

Б А К А Л А В Р И А Т

*Г.С. Варданян, В.И. Андреев,
Н.М. Атаров, А.А. Горшков*

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ С ОСНОВАМИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ

У Ч Е Б Н И К



Электронно-
Библиотечная
Система
znanium.com



Уважаемый читатель!

Вы держите в руках книгу,
дополнительные материалы которой
доступны Вам БЕСПЛАТНО
в Интернете на www.znanium.com
Специального программного
обеспечения не требуется



**Г.С. ВАРДАНЯН, В.И. АНДРЕЕВ,
Н.М. АТАРОВ, А.А. ГОРШКОВ**

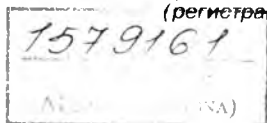
СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ С ОСНОВАМИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ

УЧЕБНИК

Под редакцией заслуженного деятеля науки и техники Российской Федерации,
профессора Г.С. Варданяна и почетного работника высшего профессионального
образования Российской Федерации, профессора Н.М. Атарова

Второе издание, исправленное и дополненное

*Рекомендовано
Государственным образовательным учреждением
высшего профессионального образования
«Московский государственный строительный университет»
в качестве учебника для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлению подготовки 08.03.01 (270100) «Строительство»
(регистрационный № рецензии 1100 от 09.11.2010, МГУП)*



**Электронно-
Библиотечная
Система
znanium.com**

*Соответствует
Федеральному государственному
образовательному стандарту
3-го поколения*

Москва
ИНФРА-М
2014

УДК 539.3(075.8)
ББК 30.121я73
В18

ФЗ
№ 436-ФЗ

Издание не подлежит маркировке
в соответствии с п. 1 ч. 1 ст. 11

Рецензенты:

кафедра «Прочность материалов и конструкций»

Российского университета дружбы народов

(зав. кафедрой профессор, д-р техн. наук *С.Н. Кривошапко*);

член-кор. РААСН, профессор, д-р техн. наук *Н.Н. Шапошников*

(Московский государственный университет путей сообщения)

В18

Варданын Г.С., Андреев В.И., Атаров Н.М., Горшков А.А.

Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности: Учебник / Под ред. Г.С. Варданына и Н.М. Атарова. — 2-е изд., испр. и доп. — М.: ИНФРА-М, 2014. — 512 с. + Доп. материалы [Электронный ресурс; Режим доступа <http://www.znanium.com>]. — (Высшее образование: Бакалавриат). — DOI 10.12737/3068 (www.doi.org).

ISBN 978-5-16-009587-5 (print)

ISBN 978-5-16-100841-6 (online)

В учебнике изложен единый курс сопротивления материалов с основами теории упругости, пластичности и ползучести, соответствующий Государственному стандарту Федерального Агентства Российской Федерации по образованию в области строительства.

Рассмотрены все основные разделы курса, излагаемого студентам вузов и факультетов строительного профиля. Некоторые формулы сопротивления материалов получены с помощью общих уравнений механики деформируемого твердого тела, что способствовало более компактному построению курса.

Учебник может быть также полезен студентам других технических специальностей.

УДК 539.3(075.8)

ББК 30.121я73

Материалы, отмеченные знаком , доступны в электронно-библиотечной системе [znanium \(www.znanium.com\)](http://www.znanium.com)

ISBN 978-5-16-009587-5 (print)

ISBN 978-5-16-100841-6 (online)

© Варданын Г.С., Андреев В.И.,

Атаров Н.М., Горшков А.А., 2011, 2014

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий учебник написан в соответствии с учебными планами и программами для строительных специальностей вузов по дисциплине «Сопротивление материалов».

В учебнике изложен единый курс сопротивления материалов с основами теории упругости, пластичности и ползучести на основе механики деформируемого твердого тела. При этом даются основные зависимости механики деформируемого твердого тела, затем с использованием этих зависимостей рассматриваются напряженное и деформированное состояния и оценка прочности стержней при различных видах деформирования. Этот материал излагается в первой и второй частях учебника.

В третьей части учебника даются постановка задачи теории упругости и методы ее решения. Рассматриваются плоская задача и изгиб тонких пластин, а также основы теории пластичности и ползучести. Такое объединение разделов механики деформируемого твердого тела позволяет более рационально использовать отведенное учебным планом время, а главное — добиться более глубокого понимания студентами внутренних связей этой науки.

Многие формулы, используемые в традиционных курсах сопротивления материалов, в учебнике получены с помощью общих уравнений механики деформируемого твердого тела. Это способствует лучшему пониманию тех допущений, которые лежат в основе используемых формул, и более обоснованному применению их при расчете конструкций на прочность и жесткость.

Некоторые второстепенные вопросы в учебнике изложены менее подробно или вообще исключены из рассмотрения, что соответствует практике изложения учебного материала в аудиторных условиях.

Учебник написан профессорами кафедры сопротивления материалов Московского государственного строительного университета (МГСУ—МИСИ) с учетом опыта многолетнего преподавания данной дисциплины.

В написании глав «Экспериментальные методы определения напряжений и деформаций» и «Численные методы решения задач сопротивления материалов и теории упругости» большую помощь

оказали авторам соответственно старший научный сотрудник И.В. Жаворонок и профессор В.И. Прокопьев. Авторы выражают им благодарность за проделанную работу.

Авторы выражают также благодарность проф. В.В. Павлову за ценные замечания и помощь в подготовке рукописи к изданию.

В учебнике использована Международная система единиц (СИ). Соотношения между основными механическими величинами в единицах СИ и в технической системе приведены в следующей таблице.

Наименование величины	Единица		Соотношение единиц
	Наименование	Обозначение	
Сила, нагрузка, вес	Ньютон	Н	$1 \text{ Н} \approx 0,1 \text{ кгс}$ $1 \text{ кН} \approx 0,1 \text{ тс}$
Линейная нагрузка	Ньютон на метр	Н/м	$1 \text{ Н/м} \approx 0,1 \text{ кгс/м}$ $1 \text{ кН/м} \approx 0,1 \text{ тс/м}$
Момент силы, момент пары сил	Ньютон-метр	Нм	$1 \text{ Нм} \approx 0,1 \text{ кгс} \cdot \text{м}$ $1 \text{ кНм} \approx 0,1 \text{ тс} \cdot \text{м}$
Напряжение, давление	Паскаль	Па	$1 \text{ Па} \approx 0,1 \text{ кгс/м}^2$ $1 \text{ МПа} \approx 10 \text{ кгс/см}^2$

При определении напряжений в качестве вспомогательной единицы измерения также используется кН/см^2 ($1 \text{ кН/см}^2 = 10 \text{ МПа}$).

Во втором издании учебника исправлены ошибки, выполнены методическая и литературная редакции и включены некоторые дополнения. Общее редактирование выполнено проф. Н.М. Атаровым.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ГЛАВА 1

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

1.1. Задачи механики деформируемого твердого тела

Механика деформируемого твердого тела — наука, в которой изучаются законы равновесия и движения твердых тел в условиях их деформирования при различных воздействиях. Деформация твердого тела заключается в том, что изменяются его размеры и форма. С этим свойством твердых тел как элементов конструкций, сооружений и машин инженер постоянно встречается в своей практической деятельности. Например, стержень под действием растягивающих сил удлинится, балка, нагруженная поперечной нагрузкой, изгибается и т.п.

При действии нагрузок, а также при тепловых воздействиях в твердых телах возникают внутренние силы, которые характеризуют сопротивление тела деформации. Внутренние силы, отнесенные к единице площади, называются *напряжениями*.

Исследование напряженного и деформированного состояний твердых тел при различных воздействиях составляет основную задачу механики деформируемого твердого тела.

Сопротивление материалов, теория упругости, теория пластичности, теория ползучести являются разделами механики деформируемого твердого тела. В технических, в частности строительных, вузах эти разделы имеют прикладной характер и служат для разработки и обоснования методов расчета инженерных конструкций и сооружений на *прочность, жесткость и устойчивость*. Правильное решение этих задач является основой при расчете и проектировании конструкций, машин, механизмов и т.п., поскольку оно обеспечивает их надежность в течение всего периода эксплуатации.

Под *прочностью* обычно понимается способность безопасной работы конструкции, сооружения и их отдельных элементов, которая исключала бы возможность их разрушения. Потеря (ис-

черпание) прочности показана на рис. 1.1 на примере разрушения балки при действии силы P .

Процесс истощения прочности без изменения схемы работы конструкции или формы ее равновесия обычно сопровождается нарастанием характерных явлений, таких, например, как появление и развитие трещин.

Устойчивость конструкции — это ее способность сохранять вплоть до разрушения первоначальную форму равновесия. Например, для стержня на рис. 1.2, а до определенного значения сжимающей силы первоначальная прямолинейная форма равновесия будет устойчивой. Если сила превысит некоторое критическое значение, то устойчивым будет искривленное состояние стержня (рис. 1.2, б). При этом стержень будет работать не только на сжатие, но и на изгиб, что может привести к быстрому его разрушению из-за потери устойчивости или к появлению недопустимо больших деформаций.

Потеря устойчивости очень опасна для сооружений и конструкций, поскольку она может произойти в течение короткого промежутка времени.

Жесткость конструкции характеризует ее способность препятствовать развитию деформаций (удлинений, прогибов, углов закручивания и т.п.). Обычно жесткость конструкций и сооружений регламентируется нормами проектирования. Например, максимальные прогибы балок (рис. 1.3), применяемых в строительстве, должны находиться в пределах $f' = (1/200 \div 1/1000)l$, углы закручивания валов обычно не превышают 2° на 1 метр длины вала и т.п.

Решение проблем надежности конструкций сопровождается поисками наиболее оптимальных вариантов с точки зрения эффективности работы или эксплуатации конструкций, расхода материалов, технологичности возведения или изготовления, эстетичности восприятия и т.п.

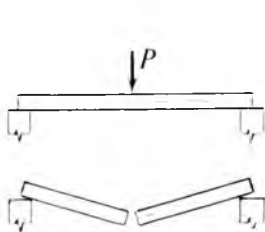


Рис. 1.1

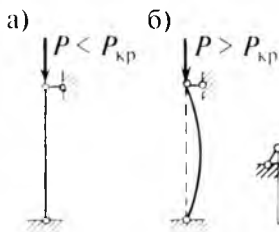


Рис. 1.2

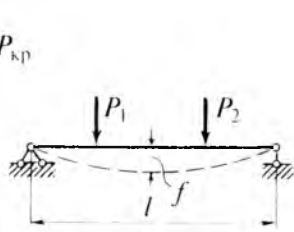


Рис. 1.3

Сопротивление материалов в технических вузах является по существу первой в процессе обучения инженерной дисциплиной в области проектирования и расчета сооружений и машин. В курсе сопротивления материалов в основном излагаются методы расчета наиболее простых конструктивных элементов — стержней (балок, брусев). При этом вводятся различные упрощающие гипотезы, с помощью которых выводятся простые расчетные формулы.

В сопротивлении материалов широко используются методы теоретической механики и высшей математики, а также данные экспериментальных исследований. На сопротивление материалов как на базовую дисциплину в значительной степени опираются дисциплины, изучаемые студентами на старших курсах, такие как строительная механика, строительные конструкции, испытание сооружений, динамика и прочность машин и т.д.

Теория упругости, теория ползучести, теория пластичности являются наиболее общими разделами механики деформируемого твердого тела. Вводимые в этих разделах гипотезы носят общий характер и в основном касаются поведения материала тела в процессе его деформирования под действием нагрузки.

В теориях упругости, пластичности и ползучести используются по возможности точные или достаточно строгие методы аналитического решения задач, что требует привлечения специальных разделов математики. Получаемые здесь результаты позволяют дать методы расчета более сложных конструктивных элементов, например пластин и оболочек, разработать методы решения специальных задач, таких, например, как задача о концентрации напряжений вблизи отверстий, а также установить области использования решений сопротивления материалов.

В тех случаях, когда механика деформируемого твердого тела не может дать достаточно простые и доступные для инженерной практики методы расчета конструкций, используются различные экспериментальные методы определения напряжений и деформаций в реальных конструкциях или в их моделях (например, метод тензометров, поляризационно-оптический метод, метод голографии и т.п.).

Формирование сопротивления материалов как науки можно отнести к середине прошлого века, что было связано с интенсивным развитием промышленности и строительством железных дорог.

Запросы инженерной практики дали импульс исследованиям в области прочности и надежности конструкций, сооружений и ма-

шин. Ученые и инженеры в этот период разработали достаточно простые методы расчета элементов конструкций и заложили основы дальнейшего развития науки о прочности.

Теория упругости начала развиваться в начале XIX века как математическая наука, не имеющая прикладного характера. Теория пластичности и теория ползучести как самостоятельные разделы механики деформируемого твердого тела сформировались в XX веке.

Механика деформируемого твердого тела является во всех своих разделах постоянно развивающейся наукой. Разрабатываются новые методы определения напряженного и деформированного состояний тел. Широкое применение получили различные численные методы решения задач, что связано с внедрением и использованием ЭВМ практически во всех сферах науки и инженерной практики.

1.2. Основные понятия, гипотезы и принципы

Одним из основных понятий механики деформируемого твердого тела является понятие о *деформации тела* при различных воздействиях. В процессе деформирования изменяется взаимное расположение частиц тела, которые получают *перемещения*. Как правило, эти перемещения считаются малыми по сравнению с размерами тела.

Отметим, что перемещения тела как жесткого целого (то есть без деформации) изучаются в курсе теоретической механики.

В механике деформируемого твердого тела вводятся различные гипотезы и допущения, касающиеся характера процесса деформирования тела и свойств его материала.

Процесс деформирования называется *абсолютно упругим*, если после снятия нагрузки деформации полностью исчезают и при этом восстанавливаются первоначальные размеры тела и его форма. Такой процесс соответствует гипотезе об абсолютной или *идеальной упругости тела*. Построенная на основании этой гипотезы теория упругости составляет наиболее обширный раздел механики деформируемого твердого тела. В большинстве задач сопротивления материалов также используется гипотеза об идеальной упругости тела.

Гипотеза об идеальной упругости тела, строго говоря, не соответствует действительности, поскольку после разгрузки часть деформаций, пусть даже и очень малая, не исчезает. Наличие оста-

точных деформаций характеризует *пластические* свойства материала тела. Процесс деформирования тела с учетом пластических деформаций изучается в курсе теории пластичности.

Если нагрузить тело и зафиксировать нагрузку на определенном уровне, то с течением времени деформации могут увеличиться. Такое явление называется *ползучестью*. С другой стороны, если деформации тела в течение определенного периода времени остаются неизменными, то внутренние силы и напряжения в теле могут уменьшиться. Такое явление называется *релаксацией напряжений*.

Определение напряженного и деформированного состояний тела с учетом этих явлений рассматривается в курсе теории ползучести.

Практически во всех разделах механики деформируемого твердого тела принимается положение о *сплошности тела*. Согласно этому положению материал тела считается сплошным и полностью заполняющим объем, ограниченный поверхностями тела. При этом, по существу, не учитывается молекулярное строение вещества, однако для целей изучения напряженного и деформированного состояний тела под действием нагрузки это вполне допустимо.

Введение положения о сплошности позволяет рассматривать перемещения точек тела как непрерывные функции координат и использовать аппарат математического анализа.

Строение и состав материала тела могут быть неодинаковыми в различных точках, что характеризует его *неоднородность*. В природе все тела более или менее неоднородны. Неоднородность материала конструктивного элемента может быть создана искусственно для получения нужного эффекта его работы.

Для многих строительных конструкционных материалов вводится гипотеза об однородности тела, что соответствует осреднению свойств его материала по всему объему.

Материал тела имеет определенные физико-механические характеристики. Если эти характеристики одинаковы по всем направлениям, то тело называется *изотропным*, а при их различии — *анизотропным*. Свойство анизотропии в той или иной степени имеют все материалы, однако для некоторых она незначительна и может не учитываться, как, например, для стали. Материалом с сильно выраженной естественной анизотропией является дерево.

В некоторых случаях анизотропия свойств материалов создается искусственно для обеспечения оптимального характера работы соответствующей конструкции. Примерами таких материалов яв-

ляются широко применяемые в технике стеклопластики и пластмассы.

Большое значение в механике деформируемого твердого тела имеет *принцип независимости действия сил*. Согласно этому принципу какой-либо результат действия нагрузки (деформации, опорные реакции и т.п.) можно представить как сумму аналогичных результатов действия по отдельности всех составляющих нагрузки. Например, удлинение стержня на рис. 1.4, а от одновременного действия двух сил P_1 и P_2 равно сумме его удлинений от раздельного действия этих сил (рис. 1.4, б и 1.4, в):

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2.$$

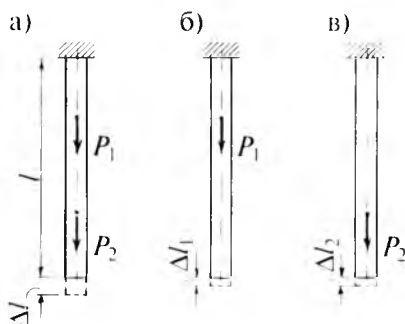


Рис. 1.4

Принцип независимости действия сил опирается на известный в физике закон Гука, характеризующий линейную зависимость между нагрузкой и деформацией. В случаях когда процесс деформирования тела не следует закону Гука, а также в некоторых особых случаях принцип независимости действия сил применять нельзя.

1.3. Понятие о расчетных схемах

Расчет любой конструкции начинается с построения ее расчетной схемы. При этом вводятся различные схематизации и упрощения, касающиеся характера действия нагрузок, условий опирания, типов конструктивных элементов и т.п. Эти упрощения должны быть такими, чтобы расчетная схема отражала все наиболее существенное для характера работы данной конструкции и не содержала второстепенных факторов, мало влияющих на результаты ее расчета.

Например, расчетная схема несущей конструкции мостового крана в пролете цеха промышленного здания (рис. 1.5, а) может быть представлена в виде шарнирно опертой балки, нагруженной двумя сосредоточенными силами (рис. 1.5, б).

Построение и обоснование расчетной схемы — ответственный этап проектирования и расчета конструкции. Одним из этапов построения расчетной схемы элемента конструкции является выделение его в соответствующую категорию (тип) по геометрическим соображениям.

К первому типу относятся стержни или брусья (рис. 1.6, а), у которых длина значительно больше размеров поперечного сечения. Геометрическими элементами стержня являются его ось и поперечное сечение.

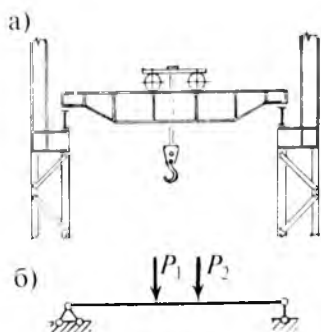


Рис. 1.5

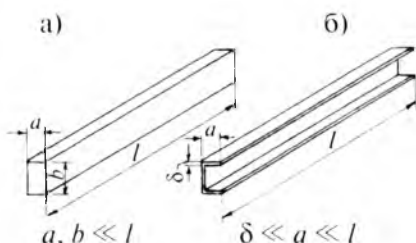


Рис. 1.6

Ось стержня — линия, соединяющая центры тяжести поперечных сечений. *Поперечное сечение* образуется при пересечении стержня плоскостью, перпендикулярной к его оси.

В зависимости от формы оси стержни могут быть прямыми, кривыми, плоскими и пространственными. Поперечные сечения стержня могут быть одинаковыми или различными по длине (стержни постоянного или переменного сечения). В строительных конструкциях чаще всего используются прямые стержни постоянного или ступенчато-постоянного сечения.

В курсе сопротивления материалов часто встречаются термины «волокно» и «слой» стержня. *Волокном* можно назвать материальную линию, параллельную оси стержня и имеющую бесконечно малую площадь поперечного сечения. Ряд волокон, расположенных на плоскости или на поверхности, образует *слой* стержня.

К особой категории относятся *тонкостенные стержни* (рис. 1.6, б), у которых размеры элементов поперечного сечения имеют разный порядок (например, двутавры и швеллеры). Расчет тонкостенных стержней имеет некоторые особенности по сравнению с расчетом стержней сплошного сечения.

Стержень является основным объектом изучения в курсе сопротивления материалов. При этом в качестве расчетной схемы стержня, как правило, принимается его ось, к которой относят опоры и нагрузку.

В инженерных конструкциях широко применяются стержневые системы, состоящие из нескольких стержней, соединенных между собой с помощью жестких узлов или шарниров, например рамы (рис. 1.7) и фермы (рис. 1.8). Расчет стержневых систем в основном изучается в курсе строительной механики.

Ко второму типу конструктивных элементов относятся пластины (плиты) и оболочки (рис. 1.9, а, б), у которых размеры в плане имеют один порядок и значительно больше толщины h . Пластина характеризуется срединной плоскостью, которая делит ее пополам по толщине. Для оболочки этим геометрическим элементом является срединная поверхность.

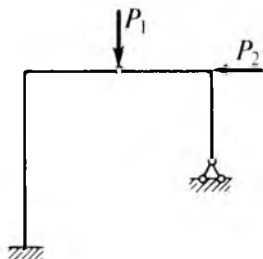


Рис. 1.7

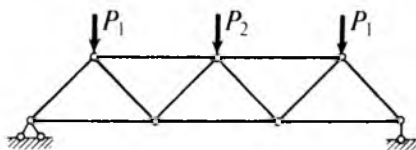


Рис. 1.8

В строительных конструкциях пластины встречаются в виде плит перекрытий и фундаментов, панелей зданий, днищ резервуаров и т.п. Оболочки применяются в качестве элементов покрытий зданий, а также в листовых конструкциях (резервуары, газгольдеры и т.п.).

Третьим типом конструктивных элементов является массивное тело, у которого все основные размеры имеют один порядок (рис. 1.10). К такому типу можно отнести блоки фундаментов и гидротехнических сооружений, станины машин и т.п.

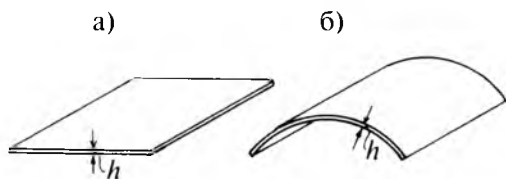


Рис. 1.9

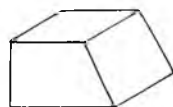


Рис. 1.10

При построении расчетных схем существенное упрощение вносит предположение о малости деформаций конструктивного элемента по сравнению с его размерами. Это предположение позволяет, например, рассматривать статическое равновесие конструкции после действия нагрузки в недеформированном состоянии, то есть не учитывать изменение положения нагрузки и характера ее действия за счет деформации конструкции. Такой расчет называется расчетом по недеформированной схеме. Отметим, что в некоторых случаях такой расчет неприменим.

Большое значение в механике деформируемого твердого тела имеет принцип Сен-Венана, также позволяющий вносить упрощения в расчетные схемы. Согласно принципу Сен-Венана напряженное состояние тела на достаточном удалении от малой (локальной) области действия нагрузок практически не зависит от детального способа приложения этих нагрузок.

Например, напряженные состояния балок на рис. 1.11, а, б практически одинаковы, за исключением весьма малой области вблизи свободного конца, где приложена нагрузка. Поэтому при построении расчетной схемы балки нет необходимости указывать, как конкретно осуществляется передача нагрузки на балку. На расчетной схеме (рис. 1.11, в) равнодействующая этой нагрузки в виде сосредоточенной силы приложена к оси балки.

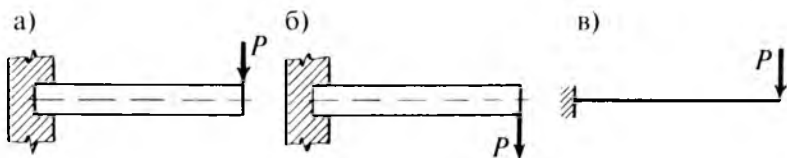


Рис. 1.11

Принцип Сен-Венана можно также трактовать как принцип локальности эффекта действия взаимно уравновешенных нагрузок в малой области. Вызываемые действием таких нагрузок напряжения, как правило, имеют местный характер и очень быстро уменьшаются при удалении от области приложения нагрузок.

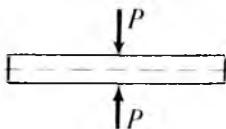


Рис. 1.12

Пример взаимно уравновешенной нагрузки приведен на рис. 1.12. Действующие на стержень силы вызывают большие напряжения только вблизи линии их действия. Большая часть стержня при этом практически не испытывает деформации, и напряжения в ней отсутствуют.

Отметим, что в задачах расчета тонкостенных стержней возможность применения принципа Сен-Венана требует дополнительного обоснования.

Использование принципа Сен-Венана позволяет при построении расчетных схем заменять группу сил ее равнодействующей, переносить силу по линии ее действия и производить другие упрощения. Однако следует иметь в виду, что применение этих правил теоретической механики, как правило, возможно, в случае когда нагрузка занимает небольшую область в сравнении с размерами тела. Если область действия нагрузок соизмерима с размерами тела, то применение указанных правил теоретической механики может привести к существенному изменению характера напряженного и деформированного состояний тела.

Например, для стержня на рис. 1.13 равновесие не нарушится при переносе точки приложения силы. Однако в первом случае (рис. 1.13, а) деформируется весь стержень, а во втором (рис. 1.13, б) — только его верхняя часть.

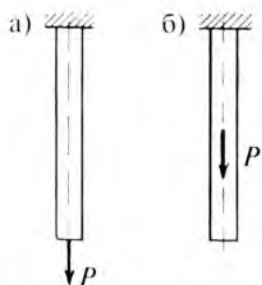


Рис. 1.13

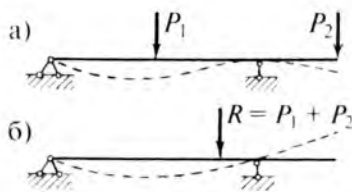


Рис. 1.14

Замена двух сил их равнодействующей не отразится на величине и направлении опорных реакций шарнирно опертой балки на рис. 1.14, *а, б*. Однако характер изгиба балки при такой замене изменится (изогнутая ось балки показана пунктиром).

1.4. Виды нагрузок

В процессе работы или эксплуатации конструкций, сооружений и машин их элементы испытывают действие различных нагрузок. Нагрузки можно классифицировать по ряду признаков. Отметим некоторые из них.

Нагрузки поверхностные и объемные. Поверхностные нагрузки можно рассматривать как результат взаимодействия различных конструктивных элементов друг с другом или с различными физическими объектами (грунт, вода, снег и т.п.). При построении расчетных схем всегда важно установить характер и последовательность передачи нагрузки от одного конструктивного элемента к другому.

Объемные нагрузки действуют на каждую частицу внутри тела. К таким нагрузкам относятся собственный вес конструкции, силы инерции, силы магнитного притяжения и т.п. В практике инженерных расчетов объемные нагрузки часто приводят к поверхностным нагрузкам, что упрощает решение задач.

Активные нагрузки и реакции связей. Такое разделение нагрузок необходимо для построения расчетной схемы конструкции и проведения расчета.

Активные нагрузки, как правило, известны или заданы в нормах проектирования. Реакции связей возникают в местах закрепления конструктивного элемента (на опорах) и подлежат определению из уравнений равновесия. Если этих уравнений недостаточно для определения опорных реакций, то кроме уравнений равновесия необходимо использовать дополнительные уравнения, составляемые исходя из характера или схемы деформации конструкции.

Нагрузки распределенные и сосредоточенные. Все поверхностные нагрузки являются распределенными по некоторой поверхности конструкции или ее элементов (рис. 1.15). Распределенные нагрузки характеризуются интенсивностью q , которая может быть переменной или постоянной. В последнем случае нагрузка называется равномерно распределенной.

Распределенные поверхностные нагрузки имеют размерность силы, отнесенной к единице площади, например Н/м^2 (Па).

Примерами распределенных поверхностных нагрузок могут служить давление жидкости на стенки резервуара (рис. 1.16), давление снега на покрытие здания, ветровые нагрузки и т.п.

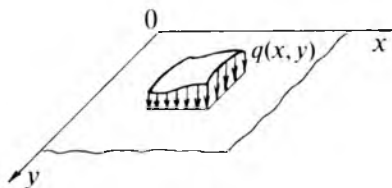


Рис. 1.15

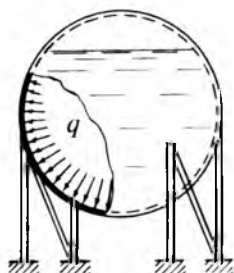


Рис. 1.16

При расчете стержней распределенная по площади нагрузка приводится к линейной нагрузке, распределенной по длине стержня (рис. 1.17). Линейная распределенная нагрузка имеет размерность силы, отнесенной к единице длины, например Н/м. Она характеризуется равнодействующей, величина которой в общем случае равна

$$R = \int_a^c q(x) dx. \quad (1.1)$$

Точка приложения равнодействующей (точнее, линия ее действия) определяется по правилам статики. Приведение к равнодействующим равномерно распределенной нагрузки и нагрузки, изменяющейся по линейному закону, показано на рис. 1.18, а, б.

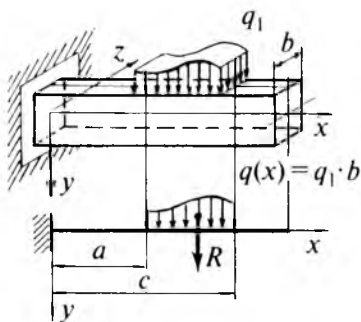


Рис. 1.17

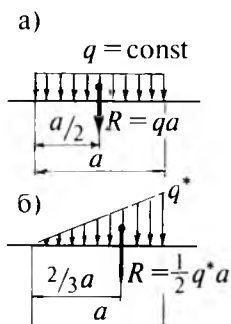


Рис. 1.18

При приведении нагрузки к оси стержня могут возникнуть распределенные по длине моментные нагрузки (пары сил). Чаще всего встречается распределенная скручивающая нагрузка $m(x)$, равнодействующий момент которой (рис. 1.23, в) в общем случае равен

$$M = \int_a^b m(x) dx. \quad (1.2)$$

При малой площади распределения нагрузку с той или иной степенью точности можно считать сосредоточенной (рис. 1.19, а, б) или распределенной по линии (рис. 1.20). Для задач расчета конструкции в целом такая схематизация нагрузки обосновывается принципом Сен-Венана. Однако она недопустима, если надо изучить характер напряженного и деформированного состояний конструктивных элементов в самой зоне их взаимодействия, что характерно для контактных задач. Примерами контактных задач являются, например, задача о давлении колеса на рельс (рис. 1.21), задача о взаимном давлении зубьев шестеренчатой передачи и т.п.

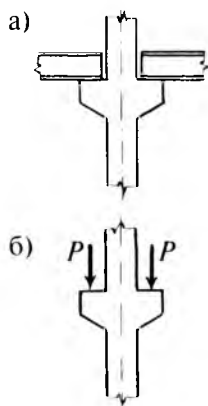


Рис. 1.19

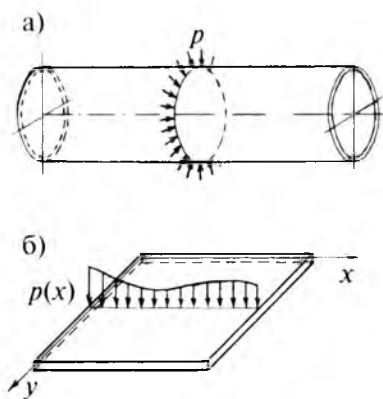


Рис. 1.20

Для стержней сосредоточенными нагрузками являются силы и пары сил (моменты), что показано на рис. 1.22, а, б. Сосредоточенная сила имеет размерность Н, кН, а сосредоточенный момент — соответственно Нм, кНм. По отношению к оси стержня все нагрузки можно привести к осевым (рис. 1.23, а), поперечным (рис. 1.23, б) и скручивающим (рис. 1.23, в) составляющим.

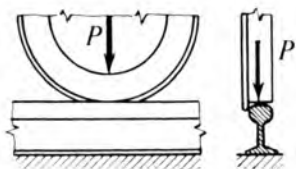


Рис. 1.21

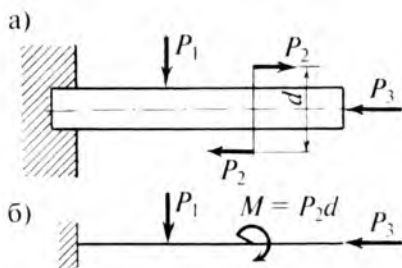


Рис. 1.22

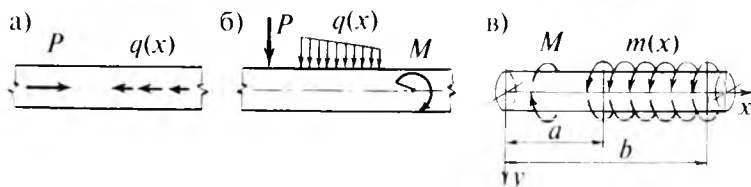


Рис. 1.23

Нагрузки статические и динамические. Статическое нагружение конструкции характеризуется постепенным нарастанием нагрузки до ее конечного значения. При этом силами инерции без ущерба для точности расчета можно пренебречь.

При динамическом нагружении величина нагрузки либо изменяется в течение короткого промежутка времени (например, при ударе), либо нагрузки являются периодическими с малым периодом колебаний (например, вибрационные нагрузки). В этих случаях учет сил инерции и частоты колебаний конструкции является обязательным и их определение составляет существенную часть расчета.

Нагрузки постоянные и временные. Такое разделение нагрузок обусловлено методами расчета конструкций, в частности введением коэффициентов надежности по нагрузке или коэффициентов запаса.

К постоянным нагрузкам относятся те из них, которые должны действовать в течение всего периода эксплуатации конструкции (например, собственный вес). Временные нагрузки носят периодический характер, например давление людей и оборудования на перекрытие здания, напор ветра на башню и т.п. Эти нагрузки в эксплуатационный период могут существенно изменяться по величине и характеру действия.

Помимо силового воздействия, конструкция может также испытывать тепловое воздействие (нагрев или охлаждение), вызывающее напряжения и деформации в ее элементах. Методы расчета конструкций на действие температуры рассматриваются в специальном разделе механики деформируемого твердого тела.

1.5. Напряжения и деформации

Под действием нагрузок между отдельными частями тела возникают силы взаимодействия (внутренние силы). Отметим, что силы взаимодействия между частями тела в ненагруженном и недеформированном (естественном) состоянии в механике деформируемого твердого тела не рассматриваются.

Для выявления внутренних сил в теле при его нагружении применяется *метод сечений*. В соответствии с этим методом тело мысленно рассекается плоскостью, одна из частей тела отбрасывается, а ее влияние заменяется внутренними силами, непрерывно распределенными по сечению (рис. 1.24, а, б).

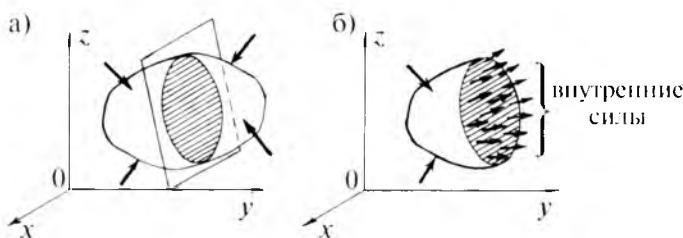


Рис. 1.24

Выделим в окрестности произвольной точки сечения $M(x, y, z)$ бесконечно малую площадку (элемент площади) ΔF . На эту площадку действует своя часть внутренних сил с равнодействующей ΔP , направление которой в общем случае не совпадает с направлением нормали ν (рис. 1.25, а) к площадке. При не очень сильной интенсивности изменения внутренних сил в окрестности данной точки можно считать, что равнодействующая ΔP приложена в центре тяжести площадки ΔF .

Отношение равнодействующей ΔP к площади ΔF представляет собой среднее напряжение на выделенной площадке. Устремляя величину ΔF к нулю и переходя к пределу, получим полное напряжение в рассматриваемой точке:

$$p_v = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta F}, \quad (1.3)$$

где индекс v указывает направление нормали к площадке.

Разложив p_v на составляющие по нормали и по касательной к площадке, получим нормальное σ_v и касательное τ_{tv} напряжения в точке M (рис. 1.25, б). Между напряжениями справедливо соотношение

$$p_v^2 = \sigma_v^2 + \tau_{tv}^2. \quad (1.4)$$

Таким образом, взаимодействие между частями тела при его нагружении характеризуется наличием напряжений в точках мысленно проведенных сечений. Напряжения имеют размерность силы, отнесенной к единице площади, например Па (Н/м^2), МПа. Распределение напряжений в теле характеризует его напряженное состояние под действием нагрузки, определение которого составляет одну из основных задач механики деформируемого твердого тела. По величинам наибольших напряжений выполняется расчет элементов конструкций и машин на прочность.

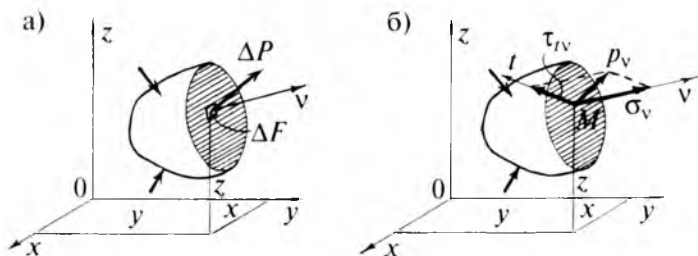


Рис. 1.25

Как уже было отмечено, процесс деформирования тела под действием нагрузок сопровождается перемещениями его точек. Различие перемещений соседних точек вызывает появление абсолютных и относительных деформаций. Существуют два типа деформаций в твердых телах — *линейные* и *угловые*.

Рассмотрим определение линейной и угловой деформаций в точке K деформируемого тела (рис. 1.26). Для этого выде-

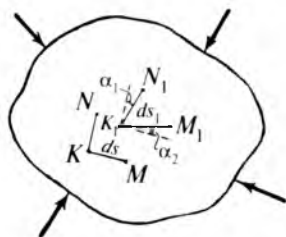


Рис. 1.26

лим в окрестности этой точки два бесконечно малых взаимно перпендикулярных отрезка KM и KN . В результате деформации тела точка K переместится в положение K_1 , а длины отрезков KM и KN и угол между ними изменятся.

Величина $d(\Delta s) = ds_1 - ds$, характеризующая изменение длины отрезка $KM = ds$, называется абсолютной линейной деформацией. При этом относительная линейная деформация в точке K по направлению s равна

$$\varepsilon_s = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{ds_1 - ds}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{d(\Delta s)}{\Delta s}.$$

Сумма углов искажения между направлениями KM и KN называется относительной угловой деформацией (углом сдвига) в плоскости, где расположены эти отрезки:

$$\gamma = \alpha_1 + \alpha_2.$$

Относительные линейные и угловые деформации являются безразмерными величинами. В большинстве задач они значительно меньше единицы

1.6. Внутренние усилия в поперечных сечениях стержня

Рассмотрим стержень, находящийся в равновесии под действием произвольных нагрузок (рис. 1.27, *a*). Отнесем стержень к декартовой системе координат, направив ось Ox вдоль оси стержня и расположив оси Oy , Oz в плоскости его поперечного сечения. Рассечем мысленно стержень плоскостью, перпендикулярной к оси, перенесем начало отсчета в центр тяжести поперечного сечения и покажем действующие в произвольной его точке напряжения (рис. 1.27, *б*). Полное напряжение p_x разложим по осям координат на нормальное напряжение σ_x и касательные напряжения τ_{yx} и τ_{zx} . Остановимся на обозначении напряжений на площадке с нормалью, параллельной оси Ox (такая площадка называется координатной). У нормального напряжения индекс показывает направление его действия. У касательных напряжений первый индекс указывает направление действия напряжения, а второй — направление нормали к площадке, на которой оно действует. Напряжения в данной точке связаны между собой соотношением

$$p_x^2 = \sigma_x^2 + \tau_{yx}^2 + \tau_{zx}^2. \quad (1.5)$$

Выделим в окрестности рассматриваемой точки бесконечно малую площадку dF и приведем действующие на нее внутренние силы σdF , $\tau_{yx} dF$ и $\tau_{zx} dF$ к шести равнодействующим:

$$\left. \begin{aligned} N &= \iint_F \sigma dF; & Q_y &= \iint_F \tau_{yx} dF; \\ M_y &= \iint_F \sigma z dF; & Q_z &= \iint_F \tau_{zx} dF; \\ M_z &= \iint_F \sigma y dF; & M_x &= \iint_F (\tau_{yx} z - \tau_{zx} y) dF. \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

Интегрирование производится по всей площади поперечного сечения F .

Величины (1.6) называются внутренними усилиями в поперечных сечениях стержня, соответственно N — продольная сила, M_y и M_z — изгибающие моменты, Q_y и Q_z — поперечные силы и $M_x = M_k$ — крутящий момент (рис. 1.28, а, б). Внутренние усилия в стержне определяются с помощью метода сечений. В общем случае они переменны по длине стержня, то есть являются функциями координаты точек его оси. Графики этих функций, построенные в соответствующем масштабе, называются *эпюрами внутренних усилий*. Эпюры строятся на оси стержня и заштриховываются перпендикулярными к ней прямыми линиями. Внутри каждой эпюры ставится знак внутреннего усилия.

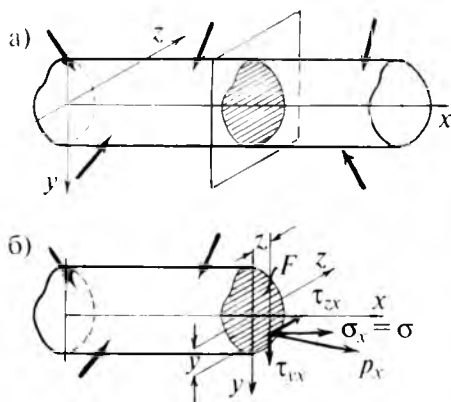


Рис. 1.27

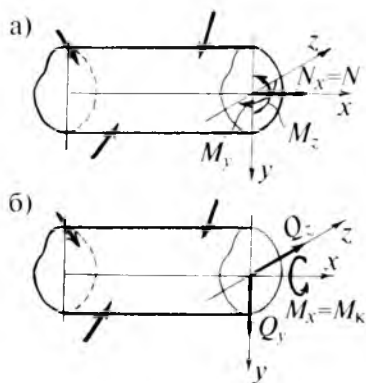


Рис. 1.28

В сопротивлении материалов расчет стержня обычно начинается с определения внутренних усилий и построения их эпюр. При этом можно либо устанавливать законы изменения внутренних усилий по длине стержня, либо вычислять их значения в его характерных сечениях. В последнем случае для построения эпюр внутренних усилий необходимо знать характер их изменения на участках стержня между его различными сечениями, что устанавливается из дифференциальных соотношений между внутренними усилиями и интенсивностями распределенных нагрузок.

Знание внутренних усилий недостаточно для определения законов изменения напряжений по поперечному сечению стержня, поскольку каждому внутреннему усилию могут соответствовать различные законы распределения напряжений. Для решения этой задачи надо рассмотреть характер деформации стержня и ввести упрощающие гипотезы. При этом оказывается возможным вывести простые расчетные формулы для определения напряжений через внутренние усилия в поперечных сечениях стержня.

В сопротивлении материалов изучение характера работы прямого стержня производится отдельно от действия каждого из трех видов внешней нагрузки. Действие осевых нагрузок (см. рис. 1.23, *а*) соответствует *центральному растяжению или сжатию стержня*. При этом в его поперечных сечениях действует только одно внутреннее усилие — продольная сила N .

Действие поперечных нагрузок (см. рис. 1.23, *б*) вызывает *изгиб стержня*. В общем случае изгиба в поперечных сечениях стержня могут действовать два изгибающих момента M_1 и M_2 и две поперечные силы Q_1 и Q_2 .

Скручивающие нагрузки (см. рис. 1.23, *в*) вызывают *кручение стержня*, что соответствует действию в его поперечных сечениях крутящего момента M_k .

Совместное действие осевых, поперечных и скручивающих нагрузок вызывает так называемое *сложное сопротивление стержня*, которое можно разделить на отдельные задачи в зависимости от сочетания нагрузок (например, растяжение с изгибом, изгиб с кручением и т.п.).

ГЛАВА 2

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ СТЕРЖНЕЙ

2.1. Статические моменты и моменты инерции

В сопротивлении материалов определяются напряжения, деформации и перемещения в стержнях при действии различных нагрузок, вызывающих центральное растяжение (сжатие), изгиб, кручение или одновременно все виды названных деформаций. В формулы для напряжений и перемещений в зависимости от вида деформирования входят различные геометрические характеристики поперечных сечений стержня. Величины этих характеристик зависят от формы и размеров поперечного сечения. Рассмотрим произвольную плоскую фигуру (поперечное сечение стержня) площадью F , отнесенную к прямоугольной системе координат Oxy (рис. 2.1). Выделим в плоскости фигуры элемент площади dF с координатами x, y и определим основные геометрические характеристики поперечных сечений стержней как взятые по всей площади F суммы произведений элементарных площадей dF на их расстояния x и y до осей Oy и Ox в соответствующей степени.

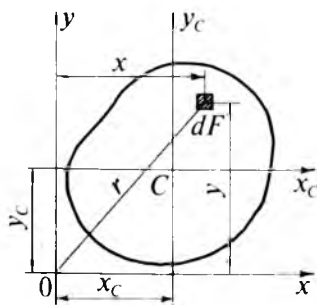


Рис. 2.1

Статические моменты площади сечения:

$$S_x = \iint_F y dF; \quad S_y = \iint_F x dF. \quad (2.1)$$

Осевые моменты инерции:

$$J_x = \iint_F y^2 dF; \quad J_y = \iint_F x^2 dF. \quad (2.2)$$

Центробежный момент инерции:

$$J_{xy} = \iint_F xy dF. \quad (2.3)$$

Полярный момент инерции:

$$J_p = \iint_F r^2 dF = \iint_F (x^2 + y^2) dF = J_x + J_y. \quad (2.4)$$

Статические моменты имеют размерность единицы длины в третьей степени (например, см^3), а осевые, центробежный и полярный моменты инерции — единицы длины в четвертой степени (см^4).

Как видно из приведенных формул, статические и центробежный моменты в зависимости от выбора системы координат могут быть положительными, отрицательными и равными нулю. Осевые и полярный моменты инерции всегда положительны.

На основании известной из теоретической механики теоремы о моменте равнодействующей можно получить следующие формулы:

$$S_x = \iint_F y dF = F y_C; \quad S_y = \iint_F x dF = F x_C,$$

где F — площадь всего сечения.

С помощью этих формул определяются координаты центра тяжести сечения (рис. 2.1):

$$x_C = \frac{S_y}{F}; \quad y_C = \frac{S_x}{F}. \quad (2.5)$$

Оси, проходящие через центр тяжести сечения, называются *центральными осями*. Из (2.5) следует, что статический момент всего сечения относительно любой центральной оси равен нулю. Из свойств определенного интеграла также следует, что статические моменты равны нулю относительно осей симметрии сечения.

2.2. Зависимости между моментами инерции относительно параллельных осей

Пусть известны моменты инерции J_x , J_y , J_{xy} сечения относительно центральных осей Ox , Oy (рис. 2.2). Определим моменты инерции J_{x_1} , J_{y_1} , $J_{x_1y_1}$ относительно осей O_1x_1 , O_1y_1 , параллельных

осей Ox , Oy . Обозначим через a и b координаты точки O в системе координат $O_1x_1y_1$. В соответствии с рис. 2.2 $x_1 = x + a$, $y_1 = y + b$. С учетом этого получим

$$\begin{aligned} J_{x_1} &= \iint_F y_1^2 dF = \iint_F (y+b)^2 dF = \iint_F y^2 dF + 2b \iint_F y dF + b^2 \iint_F dF = \\ &= J_x + 2bS_x + b^2 F. \end{aligned}$$

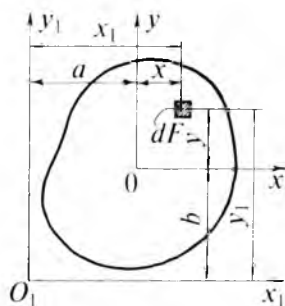


Рис. 2.2

Так как ось Ox проходит через центр тяжести сечения, то статический момент $S_x = 0$. Формулы для J_{y_1} и $J_{x_1y_1}$ выводятся аналогично. В результате будем иметь следующие три соотношения, которые называются *формулами преобразования моментов инерции при параллельном переносе осей*:

$$\left. \begin{aligned} J_{x_1} &= J_x + b^2 F; \\ J_{y_1} &= J_y + a^2 F; \\ J_{x_1y_1} &= J_{xy} + abF. \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

2.3. Изменение моментов инерции при повороте координатных осей

Пусть известны моменты инерции J_x , J_y , J_{xy} сечения относительно осей Ox , Oy (рис. 2.3). Определим моменты инерции J_{x_1} , J_{y_1} , $J_{x_1y_1}$ относительно осей Ox_1 , Oy_1 , повернутых по отношению к осям Ox , Oy на угол α . Координаты элемента площади dF в повернутых и исходных осях связаны между собой следующими соотношениями:

$$x_1 = OC = OE + AD = x \cos \alpha + y \sin \alpha;$$

$$y_1 = BC = BD - EA = y \cos \alpha - x \sin \alpha.$$

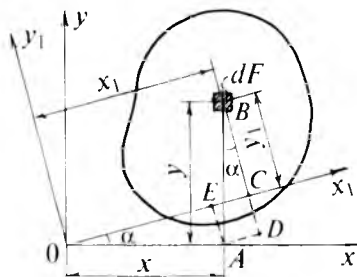


Рис. 2.3

Учитывая эти соотношения, получим

$$J_{x_1} = \iint_F y_1^2 dF = \iint_F (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 dF = \cos^2 \alpha \iint_F y^2 dF + \\ + \sin^2 \alpha \iint_F x^2 dF - \sin 2\alpha \iint_F xy dF = J_x \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - J_{xy} \sin 2\alpha.$$

Формулы для J_{y_1} и $J_{x_1 y_1}$ выводятся аналогично. В результате будем иметь следующие три соотношения, которые называются *формулами преобразования моментов инерции при повороте осей*:

$$\left. \begin{aligned} J_{x_1} &= J_x \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - J_{xy} \sin 2\alpha; \\ J_{y_1} &= J_x \sin^2 \alpha + J_y \cos^2 \alpha + J_{xy} \sin 2\alpha; \\ J_{x_1 y_1} &= \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{xy} \cos 2\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Используя формулы

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha), \quad \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha),$$

можно преобразовать соотношения (2.7) к следующему виду:

$$\left. \begin{aligned} J_{x_1} &= \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2} \cos 2\alpha - J_{xy} \sin 2\alpha; \\ J_{y_1} &= \frac{J_x + J_y}{2} - \frac{J_x - J_y}{2} \cos 2\alpha + J_{xy} \sin 2\alpha; \\ J_{x_1 y_1} &= \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{xy} \cos 2\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

Складывая почленно первые две формулы (2.8), получим

$$J_{x_1} + J_{y_1} = J_x + J_y = J_p. \quad (2.9)$$

Таким образом, сумма двух осевых моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей не изменяется при повороте осей и равна полярному моменту инерции J_p .

2.4. Главные оси и главные моменты инерции

Из формул (2.8) видно, что при повороте осей координат моменты инерции в зависимости от угла α изменяются по тригонометрическим функциям. Поэтому функции J_{x_1} , J_{y_1} , $J_{x_1 y_1}$ должны иметь экстремумы. Кроме этого, сумма осевых моментов инерции согласно (2.9) при изменении α остается величиной постоянной.

Следовательно, существует такое значение α , при котором одновременно один из осевых моментов инерции достигает своего максимального ($J_{\max}$), а другой — минимального ($J_{\min}$) значения. Для нахождения экстремальных величин осевых моментов инерции приравняем к нулю производную по α от первого из выражений (2.8):

$$\frac{dJ_{x_1}}{d\alpha} = -2 \left(\frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{xy} \cos 2\alpha \right) = -2J_{x_1 y_1} = 0.$$

Отсюда находим

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2J_{xy}}{J_x - J_y}. \quad (2.10)$$

Эта формула позволяет в интервале $-45^\circ < \alpha < 45^\circ$ определить угол наклона α к оси Ox одной из двух взаимно перпендикулярных осей, относительно которых один из осевых моментов инерции равен $J_{\max}$, а другой — $J_{\min}$. Центробежный момент инерции относительно этих осей равен нулю.

Такие две взаимно перпендикулярные оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, называются *главными осями инерции* сечения. Осевые моменты инерции относительно таких осей имеют экстремальные значения ($J_{\max}$ и $J_{\min}$) и называются *главными моментами инерции*.

В дальнейшем для главных осей инерции используются цифровые обозначения 1 и 2 и, соответственно, для главных моментов инерции обозначения $J_1 = J_{\max}$ и $J_2 = J_{\min}$.

В любой точке сечения всегда существует по крайней мере одна пара взаимно перпендикулярных главных осей.

Если главные оси проходят через центр тяжести сечения, то они называются *главными центральными осями*. Определение положения этих осей имеет наибольшее практическое значение. Исследуя знак второй производной первого или второго из выражений (2.8), можно доказать следующее правило: если $J_x > J_y$, то по (2.10) получается угол α_1 между осью Ox и осью 1; при $J_x < J_y$ — угол α_2 между осью Ox и осью 2. При этом положительному углу соответствует поворот против хода часовой стрелки.

Формулы для углов, определяющих положение главных осей, удобнее записать с использованием главных моментов инерции J_1, J_2 . Приведем эти формулы без вывода:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{J_{xy}}{J_y - J_1}; \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{J_{xy}}{J_y - J_2}. \quad (2.11)$$

Для определения главных моментов инерции необходимо в (2.8) с помощью известных формул тригонометрии выразить $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$ через $\operatorname{tg} 2\alpha$ с использованием выражения (2.10). В результате для главных моментов инерции получим формулы

$$J_{1,2} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2}. \quad (2.12)$$

2.5. Некоторые свойства моментов инерции и осей инерции

1. При повороте двух взаимно перпендикулярных осей на 90° или при изменении направления одной из осей на противоположное знак центробежного момента инерции также изменяется на противоположный.

В справедливости первого утверждения убеждаемся, положив в последней из формул (2.8) $\alpha = \pi/2$ (рис. 2.4, а):

$$J_{x_1 y_1} = \frac{J_x - J_y}{2} \sin \pi + J_{xy} \cos \pi = -J_{xy}.$$

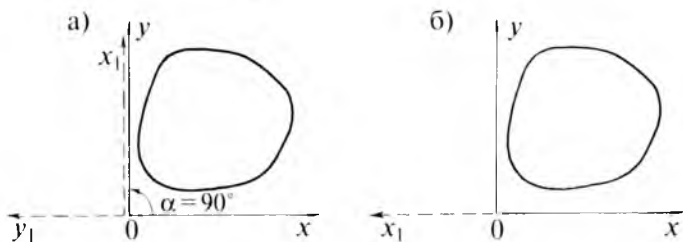


Рис. 2.4

В справедливости второго утверждения убеждаемся, изменив направление оси Ox на противоположное (рис. 2.4, б). При этом знак абсциссы всех точек сечения изменится на противоположный ($x_1 = -x$), поэтому

$$J_{x_1 y} = \iint_F x_1 y dF = \iint_F (-x) y dF = -J_{xy}.$$

2. Ось симметрии сечения и любая ось, ей перпендикулярная, составляют пару главных осей. Пусть, например, сечение (рис. 2.5) симметрично относительно оси Oy . Тогда любому элементу площади dF , расположенному справа от оси Oy , соответствует симмет-

рично расположенный элемент площади слева от оси Oy . Так как абсциссы x этих элементов отличаются только знаком, то все элементарные произведения $xy dF$ оказываются попарно равны и противоположны по знаку. Поэтому центробежный момент инерции всего сечения как предел интегральной суммы равен нулю:

$$J_{xy} = \iint_I xy dF = 0,$$

то есть оси Ox и Oy являются главными осями.

3. Главная центральная ось сечения и любая ось, ей перпендикулярная, составляют пару главных осей.

Пусть оси Ox и Oy являются главными центральными осями сечения (рис. 2.6). Тогда $J_{xy} = 0$. Ось O_1x_1 перпендикулярна к оси Oy .

Для определения центробежного момента инерции воспользуемся формулами (2.6):

$$J_{x_1y} = J_{xy} + abF.$$

Так как $J_{xy} = 0$ и из двух координат a и b центра тяжести в системе координат O_1x_1y $a = 0$, то $J_{x_1y} = 0$. Следовательно, оси O_1x_1 и O_1y составляют пару главных осей.

4. Если моменты инерции относительно двух взаимно перпендикулярных главных осей, проходящих через некоторую точку сечения, равны по величине, то все оси, проходящие через эту точку, также являются главными и моменты инерции относительно всех этих осей одинаковы.

Пусть 1 и 2 — главные оси, а Ox и Oy — произвольные оси, повернутые по отношению к главным осям на угол α (рис. 2.7).

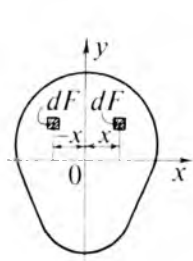


Рис. 2.5

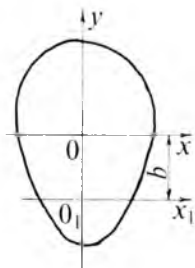


Рис. 2.6

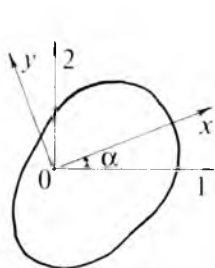


Рис. 2.7

Если в формулах (2.8) за исходные принять главные оси 1 и 2, а x_1 и y_1 заменить на x и y , то эти формулы с учетом того, что $J_{12} = 0$, запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} J_x &= \frac{J_1 + J_2}{2} + \frac{J_1 - J_2}{2} \cos 2\alpha; \\ J_y &= \frac{J_1 + J_2}{2} - \frac{J_1 - J_2}{2} \cos 2\alpha; \\ J_{xy} &= \frac{J_1 - J_2}{2} \sin 2\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

Из последней формулы (2.13) видно, что $J_{xy} = 0$ при произвольных значениях α только при условии равенства главных моментов инерции ($J_1 = J_2$). Тогда из первых двух формул (2.13) следует, что

$$J_x = J_y = J_1 = J_2.$$

5. Если для множества осей, проходящих через некоторую точку сечения, можно указать более одной пары несовпадающих главных осей, то все оси, проходящие через эту точку, являются главными.

Пусть две пары несовпадающих осей 1 и 2 и Ox , Oy для сечения, изображенного на рис. 2.7, являются главными. Тогда на основании последней из формул (2.13) имеем

$$J_{xy} = \frac{J_1 - J_2}{2} \sin 2\alpha = 0.$$

Так как $\sin 2\alpha \neq 0$, то отсюда следует, что $J_1 = J_2$ и на основании свойства 4 все оси, проходящие через точку O , являются главными.

Из свойств 2 и 5 следует, что у сечений, имеющих более двух осей симметрии, все центральные оси являются главными.

К таким сечениям относятся, например, изображенные на рис. 2.8 сечения в виде круга, равностороннего треугольника, квадрата, правильного многоугольника. Осевые моменты инерции у таких сечений относительно всех центральных осей одинаковы.

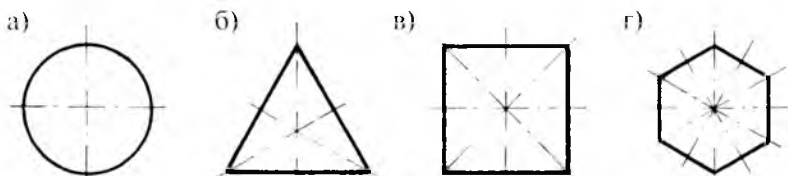


Рис. 2.8

2.6. Моменты инерции простых сечений

Для простых сечений статические моменты и моменты инерции находятся по формулам (2.1)–(2.4) с помощью интегрирования. Рассмотрим, например, вычисление осевого момента инерции J_x для произвольного сечения, изображенного на рис. 2.9. Учитывая, что в прямоугольной системе координат элемент площади $dF = dx dy$, получим

$$J_x = \iint_F y^2 dF = \int_{y_n}^{y_n} y^2 dy \int_{x_A(y)}^{x_B(y)} dx,$$

где $x_A(y)$ и $x_B(y)$ — координаты точек контура при некотором фиксированном значении y .

Выполняя интегрирование по x , найдем

$$\int_{x_A(y)}^{x_B(y)} dx = x_B - x_A = b(y).$$

Величина $b(y)$ представляет собой ширину сечения на уровне y (см. рис. 2.9), а произведение $b(y)dy = dF$ — площадь заштрихованной элементарной полосы, параллельной оси Ox . С учетом этого формула для J_x преобразуется к виду

$$J_x = \int_{y_n}^{y_n} y^2 b(y) dy. \quad (2.14)$$

Аналогичное выражение можно получить для момента инерции J_y .

Прямоугольник. Найдем моменты инерции относительно главных центральных осей, которые в соответствии со свойством 2 (§ 2.5) совпадают с осями симметрии прямоугольника (рис. 2.10). Так как ширина сечения постоянна, то по формуле (2.14) получим

$$J_x = b \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy = \frac{bh^3}{12}.$$

Момент инерции относительно оси O_1x_1 определим по первой из формул (2.6):

$$J_{x_1} = \frac{bh^3}{12} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 bh = \frac{bh^3}{3}.$$

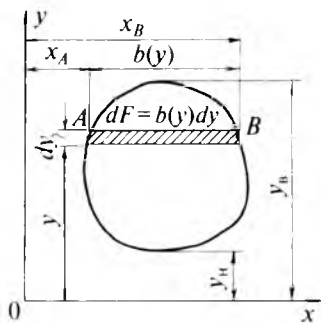


Рис. 2.9

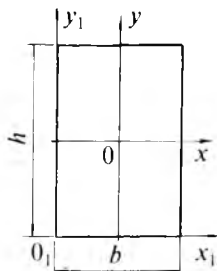


Рис. 2.10

Моменты инерции J_y и J_{y_1} находятся аналогично. Запишем формулы для осевых моментов инерции прямоугольника:

$$J_x = \frac{bh^3}{12}; \quad J_y = \frac{hb^3}{12}; \quad J_{x_1} = \frac{bh^3}{3}; \quad J_{y_1} = \frac{hb^3}{3}. \quad (2.15)$$

Произвольный треугольник. Вначале найдем момент инерции относительно оси O_1x_1 , проходящей через основание треугольника (рис. 2.11). Ширина сечения $b(y_1)$ на уровне y_1 находится из подобия треугольников:

$$b(y_1) = \frac{b(h - y_1)}{h}.$$

Подставляя эту величину в формулу (2.14) и производя интегрирование, получим

$$J_{x_1} = \frac{b}{h} \int_0^h y_1^2 (h - y_1) dy_1 = \frac{bh^3}{12}.$$

Моменты относительно осей Ox и O_2x_2 , параллельных основанию и проходящих соответственно через центр тяжести и через вершину треугольника, находим с помощью формул (2.6):

$$J_x = J_{x_1} - b_1^2 F = \frac{bh^3}{12} - \left(\frac{h}{3}\right)^2 \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{36};$$

$$J_{x_2} = J_x + b_2^2 F = \frac{bh^3}{36} + \left(-\frac{2}{3}h\right)^2 \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{4}.$$

В этих формулах $b_1 = h/3$ и $b_2 = -2h/3$ — соответственно ординаты центра тяжести треугольника O в системе координат $O_1x_1y_1$ и $O_2x_2y_2$.

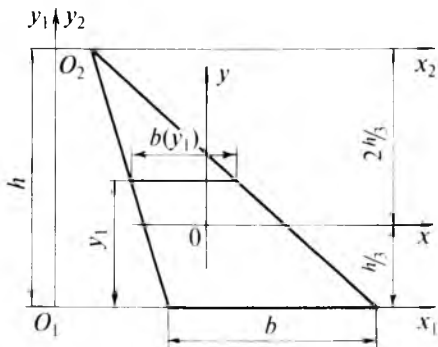


Рис. 2.11

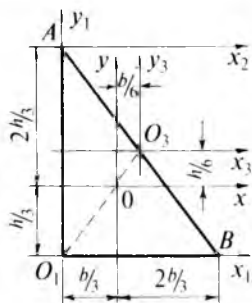


Рис. 2.12

Запишем формулы для осевых моментов инерции треугольника относительно осей, параллельных основанию:

$$J_x = \frac{bh^3}{36}; \quad J_{x_1} = \frac{bh^3}{12}; \quad J_{x_2} = \frac{bh^3}{4}. \quad (2.16)$$

Прямоугольный и равнобедренный треугольники. Для прямоугольного треугольника (рис. 2.12) определим центробежный момент инерции J_{xy} относительно центральных осей Ox и Oy , параллельных катетам. Это можно сделать, воспользовавшись формулой (2.3). Однако решение задачи можно упростить, если применить следующий прием. С помощью медианы O_1O_3 разделим заданный треугольник на два равнобедренных треугольника O_1O_3A и O_1O_3B . Оси O_3x_3 и O_3y_3 являются осями симметрии для этих треугольников и на основании свойства 2 (§ 2.5) будут главными осями каждого из них по отдельности, а следовательно, и всего треугольника O_1AB . Поэтому центробежный момент инерции $J_{x_3y_3} = 0$. Центробежный момент треугольника относительно осей Ox и Oy найдем с помощью последней из формул (2.6):

$$J_{xy} = J_{x_3y_3} - a_3b_3F = -\left(-\frac{h}{6}\right)\left(-\frac{b}{6}\right)\frac{bh}{2} = -\frac{b^2h^2}{72}.$$

Запишем формулы для моментов инерции прямоугольного треугольника:

$$\left. \begin{aligned} J_x &= \frac{bh^3}{36}; & J_y &= \frac{hb^3}{36}; & J_{x_1} &= \frac{bh^3}{12}; \\ J_{y_1} &= \frac{hb^3}{12}; & J_{x_2} &= \frac{bh^3}{4}; & J_{xy} &= -\frac{b^2h^2}{72}. \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

Момент инерции равнобедренного треугольника относительно оси симметрии Oy (рис. 2.13) определим, используя четвертую из формул (2.17), как удвоенный момент инерции прямоугольного треугольника с основанием h и высотой $b/2$:

$$J_y = \frac{2h(0,5b)^3}{12} = \frac{hb^3}{48}.$$

Таким образом, моменты инерции равнобедренного треугольника относительно главных центральных осей Ox и Oy определяются по формулам

$$J_x = \frac{bh^3}{36}; \quad J_y = \frac{hb^3}{48}. \quad (2.18)$$

Круг. Вначале удобно вычислить полярный момент инерции круга по формуле (2.4), воспользовавшись полярной системой координат (рис. 2.14).

Учитывая, что $dF = r dr d\theta$, найдем

$$J_p = \iint_F r^2 dF = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi R^4}{2}.$$

Поскольку полярный момент согласно (2.4) равен сумме двух осевых моментов, получим

$$J_x = J_y = \frac{J_p}{2} = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64}. \quad (2.19)$$

Кольцо. Моменты инерции кольца (рис. 2.15) находятся как разность моментов инерции двух кругов с радиусами R_2 и R_1 :

$$J_p = \frac{\pi}{2}(R_2^4 - R_1^4) = \frac{\pi}{32}(D_2^4 - D_1^4); \quad J_x = J_y = \frac{J_p}{2}. \quad (2.20)$$

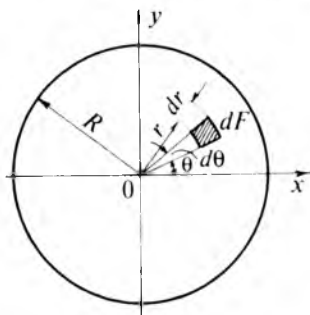


Рис. 2.14

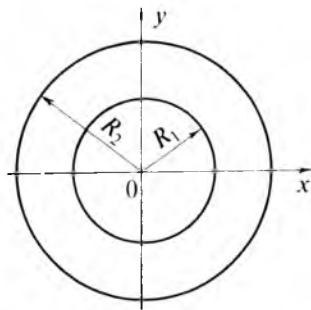


Рис. 2.15

Полукруг (рис. 2.16). Выделим в плоскости полукруга элемент площади dF с полярными координатами r, θ и декартовыми координатами x_1, y_1 , для которых в соответствии с рис. 2.16 имеем:

$$x_1 = r \cos \theta; \quad y_1 = r \sin \theta; \quad dF = r dr d\theta.$$

По формулам (2.1) и (2.5) найдем соответственно статический момент полукруга относительно оси O_1x_1 и ординату y_0 центра тяжести O в системе координат $O_1x_1y_1$:

$$S_{y_1} = \iint_F y_1 dF = \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^R r^2 dr = \frac{2R^3}{3};$$

$$y_0 = \frac{S_{y_1}}{F} = \frac{4R^3}{3\pi R^2} = \frac{4R}{3\pi} \approx 0,424R. \quad (2.21)$$

Относительно осей O_1x_1 и O_1y_1 , которые являются главными осями для полукруга, осевые моменты инерции равны половине моментов инерции круга:

$$J_{x_1} = J_{y_1} = \frac{\pi R^4}{8}.$$

Момент инерции относительно главной центральной оси определяется с помощью первой формулы (2.6):

$$J_x = J_{x_1} - b^2 F = \frac{\pi R^4}{8} - \left(\frac{4R}{3\pi} \right)^2 \frac{\pi R^2}{2} \approx 0,11R^4. \quad (2.22)$$

Эллипс. Для вычисления осевого момента инерции эллипса с полуосями a и b относительно оси Ox (рис. 2.17) поступим следующим образом. Вокруг эллипса опишем окружность и выделим две элементарные полосы шириной dx и высотой $2y_k$ для круга и $2y_s$ для эллипса. Моменты инерции этих двух полос можно определить по первой из формул (2.15) для прямоугольника:

$$dJ_x^k = dx \frac{(2y_k)^3}{12} = \frac{2}{3} y_k^3 dx; \quad dJ_x^s = dx \frac{(2y_s)^3}{12} = \frac{2}{3} y_s^3 dx.$$

Интегрируя эти выражения в пределах от $-a$ до a , получим

$$J_x^k = \frac{2}{3} \int_{-a}^a y_k^3 dx = \frac{\pi a^4}{4}; \quad J_x^s = \frac{2}{3} \int_{-a}^a y_s^3 dx.$$

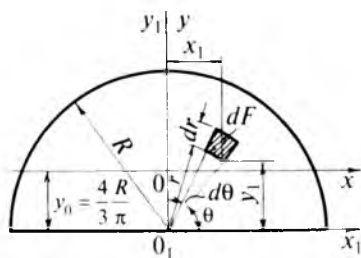


Рис. 2.16

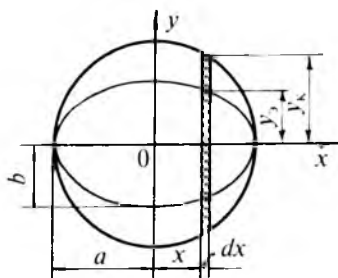


Рис. 2.17

Из уравнений окружности и эллипса имеем

$$x^2 + y^2 = a^2; \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

$$y_k = \pm \sqrt{a^2 - x^2}; \quad y_j = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{b}{a} y_k.$$

С учетом этого

$$J_x' = \frac{2}{3} \int_{-a}^a \left(\frac{b}{a} y_k \right)^3 dx = \frac{b^3}{a^3} J_x^k = \frac{\pi a b^3}{4}.$$

Аналогичное выражение можно получить для момента инерции относительно оси Oy . В результате для эллипса будем иметь следующие формулы для осевых моментов:

$$J_x = \frac{\pi a b^3}{4}; \quad J_y = \frac{\pi a^3 b}{4}. \quad (2.23)$$

Прокатные стержни. Геометрические характеристики сечений прокатных стержней (двутавры, швеллеры, уголки) приведены в таблицах сортамента прокатной стали (см. приложение).

2.7. Моменты инерции сечений составных стержней

При определении моментов инерции сечения составного стержня относительно главных центральных осей на основании свойства аддитивности определенных интегралов сечение разбивают на простые фигуры, у которых известны положения центров тяжести и моменты инерции относительно собственных центральных осей. По формулам (2.5) находят координаты центра тяжести всего сечения в системе произвольно выбранных вспомогательных осей.

Параллельно этим осям проводят центральные оси, относительно которых по формулам (2.6) определяют осевые и центробежный моменты инерции. Моменты инерции относительно главных центральных осей определяют по формуле (2.12), а положение главных центральных осей — по формулам (2.11) или (2.10).

Пример 2.1. Для сечения в виде трапеции $ABCD$ (рис. 2.18) определим моменты инерции относительно главных центральных осей и положение этих осей. Размеры на рис. 2.18 даны в сантиметрах.

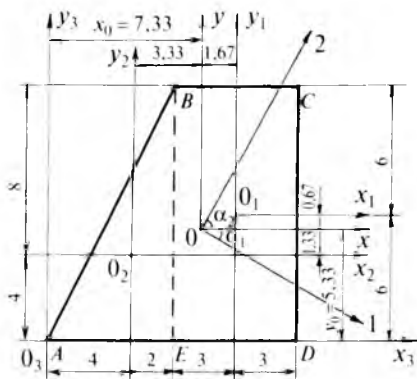


Рис. 2.18

Разобьем трапецию на прямоугольник $BCDE$ и треугольник ABE и найдем их моменты инерции относительно собственных центральных осей.

Для прямоугольника по формулам (2.15) имеем

$$J_{x_1} = \frac{bh^3}{12} = \frac{6 \cdot 12^3}{12} = 864 \text{ см}^4; \quad J_{y_1} = \frac{hb^3}{12} = \frac{12 \cdot 6^3}{12} = 216 \text{ см}^4; \quad F_1 = 72 \text{ см}^2.$$

Для прямоугольного треугольника по формулам (2.17) получим

$$J_{x_2} = \frac{bh^3}{36} = \frac{6 \cdot 12^3}{36} = 288 \text{ см}^4; \quad J_{y_2} = \frac{hb^3}{36} = \frac{12 \cdot 6^3}{36} = 72 \text{ см}^4;$$

$$J_{x_2 y_2} = \frac{b^2 h^2}{72} = \frac{6^2 \cdot 12^2}{72} = 72 \text{ см}^4; \quad F_2 = 36 \text{ см}^2.$$

Знак плюс у центробежного момента треугольника объясняется тем, что в отличие от рис. 2.12, на котором обе центральные оси Ox и Oy направлены в сторону гипотенузы, в данном случае одна из

осей O_2y_2 направлена в сторону гипотенузы, а другая O_2x_2 — в сторону катета.

Площадь всего сечения $F = F_1 + F_2 = 108 \text{ см}^2$.

Для определения положения центра тяжести O всего сечения выберем вспомогательные оси O_3x_3 и O_3y_3 , найдем статические моменты сечения относительно этих осей и координаты y_0 и x_0 центра тяжести по формулам (2.5):

$$S_{x_3} = F_1y_1 + F_2y_2 = 72 \cdot 6 + 36 \cdot 4 = 576 \text{ см}^3;$$

$$S_{y_3} = F_1x_1 + F_2x_2 = 72 \cdot 9 + 36 \cdot 4 = 792 \text{ см}^3;$$

$$y_0 = \frac{S_{x_3}}{F} = \frac{576}{108} = 5,33 \text{ см}; \quad x_0 = \frac{S_{y_3}}{F} = \frac{792}{108} = 7,33 \text{ см}.$$

Заметим, что для сечения, состоящего из двух фигур, центр тяжести O должен быть расположен на линии O_1O_2 , соединяющей центры тяжести этих фигур.

Через центр тяжести O проведем центральные оси Ox и Oy , параллельные осям O_3x_3 и O_3y_3 . Координаты центров тяжести прямоугольника и треугольника в системе координат Oxy равны: $a_1 = 1,67 \text{ см}$; $b_1 = 0,67 \text{ см}$; $a_2 = -3,33 \text{ см}$; $b_2 = -1,33 \text{ см}$.

По формулам (2.6) определим моменты инерции сечения относительно осей Ox и Oy :

$$\begin{aligned} J_x &= J_{x_1} + F_1b_1^2 + J_{x_2} + F_2b_2^2 = \\ &= 864 + 72 \cdot 0,67^2 + 288 + 36(-1,33)^2 = 1248 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_y &= J_{y_1} + F_1a_1^2 + J_{y_2} + F_2a_2^2 = \\ &= 216 + 72 \cdot 1,67^2 + 72 + 36(-3,33)^2 = 888 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{xy} &= J_{x_1y_1} + F_1a_1b_1 + J_{x_2y_2} + F_2a_2b_2 = \\ &= 0 + 72 \cdot 1,67 \cdot 0,67 + 72 + 36(-3,33)(-1,33) = 312 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

По формуле (2.12) найдем величины главных моментов инерции и по формулам (2.11) — углы наклона главных осей к оси Ox :

$$J_{1,2} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2} = \frac{1248 + 888}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1248 - 888}{2}\right)^2 + 312^2};$$

$$J_1 = 1068 + 360 = 1428 \text{ см}^4; \quad J_2 = 1068 - 360 = 708 \text{ см}^4;$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{J_{xy}}{J_y - J_1} = \frac{312}{888 - 1428} = -0,578; \quad \alpha_1 = -30^\circ;$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{J_{xy}}{J_y - J_2} = \frac{312}{888 - 708} = 1,733; \quad \alpha_2 = 60^\circ.$$

Направления главных осей 1 и 2 показаны на рис. 2.18.

Пример 2.2. Определим моменты инерции поперечного сечения стального стержня, составленного из прокатных профилей — двутавра I40 и швеллера С30 (рис. 2.19).

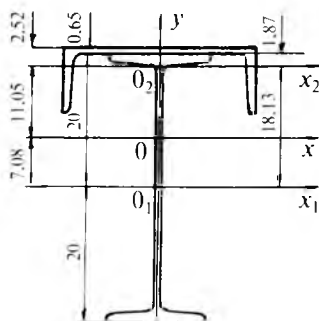


Рис. 2.19

Выпишем из сортамента необходимые размеры (они даны на рис. 2.19 в см) и геометрические характеристики: площади сечений F_i и моменты инерции J_{x_i}, J_{y_i} относительно собственных главных центральных осей.

Для I40: $F_1 = 72,6 \text{ см}^2$; $J_{x_1} = 19\,062 \text{ см}^4$; $J_{y_1} = 667 \text{ см}^4$.

Для С30: $F_2 = 46,5 \text{ см}^2$; $J_{x_2} = 327 \text{ см}^4$; $J_{y_2} = 5810 \text{ см}^4$. Площадь всего сечения $F = 72,6 + 46,5 = 119,1 \text{ см}^2$.

Сечение имеет вертикальную ось симметрии, и центр тяжести O всего сечения находится на этой оси.

Для определения положения центра тяжести примем в качестве вспомогательной оси ось двутавра $O_1 x_1$. Тогда получим

$$y_0 = \frac{S_{x_1}}{F} = \frac{F_2 y_2}{F} = \frac{46,5 \cdot 18,13}{119,1} = 7,08 \text{ см.}$$

Отложим эту величину по оси $O_1 y$ и проведем ось Ox , которая вместе с осью Oy составляет пару главных центральных осей всего сечения. Найдем координаты центров тяжести двутавра и швеллера в системе координат Oxy : $b_1 = -7,08 \text{ см}$; $b_2 = 11,05 \text{ см}$; $a_1 = a_2 = 0$

(см. рис. 2.19). По формулам (2.6) найдем моменты инерции сечения относительно осей Ox и Oy :

$$J_x = J_{x_1} + F_1 b_1^2 + J_{x_2} + F_2 b_2^2 = 19\,062 + 72,6(-7,08)^2 + 327 + 46,5 \cdot 11,05^2 = 28\,706 \text{ см}^4;$$

$$J_y = J_{y_1} + J_{y_2} = 667 + 5810 = 6477 \text{ см}^4;$$

$$J_{\max} = J_x = 28\,706 \text{ см}^4; \quad J_{\min} = J_y = 6477 \text{ см}^4; \quad J_{xy} = 0.$$

2.8. Определение моментов инерции с помощью круга инерции

Формулы (2.13) для случая, когда в качестве исходных приняты главные оси, имеют простую геометрическую интерпретацию. Если ввести обозначения

$$a = \frac{J_1 + J_2}{2}; \quad R = \frac{J_1 - J_2}{2},$$

то указанные формулы примут вид

$$\left. \begin{aligned} J_x &= a + R \cos 2\alpha; \\ J_y &= a - R \cos 2\alpha; \\ J_{xy} &= R \sin 2\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

Из этих формул видно, что момент инерции J_y может быть получен из выражения для J_x заменой α на $\alpha + 90^\circ$.

Первая и третья из формул (2.24) представляют собой параметрические уравнения окружности в координатных осях J_x, J_{xy} с радиусом R и центром на оси J_x на расстоянии a от начала координат (рис. 2.20). Абсцисса произвольной точки K_1 этой окружности равна осевому моменту инерции J_x относительно оси Ox , которая составляет угол α с главной осью 1 (см. рис. 2.7). Ордината точки K_1 равна центробежному моменту инерции J_{xy} относительно осей Ox, Oy .

Координаты точки K окружности, называемой полюсом, равны соответственно J_y и J_{xy} .

Впервые данный графический способ был предложен О. Мором для определения напряжений на наклонных площадках (см. § 4.6), и соответствующий круг называется кругом Мора для напряжений. По аналогии круг, изображенный на рис. 2.20, называется кругом инерции.

С помощью круга инерции можно графически определить моменты инерции относительно произвольных осей. При этом обычно строят круг инерции по известным моментам инерции J_x, J_y, J_{xy} ,

вычисленным относительно произвольных осей Ox и Oy . Приведем это построение (рис. 2.21).

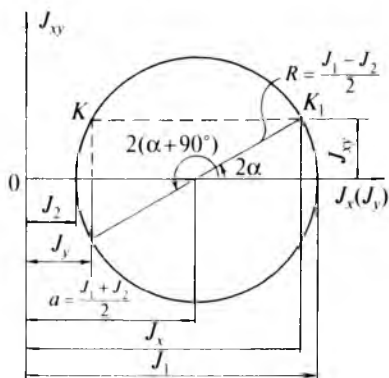


Рис. 2.20

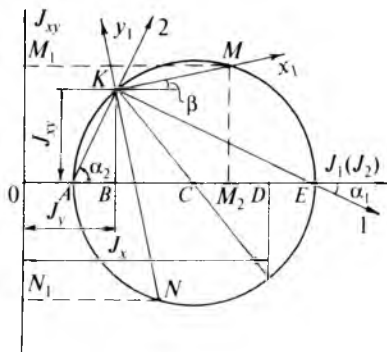


Рис. 2.21

На горизонтальной оси отложим $OD = J_x$ и $OB = J_y$. Поделив отрезок BD пополам, получим центр круга инерции C , причем $OC = (J_x + J_y)/2$. Отложив из конца отрезка $OB = J_y$ величину $J_{xy} = BK$ со своим знаком, получим полюс K круга инерции. Проводя радиусом CK окружность и далее через полюс K лучи KE и KA , найдем величины главных моментов инерции $J_1 = OE$, $J_2 = OA$ и углы наклона α_1 и α_2 главных осей 1 и 2 к оси Ox .

С помощью приведенных на рис. 2.21 построений можно получить формулы для величин главных моментов инерции (2.12) и углов наклона главных осей (2.11). Действительно, определив из прямоугольного треугольника BCK радиус круга инерции

$$R = KC = \sqrt{BC^2 + BK^2} = \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2},$$

получим

$$J_{1,2} = OC \pm R = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2}.$$

Тангенсы углов наклона главных осей 1 и 2 к оси Ox определяются из прямоугольных треугольников BEK и BAK :

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = -\frac{BK}{BE} = \frac{J_{xy}}{J_y - J_1}; \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{BK}{AB} = \frac{J_{xy}}{J_y - J_2}.$$

Знак минус в первой формуле объясняется тем, что угол α_1 является отрицательным.

Для определения величин моментов инерции J_{x_1} , J_{y_1} , $J_{x_1y_1}$ относительно произвольных взаимно перпендикулярных осей Ox_1 и Oy_1 , наклоненных к оси Ox на угол β , необходимо через полюс K провести под углом β к горизонтали ось Ox_1 и перпендикулярно к ней — ось Oy_1 до пересечения этих осей с окружностью в точках M и N . Можно показать, что искомые величины моментов инерции соответственно равны

$$J_{x_1} = MM_1, \quad J_{y_1} = NN_1, \quad J_{x_1y_1} = MM_2.$$

В качестве иллюстрации на рис. 2.22 приведено построение круга инерции для числового примера 2.1, рассмотренного в § 2.7.

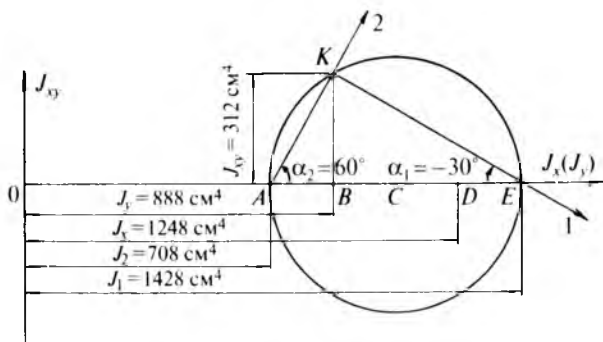


Рис. 2.22

ГЛАВА 3

ЦЕНТРАЛЬНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ СТЕРЖНЕЙ

3.1. Продольная сила и ее эпюра

Центральным растяжением и сжатием прямых стержней называется такой вид деформирования, при котором все внешние нагрузки или их равнодействующие действуют вдоль оси стержня (осевые нагрузки) (рис. 3.1, а).

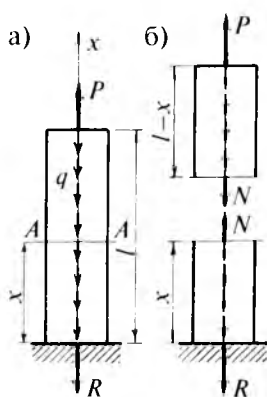


Рис. 3.1

К осевым нагрузкам относятся сосредоточенные силы P , а также распределенные нагрузки q . Как правило, распределенные нагрузки являются результатом действия собственного веса, и в этом случае они могут быть определены по формуле $q = \gamma F$, где γ — объемный вес материала стержня, а F — площадь поперечного сечения стержня. В дальнейшем будем считать $q = \text{const}$. При нагружении стержня осевыми нагрузками в его поперечных сечениях возникают только продольные силы. Для их определения используется метод сечений. Мысленно разрежем стержень плоскостью, перпендикулярной к его оси, на произвольном расстоянии x от нижнего конца и приложим в сечении А—А неизвестную силу N (рис. 3.1, б).

Продольная сила N считается положительной, если она направлена от сечения и вызывает растяжение стержня. В противном случае продольная сила является сжимающей и считается отрицательной.

Величину силы N можно определить из условия равновесия оставшейся части стержня. Составляя, например, уравнение равновесия верхней части, получим

$$\sum X = 0, \quad P - q(l - x) - N = 0,$$

откуда

$$N = P - q(l - x). \quad (3.1)$$

Аналогично из уравнения равновесия нижней части стержня определяем

$$N = R + qx, \quad (3.2)$$

где R — реактивная сила, возникающая в закреплении (рис. 3.1).

Приравняв правые части равенств (3.1) и (3.2), получим

$$R + ql - P = 0,$$

что, по существу, является уравнением равновесия $\sum X = 0$ для всего стержня в целом. Из этого уравнения определяется опорная реакция $R = P - ql$.

Как видно из соотношений (3.1) и (3.2), продольные силы в общем случае являются переменными вдоль оси стержня. Определив силы N в различных сечениях стержня, можно построить график изменения $N(x)$, который называется эпюрой продольных сил.

Пример 3.1. Построим эпюру N для стержня, изображенного на рис. 3.2, а. Проведем сечение 1—1 на нижнем участке стержня. Оно делит стержень на две части. Рассмотрим равновесие нижней части стержня (рис. 3.2, б).

Предполагая, что продольная сила в сечении положительна, направим ее от сечения. Из рисунка видно, что $N = P_1 = 20$ кН, то есть продольная сила постоянна на нижнем участке стержня. Откладывая положительные значения силы справа от оси (рис. 3.2, г), построим соответствующую часть эпюры. Обычно на эпюре показывают знак продольной силы, а штриховка эпюры производится перпендикулярно к оси.

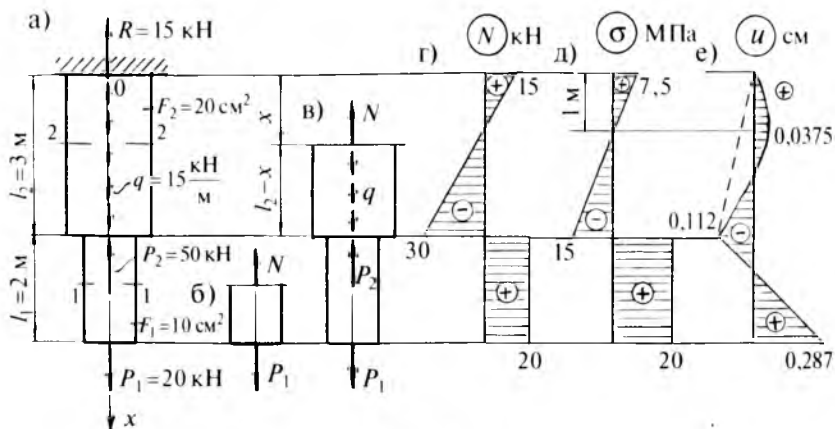


Рис. 3.2

Если провести сечение 2—2 на верхнем участке, то часть стержня, расположенная выше этого сечения, является более простой для расчета. Однако на нее действует неизвестная пока реактивная сила R , что не позволяет сразу найти продольную силу в рассматриваемом сечении. Поэтому рассмотрим нижнюю часть стержня (рис. 3.2, в). Составляя для этой части уравнение равновесия, получим

$$\sum X = 0, \quad -N - P_2 + P_1 + q(l_2 - x) = 0,$$

откуда

$$N = P_1 - P_2 + q(l_2 - x).$$

Продольная сила на втором участке изменяется по линейному закону. Подставляя значения x , соответствующие началу и концу верхнего участка с учетом $l_2 = 3$ м, найдем значения N в этих сечениях:

$$x = 0, \quad N = 20 - 50 + 15 \cdot 3 = 15 \text{ кН (растяжение);}$$

$$x = 3 \text{ м, } N = 20 - 50 = -30 \text{ кН (сжатие).}$$

Опорная реакция в месте закрепления стержня равна значению N в начальном сечении: $R = 15$ кН. Эпюра N для всего стержня показана на рис. 3.2, г.

Как было показано в главе 1, продольная сила является интегральной характеристикой, которая связана с нормальными напряжениями, действующими в сечении, соотношением

$$N = \iint_F \sigma dF. \quad (3.3)$$

Если известен закон изменения напряжений σ по сечению, то это равенство позволяет вычислить силу N . Однако решить обратную задачу, то есть при известном значении N найти напряжения, не вводя дополнительных гипотез о характере их распределения, невозможно.

3.2. Напряжения в поперечных и наклонных сечениях

Чтобы установить закон изменения нормальных напряжений σ в поперечном сечении стержня при растяжении и сжатии, обратимся к эксперименту. Если на поверхности растягиваемого стержня (рис. 3.3, а) провести линию a — a перпендикулярно к его оси, то в процессе деформирования эта линия переместится параллельно самой себе на величину u_a , то есть перемещения всех точек этой

линии будут одинаковы. На основании этого опыта швейцарским ученым Я. Бернулли была предложена *гипотеза плоских сечений*, получившая широкое применение во многих задачах сопротивления материалов. Согласно этой гипотезе *сечения, плоские и перпендикулярные к оси стержня до деформации, остаются плоскими и перпендикулярными к оси после деформации*. Таким образом, при растяжении и сжатии длина всех продольных волокон стержня изменяется на одинаковую величину. Отсюда следует, что нормальные напряжения распределены по сечению равномерно (рис. 3.3, б). Вынося в формуле (3.3) постоянное значение σ из-под знака интеграла, получим

$$N = \sigma F.$$

Отсюда находим

$$\sigma = \frac{N}{F}. \quad (3.4)$$

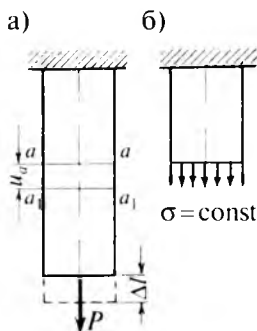


Рис. 3.3

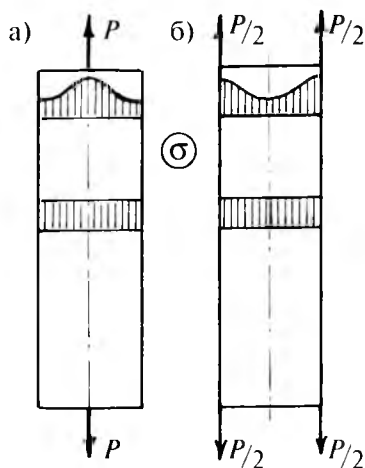


Рис. 3.4

Сделанное выше на основании гипотезы плоских сечений предположение о равномерном распределении нормальных напряжений по сечению, строго говоря, справедливо не во всех сечениях стержня. В сечениях, близких к местам приложения сосредоточенных сил, характер изменения напряжений σ по сечению может быть различным. Вблизи торца распределение напряжений по сечению стержня существенно неравномерно (рис. 3.4, а, б). Однако при

удалении от торца эта неравномерность уменьшается и на некотором расстоянии, достаточно превосходящем размеры торцевого сечения, распределение напряжений становится практически равномерным, что согласуется с принципом Сен-Венана (см. § 1.3).

Таким образом, для всего стержня, за исключением областей вблизи нагруженных торцов, напряжения распределены равномерно и для их определения вполне обоснованно может использоваться формула (3.4). Эта формула может также применяться и при расчете стержней с непрерывно изменяющейся по длине площадью поперечного сечения F , если это изменение незначительно.

С помощью формулы (3.4) при известной эпюре N легко построить эпюру σ . На рис. 3.2, d показана эпюра σ для рассмотренного выше примера.

До сих пор рассматривались нормальные напряжения в поперечных сечениях, то есть в сечениях, перпендикулярных к оси стержня. Однако во многих задачах возникает необходимость определения напряжений в наклонных сечениях. На рис. 3.5, a показано сечение, нормаль к которому ν составляет угол α с осью Ox . Очевидно, что, для того чтобы рассматриваемый участок стержня находился в равновесии, к центру тяжести наклонного сечения должна быть приложена сила N , равная продольной силе, действующей в поперечном сечении. Составляя проекции этой силы на направление нормали ν и касательной t к сечению, получим формулы для определения нормального и касательного усилий в наклонном сечении:

$$N_{\alpha} = N \cos \alpha; \quad T_{\alpha} = -N \sin \alpha.$$

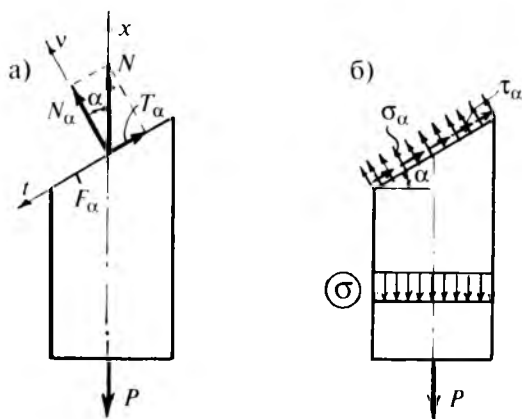


Рис. 3.5

Величина N_α является равнодействующей нормальных напряжений σ_α , действующих в этом сечении (рис. 3.5, б), а T_α — касательных напряжений τ_α . Предполагая, что напряжения распределены по сечению равномерно, и учитывая, что площадь наклонного сечения равна $F_\alpha = F/\cos \alpha$, получим формулы для напряжений:

$$\sigma_\alpha = \frac{N_\alpha}{F_\alpha} = \frac{N}{F} \cos^2 \alpha = \sigma \cos^2 \alpha;$$

$$\tau_\alpha = \frac{T_\alpha}{F_\alpha} = -\frac{N}{F} \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha.$$

Полученные соотношения называются формулами для напряжений на наклонных площадках при растяжении и сжатии. Из этих формул видно, что при $\alpha = 90^\circ$ $\sigma_\alpha = \tau_\alpha = 0$. Отсюда следует, что продольные слои стержня при растяжении и сжатии не взаимодействуют между собой.

Из формулы для касательных напряжений следует, что при $\alpha = \pm 45^\circ$ они достигают наибольших по абсолютной величине значений, равных $\tau_{\text{нб}} = \sigma/2$.

3.3. Деформации и перемещения. Закон Гука

При растяжении и сжатии стержня изменяются его длина и размеры поперечного сечения. Если мысленно выделить из стержня в недеформированном состоянии элемент длиной dx , то после деформации его длина будет равна dx_1 (рис. 3.6). При этом абсолютное удлинение по направлению оси Ox будет равно

$$du = d(\Delta x) = dx_1 - dx,$$

а относительная линейная деформация ϵ_x определяется равенством

$$\epsilon_x = \frac{d(\Delta x)}{dx} = \frac{du}{dx}. \quad (3.5)$$

Поскольку ось Ox совпадает с осью стержня, вдоль которой действуют внешние нагрузки, назовем деформацию ϵ_x продольной деформацией, у которой в дальнейшем индекс будем опускать. Деформации в направлениях, перпендикулярных к оси, называются поперечными деформациями. Если обозначить через b характерный размер поперечного сечения (рис. 3.6), то поперечная деформация определяется соотношением

$$\epsilon' = \frac{b_1 - b}{b} = -\frac{\Delta b}{b}.$$

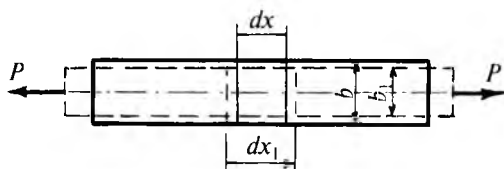


Рис. 3.6

Относительные линейные деформации являются безразмерными величинами. Установлено, что поперечные и продольные деформации при центральном растяжении и сжатии стержня связаны между собой зависимостью

$$\epsilon' = -\nu \epsilon. \quad (3.6)$$

Входящая в это равенство величина ν называется *коэффициентом Пуассона* или коэффициентом поперечной деформации. Этот коэффициент является одной из основных постоянных упругости материала и характеризует его способность к поперечным деформациям. Для каждого материала он определяется из опыта на растяжение или сжатие (см. § 3.5) и вычисляется по формуле

$$\nu = \left| \frac{\epsilon'}{\epsilon} \right|. \quad (3.6, a)$$

Как следует из равенства (3.6), продольные и поперечные деформации всегда имеют противоположные знаки, что является подтверждением очевидного факта — при растяжении размеры поперечного сечения уменьшаются, а при сжатии увеличиваются.

Для различных материалов коэффициент Пуассона различен. Для изотропных материалов он может принимать значения в пределах от 0 до 0,5. Например, для пробкового дерева коэффициент Пуассона близок к нулю, а для резины он близок к 0,5. Для многих металлов при нормальных температурах величина коэффициента Пуассона находится в пределах 0,25÷0,35.

Как установлено в многочисленных экспериментах, для большинства конструкционных материалов при малых деформациях между напряжениями и деформациями существует линейная связь

$$\sigma = E \epsilon. \quad (3.7)$$

Этот закон пропорциональности впервые был установлен английским ученым Робертом Гуком и называется *законом Гука*.

Входящая в закон Гука постоянная E называется модулем упругости. Модуль упругости является второй основной постоянной

упругости материала и характеризует его жесткость. Поскольку деформации являются безразмерными величинами, из (3.7) следует, что модуль упругости имеет размерность напряжения.

В табл. 3.1 приведены значения модуля упругости и коэффициента Пуассона для различных материалов.

При проектировании и расчетах конструкций наряду с вычислением напряжений необходимо также определять перемещения отдельных точек и узлов конструкций. Рассмотрим способ вычисления перемещений при центральном растяжении и сжатии стержней.

Абсолютное удлинение элемента длиной dx (рис. 3.6) согласно формуле (3.5) равно

$$du = d(\Delta x) = \varepsilon dx.$$

Таблица 3.1

Наименование материала	Модуль упругости, МПа	Коэффициент Пуассона
Сталь углеродистая	$2,1 \cdot 10^5$	$0,24 \div 0,30$
Сплавы алюминия	$0,72 \cdot 10^5$	$0,26 \div 0,36$
Сплавы титана	$1,12 \cdot 10^5$	—
Медь	$(1,0 \div 1,3) \cdot 10^5$	$0,31 \div 0,34$
Чугун	$(1,15 \div 1,6) \cdot 10^5$	$0,23 \div 0,27$
Сосна:		
вдоль волокон	$(0,1 \div 0,12) \cdot 10^5$	—
поперек волокон	$(0,0005 \div 0,01) \cdot 10^5$	—
Бетон	$(0,097 \div 0,408) \cdot 10^5$	$0,16 \div 0,22$
Гранит	$0,49 \cdot 10^5$	—
Мрамор	$0,56 \cdot 10^5$	—
Кладка из кирпича	$(0,027 \div 0,03) \cdot 10^5$	—
Стекло	$0,1 \cdot 10^5$	0,25
Стеклопластик СВМ	$0,35 \cdot 10^5$	0,43
Текстолит	$(0,07 \div 0,13) \cdot 10^5$	—
Резина на каучуке	8,0	0,5

Интегрируя это выражение в пределах от 0 до x , получим

$$u(x) = \Delta x = \int_0^x \varepsilon dx + C,$$

где $u(x)$ — осевое перемещение произвольного сечения (рис. 3.7), а $C = u(0)$ — осевое перемещение начального сечения $x = 0$. Если

это сечение закреплено, то $u(0) = 0$ и перемещение произвольного сечения равно

$$u(x) = \Delta x = \int_0^x \epsilon dx. \quad (3.8)$$

Удлинение или укорочение стержня равно осевому перемещению его свободного торца (рис. 3.7), величину которого получим из (3.8), приняв $x = l$:

$$u(l) = \Delta l = \int_0^l \epsilon dx. \quad (3.9)$$

Подставив в формулу (3.8) выражение для деформации ϵ из закона Гука (3.7), получим

$$u(x) = \int_0^x \frac{\sigma}{E} dx.$$

Для стержня из материала с постоянным модулем упругости E осевые перемещения определяются по формуле

$$u(x) = \frac{1}{E} \int_0^x \sigma dx. \quad (3.10)$$

Входящий в это равенство интеграл можно вычислить двумя способами. Первый способ заключается в аналитической записи функции $\sigma(x)$ и последующем интегрировании. Второй способ основан на том, что рассматриваемый интеграл численно равен площади эпюры σ на участке $[0, x]$. Вводя обозначение

$$\Omega_\sigma = \int_0^x \sigma dx,$$

получим

$$u = \frac{\Omega_\sigma}{E}. \quad (3.10, a)$$

Рассмотрим частные случаи. Для стержня, растягиваемого сосредоточенной силой P (рис. 3.3, а), продольная сила N постоянна по длине и равна P . Напряжения σ согласно (3.4) также постоянны и равны

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{P}{F}.$$

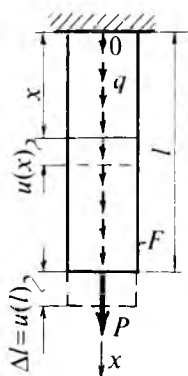


Рис. 3.7

Тогда из (3.10) получаем

$$u(x) = \frac{N}{EF} \int_0^x dx = \frac{Nx}{EF} = \frac{Px}{EF}.$$

Из этой формулы следует, что если напряжения на некотором участке стержня постоянны, то перемещения изменяются по линейному закону. Подставляя в последнюю формулу $x = l$, найдем удлинение стержня:

$$u(l) = \Delta l = \frac{Nl}{EF} = \frac{Pl}{EF}. \quad (3.11)$$

Произведение EF называется *жесткостью стержня при растяжении и сжатии*. Чем больше эта величина, тем меньше удлинение или укорочение стержня.

Рассмотрим стержень, находящийся под действием равномерно распределенной нагрузки (рис. 3.8). Продольная сила в произвольном сечении, отстоящем на расстоянии x от закрепления, равна

$$N = q(l - x).$$

Разделив N на F , получим формулу для напряжений

$$\sigma = \frac{q(l - x)}{F}. \quad (3.12)$$

Подставляя это выражение в (3.10) и интегрируя, находим

$$u(x) = \frac{q}{EF} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right). \quad (3.13)$$

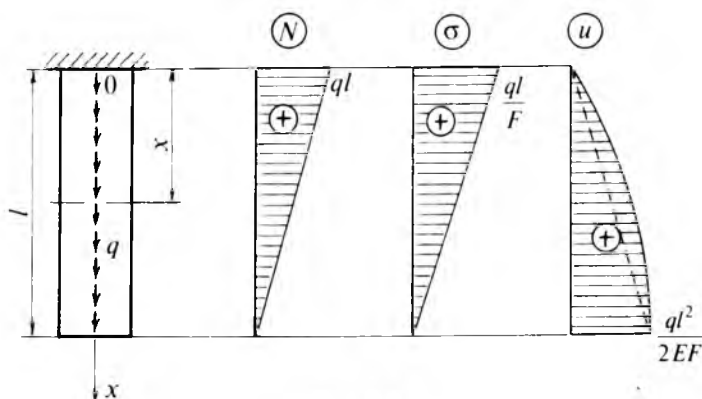


Рис. 3.8

Наибольшее перемещение, равное удлинению всего стержня, получим, подставив в (3.13) $x = l$:

$$\Delta l = u(l) = \frac{ql^2}{2EF}. \quad (3.14)$$

Из формул (3.12) и (3.13) видно, что если напряжения линейно зависят от x , то перемещения изменяются по закону квадратной параболы. Эпюры N , σ и u показаны на рис. 3.8.

Общая дифференциальная зависимость, связывающая функции $u(x)$ и $\sigma(x)$, может быть получена из соотношения (3.5). Подставляя в это соотношение ϵ из закона Гука (3.7), найдем

$$\frac{du}{dx} = \frac{\sigma}{E}. \quad (3.15)$$

Из этой зависимости следуют, в частности, отмеченные в рассмотренных выше примерах закономерности изменения функции $u(x)$.

Кроме того, можно заметить, что если в каком-либо сечении напряжения σ обращаются в нуль, то на эпюре u в этом сечении может быть экстремум.

В качестве примера построим эпюру u для стержня, изображенного на рис. 3.2, положив $E = 10^4$ МПа. Вычисляя площади эпюры σ для различных участков, находим:

сечение $x = 1$ м:

$$u = \frac{\Omega_\sigma}{E} = \frac{1}{10^4 \cdot 10^{-1}} \cdot \frac{7,5 \cdot 10^{-1} \cdot 100}{2} = 0,0375 \text{ см};$$

сечение $x = 3$ м:

$$u = \frac{1}{10^4 \cdot 10^{-1}} \left(37,5 - \frac{15 \cdot 10^{-1} \cdot 200}{2} \right) = -0,112 \text{ см};$$

сечение $x = 5$ м:

$$u = \frac{1}{10^4 \cdot 10^{-1}} (-112,5 + 20 \cdot 10^{-1} \cdot 200) = 0,287 \text{ см}.$$

На верхнем участке стержня эпюра u представляет собой квадратную параболу (рис. 3.2, *е*). При этом в сечении $x = 1$ м имеется экстремум. На нижнем участке характер эпюры является линейным.

Общее удлинение стержня, которое в данном случае равно

$$\Delta l = u(5) = 0,287 \text{ см},$$

можно вычислить, воспользовавшись формулами (3.11) и (3.14). Поскольку нижний участок стержня (см. рис. 3.2, а) растягивается силой P_1 его удлинение согласно (3.11) равно

$$\Delta l_1 = \frac{P_1 l_1}{EF_1} = \frac{20 \cdot 200}{10^4 \cdot 10^{-1} \cdot 10} = 0,4 \text{ см.}$$

Действие силы P_1 передается также и на верхний участок стержня. Кроме того, он сжимается силой P_2 и растягивается равномерно распределенной нагрузкой q . В соответствии с этим изменение его длины вычисляется по формуле

$$\Delta l_2 = \frac{(P_1 - P_2) l_2}{EF_2} + \frac{q l_2^2}{2EF_2} = -\frac{30 \cdot 300}{10^4 \cdot 10^{-1} \cdot 20} + \frac{15 \cdot 10^{-2} \cdot 9 \cdot 10^4}{2 \cdot 10^4 \cdot 10^{-1} \cdot 20} = -0,112 \text{ см.}$$

Суммируя значения Δl_1 и Δl_2 , получим тот же результат, что приведен выше.

В заключение следует отметить, что, несмотря на малую величину перемещений и удлинений (укорочений) стержней при растяжении и сжатии, пренебрегать ими нельзя. Умение вычислять эти величины важно во многих технологических задачах (например, при монтаже конструкций), а также для решения статически неопределимых задач.

3.4. Статически неопределимые задачи

Задача называется *статически неопределимой*, если из уравнений равновесия нельзя определить опорные реакции и внутренние усилия в стержнях. Например, в стержневой системе, изображенной на рис. 3.9, а, число неизвестных усилий, действующих в поперечных сечениях стержней, равно трем: N_1 , N_2 , N_3 , а уравнений равновесия для их определения — два (рис. 3.9, б):

$$\begin{aligned} \sum X &= 0, & -N_1 \sin \alpha + N_3 \sin \alpha &= 0; \\ \sum Y &= 0, & (N_1 + N_3) \cos \alpha + N_2 - P &= 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

В общем случае система является n раз статически неопределимой, если число неизвестных на n превышает число независимых уравнений равновесия. В рассматриваемом примере стержневая система один раз статически неопределима.

Для решения данной задачи рассмотрим схему деформации системы при $l_3 = l_1$ (рис. 3.9, в). Под действием силы P узел D в силу симметрии системы относительно оси второго стержня переместится вертикально вниз. При этом стержни получают удлинения

$\Delta l_1 = \Delta l_3$ и Δl_2 . В силу малости перемещений точек и удлинений стержней в сравнении с их первоначальными длинами можно пренебречь изменением углов между стержнями после деформации системы.

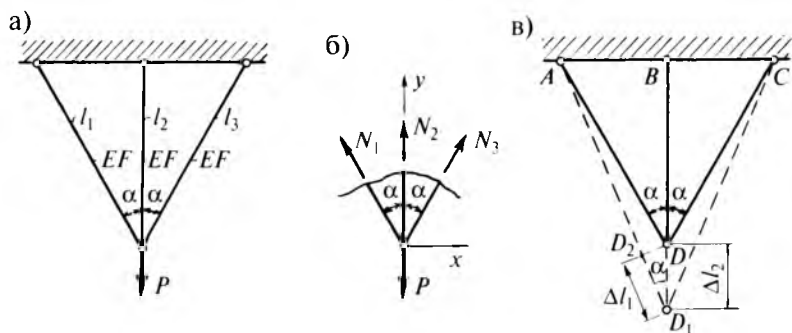


Рис. 3.9

Из рисунка видно, что отрезок $DD_1 = \Delta l_2$, а для того, чтобы определить удлинение первого стержня, отложим на его новой длине AD_1 первоначальную длину, равную AD_2 . В силу малости перемещений дугу DD_2 можно заменить перпендикуляром, опущенным из точки D на линию AD_1 . Таким образом, отрезок $D_1D_2 = \Delta l_1$. Из треугольника DD_1D_2 установим соотношение между удлинениями:

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 \cos \alpha. \quad (3.17)$$

Каждый из стержней рассматриваемой системы находится под действием постоянной продольной силы. Считая жесткости всех стержней при растяжении одинаковыми и используя формулу (3.11), находим

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EF}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EF}. \quad (3.18)$$

Соотношения (3.16)—(3.18) характеризуют соответственно три стороны задачи: *статическую*, *геометрическую* и *физическую*. Равенства (3.16) являются уравнениями равновесия или статики, формула (3.17) устанавливает геометрическую связь между удлинениями стержней, а соотношения (3.18) основаны на законе Гука, который определяет физические свойства материала.

Подставляя (3.18) в (3.17) и учитывая, что $l_2 = l_1 \cos \alpha$, получим

$$N_1 = N_2 \cos^2 \alpha. \quad (3.19)$$

Полученное соотношение между N_1 и N_2 совместно с уравнениями (3.16) позволяет решить задачу. Из первого равенства (3.16) находим, что $N_1 = N_3$, что, впрочем, очевидно из условия симметрии системы. Второе уравнение равновесия с учетом (3.19) дает

$$2N_2 \cos^3 \alpha + N_2 - P = 0,$$

откуда находим

$$N_2 = \frac{P}{1 + 2\cos^3 \alpha}; \quad N_1 = N_3 = \frac{P \cos^2 \alpha}{1 + 2\cos^3 \alpha}.$$

В качестве второго примера рассмотрим стержень ступенчатого постоянного сечения, закрепленный с двух сторон и находящийся под действием сосредоточенной силы (рис. 3.10, а). В точках закрепления стержня возникают опорные реакции R_1 и R_2 , направленные вдоль его оси. Составим уравнение статики:

$$\sum X = 0, \quad R_1 + R_2 = P. \quad (3.20)$$

Закрепленный с двух сторон стержень является один раз статически неопределимым. Для решения задачи надо составить дополнительное уравнение исходя из условия, что длина стержня при его деформации не изменяется и, следовательно, $\Delta l = 0$.

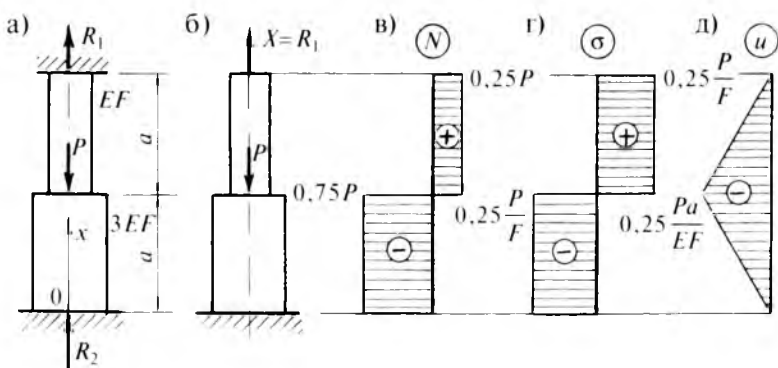


Рис. 3.10

Отбросим мысленно любое из закреплений, например верхнее, и введем в этом сечении неизвестную силу $X = R_1$ (рис. 3.10, б). Рассмотрев действие сил P и X раздельно (рис. 3.11, а, б), запишем на основании принципа независимости действия сил условие деформации стержня:

$$\Delta l = \Delta l_p + \Delta l_v = 0.$$

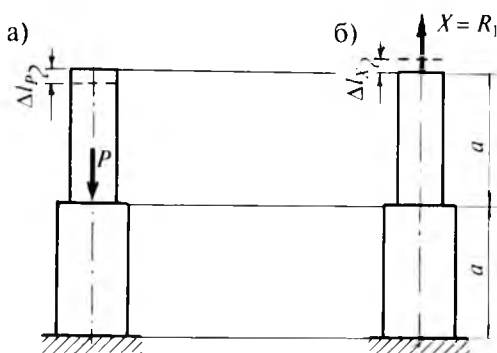


Рис. 3.11

Подставляя в это равенство значения Δl_p и Δl_x , получим следующее дополнительное уравнение:

$$-\frac{Pa}{3EF} + \frac{Xa}{EF} + \frac{Xa}{3EF} = 0. \quad (3.21)$$

Решая совместно уравнения (3.20) и (3.21), получим

$$X = R_1 = 0,25P; \quad R_2 = P - R_1 = 0,75P.$$

Эпюры N и σ приведены на рис. 3.10, в, г. Отметим, что площади эпюры σ в пределах верхнего и нижнего участков равны по величине и противоположны по знаку, что в соответствии с формулой (3.10, а) дает $u(2a) = \Delta l = \frac{\Omega_\sigma}{E} = 0$.

Величина осевого перемещения сечения, соответствующего границе участков, равна

$$u(a) = -\frac{Pa}{4EF}.$$

Эпюра осевых перемещений приведена на рис. 3.10, д. Осевые перемещения изменяются по линейному закону и в закрепленных сечениях равны нулю. Все поперечные сечения перемещаются вниз.

В статически неопределимых системах могут возникать внутренние усилия и напряжения и при отсутствии внешних силовых воздействий. Рассмотрим два характерных примера.

Температурные напряжения. Если статически определимый стержень, закрепленный одним концом (рис. 3.12, а), нагреть на температуру T , то его длина увеличится на величину

$$\Delta l_T = \alpha l T,$$

где α — коэффициент линейного температурного расширения материала. При таком свободном расширении напряжения в стержне не возникают. Если же стержень закреплен с двух сторон (рис. 3.12, б), то закрепления препятствуют свободному удлинению стержня и в них возникают реактивные усилия R . Вследствие этого в стержне появляются напряжения. Поскольку в этом случае стержень является статически неопределимым, для решения задачи используем условие

$$\Delta l = \Delta l_T + \Delta l_R = 0.$$

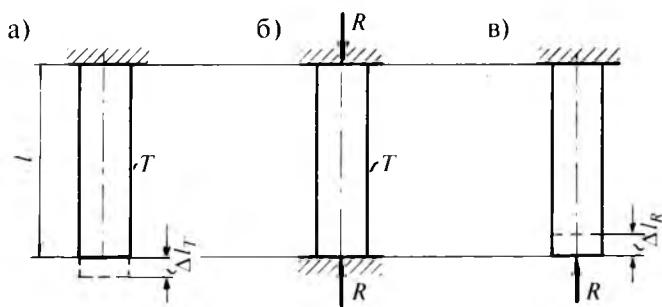


Рис. 3.12

Подставляя в это равенство соответствующие выражения для удлинений, получим

$$\alpha l T - \frac{Rl}{EF} = 0,$$

откуда

$$R = EF\alpha T.$$

Продольная сила в стержне является сжимающей: $N = -R$. Напряжения в стержне равны

$$\sigma = \frac{N}{F} = -\frac{R}{F} = -E\alpha T. \quad (3.22)$$

Очевидно, что при охлаждении в стержне будут возникать растягивающие напряжения.

Из формулы (3.22) следует, что чем больше модуль упругости материала стержня E , тем больше действующие в нем напряжения. При больших перепадах температур эти напряжения могут быть настолько значительными, что приведут к разрушению элемента конструкции. Чтобы избежать этого, во многих инженерных со-

оружениях используются различные конструктивные приемы, например температурные швы в зданиях.

Монтажные напряжения. При монтаже статически определимых стержневых систем отклонения в размерах стержней не приводят к появлению в них усилий и напряжений. Два стержня длиной l_1 и l_3 (рис. 3.13, а) могут быть соединены в точке D при любых небольших отклонениях их размеров. В то же время при усилении конструкции, например, еще одним стержнем, его длина должна быть равна величине l_2 . На рис. 3.13, а показан стержень, длина которого l'_2 меньше требуемого значения l_2 на малую величину $\delta \ll l_2$. Чтобы закрепить этот стержень в точке D , его необходимо подвергнуть предварительному растяжению или нагреву. После монтажа в среднем стержне будет действовать растягивающее усилие N_2 , а в крайних стержнях — сжимающие усилия N_1 и N_3 (рис. 3.13, б). Из уравнений равновесия $\sum X = 0$, $\sum Y = 0$ получим

$$N_1 = N_3; \quad N_2 = 2N_1 \cos \alpha. \quad (3.23)$$

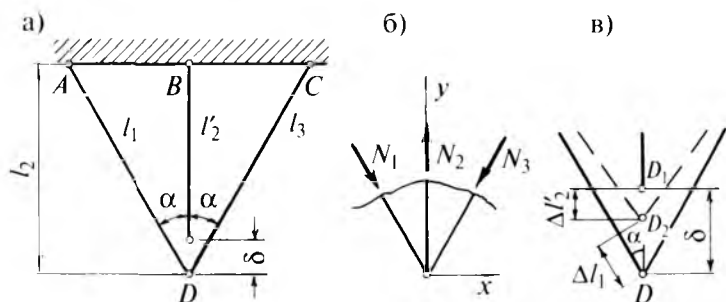


Рис. 3.13

Задача является статически неопределимой. Для ее решения составим геометрическое соотношение между удлинениями и укорочениями стержней (рис. 3.13, в). Из рисунка видно, что

$$\Delta l_1 = (\delta - \Delta l'_2) \cos \alpha.$$

Выражая входящие в это соотношение величины удлинений и укорочений через усилия в стержнях, находим

$$\frac{N_1 l_1}{EF} = \left(\delta - \frac{N_2 l'_2}{EF} \right) \cos \alpha. \quad (3.24)$$

где $l'_2 \approx l_2 = l_1 \cos \alpha$. Жесткости стержней приняты одинаковыми и равными EF .

Решая уравнение (3.24) совместно с уравнениями равновесия (3.23), после несложных преобразований получим

$$N_1 = \frac{\delta EF \cos \alpha}{l_1 (1 + 2 \cos^3 \alpha)}; \quad N_2 = \frac{2\delta EF \cos^2 \alpha}{l_1 (1 + 2 \cos^3 \alpha)}.$$

Если вычислить напряжения в стержнях, то можно установить, что напряжения пропорциональны модулю упругости материала и относительной погрешности δ/l в изготовлении стержня. Даже при относительно небольшой погрешности изготовления порядка 1% ($\delta/l = 0,01$) в стержнях могут возникнуть большие напряжения.

3.5. Механические свойства материалов. Диаграммы растяжения и сжатия

При расчете элементов конструкций на прочность, жесткость и устойчивость необходимо знание механических характеристик материалов, из которых они изготовлены.

Эти характеристики определяются путем испытания стандартных образцов. Для каждого материала устанавливаются государственным стандартом форма и соотношение размеров образцов для определения в лабораторных условиях их механических свойств. Образцы испытываются в зависимости от материала на растяжение, сжатие, изгиб, кручение, срез. Отечественной и зарубежной промышленностью создано большое количество испытательных машин для различных испытаний, позволяющих получить зависимости между нагрузками и соответствующими деформациями в упругой и неупругой стадиях работы материала.

Для таких строительных материалов, как цементный камень и бетон, при испытаниях на сжатие применяют стандартные образцы в виде кубиков (со стороной 70 мм для цементного камня и 200 или 300 мм для бетона). При испытаниях на растяжение применяют образцы в виде «восьмерки», а при испытаниях на изгиб — в виде призмы. Основным видом испытаний стали является растяжение стандартных круглых или плоских образцов (рис. 3.14, *а, б*), для которых строятся диаграммы растяжения в координатах сила — абсолютное удлинение: $P = f(\Delta l)$. Существуют испытательные машины, которые с помощью самопишущих устройств позволяют получить эту зависимость графически.

Чаще всего стандартный образец круглого сечения для испытания стали (рис. 3.14, *а*) имеет рабочую длину постоянного диаметра

ра $l_0 = 10d_0$ с конусными утолщениями на концах для закрепления в зажимах машины. Диаметр образцов обычно принимают равным $d_0 = 10$ мм, но могут быть и другие размеры.

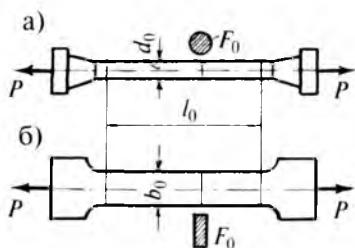


Рис. 3.14

Диаграмма растяжения стали. Рассмотрим диаграмму растяжения малоуглеродистой стали марки ВСт3, обладающей хорошо выраженными пластическими свойствами и широко применяемой в строительстве. Если испытывать образцы разных размеров, то получим различные диаграммы $P = f(\Delta l)$. Для определения обобщенных механических характеристик материала диаграммы строят в координатах напряжение — деформация: $\sigma = f(\epsilon)$, которые определяются по формулам

$$\sigma = \frac{P}{F_0}; \quad \epsilon = \frac{\Delta l}{l_0}.$$

На рис. 3.15 показана диаграмма растяжения малоуглеродистой стали.

При нагружении образца до напряжения, соответствующего точке A , зависимость между напряжениями и деформациями является линейной. На участке OA справедлив закон Гука (3.7).

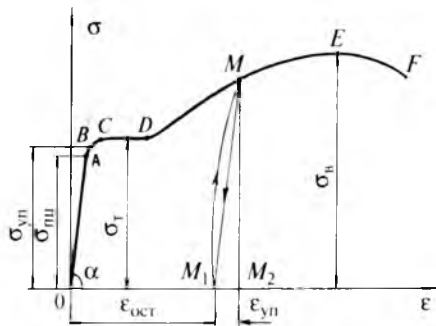


Рис. 3.15

Наибольшее напряжение, до которого деформация материала следует закону Гука, называется *пределом пропорциональности* σ_{III} .

По углу наклона прямой OA можно определить численное значение модуля упругости материала:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \operatorname{tg} \alpha.$$

При дальнейшем нагружении образца от точки A до точки B линейная зависимость нарушается, но при разгрузке образца возникшие деформации исчезают, то есть материал является упругим.

Наибольшее напряжение, при котором в материале при разгрузке не возникают остаточные деформации, называется *пределом упругости* $\sigma_{\text{уп}}$. Отметим, что для стали предел упругости практически совпадает с пределом пропорциональности.

На участке CD диаграммы наблюдается значительный рост деформаций практически без увеличения напряжений, материал образно говоря «течет». Горизонтальный отрезок на диаграмме называется *площадкой текучести*, а соответствующее напряжение σ_1 — *пределом текучести*.

При напряжениях, равных пределу текучести, в малоуглеродистых сталях появляются пластические деформации, связанные с необратимыми деформациями сдвига между кристаллами феррита. На хорошо отшлифованной поверхности образцов можно видеть наклоненные под углом 45° к оси стержня полосы, называемые линиями Людерса—Чернова по имени немецкого и русского металлургов, впервые независимо друг от друга описавших это явление. Эти линии вызваны деформациями сдвига от наибольших касательных напряжений, действующих под углами 45° к оси образца, что было отмечено в § 3.2.

После развития определенных пластических деформаций и перестройки кристаллической решетки стали несущая способность стержня увеличивается — рост деформаций сопровождается увеличением напряжений, происходит упрочнение стали. Участок DE на диаграмме называется *участком упрочнения*.

При напряжении, соответствующем наивысшей точке E диаграммы, в определенном участке образца появляется заметное уменьшение размеров поперечного сечения — образуется так называемая шейка. Отношение наибольшей силы $P_{\text{нб}}$, которую может выдержать образец, к первоначальной площади поперечного сече-

ния образца F_0 называется *временным сопротивлением или пределом прочности*:

$$\sigma_b = \frac{P_{нб}}{F_0},$$

Разрушение образца наступает вскоре после появления шейки. При этом нагрузка падает (точка F), хотя истинное значение напряжения при разрыве в связи с резким уменьшением площади поперечного сечения существенно возрастает и может быть определено по формуле

$$\sigma_p = \frac{P_p}{F_{ш}},$$

где P_p — нагрузка при разрыве, регистрируемая испытательной машиной; $F_{ш}$ — площадь поперечного сечения шейки, измеряемая после разрыва. Деформация в зоне шейки может превышать 100%.

Рассмотренная диаграмма называется *условной*, так как при ее построении не учитывается уменьшение площади поперечного сечения при растяжении образца.

Диаграмма растяжения, построенная с учетом изменения площади поперечного сечения, называется *истинной диаграммой*. При нагружении образца до предела текучести уменьшение площади его поперечного сечения столь незначительно, что истинная и условная диаграммы на этом участке практически совпадают. Заметное их отличие проявляется при напряжениях выше предела текучести, нарастая к концу стадии упрочнения.

Следует отметить, что в реальных конструкциях напряжения не должны превосходить предел текучести материала (см. § 3.7). В силу этого истинная диаграмма растяжения, как правило, не имеет практического значения.

Рассмотрим еще некоторые свойства стали, которые можно наблюдать при испытаниях. Если довести нагружение образца до некоторой точки M , находящейся выше предела упругости, и затем снять нагрузку, то диаграмма разгрузки пойдет по прямой MM_1 , параллельной OA , а отрезок OM_1 на оси ϵ будет соответствовать остаточной деформации $\epsilon_{ост}$. Отрезок M_1M_2 характеризует упругую деформацию $\epsilon_{уп}$ при нагружении образца до точки M . Полная деформация, соответствующая точке M на диаграмме, равна

$$\epsilon = \epsilon_{ост} + \epsilon_{уп}.$$

При повторном нагружении образца от точки M_1 диаграмма нагружения следует по кривой M_1M , близкой к прямой MM_1 . Таким

образом, при повторном нагружении как бы повышается предел пропорциональности стали, что связано с изменением микроструктуры в ее кристаллической решетке. При этом площадку текучести исчезает, материал становится более хрупким. Указанные изменения свойств стали, возникающие при разгрузке и повторном нагружении, называются *наклепом*. Это явление используется в технике, например, при изготовлении цепей грузоподъемных машин. Участок диаграммы MM_1M называется *петлей гистерезиса*.

При испытаниях на растяжение плоских образцов с достаточно большой шириной b_0 (рис. 3.14, б) определяют еще одну механическую характеристику — коэффициент Пуассона ν . Измеряя изменение ширины поперечного сечения Δb , можно вычислить поперечную деформацию:

$$\epsilon' = -\frac{\Delta b}{b_0},$$

что позволяет определить коэффициент Пуассона

$$\nu = \left| \frac{\epsilon'}{\epsilon} \right|.$$

Как показывают опыты, для *пластичных* материалов коэффициент Пуассона остается постоянным при напряжениях, не превосходящих предел текучести σ_T . Значения ν для некоторых материалов приведены в табл. 3.1. По мере увеличения пластических деформаций величина коэффициента Пуассона возрастает, приближаясь к величине, равной 0,5.

Получаемые по диаграмме растяжения предел текучести σ_T и временное сопротивление σ_n называются *характеристиками прочности*. В табл. 3.2 приведены значения предела текучести и временного сопротивления для кипящей (кп), полуспокойной (пс) и спокойной (сп) сталей марки ВСт3 в зависимости от толщины проката.

По результатам испытаний образца после разрыва определяют его относительное остаточное удлинение

$$\delta = \frac{l_p - l_0}{l_0} \cdot 100\% = \frac{\Delta l}{l_0} \cdot 100\%$$

и относительное остаточное сужение в шейке

$$\psi = \frac{F_0 - F_{III}}{F_0} \cdot 100\%,$$

где l_p и F_{III} — длина образца и площадь поперечного сечения шейки после разрыва.

Таблица 3.2

Марка стали	Вид проката	Толщина проката*, мм	Предел текучести, МПа	Временное сопротивление, МПа
ВСт3кп2-1	Лист	11 ÷ 20	225	360
ВСт3кп2-1	Фасон	21 ÷ 30	215	360
ВСт3пс6-1	Фасон	4 ÷ 10	245	370
ВСт3пс6-2	Фасон	11 ÷ 20	275	380
ВСт3сп5-1	Лист	11 ÷ 20	235	370

* За толщину фасонного проката принимаются толщины полок уголков, двутавров, швеллеров.

Величины δ и ψ характеризуют пластические свойства стали. Для стали марки ВСт3 они составляют $\delta = (20 \div 23)\%$ и $\psi = (60 \div 70)\%$.

Диаграммы растяжения для других материалов. Многие материалы имеют диаграмму растяжения, существенно отличающуюся от рассмотренной выше диаграммы для стали марки ВСт3. На рис. 3.16 показаны диаграммы $\sigma \sim \epsilon$ для чугуна (1) и меди (2). Диаграмма (1) характерна тем, что практически до разрушения зависимость между σ и ϵ является линейной или слабо нелинейной. Такие материалы называются *хрупкими*. К ним относятся чугун, стекло, камень, инструментальные стали.

Диаграмма (2) соответствует *пластичным* материалам, у которых отсутствует площадка текучести. Для таких материалов принимается условный предел текучести, соответствующий напряжению, при котором остаточные деформации составляют 0,2%. В соответствии с этим условный предел текучести обозначается $\sigma_{0,2}$. Следует отметить, что диаграмма (2) с самого начала нагружения имеет нелинейный характер. В то же время в материале наряду с пластическими возникают и упругие деформации, которые исчезают после разгрузки.

Аппроксимация диаграмм. Использование реальных диаграмм в расчетах часто приводит к большим математическим сложностям. Существуют различные способы аппроксимации этих диаграмм с помощью более простых графиков. Так, например, для стали, диаграмма которой показана на рис. 3.15, пределы пропорциональности ($\sigma_{пл}$), упругости ($\sigma_{уп}$) и текучести (σ_t) имеют близкие значения. Это позволяет схематизировать диаграмму в виде двух прямых (рис. 3.17), полагая, что все три указанных напряжения соответствуют одной точке. Такая диаграмма называется *диаграммой Праудтля*. Она отражает одну из характерных особенностей пове-

дения упруго-пластических материалов — способность к большим пластическим деформациям.

В силу своей простоты эта диаграмма широко используется в расчетах конструкций, напряжения в которых превышают предел упругости. В то же время очевидно, что диаграмма Прандтля далеко не полностью отражает реальное поведение материалов и в расчетах могут использоваться более сложные диаграммы (рис. 3.18).

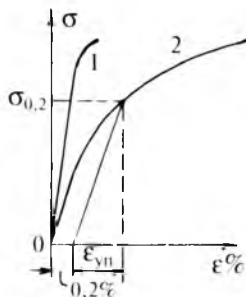


Рис. 3.16

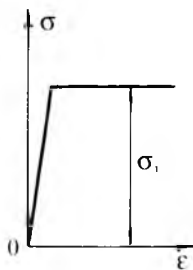


Рис. 3.17



Рис. 3.18

Диаграммы сжатия. Для испытания стали на сжатие применяются цилиндрические образцы высотой h , равной от одного до трех диаметров (рис. 3.19, а). Диаграмма сжатия пластичной малоуглеродистой стали в интервале до предела текучести такая же, как и при растяжении. Пределы пропорциональности $\sigma_{\text{пл}}$, упругости $\sigma_{\text{уп}}$ и текучести $\sigma_{\text{т}}$, а также модуль упругости у сталей при растяжении и сжатии практически одинаковы (рис. 3.20). Предел прочности при

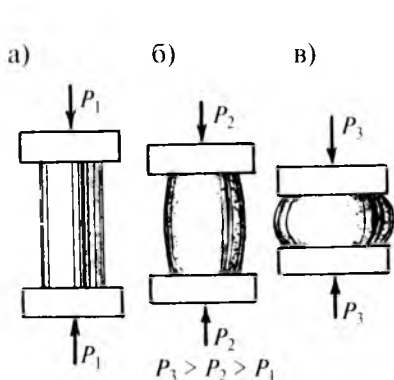


Рис. 3.19

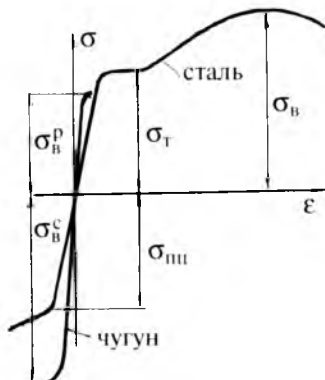


Рис. 3.20

сжатию у пластичной стали получить невозможно, так как образец при появлении пластических деформаций сначала принимает бочкообразную форму (рис. 3.19, б), а затем, не разрушаясь, превращается в диск (рис. 3.19, в). Площадка текучести при сжатии стали не выражена, а зависимость между напряжениями и деформациями за пределом упругости имеет другой характер, чем при растяжении.

Хрупкие материалы имеют существенно меньший предел прочности при растяжении, чем при сжатии. Например, серый чугун при сжатии имеет предел прочности $\sigma_{\text{в}}^{\text{с}} = 500 \div 1500$ МПа, а при растяжении — почти в четыре раза меньше: $\sigma_{\text{в}}^{\text{р}} = 120 \div 380$ МПа. На рис. 3.20 показана также диаграмма растяжения и сжатия для чугуна. Разрушение чугуна при сжатии начинается с образования трещин под углом 45° к оси цилиндрического образца, что вызвано наибольшими касательными напряжениями (рис. 3.21).



Рис. 3.21



Рис. 3.22

Такие строительные материалы, как цементный камень, бетон, дерево, испытываются на сжатие на образцах в виде кубиков (рис. 3.22, а). Характер разрушения хрупких материалов при сжатии во многом зависит от сил трения, возникающих по контакту опорной плиты пресса с торцевой поверхностью образца. Например, при отсутствии смазки по контакту, когда поперечные деформации ограничиваются, кубиковый образец бетона разрушается с появлением наклонных трещин, как у чугуна. Завершается разрушение образованием двух усеченных пирамид (рис. 3.22, б). При устранении сил трения по контакту с помощью смазки в образце при разрушении появляются вертикальные трещины (рис. 3.22, в).

Дерево является анизотропным материалом, у которого физические и прочностные свойства существенно различаются в направлениях вдоль и поперек волокон (рис. 3.23). При сжатии ку-

бика из дерева вдоль волокон разрушение происходит в виде сдвига по наклонной плоскости одной части образца относительно другой (рис. 3.24, а). При сжатии поперек волокон происходит прессование дерева (рис. 3.24, б). Пределы прочности дерева при сжатии вдоль и поперек волокон значительно различаются, что видно из табл. 3.3, где приведены величины пределов прочности

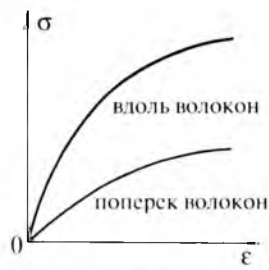


Рис. 3.23

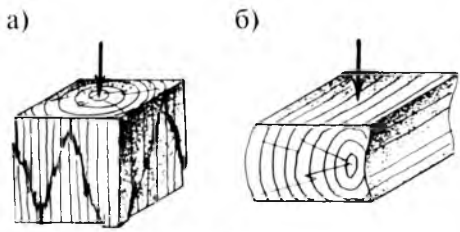


Рис. 3.24

Таблица 3.3

Наименование материала	Предел текучести σ_t , МПа	Предел прочности	
		при растяжении $\sigma_{\text{в}}^p$, МПа	при сжатии $\sigma_{\text{в}}^c$, МПа
Прокат стали марок:			
ВСт3кп	185÷235	360÷365	
ВСт3пс	235÷275	370÷400	
ВСт3сп	235÷270	370÷400	
09Г2 (марганцовистая)	295÷370	430÷500	
10ХСНД (хромокремниевая)	390	530	
12Г2СМФ (термически упрочненная легированная)	590	685	
Титановый сплав ВТ4	550÷650	700÷850	
Чугун серый марки СЧ	—	120÷380	500÷1500
Гранит	—	3	120÷260
Кирпич	—	0,7÷3,0	7÷30
Бетон	—	0,4÷2,6	2,8÷43,8
Сосна, ель:			
вдоль волокон	—	80	40
поперек волокон	—	—	5
Текстолит ПТК	—	100	250
Оргстекло СТ-1	—	78	120
Стеклопластик СВМ1:1	—	480÷500	420

при растяжении $\sigma_{\text{в}}^{\text{p}}$ и сжатии $\sigma_{\text{в}}^{\text{с}}$ для некоторых материалов, а также диапазоны изменения предела текучести $\sigma_{\text{т}}$ и предела прочности $\sigma_{\text{в}}$ прокатной стали некоторых марок, сплавов титана и др.

Существенное влияние на механические свойства материалов могут оказывать такие факторы, как изменение температуры, технологические условия обработки при высоких температурах, радиоактивное облучение, скорость нагружения и пр.

Влияние температуры. Приведенные выше свойства стали соответствуют температуре 20°С. В реальных условиях строительные и машиностроительные конструкции могут эксплуатироваться при воздействии высоких и низких температур.

Для большинства металлов с повышением температуры уменьшаются пределы пропорциональности $\sigma_{\text{мп}}$, текучести $\sigma_{\text{т}}$, прочности $\sigma_{\text{в}}$ и модуль упругости E , а характеристики пластичности (остаточная деформация δ и остаточное сужение поперечного сечения ψ) увеличиваются. Коэффициент Пуассона ν при этом также несколько увеличивается. В области отрицательных температур повышается хрупкость металлов и увеличиваются значения $\sigma_{\text{мп}}$, $\sigma_{\text{т}}$, $\sigma_{\text{в}}$. При этом пластические свойства понижаются.

Однако у углеродистых сталей эти закономерности изменяются. При повышении температуры до +300°С предел прочности несколько увеличивается, а при дальнейшем увеличении температуры интенсивно уменьшается. Предел текучести с повышением температуры имеет тенденцию к уменьшению.

Радиационное облучение. При эксплуатации атомных электростанций, синхрофазотронов и других сооружений конструкции находятся под воздействием ионизирующего облучения, которое приводит к изменению механических свойств материалов. Действие радиационного облучения на металлы аналогично понижению температуры, то есть повышает прочностные характеристики и уменьшает пластические свойства. При длительной работе бетонных сооружений под воздействием радиации происходит понижение их жесткостных свойств и уменьшение модуля упругости.

Влияние фактора времени. На проявление упругих и пластических свойств материалов влияет скорость приложения нагрузки. Например, для стали при быстром нагружении пластические свойства не успевают развиваться и на диаграмме растяжения отсутствует площадка текучести, а предел прочности увеличивается.

Существенное значение для некоторых материалов имеет длительность приложения нагрузки. При этом проявляется свойство *ползучести*, которое характеризуется нарастанием деформаций при постоянной нагрузке.

У металлов свойства ползучести проявляются только при повышенных температурах. Например, для сталей — при $T > 400^\circ\text{C}$. Испытание стального образца при высокой температуре и постоянной нагрузке позволяет построить графики изменения деформаций во времени, называемые кривыми ползучести (кривая 1 на рис. 3.25).

Первый участок *OA* соответствует упругим «мгновенным» деформациям, возникающим в момент приложения нагрузки. На практике период нагружения занимает какое-то время, однако по сравнению с рассматриваемыми длительными процессами этим временем можно пренебречь и считать нагружение мгновенным. Далее при постоянной нагрузке развиваются деформации ползучести сначала по кривой *AB*, затем по прямой *BC* и заканчиваются перед разрушением кривой *CD*.

В теории ползучести вводится понятие *скорости ползучести*, численное значение которой можно определить по тангенсу угла наклона касательной к кривой ползучести в некоторой точке:

$$v_{\text{п}} = \lg \alpha = \frac{d\varepsilon}{dt}.$$

Участок *AB* соответствует неустановившейся ползучести, *BC* — установившейся ползучести ($v_{\text{п}} = \text{const}$) и *CD* — прогрессирующей ползучести. Свойства ползучести учитываются в прочностных расчетах конструкций. Необходимо, чтобы наибольшая деформация ползучести в период эксплуатации не превышала допустимой. Примером конструкций, работающих при высоких температурах и напряжениях, являются металлические паропроводы, у которых диаметр со временем увеличивается и может произойти разрыв стенок.

Другим строительным материалом, обладающим свойством ползучести, является бетон. Ползучесть бетона проявляется при нормальной температуре. Со временем деформации ползучести бетона затухают (кривая 2 на рис. 3.25). Период затухания дефор-

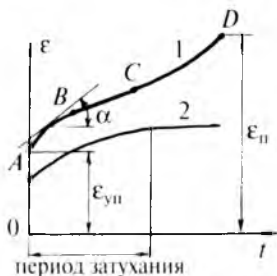


Рис. 3.25

маций ползучести бетона очень длительный и может продолжаться до нескольких лет.

Остановимся еще на одном явлении — *релаксации напряжений*, которая характеризуется уменьшением напряжений при постоянной деформации. Например, она наблюдается в болтовых соединениях, когда усилие затяжки и, следовательно, плотность соединения со временем уменьшаются. Релаксацию напряжений (усилий) можно проиллюстрировать простой схемой (рис. 3.26), на которой между двумя неподвижными плоскостями помещена пружина с динамометром, показывающим усилие растяжения. Если материал пружины обладает свойством релаксации, то показания на динамометре уменьшаются. Это можно изобразить графиком зависимости напряжений от времени — кривой релаксации (рис. 3.27). Начальное напряжение σ_0 создается в короткий промежуток времени при некотором фиксированном перемещении δ крюка динамометра до опоры. Затем напряжение (усилие) уменьшается сначала быстро, а затем с затуханием, приближаясь асимптотически к горизонтали на уровне конечного напряжения σ_k . Тангенс угла наклона касательной к кривой релаксации в некоторой точке дает по абсолютной величине численное значение скорости релаксации:

$$v_{\text{рел}} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{d\sigma}{dt}.$$



Рис. 3.26

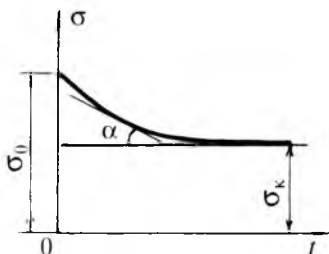


Рис. 3.27

Явления ползучести и релаксации напряжений особенно заметно проявляются в различных полимерах, используемых в качестве конструкционных материалов при изготовлении деталей машин и элементов строительных конструкций.

3.6. Потенциальная энергия деформации при растяжении и сжатии

Рассмотрим стержень постоянного сечения, нагруженный на свободном конце сосредоточенной силой P (рис. 3.3). При постепенном возрастании силы P от нуля до некоторого значения P_1 (рис. 3.28) она совершает работу A на вызванных этой силой перемещениях. Вычислим работу A , учитывая, что в упругой стадии сила пропорциональна удлинению стержня:

$$P = k \Delta l. \quad (3.25)$$

Входящий в это равенство коэффициент k зависит от свойств материала и размеров стержня.

Элементарная работа на удлинении $d(\Delta l)$ численно равна заштрихованной на рис. 3.28 площади или произведению среднего значения силы P на этом отрезке на величину $d(\Delta l)$:

$$dA = P d(\Delta l).$$

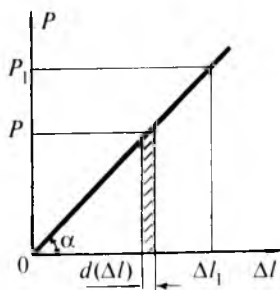


Рис. 3.28

Полная работа, затраченная на удлинение стержня до величины Δl_1 , с учетом (3.25) равна

$$A = \int_0^{\Delta l_1} P d(\Delta l) = k \int_0^{\Delta l_1} \Delta l d(\Delta l) = k \frac{\Delta l_1^2}{2}.$$

Производя в полученном выражении обратную замену $\Delta l_1 = P_1/k$, приходим окончательно к следующему выражению:

$$A = \frac{1}{2} P_1 \Delta l_1.$$

Нетрудно заметить, что полученное выражение равно площади под линейной диаграммой $P(\Delta l)$, показанной на рис. 3.28.

Поскольку сделанный вывод справедлив для любых значений P и Δl , относящихся к линейному участку деформирования, опустим индекс у соответствующих величин и выражение для работы силы P представим в виде

$$A = \frac{1}{2} P \Delta l. \quad (3.26)$$

Работа, совершаемая силой P , сопровождается накоплением потенциальной энергии деформации стержня U , а также наличием кинетической энергии K движения его частиц.

При статическом нагружении скорость перемещения частиц незначительна, в силу чего кинетической энергией можно пренебречь. Кроме того, при упругой работе материала можно не учитывать части работы, связанные с выделением тепла, с преодолением внутреннего трения и т.п. В силу этого можно принять, что работа силы P численно равна потенциальной энергии деформации стержня:

$$A = U = \frac{1}{2} P \Delta l. \quad (3.27)$$

При разгрузке стержня потенциальная энергия деформации расходуется на восстановление его первоначальной формы и размеров, то есть на возвращение его в первоначальное недеформированное состояние.

Подставляя в выражение (3.27) значение Δl из формулы (3.11) и учитывая, что в данном случае продольная сила N постоянна по длине стержня и равна P , перепишем последнее равенство следующим образом:

$$U = \frac{N^2 l}{2EF} = \frac{P^2 l}{2EF}.$$

Полученную формулу можно обобщить на случай, когда продольная сила, а также жесткость стержня при растяжении и сжатии переменны по длине. В этом случае энергия, накапливаемая в участке стержня длиной dx , равна

$$dU = \frac{N^2 dx}{2EF}, \quad (3.28)$$

а полная энергия вычисляется по формуле

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{N^2 dx}{EF}. \quad (3.29)$$

В качестве примера вычислим потенциальную энергию, накопленную в стержне, находящемся под действием равномерно распределенной нагрузки q (см. рис. 3.8). В этом случае $EF = \text{const}$ и

$$N(x) = q(l - x).$$

Подставляя соответствующие выражения в (3.29) и интегрируя, получим

$$U = \frac{q^2}{2EF} \int_0^l (l-x)^2 dx = \frac{q^2 l^3}{6EF}.$$

Во многих задачах сопротивления материалов и теории упругости представляет интерес не полная энергия, накопленная в элементе конструкции, а *удельная потенциальная энергия* U_0 , отнесенная к единице объема тела. В частном случае стержня, растягиваемого сосредоточенной силой P , получим

$$U_0 = \frac{P\Delta l}{2Fl}.$$

Учитывая, что $P/F = \sigma$, а $\Delta l/l = \epsilon$, это равенство представим в виде

$$U_0 = \frac{\sigma\epsilon}{2}. \quad (3.30)$$

Используя закон Гука (3.7), можно получить следующие формулы:

$$U_0 = \frac{\sigma^2}{2E}; \quad U_0 = \frac{E\epsilon^2}{2}. \quad (3.31)$$

3.7. Расчеты на прочность

Сечения элементов конструкции должны быть такими, чтобы в течение всего срока эксплуатации была исключена возможность разрушения и возникновения недопустимо больших деформаций конструкции при одновременном требовании экономии материала. Необходимые размеры сечений элементов конструкции определяются из расчетов на прочность, жесткость и устойчивость.

Расчет на прочность сводится к требованию, чтобы наибольшие напряжения в элементе конструкции (нормальные, касательные либо определенная комбинация этих напряжений) не превосходили некоторой допустимой для данного материала величины.

Расчет на жесткость сводится к требованию, чтобы наибольшие перемещения (удлинения стержней, прогибы, осадки опор) не превышали некоторых допустимых величин.

В этом параграфе ограничимся кратким изложением методов расчета на прочность. Расчеты на жесткость и устойчивость подробно рассматриваются в следующих главах.

Существуют три метода расчета на прочность:

- 1) метод допускаемых напряжений;
- 2) метод предельных состояний;
- 3) метод разрушающих нагрузок.

Рассмотрим все три метода.

1. Метод допускаемых напряжений. Этот метод применяется при расчете машиностроительных конструкций. *Допускаемым* называется наибольшее напряжение, при котором элемент конструкции будет работать длительное время без опасности его разрушения. Допускаемое напряжение $[\sigma]$ определяется делением опасного напряжения σ_0 на коэффициент запаса прочности $n > 1$:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_0}{n}. \quad (3.32)$$

Для элементов конструкций, изготовленных из материалов, обладающих свойствами пластичности, за опасное напряжение принимается предел текучести при растяжении σ_T^p или сжатии σ_T^c , так как при достижении этих напряжений могут возникнуть недопустимо большие остаточные деформации.

Для элементов конструкций, изготовленных из хрупких материалов, за опасные напряжения принимаются временное сопротивление (предел прочности) при растяжении σ_B^p или сжатии σ_B^c , так как при достижении этих напряжений происходит разрушение. Таким образом, для пластичных материалов допускаемые напряжения при растяжении и сжатии определяются по формулам

$$[\sigma_p] = \frac{\sigma_T^p}{n_T}; \quad [\sigma_c] = \frac{\sigma_T^c}{n_T}, \quad (3.33)$$

где n_T — коэффициент запаса по пределу текучести.

Для материалов с выраженными пластическими свойствами $\sigma_T^p = \sigma_T^c = \sigma_T$ и

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T}. \quad (3.34)$$

Для хрупких материалов

$$[\sigma_p] = \frac{\sigma_B^p}{n_B}; \quad [\sigma_c] = \frac{\sigma_B^c}{n_B}, \quad (3.35)$$

где n_B — коэффициент запаса по временному сопротивлению.

Необходимость введения коэффициента запаса обусловлена рядом обстоятельств: невозможностью точно определить величины и характер действующих нагрузок; разбросом свойств материалов (особенно неоднородных) и недостаточной точностью их определения; невозможностью учета всех неблагоприятных условий эксплуатации сооружения; неточностью изготовления и монтажа кон-

струкции; неточностью методов расчета; назначением и степенью ответственности конструкции.

Величины коэффициентов запаса и допускаемых напряжений устанавливаются нормами проектирования и изменяются в пределах: $n_T = 1,5 \div 2,5$; $n_B = 2,5 \div 5$. Очевидно, что коэффициент запаса n_B должен быть больше, чем n_T , так как появление в элементе конструкции напряжений, равных σ_p , еще не приводит его к разрушению. Ориентировочные величины допускаемых напряжений для некоторых материалов, применяемых в машиностроении, приведены в табл. 3.4.

Таблица 3.4

Наименование материала	Допускаемые напряжения, МПа	
	при растяжении $[\sigma_p]$	при сжатии $[\sigma_c]$
Сталь машиностроительная (конструкционная) углеродистая	60÷250	
Сталь машиностроительная (конструкционная) легированная	100÷400 и выше	
Медь	30÷120	
Бронза	60÷120	
Дюралюминий	80÷150	
Чугун серый в отливках	28÷80	120÷160
Сосна вдоль волокон	7÷10	10÷12
Сосна поперек волокон	—	1,5÷2,0
Текстолит	30÷40	
Гетинакс	50÷70	

Условие прочности при расчете по методу допускаемых напряжений сводится к требованию, чтобы наибольшие растягивающие $\sigma_p^{нб}$ и наибольшие по абсолютной величине сжимающие $\sigma_c^{нб}$ напряжения в элементе конструкции не превышали допускаемых напряжений:

$$\sigma_p^{нб} \leq [\sigma_p]; \quad \sigma_c^{нб} \leq [\sigma_c]. \quad (3.36)$$

Если материал одинаково сопротивляется растяжению и сжатию, то производится проверка прочности по наибольшему по абсолютной величине напряжению:

$$\sigma_{нб} \leq [\sigma]. \quad (3.37)$$

В некоторых случаях, например для деталей машин, работающих на кручение, для элементов соединений, работающих на

сдвиг (заклепки, сварные швы, деревянные шпонки и т.п.), решающее значение для прочности имеют касательные напряжения. Условие прочности по касательным напряжениям записывается в виде

$$\tau_{\text{нб}} \leq [\tau], \quad (3.38)$$

где $[\tau]$ — допускаемое касательное напряжение. Для пластичных материалов принимается $[\tau] \approx 0,6 [\sigma]$.

Сечение стержня, в котором действует наибольшее напряжение, называется опасным сечением.

При центральном растяжении и сжатии в опасных сечениях стержня должны выполняться условия прочности, которые с учетом формул (3.36) и (3.37) можно представить в виде

$$\sigma_p = \frac{N_p}{F} \leq [\sigma_p]; \quad \sigma_c = \frac{N_c}{F} \leq [\sigma_c]; \quad (3.39)$$

$$\sigma = \frac{N}{F} \leq [\sigma]. \quad (3.40)$$

В этих формулах продольные силы принимаются по абсолютной величине.

2. Метод предельных состояний. Этот метод применяется при расчете строительных конструкций.

Предельным называется такое состояние конструкции, при котором становится невозможной ее дальнейшая нормальная эксплуатация.

В строительных нормах и правилах (СНиП) установлены три группы предельных состояний.

Первая группа предельных состояний определяется потерей несущей способности — прочности или устойчивости.

Вторая группа предельных состояний определяется возникновением чрезмерно больших деформаций или колебаний сооружения.

Третья группа предельных состояний определяется образованием и развитием трещин и других повреждений.

В этом параграфе рассматривается расчет на прочность по первой группе предельных состояний.

При расчете на прочность по допускаемым напряжениям вводится один общий коэффициент запаса. Расчет на прочность по первой группе предельных состояний отличается более гибким подходом к назначению необходимого запаса прочности. При этом вместо одного коэффициента запаса вводятся несколько коэффициентов.

Коэффициент надежности по нагрузке γ_f . С помощью этого коэффициента учитывается возможное увеличение нагрузки по срав-

нению с ее *нормативным значением* R_n , приведенным в СНиП. Расчет на прочность производится на действия расчетных нагрузок P_p , значения которых определяются по формуле

$$P_p = P_n \gamma_f. \quad (3.41)$$

Для постоянных нагрузок (например, собственный вес) коэффициент $\gamma_f = 1,05 \div 1,3$. Для временных нагрузок $\gamma_f = 1,05 \div 1,4$. Например, для снеговой и ветровой нагрузок принимается $\gamma_f = 1,4$.

Коэффициент надежности по материалу γ_m . С помощью этого коэффициента учитывается возможное уменьшение нормативного сопротивления R_n материала конструкции по сравнению с данными испытаний на образцах. Для пластичных материалов за нормативное сопротивление принимается предел текучести $R_n = \sigma_t$, для хрупких — временное сопротивление $R_n = \sigma_b$. Для стальных конструкций величина γ_m принимается в пределах $1,025 \div 1,15$.

Величина

$$R = \frac{R_n}{\gamma_m} \quad (3.42)$$

называется *расчетным сопротивлением материала*. Для строительных сталей эта величина определяется по формуле

$$R = \frac{\sigma_t}{\gamma_m} \quad (3.43)$$

и называется *расчетным сопротивлением по пределу текучести*.

Значения расчетных сопротивлений для некоторых материалов приведены в табл. 3.5. Более полные сведения приведены в соответствующих разделах СНиП.

При расчетах на прочность вводится также *коэффициент условий работы* γ_c , зависящий от вида конструкции и особенностей ее работы. Величина γ_c изменяется в пределах $0,75 \div 1,0$.

Условия прочности при расчете по первой группе предельных состояний сводятся к требованию, чтобы наибольшие растягивающие напряжения $\sigma_p^{нб}$ и наибольшие по абсолютной величине сжимающие напряжения $\sigma_c^{нб}$ от действия расчетных нагрузок не превышали величин расчетных сопротивлений при растяжении R_p и сжатии R_c , умноженных на коэффициент условий работы γ_c :

$$\sigma_p^{нб} \leq \gamma_c R_p; \quad \sigma_c^{нб} \leq \gamma_c R_c. \quad (3.44)$$

Если материал одинаково сопротивляется растяжению и сжатию, то производится проверка прочности по наибольшему по абсолютной величине напряжению:

$$\sigma_{нб} \leq \gamma_c R. \quad (3.45)$$

Условие прочности по касательным напряжениям записывается в виде

$$\tau \leq \gamma_c R_s, \quad (3.46)$$

где R_s — расчетное сопротивление материала при сдвиге. Для пластичных материалов $R_s \approx 0,6R$.

Таблица 3.5

Наименование материала	Расчетное сопротивление, МПа		
	при растяжении R_p	при сжатии R_c	при сдвиге R_s
Прокат стали марок:			
ВСт3кп	175+230		100÷140
ВСт3пс, ВСт3сп	230+280		140÷170
09Г2 (марганцовистая)	290+360		180÷215
10ХСНД (хромокремненикелевая)	355		210
12Г2СМФ (термически упрочненная легированная)	515		310
Алюминиевые сплавы, термически упрочненные	125+200		75÷120
Чугун серый марки СЧ	55÷100	160÷250	40÷75
Бетон	0,26÷1,68	2,14÷33,6	—
Сосна, ель:			
вдоль волокон	10	13	2,4
при изгибе	13	13	2,4

При центральном растяжении и сжатии в опасных сечениях стержня должны выполняться условия прочности, которые по аналогии с (3.39) и (3.40) можно представить в виде

$$\sigma_p = \frac{N_p}{F} \leq \gamma_c R_p; \quad \sigma_c = \frac{N_c}{F} \leq \gamma_c R_c; \quad (3.47)$$

$$\sigma = \frac{N}{F} \leq \gamma_c R, \quad (3.48)$$

где, как и в формулах (3.39) и (3.40), продольные силы принимаются по абсолютной величине.

При расчете элементов конструкций, работающих на центральное растяжение и сжатие, решаются задачи трех типов: 1) проверка прочности; 2) подбор сечения; 3) определение несущей способности (грузоподъемности) стержня или стержневой системы.

Рассмотрим решение этих задач на простых примерах.

Решение первой задачи сводится к проверке выполнения условий прочности при заданных нагрузке, форме, размерах сечений и свойствах материала.

Проверим прочность чугунного стержня (рис. 3.29, а), центрально нагруженного двумя сосредоточенными силами $P_1 = 100$ кН и $P_2 = 600$ кН. Нижняя часть стержня имеет постоянное по длине квадратное сечение 60×60 мм. Верхняя часть имеет форму усеченного конуса. Диаметр верхнего сечения $d_1 = 40$ мм, нижнего — $d_2 = 50$ мм. Допускаемые напряжения чугуна при растяжении $[\sigma_p] = 80$ МПа и сжатии $[\sigma_c] = 150$ МПа.

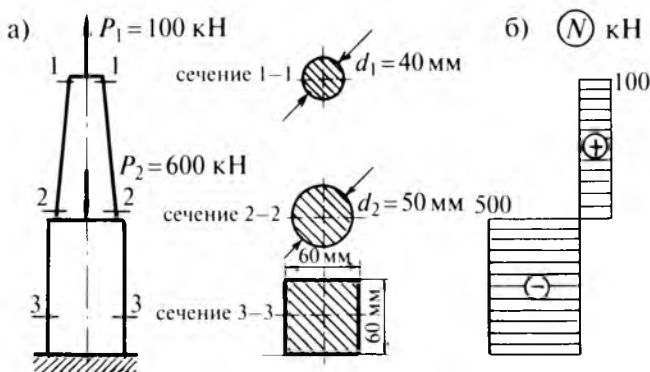


Рис. 3.29

На рис. 3.29, б приведена эпюра продольных сил. Для верхней части опасным является сечение 1—1, в котором действует растягивающая продольная сила $N_p = 100$ кН, а площадь сечения $F_1 = \pi \cdot 2^2 = 12,56$ см². По первой из формул (3.39) проверяем прочность по растягивающим напряжениям:

$$\sigma_p = \frac{N_p}{F_1} = \frac{100}{12,56} = 7,96 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 79,6 \text{ МПа} < [\sigma_p] = 80 \text{ МПа}.$$

В нижней, сжатой части продольная сила по абсолютной величине равна $N_c = 500$ кН и все сечения равноопасны; $F_2 = 6 \cdot 6 = 36$ см². По второй из формул (3.39) проверяем прочность по сжимающим напряжениям:

$$\sigma_c = \frac{N_c}{F_2} = \frac{500}{36} = 13,89 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 138,9 \text{ МПа} < [\sigma_c] = 150 \text{ МПа}.$$

Таким образом, условия прочности выполняются.

Решение второй задачи сводится к определению размеров сечения заданной формы при заданных нагрузках и свойствах материала.

Балка AB (рис. 3.30) шарнирно оперта в точке A и поддерживается стержнем CD , шарнирно прикрепленным к балке в точке D и к опоре в точке C . Балка нагружена на конце силой P , нормативное значение которой $P_n = 200$ кН. Коэффициент надежности по нагрузке $\gamma_f = 1,2$, коэффициент условий работы $\gamma_c = 0,9$. Материал стержня — строительная сталь марки ВСт3пс 6-1 с расчетным сопротивлением по пределу текучести $R = 240$ МПа. Требуется подобрать сечение стержня в виде двух равнобоких уголков.

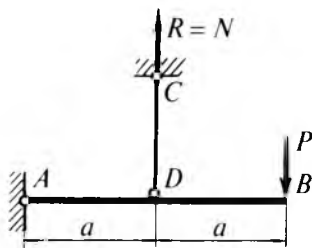


Рис. 3.30

По формуле (3.41) определим расчетное значение нагрузки:

$$P_p = P_n \gamma_f = 200 \cdot 1,2 = 240 \text{ кН.}$$

Из уравнения равновесия $\sum M_A = Na - P_p 2a = 0$ находим усилие в стержне:

$$N = 2P_p = 480 \text{ кН.}$$

Из условия прочности по первой группе предельных состояний (3.48) определяем требуемую площадь сечения стержня:

$$F_{\text{т}} = \frac{N}{\gamma_c R} = \frac{480}{0,9 \cdot 240 \cdot 10^{-1}} = 22,22 \text{ см}^2.$$

По сортаменту прокатных профилей «Сталь прокатная угловая равнополочная» (по ГОСТ 8509 — 72) принимаем сечение $2\angle 80 \times 8$. Площадь сечения двух уголков $F = 2 \cdot 12,3 = 24,6 \text{ см}^2$.

При решении третьей задачи по определению грузоподъемности стержня или стержневой системы находится нагрузка, при действии которой напряжения в опасном сечении в зависимости от метода расчета равны допускаемым напряжениям или расчетному сопротивлению материала, умноженному на коэффициент условий работы.

В качестве примера определим грузоподъемность статически неопределимой стержневой системы (см. рис. 3.9), рассмотренной в § 3.4, при следующих исходных данных: все три стержня выполнены из двух равнобоких уголков $2\angle 80 \times 8$, имеющих площадь сечения $F = 2 \cdot 12,3 = 24,6 \text{ см}^2$; материал — сталь с расчетным сопротивлением $R = 210 \text{ МПа}$; коэффициент условий работы $\gamma_c = 1$; угол наклона крайних стержней к вертикали $\alpha = 30^\circ$.

Поделив найденные усилия N_1, N_2, N_3 на площади поперечных сечений стержней, определим напряжения:

$$\sigma^{(1)} = \frac{N_1}{F_1} = \frac{P \cos^2 \alpha}{(1 + 2 \cos^3 \alpha) F}; \quad \sigma^{(2)} = \frac{N_2}{F_2} = \frac{P}{(1 + 2 \cos^3 \alpha) F}.$$

Из этих формул видно, что напряжения в среднем стержне больше, чем в крайних. Приравняв $\sigma^{(2)}$ величине $\gamma_c R$, определим грузоподъемность стержневой системы:

$$P = (1 + 2 \cos^3 \alpha) F \gamma_c R = (1 + 2 \cos^3 30^\circ) \cdot 24,6 \cdot 1 \cdot 210 \cdot 10^{-1} = 1188 \text{ кН}.$$

3. Метод разрушающих нагрузок. Для конструкции, изготовленной из материала с достаточно протяженной площадкой текучести, за разрушающую принимается нагрузка, при которой в ее элементах возникают значительные пластические деформации. При этом конструкция становится неспособной воспринимать дальнейшее увеличение нагрузки.

Для конструкции, изготовленной из хрупкого материала, за разрушающую принимается нагрузка, при которой хотя бы в одном из ее элементов возникают напряжения, равные пределу прочности σ_b .

Для стержня ступенчато-постоянного сечения (рис. 3.31) за разрушающую нагрузку в случае пластичного материала следует принять $P_{\text{разр}} = \sigma_T F_1$, а в случае хрупкого материала — $P_{\text{разр}} = \sigma_b F_1$.

Для статически определимой стержневой системы (рис. 3.32) усилия в стержнях определяются из уравнений равновесия узла С: $N_1 = N_2 = P/2 \cos \alpha$. Разрушающей будет нагрузка, при которой напряжения в стержне АС, имеющем меньшую площадь сечения F_1 , равны σ_1 в случае пластичного материала и σ_b — в случае хрупкого материала. В первом случае $P_{\text{разр}} = 2 \sigma_T F_1 \cos \alpha$, во втором — $P_{\text{разр}} = 2 \sigma_b F_1 \cos \alpha$.

В статически неопределимой стержневой системе возникновение напряжений, равных пределу текучести в наиболее напряженном стержне, еще не означает, что система непригодна для дальнейшей работы. Возможно дальнейшее увеличение нагрузки за счет того, что не все стержни одновременно переходят в пластическое

состояние. Так, если стержневую систему (см. рис. 3.9), изготовленную из материала, следующего диаграмме идеальной пластичности Прандтля (см. рис. 3.17), нагружать постепенно возрастающей силой P , то сначала напряжения, равные σ_T , возникнут только в наиболее нагруженном среднем стержне.

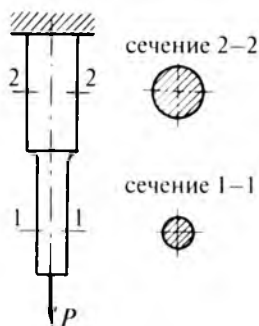


Рис. 3.31

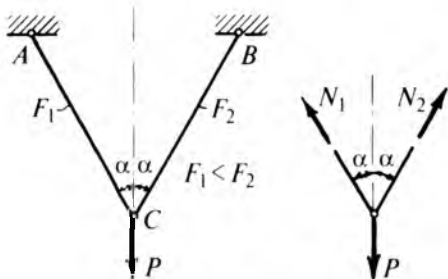


Рис. 3.32

Возникновение пластических деформаций в среднем стержне не означает его разрушение. Согласно диаграмме Прандтля напряжения, а следовательно, и усилия в этом стержне остаются постоянными ($\sigma = \sigma_T$; $N_2 = N_{2T} = \sigma_T F$) и стержень воспринимает часть нагрузки. Дальнейший рост нагрузки будет восприниматься системой до тех пор, пока напряжения в крайних стержнях не достигнут предела текучести σ_T .

Разрушение наступит тогда, когда и в этих стержнях возникнут напряжения, равные σ_T . В этом состоянии усилия во всех стержнях равны $N_{1T} = N_{2T} = N_{3T} = \sigma_T F$ и разрушающая нагрузка определяется из уравнения равновесия:

$$\sum Y = 0, \quad 2N_{1T} \cos \alpha + N_{2T} - P_{\text{разр}} = 0,$$

$$P_{\text{разр}} = \sigma_T F (1 + 2 \cos \alpha).$$

Если та же система изготовлена из хрупкого материала, то разрушающей нагрузке соответствует возникновение напряжений, равных пределу прочности σ_B в среднем стержне.

Определив величину разрушающей нагрузки, можно установить грузоподъемность стержня или стержневой системы по формуле

$$[P] \leq \frac{P_{\text{разр}}}{n},$$

где $[P]$ — допускаемая нагрузка и n — коэффициент запаса прочности, принимаемый на основе тех же соображений, что и в методе допускаемых напряжений.

ГЛАВА 4

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ ТЕЛА

4.1. Напряжения на координатных и наклонной площадках

Если через произвольную точку тела провести три взаимно перпендикулярные площадки параллельно координатным плоскостям, то девять составляющих (компонент) напряжения: три нормальных $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ и шесть касательных $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{yx}, \tau_{xz}, \tau_{zy}$, действующих на этих площадках (рис. 4.1), полностью определяют напряженное состояние в окрестности данной точки. Это означает, что, зная эти девять величин, можно найти напряжения на любой наклонной площадке, проходящей через данную точку. Слово «составляющая» или «компонента» в дальнейшем для краткости будем опускать.

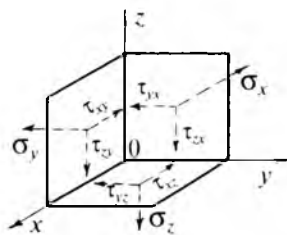


Рис. 4.1

Все девять напряжений можно обозначить одинаково, например σ_{ij} ($i, j = x, y, z$). Тогда при $i = j$ получаются нормальные напряжения, в которых сохраняется только один индекс, а при $i \neq j$ — касательные напряжения. Первый индекс указывает, параллельно какой оси направлено напряжение, а второй — обозначает нормаль к площадке, на которой оно действует. Это правило непосредственно относится к касательным напряжениям, но им также можно пользоваться и для нормальных напряжений, если употреблять обозначения σ_{ij} . Нормальные напряжения считаются положительными, если они направлены в сторону внешней нормали к площадке, и наоборот. В соответствии с этим правилом положительные нормальные напряжения считаются растягивающими, а отрицательные — сжимающими.

Для касательных напряжений принимается следующее правило знаков. На площадке, внешняя нормаль к которой направлена в положительном направлении соответствующей оси, касательное напряжение считается положительным, если оно также направлено в положительном направлении оси. На рис. 4.1 показаны положительные напряжения.

Проведем в окрестности точки O тела произвольную наклонную площадку ABC , площадь которой обозначим через dF (рис. 4.2). Положение этой площадки может быть определено углами, которые составляет нормаль ν с осями координат.

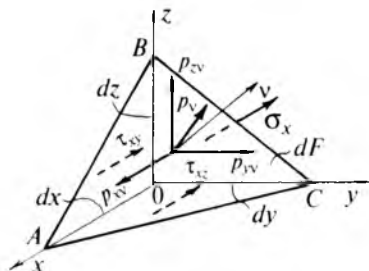


Рис. 4.2

Как известно из аналитической геометрии, направляющие косинусы нормали

$$l = \cos(\nu, x); \quad m = \cos(\nu, y); \quad n = \cos(\nu, z)$$

связаны между собой соотношением

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1. \quad (4.1)$$

Полное напряжение p_ν , действующее на этой площадке, можно спроецировать на оси координат. Проекции $p_{x\nu}$, $p_{y\nu}$, $p_{z\nu}$ определяются из уравнений равновесия тетраэдра $OABC$. Составим сумму проекций всех сил, приложенных к граням тетраэдра, на ось Ox (на рис. 4.2 на вертикальных и горизонтальной гранях тетраэдра показаны только те напряжения, которые дают проекции на ось Ox):

$$p_{x\nu} dF - \sigma_x dF_x - \tau_{xy} dF_y - \tau_{xz} dF_z = 0,$$

где $dF_x = dF \cdot l$, $dF_y = dF \cdot m$, $dF_z = dF \cdot n$ — площади граней тетраэдра, перпендикулярных к осям Ox , Oy , Oz . С учетом этого получим

$$p_{x\nu} = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n.$$

Аналогично, составляя проекции всех сил, действующих на тетраэдр, на оси Oy и Oz , можно найти выражения для $p_{y\nu}$ и $p_{z\nu}$. В итоге получим следующие формулы для составляющих полного напряжения на наклонной площадке:

$$\left. \begin{aligned} p_{x\nu} &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n; \\ p_{y\nu} &= \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n; \\ p_{z\nu} &= \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n. \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

Величину полного напряжения на наклонной площадке можно определить по формуле

$$p_v^2 = p_{xv}^2 + p_{yv}^2 + p_{zv}^2. \quad (4.3)$$

Если наклонная грань элементарного тетраэдра совпадает с внешней поверхностью тела, то равенства (4.2) могут использоваться в качестве статических граничных условий. В этом случае p_{xv} , p_{yv} , p_{zv} являются составляющими внешней поверхностной нагрузки, параллельными осям координат.

Составим уравнение моментов сил относительно оси $O_1 z_1$, параллельной Oz и проходящей через центр тяжести тетраэдра (рис. 4.3) (на рисунке показаны напряжения, дающие моменты относительно этой оси):

$$\tau_{xy} \cdot \frac{1}{2} dx dz \cdot \frac{1}{3} dy - \tau_{yx} \cdot \frac{1}{2} dy dz \cdot \frac{1}{3} dx = 0.$$

Из этого равенства получим $\tau_{xy} = \tau_{yx}$. Точно так же можно получить еще два аналогичных равенства. Таким образом, будем иметь следующие три соотношения:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}; \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}, \quad (4.4)$$

выражающие *закон парности касательных напряжений*, согласно которому касательные напряжения на двух взаимно перпендикулярных площадках, направленные перпендикулярно к линии пересечения этих площадок, равны по величине.

В силу закона парности вместо девяти будем иметь шесть компонент напряжений, определяющих напряженное состояние в окрестности точки тела.

Полное напряжение p_v на наклонной площадке можно разложить на две составляющие по нормали v и по направлению t в плоскости площадки (рис. 4.4). Если напряжения p_v , σ_v и τ_{tv} действуют в одной плоскости, то они связаны между собой равенством

$$p_v^2 = \sigma_v^2 + \tau_{tv}^2. \quad (4.5)$$

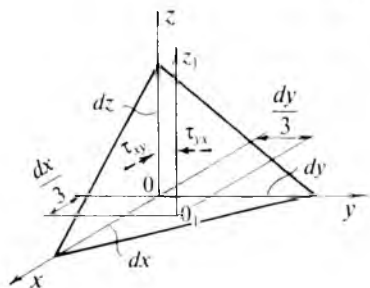


Рис. 4.3

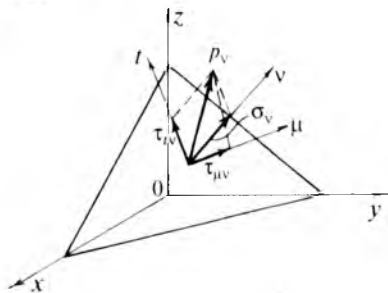


Рис. 4.4

Величину нормального напряжения σ_v на наклонной площадке найдем, составив проекцию полного напряжения p_v на направление нормали v :

$$\sigma_v = p_{xv}l + p_{yv}m + p_{zv}n.$$

Подставляя в это равенство выражения (4.2) и учитывая (4.4), получим

$$\sigma_v = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy}lm + 2\tau_{yz}mn + 2\tau_{zx}nl. \quad (4.6)$$

Величину касательного напряжения $\tau_{\mu v}$ по произвольному направлению μ в плоскости наклонной площадки, определяемую направляющими косинусами l_1, m_1, n_1 найдем, составив проекцию полного напряжения p_v на направление μ :

$$\begin{aligned} \tau_{\mu v} = p_{xv}l_1 + p_{yv}m_1 + p_{zv}n_1 = \sigma_x ll_1 + \sigma_y mm_1 + \sigma_z nn_1 + \\ + \tau_{xy}(lm_1 + ml_1) + \tau_{yz}(mn_1 + nm_1) + \tau_{zx}(nl_1 + ln_1). \end{aligned} \quad (4.7)$$

При совпадении направления μ с направлением t величину касательного напряжения $\tau_{\mu v} = \tau_{tv}$ можно определить также из равенства (4.5).

4.2. Дифференциальные уравнения равновесия

Из тела, находящегося под действием внешних сил, вырежем мысленно в окрестности точки O элементарный параллелепипед, грани которого параллельны координатным плоскостям (рис. 4.5). Напряженное состояние в этой точке определяется напряжениями, которые показаны на невидимых гранях. Поскольку все напряжения являются функциями координат точек тела, то при переходе к параллельным граням они получают некоторые малые приращения. Обозначим с помощью штрихов величины напряжений на видимых гранях параллелепипеда.

При переходе на параллельные грани приращения обусловлены изменением только одной из координат. Например, для σ'_x справедливо равенство

$$\sigma'_x = \sigma_x + \Delta_x \sigma_x.$$

Заменяя приближенно в этом выражении частное приращение частным дифференциалом, получим

$$\sigma'_x \approx \sigma_x + d_x \sigma_x = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx. \quad (4.8)$$

Аналогично определяем и другие напряжения на видимых гранях.

Составим суммы проекций всех сил, действующих на параллелепипед, на оси координат. При этом учтем также действие объемных

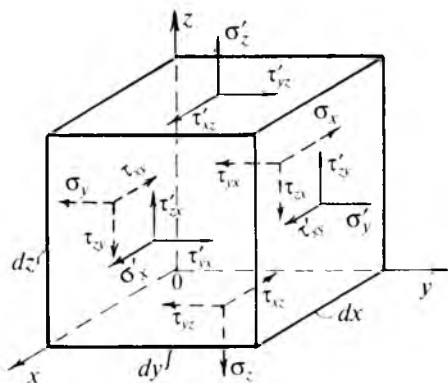


Рис. 4.5

сил. Обозначим отнесенные к единице объема тела проекции этих сил на оси координат через X, Y, Z . Для вычисления равнодействующих объемных сил их нужно умножить на объем параллелепипеда.

Суммируя проекции всех сил на ось Ox и приравнявая их к нулю, получим

$$(\sigma'_x - \sigma_x) dy dz + (\tau'_{xy} - \tau_{xy}) dx dz + (\tau'_{xz} - \tau_{xz}) dx dy + X dx dy dz = 0. \quad (4.9)$$

Входящие в это уравнение напряжения τ'_{xy} и τ'_{xz} определяются с помощью равенств, аналогичных (4.8) для напряжения σ'_x :

$$\tau'_{xy} = \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy; \quad \tau'_{xz} = \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz.$$

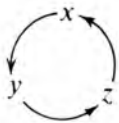
Подставив эти равенства в (4.9), после приведения подобных членов и деления на $dx dy dz$ получим

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0.$$

Аналогично можно составить уравнения проекций всех сил на оси Oy и Oz . В итоге получим систему трех уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

которые называются *дифференциальными уравнениями равновесия Навье*.



Второе и третье уравнения равновесия могут быть также получены из первого путем так называемой круговой перестановки индексов, схематично показанной на рис. 4.6.

Рис. 4.6

Дифференциальные уравнения равновесия устанавливают законы изменения напряжений при переходе от одной точки к бесконечно близко расположенной другой точке. С учетом закона парности касательных напряжений (4.4) эти уравнения содержат шесть неизвестных напряжений. Поскольку количество уравнений статики меньше количества неизвестных, то в общем случае задача определения напряжений является статически неопределимой.

Уравнения (4.10) могут быть также получены, если рассмотреть равновесие тела в целом. Составим уравнение суммы проекций всех сил на ось Ox , в которое войдут проекции объемных сил X и проекции поверхностной нагрузки p_{xy} :

$$\iiint_V X dV + \iint_S p_{xy} dS = 0.$$

Здесь dV и dS — соответственно элементы объема и поверхности тела. Подставив во второй интеграл первое равенство (4.2), получим

$$\iiint_V X dV + \iint_S (\sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n) dS = 0.$$

Из курса высшей математики известна формула Гаусса—Остроградского, которая позволяет преобразовать интеграл по поверхности в интеграл по объему:

$$\iint_S (Pl + Qm + Rn) dS = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV.$$

Используя эту формулу, запишем уравнение равновесия в виде

$$\iiint_V \left(X + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) dV = 0.$$

Поскольку это равенство справедливо при любых значениях dV , подынтегральное выражение должно быть равно нулю, что дает первое уравнение (4.10).

4.3. Тензор напряжений

Девять напряжений, действующих на трех взаимно перпендикулярных площадках, могут быть записаны в виде матрицы

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

которая называется *тензором напряжений*. С учетом закона парности касательных напряжений этот тензор является симметричным, то есть элементы матрицы, расположенные симметрично относительно главной диагонали, равны между собой.

Под действием напряжений, приложенных к граням элементарного параллелепипеда, он деформируется, то есть изменяются его размеры и форма. Под изменением объема будем понимать такой вид деформирования, при котором соотношения между длинами ребер параллелепипеда не изменяются и прямые углы между гранями не искажаются. Выделим из тензора напряжений те напряжения, которые вызывают только изменение объема параллелепипеда. Очевидно, что изменение только объема будет происходить в том случае, когда ко всем граням параллелепипеда приложены одинаковые нормальные напряжения σ_0 , а касательные напряжения отсутствуют. Во всех остальных случаях будет происходить также изменение формы. Так, например, при одноосном растяжении один размер увеличивается, а два других уменьшаются, то есть форма параллелепипеда изменяется. Тензор напряжений

$$T_{\sigma}^0 = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

соответствующий напряженному состоянию, при котором на трех взаимно перпендикулярных площадках действуют только три одинаковых нормальных напряжения, равных *среднему напряжению* в данной точке тела

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z), \quad (4.13)$$

называется *шаровым тензором*.

Вычитая из тензора напряжений (4.11) шаровой тензор (4.12), получим так называемый *девиатор напряжений*

$$D_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_0 \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

Таким образом, тензор напряжений T_{σ} может быть представлен в виде суммы

$$T_{\sigma} = T_{\sigma}^0 + D_{\sigma}. \quad (4.15)$$

Компоненты шарового тензора приводят к изменению объема, а компоненты девиатора напряжений определяют изменение формы параллелепипеда.

Разложение тензора напряжений на шаровой тензор и девиатор напряжений будет использовано в дальнейшем при рассмотрении физических соотношений в теории упругости и теории пластичности.

4.4. Главные площадки и главные напряжения

При изменении положения наклонной площадки (рис. 4.4), то есть при изменении углов между нормалью v и осями координат, напряжения σ_v и $\tau_{rv} = \tau_{\mu v}$, как следует из формул (4.6) и (4.7), будут также изменяться. Поставим задачу отыскания таких площадок, на которых касательные напряжения отсутствуют. Такие площадки называются *главными площадками*, а нормальные напряжения, действующие на них, — *главными напряжениями*.

Полное напряжение p_v на главной площадке направлено по нормали к ней и, следовательно, совпадает по величине и направлению с главным напряжением σ (рис. 4.7). Проекции этого напряжения на оси координат будут равны

$$p_{xv} = \sigma l; \quad p_{yv} = \sigma m; \quad p_{zv} = \sigma n. \quad (4.16)$$

Приравнивая правые части равенств (4.16) и (4.2) между собой, получим систему алгебраических уравнений относительно неизвестных l , m и n :

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma)l + \tau_{xy}m + \tau_{xz}n &= 0; \\ \tau_{yx}l + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{yz}n &= 0; \\ \tau_{zx}l + \tau_{zy}m + (\sigma_z - \sigma)n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

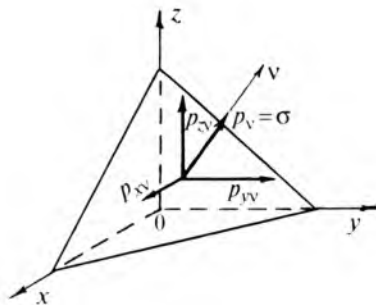


Рис. 4.7

Из равенства (4.1) следует, что направляющие косинусы l, m, n не могут быть все одновременно равны нулю. Следовательно, система однородных уравнений (4.17) должна иметь ненулевое решение. Это возможно только при условии равенства нулю определителя системы:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим следующее кубическое уравнение относительно главного напряжения:

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0, \quad (4.18)$$

где

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z; \\ I_2 &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2; \\ I_3 &= \sigma_x \sigma_y \sigma_z - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

Существует доказательство, что все три корня уравнения (4.18) являются действительными числами. В дальнейшем величины трех главных напряжений обозначаются через $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. При этом обычно принимается, что

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3. \quad (4.20)$$

Для решения уравнения (4.18) применим следующий способ. Вычислим вспомогательные величины:

$$a = \frac{1}{3} \left(I_2 - \frac{1}{3} I_1^2 \right); \quad b = -\frac{I_1^3}{27} + \frac{I_1 I_2}{6} - \frac{I_3}{2}; \quad \cos \varphi = \frac{|b|}{|a| \sqrt{|a|}}.$$

При этом корни уравнения (4.18) можно вычислить по формулам:

$$\sigma' = 2 \left(\pm \sqrt{|a|} \cos \frac{\pi - \varphi}{3} + \frac{I_1}{6} \right);$$

$$\sigma'' = 2 \left(\pm \sqrt{|a|} \cos \frac{\pi + \varphi}{3} + \frac{I_1}{6} \right);$$

$$\sigma''' = -2 \left(\pm \sqrt{|a|} \cos \frac{\varphi}{3} - \frac{I_1}{6} \right).$$

Знак перед корнем должен совпадать со знаком b .

В соответствии с (4.20) наибольшее из этих напряжений будет σ_1 , а наименьшее — σ_3 . Определив значения главных напряжений, из (4.17) с учетом (4.1) можно найти положения каждой из трех главных площадок, то есть определить l_i, m_i, n_i ($i = 1, 2, 3$). Для этого следует подставить последовательно значения σ_i в какие-либо два уравнения (4.17) (третье является линейно зависимым) и, решая их совместно с (4.1), найти соответствующие значения направляющих косинусов. Выражения для l_i, m_i, n_i можно получить, используя известные из математики формулы Крамера:

$$l_i = \frac{\Delta_{1i}}{D_i}; \quad m_i = \frac{\Delta_{2i}}{D_i}; \quad n_i = \frac{\Delta_i}{D_i}, \quad (4.21)$$

где

$$\Delta_{1i} = -(\sigma_y - \sigma_i) \tau_{xz} + \tau_{xy} \tau_{yz};$$

$$\Delta_{2i} = -(\sigma_x - \sigma_i) \tau_{yz} + \tau_{xy} \tau_{xz};$$

$$\Delta_i = (\sigma_x - \sigma_i)(\sigma_y - \sigma_i) - \tau_{xy}^2;$$

$$D_i = \sqrt{\Delta_{1i}^2 + \Delta_{2i}^2 + \Delta_i^2}.$$

Найденные по формулам (4.21) значения направляющих косинусов позволяют определить направления нормалей к главным площадкам. Эти направления будем называть *главными направлениями*.

Покажем, что главные площадки взаимно перпендикулярны. Подставим в (4.17) значения направляющих косинусов, соответствующие первой и второй главным площадкам:

$$(\sigma_x - \sigma_1)l_1 + \tau_{xy}m_1 + \tau_{xz}n_1 = 0;$$

$$\tau_{yx}l_1 + (\sigma_y - \sigma_1)m_1 + \tau_{yz}n_1 = 0;$$

$$\tau_{zx}l_1 + \tau_{zy}m_1 + (\sigma_z - \sigma_1)n_1 = 0;$$

$$(\sigma_x - \sigma_2)l_2 + \tau_{xy}m_2 + \tau_{xz}n_2 = 0;$$

$$\tau_{yx}l_2 + (\sigma_y - \sigma_2)m_2 + \tau_{yz}n_2 = 0;$$

$$\tau_{zx}l_2 + \tau_{zy}m_2 + (\sigma_z - \sigma_2)n_2 = 0.$$

Умножим первые три равенства соответственно на l_2 , m_2 , n_2 , а вторые три — на $-l_1$, $-m_1$, $-n_1$ и сложим все шесть равенств. В результате получим

$$(\sigma_2 - \sigma_1)(l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2) = 0.$$

Считая, что в общем случае $\sigma_1 \neq \sigma_2$, приходим к равенству

$$l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0,$$

которое, как известно из аналитической геометрии, справедливо, если две площадки взаимно перпендикулярны.

Рассмотрим элементарный параллелепипед, грани которого являются главными площадками. Располагая оси координат по главным направлениям 1, 2, 3, то есть вдоль ребер этого параллелепипеда (рис. 4.8), и учитывая, что на главных площадках касательные напряжения отсутствуют, вычислим по формулам (4.19) коэффициенты уравнения (4.18):

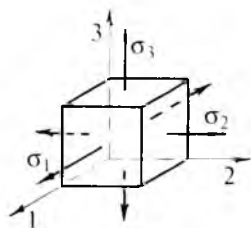


Рис. 4.8

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3;$$

$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1;$$

$$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3.$$

Поскольку величины и направления главных напряжений не зависят от выбора системы координат, а зависят только от нагрузок, действующих на тело, то коэффициенты I_1 , I_2 , I_3 уравнения (4.18) в данной точке тела также не изменяются при повороте осей. Такие величины называются *инвариантами*. Будем называть I_1 , I_2 и I_3 соответственно *первым*, *вторым* и *третьим инвариантами тензора напряжений*.

Значения главных напряжений определяют вид напряженного состояния в точке тела. Существует три основных вида напряженного состояния: *трехосное*, при котором все три главных напряжения σ_1 , σ_2 , σ_3 отличны от нуля; *двухосное*, при котором одно из главных напряжений равно нулю, и *одноосное*, при котором только одно из главных напряжений отлично от нуля.

О виде напряженного состояния можно также судить по значениям инвариантов тензора напряжений. Так, например, при $I_3 = 0$ напряженное состояние является двухосным, так как при этом один из корней кубического уравнения (4.18) равен нулю. Если же $I_2 = I_3 = 0$, то равны нулю два корня уравнения (4.18) и напряженное состояние является одноосным.

Определим нормальные и касательные напряжения на произвольной наклонной площадке, приняв в качестве исходных оси, совпадающие с главными направлениями 1, 2, 3 (см. рис. 4.8). Тогда, считая, что l , m и n являются косинусами углов между нормалью к рассматриваемой площадке и главными осями, и учитывая, что на главных площадках касательные напряжения равны нулю, из (4.6) и (4.5) с помощью (4.3) и (4.2) получим

$$\left. \begin{aligned} \sigma_v &= \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2; \\ \tau_{lv} &= \sqrt{p_v^2 - \sigma_v^2} = \\ &= \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 l^2 m^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 m^2 n^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 n^2 l^2}. \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

Первое из этих выражений с учетом (4.1) представим в виде

$$\sigma_v = \sigma_1 (1 - m^2 - n^2) + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2.$$

Исследуем это выражение на экстремум. Необходимыми условиями экстремума являются

$$\frac{\partial \sigma_v}{\partial m} = 0; \quad \frac{\partial \sigma_v}{\partial n} = 0.$$

Используя эти условия, приходим к уравнениям

$$(\sigma_1 - \sigma_2) m = 0; \quad (\sigma_1 - \sigma_3) n = 0.$$

Поскольку в общем случае $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$, получим $m = n = 0$, $l = 1$. Найденные значения направляющих косинусов соответствуют первой главной площадке (площадке, перпендикулярной к оси 1). Это означает, что σ_1 — экстремальное напряжение. Аналогично можно показать, что два других главных напряжения также являются экстремальными.

Учитывая правило (4.20), можно утверждать, что σ_1 является наибольшим среди нормальных напряжений на всех наклонных площадках, проходящих через данную точку. Соответственно, σ_3 — наименьшее напряжение.

Аналогичное исследование на экстремум касательного напряжения τ_{lv} из (4.22) показывает, что эта величина достигает экстре-

мальных значений на площадках, расположенных под углами 45° к главным площадкам (рис. 4.9). Эти напряжения выражаются через главные напряжения по формулам

$$\tau_{12} = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}; \quad \tau_{23} = -\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \quad \tau_{31} = -\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}. \quad (4.23)$$

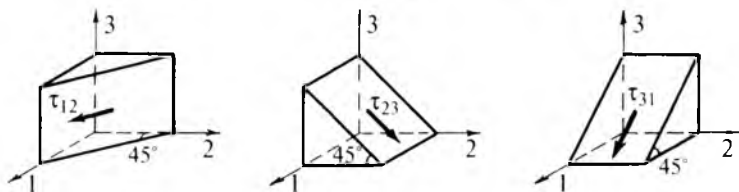


Рис. 4.9

Согласно условию (4.20) наибольшим является напряжение

$$\tau_{\text{нб}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

4.5. Двухосное напряженное состояние

Пусть одно из главных напряжений, например σ_3 , равно нулю. Совмещая ось Oz с третьим главным направлением и учитывая, что на главной площадке касательные напряжения отсутствуют, получим (рис. 4.10, а)

$$\sigma_z = \sigma_3 = 0; \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0. \quad (4.24)$$

Пользуясь общими формулами (4.6) и (4.7), определим нормальное и касательное напряжения на наклонной площадке, нормаль к которой составляет угол α с осью Ox (рис. 4.10, б). Направляющие косинусы нормали v и касательной t к этой площадке соответственно равны

$$l = \cos \alpha; \quad m = \cos (90^\circ - \alpha) = \sin \alpha; \quad n = 0;$$

$$l_1 = \cos (90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha; \quad m_1 = \cos \alpha; \quad n_1 = 0.$$

Подставляя эти величины в (4.6) и (4.7), предварительно заменяя μ на l и учитывая (4.24), получим

$$\left. \begin{aligned} \sigma_v &= \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha; \\ \tau_{tv} &= -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (4.25)$$

Эти же формулы можно получить, если составить для элемента, показанного на рис. 4.10, б, уравнение суммы проекций всех сил на направления v и t .

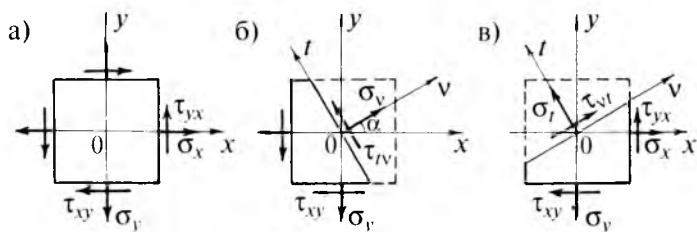


Рис. 4.10

Определим напряжения на площадке, нормаль к которой совпадает с направлением l , а касательная — с направлением v (рис. 4.10, б). Эта площадка перпендикулярна к рассмотренной выше. Очевидно, что в этом случае в формулах (4.6) и (4.7) следует произвести замену направляющих косинусов l на l_1 , m на m_1 и наоборот. В результате получим

$$\sigma_l = \sigma_x \sin^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha; \quad \tau_{vl} = \tau_{lv}. \quad (4.26)$$

Последнее равенство выражает закон парности касательных напряжений. Сложив выражения для σ_v и σ_l , получим

$$\sigma_l + \sigma_v = \sigma_x + \sigma_y.$$

Таким образом, при двухосном напряженном состоянии сумма нормальных напряжений, действующих на любых двух взаимно перпендикулярных площадках, является инвариантной величиной.

Для определения двух главных напряжений при двухосном напряженном состоянии воспользуемся уравнением (4.18), которое с учетом $I_3 = 0$ сводится к квадратному уравнению

$$\sigma^2 - I_1 \sigma + I_2 = 0.$$

Инварианты тензора напряжений, входящие в это уравнение, в соответствии с (4.19) и (4.24) равны:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y; \quad I_2 = \sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2.$$

Решая с учетом этого полученное квадратное уравнение, найдем величины главных напряжений:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}. \quad (4.27)$$

Положение главных площадок при двухосном напряженном состоянии наиболее просто может быть определено из уравнений (4.17), которые в этом случае принимают вид

$$(\sigma_x - \sigma)l + \tau_{xy}m = 0;$$

$$\tau_{xy}l + (\sigma_y - \sigma)m = 0.$$

Из этих двух уравнений независимым является только одно. Воспользуемся, например, вторым уравнением. Учитывая, что $l = \cos \alpha$, а $m = \sin \alpha$, и подставляя в него вместо σ последовательно значения σ_1 и σ_2 , найдем углы наклона α_1 и α_2 нормалей главных площадок к оси Ox :

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_1 - \sigma_y}; \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_2 - \sigma_y}. \quad (4.28)$$

Согласно определению касательные напряжения на главных площадках равны нулю. Положив во втором из равенств (4.25) $\tau_{nv} = 0$, можно получить другую формулу для нахождения положения углов наклона нормалей к главным площадкам:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}. \quad (4.29)$$

Если исследовать на экстремум выражение (4.25) для нормального напряжения σ_v , то условие $\frac{d\sigma_v}{d\alpha} = 0$ приводит к равенству

$$(\sigma_y - \sigma_x) \sin 2\alpha + 2\tau_{xy} \cos 2\alpha = 0,$$

которое равносильно равенству (4.29). Отсюда следует, что на главных площадках нормальные напряжения экстремальны.

Для определения экстремальных значений касательных напряжений и положения площадок, на которых они действуют, запишем формулы (4.25) для напряжений на наклонной площадке, взяв в качестве исходных главные направления 1 и 2 (рис. 4.11, а). Учитывая, что на главных площадках касательные напряжения равны нулю, получим

$$\left. \begin{aligned} \sigma_v &= \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha; \\ \tau_{nv} &= -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (4.30)$$

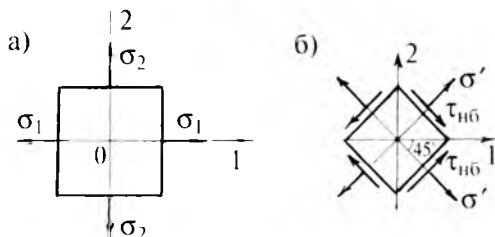


Рис. 4.11

Из (4.30) следует, что касательные напряжения достигают своих экстремальных значений на площадках, расположенных под углами $\pm 45^\circ$ к главным площадкам. При этом величина наибольшего касательного напряжения равна

$$\tau_{\text{нб}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \quad (4.31)$$

Нормальные напряжения на этих площадках согласно (4.30) равны

$$\sigma' = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}. \quad (4.32)$$

Рассмотрим два частных случая.

Чистый сдвиг. Чистым сдвигом называется напряженное состояние, при котором на двух взаимно перпендикулярных площадках действуют только касательные напряжения (рис. 4.12, а).

Положив в формуле (4.27) $\sigma_x = \sigma_y = 0$, а $\tau_{xy} = \tau$, найдем величины главных напряжений при чистом сдвиге: $\sigma_{1,2} = \pm \tau$. Зная $\sigma_{1,2}$, из (4.28) найдем углы наклона главных площадок:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = 1; \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = -1; \quad \alpha_1 = 45^\circ; \quad \alpha_2 = -45^\circ.$$

Таким образом, чистый сдвиг эквивалентен комбинации двух равных по величине и противоположных по знаку главных напряжений $\sigma_1 = \tau$, $\sigma_2 = -\tau$ (рис. 4.12, б). Площадки чистого сдвига наклонены по отношению к главным площадкам под углами $\alpha = \pm 45^\circ$.

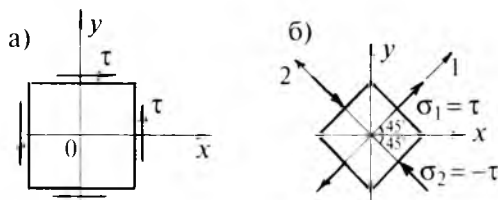


Рис. 4.12

Одноосное напряженное состояние. Такое напряженное состояние возникает, если только одно из главных напряжений отлично от нуля. Этот случай соответствует, например, задаче центрального растяжения и сжатия, рассмотренной в главе 3. Формулы для напряжений на наклонных площадках (см. § 3.2) можно получить из формул (4.30) для двухосного напряженного состояния, если положить в них $\sigma_2 = 0$:

$$\sigma_v = \sigma_1 \cos^2 \alpha; \quad \tau_{v'} = -\frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha.$$

В этих формулах α — угол между нормалью v к наклонной площадке и направлением действия напряжения σ_1 (рис. 4.13).

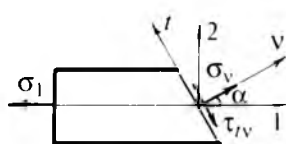


Рис. 4.13

4.6. Определение напряжений с помощью круга Мора

Между формулами (4.25), (4.26) для напряжений на наклонных площадках при двухосном напряженном состоянии и формулами (2.7) для моментов инерции относительно повернутых осей существует очевидная аналогия. Переход от одних формул к другим может быть осуществлен с помощью следующих замен:

$$J_x \leftrightarrow \sigma_x, \quad J_y \leftrightarrow \sigma_y, \quad J_{xy} \leftrightarrow -\tau_{xy} \quad (J_{x_1 y_1} \leftrightarrow -\tau_{l v}). \quad (4.33)$$

Поэтому графический способ определения моментов инерции с помощью круга инерции может быть также использован для исследования напряжений при двухосном напряженном состоянии. Исторически этот графический метод был применен раньше именно для определения напряжений.

Круг Мора для напряжений (рис. 4.15) строится аналогично кругу инерции (см. рис. 2.21) с той лишь разницей, что при принятом на рис. 4.14 направлении осей координат Ox и Oy положительные значения касательных напряжений откладываются вниз от горизонтальной оси. Заметим также, что в отличие от осевых моментов инерции J_x, J_y нормальные напряжения σ_x, σ_y могут быть как положительными, так и отрицательными величинами. Поэтому центр круга Мора для напряжений может быть расположен как справа, так и слева от вертикальной оси.

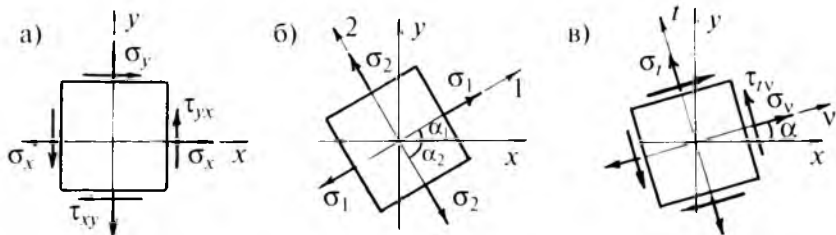


Рис. 4.14

На рис. 4.15 с помощью круга Мора определены главные напряжения σ_1 и σ_2 , действующие на площадках с нормальными, составляющими с осью Ox углы α_1 и α_2 (рис. 4.14, б), а также нормальные и касательные напряжения, действующие на произвольных площадках с нормальными v и t (рис. 4.14, в).

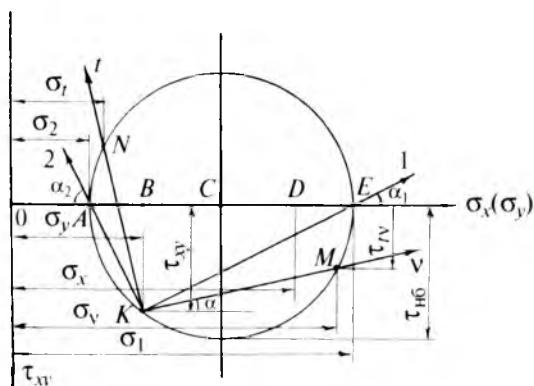


Рис. 4.15

В качестве второго примера определения напряжений с помощью круга Мора рассмотрим задачу о чистом сдвиге, изображенную на рис. 4.12, а. Поскольку в этом случае $\sigma_x = \sigma_y = 0$, точка K расположена на оси τ_{xy} , а центр круга C совпадает с началом координат O (рис. 4.16). Очевидно, что главные напряжения при чистом сдвиге равны $\pm\tau$, а главные площадки расположены под углами 45° к исходным площадкам.

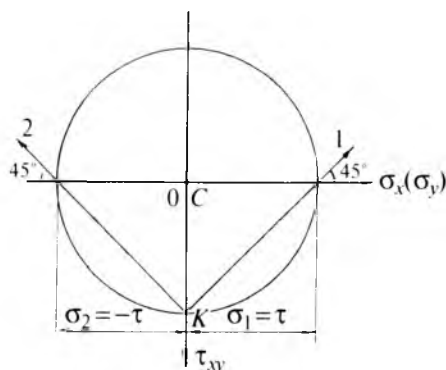


Рис. 4.16

ГЛАВА 5

ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ ТЕЛА

5.1. Перемещения и деформации

Под действием внешних сил происходят деформирование тела и перемещение его точек в пространстве. При этом возможны перемещения двух видов: перемещение тела как абсолютно твердого без изменения его формы и размеров и перемещения, связанные с деформированием тела. Перемещения первого вида изучаются в теоретической механике. Поэтому в дальнейшем рассматриваются только перемещения, связанные с деформированием тела.

Пусть в результате деформирования тела точка A переместилась в новое положение A' (рис. 5.1). Обозначим составляющие вектора полного перемещения AA' по осям Ox , Oy , Oz соответственно через u , v , w . Перемещения u , v , w считаются положительными, если они происходят в положительном направлении осей координат.

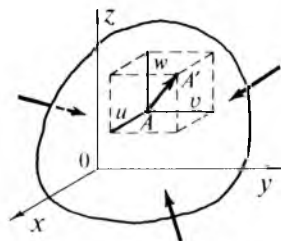


Рис. 5.1

Будем полагать, что перемещения малы по сравнению со всеми характерными размерами тела. Например, прогибы балок, применяемых в строительных конструкциях, обычно малы по сравнению с длиной и размерами поперечного сечения.

Перемещения различных точек тела различны и в соответствии с положением о сплошности являются непрерывными функциями координат x , y , z :

$$u = u(x, y, z); \quad v = v(x, y, z); \quad w = w(x, y, z).$$

Для исследования деформированного состояния вырежем мысленно вблизи произвольной точки тела элементарный параллелепипед с ребрами dx , dy , dz . В результате различия перемещений точек параллелепипеда длина его ребер изменяется, а первоначально прямые углы между ребрами искажаются. В соответствии с этим (см. § 1.5) различают два основных вида деформаций — *линейные* и *угловые*. Рассмотрим их по отдельности.

Линейные деформации $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ представляют собой относительные удлинения или укорочения ребер dx, dy, dz элементарного параллелепипеда (рис. 5.2):

$$\varepsilon_x = \frac{d(\Delta x)}{dx}; \quad \varepsilon_y = \frac{d(\Delta y)}{dy}; \quad \varepsilon_z = \frac{d(\Delta z)}{dz}. \quad (5.1)$$

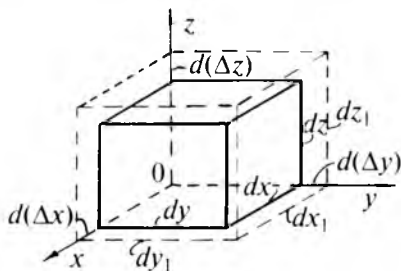


Рис. 5.2

Деформации удлинения считаются положительными, укорочения — отрицательными.

Используя соотношения (5.1), можно найти абсолютные удлинения ребер $d(\Delta x)$, $d(\Delta y)$, $d(\Delta z)$ и длины ребер dx_1 , dy_1 , dz_1 после деформации:

$$dx_1 = (1 + \varepsilon_x)dx; \quad dy_1 = (1 + \varepsilon_y)dy; \quad dz_1 = (1 + \varepsilon_z)dz. \quad (5.2)$$

Угловые деформации или деформации сдвига $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ представляют собой искажения прямых углов между ребрами элементарного параллелепипеда (рис. 5.3). При этом индексы указывают, в какой плоскости происходит угловая деформация. Заметим, что напряженное и деформированное состояния элементарного параллелепипеда для трех случаев, изображенных на рис. 5.4, *а, б, в* (показаны проекции параллелепипеда на плоскость Oxy), одинаковы, так как эти три случая отличаются друг от друга только характеристиками жесткого вращения вокруг оси Oz , не вызывающего дополнительных напряжений.

Деформации сдвига, так же как касательные напряжения, обладают свойством взаимности, то есть

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx}; \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy}; \quad \gamma_{zx} = \gamma_{xz}.$$

В дальнейшем будем считать, что линейные и угловые деформации по абсолютной величине существенно малы по сравнению с единицей, то есть

$$|\varepsilon_i| \ll 1; \quad |\gamma_{ij}| \ll 1 \quad (i, j = x, y, z). \quad (5.3)$$

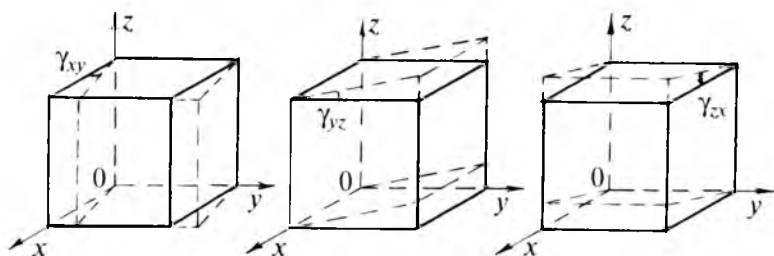


Рис. 5.3

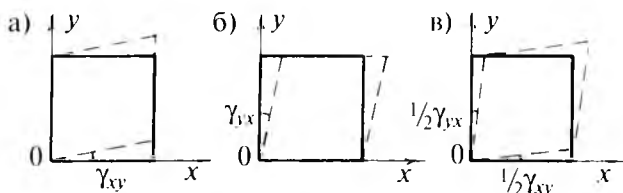


Рис. 5.4

Деформации, связанные с искривлением граней и ребер элементарного параллелепипеда, являются величинами более высокого порядка малости по сравнению с рассмотренными основными деформациями, и ими можно пренебречь.

Установим связь между перемещениями и деформациями. На рис. 5.5 сплошными и пунктирными линиями показаны соответственно проекции элементарного параллелепипеда на плоскость Oxy в недеформированном и деформированном состояниях. При деформировании ребра AB и AC удлиняются и поворачиваются на малые углы α_1 и α_2 .

В соответствии с принятыми обозначениями перемещения точки A по направлениям координатных осей равны u и v . При переходе от точки A к точке B изменяется только координата x на величину dx , поэтому перемещения точки B будут отличаться от перемещений точки A на величины частных приращений $\Delta_x u$ и $\Delta_x v$, которые можно приближенно заменить частными дифференциалами:

$$d_x u = \frac{\partial u}{\partial x} dx; \quad d_x v = \frac{\partial v}{\partial x} dx.$$

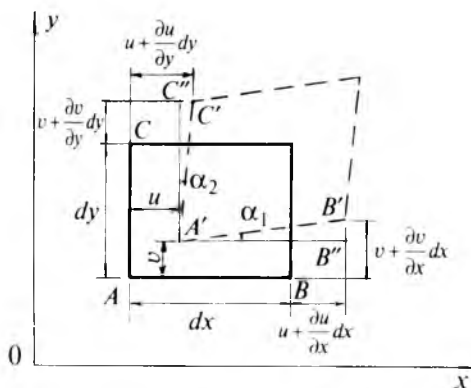


Рис. 5.5

В результате перемещения точки B будут равны

$$u + \frac{\partial u}{\partial x} dx; \quad v + \frac{\partial v}{\partial x} dx.$$

Аналогично перемещения точки C равны

$$u + \frac{\partial u}{\partial y} dy; \quad v + \frac{\partial v}{\partial y} dy.$$

Удлинение ребра AB согласно рис. 5.5 равно $\Delta(AB) = A'B' - AB$. Вследствие малости угла α_1 можно принять $A'B' \approx A'B''$. Тогда получим

$$\Delta(AB) \approx d_x(AB) = dx + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u - dx = \frac{\partial u}{\partial x} dx.$$

С учетом этого определим линейную деформацию по направлению оси Ox :

$$\epsilon_x = \frac{d_x(AB)}{AB} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (5.4)$$

Аналогично определяются линейные деформации по направлениям осей Oy и Oz :

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (5.5)$$

Определим угол поворота ребра AB в плоскости Oxy . Учитывая малость угла α_1 и соотношения (5.3), (5.4), получим

$$\alpha_1 \approx \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{B'B''}{A'B''} = \frac{v + \frac{\partial v}{\partial x} dx - v}{dx + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx(1 + \epsilon_x)} = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Аналогично можно определить угол поворота ребра AC :

$$\alpha_2 = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Угловая деформация в плоскости Oxy определяется как сумма углов α_1 и α_2 :

$$\gamma_{xy} = \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (5.6)$$

Угловые деформации в двух других плоскостях определяются аналогично:

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (5.7)$$

Формулы (5.4), (5.5), (5.6) и (5.7) дают шесть основных зависимостей линейных и угловых деформаций от перемещений:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}; & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}; & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \right\}, \quad (5.8)$$

которые называются *соотношениями Коши*.

Кроме линейных и угловых деформаций, представляет также интерес объемная деформация, равная относительному изменению объема элементарного параллелепипеда (рис. 5.2):

$$e = \frac{dV_1 - dV}{dV}, \quad (5.9)$$

где $dV = dx dy dz$ и $dV_1 = dx_1 dy_1 dz_1$ — объемы параллелепипеда до и после деформации.

Учитывая формулы (5.2), найдем

$$\begin{aligned} dV_1 &= dx dy dz (1 + \epsilon_x) (1 + \epsilon_y) (1 + \epsilon_z) = \\ &= dV (1 + \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z + \epsilon_x \epsilon_y + \epsilon_y \epsilon_z + \epsilon_z \epsilon_x + \epsilon_x \epsilon_y \epsilon_z). \end{aligned}$$

Пренебрегая в этом выражении произведениями деформаций как величинами второго и третьего порядков малости, по формуле (5.9) окончательно получим

$$e = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z. \quad (5.10)$$

Таким образом, относительная объемная деформация равна сумме трех линейных деформаций.

Отметим, что по малости угловых деформаций их влияние на изменение объема элементарного параллелепипеда не учитывается.

5.2. Линейная и угловая деформации в окрестности точки тела. Аналогия между напряженным и деформированным состояниями

Рассмотрим внутри тела произвольную точку $A(x, y, z)$ и бесконечно близкую к ней точку $B(x + dx, y + dy, z + dz)$ (рис. 5.6). Положение отрезка $AB = ds$ по произвольному направлению v до деформации можно охарактеризовать тремя направляющими косинусами вектора v :

$$l = \frac{dx}{ds}; \quad m = \frac{dy}{ds}; \quad n = \frac{dz}{ds}, \quad (5.11)$$

где dx, dy, dz — проекции отрезка ds на оси координат.

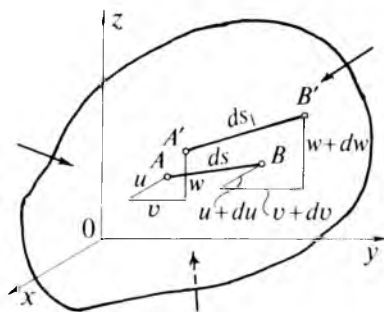


Рис. 5.6

При деформировании тела точки A и B перемещаются в направлениях осей координат на соответственно величины u, v, w и $u + du, v + dv, w + dw$. При этом длина отрезка ds изменяется и становится равной ds_1 , проекции которого на оси координат равны $dx + du, dy + dv, dz + dw$.

Поскольку при переходе от точки A к точке B изменяются все три координаты, то приращения перемещений точки B следует принять равными их полным дифференциалам:

$$\left. \begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz; \\ dv &= \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz; \\ dw &= \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz. \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

Определим деформацию ϵ_v отрезка ds . Для этого поступим следующим образом. Найдем квадраты длин ds и ds_1 :

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2; \\ ds_1^2 &= (dx + du)^2 + (dy + dv)^2 + (dz + dw)^2 = \\ &= dx^2 + dy^2 + dz^2 + 2(dxdu + dydv + dzdw) + du^2 + dv^2 + dw^2. \end{aligned}$$

Пренебрегая в этом выражении тремя последними слагаемыми как величинами второго порядка малости, получим

$$ds_1^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + 2(dxdu + dydv + dzdw).$$

С учетом этого получим следующее равенство:

$$ds_1^2 - ds^2 = 2(dxdu + dydv + dzdw). \quad (5.13)$$

С другой стороны, по аналогии с равенствами (5.2) найдем

$$ds_1^2 = (1 + \epsilon_v)^2 ds^2 = (1 + 2\epsilon_v + \epsilon_v^2) ds^2.$$

Из этого равенства, пренебрегая величиной ϵ_v^2 , получим

$$ds_1^2 - ds^2 = 2\epsilon_v ds^2. \quad (5.14)$$

Приравняв правые части равенств (5.13) и (5.14), найдем деформацию отрезка ds :

$$\epsilon_v = \frac{dx}{ds} \cdot \frac{du}{ds} + \frac{dy}{ds} \cdot \frac{dv}{ds} + \frac{dz}{ds} \cdot \frac{dw}{ds}.$$

С помощью соотношений (5.11) и (5.12) это выражение преобразуется к виду

$$\epsilon_v = l \left(\frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial u}{\partial y} m + \frac{\partial u}{\partial z} n \right) + m \left(\frac{\partial v}{\partial x} l + \frac{\partial v}{\partial y} m + \frac{\partial v}{\partial z} n \right) + n \left(\frac{\partial w}{\partial x} l + \frac{\partial w}{\partial y} m + \frac{\partial w}{\partial z} n \right).$$

После замены частных производных от перемещений деформациями по формулам Коши (5.8) получим окончательное выражение для линейной деформации по произвольному направлению v в виде

$$\epsilon_v = \epsilon_x l^2 + \epsilon_y m^2 + \epsilon_z n^2 + \gamma_{xy} lm + \gamma_{yz} mn + \gamma_{zx} nl. \quad (5.15)$$

Можно также показать, что выражение для угловой деформации $\gamma_{\mu\nu}$, определяющей изменение прямого угла между направлениями ν и μ , имеет вид

$$\gamma_{\mu\nu} = 2(\epsilon_x l_l + \epsilon_y m m_l + \epsilon_z n n_l) + \gamma_{xy}(l m_l + l_l m) + \gamma_{yz}(m n_l + m_l n) + \gamma_{zx}(n l_l + n_l l), \quad (5.16)$$

где l_l, m_l, n_l — направляющие косинусы вектора μ , перпендикулярного к вектору ν .

Сравнивая формулы (5.15) и (5.16) с формулами (4.6) и (4.7) для напряжений на наклонной площадке, замечаем, что они имеют аналогичную структуру и могут быть получены одни из других с помощью следующих формальных замен:

$$\sigma_i \leftrightarrow \epsilon_i; \quad \tau_{ij} \leftrightarrow \frac{1}{2} \gamma_{ij} \quad (i, j = x, y, z, \nu, \mu). \quad (5.17)$$

Отмеченная аналогия имеется также и между другими формулами напряженного и деформированного состояний.

5.3. Тензор деформаций

По аналогии с тензором напряжений (4.11) введем понятие тензора деформаций

$$T_\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \epsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \epsilon_z \end{pmatrix}. \quad (5.18)$$

Тензор деформаций, так же как и тензор напряжений, можно представить в виде суммы

$$T_\epsilon = T_\epsilon^0 + D_\epsilon, \quad (5.19)$$

где T_ϵ^0 — *шаровой тензор деформаций*

$$T_\epsilon^0 = \begin{pmatrix} \epsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_0 \end{pmatrix}, \quad (5.20)$$

D_ϵ — *девиатор деформаций*:

$$D_\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_x - \epsilon_0 & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \epsilon_y - \epsilon_0 & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \epsilon_z - \epsilon_0 \end{pmatrix}. \quad (5.21)$$

Величина ϵ_0 называется *средней деформацией* и равна

$$\epsilon_0 = \frac{1}{3}(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z). \quad (5.22)$$

Если просуммировать компоненты шарового тензора деформаций, то с учетом (5.10) получим

$$e = 3\epsilon_0. \quad (5.23)$$

Так как при этом относительные деформации всех трех ребер элементарного параллелепипеда одинаковы, то отсюда следует, что шаровой тензор деформаций определяет объемную деформацию параллелепипеда без изменения его формы.

Если сложить компоненты девиатора деформаций, стоящие на его главной диагонали, то получим

$$\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z - 3\epsilon_0 = 0.$$

Таким образом, девиатор деформаций характеризует изменение формы элементарного параллелепипеда без изменения его объема.

5.4. Главные деформации

В каждой точке деформированного тела существуют три взаимно перпендикулярных направления, сдвиги между которыми равны нулю. Прямые, проведенные из данной точки по этим направлениям, называются *главными осями деформированного состояния* в этой точке.

Линейные деформации по направлениям главных осей называются *главными деформациями*.

Можно показать, что в изотропном теле, свойства которого не зависят от направлений, главные оси напряженного и деформированного состояний совпадают. Это утверждение справедливо и в общем случае, то есть направления напряжения σ_v и деформации ϵ_v также совпадают.

Величины трех главных деформаций $\epsilon_1 \geq \epsilon_2 \geq \epsilon_3$ определяются из кубического уравнения, аналогичного уравнению (4.18):

$$\epsilon^3 - S_1\epsilon^2 + S_2\epsilon - S_3 = 0, \quad (5.24)$$

коэффициенты которого называются *инвариантами тензора деформаций*. Выражения для этих инвариантов могут быть записаны по аналогии с (4.19):

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z; \\ S_2 &= \epsilon_x\epsilon_y + \epsilon_y\epsilon_z + \epsilon_z\epsilon_x - \frac{1}{4}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2); \\ S_3 &= \epsilon_x\epsilon_y\epsilon_z + \frac{1}{4}\gamma_{xy}\gamma_{yz}\gamma_{zx} - \frac{1}{4}(\epsilon_x\gamma_{yz}^2 + \epsilon_y\gamma_{zx}^2 + \epsilon_z\gamma_{xy}^2). \end{aligned} \right\} \quad (5.25)$$

Так как главные оси напряженного и деформированного состояний совпадают, то их направления можно найти либо из системы (4.17) с использованием (4.1), либо с помощью аналогичной системы, записанной для деформаций с использованием замен (5.17).

Величина наибольшей угловой деформации определяется по аналогии с наибольшим касательным напряжением по формуле

$$\gamma_{\text{нб}} = \epsilon_1 - \epsilon_3. \quad (5.26)$$

5.5. Частные случаи деформированного состояния

Аналогично трем видам напряженного состояния (см. § 4.4) рассмотрим три основных вида деформированного состояния: *трехосное*, при котором все три главные деформации ϵ_1 , ϵ_2 , ϵ_3 не равны нулю, *двухосное*, при котором одна из главных деформаций равна нулю, и *одноосное*, при котором равны нулю две главные деформации.

Характерным признаком двухосной деформации является равенство нулю третьего инварианта тензора деформаций ($S_3 = 0$), так как только при этом условии один из корней уравнения (5.24) будет равен нулю.

Если принять, что ось Oz является главной осью деформированного (а следовательно, и напряженного) состояния, то наряду с равенством $\epsilon_z = 0$ в плоскостях, проходящих через эту ось, должны отсутствовать деформации сдвига γ_{xz} и γ_{yz} (а в плоскостях, нормальных к этой оси, равны нулю и касательные напряжения τ_{xz} и τ_{yz}). При этом, как видно из (5.25), будет выполняться равенство $S_3 = 0$.

Наиболее просто можно представить двухосную деформацию, если сжимать упругую пластину, помещенную между двумя абсолютно жесткими и гладкими плитами, равномерно распределенными нагрузками, приложенными к торцам (рис. 5.7). Очевидно, что при неизменном расстоянии между плитами и отсутствии трения по плоскостям контакта пластины с плитами будут выполнены условия

$$\epsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0; \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0. \quad (5.27)$$

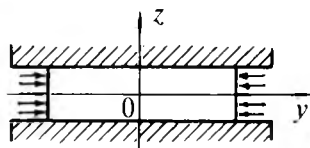


Рис. 5.7

Используя формулы (5.15) и (5.16) и аналогию между напряженным и деформированным состояниями, приведем основные зависимости между деформациями для двухосного деформированного состояния (рис. 5.8). Эти зависимости используются при экспериментальных исследованиях элементов конструкций, так как по найденным из эксперимента величинам деформаций можно с использованием закона Гука определить напряжения.

На основании аналогии с помощью замен (5.17) из формул (4.25), (4.26) получим выражения для линейных деформаций по произвольным взаимно перпендикулярным направлениям v и t (рис. 5.8, в) и для деформации сдвига между этими направлениями (рис. 5.8, г):

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_v &= \epsilon_x \cos^2 \alpha + \epsilon_y \sin^2 \alpha + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \sin 2\alpha; \\ \epsilon_t &= \epsilon_x \sin^2 \alpha + \epsilon_y \cos^2 \alpha - \frac{1}{2} \gamma_{xy} \sin 2\alpha; \\ \gamma_{tv} &= -(\epsilon_x - \epsilon_y) \sin 2\alpha + \gamma_{xy} \cos 2\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (5.28)$$

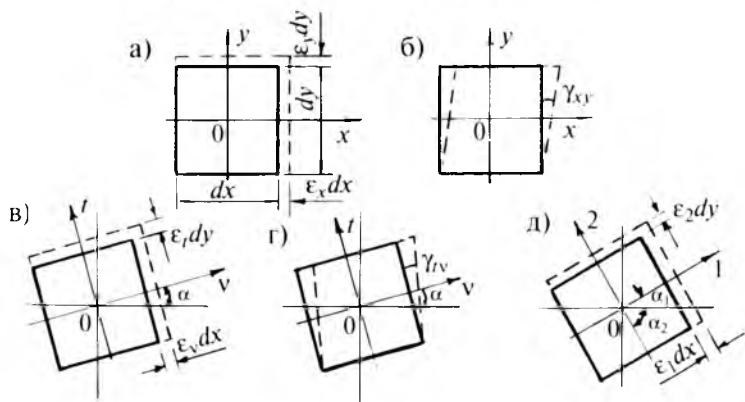


Рис. 5.8

Величины главных деформаций и направления главных осей деформации (рис. 5.8, д) определяются по аналогии с (4.27) и (4.28) с помощью формул:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{1,2} &= \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2}; \\ \operatorname{tg} \alpha_1 &= \frac{\gamma_{xy}}{2(\epsilon_1 - \epsilon_y)}; \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\gamma_{xy}}{2(\epsilon_2 - \epsilon_y)}. \end{aligned} \right\} \quad (5.29)$$

Запишем также по аналогии с (4.31) формулы для наибольшей угловой деформации

$$\gamma_{\text{нб}} = \epsilon_1 - \epsilon_2 \quad (5.30)$$

и главных деформаций при чистом сдвиге

$$\epsilon_{1,2} = \pm \frac{1}{2} \gamma_{xy}. \quad (5.31)$$

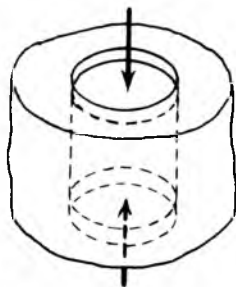


Рис. 5.9

Пример одноосного деформированного состояния показан на рис. 5.9, где изображен упругий стержень, помещенный в абсолютно жесткую среду и нагруженный сжимающими силами, равномерно распределенными по торцам. В этом случае $\epsilon_3 \neq 0$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$, так как жесткая среда препятствует расширению стержня в поперечном направлении.

ГЛАВА 6

СВЯЗЬ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ

6.1. Обобщенный закон Гука

Рассмотренные в двух предыдущих главах статические и геометрические соотношения механики деформируемого твердого тела (уравнения равновесия Навье и соотношения Коши) не зависят от свойств материала и его поведения при деформировании (упругость, пластичность, ползучесть).

Для получения полной системы уравнений, описывающих напряженное и деформированное состояния тела, необходимо иметь равенства, связывающие между собой напряжения и деформации. В эти равенства должны входить величины, характеризующие физические свойства материала.

В общем случае трехосного напряженного состояния на всех гранях элементарного параллелепипеда, выделенного в окрестности произвольной точки тела, действуют нормальные и касательные напряжения (на рис. 6.1 показаны напряжения только на видимых гранях).

Будем предполагать, что напряжения и деформации связаны между собой линейными зависимостями и любая деформация, вызванная одновременным действием нескольких напряжений, на основании принципа независимости действия сил может быть найдена как сумма деформаций от действия каждого из напряжений по отдельности.

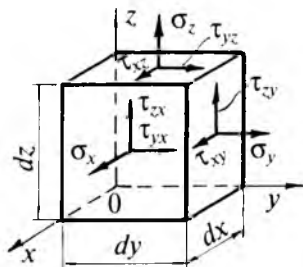


Рис. 6.1

В изотропном теле нормальные напряжения вызывают только линейные деформации удлинения или укорочения ребер элементарного параллелепипеда и не вызывают угловых деформаций. Касательные напряжения вызывают только угловые деформации и не вызывают линейных деформаций.

На рис. 6.2, а, б показано деформированное состояние элементарного параллелепипеда от действия нормального напряжения σ_x и касательного напряжения τ_{xy} .

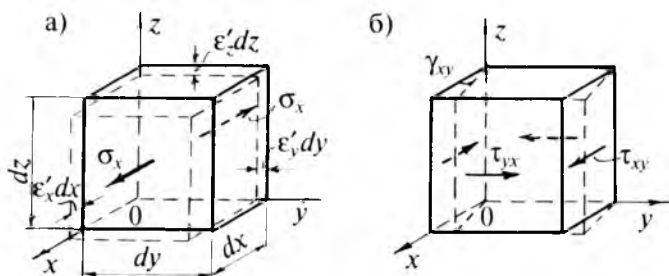


Рис. 6.2

Элемент, изображенный на рис. 6.2, а, испытывает одноосное напряженное состояние. Под действием напряжения σ_x возникают деформации удлинения ϵ'_x ребер параллелепипеда, параллельных оси Ox , и деформации укорочения ϵ'_y и ϵ'_z ребер, параллельных осям Oy и Oz . Эти деформации согласно закону Гука при одноосном напряженном состоянии (3.7) и зависимости между поперечными и продольными деформациями (3.6) равны

$$\epsilon'_x = \frac{\sigma_x}{E}; \quad \epsilon'_y = \epsilon'_z = -\nu \epsilon'_x = -\nu \frac{\sigma_x}{E}.$$

Аналогично под действием напряжений σ_y и σ_z возникают деформации

$$\epsilon''_y = \frac{\sigma_y}{E}; \quad \epsilon''_z = \epsilon''_x = -\nu \epsilon''_y = -\nu \frac{\sigma_y}{E};$$

$$\epsilon'''_z = \frac{\sigma_z}{E}; \quad \epsilon'''_x = \epsilon'''_y = -\nu \epsilon'''_z = -\nu \frac{\sigma_z}{E}.$$

Полное относительное удлинение ребер параллелепипеда, параллельных оси Ox , находим как сумму удлинений от действия каждого из напряжений:

$$\epsilon_x = \epsilon'_x + \epsilon''_x + \epsilon'''_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)].$$

Аналогично можно определить относительные удлинения ребер, параллельных осям Oy и Oz .

Таким образом, линейные деформации связаны с нормальными напряжениями тремя формулами закона Гука:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]; \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)]; \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]. \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

Если вместо произвольных осей Ox , Oy , Oz воспользоваться главными осями напряженно-деформированного состояния, то формулы (6.1) примут вид

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{1}{E}[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)]; \\ \epsilon_2 &= \frac{1}{E}[\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)]; \\ \epsilon_3 &= \frac{1}{E}[\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)]. \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

Элемент, изображенный на рис. 6.2, б, испытывает напряженное состояние, называемое чистым сдвигом (см. § 4.5). Рассмотрим проекцию элемента на координатную плоскость Oxy (рис. 6.3). Главные оси напряженного и деформированного состояний наклонены по отношению к площадкам чистого сдвига под углами 45° . Главные напряжения по абсолютной величине равны касательным напряжениям и имеют противоположные знаки:

$$\sigma_1 = \tau_{xy}; \quad \sigma_2 = -\tau_{xy}. \quad (6.3)$$

Для нахождения величин главных деформаций ϵ_1 и ϵ_2 , которые в рассматриваемом случае представляют собой соответственно относительное удлинение диагонали AC и относительное укорочение диагонали BD , воспользуемся аналогией между формулами напряженного и деформированного состояний (см. § 5.2). Заменяя в формулах (6.3) σ_1 , σ_2 , τ_{xy} на ϵ_1 , ϵ_2 , $\gamma_{xy}/2$, получим

$$\epsilon_1 = \frac{1}{2}\gamma_{xy}; \quad \epsilon_2 = -\frac{1}{2}\gamma_{xy}. \quad (6.4)$$

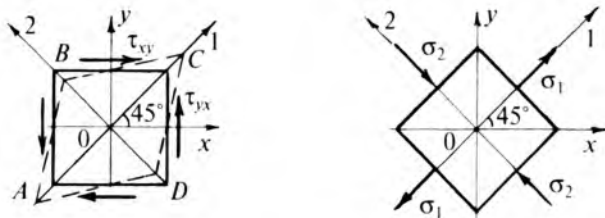


Рис. 6.3

Чистый сдвиг представляет собой частный случай двухосного напряженного состояния. Поэтому положим в первой из формул (6.2) $\sigma_3 = 0$ и подставим вместо σ_1 и σ_2 их выражения из (6.3), а вместо ϵ_1 — выражение из первой формулы (6.4). Тем самым мы свяжем деформации сдвига с касательными напряжениями:

$$\frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{1}{E}(\tau_{xy} + \nu\tau_{yx}).$$

Вводя в этом выражении обозначение

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad (6.5)$$

получим одну из формул закона Гука при сдвиге:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}. \quad (6.6)$$

Аналогично можно получить еще две формулы, связывающие деформации сдвига γ_{yz} и γ_{zx} с касательными напряжениями τ_{yz} и τ_{zx} :

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}.$$

Величина G называется *модулем сдвига*.

Выражение (6.5) устанавливает связь между тремя постоянными упругости для изотропного материала: модулем упругости E , модулем сдвига G и коэффициентом Пуассона ν . Из (6.5) следует, что независимыми являются только две из этих постоянных.

Таким образом, в общем случае трехмерной задачи теории упругости имеем шесть формул, устанавливающих связь между напряжениями и деформациями в окрестности точки тела, которые называются *обобщенным законом Гука*:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]; & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)]; & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]; & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G}. \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

6.2. Различные формы обобщенного закона Гука

Сложим почленно первые три формулы (6.7):

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \quad (6.8)$$

Используем обозначения для относительной объемной деформации e , средней деформации ε_0 , суммы нормальных напряжений s и среднего напряжения σ_0

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z; \quad \varepsilon_0 = \frac{e}{3}; \quad s = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z; \quad \sigma_0 = \frac{s}{3} \quad (6.9)$$

и введем понятие *модуля объемной деформации*

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}. \quad (6.10)$$

Тогда равенство (6.8) можно записать в виде

$$e = \frac{s}{3K} = \frac{\sigma_0}{K}; \quad \varepsilon_0 = \frac{s}{9K} = \frac{\sigma_0}{3K}. \quad (6.11)$$

Соотношения (6.11) называют *законом упругого изменения объема*. Как показывают лабораторные исследования, этот закон справедлив и при высоких значениях среднего напряжения σ_0 , значительно превышающих предел упругости материала.

С помощью (6.10) и (6.11) можно показать, что для изотропного материала коэффициент Пуассона не может превышать значения $\nu = 0,5$. Пусть ко всем граням элементарного параллелепипеда приложены сжимающие напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$. Если при этом предположить, что $\nu > 0,5$, то из (6.10) и (6.11) следует, что $K < 0$ и $e > 0$, то есть при всестороннем сжатии объем параллелепипеда увеличивается, что противоречит физическому смыслу.

Как видно из (6.10) и (6.11), при $\nu \rightarrow 0,5$ $K \rightarrow \infty$ и $e \rightarrow 0$, т.е. изменение объема не происходит. *Материал, обладающий этим свойством, называется несжимаемым.* Условие несжимаемости используется в теории пластичности.

Равенства (6.7) часто называют прямой формой закона Гука. Если их решить относительно напряжений, то получим обратную форму закона Гука:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2\mu\epsilon_x + \lambda e; & \tau_{xy} &= \mu\gamma_{xy}; \\ \sigma_y &= 2\mu\epsilon_y + \lambda e; & \tau_{yz} &= \mu\gamma_{yz}; \\ \sigma_z &= 2\mu\epsilon_z + \lambda e; & \tau_{zx} &= \mu\gamma_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (6.12)$$

Входящие в эти формулы величины μ и λ называются *постоянными Ляме*. Они связаны с постоянными E , G , и ν с помощью формул

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}; \quad \lambda = \frac{2\nu G}{1-2\nu} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}. \quad (6.13)$$

Вычтем из левых и правых частей первых трех равенств (6.12) среднее напряжение σ_0 . После несложных преобразований правых частей с помощью соотношений (6.11) и (6.13) получим соотношения, которые называются *законом изменения формы*:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x - \sigma_0 &= 2G(\epsilon_x - \epsilon_0); & \tau_{xy} &= 2G\left(\frac{1}{2}\gamma_{xy}\right); \\ \sigma_y - \sigma_0 &= 2G(\epsilon_y - \epsilon_0); & \tau_{yz} &= 2G\left(\frac{1}{2}\gamma_{yz}\right); \\ \sigma_z - \sigma_0 &= 2G(\epsilon_z - \epsilon_0); & \tau_{zx} &= 2G\left(\frac{1}{2}\gamma_{zx}\right). \end{aligned} \right\} \quad (6.14)$$

В левых частях этих равенств стоят компоненты девиатора напряжений (см. § 4.3), а в правых — компоненты девиатора деформаций (см. § 5.3), умноженные на один и тот же коэффициент пропорциональности $2G$. Следовательно, девиатор напряжений пропорционален девиатору деформаций, и равенства (6.14) можно записать более компактно в тензорной форме

$$D_\sigma = 2GD_\epsilon. \quad (6.15)$$

Равенства (6.14) характеризуют изменение формы, а (6.11) — изменение объема в окрестности точки тела. Поэтому в совокупности они эквивалентны полной системе равенств обобщенного закона Гука.

6.3. Закон Гука для двухосного напряженного состояния

В случае двухосного напряженного состояния (см. § 4.5) в формулах (6.7) необходимо положить $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$. В результате получим

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y); \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x); \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (6.16)$$

Деформация ε_z может быть найдена из третьего равенства (6.7):

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y). \quad (6.17)$$

Деформации сдвига $\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$.

Таким образом, при двухосном напряженном состоянии имеем три формулы (6.16) обобщенного закона Гука.

В главных осях деформации сдвига отсутствуют, а формулы (6.16) имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2); \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu\sigma_1). \end{aligned} \right\} \quad (6.18)$$

Если равенства (6.16) решить относительно напряжений, то получим

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y); \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x); \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (6.19)$$

6.4. Связь между напряжениями и деформациями для анизотропного тела

В анизотропном теле постоянные упругости, характеризующие свойства материала по различным направлениям, проведенным через рассматриваемую точку, различны. В самом общем случае

анизотропии связь между деформациями и напряжениями для линейно-упругого тела записывается в виде следующих шести соотношений:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z + a_{14}\tau_{xy} + a_{15}\tau_{yz} + a_{16}\tau_{zx}; \\ \varepsilon_y &= a_{21}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{23}\sigma_z + a_{24}\tau_{xy} + a_{25}\tau_{yz} + a_{26}\tau_{zx}; \\ \varepsilon_z &= a_{31}\sigma_x + a_{32}\sigma_y + a_{33}\sigma_z + a_{34}\tau_{xy} + a_{35}\tau_{yz} + a_{36}\tau_{zx}; \\ \gamma_{xy} &= a_{41}\sigma_x + a_{42}\sigma_y + a_{43}\sigma_z + a_{44}\tau_{xy} + a_{45}\tau_{yz} + a_{46}\tau_{zx}; \\ \gamma_{yz} &= a_{51}\sigma_x + a_{52}\sigma_y + a_{53}\sigma_z + a_{54}\tau_{xy} + a_{55}\tau_{yz} + a_{56}\tau_{zx}; \\ \gamma_{zx} &= a_{61}\sigma_x + a_{62}\sigma_y + a_{63}\sigma_z + a_{64}\tau_{xy} + a_{65}\tau_{yz} + a_{66}\tau_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (6.20)$$

Можно показать, что постоянные a_{ij} , характеризующие свойства материала, обладают свойством взаимности: $a_{ij} = a_{ji}$. Поэтому из 36 постоянных, входящих в равенства (6.20), независимыми являются 21 постоянная. Как видно из (6.20), в общем случае анизотропии линейные и угловые деформации зависят от всех шести напряжений.

Если предположить, что оси Ox , Oy , Oz являются главными осями напряженного состояния, то касательные напряжения $\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$. При этом, как видно из последних трех равенств (6.20), угловые деформации γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{zx} в нуль не обращаются. Следовательно, оси Ox , Oy , Oz не являются главными осями деформированного состояния. Отсюда можно сделать вывод, что в общем случае анизотропии главные оси напряженного и деформированного состояний не совпадают между собой.

В частных случаях анизотропии число независимых постоянных a_{ij} сокращается. Так, например, если в каждой точке тела имеется одна *плоскость упругой симметрии*, обладающая тем свойством, что любые два направления, симметричные относительно этой плоскости, эквивалентны в отношении упругих свойств, то можно показать, что в этом случае число независимых постоянных сокращается до 13. Направления, нормальные к плоскостям упругой симметрии, называются *главными направлениями упругости*.

Тело, в каждой точке которого имеются три взаимно перпендикулярных плоскости упругой симметрии, называется *ортотропным*. К ортотропным материалам относят, например, натуральную древесину, фанеру, а также так называемые композитные материалы на полимерной основе, армированные в трех ортогональных направлениях волокнами из высокопрочного материала. У натураль-

ной древесины одна плоскость упругой симметрии нормальна к волокнам, вторая — параллельна годичным слоям и третья — ортогональна к первым двум.

Если координатные оси Ox , Oy , Oz совместить с главными направлениями упругости, то равенства (6.20) для ортотропного материала можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E_x} \sigma_x - \frac{\nu_{xy}}{E_y} \sigma_y - \frac{\nu_{xz}}{E_z} \sigma_z; & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G_{xy}} \tau_{xy}; \\ \varepsilon_y &= -\frac{\nu_{yx}}{E_x} \sigma_x + \frac{1}{E_y} \sigma_y - \frac{\nu_{yz}}{E_z} \sigma_z; & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G_{yz}} \tau_{yz}; \\ \varepsilon_z &= -\frac{\nu_{zx}}{E_x} \sigma_x - \frac{\nu_{zy}}{E_y} \sigma_y + \frac{1}{E_z} \sigma_z; & \gamma_{zx} &= \frac{1}{G_{zx}} \tau_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (6.21)$$

В этих равенствах E_x, E_y, E_z — модули упругости в направлении осей Ox, Oy, Oz ; G_{xy}, G_{yz}, G_{zx} — модули сдвига в плоскостях Oxy, Oyz, Ozx ; $\nu_{xy}, \nu_{yx}, \nu_{yz}, \nu_{zy}, \nu_{zx}, \nu_{xz}$ — коэффициенты Пуассона. Первый индекс у коэффициентов Пуассона обозначает направление поперечного сужения, второй — направление действия нормального напряжения, вызывающего поперечное сужение. Например, величина $-\frac{\nu_{xy}}{E_y} \sigma_y$ представляет собой относительное поперечное сужение в направлении оси Ox , вызванное напряжением σ_y .

Сравнивая (6.21) с (6.20) и учитывая свойства взаимности коэффициентов $a_{ij} = a_{ji}$, получим следующие три соотношения, связывающие между собой постоянные упругости:

$$\frac{\nu_{xy}}{E_y} = \frac{\nu_{yx}}{E_x}; \quad \frac{\nu_{xz}}{E_z} = \frac{\nu_{zx}}{E_x}; \quad \frac{\nu_{yz}}{E_z} = \frac{\nu_{zy}}{E_y}. \quad (6.22)$$

Отсюда следует, что для ортотропного материала из 12 постоянных упругости, входящих в равенства (6.21), только 9 являются независимыми.

6.5. Потенциальная энергия деформации

Внешние силы, приложенные к телу, совершают работу на вызываемых ими перемещениях. В результате этого происходит накопление *потенциальной энергии деформации*, которая при удалении внешних сил расходуется на восстановление первоначального недеформированного состояния тела. Если тело при нагружении ис-

пытывает только упругие деформации, то потенциальная энергия деформации численно равна работе сил, затраченной на деформацию тела. Энергия, накапливаемая в единице объема тела, называется *удельной энергией*.

При одноосном напряженном состоянии удельная потенциальная энергия деформации определяется по формуле (3.30):

$$U_0 = \frac{1}{2} \sigma \epsilon.$$

В общем случае трехмерной задачи выражение для U_0 можно записать в виде

$$U_0 = \frac{1}{2} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}). \quad (6.23)$$

Это выражение называется *формулой Клапейрона*.

Удельную потенциальную энергию можно выразить через напряжения, если в (6.23) подставить значения деформаций из закона Гука (6.7). После несложного преобразования получим

$$U_0 = \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) + 2(1 + \nu)(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]. \quad (6.24)$$

Для нахождения полной потенциальной энергии, накапливаемой в теле, необходимо произвести интегрирование по всему объему V тела:

$$U = \iiint_V U_0 dV. \quad (6.25)$$

В дальнейшем для рассмотрения вопросов прочности при трехосном и двухосном напряженных состояниях представим удельную потенциальную энергию в виде двух слагаемых: *энергии изменения объема* $U_0^{\text{об}}$ и *энергии изменения формы* U_0^{Φ} :

$$U_0 = U_0^{\text{об}} + U_0^{\Phi}. \quad (6.26)$$

Такое разделение энергии на две части необходимо, поскольку прочность материалов в основном определяется энергией формоизменения. Энергия изменения объема на прочность существенно не влияет.

Величина $U_0^{\text{об}}$ находится как половина суммы произведений соответствующих компонент шаровых тензоров напряжений (см. § 4.3) и деформаций (см. § 5.3) аналогично выражению (6.23):

$$U_0^{\text{об}} = 3\frac{1}{2}\sigma_0\varepsilon_0. \quad (6.27)$$

На основании (6.10) и (6.11)

$$U_0^{\text{об}} = \frac{3(1-2\nu)}{2E}\sigma_0^2. \quad (6.28)$$

Величина U_0^Φ может быть найдена как половина суммы произведений соответствующих компонент девиаторов напряжений (4.14) и деформаций (5.21) или путем вычитания выражения (6.28) из (6.24):

$$U_0^\Phi = U_0 - U_0^{\text{об}} = \frac{1+\nu}{6E}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] + \\ + \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2). \quad (6.29)$$

Выражения (6.24) и (6.29) более просто записываются через главные напряжения:

$$U_0 = \frac{1}{2E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)]; \quad (6.30)$$

$$U_0^\Phi = \frac{1+\nu}{6E}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]. \quad (6.31)$$

ГЛАВА 7

ВНУТРЕННИЕ УСИЛИЯ И НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ СТЕРЖНЕЙ

7.1. Основные понятия

Изгибом называется такой вид деформирования стержня, при котором внешние нагрузки (сосредоточенные силы, распределенные нагрузки, пары сил) действуют перпендикулярно к его оси (рис. 7.1). Стержень, работающий на изгиб, обычно называют *балкой*.

В зависимости от способа приложения внешних нагрузок рассматривают различные виды изгиба. В самом общем случае, когда нагрузки расположены в разных плоскостях (рис. 7.2), изгиб называется *пространственным*. Если же все внешние нагрузки расположены в одной плоскости, изгиб называется *плоским*. Когда плоскость действия нагрузок проходит через одну из главных центральных осей сечения (рис. 7.3), имеет место *плоский прямой изгиб*. Если же плоскость действия нагрузок не проходит ни через одну из главных осей сечения, то такой вид деформирования называется *плоским косым изгибом* (рис. 7.4).

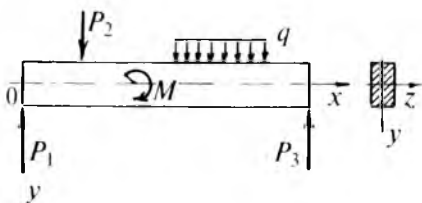


Рис. 7.1

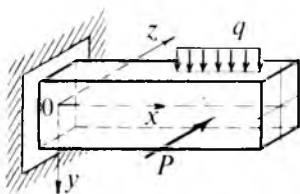


Рис. 7.2

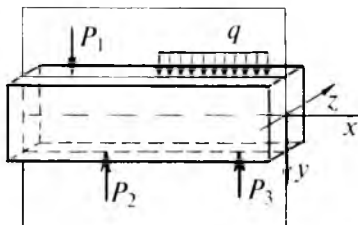


Рис. 7.3

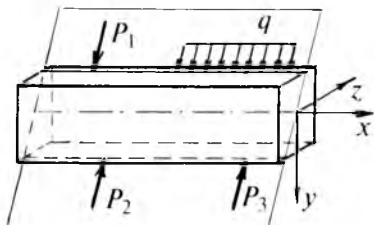


Рис. 7.4

При пространственном и плоском косом изгибе в поперечных сечениях балки возникают следующие внутренние усилия: два изгибающих момента M_y , M_z и две поперечные силы Q_y , Q_z (рис. 7.5). При плоском прямом изгибе в поперечных сечениях балки отличными от нуля будут только два внутренних усилия — изгибающий момент и поперечная сила. В примере, изображенном на рис. 7.3, это будут Q_y и M_z .

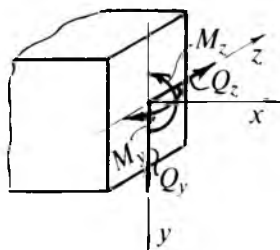


Рис. 7.5

В настоящей главе рассматривается наиболее простой вид изгиба — плоский прямой изгиб.

7.2. Типы опор и опорные реакции

Для того чтобы балка могла воспринимать внешнюю нагрузку, она должна быть закреплена. На практике чаще всего встречаются три основных типа опор: шарнирно подвижная, шарнирно неподвижная опоры и жесткая заделка (зашемление). Рассмотрим основные конструктивные особенности и реакции, возникающие в опорах балки.

Шарнирно подвижная опора (рис. 7.6) допускает перемещение и балки в горизонтальном направлении и поворот балки относительно опоры на некоторый угол ϕ . Вертикальное перемещение v на такой опоре отсутствует (рис. 7.6, а). В соответствии с этим в шарнирно подвижной опоре возникает только вертикальная реакция, которую будем обозначать R . Закрепление балки с помощью такой опоры накладывает на нее одну связь. Такую опору принято также изображать в виде короткого стержня (рис. 7.6, б) с шарнирами на концах (опорная связь).

Шарнирно неподвижная опора (рис. 7.7) допускает поворот балки относительно опоры и не допускает линейных перемещений (рис. 7.7, а).

Схематично такая опора изображается также в виде двух опорных связей (рис. 7.7, б, в). В опоре возникают две реакции: вертикальная R и горизонтальная H .

Жесткая заделка (рис. 7.8) не допускает поворота и поступательного перемещения закрепленного конца балки. В ней

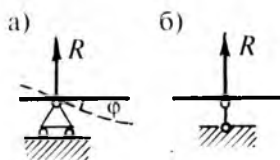


Рис. 7.6

возникают три опорные реакции: вертикальная R , горизонтальная H и реактивный момент M (рис. 7.8, а).

Жесткая заделка эквивалентна трем опорным связям (рис. 7.8, б) — горизонтальной и двум близко расположенным вертикальным опорным связям.

Количество опорных связей в схематическом изображении опор равно числу составляющих опорной реакции.

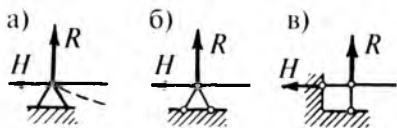


Рис. 7.7

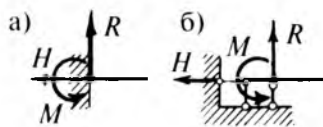


Рис. 7.8

В балочных конструкциях встречаются конструктивные особенности в виде промежуточных шарниров (рис. 7.9, а). Особенностью балки с промежуточным шарниром является то, что вертикальные и горизонтальные перемещения сечений слева и справа от шарнира одинаковы, а углы поворота различны. Таким образом, в шарнире имеет место взаимный угол поворота сечений $\Delta\varphi$ (рис. 7.9, б), а изгибающий момент равен нулю.

В зависимости от конструкции и расположения опор различают следующие основные типы балок. Однопролетная двухопорная балка (рис. 7.10), у которой одна опора шарнирно неподвижная, а вторая — подвижная. Такое закрепление позволяет подвижной опоре свободно перемещаться в горизонтальном направлении. При этом в балке не возникают продольные усилия.

На рис. 7.11 изображена консольная балка (или консоль); на рис. 7.12 — шарнирно опертая балка с консолями.

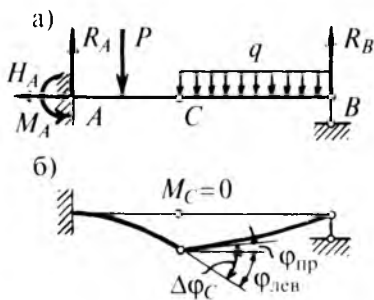


Рис. 7.9

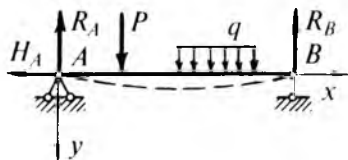


Рис. 7.10

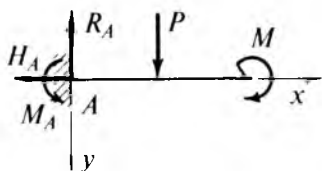


Рис. 7.11

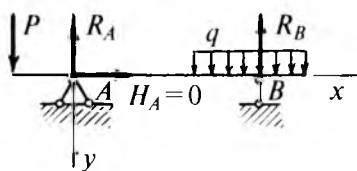


Рис. 7.12

В рассмотренных балках (рис. 7.10—7.12) количество опорных реакций равно трем, и для их определения достаточно трех уравнений равновесия, которые можно записать для всей балки в целом:

$$\sum X = 0; \quad \sum Y = 0; \quad \sum M_O = 0.$$

Здесь сумма моментов составляется относительно произвольной точки O , расположенной в плоскости действия сил.

При отсутствии горизонтальных внешних нагрузок из уравнения $\sum X = 0$ следует, что $H = 0$. Два других уравнения позволяют определить оставшиеся реакции. Чаше всего более удобно вместо приведенных выше уравнений статики использовать другую систему уравнений. Например, для балки, изображенной на рис. 7.12, для определения реакций R_A и R_B следует составить два уравнения моментов:

$$\sum M_A = 0; \quad \sum M_B = 0,$$

в каждое из которых войдет по одному неизвестному.

Балки, в которых количество неизвестных опорных реакций равно количеству независимых уравнений статики, называются *статически определенными*. Если число реакций превышает число уравнений статики, то балка называется *статически неопределимой* (рис. 7.13).

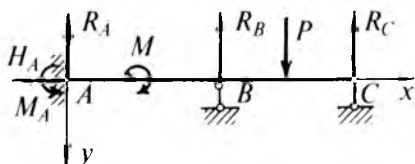


Рис. 7.13

Особый случай представляют балки с промежуточными шарнирами. В таких балках наряду с тремя уравнениями равновесия для всей балки в целом можно составить дополнительное уравнение равновесия (моментов) для части балки, расположенной слева

или справа от шарнира. Так, для балки, показанной на рис. 7.9, а, таким дополнительным уравнением будет

$$\sum M_C^{\text{лев}} = 0 \quad \text{или} \quad \sum M_C^{\text{прав}} = 0. \quad (7.1)$$

Таким образом, данная балка является статически определимой, так как для определения четырех опорных реакций R_A , R_B , H_A , M_A имеются четыре уравнения равновесия: к трем обычным, записанным для всей балки, добавляется одно из уравнений (7.1).

7.3. Внутренние усилия при изгибе. Дифференциальные зависимости

Как было отмечено выше, при плоском поперечном изгибе в случае отсутствия осевых нагрузок в поперечных сечениях балки возникают два внутренних усилия: изгибающий момент M_x и поперечная сила Q_y .

Приведем правила знаков для внутренних усилий. Изгибающий момент считается положительным, если он вызывает растяжение нижних волокон балки (рис. 7.14). Поперечная сила считается положительной, если она стремится повернуть рассматриваемую часть балки по ходу часовой стрелки (рис. 7.15).



Рис. 7.14

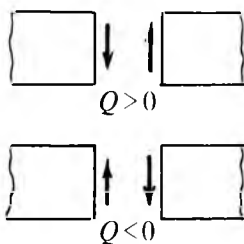


Рис. 7.15

Для определения внутренних усилий используется метод сечений. Рассекая мысленно балку в сечении $m-n$ на произвольном расстоянии x от левого конца плоскостью, перпендикулярной к ее оси (рис. 7.16, а), мы можем рассмотреть равновесие левой или правой ее части.

Составляя уравнение равновесия $\sum Y = 0$ для части балки, находящейся слева от рассматриваемого сечения (рис. 7.16, б), получим

$$Q_y = R_A - P_1.$$

В общем случае это выражение можно записать в виде

$$Q_y = \sum Y^{\text{лев}}. \quad (7.2)$$

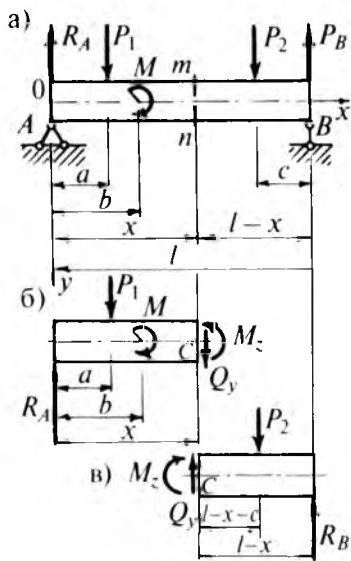


Рис. 7.16

В правой части этого равенства стоит сумма проекций на нормаль к оси балки всех сил, приложенных к ее левой части. Из уравнения моментов относительно центра тяжести сечения $\sum M_C = 0$ для левой части балки получим

$$M_z = R_A x - P_1(x - a) + M.$$

В общем случае

$$M_z = \sum M_C^{\text{лев}}. \quad (7.3)$$

В правой части этого равенства стоит сумма моментов относительно центра тяжести сечения всех сил, расположенных слева от этого сечения.

Рассматривая равновесие правой части балки (рис. 7.16, в), можно получить аналогичные выражения:

$$\begin{aligned} Q_y &= P_2 - R_B; \\ M_z &= R_B(l - x) - P_2(l - x - c); \end{aligned}$$

или в общем случае:

$$Q_y = \sum Y^{\text{пр}}; \quad (7.4)$$

$$M_z = \sum M_C^{\text{пр}}. \quad (7.5)$$

Чтобы правильно определить знак того или иного слагаемого в правых частях равенств (7.2) и (7.4), следует мысленно закрепить рассматриваемую (левую или правую) часть балки в сечении $m-n$ (рис. 7.16, б, в). Тогда в соответствии с правилом знаков для Q , если силовой фактор (в данном примере это R_A и P_2) стремится повернуть балку по ходу часовой стрелки, то соответствующее слагаемое берется с положительным знаком.

При определении знаков слагаемых в выражениях (7.3) и (7.5) следует пользоваться правилом знаков для изгибающего момента. В рассматриваемом примере силовые факторы R_A , M , R_B , вызывающие растяжение нижних волокон балки, взяты со знаком плюс, а силы P_1 и P_2 , вызывающие растяжение верхних волокон, — со знаком минус.

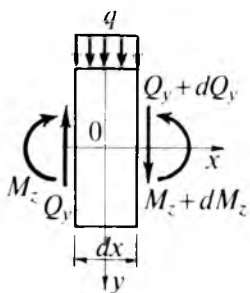


Рис. 7.17

Для нахождения зависимостей между изгибающим моментом M_z , поперечной силой Q_y и распределенной нагрузкой $q(x)$ вырежем мысленно из балки элемент длиной dx (рис. 7.17). В силу малости длины элемента dx распределенную в его пределах нагрузку $q(x)$ примем постоянной. Рассматривая уравнения равновесия этого элемента, получим

$$\sum Y = qdx - Q_y + (Q_y + dQ_y) = 0;$$

$$\sum M_O = M_z + Q_y \frac{dx}{2} + (Q_y + dQ_y) \frac{dx}{2} - (M_z + dM_z) = 0.$$

Пренебрегая слагаемыми $dQ_y dx/2$, имеющими более высокий порядок малости по сравнению с остальными, получим

$$\frac{dQ_y}{dx} = -q; \quad \frac{dM_z}{dx} = Q_y. \quad (7.6)$$

Из этих двух зависимостей следует третья:

$$\frac{d^2 M_z}{dx^2} = -q. \quad (7.7)$$

Формулы (7.6) и (7.7) используются при построении и проверке эпюр Q_y и M_z в балках при изгибе.

7.4. Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов

Для выполнения расчета балки на прочность при изгибе необходимо знать наибольшие значения поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_z и положение сечений, в которых они действуют. В связи с этим возникает необходимость определить закон изменения Q_y и M_z по длине балки. Для этой цели обычно строят *эпюры поперечных сил и изгибающих моментов*, которые представляют собой графическое изображение функций Q_y и M_z .

При построении эпюр Q_y и M_z обычно вычисляют значения этих внутренних усилий в характерных сечениях балки, а полученные ординаты соединяют соответствующими линиями, учитывая зависимости (7.6), (7.7) и вид нагрузки.

При положительном направлении оси Oy вниз на эпюре Q_y положительные ординаты следует откладывать также вниз, отрицательные — вверх. Ординаты эпюры M_z будем откладывать со стороны растянутых волокон балки. Согласно этому правилу для балок положительные значения изгибающих моментов откладываются вниз, так как эти моменты вызывают растяжение нижних волокон.

С учетом этих условий и формул (7.6) и (7.7) можно сделать ряд выводов, полезных при построении и проверке правильности эпюр Q_y и M_z . Прежде чем сформулировать эти выводы, рассмотрим примеры построения эпюр Q_y и M_z при простой нагрузке.

Пример 7.1. Построим эпюры Q_y и M_z для шарнирно опертой балки, показанной на рис. 7.18.

Из уравнений статики найдем опорные реакции:

$$\sum M_A = R_B l - Pa = 0; \quad R_B = \frac{Pa}{l};$$

$$\sum M_B = -R_A l + Pb = 0; \quad R_A = \frac{Pb}{l}.$$

Вычислим Q_y и M_z для участков AC и CB балки.

На участке AC ($0 \leq x_1 \leq a$)

$$Q_y = R_A = \frac{Pb}{l}; \quad M_z = R_A x_1 = \frac{Pbx_1}{l}.$$

На участке CB ($a \leq x_2 \leq l$)

$$Q_y = -R_B = -\frac{Pa}{l}; \quad M_z = R_B(l - x_2) = \frac{Pa}{l}(l - x_2).$$

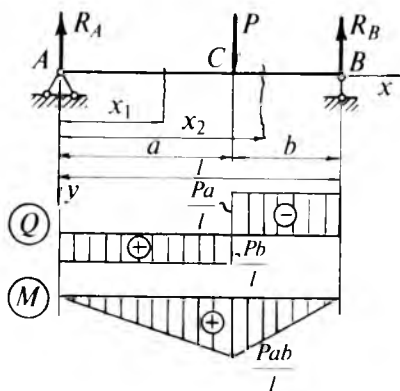


Рис. 7.18

Из полученных выражений видно, что поперечная сила на участках AC и CB постоянна, а в точке C имеет скачок, равный P . Изгибающие моменты изменяются по линейным законам, при этом $M_z^A = M_z^B = 0$, $M_z^C = \frac{Pab}{l}$. Эпюры Q_y и M_z показаны на рис. 7.18.

Пример 7.2. Построим эпюры Q_y и M_z для балки, нагруженной сосредоточенным моментом M (рис. 7.19).

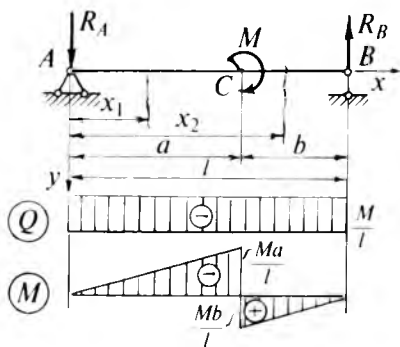


Рис. 7.19

Независимо от места приложения момента опорные реакции будут равны по величине и противоположны по направлению:

$$\sum M_A = R_B l - M = 0; \quad R_B = \frac{M}{l};$$

$$\sum M_B = R_A l - M = 0; \quad R_A = \frac{M}{l}.$$

На участке AC имеем

$$Q_y = -R_A = -\frac{M}{l}; \quad M_z = -R_A x_1 = -\frac{M}{l} x_1.$$

На участке CB

$$Q_y = -R_B = -\frac{M}{l}; \quad M_z = R_B(l - x_2) = \frac{M}{l}(l - x_2).$$

Из полученных выражений видно, что поперечная сила на обоих участках имеет одно и то же постоянное значение, равное $-M/l$, а изгибающие моменты изменяются по линейным законам, при этом

$$M_z^A = M_z^B = 0.$$

В точке C изгибающий момент имеет различные значения слева и справа:

$$M_z^{\text{лев}} = -\frac{Ma}{l}; \quad M_z^{\text{пр}} = \frac{Mb}{l},$$

при этом на эпюре M_z имеется скачок, равный величине приложенного момента M . Эпюры Q_y и M_z показаны на рис. 7.19.

Пример 7.3. Построим эпюры Q_y и M_z для балки, показанной на рис. 7.20.

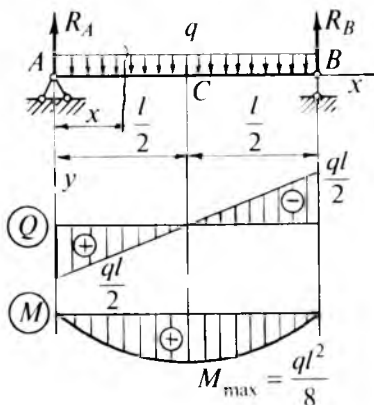


Рис. 7.20

Ввиду симметрии опорные реакции равны между собой:

$$R_A = R_B = \frac{ql}{2}.$$

Выражения для поперечной силы и изгибающего момента в произвольном сечении x балки имеют следующий вид:

$$Q_y = R_A - qx = \frac{q}{2}(l - 2x);$$

$$M_z = R_A x - qx \frac{x}{2} = \frac{qx}{2}(l - x).$$

Таким образом, поперечная сила изменяется по длине балки по линейному закону, а изгибающий момент — по закону квадратной параболы. На опорах балки

$$Q_y^A = \frac{ql}{2}; \quad Q_y^B = -\frac{ql}{2}; \quad M_z^A = M_z^B = 0.$$

В середине пролета $x = l/2$

$$Q_y^C = 0; \quad M_z^C = M_z^{\max} = \frac{1}{2} \cdot \frac{ql}{2} \left(l - \frac{l}{2} \right) = \frac{ql^2}{8}.$$

Эпюры Q_y и M_z , построенные по найденным ординатам в точках A , B и в середине пролета, показаны на рис. 7.20.

Теперь приведем общие выводы, которые можно сделать на основе рассмотренных выше простых примеров.

1. На участках балки, где $q = 0$ (участки AC и CB на рис. 7.18 и 7.19), поперечная сила Q_y постоянна, а изгибающий момент M_z изменяется по линейному закону.

2. На участках балки, где приложена равномерно распределенная нагрузка q (рис. 7.20), поперечная сила Q_y изменяется по линейному закону, а изгибающий момент M_z — по закону квадратной параболы, обращенной выпуклостью в сторону действия нагрузки q .

3. В сечениях, где линия эпюры Q_y пересекает ось балки (рис. 7.20), изгибающий момент M_z имеет экстремум (максимум или минимум).

4. В точке приложения сосредоточенной силы (см. рис. 7.18) эпюра Q_y имеет скачок, равный по величине приложенной силе, а эпюра M_z имеет излом в сторону действия силы.

5. В точке приложения сосредоточенного момента (см. рис. 7.19) эпюра M_z имеет скачок, равный по величине приложенному моменту.

6. На участках балки, где Q_y имеет одно и то же постоянное значение (см. рис. 7.19), эпюра M_z ограничена параллельными прямыми.

Пользуясь приведенными выводами, построим эпюры Q_y и M_z для более сложных нагружений.

Пример 7.4. Построим эпюры Q_y и M_z для балки на двух шарнирных опорах с консолью (рис. 7.21, а).

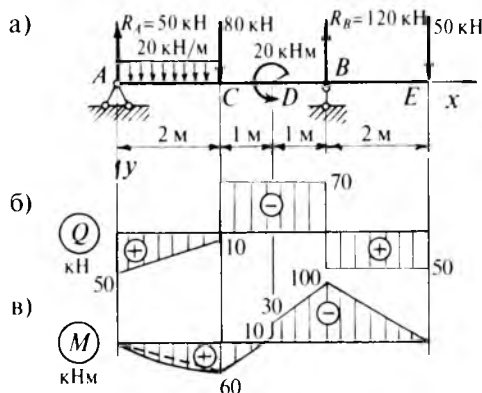


Рис. 7.21

Из уравнений равновесия найдем опорные реакции R_A и R_B :

$$\sum M_B = -R_A \cdot 4 + 20 \cdot 2 \cdot 3 + 80 \cdot 2 + 20 - 50 \cdot 2 = 0; \quad R_A = \frac{200}{4} = 50 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = R_B \cdot 4 - 20 \cdot 2 \cdot 1 - 80 \cdot 2 + 20 - 50 \cdot 6 = 0; \quad R_B = \frac{480}{4} = 120 \text{ кН}.$$

Для проверки составим проекции нагрузок и реакций на вертикальную ось:

$$\sum Y = 20 \cdot 2 + 80 + 50 - 50 - 120 = 120 - 120 = 0.$$

Следовательно, опорные реакции R_A и R_B найдены правильно.

Вычислим Q_y и M_z в характерных сечениях, начиная с сечения А.

Сечение А: $Q_y = R_A = 50$ кН; $M_z = 0$.

Сечение С: $Q_y^{\text{лев}} = 50 - 20 \cdot 2 = 10$ кН;

$$Q_y^{\text{пр}} = 50 - 20 \cdot 2 - 80 = -70 \text{ кН};$$

$$M_z = 50 \cdot 2 - 20 \cdot 2 \cdot 1 = 60 \text{ кНм}.$$

Теперь более удобно делать вычисления, начиная с сечения Е.

Сечение Е: $Q_y = 50$ кН; $M_z = 0$.

Сечение В: $Q_y^{\text{пр}} = 50$ кН; $Q_y^{\text{лев}} = 50 - 120 = -70$ кН;

$$M_z = -50 \cdot 2 = -100 \text{ кНм}.$$

Сечение D: $Q_y = 50 - 120 = -70$ кН;

$$M_z^{\text{пр}} = -50(2 + 1) + 120 \cdot 1 = -30 \text{ кНм};$$

$$M_z^{\text{лев}} = -50(2 + 1) + 120 \cdot 1 + 20 = -10 \text{ кНм}.$$

На участке AC действует равномерно распределенная нагрузка q , поэтому Q_y изменяется по линейному закону, убывая от значения 50 кН в сечении A до значения 10 кН в сечении C слева; M_z изменяется по закону квадратной параболы с выпуклостью вниз. Поскольку на участке AC поперечная сила является однозначной, на эпюре M_z отсутствует экстремум.

На участке CB отсутствует распределенная нагрузка, поэтому поперечная сила Q_y постоянна (–70 кН), а эпюра M_z ограничена прямыми параллельными линиями. В точке D на эпюре M_z имеется скачок, равный по величине приложенному моменту $M = 20$ кНм.

На участке BE отсутствует распределенная нагрузка q , поэтому поперечная сила Q_y постоянна, а M_z изменяется по линейному закону.

Эпюры Q_y и M_z показаны на рис. 7.21, б, в.

Пример 7.5. Балка с промежуточным шарниром (рис. 7.22, а).

Расчетную схему балки с промежуточным шарниром можно представить в виде так называемой поэтажной схемы (рис. 7.22, б), в которой выделяется *несомая* часть балки CE и *несущая* часть AC . Несомая балка шарнирно опирается на несущую в точке C .

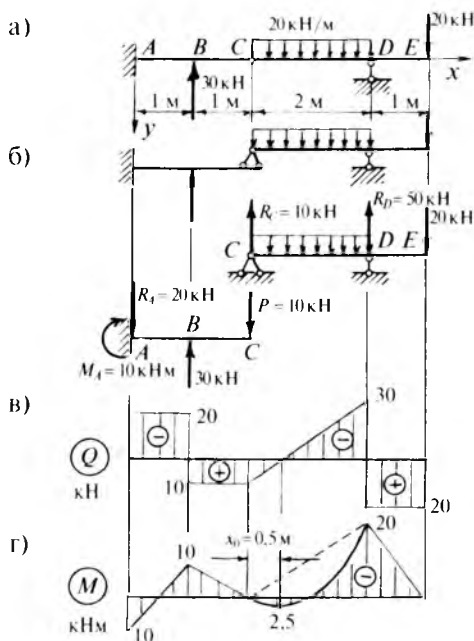


Рис. 7.22

Вначале необходимо сделать расчет несомой балки. В сечении C введена условная шарнирная опора. Определим опорные реакции R_C и R_D :

$$\Sigma M_C = R_D \cdot 2 - 20 \cdot 3 - 20 \cdot 2 \cdot 1 = 0; \quad R_D = 50 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_D = -R_C \cdot 2 - 20 \cdot 1 + 20 \cdot 2 \cdot 1 = 0; \quad R_C = 10 \text{ кН}.$$

Вычислим Q_y и M_z в характерных точках несомой балки CE .

Сечение E : $Q_y = 20 \text{ кН}$; $M_z = 0$.

Сечение D : $Q_y^{\text{пр}} = 20 \text{ кН}$; $Q_y^{\text{лев}} = 20 - 50 = -30 \text{ кН}$;

$$M_z = -20 \cdot 1 = -20 \text{ кНм}.$$

Сечение C : $Q_y = R_C = 10 \text{ кН}$; $M_z = 0$.

На участке CD действует равномерно распределенная нагрузка, поэтому изгибающий момент M_z изменяется по закону квадратной параболы. Для нахождения экстремального значения M_z определим положение сечения балки на этом участке, в котором поперечная сила Q_y равна нулю:

$$Q_y = \frac{dM_z}{dx} = 10 - 20x_0 = 0,$$

откуда находим $x_0 = 0,5 \text{ м}$. Экстремальное значение M_z на участке CD равно

$$M_z^{\text{max}} = 10 \cdot 0,5 - 20 \cdot 0,5 \cdot 0,25 = 2,5 \text{ кНм}.$$

Расчет несущей балки AC производится на действие приложенной к ней в точке B силы 30 кН и силы $P = 10 \text{ кН}$, численно равной условной опорной реакции балки CE и направленной в противоположную сторону.

Вычислим Q_y и M_z в характерных точках несущей балки AC .

Сечение C : $Q_y = 10 \text{ кН}$; $M_z = 0$.

Сечение B : $Q_y^{\text{пр}} = 10 \text{ кН}$; $Q_y^{\text{лев}} = 10 - 30 = -20 \text{ кН}$;

$$M_z = -10 \cdot 1 = -10 \text{ кНм}.$$

Сечение A : $Q_y = -20 \text{ кН}$; $M_z = -10 \cdot 2 + 30 \cdot 1 = 10 \text{ кНм}$. В шарнире C изгибающий момент равен нулю. Эпюры Q_y и M_z приведены на рис. 7.22, в, г.

Пример 7.6. Для жестко заделанного одним концом ломаного стержня (рис. 7.23, а) построим эпюры внутренних усилий N , Q и M .

Необходимо заметить, что для ломаных и криволинейных стержней и рам ординаты эпюры M , как и в балках, откладываются со стороны растянутых волокон.

Вычисление усилий для консольных балок и ломаных стержней удобно начинать со свободного конца. При этом не требуется предварительное определение опорных реакций.

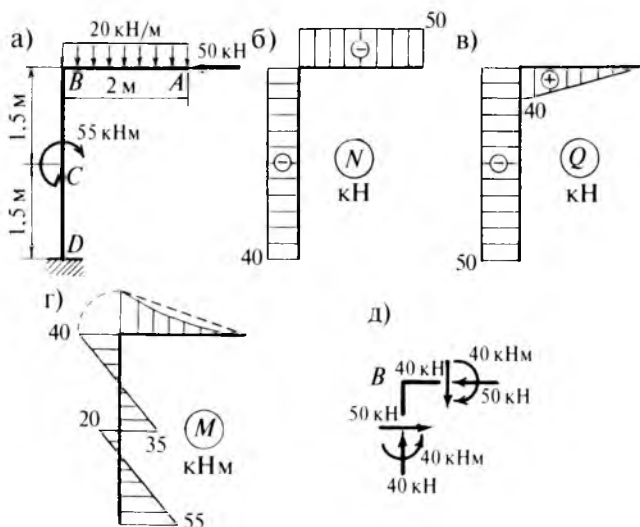


Рис. 7.23

Вычислим значения N , Q , M в характерных сечениях стержня.

Участок AB

Сечение A: $N = -50$ кН (сжатие); $Q = 0$; $M = 0$.

Сечение B: $N = -50$ кН; $Q = 20 \cdot 2 = 40$ кН; $M = -20 \cdot 2 \cdot 1 = -40$ кНм (растянуты верхние волокна).

В пределах участка AB изгибающий момент изменяется по закону квадратной параболы, обращенной выпуклостью в сторону действия распределенной нагрузки.

Участок BD

Сечение B: $N = -20 \cdot 2 = -40$ кН; $Q = -50$ кН; $M = -20 \cdot 2 \cdot 1 = -40$ кНм (растянуты наружные волокна).

Сечение C: $N = -40$ кН; $Q = -50$ кН; $M_C^B = -20 \cdot 2 \cdot 1 + 50 \cdot 1,5 = 35$ кНм (растянуты внутренние волокна);
 $M_C^D = 35 - 55 = -20$ кНм (растянуты наружные волокна).

Сечение D: $N = -40$ кН; $Q = -50$ кН; $M = -20 \cdot 2 \cdot 1 - 55 + 50 \cdot 3 = 55$ кНм (растянуты внутренние волокна).

В соответствии с полученными результатами на рис. 7.23, б, в, г построены эпюры N , Q , M .

Проверим равновесие жесткого узла B . Для этого мысленно вырежем этот узел и приложим к нему внутренние усилия, действующие в поперечных сечениях горизонтального и вертикального элементов (рис. 7.23, d). Очевидно, что уравнения статики $\sum X=0$, $\sum Y=0$, $\sum M_B=0$ выполняются. Следовательно, узел B находится в равновесии.

Пример 7.7. Построим эпюры внутренних усилий N , Q , M для рамы, показанной на рис. 7.24, a . Определим опорные реакции H_A , R_A и R_F :

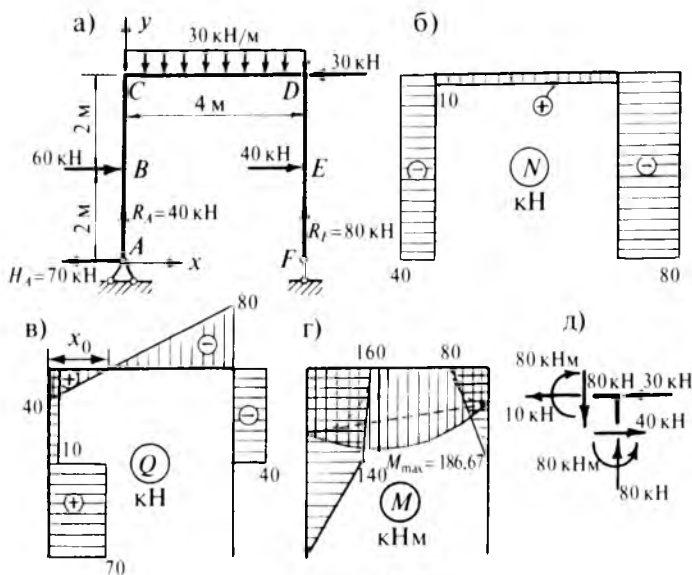


Рис. 7.24

$$\begin{aligned}\sum M_A &= R_F \cdot 4 - 60 \cdot 2 - 40 \cdot 2 - 30 \cdot 4 \cdot 2 + 30 \cdot 4 = 0; & R_F &= 80 \text{ кН}; \\ \sum M_F &= -R_A \cdot 4 - 60 \cdot 2 - 40 \cdot 2 + 30 \cdot 4 \cdot 2 + 30 \cdot 4 = 0; & R_A &= 40 \text{ кН}; \\ \sum X &= -H_A + 60 + 40 - 30 = 0; & H_A &= 70 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Для проверки составим проекции нагрузок и реакций на вертикальную ось:

$$\sum Y = -40 - 80 + 30 \cdot 4 = -120 + 120 = 0.$$

Опорные реакции найдены правильно.

Вычислим внутренние усилия в характерных сечениях рамы.

Участок AC

Сечение A: $N = -R_A = -40$ кН; $Q = H_A = 70$ кН; $M = 0$.

Сечение B: $N = -40$ кН; $Q^B = 70$ кН; $Q_B^B = 70 - 60 = 10$ кН;
 $M = 70 \cdot 2 = 140$ кНм (растянуты внутренние волокна).

Сечение C : $N = -40$ кН; $Q = 70 - 60 = 10$ кН; $M = 70 \cdot 4 - 60 \cdot 2 = 160$ кНм (растянуты внутренние волокна).

Участок CD

Сечение C : $N = 70 - 60 = 10$ кН; $Q = 40$ кН; $M = 70 \cdot 4 - 60 \cdot 2 = 160$ кНм (растянуты нижние волокна).

Сечение D : $N = 40 - 30 = 10$ кН; $Q = -R_F = -80$ кН;
 $M = 40 \cdot 2 = 80$ кНм (растянуты нижние волокна).

Участок DF

Сечение F : $N = -R_F = -80$ кН; $Q = 0$; $M = 0$.

Сечение E : $N = -80$ кН; $Q_E^H = 0$; $Q_E^H = -40$ кН; $M = 0$.

Сечение D : $N = -80$ кН; $Q = -40$ кН; $M = 40 \cdot 2 = 80$ кНм
(растянуты внутренние волокна).

В пределах пролета рамы CD изгибающий момент M изменяется по закону квадратной параболы. Определим положение сечения, где поперечная сила Q обращается в нуль, и вычислим экстремальное значение момента M : $Q = 40 - 30x = 0$, $x_0 = 1,33$ м,

$$M_{\max} = 70 \cdot 4 + 40 \cdot 1,33 - 60 \cdot 2 - 30 \cdot \frac{1,33^2}{2} = 186,67 \text{ кНм.}$$

В соответствии с полученными результатами на рис. 7.24, б, в, г построены эпюры N , Q , M .

Внутренние усилия, действующие в узле D , показаны на рис. 7.24, д. Как видно из этого рисунка, уравнения статики выполняются, и следовательно, узел D находится в равновесии.

7.5. Нормальные напряжения при чистом изгибе

Рассмотрим вначале участки балки, в пределах которых изгибающий момент имеет постоянное значение ($M = \text{const}$), а поперечная сила отсутствует ($Q = 0$). Такой изгиб принято называть *чистым изгибом*.

Для балки, показанной на рис. 7.25, а это имеет место в пределах всей ее длины, а для балки, показанной на рис. 7.25, б, — только в пределах участка CD .

Изучим закон распределения напряжений в поперечном сечении балки при чистом изгибе.

С помощью эксперимента установлено, что если на боковую поверхность резиновой модели балки прямоугольного поперечного сечения нанести ортогональную сетку в виде продольных и поперечных прямых (рис. 7.26), то после деформирования на участке

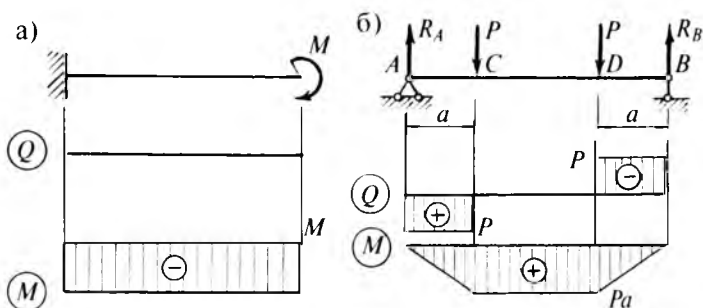


Рис. 7.25

чистого изгиба продольные прямые принимают криволинейное очертание, а поперечные — остаются прямыми. При этом сетка остается ортогональной. Отсюда можно сделать вывод, что угловые деформации в плоскости изгиба отсутствуют и поперечные сечения балки при деформации не искривляются.

Из рис. 7.26 видно, что продольные волокна балки, расположенные ниже некоторого слоя, будут растянуты, а выше этого слоя — сжаты. Такой слой называется *нейтральным слоем*. Он не испытывает деформаций растяжения и сжатия. Следовательно, ниже нейтрального слоя в поперечных сечениях действуют растягивающие нормальные напряжения, а выше этого слоя — сжимающие.

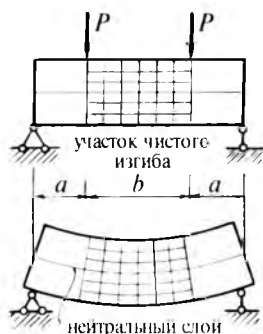


Рис. 7.26

Линия пересечения нейтрального слоя с плоскостью поперечного сечения называется *нейтральной осью (нулевой линией)* сечения.

Экспериментальные и теоретические исследования чистого изгиба балок дают основание принять следующие гипотезы.

1. *Поперечные сечения балки, плоские до деформации, остаются плоскими и ортогональными к нейтральному слою после деформации* (гипотеза Я. Бернулли). Эта гипотеза равносильна предположению о том, что при изгибе происходит поворот поперечных сечений на некоторый угол относительно нейтральной оси и что угловые деформации в продольных сечениях балки отсутствуют.

2. *Взаимное давление между продольными слоями отсутствует*. Из этого следует, что продольные волокна испытывают одноосное растяжение или сжатие.

Рассмотрим чистый изгиб стержня произвольного поперечного сечения. Поместим начало декартовой системы координат O в про-

извольной точке поперечного сечения, направив ось Ox параллельно оси стержня, а ось Oy — вертикально вниз (рис. 7.27).

Пусть силовая плоскость, в которой действует изгибающий момент M , не совпадает с координатными плоскостями.

Из гипотезы плоских сечений (первая гипотеза) следует, что перемещение u вдоль оси Ox является линейной функцией координат y и z :

$$u = Ay + Bz + C, \quad (7.8)$$

где A , B и C являются функциями от x .

Из первой и второй гипотез следует также, что

$$\sigma_x \neq 0; \quad \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0. \quad (7.9)$$

Тогда с помощью закона Гука (6.12) и соотношений Коши (5.8) получим

$$\sigma_x = E \varepsilon_x = E \frac{\partial u}{\partial x} = E(A'y + B'z + C'). \quad (7.10)$$

Заменив изгибающий момент M двумя составляющими M_y и M_z ($M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}$), действующими соответственно в координатных плоскостях Oxz и Oxy , из условий статической эквивалентности получим

$$N = \iint_F \sigma_x dF = 0; \quad M_y = \iint_F \sigma_x z dF; \quad M_z = \iint_F \sigma_x y dF. \quad (7.11)$$

Подставив в эти соотношения выражение σ_x из (7.10), приходим к системе уравнений относительно неизвестных A' , B' , C' :

$$\left. \begin{aligned} A'S_z + B'S_y + C'F &= 0; \\ A'J_{yz} + B'J_y + C'S_y &= \frac{M_y}{E}; \\ A'J_z + B'J_{yz} + C'S_z &= \frac{M_z}{E}, \end{aligned} \right\} \quad (7.12)$$

где F — площадь поперечного сечения стержня; S_y , S_z — статические моменты площади сечения относительно осей Oy и Oz и J_y , J_z , J_{yz} — осевые и центробежный моменты инерции сечения относительно этих осей.

Если Oy и Oz являются главными центральными осями поперечного сечения (рис. 7.28), то

$$S_y = S_z = J_{yz} = 0,$$



Рис. 7.27

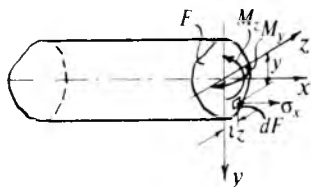


Рис. 7.28

и из системы (7.12) находим

$$C' = 0; \quad B' = \frac{M_y}{EJ_y}; \quad A' = \frac{M_z}{EJ_z}.$$

Подставляя эти величины в (7.10), получим

$$\sigma_x = \frac{M_z}{J_z} y + \frac{M_y}{J_y} z. \quad (7.13)$$

Отметим, что индекс у нормального напряжения в поперечном сечении балки обычно опускается.

Если силовая плоскость совпадает с главной плоскостью Oxy , то $M_y = 0$, и формула (7.13) для напряжения σ принимает окончательный вид

$$\sigma = \frac{M_z}{J_z} y. \quad (7.14)$$

Таким образом, при чистом изгибе стержня моментами M_z , действующими в главной плоскости инерции Oxy , нормальные напряжения σ в поперечном сечении стержня изменяются по линейному закону. При этом переменная y отсчитывается от главной оси Oz , которая является нулевой линией.

Используя первую гипотезу и соотношение Коши для угловой деформации γ_{xy} , получим

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Дифференцируя это равенство по переменной x и учитывая (7.10), получим

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = -\frac{1}{E} \cdot \frac{\partial \sigma_x}{\partial y}.$$

Отсюда с учетом (7.14) получим уравнение относительно перемещений $v(x, y)$ любой точки поперечного сечения балки при чистом изгибе:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{M_z}{EJ_z}. \quad (7.15)$$

Для точек оси балки $y = 0$ и уравнение (7.15) превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение относительно поперечных перемещений точек оси балки, или прогибов $v(x)$:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{M_z}{EJ_z}. \quad (7.16)$$

Это уравнение называется *дифференциальным уравнением изогнутой оси балки*. Оно может быть использовано для определения ее прогибов.

По формуле (7.14) определяются нормальные напряжения в произвольной точке поперечного сечения балки при прямом изгибе в плоскости Oxy . Из нее видно, что напряжения σ изменяются по высоте сечения по линейному закону. В точках нейтральной оси напряжения σ равны нулю, а наибольшее и наименьшее значения они принимают в нижних ($y = h_n$) и в верхних ($y = -h_v$) волокнах, наиболее удаленных от нейтральной оси (рис. 7.29 и 7.30):

$$\sigma_n = \frac{M_z h_n}{J_z}; \quad \sigma_v = -\frac{M_z h_v}{J_z}. \quad (7.17)$$

Эти формулы удобно представить в виде

$$\sigma_n = \frac{M_z}{W_{zn}}; \quad \sigma_v = -\frac{M_z}{W_{zv}}, \quad (7.18)$$

где

$$W_{zn} = \frac{J_z}{h_n}; \quad W_{zv} = \frac{J_z}{h_v}. \quad (7.19)$$

Величины W_{zn} и W_{zv} называются *моментами сопротивления сечения относительно нейтральной оси Oz* для нижних и верхних волокон. Они считаются положительными величинами.

Отметим, что знак напряжения в формуле (7.14) определяется знаками изгибающего момента M_z и ординаты y , а в формулах (7.18) —

по физическому смыслу задачи в зависимости от того, растянуты или сжаты рассматриваемые волокна балки. В последнем случае M_z берется по абсолютной величине.

На рис. 7.29 изображен характер эпюр нормальных напряжений для несимметричных сечений: таврового при $M_z > 0$ и треугольного при $M_z < 0$.

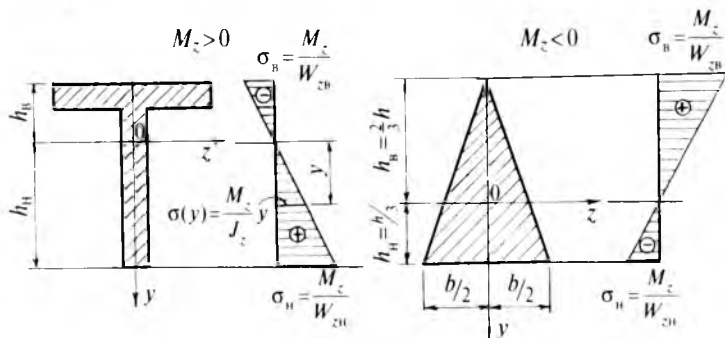


Рис. 7.29

Из приведенных на рис. 7.29 эпюр видно, что в балках с несимметричным сечением наибольшие по абсолютной величине напряжения возникают в волокнах, наиболее удаленных от нейтральной оси, и могут быть определены по формуле

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{M_z}{W_z^{\text{нм}}}, \quad (7.20)$$

где $W_z^{\text{нм}}$ — меньший из моментов сопротивления $W_z^{\text{н}}$ или $W_z^{\text{в}}$.

Для сечений, симметричных относительно нейтральной оси, $h_{\text{н}} = h_{\text{в}} = h/2$ и момент сопротивления определяется по формуле

$$W_z = \frac{J_z}{0,5h}. \quad (7.21)$$

Напряжения в крайних волокнах в этом случае равны по величине и отличаются знаками:

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{M_z}{W_z}; \quad \sigma_{\text{нм}} = -\frac{M_z}{W_z}. \quad (7.22)$$

На рис. 7.30 изображен характер эпюры σ для симметричных сечений: прямоугольного, круглого, двутаврового при $M_z > 0$.

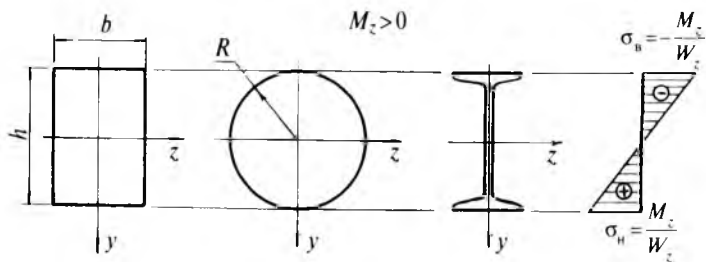


Рис. 7.30

Моменты инерции и моменты сопротивления прямоугольного, круглого сплошного и кольцевого сечений определяются по следующим формулам:

для прямоугольного сечения

$$J_z = \frac{bh^3}{12}; \quad W_z = \frac{J_z}{0,5h} = \frac{bh^2}{6}; \quad (7.23)$$

для сплошного круглого сечения

$$J_z = \frac{\pi R^4}{4}; \quad W_z = \frac{J_z}{R} = \frac{\pi R^3}{4}; \quad (7.24)$$

для кольцевого сечения с внутренним и внешним радиусами R_1 и R_2

$$J_z = \frac{\pi R_2^4}{4} - \frac{\pi R_1^4}{4}; \quad W_z = \frac{J_z}{R_2} = \frac{\pi(R_2^4 - R_1^4)}{4R_2}. \quad (7.25)$$

Для двутавровых, швеллерных и других прокатных профилей величины J_z и W_z приведены в сортаменте.

7.6. Нормальные и касательные напряжения при поперечном изгибе

Рассмотрим балку, находящуюся в условиях плоского прямого изгиба под действием произвольных поперечных нагрузок в главной плоскости Oxy (рис. 7.31, а). Рассечем балку на расстоянии x от ее левого конца и рассмотрим равновесие левой части. Влияние правой части в этом случае нужно заменить действием изгибающего момента M_z и поперечной силы Q_y в проведенном сечении (рис. 7.31, б). Изгибающий момент M_z в общем случае не является постоянным по величине, как это имело место при чистом изгибе, а изменяется по длине балки. Так как изгибающий момент M_z

согласно (7.14) связан с нормальными напряжениями $\sigma = \sigma_x$, то нормальные напряжения в продольных волокнах также будут изменяться по длине балки. Следовательно, в случае поперечного изгиба нормальные напряжения являются функциями переменных x и y : $\sigma_x = \sigma_x(x, y)$.

При поперечном изгибе в сечении балки действуют не только нормальные, но и касательные напряжения τ_{yx} (рис. 7.31, в), равнодействующей которых является поперечная сила Q_y :

$$Q_y = \iint_F \tau_{yx} dF.$$

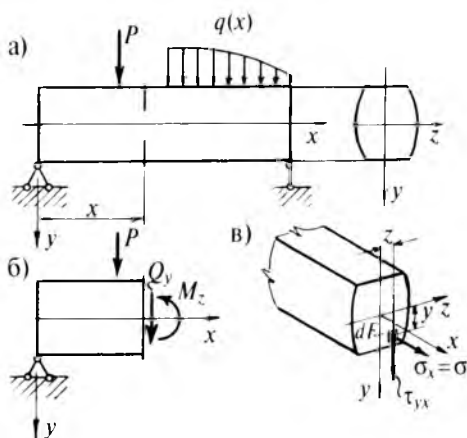


Рис. 7.31

Наличие касательных напряжений τ_{yx} сопровождается появлением угловых деформаций γ_{yx} . Касательные напряжения, как и нормальные, распределены по сечению неравномерно. Следовательно, неравномерно будут распределены и угловые деформации, связанные с ними законом Гука при сдвиге. Это означает, что при поперечном изгибе в отличие от чистого изгиба сечения балки не остаются плоскими (нарушается гипотеза Я. Бернулли).

Искривление поперечных сечений можно наглядно продемонстрировать на примере изгиба консольной балки прямоугольного сечения из резины, вызванного приложенной на конце сосредоточенной силой (рис. 7.32). Если предварительно на боковых гранях нанести прямые линии, перпендикулярные к оси балки, то после изгиба эти линии не остаются прямыми. При этом они искривляются так, что наибольший сдвиг имеет место на уровне нейтрального слоя.

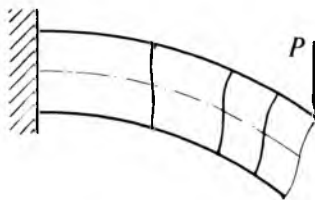


Рис. 7.32

Более точными исследованиями установлено, что влияние искажения поперечных сечений на величину нормальных напряжений незначительно. Оно зависит от отношения высоты сечения h к длине балки l и при $h/l \leq 1/5$ является несущественным. Поэтому для определения нормальных напряжений σ_x при поперечном изгибе обычно используется формула (7.14), выведенная для случая чистого изгиба.

Второй особенностью поперечного изгиба является наличие нормальных напряжений σ_y , действующих в продольных сечениях балки и характеризующих взаимное давление между продольными слоями. Эти напряжения возникают на участках, где имеется распределенная нагрузка q , и в местах приложения сосредоточенных сил. Обычно эти напряжения имеют весьма малую величину по сравнению с нормальными напряжениями σ_x . Особый случай представляет собой действие сосредоточенной силы, в области приложения которой могут возникнуть значительные местные напряжения σ_y .

Таким образом, бесконечно малый элемент в плоскости Oxy в случае поперечного изгиба находится в условиях двухосного напряженного состояния (рис. 7.33).

Напряжения τ_{yx} и σ_y , так же как и напряжение σ_x , в общем случае являются функциями координат x и y . Они должны удовлетворять дифференциальным уравнениям равновесия, которые для двухосного напряженного состояния ($\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$) при отсутствии объемных сил имеют следующий вид:

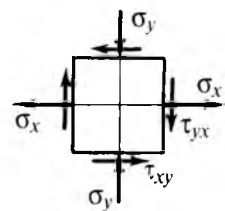


Рис. 7.33

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.26)$$

Эти уравнения могут быть использованы для определения касательных напряжений $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ и нормальных напряжений σ_x . Наиболее просто это сделать для балки прямоугольного поперечного сечения. В этом случае при определении τ_{yx} принимается предположение об их равномерном распределении по ширине сечения (рис. 7.34). Это предположение было сделано известным русским ученым-мостостроителем Д.И. Журавским. Исследования показывают, что это предположение практически точно соответствует действительному характеру распределения касательных напряжений при изгибе для достаточно узких и высоких балок ($b \ll h$).

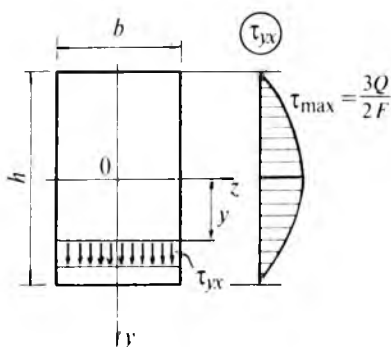


Рис. 7.34

Воспользовавшись первым из дифференциальных уравнений (7.26) и формулой (7.14) для нормальных напряжений σ_x , получим

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -\frac{dM}{dx} \cdot \frac{y}{J_z} = -\frac{Q_y}{J_z} y. \quad (7.27)$$

Интегрируя это уравнение по переменной y , находим

$$\tau_{yx} = -\frac{Q_y}{2J_z} y^2 + f(x), \quad (7.28)$$

где $f(x)$ — произвольная функция, для определения которой используем условие отсутствия касательных напряжений на нижней грани балки:

$$y = \frac{h}{2}, \quad \tau_{yx} = 0.$$

С учетом этого граничного условия из (7.28) находим

$$f(x) = \frac{Q_y}{2J_z} \cdot \frac{h^2}{4}.$$

Окончательно выражение для касательных напряжений, действующих в поперечных сечениях балки, принимает следующий вид:

$$\tau_{yx} = \frac{Q_y}{2J_z} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right). \quad (7.29)$$

В силу закона парности касательных напряжений возникают также касательные напряжения $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ в продольных сечениях балки, параллельных нейтральному слою.

Из формулы (7.29) видно, что касательные напряжения изменяются по высоте поперечного сечения балки по закону квадратной параболы. Наибольшее значение касательные напряжения имеют в точках на уровне нейтральной оси при $y = 0$, а в крайних волокнах балки при $y = \pm h/2$ они равны нулю. Используя формулу (7.23) для момента инерции прямоугольного сечения, получим

$$\tau_{\max} = \frac{Q_y h^2}{8J_z} = \frac{3Q_y}{2F}, \quad (7.30)$$

где $F = bh$ — площадь поперечного сечения балки.

Эпюра τ_{yx} приведена на рис. 7.34.

В случае балок непрямоугольного поперечного сечения (рис. 7.35) определение касательных напряжений τ_{yx} из уравнения равновесия (7.27) затруднительно, так как граничное условие для τ_{yx} не во всех точках контура поперечного сечения известно. Это связано с тем, что в этом случае в поперечном сечении действуют касательные напряжения τ , не параллельные поперечной силе Q_y . В самом деле, можно показать, что в точках у контура поперечного сечения полное касательное напряжение τ направлено по касательной к контуру. Рассмотрим в окрестности произвольной точки контура (см. рис. 7.35) бесконечно малую площадку dF в плоскости поперечного сечения и перпендикулярную к ней площадку dF' на боковой поверхности балки. Если полное напряжение τ в точке контура направлено не по касательной, то оно может быть разложено на две составляющие: τ_{vx} в направлении нормали v к контуру и τ_{tx} в направлении касательной t к контуру. Следовательно, согласно закону парности касательных напряжений на площадке dF' долж-

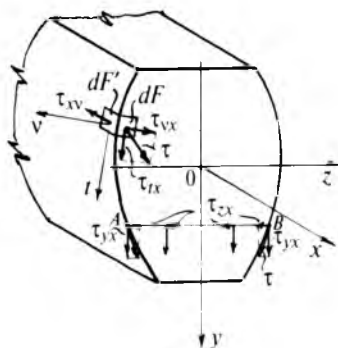


Рис. 7.35

но действовать касательное напряжение τ_{xv} равное τ_{vx} . Если боковая поверхность свободна от касательных нагрузок, то составляющая $\tau_{xv} = \tau_{vx} = 0$, то есть полное касательное напряжение τ должно быть направлено по касательной к контуру поперечного сечения, как это показано, например, в точках *A* и *B* контура.

Следовательно, касательное напряжение τ как в точках контура, так и в любой точке поперечного сечения можно разложить на составляющие τ_{yx} и τ_{zx} .

Для определения составляющих τ_{yx} касательного напряжения в балках непрямоугольного поперечного сечения (рис. 7.36, б) предположим, что сечение имеет вертикальную ось симметрии и что составляющая τ_{yx} полного касательного напряжения τ , как и в случае прямоугольного поперечного сечения, равномерно распределена по его ширине.

С помощью продольного сечения, параллельного плоскости Oxz и проходящего на расстоянии y от нее, и двумя поперечными сечениями x и $x + dx$ вырежем мысленно из нижней части балки бесконечно малый элемент длиной dx (рис. 7.36, в).

Предположим, что изгибающий момент M_z изменяется в пределах длины dx рассматриваемого элемента балки, а поперечная сила Q_y постоянна. Тогда в поперечных сечениях x и $x + dx$ балки будут действовать одинаковые по величине касательные напряжения τ_{yx} , а нормальные напряжения, возникающие от изгибающих моментов M_z и $M_z + dM_z$, будут соответственно равны σ и $\sigma + d\sigma$. По горизонтальной грани выделенного элемента (на рис. 7.36, в он показан в аксонометрии) согласно закону парности касательных напряжений будут действовать напряжения $\tau_{xy} = \tau_{yx}$.

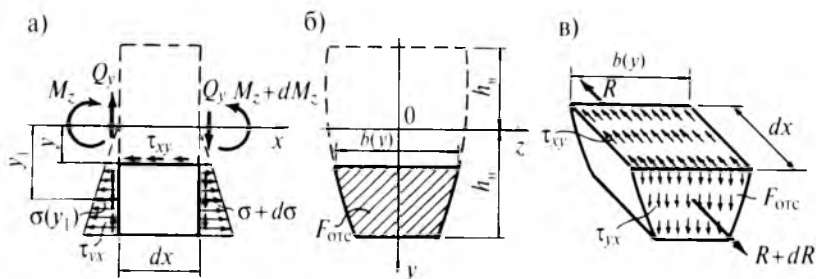


Рис. 7.36

Равнодействующие R и $R + dR$ нормальных напряжений σ и $\sigma + d\sigma$, приложенных к торцам элемента, с учетом формулы (7.14) равны

$$R = \iint_{F_{\text{отс}}} \sigma(y_1) dF = \iint_{F_{\text{отс}}} \frac{M_z}{J_z} y_1 dF = \frac{M_z}{J_z} S_z^{\text{отс}};$$

$$R + dR = \frac{M_z + dM_z}{J_z} S_z^{\text{отс}},$$

где

$$S_z^{\text{отс}}(y) = \iint_{F_{\text{отс}}} y_1 dF \quad (7.31)$$

статический момент отсеченной площади $F_{\text{отс}}$ (на рис. 7.36, б заштрихована) относительно нейтральной оси Oz ; y_1 — вспомогательная переменная, изменяющаяся в пределах $y \leq y_1 \leq h_n$.

Равнодействующая касательных напряжений τ_{xy} , приложенных к горизонтальной грани элемента, с учетом введенного предположения о равномерном распределении этих напряжений по ширине $b(y)$ может быть найдена по формуле

$$dT = \tau_{xy} b(y) dx.$$

Условие равновесия элемента $\sum X = 0$ дает

$$R + dR - R - dT = 0.$$

Подставляя значения равнодействующих сил, получим

$$\frac{dM_z}{J_z} S_z^{\text{отс}} - \tau_{xy} b(y) dx = 0.$$

Отсюда с учетом (7.6) получим формулу для определения касательных напряжений:

$$\tau_{xy} = \frac{Q_y S_z^{\text{отс}}(y)}{J_z b(y)}. \quad (7.32)$$

Эта формула в отечественной литературе называется *формулой Д.И. Журавского*.

В соответствии с формулой (7.32) распределение касательных напряжений τ_{yx} по высоте сечения зависит от изменения ширины сечения $b(y)$ и статического момента отсеченной части сечения $S_z^{\text{отс}}(y)$.

С помощью формулы (7.32) касательные напряжения наиболее просто определяются для рассмотренной выше балки прямоугольного сечения (рис. 7.37).

Статический момент отсеченной площади сечения $F_{\text{отс}}$ равен

$$S_z^{\text{отс}} = y \cdot F_{\text{отс}} = \left[y + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - y \right) \right] b \left(\frac{h}{2} - y \right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

Подставив $S_z^{\text{отс}}$ в (7.32), получим выведенную ранее формулу (7.29).

Формула (7.32) может использоваться при определении касательных напряжений в балках со ступенчато-постоянной шириной сечения. В пределах каждого участка с постоянной шириной касательные напряжения изменяются по высоте сечения по закону квадратной параболы. В местах скачкообразного изменения ширины сечения касательные напряжения также имеют скачки или разрывы. Характер эпюры τ_{yx} для такого сечения приведен на рис. 7.38.

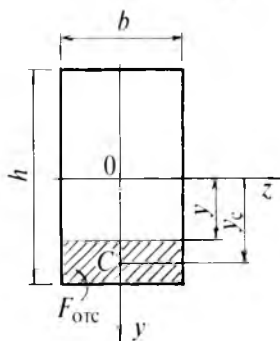


Рис. 7.37

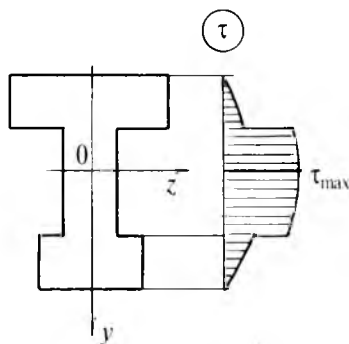


Рис. 7.38

Рассмотрим распределение касательных напряжений в двутавровом сечении (рис. 7.39, а) при изгибе в плоскости Oxy . Двутавровое сечение может быть представлено в виде сопряжений трех узких прямоугольников: двух горизонтальных полок и вертикальной стенки.

При вычислении τ_{yx} в стенке в формуле (7.32) нужно принять $b(y) = d$. В результате получим

$$\tau_{yx} = \frac{Q_y S_z^{\text{отс}}}{J_z d}, \quad (7.33)$$

где $S_z^{\text{отс}}$ вычисляется как сумма статических моментов относительно оси Oz площади полки F_{Π} и части стенки F_c , заштрихованных на рис. 7.39, а:

$$S_z^{\text{отс}} = F_{\Pi} y_1 + F_c y_2.$$

Наибольшее значение касательные напряжения τ_{yx} имеют на уровне нейтральной оси при $y = 0$:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_y S_z^{1/2}}{J_z d},$$

где $S_z^{1/2}$ — статический момент площади половины сечения относительно нейтральной оси:

$$S_z^{1/2} = \left(\frac{h}{2} - t\right) d \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - t\right) + bt \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right).$$

Для прокатных двутавров и швеллеров величина статического момента половины сечения приведена в сортаменте.

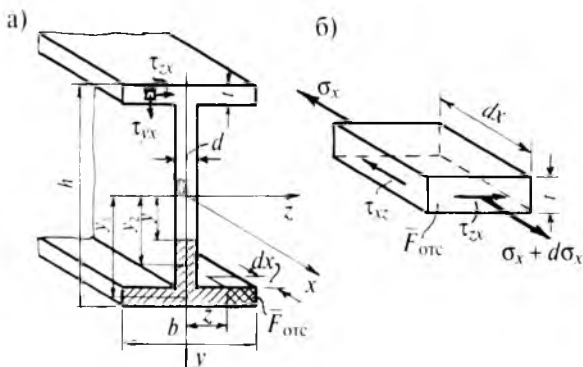


Рис. 7.39

На уровне примыкания стенки к полкам касательные напряжения τ_{yx} равны

$$\tau_{yx} = \frac{Q_y S_z^n}{J_z d},$$

где S_z^n — статический момент площади сечения полки относительно нейтральной оси:

$$S_z^n = \frac{bt}{2}(h-t).$$

Вертикальные касательные напряжения τ_{yx} в полках двутавра не могут быть найдены по формуле (7.32), так, как вследствие того что $b \gg t$, предположение об их равномерном распределении по ширине полки становится неприемлемым. На верхней и нижней гранях полки эти напряжения должны быть равны нулю. Поэтому τ_{yx} в полках весьма малы и не представляют практического интереса. Значительно больший интерес представляют горизонтальные касательные напряжения в полках τ_{xz} , для определения которых рассмотрим равновесие бесконечно малого элемента, выделенного из нижней полки (рис. 7.39, б).

Согласно закону парности касательных напряжений на продольной грани этого элемента, параллельной плоскости Oxy , действует напряжение τ_{xz} , равное по величине напряжению τ_{zx} , действующему в поперечном сечении. Вследствие малой толщины полки двутавра эти напряжения можно принять равномерно распределенными по толщине полки. С учетом этого из уравнения равновесия элемента $\sum X = 0$ будем иметь

$$\iint_{\bar{F}_{\text{от}}} (\sigma_x + d\sigma_x) dF - \iint_{\bar{F}_{\text{от}}} \sigma_x dF - \tau_{xz} t dx = 0.$$

Отсюда находим

$$\tau_{xz} = \frac{1}{t} \iint_{\bar{F}_{\text{от}}} \frac{d\sigma_x}{dx} dF.$$

Подставляя в эту формулу выражение для σ_x из (7.14) и учитывая, что $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, получим

$$\tau_{zx} = \frac{1}{J_z t} \cdot \frac{dM_z}{dx} \iint_{\bar{F}_{\text{от}}} y dF.$$

Учитывая, что

$$\frac{dM_z}{dx} = Q_y; \quad \iint_{F_{отс}} y dF = \bar{S}_z^{отс},$$

где $\bar{S}_z^{отс}$ — статический момент отсеченной площади полки (на рис. 7.39, а заштрихована дважды) относительно оси Oz , окончательно получим

$$\tau_{zx} = \frac{Q_y \bar{S}_z^{отс}}{J_z t}. \quad (7.34)$$

В соответствии с рис. 7.39, а

$$\bar{S}_z^{отс} = t \left(\frac{b}{2} - z \right) \left(\frac{h}{2} - t \right),$$

где z — переменная, отсчитываемая от оси Oy .

С учетом этого формулу (7.34) можно представить в виде

$$\tau_{zx} = \frac{Q_y}{4J_z} (h-t)(b-2z).$$

Отсюда видно, что горизонтальные касательные напряжения τ_{zx} изменяются по линейному закону вдоль оси Oz и принимают наибольшее значение при $z = d/2$:

$$\tau_{zx}^{нб} = \frac{Q_y}{4J_z} (h-t)(b-d).$$

На рис. 7.40 показаны эпюры касательных напряжений τ_{yx} и τ_{zx} , а также направления этих напряжений в полках и стенке двутавра при действии в сечении балки положительной поперечной силы Q_y . Касательные напряжения образно говоря образуют в сечении двутавра непрерывный поток, направленный в каждой точке параллельно контуру сечения.

Перейдем к определению нормальных напряжений σ_y в продольных сечениях балки. Рассмотрим участок балки с равномерно распределенной нагрузкой по верхней грани (рис. 7.41). Поперечное сечение балки примем прямоугольным.

Используем для определения σ_y второе из дифференциальных уравнений равновесия (7.26). Подставив в это уравнение формулу (7.32) для касательных напряжений τ_{yx} , с учетом (7.6) получим

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = -\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} = -\frac{1}{2J_z} \cdot \frac{dQ_y}{dx} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) = \frac{q}{2J_z} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

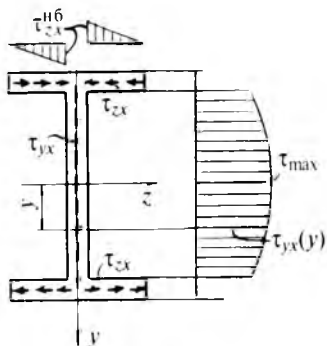


Рис. 7.40

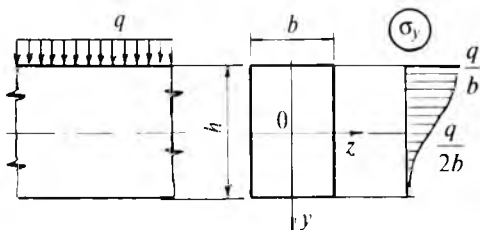


Рис. 7.41

Выполнив интегрирование по переменной y , находим

$$\sigma_y = \frac{qh^2}{8J_z} y - \frac{qy^3}{6J_z} + f(x).$$

Здесь $f(x)$ — произвольная функция, которая определяется с помощью граничного условия. По условиям задачи балка нагружена равномерно распределенной нагрузкой q по верхней грани, а нижняя грань свободна от нагрузок. Тогда соответствующие граничные условия записываются в виде

$$y = -\frac{h}{2}, \quad \sigma_y = -\frac{q}{b}, \quad y = \frac{h}{2}, \quad \sigma_y = 0. \quad (7.35)$$

Используя второе из этих условий, получим

$$f(x) = -\frac{qh^3}{24J_z}.$$

С учетом этого формула для напряжений σ_y примет следующий вид:

$$\sigma_y = \frac{qh^3}{24J_z} \left(3\frac{y}{h} - 4\frac{y^3}{h^3} - 1 \right). \quad (7.36)$$

Из этого выражения видно, что напряжения σ_y изменяются по высоте сечения по закону кубической параболы. При этом выполняются оба граничных условия (7.35). Наибольшее значение напряжения σ_y принимает на верхней поверхности балки при $y = -h/2$:

$$\sigma_y^{\text{нб}} = -\frac{qh^3}{12J_z} = -\frac{q}{b}. \quad (7.37)$$

Характер эпюры σ_y приведен на рис. 7.41.

Для оценки величин наибольших напряжений σ_x , σ_y и τ_{yx} и соотношений между ними рассмотрим, например, изгиб консольной балки прямоугольного поперечного сечения с размерами $b \times h$, находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки, приложенной к верхней грани балки (рис. 7.42). Наибольшие по абсолютной величине напряжения возникают в заделке. В соответствии с формулами (7.22), (7.30) и (7.37) эти напряжения равны

$$\sigma_x = \frac{6M}{bh^2} = 3\left(\frac{l}{h}\right)^2 \frac{q}{b}; \quad \tau_{yx} = \frac{3Q}{2F} = \frac{3}{2}\left(\frac{l}{h}\right) \frac{q}{b}; \quad \sigma_y = \frac{q}{b}.$$

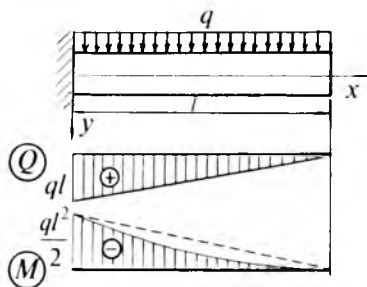


Рис. 7.42

Так как обычно для балок $l/h \gg 1$, то из полученных выражений следует, что напряжения σ_x по абсолютной величине превосходят напряжения τ_{yx} и, особенно, σ_y . Так, например, при $l/h = 10$ получим $\sigma_x/\tau_{yx} = 20$; $\sigma_x/\sigma_y = 300$.

Таким образом, наибольший практический интерес при расчете балок на изгиб представляют напряжения σ_x , действующие в поперечных сечениях балки. Напряжения σ_y , характеризующие взаимное давление продольных слоев балки, пренебрежимо малы по сравнению с σ_x .

Полученные в этом примере результаты свидетельствуют о том, что введенные в § 7.5 гипотезы вполне обоснованы.

7.7. Главные напряжения в балках при изгибе

Величины главных напряжений и углы наклона главных плоскостей в балках при поперечном изгибе можно определить по формулам (4.27) и (4.28) двухосного напряженного состояния:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}; \quad (7.38)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_1 - \sigma_y}; \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_2 - \sigma_y}. \quad (7.39)$$

Как уже было установлено, при поперечном изгибе в сечении балки действуют нормальные напряжения σ_x и σ_y и касательные напряжения $\tau_{yx} = \tau_{xy}$. Однако нормальные напряжения σ_y по сравнению с σ_x существенно малы, и обычно их принимают равными нулю. Таким образом, будем исходить из того, что при поперечном изгибе в балке возникают напряжения

$$\sigma_x = \sigma = \frac{M_z}{J_z} y; \quad \tau_{yx} = \tau = \frac{Q_y S_z^{\text{отс}}}{J_z b}. \quad (7.40)$$

Следовательно, имеет место частный случай двухосного напряженного состояния (рис. 7.43):

$$\sigma_x = \sigma; \quad \sigma_y = 0; \quad \tau_{xy} = \tau.$$

Тогда формулы (7.38) и (7.39) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 = \sigma_{\text{нб}} &= \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2}; \\ \sigma_2 = \sigma_{\text{нм}} &= \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2}; \end{aligned} \right\} \quad (7.41)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\tau}{\sigma_1}; \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\tau}{\sigma_2}. \quad (7.42)$$

При условии $M_z > 0$ и $Q_y > 0$ рассмотрим в поперечном сечении балки три характерные точки (рис. 7.44): в верхнем, сжатом волокне (точка А), в нейтральном слое (точка В) и в нижнем, растянутом волокне (точка С).

В точке А согласно эпюрам σ_x и τ_{yx} на рис. 7.30 и 7.34 $\sigma = \sigma_{\text{нм}} = -\sigma_2$, $\tau = 0$. Так как при этом $\sigma_1 = 0$, то первая из формул (7.42) превращается в неопределенность, а вторая дает $\alpha_2 = 0$.

Аналогично в точке С $\sigma = \sigma_{\text{нб}} = \sigma_1$, $\tau = 0$ и первая из формул (7.42) дает $\alpha_1 = 0$.

В точке В имеем: $\sigma = 0$, $\tau = \tau_{\text{нб}}$. В этом случае из формул (7.41) получим

$$\sigma_1 = \tau_{\text{нб}}; \quad \sigma_2 = -\tau_{\text{нб}}.$$

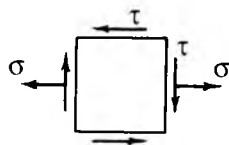


Рис. 7.43

Формулы (7.42) дают

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = 1; \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = -1; \quad \alpha_1 = 45^\circ, \quad \alpha_2 = -45^\circ.$$

Таким образом, при поперечном изгибе в точках нейтрального слоя возникает напряженное состояние чистого сдвига, а в верхних и нижних волокнах — одноосное напряженное состояние. Если в различных точках известны направления главных напряжений, то можно построить *траектории главных напряжений*, то есть линии, в каждой точке которых касательная совпадает с направлением главного напряжения в этой точке.

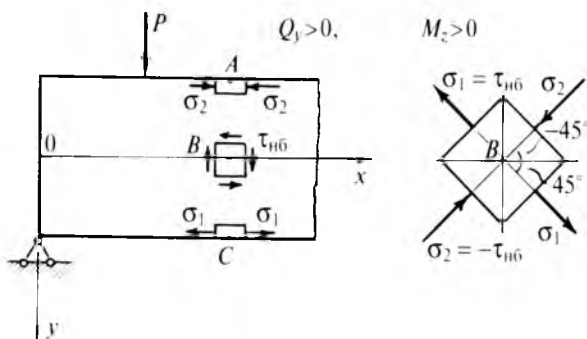


Рис. 7.44

На рис. 7.45 для балки, заделанной одним концом и нагруженной силой P , сплошными линиями показаны траектории главных растягивающих напряжений σ_1 , а пунктирными — главных сжимающих напряжений σ_2 . Траектории главных напряжений σ_1 и σ_2 являются взаимноортогональными кривыми, пересекающими ось балки под углами 45° .

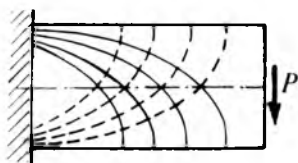


Рис. 7.45

По траекториям σ_1 можно судить о возможном месте и направлении трещин в балках из хрупких материалов. При армировании железобетонных балок арматуру необходимо располагать в зонах растяжения и по возможности по направлению главных напряжений. Эта задача решается с помощью траекторий главных напряжений.

В случае поперечных сечений с резко изменяющейся шириной (например, двутавр) могут возникнуть большие главные напряжения. Рассмотрим числовой пример.

Пример 7.8. Для балки, изображенной на рис. 7.21 и имеющей сечение $\text{I}30\text{a}$, определим главные напряжения.

По таблице сортамента находим момент сопротивления $W_z = 518 \text{ см}^3$, момент инерции $J_z = 7780 \text{ см}^4$ и статический момент половины сечения $S_z^{1/2} = 292 \text{ см}^3$. Основные размеры сечения показаны на рис. 7.46 в сантиметрах.

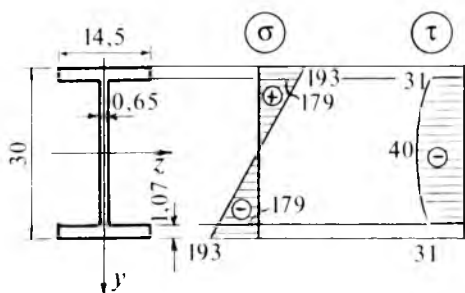


Рис. 7.46

Определим статический момент полки относительно нейтральной оси:

$$S_z^{\text{II}} = 14,5 \cdot 1,07 \left(15,0 - \frac{1,07}{2} \right) = 224 \text{ см}^3.$$

Точки, в которых нужно определить главные напряжения, находим в следующем порядке: сначала отметим те сечения, в которых изгибающий момент и поперечная сила имеют одновременно большие значения, и построим для этих сечений эпюры напряжений σ и τ . Затем для каждого из этих сечений по эпюрам нормальных и касательных напряжений отметим те точки, в которых эти напряжения одновременно будут большими. Для найденных таким образом точек определим главные напряжения.

Эпюры Q_y и M_z приведены на рис. 7.21. Опасным является сечение B , где поперечная сила и изгибающий момент имеют значения $Q_y = -70 \text{ кН}$; $M_z = -100 \text{ кНм}$.

Построим эпюры нормальных и касательных напряжений для опасного сечения. Нормальные напряжения в верхних волокнах равны

$$\sigma = -\frac{M_z}{W_z} = \frac{100 \cdot 10^2}{518} = 19,3 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 193 \text{ МПа}.$$

На уровне примыкания полки к стенке ($y = -13,93$ см)

$$\sigma = \frac{M_z}{J_z} y = \frac{100 \cdot 10^2 \cdot 13,93}{7780} = 17,9 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 179 \text{ МПа.}$$

Касательные напряжения на уровне нейтральной оси

$$\tau = \frac{Q_z S_z^{1/2}}{J_z d} = -\frac{70 \cdot 292}{7780 \cdot 0,65} = -4,0 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = -40 \text{ МПа.}$$

Касательные напряжения в стенке на уровне сопряжения с полкой

$$\tau = \frac{Q_y S_z^{\text{II}}}{J_z d} = -\frac{70 \cdot 224}{7780 \cdot 0,65} = -3,1 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = -31 \text{ МПа.}$$

По найденным значениям σ и τ построены эпюры нормальных и касательных напряжений (см. рис. 7.46). Из этих эпюр видно, что в стенке в местах сопряжения с полками балки напряжения σ и τ имеют одновременно большие значения. В этих местах определим главные напряжения. Для верхней части сечения имеем

$$\sigma_1 = \frac{179}{2} + \sqrt{\frac{179^2}{4} + 31^2} = 89,5 + 94,7 = 184,2 \text{ МПа;}$$

$$\sigma_2 = 89,5 - 94,7 = -5,2 \text{ МПа.}$$

Таким образом, в рассматриваемом примере главные напряжения в опасных точках не превосходят нормальных напряжений в крайних волокнах.

7.8. Расчет балок на прочность при изгибе

При расчете изгибаемых элементов конструкций на прочность используются методы, рассмотренные в § 3.7. При расчете строительных конструкций применяется метод расчета по первой группе предельных состояний; в машиностроении — метод расчета по допускаемым напряжениям. В большинстве случаев решающее влияние на прочность элементов конструкций оказывают нормальные напряжения, действующие в крайних волокнах балок, и лишь в некоторых случаях — касательные напряжения, а также главные напряжения в наклонных сечениях. Во всех случаях наибольшие напряжения, возникающие в балке, не должны превышать некоторой допустимой для данного материала величины. При расчете

по первой группе предельных состояний эта величина принимается равной расчетному сопротивлению R , умноженному на коэффициент условий работы $\gamma_c \leq 1$; при расчете по методу допускаемых напряжений — допускаемому напряжению $[\sigma]$. В первом случае условие прочности записывается в виде

$$\sigma_{\text{нб}} \leq \gamma_c R, \quad (7.43)$$

во втором

$$\sigma_{\text{нб}} \leq [\sigma]. \quad (7.44)$$

В таком виде записываются условия прочности для балок из пластичного материала (например, строительных сталей), одинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию. Для хрупких материалов (например, чугуна), которые работают на растяжение значительно хуже, чем на сжатие, расчетное сопротивление и допускаемые напряжения при растяжении R_p и $[\sigma_p]$ существенно меньше, чем при сжатии R_c и $[\sigma_c]$. В этом случае необходимо выполнение условий прочности по наибольшему растягивающим $\sigma_p^{\text{нб}}$ и наибольшему сжимающим $\sigma_c^{\text{нб}}$ напряжениям:

$$\sigma_p^{\text{нб}} \leq \gamma_c R_p; \quad \sigma_c^{\text{нб}} \leq \gamma_c R_c, \quad (7.45)$$

или

$$\sigma_p^{\text{нб}} \leq [\sigma_p]; \quad \sigma_c^{\text{нб}} \leq [\sigma_c]. \quad (7.46)$$

В дальнейшем мы будем главным образом пользоваться методом расчета по первой группе предельных состояний.

Для балок из пластичного материала, одинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию, рационально применять симметричные относительно нейтральной оси сечения. В этом случае условие прочности (7.43) с учетом формулы (7.22) записывается в виде

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{M_{\text{нб}}}{W} \leq \gamma_c R. \quad (7.47)$$

Иногда по конструктивным соображениям применяются несимметричные сечения типа тавра, разнополочного двутавра и т.п. В этих случаях условие прочности (7.43) с учетом (7.20) записывается в виде

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{M_{\text{нб}}}{W'_{\text{нм}}} \leq \gamma_c R. \quad (7.48)$$

В формулах (7.47) и (7.48) W и $W'_{\text{нм}}$ — моменты сопротивления сечения относительно нейтральной оси Oz (индекс z в дальнейшем опускаем); $M_{\text{нб}}$ — наибольший по абсолютной величине изгиба-

ющий момент от действия расчетных нагрузок, определяемых по формуле (3.41). Сечение балки, в котором действует наибольший по абсолютной величине изгибающий момент, называется опасным сечением.

При расчете элементов конструкций, работающих на изгиб, с использованием условий прочности решаются следующие задачи: проверка прочности балки; подбор сечения; определение несущей способности (грузоподъемности) балки, то есть значений нагрузок, при которых наибольшие напряжения в опасном сечении балки равны $\gamma_c R$ или $[\sigma]$.

Решение первой задачи сводится к проверке выполнения условий прочности при заданных нагрузках, форме, размерах сечения и свойствах материала.

Решение второй задачи сводится к определению размеров сечения заданной формы при заданных нагрузках и свойствах материала. Вначале из условий прочности (7.47) или (7.48) определяется величина требуемого момента сопротивления:

$$W \geq \frac{M_{нб}}{\gamma_c R} \quad \text{или} \quad W_{нм} \geq \frac{M_{нб}}{\gamma_c R}, \quad (7.49)$$

а затем устанавливаются размеры сечения. Наиболее просто эта задача решается для балок прямоугольного или круглого сечения и прокатных балок.

Для прямоугольного сечения (рис. 7.30) с заданным соотношением сторон $h/b = k$ из (7.23) и (7.49) можно найти

$$W = \frac{bh^2}{6} = \frac{h^3}{6k}; \quad h = \sqrt[3]{\frac{6kM_{нб}}{\gamma_c R}}; \quad b = \frac{h}{k}. \quad (7.50)$$

Для круглого сечения

$$W = \frac{\pi D^3}{32}; \quad D = \sqrt[3]{\frac{32M_{нб}}{\pi \gamma_c R}}. \quad (7.51)$$

Для прокатных балок (двутавры, швеллеры) по величине требуемого из условий прочности (7.47) момента сопротивления подбор сечения производится по сортаменту.

Подбор сечения более сложной формы выполняется методом последовательных приближений. При каждом приближении принимаются размеры сечения и затем проверяется выполнение условий прочности (7.47) или (7.48). Приближения выполняются до тех пор, пока напряжения $\sigma_{нб}$ станут равны $\gamma_c R$ или будут немного меньше этой величины.

При решении третьей задачи по определению грузоподъемности балки вначале по формуле (7.47) или (7.48) из условия равенства наибольших напряжений в опасном сечении величине $\gamma_c R$ находится величина наибольшего изгибающего момента

$$M_{\text{нб}} = \gamma_c R W_{\text{нм}}. \quad (7.52)$$

Затем этот момент выражается через приложенные к балке нагрузки и из полученного выражения определяются соответствующие величины нагрузок. Например, для стальной двутавровой балки I 30 , изображенной на рис. 7.47, при $R = 210 \text{ МПа}$, $\gamma_c = 0,9$, $W = 472 \text{ см}^3$

$$M_{\text{нб}} = \gamma_c R W = 0,9 \cdot 210 \cdot 472 \cdot 10^{-3} = 89,2 \text{ кНм}.$$

По эпюре изгибающих моментов находим

$$M_{\text{нб}} = \frac{Pl}{4} = 89,2 \text{ кНм}; \quad P = \frac{4 \cdot 89,2}{3} = 118,3 \text{ кН}.$$

Рассмотрим случаи, когда проверка прочности (7.47), (7.48) по наибольшим нормальным напряжениям, действующим в поперечных сечениях балки, оказывается недостаточной.

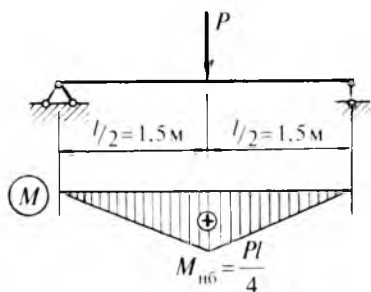


Рис. 7.47

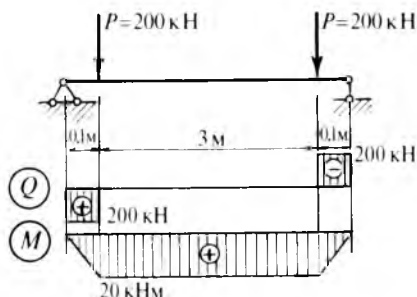


Рис. 7.48

В коротких балках ($l/h \leq 5$), а также в балках, нагруженных большими по величине сосредоточенными силами, близко расположенными к опорам (рис. 7.48), изгибающий момент $M_{\text{нб}}$ может оказаться сравнительно небольшим, а поперечная сила $Q_{\text{нб}}$ по абсолютной величине значительна. В этих случаях необходимо производить проверку по наибольшим касательным напряжениям $\tau_{\text{нб}}$, которые возникают в сечении балки, где действует $Q_{\text{нб}}$. Условие прочности по наибольшим касательным напряжениям можно записать в виде

$$\tau_{\text{нб}} \leq \gamma_c R_s, \quad (7.53)$$

где R_s — расчетное сопротивление материала балки при сдвиге. Для металлов $R_s \approx 0,6R$; например, для стали марки ВСт3 при $R = 210$ МПа $R_s = 130$ МПа.

Касательные напряжения могут достигать значительной величины в стенке двутавровых балок, особенно в тонких стенках составных балок. Кроме того, в стенке такой балки в местах перехода к полке главные напряжения, возникающие на наклонных площадках, могут оказаться по абсолютной величине больше, чем наибольшие напряжения в поперечных сечениях. В таких случаях необходимо проверять выполнение условия прочности по наибольшим главным напряжениям для тех сечений балки, в которых M и Q одновременно велики по абсолютной величине:

$$|\sigma_{1,2}| = \left| \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2} \right| \leq \gamma_c R. \quad (7.54)$$

Следует отметить, что проверка прочности по формулам (7.53) и (7.54) производится после проверки прочности или подбора сечения по формулам (7.47), (7.48), (7.49) и имеет цель при необходимости уточнить некоторые размеры сечения, например увеличить толщину стенки двутавра. Отметим также, что при наличии достаточно больших нормальных и касательных напряжений проверка прочности должна выполняться с помощью соответствующей теории прочности (см. § 12.5).

Расчет на прочность по касательным напряжениям может иметь решающее значение для деревянных балок, так как дерево плохо сопротивляется скалыванию вдоль волокон. Так, например, для сосны расчетное сопротивление растяжению и сжатию при изгибе $R = 13$ МПа, а при скалывании вдоль волокон $R_s = R_{ск} = 2,4$ МПа. Условие прочности по касательным напряжениям для деревянной балки прямоугольного сечения с учетом формулы (7.30) и $\gamma_c = 1$ можно записать в виде

$$\tau_{нб} = \frac{3Q_{нб}}{2F} \leq R_{ск}. \quad (7.55)$$

7.9. Рациональные типы сечений балок

Как видно из формулы (7.52), несущая способность балки пропорциональна моменту сопротивления $W_{нм}$, а расход материала — площади F поперечного сечения балки. Поэтому рациональными с точки зрения расхода материала являются такие типы сечений, у которых отношение W/F имеет возможно большее значение.

Момент сопротивления пропорционален моменту инерции. Для симметричных сечений $W = J/0,5h$. Момент инерции тем больше, чем дальше расположен материал от нейтральной оси Oz сечения. С этой точки зрения очевидно, что из трех сечений, изображенных на рис. 7.49, наиболее рациональным должно быть двутавровое сечение.

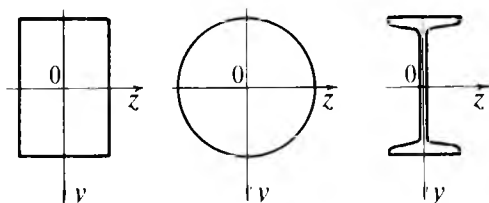


Рис. 7.49

Чтобы убедиться в этом, произведем подбор сечений этих балок при одном и том же значении изгибающего момента $M_{нб} = 80 \text{ кНм}$. Материал — сталь, $R = 210 \text{ МПа}$, $\gamma_c = 1$.

Для прямоугольного сечения с соотношением сторон $k = h/b = 2$ по формуле (7.50)

$$h = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 2 \cdot 80 \cdot 10^2}{1 \cdot 210 \cdot 10^{-1}}} = 16,6 \text{ см}; \quad b = 8,3 \text{ см}; \quad F = 146 \text{ см}^2.$$

Для круглого сечения по формуле (7.51)

$$D = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 80 \cdot 10^2}{\pi \cdot 1 \cdot 210 \cdot 10^{-1}}} = 15,7 \text{ см}; \quad F = 194 \text{ см}^2.$$

Для прокатного двутавра

$$W = \frac{M_{нб}}{\gamma_c R} = 381 \text{ см}^3.$$

В соответствии с этой величиной по таблице сортамента для прокатных двутавров принимаем сечение $\text{I} 27\text{а}$, $W = 407 \text{ см}^3$, $F = 43,2 \text{ см}^2$.

Таким образом, расход материала в случае двутаврового сечения оказался в 3,4 раза меньше, чем в случае прямоугольного, и в 4,5 раза меньше, чем в случае круглого сечения. Наименее рациональным является круглое сечение, так как в этом случае значительная часть материала балки находится в области небольших напряжений.

В балках из хрупкого материала с целью уменьшения наибольших растягивающих напряжений более рационально применять несимметричные сечения. На рис. 7.50 изображены некоторые типы сечений, применяемых в железобетонных балках, в деталях машиностроительных конструкций, изготавливаемых из чугуна.

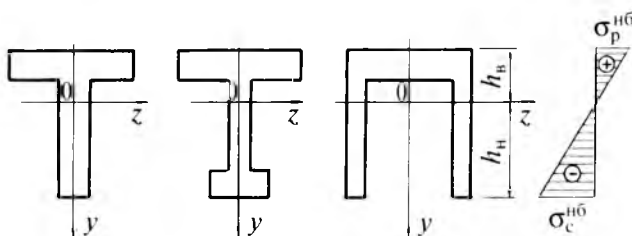


Рис. 7.50

Рядом приведен характер эпюры нормальных напряжений при действии в сечении отрицательного изгибающего момента, растягивающего верхние волокна балки. Изменяя соотношение размеров отдельных элементов сечения, можно найти такое положение нейтральной линии, при котором наибольшие растягивающие σ_p^{nb} и наибольшие по абсолютной величине сжимающие σ_c^{nb} напряжения в поперечном сечении будут равны допускаемым напряжениям $[\sigma_p]$ и $[\sigma_c]$. Так, например, для балки, изготовленной из серого чугуна с допускаемыми напряжениями $[\sigma_p] = 80$ МПа и $[\sigma_c] = 160$ МПа, это условие будет выполнено при отношении высоты сжатой зоны к высоте растянутой, равном 2.

Наибольшие растягивающие и наибольшие по абсолютной величине сжимающие напряжения в балках несимметричного сечения из хрупкого материала могут возникать в разных сечениях. Поэтому необходимо проверить прочность по наибольшим растягивающим и сжимающим напряжениям в двух сечениях балки: в сечении с наибольшим положительным изгибающим моментом M_{nb}^+ :

$$\sigma_p^{nb} = \frac{M_{nb}^+}{W_n} \leq [\sigma_p]; \quad \sigma_c^{nb} = \frac{M_{nb}^+}{W_b} \leq [\sigma_c], \quad (7.56)$$

и в сечении с наибольшим по абсолютной величине отрицательным изгибающим моментом M_{nb}^- :

$$\sigma_p^{nb} = \frac{M_{nb}^-}{W_b} \leq [\sigma_p]; \quad \sigma_c^{nb} = \frac{M_{nb}^-}{W_n} \leq [\sigma_c]. \quad (7.57)$$

В формулах (7.56) и (7.57) $W_{\text{н}}$ и $W_{\text{в}}$ — моменты сопротивления для нижних и верхних волокон.

В балках симметричного сечения достаточно проверить прочность по наибольшему по абсолютной величине изгибающему моменту.

Пример 7.9. Проверим прочность балки таврового сечения (рис. 7.51), изготовленной из чугуна с допускаемыми напряжениями $|\sigma_{\text{р}}| = 80$ МПа, $|\sigma_{\text{с}}| = 160$ МПа.

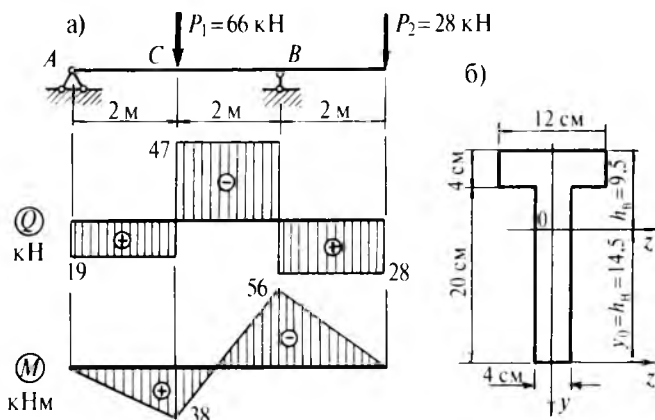


Рис. 7.51

Определим положение центра тяжести y_0 , момент инерции J_z и моменты сопротивления $W_{\text{н}}$ и $W_{\text{в}}$:

$$y_0 = \frac{S_{z_1}}{F} = -\frac{12 \cdot 4 \cdot 22 + 4 \cdot 20 \cdot 10}{12 \cdot 4 + 4 \cdot 20} = -14,5 \text{ см};$$

$$J_z = \frac{12 \cdot 4^3}{12} + 12 \cdot 4 \cdot 7,5^2 + \frac{4 \cdot 20^3}{12} + 4 \cdot 20 \cdot 4,5^2 = 7050 \text{ см}^4;$$

$$W_{\text{н}} = \frac{J_z}{h_{\text{н}}} = \frac{7050}{14,5} = 486 \text{ см}^3; \quad W_{\text{в}} = \frac{J_z}{h_{\text{в}}} = \frac{7050}{9,5} = 742 \text{ см}^3.$$

Для сечения C с наибольшим положительным моментом $M_{\text{нс}}^+ = 38$ кНм имеем:

$$\sigma_{\text{р}}^{\text{нб}} = \frac{M_{\text{нс}}^+}{W_{\text{н}}} = \frac{38 \cdot 10^2}{486} = 7,82 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 78,2 \text{ МПа} < |\sigma_{\text{р}}| = 80 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\text{с}}^{\text{нб}} = \frac{M_{\text{нс}}^+}{W_{\text{в}}} = \frac{38 \cdot 10^2}{742} = 5,12 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 51,2 \text{ МПа} < |\sigma_{\text{с}}| = 160 \text{ МПа}.$$

Для сечения B с наибольшим по абсолютной величине отрицательным моментом $M_{\text{нб}}^- = 56 \text{ кНм}$ получим:

$$\sigma_{\text{р}}^{\text{нб}} = \frac{M_{\text{нб}}^-}{W_{\text{в}}} = \frac{56 \cdot 10^2}{742} = 7,55 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 75,5 \text{ МПа} < [\sigma_{\text{р}}] = 80 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\text{с}}^{\text{нб}} = \frac{M_{\text{нб}}^-}{W_{\text{н}}} = \frac{56 \cdot 10^2}{486} = 11,52 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 115,2 \text{ МПа} < [\sigma_{\text{с}}] = 160 \text{ МПа}.$$

Таким образом, наибольшие растягивающие напряжения $\sigma_{\text{р}}^{\text{нб}} = 78,2 \text{ МПа}$ действуют в нижних волокнах балки в сечении C , а наибольшие сжимающие напряжения $\sigma_{\text{с}}^{\text{нб}} = 115,2 \text{ МПа}$ — в нижних волокнах в сечении B . Условия прочности выполняются.

7.10. Понятие о центре изгиба тонкостенных стержней

Как было отмечено выше, касательные напряжения в поперечных сечениях тонкостенных стержней образуют, образно говоря, поток, параллельный контурным линиям каждого элемента сечения. В некоторых случаях этот поток может создавать момент относительно оси стержня, вызывающий его закручивание.

Рассмотрим, например, изгиб консольной балки швеллерного сечения в плоскости Oxy (рис. 7.52, a). Характер распределения касательных напряжений в поперечном сечении швеллера такой же, как и в двутавре. В стенке швеллера действуют касательные напряжения τ_{yx} , а в полках — касательные напряжения τ_{zx} . Эпюры этих напряжений приведены на рис. 7.52, b .

Равнодействующей касательных напряжений в стенке является сила T_1 (рис. 7.53), которая практически равна поперечной силе Q_y ($T_1 \approx Q_y$). Касательные напряжения в полках приводятся к равнодействующим силам T_2 .

Нетрудно видеть, что поток касательных напряжений дает момент относительно центра тяжести сечения, вызывающий закручивание стержня. Таким образом, если линия действия силы P проходит через центр тяжести сечения O , то балка будет испытывать изгиб с кручением, что является нежелательным.

Установим положение точки плоскости, при прохождении через которую линии действия силы P поток касательных напряжений не будет вызывать закручивание стержня. Очевидно, что такая точка A расположена на оси Oz левее стенки швеллера (рис. 7.53), поскольку при этом равнодействующие касательных напряжений T_1 и T_2 будут давать моменты противоположных знаков относительно точки A . Составим уравнение статики:

$$\sum M_A = 0; \quad T_1 e - T_2 h = 0.$$

Отсюда находим координату точки A :

$$e = \frac{T_2 h}{T_1}.$$

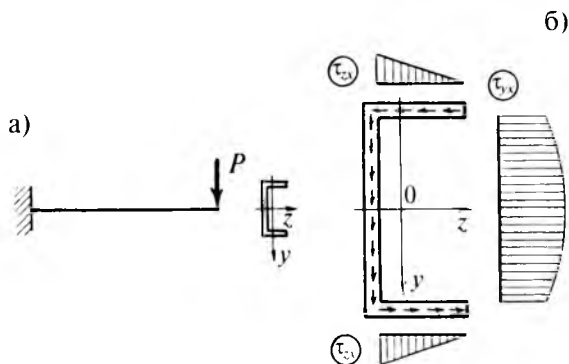


Рис. 7.52

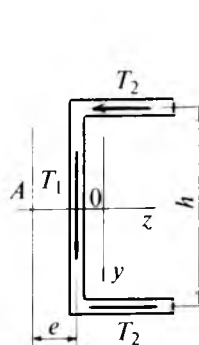


Рис. 7.53

Если линия действия силы P будет проходить через точку A , то стержень будет испытывать только изгиб. Поэтому точка A называется *центром изгиба*. В общем случае центр изгиба не совпадает с центром тяжести сечения и его положение подлежит определению.

В некоторых случаях положение центра изгиба устанавливается без предварительных вычислений. Для сечений с двумя осями симметрии, например для двутавра (рис. 7.54, а), центр изгиба совпадает с центром тяжести сечения. Это имеет место также для так называемых кососимметричных сечений (например, для показанного на рис. 7.54, б Z-образного сечения). Для сечений в виде тавра и уголка (рис. 7.54, в, г) центр изгиба находится в точке пересечения средних линий элементов сечения. Момент касательных напряжений относительно этой точки равен нулю.

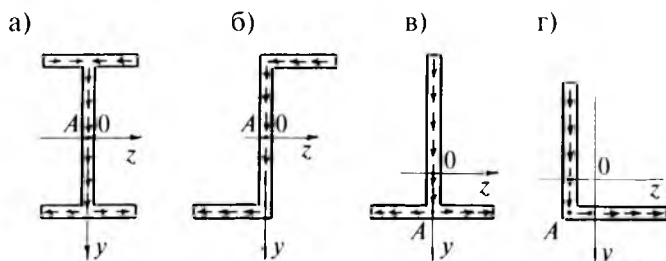


Рис. 7.54

ГЛАВА 8

КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЕЙ

8.1. Внутренние усилия при кручении

Кручение стержня вызывается действием нагрузок, образующих моменты относительно его оси. Такие нагрузки называются скручивающими. Они могут быть сосредоточенными и распределенными по длине стержня. Например, на рис. 8.1 показаны сосредоточенные скручивающие моменты M_1 и M_2 , приложенные в сечениях $z = a$ и $z = b$, и скручивающая нагрузка $m(z)$, распределенная на участке стержня от c до d . Ее равнодействующая равна

$$M = \int_c^d m(z) dz. \quad (8.1)$$

Кручение как основной вид деформации характерно для элементов машиностроительных конструкций, таких как валы двигателей, оси моторных вагонов и локомотивов и т. п. В строительных конструкциях кручение может иметь место при пространственной работе элементов стержневых систем, что в большинстве случаев является нежелательным.

Рассмотрим стержень, находящийся в равновесии под действием произвольных скручивающих нагрузок (см. рис. 8.1). Для определения внутренних усилий в стержне применим к нему метод сечений и разрежем его в произвольном сечении z . Влияние любой

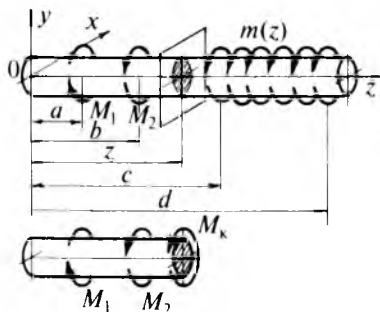


Рис. 8.1

из отброшенных частей стержня можно заменить действием только одного внутреннего усилия — крутящего момента $M_k = M_z$. Для его определения составим уравнение равновесия оставшейся левой части стержня (см. рис. 8.1):

$$\Sigma M_z = 0; \quad M_k + M_2 - M_1 = 0; \quad M_k = M_1 - M_2.$$

Таким образом, крутящий момент в поперечных сечениях стержня определяется как сумма скручивающих нагрузок, приложенных к одной из его частей. Крутящий момент будем считать положительным, если при взгляде на сечение со стороны внешней нормали он стремится повернуть оставшуюся часть стержня против хода часовой стрелки (рис. 8.2, а, б).

В общем случае крутящие моменты переменны по длине стержня. Закон их изменения можно изобразить графически с помощью эпюры крутящих моментов. Для правильного построения эпюры M_k используется дифференциальное соотношение между крутящим моментом и распределенной скручивающей нагрузкой.

Вырежем из скручиваемого стержня на участке, где действует $m(z)$, элемент dz и рассмотрим его равновесие (рис. 8.3). Влияние отброшенных частей стержня заменим действием крутящих моментов M_k и $M_k^* = M_k + dM_k$, где dM_k — приращение (дифференциал) крутящего момента на длине dz .

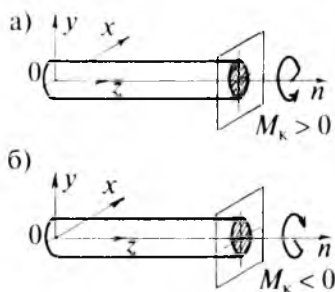


Рис. 8.2

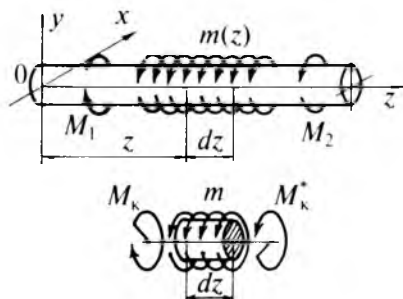


Рис. 8.3

Вследствие малости dz распределенную в пределах элемента нагрузку можно считать постоянной.

Составим уравнение равновесия элемента:

$$\Sigma M_z = 0; \quad -M_k + mdz + (M_k + dM_k) = 0,$$

где произведение mdz представляет собой равнодействующую скручивающей нагрузки на участке dz .

Поделив это уравнение на dz , получим искомое дифференциальное соотношение

$$\frac{dM_{\kappa}}{dz} = -m. \quad (8.2)$$

Из этого соотношения следует, что на участках стержня, свободных от распределенной скручивающей нагрузки, крутящий момент является постоянным или ступенчато-постоянным по величине, а на участках, где $m = \text{const}$, он изменяется по линейному закону.

Пример 8.1. Построим эпюру крутящих моментов для стержня, показанного на рис. 8.4, а. Вычислим значения крутящих моментов в характерных сечениях стержня, начиная со свободного конца.

Сечение $z = 4a$, $M_{\kappa} = 0$.

Сечение $z = 2a$, $M_{\kappa} = 2ma$.

Сечение $z = a$, $M_{\kappa}^{\text{пр}} = 2ma$.

$M_{\kappa}^{\text{лев}} = 2ma - 5ma = -3ma$.

Сечение $z = 0$, $M_{\kappa} = -3ma$.

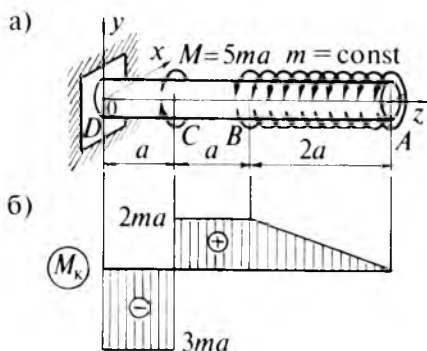


Рис. 8.4

На участке AB крутящий момент изменяется по линейному закону от 0 в сечении A до $2ma$ в сечении B . На участках BC и CD крутящий момент имеет постоянное значение, равное соответственно $2ma$ и $-3ma$. Эпюра крутящих моментов приведена на рис. 8.4, б.

8.2. Напряжения при кручении стержня с круглым поперечным сечением

Рассмотрим стержень круглого поперечного сечения, зашеченный левым концом и нагруженный на правом конце парой сил с моментом M (рис. 8.5). При этом крутящий момент по длине

стержня не изменяется ($M_k = M = \text{const}$). На боковой поверхности стержня рассмотрим образующую KE , которая после деформации стержня превратится в винтовую линию, заменяемую по малости деформации прямой KE_1 . В результате кручения стержня сечение 1—1, находящееся на расстоянии z от заделки, повернется на угол φ , а соседнее с ним сечение 2—2 — на угол $\varphi + d\varphi$. Следовательно, сечение 2—2 по отношению к сечению 1—1 повернется на угол $d\varphi$. Угол φ называется *углом закручивания*. Производная от φ по z называется *относительным углом закручивания* и обозначается через φ' :

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{dz}. \quad (8.3)$$

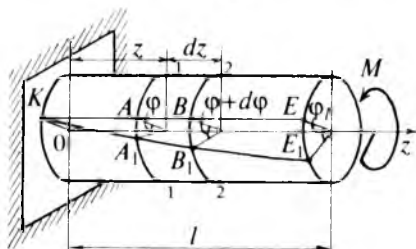


Рис. 8.5

Экспериментальные и теоретические исследования кручения стержней круглого сечения позволяют принять следующие гипотезы.

1. *Поперечные сечения, плоские до деформации стержня, остаются плоскими и после деформации.*
2. *Радиусы, проведенные мысленно в любом поперечном сечении, в процессе кручения не искривляются.*

Из этих гипотез следует, что произвольная точка C (рис. 8.6) в поперечном сечении смещается в положение C_1 по дуге CC_1 радиуса r на величину $s = r\varphi$, которую вследствие малости можно заменить хордой CC_1 . Тогда из прямоугольного треугольника CC_1D найдем перемещения u и v точки C по направлениям осей Ox и Oy :

$$\left. \begin{aligned} u &= -s \sin \theta = -r\varphi(z) \sin \theta = -y\varphi(z); \\ v &= s \cos \theta = r\varphi(z) \cos \theta = x\varphi(z). \end{aligned} \right\} \quad (8.4)$$

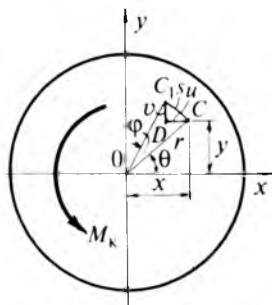


Рис. 8.6

Здесь r и θ — полярные координаты точки C .

Перемещения стержня в осевом направлении можно принять равными нулю:

$$w = 0. \quad (8.5)$$

Подставляя значения перемещений из (8.4) и (8.5) в формулы Коши (5.8), определим относительные линейные и угловые деформации:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = 0; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\varphi(z) + \varphi(z) = 0; \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = -y\varphi'; \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = x\varphi'. \end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

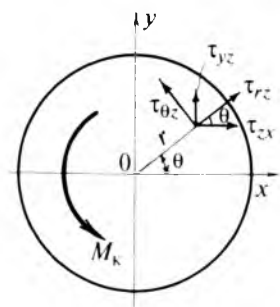


Рис. 8.7

Подставляя деформации в формулы закона Гука (6.12), найдем напряжения

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0; \\ \tau_{xz} &= G\gamma_{xz} = -G\varphi'y; \\ \tau_{yz} &= G\gamma_{yz} = G\varphi'x. \end{aligned} \right\} \quad (8.7)$$

Из условия статической эквивалентности крутящий момент M_k в сечении должен равняться сумме моментов элементарных сил $\tau_{xz} dF$ и $\tau_{yz} dF$ (рис. 8.7):

$$\begin{aligned} M_k &= \iint_F (\tau_{yz}x - \tau_{xz}y) dF = G\varphi' \iint_F (x^2 + y^2) dF = \\ &= G\varphi' \iint_F r^2 dF = G\varphi' J_p, \end{aligned} \quad (8.8)$$

где

$$J_p = \iint_F r^2 dF = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32} \quad (8.9)$$

полярный момент инерции круглого сечения.

Из формулы (8.8) выразим относительный угол закручивания φ' через крутящий момент M_k :

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_k}{GJ_p}. \quad (8.10)$$

Произведение GJ_p называется *жесткостью стержня круглого сечения при кручении*.

Подставляя (8.10) в (8.7), получим

$$\tau_{xz} = -\frac{M_k}{J_p} y; \quad \tau_{yz} = \frac{M_k}{J_p} x. \quad (8.11)$$

Если напряжения, определяемые формулами (8.7) и (8.11), подставить в уравнения равновесия Навье (4.10), то легко убедиться, что при $M_k = \text{const}$ они тождественно удовлетворяются.

Следовательно, полученное решение задачи кручения стержня круглого сечения удовлетворяет всем основным уравнениям теории упругости.

Полученные результаты более удобно представить в цилиндрических координатах. Связь между декартовыми и цилиндрическими координатами определяется следующими соотношениями:

$$x = r \cos \theta; \quad y = r \sin \theta; \quad z = z; \quad r^2 = x^2 + y^2. \quad (8.12)$$

Найдем касательные напряжения τ_{rz} и $\tau_{\theta z}$, действующие по радиальному и окружному направлениям (рис. 8.7). Эти напряжения можно найти по значениям напряжений τ_{xz} и τ_{yz} , составляя их проекции их на направления r и θ :

$$\tau_{rz} = \tau_{xz} \cos \theta + \tau_{yz} \sin \theta; \quad \tau_{\theta z} = -\tau_{xz} \sin \theta + \tau_{yz} \cos \theta.$$

Подставляя сюда значения τ_{xz} и τ_{yz} из (8.11) и учитывая (8.12), получим

$$\tau_{rz} = \frac{M_k}{J_p} \left(-\frac{yx}{r} + \frac{xy}{r} \right) = 0; \quad \tau_{\theta z} = \frac{M_k}{J_p} \left(\frac{y^2}{r} + \frac{x^2}{r} \right) = \frac{M_k}{J_p} r. \quad (8.13)$$

Таким образом, касательное напряжение τ_{rz} в радиальном направлении равно нулю, а полное касательное напряжение $\tau_{\theta z}$ направлено в каждой точке поперечного сечения стержня перпендикулярно к радиусу. Равно нулю также касательное напряжение $\tau_{r\theta}$, так как поверхность стержня свободна от касательных нагрузок (рис. 8.8).

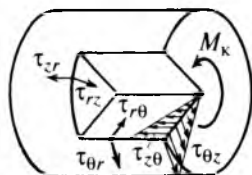


Рис. 8.8

Опуская в последнем выражении индексы θ и z , получим формулу для определения касательных напряжений при кручении стержня круглого сечения в виде

$$\tau = \frac{M_k}{J_p} r. \quad (8.14)$$

Из этой формулы видно, что касательные напряжения в поперечном сечении изменяются в радиальном направлении по линейному закону. Наибольшее значение они принимают на внешнем контуре сечения при $r = R$ (рис. 8.9):

$$\tau_{\text{нб}} = \frac{M_k}{J_p} R = \frac{M_k}{W_p}, \quad (8.15)$$

где W_p — полярный момент сопротивления, определяемый по формуле

$$W_p = \frac{J_p}{R} = \frac{\pi R^3}{2} = \frac{\pi D^3}{16}. \quad (8.16)$$

Формулы (8.14) и (8.15) справедливы также для трубчатого сечения (рис. 8.10). При этом полярный момент инерции и полярный момент сопротивления будут равны

$$\left. \begin{aligned} J_p &= \frac{\pi R_2^4}{2} - \frac{\pi R_1^4}{2} = \frac{\pi R_2^4}{2} (1 - k^4) = \frac{\pi D_2^4}{32} (1 - k^4); \\ W_p &= \frac{J_p}{R_2} = \frac{\pi R_2^3}{2} (1 - k^4) = \frac{\pi D_2^3}{16} (1 - k^4); \quad k = \frac{R_1}{R_2}. \end{aligned} \right\} \quad (8.17)$$

Эпюра касательных напряжений для трубчатого сечения изображена на рис. 8.10.

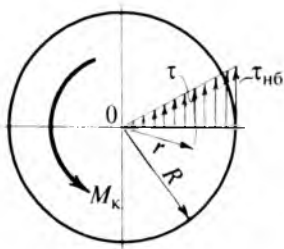


Рис. 8.9

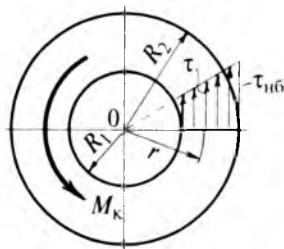


Рис. 8.10

8.3. Определение перемещений и углов закручивания стержней круглого сечения

Интегрируя уравнение (8.10) в пределах от 0 до z , получим выражение для углов закручивания:

$$\varphi(z) = \varphi_0 + \int_0^z \frac{M_{\kappa}}{GJ_p} dz, \quad (8.18)$$

где $\varphi_0 = \varphi(0)$ — угол закручивания начального сечения. Если это сечение закреплено, то $\varphi_0 = 0$. В частном случае, когда $M_{\kappa} = \text{const}$, $GJ_p = \text{const}$ и $\varphi_0 = 0$, получим

$$\varphi(z) = \frac{M_{\kappa} z}{GJ_p}; \quad \varphi(l) = \frac{M_{\kappa} l}{GJ_p}. \quad (8.19)$$

Эпюры M_{κ} и $\varphi(z)$ для этого простого случая изображены на рис. 8.11.

При наличии распределенной скручивающей нагрузки $m(z)$ законы изменения углов закручивания стержня являются более сложными. Выведем уравнение, связывающее эти две величины между собой. Продифференцировав выражение (8.10) по z с учетом (8.2), получим

$$\frac{d^2 \varphi}{dz^2} = \frac{1}{GJ_p} \cdot \frac{dM_{\kappa}}{dz} = -\frac{1}{GJ_p} m(z). \quad (8.20)$$

Полученное уравнение можно назвать дифференциальным уравнением кручения стержня круглого сечения:

$$GJ_p \varphi''(z) = -m(z). \quad (8.21)$$

Из этого уравнения следует, например, что на участках стержня с равномерно распределенной нагрузкой $m = \text{const}$ углы закручивания изменяются по закону квадратной параболы.

После того как найдено выражение $\varphi(z)$, по формулам (8.4) могут быть определены перемещения:

$$u = -\frac{M_{\kappa}}{GJ_p} yz = -\varphi' yz; \quad v = \frac{M_{\kappa}}{GJ_p} xz = \varphi' xz. \quad (8.22)$$

Пример 8.2. Построим эпюры M_{κ} и φ для стержня ступенчато-постоянного сечения, изображенного на рис. 8.12. Жесткость участка BC обозначим через GJ_p . На этом участке действует равномерно

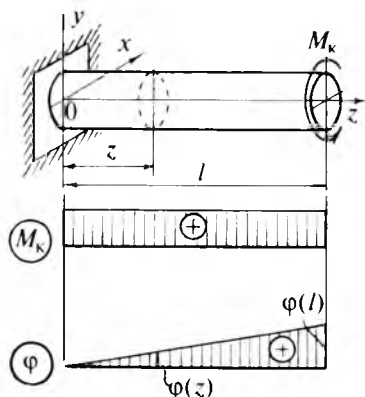


Рис. 8.11

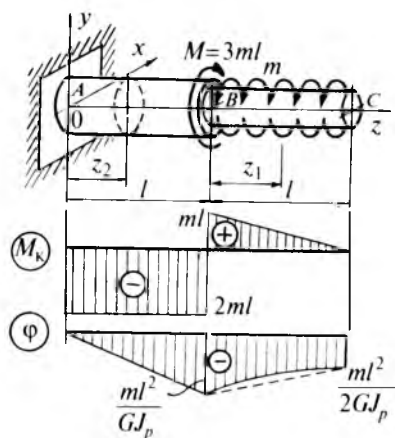


Рис. 8.12

распределенная скручивающая нагрузка с интенсивностью m . Пусть жесткость участка AB равна $2GJ_p$ и в сечении B действует сосредоточенный момент $M = 3ml$. При построении эпюры M_k удобно начать вычисления со свободного конца, а при построении эпюры φ — с закрепленного сечения.

Вычислим сначала значения крутящих моментов.

На участке BC ($0 \leq z_1 \leq l$) $M_k = m(l - z_1)$, $M_k(l) = 0$,
 $M_k(0) = ml$.

На участке AB ($0 \leq z_2 \leq l$) $M_k = ml - 3ml = -2ml = \text{const.}$

Для угла закручивания согласно (8.18) и (8.19) имеем:
 на участке AB

$$\varphi(z_2) = \frac{M_k z_2}{2GJ_p} = -\frac{ml z_2}{GJ_p}; \quad \varphi(0) = 0; \quad \varphi(l) = \frac{ml^2}{GJ_p};$$

на участке BC

$$\begin{aligned} \varphi(z_1) &= \varphi(0) + \int_0^{z_1} \frac{M_k}{GJ_p} dz = -\frac{ml^2}{GJ_p} + \int_0^{z_1} \frac{ml - mz}{GJ_p} dz = \\ &= -\frac{ml^2}{GJ_p} + \frac{ml z_1}{GJ_p} - \frac{m z_1^2}{2GJ_p}; \quad \varphi(0) = -\frac{ml^2}{GJ_p}; \quad \varphi(l) = -\frac{ml^2}{2GJ_p}. \end{aligned}$$

На рис. 8.12 изображены эпюры M_k и φ .

8.4. Расчет стержней круглого сечения на прочность и жесткость

Условие прочности при кручении стержней круглого сечения имеет вид

$$\tau_{\text{нб}} = \frac{M_{\text{к}}^{\text{нб}}}{W_p} \leq [\tau], \quad (8.23)$$

где $M_{\text{к}}^{\text{нб}}$ — наибольший крутящий момент в стержне; W_p — полярный момент сопротивления сечения; $[\tau]$ — допускаемое касательное напряжение.

Из условия прочности (8.23) получим формулу подбора сечения

$$W_p \geq \frac{M_{\text{к}}^{\text{нб}}}{[\tau]}.$$

Отсюда находим требуемые размеры поперечного сечения скручиваемого стержня.

Для сплошного круглого сечения согласно (8.16)

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16}; \quad D \geq \sqrt[3]{\frac{16 M_{\text{к}}^{\text{нб}}}{\pi [\tau]}}. \quad (8.24)$$

Для трубчатого сечения согласно (8.17)

$$W_p = \frac{\pi D_2^3}{16} (1 - k^4); \quad D_2 \geq \sqrt[3]{\frac{16 M_{\text{к}}^{\text{нб}}}{\pi (1 - k^4) [\tau]}}. \quad (8.25)$$

Стержни, работающие на кручение, должны обладать достаточной жесткостью. Большие углы закручивания особенно опасны при передаче переменного во времени момента, так как при этом могут возникнуть опасные для прочности крутильные колебания.

Условие жесткости стержня при кручении имеет вид

$$\varphi'_{\text{нб}} = \frac{M_{\text{к}}^{\text{нб}}}{GJ_p} \leq [\varphi'], \quad (8.26)$$

где $[\varphi']$ — допускаемый относительный угол закручивания стержня, обычно принимаемый в пределах $0,15 \div 2$ град/м. Из условия жесткости (8.26) имеем

$$J_p \geq \frac{M_{\text{к}}^{\text{нб}}}{G[\varphi']}.$$

Отсюда находим требуемые размеры поперечного сечения.

Для сплошного круглого сечения согласно (8.9)

$$J_p = \frac{\pi D^4}{32}; \quad D \geq \sqrt[4]{\frac{32 M_{\kappa}^{\text{нб}}}{G \pi [\varphi']}}. \quad (8.27)$$

Для трубчатого сечения согласно (8.17)

$$J_p = \frac{\pi D_2^4}{32} (1 - k^4); \quad D_2 \geq \sqrt[4]{\frac{32 M_{\kappa}^{\text{нб}}}{G \pi (1 - k^4) [\varphi']}}. \quad (8.28)$$

При расчете скручиваемого стержня на прочность и жесткость из двух требуемых значений диаметра надо принять большее.

Пример 8.3. Стержень круглого сечения скручивается постоянным по длине моментом $M_{\kappa} = 3$ кНм. Дано: $[\tau] = 45$ МПа; $[\varphi'] = 0,25$ град/м; $G = 0,8 \cdot 10^5$ МПа. Требуется определить диаметр стержня.

Из условия прочности (8.24) имеем

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 3 \cdot 10^2}{\pi \cdot 45 \cdot 10^{-1}}} = 6,94 \text{ см.}$$

Учитывая, что $0,25$ град/м $= 0,25 \cdot \pi / 180$ рад/м $= 0,437 \times 10^{-4}$ рад/см, из условия жесткости (8.27) находим

$$D \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 3 \cdot 10^2}{0,8 \cdot \pi \cdot 10^4 \cdot 0,437 \cdot 10^{-4}}} = 9,67 \text{ см.}$$

Из двух найденных значений диаметра принимаем $D = 97$ мм.

8.5. Главные напряжения при кручении стержня круглого сечения

Выше было установлено, что при кручении стержня круглого сечения в поперечных сечениях возникают касательные напряжения $\tau_{\theta z} = \tau$, перпендикулярные к радиусу. Согласно закону парности в радиальных сечениях, проходящих через продольную ось стержня, действуют также касательные напряжения $\tau_{z\theta} = \tau_{\theta z}$ (см. рис. 8.8).

Выделим внутри стержня бесконечно малый элемент с размерами dr , ds , dz (рис. 8.13, а). По боковым граням этого элемента действуют только касательные напряжения τ , определяемые по формуле (8.14). Следовательно, элемент находится в условиях чистого сдвига. В § 4.5 было показано, что главные напряжения при чистом сдвиге равны по величине касательным напряжениям и имеют противоположные знаки ($\sigma_1 = \tau$, $\sigma_2 = -\tau$), а главные пло-

щадки наклонены под углами $\pm 45^\circ$ к площадкам чистого сдвига (рис. 8.13, б).

Экспериментальные исследования свидетельствуют о правильности полученных результатов. Так, например, при скручивании деревянного стержня образуются трещины от действия касательных напряжений в продольные сечения вследствие малой прочности древесины при скалывании вдоль волокон (рис. 8.14, а).

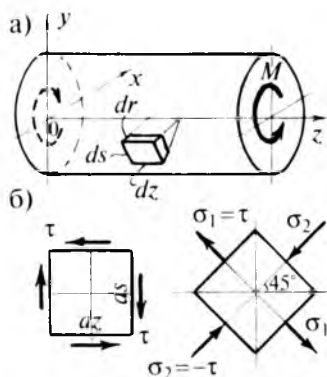


Рис. 8.13

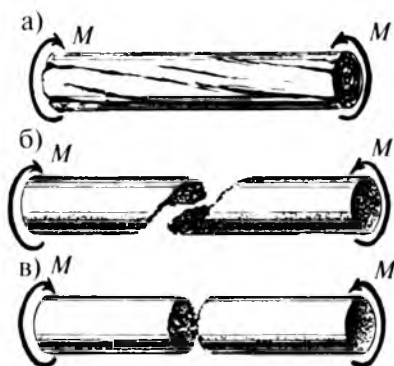


Рис. 8.14

Стержень из хрупкого материала, например чугуна, разрушается от действия главных растягивающих напряжений по винтовой поверхности, наклоненной к оси стержня под углом 45° (рис. 8.14, б). Стержень, изготовленный из пластичной стали, разрушается в виде среза от действия касательных напряжений в поперечном сечении (рис. 8.14, в), так как растягивающие напряжения для такого стержня менее опасны, чем касательные.

8.6. Статически неопределимые задачи при кручении

Задачи кручения стержней являются статически неопределимыми, если крутящие моменты, возникающие в поперечных сечениях стержня, не могут быть определены с помощью одних только уравнений равновесия. Для решения таких задач необходимо также рассматривать деформированное состояние скручиваемого стержня.

В качестве примера рассмотрим закрепленный на концах стержень круглого сечения, нагруженный скручивающим моментом M , приложенным на расстоянии a от левого конца (рис. 8.15, а).

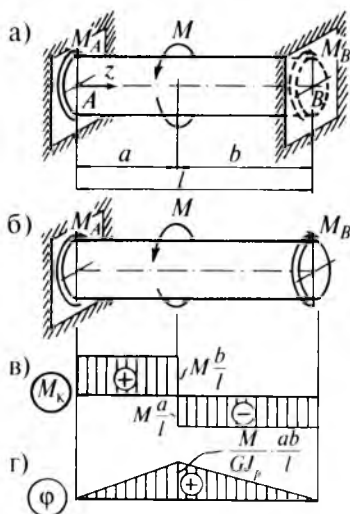


Рис. 8.15

Для определения двух опорных моментов M_A и M_B имеем лишь одно уравнение равновесия

$$\sum M_z = M - M_A - M_B = 0. \quad (8.29)$$

Для составления уравнения деформаций отбросим мысленно правую опору (рис. 8.15, б). Найдем угол закручивания ϕ_B сечения B образованного таким образом статически определимого стержня и приравняем его к нулю:

$$\phi_B = -\frac{M_B l}{GJ_p} + \frac{Ma}{GJ_p} = 0.$$

Из этого равенства получим

$$M_B = M \frac{a}{l}.$$

Из уравнения равновесия (8.29) найдем

$$M_A = M - M_B = M \frac{b}{l}.$$

При известных величинах M_A и M_B можно определить крутящий момент M_k и угол закручивания ϕ в произвольном сечении стержня.

Соответствующие эпюры M_k и ϕ приведены на рис. 8.15, в, г.

8.7. Кручение стержней с некруглым поперечным сечением. Задача Сен-Венана

Как показывают эксперименты, при кручении стержней некруглого поперечного сечения гипотезы, принятые в § 8.2, оказываются несправедливыми. Основным отличием является то, что поперечные сечения в таких стержнях при кручении не остаются плоскими, а искривляются (рис. 8.16). Это явление называется *депланацией*. При этом в зависимости от условий закрепления стержня депланация по длине стержня может быть различна. Так, например, если один торец стержня закреплен (рис. 8.16), то депланация в заделке отсутствует, а на свободном торце она наибольшая. При этом, очевидно, некоторые продольные волокна стержня удлиняются, а другие — укорачиваются. Это возможно лишь за счет появления нормальных напряжений σ_z , которые на первый взгляд должны отсутствовать, поскольку внутренние усилия (N , M_x , M_y), являющиеся равнодействующими этих напряжений, при кручении равны нулю.

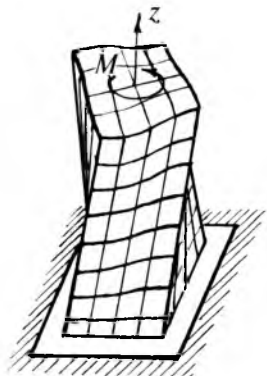


Рис. 8.16

Кручение стержня, при котором депланация сечения по длине стержня изменяется, называется *стесненным кручением*.

В этом параграфе рассмотрим такое кручение, при котором депланация по длине стержня постоянна и ее можно характеризовать величиной перемещения $w = w(x, y)$ в осевом направлении. Такое кручение стержня называется *свободным кручением*. Свободное кручение имеет место, например, когда стержень постоянного по всей длине сечения нагружен по торцам двумя скручивающими моментами (рис. 8.17).

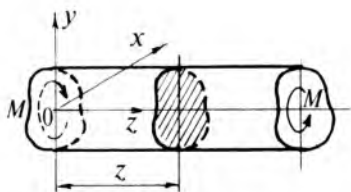


Рис. 8.17

Решение задачи свободного кручения стержней некруглого поперечного сечения получено Сен-Венаном. В основу решения положены следующие допущения.

1. Перемещения u и v в плоскости Oxy описываются теми же соотношениями, что и при кручении стержней круглого сечения (формулы (8.22)):

$$u = -\phi' yz; \quad v = \phi' xz. \quad (8.30)$$

2. Величина деформации пропорциональна относительному углу закручивания ϕ' , то есть

$$w = \phi' \psi(x, y). \quad (8.31)$$

Здесь следует отметить, что если в рассматриваемой задаче (см. рис. 8.17) считать, что сечение $z = 0$ не поворачивается, то углы закручивания ϕ изменяются по длине стержня по линейному закону (рис. 8.11) и $\phi' = \frac{d\phi}{dz} = \text{const.}$

Из соотношений Коши (5.8) с учетом (8.30) и (8.31) найдем деформации:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \gamma_{xy} &= 0; \\ \gamma_{xz} &= \phi' \left(-y + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right); \quad \gamma_{yz} = \phi' \left(x + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right). \end{aligned} \right\} \quad (8.32)$$

С помощью закона Гука (6.12) получим

$$\tau_{xz} = G \gamma_{xz} = G \phi' \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right); \quad \tau_{yz} = G \gamma_{yz} = G \phi' \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right), \quad (8.33)$$

а остальные напряжения равны нулю.

Из этих соотношений видно, что в стержне возникает напряженное состояние чистого сдвига. Подставив выражения для τ_{xz} и τ_{yz} в формулу (8.8), вычислим величину крутящего момента:

$$M_k = \iint_F (\tau_{yz} x - \tau_{xz} y) dF = G \phi' \iint_F \left(x^2 + y^2 + \frac{\partial \psi}{\partial y} x - \frac{\partial \psi}{\partial x} y \right) dF. \quad (8.34)$$

Входящий в это равенство интеграл

$$J_k = \iint_F \left(x^2 + y^2 + \frac{\partial \psi}{\partial y} x - \frac{\partial \psi}{\partial x} y \right) dF \quad (8.35)$$

назовем *моментом инерции сечения при кручении*. В случае круглого сечения, когда деформация отсутствует ($\psi = 0$), эта величина совпадает с полярным моментом инерции

$$J_p = \iint_F (x^2 + y^2) dF.$$

Подставляя (8.35) в (8.34), получим

$$M_k = GJ_k \varphi'. \quad (8.36)$$

Эта формула совпадает по форме с (8.8). Отличными в этих формулах являются только геометрические характеристики J_p и J_k .

Произведение GJ_k называется *жесткостью стержня при свободном кручении*.

Таким образом, для решения задачи о свободном кручении стержней некруглого поперечного сечения необходимо найти функцию $\psi(x, y)$. Тогда из (8.36) с учетом (8.35) можно определить относительный угол закручивания φ' , а с помощью (8.33) и (8.32) — вычислить напряжения и деформации.

Подставив выражения для напряжений τ_{xz} и τ_{yz} из (8.33) в третье уравнение равновесия Навье (4.10) при отсутствии объемных сил, получим

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = G\varphi' \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (8.37)$$

Отсюда следует, что функция $\psi(x, y)$ должна удовлетворять уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0. \quad (8.38)$$

Рассмотрим теперь граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n &= p_{xv}, \\ \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n &= p_{yv}, \\ \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n &= p_{zv}. \end{aligned} \right\} \quad (8.39)$$

На боковой поверхности стержня, которая свободна от внешних нагрузок и имеет нормаль v , перпендикулярную к оси Oz , имеем

$$p_{xv} = p_{yv} = p_{zv} = 0; \quad n = \cos(v, z) = 0.$$

С учетом этих равенств третье граничное условие (8.39), дает

$$\tau_{zx} l + \tau_{zy} m = 0. \quad (8.40)$$

Преобразуем это условие, рассмотрев бесконечно малый элемент ABC у границы поперечного сечения (рис. 8.18). Направление касательной t примем так, как показано на этом рисунке.

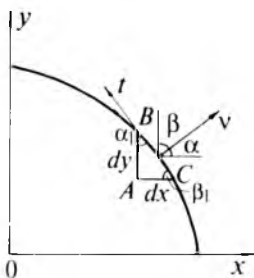


Рис. 8.18

Тогда

$$\left. \begin{aligned} l &= \cos \alpha = \cos \alpha_1 = \frac{dy}{dt}; \\ m &= \cos \beta = -\cos \beta_1 = -\frac{dx}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (8.41)$$

Подставляя эти значения в (8.40), получим

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right) \frac{dy}{dt} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right) \frac{dx}{dt} = 0. \quad (8.42)$$

Таким образом, задача о кручении стержня с произвольным поперечным сечением сводится к решению дифференциального уравнения (8.38) с граничным условием (8.42).

Граничное условие (8.42) имеет сложный вид и не очень удобно для решения задач. Поэтому рассмотрим другой подход, приводящий к более простому граничному условию.

Уравнению (8.37) можно удовлетворить, приняв

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad (8.43)$$

где $\Phi = \Phi(x, y)$ называется *функцией напряжений*.

Из равенств (8.33) и (8.43) получим

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = G\varphi' \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right); \quad -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = G\varphi' \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right).$$

Исключим функцию ψ . Для этого продифференцируем первое равенство по y , второе — по x и вычтем из первого равенства второе:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = G\varphi' \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - 1 - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - 1 \right) = -2G\varphi'.$$

Таким образом, функция Φ удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -2G\varphi'. \quad (8.44)$$

Граничное условие (8.40) с учетом (8.41) и (8.43) принимает вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{d\Phi}{dt} = 0.$$

Отсюда следует, что на границе

$$\Phi = \text{const.} \quad (8.45)$$

В случае односвязных, то есть сплошных, сечений эту постоянную можно принять равной нулю. Тогда получим, что на границе

$$\Phi = 0. \quad (8.46)$$

Таким образом, задача определения напряжений в скручиваемом стержне некруглого поперечного сечения сводится к отысканию функции Φ , которая удовлетворяет уравнению Пуассона (8.44) и граничному условию (8.46).

Выразим крутящий момент M_k через функцию напряжений Φ . Подставив (8.43) в (8.34), получим

$$M_k = - \iint_F \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} x + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y \right) dF.$$

Дважды интегрируя это выражение по частям и используя граничное условие (8.46), можно получить следующее равенство:

$$M_k = 2 \iint_F \Phi dF. \quad (8.47)$$

8.8. Примеры решения задач кручения стержней с некруглым поперечным сечением

Кручение стержня эллиптического поперечного сечения. Пусть поперечное сечение стержня ограничено эллипсом с полуосями a и b (рис. 8.19). Уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Если функцию напряжений принять в виде

$$\Phi = A \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right), \quad (8.48)$$

то граничное условие (8.46) будет удовлетворяться.

Подставляя (8.48) в уравнение (8.44), получим

$$A \left(\frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2} \right) = -2G\varphi'.$$

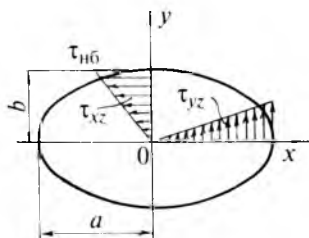


Рис. 8.19

Отсюда найдем

$$A = -\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} G\varphi'. \quad (8.49)$$

Подставляя (8.49) в (8.48), получим

$$\Phi = -\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} G\varphi' \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right). \quad (8.50)$$

Для того чтобы относительный угол закручивания φ' выразить через заданный крутящий момент M_k , воспользуемся формулой (8.47). Подставив в эту формулу значение Φ из (8.50), получим

$$M_k = -\frac{2a^2 b^2}{a^2 + b^2} G\varphi' \left(\frac{1}{a^2} \iint_F x^2 dF + \frac{1}{b^2} \iint_F y^2 dF - \iint_F dF \right). \quad (8.51)$$

Здесь первый и второй интегралы представляют собой осевые моменты инерции эллипса относительно осей Oy и Ox , а третий — площадь эллипса (см. § 2.6):

$$J_y = \iint_F x^2 dF = \frac{\pi a^3 b}{4}; \quad J_x = \iint_F y^2 dF = \frac{\pi a b^3}{4}; \quad F = \iint_F dF = \pi a b.$$

Подставляя эти выражения в (8.51), получим

$$M_k = -\frac{2a^2 b^2}{a^2 + b^2} G\varphi' \left(\frac{\pi a b}{4} + \frac{\pi a b}{4} - \pi a b \right) = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2} G\varphi'. \quad (8.52)$$

С другой стороны, согласно (8.36)

$$M_k = GJ_k \varphi'. \quad (8.53)$$

Поэтому для эллиптического сечения

$$J_k = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}. \quad (8.54)$$

С учетом (8.52) для функции напряжений Φ имеем следующее окончательное выражение:

$$\Phi = -\frac{M_k}{\pi a b} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right).$$

Выражения для напряжений принимают вид

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{2M_k}{\pi a b^3} y; \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{2M_k}{\pi a^3 b} x.$$

Отсюда видно, что вдоль горизонтальной оси ($y=0$) напряжения $\tau_{xz}=0$, а τ_{yz} изменяются по линейному закону, и аналогично, вдоль вертикальной оси ($x=0$) $\tau_{yz}=0$, а τ_{xz} изменяются по линейному закону (см. рис. 8.19).

Наибольшие напряжения действуют на концах малой оси эллипса:

$$\tau_{\text{нб}} = |\tau_{xz}(\pm b)| = \frac{2M_k}{\pi ab^2} = \frac{M_k}{W_k}, \quad (8.55)$$

где

$$W_k = \frac{\pi ab^2}{2} \quad (8.56)$$

момент сопротивления эллиптического стержня при свободном кручении.

При $a=b=R$ формулы (8.54), (8.55), (8.56) совпадают с формулами (8.9), (8.15), (8.16) для круглого сечения.

Кручение стержня прямоугольного поперечного сечения. Рассмотрим сначала прямоугольное сечение в виде узкой полосы: $b=\delta \ll h$ (рис. 8.20). В этом случае можно пренебречь влиянием граничных условий на коротких сторонах ($y=\pm h/2$) на распределение напряжений в поперечном сечении.

Функцию напряжений Φ примем в виде

$$\Phi = A \left(x + \frac{\delta}{2} \right) \left(x - \frac{\delta}{2} \right) = A \left(x^2 - \frac{\delta^2}{4} \right). \quad (8.57)$$

Эта функция на длинных сторонах полосы ($x=\pm\delta/2$) равна нулю. На коротких сторонах ($y=\pm h/2$) она не равна нулю, но как было отмечено выше, это несущественно.

Подставляя (8.57) в (8.44), найдем

$$A = -G\phi'.$$

Тогда

$$\Phi = -G\phi' \left(x^2 - \frac{\delta^2}{4} \right).$$

По формулам (8.43) найдем напряжения

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0; \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2G\phi'x. \quad (8.58)$$

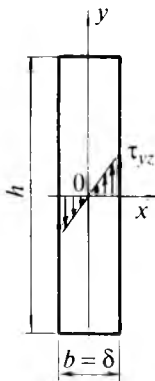


Рис. 8.20

Для того чтобы относительный угол закручивания φ' выразить через заданный момент M_{κ} , воспользуемся формулой (8.47):

$$\begin{aligned} M_{\kappa} &= -2G\varphi' \iint_F \left(x^2 - \frac{\delta^2}{4} \right) dx dy = -2G\varphi' \int_{-h/2}^{h/2} dy \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \left(x^2 - \frac{\delta^2}{4} \right) dx = \\ &= -2G\varphi' h \left(\frac{x^3}{3} - \frac{\delta^2 x}{4} \right) \bigg|_{-\delta/2}^{\delta/2} = \frac{1}{3} G\varphi' h \delta^3. \end{aligned}$$

Из сравнения этого выражения с (8.53) следует, что момент инерции при кручении стержня с поперечным сечением в виде узкого прямоугольника равен

$$J_{\kappa} = \frac{1}{3} h \delta^3. \quad (8.59)$$

С учетом этого формулу для относительного угла закручивания можно представить в виде

$$\varphi' = \frac{M_{\kappa}}{GJ_{\kappa}} = \frac{3M_{\kappa}}{Gh\delta^3}. \quad (8.60)$$

Подставляя это значение φ' в (8.58), получим

$$\tau_{yz} = \frac{2M_{\kappa}}{J_{\kappa}} x = \frac{6M_{\kappa}}{h\delta^3} x.$$

Наибольшие касательные напряжения возникают на длинных сторонах прямоугольника ($x = \pm \delta/2$):

$$\tau_{\text{нб}} = \frac{3M_{\kappa}}{h\delta^2} = \frac{M_{\kappa}}{W_{\kappa}}, \quad (8.61)$$

где

$$W_{\kappa} = \frac{J_{\kappa}}{\delta} = \frac{1}{3} h \delta^2 \quad (8.62)$$

момент сопротивления для узкого прямоугольника при свободном кручении.

Перейдем к рассмотрению кручения стержня прямоугольного поперечного сечения с произвольным отношением сторон h/b (рис. 8.21). Решение этой задачи получается с помощью рядов. Ограничимся рассмотрением конечных результатов. Анализ показывает, что в угловых точках сечения напряжения равны нулю. Наибольшие по абсолютной величине напряжения, возникающие

в серединах длинных сторон прямоугольника (в точках A и B), могут быть найдены по формуле

$$\tau_{yz}^{нб} = \frac{M_K}{W_K},$$

где

$$W_K = \alpha h b^2.$$

Напряжения в серединах коротких сторон (в точках C и D) равны

$$\tau_{xz}^{нб} = \eta \tau_{yz}^{нб}.$$

В отличие от случая узкого прямоугольника здесь изменение касательных напряжений по сечению имеет нелинейный характер.

Относительный угол закручивания стержня может быть найден по формуле (8.36), в которой следует положить

$$J_K = \beta h b^3.$$

Эпюры касательных напряжений по главным осям сечения и по диагонали изображены на рис. 8.21.

Коэффициенты α , β , η зависят только от отношения сторон h/b прямоугольника. Значения этих коэффициентов для различных отношений h/b приведены в табл. 8.1.

Для очень узких прямоугольников ($h/b > 10$) можно принять

$$\alpha = \beta = \frac{1}{3}, \quad \eta = 0,742.$$

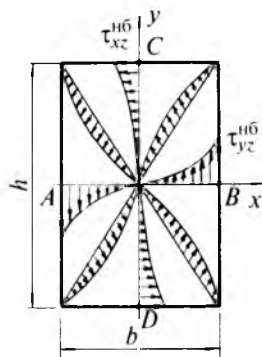


Рис. 8.21

Таблица 8.1

h/b	1	2	3	4	6	8	10	∞
α	0,208	0,246	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
β	0,140	0,229	0,263	0,281	0,299	0,307	0,312	0,333
η	1,000	0,795	0,753	0,745	0,743	0,742	0,742	0,742

8.9. Свободное кручение тонкостенных стержней

Стержень называется тонкостенным, если длина контура его поперечного сечения s намного больше толщины сечения δ (рис. 8.22). В свою очередь, понятие «стержень» устанавливает, что

его длина l намного превосходит размеры поперечного сечения. Таким образом, для тонкостенных стержней справедливы следующие неравенства:

$$l \gg s \gg \delta.$$

Различают два типа тонкостенных стержней — стержни *замкнутого* (рис. 8.23, а) и *открытого* (рис. 8.23, б) *профиля*. Эти два типа стержней обладают существенно разной жесткостью при кручении, вследствие чего углы закручивания их при одинаковых крутящих моментах также существенно различаются. Существенно различны также характер распределения и величины касательных напряжений в их поперечных сечениях. Ниже рассматривается *свободное* кручение тонкостенных стержней, при котором деформация сечений по длине не изменяется и в поперечных сечениях возникают только касательные напряжения.

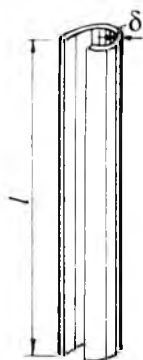


Рис. 8.22

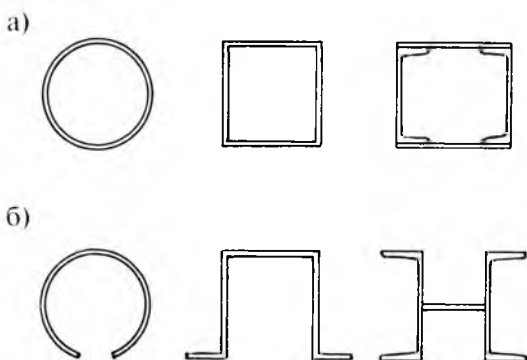


Рис. 8.23

Стержни замкнутого профиля. Рассмотрим основные закономерности свободного кручения таких стержней на примере стержня, имеющего сечение в виде тонкого кольца (рис. 8.24). Если толщина кольца δ намного меньше его среднего радиуса $R_0 = (R_1 + R_2)/2$, то можно приближенно считать, что касательные напряжения постоянны по толщине стенки. Их величина может быть определена по формуле (8.14), при этом формулу для полярного момента инерции можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} J_p &= \frac{\pi}{2} (R_2^4 - R_1^4) = \frac{\pi}{2} (R_2^2 - R_1^2)(R_2^2 + R_1^2) = \\ &= \frac{\pi}{2} (R_2 - R_1)(R_2 + R_1)(R_2^2 + R_1^2). \end{aligned}$$

Полагая $R_2 - R_1 = \delta$ и считая приближенно $R_2 \approx R_1 \approx R_0$, получим формулы для полярного момента инерции и полярного момента сопротивления тонкостенного кольцевого сечения в виде

$$J_p \approx 2\pi R_0^3 \delta; \quad W_p = \frac{J_p}{R_0} \approx 2\pi R_0^2 \delta. \quad (8.63)$$

С учетом этого по формулам (8.15) и (8.10) получим

$$\tau_{(3)} = \frac{M_k}{W_p} = \frac{M_k}{2\pi R_0^2 \delta}; \quad (8.64)$$

$$\varphi'_{(3)} = \frac{M_k}{GJ_p} = \frac{M_k}{2\pi R_0^3 \delta}. \quad (8.65)$$

В этих формулах индекс (3) означает «замкнутое» кольцо.

Результаты, полученные для замкнутого кольцевого сечения, можно обобщить для любого замкнутого тонкостенного профиля (рис. 8.25). В частности, формула для касательных напряжений при этом примет вид

$$\tau = \frac{M_k}{W_k}; \quad W_k = 2\Omega \delta(s), \quad (8.66)$$

где Ω — площадь области, ограниченная средней линией сечения, а $\delta(s)$ — в общем случае переменная толщина стенки сечения. Заметим, что для кругового кольца $\Omega = \pi R_0^2$ и $\delta = \text{const}$, и в этом случае из (8.66) получается формула (8.64). Очевидно, что наибольшие касательные напряжения будут в той зоне замкнутого профиля, где толщина стенки наименьшая.

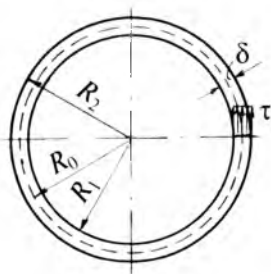


Рис. 8.24

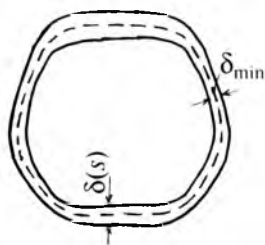


Рис. 8.25

Стержни открытого профиля. Для определения наибольших касательных напряжений и относительных углов закручивания тон-

костенных стержней открытого профиля следует пользоваться формулами (8.61) и (8.60). При этом момент инерции J_k и момент сопротивления W_k , входящие в эти формулы, в зависимости от формы поперечного сечения вычисляются по-разному.

Для тонкого листа, поперечное сечение которого представляет собой узкий прямоугольник, как следует из формул (8.59) и (8.62),

$$J_k = \frac{1}{3} h \delta^3; \quad W_k = \frac{1}{3} h \delta^2. \quad (8.67)$$

Тогда формула для наибольших касательных напряжений в тонком листе может быть записана в виде

$$\tau_{\text{ноб}} = \frac{M_k}{W_k} = \frac{M_k}{J_k} \delta. \quad (8.68)$$

Характер распределения касательных напряжений в поперечном сечении тонкого листа показан на рис. 8.20. Равенство (8.68) может использоваться и для вычисления напряжений в стержнях, состоящих из нескольких листов и прокатных профилей. При этом момент инерции вычисляется по формуле

$$J_k = \sum_n J_{kn}, \quad (8.69)$$

а каждое слагаемое, входящее в эту формулу, также определяется как сумма:

$$J_{kn} = \frac{\eta}{3} \sum h_i \delta_i^3. \quad (8.70)$$

Здесь h_i, δ_i — размеры отдельных элементов сечения; η — коэффициент, зависящий от формы сечения. Для двутавра $\eta = 1,2$, для швеллера — 1,12, для уголка и листа — 1,00.

Увеличение моментов инерции J_{kn} сечений прокатных профилей по сравнению с моментами инерции сечений, состоящих из прямоугольников, обусловлено наличием утолщений в местах стыковки отдельных элементов профиля.

Покажем на примере вычисление момента инерции J_k для швеллера.

$$J_k = \frac{1,12}{3} (h_c \delta_c^3 + 2h_n \delta_n^3),$$

где h_c, δ_c и h_n, δ_n — соответственно длина и толщина стенки и полки швеллера.

Если сечение имеет криволинейное очертание с длиной контура по средней линии, равной s , то J_k и W_k можно вычислить по формулам (8.67) для тонкого прямоугольника, заменив в них h на s . В результате получим

$$J_k = \frac{1}{3} s \delta^3; \quad W_k = \frac{1}{3} s \delta^2. \quad (8.71)$$

Воспользуемся этими формулами для вычисления J_k и W_k сечения в виде кругового кольца с разрезом (рис. 8.26). Учитывая, что длина s средней линии сечения равна $2\pi R_0$, получим

$$J_k = \frac{2}{3} \pi R_0 \delta^3; \quad W_k = \frac{2}{3} \pi R_0 \delta^2.$$

По формулам (8.61) и (8.60) вычислим наибольшие напряжения и относительный угол закручивания:

$$\tau_{(o)} = \frac{3M_k}{2\pi R_0 \delta^2}; \quad \Phi'_{(o)} = \frac{3M_k}{2G\pi R_0 \delta^3}.$$

Здесь индекс (о) означает «открытый» профиль. Сравним полученные значения с соответствующими величинами для замкнутого кольца (8.64) и (8.65), вычислив их отношения:

$$\frac{\tau_{(o)}}{\tau_{(z)}} = 3 \frac{R_0}{\delta}; \quad \frac{\Phi'_{(o)}}{\Phi'_{(z)}} = 3 \left(\frac{R_0}{\delta} \right)^2.$$

Из этих соотношений видно, что при $R_0 \gg \delta$ напряжения в стержне открытого профиля существенно больше, чем в стержнях, имеющих замкнутый профиль. Еще более существенно отличие в углах закручивания. Если, например, $R_0/\delta = 10$, то напряжения в стержне открытого профиля в тридцать раз, а относительный угол закручивания — в триста раз больше, чем в стержне замкнутого профиля.

Эти эффекты связаны с существенно различным характером распределения напряжений в двух рассматриваемых типах сечений (см. рис. 8.24 и 8.26).

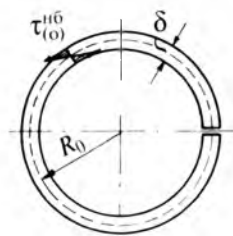


Рис. 8.26

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ГЛАВА 9

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В БАЛКАХ ПРИ ПРЯМОМ ИЗГИБЕ

9.1. Общие положения

Изгиб балки сопровождается искривлением ее оси. При прямом изгибе ось балки превращается в плоскую кривую, расположенную в плоскости действия поперечных нагрузок. При этом точки оси получают поперечные перемещения или прогибы v , а поперечные сечения поворачиваются относительно своих нейтральных осей (рис. 9.1). Углы поворота поперечных сечений принимаются равными углом наклона φ касательной к изогнутой оси балки. Прогибы и углы поворота в балках часто называются линейными и угловыми перемещениями.

Отметим, что при изгибе балки точки ее оси получают также осевые перемещения u . Однако в большинстве случаев они значительно меньше прогибов и ими можно пренебречь. Исключение составляют так называемые гибкие стержни, допускающие значительное искривление оси (рис. 9.2). В реальных конструкциях прогибы балок значительно меньше длины пролета. Отношение наибольшего прогиба (стрелы прогиба) f к длине пролета l устанавливается нормами проектирования строительных конструкций в следующих пределах:

$$\frac{f}{l} = \frac{1}{200} \div \frac{1}{1000}.$$

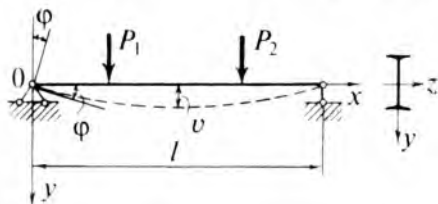


Рис. 9.1

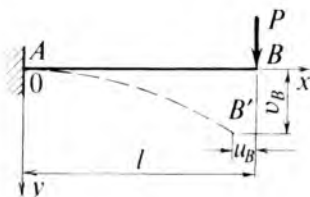


Рис. 9.2

Будем считать прогибы положительными, если поперечные перемещения точек оси происходят в положительном направлении оси Oy (на рис. 9.1 — вниз). Углы поворота считаются положительными, если касательная к изогнутой оси поворачивается от оси Ox к оси Oy , то есть по ходу часовой стрелки. Прогибы балок измеряются в сантиметрах или миллиметрах, а углы поворота — в градусах или радианах.

Прогибы и углы поворота в балках являются переменными величинами, то есть функциями координаты x . Их определение необходимо для расчета балок на жесткость, а также при решении статически неопределимых задач. При этом можно либо определять законы изменения функций $v(x)$ и $\varphi(x)$ по длине балки, либо вычислять значения этих величин в конкретных сечениях. Существуют различные методы определения линейных и угловых перемещений в балках и стержневых системах.

9.2. Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки

В § 7.5 было получено дифференциальное уравнение изогнутой оси балки, связывающее ее прогибы с изгибающими моментами M_z :

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{M_z}{EJ_z}, \quad (9.1)$$

где J_z — момент инерции поперечного сечения балки относительно его нейтральной оси; E — модуль упругости материала балки. Произведение EJ_z называется жесткостью балки при изгибе (изгибной жесткостью). Чаще всего она бывает постоянной или ступенчато-постоянной по длине.

Уравнение (9.1) получено для случая чистого изгиба балки, когда изгибающий момент имеет постоянное значение, а поперечная сила равна нулю. Однако это уравнение используется и в случае поперечного изгиба, что равносильно пренебрежению искривлением поперечных сечений балки за счет сдвигов.

Левая часть уравнения (9.1) представляет собой приближенное выражение для кривизны изогнутой оси балки:

$$\frac{1}{\rho} \approx \frac{d^2 v}{dx^2}, \quad (9.2)$$

где ρ — радиус кривизны изогнутой оси (рис. 9.3).

Выражение (9.2) можно использовать при весьма малой кривизне изогнутой оси, что всегда имеет место в реальных строительных конструкциях. В силу изложенного уравнение (9.1) можно считать приближенным дифференциальным уравнением изогнутой оси балки, справедливым при малых прогибах.

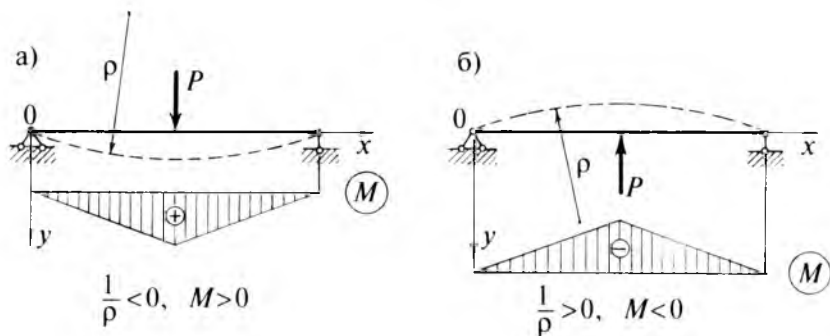


Рис. 9.3

Если прогибы балки не малы по сравнению с ее длиной, то в левой части уравнения (9.1) надо использовать точное выражение для кривизны изогнутой оси:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2v}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}. \quad (9.3)$$

При этом дифференциальное уравнение изогнутой оси балки становится нелинейным, что существенно усложняет его интегрирование. В дальнейшем будем использовать только приближенное уравнение (9.1), поскольку оно позволяет получать практически точные решения для большинства задач изгиба балок.

Знак минус в уравнении (9.1) соответствует принятому положительному направлению оси Oy (вниз) и правилу знаков для изгибающих моментов. При этом кривизна изогнутой оси балки и изгибающий момент имеют противоположные знаки (рис. 9.3, а, б).

Введем еще одно упрощение, связанное с углами поворота поперечных сечений. Если изогнутая ось балки является очень поло-

гой кривой, то углы поворота можно с достаточной степенью точности принимать равными первой производной от прогиба:

$$\varphi \approx \operatorname{tg} \varphi = \frac{dv}{dx} = v'(x). \quad (9.4)$$

Из этой формулы следует, что прогиб балки может иметь экстремальное значение (максимум или минимум) в сечении, где угол поворота равен нулю. Таких сечений может быть несколько.

9.3. Метод непосредственного интегрирования

Этот метод сводится к интегрированию дифференциального уравнения изогнутой оси балки (9.1) при известном законе изменения изгибающих моментов $M_z(x)$. Считая жесткость балки при изгибе постоянной ($EJ_z = \text{const}$) и последовательно интегрируя уравнение (9.1), получим

$$\left. \begin{aligned} EJv'' &= -M(x); \\ EJv' &= EJ\varphi(x) = -\int M(x)dx + C_1; \\ EJv(x) &= -\int dx \int M(x)dx + C_1x + C_2. \end{aligned} \right\} \quad (9.5)$$

В выражениях (9.5) и в дальнейшем для упрощения записи опущены индексы у моментов инерции и изгибающих моментов.

Выражения (9.5) позволяют получить аналитические законы изменения прогибов и углов поворота в балке. Входящие в (9.5) постоянные интегрирования C_1 и C_2 подлежат определению из кинематических граничных условий и условий сопряжения участков балки.

Кинематические граничные условия отражают характер закрепления (опирания) балки и ставятся относительно прогибов и углов поворота. Например, для шарнирно опертой балки (рис. 9.4) граничные условия характеризуют отсутствие прогибов на опорах: $x = 0, x = l, v = 0$. Для консольной балки (рис. 9.5) граничные условия характеризуют равенство нулю прогиба и угла поворота в жесткой заделке: $x = 0, v = 0; \varphi = 0$.

Условия сопряжения ставятся на границах участков с различными законами изменения изгибающих моментов. При отсутствии промежуточных шарниров и так называемых параллелограммных механизмов (ползунов) условия сопряжения заключаются в равенстве прогибов и углов поворота в сечениях слева и справа от границы участков, то есть они характеризуют непрерывность и глад-

кость изогнутой оси балки. Например, для балки на рис. 9.4 можно записать: $x = a$, $v_{пр} = v_{лев}$; $\varphi_{пр} = \varphi_{лев}$.

При наличии n участков с различными законами изменения изгибающих моментов выражение для прогиба будет содержать $2n$ постоянных интегрирования. Используя граничные условия и условия сопряжения участков, можно получить систему $2n$ линейных алгебраических уравнений относительно этих постоянных. После определения всех постоянных интегрирования будут установлены законы изменения $v(x)$ и $\varphi(x)$ в пределах каждого участка балки. Рассмотрим примеры определения прогибов и углов поворота в балках с помощью метода непосредственного интегрирования.

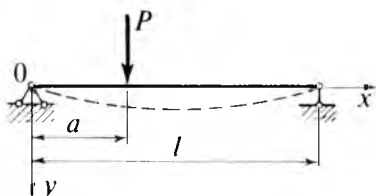


Рис. 9.4

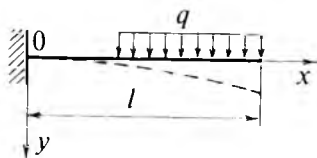


Рис. 9.5

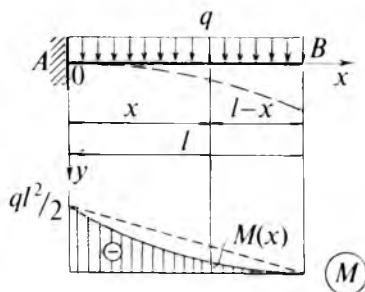


Рис. 9.6

Пример 9.1. Определим аналитические выражения для $v(x)$ и $\varphi(x)$ в консольной балке, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой (рис. 9.6), и вычислим значения этих величин на свободном конце.

Изгибающий момент в балке на всем ее протяжении изменяется по закону квадратной параболы:

$$M(x) = -\frac{q(l-x)^2}{2}.$$

Подставим это выражение в решение (9.5) и проинтегрируем его:

$$EJv''(x) = \frac{q(l-x)^2}{2};$$

$$EJv'(x) = EJ\varphi(x) = -\frac{q(l-x)^3}{6} + C_1;$$

$$EJv(x) = \frac{q(l-x)^4}{24} + C_1x + C_2.$$

Используя граничные условия, определим постоянные интегрирования:

$$x = 0, \quad EJv(0) = \frac{ql^4}{24} + C_2 = 0, \quad C_2 = -\frac{ql^4}{24};$$

$$EJ\varphi(0) = -\frac{ql^3}{6} + C_1 = 0, \quad C_1 = \frac{ql^3}{6}.$$

Запишем окончательные выражения для прогибов и углов поворота в балке и определим значения этих величин на свободном конце:

$$v(x) = \frac{1}{EJ} \left[\frac{q(l-x)^4}{24} + \frac{ql^3}{6}x - \frac{ql^4}{24} \right];$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{EJ} \left[-\frac{q(l-x)^3}{6} + \frac{ql^3}{6} \right];$$

$$v_B = v(l) = \frac{ql^4}{8EJ}; \quad \varphi_B = \varphi(l) = \frac{ql^3}{6EJ}.$$

Пример 9.2. Для шарнирно опертой балки, нагруженной на конце сосредоточенной силой (рис. 9.7), определим выражения для $v(x)$ и $\varphi(x)$ и вычислим значения этих величин в характерных сечениях.

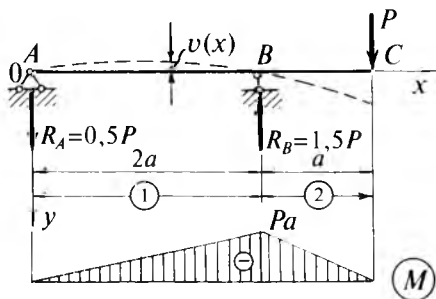


Рис. 9.7

Эпюра M приведена на рис. 9.7. Изгибающие моменты имеют различные законы изменения на первом и втором участках балки. Интегрируем дифференциальное уравнение изогнутой оси в пределах каждого участка.

Первый участок ($0 \leq x \leq 2a$):

$$\begin{aligned} M(x) &= -R_A x = -\frac{Px}{2}; & EJv''(x) &= \frac{Px}{2}; \\ EJ\varphi(x) &= \frac{Px^2}{4} + C_1; & EJv(x) &= \frac{Px^3}{12} + C_1x + C_2. \end{aligned}$$

Второй участок ($2a \leq x \leq 3a$):

$$\begin{aligned} M(x) &= -R_A x + R_B(x - 2a) = -\frac{Px}{2} + \frac{3P(x - 2a)}{2}; \\ EJv''(x) &= \frac{Px}{2} - \frac{3P(x - 2a)}{2}; \\ EJ\varphi(x) &= \frac{Px^2}{4} - \frac{3P(x - 2a)^2}{4} + D_1; \\ EJv(x) &= \frac{Px^3}{12} - \frac{3P(x - 2a)^3}{12} + D_1x + D_2. \end{aligned}$$

Для определения четырех постоянных интегрирования C_1, C_2, D_1 и D_2 ставим граничные условия и условия сопряжения участков:

$$\begin{aligned} x = 0, & & v &= 0. \\ x = 2a, & & v_{\text{пр}} = v_{\text{лев}} = 0; & & \varphi_{\text{пр}} = \varphi_{\text{лев}}. \end{aligned}$$

Из условия сопряжения участков получаем равенство постоянных интегрирования на первом и втором участках: $C_1 = D_1, C_2 = D_2$. Используя граничные условия, находим значения постоянных:

$$C_1 = D_1 = -\frac{Pa^2}{3}; \quad C_2 = D_2 = 0.$$

Запишем окончательные выражения для $v(x)$ и $\varphi(x)$ в пределах каждого участка:

$$\begin{aligned} v(x) &= \frac{P}{EJ} \left[\frac{x^3}{12} - \frac{a^2x}{3} \Big|_{\text{①}} - \frac{3(x-2a)^3}{12} \Big|_{\text{②}} \right]; \\ \varphi(x) &= \frac{P}{EJ} \left[\frac{x^2}{4} - \frac{a^2}{3} \Big|_{\text{①}} - \frac{3(x-2a)^2}{4} \Big|_{\text{②}} \right]. \end{aligned}$$

В этих выражениях вертикальная черта с цифрой внизу соответствует границе каждого участка. В пределах первого участка v и φ определяются функциями, стоящими до вертикальной черты с цифрой 1, а в пределах второго участка — до вертикальной черты с цифрой 2, то есть всеми функциями.

Вычислим v и φ в характерных сечениях балки:

$$\begin{aligned}x = 0, \quad v_A = v(0) = 0; \quad \varphi_A = \varphi(0) &= -\frac{Pa^2}{3EJ}; \\x = 2a, \quad v_B = 0; \quad \varphi_B &= \frac{P}{EJ} \left[\frac{(2a)^2}{4} - \frac{a^2}{3} \right] = \frac{2Pa^2}{3EJ}; \\x = 3a, \quad v_C &= \frac{P}{EJ} \left[\frac{(3a)^3}{12} - \frac{a^2(3a)}{3} - \frac{3a^3}{12} \right] = \frac{Pa^3}{EJ}; \\ \varphi_C &= \frac{P}{EJ} \left[\frac{(3a)^2}{4} - \frac{a^2}{3} - \frac{3a^2}{4} \right] = \frac{7Pa^2}{6EJ}.\end{aligned}$$

В пределах первого участка знак угла поворота изменяется на противоположный. Установим положение сечения, где угол поворота обращается в нуль:

$$\varphi(x) = \frac{P}{EJ} \left(\frac{x^2}{4} - \frac{a^2}{3} \right) = 0; \quad x = x_0 = \frac{2a}{\sqrt{3}} = 1,155a.$$

В сечении $x = x_0$ прогиб балки имеет экстремум. Вычисляем его значение:

$$v(x_0) = \frac{P}{EJ} \left[\frac{(1,155a)^3}{12} - \frac{a^2 \cdot 1,155a}{3} \right] = -0,257 \frac{Pa^3}{EJ}.$$

Для сравнения определим величину прогиба балки в середине пролета:

$$v(a) = \frac{P}{EJ} \left[\frac{a^3}{12} - \frac{a^2 \cdot a}{3} \right] = -\frac{Pa^3}{4EJ} = -0,25 \frac{Pa^3}{EJ}.$$

Можно отметить, что экстремальный прогиб весьма незначительно (на 2,6%) отличается от прогиба в середине пролета.

Выполним числовой расчет при $P = 20$ кН и $a = 1,6$ м. Подберем сечение балки в виде стального прокатного двутавра, приняв коэффициент надежности по нагрузке $\gamma_f = 1,2$, коэффициент условий работы $\gamma_c = 1$, расчетное сопротивление материала $R = 210$ МПа = 21 кН/см² и модуль упругости стали $E = 2,1 \cdot 10^4$ кН/см².

$$P_{\text{расч}} = 20 \cdot 1,2 = 24 \text{ кН}; \quad M_{\text{расч}} = 24 \cdot 1,6 = 38,4 \text{ кНм};$$

$$W_z \geq \frac{M_{\text{расч}}}{R_{\gamma_c}} = \frac{38,4 \cdot 10^2}{21 \cdot 1,0} = 183 \text{ см}^3.$$

Принимаем $\text{I } 20$, $W_z = 184 \text{ см}^3$, $J_z = 1840 \text{ см}^4$.

Вычислим наибольшие значения угла поворота и прогиба в балке. Согласно СНиП расчет производим на действие нормативных нагрузок.

$$v_{\text{нб}} = v_c = \frac{Pa^3}{EJ} = \frac{20 \cdot 160^3}{2,1 \cdot 10^4 \cdot 1840} = 2,12 \text{ см};$$

$$\varphi_{\text{нб}} = \varphi_c = \frac{7Pa^2}{6EJ} = \frac{7 \cdot 20 \cdot 160^2}{6 \cdot 2,1 \cdot 10^4 \cdot 1840} = 0,0155 \text{ рад} = 0^\circ 53'.$$

Из рассмотренного примера видно, что при наличии в балке нескольких участков с различными законами изменения изгибающих моментов метод непосредственного интегрирования становится громоздким и неудобным.

9.4. Метод начальных параметров

Продифференцировав два раза уравнение (9.1) при $EJ = \text{const}$ и используя дифференциальные зависимости (7.6) при изгибе, получим

$$\left. \begin{aligned} EJv''(x) &= -M(x); \\ EJv'''(x) &= -M'(x) = -Q(x); \\ EJv^{IV}(x) &= -Q'(x) = q(x). \end{aligned} \right\} \quad (9.6)$$

Последнее выражение является дифференциальным уравнением изогнутой оси балки четвертого порядка

$$EJv^{IV}(x) = q(x), \quad (9.7)$$

устанавливающим дифференциальную зависимость между прогибом и распределенной поперечной нагрузкой. При отсутствии последней уравнение (9.7) становится однородным:

$$EJv^{IV}(x) = 0. \quad (9.8)$$

Проинтегрируем уравнение (9.8). С учетом выражений (9.6) получим

$$\left. \begin{aligned} EJv^{IV}(x) &= 0; \\ EJv'''(x) &= -Q(x) = C_1; \\ EJv''(x) &= -M(x) = C_1x + C_2; \\ EJv'(x) &= EJ\varphi(x) = C_1 \frac{x^2}{2!} + C_2x + C_3; \\ EJv(x) &= C_1 \frac{x^3}{3!} + C_2 \frac{x^2}{2!} + C_3x + C_4. \end{aligned} \right\} \quad (9.9)$$

Введем в начальном сечении балки при $x = 0$ следующие четыре величины:

$$v(0) = v_0; \quad \varphi(0) = \varphi_0; \quad M(0) = M_0; \quad Q(0) = Q_0. \quad (9.10)$$

Эти величины представляют собой значения прогиба, угла поворота, изгибающего момента и поперечной силы в начальном сечении балки (рис. 9.8), причем v_0 и φ_0 называются *кинематическими начальными параметрами*, а M_0 и Q_0 — *статическими начальными параметрами*.

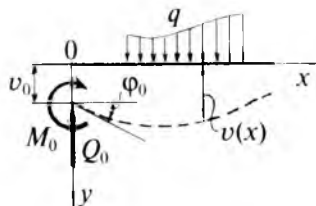


Рис. 9.8

Выразим постоянные интегрирования C_1 , C_2 , C_3 и C_4 в решениях (9.9) через начальные параметры. Положив в этих выражениях $x = 0$, получим

$$C_1 = -Q_0; \quad C_2 = -M_0; \quad C_3 = EJ\varphi_0; \quad C_4 = EJv_0. \quad (9.11)$$

Подставив постоянные в последнее выражение из (9.9), получим решение однородного дифференциального уравнения изогнутой оси балки (9.8) в форме метода начальных параметров:

$$v(x) = v_0 + \varphi_0 x - \frac{M_0 x^2}{2! EJ} - \frac{Q_0 x^3}{3! EJ}. \quad (9.12)$$

Продифференцировав уравнение (9.12), получим выражения для угла поворота и внутренних усилий в балке:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x) = v'(x) &= \varphi_0 - \frac{M_0 x}{EJ} - \frac{Q_0 x^2}{2! EJ}; \\ M(x) &= -EJv''(x) = M_0 + Q_0 x; \\ Q(x) &= M'(x) = Q_0. \end{aligned} \right\} \quad (9.13)$$

Отметим, что внутренние усилия M и Q не зависят от кинематических начальных параметров v_0 и φ_0 .

Выражения (9.12) и (9.13) полностью определяют напряженное и деформированное состояния балки в том случае, когда распределенная поперечная нагрузка отсутствует, а функции $v(x)$, $\varphi(x)$, $M(x)$ и $Q(x)$ являются непрерывными. Рассмотрим случаи, когда эти функции имеют разрывы, и покажем, как учесть их влияние.

Внутренние усилия Q и M имеют скачки (разрывы) в сечениях, где приложены сосредоточенные силы и моменты. У кинематических величин φ и v разрывы отражают наличие промежуточных шарниров и так называемых параллелограммных механизмов.

В промежуточном шарнире изогнутая ось балки может иметь излом, что характеризует взаимный поворот $\Delta\varphi$ поперечных сечений (рис. 9.9). Следовательно, можно записать: $x = a$, $v_{\text{пр}} = v_{\text{лев}}$; $\varphi_{\text{пр}} = \varphi_{\text{лев}} + \Delta\varphi$.

Параллелограммный механизм допускает взаимное поперечное смещение Δv (рис. 9.10), а углы поворота сечений остаются одинаковыми. Это позволяет записать: $x = a$, $v_{\text{пр}} = v_{\text{лев}} + \Delta v$; $\varphi_{\text{пр}} = \varphi_{\text{лев}}$.

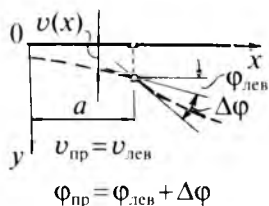


Рис. 9.9

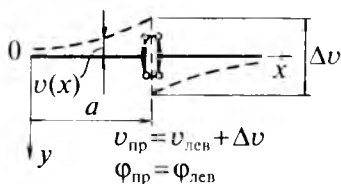


Рис. 9.10

Если в каком-либо сечении балки $x = a$ имеет место разрыв одной из четырех величин v , φ , M и Q , то он может оказать влияние на эти величины в сечениях $x > a$. Для учета влияния разрывов можно воспользоваться методом наложения, вытекающим из принципа независимости действия сил. При этом к выражению (9.12) надо добавить член, равный произведению величины разрыва на

функцию при соответствующем начальном параметре, вычисляемую для разности $x - a$.

Рассмотрим, например, действие сосредоточенной силы P (рис. 9.11). В этом случае в сечении $x = a$ функции $v(x)$, $\varphi(x)$ и $M(x)$ остаются непрерывными, а поперечная сила Q имеет разрыв (скачок) на величину P , то есть можно записать:

$$\begin{aligned} x = a, \quad v_{\text{пр}} &= v_{\text{лев}}, & \Delta v &= 0; \\ \varphi_{\text{пр}} &= \varphi_{\text{лев}}, & \Delta \varphi &= 0; \\ M_{\text{пр}} &= M_{\text{лев}}, & \Delta M &= 0; \\ Q_{\text{пр}} &= Q_{\text{лев}} + P, & \Delta Q &= P. \end{aligned}$$

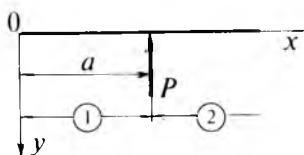


Рис. 9.11

На первом участке балки прогиб зависит только от начальных параметров и определяется выражением (9.12). На втором участке к этому выражению надо добавить функцию $v^*(x)$, отражающую влияние разрыва ΔQ на прогиб балки за сечением $x = a$:

$$v^*(x) = \Delta Q \left[-\frac{(x-a)^3}{3! EJ} \right] = -\frac{P(x-a)^3}{3! EJ}. \quad (9.14)$$

Таким образом, прогиб балки на первом и втором участках определяется по формуле

$$v(x) = v_0 + \varphi_0 x - \frac{M_0 x^2}{2! EJ} - \frac{Q_0 x^3}{3! EJ} \Big|_{\text{①}} - \frac{P(x-a)^3}{3! EJ} \Big|_{\text{②}}, \quad (9.15)$$

где, как и ранее, вертикальная черта с цифрой внизу соответствует границе участков (см. пример 9.2).

Аналогично можно учесть влияние на прогиб балки и других сосредоточенных факторов — сосредоточенного момента M и скачков угла поворота $\Delta \varphi$ и прогиба Δv .

Для учета влияния распределенной поперечной нагрузки ее надо представить как бесконечное множество элементарных сосредоточенных сил $dP = q(t) dt$ (рис. 9.12), где t — новая переменная, изменяющаяся в пределах $a \leq t \leq x$.

Записав с помощью (9.14) выражение для учета влияния элементарной сосредоточенной силы dP

$$dv^* = \frac{dP(x-t)^3}{3! EJ} = \frac{(x-t)^3 q(t) dt}{3! EJ}$$

и проинтегрировав его по переменной t в пределах от a до x , получим функцию, добавляемую к решению (9.12):

$$v^*(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^3}{3! EJ} q(t) dt.$$

Например, для равномерно распределенной нагрузки на участке $[a, b]$ (рис. 9.13) эта функция имеет следующий вид:

$$v^*(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^3}{3! EJ} q dt = \frac{q(x-a)^4}{4! EJ}. \quad (9.16)$$

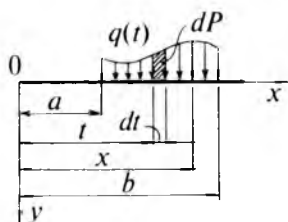


Рис. 9.12

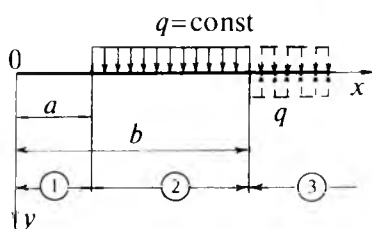


Рис. 9.13

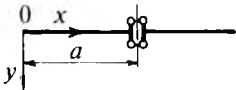
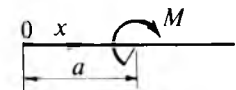
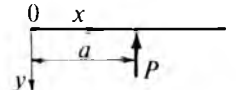
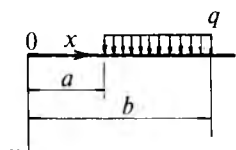
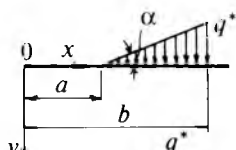
При $x > b$

$$v^*(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^3}{3! EJ} q dt - \int_b^x \frac{(x-t)^3}{3! EJ} q dt = \frac{q(x-a)^4}{4! EJ} - \frac{q(x-b)^4}{4! EJ}. \quad (9.17)$$

Первый член в формуле (9.17) соответствует равномерно распределенной нагрузке, условно продолженной до конца балки. Второй член соответствует компенсирующей нагрузке на участке $x > b$, направленной в противоположную сторону. На рис. 9.13 эти взаимно уравновешенные нагрузки показаны пунктиром.

Аналогичным образом можно учесть влияние поперечной нагрузки, распределенной по линейному закону, распределенной моментной нагрузки и т.п. Функции, добавляемые к выражению для прогиба (9.12) для учета влияния наиболее распространенных статических и кинематических воздействий на балку, приведены в табл. 9.1.

Таблица 9.1

Вид воздействия	Дополнительная функция
 Diagram showing a horizontal beam with a vertical force P applied at a distance a from the origin 0. The coordinate x is measured along the beam, and y is the vertical displacement.	при $x > a$ $v^*(x) = \Delta v$
 Diagram showing a horizontal beam with a vertical force P applied at a distance a from the origin 0. The coordinate x is measured along the beam, and y is the vertical displacement.	при $x > a$ $v^*(x) = \Delta \phi(x - a)$
 Diagram showing a horizontal beam with a moment M applied at a distance a from the origin 0. The coordinate x is measured along the beam, and y is the vertical displacement.	при $x > a$ $v^*(x) = -\frac{M(x-a)^2}{2! EJ}$
 Diagram showing a horizontal beam with a vertical force P applied at a distance a from the origin 0. The coordinate x is measured along the beam, and y is the vertical displacement.	при $x > a$ $v^*(x) = -\frac{P(x-a)^3}{3! EJ}$
 Diagram showing a horizontal beam with a uniformly distributed load q applied over the interval $[a, b]$. The coordinate x is measured along the beam, and y is the vertical displacement.	при $a \leq x \leq b$ $v^*(x) = \frac{q(x-a)^4}{4! EJ}$; при $x > b$ $v^*(x) = \frac{q(x-a)^4}{4! EJ} - \frac{q(x-b)^4}{4! EJ}$
 Diagram showing a horizontal beam with a triangularly distributed load q^* applied over the interval $[a, b]$. The load intensity increases linearly from 0 at $x=a$ to q^* at $x=b$. The angle of the load distribution is α. The coordinate x is measured along the beam, and y is the vertical displacement. $k = \tan \alpha = \frac{q^*}{b-a}$	при $a \leq x \leq b$ $v^*(x) = \frac{k(x-a)^5}{5! EJ}$; при $x > b$ $v^*(x) = \frac{k(x-a)^5}{5! EJ} - \frac{k(x-b)^5}{5! EJ} - \frac{q^*(x-b)^4}{4! EJ}$

С помощью данных табл. 9.1 запишем уравнение изогнутой оси балки с учетом начальных параметров и наиболее распространенных воздействий (рис. 9.14):

$$\begin{aligned}
 v(x) = & v_0 + \varphi_0 x - \frac{M_0 x^2}{2! EJ} - \frac{Q_0 x^3}{3! EJ} \Big|_1 + \Delta v \Big|_2 + \Delta \varphi (x - a_2) \Big|_3 - \\
 & - \frac{M(x - a_3)^2}{2! EJ} \Big|_4 - \frac{P(x - a_4)^3}{3! EJ} \Big|_5 + \frac{q(x - a_5)^4}{4! EJ} \Big|_6 - \frac{q(x - a_6)^4}{4! EJ} \Big|_7 + \\
 & + \frac{k(x - a_7)^5}{5! EJ} \Big|_8 - \frac{k(x - a_8)^5}{5! EJ} - \frac{q^*(x - a_8)^4}{4! EJ} \Big|_9. \quad (9.18)
 \end{aligned}$$

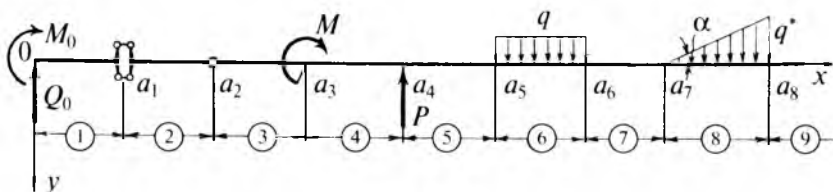


Рис. 9.14

Формула (9.18) является аналитическим выражением для прогиба балки на всех показанных на рис. 9.14 участках, границы которых обозначены вертикальной чертой с номером участка. На первом участке выражение для прогиба ограничено вертикальной чертой с цифрой 1, на втором участке — вертикальной чертой с цифрой 2 и т.д. Если нагрузки имеют другое направление, чем на рис. 9.14, то у соответствующих функций в выражении (9.18) надо поменять знак на противоположный. При наличии нескольких однотипных воздействий (например, нескольких сосредоточенных сил и т.п.) в уравнение изогнутой оси надо ввести такое же количество соответствующих функций.

Продифференцировав уравнение изогнутой оси (9.18), можно записать выражение для углов поворота $\varphi(x)$.

Получить уравнение изогнутой оси балки в форме метода начальных параметров можно также на основании дифференциального уравнения второго порядка (9.1). Для этого надо записать выражение для изгибающих моментов в произвольном сечении

балки с учетом влияния статических начальных параметров M_0 и Q_0 и заданных нагрузок и произвести интегрирование.

Рассмотрим, например, балку, нагруженную распределенной нагрузкой, изменяющейся по линейному закону (рис. 9.15). Изгибающий момент в сечении x равен

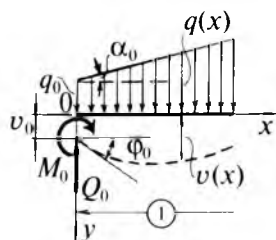


Рис. 9.15

$$M(x) = M_0 + Q_0 x - \frac{q_0 x^2}{2} - \frac{[q(x) - q_0] x^2}{6},$$

где $q(x) = q_0 + \operatorname{tg} \alpha_0 x = q_0 + kx$.

Подставим это выражение в дифференциальное уравнение (9.1) и выполним интегрирование:

$$EJv''(x) = -M_0 - Q_0 x + \frac{q_0 x^2}{2!} + \frac{kx^3}{3!};$$

$$EJv'(x) = EJ\varphi(x) = -M_0 x - \frac{Q_0 x^2}{2!} + \frac{q_0 x^3}{3!} + \frac{kx^4}{4!} + C_1;$$

$$EJv(x) = -\frac{M_0 x^2}{2!} - \frac{Q_0 x^3}{3!} + \frac{q_0 x^4}{4!} + \frac{kx^5}{5!} + C_1 x + C_2.$$

Положив в этих решениях $x = 0$, выразим постоянные интегрирования C_1 и C_2 через кинематические начальные параметры v_0 и φ_0 :

$$EJ\varphi(0) = EJ\varphi_0 = C_1; \quad EJv(0) = EJv_0 = C_2.$$

Подставим C_1 и C_2 в полученное выше выражение для прогиба в пределах первого участка балки. Тогда получим

$$v(x) = v_0 + \varphi_0 x - \frac{M_0 x^2}{2! EJ} - \frac{Q_0 x^3}{3! EJ} + \frac{q_0 x^4}{4! EJ} + \frac{kx^5}{5! EJ}.$$

Это выражение является частным случаем уравнения (9.18). Учет влияния сосредоточенных воздействий, как и ранее, может быть произведен с помощью метода наложения.

Входящие в выражение (9.18) начальные параметры v_0 , φ_0 , M_0 и Q_0 , а также скачки $\Delta\varphi$ и Δv не всегда бывают известны в начале расчета. Для определения неизвестных начальных параметров и величин $\Delta\varphi$ и Δv надо использовать соответствующие граничные условия.

При определении v и φ в статически определимых балках удобно вначале выполнить статический расчет и определить статические начальные параметры M_0 и Q_0 . Неизвестные величины v_0 , φ_0 , $\Delta\varphi$ и Δv подлежат определению из кинематических граничных условий. Приведем примеры их постановки.

1. *Заделка в начальном сечении (рис. 9.16).*

После статического расчета все начальные параметры будут известны: $v_0 = 0$; $\varphi_0 = 0$; $M_0 = -M_A$; $Q_0 = R_A$.

2. *Шарнирная опора в начальном сечении (рис. 9.17).*

В начальном сечении имеем: $v_0 = 0$; $M_0 = 0$; $Q_0 = R_A$. Неизвестный начальный параметр φ_0 подлежит определению из граничного условия $x = l$, $v = 0$.

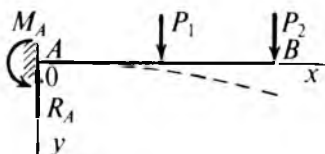


Рис. 9.16

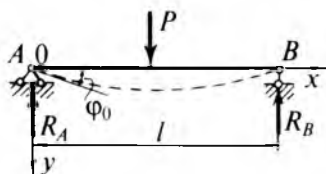


Рис. 9.17

3. *Свободный конец в начальном сечении (рис. 9.18).*

В начале расчета известны два начальных параметра: $M_0 = -M$; $Q_0 = 0$. Для определения v_0 и φ_0 можно использовать два граничных условия: $x = a$, $v = 0$; $x = a + l$, $v = 0$.

4. *Балка с промежуточным шарниром (рис. 9.19).*

В начальном сечении имеем: $v_0 = 0$; $M_0 = 0$; $Q_0 = R_A$. Неизвестные величины φ_0 и $\Delta\varphi_B$ подлежат определению из граничных условий в заделке: $x = l + a$; $v = 0$, $\varphi = 0$.

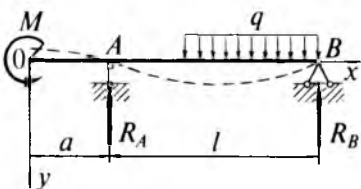


Рис. 9.18

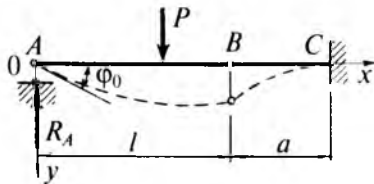


Рис. 9.19

5. *Статически неопределимая балка (рис. 9.20).*

Для статически неопределимых балок предварительный статический расчет невозможен, так как число искомых статических величин превышает число уравнений равновесия, которые можно

составить для их определения. Следовательно, в начале расчета таких балок могут быть неизвестны как кинематические, так и статические начальные параметры. Неизвестные величины подлежат определению из кинематических и статических граничных условий. Последние ставятся относительно изгибающих моментов и поперечных сил.

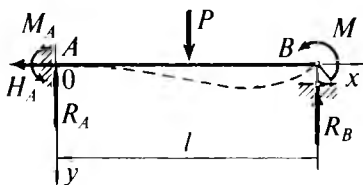


Рис. 9.20

Например, балка на рис. 9.20 статически неопределима, поскольку трех уравнений равновесия недостаточно для определения четырех опорных реакций. В начальном сечении балки имеем: $v_0 = 0$; $\varphi_0 = 0$. Для определения неизвестных начальных параметров M_0 и Q_0 можно использовать следующие граничные условия: $x = l$; $v = 0$; $M_x = M$ (смешанные граничные условия).

Использував граничные условия, можно получить необходимое число уравнений относительно всех неизвестных величин. После их определения можно с помощью уравнения (9.18) записать окончательные выражения для прогибов и углов поворота в балке, а для статически неопределимых балок — построить также эпюры Q и M .

Вычислив значения v и φ в характерных сечениях балки, можно построить эпюры этих величин. Для правильного построения и контроля эпюр Q , M , φ и v надо использовать дифференциальные соотношения при изгибе:

$$\left. \begin{aligned} Q' &= -q; & M' &= Q; \\ EJ\varphi' &= -M; & v' &= \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (9.19)$$

Соотношения (9.19), а также характер внешней нагрузки позволяют установить наличие особенностей в эпюрах Q , M , φ и v , а именно скачков, изломов, экстремумов и точек перегиба (см. § 7.4). Рассмотрим примеры использования метода начальных параметров.

Пример 9.3. Для балки с промежуточным шарниром (рис. 9.21, а) запишем с помощью метода начальных параметров выражения для φ и v , вычислим значения этих величин в характерных сечениях и построим эпюры Q , M , φ и v .

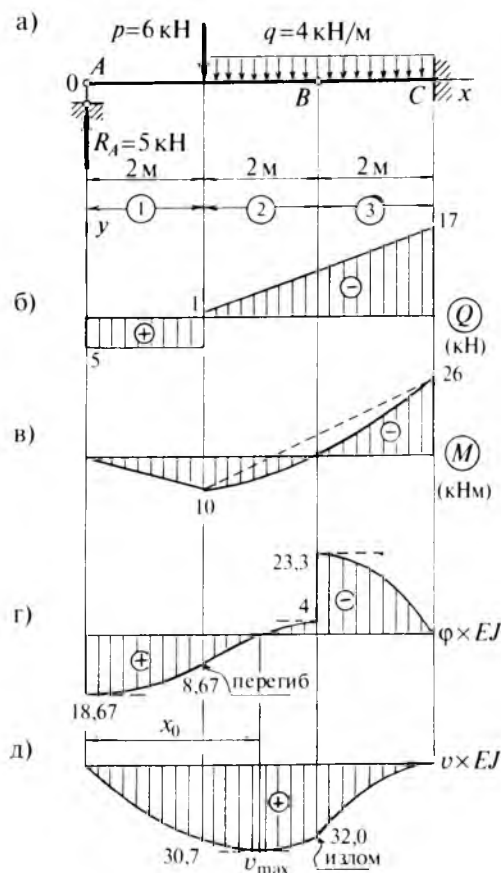


Рис. 9.21

Данная балка статически определима. Ее можно представить состоящей из несущей и несомой частей (балок), соответственно BC и AB . Определим значение опорной реакции R_A и построим эпюры изгибающих моментов и поперечных сил:

$$\Sigma M_B^{\text{лев}} = 0; \quad R_A = \frac{6 \cdot 2 + 4 \cdot 2 \cdot 1}{4} = 5 \text{ кН.}$$

Эпюры Q и M приведены на рис. 9.21, б, в.

Начальные параметры равны

$$v_0 = 0, \quad M_0 = 0, \quad Q_0 = R_A = 5 \text{ кН.}$$

Учитывая значения начальных параметров и характер нагрузки, запишем с помощью уравнения (9.18) выражения для прогибов и углов поворота в пределах трех характерных участков балки:

$$v(x) = \varphi_0 x - \frac{5x^3}{3! EJ} \Big|_1 + \frac{6(x-2)^3}{3! EJ} + \frac{4(x-2)^4}{4! EJ} \Big|_2 + \Delta\varphi_B (x-4) \Big|_3 ;$$

$$\varphi(x) = v'(x) = \varphi_0 - \frac{5x^2}{2! EJ} \Big|_1 + \frac{6(x-2)^2}{2! EJ} + \frac{4(x-2)^3}{3! EJ} \Big|_2 + \Delta\varphi_B \Big|_3 .$$

В этих выражениях неизвестными величинами являются начальный параметр φ_0 и взаимный угол поворота $\Delta\varphi_B$ в промежуточном шарнире. Для их определения используем граничные условия в заделке С:

$$x = 6 \text{ м}, \quad v = 6\varphi_0 - \frac{5 \cdot 6^3}{6 EJ} + \frac{6 \cdot 4^3}{6 EJ} + \frac{4 \cdot 4^4}{24 EJ} + 2\Delta\varphi_B = 0;$$

$$\varphi = \varphi_0 - \frac{5 \cdot 6^2}{2 EJ} + \frac{6 \cdot 4^2}{2 EJ} + \frac{4 \cdot 4^3}{6 EJ} + \Delta\varphi_B = 0.$$

Получили систему двух уравнений относительно неизвестных величин φ_0 и $\Delta\varphi_B$:

$$\begin{cases} 3\varphi_0 + \Delta\varphi_B = \frac{36,67}{EJ} ; \\ \varphi_0 + \Delta\varphi_B = -\frac{0,67}{EJ} , \end{cases}$$

решив которую находим

$$\varphi_0 = \frac{18,67}{EJ}; \quad \Delta\varphi_B = -\frac{19,33}{EJ}.$$

Запишем окончательные выражения для v и φ и вычислим значения этих величин в характерных сечениях балки:

$$v(x) = \frac{1}{EJ} \left[18,67x - \frac{5x^3}{3!} \Big|_1 + \frac{6(x-2)^3}{3!} + \frac{4(x-2)^4}{4!} \Big|_2 - 19,33(x-4) \Big|_3 \right];$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{EJ} \left[18,67 - \frac{5x^2}{2!} \Big|_1 + \frac{6(x-2)^2}{2!} + \frac{4(x-2)^3}{3!} \Big|_2 - 19,33 \Big|_3 \right].$$

$$x = 0, \quad v = v_0 = 0; \quad \varphi = \varphi_0 = \frac{18,67}{EJ}.$$

$$x = 2 \text{ м}, \quad v = \frac{1}{EJ} \left[18,67 \cdot 2 - \frac{5 \cdot 2^3}{6} \right] = \frac{30,67}{EJ};$$

$$\varphi = \frac{1}{EJ} \left[18,67 - \frac{5 \cdot 2^2}{2} \right] = \frac{8,67}{EJ}.$$

$$x = 4 \text{ м}, \quad v = \frac{1}{EJ} \left[18,67 \cdot 4 - \frac{5 \cdot 4^3}{6} + \frac{6 \cdot 2^3}{6} + \frac{4 \cdot 2^4}{24} \right] = \frac{32,0}{EJ};$$

$$\varphi_{\text{лев}} = \frac{1}{EJ} \left[18,67 - \frac{5 \cdot 4^2}{2} + \frac{6 \cdot 2^2}{2} + \frac{4 \cdot 2^3}{6} \right] = -\frac{4}{EJ};$$

$$\varphi_{\text{пр}} = \frac{1}{EJ} (-4 - 19,33) = -\frac{23,33}{EJ}.$$

$$x = 6 \text{ м}, \quad v = 0; \quad \varphi = 0.$$

Построим эпюры v и φ и отметим их особенности на основании дифференциальных соотношений (9.19).

Эпюра φ в сечении $x = 4$ м (промежуточный шарнир) имеет скачок (разрыв). В сечении под сосредоточенной силой на эпюре φ имеет место точка перегиба (смена знака кривизны), поскольку в этом сечении изменяется знак поперечной силы. В сечениях $x = 0$ и $x = 4$ м касательные к эпюре φ параллельны оси, поскольку в этих сечениях изгибающий момент равен нулю. В пределах второго участка изменяется знак угла поворота. Определим координату сечения x_0 , где угол поворота обращается в нуль:

$$\varphi(x) = \frac{1}{EJ} \left[18,67 - \frac{5x^2}{2!} + \frac{6(x-2)^2}{2!} + \frac{4(x-2)^3}{3!} \right] = 0; \quad x = x_0 = 2,98 \text{ м}.$$

На эпюре v в сечении B имеют место излом и смена знака кривизны. В сечении C (заделка) касательная к эпюре v совпадает с осью балки, поскольку в этом сечении $\varphi = 0$. В сечении $x = x_0$ прогиб имеет экстремум, значение которого равно

$$v_{\max} = \frac{1}{EJ} \left[18,67 \cdot 2,98 - \frac{5 \cdot 2,98^3}{6} + \frac{6 \cdot 0,98^3}{6} + \frac{4 \cdot 0,98^4}{24} \right] = \frac{34,68}{EJ}.$$

Эпюры v и φ приведены на рис. 9.21, z, d .

Пример 9.4. Для балки на рис. 9.22, a построим эпюры Q и M и вычислим значение прогиба в сечении, где приложен сосредоточенный момент.

Данная балка статически неопределима, поскольку для определения четырех опорных реакций R_A, H_A, M_A и R_B можно составить только три уравнения равновесия.

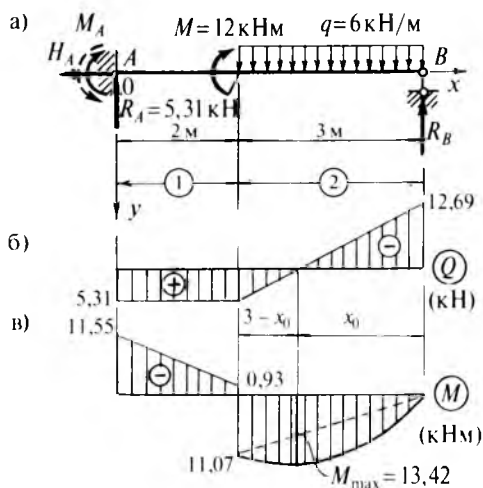


Рис. 9.22

В начальном сечении балки имеем: $v_0 = 0$; $\varphi_0 = 0$; $M_0 = M_A$; $Q_0 = R_A$. Запишем с помощью (9.18) выражение для прогиба в пределах двух характерных участков:

$$v(x) = -\frac{M_0 x^2}{2! EJ} - \frac{Q_0 x^3}{3! EJ} \Big|_{\text{①}} - \frac{12(x-2)^2}{2! EJ} + \frac{6(x-2)^4}{4! EJ} \Big|_{\text{②}}.$$

Для определения неизвестных статических начальных параметров M_0 и Q_0 используем граничные условия на опоре B :

$$x = 5 \text{ м}, \quad v = \frac{1}{EJ} \left[-\frac{M_0 \cdot 5^2}{2} - \frac{Q_0 \cdot 5^3}{6} - \frac{12 \cdot 3^2}{2} + \frac{6 \cdot 3^4}{24} \right] = 0;$$

$$M = M_0 + 5Q_0 + 12 - 6 \cdot 3 \cdot 1,5 = 0.$$

Решая систему двух уравнений

$$\begin{cases} 12,5 M_0 + 20,83 Q_0 = -33,75; \\ M_0 + 5 Q_0 = 15, \end{cases}$$

находим значения статических начальных параметров:

$$M_0 = M_A = -11,55 \text{ кНм}; \quad Q_0 = R_A = 5,31 \text{ кН}.$$

Изгибающий момент M_0 вызывает растяжение верхних волокон балки (его направление показано на рис. 9.22, a пунктиром). Дальнейший статический расчет балки прост и не требует пояснений.

Определим экстремальное значение изгибающего момента на втором участке:

$$\frac{x_0}{12,69} = \frac{3 - x_0}{5,31}; \quad x_0 = 2,11 \text{ м};$$

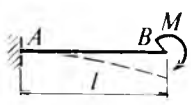
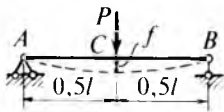
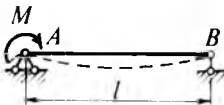
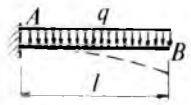
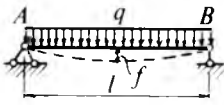
$$M_{\max} = 12,69 \cdot 2,11 - \frac{6 \cdot 2,11^2}{2} = 13,42 \text{ кНм}.$$

Эпюры Q и M приведены на рис. 9.22, б, в. Прогиб балки в сечении, где приложен сосредоточенный момент, равен

$$v(2) = \frac{11,55 \cdot 2^2}{2EJ} - \frac{5,31 \cdot 2^3}{6EJ} = \frac{16,02}{EJ}.$$

В заключение приведем формулы для прогибов и углов поворота в консольных и шарнирно-опертых балках при простых нагрузках (табл. 9.2).

Таблица 9.2

 $v_B = \frac{Ml^2}{2EJ}$ $\varphi_B = \frac{Ml}{EJ}$	 $f = v_C = \frac{Pl^3}{48EJ}$ $\varphi_A = -\varphi_B = \frac{Pl^2}{16EJ}$
 $v_B = \frac{Pl^3}{3EJ}$ $\varphi_B = \frac{Pl^2}{2EJ}$	 $\varphi_A = \frac{Ml}{3EJ}$ $\varphi_B = -\frac{Ml}{6EJ}$
 $v_B = \frac{ql^4}{8EJ}$ $\varphi_B = \frac{ql^3}{6EJ}$	 $f = \frac{5ql^4}{384EJ}$ $\varphi_A = -\varphi_B = \frac{ql^3}{24EJ}$

ГЛАВА 10

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА МОРА

10.1. Работа внешних сил и потенциальная энергия деформации при изгибе стержней и стержневых систем

При нагружении деформируемой системы ее точки получают перемещения. При этом внешние нагрузки производят работу на соответствующих перемещениях. Будем рассматривать только статическое нагружение, при котором нагрузки достигают своих конечных значений в течение некоторого промежутка времени, достаточно большого, чтобы можно было не учитывать возникающие при изменении величин нагрузок силы инерции.

Рассмотрим, например, действие сосредоточенной силы P , статически приложенной к консольной балке (рис. 10.1, а). При нагружении балка изгибается и точки ее оси получают поперечные перемещения. При этом сила P производит работу на перемещении Δ по направлению ее действия. Если материал балки является линейно-упругим, то перемещение Δ прямо пропорционально силе:

$$\Delta = kP, \quad (10.1)$$

где k — коэффициент пропорциональности, зависящий от свойств материала балки, от ее размеров и формы поперечного сечения.

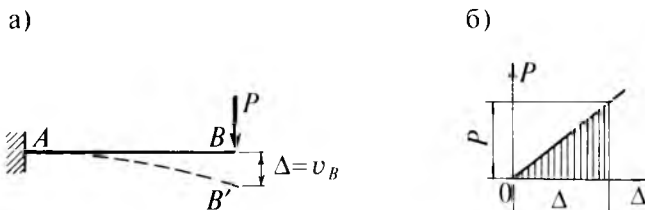


Рис. 10.1

График зависимости (10.1) представляет собой наклонную прямую, проведенную через начало координат (рис. 10.1, б). Как пока-

зано в § 3.6, работа статически приложенной силы численно равна площади заштрихованного треугольника на рис. 10.1, б:

$$A = \frac{1}{2} P \Delta. \quad (10.2)$$

Отметим, что каждому виду нагрузки соответствует свое перемещение, на котором она производит работу. Сосредоточенной силе соответствует линейное перемещение по направлению ее действия, сосредоточенному моменту — угловое перемещение или угол поворота поперечного сечения стержня, в котором приложен момент. Например, работа сосредоточенного момента, приложенного в опорном сечении балки на рис. 10.2, равна

$$A = \frac{1}{2} M \varphi_A.$$

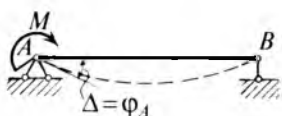


Рис. 10.2

Для отражения всего многообразия внешних нагрузок можно ввести понятие об обобщенной силе. Перемещение, на котором обобщенная сила производит работу, называется *обобщенным перемещением*.

Таким образом, работа внешней обобщенной силы P_i при статическом нагружении равна половине произведения величины силы на соответствующее обобщенное перемещение Δ_i . Этот вывод можно распространить на случай одновременного действия нескольких нагрузок:

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i \Delta_i. \quad (10.3)$$

Работу внешних сил, статически приложенных к балке или к стержневой системе, можно выразить через внутренние усилия в стержнях. Рассмотрим, например, плоский изгиб рамы (рис. 10.3, а). В поперечных сечениях стержней рамы могут действовать три внутренних усилия — изгибающий момент M , поперечная сила Q и продольная сила N .

Вырежем из рамы бесконечно малый элемент ds и покажем действующие в его торцевых сечениях внутренние усилия (рис. 10.3, б). Изменение внутренних усилий на длине ds здесь учитывать не будем. Поперечное сечение стержня отнесено к главным центральным осям Oz и Oy (рис. 10.3, в). Для каждого элемента внутренние усилия можно условно рассматривать как внешние нагрузки, про-

изводящие работу на соответствующих деформациях элемента. Воспользуемся принципом независимости действия сил и вычислим отдельно работу каждого внутреннего усилия.

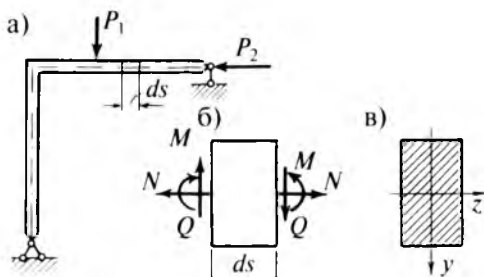


Рис. 10.3

Продольные силы вызывают взаимные осевые перемещения поперечных сечений (рис. 10.4, а), величина которых равна удлинению (укорочению) элемента:

$$d(\Delta s) = \frac{N ds}{EF}.$$

Работа продольной силы на перемещении $d(\Delta s)$ равна

$$dA_N = \frac{1}{2} N d(\Delta s) = \frac{N^2 ds}{2EF}.$$

Изгибающие моменты вызывают взаимный поворот поперечных сечений элемента (рис. 10.4, б). Учитывая, что при изгибе стержня длина волокон нейтрального слоя не изменяется, и используя формулу (9.2) для определения кривизны оси стержня (без учета ее знака)

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 v}{ds^2} = \frac{M}{EJ},$$

получим величину угла взаимного поворота сечений

$$d\varphi = \frac{ds}{\rho} = \frac{M ds}{EJ}.$$

Изгибающий момент производит работу на угловых перемещениях поперечных сечений, равную

$$dA_M = \frac{1}{2} M d\varphi = \frac{M^2 ds}{2EJ}.$$

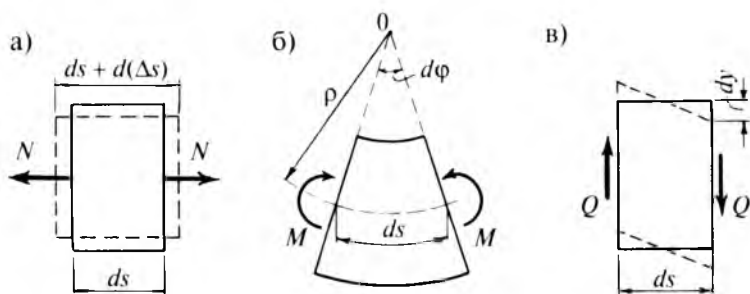


Рис. 10.4

Поперечные силы вызывают взаимный сдвиг поперечных сечений элемента (рис. 10.4, в). Опуская несложный вывод, приведем формулу для определения работы поперечной силы на деформациях сдвига:

$$dA_Q = \eta \frac{Q^2 ds}{2GF},$$

где G — модуль упругости материала стержня при сдвиге. Безразмерный коэффициент η отражает неравномерность распределения касательных напряжений по высоте поперечного сечения и зависит от его формы. Например, для прямоугольного сечения он равен $6/5$, для круглого сечения — $10/9$.

Таким образом, работа внутренних усилий на деформациях бесконечно малого элемента стержня равна

$$dA = dA_N + dA_M + dA_Q = \frac{N^2 ds}{2EF} + \frac{M^2 ds}{2EJ} + \eta \frac{Q^2 ds}{2GF}.$$

Интегрируя это выражение по длине каждого стержня и производя суммирование по всем стержням системы, получим формулу для определения работы внешних сил, выраженную через внутренние усилия в стержнях:

$$A = \sum_{i=1}^n \int_{s_i} \frac{N^2 ds}{2EF} + \sum_{i=1}^n \int_{s_i} \frac{M^2 ds}{2EJ} + \sum_{i=1}^n \int_{s_i} \eta \frac{Q^2 ds}{2GF}, \quad (10.4)$$

где $i = 1, 2, \dots, n$ — номер стержня и s_i — его длина.

Поскольку в формуле (10.4) стоят квадраты внутренних усилий, работа внешних сил на вызванных их действием перемещениях всегда положительна.

Для деформируемых систем, материал которых следует закону Гука, принимается, что работа внешних сил численно равна потенциальной энергии деформации системы: $A = U$. При этом работа, затрачиваемая на преодоление внутреннего трения, связанная с выделением тепла и т.п., считается несущественной и не учитывается.

Потенциальная энергия деформации упругой системы, так же как и работа внешних сил, всегда положительна. В процессе деформирования она, образно говоря, накапливается в упругой системе, а при разгрузке расходуется на возвращение ее в первоначальное недеформированное состояние.

Отметим, что в большинстве случаев интегралами в формуле (10.4), содержащими поперечные силы, можно в связи с их малостью пренебречь.

10.2. Теоремы Бетти и Максвелла

Величина работы внешних сил, так же как и потенциальная энергия деформации, не зависит от последовательности нагружения упругой системы и определяется ее конечным состоянием. Используем это свойство для определения работы двух сосредоточенных сил, приложенных к шарнирно опертой балке (рис. 10.5, *а*). Рассмотрим два варианта последовательности нагружения балки. В первом случае (рис. 10.5, *б*) вначале действует сила P_1 , статически возрастая до своего конечного значения. Затем начинает действовать сила P_2 , при увеличении которой сила P_1 остается постоянной по величине.

Линейные перемещения точек оси балки по направлению действия сил (прогибы) обозначены на рис. 10.5 буквой Δ и имеют два индекса. Первый индекс показывает направление перемещения (по направлению действия первой или второй силы), а второй — причину, вызвавшую перемещение (действие силы P_1 или P_2).

Работа сил P_1 и P_2 при первой последовательности нагружения равна

$$A = \frac{1}{2} P_1 \Delta_{11} + \frac{1}{2} P_2 \Delta_{22} + P_1 \Delta_{12} = A_{11} + A_{22} + A_{12}. \quad (10.5)$$

Третье слагаемое в этом выражении представляет работу силы P_1 на перемещении Δ_{12} по ее направлению от действия силы P_2 . Поскольку при этом сила P_1 остается постоянной по величине, работа равна полному произведению.

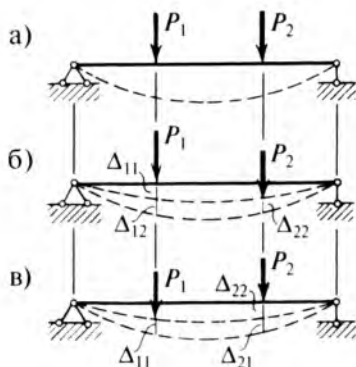


Рис. 10.5

Во втором случае изменим последовательность нагружения: вначале действует сила P_2 , а затем сила P_1 . Линейные перемещения, на которых эти силы производят работу, показаны на рис. 10.5, в. Определяем работу сил P_1 и P_2 :

$$A = \frac{1}{2} P_2 \Delta_{22} + \frac{1}{2} P_1 \Delta_{11} + P_2 \Delta_{21} = A_{22} + A_{11} + A_{21}, \quad (10.6)$$

где последнее слагаемое представляет работу постоянной по величине силы P_2 на перемещении Δ_{21} по ее направлению от действия силы P_1 .

Приравняв выражения (10.5) и (10.6) между собой, получим

$$P_1 \Delta_{12} = P_2 \Delta_{21}, \quad A_{12} = A_{21}. \quad (10.7)$$

Равенства (10.7) выражают теорему Бетти о взаимности работ. Согласно этой теореме работа первой силы на перемещении по ее направлению от действия второй силы равна работе второй силы на перемещении по ее направлению от действия первой силы. Теорему Бетти можно обобщить на случай произвольного нагружения упругой системы.

Выразим работу A_{12} через внутренние усилия в стержнях плоской стержневой системы:

$$A_{12} = \sum_{i=1}^n \int_{s_i} N_1 \frac{N_2 ds}{EF} + \sum_{i=1}^n \int_{s_i} M_1 \frac{M_2 ds}{EJ} + \sum_{i=1}^n \int_{s_i} \eta Q_1 \frac{Q_2 ds}{GF}. \quad (10.8)$$

В этой формуле N_1 , M_1 и Q_1 — внутренние усилия в стержнях от действия силы P_1 . Оставаясь постоянными по величине, они производят работу на перемещениях

$$\frac{N_2 ds}{EF}, \quad \frac{M_2 ds}{EJ}, \quad \eta \frac{Q_2 ds}{GF},$$

вызванных действием силы P_2 .

Если силы P_1 и P_2 являются единичными ($\bar{P}_1 = \bar{P}_2 = 1$), то на основании теоремы Бетти получим следующее равенство:

$$1 \cdot \Delta_{12} = 1 \cdot \Delta_{21}.$$

При обозначении единичных нагрузок принято вводить горизонтальную черту над соответствующей буквой. Обозначая перемещения, вызванные действием единичных нагрузок, буквой δ , имеем

$$\delta_{12} = \delta_{21}. \quad (10.9)$$

Равенство (10.9) известно как теорема Максвелла о взаимности перемещений. Смысл этой теоремы проиллюстрирован на рис. 10.6, где показаны два состояния шарнирно опертой балки под действием единичных сил (единичные состояния). Перемещение по направлению действия второй силы в первом единичном состоянии равно перемещению по направлению действия первой силы во втором единичном состоянии.

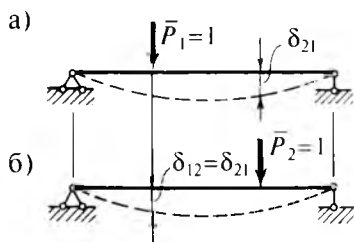


Рис. 10.6

Единичными нагрузками могут быть как сосредоточенные силы $\bar{P} = 1$, так и сосредоточенные моменты $\bar{M} = 1$; они считаются безразмерными величинами.

10.3. Формула Мора для определения перемещений

Рассмотрим балку, находящуюся под действием произвольных нагрузок (рис. 10.7, а). Назовем состояние балки под действием заданных нагрузок *грузовым или действительным состоянием*. Допустим, требуется определить прогиб балки в некоторой точке С.

Приложим в этой точке по направлению искомого перемещения единичную силу $\bar{P}_1 = 1$, то есть создадим *единичное или вспомогательное состояние* (рис. 10.7, б).

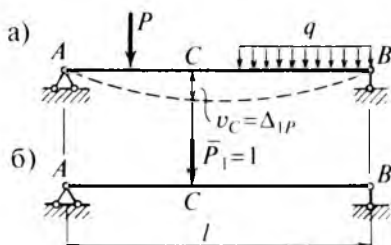


Рис. 10.7

Примем следующую последовательность нагружения: вначале действует единичная сила, а затем заданная нагрузка. Определим работу постоянной по величине единичной силы на перемещении по ее направлению от действия заданных нагрузок, то есть на искомом перемещении точки C. На основании теоремы Бетти она равна

$$A_{1P} = \bar{P}_1 \Delta_{1P} = 1 \cdot \Delta_{1P}.$$

Выражая работу A_{1P} с помощью (10.8) через внутренние усилия в балке в единичном и грузовом состояниях, получаем формулу для определения искомого перемещения:

$$\Delta_{1P} = v_C = \int_0^l \bar{N}_1 \frac{N_P dx}{EF} + \int_0^l \bar{M}_1 \frac{M_P dx}{EJ} + \int_0^l \eta \bar{Q}_1 \frac{Q_P dx}{GF}. \quad (10.10)$$

Обобщая (10.10), запишем формулу для определения любого линейного или углового перемещения в плоской стержневой системе:

$$\Delta_{kP} = \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \frac{\bar{N}_k N_P}{EF} dx + \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \frac{\bar{M}_k M_P}{EJ} dx + \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \eta \frac{\bar{Q}_k Q_P}{GF} dx. \quad (10.11)$$

Формула (10.11) называется формулой Мора. В этой формуле $\bar{N}_k$, $\bar{M}_k$ и $\bar{Q}_k$ — внутренние усилия в стержнях, вызванные действием единичной силы $\bar{P}_k = 1$ или единичного момента $\bar{M}_k = 1$, приложенных по направлению искомого перемещения. В первом случае перемещение Δ_{kP} является линейным, а во втором — угловым.

Внутренние усилия N_p , M_p и Q_p соответствуют грузовому состоянию системы и возникают в ее стержнях под действием заданных нагрузок.

Таким образом, для определения с помощью формулы Мора перемещений в балке или стержневой системе от действия заданных нагрузок надо по направлению искомого перемещения приложить единичную силу или единичный момент и определить вызываемые их действием внутренние усилия $\bar{N}_k$, $\bar{M}_k$ и $\bar{Q}_k$. Затем (или вначале) производится расчет системы на действие заданных нагрузок и определяются внутренние усилия N_p , M_p и Q_p грузового состояния. Выражения для внутренних усилий подставляются в формулу (10.11) и производится интегрирование в пределах длины каждого стержня l_i и суммирование результатов интегрирования по всем стержням системы.

Если в результате вычислений величина Δ_{kp} оказалась положительной, то направление перемещения совпадает с направлением действия единичной нагрузки, а если отрицательной, то оно противоположно этому направлению.

Отметим, что в общем случае нагружения стержня или стержневой системы формула Мора содержит шесть членов (интегралов) по числу внутренних усилий в поперечных сечениях стержня.

Для систем, стержни которых работают на растяжение или сжатие (например, для ферм), отличен от нуля только один член формулы Мора:

$$\Delta_{kp} = \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \frac{\bar{N}_k N_p}{EF} dx. \quad (10.12)$$

При расчете балок и стержневых систем, работающих в основном на изгиб (например, рам), влияние поперечных и продольных сил на перемещения несущественно и в большинстве задач не учитывается. Поэтому в формуле Мора можно с достаточной степенью точности использовать только слагаемое, содержащее изгибающие моменты:

$$\Delta_{kp} = \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \frac{\bar{M}_k M_p}{EJ} dx. \quad (10.13)$$

В случае пространственной работы стержня или стержневой системы, элементы которой работают в основном на изгиб и кручение, в формуле Мора обычно используются слагаемые, содержащие изгибающие и крутящие моменты.

Для определения взаимного перемещения точек оси стержневой системы или взаимного угла поворота поперечных сечений единичное состояние надо образовать с помощью парной единичной нагрузки. Например, для определения взаимного угла поворота поперечных сечений балки в промежуточном шарнире ($\Delta\varphi_B$ на рис. 10.8, а) надо в этом сечении приложить единичные моменты слева и справа от шарнира (рис. 10.8, б).

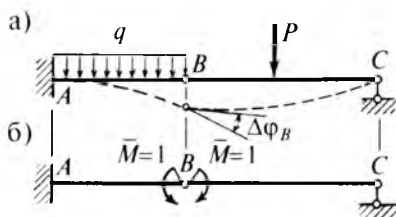


Рис. 10.8

Для стержней с криволинейной осью интегрирование в формуле Мора должно производиться по длине дуги оси стержня.

Пример 10.1. Для криволинейного консольного стержня, ось которого является четвертью окружности (рис. 10.9, а), определим вертикальное перемещение точки приложения силы и угол поворота конечного сечения B .

Приложим в сечении B по направлению искомого перемещения единичные силу и момент. Эпюры изгибающих моментов грузового и единичных состояний приведены на рис. 10.9, б, в, г.

Записываем выражения для изгибающих моментов в стержне в функции угла θ :

$$M_P = PR \sin \theta; \quad \bar{M}_1 = 1 \cdot R \sin \theta; \quad \bar{M}_2 = 1.$$

Подставляем эти выражения в формулу (10.13) и производим интегрирование по длине оси стержня. При этом учитываем, что дифференциал дуги окружности равен $ds = R d\theta$. В результате получаем

$$v_B = \Delta_{1P} = \int_s \frac{\bar{M}_1 M_P}{EJ} ds = \frac{PR^3}{EJ} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi PR^3}{4EJ};$$

$$\varphi_B = \Delta_{2P} = \int_s \frac{\bar{M}_2 M_P}{EJ} ds = \frac{PR^2}{EJ} \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta = \frac{PR^2}{EJ}.$$

Поскольку знаки вычисленных перемещений оказались положительными, их направления совпадают с направлениями единичных нагрузок.

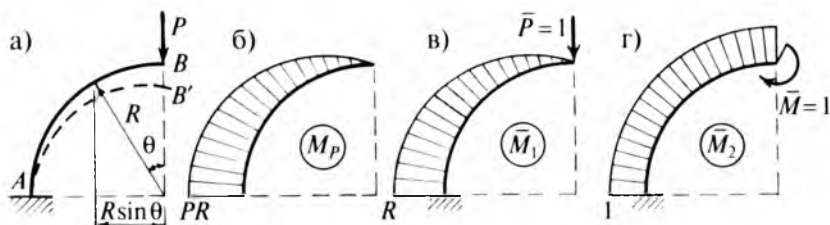


Рис. 10.9

10.4. Правило А.К. Верещагина

Для балок и стержневых систем, состоящих из прямых стержней, внутренние усилия единичных состояний $\bar{N}_k$, $\bar{M}_k$ и $\bar{Q}_k$ являются линейными функциями или на всем протяжении каждого стержня, или на его отдельных участках. Внутренние усилия грузового состояния N_p , M_p и Q_p могут иметь произвольные законы изменения по длине стержней. Если балки и стержни имеют при этом постоянные или ступенчато-постоянные жесткости EF , EJ и GF , то вычисление интегралов в формуле Мора может быть произведено с помощью эпюр внутренних усилий.

Рассмотрим, например, эпюры изгибающих моментов M_p и $\bar{M}_k$ в прямом стержне постоянной жесткости (рис. 10.10). Грузовая эпюра M_p произвольна, а единичная эпюра $\bar{M}_k$ является линейной. Начало отсчета координат поместим в точке пересечения линии эпюры $\bar{M}_k$ с осью Ox . При этом изгибающий момент $\bar{M}_k$ изменяется по закону $\bar{M}_k = x \operatorname{tg} \alpha$. Выносим постоянную величину $\operatorname{tg} \alpha / EJ$ в формуле (10.13) из-под знака интеграла и производим интегрирование по длине стержня:

$$\Delta_{kP} = \int_a^b \frac{\bar{M}_k M_p}{EJ} dx = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{EJ} \int_a^b x M_p dx.$$

Величина $M_p dx = d\Omega$ является элементом площади грузовой эпюры M_p . При этом сам интеграл можно рассматривать как ста-

тический момент площади эпюры M_p относительно оси Oy , который равен

$$\int_a^b x M_p dx = \iint_{\Omega_p} x d\Omega = x_C \Omega_p,$$

где Ω_p — площадь эпюры M_p и x_C — абсцисса ее центра тяжести.

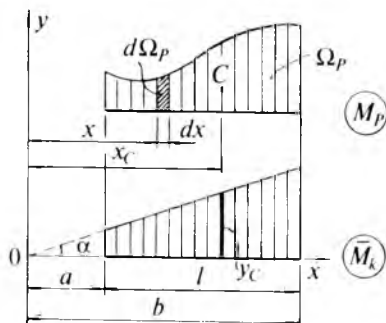


Рис. 10.10

Учитывая, что $x_C \operatorname{tg} \alpha = y_C$, получаем окончательный результат:

$$\Delta_{kp} = \int_a^b \frac{\bar{M}_k M_p}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} y_C \Omega_p, \quad (10.14)$$

где y_C — ордината в линейной эпюре $\bar{M}_k$ под центром тяжести площади нелинейной эпюры M_p (см. рис. 10.10).

Способ вычисления интегралов в формуле Мора с помощью формулы (10.14) называется правилом А.К. Верещагина или правилом «перемножения» эпюр. Согласно формуле (10.14) результат «перемножения» двух эпюр равен произведению площади нелинейной эпюры на ординату под ее центром тяжести в линейной эпюре. Если обе эпюры на рассматриваемом участке являются линейными, то при «перемножении» можно подставить площадь любой из них. Результат «перемножения» однозначных эпюр является положительным, а разнозначных — отрицательным.

При использовании правила А.К. Верещагина сложные эпюры надо разбить на простые фигуры, у которых известны площадь и положение центра тяжести. Чаще всего элементами разбиения являются треугольники и квадратные параболы (в случае действия равномерно распределенных нагрузок). Примеры разбиения эпюр приведены на рис. 10.11.

а) Трапеции

б) Квадратные параболы

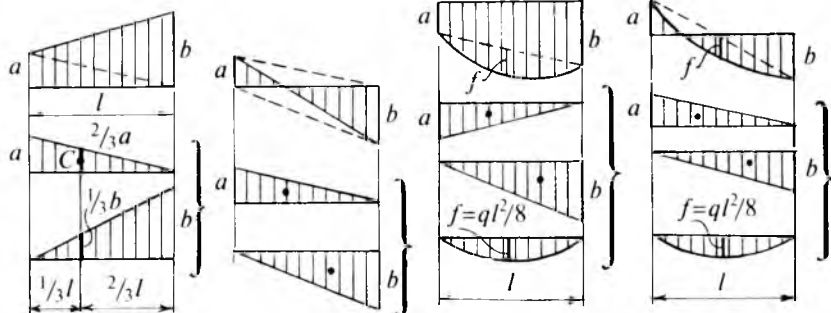


Рис. 10.11

Однозначные или разнозначные трапеции можно разбить на два треугольника (рис. 10.11, а). Квадратная парабола с ординатами a и b в начале и конце участка разбивается на два однозначных или разнозначных треугольника и квадратную параболу с нулевыми начальным и конечным значениями (рис. 10.11, б).

Сведения о площадях и координатах центра тяжести простых эпюр (фигур) даны в табл. 10.1.

Результат «перемножения» двух трапеций (рис. 10.12) можно представить в виде следующей формулы:

$$\Delta = \frac{l}{6EJ} (2ac + 2bd + ad + bc). \quad (10.15)$$

Правило А.К. Верещагина нельзя применять в случае, когда обе эпюры являются нелинейными (например, для стержней с криволинейной осью). В этом случае при определении перемещений с помощью метода Мора производится аналитическое или численное вычисление интегралов в формуле (10.11). Для численного интегрирования часто используется формула Симпсона.

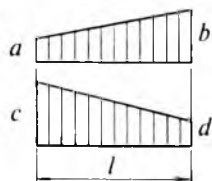
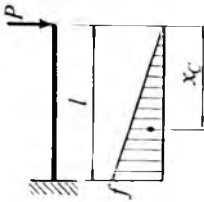
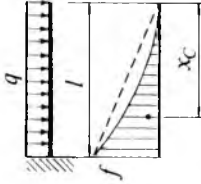
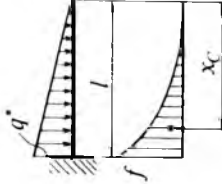
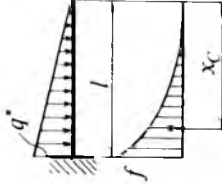
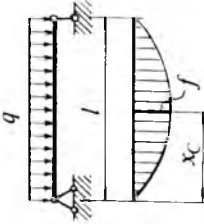


Рис. 10.12

Пример 10.2. Для консольной балки постоянной жесткости EJ (рис. 10.13, а) определим прогиб в сечении B и угол поворота сечения C .

Строим эпюру изгибающих моментов M_p от действия заданных нагрузок (рис. 10.13, б). Для определения искомых перемещений приложим в сечении B единичную силу, в сечении C — единичный

Таблица 10.1

Схема балки и нагрузки, характер эпюры				
				
Площадь эпюры и координата ее центра тяжести				
$f = Pl;$ $\Omega = \frac{1}{2} fl = \frac{Pl^2}{2};$ $x_C = \frac{2}{3} l.$	$f = \frac{ql^2}{2};$ $\Omega = \frac{1}{3} fl = \frac{ql^3}{6};$ $x_C = \frac{3}{4} l.$	$f = \frac{q^* l^2}{6};$ $\Omega = \frac{1}{4} fl = \frac{q^* l^3}{24};$ $x_C = \frac{4}{5} l.$	$f = \frac{ql^2}{8};$ $\Omega = \frac{2}{3} fl = \frac{ql^3}{12};$ $x_C = \frac{1}{2} l.$	

момент и построим единичные эпюры $\bar{M}_1$ и $\bar{M}_2$ (рис. 10.13, в, г). Эпюры M_P и $\bar{M}_1$ на первом участке представляют собой трапеции, а на втором — треугольники.

Вычислим интегралы Мора с помощью правила А.К. Верещагина. При «перемножении» трапеций используем формулу (10.15). В результате вычислений получим

$$v_B = \Delta_{1P} = \int_0^l \frac{\bar{M}_1 M_P}{EJ} dx =$$

$$= \frac{1}{EJ} \left[-\frac{1}{2} Pa \cdot a \cdot \frac{2}{3} a + \frac{2a}{6} (2 \cdot 3Pa \cdot 3a - 2 \cdot Pa \cdot a - Pa \cdot 3a + 3Pa \cdot a) \right] = \frac{5Pa^3}{EJ};$$

$$\varphi_C = \Delta_{2P} = \int_0^l \frac{\bar{M}_2 M_P}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{3Pa - Pa}{2} \cdot 2a \cdot 1 = \frac{2Pa^2}{EJ}.$$

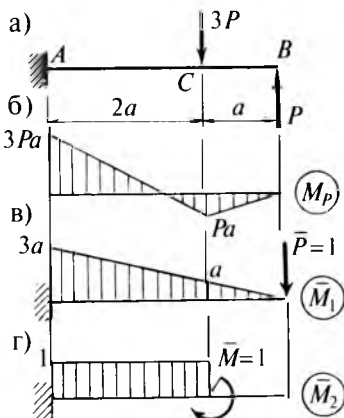


Рис. 10.13

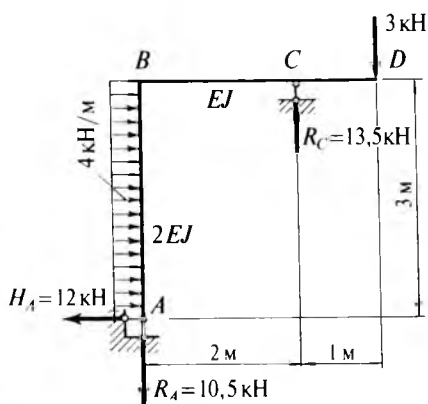


Рис. 10.14

Результаты «перемножения» эпюр оказались положительными. Это означает, что направления перемещений соответствуют направлениям действия единичных нагрузок, то есть прогиб балки в сечении B происходит вниз, а сечение C поворачивается по ходу часовой стрелки.

Пример 10.3. Для рамы на рис. 10.14 определим вертикальное перемещение сечения D , горизонтальное перемещение сечения B и угол поворота сечения на опоре A . Изгибная жесткость вертикального стержня в два раза больше, чем жесткость горизонтального стержня.

Определяем опорные реакции в раме от действия заданных нагрузок и строим эпюру M_p (рис. 10.15, а). Приложим по направлению искомым перемещений единичные нагрузки и построим единичные эпюры изгибающих моментов. Эти эпюры приведены на рис. 10.15, б, в, г.

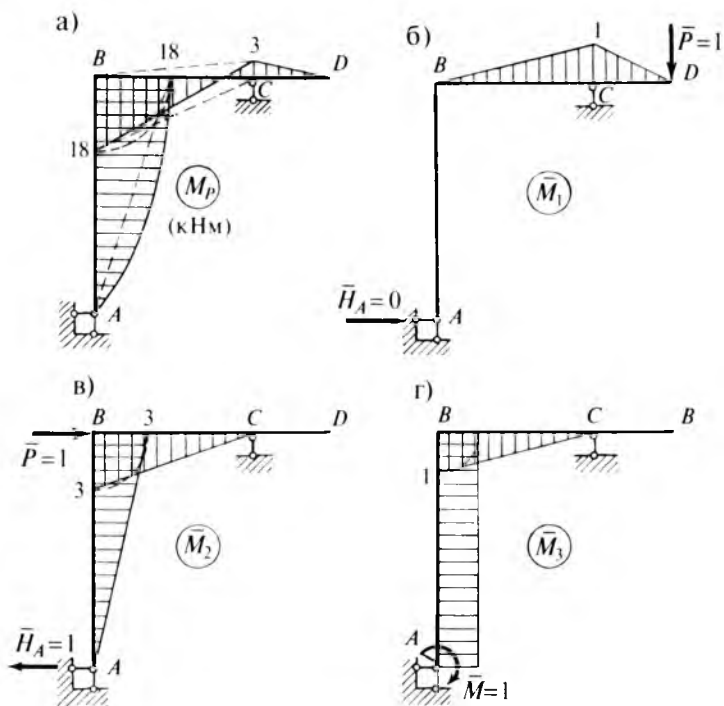


Рис. 10.15

Разобьем грузовую эпюру M_p в пределах стержня AB на квадратную параболу и треугольник, а в пределах стержня BC — на два разнозначных треугольника (на рис. 10.15, а эти разбиения показаны пунктиром). «Перемножая» эпюру M_p с единичными эпюрами, определяем величины искомым перемещений:

$$v_D = \Delta_{1P} = \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \left(\frac{2}{3} \cdot 3 - \frac{1}{3} \cdot 18 \right) \right] = -\frac{3}{EJ};$$

$$u_B = \Delta_{2P} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 \left(\frac{2}{3} \cdot 18 - \frac{1}{3} \cdot 3 \right) + \\ + \frac{1}{2EJ} \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 18 + \frac{4 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \right) = \frac{66,75}{EJ};$$

$$\varphi_A = \Delta_{3P} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \left(\frac{2}{3} \cdot 18 - \frac{1}{3} \cdot 3 \right) + \\ + \frac{1}{2EJ} \left(\frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 3 + \frac{4 \cdot 3^3}{12} \right) \cdot 1 = \frac{29}{EJ}.$$

Вертикальное перемещение сечения D происходит в направлении, противоположном направлению действия единичной силы, то есть вверх. Направления других перемещений совпадают с направлениями действия соответствующих единичных нагрузок.

10.5. Понятие о расчете статически неопределимых балок с помощью метода сил

Как было отмечено, статически неопределимая балка или стержневая система имеют избыточные или «лишние» связи. При расчете таких конструкций с помощью метода сил надо отбросить «лишние» связи и образовать так называемую *основную систему*, которая должна быть статически определимой и кинематически неизменяемой. Основных систем может быть несколько; выбирается наиболее удобная для расчета.

В основной системе надо приложить по направлению реакций в отброшенных «лишних» связях неизвестные силы или моменты $X_1, X_2, \dots, X_n$. Поставив условие, что основная система должна деформироваться, как заданная, надо приравнять к нулю линейные и угловые перемещения по направлению реакций в отброшенных связях от совместного действия нагрузки и всех неизвестных. Таким образом, можно составить дополнительные уравнения (уравнения перемещений), которые позволяют определить все неизвестные метода сил, то есть раскрыть статическую неопределимость заданной системы.

В качестве примера рассмотрим балку на рис. 10.16, *а*. Поскольку на эту балку наложено четыре связи, ее степень статической неопределимости равна единице ($n = 4 - 3 = 1$). Отбрасывая «лишнюю» связь, образуем основные системы и составим соответствующие дополнительные уравнения.

Для образования первой основной системы (рис. 10.16, *б*) отброшена шарнирная опора B . Дополнительное уравнение должно выражать отсутствие прогиба в сечении B от совместного действия заданной нагрузки и неизвестной силы $X_1 = R_B$. На основании при-

нципа независимости действия сил представим это уравнение в следующем виде:

$$v_B = v_{BP} + v_{BX_1} = 0,$$

где v_{BP} — прогиб балки в сечении B от действия заданной нагрузки и v_{BX_1} — прогиб балки в том же сечении от действия неизвестной силы X_1 .

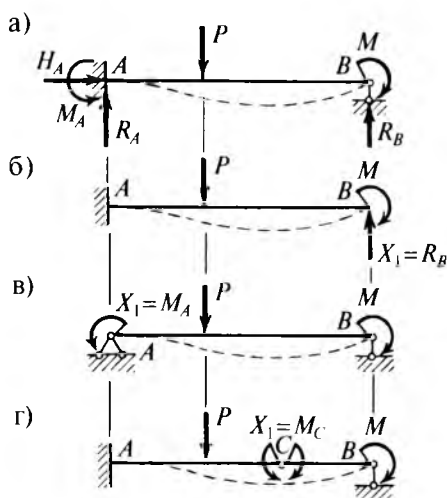


Рис. 10.16

Для образования второй основной системы (рис. 10.16, б) жесткая заделка в сечении A заменена шарнирно неподвижной опорой. В качестве неизвестного принят реактивный момент в заделке. Дополнительное уравнение должно выражать отсутствие угла поворота в сечении A от совместного действия нагрузок и неизвестного момента $X_1 = M_A$:

$$\varphi_A = \varphi_{AP} + \varphi_{AX_1} = 0.$$

Для образования третьей основной системы (рис. 10.16, г) в сечении C введен промежуточный шарнир. Дополнительное уравнение составим из условия равенства углов поворота в заданной балке слева и справа от сечения C (равенство нулю взаимного угла поворота сечений):

$$(\varphi_{CP} + \varphi_{CX_1})_{\text{лев}} = (\varphi_{CP} + \varphi_{CX_1})_{\text{прав}}, \quad \Delta\varphi_C = 0.$$

Неизвестный момент $X_1 = M_C$, приложенный в основной системе слева и справа от шарнира C , называется групповым (парным) неизвестным.

Дополнительные уравнения удобно записать в специальной, так называемой канонической форме метода сил. Рассмотрим, например, балку, приведенную на рис. 10.17, а. Степень ее статической неопределенности равна $n = 5 - 3 = 2$. Для образования основной системы введем в сечении A вместо жесткой заделки шарнирно неподвижную опору и отбросим опору B . По направлению реакций в отброшенных связях приложим неизвестный момент $X_1 = M_A$ и неизвестную силу $X_2 = R_B$ (рис. 10.17, б).

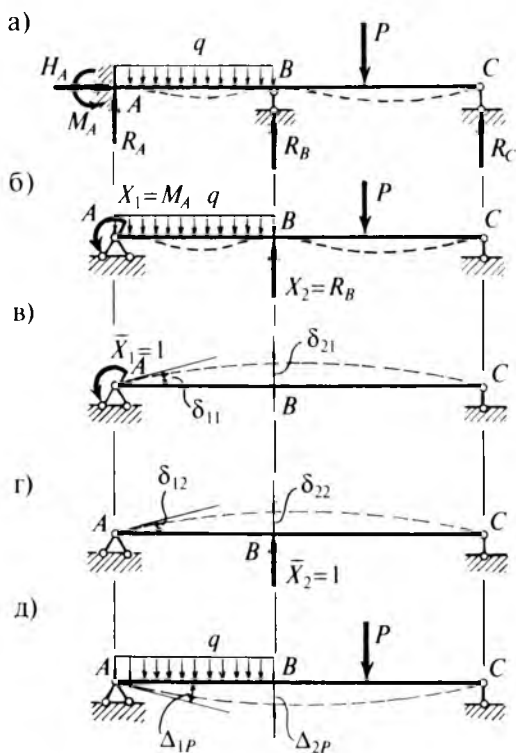


Рис 10.17

Для того чтобы поставить деформацию основной системы в соответствие с деформацией заданной балки, необходимо в основной системе приравнять к нулю угол поворота на опоре A и прогиб в

сечении B , то есть составить дополнительные уравнения. Запишем их в следующем виде:

$$\varphi_A = \Delta_{11} + \Delta_{12} + \Delta_{1P} = 0;$$

$$v_B = \Delta_{21} + \Delta_{22} + \Delta_{2P} = 0.$$

В этих уравнениях Δ_{11} , Δ_{12} , Δ_{21} и Δ_{22} — перемещения в основной системе по направлению реакций в отброшенных связях от действия неизвестных X_1 и X_2 . Их можно представить в следующем виде:

$$\Delta_{11} = \delta_{11}X_1; \quad \Delta_{12} = \delta_{12}X_2; \quad \Delta_{21} = \delta_{21}X_1; \quad \Delta_{22} = \delta_{22}X_2,$$

где δ_{11} , δ_{12} , δ_{21} и δ_{22} — перемещения в основной системе по направлению отброшенных связей от действия единичных нагрузок $\bar{X}_1 = 1$ и $\bar{X}_2 = 1$ (рис. 10.17, θ , ε). На основании теоремы Максвелла величины δ_{12} и δ_{21} численно равны между собой: $\delta_{12} = \delta_{21}$.

Величины Δ_{1P} и Δ_{2P} представляют собой перемещения в основной системе по направлению реакций в отброшенных связях от действия заданной нагрузки (рис. 10.17, θ).

Таким образом, дополнительные уравнения примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Обобщая рассмотренную форму записи, можно составить n канонических уравнений для n раз статически неопределимой балки или стержневой системы. Для определения коэффициентов δ_{ik} и свободных (грузовых) членов Δ_{iP} ($i = 1, 2, \dots, n$) системы канонических уравнений обычно используется формула Мора.

После решения канонических уравнений можно произвести расчет основной системы на совместное действие найденных неизвестных и заданной нагрузки, что позволит построить эпюры внутренних усилий. Для кинематической проверки правильности решения надо убедиться в том, что перемещения в основной системе по направлению отброшенных связей действительно равны нулю, что соответствует деформации заданной системы.

Определение линейных и угловых перемещений в статически неопределимой системе, работающей преимущественно на изгиб, производится с помощью окончательной эпюры M и любой основной системы. Для этого необходимо «перемножить» эпюру M с соответствующей единичной эпюрой $\bar{M}_k$ в основной системе.

В заключение отметим, что расчет статически неопределимых систем с помощью метода сил имеет ряд особенностей, которые подробно рассматриваются в курсе строительной механики.

Пример 10.4. Для балки, показанной на рис. 10.18, а, построим эпюры Q и M и определим прогиб в сечении C .

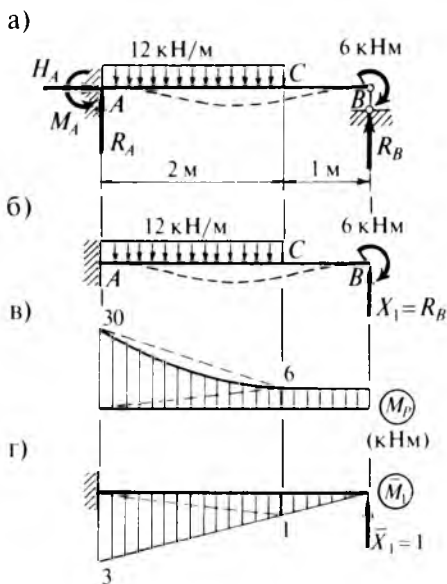


Рис. 10.18

Данная балка один раз статически неопределима. Для образования основной системы отбросим шарнирную опору B и приложим в этом сечении неизвестную силу $X_1 = R_B$ (рис. 10.18, б). Запишем каноническое уравнение метода сил:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

Для определения коэффициента и грузового члена этого уравнения строим грузовую и единичную эпюры изгибающих моментов (рис. 10.18, в, г) и производим их «перемножение» по правилу А.К. Верещагина:

$$\delta_{11} = \int_0^l \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 = \frac{9}{EJ};$$

$$\begin{aligned} \Delta_{1P} &= \int_0^l \frac{\bar{M}_1 M_P}{EJ} dx = -\frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 6 + \frac{2}{6} (2 \cdot 30 \cdot 3 + 2 \cdot 6 \cdot 1 + 30 \cdot 1 + 6 \cdot 3) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{12 \cdot 2^3}{12} \cdot \frac{(3+1)}{2} \right] = -\frac{67}{EJ}. \end{aligned}$$

Решаем каноническое уравнение и определяем величину силы X_1 :

$$\frac{9}{EJ} X_1 - \frac{67}{EJ} = 0; \quad X_1 = R_B = 7,44 \text{ кН}.$$

Произведем расчет основной системы на совместное действие заданных нагрузок и найденной силы X_1 (рис. 10.19, а). Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов в заданной балке приведены на рис. 10.19, б, в.

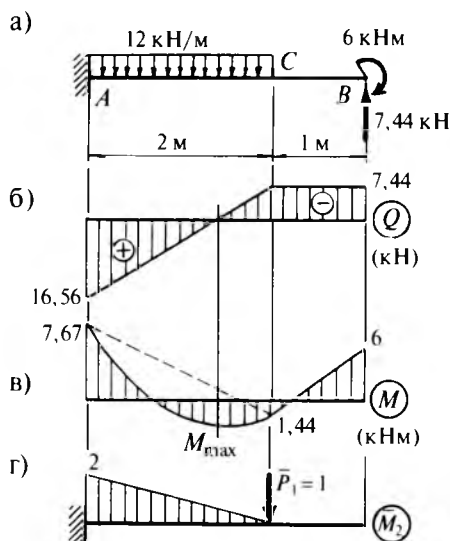


Рис. 10.19

Произведем кинематическую проверку правильности решения. Для этого «перемножим» эпюру M с единичной эпюрой $\bar{M}_1$, т.е. определим прогиб основной системы в сечении B .

$$\begin{aligned} v_B = \int_0^l \frac{\bar{M}_1 M}{EJ} dx &= \frac{1}{EJ} \left[\frac{2}{6} (-2 \cdot 3 \cdot 7,67 + 2 \cdot 1 \cdot 1,44 - 7,67 \cdot 1 + 1,44 \cdot 3) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{12 \cdot 2^3}{12} \cdot \frac{(3+1)}{2} + \frac{1}{6} (2 \cdot 1 \cdot 1,44 - 1 \cdot 6) \right] = \frac{1}{EJ} (16,0 - 16,0) = 0. \end{aligned}$$

Прогиб в сечении B основной системы равен нулю, что соответствует условию ее деформации. Следовательно, задача решена правильно.

Для определения прогиба заданной балки в сечении C используем принятую ранее основную систему и произведем ее расчет на действие единичной силы, приложенной по направлению искомого прогиба. Соответствующая единичная эпюра изгибающих моментов $\bar{M}_2$ приведена на рис. 10.19, г. «Перемножив» эпюры $\bar{M}_2$ и M , получим

$$v_C = \frac{1}{EJ} \left[\frac{2}{6} (2 \cdot 7,67 \cdot 2 - 1,44 \cdot 2) - \frac{12 \cdot 2^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \right] = \frac{1,26}{EJ}.$$

Прогиб балки в сечении C происходит вниз.



ГЛАВА 11

РАСЧЕТ БАЛОК НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

11.1. Понятие о сплошном упругом основании. Модель Винклера

11.2. Дифференциальное уравнение изгиба балки на упругом основании

11.3. Расчет длинных балок на упругом основании

11.4. Расчет балок конечной длины

ГЛАВА 12

СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ СТЕРЖНЕЙ

12.1. Общие понятия

В предыдущих главах были подробно рассмотрены основные виды деформирования стержней: растяжение и сжатие, кручение, плоский прямой изгиб. Настоящая глава посвящена решению задач о сложном сопротивлении стержней, представляющем собой комбинации основных видов деформирования. Примерами сложного сопротивления являются растяжение с изгибом, изгиб в двух плоскостях, изгиб с кручением и т.д.

При сложном сопротивлении в поперечном сечении стержня могут возникать несколько внутренних усилий, в наиболее общем случае все шесть: N , M_x , M_y , M_z , Q_y , Q_z . В дальнейшем во всех задачах сложного сопротивления оси Oy и Oz будем совмещать с главными центральными осями инерции поперечных сечений стержня.

В качестве примера определим внутренние усилия в сечении, отстоящем на расстоянии x от заделки в стержне, показанном на рис. 12.1:

$$\begin{aligned} N &= 0; & Q_y &= P; & Q_z &= 0; \\ M_x &= P \frac{b}{2}; & M_y &= 0; & M_z &= -P(l-x). \end{aligned}$$

Таким образом, балка испытывает деформации изгиба и кручения.

Рассмотренный пример показывает, что даже при относительно простых нагрузках (одна сосредоточенная сила) может иметь место сложное сопротивление.

При решении задач сложного сопротивления необходимо ввести правила знаков для внутренних усилий. Изгибающий момент считается положительным, если он вызывает растяжение в части сечения, относящейся к первой четверти системы координат в плоскости сечения (рис. 12.2, а). На площадке, нормаль к которой совпадает с положительным направлением оси Ox , поперечная сила считается положительной, если она направлена в сторону положительного направления соответствующей оси (рис. 12.2, б).

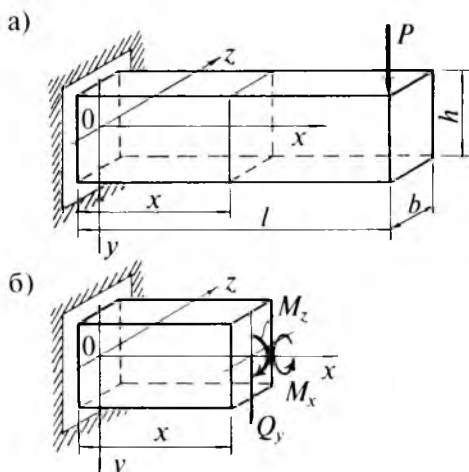


Рис. 12.1

Продольная сила считается положительной, если она вызывает растяжение, а крутящий момент — положительным, если он направлен против хода часовой стрелки (рис. 12.2, в).

Приведем основные формулы для напряжений при простых видах деформирования стержня (направление осей в сечении соответствует рис. 12.2).

Растяжение и сжатие:

$$\sigma_x = \frac{N}{F}.$$

Кручение (для круглого сечения):

$$\tau_k = \frac{M_k}{J_p} r = \frac{M_x}{J_p} r.$$

Поперечный изгиб в плоскости Oxy :

$$\sigma_x = \frac{M_z}{J_z} y; \quad \tau_{xy} = \frac{Q_y S_z^{\text{отс}}}{J_z b(y)}.$$

Поперечный изгиб в плоскости Oxz :

$$\sigma_x = \frac{M_y}{J_y} z; \quad \tau_{xz} = \frac{Q_z S_y^{\text{отс}}}{J_y h(z)}.$$

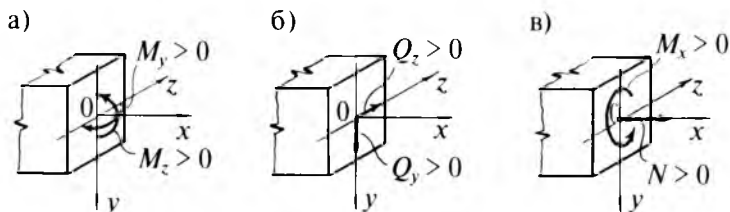


Рис. 12.2

Пользуясь принципом независимости действия сил, получим в общем случае сложного сопротивления формулу для нормальных напряжений (здесь и в дальнейшем индекс x будем опускать):

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_y}{J_y} z + \frac{M_z}{J_z} y. \quad (12.1)$$

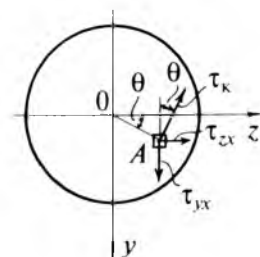


Рис. 12.3

Задача определения касательных напряжений в поперечном сечении стержня, находящегося в условиях сложного сопротивления, решается сложнее. На рис. 12.3 показаны касательные напряжения, возникающие в произвольной точке поперечного сечения круглого стержня при изгибе с кручением. Полное касательное напряжение τ на площадке вблизи точки A может быть вычислено с помощью геометрического суммирования:

$$\tau = \sqrt{(\tau_{yx} - \tau_k \cos \theta)^2 + (\tau_{cx} + \tau_k \sin \theta)^2}.$$

Рассмотрим частные случаи сложного сопротивления.

12.2. Косой изгиб

Косым изгибом называется такой изгиб, при котором плоскость действия суммарного изгибающего момента в сечении балки не совпадает с главными плоскостями инерции Oxy или Oxz . Различают два вида косого изгиба: *плоский* и *пространственный*. При плоском косом изгибе (рис. 12.4, а) нагрузки действуют в одной плоскости, не совпадающей с главными плоскостями инерции. Эта плоскость называется *силовой плоскостью*, а линия ее пересечения с плоскостью поперечного сечения балки — *силовой линией*. При пространственном косом изгибе (рис. 12.4, б) нагрузки действуют в различных плоскостях.

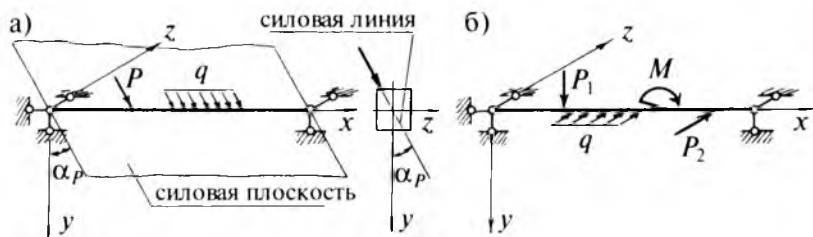


Рис. 12.4

Обозначим через α_p угол между силовой линией и главной осью Oy . Будем считать этот угол положительным при повороте силовой линии от оси Oy против хода часовой стрелки. Как при плоском, так и при пространственном косом изгибе суммарный изгибающий момент M , действующий в сечении балки (рис. 12.5, в), можно разложить на два изгибающих момента M_y и M_z , действующих в главных плоскостях инерции:

$$M_y = M \sin \alpha_p; \quad M_z = M \cos \alpha_p. \quad (12.2)$$

Поделив первое из этих равенств на второе, выразим угол α_p через отношение изгибающих моментов:

$$\operatorname{tg} \alpha_p = \frac{M_y}{M_z}. \quad (12.3)$$

Из этого равенства видно, что если изгибающие моменты M_y и M_z имеют одинаковые знаки, то угол α_p положителен. В этом случае силовая линия проходит через первую и третью четверти плоскости Oyz (рис. 12.5, б).

При плоском косом изгибе внутренние усилия M_y, M_z, Q_y, Q_z не являются независимыми, поскольку они определяются одними и теми же нагрузками, действующими в силовой плоскости. При этом угол α_p один и тот же во всех сечениях. При пространственном изгибе внутренние усилия имеют различные законы изменения по длине балки, так как вычисляются от нагрузок, действующих в разных плоскостях. При этом величина угла α_p также изменяется по длине балки.

Если в (12.1) положить $N = 0$, то получим формулу для нормальных напряжений при косом изгибе:

$$\sigma = \frac{M_y}{J_y} z + \frac{M_z}{J_z} y. \quad (12.4)$$

Здесь J_y и J_z — главные моменты инерции сечения; y и z — координаты точек сечения.

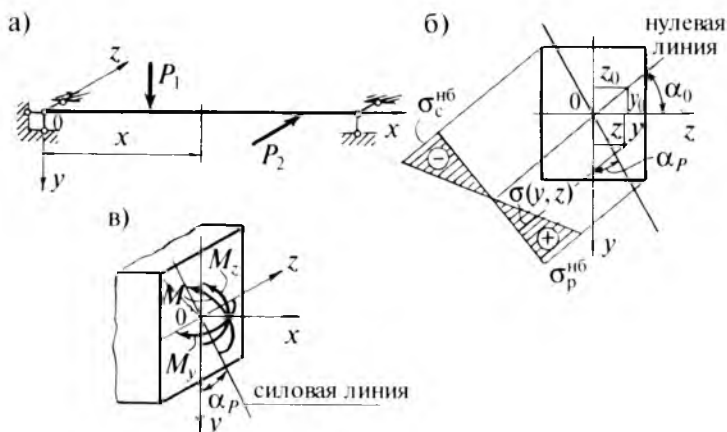


Рис. 12.5

Из (12.4) видно, что при косом изгибе напряжения σ изменяются по координатам y и z по линейному закону.

Положив в (12.4) $\sigma = 0$, получим уравнение нулевой линии:

$$\frac{M_y}{J_y} z_0 + \frac{M_z}{J_z} y_0 = 0, \quad (12.5)$$

где y_0 и z_0 — координаты точек нулевой линии (рис. 12.5, б). Выражение (12.5) является уравнением прямой, проходящей через начало координат.

Если обозначить через α_0 угол между нулевой линией и главной осью Oz , то из уравнения (12.5) найдем

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{y_0}{z_0} = -\frac{J_z}{J_y} \cdot \frac{M_y}{M_z}.$$

Учитывая (12.3), получим соотношение, связывающее между собой углы α_0 и α_p :

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = -\frac{J_z}{J_y} \operatorname{tg} \alpha_p. \quad (12.6)$$

Знак минус в этой формуле указывает на то, что нулевая линия по отношению к силовой линии проходит через две другие четверти осей координат. Отсюда следует, что угол α_0 откладывается от оси Oz в ту же сторону, что и угол α_p от оси Oy (рис. 12.5, б).

На основании гипотезы плоских сечений при деформациях балки ее поперечные сечения поворачиваются вокруг нулевых линий. При этом наибольшие деформации удлинения и укорочения, а следовательно, и напряжения возникают в точках сечения, наиболее удаленных от нулевой линии. Таким образом, для вычисления наибольших напряжений в сечении необходимо подставить в формулу (12.4) координаты точек, наиболее удаленных от нулевой линии. Для сечений типа прямоугольника и двутавра, имеющих две оси симметрии, наибольшие по абсолютной величине напряжения удобно вычислять по формуле

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{|M_y|}{W_y} + \frac{|M_z|}{W_z}, \quad (12.7)$$

где W_y , W_z — моменты сопротивления сечения.

На рис. 12.5, б показан характер эпюры нормальных напряжений для прямоугольного сечения. В этом случае наибольшие растягивающие $\sigma_{\text{р}}^{\text{нб}}$ и сжимающие $\sigma_{\text{с}}^{\text{нб}}$ напряжения возникают в противоположных угловых точках сечения.

Условие прочности при косом изгибе для балок с отмеченным выше типом поперечного сечения имеет вид

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{|M_y|}{W_y} + \frac{|M_z|}{W_z} \leq \gamma_c R, \quad (12.8)$$

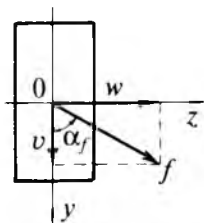
а в случае произвольного сечения

$$\sigma_{\text{нб}} = \left| \frac{M_y}{J_y} z + \frac{M_z}{J_z} y \right| \leq \gamma_c R. \quad (12.9)$$

В этих формулах M_y , M_z — изгибающие моменты в опасном сечении балки; y , z — координаты точки, наиболее удаленной от нулевой линии. При использовании условия (12.9) величины M_y , M_z , y , z необходимо брать с учетом их знаков.

Важно заметить, что при пространственном изгибе положение опасного сечения не всегда является очевидным, так как изгибающие моменты M_y и M_z возникают от действия различных нагрузок и не зависят друг от друга. В этих случаях необходимо проверять прочность в нескольких сечениях балки, например в сечениях, где M_y и M_z имеют наибольшие значения.

Для определения прогибов балки при косом изгибе необходимо действующие на балку нагрузки разложить на составляющие, па-



параллельные главным осям Oy , Oz , и определить по отдельности прогибы v и w по направлениям этих осей (рис. 12.6). Полный прогиб f в произвольном сечении балки и его направление определяются по формулам

$$f = \sqrt{v^2 + w^2}; \quad \operatorname{tg} \alpha_f = \frac{w}{v}, \quad (12.10)$$

Рис. 12.6

где α_f — угол между направлением суммарного прогиба и осью Oy .

Аналогично могут быть найдены углы поворота сечений балки.

Рассмотрим примеры расчета балок при плоском и пространственном косом изгибе.

Пример 12.1. Деревянная консольная балка прямоугольного сечения (рис. 12.7) нагружена на свободном конце силой P , направленной под углом $\alpha_p = 30^\circ$ к оси Oy . Нормативное значение нагрузки $P_n = 3$ кН, коэффициент надежности по нагрузке $\gamma_f = 1,2$. Расчетное сопротивление дерева (сосна) $R = 13$ МПа, модуль упругости $E = 10^4$ МПа, коэффициент условий работы $\gamma_c = 1$. Размеры балки приведены на рис. 12.7, а, б.

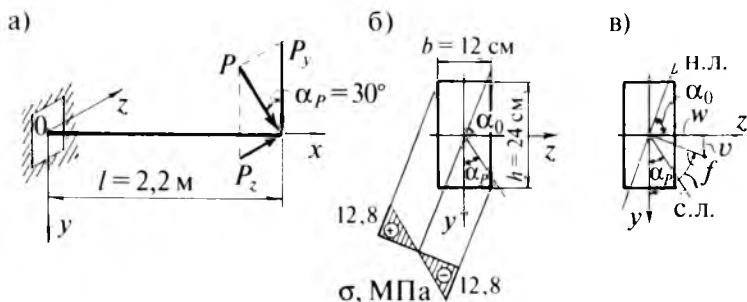


Рис. 12.7

Построим эпюру нормальных напряжений для сечения в заделке, проверим прочность балки и определим прогиб на свободном конце.

Согласно СНиП при расчете на прочность необходимо брать расчетные нагрузки, а при определении перемещений — их нормативные значения.

Определим величину расчетной нагрузки и изгибающие моменты в заделке:

$$P_p = P_n \gamma_f = 3 \cdot 1,2 = 3,6 \text{ кН};$$

$$M_y = -P_p l \sin \alpha_p = -3,6 \cdot 2,2 \cdot \sin 30^\circ = -3,96 \text{ кНм};$$

$$M_z = -P_p l \cos \alpha_p = -3,6 \cdot 2,2 \cos 30^\circ = -6,86 \text{ кНм}.$$

Главные моменты инерции и моменты сопротивления сечения равны

$$J_z = \frac{12 \cdot 24^3}{12} = 13\,824 \text{ см}^4; \quad J_y = \frac{24 \cdot 12^3}{12} = 3456 \text{ см}^4;$$

$$W_z = \frac{13\,824}{12} = 1152 \text{ см}^3; \quad W_y = \frac{3456}{6} = 576 \text{ см}^3.$$

По формуле (12.6) находим положение нулевой линии:

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = -\frac{13\,824}{3456} \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = -2,309; \quad \alpha_0 = -66,6^\circ.$$

По формуле (12.8) проверяем прочность балки:

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{3,96 \cdot 10^2}{576} + \frac{6,86 \cdot 10^2}{1152} = 1,28 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 12,8 \text{ МПа} < 13 \text{ МПа}.$$

Условие прочности выполняется. Эпюра нормальных напряжений для сечения балки в заделке приведена на рис. 12.7, б.

Для определения прогиба свободного конца балки разложим заданную нормативную нагрузку P_n на составляющие $P_y = P_n \cos \alpha_p$ и $P_z = P_n \sin \alpha_p$. Используя формулу для прогиба консольной балки, нагруженной сосредоточенной силой на конце (см. табл. 9.2), найдем составляющие v и w полного прогиба f (рис. 12.7, в):

$$v = \frac{P_y l^3}{3EJ_z} = \frac{P_n l^3 \cos \alpha_p}{3EJ_z}; \quad w = \frac{P_z l^3}{3EJ_y} = \frac{P_n l^3 \sin \alpha_p}{3EJ_y}.$$

Подставив числовые значения величин, входящих в эти формулы, найдем $v = 0,667 \text{ см}$, $w = 1,540 \text{ см}$. По формулам (12.10) определим полный прогиб $f = 1,678 \text{ см}$ и его направление:

$$\operatorname{tg} \alpha_f = \frac{w}{v} = \frac{1,540}{0,667} = 2,309; \quad \alpha_f = 66,6^\circ.$$

Из сравнения этого равенства с (12.6) следует, что $|\alpha_f| = |\alpha_0|$, то есть при плоском косом изгибе полный прогиб f направлен перпендикулярно к нулевой линии и изогнутая ось балки не расположена в силовой плоскости.

Пример 12.2. Стальная двутавровая балка сечением $\text{I } 27a$ (рис. 12.8) нагружена в главных плоскостях инерции Oxy и Oxz со-

средоточенным моментом $M = 60 \text{ кНм}$ и силой $P = 10 \text{ кН}$ (заданы расчетные значения нагрузок). Расчетное сопротивление стали $R = 210 \text{ МПа}$, коэффициент условий работы $\gamma_c = 1$.

Построим эпюру нормальных напряжений для опасного сечения и проверим прочность балки.

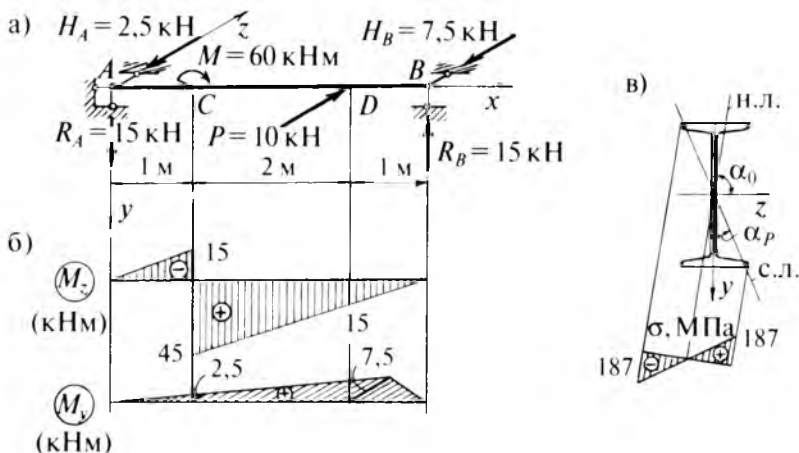


Рис. 12.8

Моменты инерции и моменты сопротивления сечения $\text{I } 27 \text{ а}$ равны: $J_z = 5500 \text{ см}^4$; $J_y = 337 \text{ см}^4$; $W_z = 407 \text{ см}^3$; $W_y = 50 \text{ см}^3$.

На рис. 12.8, б построены эпюры изгибающих моментов M_z и M_y . Наибольшие величины моменты M_z и M_y имеют соответственно в сечениях С и D балки. Поэтому необходимо проверить прочность балки по формуле (12.8) в обоих сечениях.

В сечении С $M_z = 45 \text{ кНм}$, $M_y = 2,5 \text{ кНм}$,

$$\sigma_{\text{ноб}} = \frac{45 \cdot 10^2}{407} + \frac{2,5 \cdot 10^2}{50} = 16 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 160 \text{ МПа} < 210 \text{ МПа}.$$

В сечении D $M_z = 15 \text{ кНм}$, $M_y = 7,5 \text{ кНм}$,

$$\sigma_{\text{ноб}} = \frac{15 \cdot 10^2}{407} + \frac{7,5 \cdot 10^2}{50} = 18,7 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 187 \text{ МПа} < 210 \text{ МПа}.$$

Условие прочности в обоих сечениях выполняется. Более опасным является сечение D. Для построения эпюры напряжений в этом сечении определим по формулам (12.3) и (12.6) положения силовой и нулевой линий:

$$\operatorname{tg} \alpha_p = \frac{7,5}{15} = 0,5, \quad \alpha_p = 26,6^\circ; \quad \operatorname{tg} \alpha_0 = -\frac{5500}{337} \cdot 0,5 = -8,15, \quad \alpha_0 = -83^\circ.$$

Так как $\alpha_p > 0$, то согласно введенному правилу знаков для угла α_p силовая линия проходит через первую и третью четверти осей координат, а нулевая линия — через вторую и четвертую четверти. Эпюра нормальных напряжений для сечения D балки показана на рис. 12.8, в.

12.3. Внецентренное растяжение и сжатие

Многие элементы строительных конструкций (колонны, стойки, опоры) находятся под воздействием сжимающих сил, приложенных не в центре тяжести сечения. На рис. 12.9 показана колонна, на которую опирается балка перекрытия. Как видно, сила действует по отношению к оси колонны с эксцентриситетом e , и таким образом, в произвольном сечении $a—a$ колонны наряду с продольной силой $N = -P$ возникает изгибающий момент, величина которого равна Pe . Внецентренное растяжение (сжатие) стержня представляет такой вид деформирования, при котором равнодействующие внешних сил действуют вдоль прямой, параллельной оси стержня. В дальнейшем будем рассматривать главным образом задачи внецентренного сжатия. При внецентренном растяжении во всех приводимых расчетных формулах следует изменить знак перед силой P на противоположный.

Пусть стержень произвольного поперечного сечения (рис. 12.10) нагружен на торце внецентренно приложенной сжимающей силой P , направленной параллельно оси Ox . Примем положительные

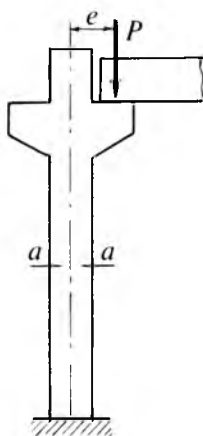


Рис. 12.9

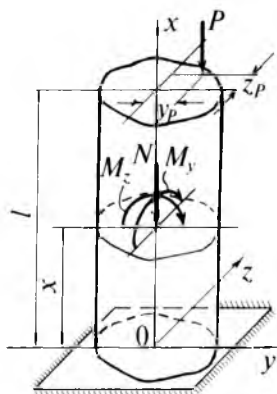


Рис. 12.10

направления главных осей инерции сечения Oy и Oz таким образом, чтобы точка приложения силы P находилась в первой четверти осей координат. Обозначим координаты точки приложения силы P через y_p и z_p .

Внутренние усилия в произвольном сечении стержня равны

$$N = -P; \quad M_y = -Pz_p; \quad M_z = -Py_p. \quad (12.11)$$

Знаки минус у изгибающих моментов обусловлены тем, что в первой четверти осей координат эти моменты вызывают сжатие. Величины внутренних усилий в данном примере не изменяются по длине стержня, и таким образом, распределение напряжений в сечениях, достаточно удаленных от места приложения нагрузки, будет одинаковым.

Подставляя (12.11) в (12.1), получим формулу для нормальных напряжений при внецентренном сжатии:

$$\sigma = -\frac{P}{F} - \frac{Pz_p}{J_y} z - \frac{Py_p}{J_z} y.$$

Эту формулу можно преобразовать к виду

$$\sigma = -\frac{P}{F} \left(1 + \frac{z_p z}{i_y^2} + \frac{y_p y}{i_z^2} \right), \quad (12.12)$$

где i_y, i_z — главные радиусы инерции сечения. При этом

$$i_y^2 = \frac{J_y}{F}; \quad i_z^2 = \frac{J_z}{F}. \quad (12.13)$$

Положив в (12.12) $\sigma = 0$, получим уравнение нулевой линии:

$$1 + \frac{z_p z_0}{i_y^2} + \frac{y_p y_0}{i_z^2} = 0. \quad (12.14)$$

Здесь y_0 и z_0 — координаты точек нулевой линии (рис. 12.11). Уравнение (12.14) является уравнением прямой, не проходящей через центр тяжести сечения. Чтобы провести нулевую линию, найдем точки ее пересечения с осями координат. Полагая в (12.14) последовательно $y_0 = 0$ и $z_0 = 0$, соответственно найдем

$$z_0 = a_z = -\frac{i_y^2}{z_p}; \quad y_0 = a_y = -\frac{i_z^2}{y_p}, \quad (12.15)$$

где a_z и a_y — отрезки, отсекаемые нулевой линией на осях координат (рис. 12.11).



Рис. 12.11

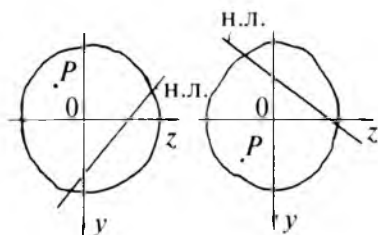


Рис. 12.12

Установим особенности положения нулевой линии при внецентренном сжатии.

1. Из формул (12.15) следует, что a_y и a_z имеют знаки, противоположные знакам соответственно y_p и z_p . Таким образом, нулевая линия проходит через те четверти осей координат, которые не содержат точку приложения силы (рис. 12.12).

2. С приближением точки приложения силы P по прямой к центру тяжести сечения координаты этой точки y_p и z_p уменьшаются. Из (12.15) следует, что при этом абсолютные значения длин отрезков a_y и a_z увеличиваются, то есть нулевая линия удаляется от центра тяжести, оставаясь параллельной самой себе (рис. 12.13). В пределе при $z_p = y_p = 0$ (сила приложена в центре тяжести) нулевая линия удаляется в бесконечность. В этом случае в сечении напряжения будут постоянными и равными $\sigma = -P/F$.

3. Если точка приложения силы P находится на одной из главных осей, нулевая линия параллельна другой оси. Действительно, положив в (12.15), например, $y_p = 0$, получим, что $a_y = \infty$, то есть нулевая линия не пересекает ось Oy (рис. 12.14).

4. Если точка приложения силы перемещается по прямой, не проходящей через центр тяжести, то нулевая линия поворачивается вокруг некоторой точки. Докажем это свойство. Точкам приложения сил P_1 и P_2 , расположенным на осях координат, соответствуют нулевые линии 1-1 и 2-2, параллельные осям (рис. 12.15), которые пересекаются в точке D . Так как эта точка принадлежит двум нулевым линиям, то напряжения в этой точке от одновременно приложенных сил P_1 и P_2 будут равны нулю. Поскольку любую силу P_3 , точка приложения которой расположена на прямой $P_1 P_2$, можно

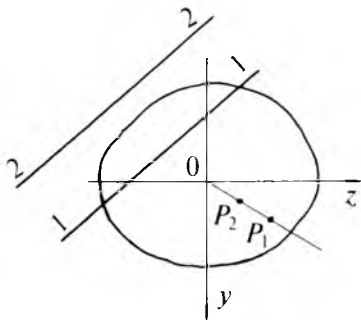


Рис. 12.13

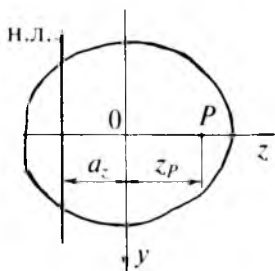


Рис. 12.14

разложить на две параллельные составляющие, приложенные в точках P_1 и P_2 , то отсюда следует, что напряжения в точке D от действия силы P_3 также равны нулю. Таким образом, нулевая линия 3—3, соответствующая силе P_3 , проходит через точку D .

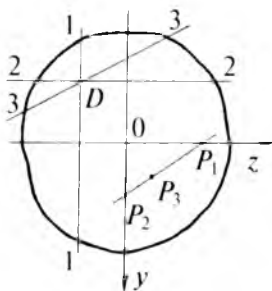


Рис. 12.15

Другими словами, множеству точек P , расположенных на прямой P_1P_2 , соответствует пучок прямых, проходящих, через точку D . Справедливо и обратное утверждение: при вращении нулевой линии вокруг некоторой точки точка приложения силы перемещается по прямой, не проходящей через центр тяжести.

Если нулевая линия пересекает сечение, то она делит его на зоны сжатия и растяжения. Так же как и при косом изгибе, из гипотезы плоских сечений сле-

дует, что напряжения достигают наибольших значений в точках, наиболее удаленных от нулевой линии. Характер эпюры напряжений в этом случае показан на рис. 12.16, а.

Если нулевая линия расположена вне сечения, то во всех точках сечения напряжения будут одного знака (рис. 12.16, б).

Пример 12.3. Построим эпюру нормальных напряжений в произвольном сечении внецентренно сжатой колонны прямоугольного сечения с размерами $b \times h$ (рис. 12.17). Квадраты радиусов инерции сечения согласно (12.22) равны

$$i_z^2 = \frac{bh^3}{12bh} = \frac{h^2}{12}; \quad i_y^2 = \frac{b^2}{12}.$$

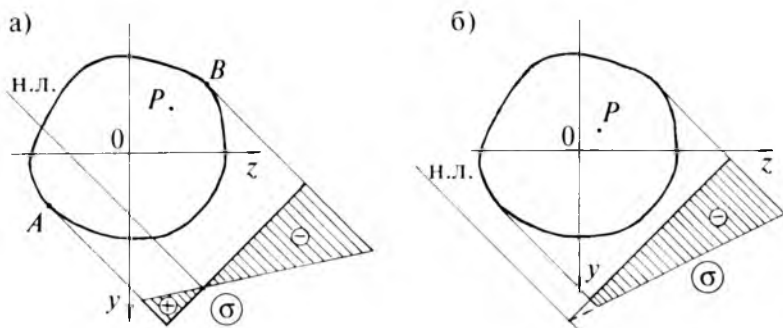


Рис. 12.16

Отрезки, отсекаемые нулевой линией на осях координат, определяются по формулам (12.15):

$$a_z = -\frac{4b^2}{12b} = -\frac{b}{3}; \quad a_y = -\frac{h}{3}.$$

Подставляя последовательно в (12.12) координаты наиболее удаленных от нулевой линии точек C и B (рис. 12.18) $y_C = -h/2$; $z_C = -b/2$, $y_B = h/2$, $z_B = b/2$, найдем

$$\sigma_C = -\frac{P}{F} \left(1 - \frac{\frac{b}{4} \cdot \frac{b}{2}}{\frac{b^2}{12}} - \frac{\frac{h}{4} \cdot \frac{h}{2}}{\frac{h^2}{12}} \right) = \frac{2P}{F};$$

$$\sigma_B = -\frac{P}{F} \left(1 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \right) = -\frac{4P}{F}.$$

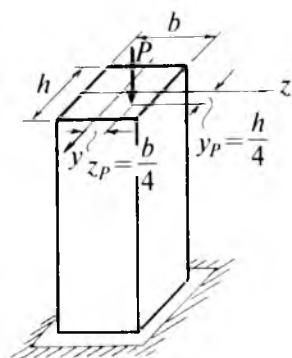


Рис. 12.17

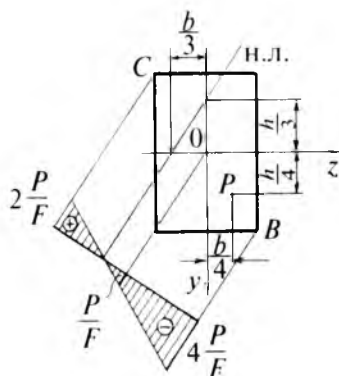


Рис. 12.18

Эпюра σ показана на рис. 12.18. Наибольшие сжимающие напряжения по абсолютной величине в четыре раза превосходят значения напряжений, которые были бы в случае центрального приложения силы. Кроме того, в сечении появились значительные растягивающие напряжения. Заметим, что из (12.12) следует, что в центре тяжести ($y = z = 0$) напряжения равны $\sigma = -P/F$.

Пример 12.4. Полоса с вырезом нагружена растягивающей силой P (рис. 12.19, а). Сравним напряжения в сечении AB , достаточно удаленном от торца и места выреза, с напряжениями в сечении CD в месте выреза.

В сечении AB (рис. 12.19, б) сила P вызывает центральное растяжение и напряжения равны $\sigma = P/F = P/bh$.

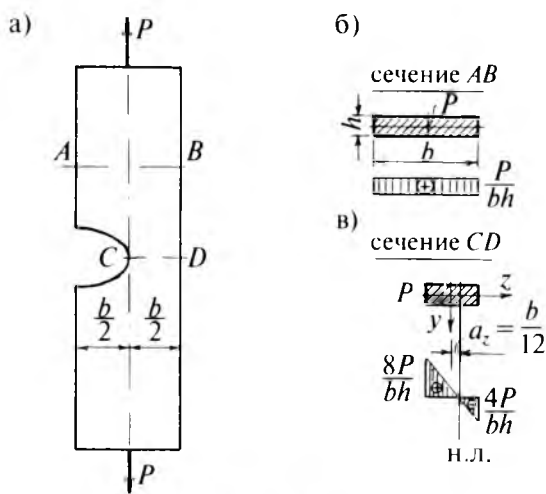


Рис. 12.19

В сечении CD (рис. 12.19, в) линия действия силы P не проходит через центр тяжести сечения, и поэтому возникает внецентренное растяжение. Изменив знак в формуле (12.12) на противоположный и приняв $y_p = 0$, получим для этого сечения

$$\sigma = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{z_p z}{i_y^2} \right).$$

Принимая

$$F = \frac{bh}{2}; \quad z_p = -\frac{b}{4}; \quad i_y^2 = \frac{b^2}{48},$$

найдем

$$\sigma = \frac{2P}{bh} \left(1 - \frac{12z}{b} \right). \quad (12.16)$$

Нулевая линия в сечении CD параллельна оси Oy и пересекает ось Oz на расстоянии $a_z = -i_y^2/z_p = b/12$. В наиболее удаленных от нулевой линии точках сечения $C(z = -b/4)$ и $D(z = b/4)$ напряжения согласно (12.16) равны

$$\sigma_C = \frac{8P}{bh}; \quad \sigma_D = -\frac{4P}{bh}.$$

Эпюры нормальных напряжений для сечений AB и CD показаны на рис. 12.19, б, в.

Таким образом, несмотря на то что сечение CD имеет площадь в два раза меньшую, чем сечение AB , за счет внецентренного приложения силы растягивающие напряжения в ослабленном сечении возрастают не в два, а в восемь раз. Кроме того, в этом сечении появляются значительные по величине сжимающие напряжения.

Следует заметить, что в приведенном расчете не учитываются дополнительные местные напряжения, возникающие вблизи точки C из-за наличия выточки. Эти напряжения зависят от радиуса выточки (с уменьшением радиуса они увеличиваются) и могут значительно превысить по величине найденное значение $\sigma_C = 8P/bh$. При этом характер эпюры напряжений вблизи точки C будет существенно отличаться от линейного. Определение местных напряжений (концентрация напряжений) рассматривается в главе 18.

Многие строительные материалы (бетон, кирпичная кладка и др.) плохо сопротивляются растяжению. Их прочность на растяжение во много раз меньше, чем на сжатие. Поэтому в элементах конструкций из таких материалов нежелательно появление растягивающих напряжений. Чтобы это условие выполнялось, необходимо, чтобы нулевая линия находилась вне сечения. В противном случае нулевая линия пересечет сечение и в нем появятся растягивающие напряжения. Если нулевая линия является касательной к контуру сечения, то соответствующее положение точки приложения силы является предельным. В соответствии со свойством 2 нулевой линии, если точка приложения силы будет приближаться к центру тяжести сечения, нулевая линия будет удаляться от него. Геометрическое место предельных точек, соответствующих различным касательным к контуру сечения, является границей ядра сечения. Ядром сечения называется выпуклая область вокруг центра тяжести, об-

ладающая следующим свойством: если точка приложения силы находится внутри или на границе этой области, то во всех точках сечения напряжения имеют один знак. Ядро сечения является выпуклой фигурой, поскольку нулевые линии должны касаться огибающей контура сечения и не пересекать его.

Через точку A (рис. 12.20) можно провести бесчисленное множество касательных (нулевых линий); при этом только касательная AC является касательной к огибающей, и ей должна соответствовать определенная точка контура ядра сечения. В то же время, например, нельзя провести касательную к участку AB контура сечения, поскольку она пересекает сечение.

Построим ядро сечения для прямоугольника (рис. 12.21). Для касательной 1—1 $a_z = b/2$; $a_y = \infty$. Из (12.15) находим для точки 1, соответствующей этой касательной, $z_p = -i_y^2/a_z = -b/6$; $y_p = 0$. Для касательной 2—2 $a_y = h/2$; $a_z = \infty$, и координаты точки 2 будут равны $y_p = -h/6$; $z_p = 0$. Согласно свойству 4 нулевой линии точки приложения силы, соответствующие различным касательным к правой нижней угловой точке сечения, расположены на прямой 1—2. Положение точек 3 и 4 определяется из условий симметрии. Таким образом, ядро сечения для прямоугольника представляет собой ромб с диагоналями $b/3$ и $h/3$.

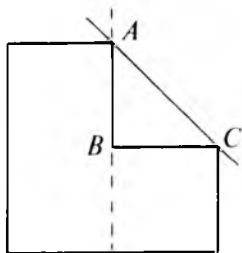


Рис. 12.20

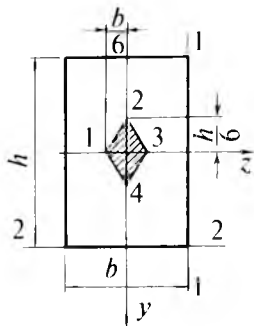


Рис. 12.21

Чтобы построить ядро сечения для круга, достаточно провести одну касательную (рис. 12.22). При этом $a_z = R$; $a_y = \infty$.

Учитывая, что для круга $i_y^2 = J_y/F = R^2/4$, из (12.15) получим

$$z_p = -\frac{i_y^2}{a_z} = \frac{R}{4}; \quad y_p = 0.$$

Таким образом, ядро сечения для круга представляет собой круг с радиусом $R/4$.

На рис. 12.23, а, б показаны ядра сечения для двутавра и швеллера. Наличие четырех угловых точек ядра сечения в каждом из этих примеров обусловлено тем, что огибающая контура и у двутавра и у швеллера является прямоугольником.

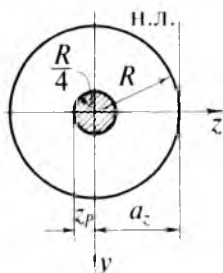


Рис 12.22

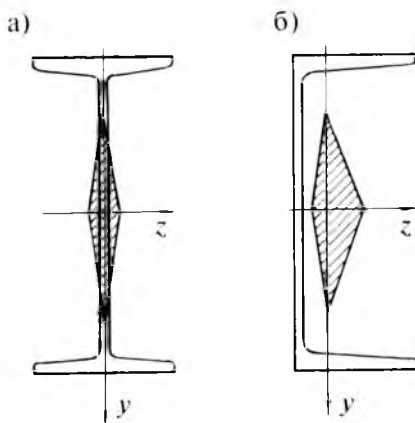


Рис. 12.23

12.4. Растяжение и сжатие с изгибом

На практике часто встречаются случаи, когда на стержень действуют одновременно поперечные и продольные нагрузки, причем последние могут быть приложены вне-центрично. На рис. 12.24 показан именно такой случай.

Определим внутренние усилия в сечении в заделке:

$$N = P; \quad M_y = q \frac{l^2}{2} - P \frac{b}{2}; \quad M_z = P \frac{h}{2}.$$

Нормальные напряжения в таких задачах вычисляются по формуле (12.1):

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_y}{J_y} z + \frac{M_z}{J_z} y, \quad (12.17)$$

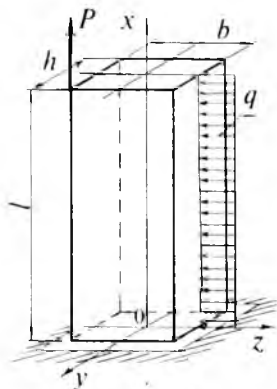


Рис. 12.24

а уравнение нулевой линии получается из условия $\sigma = 0$ и имеет вид

$$\frac{N}{F} + \frac{M_y}{J_y} z_0 + \frac{M_z}{J_z} y_0 = 0. \quad (12.18)$$

Отрезки, которые отсекает нулевая линия на осях координат, могут быть найдены из (12.18), если положить последовательно $y_0 = 0$ и $z_0 = 0$. Тогда получим

$$a_z = -\frac{N}{M_y} \cdot \frac{J_y}{F}; \quad a_y = -\frac{N}{M_z} \cdot \frac{J_z}{F}.$$

Дальнейшее решение задачи строится по аналогии с внецентренным сжатием. Определяя координаты наиболее удаленных от нулевой линии точек сечения, по формуле (12.17) находим наибольшие напряжения. Эпюра σ может быть однозначной или разноточной.

Пример 12.5. Построим эпюру нормальных напряжений в опасном сечении балки $\text{I } 30$ ($F = 46,5 \text{ см}^2$, $W_z = 472 \text{ см}^3$), показанной на рис. 12.25. Приложенные поперечные нагрузки P_1 и P_2 вызывают изгибающий момент M_z , а внецентренно приложенная сила P_3 — продольную силу $N = P_3$ и момент $M_y = P_3 e$. На рис. 12.25, а показаны эпюры N и M_z . Опасным является сечение в заделке. Напряжения в этом сечении вычисляются по формуле (12.17) при $M_y = 0$:

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_M = \frac{N}{F} + \frac{M_z^{\text{нб}}}{J_z} y.$$

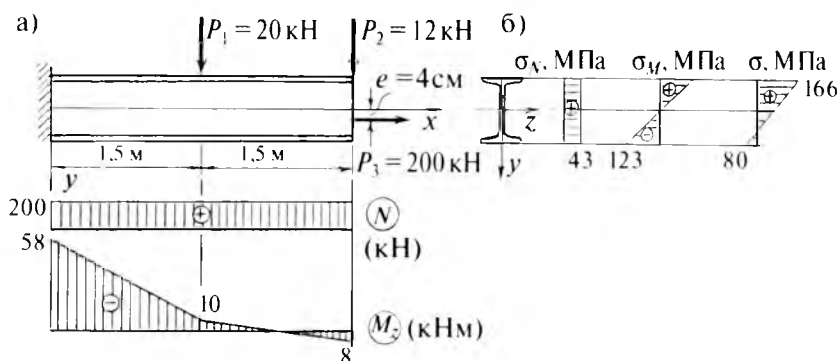


Рис. 12.25

Наибольшие напряжения в сечении возникают в крайних волокнах. При этом в верхних волокнах напряжения суммируются:

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_z^{нб}}{W_z} = \frac{200 \cdot 10^2}{46,5} + \frac{58 \cdot 10^2}{472} = 16,6 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 166 \text{ МПа},$$

а в нижних — вычитаются:

$$\sigma = \frac{N}{F} - \frac{M_z^{нб}}{W_z} = -80 \text{ МПа}.$$

На рис. 12.25, б показаны эпюры напряжений от продольной силы и изгибающего момента по отдельности, также суммарная эпюра.

Заметим, что во всех предыдущих решениях мы пользовались принципом независимости действия сил, определяя внутренние усилия для недеформированного состояния стержня. Строго говоря, это возможно лишь при малых деформациях. В тех случаях, когда деформации велики, принцип независимости действия сил неприменим. Так, например, на рис. 12.26 показан гибкий стержень, прогибы которого от поперечной нагрузки достаточно велики и сила P создает в заделке дополнительный момент, равный $Pv_{нб}$. Таким образом, момент, создаваемый силой P , зависит от величины поперечной нагрузки q , влияющей на величину прогиба. Подобные задачи будут рассмотрены в главе 13.

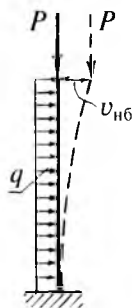


Рис. 12.26

12.5. Теории прочности

Одной из основных задач сопротивления материалов и теории упругости является оценка прочности конструкций и их элементов. Для решения этой задачи необходимо знать напряженное состояние в каждой точке тела, которое, как известно (см. гл. 4), может быть сведено к трем главным напряжениям $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (рис. 12.27). При этом обычно принимается $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

Простейшие экспериментальные исследования материалов, проводимые в лабораториях, дают возможность определить опасные (предельные) напряжения

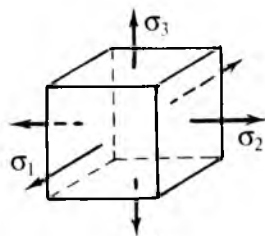


Рис. 12.27

при одноосном растяжении σ_0^p или сжатии σ_0^c . Напомним, что для пластичных материалов опасным напряжением считается предел текучести σ_p , а для хрупких — предел прочности σ_b .

Если вблизи некоторой точки тела отличным от нуля является только одно главное напряжение, то опасное состояние в данной точке наступит при выполнении равенства

$$\sigma_1 = \sigma_0^p, \quad (12.19)$$

или

$$|\sigma_3| = \sigma_0^c. \quad (12.20)$$

Первая из этих формул соответствует случаю одноосного растяжения, вторая — одноосного сжатия.

Значительно более сложной является оценка прочности, когда два или три главных напряжения отличны от нуля. Поскольку соотношений между главными напряжениями может быть бесчисленное множество, не представляется возможным проведение соответствующих экспериментов, а многие опыты просто технически невозможно осуществить.

Суть любой теории прочности заключается в построении равенства

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_0, \quad (12.21)$$

соответствующего наступлению опасного состояния. В (12.21) функция $F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ представляет собой некоторую комбинацию главных напряжений, а опасное напряжение σ_0 определяется из опытов на одноосное растяжение или сжатие. В различных теориях прочности вид функции F устанавливается на основе тех или иных физических гипотез о причинах разрушения.

Формулы (12.19)—(12.21) дают условие разрушения для хрупких материалов или условие появления пластических деформаций для пластичных материалов. При расчетах на прочность (см. § 3.7) для обеспечения запаса прочности сравнение действующих в теле напряжений проводится не с опасными напряжениями σ_0 , а с некоторыми напряжениями, меньшими σ_0 . В соответствии с методом расчета по допускаемым напряжениям это $[\sigma]$, а по предельным состояниям — $\gamma_c R$. Таким образом, при расчетах на прочность вместо формулы (12.21) пользуются *условиями прочности*:

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \leq [\sigma], \quad (12.22)$$

или

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \leq \gamma_c R. \quad (12.23)$$

Для проверки разрабатываемых теорий прочности проводят ограниченное количество опытов, в которых имеется возможность изменять соотношения между главными напряжениями.

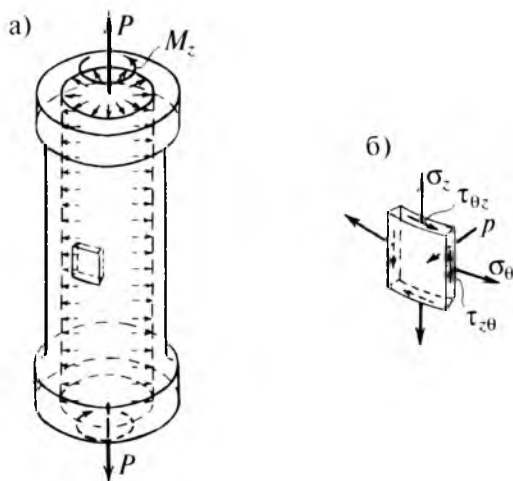


Рис. 12.28

Одним из распространенных опытов, при котором осуществляется сложное напряженное состояние, является испытание тонких цилиндрических трубок при одновременном действии внутреннего давления, растяжения и кручения (рис. 12.28, а). Изменяя значения давления p , силы P и крутящего момента $M_k = M_z$, можно добиться изменения напряжений σ_z , σ_θ и $\tau_{z\theta}$ (рис. 12.28, б). Здесь используется цилиндрическая система координат r, θ, z . Поскольку, как показывают расчеты и непосредственные измерения, напряжения $\sigma_r \ll \sigma_\theta, \sigma_z$, можно считать, что в данном опыте материал находится в условиях двухосного напряженного состояния. Таким образом, увеличивая внешние нагрузки, можно добиться разрушения при различных соотношениях между величинами главных напряжений.

Проверку теорий прочности для многих строительных материалов (камень, кирпич, бетон) осуществляют при двухосном или трехосном сжатии образцов кубической формы.

В настоящее время имеется большое число различных теорий прочности, каждая из которых применима к определенным материалам (или группам материалов) при определенных условиях их работы.

Ниже рассматриваются некоторые классические теории прочности.

Первая теория прочности (*теория наибольших нормальных напряжений*). В основу данной теории положена гипотеза о том, что разрушение (или переход в пластическое состояние) происходит при достижении наибольшим из главных напряжений опасного значения σ_0^c . Если материал имеет различные предельные напряжения на растяжение и сжатие, то опасное состояние наступит, когда

$$\sigma_1 = \sigma_0^p; \quad |\sigma_3| = \sigma_0^c. \quad (12.24)$$

Условия прочности по этой теории имеют вид

$$\sigma_1 \leq \gamma_c R_p; \quad |\sigma_3| \leq \gamma_c R_c, \quad (12.25)$$

где R_p и R_c — расчетные сопротивления материала при растяжении и сжатии; γ_c — коэффициент условий работы.

Очевидным недостатком первой теории прочности является то, что в ней учитывается влияние на прочность только одного из трех главных напряжений. Эта теория подтверждается экспериментально только для хрупких материалов и при условии, что одно из главных напряжений значительно превосходит по абсолютной величине два других главных напряжения.

Вторая теория прочности (*теория наибольших линейных деформаций*). Эта теория основана на предположении, что опасное состояние наступает, когда наибольшая деформация растяжения или сжатия достигает предельного значения ϵ_0^p или ϵ_0^c , определенного из опытов на одноосное растяжение (сжатие). Этой гипотезе соответствуют условия

$$\epsilon_1 = \epsilon_0^p; \quad |\epsilon_3| = \epsilon_0^c. \quad (12.26)$$

Предположив, что вплоть до наступления опасного состояния ($\sigma = \sigma_0^p$ или $|\sigma| = \sigma_0^c$) справедлив закон Гука, величины предельных деформаций при одноосном растяжении и сжатии можно определить по формулам $\epsilon_0^p = \sigma_0^p/E$ и $\epsilon_0^c = \sigma_0^c/E$. Приравняв эти величины главным деформациям ϵ_1 и $|\epsilon_3|$ из закона Гука (6.2) при трехосном напряженном состоянии, можно записать условия (12.26) в развернутом виде. В соответствии с этим условия прочности по второй теории будут иметь вид

$$\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq \gamma_c R_p; \quad |\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)| \leq \gamma_c R_c.$$

В отличие от первой теории здесь учитывается влияние на прочность всех главных напряжений. Эта теория прочности подтверждается экспериментально при трехосном напряженном состоянии

только для хрупких материалов, когда все три главных напряжения являются сжимающими.

Третья теория прочности (*теория наибольших касательных напряжений*). Согласно этой теории предполагается, что причиной разрушения или перехода в пластическое состояние являются наибольшие касательные напряжения. Исходя из этой гипотезы получим условие наступления опасного состояния

$$\tau_{\text{нб}} = \tau_0.$$

Эта формула называется *критерием пластичности Треска—Сен-Венана* и используется в теории пластичности.

Опасное напряжение τ_0 , определенное из опытов на одноосное растяжение (сжатие), равно $\sigma_0/2$ (см. § 3.2). С другой стороны, известно, что наибольшие касательные напряжения при сложном напряженном состоянии действуют на площадках, наклоненных под углами 45° к главным площадкам, и равны

$$\tau_{\text{нб}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

Таким образом, приводя условие наступления опасного состояния к виду (12.21), получим

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_0. \quad (12.28)$$

Условие прочности по теории наибольших касательных напряжений имеет вид

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq \gamma_c R. \quad (12.29)$$

Данная теория хорошо подтверждается в опытах с пластичными материалами, одинаково сопротивляющимися растяжению и сжатию, особенно при двухосном напряженном состоянии для случаев, когда $\sigma_1 \geq \sigma_2 > 0$, $\sigma_3 = 0$ и $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 < 0$. Недостатком теории является то, что в ней не учитывается влияние на прочность главного напряжения σ_2 . Эта теория подтверждается, в частности, при трехосном напряженном состоянии, когда $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, так как в этом случае касательные напряжения равны нулю.

Четвертая теория прочности (*энергетическая*). Как было отмечено, разрушение хрупких материалов и переход в пластическое состояние пластичных материалов завершают стадию упругой работы.

В основу энергетической теории прочности положена гипотеза о том, что разрушение (или переход в пластическое состояние) наступает, когда удельная потенциальная энергия формоизмене-

ния U^Φ при работе материала в упругой стадии (см. § 6.5) достигает предельного значения U_0^Φ , соответствующего одноосному напряженному состоянию:

$$U^\Phi = U_0^\Phi, \quad (12.30)$$

где согласно (6.31)

$$U^\Phi = \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]; \quad U_0^\Phi = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_0^2.$$

С помощью этих равенств условие наступления опасного состояния (12.30) преобразуется к виду

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sigma_0. \quad (12.31)$$

Это условие носит название *критерия пластичности Губера — Мизеса* и, так же как и критерий Треска — Сен-Венана, используется в теории пластичности.

Условие прочности по энергетической теории имеет следующий вид:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \leq \gamma_c R. \quad (12.32)$$

В этой теории учитывается влияние на прочность всех трех главных напряжений, и она хорошо подтверждается экспериментально для пластичных материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию. Так же как и теория наибольших касательных напряжений, эта теория подтверждается при трехосном напряженном состоянии, когда $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, так как в этом случае изменения формы не происходит.

Теория прочности Мора. Эта теория применяется для материалов, неодинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию. Условием возникновения опасного состояния является равенство

$$\sigma_1 - k\sigma_3 = \sigma_0^p, \quad (12.33)$$

где $k = \sigma_0^p / \sigma_0^c$ — коэффициент, учитывающий различное сопротивление материала растяжению и сжатию.

Условие прочности по теории Мора имеет вид

$$\sigma_1 - k\sigma_3 \leq \gamma_c R_p. \quad (12.34)$$

При $\sigma_0^p = \sigma_0^c$ теория Мора совпадает с теорией наибольших касательных напряжений.

Теория прочности Мора хорошо подтверждается экспериментально как для пластичных, так и для хрупких материалов, особенно если $\sigma_1 > 0$, а $\sigma_3 < 0$.

Пример 12.6. Проверим прочность стальной балки (І 30), изображенной на рис. 12.29, а, при $\gamma_c = 1$, $R = 280$ МПа. Нагрузки будем считать расчетными.

Из анализа эпюр внутренних усилий можно сделать вывод, что опасным сечением является сечение над левой опорой. В этом сечении $M_z = -100$ кНм, $Q_y = -200$ кН.

Наиболее опасными в рассматриваемом сечении являются точки в стенке на уровне ее сопряжения с полкой (уровень $B-B$ на рис. 12.29, б). Для двутавра І 30 из сортамента находим: $h = 30$ см; $b = 13,5$ см; $d = 0,65$ см; $t = 1,02$ см; $J_z = 7080$ см⁴.

Нормальное и касательное напряжения на уровне $B-B$ ($y = -13,98$ см) равны

$$\sigma_x = \frac{M_z}{J_z} \left(\frac{h}{2} - t \right) = \frac{100 \cdot 10^2}{7080} \cdot 13,98 = 19,75 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 197,5 \text{ МПа};$$

$$\tau_{yx} = \frac{Q_y S_z^{\text{II}}}{J_z d} = -\frac{200 \cdot 199,5}{7080 \cdot 0,65} = -8,67 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = -86,7 \text{ МПа}.$$

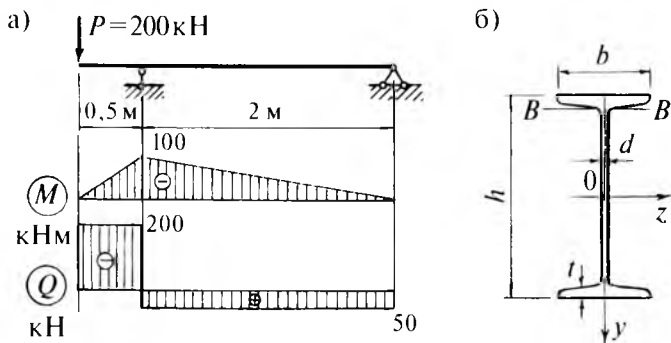


Рис. 12.29

В последнем равенстве S_z^{II} — статический момент площади сечения полки двутавра, который равен

$$S_z^{\text{II}} = bt \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) = 13,5 \cdot 1,02 \left(\frac{30}{2} - \frac{1,02}{2} \right) = 199,5 \text{ см}^3.$$

В рассматриваемом случае одно из главных напряжений равно нулю, а два других вычисляются по формуле (4.27):

$$\sigma = \frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2} \right)^2 + \tau_{yx}^2}. \quad (12.35)$$

Подставив сюда $\sigma_x = 197,5$ МПа, $\tau_{yx} = -86,7$ МПа, найдем два главных напряжения, которые равны $\sigma' = 230,1$ МПа и $\sigma'' = -32,7$ МПа. Учитывая условие $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, получим $\sigma_1 = 230,1$ МПа, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -32,7$ МПа.

Поскольку материал балки является пластичным и одинаково сопротивляется растяжению и сжатию, для проверки прочности можно воспользоваться третьей или четвертой теориями прочности.

По третьей теории прочности (12.29) получим

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 262,8 \text{ МПа} < \gamma_c R = 280 \text{ МПа}.$$

По четвертой теории прочности (12.32) получим

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_3} = 248 \text{ МПа} < 280 \text{ МПа}.$$

Условия прочности выполняются.

Обе теории в данном случае дают близкие результаты. Можно считать, что прочность балки обеспечена.

Пример 12.7. Используя третью и четвертую теории прочности и метод расчета по допускаемым напряжениям, подберем сечение круглого стержня AB (рис. 12.30), принимая $[\sigma] = 160$ МПа.

Опасным сечением стержня является сечение в заделке. В этом сечении изгибающий и крутящий моменты соответственно равны (рис. 12.30, а):

$$M_z = -Pl = -10 \text{ кНм}; \quad M_k = -Pa = -4 \text{ кНм}.$$

Нормальные напряжения от изгиба достигают наибольших по абсолютной величине значений в точках C и E сечения (рис. 12.30, б) и вычисляются по формуле

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{M_z}{W_z} = \frac{32 Pl}{\pi D^3}. \quad (12.36)$$

Касательные напряжения от изгиба в точках C и E равны нулю.

Касательные напряжения от кручения достигают своих наибольших значений вблизи контура сечения, в том числе в точках C и E , и вычисляются по формуле

$$\tau_{\text{нб}} = \frac{M_k}{W_p} = \frac{16 Pa}{\pi D^3}. \quad (12.37)$$

Таким образом, точки C и E в сечении B стержня являются наиболее опасными. Напряженное состояние в этих точках является двухосным. При этом по формулам (12.35) после подстановки в них (12.36) и (12.37) для главных напряжений получим

$$\sigma_1 = \frac{16P}{\pi D^3} (l + \sqrt{l^2 + a^2}); \quad \sigma_3 = \frac{16P}{\pi D^3} (l - \sqrt{l^2 + a^2}).$$

Здесь, как и в примере 12.6, $\sigma_2 = 0$.

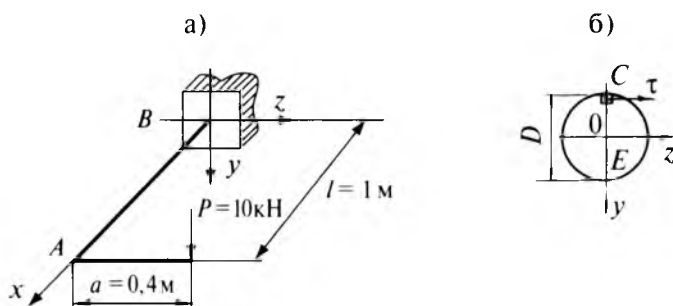


Рис. 12.30

Используя третью теорию прочности, получим

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{32P}{\pi D^3} \sqrt{l^2 + a^2} \leq [\sigma].$$

Отсюда найдем требуемое значение диаметра стержня:

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{32P\sqrt{l^2 + a^2}}{\pi[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{3446 \cdot 10}{\pi \cdot 160 \cdot 10^{-1}}} = 8,82 \text{ см.}$$

Согласно четвертой теории прочности получим

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_3} = \frac{32P}{\pi D^3} \sqrt{l^2 + \frac{3}{4}a^2} \leq [\sigma].$$

Отсюда находим $D = 8,76 \text{ см.}$

Из двух найденных значений диаметра принимаем $D = 89 \text{ мм.}$

ГЛАВА 13

УСТОЙЧИВОСТЬ И ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ СТЕРЖНЕЙ

13.1. Понятие об устойчивости

Существуют три вида равновесия тел: устойчивое, безразличное и неустойчивое. *Устойчивым* называется такое равновесие, при котором тело после малого отклонения от исходного положения возвращается в это положение при устранении воздействия, вызывающего отклонение; *безразличным* — когда тело после отклонения остается в равновесии и в новом положении; *неустойчивым* — когда тело при малом отклонении не возвращается в исходное положение, а удаляется от него.

В качестве примера рассмотрим равновесные положения тяжелого шарика для трех случаев, изображенных на рис. 13.1. Равновесие шарика, находящегося на дне вогнутой сферы (рис. 13.1, а), является устойчивым, на плоскости (рис. 13.1, б) — безразличным, на вершине выпуклой сферы (рис. 13.1, в) — неустойчивым.

Если слегка отклонить шарик от положения равновесия и предоставить его самому себе, то в первом случае он после нескольких колебаний возвратится в исходное положение. Частота колебаний шарика по отношению к исходному устойчивому положению зависит от кривизны поверхности сферы. С уменьшением кривизны частота уменьшается. Во втором случае любое положение шарика является равновесным. В третьем случае при малейшем отклонении шарик будет удаляться от исходного положения.

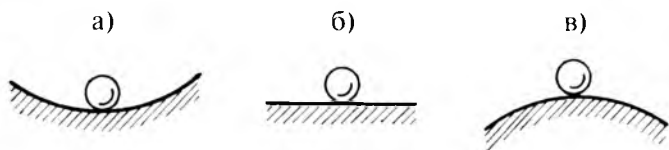


Рис. 13.1

Рассмотренный пример относится к задачам *устойчивости положения* абсолютно твердого тела. В механике деформируемого твердого тела рассматриваются задачи *устойчивости элементов*

конструкций при их деформировании. Эти задачи отличаются от задач устойчивости положения значительно большей сложностью.

В настоящей главе мы ограничимся рассмотрением задач устойчивости центрально сжатых прямых стержней.

Рассмотрим равновесие идеально прямого гибкого упругого стержня, находящегося под действием центрально приложенной к верхнему сечению сжимающей силы P , сохраняющей в процессе нагружения вертикальное положение (рис. 13.2). В зависимости от величины силы стержень может иметь прямолинейную или искривленную форму равновесия. Пока величина силы P меньше некоторого критического значения $P_{кр}$, сохраняется первоначальная прямолинейная форма равновесия стержня (рис. 13.2, а).

Если верхний конец стержня немного отклонить, а затем отпустить, то после нескольких колебаний стержень возвратится в первоначальное прямолинейное состояние. Таким образом, *при $P < P_{кр}$ прямолинейная форма равновесия стержня является устойчивой*. Частота малых колебаний стержня по отношению к исходной прямолинейной форме равновесия зависит от величины сжимающей силы P . При возрастании силы частота уменьшается. Когда величина силы достигнет критического значения, частота колебаний обратится в нуль и стержень придет в состояние безразличного равновесия. Если теперь слегка отклонить стержень от первоначального прямолинейного состояния и затем отпустить, то он останется в изогнутом состоянии (рис. 13.2, б). Таким образом, *при $P = P_{кр}$ прямолинейная форма равновесия становится неустойчивой*. Происходит раздвоение (бифуркация) форм равновесия, то есть наряду с прямолинейной возможно существование смежной, слегка искривленной формы равновесия.

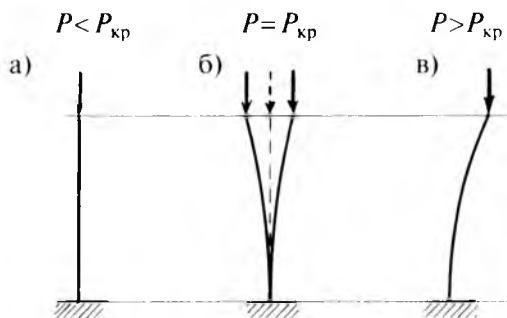


Рис. 13.2

Наименьшая величина нагрузки (в данном случае сжимающей силы), при которой первоначальная форма равновесия становится неустойчивой, называется критической нагрузкой.

Приложение к стержню силы, превышающей критическое значение, приводит к потере устойчивости первоначальной прямолинейной формы равновесия, и стержень изгибается. Это явление называется *продольным изгибом*.

При дальнейшем, даже самом незначительном, увеличении сжимающей силы сверх критического значения (рис. 13.2, в) происходит резкое нарастание прогибов и возникновение весьма значительных дополнительных напряжений изгиба.

Опасность потери устойчивости особенно велика для тонкостенных элементов конструкций типа стержней, пластин и оболочек.

На рис. 13.3 приведены примеры потери устойчивости с образованием смежных форм равновесия. Рама, в стойках которой возникает только центральное сжатие, при потере устойчивости изгибается, и узлы рамы смещаются по горизонтали (рис. 13.3, а). Круглая труба, находящаяся под действием равномерного внешнего давления, при потере устойчивости приобретает смежную (овальную) форму равновесия (рис. 13.3, б). Тонкая полоса, работающая на изгиб в вертикальной плоскости, при достижении силой критического значения теряет устойчивость *плоской формы изгиба* и начинает дополнительно испытывать изгиб в горизонтальной плоскости и кручение (рис. 13.3, в).

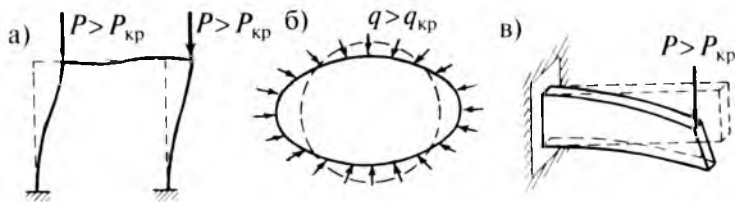


Рис. 13.3

Понятие потери устойчивости не следует отождествлять с понятием потери прочности. Так, например, если в гибком стержне, нагруженном сжимающей силой, превосходящей по величине ее критическое значение, возникают только упругие деформации, то после разгрузки восстанавливается первоначальная прямолинейная форма стержня. Разрушение стержня в результате потери устойчивости в этом случае не произойдет. Однако в реальных кон-

струкциях критическое состояние недопустимо, поскольку оно может привести к разрушению конструкции или к появлению недопустимо больших деформаций. При расчете на устойчивость безопасность сооружения обеспечивается введением коэффициента запаса устойчивости.

13.2. Формула Эйлера для критической силы

Определим критическую силу для центрально сжатого стержня, шарнирно опертого по концам (рис. 13.4). При небольших значениях силы P ось стержня остается прямой и в его сечениях возникают напряжения центрального сжатия $\sigma = P/F$. При критическом значении силы $P = P_{кр}$ становится возможной искривленная форма равновесия стержня. Возникает продольный изгиб. Изгибающий момент в произвольном сечении x стержня равен

$$M(x) = Pv(x). \quad (13.1)$$

Важно заметить, что изгибающий момент определяется для деформированного состояния стержня.

Если предположить, что напряжения изгиба, возникающие в поперечных сечениях стержня от действия критической силы, не превосходят предел пропорциональности материала $\sigma_{пл}$ и прогибы стержня малы, то можно воспользоваться приближенным дифференциальным уравнением изогнутой оси стержня (см. § 9.2)

$$EJv'' = -M = -Pv. \quad (13.2)$$

Введя обозначение

$$k^2 = \frac{P}{EJ}, \quad (13.3)$$

получим вместо (13.2) следующее уравнение:

$$v'' + k^2v = 0. \quad (13.4)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$v = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx. \quad (13.5)$$

Это решение содержит три неизвестных: постоянные интегрирования C_1 , C_2 и параметр k , так как величина критической силы также неизвестна. Для определения этих трех величин имеются



Рис. 13.4

только два граничных условия: $v(0) = 0$, $v(l) = 0$. Из первого граничного условия следует, что $C_2 = 0$, а из второго получим

$$C_1 \sin kl = 0. \quad (13.6)$$

Из этого равенства следует, что либо $C_1 = 0$, либо $\sin kl = 0$. В случае $C_1 = 0$ прогибы во всех сечениях стержня равны нулю, что противоречит исходному предположению задачи. Во втором случае $kl = n\pi$, где n — произвольное целое число. С учетом этого по формулам (13.3) и (13.5) получим

$$P^{(n)} = \frac{n^2 \pi^2 EJ}{l^2}; \quad (13.7)$$

$$v^{(n)} = C_1^{(n)} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (13.8)$$

Рассмотренная задача является задачей на собственные значения. Найденные числа $k = n\pi/l$ называются *собственными числами*, а соответствующие им функции $\sin \frac{n\pi x}{l}$ — *собственными функциями*.

Как видно из (13.7), в зависимости от числа n сжимающая сила $P^{(n)}$, при которой стержень находится в изогнутом состоянии, теоретически может принимать целый ряд значений. При этом согласно (13.8) стержень изгибается по n полуволнам синусоиды (рис. 13.5).

Наименьшее значение силы будет при $n = 1$:

$$P^{(1)} = P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}. \quad (13.9)$$

Эта сила носит название *первой критической силы*. При этом $kl = \pi$ и изогнутая ось стержня представляет собой одну полуволну синусоиды (рис. 13.5, а):

$$v^{(1)} = v = f \sin \frac{\pi x}{l}, \quad (13.10)$$

где $C_1^{(1)} = f$ — прогиб в середине длины стержня, что следует из (13.8) при $n = 1$ и $x = l/2$.

Формула (13.9) была получена Леонардом Эйлером и называется формулой Эйлера для критической силы.

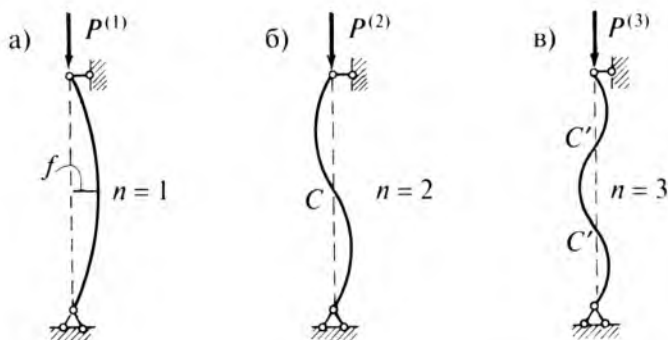


Рис. 13.5

Все формы равновесия (рис. 13.5), кроме первой ($n = 1$), неустойчивы и потому не представляют практического интереса. Формы равновесия, соответствующие $n = 2, 3, \dots$, будут устойчивыми, если в точках перегиба упругой линии (точки C и C' на рис. 13.5, б, в) ввести дополнительные шарнирные опоры.

Полученное решение обладает двумя особенностями. Во-первых, решение (13.10) не является единственным, так как произвольная постоянная $C_1^{(1)} = f$ осталась неопределенной, несмотря на использование всех граничных условий. В результате прогибы оказались определены с точностью до постоянного множителя. Во-вторых, это решение не дает возможности описать состояние стержня при $P > P_{кр}$. Из (13.6) следует, что при $P = P_{кр}$ стержень может иметь искривленную форму равновесия при условии $kl = \pi$. Если же $P > P_{кр}$, то $kl \neq \pi$, и тогда должно быть $C_1^{(1)} = 0$. Это означает, что $v = 0$, то есть стержень после искривления при $P = P_{кр}$ вновь приобретает прямолинейную форму при $P > P_{кр}$. Очевидно, что это противоречит физическим представлениям об изгибе стержня.

Эти особенности связаны с тем, что выражение (13.1) для изгибающего момента и дифференциальное уравнение (13.2) получены для деформированного состояния стержня, в то время как при постановке граничного условия на конце $x = l$ осевое перемещение u_B этого конца (рис. 13.6) вследствие изгиба не учитывалось. Действительно, если пренебречь укорочением стержня за счет центрального сжа-

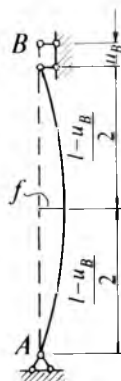


Рис. 13.6

тия, то нетрудно представить, что прогибы стержня будут иметь вполне определенные значения, если задать величину u_B .

Из этого рассуждения становится очевидным, что для определения зависимости прогибов от величины сжимающей силы P необходимо вместо граничного условия $v(l) = 0$ использовать уточненное граничное условие $v(l - u_B) = 0$. При этом установлено, что если сила превосходит критическое значение всего на 1÷2%, прогибы становятся достаточно большими и необходимо пользоваться *точным нелинейным дифференциальным уравнением продольного изгиба*

$$\frac{v'''}{[1 + (v')^2]^{3/2}} + k^2 v = 0. \quad (13.11)$$

Это уравнение отличается от приближенного уравнения (13.4) первым слагаемым, представляющим собой точное выражение для кривизны изогнутой оси стержня (см. § 9.2).

Решение уравнения (13.11) достаточно сложно и выражается через полный эллиптический интеграл первого рода.

13.3. Влияние способов закрепления концов стержня на величину критической силы

Формула Эйлера (13.9) получена для стержня, шарнирно опертого по концам. Производя аналогичные выкладки для стержней с другими опорными закреплениями (рис. 13.7) и обобщая результаты, можно получить следующее *выражение для критической силы*:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{l_0^2}. \quad (13.12)$$

Входящая в эту формулу величина

$$l_0 = \mu l \quad (13.13)$$

называется *приведенной длиной стержня*, а μ — *коэффициентом приведения*. Величина l_0 представляет собой расстояние между точками перегиба C и C' изогнутой оси стержня, в которых изгибающие моменты равны нулю. Можно считать, что любой из представленных на рис. 13.7 стержней в пределах участка CC' длиной l_0 изгибается как шарнирно опертый стержень по полуволне синусоиды. Консольный стержень можно рассматривать как половину шарнирно опертого по концам стержня длиной $l_0 = 2l$.

Поделив критическую силу на площадь поперечного сечения стержня, получим *критическое напряжение*

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F} = \frac{\pi^2 EJ}{l_0^2 F}.$$

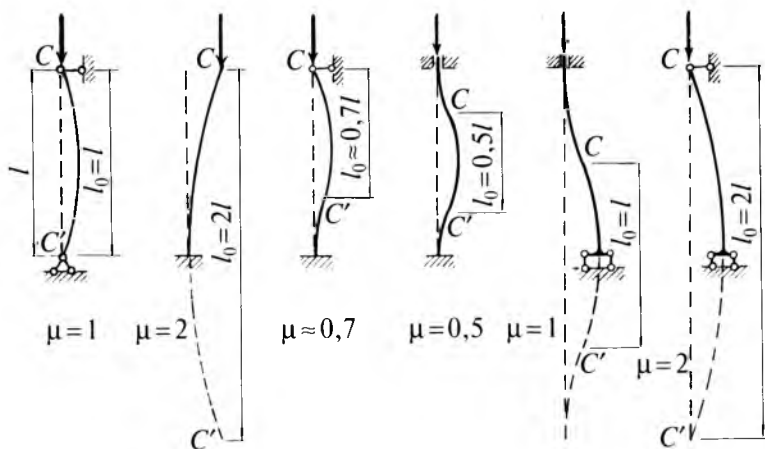


Рис. 13.7

Учитывая, что величина J/F равна квадрату радиуса инерции поперечного сечения i^2 и вводя обозначение

$$\lambda = \frac{l_0}{i}, \quad (13.14)$$

представим формулу для критического напряжения в виде

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \quad (13.15)$$

Величина λ называется *гибкостью стержня*.

Если стержень имеет одинаковые опорные закрепления в двух взаимно перпендикулярных главных плоскостях инерции, то при определении критической силы и критического напряжения необходимо брать наименьшие значения момента инерции и радиуса инерции поперечного сечения. В этом случае стержень при потере устойчивости изгибается в главной плоскости, проходящей через ось наибольшего момента инерции.

Стержень, имеющий неодинаковые опорные закрепления в главных плоскостях и, следовательно, неодинаковые приведенные

длины, теряет устойчивость в той главной плоскости, в которой гибкость стержня имеет наибольшее значение. Более подробно этот вопрос рассмотрен в § 13.5.

13.4. Потеря устойчивости при напряжениях, превышающих предел пропорциональности материала

При выводе формулы Эйлера предполагалось, что напряжения центрального сжатия, возникающие в поперечных сечениях стержня от действия критической силы $\sigma_{кр} = P_{кр} / F$, не превышают предел пропорциональности материала $\sigma_{пл}$. Если это условие не выполняется, то при определении критической силы нельзя пользоваться законом Гука, в предположении справедливости которого получено исходное дифференциальное уравнение (13.2). Таким образом, *условие применимости формулы Эйлера* в общем случае имеет вид

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{пл}. \quad (13.16)$$

Обозначим через λ_1 значение гибкости, при котором $\sigma_{кр} = \sigma_{пл}$:

$$\lambda_1 = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{пл}}}. \quad (13.17)$$

Тогда условие применимости формулы Эйлера (13.16) можно представить в виде

$$\lambda \geq \lambda_1. \quad (13.18)$$

Величина λ_1 , определяемая по формуле (13.17), называется *предельной гибкостью*. Стержни, для которых выполняется условие (13.18), называются *стержнями большой гибкости*.

Как видно из формулы (13.17), предельная гибкость зависит от свойств материала: модуля упругости и предела пропорциональности. Так как для стали $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, то λ_1 зависит от величины $\sigma_{пл}$, то есть от марки стали. Например, у некоторых распространенных в строительных конструкциях сталей марки ВСт3 величина $\sigma_{пл}$ составляет 200–210 МПа, и по формуле (13.17) получается $\lambda_1 \approx 100$. Таким образом, для сталей указанных марок условием применимости формулы Эйлера можно считать

$$\lambda \geq 100. \quad (13.19)$$

Величина предельной гибкости для дерева может быть принята $\lambda_1 = 70$; для чугуна $\lambda_1 = 80$.

Теоретическое определение критических нагрузок при напряжениях, превышающих предел пропорциональности материала, достаточно сложно. В то же время имеется большое число экспериментальных исследований устойчивости стержней, работающих за пределом пропорциональности материала. Эти исследования показали, что при $\sigma_{кр} \leq \sigma_{пл}$ экспериментальные и теоретические значения критических сил практически совпадают. При $\sigma_{кр} > \sigma_{пл}$ наблюдается значительное расхождение между экспериментальными и теоретическими значениями критических сил, вычисленных по формуле Эйлера. При этом формула Эйлера всегда дает завышенное значение критической силы.

На основании опытных данных различными авторами были предложены эмпирические формулы для вычисления критических напряжений за пределом пропорциональности материала. Наиболее простой является *линейная зависимость*, предложенная в начале XX века немецким ученым Л. Тетмайером и независимо от него профессором Петербургского института инженеров путей сообщения Ф.С. Ясинским:

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda, \quad (13.20)$$

где a и b — эмпирические коэффициенты, зависящие от свойств материала стержня и имеющие размерность напряжения.

Для стали марки ВСт3 с пределом пропорциональности $\sigma_{пл} = 200$ МПа и пределом текучести $\sigma_t = 240$ МПа получено $a = 310$ МПа, $b = 1,14$ МПа.

Для некоторых материалов при $\lambda \leq \lambda_1$ используются нелинейные зависимости. Так, например, для дерева (сосна, ель, лиственница) при $\lambda \leq 70$ используется параболическая зависимость

$$\sigma_{кр} = 33 - 26,4 \left(\frac{\lambda}{100} \right)^2. \quad (13.21)$$

Для чугуна при $\lambda \leq 80$ принимается

$$\sigma_{кр} = 776 - 12\lambda + 0,053\lambda^2. \quad (13.22)$$

Формулой Тетмайера — Ясинского (13.20) можно пользоваться при условии, что критические напряжения, вычисленные по этой формуле, не превосходят предел текучести σ_t для пластичного материала и предел прочности при сжатии $\sigma_{сж}$ для хрупкого материала. Обозначив в формуле (13.20) через λ_2 то значение гибкости,

при котором $\sigma_{кр} = \sigma_{т}$ для пластичного или $\sigma_{кр} = \sigma_{вс}$ для хрупкого материала, можно записать *условие применимости* формулы Тетмайера – Ясинского в виде

$$\lambda_2 \leq \lambda \leq \lambda_1, \quad (13.23)$$

где λ_1 определяется по формуле (13.17).

Стержни, для которых выполняется условие (13.23), называются *стержнями средней гибкости*.

С учетом приведенных выше значений $\sigma_{т}$, a и b для стали марки ВСт3 по формуле (13.20) получим $\lambda_2 = 60$, и условие (13.23) примет следующий вид

$$60 \leq \lambda \leq 100. \quad (13.24)$$

Стержни, у которых $\lambda < \lambda_2$, называются *стержнями малой гибкости*. Они могут разрушиться не в результате потери устойчивости, а в результате потери прочности при центральном сжатии. В таком случае для стержней малой гибкости из пластичного и хрупкого материалов следует соответственно принять

$$\sigma_{кр} = \sigma_{т}; \quad \sigma_{кр} = \sigma_{вс}. \quad (13.25)$$

На рис. 13.8 изображен график зависимости критических напряжений от гибкости для стали марки ВСт3 с пределом пропорциональности $\sigma_{пц} = 200$ МПа и пределом текучести $\sigma_{т} = 240$ МПа. При $\lambda \geq 100$ график $\sigma_{кр}(\lambda)$ представляется гиперболой Эйлера AB , при $60 \leq \lambda \leq 100$ — прямой Тетмайера – Ясинского BC , при $0 \leq \lambda \leq 60$ — горизонтальной прямой CD . Для значений $\lambda < 100$ гиперболы Эйлера изображена пунктирной линией. Из этого графика видно, что для стержней средней и малой гибкости формула Эйлера дает сильно завышенные значения критических напряжений.

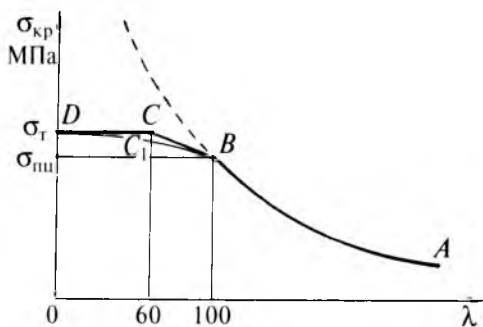


Рис. 13.8

Для стержней из пластичного материала при критических напряжениях $\sigma_{\text{пл}} \leq \sigma_{\text{кр}} \leq \sigma_{\text{т}}$ и значениях гибкости $0 < \lambda \leq \lambda_1$ величину $\sigma_{\text{кр}}$ можно также определить с помощью квадратичной зависимости

$$\sigma_{\text{кр}} = \sigma_{\text{т}} - (\sigma_{\text{т}} - \sigma_{\text{пл}}) \left(\frac{\lambda}{\lambda_1} \right)^2,$$

где λ_1 — предельная гибкость, определяемая по формуле (13.17). График приведенной зависимости изображен на рис. 13.8 кривой BC_1D , которая незначительно отклоняется от ломанной BCD .

13.5. Практический расчет сжатых стержней на устойчивость

При продольном изгибе центрально сжатый стержень теряет несущую способность, когда напряжения в его поперечных сечениях становятся равными критическим. Поэтому необходимо ввести в расчет *коэффициент запаса устойчивости* n_y по отношению к критическим напряжениям, с помощью которого определяется *допускаемое напряжение при расчете на устойчивость*:

$$[\sigma_y] = \frac{\sigma_{\text{кр}}}{n_y}. \quad (13.26)$$

Условие устойчивости по методу допускаемых напряжений для центрально сжатого стержня записывается в виде, аналогичном условию прочности:

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq [\sigma_y]. \quad (13.27)$$

Коэффициент запаса устойчивости принимается несколько большим основного коэффициента запаса прочности, который для пластичных и хрупких материалов соответственно равен (см. § 3.7)

$$n_{\text{т}} = \frac{\sigma_{\text{т}}}{[\sigma]}; \quad n_{\text{в}} = \frac{\sigma_{\text{в}}}{[\sigma]}. \quad (13.28)$$

Это объясняется невозможностью точного учета случайных факторов, снижающих величину критической силы. К ним относятся некоторое неизбежное на практике внецентренное приложение сжимающей силы (случайные эксцентриситеты) и малая начальная кривизна стержня, связанные с условиями монтажа и технологией изготовления реальных конструкций. Эти факторы в расчетах на прочность существенного значения не имеют.

Допускаемое напряжение при расчете на устойчивость можно принять равным некоторой доле от допускаемого напряжения при центральном сжатии:

$$[\sigma_y] = \varphi[\sigma]. \quad (13.29)$$

Коэффициент φ , всегда меньший единицы, называется *коэффициентом уменьшения допускаемого напряжения при продольном изгибе* или *коэффициентом продольного изгиба*. Он зависит от свойств материала и гибкости стержня. Подставляя в формулу (13.29) значения $[\sigma_y]$ и $[\sigma]$ из (13.26) и (13.28), получим выражения для φ для пластичного и хрупкого материалов:

$$\varphi = \frac{\sigma_{кр} n_{\Gamma}}{\sigma_{\Gamma} n_y}; \quad \varphi = \frac{\sigma_{кр} n_{\text{в}}}{\sigma_{\text{в}} n_y}. \quad (13.30)$$

Коэффициенты запаса прочности n_{Γ} и $n_{\text{в}}$ представляют собой постоянные величины, а коэффициент запаса устойчивости принимается зависящим от величины гибкости λ во всем рабочем диапазоне изменения этой величины. Как показали исследования, проведенные А.Р. Ржаницыным¹ с использованием методов математической статистики, на величины n_y и φ при малых значениях гибкости наибольшее влияние оказывают случайные эксцентриситеты приложения сжимающей силы, а при больших гибкостях — начальные искривления оси стержня.

Величины коэффициента φ в зависимости от гибкости λ для различных материалов приводятся в виде таблиц в нормах проектирования (для строительных конструкций в соответствующих разделах СНиП). В табл. 13.1 приведены значения коэффициента φ для стали марки ВСтЗ, чугуна и дерева. Следует заметить, что нормы проектирования периодически пересматриваются и значения φ корректируются.

Условие устойчивости (13.27) при расчете по методу допускаемых напряжений с учетом (13.29) записывается в виде

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq \varphi[\sigma]. \quad (13.31)$$

В аналогичном виде может быть представлено *условие устойчивости при расчете по методу предельных состояний*:

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq \varphi \gamma_c R, \quad (13.32)$$

¹ См.: Ржаницын А.Р. Теория расчета строительных конструкций на надежность. М.: Стройиздат, 1978.

причем в этом случае коэффициент продольного изгиба φ называют также *коэффициентом уменьшения расчетного сопротивления при продольном изгибе*.

При расчете сжатых стержней на устойчивость решаются следующие задачи: 1) проверочный расчет на устойчивость; 2) подбор сечения; 3) определение несущей способности, то есть величины допускаемой нагрузки из условия устойчивости.

Рассмотрим решение этих задач на числовых примерах.

Пример 13.1. Проверим устойчивость стальной колонны двутаврового сечения $\text{I} 20\text{а}$, нагруженной расчетной сжимающей силой $P = 350 \text{ кН}$ (рис. 13.9). Определим критическую силу, критические напряжения и наибольшую допустимую величину нагрузки из условия устойчивости по методу предельных состояний. Материал колонны — сталь марки ВСт3 с расчетным сопротивлением $R = 210 \text{ МПа}$, $\gamma_c = 1$.

Так как опорные закрепления стержня в двух главных плоскостях инерции Oxy и Oxz одинаковы, то его потеря устойчивости возможна в плоскости наибольшей гибкости Oxz . Поэтому выписываем из сортамента наименьшие значения момента инерции $J_y = 155 \text{ см}^4$, радиуса инерции $i_y = 2,32 \text{ см}$ и площадь сечения $F = 28,9 \text{ см}^2$.

При заданных опорных закреплениях (рис. 13.7) приведенная длина стержня равна $l_0 = \mu l = 0,7 \cdot 300 = 210 \text{ см}$.

По формуле (13.14) находим гибкость стержня и по табл. 13.1 — соответствующее значение коэффициента продольного изгиба:

$$\lambda = \frac{l_0}{i_y} = \frac{210}{2,32} = 90; \quad \varphi = 0,665.$$

По формуле (13.32) производим проверку устойчивости:

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{350}{28,9} = 12,11 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 121,1 \text{ МПа} < \varphi \gamma_c R = 139,6 \text{ МПа}.$$

Условие устойчивости выполняется.

Из условия устойчивости (13.32) находим наибольшую допустимую величину расчетной нагрузки

$$P_{\text{доп}} = \varphi \gamma_c R F = 0,665 \cdot 1,0 \cdot 21 \cdot 28,9 = 403,6 \text{ кН}.$$

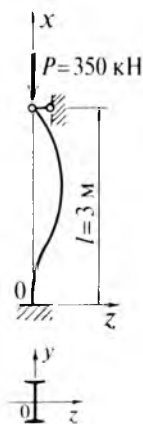


Рис. 13.9

Таблица 13.1

Гиб- кость λ	Сталь с расчетным сопротивлением по пределу текучести R , МПа							Чугун мар- ки СЧ	Де- рсно (со- сна)
	200	240	280	320	360	400	440		
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
10	0,988	0,987	0,985	0,984	0,983	0,982	0,981	0,970	0,992
20	0,967	0,962	0,959	0,955	0,952	0,949	0,946	0,910	0,968
30	0,939	0,931	0,924	0,917	0,911	0,905	0,900	0,810	0,928
40	0,906	0,894	0,883	0,873	0,863	0,854	0,846	0,690	0,872
50	0,869	0,852	0,836	0,822	0,809	0,796	0,785	0,570	0,800
60	0,827	0,805	0,785	0,766	0,749	0,721	0,696	0,440	0,712
70	0,782	0,754	0,724	0,687	0,654	0,623	0,595	0,340	0,612
80	0,734	0,686	0,641	0,602	0,566	0,532	0,501	0,260	0,469
90	0,665	0,612	0,565	0,522	0,483	0,447	0,413	0,200	0,370
100	0,599	0,542	0,493	0,448	0,408	0,369	0,335	0,160	0,300
110	0,537	0,478	0,427	0,381	0,338	0,306	0,280	—	0,248
120	0,479	0,419	0,366	0,321	0,287	0,260	0,237	—	0,208
130	0,425	0,364	0,313	0,276	0,247	0,223	0,204	—	0,178
140	0,376	0,315	0,272	0,240	0,215	0,195	0,178	—	0,153
150	0,328	0,276	0,239	0,211	0,189	0,171	0,157	—	0,133
160	0,290	0,244	0,212	0,187	0,167	0,152	0,139	—	0,117
170	0,259	0,218	0,189	0,167	0,150	0,136	0,125	—	0,104
180	0,233	0,196	0,170	0,150	0,135	0,123	0,112	—	0,093
190	0,210	0,177	0,154	0,136	0,122	0,111	0,102	—	0,083
200	0,191	0,161	0,140	0,124	0,111	0,101	0,093	—	0,075
210	0,174	0,147	0,128	0,113	0,102	0,093	0,085	—	0,068
220	0,160	0,135	0,118	0,104	0,094	0,086	0,077	—	0,062

Полученное значение гибкости $\lambda = 90$ удовлетворяет условию (13.24). Поэтому критическое напряжение и критическую силу находим по формуле Тетмайера – Ясинского:

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda = 310 - 1,14 \cdot 90 = 207,4 \text{ МПа};$$

$$P_{кр} = \sigma_{кр} \cdot F = 20,74 \cdot 28,9 = 599,4 \text{ кН}.$$

Пример 13.2. Подберем сечение раскоса стропильной фермы в виде равнобокого уголка, в котором действует расчетное сжимаю-

шее усилие $N = P = 120 \text{ кН}$ (рис. 13.10). Материал — сталь марки ВСт3, $R = 200 \text{ МПа}$, $\gamma_c = 0,75$, $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

При практических расчетах ферм обычно вводят предположение, что элементы фермы соединены между собой в узлах с помощью шарниров. При подборе сечения условие устойчивости (13.32) необходимо записать в виде

$$F \geq \frac{P}{\varphi \gamma_c R}.$$

Эта формула содержит две неизвестные величины — площадь поперечного сечения F и коэффициент продольного изгиба φ . Поэтому при расчете приходится использовать метод последовательных приближений. Обычно в первом приближении принимают $\varphi_1 = 0,4 \div 0,6$ и находят последовательно площадь поперечного сечения F , радиус инерции i , гибкость стержня λ и соответствующее ей действительное значение φ'_1 . Если величины φ_1 и φ'_1 существенно отличаются друг от друга, то во втором приближении принимают

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2}.$$

Последующие приближения делаются аналогично. Расчет можно закончить, когда в k -том приближении величина φ'_k будет превышать φ_k не более, чем на 3÷5%. Если $\varphi'_k < \varphi_k$ то условие устойчивости (13.32) не выполняется.

Первое приближение. Принимаем $\varphi_1 = 0,5$ и находим требуемую площадь поперечного сечения

$$F = \frac{120}{0,5 \cdot 0,75 \cdot 20} = 16,0 \text{ см}^2.$$

По сортаменту принимаем равнобокий уголок $\angle 110 \times 8$ с площадью $F = 17,2 \text{ см}^2$ и минимальным радиусом инерции $i_{\min} = i_{z_0} = 2,18 \text{ см}$. Гибкость стержня равна

$$\lambda = \frac{l_0}{i_{z_0}} = \frac{1 \cdot 235}{2,18} = 107,8.$$

Используя линейную интерполяцию, по табл. 13.1 находим

$$\varphi'_1 = 0,599 - \frac{0,599 - 0,537}{10}(107,8 - 100) = 0,551 > \varphi_1 = 0,5.$$



Рис. 13.10

Второе приближение. Принимаем

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2} = \frac{0,5 + 0,551}{2} = 0,526.$$

Требуемая площадь сечения равна

$$F = \frac{120}{0,526 \cdot 15,0} = 15,21 \text{ см}^2.$$

Принимаем сечение $\text{L } 110 \times 7$, $F = 15,2 \text{ см}^2$, $i_{z_0} = 2,19 \text{ см}$, $J_{z_0} = 72,7 \text{ см}^4$.

Находим $\lambda = 235/2,19 = 107,3$, $\varphi'_2 = 0,554$.

Так как $\varphi'_2 > \varphi_2$, то условие устойчивости (13.32) выполняется. Определим величину погрешности в определении коэффициента φ во втором приближении:

$$\frac{\varphi'_2 - \varphi_2}{\varphi_2} \cdot 100\% = \frac{0,554 - 0,526}{0,526} \cdot 100\% \approx 5\%.$$

Поскольку погрешность не превышает допустимой величины, то на этом расчет можно закончить.

В конце расчета убедимся в том, что подобранное сечение удовлетворяет условию устойчивости:

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{120}{15,2} = 7,89 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 78,9 \text{ МПа} < \varphi'_2 \gamma_c R = 83,1 \text{ МПа}.$$

Условие устойчивости выполняется с небольшим запасом.

Определим критическую силу и критические напряжения. Так как гибкость $\lambda = 107,3 > 100$, то в соответствии с условием (13.19) применяем формулу Эйлера (13.12):

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ_{z_0}}{l_0^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^4 \cdot 72,7}{235^2} = 272,6 \text{ кН};$$

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{P_{\text{кр}}}{F} = \frac{272,6}{15,2} = 17,93 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 179,3 \text{ МПа}.$$

Пример 13.3. Деревянная стойка прямоугольного поперечного сечения (рис. 13.11) жестко закреплена на нижнем конце. Верхний конец может свободно перемещаться в главной плоскости инерции Oxz , а в главной плоскости Oxy имеет шарнирную опору. Материал стойки — сосна. Модуль упругости $E = 10^4 \text{ МПа}$, расчетное сопротивление $R = 13 \text{ МПа}$. Коэффициент условий работы $\gamma_c = 1,0$. Определим критическую силу, критические напряжения и наибольшую допустимую величину расчетной силы P .

Определяем геометрические характеристики поперечного сечения стойки:

$$F = bh = 6 \cdot 18 = 108 \text{ см}^2;$$

$$J_y = \frac{6 \cdot 18^3}{12} = 2916 \text{ см}^4; \quad J_z = \frac{18 \cdot 6^3}{12} = 324 \text{ см}^4;$$

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}} = 5,196 \text{ см}; \quad i_z = \sqrt{\frac{J_z}{F}} = 1,732 \text{ см}.$$

Определяем приведенную длину и гибкость стойки:

в главной плоскости Oxy

$$l_0 = 0,7l = 0,7 \cdot 300 = 210 \text{ см}; \quad \lambda = \frac{l_0}{i_z} = \frac{210}{1,732} = 121,2;$$

в главной плоскости Oxz

$$l_0 = 2l = 2 \cdot 300 = 600 \text{ см}; \quad \lambda = \frac{l_0}{i_y} = \frac{600}{5,196} = 115,5.$$

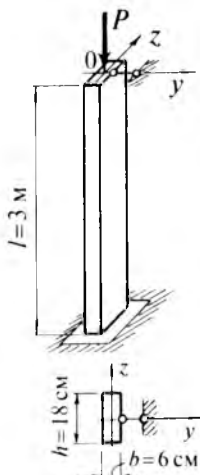


Рис. 13.11

Таким образом, стойка может потерять устойчивость в плоскости Oxy , в которой гибкость имеет большее значение.

Гибкость $\lambda = 121,2$ больше предельной гибкости $\lambda_1 = 70$ для дерева (см. § 13.4). Поэтому критическую силу определяем по формуле Эйлера:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_z}{l_0^2} = \frac{\pi^2 \cdot 10^3 \cdot 324}{210^2} = 72,44 \text{ кН};$$

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F} = \frac{72,44}{108} = 0,671 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 6,71 \text{ МПа}.$$

Для $\lambda = 121,2$ по табл. 13.1 находим коэффициент продольного изгиба $\varphi = 0,204$. Из условия устойчивости (13.32) определяем наибольшую допустимую величину расчетной силы:

$$P_{нб} = \varphi \gamma_c RF = 0,204 \cdot 1,0 \cdot 1,3 \cdot 108 = 28,64 \text{ кН}.$$

13.6. Продольно-поперечный изгиб стержней

Продольно-поперечным называется изгиб стержня, возникающий от совместного действия поперечной и продольной нагрузок.

Для достаточно жестких стержней (см. § 12.4) дополнительные прогибы и изгибающие моменты от действия центрально прило-

женной силы невелики по сравнению с прогибами и моментами от поперечной нагрузки, и ими можно пренебречь.

Рассмотрим гибкий стержень, находящийся под действием поперечной нагрузки и центрально приложенной сжимающей силы P (рис. 13.12).

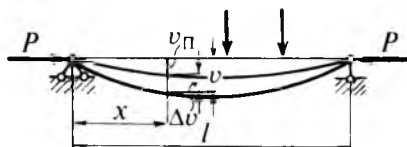


Рис. 13.12

Обозначим через $v_n(x)$ и $M_n(x)$ прогиб и изгибающий момент в произвольном сечении стержня от действия поперечной нагрузки. После приложения к концам стержня сжимающей силы P прогибы и моменты получают приращения $\Delta v(x)$ и $\Delta M(x)$. Полный прогиб и изгибающий момент от совместного действия поперечной и продольной нагрузок равны

$$v = v_n + \Delta v; \quad M = M_n + \Delta M = M_n + Pv, \quad (13.33)$$

где $\Delta M = Pv$ — дополнительный изгибающий момент, вызванный действием сжимающей силы.

Если вместо сжимающей приложить растягивающую силу P , то

$$v = v_n - \Delta v; \quad M = M_n - \Delta M = M_n - Pv.$$

Из полученных формул видно, что действие сжимающей силы приводит к увеличению, а растягивающей — к уменьшению прогибов и изгибающих моментов.

На практике чаще встречается продольно-поперечный изгиб, вызванный поперечной нагрузкой и сжимающей силой.

Дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня с учетом (13.33) можно записать в виде

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M_n}{EJ} - \frac{Pv}{EJ}. \quad (13.34)$$

Введя обозначение

$$k^2 = \frac{P}{EJ}, \quad (13.35)$$

запишем уравнение (13.34) в окончательном виде:

$$\frac{d^2v}{dx^2} + k^2v = -\frac{M_n}{EJ}. \quad (13.36)$$

Ниже рассмотрены точное и приближенное решения этого уравнения.

13.7. Решение уравнения продольно-поперечного изгиба стержня с помощью метода начальных параметров

При решении задач изгиба стержней с использованием метода начальных параметров (см. § 9.4) оказывается более удобным интегрировать уравнение четвертого порядка.

Изгибающие моменты M_{II} и поперечные силы Q_{II} , вызванные действием поперечной нагрузкой q , определяются для недеформированного состояния стержня. Поэтому для них справедливы известные дифференциальные соотношения

$$\frac{dM_{II}}{dx} = Q_{II}; \quad \frac{dQ_{II}}{dx} = -q. \quad (13.37)$$

Заметим, что для определения действительных значений поперечных сил Q с учетом деформаций стержня необходимо составить проекции нагрузок, приложенных по одну сторону от рассматриваемого сечения, на нормаль к изогнутой оси стержня. Однако поперечные силы в гибких стержнях невелики и мало влияют на оценку прочности.

Продифференцировав два раза уравнение (13.36) с учетом соотношений (13.37), получим дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$\frac{d^4 v}{dx^4} + k^2 \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{q}{EJ}. \quad (13.38)$$

Введем безразмерную переменную ξ по формуле

$$\xi = kx. \quad (13.39)$$

Производные по переменным x и ξ , связаны между собой соотношением

$$\frac{d^n}{dx^n} = k^n \frac{d^n}{d\xi^n}. \quad (13.40)$$

С учетом этого уравнение (13.38) после деления всех членов на k^4 и преобразования правой части с помощью соотношения (13.35) примет вид

$$\frac{d^4 v}{d\xi^4} + \frac{d^2 v}{d\xi^2} = \frac{q}{k^2 P}. \quad (13.41)$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения при $q = 0$ имеет вид

$$v(\xi) = C_1 + C_2 \xi + C_3 \cos \xi + C_4 \sin \xi. \quad (13.42)$$

В дальнейшем будем обозначать с помощью штрихов производные от искомой функции по переменной ξ . Составим выражения для угла поворота φ , суммарного изгибающего момента M и поперечной силы Q_{Π} , вызванной действием поперечной нагрузки. Учитывая формулы (13.33), (13.35), (13.37), (13.39) и (13.40), получим

$$\varphi(\xi) = \frac{dv}{dx} = kv' = k(C_2 - C_3 \sin \xi + C_4 \cos \xi); \quad (13.43)$$

$$\begin{aligned} M(\xi) &= -EJ \frac{d^2 v}{dx^2} = -EJk^2 v'' = -Pv'' = \\ &= P(C_3 \cos \xi + C_4 \sin \xi); \end{aligned} \quad (13.44)$$

$$\begin{aligned} Q_{\Pi}(\xi) &= \frac{dM_{\Pi}}{dx} = kM'_{\Pi} = k(M - Pv)' = k(-Pv'' - Pv)' = \\ &= -kP(v''' + v') = -kPC_2. \end{aligned} \quad (13.45)$$

Полагая в выражениях (13.42) — (13.45) $\xi = 0$ и вводя обозначения $v(0) = v_0$, $\varphi(0) = \varphi_0$, $M(0) = M_0$, $Q_{\Pi}(0) = Q_0$, выразим произвольные постоянные через начальные параметры:

$$\left. \begin{aligned} C_2 &= -\frac{Q_0}{kP}; \quad C_3 = \frac{M_0}{P}; \quad C_1 = v_0 - C_3 = v_0 - \frac{M_0}{P}; \\ C_4 &= \frac{\varphi_0}{k} - C_2 = \frac{\varphi_0}{k} + \frac{Q_0}{kP}. \end{aligned} \right\} \quad (13.46)$$

Подставляя найденные значения произвольных постоянных в выражение (13.42) и группируя слагаемые, получим решение однородного дифференциального уравнения продольно-поперечного изгиба стержня в форме метода начальных параметров:

$$v(\xi) = v_0 + \frac{\varphi_0}{k} \sin \xi - \frac{M_0}{P} (1 - \cos \xi) - \frac{Q_0}{kP} (\xi - \sin \xi). \quad (13.47)$$

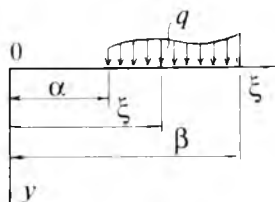


Рис. 13.13

Множители при начальных параметрах в этом выражении можно назвать *функциями влияния*. Они характеризуют влияние начальных параметров на величины прогибов стержня.

Частное решение v^* неоднородного уравнения (13.41) при действии на участке $\alpha \leq \xi \leq \beta$ стержня распределенной нагрузки (рис. 13.13) можно найти методом, изложенным в § 9.4:

$$v^* = \int_{\alpha}^{\xi} [(\xi - t) - \sin(\xi - t)] \frac{q(t)}{k^2 P} dt.$$

В случае равномерно распределенной нагрузки $q = \text{const}$ после интегрирования этого выражения будем иметь

$$v^* = -\frac{q}{k^2 P} \left[1 - \cos(\xi - \alpha) - \frac{(\xi - \alpha)^2}{2} \right]. \quad (13.48)$$

Используя понятие функций влияния, введем соответствующие слагаемые в выражение для прогиба, учитывающие сосредоточенные воздействия в сечениях $\xi = \alpha_i$ (рис. 13.14). В результате с учетом соотношений (13.43)—(13.48) получим следующие выражения для прогибов, углов поворота, изгибающих моментов и поперечных сил в произвольном сечении стержня:

$$\begin{aligned} v(\xi) = & v_0 + \frac{\varphi_0}{k} \sin \xi - \frac{M_0}{P} (1 - \cos \xi) - \frac{Q_0}{kP} (\xi - \sin \xi) \Big|_{\textcircled{1}} + \Delta v \Big|_{\textcircled{2}} + \\ & + \frac{\Delta \varphi}{k} \sin(\xi - \alpha_2) \Big|_{\textcircled{3}} - \frac{M}{P} [1 - \cos(\xi - \alpha_3)] \Big|_{\textcircled{4}} - \frac{P_1}{kP} [(\xi - \alpha_4) - \sin(\xi - \alpha_4)] \Big|_{\textcircled{5}} - \\ & - \frac{q}{k^2 P} \left[1 - \cos(\xi - \alpha_5) - \frac{(\xi - \alpha_5)^2}{2} \right] \Big|_{\textcircled{6}} + \\ & + \frac{q}{k^2 P} \left[1 - \cos(\xi - \alpha_6) - \frac{(\xi - \alpha_6)^2}{2} \right] \Big|_{\textcircled{7}}; \end{aligned} \quad (13.49)$$

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) = & \varphi_0 \cos \xi - \frac{kM_0}{P} \sin \xi - \frac{Q_0}{P} (1 - \cos \xi) \Big|_{\textcircled{1}} + \Delta \varphi \cos(\xi - \alpha_2) \Big|_{\textcircled{2} \textcircled{3}} - \\ & - \frac{kM}{P} \sin(\xi - \alpha_3) \Big|_{\textcircled{4}} - \frac{P_1}{P} [1 - \cos(\xi - \alpha_4)] \Big|_{\textcircled{5}} - \\ & - \frac{q}{kP} [\sin(\xi - \alpha_5) - (\xi - \alpha_5)] \Big|_{\textcircled{6}} + \\ & + \frac{q}{kP} [\sin(\xi - \alpha_6) - (\xi - \alpha_6)] \Big|_{\textcircled{7}}; \end{aligned} \quad (13.50)$$

$$\begin{aligned}
 M(\xi) = & \varphi_0 \frac{P}{k} \sin \xi + M_0 \cos \xi + \frac{Q_0}{k} \sin \xi \Big|_{\textcircled{1}} + \Delta\varphi \frac{P}{k} \sin(\xi - \alpha_2) \Big|_{\textcircled{2}\textcircled{3}} + \\
 & + M \cos(\xi - \alpha_3) \Big|_{\textcircled{4}} + \frac{P_1}{k} \sin(\xi - \alpha_4) \Big|_{\textcircled{5}} - \frac{q}{k^2} [1 - \cos(\xi - \alpha_5)] \Big|_{\textcircled{6}} + \\
 & + \frac{q}{k^2} [1 - \cos(\xi - \alpha_6)] \Big|_{\textcircled{7}}; \quad (13.51)
 \end{aligned}$$

$$Q_n(\xi) = Q_0 \Big|_{\textcircled{1}-\textcircled{4}} + P_1 \Big|_{\textcircled{5}} - \frac{q}{k} (\xi - \alpha_5) \Big|_{\textcircled{6}} + \frac{q}{k} (\xi - \alpha_6) \Big|_{\textcircled{7}}. \quad (13.52)$$

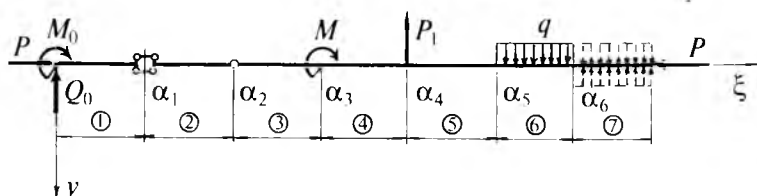


Рис. 13.14

В этих формулах $\alpha_i = ka_i$ — безразмерные координаты границ участков.

Заметим, что выражение для поперечной силы Q_{11} составлено для недеформированного состояния стержня. Поэтому оно не зависит от сжимающей силы P и не отличается от выражения для поперечной силы при изгибе балки.

Неизвестные начальные параметры, скачки прогиба Δv и угла поворота $\Delta\varphi$, входящие в выражения (13.49)–(13.52), определяются из граничных условий. Рассмотрим пример постановки граничных условий для консольного стержня (рис. 13.15). В этом случае известны три начальных параметра: $v_0 = \varphi_0 = 0$; $Q_0 = R_4 = P_1$. Неизвестный изгибающий момент $M_0 = -M_4$ определяется из статического граничного условия на правом свободном конце стержня: $\xi = kl$, $M = 0$.

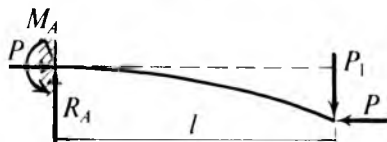


Рис. 13.15

13.8. Приближенное решение уравнения продольно-поперечного изгиба стержня

Рассмотрим часто применяемый на практике приближенный метод расчета сжато-изогнутых стержней.

Подставив первое из равенств (13.33) в левую часть уравнения (13.34), получим

$$\frac{d^2 v_n}{dx^2} + \frac{d^2 (\Delta v)}{dx^2} = -\frac{M_n}{EJ} - \frac{Pv}{EJ}. \quad (13.53)$$

При действии только поперечной нагрузки справедливо уравнение

$$\frac{d^2 v_n}{dx^2} = -\frac{M_n}{EJ}.$$

С учетом этого уравнение (13.53) примет вид

$$\frac{d^2 (\Delta v)}{dx^2} = -\frac{Pv}{EJ}. \quad (13.54)$$

При решении этого уравнения можно принять некоторое приближенное выражение для дополнительного прогиба Δv , удовлетворяющее граничным условиям. Так, например, для шарнирно опертого по концам стержня (рис. 13.12) при действии поперечной нагрузки, направленной в одну сторону, можно принять

$$\Delta v = f \sin \frac{\pi x}{l}.$$

При этом будут удовлетворяться условия равенства нулю прогибов на концах стержня $x = 0$ и $x = l$.

Дифференцируя это выражение, найдем

$$\frac{d^2 (\Delta v)}{dx^2} = -f \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l} = -\frac{\pi^2}{l^2} \Delta v = -\frac{\pi^2}{l^2} (v - v_n).$$

С учетом этого из уравнения (13.54) получим

$$\frac{\pi^2}{l^2} (v - v_n) = \frac{Pv}{EJ}.$$

Учитывая, что выражение

$$P_3 = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$$

представляет собой критическую силу Эйлера для шарнирно опертого по концам стержня, получим выражение для суммарного прогиба

$$v = \frac{v_{\Pi}}{1 - \frac{P}{P_{\text{кр}}}}. \quad (13.55)$$

Эта формула часто используется и при других способах закрепления концов стержня. При этом $P_{\text{кр}}$ вычисляется по общей формуле Эйлера (13.12) независимо от величины гибкости λ стержня. Момент инерции в этой формуле принимается относительно той главной оси инерции поперечного сечения стержня, которая перпендикулярна к плоскости действия поперечной нагрузки.

Прогибы v_{Π} стержня от действия поперечной нагрузки могут быть найдены любым известным методом (см. гл. 9).

Имея выражение суммарного прогиба, можно определить дополнительный изгибающий момент $\Delta M = Pv$ и суммарный изгибающий момент в произвольном сечении стержня $M = M_{\Pi} + Pv$.

Как видно из формулы (13.55), суммарный прогиб v пропорционален прогибу v_{Π} , который линейно зависит от поперечных нагрузок. Суммарный прогиб нелинейно зависит от сжимающей силы P . Отсюда следует, что *при продольно-поперечном изгибе принцип независимости действия сил справедлив только в отношении поперечных нагрузок.*

Из формулы (13.55) видно, что при приближении величины силы P к значению $P_{\text{кр}}$ прогиб неограниченно возрастает, и приближенное дифференциальное уравнение (13.34) становится несправедливым. В этом случае необходимо исходить из нелинейного дифференциального уравнения

$$\frac{\frac{d^2 v}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = -\frac{M_{\Pi} + Pv}{EJ}.$$

Очевидно, что все сказанное относится и к формулам, полученным в § 13.7. Решения, основанные на приближенном уравнении (13.34), имеют удовлетворительную точность при $P \leq 0,75P_{\text{кр}}$. Обычно в реальных конструкциях сжимающая сила не превышает величины $(0,5 \div 0,6) P_{\text{кр}}$.

13.9. Расчет сжато-изогнутых стержней на прочность и устойчивость

Расчет сжато-изогнутых стержней производится на устойчивость в двух главных плоскостях инерции по формуле (13.32) и на прочность при продольно-поперечном изгибе.

Величина наибольшего сжимающего напряжения в опасном сечении стержня определяется по формуле

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{M}{W}.$$

Воспользовавшись приближенным методом расчета, рассмотренным в § 13.8, запишем эту формулу в следующем виде:

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{M_{\text{п}}}{W} + \frac{Pv_{\text{п}}}{W \left(1 - \frac{P}{P_{\text{с}}} \right)}.$$

Увеличим все нагрузки, действующие на стержень, в k раз. Тогда получим

$$\sigma = \frac{kP}{F} + \frac{kM_{\text{п}}}{W} + \frac{kP \cdot kv_{\text{п}}}{W \left(1 - \frac{kP}{P_{\text{с}}} \right)}. \quad (13.56)$$

Как видно из этой формулы, первые два слагаемых увеличились в k раз, а третье — более чем в k^2 раз. Таким образом, существенной особенностью продольно-поперечного изгиба является то, что *напряжения в поперечных сечениях стержня нелинейно зависят от внешних нагрузок и при увеличении нагрузок возрастают быстрее последних*. Поэтому реальным коэффициентом запаса сжато-изогнутого стержня является *коэффициент запаса по нагрузкам* n_p , который показывает, во сколько раз надо увеличить все заданные нормативные нагрузки, чтобы наибольшее сжимающее напряжение достигло опасной величины. Для пластичного материала за опасное принимается напряжение, равное пределу текучести $\sigma_{\text{т}}$. Положив в формуле (13.56) $\sigma = \sigma_{\text{т}}$, $k = n_p$ и допуская, что закон Гука справедлив до предела текучести, получим квадратное уравнение для определения коэффициента запаса по нагрузкам:

$$n_p^2 \left[\left(\frac{P}{F} + \frac{M_{\text{п}}}{W} \right) \frac{P}{P_{\text{с}}} - \frac{Pv_{\text{п}}}{W} \right] - n_p \left[\frac{P}{F} + \frac{M_{\text{п}}}{W} + \sigma_{\text{т}} \frac{P}{P_{\text{с}}} \right] + \sigma_{\text{т}} = 0. \quad (13.57)$$

Этим уравнением можно воспользоваться при условии применимости для рассматриваемого стержня приближенного метода расчета (см. § 13.8).

Нетрудно показать, что коэффициент запаса по напряжениям, равный отношению предела текучести к наибольшим напряжениям $n_T = \sigma_T / \sigma$, больше коэффициента запаса по нагрузкам n_p . По этой причине выполнение условия прочности по напряжениям

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{M}{W} \leq \gamma_c R,$$

в основу которого положен коэффициент запаса по напряжениям, не гарантирует достаточного запаса прочности сжато-изогнутого стержня по нагрузкам.

Проверка прочности сжато-изогнутого стержня из пластичного материала может быть сведена к требованию, чтобы наибольшие сжимающие напряжения от действия нормативных нагрузок, умноженных на заданную величину коэффициента запаса по нагрузкам n_p , не превышали предел текучести материала:

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{M}{W} \leq \sigma_T. \quad (13.58)$$

Заметим, что в СНиП дана специальная методика расчета внецентренно сжатых и сжато-изогнутых стержней на прочность и устойчивость, которую мы здесь не приводим.

Рассмотрим примеры расчета сжато-изогнутых стержней.

Пример 13.4. Гибкая стальная стойка двутаврового сечения $\text{I } 20$ ($F = 26,8 \text{ см}^2$, $J_y = 115 \text{ см}^4$, $W_y = 23,1 \text{ см}^3$) внецентренно сжата силой P , приложенной с эксцентриситетом e в плоскости Oxz (рис. 13.16). Предел текучести стали $\sigma_T = 240 \text{ МПа}$, допускаемое напряжение $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$. Определим прогиб f на верхнем конце стойки, изгибающий момент в заделке и величину наибольших сжимающих напряжений в зависимости от величин сжимающей силы P и эксцентриситета e .

Для решения задачи воспользуемся методом начальных параметров. Примем начало координат в заделке. Тогда при неизменном вертикальном направлении силы P будут равны нулю начальный прогиб v_0 , угол поворота ϕ_0 и поперечная сила Q_0 .



Рис. 13.16

Величина изгибающего момента $M_0 = -P(e + f)$ в заделке неизвестна, так как неизвестен прогиб f конца стойки.

Величину M_0 определим из выражения (13.51) для изгибающего момента, положив в нем $v_0 = \varphi_0 = Q_0 = 0$ и использовав статическое граничное условие на верхнем конце стержня

$$x = l, \quad (\xi = kl), \quad M = -Pe,$$

из которого найдем

$$M_0 = -\frac{Pe}{\cos kl}.$$

Подставив найденное значение M_0 в формулы (13.49) и (13.51), получим выражения для прогиба и изгибающего момента в произвольном сечении стержня:

$$v = -\frac{M_0}{P}(1 - \cos kx) = \frac{e(1 - \cos kx)}{\cos kl};$$

$$M = M_0 \cos kx = -\frac{Pe \cos kx}{\cos kl}.$$

Наибольшие значения прогиба и изгибающего момента равны

$$f = \frac{e(1 - \cos kl)}{\cos kl}; \quad (13.59)$$

$$M = -\frac{Pe}{\cos kl}. \quad (13.60)$$

Наибольшее сжимающее напряжение определяется по формуле для нормальных напряжений при внецентренном сжатии (см. § 12.3):

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{M}{W_y} = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{Fe}{W_y \cos kl} \right). \quad (13.61)$$

Для исследования зависимости прогибов, изгибающих моментов и наибольших напряжений в стойке от величины силы P преобразуем безразмерную величину kl следующим образом:

$$kl = l \sqrt{\frac{P}{EJ_y}} = l \sqrt{\frac{P}{EJ_y} \cdot \frac{P_{кр}}{P_{кр}}} = l \sqrt{\frac{P}{P_{кр}} \cdot \frac{\pi^2 EJ_y}{EJ_y (2l)^2}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{кр}}}, \quad (13.62)$$

где

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_y}{(2l)^2} -$$

критическая сила Эйлера для консольного стержня.

Как видно из формул (13.59)—(13.62), по мере приближения силы P к ее критическому значению величина k/l приближается к значению $\pi/2$ и прогибы, изгибающие моменты и напряжения существенно возрастают.

На рис. 13.17 приведены графики зависимости наибольших напряжений $\sigma_{\text{нб}}$ от величины сжимающей силы P при различных значениях эксцентриситета e .

Из анализа графиков следует, что даже весьма незначительный эксцентриситет приложения сжимающей силы может вызвать весьма существенное увеличение напряжений в стойке по сравнению с напряжениями центрального сжатия (случай $e = 0$).

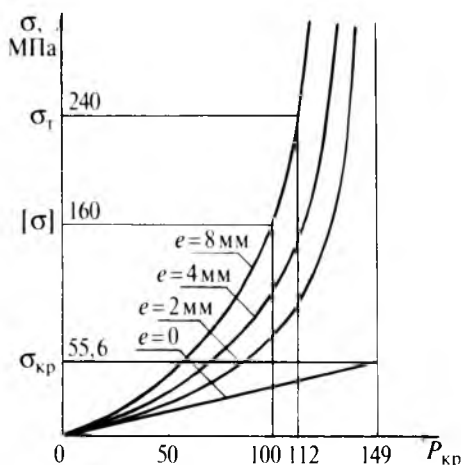


Рис. 13.17

Из верхнего графика ($e = 8$ мм) видно, что если во внецентренно сжатом стержне напряжение равно допускаемому $[\sigma] = 160$ МПа, то действительный коэффициент запаса по нагрузкам

$$n_p = \frac{P_2}{P_1} = \frac{112}{100} = 1,12$$

будет значительно меньше коэффициента запаса по напряжениям

$$n_\sigma = \frac{\sigma_T}{[\sigma]} = \frac{240}{160} = 1,5.$$

Поэтому при расчете на прочность при продольно-поперечном изгибе стержней нельзя ограничиться проверкой прочности по напряжениям

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{P}{F} + \frac{M}{W} \leq [\sigma].$$

Необходимо обеспечить заданную величину коэффициента запаса по нагрузкам, например $n_p = 1,5$.

Пример 13.5. Стальная колонна из прокатного двутавра $\text{I} 16$ ($F = 20,2 \text{ см}^2$, $J_z = 873 \text{ см}^4$, $W_z = 109 \text{ см}^3$), шарнирно опертая по концам, нагружена сжимающей силой $P_{\text{н}} = 100 \text{ кН}$ и поперечной нагрузкой $P_{\text{пн}} = 5 \text{ кН}$ (даны нормативные значения нагрузок), расположенной в плоскости стенки двутавра (рис. 13.18).

Проверим прочность колонны при совместном действии поперечной и продольной нагрузок, приняв требуемую величину коэффициента запаса по нагрузкам $n_p = 1,5$. Предел текучести стали $\sigma_{\text{т}} = 240 \text{ МПа}$, $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

Умножим величины нормативных нагрузок на заданный коэффициент запаса по нагрузкам $n_p = 1,5$:

$$P = n_p P_{\text{н}} = 1,5 \cdot 100 = 150 \text{ кН};$$

$$P_{\text{п}} = n_p P_{\text{пн}} = 1,5 \cdot 5 = 7,5 \text{ кН}.$$

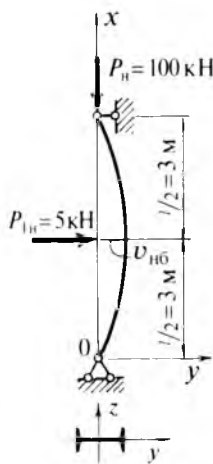


Рис. 13.18

Воспользуемся приближенным методом расчета (см. § 13.8).

Наибольший изгибающий момент и прогиб возникают в середине длины колонны. От действия поперечной нагрузки $P_{\text{п}}$ имеем:

$$M_{\text{н}} = \frac{P_{\text{п}} l}{4} = \frac{7,5 \cdot 6}{4} = 11,25 \text{ кНм};$$

$$v_{\text{н}} = \frac{P_{\text{п}} l^3}{48 E J_z} = \frac{7,5 \cdot 600^3}{48 \cdot 2,1 \cdot 10^4 \cdot 873} = 1,841 \text{ см}.$$

Значение силы Эйлера в плоскости изгиба равно:

$$P_{\text{э}} = \frac{\pi^2 E J_z}{l_0^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^4 \cdot 873}{600^2} = 502 \text{ кН}.$$

Определим наибольший прогиб и изгибающий момент от совместного действия поперечной и продольной нагрузок:

$$v = \frac{v_{\text{п}}}{1 - \frac{P}{P_3}} = \frac{1,841}{1 - \frac{150}{502}} = 2,625 \text{ см};$$

$$M = M_{\text{п}} + Pv = 11,25 + 150 \cdot 0,02625 = 15,19 \text{ кНм};$$

$$\sigma_{\text{нб}} = \frac{P}{F} + \frac{M}{W_z} = \frac{150}{20,2} + \frac{15,19 \cdot 10^2}{109} =$$

$$= 21,4 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 214 \text{ МПа} < \sigma_1 = 240 \text{ МПа}.$$

Условие прочности выполняется. Величину действительного коэффициента запаса в данном случае можно найти из квадратного уравнения (13.57). При вычислении коэффициентов этого уравнения необходимо взять нормативные значения заданных нагрузок $P_{\text{п}} = 100 \text{ кН}$ и $P_{\text{лн}} = 5 \text{ кН}$ и соответствующие величины $M_{\text{п}} = P_{\text{п}} l / 4 = 7,5 \text{ кНм}$ и $v_{\text{п}} = P_{\text{п}} l^3 / (48 EJ_z) = 1,228 \text{ см}$.

Решая квадратное уравнение, найдем $n_p = 1,645$.

13.10. Определение критических сил с помощью метода начальных параметров

Формулы (13.49)–(13.52) позволяют определить критические силы для центрально сжатых упругих стержней ступенчато-постоянной жесткости при наличии опор и сжимающих сил в промежуточных сечениях стержня. Рассмотрим примеры.

Пример 13.6. Определим критическую силу и коэффициент приведения длины для шарнирно опертого стержня с консолью (рис. 13.19, а).

Примем начало координат на верхнем свободном конце стержня. Тогда начальные параметры $M_0 = Q_0 = 0$. Используя уравнение статики, выразим опорную реакцию R через силу P и начальный прогиб v_0 :

$$\sum M_B = 0, \quad R = \frac{Pv_0}{b}.$$

С учетом этого выражение (13.49) для прогиба запишется в виде

$$v(x) = v_0 + \frac{\Phi_0}{k} \sin kx \quad \bigg|_{\text{①}} - \frac{v_0}{kb} [k(x-a) - \sin k(x-a)] \quad \bigg|_{\text{②}}.$$

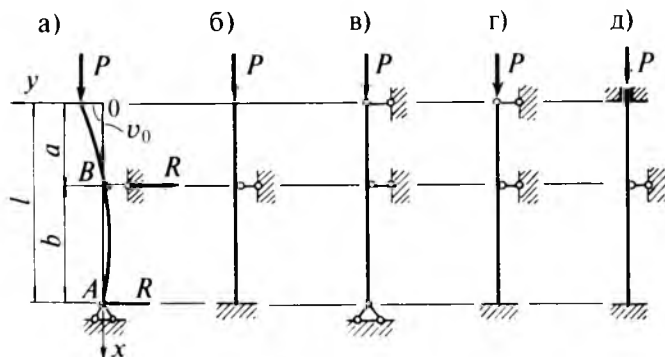


Рис. 13.19

Удовлетворяя граничным условиям $v(a) = v(l) = 0$, получим систему однородных алгебраических уравнений относительно неизвестных начальных параметров v_0 и φ_0 :

$$v_0 + \frac{\varphi_0}{k} \sin ka = 0;$$

$$\frac{v_0}{kb} \sin kb + \frac{\varphi_0}{k} \sin kl = 0.$$

Эта система имеет ненулевое решение при условии, что ее определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{\sin ka}{k} \\ \frac{\sin kb}{kb} & \frac{\sin kl}{k} \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим трансцендентное уравнение относительно параметра k

$$kb \sin kl - \sin ka \sin kb = 0. \quad (13.63)$$

При известной величине k критическая сила может быть найдена по формуле (13.35):

$$P_{кр} = k^2 EJ. \quad (13.64)$$

При практических расчетах сжатых стержней на устойчивость необходимо знать величину коэффициента приведения длины стержня μ (для простых случаев опирания значения μ приведены на рис. 13.7).

С помощью равенства $kl = \pi/\mu$, которое легко получить, приравняв правые части формул (13.12) и (13.64), уравнение (13.63) можно преобразовать к виду

$$\frac{\pi\beta}{\mu} \sin \frac{\pi}{\mu} = \sin \frac{\pi\alpha}{\mu} \sin \frac{\pi\beta}{\mu}, \quad (13.65)$$

где $\alpha = a/l$; $\beta = b/l$.

Из этого уравнения можно определить величину μ численным методом, например методом итераций.

Установим пределы изменения величины μ в зависимости от величин α и β .

Случай $\alpha = 0$, $\beta = 1$ соответствует стержню, шарнирно опертому по концам. При этом из уравнения (13.65) следует

$$\sin \frac{\pi}{\mu} = 0; \quad \mu = 1.$$

Случай $\alpha \rightarrow 1$, $\beta \rightarrow 0$ ($\beta \neq 0$) соответствует консольному стержню, так как опорное закрепление в виде трех опорных связей эквивалентно заделке. Однако в данном случае в отличие от предыдущего получить величину $\mu = 2$ из уравнения (13.65) нельзя, поскольку вместо граничных условий $v(a) = v(l) = 0$ необходимо использовать граничные условия в заделке $v(l) = \varphi(l) = 0$.

Таким образом, для всех значений $0 < \beta \leq 1$ коэффициент приведения длины изменяется в пределах $1 \leq \mu < 2$.

В справочной литературе приведены значения коэффициента μ для стержней с различными опорными закреплениями в зависимости от отношения характерных размеров. В табл. 13.2 даны значения μ в зависимости от отношения $\beta = b/l$ для стержней, изображенных на рис. 13.19.

Таблица 13.2

Рис. 13.19	$\beta = b/l$										
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
<i>a</i>	2,00	1,87	1,73	1,60	1,47	1,35	1,23	1,13	1,06	1,01	1,00
<i>б</i>	2,00	1,85	1,70	1,55	1,40	1,26	1,11	0,98	0,85	0,76	0,70
<i>в</i>	0,70	0,65	0,60	0,56	0,52	0,50	0,52	0,56	0,60	0,65	0,70
<i>г</i>	0,70	0,65	0,59	0,54	0,49	0,44	0,41	0,41	0,44	0,47	0,50
<i>д</i>	0,50	0,46	0,43	0,39	0,36	0,35	0,36	0,39	0,43	0,46	0,50

Пример 13.7. Составим трансцендентное уравнение для определения критических сил консольного стержня ступенчато-постоянной жесткости, нагруженного двумя сжимающими силами P_1 и P_2 (рис. 13.20). Отношение P_1/P_2 задано.

Введем обозначения

$$k_1^2 = \frac{P_1 + P_2}{E_1 J_1}; \quad k_2^2 = \frac{P_2}{E_2 J_2}. \quad (13.66)$$

Примем начало координат для нижнего участка стержня в заделке. Учитывая, что $v_0 = \varphi_0 = Q_0 = 0$, по формулам (13.49)–(13.52) получим

$$\left. \begin{aligned} v(b) &= -\frac{M_0}{P_1 + P_2} (1 - \cos k_1 b); \\ \varphi(b) &= -\frac{k_1 M_0}{P_1 + P_2} \sin k_1 b; \\ M(b) &= M_0 \cos k_1 b; \quad Q(b) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (13.67)$$

Перенесем начало координат в точку O_2 и примем величины (13.67) за начальные параметры для верхнего участка стержня. Удовлетворяя граничному условию на верхнем конце стержня $M(a) = 0$, по формуле (13.51) с учетом (13.67) получим

$$M(a) = -\frac{k_1 M_0}{P_1 + P_2} \sin k_1 b \cdot \frac{P_2}{k_2} \sin k_2 a + M_0 \cos k_1 b \cdot \cos k_2 a = 0.$$

После преобразований получим уравнение

$$\frac{k_1 P_2}{k_2 (P_1 + P_2)} \operatorname{tg} k_1 b \operatorname{tg} k_2 a = 1. \quad (13.68)$$

При заданных величинах a , b и P_1/P_2 с использованием равенств (13.66) можно найти наименьший корень уравнения (13.68) и величины критических сил $P_{1\text{кр}}$ и $P_{2\text{кр}}$.

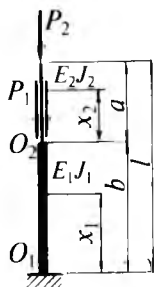


Рис. 13.20

13.11. Определение критических сил с помощью энергетического метода

Во многих более сложных задачах определение критических сил с помощью метода начальных параметров приводит к значительным трудностям вычислительного характера, связанным с необхо-

димостью решения сложных трансцендентных уравнений. Поэтому в таких случаях предпочтительнее оказываются приближенные методы. Одним из наиболее простых приближенных методов является *энергетический метод*. Он основан на рассмотрении изменения полной потенциальной энергии упругого стержня при переходе от прямолинейной формы равновесия к искривленной.

Полная потенциальная энергия стержня при изгибе определяется выражением

$$\Pi = U + V, \quad (13.69)$$

где U — потенциальная энергия деформации стержня при изгибе; V — потенциальная энергия внешних сжимающих сил P_i .

Выражение для потенциальной энергии деформации изгиба можно представить в виде

$$U = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2 EJ} = \int_0^l \frac{(-EJv'')^2 dx}{2 EJ} = \frac{1}{2} \int_0^l EJ (v'')^2 dx. \quad (13.70)$$

Потенциальную энергию сжимающих сил P_i можно выразить через работу этих сил на соответствующих им продольных перемещениях u_i , возникающих при переходе от прямолинейной к искривленной форме равновесия:

$$V = -A = -\sum_i P_i u_i. \quad (13.71)$$

Поскольку при потере устойчивости силы P_i остаются постоянными по величине, в последнем равенстве отсутствует множитель $1/2$. Составим выражение для перемещения u_i точки приложения сжимающей силы P_i по направлению этой силы (рис. 13.21, а). Это перемещение обусловлено изгибом стержня, в результате чего происходит поворот отдельных элементов стержня без изменения их длины. Поворот элемента длиной dx (рис. 13.21, б) вызывает уменьшение его проекции на направление оси стержня на величину

$$du = dx - dx \cos \varphi = dx \cdot 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \approx dx \frac{\varphi^2}{2} = \frac{1}{2} (v')^2 dx.$$

Отсюда найдем

$$u_i = \frac{1}{2} \int_0^l (v')^2 dx. \quad (13.72)$$

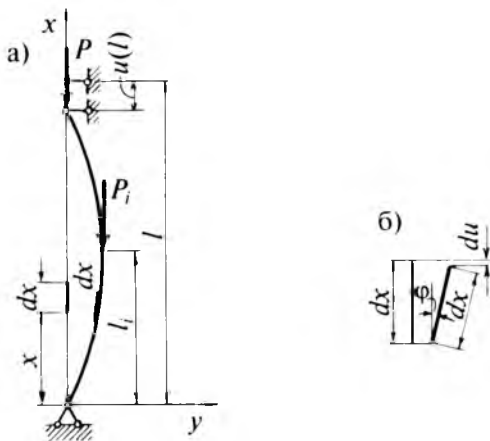


Рис. 13.21

Подставляя (13.70)– (13.72) в (13.69), получим

$$\Pi = U - A = \frac{1}{2} \left[\int_0^l EJ (v'')^2 dx - \sum_i P_i \int_0^{l_i} (v')^2 dx \right]. \quad (13.73)$$

Одной из разновидностей энергетического метода является метод Ритца. При определении критических сил с помощью этого метода для прогиба принимают выражение в виде нескольких членов ряда

$$v(x) = \sum_{k=1}^n a_k f_k(x). \quad (13.74)$$

Функции $f_k(x)$ подбирают так, чтобы каждая из них удовлетворяла граничным условиям задачи (по крайней мере, кинематическим). Например, для стержня, шарнирно опертого по концам, можно принять

$$v(x) = \sum_{k=1}^n a_k \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

При этом удовлетворяются граничные условия на опорах

$$v(0) = v(l) = M(0) = M(l) = 0.$$

Подставляя (13.74) в (13.73), получим выражение для полной потенциальной энергии как квадратичной функции независимых параметров a_k :

$$\Pi = \Pi(a_1^2, a_2^2, \dots, a_n^2).$$

Согласно *принципу Дирихле* необходимым и достаточным условием равновесия системы является наличие экстремума ее полной потенциальной энергии:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial a_2} = 0; \quad \dots; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial a_n} = 0. \quad (13.75)$$

В результате дифференцирования получим систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно независимых параметров $a_1, a_2, \dots, a_n$. Эта система уравнений имеет отличные от нуля решения при условии, что ее определитель равен нулю. Раскрывая определитель, получим алгебраическое уравнение n -й степени относительно сжимающей силы. Наименьший положительный корень этого уравнения равен критической силе.

При вычислении критических сил с помощью энергетического метода необходимо иметь в виду следующее. Если принятое выражение (13.74) совпадает с истинным уравнением для прогибов стержня, энергетический метод дает точное значение критической силы. Принимая приближенные выражения для $v(x)$, мы будем всегда получать завышенные значения критических сил, так как всякое отклонение от истинной формы равносильно наложению на систему некоторых дополнительных связей, которые повышают устойчивость. Наиболее просто определяются критические силы в том случае, когда истинное уравнение для прогиба с достаточной точностью можно аппроксимировать одним членом ряда

$$v(x) = af(x).$$

Подставляя это выражение в формулу (13.73) и используя уравнение (13.75), получим

$$\Pi = \frac{a^2}{2} \left[\int_0^l EJ(f'')^2 dx - \sum_i P_i \int_0^{l_i} (f')^2 dx \right]; \quad (13.76)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a} = a \left[\int_0^l EJ(f'')^2 dx - \sum_i P_i \int_0^{l_i} (f')^2 dx \right] = 0. \quad (13.77)$$

Из сравнения выражений (13.76) и (13.77) следует, что в рассматриваемом случае условие $\partial \Pi / \partial a = 0$ можно заменить условием энергетического баланса системы

$$\Pi = U - A = 0. \quad (13.78)$$

Если стержень нагружен одной сжимающей силой, то из уравнения (13.78) с учетом (13.73) получим

$$P_{\text{кр}} = \frac{\int_0^l EJ(v'')^2 dx}{\int_0^{l_p} (v')^2 dx}, \quad (13.79)$$

где l_p — координата точки приложения сжимающей силы.

Рассмотрим пример определения критической силы с помощью энергетического метода.

Пример 13.8. Определим критическую силу для шарнирно опертого стержня, нагруженного сжимающей силой P , приложенной в середине длины пролета (рис. 13.22).

Точное решение этой задачи с помощью метода начальных параметров приводит к довольно громоздким преобразованиям.

Для определения $P_{\text{кр}}$ воспользуемся формулой (13.79). Примем

$$v = a \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Тогда получим

$$P_{\text{кр}} = \frac{a^2 EJ \frac{\pi^2}{l^4} \int_0^l \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx}{a^2 \frac{\pi^2}{l^2} \int_0^{l/2} \cos^2 \frac{\pi x}{l} dx} = \frac{2\pi^2 EJ}{l^2} = \frac{19,7 EJ}{l^2}.$$

Точное решение дает

$$P_{\text{кр}} = \frac{18,7 EJ}{l^2}.$$



Рис. 13.22

Точность полученного приближенного решения можно существенно повысить, если принять

$$v = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l}$$

и воспользоваться методом Ритца. При этом получается практически точное значение критической силы.



ГЛАВА 14

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ

14.1. Основные понятия

14.2. Определение секториальных нормальных напряжений

14.3. Определение секториальных касательных напряжений

14.4. Секториальные координаты и секториальные геометрические характеристики сечений

14.5. Определение углов закручивания и внутренних усилий

ГЛАВА 15

ДИНАМИЧЕСКОЕ ДЕЙСТВИЕ НАГРУЗОК

15.1. Понятие о динамической нагрузке

В предыдущих разделах был рассмотрен расчет стержней и стержневых систем на действие *статических* нагрузок, то есть постоянных во времени или таких, которые в процессе нагружения конструкции изменяются настолько медленно, что возникающие при этом силы инерции незначительны и ими можно пренебречь. Быстро изменяющаяся нагрузка вызывает перемещения элементов конструкции с ускорениями, в результате чего возникают инерционные силы, которые необходимо учитывать в расчете. Такие нагрузки, а также вызываемые ими перемещения, деформации и напряжения называются *динамическими*. К динамическим относятся вибрационные и ударные нагрузки, создаваемые различными двигателями, станками, механизмами, а также нагрузки, возникающие при движении тела с ускорением.

При расчете конструкций на действие динамических нагрузок используется известный из курса теоретической механики *принцип Даламбера*, согласно которому движущуюся с ускорением систему в каждый момент времени можно рассматривать как находящуюся в состоянии покоя, если к внешним силам, действующим на систему, добавить силы инерции.

Силы инерции $P_{\text{и}}$ относятся к объемным силам, так как они непрерывно распределены по всему объему V тела.

Величина $dP_{\text{и}}$ элементарной силы инерции, действующей на бесконечно малый элемент тела, равна произведению его массы dm на ускорение a и направлена в сторону, противоположную ускорению:

$$dP_{\text{и}} = dma = \frac{dQ}{g} a = \gamma dV \frac{a}{g}, \quad (15.1)$$

где dQ и dV — вес и объем бесконечно малого элемента тела; γ — объемный вес материала; g — ускорение силы тяжести.

Сила инерции, действующая на единицу объема тела, равна

$$\frac{dP_{\text{и}}}{dV} = \frac{\gamma a}{g}. \quad (15.2)$$

При расчете стержней удобно ввести распределенную по длине стержня инерционную нагрузку. Объем dV элемента стержня, имеющего площадь поперечного сечения $F(x)$ и длину dx , равен Fdx . Учитывая формулу (15.2), найдем

$$q_{\text{и}}(x) = \frac{\gamma a}{g} \cdot \frac{dV}{dx} = \frac{\gamma a}{g} \cdot \frac{Fdx}{dx} = \frac{q}{g} a, \quad (15.3)$$

где $q = \gamma F$ — вес единицы длины стержня.

При решении многих задач сопротивления материалов динамические перемещения $u_{\text{д}}$, деформации $\epsilon_{\text{д}}$ и напряжения $\sigma_{\text{д}}$, возникающие от действия динамической нагрузки $P_{\text{д}}$, могут быть найдены путем умножения соответствующих статических перемещений $u_{\text{с}}$, деформаций $\epsilon_{\text{с}}$ и напряжений $\sigma_{\text{с}}$, возникающих от действия статической нагрузки, на так называемый *динамический коэффициент* μ :

$$u_{\text{д}} = \mu u_{\text{с}}; \quad \epsilon_{\text{д}} = \mu \epsilon_{\text{с}}; \quad \sigma_{\text{д}} = \mu \sigma_{\text{с}}; \quad P_{\text{д}} = \mu P_{\text{с}}. \quad (15.4)$$

Величина динамического коэффициента зависит от вида нагрузки, геометрических размеров, массы, материала сооружения и ряда других факторов.

15.2. Напряжения в стержне при его движении с ускорением

Рассмотрим определение динамических усилий и напряжений, возникающих в балке и тросе при подъеме балки с ускорением (рис. 15.1). Возникающие при этом силы инерции вызывают дополнительные деформации изгиба балки и растяжения троса. Если пренебречь влиянием этих деформаций на величины ускорений различных частиц балки и троса, то можно принять, что все точки балки и троса находятся в движении с одинаковым ускорением.

До начала подъема в сечении A балки возникает наибольший по величине статический изгибающий момент

$$M_{\text{с}} = \frac{q_1 l^2}{18},$$

а в сечении B троса — наибольшее статическое растягивающее усилие (весом строповочного устройства пренебрегаем, так как $h_1 \ll h$)

$$N_{\text{с}} = q_1 l + q_2 h,$$

где q_1 и q_2 — веса единиц длин балки и троса.

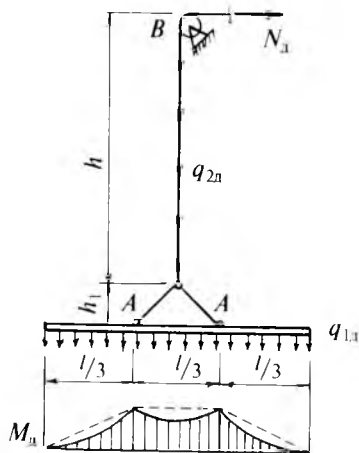


Рис. 15.1

При подъеме с ускорением a возникают равномерно распределенные по длине балки и троса инерционные силы

$$q_{1н} = \frac{q_1}{g} a; \quad q_{2н} = \frac{q_2}{g} a.$$

Динамические нагрузки $q_{1д}$ и $q_{2д}$ равны сумме статических и инерционных нагрузок:

$$q_{1д} = q_1 + q_{1н} = \left(1 + \frac{a}{g}\right) q_1 = \mu q_1; \quad q_{2д} = \mu q_2. \quad (15.5)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае величина динамического коэффициента определяется выражением

$$\mu = 1 + \frac{a}{g}. \quad (15.6)$$

С учетом этого наибольшие значения динамического изгибающего момента M_d и динамического усилия в тросе могут быть найдены по формулам

$$M_d = \mu M_c = \mu \frac{q_1 l^2}{18}; \quad N_d = \mu N_c = \mu (q_1 l + q_2 h).$$

Соответствующие наибольшие динамические напряжения в балке и тросе равны

$$\sigma_d = \frac{M_d}{W} = \mu \frac{M_c}{W}; \quad \sigma_n = \frac{N_d}{F} = \mu \frac{N_c}{F},$$

где W — момент сопротивления поперечного сечения балки; F — площадь поперечного сечения троса.

При больших скоростях подъема, которые могут быть достигнуты, как правило, благодаря большим ускорениям (например, в скоростных лифтах), динамические усилия и напряжения могут значительно превосходить по величине их статические значения.

15.3. Ударное действие нагрузки

Под *ударной* понимается нагрузка, которая достигает значительной величины за весьма короткий промежуток времени. Например, при забивке свай в грунт ударяющее тело падает с некоторой высоты на конец сваи и почти мгновенно останавливается, вызывая удар. Скорость ударяющего тела за время, измеряемое малыми долями секунды, падает до нуля. Следовательно, ударяющему телу со стороны ударяемого тела передается очень большое ускорение, направленное в сторону, обратную движению. Возникающее между телами динамическое давление P_d равно силе инерции ударяющего тела:

$$P_d = P \frac{a}{g},$$

где P — вес ударяющего тела; a — ускорение.

Однако найти величину силы P_d по этой формуле практически невозможно, так как время удара, в течение которого происходит падение скорости до нуля, и ускорение практически нельзя определить. В связи с этим при расчетах на удар пользуются энергетическим принципом, основанным на законе сохранения энергии.

Элементы стержневых конструкций, подвергающиеся удару, могут испытывать различные виды деформаций: сжатие (рис. 15.2, а), изгиб (рис. 15.2, б), изгиб с кручением (рис. 15.2, в) и др.

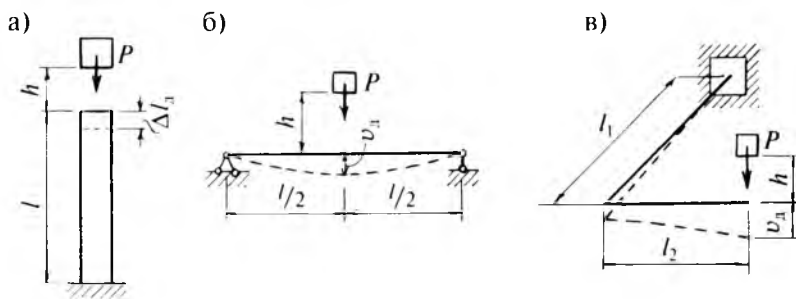


Рис. 15.2

Для упрощения расчета в приближенной теории удара вводится ряд допущений. Предполагается, что ударяющее тело, падающее с некоторой высоты h , не отскакивает от ударяемого тела и после удара оба тела движутся совместно.

Местные деформации, возникающие в телах в области их контакта при ударе и приводящие к некоторому смягчению последнего, не учитываются, что идет в запас прочности.

Предполагается, что в ударяемом теле возникают только упругие деформации и справедлив закон Гука.

В некоторый момент времени скорость перемещения в месте удара становится равной нулю. В этот момент динамическая сила P_d и возникающее от ее действия динамическое перемещение λ_d конструкции в точке удара достигают наибольших значений. Затем происходят затухающие колебания и наступает состояние статического равновесия, при котором перемещение в точке удара становится равным его значению при статическом действии силы P , равной весу груза.

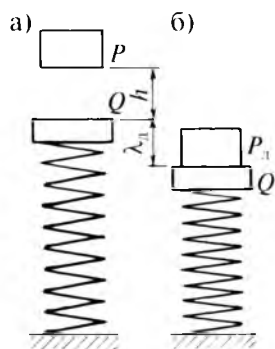


Рис. 15.3

Рассмотрим удар груза весом P , падающего с высоты h на тело весом Q , прикрепленное к концу упругой пружины (рис. 15.3).

Величина осевой силы, при которой происходит сжатие пружины на единицу длины, называется *жесткостью пружины*. Обозначим ее буквой c . С учетом этого величина перемещения верхнего конца пружины при статическом приложении силы P может быть найдена по формуле

$$\lambda_c = \frac{P}{c}. \quad (15.7)$$

При ударном действии нагрузки благодаря инерции массы пружины в начальный момент времени окажется сжатой не вся пружина, а лишь небольшая часть у верхнего ее конца. Волна сжатия достигнет нижнего конца пружины лишь через некоторое время. После отражения возникнет волна, движущаяся в обратном направлении, и т.д. Таким образом, распространение упругих деформаций по длине пружины носит волнообразный характер.

Если масса пружины мала по сравнению с массой падающего груза, то силами инерции пружины можно пренебречь. В этом слу-

чае можно считать, что волна сжатия распространяется по всей длине пружины мгновенно, и величина динамического перемещения λ_d верхнего конца пружины может быть найдена по формуле

$$\lambda_d = \frac{P_d}{c}. \quad (15.8)$$

Примем следующие положения.

1. В момент, непосредственно предшествующий удару, скорость V падающего груза P связана с высотой падения h соотношением

$$V^2 = 2gh. \quad (15.9)$$

2. После удара в момент соприкосновения двух тел P и Q начинается их совместное движение со скоростью V_1 . Величину V_1 можно определить с помощью теоремы об изменении количества движения за время удара, согласно которой количество движения до удара равно количеству движения после удара:

$$\frac{P}{g}V = \frac{P+Q}{g}V_1.$$

Отсюда находим

$$V_1 = \frac{P}{P+Q}V. \quad (15.10)$$

Величину кинетической энергии двух тел, соответствующую началу их совместного движения, с учетом равенств (15.9) и (15.10) можно определить по формуле

$$T_1 = \frac{P+Q}{2g}V_1^2 = \frac{P^2V^2}{2g(P+Q)} = \frac{Ph}{1 + \frac{Q}{P}}.$$

3. При дальнейшем движении двух тел их скорость V_2 постепенно убывает до нуля. В этот момент перемещение и сила сжатия пружины достигают своих наибольших значений, соответственно равных λ_d и $P_d + Q$ (рис. 15.3, б), а кинетическая энергия обращается в нуль:

$$T_2 = \frac{P+Q}{2g}V_2^2 = 0.$$

На основании теоремы об изменении кинетической энергии можно записать

$$T_2 - T_1 = A, \quad (15.11)$$

где A — работа всех сил, приложенных к двум движущимся телам, на перемещении λ_d .

Сила тяжести двух тел совершает на перемещении λ_d работу

$$A_1 = (P + Q)\lambda_d.$$

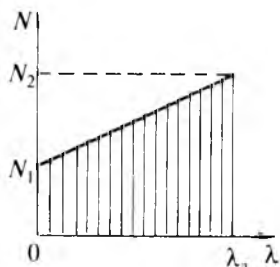


Рис. 15.4

Сила упругости пружины, приложенная к телам в процессе деформации пружины, изменяется от значения $N_1 = Q$ до значения $N_2 = Q + P_d$. График зависимости силы от перемещения изображен на рис. 15.4. Так как эта сила направлена в сторону, противоположную движению, ее работа отрицательна и численно равна площади диаграммы, заштрихованной на рис. 15.4:

$$A_2 = -\frac{N_1 + N_2}{2}\lambda_d = -Q\lambda_d - \frac{P_d\lambda_d}{2}.$$

Входящую в это выражение величину силы P_d можно исключить с помощью равенств (15.7) и (15.8):

$$P_d = c\lambda_d = P\frac{\lambda_d}{\lambda_c}.$$

С учетом этого получим

$$A = A_1 + A_2 = (P + Q)\lambda_d - Q\lambda_d - \frac{P\lambda_d^2}{2\lambda_c} = P\lambda_d - \frac{P\lambda_d^2}{2\lambda_c}.$$

Подставляя найденные значения T_1 , T_2 , A в равенство (15.11), получим следующее квадратное уравнение относительно величины динамического перемещения:

$$\lambda_d^2 - 2\lambda_c\lambda_d - \frac{2\lambda_ch}{1 + \frac{Q}{P}} = 0.$$

Решение этого уравнения можно представить в виде

$$\lambda_d = \mu\lambda_c, \quad (15.12)$$

где

$$\mu = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\lambda_c\left(1 + \frac{Q}{P}\right)}} \quad (15.13)$$

представляет собой величину динамического коэффициента при ударе.

При известном значении μ величины динамической нагрузки, динамических напряжений и деформаций могут быть найдены по формулам (15.4).

Если $Q = 0$, то есть груз P падает на невесомую пружину, то

$$\mu = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\lambda_c}}. \quad (15.14)$$

Формулой (15.14) можно пользоваться в том случае, когда масса ударяемой конструкции мала по сравнению с массой ударяющего тела. Если масса ударяемой конструкции значительна, то расчет сильно усложняется. В этом случае производят приближенный расчет, полагая, что распределенную по всему объему массу Q/g можно заменить *приведенной массой* $\beta Q/g$, сосредоточенной в точке удара. Безразмерный коэффициент β называется *коэффициентом приведения массы* ударяемого тела к точке удара. Он всегда меньше единицы.

Величина β определяется приближенно путем приравнивания кинетической энергии T заданной системы с распределенной массой к кинетической энергии T' той же системы, вся приведенная масса которой $\beta Q/g$ сосредоточена в точке удара. Величины T и T' могут быть найдены по формулам

$$T = \iiint_V \frac{V^2(x)dQ}{2g}; \quad T' = \beta \frac{QV^2}{2g},$$

где dQ/g и $V(x)$ — масса и скорость бесконечно малого элемента ударяемого тела; V — скорость приведенной массы в точке удара.

Приравняв T и T' между собой, получим

$$\beta = \frac{\iiint_V V^2(x)dQ}{QV^2}. \quad (15.15)$$

Величина динамического коэффициента упругой системы с приведенной массой определяется по формуле

$$\mu = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\lambda_c \left(1 + \beta \frac{Q}{P}\right)}}. \quad (15.16)$$

Анализируя формулы (15.13), (15.14), (15.16), можно прийти к следующим выводам.

Неучет массы ударяемой конструкции при расчете повышает величину динамического коэффициента, то есть идет в запас прочности.

Динамический коэффициент тем меньше, чем больше статическое перемещение λ_c в точке удара.

Если высота падения груза $h = 0$, то $\mu = 2$. Такое нагружение называется *внезапным*.

Если высота падения груза существенно больше величины статического перемещения, то единицами в формулах (15.13), (15.14), (15.16) можно пренебречь и они несколько упрощаются. Формула (15.13), например, принимает вид

$$\mu = \sqrt{\frac{2h}{\lambda_c \left(1 + \frac{Q}{P}\right)}}$$

15.4. Расчет стержней при ударном действии нагрузки

При расчете стержней для определения коэффициента приведения массы стержня к точке удара вводится допущение, что скорость $V(x)$ динамического перемещения $\lambda_d(x)$ произвольного сечения стержня пропорциональна перемещению $\lambda_c(x)$ стержня, статически нагруженного силой P в точке удара:

$$V(x) = k\lambda_c(x); \quad V = k\lambda_c,$$

где V и λ_c — скорость и статическое перемещение сечения стержня в месте удара; k — коэффициент пропорциональности.

Подставляя эти равенства в формулу (15.15) и учитывая, что $dQ = \gamma F(x)dx$, получим

$$\beta = \frac{\gamma \int_0^l \lambda_c^2(x) F(x) dx}{\lambda_c^2 Q}. \quad (15.17)$$

Рассмотрим частные случаи.

1. *Продольный удар*, вызывающий деформацию растяжения или сжатия стержня.

Для стержня постоянного сечения (рис. 15.5) статическое перемещение в месте удара равно его укорочению:

$$\lambda_c = \Delta l_c = \frac{Pl}{EF}.$$

Статическое перемещение произвольного сечения, находящегося на расстоянии x от опоры, равно

$$\lambda_c(x) = u(x) = \frac{Px}{EF} = \Delta l_c \frac{x}{l}.$$

Вес всего стержня $Q = \gamma Fl$.

Подставляя найденные величины в формулу (15.17), получим

$$\beta = \frac{1}{l^3} \int_0^l x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

Пример 15.1. Определим наибольшие сжимающие напряжения в стальном стержне ступенчато-постоянного сечения, возникающие в результате падения груза $P = 0,2$ кН с высоты $h = 20$ см (рис. 15.6). Решим задачу в двух вариантах: с учетом и без учета массы стержня. При расчете примем $\gamma = 7,7 \cdot 10^{-5}$ кН/см³, $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа.

Для выполнения расчета с учетом массы стержня определим коэффициент β приведения массы к точке удара.

Статическое перемещение произвольного сечения нижнего участка стержня равно

$$u_c(x_1) = \frac{Px_1}{EF_1}.$$

Для верхнего участка имеем

$$u_c(x_2) = \frac{Pl_1}{EF_1} + \frac{Px_2}{EF_2}.$$

Статическое перемещение в месте удара равно полному укорочению стержня:

$$\lambda_c = \Delta l_c = \frac{P}{E} \left(\frac{l_1}{F_1} + \frac{l_2}{F_2} \right) = \frac{0,2}{2,1 \cdot 10^4} \left(\frac{80}{10} + \frac{40}{5} \right) = 1,524 \cdot 10^{-4} \text{ см};$$

$$Q = \gamma(F_1 l_1 + F_2 l_2) = 7,7 \cdot 10^{-5} (10 \cdot 80 + 5 \cdot 40) = 0,077 \text{ кН}.$$

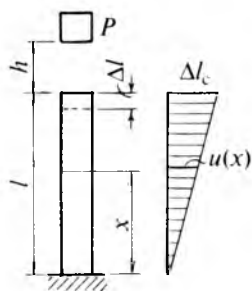


Рис. 15.5

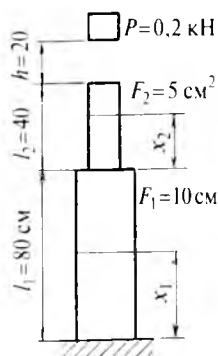


Рис. 15.6

Преобразуя с помощью полученных соотношений числитель формулы (15.17) и подставляя числовые значения входящих в нее величин, найдем

$$\begin{aligned}\gamma \int_0^l \lambda_c^2(x) F(x) dx &= \gamma \int_0^{l_1} u_c^2(x_1) F_1 dx_1 + \gamma \int_0^{l_2} u_c^2(x_2) F_2 dx_2 = \\ &= \gamma \int_0^{l_1} \left(\frac{Px_1}{EF_1} \right)^2 F_1 dx_1 + \gamma \int_0^{l_2} \left(\frac{Pl_1}{EF_1} + \frac{Px_2}{EF_2} \right)^2 F_2 dx_2 = \\ &= \frac{P^2 \gamma}{E^2} \left(\frac{l_1^3}{3F_1} + \frac{l_1^2 l_2 F_2}{F_1^2} + \frac{l_1 l_2^2}{F_1} + \frac{l_2^3}{3F_2} \right) = 3,278 \cdot 10^{-10} \text{ кНсм}^2.\end{aligned}$$

По формуле (15.17) находим

$$\beta = \frac{3,278 \cdot 10^{-10}}{1,524^2 \cdot 10^{-8} \cdot 0,077} = 0,183.$$

Динамический коэффициент с учетом массы стержня определяем по формуле (15.16):

$$\mu = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 20}{1,524 \cdot 10^{-4} \left(1 + \frac{0,183 \cdot 0,077}{0,2} \right)}} = 496.$$

Наибольшее статическое σ_c и динамическое σ_d напряжения равны

$$\sigma_c = \frac{P}{F_2} = \frac{0,2}{5} = 0,04 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 0,4 \text{ МПа}; \quad \sigma_d = \mu \sigma_c = 496 \cdot 0,4 = 198,4 \text{ МПа}.$$

Динамический коэффициент и наибольшее динамическое напряжение без учета массы стержня соответственно равны: $\mu = 513$, $\sigma_d = 205 \text{ МПа}$.

В рассмотренном примере влияние массы стержня на величину динамических напряжений незначительно.

2. Поперечный удар, вызывающий изгиб стержня.

Для балок постоянного сечения величина коэффициента β приведения массы балки к точке удара зависит от вида опорных закреплений балки и места удара. В качестве примера определим величину β для консольной балки, на свободный конец которой падает груз весом P (рис. 15.7).

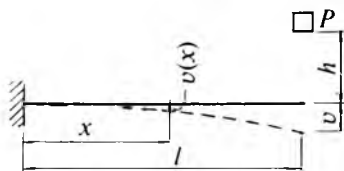


Рис. 15.7

Статический прогиб $v_c(x)$ в произвольном сечении балки от действия силы P можно найти, используя, например, метод начальных параметров. В результате получим

$$v_c(x) = \frac{Plx^2}{2EJ} - \frac{Px^3}{6EJ} = \frac{P}{6EJ}(3lx^2 - x^3).$$

В точке удара имеем

$$v_c = \frac{Pl^3}{3EJ}.$$

Полагая в формуле (15.17) $\lambda_c(x) = v_c(x)$, $\lambda_c = v_c$, $F = \text{const}$, $Q = \gamma Fl$ и проводя необходимые вычисления, получим

$$\beta = \frac{\frac{P^2 \gamma F}{36(EJ)^2} \int_0^l (3lx^2 - x^3)^2 dx}{\frac{P^2 l^6}{9(EJ)^2 \gamma F}} = \frac{33}{140}.$$

Аналогично можно вычислить величину коэффициента β для других случаев опирания и нагружения балок ударной нагрузкой. Например, для шарнирно опертой по концам балки при действии ударной нагрузки в середине пролета величина $\beta = 17/35$.

Пример 15.2. Определим наибольшие нормальные напряжения в стальной консольной балке двутаврового сечения (I 16), возникающие в результате падения груза $P = 0,5$ кН с высоты $h = 15$ см (рис. 15.7). Длина балки $l = 2$ м, $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа.

Выпишем из сортамента необходимые геометрические характеристики поперечного сечения и вес единицы длины балки: $J_c = 873$ см⁴, $W_c = 109$ см³; $q = 0,156$ кН/м.

Вес балки $Q = 0,156 \cdot 2 = 0,318$ кН.

Статический прогиб в точке удара равен:

$$v_c = \frac{Pl^3}{3EJ} = \frac{0,5 \cdot 200^3}{3 \cdot 2,1 \cdot 10^4 \cdot 873} = 0,0727 \text{ см.}$$

Динамический коэффициент с учетом массы балки определяем по формуле (15.16):

$$\mu = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 15}{0,0727 \left(1 + \frac{33}{140} \cdot \frac{0,318}{0,5} \right)}} = 19,97.$$

Наибольший изгибающий момент и наибольшие нормальные напряжения возникают в заделке. Их статические и динамические значения равны:

$$M_c = Pl = 0,5 \cdot 2 = 1 \text{ кНм}; \quad \sigma_c = \frac{M_c}{W} = \frac{10^2}{109} = 0,917 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 9,17 \text{ МПа};$$

$$M_d = \mu M_c = 19,97 \text{ кНм}; \quad \sigma_d = \mu \sigma_c = 183,1 \text{ МПа}.$$

Без учета массы балки $\mu = 21,34$; $\sigma_d = 195,7 \text{ МПа}$.

15.5. Прочность материалов при напряжениях, периодически изменяющихся во времени

К динамическим нагрузкам, несмотря на отсутствие значительных инерционных сил, можно отнести периодические многократно повторяющиеся нагрузки, действующие на элементы конструкций и сооружений. Такого рода нагружения характерны для элементов машиностроительных конструкций, таких как вагонные оси, валы, лопасти турбин и компрессоров и т.п. Изменения температуры (например, суточные и сезонные температурные перепады) также приводят к периодическим изменениям усилий и напряжений.

При таких нагружениях усилия и напряжения в элементах конструкций изменяются со временем по величине; они могут быть также знакопеременными. Опыты показывают, что знакопеременные во времени напряжения могут привести к разрушению конструкции при напряжениях, существенно меньших, чем предел текучести или временное сопротивление материала. Такое разрушение принято называть «усталостным». Материал, образно говоря, «устает» при действии многократных периодических нагрузок.

Число нагружений (циклов), необходимое для разрушения конструкции, зависит главным образом от величины действующих напряжений и может изменяться в очень широких пределах, достигая нескольких миллионов циклов. При небольших значениях напряжений элементы конструкций могут выдержать практически

неограниченное число циклов нагружений. Способность материалов выдерживать многократно повторяющиеся (периодические) нагрузки называется *выносливостью*.

Физические причины усталостного разрушения материалов достаточно сложны и не до конца изучены. Одной из причин усталостного разрушения принято считать образование и развитие трещин. Поскольку структура всех материалов не является однородной, на границах отдельных включений и вблизи микроскопических пустот и различных дефектов возникает концентрация напряжений, приводящая к появлению микротрещин. В результате действия периодических, в особенности знакопеременных, напряжений микротрещины растут, соединяются, и в результате этот процесс приводит к образованию одной или нескольких макротрещин. Последние и являются причиной усталостного разрушения. Наличие трещин при усталостном разрушении подтверждается натурными наблюдениями и анализом характера места разрушения.

Таким образом, под *усталостью* можно понимать процесс постепенного накопления повреждений материала под действием переменных напряжений, приводящий к образованию трещин и разрушению.

При проектировании конструкций, работающих под действием переменных (периодических) нагрузок, необходимо уметь прогнозировать их *длительную прочность и долговечность*. Для этого необходимо знать характер нагружения элементов конструкции, закон изменения напряжений во времени и усталостные свойства материалов.

Рассмотрим пример определения нормальных напряжений в поперечном сечении оси вагона (рис. 15.8). Вес вагона вызывает изгиб оси. Соответствующая расчетная схема и эпюра изгибающих моментов изображены на рис. 15.8, а, в.

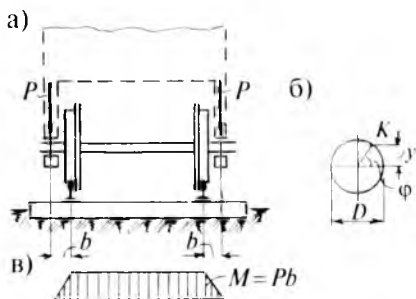


Рис. 15.8

При вращении оси вагона точка K поперечного сечения (рис. 15.8, б) оказывается попеременно в зонах растяжения и сжатия. Закон изменения нормальных напряжений в точке K в зависимости от времени t определяется по формуле

$$\sigma(t) = \frac{M}{J} y = \frac{PhD}{2J} \sin \varphi = \frac{32 Ph}{\pi D^3} \sin \omega t,$$

где $J = \pi D^4/64$ — момент инерции поперечного сечения оси; ω — угловая скорость вращения.

Таким образом, нормальные напряжения в поперечном сечении оси изменяются по периодическому закону (рис. 15.9) с периодом $T = 2\pi$ и амплитудой $\sigma_a = 32 Ph/(\pi D^3)$.

Совокупность всех значений переменных напряжений за один период процесса их изменения называется *циклом напряжений*.

В рассмотренном случае максимальное $\sigma_{\max}$ и минимальное $\sigma_{\min}$ напряжения цикла равны по величине и противоположны по знаку. Такой цикл называется *симметричным*.

Если к вращающемуся валу, работающему на изгиб, дополнительно приложить постоянную по величине растягивающую (сжимающую) силу P , то напряжения будут изменяться по закону

$$\sigma = \frac{P}{F} + \sigma_a \sin \omega t.$$

При этом максимальное $\sigma_{\max}$ и минимальное $\sigma_{\min}$ напряжения цикла не равны между собой. Такой цикл напряжений (рис. 15.10) называется *асимметричным*.

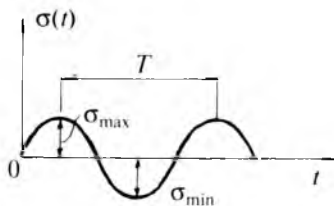


Рис. 15.9

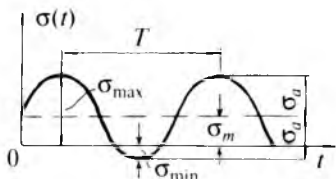


Рис. 15.10

Полусумма максимального и минимального напряжений называется *средним напряжением*:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2},$$

а полуразность — амплитудой цикла:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}.$$

Среднее напряжение цикла может быть как положительным, так и отрицательным. Амплитуда цикла всегда положительна.

Если напряжения $\sigma_{\max}$ и $\sigma_{\min}$ имеют одинаковые знаки, то соответствующий цикл напряжений называется *знакопостоянным*, если же знаки $\sigma_{\max}$ и $\sigma_{\min}$ различны — то *знакопеременным*. Если одна из величин $\sigma_{\max}$ или $\sigma_{\min}$ равна нулю, то цикл напряжений называется *отнулевым* или *пульсирующим*.

Отношение

$$R = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}}$$

называется *коэффициентом асимметрии цикла*. Для симметричного цикла $R = -1$.

Многочисленными опытами установлено, что при действии переменных напряжений разрушение материалов происходит при напряжениях $\sigma_{\max}$ и $\sigma_{\min}$, значительно меньших, чем опасные напряжения при однократном статическом нагружении. При этом усталостное разрушение определяется только наибольшим и наименьшим напряжениями цикла и практически не зависит от характера и частоты изменения напряжений внутри интервала $\sigma_{\max} - \sigma_{\min}$.

Наибольшее значение максимального напряжения цикла $\sigma_{\max}$ (или $\sigma_{\min}$, если $|\sigma_{\max}| < |\sigma_{\min}|$), которое не вызывает разрушения испытываемого на выносливость образца из данного материала при неограниченно большом числе циклов, называется *пределом выносливости*. Его обозначают σ_R , где R — коэффициент асимметрии цикла. Предел выносливости имеет наименьшее значение при симметричном цикле и обозначается σ_{-1} . Для опытного определения σ_{-1} используются специальные машины, в которых вращающийся образец круглого сечения подвергается чистому изгибу. Схема машины изображена на рис. 15.11. Нагрузка, вызывающая изгиб, передается с помощью подвесок, прикрепленных к образцу на подшипниках. Из испытываемого материала изготавливают не менее десяти одинаковых образцов. Принимая различные значения напряжения $\sigma_{\max}$, определяют число циклов N , необходимое для доведения каждого образца до разрушения. По результатам испы-

таний строят кривую выносливости $\sigma_{\max}(N)$ (рис. 15.12). Эта кривая имеет горизонтальную асимптоту, ордината которой равна пределу выносливости σ_{-1} .

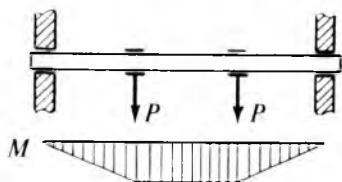


Рис. 15.11

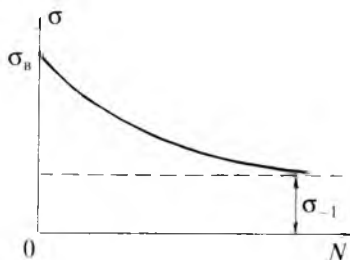


Рис. 15.12

Опыты показали, что если стальной образец не разрушается при $N = 10^7$ циклов, то он не разрушается и при большем числе циклов. Поэтому испытание образцов прекращается при $N = 10^7$. Это число циклов называется *базой испытания*. Кривые выносливости для цветных металлов не имеют горизонтальных асимптот. Поэтому для них база испытания увеличивается до $N = 10^8$ циклов и устанавливается *предел ограниченной выносливости*. Для того чтобы иметь представление о порядке величин числа циклов, заметим, что вагонная ось на пути от Москвы до Владивостока испытывает около $3 \cdot 10^6$ циклов.

Ориентировочно предел выносливости σ_{-1} для сталей составляет $0,4 \div 0,5$ от временного сопротивления σ_b . Более точные данные приведены в специальной литературе.

На величину предела выносливости влияют многие факторы. Кратко рассмотрим основные из них.

Концентрация напряжений. Усталостные трещины чаще всего возникают в местах концентрации напряжений (выточек, отверстий, шпоночных канавок, острых углов, в зонах контакта деталей и т.д.). Снижение предела выносливости при наличии концентраторов напряжений учитывается введением так называемого *эффективного коэффициента концентрации напряжений*, который представляет собой отношение предела выносливости σ_{-1} образца без концентраторов напряжений к пределу выносливости $\sigma_{-1к}$ образца тех же размеров, но с концентратором напряжений:

$$k_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1к}}.$$

Качество поверхности детали. В большинстве деталей усталостное разрушение начинается с поверхности. Снижение предела выносливости тем больше, чем грубее поверхностная обработка детали, создающая дополнительные места концентрации напряжений. Снижение предела выносливости в этом случае учитывается введением *коэффициента поверхностной чувствительности*, который представляет собой отношение предела выносливости σ_{-1} образца с заданным состоянием поверхности к пределу выносливости $\sigma_{-1н}$ такого же образца с полированной поверхностью:

$$\beta_n = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1н}}.$$

Абсолютные размеры детали. Экспериментально установлено, что с увеличением размеров образца предел выносливости уменьшается. Так, например, предел выносливости образца диаметром 7 мм из стали, идущей на изготовление вагонных осей, равен 230 МПа, а действительный предел выносливости вагонной оси диаметром 170 мм составляет 120 МПа. Это можно объяснить тем, что в образцах с большим объемом материала больше дефектных мест (раковины, неметаллические включения и т.п.). Снижение предела выносливости с увеличением размеров детали носит название *масштабного эффекта*. Снижение предела выносливости за счет масштабного эффекта учитывается введением *масштабного коэффициента*, который представляет собой отношение предела выносливости $\sigma_{1м}$ образца заданного размера к пределу выносливости σ_{-1} образцов диаметром 6÷12 мм:

$$\beta_m = \frac{\sigma_{1м}}{\sigma_{-1}}.$$

Внешняя среда. Усталостная прочность зависит от среды, в которой находится деталь. Существенное влияние на величину предела выносливости оказывает коррозия. В некоторых случаях снижение предела выносливости в результате коррозии достигает 70÷80%. Причиной такого резкого снижения выносливости являются коррозионные повреждения поверхности, вызывающие значительную концентрацию напряжений.

Снижение предела выносливости вследствие коррозии может быть учтено в расчете введением коэффициента β_k , равного отношению предела выносливости $\sigma_{-1к}$ образца с корродированной

поверхностью к пределу выносливости $\sigma_{-1п}$ образца с полированной поверхностью:

$$\beta_k = \frac{\sigma_{-1к}}{\sigma_{-1п}}.$$

Температура. При повышении температуры предел выносливости, как правило, снижается, а при понижении — возрастает. Для стали при температуре выше 300°C предел выносливости снижается на 15÷20% на каждые 100°C повышения температуры. При понижении температуры с 20° до –190°C предел выносливости для некоторых сталей увеличивается более чем вдвое.

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

ГЛАВА 16

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

16.1. Полная система уравнений теории упругости

В главах 4—6 были выведены основные уравнения теории упругости, устанавливающие законы изменения напряжений и деформаций в окрестности произвольной точки тела, а также соотношения, связывающие напряжения с деформациями и деформации с перемещениями. Приведем полную систему уравнений теории упругости в декартовых координатах.

Уравнения равновесия Навье:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (16.1)$$

Соотношения Коши:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}; & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}; & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (16.2)$$

Закон Гука (в прямой и обратной формах):

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]; & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)]; & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]; & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G}. \end{aligned} \right\} \quad (16.3)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \lambda e + 2\mu \epsilon_x; & \tau_{xy} &= \mu \gamma_{xy}; \\ \sigma_y &= \lambda e + 2\mu \epsilon_y; & \tau_{yz} &= \mu \gamma_{yz}; \\ \sigma_z &= \lambda e + 2\mu \epsilon_z; & \tau_{zx} &= \mu \gamma_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (16.3, a)$$

Напомним, что здесь $e = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$ — относительная объемная деформация, а по закону парности касательных напряжений $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ и соответственно $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$. Входящие в (16.3, а) постоянные Ляме определяются по формулам (6.13).

Из приведенной системы видно, что она включает 15 дифференциальных и алгебраических уравнений, содержащих 15 неизвестных функций (6 компонент тензора напряжений, 6 компонент тензора деформаций и 3 компоненты вектора перемещения).

В силу сложности полной системы уравнений нельзя найти общее решение, которое было бы справедливо для всех задач теории упругости, встречающихся на практике.

Существуют различные способы уменьшения количества уравнений, если в качестве неизвестных функций принять, например, только напряжения или перемещения.

Если, решая задачу теории упругости, исключить из рассмотрения перемещения, то вместо соотношений Коши (16.2) можно получить уравнения, связывающие между собой компоненты тензора деформаций. Продифференцируем деформацию ϵ_x , определяемую первым равенством (16.2), два раза по y , деформацию ϵ_y — два раза по x и сложим полученные выражения. В результате получим

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

Выражение, стоящее в скобках, согласно (16.2) определяет угловую деформацию γ_{xy} . Таким образом, последнее равенство можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}.$$

Аналогично можно получить еще два равенства, которые вместе с последним соотношением составляют первую группу *уравнений совместности деформаций Сен-Венана*:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (16.4)$$

Каждое из равенств (16.4) устанавливает связь между деформациями в одной плоскости. Из соотношений Коши могут быть также получены условия совместности, связывающие деформации в разных плоскостях. Продифференцируем выражения (16.2) для угловых деформаций следующим образом: γ_{xy} — по z ; γ_{yz} — по x ; γ_{zx} — по y ; сложим два первых равенства и вычтем третье. В результате получим

$$\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} = 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z}.$$

Дифференцируя это равенство по y и учитывая, что $\frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y$, приходим к следующему соотношению:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y \partial z} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x}.$$

С помощью круговой подстановки получим еще два равенства, которые вместе с последним соотношением составляют вторую группу уравнений совместности деформаций Сен-Венана:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x}; \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (16.5)$$

Уравнения совместности деформаций называются также условиями *сплошности* или *неразрывности*. Эти термины характеризуют тот факт, что при деформировании тело остается сплошным. Если представить тело состоящим из отдельных элементов и принять

деформации $\epsilon_x, \dots, \gamma_{zx}$ в виде произвольных функций, то в деформированном состоянии из этих элементов не удастся сложить сплошное тело. При выполнении условий (16.4), (16.5) перемещения границ отдельных элементов будут таковы, что тело и в деформированном состоянии останется сплошным.

Таким образом, одним из способов сокращения количества неизвестных при решении задач теории упругости является исключение из рассмотрения перемещений. Тогда вместо соотношений Коши в полную систему уравнений будут входить уравнения совместности деформаций Сен-Венана.

Рассматривая полную систему уравнений теории упругости, следует обратить внимание на то, что она практически не содержит факторов, определяющих напряженно-деформированное состояние тела. К таким факторам относятся форма и размеры тела, способы его закрепления, действующие на тело нагрузки, за исключением объемных сил X, Y, Z .

Таким образом, полная система уравнений теории упругости устанавливает лишь общие закономерности изменения напряжений, деформаций и перемещений в упругих телах. Решение же конкретной задачи может быть получено, если заданы условия нагружения тела. Это дается в граничных условиях, которые и отличают одну задачу теории упругости от другой.

С математической точки зрения также понятно, что общее решение системы дифференциальных уравнений включает в себя произвольные функции и постоянные, которые и должны быть определены из граничных условий.

16.2. Граничные условия

Сформулировать граничные условия — это значит перевести на язык математики постановку задачи, описываемую обычным образом.

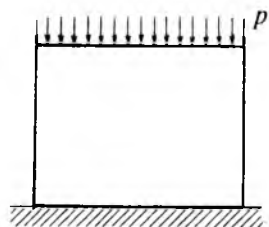


Рис. 16.1

Так, например, если сказано: тело прямоугольной формы прикреплено к жесткому массиву и нагружено сверху равномерным давлением, то довольно легко можно изобразить расчетную схему (рис. 16.1). Для того чтобы сформулировать граничные условия, достаточно определить размеры тела и математически записать, что происходит на его поверхности. При этом данная запись должна

содержать уравнение участка поверхности (иногда это может быть линия или точка) и собственно условия, выполняемые на этом участке поверхности. Эти условия представляют собой равенства тех или иных функций (напряжений, перемещений) известным величинам. Так, в примере, показанном на рис. 16.1, в соответствии с условием, что тело прикреплено к жесткому основанию, необходимо записать, что на этом участке перемещения равны нулю. Рассмотрим различные способы написания граничных условий.

Граничные условия в напряжениях. Такие граничные условия можно записать, если на поверхности тела заданы (известны) поверхностные нагрузки. В частном случае эти нагрузки могут отсутствовать.

Пример 16.1. На рис. 16.2 показана тонкая прямоугольная пластина, растягиваемая в одном направлении равномерными усилиями p .

Расположим оси координат, как показано на рисунке, и рассмотрим последовательно четыре участка границы.

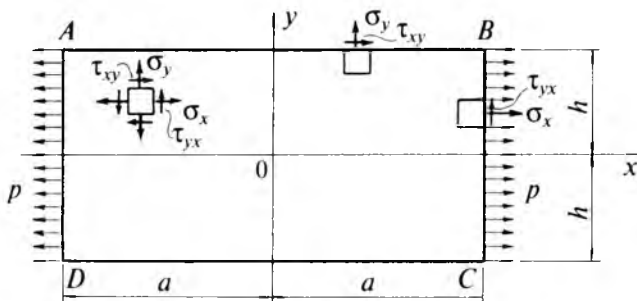


Рис. 16.2

Участок AB . Уравнение этого участка границы $y = h$.

Для того чтобы записать условия на этой границе, представим мысленно элемент, на гранях которого могут действовать напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$. Переместим этот элемент так, чтобы одна из его граней совпала с границей. На грани, совпадающей с поверхностью, могут действовать напряжения σ_y и τ_{xy} . Эти напряжения должны быть равны соответственно внешним нагрузкам в направлении нормали и касательной к поверхности. Поскольку на грань AB не действуют внешние силы, то граничные условия в данном случае можно записать в виде

$$\text{при } y = h, \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0.$$

Часто слово «при» опускают, ограничиваясь записью

$$y = h, \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0.$$

Это и есть граничные условия в напряжениях на грани AB .

Рассматривая грань CD ($y = -h$), замечаем, что на этом участке поверхности тела граничные условия будут иметь такой же вид, что и на грани AB . В таких симметричных задачах граничные условия можно объединить с помощью записи

$$y = \pm h, \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0.$$

Перейдем к участку BC . Перемещая элемент до совмещения с этой гранью, видим, что на границе могут действовать напряжения σ_x и τ_{yx} . Сравнивая их с внешними нагрузками на этой грани, заметим, что $\sigma_x = p$, а $\tau_{yx} = 0$. Такие же условия будут и на грани AD . Полная запись граничных условий на этих двух гранях имеет вид

$$x = \pm a, \quad \sigma_x = p, \quad \tau_{yx} = 0. \quad (16.6)$$

Рассмотренный способ написания граничных условий в напряжениях может применяться лишь в тех случаях, когда границы тела совпадают с координатными поверхностями (или линиями). В декартовой системе координат это плоскости или прямые, параллельные координатным осям. Если же какой-либо участок границы не совпадает с координатной поверхностью, то для постановки граничных условий в напряжениях необходимо использовать общие соотношения (4.2) для напряжений на наклонных площадках. Эти равенства имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n &= p_{xv}; \\ \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n &= p_{yv}; \\ \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n &= p_{zv}, \end{aligned} \right\} \quad (16.7)$$

где p_{xv}, p_{yv}, p_{zv} — проекции внешней поверхностной нагрузки на оси координат, а l, m, n — направляющие косинусы внешней нормали к поверхности.

Пример 16.2. Рассмотрим треугольную пластину (рис. 16.3), нагруженную по наклонной грани AB равномерным давлением q в горизонтальном направлении. Для постановки граничных условий на этой грани воспользуемся соотношениями (16.7). Для двухосного напряженного состояния эти соотношения упрощаются и имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x l + \tau_{xy} m &= p_{xv}; \\ \tau_{yx} l + \sigma_y m &= p_{yv}. \end{aligned} \right\} \quad (16.8)$$

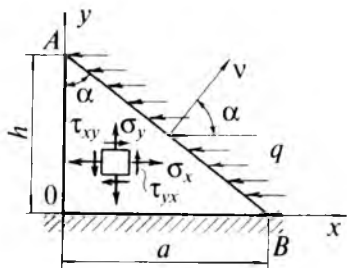


Рис. 16.3

Проекции поверхностной нагрузки на грань AB равны

$$p_{xv} = -q; \quad p_{yv} = 0.$$

Направляющие косинусы нормали v , проведенной к этой грани, равны

$$l = \cos(v, x) = \cos \alpha; \quad m = \cos(v, y) = \sin \alpha.$$

Подставляя эти значения в (16.8) и записывая уравнение прямой AB , приходим к окончательному виду граничных условий на рассматриваемой грани:

$$\left. \begin{aligned} y = h \left(1 - \frac{x}{a} \right), \quad \sigma_x \cos \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha &= -q; \\ \tau_{yx} \cos \alpha + \sigma_y \sin \alpha &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (16.9)$$

Эти условия отличаются от рассмотренных в примере 16.1 тем, что в каждое из равенств входит не одно напряжение, а линейная комбинация напряжений.

Соотношения (16.7) или (16.8) могут использоваться и в задачах, в которых участки поверхности тела совпадают с координатными поверхностями. Рассматривая, например, грань BC в примере 16.1, можно записать

$$l = 1, \quad m = 0, \quad p_{xv} = p, \quad p_{yv} = 0.$$

Подставив эти значения в (16.8), приходим к равенствам (16.6).

Граничные условия в перемещениях. Такие граничные условия обычно записываются в местах закреплений. Так, в примере, изображенном на рис. 16.3, на грани OB , если считать ее прикрепленной к абсолютно жесткому основанию, следует записать граничные условия в виде

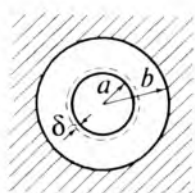
$$y = 0, \quad u = v = 0, \quad (16.10)$$

что указывает на отсутствие перемещений точек этой грани. Отметим, что под действием нагрузки q , приложенной к наклонной

границы, тело стремится переместиться влево и повернуться, но заделка препятствует таким перемещениям. В результате в основании пластины возникают напряжения σ_y и τ_{xy} . Поскольку величина этих напряжений неизвестна, мы не можем записать на грани OB условия в напряжениях.

Граничные условия в перемещениях записываются также в тех случаях, когда деформирование тела обусловлено не заданными нагрузками, а перемещениями отдельных участков его границы, например в результате теплового воздействия.

Пример 16.3. На рис. 16.4 изображено кольцо, находящееся во внешней абсолютно жесткой среде. Внутри кольца вставляется аб-



солютно жесткий вал, диаметр которого на величину 2δ больше диаметра отверстия. Если использовать в данном примере полярные координаты (r, θ) и обозначить перемещения: u — вдоль радиуса и v — вдоль угловой координаты, то граничные условия следует записать в виде

$$r = a, \quad u = \delta; \quad r = b, \quad u = 0.$$

Рис. 16.4

Здесь следует обратить внимание на то, что уравнение внутренней границы записывается для недеформированного состояния кольца, хотя известно положение этой границы после деформации: $r = a + \delta$. Это делается по следующим причинам. Во-первых, в теории упругости рассматриваются малые перемещения ($\delta \ll a$), а во-вторых, как правило, не решив задачи, мы не знаем конечного положения границ тела. В силу симметрии перемещения v в этой задаче тождественно равны нулю.

Смешанные граничные условия. Имеется два типа задач со смешанными граничными условиями:

а) на одной части поверхности тела заданы напряжения, а на другой — перемещения;

б) на одном и том же участке границы часть граничных условий задана в напряжениях, а часть — в перемещениях.

Пример с граничными условиями типа (а) показан на рис. 16.3. Граничные условия (16.9) на грани AB содержат напряжения, а условия (16.10) на грани OB — перемещения.

Рассмотрим смешанные граничные условия типа (б).

Пример 16.4. На рис. 16.5 показано тело прямоугольной формы, нижняя грань которого закреплена на жестком основании. Грань OA плотно прилегает к абсолютно жесткой стенке, при этом трение по поверхности контакта отсутствует.

Под действием давления p тело деформируется. Точки грани OA не имеют горизонтальных смещений, которым препятствует стенка, то есть на этой грани $u = 0$. В то же время отсутствие трения в зазоре позволяет точкам этой грани свободно перемещаться в вертикальном направлении (при сжатии нагрузкой p тело расширяется в перпендикулярном направлении, то есть $v \neq 0$). Таким образом, вторым условием на этой грани будет отсутствие касательных напряжений. В результате граничные условия на участке OA примут вид

$$x = 0, \quad u = 0; \quad \tau_{yx} = 0,$$

что соответствует второму типу смешанных граничных условий.

Часто говорят, что рассмотренные граничные условия соответствуют скользящей заделке, которая показана на рис. 16.6. В такой заделке отсутствуют вертикальные смещения и касательные напряжения.

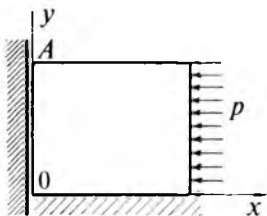


Рис. 16.5

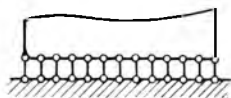


Рис. 16.6

На практике встречаются и более сложные случаи, когда одно и то же граничное условие содержит компоненты напряжений и перемещений. Такие условия бывают в контактных зонах при наличии трения, в упругих заделках и т.д.

16.3. Интегральные граничные условия

В предыдущем параграфе рассматривались нагрузки, распределенные по поверхности, однако во многих практических задачах нагрузки являются сосредоточенными или действующими вдоль линии (рис. 16.7).

Возникает вопрос: как учитывать действие таких поверхностных нагрузок? Очевидно, что в граничные условия в напряжениях они не войдут. Прежде чем ответить на поставленный вопрос, рассмотрим действие сосредоточенной силы на поверхность тела.

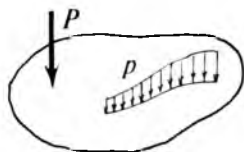


Рис. 16.7

Заметим, что сосредоточенная сила считается приложенной в точке, которая, как известно, не имеет размеров. В данном случае в точке приложения силы напряжения будут стремиться к бесконечности. Примеры таких решений встретятся ниже (например, задача Фламана в главе 18). Так же обстоит дело и в случае нагрузки, приложенной вдоль линии (линия, как известно, не имеет толщины).

В реальных задачах область приложения сосредоточенной силы имеет малый, но конечный размер, и напряжения в этой зоне достигают больших (но не бесконечных) значений. Под действием сосредоточенных нагрузок могут появиться местные пластические деформации, произойти смятие и т.д. При наличии таких нагрузок используются *интегральные граничные условия*.

Пример 16.5. Рассмотрим известную задачу сопротивления материалов — чистый изгиб балки прямоугольного сечения единичной ширины (рис. 16.8).

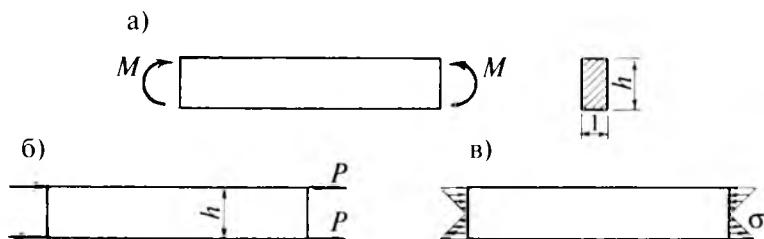


Рис. 16.8

Изгибающий момент, действующий на торцевые сечения балки, может быть приложен различными способами, два из которых показаны на рисунке. Как известно, решение сопротивления материалов дает формулу для напряжений

$$\sigma = \frac{M}{J} y, \quad (16.11)$$

которая соответствует способу, изображенному на рис. 16.8, в. В этом случае говорят, что решение справедливо во всей области.

Если же изгибающий момент приложен в виде пары сил (рис. 16.8, б), то формула (16.11) на торцах не соответствует внешней нагрузке. В подобных задачах используются интегральные

граничные условия. В рассматриваемом примере такое условие имеет вид

$$\iint_F \sigma_y dF = Ph.$$

Подстановка (16.11) в это соотношение обращает его в тождество, если учесть, что $M = Ph$.

В таких случаях считается, что решение справедливо во всей области, исключая небольшие зоны вблизи участков поверхности, где приложены нагрузки. Основанием для такого заключения является принцип Сен-Венана (см. гл. 1). Справедливость этого принципа подтверждена многочисленными экспериментальными исследованиями.

16.4. Постановка задачи теории упругости в перемещениях

Если в качестве основных неизвестных принять три функции перемещений u , v , w , то полную систему уравнений теории упругости можно свести к трем дифференциальным уравнениям относительно этих функций.

Преобразуем первое уравнение из системы (16.1). Для этого выразим входящие в это уравнение напряжения через перемещения с помощью соотношений (16.3, а) и (16.2).

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}; \\ \tau_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right); \quad \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right).\end{aligned}$$

Продифференцировав эти напряжения соответственно по x , y и z и подставив полученные выражения в первое равенство из (16.1), получим

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) + X = 0. \quad (16.12)$$

Выражение, стоящее в первых скобках, можно записать в виде $\nabla^2 u$, где ∇^2 — дифференциальный оператор Лапласа:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (16.13)$$

Сумма производных, стоящих во вторых скобках, может быть преобразована следующим образом:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \frac{\partial e}{\partial x}.$$

С учетом введенных обозначений уравнение (16.12) принимает вид

$$\mu \nabla^2 u + (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial x} + X = 0.$$

Преобразовав аналогичным образом второе и третье уравнения из системы (16.1), получим следующую систему трех уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \mu \nabla^2 u + (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial x} + X &= 0; \\ \mu \nabla^2 v + (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial y} + Y &= 0; \\ \mu \nabla^2 w + (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial z} + Z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (16.14)$$

Уравнения (16.14) называются *уравнениями Ляме*. По своей сути они являются уравнениями равновесия, выраженными через перемещения. Поскольку при выводе этих уравнений использовались все основные соотношения теории упругости, можно считать, что уравнения Ляме являются синтезом статических, геометрических и физических уравнений.

Наиболее удобно использовать постановку задачи теории упругости в перемещениях, если на границе тела заданы перемещения. Если же граничные условия записаны в напряжениях, то эти условия с помощью закона Гука (16.3, а) и соотношений Коши (16.2) следует преобразовать к такому виду, чтобы они включали в себя перемещения. При заданных на границах нагрузках с учетом указанных преобразований граничные условия (16.7) примут вид

$$\left. \begin{aligned} \left(\lambda e + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) l + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) m + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) n &= p_{xv}; \\ \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) l + \left(\lambda e + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) m + \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) n &= p_{yv}; \\ \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) l + \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) m + \left(\lambda e + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \right) n &= p_{zv}. \end{aligned} \right\} \quad (16.15)$$

Напомним, что в этих равенствах p_{xv}, p_{yv}, p_{zv} — известные компоненты внешней поверхностной нагрузки и $e = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$ — относительная объемная деформация.

Уравнения (16.14) совместно с граничными условиями (16.15) позволяют решить задачу теории упругости в перемещениях. После нахождения перемещений u, v, w можно определить деформации по формулам Коши (16.2), а напряжения — с помощью закона Гука (16.3, а).

16.5. Постановка задачи теории упругости в напряжениях

Если в качестве основных неизвестных принять шесть компонент тензора напряжений: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$, то для их определения имеются три дифференциальных уравнения (16.1), которых, очевидно, недостаточно для нахождения шести функций. Дополнительными соотношениями могут быть уравнения совместности деформаций (16.4), (16.5), выраженные с использованием закона Гука (16.3) через напряжения.

При выводе этих соотношений используются также уравнения равновесия (16.1), поэтому условия совместности в напряжениях, так же как и уравнения Ляме, являются синтезом статической, геометрической и физической сторон задачи.

Не приводя промежуточных выкладок, запишем окончательный вид этих уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \sigma_x + \frac{1}{1+\nu} \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} &= -2 \frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right); \\ \nabla^2 \sigma_y + \frac{1}{1+\nu} \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} &= -2 \frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right); \\ \nabla^2 \sigma_z + \frac{1}{1+\nu} \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} &= -2 \frac{\partial Z}{\partial z} - \frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right); \\ \nabla^2 \tau_{xy} + \frac{1}{1+\nu} \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial x \partial y} &= - \left(\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x} \right); \\ \nabla^2 \tau_{yz} + \frac{1}{1+\nu} \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial y \partial z} &= - \left(\frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial y} \right); \\ \nabla^2 \tau_{zx} + \frac{1}{1+\nu} \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial z \partial x} &= - \left(\frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial z} \right), \end{aligned} \right\} \quad (16.16)$$

где $s = J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ — первый инвариант тензора напряжений.

Соотношения (16.16) называются уравнениями Бельтрами — Митчелла. Для случая, когда объемные силы X , Y , Z являются постоянными или равными нулю, уравнения (16.16) становятся однородными.

Уравнения Бельтрами—Митчелла являются условиями совместности в напряжениях. Вместе с уравнениями равновесия (16.1) они составляют полную систему уравнений для решения задачи теории упругости в напряжениях.

Такая постановка задачи наиболее удобна, если на границе тела заданы нагрузки (см. граничные условия (16.7)). Если же на границе или на ее части заданы перемещения, то для решения задачи необходимо сначала по соотношениям Коши (16.2) определить деформации, а затем с помощью закона Гука (16.3, а) определить напряжения.

Наряду с двумя рассмотренными постановками задач теории упругости (в перемещениях и в напряжениях) известны и другие методы, когда в качестве искомых функций используются одновременно и перемещения и напряжения (смешанная постановка задачи) или другие, искусственно вводимые функции. Один из таких методов будет рассмотрен в следующей главе.

В заключение еще раз подчеркнем, что решение задачи теории упругости должно удовлетворять полной системе уравнений (16.1) — (16.3) и граничным условиям. В некоторых случаях решение задачи может быть получено по аналогии с известными решениями, подобрано, «угадано».

Существует доказательство теоремы о единственности решения задачи теории упругости. Эта теорема позволяет быть уверенным, что решение, удовлетворяющее названному выше соотношению, является единственным.

16.6. Простейшие задачи теории упругости

В этом параграфе приводятся решения некоторых задач теории упругости, не требующие интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных. Решение этих задач получается с помощью логических рассуждений и простейших вычислений. При этом будет показано, что все основные соотношения теории упругости выполняются. На основании теоремы единственности можно сделать вывод, что эти решения правильны и единственны.

Всестороннее сжатие тела произвольной формы. На рис. 16.9 показано тело произвольной формы, находящееся под действием

равномерного давления p . Предположим, что вблизи произвольной точки внутри тела имеет место всестороннее сжатие, то есть

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p; \quad \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0. \quad (16.17)$$

Покажем, что при этом строго выполняются все основные соотношения теории упругости. Очевидно, что если $\sigma_i = \text{const}$, а $\tau_{ij} = 0$, то уравнения равновесия (16.1) обращаются в тождества. Из закона Гука (16.3) получим, что ϵ_i также постоянны по объему тела, а $\gamma_{ij} = 0$. Отсюда следует, что условия совместности деформаций Сен-Венана (16.4) и (16.5) также выполняются. Рассмотрим граничные условия в напряжениях (16.7). Составляя проекции нагрузки p в любой точке поверхности на оси координат (рис. 16.10), получим

$$p_{xv} = -pl; \quad p_{yv} = -pm; \quad p_{zv} = -pn.$$

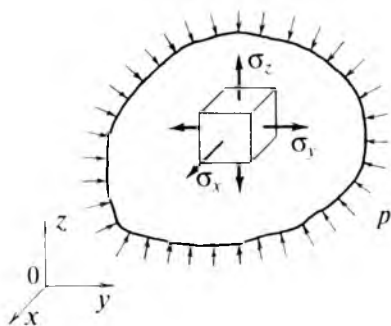


Рис. 16.9

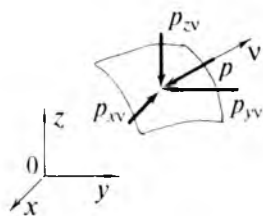


Рис. 16.10

Подставляя эти значения, а также напряжения из (16.17) в равенства (16.7), можно убедиться, что они также выполняются. Таким образом, решение рассматриваемой задачи, даваемое формулами (16.17), является правильным.

Следует заметить, что полученное решение справедливо только для односвязных тел. Если внутри тела имеется полость, то на поверхности полости нагрузка отсутствует и граничные условия (16.7) на этой части поверхности не выполняются. Обычно в таких задачах вблизи полости имеет место концентрация напряжений. В последующих главах будут рассмотрены подобные задачи.

Полупространство под действием собственного веса. Задача о вычислении напряжений вблизи произвольной точки полупространства, находящегося под действием собственного веса, широко используется в механике грунтов при расчете подземных сооружений. В данном случае полупространство представляет собой модель

грунтовой среды, а объемная сила $X = \gamma$, где $\gamma = \text{const}$ является объемным весом грунта (рис. 16.11).

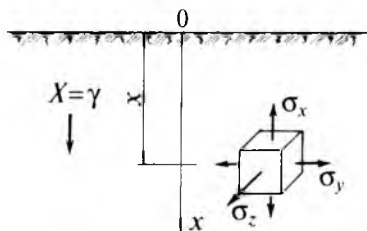


Рис. 16.11

Рассмотрим бесконечно малый элемент, расположенный на глубине x . Пренебрегая вертикальным размером этого элемента по сравнению с x , можно считать, что слой толщиной x оказывает равномерное давление на расположенные ниже слои, при этом на единицу площади приходится давление, равное γx . Таким образом, имеем

$$\sigma_x = -\gamma x. \quad (16.18)$$

Чтобы определить напряжения σ_y и σ_z , рассмотрим деформации элемента в направлении осей Oy и Oz . Учитывая, что массив бесконечен в этих направлениях, следует положить $\epsilon_y = \epsilon_z = 0$, иначе суммарное увеличение размеров массива было бы также бесконечным. Кроме того, в силу равнозначности направлений Oy и Oz очевидно, что $\sigma_y = \sigma_z$.

С учетом изложенного из закона Гука (16.3) получим

$$\epsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] = \frac{1}{E}[(1 - \nu)\sigma_y - \nu\sigma_x] = 0.$$

Подставляя сюда напряжения σ_x из (16.18), найдем

$$\sigma_y = \sigma_z = \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_x = -\frac{\nu}{1 - \nu} \gamma x. \quad (16.19)$$

Коэффициент $\frac{\nu}{1 - \nu}$ называется коэффициентом бокового отпора. В частности, при $\nu = 0,5$, что соответствует несжимаемому материалу, этот коэффициент равен единице и все три нормальных напряжения равны $-\gamma x$, то есть имеет место всестороннее (гидростатическое) сжатие. Легко проверить, что решение рассматриваемой задачи, даваемое формулами (16.18) и (16.19), удовлетворяет всем уравнениям теории упругости и граничным условиям на поверхности полупространства.

ГЛАВА 17

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

В общем случае пространственная задача теории упругости сводится к решению сложной системы дифференциальных уравнений в частных производных. Но существует обширный класс практически важных задач, для которых путем введения некоторых допущений основная система дифференциальных уравнений существенно упрощается. Этот класс задач объединяется одним общим названием — *плоская задача* теории упругости. Различают два основных вида плоской задачи — *плоскую деформацию* и *плоское напряженное состояние*.

17.1. Плоская деформация

Рассмотрим призматическое или цилиндрическое тело (рис. 17.1) с торцами, перпендикулярными к оси Oz . Предполагается, что торцы закреплены таким образом, что их точки могут свободно перемещаться в своей плоскости и не могут перемещаться в направлении оси Oz .

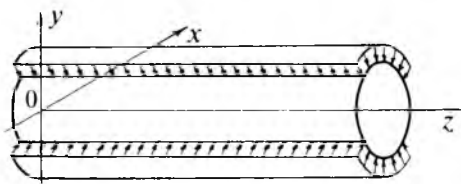


Рис. 17.1

Внешние силы (включая реактивные), приложенные к боковой поверхности тела, направлены нормально к оси Oz и равномерно распределены по длине тела. В плоскостях поперечных сечений тела они образуют взаимноуравновешенную систему сил.

При указанных ограничениях все поперечные сечения тела при деформировании остаются плоскими и не перемещаются в направлении оси Oz . Таким образом, плоская деформация характеризуется

тем, что точки тела могут перемещаться только в плоскостях, перпендикулярных к оси Oz :

$$u = u(x, y); \quad v = v(x, y); \quad w = 0. \quad (17.1)$$

Если в рассмотренном выше случае торцевые сечения тела остаются плоскими, но могут поступательно перемещаться в направлении оси Oz , то в отличие от (17.1) перемещения w не равны нулю, а изменяются в зависимости от координаты z (с точностью до жесткого смещения) по линейному закону:

$$w = Cz. \quad (17.2)$$

Такое деформированное состояние тела иногда называют *обобщенной плоской деформацией*.

Плоская деформация обычно возникает в телах, имеющих большую протяженность в направлении оси Oz .

В качестве практического примера плоской деформации можно привести плотину (рис. 17.2), нагруженную гидростатическим давлением воды и силами тяжести от собственного веса. Если предположить, что торцы плотины жестко закреплены, то все сечения плотины, включая торцевые, находятся в условиях плоской деформации. Если же предположить, что торцы свободны от закреплений, то перемещениям сечений плотины в направлении оси Oz препятствуют связи сдвига, имеющиеся между подошвой плотины и основанием вследствие сцепления с грунтом. Так как связи сдвига не являются абсолютно жесткими, то концевые части плотины могут смещаться в направлении оси Oz . В этом случае на основании принципа Сен-Венана в условиях плоской деформации будут находиться сечения, достаточно удаленные от торцов. В аналогичных условиях находятся прямолинейный участок тоннеля (рис. 17.3), цилиндрический каток опоры моста (рис. 17.4).

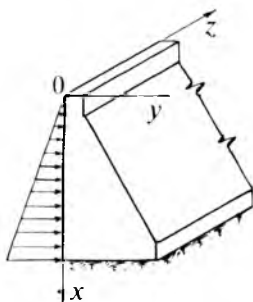


Рис. 17.2

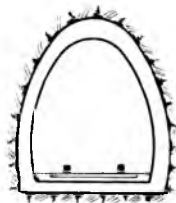


Рис. 17.3

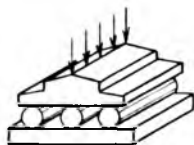


Рис. 17.4

В соответствии с (17.1) общие уравнения теории упругости (см. гл. 16) упрощаются следующим образом.

Из шести уравнений Коши (16.2) остаются три:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (17.3)$$

Три деформации обращаются в нуль:

$$\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0. \quad (17.4)$$

С учетом этого по формулам закона Гука (16.3) получим

$$\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0; \quad (17.5)$$

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y). \quad (17.6)$$

Подставляя (17.6) в (16.3), оставшиеся три формулы закона Гука можно преобразовать к виду

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E_1}(\sigma_x - \nu_1 \sigma_y); \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E_1}(\sigma_y - \nu_1 \sigma_x); \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G_1}, \quad (17.7)$$

где E_1 , ν_1 и G_1 — приведенные постоянные упругости, определяемые по формулам

$$E_1 = \frac{E}{1-\nu^2}; \quad \nu_1 = \frac{\nu}{1-\nu}; \quad G_1 = G = \frac{E_1}{2(1+\nu_1)} = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (17.8)$$

Соответствующие обратные соотношения закона Гука можно представить в виде

$$\sigma_x = \frac{E_1}{1-\nu_1^2}(\varepsilon_x + \nu_1 \varepsilon_y); \quad \sigma_y = \frac{E_1}{1-\nu_1^2}(\varepsilon_y + \nu_1 \varepsilon_x); \quad \tau_{xy} = G_1 \gamma_{xy}. \quad (17.9)$$

Из соотношений (17.1), (17.3), (17.9) следует, что перемещения, деформации и напряжения не зависят от z . Поэтому из трех уравнений равновесия (16.1) остаются два:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0; \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0. \quad (17.10)$$

Из шести уравнений неразрывности деформаций (16.4), (16.5) остается только одно:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \quad (17.11)$$

а остальные тождественно удовлетворяются.

Так как во всех точках боковой поверхности тела $n = \cos(v, z) = 0$, то из статических граничных условий (16.7) остаются два:

$$\sigma_x l + \tau_{xy} m = p_{xv}; \quad \tau_{yx} l + \sigma_y m = p_{yv}. \quad (17.12)$$

17.2. Плоское напряженное состояние

Двухосным или *плоским* называется такое напряженное состояние тела, при котором во всех его точках одно из главных напряжений равно нулю. Можно показать*, что плоское напряженное состояние возникает в призматическом или цилиндрическом теле (рис. 17.1) с незакрепленными и ненагруженными торцами, если к боковой поверхности тела приложена система внешних сил, нормальных к оси Oz и изменяющихся в зависимости от z по квадратичному закону симметрично относительно среднего сечения. При этом оказывается, что во всех поперечных сечениях тела

$$\sigma_z = \sigma_z = 0; \quad \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0, \quad (17.13)$$

а напряжения σ_x , σ_y , τ_{xy} изменяются в зависимости от z также по квадратичному закону симметрично относительно среднего сечения. Введение указанных допущений позволяет получить решение задачи, удовлетворяющее условиям (17.13) и всем уравнениям теории упругости.

Представляет интерес частный случай, когда напряжения не зависят от переменной z :

$$\sigma_x = \sigma_x(x, y); \quad \sigma_y = \sigma_y(x, y); \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y). \quad (17.14)$$

Такое напряженное состояние возможно только при действии равномерно распределенной по длине нагрузки. Из формул закона Гука (16.3) следует, что деформации ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z , γ_{xy} также не зависят от z , а деформации γ_{yz} и γ_{zx} с учетом (17.13) равны нулю. В таком случае четвертое и пятое из уравнений неразрывности деформаций (16.4), (16.5) тождественно удовлетворяются, а второе, третье и шестое уравнения принимают вид

$$\frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x \partial y} = 0. \quad (17.15)$$

Интегрируя эти уравнения и учитывая третью из формул закона Гука (16.3) при $\sigma_z = 0$, получим

$$\epsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) = ax + by + c. \quad (17.16)$$

* См.: Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975.

Таким образом, плоское напряженное состояние в призматическом или цилиндрическом теле со свободными торцами, нагруженном постоянной по длине тела поверхностной нагрузкой, возможно только в частном случае, когда сумма напряжений $\sigma_x + \sigma_y$ изменяется в зависимости от переменных x и y по линейному закону или постоянна.

Если расстояние между торцевыми плоскостями тела (рис. 7.1) мало по сравнению с размерами сечений, то имеем случай тонкой пластины (рис. 17.5), нагруженной по внешнему контуру силами, симметрично распределенными относительно срединной плоскости пластины по квадратичному закону. Так как толщина пластины h мала, то с незначительной погрешностью можно принять, что при любом симметричном относительно срединной плоскости нагружении пластины напряжения σ_x , σ_y , τ_{xy} равномерно распределены по ее толщине.

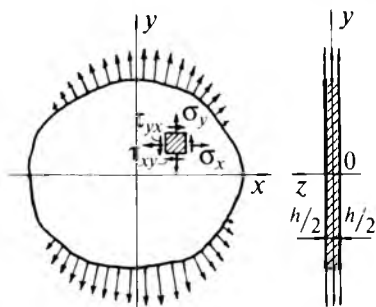


Рис. 17.5

При этом под напряжениями следует понимать их средние по толщине значения, например

$$\sigma_x = \sigma_x^{\text{cp}} = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x(x, y, z) dz.$$

Следует также отметить, что при введении допущения (17.14) условия (17.13) равенства нулю напряжений σ_z , τ_{yz} , τ_{zx} будут строго выполняться только на внешних, ненагруженных плоскостях пластины. Исключение представляет случай, когда справедливо условие (17.16). Внутри пластины эти напряжения, строго говоря, не равны нулю, но вследствие малой толщины пластины они не могут достигнуть заметной величины. Поэтому приближенно можно считать, что условия (17.13) выполняются во всех точках пластины.

Рассмотренный случай напряженного состояния тонкой пластины с допущениями (17.13) и (17.14) часто называют *обобщенным плоским напряженным состоянием*.

Рассмотрим основные уравнения теории упругости для этого случая.

С учетом (17.13) формулы закона Гука (16.3) запишутся в виде

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y); \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x); \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}. \quad (17.17)$$

Соответствующие обратные соотношения имеют вид

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y); \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x); \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy}. \quad (17.18)$$

Формулы (17.17) и (17.18) отличаются от формул (17.7) и (17.9) закона Гука для плоской деформации только тем, что в последние вместо модуля упругости E и коэффициента Пуассона ν входят приведенные величины E_1 и ν_1 .

Уравнения равновесия, соотношения Коши, уравнение неразрывности деформаций и статические граничные условия не отличаются от соответствующих уравнений (17.10), (17.3), (17.11), (17.12) для плоской деформации.

Плоская деформация и обобщенное плоское напряженное состояние по существу описываются одними и теми же уравнениями. Единственное отличие имеется в величинах постоянных упругости в формулах закона Гука. Поэтому обе задачи объединяются общим названием: *плоская задача теории упругости*.

Полная система уравнений плоской задачи состоит из двух уравнений равновесия (17.10), трех геометрических соотношений Коши (17.3) и трех формул закона Гука (17.7) или (17.17). Они содержат восемь неизвестных функций: три напряжения σ_x , σ_y , τ_{xy} , три деформации ε_x , ε_y , γ_{xy} и два перемещения u и v .

Если при решении задачи не требуется определять перемещения, то число неизвестных сокращается до шести. Для их определения имеется шесть уравнений: два уравнения равновесия, три формулы закона Гука и уравнение неразрывности деформаций (17.11).

Основное отличие рассмотренных двух видов плоской задачи состоит в следующем. При плоской деформации $\varepsilon_z = 0$, $\sigma_z \neq 0$, причем величина σ_z может быть найдена по формуле (17.6) после того, как определены напряжения σ_x и σ_y . При обобщенном плоском напряженном состоянии $\sigma_z = 0$, $\varepsilon_z \neq 0$, и деформация ε_z может быть

выражена через напряжения σ_x и σ_y по формуле (17.16). Перемещение w можно найти путем интегрирования уравнения Коши $\varepsilon_z = \partial w / \partial z$.

17.3. Постановка плоской задачи в напряжениях. Функция напряжений

При решении плоской задачи в напряжениях в уравнении неразрывности деформаций (17.11) необходимо выразить деформации через напряжения с помощью формул закона Гука. Воспользовавшись, например, формулами (17.17) для обобщенного плоского напряженного состояния, получим

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - 2(1 + \nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = 0.$$

Исключим из этого уравнения касательное напряжение. Считая объемные силы X и Y постоянными или равными нулю, продифференцируем первое уравнение равновесия (17.10) по x , второе — по y и, сложив их почленно, найдем

$$2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = - \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2}.$$

С учетом этого равенства после простых преобразований получим уравнение неразрывности деформаций, выраженное в напряжениях:

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0. \quad (17.19)$$

Здесь через ∇^2 обозначен оператор Лапласа

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа, называется *гармонической*. Следовательно, при постоянных или равных нулю объемных силах сумма нормальных напряжений $\sigma_x + \sigma_y$ в плоской задаче теории упругости является гармонической функцией.

Уравнение (17.19) называют *уравнением Мориса Леви*. Оно выведено для обобщенного плоского напряженного состояния, отличающегося от плоской деформации величинами постоянных упругости в формулах закона Гука. Но уравнение (17.19) не содержит постоянных упругости и, следовательно, имеет тот же вид и для плоской деформации.

Таким образом, решение плоской задачи теории упругости в напряжениях сводится к интегрированию системы трех дифференциальных уравнений: двух уравнений равновесия (17.10) и уравнения неразрывности деформаций (17.19) при выполнении статических граничных условий (17.12) на поверхности тела.

Систему трех уравнений можно свести к одному разрешающему уравнению, если ввести так называемую *функцию напряжений Эри* $\varphi(x, y)$. Напряжения выражаются через функцию φ следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; & \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - yX - xY. \end{aligned} \right\} \quad (17.20)$$

Подставив эти формулы в уравнения равновесия (17.10), нетрудно убедиться в том, что они тождественно удовлетворяются при условии, что объемные силы X и Y постоянны или равны нулю.

Подставляя (17.20) в (17.19), получим

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0. \quad (17.21)$$

Уравнение (17.21) называется *бигармоническим уравнением*, а функция, удовлетворяющая ему, — *бигармонической функцией*. В развернутом виде это уравнение записывается следующим образом:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0. \quad (17.22)$$

Таким образом, решение плоской задачи теории упругости сводится к нахождению функции напряжений, удовлетворяющей бигармоническому уравнению и статическим граничным условиям на поверхности тела.

Статические граничные условия (17.12) можно выразить через функцию напряжений, подставив в них выражения (17.20):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} l - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + yX + xY \right) m &= p_{xy}; \\ - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + yX + xY \right) l + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} m &= p_{yx}. \end{aligned} \right\} \quad (17.23)$$

При известной функции $\varphi(x, y)$ напряжения определяются по формулам (17.20) с помощью дифференцирования.

Заметим, что в случае, когда граничные условия ставятся в напряжениях, а объемные силы X и Y постоянны или равны нулю, то ни в уравнение (17.22), ни в граничные условия (17.23) не входят постоянные упругости материала E и ν (или их приведенные значения E_1 и ν_1 при плоской деформации). В этом случае оказывается справедливой следующая теорема Леви—Митчелла: *в плоской задаче для односвязного тела, на поверхности которого заданы внешние силы, напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ не зависят от свойств материала тела.*

Можно доказать, что эта теорема справедлива также и для многосвязного тела (с отверстиями) при условии, что главные векторы внешних сил, приложенных к контурам каждого отверстия, равны нулю.

Теорема Леви—Митчелла дает основание при исследовании напряженного состояния элементов конструкций использовать геометрически подобные модели из любого упругого материала. Например, при определении напряжений методом фотоупругости используются прозрачные оптически чувствительные полимерные материалы. Основы метода фотоупругости изложены в гл. 23.

17.4. Решение плоской задачи в полиномах

При решении плоской задачи с помощью функции напряжений применяются различные методы: полуобратный метод с использованием алгебраических полиномов (многочленов) или тригонометрических рядов; метод функций комплексных переменных; метод конечных разностей (§ 21.1) и другие методы.

Рассмотрим наиболее простой полуобратный метод решения с помощью алгебраических полиномов различных целых и положительных степеней. Сущность метода состоит в том, что функцию $\varphi(x, y)$ принимают в виде полинома, коэффициенты которого подбираются таким образом, чтобы удовлетворялись бигармоническое уравнение (17.22) и граничные условия.

Установим, какие задачи можно решить с помощью полиномов различных степеней. Объемные силы будем полагать равными нулю. Так как бигармоническое уравнение имеет четвертый порядок, то полиномы ниже четвертой степени тождественно удовлетворяют этому уравнению при любых значениях коэффициентов и являются бигармоническими функциями. Полиномы четвертой и более высокой степени имеют только четыре независимых коэффициента.

Полином первой степени

$$\varphi = a_1 x + b_1 y$$

интереса не представляет, так как при подстановке в формулы (17.20) дает напряжения, равные нулю.

Рассмотрим полином второй степени:

$$\varphi = \frac{a_2}{2} x^2 + b_2 xy + \frac{c_2}{2} y^2. \quad (17.24)$$

Дробные коэффициенты вводятся с целью сокращения чисел при дифференцировании. По формулам (17.20) найдем напряжения:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = c_2; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = a_2; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -b_2. \quad (17.25)$$

Получили так называемое *однородное напряженное состояние*, при котором напряжения во всех точках тела одинаковы. Такое напряженное состояние возникает в прямоугольной пластине (рис. 17.6), нагруженной на краях равномерно распределенными нормальными p_x , p_y и касательными p_{xy} силами. Толщина пластины принята равной единице. В этом случае коэффициенты полинома равны

$$c_2 = p_x; \quad a_2 = p_y; \quad b_2 = -p_{xy}.$$

В частном случае при $a_2 = b_2 = 0$ имеем равномерное растяжение в направлении оси Ox . Случай $c_2 = a_2 = 0$ соответствует напряженному состоянию чистого сдвига.

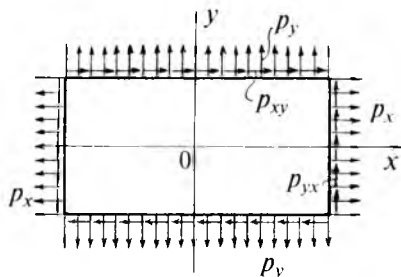


Рис. 17.6

Рассмотрим полином третьей степени:

$$\varphi = \frac{a_3}{6} x^3 + \frac{b_3}{2} x^2 y + \frac{c_3}{2} xy^2 + \frac{d_3}{6} y^3. \quad (17.26)$$

Выражения для напряжений принимают следующий вид:

$$\sigma_x = c_3 x + d_3 y; \quad \sigma_y = a_3 x + b_3 y; \quad \tau_{xy} = -b_3 x - c_3 y. \quad (17.27)$$

Если принять $a_3 = b_3 = c_3 = 0$, то получим

$$\sigma_x = d_3 y; \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0.$$

Во всех сечениях пластины, нормальных к оси Ox (рис. 17.7), напряжения σ_x изменяются по линейному закону, причем в точках оси Ox они равны нулю.

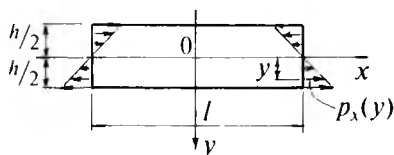


Рис. 17.7

Как известно, такое напряженное состояние возникает при чистом изгибе, и формулу для σ_x можно записать в виде

$$\sigma_x = d_3 y = \frac{M_z}{J_z} y,$$

где M_z — изгибающий момент; J_z — момент инерции сечения, нормального к оси Ox .

Для образования напряженного состояния чистого изгиба во всех сечениях пластины необходимо, чтобы приложение моментов осуществлялось с помощью нагрузок p_x , распределенных по торцам также по линейному закону:

$$p_x = \frac{M_z}{J_z} y.$$

Однако согласно принципу Сен-Венана для пластины в виде длинной полосы ($l \gg h$) детальный способ приложения моментов к торцам сказывается на характере распределения напряжений только в сечениях, близких к торцам.

Если для полосы, вытянутой по вертикали (рис. 17.8), взять по одному члену из полиномов второй и третьей степени:

$$\varphi = \frac{a_2}{2} x^2 + \frac{a_3}{6} x^3, \quad (17.28)$$

то получим напряженное состояние внецентренного растяжения полосы:

$$\sigma_y = a_2 + a_3 x; \quad \sigma_x = \tau_{xy} = 0. \quad (17.29)$$

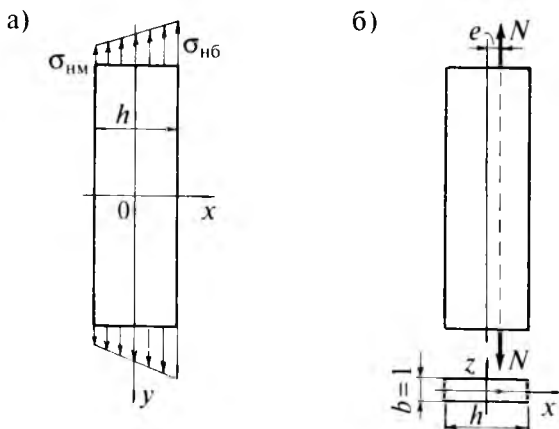


Рис. 17.8

В крайних волокнах при $x = \pm h/2$ напряжения σ_y имеют наибольшее и наименьшее значения (рис. 17.8, а):

$$\sigma_{нб} = a_2 + \frac{a_3 h}{2}; \quad \sigma_{нм} = a_2 - \frac{a_3 h}{2}.$$

Постоянные a_2 и a_3 можно выразить через продольную силу N , эксцентриситет e и геометрические характеристики поперечного сечения полосы — площадь $F = bh$ и момент инерции $J_z = bh^3/12$ (рис. 17.8, б):

$$a_2 = \frac{N}{F}; \quad a_3 = \frac{Ne}{J_z} = \frac{M_z}{J_z}.$$

Тогда формула (17.29) для напряжений σ_y примет вид

$$\sigma_y = \frac{N}{F} + \frac{M_z}{J_z} x.$$

Рассмотрим полином четвертой степени:

$$\varphi = \frac{a_4}{12} x^4 + \frac{b_4}{6} x^3 y + \frac{c_4}{4} x^2 y^2 + \frac{d_4}{6} x y^3 + \frac{e_4}{12} y^4.$$

Теперь бигармоническое уравнение (17.22) не будет тождественно удовлетворяться при любых значениях коэффициентов, так как производные четвертого порядка от функции φ не равны нулю:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} = 2a_4; \quad \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} = c_4; \quad \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 2e_4.$$

Подставляя эти производные в уравнение (17.22), получим

$$a_4 + c_4 + e_4 = 0.$$

Таким образом, из пяти коэффициентов независимыми являются только четыре. Исключая с помощью последнего равенства коэффициент e_4 , запишем выражение для функции φ в виде

$$\varphi = \frac{a_4}{12}(x^4 - y^4) + \frac{b_4}{6}x^3y + \frac{c_4}{4}(x^2y^2 - \frac{1}{3}y^4) + \frac{d_4}{6}xy^3. \quad (17.30)$$

Этот полином удовлетворяет бигармоническому уравнению. Выражения для напряжений имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -a_4y^2 + \frac{c_4}{2}(x^2 - 2y^2) + d_4xy; \\ \sigma_y &= a_4x^2 + b_4xy + \frac{c_4}{2}y^2; \\ \tau_{xy} &= -\frac{b_4}{2}x^2 - c_4xy - \frac{d_4}{2}y^2. \end{aligned} \right\} \quad (17.31)$$

Точно так же можно составить полином пятой степени, тождественно удовлетворяющий бигармоническому уравнению (17.22) при любых значениях четырех коэффициентов. Приведем его выражение без вывода:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{a_5}{20}(x^5 - 5xy^4) + \frac{b_5}{12}\left(x^4y - \frac{1}{5}y^5\right) + \\ &+ \frac{c_5}{6}(x^3y^2 - xy^4) + \frac{d_5}{6}\left(x^2y^3 - \frac{1}{5}y^5\right). \end{aligned} \quad (17.32)$$

Выражения для напряжений имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -3a_5xy^2 - \frac{b_5}{3}y^3 + \frac{c_5}{3}(x^3 - 6xy^2) + d_5\left(x^2y - \frac{2}{3}y^3\right); \\ \sigma_y &= a_5x^3 + b_5x^2y + c_5xy^2 + \frac{d_5}{3}y^3; \\ \tau_{xy} &= a_5y^3 - \frac{b_5}{3}x^3 - c_5\left(x^2y - \frac{2}{3}y^3\right) - d_5xy^2. \end{aligned} \right\} \quad (17.33)$$

При решении задач можно попытаться составить подходящую комбинацию из отдельных членов полиномов различных степеней, основываясь, например, на результатах рассмотренных выше задач. В некоторых случаях помогает учет условий симметрии. В первом приближении можно воспользоваться выражениями для напряже-

ний, полученными методами сопротивления материалов. Если найденная на основе этого решения функция напряжений не удовлетворяет бигармоническому уравнению или граничным условиям, то можно попытаться внести в решение необходимую поправку.

Ниже рассмотрены примеры решения задач с помощью метода алгебраических полиномов.

17.5. Изгиб консольной балки силой, приложенной на конце

Рассмотрим консольную балку прямоугольного сечения шириной $b = 1$, нагруженную силой P (рис. 17.9). Будем считать, что в балке имеет место обобщенное плоское напряженное состояние.

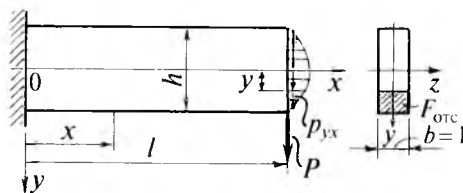


Рис. 17.9

Воспользуемся известными формулами сопротивления материалов для напряжений:

$$\sigma_x = \frac{M_z}{J_z} y; \quad \sigma_y = 0; \quad \tau_{xy} = \frac{QS_z^{\text{отс}}}{J_z h}.$$

Найдем входящие в эти формулы величины: изгибающий момент

$$M_z = -P(l - x);$$

поперечную силу

$$Q = P;$$

момент инерции поперечного сечения

$$J_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{h^3}{12};$$

статический момент отсеченной площади при $b = 1$ (см. формулу (7.45))

$$S_z^{\text{отс}} = \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

Подставив эти величины в формулы для напряжений, получим

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{P(l-x)}{J_z} y = -\frac{Pl}{J_z} y + \frac{P}{J_z} xy; & \sigma_y &= 0; \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \frac{P}{2J_z} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) = \frac{Ph^2}{8J_z} - \frac{P}{2J_z} y^2. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Используя формулы (17.20) при $X = Y = 0$, свяжем эти выражения с функцией напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = c_1 y + c_2 xy; & \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0; \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = c_3 + c_4 y^2, \end{aligned}$$

где через c_1, c_2, c_3, c_4 обозначены постоянные множители в формулах (a) для напряжений.

Интегрируя первое из этих равенств два раза по y и подставляя полученное таким образом выражение для φ во второе и третье равенства, последовательно получим

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{c_1}{6} y^3 + \frac{c_2}{6} xy^3 + f_1(x)y + f_2(x); \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= f_1''(x)y + f_2''(x) = 0; \\ -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} &= -\frac{c_2}{2} y^2 - f_1'(x) = c_3 + c_4 y^2. \end{aligned}$$

Рассмотрим второе и третье из этих равенств. Так как y — независимая переменная, то второе равенство возможно только при выполнении условий

$$f_1''(x) = 0; \quad f_2''(x) = 0.$$

Производя интегрирование, найдем

$$f_1' = c_5; \quad f_1 = c_5 x + c_6; \quad f_2' = c_7; \quad f_2 = c_7 x + c_8.$$

Подставляя в третье равенство $f_1' = c_5$ и приравнявая между собой коэффициенты при одинаковых степенях y , получим

$$c_4 = -\frac{c_2}{2}; \quad c_5 = -c_3.$$

С учетом полученных соотношений сумму двух последних слагаемых в выражении для φ можно представить в виде

$$f_1 y + f_2 = -c_3 xy + c_6 y + c_7 x + c_8.$$

Последние три слагаемых в этом равенстве можно отбросить, так как напряжения выражаются через вторые производные от функции φ . Тогда получим окончательное выражение для функции напряжений

$$\varphi = \frac{c_1}{6} y^3 + \frac{c_2}{6} xy^3 - c_3 xy,$$

тождественно удовлетворяющее бигармоническому уравнению (17.22), и соответствующие формулы для напряжений

$$\sigma_x = c_1 y + c_2 xy; \quad \sigma_y = 0; \quad \tau_{xy} = -\frac{c_2}{2} y^2 + c_3. \quad (б)$$

Коэффициенты c_1, c_2, c_3 найдем из граничных условий на контуре (см. § 16.2, пример 16.1). На нижней и верхней ненагруженных гранях имеем

$$y = \pm \frac{h}{2}, \quad \sigma_y = 0; \quad \tau_{xy} = 0.$$

Первое условие выполняется тождественно, а из второго найдем

$$c_3 = c_2 \frac{h^2}{8}.$$

На правом торце запишем

$$x = l, \quad \sigma_x = 0; \quad \tau_{yx} = p_{yx},$$

где $p_{yx}(y)$ — касательная нагрузка, равнодействующая которой равна приложенной силе P . Из первого условия найдем

$$c_1 = -c_2 l.$$

Второе условие

$$\tau_{yx} = -\frac{c_2}{2} y^2 + c_3 = p_{yx}(y)$$

при некотором заданном законе изменения $p_{yx}(y)$, очевидно, не может выполняться при произвольных значениях y .

Потребуем выполнения граничного условия в интегральной форме:

$$\int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} dy = \int_{-h/2}^{h/2} p_{yx} dy = P.$$

Предположим, что p_{yx} изменяется в зависимости от y по тому же закону, что и касательные напряжения τ_{yx} в поперечных сечениях. Тогда получим

$$\int_{-h/2}^{h/2} \left(-\frac{c_2}{2} y^2 + c_3 \right) dy = \int_{-h/2}^{h/2} \left(-\frac{c_2}{2} y^2 + c_2 \frac{h^2}{8} \right) dy = P.$$

Отсюда после интегрирования найдем

$$c_2 = \frac{12P}{h^3} = \frac{P}{J_z}; \quad c_1 = -\frac{Pl}{J_z}; \quad c_3 = \frac{Ph^2}{8J_z}.$$

Подставив эти значения постоянных в формулы (б), придем к формулам (а). Таким образом, выражения (а) для напряжений, полученные в сопротивлении материалов, удовлетворяют всем уравнениям теории упругости и статическим граничным условиям на трех гранях балки. Если касательные силы p_{yx} распределены по торцу по какому-либо другому закону, то согласно принципу Сен-Венана существенное отличие в напряжениях будет только в области, близкой к торцу.

Для определения перемещений воспользуемся формулами закона Гука (17.17), в которых выразим деформации через перемещения по формулам Коши (17.3), а вместо напряжений подставим их выражения (а):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{P}{EJ_z}(l-x)y; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\nu P}{EJ_z}(l-x)y;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{(1+\nu)P}{EJ_z} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

Интегрируя первое из этих уравнений по x , а второе — по y и подставляя найденные перемещения u и v в третье уравнение, получим

$$u = -\frac{P}{EJ_z} \left(lxy - \frac{1}{2}x^2y \right) + f_3(y); \quad v = \frac{\nu P}{2EJ_z} (ly^2 - xy^2) + f_4(x); \quad (\text{в})$$

$$\left[f_4'(x) - \frac{P}{EJ_z} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right) \right] + \left[f_3'(y) + \frac{(2+\nu)P}{2EJ_z} y^2 \right] = \frac{(1+\nu)Ph^2}{4EJ_z}, \quad (\text{г})$$

где $f_3(y)$ и $f_4(x)$ — произвольные функции.

В равенстве (г) выражение в первых квадратных скобках зависит только от x , во вторых — только от y , правая часть — постоянная величина. Так как x и y — независимые переменные, то равенство (г) может выполняться только при условии, что выражения в квадратных скобках являются постоянными величинами:

$$f_4'(x) - \frac{P}{EJ_z} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right) = c_9; \quad f_3'(y) + \frac{(2+\nu)P}{2EJ_z} y^2 = c_{10}. \quad (\text{д})$$

Интегрируя эти уравнения, найдем

$$f_4(x) = \frac{P}{EJ_z} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + c_9x + c_{11};$$

$$f_3(y) = -\frac{(2+\nu)P}{6EJ_z} y^3 + c_{10}y + c_{12}.$$

С учетом этих формул выражения (в) для перемещений запишутся в виде

$$u = \frac{P}{EJ_z} \left(-lxy + \frac{x^2y}{2} - \frac{2+\nu}{6} y^3 \right) + c_{10}y + c_{12}; \quad (е)$$

$$v = \frac{P}{2EJ_z} \left(\nu ly^2 - \nu xy^2 + lx^2 - \frac{x^3}{3} \right) + c_9x + c_{11}. \quad (ж)$$

Как видно из формулы (е), перемещение u нелинейно зависит от y , следовательно, поперечные сечения балки, в том числе и в заделке, не остаются плоскими (рис. 17.10). Сечение $x=0$ в полученном решении лишь с некоторым приближением можно считать заделкой, так как при определении постоянных $c_9, c_{10}, c_{11}, c_{12}$, входящих в выражения (е) и (ж), невозможно удовлетворить граничным условиям $u=0, v=0$ для любых значений y . Поэтому ограничимся требованием, чтобы была неподвижна точка O , расположенная на оси Ox , то есть

$$x=0, \quad y=0, \quad u=v=0.$$

Подставляя эти условия в формулы (е) и (ж), получим

$$c_{11} = c_{12} = 0.$$

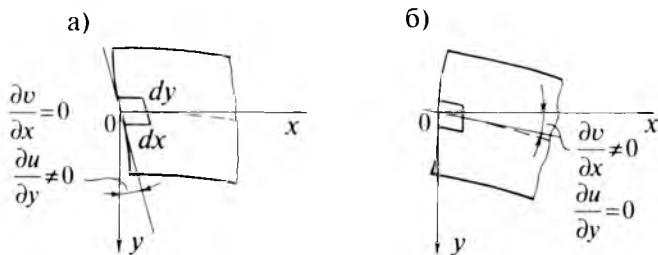


Рис. 17.10

Для определения постоянных c_9 и c_{10} потребуем, как это принимается в теории изгиба балок, чтобы в заделке угол пово-

рота касательной к изогнутой оси (рис. 17.10, а) был равен нулю, то есть примем

$$x = 0, \quad y = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Из этого условия, используя формулу (ж), найдем $c_9 = 0$. С учетом этого из равенств (г) и (д) получим

$$c_{10} = \frac{(1 + \nu)Ph^2}{4EJ_z}.$$

Окончательные выражения для перемещений примут вид

$$u = \frac{P}{EJ_z} \left[-lxy + \frac{x^2 y}{2} - \frac{2 + \nu}{6} y^3 + \frac{(1 + \nu)h^2}{4} y \right]; \quad (з)$$

$$v = \frac{P}{2EJ_z} \left(\nu ly^2 - \nu xy^2 + lx^2 - \frac{x^3}{3} \right). \quad (и)$$

Полагая во втором выражении $y = 0$, получим уравнение изогнутой оси балки и при $x = l$ — прогиб конца консоли:

$$v(x) = \frac{P}{EJ_z} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right); \quad v(l) = \frac{Pl^3}{3EJ_z}. \quad (к)$$

Выражения (к) в точности совпадают с выражениями для прогибов консольной балки, полученными в элементарной теории изгиба, основанной на гипотезе плоских сечений.

Вместо равенства нулю угла поворота касательной к изогнутой оси в заделке $\partial v / \partial x = 0$ можно потребовать, чтобы был равен нулю угол поворота нормали к изогнутой оси (рис. 17.10, б), то есть принять

$$x = 0, \quad y = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Из этих условий, используя формулы (е), (г) и (д), найдем

$$c_{10} = 0; \quad c_9 = \frac{(1 + \nu)Ph^2}{4EJ_z}.$$

Формулы для перемещений имеют вид

$$u = \frac{P}{EJ_z} \left[-lxy + \frac{x^2 y}{2} - \frac{(2 + \nu)}{6} y^3 \right];$$

$$v = \frac{P}{2EJ_z} \left[\nu ly^2 - \nu xy^2 + lx^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{(1 + \nu)h^2}{2} x \right],$$

а для прогибов оси получим следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} v(x) &= \frac{P}{EJ_z} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + \frac{(1+\nu)Pl^2}{4EJ_z} \left(\frac{h}{l} \right)^2 x; \\ v(l) &= \frac{Pl^3}{3EJ_z} + \frac{(1+\nu)Pl^3}{4EJ_z} \left(\frac{h}{l} \right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (л)$$

Первые слагаемые в формулах (л) совпадают с выражениями (к), а вторые, имеющие порядок величины $(h/l)^2$ по сравнению с первыми, характеризуют учет влияния деформаций сдвига на прогибы. Для балок при $h/l < 1/5$ влияние сдвигов незначительно.

17.6. Балка на двух опорах под действием равномерно распределенной нагрузки

Схема балки показана на рис. 17.11. Начало координат принято в середине балки. В примере, рассмотренном в § 17.5, для функции напряжений оказалась подходящей сумма трех членов, взятых из полиномов второй, третьей и четвертой степеней. В рассматриваемом случае к балке приложена равномерно распределенная нагрузка q , поэтому в выражение для φ следует добавить члены из полиномов более высоких степеней. Примем, например, функцию φ в виде бигармонических полиномов второй (17.24), третьей (17.26), четвертой (17.30) и пятой (17.32) степеней. Так как ось Oy является осью симметрии, нормальные напряжения $\sigma_x(x, y)$, $\sigma_y(x, y)$ должны быть четными функциями x , а касательные напряжения $\tau_{xy}(x, y)$ — нечетной функцией x . Поэтому в выражениях (17.25), (17.27), (17.31), (17.33) для нормальных напряжений σ_x, σ_y следует положить равными нулю коэффициенты при нечетных степенях x , а для касательных напряжений τ_{xy} — при четных степенях x :

$$b_2 = c_3 = a_3 = d_4 = b_4 = a_5 = c_5 = 0.$$

Тогда для функции φ получим следующее выражение, удовлетворяющее бигармоническому уравнению (17.22) при любых значениях коэффициентов:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{b_5}{12} \left(x^4 y - \frac{1}{5} y^5 \right) + \frac{d_5}{6} \left(x^2 y^3 - \frac{1}{5} y^5 \right) + \frac{a_4}{12} (x^4 - y^4) + \\ &+ \frac{c_4}{4} \left(x^2 y^2 - \frac{1}{3} y^4 \right) + \frac{b_3}{2} x^2 y + \frac{d_3}{6} y^3 + \frac{a_2}{2} x^2 + \frac{c_2}{2} y^2. \end{aligned}$$

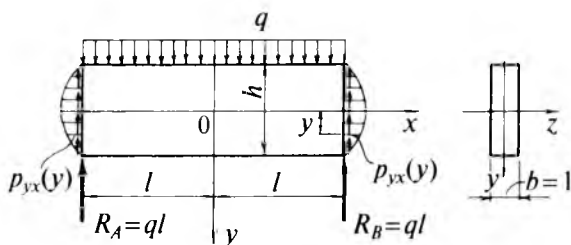


Рис. 17.11

Полагая объемные силы равными нулю, определим напряжения по формулам (17.20):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{b_5}{3} y^3 + d_5 \left(x^2 y - \frac{2}{3} y^3 \right) - a_4 y^2 + \frac{c_4}{2} (x^2 - 2y^2) + d_3 y + c_2; \\ \sigma_y &= b_5 x^2 y + \frac{d_5}{3} y^3 + a_4 x^2 + \frac{c_4}{2} y^2 + b_3 y + a_2; \\ \tau_{xy} &= -\frac{b_5}{3} x^3 - d_5 xy^2 - c_4 xy - b_3 x. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Для определения постоянных коэффициентов воспользуемся граничными условиями на верхней и нижней гранях (см. рис. 17.11):

$$y = -\frac{h}{2}, \quad \sigma_y = -q, \quad \tau_{xy} = 0; \quad y = \frac{h}{2}, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0.$$

С учетом выражений (а) получим систему четырех уравнений

$$-b_5 \frac{h}{2} x^2 - d_5 \frac{h^3}{24} + a_4 x^2 + c_4 \frac{h^2}{8} - b_3 \frac{h}{2} + a_2 = -q;$$

$$b_5 \frac{x^3}{3} + d_5 \frac{h^2}{4} x - c_4 \frac{h}{2} x + b_3 x = 0;$$

$$b_5 \frac{h}{2} x^2 + d_5 \frac{h^3}{24} + a_4 x^2 + c_4 \frac{h^2}{8} + b_3 \frac{h}{2} + a_2 = 0;$$

$$b_5 \frac{x^3}{3} + d_5 \frac{h^2}{4} x + c_4 \frac{h}{2} x + b_3 x = 0.$$

Так как эти уравнения должны удовлетворяться при любых значениях x , необходимо приравнять нулю коэффициенты при различных степенях x . Из второго и четвертого уравнений следует, что $b_5 = 0$. Вычитая из второго уравнения четвертое, получим $c_4 = 0$. Складывая первое и третье уравнения, получим $a_4 = 0$, $a_2 = -q/2$.

С учетом этого второе и третье уравнения приводятся к виду

$$d_5 \frac{h^2}{4} + b_3 = 0; \quad d_5 \frac{h^3}{12} + b_3 h = q.$$

Решая эти уравнения, получим $b_3 = 3q/(2h)$; $d_5 = -6q/h^3$.

На левом и правом торцах балки должны выполняться следующие граничные условия:

$$x = \pm l, \quad \sigma_x = 0; \quad \tau_{yx} = \mp p_{yx}, \quad (б)$$

где $p_{yx}(y)$ — касательные нагрузки на торцах, равнодействующие которых должны быть равны опорным реакциям $R_A = R_B = ql$.

Так как закон изменения p_{yx} не задан, второе условие следует представить в интегральной форме, потребовав, чтобы касательные напряжения на торцах приводились к опорным реакциям:

$$x = \pm l, \quad \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} dy = \mp ql.$$

Подставив в это условие выражение для τ_{yx} из (а) с учетом найденных значений коэффициентов, можно убедиться в том, что оно тождественно удовлетворяется.

Подставив $x = \pm l$ в выражение для σ_x , получим

$$\sigma_x = -\frac{6q}{h^3} \left(l^2 y - \frac{2}{3} y^3 \right) + d_3 y + c_2.$$

Из этого выражения видно, что первое из граничных условий (б) при некоторых фиксированных значениях d_3 и c_2 и произвольных значениях y не может быть выполнено. Поэтому вновь воспользуемся интегральными граничными условиями. Потребуем, чтобы на торцах обращались в нуль продольная сила и изгибающий момент:

$$N = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dy = \int_{-h/2}^{h/2} \left[-\frac{6q}{h^3} \left(l^2 y - \frac{2}{3} y^3 \right) + d_3 y + c_2 \right] dy = 0;$$

$$M_z = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x y dy = \int_{-h/2}^{h/2} \left[-\frac{6q}{h^3} \left(l^2 y^2 - \frac{2}{3} y^4 \right) + d_3 y^2 + c_2 y \right] dy = 0.$$

Из этих уравнений найдем

$$c_2 = 0; \quad d_3 = \frac{6q}{h^3} \left(l^2 - \frac{h^2}{10} \right).$$

Подставляя найденные постоянные в формулы (а), получим

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{6qy}{h^3}(l^2 - x^2) + \frac{6qy}{h^3} \left(\frac{2}{3}y^2 - \frac{h^2}{10} \right); \\ \sigma_y &= -\frac{q}{2} \left(4\frac{y^3}{h^3} - 3\frac{y}{h} + 1 \right); \\ \tau_{xy} &= -\frac{6qx}{h^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right). \end{aligned} \right\} \quad (в)$$

Для сравнения определим напряжения по формулам сопротивления материалов:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{M_z(x)}{J_z} y = \left[\frac{q(2l)^2}{8} - \frac{qx^2}{2} \right] \frac{12y}{h^3} = \frac{6qy}{h^3}(l^2 - x^2); \quad \sigma_y = 0; \\ \tau_{xy} &= \frac{Q(x)S_z^{\text{отс}}(y)}{J_z b} = \frac{-qx \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \cdot 12}{h^3 \cdot 1} = -\frac{6qx}{h^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right). \end{aligned} \right\} \quad (г)$$

Сравнивая формулы (в) и (г), приходим к следующим выводам. Формулы для касательных напряжений τ_{xy} в обоих случаях совпадают. Первое слагаемое в формуле (в) для σ_x совпадает с формулой сопротивления материалов. Исследуем влияние второго слагаемого на величину наибольших напряжений σ_x , возникающих в крайних волокнах среднего сечения балки $x = 0$. Полагая в первой из формул (в) $x = 0$, $y = h/2$, получим

$$\sigma_x = \frac{3ql^2}{h^2} \left(1 + \frac{1}{15} \cdot \frac{h^2}{l^2} \right). \quad (д)$$

Как видно из этой формулы, величина второго слагаемого в скобках быстро убывает с уменьшением отношения высоты поперечного сечения h к длине балки $2l$. Так, при $h/(2l) = 0,5; 0,25; 0,1$ величина второго слагаемого по сравнению с первым соответственно составляет 6,7%; 1,7%; 0,3%.

Напряжения σ_y взаимного давления продольных слоев балки имеют наибольшую абсолютную величину $\sigma_y = q$ на верхней грани, в чем можно убедиться, положив во второй из формул (в) $y = -h/2$. Из сравнения этой величины с величиной наибольших напряжений σ_x из формул (в) видно, что для достаточно длинных балок ($2l/h \geq 4$) напряжения σ_y существенно малы по сравнению с σ_x .

Поэтому в сопротивлении материалов обычно полагают, что $\sigma_y = 0$, хотя эти напряжения могут быть определены (см. § 7.6).

На рис. 17.12 изображены эпюры наибольших напряжений σ_x , σ_y , τ_{yx} для случая $2l/h = 4$. Пунктирная прямая на эпюре σ_x соответствует решению по формуле сопротивления материалов.

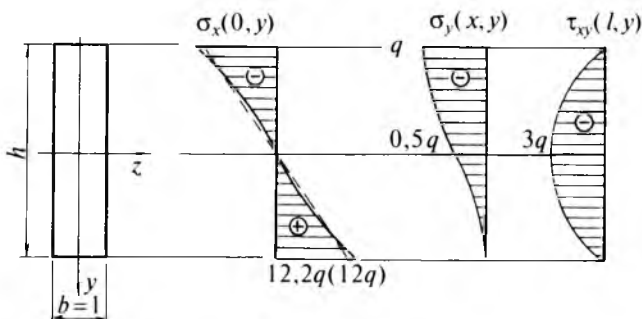


Рис. 17.12

Проведенный анализ позволяет сделать заключение о том, что для достаточно длинных балок решения сопротивления материалов и теории упругости дают практически одинаковые результаты.

17.7. Расчет плотины треугольного поперечного сечения

Решение плоской задачи в полиномах можно применить к расчету плотины с треугольным поперечным сечением (рис. 17.13). На вертикальную напорную грань плотины действует гидростатическое давление воды, которое на глубине x равно γx (γ — объемный вес воды). Кроме того, необходимо учесть объемную силу, равную объемному весу материала плотины: $X = \gamma_1$, $Y = 0$.

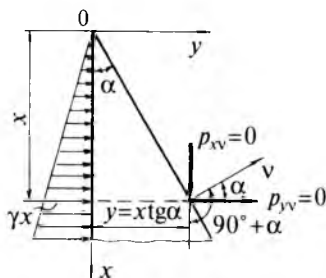


Рис. 17.13

Примем функцию напряжений в виде полинома третьей степени (17.26), удовлетворяющего бигармоническому уравнению (17.22) при любых значениях коэффициентов. По формулам (17.20) найдем напряжения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= c_3 x + d_3 y; & \sigma_y &= a_3 x + b_3 y; \\ \tau_{xy} &= -b_3 x - c_3 y - \gamma_1 y. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Входящие в эти формулы постоянные коэффициенты определим из граничных условий на вертикальной и наклонной гранях. На вертикальной грани имеем

$$y = 0, \quad \sigma_y = -\gamma x; \quad \tau_{xy} = 0.$$

Используя формулы (a), найдем $a_3 = -\gamma$; $b_3 = 0$.

С учетом этого формулы (a) для напряжений примут вид

$$\sigma_x = c_3 x + d_3 y; \quad \sigma_y = -\gamma x; \quad \tau_{xy} = -(c_3 + \gamma_1) y. \quad (б)$$

Нормаль ν к наклонной грани не параллельна осям координат. Поэтому необходимо использовать статические граничные условия в общем виде (17.12):

$$p_{x\nu} = \sigma_x l + \tau_{xy} m; \quad p_{y\nu} = \tau_{yx} l + \sigma_y m, \quad (в)$$

где

$$l = \cos(\nu, x) = \cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha; \quad m = \cos(\nu, y) = \cos \alpha.$$

Поверхностные нагрузки на наклонной грани отсутствуют. Поэтому $p_{x\nu} = p_{y\nu} = 0$. С учетом этих равенств соотношения (в) принимают вид

$$-\sigma_x \sin \alpha + \tau_{xy} \cos \alpha = 0; \quad -\tau_{yx} \sin \alpha + \sigma_y \cos \alpha = 0.$$

Подставляя в эти равенства выражения (б) и учитывая, что уравнение наклонной грани $y = x \operatorname{tg} \alpha$, получим

$$-(c_3 + d_3 \operatorname{tg} \alpha) x \sin \alpha - (c_3 + \gamma_1) x \operatorname{tg} \alpha \cos \alpha = 0;$$

$$(c_3 + \gamma_1) x \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha - \gamma x \cos \alpha = 0.$$

Решая эти уравнения, найдем

$$c_3 = \gamma \operatorname{ctg}^2 \alpha - \gamma_1; \quad d_3 = \gamma_1 \operatorname{ctg} \alpha - 2\gamma \operatorname{ctg}^3 \alpha.$$

Запишем окончательные выражения для напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= (\gamma \operatorname{ctg}^2 \alpha - \gamma_1) x + (\gamma_1 \operatorname{ctg} \alpha - 2\gamma \operatorname{ctg}^3 \alpha) y; \\ \sigma_y &= -\gamma x; \quad \tau_{xy} = -\gamma y \operatorname{ctg}^2 \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (г)$$

Интересно сравнить полученные результаты с решением по формулам сопротивления материалов. Для этого выделим из пло-

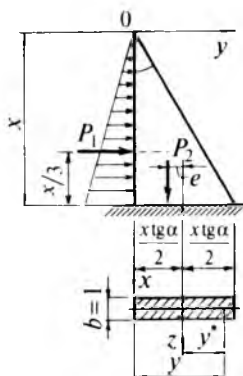


Рис. 17.14

тины пластину шириной $b = 1$ (рис. 17.14) и рассмотрим ее как консольную балку переменного сечения. В поперечном сечении балки, находящемся на расстоянии x от свободного конца, возникают три внутренних усилия: поперечная сила, равная площади треугольной эпюры гидростатического давления

$$Q = \frac{1}{2} \gamma x^2; \quad (д)$$

продольная сила, равная весу треугольной призмы

$$N = -\frac{1}{2} \gamma_1 x^2 \operatorname{tg} \alpha; \quad (е)$$

изгибающий момент, равный сумме моментов двух сил: силы $P_1 = Q$, приложенной в центре тяжести треугольной эпюры давления, и силы $P_2 = |N|$, приложенной в центре тяжести треугольной призмы с эксцентриситетом $e = \frac{1}{6} x \operatorname{tg} \alpha$ относительно центра тяжести рассматриваемого сечения (заштрихованного на рис. 17.14), то есть

$$M_z = -P_1 \frac{x}{3} + P_2 e = -\frac{1}{6} \gamma x^3 + \frac{1}{12} \gamma_1 x^3 \operatorname{tg}^2 \alpha. \quad (ж)$$

Согласно формулам сопротивления материалов имеем:

$$\sigma_x = \frac{N}{F} + \frac{M_z}{J_z} y^*; \quad \sigma_y = 0; \quad \tau_{xy} = \frac{Q S_z^{\text{отс}}(y^*)}{J_z b}, \quad (з)$$

где y^* — переменная, отсчитываемая от центральной оси Oz поперечного сечения; F , J_z и $S_z^{\text{отс}}(y^*)$ — соответственно площадь, момент инерции сечения и статический момент отсеченной площади:

$$\left. \begin{aligned} F &= bh = x \operatorname{tg} \alpha; \quad J_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{1}{12} x^3 \operatorname{tg}^3 \alpha; \\ S_z^{\text{отс}}(y^*) &= \frac{b}{2} \left[\frac{h^2}{4} - (y^*)^2 \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} x^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - (y^*)^2 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (и)$$

Координаты y и y^* произвольной точки поперечного сечения связаны между собой соотношением

$$y^* = y - \frac{1}{2} x \operatorname{tg} \alpha. \quad (к)$$

Подставив формулы (д), (е), (ж), (и), (к) в (з), после простых преобразований получим

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= (\gamma \operatorname{ctg}^2 \alpha - \gamma_1)x + (\gamma_1 \operatorname{ctg} \alpha - 2\gamma \operatorname{ctg}^3 \alpha)y; \\ \sigma_y &= 0; \quad \tau_{xy} = 3\gamma \operatorname{ctg}^3 \alpha \left(y \operatorname{tg} \alpha - \frac{y^2}{x} \right). \end{aligned} \right\} \quad (\text{л})$$

Для горизонтального сечения, находящегося на некотором заданном уровне $x = \text{const}$, на рис. 17.15, а, б изображены эпюры напряжений, полученные соответственно по формулам теории упругости (г) и по формулам сопротивления материалов (л) при следующих исходных данных: $\alpha = 30^\circ$, $\gamma = 10 \text{ кН/м}^3$, $\gamma_1 = 20 \text{ кН/м}^3$.

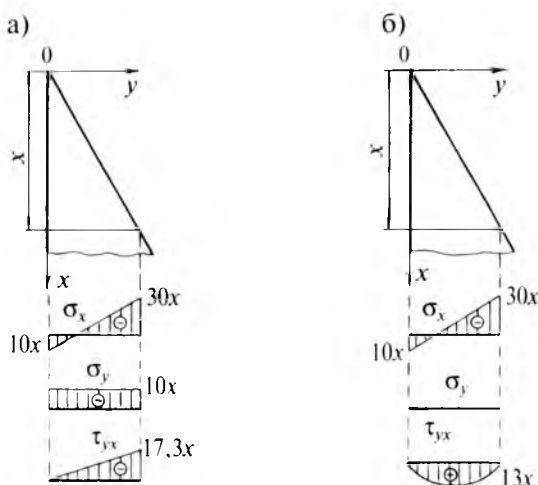


Рис. 17.15

Сравнивая формулы (г) и (л) и соответствующие им эпюры, приходим к следующим выводам. Формулы для напряжений σ_x в обоих решениях совпадают. Напряжения σ_y , которые в сопротивлении материалов не учитываются, имеют одинаковый порядок с напряжениями σ_x . Эпюры касательных напряжений τ_{yx} , полученные по формулам теории упругости и сопротивления материалов, отличаются между собой не только количественно, но и качественно. Следовательно, расчет по формулам сопротивления материалов для рассматриваемой задачи неприемлем.

При заданном угле $\alpha = 30^\circ$ напряжения σ_x в точках передней грани плотины являются растягивающими, что для хрупкого ма-

териала нежелательно. Растягивающих напряжений можно избежать соответствующим выбором угла α . Положив в первой из формул (г) $y = 0$, $\sigma_x = 0$, получим уравнение

$$(\gamma \operatorname{tg}^2 \alpha - \gamma_1)x = 0,$$

из которого при заданных величинах γ и γ_1 и $x \neq 0$ найдем

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\gamma}{\gamma_1} = 0,5, \quad \alpha = 35,3^\circ.$$

Таким образом, при $\alpha \geq 35,3^\circ$ растягивающих напряжений в плотине не будет.

17.8. Решение плоской задачи с помощью тригонометрических рядов

Выше мы рассмотрели решение двух задач об изгибе тонкой полосы (балки) прямоугольного поперечного сечения. Для расчета консоли, нагруженной на конце сосредоточенной силой, оказалась подходящей функция напряжений в виде полинома четвертой степени, для свободно опертой по концам балки, находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки, — полином пятой степени.

Повышая степени полиномов, можно получить решение задач для более сложных случаев нагружения полосы. Например, с помощью функции напряжений в виде полинома шестой степени решается задача об изгибе консоли нагрузкой, изменяющейся по линейному закону. При нагрузке, изменяющейся по квадратичному закону, подходит полином седьмой степени.

Однако решение в полиномах применимо только для случаев нагружения балки непрерывной по всей длине нагрузкой, закон изменения которой может быть аппроксимирован алгебраическим многочленом с целыми положительными степенями.

При действии на балку более сложных нагрузок, в том числе прерывистых (рис. 17.16), функцию напряжений можно представить в виде тригонометрических рядов по синусам или косинусам:

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y) \sin \lambda_n x; \quad (17.34)$$

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(y) \cos \lambda_n x, \quad (17.35)$$

где

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{l}. \quad (17.36)$$

Очевидно, что функция φ может быть принята в виде суммы выражений (17.34) и (17.35).

Если подставить один член ряда (17.34) в бигармоническое уравнение (17.22), то получим обыкновенное дифференциальное уравнение относительно функции $f_n(y)$:

$$f_n^{IV}(y) - 2\lambda_n^2 f_n''(y) + \lambda_n^4 f_n(y) = 0. \quad (17.37)$$

Соответствующее характеристическое уравнение

$$r^4 - 2\lambda_n^2 r^2 + \lambda_n^4 = 0$$

имеет два действительных кратных корня

$$r_1 = r_2 = \lambda_n; \quad r_3 = r_4 = -\lambda_n.$$

В соответствии с этим общее решение уравнения (17.37) можно представить в виде

$$f_n(y) = C_{1n} \operatorname{ch} \lambda_n y + C_{2n} \operatorname{sh} \lambda_n y + C_{3n} y \operatorname{ch} \lambda_n y + C_{4n} y \operatorname{sh} \lambda_n y.$$

Таким образом, решение, соответствующее одному члену разложения функции φ в ряд по синусам, имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi_n = & (C_{1n} \operatorname{ch} \lambda_n y + C_{2n} \operatorname{sh} \lambda_n y + C_{3n} y \operatorname{ch} \lambda_n y + \\ & + C_{4n} y \operatorname{sh} \lambda_n y) \sin \lambda_n x, \end{aligned} \quad (17.38)$$

а при разложении (17.35) в ряд по косинусам для одного члена ряда имеем

$$\begin{aligned} \varphi_n = & (D_{1n} \operatorname{ch} \lambda_n y + D_{2n} \operatorname{sh} \lambda_n y + D_{3n} y \operatorname{ch} \lambda_n y + \\ & + D_{4n} y \operatorname{sh} \lambda_n y) \cos \lambda_n x. \end{aligned} \quad (17.39)$$

Произвольные постоянные интегрирования, входящие в (17.38) и (17.39), находятся из граничных условий на верхней и нижней гранях пластины. Для этого необходимо внешнюю нагрузку $q(x)$ также разложить в тригонометрические ряды по синусам или по косинусам:

$$q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \lambda_n x; \quad q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos \lambda_n x. \quad (17.40)$$

Если начало координат принять на левом конце балки (рис. 17.16), то коэффициенты разложений (17.40) определятся по формулам

$$\left. \begin{aligned} A_n &= \frac{2}{l} \int_0^l q(x) \sin \lambda_n x dx; \\ B_0 &= \frac{1}{l} \int_0^l q(x) dx; \quad B_n = \frac{2}{l} \int_0^l q(x) \cos \lambda_n x dx. \end{aligned} \right\} \quad (17.41)$$

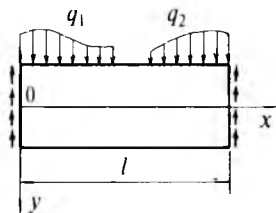


Рис. 17.16

В тех случаях, когда приложенная к балке нагрузка является симметричной или кососимметричной относительно среднего сечения (рис. 17.17, а, б), для упрощения расчета ось Oy следует совместить с осью симметрии балки. Тогда в случае симметричной нагрузки

$$A_n = 0; \quad B_0 = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l q(x) dx; \quad B_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l q(x) \cos \lambda_n x dx, \quad (17.42)$$

а в случае кососимметричной нагрузки

$$A_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l q(x) \sin \lambda_n x dx; \quad B_0 = B_n = 0. \quad (17.43)$$

Напряжения в балке определяются по формулам (17.20).

В качестве примера рассмотрим порядок расчета полосы, имеющей поперечное сечение в виде узкого прямоугольника единичной ширины (рис. 17.18). К верхней грани полосы приложена распределенная нагрузка $q(x)$, а по торцам — касательные силы.

Функцию напряжений примем в виде ряда по синусам (17.34). Найдем решение, соответствующее произвольному n -му члену ряда (17.38). Подставив (17.38) в (17.20), получим при отсутствии объемных сил выражения для напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^{(n)} &= \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial y^2} = [C_{1n} \lambda_n^2 \operatorname{ch} \lambda_n y + C_{2n} \lambda_n^2 \operatorname{sh} \lambda_n y + C_{3n} \lambda_n \times \\ &\quad \times (2 \operatorname{sh} \lambda_n y + \lambda_n y \operatorname{ch} \lambda_n y) + C_{4n} \lambda_n (2 \operatorname{ch} \lambda_n y + \\ &\quad + \lambda_n y \operatorname{sh} \lambda_n y)] \sin \lambda_n x; \\ \sigma_y^{(n)} &= \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x^2} = -(C_{1n} \operatorname{ch} \lambda_n y + C_{2n} \operatorname{sh} \lambda_n y + \\ &\quad + C_{3n} y \operatorname{ch} \lambda_n y + C_{4n} y \operatorname{sh} \lambda_n y) \lambda_n^2 \sin \lambda_n x; \\ \tau_{xy}^{(n)} &= -\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x \partial y} = -[C_{1n} \lambda_n \operatorname{sh} \lambda_n y + C_{2n} \lambda_n \operatorname{ch} \lambda_n y + C_{3n} \times \\ &\quad \times (\operatorname{ch} \lambda_n y + \lambda_n y \operatorname{sh} \lambda_n y) + C_{4n} (\operatorname{sh} \lambda_n y + \\ &\quad + \lambda_n y \operatorname{ch} \lambda_n y)] \lambda_n \cos \lambda_n x. \end{aligned} \right\} \quad (17.44)$$

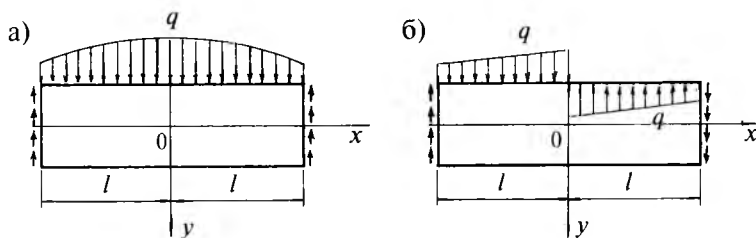


Рис. 17.17

Этим выражениям для напряжений соответствует n -й член разложения нагрузки (17.40) в ряд по синусам

$$q_n(x) = A_n \sin \lambda_n x, \quad (17.45)$$

где A_n определяется по первой из формул (17.41).

Постоянные интегрирования, входящие в (17.44), определяются из граничных условий на верхней и нижней гранях балки:

$$\begin{aligned} y = -h, \quad \sigma_y^{(n)} &= -q_n; \quad \tau_{xy}^{(n)} = 0; \\ y = h, \quad \sigma_y^{(n)} &= 0; \quad \tau_{xy}^{(n)} = 0. \end{aligned}$$

Подставив в эти равенства выражения $\sigma_y^{(n)}$, $\tau_{xy}^{(n)}$ из (17.44) и q_n из (17.45), получим следующую систему четырех уравнений:

$$-C_{1n} \operatorname{ch} \lambda_n h + C_{2n} \operatorname{sh} \lambda_n h + C_{3n} h \operatorname{ch} \lambda_n h - C_{4n} h \operatorname{sh} \lambda_n h = \frac{A_n}{\lambda_n^2};$$

$$C_{1n} \operatorname{ch} \lambda_n h + C_{2n} \operatorname{sh} \lambda_n h + C_{3n} h \operatorname{ch} \lambda_n h + C_{4n} h \operatorname{sh} \lambda_n h = 0;$$

$$\begin{aligned} C_{1n} \lambda_n \operatorname{sh} \lambda_n h - C_{2n} \lambda_n \operatorname{ch} \lambda_n h - C_{3n} (\operatorname{ch} \lambda_n h + \lambda_n h \operatorname{sh} \lambda_n h) + \\ + C_{4n} (\operatorname{sh} \lambda_n h + \lambda_n h \operatorname{ch} \lambda_n h) = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{1n} \lambda_n \operatorname{sh} \lambda_n h + C_{2n} \lambda_n \operatorname{ch} \lambda_n h + C_{3n} (\operatorname{ch} \lambda_n h + \lambda_n h \operatorname{sh} \lambda_n h) + \\ + C_{4n} (\operatorname{sh} \lambda_n h + \lambda_n h \operatorname{ch} \lambda_n h) = 0. \end{aligned}$$

Решая эту систему уравнений, найдем постоянные C_{1n} , C_{2n} , C_{3n} , C_{4n} .

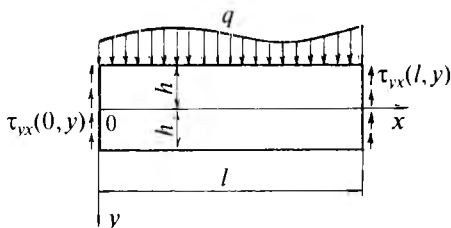


Рис. 17.18

Рассмотрим граничные условия на левом и правом торцах балки. Как видно из (17.44), граничные условия для нормальных напряжений σ_x тождественно удовлетворяются, так как при $x = 0$ и $x = l$ $\sigma_x = 0$. Первое, пятое и шестое слагаемые в последней формуле (17.44) соответствуют взаимноуравновешенной системе касательных напряжений τ_{xy} , так как в верхней ($y \geq -h$) и в нижней ($y \leq h$) частях сечения эти напряжения направлены в противоположные стороны. Второе, третье и четвертое слагаемые дают на торцах касательные напряжения, уравнивающие заданную нагрузку q .

Складывая решения, даваемые несколькими членами ряда, можно определить напряжения в балке с необходимой точностью.

17.9. Обоснование принципа Сен-Венана

В качестве важного приложения решения плоской задачи в тригонометрических рядах можно привести исследование локального эффекта Сен-Венана (см. § 1.3 и § 3.2).

Рассмотрим пластину в виде длинной полосы ($l \gg h$) толщиной $h = 1$ (рис. 17.19). К верхней и нижней граням полосы на малом участке длиной $2a$ ($a \ll l$) приложены одинаковые по величине и противоположно направленные равномерно распределенные нагрузки q , симметричные относительно сечения $x = 0$.

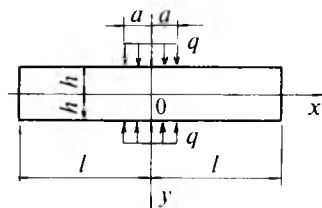


Рис. 17.19

Вследствие симметрии задачи функцию напряжений и нагрузки необходимо представить в виде разложений (17.39) и (17.40) в ряды по косинусам. Учитывая, что нагрузки q действуют только в пределах участка $-a \leq x \leq a$, по формулам (17.42) получим

$$B_0 = \frac{1}{2l} \int_{-a}^a q dx = \frac{qa}{l};$$

$$B_n = \frac{1}{l} \int_{-a}^a q \cos \lambda_n x dx = \frac{2q}{\lambda_n l} \sin \lambda_n a.$$

Граничные условия на нижней и верхней сторонах пластины для n -х членов разложения записываются в виде

$$y = \pm h, \quad \sigma_y^{(n)} = -q_n; \quad \tau_{xy}^{(n)} = 0.$$

Дальнейший ход решения задачи аналогичен рассмотренному в предыдущем параграфе примеру.

Запишем окончательное выражение* для напряжений σ_y , действующих вдоль линии $y = 0$:

$$\sigma_y = -\frac{qa}{l} - \frac{4q}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_n a (\lambda_n h \operatorname{ch} \lambda_n h + \operatorname{sh} \lambda_n h)}{n(\operatorname{sh} 2\lambda_n h + 2\lambda_n h)} \cos \lambda_n x. \quad (17.46)$$

В предельном случае, когда размер a мал ($a \ll h$), можно получить решение для полосы, нагруженной двумя взаимноуравновешенными силами $P = 2qa$. На рис. 17.20 приведена эпюра напряжений σ_y , действующих вдоль линии $y = 0$. Эта эпюра характеризует принцип локального эффекта Сен-Венана, который можно сформулировать так: *если к весьма малой части тела приложена система взаимноуравновешенных сил, то она вызывает напряжения, быстро затухающие по мере удаления от места приложения этих сил.*

На рис. 17.21, а приведен второй частный случай, когда $l \ll h$, что соответствует центральному сжатию стержня прямоугольного сечения. В этом случае формула для напряжений σ_y в произвольном поперечном сечении стержня имеет вид

$$\sigma_y = -\frac{P}{2l} - \frac{2P}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_n a}{n(\operatorname{sh} 2\lambda_n h + 2\lambda_n h)} [(\lambda_n h \operatorname{ch} \lambda_n h + \operatorname{sh} \lambda_n h) \operatorname{ch} \lambda_n y - \lambda_n y \operatorname{sh} \lambda_n h \operatorname{sh} \lambda_n y] \cos \lambda_n x. \quad (17.47)$$

На рис. 17.21, б приведены полученные с помощью этой формулы эпюры напряжений σ_y для трех сечений стержня, находящихся на расстояниях $l/2$, l и $2l$ от торца. Величины ординат даны в долях от среднего значения $\sigma_{\text{ср}} = P/F$, соответствующего равномерному распределению напряжений по площади поперечного сечения. Из этих эпюр видно, что по мере удаления от места приложения

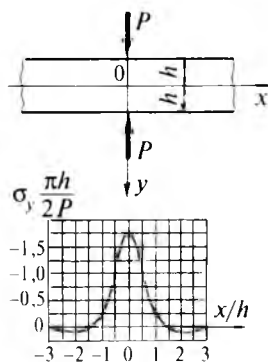


Рис. 17.20

* См.: Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. Наука, М., 1975.

силы P распределение напряжений по сечению быстро приближается к равномерному и практически становится равномерным на расстоянии, равном ширине сечения $2l$.

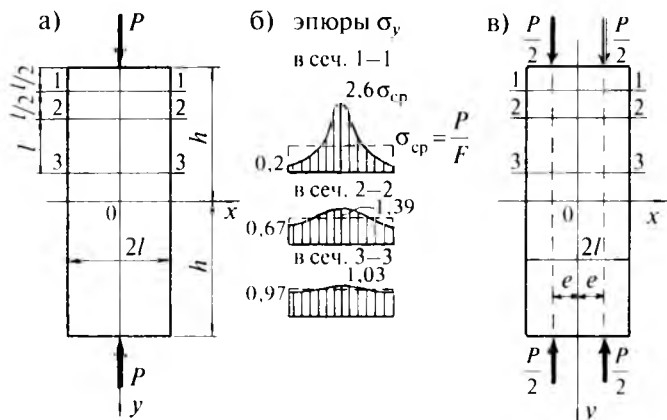


Рис. 17.21

Заметим, что приведенное решение непригодно для сечений, находящихся в непосредственной близости к точке приложения силы P .

Если центральное сжатие стержня осуществлять с помощью какой-либо другой нагрузки, равнодействующая которой равна P , например с помощью двух сил, каждая из которых равна $P/2$ (рис. 17.21, в), то распределение напряжений σ_y в тех же сечениях 1—1, 2—2, 3—3 будет иным. Однако на расстоянии $2l$ от торца распределение напряжений по сечению 3—3 будет практически равномерным. На этом основании принцип Сен-Венана можно сформулировать в такой трактовке: *детальный способ приложения нагрузки сказывается на характере распределения напряжений лишь в области, близкой к месту приложения нагрузки, и практически не влияет на напряжения в точках, достаточно удаленных от места приложения нагрузки.*

ГЛАВА 18

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

18.1. Общие уравнения плоской задачи в полярных координатах

Во многих случаях, когда тело ограничено поверхностями кругового цилиндра и радиально расходящимися плоскостями, плоскую задачу теории упругости удобно рассматривать в полярной системе координат.

Совместив полюс полярной системы координат (r, θ) с началом декартовой системы координат (x, y) , а полярную ось — с осью абсцисс Ox (рис. 18.1), нетрудно установить связь между координатами произвольной точки M в этих двух системах координат:

$$x = r \cos \theta; \quad y = r \sin \theta. \quad (18.1)$$

Обратные зависимости имеют вид

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (18.2)$$

Уравнения плоской задачи теории упругости в полярной системе координат могут быть получены путем преобразования уравнений главы 17 с использованием зависимостей (18.1) и (18.2). Однако более просто вывести все уравнения непосредственно в полярной системе координат.

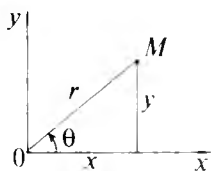


Рис. 18.1

Уравнения равновесия. Выделим из нагруженного плоского тела бесконечно малый элемент $abcd$ (рис. 18.2), образованный двумя концентрическими окружностями с радиусами r и $r + dr$ и двумя лучами, проведенными под углами θ и $\theta + d\theta$ к оси Ox . Толщину элемента примем равной единице.

На гранях ad и ab элемента действуют радиальные σ_r и тангенциальные σ_θ нормальные напряжения и касательные напряжения $\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r}$, а на гранях bc и cd эти напряжения получают соответствующие приращения. Кроме того, на элемент могут действовать по направлениям r и θ составляющие R и Θ объемной силы.

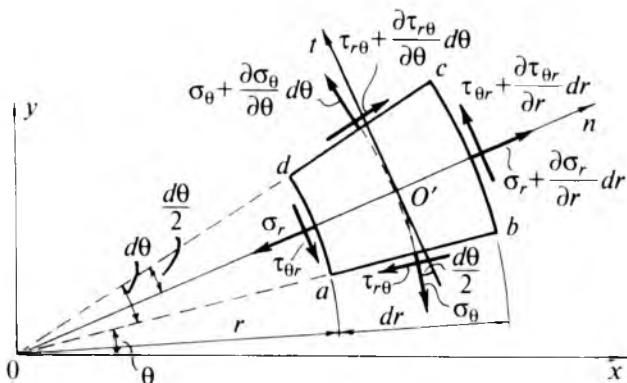


Рис. 18.2

Составив проекции всех сил, приложенных к элементу, на две взаимно перпендикулярные оси $O'n$ и $O't$, проходящие через центр тяжести O' элемента, получим

$$\begin{aligned} & \left(\sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta - \sigma_r r d\theta - \left(\sigma_\theta + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} d\theta \right) dr \sin \frac{d\theta}{2} - \\ & - \sigma_\theta dr \sin \frac{d\theta}{2} + \left(\tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} d\theta \right) dr \cos \frac{d\theta}{2} - \tau_{r\theta} dr \cos \frac{d\theta}{2} + R r dr d\theta = 0; \\ & \left(\sigma_\theta + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} d\theta \right) dr \cos \frac{d\theta}{2} - \sigma_\theta dr \cos \frac{d\theta}{2} + \left(\tau_{\theta r} + \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta - \\ & - \tau_{\theta r} r d\theta + \left(\tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} d\theta \right) dr \sin \frac{d\theta}{2} + \tau_{r\theta} dr \sin \frac{d\theta}{2} + \Theta r dr d\theta = 0. \end{aligned}$$

Отбрасывая в этих уравнениях слагаемые, содержащие произведение трех дифференциалов независимых переменных r и θ , и полагая в силу малости угла $d\theta$

$$\sin \frac{d\theta}{2} \approx \frac{d\theta}{2}; \quad \cos \frac{d\theta}{2} \approx 1,$$

после деления всех членов на площадь $r dr d\theta$ элемента $abcd$ получим уравнения равновесия для плоской задачи в полярных координатах:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{\theta r}}{r} + \Theta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (18.3)$$

Геометрические уравнения. Рассмотрим перемещения и деформации бесконечно малого элемента $abcd$ (рис. 18.3). Перемещение u произвольной точки тела в направлении радиуса называется радиальным перемещением, а перемещение v в направлении, перпендикулярном к радиусу, — окружным перемещением. Относительное удлинение ϵ_r стороны ab элемента называется радиальной деформацией, а относительное удлинение ϵ_θ дуги ad — окружной деформацией. Относительная угловая деформация $\gamma_{r\theta}$ представляет собой искажение прямого угла bad .

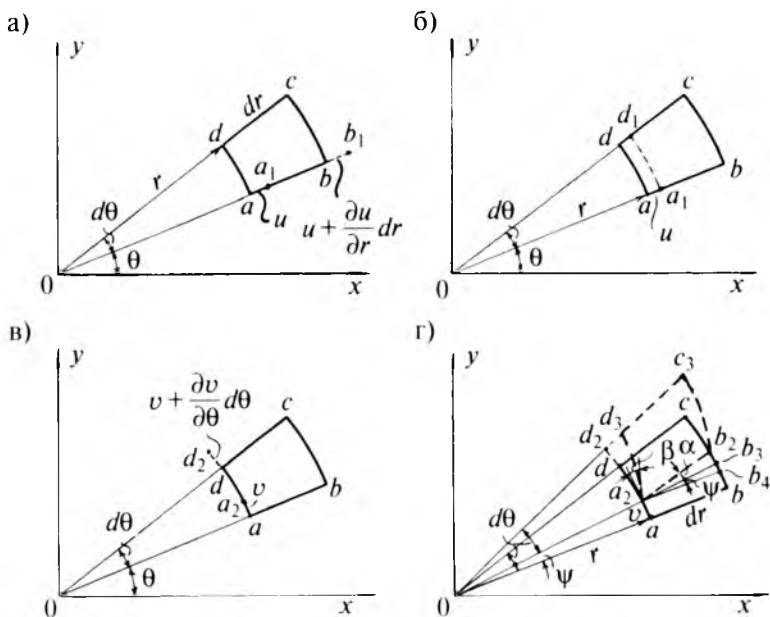


Рис. 18.3

Рассмотрим каждый вид деформации по отдельности.

Относительное удлинение стороны ab (рис. 18.3, а) равно разности перемещений точек a и b в направлении радиуса, деленной на первоначальную длину $ab = dr$:

$$\epsilon_r = \frac{bb_1 - aa_1}{ab} = \frac{u + \frac{\partial u}{\partial r} dr - u}{dr} = \frac{\partial u}{\partial r}.$$

Окружная деформация ϵ_θ происходит по двум причинам: вследствие перехода дуги $ad = r d\theta$ на окружность большего радиуса

$r' = r + u$ (рис. 18.3, б), в результате чего длина дуги становится равной $a_1 d_1 = (r + u) d\theta$, а относительное удлинение

$$\varepsilon_{\theta}^{(1)} = \frac{a_1 d_1 - ad}{ad} = \frac{(r + u)d\theta - rd\theta}{rd\theta} = \frac{u}{r},$$

и вследствие разности перемещений точек a и d в окружном направлении (рис. 18.3, в):

$$\varepsilon_{\theta}^{(2)} = \frac{dd_2 - aa_2}{ad} = \frac{v + \frac{\partial v}{\partial \theta} d\theta - v}{rd\theta} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta}.$$

Полная окружная деформация равна

$$\varepsilon_{\theta} = \varepsilon_{\theta}^{(1)} + \varepsilon_{\theta}^{(2)} = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta}.$$

При определении угловой деформации $\gamma_{r\theta} = \alpha + \beta$ (рис. 18.3, г) изменение длин сторон элемента $abcd$ с точностью до величин высшего порядка малости можно не учитывать. Поскольку смещение элемента как жесткого целого в направлении радиуса не вызывает искажения его углов, радиальное перемещение u точки a на рисунке не показано. Жесткое вращение элемента вокруг полюса O на угол $\psi = v/r$ вызывает поворот стороны ab на тот же угол.

Рассматривая рис. 18.3, г, найдем

$$\gamma_{r\theta} = \alpha + \beta \approx \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{b_2 b_3}{a_2 b_3} + \frac{d_2 d_3}{a_2 d_2} = \frac{bb_2 - bb_4 - b_3 b_4}{a_2 b_3} + \frac{d_2 d_3}{a_2 d_2}.$$

Учитывая, что

$$bb_2 = v + \frac{\partial v}{\partial r} dr; \quad bb_4 = aa_2 = v; \quad b_3 b_4 = \psi dr = \frac{v}{r} dr;$$

$$d_2 d_3 = \frac{\partial u}{\partial \theta} d\theta; \quad a_2 b_3 = dr; \quad a_2 d_2 = ad = rd\theta,$$

после несложных преобразований получим

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Запишем все три геометрических соотношения:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \varepsilon_{\theta} = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta}; \quad \gamma_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta}. \quad (18.4)$$

Закон Гука. Уравнения закона Гука в полярных координатах получаются из соответствующих уравнений в декартовых координатах заменой индексов x и y на r и θ .

Для плоского напряженного состояния прямые (17.17) и обратные (17.18) уравнения закона Гука записываются в виде

$$\epsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta); \quad \epsilon_\theta = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r); \quad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{G}\tau_{r\theta}; \quad (18.5)$$

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_r + \nu\epsilon_\theta); \quad \sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_\theta + \nu\epsilon_r); \quad \tau_{r\theta} = G\gamma_{r\theta}. \quad (18.6)$$

Соответствующие уравнения для плоской деформации можно получить из (18.5) и (18.6) путем замены постоянных упругости E и ν на приведенные постоянные упругости E_1 и ν_1 , определяемые по формулам (17.8):

$$E_1 = \frac{E}{1-\nu^2}; \quad \nu_1 = \frac{\nu}{1-\nu}. \quad (18.7)$$

Связь между напряжениями в декартовых и полярных координатах. Выделим из плоского тела два бесконечно малых элемента в виде призмы с основаниями, имеющими форму прямоугольного треугольника (рис. 18.4 и 18.5). Грани AC , BC и $A'C'$, $B'C'$ элементов параллельны осям Ox и Oy декартовой системы координат. Грань AB на рис. 18.4 перпендикулярна, а грань $A'B'$ на рис. 18.5 параллельна радиальному направлению полярной системы координат.

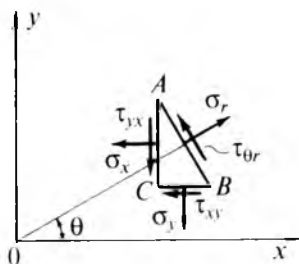


Рис. 18.4

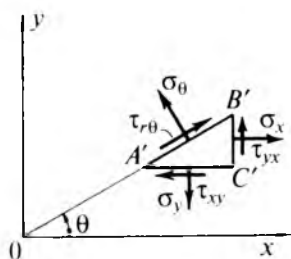


Рис. 18.5

Выражения для напряжений σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$ через напряжения σ_x , σ_y , τ_{xy} получаются из формул (4.25), (4.26) заменой индексов x и y на r и θ и угла α на θ :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + \tau_{xy} \sin 2\theta; \\ \sigma_\theta &= \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - \tau_{xy} \sin 2\theta; \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta. \end{aligned} \right\} \quad (18.8)$$

Эти выражения можно вывести, если составить проекции всех сил, приложенных к граням элементов ABC и $A'B'C'$, соответственно на радиальное и окружное направления.

С помощью несложных преобразований соотношений (18.8) можно получить выражения для напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ через $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_r \cos^2 \theta + \sigma_\theta \sin^2 \theta - \tau_{r\theta} \sin 2\theta; \\ \sigma_y &= \sigma_r \sin^2 \theta + \sigma_\theta \cos^2 \theta + \tau_{r\theta} \sin 2\theta; \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_\theta) \sin 2\theta + \tau_{r\theta} \cos 2\theta. \end{aligned} \right\} \quad (18.9)$$

Сложив почленно первые две из формул (18.8) или (18.9), получим подтверждение известного свойства первого инварианта тензора напряжений при двухосном напряженном состоянии:

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_r + \sigma_\theta. \quad (18.10)$$

Уравнения неразрывности деформаций. В § 17.3 было получено уравнение неразрывности деформаций в напряжениях (17.19) в декартовой системе координат для случая, когда объемные силы постоянны или равны нулю. Это уравнение имеет вид

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0,$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

оператор Лапласа.

Для того чтобы записать оператор Лапласа в полярных координатах, установим связь между частными производными произвольной функции в декартовых и полярных координатах.

Из курса высшей математики известны формулы для определения частных производных сложной функции двух переменных:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x}; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (18.11)$$

С учетом (18.1) и (18.2) получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{r} = \cos \theta; & \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y}{r} = \sin \theta; \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= -\frac{y}{r^2} = -\frac{\sin \theta}{r}; & \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{x}{r^2} = \frac{\cos \theta}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (18.12)$$

Используя эти соотношения, найдем частные производные функции φ первого и второго порядка и выражение $\nabla^2\varphi$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial x} &= \cos\theta \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}; \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} &= \sin\theta \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}. \end{aligned} \right\} \quad (18.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) = \left(\cos\theta \cdot \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial\theta} \right) \left(\cos\theta \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial r} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sin\theta}{r} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \right) = \cos^2\theta \cdot \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \sin^2\theta \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} \right) - \\ &\quad - \sin 2\theta \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2\varphi}{\partial r \partial\theta} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \right). \end{aligned} \quad (18.14)$$

Аналогично получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} &= \sin^2\theta \cdot \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \cos^2\theta \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} \right) + \\ &\quad + \sin 2\theta \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2\varphi}{\partial r \partial\theta} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \right); \end{aligned} \quad (18.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial y} &= \cos 2\theta \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2\varphi}{\partial r \partial\theta} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \right) + \frac{\sin 2\theta}{2} \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} \right); \end{aligned} \quad (18.16)$$

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}.$$

Таким образом, в полярной системе координат уравнение неразрывности деформаций плоской задачи в напряжениях для случая, когда объемные силы постоянны или равны нулю, имеет вид

$$\nabla^2(\sigma_r + \sigma_\theta) = 0, \quad (18.17)$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \quad (18.18)$$

оператор Лапласа в полярных координатах.

Уравнение неразрывности (18.17) и уравнения равновесия (18.3) образуют полную систему трех уравнений с тремя неизвестными σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$.

Как и при решении плоской задачи в декартовых координатах, систему трех уравнений можно свести к одному бигармоническому уравнению относительно функции напряжений φ , аналогичному уравнению (17.21):

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0, \quad (18.19)$$

или в развернутом виде

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) = 0. \quad (18.20)$$

Если формулы (17.25) преобразовать с помощью (18.14) — (18.16) и затем подставить в (18.8), то при отсутствии объемных сил получаются следующие выражения для напряжений через функцию φ :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}; & \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}; \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \right\} \quad (18.21)$$

Если учесть, что напряжения σ_r , σ_θ и $\tau_{r\theta}$ в полярных координатах при $\theta = 0$ совпадают с напряжениями соответственно σ_x , σ_y и τ_{xy} , то соотношения (18.21) можно получить также из выражений (18.15), (18.14) и (18.16), положив в них $\theta = 0$.

18.2. Кли́н, нагруженный в вершине сосредоточенной силой

Рассмотрим плоский клин толщиной $b = 1$ с углом раствора 2α , нагруженный в вершине силой P , направленной под углом β к оси симметрии Ox (рис. 18.6).

Чтобы не рассматривать напряженно-деформированное состояние клина в области закрепления нижней кромки, будем считать, что клин неограниченно простирается в направлении оси Ox .

Так как боковые грани клина не нагружены, то граничные условия на этих гранях записываются в следующем виде:

$$\theta = \pm \alpha, \quad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0. \quad (18.22)$$

Решение задачи будем искать с помощью функции напряжений φ , удовлетворяющей бигармоническому уравнению (18.20) и граничным условиям (18.22). Для отыскания функции φ воспользуемся методом анализа размерностей. Любое уравнение, описывающее некоторый физический процесс, должно быть размерно однородным, то есть все слагаемые, входящие в это уравнение, должны иметь одинаковую размерность.

Очевидно, что функция напряжений в произвольной точке клина должна зависеть от величины силы P , от координат этой точки r и θ и от значений углов α и β :

$$\varphi = \varphi(p, r, \theta, \alpha, \beta). \quad (18.23)$$

Установим размерности величин, входящих в (18.23). Для обозначения размерностей (единиц измерения) величин будем ставить их в квадратные скобки.

Единицу измерения для длин обозначим через $L = [r] = [b]$, а для сосредоточенной силы — через $Q = [P]$. Распределенная нагрузка $p = P/b$ имеет размерность $[p] = QL^{-1}$, а величины θ, α, β — безразмерные, то есть $[\theta] = [\alpha] = [\beta] = 1$. Так как напряжения $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ имеют размерность силы, деленной на площадь ($[\sigma] = QL^{-2}$), из формул (18.21) следует, что функция φ имеет размерность силы:

$$[\varphi] = [\sigma][r]^2 = \frac{Q}{L^2} \cdot L^2 = Q.$$

Чтобы выражение (18.23) удовлетворяло условию размерной однородности, приведем его к безразмерному виду. Из трех размерных величин φ, p и r , входящих в (18.23), можно составить единственно возможную безразмерную комбинацию

$$\frac{\varphi}{pr} = \Phi(\theta, \alpha, \beta).$$

Отсюда получим выражение для φ , в котором переменные r и θ разделены:

$$\varphi = pr \Phi(\theta, \alpha, \beta).$$

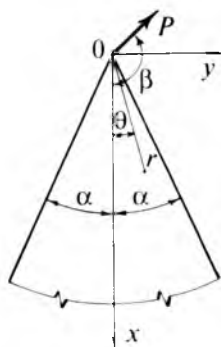


Рис. 18.6

Найдем производные функции φ , входящие в бигармоническое уравнение (18.20):

$$\begin{aligned}\nabla^2 \varphi &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = \frac{p}{r} (\Phi + \Phi''); \\ \frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 \varphi) &= -\frac{p}{r^2} (\Phi + \Phi''); \quad \frac{\partial^2}{\partial r^2} (\nabla^2 \varphi) = \frac{2p}{r^3} (\Phi + \Phi''); \\ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (\nabla^2 \varphi) &= \frac{p}{r} (\Phi'' + \Phi^{IV}).\end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (18.20), получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\Phi^{IV} + 2\Phi'' + \Phi = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\Phi = (A + C\theta) \cos \theta + (B + D\theta) \sin \theta.$$

Таким образом, окончательное выражение для функции напряжений имеет вид

$$\varphi = pr [(A + C\theta) \cos \theta + (B + D\theta) \sin \theta].$$

Подставляя это выражение в формулы (18.21), найдем напряжения:

$$\sigma_r = -\frac{2p}{r} (C \sin \theta - D \cos \theta); \quad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0. \quad (18.24)$$

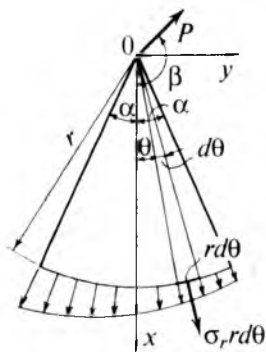


Рис. 18.7

Напряженное состояние, определяемое равенствами (18.24), часто называют *радиальным напряженным состоянием*.

Так как напряжения σ_θ и $\tau_{r\theta}$ во всех точках клина равны нулю, то граничные условия (18.22) тождественно удовлетворяются и не позволяют определить произвольные постоянные C и D . Эти постоянные можно определить из условия равновесия части клина, ограниченной круговым сечением радиуса r (рис. 18.7).

Составим проекции всех сил, действующие на этот элемент, на оси Ox и Oy :

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \sigma_r r \cos \theta d\theta + p \cos \beta = 0; \quad \int_{-\alpha}^{\alpha} \sigma_r r \sin \theta d\theta + p \sin \beta = 0.$$

Подставляя в эти равенства выражение σ_r из (18.24), получим

$$\begin{aligned} 2C \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \theta \sin \theta d\theta - 2D \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos^2 \theta d\theta &= \cos \beta; \\ 2C \int_{-\alpha}^{\alpha} \sin^2 \theta d\theta - 2D \int_{-\alpha}^{\alpha} \sin \theta \cos \theta d\theta &= \sin \beta. \end{aligned}$$

Производя интегрирование и решая полученную систему двух алгебраических уравнений, найдем постоянные C и D :

$$C = \frac{\sin \beta}{2\alpha - \sin 2\alpha}; \quad D = \frac{-\cos \beta}{2\alpha + \sin 2\alpha}.$$

Подставляя найденные значения постоянных в (18.24), получим окончательное выражение для напряжения σ_r :

$$\sigma_r = -\frac{2p}{r} \left(\frac{\cos \beta \cos \theta}{2\alpha + \sin 2\alpha} + \frac{\sin \beta \sin \theta}{2\alpha - \sin 2\alpha} \right). \quad (18.25)$$

Рассмотрим частные случаи действия силы, приложенной в вершине клина.

Сжатие клина (рис. 18.8). Решение этой задачи получим из (18.25), положив $\beta = 0$:

$$\sigma_r = -\frac{2p}{2\alpha + \sin 2\alpha} \cdot \frac{\cos \theta}{r}; \quad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0. \quad (18.26)$$

Определим напряжения в декартовой системе координат. Для этого необходимо подставить напряжения (18.26) в формулы (18.9) и исключить в полученных выражениях r , $\sin \theta$, $\cos \theta$ с помощью соотношений (18.2). В результате получим

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_r \cos^2 \theta = -\frac{2p}{2\alpha + \sin 2\alpha} \cdot \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^2}; \\ \sigma_y &= \sigma_r \sin^2 \theta = -\frac{2p}{2\alpha + \sin 2\alpha} \cdot \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^2}; \\ \tau_{xy} &= \sigma_r \sin \theta \cos \theta = -\frac{2p}{2\alpha + \sin 2\alpha} \cdot \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (18.27)$$

По этим формулам на рис. 18.8 для горизонтального сечения mn , находящегося на некотором заданном расстоянии x_0 от вершины, построены эпюры напряжений σ_x , σ_y , τ_{yx} для клина с углом раствора $2\alpha = 60^\circ$.

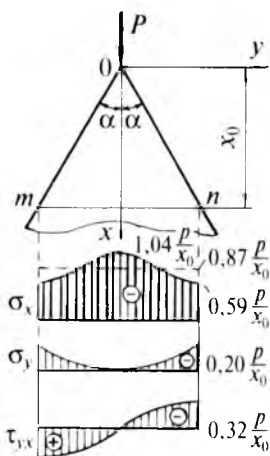


Рис. 18.8

Если сжатый клин рассматривать с позиций сопротивления материалов как стержень переменного сечения, то для сечения mn , площадь которого равна $F = 2x_0 \operatorname{tg} \alpha$, получим

$$\sigma_x = \frac{P}{F} = \frac{p}{2x_0 \operatorname{tg} \alpha} = -\frac{0,866 p}{x_0};$$

$$\sigma_y = \tau_{xy} = 0.$$

В этом случае напряжения σ_x равномерно распределены по сечению (соответствующая эпюра σ_x изображена на рис. 18.8 пунктиром). При угле $\alpha = 30^\circ$ эти напряжения по абсолютной величине на 17% меньше, чем наибольшие напряжения, полученные по точным формулам теории упругости (18.27). С увеличением α это расхождение возрастает. Например, при $\alpha = 45^\circ$ оно становится равным 36%. Напряжения σ_y и τ_{yx} , которые не учитываются в сопротивлении материалов, имеют одинаковый порядок с напряжениями σ_x .

Из приведенного анализа можно сделать вывод, что, в случае, когда площадь поперечного сечения стержня существенно изменяется по его длине, расчет по формулам сопротивления материалов может привести к значительной погрешности в определении напряжений.

Изгиб клина (рис. 18.9). В этом случае в формуле (18.25) следует положить $\beta = 90^\circ$. В результате получим

$$\sigma_r = -\frac{2p}{2\alpha - \sin 2\alpha} \cdot \frac{\sin \theta}{r}; \quad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0. \quad (18.28)$$

Формулы для напряжений в декартовой системе координат выводятся аналогично формулам (18.27) и имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_r \cos^2 \theta = -\frac{2p}{2\alpha - \sin 2\alpha} \cdot \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}; \\ \sigma_y &= \sigma_r \sin^2 \theta = -\frac{2p}{2\alpha - \sin 2\alpha} \cdot \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^2}; \\ \tau_{xy} &= \sigma_r \sin \theta \cos \theta = -\frac{2p}{2\alpha - \sin 2\alpha} \cdot \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (18.29)$$

Соответствующие этим формулам эпюры напряжений для сечения mn , находящегося на расстоянии x_0 от вершины клина с углом раствора $2\alpha = 60^\circ$, приведены на рис. 18.9.

Приведем решение этой задачи по формулам сопротивления материалов, рассматривая клин как балку с переменной высотой сечения $h = 2x \operatorname{tg} \alpha$ и шириной $b = 1$. Площадь сечения, момент инерции и статический момент отсеченной площади соответственно равны

$$F = 2x \operatorname{tg} \alpha; \quad J_z = \frac{(2x \operatorname{tg} \alpha)^3}{12};$$

$$S_z^{\text{отс}} = \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) = \frac{1}{2} (x^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - y^2).$$

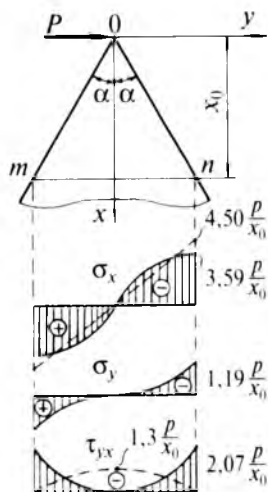


Рис. 18.9

С учетом этого получим следующие формулы для напряжений:

$$\sigma_x = \frac{M}{J_x} y = \frac{-pxy \cdot 3}{2x^3 \operatorname{tg}^3 \alpha} = -\frac{3py}{2x^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}; \quad \sigma_y = 0;$$

$$\tau_{xy} = \frac{QS_z^{\text{отс}}}{J_z b} = \frac{3p(x^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - y^2)}{4x^3 \operatorname{tg}^3 \alpha}.$$

Соответствующие этим формулам эпюры напряжений для сечения mn при $\alpha = 30^\circ$ изображены на рис. 18.9 пунктирными линиями.

Как видно из сравнения эпюр, решение по формулам сопротивления материалов как в количественном, так и в качественном отношении существенно отличается от решения теории упругости. С увеличением угла α это отличие возрастает.

18.3. Действие сосредоточенной силы на полуплоскость (задача Фламана)

Под упругой полуплоскостью понимается пластина единичной толщины, неограниченно простирающаяся по одну сторону от горизонтальной границы (рис. 18.10, a). От действия нагрузки p , перпендикулярной к границе полуплоскости и равномерно распределенной по толщине, в полуплоскости возникает обобщенное

плоское напряженное состояние (см. § 17.2). Аналогично под упругим полупространством понимается часть пространства, неограниченно простирающегося по одну сторону от горизонтальной плоскости (рис. 18.10, б).

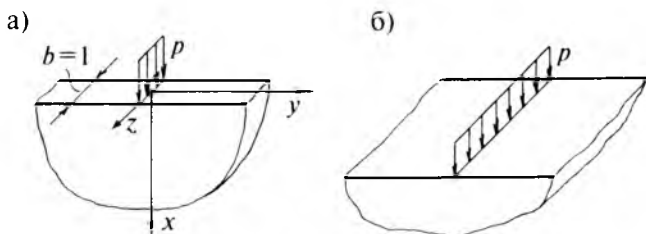


Рис. 18.10

При действии на границе полупространства вертикальной нагрузки p , равномерно распределенной вдоль прямой линии, в полупространстве возникает плоское деформированное состояние (см. § 17.1). В условиях, близких к этому, находится основание под ленточным фундаментом.

Как в полуплоскости, так и в полупространстве при указанном характере нагружения напряжения σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$ определяются одинаково. Различие будет в том, что в полупространстве возникают напряжения σ_z , которые могут быть найдены по формуле (17.6):

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta).$$

Решение рассматриваемой задачи можно получить как частный случай задачи о сжатии клина, положив в формулах (18.26), (18.27) $\alpha = 90^\circ$. В результате для напряжений σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$ получим

$$\sigma_r = -\frac{2p}{\pi} \cdot \frac{\cos \theta}{r}; \quad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0. \quad (18.30)$$

Чтобы наглядно представить картину распределения напряжений в полуплоскости, французский ученый Буссинеск предложил воспользоваться следующим построением (рис. 18.11). Через точку O приложения силы P проведем окружность произвольного диаметра D , касающуюся границы полуплоскости. В произвольной точке $A(r, \theta)$ окружности покажем главную площадку, на которой действует напряжение σ_r . Выразим переменную r через диаметр D : $r = D \cos \theta$ и, подставив ее в (18.30), получим

$$\sigma_r = -\frac{2p}{\pi D}. \quad (18.31)$$

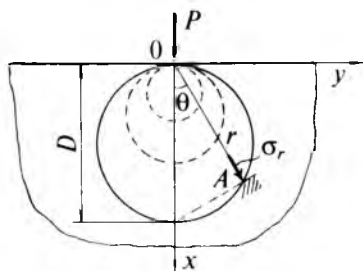


Рис. 18.11

Отсюда следует, что во всех точках окружности напряжения σ_r одинаковы.

Множество окружностей, касающихся границы полуплоскости в точке приложения силы P , называется *кругами Буссинеска*.

При расчете фундаментов необходимо знать распределение напряжений в грунтовом основании по горизонтальным и вертикальным плоскостям. Выражения для этих напряжений получим, положив в формулах (18.27) $\alpha = 90^\circ$:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2px^3}{\pi(x^2 + y^2)^2}; & \sigma_y &= -\frac{2pxy^2}{\pi(x^2 + y^2)^2}; \\ \tau_{xy} &= -\frac{2px^2y}{\pi(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (18.32)$$

По формулам (18.30) и (18.32) могут быть найдены напряжения в произвольной точке полуплоскости, за исключением точки приложения силы, в которой напряжения обращаются в бесконечность.

На рис. 18.12, а, б показаны эпюры σ_x и τ_{yx} для двух горизонтальных сечений $x = x_0$ и $x = 2x_0$, а на рис. 18.12, в — эпюры σ_y для двух вертикальных сечений $y = y_0$ и $y = 2y_0$.

Нормальные напряжения σ_x имеют наибольшую величину по линии действия силы P и убывают с удалением от этой линии. Касательные напряжения τ_{xy} на оси Ox равны нулю. На некотором расстоянии от оси Ox они достигают наибольшей величины, а затем убывают. Характер изменения нормальных напряжений σ_y в вертикальном направлении аналогичен характеру изменения напряжений τ_{xy} в горизонтальном направлении.

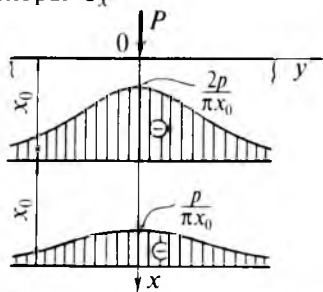
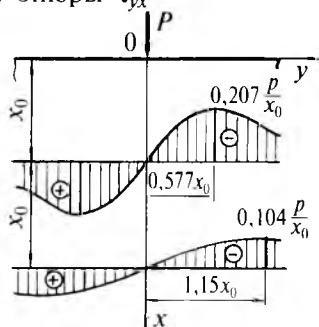
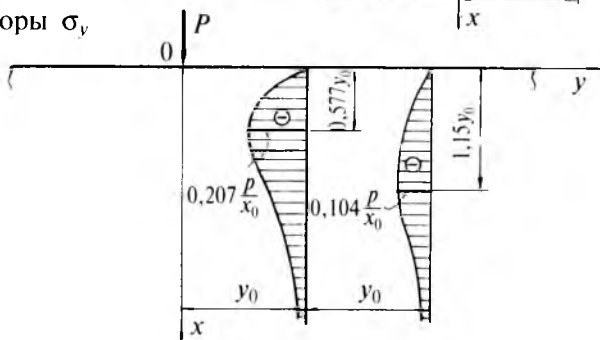
а) эпюры σ_x б) эпюры τ_{yx} в) эпюры σ_y 

Рис. 18.12

Полученное решение можно распространить на случай нагружения полуплоскости распределенной нагрузкой $q(y)$, приложенной на участке $a \leq y \leq b$ (рис. 18.13). Для этого по формулам (18.32) определим напряжения $d\sigma_x$, $d\sigma_y$, $d\tau_{xy}$ в произвольной точке $M(x, y)$ полуплоскости от действия элементарной силы $dp = q(t)dt$, где t — вспомогательная переменная, изменяющаяся в пределах $a \leq t \leq b$. Учитывая, что точка M находится на расстоянии $y - t$ от линии действия силы dp , по первой из формул (18.32) получим

$$d\sigma_x = -\frac{2qdt x^3}{\pi[x^2 + (y-t)^2]^2}.$$

Проинтегрировав это выражение по переменной t в пределах от $t = a$ до $t = b$, получим напряжение σ_x от действия распределенной нагрузки $q(y)$:

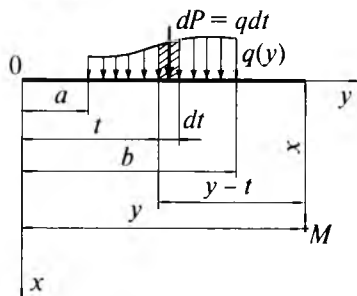


Рис. 18.13

$$\sigma_x = -\frac{2x^3}{\pi} \int_a^b \frac{q(t)dt}{[x^2 + (y-t)^2]^2}.$$

Выражения для σ_y и τ_{xy} имеют аналогичный вид. В случае равномерно распределенной нагрузки $q = \text{const}$ интегралы*, входящие в формулы для σ_x , σ_y , τ_{xy} , легко вычисляются. В результате получим следующие окончательные формулы для напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{q}{\pi} \left[\frac{x(y-a)}{x^2 + (y-a)^2} - \frac{x(y-b)}{x^2 + (y-b)^2} + \arctg \frac{y-a}{x} \arctg \frac{y-b}{x} \right]; \\ \sigma_y &= -\frac{q}{\pi} \left[-\frac{x(y-a)}{x^2 + (y-a)^2} + \frac{x(y-b)}{x^2 + (y-b)^2} + \arctg \frac{y-a}{x} \arctg \frac{y-b}{x} \right]; \\ \tau_{xy} &= -\frac{q}{\pi} \left[\frac{(y-a)^2}{x^2 + (y-a)^2} - \frac{(y-b)^2}{x^2 + (y-b)^2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (18.33)$$

18.4. Полярно-симметричное распределение напряжений

Полярно-симметричным называется такое распределение напряжений в теле, при котором напряжения не зависят от полярного угла θ . Такое напряженное состояние возникает, например, в толстостенном цилиндре постоянного сечения, нагруженном внутренним и внешним давлениями p_1 и p_2 или скручивающими моментами, приложенными к торцам.

Исключая из рассмотрения кручение, следует положить $\tau_{r\theta} = 0$. В этом случае функция напряжений ϕ также не зависит от полярного угла. Бигармоническое уравнение (18.20) и формулы для напряжений (18.21) принимают следующий вид:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2 \phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d\phi}{dr} \right) = 0; \quad (18.34)$$

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \cdot \frac{d\phi}{dr}; \quad \sigma_\theta = \frac{d^2 \phi}{dr^2}; \quad \tau_{r\theta} = 0. \quad (18.35)$$

* См.: Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. М.: Наука, 1980.

Уравнение (18.34) можно записать в следующем виде:

$$\frac{d^4\varphi}{dr^4} + \frac{2}{r} \cdot \frac{d^3\varphi}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \cdot \frac{d\varphi}{dr} = 0. \quad (18.36)$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами называется уравнением типа Эйлера. С помощью замены переменной

$$r = e^t; \quad t = \ln r \quad (18.37)$$

его можно свести к уравнению с постоянными коэффициентами. Для этого выразим производные функции φ по r через производные по переменной t :

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dr} &= \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{dt}{dr} = \frac{1}{r} \cdot \frac{d\varphi}{dt}; & \frac{d^2\varphi}{dr^2} &= \frac{1}{r^2} \left(-\frac{d\varphi}{dt} + \frac{d^2\varphi}{dt^2} \right); \\ \frac{d^3\varphi}{dr^3} &= \frac{1}{r^3} \left(2\frac{d\varphi}{dt} - 3\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{d^3\varphi}{dt^3} \right); \\ \frac{d^4\varphi}{dr^4} &= \frac{1}{r^4} \left(-6\frac{d\varphi}{dt} + 11\frac{d^2\varphi}{dt^2} - 6\frac{d^3\varphi}{dt^3} + \frac{d^4\varphi}{dt^4} \right). \end{aligned}$$

Подставив эти выражения в (18.36), получим обыкновенное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^4\varphi}{dt^4} - 4\frac{d^3\varphi}{dt^3} + 4\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0. \quad (18.38)$$

Решение этого уравнения ищем в виде

$$\varphi = e^{\lambda t}. \quad (18.39)$$

Подставив (18.39) в (18.38), получим характеристическое уравнение

$$\lambda^2(\lambda - 2)^2 = 0, \quad (18.40)$$

которое имеет корни

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0; \quad \lambda_3 = \lambda_4 = 2.$$

В соответствии с этим общее решение уравнения (18.38) имеет вид

$$\varphi = C_1 + C_2 t + C_3 e^{2t} + C_4 t e^{2t}.$$

Возвращаясь к переменной r с помощью (18.37), получим окончательное выражение для функции напряжений:

$$\varphi = C_1 + C_2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 r^2 \ln r. \quad (18.41)$$

Заметим, что решение (18.41) уравнения (18.36) можно получить непосредственно, не преобразовывая его к уравнению с постоянными коэффициентами.

ными коэффициентами. Для этого надо в выражении (18.39) вернуться к переменной r :

$$\varphi = e^{\lambda t} = e^{\lambda \ln r} = r^{\lambda}.$$

Подставив это выражение в (18.36), получим характеристическое уравнение (18.40). Учитывая, что в этом случае частные решения уравнения (18.36), соответствующие кратным корням характеристического уравнения, отличаются множителем $\ln r$, получим общее решение в виде (18.41).

Подставив (18.41) в (18.35), получим формулы для напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{C_2}{r^2} + C_4(1 + 2 \ln r) + 2C_3; \\ \sigma_\theta &= -\frac{C_2}{r^2} + C_4(3 + 2 \ln r) + 2C_3; \\ \tau_{r\theta} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (18.42)$$

18.5. Толстостенный цилиндр под действием равномерного внутреннего и внешнего давлений (задача Ляме)

Вначале рассмотрим более простую задачу: сплошной диск или сплошной цилиндр со свободными торцами, нагруженный на боковой поверхности равномерным давлением p (рис. 18.14).

В формулах (18.42) необходимо положить $C_2 = C_4 = 0$, так как в противном случае в центре диска при $r = 0$ напряжения σ_r и σ_θ будут равны бесконечности. Произвольная постоянная C_3 определяется из граничного условия на боковой поверхности:

$$r = a, \quad \sigma_r = 2C_3 = -p.$$

Тогда получим

$$\sigma_r = \sigma_\theta = -p, \quad (18.43)$$

то есть напряжения во всех точках диска одинаковы.

Определим радиальное перемещение $u(r)$. Учитывая осевую симметрию, по формулам (18.4) и (18.5) получим

$$\epsilon_\theta = \frac{u}{r} = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu \sigma_r) = -\frac{1-\nu}{E} p.$$

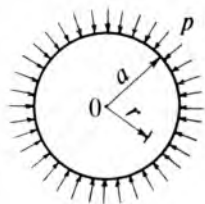


Рис. 18.14

Отсюда найдем

$$u(r) = -\frac{(1-\nu)pr}{E}. \quad (18.44)$$

Таким образом, радиальное перемещение изменяется в зависимости от r по линейному закону.

Рассмотрим толстостенный цилиндр со свободными торцами, находящийся под действием равномерного внутреннего p_1 и внешнего p_2 давлений (рис. 18.15).

В формулы (18.42) для напряжений входят три произвольные постоянные, в то время как для их определения имеется только два граничных условия:

$$\left. \begin{aligned} r = a, \quad \sigma_r &= -p_1; \\ r = b, \quad \sigma_r &= -p_2. \end{aligned} \right\} \quad (18.45)$$

Известно*, что при решении задачи в напряжениях, когда поперечное сечение тела является многосвязной областью, граничных условий оказывается недостаточно для определения произвольных постоянных. К ним необходимо добавить условия однозначности перемещений. Поперечное сечение замкнутого цилиндра является двухсвязной областью. Для составления условия однозначности перемещений подставим в формулы закона Гука для плоского напряженного состояния (18.5) геометрические соотношения (18.4). Тогда получим два уравнения

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta); \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r).$$

Подставив в эти равенства напряжения из (18.42) и проинтегрировав первое из них, найдем

$$u = -C_2 \frac{1+\nu}{E} \cdot \frac{1}{r} + 2C_3 \frac{1-\nu}{E} r + \frac{C_4}{E} [(1-3\nu)r + 2(1-\nu)(r \ln r - r)] + C_5.$$

С другой стороны, из второго равенства получим

$$u = -C_2 \frac{1+\nu}{E} \cdot \frac{1}{r} + 2C_3 \frac{1-\nu}{E} r + \frac{C_4}{E} [(3-\nu)r + 2(1-\nu)r \ln r].$$

* См.: Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Указ. соч.

Из сравнения этих двух выражений видно, что они совпадут лишь при условии $C_4 = C_5 = 0$. С учетом этого будем иметь

$$u = 2C_3 \frac{1-\nu}{E} r - C_2 \frac{1+\nu}{E} \cdot \frac{1}{r}; \quad \sigma_r = \frac{C_2}{r^2} + 2C_3; \quad \sigma_\theta = -\frac{C_2}{r^2} + 2C_3.$$

Удовлетворив граничным условиям (18.45), найдем произвольные постоянные:

$$C_2 = \frac{(p_2 - p_1)a^2b^2}{b^2 - a^2}; \quad C_3 = \frac{p_1a^2 - p_2b^2}{2(b^2 - a^2)}.$$

С учетом этого получим окончательные выражения для напряжений и радиального перемещения в виде

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{(p_2 - p_1)k^2}{1 - k^2} \cdot \frac{1}{\rho^2} + \frac{p_1k^2 - p_2}{1 - k^2}; \\ \sigma_\theta &= -\frac{(p_2 - p_1)k^2}{1 - k^2} \cdot \frac{1}{\rho^2} + \frac{p_1k^2 - p_2}{1 - k^2}; \\ u &= \frac{(1 - \nu)(p_1k^2 - p_2)b}{E(1 - k^2)} \rho - \frac{(1 + \nu)(p_2 - p_1)ak}{E(1 - k^2)} \cdot \frac{1}{\rho}, \end{aligned} \right\} \quad (18.46)$$

где

$$\rho = \frac{r}{b}, \quad a \leq r \leq b, \quad k = \frac{a}{b}. \quad (18.47)$$

Складывая почленно формулы для напряжений, получим

$$\sigma_r + \sigma_\theta = 2 \frac{p_1k^2 - p_2}{1 - k^2} = \text{const}. \quad (18.48)$$

Таким образом, сумма нормальных напряжений во всех точках цилиндра одинакова. В этом случае (см. § 17.2 и формулу (17.16)) при отсутствии нагрузок на свободных торцах осевое напряжение $\sigma_z = 0$ и цилиндр находится в условиях плоского напряженного состояния. При этом осевая деформация ε_z и осевые перемещения $w(z)$ могут быть определены по формуле

$$\varepsilon_z = \frac{dw}{dz} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_r + \sigma_\theta). \quad (18.49)$$

Если торцевые сечения цилиндра закреплены от продольных перемещений, то $\varepsilon_z = 0$ и цилиндр находится в условиях плоской деформации (см. § 17.1). При этом для напряжений σ_r и σ_θ остаются справедливыми формулы (18.46), а напряжение σ_z определяется по формуле (17.6):

$$\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta). \quad (18.50)$$

Радиальное перемещение u в этом случае может быть найдено по формуле (18.46), если в ней заменить E и ν на приведенные постоянные упругости E_1 и ν_1 , определяемые по формулам (17.8).

В частном случае, когда цилиндр нагружен только внутренним давлением, то есть $p_2 = 0$, формулы (18.46) для напряжений принимают вид

$$\sigma_r = \frac{p_1 k^2}{1 - k^2} \left(1 - \frac{1}{\rho^2} \right); \quad \sigma_\theta = \frac{p_1 k^2}{1 - k^2} \left(1 + \frac{1}{\rho^2} \right). \quad (18.51)$$

В точках внутренней поверхности при $\rho = \frac{a}{b} = k$

$$\sigma_r = -p_1; \quad \sigma_\theta = p_1 \frac{1 + k^2}{1 - k^2}.$$

В точках внешней поверхности при $\rho = 1$

$$\sigma_r = 0; \quad \sigma_\theta = \frac{2 p_1 k^2}{1 - k^2}.$$

В точках по середине толщины стенки цилиндра при $\rho = \frac{1 + k}{2}$

$$\sigma_r = p_1 \frac{k^2}{1 - k^2} \cdot \frac{(1 + k)^2 - 4}{(1 + k)^2}; \quad \sigma_\theta = p_1 \frac{k^2}{1 - k^2} \cdot \frac{(1 + k)^2 + 4}{(1 + k)^2}.$$

На рис. 18.16 изображены эпюры распределения напряжений σ_r и σ_θ и радиальных перемещений u по толщине стенки цилиндра для случая $k = a/b = 0,5$ и $\nu = 0,3$.

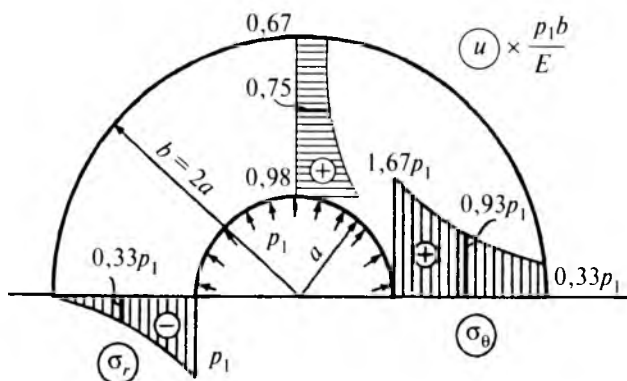


Рис. 18.16

Решение плоской полярно-симметричной задачи может быть также получено в перемещениях. Для этого нужно в формулах закона Гука (18.6) выразить с помощью равенств (18.4) деформации

через радиальное перемещение $u(r)$ и подставить полученные таким образом выражения для напряжений в первое уравнение равновесия (18.3), которое при $R = 0$ принимает вид

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0. \quad (18.52)$$

В результате получим следующее дифференциальное уравнение относительно радиального перемещения

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0. \quad (18.53)$$

Общее решение этого уравнения и выражения для деформаций и напряжений имеют вид

$$\left. \begin{aligned} u &= Ar + \frac{B}{r}; & \epsilon_r = \frac{du}{dr} &= A - \frac{B}{r^2}; & \epsilon_\theta = \frac{u}{r} &= A + \frac{B}{r^2}; \\ \sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[(1+\nu)A - (1-\nu)\frac{B}{r^2} \right]; & \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[(1+\nu)A + (1-\nu)\frac{B}{r^2} \right]; \end{aligned} \right\} \quad (18.54)$$

Произвольные постоянные A и B определяются из граничных условий (18.45), при этом для напряжений и перемещения получим те же формулы (18.46).

Перемещения в окружном направлении в силу полярной симметрии невозможны: $v = 0$.

В точках внутренней и внешней поверхностей могут быть заданы перемещения (рис. 18.17). В этом случае произвольные постоянные определяются из граничных условий

$$r = a, \quad u = u_1; \quad r = b, \quad u = u_2.$$

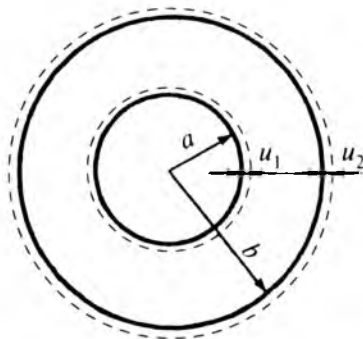


Рис. 18.17

В результате получим следующие формулы для напряжений и перемещения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\nu} \cdot \frac{u_2 - u_1 k}{(1-k^2)b} + \frac{E}{1+\nu} \cdot \frac{(u_2 k - u_1)k}{(1-k^2)b} \cdot \frac{1}{\rho^2}; \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\nu} \cdot \frac{u_2 - u_1 k}{(1-k^2)b} - \frac{E}{1+\nu} \cdot \frac{(u_2 k - u_1)k}{(1-k^2)b} \cdot \frac{1}{\rho^2}; \\ u &= \frac{u_2 - u_1 k}{1-k^2} \cdot \rho - \frac{u_2 k - u_1}{1-k^2} \cdot \frac{k}{\rho}. \end{aligned} \right\} \quad (18.55)$$

В качестве примера рассмотрим толстостенный цилиндр, внешняя поверхность которого имеет закрепление, препятствующее перемещению в радиальном направлении (рис. 18.18). На внутреннем контуре задано $u = u_1$, на внешнем контуре $u = u_2 = 0$. В этом случае

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{Eu_1 k}{(1-k^2)b} \cdot \left(\frac{1}{1-\nu} + \frac{1}{1+\nu} \cdot \frac{1}{\rho^2} \right); \\ \sigma_\theta &= -\frac{Eu_1 k}{(1-k^2)b} \cdot \left(\frac{1}{1-\nu} - \frac{1}{1+\nu} \cdot \frac{1}{\rho^2} \right); \\ u &= -\frac{u_1 k}{1-k^2} \cdot \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right). \end{aligned} \right\} \quad (18.56)$$

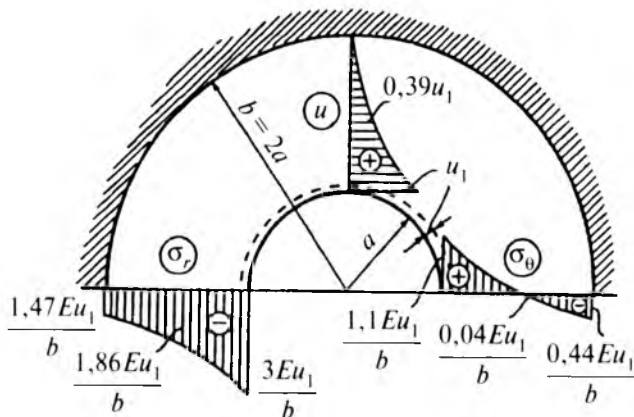


Рис. 18.18

На рис. 18.18 изображены эпюры распределения напряжений и радиального перемещения по толщине стенки цилиндра для случая $k = 0,5$, $\nu = 0,3$.

На рис. 18.19 рассмотрен случай, когда на внутренней поверхности заданы перемещения u_1 , а внешняя поверхность нагружена равномерным давлением p_2 . Используя граничные условия

$$r = a, \quad u = u_1; \quad r = b, \quad \sigma_r = -p_2,$$

получим

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{u_1 k E / b - (1 + \nu) p_2}{(1 - \nu) k^2 + (1 + \nu)} - \frac{u_1 k E / b + (1 - \nu) p_2 k^2}{(1 - \nu) k^2 + (1 + \nu)} \cdot \frac{1}{\rho^2}; \\ \sigma_\theta &= \frac{u_1 k E / b - (1 + \nu) p_2}{(1 - \nu) k^2 + (1 + \nu)} + \frac{u_1 k E / b + (1 - \nu) p_2 k^2}{(1 - \nu) k^2 + (1 + \nu)} \cdot \frac{1}{\rho^2}; \\ u &= \frac{(1 - \nu) u_1 k - (1 - \nu^2) p_2 b / E}{(1 - \nu) k^2 + (1 + \nu)} \cdot \rho + \frac{(1 + \nu) u_1 k + (1 - \nu^2) p_2 a k / E}{(1 - \nu) k^2 + (1 + \nu)} \cdot \frac{1}{\rho}. \end{aligned} \right\} \quad (18.57)$$

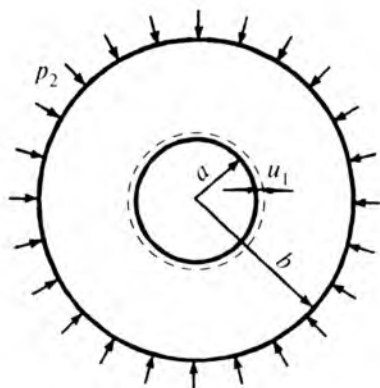


Рис. 18.19

В качестве примера рассмотрим цилиндр, на внутренней поверхности которого радиальные перемещения u равны нулю (рис. 18.20). Полагая в формулах (18.57) $u_1 = 0$, получим

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{-p_2}{(1 - \nu) k^2 + (1 + \nu)} \left[(1 + \nu) + (1 - \nu) \cdot \frac{k^2}{\rho^2} \right]; \\ \sigma_\theta &= \frac{-p_2}{(1 - \nu) k^2 + (1 + \nu)} \left[(1 + \nu) - (1 - \nu) \cdot \frac{k^2}{\rho^2} \right]; \\ u &= \frac{(1 - \nu^2) p_2}{[(1 - \nu) k^2 + (1 + \nu)] E} \left(-b \rho + a \cdot \frac{k}{\rho} \right). \end{aligned} \right\} \quad (18.58)$$

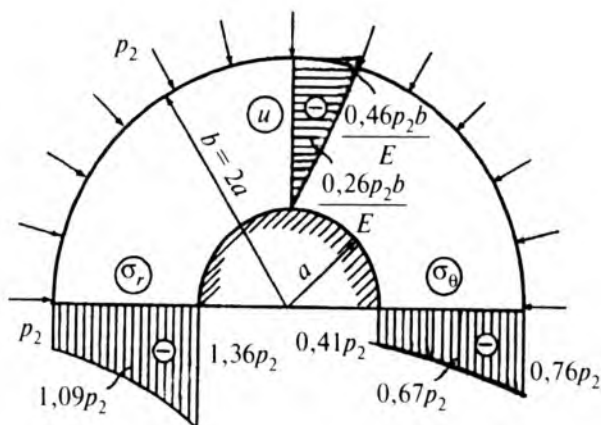


Рис. 18.20

На рис. 18.20 приведены эпюры распределения напряжений и радиального перемещения по толщине стенки цилиндра для случая $k = 0,5$, $\nu = 0,3$.



**18.6. Чистый изгиб кривого бруса
(задача Х.С. Головина)**



**18.7. Изгиб кривого бруса силой,
приложенной на конце**



**18.8. Растяжение пластины с круговым
отверстием (задача Кирша)**



ГЛАВА 19

ОСНОВЫ ТЕРМОУПРУГОСТИ

- 19.1. Уравнение теплопроводности**
- 19.2. Основные уравнения термоупругости**
- 19.3. Плоская задача термоупругости**
- 19.4. Термоупругие напряжения в полом цилиндре
при изменении температуры по радиусу**

ГЛАВА 20

ИЗГИБ И УСТОЙЧИВОСТЬ ТОНКИХ ПЛАСТИН

20.1. Основные понятия и гипотезы

К категории пластин относятся конструктивные элементы, у которых один размер (толщина) значительно меньше двух других характерных размеров (размеров в плане). Последние, в свою очередь, имеют один порядок. Например, на рис. 20.1 показаны наиболее часто встречающиеся в инженерной практике прямоугольная и круглая пластины.

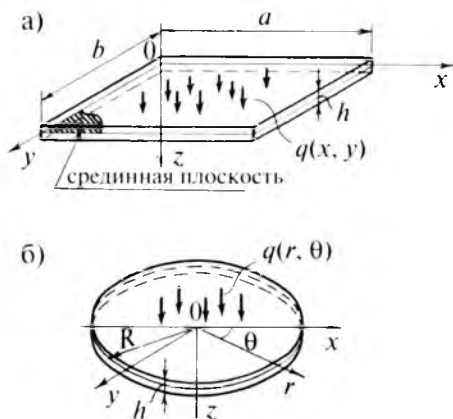


Рис. 20.1

При расчете пластин вводятся понятия о срединной плоскости и линейном элементе. Плоскость, которая делит пластину пополам по толщине, называется *срединной плоскостью*.

Отрезок прямой, соединяющий внешние поверхности пластины перпендикулярно к срединной плоскости, называется *линейным элементом*.

Длина линейного элемента равна толщине пластины h . Линия пересечения срединной плоскости с боковой поверхностью пластины называется *контуром*.

Пластина может быть соответствующим образом закреплена по контуру, а также может иметь промежуточные опоры. Часть контура пластины может быть свободна от закреплений.

В срединной плоскости обычно располагаются координатные оси, например оси Ox и Oy для прямоугольной пластины (рис. 20.1, а). Ось Oz направляется перпендикулярно к срединной плоскости, чаще всего вниз.

Пластины могут быть постоянной или переменной толщины. Пластины, являющиеся конструктивными элементами строительных конструкций, как правило, имеют постоянную толщину.

Изгиб пластины вызывается действием поперечных нагрузок, перпендикулярных к срединной плоскости. Например, на рис. 20.1, а показана поперечная нагрузка $q(x, y)$, распределенная по верхней поверхности пластины. При изгибе пластина искривляется и ее срединная плоскость превращается в изогнутую поверхность. Точки срединной плоскости получают при изгибе поперечные перемещения (прогибы) w .

В зависимости от соотношения между основными размерами пластины и ее прогибом пластину можно отнести к различным категориям.

К категории *толстых плит* относятся пластины, у которых толщина составляет $\frac{1}{3} \div \frac{1}{5}$ от минимального размера в плане. Толстые плиты встречаются в инженерной практике в качестве массивных элементов фундаментов зданий, гидротехнических сооружений, опорных конструкций станков и т.п. Расчет толстых плит производится, по существу, как трехмерных тел на основании уравнений пространственной задачи теории упругости.

К категории *гибких пластин* относятся пластины, у которых прогибы соизмеримы с толщиной ($w > h/4$). Такие пластины применяются в приборостроении, авиастроении (элементы обшивки самолетов и ракет) и т.п. Расчет гибких пластин производится с помощью уравнений, учитывающих геометрическую нелинейность задачи.

Пластины, используемые в строительных конструкциях, чаще всего можно отнести к категории *тонких пластин*. Это железобетонные плиты и панели жилых и промышленных зданий, металлические настилы, днища резервуаров и т.п. Для тонких пластин обычно принимаются следующие соотношения:

$$\frac{h}{a} = \frac{1}{5} \div \frac{1}{80}; \quad w \leq \frac{h}{4},$$

где a — наименьший размер пластины в плане.

Для расчета тонких пластин разработана так называемая техническая теория изгиба, в основу которой положены следующие гипотезы.

1. *Линейный элемент при изгибе остается прямым и перпендикулярным к изогнутой срединной поверхности пластины.* На рис. 20.2, а, б показано положение линейного элемента ab до и после деформации. При изгибе он поворачивается в плоскостях Oxz и Oyz на некоторые углы φ_x и φ_y по отношению к своему первоначальному положению. Поскольку углы между линейным элементом и касательными к изогнутой срединной поверхности пластины остаются при изгибе прямыми, сдвиги в поперечных плоскостях Oxz и Oyz полагаются равными нулю:

$$\gamma_{xz} = 0; \quad \gamma_{yz} = 0. \quad (20.1)$$

Рассмотренная гипотеза является по существу обобщением известной в сопротивлении материалов гипотезы плоских сечений.

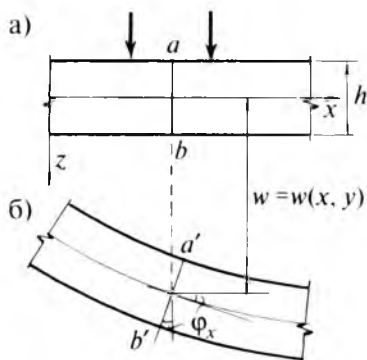


Рис. 20.2

2. *Длина линейного элемента при изгибе не изменяется.* В соответствии с этой гипотезой можно принять

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (20.2)$$

3. *Взаимное давление между продольными слоями пластины отсутствует.* При этом напряжение σ_z , характеризующее это взаимное давление, принимается равным нулю: $\sigma_z = 0$. Аналогичная гипотеза вводится в теории изгиба балок.

4. *Перемещения точек срединной плоскости в направлении осей Ox , Oy (продольные перемещения) полагаются малыми величинами в*

сравнении с прогибом и в силу этого не учитываются. Таким образом, принимается, что

$$u(x, y, 0) = 0; \quad v(x, y, 0) = 0. \quad (20.3)$$

При этом в срединной плоскости отсутствуют деформации растяжения (сжатия) и сдвига, то есть она является нейтральной.

Расчет пластин на основе рассмотренных выше гипотез является наиболее простым и позволяет получать доступные для инженерной практики решения. Эти решения и будут рассмотрены в дальнейшем. Отметим, что теория изгиба и устойчивости пластин составляет большой раздел прикладной теории упругости и строительной механики и ей посвящена обширная научная и учебная литература*.

20.2. Перемещения и деформации в пластине при изгибе

Введенные гипотезы позволяют выразить перемещения u и v (рис. 20.3) через прогиб пластины. В соответствии с формулой (20.2) прогиб не зависит от координаты z , то есть $w = w(x, y)$. Подставив в формулы (20.1) соотношения Коши, получим

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0;$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$



Рис. 20.3

* См., например: Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1966.

Проинтегрировав эти равенства по переменной z , находим

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} + f_1(x, y);$$

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y} + f_2(x, y),$$

где $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ — произвольные функции, появляющиеся при интегрировании дифференциальных уравнений в частных производных. Для определения этих функций используем условия (20.3)

$$u(x, y, 0) = f_1(x, y) = 0; \quad v(x, y, 0) = f_2(x, y) = 0.$$

С учетом этих условий формулы для перемещений u и v принимают следующий вид:

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}; \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (20.4)$$

Определим линейные и угловую деформации:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (20.5)$$

20.3. Напряжения в пластинах при изгибе.

Дифференциальное уравнение изгиба пластины

Для определения напряжений в пластинах используем формулы обобщенного закона Гука в обратной форме, в которых положим $\sigma_z = 0$. При этом с учетом формул (20.5) получим

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y) = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x) = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \\ \tau_{xy} &= G \gamma_{xy} = -\frac{Ez}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (20.6)$$

Как видно из формул (20.6), напряжения σ_x , σ_y и τ_{xy} изменяются по толщине пластины по линейному закону и равны нулю в точках на уровне срединной плоскости. Характер изменения этих напряжений показан на рис. 20.4, а, б.

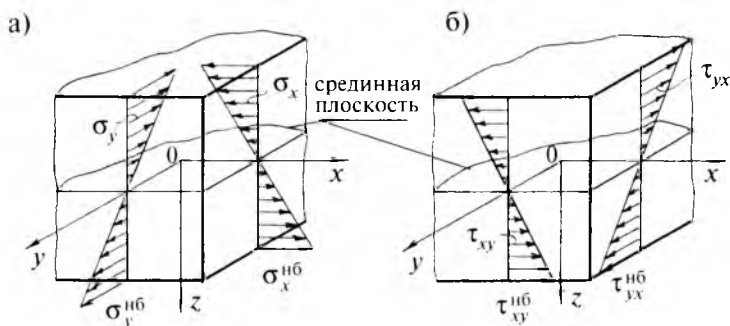


Рис. 20.4

Касательные напряжения τ_{xz} и τ_{yz} в соответствии с формулами (20.1) должны быть равны нулю. Однако в общем случае нагружения пластины это противоречит уравнению равновесия $\sum Z = 0$, так как поперечная нагрузка может оказаться неуравновешенной. Для определения касательных напряжений τ_{xz} и τ_{yz} можно использовать первое и второе дифференциальные уравнения равновесия (16.1) без учета объемных сил. На основании первого уравнения запишем

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}.$$

Подставив в это уравнение выражения (20.6) для напряжений σ_x и τ_{xy} , получим

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \nu \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) + \frac{Ez}{1+\nu} \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}.$$

Упростив это равенство и произведя его интегрирование по переменной z , находим

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{Ez^2}{2(1-\nu^2)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w + f_3(x, y),$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — дифференциальный оператор Лапласа; $f_3(x, y)$ — произвольная функция, для определения которой используем условие отсутствия касательных (сдвигающих) нагрузок на внешних поверхностях пластины:

$$z = \pm \frac{h}{2}, \quad \tau_{xz} = 0.$$

Используя эти условия, получим

$$f_3(x, y) = -\frac{Eh^2}{8(1-\nu^2)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w.$$

Аналогичные выкладки можно произвести на основании второго дифференциального уравнения равновесия (16.1). В результате получим следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} = \tau_{zx} &= -\frac{E}{2(1-\nu^2)} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w; \\ \tau_{zy} = \tau_{yz} &= -\frac{E}{2(1-\nu^2)} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w. \end{aligned} \right\} \quad (20.7)$$

Касательные напряжения τ_{xz} и τ_{zy} изменяются по толщине пластины по закону квадратной параболы, так же как касательные напряжения в балках прямоугольного сечения при изгибе. Максимальных значений они достигают в точках срединной плоскости. Эпюры касательных напряжений τ_{xz} и τ_{zy} приведены на рис 20.5.

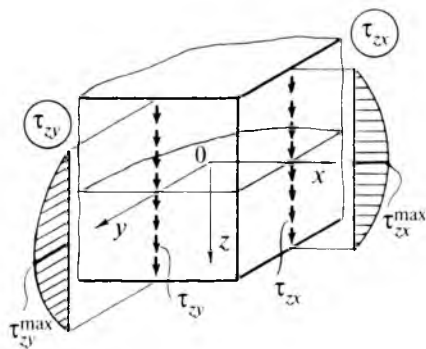


Рис. 20.5

В соответствии с гипотезой об отсутствии взаимного давления между продольными слоями пластины напряжение σ_z положено равным нулю, что позволило упростить закон Гука. Однако это противоречит граничным условиям на внешних поверхностях пластины при наличии распределенных поперечных нагрузок. Для определения σ_z используем третье дифференциальное уравнение

равновесия (16.1), в котором объемные силы положим равными нулю. На основании этого уравнения запишем

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}.$$

Подставим в это уравнение формулы (20.7) для касательных напряжений τ_{zx} и τ_{zy} и проинтегрируем его по переменной z :

$$\begin{aligned}\sigma_z &= -\int \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} \right) dz + f_4(x, y) = \\ &= -\frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \nabla^2 w \int \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) dz + f_4(x, y) = \\ &= \frac{Ez}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \nabla^2 \nabla^2 w + f_4(x, y).\end{aligned}$$

Здесь $f_4(x, y)$ — произвольная функция.

Считая, что пластина находится под действием распределенной поперечной нагрузки $q(x, y)$, приложенной к верхней поверхности пластины, а нижняя поверхность свободна от нагрузки, поставим следующие граничные условия:

$$\begin{aligned}z = -\frac{h}{2}, \quad \sigma_z &= -q(x, y); \\ z = \frac{h}{2}, \quad \sigma_z &= 0.\end{aligned}$$

Используя эти условия, получим

$$\left. \begin{aligned}-\frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)} \nabla^2 \nabla^2 w + f_4(x, y) &= -q; \\ \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)} \nabla^2 \nabla^2 w + f_4(x, y) &= 0.\end{aligned} \right\} \quad (20.8)$$

Сложив эти уравнения, находим

$$f_4(x, y) = -\frac{q(x, y)}{2}.$$

С учетом этого выражения формула для напряжения σ_z принимает следующий вид:

$$\sigma_z = -\frac{q}{2} \left[1 - 3\frac{z}{h} + 4\frac{z^3}{h^3} \right]. \quad (20.9)$$

Нетрудно видеть, что напряжение σ_z изменяется по толщине пластины по закону кубической параболы, так же как в балках прямоугольного сечения, находящихся под действием распределенной нагрузки. Характер эпюры σ_z показан на рис. 20.6.

Расчеты показывают, что в тонких пластинах напряжение σ_z значительно меньше напряжений σ_x и σ_y и им вполне обоснованно можно пренебречь.

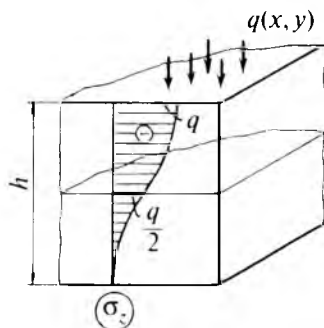


Рис. 20.6

Вычитая одно из другого уравнения системы (20.8), получим

$$D \nabla^2 \nabla^2 w = q(x, y), \quad (20.10)$$

где обозначено

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}. \quad (20.11)$$

Величина D называется *жесткостью* пластины при изгибе.

Запишем уравнение (20.10) в следующем виде:

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q(x, y). \quad (20.12)$$

Это дифференциальное уравнение является основным уравнением, описывающим изгиб тонких пластин. Оно часто называется уравнением Софи Жермен — Лагранжа.

20.4. Внутренние усилия в пластинах при изгибе. Дифференциальные соотношения

Приведем действующие в пластине напряжения к равнодействующим. Для этого выделим из пластины элемент с размерами dx , dy , h и покажем действующие по граням этого элемента напряже-

ния (рис. 20.7). На площадках $dF_x = dydz$ и $dF_y = dx dz$ эти напряжения создают бесконечно малые нормальные и касательные силы и моменты относительно осей Ox и Oy . Рассматривая силы и моменты, приходящиеся на единицу ширины сечения, и суммируя их по толщине пластины, получим

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz; & N_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz; & S_{xy} &= S_{yx} = S = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz; \\ M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz; & M_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz; & M_{xy} &= M_{yx} = H = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz; \\ Q_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{zx} dz; & Q_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{zy} dz. \end{aligned} \right\} \quad (20.13)$$

Подставляя сюда формулы для напряжений (20.6) и (20.7) и учитывая, что

$$\int_{-h/2}^{h/2} dz = h; \quad \int_{-h/2}^{h/2} z dz = 0; \quad \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = \frac{h^3}{12},$$

получим следующие выражения для внутренних усилий:

$$\left. \begin{aligned} N_x &= N_y = S = 0; \\ M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \\ M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \\ M_{xy} &= M_{yx} = H = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \\ Q_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w; \\ Q_y &= -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w. \end{aligned} \right\} \quad (20.14)$$

Внутренние усилия N_x , N_y и S действуют в срединной плоскости пластины и называются продольными и сдвигающей силами. При поперечном изгибе пластины при малых прогибах эти внутренние усилия равны нулю.

ность силы (например, $\text{кН} \cdot \text{м/м} = \text{кН}$), а поперечных сил — размерность распределенной линейной нагрузки (например, кН/м).

Между внутренними усилиями и распределенной поперечной нагрузкой $q(x, y)$ имеют место дифференциальные соотношения, для вывода которых надо рассмотреть уравнения равновесия бесконечно малого элемента срединной плоскости пластины (рис. 20.9, а). Выделенный элемент должен находиться в равновесии под действием внутренних усилий и распределенной нагрузки, причем внутренние усилия на противоположных сторонах элемента отличаются друг от друга соответствующими частными дифференциалами. На рис. 20.9, б, в, г внутренние усилия для удобства рассмотрения показаны раздельно. Поперечную нагрузку в пределах элемента в связи с его малостью можно считать равномерно распределенной.

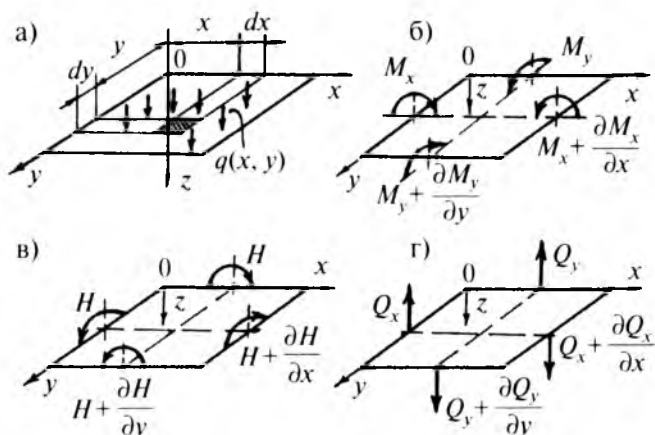


Рис. 20.9

Для выполнения условий равновесия выделенного элемента используем уравнения статики. Нетрудно видеть, что уравнения $\sum X = 0$, $\sum Y = 0$ и $\sum M_z = 0$ удовлетворяются тождественно. Составим уравнение статики $\sum Z = 0$:

$$-Q_x dy + \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy - Q_y dx + \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx + q dx dy = 0.$$

При составлении этого уравнения поперечные силы умножены на соответствующие длины сторон элемента dx и dy , а распределенная нагрузка — на его площадь $dx dy$. Аналогично можно составить уравнения статики $\sum M_x = 0$ и $\sum M_y = 0$.

Приведя подобные члены и сократив эти уравнения на $dx dy$, получим три дифференциальных соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} &= -q(x, y); \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} &= Q_x; \\ \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x} &= Q_y. \end{aligned} \right\} \quad (20.15)$$

Полученные уравнения можно считать обобщением дифференциальных соотношений при изгибе балки:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -q(x); \quad \frac{\partial M}{\partial x} = Q.$$

Подставив в первое уравнение системы (20.15) выражения для поперечных сил из (20.14), получим выведенное в § 20.3 дифференциальное уравнение изгиба пластины:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \nabla^2 w = -q(x, y);$$

$$D \nabla^2 \nabla^2 w = q(x, y).$$

20.5. Граничные условия на контуре пластины

Функция прогиба пластины $w(x, y)$ должна удовлетворять дифференциальному уравнению (20.12) и условиям опирания пластины на краях (по контуру), то есть граничным условиям. Эти условия, так же как и в теории изгиба стержней, могут быть кинематическими, статическими и смешанными. Приведем примеры постановки граничных условий для трех основных случаев опирания пластины.

Зашемленные края. На зашемленных краях пластины должны быть равны нулю прогиб и углы наклона касательной к изогнутой срединной поверхности, которые определяются по формулам

$$\left. \begin{aligned} \varphi_x &\approx \operatorname{tg} \varphi_x = \frac{\partial w}{\partial x}; \\ \varphi_y &\approx \operatorname{tg} \varphi_y = \frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (20.16)$$

Например, на зашемленных краях $x = 0$ и $y = 0$ (рис. 20.10) надо поставить следующие кинематические граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} x = 0, \quad w = 0; \quad \varphi_x = \frac{\partial w}{\partial x} = 0; \\ y = 0, \quad w = 0; \quad \varphi_y = \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (20.17)$$

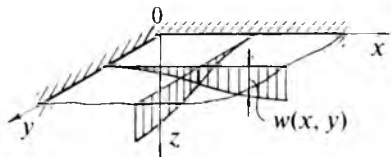


Рис. 20.10

Шарнирно опертые края. Шарнирное опирание препятствует прогибу пластины, но допускает свободный поворот опертого края в перпендикулярном к нему направлении. Рассмотрим, например, граничные условия на шарнирно опертых краях $x = 0$ и $y = 0$ (рис. 20.11). Вдоль края $x = 0$ действуют распределенные краевые моменты m_x . На рис. 20.11 и в дальнейшем используется принятое в литературе изображение шарнирно опертых краев (контуров) с помощью пунктирных линий.

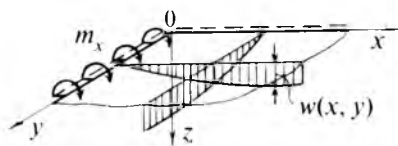


Рис. 20.11

Граничные условия на краях $x = 0$ и $y = 0$ ставятся относительно прогиба и изгибающих моментов (смешанные граничные условия):

$$\left. \begin{aligned} x = 0, \quad w = 0; \quad M_x = m_x; \\ y = 0, \quad w = 0; \quad M_y = 0. \end{aligned} \right\} \quad (20.18)$$

Для постановки граничных условий относительно изгибающих моментов используем выражения (20.14):

$$\left. \begin{aligned} x = 0, \quad M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = m_x; \\ y = 0, \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = -D \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (20.19)$$

Вторые слагаемые в выражениях для изгибающих моментов отброшены, поскольку опертые края остаются прямыми и вторые производные от прогиба по направлению, совпадающему с направлением опертого края, равны нулю. Таким образом, при постановке граничных условий на шарнирно опертых краях пластины используются выражения для прогиба и второй производной от прогиба по направлению, перпендикулярному к опертому краю.

Свободные от закреплений края. На свободных краях, как правило, ставятся статические граничные условия относительно интегральных величин — внутренних усилий в пластине. Таких усилий на каждом крае пластины может быть три — крутящий момент и соответствующие изгибающий момент и поперечная сила. Следовательно, граничные условия на свободных краях должны ставиться относительно трех внутренних усилий и этих условий должно быть также три. Однако в соответствии с порядком дифференциального уравнения изгиба пластины (20.12) на каждом крае можно удовлетворить только двум граничным условиям. Несоответствие между числом граничных условий и числом внутренних усилий на свободных краях является следствием введенных гипотез (см. § 20.1). Для устранения этого противоречия можно произвести на свободных краях объединение двух внутренних усилий — крутящего момента и соответствующей поперечной силы. При этом крутящий момент надо представить в виде поперечных сил, распределенных вдоль рассматриваемого края.

Рассмотрим, например, действие крутящего момента вдоль края пластины, параллельного оси Ox (рис. 20.12, *а*). В произвольной точке края крутящий момент, приходящийся на длину dx , может быть представлен парой вертикальных сил H с моментом Hdx . На бесконечно малом приращении dx крутящий момент получит приращение и будет равен

$$H^* = H + \frac{\partial H}{\partial x} dx.$$

Его также можно представить в виде пары вертикальных сил (рис. 20.12, *б*) с моментом

$$\left(H + \frac{\partial H}{\partial x} dx \right) dx.$$

Такую замену крутящих моментов вертикальными силами можно произвести по всей длине края пластины. Произведя суммирование

вание противоположно направленных сил в каждой точке края, получим в итоге такого преобразования распределенную поперечную нагрузку с интенсивностью $\frac{\partial H}{\partial x}$ (рис. 20.12, в). Эту нагрузку можно объединить с поперечной силой Q_y , действующей вдоль рассматриваемого края. В итоге получим обобщенное внутреннее усилие — так называемую *приведенную поперечную силу* V_y :

$$V_y = Q_y + \frac{\partial H}{\partial x}. \quad (20.20)$$

Произведя аналогичное преобразование крутящего момента на контуре пластины, параллельном оси Oy , получим приведенную поперечную силу V_x :

$$V_x = Q_x + \frac{\partial H}{\partial y}. \quad (20.21)$$

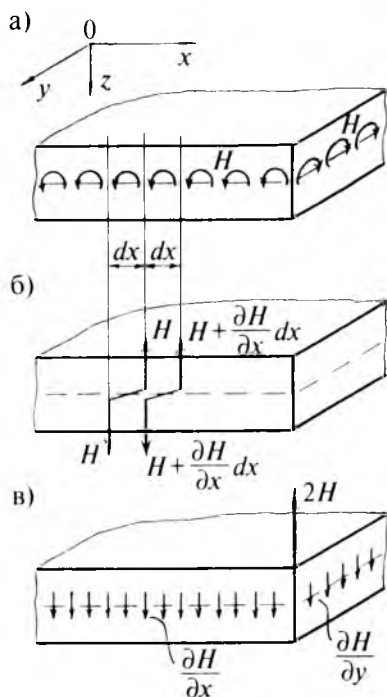


Рис 20.12

Подставив в эти формулы соответствующие выражения из (20.14), получим

$$\begin{aligned} V_x &= -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]; \\ V_y &= -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right]. \end{aligned} \quad (20.22)$$

Произведенное объединение поперечных сил и крутящего момента позволяет рассматривать на свободных краях пластины два граничных условия относительно соответствующих изгибающего момента и приведенной поперечной силы. При этом, естественно, граничные условия на свободных краях будут удовлетворяться приближенно. Однако на основании принципа Сен-Венана такое преобразование вызывает изменение характера напряженного состояния пластины только вблизи края, где оно выполнено. Для всей остальной части пластины замена крутящих моментов статически эквивалентными им вертикальными распределенными силами практически не приводит к изменению характера напряженного состояния, и в этом смысле она вполне допустима.

Следует также отметить, что при рассмотренном выше преобразовании в углах пластины появляются сосредоточенные силы, равные удвоенным значениям крутящего момента в угловых точках (рис. 20.13). В силу этого при постановке граничных условий на краях пластины угловые точки, как правило, исключаются из рассмотрения.

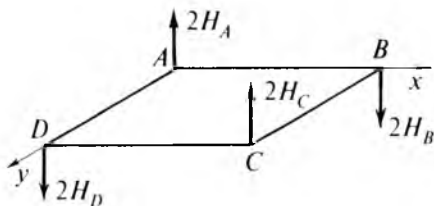


Рис. 20.13

Если свободный от закреплений край пластины является ненагруженным, то статические граничные условия на этом крае будут однородными (нулевыми).

На нагруженных свободных краях внутренние усилия должны быть равны интенсивностям распределенных краевых нагрузок (сил или моментов).

Рассмотрим в качестве примера постановку граничных условий для прямоугольной пластины, у которой края $y = 0$ и $x = a$ шарнирно оперты, край $x = 0$ жестко зашпелен и край $y = b$ свободен от закреплений (рис. 20.14). На свободном крае действует равномерно распределенная краевая нагрузка с интенсивностью $p = \text{const}$. На рисунке показан характер изменения прогиба пластины вдоль линий $x = a/2$, $y = b/2$.

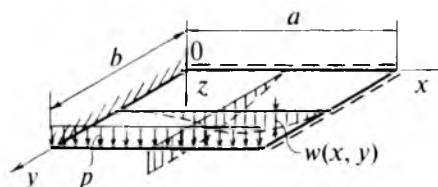


Рис. 20.14

На краях пластины надо поставить следующие граничные условия:

$$x = 0, \quad w = 0; \quad \varphi_x = \frac{\partial w}{\partial x} = 0;$$

$$y = 0, \quad w = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0;$$

$$x = a, \quad w = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0;$$

$$y = b, \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0;$$

$$V_y = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right] = p.$$

20.6. Наибольшие напряжения в пластинах.

Расчет пластин на прочность

Нормальные напряжения σ_x и σ_y и касательное напряжение τ_{xy} достигают наибольших по абсолютной величине значений при $z = \pm h/2$ (см. рис. 20.4). Касательные напряжения τ_{zx} и τ_{zy} имеют экстремальные (максимальные или минимальные) значения в точках на уровне срединной поверхности при $z = 0$ (см. рис. 20.5).

Выразим значения наибольших напряжений через внутренние усилия. Для этого надо рассмотреть совместно формулы для наибольших напряжений и формулы для соответствующих внутренних усилий. После несложных преобразований получим

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^{\text{нб}} &= \frac{6M_x}{h^2}; & \sigma_y^{\text{нб}} &= \frac{6M_y}{h^2}; \\ \tau_{xy}^{\text{нб}} &= \frac{6H}{h^2}; & \tau_{zx}^{\text{нб}} &= \frac{3Q_x}{2h}; & \tau_{zy}^{\text{нб}} &= \frac{3Q_y}{2h}. \end{aligned} \right\} \quad (20.23)$$

При расчете пластин на прочность наибольшую опасность представляют нормальные напряжения σ_x и σ_y и касательное напряжение τ_{xy} . Напряжения τ_{zx} , τ_{zy} и σ_z , как правило, значительно меньше напряжений σ_x , σ_y , и τ_{xy} и мало влияют на оценку прочности пластины.

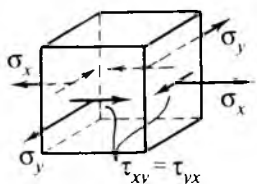


Рис. 20.15

Если не учитывать напряжение σ_z , то напряженное состояние вблизи внешних поверхностей пластины можно считать двухосным, что показано на рис. 20.15.

Поскольку напряжения σ_x , σ_y , и τ_{xy} могут иметь в опасной точке один порядок, для оценки прочности пластины необходимо использовать соответствующую теорию прочности. Если, например, использовать энергетическую теорию прочности, то условие прочности по методу предельных состояний можно записать в следующем виде:

$$\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2} \leq \gamma_c R. \quad (20.24)$$

Подставив в условие прочности (20.24) формулы (20.23) для наибольших напряжений, получим

$$\frac{6}{h^2} \sqrt{M_x^2 + M_y^2 - M_x M_y + 3H^2} \leq \gamma_c R. \quad (20.25)$$

Из этого условия можно определить требуемую толщину пластины:

$$h \geq \sqrt{\frac{6}{\gamma_c R} \sqrt{M_x^2 + M_y^2 - M_x M_y + 3H^2}}. \quad (20.26)$$

Следует отметить, что в общем случае расчет пластины на прочность должен производиться для нескольких точек пластин, в ко-

торых изгибающие и крутящий моменты M_x , M_y и H имеют достаточно большие значения.

Рассмотрим некоторые задачи расчета прямоугольных пластин и методы их решения.

20.7. Цилиндрический изгиб пластин

Цилиндрическим изгибом можно назвать такой случай изгиба пластины, при котором ее срединная плоскость искривляется по цилиндрической поверхности. При этом одна из кривизн изогнутой срединной поверхности пластины равна нулю.

Цилиндрический изгиб имеет место, например, в достаточно длинной прямоугольной пластине при действии поперечной нагрузки, не изменяющейся вдоль длинной стороны. В качестве примера такой задачи на рис. 20.16, а приведена консольная пластина, жестко зашпеленная по краю вдоль длинной стороны $x = 0$ и нагруженная равномерно распределенной краевой нагрузкой p вдоль свободного края $x = a$. При $b \geq 2a$ изогнутую срединную поверхность большей части пластины, за исключением областей вблизи торцов, можно считать цилиндрической поверхностью с образующей, параллельной длинной стороне. Следовательно, прогиб пластины является функцией только одной переменной: $w = w(x)$. Во всех полученных уравнениях и формулах, описывающих изгиб пластин

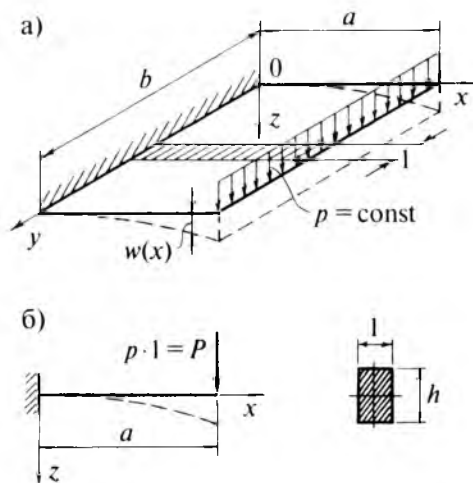


Рис. 20.16

тины, необходимо положить равными нулю производные от w по переменной y , что существенно упрощает решение задачи. Например, дифференциальное уравнение изгиба пластины (20.12) примет следующий вид:

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} = q(x). \quad (20.27)$$

Это уравнение аналогично дифференциальному уравнению изгиба балки, в котором изгибная жесткость EJ заменяется цилиндрической жесткостью D . В силу этого цилиндрический изгиб пластины можно рассматривать как изгиб множества балок-полос прямоугольного сечения единичной ширины, мысленно вырезанных из пластины в поперечном направлении (рис. 20.16, *a, б*). Расчет таких балок-полос производится обычными методами сопротивления материалов (построение эпюр внутренних усилий, определение напряжений и т.п.).

Однако цилиндрический изгиб пластины имеет отличие от изгиба балки. Оно заключается в том, что при изгибе балки ее поперечные деформации ничем не стеснены и могут происходить свободно. Это приводит к искажению формы контура поперечного

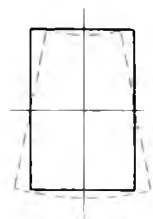


Рис. 20.17

сечения балки, что для случая чистого изгиба показано пунктиром на рис. 20.17 (в зоне действия растягивающих напряжений ширина сечения уменьшается, а в зоне действия сжимающих напряжений — увеличивается). Отметим, что задача определения перемещений точек поперечного сечения и искажения формы контура прямоугольного сечения балки при чистом изгибе относится к элементарным задачам теории упругости.

При цилиндрическом изгибе пластины поперечные деформации выделенной балки-полосы невозможны за счет стеснения со стороны соседних балок-полос. Следовательно, поперечную деформацию ϵ_y надо положить равной нулю ($\epsilon_y = 0$). При этом нормальные напряжения в пластине будут определяться по формулам

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y) = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \cdot \frac{d^2 w}{dx^2}; \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x) = -\frac{\nu Ez}{1-\nu^2} \cdot \frac{d^2 w}{dx^2} = \nu \sigma_x. \end{aligned} \right\} \quad (20.28)$$

Этим напряжениям соответствуют изгибающие моменты

$$M_x = -D \frac{d^2 w}{dx^2}; \quad M_y = -D\nu \frac{d^2 w}{dx^2} = \nu M_x. \quad (20.29)$$

Наличие в пластине изгибающего момента M_y (в продольном направлении) весьма характерно. Отсюда следует, что цилиндрический изгиб пластины будет иметь место, строго говоря, в том случае, когда к боковым поперечным краям пластины приложены распределенные краевые моменты $m_y = M_y = \nu M_x$, (рис. 20.18). При отсутствии этих моментов форма изогнутой срединной поверхности пластины вблизи коротких сторон будет отличаться от цилиндрической.

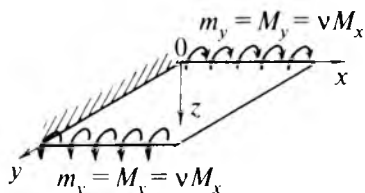


Рис. 20.18

20.8. Чистый изгиб прямоугольных пластин

Чистым изгибом принято называть такой случай изгиба пластины, при котором поперечные силы отсутствуют. Чистый изгиб имеет место, например, в прямоугольной свободной от закреплений пластине при действии по ее краям равномерно распределенных краевых моментов $m_x = m_1$, $m_y = m_2$ (рис. 20.19, а).

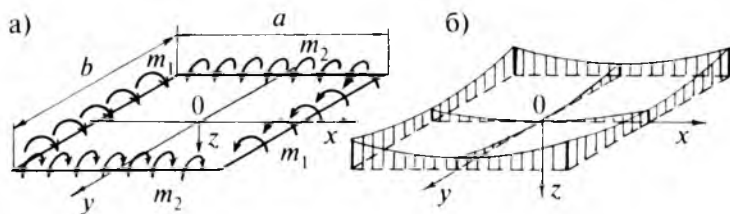


Рис. 20.19

Примем начало координат в середине пластины. Рассматривая действие моментов m_1 и m_2 отдельно и используя метод суперпо-

зиции, получим следующие значения внутренних усилий в пластине: $M_x = m_1 = \text{const}$; $M_y = m_2 = \text{const}$; $H = 0$; $Q_x = 0$; $Q_y = 0$. Используя выражения для изгибающих моментов из (20.14), находим

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{m_1 - \nu m_2}{D(1 - \nu^2)}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{m_2 - \nu m_1}{D(1 - \nu^2)}.$$

Интегрируя эти уравнения при условии, что

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0,$$

получим следующее выражение для прогиба пластины:

$$w(x, y) = -\frac{m_1 - \nu m_2}{2D(1 - \nu^2)} x^2 - \frac{m_2 - \nu m_1}{2D(1 - \nu^2)} y^2 + C_1 x + C_2 y + C_3.$$

Исключая жесткое смещение пластины, положим $C_3 = 0$. Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяются из граничных условий в середине пластины, характеризующих симметрию ее изогнутой срединной поверхности относительно плоскостей Oxz и Oyz :

$$x = 0, \quad y = 0, \quad \varphi_x = \frac{\partial w}{\partial x} = 0; \quad \varphi_y = \frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Из этих условий находим $C_1 = 0$, $C_2 = 0$. Таким образом, изогнутая срединная поверхность пластины определяется следующим уравнением:

$$w(x, y) = -\frac{m_1 - \nu m_2}{2D(1 - \nu^2)} x^2 - \frac{m_2 - \nu m_1}{2D(1 - \nu^2)} y^2. \quad (20.30)$$

Уравнение (20.30) описывает поверхность второго порядка (параболоид). Характер изгиба пластины показан на рис. 20.19, б. Наибольшие значения прогибы имеют в углах пластины при $x = \pm a/2$, $y = \pm b/2$.

В частном случае при $m_1 = m_2 = m$ изогнутая срединная поверхность пластины представляет собой параболоид вращения

$$w(x, y) = -\frac{m(x^2 + y^2)}{2D(1 + \nu)}. \quad (20.31)$$

При $m_1 = m$, $m_2 = -m$ (рис. 20.20, а) изогнутая срединная поверхность является гиперболическим параболоидом, описываемым уравнением

$$w(x, y) = -\frac{m(x^2 - y^2)}{2D(1 - \nu)}. \quad (20.32)$$

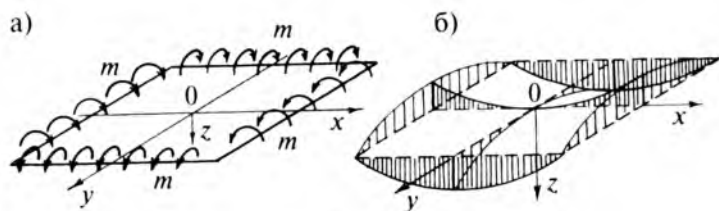


Рис. 20.20

Характер изогнутой срединной поверхности для квадратной пластины ($a = b$) показан на рис. 20.20, б. Наибольшие значения прогибы имеют в серединах сторон пластины при $y = 0$, $x = \pm a/2$ и $x = 0$, $y = \pm b/2$.

Представляет интерес случай, когда один из моментов равен нулю, например $m_1 = m$, $m_2 = 0$. Изогнутая срединная поверхность пластины в этом случае также представляет собой гиперболический параболоид, описываемый уравнением

$$w(x, y) = -\frac{m(x^2 - \nu y^2)}{2D(1 - \nu^2)}. \quad (20.33)$$

Для того чтобы осуществился цилиндрический изгиб пластины в направлении оси Ox , необходимо к ее краям $y = \pm b/2$ приложить краевые моменты $m_2 = \nu m$ (рис. 20.21, а). При этом прогиб пластины будет определяться следующим выражением:

$$w(x) = -\frac{mx^2}{2D}. \quad (20.34)$$

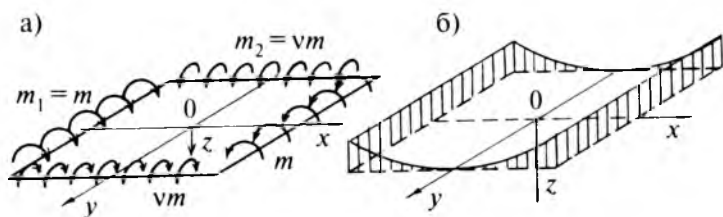


Рис. 20.21

Характер изгиба пластины для этого случая показан на рис. 20.21, б. Изогнутая срединная поверхность пластины представляет собой цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси Oy .

20.9. Расчет прямоугольных пластин с помощью двойных тригонометрических рядов

Рассмотрим прямоугольную шарнирно опертую по всем четырем сторонам пластину, нагруженную произвольной поперечной нагрузкой $q(x, y)$ (рис. 20.22). Краевые моменты отсутствуют. Функция прогиба пластины должна удовлетворять дифференциальному уравнению (20.12) и граничным условиям на краях.

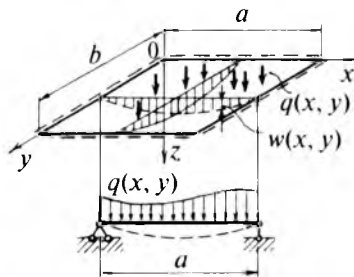


Рис. 20.22

Поскольку получить точное аналитическое решение дифференциального уравнения (20.12) в общем случае невозможно, будем искать его в виде бесконечного ряда. Для пластины с шарнирно опертыми по всем четырем сторонам краями и началом координат в угловой точке $x=0, y=0$ удобно использовать разложение искомой функции прогиба $w(x, y)$ в двойной тригонометрический ряд по синусам:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (20.35)$$

где w_{mn} — коэффициенты ряда, являющиеся постоянными величинами; m и n — целые положительные числа, соответствующие номеру членов ряда и характеризующие число полуволн синусоиды в разложении (20.35).

Нетрудно показать, что задание прогиба в виде (20.35) позволяет удовлетворить всем граничным условиям на краях пластины, которые имеют следующий вид (см. § 20.5):

$$\left. \begin{aligned} x=0, \quad x=a, \quad w=0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0; \\ y=0, \quad y=b, \quad w=0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (20.36)$$

Для определения неизвестных коэффициентов w_{mn} ряда (20.35) разложим функцию поперечной распределенной нагрузки $q(x, y)$ также в двойной тригонометрический ряд по синусам:

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (20.37)$$

Коэффициенты этого ряда могут быть определены по известной формуле теории рядов Фурье. При нагружении по всей поверхности пластины имеем:

$$q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy. \quad (20.38)$$

Подставляя выражения (20.35) и (20.37) в уравнение (20.12) и приравнивая между собой коэффициенты при одинаковых произведениях синусов в левой и правой частях уравнения, получим

$$D \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 \right] w_{mn} = q_{mn}.$$

Отсюда находим

$$w_{mn} = \frac{q_{mn}}{D\pi^4 \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2}. \quad (20.39)$$

Таким образом, выражение для прогиба пластины с четырьмя шарнирно опертыми краями имеет следующий вид:

$$w(x, y) = \frac{1}{D\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{\left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2}. \quad (20.40)$$

Ряд (20.40) сходится очень быстро при любой поперечной нагрузке в любой точке пластины. Используя выражение для прогиба (20.40), можно с помощью полученных выше формул определить внутренние усилия в пластине. Выражения для них также будут иметь вид бесконечных тригонометрических рядов по синусам или косинусам, сходимость которых всегда хуже, чем сходимость ряда для прогибов, так как при дифференцировании сходимость рядов Фурье ухудшается. Рассмотрим некоторые частные случаи нагружения пластины.

Действие нагрузки, распределенной по полуволне синусоиды. Рассмотрим действие нагрузки, распределенной вдоль координатных линий по одной полуволне синусоиды (рис. 20.23):

$$q(x, y) = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad (20.41)$$

где $q_0 = q_{11}$ — значение интенсивности нагрузки в середине пластины при $x = a/2$, $y = b/2$. Такое задание нагрузки соответствует первому члену разложения (20.37).

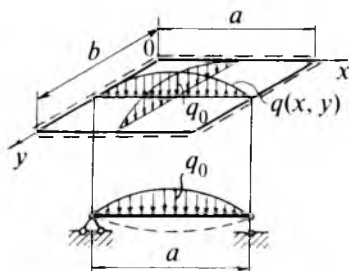


Рис. 20.23

Очевидно, что действию такой нагрузки соответствует изменение прогиба также по одной полуволне синусоиды вдоль координатных линий:

$$w(x, y) = w_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad (20.42)$$

где $w_0 = w_{11}$ — величина прогиба в середине пластины.

Выражение (20.42) соответствует первому члену ряда (20.35). Величина w_0 может быть определена по формуле (20.39), в которой надо положить $m = 1$, $n = 1$:

$$w_0 = \frac{q_0}{D\pi^4 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2}. \quad (20.43)$$

Определив соответствующие производные от прогиба, можно получить выражения для внутренних усилий в пластине. Например, изгибающий момент M_x , крутящий момент H и поперечная сила Q_x определяются по формулам

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \frac{q_0 \left(\frac{1}{a^2} + \nu \frac{1}{b^2} \right)}{\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}; \\ H &= - \frac{q_0 (1 - \nu)}{\pi^2 ab \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}; \\ Q_x &= - \frac{q_0}{\pi a \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \end{aligned} \right\} \quad (20.44)$$

Характер изменения изгибающего момента M_x и крутящего момента H (эпюры этих величин) показан на рис. 20.24, а, б.

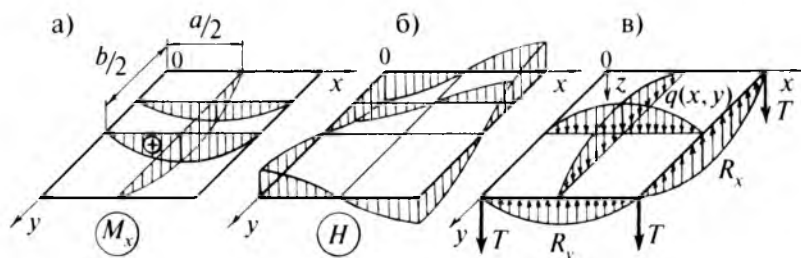


Рис. 20.24

Изгибающие моменты достигают наибольших значений в середине пластины при $x = a/2$, $y = b/2$, а крутящий момент — в ее углах.

На опертых краях пластины действуют распределенные опорные реакции, равные значениям приведенных поперечных сил V_x и V_y при $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$. Выражения для распределенных реактивных сил можно получить с помощью формул (20.22) и (20.42). Например, распределенные опорные реакции вдоль края $x = 0$ определяются следующим выражением:

$$R_x = V_x = \frac{q_0 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{2 - \nu}{b^2} \right)}{\pi a \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (20.45)$$

Аналогичные выражения характеризуют распределение опорных реакций на других шарнирно опертых краях пластины. Направление этих реакций противоположно направлению действия поперечной нагрузки.

В углах пластины действуют сосредоточенные реактивные силы T , равные удвоенному значению крутящего момента H в угловых точках. Эти силы имеют одинаковую величину и направление во всех четырех угловых точках. По абсолютной величине они равны

$$T = \frac{2q_0(1-\nu)}{\pi^2 ab \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2}. \quad (20.46)$$

Поскольку направление этих реактивных сил совпадает с направлением действия нагрузки, можно сделать вывод, что углы пластины имеют тенденцию отрыва от опор. Характер распределения опорных реакций на шарнирно опертых краях пластины показан на рис. 20.24, в. Можно убедиться в том, что пластина под действием нагрузки (20.41) и распределенных и сосредоточенных опорных реакций находится в равновесии и для нее точно выполняется уравнение статики $\sum Z = 0$.

Действие равномерно распределенной нагрузки. При действии по всей поверхности пластины равномерно распределенной нагрузки $q = \text{const}$ (рис. 20.25) выражение для прогиба пластины имеет вид бесконечного ряда (20.40). Определим входящие в это

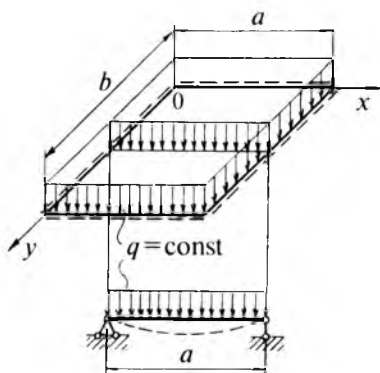


Рис. 20.25

выражение коэффициенты q_{mn} по формуле (20.38). Вынося постоянную величину q из под знака интегралов и выполняя интегрирование, получим

$$q_{mn} = \frac{4q}{ab} \int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} dx \int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} dy = \frac{16q}{\pi^2 mn},$$

где $m, n = 1, 3, 5, \dots$

При вычислении определенных интегралов учтено, что они равны нулю при четных значениях индексов m и n . Окончательное выражение для прогиба пластины имеет следующий вид:

$$w(x, y) = \frac{16q}{D\pi^6} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2}. \quad (20.47)$$

В соответствии с нечетными значениями индексов m и n синусоиды, характеризующие изменение прогибов пластины, являются симметричными по отношению к линиям $x = a/2$, $y = b/2$, что соответствует физическому смыслу задачи. Ряд (20.47) быстро сходится при любых значениях координат x и y . Например, для максимального прогиба в середине квадратной пластины ($a = b$) уже при четырех членах ряда получаем точное значение, приводимое в справочной литературе:

$$w_{\max} = 0,00406 \frac{qa^4}{D}.$$

С помощью (20.47) можно получить выражения для внутренних усилий в пластине. Используя, например, формулу (20.14), получим следующее выражение для изгибающего момента M_x :

$$M_x = \frac{16q}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{m}{a} \right)^2 + v \left(\frac{n}{b} \right)^2}{mn \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (20.48)$$

Для других внутренних усилий можно также получить выражения в виде тригонометрических рядов по синусам или косинусам. Отметим, что сходимость рядов для внутренних усилий хуже, чем сходимость ряда (20.47) для прогиба пластины. Например, для зна-

чения максимального изгибающего момента M_x в середине квадратной пластины со стороной a и $\nu = 0,3$ при четырех членах ряда (20.48) получим

$$M_x^{\max} = 0,0469qa^2,$$

в то время как точное значение равно

$$M_x^{\max} = 0,0479qa^2.$$

Ряды для поперечных сил сходятся еще медленнее.

Частичное нагружение пластины. Рассмотрим действие нагрузки, равномерно распределенной по площади прямоугольника со сторонами c и d (рис. 20.26). Обозначим координаты середины грузового участка через α и β . Равнодействующая нагрузки равна $P = qcd$.

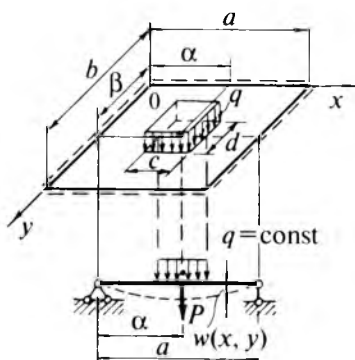


Рис. 20.26

Прогиб пластины по-прежнему определяется выражением (20.40). Вычислим коэффициенты разложения нагрузки в тригонометрический ряд по формуле (20.38), в которой интегрирование надо произвести в пределах участка нагружения. В результате получим

$$\begin{aligned} q_{mn} &= \frac{4q}{ab} \int_{\alpha-c/2}^{\alpha+c/2} \sin \frac{m\pi x}{a} dx \int_{\beta-d/2}^{\beta+d/2} \sin \frac{n\pi y}{b} dy = \\ &= \frac{16q}{\pi^2 mn} \sin \frac{m\pi\alpha}{a} \sin \frac{n\pi\beta}{b} \sin \frac{m\pi c}{2a} \sin \frac{n\pi d}{2b}. \end{aligned} \quad (20.49)$$

Если нагрузка симметрична по отношению к линиям $x = a/2$, $y = b/2$, то соответствующие индексы m и n должны быть нечетными числами. При произвольном расположении нагрузки индексы m и n должны принимать значения всех целых положительных чисел.

Рассмотрим, например, нагружение левой половины пластины. В этом случае в формуле (20.49) надо положить $c = a/2$, $d = b$, $\alpha = a/4$, $\beta = b/2$, и она примет следующий вид:

$$q_{mn} = \frac{16q}{\pi^2 mn} \sin^2 \frac{m\pi}{4} \sin^2 \frac{n\pi}{2},$$

где индексы m принимает произвольные значения, а n — только нечетные значения, поскольку изогнутая срединная поверхность пластины при таком нагружении должна быть симметричной относительно вертикальной плоскости, проходящей через линию $y = b/2$.

Действие сосредоточенной силы. При малой площади распределения нагрузки можно считать сосредоточенной в точке с координатами $x_p = \alpha$, $y_p = \beta$ (рис. 20.27). В этом случае для получения решения надо в формуле (20.49) устремить размеры c и d к нулю, сохраняя конечное значение $P = qcd$. Положив в (20.49) $q = P/(cd)$ и перейдя к пределу, получим

$$q_{mn} = \frac{4P}{ab} \sin \frac{m\pi x_p}{a} \sin \frac{n\pi y_p}{b}. \quad (20.50)$$

Для определения прогиба пластины коэффициенты q_{mn} надо подставить в выражение (20.40). Если, например, сила приложена в середине пластины ($x_p = a/2$, $y_p = b/2$), то ее прогиб определяется следующим выражением:

$$w(x, y) = \frac{4P}{D\pi^4 ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2}}{\left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (20.51)$$

где индексы m и n должны быть только нечетными числами.

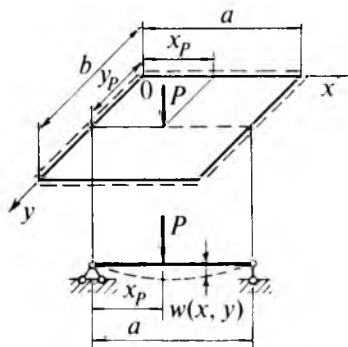


Рис. 20.27

Ряд (20.51) достаточно хорошо сходится в любой точке пластины, в том числе и в точке приложения силы. Составим, например, ряд для определения прогиба в центре квадратной пластины. Положив в выражении (20.51) $a = b$, $x = y = a/2$, получим

$$w_{\max} = \frac{4Pa^2}{D\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(m^2 + n^2)^2}. \quad (20.52)$$

Удержав в разложении (20.52) первые четыре члена ряда, соответствующие значениям $m = 1, 3$ и $n = 1, 3$, находим

$$w_{\max} = \frac{4Pa^2}{D\pi^4} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \frac{1}{324} \right) = \frac{0,01121 Pa^2}{D}.$$

Это значение примерно на 3% меньше точного значения прогиба

$$w_{\max} = \frac{0,01160 Pa^2}{D}.$$

Составив выражения для внутренних усилий также в виде рядов, можно убедиться, что их сходимость значительно хуже, чем сходимость ряда для прогиба. В самой точке приложения силы ряды для внутренних усилий оказываются расходящимися. Такой результат связан с характером сосредоточенного воздействия на тело. Как уже отмечалось, любая поверхностная нагрузка всегда имеет площадь распределения, пусть даже очень малую, но имеющую конечное значение. В силу этого переход к сосредоточенным нагрузкам в задачах теории упругости всегда приводит к появлению так называемых особенностей — бесконечно больших значений напряжений и внутренних усилий.

20.10. Расчет прямоугольных пластин с помощью одинарных тригонометрических рядов

Использование одинарных тригонометрических рядов эффективно при расчете прямоугольных пластин с двумя противоположными шарнирно опертыми краями. Два других края пластины могут иметь различные условия опирания или могут быть свободными от закреплений.

Рассмотрим, например, прямоугольную пластину, шарнирно опертую по краям $x = 0$ и $x = a$ и нагруженную распределенной нагрузкой $q(x, y)$ (рис. 20.28). Край $y = 0$ жестко защемлен, край $y = b$ свободен от закреплений.

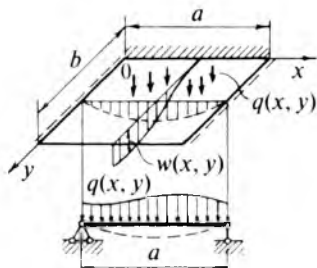


Рис. 20.28

Поместив начало координат в угловой точке $x = 0$, $y = 0$, примем функцию прогиба пластины в виде следующего ряда:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} w_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (20.53)$$

где $m = 1, 2, 3, \dots$

Представление искомой функции прогиба в виде ряда по синусам в направлении, перпендикулярном к шарнирно опертым краям пластины, позволяет точно удовлетворить граничным условиям на этих краях при отсутствии краевых моментов:

$$x = 0, \quad x = a, \quad w = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0.$$

Функции $w_m(y)$ в разложении (20.53) характеризуют изменение прогиба в направлении оси Oy и подлежат определению. Для этого разложим заданную распределенную поперечную нагрузку также в тригонометрический ряд по синусам:

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (20.54)$$

Коэффициенты этого разложения, являющиеся функциями переменной y , могут быть определены с помощью известной из теории рядов Фурье формулы. При распределении нагрузки по всей поверхности пластины имеем:

$$q_m(y) = \frac{2}{a} \int_0^a q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} dx. \quad (20.55)$$

Подставив выражения (20.53) и (20.54) в дифференциальное уравнение (20.12), получим

$$D \sum_{m=1}^{\infty} (w_m^{IV} - 2\lambda_m^2 w_m'' + \lambda_m^4 w_m) \sin \lambda_m x = \sum_{m=1}^{\infty} q_m(y) \sin \lambda_m x,$$

где принято обозначение $\lambda_m = \frac{m\pi}{a}$.

Приравняв между собой члены рядов с одинаковыми индексами m и сократив обе части этого выражения на $\sin \lambda_m x$, получим обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка относительно функции $w_m(y)$

$$w_m^{IV} - 2\lambda_m^2 w_m'' + \lambda_m^4 w_m = \frac{q_m(y)}{D}. \quad (20.56)$$

Общее решение уравнения (20.56) имеет вид

$$w_m(y) = w_m^0(y) + w_m^*(y), \quad (20.57)$$

где $w_m^0(y)$ — общее решение однородного уравнения

$$w_m^{IV} - 2\lambda_m^2 w_m'' + \lambda_m^4 w_m = 0, \quad (20.58)$$

а $w_m^*(y)$ — какое-либо частное решение уравнения (20.56).

Уравнение типа (20.58) было рассмотрено в § 17.8 при решении плоской задачи теории упругости. Общее решение этого уравнения имеет следующий вид:

$$w_m^0(y) = C_{1m} \operatorname{ch} \lambda_m y + C_{2m} \operatorname{sh} \lambda_m y + C_{3m} y \operatorname{ch} \lambda_m y + C_{4m} y \operatorname{sh} \lambda_m y. \quad (20.59)$$

Для определения $w_m^*(y)$ надо использовать известные методы отыскания частных решений неоднородного дифференциального уравнения (например, метод Коши, метод вариации произвольных постоянных и др.).

Подставляя решение (20.57) с учетом (20.59) в разложение (20.53), получим

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} [C_{1m} \operatorname{ch} \lambda_m y + C_{2m} \operatorname{sh} \lambda_m y + C_{3m} y \operatorname{ch} \lambda_m y + C_{4m} y \operatorname{sh} \lambda_m y + w_m^*(y)] \sin \lambda_m x, \quad (20.60)$$

где C_{1m} , C_{2m} , C_{3m} и C_{4m} — постоянные интегрирования, подлежащие определению из граничных условий на краях $y = 0$ и $y = b$.

С помощью (20.60) можно получить выражения для внутренних усилий в пластине.

Рассмотрим более подробно расчет прямоугольной пластины с противоположными шарнирно опертыми и жестко защемленными краями, находящейся под действием нагрузки, равномерно распределенной по всей поверхности (рис. 20.29). Направления координатных осей показаны на рисунке.

Подставив значение $q = \text{const}$ в формулу (20.55) и выполнив интегрирование, получим

$$q_m = \frac{2q}{a} \int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} dx = \frac{4q}{m\pi},$$

где $m = 1, 3, 5, \dots$

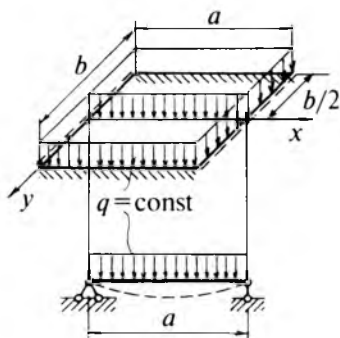


Рис. 20.29

При этом частное решение неоднородного уравнения (20.56) можно представить в виде

$$w_m^* = \frac{4q}{m\pi D\lambda_m^4}.$$

В силу симметрии изогнутой срединной поверхности пластины относительно вертикальной плоскости, проходящей через ось Ox , в выражении (20.60) надо удерживать только четные функции переменной y и отбросить нечетные функции, положив постоянные C_{2m} и C_{3m} равными нулю. Таким образом, прогиб пластины определяется выражением

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(C_{1m} \operatorname{ch} \lambda_m y + C_{4m} y \operatorname{sh} \lambda_m y + \frac{4q}{m\pi D\lambda_m^4} \right) \sin \lambda_m x.$$

Постоянные интегрирования C_{1m} и C_{4m} подлежат определению из граничных условий на защемленных краях пластины

$$y = \pm \frac{b}{2}, \quad w = 0; \quad \varphi_y = \frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Использував эти условия, получим систему двух алгебраических уравнений относительно постоянных с одинаковым индексом m :

$$\left. \begin{aligned} C_{1m} \operatorname{ch} \beta_m + C_{4m} \frac{b}{2} \operatorname{sh} \beta_m + \frac{4q}{m\pi D\lambda_m^4} &= 0; \\ \lambda_m C_{1m} \operatorname{sh} \beta_m + C_{4m} \left(\operatorname{sh} \beta_m + \frac{b}{2} \operatorname{ch} \beta_m \right) &= 0, \end{aligned} \right\}$$

где $\beta_m = \frac{b}{2} \lambda_m = \frac{m\pi b}{2a}.$

Решив эту систему и определив постоянные C_{1m} и C_{4m} , получим следующее выражение для прогиба пластины:

$$w(x, y) = \frac{4qa^4}{D\pi^5} \sum_{m=1}^{\infty} \left[1 + \frac{\lambda_m y \operatorname{sh} \lambda_m y \operatorname{sh} \beta_m - (\operatorname{sh} \beta_m + \beta_m \operatorname{ch} \beta_m) \operatorname{ch} \lambda_m y}{\beta_m + \operatorname{sh} \beta_m \operatorname{ch} \beta_m} \right] \frac{\sin \lambda_m x}{m^5}, \quad (20.61)$$

где $m = 1, 3, 5, \dots$

Полученный ряд сходится очень быстро. Вычислим, например, значение прогиба в середине квадратной пластины ($a = b$). Для этого положим в последней формуле $x = a/2$, $y = 0$. Тогда получим

$$w_{\max} = \frac{4qa^4}{D\pi^5} \sum_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\operatorname{sh} \frac{m\pi}{2} + \frac{m\pi}{2} \operatorname{ch} \frac{m\pi}{2}}{\frac{m\pi}{2} + \operatorname{sh} \frac{m\pi}{2} \operatorname{ch} \frac{m\pi}{2}} \right) \frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{m^5}.$$

Взяв только один член этого ряда ($m = 1$), получим

$$w_{\max} = 0,00196 \frac{qa^4}{D},$$

что незначительно отличается от точного значения

$$w_{\max} = 0,00192 \frac{qa^4}{D}.$$

Ряды для внутренних усилий сходятся также достаточно хорошо.

В качестве второго примера рассмотрим прямоугольную пластину, достаточно протяженную в направлении оси Oy ($b \gg a$), со свободным от закрепления краем $y = 0$, нагруженным равномерно распределенной краевой нагрузкой $p = \text{const}$ (рис. 20.30). Такие пластины иногда называются полубесконечными.

Края пластины $x = 0$, $x = a$ являются шарнирно опертыми. Прогиб пластины определяется выражением (20.60), в котором частное решение $w_m^*(y)$ надо положить равным нулю, поскольку распределенная по поверхности пластины нагрузка отсутствует. При этом удобно перейти от гиперболических функций к экспоненциальным и представить выражение для прогиба в следующем виде:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} (C_{1m} e^{\lambda_m y} + C_{2m} y e^{\lambda_m y} + C_{3m} e^{-\lambda_m y} + C_{4m} y e^{-\lambda_m y}) \sin \lambda_m x. \quad (20.62)$$

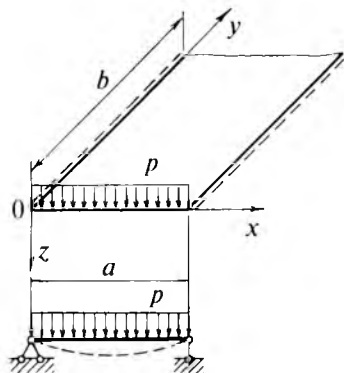


Рис. 20.30

В силу симметрии изогнутой срединной поверхности пластины относительно вертикальной плоскости, проходящей через линию $x = a/2$, в выражении (20.62) индексы m должны быть нечетными числами ($m = 1, 3, 5, \dots$).

Очевидно, что при удалении от нагруженного края пластины прогиб и внутренние усилия должны уменьшаться (затухать). Для удовлетворения этому условию в выражении (20.62) надо удержать только затухающие частные интегралы, содержащие $e^{-\lambda_m y}$, и отбросить возрастающие частные интегралы, положив $C_{1m} = 0$, $C_{2m} = 0$. Таким образом, получим

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} (C_{3m} + C_{4m} y) e^{-\lambda_m y} \sin \lambda_m x. \quad (20.63)$$

Для определения постоянных интегрирования C_{3m} и C_{4m} надо использовать статические граничные условия на нагруженном крае пластины:

$$\left. \begin{aligned} y=0, \quad M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0; \\ V_y &= -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) = -p. \end{aligned} \right\} \quad (20.64)$$

Для того чтобы использовать второе из приведенных граничных условий, разложим нагрузку p в ряд Фурье по синусам:

$$p = \sum_{m=1}^{\infty} p_m \sin \frac{m\pi x}{a} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4p}{m\pi} \sin \lambda_m x.$$

Коэффициенты разложения p_m вычислены по формуле (20.55), где принято $q_m(y) = p_m$ и $q(x, y) = p$.

Составим выражения для производных от прогиба, соответствующего произвольному члену ряда (20.63).

$$\frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2} = -\lambda_m^2 (C_{3m} + C_{4m}y) e^{-\lambda_m y} \sin \lambda_m x;$$

$$\frac{\partial^2 w_m}{\partial y^2} = \lambda_m [\lambda_m C_{3m} - (2 - \lambda_m y) C_{4m}] e^{-\lambda_m y} \sin \lambda_m x;$$

$$\frac{\partial^3 w_m}{\partial y^3} = -\lambda_m^2 [\lambda_m C_{3m} - (3 - \lambda_m y) C_{4m}] e^{-\lambda_m y} \sin \lambda_m x;$$

$$\frac{\partial^3 w_m}{\partial x^2 \partial y} = \lambda_m^2 [\lambda_m C_{3m} - (1 - \lambda_m y) C_{4m}] e^{-\lambda_m y} \sin \lambda_m x.$$

Используя граничные условия (20.64), находим произвольные постоянные:

$$C_{3m} = \frac{8p}{\lambda_m^4 Da(3+\nu)(1-\nu)}; \quad C_{4m} = \frac{4p}{\lambda_m^3 Da(3+\nu)},$$

после чего запишем окончательное выражение для прогиба пластины

$$w(x, y) = \frac{8pa^3}{D\pi^4(3+\nu)(1-\nu)} \sum_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1-\nu}{2} \lambda_m y \right) e^{-\lambda_m y} \frac{\sin \lambda_m x}{m^4}. \quad (20.65)$$

С помощью выражения (20.65) можно определить внутренние усилия в пластине. Например, для изгибающего момента M_x получим следующее выражение:

$$M_x = \frac{8pa}{\pi^2(3+\nu)} \sum_{m=1}^{\infty} \left[(1+\nu) + \frac{1-\nu}{2} \lambda_m y \right] e^{-\lambda_m y} \frac{\sin \lambda_m x}{m^2}, \quad (20.66)$$

где по-прежнему индекс m принимает нечетные значения ($m = 1, 3, \dots$).

Наибольшие значения прогиб и изгибающий момент M_x имеют в середине нагруженного края при $y = 0, x = a/2$. Они определяются следующими выражениями:

$$w_{\text{нб}} = \frac{8pa^3}{D\pi^4(3+\nu)(1-\nu)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{m^4};$$

$$M_x^{\text{нб}} = \frac{8pa(1+\nu)}{\pi^2(3+\nu)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{m^2}.$$

Взяв только по одному члену этих рядов ($m = 1$), получим следующие значения:

$$w_{\text{нб}} = \frac{8pa^3}{D\pi^4(3+\nu)(1-\nu)}; \quad M_x^{\text{нб}} = \frac{8pa(1+\nu)}{\pi^2(3+\nu)}.$$

Точные значения, приводимые в справочниках, равны

$$w_{\text{нб}} = \frac{7,92pa^3}{D\pi^4(3+\nu)(1-\nu)}; \quad M_x^{\text{нб}} = \frac{7,3pa(1+\nu)}{\pi^2(3+\nu)}.$$

Нетрудно видеть, что даже первые члены рядов для наибольших прогиба и изгибающего момента M_x дают вполне удовлетворительные результаты, особенно для прогиба. При четырех членах рядов полученные значения практически совпадают с точными значениями.

Покажем характер изменения прогиба и изгибающего момента M_x вдоль линии $x = a/2$. Ограничимся первыми членами в рядах (20.65) и (20.66) и примем коэффициент Пуассона равным $\nu = 0,3$. На рис. 20.31 показаны графики изменения безразмерных функций

$$\bar{w}(y) = \left(1 + \frac{1-\nu}{2}\lambda_1 y\right) e^{-\lambda_1 y};$$

$$\bar{M}_x(y) = \left[(1+\nu) + \frac{1-\nu}{2}\lambda_1 y\right] e^{-\lambda_1 y}$$

в зависимости от отношения y/a . Можно отметить, что уже при $y/a = 1,5$ прогиб и изгибающий момент достаточно малы. Уточнение, связанное с удержанием большего числа членов рядов, очень мало влияет на быстроту затухания прогиба и внутренних усилий. Следовательно, полученное выше решение можно использовать для расчета пластин при $b \geq 1,5a$. При этом характер опирания пластины по краю $y = b$ практически не будет влиять на результаты расчета.

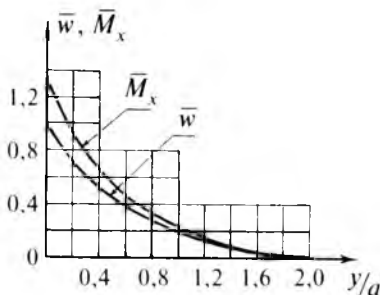


Рис. 20.31

20.11. Понятие о расчете пластин с помощью вариационных методов

В главе 16 показано, что задачи теории упругости сводятся к интегрированию дифференциальных уравнений в частных производных при удовлетворении соответствующих граничных условий.

В силу больших математических трудностей получение точных аналитических решений многих задач теории упругости в форме, доступной для практических целей, затруднительно или невозможно. В этом случае можно использовать вариационные методы, которые позволяют получать приближенные решения задач теории упругости в аналитической форме. При этом приближенно удовлетворяются дифференциальные уравнения или граничные условия, а в отдельных случаях — и те и другие. В основе вариационных методов лежат вариационные принципы, например принцип возможных перемещений Лагранжа.

В задачах расчета пластин вариационные методы позволяют получить приближенное выражение для прогиба пластины с точностью, достаточной для инженерной практики. При этом искомая функция прогиба принимается в виде аналитического выражения, соответствующего характеру изогнутой срединной поверхности пластины и удовлетворяющего граничным условиям. Это выражение должно содержать неизвестные коэффициенты или функции одной переменной, для определения которых используется один из вариационных принципов. Такой подход позволяет свести задачу интегрирования дифференциального уравнения в частных производных, описывающего изгиб пластины, к решению системы линейных алгебраических уравнений или системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Например, искомую функцию прогиба пластины можно принять в следующем виде:

$$w(x, y) = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n a_{kl} \varphi_{kl}(x, y), \quad (20.67)$$

где $k = 1, 2, \dots, m$; $l = 1, 2, \dots, n$.

В этом выражении функции φ_{kl} должны быть линейно независимыми и удовлетворяющими кинематическим граничным условиям; они принимаются в начале расчета и называются аппроксимирующими функциями. Следует отметить, что от удачного выбора аппроксимирующих функций зависит точность решения и трудоемкость его получения. Поэтому желательно, чтобы функции φ_{kl} удовлетворяли не только кинематическим, но и статическим граничным условиям.

Коэффициенты a_{kl} в выражении (20.67) являются постоянными числами (параметрами) и подлежат определению. Рассмотрим определение коэффициентов a_{kl} с помощью вариационных методов Ритца и Бубнова — Галеркина.

Метод Ритца основан на использовании известной теоремы Дирихле — Лагранжа, на основании которой формулируется следующий принцип: *потенциальная энергия упругого тела в состоянии устойчивого равновесия имеет минимальное значение*. Для использования метода Ритца в задачах расчета пластин необходимо составить выражения для потенциальной энергии деформации пластины U и работы внешних сил A . Полная потенциальная энергия пластины равна их разности ($\Pi = U - A$). Можно показать, что при задании прогиба в виде (20.67) полная потенциальная энергия является квадратичной функцией параметров a_{kl} : $\Pi = \Pi(a_{kl}^2)$.

Выполняя условия минимума полной потенциальной энергии пластины, надо составить частные производные от Π по всем параметрам a_{kl} и приравнять их к нулю:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_{kl}} = 0. \quad (20.68)$$

Соотношения (20.68) позволяют получить систему линейных алгебраических уравнений относительно a_{kl} . Определив эти параметры и подставив их в (20.67), получим искомое приближенное решение задачи.

Метод Бубнова — Галеркина основан на свойстве ортогональности функций. Система функций $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_k(x)$, образует на отрезке $[a, b]$ ортогональную систему, если при $k \neq l$ выполняется условие

$$\int_a^b \varphi_k(x) \varphi_l(x) dx = 0. \quad (20.69)$$

Нетрудно показать, например, что система функции $1, \sin x, \cos x, \dots, \sin kx, \cos kx$, ортогональна на отрезке $[-\pi, \pi]$, поскольку каждая пара этих функций удовлетворяет условию (20.69). Указанное свойство можно распространить на функции нескольких переменных.

Если одна из функций системы равна нулю, то ее можно считать ортогональной ко всем без исключения функциям, поскольку в этом случае условие (20.69) выполняется тождественно. В качестве такой функции в теории изгиба пластин можно принять функцию

$$\psi(x, y) = D\nabla^2\nabla^2 w - q, \quad (20.70)$$

которая должна быть равна нулю согласно (20.10). Следовательно, функция $\psi(x, y)$ должна быть ортогональна к любым функциям, заданным в некоторой области.

Если прогиб пластины задан приближенно в виде (20.67), то уравнение изгиба пластины не удовлетворяется и $\psi(x, y) \neq 0$. Однако можно потребовать, чтобы эта функция была ортогональна к аппроксимирующим функциям $\varphi_{kl}(x, y)$ в выражении (20.67). В результате получим следующее равенство:

$$\iint_S \psi(x, y) \varphi_{kl}(x, y) dx dy = \iint_S (D\nabla^2\nabla^2 w - q) \varphi_{kl} dx dy = 0, \quad (20.71)$$

где интегрирование должно выполняться по всей площади S срединной плоскости пластины.

Подставив в (20.71) выражение (20.67) и выполнив интегрирование, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно a_{kl} . Можно показать, что уравнение (20.71) выражает в интегральной форме условие равенства нулю работы всех внешних и внутренних сил в пластине на возможных перемещениях $\varphi_{kl}(x, y)$.

В этом смысле метод Бубнова — Галеркина, как и метод Ритца, исходит из принципа возможных перемещений Лагранжа.

Применим метод Бубнова — Галеркина к расчету прямоугольной пластины, жестко зашеченной по контуру и нагруженной по всей поверхности равномерно распределенной нагрузкой.

Примем начало координат в середине пластины (рис. 20.32). Искомая функция прогиба должна удовлетворять следующим кинематическим граничным условиям:

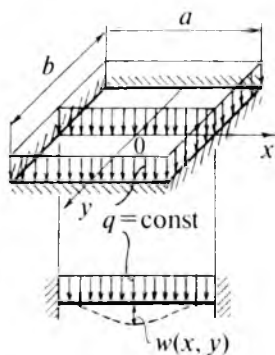


Рис. 20.32

$$x = \pm \frac{a}{2}, \quad w = 0; \quad \varphi_x = \frac{\partial w}{\partial x} = 0;$$

$$y = \pm \frac{b}{2}, \quad w = 0; \quad \varphi_y = \frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Кроме того, изогнутая срединная поверхность пластины должна быть симметричной по отношению к вертикальным плоскостям, проходящим через оси Ox и Oy .

Данным граничным условиям и условию симметрии удовлетворяет функция прогиба в виде следующего выражения:

$$w(x, y) = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n a_{kl} \left(1 + \cos \frac{2k\pi x}{a} \right) \left(1 + \cos \frac{2l\pi y}{b} \right), \quad (20.72)$$

где индексы k и l должны быть нечетными числами. Для определения коэффициентов a_{kl} надо использовать равенство (20.71), в котором следует принять

$$\varphi_{kl} = \left(1 + \cos \frac{2k\pi x}{a} \right) \left(1 + \cos \frac{2l\pi y}{b} \right).$$

Ограничимся первым членом выражения (20.72)

$$w_{11} = a_{11} \varphi_{11} = a_{11} \left(1 + \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \left(1 + \cos \frac{2\pi y}{b} \right)$$

и подставим его в выражение (20.70). В результате получим

$$\begin{aligned} \psi(x, y) = 16 D \pi^4 a_{11} & \left[\frac{1}{a^4} \cos \frac{2\pi x}{a} + \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 \cos \frac{2\pi x}{a} \times \right. \\ & \left. \times \cos \frac{2\pi y}{b} + \frac{1}{b^4} \cos \frac{2\pi y}{b} \right] - q. \end{aligned}$$

Подставив функции $\psi(x, y)$ и φ_{11} в равенство (20.71)

$$\int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \psi(x, y) \left(1 + \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \left(1 + \cos \frac{2\pi y}{b} \right) dx dy = 0$$

и выполнив интегрирование, получим алгебраическое уравнение относительно коэффициента a_{11} :

$$4\pi^4 a_{11} \left(\frac{3}{a^4} + \frac{3}{b^4} + \frac{2}{a^2 b^2} \right) - \frac{q}{D} = 0,$$

решив которое находим

$$a_{11} = \frac{qa^4}{4D\pi^4} \cdot \frac{1}{\left(3 + 3\frac{a^4}{b^4} + 2\frac{a^2}{b^2}\right)}.$$

Таким образом, функция прогиба пластины, соответствующая первому члену выражения (20.72), имеет следующий вид:

$$w_{11} = \frac{qa^4}{4D\pi^4} \cdot \frac{\left(1 + \cos \frac{2\pi x}{a}\right)\left(1 + \cos \frac{2\pi y}{b}\right)}{\left(3 + 3\frac{a^4}{b^4} + 2\frac{a^2}{b^2}\right)}.$$

Максимальное значение прогиб имеет в середине пластины. Для квадратной пластины ($a = b$) он равен

$$w_{\max} = \frac{qa^4}{8D\pi^4}.$$

Эта величина незначительно отличается от точного значения.

20.12. Основные соотношения при изгибе круглых пластин

Задачи изгиба круглых пластин удобно рассматривать в полярной системе координат, которую по-прежнему отнесем к срединной плоскости пластины. Начало отсчета координат (полюс) примем в центре срединной плоскости (рис. 20.33). В общем случае изгиба круглой пластины поперечная нагрузка и все величины, характеризующие напряженное и деформированное состояния пластины, являются функциями двух переменных r и θ .

Для оператора Лапласа в полярной системе координат в § 18.1 была выведена формула

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \quad (20.73)$$

В соответствии с этой формулой дифференциальное уравнение (20.10) изгиба круглых пластин в полярной системе координат имеет следующий вид:

$$\nabla^2 \nabla^2 w(r, \theta) = \frac{q(r, \theta)}{D}, \quad (20.74)$$

или в развернутом виде

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = \frac{q(r, \theta)}{D}. \quad (20.75)$$

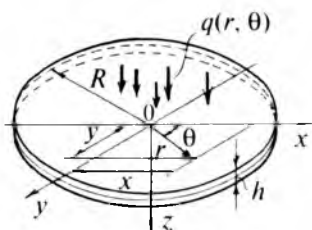


Рис. 20.33

В круглых пластинах при изгибе действуют пять напряжений (рис. 20.34): два нормальных — радиальное σ_r и окружное σ_θ и три касательных $\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r}$, τ_{zr} , $\tau_{z\theta}$. Напряжение σ_z в соответствии с третьей гипотезой теории изгиба тонких пластин не учитывается. Напряжения σ_r , σ_θ и $\tau_{r\theta}$ изменяются по толщине пластины по линейному закону и имеют наибольшие значения в точках вблизи внешних поверхностей пластины при $z = \pm h/2$. Касательные напряжения τ_{zr} и $\tau_{z\theta}$ изменяются по толщине по закону квадратной параболы и имеют наибольшие значения в точках срединной плоскости.

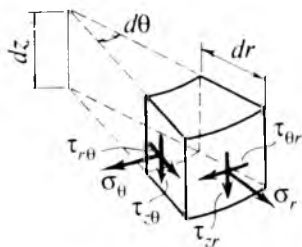


Рис. 20.34

Равнодействующими рассмотренных напряжений являются пять внутренних усилий, действующих в пластине в общем случае ее изгиба. Этими внутренними усилиями являются два изгибающих момента — радиальный M_r и окружной M_θ , крутящий момент $H = M_{r\theta} = M_{\theta r}$ и две поперечные силы — радиальная Q_r и окружная Q_θ . Характер действия внутренних усилий по граням бесконечно малого элемента пластины показан на рис. 20.35, а, б, в.

Выразим внутренние усилия в круглой пластине через ее прогиб. Как уже было отмечено в § 18.1, искомые величины (напряжения, внутренние усилия и т.п.) в полярной системе координат при $\theta = 0$

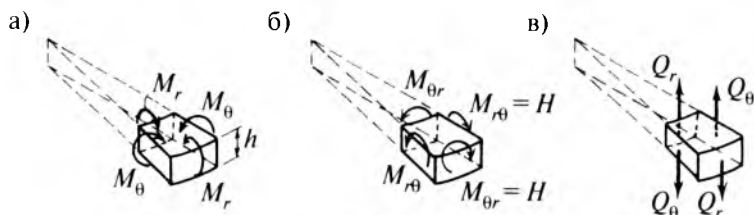


Рис. 20.35

совпадают с соответствующими величинами в декартовой системе. В силу этого выражения для M_r , M_θ , H , Q_r и Q_θ можно получить с помощью выражений (20.14) для M_x , M_y , H , Q_x и Q_y , если учесть равенства (18.14) — (18.16), заменив в них φ на w и положив $\theta = 0$. В результате получим

$$\left. \begin{aligned} M_r &= -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right]; \\ M_\theta &= -D \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right); \\ H &= -D(1 - \nu) \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} \right); \\ Q_r &= -D \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right); \\ Q_\theta &= -D \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (20.76)$$

Граничные условия для круглых сплошных пластин ставятся на закрепленном контуре при $r = R$ относительно прогиба w , угла наклона касательной к изогнутой срединной поверхности пластины

$$\varphi_r = \frac{\partial w}{\partial r} \quad (20.77)$$

и радиального изгибающего момента M_r . Для постановки граничных условий на свободном от закреплений контуре вводится приведенная радиальная поперечная сила

$$V_r = Q_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H}{\partial \theta} = -D \left[\frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 w + (1 - \nu) \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r \partial \theta} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right]. \quad (20.78)$$

Для кольцевых пластин граничные условия ставятся на внутреннем и внешнем контурах, соответственно при $r = R_1$ и $r = R_2$ (рис. 20.36).

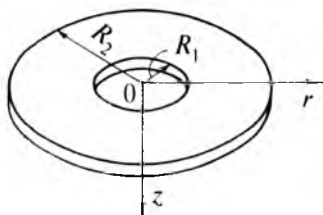


Рис. 20.36

Примеры постановки граничных условий рассмотрены ниже при решении конкретных задач.

20.13. Некоторые задачи изгиба круглых пластин

Осесимметричный изгиб. Задача изгиба круглой пластины называется осесимметричной, если нагрузка на пластину и условия закрепления ее краев (контуров) не зависят от полярного угла θ . При этом изогнутая срединная поверхность пластины представляет собой поверхность вращения, осью которой является ось Oz . Следовательно, прогиб пластины также не зависит от полярного угла θ и является функцией только переменной r , то есть $w = w(r)$. Этот вывод распространяется на все напряжения и внутренние усилия в пластине.

При осесимметричном изгибе задача расчета круглой пластины существенно упрощается, поскольку во всех уравнениях и формулах, описывающих изгиб пластины, производные по угловой координате θ обращаются в нуль. Например, дифференциальное уравнение изгиба пластины (20.75) принимает следующий вид:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dw}{dr} \right) = \frac{q(r)}{D}, \quad (20.79)$$

или в развернутом виде

$$\frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r} \cdot \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \cdot \frac{dw}{dr} = \frac{q(r)}{D}. \quad (20.80)$$

Уравнение (20.80) является дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами типа Эйлера. Соответствующее

(20.80) однородное уравнение аналогично по структуре дифференциальному уравнению (18.36), для которого получено общее решение в виде (18.41). По аналогии с решением (18.41) запишем

$$w^0(r) = C_1 + C_2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 r^2 \ln r. \quad (20.81)$$

Общее решение неоднородного уравнения (20.80) имеет вид

$$w(r) = C_1 + C_2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 r^2 \ln r + w^*(r), \quad (20.82)$$

где $w^*(r)$ — частное решение уравнения (20.80). Для нахождения частного решения можно, например, представить уравнение (20.80) в следующем виде:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] \right\} = \frac{q(r)}{D}.$$

После четырехкратного интегрирования получим

$$w^*(r) = \frac{1}{D} \int_0^r \frac{1}{r} \left\{ \int_0^r r \left[\int_0^r \frac{1}{r} \left(\int_0^r q(r) r dr \right) dr \right] dr \right\} dr. \quad (20.83)$$

Для случая, когда пластина находится под действием равномерно распределенной нагрузки $q = \text{const}$, после интегрирования получим

$$w^*(r) = \frac{qr^4}{64D}. \quad (20.84)$$

Входящие в (20.82) постоянные интегрирования C_1 , C_2 , C_3 и C_4 подлежат определению из соответствующих граничных условий в каждой конкретной задаче.

При осесимметричном изгибе в круглой пластине могут действовать только три напряжения σ_r , σ_θ и $\tau_{r\theta}$ и три внутренних усилия M_r , M_θ и Q_r , выражения для которых упрощаются и принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} M_r &= -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \cdot \frac{dw}{dr} \right); \\ M_\theta &= -D \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right); \\ Q_r &= -D \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dw}{dr} \right). \end{aligned} \right\} \quad (20.85)$$

Как видно из соотношений (20.76), крутящий момент и окружная поперечная сила при осесимметричном изгибе равны нулю:

$H = 0$; $Q_\theta = 0$. Отметим, что радиальная поперечная сила Q_r может быть определена статически из уравнения равновесия пластины $\sum Z = 0$. Действительно, в силу осевой симметрии равнодействующая P_0 осесимметричной нагрузки на пластину должна уравниваться равномерно распределенными по окружности радиуса r поперечными силами (рис. 20.37).

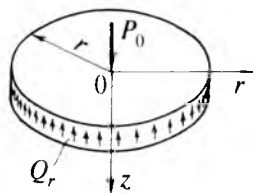


Рис. 20.37

Составив уравнение статики $\sum Z = 0$, получим

$$P_0 - Q_r \cdot 2\pi r = 0,$$

откуда

$$Q_r = \frac{P_0}{2\pi r}. \quad (20.86)$$

Если пластина нагружена равномерно распределенной нагрузкой $q = \text{const}$, то $P_0 = q\pi r^2$ и поперечная сила равна

$$Q_r = \frac{qr}{2}. \quad (20.87)$$

При действии произвольной осесимметричной распределенной нагрузки $q(r)$ ее равнодействующая P_0 определяется как интеграл по площади нагружения.

Выразив наибольшие напряжения через внутренние усилия, как это было сделано в § 20.6, получим следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} z = \pm \frac{h}{2}, \quad \sigma_r^{\text{нб}} &= \frac{6M_r}{h^2}; \quad \sigma_\theta^{\text{нб}} = \frac{6M_\theta}{h^2}; \\ z = 0, \quad \tau_{rz}^{\text{нб}} &= \frac{3Q_r}{2h}. \end{aligned} \right\} \quad (20.88)$$

Расчет пластины на прочность производится по величинам наибольших нормальных напряжений с использованием соответствующей теории прочности. Этот расчет надо выполнять для точек пластины, где изгибающие моменты M_r и M_θ имеют наибольшие значения или достаточно велики.

В качестве первого примера рассмотрим задачу об изгибе круглой пластины, жестко защемленной по контуру и находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки (рис. 20.38). Прогиб пластины определяется выражением (20.82), где частное решение $w^*(r)$ имеет вид (20.84).

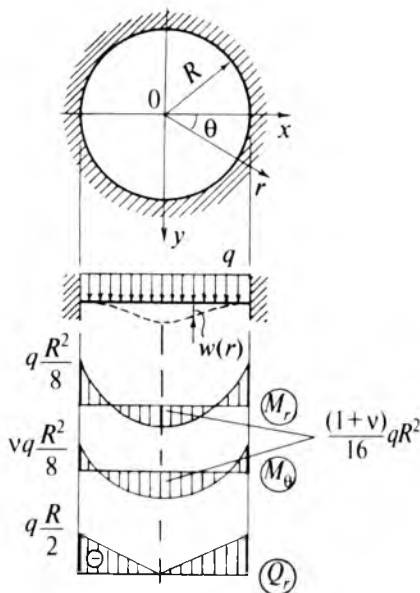


Рис. 20.38

В соответствии с физическим смыслом задачи в центре пластины при $r = 0$ прогиб и внутренние усилия должны иметь конечные значения. Для удовлетворения этому условию надо в общем решении (20.82) отбросить частные интегралы, содержащие натуральный логарифм ($\ln 0 = -\infty$), положив равными нулю постоянные интегрирования C_2 и C_4 . Таким образом, получим для прогиба пластины следующее выражение:

$$w(r) = C_1 + C_3 r^2 + \frac{qr^4}{64D}. \quad (20.89)$$

Для определения постоянных C_1 и C_3 используем граничные условия на жестко защемленном контуре пластины:

$$r = R, \quad w = 0; \quad \varphi_r = \frac{dw}{dr} = 0.$$

Используя эти условия, получим два алгебраических уравнения относительно C_1 и C_3 :

$$C_1 + C_3 R^2 + \frac{qR^4}{64D} = 0; \quad 2C_3 R + \frac{qR^3}{16D} = 0.$$

Решив эти уравнения, получим

$$C_1 = \frac{qR^4}{64D}; \quad C_3 = -\frac{qR^2}{32D}.$$

Окончательное выражение для прогиба имеет вид

$$w(r) = \frac{q}{64D} (R^4 - 2R^2r^2 + r^4) = \frac{q}{64D} (R^2 - r^2)^2.$$

С помощью формул (20.85) получим выражения для внутренних усилий в пластине:

$$M_r = \frac{q}{16} [(1+\nu)R^2 - (3+\nu)r^2];$$

$$M_\theta = \frac{q}{16} [(1+\nu)R^2 - (1+3\nu)r^2];$$

$$Q_r = -\frac{qr}{2}.$$

Эпюры внутренних усилий приведены на рис. 20.38. В центре пластины изгибающие моменты равны по величине, поперечная сила равна нулю, а прогиб имеет максимальное значение, равное

$$w_{\max} = \frac{qR^4}{64D}.$$

Рассмотрим задачу о расчете круглой пластины, жестко зашеченной по контуру и нагруженной в центре сосредоточенной силой P (рис. 20.39, а). Для получения решения этой задачи необходимо вначале произвести расчет пластины на действие нагрузки q , равномерно распределенной по площади круга радиуса $r = a$ (рис. 20.39, б). Этот расчет достаточно прост и сводится к определению постоянных интегрирования из граничных условий на контуре пластины и условий сопряжения участков $0 \leq r \leq a$ и $a < r \leq R$. Затем в полученном решении надо произвести предельный переход, устремляя размер a к нулю и сохраняя конечное значение равнодействующей нагрузки $P = q\pi a^2$. Опуская промежуточные выкладки, приведем окончательное решение задачи:

$$w = \frac{P}{16\pi D} \left[2r^2 \ln \frac{r}{R} + (R^2 - r^2) \right];$$

$$M_r = \frac{P}{4\pi} \left[(1+\nu) \ln \frac{R}{r} - 1 \right];$$

$$M_\theta = \frac{P}{4\pi} \left[(1+\nu) \ln \frac{R}{r} - \nu \right];$$

$$Q_r = -\frac{P}{2\pi r}.$$

Прогиб в центре пластины имеет конечное значение и равен

$$w_{\max} = \frac{PR^2}{16\pi D},$$

а внутренние усилия стремятся к бесконечности, что соответствует характеру нагружения пластины (как уже отмечалось, в точках приложения сосредоточенных сил появляются особенности). Эпюры M_r и Q_r приведены на рис. 20.39, в, г.

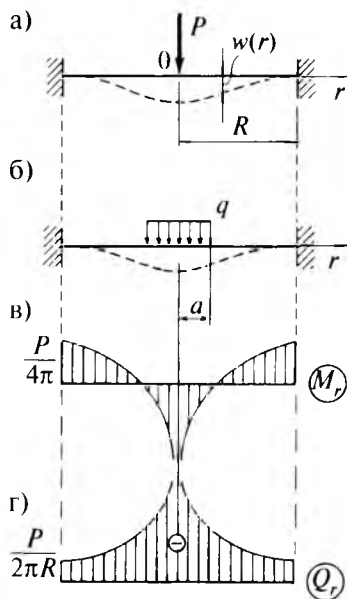


Рис. 20.39

В аналогичной постановке решаются задачи расчета круглых пластин, шарнирно опертых по контуру. Рассмотрим, например, действие равномерно распределенной нагрузки на такую пластину (рис. 20.40). Прогиб пластины по-прежнему определяется выражением (20.89). Для определения постоянных интегрирования используем граничные условия на шарнирно опертом контуре:

$$r = R, \quad w = 0; \quad M_r = -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \cdot \frac{dw}{dr} \right) = 0.$$

Используя эти условия, получим систему двух алгебраических уравнений относительно C_1 и C_3 :

$$\left. \begin{aligned} C_1 + C_3 R^2 + \frac{qR^4}{64D} &= 0; \\ 2C_3 + \frac{3qR^2}{16D} + \nu \left(2C_3 + \frac{qR^2}{16D} \right) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Определив постоянные интегрирования, запишем после несложных математических выкладок окончательное решение задачи:

$$w = \frac{q(R^2 - r^2)}{64D} \left(\frac{5+\nu}{1+\nu} R^2 - r^2 \right);$$

$$M_r = \frac{q}{16} (3+\nu)(R^2 - r^2);$$

$$M_\theta = \frac{q}{16} [(3+\nu)R^2 - (1+3\nu)r^2];$$

$$Q_r = -\frac{qr}{2}.$$

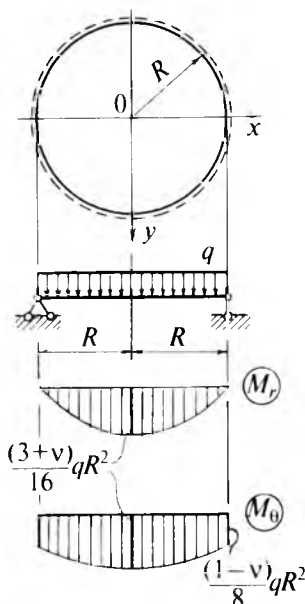


Рис. 20.40

Максимальное значение прогиб имеет в центре пластины, где он равен

$$w_{\max} = \frac{5+\nu}{1+\nu} \cdot \frac{qR^4}{64D}.$$

Эпюры изгибающих моментов приведены на рис. 20.40. В центре пластины радиальный и окружной изгибающие моменты равны по величине.

Рассмотрим кольцевую пластину, шарнирно опертую по внешнему контуру и находящуюся под действием краевой нагрузки p , равномерно распределенной по внутреннему свободному от закреплений контуру (рис. 20.41). Поскольку в данной задаче распределенная по поверхности пластины нагрузка отсутствует, частное решение в выражении (20.82) нужно положить равным нулю. Таким образом, прогиб кольцевой пластины в этом случае определяется выражением

$$w(r) = C_1 + C_2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 r^2 \ln r.$$

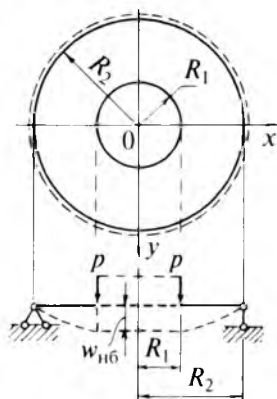


Рис. 20.41

Для определения постоянных интегрирования необходимо использовать следующие граничные условия на внутреннем и внешнем контурах пластины:

$$r = R_1, \quad M_r = -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \cdot \frac{dw}{dr} \right) = 0;$$

$$Q_r = -D \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dw}{dr} \right) = -p;$$

$$r = R_2, \quad w = 0; \quad M_r = -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \cdot \frac{dw}{dr} \right) = 0.$$

Используя граничные условия с помощью выражения для прогиба, получим систему четырех алгебраических уравнений относительно постоянных C_1, C_2, C_3 и C_4 . После их определения задача расчета пластины по существу может считаться решенной. Подставив эти постоянные в выражения для прогиба и внутренних усилий в пластине, можно записать окончательные решения в виде замкнутых формул, которые, однако, имеют достаточно громоздкий вид и в силу этого не приводятся.

Общий случай изгиба круглых пластин. Если нагрузка на пластину или условия ее закрепления не являются осесимметричными, то прогиб пластины зависит от переменных r и θ и должен удовлетворять дифференциальному уравнению (20.75). Чаще всего для получения решения прогиб пластины представляется в виде тригонометрического ряда по угловой координате θ :

$$w(r, \theta) = w_0(r) + \sum_{m=1}^{\infty} w_m(r) \cos m\theta + \sum_{n=1}^{\infty} w_n(r) \sin n\theta, \quad (20.90)$$

где $m, n = 1, 2, 3, \dots$

Функции $w_0(r)$, $w_m(r)$ и $w_n(r)$ характеризуют изменение прогиба пластины в радиальном направлении и подлежат определению. Нетрудно видеть, что функция $w_0(r)$ описывает осесимметричный изгиб круглой пластины.

Произвольную поперечную распределенную нагрузку, вызывающую изгиб пластины, также можно разложить в тригонометрический ряд, аналогичный ряду (20.90):

$$q(r, \theta) = q_0(r) + \sum_{m=1}^{\infty} q_m(r) \cos m\theta + \sum_{n=1}^{\infty} q_n(r) \sin n\theta. \quad (20.91)$$

Действие отдельно взятой нагрузки $q_0(r)$ вызывает рассмотренный выше осесимметричный изгиб. Коэффициенты разложений могут быть определены по известным формулам теории рядов Фурье:

$$\left. \begin{aligned} q_0(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(r, \theta) d\theta; \\ q_m(r) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} q(r, \theta) \cos m\theta d\theta; \\ q_n(r) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} q(r, \theta) \sin n\theta d\theta. \end{aligned} \right\} \quad (20.92)$$

Подставив выражения (20.90) и (20.91) в дифференциальное уравнение (20.75) и приравняв между собой члены рядов с одинаковым индексом m , получим

$$\left(\frac{d}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2} \right) \left(\frac{d^2 w_m}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dw_m}{dr} - \frac{m^2}{r^2} w_m \right) = \frac{q_m(r)}{D}. \quad (20.93)$$

Дифференциальное уравнение относительно функции $w_n(r)$ имеет такой же вид. Решение уравнения (20.93) позволяет определить вид функций $w_m(r)$ или $w_n(r)$ и тем самым получить окончательное решение задачи. Входящие в решение постоянные интегрирования могут быть определены из граничных условий на контуре пластины.

При $m = 0$ уравнение (20.93) совпадает с уравнением (20.79) и описывает осесимметричный изгиб пластины. При $m = 1$ решение уравнения (20.93) можно записать в следующем виде:

$$w_1(r) = C_1 r + C_2 r^3 + C_3 \frac{1}{r} + C_4 r \ln r + w_1^*(r), \quad (20.94)$$

где $w_1^*(r)$ — частное решение, зависящее от вида функции $q_1(r)$.

Для целых и положительных чисел $m \geq 2$ решение дифференциального уравнения (20.93) имеет следующий вид:

$$w_m(r) = C_1 r^m + C_2 r^{m+2} + C_3 \frac{1}{r^m} + C_4 \frac{1}{r^{m-2}} + w_m^*(r).$$

Рассмотрим в качестве примера расчет круглой пластины, шарнирно опертой по контуру и находящейся под действием нагрузки со следующим законом распределения:

$$q(r, \theta) = \frac{q_0 r}{R} \cos \theta.$$

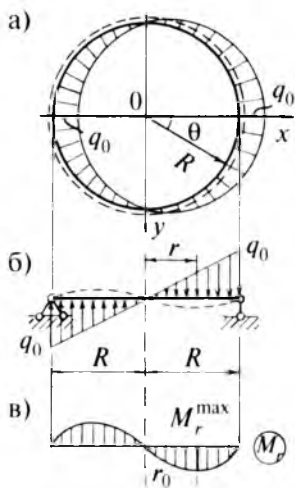


Рис. 20.42

Характер изменения нагрузки по угловой координате θ и по радиусу r показан на рис. 20.42, а, б. Поскольку задание нагрузки соответствует первому члену ряда (20.91) по косинусам ($m=1$), прогиб пластины также можно представить как первый член ряда (20.90) по косинусам, то есть принять $w(r, \theta) = w_1(r) \cos \theta$, где функция $w_1(r)$ определяется выражением (20.94). Входящее в (20.94) частное решение, зависящее от функции $q_1 = q_0 r/R$, имеет следующий вид:

$$w_1^*(r) = \frac{q_0 r^5}{192 R D}.$$

Учитывая ограниченность значений прогиба и внутренних усилий в центре пластины при $r=0$, положим $C_3 = 0$; $C_4 = 0$. Таким образом, прогиб пластины определяется следующим выражением:

$$w(r, \theta) = \left(C_1 r + C_2 r^3 + \frac{q_0 r^5}{192 R D} \right) \cos \theta.$$

Для определения постоянных интегрирования используем граничные условия на шарнирно опертом контуре пластины:

$$r = R, \quad w = 0; \quad M_r = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] = 0.$$

Приведем окончательные выражения для прогиба пластины и радиального изгибающего момента:

$$w = \frac{q_0 R^4 (1 - \rho^2) \rho}{192 (3 + \nu) D} \left[(7 + \nu) - (3 + \nu) \rho^2 \right] \cos \theta;$$

$$M_r = \frac{q_0 R^2}{48} (5 + \nu) \rho (1 - \rho^2) \cos \theta,$$

где $\rho = r/R$ — безразмерный радиус.

Нетрудно показать, что M_r имеет максимальное значение при

$$\theta = 0 \quad \text{и} \quad r_0 = R\sqrt{3},$$

которое равно

$$M_r^{\max} = \frac{q_0 R^2 (5 + \nu)}{72\sqrt{3}}.$$

Характер эпюры M_r показан на рис. 20.42, в.



20.14. Изгиб пластины под действием поперечных нагрузок и нагрузок в срединной плоскости



20.15. Некоторые задачи устойчивости прямоугольных пластин



ГЛАВА 21

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ И ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

21.1. Метод конечных разностей

21.2. Метод конечных элементов

ГЛАВА 22

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ И ПОЛЗУЧЕСТИ

22.1. Простейшие задачи теории пластичности

В главе 3 были рассмотрены основные свойства пластичных тел, наблюдаемые в опытах при одноосном растяжении стального стержня. Напомним, что при напряжениях, равных пределу текучести σ_T , на диаграмме $\sigma \sim \epsilon$ имеется площадка текучести (рис. 22.1, а), соответствующая росту деформаций при постоянных напряжениях. Одной из наиболее простых аппроксимаций реальной диаграммы растяжения является диаграмма Прандтля (рис. 22.1, б), согласно которой площадка текучести считается бесконечной. Такое предположение является вполне оправданным, поскольку деформации ϵ^* , соответствующие концу площадки текучести на реальной диаграмме, для многих материалов в $30 \div 40$ раз превышают деформации ϵ_T , соответствующие концу линейного участка. С помощью диаграммы Прандтля удастся довольно просто решить многие задачи теории пластичности. Одна из таких задач, посвященная расчету статически неопределимой стержневой системы, была рассмотрена в § 3.7.

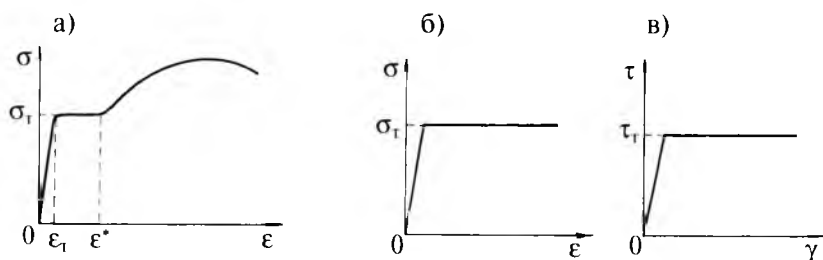


Рис. 22.1

В данном параграфе приводятся решения еще двух простых задач: упруго-пластического изгиба балки и упруго-пластического кручения стержня круглого сечения. При этом во второй задаче используется диаграмма Прандтля для чистого сдвига (рис. 22.1, в).

Упруго-пластический изгиб балки. Простейшее решение рассматриваемой задачи получается для случая чистого изгиба балки прямоугольного сечения (рис. 22.2).

При чистом изгибе в поперечных сечениях возникают только нормальные напряжения. Решение данной задачи в упругой постановке приведено в § 7.5 и имеет вид

$$\sigma = \frac{M}{J} y. \quad (22.1)$$

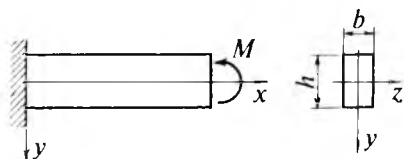


Рис. 22.2

Наибольшие нормальные напряжения $\sigma_{нб}$ имеют место в волокнах, наиболее удаленных от нейтральной оси ($y = \pm h/2$). На рис. 22.3, а показана соответствующая эпюра напряжений. При чистом изгибе момент M является постоянным по длине балки и эпюры напряжений во всех сечениях одинаковы.

При решении задачи в упруго-пластической постановке будем полагать, что при сжатии также справедлива диаграмма Прандтля и пределы текучести при растяжении и сжатии равны.

Увеличение момента M приводит к увеличению напряжений, и при определенном значении $M = M_T$ в крайних волокнах они достигнут значения σ_T (рис. 22.3, б). Подставив в (22.1) $\sigma = \sigma_T$, $y = h/2$, найдем соответствующее значение изгибающего момента $M_T = 2\sigma_T J/h$.

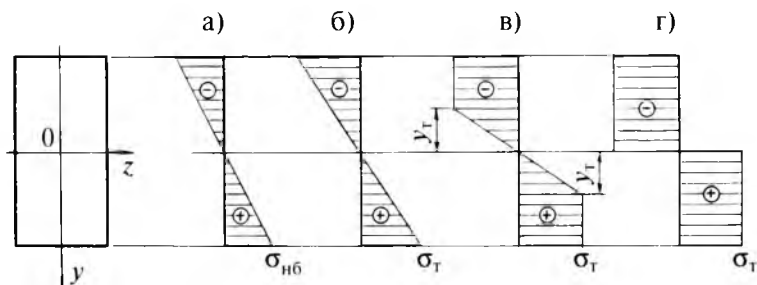


Рис. 22.3

Учитывая, что для прямоугольного сечения $J = bh^3/12$, получим

$$M_1 = \frac{\sigma_1 bh^2}{6}. \quad (22.2)$$

Полученное значение момента соответствует состоянию, при котором в балке возникают первые пластические деформации.

При дальнейшем увеличении нагрузки напряжения в крайних волокнах в соответствии с диаграммой Прандтля остаются постоянными, а рост момента компенсируется увеличением напряжений в средней части балки (рис. 22.3, в). При этом материал во внутренних слоях ($|y| < y_1$) находится в упругом состоянии, а в крайних слоях ($|y| \geq y_1$) — в пластическом.

Предельное состояние наступает, когда напряжения во всех волокнах в нижней и верхней частях балки достигнут значения σ_T (рис. 22.3, г). Соответствующий этому состоянию изгибающий момент называется *предельным* или *разрушающим* моментом, который можно вычислить по формуле

$$M_{\text{разр}} = \iint_F \sigma y dF.$$

Учитывая, что интегралы по верхней и нижней половинам сечения равны, и вынося из-под знака интеграла постоянное значение $\sigma = \sigma_T$, получим

$$M_{\text{разр}} = 2\sigma_T \iint_{F/2} y dF.$$

Интеграл, входящий в это выражение, равен статическому моменту половины сечения и обозначается $S^{1/2}$. Таким образом, для разрушающего момента получим

$$M_{\text{разр}} = 2\sigma_T S^{1/2}. \quad (22.3)$$

Для прямоугольника $S^{1/2} = bh^2/8$. Подставив это выражение в (22.3), найдем

$$M_{\text{разр}} = \frac{\sigma_T bh^2}{4}.$$

Отношение $\beta = M_{\text{разр}}/M_1 = 1,5$ характеризует запас прочности балок по отношению к состоянию, при котором в балке возникают первые пластические деформации. Для прокатных двутавров $\beta = 1,15 \div 1,17$. Это существенно меньше, чем для прямоугольного сечения, что объясняется рациональностью двутаврового сечения по сравнению с прямоугольным.

Рассмотренный способ расчета балок может использоваться и в случае поперечного изгиба, если учесть, что влияние сдвигов на величину нормальных напряжений незначительно. На рис. 22.4, а показана балка, нагруженная в середине сосредоточенной силой P . Наибольший изгибающий момент возникает в среднем сечении балки. При достижении моментом величины M_T (эпюра 1) в точках A и B (рис. 22.4, б) появятся первые пластические деформации. С увеличением силы P до некоторого значения P_1 момент в среднем сечении достигает величины M_1 (эпюра 2), а в сечениях D и E моменты достигнут величины M_T . При этом пластические зоны распространятся в глубь балки (на рис. 22.4, б эти зоны заштрихованы). Предельным будет такое состояние, при котором пластические зоны сомкнутся (показаны пунктиром). При этом в среднем сечении балки образуется так называемый *пластический шарнир*. Эпюра напряжений, соответствующая образованию пластического шарнира, показана на рис. 22.3, г. Образование пластического шарнира в статически определимых балках приводит к их разрушению, а в статически неопределимых — к понижению степени статической неопределимости на единицу.

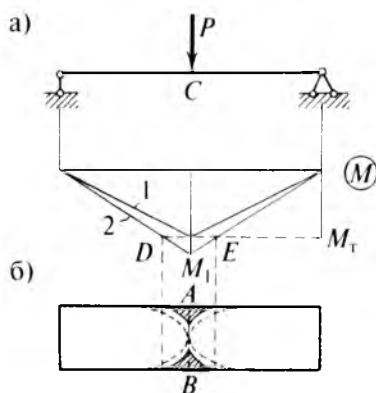


Рис. 22.4

Для вычисления изгибающего момента, соответствующего образованию пластического шарнира, можно использовать формулу (22.3), которую перепишем в виде

$$M_{\text{разр}} = \sigma_T W_T \quad (22.4)$$

где

$$W_T = 2S^{1/2} \quad (22.5)$$

называется *пластическим моментом сопротивления*. Для прямоугольного сечения $W_T = bh^2/4$.

Формулы (22.4), (22.5) могут использоваться для расчета любых балок, сечение которых симметрично относительно центральной оси. Так, например, для круга $S^{1/2} = 2R^3/3$ и $W_T = 4R^3/3$.

Если сечение балки несимметрично относительно центральной оси, то нейтральная ось при развитии пластических деформаций смещается. Положение нейтральной оси при образовании пластического шарнира может быть найдено из условия

$$N = \iint_F \sigma dF = 0. \quad (22.6)$$

Учитывая, что при образовании пластического шарнира напряжения в зонах растяжения и сжатия равны по абсолютной величине σ_T , из (22.6) получим

$$\sigma_T (F_p - F_c) = 0,$$

где F_p и F_c — соответственно площади зон растяжения и сжатия.

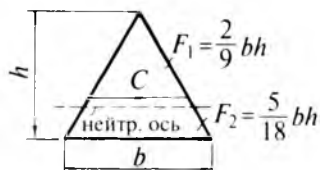


Рис. 22.5

Отсюда найдем условие, определяющее положение нейтральной оси: $F_p = F_c$. Например, для равнобедренного треугольника (рис. 22.5) площади частей сечения, расположенных выше и ниже оси, проходящей через центр тяжести, не равны ($F_1 \neq F_2$) и при образовании пластического шарнира нейтральная ось сместится вниз.

Упруго-пластическое кручение стержня круглого сечения. При кручении стержня круглого сечения отличными от нуля являются напряжения $\tau_{\theta z}$ (здесь ось Oz направлена по оси стержня), которые в упругой задаче (см. § 8.2) определяются по формуле

$$\tau_{\theta z} = \frac{M_\kappa}{J_p} r. \quad (22.7)$$

Соответствующая эпюра напряжений показана на рис. 22.6, а.

Увеличение крутящего момента M_κ приводит к росту напряжений до тех пор, пока наибольшие напряжения вблизи контура

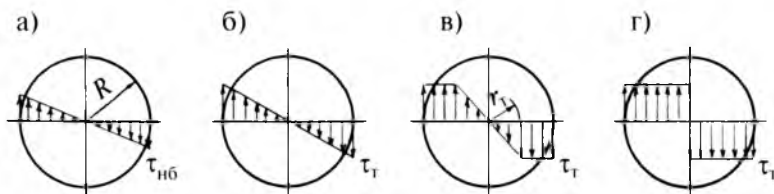


Рис. 22.6

сечения в соответствии с диаграммой Прандтля не достигнут предела текучести при сдвиге τ_t (рис. 22.6, б). Соответствующее значение момента может быть определено из (22.7). Учитывая, что $\tau_t = M_t R / J_p$, а $J_p = \pi R^4 / 2$, найдем

$$M_t = \tau_t \frac{\pi R^3}{2}. \quad (22.8)$$

В этом состоянии на контуре сечения появляются первые пластические деформации. При дальнейшем увеличении момента напряжения вблизи контура в соответствии с диаграммой Прандтля (рис. 22.1, в) остаются постоянными и равными τ_t , а приращение момента компенсируется увеличением напряжений во внутренних кольцевых слоях сечения (рис. 22.6, в). При этом внутренняя часть стержня, где напряжения не превышают τ_t ($r < r_t$), находится в упругом состоянии и называется *упругим ядром*.

Предельное состояние наступает, когда напряжения во всем сечении достигнут предела текучести τ_t (рис. 22.6, г). Крутящий момент в этом состоянии равен

$$M_{\text{разр}} = \iint_F \tau_t r dF = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \tau_t r^2 dr = \frac{2}{3} \pi R^3 \tau_t.$$

Разделив полученное выражение на значение крутящего момента, определяемого формулой (22.8), получим $\beta = M_{\text{разр}} / M_t = 4/3$.

22.2. Основы деформационной теории пластичности

В настоящее время существуют две теории пластичности. Первая — *деформационная теория пластичности*, называемая также *теорией малых упруго-пластических деформаций*, получила свое развитие в многочисленных работах А. А. Ильюшина. В основу этой

теории положены физические соотношения, связывающие напряжения и деформации. Как показывают экспериментальные исследования, деформационная теория пластичности справедлива при относительно небольших пластических деформациях при осуществлении *простого нагружения*. Последний термин определяет такое нагружение, при котором все внешние нагрузки изменяются пропорционально одному параметру, например времени.

Вторая теория — *теория течения*, в которой физические соотношения связывают напряжения с приращениями деформаций или скоростями деформаций. В этой теории процесс деформирования рассматривается как течение вязкой жидкости. Теория течения применяется, как правило, при больших деформациях, возникающих, например, в таких процессах, как ковка, штамповка, волочение и т.д. При этом в теории течения процесс нагружения может быть *сложным*, когда нагрузки, прикладываемые к телу, изменяются независимо друг от друга.

Как было отмечено, отличия в двух теориях пластичности заключаются в физических законах. Что касается двух других групп основных соотношений механики — дифференциальных уравнений равновесия и соотношений Коши, то они справедливы в обеих теориях пластичности и имеют тот же вид, что и в теории упругости (см. гл. 4 и 5).

Наряду с общепринятыми обозначениями, используемыми в механике деформируемого твердого тела, в теории пластичности вводятся новые понятия.

Интенсивность напряжений

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}. \quad (22.9)$$

Интенсивность деформаций

$$\epsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + (\epsilon_y - \epsilon_z)^2 + (\epsilon_z - \epsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}. \quad (22.10)$$

Эти же величины могут быть выражены соответственно через главные напряжения и главные деформации:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}; \quad (22.11)$$

$$\epsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2}. \quad (22.12)$$

Интенсивности напряжений и деформаций используются в физических соотношениях теории пластичности.

Процесс деформирования пластичных материалов может быть разделен на две стадии. Первая — упругое деформирование при малых деформациях. Компоненты тензоров напряжений и деформаций при этом связаны между собой законом Гука (см. гл. 6). Прежде чем перейти к установлению физических зависимостей на второй стадии (стадии пластического деформирования), следует определить условия возникновения пластических деформаций. В простейшем случае одноосного напряженного состояния это условие соответствует равенству напряжений пределу текучести σ_1 , при котором на диаграмме $\sigma - \epsilon$ имеется площадка текучести. При сложном напряженном состоянии условие появления пластических деформаций устанавливается на основании двух критериев, соответствующих двум теориям прочности (см. § 12.5).

Критерий Треска — Сен-Венана, согласно которому материал переходит в пластическое состояние, когда наибольшее касательное напряжение $\tau_{\text{нб}}$ достигает предела текучести τ_1 при сдвиге. Учитывая, что $\tau_1 = \sigma_1/2$, а $\tau_{\text{нб}} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$, получим условие пластичности Треска — Сен-Венана в виде

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_1. \quad (22.13)$$

Критерий Губера — Мизеса, в соответствии с которым пластические деформации возникают, когда интенсивность напряжений σ_1 достигает значения σ_1 . Используя соотношение (22.11), приходим к равенству

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2 \sigma_1^2. \quad (22.14)$$

Нетрудно заметить, что при некоторых видах напряженного состояния оба критерия дают один и тот же результат. Так, положив при одноосном растяжении $\sigma_1 = \sigma$; $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, из (22.13) и (22.14) получим одно и то же условие $\sigma = \sigma_1$. Наибольшие отличия между двумя критериями пластичности будут при чистом сдвиге. Если принять при этом, что $\sigma_1 = \tau$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -\tau$, то из (22.13) получим равенство $\tau = \sigma_1/2$, а из (22.14) — $\tau = \sigma_1/\sqrt{3}$. Отличия между двумя значениями τ не превышают 14%.

Перейдем к рассмотрению физических гипотез, положенных в основу деформационной теории пластичности.

1. Связь между интенсивностью напряжений и интенсивностью деформаций не зависит от вида напряженного состояния.

Из этой гипотезы следует, что зависимость $\sigma_i = f(\epsilon_i)$ одна и та же при любых комбинациях напряжений и деформаций и может быть определена из любого опыта. Наиболее простым является опыт на одноосное растяжение, при котором $\sigma_1 = \sigma$; $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, $\epsilon_1 = \epsilon$, $\epsilon_2 = \epsilon_3 = -\nu\epsilon$. Подставив эти значения в (22.11) и (22.12), получим

$$\sigma_i = \sigma; \quad \epsilon_i = \frac{2(1+\nu)}{3}\epsilon. \quad (22.15)$$

Имея зависимость $\sigma \sim \epsilon$, полученную при одноосном растяжении (см., например, рис. 22.1, а), по формулам (22.15) можно получить зависимость между σ_i и ϵ_i .

Как было отмечено в § 3.5, значение коэффициента поперечной деформации ν при переходе материала в пластическое состояние увеличивается до 0,5, что характерно для несжимаемого материала. Во многих расчетах для упрощения полагают $\nu = 0,5$ и в упругой, и в пластической зонах. Это позволяет использовать условие несжимаемости, записанное в виде

$$\epsilon_0 = \frac{1}{3}(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) = 0. \quad (22.16)$$

Положив в (22.15) $\nu = 0,5$, получим при одноосном растяжении $\epsilon_i = \epsilon$, и таким образом, диаграмма $\sigma \sim \epsilon$, полученная при одноосном растяжении, будет совпадать с диаграммой $\sigma_i \sim \epsilon_i$ при любом напряженном состоянии.

2. Между объемной деформацией e и средним напряжением σ_0 существует линейная зависимость

$$e = \frac{\sigma_0}{K}. \quad (22.17)$$

Здесь $K = \frac{E_0}{3(1-2\nu_0)}$ — модуль объемной деформации (см. § 6.2),

одинаковый в упругой и пластической зонах; E_0 и ν_0 — модуль упругости и коэффициент Пуассона, определяемые на начальном упругом этапе деформирования.

Если считать материал несжимаемым, то очевидно, что при $\nu \rightarrow 0,5$, $K \rightarrow \infty$ и из (22.17) следует также условие (22.16), если учесть, что $e = 3\epsilon_0$.

3. Компоненты девиатора напряжений пропорциональны компонентам девиатора деформаций.

В теории упругости компоненты девиаторов напряжений и деформаций связаны уравнениями (6.14). По аналогии с этими со-

отношениями запишем физические соотношения теории пластичности:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x - \sigma_0 &= 2G_c(\epsilon_x - \epsilon_0); & \tau_{xy} &= G_c\gamma_{xy}; \\ \sigma_y - \sigma_0 &= 2G_c(\epsilon_y - \epsilon_0); & \tau_{yz} &= G_c\gamma_{yz}; \\ \sigma_z - \sigma_0 &= 2G_c(\epsilon_z - \epsilon_0); & \tau_{zx} &= G_c\gamma_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (22.18)$$

Здесь вместо модуля сдвига G введено обозначение G_c . Эта величина не является постоянной, а зависит от напряжений в данной точке тела. Подставив $\sigma_x, \dots, \tau_{zx}$ из (22.18) в формулу (22.9), получим с учетом (22.10)

$$\sigma_i = 3G_c\epsilon_i.$$

Отсюда следует, что

$$G_c = \frac{\sigma_i}{3\epsilon_i}. \quad (22.19)$$

Смысл величины G_c можно понять из рис. 22.7, а. Если ввести понятие *секущего модуля* E_c , равного

$$E_c = \frac{\sigma_i}{\epsilon_i}, \quad (22.20)$$

то из (22.19) следует, что

$$G_c = \frac{E_c}{3}. \quad (22.21)$$

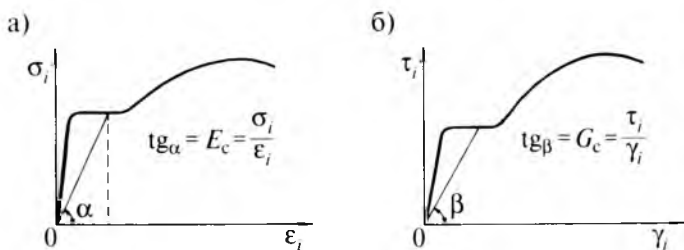


Рис. 22.7

Величина G_c является секущим модулем на диаграмме $\tau_i \sim \gamma_i$ (рис. 22.7, б), где $\tau_i = \sigma_i / \sqrt{3}$ — интенсивность касательных напряжений, а $\gamma_i = \sqrt{3}\epsilon_i$ — интенсивность деформаций сдвига. При этом следует заметить, что диаграмма $\tau_i \sim \gamma_i$ совпадает с диаграммой чистого сдвига $\tau \sim \gamma$.

Из формулы (22.19) следует, что поскольку коэффициент пропорциональности G_c не является постоянным, а зависит от напря-

жений и деформаций, соотношения (22.18) являются нелинейными и, таким образом, задача теории пластичности также является нелинейной. Задачи теории пластичности сводятся к нелинейным дифференциальным уравнениям, что значительно усложняет их решение по сравнению с задачами теории упругости, являющимися линейными.

Все рассмотренные выше соотношения относятся к так называемому *активному* деформированию, при котором в процессе нагружения во всех точках тела каждое последующее значение интенсивности напряжений σ_i больше предыдущего. Во многих задачах, особенно при сложном нагружении, когда нагрузки, действующие на тело, прикладываются не одновременно, в отдельных частях тела может произойти разгрузка, при которой σ_i уменьшается или остается постоянной величиной. Такой процесс называется *пассивным* деформированием.

В качестве примера можно рассмотреть балку, показанную на рис. 22.8. Если сначала приложить силу P_1 , то балка изогнется по кривой 1. После приложения силы P_2 прогибы (кривая 2) в пролете уменьшатся. Если под действием силы P_1 в балке появятся пластические деформации, то после приложения силы P_2 напряжения в пролете уменьшатся, при этом разгрузка будет происходить по закону Гука (см. § 3.5).

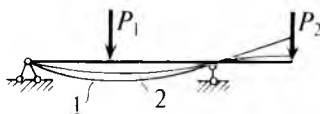


Рис. 22.8

Таким образом, при решении задач теории пластичности необходимо следить за изменением интенсивности напряжений в каждой точке тела в течение всего процесса деформирования и при необходимости использовать соответствующие физические соотношения.



Рис. 22.9

Если процесс деформирования является активным, то решение задачи теории пластичности совпадает с решением задачи для *нелинейно упругого материала*, диаграмма $\sigma_i \sim \epsilon_i$ которого также является нелинейной, но разгрузка идет не по линейному закону, как в случае упруго-пластического материала, а по той же диаграмме, и при снятии нагрузки деформации обращаются в нуль (рис. 22.9).

22.3. Упруго-пластическое состояние толстостенной трубы

Будем полагать, что труба, нагруженная внутренним и внешним давлениями p_1 и p_2 (рис. 22.10), находится в условиях плоской деформации, то есть $\varepsilon_z = 0$. Решение этой задачи при упругом деформировании, полученное в § 18.5, имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{(p_2 - p_1)a^2b^2}{(b^2 - a^2)r^2} + \frac{p_1a^2 - p_2b^2}{b^2 - a^2}; \\ \sigma_\theta &= -\frac{(p_2 - p_1)a^2b^2}{(b^2 - a^2)r^2} + \frac{p_1a^2 - p_2b^2}{b^2 - a^2}. \end{aligned} \right\} \quad (22.22)$$

Предполагая, что материал является не-сжимаемым как в пластической, так и в упругой зонах ($\nu = 0,5$), из соотношения (18.50) найдем

$$\sigma_z = \frac{p_1a^2 - p_2b^2}{b^2 - a^2}. \quad (22.23)$$

В силу осевой симметрии задачи касательные напряжения равны нулю. Для определения условия возникновения пластических деформаций воспользуемся критерием Губера — Мизеса. Подставляя (22.22) и (22.23) в (22.9), для интенсивности напряжений получим выражение

$$\sigma_i = \pm \frac{\sqrt{3}(p_1 - p_2)a^2b^2}{(b^2 - a^2)r^2}. \quad (22.24)$$

Знак в этом равенстве зависит от знака разности между давлениями. В дальнейшем будем полагать, что $p_1 > p_2$, и тогда выражение (22.24) следует считать положительным.

Очевидно, что наибольшего значения σ_i достигает на внутреннем контуре трубы при $r = a$. Именно здесь и возникнут первые пластические деформации. Используя условие (22.14), найдем величину разности давлений, соответствующую этому условию:

$$(p_1 - p_2)_1 = \frac{\sigma_i(b^2 - a^2)}{\sqrt{3}b^2}. \quad (22.25)$$

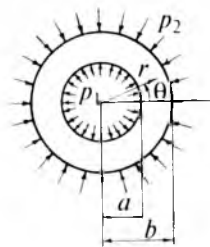


Рис. 22.10

Нетрудно проверить, что согласно критерию Треска — Сен-Венана условие появления пластических деформаций будет иметь вид

$$(p_1 - p_2)_r = \frac{\sigma_r(b^2 - a^2)}{2b^2}.$$

С увеличением разности между давлениями пластическая зона будет увеличиваться (рис. 22.11). Обозначив через c радиус окружности, разделяющей упругую и пластическую зоны, найдем решение для каждой из этих зон.



Рис. 22.11

В упругой зоне решение может быть записано в виде (см. § 18.5)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{C_1}{r^2} + C_2; \\ \sigma_{\theta e} &= -\frac{C_1}{r^2} + C_2, \end{aligned} \right\} \quad (22.26)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, подлежащие определению. Индекс «e» означает отношение к упругой зоне (от английского слова *elastic*).

Решение в пластической зоне будем искать, считая, что материал подчиняется диаграмме Прандтля (см. рис. 22.1, б). В этом случае в пластической зоне справедливо равенство

$$\sigma_{ip} = \sigma_r.$$

Здесь индекс «p» означает отношение к пластической зоне (от английского слова *plastic*).

Перейдя в (22.18) к цилиндрическим координатам r, θ, z и положив в третьем равенстве $\epsilon_0 = 0$ (условие несжимаемости), а также $\epsilon_z = 0$ (условие плоской деформации), получим

$$\sigma_{zp} = \sigma_0. \quad (22.27)$$

Из формулы для среднего напряжения $\sigma_0 = (\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z)/3$ с учетом (22.27) найдем

$$\sigma_{zp} = \frac{\sigma_r + \sigma_{\theta p}}{2}.$$

Подставляя полученное равенство в (22.9), записанное в цилиндрических координатах, приходим к следующему выражению для интенсивности напряжений:

$$\sigma_{ip} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} (\sigma_{\theta p} - \sigma_r).$$

Используя это равенство, получим

$$\sigma_{\theta p} - \sigma_r = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_{ip} = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_r. \quad (22.28)$$

Полагая, как и ранее, $p_1 > p_2$, примем в последнем равенстве знак плюс. Справедливость этого будет подтверждена в дальнейшем.

Рассматривая уравнения равновесия плоской задачи в полярных координатах (18.3), убеждаемся, что второе уравнение удовлетворяется тождественно, а из первого с учетом (22.28) следует

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sigma_r}{r}.$$

Интегрируя полученное уравнение, найдем

$$\sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_r \ln r + C_3^*,$$

или

$$\sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_1 \left(\ln \frac{r}{c} + C_3 \right). \quad (22.29)$$

Из (22.28) получим выражение для $\sigma_{\theta p}$:

$$\sigma_{\theta p} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_1 \left(\ln \frac{r}{c} + C_3 + 1 \right). \quad (22.30)$$

Выражения (22.26), (22.29), (22.30) для напряжений в упругой и пластической зонах трубы содержат четыре неизвестных: C_1, C_2, C_3 и c . Для их определения воспользуемся граничными условиями

$$\begin{aligned} r = a, & \quad \sigma_r = -p_1; \\ r = b, & \quad \sigma_{re} = -p_2; \\ r = c, & \quad \sigma_r = \sigma_{re}; \\ & \quad \sigma_{\theta e} - \sigma_{re} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_r. \end{aligned}$$

Последнее равенство соответствует условию перехода материала из упругого состояния в пластическое.

Подставляя в эти условия соответствующие выражения для напряжений, получим систему четырех алгебраических уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_1 \left(\ln \frac{a}{c} + C_3 \right) &= -p_1; \\ \frac{C_1}{b^2} + C_2 &= -p_2; \\ \frac{C_1}{c^2} + C_2 &= \frac{2\sigma_1}{\sqrt{3}} C_3; \\ -\frac{C_1}{c^2} &= \frac{\sigma_1}{\sqrt{3}}. \end{aligned} \right\} \quad (22.31)$$

Из этой системы найдем выражения для постоянных C_1 , C_2 и C_3 через c :

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{\sigma_1 c^2}{\sqrt{3}}; \quad C_2 = -p_2 + \frac{\sigma_1 c^2}{\sqrt{3} b^2}; \\ C_3 &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{p_2}{\sigma_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{c^2}{b^2} - 1 \right). \end{aligned}$$

Для определения c из первого равенства (22.31) получим трансцендентное уравнение

$$p_1 - p_2 = \frac{\sigma_1}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{c^2}{b^2} - 2 \ln \frac{a}{c} \right). \quad (22.32)$$

Из этого уравнения, в частности, следует, что поскольку $\ln(a/c) < 0$, а $c^2/b^2 < 1$, выражение, стоящее справа, положительно, что соответствует принятому выше условию $p_1 > p_2$. В случае когда $p_2 > p_1$, в равенстве (22.28) следует взять знак минус.

С помощью формулы (22.32) можно также найти разность между давлениями, соответствующую появлению первых пластических деформаций. Положив $c = a$, приходим к условию, совпадающему с (22.25).

Формула (22.32) позволяет также найти предельную разность $(p_1 - p_2)_{\text{разр}}$, при которой материал всей трубы переходит в пластическое состояние. Положив $c = b$, получим

$$(p_1 - p_2)_{\text{разр}} = \frac{2\sigma_1}{\sqrt{3}} \ln \frac{b}{a}.$$

Решение уравнения (22.32) при заданных значениях p_1 и p_2 может быть получено численно или графически. Более удобно решать обратную задачу — найти разность $(p_1 - p_2)$, соответствующую заданному значению c . На рис. 22.12, а построен график зависимости $(p_1 - p_2)$ от c при $b/a = 2$. По этому графику можно найти величину $(p_1 - p_2)_T$, равную в данном случае $0,432 \sigma_T$, величину $(p_1 - p_2)_{\text{разр}}$, равную $0,81 \sigma_T$, а также определить радиус c при произвольном значении разности $(p_1 - p_2)$, находящейся в пределах между $(p_1 - p_2)_T$ и $(p_1 - p_2)_{\text{разр}}$.

Определив c и найдя постоянные интегрирования C_1, C_2 и C_3 с помощью равенств (22.26), (22.29), (22.30), можно определить напряжения в упругой и пластической зонах трубы. На рис. 22.12, б показаны эпюры σ_r и σ_θ при трех значениях отношения c/a .

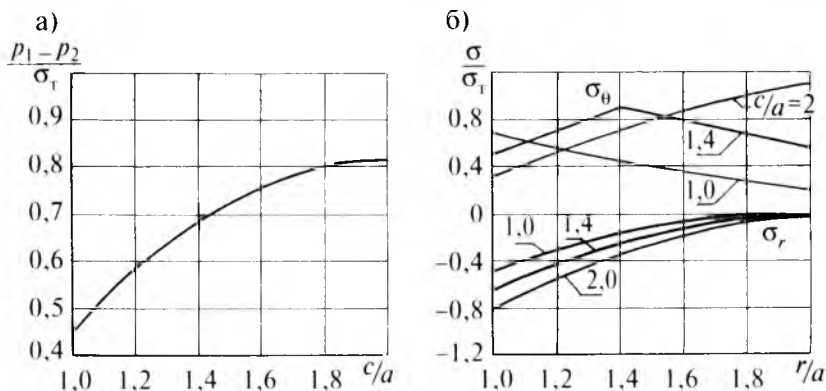


Рис. 22.12

22.4. Приближенные методы решения задач теории пластичности

Как было отмечено выше, решение физически нелинейных задач, к которым относятся задачи теории пластичности, сводится к решению нелинейных дифференциальных уравнений. Поскольку аналитическое решение таких уравнений удастся получить лишь в простейших случаях, широкое распространение получили различные приближенные методы, основанные на линеаризации уравнений теории пластичности. Ниже рассматриваются три таких метода.

Метод упругих решений. Этот метод разработан А.А. Ильюшиным. В основу метода положена постановка задачи в перемещениях. Прежде чем перейти к выводу разрешающих уравнений, анало-

гичных уравнениям Ляме в теории упругости (см. § 16.5), введем еще одну функцию ω , характеризующую степень упрочнения материала (рис. 22.13):

$$\omega(\epsilon_i) = 1 - \frac{\sigma_i(\epsilon_i)}{E\epsilon_i}. \quad (22.33)$$

Здесь $E = \operatorname{tg} \alpha$ — модуль упругости.

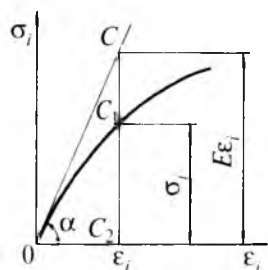


Рис. 22.13

Эта функция характеризует отношение отрезка CC_1 к отрезку CC_2 . Первый отрезок определяется разностью между напряжением $E\epsilon_i$, соответствующим упругому состоянию, и напряжениями σ_i в пластическом состоянии. Отрезок CC_2 равен напряжениям в упругом материале. Чем ближе кривая деформирования к прямой OC , тем меньше функция ω . В частном случае при упругом деформировании $\omega = 0$.

Используя функцию ω и учитывая (22.17) и (22.19), преобразуем физические соотношения (22.18) к виду

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \left(\lambda + \frac{2}{3} G \omega \right) e + 2G(1 - \omega) \epsilon_x; \\ \sigma_y &= \left(\lambda + \frac{2}{3} G \omega \right) e + 2G(1 - \omega) \epsilon_y; \\ \sigma_z &= \left(\lambda + \frac{2}{3} G \omega \right) e + 2G(1 - \omega) \epsilon_z; \\ \tau_{xy} &= G(1 - \omega) \gamma_{xy}; \\ \tau_{yz} &= G(1 - \omega) \gamma_{yz}; \\ \tau_{zx} &= G(1 - \omega) \gamma_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (22.34)$$

Здесь λ и $G = \mu$ — коэффициенты Ляме, $e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ — относительная объемная деформация.

Можно заметить, что при $\omega = 0$ равенства (22.34) переходят в уравнения закона Гука в форме Ляме (16.3, а).

Подставляя полученные выражения для напряжений в уравнения равновесия (16.1) и выражая деформации через перемещения с помощью соотношений Коши (16.2), приходим к следующей системе нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned}
 & G\nabla^2 u + (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial x} + X - \omega \left(\nabla^2 u + \frac{1}{3} \cdot \frac{\partial e}{\partial x} \right) + \\
 & + G \left[\frac{\partial \omega}{\partial x} \left(\frac{2}{3} e - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial \omega}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{\partial \omega}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] = 0; \\
 & G\nabla^2 v + (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial y} + Y - \omega \left(\nabla^2 v + \frac{1}{3} \cdot \frac{\partial e}{\partial y} \right) + \\
 & + G \left[\frac{\partial \omega}{\partial y} \left(\frac{2}{3} e - 2 \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial \omega}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{\partial \omega}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] = 0; \\
 & G\nabla^2 w + (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial z} + Z - \omega \left(\nabla^2 w + \frac{1}{3} \cdot \frac{\partial e}{\partial z} \right) + \\
 & + G \left[\frac{\partial \omega}{\partial z} \left(\frac{2}{3} e - 2 \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{\partial \omega}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{\partial \omega}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] = 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (22.35)$$

Нелинейность этих уравнений обусловлена тем, что функция ω , определяемая равенством (22.33), нелинейно зависит от перемещений, входящих в выражение для ϵ_r . Если в (22.35) положить $\omega = 0$, то эти уравнения (с учетом $G = \mu$) переходят в уравнения Ляме (16.12) для упругого материала.

Решение задачи теории пластичности, определяемое функциями u , v и w , должно удовлетворять системе уравнений (22.35) и граничным условиям на поверхности.

Выразив в (22.34) деформации через перемещения и подставив их в равенства (16.7), получим граничные условия в виде

$$\left. \begin{aligned}
 & \left[\left(\lambda + \frac{2}{3} G\omega \right) e + 2G(1-\omega) \frac{\partial u}{\partial x} \right] l + G(1-\omega) \times \\
 & \times \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) m + G(1-\omega) \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) n = p_{xv}; \\
 & G(1-\omega) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) l + \left[\left(\lambda + \frac{2}{3} G\omega \right) e + \right. \\
 & \left. + 2G(1-\omega) \frac{\partial v}{\partial y} \right] m + G(1-\omega) \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) n = p_{yv}; \\
 & G(1-\omega) \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) l + G(1-\omega) \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) m + \\
 & + \left[\left(\lambda + \frac{2}{3} G\omega \right) e + 2G(1-\omega) \frac{\partial w}{\partial z} \right] n = p_{zv}.
 \end{aligned} \right\} \quad (22.36)$$

Для решения задачи предлагается метод последовательных приближений, в котором на каждом шаге итерационного процесса используется упругое решение. Отсюда и происходит название — *метод упругих решений*.

Обозначим в первом из уравнений (22.35) все слагаемые, содержащие функцию ω и ее производные, через X^* , а во втором и третьем уравнениях — соответственно через Y^* и Z^* . Тогда систему уравнений (22.35) можно записать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} G \nabla^2 u + (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial x} + X + X^* &= 0; \\ G \nabla^2 v + (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial y} + Y + Y^* &= 0; \\ G \nabla^2 w + (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial z} + Z + Z^* &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (22.37)$$

В свою очередь, граничные условия (22.36) можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \left(\lambda e + 2G \frac{\partial u}{\partial x} \right) l + G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) m + G \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) n &= p_{xv} + p_{xv}^*; \\ G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) l + \left(\lambda e + 2G \frac{\partial v}{\partial y} \right) m + G \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) n &= p_{yv} + p_{yv}^*; \\ G \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) l + G \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) m + \left(\lambda e + 2G \frac{\partial w}{\partial z} \right) n &= p_{zv} + p_{zv}^*. \end{aligned} \right\} \quad (22.38)$$

Здесь через $p_{xv}^*, p_{yv}^*, p_{zv}^*$ обозначены слагаемые, содержащие в равенствах (22.36) функцию ω и ее производные.

Положим на первом этапе решения $X^* = Y^* = Z^* = 0$ и $p_{xv}^* = p_{yv}^* = p_{zv}^* = 0$, что соответствует $\omega = 0$, то есть упругому материалу. Найдем решение $u^{(1)}, v^{(1)}, w^{(1)}$, удовлетворяющее дифференциальным уравнениям и граничным условиям. По этому решению можно вычислить $\varepsilon_i(x, y, z)$, $\sigma_i(x, y, z)$ и $\omega(x, y, z)$. Зная ω , найдем выражения X^*, Y^*, Z^* и $p_{xv}^*, p_{yv}^*, p_{zv}^*$, которые на втором этапе решения можно рассматривать как дополнительные нагрузки в уравнениях (22.35) и граничных условиях (22.36). Рассматриваемый метод решения иногда называют *методом дополнительных нагрузок*.

Решая повторно задачу теории упругости с новыми объемными силами $(X + X^*), (Y + Y^*), (Z + Z^*)$ и поверхностными нагрузками $(p_{xv} + p_{xv}^*), (p_{yv} + p_{yv}^*), (p_{zv} + p_{zv}^*)$, находим второе приближение $u^{(2)}, v^{(2)}, w^{(2)}$, которое в дальнейшем используется для вычисления новых значений X^*, Y^*, Z^* и $p_{xv}^*, p_{yv}^*, p_{zv}^*$, и т.д.

Последовательность решений $u^{(n)}, v^{(n)}, w^{(n)}$ должна сходиться к искомому решению упруго-пластической задачи. Как показано в многочисленных расчетах, скорость сходимости итерационного процесса в значительной степени зависит от вида диаграммы $\sigma_i \sim \epsilon_i$. При большом упрочнении, когда диаграмма не сильно отличается от линейной, часто достаточно трех–четырёх итераций для получения результатов с удовлетворительной точностью.

Метод переменных параметров упругости. Данный метод, разработанный И.А. Биргером, так же как и метод упругих решений, является итерационным, но основан на другом представлении физических соотношений теории пластичности.

Преобразуем первое равенство (22.18), выразив из него деформацию ϵ_x с учетом (22.17) и $\epsilon_0 = e/3$, $\sigma_0 = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3$:

$$\epsilon_x = \sigma_x \left(\frac{1}{E_c} + \frac{1-2\nu_0}{3E_0} \right) - (\sigma_y + \sigma_z) \left(\frac{1}{2E_c} - \frac{1-2\nu_0}{3E_0} \right). \quad (22.39)$$

Если ввести обозначения

$$\frac{1}{E_n} = \frac{1}{E_c} + \frac{1-2\nu_0}{3E_0}; \quad \nu_n = \frac{3E_n}{2E_c} - 1, \quad (22.40)$$

то выражение (22.39) можно записать в виде

$$\epsilon_x = \frac{1}{E_n} [\sigma_x - \nu_n (\sigma_y + \sigma_z)],$$

совпадающем по форме с уравнением закона Гука (16.3). По аналогии могут быть получены выражения и для остальных деформаций. В результате получим

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E_n} [\sigma_x - \nu_n (\sigma_y + \sigma_z)], & \gamma_{xy} &= \frac{3\tau_{xy}}{E_c}; \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E_n} [\sigma_y - \nu_n (\sigma_z + \sigma_x)], & \gamma_{yz} &= \frac{3\tau_{yz}}{E_c}; \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E_n} [\sigma_z - \nu_n (\sigma_x + \sigma_y)], & \gamma_{zx} &= \frac{3\tau_{zx}}{E_c}. \end{aligned} \right\} \quad (22.41)$$

Равенства (22.41) по своей сути существенно отличаются от уравнений закона Гука тем, что содержат не постоянные упругости материала, а переменные параметры E_n и ν_n , которые, в свою очередь, зависят от секущего модуля E_c . Поскольку секущий модуль зависит от напряжений и деформаций в данной точке тела (см. рис. 22.7), то E_n и ν_n являются функциями координат, и таким образом, ра-

венства (22.41) как бы являются физическими соотношениями теории упругости для неоднородного тела. Задача дополнительно осложняется тем, что законы изменения $E_{\Pi}(x, y, z)$ и $\nu_{\Pi}(x, y, z)$ могут быть найдены лишь после решения задачи, когда по известным напряжениям и деформациям можно определить $\sigma_i(x, y, z)$, $\epsilon_i(x, y, z)$ и затем $E_{\Pi}(x, y, z)$ и $\nu_{\Pi}(x, y, z)$.

Применяя для решения задачи теории пластичности итерационный метод, на первом этапе решают упругую задачу, когда модуль упругости и коэффициент поперечной деформации считаются постоянными и равными соответственно E_0 и ν_0 . Вычислив напряжения и деформации, можно определить $\sigma_i^{(1)}$, $\epsilon_i^{(1)}$, а следовательно, и $E_c^{(1)} = \sigma_i^{(1)} / \epsilon_i^{(1)}$ в каждой точке тела.

На втором этапе решается задача, в которой в качестве физических соотношений используются равенства (22.41), содержащие $E_c^{(1)}$, $E_{\Pi}^{(1)}$ и $\nu_{\Pi}^{(1)}$, при этом две последние функции вычисляются согласно (22.40). Полученное таким образом решение позволяет вычислить $E_c^{(2)}$, $E_{\Pi}^{(2)}$, $\nu_{\Pi}^{(2)}$ и перейти к следующему приближению. Последовательность решений сходится к искомому решению задачи теории пластичности.

Как показано в различных исследованиях, сходимость метода переменных параметров упругости, определяемая количеством итераций, необходимых для получения решения с требуемой точностью, как правило, выше, чем метода упругих решений. Однако решение на каждом этапе итерационного процесса в методе переменных параметров упругости получается более сложным, так как требует решения задачи теории упругости неоднородных тел. Таким образом, ответ на вопрос о том, какой из двух рассмотренных методов является более эффективным, может быть получен лишь при решении конкретной задачи.

Метод последовательных нагружений. Рассматриваемый метод, называемый также *шаговым методом*, основан на решении ряда

упругих задач при разбиении внешних объемных и поверхностных нагрузок на N малых значений. Если обозначить произвольную нагрузку через P , то решение на каждом этапе ищется при нагрузке, равной $\Delta P = P/N$. На первом этапе в законе Гука используются постоянные E_0 и ν_0 , а на последующих в качестве модуля упругости берется касательный модуль (рис. 22.14),

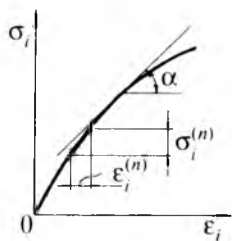


Рис. 22.14

$$E_k = \frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i} = \operatorname{tg} \alpha,$$

а коэффициент поперечной деформации вычисляется по второй формуле (22.40), в которую вместо E_{II} следует подставить E_k .

Напряжения, деформации и перемещения при полной нагрузке вычисляются путем суммирования:

$$\sigma_x = \sum_{n=1}^N \sigma_x^{(n)}, \dots; \quad \varepsilon_x = \sum_{n=1}^N \varepsilon_x^{(n)}, \dots; \quad u = \sum_{n=1}^N u^{(n)}, \dots$$

На рис. 22.14 показаны составляющие интенсивностей напряжений и деформаций, получаемые на одном шаге решения.

Шаговый метод является весьма чувствительным к выбору шага по нагрузке ΔP , и для получения точного решения требуется брать большое значение N , что ведет к увеличению продолжительности итерационного процесса.

Расчет толстостенной трубы. В качестве примера применения приближенных методов рассмотрим расчет толстостенной бетонной трубы, материал которой имеет нелинейную диаграмму деформирования, описываемую соотношением

$$\sigma_i = E_0 \varepsilon_i - A \varepsilon_i^k, \quad (22.42)$$

Здесь E_0 , A и k — постоянные характеристики материала, определяемые из эксперимента.

Рассматривая процесс активного деформирования, не будем делать различий между упруго-пластическим и нелинейно упругим материалом.

Размеры трубы определяются радиусами внутренней и внешней поверхностей a и b . Труба находится под действием внешнего равномерного давления p .

Применим для решения задачи метод переменных параметров упругости. Считая, что труба находится в условиях плоской деформации, запишем исходные уравнения в следующем виде.

Уравнение равновесия

$$\sigma_\theta = r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r. \quad (22.43)$$

Условие совместности деформаций

$$\frac{d\varepsilon_\theta}{dr} + \frac{\varepsilon_\theta - \varepsilon_r}{r} = 0, \quad (22.44)$$

которое получится, если из соотношений Коши $\varepsilon_r = du/dr$, $\varepsilon_\theta = u/r$ исключить перемещение u .

Закон Гука:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{1 - \nu_n^2(r)}{E_n(r)} \left[\sigma_r - \frac{\nu_n(r)}{1 - \nu_n(r)} \sigma_\theta \right]; \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1 - \nu_n^2(r)}{E_n(r)} \left[\sigma_\theta - \frac{\nu_n(r)}{1 - \nu_n(r)} \sigma_r \right].\end{aligned}\quad (22.45)$$

Здесь в соответствии с (22.40) и (22.42) принято

$$E_n = \frac{3E_0 E_c}{3E_0 + E_c(1 - 2\nu_0)}; \quad E_c = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} = E - A\varepsilon_i^{k-1}; \quad \nu_n = \frac{3E_n}{2E_c} - 1.$$

Подставив полученные выражения для деформаций ε_r и ε_θ в (22.44) с учетом (22.43), придем к разрешающему дифференциальному уравнению относительно напряжения σ_r :

$$\begin{aligned}\sigma_r'' + \left[3 - r \left(\frac{2\nu_n \nu_n'}{1 - \nu_n^2} + \frac{E_n'}{E_n} \right) \right] \sigma_r' - \\ - r \left(\frac{1 + 4\nu_n}{1 - \nu_n^2} \cdot \nu_n' + \frac{1 - 2\nu_n}{1 - \nu_n} \cdot \frac{E_n'}{E_n} \right) \sigma_r = 0.\end{aligned}\quad (22.46)$$

На n -м шаге итерационного процесса уравнение (22.46) решается для значений ν_n и E_n , определенных на $(n - 1)$ шаге. При этом интенсивность деформаций, входящая в выражение для секущего модуля E_c , вычисляется по формуле

$$\varepsilon_i^{(n-1)} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{[\varepsilon_r^{(n-1)} - \varepsilon_\theta^{(n-1)}]^2 + [\varepsilon_r^{(n-1)}]^2 + [\varepsilon_\theta^{(n-1)}]^2}.$$

Уравнение (22.46) в силу сложности коэффициентов решается на каждом шаге численно методом прогонки (см. § 21.1). Сходимость метода существенно зависит от нагрузки. При малом давлении p , когда поведение материала близко к линейно упругому, для

получения точных результатов достаточно двух—трех итераций. Если же значение давления таково, что ε_i приближается к ε_i^* , соответствующей максимуму на диаграмме $\sigma_i \sim \varepsilon_i$, (рис. 22.15), для достижения достаточной точности (около 1%) необходимо сделать 12—13 приближений.

На рис. 22.16 приведены эпюры напряжений σ_θ в трубе с размерами $a = 0,3$ м,

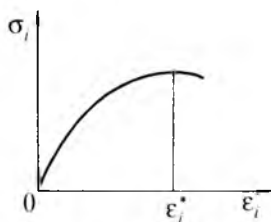


Рис. 22.15

$b = 0,5$ м, вычисленные для линейно упругого (пунктир) и нелинейно упругого материалов с постоянными $E_0 = 3 \cdot 10^4$ МПа; $A = 2 \cdot 10^5$ МПа; $k = 1,5$; $\nu_0 = 0,2$ при действии внешнего давления $p = 50$ МПа.

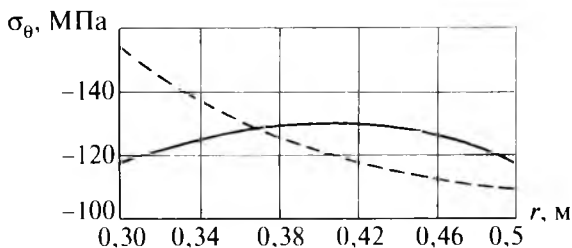


Рис. 22.16

Из приведенных графиков видно, что нелинейность материала существенно сказывается на напряженном состоянии трубы. Уменьшение напряжений σ_θ вблизи внутреннего контура трубы при учете нелинейности составляет более 25%. Рост напряжений вблизи внешнего контура обусловлен условием равновесия $\sum Y = 0$, которое должно выполняться для полонины трубы (рис. 22.17):

$$-\int_0^\pi p \sin \theta b d\theta - 2 \int_a^b \sigma_\theta dr = 0.$$

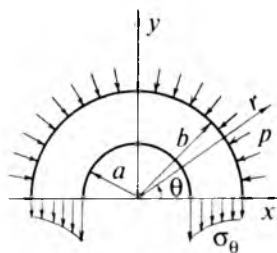


Рис. 22.17

Поскольку первое слагаемое в этом равенстве постоянно и равно $-2pb$, интеграл от напряжений σ_θ должен принимать одно и то же значение при любой функции $\sigma_\theta(r)$. Из последнего равенства также следует, что напряжения σ_θ должны быть отрицательными (сжимающими).

22.5. Ползучесть и релаксация в твердых телах

Ползучестью называется явление, заключающееся в увеличении деформаций при постоянстве нагрузок, действующих на тело. Свойством ползучести обладают многие материалы (бетон, полимеры и композиты, грунты, металлы при высоких температурах и пр.).

Рассмотрим простейший опыт одноосного растяжения стержня, изготовленного из материала, обладающего свойством ползучести (рис. 22.18, а). Пусть в момент времени $t = 0$ к телу приложен груз весом P . Образец сначала удлинится на величину Δl_0 , а в дальнейшем со временем его удлинение Δl будет возрастать. При этом напряжения в образце $\sigma = P/F$ будут постоянными. Построим график зависимости деформаций $\epsilon = \Delta l/l_0$ от времени t (рис. 22.18, б). На этом рисунке через ϵ_e обозначены мгновенные упругие деформации, равные $\Delta l_0/l_0$, а через ϵ_c — деформации ползучести (индекс «с» от английского слова *creep*), зависящие от времени. Диаграмма $\epsilon(t)$, построенная на рис. 22.18, б, называется диаграммой или кривой ползучести. Полная деформация образца ϵ может быть представлена в виде суммы

$$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_c. \quad (22.47)$$

Используя закон Гука для упругих деформаций, перепишем последнее равенство в виде

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} + \epsilon_c. \quad (22.48)$$

Природа упругих деформаций и деформаций ползучести различна. Упругие деформации обусловлены изменением межатомных и межмолекулярных расстояний. Деформации ползучести связаны, например в полимерах, с движением длинноцепочных молекул или перемещениями надмолекулярных структур. Эти явления подобны движению вязкой жидкости, в связи с чем материалы, обладающие свойствами ползучести, часто называются вязкоупругими, а теория ползучести — теорией вязкоупругости.

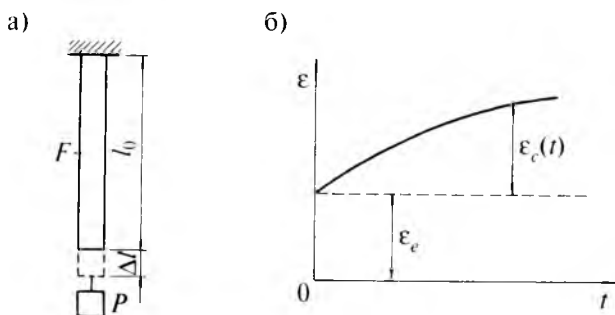


Рис. 22.18

Рассмотрим характерные особенности диаграмм ползучести (рис. 22.19). Кривая 1, асимптотически приближающаяся к предельному значению ϵ^* , соответствует *ограниченной ползучести*. Скорость деформации $d\epsilon/dt$ при ограниченной ползучести постепенно уменьшается, и образец не разрушается при сколь угодно большой продолжительности опыта. Кривые 2 и 3 соответствуют *неограниченной ползучести*. При некоторых усло-

виях кривая, соответствующая неограниченной ползучести, имеет участок с постоянной скоростью изменения деформаций ($d\epsilon/dt = \text{const}$). Такой процесс называется *установившейся ползучестью* (кривая 2). При неограниченной ползучести в определенный момент времени наступает разрушение образца.

Характер диаграмм ползучести зависит от многих факторов: свойств материала, величины напряжений, температуры и т.д. Так, например, с увеличением напряжений или при повышении температуры характер кривых ползучести может изменяться, переходя от кривой типа 1 к кривым 2 или 3 (см. рис. 22.19).

Вязкоупругие свойства материалов проявляются также и в других опытах. На рис. 22.20 показан стержень, предварительно растянутый и закрепленный по торцам. В таком опыте деформация с течением времени остается постоянной ($\epsilon = \text{const}$), а напряжения уменьшаются. Это явление называется *релаксацией напряжений*. Уменьшение напряжений в этом опыте можно объяснить следующим образом. Если в формуле (22.48) положить $\epsilon = \text{const}$, то рост деформаций ползучести ϵ_c со временем должен привести к уменьшению напряжений σ .

При определении механических характеристик вязкоупругих материалов проводят опыт, суть которого показана на рис. 22.21. Образец, находящийся в условиях ползучести, в момент времени t мгновенно разгружают. Упругие деформации ϵ_e исчезают, а составляющая полных деформаций, обусловленная ползучестью, начинает со временем убывать. Такой процесс называется *релаксацией деформаций* или *последствием*. При этом в зависимости от свойств материала и условий проведения опыта кривая диаграммы, соответствующая участку релаксации деформаций, может стремиться к нулю (кривая 1), что соответствует *полностью обратимым де-*

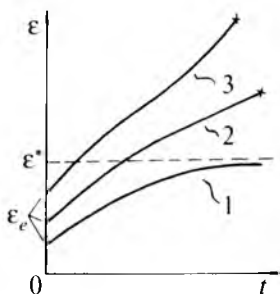


Рис. 22.19

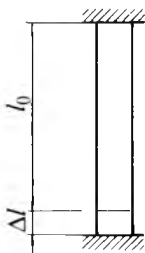


Рис. 22.20

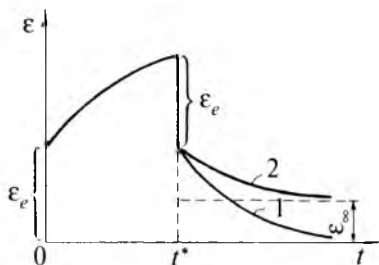


Рис. 22.21

формациям ползучести, или асимптотически приближаться к некоторому предельному значению ε_∞ (кривая 2). В последнем случае деформации ползучести являются не полностью обратимыми, что характерно для пластичных материалов. Следует отметить, что теория течения, являющаяся одной из теорий пластичности (см. § 22.2), имеет некоторую аналогию с теорией вязкоупругости, поскольку в обеих этих теориях процесс деформирования рассматривается как течение вязкой жидкости.

22.6. Модели вязкоупругих тел

В теории ползучести используются различные физические зависимости, объединяющие соотношения, характерные для упругого тела (закон Гука) и вязкой жидкости (закон Ньютона). Наиболее просто записать физические соотношения для случая одноосного напряженного состояния. Рассмотрим различные модели вязкоупругих тел. Упругое тело можно схематически изобразить в виде пружины (рис. 22.22, а), жесткость которой равна модулю упругости материала E . Деформация такого элемента связана с напряжением законом Гука

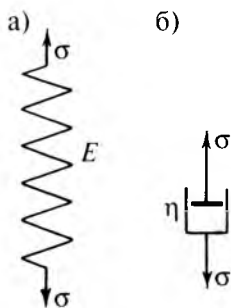


Рис. 22.22

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}. \quad (22.49)$$

Элемент, обладающий свойствами вязкой жидкости, изображается в виде поршня (рис. 22.22, б), движущегося в вязкой жидкости. Коэффициент вязкости этого элемента обозначим через η .

Закон Ньютона, описывающий течение вязкой жидкости, имеет вид

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\sigma}{\eta}. \quad (22.50)$$

Этот закон устанавливает, что скорость деформации пропорциональна действующему напряжению.

Комбинируя различным образом два рассмотренных элемента, можно получить разные модели вязкоупругих тел, соответствующие различным физическим законам теории ползучести. Рассмотрим некоторые из этих моделей.

Наиболее простым соединением двух элементов является последовательное (рис. 22.23). Такая модель называется моделью *Максвелла*. Выведем дифференциальное уравнение, соответствующее этой модели.

Суммарная деформация рассматриваемого элемента вычисляется по формуле (22.47). Продифференцировав это равенство по времени, получим

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon_e}{dt} + \frac{d\varepsilon_c}{dt}.$$



Рис. 22.23

Используя для упругих деформаций закон Гука (22.49), а для деформаций ползучести — закон Ньютона (22.50), приходим к следующему соотношению:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E} \cdot \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta}. \quad (22.51)$$

Это равенство представляет собой дифференциальное уравнение, связывающее скорость изменения полных деформаций с напряжением и скоростью изменения напряжений.

Найдем решение уравнения (22.51) для двух рассмотренных выше случаев одноосного нагружения стержня.

Ползучесть. Положив в (22.51) $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$, получим уравнение

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\sigma_0}{\eta},$$

интегрируя которое найдем

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{\eta} t + C.$$

Используя начальное условие

$$t = 0, \quad \varepsilon = \varepsilon_e = \frac{\sigma_0}{E},$$

находим постоянную интегрирования $C = \sigma_0/E$. Окончательно для процесса ползучести получим следующий закон изменения деформаций:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{\eta} t + \frac{\sigma_0}{E}.$$

На рис. 22.24 показано несколько диаграмм ползучести, построенных для различных значений η . Поскольку скорость изменения деформаций на этих диаграммах постоянна, можно сделать вывод, что модель Максвелла описывает только установившуюся ползучесть. Кроме того, заметим, что в зависимости от величины коэффициента вязкости η скорость ползучести различна. С ростом η скорость ползучести уменьшается.

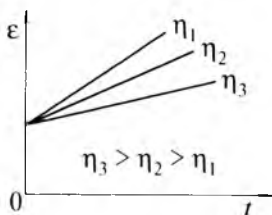


Рис. 22.24

Релаксация напряжений. Положим в (22.51) $\varepsilon = \varepsilon_0 = \text{const}$.

В этом случае приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{E}{\eta} \sigma.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\sigma = A e^{-\frac{E}{\eta} t}.$$

Найдя произвольную постоянную интегрирования A из начального условия

$$t = 0, \quad \sigma = \sigma_e = E\varepsilon_0,$$

получим окончательно

$$\sigma = E\varepsilon_0 e^{-\frac{E}{\eta} t}.$$

Соответствующие данному решению кривые релаксации напряжений показаны на рис. 22.25. С течением времени напряжения в образце уменьшаются до нуля (кривая 1). В то же время в реальных материалах в процессе релаксации напряжений последние не всегда исчезают, а приближаются асимптотически к некоторому предельному значению σ_∞ (кривая 2).

Рассмотренные примеры показывают, что с помощью модели Максвелла удается описать только простейшие процессы, происходящие в вязкоупругих телах.

Другой простой моделью является модель Фойгта (рис. 22.26). В этой модели упругий элемент имеет жесткость E_∞ (смысл индекса будет объяснен в дальнейшем). При параллельном соединении упругого и вязкого элементов напряжения в этих двух элементах суммируются, и физический закон в случае одноосного нагружения имеет вид

$$\sigma = \sigma_e + \sigma_c = E_\infty \varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt},$$

или

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{E_\infty}{\eta} \varepsilon = \frac{\sigma}{\eta}. \quad (22.52)$$

Используя модель Фойгта, рассмотрим процесс ползучести. Положив в (22.52) $\sigma = \sigma_0$, получим решение уравнения в виде

$$\varepsilon = A e^{-\frac{E_\infty}{\eta} t} + \frac{\sigma_0}{E_\infty}.$$

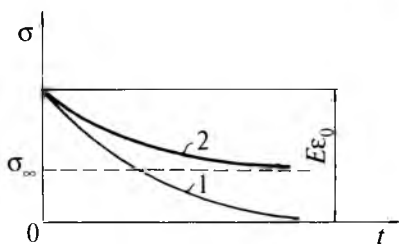


Рис. 22.25

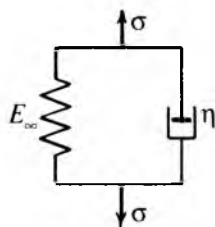


Рис. 22.26

Поскольку оба элемента деформируются совместно, в начальный момент времени $t = 0$ деформации отсутствуют ($\varepsilon = 0$). Из этого начального условия определяется постоянная интегрирования A , и окончательно для процесса ползучести получим следующий закон изменения деформаций:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E_\infty} \left(1 - e^{-\frac{E_\infty}{\eta} t} \right).$$

На рис. 22.27 показана кривая ползучести, соответствующая полученному решению. Эта кривая соответствует ограниченной ползучести. При $t \rightarrow \infty$ деформации стремятся к предельному значению σ_0/E_∞ . Для полимерных материалов постоянная величина E_∞ называется *модулем высокоэластичности* или *длительным модулем упругости* (отсюда индекс ∞). Связь между напряжениями и деформациями на бесконечности аналогична закону Гука, но с постоянными E_∞ и ν_∞ . На кривой ползучести (см. рис. 22.27) отсутствуют мгновенные упругие деформации, что ограничивает применимость модели Фойгта к расчетам реальных тел.

Более универсальной является модель Кельвина — Фойгта (рис. 22.28), объединяющая модель Фойгта и упругий элемент, изображенный на рис. 22.22. Дифференциальное уравнение, описывающее поведение этой модели, имеет вид

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E} \cdot \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma - E_\infty \varepsilon}{\eta}. \quad (22.53)$$

При ползучести ($\sigma = \sigma_0 = \text{const}$) решение уравнения (22.53) запишем следующим образом:

$$\varepsilon = \sigma_0 \left(\frac{1}{E} - \frac{1}{E_\infty} \right) e^{-\frac{E_\infty}{\eta} t} + \frac{\sigma_0}{E_\infty}.$$

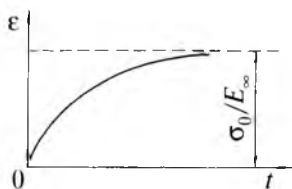


Рис. 22.27

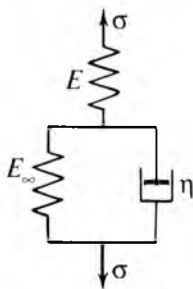


Рис. 22.28

Соответствующая диаграмма ползучести показана на рис. 22.29, а. Полученная в результате расчета кривая ползучести, так же как и в случае модели Фойгта, соответствует ограниченной ползучести, но при этом имеет скачок при $t = 0$, соответствующий упругой деформации.

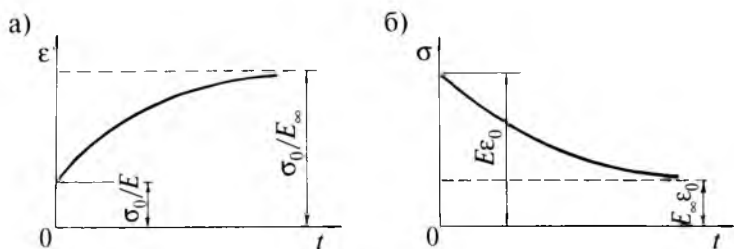


Рис. 22.29

Для расчета процесса релаксации напряжений положим в (22.53) $\varepsilon = \varepsilon_0 = \text{const}$. В этом случае решение дифференциального уравнения будет иметь вид

$$\sigma = (E - E_\infty)\varepsilon_0 e^{-\frac{E}{\eta}t} + E_\infty\varepsilon_0.$$

Кривая релаксации напряжений показана на рис. 22.29, б. При $t \rightarrow \infty$ напряжения стремятся к предельному значению $E_\infty\varepsilon_0$. Такой процесс в значительной степени соответствует поведению реальных материалов.

Рассмотренные модели вязкоупругих тел дают возможность рассмотреть лишь некоторые основные особенности поведения материалов при ползучести. Реальные процессы в вязкоупругих телах бывают значительно более сложными. Для их описания можно построить другие, более сложные модели, включающие большое количество упругих и вязких элементов (см., например, рис. 22.30).

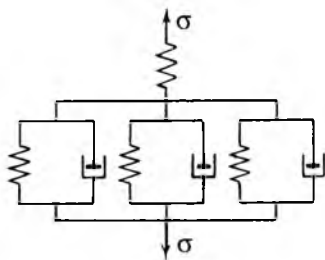


Рис. 22.30

Другим путем построения физических зависимостей для вязкоупругих тел является использование не рассмотренных выше диф-

ференциальных соотношений, а *интегральных уравнений*, связывающих напряжения, деформации и время^{*}. Эти уравнения позволяют учесть при расчетах конструкций из вязкоупругих материалов историю нагружения, изменение свойств материалов в процессе ползучести и многие другие эффекты и явления. Известны, например, *теория наследственности*, *теория старения* и другие теории, применяющиеся для расчетов сооружений из бетона и других строительных материалов.



ГЛАВА 23

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ

23.1. Общие положения

23.2. Метод электротензометрии

23.3. Метод фотоупругости

23.4. Голографическая интерферометрия

23.5. Спекл-фотография

23.6. Метод муара



ПРИЛОЖЕНИЕ

Сортамент прокатной стали

^{*} См.: *Малинин Н.Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1968; *Ржаницын А.Р.* Теория ползучести. М.: Стройиздат, 1968.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров А.В., Потапов В.Д.* Основы теории упругости и пластичности. М.: Высшая школа, 1990.
2. *Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П.* Сопротивление материалов. М.: Высшая школа, 1995.
3. *Арутюнян Н.Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. М.; Л.: ГИТТЛ, 1952.
4. *Безухов Н.И.* Основы теории упругости, пластичности и ползучести. М.: Высшая школа, 1968.
5. *Безухов Н.И.* Примеры и задачи по теории упругости, пластичности и ползучести. М.: Высшая школа, 1965.
6. *Беляев Н.М.* Сопротивление материалов. М.: Физматгиз, 1962.
7. *Биргер И.А., Мавлютов Р.Р.* Сопротивление материалов. М.: Наука, 1986.
8. *Боли Б., Уэйнер Дж.* Теория температурных напряжений. М.: Мир, 1964.
9. *Вайнберг Д.В., Вайнберг Е.Д.* Расчет пластин. Киев: Будивельник, 1970.
10. *Ван Цзи-де.* Прикладная теория упругости. М.: Физматгиз, 1959.
11. *Власов В.З.* Избранные труды. М.: Наука. Т. 1, 1962; Т. 2, 1963; Т. 3, 1964.
12. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. М.: Физматгиз, 1967.
13. *Дарков А.В., Шниро Г.С.* Сопротивление материалов. М.: Высшая школа, 1965.
14. *Дюрелли А., Райли У.* Введение в фотомеханику. М.: Мир, 1970.
15. *Жемочкин Б.Н.* Теория упругости. М.: Госстройиздат, 1957.
16. *Ильюшин А.А.* Пластичность. М.; Л.: ГИТТЛ, 1948.
17. *Кац А.М.* Теория упругости. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1956.
18. *Качанов Л.М.* Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969.
19. *Коваленко А.Д.* Основы термоупругости. Киев: Наукова думка, 1970.
20. *Колкунов Н.В.* Основы расчета упругих оболочек. М.: Высшая школа, 1987.
21. *Лейбензон Л.С.* Курс теории упругости. М.; Л.: ГИТТЛ, 1947.
22. *Леонтьев Н.Н., Соболев Д.Н., Амосов А.А.* Основы строительной механики стержневых систем. М.: АСВ, 1996.
23. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977.
24. *Малинин Н.Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975.
25. *Мелан Э., Паркус Г.* Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. М.: Физматгиз, 1958.
26. *Никифоров С.Н.* Теория упругости и пластичности. М.: Госстройиздат, 1955.

27. *Никифоров С.Н.* Сопротивление материалов. М.: Высшая школа, 1966.
28. *Папкович П.Ф.* Теория упругости. М.: Оборонгиз, 1939.
29. *Писаренко Г.С., Агарёв В.А., Квитка А.Л.* и др. Сопротивление материалов. Киев, 1973.
30. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в 3 т. / Под ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1968.
31. *Рабинович И.М.* Основы строительной механики стержневых систем. М.: Госстройиздат, 1960.
32. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966.
33. *Ржаницын А.Р.* Теория ползучести. М.: Стройиздат, 1968.
34. *Рудицын М.Н., Артемов П.Я., Любошиц М.Н.* Справочное пособие по сопротивлению материалов. Минск: Вышэйшая школа, 1970.
35. *Саргсян А.Е.* Сопротивление материалов, теория упругости и пластичности. М.: АСВ, 1998.
36. *Самуль В.И.* Основы теории упругости и пластичности. М.: Высшая школа, 1970.
37. *Смирнов А.Ф., Александров А.В., Монахов Н.И.* и др. Сопротивление материалов. М.: Высшая школа, 1975.
38. *Степин П.А.* Сопротивление материалов. М.: Высшая школа, 1979.
39. *Терегулов И.Г.* Сопротивление материалов и основы теории упругости и пластичности. М.: Высшая школа, 1984.
40. *Тимошенко С.П.* Сопротивление материалов. М.: Наука. Т. 1, 2. 1965.
41. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1966.
42. *Тимошенко С.П., Гудьер Дж.* Теория упругости. М.: Наука, 1975.
43. *Феодосьев В.И.* Сопротивление материалов. М.: Наука, 1979.
44. *Феодосьев В.И.* Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. М.: Наука, 1973.
45. *Филоненко-Бородич М.М.* Теория упругости. М.: Физматгиз, 1959.
46. *Филоненко-Бородич М.М.; Изюмов С.М.; Олисов Б.А.* и др. Курс сопротивления материалов. М.: ГИТТЛ. Ч. 1, 1955; Ч. 2, 1956.
47. *Фрохт М.* Фотоупругость. М.: Гостехиздат. Т. 1, 1948; Т. 2, 1950.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

Глава 1.	ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА	5
1.1.	Задачи механики деформируемого твердого тела	5
1.2.	Основные понятия, гипотезы и принципы	8
1.3.	Понятие о расчетных схемах	10
1.4.	Виды нагрузок	15
1.5.	Напряжения и деформации	19
1.6.	Внутренние усилия в поперечных сечениях стержня	21
Глава 2.	ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ СТЕРЖНЕЙ	24
2.1.	Статические моменты и моменты инерции	24
2.2.	Зависимости между моментами инерции относительно параллельных осей	25
2.3.	Изменение моментов инерции при повороте координатных осей	26
2.4.	Главные оси и главные моменты инерции	27
2.5.	Некоторые свойства моментов инерции и осей инерции	29
2.6.	Моменты инерции простых сечений	32
2.7.	Моменты инерции сечений составных стержней	37
2.8.	Определение моментов инерции с помощью круга инерции	41

Глава 3.	ЦЕНТРАЛЬНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ СТЕРЖНЕЙ.....	44
3.1.	Продольная сила и ее эпюра	44
3.2.	Напряжения в поперечных и наклонных сечениях	46
3.3.	Деформации и перемещения. Закон Гука	49
3.4.	Статически неопределимые задачи	55
3.5.	Механические свойства материалов. Диаграммы растяжения и сжатия	61
3.6.	Потенциальная энергия деформации при растяжении и сжатии	73
3.7.	Расчеты на прочность	75
Глава 4.	НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ ТЕЛА	85
4.1.	Напряжения на координатных и наклонной площадках	85
4.2.	Дифференциальные уравнения равновесия	88
4.3.	Тензор напряжений	91
4.4.	Главные площадки и главные напряжения	92
4.5.	Двухосное напряженное состояние	97
4.6.	Определение напряжений с помощью круга Мора	101
Глава 5.	ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ ТЕЛА	103
5.1.	Перемещения и деформации	103
5.2.	Линейная и угловая деформации в окрестности точки тела. Аналогия между напряженным и деформированным состояниями	108
5.3.	Тензор деформаций	110
5.4.	Главные деформации	111
5.5.	Частные случаи деформированного состояния	112
Глава 6.	СВЯЗЬ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ	115
6.1.	Обобщенный закон Гука.....	115
6.2.	Различные формы обобщенного закона Гука	119

6.3.	Закон Гука для двухосного напряженного состояния	121
6.4.	Связь между напряжениями и деформациями для анизотропного тела	121
6.5.	Потенциальная энергия деформации	123
Глава 7.	ВНУТРЕННИЕ УСИЛИЯ И НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ СТЕРЖНЕЙ	126
7.1.	Основные понятия	126
7.2.	Типы опор и опорные реакции	127
7.3.	Внутренние усилия при изгибе. Дифференциальные зависимости	130
7.4.	Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов	133
7.5.	Нормальные напряжения при чистом изгибе	142
7.6.	Нормальные и касательные напряжения при поперечном изгибе	148
7.7.	Главные напряжения в балках при изгибе	160
7.8.	Расчет балок на прочность при изгибе	164
7.9.	Рациональные типы сечений балок	168
7.10.	Понятие о центре изгиба тонкостенных стержней	172
Глава 8.	КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЕЙ	174
8.1.	Внутренние усилия при кручении	174
8.2.	Напряжения при кручении стержня с круглым поперечным сечением	176
8.3.	Определение перемещений и углов закручивания стержней круглого сечения	181
8.4.	Расчет стержней круглого сечения на прочность и жесткость	183
8.5.	Главные напряжения при кручении стержня круглого сечения	184
8.6.	Статически неопределимые задачи при кручении	185
8.7.	Кручение стержней с некруглым поперечным сечением. Задача Сен-Венана	187

8.8.	Примеры решения задач кручения стержней с некруглым поперечным сечением	191
8.9.	Свободное кручение тонкостенных стержней	195

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

Глава 9.	ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В БАЛКАХ ПРИ ПРЯМОМ ИЗГИБЕ	200
9.1.	Общие положения	200
9.2.	Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки	201
9.3.	Метод непосредственного интегрирования	203
9.4.	Метод начальных параметров	208
Глава 10.	ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА МОРА	223
10.1.	Работа внешних сил и потенциальная энергия деформации при изгибе стержней и стержневых систем	223
10.2.	Теоремы Бетти и Максвелла	227
10.3.	Формула Мора для определения перемещений	229
10.4.	Правило А.К. Верещагина	233
10.5.	Понятие о расчете статически неопределимых балок с помощью метода сил	239



Глава 11.	РАСЧЕТ БАЛОК НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ	245
11.1.	Понятие о сплошном упругом основании. Модель Винклера	245-1
11.2.	Дифференциальное уравнение изгиба балки на упругом основании	245-3
11.3.	Расчет длинных балок на упругом основании	245-5
11.4.	Расчет балок конечной длины	245-10

Глава 12. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ СТЕРЖНЕЙ	246
12.1. Общие понятия	246
12.2. Косой изгиб	248
12.3. Внецентренное растяжение и сжатие	255
12.4. Растяжение и сжатие с изгибом	263
12.5. Теории прочности	265
 Глава 13. УСТОЙЧИВОСТЬ И ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ СТЕРЖНЕЙ	 274
13.1. Понятие об устойчивости	274
13.2. Формула Эйлера для критической силы	277
13.3. Влияние способов закрепления концов стержня на величину критической силы	280
13.4. Потеря устойчивости при напряжениях, превышающих предел пропорциональности материала	282
13.5. Практический расчет сжатых стержней на устойчивость	285
13.6. Продольно-поперечный изгиб стержней	291
13.7. Решение уравнения продольно-поперечного изгиба стержня с помощью метода начальных параметров ...	293
13.8. Приближенное решение уравнения продольно-поперечного изгиба стержня	297
13.9. Расчет сжато-изогнутых стержней на прочность и устойчивость	299
13.10. Определение критических сил с помощью метода начальных параметров	304
13.11. Определение критических сил с помощью энергетического метода	307



Глава 14. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ

14.1. Основные понятия	313-1
14.2. Определение секториальных нормальных напряжений	313-4

14.3. Определение секториальных касательных напряжений	313-8
14.4. Секториальные координаты и секториальные геометрические характеристики сечений	313-9
14.5. Определение углов закручивания и внутренних усилий	313-15

Глава 15. ДИНАМИЧЕСКОЕ ДЕЙСТВИЕ НАГРУЗОК 314

15.1. Понятие о динамической нагрузке	314
15.2. Напряжения в стержне при его движении с ускорением	315
15.3. Ударное действие нагрузки	317
15.4. Расчет стержней при ударном действии нагрузки	322
15.5. Прочность материалов при напряжениях, периодически изменяющихся во времени	326

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

Глава 16. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ 333

16.1. Полная система уравнений теории упругости	333
16.2. Граничные условия	336
16.3. Интегральные граничные условия	341
16.4. Постановка задачи теории упругости в перемещениях	343
16.5. Постановка задачи теории упругости в напряжениях	345
16.6. Простейшие задачи теории упругости	346

Глава 17. ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ 349

17.1. Плоская деформация	349
17.2. Плоское напряженное состояние	352
17.3. Постановка плоской задачи в напряжениях. Функция напряжений	355

17.4.	Решение плоской задачи в полиномах	357
17.5.	Изгиб консольной балки силой, приложенной на конце	362
17.6.	Балка на двух опорах под действием равномерно распределенной нагрузки	368
17.7.	Расчет плотины треугольного поперечного сечения	372
17.8.	Решение плоской задачи с помощью тригонометрических рядов	376
17.9.	Обоснование принципа Сен-Венана	380

Глава 18. ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ 383

18.1.	Общие уравнения плоской задачи в полярных координатах	383
18.2.	Клин, нагруженный в вершине сосредоточенной силой	390
18.3.	Действие сосредоточенной силы на полуплоскость (задача Фламана)	395
18.4.	Полярно-симметричное распределение напряжений	399
18.5.	Толстостенный цилиндр под действием равномерного внутреннего и внешнего давлений (задача Ляме)	401



18.6.	Чистый изгиб кривого бруса (задача Х.С. Головина)	408



18.7.	Изгиб кривого бруса силой, приложенной на конце	408



18.8.	Растяжение пластины с круговым отверстием (задача Кирша)	408



Глава 19. ОСНОВЫ ТЕРМОУПРУГОСТИ 409

19.1.	Уравнение теплопроводности	409-1
19.2.	Основные уравнения термоупругости	409-3
19.3.	Плоская задача термоупругости	409-8
19.4.	Термоупругие напряжения в полом цилиндре при изменении температуры по радиусу	409-13

Глава 20. ИЗГИБ И УСТОЙЧИВОСТЬ ТОНКИХ ПЛАСТИН	410
20.1. Основные понятия и гипотезы	410
20.2. Перемещения и деформации в пластине при изгибе	413
20.3. Напряжения в пластинах при изгибе. Дифференциальное уравнение изгиба пластины	414
20.4. Внутренние усилия в пластинах при изгибе. Дифференциальные соотношения	418
20.5. Граничные условия на контуре пластины	422
20.6. Наибольшие напряжения в пластинах. Расчет пластин на прочность	427
20.7. Цилиндрический изгиб пластин	429
20.8. Чистый изгиб прямоугольных пластин	431
20.9. Расчет прямоугольных пластин с помощью двойных тригонометрических рядов	434
20.10. Расчет прямоугольных пластин с помощью одинарных тригонометрических рядов	442
20.11. Понятие о расчете пластин с помощью вариационных методов	450
20.12. Основные соотношения при изгибе круглых пластин	454
20.13. Некоторые задачи изгиба круглых пластин	457
 20.14. Изгиб пластины под действием поперечных нагрузок и нагрузок в срединной плоскости	467
 20.15. Некоторые задачи устойчивости прямоугольных пластин	467
 Глава 21. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ И ТЕОРИИ УПРУГОСТИ	467
21.1. Метод конечных разностей.....	467-1
21.2. Метод конечных элементов	467-13
Глава 22. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ И ПОЛЗУЧЕСТИ	468
22.1. Простейшие задачи теории пластичности	468
22.2. Основы деформационной теории пластичности	473

22.3.	Упруго-пластическое состояние толстостенной трубы	479
22.4.	Приближенные методы решения задач теории пластичности	483
22.5.	Ползучесть и релаксация в твердых телах	491
22.6.	Модели вязкоупругих тел	494



Глава 23. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ 500

23.1.	Общие положения	500-1
23.2.	Метод электротензометрии.....	500-2
23.3.	Метод фотоупругости.....	500-6
23.4.	Голографическая интерферометрия	500-14
23.5.	Спекл-фотография	500-20
23.6.	Метод муара	500-23



ПРИЛОЖЕНИЕ Сортамент прокатной стали 500

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	501

По вопросам приобретения книг обращайтесь:
Отдел продаж «ИНФРА-М» (оптовая продажа):
127282, Москва, ул. Полярная, д. 31в, стр. 1
Тел. (495) 380-4260; факс (495) 363-9212
E-mail: books@infra-m.ru

•
Отдел «Книга—почтой»:
тел. (495) 363-4260 (доб. 232, 246)

Учебное издание

*Гумедин Суренович Варданян
Владимир Игоревич Андреев
Николай Михайлович Атаров
Алексей Алексеевич Горшков*

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ С ОСНОВАМИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ

Учебник

Корректор *Л.С. Куликова*
Компьютерная верстка *О.В. Савостиной, Г.А. Волковой*

Подписано в печать 25.03.2014
Формат 60×90/16. Бумага офсетная
Печать офсетная. Гарнитура *Newton*
Усл. печ. л. 32,0. Уч.-изд. л. 30,12 + 7,18 ЭБС
Доп. тираж 500 экз. Заказ № 2950.
Цена свободная

ТК 45477-8786-250314

ООО «Научно-издательский центр ИНФРА-М»
127282, Москва, ул. Полярная, д. 31В, стр. 1
Тел.: (495) 380-05-40, 380-05-43. Факс: (495) 363-92-12
E-mail: books@infra-m.ru <http://www.infra-m.ru>

Отпечатано с готовых файлов заказчика
в ОАО «Первая Образцовая типография»,
филиал «УЛЬЯНОВСКИЙ ДОМ ПЕЧАТИ»
432980, г. Ульяновск, ул. Гончарова, 14