

Г. И. БАРЕНБЛАТТ, В. М. ЕНТОВ, В. М. РЫЖИК

ТЕОРИЯ
НЕСТАЦИОНАРНОЙ
ФИЛЬТРАЦИИ
ЖИДКОСТИ
И ГАЗА

А.С. 13К
1886

ТЕОРИЯ
НЕСТАЦИОНАРНОЙ
ФИЛЬТРАЦИИ
ЖИДКОСТИ
И ГАЗА

Г. И. БАРЕНБЛАТТ, В. М. ЕНТОВ, В. М. РЫЖИК

178374



ИЗДАТЕЛЬСТВО „НЕДРА“
Москва 1972

Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М.: «Недра», 1972, с. 288.

В книге дана краткая характеристика пористых сред, в которых происходит фильтрация жидкости.

Основное внимание уделено решению задач по нестационарной фильтрации жидкости, газа и многокомпонентных систем. Рассматриваются теоретические предпосылки фильтрации в пористых, трещиноватых и трещиновато-пористых средах. Описаны законы фильтрации смесей различных физических свойств, зависимости вытеснения одних жидкостей другими.

Все задачи решаются применительно к разработке нефтяных, газовых и газоконденсатных месторождений.

Книга предназначена для инженерно-технических работников нефтедобывающей промышленности. Особый интерес она представит для научных работников научно-исследовательских и проектных институтов.

Таблиц 7, иллюстраций 89, список литературы — 162 названия.

О Г Л А В Л Е Н И Е

Глава I. Физические основы	3
§ 1. Пористая среда и ее свойства	3
§ 2. Закон фильтрации однородной жидкости	6
§ 3. Зависимость параметров жидкости и пористой среды от давления	11
Глава II. Основные задачи нестационарной фильтрации	17
§ 1. Уравнение неразрывности	17
§ 2. Упругий режим фильтрации	18
§ 3. Уравнения безнапорной фильтрации несжимаемой жидкости	20
§ 4. Основные уравнения фильтрации газа	23
Глава III. Теория упругого режима фильтрации	26
§ 1. Одномерное прямолинейно-параллельное движение	26
§ 2. Осесимметричные задачи и задачи интерференции скважин при неустановившейся фильтрации	32
§ 3. Некоторые специальные задачи упругого режима	37
§ 4. Обратные задачи линейной теории нестационарной фильтрации	47
Глава IV. Нелинейные инвариантные задачи нестационарной фильтрации жидкостей и газов	57
§ 1. Общая характеристика инвариантных задач теории нестационарной фильтрации. Автомодельные пологие безнапорные движения при нулевом начальном уровне жидкости	57
§ 2. Пологие безнапорные движения с нулевым начальным напором: предельные автомодельные движения, осесимметричные автомодельные движения	73
§ 3. Автомодельные движения жидкости и газа плоскими волнами в полубесконечном пласте при ненулевом начальном давлении газа или уровне жидкости	84
§ 4. Осесимметричные автомодельные движения в бесконечном пласте при ненулевом начальном давлении газа или уровне жидкости	89
§ 5. Некоторые специальные автомодельные движения	99
Глава V. Приближенные методы решения задач нестационарной фильтрации	115
§ 1. Схема метода интегральных соотношений. Приток к галерее в бесконечном пласте при упругом режиме	116
§ 2. Решение задач упругого режима методом интегральных соотношений	125
§ 3. Решение задач нестационарной фильтрации газа	131

Глава I

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ

§ 1. ПОРИСТАЯ СРЕДА И ЕЕ СВОЙСТВА

Теория фильтрации изучает движение газов, жидкостей и их смесей в пористых средах, т. е. в твердых телах, пронизанных системой сообщающихся между собой пустот (пор), что делает их проницаемыми для жидкостей ¹.

Движение жидкостей и газов в пористой среде имеет ряд особенностей. Пористая среда состоит из огромного числа случайно расположенных зерен различной формы и величины. Поэтому пространство, в котором движется жидкость, представляет собой систему пор, непрерывно переходящих одна в другую. Для пористой среды характерно свойство сообщаемости пор, ее нельзя представлять себе в виде совокупности капилляров, расположенных обособленно один от другого. Некоторое представление о пористой среде дает фотография шлифа нефтеносного песчаника (рис. I.1). Характер связи пор между собой виден на фотографии срезка порового пространства (рис. I.2), заимствованной из книги [58].

Нерегулярный характер структуры порового пространства не позволяет изучать движение жидкости и газов в нем прямым применением обычных методов гидродинамики, т. е. путем решения уравнений движения вязкой жидкости для области, представляющей собой совокупность всех пор. Такое решение (собственно, даже запись граничных условий этой задачи), очевидно, связано с непреодолимыми трудностями. Однако в таком решении и нет необходимости: с увеличением числа отдельных микродвижений, составляющих макроскопическое фильтрационное движение, начинают проявляться суммарные статистические закономерности, характерные для движения в целом и не справедливые для одного порового канала или нескольких каналов. Возникающая ситуация характерна для систем с большим числом элементов (см. § 1 книги [66]), слабо связанных между собой. Такие системы могут быть описаны

¹ Разумеется, часть пор может быть изолированной.

как некоторые сплошные среды, свойства которых не выражаются непосредственно через свойства составляющих элементов, а являются осредненными характеристиками достаточно больших объемов среды.

Подобно этому в гидродинамике не рассматривается движение отдельных молекул, а вводятся некоторые осредненные динамические характеристики жидкости как сплошной среды. При таком подходе гидродинамикой рассматриваются только объемы жидкости, размеры которых достаточно велики по сравнению с межмолекулярными

расстояниями, чтобы в любом объеме находилось достаточно большое число молекул и было бы возможно осреднение¹.

Аналогично теория фильтрации строится на представлении о том, что пористая среда и заполняющая ее жидкость образуют сплошную среду. Это означает, что физически бесконечно малые элементы системы жидкость — пористая среда все же достаточно велики по сравнению с размерами пор и зерен пористой среды; только для объема, в котором заключено большое число пор и зерен, достаточно представительны вводимые осредненные характеристики. В применении

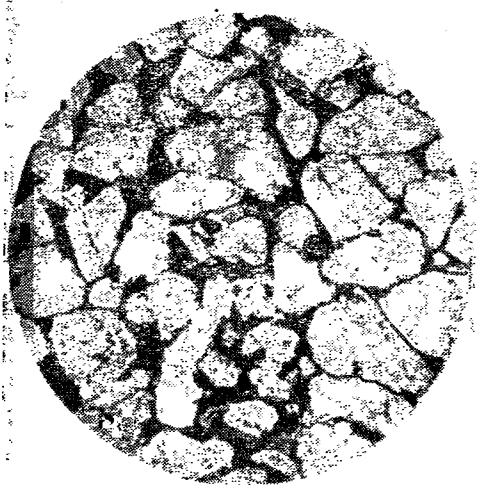


Рис. I.1.

к меньшим объемам выводы теории фильтрации теряют силу.

С точки зрения теории фильтрации значение твердого скелета пористой среды прежде всего геометрическое: он ограничивает ту область пространства, в которой движется жидкость. Лишь в более специальных случаях, о которых будет сказано ниже, приходится непосредственно учитывать силовое взаимодействие между скелетом и прилежащими к нему слоями жидкости. Поэтому свойства пористой среды в теории фильтрации описываются некоторым набором геометрических характеристик. Из-за нерегулярности строения порового пространства его нельзя полностью описать никаким конечным набором параметров; для целей теории фильтрации, однако, достаточно небольшого числа осредненных характеристик.

¹ Как известно из теории вероятностей, чем больше число случайных величин, образующих некоторую совокупность, тем меньше вероятность отклонения среднего значения параметра для данной реализации от наиболее вероятного значения. Тем самым указанные требования делают интегральные характеристики движения достаточно устойчивыми.

Важнейшая характеристика пористой среды — ее пористость m , равная отношению объема, занятого в выделенном элементе порами, к общему объему элемента:

$$m = V_{\text{п}}/V. \quad (\text{I.1.1})$$

Соотношение (I.1.1) определяет среднюю пористость данного элемента. Выбрав некоторую точку пористой среды, окружая ее элементами все меньшего объема, мы можем определить локальную пористость как предел пористости при стягивании объема. При этом необходимо иметь в виду, что при «стягивании» элемента он все время должен оставаться большим по сравнению с микромасштабом пористой среды (размером пор или зерен). Ситуация здесь вполне аналогична положению в других разделах механики сплошной среды; так, при определении локальной плотности газа размер контрольного объема всегда выбирается большим по сравнению с межмолекулярными расстояниями [см., напр., 95].

При определении пористости обычно различают полную пористость, в которой учитываются все поры, и активную пористость, при определении которой учитываются лишь те поры, которые входят в единую систему соединенных между собой пор и, следовательно, могут быть заполнены жидкостью извне. Для наших целей важна, естественно, лишь активная пористость; поэтому в дальнейшем под пористостью понимается именно она. Наряду с пористостью m иногда вводится понятие «просветности» n , определяемой для каждого сечения, проходящего через данную точку, как отношение площади пор в сечении ко всей площади сечения. Легко убедиться, что просветность в данной точке не зависит от выбора направления сечения и равна пористости m [94].

Пористость характеризует форму и взаимное расположение пор и одинакова для геометрически подобных сред. Наряду с пористостью для описания пористой среды необходимо указать также некоторый характерный размер порового пространства d_0 . Имеется много по существу равноценных способов определения этого размера.



Рис. I.2.

Естественно, например, за характерный размер d_0 принимать некоторый средний размер порового канала d или отдельного зерна пористого скелета l . Чтобы подсчитать эти средние размеры, в каждом конкретном случае исследуется микроструктура пористой среды в некотором достаточно представительном элементе (объема или сечения). Вначале тем или иным способом определяют размер отдельной поры или отдельного зерна. Этот размер меняется при переходе от одной поры к другой или от одного зерна к другому. Поэтому результаты измерений представляются в виде кривой распределения выбранного случайного размера; среднее значение получается как результат некоторого осреднения кривой распределения.

Сами по себе кривые распределения размеров пор или зерен дают значительно больше информации о микроструктуре пористой среды, чем одни средние значения. Поэтому предпринимались многочисленные попытки определения всех геометрических и гидродинамических характеристик пористой среды на основе кривых распределения. Однако зависимости характеристик пористой среды от параметров кривых распределения не могут быть универсальными. Действительно, вводя, например, тонкие непроницаемые перегородки, можно коренным образом изменить гидродинамические характеристики среды, слабо изменив вид кривых распределения. В то же время можно указать ряд процессов (в первую очередь процессы переноса в пористой среде), для которых существенна степень неоднородности составляющих пористой среды — пор и зерен. В этом случае наряду со средним значением размера существенна и его дисперсия, характеризующая степень отклонения от среднего значения; обычно предполагается, что кривая распределения имеет некоторый стандартный вид (например, является логарифмически нормальной) и ее можно полностью охарактеризовать, задав два параметра. Подробные сведения по этому вопросу можно найти в книге [3].

§ 2. ЗАКОН ФИЛЬТРАЦИИ ОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ

Фильтрация представляет собой движение жидкости в пористой среде под действием перепада давления ¹. Основной характеристикой фильтрационного движения является вектор скорости фильтрации $\vec{u}$, определяемый следующим образом. Выберем точку M пористой среды и проведем через нее элементарную площадку ΔS . Через выделенную площадку в единицу времени протекает масса жидкости ΔQ . Тогда проекция вектора $\vec{u}$ на нормаль к выделенной площадке равна $\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \Delta Q / (\rho \Delta S)$, где ρ — плотность жидкости. Подчеркнем, что масса жидкости делится на полную площадь ΔS , а не на ее часть, занятую порами.

¹ Как и все величины, давление жидкости предполагается осредненным по элементарному макрообъему, окружающему данную точку пористой среды.

Основное соотношение теории фильтрации — закон фильтрации — устанавливает связь между вектором скорости фильтрации и тем полем давления, которое вызывает фильтрационное движение. Некоторые сведения о законе фильтрации можно получить, исходя из самых общих представлений.

Окружим точку пористой среды некоторой малой окрестностью; поле скоростей фильтрации в этой окрестности можно считать непрерывным, а все параметры пористой среды и насыщающей ее жидкости — постоянными. Нельзя пренебречь лишь изменением давления, как бы мало оно ни было, поскольку при постоянном по пространству давлении движение полностью отсутствует (по существу это утверждение является основной гипотезой). Поскольку изменение давления в окрестности данной точки определяется градиентом давления, основное предположение при установлении вида закона фильтрации состоит в том, что вектор скорости фильтрации в данной точке пористой среды определяется свойствами жидкости и пористой среды и градиентом давления $\text{grad } p$. Пористая среда характеризуется геометрическими параметрами — характерным размером d и некоторыми безразмерными характеристиками: пористостью m , безразмерными параметрами кривой распределения и др. Закон фильтрации должен являться следствием уравнений количества движения жидкости в поровом пространстве, поэтому в систему определяющих величин следует включить также те характеристики жидкости, которые входят в эти уравнения, т. е. плотность ρ и вязкость μ . Таким образом, предполагается, что существует зависимость градиента давления $\text{grad } p$ от вектора скорости фильтрации $\vec{u}$, геометрических характеристик пористой среды m , d и т. д. и характеристик жидкости ρ и μ . Среди величин, от которых зависит $\text{grad } p$, только скорость фильтрации $\vec{u}$ является вектором. В силу изотропии среды (т. е. независимости ее свойств от вращений и отражений системы отсчета) зависимость $\text{grad } p$ от $\vec{u}$ должна быть инвариантной относительно вращения вокруг направления вектора $\vec{u}$.

Поэтому вектор $\text{grad } p$ должен быть направлен по одной прямой с вектором $\vec{u}$. В самом деле, предположим обратное, т. е. пусть вектор $\text{grad } p$ составляет некоторый угол с направлением вектора $\vec{u}$. Если повернуть выбранную произвольную систему координат относительно направления вектора $\vec{u}$ на некоторый угол, то ни вектор $\vec{u}$, ни какой-либо другой из определяющих параметров не изменится. Следовательно, не должен измениться и вектор $\text{grad } p$, зависящий только от этих параметров. Но если $\text{grad } p$ составляет некоторый угол с направлением вектора $\vec{u}$, то при повороте его направление относительно координатных осей обязательно изменится. Отсюда

вытекает, что вектор $\text{grad } p$ может быть обращен только по направлению вектора $\vec{u}$, так что

$$\text{grad } p = -c\vec{u}, \quad (1.2.1)$$

где c — некоторая скалярная величина, зависящая от модуля вектора скорости u , а также величин d , m , ρ , μ .

Рассмотрим сначала такие фильтрационные движения, для которых несущественны силы инерции. К числу подобных безынерционных движений принадлежит, в силу их крайней медленности, большинство фильтрационных движений, встречающихся на практике¹. При этом плотность ρ , характеризующая инерционные свойства жидкости, несущественна и исключается из числа определяющих параметров. Таким образом, при безынерционных движениях величина c зависит только от u , d , m и μ . Выпишем размерности интересующих нас величин:

$$[c] = \frac{M}{L^3 T}; \quad [u] = \frac{L}{T}; \quad [d] = L; \quad [\mu] = \frac{M}{L T}; \quad [m] = 1. \quad (1.2.2)$$

Из пяти величин (1.2.2) можно выбрать три с независимыми размерностями (например, u , μ и d). Тогда, согласно π -теореме, анализа размерностей искомая зависимость будет связывать две безразмерные комбинации указанных величин. В качестве одной из безразмерных величин удобно взять пористость m , в качестве другой выберем cd^2/μ . Таким образом, имеем

$$cd^2/\mu = f(m), \quad c = \mu d^{-2} f(m). \quad (1.2.3)$$

После этого уравнение (1.2.1) может быть представлено в виде:

$$\text{grad } p = -\mu d^{-2} f(m) \vec{u} \quad \text{или} \quad \vec{u} = -\frac{k}{\mu} \text{grad } p; \quad k = \frac{d^2}{f(m)}. \quad (1.2.4)$$

Это соотношение называется законом фильтрации Дарси (по имени французского ученого, установившего его экспериментально в 1856 г.). Величина $k = d^2/f(m)$, вводимая уравнением (1.2.4), носит название п р о н и ц а е м о с т и. Проницаемость имеет размерность площади; она не зависит от свойств жидкости и является чисто геометрической характеристикой пористой среды.

В физической системе единиц проницаемость измеряется в см^2 . Однако проницаемость большинства горных пород выражается при этом весьма малыми числами. Так, проницаемость крупнозернистых песчаников составляет 10^{-8} — 10^{-9} см^2 ; проницаемость плотных песчаников — около 10^{-10} см^2 . Ввиду этого в нефтепромысловой практике получила распространение единица проницаемости 1 д (дарси) = $1,02 \cdot 10^{-8} \text{ см}^2$.

¹ Так, при разработке нефтяных месторождений скорости фильтрации в основной части пласта составляют величину около 0,005 см/сек и менее.

В практике гидротехнических расчетов вместо давления обычно используется напор $H = p/\rho g$, и закон Дарси записывается в виде:

$$\vec{u} = -C \text{grad} H. \quad (I.2.5)$$

Величина C , имеющая размерность скорости, называется коэффициентом фильтрации.

Напомним, что функция f в выражении (I.2.3) зависит не только от пористости, но и от других безразмерных характеристик геометрии порового пространства. Были сделаны многочисленные попытки представить проницаемость в качестве функции пористости и характерного размера для типичных пористых сред как путем рассмотрения простейших моделей, так и путем обработки опытных данных. Эти вопросы подробно рассмотрены в книге [71]. Все полученные результаты носят частный характер и имеют узкую область применимости. Наибольшей известностью из формул этого рода пользуется уравнение Козени — Кармана, полученное на основе аналогии между пористой средой и системой параллельных трубок, выражающее проницаемость через удельную поверхность Σ и пористость m :

$$k = \frac{K m^3}{\Sigma^2}. \quad (I.2.6)$$

Постоянная K определяется из опыта и оказывается разной для пористых сред различной структуры. Формула (I.2.6) используется главным образом при расчетах фильтрационных сопротивлений искусственных пористых сред, применяемых в химических аппаратах; ею пользуются также при определении удельной поверхности порошков.

Как видно из приведенного вывода, закон Дарси является следствием предположения о безынерционности движения жидкости. Фильтрационное течение, следующее закону Дарси, является частным случаем ползущего течения (широко известным примером ползущего течения является стоковское обтекание сферы). Течения такого типа характеризуются преобладанием вязких сил над инерционными, т. е. очень малыми числами Рейнольдса ($Re \ll 1$). Поэтому представляются нецелесообразными многочисленные попытки получить закон Дарси путем осреднения уравнений Навье — Стокса. Ясно, что любой такой вывод будет сводиться в конечном счете к попытке вычислить проницаемость по известной геометрической структуре пористой среды.

Закон Дарси имеет весьма широкую область приложения и на его основе получены основные результаты теории фильтрации. Существуют, однако, случаи, когда линейный закон фильтрации Дарси не применим. Эти случаи, необходимые обобщения закона Дарси и возникающие при этом нелинейные задачи теории фильтрации будут рассмотрены ниже (гл. VIII). Пока же будем считать все рассматриваемые движения подчиняющимися закону Дарси.

До сих пор предполагалось, что пористая среда изотропна. Если пористая среда не является изотропной, то из общих соображений можно утверждать, что в произвольной ортогональной декартовой системе координат x_1, x_2, x_3 компоненты вектора $\text{grad } p$ выражаются через компоненты u_i вектора $\vec{u}$ следующим образом¹:

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = -c_{ij} u_j, \quad (1.2.7)$$

где c_{ij} — некоторый тензор. В случае безынерционных движений компоненты тензора c_{ij} могут зависеть только от вязкости жидкости μ , тех или иных геометрических характеристик пористой среды и модуля вектора скорости фильтрации $\vec{u}$.

Аналогично выводу формулы (1.2.7) можно показать, что $c_{ij} = \mu r_{ij}$, где тензор r_{ij} зависит только от геометрических характеристик пористой среды и называется тензором удельных фильтрационных сопротивлений; компоненты тензора r_{ij} имеют размерность обратной площади. Выражая, наоборот, компоненты вектора скорости через компоненты вектора градиента давления, получаем

$$u_i = -\frac{k_{iz}}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_z}, \quad (1.2.8)$$

где тензор k_{ij} является обратным тензору r_{ij} , также зависит только от геометрических характеристик пористой среды, имеет размерность площади и называется тензором проницаемости. Эта зависимость представляет собой закон Дарси для анизотропной пористой среды.

Покажем теперь, что тензор сопротивлений r_{ij} и тензор проницаемости k_{ij} являются симметричными, т. е. $r_{ij} = r_{ji}$, $k_{ij} = k_{ji}$. В самом деле, на пористую среду со стороны фильтрующейся жидкости действует объемная сила, пропорциональная градиенту давления; безразмерный множитель пропорциональности зависит только от геометрических характеристик пористой среды. Удельная работа этой силы, т. е. работа за единицу времени на единицу объема системы жидкостью — пористой среды, равная удельной диссипации энергии жидкостью в пористой среде, равна скалярному произведению

$$(\text{grad } p, \vec{u}) = \frac{\partial p}{\partial x_z} u_z = -\mu r_{z\alpha} u_z u_\alpha. \quad (1.2.9)$$

Очевидно, что удельная работа сил взаимодействия жидкостью с пористой средой не должна зависеть от выбора осей координат x_1, x_2, x_3 . Но для того чтобы квадратичная форма $r_{z\alpha} u_z u_\alpha$, пропорциональная этой удельной работе, не зависела от выбора системы координат, необходимо и достаточно, чтобы $r_{z\alpha} = r_{\alpha z}$. Аналогично можно показать, что $k_{z\alpha} = k_{\alpha z}$.

В приложениях особую роль играет анизотропия естественных пористых сред, связанная с осадконакоплением. В этом случае проницаемости вдоль слоев имеют одно значение, а в перпендикулярном направлении — другое, обычно значительно меньшее. Поэтому одна из главных осей тензора проницаемости — x_3 перпендикулярна плоскости напластования, а две другие — x_1 и x_2 можно выбрать произвольно в плоскости напластования. Система x_1, x_2, x_3 будет главной системой в каждой точке пористой среды; в этой системе имеем

$$k_{11} = k_{22} = k; \quad k_{33} = k_0; \quad k_{12} = k_{21} = k_{32} = k_{23} = k_{31} = k_{13} = 0. \quad (1.2.10)$$

Закон Дарси в выбранной системе координат записывается в силу соотношений (1.2.10) следующим образом:

$$u_1 = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_1}; \quad u_2 = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_2}; \quad u_3 = -\frac{k_0}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_3}. \quad (1.2.11)$$

¹ Здесь и далее мы будем предполагать суммирование по всем значениям повторяющихся греческих индексов, так что, например, $c_{iz} u_\alpha$ означает $c_{i1} u_1 + c_{i2} u_2 + c_{i3} u_3$.

§ 3. ЗАВИСИМОСТЬ ПАРАМЕТРОВ ЖИДКОСТИ И ПОРИСТОЙ СРЕДЫ ОТ ДАВЛЕНИЯ

Поскольку движение жидкости в пористой среде вызывается перепадом давления, окончательная формулировка большинства задач теории фильтрации заключается в составлении дифференциальных уравнений для распределения давления и в установлении соответствующих начальных и граничных условий. Как при составлении этих уравнений, так и при решении их необходимо знать, как зависят от давления характеристики пористой среды и насыщающей ее жидкости.

1. Рассмотрим прежде всего влияние давления на свойства жидкости — плотность ρ и вязкость μ .

Для капельных жидкостей — воды и нефти — изменения плотности обычно невелики. Встречающиеся в фильтрационных движениях перепады давления (десятки кгс/см²) весьма малы по сравнению с модулями объемного сжатия K_p капельных жидкостей ($5 \cdot 10^3$ — $2 \cdot 10^4$ кгс/см²). Поэтому для приложений достаточно ограничиться линейной зависимостью

$$\rho(p) = \rho_0 \left(1 + \frac{p - p_0}{K_p} \right). \quad (I.3.1)$$

Следует, однако, иметь в виду, что хотя сжимаемость капельных жидкостей и мала, она играет значительную роль в тех случаях, когда возмущения давления захватывают обширные области (здесь существенно то, что нефтяные залежи обычно граничат с пластовой водой, суммарный объем которой значительно больше объема нефти в залежи; в результате этого расширение воды при снижении давления может полностью компенсировать извлекаемый объем нефти). Зависимостью вязкости капельных жидкостей от давления при изменении давления в тех же пределах можно обычно пренебречь¹.

Фильтрационные движения газа характеризуются тем, что при их исследовании, с одной стороны, почти всегда можно пренебречь изменениями температуры, считая их малыми, а с другой, — тем, что ввиду больших абсолютных значений давления и перепадов считать газ идеальным можно лишь с большой натяжкой. Уравнение состояния газа обычно записывают в виде:

$$\rho = \frac{p}{z(p, T) RT}. \quad (I.3.2)$$

Преимущества такой записи связаны с тем, что для функции $z(p, T)$, называемой коэффициентом сверхсжимаемости, составлены таблицы и графики, охватывающие ряд практически важных случаев, и имеются простые способы приближенного вычисления ее для

¹ Сказанное не относится к нефти, находящейся в контакте с природным газом. В этом случае при повышении давления увеличивается количество растворенного в нефти газа, и ее вязкость заметно падает.

газовых смесей [27]. Температуру в этом уравнении обычно можно считать постоянной и рассматривать как параметр. Отклонение z от единицы (газа от идеальности) значительно для более тяжелых углеводородных газов.

Согласно элементарной кинетической теории газов, вязкость газа не должна зависеть от давления. Это утверждение также не применимо к условиям, характерным для газового пласта. При фиксированной температуре вязкость газа может изменяться на десятки процентов при изменении давления на десятки атмосфер.

2. Рассмотрим теперь вопрос, как зависят от давления жидкости свойства пористой среды — ее пористость m и проницаемость k .

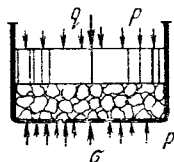
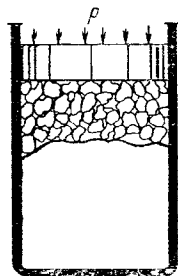


Рис. 1.3.

Обе эти величины характеризуют структуру порового пространства, и их изменение в любой точке определяется давлением жидкости и тензором напряжений, действующих в скелете пористой среды. При этом следует отметить, что в опытах определяется их зависимость не от истинных напряжений, действующих в скелете, а от некоторой их части, которую мы назовем фиктивными напряжениями. Для выяснения этого обстоятельства разберем следующую элементарную схему опыта. Пусть (рис. 1.3, а) в цилиндрическом сосуде с площадью поперечного сечения, равной единице, находится некоторый объем пористой среды, в котором содержится жидкость под давлением p . На верхней грани этого объема лежит непроницаемый поршень, по другую сторону которого находится жидкость под тем же давлением p . В силу известного принципа гидростатики — принципа отвердевания — эта система находится в состоянии равновесия. Для выяснения зависимости пористости от нагрузки приложим к поршню дополнительную нагрузку q . Вычислим сжимающее нормальное напряжение, действующее в сечении объема пористой среды плоскостью, параллельной поршню; для этого составим уравнение равновесия части рассматриваемого объема, ограниченной поршнем и плоскостью сечения (рис. 1.3, б). Пренебрегая силами трения о стенки вмещающего сосуда и собственным весом среды и жидкости, получаем

$$\sigma + mp = q + p; \quad \sigma = q + p(1 - m), \quad (1.3.3)$$

где σ — истинное напряжение, действующее в пористой среде (в расчете на единицу площади общего сечения) и, очевидно, не равное приложенной нагрузке q . Изменение пористости в зависимости от давления при фиксированной нагрузке в целом мало существенное, учитывается отдельно (это изменение обуславливается сжимаемостью материала зерен, составляющих пористую среду, которая мала срав-

нительно со сжимаемостью пористой среды в целом, так как изменение пористости происходит в основном за счет более плотной упаковки зерен и лишь в очень небольшой мере — за счет их сжатия; если вообще не учитывать сжимаемость материала зерен, составляющих пористую среду, то пористость при фиксированной нагрузке не будет зависеть от давления жидкости). Можно показать также, что при фиксированных напряжениях σ изменение давления жидкости вообще не будет приводить к изменению объема скелета, независимо от того, какова сжимаемость его материала. Таким образом, рассматриваемый опыт даст нам зависимость пористости от нагрузки q , составляющей лишь часть истинных напряжений, действующих в скелете пористой среды:

$$q = \sigma^f - p(1 - m). \quad (I.3.4)$$

Величину σ^f будем в дальнейшем называть фиктивным напряжением.

Важная особенность пористой среды, отмеченная выше, заключается в том, что изменения занятого ею объема могут происходить при весьма малых изменениях собственного объема твердого скелета, почти исключительно за счет его перестройки. Простейшей моделью подобной системы может служить пружина, погруженная в воду (рис. I.4). Объем цилиндрического тела, ограниченного пружиной, практически не изменяется при изменении давления жидкости и может сильно измениться, если приложить по концам противоположно направленные силы. В формулу для вычисления осадки пружины следует подставлять величину истинных напряжений за вычетом слагаемого, обусловленного давлением жидкости.

Аналогичные соображения применимы и в более общих случаях. Таким образом, опыт, поставленный в условиях произвольного нагружения, даст нам зависимость пористости не от тензора истинных напряжений, действующих в скелете пористой среды, а от тензора фиктивных напряжений. Ввиду того что при действии на пористую среду одного гидростатического давления касательные напряжения в пористой среде не возникают, касательные компоненты тензора истинных напряжений и тензора фиктивных напряжений совпадают, а нормальные компоненты отличаются на величину $p(1 - m)$, имеем

$$\sigma_{ij}^f = \sigma_{ij}^v - p(1 - m)\delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3...), \quad (I.3.5)$$

где σ_{ij}^f — компоненты тензора фиктивных напряжений; σ_{ij}^v — компоненты тензора истинных напряжений; $\delta_{ij} = 1$ при $j = i$, $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Будучи величинами скалярными, пористость и проницаемость могут зависеть только от инвариантов тензора фиктивных напряжений. Следуя Н. М. Герсеванову [37], зависимость их от второго

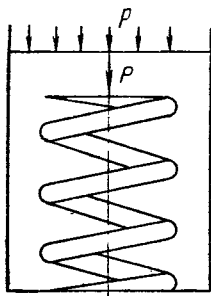


Рис. I.4

и третьего инвариантов тензора фиктивных напряжений пренебрегают¹, откуда

$$m = m(\Theta, p); \quad k = k(\Theta, p); \quad \Theta = \frac{\sigma_{11}^f + \sigma_{22}^f + \sigma_{33}^f}{3} = \\ = \frac{\sigma_1^f + \sigma_2^f + \sigma_3^f}{3}, \quad (I.3.6)$$

где $\sigma_1^f, \sigma_2^f, \sigma_3^f$ — главные нормальные фиктивные напряжения, а Θ — среднее напряжение.

Величину Θ можно связать с давлением p , если рассматривать напряженное состояние в пласте. Пусть H — глубина залегания пласта, h — его мощность, а ρ_0 — средняя плотность горных пород. Обычно нефтяные пласты располагаются на значительной глубине под дневной поверхностью и их мощность мала сравнительно с глубиной залегания, т. е. $h \ll H$. В этом случае удастся связать изменение величины Θ с изменением давления p . В самом деле, лежащие над пластом горные породы поддерживаются скелетом пласта и насыщающей пласт жидкостью, так что вес вышележащих горных пород уравнивается системой напряжений в пористой среде и гидродинамическим давлением жидкости. Составляющую пласт систему жидкость — пористая среда можно представить себе как некоторую деформируемую систему, касательные напряжения в которой совпадают с касательными напряжениями в пористой среде, а нормальные напряжения равны сумме истинных нормальных напряжений, действующих в пористой среде, и доли нормальных напряжений, воспринимаемых жидкостью (эта доля равняется, очевидно, произведению пористости на давление жидкости). Имеем, таким образом, выражение для компоненты суммарного напряжения σ_{ij} :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^v + m p \delta_{ij} = \sigma_{ij}^f + (1 - m) p \delta_{ij} + m p \delta_{ij} = \sigma_{ij}^f + p \delta_{ij}. \quad (I.3.7)$$

Пусть ρ — суммарная плотность системы жидкость — пористая среда, а g_i — компонента вектора ускорения силы тяжести по оси x_i . Тогда уравнение равновесия системы жидкость — пористая среда имеет вид:

$$\frac{\partial \sigma_{ia}}{\partial x_a} + \rho g_i = \frac{\partial \sigma_{ia}^f}{\partial x_a} + \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i = 0. \quad (I.3.8)$$

Считая жидкость слабосжимаемой, можно положить в уравнении (I.3.8) $\rho = \rho_*$, где ρ_* — постоянное исходное значение суммарной плотности. Таким образом, суммарное уравнение равновесия

¹ Возможность такого пренебрежения связана с тем, что в действительности пористость, проницаемость и т. п. зависят от отношений напряжений к некоторым постоянным для среды величинам типа коэффициентов сжимаемости, которые не менее чем на порядок больше напряжений. Поэтому пренебрежение вторыми и третьими инвариантами означает на самом деле пренебрежение квадратичными и кубическими членами, т. е. линеаризацию.

системы жидкость — пористая среда окончательно записывается в виде:

$$\frac{\partial \sigma_{iz}}{\partial x_\alpha} + \rho_* g_i = 0 \quad (1.3.9)$$

и, как видно, это уравнение не зависит от времени. Покажем теперь, что и суммарные напряжения на кровле и подошве пласта (т. е. на верхней и нижней ограничивающих пласт поверхностях) можно с большой степенью точности считать постоянными. Физическое объяснение этого факта сводится к следующему: упругое смещение, обусловливаемое изменением давления жидкости, насыщающей породу пласта, пропорциональное, очевидно, мощности пласта, распределяется на всю огромную толщину H вышележащего массива горных пород, так что соответствующие относительные деформации в этом массиве малы и, следовательно, малы возникающие в нем дополнительные напряжения, в частности дополнительные напряжения на кровле и подошве пласта.

Поясним это несколько подробнее. Предположим, что давление жидкости, насыщающей пласт, изменилось по сравнению с исходным моментом на величину δp . Обозначим величину изменения давления жидкости в том месте, где оно максимально, через $\delta p_{\text{макс}}$. Для поддержания вышележащих горных пород необходимо, чтобы напряжение в скелете пористой среды внутри пласта изменилось также на величину порядка δp . Соответствующая относительная деформация в пласте составила величину порядка $\delta p/E$, где E — некоторый эффективный модуль Юнга системы, а полное вертикальное смещение точки, например кровли пласта, — величину порядка $v = h\delta p/E$, где h — мощность пласта. Заметим теперь, что, закрепив точки свободной поверхности, т. е. обеспечив на свободной поверхности равенство нулю упругих смещений, а также заменив во всех точках пласта δp на $\delta p_{\text{макс}}$, мы можем лишь увеличить возникающие дополнительные напряжения. Таким образом, если на свободной поверхности вышележащего массива смещение равно нулю, а на глубине H оно имеет величину порядка $v_{\text{макс}} = h\delta p_{\text{макс}}/E$, то, очевидно, соответствующее напряжение $\sigma_{\text{макс}}$ имеет величину порядка $\sigma_{\text{макс}} = v_{\text{макс}}E/H$. Отношение этого дополнительного напряжения к действующему на глубине H вертикальному напряжению сжатия¹, имеющему порядок $\rho_0 gH$ (ρ_0 — средняя плотность горных пород — величина, примерно равная 2,5 г/см³), равно по порядку величины

$$\frac{\delta p_{\text{макс}}}{\rho_0 gH} \frac{h}{H}. \quad (1.3.10)$$

Значение $\delta p_{\text{макс}}/\rho_0 gH$ обычно не превышает одной-двух десятых; величина h/H исчезающе мала, так что изменение напряжения во

¹ Если пласт наклонный, то вместо вертикального нормального напряжения следует взять напряжение, перпендикулярное направлению напластования, которое обычно имеет тот же порядок.

всем выпележащем массиве и, в частности, на его границах мало сравнительно с исходным напряжением. Поэтому можно считать, что при изменении давления жидкости в пласте напряжения, действующие на кровле и подошве пласта, остаются постоянными.

Предыдущее рассуждение существенно основано на том, что модуль Юнга системы жидкость — пористая среда E и модуль выпележащего массива горных пород E_1 имеют одинаковый порядок величины (что обычно имеет место в действительности). Если бы эти модули Юнга сильно отличались между собой, то выражение (1.3.10) содержало бы дополнительный множитель E_1/E и при $E_1 \gg E$ отношение напряжений могло бы и не быть малым. Физически это означает, что в случае, когда выпележащая толща сложена из очень жестких пород, могут образоваться своды, и при изменении давления жидкости напряжения на кровле и подошве пласта будут меняться.

Если теперь пренебречь влиянием таких границ области фильтрации, как стенки скважин (эти границы имеют сравнительно очень малую протяженность; их влияние будет оценено ниже), то из независимости от времени уравнений равновесия системы жидкость — пористая среда (1.3.9) и напряжений на кровле и подошве пласта следует важный вывод о независимости суммарного напряженного состояния в системе жидкость — пористая среда от времени, так что

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial (\sigma_{ij}^f + p\delta_{ij})}{\partial t} = 0. \quad (1.3.11)$$

Свертывая уравнения (1.3.11) (т. е. полагая $i, j = 1, 2, 3$ и суммируя получающиеся уравнения), имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} (\sigma_{11}^f + \sigma_{22}^f + \sigma_{33}^f + 3p) = 0,$$

откуда вытекает важное соотношение

$$\frac{\partial (\Theta + p)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial t}. \quad (1.3.12)$$

Глава II

**ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ
НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ**

§ 1. УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ

Рассмотрим баланс массы жидкости в произвольном элементе объема пористой среды V , ограниченном поверхностью S . За бесконечно малое время dt приток жидкости внутрь элемента равен согласно определению скорости фильтрации

$$-dt \int_S \rho u_n d\sigma = -dt \int_S \rho (\vec{u} \vec{n}) d\sigma \quad (\text{II.1.1})$$

($\vec{n}$ — единичный вектор нормали; за положительное направление нормали принято направление внешней нормали к поверхности; u_n — нормальная к поверхности составляющая скорости фильтрации). Приращение массы жидкости внутри этого элемента равняется

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \int_V m \rho dv \right) dt = \left(\int_V \frac{\partial m \rho}{\partial t} dv \right) dt. \quad (\text{II.1.2})$$

Приравнявая выражения (II.1.1) и (II.1.2) и используя формулу преобразования поверхностного интеграла в объемный

$$\int_S \rho u_n d\sigma = \int_V \operatorname{div} (\rho \vec{u}) dv,$$

находим

$$\int_V \left(\frac{\partial m \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{u} \right) dv = 0,$$

откуда в силу произвольности элемента V и вытекает уравнение неразрывности

$$\frac{\partial m \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{u} = 0. \quad (\text{II.1.3})$$

§ 2. УПРУГИЙ РЕЖИМ ФИЛЬТРАЦИИ

1. Самым простым и наиболее изученным случаем нестационарной фильтрации является фильтрация слабосжимаемой жидкости в упругодеформируемом пласте (в технических приложениях эти задачи получили название задач упругого режима фильтрации). В основу исследования кладется система уравнений закона фильтрации и уравнения неразрывности:

$$\frac{\partial m\rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{\rho u} = 0; \quad \vec{u} = -\frac{k}{\mu} \operatorname{grad} p. \quad (\text{II.2.1})$$

Для того чтобы получить замкнутую систему уравнений, нужно воспользоваться тем, что свойства жидкости (плотность ρ и вязкость μ), так же как и пористость и проницаемость пористой среды, являются функциями давления (мы предполагаем движение изотермическим).

В силу (I.3.12) имеем

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad \frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial m}{\partial \Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial t} + \frac{\partial m}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} = \left(\frac{\partial m}{\partial p} - \frac{\partial m}{\partial \Theta} \right) \frac{\partial p}{\partial t}.$$

Исходя из предположения о слабой сжимаемости жидкости и пористой среды, можно считать относительные изменения величин ρ и m малыми и коэффициенты при $\partial p / \partial t$ в предыдущих формулах постоянными:

$$\frac{\partial \rho}{\partial p} = \frac{\rho_0}{K_\rho}; \quad \frac{\partial m}{\partial p} - \frac{\partial m}{\partial \Theta} = \frac{m_0}{K_m}; \quad \frac{\partial (k/\mu)}{\partial p} = \frac{k_0}{\mu_0 K_k}. \quad (\text{II.2.2})$$

Опытные данные показывают, что в реальных случаях

$$(p - p_0)/K_m \ll 1; \quad (p - p_0)/K_\rho \ll 1 \text{ и т. д.}$$

Подставляя второе уравнение (II.2.1) в первое и преобразуя получающееся соотношение с учетом (II.2.2), находим, пренебрегая малыми величинами,

$$m_0 \rho_0 \left(\frac{1}{K_\rho} + \frac{1}{K_m} \right) \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\rho_0 k_0}{\mu_0} \left[\nabla^2 p + \left(\frac{1}{K_\rho} + \frac{1}{K_m} + \frac{1}{K_k} \right) (\operatorname{grad} p)^2 \right] = 0.$$

Если δp — характерное изменение давления, а L — характерная длина, то первый член в скобках имеет, очевидно, порядок $\delta p / L^2$, а второй $(\delta p)^2 / L^2 K$. Отсюда следует, что вторым членом в принятом приближении также следует пренебречь¹. Таким образом, имеем

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \kappa \Delta p = \kappa \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right), \quad (\text{II.2.3})$$

где коэффициент

$$\kappa = \frac{k_0}{\mu_0 m_0} \left(\frac{1}{K_m} + \frac{1}{K_\rho} \right)^{-1} \quad (\text{II.2.4})$$

¹ Ср. с примечанием на стр. 14 о возможности пренебречь зависимостью пористости и проницаемости от второго и третьего инвариантов тензора напряжений.

носит название коэффициента пьезопроводности. Уравнение (II.2.3) обычно называется уравнением упругого режима или, по предложению В. Н. Щелкачева, уравнением пьезопроводности. Оно совпадает с хорошо известным классическим уравнением теплопроводности.

Постановка задачи об упругом режиме пласта была дана в работах Тейса [160], Джекоба [138] и независимо В. Н. Щелкачевым [123].

2. Рассмотрим постановку основных задач теории упругого режима. Определим распределение давления p в некоторой замкнутой области пространства D на протяжении промежутка времени $0 \leq t \leq T$. Из теории уравнения теплопроводности известно, что если задать на границе Γ области D линейную комбинацию давления и его производной по нормали к границе области

$$\alpha p + \beta \frac{\partial p}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = f(x, y, z, t) \quad (\text{II.2.5})$$

и задать начальное распределение давления в области D

$$p(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z), \quad (\text{II.2.6})$$

то существует распределение давления $p(x, y, z, t)$, и притом единственное, удовлетворяющее уравнению (II.2.3), непрерывное в замкнутой области D , включая границу, и удовлетворяющее условиям (II.2.5) и (II.2.6).

Сформулированная задача охватывает почти все основные задачи теории упругого режима фильтрации.

Рассмотрим подробнее физический смысл тех или иных дополнительных условий.

Область, в которой ищется распределение давления жидкости, обычно представляет собой пористый пласт, частично имеющий непроницаемые границы, а частично сообщающийся с другими пластами и вскрываемыми его скважинами. На непроницаемых границах должно удовлетворяться очевидное условие отсутствия потока — равенство нормальной компоненты скорости фильтрации нулю:

$$u_n = 0,$$

откуда, используя закон Дарси, получаем

$$(\text{grad } p)_n = \frac{\partial p}{\partial n} = 0. \quad (\text{II.2.7})$$

На участках границы с областями, в которых перераспределения давления практически не происходит («области питания»), давление можно считать постоянным и известным, так что

$$p|_{\Gamma} = f(x, y, z). \quad (\text{II.2.8})$$

Такое условие справедливо, если, например, рассматриваемый пласт граничит с высокопроницаемой областью, запас жидкости в которой весьма велик. Давление на границе такой области близко

к среднему давлению в ней и ввиду ее большого объема мало зависит от процессов, происходящих в исследуемой области. Характерным примером является нефтяная залежь, окруженная со всех сторон обширной водоносной областью.

При рассмотрении нестационарных процессов в залежи давление в водоносной области можно считать постоянным. Следует, однако, отчетливо представлять себе, что понятие области постоянного давления не является абсолютным. Чем более длительный характер носят изменения давления, тем на большую область они распространяются.

Часть границы области фильтрации обычно образована стенками скважины или дренажных галерей. На этой части границы чаще всего задается либо давление жидкости, либо поток ее через стенки скважины. Выбор того или иного условия зависит от режима работы скважины или галереи. Могут быть и более сложные условия, когда задается связь давления с расходом жидкости. Задание потока жидкости согласно закону Дарси эквивалентно заданию нормальной производной от давления.

Условия этого типа выполняются на тех участках границы, через которые может происходить обмен жидкости с соседними пластами через сравнительно слабопроницаемые перемычки. Если толщина перемычки Δ мала, а давление p' за ней можно считать постоянным, то расход вытекающей жидкости через участок перемычки площадью ds составит $\frac{k'(p-p')ds}{\mu\Delta}$. Это количество жидкости должно быть равно

$$u_n ds = - \frac{k\partial p}{\mu\partial n} ds,$$

где u_n — нормальная проекция скорости фильтрации на рассматриваемом участке границы. Отсюда имеем

$$\frac{\partial p}{\partial n} + \frac{k'p}{k\Delta} = \frac{k'p'}{k\Delta} = \text{const}, \quad (\text{II.2.9})$$

т. е. условия третьего рода.

Все три типа условий являются частными случаями общего условия (II.2.5). Таким образом, задавая начальное распределение давления и указанные условия на границе, получаем однозначно разрешимую задачу.

§ 3. УРАВНЕНИЯ БЕЗНАПОРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

1. Общая постановка задачи. Под безнапорным фильтрационным движением понимают движение со свободной поверхностью, на которой давление жидкости постоянно и равно внешнему атмосферному давлению. Наиболее часто приходится встречаться с безнапорным движением подземных вод; безнапорное движение нефти встречается сравнительно редко, только при шахтной добыче.

Рассмотрим безнапорное движение в однородной и изотропной пористой среде, область течения будем предполагать ограниченной снизу непроницаемой и криволинейной поверхностью — водоупором.

Закон Дарси в рассматриваемом случае можно записать в виде:

$$u = -C \operatorname{grad} \bar{h}; \quad \bar{h} = z + p/\rho g. \quad (\text{II.3.1})$$

Величина C , имеющая размерность скорости, называется коэффициентом фильтрации, $\bar{h}$ — напором, а функция $C\bar{h}$ — фильтрационным потенциалом. Заметим, что для безнапорного движения изменения давления обычно настолько малы, что пористую среду можно считать недеформируемой, а жидкость несжимаемой, так что $C = \text{const}$, $\rho g = \text{const}$.

В точной постановке исследование безнапорного фильтрационного движения представляет исключительные трудности математического характера; относящиеся сюда постановки задач и результаты можно найти в книге П. Я. Полубариновой-Кочиной [94]. Поэтому приходится обращаться к некоторым упрощенным постановкам.

Большое значение имеет приближенная постановка задачи о безнапорной фильтрации, соответствующая случаю движения, которое будем называть *пологим*. Под пологим фильтрационным движением понимается движение, происходящее в пластах с конечной глубиной водоупора, в котором вертикальная компонента скорости фильтрации u_z мала сравнительно с горизонтальной компонентой. Так как характерной скоростью в безнапорном фильтрационном движении является скорость C , то горизонтальная компонента скорости фильтрации может быть либо порядка C , либо малой сравнительно с C . В обоих случаях ясно, что вертикальная компонента u_z мала сравнительно с C , т. е.

$$u_z \ll C = \frac{k\rho g}{\mu}. \quad (\text{II.3.2})$$

Это неравенство можно переписать еще так:

$$\frac{\mu u_z}{k} \ll \rho g. \quad (\text{II.3.3})$$

Но $\frac{\mu u_z}{k}$ представляет собой ту часть вертикальной компоненты градиента давления, которая обусловлена фильтрацией жидкости. Неравенство (II.3.3) показывает таким образом, что вертикальная компонента фильтрационного градиента давления мала сравнительно с гидростатическим градиентом давления. Поэтому распределение давления по вертикали можно в случае пологих движений считать гидростатическим.

Выведем важное для дальнейших рассуждений соотношение. Рассмотрим объем V , ограниченный свободной поверхностью жидкости и некоторой цилиндрической поверхностью с вертикальными образующими. Обозначим через h расстояние от свободной

поверхности жидкости до водоупора. а через H — расстояние от свободной поверхности до горизонтальной плоскости $z = 0$ (рис. II.4); очевидно, $\partial h/\partial t = \partial H/\partial t$. Объем жидкости, заключенной в объеме V , равен

$$\int_S m h dS, \quad (\text{II.3.4})$$

где площадку S представляет собой проекцию объема на горизонтальную плоскость (см. рис. II.4). Изменение количества жидкости в объеме V за бесконечно малый промежуток времени dt равно по-этому

$$dt \left(\int_S m \frac{\partial H}{\partial t} dS \right) = dt \int_S m \frac{\partial h}{\partial t} dS. \quad (\text{II.3.5})$$

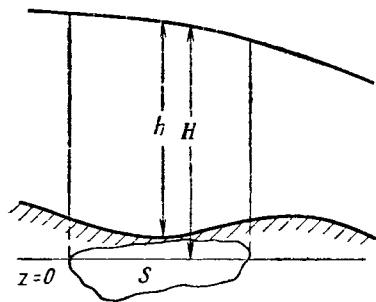


Рис. II.4

Вместе с тем это изменение равно притоку жидкости в объем V извне за время dt , равному

$$-dt \int_{\gamma} dl \int_{H-h}^H u_n dz = -dt \int_{\gamma} w_n dl, \quad (\text{II.3.6})$$

где γ — замкнутый контур, ограничивающий площадку S , а u_n — нормальная компонента скорости $\vec{u}$; w_n — нормальная компонента вектора потока $\vec{w}$, определяемого соотношением

$$\vec{w} = \int_{H-h}^H \vec{u} dz. \quad (\text{II.3.7})$$

Приведя (II.3.5) и (II.3.6) и используя формулу преобразования контурного интеграла в интеграл по площади

$$\int_{\gamma} w_n dl = \int_S \text{div} \vec{w} dS,$$

получаем

$$\int_S \left(m \frac{\partial h}{\partial t} + \text{div} \vec{w} \right) dS = 0, \quad (\text{II.3.8})$$

откуда, пользуясь произвольностью площадки S , находим уравнение

$$m \frac{\partial h}{\partial t} + \text{div} \vec{w} = 0. \quad (\text{II.3.9})$$

Согласно закону Дарси, скорость фильтрации определяется соотношением (II.3.4).

Поскольку, по предыдущему, давление распределяется по вертикали с точностью до малых величин по гидростатическому закону, величина $\tilde{h}$ вдоль каждой вертикали будет постоянна и равна H :

$$\tilde{h}(x, y, z, t) = H(x, y, z, t) + O(u_z/C); \quad \vec{u} = -C \operatorname{grad} H + O(u_z).$$

Таким образом, скорость $\vec{u}$ можно, пренебрегая малыми величинами, вынести из-под знака интегрирования по вертикали в соотношении (II.3.7), определяющем вектор $\vec{w}$. Тогда получаем

$$\vec{w} = -Ch \operatorname{grad} H. \quad (\text{II.3.10})$$

Подставляя (II.3.10) в (II.3.17), имеем

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{C}{m} \operatorname{div}(h \operatorname{grad} H). \quad (\text{II.3.11})$$

В это уравнение следует подставить соотношение

$$H(x, y, t) = h(x, y, t) + h_0(x, y),$$

определяющее вертикальную координату свободной поверхности H через ее расстояние h до водоупора и расстояние h_0 от водоупора до плоскости отсчета $z = 0$; получим окончательное уравнение для определения h . В частности, если поверхность водоупора представляет собой горизонтальную плоскость, то ее можно принять за плоскость отсчета и, следовательно, $h_0(x, y)$ можно считать равным нулю. Тогда $H = h$, и уравнение (II.3.11) принимает вид:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = a \Delta h^2; \quad a = \frac{C}{2m} = \frac{k\rho g}{2m\mu}. \quad (\text{II.3.12})$$

Уравнения (II.3.11) и (II.3.12) были даны Буссинеском [133].

§ 4. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ФИЛЬТРАЦИИ ГАЗА

При исследовании фильтрации газа основное значение имеет тот факт, что сжимаемость газа обычно на несколько порядков превышает сжимаемость пористой среды. С учетом этого обстоятельства в уравнении неразрывности

$$\frac{\partial m\rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{u} = 0 \quad (\text{II.4.1})$$

изменением пористости m во времени можно пренебречь, так что получим

$$m \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{u} = 0. \quad (\text{II.4.2})$$

Для того чтобы получить замкнутую систему уравнений, снова нужно использовать связь плотности газа ρ с его давлением p и температурой T :

$$\rho = \rho(p, T), \quad (\text{II.4.3})$$

поэтому в задаче появляется новая переменная T , и для замыкания системы уравнений нужно добавить еще одно уравнение — уравнение энергии. Однако, если в среде отсутствуют источники выделения или поглощения энергии, то изменения температуры в процессе движения газа крайне малы, и при расчете поля давления газа ими можно пренебречь. Это обстоятельство легко понять, если учесть, во-первых, крайнюю малость скорости фильтрации и, во-вторых, наличие теплового балласта — скелета пористой среды, эффективно подавляющего изменения температуры. Будем поэтому считать, что

$$\rho = \rho(p, T_0) = \rho(p), \quad (\text{II.4.4})$$

где T_0 — постоянная температура.

Присоединяя к уравнениям (II.4.2) и (II.4.4) уравнение закона фильтрации (предполагаемого линейным)

$$\vec{u} = -\frac{k}{\mu} \text{grad } p, \quad (\text{II.4.5})$$

получаем замкнутую систему уравнений. Исключая скорость фильтрации, имеем

$$m \frac{\partial \rho}{\partial t} = k \text{div} \left(\frac{\rho}{\mu} \text{grad } p \right). \quad (\text{II.4.6})$$

В уравнении (II.4.6) ρ — известная функция давления. Аналогично и вязкость газа, зависящая в общем случае от давления и температуры, может быть представлена в виде:

$$\mu = \mu(p, T_0) = \mu(p). \quad (\text{II.4.7})$$

Таким образом, и вязкость может считаться известной функцией одного лишь давления.

Введем теперь функции

$$P(p) = k \int_0^p \frac{\rho(p) dp}{\mu(p)}; \quad \kappa(P) = m \left(\frac{d\rho}{dP} \right)^{-1} \quad (\text{II.4.8})$$

Уравнение (II.4.6) принимает при этом вид:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \kappa(P) \Delta P. \quad (\text{II.4.9})$$

Можно показать, что уравнение для давления сохранит форму (II.4.9) и в случае, если учитывается деформируемость пористой среды, т. е. зависимость от давления пористости и проницаемости (среда по-прежнему считается однородной).

В простейшем случае, когда газ можно считать термодинамически идеальным, с вязкостью, не зависящей от давления,

$$\mu = \text{const}, \quad \rho = \frac{\rho_0 p}{p_0} \quad (\text{II.4.10})$$

(p_0 и ρ_0 — постоянные). При этом

$$P(p) = \frac{k\rho_0 p^2}{2\mu\rho_0}; \quad \kappa = \frac{kp}{m\mu}, \quad (\text{II.4.11})$$

и уравнение (II.4.9) преобразуется к виду:

$$\frac{\partial p^2}{\partial t} = \frac{kp}{m\mu} \Delta p^2 \quad (\text{II.4.12})$$

или

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{k}{2m\mu} \Delta p^2. \quad (\text{II.4.13})$$

Уравнения (II.4.12) и (II.4.13) выведены в предположении постоянства температуры газа T_0 . Поэтому их обычно называют уравнениями изотермической фильтрации газа.

Уравнение (II.4.13) — основное для теории фильтрации газа — получено впервые Л. С. Лейбензоном [70], а затем, несколько позднее, в работе Маскета и Ботсета [148]. Преобразование (II.4.8) также берет свое начало от работ Л. С. Лейбенсона. Поэтому будем называть функцию $P(p)$ функцией Лейбенсона. Далее уравнение (II.4.13) совпадает с уравнением Буссинеска (II.3.12) для напора при пологих безнапорных фильтрационных движениях. Эта аналогия, впервые обнаруженная Л. С. Лейбензоном, позволяет рассматривать исследование изотермической фильтрации газа и пологих безнапорных движений несжимаемой жидкости как одну задачу.

Глава III

ТЕОРИЯ УПРУГОГО РЕЖИМА ФИЛЬТРАЦИИ

§ 1. ОДНОМЕРНОЕ ПРЯМОЛИНЕЙНО-ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Под упругим режимом фильтрации, как уже упоминалось выше, понимается фильтрация упругой слабосжимаемой жидкости в упругой пористой среде. В этих условиях распределение давления описывается классическим уравнением теплопроводности (II.2.3). Хорошо разработанная техника решения этого уравнения при различных начальных и краевых условиях применима и к задачам теории упругого режима. Разнообразные конкретные решения могут быть заимствованы, например, из руководства Карслоу и Егера [54] и из других источников. Однако задачи теории фильтрации имеют свою специфику, связанную с наличием некоторых малых параметров (например, отношения радиуса скважины к размеру пласта), которая в ряде случаев существенно упрощает решения. Поэтому приводимые ниже примеры предназначены не только проиллюстрировать постановку и способы решения основных задач, но и обратить внимание на эту специфику, отличающую эти задачи от задач теплопроводности.

Читатель, заинтересованный в ознакомлении с другими аспектами теории упругого режима, может обратиться к книгам [124, 125, 3, 38], где рассмотрено большое число задач, от самых простых до весьма сложных задач движения в неоднородных пластах.

1. Рассмотрим движения жидкости, для которых скорость параллельна оси x и не зависит от координат y и z . Давление при этом удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq L. \quad (\text{III.1.1})$$

Наиболее интересны случаи, для которых в начальный момент движение в пласте стационарно. Поскольку стационарное распределение давления также удовлетворяет уравнению (III.1.1), удобно отсчитывать давление в каждой точке от стационарного зна-

чения $p_0(x)$. Введенная таким образом разность $P = p - p_0$ удовлетворяет уравнению (III.1.1) с нулевым начальным условием

$$P(x, 0) = 0. \quad (\text{III.1.2})$$

Предположим, что в плоскости $x = L$ давление сохраняет постоянное значение, равное начальному:

$$P(L, t) = 0. \quad (\text{III.1.3})$$

Такое условие выполняется, если, например, рассматриваемая область граничит с обширным хорошо проницаемым водоносным пластом. Обозначим через $f(t)$ функцию, описывающую изменение давления в начальном сечении $x = 0$. Чтобы получить решение уравнения (III.1.1) при указанных начальных и краевых условиях, применим к нему преобразование Лапласа [42, 43, 63]:

$$L\{P(x, t)\} = \bar{P}(x, \sigma) = \int_0^\infty e^{-t\sigma} P(x, t) dt, \quad (\text{III.1.4})$$

в результате чего для трансформанты $\bar{P}$ получим уравнение

$$\frac{d^2 \bar{P}}{dx^2} - \frac{\sigma}{\kappa} \bar{P} = 0 \quad (\text{III.1.5})$$

при граничных условиях

$$\bar{P}(0) = L\{f(t)\} = F(\sigma), \quad \bar{P}(L) = 0. \quad (\text{III.1.6})$$

Искомое решение уравнения (III.1.5) имеет вид:

$$\bar{P} = F(\sigma) \frac{\text{sh}[(L-x)\sqrt{\sigma/\kappa}]}{\text{sh}(L\sqrt{\sigma/\kappa})}. \quad (\text{III.1.7})$$

Кроме распределения давления в пласте для приложений обычно важно знать также поток жидкости через начальное сечение пласта $x = 0$ и через удаленную границу (контур питания L).

Расход жидкости, приходящийся на единицу площади, равен

$$Q(x, t) = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x}. \quad (\text{III.1.8})$$

Используя (III.1.7), получаем для трансформанты Q выражения

$$\begin{aligned} \bar{Q}(0) &= -\frac{k}{\mu} \sqrt{\frac{\sigma}{\kappa}} F(\sigma) \text{cth}\left(L \sqrt{\frac{\sigma}{\kappa}}\right); \\ \bar{Q}(L) &= \frac{k}{\mu} F(\sigma) \sqrt{\frac{\sigma}{\kappa}} \frac{1}{\text{sh}\left(L \sqrt{\frac{\sigma}{\kappa}}\right)}. \end{aligned} \quad (\text{III.1.9})$$

Соотношения (III.1.7) и (III.1.9) дают решение поставленной задачи, если воспользоваться общей формулой обращения для преобразования Лапласа:

$$P(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \bar{P}(x, \sigma) e^{\sigma t} d\sigma, \quad \gamma > 0. \quad (\text{III.1.10})$$

2. Применение такого операционного метода к задачам упругого режима удобно в том отношении, что позволяет легко исследовать асимптотическое поведение полученного решения при больших и малых значениях времени, даже не выписывая его полностью. Это обстоятельство особенно важно применительно к сложным задачам, для которых эффективное осуществление обратного преобразования затруднено. Кроме того, оно даст значительные упрощения при решении обратных задач, когда речь идет об определении гидродинамических характеристик пласта по данным измерений давлений и расходов (ср. § 4).

Из формул преобразования Лапласа (III.1.4) и (III.1.10) непосредственно видно, что поведение решения при малых значениях времени t определяется асимптотикой изображения при больших $|\sigma|$ и обратно — поведение преобразованной функции при малых $|\sigma|$ определяет асимптотику оригинала при больших t .

Различные приемы определения асимптотик и их обоснование можно найти в книгах [42, 63].

Конкретизируем теперь вид функции $f(t)$, приняв ее равной постоянной p^0 . При этом предполагается, что в начальный момент давление на границе пласта принимает новое фиксированное значение; при этом $F = p^0/\sigma$. Из (III.1.7) и (III.1.9) имеем

$$\bar{P} = \frac{p^0}{\sigma} \frac{\text{sh} \left[(L-x) \sqrt{\frac{\sigma}{\kappa}} \right]}{\text{sh} \left(L \sqrt{\frac{\sigma}{\kappa}} \right)}; \quad \bar{Q}(0) = -\frac{k p^0}{\mu \sigma} \sqrt{\frac{\sigma}{\kappa}} \text{cth} \left(L \sqrt{\frac{\sigma}{\kappa}} \right). \quad (\text{III.1.11})$$

Рассмотрим вначале поведение решений при малых временах, т. е. будем рассматривать (III.1.11) при больших $|\sigma|$. Выразим в (III.1.11) гиперболические функции через показательные и, считая

$2L \sqrt{\frac{\sigma}{\kappa}} \gg 1$, разложим эти выражения в ряды по степеням $e^{-2L \sqrt{\frac{\sigma}{\kappa}}}$. Тогда

$$\bar{P}(x, \sigma) = \frac{p^0}{\sigma} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \exp \left[-\sqrt{\frac{\sigma}{\kappa}} (x + 2Ln) \right] - \sum_{n=0}^{\infty} \exp \left[-\sqrt{\frac{\sigma}{\kappa}} (2L(n+1) - x) \right] \right\};$$

$$\bar{Q}(0) = -\frac{p^0}{\sqrt{\kappa\sigma}} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left[\exp\left(-2Ln\sqrt{\frac{\sigma}{\kappa}}\right) + \exp\left(-2L(n+1)\sqrt{\frac{\sigma}{\kappa}}\right) \right] \right\}. \quad (\text{III.4.12})$$

Производя почленное обращение рядов (III.4.12) (соответствующие формулы обращения выводятся, например, в книге М. А. Лаврентьева и Б. В. Шабата [63], гл. 6, § 1), имеем

$$P(x, t) = p^0 \sum_{n=0}^{\infty} \left[\operatorname{erfc} \frac{2Ln+x}{2\sqrt{\kappa t}} - \operatorname{erfc} \frac{2L(n+1)-x}{2\sqrt{\kappa t}} \right]; \quad (\text{III.4.13})$$

$$Q(0) = -\frac{kp^0}{\mu\sqrt{\pi\kappa t}} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{n^2 L^2}{\kappa t}\right) \right].$$

3. Полученные ряды, как нетрудно убедиться, сходятся при всех t и x . Допустим вначале, что рассматриваются малые времена и $\frac{L^2}{\kappa t} \gg 1$. Тогда в выражении для $P(x, t)$ можно все значения erfc заменить их предельными $\operatorname{erfc} \infty = 0$, за исключением члена ряда $\operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}$. Аналогичным образом в выражении для $Q(0)$ все члены ряда обращаются в нуль. Имеем

$$P(x, t) = p^0 \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}; \quad Q(0) = -\frac{kp^0}{\mu\sqrt{\pi\kappa t}}. \quad (\text{III.4.14})$$

Полученные формулы имеют двоякий смысл. С одной стороны, они описывают распределение давления в пласте конечной длины L при малых временах $\kappa t \ll L^2$. С другой стороны, они дают распределение давления в произвольный момент времени в пласте «бесконечной» протяженности $L \rightarrow \infty$. Дело в том, что конечное (не бесконечно-малое) изменение давления распространяется за заданное время лишь на конечное расстояние, и, если рассматриваются малые времена, можно считать пласт бесконечным. Решение задачи для бесконечного пласта автомодельно: независимые переменные x и t входят в решение не порознь, а лишь в комбинации $x/\sqrt{\kappa t}$. Автомодельность решения является простым следствием отсутствия в постановке задачи постоянных, из которых можно образовать величины размерности длины или времени. Автомодельные решения будут подробно рассмотрены ниже (гл. IV).

Уравнение теплопроводности (III.4.1) является линейным и в силу этого допускает суперпозицию решений. Это позволяет, используя приведенное выше решение для скачкообразного изменения давления в начальном сечении пласта, построить решение, отвечающее произвольному граничному условию

$$P(0, t) = f(t) \quad (\text{III.4.15})$$

и обращающееся в нуль при $t = 0$ и $x = L$ (интеграл Дюамеля):

$$P(x, t) = \int_0^t \frac{df(\tau)}{d\tau} P_1(x, t - \tau) d\tau. \quad (\text{III.1.16})$$

В частности, для бесконечного пласта

$$P(x, t) = \int_0^t \frac{dj(\tau)}{d\tau} \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{\mu V t - \tau}} d\tau; \quad Q(0) = -\frac{k}{\mu V \pi \kappa} \int_0^t \frac{df(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{V t - \tau}. \quad (\text{III.1.17})$$

Если задано не давление, а расход через концевое сечение бесконечного пласта

$$Q(0) = q(t), \quad (\text{III.1.18})$$

то решение, как нетрудно показать тем же способом, имеет вид:

$$P(x, t) = -\frac{\mu}{k} \frac{V \kappa}{\pi} \int_0^t q(t - \tau) \exp\left(-\frac{x^2}{4\kappa\tau}\right) \frac{d\tau}{V \tau}. \quad (\text{III.1.19})$$

4. Решение (III.1.14) представляет «тепловую волну», распространяющуюся с момента $t = 0$ из точки $x = 0$ в положительном направлении оси x . Поэтому выражение (III.1.13) можно рассматривать как результат суперпозиции тепловых волн той же амплитуды p^0 , распространяющихся из точек $x = -2Ln$ вправо и из точек $x = 2Ln$ влево, начиная с того же момента времени, причем волны, распространяющиеся влево, имеют обратный знак. Такому толкованию можно придать простой физический смысл. Попытаемся удовлетворить уравнению (III.1.1) и поставленным краевым условиям при помощи решений типа тепловой волны. Очевидно, все такие решения удовлетворяют начальным условиям. Чтобы удовлетворить условию при $x = L$, добавим к решению (III.1.14) тепловую волну, исходящую из точки $x = 2L$ в отрицательном направлении оси и имеющую обратный знак:

$$f_1(x, t) = -p^0 \operatorname{erfc} \frac{2L - x}{2\sqrt{\kappa t}}. \quad (\text{III.1.20})$$

В силу симметрии очевидно, что суммарное решение обращается в нуль при $x = L$. Однако при $x = 0$ построенное решение уже не равно точно p^0 . Чтобы скомпенсировать невязку, вызванную второй тепловой волной, добавим третью волну того же знака и направления, что и первая, и исходящую из точки $x = -2L$. При этом возникает невязка в граничном условии при $x = L$, для компенсации которой придется добавить обратную волну из точки $x = 4L$ и т. д. Нетрудно видеть, что таким путем мы придем к решению (III.1.13). Отсюда ясно, что пока рассматриваемые значения времени не слишком велики, достаточно ограничиться учетом волн от нескольких

ближайших к рассматриваемой точке источников [это, конечно, легко увидеть и непосредственно из (III.1.13)]. Таким путем можно получить простые выражения для достаточно длительного начального периода движения.

5. Рассмотрим теперь противоположную асимптотику: $t \gg \frac{L^2}{\kappa}$.

В этом случае выражение (III.1.13) неудобно тем, что приходится суммировать много членов ряда. Чтобы получить решение в более удобной форме, обратимся вновь к соотношению (III.1.7), полагая в нем опять $f = p^0$. Используя формулу обращения (III.1.10), имеем

$$P_1(x, t) = \frac{p^0}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\operatorname{sh} \left[(L-x) \sqrt{\frac{\sigma}{\kappa}} \right]}{\operatorname{sh} \left[L \sqrt{\frac{\sigma}{\kappa}} \right]} \frac{e^{\sigma t} d\sigma}{\sigma}; \quad c > 0. \quad (\text{III.1.21})$$

Подынтегральное выражение убывает при $|\sigma| \rightarrow \infty$. Это позволяет обычным приемом перейти к интегрированию по прямой, параллельной мнимой оси, но лежащей левее ее, добавив вклады от полюсов подынтегрального выражения, лежащих между прямыми. Полагая поэтому $\pi^2 \kappa L^{-2} < -c_1 < 4\pi^2 \kappa L^{-2}$, имеем

$$P_1(x, t) = p^0 \left(1 - \frac{x}{L} \right) - \frac{2p^0}{\pi} \sin \left[\pi \left(1 - \frac{x}{L} \right) \right] \exp \left(-\frac{\pi^2 \kappa t}{L^2} \right) + \\ + 0 \left[\exp \left(-\frac{(4-\varepsilon) \pi^2 \kappa t}{L^2} \right) \right]. \quad (\text{III.1.22})$$

Первый член выражения (III.1.22) представляет собой стационарное решение, отвечающее заданным краевым условиям; второй член выражает основную, при больших временах, часть поправки к этому стационарному решению; наконец, последний член мал даже по сравнению с первым поправочным членом. Таким образом, приближение к стационарному режиму происходит экспоненциально, причем характерное время выхода на стационарный режим — порядка

$$\tau = L^2 \kappa^{-1}. \quad (\text{III.1.23})$$

Оценим это время для систем различных размеров. При этом для κ примем характерное значение $\kappa = 10^4$ см²/сек. В результате имеем: при $L = 1$ м (переходный процесс в одном куске-блоке породы) $\tau = 0,1$ сек; при $L = 300$ м (порядка расстояния между скважинами) $\tau = 10^4$ сек ≈ 3 ч; $L = 10$ км (порядка размеров месторождения) $\tau = 10^7$ сек = 100 суткам; $L = 100$ км (порядка размеров крупной водонапорной системы) $\tau = 10^9$ сек = 30 лет. В практических задачах часто приходится рассматривать нестационарные процессы в сложных системах, в которые входят элементы с различными собственными временами. Оценивая время установления (стационарного течения) для каждого элемента по его размерам, мы упростим

задачу, отделив те элементы, движение в которых уже можно считать стационарным, и те, в которых нестационарный процесс находится в начальной стадии.

§ 2. ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ЗАДАЧИ И ЗАДАЧИ ИНТЕРФЕРЕНЦИИ СКВАЖИН ПРИ НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ ФИЛЬТРАЦИИ

1. Рассмотрим теперь одномерное осесимметричное (плоско-радиальное) движение при упругом режиме. Распределение давления определяется при этом как решение уравнения теплопроводности в полярных координатах (r, θ) :

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \kappa \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) \quad 0 < \rho \leq r \leq R \leq \infty, \quad (\text{III.2.1})$$

удовлетворяющее начальному условию

$$p(r, 0) = f(r) \quad (\text{III.2.2})$$

и граничным условиям при $r = \rho$ и $r = R$.

По-прежнему основной интерес представляют решения, отвечающие стационарному начальному распределению давления $f(r) = C_1 \ln r + C_2$. В силу линейности уравнения (III.2.1) отклонения распределения давления от стационарного также удовлетворяют уравнению (III.2.1), но уже с нулевым начальным условием. Поэтому примем далее $f(r) \equiv 0$, понимая под p отклонение давления от стационарного распределения.

Переходя в уравнении (III.2.1) к лапласовым изображениям, получаем уравнение

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dP(r, \sigma)}{dr} \right) = -\frac{\sigma}{\kappa} P(r, \sigma), \quad (\text{III.2.3})$$

общее решение которого имеет вид:

$$P(r, \sigma) = C_1 I_0 \left(r \sqrt{\frac{\sigma}{\kappa}} \right) + C_2 K_0 \left(r \sqrt{\frac{\sigma}{\kappa}} \right), \quad (\text{III.2.4})$$

где I_0 и K_0 — модифицированные функции Бесселя от мнимого аргумента нулевого порядка. Задавая два граничных условия, мы можем определить постоянные C_1, C_2 , а вместе с ними и решение.

2. В приложениях особое значение имеет задача, в которой на скважине задается не постоянное давление, а постоянный дебит. Решение этой задачи используется в наиболее распространенных способах определения параметров пласта по наблюдениям нестационарного притока к скважине. Положим таким образом

$$q = -\frac{2\pi k}{\mu} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=\rho} = \text{const}; \quad \frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{r=\rho} = \frac{p^*}{\rho};$$

$$p^* = -\frac{q\mu}{2\pi k}; \quad p(R, t) = 0, \quad (\text{III.2.5})$$

где p^* — постоянная размерности давления. Удовлетворяя граничным условиям, получим для изображения распределения давления

$$P(\sigma) = \frac{p^* \sqrt{\kappa}}{\rho \sigma^{3/2}} \frac{K_0\left(R \sqrt{\frac{\sigma}{\kappa}}\right) I_0\left(r \sqrt{\frac{\sigma}{\kappa}}\right) - K_0\left(r \sqrt{\frac{\sigma}{\kappa}}\right) I_0\left(R \sqrt{\frac{\sigma}{\kappa}}\right)}{I_1\left(\rho \sqrt{\frac{\sigma}{\kappa}}\right) K_0\left(R \sqrt{\frac{\sigma}{\kappa}}\right) + I_0\left(R \sqrt{\frac{\sigma}{\kappa}}\right) K_1\left(\rho \sqrt{\frac{\sigma}{\kappa}}\right)}. \quad (\text{III.2.6})$$

Рассмотрим «промежуточную асимптотику»

$$\frac{\rho}{\sqrt{\kappa t}} \ll 1 \ll \frac{R}{\sqrt{\kappa t}},$$

что позволяет упростить выражение (III.2.6), полагая

$$\rho \sqrt{\frac{\sigma}{\kappa}} \ll 1 \ll R \sqrt{\frac{\sigma}{\kappa}}.$$

При больших значениях аргумента z модифицированные функции Бесселя имеют асимптотические выражения [26, 129]

$$I_0(z) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} e^z; \quad K_0(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}. \quad (\text{III.2.7})$$

В этом случае граничное условие на внешнем контуре оказывается несущественным, и мы имеем решение для неограниченного пласта:

$$P(r, \sigma) = - \frac{p^* \sqrt{\kappa}}{\rho \sigma^{3/2}} \frac{K_0\left(r \sqrt{\frac{\sigma}{\kappa}}\right)}{K_1\left(\rho \sqrt{\frac{\sigma}{\kappa}}\right)}. \quad (\text{III.2.8})$$

Упростим теперь выражение (III.2.8), используя неравенство $\rho \ll \sqrt{\kappa t}$ и асимптотические формулы для $K_1(z)$ и $K_0(z)$ при $z \rightarrow 0$:

$$K_0(z) = - \left(C + \ln \frac{z}{2} \right)^{-} \quad (\text{III.2.9})$$

($C = 0,7772$ — постоянная Эйлера).

Подставляя (III.2.9) в (III.2.8), получаем

$$P(r, \sigma) = - \frac{p^*}{\sigma} K_0\left(r \sqrt{\frac{\sigma}{\kappa}}\right), \quad (\text{III.2.10})$$

в частности, для давления в скважине

$$P(\rho, \sigma) = \frac{p^*}{\sigma} \left(C + \ln \rho \sqrt{\frac{\sigma}{\kappa}} \right). \quad (\text{III.2.11})$$

Отметим важное обстоятельство: в соотношениях (III.2.10) и (III.2.11) не входит радиус скважины ρ . Это означает, что в области применимости условия $\rho^2/\kappa t \ll 1$ распределение давления не зависит от радиуса скважины.

Используя таблицу преобразований Лапласа (см., например, [26, формула 5.16 (35)]), имеем

$$K_0(\sqrt{a\sigma}) \Leftrightarrow \frac{1}{2t} \exp\left(-\frac{\alpha}{4t}\right). \quad (\text{III.2.12})$$

Отсюда, используя связь между преобразованиями Лапласа функции и ее производной [формула (С. 3) приложения], получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma} K_0(\sqrt{a\sigma}) &\Leftrightarrow \int_0^t \frac{1}{2\tau} \exp\left(-\frac{\alpha}{4\tau}\right) d\tau = \frac{1}{2} \int_{\alpha/4t}^{\infty} e^{-s} \frac{ds}{s} = \\ &= -\frac{1}{2} \text{Ei}\left(-\frac{\alpha}{4t}\right). \end{aligned} \quad (\text{III.2.13})$$

Полагая теперь в соответствии с (III.2.10) $\alpha = r^2/\kappa$, получим

$$p(r, t) = \frac{1}{2} p^* \text{Ei}\left(-\frac{r^2}{4\kappa t}\right) = \frac{q\mu}{4\pi k} \text{Ei}\left(-\frac{r^2}{4\kappa t}\right). \quad (\text{III.2.14})$$

Выражение для давления в скважине $p(r, t)$ можно непосредственно получить из выражения (III.2.14), по таблицам преобразования Лапласа или используя известную асимптотику интегральной показательной функции

$$\text{Ei}(-x) = C - \ln x \dots \quad (\text{III.2.15})$$

При этом получим

$$p(r, t) = +\frac{q\mu}{4\pi k} \left(\ln \frac{r^2}{4\kappa t} + C \dots \right) \approx -\frac{q\mu}{4\pi k} \ln \frac{2,25\kappa t}{r^2}. \quad (\text{III.2.16})$$

Последнее выражение широко используется при интерпретации результатов исследования скважин (см. § III.4).

3. Рассмотрим теперь простейшие задачи интерференции скважин при неустановившемся движении. Интерес к этим задачам связан с тем обстоятельством, что на любом месторождении имеется большое число скважин, объединяемых в более или менее правильно расположенные группы (батареи), причем режимы всех скважин в батарее обычно являются примерно одинаковыми. При расчете удобно заменять батарею однотипных скважин дренажной галереей или укрупненной скважиной: группа дискретных стоков (источников) заменяется одним распределенным.

Пусть имеется бесконечная цепочка скважин, расположенных на расстоянии $2a$ друг от друга вдоль прямой, которую мы примем за ось x . Предположим, что вначале движения не было, а при $t = 0$ из всех скважин начинается отбор с одинаковым дебитом q . Рассмотрим изменение давления в точке с координатами x, y , где для определенности считается, что $|x| < a, y > 0$ и что одна из скважин расположена в начале координат. Считая, что радиус скважины мал

по сравнению с расстоянием между соседними скважинами $2a$, воспользуемся упомянутым в предыдущем пункте выражением для давления, получаемым из автомодельного решения.

Имеем

$$p = \frac{1}{2} p^* \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Ei} \left[-\frac{(x-2na)^2 + y^2}{4\kappa t} \right]. \quad (\text{III.2.17})$$

Практический интерес обычно представляют два вопроса: темп снижения давления в скважинах цепочки и темп снижения давления на большом удалении от цепочки. Положим поэтому сначала $y \gg a$. Вычислим давление в точках, лежащих на оси y . Имеем

$$\begin{aligned} p(n, y) &= \frac{1}{2} p^* \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Ei} \left(-\frac{4n^2 a^2 + y^2}{4\kappa t} \right) = \\ &= \frac{1}{2} p^* \text{Ei} \left(-\frac{y^2}{4\kappa t} \right) - p^* \int_1^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left(-\frac{un^2 a^2}{\kappa t} \right) \exp \left(-\frac{uy^2}{4\kappa t} \right) \frac{du}{u}. \end{aligned} \quad (\text{III.2.18})$$

Последнее выражение можно преобразовать, используя тождество [41, № 552, 61]:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \exp(-k^2 x^2) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\pi}}{x} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \exp \left(-\frac{k^2 \pi^2}{x^2} \right) \right]. \quad (\text{III.2.19})$$

Имеем

$$\begin{aligned} p(0, y) &= -\frac{1}{2} p^* \int_{\frac{a^2}{\pi \kappa t}}^{\infty} \exp \left(-\frac{\pi y^2 v}{4a^2} \right) \frac{dv}{v^{3/2}} - \\ &- p^* \int_{\frac{a^2}{\pi \kappa t}}^{\infty} \exp \left(-\frac{\pi y^2 v}{4a^2} \right) \sum_{k=1}^{\infty} \exp \left(-\frac{\pi k^2}{v} \right) \frac{dv}{v^{3/2}}. \end{aligned} \quad (\text{III.2.20})$$

В последнем интеграле, в силу быстрой его сходимости на нижнем пределе, можно интегрирование вести от нуля. После этого результат почленного интегрирования ряда может быть найден достаточно просто. Имеем (например, непосредственно по таблицам преобразования Лапласа)

$$\int_0^{\infty} \exp \left(-\frac{\pi y^2 v}{4a^2} - \frac{\pi k^2}{v} \right) \frac{dv}{v^{3/2}} = \frac{1}{k} \exp \left(-\frac{\pi k y}{a} \right). \quad (\text{III.2.21})$$

В результате второй интеграл в уравнении (III.2.20) представляется в виде интеграла от геометрической прогрессии. В первом же интеграле удобно выделить не убывающие при $t \rightarrow \infty$ члены. После указанных преобразований имеем

$$p(0, y) = p^* \left[-\frac{\sqrt{\pi \kappa t}}{a} + \frac{\pi y}{2a} + \ln(1 - e^{-\pi y/a}) + o(1) \right]. \quad (\text{III.2.22})$$

Напомним, что формула (III.2.22) описывает распределение давления вдоль линии, проходящей через ось одной из скважин и перпендикулярной оси батареи, при достаточно больших временах $4\kappa t \gg y^2$, $4\kappa t \gg a^2$.

Мы видим, что вдали от скважины (при $y \gg a$) последний член выражения (III.2.22) несуществен, первые же два члена этого выражения, если учесть условие $y^2 \ll 4\kappa t$, совпадают с выражением для падения давления при пуске галереи с дебитом $q/4a$ в расчете на единицу площади галереи. Практически этим выражением можно пользоваться уже начиная с $y = a$.

Представляет интерес выяснение того, каким образом давление меняется вдоль линий, параллельных оси галереи. Непосредственно очевидно, что

$$p(0, y) \leq p(x, y) \leq p(a, y), \quad (\text{III.2.23})$$

откуда легко получить величину колебания давления вдоль линии $y = \text{const}$. Имеем

$$p(a, y) = \frac{1}{2} p^* \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{Ei} \left(-\frac{y^2 + k^2 a^2}{4\kappa t} \right) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{Ei} \left(-\frac{y^2 + 4k^2 a^2}{4\kappa t} \right) \right].$$

Если обозначить временно через p'_a распределение давления, определяемое формулой (III.2.22), то

$$p(a, y) = p'_{\frac{a}{2}} - p'_a = p^* \left[-\frac{\sqrt{\pi \kappa t}}{a} + \frac{\pi y}{2a} + \ln \frac{1 - \exp \left(-\frac{2\pi y}{a} \right)}{1 - \exp \left(-\frac{\pi y}{a} \right)} + o(1) \right]. \quad (\text{III.2.24})$$

Сравнение выражений (III.2.22) и (III.2.24) дает

$$p(a, y) - p(0, y) = p^* \left[\ln \frac{1 - e^{-\frac{2\pi y}{a}}}{1 - e^{-\frac{\pi y}{a}}} + o(1) \right]. \quad (\text{III.2.25})$$

Таким образом, по мере удаления от батареи скважин различие давлений между отдельными точками прямой $y = \text{const}$ быстро исчезает и уже при $y = a$ им можно пренебречь.

Полученные результаты показывают, что вне полосы $|y| \leq a$ движение можно с высокой степенью точности считать одномерным; напротив, внутри этой полосы существенна неоднородность движения, связанная с наличием точечных стоков (скважин) вместо распределенных.

Вычислим, используя формулу (III.2.22), давление в скважине, положив $y = \rho$ ($\rho \ll a$ — радиус скважины). Имеем

$$p(0, \rho) = -p^* \left(\frac{\sqrt{\pi \kappa t}}{a} - \ln \frac{\pi \rho}{a} + \dots \right). \quad (\text{III.2.26})$$

Выражение (III.2.26) показывает, что давление в скважине отличается от давления на галерее с тем же дебитом на единицу площади сечения пласта лишь постоянным слагаемым $p^* \ln \left(\frac{\pi \rho}{a} \right)$. Это обстоятельство позволяет вести расчет батарей скважин так же, как и расчет галерей, добавляя к перепаду давления величину $p^* \ln \left(\frac{\pi \rho}{a} \right)$.

Соответствующий метод («метод фильтрационных сопротивлений») разработан Ю. П. Борисовым [33] первоначально для стационарного движения; его применение к нестационарным процессам дано в работе [113]. Метод сводится к тому, что сопротивление притоку к скважинам разбивается на два соединенных последовательно: внешнее сопротивление, отвечающее движению вне галереи, и внутреннее, определяющее разность давлений между скважиной и фиктивной галереей. Применительно к нестационарному движению особо важное упрощение достигается благодаря тому, что нестационарность следует учитывать лишь для внешнего давления; добавочное сопротивление при переходе от скважины к галерее можно считать постоянным.

§ 3. НЕКОТОРЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ УПРУГОГО РЕЖИМА

Рассмотрим теперь несколько более сложных задач, имеющих существенное значение для приложений.

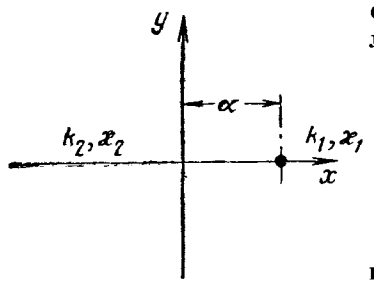
1. Предположим, что плоский пласт состоит из двух областей с различными свойствами (проницаемостью, пористостью и т. д.), разделенных прямолинейной границей (рис. III.1). Пусть в момент $t = 0$ первоначально стационарное состояние возмущается в результате пуска скважины в точке $(a, 0)$ с постоянным расходом q . Тогда распределение давления в каждой из областей описывается уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\kappa_2} \frac{\partial p}{\partial t} &= \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}; & (x < 0); \\ \frac{1}{\kappa_1} \frac{\partial p}{\partial t} &= \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - \frac{\mu}{k} q \delta(y) \delta(x-a); & (x > 0). \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.3.4})$$

На границе $x = 0$ выполняются условия непрерывности давлений и потоков:

$$p(x-0, y) = p(x+0, y); \quad k_1 \frac{\partial p(x+0, y)}{\partial x} = k_2 \frac{\partial p(x-0, y)}{\partial x}. \quad (\text{III.3.2})$$

Во втором уравнении (III.3.1) в правую часть непосредственно введен точечный источник интенсивностью q . Через δ , как обычно, обозначена дельта-функция, определяемая условиями (см., например, [106])



$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi) f(\xi) d\xi = f(0); \quad \delta(\xi) = 0; \quad (\xi \neq 0). \quad (\text{III.3.3})$$

Рис. III.4

Применив к уравнениям (III.3.1) косинус-преобразование Фурье и преобразование Лапласа, получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 P}{dx^2} - \left(\omega^2 + \frac{\sigma}{\kappa_2} \right) P &= 0; \quad (x < 0); \\ \frac{d^2 P}{dx^2} - \left(\omega^2 + \frac{\sigma}{\kappa_1} \right) P &= \frac{\mu q}{2k_1 \sigma} \delta(x-a), \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.3.4})$$

где

$$P(x, \omega, \sigma) = \int_0^{\infty} \cos \omega y dy \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} p(x, y, t) dt. \quad (\text{III.3.5})$$

Наличие в правой части уравнения второго порядка (III.3.4) величины $\left(\frac{\mu q}{2k_1 \sigma} \right) \delta(x-a)$ означает, что P удовлетворяет однородному уравнению при $x \neq a$, а при $x = a$ производная $\frac{dP}{dx}$ претерпевает скачок величиной $\frac{\mu q}{2k_1 \sigma}$, тогда как сама величина P непрерывна.

Учитывая это, легко выписать решение уравнений (III.3.4), удовлетворяющее условиям сшивки при $x = 0$ и стремящееся к нулю при $x \rightarrow \pm \infty$. Это решение имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} P(x, \omega, \sigma) &= C \left[\text{ch } s_1 x + \frac{k_2}{k_1} \frac{s_2}{s_1} \text{sh } s_1 x \right]; \quad (0 < x < a); \\ P(x, \omega, \sigma) &= A e^{-s_1 x}; \quad (a < x < \infty); \\ P(x, \omega, \sigma) &= C e^{s_2 x}; \quad (x < 0); \\ s_1 &= \sqrt{\omega^2 + \frac{\sigma}{\kappa_1}}; \quad s_2 = \sqrt{\omega^2 + \frac{\sigma}{\kappa_2}}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.3.6})$$

где

$$\left. \begin{aligned} C &= -\frac{\mu q}{2k_1\sigma} \frac{e^{-s_1 a}}{s_1 + \frac{k_2 s_2}{k_1}}; \\ A &= -\frac{\mu q}{2k_1\sigma} \frac{k_1 \operatorname{ch} s_1 a + \frac{k_2 s_2}{s_1} \operatorname{sh} s_1 a}{k_1 s_1 + k_2 s_2}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.3.7})$$

Проанализируем теперь полученное решение. Определим сначала давление в точке $x = a + \rho$, $y = 0$ ($\rho \ll a$).

Имеем

$$P(a + \rho) = -\frac{\mu q}{4k_1\sigma} \frac{e^{-s_1 \rho}}{s_1} \left[1 + \frac{k_1 s_1 - k_2 s_2}{k_1 s_1 + k_2 s_2} e^{-2as_1} \right]. \quad (\text{III.3.8})$$

Пусть $\sigma a^2/\kappa_1 \gg 1$ (т. е. рассматриваются малые времена; $t \ll a^2/\kappa_1$). В этом случае

$$P(a + \rho) \approx -\frac{\mu q}{4k_1\sigma} \frac{e^{-\rho s_1}}{s_1}. \quad (\text{III.3.9})$$

Чтобы вычислить лапласово изображение давления, необходимо выполнить обратное косинус-преобразование:

$$\bar{p}(x, y, \sigma) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty P \cos \omega y d\omega, \quad (\text{III.3.10})$$

откуда

$$\bar{p}(a + \rho, 0, \sigma) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty P(a + \rho) d\omega. \quad (\text{III.3.11})$$

Подставляя (III.3.9) в (III.3.11), имеем

$$\begin{aligned} \bar{p}(a + \rho, 0, \sigma) &= -\frac{\mu q}{2\pi k_1\sigma} \int_0^\infty \frac{e^{-\rho \sqrt{\omega^2 + \frac{\sigma}{\kappa_1}}}}{\sqrt{\omega^2 + \frac{\sigma}{\kappa_1}}} d\omega = \\ &= -\frac{\mu q e^{-\rho \sqrt{\frac{\sigma}{\kappa_1}}}}{2\pi k_1\sigma} \int_0^\infty \frac{e^{-u\rho \sqrt{\frac{\sigma}{\kappa_1}}}}{\sqrt{u(u+2)}} du = -\frac{\mu q}{2\pi k_1\sigma} K_0\left(\sqrt{\frac{\sigma}{\kappa_1}} \rho\right). \end{aligned} \quad (\text{III.3.12})$$

Используем известное соотношение

$$K_0\left(\sqrt{\frac{\sigma}{\kappa_1}} \rho\right) \leftrightarrow \frac{1}{2t} \exp\left(-\frac{\rho^2}{4\kappa_1 t}\right).$$

Тогда

$$\frac{1}{\sigma} K_0\left(\sqrt{\frac{\sigma}{\kappa_1}} \rho\right) \leftrightarrow \frac{1}{2} \int_0^t \frac{1}{t} \exp\left(-\frac{\rho^2}{4\kappa_1 t}\right) dt = -\frac{1}{2} \operatorname{Ei}\left(-\frac{\rho^2}{4\kappa_1 t}\right). \quad (\text{III.3.13})$$

Полученный результат, конечно, вполне очевиден; он означает, что для достаточно малых времен ($t^2 \ll a^2/\kappa_1$) влиянием второй зоны можно пренебречь, и давление распределено так же, как и в однородном пласте.

Пусть теперь имеется обратное неравенство: $t^2 \gg a^2/\kappa_1$, так что $\sigma \ll \kappa_1/a^2$. При этом вклад первого члена (III.3.8) не изменится; вклад же второго члена уже не будет пренебрежимо малым. Представим его в виде:

$$-\frac{\mu q}{4k_1\sigma} \frac{\exp[-(2a+\rho)s_1]}{s_1} \left(\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2} + \frac{2k_1k_2(s_1-s_2)}{(k_1+k_2)(k_1s_1+k_2s_2)} \right). \quad (\text{III.3.14})$$

Первый член (III.3.14) подобно выражению (III.3.9) отвечает течению от источника, помещенного в точке $(-a, 0)$ и пущенного в момент $t = 0$ с дебитом $q \frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}$; его вклад может быть легко вычислен. Второй член (III.3.14) дает после обращения

$$\Delta(a+\rho, \sigma) = -\frac{\mu q}{\pi(k_1+k_2)} \frac{k_2}{\sigma} \int_0^\infty \frac{\exp[-(2a+\rho)s_1]}{s_1} \frac{s_1-s_2}{k_1s_1+k_2s_2} d\omega. \quad (\text{III.3.15})$$

Интеграл (III.3.15) принимает при $\sigma = 0$ конечное значение $\frac{1}{k_1} \Delta_0$. Это означает, что при больших временах распределение давления имеет весьма простой вид, причем опущенные члены стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$:

$$p(x, y, t) = \frac{\mu q}{4\pi k_1} \left[\text{Ei} \left(-\frac{\rho^2}{4\kappa_1 t} \right) + \frac{k_1-k_2}{k_1+k_2} \text{Ei} \left(-\frac{(2a+\rho)^2}{4\kappa_1 t} \right) \right] - \\ - \frac{\mu q k_2}{\pi(k_1+k_2)k_1} \Delta_0(\beta, k_2/k_1); \quad (\beta^2 = \kappa_1/\kappa_2). \quad (\text{III.3.16})$$

В табл. III.1 приведены значения интеграла Δ_0 для случая $\beta^2 = k_1/k_2$.

Таблица III-1

k_1/k_2	Δ_0	k_1/k_2	Δ_0
0,01	-0,022	1	0
0,1	-0,195	2	0,267
0,2	-0,120	3	0,534
0,333	-0,123	5	1,030
0,5	-0,106	10	2,080
		100	11,400

П. Я. Полубаринова-Кочина [94] рассмотрела аналогичную стационарную задачу и показала, что распределение давления в той части пласта, где находится источник, совпадает с распределением давления в однородной среде при действии двух источников интен-

сивностью q и λq (где $\lambda = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}$), расположенных симметрично относительно границы раздела. Как мы видели выше, то же имеет место и для движения при упругом режиме. При этом следует иметь в виду, что появление дополнительного члена Δ_0 не противоречит сказанному, поскольку при стационарном движении давление определено с точностью до постоянной; при нестационарном же движении такого произвола уже нет, так как естественным началом отсчета служит давление в невозмущенном пласте. Рассмотренную задачу впервые изучил В. А. Максимов [75, 31].

Приведенная упрощенная форма решения удобна при анализе решения для участка пласта вблизи скважины. Для удаленных участков пласта решение может быть представлено по-другому. Выполним это для точек, расположенных на оси y , считая $y \gg a$. При этом $P(0, \omega, \sigma) = C$ и

$$\bar{p}(0, y, \sigma) = -\frac{\mu q}{\pi k_1 \sigma} \int_0^\infty \frac{e^{-as_1} \cos \omega y \, d\omega}{s_1 + (k_2/k_1) s_2}. \quad (\text{III.3.17})$$

При $y \gg a$ и $a^2 \sigma / \kappa_1 \ll 1$ главный член выражения (III.3.17) имеет вид:

$$\begin{aligned} \bar{p}(0, y, \sigma) &= -\frac{\mu q}{\pi k_1 \sigma} \int_0^\infty \frac{\cos \omega y \, d\omega}{s_1 + k_2/k_1 s_2} = \\ &= -\frac{\mu q}{\pi \sigma (k_1 + k_2)} K_0 \left(\sqrt{\frac{\sigma}{\kappa_1}} y \right) - \frac{\mu q k_2}{k_1 \pi \sigma (k_1 + k_2)} \int_0^\infty \frac{\cos \omega y (s_1 - s_2) \, d\omega}{s_1 (s_1 + k_2/k_1 s_2)} = \\ &= -\frac{\mu q}{\pi \sigma (k_1 + k_2)} K_0 \left(\sqrt{\frac{\sigma}{\kappa_1}} y \right) - \frac{\mu q k_2 (\kappa_2 - \kappa_1)}{\pi \sigma k_1 (k_1 + k_2) \kappa_2} F(\eta, \beta, k_2/k_1); \\ F(\eta, \beta, k_2/k_1) &= \int_0^\infty \frac{\cos \eta v \, dv}{\sqrt{1+v^2} (\sqrt{1+v^2} + \sqrt{\beta^2+v^2}) (\sqrt{1+v^2} + k_2/k_1 \sqrt{\beta^2+v^2})}; \\ (\omega &= v \sqrt{\sigma/\kappa_1}; \quad \beta^2 = \kappa_1/\kappa_2; \quad \eta = y \sqrt{\sigma/\kappa_1}). \end{aligned} \quad (\text{III.3.18})$$

Полученная асимптотика имеет простой смысл. Если точка, в которой рассматривается решение, удалена от начала координат на расстояние, большее по сравнению с a , то точное положение скважины уже не имеет значения. В частности, можно в первом приближении считать скважину расположенной непосредственно на границе пластов. В видоизмененной таким образом задаче уже отсутствует характерный размер, и она имеет автомодельное решение вида:

$$p(x, y, t) = \frac{\mu q}{k_1} f(\xi, \Theta), \quad (\text{III.3.19})$$

где $\xi = \frac{r}{2\sqrt{\kappa_1 t}}$; r и Θ — полярные координаты.

Приведенное выше выражение (III.3.18) отвечает значению $\Theta = \pi/2$. Можно уточнить рассмотренную асимптотику, учитывая следующие члены разложения.

Чтобы понять смысл последующих членов разложения, заметим, что, «сдвигая» источник в начале координат (т. е. полагая $a = 0$), мы вносим ошибку, которую можно компенсировать, добавив «пару» из стока в начале координат и источника в точке $(a, 0)$. Действие этой пары можно приближенно заменить действием «диполя» интенсивностью qa , расположенного в начале координат. Отвечающее ему решение также автомодельно. Подобным же образом может быть произведен учет высших поправок. В результате решение для больших r окажется представленным в виде наложения автомодельных решений сравнительно простого вида.

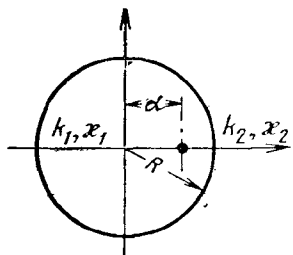


Рис. III.2

2. Рассмотрим теперь аналогичную задачу о влиянии неоднородности пласта, считая, что неоднородность имеет круговую форму (рис. III.2). Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa_1} \frac{\partial p}{\partial t} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \Theta^2} - \frac{\mu q}{k_1 r} \delta(r-a) \delta(\Theta) \quad (r < R); \\ \frac{1}{\kappa_2} \frac{\partial p}{\partial t} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \Theta^2} \quad (r > R), \end{aligned} \quad (\text{III.3.20})$$

а на границе $r = R$ выполняются условия сшивки:

$$\begin{aligned} p(R-0, \Theta, t) &= p(R+0, \Theta, t); \\ k_1 \frac{\partial p(R-0, \Theta, t)}{\partial r} &= k_2 \frac{\partial p(R+0, \Theta, t)}{\partial r}. \end{aligned} \quad (\text{III.3.21})$$

Представив решение рядом Фурье, получим для коэффициентов

$$P_n(r, \sigma) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty e^{-\sigma t} p(r, \Theta, t) \cos n\Theta dt d\Theta \quad (\text{III.3.22})$$

выражения

$$\begin{aligned} P_n &= CI_n(\sqrt{\sigma/\kappa_1} r) \quad (r < a); \\ P_n &= BI_n(\sqrt{\sigma/\kappa_1} r) + DK_n(\sqrt{\sigma/\kappa_1} r) \quad (a < r < R); \\ P_n &= AK_n(\sqrt{\sigma/\kappa_1} r) \quad (r > R). \end{aligned} \quad (\text{III.3.23})$$

Здесь

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu q}{\pi k_1 \sigma} I_n(\alpha) \times \\ &\times \frac{K_n(\rho_0) [K_{n+1}(\beta \rho_0) + K_{n-1}(\beta \rho_0)] - \beta K_{n+1}(\rho_0) K_n(\beta \rho_0) - \beta K_n(\rho_0) K_{n-1}(\beta \rho_0)}{I_n(\rho_0) [K_{n+1}(\beta \rho_0) + K_{n-1}(\beta \rho_0)] + \beta K_n(\beta \rho_0) [I_{n+1}(\rho_0) + I_{n-1}(\rho_0)]}; \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} C &= B - \frac{\mu q}{\pi k_1 \sigma} K_n(\alpha); & D &= -\frac{\mu q}{\pi k_1 \sigma} I_n(\alpha); \\ A &= B \frac{I_n(\rho_0)}{K_n(\beta \rho_0)} + D \frac{K_n(\rho_0)}{K_n(\beta \rho_0)}; \\ \alpha &= \sqrt{\frac{\sigma}{\kappa_1}} a; & \rho_0 &= \sqrt{\frac{\sigma}{\kappa_1}} R; & \beta^2 &= \frac{\kappa_2}{\kappa_1}; & \rho &= \sqrt{\frac{\sigma}{\kappa_1}} r. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.3.24})$$

Выберем точку $r = a - \delta$, $0 < \delta \ll a$. Имеем

$$P_n(a - \delta) = B I_n(\rho) - \frac{\mu q}{\pi k_1 \sigma} K_n(\alpha) I_n(\rho). \quad (\text{III.3.25})$$

Соответствующий второму члену разложения (III.3.25) ряд Фурье суммируем. Тогда

$$\begin{aligned} \bar{p}(\rho, \Theta, \sigma) &= \frac{1}{2} P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n \cos n\Theta = \\ &= -\frac{\mu q}{\pi k_1 \sigma} \left(\frac{1}{2} K_0(\alpha) I_0(\rho) + \sum_{n=1}^{\infty} K_n(\alpha) I_n(\rho) \cos n\Theta \right) = -\frac{\mu q}{2\pi k_1 \sigma} K_0(\omega); \\ \omega &= \sqrt{\rho^2 + \alpha^2 - 2\alpha\rho \cos \Theta} \end{aligned} \quad (\text{III.3.26})$$

(см. [26, формулы 7, 15, 35]), что отвечает течению от источника в однородном пласте. Если α и ρ_0 велики (σ велики, т. е. времена малы), то, как легко убедиться, вклад первого члена формулы (III.3.25) экспоненциально мал, так что решение совпадает с решением для однородного пласта. Это имеет место, очевидно, до тех пор, пока возмущение давления не достигнет круговой границы $r = R$.

Рассмотрим подробнее противоположный случай, когда α , ρ_0 и $\beta \rho_0$ малы. Тогда выражение (III.3.24) для B можно упростить, используя известные формулы для малых значений аргумента:

$$I_n(\alpha) \approx \frac{\alpha^n}{2^n n!}; \quad K_n(\alpha) \approx \frac{(n-1)! 2^{n-1}}{\alpha^n} \quad (n > 0). \quad (\text{III.3.27})$$

В результате при $n \neq 0$ в (III.3.24) можно пренебречь членами, содержащими K_{n-1} и I_{n+1} , и получить после некоторых упрощений

$$B_n = \frac{\mu q}{2\pi k_1 \sigma} \frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1} 2^n (n-1)! \left(\frac{\alpha}{\rho_0^2} \right)^n. \quad (\text{III.3.28})$$

При $n = 0$ имеем

$$B_0 = \frac{\mu q}{\pi k_1 \sigma} \left[\left(\frac{k_1}{k_2} - 1 \right) \left(C + \ln \frac{\rho_0}{2} \right) + \frac{k_1}{k_2} \ln \beta \right]. \quad (\text{III.3.29})$$

Вклад выражения (III.3.28) в решение равен

$$\begin{aligned}
 & -\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2} \frac{\mu q}{2\pi k_1 \sigma} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha \rho}{\rho_0^2} \right)^n \frac{\cos n\theta}{n} = \\
 & = \frac{k_1-k_2}{k_1+k_2} \frac{\mu q}{4\pi k_1 \sigma} \ln \left(1 - \frac{2\alpha \rho}{\rho_0^2} \cos \theta + \frac{\rho^2 \alpha^2}{\rho_0^4} \right) \quad (\text{III.3.30})
 \end{aligned}$$

(см. [40, формула I.448.2]).

Таким образом, отвечающее большим значениям времени изображение распределения давления имеет вид:

$$\begin{aligned}
 \bar{p}(r, \theta, \sigma) = & \frac{\mu q}{2\pi k_1 \sigma} \left[\ln \frac{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta}}{R} + \right. \\
 & + \frac{k_1-k_2}{k_1+k_2} \ln \frac{\sqrt{r^2 a^2 + R^4 - 2arR^2 \cos \theta}}{R^2} \left. \right] + \\
 & + \frac{\mu q}{2k_2 \pi \sigma} \left[\ln \frac{R}{2} \sqrt{\frac{\sigma}{\kappa_2}} + C + \ln \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right]. \quad (\text{III.3.31})
 \end{aligned}$$

В формуле (III.3.31) выражение в квадратных скобках с точностью до постоянной совпадает с выражением для распределения давления в соответствующей стационарной задаче; член, содержащий $\ln \frac{R}{2} \sqrt{\frac{\sigma}{\kappa_2}}$, при обратном преобразовании дает логарифмический рост давления во времени, так что формула (III.3.31) обнаруживает в целом следующую картину: давление во внутренней кольцевой зоне распределено стационарно, т. е. разность давлений между любыми двумя точками области имеет то же значение, что и при стационарном движении, а средний уровень давления медленно (логарифмически) изменяется с ростом времени. При этом давление лишь постоянной величиной отличается от давления вблизи одиночной скважины, пущенной с постоянным отбором q в однородном пласте проницаемостью k_2 и пьезопроводностью κ_2 .

3. Рассмотрим теперь приток жидкости к вертикальной трещине длиной $2L$, которую будем считать поверхностью постоянного давления. Положим, что полный отбор жидкости через трещину сохраняет известное постоянное значение. Примем, как и раньше, начальное давление в пласте за нуль. При этом, учитывая симметрию относительно осей x и y , имеем

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) \quad (0 < x < \infty; \quad 0 < y < \infty); \quad (\text{III.3.32})$$

$$\frac{\partial p(0, y)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial p(x, 0)}{\partial x} = 0 \quad (0 < x < L);$$

$$\frac{\partial p(x, 0)}{\partial y} = 0 \quad (L < x < \infty); \quad \int_0^L \frac{\partial p(x, 0)}{\partial y} dx = \frac{\mu q}{2k}.$$

Обозначим

$$\frac{\partial p(x, 0)}{\partial y} = \rho(x); \quad \int_{-L}^L \rho(x) dx = \frac{\mu q}{k}. \quad (\text{III.3.33})$$

Считая величину $\rho(x)$ заданной, можно, применяя к задаче (III.3.32) преобразование Лапласа по t и косинус-преобразование Фурье по x , найти для преобразованного по Лапласу давления $P(x, y, \sigma)$ выражение

$$P(x, y, \sigma) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos \omega x \frac{e^{-\sqrt{\omega^2 + \frac{\sigma}{\kappa}} y}}{\sqrt{\omega^2 + \frac{\sigma}{\kappa}}} \int_0^L \bar{\rho}(\xi) \cos \omega \xi d\xi d\omega. \quad (\text{III.3.34})$$

Это выражение есть общее решение задачи (III.3.32), удовлетворяющее всем дополнительным условиям, кроме условия постоянства давления на отрезке $0 < x < L, y = 0$. Это условие дает

$$P(x, 0, \sigma) = P_0(\sigma) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \omega x d\omega}{\sqrt{\omega^2 + \frac{\sigma}{\kappa}}} \int_0^L \bar{\rho}(\xi) \cos \omega \xi d\xi. \quad (\text{III.3.35})$$

Меняя в этом выражении порядок интегрирования и вычисляя внутренний интеграл

$$\int_0^\infty \frac{\cos \omega x \cos \omega \xi d\omega}{\sqrt{\omega^2 + \frac{\sigma}{\kappa}}} = \frac{1}{2} \left\{ K_0 \left[(x + \xi) \sqrt{\frac{\sigma}{\kappa}} \right] + K_0 \left[(x - \xi) \sqrt{\frac{\sigma}{\kappa}} \right] \right\},$$

приведем это уравнение к виду:

$$P_0(\sigma) = -\frac{1}{\pi} \int_{-L}^L \bar{\rho}(\xi, \sigma) K_0 \left[(x - \xi) \sqrt{\frac{\sigma}{\kappa}} \right] d\xi, \quad |x| < L$$

(здесь дополнительно учтена четность величины ρ по ξ , непосредственно следующая из симметрии задачи). Удобно ввести здесь безразмерные переменные $u = x/L, \eta = \xi/L, \lambda = L \sqrt{\frac{\sigma}{\kappa}}$. При этом имеем

$$P_0(\lambda) = -\frac{L}{\pi} \int_{-1}^1 \bar{\rho}(\eta, \lambda) K_0[(u - \eta)\lambda] d\eta, \quad |u| < 1. \quad (\text{III.3.36})$$

Формула (III.3.36) представляет собой интегральное уравнение для определения неизвестной функции $\bar{\rho}(\eta, \lambda)$. Мы ограничимся отысканием его приближенного решения для малых λ .

Используя асимптотическое выражение для K_0 при малых значениях аргумента, имеем

$$P_0(\lambda) = \frac{L}{\pi} \int_{-1}^1 \bar{\rho}(\eta, \lambda) \left[\ln \frac{|u - \eta| \lambda}{2} + C + \dots \right] d\eta \quad (\text{III.3.37})$$

или, учитывая (III.3.33),

$$\frac{L}{\pi} \int_{-1}^1 \bar{\rho}(\eta, \lambda) \ln |u - \eta| d\eta = P_0 - \frac{\mu q}{\pi k \sigma} \left(\ln \frac{\lambda}{2} + C \right). \quad (\text{III.3.38})$$

Заметим, что если бы вместо задачи (III.3.32) мы рассматривали такую же задачу для стационарного движения, то, действуя тем же способом, получили бы интегральное уравнение вида:

$$\frac{L}{\pi} \int_{-1}^1 \rho_0(\eta) \ln |u - \eta| d\eta = \text{const}; \quad \int_{-1}^1 \rho_0(\eta) d\eta = \frac{\mu q}{kL}. \quad (\text{III.3.39})$$

При этом постоянная в уравнении (III.3.39) не определена, поскольку в соответствующей стационарной задаче давление определяется лишь с точностью до постоянной. Стационарную задачу можно легко решить, рассматривая ее как краевую задачу теории функций, и применяя формулу Келдыша — Седова ([63, гл. III, § 3]).

Искомое решение имеет вид:

$$\rho_0(\eta) = \frac{\mu q}{\pi k L \sqrt{1 - \eta^2}}. \quad (\text{III.3.40})$$

Уравнения (III.3.38) и (III.3.39) эквивалентны, так что функция $\frac{1}{\sigma} \rho_0(\eta)$ дает в рассматриваемом приближении также и решение исходной задачи. Иначе говоря, при $\lambda \ll 1$, что отвечает большим временам ($t \gg L^2/\kappa$), распределение скоростей фильтрации по поверхности трещины можно считать стационарным. Подставляя в (III.3.38) $\bar{\rho} = \frac{1}{\sigma} \rho_0(\eta)$, получим

$$P_0(\sigma) = \frac{\mu}{\pi \sigma k} \left(\ln \frac{\lambda}{2} + C \right) + \frac{\mu q}{k \sigma \pi^2} \int_{-1}^1 \frac{\ln |u - \eta| d\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}} = \frac{q\mu}{\pi k \sigma} \left(\ln \frac{\lambda}{4} + C \right). \quad (\text{III.3.41})$$

Формула (III.3.41) определяет асимптотику давления в трещине при больших временах. Сопоставляя ее с формулой (III.2.27), видим, что давление изменяется так же, как в скважине радиусом $r_* = \frac{1}{2}L$, т. е.

$$P_0(t) = \frac{q\mu}{2\pi k} \left[\ln \frac{L^2}{16\kappa t} + C + o(1) \right]. \quad (\text{III.3.42})$$

Это обстоятельство позволяет определить размер трещины по наблюдениям нестационарного притока к ней (см. § 4).

4. Приведенные примеры позволяют сделать некоторые выводы общего характера относительно нестационарных течений со сложной геометрией. В большинстве случаев рассматриваемые задачи сводятся к изучению поведения системы при локализованном воздействии достаточно простого вида (например, при скачкообразном изменении дебита в одной из скважин).

Из получаемых таким образом решений при желании можно, пользуясь принципом суперпозиции, найти результат более сложных воздействий. Такая сосредоточенность изменений во времени и в пространстве приводит к тому, что асимптотические свойства соответствующих решений оказываются весьма простыми. В большинстве задач удастся выделить три основные области. Первая из них — удаленная от места возмущения область, которая к данному моменту еще сохраняет свое исходное состояние и условия в которой еще не успели повлиять на поведение решения. Вторая область — непосредственно прилегающая к месту возмущения; движение здесь в известном смысле близко к стационарному (например, если возмущение заключалось в скачкообразном изменении расхода через трещину (п. 3), то поле скоростей вблизи трещины близко к стационарному полю скоростей). Наконец, в третьей, сравнительно узкой и имеющей простую геометрическую форму переходной области и происходит собственно нестационарное движение. Такая простая структура решения (присущая к тому же не только задачам упругого режима, но и нелинейным нестационарным задачам) позволяет в ряде случаев легко устанавливать основной ход решения, используя известные стационарные решения для «внутренней» части области движения и простые (например, автомодельные) нестационарные решения для внешней области.

§ 4. ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

В вопросах геологии, особенно геологии нефти, широко используются решения обратных (стационарных и нестационарных) задач теории фильтрации. Общий принцип исследования пластов при нестационарном течении заключается в том, что путем изменения работы скважин в пласте искусственно создается нестационарный режим фильтрации и измеряется давление в зависимости от времени в одной или нескольких скважинах. На основе данных об изменении дебитов скважин и об изменении давления в определенных точках пласта могут быть получены сведения о параметрах пласта — проницаемости, пьезопроводности, о расположении границ пласта и др.

1. Самым простым и наиболее употребительным способом создания нестационарного течения является остановка одной из скважин. Кривая зависимости давления от времени, при помощи которой проводится исследование пласта, может быть снята либо в самой

остановленной скважине, либо в другой — неработавшей скважине (пьезометрической). При этом предполагается, что во время исследования дебиты остальных скважин меняются незначительно. Типичный вид кривой изменения давления в остановленной скважине (кривой восстановления давления) изображен на рис. III.3 в координатах $p, \ln t$ (кривая 1).

Решение задачи об изменении на постоянную величину давления в бесконечном пласте после изменения дебита скважины было приведено в § 2. С точки зрения анализа кривых восстановления давления прежде всего представляет интерес асимптотический участок кривой $p(\ln t)$ при больших t , описываемый формулой (III.2.28). Изменение давления в скважине, остановленной после того как она

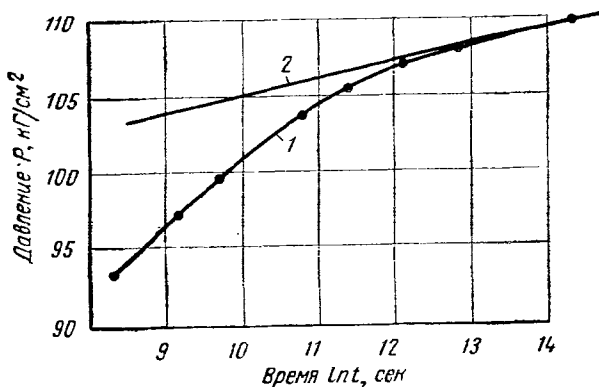


Рис. III.3

работала на стационарном режиме с дебитом q_0 , может быть записано в виде:

$$p(r, t) - p(r, 0) = \frac{q_0 \mu}{4\pi k h} \left(\ln t + \ln \frac{4\kappa}{\gamma r^2} \right). \quad (\text{III.4.1})$$

Формула (III.4.1) определяет прямую в координатах $p, \ln t$. При построении кривой восстановления давления в остановленной скважине такой прямолинейный участок часто устанавливается через непродолжительное время (кривая 2). Пусть уравнение асимптоты есть $p = A \ln t + B$. Тогда сравнение с формулой (III.4.1) показывает, что $A = \frac{q_0 \mu}{4\pi k h}$, $B = A \ln \frac{4\kappa}{\gamma r^2}$. Поскольку значение q_0 известно, то, измерив по графику параметры A и B , можно найти гидропроводность пласта $\frac{k h}{\mu}$ и отношение $\frac{\kappa}{r^2}$.

Следует иметь в виду, что радиус скважины, входящий в формулы для притока к скважине, обычно не равен истинному радиусу вследствие того, что, во-первых, скважина вскрывает пласт не на всю мощность, и, во-вторых, не вся поверхность скважины открыта для

движения жидкости (несовершенство скважины по степени и характеру вскрытия). Поэтому, зная величину $\frac{\kappa}{\rho^2}$, нельзя по отдельности определить κ и ρ^2 . Для определения пьезопроводности пласта удобнее использовать метод гидропрослушивания, т. е. исследовать изменение давления в другой скважине, не работавшей к моменту пуска «возмущающей» скважины. В этом случае характерным размером является не радиус скважины, а расстояние между скважинами, которое известно достаточно точно.

Воспользуемся для анализа кривой изменения давления формулой, описывающей распределение давления в бесконечном пласте при работе скважины-источника, пущенного при $t = 0$ с дебитом q_0 :

$$p(r, t) - p(r, 0) = - \frac{q_0 \mu}{4\pi k h} \operatorname{Ei} \left(- \frac{r^2}{4\kappa t} \right). \quad (\text{III.4.2})$$

После несложных преобразований формулу (III.4.2) можно записать в виде:

$$p(r, t) - p(r, 0) = \Delta p = \frac{q_0 \mu}{4\pi k h} \int_0^t e^{-\frac{r^2}{4\kappa \tau}} \frac{d\tau}{\tau}. \quad (\text{III.4.3})$$

Обычный способ обработки кривых изменения давления в реагирующей скважине заключается в том, что на кривой фиксируется время появления каких-либо характерных точек — точки перегиба, точки касания и др. Удобно фиксируется, например, точка касания с кривой $p(t)$ прямой, проведенной из начала координат. Пусть в этой точке $t = t_1$, $\Delta p = (\Delta p)_1$:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{(\Delta p)_1}{t_1}.$$

Подставляя сюда значения $\frac{\partial p}{\partial t}$ и Δp из формул (III.4.2) и (III.4.3), можно легко найти, что t_1 определяется из уравнения

$$-\operatorname{Ei} \left(- \frac{r^2}{4\kappa t_1} \right) = \exp \left(- \frac{r^2}{4\kappa t_1} \right).$$

Корень этого уравнения равен $\frac{r^2}{4\kappa t_1} = 0,44$, откуда $\kappa = 0,57 \frac{r^2}{t_1}$.

2. Применимость приведенных выше простейших приемов использования обратных задач теории фильтрации для исследования пластов ограничена условиями, при которых скважина может рассматриваться как источник постоянной интенсивности в бесконечном однородном пласте. Когда возмущение, вызванное закрытием скважины, доходит до границ пласта, т. е. через время порядка R^2/κ , кривая восстановления давления в скважине начнет искажаться, а через достаточно большое время выходит на горизонтальную асимптоту, соответствующую стационарному распределению давления.

Таким образом, протяженность прямолинейного участка на кривой $p(\ln t)$ ограничена. Вместе с тем фактически в силу ряда технических трудностей скважина не может быть остановлена мгновенно. Скважина обычно закрывается не на забое, т. е. на границе пласта, а на поверхности. Из-за упругости жидкостей и газов, заполняющих скважину, приток из пласта продолжается еще некоторое время после закрытия. Время до выхода на асимптоту, очевидно, должно превышать время дополнительного притока. Поэтому возможны условия, особенно в скважинах, расположенных близко от границ пласта, когда прямолинейного участка на кривой $p(\ln t)$ не существует.

Кроме того, дополнительный приток в скважину значительно увеличивает продолжительность исследования.

Способ обработки кривых восстановления давления, свободный от указанных недостатков, был предложен в работе [15]. В этом методе непосредственно используются преобразования Лапласа кривых восстановления давления, поэтому он пригоден при произвольном изменении дебита скважин.

Изложенные выше методы обработки кривых восстановления давления могут быть получены как частный случай общего метода. Использование преобразования Лапласа позволяет также во многих случаях определять по кривым восстановления давления характер неоднородности пласта (радиус зоны пониженной проницаемости вблизи скважин, расстояние до непроницаемых границ и т. д.).

Предположим, что в результате измерений в скважине известны зависимости $p(r, t)$ и $\frac{2\pi kh}{\mu} \rho \frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{r=\rho} = q(t)$.

Рассмотрим пласт, неоднородный и произвольной конфигурации, в котором при $t = 0$ начинает работать скважина на нестационарном режиме. Изменение давления $p(r, \theta, z, t)$, отсчитываемое от начального стационарного уровня, удовлетворяет уравнению пьезопроводности

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \kappa \nabla^2 p = 0, \quad (\text{III.4.4})$$

и начальному условию $p = 0$. Пусть скважина ($r = \rho$) удовлетворяет условию $p|_{r=\rho} = p_1(t)$. Кроме того, на внешних границах пласта должны выполняться условия вида $p = 0$ на контурах питания и $\partial p / \partial n = 0$ на непроницаемых участках границы. Переходя к преобразованию давления по Лапласу $P(r, z, \theta, \sigma)$, получим, что P удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 P = \frac{\sigma}{\kappa} P, \quad (\text{III.4.5})$$

условиям $P|_{r=\rho} = P_1(\sigma)$ и условиям вида $P = 0$ или $\partial P / \partial n = 0$ на различных участках внешней границы пласта. Введем теперь функцию $U = P/P_1(\sigma)$. Эта функция удовлетворяет уравнению (III.4.5) и однородным условиям 1-го и 2-го рода на внешних гра-

ницах. На скважине $U = 1$. По этим условиям может быть найдена функция $U(r, z, \Theta, \sigma)$, не зависящая от режима работы скважины.

Пусть дебит скважины будет $q(t)$. Имеем

$$Q(\sigma) = \int_0^{\infty} q(t) e^{-\sigma t} dt = \frac{2\pi kh}{\mu} \rho \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} \int_l \frac{\partial p}{\partial r} dt dl = \frac{2\pi kh}{\mu} P_1(\sigma) \int_l \frac{\partial U}{\partial r} dl, \quad (\text{III.4.6})$$

где интегрирование производится по длине вскрывшей пласт части скважины.

Из формулы (III.4.6) следует, что отношение

$$\psi(\sigma) = \frac{P_1(\sigma)}{Q(\sigma)} = \left[\frac{2\pi kh}{\mu} \int_0^l \frac{\partial U}{\partial r} dl \right]^{-1} \quad (\text{III.4.7})$$

зависит только от вида функции U и, следовательно, не зависит от режима работы скважины. Вид функции $\psi(\sigma)$ полностью определяется параметрами пласта. Когда функции $p_1(t)$ и $q(t)$ известны, функции $P_1(\sigma)$ и $Q(\sigma)$ могут быть найдены без затруднений каким-либо методом численного интегрирования. По виду функции $\psi(\sigma)$ в ряде случаев удастся определить некоторые параметры пласта.

Для случая мгновенной остановки скважины $Q(\sigma) = \frac{q_0}{\sigma}$; следовательно, $-P_1(\sigma) = P^0(\sigma) = \frac{q_0 \psi(\sigma)}{\sigma}$. Таким образом, функция $\psi(\sigma)$ равна $\sigma P^0(\sigma)$, где $P^0(\sigma)$ — преобразование Лапласа изменения давления $p^0(t)$ при мгновенной остановке скважины.

Из формулы (III.4.7) следует (см. также § 1), что функция $p(t)$ в общем случае может быть выражена через $P^0(t)$ при помощи интеграла Дюамеля, если $q(t)$ известно:

$$p(t) = \int_0^t \frac{dq}{dt} P^0(t - \tau) d\tau. \quad (\text{III.4.8})$$

В § 2 и 3 настоящей главы были получены решения ряда задач о распределении давления вблизи скважины при скачкообразном изменении дебита. Приведенные там функции $P(x, y, \sigma)$ можно непосредственно использовать для определения функции $\psi(\sigma) = \frac{\sigma}{q} P$, не находя отдельно $U(x, y, \sigma)$. Функция U для некоторых из этих задач была получена в работах Г. И. Баренблатта и В. А. Максимова [22] и В. А. Максимова [75, 76, 3].

Рассмотрим простейший пример — скважину, работающую в однородном бесконечном пласте. Функция U имеет вид (см. § 2):

$$U = \frac{K_0 \left(r \sqrt{\frac{\sigma}{\kappa}} \right)}{K_0 \left(\rho \sqrt{\frac{\sigma}{\kappa}} \right)}, \quad (\text{III.4.9})$$

откуда

$$\psi(\sigma) = \frac{1}{2\pi\rho \frac{\partial U}{\partial r} \frac{kh}{\mu}} = \frac{\mu}{2\pi kh} \frac{K_0\left(\rho \sqrt{\frac{\sigma}{\kappa}}\right)}{\rho \sqrt{\frac{\sigma}{\kappa}} K_1\left(\rho \sqrt{\frac{\sigma}{\kappa}}\right)}. \quad (\text{III.4.10})$$

При практическом построении преобразования Лапласа от $p(t)$ и $q(t)$ удобно вместо σ использовать параметр $\tau = \frac{1}{\sigma}$, т. е. писать

$$P(\tau) = \int_0^{\infty} p(t) e^{-\frac{t}{\tau}} dt. \quad \text{Интегралы вычисляются для нескольких}$$

значений параметра τ . Фактически из-за наличия множителя $e^{-\frac{t}{\tau}}$ используется только участок кривой $p(t)$ или $q(t)$, для которого t не превосходит 6σ . Очень малые значения τ (меньше 1—2 мин) брать нельзя, так как на начальном участке кривая $p(t)$ определяется очень неточно. Поэтому значения $\rho \sqrt{\frac{\sigma}{\kappa}} = \frac{\rho}{\sqrt{\kappa\tau}}$ во всех практически интересных случаях достаточно малы для того, чтобы можно было использовать представления функций $K_0(z)$ и $K_1(z)$ для малых значений аргумента (III.3.27). Отсюда

$$\Psi(\tau) = \psi(\sigma) = -\frac{\mu}{2\pi kh} \ln \frac{\gamma\rho}{2\sqrt{\kappa\tau}} = \frac{\mu}{4\pi kh} \ln \tau + \frac{\mu}{4\pi kh} \ln \frac{4\kappa}{\gamma^2\rho^2}. \quad (\text{III.4.11})$$

Параметры пласта на основе формулы (III.4.11) определяются по графику $\frac{P_1}{Q}$ от $\ln \tau$ точно так же, как параметры по графику $p, \ln t$ при мгновенной остановке скважины. Тот факт, что зависимость $\psi(\ln \tau)$ прямолинейна, позволяет ограничиться вычислением функции при очень небольшом числе значений τ .

В § 3 было приведено решение задачи о притоке к скважине в пласте с неоднородностью круговой формы. Из формулы (III.3.25) следует, что при небольших временах (больших σ) функция $P(x, y, \sigma)$, а следовательно, и $\psi(\sigma)$ имеет тот же вид, что и для однородного пласта с параметрами внутренней зоны. При малых σ (больших τ) для определения $\psi(\sigma)$ можно воспользоваться формулой (III.3.31), которая дает в точках, где $r = a + \rho$ ($\rho \ll R, \theta \approx 0$):

$$\begin{aligned} \psi(\sigma) = \frac{P\sigma}{q} = \frac{\mu}{2\pi k_1 h} \left(\ln \frac{r}{R} + \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \ln \frac{R - a}{R} \right) + \\ + \frac{\mu}{2\pi k_2 h} \left[\ln \frac{R}{2} \sqrt{\frac{\sigma}{\kappa_2}} + C + \ln \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{III.4.12})$$

Формулу (III.4.12) можно записать иначе:

$$\Psi(\tau) = \frac{\mu}{4\pi k_2 h} \ln \tau + \frac{\mu}{4\pi k_2 h} \ln \frac{4}{\gamma^2} \frac{\kappa_2}{\rho^2}, \quad (\text{III.4.13})$$

где

$$\rho^* = R \left(\frac{\rho}{R} \right)^{\frac{k_2}{k_1}} \left(\frac{R-a}{R} \right)^{\frac{k_2}{k_1} \frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}}.$$

В простейшем случае, когда скважина расположена в центре зоны радиусом R ,

$$\rho^* = R \left(\frac{\rho}{R} \right)^{\frac{k_2}{k_1}} = \rho \left(\frac{\rho}{R} \right)^{\frac{k_2}{k_1} - 1}$$

(ρ^* — приведенный радиус скважины). Сравнивая формулы (III.4.11) и (III.4.13), видим, что формула (III.4.13) представляет преобразованную кривую восстановления давления в однородном пласте с параметрами внешней зоны, но в скважине, радиус которой равен ρ^* . Нетрудно убедиться, что ρ^* — эквивалентный радиус скважины для стационарного притока в круговом пласте с теми же значениями $\frac{kh}{\mu}$. Эквивалентный радиус определяется как радиус такой совершенной скважины, стационарный приток к которой в пласте с параметрами внешней зоны равен притоку к действительной скважине в неоднородном пласте при том же перепаде давления между скважиной и круговым контуром.

Рассмотренный случай пласта, проницаемость которого вблизи скважины (в призабойной зоне) отличается от проницаемости во внешней области, представляет большой практический интерес. Процесс бурения и оборудования нефтяной или газовой скважины и ее последующая работа изменяют проницаемость в призабойной зоне, чаще всего уменьшают ее. Для восстановления и увеличения проницаемости призабойной зоны производятся различные обработки ее: промывка кислотой, образование трещин путем закачки жидкости под высоким давлением (гидравлический разрыв пласта) или взрывом (торпедирование) и др. Исследование скважин методом восстановления давления позволяет выяснить необходимость проведения таких выработок, т. е. определить снижение проницаемости в призабойной зоне по сравнению с проницаемостью остальной части пласта, а впоследствии — оценить эффективность проведенных работ.

Существование вертикальных и горизонтальных трещин вблизи скважины приводит к тому, что течение не является радиальным. Однако, как отмечалось в § 3, спустя некоторое время после начала возмущения движение жидкости вблизи скважины близко к стационарному. Нестационарность притока сказывается только на больших расстояниях, где поток можно считать радиальным. Поэтому кривые восстановления давления при больших значениях τ имеют асимптотический прямолинейный участок типа, описываемого формулой (III.4.13). Входящий в эту формулу приведенный радиус ρ^* определяется из решения задачи о стационарном притоке к скважине в пласте с заданным распределением трещин. Например, для

вертикальной трещины длиной $2L \rho^* = \frac{L}{2}$, как это следует из решения, приведенного в § 3, п. 3. Ряд других задач о притоке к скважине с трещинами в призабойной зоне решен В. А. Максимовым [75].

Если значение κ_2 известно, например, по кривым гидропрослушивания, то по кривым восстановления давления можно определить ρ^* — наиболее важный параметр для расчета дебита.

Анализ кривых восстановления давления позволяет также обнаружить существование неоднородности пласта на больших расстояниях от скважины. Важнейшей задачей такого рода является определение расстояния до прямолинейной границы, разделяющей области разной проницаемости.

Решение соответствующих задач о притоке к скважине приводится в § 3. При малых τ , т. е. больших σ , функция $\Psi(\tau)$ имеет вид, соответствующий однородному пласту. Поскольку всегда $a \gg \rho$, то на кривой $\Psi(\ln \tau)$ имеется начальный прямолинейный участок, соответствующий формуле (III.4.11) для однородного пласта. Для малых σ можно воспользоваться формулами (III.3.8), (III.3.12) — (III.3.15), из которых следует

$$P(a + \rho, \sigma) = -\frac{\mu q}{2\pi k_1 \sigma} \left[K_0 \left(\sqrt{\frac{\sigma}{\kappa_1}} \rho \right) + \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} K_0 \left(2a \sqrt{\frac{\sigma}{\kappa_1}} \right) + \Delta_0 \right]. \quad (\text{III.4.15})$$

Пользуясь асимптотическими выражениями для K_0 , получим

$$\psi(\sigma) = \frac{P\sigma}{q} = -\frac{\mu}{4\pi k_1} \left[\frac{2k_1}{k_1 + k_2} \ln \sigma + \ln \frac{\rho^2}{4\kappa_1} + \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \ln \frac{a^2}{2\kappa_1} + \Delta_0 \right] \quad (\text{III.4.16})$$

или

$$\Psi(\tau) = \frac{\mu}{4\pi k_1} \left[\frac{2k_1}{k_1 + k_2} \ln \tau + \ln \frac{4}{\gamma^2} \frac{\kappa_1}{\rho^{*2}} \right], \quad (\text{III.4.17})$$

где приведенный радиус ρ^* равен

$$\rho^* = \sqrt{2\rho a} \left(\frac{a}{2\kappa_1} \right)^{\frac{k_2}{k_1 + k_2}} e^{\Delta_0}.$$

Из формулы (III.4.17) следует, что при больших τ кривая $\Psi(\ln \tau)$ имеет асимптотический прямолинейный участок, наклон которого к оси абсцисс в $2k_1/(k_1 + k_2)$ раза больше, чем наклон асимптоты для однородного пласта. Расстояние до границы раздела зон разной проницаемости может быть определено по второму слагаемому формулы (III.4.17), если известно отношение $\frac{\kappa_1}{\kappa_2}$. Если неизвестна граница непроницаема, то можно положить $k_2 = 0$. При этом наклон асимптоты в два раза больше, чем в однородном пласте, а $\rho^* = \sqrt{2\rho a}$.

Таким образом, сравнивая два прямолинейных участка преобразованной кривой восстановления давления, можно найти величины $\frac{\kappa}{\rho^2}$ и $\frac{a}{\rho}$. Если известны значения κ или ρ по отдельности, то может быть найдено искомое значение a .

Рассмотренные до сих пор методы исследования относились главным образом к случаю монотонно изменяющегося дебита скважины. Иногда представляет интерес исследование скважин при периодическом изменении дебита. Такой метод был предложен С. Н. Бузиновым и И. Д. Умрихиным [35]. При этом в пласте возникают волны давления, аналогичные тепловым волнам.

Предположим, что дебит скважины в однородном бесконечном пласте, начиная с $t = 0$, изменяется по закону

$$q = q_0 \sin \omega t.$$

Таким образом, требуется найти решение уравнения (III.2.4), удовлетворяющее нулевым начальным условиям, а также условию

$$\frac{2\pi k h \rho}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=\rho} = q_0 \sin \omega t. \quad (\text{III.4.18})$$

Используя преобразование Лапласа $P(r, \sigma)$, получим, что P должно удовлетворять уравнению (III.2.3) при граничном условии

$$\frac{2\pi k h}{\mu} \rho \frac{dP}{dr} \Big|_{r=\rho} = \frac{q_0 \omega}{\sigma^2 + \omega^2}. \quad (\text{III.4.19})$$

Тогда, используя формулы, полученные в § 2, имеем

$$P(r, \sigma) = - \frac{q_0 \mu K_0 \left(r \sqrt{\frac{\sigma}{\kappa}} \right)}{2\pi k h \rho \sqrt{\frac{\sigma}{\kappa}} K_1 \left(\rho \sqrt{\frac{\sigma}{\kappa}} \right)} \frac{\omega}{\omega^2 + \sigma^2}. \quad (\text{III.4.20})$$

Для больших времен, когда $\rho \sqrt{\frac{\sigma}{\kappa}} \ll 1$, выражение для $P(r, \sigma)$ упрощается:

$$P(r, \sigma) = - \frac{q_0 \mu \omega}{2\pi k h} \frac{K_0 \left(r \sqrt{\frac{\sigma}{\kappa}} \right)}{\omega^2 + \sigma^2} \equiv - \frac{q_0 \mu \omega}{2\pi k h} \Phi(\sigma). \quad (\text{III.4.21})$$

Для определения оригинала по изображению (III.4.21) воспользуемся теоремой о свертке, которая дает

$$p(t) = \frac{q_0 \mu \omega}{2\pi k h} \Phi(t) = \frac{q_0 \mu \omega}{2\pi k h} \int_0^t \frac{1}{2\tau} \exp\left(-\frac{r^2}{4\kappa\tau}\right) \sin \omega(t - \tau) d\tau. \quad (\text{III.4.22})$$

Нас, однако, интересует изменение давления в скважине при $r = \rho$. Во всех практически интересных случаях период колебания

$\frac{2\pi}{\omega}$ значительно превышает характерное время. Тогда функцию $\Phi(\sigma)$ можно приближенно представить в следующем виде:

$$\Phi(\sigma) = -\frac{1}{2} \frac{\sigma}{\omega^2 + \sigma^2} \frac{1}{\sigma} \ln \gamma \sigma - \frac{1}{2} \frac{1}{\omega^2 + \sigma^2} \ln \frac{\gamma \rho^2}{4\kappa}. \quad (\text{III.4.23})$$

Оригинал второго слагаемого есть $\frac{1}{2\omega} \ln \frac{\gamma \rho^2}{4\kappa} \sin \omega t$. Для вычисления оригинала первого слагаемого снова воспользуемся теоремой о свертке и формулой $L[\ln t] = -\frac{1}{\sigma} \ln \gamma \sigma$. Тогда

$$\varphi(t) = \frac{1}{2} \int_0^t \ln \tau \cos \omega(t - \tau) d\tau - \frac{1}{2\omega} \ln \frac{\gamma \rho^2}{4\kappa} \sin \omega t, \quad (\text{III.4.24})$$

откуда можно получить

$$p(\rho, t) = \frac{q_0 \mu}{4\pi k h} \left[\sin \omega t \operatorname{Ci}(\omega t) - \cos \omega t \operatorname{Si}(\omega t) - \sin \omega t \ln \frac{\gamma^2}{4} \frac{\rho^2 \omega}{\kappa} \right], \quad (\text{III.4.25})$$

где $\operatorname{Ci}(\omega t)$ и $\operatorname{Si}(\omega t)$ — интегральные косинус и синус (см. [40]).

Функции $\operatorname{Ci}(\omega t)$ и $\operatorname{Si}(\omega t)$ при больших значениях ωt (превышающих 1) могут быть выражены асимптотическими формулами:

$$\operatorname{Ci}(\omega t) \approx \frac{\sin \omega t}{\omega t}; \quad \operatorname{Si}(\omega t) \approx \frac{\pi}{2} - \frac{\cos \omega t}{\omega t}.$$

Тогда формула (III.4.25) примет вид:

$$p(\rho, t) = \frac{q_0 \mu}{4\pi k h} \left(-\frac{\pi}{2} \cos \omega t - \ln \frac{\gamma^2}{4} \frac{\rho^2 \omega}{\kappa} \sin \omega t + \frac{1}{\omega t} \right). \quad (\text{III.4.26})$$

Из (III.4.26) видно, что с течением времени изменение давления в скважине становится синусоидальным с периодом $2\pi/\omega$. Последним членом в скобках, выражающим влияние начальных условий, можно пренебречь уже через 2—3 периода. По изменению давления в скважине можно в соответствии с формулой (III.4.26) по амплитуде и сдвигу фаз колебания давления (по сравнению с фазой колебания дебита) найти значения гидропроводности и параметра ρ^2/κ .

Глава IV

НЕЛИНЕЙНЫЕ ИНВАРИАНТНЫЕ ЗАДАЧИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

§ 1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ИНВАРИАНТНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ. АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНО БЕЗНАПОРНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ПРИ НУЛЕВОМ НАЧАЛЬНОМ УРОВНЕ ЖИДКОСТИ

1. Общая характеристика инвариантных задач теории нестационарной фильтрации. В главе II было показано, что основные задачи гидродинамической теории нестационарной фильтрации приводят к краевым, смешанным или начальным задачам для нелинейных, как правило, дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа. Нелинейность вообще характерна для многих актуальных задач современной гидродинамики: газодинамики, теории волн, теории движений вязкой жидкости и т. д. В настоящее время не существует сколько-нибудь общих эффективных аналитических методов решения достаточно широких классов нелинейных задач математической физики; это в полной мере относится и к теории фильтрации. Поэтому в теории фильтрации (как и во многих других разделах математической физики вообще и механики сплошных сред, в частности) уже давно привлекли внимание своеобразные частные решения, которые выражаются через функции одной переменной. Вначале эти решения обратили на себя внимание только потому, что их получение сводилось к решению обыкновенных уравнений и представлялось (особенно в домашинную эру) более простым, чем решение уравнений в частных производных в общем случае. При построении различных приближенных методов решения, более общих, эти решения часто использовались как эталоны, позволяющие оценить точность метода. (Приближенные методы аналитического решения сохраняют, особенно в теории фильтрации, свое значение и сейчас, при широком внедрении машин, поскольку эти методы

дают аналитические формулы, позволяющие наглядно проследить влияние различных параметров, а высокая точность в теории фильтрации не представляет особого интереса. Эти методы будут рассмотрены в следующей главе.) В ряде случаев задачи, описываемые такими решениями, представляют и самостоятельный интерес.

Однако главная ценность таких решений была осознана позднее. Оказалось, что они представляют собой асимптотические представления решений весьма широких классов задач именно там, где детальная структура граничных и начальных условий перестает быть существенной, а эти области часто бывают наиболее интересными (например, спустя некоторое время после начала отбора из скважины, пока воронка депрессии не достигла области влияния соседней скважины и т. д.). Поэтому, зная такие решения, мы фактически получаем возможность судить, по крайней мере качественно, о поведении очень широкого класса фильтрационных движений.

Важным свойством рассматриваемых ниже решений является их инвариантность: для одних из этих решений — «автомодельных» — распределение давлений, напоров, плотностей и т. п. оказывается все время подобным самому себе, для других — перемещается как твердое тело с постоянной скоростью и т. д. Это свойство связано с особым характером задач, приводящих к таким решениям. Выполнение определенных преобразований зависимых и независимых переменных оставляет уравнения, граничные и начальные условия задачи неизменными. Как говорят в математике, эти задачи инвариантны относительно некоторой группы непрерывных преобразований. Такие задачи называются инвариантными, они рассматриваются ниже.

2. Автомодельные пологие безнапорные движения при нулевом начальном уровне жидкости. Ниже будут рассмотрены точные решения некоторых нелинейных задач нестационарной фильтрации, характеризующихся нулевым начальным условием. Исследование этого класса движений представляет, помимо непосредственного, также принципиальный интерес, поскольку в подобных задачах наиболее сильно проявляется существование нелинейный характер рассматриваемой проблемы и обнаруживаются некоторые свойства нелинейных движений, резко отличающие их от соответствующих линейных задач и неизбежно утрачиваемые при линеаризации.

Для определенности при исследовании задач с нулевым начальным условием будем рассматривать безнапорные пологие фильтрационные движения в первоначально сухом грунте, имея в виду, что в силу обнаруженной Л. С. Лейбензоном аналогии (см. гл. II) все результаты непосредственно переносятся на задачи изотермической фильтрации газа. Излагаемые ниже в этом параграфе решения были получены Г. И. Баренблатом [4, 5, 9].

Рассмотрим полубесконечный пласт, имеющий снизу плоскую горизонтальную непроницаемую границу — водоупор, а со стороны канала — плоскую вертикальную границу (рис. IV.1), перпендикулярную оси x и проходящую через точку $x = 0$.

Пусть начальный напор жидкости в пласте равен нулю, а напор на вертикальной границе пласта изменяется по степенному закону, начиная с исходного момента $t = t_0$:

$$h(0, t) = \sigma (t - t_0)^\alpha, \quad (\text{IV.1.1})$$

где $\sigma > 0$, а α — некоторая константа, которую будем выбирать в пределах $-\frac{1}{2} < \alpha < \infty$. В частности, константа α может равняться нулю; в этом случае напор на границе мгновенно принимает некоторое значение σ и остается постоянным.

В случае фильтрации газа сформулированная задача отвечает закачке газа в первоначально не заполненный однородный пласт постоянной мощности при изменении давления газа в начальном сечении пласта $x = 0$ по закону (IV.1.1). Линиями равных напоров будут линии $x = \text{const}$, параллельные границе пласта. Таким образом, напор $h(x, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial h}{\partial t} = a \frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2}; \quad a = \frac{C}{2m} = \frac{k\rho g}{2m\mu}, \quad (\text{IV.1.2})$$

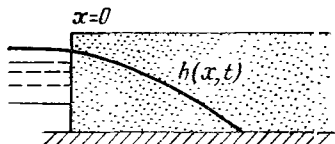


Рис. IV.1

получающемуся из общего уравнения Буссинеска (II.3.20) для данных геометрических условий задачи, а также граничному условию (IV.1.1), начальному условию и условию на бесконечности:

$$h(x, t_0) = h(\infty, t) = 0. \quad (\text{IV.1.3})$$

Напор в некоторой точке пласта h зависит от следующих аргументов: координаты x , времени, прошедшего от начала процесса $t - t_0$ [в силу однородности уравнения (IV.1.2) по времени напор будет зависеть только от разности $t - t_0$, а не от значений t и t_0 в отдельности], коэффициентов a и σ и константы α . Вводя для удобства независимую размерность напора (это возможно, так как для рассматриваемой задачи несущественно, что размерности длины и напора одинаковы)¹, получим размерности этих аргументов в следующем виде:

$$[a] = [h]^{-1} L^2 T^{-1}; \quad [t - t_0] = T; \quad [x] = L; \quad [\sigma] = [h] T^{-\alpha}, \quad (\text{IV.1.4})$$

где через $[h]$, L и T обозначены соответственно размерности напора, длины и времени; константа α безразмерна. Из аргументов, от которых зависит напор жидкости, можно составить только две независимые безразмерные комбинации:

$$\xi = x \sqrt{\frac{\alpha + 1}{a\sigma (t - t_0)^{\alpha + 1}}}; \quad \alpha. \quad (\text{IV.1.5})$$

¹ Действительно, в данном случае можно было бы вместо напора h ввести пропорциональное ему давление у подошвы пласта $h\rho g$, что не отразилось бы на остальных выкладках.

В силу π -теоремы анализа размерностей выражение для напора можно представить в виде произведения комбинации определяющих параметров, имеющей размерность напора [в качестве нее можно взять $\sigma(t - t_0)^\alpha$], на безразмерную функцию от безразмерных комбинаций (IV.1.5). Имеем таким образом

$$h = \sigma(t - t_0)^\alpha f(\xi, \lambda); \quad \lambda = \alpha/(1 + \alpha), \quad (\text{IV.1.6})$$

где f — безразмерная функция, а параметр λ введен вместо параметра α для удобства последующего изложения. Очевидно, что λ лежит в интервале $-1 < \lambda < 1$. Имеем, далее, в силу (IV.1.6)

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \alpha \sigma (t - t_0)^{\alpha-1} f(\xi, \lambda) - \sigma (t - t_0)^\alpha \frac{\alpha+1}{2} x \sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha \sigma (t - t_0)^{\alpha+1}}} \frac{df}{d\xi};$$

$$\frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} = \frac{\sigma^2 (t - t_0)^{2\alpha} (\alpha+1)}{\alpha \sigma (t - t_0)^{\alpha+1}} \frac{d^2 f^2}{d\xi^2}.$$

Подставляя эти соотношения в уравнение (IV.1.2) и упрощая, получаем для функции f обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} + \frac{1}{2} \xi \frac{df}{d\xi} - \lambda f = 0. \quad (\text{IV.1.7})$$

После подстановки выражения (IV.1.6) в граничное условие (IV.1.1) и условие (IV.1.3) получаем для функции $f(\xi, \lambda)$ краевые условия:

$$f(0, \lambda) = 1; \quad (\text{IV.1.8})$$

$$f(\infty, \lambda) = 0. \quad (\text{IV.1.9})$$

Напор и объемный поток (расход) грунтовых вод должны быть непрерывными функциями x и t . Используя закон Дарси, имеем для расхода, приходящегося на единицу ширины пласта, выражение

$$-Ch \frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{C}{2} \frac{\partial h^2}{\partial x} = -\frac{C \sigma^{3/2} (t - t_0)^{\frac{3\alpha-1}{2}}}{2\alpha} \sqrt{\alpha+1} \frac{df^2}{d\xi}. \quad (\text{IV.1.10})$$

Таким образом, из требования непрерывности расхода следует непрерывность функции $df^2/d\xi$.

При непрерывной функции $f(\xi)$ и $f \neq 0$ требование непрерывности функции $df^2/d\xi = 2f df/d\xi$ совпадает с требованием непрерывности производной $df/d\xi$. Однако при $f = 0$ из непрерывности $df^2/d\xi$ непрерывность $df/d\xi$ не вытекает. Напротив, как увидим далее, искомая функция $f(\xi, \lambda)$ имеет в точке, где f обращается в нуль, разрыв первой производной.

Условие (IV.1.9) удобнее привести к другому виду. Умножим обе части основного уравнения (IV.1.2) на x и проинтегрируем по x от нуля до бесконечности. В результате получим

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} x \frac{\partial h}{\partial t} dx &= \frac{d}{dt} \int_0^{\infty} x h(x, t) dx = a \int_0^{\infty} x \frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} dx = \\ &= a \left(x \frac{\partial h^2}{\partial x} \right)_{x=0}^{x=\infty} + a [h^2(0, t) - h^2(\infty, t)].\end{aligned}$$

Очевидно, что $\partial h^2 / \partial x$ стремится к нулю при $x \rightarrow \infty$ быстрее, чем x^{-1} , в противном случае h не стремилось бы к нулю при $x \rightarrow \infty$. Используя это обстоятельство и условие на бесконечности (IV.1.3), получаем

$$\frac{d}{dt} \int_0^{\infty} x h(x, t) dx = a h^2(0, t).$$

Интегрируя это соотношение в пределах от $t = t_0$ до t и используя граничное условие (IV.1.4) и представление решения (IV.1.6), имеем

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} x h(x, t) dx &= \frac{a \sigma^2 (t - t_0)^{2\alpha+1}}{\alpha+1} \int_0^{\infty} \xi f(\xi, \lambda) d\xi = \\ &= a \int_{t_0}^t h^2(0, t) dt = \frac{a \sigma^2 (t - t_0)^{2\alpha+1}}{2\alpha+1}\end{aligned}$$

(напомним, что считаем α удовлетворяющим неравенству $-1/2 < \alpha < \infty$), откуда получаем искомое условие в форме

$$\int_0^{\infty} \xi f(\xi, \lambda) d\xi = \frac{1+\alpha}{1+2\alpha} = \frac{1}{1+\lambda}. \quad (\text{IV.1.11})$$

В интересующей нас области изменения α и λ правая часть (IV.1.11) конечна и положительна.

3. Исследование интегральных кривых обыкновенного дифференциального уравнения. Итак, решение рассматриваемой задачи свелось к решению обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка (IV.1.7) при условиях (IV.1.8) и (IV.1.11), непрерывного и имеющего непрерывную производную от квадрата. Заметим, что уравнение (IV.1.7) инвариантно относительно группы преобразований

$$\Phi(\xi, \mu) = \mu^{-2} f(\mu \xi, \lambda), \quad (\text{IV.1.12})$$

т. е. если $f(\xi, \mu)$ удовлетворяет уравнению (IV.1.7), то и $\Phi(\xi, \mu)$ удовлетворяет этому уравнению при произвольном положительном μ .

Это свойство уравнения дает возможность понизить его порядок. Положим по общему правилу (см., например, [53, стр. 93])

$$f(\xi, \lambda) = \xi^2 \varphi(\eta, \lambda), \quad \eta = \ln \xi, \quad (\text{IV.1.13})$$

тогда уравнение (IV.1.7) сведется к уравнению второго порядка относительно функции $\varphi(\eta)$, не содержащему независимой переменной η :

$$\varphi\varphi'' + 6\varphi^2 + 7\varphi\varphi' + \varphi'^2 + \frac{1}{2}(1-\lambda)\varphi + \frac{1}{4}\varphi' = 0. \quad (\text{IV.1.14})$$

Полагая далее

$$\frac{d\varphi}{d\eta} = \psi \quad (\text{IV.1.15})$$

и принимая φ за независимую переменную, получим для функции ψ уравнение первого порядка:

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = -\frac{1}{\varphi\psi} \left[6\varphi^2 + 7\varphi\psi + \psi^2 + \frac{1-\lambda}{2}\varphi + \frac{1}{4}\psi \right]. \quad (\text{IV.1.16})$$

Исследование этого уравнения проводится обычным образом (см., например, книгу В. В. Степанова [111]). Поскольку, очевидно, напор заведомо неотрицателен, функция f и, следовательно, функция φ также неотрицательны, так что интересующая нас область плоскости $\varphi\psi$ представляет собой правую полуплоскость (см. рис. IV.2).

Вблизи оси ψ (т. е. там, где φ мало и $\psi \gg \varphi$) уравнение (IV.1.16) записывается следующим образом:

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = -\frac{1}{\varphi} \left(\psi + \frac{1}{4} \right) + O(1). \quad (\text{IV.1.17})$$

Стало быть, при малых φ и $\psi > -\frac{1}{4}$ интегральные кривые имеют большой отрицательный наклон, при $\psi < -\frac{1}{4}$ — большой положительный наклон. Интегрируя уравнение (IV.1.17), получим, что вблизи оси ψ интегральные кривые представляются формулой

$$\psi = \frac{C}{\varphi} - \frac{1}{4} + O(\varphi), \quad (\text{IV.1.18})$$

где C — константа интегрирования, различная для разных интегральных кривых. Для исследования поведения интегральных кривых в окрестности начала координат проведем через начало прямые $\psi = m\varphi$ и рассмотрим поведение интегральных кривых на этих прямых вблизи начала. Имеем на прямой $\psi = m\varphi$ вблизи начала

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = -\frac{1}{4m\varphi} [m + 2(1-\lambda)] + O(1), \quad (\text{IV.1.19})$$

так что при $m > m_0 = -2(1-\lambda) = -2/(1+\alpha)$ наклон интегральных кривых велик и отрицателен, при $m < m_0$ — велик и поло-

жителен. Как нетрудно видеть, при положительных φ и ψ , т. е. в первом квадранте, наклон интегральных кривых отрицателен. Вблизи оси φ , т. е. при малых $\psi \ll \varphi$, уравнение (IV.1.16) представляется в виде:

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = -\frac{1}{\psi} \left[6\varphi + \frac{1-\lambda}{2} \right] + O(1), \quad (\text{IV.1.20})$$

поэтому вблизи этой оси наклон интегральных кривых меняет знак, обращаясь в бесконечность. Таким образом, интегральные кривые уравнения первого порядка (IV.1.16) имеют вид, изображенный на рис. IV.2 В зависимости от того, положительно C или отрицательно, эти интегральные кривые разбиваются на два класса: I и II. Уравнение (IV.1.18) показывает, что ни одна из интегральных кривых I класса ($C > 0$) и ни одна из интегральных кривых II класса ($C < 0$) не пересекает ось ψ в конечной точке. Кривые I класса вблизи начала координат стремятся к совпадению с прямой линией $\psi = m_0\varphi = -\frac{2\varphi}{\alpha+1}$, так что вблизи начала координат плоскости $\varphi\psi$ эти кривые удовлетворяют уравнению

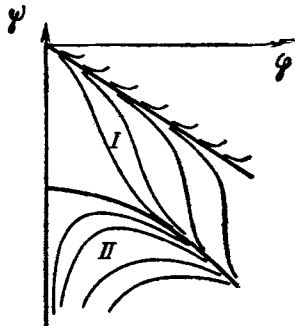


Рис. IV.2

$$\frac{d\varphi}{d\eta} = -\frac{2}{\alpha+1} \varphi + O(\varphi). \quad (\text{IV.1.21})$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$\ln \varphi = -\frac{2}{\alpha+1} \eta + \ln D + \dots = -\frac{2}{\alpha+1} \ln \xi + \ln D + \dots, \quad (\text{IV.1.22})$$

$$\varphi = D\xi^{-\frac{2}{\alpha+1}},$$

где D — константа интегрирования, а многоточия означают неучитываемые малые величины.

Из (IV.1.22) видно, что при подходе вдоль рассматриваемой интегральной кривой к началу координат, т. е. при $\varphi \rightarrow 0$, ξ стремится к бесконечности. Возвращаясь к переменным f и ξ , получаем, что интегральные кривые уравнения второго порядка (IV.1.7), соответствующие интегральным кривым I класса уравнения первого порядка, при $\xi \rightarrow \infty$ удовлетворяют соотношению

$$f = D\xi^{2\alpha} + o(\xi^{2\alpha}). \quad (\text{IV.1.23})$$

Далее, при малых φ для интегральных кривых II класса имеем

$$\varphi\psi = \varphi \frac{d\varphi}{d\eta} = C + O(\varphi) \quad (C < 0). \quad (\text{IV.1.24})$$

Интегрируя это уравнение, получим соотношение

$$\varphi^3 = 2C\eta + E + 0(\varphi^2),$$

которое показывает, что η остается конечным при $\varphi \rightarrow 0$, т. е. при $f \rightarrow 0$ для соответствующих интегральных кривых уравнения второго порядка ξ остается конечным. Имея это в виду и переходя в соотношении (IV.1.24) к переменным f , ξ , получаем, что при малых f соответствующие интегральные кривые II класса уравнения второго порядка (IV.1.7) удовлетворяют соотношению

$$\frac{df^2}{d\xi} = 2C\xi^3 + 0(f). \quad (\text{IV.1.25})$$

Интегральные кривые I и II классов уравнения первого порядка (IV.1.16) разделяются интегральной кривой, соответствующей $C = 0$, которая вблизи оси ψ представляется уравнением

$$\psi = \frac{d\varphi}{d\eta} = -\frac{1}{4} \pm 0(\varphi). \quad (\text{IV.1.26})$$

Переходя к переменным f и ξ , получаем, что разделяющая кривая при малых f удовлетворяет соотношению

$$\frac{df}{d\xi} = -\frac{1}{4}\xi - 0(f). \quad (\text{IV.1.27})$$

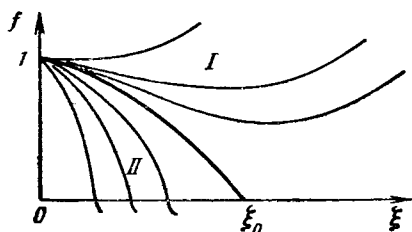


Рис. IV.3

Системы интегральных кривых уравнения второго порядка (IV.1.7), принимающих различные значения при $\xi = 0$, получаются одна из другой преобразованием подобия (IV.1.12). Таким образом, резюмируя все сказанное, получаем, что интегральные кривые уравнения (IV.1.7), удовлетворяющие условию (IV.1.8), располагаются следующим образом (рис. IV.3). Кривые I класса при $\xi \rightarrow \infty$ изменяются по закону $f = D\xi^{2\lambda}$ ($D \neq 0$ — константа, различная для различных кривых), причем ни одна из этих кривых ни в одной точке не касается и не пересекает оси абсцисс. Очевидно, что ни одна из этих кривых не является искомой, поскольку ни одна из них не удовлетворяет условию (IV.1.11) — для каждой из них интеграл $\int_0^\infty \xi f(\xi, \lambda) d\xi$ расходится. Исключением является случай $\alpha = 0$ (рассматриваемый ниже), для которого все кривые I класса имеют горизонтальные асимптоты. На рис. IV.3 изображен случай $\alpha > 0$. Остальные интегральные кривые (кривые II класса) пересекают ось абсцисс в конечных точках, причем они подходят к оси абсцисс под прямым углом, поскольку для каждой из этих кривых соотношение (IV.1.25) дает при малых f

$$\frac{df}{d\xi} = \frac{C}{f}\xi^3 + 0(1). \quad (\text{IV.1.28})$$

Здесь $C < 0$ — константа, соответствующая рассматриваемой интегральной кривой II класса, пересекающей ось абсцисс в точке с координатой ξ_c . Разделяющая кривая подходит к оси абсцисс в точке $\xi = \xi_0$ под некоторым углом v . В силу (IV.1.27) этот угол определяется соотношением

$$\operatorname{tg} v = -\frac{1}{4} \xi_0.$$

Поскольку напор жидкости по физическим соображениям не может быть отрицательным¹, ясно, что искомая функция $f(\xi, \lambda)$ должна каким-то образом комбинироваться из интегральных кривых уравнения (IV.1.7), не принадлежащих к I классу, в той их части, где эти кривые располагаются над осью абсцисс, и из самой оси абсцисс. Однако, если мы составим функцию $f(\xi, \lambda)$ таким образом, чтобы она представлялась отрезком некоторой кривой II класса вплоть до точки ξ_c пересечения этой кривой с осью абсцисс, и далее самой осью абсцисс, то полученная функция в точке $\xi = \xi_c$ будет иметь разрыв производной от квадрата. В самом деле, при приближении к точке пересечения $\xi = \xi_c$ справа, где функция $f(\xi, \lambda)$ представляется осью абсцисс, получаем, что $(df^2/d\xi)_{\xi=\xi_c+0} = 0$, так как при $df^2/d\xi$ тождественно равно нулю $\xi > \xi_c$. При приближении же к точке пересечения $\xi = \xi_c$ слева, где функция $f(\xi, \lambda)$ представляется некоторой кривой II класса, получаем в силу соотношения (IV.1.25)

$$\left(\frac{df^2}{d\xi}\right)_{\xi=\xi_c-0} = 2C\xi_c^3 \neq 0. \quad (\text{IV.1.29})$$

Разрыв величины $df^2/d\xi$ соответствует разрыву потока жидкости, что противоречит постановке задачи. Поэтому ни одна из функций $f(\xi, \lambda)$, получающихся указанной выше комбинацией интегральных кривых II класса при $C \neq 0$ и оси абсцисс, не годится.

Искомой кривой уравнения (IV.1.7), удовлетворяющей условию (IV.1.8), непрерывной и обладающей непрерывной производной от квадрата, будет кривая, состоящая из отрезка интегральной кривой, разделяющей кривые I и II классов, вплоть до пересечения ее с осью абсцисс в некоторой точке ξ_0 , и отрезка оси абсцисс $\xi \geq \xi_0$.

Сама функция непрерывна по построению; проверим непрерывность производной от квадрата в точке пересечения $\xi = \xi_0$ (в остальных точках эта непрерывность не вызывает сомнений, поскольку интегральная кривая состоит из двух участков гладких кривых). При подходе к точке $\xi = \xi_0$ справа, где интегральная кривая представляется осью абсцисс, предел $(df^2/d\xi)_{\xi=\xi_0+0}$ равен нулю. При подходе к точке $\xi = \xi_0$ слева предел равен $(df^2/d\xi)_{\xi=\xi_0-0} = 2(fdf/d\xi)_{\xi=\xi_0-0}$ и в силу (IV.1.27) равен $-1/4 (\xi f)_{\xi=\xi_0} = 0$.

¹ Математически это является следствием того, что для уравнения (IV.1.2) справедлив принцип максимума, в соответствии с которым решение не может оказаться отрицательным при положительных начальном и граничных условиях.

Таким образом, для построенной кривой производная $df^2/d\xi$ непрерывна.

Покажем теперь, что построенная функция удовлетворяет условию (IV.1.11). Умножим обе части уравнения (IV.1.7) на ξ и проинтегрируем в пределах от $\xi = 0$ до $\xi = \infty$ (или, что то же, до $\xi = \xi_0$, так как при $\xi \geq \xi_0$ $f(\xi, \lambda) \equiv 0$). Получим

$$-\lambda \int_0^{\xi_0} \xi f(\xi) d\xi + \frac{1}{2} \int_0^{\xi_0} \xi^2 \frac{df}{d\xi} d\xi + \int_0^{\xi_0} \xi \frac{d^2 f^2}{d\xi^2} d\xi = 0 \quad (\text{IV.1.30})$$

Но в силу непрерывности f и $df^2/d\xi$ имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{\xi_0} \xi^2 \frac{df}{d\xi} d\xi &= \xi^2 f \Big|_0^{\xi_0} - 2 \int_0^{\xi_0} \xi f(\xi, \lambda) d\xi = -2 \int_0^{\xi_0} \xi f(\xi, \lambda) d\xi; \\ \int_0^{\xi_0} \xi \frac{d^2 f^2}{d\xi^2} d\xi &= \xi \frac{df^2}{d\xi} \Big|_0^{\xi_0} - \int_0^{\xi_0} \frac{df^2}{d\xi} d\xi = f^2(0, \lambda) = 1, \end{aligned}$$

откуда и из (IV.1.30) получаем

$$\int_0^{\infty} \xi f(\xi, \lambda) d\xi = \int_0^{\xi_0} \xi f(\xi, \lambda) d\xi = \frac{1}{1+\lambda}, \quad (\text{IV.1.31})$$

т. е. функция $f(\xi, \lambda)$ удовлетворяет условию (IV.1.11), что и требовалось доказать.

Таким образом, функция $f(\xi, \lambda)$ отличается от нуля лишь при $\xi < \xi_0$, а при $\xi \geq \xi_0$ она тождественно равна нулю. Разумеется, величина ξ_0 зависит от параметра λ . В точке $\xi = \xi_0$ функция $f(\xi, \lambda)$ имеет разрыв первой производной¹.

Из требования непрерывности f и $df^2/d\xi$ и теоремы единственности решения дифференциального уравнения следует, что при составлении функции $f(\xi, \lambda)$ склеивание различных интегральных кривых уравнения (IV.1.7) можно производить только в точках, где $f = 0$, откуда непосредственно вытекает единственность построенной нами функции, т. е. единственность автомодельного решения².

¹ Таким образом, полученное решение $h(x, t)$ уравнения в частных производных (IV.1.2) имеет разрыв производной dh/dx и поэтому не является решением этого уравнения в классическом смысле, а представляет обобщенное решение этого уравнения по С. Л. Соболеву [107].

² Относительно доказательства единственности в автомодельных нелинейных задачах можно сделать следующее общее замечание. Приведенные выше рассуждения (и аналогичные рассуждения для других задач), доказывающие единственность решения краевой задачи для обыкновенного уравнения, могут служить только доказательством единственности автомодельных решений рассматриваемых задач. Само же доказательство автомодельности решений, исходящее из соответствующих постановок краевых задач и основанное на π -теореме, опирается на предположение о том, что решение может зависеть только от размерных параметров, входящих в уравнения и граничные условия задачи (иначе

4. Эффективное вычисление функции $f(\xi, \lambda)$. Для эффективного вычисления функции $f(\xi, \lambda)$ целесообразно обращаться к интегрированию уравнения первого порядка (IV.1.16). Удобнее поступить следующим образом.

Построим решение $\Phi(\xi, \lambda)$ уравнения второго порядка (IV.1.7), обращающееся при $\xi = 1$ в нуль и имеющее в этой точке конечную первую производную, т. е. соответствующее разделяющей интегральной кривой, проходящей через точку $\xi = 1$. В силу равенства (IV.1.27), независимо от того, выполняется условие (IV.1.8) или нет, эта производная равна $-1/4$.

При $\xi < 1$ решение $\Phi(\xi, \lambda)$ представляется быстро сходящимся рядом

$$\Phi(\xi, \lambda) = \frac{1}{4} (1 - \xi) + C_1 (1 - \xi)^2 + C_2 (1 - \xi)^3 + \dots, \quad (\text{IV.1.32})$$

где

$$C = \frac{2\lambda - 1}{16}, \quad C_2 = \frac{2}{9} C_1 (\lambda - 1 - 12C_1), \quad C_3 = C_2 \left(\frac{2\lambda - 3}{16} - 5C_1 \right). \quad (\text{IV.1.33})$$

Ряд (IV.1.32) достаточно быстро сходится на всем отрезке $0 \leq \xi \leq 1$, однако для вычисления $\Phi(\xi, \lambda)$ при малых ξ удобно воспользоваться методом Адамса — Штермера (см. об этом методе, например, в книге А. Н. Крылова [61]), вычисляя при помощи ряда (IV.1.32) необходимые при применении этого метода начальные значения $\Phi(\xi, \lambda)$ в точках, близких к $\xi = 1$. Суммируя ряд (IV.1.32) при $\xi = 0$ или вычисляя $\Phi(0, \lambda)$ методом численного интегрирования, можно получить $\Phi(0, \lambda) = N(\lambda)$, где $N(\lambda)$ представляет собой положительное число, не равное единице. Таким образом, функция $\Psi(\xi, \lambda)$, равная $\Phi(\xi, \lambda)$ при $\xi \leq 1$ и тождественно равная нулю при $\xi > 1$ непрерывна и имеет непрерывную производную от квадрата, удовлетворяет уравнению (IV.1.7) и условию на бесконечности (IV.1.9), а условию (IV.1.8) не удовлетворяет.

Для получения искомого решения вспомним, что функция

$$f(\xi, \lambda) = \frac{1}{\mu^2} \Psi(\mu\xi, \lambda) \quad (\text{IV.1.34})$$

также удовлетворяет уравнению (IV.1.7) при произвольном $\mu > 0$ и обладает нужными свойствами непрерывности. Выберем теперь

говоря, предполагается, что система определяющих параметров полна). Таким образом, автоматически исключаются все возможные семейства решений, характеризующиеся еще какими бы то ни было размерными параметрами. Можно привести элементарный пример, хорошо иллюстрирующий это обстоятельство. Решение уравнения теплопроводности $a^2 u_{xx} = u_t$ при условиях $u(0, t) = U = \text{const}$ и $u(\infty, t) = 0$ заведомо не единственно; однако, как нетрудно показать, автомодельное решение этой задачи единственно. Полное доказательство единственности решения в естественном для рассматриваемых задач классе функций требует даже для автомодельных задач привлечения дополнительных соображений.

$\mu = \mu_0$ таким образом, чтобы функция $f(\xi, \lambda)$ удовлетворяла также и условию (IV.1.8), тогда полученная функция $f(\xi, \lambda)$ будет удовлетворять всем условиям, налагаемым на искомое решение. Имеем

$$f(0, \lambda) = 1 = \frac{1}{\mu_0^2} \Phi(0, \lambda) = \frac{1}{\mu_0^2} N(\lambda), \quad (\text{IV.1.35})$$

откуда получаем

$$\mu_0 = \sqrt{N(\lambda)}. \quad (\text{IV.1.36})$$

Значение ξ_0 (начиная с которого $f(\xi, \lambda) \equiv 0$) получается в случае, если учесть, что $\Psi(\mu_0 \xi, \lambda) \equiv 0$ при $\mu_0 \xi \geq 1$, откуда, а также из (IV.1.34) следует, что

$$\xi_0 = \frac{1}{\mu_0} = \frac{1}{\sqrt{N(\lambda)}}. \quad (\text{IV.1.37})$$

Функция $\Phi(\xi, \lambda)$ и, следовательно, $\Psi(\xi, \lambda)$ определяются суммированием ряда (IV.1.32) или численным интегрированием; зная $\mu = \mu_0$, можно таким образом вычислить $f(\xi, \lambda)$

$\lambda \backslash \xi/\xi^*$	0,00	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45
0.1	0,9257	0,9222	0,9190	0,9161	0,9133	0,9107	0,9083	0,9060	0,9034	0,9019
0.2	0,8461	0,8399	0,8341	0,8288	0,8239	0,8192	0,8149	0,8108	0,8070	0,8034
0.3	0,7610	0,7528	0,7452	0,7382	0,7316	0,7255	0,7198	0,7144	0,7093	0,7045
0.4	0,6702	0,6608	0,6521	0,6440	0,6365	0,6294	0,6228	0,6166	0,6107	0,6052
0.5	0,5738	0,5639	0,5547	0,5463	0,5383	0,5309	0,5240	0,5174	0,5113	0,5055
0.6	0,4714	0,4618	0,4530	0,4448	0,4372	0,4300	0,4232	0,4169	0,4110	0,4053
0.7	0,3629	0,3545	0,3468	0,3395	0,3328	0,3265	0,3205	0,3149	0,3097	0,3047
0.8	0,2483	0,2419	0,2359	0,2304	0,2252	0,2203	0,2158	0,2115	0,2074	0,2036
0.9	0,1273	0,1237	0,1204	0,1172	0,1143	0,1115	0,1090	0,1065	0,1042	0,1021
$\xi^*(\lambda)$	2,286	2,250	2,216	2,185	2,154	2,126	2,098	2,072	2,047	2,023

по формуле (IV.1.34). Результаты вычислений $f(\xi, \lambda)$ для ряда значений λ сведены в табл. IV.1 и IV.2 и приведены на рис. IV.4, а на рис. IV.5 представлены функции $\xi_0(\lambda)$ и $M(\lambda) = -df^2(0, \lambda)/d\xi$.

Мы видим, что кривые $f(\xi, \lambda)$, соответствующие $\lambda > 1/2$, обращены вогнутостью вверх; кривая, соответствующая $\lambda = 1/2$, является ломаной, составленной из двух прямых; при $\lambda < 1/2$ кривые $f(\xi, \lambda)$ обращены вогнутостью вниз, причем вплоть до функции, соответствующей $\lambda = -1/2$, производная $f'(0, \lambda)$ отрицательна. Значению $\lambda = -1/2$ соответствует функция

$$f\left(\xi, -\frac{1}{2}\right) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{8}\xi^2 & (0 \leq \xi \leq \sqrt{8}) \\ 0 & (\xi \geq \sqrt{8}), \end{cases} \quad (\text{IV.1.38})$$

имеющая $f'(0, -1/2) = 0$. При $\lambda < -1/2$ $f'(0, \lambda)$ положительно.

Таблица IV.1

	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
	0,9000	0,8982	0,8965	0,8949	0,8933	0,8918	0,8904	0,8890	0,8876	0,8863	0,8850
	0,8000	0,7968	0,7937	0,7908	0,7880	0,7853	0,7828	0,7803	0,7779	0,7756	0,7735
	0,7000	0,6957	0,6916	0,6878	0,6841	0,6806	0,6772	0,6739	0,6708	0,6677	0,6647
	0,6000	0,5951	0,5904	0,5859	0,5816	0,5776	0,5737	0,5699	0,5663	0,5628	0,5594
	0,5000	0,4948	0,4899	0,4852	0,4807	0,4764	0,4723	0,4683	0,4645	0,4609	0,4573
	0,4000	0,3950	0,3902	0,3856	0,3812	0,3771	0,3731	0,3693	0,3656	0,3621	0,3586
	0,3000	0,2955	0,2913	0,2873	0,2834	0,2797	0,2762	0,2728	0,2696	0,2665	0,2634
	0,2000	0,1966	0,1933	0,1902	0,1872	0,1843	0,1817	0,1791	0,1765	0,1742	0,1718
	0,1000	0,0980	0,0962	0,0944	0,0927	0,0911	0,0896	0,0881	0,0867	0,0853	0,0840
	2,000	1,978	1,957	1,936	1,916	1,897	1,879	1,861	1,844	1,827	1,810

λ	$M(\lambda)$	λ	$M(\lambda)$	λ	$M(\lambda)$
0,00	0,6276	0,35	0,9010	0,70	1,120
0,05	0,6714	0,40	0,9349	0,75	1,149
0,10	0,7134	0,45	0,9680	0,80	1,176
0,15	0,7538	0,50	1,0000	0,85	1,203
0,20	0,7925	0,55	1,031	0,90	1,229
0,25	0,8299	0,60	1,062	0,95	1,255
0,30	0,8661	0,65	1,091	1,00	1,280

Функция $\xi_0(\lambda)$ монотонно возрастает с убыванием λ , стремясь к бесконечности при λ , стремящемся к -1 (решение, соответствующее $\lambda = -1$, будет рассмотрено ниже).

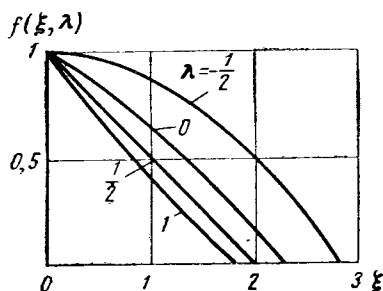


Рис. IV.4

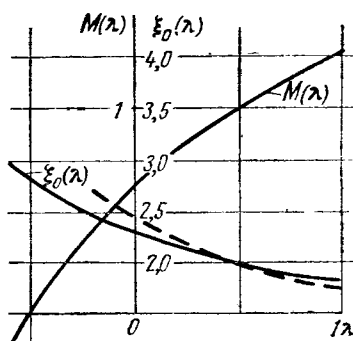


Рис. IV.5

5. Основные характеристики исследуемых автомодельных решений. Переходя от функции $f(\xi, \lambda)$ к напору жидкости h , получаем, что напор жидкости отличается от нуля в каждый момент времени лишь в некоторой конечной части рассматриваемой области пористой среды, причем размер этой области со временем увеличивается. Конечность скорости распространения передней границы возмущенной области является характерной для рассматриваемого круга задач, отвечающих нулевому начальному условию; она существенно отличается постановку задачи о пологих безнапорных движениях от задач, связанных с классическими линейными уравнениями параболического типа, для которых, как известно, имеет место бесконечная скорость распространения переднего фронта возмущенной области.

Эта особенность была впервые обнаружена в работах Я. Б. Зельдовича и А. С. Компанейца [50] и Г. И. Баренблатта [4] путем исследования различных автомодельных решений. В работе Г. И. Ба-

ренблатта и М. И. Вишика [46] было дано доказательство конечности скорости распространения передней границы возмущенной области для задач пологих безнапорных движений (а также широкого класса более общих задач), соответствующих начальным распределениям напора жидкости, тождественно равным нулю вне некоторой конечной области.

Координата движущегося переднего фронта жидкости для рассматриваемых автомодельных движений выражается формулой

$$x_0(t) = \xi_0 \sqrt{\frac{a\sigma(t-t_0)^{\alpha+1}}{\alpha+1}} \quad (\text{IV.1.39})$$

(поскольку передний фронт соответствует $\xi = \xi_0$; напомним, что параметры α и λ связаны между собой соотношением $\lambda = \alpha/(\alpha+1)$). Скорость распространения переднего фронта v_0 представляется соотношением

$$v_0 = \frac{1}{2} \xi_0 \sqrt{a\sigma(t-t_0)^{\alpha-1}(\alpha+1)}.$$

В частности, когда напор на границе пласта постоянен, т. е. $\alpha = 0$, то

$$x_0(t) = 2,286 \sqrt{a\sigma(t-t_0)}; \quad v_0 = 1,143 \sqrt{\frac{a\sigma}{t-t_0}}. \quad (\text{IV.1.40})$$

Далее, для суммарного объемного количества жидкости в пласте M на основе уравнений (IV.1.5) и (IV.1.6) получается следующее выражение:

$$M = \int_0^{\infty} mh(x, t) dx = \frac{ma^{1/2}\sigma^{3/2}(t-t_0)^{\frac{3\alpha}{2} + \frac{1}{2}}}{\sqrt{\alpha+1}} \int_0^{\xi_0} f(\xi, \lambda) d\xi, \quad (\text{IV.1.41})$$

а для потока жидкости при $x = 0$, т. е. для скорости притока жидкости в пласт, в силу (IV.1.10) — выражение

$$-\frac{1}{2} C \left(\frac{\partial h^2}{\partial x} \right)_{x=0} = -\frac{C\sigma^{3/2}(t-t_0)^{\frac{3\alpha}{2} - \frac{1}{2}}}{2a} \sqrt{\alpha+1} \left(\frac{df^2}{d\xi} \right)_{\xi=0}. \quad (\text{IV.1.42})$$

Интегрируя обе части уравнения (IV.1.7) по ξ от $\xi = 0$ до $\xi = \infty$ или, что все равно, до $\xi = \xi_0$, поскольку $f(\xi, \lambda) \equiv 0$ при $\xi \geq \xi_0$, получаем

$$\int_0^{\xi_0} f(\xi, \lambda) d\xi = -\frac{2}{1+2\lambda} \frac{df^2}{d\xi} \Big|_{\xi=0}, \quad (\text{IV.1.43})$$

так что формула (IV.1.41) приводится к виду:

$$M = -\frac{2ma^{1/2}\sigma^{3/2}(t-t_0)^{\frac{3\alpha+1}{2}} \sqrt{1+\alpha}}{1+2\alpha}. \quad (\text{IV.1.44})$$

Таким образом, предыдущие соотношения показывают, что решения, соответствующие $0 < \alpha < \infty$, т. е. $0 < \lambda < 1$, отвечают возрастанию напора жидкости на границе и общего количества жидкости в пласте; для решения, соответствующего $\alpha = \lambda = 0$, напор жидкости на границе постоянен в ходе всего процесса, количество жидкости в пласте возрастает. При $-1/3 < \alpha < 0$, т. е. $-1/2 < \lambda < 0$, напор на границе в начальный момент бесконечен и убывает с течением времени до нуля; количество жидкости, первоначально равное, как и во всех предыдущих случаях, нулю, со временем увеличивается. При $\alpha = -1/3$, т. е. $\lambda = -1/2$, напор на границе в начальный момент бесконечен и с течением времени убывает до нуля; общее количество жидкости в пласте постоянно в течение всего процесса — жидкость через границу $x = 0$ в пласт не поступает. Во всех указанных случаях на границе пласта $x = 0$ во всякий момент времени достигается максимальное для этого момента значение напора. При $-1/2 < \alpha < -1/3$, т. е. $-1 < \lambda < -1/2$, напор жидкости на границе в начальный момент бесконечен и с течением времени убывает до нуля. Общее количество жидкости в начальный момент бесконечно велико и с течением времени убывает, стремясь к нулю, так что на границе пласта жидкость уже не втекает в пласт, как в предыдущих случаях, а вытекает из пласта. Тогда на границе пласта напор жидкости уже не будет максимальным; максимальная величина напора достигается в некоторой внутренней точке пласта, различной для разных моментов времени.

6. Линейное возрастание со временем напора жидкости на границе пласта. Рассмотрим теперь частный случай, соответствующий линейному возрастанию напора жидкости на границе пласта, т. е. когда $\alpha = 1$. Здесь

$$h(0, t) = \sigma(t - t_0); \quad \xi = \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{a\sigma}(t - t_0)} \quad (\text{IV.1.45})$$

и уравнение (IV.1.7) принимает вид:

$$\frac{d^2 f^2}{d\xi^2} + \frac{1}{2}\xi \frac{df}{d\xi} - \frac{1}{2}f = 0. \quad (\text{IV.1.46})$$

Как нетрудно проверить, функция

$$f(\xi, 1) = \begin{cases} 1 - \xi/2 & 0 \leq \xi \leq \xi_0 = 2; \\ 0 & \xi_0 \leq \xi \end{cases} \quad (\text{IV.1.47})$$

удовлетворяет уравнению (IV.1.46) и всем условиям задачи; отсюда получается

$$h(x, t) = \sigma(t - t_0) - \frac{x}{\sqrt{2a/\sigma}}; \quad 0 \leq x \leq \sqrt{2a\sigma}(t - t_0);$$

$$h(x, t) = 0; \quad \sqrt{2a\sigma}(t - t_0) \leq x < \infty. \quad (\text{IV.1.48})$$

Координата переднего фронта жидкости $x_0(t)$ выражается следующим образом:

$$x_0(t) = \sqrt{2a\sigma}(t - t_0), \quad (\text{IV.1.49})$$

а постоянная скорость распространения переднего фронта

$$v_0 = \sqrt{2a\sigma}. \quad (\text{IV.1.50})$$

Таким образом, график распределения напора жидкости в пласте представляется отсекаемым осями координат отрезком прямой линии, перемещающейся параллельно самой себе с постоянной скоростью.

Этот качественный результат был экспериментально проверен В. М. Шестаковым [122] на щелевом лотке, часто применяемом для моделирования безнапорных движений жидкости в пористой среде (с теорией щелевого лотка можно ознакомиться по книге В. И. Аравина и С. Н. Нумерова [2]). Щелевой лоток представляет собой две близко поставленные вертикальные стеклянные пластинки; щель между этими пластинками имеет непроницаемое горизонтальное дно и соединена с сосудом достаточно большого объема. Движение вязкой жидкости в щели подчиняется тем же закономерностям, что и безнапорное движение жидкости в пористой среде; место соединения щели с сосудом соответствует границе пласта. Равномерно поднимая уровень глицерина в сосуде, В. М. Шестаков [122] получил распределение уровней глицерина в лотке, хорошо согласующееся с приведенным выше теоретическим результатом.

§ 2. ПОЛОГИЕ БЕЗНАПОРНЫЕ ДВИЖЕНИЯ С НУЛЕВЫМ НАЧАЛЬНЫМ НАПОРОМ: ПРЕДЕЛЬНЫЕ АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ДВИЖЕНИЯ, ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ДВИЖЕНИЯ

1. Предельные автомодельные движения. Рассмотрим теперь для того же полубесконечного пласта несколько иную задачу. Будем исследовать движение на полубесконечном интервале времени $(-\infty, t)$, поэтому начальное распределение напора по пласту несущественно.

Предположим, что на больших расстояниях от границы пласта, т. е. при $x \rightarrow \infty$, напор жидкости равен нулю; следовательно,

$$h(\infty, t) = 0. \quad (\text{IV.2.1})$$

Пусть, далее, напор жидкости на границе пласта возрастает со временем по экспоненциальному закону:

$$h(0, t) = h_0 e^{\lambda t}. \quad (\text{IV.2.2})$$

Напор жидкости внутри пласта $h(x, t)$ по-прежнему удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial h}{\partial t} = a \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}; \quad a = \frac{C}{2m}. \quad (\text{IV.2.3})$$

Составим полный список аргументов, от которых зависит это решение. Помимо координаты x и времени t , в этот список войдут также величины h_0 , κ и a . Тогда размерности всех определяющих параметров решения представляются в виде:

$$[x] = L; [t] = T; [a] = [h]^{-1} L^2 T^{-1}; [h_0] = [h]; [\kappa] = T^{-1}, \quad (\text{IV.2.4})$$

где по-прежнему символы L , T и $[h]$ означают соответственно размерности длины, времени и напора. Из пяти аргументов (IV.2.4) с тремя независимыми размерностями можно составить две независимые безразмерные комбинации, которые удобно взять в виде:

$$x \sqrt{\frac{\kappa}{ah_0}}, \quad \kappa t;$$

отсюда на основе π -теоремы решение рассматриваемой задачи будет

$$h = h_0 \Phi \left(\frac{x}{\sqrt{ah_0/\kappa}}, \kappa t \right), \quad (\text{IV.2.5})$$

где Φ — безразмерная функция.

Положим теперь $t = t' + \tau$, где τ — произвольная константа. При этом условие (IV.2.1) и уравнение (IV.2.3), как нетрудно проверить, записываются через новую переменную t' , так же как и через прежнюю переменную, а условие (IV.2.2) принимает вид:

$$h(0, t') = h_0^* e^{\kappa t'}; \quad h_0^* = h_0 e^{\kappa \tau}. \quad (\text{IV.2.6})$$

Таким образом, сдвиг во времени влияет лишь на некоторое преобразование величины h_0 , и постановка задачи оказывается инвариантной по отношению к группе преобразований переноса по времени; для определения h в переменных x , t' , a , κ , h_0^* получается та же задача, что и для определения h в переменных (IV.2.4). Стало быть, на основе соотношений (IV.2.5) и (IV.2.6) имеем

$$\begin{aligned} h &= h_0 \Phi \left(x \sqrt{\frac{\kappa}{ah_0}}, \kappa t \right) = h_0^* \Phi \left(x \sqrt{\frac{\kappa}{ah_0^*}}, \kappa t' \right) = \\ &= e^{\kappa \tau} h_0 \Phi \left(x \sqrt{\frac{\kappa}{ah_0 e^{\kappa \tau}}}, \kappa t - \kappa \tau \right). \end{aligned} \quad (\text{IV.2.7})$$

Отсюда следует, что при любом τ имеет место тождество

$$\Phi \left(x \sqrt{\frac{\kappa}{ah_0}}, \kappa t \right) \equiv e^{\kappa \tau} \Phi \left(x \sqrt{\frac{\kappa}{ah_0 e^{\kappa \tau}}}, \kappa t - \kappa \tau \right). \quad (\text{IV.2.8})$$

Положим теперь $\tau = t$ и получим

$$\Phi \left(x \sqrt{\frac{\kappa}{ah_0}}, \kappa t \right) = e^{\kappa t} \Phi \left(x \sqrt{\frac{\kappa}{ah_0 e^{\kappa t}}}, 0 \right) = e^{\kappa t} f \left(x \sqrt{\frac{\kappa}{ah_0 e^{\kappa t}}} \right). \quad (\text{IV.2.9})$$

Итак, функция h , зависящая от пяти аргументов (IV.2.4), представляется через функцию одного аргумента:

$$h = h_0 e^{\kappa t} f(\xi); \quad \xi = \frac{x e^{-1/2 \kappa t} \sqrt{\kappa}}{\sqrt{a h_0}}. \quad (\text{IV.2.10})$$

Подставляя (IV.2.10) в основное уравнение (IV.2.3), получаем для функции $f(\xi)$ обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 f^2}{d\xi^2} + \frac{1}{2} \xi \frac{df}{d\xi} - f = 0. \quad (\text{IV.2.11})$$

Подставляя выражение (IV.2.10) в условие на бесконечности (IV.2.1) и граничное условие (IV.2.2), имеем граничные условия для функции $f(\xi)$:

$$f(0) = 1; \quad f(\infty) = 0. \quad (\text{IV.2.12})$$

В силу непрерывности напора жидкости и потока жидкости функция $f(\xi)$ по-прежнему должна быть непрерывной и иметь непрерывную производную от квадрата $df^2/d\xi$. Мы получили, таким образом, для определения функции $f(\xi)$ граничную задачу того же типа, что и граничные задачи для автомодельных решений, рассмотренных в предыдущем параграфе, и соответствующую значению параметра α , равному бесконечности, т. е. $\lambda = 1$. Эффективное вычисление функции $f(\xi)$ выполняется способом, указанным в п. 4 предыдущего параграфа; результаты вычислений были приведены в табл. IV.1 и на рис. IV.4. Функция $f(\xi) = f(\xi, 1)$ тождественно равна нулю при $\xi \geq \xi_0 = 1,810$; передний фронт $x_0(t)$ перемещается, таким образом, по закону

$$x_0(t) = 1,810 \sqrt{\frac{a h_0 e^{\kappa t}}{\kappa}}, \quad (\text{IV.2.13})$$

а скорость его перемещения равна

$$v_0(t) = 0,905 \sqrt{a \kappa h_0 e^{\kappa t}}. \quad (\text{IV.2.14})$$

Полученное решение является в некотором смысле предельным для автомодельных решений, рассмотренных в предыдущем параграфе. В самом деле, положим в формуле (IV.1.6)

$$\sigma = h_0 (\alpha \tau)^{-\alpha}, \quad (\text{IV.2.15})$$

где h_0 — некоторая константа размерности напора; τ — константа размерности времени, причем, очевидно, эти константы выбираются с точностью до некоторого постоянного множителя. Решение (IV.1.6) принимает при этом вид

$$h = h_0 \left(\frac{t - t_0}{\alpha \tau} \right)^\alpha f \left(\frac{x}{\sqrt{\frac{a h_0 \tau}{\alpha^\alpha (1 + \alpha)} \left(\frac{t - t_0}{\tau} \right)^{\alpha+1}}}, \lambda \right). \quad (\text{IV.2.16})$$

Будем неограниченно увеличивать в этом решении α при начальном моменте $t_0 \rightarrow -\infty$ по закону

$$t_0 = -\alpha\tau. \quad (\text{IV.2.17})$$

Раскрывая неопределенность, получаем, что при $\alpha \rightarrow \infty$

$$\left(\frac{t-t_0}{\alpha\tau}\right)^\alpha \rightarrow \exp \frac{t}{\tau}; \quad \frac{\alpha^{-\alpha}}{\alpha+1} \left(\frac{t-t_0}{\tau}\right)^{\alpha+1} \rightarrow \exp \frac{t}{\tau}; \quad \lambda \rightarrow 1. \quad (\text{IV.2.18})$$

Уравнение (IV.1.7) в пределе при $\alpha \rightarrow \infty$ переходит в уравнение (IV.2.14), а условия (IV.1.8) и (IV.1.9) совпадают с условиями (IV.2.12); $f(\xi, \lambda) \rightarrow f(\xi, 1) = f(\xi)$.

Обозначая τ через $1/\kappa$, получаем, что при $\alpha \rightarrow \infty$ решение (IV.2.16) стремится к решению (IV.2.10). Поэтому решение (IV.2.10) было названо предельным автомодельным решением. Это решение было получено в работе Г. И. Баренблатта [8]. Предельные автомодельные решения представляют и принципиальный интерес в том отношении, что для доказательства автомодельности этих решений уже недостаточно соображений анализа размерности, т. е. недостаточно инвариантности постановки задачи относительно группы преобразования подобия величин с независимыми размерностями, как это было в ранее рассмотренных автомодельных задачах, а требуется дополнительно воспользоваться инвариантностью постановки задачи относительно еще одной группы — группы преобразований переноса по времени.

Приведенные при рассмотрении предельной автомодельной задачи рассуждения носят общий характер и могут применяться во многих других задачах. Очевидно, что предельные автомодельные движения существуют всегда, если система основных уравнений рассматриваемой задачи имеет автомодельные решения обычного степенного типа с произвольным показателем степени (который может принимать сколь угодно большие значения) и инвариантна относительно преобразования переноса соответствующей координаты. Как пример можно указать задачу пограничного слоя в несжимаемой жидкости, а также задачу одномерных неустановившихся движений газа. Полученные для этих задач автомодельные решения, содержащие степенные функции независимых переменных [136, 103], при предельном переходе, аналогичном проделанному в рассматриваемой задаче теории фильтрации¹, дают предельные автомодельные решения, полученные Гольдштейном и Станюковичем [137, 109] путем формальной постановки.

Задача. На границе $x = 0$ полубесконечного пласта с непроницаемым горизонтальным водоупором задается поток (расход) жидкости как степенная функция времени

$$-\frac{1}{2}C \left(\frac{\partial h^2}{\partial x}\right)_{x=0} = \tau(t-t_0)^\beta; \quad \beta > -1, \tau > 0. \quad (\text{IV.2.19})$$

Начальный напор во всем пласте равен нулю.

¹ См. статью Г. И. Баренблатта [8] и книгу Л. И. Седова [102].

Решение задачи представляется в виде:

$$h = \left[\frac{6a\tau^2 (t-t_0)^{2\beta+1}}{C^2 M^2(\lambda) (\beta+2)} \right]^{1/3} f \left\{ x \left[\frac{2CM(\lambda) (\beta+2)^2}{9a^2\tau (t-t_0)^{5+2\beta}} \right]^{1/3}, \lambda \right\}, \quad (\text{IV.2.20})$$

где $M(\lambda) = -df^2(0, \lambda)/d\xi$ (см. рис. IV.5 и табл. IV.2), а координата переднего фронта жидкости $x_0(t)$ — в виде:

$$x_0(t) = \xi_0(\lambda) \left[\frac{9a^2\tau (t-t_0)^{\beta+2}}{2CM(\lambda) (\beta+2)^2} \right]^{1/3}. \quad (\text{IV.2.21})$$

2. Осесимметричные автомодельные движения. При осесимметричных пологих безнапорных движениях жидкости напор жидкости h удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial h}{\partial t} = a \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial h^2}{\partial r} \right); \quad a = \frac{C}{2m} = \frac{k\rho g}{2\mu m}, \quad (\text{IV.2.22})$$

где r — расстояние рассматриваемой точки пласта от оси симметрии.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть (рис. IV.6) в бесконечный пласт, ограниченный снизу непроницаемой горизонтальной поверхностью — водоупором, через скважину, радиус которой пренебрежимо мал, начинается закачка жидкости. Предположим, что начальный напор жидкости в пласте равен нулю, так что начальное условие и условие на бесконечности имеют вид:

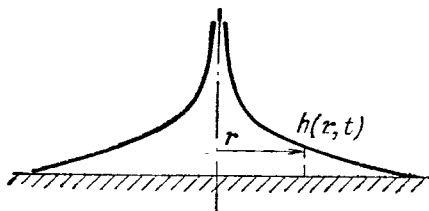


Рис. IV.6

$$h(r, t_0) = 0; \quad h(\infty, t) = 0. \quad (\text{IV.2.23})$$

Предположим далее, что расход закачиваемой жидкости изменяется со временем по степенному закону. Выражение для полного расхода жидкости, закачиваемой через скважину радиусом R , имеет вид:

$$q(t) = 2\pi R \left(-Ch \frac{\partial h}{\partial r} \right)_{r=R} = -\pi C \left(r \frac{\partial h^2}{\partial r} \right)_{r=R}. \quad (\text{IV.2.24})$$

По предположению, радиус скважины пренебрежимо мал (ниже мы остановимся на причинах, по которым это допущение можно делать для большинства реальных движений), поэтому можно принять $R = 0$; так как расход жидкости, закачиваемой в скважину, меняется по степенному закону, граничное условие на скважине принимает вид:

$$-\pi C \left(r \frac{\partial h^2}{\partial r} \right)_{r=0} = \tau (t - t_0)^\beta, \quad (\text{IV.2.25})$$

где $\tau > 0$ и $\beta > -1$. В частности, случай $\beta = 0$ соответствует закачке жидкости в пласт с постоянным расходом. Таким образом, решение задачи удовлетворяет уравнению (IV.2.22) и условиям (IV.2.23)

и (IV.2.25). По-прежнему, используя π -теорему анализа размерности, можно показать, что это решение является автомодельным и представляется в виде:

$$h = \left[\frac{\tau}{\pi C} (t - t_0)^3 \right]^{1/3} f_1(\xi, \lambda). \quad (\text{IV.2.26})$$

Здесь

$$\xi = r \sqrt[4]{\frac{4a^2\tau(t-t_0)^{3+2}}{\pi C(\beta+2)^2}}; \quad \lambda = \frac{\beta}{\beta+2} \quad (\text{IV.2.27})$$

представляют собой две независимые безразмерные комбинации определяющих параметров решения: других независимых комбинаций этих параметров не существует. Постоянный множитель снова введен в формулу для ξ с целью удобства последующего изложения. Как и прежде, искомая функция должна быть непрерывной и иметь непрерывную производную от квадрата. Подставляя выражение (IV.2.26) в уравнение (IV.2.22) и условия (IV.2.23) и (IV.2.25), находим, что функция $f_1(\xi, \lambda)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{df_1^2}{d\xi} \right) + \frac{1}{2} \xi \frac{df_1}{d\xi} - \lambda f_1 = 0 \quad (\text{IV.2.28})$$

при условиях

$$\xi \frac{df_1^2}{d\xi} \Big|_{\xi=0} = -1; \quad f_1(\infty, \lambda) = 0. \quad (\text{IV.2.29})$$

Исследование этой граничной задачи проводится аналогично предыдущему; также единственным образом строится функция $f_1(\xi, \lambda)$, отличающаяся от нуля лишь при $0 \leq \xi \leq \xi_1(\lambda)$, где $\xi_1(\lambda)$ — некоторая функция ξ , а при $\xi \geq \xi_1(\lambda)$ тождественно равная нулю. Функция $f_1(\xi, \lambda)$ при $\xi \rightarrow 0$ имеет особенность, как нетрудно видеть из первого условия (IV.2.29):

$$f_1(\xi, \lambda) \approx \sqrt{\ln \frac{1}{\xi}} \quad (\xi \rightarrow 0). \quad (\text{IV.2.30})$$

Второе условие (IV.2.29) может быть приведено к другой форме: умножая уравнение (IV.2.28) на ξ и интегрируя в пределах от $\xi = 0$ до $\xi = \infty$, получаем, используя оба условия (IV.2.29) и условия

$$\left(\xi \frac{df_1^2}{d\xi} \right)_{\xi=\infty} = 0; \quad [\xi f_1(\xi, \lambda)]_{\xi=0} = 0, \quad (\text{IV.2.31})$$

следующее интегральное соотношение:

$$\int_0^\infty \xi f_1(\xi, \lambda) d\xi = \int_0^{\xi_1(\lambda)} \xi f_1(\xi, \lambda) d\xi = \frac{1}{1+\lambda}. \quad (\text{IV.2.32})$$

Первое условие (IV.2.31) непосредственно следует из условия, которому удовлетворяет функция $f_1(\xi, \lambda)$ на бесконечности, так как

если бы предел $\xi \frac{df_1^2}{d\xi}$ при $\xi \rightarrow \infty$ не был равен нулю, то функция $f_1(\xi, \lambda)$ не стремилась бы к нулю при $\xi \rightarrow \infty$. Второе условие (IV.2.31) непосредственно следует из (IV.2.30).

Эффективное вычисление функции $f_1(\xi, \lambda)$ удобно проводить следующим образом. Строим решение задачи Коши $\Phi_1(\xi, \lambda)$ для уравнения (IV.2.28), обращающееся в нуль при $\xi = 1$ и имеющее в этой точке конечную первую производную. Исследование, в точности аналогичное приведенному в п. 3 § 1, показывает, что эта производная равна $-1/4$. Строить решение задачи Коши удобно так: вблизи $\xi = 1$ можно представить решение в виде ряда, при помощи которого находится надлежащее число начальных значений, после чего применяется метод численного интегрирования Адамса — Штермера. Далее численно вычисляется величина

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \left(\xi \frac{d\Phi_1^2}{d\xi} \right) = -N(\lambda).$$

Величина $N(\lambda)$ не равна единице, поэтому функция, равная $\Phi_1(\xi, \lambda)$ при $\xi < 1$ и тождественно равная нулю при $\xi \geq 1$, удовлетворяет всем условиям граничной задачи (IV.2.28) — (IV.2.29), кроме первого условия (IV.2.29). Воспользуемся теперь тем, что, как нетрудно показать, уравнение (IV.2.28) и второе граничное условие (IV.2.29) инвариантны относительно группы преобразований:

$$\Phi_2(\xi, \lambda) = \frac{1}{\mu^2} \Phi_1(\xi\mu, \lambda), \quad (\text{IV.2.33})$$

поэтому при произвольном положительном μ функция $\Phi_2(\xi, \lambda)$ удовлетворяет уравнению (IV.2.28) и второму граничному условию (IV.2.29). Но

$$\left(\xi \frac{d\Phi_2^2}{d\xi} \right)_{\xi=0} = \frac{1}{\mu^4} \left(\xi \frac{d\Phi_1^2(\xi, \lambda)}{d\xi} \right)_{\xi=0} = -\mu^{-4} N(\lambda). \quad (\text{IV.2.34})$$

Выбрав $\mu = \mu_* = \sqrt[4]{N(\lambda)}$ так, что $\left(\xi \frac{d\Phi_2^2}{d\xi} \right)_{\xi=0} = -1$, получим, что функция

$$f_1(\xi, \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[4]{N(\lambda)}} \Phi_1(\xi \sqrt[4]{N(\lambda)}; \lambda); & [0 \leq \xi \leq \xi_1(\lambda)] = [N(\lambda)]^{-1/4}; \\ 0 & [\xi \geq \xi_1(\lambda)] \end{cases} \quad (\text{IV.2.35})$$

удовлетворяет всем условиям граничной задачи (IV.2.28) — (IV.2.29).

В табл. IV.3 представлены полученные в результате проведенных таким способом вычислений значения функции $f_1(\xi, \lambda)$ для λ в пределах от нуля до единицы через 0,1. Для удобства вычисления расхода жидкости на рис. IV.7; а, б даны соответствующие

	$\lambda=0,00$	$\lambda=0,05$	$\lambda=0,10$	$\lambda=0,15$	$\lambda=0,20$	$\lambda=0,25$
ξ	0,01119	0,01096	0,01075	0,01056	0,01037	0,01020
ξ_{f_1}	2,534	2,525	0,517	2,510	2,502	2,497
ξ	0,01758	0,01722	0,01689	0,01659	0,01630	0,01603
ξ_{f_1}	2,412	2,402	2,394	2,387	2,379	2,373
ξ	0,02557	0,02505	0,02457	0,02413	0,02374	0,02331
ξ_{f_1}	2,307	2,296	2,287	2,280	2,272	2,265
ξ	0,03836	0,03758	0,03686	0,03620	0,03556	0,03497
ξ_{f_1}	2,186	2,176	2,166	2,158	2,149	2,142
ξ	0,05754	0,05637	0,05529	0,05430	0,05334	0,05246
ξ_{f_1}	2,059	2,047	2,037	2,029	2,020	2,012
ξ	0,08950	0,08769	0,08601	0,08446	0,08298	0,08160
ξ_{f_1}	1,911	0,898	1,887	1,878	1,868	1,860
ξ	0,1279	0,1252	0,1229	0,1207	0,1185	0,1166
ξ_{f_1}	1,782	1,769	1,757	1,747	1,737	1,728
ξ	0,1918	0,1879	0,1843	0,1810	0,1778	0,1749
ξ_{f_1}	1,624	1,609	1,597	1,586	1,574	1,565
ξ	0,2685	0,2631	0,2580	0,2534	0,2489	0,2448
ξ_{f_1}	1,480	1,464	1,451	1,439	1,427	1,417
ξ	0,3580	0,3507	0,3440	0,3378	0,3319	0,3264
ξ_{f_1}	1,345	1,329	1,315	1,302	1,289	1,278
ξ	0,4731	0,4635	0,4546	0,4464	0,4386	0,4313
ξ_{f_1}	1,202	1,185	1,170	1,156	1,143	1,132
ξ	0,6137	0,6013	0,5898	0,5792	0,5216	0,5596
ξ_{f_1}	1,054	1,036	1,021	1,006	1,045	0,9809
ξ	0,7416	0,7266	0,7127	0,6998	0,6638	0,6761
ξ_{f_1}	0,9347	0,9170	0,9012	0,8868	0,8962	0,8610
ξ	0,8950	0,8769	0,8601	0,8446	0,7824	0,8160
ξ_{f_1}	0,8042	0,7868	0,7713	0,7571	0,7855	0,7318
ξ	1,048	1,027	1,008	0,9894	0,9246	0,9559
ξ_{f_1}	0,6830	0,6665	0,6517	0,6381	0,6639	0,6139
ξ	1,227	1,203	1,180	1,158	1,043	1,119
ξ_{f_1}	0,5494	0,5344	0,5211	0,5087	0,5693	0,4867
ξ	1,381	1,353	1,327	1,303	1,185	1,259
ξ_{f_1}	0,4394	0,4262	0,4146	0,4037	0,4621	0,3845
ξ	1,509	1,478	1,450	1,424	1,304	1,376
ξ_{f_1}	0,3498	0,3386	0,3288	0,3193	0,3768	0,3029
ξ	1,637	1,603	1,573	1,544	1,422	1,492
ξ_{f_1}	0,2616	0,2527	0,2450	0,2373	0,2946	0,2242
ξ	1,739	1,704	—	1,641	1,541	—
ξ_{f_1}	0,1917	0,1848	—	0,1730	0,2147	—
ξ	1,841	1,804	1,769	1,737	1,660	1,679
ξ_{f_1}	0,1221	0,1175	0,1134	0,1096	0,1368	0,1029
ξ	1,943	1,904	1,868	1,834	1,802	1,772
ξ_{f_1}	0,05233	0,05030	0,04845	0,4677	0,04520	0,04377
ξ	2,046	— 2,004	1,966	1,931	1,897	1,865
		$\lambda=0,30$	$\lambda=0,35$	$\lambda=0,40$	$\lambda=0,45$	$\lambda=0,50$
ξ	0,01004	0,009885	0,009740	0,009603	0,009472	
ξ_{f_1}	2,491	2,486	2,481	2,477	2,472	
	0,01577	0,01563	0,01531	0,01509	0,01488	

Таблица IV-3 (продолжение)

	$\lambda=0,30$	$\lambda=0,35$	$\lambda=0,40$	$\lambda=0,45$	$\lambda=0,50$
f_1	2,367	2,361	2,356	2,351	2,347
ε_1	0,02294	0,02259	0,02226	0,2195	0,02165
f_1	2,259	2,253	2,248	2,243	2,238
ε_1	0,03442	0,03389	0,03340	0,3292	0,03247
f_1	2,136	2,130	2,124	2,119	2,114
ε_1	0,05163	0,05084	0,05009	0,04939	0,04871
f_1	2,005	1,999	1,992	1,987	1,982
ε_1	0,08031	0,07908	0,07792	0,7682	0,7577
f_1	1,852	1,845	1,839	1,833	1,827
ε_1	0,1147	0,1130	0,1113	0,1097	0,1082
f_1	1,720	1,712	1,705	1,699	1,692
ε_1	0,1721	0,1808	0,1670	0,1646	0,1624
f_1	1,556	1,520	1,540	1,532	1,526
ε_1	0,2409	0,2372	0,2332	0,2305	0,2273
f_1	1,407	1,398	1,390	1,382	1,375
ε_1	0,3212	0,3163	0,3117	0,3073	0,3031
f_1	1,268	1,259	1,250	1,242	1,234
ε_1	0,4245	0,4180	0,4119	0,4061	0,4005
f_1	0,1121	1,111	1,102	1,093	1,085
ε_1	0,5507	0,5423	0,5343	0,5268	0,5196
f_1	0,9698	0,9695	0,9498	0,9409	0,9325
ε_1	0,6654	0,6553	0,6457	0,6585	0,6278
f_1	0,8498	0,8394	0,8297	0,7982	0,8122
ε_1	0,8031	0,7908	0,7792	0,7682	0,7577
f_1	0,7208	0,7105	0,7009	0,6920	0,6837
ε_1	0,9407	0,9264	0,9128	0,8999	0,8876
f_1	0,6033	0,5935	0,5843	0,5758	0,5678
ε_1	1,101	1,085	1,069	1,054	1,039
f_1	0,4771	0,4682	0,4599	0,4521	0,4448
ε_1	1,239	1,220	1,202	1,185	1,169
f_1	0,3760	0,3682	0,3608	0,3540	0,3476
ε_1	1,330	1,311	1,291	1,273	1,256
f_1	0,3115	0,3046	0,2981	0,2920	0,2863
ε_1	1,468	1,446	1,425	1,404	1,386
f_1	0,2184	0,2131	0,2081	0,2034	0,1990
ε_1	1,560	1,536	1,514	1,493	1,472
f_1	0,1585	0,1543	0,1505	0,1469	0,1435
ε_1	1,652	1,627	1,603	1,580	1,559
f_1	0,09992	0,09716	0,09459	0,09219	0,08993
ε_1	1,744	1,717	1,692	1,668	1,645
f_1	0,04245	0,04121	0,04006	0,03899	0,03798
ε_1	1,836	1,808	1,781	1,756	1,732
	$\lambda=0,55$	$\lambda=0,60$	$\lambda=0,65$	$\lambda=0,70$	$\lambda=0,75$
ε_1	0,009347	0,009232	0,009114	0,009009	0,008901
f_1	2,468	2,466	2,463	2,460	2,455
ε_1	0,01469	0,01451	0,01432	0,01416	0,01399
f_1	2,343	2,341	2,337	2,334	2,329
ε_1	0,02137	0,02110	0,02083	0,02059	0,02034
f_1	2,233	2,232	2,227	2,224	2,219

Таблица IV-3 (продолжение)

	$\lambda=0,55$	$\lambda=0,60$	$\lambda=0,65$	$\lambda=0,70$	$\lambda=0,75$
ξ	0,03205	0,03165	0,03125	0,03089	0,03052
f_1	2,109	2,107	2,102	2,099	2,093
ξ	0,04807	0,04748	0,04687	0,04633	0,04577
f_1	1,976	1,974	1,969	1,965	1,960
ξ	0,07478	0,07386	0,07291	0,07208	0,07120
f_1	1,822	1,818	1,813	1,809	1,803
ξ	0,1068	0,1055	0,1042	0,1030	0,1017
f_1	0,687	1,683	1,678	1,673	1,667
ξ	0,1602	0,1583	0,1562	0,1544	0,1526
f_1	1,520	1,516	1,509	1,505	1,499
ξ	0,2243	0,2216	0,2187	0,2162	0,2136
f_1	1,368	1,363	1,357	1,352	1,345
ξ	0,2291	0,2254	0,2217	0,2183	0,2149
f_1	1,227	1,221	1,215	1,209	1,202
ξ	0,3953	0,3904	0,3854	0,3810	0,3764
f_1	1,077	1,071	1,065	1,058	1,052
ξ	0,5128	0,5065	0,5000	0,4942	0,4883
f_1	0,9246	0,9181	0,9111	0,9047	0,8977
ξ	0,6196	0,6120	0,6041	0,5972	0,5900
f_1	0,8042	0,7975	0,7905	0,7839	0,7769
ξ	0,7478	0,7386	0,7291	0,7208	0,7120
f_1	0,6758	0,6691	0,6621	0,6556	0,6488
ξ	0,8760	0,8652	0,8541	0,8443	0,8341
f_1	0,5603	0,5538	0,5472	0,5409	0,5345
ξ	1,026	1,013	1,000	0,9885	0,9765
f_1	0,4380	0,4320	0,4259	0,4202	0,4144
ξ	1,154	1,140	1,125	1,112	1,099
f_1	0,3416	0,3362	0,3309	0,3260	0,3209
ξ	1,239	1,224	1,208	1,194	1,180
f_1	0,2810	0,2762	0,2715	0,2671	0,2626
ξ	1,368	1,351	1,333	1,277	1,261
f_1	0,1949	0,1912	0,1875	0,2111	0,2073
ξ	1,453	1,435	1,417	1,359	1,343
f_1	0,1403	0,1375	0,1346	0,1578	0,1547
ξ	1,538	1,519	1,500	1,442	1,424
f_1	0,08782	0,08591	0,08396	1,099	0,1047
ξ	1,624	1,604	1,583	1,565	1,546
f_1	0,03703	0,03617	0,03529	0,03453	0,03374
ξ_1	1,709	1,688	1,667	1,647	1,628
	$\lambda=0,80$	$\lambda=0,85$	$\lambda=0,90$	$\lambda=0,95$	$\lambda=1,00$
ξ	0,008800	0,008707	0,008610	0,008522	0,008434
f_1	2,453	2,452	2,448	2,447	2,444
ξ	0,01383	0,01368	0,01230	0,01096	0,01084
f_1	2,327	2,326	2,319	2,318	2,314
ξ	0,02011	0,01990	0,01968	0,01948	0,01928
f_1	2,216	2,216	2,211	2,210	2,206
ξ	0,03017	0,02985	0,02952	0,02922	0,02892
f_1	2,091	2,090	2,085	2,083	2,080
ξ	0,04526	0,04478	0,04428	0,04383	0,04338

Таблица IV-3 (продолжение)

	$\lambda = 0,80$	$\lambda = 0,85$	$\lambda = 0,90$	$\lambda = 0,95$	$\lambda = 1,00$
f_1	1,957	1,955	1,950	1,948	1,945
ξf_1	0,07040	0,06965	0,06888	0,6818	0,06747
ξf_1	1,800	1,798	1,793	1,791	1,787
ξf_1	0,1006	0,09951	0,09840	0,09740	0,09639
ξf_1	1,664	1,661	1,656	1,654	1,649
ξf_1	0,1509	0,1493	0,1476	0,1461	0,1446
ξf_1	1,495	1,492	1,486	1,483	1,479
ξf_1	0,2112	0,2090	0,2066	0,2045	0,2024
ξf_1	1,341	1,338	1,332	1,329	1,324
ξf_1	0,2816	0,2786	0,2755	0,2727	0,2699
ξf_1	1,198	0,194	1,188	1,184	1,179
ξf_1	0,3721	0,3682	0,3641	0,3604	0,3470
ξf_1	1,046	1,042	1,036	1,032	1,043
ξf_1	0,4827	0,4777	0,4723	0,4675	0,4627
ξf_1	0,8923	0,8876	0,8816	0,8772	0,8720
ξf_1	0,5833	0,5772	0,5707	0,5649	0,5591
ξf_1	0,7714	0,7666	0,7606	0,7560	0,7508
ξf_1	0,7040	0,6966	0,6888	0,6818	0,6747
ξf_1	0,6433	0,6384	0,6326	0,6280	0,6230
ξf_1	0,8046	0,7961	0,7872	0,7792	0,7711
ξf_1	0,5474	0,5426	0,5370	0,5325	0,5277
ξf_1	0,9253	0,9155	0,9053	0,8961	0,8868
ξf_1	0,4424	0,4379	0,4328	0,4285	0,4240
ξf_1	1,086	1,075	1,023	0,9740	1,002
ξf_1	0,3166	0,3127	0,3381	0,3647	0,3302
ξf_1	1,207	1,154	1,181	1,052	1,080
ξf_1	0,2311	0,2553	0,2242	0,3047	0,2724
ξf_1	1,287	1,234	1,260	1,130	1,195
ξf_1	0,1777	0,2010	0,1720	0,2482	0,1920
ξf_1	1,368	1,314	1,338	1,247	1,272
ξf_1	0,1271	0,1496	0,1226	0,1694	0,1424
ξf_1	1,408	1,393	1,417	1,364	1,388
ξf_1	0,1027	0,1009	0,07594	0,09730	0,07326
ξf_1	1,529	1,513	1,496	1,481	1,465
ξf_1	0,03302	0,3237	0,03169	0,03109	0,03048
ξ_1	1,609	1,592	1,575	1,558	1,542

значения $f_1(\xi)$ и $\left(-\xi \frac{df_1^2}{d\xi}\right)_{\xi=0}$ при $\lambda = 0$ (скачкообразное изменение расхода). На рис. IV.8 построен график функции $\xi_1(\lambda)$.

Координата r_0 движущегося переднего фронта жидкости выражается соотношением

$$r_0 = \xi_1(\lambda) \sqrt[4]{\frac{4a^2\tau(t-t_0)^{\beta+2}}{\pi C(\beta+2)^2}} = \sqrt[4]{\frac{C\tau(t-t_0)^{\beta+2}}{\pi m^2(\beta+2)^2 N(\lambda)}}. \quad (\text{IV.2.36})$$

В частности, в случае постоянного расхода закачиваемой жидкости $q(t) = \tau$, т. е. при $\beta = 0$, выражение для напора жидкости представляется в виде:

$$h = \left(\frac{\tau}{\pi C} \right)^{1/2} f_1 \left(\frac{r}{\left(\frac{C\tau}{4\pi m^2} \right)^{1/4} \sqrt{t-t_0}}; 0 \right). \quad (\text{IV.2.37})$$

Координата переднего фронта жидкости в этом случае выражается как

$$r_0(t) = 1,537 \left(\frac{a^2 \tau}{C} \right)^{1/4} \times \\ \times \sqrt{t-t_0} = 1,087 \left(\frac{C\tau}{m^2} \right)^{1/4} \sqrt{t-t_0}. \quad (\text{IV.2.38})$$

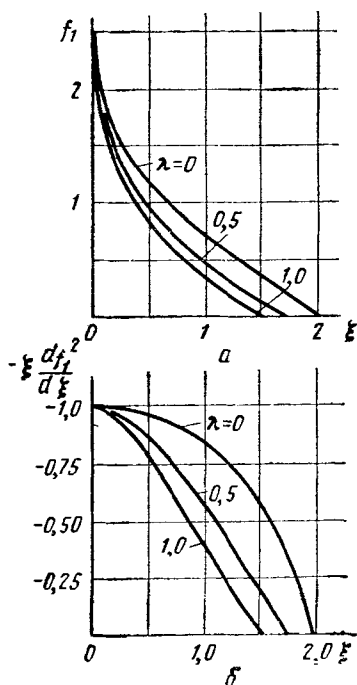


Рис. IV.7

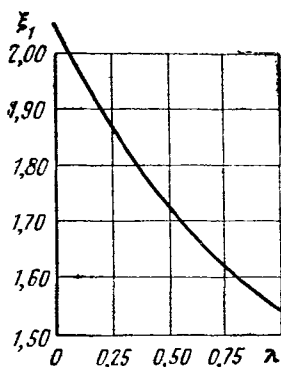


Рис. IV.8

§ 3. АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ И ГАЗА ПЛОСКИМИ ВОЛНАМИ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ ПЛАСТЕ ПРИ НЕНУЛЕВОМ НАЧАЛЬНОМ ДАВЛЕНИИ ГАЗА ИЛИ УРОВНЕ ЖИДКОСТИ

1. Автомоделные пологие безнапорные движения при ненулевом начальном уровне жидкости. Рассмотрим снова пологие безнапорные движения несжимаемой жидкости в полубесконечном пласте, ограниченном снизу горизонтальным водоупором, а сбоку — вертикальной плоской границей, по другую сторону которой располагается резервуар, заполненный жидкостью. Предположим, что начальный уровень жидкости в пласте над водоупором постоянен и равен некоторому значению h_0 , отличному от нуля (случай $h_0 = 0$ был рассмотрен выше). Предположим, далее, что в начальный момент уровень жидкости в резервуаре внезапно изменяется, достигает

некоторой величины h_1 , большей или меньшей h_0 (но сначала не равной нулю; случай $h_1 = 0$ будет рассмотрен особо) и затем остается постоянным. Очевидно, что возвышение h_1 свободной поверхности жидкости зависит только от времени t и координаты x , отсчитываемой по нормали к плоской границе; самой этой границе мы придадим значение координаты x , равное нулю, так что уравнение для h имеет вид:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = a \frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2}; \quad a = \frac{k\rho g}{2\mu m}. \quad (\text{IV.3.1})$$

В силу постоянства начального уровня жидкости начальное условие и условие на бесконечности представляются в виде:

$$h(x, 0) = h_0; \quad h(\infty, t) = h_0, \quad (\text{IV.3.2})$$

а условие на границе пласта $x = 0$ принимает форму

$$h(0, t) = h_1. \quad (\text{IV.3.3})$$

Таким образом, возвышение h свободной поверхности зависит от следующих величин:

$$x, t, a, h_0, h_1, \quad (\text{IV.3.4})$$

имеющих размерности

$$[x] = L; [t] = T; [a] = [h]^{-1} L^2 T^{-1}; [h_0] = [h_1] = [h]$$

(L — размерность длины, T — размерность времени, $[h]$ — размерность напора, которую мы вправе принять независимой от размерности длины). Из величин (IV.3.4) можно, очевидно, составить две независимые безразмерные комбинации, в качестве которых удобно выбрать

$$\xi = \frac{x}{V a h_1 t}, \quad \lambda = \frac{h_0}{h_1}, \quad (\text{IV.3.5})$$

так что рассматриваемое движение оказывается автомодельным и функция h представляется в виде:

$$h = h_1 F(\xi, \lambda). \quad (\text{IV.3.6})$$

Подставляя это представление функции h в уравнение (IV.3.1) и условия (IV.3.2) и (IV.3.3), получаем для определения функции $F(\xi, \lambda)$ уравнение

$$\frac{d^2 F^2}{d\xi^2} + \frac{1}{2} \xi \frac{dF}{d\xi} = 0 \quad (\text{IV.3.7})$$

и граничные условия

$$F(0, \lambda) = 1, \quad F(\infty, \lambda) = \lambda. \quad (\text{IV.3.8})$$

В этом случае ни одно из граничных условий (IV.3.8) уже не инвариантно относительно группы преобразований

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{\mu^2} F(\mu\xi, \lambda),$$

хотя уравнение (IV.3.7) по-прежнему инвариантно относительно этой группы. Из-за этого обстоятельства определение функции $F(\xi, \lambda)$ не удастся привести к задаче Коши, что сильно осложняет ее эффективное вычисление. Поэтому вычисления были проведены на быстродействующей электронной счетной машине (руководил вычислениями Н. П. Трифонов).

Значения функции $F(\xi, \lambda)$ представлены для различных λ (от 0 до 2 с шагом 0,1) на рис. IV.9, здесь же изображен предельный случай $\lambda = 0$, соответствующий $h_0^- = 0$ и рассмотренный выше. На рисунке IV.10 приведены

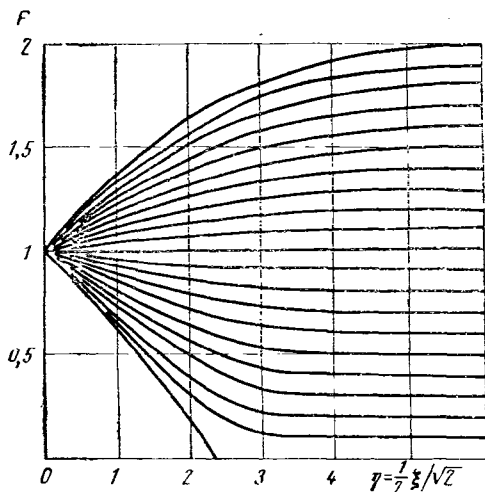


Рис. IV.9

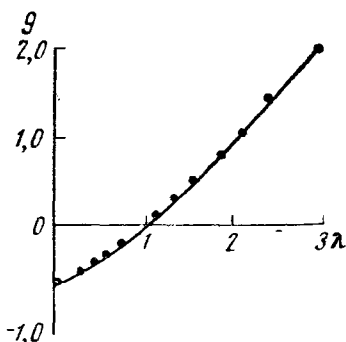


Рис. IV.10

значения функции $g(\lambda) = \left. \frac{dF^2}{d\xi} \right|_{\xi=0}$, определяющие поток жидкости через границу пласта q согласно соотношению

$$q = -\frac{k\rho g}{2\mu} \frac{h_0^2 g(\lambda)}{V_{a_1 h t}}. \quad (\text{IV.3.9})$$

Представим в уравнении (IV.3.7) член $\frac{1}{2}\xi \frac{dF}{d\xi}$ в виде $\frac{1}{2}\xi \frac{d[F(\xi, \lambda) - \lambda]}{d\xi}$, умножим обе его части на ξ и проинтегрируем это уравнение от $\xi = 0$ до $\xi = \infty$; получим

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \xi \frac{d^2 F^2}{d\xi^2} d\xi + \frac{1}{2} \int_0^\infty \xi^2 \frac{d}{d\xi} [F(\xi, \lambda) - \lambda] d\xi &= \left[\xi \frac{dF^2}{d\xi} \right]_{\xi=0}^{\xi=\infty} - \\ &- \int_0^\infty \frac{dF^2}{d\xi} d\xi + \frac{\xi^2}{2} [F(\xi, \lambda) - \lambda]_{\xi=0}^{\xi=\infty} - \int_0^\infty \xi [F(\xi, \lambda) - \lambda] d\xi. \end{aligned} \quad (\text{IV.3.10})$$

Исследование, которое мы здесь опускаем, показывает, что функция $F(\xi, \lambda)$ стремится к своему предельному значению при $\xi \rightarrow \infty$ очень быстро, по показательному закону. Поэтому, а также учитывая, что при $\xi = 0$ $F(\xi, \lambda)$ и $\frac{dF^2}{d\xi}$ конечны, получаем

$$\left[\xi \frac{dF^2}{d\xi} \right]_{\xi=0}^{\xi=\infty} = \frac{\xi^2}{2} [F(\xi, \lambda) - \lambda]_{\xi=0}^{\xi=\infty} = 0.$$

Поскольку, очевидно,

$$\int_0^{\infty} \frac{dF^2}{d\xi} d\xi = F^2(\infty, \lambda) - F^2(0, \lambda),$$

выражение (IV.3.10) дает интегральное соотношение, которому удовлетворяет функция $F(\xi, \lambda)$:

$$\int_0^{\infty} \xi [F(\xi, \lambda) - \lambda] d\xi = 1 - \lambda^2. \quad (\text{IV.3.11})$$

Рассмотренные выше автомодельные решения задачи о полой безнапорной фильтрации жидкости при ненулевом начальном уровне были найдены П. Я. Полубариновой-Кочиной [92, 93]. На существование автомодельных решений такого типа в задачах нестационарной фильтрации жидкости и газа было указано в работах Буссинеска [133] и Лейбензона [72], однако ни их качественного исследования, ни численного расчета в этих работах проведено не было.

2. Фильтрация жидкости из полубесконечного пласта в пустой резервуар. Случай $h_1 = 0$ нуждается в отдельном рассмотрении. Здесь из оставшихся определяющих параметров можно составить только одну безразмерную комбинацию $\xi = x/\sqrt{ah_0 t}$, так что возвышение свободной поверхности h представляется в виде:

$$h = h_0 \varphi(\xi). \quad (\text{IV.3.12})$$

Функция h по-прежнему удовлетворяет уравнению Буссинеска (IV.3.1), начальному условию и условию на бесконечности (IV.3.2), а также граничному условию

$$h(0, t) = 0, \quad (\text{IV.3.13})$$

откуда получается, что функция $\varphi(\xi)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 \varphi^2}{d\xi^2} + \frac{1}{2} \xi \frac{d\varphi}{d\xi} = 0 \quad (\text{IV.3.14})$$

при условиях

$$\varphi(0) = 0; \quad \varphi(\infty) = 1. \quad (\text{IV.3.15})$$

В этом случае уравнение (IV.3.14) и первое условие (IV.3.15) инвариантны относительно группы преобразований $f(\xi) = \mu^{-2} \xi$.

Поэтому, если $\varphi(\xi)$ удовлетворяет уравнению (IV.3.14) и первому условию (IV.3.15), то и $f(\xi)$ удовлетворяет этим соотношениям при любом $\mu > 0$. Это дает возможность свести определение функции φ к решению задачи Коши для уравнения (IV.3.14). Однако в данном случае нет даже необходимости решать задачу Коши ввиду того, что рассматриваемая задача оказывается в точности математически эквивалентной основной задаче теории пограничного слоя — о пограничном слое на плоской пластине.

В самом деле, положим в уравнении (IV.3.1) $z(x, t) = h_0^2 - h^2$. Тогда это уравнение сводится к виду:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = 2a \sqrt{h_0^2 - z^2} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad (\text{IV.3.16})$$

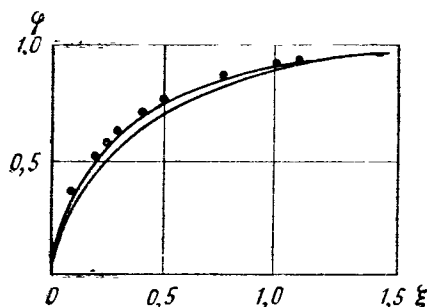


Рис. IV.11

а условия (IV.3.2) и (IV.3.3) переписываются так:

$$\begin{aligned} z(\infty, t) &= 0; \quad z(0, t) = h_0^2; \\ z(x, 0) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{IV.3.17})$$

Но уравнение (IV.3.16) и условия (IV.3.17) совпадают с основным уравнением в форме Мизеса и условиями упомянутой задачи теории пограничного слоя [59], если заменить t на продольную координату x , x — на функцию тока ψ , $2a$ — на вязкость жидкости ν , h_0 — на скорость набегающего потока U , причем z выражает величину $U^2 - u^2$, где u — продольная скорость потока. Таким образом, возвышение свободной поверхности h соответствует продольной скорости потока u в задаче пограничного слоя. Заметим теперь, что мы определяем зависимость функции φ , равной h/h_0 , от переменной $\xi = x/\sqrt{a h_0 t}$, которая в терминах пограничного слоя соответствует зависимости функции u/U от переменной $\psi/\sqrt{\frac{2}{\nu U x}}$. Как известно из теории пограничного слоя,

$$\frac{u}{U} = \zeta'(\eta); \quad \frac{\psi}{\sqrt{\nu U x}} = \zeta(\eta), \quad (\text{IV.3.18})$$

где $\zeta(\eta)$ — затабулированная функция Блазиуса, таблица значений производной от которой имеется в каждом руководстве по гидродинамике, а η — безразмерная переменная Блазиуса, равная $y \sqrt{\frac{U}{\nu x}}$ (y — поперечная координата в пограничном слое). Таким образом, мы должны найти зависимость ζ' от переменной $\sqrt{2}\xi$ и затем, полагая $\zeta' = \varphi$, $\sqrt{2}\xi = \xi$, получим искомую функцию $\varphi(\xi)$.

На рис. IV.11 приведены полученные таким образом значения функции $\varphi(\xi)$.

Определим теперь поток жидкости, вытекающей в резервуар из пласта. Имеем

$$q = - \frac{k\rho g}{2\mu} \frac{\partial h^2}{\partial x} \Big|_{x=0} = - \frac{k\rho g h_0^2}{2\mu \sqrt{2ah_0t}} \frac{d\varphi^2}{d\xi} \Big|_{\xi=0}.$$

Но согласно предыдущему $\varphi = \zeta'(\sqrt{2}\xi)$, так что

$$\frac{d\varphi^2}{d\xi} \Big|_{\xi=0} = 2 \left[\zeta'(\eta) \zeta''(\eta) \frac{d\eta}{d\xi} \frac{1}{\sqrt{2}} \right]_{\eta=0} = \sqrt{2} \zeta''(0).$$

Как известно из теории пограничного слоя, величина $\zeta''(0)$, через которую выражается коэффициент трения пластины, равна 0,332, откуда получаем окончательно выражение для потока жидкости, вытекающей в резервуар, в виде:

$$q = -0,332 \frac{k\rho g h_0^{3/2}}{\mu \sqrt{2ah_0t}} = -0,332 h_0^{3/2} \sqrt{\frac{k\rho g \mu}{\mu t}}. \quad (\text{IV.3.19})$$

Рассмотренное решение было найдено Н. Я. Полубариновой-Кочиной [92—94].

§ 4. ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ДВИЖЕНИЯ В БЕСКОНЕЧНОМ ПЛАСТЕ ПРИ НЕНУЛЕВОМ НАЧАЛЬНОМ ДАВЛЕНИИ ГАЗА ИЛИ УРОВНЕ ЖИДКОСТИ

1. Автомоделное изотермическое движение термодинамически идеального газа с постоянной вязкостью, возникающее при закачке или отборе газа через скважину. Рассмотрим бесконечный горизонтальный пласт мощностью H , вскрытый по всей мощности цилиндрической скважиной, направление которой перпендикулярно направлению простирания пласта. В начальный момент пласт насыщен газом, находящимся под давлением P . Через вскрывающую пласт скважину в начальный момент начинает закачиваться газ с постоянным массовым расходом q . Рассмотрим возникающее при этом фильтрационное движение газа.

Поскольку картина движения симметрична и одинакова во всех плоскостях, перпендикулярных оси скважины, распределение давления газа зависит только от времени t и расстояния r рассматриваемой точки пласта от оси скважины $r=0$ и удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial p}{\partial t} = a^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p^2}{\partial r} \right); \quad a^2 = \frac{k}{2\mu}. \quad (\text{IV.4.1})$$

Начальное давление газа в пласте постоянно и равно P , так что начальное условие и условие на бесконечности имеют вид:

$$p(r, 0) = P, \quad p(\infty, t) = P. \quad (\text{IV.4.2})$$

Через скважину, радиус которой равен R , в пласт закачивается газ с постоянным массовым расходом q :

$$-\frac{\pi k H \rho_0}{\mu p_0} \left(r \frac{\partial p^2}{\partial r} \right)_{r=R} = q. \quad (\text{IV.4.3})$$

Будем считать радиус скважины пренебрежимо малым (ниже мы приведем оценки, оправдывающие это допущение). Тогда условие (IV.4.3) перепишется в виде:

$$\left(r \frac{\partial p^2}{\partial r} \right)_{r=0} = -\frac{q \mu p_0}{\pi k H \rho_0}. \quad (\text{IV.4.4})$$

Итак, искомое распределение давления в пласте, удовлетворяющее уравнению (IV.4.1) и условиям (IV.4.2) и (IV.4.4), зависит от определяющих параметров r , t , a^2 , $\frac{q \mu p_0}{\pi k H \rho_0}$, размерности которых следующие: $[r] = L$; $[t] = T$; $[a^2] = [p]^{-1} L^2 T^{-1}$; $\left[\frac{q \mu p_0}{\pi k H \rho_0} \right] = [p]^2$; $[P] = [p]$ ($[p]$ — размерность давления). При помощи анализа размерности можно убедиться в автомодельности рассматриваемого движения. Распределение давления при этом представляется в виде:

$$p = P F_1(\xi, \lambda); \quad \xi = \frac{r}{\sqrt{a^2 P t}}; \quad \lambda = \frac{q \mu p_0}{\pi k H \rho_0}. \quad (\text{IV.4.5})$$

Подставляя (IV.4.5) в уравнение (IV.4.1) и условия (IV.4.2) и (IV.4.4), получим, что функция $F_1(\xi, \lambda)$ является интегралом уравнения

$$\frac{d^2 F_1^2}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dF_1^2}{d\xi} + \frac{\xi}{2} \frac{dF_1}{d\xi} = 0 \quad (\text{IV.4.6})$$

при граничных условиях

$$\left(\xi \frac{dF_1^2}{d\xi} \right)_{\xi=0} = -\lambda; \quad F_1(\infty, \lambda) = 1. \quad (\text{IV.4.7})$$

Качественная картина расположения интегральных кривых уравнения (IV.4.6) исследуется аналогично тому, как описано в § 1: точно так же порядок уравнения (IV.4.6) понижается до первого, затем исследуется картина интегральных кривых уравнения первого порядка, после чего результаты переносятся на интегральные кривые уравнения (IV.4.6). Это исследование показывает, что интегральные кривые уравнения (IV.4.6), удовлетворяющие второму условию (IV.4.7), распадаются на два класса, разделенные между собой интегральной кривой $F_1(\xi, 0) \equiv 1$, соответствующей, как легко видеть, $\lambda = 0$ (рис. IV.12). Кривые первого класса, располагающиеся над кривой $F_1(\xi, 0) \equiv 1$, беспрестанно близко подходят к оси ординат, асимптотически уходя в бесконечность при уменьшении ξ до нуля. При $\xi \rightarrow 0$ функция $F_1(\xi, \lambda)$ медленно возрастает по закону

$$F_1(\xi, \lambda) = \sqrt{-\lambda \ln \xi} + 0(1), \quad (\text{IV.4.8})$$

так что каждой из интегральных кривых первого класса соответствует свое значение параметра λ , монотонно возрастающее от нуля до бесконечности по мере удаления от кривой $F_1(\xi, 0) \equiv 1$.

При $\xi \rightarrow \infty$ ординаты кривых обоих классов быстро стремятся к единице по закону

$$F_1(\xi, \lambda) = 1 + O\left[\frac{1}{\xi} \exp\left(-\frac{\xi^2}{8}\right)\right]. \quad (\text{IV.4.9})$$

Кривые второго класса, располагающиеся под интегральной кривой $F_1(\xi, 0) \equiv 1$, не доходят до оси ординат, а заканчиваются, подходя под прямым углом к оси абсцисс [которая является особой линией уравнения (IV.4.6), поскольку на этой линии обращается в нуль коэффициент при старшей производной в этом уравнении]. При этом вместо первого условия, которому удовлетворяют все интегральные кривые первого класса, соответствующие $\lambda > 0$, эти кривые удовлетворяют условию

$$\left(\xi \frac{dF_1}{d\xi}\right)_{\xi=\bar{\xi}(\lambda)} = -\lambda, \quad (\text{IV.4.10})$$

где $\bar{\xi}(\lambda)$ — координата точки пересечения рассматриваемой кривой с осью абсцисс. Каждой кривой соответствует определенное значение λ , монотонно убывающее по мере удаления кривых от интегральной кривой $F_1(\xi, 0) \equiv 1$ от нуля до $-\infty$.

Интегральные кривые второго класса описывают автомодельные движения, в процессе которых происходит не нагнетание газа в пласт, как в случае движений, отвечающих интегральным кривым первого класса ($\lambda > 0$), а отбор газа из пласта с расходом, определяемым соответствующей этой кривой величиной λ :

$$q = \frac{\lambda \pi k H P^2 \rho_0}{\mu \rho_0}. \quad (\text{IV.4.11})$$

(в этой формуле массовый расход q считается отрицательным).

Следует отметить, что, создавая достаточный перепад давления, можно, в принципе, закачивать газ в пласт с любым большим расходом через скважину сколь угодно малого радиуса. Однако отбирать газ из пласта можно лишь при расходах, не превышающих того расхода, который соответствует установлению у стенки скважины нулевого давления. Дальнейшее увеличение расхода отбираемого газа возможно только при условии расширения скважины. Таким образом, в отличие от случая закачки газа, нельзя ставить задачу об отборе газа через скважину пренебрежимо малого радиуса. Кривые $F_1(\xi, \lambda)$ при $\lambda > 0$ (кривые второго класса) соответствуют автомодельным движениям, в которых отбор газа с постоянным расходом,

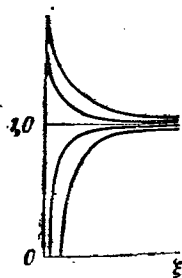


Рис. IV.12

определяемым формулой (IV.4.11), происходит через расширяющуюся скважину, радиус которой растет по закону

$$R = \bar{\xi}(\lambda) \sqrt{a^2 P t}, \quad (\text{IV.4.12})$$

причем у стенки этой расширяющейся скважины давление постоянно и равно нулю. Заметим, что это расширение отбирающей скважины ни в коей мере не препятствует применению рассматриваемых решений к практическим задачам, поскольку для значений параметра λ , представляющих практический интерес, эта фиктивная скважина, как показывают проведенные расчеты (см. ниже), всегда будет находиться внутри настоящей скважины.

Далее, если взять часть любой интегральной кривой $F_1(\xi, \lambda)$, принадлежащей к первому или второму классу, от некоторого $\xi = \eta \gg \bar{\xi}(\lambda)$ до $\xi = \infty$, то формула (IV.4.5) будет представлять собой автомодельное решение задачи, соответствующей постоянному начальному давлению и отбору или нагнетанию газа (в зависимости от знака λ) через расширяющуюся скважину. При этом у стенки скважины поддерживается постоянное давление, равное

$$P F_1(\eta, \lambda). \quad (\text{IV.4.13})$$

Радиус R расширяющейся скважины увеличивается по закону

$$R = \eta \sqrt{a^2 P t}. \quad (\text{IV.4.14})$$

Для дальнейшего изложения полезно выяснить, какой порядок величины $\lambda = q \mu r_0 [\pi k r_0 H P^2]^{-1}$ встречается в практических задачах. Возьмем в качестве примера случай, для которого величина λ будет весьма высокой, этим самым определится порядок верхнего предела значений λ . Пусть через скважину отбирается 1 000 000 м³ газа в сутки (имеется в виду объем при атмосферных условиях); такой расход является достаточно высоким. Пусть, далее, вязкость газа μ равна 0,01 спз, проницаемость пористой среды $k = 1$ д = 10⁻⁸ см², мощность пласта $H = 10$ м, начальное пластовое давление $P = 30$ кгс/см² (относительно небольшое давление для столь высокого отбора газа); за величины r_0 и ρ_0 возьмем соответственно 1 кгс/см² и плотность газа при давлении 1 кгс/см², так что величина q/ρ_0 представляет собой заданный объемный расход газа, отбираемого через скважину. Переходя к одинаковым единицам измерения и подставляя приведенные величины параметров в выражение для λ , примем $\lambda \approx 0,04$. Стало быть, в реальных случаях параметр λ равен 0,01—0,02 и менее.

На рис. IV.13, а, б изображены кривые $F_1(\xi, \lambda)$, отвечающие нескольким значениям параметра λ , как положительным, так и отрицательным, а также соответствующие кривые $-\xi dF_1/d\xi$. Эти кривые показывают, что в довольно значительной области вблизи точки $\xi = 0$ (соответственно вблизи $\xi = \bar{\xi}(\lambda)$ для кривых, отвечающих $\lambda < 0$) функция $-\xi dF_1/d\xi$ близка к своему значению при $\xi = 0$

(соответственно при $\xi = \bar{\xi}(\lambda)$), т. е. к λ . При этом основное изменение функции $F_1(\xi, \lambda)$, т. е. основное изменение давления газа, сосредотачивается именно в этой области. При тех же значениях ξ , для которых функция $-\xi dF_1^2/d\xi$ уже существенно отклоняется по величине от λ , функция $F_1(\xi, \lambda)$ оказывается достаточно близкой к единице. В практически наиболее интересной области значений параметра λ , равных по абсолютной величине одной сотой и менее,

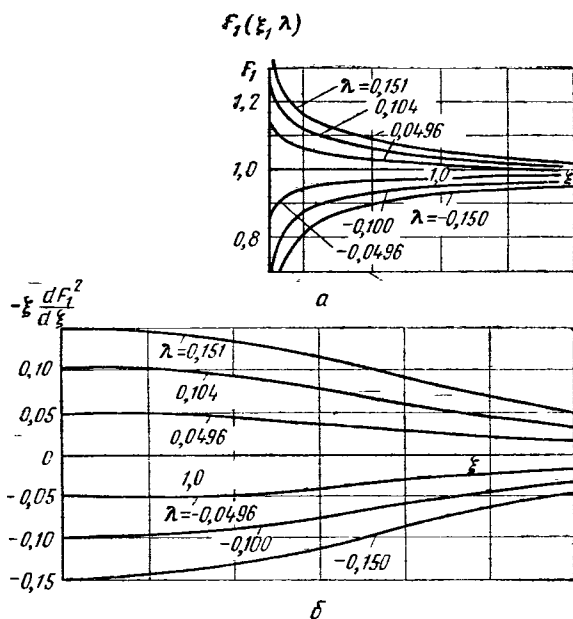


Рис. IV.13

это свойство постоянства функции $-\xi dF_1^2/d\xi$ в области, где $F_1(\xi, \lambda)$ существенно отличается от единицы, выражено еще более резко. В табл. IV.4 приведены результаты численного расчета кривых $F_1(\xi, \lambda)$, соответствующих $\lambda = -0,009999$ и $\lambda = -0,004994$. Через ξ_* обозначено значение аргумента ξ , обладающее тем свойством, что при $\xi < \xi_*$ значения $-\xi dF_1^2/d\xi$ отличаются от λ меньше, чем на 0,01%. Стало быть, при $\xi \leq \xi_*$ с этой же степенью точности выполняется соотношение

$$\xi \frac{dF_1^2}{d\xi} = -\lambda, \quad (\text{IV.4.15})$$

откуда при $\xi < \xi_*$ имеем с той же степенью точности, с которой вычислены таблицы,

$$F_1^2(\xi, \lambda) - F_1^2(\xi_*, \lambda) = -\lambda \ln \frac{\xi}{\xi_*}. \quad (\text{IV.4.16})$$

$\lambda = -0,009999$			$\lambda = -0,004994$		
ξ	$F_1(\xi, \lambda)$	$\xi \frac{dF_1^2}{d\xi}$	ξ	$F_1(\xi, \lambda)$	$\xi \frac{dF_1^2}{d\xi}$
$\xi_* = 0,005787$	0,9701	0,009999	$\xi_* = 0,003886$	0,9842	0,004994
0,01157	0,9737	0,009999	0,01555	0,9877	0,004994
0,01929	0,9763	0,009999	0,03109	0,9894	0,004993
0,03472	0,9793	0,009998	0,06218	0,9912	0,004992
0,06558	0,9825	0,009994	0,1244	0,9929	0,004984
0,09645	0,9845	0,009987	0,2487	0,9947	0,004955
0,1582	0,9870	0,009968	0,4974	0,9964	0,004841
0,2816	0,9899	0,009899	0,9949	0,9980	0,004412
0,5285	0,9930	0,009653	1,492	0,9988	0,003779
0,7754	0,9948	0,009270	2,487	0,9996	0,002305
1,269	0,9970	0,008167	3,482	0,9999	0,001098
1,763	0,9982	0,006770	—	—	—
2,751	0,9994	0,003879			
3,738	0,9999	0,001743			

Поэтому значения $F_1(\xi, \lambda)$ при $\xi < \xi_*$ в табл. IV.4 не приводятся. Проведенные численные расчеты показывают, как это видно из табл. IV.4, что при $|\lambda| < 0,01$ величина $F_1(\xi_*, \lambda)$ отличается от единицы менее чем на 0,03, так что при $\xi \geq \xi_*$ справедливо неравенство $1 > F_1(\xi, \lambda) > 0,97$. Отсюда следует, что с практически вполне достаточной точностью в этой области уравнение (IV.4.6) для функции $F_1(\xi, \lambda)$ можно заменить линейным относительно $F_1^2(\xi, \lambda)$ уравнением

$$\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \xi \frac{dF_1^2}{d\xi} + \frac{\xi}{4} \frac{dF_1^2}{d\xi} = 0 \quad (\text{IV.4.17})$$

[в последнем слагаемом уравнения (IV.4.6) добавлен множитель $F_1(\xi, \lambda)$, согласно предыдущему мало отличающийся от единицы]. Это линейное уравнение легко интегрируется и дает

$$\xi \frac{dF_1^2}{d\xi} = C e^{-\xi^2/8}, \quad (\text{IV.4.18})$$

где C — константа интегрирования. Определим эту константу из условия, что при $\xi = \xi_*$ величина $\xi \frac{dF_1^2}{d\xi} = -\lambda$. Имеем

$$C = -\lambda \exp(-1/8 \xi_*^2).$$

Так как для рассматриваемой практически интересной области $|\lambda| < 0,01$ значение ξ_* весьма мало ($< 0,01$) и $e^{-1/8 \xi_*^2}$ отличается от единицы не более чем в шестом десятичном знаке, то можно полагать $C = -\lambda$.

Интегрируя уравнение (IV.4.18) еще раз, получаем при $\xi \geq \xi_*$

$$F_1^2(\xi, \lambda) = D - \lambda \int_{\xi}^{\infty} \frac{1}{\xi} e^{-\xi^2/8} d\xi. \quad (\text{IV.4.19})$$

Константа интегрирования D находится из условия, что при $\xi = \xi_*$ величина $F_1(\xi_*, \lambda)$, соответствующая решению линейного уравнения (IV.4.17), совпадает с величиной $F_1(\xi, \lambda)$, полученной численным интегрированием. Это дает при $\xi \geq \xi_*$

$$F_1^2(\xi, \lambda) = F_1^2(\xi_*, \lambda) + \frac{\lambda}{2} \text{Ei}\left(-\frac{\xi_*^2}{8}\right) - \frac{\lambda}{2} \text{Ei}\left(-\frac{\xi^2}{8}\right), \quad (\text{IV.4.20})$$

где Ei — интегральная показательная функция.

При $\xi \rightarrow \infty$ функция, определяемая уравнением (IV.4.20), строго говоря, не удовлетворяет второму условию (IV.4.7) — при $\xi \rightarrow \infty$ эта функция стремится не к единице, а к величине

$$S = \sqrt{F_1^2(\xi_*, \lambda) + \frac{\lambda}{2} \text{Ei}\left(-\frac{\xi_*^2}{8}\right)}.$$

Однако оказывается, что эта величина очень мало отличается от единицы, — отличие для практически наиболее интересной области $|\lambda| < 0,01$ находится в пределах 0,01%. Так при $\lambda = -0,009999$ имеем: $\xi_* = 0,005787$; $-\frac{1}{2} \text{Ei}\left(\frac{1}{8} \xi_*^2\right) = 5,905$; $F_1(\xi_*, \lambda) = 0,9701$; $S = 1,00007$. Для меньших по абсолютной величине λ это отличие еще меньше, так что величина S для этого диапазона значений λ может быть принята равной единице. Таким образом, построенное нами решение линейного уравнения удовлетворяет с вполне достаточной степенью точности второму условию (IV.4.7).

Итак, при $\xi \geq \xi_*$ функция $F_1(\xi, \lambda)$ с точностью до 0,01% представляется в виде:

$$F_1(\xi, \lambda) = \sqrt{1 - \frac{\lambda}{2} \text{Ei}\left(-\frac{\xi^2}{8}\right)}. \quad (\text{IV.4.21})$$

Заметим теперь, что так как в рассматриваемом интервале $|\lambda| < 0,01$ величина ξ_* весьма мала, для функции $\text{Ei}\left(-\frac{\xi^2}{8}\right)$ при $\xi \leq \xi_*$ с большой точностью выполняется асимптотическая формула

$$\text{Ei}\left(-\frac{\xi^2}{8}\right) = -\ln \frac{8}{\sqrt{\xi^2}},$$

(см., например, Янке и Эмде [129]). Поэтому при $\xi \leq \xi_*$ с точностью, большей 0,01%, имеет место равенство

$$\lambda \ln \frac{\xi}{\xi_*} = \frac{\lambda}{2} \text{Ei}\left(-\frac{\xi^2}{8}\right) - \frac{\lambda}{2} \text{Ei}\left(-\frac{\xi_*^2}{8}\right).$$

Подставляя это соотношение в формулу (IV.4.16), получаем, что при $\xi \leq \xi_*$ с точностью до 0,01%

$$F_1^2(\xi, \lambda) = F_1^2(\xi_* \lambda) + \frac{\lambda}{2} \operatorname{Ei}\left(-\frac{\xi_*^2}{8}\right) - \frac{\lambda}{2} \operatorname{Ei}\left(-\frac{\xi^2}{8}\right).$$

Но это выражение точно совпадает с соотношением (IV.4.20), которому функция $F_1(\xi, \lambda)$ удовлетворяет при $\xi \leq \xi_*$. Кроме того, выше было показано, что первые два слагаемых правой части предыдущей формулы в сумме с большой точностью равны единице. Отсюда следует весьма существенный вывод о том, что в практически наиболее интересном интервале значений параметра λ , $|\lambda| < 0,01$, функция $F_1(\xi, \lambda)$ представляется в виде (IV.4.21) при всех значениях ξ .

Переходя от функции $F_1(\xi, \lambda)$ к давлению p по формуле (I.4.5), получаем, что для

$$|\lambda| = \left| \frac{q\mu p_0}{\pi k H \rho_0 P^2} \right| < 0,01$$

распределение давления с весьма высокой степенью точности представляется для всех значений r и t в виде:

$$p^2 = P^2 - \frac{q\mu p_0}{2\pi k H \rho_0} \operatorname{Ei}\left(-\frac{r^2}{8a^2 P t}\right). \quad (\text{IV.4.22})$$

Именно таким получилось бы решение задачи, если бы мы заменили в уравнении (IV.4.1), которое можно представить в форме

$$r \frac{\partial p^2}{\partial t} - 2a^2 p \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial p^2}{\partial r} = 0, \quad (\text{IV.4.1}^*)$$

множитель p во втором члене на значение $p = P$ этого множителя при $r = \infty$, т. е. если бы от уравнения (IV.4.1) при тех же граничных и начальных условиях перешли к линейному относительно p^2 уравнению

$$r \frac{\partial p^2}{\partial t} = 2a^2 P \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial p^2}{\partial r}. \quad (\text{IV.4.23})$$

Такой способ линеаризации уравнения (IV.4.1) был впервые предложен Л. С. Лейбензоном [71]. Приведенные расчеты показывают практически точное совпадение решения рассматриваемой нелинейной осесимметричной задачи с решением линеаризованной задачи. Успех линеаризации объясняется в данном случае тем, что в случае осесимметричных движений область движения разбивается на две части: 1) область квазистационарного движения и, соответствующая малым значениям ξ , в которой сосредоточивается основная часть всего перепада давления, но поток газа почти постоянен, и 2) — область малых депрессий (перепадов давления), в которой поток газа сравнительно медленно уменьшается, а перепады давлений малы,

В области квазистационарного движения не только разность величин $r \frac{\partial p^2}{\partial t}$ и $2a^2 p \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial p^2}{\partial r}$ равна нулю, как это следует из уравнения (IV.4.1), но и каждая из этих величин сама по себе исчезающе мала (сравнительно со значениями этих величин в тех точках, где они максимальны). Поэтому в этой области поток газа, равный $-\frac{\pi k H p_0}{\mu p_0} \left(r \frac{\partial p^2}{\partial r} \right)$, почти постоянен, а величина множителя при втором члене уравнения (IV.4.1) незначительна, и с большой степенью точности можно заменить в этом множителе $p(r, t)$ на $P(r, t)$. В области же малых депрессий, в определенной части которой оба члена уравнения (IV.4.1) существенно отличаются от нуля, возможность такой замены обусловливается малостью разности $p(r, t) - P$.

Обнаруженная допустимость линеаризации при описании нелинейных осесимметричных движений вне зависимости от величины возникающего перепада давления позволяет сделать важные выводы применительно к более общим классам движения.

Заметим теперь, что в реальных задачах задается поток газа через скважину хотя и малого, но конечного фиксированного радиуса, так что граничное условие на скважине на основании выражения (IV.4.3) имеет вид:

$$\left(r \frac{\partial p^2}{\partial r} \right)_{r=R} = -\frac{q \mu p_0}{\pi k H p_0}. \quad (\text{IV.4.24})$$

Покажем, что построенное выше автомодельное решение удовлетворяет с большой степенью точности этому условию уже спустя несколько секунд после начала процесса.

В самом деле, на основании (IV.4.5) имеем

$$\left(r \frac{\partial p^2}{\partial r} \right)_{r=R} = P^2 \left(\xi \frac{dF_1^2}{d\xi} \right)_{\xi=R/\sqrt{a^2 P t}}. \quad (\text{IV.4.25})$$

Численные расчеты, проведенные для кривой $\lambda = -0,0099999$, показывают (см. табл. IV.4), что уже при $\xi = 0,1582$ значение функции $\xi dF_1^2/d\xi$ равно 0,009968, т. е. отличается от $-\lambda$ менее чем на 0,5% и еще менее при меньших ξ .

При радиусе скважины $R \approx 10$ см, проницаемости $k \approx 1$ д = $= 10^{-8}$ см², пористости $m \approx 0,2$, вязкости $\mu \approx 10^4$ г/см·сек, величина $a^2 P = \frac{kP}{2m\mu}$ имеет порядок $10^3 \div 10^4$ см²/сек, и тогда уже при $t = 3$ сек

$$\xi = R/\sqrt{a^2 P t} < 0,19.$$

Поэтому можно с весьма высокой степенью точности полагать при $t > 3$ сек

$$\left(\xi \frac{dF_1^2}{d\xi} \right)_{\xi=R/\sqrt{a^2 P t}} = -\lambda.$$

Используя это обстоятельство в соотношении (IV.4.25), получаем, что спустя несколько секунд после начала движения автомодельное

решение (IV.4.5) с большой степенью точности удовлетворяет уравнению

$$\left(-r \frac{\partial p^2}{\partial r}\right)_{r=R} = \lambda P^2 = \frac{qH P_0}{\pi k H r_0},$$

т. е. граничному условию (IV.4.24).

Как было показано выше, встречающиеся на практике значения параметра λ по модулю значительно меньше, чем рассмотренное только что значение, примерно равное $-0,08$. Поэтому для меньших λ условие (IV.4.24) будет удовлетворяться еще быстрее.

Выше было отмечено, что автомодельные решения при $\lambda < 0$ соответствуют отбору газа из пласта через расширяющуюся со временем скважину. Покажем теперь, что это неестественное, на первый взгляд, свойство решений не препятствует применению их к реальным задачам, поскольку для представляющего практический интерес времени расширяющаяся (фиктивная) скважина всегда остается внутри настоящей скважины. Для этого определим порядок величины $\bar{\xi}(\lambda)$ — координаты точек подхода кривой $F_1(\xi, \lambda)$ при $\lambda < 0$ к оси абсцисс. Как было отмечено выше, при $\xi \leq \xi_*$, т. е. в частности, при $\xi = \bar{\xi}(\lambda)$, функция $F_1(\xi, \lambda)$ с высокой степенью точности удовлетворяет соотношению (IV.4.16):

$$F_1^2(\xi, \lambda) - F_1^2(\xi_*, \lambda) = \lambda \ln \frac{\xi}{\xi_*}.$$

Полагая в этом соотношении $\xi = \bar{\xi}(\lambda)$, $F_1(\xi, \lambda) = 0$, получаем

$$F_1^2(\xi_*, \lambda) = \lambda \ln \frac{\bar{\xi}(\lambda)}{\xi_*}; \quad \bar{\xi}(\lambda) = \xi_* e^{\frac{1}{\lambda} F_1^2(\xi_*, \lambda)}$$

При $\lambda = -0,08$, $F_1(\xi_*, \lambda) \approx 0,72$ значение $\xi_* = 0,0050$, откуда $\bar{\xi}(\lambda) \approx 0,005 e^{-6,5} = 0,75 \cdot 10^{-5}$. Как показывает формула (IV.4.12), промежутки времени T , за который расширяющаяся внутренняя скважина достигает размеров настоящей скважины, составляет

$$T = \frac{R^2}{\bar{\xi}^2 a^2 P},$$

что в силу предыдущих оценок для $\bar{\xi}$, $a^2 P$ и R дает примерно $T = 2 \cdot 10^8$ сек — около шести лет. Отметим, что значение $\lambda = -0,08$ очень велико сравнительно со значениями, встречающимися на практике. При уменьшении λ величина T резко возрастает: так, при $\lambda = -0,01$ $T \approx 10^{75}$ лет. Таким образом, для реальных задач расширяющаяся (фиктивная) скважина всегда остается внутри настоящей.

Приведенные выше оценки показывают, что рассматриваемое автомодельное решение является вполне пригодным для реальных задач.

Автомодельность рассматриваемой в настоящей рубрике задачи была отмечена Л. С. Лейбензоном [72] и П. Я. Полубариновой-Ко-

чиной [94]. Изложенное выше решение этой задачи дано Г. И. Баренблаттом [12, 9]. Численные расчеты были выполнены под руководством Н. П. Трифонова [24].

§ 5. НЕКОТОРЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ДВИЖЕНИЯ

В этом параграфе будут изложены решения некоторых автомодельных задач нестационарной фильтрации, представляющих специальный интерес. В связи с тем, что методическая сторона построения подобных решений достаточно выяснена в предыдущих параграфах, изложение здесь будет более кратким; читатель, интересующийся подробностями вычислений, сможет найти их в цитируемой литературе.

1. Подъем уровня жидкости при прекращении фильтрации в пустой резервуар и при набегании переднего фронта жидкости на препятствие. Пусть начальному моменту $t=0$ соответствует стационарное распределение уровня жидкости, отвечающее положому безнапорному истечению жидкости из пласта в пустой резервуар. Если вторая граница пласта находится достаточно далеко, то пласт можно считать полубесконечным; начальное распределение уровня жидкости $h_0(x)$, удовлетворяющее уравнению (IV.3.1) и условию $h_0(0) = 0$, представляется в виде:

$$h(x, 0) = h_0(x) = \sqrt{\frac{2q\mu x}{k\rho g}}, \quad (\text{IV.5.1})$$

где q — постоянный поток жидкости, вытекающей из пласта. Заметим, что возвышение свободной поверхности с увеличением x безгранично возрастает; однако это не имеет значения, поскольку, рассматривая бесконечный пласт, мы интересуемся только начальной стадией движения, когда возмущения стационарного режима, производимые вблизи границы $x=0$, несущественно сказываются вблизи второй границы.

Предположим теперь, что в начальный момент времени граница пласта $x=0$ внезапно изолируется, так что истечение жидкости через нее прекращается. Рассмотрим последующий процесс подъема уровня жидкости. Поток жидкости на границе при $x=0$ равен нулю; это дает условие

$$\frac{\partial h^2}{\partial x} = 0 \quad (t > 0). \quad (\text{IV.5.2})$$

Как следует из анализа размерности, решение уравнения (IV.3.1) при условиях (IV.5.1) и (IV.5.2) автомодельно и представляется в виде:

$$h = \sqrt{\frac{2q\mu x}{k\rho g}} G(\zeta); \quad \zeta = \frac{x}{\left(at \sqrt{\frac{2q\mu}{k\rho g}}\right)^{1/2}} = \frac{x}{\left(\frac{t}{m} \sqrt{\frac{k\rho g q}{2\mu}}\right)^{1/2}}. \quad (\text{IV.5.3})$$

Положим $G(\xi) = \xi^{-1/2} g(\xi)$; $\xi = \zeta \sqrt{\frac{4}{3}}$. Тогда в соответствии с уравнением (IV.3.4) и условиями (IV.5.1) и (IV.5.2) функция $g(\xi)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 g^2}{d\xi^2} + \frac{1}{2} \xi \frac{dg}{d\xi} - \frac{1}{4} g = 0, \quad (\text{IV.5.4})$$

совпадающему с уравнением (IV.1.7) при $\lambda = 1/4$, при краевых условиях

$$\left. \frac{dg^2}{d\xi} \right|_{\xi=0} = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{g(\xi)}{\sqrt{\xi}} = \sqrt{\frac{4}{3}}. \quad (\text{IV.5.5})$$

Построим функцию $g_0(\xi)$ — решение задачи Коши для уравнения (IV.5.4), удовлетворяющее условиям $g_0(0) = 1$, $g'_0(0) = 0$.

Как показывает исследование, приведенное в § 1, при $\xi \rightarrow \infty$ для функции $g_0(\xi)$, принадлежащей к интегральным кривым I класса уравнения (IV.5.4), справедливо соотношение $\lim_{\xi \rightarrow \infty} g_0(\xi)/\sqrt{\xi} = \text{const}$; согласно вычислению константа равна 0,7772, и функция $g_0(\xi)$ удовлетворяет уравнению (IV.5.4) и первому условию (IV.3.5), но не удовлетворяет второму условию (IV.3.5). Поскольку функция $\mu^2 g_0(\mu \xi)$ удовлетворяет уравнению (IV.5.4) и первому условию (IV.5.5) при любом μ , то, выбирая $\mu = \mu_* = 0,8763$, получаем, что функция $g(\xi) = \mu_*^{-2} g_0(\mu_* \xi)$ удовлетворяет всем условиям задачи, и решение представляется в виде:

$$h = \sqrt[3]{\frac{2q^2 \mu t}{mk\rho g}} g \left[\frac{2x \sqrt{3}}{\left(\frac{t}{m} \sqrt{\frac{k\rho g q}{2\mu}} \right)^{2/3}} \right] = 1,260 \sqrt[3]{\frac{q^2 \mu t}{mk\rho g}} g \left[\frac{1,633x}{\left(\frac{t}{m} \sqrt{\frac{k\rho g q}{\mu}} \right)^{2/3}} \right] \quad (\text{IV.5.6})$$

Значения функции $g(\xi)$ приведены на рис. IV.13. В частности, при $x = 0$, т. е. на границе пласта, уровень жидкости возрастает со временем по закону

$$h(0, t) = 1,641 \sqrt[3]{\frac{q^2 \mu t}{mk\rho g}}. \quad (\text{IV.5.7})$$

Рассмотренные выше примеры автомоделных движений показывают, что передний фронт жидкости распространяется по сухому водоупору с конечной скоростью, причем свободная поверхность подходит к точке своего соприкосновения с водоупором под острым углом и вблизи этой точки имеет форму наклонной плоскости.

Следующее рассуждение, принадлежащее Я. Б. Зельдовичу и А. С. Компанейцу [50], показывает, что это обстоятельство имеет место и в общем случае движения жидкости в сухом грунте. В самом деле, уравнение (IV.3.4), описывающее распределение уровня жидкости, можно переписать следующим образом:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = a^2 \left[2 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + 2h \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right]. \quad (\text{IV.5.8})$$

Но в точке $x_0(t)$ — на переднем фронте области, занятой жидкостью, выполняется соотношение $h[x_0(t), t] = 0$. Для определенности будем считать, что фронт движется справа налево. Тогда, дифференцируя последнее соотношение, находим

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_{x=x_0} \frac{dx_0}{dt} = 0; \quad \frac{\partial h}{\partial t} = \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_{x=x_0} v_0,$$

где v_0 — абсолютная мгновенная скорость перемещения границы этой области (сама скорость отрицательна). Подставляя эти соотношения в уравнение (IV.5.8), находим

$$v_0 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_{x=x_0} = 2a^2 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_{x=x_0}^2; \quad \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_{x=x_0} = \frac{v_0}{2a^2} = \frac{v_0 m \mu}{k \rho g}. \quad (\text{IV.5.9})$$

Отсюда получается, что вблизи переднего фронта распределение уровня жидкости имеет вид:

$$h = \frac{v_0 m \mu}{k \rho g} (x_0 - x), \quad (\text{IV.5.10})$$

причем в течение непродолжительных промежутков времени можно скорость перемещения переднего фронта считать постоянной.

Таким образом, приходим к следующей постановке задачи.

В начальный момент распределение уровня жидкости при $x > 0$ выражается, как

$$h(x, 0) = \frac{v_0 m \mu x}{k \rho g}. \quad (\text{IV.5.11})$$

На границе $x = 0$, соответствующей непроницаемому препятствию, поток жидкости равен нулю:

$$\left. \frac{\partial h^2}{\partial x} \right|_{x=0} = 0. \quad (\text{IV.5.12})$$

Распределение уровня жидкости $h(x, t)$, удовлетворяющее уравнению (IV.3.1) и условиям (IV.5.11) и (IV.5.12), автомодельно и может быть представлено в виде:

$$h = \frac{v_0^2 m \mu t}{2k \rho g} u(\xi); \quad \xi = \frac{2\sqrt{2}x}{v_0 t}. \quad (\text{IV.5.13})$$

Функция $u(\xi)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 u^2}{d\xi^2} + \frac{1}{2} \xi \frac{du}{d\xi} - \frac{1}{2} u = 0 \quad (\text{IV.5.14})$$

при граничных условиях

$$\left(\frac{du^2}{d\xi} \right)_{\xi=0} = 0; \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{u(\xi)}{\xi} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (\text{IV.5.15})$$

Решение $u(\xi)$ краевой задачи (IV.5.14)–(IV.5.15) выражается, как и в предыдущем случае, через решение задачи Коши для

уравнения (IV.5.14), удовлетворяющее условиям $u_0(0) = 1$, $u'_0(0) = 0$. Значения функции $u(\xi)$ приведены на рис. IV.14. В частности, уровень жидкости на самом препятствии, т. е. при $x = 0$, возрастает по закону

$$-h(0, t) = 1,79 \frac{m\mu t}{k\rho g}. \quad (\text{IV.5.16})$$

2. Напорно-безнапорное движение при нулевом начальном уровне жидкости. Рассмотрим однородный пласт конечной мощности H . Пусть вначале пласт был заполнен неподвижной жидкостью до уровня $h_\infty < H$; в момент $t = 0$ на границе пласта $x = 0$ создается напор $h_0 > H$. Распределение напора в последующие моменты времени будет, очевидно, иметь вид, показанный на рис. IV.15. В части пласта, непосредственно примыкающей к начальному сечению $x = 0$, напор превысит величину H . Поэтому пласт будет заполнен жидкостью

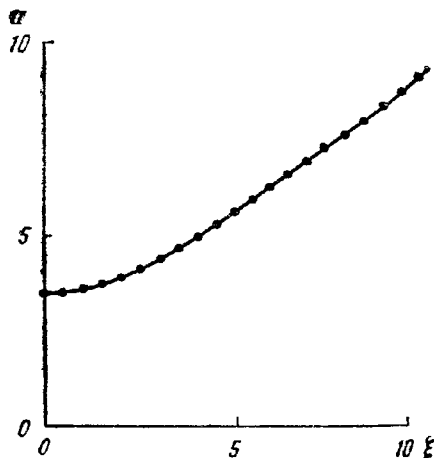


Рис. IV.14

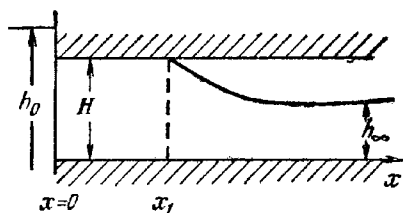


Рис. IV.15

целиком, и движение на этом участке будет напорным. В некоторой точке $x = x_1$ напор сравняется с H и при $x > x_1$ движение станет безнапорным. Если пласт вначале не содержал жидкости ($h_\infty = 0$), то зона движения распространяется с конечной скоростью; если начальный уровень отличается от нуля, то движение сразу захватывает весь пласт. Сформулированная задача имеет автомодельное решение:

$$h = H f_0(\xi); \quad \xi = x \sqrt{\frac{m\mu}{kH\rho g t}}. \quad (\text{IV.5.17})$$

При этом от $\xi = 0$ до $\xi_1 = x_1 \left(\frac{m\mu}{kH\rho g t} \right)^{1/2}$ движение является напорным, а от $\xi = \xi_1$ и далее — безнапорным. При нулевом начальном уровне жидкости область безнапорного движения простирается до некоторого конечного значения

$$\xi = \xi_2 = x_2 \left(\frac{m\mu}{kH\rho g t} \right)^{1/2}.$$

Читатель легко закончит построение автомодельного решения задачи о напорно-безнапорном движении при нулевом начальном уровне жидкости, используя для эффективного построения решения автомодельные решения § 1.

3. Решения типа мгновенных источников для задач политропической фильтрации термодинамически идеального газа. Пусть в бесконечном объеме пористой среды происходит фильтрация газа при политропической связи плотности и давления фильтрующегося газа. Предполагая движение одномерным, имеем уравнение для плотности газа в виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = a^2 \frac{1}{r^s} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^s \frac{\partial \rho^{n+1}}{\partial r} \right); \quad a^2 = \frac{k n p_*}{\mu m (n+1) \rho_*^n}; \quad (\text{IV.5.18})$$

$$p = \frac{p_*}{\rho_*^n} \rho^n,$$

где r — пространственная координата, т. е. расстояние рассматриваемой точки пористой среды от плоскости отсчета при движении газа плоскими волнами, расстояние этой точки от оси симметрии движения — при осесимметричном движении газа и расстояние ее от центра симметрии — при центрально-симметричном движении газа, а s соответственно равно нулю, единице или двум для этих трех типов симметрии движения. Начальное давление и плотность газа предполагаем пренебрежимо малыми во всей области пористой среды, так что начальное условие и условие на бесконечности имеют для рассматриваемой группы задач вид:

$$\rho(r, 0) \equiv 0; \quad \rho(\infty, t) = 0. \quad (\text{IV.5.19})$$

Излагаемые ниже решения соответствуют «мгновенным» источникам. Для движения газа плоскими волнами это означает, что в начальный момент некоторая масса газа сосредоточена вблизи плоскости начала отсчета $r = 0$. Для осесимметричных и центрально-симметричных движений это означает, что некоторая масса газа сосредоточена в начальный момент вблизи оси или, соответственно, центра симметрии, которым также соответствует значение $r = 0$. Поскольку во время движения не происходят никакие процессы, приводящие к исчезновению или появлению газа, должны выполняться некоторые соотношения, выражающие сохранение полной массы газа во всем объеме пористой среды; эти соотношения записываются в виде:

$$\int_0^\infty \rho m dr = M_0; \quad \int_0^\infty \rho m r dr = \frac{M_1}{2\pi}; \quad \int_0^\infty \rho m r^2 dr = \frac{M_2}{4\pi}. \quad (\text{IV.5.20})$$

Рассматриваемые решения представляют, например, для случая движения газа плоскими волнами, удобную схематизацию реальных движений, возникающих в пористой среде, когда определенная масса газа сосредоточивается под большим давлением, значительно

превышающим давление в остальных точках пористой среды, а затем растекается по пласту.

Умножая обе части уравнения (IV.5.18) на r^s и интегрируя от $r = 0$ до $r = \infty$, пользуясь условиями (IV.1.3) и тем, что поток газа на бесконечности, пропорциональный $\left(r^s \frac{\partial \rho^{n+1}}{\partial r}\right)_{r \rightarrow \infty}$, равен нулю¹, получаем

$$\left(r^s \frac{\partial \rho^{n+1}}{\partial r}\right)_{r=0} = 0. \quad (\text{IV.5.21})$$

Используя соображения размерности, получим следующие выражения для плотности газа при осесимметричном и центрально-симметричном движении его плоскими волнами:

$$\rho = \left(\frac{M_0^2}{a^2 m^2 t}\right)^{\frac{1}{n+2}} f_0 \left[\frac{r}{\left(\frac{M_0^n a^2 t}{m^n}\right)^{\frac{1}{n+2}}} \right]; \quad (\text{IV.5.22})$$

$$\rho = \left(\frac{M_1}{2\pi a^2 m t}\right)^{\frac{1}{n+1}} f_1 \left[\frac{r}{\left(\frac{M_1^n a^2 t}{(2\pi m)^n}\right)^{\frac{1}{2n+2}}} \right]; \quad (\text{IV.5.23})$$

$$\rho = \left(\frac{M_2^{2/s}}{(4\pi m)^{2/s} a^2 t}\right)^{\frac{3}{3n+2}} f_2 \left[\frac{r}{\left(\frac{M_2^n a^2 t}{(4\pi m)^n}\right)^{\frac{1}{3n+3}}} \right]. \quad (\text{IV.5.24})$$

Здесь функции $f_s(\xi)$ | ξ обозначает в каждом случае свой безразмерный аргумент функции f_s в формулах (IV.5.22) — (IV.5.24) | удовлетворяют уравнению

$$\frac{d^2 f_s^{n+1}}{d\xi^2} + \frac{s}{\xi} \frac{d f_s^{n+1}}{d\xi} + \frac{1}{sn+2} \xi \frac{d f_s}{d\xi} + \frac{s+1}{sn+2} f_s = 0 \quad (\text{IV.5.25})$$

и условиям

$$\int_0^\infty f_s(\xi) \xi^s d\xi = 1; \quad \left(\xi^s \frac{d f_s^{n+1}}{d\xi}\right)_{\xi=0} = 0 \quad (s=0, 1, 2). \quad (\text{IV.5.26})$$

Из непрерывности плотности газа ρ и потока газа $\rho \vec{u} = -\frac{k}{\mu} \rho \text{grad } p = -\frac{k\beta^n n \text{grad } \rho^{n+1}}{\mu(n+1)}$ следует, что функции ρ и $\text{grad } \rho^{n+1}$ должны быть непрерывными. Для одномерных движений это влечет за собой непрерывность ρ и $\partial \rho^{n+1} / \partial r$, а для рассматриваемых нами автомодельных задач — непрерывность $f_s(\xi)$ и $d f_s^{n+1} / d\xi$.

¹ В противном случае не выполнялось бы условие на бесконечности — второе условие (IV.5.19).

Умножив обе части уравнения (IV.5.25) на ξ^s , получим в левой части этого уравнения полную производную. Интегрируя, найдем первый интеграл в виде:

$$\xi^s \frac{df_s^{n+1}}{d\xi} + \frac{1}{sn+2} \xi^{s+1} f_s = C_s. \quad (\text{IV.5.27})$$

Заметим теперь, что $\xi^{s+1} f_s(\xi)$ стремится к нулю при $\xi \rightarrow 0$, иначе интегралы в условиях (IV.5.26) расходились бы при $\xi = 0$. Поэтому, полагая в уравнении (IV.5.27) $\xi = 0$ и используя условие (IV.5.26), получим $C_0 = C_1 = C_2 = 0$. Имея это в виду и интегрируя еще раз соотношения (IV.5.27), легко найдем выражения для $f_s(\xi)$ в виде:

$$f_s(\xi) = \left[\frac{n}{2(n+1)(sn+2)} (e_s - \xi^2) \right]^{1/n}; \quad 0 \leq \xi \leq \sqrt{e_s};$$

$$f_s(\xi) \equiv 0 \quad (\xi \geq \sqrt{e_s}), \quad (\text{IV.5.28})$$

где e_s — постоянная интегрирования. Как нетрудно видеть, эти решения удовлетворяют сформулированным выше требованиям непрерывности f_s и $df_s^{n+1}/d\xi$.

Из первого соотношения (IV.5.26) получаем

$$e_0 = \left(\frac{2(n+1)(n+2)}{n} \right)^{\frac{2}{n+2}} \left[\frac{2\Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{n}\right)} \right]^{\frac{2n}{n+2}}; \quad (\text{IV.5.29})$$

$$e_1 = \left(2 \frac{1+n}{n} \right)^{\frac{n}{n+1}} \left[\frac{4(n+1)^2}{n} \right]^{\frac{1}{n+1}} = [2(1+n)]^{\frac{n+2}{n+1}} n^{-1}; \quad (\text{IV.5.30})$$

$$e_2 = \left[\frac{2(n+1)(3n+2)}{n} \right]^{\frac{2}{3n+2}} \left[\frac{2\Gamma\left(\frac{5}{2} + \frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \right]^{\frac{2n}{3n+2}}, \quad (\text{IV.5.31})$$

где Γ — гамма-функция Эйлера. Окончательно имеем выражения для распределений плотности газа в виде:

$$\rho_0 = \begin{cases} \left[\frac{M_0^2}{a^2 m^2 t} \right]^{\frac{1}{n+2}} \left\{ \frac{n}{2(n+1)(n+2)} \left[e_0 - r^2 \left(\frac{m^n}{M_0^n a^2 t} \right)^{\frac{2}{n+2}} \right] \right\}^{1/n} & 0 \leq r \leq r_0(t); \\ 0 & r \geq r_0 = \sqrt{e_0} \left(\frac{M_0^n a^2 t}{m^n} \right)^{\frac{1}{n+2}}; \end{cases} \quad (\text{IV.5.32})$$

$$\rho_1 = \begin{cases} \left[\frac{M_1}{2\pi a^2 m t} \right]^{\frac{1}{n+1}} \left\{ \frac{n}{4(n+1)^2} \left[e_1 - r^2 \left(\frac{(2\pi m)^n}{M_1^n a^2 t} \right)^{\frac{2}{1+n}} \right] \right\}^{1/n} & 0 \leq r \leq r_1(t); \\ 0 & r \geq r_1(t) = \sqrt{e_1 \left(\frac{M_1^n a^2 t}{2\pi m} \right)^{\frac{1}{1+n}}}; \end{cases} \quad (\text{IV.5.33})$$

$$\rho_2 = \begin{cases} \left[\frac{M_2^{2/3}}{(4\pi m)^{2/3} a^2 t} \right]^{\frac{3}{3n+2}} \left\{ \frac{n}{2(n+1)(3n+2)} \left[e_2 - \frac{r^2}{\left(\frac{M_2^n a^2 t}{(4\pi m)^n} \right)^{\frac{2}{3n+2}}} \right] \right\}^{1/n} & 0 \leq r \leq r_2(t); \\ 0 & r \geq r_2(t) = \sqrt{e_2 \left[\frac{M_2^n a^2 t}{(4\pi m)^n} \right]^{\frac{1}{3n+2}}}. \end{cases} \quad (\text{IV.5.34})$$

Как видно, эти решения непрерывны и обладают непрерывной производной $\partial \rho^{n+1} / \partial r$. Однако производная $\partial \rho / \partial r$ имеет в точке $r = r_s(t)$ разрыв, так что построенные решения не относятся к классическим решениям уравнения в частных производных (IV.5.18) и являются его обобщенными решениями.

Интересно проследить, как при стремлении n к нулю решения (IV.5.32)–(IV.5.34) переходят в известные решения типа мгновенного источника классического линейного уравнения теплопроводности. Рассмотрим это на примере решения (IV.5.32). Имеем при $r \leq r_0(t)$

$$\rho_0 = \left[\frac{M_0^2}{a^2 m^2 t} \right]^{\frac{1}{n+2}} \left\{ \left[\frac{n e_0}{2(n+1)(n+2)} \right]^{1/n} \left[1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right]^{1/n} \right\}.$$

Воспользовавшись формулой Стирлинга для Γ -функции при больших значениях аргумента

$$\Gamma(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{e}} e^{-z} [z(z+1)]^{\frac{z}{2} + \frac{1}{4}} \quad (z \gg 1) \quad (\text{IV.5.35})$$

и тем, что $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, получим при $n \rightarrow 0$ известное выражение для решения типа мгновенного источника классического линейного уравнения теплопроводности:

$$\frac{M_0}{m \sqrt{a^2 \pi t}} e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}} \quad (\text{IV.5.36})$$

(отсутствие обычной двойки в знаменателе объясняется тем, что мы приняли полную массу газа равной $2M_0$, а не M_0).

На рис. IV.16 изображены распределения плотности газа в некоторый момент времени, соответствующие различным значениям n при одинаковых значениях всех прочих параметров. Как видно

из рисунка, при $n > 1$ кривая распределения плотности подходит к границе области, занятой газом, под прямым углом. При $n = 1$ эта кривая подходит к границе области, занятой газом, под острым углом. При $0 < n < 1$ кривая распределения плотности газа подходит к границе области, занятой газом, под нулевым углом, касаясь оси абсцисс в конечной точке, координата которой возрастает с уменьшением n . Во всех этих случаях имеет место конечная скорость распространения переднего фронта области, занятой газом. Предельному случаю $n = 0$ (классическое линейное уравнение теплопроводности) соответствует, как известно, бесконечная скорость распространения переднего фронта.

Рассмотренные выше движения были впервые исследованы в работе Я. Б. Зельдовича и А. С. Компанейца [50] применительно

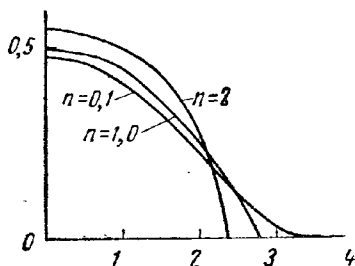


Рис. IV.16

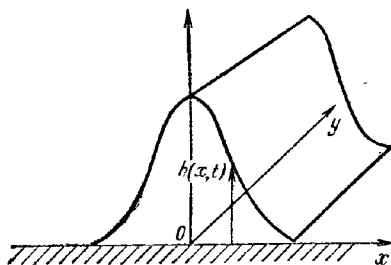


Рис. IV.17

к математически аналогичной задаче теории теплопроводности и независимо — применительно к задаче теории фильтрации в работе Г. И. Баренблатта [5].

4. Задача о растекании бугра жидкости на непроницаемом горизонтальном водоупоре. Полученные в предыдущей рубрике решения могут быть использованы, благодаря аналогии между пологими безнапорными движениями несжимаемой жидкости и изотермической фильтрацией термодинамически идеального газа (см. гл. II), для построения решения некоторых интересных задач пологих безнапорных движений.

Предположим, что в пласте бесконечной мощности, лежащем на непроницаемом водоупоре, тем или иным способом создается бугор жидкости, который затем растекается под действием силы тяжести по всему водоупору (рис. IV.17). Рассмотрим две простейшие схемы. В первом случае предположим, что бугор жидкости сильно вытянут в одном направлении, так что картину движения можно считать не зависящей от координаты, отсчитываемой в этом направлении; обозначим ее через y . Таким образом, возвышение свободной поверхности над водоупором h зависит только от времени t и координаты x , отсчитываемой в перпендикулярном направлении, и удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial h}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2}; \quad a^2 = \frac{k\rho g}{2\mu}. \quad (\text{IV.5.37})$$

Предполагая, далее, что бугор жидкости в начальный момент сосредоточен в очень узкой области вблизи линии $x = 0$, получаем начальное условие и условие на бесконечности в виде $h(x, 0) = 0$ ($x \neq 0$); $h(\infty, t) = 0$. Далее, суммарное количество жидкости, приходящееся на единицу ширины бугра в процессе движения, постоянно, так что

$$\int_0^{\infty} h dx = \frac{M_0}{m}. \quad (\text{IV.5.38})$$

Эта задача в точности аналогична рассмотренной ранее задаче о мгновенном источнике при изотермической фильтрации газа плоскими волнами ($n = 1$), причем вместо плотности газа фигурирует высота h свободной поверхности. Перенимая решение (IV.5.32) при $n = 1$ в новых терминах, получим решение задачи о растекании сосредоточенного плоского бугра в виде:

$$h = \left[\frac{M_0^2}{a^2 m^2 t} \right]^{1/3} \frac{18^{2/3}}{12} \left[1 - \frac{x^2}{\left(\frac{18 M_0 a^2 t}{m} \right)^{2/3}} \right]; \quad (\text{IV.5.39})$$

$$0 \leq x \leq x_0(t) = \left(\frac{18 M_0 a^2 t}{m} \right)^{1/3}$$

и $h \equiv 0$ при $x \geq x_0(t)$.

Во втором случае предположим, что форма начального бугра жидкости симметрична относительно некоторой вертикальной оси. Тогда и все последующее движение будет обладать симметрией относительно этой оси, и возвышение свободной поверхности будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial h}{\partial t} = a^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial h^2}{\partial r}, \quad a^2 = \frac{k \rho g}{2 m \mu}, \quad (\text{IV.5.40})$$

где r — расстояние от оси симметрии.

Если считать, что начальный бугор сосредоточен в малой окрестности оси симметрии, то начальное условие и условие на бесконечности имеют вид $h(r, 0) \equiv 0$, ($r \neq 0$); $h(\infty, t) = 0$. Условие постоянства всей массы жидкости в пласте M_1 имеет вид:

$$2\pi m \int_0^{\infty} h(r, t) r dr = M_1. \quad (\text{IV.5.41})$$

Эта задача в свою очередь в точности аналогична задаче о мгновенном источнике при изотермической осесимметричной фильтрации газа, только вместо плотности газа в задаче учитывается высота свободной поверхности.

Полагая в решении (IV.5.33) $n = 1$ и переписывая его в обозначениях новой задачи, получаем решение этой задачи в виде:

$$h = \left[\frac{M_1}{2\pi a^2 m t} \right]^{1/2} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left[1 - \frac{r^2}{8 \left(\frac{M_1 a^2 t}{2\pi m} \right)^{1/2}} \right]; \quad (\text{IV.5.42})$$

$$0 \leq r \leq r_1(t) = \sqrt{8} \left(\frac{M_1 a^2 t}{2\pi m} \right)^{1/4}$$

$$\text{и } h \equiv 0 \text{ при } r \geq r_1(t).$$

5. Решение типа диполя. Рассмотрим политропическую фильтрацию термодинамически идеального газа в полубесконечном пласте с плоской границей. Предположим, что до начала движения давление и плотность газа в пласте пренебрежимо малы. В начальный момент в пласт через границу мгновенно внедряется некоторое количество газа, после чего давление и плотность газа на границе становятся равными нулю. Исследуем процесс растекания газа по пласту. Фильтрация газа происходит плоскими волнами, так как все характеристики движения зависят только от времени t и координаты x , отсчитываемой по нормали к плоскости границы пласта, которой приписывается значение координаты $x = 0$. Плотность газа удовлетворяет при этом уравнению

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \rho^{n+1}}{\partial x^2}; \quad a^2 = \frac{k n p_*}{\mu m (n+1) \rho_*^2}. \quad (\text{IV.5.43})$$

Поскольку внедрение газа в пласт происходит, по предположению, мгновенно, а начальная плотность газа пренебрежимо мала, начальное условие и условие на бесконечности для рассматриваемой задачи имеют вид:

$$\rho(x, 0) \equiv 0 \quad (x \neq 0); \quad \rho(\infty, t) \equiv 0. \quad (\text{IV.5.44})$$

Умножив теперь обе части уравнения (IV.5.43) на x и проинтегрировав от $x = 0$ до $x = \infty$, получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^\infty \rho x dx &= a^2 \int_0^\infty x \frac{\partial^2 \rho^{n+1}}{\partial x^2} dx = a^2 \left(x \frac{\partial \rho^{n+1}}{\partial x} \right) \Big|_{x=0}^{x=\infty} - a^2 \int_0^\infty \frac{\partial \rho^{n+1}}{\partial x} dx = \\ &= a^2 \left(x \frac{\partial \rho^{n+1}}{\partial x} \right) \Big|_{x=0}^{x=\infty} + a^2 \rho^{n+1}(0, t) - a^2 \rho^{n+1}(\infty, t). \end{aligned}$$

Но выражение $(x \partial \rho^{n+1} / \partial x)_{x=\infty}$ равно нулю в силу условия на бесконечности $\rho(\infty, t) = 0$; если бы эта величина была не равна нулю, то условие равенства нулю плотности на бесконечности не было бы выполнено. Далее, величина $(x \partial \rho^{n+1} / \partial x)_{x=0}$ равна нулю, так как иначе плотность при $x = 0$ была бы бесконечной. Так как по условию

в течение процесса плотность газа на границе $x = 0$ равна нулю, предыдущее соотношение даст

$$\frac{d}{dt} \int_0^{\infty} \rho x dx = 0; \quad \int_0^{\infty} \rho x dx = Q = \text{const}, \quad (\text{IV.5.45})$$

причем постоянная Q характеризует в некотором смысле количество газа, мгновенно поступившего в пласт в начале процесса. Таким образом, рассматриваемый процесс характеризуется постоянством «статического момента» распределения плотности.

Из анализа размерности видно, что решение рассматриваемой задачи, т. е. решение уравнения (IV.5.43) при условиях (IV.5.44) и (IV.5.45), является автомодельным и представляется в виде:

$$\rho = \left(\frac{Q}{a^2 t} \right)^{\frac{1}{n+1}} f(\xi); \quad \xi = \frac{x}{(a^2 Q^n t)^{\frac{1}{2(n+1)}}}. \quad (\text{IV.5.46})$$

Подставляя выражение (IV.5.46) в уравнение (IV.5.43) и условие (IV.5.45), получаем для определения функции $f(\xi)$ краевую задачу

$$\frac{d^2 f^{n+1}}{d\xi^2} + \frac{1}{2(n+1)} \xi \frac{df}{d\xi} + \frac{1}{n+1} f = 0; \quad (\text{IV.5.47})$$

$$\int_0^{\infty} \xi f(\xi) d\xi = 1; \quad f(0) = 0,$$

причем по-прежнему в силу необходимой непрерывности плотности и потока газа функция $f(\xi)$ должна быть непрерывной и иметь непрерывную производную $df^{n+1}/d\xi$.

Искомое решение этой краевой задачи имеет вид:

$$f(\xi) = \begin{cases} q \left(\frac{\xi}{\xi_0} \right)^{\frac{1}{n+1}} \left[1 - \left(\frac{\xi}{\xi_0} \right)^{\frac{n+2}{n+1}} \right]^{1/n}; & 0 \leq \xi \leq \xi_0, \\ 0 & \xi \geq \xi_0, \end{cases} \quad (\text{IV.5.48})$$

где

$$q = \left[\frac{n}{2(n+1)(n+2)} \right]^{1/n} \xi_0^{2/n},$$

а константа ξ_0 определяется из условия (IV.5.47) аналогично тому, как это делалось для источников:

$$\xi_0 = 2^{\frac{1}{2(n+1)}} (n+2)^{1/2} (n+1)^{-\frac{n-1}{2(n+1)}} n^{-\frac{1}{2(n+1)}} \left[B \left(\frac{n+1}{n}, \frac{2n+1}{n+2} \right) \right]^{\frac{n}{2(n+1)}} \quad (\text{IV.5.49})$$

(B — B -функция Эйлера).

Координата $x^*(t)$ переднего фронта области, давление газа в которой отличается от нуля, изменяется согласно соотношению

$$x^*(t) = \xi_0 (a^2 Q^n t)^{\frac{1}{2(n+1)}}. \quad (\text{IV.5.50})$$

Аналогично предыдущему можно показать, что при $n \rightarrow 0$ полученное решение стремится к известному решению типа диполя классического линейного уравнения теплопроводности.

Заметим, что построенное нами решение является предельным случаем для решений, рассмотренных в гл. IV, § 1, и соответствующим $n = 1$, $\alpha = -1/2$, $\lambda = -1$.

При $n = 1$ полученное решение можно интерпретировать с точки зрения задачи безнапорной фильтрации. Пусть на плоской границе $x = 0$ полубесконечного пласта, расположенного на горизонтальном водоупоре и не содержащего жидкости, внезапно создается очень высокий напор жидкости, а затем напор на границе вновь падает до нуля¹.

Возвышение свободной поверхности h удовлетворяет при этом уравнению (IV.5.37) и условию

$$\int_0^\infty h(x, t) x dx = Q, \quad (\text{IV.5.51})$$

которое получается из уравнения (IV.5.37), аналогично тому, как было получено условие (IV.5.40) из уравнения (IV.5.43).

Константа Q определяет количество внедренной в пласт в начале процесса жидкости. Полагая в соотношениях (IV.5.46) и (IV.5.48) $n = 1$ и переписывая эти соотношения в терминах рассматриваемой задачи безнапорного движения, получаем решение этой задачи в виде:

$$h = \sqrt{\frac{Q}{a^2 t}} f \left[\frac{x}{(a^2 Q t)^{1/4}} \right]; \quad (\text{IV.5.52})$$

$$f = \begin{cases} \frac{\xi_0^2}{12} \left(\frac{\xi}{\xi_0} \right)^{1/2} \left[1 - \left(\frac{\xi}{\xi_0} \right)^2 \right] & 0 \leq \xi \leq \xi_0; \\ 0 & \xi \geq \xi_0 = 2\sqrt[4]{5}, \end{cases}$$

так что координата передней границы области, занятой жидкостью, изменяется со временем по закону

$$x^*(t) = 2\sqrt[4]{5a^2 Q t} = \sqrt[4]{\frac{40k\rho g Q t}{m\mu}}. \quad (\text{IV.5.53})$$

Координата точки $x^{**}(t)$, соответствующей максимальному возвышению свободной поверхности, определяется соотношением

$$x^{**}(t) = \frac{2}{(1+6\sqrt[4]{5})^{2/3}} \sqrt[4]{\frac{5k\rho g Q t}{2m\mu}}. \quad (\text{IV.5.54})$$

¹ Эта задача схематически описывает, например, фильтрационное движение, возникающее в стенках каналов после паводка.

На рис. IV.18 изображена форма свободной поверхности жидкости, соответствующая рассмотренному движению, для нескольких моментов времени (τ_0 — некоторый произвольно выбранный момент времени). Рассмотренное выше решение было получено в работе Г. И. Баренблатта и Я. Б. Зельдовича [19].

6. Автомоделные движения при произвольном уравнении состояния. Аналогия между безнапорной фильтрацией несжимаемой жидкости и фильтрацией термодинамически идеального газа может быть распространена на случай фильтрации газа с произвольным уравнением состояния и произвольной зависимостью вязкости от давления. При безнапорной фильтрации этому отвечает часто встречающийся случай движения

в слоистом грунте, свойства которого переменны по высоте.

Рассмотрим пологое безнапорное фильтрационное движение несжимаемой жидкости в грунте, проницаемость k и пористость m которого зависят от расстояния от горизонтального водоупора z . Если уровень жидкости в данном вертикальном сечении будет h , то в элементарном слое тол-

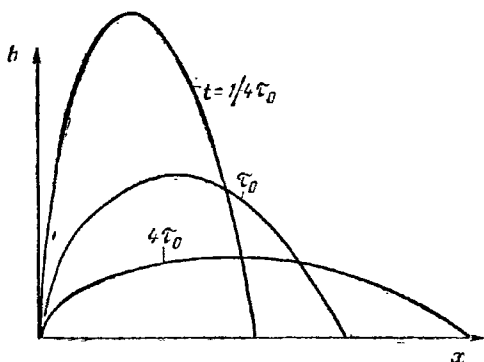


Рис. IV.18

щиной dx и шириной b содержится объем жидкости

$$H^* dx = \left(\int_0^h m(z) b(z) dz \right) dx. \quad (IV.5.55)$$

В то же время расход жидкости через это сечение составляет

$$- \left(\frac{\rho g}{\mu} \int_0^h b(z) k(z) dz \right) \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (IV.5.56)$$

где ρ — плотность жидкости.

Составляя обычным образом уравнение неразрывности, получим для напора h дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial H^*}{\partial t} = \frac{\rho g}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \Phi(h) \frac{\partial h}{\partial x}. \quad (IV.5.57)$$

где

$$\Phi(h) = \int_0^h k(z) b(z) dz$$

— неубывающая функция. Вводя функцию

$$P(h) = \int_0^h \Phi(\eta) d\eta, \quad (IV.5.58)$$

легко привести уравнение (IV.5.57) к стандартному виду:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \kappa_0 K(P) \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}, \quad (\text{IV.5.59})$$

где

$$\kappa_0 = \frac{\varphi(P_0) \rho g}{\mu m(P_0) b(P_0)}; \quad K(P) = \frac{\varphi(P_0) m(P_0) b(P_0)}{\varphi(P) m(P) b(P)} \quad (\text{IV.5.60})$$

(очевидно, φ , m и b можно считать известными функциями P).

Решение уравнения (IV.5.59) при условиях

$$P(0, x) = P_\infty; \quad P(t, 0) = P_0 \quad (\text{IV.5.61})$$

автомодельно. Будем рассматривать фильтрацию в сухой грунт, для которой $P_\infty = 0$. Искомое решение представится в виде:

$$P(t, x) = P_0 f(\xi); \quad \xi = \frac{x}{2\sqrt{\kappa_0 t}}, \quad (\text{IV.5.62})$$

где функция $f(\xi)$ удовлетворяет уравнению

$$K(P_0 f) f''(\xi) + 2\xi f' = 0. \quad (\text{IV.5.63})$$

Можно доказать, что если $k(z)$ и $m(z)$ принимают при малых z конечные значения, то, как и в задаче изотермической фильтрации газа, движение за конечное время охватывает лишь ограниченный участок пласта. Поэтому при $\xi \geq \xi_0$ $P \equiv 0$. Кроме того, из условия непрерывности расхода следует, что $f'(\xi_0) = 0$.

Мы видим, что задачи, отличающиеся конкретным видом функций $m(z)$, $b(z)$ и $k(z)$, сводятся к одинаковой краевой задаче для уравнений, отличающихся между собой лишь видом коэффициента K . Поэтому желательно, не решая уравнения (IV.5.63), составить представление о том, как меняется решение с изменением коэффициента K . Приведем следующий наиболее простой пример. Пусть функция f_1 удовлетворяет тем же краевым условиям, что и f , и уравнению вида (IV.5.63), но с некоторым другим коэффициентом K_1 . Предположим также, что функция $K(P)$ монотонно возрастает и что $K_1(P) \geq K(P)$. Тогда при всех ξ

$$f_1(\xi) \geq f(\xi). \quad (\text{IV.5.64})$$

Доказательство этого утверждения дано А. М. Пирвердяном [90], который использовал его также для оценки одних решений при помощи других, допускающих элементарное выражение.

Задачи к § 5.

1. Рассмотреть осесимметричные автомодельные решения задачи Коши для уравнения изотермической фильтрации термодинамически идеального газа

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \alpha^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial p^2}{\partial r}, \quad (\text{IV.5.65})$$

удовлетворяющие начальным условиям:

$$p(r, 0) = \sigma r^2; \quad \sigma = \text{const} > 0; \quad \alpha = \text{const} > 0$$

(Г. И. Баренблатт [5, 13]).

Ответ. При $0 < \alpha < 2$ решение задачи существует для любого значения времени и выражается в виде:

$$p(r, t) = \sigma (a^2 \sigma t)^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} \mu_*^{-2} \Phi \left[\frac{\mu_* r}{\sqrt{1-\alpha/2} (a^2 \sigma t)^{1/(2-\alpha)}} \right], \quad (\text{IV.5.66})$$

где $\Phi(\xi)$ — решение уравнения (IV.2.39) при $\lambda = \alpha/2$, удовлетворяющее начальным условиям

$$\Phi(0) = 1, \quad \Phi'(0) = 0.$$

$$\mu_* = \left[\frac{C(\alpha)}{(-\alpha/2)^{\alpha/2}} \right]^{\frac{1}{2-\alpha}}, \quad C(\alpha) = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \Phi(\xi) \xi^{-\alpha}, \quad (\text{IV.5.67})$$

При $\alpha = 2$ решение выражается в конечном виде:

$$p(r, t) = \frac{\sigma r^2}{1 - 16 a^2 \sigma t}. \quad (\text{IV.5.68})$$

Это решение существует лишь на конечном интервале значений времени t : $0 \leq t \leq T$, где $T = 1/16 a^2 \sigma$.

При $t = T$ оно обращается в бесконечность одновременно для всех значений r .

При $\alpha > 2$ решение рассматриваемой задачи Коши не единственно, поэтому при $\alpha > 2$ такая постановка задачи оказывается физически бессмысленной.

2. Рассмотреть автомодельные решения задачи Коши для движения газа плоскими волнами $p = p(x, t)$ в бесконечном пласте при начальных условиях:

$$p(x, 0) = \sigma_1 x^{\alpha_1} \quad (x > 0); \quad p(x, 0) = \sigma_2 (-x)^{\alpha_2} \quad (x < 0).$$

3. Рассмотреть случай выравнивания скачка давления

$$(\sigma_1 = P_1; \sigma_2 = P_2 \neq P_1, \alpha_1 = \alpha_2 = 0).$$

По аналогии между безнапорной фильтрацией и фильтрацией газа решение этой задачи в то же время описывает выравнивание уровней h_1 и h_2 подземных вод при безнапорной фильтрации. При $h_1 > H$, $h_2 = 0$ этот случай отвечает распространению первоначально вертикальной границы между жидкостью и газом в пласте мощностью H . Задача о таком движении границы возникает при проектировании подземного хранения газа [34].

Глава V

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Если не считать линейных задач, получение эффективного точного решения задач нестационарной фильтрации окажется скорее исключением, чем правилом. Однако и решения линейных задач, в принципе всегда доступные, не всегда удовлетворяют требованиям простоты и обозримости. В еще большей мере это относится к решениям (в этой книге не рассматриваемым), получаемым при помощи электронно-вычислительных машин.

Разнообразные технические задачи необходимо решать в сравнительно простой аналитической форме, допускающей качественный анализ решения в зависимости от параметров задачи. В связи с этим широкое применение получили приближенные методы. Большинство этих методов не имеет строгого обоснования, и их использование оправдывается главным образом тем, что при сопоставлении результатов с известными точными решениями получается удовлетворительное совпадение.

Прежде чем перейти к конкретному рассмотрению вопроса, укажем специфические особенности задач нестационарной фильтрации, которые во многом обуславливают успех применения приближенных методов.

1. Большинство задач нестационарной фильтрации сводится к уравнениям параболического типа, для которых характерно сглаживание возмущений со временем и по мере продвижения их внутрь области, для которой рассматривается решение.

2. В ряде задач, представляющих интерес для техники, решение имеет в некоторых точках области движения известные особенности, а вне окрестностей этих точек состояние системы близко к невозмущенному или к стационарному. Это обстоятельство имеет тем большее значение, что нелинейность многих задач проявляется лишь при значительном отклонении системы от стационарного состояния.

3. Практический интерес представляют интегральные характеристики решения.

Отмеченные особенности задач нестационарной фильтрации определяют и характер приближенных методов. В основном они состоят в том, что вначале ставится задача, близкая к данной и имеющая эффективное решение, а затем ищутся малые поправки к этому решению. В тех случаях, когда исходная задача имеет особенности, естественно ставить и вспомогательную задачу с теми же особенностями. Приближенные методы различаются в зависимости от того, какие задачи используются в качестве «ближких» и каким образом в решение вносятся дополнительные поправки.

Применение приближенных методов к конкретной задаче имеет свою специфику, особенно в связи с требованием эффективности. Поэтому, не пытаясь дать готовые рецепты для каждого метода, приведем примеры, из которых будет ясна и техника применения метода, и возможные осложнения при использовании его в иных обстоятельствах.

§ 1. СХЕМА МЕТОДА ИНТЕГРАЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЙ. ПРИТОК К ГАЛЕРЕЕ В БЕСКОНЕЧНОМ ПЛАСТЕ ПРИ УПРУГОМ РЕЖИМЕ

Рассмотрим прежде всего несколько одномерных задач теории упругого режима. При этом, как известно, распределение давления описывается линейным уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \kappa \nabla^2 p, \quad (\text{V.1.1})$$

и использование приближенных методов связано не с невозможностью получения точных решений, а с их сложностью. Кроме того, решение ряда задач имеет чисто методическое значение.

1. Ранее (см. гл. III, § 1) было уже приведено решение задачи о пуске галереи в бесконечном пласте, которое имеет вид:

$$p = p_0 - (p_0 - p_1) \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}, \quad (\text{V.1.2})$$

где p_0 — начальное давление в пласте; p_1 — давление на галерее.

Разность между начальным давлением и его мгновенным значением быстро убывает.

Используя определение функции ошибок в виде интеграла, легко показать, интегрируя по частям, что

$$|p - p_0| < |p_0 - p_1| \frac{2\sqrt{\kappa t}}{x} \exp\left(-\frac{x^2}{4\kappa t}\right).$$

Поэтому естественно ввести понятие об области влияния галереи, т. е. области, в которой давление заметно отличается от своего первоначального значения. Из предыдущей формулы и из соображений размерности ясно, что размер области влияния

$$l(t) = c\sqrt{\kappa t}, \quad (\text{V.1.3})$$

где c — постоянная порядка единицы, значение которой зависит от того, как определена область влияния.

Будем теперь искать приближенное решение задачи. Предположим, что вне области влияния галереи движения нет, а внутри нее давление распределено так же, как при стационарной фильтрации, т. е. линейно. Примем далее, что давление непрерывно. Тогда

$$\begin{aligned} p(x, t) &= p_1 + (p_0 - p_1) \frac{x}{l} & [0 \leq x \leq l(t)]; \\ p(x, t) &= p_0 & [x \geq l(t)]. \end{aligned} \quad (\text{V.1.4})$$

Теперь достаточно определить вид зависимости $l(t)$, чтобы завершить построение приближенного решения. Выбор соотношения для определения $l(t)$ является в известной мере произвольным, так как нельзя указать то единственное соотношение, удовлетворив которому, можно достичь наилучшего соответствия между приближенным решением (V.1.4) и точным решением поставленной задачи. Поскольку для большинства приложений основное значение имеет правильное определение количества отбираемой из пласта жидкости, обычно границу $l(t)$ находят из условия материального баланса для пласта в целом. За время dt через участок сечения пласта шириной b и мощностью H проходит объем жидкости $bHudt$, причем в соответствии с законом фильтрации

$$u = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{k}{\mu} \frac{p_1 - p_0}{l}, \quad (\text{V.1.5})$$

За время t с начала движения через сечение $x = 0$ проходит объем жидкости

$$Q(t) = \frac{kbH}{\mu} \int_0^t \frac{p_1 - p_0}{l(t)} dt. \quad (\text{V.1.6})$$

Этот объем жидкости высвободился (будем для определенности считать, что из пласта отбирается жидкость и $p_1 < p_0$) за счет снижения давления в области движения. В предположении, что деформация пласта и жидкости происходит упруго, имеем

$$Q = mbH \int_0^l \frac{p - p_0}{K} dx = \frac{mbH}{K} \int_0^{l(t)} (p_0 - p_1) \left(\frac{x}{l} - 1 \right) dx. \quad (\text{V.1.7})$$

Приравнявая выражения (V.1.6) и (V.1.7), получаем

$$\frac{k}{\mu} bH (p_1 - p_0) \int_0^t \frac{dt}{l(t)} = \frac{mbH}{K} (p_1 - p_0) \int_0^l \left(1 - \frac{x}{l} \right) dx$$

или

$$\kappa \int_0^l \frac{dx}{l(t)} = \int_0^l \left(1 - \frac{x}{l} \right) dx = \frac{1}{2} l. \quad (\text{V.1.8})$$

Решение уравнения (V.1.8), очевидно, имеет вид:

$$l = 2 \sqrt{\kappa t} \quad (\text{V.1.9})$$

(постоянная c в уравнении (V.1.3) равна в данном случае 2).

Таким образом, окончательное выражение для давления будет

$$\begin{aligned} p(x, t) &= p_1 + \frac{1}{2} (p_0 - p_1) \frac{x}{\sqrt{\kappa t}} & (0 \leq x \leq 2 \sqrt{\kappa t}); \\ p(x, t) &= p_0 & (x \geq 2 \sqrt{\kappa t}). \end{aligned} \quad (\text{V.1.10})$$

Согласно уравнению (V.1.5) скорость фильтрации на границе пласта меняется по закону

$$u(0, t) = \frac{k}{\mu} \frac{p_1 - p_0}{2 \sqrt{\kappa t}}. \quad (\text{V.1.11})$$

Из точного решения (V.1.2) для скорости фильтрации получается выражение

$$u_0(0, t) = \frac{k}{-\mu} \frac{p_1 - p_0}{\sqrt{\pi \kappa t}}. \quad (\text{V.1.12})$$

Таким образом, полученное решение, давая качественно верное описание движения, является все же лишь грубо приближенным. Тем не менее проиллюстрированный выше метод, называемый *методом последовательной смены стационарных состояний*, получил достаточно широкое применение в практических расчетах. Не останавливаясь на дальнейших примерах из теории упругого режима, которые можно найти в книгах И. А. Чарного [118, 119], В. Н. Щелкачев и Б. Б. Лапука [126], А. М. Пирвердяна [91] и др., сформулируем общую схему метода.

Предполагается, что при наложении возмущения весь пласт отчетливо разбивается на две области — область невозмущенного состояния и область возмущения и что давление в области возмущения распределено так, как если бы движение в этой области было стационарным, а вне области возмущения — возмущение отсутствовало бы вовсе. Наконец, при помощи некоторого дополнительного условия, в качестве которого чаще всего выбирается уравнение материального баланса, определяется закон разрастания области возмущения.

Таким образом, метод последовательной смены стационарных состояний основан на трех допущениях: 1) существует конечная область возмущенного движения; 2) движение внутри этой области стационарно; 3) размер области возмущения определяется из условия материального баланса.

Первое из этих трех допущений само по себе не вносит значительной погрешности, поскольку, как известно из примеров, возмущенное движение весьма быстро затухает с удалением от места возмущения. Второе допущение связано с тем, что движение жидкости вблизи источника возмущения сравнительно быстро стабилизируется. Однако

здесь произвольным является предположение о том, что стабилизация происходит сразу во всей области возмущенного движения. Третье предположение вполне естественно, хотя выбор именно этого дополнительного условия вовсе не обязателен.

2. Приведенные рассуждения показывают, что возможные уточнения метода последовательной смены стационарных состояний связаны в первую очередь с заменой второго допущения иным, более отвечающим истинному положению дел, и с соответствующим изменением тех дополнительных условий, на основании которых определяется размер области возмущения.

Последовательное проведение этой программы приводит к методу «интегральных соотношений», представляющему собой унифицированный метод, который позволяет получить решение ряда задач нестационарной фильтрации с достаточной для практики точностью.

Пусть $p(x, t)$ — решение уравнения (V.1.1) в случае прямолинейно-параллельного движения:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}. \quad (\text{V.1.13})$$

Умножив это уравнение на произвольную функцию $f(x, t)$ и проинтегрировав по x в пределах от $L_1(t)$ до $L_2(t)$, получим равенство

$$\int_{L_1}^{L_2} \frac{\partial p}{\partial t} f(x, t) dx = \kappa \int_{L_1}^{L_2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} f(x, t) dx, \quad (\text{V.1.14})$$

справедливое при любых $L_1, L_2, f(x, t)$ и t .

Пусть при этом имеется семейство таких функций $f_n(x, t)$ ($n = 0, 1, \dots$), что при любом t это семейство полно (как семейство функций от x) на отрезке $[L_1(t), L_2(t)]$. Пусть, далее, соотношение (V.1.14) выполняется для всех f_n . Тогда, если производные $\partial p / \partial t$ и $\partial^2 p / \partial x^2$ непрерывны, то функция $p(x, t)$ удовлетворяет уравнению (V.1.13) при $L_1(t) \leq x \leq L_2(t)$. Таким образом, между системой интегральных равенств (V.1.14), записанных для полной системы функций, и дифференциальным уравнением (V.1.13) существует эквивалентность, и вместо решения уравнения (V.1.13) можно искать решение системы уравнений вида (V.1.14).

Возьмем простейшую полную систему функций — последовательные степени пространственной переменной

$$1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$$

Из (V.1.14) имеем

$$\int_{L_1(t)}^{L_2(t)} x^n \frac{\partial p}{\partial t} dx = \kappa \int_{L_1(t)}^{L_2(t)} x^n \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} dx \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (\text{V.1.15})$$

Левую часть этого уравнения можно представить, используя формулу дифференцирования определенного интеграла, в виде:

$$\int_{L_1(t)}^{L_2(t)} x^n \frac{\partial p}{\partial t} dx = \frac{d}{dt} \int_{L_1(t)}^{L_2(t)} p x^n dx - p(L_2, t) L_2^n \frac{dL_2}{dt} + p(L_1, t) L_1^n \frac{dL_1}{dt}.$$

В правой части можно провести интегрирования по частям. В результате после несложных вычислений получим из (V.1.15)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{L_1(t)}^{L_2(t)} p(x, t) x^n dx &= \kappa L_2^n \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_{x=L_2} - \kappa L_1^n \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_{x=L_1} - \\ &- \kappa n L_2^{n-1} p(L_2, t) + \kappa n L_1^{n-1} p(L_1, t) + \\ &+ n(n-1) \kappa \int_{L_1}^{L_2} p(x, t) x^{n-2} dx + p(L_2, t) L_2^n \frac{dL_2}{dt} - \\ &- p(L_1, t) L_1^n \frac{dL_1}{dt}. \end{aligned} \quad (\text{V.1.16})$$

При построении приближенного решения удобнее пользоваться системой интегральных соотношений (V.1.6), чем исходным дифференциальным уравнением, поскольку в выражение (V.1.16) не входят производные неизвестных функций.

3. Рассмотрим вновь задачу о возмущении первоначально стационарного движения в пласте. Пусть в момент $t = 0$ давление распределено по закону

$$p(x, 0) = P + Gx, \quad (\text{V.1.17})$$

отвечающему отбору жидкости из пласта с расходом $-kbHG/\mu$ (в частности, $G = 0$ соответствует отсутствию движения в невозмущенном пласте). Пусть, далее, возмущение возникает вследствие некоторого изменения условий на границе $x = 0$. Тогда, очевидно, в каждый момент изменение давления в удаленных точках пласта мало. Поэтому, естественно, при отыскании приближенного решения вновь ввести представление о конечной области влияния $0 \leq x \leq l(t)$, предполагая, что на границе $x = l(t)$ давление и расход жидкости не успели измениться и сохраняют первоначальные значения (в случае конечного пласта протяженностью L область влияния, начиная с некоторого момента t^* , охватывает пласт целиком, и $l(t) = L$, $t \geq t^*$).

Будем искать приближенное решение задачи в виде многочлена

$$\begin{aligned} p(x, t) &= P_0(t) + P_1(t) x/l + \dots + P_n(t) x^n/l^n \quad (0 \leq x \leq l); \\ p(x, t) &= p(x, 0) \quad (x \geq l). \end{aligned} \quad (\text{V.1.18})$$

Выражение (V.1.18) полностью определяется $n + 2$ неизвестными функциями времени — коэффициентами $P_0, P_1, \dots, P_n$ и положением границы области влияния l .

Для определения этих $n + 2$ неизвестных можно составить систему уравнений, включающую некоторое число интегральных соотношений (V.1.16), граничное условие при $x = 0$, определяемое постановкой задачи, и условия при $x = l$.

Первое из этих условий — непрерывность давления

$$p(l, t) = P + Gl. \quad (\text{V.1.19})$$

Аналогичным образом условие непрерывности расхода дает

$$\frac{\partial p(l, t)}{\partial x} = G. \quad (\text{V.1.20})$$

Наконец, эта система условий может быть дополнена условиями определенной гладкости решений на границе возмущенной области

$$\frac{\partial^2 p(l, t)}{\partial x^2} = \dots = \frac{\partial^k p(l, t)}{\partial x^k} = 0. \quad (\text{V.1.21})$$

Основной вопрос при применении метода интегральных соотношений состоит в том, какие из бесконечного числа условий следует использовать для определения неизвестных. Ясно, что необходимо использовать хотя бы одно из интегральных соотношений, так как в противном случае совершенно не будет использовано уравнение (V.1.13). Обязательно также должно быть использовано граничное условие при $x = 0$, поскольку оно отражает специфику задачи. По тем же соображениям должно быть принято условие непрерывности давления и расхода при $x = l$. Значительно сложнее дать какие-либо рекомендации по выбору остальных определяющих соотношений. Отметим лишь, что каждое интегральное соотношение добавляет одно дифференциальное уравнение, а каждое условие гладкости при $x = l$ — одно конечное соотношение. В то же время условия при $x = l$, будучи локальными, могут не обеспечить хорошего приближения решения в основной области. Более того, принятие слишком большого числа таких условий может привести к качественному искажению решения — появлению колебаний и т. д. С этой точки зрения использование интегральных соотношений в качестве дополнительных определяющих условий при повышении порядка приближения — более оправдано, хотя и более сложно.

4. Применим эти общие соображения к сформулированной выше задаче о пуске галереи. В этом случае

$$p(0, t) = p_1; \quad p(x, 0) = p_0 = 0 \quad (\text{V.1.22})$$

(удобно принять начальное значение давления за нуль).

Распределение давления будем искать в виде (V.1.18). Используя условие (V.1.22), получаем

$$P_0(t) = p_1, \quad P_0 + P_1 + \dots + P_n = 0. \quad (\text{V.1.23})$$

Полагая в (V.1.16) $L_1(t) = 0$, $L_2(t) = l(t)$, находим интегральные соотношения в виде:

$$\frac{d}{dt} \int_0^l p dx = -\kappa \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_{x=0}; \quad (\text{V.1.24})$$

$$\frac{d}{dt} \int_0^l p x dx = \kappa p(0, t); \quad (\text{V.1.25})$$

$$\frac{d}{dt} \int_0^{l(t)} p x^k dx = \kappa k (k-1) \int_0^l p(x, t) x^{k-2} dx \quad (k \geq 2). \quad (\text{V.1.26})$$

Если выбрать $n = 1$ и использовать в качестве единственного недостающего условия интегральное соотношение (V.1.24), то мы вернемся к решению методом последовательной смены стационарных состояний. Будем теперь уточнять решение, используя приближение многочленами более высокого порядка. Положим $n = 2$ и добавим еще одно условие.

Возьмем сначала в качестве этого дополнительного условия

$$\left. \frac{\partial p(l, t)}{\partial x} \right|_{x=l-0} = 0.$$

Тогда

$$P_0 = p_1; \quad P_0 + P_1 + P_2 = 0; \quad P_1 + 2P_2 = 0, \quad (\text{V.1.27})$$

а из (V.1.24) следует соотношение

$$\frac{d}{dt} \left[p_1 l + \frac{1}{2} P_1 l + \frac{1}{3} P_2 l \right] = -\kappa \frac{P_1}{l}.$$

Отсюда находим

$$P_0 = p_1; \quad P_1 = -2p_1; \quad P_2 = p_1; \quad l^2 = 12\kappa t. \quad (\text{V.1.28})$$

Соответственно для скорости фильтрации на границе $u(0, t)$ получаем

$$u(0, t) = -\frac{\kappa}{\mu} \frac{P_1}{\sqrt{3\kappa t}}, \quad (\text{V.1.29})$$

что уже весьма близко к точному выражению (V.1.12). Посмотрим теперь, что получится, если в качестве дополнительного условия использовать второе интегральное соотношение (V.1.25).

Имеем систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} P_0 &= p_1; \quad P_0 + P_1 + P_2 = 0; \\ \frac{d}{dt} \left[P_1 l + \frac{1}{2} P_1 l + \frac{1}{3} P_2 l \right] &= -\frac{\kappa P_1}{l}; \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} P_1 l^2 + \frac{1}{3} P_1 l^2 + \frac{1}{4} P_2 l^2 \right] &= \kappa p_1. \end{aligned} \right\} \quad (\text{V.1.30})$$

Интегрирование последнего соотношения дает

$$l^2(6p_1 + 4P_1 + 3P_2) = 12\kappa p_1 t.$$

Выражая P_2 через P_1 , получаем систему

$$\left. \begin{aligned} l^2(3p_1 + P_1) &= 12\kappa p_1 t; \\ \frac{d}{dt}[l(4p_1 + P_1)] &= -\frac{6\kappa P_1}{l}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{V.1.34})$$

В данном случае очевидно, что

$$l = c\sqrt{\kappa t}; \quad c = \text{const}, \quad (\text{V.1.32})$$

так что решение задачи упрощается. Из (V.1.32) следует

$$P_1 = \frac{12p_1}{c} - 3p_1 = \text{const}$$

и

$$\begin{aligned} l^2 &= -\frac{12\kappa t P_1}{4p_1 + P_1}; & c^2 &= -\frac{12P_1}{4p_1 + P_1}; & c^2 &= \frac{12p_1}{3p_1 + P_1}; \\ \frac{P_1}{p_1} &= -\frac{4p_1 + P_1}{3p_1 + P_1}; & P_1^2 + 4p_1 P_1 + 4p_1^2 &= 0; & P_1 &= -2p_1. \end{aligned}$$

Следовательно, решение, найденное таким способом, совпадает с решением (V.1.28)—(V.1.29).

Рассмотрим теперь, что может дать следующее приближение ($n = 3$).

Согласно общей схеме имеем решение в виде:

$$p(x, t) = P_0 + P_1 x/l + P_2 x^2/l^2 + P_3 x^3/l^3; \quad x < l.$$

Если принять в качестве дополнительных условий

$$p(0, t) = p_1; \quad p(l, t) = 0; \quad \partial p(l, t)/\partial x = 0$$

и первые два интегральных соотношения (V.1.24), то получим систему уравнений

$$P_0 = p_1; \quad P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = 0; \quad P_1 + 2P_2 + 3P_3 = 0;$$

$$\frac{d}{dt} \left[p_1 l + \frac{1}{2} P_1 l + \frac{1}{3} P_2 l + \frac{1}{4} P_3 l \right] = \kappa \frac{P_1}{l};$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} P_1 l^2 + \frac{1}{3} P_1 l^2 + \frac{1}{4} P_2 l^2 + \frac{1}{5} P_3 l^2 \right] = \kappa p_1.$$

Решение этой системы нами фактически уже найдено. Оно, очевидно, дается выражениями

$$P_0 = p_1; \quad P_1 = -2p_1; \quad P_2 = p_1; \quad P_3 = 0; \quad l^2 = 12\kappa t,$$

так как удовлетворяет и системе (V.1.27)—(V.1.27a), и системе (V.1.30).

Таким образом, найденное третье приближение совпадает со вторым.

Выберем теперь другую систему определяющих условий.

Потребуем выполнения условий

$$p(0, t) = p_1; \quad p(l, t) = 0$$

и трех первых интегральных соотношений. Тогда для определения P_1, P_2, P_3 и P_0 имеем следующую систему:

$$\begin{aligned} P_0 &= p_1; & P_0 + P_1 + P_2 + P_3 &= 0; \\ \frac{d}{dt} \left[P_0 l + \frac{1}{2} P_1 l + \frac{1}{3} P_2 l + \frac{1}{4} P_3 l \right] &= -\kappa \frac{P_1}{l}; \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} P_0 l^2 + \frac{1}{3} P_1 l^2 + \frac{1}{4} P_2 l^2 + \frac{1}{5} P_3 l^2 \right] &= \kappa P_1; \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{3} P_0 l^3 + \frac{1}{4} P_1 l^3 + \frac{1}{5} P_2 l^3 + \frac{1}{6} P_3 l^3 \right] &= \\ &= -2\kappa \left[P_0 l + \frac{1}{2} P_1 l + \frac{1}{3} P_2 l + \frac{1}{4} P_3 l \right]. \end{aligned} \quad (\text{V.1.33})$$

И в данном случае решение облегчается тем, что из соображений размерности $l = c\sqrt{\kappa t}$, а все P_i могут быть только константами. Поэтому уравнения (V.1.33) сводятся к алгебраической системе

$$\begin{aligned} P_0 &= p_1; & P_0 + P_1 + P_2 + P_3 &= 0; \\ c^2 \left[P_0 + \frac{1}{2} P_1 + \frac{1}{3} P_2 + \frac{1}{4} P_3 \right] &= -2P_1; \\ c^2 \left[\frac{1}{2} P_0 + \frac{1}{3} P_1 + \frac{1}{4} P_2 + \frac{1}{5} P_3 \right] &= P_0; \\ c^2 \left[\frac{1}{3} P_0 + \frac{1}{4} P_1 + \frac{1}{5} P_2 + \frac{1}{6} P_3 \right] &= \frac{4}{3} \left[P_0 + \frac{1}{2} P_1 + \frac{1}{3} P_2 + \frac{1}{4} P_3 \right]. \end{aligned}$$

Исключая неизвестные P_0, P_1, P_2 и P_3 , приходим к следующему кубическому уравнению для c^2 :

$$c^6 - 84c^4 + 1440c^2 - 9600 = 0,$$

единственный действительный корень которого

$$c^2 \approx 63,78.$$

Для остальных неизвестных имеем

$$P_0 = p_1; \quad P_1 = -4,67p_1; \quad P_2 = 6,79p_1; \quad P_3 = -3,12p_1.$$

Для скорости фильтрации на границе

$$u(0, t) = \frac{k_1 P_1}{\mu l} = -\frac{k_1}{\mu} \frac{0,583p_1}{\sqrt{\kappa t}} = -\frac{k_1}{\mu} \frac{p_1}{\sqrt{2,93\kappa t}}.$$

Сопоставим теперь первые три приближения:
первое

$$p(x, t) = p_1 \left(1 - \frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} \right) \quad (x \leq 2\sqrt{\kappa t});$$

второе

$$p(x, t) = p_1 \left(1 - \frac{x}{3\sqrt{\kappa t}} + \frac{x^2}{12\kappa t} \right) \quad (x \leq \sqrt{12\kappa t});$$

третье

$$p(x, t) = p_1 \left(1 - 0,583 \frac{x}{\sqrt{\kappa t}} + 0,107 \frac{x^2}{\kappa t} + 0,0061 \frac{x^3}{(\kappa t)^{3/2}} \right) \\ (x \leq 7,98\sqrt{\kappa t}).$$

Результаты расчета для трех приближений показаны на рис. V.1 вместе с точным решением (цифры у кривых соответствуют номеру приближения, ноль отвечает точному решению).

Из приведенного примера понятна схема применения метода интегральных соотношений к задачам упругого режима. Ясно также, что построение приближений многочленами высокого порядка наталкивается на трудности не только вычислительного, но и принципиального характера. Прежде всего нет сколько-нибудь обоснованных правил для выбора того или иного из нескольких возможных дополнительных условий. Вторая трудность связана с тем, что приближение многочленами может дать решения физически недопустимого вида (например, отрицательные на некотором участке, см. среднюю кривую на рис. V.1) при попытке повысить точность приближения.

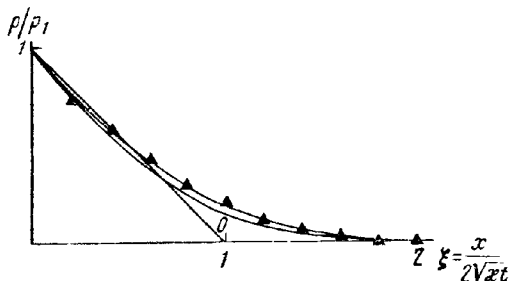


Рис. V.1

§ 2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ УПРУГОГО РЕЖИМА МЕТОДОМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЙ

Приведем еще несколько примеров использования метода интегральных соотношений для решения задач упругого режима. Из сопоставления получаемых решений с соответствующими «точными» решениями очевидны преимущества ясности и обзримости, достигаемые при помощи метода интегральных соотношений.

1. Осесимметричная задача о пуске скважины в бесконечном пласте. Рассмотрим еще одну автоматическую задачу — пуск скважины нулевого радиуса в безграничном пласте.

Выведем сначала те интегральные соотношения, которым должно удовлетворять распределение давления в осесимметричной задаче.

Из основного уравнения распределения давления

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \kappa \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) \quad (\text{V.2.1})$$

после умножения на r^{k+1} и интегрирования в пределах от R_1 до R_2 получим, по аналогии с соотношением (V.1.16), тождества:

при $k = 0$ (уравнение материального баланса)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{R_1}^{R_2} p(r, t) r dr &= \kappa R_2 \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=R_2} - \kappa R_1 \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=R_1} + \\ &+ p(R_2, t) R_2 \frac{dR_2}{dt} - p(R_1, t) R_1 \frac{dR_1}{dt}; \end{aligned}$$

при $k > 0$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{R_1}^{R_2} p(r, t) r^{k+1} dr &= \kappa R_2^{k+1} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=R_2} - \kappa R_1^{k+1} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=R_1} - \\ &- \kappa k R_2^k p(R_2, t) + \kappa k R_1^k p(R_1, t) + \kappa k^2 \int_{R_1}^{R_2} p(r, t) r^{k-1} dr + \\ &+ p(R_2, t) R_2^{k+1} \frac{dR_2}{dt} - p(R_1, t) R_1^{k+1} \frac{dR_1}{dt}. \end{aligned} \quad (\text{V.2.2})$$

Воспользуемся этими соотношениями для того, чтобы получить приближенное решение задачи о пуске скважины — основной задачи для многочисленных методов исследования скважин.

Примем первоначальное (постоянное) давление в пласте за нуль. Будем считать, что в момент $t = 0$ начинается отбор жидкости из пласта через скважину пренебрежимо малого радиуса. Предполагая, что отбор происходит в постоянном темпе, имеем дополнительные условия:

$$p(r, 0) = 0; \quad \lim_{r \rightarrow 0} \left(r \frac{\partial p(r, t)}{\partial r} \right) = \frac{\mu Q}{2\pi k h} = q. \quad (\text{V.2.3})$$

Точное решение этой задачи, как было показано в § 2, гл. III, имеет вид:

$$p(r, t) = \frac{q}{2} \text{Ei} \left(-\frac{r^2}{4\kappa t} \right). \quad (\text{V.2.4})$$

2. Приближенное решение задачи. Введем вновь увеличивающийся во времени радиус $l(t)$ и предположим, что при $r > l(t)$

$$p(r, t) = 0.$$

При этом интегральные соотношения (V.2.2), записанные для отрезка $0 < r \leq l(t)$, принимают вид:

$$\frac{d}{dt} \int_0^{l(t)} r p(r, t) dr = -\kappa \lim_{r \rightarrow 0} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = -\kappa q; \quad (\text{V.2.5})$$

$$\frac{d}{dt} \int_0^{l(t)} r^{k+1} p(r, t) dr = \kappa k^2 \int_0^l p(r, t) r^{k-1} dr \quad (k \geq 1). \quad (\text{V.2.6})$$

Как следует из граничного условия при $r \rightarrow 0$ [второе условие (V.2.3)], искомое решение обладает при $r \rightarrow 0$ той особенностью, что $\partial p / \partial r \approx q/r$. Поэтому и приближающую функцию выберем так, чтобы она имела ту же особенность, т. е. примем

$$p(r, t) = q \ln \frac{r}{l} + P_0 + P_1 \frac{r}{l} + \dots + P_n \frac{r^n}{l^n}. \quad (\text{V.2.7})$$

Так же, как и при плоско-параллельном движении, наиболее грубое приближение получается при допущении, что

$$P_1 = P_2 = \dots = P_n = 0.$$

Из условия непрерывности давления при $r = l$ имеем также $P_0 = 0$, поэтому остается лишь одна неизвестная функция $l(t)$, которая определяется при помощи одного интегрального соотношения. В качестве этого соотношения возьмем уравнение материального баланса (V.2.5). Несложный подсчет дает

$$l^2 = 4\kappa t, \quad (\text{V.2.8})$$

так что в нулевом приближении

$$\begin{aligned} p_0(r, t) &= q \ln \frac{r}{2\sqrt{\kappa t}} \quad (r \leq 2\sqrt{\kappa t}); \\ p_0(r, t) &= 0 \quad (r \geq 2\sqrt{\kappa t}). \end{aligned} \quad (\text{V.2.9})$$

Нулевое приближение, полученное таким образом, вновь совпадает с решением методом последовательной смены стационарных состояний (напомним, что давление в стационарном плоско-радиальном потоке линейно зависит от $\ln r$).

При отыскании приближений высшего порядка для определения неизвестных нужны дополнительные условия. В качестве них можно использовать либо последующие интегральные соотношения, отвечающие $k \neq 0$, либо дополнительные условия для производных от давления по радиусу. Действительно, так же как и в плоско-параллельном течении, систему определяющих условий можно дополнить условиями сопряжения

$$\frac{\partial^k p(l, t)}{\partial r^k} = 0 \quad (k = 2, \dots). \quad (\text{V.2.10})$$

Поэтому для определения неизвестных коэффициентов в формуле (V.2.7) наряду с интегральными соотношениями можно пользоваться и выражениями (V.2.10).

Ограничимся первым приближением:

$$p(r, t) = q \ln \frac{r}{l(t)} + P_0(t) + P_1(t) \frac{r}{l(t)} \quad (\text{V.2.11})$$

и будем определять неизвестные так, чтобы выполнялись интегральное соотношение (V.2.5) и условия $p(l, t) = \partial p(l, t) / \partial r = 0$. Тогда

$$P_0 + P_1 = 0; \quad q = P_1;$$

$$\frac{d}{dt} \left[-\frac{ql^2}{4} + \frac{P_0 l^2}{2} + \frac{P_1 l^2}{3} \right] = -\kappa q,$$

откуда

$$l = \sqrt{12\kappa t} \quad \text{и} \quad p(r, t) = \\ = q \ln \frac{r}{\sqrt{12\kappa t}} - q + q \frac{r}{\sqrt{12\kappa t}}. \quad (\text{V.2.12})$$

На рис. V.2 дано сопоставление точного решения (V.2.4) — точки — с двумя приближениями решения: (V.2.9) — пунктирная кривая и (V.2.12) — сплошная кривая. Как видно, уже первое приближение обеспечивает довольно высокую точность.

3. Достоинства метода интегральных соотношений еще яснее выступают при решении задач нестационарного движения в ограниченном пласте, когда нельзя пренебречь влиянием границ. Конечно, и для этих задач можно без особых затруднений написать решения, пользуясь обычными методами математической физики. Однако решения эти представляются в виде рядов Фурье (плоско-параллельное движение) или Фурье — Бесселя (плоско-радиальное движение) и потому трудно обозримы. Трудности усугубляются тем, что даже простейшие монотонные решения разлагаются по осциллирующим функциям, и для получения хорошего приближения приходится брать большое число членов ряда.

При применении метода интегральных соотношений к ограниченному пласту исследуемый промежуток времени разбивается на две части. На протяжении первой из них происходит распространение возмущения (например, области, охваченной движением) от того места, где оно возникло, до границ пласта. При этом те границы, до которых возмущение еще не дошло, не оказывают влияния на решение. Так, при пуске галереи, расположенной

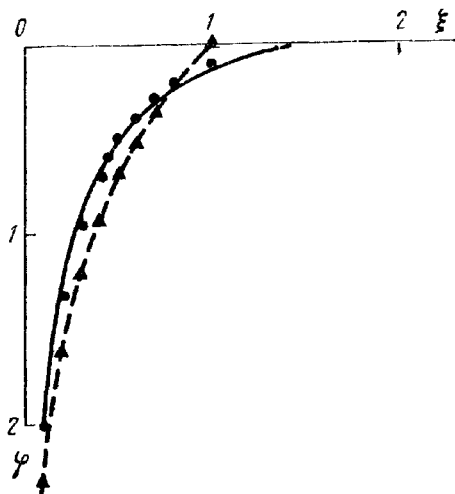


Рис. V.2

на некотором расстоянии L от непроницаемой границы пласта, приближенное решение ничем не будет отличаться от соответствующего решения для неограниченного пласта, пока $l(t) < L$. Принято называть промежуток времени, в течение которого не сказывается влияние границ, первой фазой фильтрации. Под второй фазой фильтрации понимается движение пачиная с того момента, когда граница области влияния доходит до удаленной границы пласта, и решение начинает зависеть от условий на этой границе. Естественно, что такое разделение на фазы условно, а продолжительность первой фазы существенно зависит от того, какое приближенное решение используется. Так, при решении упомянутой выше задачи методом последовательной смены стационарных состояний (первое приближение метода интегральных соотношений) $l = 2\sqrt{\kappa t}$ и продолжительность первой фазы $t_1 = L^2/4\kappa$. В то же время в третьем приближении $l \approx 8\sqrt{\kappa t}$ и $t_1 \approx L^2/64\kappa$. Однако это различие незначительно сказывается на распределении давления.

Ограничимся здесь лишь одним примером, достаточно хорошо иллюстрирующим возможности метода.

Рассмотрим круговой пласт, на контуре которого ($r = R$) поддерживается постоянное давление, равное начальному давлению в пласте. Давление это мы по-прежнему будем принимать за нуль. В начальный момент производится пуск скважины пренебрежимо малого радиуса, расположенной в центре пласта. Расход жидкости, отбираемой из скважины, по-прежнему считается постоянным. Тогда вплоть до момента $t = t_1 = R_1^2/12\kappa t$ для распределения давления справедливо, в первом приближении, соотношение (V.2.12). При $t > t_1$ необходимо учитывать условие на контуре питания:

$$p(R, t) = 0. \quad (\text{V.2.13})$$

Примем далее, что при $t > t_1$ $l(t) = R^*$. Тогда представление (V.2.11) примет вид:

$$p(r, t) = q \ln \frac{r}{R} + P_0(t) + P_1(t) \frac{r}{R}, \quad (\text{V.2.14})$$

причем из условия $p(R, t) = 0$ следует $P_0 = -P_1$.

Для определения единственной оставшейся неизвестной функции $P_0(t)$ воспользуемся первым интегральным соотношением (V.2.2). Полагая здесь $R_1 = 0$, $R_2 = R$ и учитывая (V.2.14), получим

$$\frac{d}{dt} \int_0^R p(r, t) r dr = \frac{1}{6} R^2 \frac{dP_0}{dt} = -\kappa P_0.$$

*) Часто встречаются «обоснования» этого допущения, связанные с той или иной физической интерпретацией «радиуса влияния» $l(t)$. Такая интерпретация вовсе необязательна. С таким же успехом можно было бы и дальше пользоваться представлением (V.2.11) при $l > R$, но рассматривать решение лишь при $r < R$, записывать интегральные соотношения только для этого участка и учитывать дополнительные условия при $r = R$.

Полученное дифференциальное уравнение для P_0 должно решаться при условии $P_0|_{t=t_1} = -q$, которое следует из требования непрерывности давления при $t = t_1$ и соотношений (V.2.11) и (V.2.14). Соответствующее решение имеет вид:

$$P_0(t) = -q \exp \left[-\frac{6\kappa(t-t_1)}{R^2} \right]. \quad (\text{V.2.15})$$

Таким образом, приближенное выражение для распределения давления будет

$$p(r, t) = q \ln \frac{r}{R} - q \left(1 - \frac{r}{R} \right) \exp \left[-\frac{6\kappa(t-t_1)}{R^2} \right]. \quad (\text{V.2.16})$$

Как видно, распределение давления быстро стремится к стационарному.

4. Прежде чем перейти к более сложным задачам, рассмотрим вопрос о том, каким образом, не имея точного решения, оценить степень приближения, достигаемого при помощи метода интегральных соотношений. Трудность здесь заключается в том, что нет критерия, позволяющего определить заранее, сколько нужно взять приближений, чтобы получить решение с заданной точностью. Более того, лишь в исключительно редких случаях удастся определить, насколько построенное решение отличается от точного. При этом так же, как и во многих других задачах, связанных с отысканием эффективного приближенного решения, обычно используются два критерия точности приближенного решения: первый — проверка на близких по постановке задачах, допускающих точное решение (как это делалось выше); второй — решение задачи с последовательным увеличением числа членов приближающего многочлена. Расчет ведется до тех пор, пока разность двух приближенных решений не станет меньше заданного значения. Что касается практических расчетов, то в них почти всегда ограничиваются тремя членами в приближенном выражении для давления.

Рассмотренный в последних двух параграфах метод интегральных соотношений был предложен для решения нестационарных задач теории фильтрации Г. И. Баренблаттом [10] и многократно применялся рядом исследователей. До сих пор широко используется также более грубый, но более простой метод последовательной смены стационарных состояний [120] и его видоизменения, данное А. М. Пирвердяном [90].

Наряду с рассмотренными выше методами последовательной смены стационарных состояний и интегральных соотношений часто применяется также метод осреднения производной по времени в соответствующем уравнении. Этот метод аналогичен методу Слезкина — Тарга [405] в теории пограничного слоя; в гидродинамическую теорию фильтрации он введен работами Ю. Д. Соколова [408] и Г. П. Гусейнова [39].

Так же, как и в рассмотренных выше методах, весь пласт разбивается на область движения (возмущенную область) и область покоя;

в области движения производная по времени заменяется ее средним по области значением. После этого распределение давления в зоне движения определяется путем решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Решение содержит в качестве параметров среднее значение временной производной и протяженность зоны движения. Для их определения обычным образом используются краевые условия сопряжения и интегральные соотношения. Таким образом, как и в теории пограничного слоя, этот метод является вариантом метода интегральных соотношений.

§ 3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ГАЗА

1. Для задач фильтрации газа, равно как и для близких к ним задач фильтрации в неупруго-деформируемой среде, приближенные методы составляют практически единственное средство эффективного аналитического исследования, если не считать немногочисленных авторемодельных случаев.

Самую широкую область применения имеет метод, указанный еще Л. С. Лейбензоном [71]. Этот метод заключается в том, что вместо нелинейного дифференциального уравнения

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{k}{2m\mu} \left(\frac{\partial^2 p^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p^2}{\partial z^2} \right) \quad (\text{V.3.1})$$

рассматривается линейное (относительно p^2) уравнение

$$\frac{\partial p^2}{\partial t} = \frac{k p_0}{m\mu} \left(\frac{\partial^2 p^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p^2}{\partial z^2} \right), \quad (\text{V.3.2})$$

где p_0 — некоторое постоянное давление. Очевидно, это уравнение получается из выражения (V.3.1), если умножить это уравнение на p , а затем заменить в множителе перед скобкой p на p_0 . В качестве p_0 обычно берется некоторое характерное давление. Л. С. Лейбензон впервые ввел такое преобразование в связи с задачей об изменении давления в первоначально невозмущенном пласте, и под p_0 он понимал давление в невозмущенной части пласта. Такой способ сведения нелинейного уравнения (V.3.1) к линейному (V.3.2) называется линеаризацией по Л. С. Лейбензону.

К линейному уравнению (V.3.2) применим весь хорошо разработанный аппарат теории теплопроводности (и теории упругого режима). Важнейшее достоинство метода состоит в том, что он имеет весьма широкую область применения — как при решении одномерных, так и многомерных задач, при любом законе изменения граничных значений давления и расхода жидкости и т. д. Это определило широкое применение метода линеаризации в теории разработки газовых месторождений. Однако этот метод имеет и недостаток: при его применении специфика задачи, отличающая ее от задач упругого режима, правильно учитывается лишь в тех областях, где движение можно считать стационарным [действительно, в таких областях $\partial p / \partial t = \partial p^2 / \partial t = 0$ и уравнения (V.3.1) и (V.3.2) совпадают].

К настоящему времени имеется уже довольно значительный опыт применения метода Л. С. Лейбензона. Он оказался весьма эффективным при решении задач, в которых первоначально неподвижный газ начинает двигаться под влиянием локальных возмущений. Типичной в этом отношении является задача о пуске газовой скважины в бесконечном пласте.

После линеаризации можно воспользоваться готовым решением из гл. III, § 2. Имеем

$$p^2 - p_0^2 = \frac{q\mu p_0}{2\pi k} \operatorname{Ei}\left(-\frac{r^2 m\mu}{2k p_0}\right), \quad (\text{V.3.3})$$

где r — расстояние точки от оси скважины; p_0 — начальное давление в пласте, а q — объемный дебит скважины на единицу мощности пласта, приведенный к начальному пластовому давлению p_0 .

Метод линеаризации обладает еще одним достоинством, особенно существенным с логической точки зрения, — его можно включить в общую схему метода малого параметра. Именно так понимал этот метод Л. С. Лейбензон [71].

Детальное изложение метода малого параметра в теории нестационарной фильтрации и примеры его применения можно найти в книге П. Я. Полубариновой-Кочиной [94]; последовательное применение метода малого параметра к задачам исследования скважин приведено в книге [35].

2. Линеаризация и метод малого параметра отличаются громоздкостью, особенно применительно к исследованию движения в ограниченной области. Чтобы обойти это затруднение, так же как и в задачах упругого режима в фильтрации газа, можно искать приближенное решение методом интегральных соотношений. Рассмотрим для примера задачу об истощении газовой залежи радиусом R , эксплуатируемой одиночной центрально расположенной скважиной. В обычных предположениях задача сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{k}{2m\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p^2}{\partial r} \right) \quad (\text{V.3.4})$$

при условиях

$$p(r, 0) = p_0; \quad \frac{\partial p(R, t)}{\partial r} = 0; \quad \frac{2\pi r_0 k p}{\mu} \frac{\partial p(r_0 t)}{\partial r} = q. \quad (\text{V.3.5})$$

Из последнего граничного условия (V.3.5) следует, что при приближении к скважине изменение давления может быть асимптотически представлено выражением¹

$$p^2 \approx f(r, t) - \frac{q\mu}{\pi k} \ln r, \quad (\text{V.3.6})$$

где $f(r, t)$ не имеет особенностей при $r \rightarrow 0$.

¹ Этим выражением, очевидно, можно пользоваться лишь тогда, когда его правая часть положительна (ср. соответствующее место из гл. IV об авторитетных задачах).

В соответствии с этим определим распределение давления в виде:

$$p^2 = \frac{q_0}{\pi k} \left[\ln \frac{r}{l(t)} + a_0(t) + a_1(t) \frac{r}{l(t)} + \dots \right. \\ \left. \dots + a_n(t) \frac{r^n}{l^n(t)} \right] \quad (r \leq l(t)); \\ p^2 = p^2(R) \quad (r \geq l). \quad (\text{V.3.7})$$

Движение, как обычно, подразделим на две стадии: на первой стадии $l(t) < R$ (возмущение еще не дошло до границ пласта) и $p(l, t) = p_0$; на второй стадии $l(t) = R$.

Умножим уравнение (V.3.4) на r^n и проинтегрируем от r_0 до $l(t)$. При $n = 1$ после несложных преобразований имеем

$$\frac{d}{dt} \int_{r_0}^{l(t)} r p dr = \frac{k}{2m\mu} \left(r \frac{\partial p^2}{\partial r} \right)_{r_0}^{l(t)} - l p_0 \frac{dl}{dt} = -\frac{q}{2\pi m} - l p_0 \frac{dl}{dt} \quad (\text{V.3.8})$$

(уравнение материального баланса);

при $n > 1$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{r_0}^{l(t)} r^n p dr &= \frac{k}{2m\mu} \int_{r_0}^{l(t)} r^{n-1} \left(\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial p^2}{\partial r} \right) dr - l^n p_0 \frac{dl}{dt} = \\ &= \frac{k}{2m\mu} \left(r^n \frac{\partial p^2}{\partial r} \right)_{r_0}^l - \frac{k(n-1)}{2m\mu} \int_{r_0}^l r^{n-1} \frac{\partial p^2}{\partial r} dr - l^n p_0 \frac{dl}{dt} = \\ &= \frac{k}{2m\mu} \left(r^n \frac{\partial p^2}{\partial r} \right)_{r_0}^l - \left(\frac{k(n-1)^2}{2m\mu} r^{n-1} p^2 \right)_{r_0}^l + \\ &+ \frac{k(n-1)^2}{2m\mu} \int_{r_0}^l r^{n-2} p^2 dr - l^n p_0 \frac{dl}{dt}. \end{aligned} \quad (\text{V.3.9})$$

Обычно эти выражения можно существенно упростить, учитывая, что в представляющих интерес случаях $r_0/l \ll 1$. Поэтому r_0 можно всюду положить равным нулю, имея в виду, что $\frac{k}{2\mu} r_0 \frac{\partial p^2(r_0, t)}{\partial r} = \frac{q}{2\pi}$, а произведение $r_0^n p(r_0, t)$ мало. Отсюда получим вместо (V.3.9)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{r_0}^{l(t)} r^n p dr &= -\frac{k(n-1)^2}{2m\mu} l^{n-1} p_0^2 + \\ &+ \frac{k(n-1)^2}{2m\mu} \int_{r_0}^l r^{n-2} p^2 dr - l^n p_0 \frac{dl}{dt}. \end{aligned} \quad (\text{V.3.10})$$

Найдем решение в первом приближении, полагая $a_i(t) = 0$ ($i = 2, 3, \dots, n$). Из условий $p(l, t) = p_0$, $\partial p(l, t)/\partial r = 0$ определим

для первой фазы движения $a_0(t) = p_0^2 \frac{\pi k}{\mu q} + 1$, $a_1(t) = -1$,
и искомое решение имеет вид:

$$p_0^2 - p^2 = -\frac{q\mu}{\pi k} \ln \frac{r}{l(r)} + \frac{q\mu(r-l)}{\pi k l(t)}. \quad (\text{V.3.11})$$

Из (V.3.8) имеем

$$\frac{d}{dt} \int_{r_0}^{l(t)} r \sqrt{p_0^2 + \frac{\mu q}{\pi k} \left(\ln \frac{r}{l} + 1 - \frac{r}{l} \right)} dr = -\frac{q}{2\pi m} - l p_0 \frac{dl}{dt}.$$

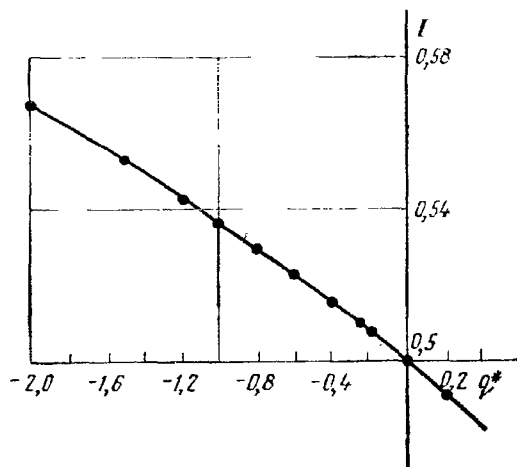


Рис. V.3

Не делая значительной ошибки, можно заменить в интеграле r_0 на 0*). Тогда

$$\frac{d}{dt} \left[l^2 p_0 \int_0^1 u \sqrt{1 + \frac{\mu q}{\pi k p_0^2} (\ln u + 1 - u)} du \right] = -\frac{q}{2\pi m} - p_0 l \frac{dl}{dt} \quad (\text{V.3.12})$$

на протяжении первой фазы движения.

Таким образом, на протяжении первой фазы движения имеем для $l(t)$:

$$l^2 \left(\int_0^1 u \sqrt{1 + q^* (\ln u + 1 - u)} - 1/2 \right) = -\frac{k p_0}{2\pi \mu} q^*; \quad q^* = \frac{\mu q}{\pi k p_0^2}.$$

Зависимость интеграла I в (V.3.12) от безразмерного параметра q^* показана на рис. V.3. Таким образом,

$$l = c \sqrt{\kappa t}; \quad \kappa = \frac{k p_0}{m \mu}; \quad c = \sqrt{q^*/(2I - 1)},$$

* Возникающую при этом малую мнимую добавку мы отбрасываем.

где постоянная c зависит от единственного безразмерного параметра q^* (см. рис. V.3). При $t > R^2/c^2$ и положим $l \equiv R$, и таким образом

$$p^2(r, t) = p_R^2 + \frac{\mu q}{\pi k} \ln \frac{r}{R} - \frac{\mu q (r-R)}{\pi k R}. \quad (\text{V.3.13})$$

Здесь p_R — давление на контуре пласта. Ясно, что это давление должно меняться во времени за счет истощения пласта.

Чтобы найти закон изменения p_R , воспользуемся вновь уравнением материального баланса. Полагая в нем $l \equiv R$, получим

$$\frac{d}{dt} R^2 \int_0^1 u \sqrt{p_R^2 + \frac{\mu q}{2\pi k} (\ln u + 1 - u)} du = - \frac{q}{2\pi m}$$

или

$$\begin{aligned} & \frac{p_R}{p_0} \int_0^1 u \sqrt{1 + \frac{p_0^2}{p_R^2} q^* (\ln u + 1 - u)} du - \\ & - \int_0^1 u \sqrt{1 + q^* (\ln u + 1 - u)} du = - \frac{q (t - t_1)}{2\pi m p_0^2 R^2}. \end{aligned} \quad (\text{V.3.14})$$

Здесь t_1 — момент окончания первой фазы движения. Зная зависимость интеграла

$$I(q^*) = \int_0^1 u \sqrt{1 + q^* (\ln u + 1 - u)} du \quad (\text{V.3.15})$$

от параметра q^* (см. рис. V.3), можно, используя уравнение (V.3.14), построить зависимость p_R/p_0 от t . Для практики, однако, достаточную точность дает самое грубое приближение, когда интеграл (V.3.15) просто полагается равным $1/2$. Физически это равносильно приравнению среднего давления в пласте давлению на контуре. Как следует из рис. V.3, для реальных значений безразмерного дебита скважины q^* (порядка сотых долей) это допустимо с ошибкой менее 2%. При этом

$$p_R^2 = p_0^2 - \frac{q}{\pi m R^2} (t - t_1) \quad (\text{V.3.16})$$

и

$$p^2(r, t) = p_0^2 - \frac{q}{\pi m R^2} (t - t_1) + \frac{\mu q}{\pi k} \left(\ln \frac{r}{R} + 1 - \frac{r}{R} \right). \quad (\text{V.3.17})$$

Если не стремиться к точному удовлетворению условия непроницаемости при $r = R$, то можно отбросить последние члены в выражениях для давления (т. е. положить $a_1(t) = 0$). Получающееся при этом выражение отвечает решению методом последовательной смены стационарных состояний. Оно впервые было получено Б. Б. Лапуком [67, 68] и широко применяется в практических расчетах.

Можно попытаться построить, придерживаясь обычной техники применения метода интегральных соотношений (см. предыдущие параграфы), последующие приближения. При этом, однако, для неавтомоделных движений коэффициенты a_i и радиус области влияния l приходится находить из сложной нелинейной системы уравнений. Попытка избавиться от трудностей путем замены корня в подынтегральном выражении (V.3.15) первыми двумя членами его разложения фактически означает переход к линеаризованной теории движения газа. Многочисленные работы выполнены этим методом Лан Чжан-Синем [64, 65].

3. Из приведенного примера ясно, что применение метода интегральных соотношений к задачам фильтрации газа оправдано либо когда допустим переход к линеаризованным уравнениям, либо когда требуемая точность достигается уже в первом приближении. Иначе говоря, выгоднее осуществлять приближение более сложными функциями, но ограничиваться минимальным числом свободных параметров.

Один из способов такого приближения заключается в использовании автомоделных решений по аналогии с тем, как в теории пограничного слоя используются автомоделные решения Фокнера — Скэн (метод Кочина — Лойцинского [60]), другой способ излагается в следующем параграфе.

В гл. IV были приведены (применительно к эквивалентной задаче фильтрации грунтовых вод) автомоделные решения одномерных задач изотермической фильтрации совершенного газа, описываемой уравнением

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{a^2}{x^s} \frac{\partial}{\partial x} x^s \frac{\partial p^2}{\partial x} \quad (\text{V.3.18})$$

($s = 0; 1; 2$ — соответственно для плоских, осесимметричных и центрально-симметричных движений). Эти решения строились для случая, когда на границе пласта (при $x = 0$) задано либо давление

$$p(0, t) = \Phi(t), \quad (\text{V.3.19})$$

что возможно только в случае плоско-параллельного движения, либо поток газа

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^s \frac{\partial p^2}{\partial x} \right) = -\Psi(t). \quad (\text{V.3.20})$$

Движения автомоделны при определенном сочетании начальных и граничных условий. В частности, если происходит заполнение пласта, в котором вначале давление газа было весьма малым, так что его можно считать равным нулю, то задача автомоделна при произвольных степенных функциях $\Phi(t)$ или $\Psi(t)$:

$$\Phi(t) = \sigma t^\alpha; \quad \Psi(t) = \tau t^\beta, \quad (\text{V.3.21})$$

где σ , τ , α и β — некоторые постоянные.

В общем случае, когда начальное давление в пласте не равно нулю, движение автомодельно лишь при $\alpha = 0$ и $\beta = 1/2 (s - 1)$.

Общая схема применения автомодельных решений для приближенного решения нелинейной задачи заключается в том, что берется однопараметрическое семейство автомодельных решений, отвечающих данным начальным и граничным условиям, а затем этот параметр полагается равным некоторой функции времени, причем вид этой функции выбирается так, чтобы дифференциальное уравнение задачи удовлетворялось в среднем. Иначе говоря, нужно, чтобы выполнялось некоторое интегральное соотношение, являющееся следствием исходной задачи.

Очевидно, существует много способов введения параметра в автомодельное решение и варьирования этого параметра. Каждый из этих способов приводит к тому или иному приближенному решению задачи. Обычно нельзя заранее сказать, какой способ решения окажется более удачным.

Рассмотрим сначала процесс плоской одномерной фильтрации газа в пустой пласт [уравнение (V.3.18) при $s = 0$ с нулевым начальным условием]. Пусть на границе $x = 0$ задан закон изменения давления [уравнение (V.3.19)]. Если $\Phi(t) = \tau t^\alpha$, то решение автомодельно и может быть представлено в виде:

$$p(x, t) = \sigma t^\alpha f(\xi, \lambda); \quad \xi = \frac{x}{a} \sqrt{\frac{\alpha+1}{\sigma t^{\alpha+1}}}, \quad (\text{V.3.22})$$

где $f(\xi, \lambda)$ — решение краевой задачи

$$\frac{d^2 f^2}{d\xi^2} + \frac{1}{2} \xi \frac{df}{d\xi} - \lambda f = 0; \quad \lambda = \frac{\alpha}{\alpha+1}; \quad f(0) = 1; \quad f(\infty) = 0. \quad (\text{V.3.23})$$

Решение тождественно равно нулю вне конечного промежутка $0 \leq \xi \leq \xi^*$ и удовлетворяет интегральному соотношению

$$\int_0^{\xi^*} \xi f(\xi, \lambda) d\xi = 1/(1 + \lambda).$$

В табл. 1 гл. IV (см. также рис. IV.4) были приведены величины функций $f(\xi, \lambda)$ для значений λ , равных 0,00; 0,05; . . . ; 1,00 и значений аргумента ξ , равных $0,1 \xi^*$; $0,2 \xi^*$ и т. д.

В общем случае произвольной функции $\Phi(t)$ соответствующее интегральное соотношение принимает вид:

$$\frac{d}{dt} \int_0^{x^*(t)} x p(x, t) dx = a^2 \Phi^2(t). \quad (\text{V.3.24})$$

Здесь $x^*(t)$ — координата переднего фронта продвижения газа.

Будем искать приближенное решение сформулированной задачи в виде:

$$p(t) = \Phi(t) f \left[\frac{x}{a} \sqrt{\frac{\alpha(t)+1}{t \Phi(t)}}, \lambda(t) \right]; \quad \lambda(t) = \frac{\alpha(t)}{\alpha(t)+1}. \quad (\text{V.3.25})$$

При $\Phi(t) = \sigma t^2$, $\alpha = \text{const}$ выражение (V.3.25) переходит в точное автомодельное решение. Поэтому естественно ожидать, что при функциях $\Phi(t)$, близких к степенным, выбранное представление будет обеспечивать хорошее приближение. После того как принято выражение (V.3.25), решение задачи сводится к определению единственной функции $\lambda(t)$. Определяя ее из интегрального соотношения (V.3.24), находим

$$\lambda(t) = \frac{\left[t\Phi^2(t) - \int_0^t \Phi^2(t) dt \right]}{\left[t\Phi^2(t) + \int_0^t \Phi^2(t) dt \right]} \quad (\text{V.3.26})$$

После этого по формуле

$$\alpha(t) = \frac{\lambda(t)}{[1 - \lambda(t)]} \quad (\text{V.3.27})$$

находим $\alpha(t)$ и, пользуясь формулой (V.3.25) и табл. IV.4, находим искомое решение. Координата переднего фронта продвижения газа определяется при этом соотношением

$$x^*(t) = a\xi^*[\lambda(t)] \sqrt{\Phi(t) t [1 - \lambda(t)]}. \quad (\text{V.3.28})$$

Рассмотрим пример решения задачи по изложенной методике.

Положим $\Phi(t) = \sigma_m t^m + \sigma_n t^n$, $m < n$. Тогда из формул (V.3.26) и (V.3.27) находим

$$\alpha(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{\sigma_m^2 t^{2m+1} + 2\sigma_m \sigma_n t^{m+n+1} + \sigma_n^2 t^{2n+1}}{\frac{1}{2m+1} \sigma_m^2 t^{2m+1} + \frac{2}{m+n+1} \sigma_m \sigma_n t^{m+n+1} + \frac{1}{2n+1} \sigma_n^2 t^{2n+1}} - 1 \right).$$

Из этого выражения непосредственно видно, что при малых t $\alpha(t) \approx m$, а при больших t $\alpha(t) \approx n$. Это означает, что по мере движения происходит переход от одного автомодельного движения к другому.

При расчете конкретного примера положим $a = 1$, $m = 0$, $n = 1$, $\sigma_m = \sigma_n = 1$. Тогда

$$\alpha(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{1 + 2t + t^2}{1 + t + 1/3 t^2} - 1 \right);$$

$$p(x, t) = (1 + t) f \left[\frac{x \sqrt{1 + \alpha(t)}}{\sqrt{t + t^2}}, \lambda(t) \right].$$

Используя таблицу функций $f(\xi, \lambda)$, можно вычислить распределение давления $p(x, t)$ в различные моменты времени. Результаты вычислений показаны на рис. V.4.

Рассмотрим теперь задачу о заполнении пласта в предположении, что задан поток газа через скважину пренебрежимо малого радиуса:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(r \frac{\partial p^2}{\partial r} \right) = -\Psi(t).$$

Если $\Psi(t) = \tau t^3$, то решение задачи автомодельно и может быть представлено в виде (см. гл. IV, § 3):

$$\begin{aligned} p(x, t) &= \tau^{1/2} t^{\beta/2} f_1(\xi, \lambda); \quad \lambda = \beta/(\beta + 2); \\ \xi &= r [4a^2 \tau t^{\beta+2}]^{-1/4} (\beta + 2)^{1/2}; \\ f_1(\infty) &= 0; \quad \lim_{\xi \rightarrow 0} \xi \frac{df_1}{d\xi} = 1. \end{aligned} \quad (\text{V.3.29})$$

Функция $f_1(\xi, \lambda)$ обращается в нуль при $\xi \geq \xi_1(\lambda)$ и удовлетворяет интегральному соотношению (IV.2.32):

$$\int_0^{\xi_1(\lambda)} \xi f_1(\xi, \lambda) d\xi = \frac{1}{1 + \lambda}. \quad (\text{V.3.30})$$

Найдем приближенное решение сформулированной задачи в виде:

$$p = [\Psi(t)]^{1/2} f_1 \left[\frac{r}{a} \left(\int_0^t V \Psi(t) dt \right)^{-1/2}, \lambda(t) \right] \quad (\text{V.3.31})$$

Как нетрудно видеть, такое приближенное представление решения удовлетворяет начальному условию и условию на бесконечности при любом $\lambda(t)$, функцию же $\lambda(t)$ мы считаем подлежащей определению. Для ее нахождения воспользуемся интегральным соотношением

$$\frac{d}{dt} \int_0^{r^*(t)} r p(r, t) dr = a^2 \Psi(t), \quad (\text{V.3.32})$$

где $r^*(t)$ — граница области проникновения газа; $p(r, t) \geq 0$ при $r \leq r^*(t)$; $p(r, t) \equiv 0$ при $r \geq r^*(t)$. После некоторых вычислений получаем

$$\lambda(t) + 1 = \sqrt{\Psi(t)} \int_0^t \sqrt{\Psi(t)} dt \left[\int_0^t \Psi(t) dt \right]^{-1}. \quad (\text{V.3.33})$$

Формулы (V.3.31) и (V.3.33) позволяют выразить приближенное решение через затабулированную функцию $f_1(\xi, \lambda)$. В тех случаях, когда задача допускает точное автомодельное решение, приближенное решение совпадает с точным.

Есть две причины, по которым мы ограничились использованием автомодельных решений только для приближенного решения задач с нулевым начальным давлением газа. Во-первых, только в этом случае решение автомодельно при любых (постоянных) α и β , т. е. имеется однопараметрическое семейство решений. Во-вторых, именно задачи

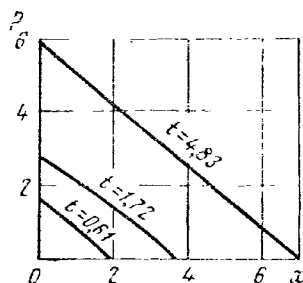


Рис. V.4

о фильтрации с нулевым начальным давлением газа представляют особую сложность для методов линеаризации и малого параметра, поскольку разложение по параметру $\nu = 1 - (p_1/p_0)^2$ становится при этом неправомерным.

§ 4. ВИДОИЗМЕНЕНИЕ МЕТОДА ИНТЕГРАЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЙ ДЛЯ СЛУЧАЯ БЕСКОНЕЧНОГО ПЛАСТА

При решении нелинейных задач различного вида последовательное применение метода интегральных соотношений по стандартной схеме приводит к громоздким вычислениям, тем более сложным, чем больше число неизвестных коэффициентов в приближенном выражении. Заметного упрощения можно достигнуть таким подбором приближающих функций, чтобы нужная точность получалась уже в одном из

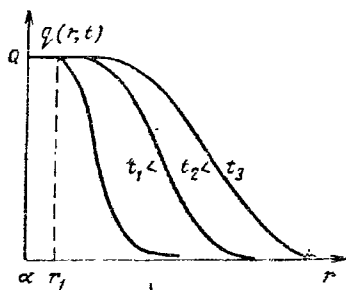


Рис. V.5

первых приближений (а практически — в первом приближении). Иными словами, задача состоит в том, чтобы почти «угадать» решение. Большую помощь при этом может оказать предварительное качественное исследование. Такое исследование уже было описано в § 4 гл. IV для автомодельной задачи о притоке газа к скважине, пущенной в эксплуатацию с постоянным дебитом. При этом оказалось, что движение вблизи скважины быстро стабилизируется, так что массовый расход газа

через скважину со скважиной цилиндрическую поверхность практически не меняется вплоть до некоторого расстояния от скважины (рис. V.5). Там же, где расход начинает меняться значительно, изменения давления газа по отношению к начальному значению невелики, и уравнения движения можно линеаризовать. Это позволяет по существу считать, что расход газа зависит от расстояния и времени так же, как и в соответствующей линеаризованной задаче, причем близость истинного и «линеаризованного» распределений расхода обусловлена малостью обычно встречающихся значений дебита (малостью значений λ в обозначениях гл. IV). Методом интегральных соотношений с учетом указанных соображений можно получить простые и достаточно точные решения ряда задач.

1. Рассмотрим осесимметричное движение сжимаемой жидкости в деформируемой среде, следующее закону Дарси. Для наших целей будет удобно ввести в ясном виде величину массового расхода жидкости в данный момент через поверхность $r \doteq \text{const}$ единичной высоты:

$$q - r\mu = -r \frac{k}{\mu} \rho \frac{\partial p}{\partial r}. \quad (\text{V.4.1})$$

Уравнение (V.4.1) вместе с уравнением неразрывности

$$\frac{\partial (m\rho)}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial q}{\partial r} = 0 \quad (\text{V.4.2})$$

и уравнениями

$$\rho = \rho(p), \quad -k = k(p), \quad \mu = \mu(p), \quad m = m(p) \quad (\text{V.4.3})$$

составляет замкнутую систему уравнений движения. Вводя функцию

$$P(p) = \int_0^p \frac{k\rho}{\mu} dp, \quad (\text{V.4.4})$$

являющуюся аналогом функции Лейбензона в теории фильтрации газа, можно привести систему (V.4.1), (V.4.2) к стандартному виду:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\kappa(P)}{r} \frac{\partial q}{\partial r} = 0; \quad q = -r \frac{\partial P}{\partial r}, \quad (\text{V.4.5})$$

где

$$\kappa(P) = \left(\frac{d(m\rho)}{dP} \right)^{-1} = \frac{k\rho}{\mu} \left[\frac{d(m\rho)}{dp} \right]^{-1} \quad (\text{V.4.6})$$

— переменный коэффициент пьезопроводности.

Система (V.4.5) может быть записана в виде одного уравнения для P . В таком виде можно записать систему уравнений движения при упругом режиме уравнения изотермической фильтрации газа и уравнения фильтрации в нелинейно деформируемой среде, так что система (V.4.5) описывает достаточно общую ситуацию.

Предположим, что рассматривается некоторое возмущение стационарного режима, возникающее на внутренней границе системы (в скважине). Чаще всего такое возмущение состоит в том, что задается определенный закон изменения отбора из скважины. Поэтому будем считать, что задача для уравнений (V.4.1) имеет вид:

$$q(r, 0) = q_0 = \text{const}; \quad q(a, t) = Q(t) \\ -(a \leq r < \infty, \quad 0 < t < \infty). \quad (\text{V.4.7})$$

Условия (V.4.7) соответствуют важнейшей для приложений задаче о нестационарном притоке к скважине (a — радиус скважины).

Наиболее простым является случай, когда расход в скважине изменяется скачком. При этом от скважины начинает распространяться волна изменения расхода, и распределение $q(r, t)$ принимает вид, показанный для последовательных моментов времени на рис. V.5. Характерно при этом, что расход сохраняет постоянные значения вблизи скважины и на удалении от нее и лишь в некоторый промежуточный области происходит его резкое изменение.

Такой характер изменения $q(r, t)$ имеет место при всех представляющих интерес видах зависимости $\kappa(P)$. В простейшем случае при $\kappa(P) = \kappa = \text{const}$, $Q = \text{const}$ имеем

$$q(r, t) = Q \exp\left(-\frac{r^2}{4\kappa t}\right) \quad (4\kappa t \gg a^2). \quad (\text{V.4.8})$$

Естественно поэтому попытаться найти приближенное решение задачи (V.4.1) — (V.4.2), полагая

$$q(r, t) = q_0 + (Q - q_0) \exp\left(-\frac{r^2}{l^2}\right), \quad (\text{V.4.9})$$

где $l = l(t)$ — параметр, выбираемый так, чтобы наилучшим образом удовлетворить некоторому дополнительному условию, которое будет приведено ниже. Если желательно учесть также конечность радиуса скважины и изменение во времени дебита скважины $Q(t)$, то удобно принять

$$q(r, t) = q_0 + (Q - q_0) \exp\frac{a^2 - r^2}{l^2}. \quad (\text{V.4.10})$$

В отличие от (V.4.9) выражение (V.4.10) не является точным даже для случая упругого режима. Оно, однако, удобно в том отношении, что позволяет значительно упростить вычисления, обеспечивая достаточно хорошее приближение.

Для определения функции $l(t)$ воспользуемся интегральным соотношением

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_a^\infty (r^2 - a^2) \left[\frac{q(r, t) - q(r, 0)}{r} \right] dr = \int_a^\infty \kappa(P) \frac{\partial q}{\partial r} dr. \quad (\text{V.4.11})$$

Выражение (V.4.10) удобно в том отношении, что после его подстановки уравнение (V.4.11) принимает достаточно простой вид.

Прежде чем перейти к рассмотрению примеров, сделаем одно общее замечание. Выбор расхода $q(r, t)$ в качестве функции, для которой задается распределение относительно простого вида, не случаен. Можно показать, что в задачах, в которых на границах области движения фиксируются значения q , распределение расхода сравнительно мало зависит от вида уравнений движения, оставаясь качественно таким же, как и для задач упругого режима. По этой причине распределение расхода $q(r, t)$ достаточно легко «угадать» с требуемой точностью. Здесь мы воспользуемся этой возможностью только для движения в однородном бесконечном пласте, однако тот же подход применим к неоднородным пластам и пластам конечной протяженности.

2. В качестве первого примера возьмем задачу из области теории упругого режима, рассмотренную еще Маскетом [78], о притоке к скважине конечного радиуса, пущенной с постоянным дебитом. В этом случае $P = \rho k p / \mu$; $\kappa = \kappa_0 = kK / m\mu = \text{const}$; $Q = \text{const}$; $q(r, 0) = 0$. Подставляя для q выражение (V.4.10), из (V.4.11) получаем

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{l^2}{4} + \frac{a^2}{4} e^{a^2/l^2} \text{Ei} \left(-\frac{a^2}{l^2} \right) \right] = \kappa_0 \quad (\text{V.4.12})$$

или

$$t = \frac{l^2}{4\kappa_0} \left[1 + \frac{a^2}{l^2} e^{a^2/l^2} \text{Ei} \left(-\frac{a^2}{l^2} \right) \right]. \quad (\text{V.4.13})$$

Интегрирование первого уравнения системы (V.4.1) с учетом условия $p(\infty, t) = p(r, 0) = 0$ дает

$$p(r, t) = \frac{\mu Q}{k\rho} \operatorname{Ei}\left(-\frac{r^2}{l^2}\right). \quad (\text{V.4.14})$$

Выражения (V.4.14) и (V.4.13) представляют в параметрическом виде искомую зависимость $p(r, t)$. На рис. V.6 показана зависимость отношения $l^2/(4\kappa t)$ и безразмерной депрессии в скважине $P = p(a, t) \frac{k\rho}{\mu Q}$ от безразмерного времени $\kappa t/a^2 = \tau$; полученное решение хорошо согласуется с точным решением Маскета [78].

Рассмотрим теперь несколько задач фильтрации газа.

Примем, что в начальном состоянии движения нет вовсе, $q(r, 0) = 0$, а начальное значение функции Лейбензона $P(r, 0) = P_0$ одинаково во всех точках, $P(r, 0) = P_0 = \text{const}$. В этом случае, используя первое уравнение системы (V.4.5) и соотношение (V.4.11) и ограничиваясь поправкой первого порядка на изменение $\kappa(P)$

$$\kappa(P) = \kappa(P_0) [1 + \eta_0(P - P_0)],$$

$$(\text{V.4.15})$$

легко представить интегральное соотношение (V.4.11) в виде:

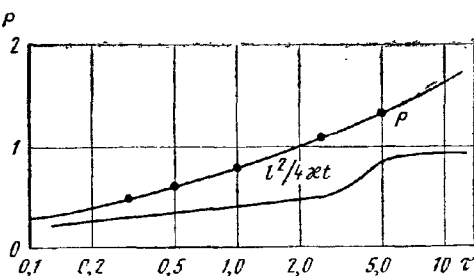


Рис. V.6

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{Ql^2}{4} + \frac{Qa^2}{4} e^{a^2/l^2} \operatorname{Ei}\left(-\frac{a^2}{l^2}\right) \right] =$$

$$= \kappa_0 \left\{ Q + \frac{1}{2} \eta_0 Q^2 \left[e^{a^2/l^2} \operatorname{Ei}\left(-\frac{a^2}{l^2}\right) - e^{2a^2/l^2} \operatorname{Ei}\left(-\frac{2a^2}{l^2}\right) \right] \right\}. \quad (\text{V.4.16})$$

В свою очередь для $P(r, t)$ из (V.4.1) и (V.4.8) получается выражение

$$P(r, t) = P_0 + \frac{1}{2} Q e^{a^2/l^2} \operatorname{Ei}\left(-\frac{r^2}{l^2}\right). \quad (\text{V.4.17})$$

В практически интересных случаях выражение (V.4.16) удастся без особого труда упростить.

Если рассматривать лишь достаточно большие времена, $l^2/a^2 \gg 1$, то уравнение (V.4.16) представится в виде:

$$\frac{1}{4} \frac{d}{dt} \left(Ql^2 - Qa^2 \ln \frac{l^2}{a^2} \right) = \kappa_0 Q \left(1 - \frac{1}{2} \eta_0 Q \ln 2 \right). \quad (\text{V.4.18})$$

При выводе этого выражения учтено также, что практически во всех случаях $\eta_0 Q \ll 1$. Из (V.4.18) следует выражение для времени:

$$t = \frac{l^2 - a^2 \ln(l^2/a^2)}{4\kappa_0 [1 - 1/2 \eta_0 Q \ln 2]}, \quad (\text{V.4.19})$$

а из (V.4.17) — формула

$$P(r, t) = P_0 + \frac{1}{2} Q e^{a^2/l^2} \text{Ei}\left(-\frac{r^2}{l^2}\right). \quad (\text{V.4.20})$$

При больших временах можно, пренебрегая членами порядка $(a^2/l^2) \ln(l^2/a^2)$, представить (V.4.20) в виде:

$$P(r, t) = P_0 + \frac{1}{2} Q \text{Ei}\left(-\frac{r^2}{4\kappa_0 t [1 - 1/2 \eta_0 Q \ln 2]}\right). \quad (\text{V.4.21})$$

Эта формула весьма близка к аналогичной формуле теории упругого режима и совпадает с ней, если пренебречь величиной произведения $1/2 \eta_0 Q \ln 2$ по сравнению с единицей. Поэтому, наблюдая изменение функции Лейбензона при пуске газовой скважины с постоянным дебитом, можно определять параметры пласта таким же образом, как при упругом режиме определяются параметры пласта по изменениям давления. Тот же результат получится, если исходную систему (V.4.5) линеаризовать по методу Л. С. Лейбензона, т. е. заменив переменный коэффициент проницаемости $\kappa(P)$ постоянной величиной $\kappa_0 = \kappa(P_0)$. Слагаемое $1/2 \eta_0 Q \ln 2$ представляет собой поправку к линеаризованной теории.

3. Для определения параметров пласта по испытаниям газовой скважины на нестационарный приток в соответствии с формулой (V.4.21) необходимо, чтобы дебит скважины на протяжении испытаний оставался постоянным. Поскольку давление на забое скважины при этом сильно изменяется, для поддержания постоянного дебита необходимо принимать специальные меры, не всегда осуществимые. Значительно проще вести эксперимент, оставляя гидравлическое сопротивление скважины постоянным. В этом случае дебит скважины оказывается функцией забойного давления

$$Q = Q(p_a). \quad (\text{V.4.22})$$

Эта функция — расходная характеристика скважины — может быть определена независимо, и ее можно считать известной. Более того, в одном случае она может быть без труда подсчитана — если в непосредственной близости к забою скважины в ней установлена диафрагма достаточно малого проходного сечения, то истечение газа в скважину носит критический характер; при этом расход приблизительно пропорционален давлению на забое

$$Q = c p_a. \quad (\text{V.4.23})$$

Можно получить приближенное решение, позволяющее определять характеристики пласта по наблюдениям за изменением давления

в случае, если дебит также изменяется в соответствии с соотношениями (V.4.23) или (V.4.22).

Рассмотрим достаточно большие значения времени: $l^2 \gg a^2$. Тогда уравнение (V.4.18) примет вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{Q(t) l^2}{4} = \kappa_0 Q(t) \left[1 - \frac{1}{2} \eta_0 Q(t) \ln 2 \right]. \quad (\text{V.4.24})$$

Используя (V.4.22), можно связать значение функции Лейбензона в скважине $P(a, t)$ с дебитом Q . Тогда из (V.4.17) следует уравнение

$$P(a, t) = P_0 + \frac{1}{2} Q [P(a, t)] \operatorname{Ei} \left(-\frac{a^2}{l^2} \right). \quad (\text{V.4.25})$$

Систему уравнений (V.4.25) и (V.4.24) легко решить приближенно, предполагая, что изменение дебита $Q(t)$ происходит достаточно медленно. Заметим прежде всего, что $Q(t)$ монотонно убывает от значения $Q_0 = Q(0)$, отвечающего моменту пуска

$$Q_0 = Q(p_0). \quad (\text{V.4.26})$$

Учитывая это обстоятельство и используя уравнение (V.4.24), можно легко получить оценку:

$$\left[1 - \frac{1}{2} \eta_0 Q(t) \ln 2 \right] \frac{Q_0}{Q(t)} \geq \frac{l^2}{4\kappa_0 t} \geq 1 - \frac{1}{2} \eta_0 Q_0 \ln 2. \quad (\text{V.4.27})$$

Из (V.4.27) следует, что с малой относительной ошибкой определения l^2/a^2 — порядка $\ln [Q_0/Q(t)]/\ln (4\kappa_0 t/a^2)$ — можно положить

$$\frac{l^2}{a^2} = \frac{4\kappa_0 t}{a^2}. \quad (\text{V.4.28})$$

Если подставить выражение (V.4.28) в (V.4.25), то получится уравнение, определяющее $P(a, t)$ как неявную функцию времени. Это уравнение удобно преобразовать к виду:

$$\chi(p_a) = \frac{Q_0}{2P_0} \ln \frac{2,25\kappa_0 t}{a^2}, \quad (\text{V.4.29})$$

где

$$\chi(p_a) = \frac{P_0 - P(a, t)}{P_0} \frac{Q_0}{Q[P(a, t)]} \quad (\text{V.4.30})$$

— безразмерная функция забойного давления, определяемая зависимостью функции Лейбензона и дебита скважины от давления; зависимость $\chi(p_a)$ может быть заранее определена для данной скважины. Формула (V.4.29) показывает, что в экспериментах с критическим истечением величина χ так же зависит от времени, как безразмерное давление в условиях упругого режима. Поэтому, представляя экспериментальные данные в координатах $\chi(p_a) - \ln t$, можно определять параметры пласта по обычной методике (см. гл. III, § 4).

При желании полученные выражения можно уточнить, вводя поправку в уравнение (V.4.28) для l^2 . На практике, однако, при обычно встречающихся значениях дебита в такой поправке нет необходимости.

Глава VI

ФИЛЬТРАЦИЯ НЕОДНОРОДНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

§ 1. ФИЛЬТРАЦИЯ МНОГОФАЗНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

1. В связи с проектированием и анализом разработок нефтяных и газовых месторождений приходится рассматривать совместное движение в пористой среде нескольких жидкостей, чаще всего воды, нефти и газа, представляющих собой обособленные фазы, не смешивающиеся между собой.

Чтобы описать фильтрацию многофазной жидкости применительно к модели сплошной пористой среды, нужно ввести характеристики осредненного движения. Масштаб осреднения в данном случае должен быть велик не только по сравнению с характерным размером пор, но и с размером частиц каждой из фаз. Существенно, что наименьший размер частиц может значительно превышать размер порового канала, поэтому масштаб осреднения определяется характером распределения фаз в порах и может быть различен в зависимости от постановки задачи. Подробнее об этом будет сказано ниже, пока же допустим, что существует такой линейный размер r , при котором характеристики каждой из фаз, осредненные по шару радиусом R , имеют при $R \rightarrow r$ асимптотические предельные значения, а размер r намного меньше характерных масштабов рассматриваемых задач. Главными характеристиками фильтрации многофазной жидкости являются *насыщенность* и *скорость фильтрации* каждой фазы.

Доля объема пор в элементарном макрообъеме в окрестности данной точки, занятая i -й фазой, называется *местной насыщенностью* порового пространства этой фазой и обозначается s_i . Очевидно,

$$\sum_{i=1}^n s_i = 1, \quad (\text{VI.1.1})$$

где n — число отдельных фаз. Таким образом, в системе n фаз имеется $n - 1$ независимая насыщенность. В частности, при исследовании

фильтрации двухфазной жидкости достаточно рассматривать лишь одну насыщенность. Движение каждой из фаз можно охарактеризовать вектором скорости фильтрации данной фазы $\vec{u}_i$. Аналогично скорости фильтрации однофазной жидкости, u_i определяется как вектор, проекция которого на некоторое направление равна объемному потоку данной фазы через единичную площадку, перпендикулярную указанному направлению.

Характерные особенности движения многофазной жидкости связаны с влиянием поверхностного натяжения. Как известно, на искривленной границе двух фаз возникает скачок давления, равный

$$p_c = \alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (\text{VI.1.2})$$

(формула Лапласа), где α — межфазное натяжение, R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны поверхности раздела фаз в данной точке. В пористой среде граница двух фаз разбивается на множество отдельных участков. Радиус кривизны каждого из них близок по порядку величины к размеру порового канала¹. Капиллярный скачок давления, особенно в малопроницаемых средах, может играть существенную роль в процессе фильтрации. Например, при проницаемости пористой среды около 10 мд радиус пор песчаника составляет примерно 10^{-4} см и капиллярное давление на границе газ — вода имеет порядок 0,5 кгс/см².

Влияние капиллярных сил на фильтрационные процессы сказывается двояким образом. Движение каждой из фаз многофазной системы зависит от сил давления, вызывающих движение, и от взаимного расположения фаз в поровом пространстве. Распределение фаз в порах определяет форму области течения каждой из фаз и тем самым величину сопротивления, испытываемого этой фазой при движении, так же как структура порового пространства определяет гидравлическое сопротивление при однофазном течении. Капиллярные силы влияют как на распределение давления в фазах, так и на взаимное расположение фаз в поровом пространстве. Соответственно и процессы фильтрации многофазной жидкости идут по-разному в зависимости от характерного времени фильтрационного процесса и от размеров области течения. Капиллярные силы создают в пористой среде перепад давления, величина которого ограничена и не зависит от размера области. Перепад внешнего давления, создающего фильтрационный поток между двумя точками, пропорционален скорости фильтрации и расстоянию между этими точками. Если размеры области малы, то при достаточно медленном движении капиллярные силы могут преувозйти внешний перепад давления. Поэтому в такой области время

¹ Мы не касаемся случая, когда одна из фаз находится в другой в виде эмульсии, радиус пузырьков которой намного меньше размера поровых каналов. В этом случае жидкость можно рассматривать как квазиоднородную; теория фильтрации таких эмульсий для случая системы газ — жидкость была разработана Л. С. Лейбензоном [73].

установления равновесного распределения фаз значительно меньше, чем время, за которое происходит заметное изменение средней насыщенности под действием фильтрационного потока. Таким образом, при исследовании локальных процессов, т. е. процессов, происходящих в элементарном макрообъеме, распределение фаз в порах обычно можно считать равновесным. Такой подход допустим, если насыщенность не меняется заметным образом на расстояниях порядка размера поровых каналов. Иначе говоря, безразмерная величина $\sqrt{k} |\text{grad } s|$ должна быть мала. Напротив, если рассматривается движение в очень большой области (например, в целой нефтяной залежи), то влияние капиллярных сил на распределение давления незначительно и их действие сказывается косвенно, через локальные процессы перераспределения фаз, вызывающие изменение местных гидравлических сопротивлений. Наконец, в ряде задач приходится рассматривать течение в областях таких промежуточных размеров, что длительность процессов перераспределения, вызываемых капиллярными силами, сравнима с характерным временем фильтрации. Задачи такого рода встречаются, например, при исследовании процессов вытеснения нефти или газа водой из неоднородных или трещиноватых пород.

Поскольку нас интересуют локальные характеристики крупномасштабного движения, будем рассматривать равновесное распределение фаз, не исследуя процесс его установления. Однако и равновесное распределение фаз при одной и той же насыщенности может быть различным. Хотя распределение фаз не зависит от средней скорости фильтрации, оно существенно зависит от того, как возникла данная насыщенность.

В ряде случаев одна или несколько фаз могут находиться в порах в виде изолированных пузырьков или капель, не связанных между собой и остальной частью данной фазы. Такие изолированные пузырьки или капли возникают либо при выделении фазы, растворенной в другой фазе, либо в конце процесса вытеснения одной фазы другой, когда частицы вытесняемой фазы разрываются на отдельные капли. Подвижность отдельной капли, окруженной другими фазами, в пористой среде весьма мала и может быть равна нулю при тех градиентах внешнего давления, которые существуют в основном фильтрационном потоке. Для примера типичное положение отдельной капли смачивающей фазы в порах показано на рис. VI.4. Для того чтобы протолкнуть эту каплю через сужение поры радиусом r , требуется приложить перепад давления одного порядка с избыточным капиллярным давлением, которое составляет около α/r . Поэтому при длине капли в несколько поровых каналов движение начнется только при условии, если градиент давления превысит $\sim \alpha/r^2$, что, как нетрудно подсчитать, намного превышает обычные градиенты давления в фильтрационных потоках в нефтяных и газовых пластах. Поэтому несвязная часть каждой фазы обычно является неподвижной. Заметим также, что несвязная насыщенность может составлять лишь небольшую долю порового пространства.

Для описания равновесного распределения фаз в порах используется понятие капиллярного давления. В состоянии равновесия граница раздела фаз в порах имеет сложную разветвленную форму. Рассмотрим равновесие двух фаз в пористой среде. Если каждая фаза в окрестности некоторой точки пористой среды является непрерывной, то можно ввести понятие среднего давления в этой фазе, которое в пределе, при стягивании поверхности осреднения может рассматриваться как давление в данной точке. Таким образом, при равновесии двухфазной смеси в пористой среде в каждой точке определяются два давления: p_1 и p_2 . Разность между этими давлениями называется



Рис. VI.1

капиллярным давлением в данной точке пористой среды. В соответствии с формулой Лапласа (VI.1.2) капиллярное давление пропорционально средней кривизне поверхности раздела фаз в окрестности данной точки. Давление больше со стороны жидкости, хуже смачивающей твердую фазу скелета пористой среды. По-видимому, основная часть жидкости не может находиться в виде пленки на поверхности твердой фазы, а имеет границы типа менисков (см. работу М. М. Кускова и Л. И. Мекеницкой [62]). Средняя кривизна этих менисков, очевидно, зависит прежде всего от искривленности порового пространства, т. е. от среднего радиуса пор среды. Далее, кривизна менисков, а следовательно, и капиллярное давление зависят от насыщенности порового пространства более смачивающей фазой, которая имеет тенденцию занимать более мелкие поры.

Состоянию равновесия соответствует минимум термодинамического потенциала, что сводится при неизменном давлении к минимуму поверхностной энергии, т. е. минимальной величине поверхности раздела фаз в данном объеме. Сложное строение порового пространства приводит к тому, что при данной насыщенности существует ряд локальных минимумов поверхностной энергии, и равновесное распределение является неоднозначным. В результате капиллярное давление зависит при данной насыщенности от пути насыщения. Тем не менее, если рассматривать только процессы вытеснения (без фазовых переходов), то можно считать, что капиллярное давление, кроме насыщенности смачивающей фазой, зависит лишь от того, увеличивается

или уменьшается насыщенность для достижения заданного ее значения.

Если отвлечься от этой неоднозначности, то из соображений размерности следует, что капиллярное давление p_c в равновесном состоянии может быть представлено в виде:

$$p_c = \frac{2\alpha}{r} \psi(s, \Theta), \quad (\text{VI.1.3})$$

где r — характерный линейный размер пор; Θ — статический краевой угол смачивания; зависимость (VI.1.3) называется капиллярной кривой.

Если рассматривать пористые среды, структуры которых подобны, то в качестве характерного линейного размера удобно принять (в соответствии со сказанным в гл. I) величину $\sqrt{k/m}$.

Влияние угла смачивания Θ на форму капиллярных кривых экспериментально изучено недостаточно. По аналогии с равновесием жидкости в капиллярной трубке принято включать в формулу для капиллярного давления вместо α «натяжение смачивания», равное $\alpha \cos \Theta$, и считать, что зависимость p_c от Θ этим исчерпывается. Тогда равенство (VI.3.1) преобразуется следующим образом:

$$p_c = \frac{2\alpha \cos \Theta}{\sqrt{\frac{k}{m}}} J(s). \quad (\text{VI.1.4})$$

Представление (VI.1.4) было впервые предложено Левереттом [143], и безразмерная функция $J(s)$ носит название функции Леверетта. Разумеется, в реальных условиях не может существовать двух сред, микроструктуры которых полностью подобны. Тем не менее экспериментально установлено, что функция $J(s)$ сохраняет свой вид с достаточной точностью для целых классов сходных по структуре пористых сред (например, для отдельных групп песчаников, песков и др.).

Равновесное распределение фаз в поровом пространстве зависит не только от конечной насыщенности, но и от того, каким образом достигнута эта насыщенность. Учесть всю предысторию насыщения, конечно, невозможно. Однако в приложениях наиболее интересны процессы постепенного замещения одной жидкости другой, когда изменение насыщенности происходит монотонно. Для анализа таких процессов можно использовать один из двух типов экспериментальных кривых $J(s)$, различающихся способом их получения. Если в исследуемом процессе возрастает насыщенность менее смачивающей фазой, то используются «кривые вытеснения», получаемые в условиях, когда менее смачивающая жидкость (или газ) очень медленно вытесняет из образца пористой среды более смачивающую жидкость. Напротив, для процессов, в которых возрастает насыщенность более смачивающей фазой, используются «кривые пропитки», получаемые при самопроизвольном капиллярном вытеснении менее

смачивающей жидкости (или газа) смачивающей жидкостью в вертикальной колонке пористой среды.

После окончания пропитки жидкости находятся в гидростатическом равновесии, и капиллярное давление в каждом сечении определяется по формуле $p_c = \Delta \rho g z$, где $\Delta \rho g$ — разность плотностей жидкостей, z — высота данного сечения над уровнем свободной смачивающей жидкости. Измеряя насыщенность в каждом сечении s , можно построить кривые $p_c(s)$ и $J(s)$.

Кривые вытеснения и пропитки заметно отличаются друг от друга (рис. VI.2), но практически не зависят от свойств жидкостей, применяемых для исследования, и каждая из них может быть описана однозначной функцией насыщенности.

Отметим еще, что та часть жидкости, которая находится в виде отдельных капель (несвязная насыщенность), не используется в определении капиллярного давления. Если вся жидкость находится в несвязном состоянии, то понятие капиллярного давления теряет смысл. Поэтому, например, кривые вытеснения $J(s)$ на рис. VI.2

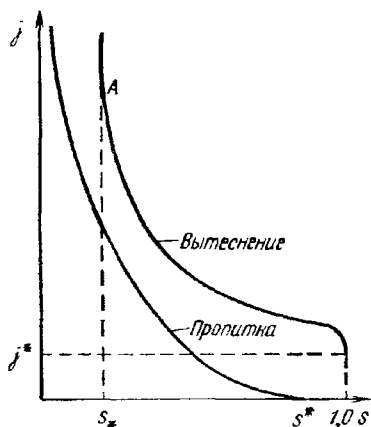


Рис. VI.2

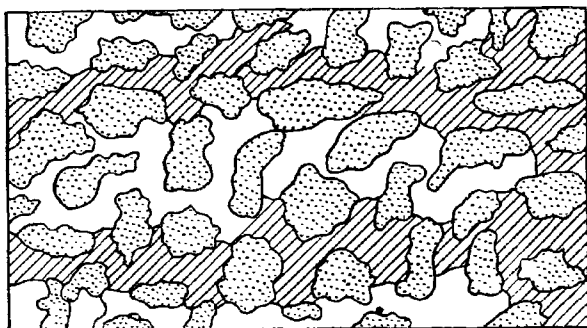


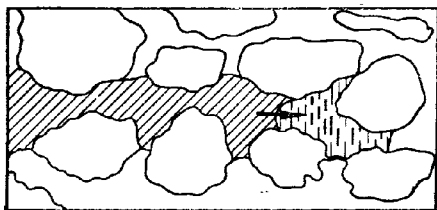
Рис. VI.3

фактически обрываются при некотором $s = s_*$ и не имеют смысла при $s < s_*$.

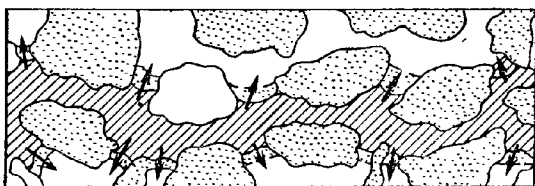
2. При фильтрации двух жидкостей в пористой среде по крайней мере одна из них образует связную систему, граничащую с пористым скелетом и частично с другой жидкостью (рис. VI.3). Из-за эффекта избирательного смачивания твердой фазы одной из жидкостей площадь контакта каждой из жидких фаз со скелетом пористой среды

значительно превышает площадь контакта фаз между собой (выше уже упоминалось, что существование одной из фаз в виде пленки на поверхности твердого скелета маловероятно). Это означает, что в первом приближении можно принять, что каждая фаза движется в занятом ею пространстве под действием «своего» давления независимо от других фаз, т. е. так, как если бы она была ограничена только твердыми стенками. Закон фильтрации каждой из жидкостей двухфазной системы можно записать в следующем виде:

$$\vec{u}_i = -\frac{k}{\mu_i} f_i \text{grad } p_i. \quad (\text{VI.1.5})$$



a



б

Рис. VI.4

Безразмерные величины f_i принято называть относительными проницаемостями. Относительные проницаемости являются важнейшими характеристиками двухфазного течения¹. Если не учитывать инерционных эффектов, то каждая функция f_i зависит только от безразмерных параметров s , $\frac{k |\text{grad } p|}{\alpha}$, $\frac{\mu_1}{\mu_2}$, m .

Большой экспериментальный материал, накопленный к настоящему времени [127], показывает, что вид кривых относительной проницаемости для данной пористой среды мало зависит от природы

¹ В дальнейшем соотношения вида (VI.1.5) будут применяться к задачам вытеснения одной жидкостью другой. Казалось бы, здесь есть прямое противоречие с предположением о независимом движении каждой из фаз. Однако, если насыщенности в ходе вытеснения меняются не слишком быстро, то процесс вытеснения будет происходить в основном не путем «выталкивания» частиц вытесняемой жидкости в направлении движения (рис. VI.4, a), но скорее путем постепенного «оттеснения» ее в сторону, перпендикулярную движению (рис. IV.4, б).

жидкостей и определяется главным образом преимущественной смачиваемостью. В частности, из большинства экспериментальных данных следует, что относительные проницаемости не зависят от отношения вязкостей фаз. Это служит подтверждением сделанного выше предположения о том, что течение каждой жидкости в занятом ею пространстве происходит независимо от движения соседней фазы ¹.

Параметр $\pi_\alpha = k/|\text{grad } p|/\alpha$ характеризует отношение перепада внешнего давления на расстояниях порядка размера поровых каналов к капиллярному давлению. Выше уже отмечалось, что для обычных достаточно медленных движений это отношение мало, и градиент внешнего давления не может существенно повлиять на распределение фаз в порах. Поэтому в этих условиях относительные проницаемости можно считать функциями только насыщенности.

Если считать, что сопротивление движению каждой фазы определяется только структурой занимаемой ею части порового пространства, то величина kf_i является для данной фазы проницаемостью (иногда kf_i называют фазовой проницаемостью) в обычном понимании. Очевидно, что с ростом насыщенности данной фазой от нуля до единицы функция f_i также возрастает от нуля до единицы. Выше было показано, что распределение фаз в порах зависит фактически только от того, какая из жидкостей обладает преимущественной смачиваемостью, но не от индивидуальных свойств жидкостей. Отсюда следует, что вид функций $f_i(s)$, так же как и $J(s)$, определяется структурой порового пространства.

Из того, что более смачивающая фаза занимает при той же насыщенности более мелкие поры, чем менее смачивающая, следует, что и относительная проницаемость при той же насыщенности для менее смачивающей жидкости больше, чем для более смачивающей. Поэтому кривые зависимости относительной проницаемости от насыщенности одною из фаз (например, более смачивающей) имеют обычно несимметричный вид типа, изображенного на рис. VI.5.

Характерно, что для каждой фазы существует предельная насыщенность (s_* и $1 - s_{**}$) — такая, что при меньших насыщенностях эта фаза неподвижна, т. е. находится в несвязном состоянии (индекс

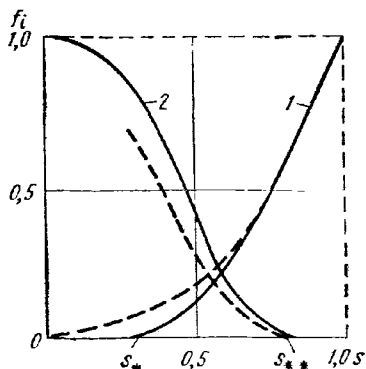


Рис. VI.5

¹ Экспериментальные результаты противоположного характера содержатся в работе Оде [150]. Однако эксперименты Оде проведены при несколько искусственных условиях и относятся к случаю, когда маловязкая смачивающая фаза образует на поверхности твердого скелета сплошной тонкий слой, играющий роль смазки. При этих обстоятельствах отношение вязкостей входит в число определяющих параметров.

1 на рис. VI.5 относится к более смачивающей жидкости, индекс 2 — к менее смачивающей).

При увеличении скорости фильтрации на распределение фаз в порах начинает влиять градиент внешнего давления. Согласно данным Д. А. Эфроса [127], это влияние начинает сказываться на относительных проницаемостях при параметре $\pi_\alpha = k |\text{grad } p| / \alpha$, большим 10^{-5} (т. е. $\pi'_\alpha = r^2 |\text{grad } p| / \alpha \approx 10^{-3}$).

Применение условий равновесия к задачам фильтрации двухфазной жидкости значительно усложняется ввиду неединственности распределения фаз при заданной насыщенности. Дополнительные осложнения возникают из-за гистерезиса смачивания, капиллярного гистерезиса, изменения свойств твердого скелета под действием длительного контакта с жидкостью и других аналогичных физико-химических явлений. Поэтому вид кривых относительной проницаемости, как и кривых $J(s)$ (см. рис. VI.2), зависит от того, повышается или понижается насыщенность в данном процессе, или в более общем случае — от всей предыстории процесса. Однако для наиболее практически интересных процессов, в которых насыщенность изменяется монотонно, относительные проницаемости, точно так же как и функция $J(s)$, могут рассматриваться как однозначные функции насыщенности.

Кривые относительной проницаемости, как и $J(s)$, разделяются по способу их получения на «кривые вытеснения» и «кривые пропитки», которые могут заметно различаться (см. рис. VI.5 — «кривые пропитки» отмечены пунктиром).

Область несвязной насыщенности ($s < s_*$ на рис. VI.5) также зависит от пути насыщения пористой среды и в процессе вытеснения различна в зависимости от того, возрастает или убывает насыщенность данной фазой. Если данная фаза является вытесняющей, то неподвижной (несвязной) может быть только та часть этой фазы, которая первоначально насыщала пористую среду. Например, в случае вытеснения нефти водой вытесняющая вода полностью подвижна, но вода, находившаяся ранее в пласте при малой начальной водонасыщенности (погребенная вода), может быть неподвижной в той части пласта, куда не дошла нагнетаемая вода. Это объясняется тем, что погребенная вода находится в пласте в виде отдельных капель и становится подвижной, только соединившись с основной массой вторгающейся в пласт воды.

Наиболее существенное отклонение кривых относительных проницаемостей от равновесных, связанное как с различными гистерезисными явлениями, так и с разрывностью фаз, отмечено при фильтрации газированной жидкости. Распределение газа и жидкости в поровом пространстве при одной и той же насыщенности существенно различно в случаях, когда газ появился в порах «извне», вытесняя жидкость, и когда растворенный ранее газ выделился из жидкости. Газ, пришедший «извне», движется как непрерывная фаза, находясь в капиллярном равновесии с жидкостью. Для газа в таком состоянии величины относительных проницаемостей зависят только

от насыщенности и совпадают с обычными относительными проницаемостями для несмачивающей фазы. В то же время газ, выделившийся из раствора, находится в порах в виде отдельных пузырьков. Как отмечено в экспериментах Д. А. Эфроса [127], относительные проницаемости для газа в таком состоянии при той же насыщенности во много раз меньше, чем для непрерывной газовой фазы. Отклонение от капиллярного равновесия проявляется также и в том, что относительные проницаемости в этом случае зависят от отношения вязкостей. Относительные проницаемости для газа, выделившегося из раствора, в большей степени, чем обычные относительные проницаемости, зависят от предыстории процесса выделения газа и последующего его движения, так как эти процессы влияют на величину и количество пузырьков. Д. А. Эфрос показал, что в качестве первого приближения можно считать относительные проницаемости зависящими от насыщенности и от приведенного давления, т. е. от отношения давления в газе к давлению насыщения нефти растворенным газом.

§ 2. ВЫТЕСНЕНИЕ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ. ЗАДАЧА БАКЛЕЯ-ЛЕВЕРЕТТА

Извлечение нефти из пласта в большинстве случаев происходит путем вытеснения ее водой или газом. Общая схема такого процесса изображена на рис. VI.6. Вода либо поступает в нефтенасыщенную

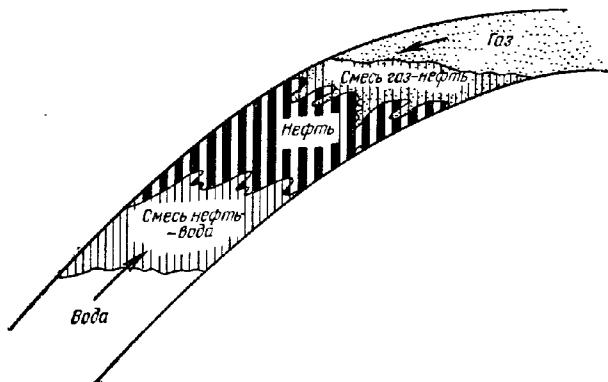


Рис. VI.6

часть пласта, перемещаясь из водонасыщенных зон того же пласта (краевая зона), либо искусственно закачивается в пласт через специальные нагнетательные скважины. Таким же вытесняющим агентом может быть газ, находящийся в пласте или специально нагнетаемый. Нефть извлекается через эксплуатационные скважины, причем в ряде случаев вместе с нефтью извлекается и вода или газ, прорвавшиеся к эксплуатационным скважинам. Хотя обычно природный газ отбирается из пласта за счет его расширения при снижении давления,

в некоторых случаях и газовые пласты работают на режиме вытеснения газа водой, насыщающей внешние области того же пласта. Для анализа эффективности вытеснения нефти или газа несмешивающейся с ней жидкостью необходимо знать, как изменяется распределение насыщенности в пласте. В связи с этим вытеснение несмешивающихся жидкостей должно рассматриваться как процесс двухфазной фильтрации.

Выведем систему уравнений двухфазной фильтрации в однородной пористой среде без фазовых переходов. При записи закона фильтрации будем предполагать, что в любой точке каждая из фаз находится целиком лишь в одном из двух крайних состояний: а) связном и подвижном и б) несвязном и поэтому неподвижном. В соответствии со сказанным в предыдущем параграфе, в областях медленного термодинамически равновесного течения для тех жидкостей, которые можно считать связными, можно ввести в расчет зависящие только от насыщенности относительные проницаемости $f_i(s)$ и капиллярное давление $p_c(s)$.

Кроме того, не касаясь гистерезисных явлений, будем рассматривать только однонаправленные процессы, которые наиболее интересны для приложений.

В результате сделанных предположений закон фильтрации можно записать в виде:

$$\bar{u}_i = - \frac{k}{\mu_i} f_i(s) \text{grad } p_i \quad (i = 1, 2). \quad (\text{VI.2.1})$$

В равновесном однонаправленном течении разность давлений в фазах равна капиллярному давлению, определяемому формулами (VI.1.3) или (VI.1.4):

$$p_2 - p_1 = p_c(s) = \alpha \sqrt{\frac{m}{k}} \cos \Theta J(s). \quad (\text{VI.2.2})$$

Для определенности будем индекс 1 относить к более смачивающей фазе, насыщенность которой равна s . В задачах совместной фильтрации нефти или газа и воды более смачивающей фазой обычно является вытесняющая вода.

Для получения замкнутой системы уравнений необходимо записать уравнения сохранения массы для обеих фаз. Выделим в фильтрационном потоке некоторый объем T . Масса первой фазы в нем равна $\int_T \rho_1 d\tau$ ($d\tau$ — элемент объема T). Приток первой фазы за время dt через поверхность S , ограничивающую объем T , составляет $-dt \int_S \rho_1 \bar{u}_1 n d\sigma$ (n — вектор нормали к поверхности S , $d\sigma$ — элемент поверхности S). Полагая, что в объеме T не содержится источников массы, имеем

$$\frac{d}{dt} \int_T \rho_1 s d\tau + \int_S \rho_1 \bar{u}_1 n d\sigma = 0, \quad (\text{VI.2.3})$$

откуда, преобразуя поверхностный интеграл в объемный и учитывая, что объем T произволен, а границы его неподвижны, получим окончательно

$$\frac{\partial}{\partial t} (m\rho_1 s) + \operatorname{div} (\rho_1 \bar{u}_1) = 0. \quad (\text{VI.2.4})$$

Аналогично выводится уравнение сохранения массы для второй фазы:

$$\frac{\partial}{\partial t} [m\rho_2 (1-s)] + \operatorname{div} (\rho_2 \bar{u}_2) = 0. \quad (\text{VI.2.5})$$

Таким образом, мы получаем замкнутую систему уравнений для p_i и s , поскольку ρ_1 и ρ_2 являются функциями давлений p_1 и p_2 , а изменение пористости в однородном пласте зависит только от изменения среднего давления $\bar{p} = \bar{p}_1 s + p_2 (1-s)$ (см. гл. II), а не давления компонентов.

Если вытесняемая и вытесняющая фазы — слабосжимаемые капельные жидкости, влиянием сжимаемости на распределение насыщенности можно пренебречь. Действительно, характерное время пестационарного перераспределения давления за счет сжимаемости имеет порядок $t_1 = L^2/\kappa$, где κ — коэффициент пьезопроводности, L — характерный размер. Характерное время вытеснения — порядка $t_2 = L/u$, где u — средняя скорость фильтрации. Обычно скорость фильтрации — около 10^{-3} см/сек, $L \approx 10^4 \div 10^5$ см, а $\kappa \approx 10^4$ см²/сек. Поэтому $t_1/t_2 \approx 10^{-2}$, откуда видно, что нестационарные процессы упругого перераспределения давления заканчиваются в начале хода вытеснения.

Если жидкости и пористую среду можно считать несжимаемыми, имеем вместо (VI.2.4) и (IV.2.5)

$$m \frac{\partial s}{\partial t} + \operatorname{div} \bar{u}_1 = 0, \quad m \frac{\partial s}{\partial t} - \operatorname{div} \bar{u}_2 = 0. \quad (\text{VI.2.6})$$

Решение системы уравнений (VI.2.4), (VI.2.2), (VI.2.6) для двух- или трехмерных случаев весьма сложно. Для анализа общих свойств поля насыщенности при вытеснении применим асимптотический подход, основанный на малости некоторых безразмерных параметров, входящих в условия задачи (см. работу Г. И. Баренблатта [26]).

В систему уравнений и граничные условия входят следующие размерные определяющие параметры: Δp — перепад давления между скважинами или галереями; L — характерный размер области течения; коэффициенты k/μ_1 и k/μ_2 , а также $p_c^0 = \alpha \sqrt{m/k} \cos \Theta$. Перейдем в уравнениях (VI.2.4), (VI.2.2), (VI.2.6) к безразмерным переменным:

$$\frac{p_i}{\Delta p} = P_i; \quad \bar{U}_i = \frac{\bar{u}_i}{u_0}; \quad (\bar{u}_0 = \frac{k \Delta p}{\mu_1 L}); \quad X = \frac{x}{L};$$

$$Y = \frac{y}{L}; \quad Z = \frac{z}{L}; \quad \tau = \frac{u_0 t}{L} = \frac{k \Delta p}{\mu_1 L^2} t; \quad \varepsilon = \frac{p_c^0}{\Delta p}.$$

Это приводит к системе уравнений

$$\begin{aligned}\bar{U}_1 &= -f_1(s) \operatorname{grad} P_2 + \varepsilon f_1(s) J(s) \operatorname{grad} s; \\ \bar{U}_2 &= -\mu_0 f_2(s) \operatorname{grad} P_2, \quad \mu_0 = \mu_1/\mu_2\end{aligned}\quad (\text{VI.2.7})$$

(оператор grad выполняется здесь в переменных X, Y, Z):

$$\begin{aligned}m \frac{\partial s}{\partial \tau} + \frac{\partial U_{1X}}{\partial X} + \frac{\partial U_{1Y}}{\partial Y} + \frac{\partial U_{1Z}}{\partial Z} &= 0; \\ m \frac{\partial s}{\partial \tau} - \frac{\partial U_{2X}}{\partial X} - \frac{\partial U_{2Y}}{\partial Y} - \frac{\partial U_{2Z}}{\partial Z} &= 0.\end{aligned}\quad (\text{VI.2.8})$$

Уравнения (VI.2.7) записаны через P_2 , так как только вытесняемая жидкость остается непрерывной во всей области течения, а вытесняющая может в целых областях, куда еще не дошел фронт вытеснения, находиться в виде отдельных капель.

Параметр $\varepsilon = \frac{P_c^0}{\Delta p}$ мал в большинстве интересных для приложений задач, так отмечалось в § 1. Поэтому член $\bar{U}_c = \varepsilon f_1(s) J'(s) \operatorname{grad} s$ может быть существен лишь в узких областях, где велик градиент насыщенности. Самый факт существования таких областей будет установлен позже, пока же отметим, что их протяженность должна быть мала по сравнению с основной внешней областью именно потому, что в них велик $|\operatorname{grad} s|$, а s — ограниченная величина. Это позволяет применить для анализа системы (VI.2.7), (VI.2.8) метод асимптотического сращения [36а], который заключается в использовании разных масштабов при рассмотрении движения в основной области и в узких зонах резкого изменения насыщенности. Подобно этому течение в пограничном слое вязкой жидкости вблизи стенок имеет иной пространственный масштаб, нежели внешнее течение.

Разделим область фильтрации на внешнюю зону, где U_c — малая величина, и узкую внутреннюю зону или зоны, где вследствие больших значений $|\operatorname{grad} s|$ значением U_c пренебречь нельзя.

Малость параметра ε приводит к естественной попытке исследовать течение во внешней зоне, разлагая искомое решение в степенной ряд по этому параметру (внешнее разложение). Первый член внешнего разложения мы получим, полагая $\varepsilon = 0$. Исследование структуры внутренней зоны (внутреннее разложение) будет рассмотрено в следующем параграфе.

Общие свойства внешнего разложения рассмотрим вначале на примере одномерной задачи, решение которой получается в замкнутом виде.

В одномерном случае (плоском, радиальном или сферическом)

уравнения (VI.2.8) с учетом (VI.2.7) при $\epsilon = 0$ запишем, возвращаясь к размерным переменным, в виде:

$$m \frac{\partial s}{\partial t} - \frac{k}{\mu_1} \frac{1}{x^{v-1}} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^{v-1} f_1(s) \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0; \quad (\text{VI.2.9})$$

$$m \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{k}{\mu_2} \frac{1}{x^{v-1}} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^{v-1} f_2(s) \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0 \quad (p_1 = p_2 = p)$$

($v = 1, 2, 3$ соответственно для линейного, радиального или сферического течения).

Вычитая второе уравнение (VI.2.9) из первого и интегрируя, получим

$$[f_1(s) - \mu_0 f_2(s)] \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{C(t)}{x^{v-1}} \quad \left(\mu_0 = \frac{\mu_1}{\mu_2} \right). \quad (\text{VI.2.10})$$

Это равенство выражает постоянство суммарного расхода вдоль трубки тока в силу несжимаемости жидкостей. Определяя $\partial p / \partial x$ из (VI.2.10) и подставляя в любое из уравнений (VI.2.9), получим одно уравнение для s :

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{q(t)}{m} \frac{F'(s)}{x^{v-1}} \frac{\partial s}{\partial x} = 0, \quad (\text{VI.2.11})$$

где $q(t) = -\frac{k}{\mu_1} C(t)$ — суммарный расход жидкости через трубку тока, а

$$F(s) = \frac{f_1(s)}{f_1(s) + \mu_0 f_2(s)}.$$

Функция $F(s)$ равна отношению скорости фильтрации (или расхода) вытесняющей фазы к суммарной скорости фильтрации (или к суммарному расходу). Функцию $F(s)$ принято называть функцией распределения фаз.

Введем новые независимые переменные: $Q = \int_{t_0}^t \frac{q(t)}{m} dt$, $W = \frac{x^v}{v}$.

Величину W можно рассматривать как объем трубки тока между сечениями x_0 и x (в частности, при $v = 1$ и $q(t) = \text{const}$ переменная Q пропорциональна времени, а $W = x$). Тогда вместо (VI.2.11) имеем

$$\frac{\partial s}{\partial Q} + F'(s) \frac{\partial s}{\partial W} = 0. \quad (\text{VI.2.12})$$

Этому уравнению в частных производных первого порядка соответствует следующая система характеристических уравнений:

$$\frac{dQ}{1} = \frac{dW}{F(s)} = \frac{ds}{0}. \quad (\text{VI.2.13})$$

Общее решение системы (VI.2.13) представляется в виде:

$$s = C_1; \quad (\text{VI.2.14})$$

$$W = Q F'(s) + C_2.$$

Таким образом, вдоль характеристик уравнения (VI.2.12) $s = \text{const}$ и в плоскости (W, Q) характеристики представляют собой прямые линии. Физически это означает, что каждое значение насыщенности s распространяется со «скоростью» dW/dQ , пропорциональной $F'(s)$. В случае движения плоскими волнами $v=1$, а $\frac{dW}{dQ}$ есть истинная скорость распространения данного значения насыщенности.

На основании равенств (VI.2.14) общее решение уравнения (VI.2.12) можно формально записать в виде:

$$W = QF'(s) + W_0(s), \quad (\text{VI.2.15})$$

где функция $W_0(s)$ соответствует начальному распределению насыщенности (при $Q=0$, т. е. $t=t_0$).

На скважинах (или галереях), через которые нагнетается вытесняющая жидкость, должны быть заданы условия, определяющие состав нагнетаемой жидкости. Если нагнетается одна (вытесняющая) жидкость, то такое условие записывается в виде:

$$u_2 = -\frac{k}{\mu_2} f_2(s) \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (\text{VI.2.16})$$

Поскольку $\partial p / \partial x \neq 0$, так как не равен нулю суммарный расход, то из (VI.2.5) следует $f_2(s) = 0$, $s \leq s_{**}$. Пусть в начальный момент везде в пласте насыщенность вытесняющей фазы ниже, чем s_{**} (s_{**} — насыщенность, при которой вытесняемая фаза становится неподвижной). Это условие выполняется почти во всех задачах, имеющих физический смысл. Тогда при $t > 0$ на границе будет выполняться условие

$$s = s_{**}. \quad (\text{VI.2.17})$$

Действительно, если предположить, что в некоторой точке границы $s > s_{**}$, то в силу непрерывности насыщенности вблизи этой точки границы должна существовать целая область конечных размеров, в которой $s > s_{**}$ и $u_2 = 0$. В силу уравнения неразрывности для вытесняемой фазы (VI.2.6) отсюда следует $\partial s / \partial t = 0$. Это противоречит условию $s \leq s_{**}$ при $t = 0$. Если же задано отношение расходов двух фаз на поверхности нагнетания λ , то условие на границе имеет вид:

$$\mu_0 \frac{f_2(s)}{f_1(s)} = \lambda, \quad (\text{VI.2.18})$$

откуда также определяется насыщенность на границе, поскольку относительные проницаемости $f_1(s)$ и $f_2(s)$ известны.

Вернемся к анализу общего вида решения (VI.2.15).

На рис. VI.7, а, б изображены типичные кривые $F(s)$ и $F'(s)$. Функция $F'(s)$ имеет максимум в некоторой точке s_m . Поэтому в соответствии с формулой (VI.2.15) два различных значения насыщенности могут иметь одинаковую скорость распространения. В связи с этим получаемая по формуле (VI.2.15) зависимость насыщенности от W

может стать неоднозначной — большие значения «обгоняют» меньшие, как это показано на рис VI.8.

Неоднозначность формального решения, получаемого из (VI.2.15), означает, что непрерывных решений задачи о вытеснении при заданном начальном условии не существует. Чтобы получить решение, имеющее физический смысл, необходимо вводить разрывы (скачки) насыщенности, т. е. поверхности, на которых значение насыщенности меняется скачком. Такие скачки могут существовать и в начальных условиях.

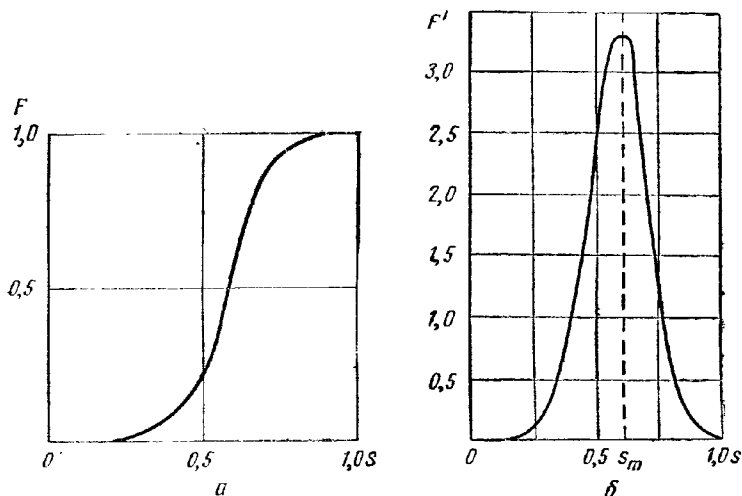


Рис. VI.7

С ростом Q начальное гладкое распределение насыщенности деформируется, как это видно на рис. VI.8. В некоторый момент (т. е. при некотором Q) касательная к кривой $s(W)$ становится вертикальной. Начиная с этого момента, возникает и распространяется скачок насыщенности. Положение скачков насыщенности заранее неизвестно и должно быть найдено в зависимости от времени из решения задачи. На скачках (поверхностях разрыва) должны выполняться условия непрерывности давления и сохранения массы каждой из движущихся фаз.

Выведем условия на скачках для общего случая неоднородного двухфазного течения. Первое из этих условий записывается в виде:

$$p^{(1)} = p^{(2)}. \quad (\text{VI.2.19})$$

Рассмотрим теперь условия сохранения массы каждой из фаз при прохождении поверхности разрыва (скачка) через некоторый элемент объема пористой среды (рис. VI.9), вырезанный по нормали к поверхности разрыва. В силу непрерывности давления сжимаемость

жидкостей для условий на скачке несущественна. Применим к этому элементу уравнение сохранения массы (VI.2.3). Имеем

$$\frac{d}{dt} \left(\int_T ms \, d\tau \right) = mV_n (s^{(1)} - s^{(2)}) A + o(T),$$

где A — площадь поперечного сечения элемента (индексом 1 сверху обозначены величины за скачком, индексом 2 — перед скачком); V_n — скорость перемещения скачка по нормали к нему; $o(T)$ — величина, стремящаяся к нулю быстрее, чем T .

Поток жидкости через сечения, параллельные поверхности разрыва, равен $(u_{1n}^{(1)} -$

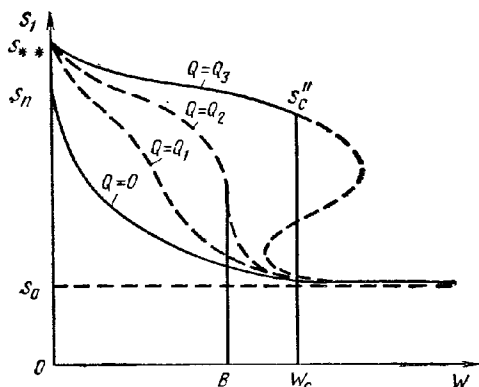


Рис. VI.8

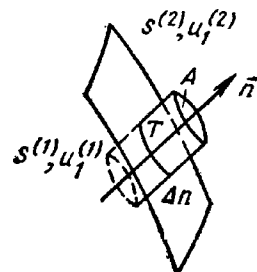


Рис. VI.9

$-u_{1n}^{(2)}) A$ (u_{1n} — проекция скорости фильтрации первой фазы на нормаль к поверхности скачка). Поток, связанный с касательной составляющей скорости, исчезающе мал по сравнению с $u_{1n}A$ при стремлении Δn к нулю в силу условия (VI.2.19).

Условие сохранения массы первой жидкости примет тогда вид:

$$mV_n (s^{(1)} - s^{(2)}) = u_{1n}^{(1)} - u_{1n}^{(2)}. \quad (\text{VI.2.20})$$

Равенство (VI.2.20) можно переписать в виде:

$$V_n = \frac{u_{1n}^{(1)} - u_{1n}^{(2)}}{m(s^{(1)} - s^{(2)})}. \quad (\text{VI.2.21})$$

Условие сохранения массы второй жидкости также сводится к выражению (VI.2.20), поскольку

$$u_{1n}^{(1)} + u_{2n}^{(1)} = u_{1n}^{(2)} + u_{2n}^{(2)}. \quad (\text{VI.2.22})$$

Вернемся к исследуемой одномерной задаче. Из определения функции $q(t)$ и $F(s)$ можно записать выражения для скоростей фильтрации вытесняющей фазы позади и впереди скачка:

$$u_1^{(i)} = \frac{q(t)}{x^v} F(s^i) \quad (i = 1, 2), \quad (\text{VI.2.23})$$

где индекс 1 относится к величинам за скачком, индекс 2 — перед скачком. Тогда получим следующее выражение для скорости скачка $V_n = V = dx/dt$:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{q(t)}{mx^{v-1}} = \frac{F(s^{(1)}) - F(s^{(2)})}{s^{(1)} - s^{(2)}}. \quad (\text{VI.2.24})$$

Переходя к переменным W и Q , получим

$$\frac{dW}{dQ} = \frac{F(s^{(1)}) - F(s^{(2)})}{s^{(1)} - s^{(2)}}. \quad (\text{VI.2.25})$$

Распределение насыщенности по обе стороны скачка описывается формулой (VI.2.15). Положение скачка W_c и насыщенность на скачке $s_c = s^{(1)}$ можно определить вычислением последовательными шагами, исходя из начального положения скачка (т. е. места появления вертикальной касательной), по формуле (VI.2.25).

Выведем дифференциальное уравнение, описывающее изменение насыщенности на скачке в зависимости от Q . Для насыщенности на скачке, как и для любого значения насыщенности, выполняется соотношение (VI.2.15):

$$W_c = QF'(s_c) + W_0(s_c). \quad (\text{VI.2.26})$$

Очевидно, согласно (VI.2.26), $s_c = s^{(1)}$ меняется с изменением Q (т. е. со временем). Дифференцируя (VI.2.26) по Q , имеем

$$\frac{dW_c}{dQ} = F'(s_c) + [F''(s_c)Q + W'_0(s_c)] \frac{ds_c}{dQ}. \quad (\text{VI.2.27})$$

Приравнявая выражения для скорости распространения скачка насыщенности (VI.2.25) и (VI.2.27), придем к следующему уравнению для s_c :

$$\frac{ds_c}{dQ} = \frac{F(s_c) - F(s^{(2)}) - F'(s_c)(s_c - s^{(2)})}{(s_c - s^{(2)})[F''(s_c)Q + W'_0(s_c)]}. \quad (\text{VI.2.28})$$

Значение $s^{(2)}$ в уравнении (VI.2.28) является функцией Q и s_c . Оно определяется из условия $W(s^{(2)}) = W(s_c) = W_c$ в соответствии с формулой (VI.2.15):

$$QF'(s_c) + W_0(s_c) = QF'(s^{(2)}) + W_0(s^{(2)}). \quad (\text{VI.2.29})$$

Для решения уравнения (VI.2.28) начальные значения s_c и Q определяются в той точке, где dW/ds , соответствующее формуле (VI.2.15), впервые обращается в нуль.

Из уравнения (VI.2.28) следует, что на скачке насыщенности, по обе стороны которого s_c и $s_0 = s^{(2)}$ постоянны (стационарный скачок), должно выполняться условие

$$\frac{F(s_c) - F(s_0)}{s_c - s_0} = F'(s_c). \quad (\text{VI.2.30})$$

Это условие (полученное впервые в работе Баклея и Леверетта [134]) означает, что скорость распространения скачка равна скорости распространения насыщенности на скачке s_c .

Рассмотрим отдельно случай, когда начальная насыщенность $s(W, 0) = s_0$ постоянна во всем пласте. Тогда $W_0(s) = 0$ при $s > s_0$ и $W_0(s)$ неопределенно при $s < s_0$. Из формулы (VI.2.15) имеем в данном случае

$$W = QF'(s) \quad (s > s_0).$$

Предположим, что $s_0 < s_m$ (см. рис. VI.7, б), и скачок возникает. При заданных условиях в уравнении (VI.2.28) переменные разделяются.

Обозначим $s_c - s_0 = y$, $F(s_c) - F(s_0) = \psi(y)$. Тогда из уравнения (VI.2.28), интегрируя, получим

$$\psi(y) - y\psi'(y) = \frac{C}{Q}; \quad C = \text{const.} \quad (\text{VI.2.34})$$

Поскольку при $Q \rightarrow 0$ (в начальный момент), левая часть равенства (VI.2.34) остается ограниченной, C должно обращаться в нуль. Следовательно, скачок является стационарным. Возвращаясь к переменным s_c и s_0 , получаем, что на скачке при любых Q выполняется соотношение (VI.2.30).

Пусть начальное распределение насыщенности таково, что $W'_0(s) < 0$ при всех s , а при $W \rightarrow \infty$ $s(W, 0) \rightarrow s_0$. Тогда рассмотренное выше решение для случая $s_0 = \text{const}$ будет выполняться асимптотически при $Q \rightarrow \infty$, поскольку $W'_0(s_0)$ ограничено.

Рассмотренное решение и условие (VI.2.30) было получено Баклеем и Левереттом [134]. Исследование движения скачков насыщенности выполнено С. Н. Бузиновым и И. А. Чарным [36].

В общем случае неоднородной задачи системы (VI.2.7) и (VI.2.8) даже при $\varepsilon = 0$ уже не сводятся к одному уравнению для насыщенности. Необходимо определять p и s совместно. При этом граничные и начальные условия для p те же, что и в задачах фильтрации однородной жидкости.

Условия для s имеют вид (VI.2.17) или (VI.2.18). Кроме того, на скачках, положение которых заранее неизвестно, должны выполняться условия (VI.2.19), (VI.2.22) и (VI.2.23). Решения неоднородных задач могут быть получены лишь численно на ЭВМ.

§ 3. СТРУКТУРА СКАЧКА НАСЫЩЕННОСТИ. УРАВНЕНИЕ РАПОПОРТА — ЛИСА. СТАБИЛИЗИРОВАННАЯ ЗОНА

На примере решения Баклея — Леверетта видно, что если в задаче о вытеснении нефти водой ограничиться первым членом внешнего разложения, т. е. не учитывать капиллярной разности давлений, то необходимо вводить поверхности, на которых насыщенность терпит разрыв.

Чтобы описать распределение насыщенности в узких областях, вблизи скачка, нужно получить «внутреннее разложение» решения задачи о вытеснении на основе полной системы уравнений (VI.2.7), (VI.2.8). Для построения первого члена внутреннего разложения введем в окрестности некоторой точки поверхности разрыва (т. е. скачка насыщенности) локальную мгновенную декартову систему координат с центром в точке 0 поверхности разрыва. Ось x направим по нормали к поверхности разрыва и введем вдоль этой оси масштаб $l = \varepsilon L$, т. е. положим $X = \frac{x}{l}$, сохраняя вдоль других осей масштаб L (рис. VI.10). Масштаб времени примем равным $t_1 = l/u_0$ и положим $\tau = t/t_1$. В остальном сохраним те же безразмерные параметры и переменные, что и в уравнениях (VI.2.7) и (VI.2.8).

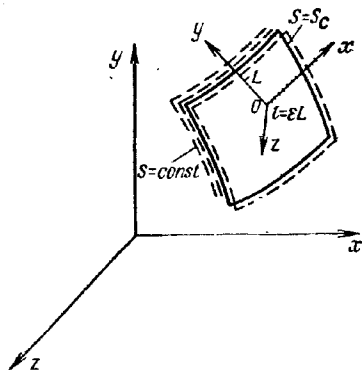


Рис. VI.10

Запишем систему уравнения в безразмерном виде. Обобщенный закон Дарси:

$$\begin{aligned} U_{1X} &= -\frac{1}{\varepsilon} f_1(s) \frac{\partial P_1}{\partial X} & U_{2X} &= -\frac{\mu_0}{\varepsilon} f_2(s) \frac{\partial P_2}{\partial X}; \\ U_{1Y} &= -f_1(s) \frac{\partial P_1}{\partial Y} & U_{2Y} &= -\mu_0 f_2(s) \frac{\partial P_2}{\partial Y}; \\ U_{1Z} &= -f_1(s) \frac{\partial P_1}{\partial Z} & U_{2Z} &= -\mu_0 f_2(s) \frac{\partial P_2}{\partial Z}; \end{aligned} \quad (\text{VI.3.4})$$

$$P_2 - P_1 = \varepsilon J(s) \quad \mu_0 = \frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

Уравнения неразрывности:

$$\begin{aligned} m \frac{\partial s}{\partial \tau} + \frac{\partial U_{1X}}{\partial X} + \varepsilon \frac{\partial U_{1Y}}{\partial Y} + \varepsilon \frac{\partial U_{1Z}}{\partial Z} &= 0; \\ m \frac{\partial s}{\partial \tau} - \frac{\partial U_{2X}}{\partial X} - \varepsilon \frac{\partial U_{2Y}}{\partial Y} - \varepsilon \frac{\partial U_{2Z}}{\partial Z} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{VI.3.2})$$

Подставляя (VI.3.4) в (VI.3.2) и отбрасывая члены порядка ε и ε^2 получим

$$\begin{aligned} m \frac{\partial s}{\partial \tau} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial X} \left(f_1(s) \frac{\partial P_1}{\partial X} \right) &= 0; \\ m \frac{\partial s}{\partial \tau} + \frac{\mu_0}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial X} \left(f_2(s) \frac{\partial P_1}{\partial X} \right) + \mu_0 \frac{\partial}{\partial X} \left(f_2(s) J'(s) \frac{ds}{dX} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{VI.3.3})$$

Исключим $\partial P_1 / \partial X$ из уравнений (VI.3.3), что дает окончательно

$$m \frac{\partial s}{\partial \tau} - w \frac{\partial F(s)}{\partial X} + \mu_0 \frac{\partial}{\partial X} (f_2(s) F(s) J^*(s) \frac{\partial s}{\partial X}) = 0, \quad (\text{VI.3.4})$$

где

$$w(\tau) = \frac{u_1 + u_2}{u_0} = -\frac{1}{\varepsilon} [f_1(s) + \mu_0 f_2(s)] \frac{\partial P_1}{\partial X} + \mu_0 f_2 J^*(s) \frac{\partial s}{\partial X} = U_{1X} + U_{2X}. \quad (\text{VI.3.5})$$

Система (VI.3.1)–(VI.3.2) свелась к одномерному уравнению (VI.3.4), потому что радиус кривизны поверхности разрыва имеет порядок L , и в принятом масштабе l эта поверхность, как и поверхности $s = \text{const}$, заменяется плоскостями. Равенство (VI.3.5) означает, что в пределах зоны скачка, где движение можно считать одномерным, суммарная скорость фильтрации обеих фаз вдоль оси x , w есть величина, зависящая только от времени, как при движении в цилиндрической трубке тока.

Значение w в уравнении (VI.3.4) находится из внешнего разложения, как безразмерная суммарная скорость фильтрации через поверхность разрыва в точке 0. Уравнение (VI.3.4), описывающее одномерное вытеснение несмешивающихся жидкостей, называется уравнением Рапопорта — Лиса [152].

Поскольку масштаб времени во внутреннем разложении t_1 намного меньше, чем во внешнем, а скорость w определяется внешним разложением, то при исследовании внутреннего разложения можно считать $w(\tau) = \text{const}$. Ввиду различия масштабов времени во внешнем и внутреннем разложении достаточно воспользоваться стационарным решением задачи Коши для уравнения (VI.3.4), т. е. положить

$$s = s(\bar{x}), \quad \bar{x} = X - V^0 \tau \quad \left(V^0 = \frac{V}{u_0} \right). \quad (\text{VI.3.6})$$

Иными словами, в масштабе времени внутреннего разложения процесс вытеснения продолжался весьма долго, и его можно считать установившимся в системе координат, связанной со скачком. При этом в силу различия масштабов l и L должны выполняться граничные условия

$$s(-\infty) = s^{(1)} = s_c; \quad s(+\infty) = s^{(2)} = s_0, \quad (\text{VI.3.7})$$

где $s^{(1)} = s_c$ и $s^{(2)} = s_0$ — насыщенности за и перед скачком, определяемые из внешнего разложения [в задаче Баклея — Леверетта они связаны соотношением (VI.2.30)]. Параметр V^0 в равенстве (VI.3.6) есть, очевидно, скорость распространения поверхности разрыва, определяемая формулами (VI.2.24) или (VI.2.24).

Используя (VI.3.6), получим вместо (VI.3.4) уравнение

$$-m V^0 \frac{ds}{d\bar{x}} - w \frac{dF(s)}{d\bar{x}} + \mu_0 \frac{d}{d\bar{x}} \left[f_2(s) F(s) J^*(s) \frac{ds}{d\bar{x}} \right] = 0. \quad (\text{VI.3.8})$$

Интегрирование дает

$$-mV^0s - wF(s) + \mu_0 f_2(s) F(s) J'(s) \frac{ds}{dx} = c = \text{const.} \quad (\text{VI.3.9})$$

Из условия $s=s_c$ при $\bar{x} \rightarrow -\infty$, учитывая, что при этом $ds/d\bar{x}=0$, имеем

$$c = -mV^0s_c - wF(s_c). \quad (\text{VI.3.10})$$

Заметим, что, поскольку значение V определяется формулой (VI.2.24), второе условие (VI.3.7) будет выполнено автоматически. Подставляя значение c из (VI.3.10) в (VI.3.9) и разрешая относительно $d\bar{x}/ds$, получим

$$\frac{d\bar{x}}{ds} = \frac{w\mu_0 f_2(s) F(s) J'(s)}{V^0(s-s_0) - [F(s) - F(s_0)]w}. \quad (\text{VI.3.11})$$

Если проинтегрировать уравнение (VI.3.11) по s , принимая начало отсчета так, чтобы при $\bar{x} = x_1$ было $s = s_1$, где $s_0 < s_1 < s_c$, получим, используя для V^0 формулы (VI.2.24) и (VI.3.5) при $s^{(1)} = s_c$, $s^{(2)} = s_0$:

$$\left(V = \frac{u_0 w}{m} \frac{F(s_c) - F(s_0)}{s_c - s_0}; \quad V^0 = \frac{w}{m} \frac{F(s_c) - F(s_0)}{s_c - s_0} \right);$$

$$\bar{x} - \bar{x}_1 = \int_{s_1}^s \frac{f_2(s) F(s) J'(s) ds}{[F(s_c) - F(s_0)] \frac{s-s_0}{s_c-s_0} - F(s) + F(s_0)}. \quad (\text{VI.3.12})$$

Если справедливо предположение о стационарности скачка насыщенности и V определяется из формулы (VI.2.24), получим иную запись для $\bar{x}(s)$:

$$\bar{x} - \bar{x}_1 = \int_{s_1}^s \frac{f_2(s) F(s) J'(s) ds}{F'(s_c)(s-s_0) - F(s) + F(s_0)}. \quad (\text{VI.3.13})$$

Интегралы (VI.3.12) и (VI.3.13) описывают переходную зону бесконечной протяженности, что является следствием принятой аппроксимации. Фактически для определения ширины зоны нужно брать по формулам (VI.3.12) и (VI.3.13) расстояние между точками с насыщенностями $s_0 + \delta$ и $s_0 - \delta$, где δ — малая, но конечная величина. Тогда безразмерная ширина переходной зоны будет порядка нескольких единиц, а размерная ширина — порядка l , т. е. $\frac{Pc}{\Delta p} L$ или $\frac{\alpha \sqrt{k}}{\mu_1 \mu_0}$. Типичная кривая распределения насыщенности в переходной зоне приведена на рис. VI.11.

Проанализируем распределение насыщенности в переходной зоне в зависимости от вида функций $F(s)$ и $J'(s)$ и значений s_c и s_0 .

При s , близких к s_c , знаменатель подынтегрального выражения имеет порядок

$$(s - s_c) \left\{ \frac{F(s_c) - F(s_0)}{s_c - s_0} - F'(s_c) \right\} + a_1 (s - s_c)^2,$$

а числитель есть конечная величина. Поэтому, если $\frac{F(s_c) - F(s_0)}{s_c - s_0} \neq F'(s_c)$, то для больших отрицательных $\bar{x}$ имеем $\bar{x} \approx B \ln(s - s_c)$. Если же $\frac{F(s_c) - F(s_0)}{s_c - s_0} = F'(s_c)$ (случай Баклея — Леверетта), то $\bar{x} \approx C (s_c - s)^{-1}$ (a_1, B, C — постоянные).

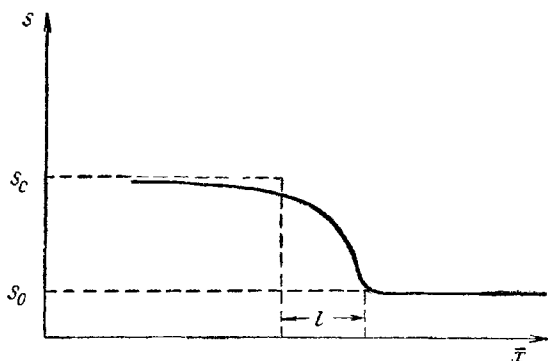


Рис. VI.11

Если s_0 и $F(s_0)$ не обращаются в нуль и $\frac{dJ}{ds}$ при $s = s_0$ конечно, то из (VI.3.12) для s , близких к s_0 , следует $\bar{x} - \bar{x}_1 \approx A \ln(s - s_0)$.

Пусть теперь $F(s_0) = 0$ и, следовательно, $s_* \geq s_0 \geq 0$. Тогда вместо (VI.3.12) получим

$$\bar{x} - \bar{x}_1 = \int_{s_1}^s \left[\frac{F(s_c)}{s_c - s_0} - \frac{F(s)}{s - s_0} \right] \frac{f_2(s) F(s) J'(s)}{s - s_0} ds. \quad (\text{VI.3.14})$$

Функция $f_1(s)$ при s , близком к s_* , имеет вид $b(s - s_*)^\beta$, где $\beta > 2$, $F(s) \approx M(s - s_*)^\beta$, b и M — постоянные. Тогда при s , близких к s_* , если $s_* \neq s_0$, то

$$\bar{x} - \bar{x}_* = N \int_{s_*}^s (s - s_*)^\beta J'(s) ds. \quad (\text{VI.3.15})$$

При $s \rightarrow s_*$ величина $J'(s)$ растет медленнее, чем $(s - s_*)^{-(\beta+1)}$, интеграл (VI.3.15) сходится, и значение $s = s_*$ достигается при конечном значении $\bar{x}$ (рис. VI.12), а от s_* до s_0 возникает скачок насыщенности. На этом скачке, как и на всяком скачке насыщенности, должно

выполняться условие (VI.2.12). Проверим его выполнение. В нашем случае $V_n = V$, $s^{(1)} = s_*$, $s^{(2)} = s_0$, $u_{1n}^{(2)} = 0$. Тогда условие (VI.2.12) примет вид:

$$u_1^{(1)} = u_1 (s - s_*) = V_m (s_* - s_0). \quad (\text{VI.3.16})$$

Сравнивая формулы (VI.3.3) и (VI.3.4), можно получить

$$u_1 = u_0 \left[w F(s) - u_0 f_2(s) F(s) J'(s) \frac{ds}{dx} \right]. \quad (\text{VI.3.17})$$

Теперь нетрудно убедиться, что с учетом (VI.3.17) из уравнения (VI.3.11) при $s = s_*$ следует условие (VI.3.16).

Если $s_0 = s_*$, то вместо формулы (VI.3.15) имеем при s , близких к s_* :

$$\bar{x} - \bar{x}_* = N_1 \int_{s_*}^s (s - s_*)^{B-1} J'(s) ds. \quad (\text{VI.3.18})$$

Величина s обращается в s_* при конечном значении $\bar{x}$ в том случае, если интеграл (VI.3.18) сходится.

Существование решений вида (VI.3.12) и (VI.3.13) показывает, что при постоянной скорости вытеснения распределение насыщенности в переходной зоне является стационарным. Экспериментально такая стационарная переходная зона при вытеснении нефти водой в трубах, заполненных песком, была обнаружена Тервиллигером и др. [158] и впоследствии подробно исследована в работах Рапопорта и Лиса [152] и Д. А. Эфроса и В. П. Оноприенко [128]. В связи со стационарностью распределения насыщенности эта зона получила название стабилизированной зоны. Фильтрация в стабилизированной зоне исследовалась в работах Джонс-Парра и Колхауна [141], а также В. М. Рыжика, И. А. Чарного, Чень-Чжун-Сяна [99а].

Распределение насыщенности в стабилизированной зоне устанавливается в результате совместного действия сил вязкого сопротивления, гравитации и капиллярных сил. Все эти силы находятся в равновесии при постоянной скорости вытеснения. Здесь имеется аналогия с гидростатическим равновесием жидкости в пористой среде, когда граница раздела фаз бывает размытой под действием капиллярных сил из-за разницы в размерах поровых каналов. Грубо оценивая величину сил, действующих на жидкость в переходной зоне, можно сказать, что капиллярное давление, вызывающее размывание фронтов,

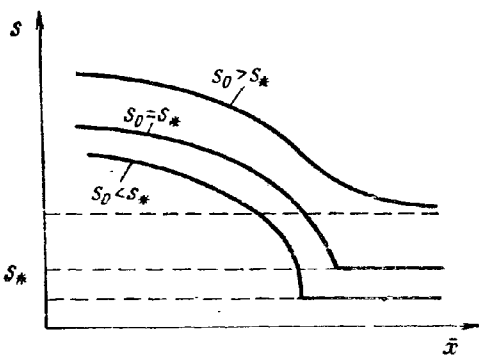


Рис. VI.12

имеет порядок $\alpha \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} \right)$, где r_0 и r_1 — минимальный и максимальный «радиусы пор» среды. Перепад давления, необходимый для преодоления вязкого сопротивления, и силы тяжести в зоне длиной l пропорциональны l . Поэтому при постоянной скорости размер зоны, в которой «срабатывается» капиллярный перепад, остается постоянным.

Возможность описания процесса вытеснения в большом масштабе при помощи внешнего разложения (например, с использованием решения Баклея — Леверетта) связана только с малостью параметра $\epsilon = \frac{p_c^0}{\Delta p}$. Если граничные условия внешней задачи таковы, что параметр ϵ мал, то он остается малым даже в том случае, если капиллярное давление зависит, кроме насыщенности, и от других параметров, поскольку капиллярное давление связано в основном с распределением фаз в порах и при любом распределении остается огравиченным. Напротив, при анализе структуры переходной зоны в настоящем параграфе учитывалось, что капиллярное давление и относительные проницаемости являются функциями только насыщенности.

Г. И. Баренблатт [26] отметил, что во внутренней переходной зоне использование предположения о фазовых проницаемостях и капиллярном давлении как универсальных функциях мгновенной насыщенности неправомерно из-за неравновесных процессов перераспределения фаз в порах. Вместо этого предполагается, что в каждый момент при каждой насыщенности s существуют объемы вытесняющей и вытесняемой фаз, равные $\tau_0 \frac{\partial s}{\partial t}$, не принимающие участия в движении (здесь τ_0 — некоторый параметр, имеющий размерность времени, зависящий от свойств пористой среды). Эти объемы захвачены процессами перераспределения, в связи с чем поры, где они находятся, как бы «заперты». Тогда в первом приближении можно полагать, что $f_1 = f_1^0 \left(s - \tau_0 \frac{\partial s}{\partial t} \right)$, $f_2 = f_2^0 \left(s + \tau_0 \frac{\partial s}{\partial t} \right)$, где $f_1^0(s)$ и $f_2^0(s)$ — обычные «равновесные» относительные проницаемости. В работе [26] были получены выражения для распределения насыщенности в стабилизированной зоне при сделанных предположениях о «запаздывании» относительных проницаемостей.

Как показывают эксперименты, стабилизированная зона при постоянной скорости вытеснения всегда образуется через достаточно большое время. Измерения распределения насыщенности в стабилизированной зоне может помочь выяснить, в каких пределах справедливы предположения, сделанные при выводе формул (VI.3.12) и (VI.3.13), т. е. предположения об однозначной зависимости функций $f_i(s)$ и $J(s)$ от насыщенности и о независимости их от скорости фильтрации.

Такие эксперименты были проведены В. М. Рыжиком совместно с В. Н. Мартосом. Из горизонтальных труб длиной 170 см, заполненных кварцевым песком с проницаемостью 10 д и пористостью 0,40,

вытеснялся воздух водой при атмосферном давлении с постоянной скоростью. Распределение насыщенности измерялось методом электросопротивления. Скорость вытеснения u_0 менялась в пределах от 0,0011 до 0,020 см/сек. Начальная насыщенность s_0 равнялась 0,21.

Эксперименты показали, что при вытеснении с постоянной скоростью изменение насыщенности в различных точках по длине модели практически повторяется со сдвигом во времени, пропорциональным скорости вытеснения, т. е. образуется стабилизированная зона. Типичные кривые $s(t)$ в точках, отстоящих друг от друга на 58 см, при скорости фронта 0,013 см/сек показаны на рис. VI.13.

Если относительные проницаемости и капиллярное давление являются функциями только насыщенности, то

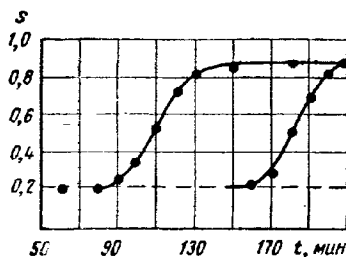


Рис. VI.13

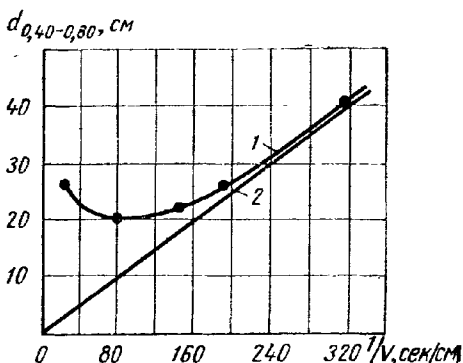


Рис. VI.14

в соответствии с формулами (VI.3.12) и (VI.3.13) безразмерная длина стабилизированной зоны δ не зависит от скорости. Это означает, что размерная длина этой зоны, равная $d = \delta l$, обратно пропорциональна скорости, т. е.

$$d = \delta l = \delta \frac{p_c^0}{\Delta p} L = \frac{\delta \alpha \sqrt{k m} \cos \theta}{u_0 \mu}. \quad (\text{VI.3.19})$$

На рис. VI.14 показана зависимость длины стабилизированной зоны d от $1/V$ (V — скорость фронта вытеснения), полученная в описанных выше опытах (кривая 1); длина стабилизированной зоны определялась как расстояние между точками с насыщенностями 0,40 и 0,80. Из графика видно (кривая 2), что при больших $1/V$ (малых скоростях) d приблизительно пропорциональна $1/V$, как и следует из формул (VI.3.12) и (VI.3.13). Однако при значении $1/V$ около 100 сек/см имеется минимум d , а далее снова наблюдается рост стабилизированной зоны. По-видимому, этот рост d связан с неравномерностью течения и запаздыванием процессов перераспределения фаз в порах. По схеме «запаздывающих» относительных проницаемостей, как показано в работе [26], получается именно такая зависимость d от скорости, когда величина $\tau_0 \frac{\partial s}{\partial t}$ становится сравнимой с s .

Из формул (VI.3.12) и (VI.3.13) можно получить также выражения для dp_c/ds , которые позволяют, зная из эксперимента распределение насыщенности, найти «динамическую» зависимость капиллярного давления от насыщенности (при этом приходится предполагать, что относительные проницаемости мало зависят от скорости. Это предположение справедливо, если вытесняющей фазой является вода, а вытесняемой — воздух, вязкость которого пренебрежимо мала). Оказалось, что при малых скоростях динамические кривые совпадают со статической кривой, а при больших — лежат тем ниже ее, чем больше скорость.

§ 4. КАПИЛЛЯРНАЯ ПРОПИТКА И АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ВЫТЕСНЕНИЯ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ

В предыдущем параграфе было рассмотрено действие капиллярных сил вблизи фронта вытеснения несмешивающихся жидкостей из пористой среды. Капиллярные силы становятся существенными и в других случаях, когда в пористой среде в силу ее собственной неоднородности или под влиянием неоднородности потока создаются значительные местные градиенты насыщенности. При этом под действием капиллярных сил происходит перераспределение фаз, поскольку градиент капиллярного давления может быть близким к градиенту внешнего давления, а в ряде случаев значительно превосходить этот градиент. Процессы перераспределения (роль которых в вытеснении несмешивающихся жидкостей будет более подробно рассмотрена в главах VII и X) проще всего проследить на примере капиллярной пропитки, т. е. фильтрации, происходящей под действием только капиллярных сил.

Можно выделить два идеализированных процесса, в которых капиллярные силы являются единственными движущими силами [99, 100].

1. Пусть цилиндрический образец пористой среды имеет непроницаемую боковую поверхность. Первоначально образец заполнен газом (имеющим пренебрежимо малую вязкость). В начальный момент один из концов образца приводится в соприкосновение со смачивающей жидкостью, которая начинает впитываться в образец. Далее будем предполагать, что давление в газе (начальное давление в образце) и давление в жидкости вне пористой среды одинаковы.

Как и в § 3, считаем, что жидкость является непрерывной вытесняющей фазой и фильтрация происходит в одном направлении. По уже упоминавшимся соображениям жидкость, движущуюся в пористой среде под действием капиллярных сил, можно рассматривать как несжимаемую. Фильтрация непрерывной фазы описывается обобщенным законом Дарси в виде:

$$u_1 = - \frac{k}{\mu_1} f_1(s) \frac{\partial p_1}{\partial x}. \quad (\text{VI.4.4})$$

Поскольку вязкость газа мала по сравнению с вязкостью жидкости, для газовой фазы можно положить $p_2 = p_0 = \text{const}$. Для рассматриваемого одномерного движения непрерывной жидкой фазы выполняется соотношение

$$p_2 - p_1 = p_c(s) \quad (\text{VI.4.2})$$

или

$$p_1 = p_0 - p_c(s) \quad (\text{VI.4.3})$$

(оставляем пока в стороне неравновесные эффекты).

Подставляя это выражение для p_1 в равенство (VI.4.1), получаем

$$u_1 = \frac{k}{\mu_1} f_1(s) p'_c(s) \frac{\partial s}{\partial x} = -a^2 m \frac{\partial H}{\partial x}, \quad (\text{VI.4.4})$$

где

$$a^2 = \frac{\alpha}{\mu_1} \sqrt{\frac{k}{m}}; \quad H(s) = - \int_0^s f_1(s) J'(s) ds;$$

$J(s)$ — функция Леверетта [см. формулу (VI.1.4)]

Уравнение неразрывности для жидкости в рассматриваемом одномерном случае имеет обычный вид:

$$m \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0. \quad (\text{VI.4.5})$$

Подставляя сюда выражение (VI.4.4), получим следующее уравнение для s :

$$\frac{\partial s}{\partial t} - a^2 \frac{\partial H}{\partial x^2} = 0. \quad (\text{VI.4.6})$$

На кривых $J(s)$, полученных путем пропитки (например, путем впитывания жидкости в вертикальную колонку пористой среды), всегда существует такое значение $s = s^* \leq 1$, что $J(s^*) = 0$. В силу непрерывности давления в жидкости при переходе через границу пористой среды и так как давление в свободной жидкости равно p_0 , то на границе пористой среды должно выполняться условие $p_1 = p_0$, откуда $p_c = 0$ и $J(s) = 0$. Следовательно, во входном сечении (где примем $x = 0$) будет $s = s^*$ (если пренебречь сжимаемостью). В выходном сечении, очевидно, вытесняющая жидкость неподвижна, поскольку истечение жидкости из порового канала не может происходить под действием одних лишь капиллярных сил (для вытекания жидкости должно произойти оборачивание мениска на выходе, что приведет к изменению знака капиллярного давления и прекращению движения). В соответствии с формулой (VI.4.4) равенство нулю скорости фильтрации означает, что в выходном сечении ($x = l$)

$$f_1(s) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial s}{\partial x} = 0, \quad (\text{VI.4.7})$$

поскольку dp_c/ds в нуль не обращается.

Первое из условий (VI.4.7) выполняется до подхода жидкости к выходному сечению, когда $s \leq s_*$ (где s_* — «неподвижная» насыщенность), а второе после подхода.

Рассмотрим случай, когда $l \rightarrow \infty$. Тогда единственным размерным определяющим параметром для распределения насыщенности оказывается a^2 . Размерность этого параметра есть L^2/T . Если, кроме того, начальная насыщенность $s_0 = \text{const}$, задача становится автомодельной и s является функцией переменной $\xi = x/a\sqrt{t}$. Уравнение (VI.4.6) обращается в обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$\frac{\xi}{2} \frac{ds}{d\xi} + \frac{d^2 H}{d\xi^2} = 0. \quad (\text{VI.4.8})$$

Зависимости относительной проницаемости для смачивающей фазы $f_1(s)$ и функции Леверетта $J(s)$ можно аппроксимировать формулами

$$f_1(s) = b(s - s_*)^\beta, \quad (f_1(s) \equiv 0 \text{ при } s < s_*), \\ J(s) = C_1 - B_1(s - s_*)^{\alpha_1} \text{ или } J(s) = B_2(s - s_*)^{\alpha_2} - C,$$

причем $\beta > 2$, $1 > \alpha_1 > 0$, $1 > \alpha_2 > 0$. Таким образом, функция $H(s)$ представляется в виде $A(s - s_*)^n$, где $n = \beta + \alpha_1$ или $n = \beta - \alpha_2$.

Если в качестве автомодельной переменной выбрать $\xi = x'a_0\sqrt{t}$, где $a_0^2 = Aa^2$, уравнение (VI.4.8) приводится к виду:

$$\frac{d^2 \sigma^n}{d\xi^2} + \frac{\xi}{2} \frac{d\sigma}{d\xi} = 0, \quad \sigma = s - s_*. \quad (\text{VI.4.9})$$

Это уравнение относится к типу, рассмотренному в гл. IV.

Рассмотрим по отдельности три возможных варианта начальных условий: $s_0 = s_*$, $s_0 < s_*$ и $s_0 > s_*$. Пусть сначала $s_0 = s_*$. Как показано выше (см. гл. IV), если $n > 1$, решения уравнения (VI.4.9) обращаются в нуль при некотором конечном значении $\xi = c$, т. е. существует «фронт пропитки», скорость которого конечна. При малых значениях $s - s_*$ и $\eta = c - \xi$ решение уравнения (VI.4.9) асимптотически представляется в виде:

$$c - \xi = \int_0^{s-s_*} \frac{n\sigma^{n-1}}{c_1 + \frac{c}{2}\sigma} d\sigma. \quad (\text{VI.4.10})$$

Чтобы определить постоянную c_1 , потребуем дополнительно, чтобы при $s \rightarrow s_*$ и $c - \xi \rightarrow 0$ оставалось конечным отношение $u_1/m(s - s_*)$, где u_1 — скорость фильтрации жидкости. Это отношение представляет собой среднюю скорость частиц подвижной (непрерывной) части впитывающейся жидкости на фронте в момент ее слияния с неподвижной жидкостью, находящейся впереди фронта.

Из формулы (VI.4.4) имеем

$$u_1 = \frac{am}{\sqrt{t}} H'(s) \frac{ds}{d\xi}. \quad (\text{VI.4.11})$$

Тогда из (VI.4.10) следует

$$\frac{u_1}{m(s-s_*)} = -\frac{a}{\sqrt{t}} \left(\frac{c_1}{s-s_*} + \frac{c}{2} \right).$$

Следовательно, чтобы отношение $u_1/m(s-s_*)$ было конечным, необходимо, чтобы $c_1 = 0$. Тогда (VI.4.10) приводит к асимптотическому выражению

$$c - \xi = \frac{2n}{c(n-1)} (s-s_*)^{n-1}, \quad s-s_* = \left(\frac{c}{2} \frac{n-1}{n} \right)^{\frac{1}{n-1}} (c-\xi)^{\frac{1}{n-1}}. \quad (\text{VI.4.12})$$

Аналогично автомодельной задаче для фильтрации газа решение задачи в случае $s_0 = s_*$ будем искать в виде ряда

$$s-s_* = \left(\frac{c}{2} \frac{n-1}{n} \right)^{\frac{1}{n-1}} \eta^{\frac{1}{n-1}} (1 + a_1 \eta + a_2 \eta^2 + \dots). \quad (\text{VI.4.13})$$

Коэффициенты ряда a_i при заданном значении c находятся путем подстановки в уравнение (VI.4.9). Меняя c , будем получать различные значения $s_1 = s(0)$.

Обратимся к случаю, когда $s_0 < s_*$. При этом, очевидно, фронт пропитки может распространяться только с конечной скоростью. Поскольку за фронтом вытесняющая фаза везде подвижна, на фронте должно быть $s = s_*$ и от s_* до s_0 возникает скачок насыщенности, аналогичный скачку на передней кромке стабилизированной зоны, описанному в § 3. На скачке должно выполняться условие (VI.2.21). При этом $u_1^{(1)}$ определяется по формулам (VI.4.10) и (VI.4.11) при $s = s_0$, $u_1^{(2)} = 0$, а скорость скачка V найдется из условия $x_c = ca_0 \sqrt{t}$, откуда

$$V = \frac{dx_c}{dt} = \frac{ca_0}{2\sqrt{t}}, \quad u_1 = \frac{a_0 m}{\sqrt{t}} \frac{c_1 + \frac{c}{2}(s-s_*)}{m(s_*-s_0)} \Big|_{s=s_*} = \frac{a_0}{\sqrt{t}} \frac{c_1}{s_*-s_0}.$$

Таким образом, из (VI.2.21) имеем

$$\frac{ca_0}{2\sqrt{t}} = \frac{a_0}{\sqrt{t}} \frac{c_1}{s_*-s_0} \quad \text{или} \quad c_1 = \frac{c}{2} (s_*-s_0). \quad (\text{VI.4.14})$$

При $s_0 = s_*$ снова имеем условие $c_1 = 0$, эквивалентное условию конечной скорости движения впитывающейся жидкости.

Если $s_* \neq s_0$, а следовательно, и c_1 не равны нулю, разложение (VI.4.13) имеет вид:

$$s-s_* = \left(\frac{c}{2} \frac{n-1}{n} \right)^{\frac{1}{n-1}} (1 + a_1 \eta + a_2 \eta^2 + \dots). \quad (\text{VI.4.15})$$

Возникновение скачка насыщенности в решении задачи о капиллярной пропитке связано со сделанным в § 2 предположением о том, что в любой момент времени жидкость в каждой точке пористой

среды может находиться лишь в одном из двух крайних состояний — полностью связном и подвижном или полностью несвязном и поэтому неподвижном. Это приводит к однозначной зависимости относительной проницаемости от насыщенности характерного вида, изображенного на рис. VI.5, с точкой s_* , где $f_1(s_*) = 0$, а при $s < s_*$ жидкость является неподвижной. Более детальное исследование показывает, что фактически лишь часть жидкости находится в каждом из состояний, причем между связной и несвязной частями происходит обмен жидкостью до достижения некоторого равновесного распределения. В этом случае скачок насыщенности на фронте капиллярной пропитки заменяется узкой зоной плавного перехода от s_0 к s_* .

Как и для фильтрации газа, конечная скорость распространения фронта позволяет использовать полученное решение не только для бесконечных, но и для конечных областей, до подхода фронта к удаленному концу.

Пусть теперь $s_0 > s_*$. Уравнение (VI.4.12) можно переписать в виде:

$$n(s - s_*)^{n-1} \frac{d^2 v}{d\xi^2} + \frac{\xi}{2} \frac{dv}{d\xi} = 0 \quad v = (s - s_*)^n. \quad (\text{VI.4.16})$$

Если $s_0 > s_*$, уравнение (VI.4.16) не имеет особенностей, так как коэффициент при старшей производной не обращается в нуль. Кроме того, из общих свойств уравнений параболического типа следует, что s меняется монотонно от s_1 до s_0 при изменении ξ от 0 до ∞ . Поэтому $v = v_0$, а следовательно, и $s = s_0$ не может обратиться в нуль ни в какой конечной точке и $s \rightarrow s_0$ лишь асимптотически при $\xi \rightarrow \infty$. Решение для этого случая можно получить численно, задаваясь при данном значении $s_1 = s(0)$ некоторым значением $ds/d\xi (\xi = 0)$. Тогда, решая задачу Коши, получим решение, соответствующее определенному значению $s_0 = s(\infty)$. Меняя $ds/d\xi$, можно найти решение, соответствующее заданному значению s_0 .

Зависимость $s_1(c)$ при $s_0 \leq s_*$ можно найти в явном виде, используя тот легко проверяемый факт, что если некоторая функция $s = s_0 - s_* = \varphi_0(\xi)$ удовлетворяет уравнению (VI.4.9), то функция

$$s - s_* = \varphi(\xi) = c^{\frac{2}{n-1}} \varphi_0\left(\frac{\xi}{c}\right) \quad (\text{VI.4.17})$$

также будет решением этого уравнения. Пусть $\varphi_0(\xi)$ есть решение уравнения (VI.4.9) такое, что $\varphi_0(1) = 0$, представляемое формулой (VI.4.13) или (VI.4.15) для $c = 1$.

Условие (VI.4.14) будет соблюдаться и для всех функций $\varphi(\xi)$, выражаемых формулой (VI.4.17). Таким образом, зная решение поставленной задачи при некотором значении s_1 или c , можно получить все решения для заданного s_0 . Из формулы (VI.4.17) получим связь между s_1 и c в виде:

$$s_1 = c^{\frac{2}{n-1}} \varphi_0(0) \quad \text{или} \quad c = \left(\frac{s_1}{\varphi_0(0)} \right)^{\frac{n-1}{2}}. \quad (\text{VI.4.18})$$

На рис. VI.15 изображены вычисленные при помощи ряда (VI.4.13) кривые $\varphi_0(\xi)$ для $n = \frac{3}{2}$ и $n = \frac{5}{2}$.

Полученное решение можно использовать для определения параметров пористой среды по результатам экспериментального измерения скорости капиллярной пропитки.

Если скорость «фронта пропитки» конечна, то это можно сделать, измеряя координаты фронта x_c в различные моменты времени.

Вследствие автомодельности задачи x_c выражается по формуле $x_c = c\alpha_0\sqrt{t}$.

Пользуясь соотношением (VI.4.18), x_c можно выразить в виде:

$$x_c = N s_1^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{\alpha}{\mu_1} \sqrt{\frac{k}{m}} t \right)^{1/2}, \quad (\text{VI.4.19})$$

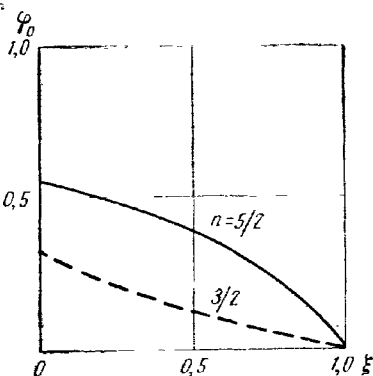


Рис. VI.15

где $N = A^{\frac{1}{2}} [\varphi_0(0)]^{-\frac{n-1}{2}}$.

Измеряя экспериментально отношение $x_c/\sqrt{t}$ и значение s_1 , можно найти показатель степени n и коэффициент N , характеризующий структуру порового пространства. Эксперименты такого рода описаны в работе [77].

2. Другой процесс, в котором фильтрация происходит под действием только капиллярных сил, — противоточная капил-

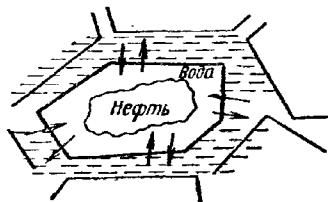


Рис. VI.16

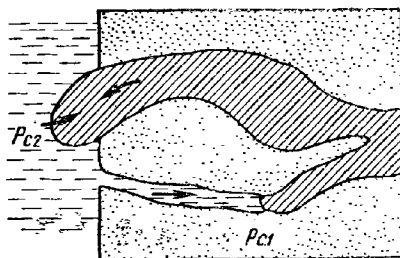


Рис. VI.17

лярная пропитка, — возникает в том случае, когда участок пористой среды, занятый менее смачивающей фазой, оказывается полностью окруженным другой, более смачивающей жидкостью (рис. VI.16). В таких условиях более смачивающая жидкость по мелким порам впитывается в образец, вытесняя менее смачивающую фазу по соседним крупным порам. Проще всего механизм этого явления иллюстрируется на примере двух соседних поровых капалов, соединенных на концах (рис. VI.17). Противоточная пропитка возникает, например,

в нефтяных пластах, разбитых трещинами на отдельные блоки (трещиноватые пласты), когда продвигающаяся вода быстрее движется по трещинам и блоки оказываются окруженными водой. После этого вода впитывается в блоки, а нефть выходит из них через ту же поверхность.

Исследуем противоточную капиллярную пропитку для линейного случая. Рассмотрим, как и в предыдущем пункте, цилиндрический образец пористой среды, боковые поверхности которого непроницаемы. Первоначально образец заполнен несмачивающей фазой. Если один из торцов цилиндра также непроницаем, а другой приводится в соприкосновение со смачивающей жидкостью, то начнется противоточная капиллярная пропитка. Это означает, что смачивающая фаза будет впитываться, а несмачивающая выходить через единственную открытую торцевую поверхность. Описанный линейный образец можно рассматривать как элемент блока более сложной формы, например прямоугольного.

Как показывают эксперименты по противоточной капиллярной пропитке прозрачных образцов, фильтрация во встречном направлении происходит равномерно по всему сечению, т. е. «каналы», по которым движется каждая из фаз, как и при обычном двухфазном течении, сравнимы по размерам с диаметром пор. Поэтому противоточную фильтрацию можно рассматривать в рамках представлений, принятых для прямооточной двухфазной фильтрации, и записывать закон фильтрации в виде:

$$u_i = -\frac{k}{\mu_i} f_i^*(s) \frac{\partial p_i}{\partial x}; \quad p_2 - p_1 = p_c^*(s) \quad (i = 1, 2). \quad (\text{VI.4.20})$$

Следует только учитывать, что до сих пор относительные проницаемости мы рассматривали лишь для случая, когда обе фазы движутся в одну сторону. Противоточное движение фаз повлияет, конечно, на распределение фаз в порах, и вид кривых относительной проницаемости и капиллярного давления изменится. В настоящее время нет прямых опытных данных о кривых относительной проницаемости при противоточном движении. Для качественного исследования будем принимать их такими же, как и раньше, т. е. примем $f_i^*(s) = f_i(s)$, $p_c^*(s) = p_c(s)$.

Уравнения неразрывности для каждой из фаз сохраняют обычный вид:

$$m \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0; \quad m \frac{\partial s}{\partial t} - \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0. \quad (\text{VI.4.21})$$

Для противоточного движения из уравнений (VI.4.21) следует

$$u_1 + u_2 = 0. \quad (\text{VI.4.22})$$

Исключая dp_i/dx из системы (VI.4.20)–(VI.4.22), получаем

$$u_1 = -u_2 = -a^2 m \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (\text{VI.4.23})$$

и

$$\text{где} \quad -\frac{\partial s}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0, \quad (\text{VI.4.24})$$

$$\Phi(s) = - \int_0^s f_2(s) F(s) J'(s) ds, \quad a^2 = \frac{\alpha}{\mu_0} \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Уравнение (VI.4.24) является частным случаем уравнения Рапопорта — Лиса при $w = 0$. Это уравнение совпадает по виду с уравнением (VI.4.6), только функция $H(s)$ заменяется на $\Phi(s)$. Граничные условия также одинаковы для капиллярной пропитки газонасыщенного образца и для противоточной капиллярной пропитки, т. е. условие равенства нулю капиллярного давления на входе ($s_1 = s^*$, $J(s^*) = 0$) и равенства нулю расхода на закрытом конце. И точно так же задача о пропитке становится автомоделной, если закрытый конец бесконечно удален и начальная насыщенность постоянна вдоль образца. При этих условиях можно вместо x и t ввести автомоделную переменную $\xi = x/a \sqrt{t}$.

Уравнение для насыщенности в случае пропитки имеет в автомоделных переменных следующий вид:

$$\frac{d^2 \Phi}{d\xi^2} + \frac{\xi}{2} \frac{ds}{d\xi} = 0, \quad (\text{VI.4.25})$$

т. е. совпадает с уравнением (VI.4.8). Полагая, что качественно кривые относительной проницаемости для противотока таковы же, как и при одинаково направленной фильтрации, воспользуемся теми же представлениями для $f_1(s)$ и $J(s)$, что и в предыдущем пункте (т. е. $f_1(s) = b(s - s_*)^3$, $J(s) = B(s - s_*)^{-1} + C$), и получим, что при малых $s - s_*$ функция Φ представляется в виде:

$$\Phi(s) \approx N(s - s_*)^n \quad n > 1$$

($f_2(s)$ остается не равным нулю).

Типичный вид функции $\Phi(s)$ показан на рис. VI.18.

Таким образом, при малых $s - s_*$ уравнение (VI.4.25) совпадает по виду с уравнением (VI.4.9). Поэтому качественные выводы о характере решений уравнения (VI.4.9) при различных значениях начальной насыщенности s_0 , в том числе и вывод о конечной скорости «фронта пропитки» при $s_0 \leq s_*$ и условия на скачке при $s_0 < s_*$ сохраняются и для решения уравнения (VI.4.25). В частности, поскольку

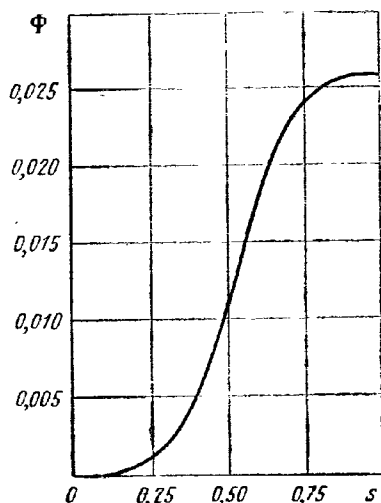


Рис. VI.18

скорость фильтрации первой фазы выражается формулой (VI.4.23), сохраняются и асимптотические выражения (VI.4.13) и (VI.4.18) для малых значений $s - s_*$.

Решение уравнения (VI.4.25) можно, как и ранее, найти, задавая значением $\xi = c$ таким, чтобы $s(c) = s_*$. Вблизи точки $(c, 0)$ это решение может быть представлено в виде ряда (VI.4.16) или (VI.4.18), а при больших значениях s — найдено каким-либо численным методом. Решение для заданного $s_1 = s(0) = s^*$ опре-

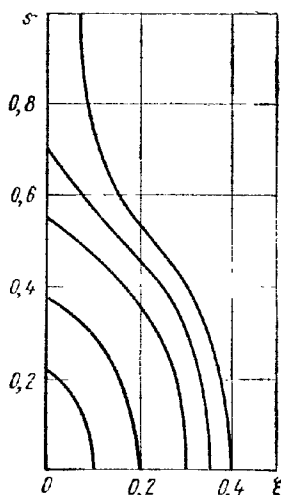


Рис. VI.19

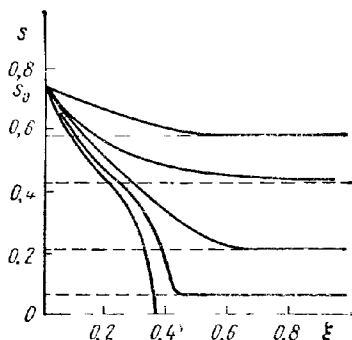


Рис. VI.20

деляется подбором путем изменения c , поскольку требуемая точность невелика.

Если s_0 больше неподвижной насыщенности s_* , то, как и для задачи предыдущего параграфа, $s = s_0$ только при $\xi \rightarrow \infty$. Семейство решений находится путем численного решения задачи Коши при заданном $s_1 = s(0)$ с различными значениями $ds/d\xi|_{\xi=0}$. Каждому из этих решений соответствует некоторое значение s_0 . Искомое решение для заданного $s_1 = s(0)$ снова определяется подбором.

В качестве примера на рис. VI.19 и VI.20 приводятся кривые $s(\xi)$, найденные при следующем выборе относительных проницаемостей и функции Леверетта:

$$f_1 = s^4; \quad f_2 = (1-s)(1-s)^3; \quad J(s) = s^{-1/2} - 1;$$

$\mu_1/\mu_2 = \mu_0$ было принято равным 1. На рис. VI.19 показаны кривые, соответствующие случаю $s_0 = 0$ и различным c . Видно, что при $c > 0,38$ кривые $s(\xi)$ пересекают линию $s = 1$ при $\xi > 0$. Следовательно, физический смысл имеют только те кривые, для которых $c < 0,38$.

На рис. VI.20 изображены кривые $s(\xi)$, соответствующие разным значениям s_0 при $s_1 = 0,75$. Заметим, что количество жидкости Q , впи-

тавшейся в пласт через единицу площади сечения к моменту времени t , равно

$$Q = ma \sqrt{t} K(s_1, s_0), \quad (\text{VI.4.26})$$

где

$$K(s_1, s_0) = \int_0^\infty (s - s_0) d\xi.$$

На рис. VI.21 построены кривые зависимости $K(s_0)$ для $s_1 = 0,7$ при различных отношениях вязкостей ($\mu_0 = 0,5; 0,1$ и $0,01$).

Для того чтобы использовать данные о противоточной капиллярной пропитке в задачах вытеснения несмешивающихся жидкостей из неоднородных и трещиновато-пористых сред (см. гл. VII, § 3), необходимо иметь кривую зависимости средней насыщенности образца конечной длины от времени. Если начальная насыщенность образца s_0 несвязная или равна нулю, скорость «фронта пропитки» конечна. Поэтому решение для образца конечной длины до подхода фронта к закрытому концу совпадает с автомодельным. При этом из формулы (VI.4.26) следует, что средняя насыщенность образца выражается формулой

$$\bar{s} = s_0 + \frac{a}{l} \sqrt{t} K(s_1, s_0). \quad (\text{VI.4.27})$$

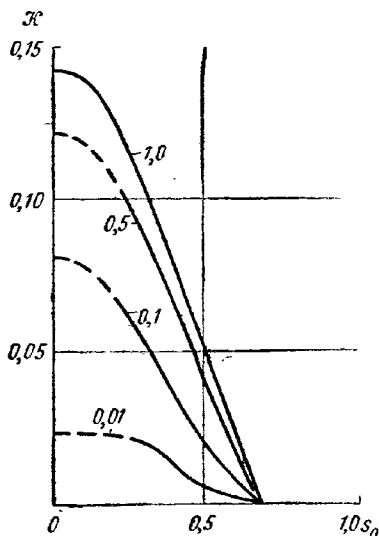


Рис. VI.21

Чтобы получить зависимость $\bar{s}$ от t для последующих моментов времени, следует решать дифференциальное уравнение в частных производных (VI.4.24). Для качественного исследования ограничимся тем, что найдем приближенное решение. Проинтегрируем уравнение (VI.4.24) по x от 0 до l , предполагая, что фронт пропитки уже подошел к закрытому концу и $s(l) > s_*$. Тогда, используя граничные условия, имеем

$$a^2 \Phi^*(s_1) \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)_0 = \frac{d}{dt} \int_0^l s dx. \quad (\text{VI.4.28})$$

Учитывая условие $d\bar{s}/dx = 0$ при $x = l$, будем искать распределение s в виде:

$$s = s_1 - A(t)(2l - x)x. \quad (\text{VI.4.29})$$

Средняя насыщенность $\bar{s}$ равна

$$\bar{s} = \frac{1}{l} \int_0^l s dx = s_1 - \frac{2}{3} A(t) l^2. \quad (\text{VI.4.30})$$

Поэтому

$$s = s_1 - \frac{2}{3} (s_1 - \bar{s}) \left(2 - \frac{x}{l} \right) \frac{x}{l}. \quad (\text{VI.4.31})$$

Подставляя в уравнение (VI.4.28) выражения $\left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)_0$ и $\int_0^{\bar{s}} s dx$, полученные из формулы (VI.4.31), найдем

$$\frac{d\bar{s}}{dt} = \frac{3a^2}{l^2} \Phi'(s_1) (s_1 - \bar{s}). \quad (\text{VI.4.32})$$

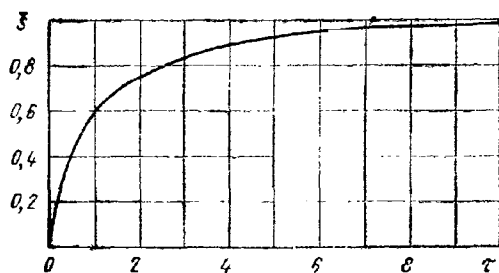


Рис. VI.22

Уравнение (VI.4.32) нужно решить при начальном условии, выражающем непрерывность средней насыщенности в момент подхода фронта к концу образца: при $t = t_0$ $\bar{s} = s_0$, где s_0 получается из формулы (VI.4.27), т. е. $\bar{s}_0 = s_0 + K/c$, $t_0 = l^2/c^2 a^2$.

Искомое решение имеет вид:

$$\bar{s} = s_1 - \left(s_1 - s_0 - \frac{K}{c} \right) \exp \left[-3\Phi'(s_1) \left(\frac{a^2 t}{l^2} - \frac{1}{c^2} \right) \right]. \quad (\text{VI.4.33})$$

Таким образом, при $t < t_0$ средняя насыщенность выражается формулой (VI.4.27), а при $t > t_0$ — формулой (VI.4.33). Общий вид зависимости $\bar{s}(\tau)$, где $\tau = \frac{a^2 t}{l^2}$, показан на рис. VI.22 для условий рассмотренного выше примера.

3. В обозначениях, использованных в п. 2, уравнение Рапопорта — Лиса (VI.3.4) примет вид:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{u}{m} F'(s) \frac{\partial s}{\partial x} - a^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0, \quad (\text{VI.4.34})$$

при этом для скоростей фильтрации каждой из фаз имеем в соответствии с (VI.3.17)

$$u_1 = uF(s) - a^2 m \Phi'(s) \frac{ds}{dx}, \quad u_1 + u_2 = u(t). \quad (\text{VI.4.35})$$

Суммарная скорость $u(t)$ есть функция времени и должна быть задана или определена из граничных условий для давления. Если

зависимость $u(t)$ задать в виде $u = \frac{q_0}{\sqrt{t}}$, то уравнение (VI.3.34)

имеет автомодельное решение вида $s = s(\xi)$, $\xi = x/a\sqrt{t}$. Для существования автомодельного решения требуется также, чтобы $s(x, 0) = s_0 = \text{const}$ и $u_2(0, t) = 0$. Тогда получим вместо (VI.4.34) уравнение

$$\frac{d^2\Phi}{d\xi^2} + \left[\frac{\xi}{2} + \lambda F'(\xi) \right] \frac{ds}{d\xi} = 0 \quad \left(\lambda = \frac{q_0}{a} \right). \quad (\text{VI.4.36})$$

При $\xi = 0$ должно выполняться условие (равносильное условию $u_2 = 0$)

$$\frac{ds}{d\xi} = \frac{\lambda \mu_0}{f_1(s) J'(s)}. \quad (\text{VI.4.37})$$

Это следует из формул (VI.4.24) и (VI.4.35). Кроме того, при $\xi \rightarrow \infty$ $s \rightarrow s_0$. Вблизи фронта, т. е. при s , близком к s_0 , уравнение (VI.4.36) асимптотически переходит в уравнение (VI.4.25), так как $\xi \gg 2\lambda F'(\xi)$, либо потому, что ξ очень велико (при $s_0 > s_*$), либо потому, что $F'(\xi) \rightarrow 0$ (при $s_0 \leq s_*$). В связи с этим условия на фронте вытеснения при различных значениях s_0 сохраняются теми же, что и в случае капиллярной пропитки. При $s_0 \leq s_*$ скорость фронта конечна, и для численного счета при малых $\eta = c - \xi$ можно использовать разложения (VI.4.13) или (VI.4.18). Выполнения условия (VI.4.37) можно добиться, меняя значение $\xi = c$, при котором s обращается в s_* .

В качестве примера на рис. VI.23 приводятся решения уравнения (VI.4.36), удовлетворяющие условию (VI.4.37) при $\lambda = 0,25$ и $\lambda = 1,0$. Функции $f_1(s)$ и $J(s)$ были использованы те же, что и в примере в п. 2. Характерно, что при изменении начальной насыщенности s_0 в весьма широких пределах конечная насыщенность s_1 меняется незначительно. Так, при $\lambda = 0,25$ изменению s_0 от 0 до 0,90 соответствует изменение s_1 от 0,89 до 0,93. В случае $\lambda = 1$ изменение s_1 еще меньше: $0,992 < s_1 < 0,998$ при $0 < s_0 < 0,98$.

Полученное решение задачи о вытеснении несмешивающихся жидкостей с учетом капиллярных сил интересно сравнить с решением той же задачи в постановке Баклея — Леверетта. В обозначениях настоящего параграфа решение Баклея — Леверетта (VI.2.21) имеет вид:

$$\xi = 2\lambda F'(s) \quad (\text{VI.4.38})$$

(поскольку в начальный момент при $\xi \rightarrow \infty$ ($t = 0$) $s = s_0 = \text{const}$). При $\xi = \xi_c$ в решении Баклея — Леверетта вводится скачок насыщенности, положение которого можно найти по формуле

$$\xi_c = 2\lambda F'(s_0) = 2\lambda \frac{F(s_c) - F(s_0)}{s_c - s_0}. \quad (\text{VI.4.39})$$

По формулам (VI.4.39) можно найти s_c и ξ_c , зная s_0 .

На рис. VI.23, а, б вместе с решениями уравнения (VI.4.36) (кривая 1) приводятся также кривые 2 для $s(\xi)$, рассчитанные по формуле (VI.4.38) с условием (VI.4.39) для тех же значений λ (т. е. $\lambda = 1$

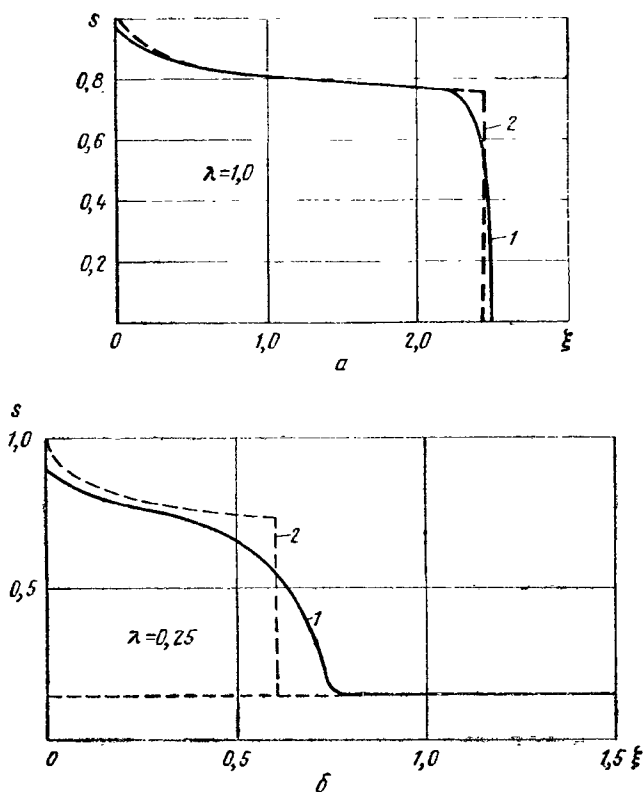


Рис. VI.23

и $\lambda = 0,25$). Из приведенных кривых видно, что при $\lambda = 1$ решение Баклея — Леверетта очень близко к точному. В частности, для решения Баклея — Леверетта $\xi(s_c) = 2,45$, а для точного решения $s = 2,49$. В случае $\lambda = 0,25$ расхождение более существенное.

Глава VII

НЕУСТАНОВИВШАЯСЯ ФИЛЬТРАЦИЯ В ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТЫХ СРЕДАХ, СРЕДАХ С ДВОЙНОЙ ПОРИСТОСТЬЮ И СЛОИСТЫХ ПОРОДАХ

§ 1. ФИЛЬТРАЦИЯ ОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ В ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Наряду с зернистыми пористыми средами, в которых жидкость содержится и движется в межзерновом пространстве, встречаются также трещиноватые горные породы, в которых существует развитая система трещин, полностью или частично обуславливающая фильтрационные свойства среды. Важность изучения таких сред определяется тем, что ряд крупнейших месторождений нефти приурочен к породам, в которых имеются многочисленные трещины.

Специфика трещиноватой среды обусловлена тем, что трещина — это (схематически) узкая щель, два измерения которой в тысячи раз больше третьего, в отличие от пор, все размеры которых одного порядка. В результате этого даже при самом незначительном объеме трещин в общем объеме пустот в твердом скелете они могут оказывать определяющее влияние на характер движения жидкости. В этом проявляется общее для всей теории фильтрации свойство ее объектов: гидродинамические характеристики могут существенно зависеть от таких элементов структуры, статистический вес которых пренебрежимо мал.

Обычно различают чисто трещиноватые и трещиновато-пористые среды. Первые из них представляют собой блоки горной породы, между которыми имеются трещины, причем сами блоки непроницаемы и не обмениваются жидкостью с трещинами (например, трещиноватый грапит); в трещиновато-пористой среде блоки представляют собой куски обычной пористой среды, обладающей конечной пористостью и проницаемостью (трещиноватый известняк). Во всех случаях объем трещин пренебрежимо мал по сравнению с общим объемом, занятым твердым скелетом и пустотами; в большинстве случаев

он мал и по сравнению с общим объемом пустот, складывающимся из объема порового пространства пористых блоков и объема самих трещин. Лишь в тех случаях, когда собственная пористость блоков практически равна нулю (например, у трещиноватых изверженных пород), приходится принимать в расчет объем собственно трещин.

Напротив, в большинстве случаев гидравлическая проводимость системы трещин во много раз больше гидравлической проводимости блоков. Поэтому можно сказать, что в трещиновато-пористой среде жидкость «хранится» в пористых блоках, а перемещается по трещинам. При стационарном движении жидкости это не приводит к существенным отличиям от обычной пористой среды. Однако при нестационарных процессах и в ходе вытеснения одной жидкости другой

проявляется ряд особенностей, еще не изученных до конца. Фильтрация в чисто трещиноватых средах происходит качественно так же, как в обычных пористых средах, лишь с небольшими количественными отклонениями. Поэтому в дальнейшем основное внимание уделяется трещиновато-пористым средам.

1. Для ламинарного движения вязкой жидкости в щели с параллельными стенками справедлива формула Буссинеска

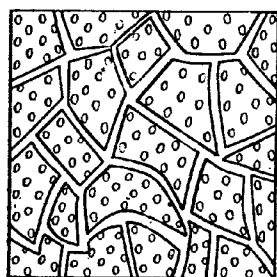


Рис. VII.1

$$Q = - \frac{bh^3}{12\mu} \frac{dp}{dx} \quad (\text{VII.1.1})$$

Здесь Q — расход жидкости; b — ширина щели в сечении, перпендикулярном оси x ; h — раскрытие щели; μ — вязкость жидкости; p — давление.

Существование такой простой формулы движения в отдельной трещине побудило многих исследователей к поискам выражений, описывающих движение в упорядоченной системе трещин. Однако этот подход оказался менее плодотворным, чем описание течения в трещиновато-пористой породе методами механики сплошной среды.

Допустим, что трещиновато-пористая среда состоит из системы блоков, отделенных друг от друга трещинами, причем форма и расположение блоков нерегулярны (рис. VII.1). Возьмем в качестве элементарного макрообъема (ср. гл. I) объем, размеры которого велики по сравнению с размерами отдельного блока, а следовательно, и интересующие нас процессы происходят в масштабе значительно более крупном, чем размер блока¹. Рассмотрим вначале наиболее существенный случай, когда проницаемость блоков мала настолько, что при описании макроскопического движения жидкости ею можно пренебречь. Считая движение в трещинах медленным (безынерцион-

¹ Размеры блоков (и, следовательно, длина трещин l) бывают самыми различными. Излагаемый подход основан на предположении, что $d \ll l \ll L$, т. е. блоки велики по сравнению с размером пор d , но малы по сравнению с размером пласта L .

ным), можно записать для него закон Дарси, который выводится из анализа размерности так же, как и в гл. I. При этом, учитывая возможную анизотропию системы трещин и то, что каждая трещина характеризуется двумя размерами — длиной l и раскрытием h , закон фильтрации удобно представить в виде:

$$u_i = -\frac{k_{ij}}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_j} = -\frac{h^3}{\mu l} k_{ij}^0 \frac{\partial p}{\partial x_j}. \quad (\text{VII.1.2})$$

Здесь u_i — компоненты вектора скорости фильтрации, определяемого обычным образом; симметричный тензор k_{ij} называется тензором трещинной проницаемости; h — среднее раскрытие трещин; l — характерный размер блока. Конкретный вид безразмерного тензора проницаемости k_{ij}^0 определяется геометрией системы трещин; для среды, состоящей из непроницаемых блоков и нескольких систем плоских регулярно расположенных трещин, он сможет быть получен на основании формулы Буссинеска (VII.1.1).

В общем случае трещиновато-пористой среды закон фильтрации также имеет тензорный вид (VII.1.2). Однако расчет компонент тензора проницаемости в этом случае невозможен, и их определяют, исходя из данных наблюдений. Соответствующим выбором системы координат тензор k_{ij} можно привести к главным осям. Если вектор градиента давления направлен вдоль одной из главных осей, то вектор скорости фильтрации направлен так же.

2. Как уже упоминалось, характерная особенность трещиновато-пористой среды состоит в том, что движение жидкости в такой среде происходит в основном по трещинам, в то время как объем трещин мал, и основные запасы жидкости заключаются в пористых блоках. Предположим, что мы пренебрегли движением жидкости в блоках, и на границе трещиновато-пористого пласта, жидкость в котором первоначально находилась под давлением P_0 , происходит снижение давления до некоторого иного значения P_1 . Пренебрегая проницаемостью блоков, можно использовать для описания движения в трещинах обычные соотношения теории фильтрации в пористой среде (например, в случае слабосжимаемой жидкости и упруго-деформируемого пласта — соотношениями теории упругого режима). После некоторого переходного процесса в трещинах установится новое стационарное распределение давления, причем по крайней мере вблизи границы пласта давление окажется значительно ниже первоначального. Поскольку давление в блоках в силу предположенной их непроницаемости не могло измениться, то между жидкостью в блоках и жидкостью в трещинах создается значительная разность давлений — порядка $P_0 - P_1$, а следовательно, в блоках возникают локальные градиенты давлений $(P_0 - P_1)/l$, значительно превосходящие существующий в пласте градиент давления в трещинах $\sim (P_0 - P_1)/L$. В этих условиях в пласте даже при самой незначительной проницаемости блоков возникают локальные фильтрационные потоки, обуславливающие приток жидкости из блоков в трещины и выравнивание местных разностей давлений между блоками и трещинами.

Тот факт, что в трещиновато-пористой среде могут в нестационарном процессе возникать местные разности давлений и местные перетоки между блоками и трещинами, мы положим в основу описания трещиновато-пористой среды, состоящей из малопроницаемых пористых блоков и трещин, суммарный объем которых мал.

Введем вместо одного среднего давления жидкости в данной точке среды два давления — давление в трещинах p_1 и давление в порах блоков p_2 . В предположении, что проницаемость блоков k_2 очень мала, мы можем для определения фильтрационного потока жидкости через некоторую площадку среды использовать уравнение (VII.1.2), подставляя в него значение давления в трещинах p_1 .

Составим теперь уравнения баланса жидкости в трещинах и блоках. Обозначая через m_1 трещинную пористость (отношение объема трещин к полному объему среды), имеем

$$\frac{\partial (m_1 \rho)}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho u) - q = 0, \quad (\text{VII.1.3})$$

где q — количество жидкости, перетекающее за единицу времени из блоков в трещины в единице объема среды.

Для блоков можно пренебречь непосредственным фильтрационным потоком, так что уравнение неразрывности имеет вид:

$$\frac{\partial (m_2 \rho)}{\partial t} + q = 0, \quad (\text{VII.1.4})$$

где m_2 — пористость блоков (в расчете на общий объем среды).

Для того чтобы замкнуть полученную систему уравнений, нужно, помимо уравнения состояния жидкостей и уравнений, связывающих изменения пористости m_1 и m_2 с давлением, дать и выражение для потока q . Это выражение может быть получено из анализа размерностей. Заметим прежде всего, что поскольку движение жидкости в пласте считается безынерционным, то безынерционным должно быть и движение жидкости в блоках. Далее, поток q может зависеть от давления в блоках p_2 и в трещинах p_1 , размера блоков l , проницаемости блоков k_2 , вязкости жидкости μ , ее плотности ρ и должен обращаться в нуль при равенстве давлений p_1 и p_2 . Предположим вначале, что плотность ρ и вязкость μ жидкости мало зависят от давления в промежутке $p_1 < p < p_2$ и их можно считать постоянными, равно как и проницаемость блоков k_2 . Тогда выражение для q должно быть инвариантным относительно выбора начала отсчета давления и может зависеть лишь от разности $p_1 - p_2$. Таким образом, величина q зависит от размерных величин $p_2 - p_1$, ρ , μ , k_2 , l .

Заметим теперь, что вследствие безынерционности движения размерности проницаемости, давления и вязкости могут быть выбраны независимо, при одном лишь условии

$$[k_2] [p] [\mu]^{-1} = L^2 T^{-1};$$

помимо этого можно считать, что размерность массы M не связана с размерностью давления или вязкости.

Отсюда следует

$$q = \alpha \frac{\rho k_2}{\mu} \frac{p_2 - p_1}{l^2}, \quad (\text{VII.4.5})$$

где α — безразмерная постоянная, характеризующая геометрию среды. Соотношение (VII.4.5) должно быть уточнено в случае, если плотность жидкости ρ и вязкость ее μ зависят от давления. Предполагая, что закон фильтрации в блоках может быть представлен в виде:

$$\rho u_i = - \frac{k_2 \rho_0}{\mu_0} \frac{\partial f(p)}{\partial x_i},$$

где ρ_0 и μ_0 — характерные постоянные значения ρ и μ , а $f(p)$ — функция размерности давления, соотношение (VII.4.5) можно переписать так:

$$q = \frac{\alpha \rho_0 k_2}{l^2} \frac{f(p_2) - f(p_1)}{\mu_0}. \quad (\text{VII.4.6})$$

Например, при фильтрации термодинамически идеального газа $f = p^2/2\rho_0$, и выражение (VII.4.6) дает

$$q = \frac{\alpha \rho_0 k_2}{2 l^2 p_0^2 \mu} (p_2^2 - p_1^2), \quad (\text{VII.4.7})$$

где p_0 — давление, отвечающее плотности ρ_0 .

Трещинная пористость m_1 обычно мала и ею в большинстве случаев можно пренебречь, если среда является трещиновато-пористой (но не чисто трещиноватой), а пористость блоков m_2 считать функцией обоих давлений p_1 и p_2 . Ограничиваясь линейным приближением, имеем соотношение

$$\frac{\partial m_2}{\partial t} = m_{20} \left(\beta_{21} \frac{\partial p_1}{\partial t} + \beta_{22} \frac{\partial p_2}{\partial t} \right), \quad (\text{VII.4.8})$$

где величины β_{21} , β_{22} и m_{20} при малых изменениях пористости можно считать постоянными.

Изменение пористости, как обычно, следует учитывать лишь в тех выражениях, где пористость дифференцируется; кроме того, поскольку она входит в произведение с величиной плотности жидкости ρ , изменения пористости существенны лишь в случае слабосжимаемой (капельной) жидкости; при фильтрации газа изменениями пористости можно пренебречь. Ограничиваясь случаем капельной жидкости, имеем

$$\rho = \rho_0 [1 + \beta_* (p - p_0)], \quad (\text{VII.4.9})$$

где $p = p_1$, p_2 — в зависимости от того, рассматривается ли жидкость в трещинах или в блоках.

Подставляя выражения (VII.1.2), (VII.1.8) и (VII.1.9) в уравнения (VII.1.3) и (VII.1.4) и полагая $m_1 = 0$, имеем систему уравнений

$$\frac{\rho_0}{\mu} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k_{ij} \frac{\partial p_1}{\partial x_j} \right) - \frac{\alpha \rho_0 k_2}{l^2} \frac{p_2 - p_1}{\mu} = 0;$$

$$m_0 \rho_0 \left[-\beta_{21} \frac{\partial p_1}{\partial t} + (\beta_{22} + \beta_*) \frac{\partial p_2}{\partial t} \right] + \frac{\alpha \rho_0 k_2}{l^2} \frac{p_2 - p_1}{\mu} = 0. \quad (\text{VII.1.10})$$

Чаще всего рассматривается случай, когда среда однородна и изотропна и трещинная проницаемость выражается шаровым тензором $k_{ij} = k_i \delta_{ij}$. При этом система (VII.1.10) принимает простой вид:

$$\frac{\partial p_2}{\partial t} - \beta \frac{\partial p_1}{\partial t} + A (p_2 - p_1) = 0;$$

$$\kappa \nabla^2 p_1 - A (p_2 - p_1) = 0, \quad (\text{VII.1.11})$$

где

$$A = \frac{\alpha k_2}{\mu l^2 m_0 (\beta_{22} + \beta_*)}; \quad \kappa = \frac{k_1}{\mu m_0 (\beta_{22} + \beta_*)}; \quad \beta = \frac{\beta_{21}}{\beta_{22} + \beta_*}.$$

Из системы (VII.1.11) можно исключить одно из давлений; поделив из второго уравнения p_2 и подставив полученное значение в первое уравнение, имеем

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} - \eta \frac{\partial \nabla^2 p_1}{\partial t} = \frac{\kappa}{1 - \beta} \nabla^2 p_1;$$

$$\eta = \frac{\kappa}{A(1 - \beta)} = \frac{k_1 l^2}{\alpha k_2 (1 - \beta)}. \quad (\text{VII.1.12})$$

В пределе при $\eta \rightarrow 0$, что соответствует беспрепятственному обмену жидкостью между блоками и трещинами, уравнение (VII.1.12) переходит в обычное уравнение упругого режима с коэффициентом пьезопроводности $\kappa/(1 - \beta)$; нетрудно видеть, что этот коэффициент пьезопроводности отвечает проницаемости системы трещин, но пористости и сжимаемости блоков.

3. Уравнение (VII.1.12) и система (VII.1.11) обладают рядом особенностей, которые на первый взгляд кажутся необычными и причина которых лежит в вырожденном характере системы (VII.1.11), относящейся к среде с пренебрежимо малыми трещинной пористостью и проницаемостью блоков. В связи с этим представляет интерес исследование свойств решений этой системы.

Заметим, что уравнению вида (VII.1.12) удовлетворяет не только давление p_1 , но и давление p_2 и, следовательно, любая линейная комбинация этих давлений. Чтобы убедиться в этом, достаточно второе уравнение (VII.1.12) умножить на β/A и продифференцировать по t , а затем прибавить к исходному уравнению. После этого из системы (VII.1.11) легко исключается p_1 . Это показывает, что обоим давлениям и любой их комбинации присущи те свойства, которыми должно обладать любое решение уравнения (VII.1.12) (см. ниже). Вместе с тем, как нетрудно убедиться, не все эти линейные комбина-

ции равноправны. Среди них есть одна, а именно $p = p_2 - \beta p_1$, которая должна быть непрерывной по времени в замкнутой области определения решения, включая и границу $t = 0$. Действительно, пусть надо найти ограниченное решение системы уравнений (VII.1.11) в пространственной области D при $0 \leq t \leq T$; заданы начальные распределения давлений p_1 и p_2 . Интегрируя первое уравнение (VII.1.11) по малому промежутку времени $0 \leq t \leq \varepsilon$ и устремляя ε к нулю, находим $\lim_{t \rightarrow 0} p(x, t) = p(x, 0)$. Представим теперь второе уравнение системы (VII.1.11) в виде:

$$- \Delta p + (1 - \beta) \Delta p_1 + \kappa \nabla^2 p_1 = 0.$$

Если выбирать достаточно малые моменты времени, то первый член этого выражения будет стремиться к своему начальному значению $p(x, 0)$. Следовательно, к такому же значению с обратным знаком будет стремиться и сумма двух других членов. Поэтому для того, чтобы давление $p_1(x, t)$ было непрерывным при $t \rightarrow 0$, необходимо, чтобы начальное распределение $p_1(x, 0)$ удовлетворяло уравнению

$$\kappa \nabla^2 p_1 + (1 - \beta) \Delta p_1 = \Delta p(x, 0) \quad (\text{VII.1.13})$$

при соответствующих граничных условиях. В противном случае давление в трещинах $p_1(x, t)$ при $t = 0$ скачкообразно изменяется в соответствии с уравнением (VII.1.13). При этом, если $\beta \neq 0$ и поэтому $p \neq p_2$, происходит также и мгновенное перераспределение давления в порах p_2 при неизменном давлении p .

Такое поведение решения имеет простой физический смысл. Изменение давлений p_1 и p_2 вызывает изменение массы жидкости, заполняющей пористые блоки. Всякое такое изменение приводит к перетoku некоторого количества жидкости из блоков в трещины или обратно. Если изменение массы жидкости конечно (не бесконечно мало), оно требует конечного времени, так как происходит под действием ограниченных сил давления, которые не могут вызвать бесконечно больших скоростей перетока. Это показывает, что мгновенное изменение массы заключенной в блоках жидкости невозможно, а следовательно, невозможно и мгновенное изменение приведенного давления $p = p_2 - \beta p_1$, однозначно связанного с этой массой. Если же давления p_1 и p_2 одновременно изменяются скачком таким образом, что приведенное давление p не меняется, то перемещения жидкости не происходит, и такое согласованное мгновенное изменение давлений возможно. Если учесть также собственный объем трещин, то появится также и другая независимая комбинация давлений p' , определяющая изменение эффективного объема трещин. При этом оба давления p_1 и p_2 окажутся непрерывными при $t = 0$, и необходимо будет задавать их начальные значения отдельно.

Другая особенность системы (VII.1.11) заключается в том, что в ней исключен за малостью поток жидкости непосредственно по пористым блокам. Поэтому выравнивание разности поровых давлений p_2

между двумя соседними точками среды может проходить лишь посредством обмена жидкостью между блоками и трещинами и перемещения жидкости по трещинам. В результате этого в трещиноватопористой среде, описываемой уравнениями (VII.1.14), скачки порового давления не исчезают мгновенно (как это бывает, например, при упругом режиме), а затухают во времени по экспоненциальному закону. Чтобы убедиться в этом, установим условия на скачках, которые должны выполняться для решений системы (VII.1.14).

Рассмотрим изолированную поверхность разрыва Σ . При выводе условий на скачках ее можно считать плоской и принять за плоскость $x = 0$.

Проинтегрируем второе уравнение (VII.1.11) по x в пределах от $-\varepsilon$ до ε . В силу ограниченности p_2 , p_1 , $\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 p_1}{\partial y^2}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем

$$\left. \frac{\partial p_1}{\partial x} \right|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left[\frac{A}{\kappa} (p_2 - p_1) - \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 p_1}{\partial y^2} \right] dx \rightarrow 0.$$

Таким образом, производная dp_1/dx , а вместе с ней и само давление в трещинах p_1 непрерывны на поверхности Σ .

Запишем теперь первое уравнение системы (VII.1.11) для точек впереди поверхности разрыва ($x = +0$) и для точек за этой поверхностью ($x = -0$), обозначая соответствующие значения значками $^+$ и $^-$, и вычтем полученные уравнения друг из друга. Имеем

$$\frac{\partial (p_2^+ - p_2^-)}{\partial t} - \beta \frac{\partial (p_1^+ - p_1^-)}{\partial t} + A [(p_2^+ - p_1^+) - (p_2^- - p_1^-)] = 0.$$

По доказанному $[p_1] = p_1^+ - p_1^- = 0$, так что для скачка давления $[p_2] = p_2^+ - p_2^-$ имеем

$$\frac{\partial [p_2]}{\partial t} + A [p_2] = 0. \quad (\text{VII.1.14})$$

Таким образом, скачки порового давления p_2 должны удовлетворять уравнению (VII.1.14), или после интегрирования

$$[p_2] = [p_2]_0 e^{-At}. \quad (\text{VII.1.15})$$

Здесь через $[p_2]_0$ обозначен начальный скачок в момент $t = 0$.

Допустим теперь, что вблизи поверхности Σ' (являющейся или не являющейся поверхностью разрыва давления p_2) производная $\partial p_1 / \partial x$ непрерывна. Тогда первое уравнение (VII.1.11) можно вне поверхности Σ' (принимаемой за плоскость $x = 0$) продифференцировать по x , получив при этом

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial p_2}{\partial x} \right) + A \frac{\partial p_2}{\partial x} = 0. \quad (\text{VII.1.16})$$

Применяя к этому уравнению те же рассуждения, что и выше, и используя непрерывность производной $\partial p_1 / \partial x$ на поверхности Σ' , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial p_2}{\partial x} \right] + A \left[\frac{\partial p_2}{\partial x} \right] &= 0, \\ \left[\frac{\partial p_2}{\partial x} \right] &= \left[\frac{\partial p_2}{\partial x} \right]_0 e^{-At}. \end{aligned} \quad (\text{VII.1.17})$$

4. Отмеченные в предыдущем пункте особенности решений уравнения (VII.1.12) и системы (VII.1.11) порождают соответствующие особенности в постановке граничных и начальных условий, которым должны удовлетворять эти решения.

Прежде всего, как уже было сказано ранее, нельзя требовать, чтобы при стремлении t к нулю оба давления (в порах и трещинах) принимали заранее заданные значения $p_1(0, x, y, z)$; $p_2(0, x, y, z)$. Обязательным условием должна быть лишь непрерывность приведенного давления

$$p = p_2 - \beta p_1, \quad (\text{VII.1.18})$$

а давление в трещинах p_1 должно затем определяться из уравнения (VII.1.13). Таким образом, начальное условие будет иметь вид:

$$p(0, x, y, z) = p_2(0, x, y, z) - \beta p_1(0, x, y, z) = f(x, y, z). \quad (\text{VII.1.19})$$

В свою очередь при стремлении к границе области лишь давление в трещинах p_1 должно быть непрерывно вместе со своими производными. Как обычно, будем рассматривать условия трех типов: когда на границе заданы значения давления жидкости и потока жидкости или их комбинация, т. е. условия вида:

$$p_1(t, S) = \varphi(S), \quad \frac{\partial p_1(t, S)}{\partial n} = \psi(S)$$

или

$$p_1(t, S) + h \frac{\partial p_1(t, S)}{\partial n} = \chi(S). \quad (\text{VII.1.20})$$

Здесь S обозначает точку граничной поверхности, а n — направление нормали к ней.

Описание трещиновато-пористой среды как «двойной» пористой среды или системы вложенных друг в друга пористых сред, способных обмениваться жидкостью, дано в работах Г. И. Баренблатта, Ю. П. Желтова и И. Н. Кочиной [17, 18]; там же рассмотрены некоторые примеры. Постановка краевых задач для уравнения (VII.1.12) уточнена в работе [14].

Иной подход к описанию трещиновато-пористых сред, связанный с рассмотрением регулярно расположенных трещин, принадлежит Е. С. Ромму с соавторами (см., например, [97]).

§ 2. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ ФИЛЬТРАЦИИ ОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ В ТРЕЩИНОВАТЫХ И СЛОИСТЫХ ПЛАСТАХ

1. Задачи неустановившейся фильтрации в трещиновато-пористой среде сложнее соответствующих задач теории упругого режима, потому что описывающие их уравнения (VII.1.12) имеют не второй, а третий порядок и не допускают автомодельных решений, так как содержат характерное время η/κ . Рассмотрим здесь две простейшие задачи, представляющие наибольший практический интерес, — задачи притока к дренажной галерее и пуска скважины.

Предположим, что первоначально давление во всем трещиновато-пористом пласте, занимающем полупространство $x \geq 0$, постоянно и равно нулю, а в момент $t = 0$ граница пласта $x = 0$ сообщается с областью постоянного давления $p = P_1$. Задача определения давления в пористых блоках p_2 сводится к решению уравнения (принято $\beta = 0$)

$$\frac{\partial p_2}{\partial x} - \eta \frac{\partial^3 p_2}{\partial x^2 \partial t} = \kappa \frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2} \quad (\text{VII.2.1})$$

при дополнительных условиях:

$$\begin{aligned} p_2(0, x) &= 0 \quad (0 \leq x < \infty); \\ p_2(t, +0) &= P_1(1 - e^{-\kappa t/\eta}). \end{aligned} \quad (\text{VII.2.2})$$

Вид краевого условия при $x = 0$ связан с законом затухания разрывов распределения порового давления, подробно рассмотренным в предыдущем параграфе.

Преобразуя уравнение (VII.2.1) по Лапласу и учитывая начальное условие, получаем

$$\frac{d^2 \bar{p}_2}{dx^2} - \frac{\sigma \bar{p}_2}{\sigma\eta + \kappa} = 0, \quad (\text{VII.2.3})$$

где

$$\bar{p}_2 = \bar{p}_2(\sigma, \kappa) = \int_0^\infty e^{-\sigma t} p_2(t, x) dt. \quad (\text{VII.2.4})$$

Преобразование краевых условий (VII.2.2) дает

$$\bar{p}_2(\sigma, +0) = \frac{\kappa P_1}{\sigma(\sigma\eta + \kappa)}; \quad \bar{p}_2(\sigma, \infty) = 0. \quad (\text{VII.2.5})$$

Удовлетворяющее этим условиям решение уравнения (VII.2.3) имеет вид:

$$\bar{p}_2(\sigma, x) = \frac{\kappa P_1}{\sigma(\sigma\eta + \kappa)} \exp \left[-x \sqrt{\frac{\sigma}{\sigma\eta + \kappa}} \right]. \quad (\text{VII.2.6})$$

Используя формулу обращения, получаем

$$p_2(t, x) = \frac{\kappa P_1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{st}}{\sigma(\sigma\eta + \kappa)} e^{-x \sqrt{\frac{\sigma}{\sigma\eta + \kappa}}} d\sigma. \quad (\text{VII.2.7})$$

При вычислении интеграла (VII.2.7) удобно свести его к интегралу по контуру, охватывающему отрицательную часть действительной оси. При этом, как легко убедиться, интегралы по участку $(-\infty, -\kappa/\eta)$ взаимно уничтожаются и остается лишь интеграл по контуру, охватывающему отрезок $(-\kappa/\eta, 0)$. Тогда

$$p_2(t, x) = P_1 \left(1 - \frac{1}{\pi} \int_0^1 e^{-\sigma t \kappa / \eta} \sin \left(\sqrt{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \frac{x}{V\eta} \right) \frac{d\sigma}{\sigma(1-\sigma)} \right) \quad (\text{VII.2.8})$$

(внеинтегральный член здесь получается в результате интегрирования по малому контуру, охватывающему точку $\sigma = 0$).

Положим, $\sigma/(1-\sigma) = v^2\eta$. Имеем

$$\begin{aligned} p_2(t, x) &= P_1 - \frac{2P_1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin vx}{v} \exp \left(-\frac{v^2 \kappa t}{1+v^2\eta} \right) dv = \\ &= P_1 - \frac{2P_1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin u}{u} \exp \left(-\frac{u^2}{4\xi^2 + \eta u^2 / \kappa t} \right) du; \quad \xi = \frac{x}{2V\kappa t}. \end{aligned} \quad (\text{VII.2.9})$$

Отсюда при $\eta = 0$ получается распределение давления при пуске галереи в однородной пористой среде

$$p(t, x) = P_1 - \frac{2P_1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin u}{u} \exp \left(-\frac{u^2}{4\xi^2} \right) du = P_1 (1 - \operatorname{erf} \xi). \quad (\text{VII.2.10})$$

Для того чтобы вместо (VII.2.9) можно было пользоваться обычным соотношением (VII.2.10), необходимо выполнение неравенства

$$\eta / \kappa t \ll 1. \quad (\text{VII.2.11})$$

Действительно, при этом член $\eta u^2 / \kappa t$ сравнивается с ξ^2 только при $u^2 \gg \xi^2$, когда экспоненциальный множитель в (VII.2.9) уже пренебрежимо мал. Если, напротив, заменить неравенство (VII.2.11) на обратное, то показатель экспоненты мал при всех u , и уравнение (VII.2.9) дает

$$p_2(x, t) \approx P_1 - \frac{2P_1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin u}{u} du = 0. \quad (\text{VII.2.12})$$

Таким образом, при временах, больших сравнительно с характерным временем η/κ , давление в блоках трещиновато-пористого пласта меняется так же, как в обычном пористом пласте. При временах же малых сравнительно с η/κ давление в блоках не меняется вовсе. Возникающее таким образом запаздывание характерно для трещиновато-пористой среды.

Вычислим теперь закон изменения потока жидкости через границу пласта $x = 0$. Поскольку поток пропорционален производной от давления в трещинах p_1 , необходимо прежде всего вычислить это давление. Для этого удобно воспользоваться первым уравнением основной системы (VII.1.11). Полагая $\beta = 0$, получаем

$$p_1 = p_2 + \frac{\eta}{\kappa} \frac{\partial p_2}{\partial t}. \quad (\text{VII.2.13})$$

При любом $t \neq 0$ дифференцирование в (VII.2.9) можно производить под знаком интеграла. Имеем

$$p_1 = p_2 + \frac{\eta}{\kappa} \frac{\partial p_2}{\partial t} = P_1 - \frac{2P_1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin vx}{v(1+v^2\eta)} \times \\ \times \exp\left(-\frac{v^2\kappa t}{1+\eta v^2}\right) dv. \quad (\text{VII.2.14})$$

Из (VII.2.14), в частности, следует $p_1(0, t) = P_1$,

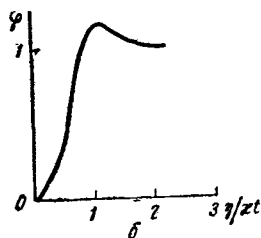
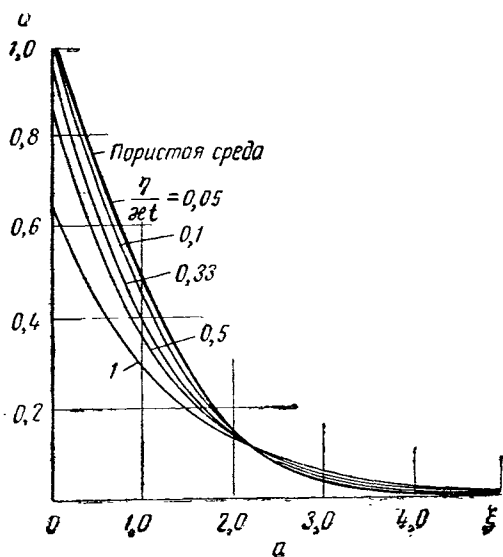


Рис. VII.2

как это и должно было быть в соответствии со сказанным ранее. Чтобы вычислить поток жидкости через границу $x = 0$, нужно продифференцировать выражение (VII.2.14) по x при $x = 0$. Дифференцируя под знаком интеграла, имеем

$$q = \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\frac{2P_1}{\pi \sqrt{\kappa t}} \int_0^{\infty} \exp\left[-\frac{u^2}{1+u^2\eta/\kappa t}\right] \frac{du}{1+u^2\eta/\kappa t}. \quad (\text{VII.2.15})$$

В условиях упругого режима $q = q_0 = -P_1/\sqrt{\pi \kappa t}$. Таким образом,

$$\frac{q}{q_0} = \sqrt{\frac{\pi \kappa t}{\eta}} \exp\left(-\frac{\eta}{2\kappa t}\right) I_0\left(\frac{\eta}{2\kappa t}\right) = \varphi\left(\frac{\eta}{\kappa t}\right). \quad (\text{VII.2.16})$$

На рис. VII.2, а показаны распределения давления в порах для различных значений параметра $\eta/\kappa t$ и на рис. VII.2, б — функ-

ция $\Phi(\eta/\kappa t)$. Как и следовало ожидать, при $t \rightarrow \infty$ ($\eta \rightarrow 0$) все решения стремятся к соответствующим решениям для пористой среды.

2. Неустановившееся движение вблизи скважины, работающей с постоянным расходом. Рассмотрим теперь осесимметричную задачу, предполагая, что в пласт, находящийся при постоянном давлении $p_0 = 0$, начинается закачка жидкости с постоянным расходом Q через скважину пренебрежимо малого радиуса.

В цилиндрических координатах рассматриваемая задача сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} - \eta \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial p_1}{\partial r} \right) = \kappa \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p_1}{\partial r} \right) \quad (\text{VII.2.17})$$

при условиях

$$p_1(0, r) = 0; \quad p_1(t, \infty) = 0; \quad \left(r \frac{\partial p_1}{\partial r} \right)_{r=0} = -\frac{\mu Q}{2\pi k_1 h} = -p_*. \quad (\text{VII.2.18})$$

Задача (VII.2.17—18) формулируется для давления в трещинах p_1 ; при желании ее можно сформулировать для давления в пористых блоках p_2 . Тогда краевое условие при $r = 0$ примет вид:

$$r \left(\frac{\partial p_2}{\partial r} \right)_{r=0} + \frac{\eta}{\kappa} \frac{\partial}{\partial t} \left(r \frac{\partial p_2}{\partial r} \right)_{r=0} = -p_*. \quad (\text{VII.2.19})$$

а остальные условия и основное уравнение останутся без изменения.

Переходя в соотношениях (VII.2.17—18) к лапласовым изображениям, имеем

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dp_1}{dr} - \frac{\sigma}{\kappa + \eta\sigma} \bar{p}_1 = 0; \quad \left(r \frac{d\bar{p}_1}{dr} \right)_{r=0} = -\frac{p_*}{\sigma}; \quad \bar{p}_1(\infty) = 0. \quad (\text{VII.2.20})$$

Этим условиям удовлетворяет решение

$$\bar{p}_1 = \frac{p_*}{\sigma} K_0 \left(\sqrt{\frac{\sigma}{\kappa + \sigma\eta}} r \right), \quad (\text{VII.2.21})$$

так что по формуле обращения

$$p_1(t, r) = \frac{p_*}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{\sigma t}}{\sigma} K_0 \left(\sqrt{\frac{\sigma}{\kappa + \sigma\eta}} r \right) d\sigma. \quad (\text{VII.2.22})$$

Этот интеграл может быть сведен к интегралу по вещественной переменной таким же образом, как это было сделано в предыдущем пункте. Мы, однако, проанализируем лишь асимптотическое поведение полученного решения при малых значениях параметра $\rho = r/2\sqrt{\kappa t}$. Представим выражение (VII.2.20) в виде:

$$p_1(t, r) = \frac{p_*}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{\zeta t}}{\zeta} K_0 \left(r \sqrt{\frac{\zeta}{1 + \zeta\eta/\kappa t}} \right) d\zeta \quad (\text{VII.2.23})$$

и будем считать $\rho \ll 1$.

При $\eta/\kappa t \ll 1$ рассматриваемое выражение переходит в известное выражение теории упругого режима (ср. § 2 гл. III). Если же $\eta/\kappa t \gg 1$, то выражение, стоящее под знаком функции Макдональда, равномерно мало, так что для нее можно воспользоваться приближенным представлением

$$K_0(x) = -(C + \ln x/2) + o(1).$$

В результате получаем

$$p_1(t, r) = -p_* \left(C + \ln \frac{r}{2\sqrt{\eta}} \right) \quad (r/\sqrt{\kappa t} \ll 1, \kappa t/\eta \ll 1). \quad (\text{VII.2.24})$$

Смысл соотношения (VII.2.24) прост: оно означает, что если собственное время трещиновато-пористой среды η/κ не слишком мало, существует промежуточный квазистационарный режим, когда жидкость,

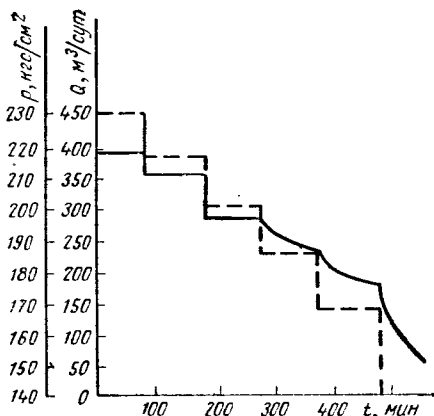


Рис. VII.3

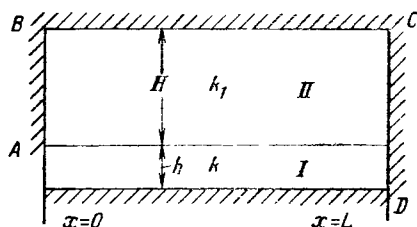


Рис. VII.4

поступающая из скважины, поглощается ближайшими к ней блоками. Лишь тогда, когда давление в блоках в окрестности скважины сравняется с давлением в трещинах (т. е. по истечении времени $\sim \eta/\kappa$), начинает сказываться обмен жидкостью с более удаленными участками пласта¹.

3. Близкие по характеру задачи возникают при исследовании фильтрации в слоистых пластах. Например, если движение происходит в двух лежащих друг над другом пластах, отделенных слабопроницаемой перемычкой, то давление в каждом из пластов следует

¹ Отметим еще одно обстоятельство. Соотношение (VII.2.24) показывает, что существует некоторый промежуток времени $r^2/\kappa \ll t \ll \eta/\kappa$, на протяжении которого давление в скважине не меняется. Если временем r^2/κ можно пренебречь (обычно это сотые доли секунды и менее), то из (VII.2.24) следует, что при скачкообразном изменении дебита скважины давление в ней изменяется скачком, а затем сохраняет постоянное значение на протяжении времени $\sim \eta/\kappa$. Такое поведение давления действительно наблюдается на практике. На рис. VII.3, заимствованном из работы [80], показано ступенчатое изменение давления (несколько, правда, искаженное влиянием побочных факторов).

уравнению упругого режима с интенсивностью перетока между пластами в правой части; эту интенсивность в большинстве случаев можно считать пропорциональной разности давлений в соответственных точках пластов. Сходство возникающей задачи с задачей фильтрации в «двойной» пористой среде очевидно.

Из всего разнообразия задач этого цикла мы рассмотрим здесь лишь одну — задачу об истощении пласта, граничащего с пластом большой мощности, но малой проницаемости. Эта задача представляет большой интерес в связи с оценкой запасов нефти и газа некоторых месторождений.

Предположим, что область фильтрации имеет вид, приведенный на рис. VII.4. Допустим, что пласты I и II сложены породами одинаковой пористости, но существенно различной проницаемости, так что $kh \gg k_1 H$, хотя $H \gg h$.

Будем рассматривать истощение системы, предполагая, что вначале она находилась под давлением P_0 , а с момента $t = 0$ начинается отбор жидкости через нижний пласт в сечении $x = 0$, причем давление на всей линии $x = 0$ одинаково, а отбор жидкости Q сохраняется постоянным. Система считается замкнутой, т. е. границы AB , BC и CD — непроницаемы. При этом задача сводится к решению совокупности уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} &= \kappa \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) & (-h \leq y \leq 0); \\ & & (0 \leq x \leq L); \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= \kappa_1 \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) & (0 \leq y \leq H). \end{aligned} \quad (\text{VII.2.25})$$

При условиях

$$k_1 \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{y=+0} = k \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{y=-0}; \quad p|_{y=+0} = p|_{y=-0} \quad (\text{VII.2.26})$$

$$\frac{\partial}{\partial y} p(0, y, t) = 0; \quad k \int_{-h}^0 \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=0} dy = Q; \quad \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad (y > 0). \quad (\text{VII.2.27})$$

При сделанных предположениях (тонком нижнем и слабопроницаемом верхнем пластах) постановку задачи можно упростить.

Заметим прежде всего, что в силу равенства граничных значений давления в обоих пластах при $y = 0$ производные по x от давления в этих пластах — одного порядка, а следовательно, скорость фильтрации в направлении оси x в верхнем пласте пренебрежимо мала (по условию $k_1 H \ll kh$). Вместе с тем скорости фильтрации в направлении оси y совпадают при $y = 0$, что может быть только в случае, если изменение давления в направлении оси y в верхнем пласте происходит быстрее, чем в нижнем.

Отсюда следует

$$\partial^2 p / \partial y^2 \gg \partial^2 p / \partial x^2.$$

Таким образом, второе уравнение (VII.2.25) можно записать в виде:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \kappa_1 \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \quad (y > 0).$$

Первое уравнение, относящееся к нижнему пласту, можно осреднить по мощности. Полагая $P = \frac{1}{h} \int_{-h}^0 p dy$, имеем

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\kappa}{h} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_{y=0} = \kappa \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\kappa k_1}{hk} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_{y=+0}$$

(здесь использовано граничное условие $k_1 \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{y=+0} = k \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{y=-0}$).
Наконец, заменим условие $p|_{y=+0} = p|_{y=-0}$ условием $p|_{y=+0} = P$. Совершаемая при этом ошибка мала при малой толщине h нижнего пласта.

Таким образом, возникает следующая упрощенная задача:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \kappa_1 \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \quad [p = P(x, y, t); y > 0];$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\kappa k_1}{hk} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_{y=0} \quad [P = P(x, t)]; \quad (\text{VII.2.28})$$

$$p(x, y, 0) = P(x, 0) = P_0; \quad p(x, 0, t) = P(x, t); \quad (\text{VII.2.29})$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{y=H} = 0; \quad \frac{k_1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{x=0} = Q = \text{const}; \quad \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0. \quad (\text{VII.2.30})$$

Решение этой задачи легко получить операционным методом. Не приводя его полностью, выпишем формулу для изображения $\bar{p}_0$ от давления на галерее $p_0 = P(0, t)$.

Имеем

$$\bar{p}_0 = \frac{P_0}{\sigma} - \frac{q \sqrt{\kappa} \operatorname{cth} \left[L \sqrt{\frac{\sigma}{\kappa} + \frac{k_1}{kh} \sqrt{\frac{\sigma}{\kappa_1} \operatorname{th} \left(H \sqrt{\frac{\sigma}{\kappa_1}} \right)}} \right]}{\sqrt{\sigma + \frac{k_1 \kappa}{kh} \sqrt{\frac{\sigma}{\kappa_1} \operatorname{th} \left(H \sqrt{\frac{\sigma}{\kappa_1}} \right)}}}. \quad (\text{VII.2.31})$$

Отсюда легко получить несколько простых выражений, отвечающих различным временам с момента пуска галереи.

Пусть прежде всего время t настолько мало, что возмущение, возникшее на галерее, не достигло непроницаемых границ системы:

$$t \ll L^2/\kappa \ll H^2/\kappa_1. \quad (\text{VII.2.32})$$

При этом в уравнении (VII.2.32) можно ограничиться асимптотикой $\sigma \gg \kappa L^{-2} \gg \kappa_1 H^{-2}$. Для таких значений σ гиперболические тангенс и котангенс в (VII.2.31) можно заменить их предельными значениями при $\sigma \rightarrow \infty$, равными единице, откуда

$$p_0 \approx \frac{P_0}{\sigma} - \frac{q \sqrt{\kappa}}{\sigma \sqrt{\sigma + \frac{k_1 \kappa}{kh} \sqrt{\frac{\sigma}{\kappa_1}}}}.$$

Учитывая еще, что в данном случае $\frac{k_1 \kappa}{kh \sqrt{\sigma \kappa_1}} \ll 1$, имеем

$$\bar{p}_0 \approx -\frac{q \sqrt{\kappa}}{\sigma \sqrt{\sigma}} \left(1 - \frac{k_1 \kappa}{2kh \sqrt{\sigma \kappa_1}} + \dots \right) + \frac{P_0}{\sigma}, \quad (\text{VII.2.33})$$

следовательно,

$$p_0(t) \approx P_0 - 2 \sqrt{\frac{\kappa t}{\pi}} q + \frac{k_1 \kappa}{2kh} \sqrt{\frac{\kappa}{\kappa_1}} t q + \dots \quad (\text{VII.2.34})$$

Таким образом, на первой стадии движения влияние верхнего слабопроницаемого пласта сказывается лишь в добавлении малых членов, порядка $\sqrt{t}$, по сравнению с главными.

Рассмотрим теперь промежуточный диапазон времен, которому отвечает разложение формулы (VII.2.31) при $\kappa L^2 \gg \sigma \gg \kappa_1 H^2$. В этом случае вновь можно положить $thH \sqrt{\frac{\sigma}{\kappa_1}} = 1$, а $\text{cth} \left[L \sqrt{\frac{\sigma}{\kappa_1}} + \dots \right]$, используя второе неравенство для σ , можно представить разложением при малых значениях аргумента. Имеем

$$\bar{p} = \frac{P_0}{\sigma} - \frac{q \kappa}{L \sigma \left(\sigma + \frac{k_1 \kappa}{kh} \sqrt{\frac{\sigma}{\kappa_1}} \right)} + \dots \quad (\text{VII.2.35})$$

Отсюда, используя таблицу изображений Лапласа, получаем

$$p_0(t) = P_0 - \frac{q \kappa}{L} \left[\frac{k^2 h^2 \kappa_1}{\kappa^2 k_1^2} \exp \left(\frac{k_1^2 \kappa^2}{k^2 h^2 \kappa_1} t \right) \times \right. \\ \left. \times \text{erfc} \left(\frac{\kappa_1 \sqrt{t}}{kh \sqrt{\kappa_1}} \right) + \frac{2 \sqrt{t \kappa_1}}{\sqrt{\pi}} \frac{kh}{\kappa k_1} - \frac{k^2 h^2 \kappa_1}{\kappa^2 k_1^2} \right]. \quad (\text{VII.2.36})$$

Последнее выражение можно упростить, если величина $\frac{k_1 \kappa}{kh} \sqrt{t}$ мала или велика сравнительно с единицей. В первом случае, разлагая первый член в скобках по степеням аргумента, получим

$$p_0(t) \approx P_0 - \frac{q \kappa t}{L} + \dots, \quad (\text{VII.2.37})$$

что совпадает с решением для случая непроницаемого верхнего пласта. Если же $k_1 \kappa \sqrt{t/kh} \gg 1$, то для упрощения первого члена можно использовать асимптотику $\text{erfc } x$ при больших значениях аргумента

$$\text{erfc } x \approx \frac{1}{\sqrt{\pi} x} e^{-x^2}.$$

Имеем

$$p_0(t) = -\frac{\kappa q}{L} \left(\frac{kh}{\kappa k_1} 2 \sqrt{\frac{t \kappa_1}{\pi}} - \frac{k^2 h^2 \kappa_1}{\kappa^2 k_1^2} + o(1) \right) + P_0. \quad (\text{VII.2.38})$$

Таким образом, изменение давления в этом случае определяется уже в основном притоком из верхнего пласта. Наконец, при еще больших временах, $t \gg H^2/\kappa_1$, начинается вторая фаза фильтрации в верхнем пласте (истощение верхнего пласта). Разлагая гиперболические тангенс и котангенс при малых значениях аргумента, получаем

$$\bar{p}_0 = \frac{P_0}{\sigma} - \frac{q\kappa}{\sigma^2 L \left(1 + \frac{\kappa k_1 H}{\kappa_1 k h}\right)} = \frac{P_0}{\sigma} - \frac{q\kappa h}{\sigma^2 L \left(h + H \frac{K m_1}{K_1 m}\right)}, \quad (\text{VII.2.39})$$

откуда

$$p_0(t) \approx P_0 - \frac{q\kappa h t}{L \left(h + H \frac{K m_1}{K_1 m}\right)} \dots = P_0 - \frac{Q t}{L} \frac{1}{\left(\frac{h m}{K} + \frac{H m_1}{K_1}\right)} + \dots \quad (\text{VII.2.40})$$

Таким образом, для двухслойного пласта рассматриваемого вида отчетливо выделяются два периода движения при работе на истощение. На протяжении первого периода происходит истощение первого пласта, а движение в малопроницаемом верхнем пласте незначительно, на второй стадии нижний пласт практически полностью истощен, и происходит истощение верхнего пласта.

Если по данным о падении давления по мере отбора на первой стадии подсчитать запасы жидкости или газа в пласте, то подсчет даст лишь запасы, заключенные в нижнем пласте ($V_0 = m h b L$), что значительно меньше истинных запасов $V = (m h + m_1 H) b L$. Это обстоятельство оказывается существенным для ряда месторождений; в частности, так обстоит дело на крупнейшем Шебелинском месторождении газа. Как показал М. А. Бернштейн [28а], первоначальные запасы Шебелинского месторождения оказались заниженными, так как не были учтены запасы газа в слабопроницаемых ангидритах. Проницаемость этих пород настолько мала, что пробуренные в них скважины не имеют промышленного значения, однако переток из ангидритов в расположенный ниже хорошо проницаемый пласт оказался весьма существенным.

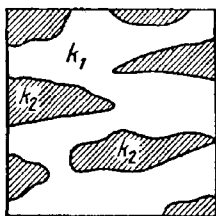
§ 3. ДВУХФАЗНАЯ НЕСТАЦИОНАРНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ И ВЫТЕСНЕНИЕ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ В СРЕДАХ С ДВОЙНОЙ ПОРИСТОСТЬЮ

При совместном движении в неоднородной пористой среде двух несмешивающихся жидкостей возникают дополнительные факторы, обуславливающие обмен жидкостью между участками разной проницаемости. Прежде всего за счет различия насыщенности в разных областях пористой среды меняются фильтрационные сопротивления, что вызывает перераспределение давления и перетоки жидкости между высоко- и малопроницаемыми участками. Другая причина, вызывающая обмен жидкостью между высокопроницаемой средой и малопроницаемыми включениями при вытеснении несмешива-

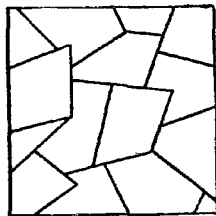
ющихся жидкостей, заключается в действии капиллярных сил. Вначале вытесняющая жидкость (вода) быстро прорывается по высокопроницаемой среде, а малопроницаемые включения оказываются окруженными водой. Поэтому содержащаяся в них нефть может быть извлечена только путем противоточной капиллярной пропитки если вытесняющая фаза является и более смачивающей.

Для описания вытеснения несмешивающихся жидкостей из среды с двойной пористостью может быть применен общий подход, изложенный в предыдущих параграфах. Будем рассматривать вытеснение

несмешивающихся жидкостей в среде, которая состоит из области с проницаемостью k_1 , имеющей малопроницаемые включения с проницаемостью $k_2 \ll k_1$. Общая схема такой среды изображена на рис. VII.5, а. Поскольку $k_2 \ll k_1$, фильтрацией в малопроницаемых участках за счет общего



а



б

Рис. VII.5

градиента давления в пласте будем пренебрегать. Частными случаями рассматриваемой схемы являются пласт, состоящий из двух слоев разной проницаемости, и трещиновато-пористый пласт (рис. VII.5, б).

Процессы перераспределения давления за счет сжимаемости жидкости и пористой среды, особенно в трещиновато-пористой среде, происходят значительно быстрее, чем перераспределение жидкости, вызываемое капиллярными силами, так как пьезопроводность пористых сред, как уже отмечалось в гл. II, имеет порядок $10^4 \text{ см}^2/\text{сек}$, а параметр $a^2 = \frac{\alpha}{\mu} \sqrt{\frac{k}{m}}$, определяющий скорость капиллярных про-

цессов, почти никогда не превышает $1 \text{ см}^2/\text{сек}$. Поэтому в большинстве случаев можно ограничиться исследованием вытеснения несжимаемых жидкостей в несжимаемой пористой среде. Один случай вытеснения сжимаемых жидкостей в среде с двойной пористостью будет рассмотрен в конце настоящего параграфа.

Как и для описания нестационарной фильтрации однородной жидкости в среде с двойной пористостью, введем в каждой точке сплошной среды по два значения каждой характеристики движущейся жидкости — одно для малопроницаемой среды, другое — для высокопроницаемой. Таким образом, будем использовать две скорости фильтрации каждой из фаз $\vec{U}_i^{(1)}$ и $\vec{U}_i^{(2)}$, две насыщенности $s^{(1)}$ и $s^{(2)}$ и два давления $p^{(1)}$ и $p^{(2)}$ (верхние индексы 1 и 2 относятся соответственно к высокопроницаемой и малопроницаемой средам, нижние 1 и 2 — к вытесняющей и вытесняемой жидкостям). Каждая из указанных характеристик получается путем осреднения

по объему, охватывающему большое число блоков или малопроницаемых включений. При слоистой среде осреднение производится по мощности каждого слоя.

В соответствии с условием $k_1 \gg k_2$ будем рассматривать только случай, когда вся фильтрация происходит в высокопроницаемой среде, т. е. $\vec{U}_i^{(2)}$ считаются равными нулю. Обобщенный закон Дарси для движения в высокопроницаемой среде можно записать в виде:

$$\begin{aligned}\vec{U}_1^{(1)} &= -\frac{k_1}{\mu_1} \vec{f}_1^{(1)} \text{grad } p^{(1)}; \\ \vec{U}_2^{(1)} &= -\frac{k_1}{\mu_2} \vec{f}_2^{(1)} \text{grad } p^{(1)}.\end{aligned}\quad (\text{VII.3.1})$$

В формулах (VII.3.1) давление принято одинаковым в обеих фазах, т. е. влиянием капиллярных сил непосредственно на фильтрацию пренебрегается. Их действие учитывается, далее, только через скорость обмена жидкостью между участками разной проницаемости. Такое упрощение справедливо, если зона, где существенно меняется насыщенность, включает большое число блоков (в слоистой среде эта зона должна значительно превышать мощность каждого из слоев). Тогда градиент насыщенности в «продольном» направлении в высокопроницаемой среде мал, и влиянием капиллярных сил на фильтрацию можно пренебречь. Это условие выполняется при достаточно малом значении параметра a_1^2/Uh , определяющего отношение скорости капиллярной пропитки к скорости фильтрации.

Относительные проницаемости $\vec{f}_i^{(1)}$, входящие в формулы (VII.3.1), могут существенно отличаться от относительных проницаемостей, входящих в уравнения обобщенного закона Дарси для однородных пористых сред (при одинаковых насыщенностях). Последние относятся к квазистатическим распределениям насыщенности, которые в макромасштабе однородны, а в микромасштабе определяются действием поверхностных сил (см. гл. VI). В неоднородной среде из-за неправильной формы малопроницаемых включений и под влиянием других причин распределение насыщенности при нестационарном течении заметно отличается от квазистатического. В высокопроницаемой среде могут образовываться области, в которых насыщенность резко отличается от средней, — «языки» воды, целики нефти. Естественно, что при этом преимущественное расположение частиц более смачивающей фазы в мелких порах нарушается, и форма осредненных кривых относительной проницаемости приближается к прямолинейной (прямолинейные относительные проницаемости соответствуют полностью случайному распределению фаз в порах).

Вид кривых относительной проницаемости в неоднородной среде зависит от характера неоднородности. Сравнительно равномерным в макромасштабе будет распределение фаз по мощности высокопроницаемого слоя в слоистом пласте, если эта мощность меньше мощ-

ности малопроницаемого слоя. В этом случае кривые относительной проницаемости сохраняют обычный вид. Напротив, в трещиновато-пористой среде относительные проницаемости при движении фаз в трещинах можно в большинстве случаев считать линейными функциями насыщенности, так как распределение фаз в трещинах не зависит от капиллярных сил и каждая фаза движется свободно (экспериментально этот факт проверялся Е. С. Роммом [97]). Относительные проницаемости в высокопроницаемой среде являются также функциями безразмерных параметров вида a^2/Uh , где U — скорость вытеснения, h — характерный размер включения. Однако эта зависимость пока не исследована. Далее предположим, что осредненные относительные проницаемости зависят только от средней насыщенности соответствующей среды.

Уравнения неразрывности можно выписать для каждой фазы в каждой из составляющих сред аналогично тому, как это было сделано в § 1 для однородной жидкости, т. е. предполагая, что в каждой точке происходит обмен жидкостью между соответствующими средами с интенсивностью q_i .

Имеем для течения в высокопроницаемой среде

$$\begin{aligned} m_1(1-n) \frac{\partial s^{(1)}}{\partial t} + \operatorname{div} [(1-n) \vec{U}_1^{(1)}] + q_1 &= 0; \\ -m_1(1-n) \frac{\partial s^{(1)}}{\partial t} + \operatorname{div} [(1-n) \vec{U}_2^{(1)}] + \bar{q}_2 &= 0. \end{aligned} \quad (\text{VII.3.2})$$

Здесь q_1 и q_2 — интенсивности перетока каждой фазы из более проницаемой среды в менее проницаемую; n — объемная плотность включений, зависящая от пространственных координат. Если предположить в соответствии со сказанным выше, что в малопроницаемых включениях скорости фильтрации $\vec{U}_i^{(2)}$ равны нулю, то уравнения неразрывности в малопроницаемой среде примут вид:

$$\begin{aligned} m_2 n \frac{\partial s^{(2)}}{\partial t} - q &= 0; \\ q_1 &= -q_2 = q, \end{aligned} \quad (\text{VII.3.3})$$

т. е. перетоки каждой из фаз равны по величине и противоположны по направлению.

Для замыкания полученной системы уравнений нужно найти связь интенсивности перетоков q с другими переменными. Как и в случае однофазной жидкости, перетоки возникают вследствие разности давлений в составляющих средах, однако при двухфазном течении эти разности различны для каждой из фаз. Большая величина капиллярного давления в малопроницаемых включениях создает в них зону пониженного давления в водной фазе. Вода является одновременно и вытесняющей и более смачивающей фазой. Напротив, в вытесняемой фазе давление во включениях выше, чем в высокопроницаемой среде. Вследствие этого и возникает переток воды во включения, а вытесняемой фазы — в противоположном

направлении. Если отношение проницаемостей k_1/k_2 очень велико, капиллярное давление в малопроницаемых включениях намного больше, чем в высокопроницаемой среде. Тогда можно рассматривать обмен жидкостью между средами за счет капиллярных сил как результат капиллярной пропитки малопроницаемых включений. Поэтому интенсивность перетоков q может быть определена на основе исследования противоточной капиллярной пропитки.

Исследовать ход пропитки, учитывая истинную форму включений или блоков, практически невозможно; кроме того, за редкими исключениями форма блоков бывает неизвестна, поэтому приходится исходить из анализа пропитки линейного образца.

В гл. VI, § 4 было получено, что когда начальная насыщенность $s = s_0$ постоянна, то при малых t насыщенность является функцией переменной $\xi = x/a\sqrt{t}$, а скорость фильтрации каждой из фаз v при $x = 0$ по абсолютной величине выражается формулой

$$v = ac(s_1, s_0) t^{-1/2}. \quad (\text{VII.3.4})$$

При этом скорость впитывающейся фазы равна $+v$, а извлекаемой $-v$.

После подхода фронта вытеснения к закрытому концу образца средняя насыщенность в нем стремится к постоянному значению $s = s_1$ в соответствии с приближенным выражением (VI.4.39)

$$s = s_1 (1 - Ae^{-\alpha t/\tau_0}).$$

В то же время значение v убывает со временем по экспоненциальному закону

$$v = Ae^{-\alpha t/\tau_0}, \quad (\text{VII.3.5})$$

где A и α — постоянные, а $\tau_0 = l^2/a^2$. Для приближенного описания хода пропитки постоянную A нужно выбрать так, чтобы скорость v была непрерывна при некотором значении $t = t_1$, так что при $t < t_1$ справедлива формула (VII.3.4), а при $t > t_1$ — формула (VII.3.5).

В целом ход пропитки линейного образца иллюстрируется приведенными выше на рис. VI.22 графиками зависимости средней насыщенности $\bar{s}$ от времени. При малых t значение $\bar{s}$ линейно зависит от $\sqrt{t}$, а v — обратно пропорционально $\sqrt{t}$. При больших t $\bar{s}$ стремится к s_1 , а v убывает по экспоненциальному закону.

Если проницаемость k_1 достаточно велика, то с момента подхода воды к малопроницаемым включениям или блокам в трещиновато-пористой среде на границе их сразу устанавливается максимально возможное значение насыщенности $s = s^*$. В таких условиях, если начальная насыщенность блоков постоянна, можно считать, что продвижение воды, впитывающейся в блок, и, следовательно, интенсивность перетоков зависят только от времени нахождения данного блока или элемента в обводненной зоне.

Введем новую неизвестную функцию $t_0(x, y, z)$ — время прохождения фронта вытеснения в высокопроницаемой среде или в тре-

щинах через точку с координатами x, y, z . Разумеется, это возможно только в том случае, если можно выделить такой фронт, т. е. поверхность, с одной стороны которой в трещинах (или в высокопроницаемой среде) появилась вытесняющая жидкость, а с другой стороны ее насыщенность равна начальному значению. При перечисленных условиях интенсивность перетоков является функцией времени нахождения блока в зоне, охваченной вытесняемой жидкостью (обводненной). Это время равно $t - t_0(x, y, z) = \tau$.

Вид функции $q(\tau)$ может быть выбран, исходя из выражений для скорости пропитки одного элемента (VII.3.4) и (VII.3.5).

Чтобы перейти от скорости пропитки одного элемента к интенсивности перетоков в единице объема среды с двойной пористостью, нужно скорость пропитки v умножить на удельную поверхность малопроницаемых блоков и на некоторый коэффициент, зависящий от формы этих блоков. При этом следует учесть, что пропитка в данной точке пласта начинается лишь после подхода к ней фронта вытеснения. Удельную поверхность из соображений размерности можно выразить в виде βl^{-1} , где β — постоянная, l — характерный размер блока. Тогда из равенства (VII.3.4) получим, что при малых значениях $\tau q(\tau)$ можно принимать в виде:

$$q = N_1 \frac{a}{l} \tau^{-1/2} = N_1 (\tau_0 \tau)^{-1/2}, \quad (\text{VII.3.6})$$

где $\tau_0 = \frac{l^2}{a^2}$ — характерное время пропитки блока; N_1 — безразмерная постоянная. Для больших τ из (VII.3.5) следует формула

$$q = N_2 \frac{a^2}{l^2} \exp\left(-\frac{\alpha \tau}{\tau_0}\right). \quad (\text{VII.3.7})$$

Удобной аппроксимацией для $q(\tau)$ при всех значениях τ является функция вида:

$$q(\tau) = A \frac{e^{-b\tau}}{\sqrt{\tau}}. \quad (\text{VII.3.8})$$

Эта функция при малых τ совпадает с выражением (VII.3.6), а при больших τ убывает таким образом, что полный впитавшийся объем в единице объема среды, равный $\int_0^\infty q(\tau) d\tau$, является конечным. Постоянные A и b в формуле (VII.3.8) нетрудно подобрать так, чтобы при малых τ уравнение (VII.3.8) совпадало с (VII.3.6), а при больших τ стремилось к предельной насыщенности блока после пропитки s_1 . Тогда

$$A = N_1 \frac{a}{l}; \quad b = \frac{\pi N_1^2 a^2}{l^2 m^2 s_1^2}. \quad (\text{VII.3.9})$$

Выражение вида (VII.3.8) было предложено Э. В. Скворцовым [104].

Интенсивность перетоков можно ввести в уравнения (VII.3.2) — (VII.3.3) и по-иному, предположив, что q зависит от насыщенности каждой из среды. При этом можно принять, что q пропорционально $c(s_1, s_2)$ [формула (VII.3.4)]. Зависимость $c(s_1, s_2)$, как показывают расчеты автомодельных решений, приближенно представляется в виде:

$$c(s_1, s_2) = K(s_1)(s_1 - s_2). \quad (\text{VII.3.10})$$

Вместо s_1 и s_2 в выражение (VII.3.10) следует подставить $s^{(1)}$ и некоторую функцию $s^{(2)}$, выбранную с учетом того, что проницаемость происходит до выравнивания капиллярных давлений в обеих средах. Такой способ введения интенсивности перетоков был использован в работе В. М. Рыжика [98].

Для описания вытеснения в трещиноватой среде в уравнениях (VII.3.2) и (VII.3.3) следует положить $n = 1$, $(1 - n) \vec{U}_i^{(1)} = \vec{w}_i$ исходя из того, что объем трещин мал по сравнению с объемом пор. w_i представляют собой средние по всему объему скорости фильтрации фаз. Обозначив, далее, $s^{(2)} = s$ и $m_2 = m$, получим

$$\text{div} \vec{w}_1 + q = 0; \quad \text{div} (\vec{w}_1 + \vec{w}_2) = 0; \quad m \frac{\partial s}{\partial t} - q = 0. \quad (\text{VII.3.11})$$

Рассмотрим одномерные задачи о вытеснении в трещиновато-поровом пласте. Система (VII.3.11) приведет к виду:

$$\frac{\partial w_1}{\partial x} + q = 0; \quad m \frac{\partial s}{\partial t} - q = 0; \quad w_1 + w_2 = w(t). \quad (\text{VII.3.12})$$

Пусть начальная насыщенность блоков постоянна и интенсивность перетоков может быть выражена формулой вида $q = q(\tau)$.

Проинтегрируем первое из уравнений (VII.3.12) от входного сечения ($x = 0$) до «фронта» вторгшейся воды. Учитывая, что при $x = 0$ движется только вытесняющая фаза и $w_1 = w(t)$, получим

$$w(t) = \int_0^{x_0(t)} q(t - T(x)) dx. \quad (\text{VII.3.13})$$

Из (VII.3.13) можно получить интегральное уравнение для перемещения фронта вытесняющей жидкости в трещинах $x_0(t) = f(t)$. Введем в уравнении (VII.3.13) новую переменную интегрирования T , полагая $x = f(T)$. Получим

$$w(t) = \int_0^t q(t - T) f'(T) dT. \quad (\text{VII.3.14})$$

Определив из интегрального уравнения (VII.3.14) функцию $f(t)$ или обратную функцию $T(x) = t_0(x)$, из второго уравнения системы

(VII.3.12) можем найти распределение насыщенности блоков s в любой момент времени:

$$s - s_0 = \frac{1}{m} \int_{T(x)}^t q(\tau - T(x)) d\tau = \frac{1}{m} \int_0^{t-T(x)} q(\tau) d\tau. \quad (\text{VII.3.15})$$

Правая часть уравнения (VII.3.14) имеет вид свертки и оно может быть решено методом преобразования Лапласа. Пусть

$$\int_0^{\infty} w(t) e^{-\sigma t} dt = W(\sigma); \quad \int_0^{\infty} q(t) e^{-\sigma t} dt = Q(\sigma); \quad (\text{VII.3.16})$$

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-\sigma t} dt = \Phi(\sigma).$$

Пользуясь теоремой о свертке и начальным условием $f(0) = 0$, получим из (VII.3.14)

$$W(\sigma) = \sigma \Phi(\sigma) Q(\sigma). \quad (\text{VII.3.17})$$

откуда

$$\Phi(\sigma) = \frac{W(\sigma)}{\sigma Q(\sigma)}. \quad (\text{VII.3.18})$$

Рассмотрим некоторые частные случаи. Для начальных моментов времени, когда $q(\tau)$ выражается формулой (VII.3.6), имеем

$$Q(\sigma) = N_1 \frac{a}{l} \sqrt{\frac{\pi}{\sigma}},$$

откуда

$$\Phi(\sigma) = \frac{W(\sigma)}{N_1 \frac{a}{l} \sqrt{\pi \sigma}}. \quad (\text{VII.3.19})$$

В частности, если скорость вытеснения $w(t)$ меняется по степенному закону $w = w_0 t^\beta$, то

$$W(\sigma) = \frac{w_0 \Gamma(\beta+1)}{\sigma^{\beta+1}}$$

и

$$\Phi(\sigma) = \frac{w_0 l \Gamma(\beta+1)}{N_1 a \sqrt{\pi} \sigma^{\beta+\frac{3}{2}}}; \quad f(t) = \frac{w_0 l \Gamma(\beta+1)}{N_1 a \sqrt{\pi} \Gamma\left(\beta+\frac{3}{2}\right)} t^{\beta+\frac{1}{2}}. \quad (\text{VII.3.20})$$

Для случая постоянной скорости $\beta = 0$ и

$$f(t) = \frac{2w_0 l}{N_1 a} \sqrt{t}. \quad (\text{VII.3.21})$$

При $\beta < -\frac{1}{2}$ решение (VII.3.20) не имеет физического смысла, так как не удовлетворяет условию $f(0) = 0$.

Полное описание вытеснения из трещиновато-пористой среды удобно провести с использованием зависимости $q(\tau)$ в виде (VII.3.8). Функция вида (VII.3.8) хорошо аппроксимирует ход пропитки в линейном случае, а ее преобразование по Лапласу имеет сравнительно простой вид, что позволяет решить уравнение (VII.3.14) в конечном виде для ряда важных случаев зависимости $w(t)$.

При $q(t)$, выражающейся формулой (VII.3.8),

$$Q(\sigma) = \frac{A \sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma + b}}, \quad (\text{VII.3.22})$$

откуда

$$\Phi(\sigma) = \frac{W(\sigma) \sqrt{\sigma + b}}{A \sqrt{\pi} \sigma}. \quad (\text{VII.3.23})$$

Рассмотрим снова случай $w(t) = w_0 = \text{const.}$ Тогда

$$\Phi(\sigma) = \frac{w_0}{A \sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\sigma + b}}{\sigma^2}. \quad (\text{VII.3.24})$$

Из таблиц преобразования Лапласа можно найти $f(t)$ в виде:

$$f(t) = \frac{w_0}{A \sqrt{\pi b}} (1 + 2bt) \operatorname{erf}(\sqrt{bt}) + \frac{2w_0}{A \sqrt{\pi b}} (1 - e^{-bt}); \quad (\text{VII.3.25})$$

$$f'(t) = \frac{2w_0 \sqrt{b}}{A \sqrt{\pi}} \operatorname{erf}(\sqrt{bt}). \quad (\text{VII.3.26})$$

Из формулы (VII.3.26) видно, что при $t \rightarrow \infty$ скорость перемещения фронта становится постоянной и равной

$$V = \frac{2w_0 \sqrt{b}}{A \sqrt{\pi}}.$$

В соответствии с формулой (VII.3.15) насыщенность блоков s , если $f(t) = Vt$, выражается в виде:

$$s = s_0 + \frac{1}{m} \int_0^{t - \frac{x}{V}} q(\tau) d\tau = s_0 + (s_1 - s_0) \operatorname{erf}\left(\sqrt{b\left(t - \frac{x}{V}\right)}\right), \quad (\text{VII.3.27})$$

т. е. s является функцией $x - Vt$. Таким образом, в пределе получаем решение типа, описанного в § 3 гл. VI, т. е. решение типа бегущей волны. При больших значениях $t - \frac{x}{V}$ насыщенность блоков стремится к постоянному предельному значению $s = s_1$. Все изменение насыщенности от s_0 до s_1 происходит в зоне, протяженность которой имеет порядок $\frac{w_0 l^2}{N_1 a^2} \cdot (2 \div 3)$. Эта зона по аналогии со случаем вытеснения в однородной среде (см. гл. VI, § 3) получила название стабилизированной. Внутри стабилизированной зоны фактически осуществляется весь процесс пропитки блоков.

Зависимость $f(t)$, соответствующая уравнению (VII.3.25), показана на рис. VII.6 [104]. Видно, что стабилизированная зона образуется за время порядка $\frac{1}{b} \cdot (2 \div 3)$, т. е. приблизительно в $2 \div 3$ раза больше времени пропитки одного блока. При малых t функция $f(t)$ имеет порядок $\sqrt{t}$, т. е. ход вытеснения таков же, как в случае $q = c/\sqrt{t}$.

Точно так же, как и рассмотренный случай линейного вытеснения, можно исследовать радиальные задачи. При радиальном течении, когда вытесняющая жидкость нагнетается через скважину, центр которой принимается за начало координат, первое из уравнений (VII.3.11) запишется в виде:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rw_1) + q = 0. \quad (\text{VII.3.28})$$

Интегрируя по r от $r = \rho$ (контур скважины) до положения фронта в трещинах $r = R$, получим

$$G(t) = 2\pi \int_{\rho}^{R(t)} q(t - T(r)) r dr, \quad (\text{VII.3.29})$$

где $G(t) = 2\pi \rho w_0(t)$ — расход жидкости через скважину на единицу мощности пласта:

$T(r) = t_0(r)$ — время появления фронта жидкости на окружности радиусом r . Пусть функцией, обратной $T(r)$, будет $R(T)$. Примем в качестве искомой функции $\varphi(t) = \pi R^2(t)$ — площадь, охваченную продвигающимся фронтом. Тогда из (VII.3.29) получается следующее интегральное уравнение для $\varphi(t)$:

$$G(t) = \int_0^t q(t - T) \varphi'(T) dT. \quad (\text{VII.3.30})$$

Это точно такое же уравнение, как и (VII.3.14), только вместо скорости фильтрации $w(t)$ в него входит расход $G(t)$. Все приведенные решения уравнения (VII.3.14) могут быть перенесены на радиальное течение. Для определения насыщенности в блоках из (VII.3.12) получим аналогично (VII.3.5)

$$s - s_0 = \int_0^{t-T(r)} q(\tau) d\tau. \quad (\text{VII.3.31})$$

Заметим, что в случае $G(t) = \text{const}$, если q определяется по формуле (VII.3.8), то из формул, аналогичных (VII.3.6) или (VII.3.18), получим при больших t

$$R(t) \approx C \sqrt{t}. \quad (\text{VII.3.32})$$

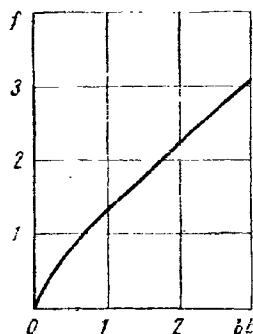


Рис. VII.6

Полученное решение кроме трещиновато-пористой среды может быть использовано также для описания вытеснения в двухслойном пласте, когда мощность малопроницаемого слоя очень велика и k_2/k_1 весьма мало, и высокопроницаемый слой можно рассматривать как щель (аналогично случаю, описанному в § 2). При этом условии, если пренебречь пропиткой в продольном направлении, каждый элемент малопроницаемого слоя (вырезанный перпендикулярно оси x) пропитывается по автомодельному закону, т. е. $q = \frac{C}{\sqrt{\tau}}$. Решение для перемещения фронта по щели сохраняет вид (VII.3.20), только постоянная $N_1 \frac{a}{l}$ заменяется на $C = ac$ [см. (VII.3.4)].

Если мощность малопроницаемого слоя конечна, то следует использовать те же выражения $q(\tau)$, что и для трещиновато-пористой среды.

Изложенный выше подход к задачам вытеснения несмешивающихся жидкостей в трещиновато-пористой среде развивался в работах В. М. Рыжика [98, 3], А. А. Боксермана, Ю. П. Желтова, А. А. Кочешкова, В. Л. Данилова [30, 31].

До сих пор мы рассматривали задачи вытеснения, в которых обмен жидкостью между трещинами и блоками (или между участками разпой проницаемости) вызывался действием капиллярных сил. Однако в специфических условиях сред с двойной пористостью ход вытеснения может существенно измениться также за счет нестационарных процессов обмена, вызванных упругим перераспределением давления между блоками и трещинами. Этот фактор используется в процессе циклического заводнения, который применяется в условиях резко неоднородных и трещиноватых коллекторов. При циклическом заводнении расход закачиваемой в пласт воды (или другой жидкости) периодически изменяется. Это изменение вызывает периодический обмен жидкостью между трещинами и блоками за счет упругого перераспределения давления. В ходе обмена происходит постепенное обогащение блоков вытесняющей жидкостью, которая, очевидно, быстрее перемещается по трещинам. Выходящая из блоков жидкость всегда поэтому имеет меньшую насыщенность вытесняющей фазой, чем жидкость, находящаяся в трещинах и входящая в блоки. Капиллярные силы интенсифицируют этот процесс, поскольку более смачивающая вытесняющая жидкость (вода) удерживается в блоках за счет «концевых эффектов». Но и в случае, когда жидкости — полностью смешивающиеся и капиллярные эффекты отсутствуют, циклический режим приводит к обмену жидкостями между блоками и трещинами и постепенному извлечению вытесняемой жидкости. Излагаемая ниже упрощенная схема циклического процесса вытеснения в пластах с двойной пористостью была предложена А. А. Боксерманом и Б. В. Шалимовым [32].

В простейшей постановке для анализа принципиальных свойств циклический процесс вытеснения можно рассмотреть на примере вытеснения из трещиновато-пористого пласта жидкостей, равных плотности, вязкости и сжимаемости (разноцветные жидкости).

В этих условиях поле давлений в блоках и трещинах описывается системой уравнений (VII.1.11) и не зависит от распределения насыщенности.

Для рассматриваемой системы динамически одинаковых жидкостей относительные проницаемости как для течения в трещинах, так и в блоках равны соответствующим насыщенностям. Уравнения неразрывности j -й фазы в трещинах и блоках соответственно имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} (m_1 \rho s_j^{(1)}) + \operatorname{div} (\rho U_j) = -\rho q_j; \quad (\text{VII.3.33})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (m_2 \rho s_j^{(2)}) = \rho q_j,$$

где $s_j^{(1)}$ — насыщенность в трещинах; $s_j^{(2)}$ — насыщенность в блоках. Здесь сделаны те же предположения, что и при выводе уравнений (VII.1.11). В соответствии со сказанным выше $\vec{U}_j = s_j^{(1)} \vec{U}$, где $\vec{U} = \vec{U}_1 + \vec{U}_2$ — суммарная скорость фильтрации в трещинах.

Имеем:

$$q_l = \begin{cases} s^{(1)} q & q > 0; \\ s^{(2)} q & q < 0, \end{cases} \quad (\text{VII.3.34})$$

т. е. если переток идет из трещин в блоки, то перетекающая жидкость имеет тот же состав, что и жидкость в трещинах, и наоборот. Если принять функцию q согласно формуле (VII.1.5), то из системы (VII.3.33) может быть получена система (VII.1.11) и, кроме того, следующие уравнения для насыщенности:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \frac{\partial s^{(1)}}{\partial t} + U \operatorname{grad} s^{(1)} &= 0 \\ m_2 \frac{\partial s^{(2)}}{\partial t} &= (s^{(1)} - s^{(2)}) q \end{aligned} \right\} q > 0; \quad (\text{VII.3.35})$$

$$\left. \begin{aligned} m_1 \frac{\partial s^{(1)}}{\partial t} + U \operatorname{grad} s^{(1)} &= (s^{(1)} - s^{(2)}) q \\ m_2 \frac{\partial s^{(2)}}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \right\} q < 0. \quad (\text{VII.3.36})$$

Уравнения (VII.3.35) и (VII.3.36) показывают, что в той из сред, из которой происходит переток, насыщенность не меняется в соответствии с предположением, что состав перетекающей жидкости тот же, что и в той среде, откуда происходит переток (фактически под влиянием капиллярных сил в выходящей из блоков жидкости будет преобладать вытесняемая фаза, что ускорит процесс обмена).

Если рассматривать вытеснение несмешивающихся жидкостей с учетом истинного вида относительных проницаемостей, то насыщенности будут меняться при любом знаке q .

В рассматриваемой постановке задачи поля давлений и насыщенностей могут быть определены поочередно путем решения уравнений

(VII.1.11) и (VII.3.35) — (VII.3.36). Для дальнейшего упрощения задачи надо учесть, что переток жидкости из трещины в блок и обратно за время одного цикла невелик по сравнению с общим объемом жидкости в блоке, поскольку этот переток происходит только за счет сжимаемости. Поэтому изменение насыщенности происходит намного медленнее, чем изменение давления. Это позволяет осреднить все параметры в уравнениях (VII.3.35) и (VII.3.36) по промежутку времени, равному одному периоду, т. е. ввести осредненные переменные вида:

$$\langle s^{(i)} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T s^{(i)} dt. \quad (\text{VII.3.37})$$

Считая отклонения от средних значений малыми, получим для средних значений насыщенности систему уравнений

$$\begin{aligned} m_1 \frac{\partial \langle s^{(1)} \rangle}{\partial t} + \langle U \rangle \text{grad} \langle s^{(1)} \rangle &= 0; \\ m_2 \frac{\partial \langle s^{(2)} \rangle}{\partial t} &= (\langle s^{(1)} \rangle - \langle s^{(2)} \rangle) q_0, \end{aligned} \quad (\text{VII.3.38})$$

где

$$q_0 = \frac{1}{2T} \int_0^T |q| dt.$$

Для того чтобы определить вид функции $q_0(x)$, следует найти соответствующие периодические решения уравнения (VII.1.11) и осреднить их по времени. Для случая одномерного течения между галереями будем искать периодические решения уравнения (VII.1.11) с периодом $T = 2\pi/\omega$:

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} - \eta \frac{\partial^3 p_1}{\partial x^3} = \kappa \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}. \quad (\text{VII.3.39})$$

Решение ищем в виде:

$$p_1 = p_0(x) + P_1^0 e^{\alpha x} e^{i\omega t} \quad (\text{VII.3.40})$$

так, чтобы оно удовлетворяло уравнению (VII.3.39) и периодическим граничным условиям

$$\begin{aligned} \frac{k_1 h}{\mu_1} \frac{\partial p_1}{\partial x} \Big|_{x=0} &= Q_0 + Q_1 \cos(\omega t + \delta_1); \\ \frac{k_1 h}{\mu_1} \frac{\partial p_1}{\partial x} \Big|_{x=l} &= Q_0 + Q_2 \cos(\omega t + \delta_2). \end{aligned} \quad (\text{VII.3.41})$$

Из уравнения (VII.3.39) следует, что $p_0''(x) = 0$ и $p_0(x) = A + Bx$. Значение A представляет собой несущественную постоянную, а

$$B = \frac{\mu_1 Q_0}{k_1 h}.$$

Подставляя выражение (VII.3.40) в уравнение (VII.3.39), получаем

$$\alpha^2 = \frac{\omega^2 \eta + i \omega \kappa}{\kappa_1^2 + i \omega^2 \eta^2}, \quad (\text{VII.3.42})$$

откуда определяются два корня: α_1 и α_2 .

Полагая $\alpha_1 = \gamma_1 + i\gamma_2$, $\alpha_2 = \gamma_1 - i\gamma_2$, имеем

$$p_1(x, t) = p_0(x) + [C_1 e^{i\gamma_1 x} + C_2 e^{-i\gamma_1 x}] e^{\gamma_1 x + i\omega t} = p_0(x) + P_0(x) e^{i\omega t}. \quad (\text{VII.3.43})$$

Подставляя выражение (VII.3.43) в условие (VII.3.41) и выделяя действительную часть, можно найти значения постоянных C_1 и C_2 . После того как найдена функция $p_1(x, t)$, вид функции перетока может быть определен из второго уравнения (VII.1.11), т. е.

$$P_1 - P_2 = \kappa \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = \frac{\kappa}{A} \frac{d^2 P_0}{dx^2} e^{i\omega t}. \quad (\text{VII.3.44})$$

Определение постоянных в приведенном выше решении довольно громоздко и мы не будем приводить окончательных формул.

Как показали многочисленные расчеты, проведенные А. А. Боксерманом и Б. В. Шалимовым [32], при обычных значениях периодов — порядка нескольких часов — амплитуда давления практически не зависит от координаты x . Следовательно, и амплитуда интенсивности перетоков q_0 может быть принята не зависящей от x . Для постоянного q_0 решение системы (VII.3.38) в одномерном случае может быть получено в замкнутом виде при начальном условии $\langle s^{(2)} \rangle = 0$. В одномерном случае уравнения (VII.3.38) можно записать, опуская знаки осреднения:

$$\begin{aligned} m_1 \frac{\partial s^{(1)}}{\partial t} + U \frac{\partial s^{(1)}}{\partial x} &= -(s^{(1)} - s^{(2)}) q_0; \\ m_2 \frac{\partial s^{(2)}}{\partial t} &= (s^{(1)} - s^{(2)}) q_0. \end{aligned} \quad (\text{VII.3.45})$$

Введем новые независимые переменные

$$\xi = x; \quad \tau = t - \frac{x m_1}{U} = t - \frac{x}{V}. \quad (\text{VII.3.46})$$

Тогда вместо (VII.3.45) получим систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial s^{(1)}}{\partial \xi} + (s^{(1)} - s^{(2)}) \frac{q_0}{V} &= 0; \\ \frac{\partial s^{(2)}}{\partial \tau} - (s^{(1)} - s^{(2)}) \frac{q_0}{m_2} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{VII.3.47})$$

Система (VII.3.47) должна быть решена при граничных условиях

$$s^{(1)} = 1 \quad \text{при } \xi = 0 \quad \text{и} \quad s^{(2)} = 0 \quad \text{при } \tau = 0. \quad (\text{VII.3.48})$$

Применяя преобразование Лапласа по τ и учитывая второе условие (VII.3.48), получим вместо (VII.3.47) уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dS^{(1)}}{d\xi} + (S^{(1)} - S^{(2)})\alpha &= 0; \\ \sigma S^{(2)} - (S^{(1)} - S^{(2)})\beta &= 0, \end{aligned} \quad (\text{VII.3.49})$$

где $S^{(1)}$ и $S^{(2)}$ — преобразования Лапласа от $s^{(1)}$ и $s^{(2)}$; σ — параметр преобразования Лапласа; $\alpha = \frac{q_0}{V}$; $\beta = \frac{q_0}{m_2}$.

Из граничных условий следует, что при $\xi = 0$ $S^{(1)} = \frac{1}{\sigma}$.

Решение уравнений (VII.3.49) имеет вид:

$$S^{(1)} = \frac{\exp(-\alpha\xi)}{\sigma} \exp\left(\frac{\alpha\beta\xi}{\alpha+\beta}\right); \quad (\text{VII.3.50})$$

$$S^{(2)} = \frac{\beta \exp(-\alpha\xi)}{\sigma} \exp\left(\frac{\alpha\beta\xi}{\sigma+\beta}\right)$$

Используем формулу

$$\int_0^{\infty} I_0(\sqrt{2at}) e^{-\tau t} dt = e^{\frac{a}{2\sigma}} \quad (\text{VII.3.51})$$

(см. [43], формула (9.3.42)). Пользуясь формулой (VII.3.51) и теоремой умножения для преобразования Лапласа, получим следующие выражения для $s^{(1)}$ и $s^{(2)}$:

$$\begin{aligned} s^{(1)} &= \exp(-\alpha\xi - \beta\tau) I_0(2\sqrt{\alpha\beta\xi\tau}) + \\ &+ \beta \exp(-\alpha\xi) \int_0^{\tau} \exp(-\beta\lambda) I_0(2\sqrt{\alpha\beta\xi\lambda}) d\lambda; \\ s^{(2)} &= \beta \exp(-\alpha\xi) \int_0^{\tau} \exp(-\beta\lambda) I_0(2\sqrt{\alpha\beta\xi\lambda}) d\lambda. \end{aligned} \quad (\text{VII.3.52})$$

Из формул (VII.3.52) следует, что на фронте продвижения воды в трещинах (при $\tau = 0$) $s^{(1)}$ имеет скачок, интенсивность которого равна $\exp(-\alpha\xi)$.

Графики зависимости $s^{(1)}$ и $s^{(2)}$ от x при разных значениях t приведены на рис. VII.7.

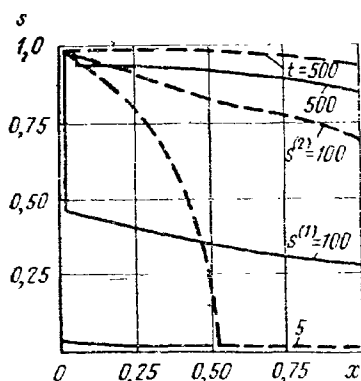


Рис. VII.7

Глава VIII

НЕЛИНЕЙНАЯ НЕСТАЦИОНАРНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

§ 1. ОТКЛОНЕНИЯ ОТ ЗАКОНА ДАРСИ. НЕЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

Во всех рассмотренных до сих пор задачах мы предполагали выполненным закон Дарси. Объясняется это тем, что закон Дарси достаточно точно описывает основной круг фильтрационных движений. Вместе с тем в ряде случаев нелинейность закона фильтрации становится существенной, а иногда и определяющей.

В основу вывода закона Дарси в гл. I, § 2 были положены два основных предположения: 1) движение является безынерционным («ползущим»); 2) жидкость вязкая пытоновская, не взаимодействующая с твердым скелетом пористой среды¹.

Последующие уточнения связаны с отказом от этих предположений.

1. Как видно из самого вывода закона Дарси (см. гл. I, § 2), он должен нарушаться в области достаточно больших скоростей, при которых уже нельзя не учитывать инерционной составляющей сопротивления движению жидкости.

Добавляя к числу определяющих параметров (I.2.2) плотность с размерностью ML^{-3} , получим уже шесть величин, из которых можно образовать три безразмерные комбинации. Повторяя рассуждения гл. I, § 2, получаем

$$\text{grad } p = -\frac{\mu}{d^2} \vec{u} f\left(\frac{u p d}{\mu}\right)$$

(возникающая здесь комбинация $u p d / \mu$ играет роль числа Рейнольдса фильтрационного микродвижения). Допуская возможность

¹ Т. е. влияние скелета сказывается лишь в том, что на его поверхности выполняется обычное для вязкой жидкости условие прилипания. В то же время предполагалось, что скелет не создает действующего на жидкость силового поля, не адсорбирует сколько-нибудь заметную часть жидкости, не образует с ней коллоида и т. д.

разложения функции f в ряд Тейлора и ограничиваясь первыми двумя членами разложения, получаем

$$\text{grad } p = -\frac{\mu}{k} \vec{u} - \beta \frac{\rho u}{V k} \vec{u} \quad (\text{VIII.1.1})$$

(здесь учтено, что $d^2 \approx k$, см. гл. I, § 2).

Выражение (VIII.1.1) носит название двучленного закона фильтрации. Впервые двучленный закон был предложен Форхгеймером [117].

Как показывают опыты, это простое выражение хорошо описывает данные наблюдений. Наряду с часто цитируемыми данными Фенчера, Льюиса и Бернса [115], отметим еще опыты Линдквиста, воспроизведенные в работе [149]. Эти опыты показывают, что соотношение (VIII.1.1) представляет собой нечто большее, нежели простую эмпирическую формулу, поскольку оно хорошо выполняется даже для весьма больших значений скорости фильтрации. Физический смысл этого заключается в том, что при больших скоростях быстропеременное движение в порах сопряжено с появлением значительных инерционных составляющих гидравлического сопротивления.

Выяснению физического смысла соотношения (VIII.1.1) посвящен ряд работ, из которых необходимо отметить работы Е. М. Минского [82—84].

Появление квадратичного члена в уравнении закона фильтрации иногда связывается с турбулизацией течения. Однако уже порядок чисел Рейнольдса (1—10), рассчитанных по диаметру зерен или пор пористой среды, при которых сказываются отклонения от линейности, указывает на неправильность такого утверждения [149, 126]. В последнее время отсутствие турбулентности (т. е. флуктуаций скорости во времени) доказано также прямыми опытами [157].

В задачах теории фильтрации (в отличие, например, от задач химической технологии) приложения двучленного закона фильтрации ограничены главным образом движением газа вблизи высокодебитных газовых скважин или движением вблизи скважин в трещиноватых средах. В последнем случае особое значение имеет то обстоятельство, что истинная скорость жидкости в трещинах значительно больше скорости фильтрации.

2. Двучленный закон фильтрации (VIII.1.1) учитывает отклонения от закона Дарси при больших скоростях. Иной характер носит уточнение, рассматриваемое ниже. Будем рассматривать только безынерционные движения. Допустим, что кроме сил вязкого сопротивления существуют также силы сопротивления, величина которых не зависит от скорости фильтрации (хотя зависит от ее направления — силы сопротивления всегда направлены против скорости относительного перемещения). Простейшим случаем системы с такими свойствами является неньютоновская вязко-пластическая жид-

кость, для которой касательные напряжения связаны с градиентом скорости du/dn соотношением Бингама [85, 86]:

$$\begin{aligned}\tau &= \tau_0 + \mu \frac{du}{dn} & \left(\frac{du}{dn} > 0 \right); \\ \tau &\leq \tau_0 & \left(\frac{du}{dn} = 0 \right).\end{aligned}\tag{VIII.1.2}$$

В это соотношение, кроме вязкости μ , входит также постоянная τ_0 , называемая начальным напряжением сдвига.

Допустим теперь, что происходит фильтрация жидкости, характеризующейся двумя постоянными: вязкостью μ и характерным напряжением τ_0 . Из соображений размерности, так же как и в гл. I, § 2, получаем

$$\text{grad } p = -\frac{\mu u}{d^2} f\left(\frac{\tau_0 d}{\mu u}\right).\tag{VIII.1.3}$$

Предположим, что движущаяся в пористой среде жидкость обладает тем свойством, что с увеличением скорости деформации значение вязких напряжений становится преобладающим. Тогда при увеличении скорости фильтрации влияние параметра τ_0 должно асимптотически уменьшаться. Это означает, что функция f должна иметь конечный предел при стремлении аргумента к нулю:

$$f(0) = d^2/k,\tag{VIII.1.4}$$

Постоянная k представляет собой проницаемость среды в обычном смысле. Пусть теперь фильтрующаяся жидкость обладает тем свойством (присущим, например, вязко-пластическим жидкостям), что при малых скоростях деформации напряжения не зависят от величины скорости и не стремятся к нулю с уменьшением скорости сдвига до нуля. Очевидно, что при малых скоростях фильтрации в выражении (VIII.1.3) скорость должна исчезать. Это означает, что

$$f \approx b \frac{\tau_0 d}{\mu u} \quad (u \rightarrow 0).\tag{VIII.1.5}$$

В результате при снижении скорости фильтрации до нуля градиент давления стремится к конечному (ненулевому) пределу:

$$(\text{grad } p)_0 = -\gamma = -\frac{b\tau_0}{d}.\tag{VIII.1.6}$$

Это предельное значение γ определяет ту величину градиента давления, по достижении которой начинается движение жидкости; при меньших значениях градиента движение отсутствует. Величина γ называется предельным (начальным) градиентом; если для рассматриваемого случая такое предельное значение существует, то говорят о фильтрации с предельным (начальным) градиентом. Наиболее простой вид закона фильтрации с предельным градиентом

получается в предположении, что функция f представляется двучленным выражением

$$f = \frac{d^2}{k} + b \frac{\tau_0 d}{\mu u}, \quad (\text{VIII.1.7})$$

удовлетворяющим соотношениям (VIII.1.4) и (VIII.1.6). При этом уравнение (VIII.1.3) даёт (рис. VIII.1)

$$\begin{aligned} \text{grad } p &= -\frac{\mu}{k} \vec{u} - \gamma \frac{\vec{u}}{u} & (u > 0); \\ |\text{grad } p| &\leq \gamma & (u = 0). \end{aligned} \quad (\text{VIII.1.8})$$

Закон фильтрации с предельным (начальным) градиентом использовался в гидротехнике [96, 116] и в нефтепромысловой механике, в первую очередь в работах А. Х. Мирзаджанзаде с сотрудниками [85, 86, 112].

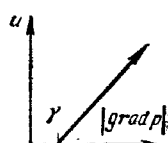


Рис. VIII.1

Надо, однако, заметить, что соотношение (VIII.1.8) необязательно выполняется точно даже для фильтрации вязко-пластической жидкости. Это легко объяснить. Суммарная сила сопротивления складывается из сил сопротивления, действующих в отдельных порах. При этом в каж-

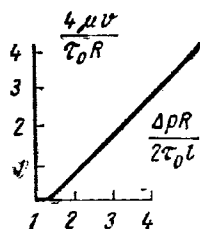


Рис. VIII.2

дом элементе жидкости соотношение между «вязкой» ($\mu du/dn$) и «пластической» (τ_0) составляющими напряжения зависит не только от величины средней скорости (скорости фильтрации), но и от перераспределения скоростей между отдельными поровыми каналами.

Подобное явление происходит и при движении вязко-пластической жидкости в одном капилляре (здесь перераспределение происходит между отдельными слоями жидкости). В результате связь между перепадом давления и средней скоростью для капилляра радиусом R имеет вид (рис. VIII.2):

$$v = \frac{\Delta p}{l} \frac{R^2}{8\mu} \left[1 - \frac{4}{3} \left(\frac{2\tau_0}{R} \frac{l}{\Delta p} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{2\tau_0 l}{\Delta p R} \right)^4 \right]. \quad (\text{VIII.1.9})$$

Движение в капилляре прекращается при перепаде давления

$$\Delta p = \frac{2\tau_0 l}{R}. \quad (\text{VIII.1.10})$$

Асимптота к линейному участку кривой $\Delta p/l - v$ пересекается с осью $\Delta p/l$ при $\Delta p = \frac{8}{3}\tau_0 l/R$.

Пусть теперь мы имеем пористую среду, состоящую из множества микрокапилляров различных радиусов. При снижении перепада давления начинается постепенное «закупоривание» капилляров. В соответствии с формулой (VIII.1.10) вначале движение прекращается в наиболее мелких капиллярах, а по мере снижения давления

происходит закупоривание все больших и больших капилляров. Ясно, что чем сильнее разброс размеров пор, тем больше растянут переход к полному прекращению движения и тем сильнее отличается истинный вид закона фильтрации от идеализированного соотношения (VIII.1.8).

Однако выражение это может иметь также асимптотический смысл, описывая движение при относительно больших скоростях фильтрации ($u \gg \tau_0 d/\mu$). При таком понимании закон фильтрации с предельным градиентом (VIII.1.8) описывает широкий класс нелинейных фильтрационных движений. При этом естественно различать истинный предельный градиент γ_0 , отвечающий полному прекращению движения, и предельный градиент γ , отвечающий асимптотическому участку закона фильтрации. Имеем по порядку величины

$$\gamma_0 \approx \frac{\tau_0}{d_{\text{макс}}}; \quad \gamma \approx \frac{\tau_0}{d}, \quad (\text{VIII.1.14})$$

где $d_{\text{макс}}$ и d — соответственно максимальный и средний размеры поровых каналов. Для сред с сильно неоднородным строением эти величины могут различаться во много раз.

Как уже было установлено из соображений размерности, $d \approx c\sqrt{k}$. Поэтому для сред однотипной структуры $\gamma \approx \tau_0/\sqrt{k}$. Это соотношение установлено и экспериментально проверено Б. И. Султановым [112] (в его опытах величины γ_0 и γ не различались).

3. Проиллюстрируем сказанное некоторыми экспериментальными данными. На рис. VIII.3, *a* — *в* приведены данные по фильтрации: *a* — воды в глине [132]; *б* — воды в глинизированном песчанике [162]; *в* — нефти в песке [1]. Как видно из графиков, выражение (VIII.1.8) достаточно хорошо описывает движение во всех этих случаях в области сравнительно больших скоростей; при малых же скоростях различные системы ведут себя по-разному.

В основе нелинейного поведения систем в этих случаях лежат различные физические механизмы. Важно, однако, что эти эффекты проявляются при малых скоростях фильтрации и в средах с малым размером пор (зерен), т. е. с малой проницаемостью. Относительная роль нелинейных эффектов определяется параметром

$$S = \frac{\tau d}{\mu u} \quad \text{или} \quad S^* = \frac{\tau \sqrt{k}}{\mu u}. \quad (\text{VIII.1.12})$$

Это обстоятельство определяет особенности нелинейной фильтрации в неоднородных пластах. Области малой проницаемости оказываются областями максимального проявления нелинейных эффектов, что способствует дополнительному затруднению движения в этих областях. Рассмотрим это на примере тонкого слоистого пласта. Этот практически важный случай приведет нас также к некоторым новым постановкам задач.

4. Тонкий слоистый пласт мощностью h_i сложен N пропластками проницаемостью k_i . Предположим, что для каждого пропластка справедлив закон фильтрации с предельным градиентом

$$\vec{u} = -\frac{k_i}{\mu} \left(\text{grad } p - \gamma_i \frac{\text{grad } p}{|\text{grad } p|} \right);$$

$$(|\text{grad } p| > \gamma_i);$$

$$u = 0 \quad (|\text{grad } p| < \gamma_i). \quad (\text{VIII.1.13})$$

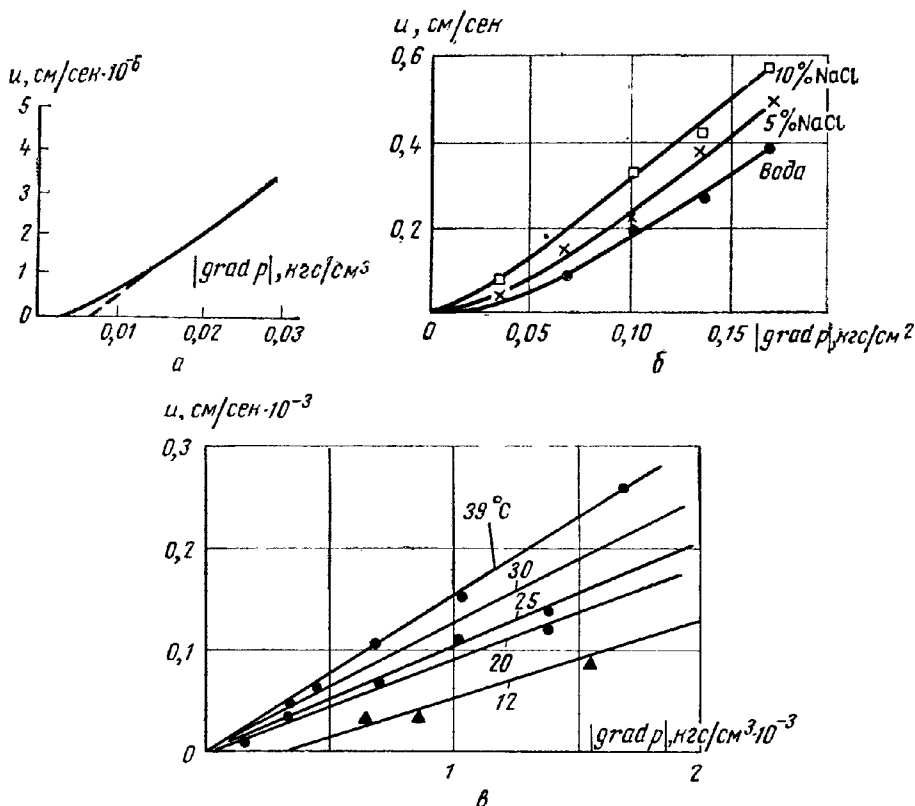


Рис. VIII.3

Примем, что пропластки занумерованы в порядке возрастания проницаемости. В соответствии со сказанным выше это означает также, что значения γ_i убывают с увеличением номера i .

Уточним теперь, что понимается под тонким пластом. Будем считать пласт топким настолько, что можно пренебречь изменением давления по толщине (тем самым предполагается, что возникающие между отдельными прослойками разности давлений быстро выравниваются за счет обмена жидкостью между пропластками). Определим

в этом предположении вектор $\vec{w}$ — среднюю скорость фильтрации жидкости через площадку, высота которой равна мощности пласта, а ширина равна единице. Имеем

$$\vec{w} = \frac{1}{H} \int_0^H \vec{u} dz = -\frac{1}{H} \left[\sum_{i=1}^j \frac{k_i h_i}{\mu} \text{grad } p - \sum_{i=1}^j \gamma_i \frac{\text{grad } p}{|\text{grad } p|} \right]. \quad (\text{VIII.1.14})$$

Здесь номер $0 \leq j \leq N$, до которого ведется суммирование, определяется очевидным условием

$$\gamma_j < \text{grad } p \leq \gamma_{j+1}. \quad (\text{VIII.1.15})$$

При $|\text{grad } p| < \gamma_1$ имеем $w = 0$. Нетрудно видеть что движение однородной жидкости в слоистом пласте можно рассматривать так же, как движение в однородном пласте со скоростью фильтрации $\vec{w}$

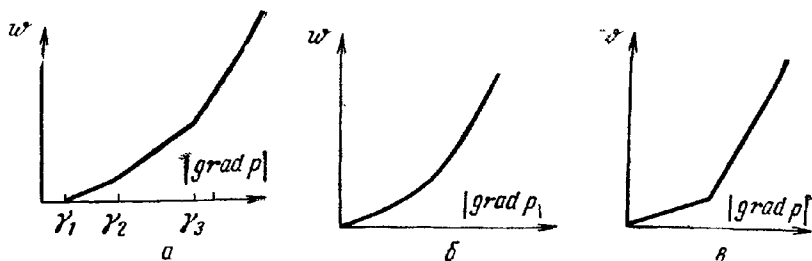


Рис. VIII.4

и в соответствии с законом фильтрации (VIII.1.14) (рис. VIII.4, а). Таким образом, наряду с законом фильтрации с предельным градиентом (VIII.1.8) имеет смысл рассматривать кусочно-линейные законы фильтрации, описываемые выпуклой книзу ломаной линией (рис. VIII.4, а). Отсюда нетрудно перейти к непрерывно изменяющейся по мощности пласта проницаемости. При этом получается закон фильтрации, описываемый произвольной выпуклой книзу кривой (рис. VIII.4, б). Наконец, рассматривая простейший случай двухслойного пласта, в котором один из прослоев обладает пренебрежимо малым предельным градиентом, получаем простой кусочно-линейный закон фильтрации (рис. VIII.4, в), на котором можно проследить ряд особенностей движения жидкости в слоистых пластах. Во всех перечисленных случаях закон фильтрации в области больших скоростей имеет прямолинейный асимптотический участок.

В нефтепромысловой литературе обычно разделяют случаи нелинейной фильтрации и исключения отдельных прослоев пласта с изменением градиента давления. Такое разделение, по-видимому, нерационально: изменение эффективной мощности пласта не только является одним из проявлений нелинейности закона фильтрации, но и может быть описано тем же математическим аппаратом.

В дальнейшем мы не будем этого оговаривать особо, но следует помнить, что все сказанное ниже о нелинейной фильтрации допускает непосредственную интерпретацию применительно к движению в слоистых тонких пластах.

5. Дополняя уравнение закона фильтрации уравнением неразрывности и уравнением состояния жидкости, получим нелинейную теорию упругого режима, или теорию нелинейной фильтрации газа, подобно тому как это было сделано в гл. II.

Наряду с рассмотренной кусочно-линейной аппроксимацией нелинейного закона сопротивления часто встречается также аппроксимация степенным выражением вида:

$$\vec{u} = -f(|\text{grad } p|) \text{grad } p, \quad (\text{VIII.1.16})$$

где f — степенная функция;

$$f(|\text{grad } p|) = C |\text{grad } p|^\alpha. \quad (\text{VIII.1.17})$$

Вначале такая аппроксимация использовалась для описания закона фильтрационного сопротивления в переходной области между линейным и квадратичным законом сопротивления; при этом $\alpha < 0$. Впоследствии, однако, такая аппроксимация почти везде уступила место двучленной аппроксимации, рассмотренной выше. В последнее же время степенной закон фильтрации вновь приобретает самостоятельное значение, поскольку он хорошо описывает движение ряда пенноотонеских жидкостей, в том числе растворов и расплавов полимеров, в пористой среде. Для таких жидкостей характерно «псевдопластическое» поведение, когда эффективная вязкость жидкости падает по мере увеличения скорости деформации и показатель α положителен.

§ 2. АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ ПРИ НЕЛИНЕЙНОМ ЗАКОНЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ. ФИЛЬТРАЦИЯ С ПРЕДЕЛЬНЫМ ГРАДИЕНТОМ

Автомодельные решения задач фильтрации с нелинейным законом сопротивления, если он не является степенным, существуют лишь при узко специальном выборе начальных и граничных условий. Однако автомодельные решения важны в том отношении, что позволяют выяснить особенности возникающих нелинейных задач.

1. Прямолинейно-параллельное движение упругой жидкости. Кусочно-линейный закон фильтрации. Рассмотрим фильтрационное движение при нелинейном законе сопротивления в условиях упругого режима. Выразим скорость из уравнения закона фильтрации через градиент давления в виде:

$$\vec{u} = -\frac{k\gamma}{\mu} \Psi\left(\frac{|\text{grad } p|}{\gamma}\right) \frac{\text{grad } p}{|\text{grad } p|}. \quad (\text{VIII.2.1})$$

Здесь k — проницаемость среды; μ — вязкость жидкости; γ — характерное значение градиента давления; Ψ — безразмерная функция, описывающая закон фильтрации.

При такой записи предполагается, что у закона фильтрации имеется линейный участок, для которого можно определить отношение k/μ (очевидно, это требование выполнено для всех рассмотренных в § 1 законов фильтрации, кроме степенного). Подставляя выражение (VIII.2.1) в уравнение неразрывности (II.1.3) и считая жидкость и пласт упруго-деформируемыми, приходим к уравнению упругого режима при законе фильтрации (VIII.2.1):

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \kappa \gamma \operatorname{div} \left[\Psi \left(\frac{|\operatorname{grad} p|}{\gamma} \right) \frac{\operatorname{grad} p}{|\operatorname{grad} p|} \right]. \quad (\text{VIII.2.2})$$

Здесь κ — пьезопроводность, рассчитанная обычным образом по определенным выше величинам k и μ :

$$\kappa = \frac{kK}{m\mu}, \quad (\text{VIII.2.3})$$

а величины K и m имеют обычный смысл.

В частности, для одномерного движения в направлении оси x имеем

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \kappa \gamma \frac{\partial}{\partial x} \Psi \left(\frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial x} \right). \quad (\text{VIII.2.4})$$

Пусть рассматривается полубесконечный пласт и начальное распределение давления в нем линейно, а на границе пласта поддерживаются постоянный отбор или закачка жидкости, так что

$$\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=0} = B; \quad p(0, x) = Ax. \quad (\text{VIII.2.5})$$

Легко убедиться, что задача с такими условиями автомодельна и имеет решение вида:

$$p = \gamma x f(\xi); \quad \xi = 1/2 x / \sqrt{\kappa t}. \quad (\text{VIII.2.6})$$

Для функции f получается уравнение

$$-2\xi^2 \frac{df}{d\xi} = \frac{d}{d\xi} \Psi \left(f + \xi \frac{df}{d\xi} \right) \quad (\text{VIII.2.7})$$

при условиях

$$f(\infty) = \frac{A}{\gamma} = \alpha; \quad \lim_{\xi \rightarrow 0} \left(f + \xi \frac{df}{d\xi} \right) = \frac{B}{\gamma} = \beta. \quad (\text{VIII.2.8})$$

Будем рассматривать кусочно-линейный закон фильтрации (см. рис. VIII.4, в):

$$\begin{aligned} \Psi(y) &= \varepsilon y & (|y| < 1; \quad \varepsilon < 1); \\ \Psi(y) &= \varepsilon \operatorname{sgn} y + y - \operatorname{sgn} y & (|y| > 1). \end{aligned} \quad (\text{VIII.2.9})$$

Особый интерес представляет предельный случай $\varepsilon \rightarrow 0$, когда получается закон фильтрации с начальным градиентом, рассмотренный выше.

При законе фильтрации вида (VIII.2.9) представленная задача может быть решена в явном виде. Уравнение (VIII.2.7) распадается на два линейных уравнения:

$$\begin{aligned} \xi f'' + 2(1 + \xi^2) f' &= 0 & (|f + \xi f'| > 1); \\ \varepsilon \xi f'' + 2(\varepsilon + \xi^2) f' &= 0 & (|f + \xi f'| < 1). \end{aligned} \quad (\text{VIII.2.10})$$

Область значений аргумента $0 < \xi < \infty$ разбивается на несколько участков (l_i, l_{i+1}) таким образом, что на каждом из них выполняется одно из уравнений (VIII.2.10), причем на смежных участках решение удовлетворяет разным уравнениям. Число и характер расположения участков легко установить из соображений непрерывности, если учесть, что решения уравнений (VIII.2.10) и их производные монотонны.

1. Если градиенты A и B (будем называть их исходным и конечным соответственно) — одного знака и по абсолютной величине больше критического градиента γ ($|\alpha| > 1, |\beta| > 1, \alpha\beta > 0$), то во всем пласте градиент превосходит критический по абсолютной величине. На всей прямой $0 < \xi < \infty$ выполняется первое уравнение (VIII.2.10), и задача сводится к известной линейной задаче.

2. Если исходный и конечный градиенты по модулю меньше критического, то на всей прямой выполняется второе уравнение (VIII.2.10), и задача вновь сводится к линейной.

3. Если $|\alpha| > 1, |\beta| < 1$, то на примыкающем к границе пласта участке $[0, l]$, где l — неизвестная граница, подлежащая определению, градиент давления меньше критического, и выполняется второе уравнение; в интервале (l, ∞) — первое.

4. Если $|\alpha| < 1, |\beta| > 1$, то на участке $[0, l]$ вблизи границы пласта выполняется первое уравнение (VIII.2.10), а на остальной полу-прямой — второе.

5. Наконец, если исходный и конечный градиенты, превосходя по модулю критический, имеют разные знаки ($|\alpha| > 1, |\beta| > 1, \alpha\beta < 0$), то область движения разбивается на три участка: на $(0, l_1)$ и (l_2, ∞) удовлетворяется первое уравнение (VIII.2.10), а на (l_1, l_2) — второе.

Для каждого участка решение может быть выписано в явном виде:

$$\begin{aligned} f(\xi) &= C_1 + D_1 [V\pi \operatorname{erf} \xi + \xi^{-1} \exp(-\xi^2)]; \\ f(\xi) &= C_2 + D_2 [V\pi \operatorname{erf}(\xi/\sqrt{\varepsilon}) + \xi^{-1} \sqrt{\varepsilon} \exp(-\xi^2/\varepsilon)] \end{aligned} \quad (\text{VIII.2.11})$$

— соответственно для первого и второго уравнений (VIII.2.10). Поэтому для того, чтобы решить задачу, достаточно найти постоянные C и D и границы l_i для всех участков. Уравнения для постоянных получаются из дополнительных условий (VIII.2.8) и условий сопряжения на границах. Эти условия состоят в том, что давление и расход непрерывны на границах участка, причем положение этих

границ определяется из дополнительного требования равенства градиента критическому. Таким образом, имеем:

$$f(l+0)=f(l-0); \quad (f+\xi f')_{l+0}=(f+\xi f')_{l-0}=\pm 1. \quad (\text{VIII.2.12})$$

Знак в последнем условии (VIII.2.12) определяется из соображений непрерывности. Нетрудно проверить, что условия (VIII.2.12) вместе с краевыми условиями дают столько же уравнений, сколько неизвестных имеется в задаче.

Рассмотрим теперь последовательно те три из перечисленных выше пяти возможностей, при которых задача не переходит в линейную. Для случая 3 решение, удовлетворяющее краевым условиям (VIII.2.5), имеет вид:

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \beta - D_2 [\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(\xi/\sqrt{\varepsilon}) + \xi^{-1} \sqrt{\varepsilon} \exp(-\xi^2/\varepsilon)] & (0 \leq \xi \leq l); \\ f(\xi) &= \alpha + D_1 \sqrt{\pi} - D_1 [\sqrt{\pi} \operatorname{erf} \xi + \xi^{-1} \exp(-\xi^2)] & (l < \xi < \infty) \end{aligned} \quad (\text{VIII.2.13})$$

а из условий (VIII.2.12) следует система алгебраических уравнений для D_1 , D_2 и l :

$$\begin{aligned} \alpha + D_1 \sqrt{\pi} \operatorname{erfc} l &= \operatorname{sgn} \alpha; \\ \beta - D_2 \sqrt{\pi} \operatorname{erf} \left(\frac{l}{\sqrt{\varepsilon}} \right) &= \operatorname{sgn} \alpha; \\ D_1 e^{-l^2} &= D_2 \sqrt{\varepsilon} e^{-\frac{l^2}{\varepsilon}}. \end{aligned} \quad (\text{VIII.2.14})$$

Система (VIII.2.14), как легко убедиться, однозначно разрешима. Аналогичным образом, в случае 4 решение определяется выражениями

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \beta - D_1 [\sqrt{\pi} \operatorname{erf} \xi + \xi^{-1} e^{-\xi^2}] & (0 \leq \xi \leq l); \\ f(\xi) &= \alpha + D_2 \sqrt{\pi} - D_2 \left[\sqrt{\pi} \operatorname{erf} \left(\frac{\xi}{\sqrt{\varepsilon}} \right) + \xi^{-1} \sqrt{\varepsilon} e^{-\frac{\xi^2}{\varepsilon}} \right] & (l < \xi < \infty), \end{aligned} \quad (\text{VIII.2.15})$$

в которых D_1 , D_2 и l определяются из системы

$$\begin{aligned} \alpha + D_2 \sqrt{\pi} \operatorname{erfc} \left(\frac{l}{\sqrt{\varepsilon}} \right) &= \operatorname{sgn} \beta; \\ \beta - D_1 \sqrt{\pi} \operatorname{erf} l &= \operatorname{sgn} \beta; \\ D_2 \sqrt{\varepsilon} e^{-\frac{l^2}{\varepsilon}} &= D_1 e^{-l^2}. \end{aligned} \quad (\text{VIII.2.16})$$

Перейдем теперь к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. При этом в соответствии с выражением (VIII.2.9) закон фильтрации принимает в пределе вид:

$$\begin{aligned} \Psi(y) &= 0 & (|y| \leq 1); \\ \Psi(y) &= y - \operatorname{sgn} y & (|y| \geq 1); \end{aligned} \quad (\text{VIII.2.17})$$

соответствующий фильтрации с предельным градиентом, когда движение жидкости начинается лишь по достижении критического значения градиента давления. Такой закон фильтрации является вырожденным и для него сама постановка задачи с заданием докритического значения градиента давления является сомнительной. Как будет видно из дальнейшего, правильная формулировка задачи о фильтрации с начальным градиентом требует, чтобы на границе области задавался не градиент давления, а скорость фильтрации.

Рассмотрим вначале случай 3. Из системы (VIII.2.14) следует, что $l \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Действительно, пусть l остается больше $\delta > 0$. Тогда D_2 остается ограниченным и из последнего уравнения $D_1 \rightarrow 0$, что противоречит первому уравнению (VIII.2.14).

Чтобы понять смысл полученного результата, рассмотрим следующий частный случай разбираемой задачи. Пусть первоначально стационарный фильтрационный поток, градиент давления в котором превосходит критический, мгновенно останавливается в результате того, что градиент давления на границе становится меньше критического. Можно было бы ожидать, что вблизи границы возникает застойная зона, в которой движения нет, а затем, по мере удаления от нее, скорость движения будет постепенно увеличиваться. Решение показывает, что это не так. Застойной зоны нет, и движение происходит во всем пласте, причем скорость движения монотонно уменьшается по мере приближения к границе пласта и обращается в нуль на самой границе, так что градиент давления здесь равен критическому.

Распределение давления в области движения определяется вторым уравнением (VIII.2.13), в котором нужно положить

$$D_1 = (\operatorname{sgn} \alpha - \alpha) / \sqrt{\pi}, \quad (\text{VIII.2.18})$$

как это получается из формулы (VIII.2.14) при $l = 0$. Нетрудно видеть, что этот результат не зависит от того, каким задавалось значение градиента давления на границе (β). В качестве примера на рис. VIII.5 приведены результаты решений для $\beta = 0$, $\alpha = 2$ и трех значений ε [$p^\circ = \xi f(\xi)$].

В случае 4 переход к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, очевидно, дает ограниченную область движения, примыкающую к границе пласта, причем остальная часть пласта занята застойной зоной. Такой характер решения усматривается также непосредственно из выражений (VIII.2.15) и системы (VIII.2.16), в которой можно перейти к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, считая l конечным. Решения для $\beta = 2$, $\alpha = 0$ и трех значений ε приведены на рис. VIII.6.

В случае 5 область движения разбивается на три зоны, и для определения неизвестных границ и коэффициентов уравнений приходится рассматривать систему шести уравнений, аналогичную по своей структуре системам (VIII.2.14) и (VIII.2.16). Переходя в этой системе к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, можно убедиться, что область, в которой градиент давления меньше критического, уменьшается до нуля,

так что в пределе пласт разбивается на две части, в которых движение происходит навстречу друг другу. Распределение давления для случая $\alpha = 2$, $\beta = -2$ показано на рис. VIII.7.

Все полученные в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ распределения имеют угловую точку в месте сшивки двух решений. Если движения первоначаль-

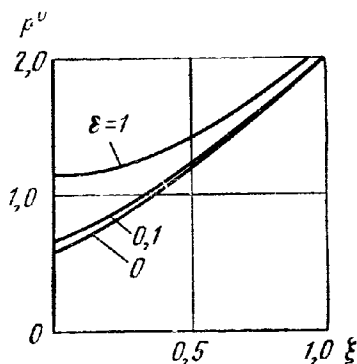


Рис. VIII.5

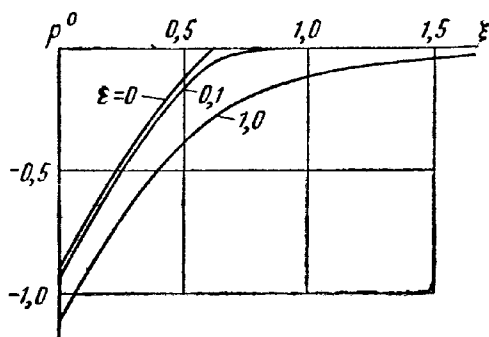


Рис. VIII.6

ально не было (случай 4), то возмущение, вносимое граничным условием, охватывает лишь конечную, расширяющуюся со временем область пласта. Поэтому решение, полученное для бесконечного пласта, применимо без всяких оговорок и к пласту конечных размеров для ограниченных интервалов времени. Если же движение в пласте существовало с самого начала (случаи 3 и 5), то возмущение мгновенно охватывает весь пласт, как и в соответствующих задачах упругого режима.

2. Осесимметричное одномерное движение в условиях упругого режима. Степенной закон фильтрации. В осесимметричном случае движение автомодельно при произвольном законе фильтрации, если

рассматривается задача о пуске скважины пренебрежимо малого радиуса при дебите, изменяющемся пропорционально квадратному корню из времени, отсчитываемому от момента пуска скважины

$$Q(t) = A \sqrt{t}. \quad (\text{VIII.2.19})$$

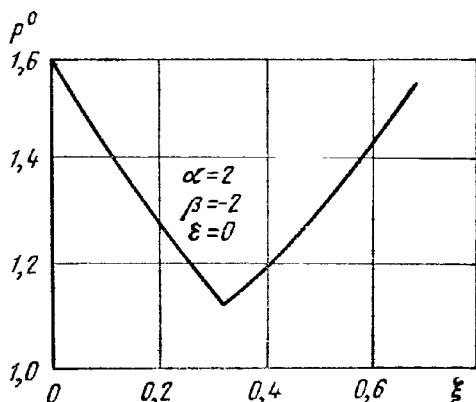


Рис. VIII.7

При таком законе изменения дебита скважины можно найти решение, в частности, при законе фильтрации с предельным градиентом [49]. Однако искусственность постановки задачи снижает ее практический интерес, и в этом случае приходится ограничиваться приближенными решениями. В то же время при степенном законе фильтрации (VIII.1.17) осесимметричное движение автомодельно при изменении дебита скважины после пуска по произвольному степенному закону:

$$Q(t) = Qt^3. \quad (\text{VIII.2.20})$$

В наиболее общем виде такие движения рассмотрены в работе [5]; ниже мы ограничимся основным для приложений случаем $\beta = 0$, что отвечает мгновенному пуску скважины с постоянным дебитом Q . Имеем для распределения давления $p(r, t)$ с учетом (VIII.1.17) уравнение

$$\frac{\partial p}{\partial t} = a^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)^{\alpha+1} \right]; \quad a^2 = \frac{KC}{m}, \quad (\text{VIII.2.24})$$

которое должно быть решено при условиях

$$p(r, 0) = 0; \quad - \left[r \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)^{\alpha+1} \right]_{r=0} = \frac{Q}{C}. \quad (\text{VIII.2.22})$$

Нетрудно видеть, что решение задачи автомодельно и его можно искать в виде:

$$p = At^{\frac{\alpha}{3\alpha+2}} f(\xi); \quad \xi = r \left(\frac{C}{Q} \right)^{\frac{\alpha}{3\alpha+2}} (a^2 t)^{-\frac{\alpha+1}{3\alpha+2}};$$

$$A = \frac{1}{(3\alpha+2)^{1/\alpha}} \left(\frac{Q}{C} \right)^{\frac{\alpha+2}{3\alpha+2}} a^{\frac{2\alpha}{3\alpha+2}}. \quad (\text{VIII.2.23})$$

Подставляя (VIII.2.23) в (VIII.2.21), получаем уравнение

$$\frac{d}{d\xi} \{ \xi [f'(\xi)]^{\alpha+1} + \xi [(a+1)\xi f'(\xi) - af(\xi)] \} = 0. \quad (\text{VIII.2.24})$$

Уравнение (VIII.2.24) должно быть решено при условиях

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \xi [f'(\xi)]^{\alpha+1} = \text{const} = (3a+2)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}. \quad (\text{VIII.2.25})$$

Далее, очевидно, что при $\xi \rightarrow \infty$ ($r \rightarrow \infty$) функция $f(\xi)$ должна стремиться к нулю вместе со своими производными, причем таким образом, чтобы интеграл

$$M = \int_0^\infty \xi f(\xi) d\xi \quad (\text{VIII.2.26})$$

оставался конечным.

Из условия (VIII.2.25) следует, что при $\xi \rightarrow 0$

$$f'(\xi) \approx -B\xi^{-1/(\alpha+1)}.$$

При $\alpha > 1$ (случай, который нас сейчас интересует) производная $f'(\xi)$ интегрируема вблизи $\xi = 0$, так что существует конечный предел

$$f(0) = \lim_{\xi \rightarrow 0} f(\xi). \quad (\text{VIII.2.27})$$

Это означает, что при степенном законе фильтрации (VIII.1.17) с показателем $\alpha > 0$ имеет смысл постановка задачи об отборе жидкости через скважину нулевого радиуса при конечном давлении в скважине.

Далее из (VIII.2.27) и (VIII.2.23) следует, что

$$p_c = p(0, t) = Af(0)t^\beta; \quad \beta = \alpha/(3\alpha + 2), \quad (\text{VIII.2.28})$$

т. е. давление в скважине изменяется по степенному закону, причем показатель степени этого закона β однозначно связан со степенью закона фильтрации α :

$$\beta = \alpha/(3\alpha + 2), \quad (\text{VIII.2.29})$$

а коэффициент A пропорционален дебиту скважины Q в степени $(\alpha + 2)/(3\alpha + 2)$.

Таким образом, полученное автомодельное решение открывает возможность экспериментального определения как показателя α , так и коэффициента C закона фильтрации. Подробнее об этом сказано в § 3, где закон фильтрации представлен в виде зависимости градиента давления от скорости фильтрации и показатель $n = 1/(\alpha + 1)$.

§ 3. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ПРИ НЕЛИНЕЙНОМ ЗАКОНЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ

Выше уже рассматривались простейшие (автомодельные) движения с нелинейным законом фильтрации. Однако наиболее важная для приложений задача об осесимметричном притоке к скважине, пущенной с постоянным дебитом, в условиях нелинейного закона фильтрации неавтомодельна; ниже эта задача рассматривается приближенно.

1. Предполагая, что фильтрующаяся жидкость и пласт упруго сжимаемы, запишем основную систему уравнений задачи в виде:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \gamma \Phi\left(\frac{q}{rU}\right); \quad \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{K}{m} \frac{1}{r} \frac{\partial q}{\partial r}. \quad (\text{VIII.3.1})$$

Здесь $q = ru$; $U = \gamma k/\mu$ — характерное значение скорости фильтрации; γ — характерное значение градиента давления.

Уравнения (VIII.3.1) должны быть решены при дополнительных условиях, отвечающих пуску скважины в пласте, в котором первоначально движения не было.

Принимая начальное давление за нуль, имеем

$$p(r, 0) = 0; \quad q(a, t) = Q = \text{const.} \quad (\text{VIII.3.2})$$

Здесь a — радиус скважины.

Примем вначале для закона фильтрации выражение, отвечающее фильтрации с начальным градиентом (см. рис. VIII.1):

$$\begin{aligned} |\Phi(j)| &\leq 1 & (j=0); \\ \Phi(j) &= j + \text{sgn } j & (j \neq 0). \end{aligned} \quad (\text{VIII.3.3})$$

Достаточная точность достигается, если приблизить функцию $q(r, t)$ параболой

$$q(r, t) = Q \left(1 + \frac{br}{l} + \frac{cr^2}{l^2} \right) \quad (r \leq l). \quad (\text{VIII.3.4})$$

Соответствующее выражение для давления имеет вид:

$$\begin{aligned} p(r, t) &= \frac{\gamma Q}{U} \left[\ln \frac{r}{l} + b \left(\frac{r}{l} - 1 \right) + \frac{1}{2} c \left(\frac{r^2}{l^2} - 1 \right) \right] + \gamma(r-l), \quad (r \leq l); \\ p(r, t) &= 0, \quad (r \geq l). \end{aligned} \quad (\text{VIII.3.5})$$

Из условия $q(l, t)$ следует $c = -1 - b$. Для определения оставшихся неизвестных $b(t)$ и $l(t)$ используем два первых интегральных соотношения, получающихся из второго уравнения системы (VIII.3.4) после умножения его на r и r^2 соответственно и интегрирования от 0 до l . При этом во всех промежуточных расчетах пренебрегаем отношением $\dot{a}/l$ по сравнению с единицей (тем самым мы ограничиваемся рассмотрением лишь достаточно больших времен). Имеем после простых выкладок

$$\begin{aligned} Ql^2(3+b) + 4Ul^2 &= \frac{24KUQt}{\gamma m}; \\ \frac{d}{dt} \left[l^3(8+3b) + 15 \frac{Ul^4}{Q} \right] &= \frac{30KUl(4+b)}{\gamma m}. \end{aligned} \quad (\text{VIII.3.6})$$

Исключая из системы (VIII.3.6) переменное $b(t)$ и вводя безразмерные переменные

$$\lambda = \frac{1}{12} \frac{U^2 l^2}{Q^2}; \quad \tau = \frac{KU^3}{\gamma m Q^2} t, \quad (\text{VIII.3.7})$$

получаем уравнение первого порядка

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = \frac{10\tau - 7\lambda + 40\sqrt{3}\lambda^{3/2}}{6\tau - 3\lambda + 24\sqrt{3}\lambda^{3/2}}. \quad (\text{VIII.3.8})$$

Искомое решение этого уравнения должно удовлетворять очевидным условиям

$$\lambda(0) = 0; \quad \lambda(\infty) = \infty; \quad \lambda'(\tau) \geq 0 \quad \text{при} \quad \tau > 0. \quad (\text{VIII.3.9})$$

Условия (VIII.3.9) выделяют единственное решение уравнения (VIII.3.8). Заметим прежде всего, что точка (0,0), через которую должно проходить решение, является для уравнения (VIII.3.8) особой. Исследуя ее по первому приближению (см., например, [87]), легко убедиться, что это седло, и две его сепаратрисы, a и b , проходящие в первом квадранте, имеют касательные с угловыми коэффициентами 1 и 10/3. Вторая из этих сепаратрис, как можно проверить, выходит из первого квадранта во второй, а сепаратриса с начальным угловым коэффициентом $(d\lambda/d\tau)_{\tau=0} = 1$ удовлетворяет всем условиям (VIII.3.9). Это легко установить, используя фазовую диаграмму уравнения (VIII.3.8), показанную на рис. VIII.8. Индексами 0 и ∞ здесь отмечены изоклины нуля и бесконечности [на которых обращаются в нуль соответственно числитель и знаменатель выражения (VIII.3.8)].

Найдем для функции $\lambda(\tau)$ асимптотическое выражение для больших значений времени. Если предположить, что $\lambda(\tau)$ возрастает быстрее или медленнее, чем $\tau^{2/3}$, то из (VIII.3.8) получим противоречие. Отсюда

$$\lambda(\tau) = c\tau^{2/3} + o(\tau^{2/3}). \quad (\text{VIII.3.10})$$

Подставляя это выражение в (VIII.3.8), находим $c = (48)^{-1/3}$. Продолжая процесс последовательного выделения членов, можно получить более точное выражение:

$$\lambda = \frac{\tau^{2/3}}{\sqrt[3]{48}} - \frac{\tau^{1/3}}{4\sqrt[3]{36}} + \frac{1}{192} + o(1). \quad (\text{VIII.3.11})$$

Начальный участок зависимости $\lambda(\tau)$ можно найти численным интегрированием уравнения (VIII.3.8) с учетом известного значения $\lambda'(0) = 1$. Сопоставление вычисленных таким образом значений со значениями, даваемыми асимптотической формулой (VIII.3.11), показывает, что уже при $\tau = 1$ эта формула верна с точностью в несколько процентов. Зависимость $\lambda(\tau)$ показана на рис. VIII.9 [начальный участок кривой получен численным интегрированием; начиная с $\tau = 1$ — по формуле (VIII.3.11)].

Зная $\lambda(\tau)$, можно найти b и c из исходных уравнений. Из (VIII.3.6) после перехода к безразмерным переменным имеем

$$b = \frac{2\tau - 8\sqrt[3]{\lambda^{3/2}}}{\lambda} - 3; \quad c = -1 - b. \quad (\text{VIII.3.12})$$

При малых τ из $\lambda(\tau) \approx \tau$ следует $b \approx -1$, $c \approx 0$. При больших τ , используя асимптотическую формулу (VIII.3.10), имеем

$$b = \frac{3}{4\sqrt[3]{6\tau}} + o(\tau^{-1/3}); \quad c = -1 - \frac{3}{4\sqrt[3]{6\tau}} + o(\tau^{-1/3}). \quad (\text{VIII.3.13})$$

Если рассматривается изменение давления для достаточно больших значений времени в точке, близкой к скважине, так что $r/l \ll 1$, $rU/Q \ll 1$, то формулу для распределения давления после отбрасывания малых членов можно представить в виде:

$$p(r, t) = \frac{\gamma Q}{U} \left(\ln \frac{r}{l} - b - \frac{c}{2} \right) - \gamma l. \quad (\text{VIII.3.14})$$

Подставляя сюда значения коэффициентов и возвращаясь к исходным переменным, имеем окончательно

$$p(r, t) = - \sqrt[3]{\frac{6\gamma^2 K Q t}{m}} - \frac{\gamma Q}{3U} \ln \frac{6K Q t}{\gamma m r^3} + \frac{\gamma Q}{6U} \quad (\text{VIII.3.15})$$

$$\left(t \gg \frac{\gamma m r^3}{K Q}; \frac{rU}{Q} \ll 1 \right).$$

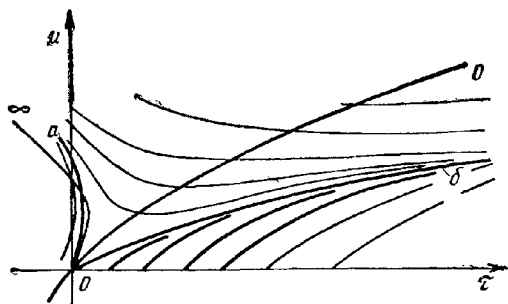


Рис. VIII.8

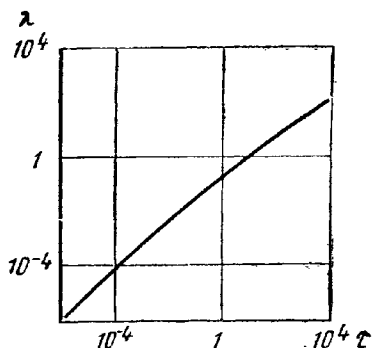


Рис. VIII.9

2. При помощи метода интегральных соотношений можно найти также решение задачи о пуске скважины при нелинейном законе фильтрации вида:

$$\varphi(j) = (j/n)^n \quad (j \leq n);$$

$$\varphi(j) = j - n + \operatorname{sgn} j \quad (j \geq n), \quad (\text{VIII.3.16})$$

который в пределе при $n \rightarrow 0$ переходит в закон фильтрации с предельным градиентом. В этом случае давление в скважине $p(a, t)$ меняется во времени по закону

$$p(a, t) \approx -\operatorname{const} \cdot t^{\frac{1-n}{3-n}} \cdot Q^{1-\frac{2(1-n)}{3-n}} \dots \quad (\text{VIII.3.17})$$

3. Применим теперь полученные результаты к анализу некоторых данных по исследованию скважин на нестационарный приток.

Сделаем вначале следующее замечание. Пусть рассматривается изменение давления $p(t)$ в некоторой фиксированной точке пласта, движение жидкости в котором вызвано пуском скважины с постоян-

ным дебитом (в частности, может рассматриваться давление в самой скважине). Пласт будем считать однородным и неограниченным. Выберем некоторый промежуток времени Δt и рассмотрим величину

$$\Delta p(t) = p(t + \Delta t) - p(t). \quad (\text{VIII.3.18})$$

Тогда изменение величины $\Delta p(t)$ при больших t зависит исключительно от вида закона фильтрации в области малых скоростей (тем меньших, чем больше рассматриваемые времена). Это утверждение достаточно очевидно: в прилегающей к скважине области движение стабилизируется и распределение давления оказывается таким же, как и при стационарном движении (см. также гл. III и IV). В результате значение этой области в отклонении давления в скважине от начального уровня перестает меняться и уже не сказывается на величине Δp . Та область, в которой происходит основная перестройка потока и которая дает основной вклад в значение $\Delta p(t)$, оказывается удаленной от скважины. Чем больше время t , тем дальше эта область и тем меньше поэтому достигаемые здесь скорости фильтрации. Этим и доказывается сформулированное утверждение.

Рассмотрим теперь приток к скважине в условиях нелинейной фильтрации, но с тем дополнительным условием, что при скоростях фильтрации, меньших некоторой $u < u_0$, закон фильтрации может быть приближенно представлен прямой (как на рис. VIII.4, а, б, в). Тогда, как показано выше, характер изменения давления в скважине при больших временах будет таким же, как и в случае линейной фильтрации. В частности, изменение давления будет пропорционально дебиту скважины Q и будет линейно зависеть от логарифма времени, так что

$$\begin{aligned} \Delta p(t) &\approx -Q \ln \frac{t + \Delta t}{t}; \\ p(t) &\approx C - Q \ln t. \end{aligned} \quad (\text{VIII.3.19})$$

(при этом сама величина C может нелинейно зависеть от Q).

Предположим теперь, что мы анализируем серию снятых при различных дебитах Q кривых изменения давления в скважинах. Тогда при достаточно больших временах все кривые в координатах $\Delta p - \ln t$ будут иметь прямолинейные участки, по которым обычным способом определится гидропроводность пласта kh/μ , очевидно, не зависящая от Q (в то же время величина приведенного радиуса скважин a^2/k окажется, возможно, зависящей от Q). Напротив, изменение гидропроводности kh/μ с изменением Q указывает на нелинейность закона фильтрации при малых скоростях (в этом случае мы будем называть закон фильтрации существенно-нелинейным или нелинеаризуемым; случай, рассмотренный выше, назовем линеаризуемым).

4. Рассмотрим с этой точки зрения данные работы [56] (табл. VIII.1), которые ясно показывают увеличение гидропроводности с ростом дебита. Особенно важно, что этот эффект свойствен как

нагнетательным (где его можно было бы объяснить раскрытием трещин при увеличении давления), так и эксплуатационным скважинам. Согласно сказанному выше, эти данные свидетельствуют о действии в пластовых условиях нелинеаризуемых законов фильтрации. Более того, такого рода нелинейность проявляется не непосредственно вблизи скважины (где нелинейные эффекты изменения эффективной мощности пласта обнаруживаются прямым наблюдением [29]), а вдали от скважины, в области медленного движения жидкости.

Таблица VIII.1

Нагнетательные скважины			Эксплуатационные скважины		
№ скважины	Дебит, м ³ /сутки	Гидропр- водность, д·см	№ скважины	Дебит, м ³ /сутки	Гидропр- водность, д·см
514	793	838	1529	153	951
	757	839		140	950
	540	760		85	875
	360	693		65	832
1246	745	575		40	670
	511	485		23	620
	323	314		16	473
367	1364	1111	1608	216	3200
	1333	1007		208	2910
	1182	964		154	2350
	1106	984		93	1700
	742	676	1288	51	1070
	561	567		149	843
	553	527		115	770
				101	730
				88	555

Попытаемся теперь количественно охарактеризовать наблюдаемую нелинейность на основе рассмотренных в пп. 1 и 2 модельных законов фильтрации. При этом будем исходить из предположения о том, что данные работы [56] правильно отражают зависимость приращения давления Δp за сопоставимые отрезки времени от дебита скважины Q (так что наблюдаемая величина $kh/\mu \approx Q/\Delta p$; подробнее см. [46]). Вместе с тем, предполагая, что имеет место закон фильтрации (VIII.3.3) или (VIII.3.16), можно установить, что ему отвечает зависимость вида:

$$\frac{(kh)_1}{(kh)_2} \approx \left(\frac{Q_1}{Q_2} \right)^{\frac{2(1-n)}{3-n}}. \quad (\text{VIII.3.20})$$

причем $n = 0$ отвечает закону (VIII.3.3).

Представим теперь данные табл. VIII.1 в координатах $\lg kh$ — $\lg Q$ (рис. VIII.10). Согласно формуле (VIII.3.20) точки, отвечающие определенной скважине, должны лежать на одной прямой с угловым коэффициентом j , удовлетворяющим неравенству

$$0 \leq j \leq \frac{2}{3}. \quad (\text{VIII.3.24})$$

Угловые коэффициенты прямых, приведенных на рис. VIII.10, показаны в табл. VIII.2 вместе с отвечающими им значениями n . Как видно из таблицы, результаты подсчета для скважин 367 и 1246 указывают на необъяснимо быстрый рост гидропроводности с увеличением дебита. Возможно, это связано с тем, что для обеих этих скважин (нагнетательных) проницаемость может также увеличиваться с ростом давления на забое скважины.

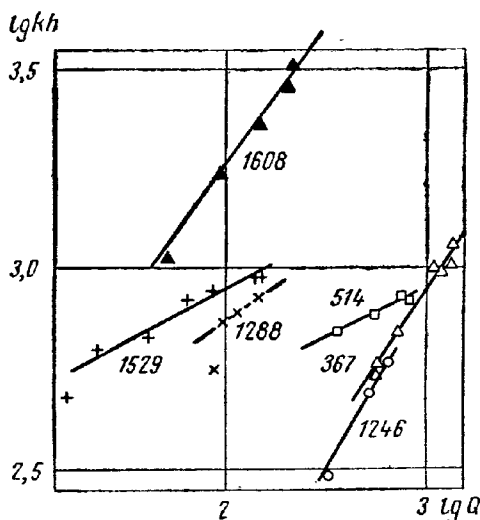


Рис. VIII.10

Таблица VIII.2

№ скважины	1608	1529	1288	514	367	1246
Угловой коэффициент	0,67	0,28	0,36	0,24	0,74	0,84
Показатель n	0	0,68	0,56	0,73	—	—

Для остальных скважин получаются физически допустимые значения показателя n . Однако результаты эти ни в коем случае не являются окончательными. Из них можно сделать лишь один достоверный вывод: в исследованном диапазоне скоростей фильтрации эффективная проницаемость пласта с уменьшением скорости монотонно убывает до нуля (с рассматриваемой точностью). Естественно, такое затухание фильтрации может иметь фундаментальное значение и нуждается в глубоком исследовании.

Изложенные результаты были получены в работе В. М. Ентова [45, 46].

Глава IX

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ

§ 1. НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЕ ФИЛЬТРАЦИОННОЕ ДВИЖЕНИЕ

До сих пор предполагалось, что температура жидкости или газа при движении их в пористой среде остается постоянной. Представление это связано с тем, что изменения температуры, возникающие при изменении давления в ходе движения, в значительной мере компенсируются теплообменом со скелетом пористой среды. Большинство же задач, в которых рассматривается изменение температуры в пласте вследствие закачки в пласт теплоносителя, например горячей воды, может быть отнесено к теории стационарной фильтрации.

Однако даже малые изменения температуры могут быть в принципе измерены и использованы для анализа вызывающих их гидродинамических процессов [121]. Поэтому мы рассмотрим здесь общую постановку задачи о неизотермическом движении сжимаемой жидкости и приведем решение для случая пуска скважины с постоянным дебитом.

1. Отказываясь от требования изотермичности, мы должны добавить к числу искомых функций еще и температуру жидкости. Можно было бы, используя уравнение сохранения энергии применительно к жидкости, составить уравнение для температуры жидкости. При этом, однако, мы столкнулись бы с необходимостью учитывать теплообмен, происходящий между жидкостью и вмещающей ее пористой средой. Описание такого теплообмена требует исследования, учитывающего закономерности движения и теплообмена в отдельных поровых каналах.

Чтобы избежать связанных с этим трудностей, воспользуемся тем, что теплообмен между жидкостью и пористой средой происходит по огромной поверхности (или, что равнозначно, глубина прогрева очень мала), так что существующая в некоторый момент разность температур между жидкостью и скелетом исчезает весьма быстро. Характерное время выравнивания температур составляет по порядку величины l^2/α , где α — коэффициент температуропровод-

ности наименее теплопроводящей из контактирующих сред, а l — характерный размер структуры порового пространства. Полагая $l \approx 10^{-1}$ см, $\alpha \approx 10^{-3}$ см²/сек, имеем $l^2/\alpha \approx 10$ сек. Таким образом, время выравнивания температурных различий (секунды и менее) несравнимо меньше времен, характерных для фильтрации. Поэтому, не интересуясь кратковременными эффектами, будем считать температуры жидкости и скелета равными. В результате в каждой точке будет определена единая температура, вводимая, как и все другие характеристики фильтрационного потока, путем осреднения по элементарному макрообъему (ср. § 1.1).

2. Выделим теперь некоторый объем V пористой среды, ограниченный поверхностью S , и составим для него уравнение энергетического баланса. Обозначая через ϵ удельную внутреннюю энергию жидкости, а через ϵ_1 — удельную внутреннюю энергию вещества твердого скелета, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \int [\epsilon m \rho + \epsilon_1 \rho_1 (1 - m)] dV - W + Q = 0. \quad (\text{IX.1.1})$$

Здесь объемный интеграл определяет полный запас энергии в выделенном объеме (кинетической энергией в силу ее малости пренебрежено); Q — количество тепла, выносимого через поверхность S ; W — работа, производимая внешними силами над данным объемом.

Перенос тепла через границу обусловлен двумя механизмами. Первый из них — механизм теплопроводности — не связан с перемещением макроскопических объемов (не отдельных молекул) вещества; второй механизм — конвективный — определяет перенос тепла с макрообъемами вещества. Однако такое разделение является чересчур грубым. В ряде случаев, типичными примерами которых являются турбулентное движение и движение жидкости в пористой среде, возможно некоторое промежуточное положение, когда в переносе тепла существенны, помимо тепловых флуктуаций и переноса со средним движением, еще и перенос со случайными мелкомасштабными отклонениями от среднего движения. При рассмотрении одних лишь осредненных характеристик движения удобно объединять все флуктуационные механизмы одним общим термином — теплопроводность. Чтобы подчеркнуть отличие от обычного (молекулярного) механизма переноса, вводят понятия конвективной диффузии и теплопроводности в пористой среде. Поток тепла за счет такого объединенного механизма теплопроводности определяется выражением

$$q_i = - \lambda_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j}. \quad (\text{IX.1.2})$$

Наличие в уравнении (IX.5.2) тензорного коэффициента теплопроводности вместо одного скалярного коэффициента теплопроводности связано с тем, что процесс теплопроводности при фильтрации обладает анизотропией, поскольку тензор теплопроводности уже не является тензором материальных констант жидкости, а зависит

также и от характеристик фильтрационного потока (в первую очередь от скорости фильтрации). Это вполне аналогично тому, что имеет место при конвективной диффузии [3, 58]. Однако в отличие от случая диффузии коэффициент теплопроводности насыщенной пористой среды сравнительно мало зависит от скорости фильтрации [47]. Поэтому достаточная точность достигается и при использовании простейшего соотношения

$$q_i = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}. \quad (\text{IX.1.3})$$

Учитывая вышесказанное, можем записать

$$Q = \int_S (\vec{u} p e + \vec{q}) \vec{n} dS. \quad (\text{IX.1.4})$$

Здесь первый член выражает конвективный перенос энергии со средним движением.

При определении работы внешних сил W не будем учитывать силу тяжести, поскольку дальше не встретятся задачи, в которых ее значение существенно, тогда все сведется к подсчету работы сил, действующих по поверхности S . При этом оказывается, что следует учитывать лишь работу нормальных напряжений (давления), а работой касательных напряжений можно пренебречь. Действительно, работа сил давления в единицу времени составляет

$$W' = - \int_S p \vec{n} \vec{u} dS = - \int_V \nabla (p \vec{u}) dV = - \int_V \vec{u} \nabla p dV - \int_V p \nabla \vec{u} dV.$$

При фильтрации несжимаемой жидкости $\nabla \vec{u} = 0$. При этом, используя закон фильтрации Дарси $\nabla p = - \frac{\mu}{k} \vec{u}$, получаем

$$W' \approx \frac{\mu u^2 V}{k}.$$

В то же время для работы касательных напряжений τ имеем следующую простую оценку: $W'' \approx \tau u S$. Но $\tau \approx \mu u / l$, где l — характерный размер порового пространства. Поэтому $W'' \approx \mu u^2 S / l$, так что $W'' / W' \approx k S / l V$. Но $k \approx l^2$ (в действительности даже $k \ll l^2$), отношение V / S — порядка L (характерного размера рассматриваемой области). Таким образом, согласно основным предположениям $W'' / W' \approx l / L \ll 1$. Для газа такой подсчет не применим, поскольку величина W' близка к нулю, но и в этом случае можно убедиться, что W'' пренебрежимо мало.

Подставляя полученные выражения в уравнение (IX.1.1), переходя от поверхностных интегралов к объемным и используя произвольность выбора объема V , получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} [\epsilon m p + \epsilon_1 \rho_1 (1 - m)] + \nabla (\epsilon u p - \lambda \nabla T) + \nabla (p \vec{u}) = 0. \quad (\text{IX.1.5})$$

3. Если рассматривается движение однородной жидкости, то уравнение энергии (IX.1.5) может быть упрощено. Пользуясь тем, что по определению $\epsilon + p/\rho = i$ и в силу уравнения неразрывности $\nabla(\vec{u}\rho) = -\partial(m\rho)/\partial t$, имеем

$$m\rho \frac{\partial}{\partial t} [i + \epsilon_1 \rho_1 (1 - m)] + \rho \vec{u} \nabla i - \frac{\partial}{\partial t} (m\rho) = \nabla(\lambda \nabla T).$$

Удобно выразить в этом уравнении энтальпию i через температуру и давление. Тогда

$$di = C_p (dT - \delta dp)$$

(C_p — теплоемкость при постоянном давлении; δ — коэффициент Джоуля — Томсона). Отсюда получим

$$\begin{aligned} m\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + C_1 \frac{\partial T}{\partial t} + \rho \vec{u} C_p \nabla T = \\ = \frac{\partial(m\rho)}{\partial t} + m\rho C_p \delta \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \vec{u} C_p \delta \nabla p + \nabla(\lambda \nabla T). \end{aligned} \quad (\text{IX.1.6})$$

В тех областях, где движение жидкости отсутствует, это уравнение переходит в обычное уравнение теплопроводности

$$(m\rho C_p + C_1) \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla(\lambda \nabla T).$$

Фильтрационное движение стабилизируется значительно быстрее, чем тепловое поле. Поэтому возникает задача, в которой следует учитывать лишь нестационарность теплового поля, — задача о тепловой конвекции при стационарной фильтрации:

$$(m\rho C_p + C_1) \frac{\partial T}{\partial t} + \rho C_p \vec{u} \nabla T = \rho \vec{u} C_p \delta \nabla p + \nabla(\lambda \nabla T). \quad (\text{IX.1.7})$$

Сопоставляя вторые члены правой и левой частей уравнения (IX.1.7), легко убедиться, что уже при сравнительно небольших скоростях фильтрации теплопроводностью в направлении движения жидкости можно пренебречь всюду, кроме областей резкого изменения температуры. Действительно:

$$\frac{|\nabla(\lambda \nabla T)|}{|\rho C_p \vec{u} \nabla T|} \approx \frac{\lambda}{\rho C_p \mu L} \approx \frac{\alpha \mu}{k \Delta p}$$

(L — характерный размер; Δp — перепад давления на расстоянии L ; α — температуропроводность). При $\alpha \approx 10^{-3}$ см²/сек; $\mu = 10$ спз = 0,1 пз; $k = 10^{-9}$ см² = 0,1 д; $\Delta p = 10$ кгс/см² = 10^7 дин/см² имеем

$$\frac{\alpha \mu}{k \Delta p} \approx 0,01.$$

Из приведенной оценки следует, что теплопроводность обуславливает лишь локальное перераспределение температуры, а перенос

тепла на большие расстояния связан с конвекцией. В силу этого обстоятельства теплопроводностью в направлении фильтрационного потока обычно пренебрегают, учитывая лишь теплопроводность в направлении, перпендикулярном движению.

4. Рассмотрим теперь задачу о пуске газовой скважины с постоянным дебитом, учитывая возникающие при этом изменения температуры. Основная система уравнений может быть, при пренебрежении теплопроводностью, представлена в виде:

$$\begin{aligned}\frac{\rho k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} &= \frac{1}{r} q; \quad q(r, t) = u(r, t) \rho r; \\ \frac{\partial (m\rho)}{\partial t} &= \frac{1}{r} \frac{\partial q}{\partial r}; \\ C \frac{\partial T}{\partial t} - C_p \frac{q}{r} \frac{\partial T}{\partial r} - m(\rho C_p \delta + 1) \frac{\partial p}{\partial t} + C_p \delta \frac{q}{r} \frac{\partial p}{\partial r} &= 0. \quad (\text{IX.1.8})\end{aligned}$$

Величины ρ , δ и μ являются известными функциями давления и температуры, в частности

$$\rho = \frac{p}{z(p, T) RT}. \quad (\text{IX.1.9})$$

Положим $\Theta = T/T_0$, $p^0 = p/p_0$, где p_0 и T_0 — начальные давления и температура, после чего система (IX.1.8) приведет к виду:

$$\begin{aligned}\frac{p^0}{\mu^0 z \Theta} \frac{\partial p^0}{\partial r} &= \frac{Q}{r}; \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p^0}{z \Theta} \right) = \frac{\kappa}{r} \frac{\partial Q}{\partial r}; \\ \left(1 + \frac{\beta C^0 p^0}{z \Theta} \right) \frac{\partial \Theta}{\partial t} - \kappa \beta C^0 \frac{Q}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial r} - \beta \frac{\partial p^0}{\partial t} - \\ - \frac{\beta C^0 D p^0}{z \Theta} \frac{\partial p^0}{\partial t} + \kappa \beta C^0 D \frac{Q}{r} \frac{\partial p^0}{\partial r} &= 0. \quad (\text{IX.1.10})\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}\mu^0 &= \frac{\mu}{\mu_0}; \quad Q = \frac{q \mu_0 R T_0}{k p_0^2}; \quad \kappa = \frac{k p_0}{\mu_0 m}; \\ C^0 &= \frac{C_p}{R}; \quad \beta = \frac{m p_0}{(1-m) \rho_1 C_1 T_0}; \quad D = \frac{\delta p_0}{T_0},\end{aligned} \quad (\text{IX.1.11})$$

а нижний индекс нуль означает, что соответствующие величины берутся при $p = p_0$, $T = T_0$.

Система (IX.1.10) должна быть решена при следующих дополнительных условиях:

$$p^0(r, 0) = 1; \quad \Theta(r, 0) = 1; \quad Q(0, t) = Q_0. \quad (\text{IX.1.12})$$

Легко убедиться, что сформулированная задача автомодельна и имеет решение вида:

$$p^0 = p^0(\xi); \quad \Theta = \Theta(\xi); \quad Q = Q(\xi); \quad \xi = 1/2 x / \sqrt{\kappa t}, \quad (\text{IX.1.13})$$

где p^0 , Θ и Q удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} -2\xi^2 \frac{d}{d\xi} \left(\frac{p^0}{z\Theta} \right) &= \frac{dQ}{d\xi}; \\ \frac{\xi p^0}{\mu^0 z \Theta} \frac{dp^0}{d\xi} &= Q; \\ \left[2\xi^2 \left(1 + \frac{\beta C^0 p^0}{z\Theta} \right) + \beta C^0 DQ \right] \frac{d\Theta}{d\xi} &= \\ = \left[2\beta \xi^2 \left(1 + \frac{C^0 Dp^0}{z\Theta} \right) + \beta C^0 DQ \right] \frac{dp}{d\xi}; \\ p^0(\infty) &= 1; \quad \Theta(\infty) = 1; \quad Q(+0) = Q_0. \end{aligned} \quad (\text{IX.1.14})$$

Система (IX.1.14) может быть проинтегрирована численно.

Задача (IX.1.14) допускает также достаточно простое приближенное решение, основанное на том, что искажение поля скоростей под влиянием изменений температуры мало. Действительно, рассматривая изменение температуры частицы газа вдоль ее траектории, можно показать, что температура отклоняется от своего первоначального значения на величину, не превосходящую величину интегрального эффекта Джоуля — Томсона при изменении давления от начального p_0 до существующего в данной точке пласта давления p :

$$|\Delta T| \leq \left| \int_{p_0}^p \delta dp \right|. \quad (\text{IX.1.15})$$

Для природных газов коэффициент Джоуля — Томсона $\delta \approx \approx 0,4 \div 0,5 \text{ } ^\circ\text{C}/(\text{кгс}/\text{см}^2)$. Поэтому вне непосредственной окрестности газовой скважины изменения температуры весьма малы. Вблизи же скважины распределение массовых скоростей фильтрации стабилизировано и является таким же, как и при стационарном движении. Поэтому без особой погрешности можно принять, как и для изотермического движения,

$$Q = Q_0 \exp(-\xi^2). \quad (\text{IX.1.16})$$

Предположим теперь, что параметры задачи позволяют подобрать такое значение $\xi_* \ll 1$, что

$$Q_0^2 \ln^2 \xi_* \ll 1 \quad (\text{IX.1.17})$$

и в то же время

$$\xi_*^2 \ll \beta C^0 Q_0. \quad (\text{IX.1.18})$$

Первое из этих неравенств обеспечивает малость отклонений давлений, а следовательно, и температур от их начальных значений; второе позволяет упростить третье уравнение (IX.1.14). Обычное значение $\beta C^0 \approx 10^{-2}$. Поэтому системе неравенств (IX.1.17) и (IX.1.18) можно без труда удовлетворить уже при $Q_0 \approx 0,05$ (что является весьма большим для практики значением).

При выполнении неравенства (IX.1.17) для $\xi > \xi^*$ имеем

$$p^0(\xi) = 1 + \frac{1}{2} z_0 Q_0 \text{Ei}(-\xi^2). \quad (\text{IX.1.19})$$

После этого распределение температуры может быть определено непосредственным интегрированием третьего уравнения системы (IX.1.14); тогда оно приобретает вид (в пренебрежении малыми членами):

$$\Theta = 1 - D(1 - p^0) - \frac{\beta - D}{2} z_0 Q_0 \text{Ei}\left(-\xi^2 - \frac{\beta C^0 Q_0}{2}\right). \quad (\text{IX.1.20})$$

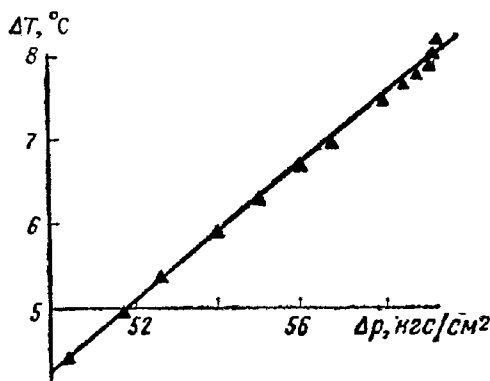


Рис. IX.1

В области $\xi < \xi^*$ в силу неравенства (IX.1.18) последнее уравнение (IX.1.14) упрощается и принимает вид:

$$\frac{d\Theta}{d\xi} = D \frac{dp^0}{d\xi}, \quad (\text{IX.1.21})$$

откуда

$$\begin{aligned} \Theta &= \Theta_* + D(p^0 - p_*^0); \\ \Theta_* &= \Theta(\xi_*); \quad p_*^0 = p^0(\xi_*). \end{aligned} \quad (\text{IX.1.22})$$

Подставляя сюда выражение (IX.1.20) и учитывая (IX.1.18), получаем

$$\Theta = 1 - D(1 - p^0) - \frac{D - \beta}{2} z_0 Q_0 \text{Ei}\left(-\frac{\beta C^0 Q_0}{2}\right). \quad (\text{IX.1.23})$$

Это выражение показывает, что в рассмотренном автомодельном решении изменения температуры при малых ξ (т. е. достаточно больших временах) повторяют в соответствующем масштабе изменения давления.

С учетом зависимости температуры от давления (IX.1.23) плотность ρ и вязкость μ газа в близкой к скважине области, где отклонения давления от начального значения велики, оказываются известными функциями одного лишь давления. Поэтому можно определить распределение давления в области малых ξ . Вводя безразмерную функцию Лейбенсона

$$P^*(p^0) = 1 - \int_{p^0}^1 \frac{p^0 \dot{dp}^0}{\mu^0 \Theta(p^0)}, \quad (\text{IX.1.24})$$

имеем для нее приближенно

$$P^*(p^0) = 1 + \frac{1}{2} Q_0 \text{Ei}(-\xi^2); \quad \xi < \xi_*. \quad (\text{IX.1.25})$$

Строя зависимость $P^*(p^0)$ от $\ln t$, можно определить обычным образом (подобно тому, как это делалось в § 4, гл. V) параметры пласта с учетом поправки на неизотермический характер движения.

Полученное выше простое приближенное решение хорошо согласуется с результатами численного интегрирования системы (IX.1.14), которое было выполнено для нескольких значений параметров задачи. Вывод о линейной связи между изменениями давления и температуры подтверждается экспериментальными данными [81], полученными на скважинах Шебелинского газового месторождения. Как видно из рис. IX.1, экспериментальные точки хорошо ложатся на прямую, угловой коэффициент которой $[0,44^\circ \text{C}/(\text{кгс}/\text{см}^2)]$ близок к значению коэффициента Джоуля — Томсона, рассчитанному по термодинамическим функциям газа. Изложенные здесь результаты получены в работе В. М. Ентова [48].

§ 2. УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИЙ РЕЖИМ НЕФТЯНОГО ПЛАСТА [20, 21]

1. При выводе основных уравнений теории упругого режима мы предполагали, что деформация скелета пористой среды при изменении давления в пласте является упругой (т. е. обратимой при снятии нагрузки) и более того — линейно-упругой. Казалось бы, для этого есть все основания, поскольку изменения давления в процессе разработки пласта малы по сравнению с модулями упругости жидкости и материала пористого скелета, а сам материал скелета обычно является вполне хрупким телом, деформирующимся упруго вплоть до разрушения.

Тем не менее имеются определенные указания [159] на то, что изменение пористости пород, слагающих нефтяной пласт, с изменением давления жидкости носит неупругий характер. Такой вид неупругости типичен для пластического состояния материала. Характер связи между деформациями и напряжениями существенно зависит от направления процесса деформирования и даже от всей его предыстории.

Типичная диаграмма деформирования пластического материала показана на рис. IX.2. Материал подвергается нагружению, начиная от недеформированного состояния. Если, достигнув некоторого состояния, начать разгружать материал, то вместо возврата к первоначальному состоянию будут получаться некоторые новые состояния. Разгрузка происходит так, как если бы модуль упругости материала увеличился. При новой нагрузке материал деформируется по кривой разгрузки до тех пор, пока не приобретет прежде не достигавшегося состояния.

Качественно сходная картина обнаруживается при деформации пористой среды. На рис. IX.3 показана зависимость пористости от нагрузки для песка [159], однако аналогичная зависимость имеет место и для других пористых сред. Причиной того, что изменение пористости носит «пластический» характер, являются, естественно,

не пластические деформации отдельных зерен скелета, а необратимые изменения их взаимного расположения (переупаковка зерен). Возможность переупаковки частиц пористой среды качественно отличает ее поведение от поведения материала скелета, не содержащего пор.

2. Рассуждая так же, как и при выводе уравнений упругого режима, примем, что пористость является функцией одного лишь давления и первого инварианта тензора фиктивных напряжений в скелете:

$$m = m(p, \Theta); \quad \Theta = \frac{1}{3} \sigma'_{ii}. \quad (\text{IX.2.1})$$

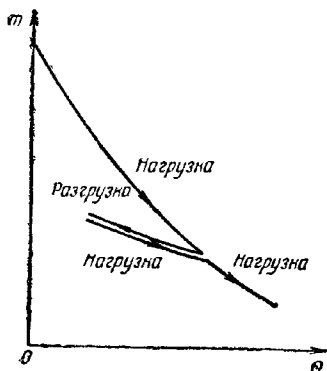


Рис. IX.2

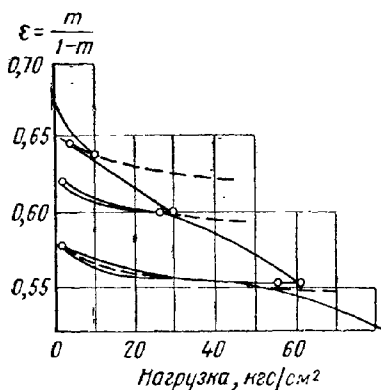


Рис. IX.3

В соответствии с этим

$$\frac{\partial m}{\partial r} = \left(\frac{\partial m}{\partial p} \right)_{\Theta} \frac{\partial p}{\partial r} + \left(\frac{\partial m}{\partial \Theta} \right)_p \frac{\partial \Theta}{\partial r} \quad (\text{IX.2.2})$$

(производная по p берется при постоянном Θ , а производная по Θ — при постоянном p).

Как это было уже показано при выводе уравнений упругого режима (см. гл. II, § 2), изменение давления компенсируется изменением напряжений в скелете, так что

$$\frac{\partial (\Theta + p)}{\partial t_j} = 0. \quad (\text{IX.2.3})$$

Иначе говоря, сумма давления и первого инварианта тензора фиктивных напряжений постоянна — она уравнивается массой вышележащих пород, которая практически не меняется.

Изменение пористости среды с изменением давления жидкости при постоянном Θ вызывается исключительно упругими деформациями материала скелета. Поэтому независимо от направления деформирования можно производную $(\partial m / \partial p)_{\Theta} = 1/K_s$ считать постоянной.

В противоположность этому зависимость пористости от первого инварианта тензора фиктивных напряжений Θ является существенно

необратимой. Положим, что она описывается зависимостью, подобной приведенной на рис. IX.2 зависимости m от напряжений. Предположим далее, что в пласте происходит однократное увеличение фиктивных напряжений, возможно с последующим их уменьшением. В силу равенства (IX.2.3) это соответствует первоначальному снижению давления с последующим частичным его увеличением. Такая схема представляет значительный интерес в связи с тем, что на первой стадии разработки нефтяного месторождения вначале обычно происходит снижение давления на месторождении в целом, затем следует период частичного восстановления пластового давления при помощи вторичных методов — в основном законтурного и внутриконтурного заводнения.

В соответствии с изложенным предположим, что первоначальное давление в пласте p_0 сначала монотонно снижается: $\partial p / \partial t < 0$. При этом $\partial \Theta / \partial t > 0$, и можно считать производную $(\partial m / \partial \Theta)_p$ постоянной и равной некоторому значению $-1/K_1$. При повышении давления $(\partial \Theta / \partial t) < 0$, а производная $(\partial m / \partial \Theta)_p$ принимает некоторое другое значение $-1/K_2$. Разгрузка является «более жесткой» — обычно модуль разгрузки K_2 больше модуля нагрузки K_1 . Новое нагружение участка, уже подвергнутого разгрузке, происходит с тем же значением модуля K_1 .

Таким образом, для характеристики зависимости m от Θ достаточно задать два значения модулей: K_1 и K_2 и указать, каким из них следует пользоваться в каждый данный момент. Это легко сделать, если ввести понятие о максимальном за всю историю нагружения значении Θ .

Положим:

$$\Theta^*(x, t) = \max_{0 \leq \tau \leq t} \Theta(x, \tau).$$

Тогда, очевидно, можно записать

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial m}{\partial \Theta} \right)_p &= -\frac{1}{K_1} \quad \text{при} \quad \frac{\partial \Theta^*}{\partial t} > 0; \\ \left(\frac{\partial m}{\partial \Theta} \right)_p &= -\frac{1}{K_2} \quad \text{при} \quad \frac{\partial \Theta^*}{\partial t} = 0. \end{aligned} \quad (\text{IX.2.4})$$

Если перейти к давлению, то с учетом (IX.2.3) можно ввести функцию

$$p_*(x, t) = \min_{0 \leq \tau \leq t} p(x, \tau) \quad (\text{IX.2.5})$$

и переписать соотношение (IX.2.4) в виде:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial m}{\partial \Theta} \right)_p &= -\frac{1}{K_1} \quad \text{при} \quad \frac{\partial p_*}{\partial t} < 0; \\ \left(\frac{\partial m}{\partial \Theta} \right)_p &= -\frac{1}{K_2} \quad \text{при} \quad \frac{\partial p_*}{\partial t} = 0. \end{aligned} \quad (\text{IX.2.6})$$

Теперь можно выписать полную систему уравнений теории упруго-пластического режима нефтяного пласта.

Запишем уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial (mp)}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{\rho u} = 0. \quad (\text{IX.2.7})$$

Будем считать жидкость упругой, а фильтрацию — следующей закону Дарси. Тогда, поступая аналогично выводу уравнений упругого режима, придем к следующей системе соотношений:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \kappa \Delta p, \quad (\text{IX.2.8})$$

где

$$\begin{aligned} \kappa &= \kappa_1 = \frac{kK_1^*}{\mu m} \quad \text{при} \quad \frac{\partial p_*}{\partial t} < 0; \\ \kappa &= \kappa_2 = \frac{kK_2^*}{\mu m} \quad \text{при} \quad \frac{\partial p_*}{\partial t} = 0; \\ \frac{1}{K_1^*} &= \frac{1}{K_{\text{ж}}} + \frac{1}{mK_1} + \frac{1}{mK_3}; \\ \frac{1}{K_2^*} &= \frac{1}{K_{\text{ж}}} + \frac{1}{mK_2} + \frac{1}{mK_3}; \end{aligned} \quad (\text{IX.2.9})$$

$p_*(x, t)$ определяется соотношением (IX.2.5).

Несмотря на сходство с уравнением упругого режима, уравнение (IX.2.8) с учетом (IX.2.9) является нелинейным. Общих методов решения его не существует. Практически приходится разбивать область движения на несколько зон, для части которых справедливо уравнение (IX.2.8) с $\kappa = \kappa_1$, а для остальных — то же уравнение с $\kappa = \kappa_2$. Для каждой зоны уравнение является линейным. Поэтому нелинейность задачи проявляется лишь в существовании неизвестных границ зон действия разных форм уравнения (IX.2.8).

Постановка основных задач для уравнений упруго-пластического режима совпадает в основном с постановкой задач для уравнений упругого режима. Некоторая особенность имеется лишь в том, что при разбивке области движения на зоны нужно дополнительно указать условия для «сшивки» решений, полученных для различных зон. Условия эти имеют обычный физический смысл: равенство давлений и потоков жидкости по обе стороны границы зон, откуда получаем

$$p_+(x, t) - p_-(x, t) = 0; \quad \frac{\partial p_+(x, t)}{\partial x} - \frac{\partial p_-(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (\text{IX.2.10})$$

(здесь учтено, что зоны различаются лишь приведенным модулем объемного сжатия).

3. Рассмотрим в качестве примера задачу о восстановлении давления в пласте при прекращении эксплуатации галереи в бесконечном пласте.

Пусть начальное давление в пласте, на границе которого ($x = 0$) имеется дренажная галерея, постоянно и равно P . Пусть, далее, в начальный момент $t = 0$ давление на галерее падает до некоторой величины $p_0 < P$ и остается постоянным в течение времени T , после

чего отбор жидкости через галерею прекращается, и давление в пласте начинает восстанавливаться.

В рассматриваемом одномерном движении давление удовлетворяет уравнениям

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \kappa_1 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \quad \left(\frac{\partial p}{\partial t} \leq 0 \right); \quad \frac{\partial p}{\partial t} = \kappa_2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \quad \left(\frac{\partial p}{\partial t} > 0 \right). \quad (\text{IX.2.11})$$

при условиях

$$p(x, 0) = P; \quad p(0, t) = p_0 \quad (0 < t < T);$$

$$\frac{\partial p(0, t)}{\partial x} = 0 \quad (t > T). \quad (\text{IX.2.12})$$

Очевидно, что плоскость переменных x, t разбивается на две области линией $x = \mu(t)$, на которой

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0.$$

Линия эта, изображающая фронт волны разгрузки, начинается в точке смены граничных условий $x = 0, t = T$ и перемещается с ростом t в глубь пласта. Положение этой линии должно быть определено в ходе решения задачи.

Будем искать приближенное решение задачи, используя метод интегральных соотношений (см. гл. V). В соответствии с общей схемой метода введем область влияния начального изменения режима [границу ее обозначим через $l(t)$] и область влияния смены режима в момент $t = T$ [граница $\lambda(t)$]. В отличие от имеющей ясный физический смысл границы $\mu(t)$ обе эти границы являются условными, возникающими в связи с применением приближенного метода. На рис. IX.4 они показаны пунктиром.

На начальной стадии ($t < T$) давление в пласте убывает, и распределение давления определяется первым уравнением (IX.2.11). Принимая для распределения давления приближенное выражение

$$p = \begin{cases} P_0 + (P - P_0) \left(\frac{3x}{l} - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3} \right) & (x \leq l) \\ P & (x \geq l), \end{cases} \quad (\text{IX.2.13})$$

для которого первые две производные обращаются в нуль при $x = l$, и используя первое интегральное соотношение (уравнение материального баланса), найдем

$$l(t) = \sqrt{24\kappa_1 t}. \quad (\text{IX.2.14})$$

Рассмотрим теперь собственно процесс восстановления давления ($t > T$). Предположим, что область влияния изменения режима

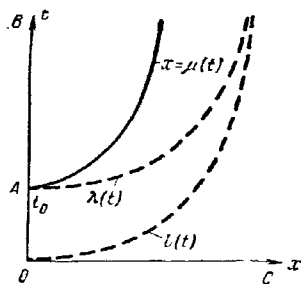


Рис. IX.4

$[0 < x < \lambda(t)]$ будет захватывать лишь часть возмущенной области $[0 < x < l(t)]$, так что при $\lambda < x < l$ распределение давления сохраняет прежний вид, определяемый соотношениями (IX.2.13) и (IX.2.14).

Для распределения давления в области $0 < x < \lambda(t)$ примем приближенное выражение

$$p = L + M \frac{x^2}{\lambda^2} + N \frac{x^3}{\lambda^3}, \quad (\text{IX.2.15})$$

удовлетворяющее краевому условию при $x = 0$, а коэффициенты L , M и N определим так, чтобы при $x = \lambda$ выражение (IX.2.15) непрерывно сопрягалось с выражением (IX.2.13) при сохранении непрерывности первых двух производных. Условия сопряжения дают систему трех уравнений, разрешая которую, получим выражения для L , M и N в функции от λ/l :

$$\begin{aligned} L &= p_0 + (P - p_0) \frac{\lambda}{l}; \\ M &= 3(P - p_0) \frac{\lambda}{l} \left(1 - \frac{\lambda}{l}\right); \\ N &= - (P - p_0) \frac{\lambda}{l} \left(1 - \frac{\lambda^2}{l^2}\right). \end{aligned} \quad (\text{IX.2.16})$$

Положение волны разгрузки $\mu(t)$ определяется тем обстоятельством, что при $x = \mu(t)$ распределение давления, рассматриваемое как функция x , имеет точку перегиба, $\partial^2 p / \partial x^2 = 0$. Дважды дифференцируя выражение (IX.2.15) и используя формулы (IX.2.16), получаем

$$\mu = - \frac{\lambda M}{3N} = \frac{\lambda}{1 + \lambda/l}. \quad (\text{IX.2.17})$$

Таким образом, распределение давления будет полностью известно, если определить функцию $\lambda(t)$. Для нахождения $\lambda(t)$ воспользуемся интегральным соотношением, следующим из уравнений (IX.2.11). Интегрируя эти уравнения — первое от $\mu(t)$ до $\lambda(t)$, а второе от 0 до $\mu(t)$ и складывая полученные соотношения, получаем

$$\frac{d}{dt} \int_0^{\lambda(t)} p(x, t) dx - p[\lambda(t), t] \frac{d\lambda}{dt} = (\kappa_2 - \kappa_1) \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=\mu(t)} + \kappa_1 \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_{x=\lambda(t)}. \quad (\text{IX.2.18})$$

Потребуем, чтобы распределение (IX.2.15) удовлетворяло интегральному соотношению (IX.2.18). Используя полученные выше выражения для L , M , N и μ через λ и обозначая $\lambda/l = z$, получим, учитывая выражение (IX.2.14) для $l(t)$, уравнение первого порядка для функции $z(t)$. Это уравнение можно привести к виду:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{4z(1+z)z}{z(1-z)[1 + \sigma - z^2 + z^2(1+z)(5-3z)]}, \quad (\text{IX.2.19})$$

где

$$\sigma = \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{\kappa_1} \quad (\text{IX.2.20})$$

— безразмерное отношение, характеризующее степень необратимости деформаций среды.

Имеем далее

$$\lambda(T) = 0; \quad z(T) = 0. \quad (\text{IX.2.21})$$

Интегрируя уравнение (IX.2.19) с учетом этого условия, получаем

$$\Phi(z, \sigma) = 4 \int_0^z \frac{\xi(1+\xi) d\xi}{(1-\xi)[1+\sigma-\xi^2+\xi^2(1+\xi)(5-3\xi)]} = \ln \frac{t}{T}. \quad (\text{IX.2.22})$$

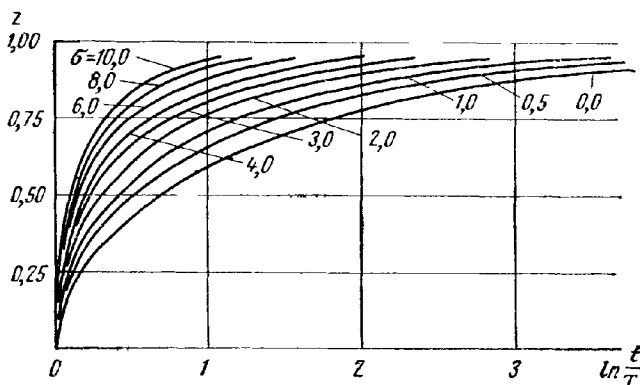


Рис. IX.5

Таблица значений функции $\Phi(z, \sigma)$ приведена в работе [11]. Используя эту таблицу, легко найти значение z , отвечающее данному значению t (рис. IX.5), а затем найти распределение давления, подставляя в (IX.2.15) значение z и соответствующие ему значения L , M и N , определяемые формулами (IX.2.16).

Из соотношения (IX.2.22) ясно, что при всех $T \leq t < \infty$ величина $0 < z < 1$; при $t \rightarrow \infty$ $z \rightarrow 1$, откуда в соответствии с (IX.2.17) следует, что $\mu/l \rightarrow 1/2$. Таким образом, при больших t волна разгрузки делит возмущенную область примерно пополам.

Заметим, что в соответствии с выражениями (IX.2.15) и (IX.2.16)

$$z(t) = \frac{p(0, t) - p_0}{P - p_0}. \quad (\text{IX.2.23})$$

Таким образом, графики рис. IX.5 описывают повышение давления на галерее после ее закрытия.

Задачи к п. 3.

1. Пусть $p(x, t)$ — распределение давления в полубесконечном пласте, удовлетворяющее при $0 < x < l(t)$ второму уравнению (IX.2.11), а при $l < x < \infty$ — первому, причем $p(x, t) \rightarrow p_0$ при $x \rightarrow \infty$.

Получить интегральное соотношение

$$\frac{1}{\kappa_2} \frac{d}{dt} \int_0^l (p - P_0) dx + \frac{1}{\kappa_1} \frac{d}{dt} \int_l^\infty (p - P_0) dx + \left(\frac{1}{\kappa_1} - \frac{1}{\kappa_2} \right) p(l, t) P_0 \frac{dl}{dt} = - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_{x=0}. \quad (\text{IX.2.24})$$

Получить также последующие интегральные соотношения по аналогии с теорией упругого режима и задачами фильтрации газа (см. гл. V).

Каков физический смысл соотношения (IX.2.24)?

2. Решить, используя метод интегральных соотношений, задачу о восстановлении давления вблизи скважины, работавшей на протяжении времени $0 < t < T$ с постоянным отбором в первоначально невозмущенном пласте, а затем остановленной.

Изложенные выше результаты были получены в работах Г. И. Баренблатта и А. П. Крылова [20] и Г. И. Баренблатта [11].

4. В теории упруго-пластической фильтрации нетривиальным оказывается вопрос об автомодельных решениях. Казалось бы, решение задачи о мгновенном источнике для упруго-пластического режима фильтрации должно в соответствии с § IV.5 представляться в виде:

$$P - p(x, t) = \frac{Q}{\sqrt{2\kappa_1 t}} f(\xi); \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{2\kappa_1 t}}, \quad (\text{IX.2.25})$$

где $f(\xi)$ удовлетворяет уравнениям

$$f''(\xi) + \xi f'(\xi) + f = 0 \quad (0 \leq \xi < \xi_0); \quad (\text{IX.2.26})$$

$$\alpha f''(\xi) + \xi f'(\xi) + f = 0 \quad (\xi_0 \leq \xi < \infty), \quad \alpha = \kappa_1 / \kappa_2$$

и условиям

$$f'(0) = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} f(\xi) = 0, \quad (\text{IX.2.27})$$

причем $\mu(t) = \xi_0 \sqrt{2\kappa_1 t}$ — координата волны разгрузки.

В самом деле, уравнения упруго-пластического режима фильтрации не содержат ни одной новой величины с независимой размерностью (κ_1 и κ_2 имеют одинаковую размерность). Поэтому, полагая

$$\int_{-\infty}^{\infty} [P - p(x, 0)] dx = Q; \quad p(x, 0) \equiv 0 \quad (x \neq 0) \quad (\text{IX.2.28})$$

и используя обычные соображения размерности, мы должны получить решение в форме (IX.2.25). Легко показать, однако, что решения в форме (IX.2.25) не существует. В самом деле, решение уравнений (IX.2.26) при условиях (IX.2.27) имеет вид, соответственно, $A \exp(-1/2 \xi^2)$, $A_1 \exp(-\xi^2/2\alpha)$ при $\xi < \lambda$ и $\xi > \lambda$. Если теперь записать условия непрерывности f и f' при $\xi = \lambda$, то при любом

$\lambda \neq 0$ для A и A_1 получается система уравнений, несовместная при $\alpha \neq 1$.

Этот результат представляется странным, потому что, казалось бы решение задачи Коши спустя достаточно большое время после начала движения должно «забывать» о деталях, связанных с начальным условием, и становится автомодельным. Рассмотрим решение неавтомодельной задачи Коши [уравнения (IX.2.11)], соответствующей начальному условию

$$P - p(x, 0) = (Q/l)\varphi(x/l), \quad (\text{IX.2.29})$$

где l — некоторый параметр размерности длины, а функция $\varphi(x/l)$ — непрерывная вместе со своей производной по x , монотонно убывающая, и притом такая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(\xi) d\xi = 1. \quad (\text{IX.2.30})$$

В силу теоремы, доказанной С. Л. Каменомостской [51, 52], решение этой задачи Коши существует и единственно. Согласно л-теореме оно представляется в виде:

$$P - p(x, t) = \frac{Q}{V\kappa_1 t} F\left(\frac{x}{V2\kappa_1 t}, \frac{l}{V2\kappa_1 t}, \frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right). \quad (\text{IX.2.31})$$

Обычное рассуждение состоит в том, что при достаточно малых l второй аргумент функции F несуществен, откуда и получается представление (IX.2.25). Нетривиальность положения, возникающего в теории упруго-пластического режима фильтрации, объясняется тем, что при $\eta = l(\kappa_1 t)^{-1/2} \rightarrow 0$ функция $F(\xi, \eta, \alpha)$ в случае $\alpha \neq 1$ не стремится к конечному пределу, а стремится к нулю или бесконечности (в зависимости от величины $\alpha = \kappa_1/\kappa_2$) и притом так, что существует такое число β , что

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{F(\xi, \eta, \alpha)}{\eta^\beta} = f(\xi, \alpha). \quad (\text{IX.2.32})$$

Подставляя это выражение в (IX.2.31), получаем, что главный член асимптотики решения задачи Коши при $l \rightarrow 0$ (или, что то же, $t \rightarrow \infty$) имеет вид:

$$P - p(x, t) = A(\kappa_1 t)^{-1/(1+\beta)} f(\xi, \alpha), \quad (\text{IX.2.33})$$

где $A = Ql^\beta$, что и наводит на мысль искать автомодельное решение задачи Коши в форме (IX.2.33), причем параметр β должен быть найден в ходе решения задачи. Подставляя (IX.2.33) в (IX.2.11), находим для функции f уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f}{d\xi^2} + \xi \frac{df}{d\xi} + (1+\beta)f &= 0 & (0 \leq \xi \leq \xi_0); \\ \alpha \frac{d^2 f}{d\xi^2} + \xi \frac{df}{d\xi} + (1+\beta)f &= 0 & (\xi_0 \leq \xi < \infty). \end{aligned} \quad (\text{IX.2.34})$$

Из граничных условий и условий непрерывности давления на волне разгрузки находим

$$f'(0) = 0; \quad f(\xi_0 - 0) = f(\xi_0 + 0), \quad (\text{IX.2.35})$$

откуда и из определения волны разгрузки

$$\frac{d^2 f(\xi_0 - 0)}{d\xi^2} = \frac{d^2 f(\xi_0 + 0)}{d\xi^2} = 0$$

получается условие непрерывности $f'(\xi)$ на волне разгрузки. Из этих условий и условия быстрого убывания функции f на бесконечности находим

$$\begin{aligned} f(\xi, \beta) &= A e^{-\xi^2/2} \Phi\left(\frac{\beta}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\xi^2}{2}\right) \quad (0 \leq \xi \leq \xi_0); \\ f(\xi, \beta) &= B e^{-\alpha \xi^2/4} D_\beta(\sqrt{\alpha} \xi) \quad (\xi_0 \leq \xi < \infty), \end{aligned} \quad (\text{IX.2.36})$$

(где Φ, D — соответственно вырожденная гипергеометрическая функция и функция гиперболического цилиндра, см. [129]) и систему из двух трансцендентных уравнений, которая однозначным образом определяет $\xi_0(\alpha)$ и $\beta(\alpha)$. Естественно, что $\beta = 0$ при $\alpha = 1$. Полученное автомодельное решение интересно в том отношении, что показатель размерности автомодельной переменной в нем не определяется из соображений размерности, а находится из условия существования решения задачи в целом. Такие автомодельные решения называются автомодельными решениями второго рода. Исследование этой задачи было выполнено в работе Г. И. Баренблатта и Г. И. Сивапинского [23], в которой можно найти детали вычислений и результаты численных расчетов.

Глава X

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ НЕОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ

§ 1. ВЫТЕСНЕНИЕ ВЗАИМОСМЕШИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ

В настоящем параграфе будет рассмотрена совместная фильтрация двух полностью взаиморастворимых жидкостей, образующих при движении одну фазу. Такого рода фильтрационные течения осуществляются, например, при вытеснении нефти из пласта растворителями, при исследовании нефтеносных и водоносных пластов при помощи меченых частиц, а также в некоторых процессах химической технологии.

1. Рассмотрим процесс изотермической фильтрации однофазной двухкомпонентной смеси. Свойства такой смеси (плотность и вязкость) определяются двумя параметрами — массовой концентрацией одного из компонентов c и давлением p . При вытеснении смешивающихся жидкостей главной особенностью фильтрации однофазной двухкомпонентной смеси является сложный механизм переноса массы, связанный с перемешиванием частиц обоих компонентов вследствие различия скоростей в разных точках пористой среды. Влияние перемешивания на теплопередачу в пористой среде отмечалось уже в § 5 гл. IX. Из-за хаотического расположения поровых каналов движение жидкости при фильтрации происходит по сложным траекториям и на расстояниях порядка размеров пор скорость каждой отдельной частицы жидкости может значительно отличаться по величине и направлению от средней скорости, равной u/m (где u — скорость фильтрации, m — пористость). Поэтому при движении в пористой среде двухкомпонентной смеси частицы каждого компонента рассеиваются относительно начального положения, несмотря на равенство средней скорости для всех частиц. При этом первоначально резкая граница двух полностью смешивающихся жидкостей оказывается «размытой». Размывание границы происходит, конечно, и под влиянием молекулярной диффузии, но эксперименты показывают [153], что в пористой среде при фильтрации перенос массы в результате отклонения скоростей от средних значений может происходить

во много раз (иногда на несколько порядков) быстрее, чем перенос, вызванный молекулярной диффузией.

Чтобы учесть влияние перемешивания на перенос компонента, имеющего концентрацию c , следует к вектору конвективного переноса $\vec{q}_D$ добавить дополнительный член, связанный с изменением концентрации от точки к точке. Дополнительный вектор переноса $\vec{q}_D$ может быть записан в форме

$$q_{Di} = A_{ij} \frac{\partial c}{\partial x_j}. \quad (\text{X.1.1})$$

Возможность использования вектора переноса в указанной форме подтверждается обработкой данных экспериментов по перемешиванию в пористой среде. Тензор A_{ij} обычно называется тензором дисперсии, иногда также тензором конвективной диффузии. Из условий симметрии следует, что в изотропной среде одна из главных осей тензора A_{ij} совпадает с направлением скорости фильтрации, а две другие могут быть выбраны произвольно в плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{u}$. Компоненты тензора A_{ij} в главных осях $K_1 = A_{11}$ и $K_2 = A_{22} = A_{33}$ называются соответственно коэффициентами продольной и поперечной дисперсии.

Коэффициенты K_1 и K_2 определяются описанным выше механизмом перемешивания и поэтому являются функциями средней скорости движения (скорости фильтрации u) и свойств пористой среды ($l, m, \dots$) и жидкости (μ, ρ, D):

$$K_i = f_i(u, D, \mu, \rho, l, m), \quad (i=1, 2), \quad (\text{X.1.2})$$

где D — коэффициент молекулярной диффузии.

Размерность коэффициентов дисперсии K_1 и K_2 есть L^2/T . Поэтому

$$K_i = ul\varphi_i(\text{Pe}, N, \alpha_1, \alpha_2, \dots), \quad (\text{X.1.3})$$

где $\text{Pe} = \frac{ul}{D}$ (число Пекле); $N = \frac{D\rho}{\mu}$; $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ представляют собой безразмерные параметры структуры порового пространства; φ_i — безразмерная функция.

Из формулы (X.1.3) следует, что зависимость коэффициентов дисперсии от скорости фильтрации проявляется через их зависимость от числа Пекле. На рис. X.1 приведена зависимость безразмерного коэффициента продольной дисперсии K/D от Pe . Этот график получен в результате обработки большого числа экспериментов по исследованию распределения концентрации нейтральной примеси в однородной жидкости при фильтрации в нецементированных песках [58]. В качестве характерного размера l принимался средний диаметр зерен.

Заметим, что эксперименты проводились при различных значениях параметра N ; но заметного влияния этого параметра на K_1 не обнаружено. В области самых малых скоростей фильтрации, когда

$ul \ll D$, механическое перемешивание несущественно по сравнению с молекулярной диффузией и

$$K_1 = aD, \quad (\text{X.1.4})$$

где a — постоянная, зависящая от структуры порового пространства. В диапазоне $1 < \text{Re} < 100$ располагается переходная область, в которой существенны оба процесса — молекулярная диффузия и механическое перемешивание.

Наконец, в области $\text{Re} > 100$ влияние молекулярной диффузии на коэффициенты дисперсии незначительно и $\varphi_1 = \text{const.}$

При числах $\text{Re} > 10^5$ величина K_1/ul начинает уменьшаться с ростом Re . В этом диапазоне уже сказывается влияние инерционных сил на распределение скоростей в порах.

Зависимость коэффициента поперечной дисперсии K_2 от числа Пекле

в принципе аналогична зависимости $K_1(\text{Pe})$. Однако влияние скорости на K_2 начинает проявляться при значительно больших числах Пекле, чем для K_1 . Поэтому при больших числах Пекле $K_1 \gg K_2$, как это видно из

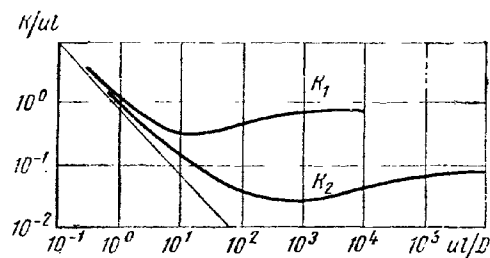


Рис. X.2

Запишем теперь уравнения совместной изотермической фильтрации двух взаиморастворимых несжимаемых жидкостей. Уравнения неразрывности каждого компонента выводятся в точности так же, как уравнение (VI.2.4), и имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho c_\lambda) + \text{div}(\rho \vec{q}_\lambda) = 0 \quad (\lambda = 1, 2), \quad (\text{X.1.5})$$

где $\vec{q}_\lambda$ — поток данного компонента, который может быть выражен в виде:

$$q_{\lambda i} = c_\lambda u_i - A_{ij} \frac{\partial c_\lambda}{\partial x_j} = - \frac{k c_\lambda}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_i} - A_{ij} \frac{\partial c_\lambda}{\partial x_j}. \quad (\text{X.1.6})$$

Подстановка выражений (X.1.6) в (X.1.5) приводит к системе нелинейных уравнений для $c = c_i$ и p :

$$m \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0; \quad (\text{X.1.7})$$

$$m \frac{\partial c}{\partial t} + u_i \frac{\partial c}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij} \frac{\partial c}{\partial x_j} \right) = 0. \quad (\text{X.1.8})$$

При исследовании потоков жидкости в пористой среде при помощи меченых частиц вытесняющая жидкость (содержащая нейтральную примесь) имеет те же физические свойства, что и вытесняемая. Поэтому система (X.1.7)—(X.1.8) разбивается на два независимых уравнения, одно из которых определяет поле скоростей, а второе служит для определения концентрации. При этом второе уравнение будет линейным. В большинстве задач, связанных с движением меченых частиц, фильтрацию можно считать установившейся. Тогда уравнение (X.1.7) переходит в уравнение Лапласа.

При исследовании собственно вытеснения смешивающихся жидкостей, например вытеснения нефти растворителями, задача упрощается в связи с тем, что скорости фильтрации в пласте вдали от скважин невелики и изменяются незначительно. Так, например, при $u = 350$ м/год $\approx 10^{-3}$ см/сек и $l = 0,01$ см (что соответствует проницаемости около 1 д) $Re \approx 1$ (так как D обычно порядка 10^{-5} см²/сек). Поэтому коэффициенты дисперсии можно считать не зависящими от скорости, а при достаточно малых скоростях (при $Re < 10$) и равными между собой (приблизительно равными коэффициенту молекулярной диффузии). Вблизи скважин течение можно считать одномерным (радиальным), однако распределение концентрации может и не быть одномерным.

2. Рассмотрим некоторые одномерные задачи вытеснения смешивающихся жидкостей.

В случае одномерного прямолинейного вытеснения несжимаемых жидкостей в несжимаемой пористой среде уравнение (X.1.7) дает $u = u_0 = \text{const}$. Если не учитывать возможной зависимости коэффициента K_1 от отношения вязкости, уравнение (X.1.8) примет вид:

$$m \frac{\partial c}{\partial t} + u_0 \frac{\partial c}{\partial x} - K_1 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = 0. \quad (\text{X.1.9})$$

Поскольку $u_0 = \text{const}$, то и $K_1(u_0) = \text{const}$.

Пусть жидкость 1 нагнетается в полубесконечный пласт, первоначально заполненный жидкостью 2. Тогда имеем следующие граничные и начальные условия: $c(0, t) = 1$, $c(\infty, t) = 0$, $c(x, 0) = 0$. Приме-

ния преобразование Лапласа к уравнению (X.1.9), имеем для $c^* =$

$$= \int_0^\infty c(x, t) e^{-\sigma t} dt$$

$$\sigma c^* + V \frac{dc^*}{dx} - K \frac{d^2 c^*}{dx^2} = 0, \quad (\text{X.1.10})$$

где $V = \frac{u_0}{m}$; $K = \frac{K_1}{m}$.

Граничные условия для c^* запишутся в виде:

$$c^*(0) = \frac{1}{\sigma}; \quad c^*(\infty) = 0.$$

Соответствующее решение уравнения (X.1.10) имеет вид:

$$c^* = \frac{1}{\sigma} \exp \left\{ -\frac{x}{V\sqrt{K}} (\sqrt{a^2 + \sigma} - a) \right\}, \quad (\text{X.1.11})$$

где $a = \frac{iV}{2\sqrt{K}}$.

Для отыскания оригинала по изображению (X.1.11) используем известную формулу (см. гл. III)

$$\frac{1}{\sigma} \exp \left(-\frac{x}{V\sqrt{K}} \sqrt{\sigma} \right) \leftrightarrow \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{x^2}{Kt}} \right). \quad (\text{X.1.12})$$

Кроме того, известно, что если преобразование Лапласа функции $\varphi(t)$ есть $F(\sigma)$, то преобразование функции $\exp(-a^2 t) \varphi(t)$ будет $F(a^2 + \sigma)$. Используя эти соотношения, а также теорему умножения для преобразования Лапласа, найдем после некоторых преобразований

$$c(x, t) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{x - Vt}{2\sqrt{Kt}} \right) + \frac{1}{2} \exp \left(\frac{Vx}{K} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{x + Vt}{2\sqrt{Kt}} \right). \quad (\text{X.1.13})$$

Фронту вытеснения, очевидно, соответствует окрестность точки $x = Vt$. При x , близком к Vt , и при больших t второе слагаемое в формуле (X.1.13) пренебрежимо мало и

$$c \approx \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{x - Vt}{2\sqrt{Kt}} \right). \quad (\text{X.1.14})$$

Формула (X.1.14) представляет решение уравнения (X.1.9), удовлетворяющее следующим начальным условиям: $c(x, 0) = 1$ при $x < 0$ и $c(x, 0) = 0$ при $x > 0$.

Из формулы (X.1.14) следует, что через достаточно большое время переходная зона, в которой концентрация меняется от некоторого малого значения ϵ до $1 - \epsilon$, со временем расширяется пропорционально $\sqrt{Kt}$. Если принять $\epsilon = 0,005$, то половина ширины переходной зоны равна $4\sqrt{Kt}$.

Для случая радиального вытеснения уравнение (X.1.7) дает $u = q_0/r$, где $q_0 = \text{const}$. Из уравнения (X.1.8) получим

$$m \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{q_0}{r} \frac{\partial c}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r K_1 \frac{\partial c}{\partial r} \right) = 0. \quad (\text{X.1.15})$$

Если молекулярной диффузией можно пренебречь, то $K_1 = \lambda u$ или $K_1 = \frac{\lambda q_0}{r}$. Тогда вместо (X.1.15) имеем

$$m \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{q_0}{r} \frac{\partial c}{\partial r} - \frac{\lambda q_0}{r} \frac{\partial^2 c}{\partial r^2} = 0. \quad (\text{X.1.16})$$

Уравнения (X.1.15) или (X.1.16) могут быть решены только численно. Для приближенной оценки роста переходной зоны заменим в уравнении (X.1.15) переменные $r^2 - 2q_0 t = \xi$, $t' = t$. Зависимость $K_1(u)$ приближенно примем в виде $K_1 = K_0 + \lambda u$. Тогда уравнение (X.1.15) запишется как

$$\frac{\partial c}{\partial t} - 4 \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ [K_0 (\xi + 2q_0 t) + q_0 \lambda \sqrt{\xi + 2q_0 t}] \frac{\partial c}{\partial \xi} \right\}. \quad (\text{X.1.17})$$

Если в пласт, содержащий только вытесняющую жидкость ($c = 0$), закачивается жидкость с концентрацией $c = 1$, то фронт вытеснения (без учета дисперсии) перемещается по закону $r = \sqrt{2q_0 t}$. Для оценки распределения концентрации вблизи фронта при больших t можно полагать, что ширина переходной зоны намного меньше, чем r , т. е. $|\xi| \ll 2q_0 t$. Тогда выражение в квадратных скобках примет вид: $2K_0 q_0 t + \sqrt{2(q_0 t)^{3/2}} \lambda$ и может быть вынесено за знак производной по ξ . Полагая

$$\tau = 4q_0(t^2 - t_0^2) + \frac{8\sqrt{2}}{3} \frac{\lambda}{K_0} [(q_0 t)^{3/2} - (q_0 t_0)^{3/2}]$$

(где t_0 — некоторая постоянная), приведем уравнение (X.1.17) к виду:

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} - K_0 \frac{\partial^2 c}{\partial \xi^2} = 0. \quad (\text{X.1.18})$$

Чтобы оценить скорость роста переходной зоны, рассмотрим автомодельное решение уравнения (X.1.18), имеющее вид, аналогичный (X.1.14):

$$c = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\xi}{2\sqrt{K_0 \tau}} \right). \quad (\text{X.1.19})$$

Это решение описывает в переменных ξ, τ распространение первоначально «ступенчатого» распределения концентрации (т. е. так, что при $\tau = 0$ $c = 1$, если $\xi < 0$, и $c = 0$, если $\xi > 0$). В переменных r, t эти условия выразятся так: при $t = t_0$ $c = 1$, если $r^2 - 2q_0 t_0 < 0$, и $c = 0$, если $r^2 - 2q_0 t_0 > 0$. При этом, разумеется,

остается в силе предположение, что $|r^2 - 2q_0 t_0| \ll 2q_0 t_0$. Подставляя в (X.1.19) вместо ξ и τ их выражения через r и t , получим

$$c = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left\{ \frac{r^2 - 2q_0 t}{2 \left[4q_0 K_0 (t^2 - t_0^2) + \frac{8\sqrt{2}\lambda}{3} ((q_0 t_0)^{3/2} - (q_0 t)^{3/2}) \right]^{1/2}} \right\}. \quad (\text{X.1.20})$$

Для оценки ширины переходной зоны используем условие $\varepsilon = 0,005$, откуда $\frac{\varepsilon}{2\sqrt{K_0 t}} < 2$, или

$$\frac{|r^2 - 2q_0 t|}{2 \left[4q_0 K_0 (t^2 - t_0^2) + \frac{8\sqrt{2}\lambda}{3} ((q_0 t_0)^{3/2} - (q_0 t)^{3/2}) \right]^{1/2}} \leq 2. \quad (\text{X.1.21})$$

При сравнительно небольших временах, когда второй член в квадратных скобках значительно превышает первый (т. е. дисперсия преобладает над молекулярной диффузией), из условия (X.1.21), пользуясь также тем, что $|r^2 - 2q_0 t| \ll 2q_0 t$, легко установить для ширины переходной зоны асимптотическое выражение

$$r - \sqrt{2q_0 t} \approx 4 \sqrt{\frac{2}{3} \lambda (2q_0 t)^{1/4}} \approx 4 \sqrt{\frac{2}{3} \lambda r}. \quad (\text{X.1.22})$$

Для больших времен, когда значения r таковы, что $K_0 \gg \frac{q_0 \lambda}{r}$,

$$r - \sqrt{2q_0 t} \approx 2 \sqrt{2K_0 t} \approx 2 \sqrt{\frac{K_0}{q_0} r}. \quad (\text{X.1.23})$$

Как показывает экспериментальная проверка (Бентсен, Нильсен, [131]), формула, аналогичная (X.1.20), сравнительно хорошо описывает распределение концентрации при радиальном вытеснении.

§ 2. УСТОЙЧИВОСТЬ ВЫТЕСНЕНИЯ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ И СМЕШИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ ИЗ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ

При изучении вытеснения жидкостей в пористой среде существенны вопросы устойчивости полученных решений. Физически возможность возникновения неустойчивости связана с тем, что при проникновении (за счет случайных возмущений) частицы более подвижной жидкости в область, занятую менее подвижной жидкостью, она оказывается под действием больших градиентов давления, чем действовавшие на нее в невозмущенном состоянии, и движение частицы ускоряется. Если более подвижная жидкость является вытесняющей, это приводит к разрастанию возмущений. В результате такого элементарного подхода (см. И. А. Чарный [119]) получаются те же условия устойчивости, что и при использовании более строгой теории.

Общий способ анализа устойчивости какой-либо системы состоит в исследовании ее поведения после наложения на основное состояние малых возмущений.

1. Рассмотрим вначале простейший случай — вертикальное движение с постоянной скоростью плоской границы раздела двух жидкостей, имеющих различные плотности и вязкости. Такая схема является предельной как для вытеснения смешивающимися, так и несмешивающимися агентами, если пренебречь шириной переходных зон.

Фильтрация каждой из жидкостей описывается следующими уравнениями (ось x направлена вертикально вверх):

$$u_j = -\frac{k_j}{\mu_j} \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \rho_j g \right); \quad v_j = -\frac{k_j}{\mu_j} \frac{\partial p}{\partial y}; \quad w_j = -\frac{k_j}{\mu_j} \frac{\partial p}{\partial z};$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial v_j}{\partial y} + \frac{\partial w_j}{\partial z} = 0 \quad (j = 1, 2). \quad (\text{X.2.1})$$

Величины, относящиеся к каждой из фаз, здесь обозначены индексом $j = 1, 2$; проницаемости k_j приняты различными по обе стороны границы раздела, чтобы учесть возможную неполноту вытеснения несмешивающихся жидкостей; в последнем случае по обе стороны границы различны насыщенности и, следовательно, различны относительные проницаемости.

На границе раздела должны выполняться условия (см. гл. VI, § 2) (VI.2.19) и (VI.2.24):

$$p_1 = p_2;$$

$$u_{n1} = u_{n2} = mV_n, \quad (\text{X.2.2})$$

где u_{nj} — проекции скорости фильтрации на нормаль к границе раздела; V_n — скорость перемещения границы по нормали к ней.

Система (X.2.1) с условиями (X.2.2) имеет следующее решение, соответствующее равномерному перемещению плоской границы раздела:

$$u_1 = u_2 = u_0; \quad v_1 = v_2 = 0; \quad w_1 = w_2 = 0;$$

$$p_1 = p_1^{(0)} = p_0 - \left(\frac{\mu_1}{k_1} u_0 + \rho_1 g \right) (x - Vt) \quad (x - Vt < 0);$$

$$p_2 = p_2^{(0)} = p_0 - \left(\frac{\mu_2}{k_2} u_0 + \rho_2 g \right) (x - Vt) \quad (x - Vt > 0). \quad (\text{X.2.3})$$

При этом $V_n = V = \frac{u_0}{m}$. Уравнение невозмущенной границы раздела имеет вид $x = Vt$.

Рассмотрим решение системы (X.2.1), отличающееся от (X.2.3) малыми возмущениями. Для этого положим

$$u_j = u_0 + \varepsilon u_j^*; \quad v_j = \varepsilon v_j^*; \quad w_j = \varepsilon w_j^*; \quad p_1 = p_1^{(0)} + \varepsilon p_1^*; \quad p_2 = p_2^{(0)} + \varepsilon p_2^*, \quad (\text{X.2.4})$$

где ε — малая величина.

Уравнение границы раздела имеет вид:

$$x = x_0(y, z, t) = Vt + \varepsilon x^*(y, z, t). \quad (\text{X.2.5})$$

Для возмущенного движения имеем систему уравнений

$$u_j^* = -\frac{k_j}{\mu_j} \frac{\partial p_j^*}{\partial x}; \quad v_j^* = -\frac{k_j}{\mu_j} \frac{\partial p_j^*}{\partial y}; \quad w_j^* = -\frac{k_j}{\mu_j} \frac{\partial p_j^*}{\partial z};$$

$$\frac{\partial u_j^*}{\partial x} + \frac{\partial v_j^*}{\partial y} + \frac{\partial w_j^*}{\partial z} = 0. \quad (\text{X.2.6})$$

Пользуясь малостью искажения границы, можно отнести условия (X.2.2) на невозмущенную границу раздела $x = Vt$. Тогда с точностью до малых порядка ε условия на границе принимают вид:

$$u_1^* - u_2^* = m \frac{\partial x^*}{\partial t}$$

при $x = Vt$;

$$p_1^* - p_2^* = \left[\left(\frac{\mu_1}{k_1} - \frac{\mu_2}{k_2} \right) u_0 + (\rho_1 - \rho_2) g \right] x^*. \quad (\text{X.2.7})$$

К условиям (X.2.7) следует присоединить также условия затухания всех возмущений при $x \rightarrow \pm\infty$, так как предполагается, что возмущение возникает вблизи границы раздела.

Произвольное возмущение может быть разложено в интеграл Фурье по y и z . Поэтому для исследования устойчивости достаточно рассмотреть развитие элементарного синусоидального возмущения. Для этого представим x^* и p_j^* в виде произведений

$$x^* = X(t) \exp(i\gamma_1 y + i\gamma_2 z) \quad (i = \sqrt{-1});$$

$$p_j^* = P_j(x, t) \exp(i\gamma_1 y + i\gamma_2 z) \quad (j = 1, 2), \quad (\text{X.2.8})$$

где $X(t)$ и $P_j(x, t)$ — амплитуды возмущений x^* и p_j^* .

Подставляя выражения (X.2.8) в уравнение (X.2.6), получим, что функция $P_j(x, t)$ должна иметь вид:

$$P_j(x, t) = P_j^{(1)}(t) \exp(\gamma x') + P_j^{(2)}(t) \exp(-\gamma x') \quad (\gamma = \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2});$$

$$(x' = x - Vt). \quad (\text{X.2.9})$$

Условия затухания возмущений на бесконечности дают:

$$P_1 = P^{(1)}(t) \exp(\gamma x'); \quad P_2 = P^{(2)}(t) \exp(-\gamma x'). \quad (\text{X.2.10})$$

Подставляя эти выражения в условия (X.2.7) и исключая $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$, получаем следующее уравнение:

$$\frac{dX}{dt} = -\frac{N\gamma X}{m \left(\frac{\mu_1}{k_1} + \frac{\mu_2}{k_2} \right)}; \quad N = \left(\frac{\mu_1}{k_1} - \frac{\mu_2}{k_2} \right) u_0 + (\rho_1 - \rho_2) g. \quad (\text{X.2.11})$$

Из уравнения (X.2.11) следует, что $X = X_0 \exp \left(-\frac{N\gamma t}{m \left(\frac{\mu_1}{k_1} + \frac{\mu_2}{k_2} \right)} \right)$,

где X_0 — начальная амплитуда возмущения. Поэтому, если

$$N = \left(\frac{\mu_1}{k_1} - \frac{\mu_2}{k_2} \right) u_0 + (\rho_1 - \rho_2) g > 0, \quad (X.2.12)$$

то начальные возмущения со временем затухают, в противном же случае — возрастают. Поскольку в условии (X.2.12) не входит параметр возмущения γ , это условие справедливо для возмущений произвольной формы. Таким образом, перемещение границы раздела устойчиво, когда выполняется условие (X.2.12). Если условие (X.2.12) не выполняется, граница раздела становится неустойчивой и разбивается на отдельные «языки» сложной и случайной формы (рис. X.3). Когда действие силы тяжести несущественно, неравенство (X.2.12) означает, что граница раздела устойчива в тех случаях, когда вытесняющая жидкость обладает большей вязкостью, чем вытесняемая, и неустойчива в противном случае. Действие силы тя-

жести способствует устойчивости границы, если вытеснение идет снизу вверх и вытесняющая жидкость обладает большей плотностью.

В случае несмешивающихся жидкостей рассмотренная граница раздела представляет собой фактически предельное положение скачка насыщенностей, когда

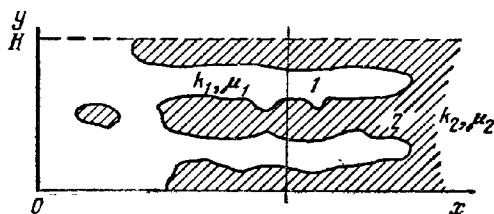


Рис. X.3

насыщенности по обе стороны скачка различны, но постоянны. В общем случае насыщенность вытесняющей фазы впереди фронта и насыщенность вытесняемой фазы за фронтом не равны нулю. С каждой стороны границы различны не только вязкости, но и проницаемости каждой из фаз. Поэтому в случае несмешивающихся жидкостей устойчивость определяется не соотношением вязкостей, а соотношением подвижностей, т. е. величин k_j/μ_j . Отношение подвижностей может быть рассчитано по кривым относительной проницаемости, исходя из насыщенностей по обе стороны скачка, которые в свою очередь определяются по формулам (VI.2.29) и зависят от отношения вязкостей. С ростом отношения вязкостей $M = \frac{\mu_2}{\mu_1}$ отношение подвижностей $M^* = \frac{k_1\mu_2}{k_2\mu_1}$ также растет, но M^* становится больше единицы, т. е. устойчивость нарушается только когда M значительно превышает единицу. При обычной форме кривых относительной проницаемости типа изображенных на рис. VI.5 отношение вязкостей, при котором наступает неустойчивость, составляет около 10—15. Типичная зависимость M^* от M показана на рис. X.4.

Эксперименты по вытеснению нефти водой, проведенные Б. Е. Кисиленко [55] на прозрачных моделях пласта с насыщенной пористой средой, показали, что неустойчивость наступает при отношении

вязкостей фаз около 12—13. Если плоская граница раздела неустойчива, то с течением времени она разбивается на большое число отдельных «языков» неправильной формы (см. рис. X.3).

Если за счет неоднородности потока насыщенность в некоторой точке изменяется на малую величину, то такое возмущение распространяется, не затухая и не разрастаясь. Действительно, уравнения неразрывности при плоском двухфазном течении имеют вид (см. гл. VI):

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + m \frac{\partial s}{\partial t}; \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad (\text{X.2.13})$$

$$u = u_1 + u_2; \quad v = v_1 + v_2.$$

Кроме того, исходя из обобщенного закона Дарси (VI.2.1), можно записать

$$u_1 = uF(s); \quad v_1 = vF(s);$$

$$F(s) = \frac{f_1(s)}{f_1(s) + \frac{1}{M} f_2(s)}.$$

(X.2.14)

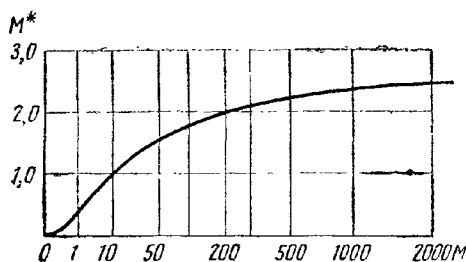


Рис. X.4

Тогда вместо первого из уравнений (X.2.13) имеем

$$m \frac{\partial s}{\partial t} + uF'(s) \frac{\partial s}{\partial x} + vF'(s) \frac{\partial s}{\partial y} = 0. \quad (\text{X.2.15})$$

Для невозмущенного течения $u = u_0$, $s = s_0$, причем скорость распространения скачка, согласно условию Баклея — Леверетта (VI.2.30), равна $V = \frac{u_0}{m} F'(s_0)$. Вводя значения возмущения скорости и насыщенности, получим из (X.2.15)

$$\frac{u_0}{m} F'(s_0) \frac{\partial s^*}{\partial x} + \frac{\partial s^*}{\partial t} \quad \text{или} \quad \frac{\partial s^*}{\partial t} + V \frac{\partial s^*}{\partial x} = 0. \quad (\text{X.2.16})$$

Из этого уравнения видно, что возмущения насыщенности вблизи скачка распространяются, не затухая, со скоростью, равной скорости скачка. Таким образом, учет возмущений насыщенности не приводит к изменению условия устойчивости.

2. Выше была рассмотрена устойчивость резкой границы раздела фаз, на которой действуют только силы тяжести и вязкого сопротивления. Однако при вытеснении несмешивающихся жидкостей на устойчивость могут оказать влияние поверхностные силы, а в случае смешивающегося вытеснения — дисперсия и молекулярная диффузия. Выравнивающее действие капиллярных сил в пористой среде в общем случае связано с процессами перераспределения насыщенности, и для исследования устойчивости необходимо рассматривать

возмущения течения в переходной зоне. Ограничимся условиями, когда длина волны возмущения велика по сравнению с шириной переходной зоны, чтобы действие капиллярных сил можно было учитывать только в граничных условиях. В этом случае для исследования вне узкой переходной зоны можно использовать уравнения (X.2.4). Этот подход, как мы увидим далее, связан с довольно существенными ограничениями. Для простоты выкладки ограничимся случаем плоской горизонтальной фильтрации. Исходя из формул (VI.2.4) гл. VI, уравнения двухфазной фильтрации в переходной зоне запишем в виде:

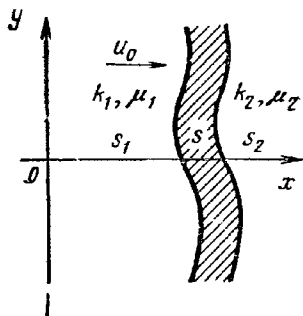


Рис. X.5

$$u_j = -\frac{k}{\mu_j} f_j(s) \frac{\partial p_j}{\partial x}; \quad v_j = -\frac{k}{\mu_j} f_j(s) \frac{\partial p_j}{\partial y} \quad (j = 1, 2).$$

$$w_j = 0.$$

Примем, что разность давлений в фазах равна капиллярному давлению — известной функции насыщенности (см. гл. VI, § 3):

$$p_2 - p_1 = p_c(s). \quad (X.2.18)$$

Уравнения неразрывности имеют обычный вид (X.2.13).

Комбинируя уравнения (X.2.17) и (X.2.13), можно получить систему для $u = u_1 + u_2$, $v = v_1 + v_2$ и s :

$$m \frac{\partial s}{\partial t} + u F'(s) \frac{\partial s}{\partial x} + v F'(s) \frac{\partial s}{\partial y} - a^2 m \left(\frac{\partial^2 \Phi(s)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi(s)}{\partial y^2} \right) = 0;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v}{\varphi(s)} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u}{\varphi(s)} \right) \quad (X.2.19)$$

(обозначения см. гл. VI, § 4); $\varphi(s) = f_1(s) + \frac{1}{M} f_2(s)$.

Чтобы получить граничные условия для возмущений, проинтегрируем уравнения (X.2.19) по x вдоль переходной зоны, считая, что граница раздела слабо искривлена (рис. X.5). При этом пренебрежем членами порядка ширины зоны и квадратами производных по y . Тогда вместо первого уравнения (X.2.19) получим

$$m(s_1 - s_2) \frac{\partial x_0}{\partial t} + u^{(2)} F(s_2) - u^{(1)} F(s_1) + \\ + [v^{(1)} F(s_1) - v^{(2)} F(s_2)] \frac{\partial x_0}{\partial y} - a^2 m (\Phi_1 - \Phi_2) \frac{\partial^2 x_0}{\partial y^2} = 0. \quad (X.2.20)$$

Здесь индексом 2 обозначены величины справа от переходной зоны, а индексом 1 — слева от нее. Интегрирование двух других уравнений (X.2.19) дает

$$u^{(1)} = u^{(2)};$$

$$\frac{v^{(1)}}{\varphi_1} - \frac{v^{(2)}}{\varphi_2} = -u^{(2)} \left(\frac{1}{\varphi_1} - \frac{1}{\varphi_2} \right) \frac{\partial x_0}{\partial y}. \quad (\text{X.2.21})$$

Переходя к возмущениям, примем, как и ранее,

$$x_0 = Vt + \varepsilon x^*;$$

$$u_i = u_0 + \varepsilon u_i^*; \quad v_i = \varepsilon v_i^*.$$

Тогда для возмущений получим из (X.2.20)

$$\frac{\partial x^*}{\partial t} - \frac{u^*}{u_0} V - a^2 \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{s_1 - s_2} \frac{\partial^2 x^*}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{X.2.22})$$

и из (X.2.21)

$$u_1^* = u_2^* = u^*; \quad \frac{v_1^*}{\varphi_1} - \frac{v_2^*}{\varphi_2} = -u_0 \left(\frac{1}{\varphi_1} - \frac{1}{\varphi_2} \right) \frac{\partial x^*}{\partial y}. \quad (\text{X.2.23})$$

Второе из уравнений (X.2.23), очевидно, эквивалентно последнему из уравнений (X.2.7) при $\rho_1 = \rho_2$ и может быть переписано в виде:

$$p_1^* - p_2^* = u_0 \left(\frac{\mu_1}{k_1} - \frac{\mu_2}{k_2} \right) x^*; \quad k_i = k\varphi_i. \quad (\text{X.2.24})$$

Условие (X.2.22) заменяет второе равенство (X.2.7). Поскольку, как и ранее, предполагается, что по обе стороны границы течение потенциальное, p_i^* и x^* снова могут быть выражены формулами (X.2.8)–(X.2.10).

Используя условия (X.2.7) и (X.2.22) и исключая $P^{(1)}(t)$ и $P^{(2)}(t)$, получим для $X(t)$ уравнение

$$\frac{dX}{dt} = -\gamma \left[\frac{1-M^*}{1+M^*} V + a_1^2 \gamma \right] \quad a_1^2 = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{s_1 - s_2} a^2;$$

$$M^* = \frac{k_1 \mu_2}{k_2 \mu_1}. \quad (\text{X.2.25})$$

Следовательно, устойчивость границы определяется условием

$$\frac{1-M^*}{1+M^*} V + a_1^2 \gamma > 0. \quad (\text{X.2.26})$$

Таким образом, граница раздела несмешивающихся жидкостей в пористой среде может стать устойчивой под действием капиллярных сил даже, если $1 - M^* < 0$, т. е. условие (X.2.12) не выполняется. Пусть $M^* > 1$, т. е. без учета капиллярных сил граница неустойчива.

Тогда условие (X.2.26) все же выполняется, если $\gamma > \frac{M^* - 1}{M^* + 1} \frac{V}{a_1^2}$. Это означает, что если длина волны возмущения границы $\lambda = \frac{2\pi}{\gamma}$

меньше критического значения λ_c , то граница остается устойчивой. Критическая длина волны λ_c определяется формулой

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{\gamma_c} = \frac{2\pi a^2}{V} \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{s_1 - s_2} \frac{M^* + 1}{M^* - 1}. \quad (\text{X.2.27})$$

В работе Чуок и др. [135] была исследована устойчивость границы раздела жидкостей в плоской щелевой модели, где действие поверхностных сил при искривлении границы приводит к возникновению разности давлений по обе стороны ее. Эта разность давлений направлена таким образом, что способствует выравниванию границы.

Предлагаем читателю самостоятельно исследовать устойчивость границы раздела в этом случае, воспользовавшись формулой Лапласа для разности давлений

$$p_c = \alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \approx \alpha \left(-\varepsilon \frac{\partial^2 x^*}{\partial y^2} + \frac{1}{h} \right), \quad (\text{X.2.28})$$

где α — поверхностное натяжение; h — половина ширины щели.

В этом случае критическая длина волны возмущения имеет вид:

$$\lambda_c = 2\pi \sqrt{\frac{\alpha}{(\mu_2 - \mu_1) \frac{u_0}{k} - (\rho_1 - \rho_2)g}}. \quad (\text{X.2.29})$$

Эксперименты Чуока [135] и Б. Е. Кисиленко [55] подтверждают, что граница раздела остается устойчивой даже при неблагоприятном соотношении подвижностей, если скорость вытеснения достаточно мала и вследствие этого ширина модели меньше критической длины волны возмущения.

3. Вывод формул (X.2.26) и (X.2.27) был сделан в предположении, что ширина переходной зоны намного меньше длины волны возмущения. В соответствии с результатами § 3 гл. VI ширина переходной зоны пропорциональна a^2/V . Поэтому указанное выше предположение справедливо только при M^* , близком к единице, и большой величине $(M^* - 1)^{-1}$. Существует значительный диапазон величин M , при которых M^* близко к единице (см. рис. X.4).

Тем не менее формулы (X.2.26) и (X.2.27) верны лишь для «слабой» неустойчивости, т. е. для M^* , близкого к единице, и являются в этом смысле асимптотическими. Чтобы исследовать устойчивость во всем диапазоне изменения отношения вязкостей, следует использовать полную систему уравнений (X.2.26). Эта задача пока до конца не решена.

Критическая длина волны возмущения λ_c , разделяющей области устойчивого и неустойчивого вытеснения, в общем случае является функцией параметров a^2 , V и $M = \frac{\mu_2}{\mu_1}$. Из соображений размерности тогда следует

$$\lambda_c = \frac{a^2}{V} \psi(M). \quad (\text{X.2.30})$$

Если M близко к тому значению M_c , при котором M^* становится равным единице, то выражение (X.2.30) должно приближаться к зависимости (X.2.27).

Рассмотрим отдельно устойчивость границы раздела по отношению к одномерным возмущениям насыщенности при учете капиллярных сил, т. е. исследуем устойчивость стабилизированной зоны. Распределение насыщенности в стабилизированной зоне представляет собой решение уравнения Рапопорта — Лиса (VI.3.4) вида $s = \varphi_0(x - Vt) = \varphi_0(\bar{x})$ и выражается формулой (VI.3.12). Перейдем в уравнении Рапопорта — Лиса, записанном в форме (VI.4.34), вместо x и t к новым независимым переменным $\bar{x}(s)$ и t и новой искомой функции $x - Vt = \bar{x}$; тогда это уравнение примет вид:

$$-\frac{\partial \bar{x}}{\partial t} + \frac{u}{m} F'(\bar{x}) - a^2 \frac{\partial}{\partial x_0} \left(-\frac{\Phi'(\bar{x}) \frac{\partial \bar{x}}{\partial x_0}}{\frac{\partial s}{\partial x_0}} \right) = 0. \quad (\text{X.2.31})$$

Введем теперь малые возмущения положения точки с насыщенностью s в стабилизированной зоне: $\bar{x} = \bar{x}_0(s) + \varepsilon \bar{x}^*$.

Для $\bar{x}^*$ имеем уравнение

$$-\frac{\partial \bar{x}^*}{\partial t} + \left[-V + \frac{u_0}{m} F_1(\bar{x}) \right] \frac{\partial \bar{x}^*}{\partial \bar{x}} + a^2 F_2(\bar{x}) \frac{\partial^2 \bar{x}^*}{\partial \bar{x}^2} = 0, \quad (\text{X.2.32})$$

где $F_1(\bar{x}) = F'(\bar{x})$; $F_2(\bar{x}) = \Phi'(\bar{x}) \frac{ds}{d\bar{x}}$.

Учитывая формулу (VI.3.12), связывающую x с s , уравнение (X.2.32) можно записать в иной форме:

$$-\frac{\partial \bar{x}^*}{\partial t} \frac{ds}{d\bar{x}} + a^2 \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(F_2(\bar{x}) \frac{\partial \bar{x}^*}{\partial \bar{x}} \right) = 0. \quad (\text{X.2.33})$$

При малых t можно искать $\bar{x}^*(\bar{x}, t)$ в виде:

$$\bar{x}^* = X(\bar{x}) e^{-\lambda t}. \quad (\text{X.2.34})$$

Тогда уравнение (X.2.33) сведется к следующему:

$$\lambda \Phi_1(\bar{x}) + a^2 \frac{d}{d\bar{x}} \left(F_2(\bar{x}) \frac{dX}{d\bar{x}} \right) = 0. \quad (\text{X.2.35})$$

Чтобы исследовать устойчивость, нужно таким образом решать задачу о собственных значениях для уравнения (X.2.35) при граничных условиях $X = 0$ при $\bar{x} = \pm A$. Если $\lambda < 0$, — течение неустойчиво, если $\lambda > 0$, — устойчиво.

Из приведенного в гл. VI, § 3 описания распределения насыщенности в стабилизированной зоне нетрудно убедиться, что

$$\varphi_1(\bar{x}) = \frac{ds}{dx} \leq 0 \quad \text{и} \quad F_2(\bar{x}) - \Phi'(s) \frac{ds}{dx} \leq 0.$$

В соответствии с общей теорией наименьшему собственному значению λ в поставленной граничной задаче соответствует собственная функция, обращающаяся в нуль только на концах рассматриваемого интервала. Тогда, интегрируя уравнение (X.2.35) по $\bar{x}$ от $-A$ до $+A$, легко получить что $\lambda_{\min} \geq 0$ при любых A . Это означает, что по отношению к одномерным возмущениям в любом конечном интервале стабилизированная зона всегда устойчива. Если рассматривать бесконечный интервал, то $\lambda = 0$ также может быть собственным значением, которому соответствует собственная функция $X = X_0 = \text{const}$. Очевидно, возмущение подобного вида, т. е. сдвиг по оси $\bar{x}$, не нарушает устойчивости стабилизированной зоны (см. аналогичную задачу об устойчивости пламени — Г. И. Баренблатт и Я. Б. Зельдович [19]).

В процессе вытеснения смешивающихся жидкостей стабилизирующее влияние на движение границы раздела оказывает перемешивание жидкостей в переходной зоне, т. е. дисперсия и молекулярная диффузия, поскольку перемешивание приводит к сглаживанию случайных возмущений насыщенности. Учесть влияние перемешивания на устойчивость границы раздела изменением условий на границе невозможно хотя бы потому, что ширина переходной зоны при вытеснении смешивающихся жидкостей неограниченно возрастает со временем (пропорционально $\sqrt{t}$, см. § 1). Таким образом, для исследования устойчивости необходимо рассматривать полную систему уравнений для насыщенности (X.1.8).

Полностью эта задача пока не решена, однако было получено несколько приближенных решений [130, 142], каждое из которых связано с рядом довольно существенно ограничивающих предположений.

4. Чтобы описать вытеснение после потери устойчивости, можно действовать двумя способами. Первый из них заключается в том, чтобы проследить за формированием симметричной системы языков, образующихся в результате малого начального искажения границы (например, синусоидальном). Описание развития языка для случая, когда вязкость вытесняющей жидкости пренебрежимо мала, было сделано с Саффманом и Тейлором [155]. Впоследствии появились еще ряд работ, в которых учитывалась вязкость вытесняющей фазы. Однако этим способом можно проанализировать только начальную стадию развития языков как из-за математических трудностей, так и потому, что правильная форма языков не может сохраняться неограниченно долго. Последнее вызвано тем, что на боковой поверхности удлиненных языков возникают вторичные искажения, когда длина языка превосходит критическую длину волны возмущения.

Для упрощенного описания совместной фильтрации двух жидкостей при таком хаотическом движении рассмотрим случай плоского

течения, когда протяженность языков в продольном направлении намного больше их ширины (см. рис. X.3). Предположим, что в среднем течение является одномерным, т. е. скорость фильтрации каждой из жидкостей, осредненная по сечению, содержащему большое число языков, направлена вдоль оси x . Примем также, что насыщенности (или концентрации) s_1 и s_2 постоянны по обе стороны границы (т. е. в областях 1 и 2). Тогда, пренебрегая фильтрацией и обменом в поперечном направлении, можем записать

$$\langle u_i \rangle = - \frac{k_i}{\mu_i} \langle \frac{\partial p}{\partial x} \rangle \frac{h}{H} \quad (i = 1, 2), \quad (X.2.36)$$

где h — суммарная высота сечения, занятая первой (вытесняющей) жидкостью.

Уравнения неразрывности для осредненного течения имеют вид:

$$H \frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial x} + m s_1 \frac{\partial h}{\partial t} = 0;$$

$$H \frac{\partial \langle u_2 \rangle}{\partial x} - m (1 - s_2) \frac{\partial h}{\partial t} = 0.$$

(X.2.37)

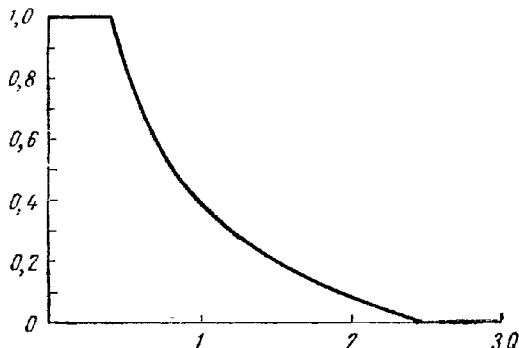


Рис. X.6

Исключая из уравнений (X.2.37) $\langle \frac{\partial p}{\partial x} \rangle$ и учитывая, что $(1 - s_2) \langle u_1 \rangle + s_1 \langle u_2 \rangle = u_0$, где u_0 — средняя скорость фильтрации, получим одно уравнение для $\eta = \frac{h}{H}$, аналогично тому, как было получено уравнение (VI.2.14):

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{u_0}{m} F'(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad (X.2.38)$$

где

$$F(\eta) = \frac{\eta}{\eta + \mu_* (1 - \eta)}; \quad \mu_* = \frac{k_2 \mu_1 s_1}{k_1 \mu_2 (1 - s_2)}.$$

Решение уравнения (X.2.38) получается точно так же, как решение уравнения Баклея — Ливеретта (VI.2.11):

$$x(\eta) = F'(\eta) \int_0^\eta u_0(\tau) d\tau + x_0(\eta) = QF'(\eta) + x_0(\eta). \quad (X.2.39)$$

Зависимость $\eta(Q)$, соответствующая формуле (X.2.39), представлена на рис. X.6. Поскольку функция $F'(\eta)$ является монотонной, скачков средней насыщенности η при этом не образуется.

Решение вида (X.2.39) рассматривалось А. М. Пирвердяном [91] и И. А. Чарным [119] применительно к образованию языка обводнения в наклонном пласте и А. Шейдеггером [156] для общего случая неустойчивого течения. Для вытеснения смешивающихся жидкостей близкие схемы были предложены Перрином [151] и Ковалем [140].

А. Некоторые формулы векторного анализа

В книге использованы некоторые простейшие формулы и понятия векторного анализа. Ниже приводятся определения этих величин. Более подробные сведения можно найти в учебниках.

1. Скаляру (числовой функции) $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ ставится в соответствие вектор градиента:

$$\text{grad } \varphi \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right\}. \quad (\text{A1})$$

2. Вектору $\vec{a}$ с компонентами a_1, a_2, a_3 соответствует скаляр $\text{div } \vec{a}$ (дивергенция $\vec{a}$):

$$\text{div } \vec{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3}. \quad (\text{A2})$$

Обозначим $\vec{i}_1; \vec{i}_2; \vec{i}_3$ — единичные векторы в направлении осей x_1, x_2 и x_3 и введем оператор Гамильтона (набла) ∇ :

$$\nabla = \vec{i}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{i}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \vec{i}_3 \frac{\partial}{\partial x_3}. \quad (\text{A3})$$

С оператором Гамильтона можно формально производить действия, как с вектором, по правилам векторной алгебры. Имеем при этом

$$\text{grad } \varphi = \nabla \varphi; \quad (\text{A4})$$

$$\text{div } \vec{a} = \nabla \cdot \vec{a}. \quad (\text{A5})$$

Наконец,

$$\text{div } (\text{grad } \varphi) = \nabla \cdot (\nabla \varphi) = \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2}. \quad (\text{A6})$$

Оператор

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \quad (\text{A7})$$

называется оператором Лапласа. В цилиндрических координатах (r, φ, z) его выражение имеет вид:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (\text{A8})$$

Наконец, часто используется формула преобразования поверхностного интеграла в объемный (формула Остроградского — Гаусса):

$$\iint_S a_n dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{a} dV. \quad (\text{A9})$$

Здесь $\vec{a}$ — некоторый вектор, заданный в объеме V , окруженном поверхностью S ; a_n — проекция вектора $\vec{a}$ в некоторой точке поверхности S на направление нормали к этой поверхности.

В. Обозначения некоторых специальных функций

Интегральная показательная функция

$$- \operatorname{Ei}(-x) = \int_x^\infty e^{-\xi} \frac{d\xi}{\xi}. \quad (\text{B1})$$

Функция ошибок

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi; \quad \operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-\xi^2} d\xi. \quad (\text{B2})$$

Функция Бесселя n -го порядка первого и второго рода:

$$J_n(x); \quad Y_n(x).$$

Модифицированные функции Бесселя n -го порядка первого и второго рода: $I_n(x)$, $K_n(x)$, функция $K_n(x)$ называется также функцией Макдональда. Функции Бесселя удовлетворяют дифференциальному уравнению Бесселя:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0, \quad (\text{B3})$$

а модифицированные функции Бесселя — такому же уравнению, но только со знаком $(+)$ перед n^2 . Необходимые свойства перечисленных специальных функций можно найти в книге [74] или в справочнике [26].

С. Некоторые сведения из операционного вычисления

В операционном исчислении каждой функции $f(t)$ переменной t , определенной при $0 \leq t < \infty$, ставится в соответствие изображение

$$F(\sigma) = \int_0^\infty e^{-\sigma t} f(t) dt \equiv L\{f(t)\}. \quad (\text{C1})$$

Соотношение (C1) носит название преобразования Лапласа; переменная σ — параметр преобразования Лапласа. Если применить преобразование Лапласа к производной $f'(t)$ и выполнить интегрирование по частям, то получим

$$L\{f'(t)\} = \sigma F(\sigma) - f(0). \quad (\text{C2})$$

В частности, если $f(t) = 0$ при $t = 0$, то

$$L\{f'(t)\} = \sigma F(\sigma). \quad (\text{C3})$$

Таким образом, функциональной операции дифференцирования для функций соответствует алгебраическая операция умножения на параметр σ . Поэтому,

применяя преобразование Лапласа к некоторому дифференциальному уравнению, содержащему дифференцирование по времени, можно прийти к новому уравнению, в котором вместо аргумента t входит аргумент σ уже в качестве параметра [ср. уравнения (III.1.4) и (III.1.5)]. Решая это уравнение, находим изображение $F(\sigma)$. Наконец, завершающим этапом является нахождение оригинала $f(t)$ по изображению $F(\sigma)$. В настоящее время имеются обширные таблицы преобразований Лапласа, позволяющие в ряде случаев непосредственно найти所需要的 изображение и соответствующий ему интеграл. Если это не удастся сделать, то зачастую возможно свести рассматриваемый случай к табличному (приемы такого сведения также излагаются в справочниках). Например, пусть необходимо найти оригинал, отвечающий изображению

$$F(\sigma) = [(\sigma + \alpha)\sigma]^{-1}.$$

По таблице находим

$$[(\sigma + \alpha)^{-1}]^{-1} \leftrightarrow e^{-\alpha t}. \quad (C4)$$

Учитывая, далее, что умножение изображения на σ соответствует дифференцированию оригинала [формула (C2)], получаем

$$f'(t) = e^{-\alpha t}; \quad f(t) = \int_0^t e^{-\alpha \tau} d\tau = \frac{1}{\alpha} [1 - e^{-\alpha t}].$$

Тот же результат можно получить по-другому. Представим $F(\sigma)$ в виде:

$$F(\sigma) = \frac{1}{\sigma(\sigma + \alpha)} = \frac{1}{\alpha} \left[\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\sigma + \alpha} \right].$$

Отсюда, используя линейность преобразования Лапласа, по формуле (C4) получаем выражение для $f(t)$.

Наконец, в общем случае оригинал находится по изображению по формуле обращения:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F(\sigma) e^{\sigma t} \frac{d\sigma}{\sigma}. \quad (C5)$$

Здесь $F(\sigma)$ рассматривается как функция комплексного переменного $\sigma = \xi + i\eta$, и интеграл берется по прямой, параллельной мнимой оси η и расположенной правее нее. Формула обращения (C5) является одновременно и наиболее сложным, и наиболее универсальным средством анализа решения, полученного методами операционного исчисления. Согласно теории функций комплексного переменного, путь интегрирования в комплексной плоскости можно при определенных условиях деформировать, не изменяя значения интеграла. Это позволяет в ряде случаев либо явным образом вычислить интеграл (C5), либо исследовать его свойства. В частности, установлена следующая связь между видом функции $F(\sigma)$ и асимптотическим поведением функции $f(t)$ при $t \rightarrow \infty$.

Рассмотрим все особые точки функции $F(\sigma)$ ($\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots$), считая их занулерованными в порядке убывания вещественных частей ($\text{Re } \sigma_0 > \text{Re } \sigma_1 > \text{Re } \sigma_2 > \dots$). Тогда имеет место теорема [42].

Если изображение $F(\sigma)$ можно разложить в окрестности точки σ_0 в степенной ряд

$$F(\sigma) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} (\sigma - \sigma_0)^{\lambda_{\nu}} \quad (-N < \lambda_0 < \lambda_1 < \dots) \quad (C6)$$

с произвольными показателями (необязательно целочисленными), то оригинал $f(t)$ при $t \rightarrow \infty$ можно представить в виде асимптотического разложения:

$$f(t) \approx e^{\sigma_0 t} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu}{\Gamma(-\lambda_\nu)} t^{-\lambda_\nu-1}. \quad (C7)$$

в котором необходимо положить $1/\Gamma(-\lambda_\nu) = 0$, если λ_ν принимает значения 0; 1; 2; ...

В частности, отсюда следует, что если разложение (C6), начиная с некоторого члена, содержит лишь целые положительные степени, то соотношение (C7) превращается в конечную асимптотическую формулу. Поэтому разность

$$f_1(t) = f(t) - e^{\sigma_0 t} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu}{\Gamma(-\lambda_\nu)} t^{-\lambda_\nu-1} \quad (C8)$$

стремится к нулю быстрее (или возрастает медленнее), чем $e^{(\sigma_0 - \varepsilon)t}$, где ε — достаточно малое число.

Можно показать, что асимптотическое поведение $f_1(t)$ при $t \rightarrow \infty$ определяется поведением $F(\sigma)$ вблизи особой точки $\sigma = \sigma_1$ таким же образом, каким асимптотика $f(t)$ определяется поведением $F(\sigma)$ вблизи точки $\sigma = \sigma_0$.

В случае, если несколько особых точек изображения имеют одинаковые вещественные части, асимптотическое поведение оригинала оказывается более сложным. Соответствующие результаты приводятся также в литературе [42].

Д. Анализ размерностей и подобия

В теории фильтрации анализ размерностей и подобия играет существенную роль. Соображения анализа размерностей и подобия просты, но не тривиальны; они основаны на нескольких определениях и фактах, которые представляется целесообразным изложить здесь без доказательств.

1. Все физические величины выражаются числами, получающимися путем их сравнения с единицами измерения. Единицы измерения разделяются на основные (например, единица массы — 1 г, единица длины — 1 см и т. д.) и производные, которые получаются из основных единиц на основе определения соответствующих величин (единица скорости — 1 см/сек, единица силы — 1 гсм/сек² и т. д.). Системой единиц измерения называется совокупность единиц измерения, достаточная для измерения характеристик рассматриваемого класса явлений. Например, для класса механических явлений стандартной системой является система СИ, наряду с которой применяются системы СГС (см, г, сек), МКС (м, кгс (сила), сек). Классом систем единиц измерения называется совокупность систем единиц измерения, отличающихся только величиной основных единиц измерения. Например, из системы СИ получается класс систем

$$\frac{\text{кг}}{M}; \quad \frac{M}{L}; \quad \frac{\text{сек}}{T}, \quad (D1)$$

в котором основные единицы массы, длины и времени получают соответственно уменьшением в M , L , T раз произвольно выбранных единиц массы, длины и времени: килограмма, метра и секунды. Класс систем единиц измерения обозначается заглавными буквами величин, единицы измерения которых приняты за основные; одновременно эти буквы означают, во сколько раз уменьшается основная единица при переходе от одной системы к другой внутри данного класса. Например, класс (1) обозначается M/LT . Размерностью данной величины называется выражение, которое показывает, во сколько раз изменяется единица измерения данной величины при переходе от одной системы к другой внутри данного класса. Естественно, что размерность существенно зависит от класса систем

5. Фундаментальное значение имеет также понятие подобия явлений. Явления называются п о д о б н ы м и, если они отличаются между собой только величиной определяющих параметров $a_1, \dots, a_n$ и притом так, что величины $\pi_1, \dots, \pi_{n-k}$ для этих явлений одинаковы.

Важность понятия подобия явлений определяется следующими соображениями. Рассмотрим два подобных явления, одно из них условно назовем моделью, другое — натурой; соответствующие значения величин будем обозначать индексами (м) и (н).

В силу π -теоремы и равенства величин $\pi_1, \dots, \pi_{n-k}$ величины π для этих двух явлений равны:

$$\pi^{(м)} = \pi^{(н)}, \quad (D7)$$

откуда и из (D5) имеем

$$a^{(н)} = a^{(м)} \left(\frac{a_1^{(н)}}{a_1^{(м)}} \right)^\alpha, \dots, \left(\frac{a_k^{(н)}}{a_k^{(м)}} \right)^\chi, \quad (D8)$$

так что значение $a^{(н)}$ в натуре при обеспечении подобия простым пересчетом получается по результатам определения величины $a^{(м)}$ на модели (в ряде случаев более дешевой, проще изготавливаемой и т. д.). Величины $\pi_1, \dots, \pi_{n-k}$, равенство которых обеспечивает подобие явлений, называются поэтому параметрами подобия, или критериями подобия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алишаев М. Г., Вахитов Г. Г., Глумов И. Ф., Фоменко И. Е. Особенности фильтрации пластовой девонской нефти при пониженных температурах. «Теория и практика добычи нефти». Ежегодник. М., изд-во «Недра», 1966.
2. Аравин В. И., Нумеров С. Н. Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде. М., Гостехтеориздат, 1953.
3. Бан А., Богомолова А. Ф., Максимов В. А., Николаевский В. Н., Оганжаиянц В. Г., Рыжик В. М. Влияние свойств горных пород на движение в них жидкостей. М., Гостоптехиздат, 1962.
4. Баренблатт Г. И. О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде. «Прикладная математика и механика», т. 16, вып. 1, 1952.
5. Баренблатт Г. И. Об автомодельных движениях сжимаемой жидкости в пористой среде. «Прикладная математика и механика», т. 16, вып. 6, 1952.
6. Баренблатт Г. И. Об одном классе точных решений плоской одномерной задачи нестационарной фильтрации газа в пористой среде. «Прикладная математика и механика», т. 17, вып. 6, 1953.
7. Баренблатт Г. И. О приближенном решении задач одномерной нестационарной фильтрации в пористой среде. «Прикладная математика и механика», т. 18, вып. 3, 1954.
8. Баренблатт Г. И. О предельных автомодельных движениях в теории нестационарной фильтрации газа в пористой среде и теории пограничного слоя. «Прикладная математика и механика», т. 18, вып. 4, 1954.
9. Баренблатт Г. И. О некоторых задачах неустановившейся фильтрации. Изв. АН СССР, ОТН, № 6, 1954.
10. Баренблатт Г. И. О некоторых приближенных методах в теории одномерной неустановившейся фильтрации жидкости при упругом режиме. Изв. АН СССР, ОТН, № 9, 1954.
11. Баренблатт Г. И. О некоторых задачах восстановления давления и распространения волны разгрузки при упруго-пластическом режиме фильтрации. Изв. АН СССР, ОТН, № 2, 1955.
12. Баренблатт Г. И. О возможности линеаризации в задачах нестационарной фильтрации газа. Изв. АН СССР, ОТН, № 11, 1956.

13. Баренблатт Г. И. Об автомодельных решениях задачи Коши для нелинейного параболического уравнения нестационарной фильтрации газа в пористой среде. «Прикладная математика и механика», т. 20, вып. 6, 1956.
14. Баренблатт Г. И. О некоторых краевых задачах для уравнений фильтрации жидкости в трещиноватых породах. «Прикладная математика и механика», т. XXVII, вып. 2, 1963.
15. Баренблатт Г. И., Борисов Ю. А., Каменский С. Г., Крылов А. П. Об определении параметров нефтеносного пласта по данным о восстановлении давления в остановленных скважинах. Изв. АН СССР, ОТН, № 11, 1957.
16. Баренблатт Г. И., Вишик М. И. О конечной скорости распространения в задачах неустановившейся фильтрации жидкости и газа в пористой среде. «Прикладная математика и механика», т. 20, вып. 3, 1956.
17. Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П. Об основных уравнениях фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах. ДАН СССР, т. 132, вып. 3, 1960.
18. Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах. «Прикладная математика и механика», т. 24, вып. 5, 1960.
19. Баренблатт Г. И., Зельдович Я. Б. О решении типа диполя в задачах нестационарной фильтрации газа при политропическом режиме. «Прикладная математика и механика», т. 21, вып. 5, 1957.
20. Баренблатт Г. И., Крылов А. П. Об упруго-пластическом режиме фильтрации. Изв. АН СССР, ОТН, № 2, 1955.
21. Баренблатт Г. И., Крылов А. П. Об упруго-пластическом режиме нефтяного пласта. Доклады на IV Международном нефтяном конгрессе в Риме. Изд-во АН СССР, М., 1955.
22. Баренблатт Г. И., Максимов В. А. О влиянии неоднородностей на определение параметров нефтеносного пласта по данным нестационарного притока жидкости к скважинам. Изв. АН СССР, ОТН, № 7, 1958.
23. Баренблатт Г. И., Сивашинский Г. И. Автомодельные решения второго рода в нелинейной фильтрации. «Прикладная математика и механика», т. 33, вып. 5, 1969.
24. Баренблатт Г. И., Трифонов Н. П. О некоторых осесимметричных задачах неустановившейся фильтрации жидкости и газа в пористой среде. Изв. АН СССР, ОТН, 1956.
25. Баренблатт Г. И., Шестаков В. М. О фильтрации в сухой грунт. «Гидротехническое строительство», 1955, № 1.
26. Баренблатт Г. И. Фильтрация двух несмешивающихся жидкостей в однородной пористой среде. Изв. АН СССР, серия «Механика жидкости и газа», № 5, 1971.
27. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т. 1—3 (пер. с англ.). М., изд-во «Наука», 1965—1967.
28. Берчик Э. Свойства пластовых жидкостей. Гостоптехиздат, 1960.
- 28а. Бернштейн М. А. Анализ разработки газовых месторождений и установление реальных запасов газа на примере Ижма-Омринских месторождений Коми АССР. Дисс. на соиск. уч. степ. канд. техн. наук, МИНХ и ГП, М., 1964.
29. Блиннов А. Ф., Зайнуллин Н. Т. Об изменении параметров пласта в нагнетательных скважинах. Тр. ТатНИИ, вып. 10. М., изд-во «Недра», 1967.

30. Боксерман А. А., Данилов В. Л., Желтов Ю. П., Кочешков А. А. К теории фильтрации несмешивающихся жидкостей в трещиновато-пористых породах. «Теория и практика добычи нефти», Ежегодник ВНИИНефть. М., изд-во «Недра», 1966.

31. Боксерман А. А., Желтов Ю. П., Кочешков А. А. О движении несмешивающихся жидкостей в трещиновато-пористой среде. ДАН СССР, т. 155, № 6, 1964.

32. Боксерман А. А., Шалимов Б. В. О циклическом воздействии на пласты с двойной пористостью при вытеснении нефти водой. Изв. АН СССР, серия «Механика жидкостей и газа», 1967, № 2.

33. Борисов Ю. П. Определение дебита скважин при совместной работе нескольких рядов скважин. Тр. МНИ им. Губкина, вып. 11. М., Гостоптехиздат, 1951.

34. Бузинов С. Н. Теоретические и экспериментальные исследования движения двухфазной системы жидкостей в пористой среде. Дисс. на соиск. уч. степ. канд. техн. наук, МИНХ и ГП, 1958.

35. Бузинов С. Н., Умрихин И. Д. Исследование пластов и скважин при упругом режиме фильтрации. М., Гостоптехиздат, 1964.

36. Бузинов С. Н., Чарный И. А. О движении скачков насыщенности при вытеснении нефти водой. Изв. АН СССР, ОТН, № 7, 1957.

36а. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М., изд-во «Мир», 1967.

37. Герсеванов Н. М. Основы динамики грунтовой массы. М., Гостройиздат, 1933.

38. Гусейн-Заде М. А. Фильтрация в неоднородных пластах. М., Гостоптехиздат, 1963.

39. Гусейнов Г. П. Некоторые вопросы гидродинамики нефтяного пласта. Баку, Азернешр, 1961.

40. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.

41. Двайт Г. Таблицы интегралов. М., ИИЛ, 1948.

42. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. М., Физматгиз, 1958.

43. Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М., Физматгиз, 1961.

44. Ентов В. М. О приближенном решении плоско-радиальных задач нестационарной фильтрации. Изв. АН СССР, серия «Механика и машиностроение» № 4, 1964.

45. Ентов В. М. Об одной задаче нелинейной нестационарной фильтрации. Изв. АН СССР, серия «Механика и машиностроение», № 5, 1963.

46. Ентов В. М. Об исследовании скважин на нестационарный приток при нелинейном законе фильтрации. Изв. АН СССР, серия «Механика и машиностроение», № 6, 1964.

47. Ентов В. М. Об эффективном коэффициенте теплопроводности насыщенной пористой среды при наличии фильтрационного движения. «Прикладная механика и техническая физика», 1965, № 5.

48. Ентов В. М. Нестационарные задачи нелинейной фильтрации. Дисс. на соиск. уч. степ. канд. техн. наук, МИНХ и ГП, 1964.

49. Ентов В. М., Сухарев М. Г. Автомодельный случай плоско-радиальной нестационарной фильтрации при нелинейном законе сопротивления. Изв. вузов, «Нефть и газ», № 4, 1965.

50. Зельдович Я. Б., Компансец А. С. К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры. Сб. к 70-летию А. Ф. Иоффе, М., изд-во АН СССР, 1950.

51. Каменомостская С. Л. Об одной задаче теории фильтрации. ДАН СССР, т. 116, № 1, 1957.

52. Каменомостская С. Л. Некоторые задачи для уравнений параболического типа с неизвестной границей. Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук, МГУ, 1958.

53. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., Физматгиз, 1961.

54. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел (пер. с англ.). М., изд-во «Наука», 1964.

55. Кисиленко Б. Е. Экспериментальное изучение характера продвижения водо-нефтяного контакта в пористой среде. Изв. АН СССР, серия «Механика и машиностроение», № 6, 1963.

56. Кисляков Ю. П., Демин Н. В., Русских В. Н. Влияние градиентов давления на величину параметров пласта на Туймазинском месторождении. «Нефтяное хозяйство», 1964, № 2.

57. Коджасв Ш. Я., Кочешков А. А. Экспериментальное исследование поведения стабилизированной зоны при заводнении трещиновато-пористой среды. Научно-техн. сб. по доб. нефти, ВНИИНефть, вып. 26. М., изд-во «Недра», 1965.

58. Коллинз Р. Течения жидкостей через пористые материалы. (Пер. с англ.). М., изд-во «Мир», 1964.

59. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, т. 1. М., Гостехтеориздат, 1955; т. II, Физматгиз, 1963.

60. Кочин Н. Е., Лойцянский Л. Г. Об одном приближенном методе расчета ламинарного пограничного слоя. ДАН СССР, т. 36, вып. 9, 1942.

61. Крылов А. Н. Лекции о приближенных вычислениях, изд. 4-е, М., Гостехиздат, 1950.

62. Кусаков М. М., Мекеницкая Л. И. Толщина тонких слоев связанной воды. Тр. IV Международного нефтяного конгресса, т. III, М., изд-во АН СССР, 1956.

63. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., Физматгиз, 1958.

64. Лан Чжан-Синь. Решение задачи о нестационарной фильтрации газа в пласте переменной мощности. «Газовая промышленность», 1961, № 7.

65. Лан Чжан-Синь. Расчет истощения газового пласта, дренируемого батареями скважин. Изв. вузов, «Нефть и газ», № 3, 1962.

66. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. М., изд-во «Наука», 1964.

67. Лапук Б. Б. Теоретические основы разработки месторождений природных газов. М., Гостехиздат, 1948.

68. Лапук Б. Б. Приближенное решение задач о неустановившейся радиальной фильтрации газов. ДАН СССР, т. 58, вып. 1, 1947.

69. Лебедев Н. Н., Скальская И. С., Уфлянд Я. С. Сборник задач по математической физике. М., Гостехтереоиздат, 1955.
70. Лейбензон Л. С. Движение газа в пористой среде. «Нефтяное хозяйство», 1930, № 8—9.
71. Лейбензон Л. С. Подземная гидравлика воды, нефти и газа. Собр. трудов, т. II. М., изд-во АН СССР, 1953.
72. Лейбензон Л. С. Движение газированной жидкости в пористой среде. Изв. АН СССР, серия геогр., № 4—5, 1941.
73. Лейбензон Л. С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. М., Гостехиздат, 1947.
74. Лебедев Н. Н. Специальные функции и некоторые их приложения, изд. 2-е. М., Физматгиз, М., 1963.
75. Максимов В. А. О влиянии неоднородностей на определение параметров нефтеносного пласта по данным нестационарного притока жидкости к скважинам. Изв. АН СССР, серия «Механика и машиностроение», № 3, 1959.
76. Максимов В. А. О влиянии неоднородностей на определение параметров нефтеносного пласта, по данным нестационарного притока жидкости к скважинам. Случай двухслойного пласта. Изв. АН СССР, серия «Механика и машиностроение», № 3, 1960.
77. Мартос В. Н., Рьжик В. М. Исследования капиллярной проницки пористых сред применительно к моделированию процесса вытеснения газа водой. АН СССР, серия «Механика жидкости и газа», № 1, 1967.
78. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде (пер. с англ.). М., Гостоптехиздат, 1949.
79. Маскет М. Физические основы технологии добычи нефти (пер. с англ.). М., Гостоптехиздат, 1953.
80. Медведский Р. И. Определение давления в остановленной скважине пористо-трещиноватого коллектора. Сб. «Гидродинамические методы исследования пластов и скважин». Баку, АЗИПТИ, 1967.
81. Мельничук Я. Г., Иванюта М. М. Применение термометрии в исследовании нефтяных и газовых скважин и пластов. Тр. Укр. НИГРИ, вып. 3. Гостоптехиздат, 1963.
82. Минский Е. М. О турбулентной фплътрации в пористых средах. ДАН СССР, т. 78, № 3, 1951.
83. Минский Е. М. О турбулентной фплътрации газа в пористых средах. Тр. Всес. н.-и ин-та природных газов. «Вопросы добычи, транспорта и переработки природных газов». М., Гостоптехиздат, 1951.
84. Минский Е. М. Статистическое обоснование уравнений фплътрационного движения. ДАН СССР, т. 118, № 2, 1958.
85. Мирзаджанзаде А. Х. Вопросы гидродинамики вязко-пластических и вязких жидкостей в применении к нефтедобыче. Баку, Азернефть, 1959.
86. Мирзаджанзаде А. Х., Мирзоян А. А., Гевинян Г. М., Сепд-Рза М. К. Гидравлика глинистых и цементных растворов. М., изд-во «Недра», 1966.
87. Пемыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М., Гостехиздат, 1947.
88. Николаевский В. Н. Некоторые задачи распространения меченых частиц в фплътрационных потоках. Изв. АН СССР, серия «Механика и машиностроение», № 5, 1960.

89. Нумеров С. Н. О неустановившейся фильтрации в полосообразном пласте к прямолинейной цепочке совершенных скважин. Изв. АН СССР, ОТН, № 1, 1958.

90. Пирвердян А. М. Приближенное решение задач о фильтрации жидкости при упругом режиме. ДАН АзССР, т. 6, № 1, 1950.

91. Пирвердян А. М. Нефтяная подземная гидравлика. Баку, Азнефтеиздат, 1956.

92. Полубаринова-Кочина П. Я. Об одном нелинейном уравнении в частных производных, встречающемся в теории фильтрации. ДАН СССР, т. 63, № 6, 1948.

93. Полубаринова-Кочина П. Я. О неустановившихся движениях грунтовых вод при фильтрации из водохранилищ. «Прикладная математика и механика», т. 13, № 2, 1949.

94. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М., Гостехиздат, 1952.

95. Прандтль Л. Гидроаэромеханика (пер. с нем.). М., ИИЛ, 1949.

96. Роза С. А. Осадки гидротехнических сооружений на глинах с малой влажностью. «Гидротехническое строительство». 1950, № 9.

97. Ромм Е. С. Фильтрационные свойства трещиноватых горных пород. М., изд-во «Недра», 1966.

98. Рыжик В. М. О вытеснении нефти водой в пористой среде с малопроницаемыми включениями. Изв. АН СССР, серия «Механика и машиностроение», № 1, 1964.

99. Рыжик В. М. О капиллярной пропитке водой нефтенасыщенного гидрофильного пласта. Изв. АН СССР, серия «Механика и машиностроение», № 2, 1960.

99а. Рыжик В. М., Чарный И. А., Чень Чжун-Сян. О некоторых точных решениях уравнений нестационарной фильтрации двухфазной жидкости. Изв. АН СССР, серия «Механика и машиностроение», № 1, 1961.

100. Рыжик В. М. О механизме капиллярной пропитки пористой среды. Изв. АН СССР, серия «Механика и машиностроение», № 6, 1959.

101. Рыжик В. М. Некоторые задачи взаимного вытеснения несмешивающихся жидкостей из пористой среды. Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук, МГУ, 1962.

102. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М., Гостехтеориздат, 1957.

103. Седов Л. И. О неустановившихся движениях сжимаемой жидкости. ДАН СССР, т. 48, № 2, 1945.

104. Скворцов Э. В. К одномерной задаче вытеснения нефти водой в трещиновато-пористой среде. Изв. АН СССР, серия «Механика жидкости и газа», № 5, 1967.

105. Слезкин Н. А., Тарг С. М. Обобщенные уравнения Рейнольдса. ДАН СССР, т. 54, 1946.

106. Снеддон И. Преобразования Фурье (пер. с англ.). М., ИИЛ, 1955.

107. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л., изд-во ЛГУ, 1950.

108. Соколов Ю. Д. Об одной задаче теории неустановившихся движений грунтовых вод. «Укр. математич. журнал», № 5, 1954, № 2.

109. Станюкович К. П. Об автомодельных решениях уравнений гидродинамики, обладающих центральной симметрией. ДАН СССР, т. 48, вып. 5, 1945.
110. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. М., Гостехиздат, 1955.
111. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. М., Гостехтеориздат, 1953.
112. Султанов Б. И. О фильтрации вязко-пластических жидкостей в пористой среде. Изв. АН СССР, серия физ.-мат. и техн. наук, № 5, 1960.
113. Сухарев М. Г. Метод приближенного расчета интерференции скважин при упругом режиме фильтрации. Изв. вузов, «Нефть и газ», № 6, 1959.
114. Уиттекер Э. и Ватсон Дж. Курс современного анализа, т. I и II (пер. с англ.). М., Физматгиз, 1963.
115. Фенчер Д., Льюис Д., Бернс К. Физические испытания пород нефтяных и газовых пластов и их свойства. «Илотехника», вып. 105. Баку — М., 1935.
116. Флорин В. А. Уплотнение земляной среды и фильтрация при переменной пористости с учетом влияния связанной воды. Изв. АН СССР, ОТН, № 14, 1951.
117. Форхгеймер Ф. Гидравлика. М. — Л., ОНТИ, 1935.
118. Чарный И. А. Подземная гидромеханика. М., Гостехиздат, 1948.
119. Чарный И. А. Подземная гидрогазодинамика. М., Гостоптехиздат, 1963.
120. Чарный И. А. Метод последовательной смены стационарных состояний. Изв. АН СССР, ОТН, № 3, 1949.
121. Чекалюк Э. Б. Термодинамика нефтяного пласта. М., изд-во «Недра», 1965.
122. Шестаков В. М. Вопросы моделирования. Сб. «Вопросы фильтрационных расчетов». М., Стройиздат, 1956.
123. Щелкачев В. Н. Основные уравнения движения упругой жидкости в упругой пористой среде. ДАН СССР, т. 52, № 2, 1946.
124. Щелкачев В. Н. Упругий режим пластовых водонапорных систем. М., Гостоптехиздат, 1948.
125. Щелкачев В. Н. Разработка нефтеводоносных пластов при упругом режиме. М., Гостоптехиздат, 1959.
126. Щелкачев В. Н., Лапук Б. Б. Подземная гидравлика. М., Гостоптехиздат, 1949.
127. Эфрос Д. А. Исследование фильтрации неоднородных систем. М., Гостоптехиздат, 1963.
128. Эфрос Д. А., Оноприенко В. П. Моделирование линейного вытеснения нефти водой. Тр. ВПНИНефть, вып. 12. М., Гостоптехиздат, 1958.
129. Янке Е., Эмде Ф. Таблицы функций с формулами и кривыми (пер. с нем.). М., Физматгиз, 1959.
130. Benham O. L., Olson R. W. A model study of viscous fingering. Soc. Petr. Eng. Journ. June, N 3, p. 138, 1963.
131. Bentsen R. G., Nielsen R. E. A study of plane radial miscible displacement in a consolidated porous medium. Soc. Petr. Eng. Journ., vol. 6, N 4, March 1966.
132. Bondarenko N., Nerpin S. Propriétés rhéologiques de l'eau dans les milieux poreux. Colloque RILEM, 1964.

133. Boussinesq J. Recherches théoriques sur l'écoulement des nappes d'eau infiltrées dans le sol. J. de math. pure et appl., ser. 5, vol. X, 1904.

134. Buckley S., Leverett M. C. Mechanism of fluid displacement in sands. Trans. AIME, vol. 146, 1942.

135. Chuoke R. L., van Meurs P., van der Poel C. The instability of slow immiscible viscous liquid-liquid displacement in permeable media. Trans. AIME, vol. 216, 1959.

136. Falkner V. M., Skan S. W. Some approximate solutions of the boundary layer equations. Aeron. Res. Comm. Rep. and Mem., N 1314, 1930.

137. Goldstein S. A note on the boundary layer equations. Proc. Cambr. Phil. Soc., vol. 35, 1939.

138. Jacob C. E. On the flow of water in an elastic artesian aquifer. Trans. Amer. Geophys. Union, 1940, p. 11.

139. Koch H. A., Slobod R. L. Miscible slug process. Journ. Petrol. Technology, N 2, Febr. 1957.

140. Koval E. J. A method for predicting the performance of unstable miscible displacement in heterogeneous media. Soc. Petr. Eng. J., 1963, vol. 3, N 2.

141. Jones-Parra J., Colhoun J. Computation of a linear flood by the stabilized zone method. Trans. AIME, vol. 198, 1953.

142. Kyle C. R., Perrine R. L. Experimental studies of miscible displacement instability. Soc. Petr. Eng. J., 1965, N 3, N 5.

143. Leverett M. C. Capillary behaviour in porous solids. Trans. AIME, vol. 142, 1941, p. 151.

144. Leverett M. Flow of oil-water mixtures through unconsolidated sands. Trans. AIME, vol. 132, 1939.

145. Mattax C., Kyte J. Imbibition oil recovery from fractured water-drive reservoir. Soc. Petr. Eng. Journ. June 1962, N 2.

146. Miller C. C., Dycs A. B., Hutchinson C. A. The estimation of permeability and reservoir pressure from bottom-hole pressure build-up characteristics. Journ. Petr. Techn., vol. 2, N 4, 1950.

147. Marle C., Pottier J. Aspects théoriques du déplacement miscible en milieux poreux pour la récupération du pétrole. Rev. de l'Inst. Franc. de pétrole, 1965, vol. 20, N 2.

148. Muskat M., Botset M. Flow of gases through porous materials. «Physics», vol. 4, N 1, 1931.

149. Nemenyi P. Über die Gültigkeit des Darcyschen Gesetzen und deren Grenzen. Wasserkraft u. Wasserwirtschaft, 29(14), 157—159, 1934.

150. Odeh A. S. Effect of viscosity on relative permeability. J. Petrol. Techn., N 12, 1959.

151. Perrine R. L. A unified theory for stable and unstable miscible displacement. Soc. Petr. Eng. J., 1963, vol. 3, N 3.

152. Rapoport L. A., Leas W. J. Properties of linear waterfloods. Trans. AIME, vol. 198, 1953.

153. Von Rosenberg D. V. Mechanics of steady singlephase fluid displacement from porous media. AIChE Journal, 1956, vol. 2, N 1.

154. Saffman P. G. A theory of dispersion in a porous medium. Journ. Fluid Mech., vol. 6, N 3, 1959.

155. Saffman P., Taylor G. The penetration of a fluid into a porous media or Hele — Shaw cell containing a more viscous fluid. Proc. Roy. Soc., N 1242, A-245, 1958.

156. Scheidegger A. E. Growth of instabilities on displacement fronts in porous media. Phys. Fluids., 1960, vol. 3, N 1.

157. Schneebeli G. Expériences sur la limite de validité de la loi de Darcy et l'apparition de la turbulence dans un écoulement de filtration. Houille Blanche, Mars-Avril 1955, N 2.

158. Terwilliger P. L. An experimental and theoretical investigation of gravity drainage performance. Trans. AIME, vol. 192, 1951.

159. Terzaghi K. Erdbaumechanik auf bodenphysikalischen Grundlage F. Denticke. Leipzig, 1925.

160. Theiss Ch. V. The relation between the lowering of the piezometric surface and the rate and duration of discharge of a well using ground-water storage. Trans. am. geophys. union, 1935, v. 16, pt. 2, p. 519—524.

161. Wyckoff R. D., Botset H. F. Flow of gas-liquid mixtures through unconsolidated sands. «Physics», vol. 7, 1936.

162. Engelhardt W. v., Tunn W. Über das Strömen von Flüssigkeiten durch Sandsteine. Heidelberger Beiträge zur Mineralogie und Petrographie. Bd. 4, H. 1/2, 1954.

О Г Л А В Л Е Н И Е

Глава I. Физические основы	3
§ 1. Пористая среда и ее свойства	3
§ 2. Закон фильтрации однородной жидкости	6
§ 3. Зависимость параметров жидкости и пористой среды от давления	11
Глава II. Основные задачи нестационарной фильтрации	17
§ 1. Уравнение неразрывности	17
§ 2. Упругий режим фильтрации	18
§ 3. Уравнения безнапорной фильтрации несжимаемой жидкости	20
§ 4. Основные уравнения фильтрации газа	23
Глава III. Теория упругого режима фильтрации	26
§ 1. Одномерное прямолинейно-параллельное движение	26
§ 2. Осесимметричные задачи и задачи интерференции скважин при неустановившейся фильтрации	32
§ 3. Некоторые специальные задачи упругого режима	37
§ 4. Обратные задачи линейной теории нестационарной фильтрации	47
Глава IV. Нелинейные инвариантные задачи нестационарной фильтрации жидкостей и газов	57
§ 1. Общая характеристика инвариантных задач теории нестационарной фильтрации. Автомодельные пологие безнапорные движения при нулевом начальном уровне жидкости	57
§ 2. Пологие безнапорные движения с нулевым начальным напором: предельные автомодельные движения, осесимметричные автомодельные движения	73
§ 3. Автомодельные движения жидкости и газа плоскими волнами в полубесконечном пласте при ненулевом начальном давлении газа или уровне жидкости	84
§ 4. Осесимметричные автомодельные движения в бесконечном пласте при ненулевом начальном давлении газа или уровне жидкости	89
§ 5. Некоторые специальные автомодельные движения	99
Глава V. Приближенные методы решения задач нестационарной фильтрации	115
§ 1. Схема метода интегральных соотношений. Приток к галерее в бесконечном пласте при упругом режиме	116
§ 2. Решение задач упругого режима методом интегральных соотношений	125
§ 3. Решение задач нестационарной фильтрации газа	131

§ 4. Видоизменение метода интегральных соотношений для случая бесконечного пласта	140
Глава VI. Фильтрация неоднородных жидкостей	146
§ 1. Фильтрация многофазных жидкостей	146
§ 2. Вытеснение несмешивающихся жидкостей. Задача Баклея — Левсретта	155
§ 3. Структура скачка насыщенности. Уравнение Рапопорта — Лиса. Стабилизированная зона	164
§ 4. Капиллярная проницаемость и автомодельные задачи вытеснения несмешивающихся жидкостей	172
Глава VII. Неустановившаяся фильтрация в трещиновато-пористых средах, средах с двойной пористостью и слоистых породах	185
§ 1. Фильтрация однородной жидкости в трещиновато-пористой среде	185
§ 2. Основные задачи неустановившейся фильтрации однородной жидкости в трещиноватых и слоистых пластах	194
§ 3. Двухфазная нестационарная фильтрация и вытеснение несмешивающихся жидкостей в средах с двойной пористостью	202
Глава VIII. Нелинейная нестационарная фильтрация	217
§ 1. Отклонения от закона Дарси. Нелинейная фильтрация	217
§ 2. Автомодельные решения задачи фильтрации жидкости при нелинейном законе сопротивления. Фильтрация с предельным градиентом	224
§ 3. Приближенное решение задач нестационарной фильтрации при нелинейном законе сопротивления	231
Глава IX. Специальные задачи нестационарной фильтрации однородной жидкости	238
§ 1. Непзотермическое фильтрационное движение	238
§ 2. Упруго-пластический режим нефтяного пласта	245
Глава X. Специальные задачи нестационарной фильтрации неоднородной жидкости	255
§ 1. Вытеснение взаимосмешивающихся жидкостей	255
§ 2. Устойчивость вытеснения несмешивающихся и смешивающихся жидкостей из пористой среды	261
Приложение	272
Список литературы	278

*Григорий Исаакович Баренблатт, Владимир Мордухович Ентов,
Виктор Михайлович Рыжик*

ТЕОРИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ И ГАЗА

Редактор Н. Д. Дубровина Технический редактор В. В. Соколова
Корректор М. П. Курялева

Сдано в набор 13/VII 1972 г. Подписано в печать 17/X 1972 г. Т-17124.
Формат 60×90^{1/16}. Бумага № 2. Печ. л. 18.0. Уч.-изд. л. 18,51.
Тираж 1500 экз. Заказ № 1865/72-6. Цена 2 р. 08 к.

Издательство «Недра», 103633, Москва, К-12, Третьяковский проезд, 1/19.
Ленинградская типография № 6 Главполиграфпрома Государственного
Комитета Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
Московский пр., 94.