И.А. БИРГЕР Р.Р. МАВЛЮТОВ

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Рекомендовано
Государственным комитетом Российской Федерации
по высшему образованию
в качестве учебника для студентов
инженерно-технических специальностей
высших учебных заведений

Москва
Издательство МАИ
1994

ББК 20.4.3
Б 64
УДК 539.3

Федеральная целевая программа книгоиздания России

Рецензенты:
академик *Н.Д. Кузнецов*,
профессор *С.И. Иванов*,
профессор *А.П.Филин*

Биргер И.А., Мавлютов Р.Р.
Б 64 Сопротивление материалов: Учебник. — М.: Изд-во МАИ, 1994. — 512 с.: ил.

ISBN 5—7035—0549—6

Изложен курс сопротивления материалов, дополненный элементами теории упругости, пластичности и ползучести, а также механики разрушения. Даны общие принципы построения моделей для расчета напряжений и деформаций в элементах конструкций и оценки их прочностной надежности. Представлены методы расчета элементов конструкций на прочность и долговечность с учетом пластичности, ползучести, усталости, малоцикловой и длительной прочности. Рассмотрены вариационные методы и основы метода конечных элементов. Большинство расчетных моделей проиллюстрировано на примерах типичных элементов авиационных и машиностроительных конструкций.

Учебник предназначен для студентов и аспирантов инженерно-технических специальностей вузов.

Б $\dfrac{2004030000-140}{094(02)-94}$ Без объявл. ББК 20.4.3

ISBN 5—7035—0549—6

ПРЕДИСЛОВИЕ

Сопротивление материалов является главной технической дисциплиной, формирующей мышление инженера.

Многие выдающиеся ученые — С.П.Тимошенко, Н.М.Беляев, В.И.Феодосьев и др. — посвятили свои усилия созданию курсов сопротивления материалов.

Можно отметить следующие особенности предлагаемого учебника.

1. Более полно описаны основные физические модели сплошной среды — модели упругости, пластичности и ползучести, а также методы решения упругопластических задач и задач ползучести применительно к стержням и другим элементам конструкций.

2. Достаточно широко представлены модели разрушения при действии статического, усталостного и малоциклового нагружения.

3. Более обстоятельно изложены вариационные, матричные и интегральные методы, методы начальных параметров.

4. Большое внимание уделено численным методам, и в том числе методу конечных элементов, который впервые введен в курс сопротивления материалов.

Современный этап развития технических наук можно охарактеризовать как переход «от расчета к модели». Создаются математические модели конструкций, машин, отражающие их функциональное назначение, работоспособность, условия надежности.

В книге даны примеры построения моделей прочностной надежности, в которых напряжения и деформации сопоставляются с условиями разрушения. В этом состоит одна из главных особенностей предлагаемого учебника. Он написан на основе вышедшего ранее учебного пособия тех же авторов, которое может быть использовано для более углубленного изучения сопротивления материалов.

Авторы выражают благодарность Т.Н.Мардимасовой, Ю.А.Кувшинову, В.С.Куликову за помощь при подготовке рукописи к печати.

Глава 1

ВВЕДЕНИЕ

1. Сопротивление материалов — наука о прочности и надежности элементов конструкций

Современный этап научно-технической революции характеризуется быстрым совершенствованием изделий, повышением их надежности и ресурса, интенсификацией рабочих процессов. Каждые пять-семь лет создаются новые поколения машин, отражающие достижения научно-технического прогресса. Происходит смена конструкционных материалов, внедряются новые технологические процессы.

Решающее влияние на инженерную науку и технику оказывает поразительно быстрое развитие и совершенствование ЭВМ. В ближайшие десятилетия проектирование и производство изделий в авиастроении и ряде других областей машиностроения станет автоматизированным с преобладающей ролью ЭВМ. При проектировании с помощью ЭВМ создаются математические модели изделий, их машинные образы, которые затем служат основой разработки их конструкций и технологии производства на станках с программным управлением.

В настоящее время задача состоит не только в разработке конструкции и технологического процесса, но и в оптимизации их параметров.

В современной технике возрастает значение проблем прочности. Это объясняется увеличением сложности технических изделий, необходимостью повышения эффективности, качества, надежности и долговечности.

Сопротивление материалов — наука о прочности и надежности элементов конструкций. В ее задачи входят обобщение инженерного опыта создания машин и сооружений, разработка научных основ проектирования и конструирования надежных изделий.

Основным содержанием науки о сопротивлении материалов является разработка моделей прочностной надежности элементов конструкций. С помощью таких моделей инженер может выбрать материал и необходимые размеры элементов конструкции, оценить сопротивление конструкционных материалов внешним воздействиям.

Для практической деятельности инженеру необходимы навыки создания простых моделей явлений и реальных объектов, умение выделять основные факторы.

Сопротивление материалов — инженерная наука, и для нее характерно использование приближенных методов, опирающихся на опыт и экспериментальные исследования. Содержание курса сопротивления материалов непрерывно изменяется в связи с развитием техники. Если в прежних курсах сопротивления материалов преобладали вопросы прочности строительных конструкций, то в последние десятилетия значительное внимание уделяется проблемам прочности, динамики, жесткости и устойчивости объектов машиностроения, турбостроения, авиационной и космической техники и др.

Сопротивление материалов опирается на математические науки (математический аппарат исследования), а также на методы теоретической механики (механики абсолютно твердого тела).

Сопротивление материалов примыкает к механике твердого деформируемого тела (теории упругости, пластичности и разрушения). Из этих наук сопротивление материалов заимствует общие методы, а также более полные и точные методы решения отдельных задач.

Общие методы построения моделей прочностной надежности, разрабатываемые в сопротивлении материалов,получают дальнейшее развитие и уточнение в таких специальных технических дисциплинах, как прочность летательных аппаратов, расчеты на прочность и т.п.

Сопротивление материалов в инженерном образовании осуществляет связь между теоретическими науками (математикой, механикой и др.) и конкретными техническими дисциплинами.

2. Модели прочностной надежности

Моделью называется совокупность представлений, зависимостей, условий, ограничений, описывающих процесс, явление. Модель — отображение объективной реальности — может иметь разную природу, структуру, язык и форму представления. Наиболее часто используются математические модели, отображающие реальный процесс, явление с помощью установления зависимостей между параметрами в виде различного рода уравнений, ограничений.

Надежностью называется способность изделия выполнять заданные функции, сохраняя свои эксплуатационные показатели в определенных пределах в течение требуемого промежутка времени или наработки.

Прочностная надежность определяется отказами, связанными с разрушением или недопустимыми деформациями элементов конструкции.

Модели прочностной надежности. Структура модели прочностной надежности показана на рис.1.1. Конечной целью, которая должна быть достигнута с помощью модели, является определение запасов прочности и (или) вероятности разрушения. Для определения критериев прочностной надежности следует разработать или принять четыре вспомогательные модели — материала, формы, нагружения и разрушения. Построение указанных частных моделей является важным этапом, существенно влияющим на достоверность оценки прочностной надежности.

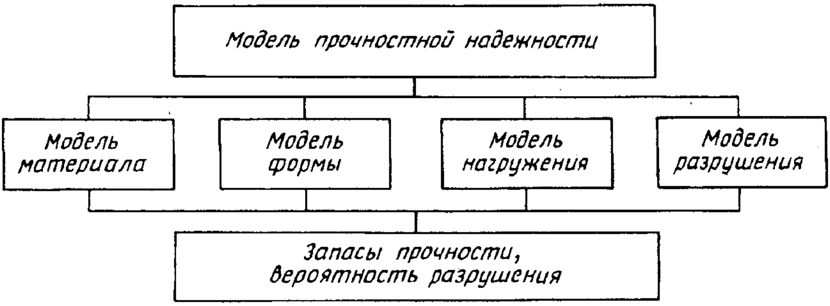


Рис. 1.1. Структура модели прочностной надежности элемента конструкций

При разработке моделей приходится идти на компромисс между необходимостью достаточно полного и адекватного описания материала, формы, условий работы и нагружения элемента и сложностью самой модели.

В качестве материала машиностроительных конструкций используются в основном металлы и их сплавы, а также различные неорганические и органические материалы (полимеры, пластмассы, волокна, керамика и др.). В последнее время нашли применение композиционные материалы, состоящие из высокопрочных нитей стекла,углерода и связующего (полимеров и металлов). В строительных конструкциях используются бетон (смесь крупных и мелких каменных частиц, скрепленных цементом), железобетон (бетон, усиленный стальными стержнями), кирпич, дерево и другие материалы.

Основными конструкционными материалами в машиностроении являются сплавы черных и цветных металлов.

Металлы имеют кристаллическое строение, представляющее регулярную структуру (рис.1.2), в которой в определенном порядке размещены атомы вещества. Многие металлы имеют кубическую объемноцентрированную структуру (железо, хром, молибден), кубическую гранецентрированную структуру (алюминий, медь) (рис.1.3). Атомный радиус — половина расстояния между ближайшими атомами в кристаллической структуре — составляет 1-2 Å (Å — ангстрем; 1Å = 10^{-8} см).

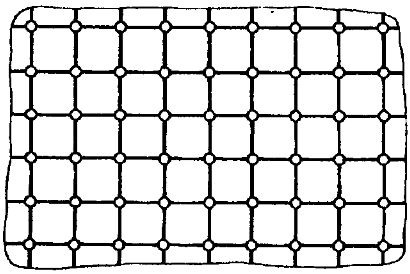


Рис. 1.2. Схема кристаллической решетки металлов

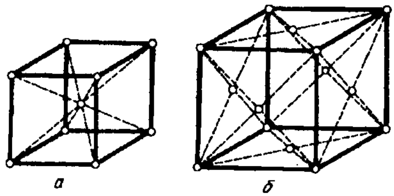


Рис. 1.3. Структура элементов кристаллической решетки:
а — кубическая объемноцентрированная структура;
б — кубическая гранецентрированная структура

Реальные металлы и их сплавы имеют обычно поликристаллическое (зернистое) строение (рис.1.4). Образование кристаллов в процессе охлаждения сплава начинается из очень большого числа центров. Каждое зерно — это кристалл, принявший неправильную форму, так как его дальнейшему росту помешали соседние кристаллы.

Прочность сплавов определяется не только прочностью зерен, но и прочностью их границ. Например, при работе сплава при высоких температурах разрушение проходит по границам зерен.

Модели материала. В сопротивлении материалов используется модель сплошного однородного тела.

Материал рассматривается как сплошное однородное деформируемое тело. Деформируемым называется тело, которое после приложения внешних нагрузок изменяет свою форму и размеры. Учет деформируемости является весьма важным, так как позволяет решить вопрос о распределении силового потока внутри тела.

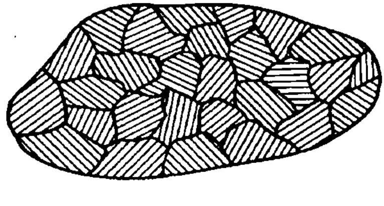


Рис. 1.4. Зернистое строение металлов и сплавов

Обычно в сопротивлении материалов принимают, что изменение формы тела под действием внешних нагрузок невелико. Это в большинстве случаев соответствует реальной ситуации при работе материала в элементах конструкций.

Модель сплошной среды позволяет рассматривать тело как непрерывную среду и применять при этом методы математического анализа.

Учитывая физические свойства, присущие в той или иной мере всем конструкционным материалам, модель материала наделяют свойствами упругости, пластичности и ползучести.

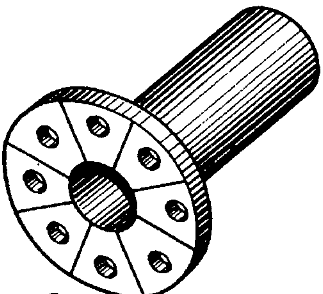
Упругостью называется свойство тела восстанавливать свою форму после снятия внешних нагрузок. Это свойство материалов знакомо каждому из жизненного опыта (например, прогиб доски или ветки дерева, прогиб моста, железнодорожного полотна и т.п.).

Пластичностью называется свойство тела сохранять после прекращения действия нагрузки полностью или частично полученную при нагружении деформацию. Это свойство также хорошо известно (изменения формы тел из глины при давлении, проволоки при большом изгибе и т.п.).

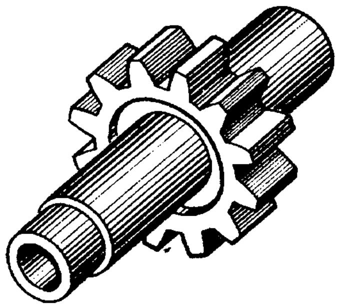
Ползучестью называется свойство тела увеличивать деформацию при постоянных внешних нагрузках (осадка фундаментов под действием веса, постепенное удлинение каната, несущего груз, ослабление затяжки болтов вследствие их удлинения со временем и т.д.).

Свойства упругости, пластичности и ползучести будут в дальнейшем рассмотрены более подробно.

Модели формы. Геометрическая форма элементов конструкций часто бывает весьма сложной. На рис. 1.5,*а* показан вал винта самолета, передающий крутящий момент от двигателя к винту, на рис.1.5,*б* изображено зубчатое колесо, сидящее на валу редуктора. Учет всех особенностей геометрической формы часто невозможен или нецелесообразен, так как приводит к сложным моделям.



а



б

Рис. 1.5. Геометрическая форма элементов конструкций

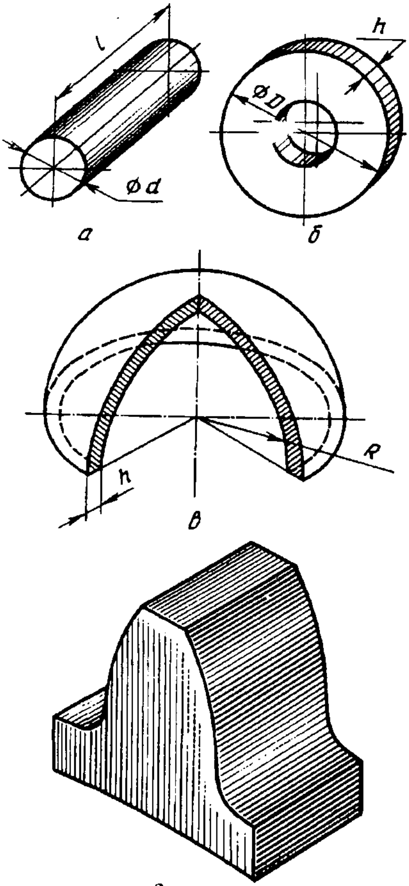


Рис.1.6. Основные модели формы: *а* — стержень; *б* — пластинка; *в* — оболочка; *г* — пространственное тело

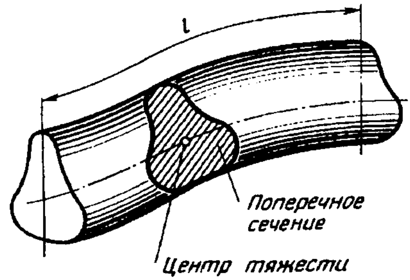


Рис. 1.7. Схема образования стержня

Для определения напряженного и деформированного состояний применяют упрощенные, схематизированные модели формы элементов конструкций. Основными моделями формы (рис.1.6) являются: стержни, пластинки, оболочки, пространственные тела (массивы). Модели формы элемента конструкции представляют собой схематизированное описание геометрии элемента с помощью стандартных, типовых элементов. Это позволяет применять для расчета более простые методы, использующие особенности геометрической формы типовых элементов. В сопротивлении материалов стержни являются основной геометрической моделью.

Стержнем называется тело, поперечные размеры которого малы по сравнению с его длиной (рис.1.7). Образование стержня можно представить как результат движения вдоль пространственной кривой (оси стержня) плоской фигуры (поперечного сечения стержня). Центр тяжести фигуры остается при движении на оси стержня, плоскость фигуры перпендикулярна оси. Поперечное сечение стержня может быть переменным по длине (рис.1.8).

Если при движении вдоль оси поперечное сечение поворачивается, то стержень называется начально закрученным. На рис.1.9 показана

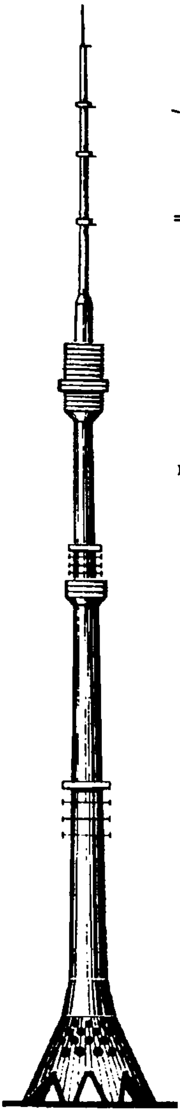


Рис. 1.8. Пример стержня переменного сечения (телевизионная башня)

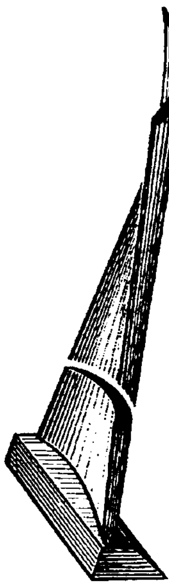


Рис. 1.9. Лопатка компрессора как закрученный стержень переменного сечения

лопатка осевого компрессора, которая может рассматриваться как закрученный стержень переменного сечения. В авиационной и строительной технике часто применяют тонкостенные стержни, у которых один размер сечения мал по отношению к другому и оба они малы по сравнению с длиной стержня (рис.1.10). Экспериментальные исследования показали возможность применения теории стержней к элементам конструкций, не вполне удовлетворяющим условию малости размеров сечения по сравнению с длиной. Для приближенной оценки общего напряженного состояния крыло самолета, корпус ракеты, зуб шестерни (рис.1.11) могут рассматриваться на основе теории стержней.

Пластинки ограничиваются двумя плоскими или слабоизогнутыми поверхностями (рис.1.12). Толщина пластинки много меньше двух других размеров, т.е. $h \ll a$, $h \ll b$, $h \ll D$. Диски компрессоров и турбин авиационных двигателей часто рассматриваются как пластинки переменной толщины.

Оболочки представляют собой тела, ограниченные двумя поверхностями, расстояние между которыми (по нормали) — толщина оболочки — мало по сравнению с радиусами кривизны поверхностей. На рис.1.13 приведены цилиндрическая оболочка и оболочка сосуда высокого давления.

Пространственное тело (массив) — модель элемента конструкции, в котором все размеры тела соизмеримы. Пространственные элементы часто вводятся для учета концентрации усилий (напряжений), возникающих в концевых областях простых моделей или в местах резкого изменения сечений (отверстия, выточки и т.п.; рис.1.14).

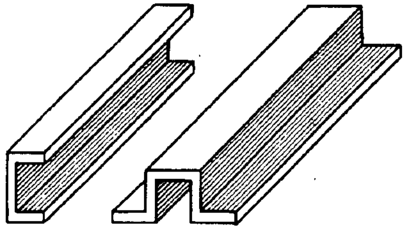


Рис. 1.10. Тонкостенные стержни

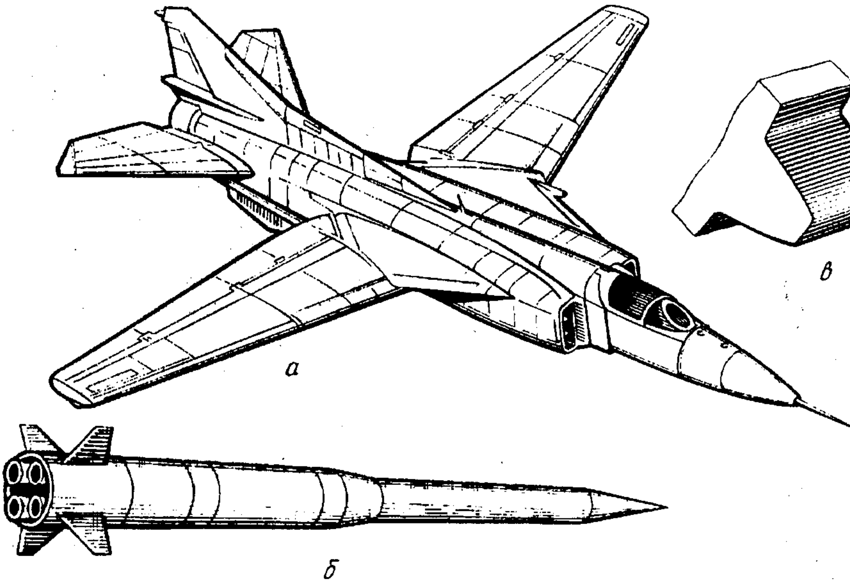


Рис. 1.11. Стержневые модели конструкций:
а — крыло самолета; *б* — корпус ракеты; *в* — зуб шестерни

Модели нагружения. Внешние силовые воздействия на элемент конструкции подразделяют на три группы: 1) сосредоточенные нагрузки; 2) распределенные нагрузки; 3) объемные или массовые силы.

Сосредоточенные нагрузки — нагрузки, действующие на небольших участках поверхности детали (например, давление шарика шарикоподшипника на вал, давление колеса на рельсы и т.п.).

Распределенные нагрузки приложены к значительным участкам поверхности (например, давление воздуха на крыло самолета, давление жидкости или газа на стенки сосуда).

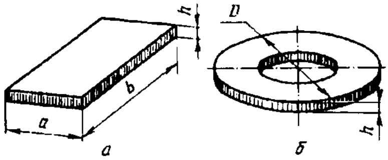


Рис. 1.12. Тонкие пластинки:
а — прямоугольные; *б* — круглые

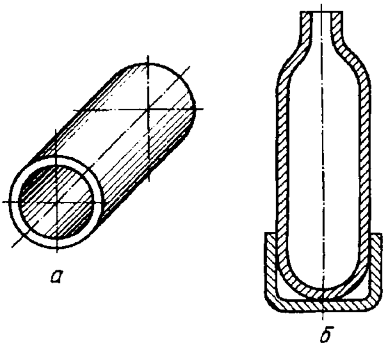


Рис. 1.13. Оболочки:
а — цилиндрическая (корпус двигателя); *б* — оболочка сосуда высокого давления

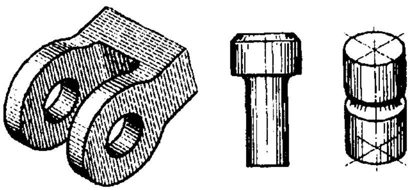


Рис. 1.14. Пространственные тела как элементы конструкций:
а — соединительный элемент в виде проушины; *б* — головка борта (стержня); *в* — стержень с выточкой

Объемные (*массовые*) силы приложены к каждой частице объема (массы) материала (например, силы тяжести, инерционные силы).

При построении модели нагружения внешние нагрузки схематизируются в виде одной из указанных групп, причем принимаемая модель зависит также от задач описания. Например, для расчета вала шестерни реакция усилия на опоре может рассматриваться как сосредоточенная нагрузка (рис.1.15,*а*); для расчета долговечности шарика то же усилие взаимодействия схематизируется в виде распределенного контактного давления (рис.1.15,*б*).

Важным моментом при разработке модели нагружения является учет внешних нагрузок и характера их изменения по времени. Нагрузки определяются в основном параметрами рабочего процесса изделия (например, мощностью, грузоподъемностью, давлением среды, частотой вращения деталей и т.п.). Для приближенных моделей учитываются только наибольшие, опасные для прочности нагрузки. При построении уточненных моделей принимается во внимание вся «история нагружения».

Довольно часто нагрузки имеют случайный характер, и для их оценки применяют вероятностные методы. Нагрузки разделяют на стационарные (постоянные, статические) и нестационарные (переменные).

Статическая нагрузка возрастает от нуля до своего номинального значения и остается постоянной во всем процессе нагружения. Примеры статической нагрузки — нагружение строительных конструкций (каркаса жилого дома) весом здания, нагружение корпуса ракеты одноразового действия внутренним давлением и т.п. В действительности представление о статической нагрузке дает упрощенную модель нагружения. На реальные конструкции действуют дополнительные силы (например, динамические и др.). Однако модель статического нагружения дает возможность использовать простые методы анализа.

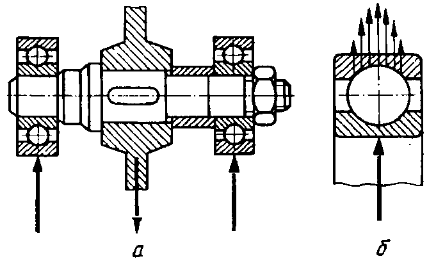


Рис. 1.15. Различные модели нагружения для расчета вала (*а*) и шарика шарикоподшипника (*б*)

Переменная нагрузка — нагрузка, изменяющаяся во времени. Наиболее важный класс нестационарных нагрузок — нагрузка при циклическом нагружении. Если циклы образуются за счет запуска и остановки машины, то нагружение обычно не превышает 10^4 — 10^5 циклов, и такое нагружение называется малоцикловым. При нагружении, связанном с упругими колебаниями элементов конструкций, число циклов нагружения часто превышает 10^5 — 10^6 (многоцикловое нагружение). Обычно частота колебаний нагрузки при многоцикловом нагружении составляет 10^2 — 10^4 Гц.

Нередко многоцикловое нагружение имеет случайный характер. Тогда модель нагружения должна содержать распределение плотности вероятности нагрузок или другие статистические модели нагружения. Часто встречается динамическое ударное нагружение (соударения элементов конструкций, взрывное нагружение и т.п.). Ударное нагружение характеризуется очень высокой скоростью возрастания нагрузки, что влияет на характеристики деформирования материала.

Модели нагружения должны учитывать воздействие полей и сред. Наиболее часто встречаются в современной технике тепловые воздействия. Пониженная и повышенная температуры влияют на механическую прочность материала. При неравномерном нагреве тела создаются температурные напряжения, которые часто оказываются соизмеримыми с напряжениями от внешних сил. В некоторых случаях приходится учитывать влияние на свойства материала нейтронного излучения электромагнитного поля и др.

Прочностная надежность существенно зависит от воздействия коррозионных сред.

Итак, модели нагружения представляют собой схематизацию внешних нагрузок по величине, по распределению во времени, а также по воздействию внешних полей и сред.

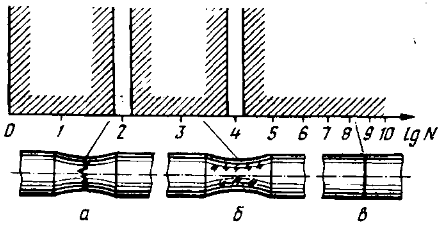


Рис. 1.16. Характер разрушения в зависимости от числа циклов нагружений: *а* — статическое разрушение; *б* — малоцикловое разрушение; *в* — усталостное разрушение

Модели разрушения. В соответствии с общей схемой моделей прочностной надежности (см. рис. 1.1) модели разрушения являются завершающими. После обоснованного выбора моделей формы, материала, нагружения переходят к непосредственной оценке надежности с помощью моделей разрушения.

Модели разрушения представляют собой условия, связывающие интенсивность внешних воздействий в момент разрушения с характеристиками прочности материала. Обычно рассматриваются четыре модели разрушения в зависимости от условий нагружения: 1) статического разрушения; 2) длительного статического разрушения; 3) малоциклового разрушения; 4) усталостного разрушения.

На рис.1.16 показан характер разрушения в зависимости от числа циклов нагружения. При малом числе циклов ($N < 10^2$) развиваются значительные пластические деформации (рис.1.16,а, статическое разрушение), при большом числе циклов ($N > 10^5$) пластические деформации отсутствуют (рис.1.16,в, усталостное разрушение). В промежуточной области ($10^2 < N < 10^5$) разрушение носит смешанный характер (рис.1.16,б, малоцикловое разрушение).

Если на элемент конструкции действует высокая температура (для алюминиевых сплавов свыше 200°С, для стальных и титановых сплавов свыше 400°С, для жаропрочных сплавов свыше 600°С), то в этом случае рассматривается так называемая *длительная прочность* материала. Сопротивление материала зависит не только от значения действующего усилия, но и от его длительности.

На структуру моделей разрушения оказывают влияние свойства материала, из которых важнейшим является его пластичность. При недостаточной пластичности возникают хрупкие разрушения, характеризующиеся рассеянием механических свойств.

При разработке моделей разрушения часто требуются дополнительные экспериментальные исследования образцов материала или самих элементов конструкций в условиях, близких к реальным.

Глава 2

НАПРЯЖЕНИЯ

3.Нормальные и касательные напряжения

Метод сечений. Пусть на элемент конструкции, условно изображенный на рис.2.1,*а*, действуют внешние силы (сосредоточенные или распределенные на участках поверхности). Считаем, что элемент конструкции под действием указанных сил находится в равновесии. Проведем плоскость П, которая рассечет элемент на две части, и рассмотрим одну из частей, например левую (2.1,*б*).

Приложим к поверхности сечения П силы взаимодействия между обеими частями элемента. Когда тело находится в равновесии, то и любая часть тела также будет в равновесии, если к поверхности сечения приложить силы взаимодействия между частями. Силы, действующие в сечении, представляют собой силы взаимодействия между частицами материала, вызванные внешней нагрузкой на элемент. Из условия равновесия рассматриваемой части тела можно определить главный вектор и главный момент внутренних сил, действующих по сечению П. В этом состоит сущность метода сечений — одного из важнейших методов механики деформируемых сред. Распределение внутренних усилий по сечению заранее неизвестно. Его исследование и составляет в дальнейшем одну из главных задач.

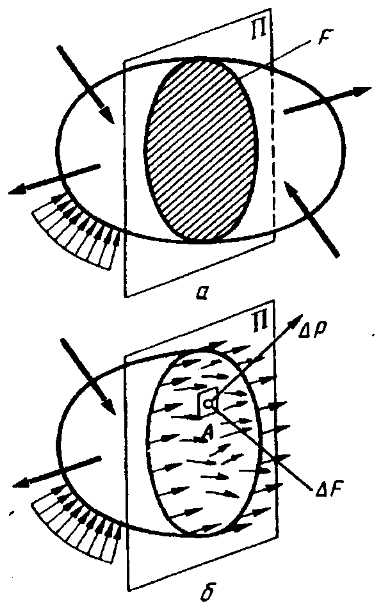


Рис. 2.1. Напряжения в сечении элемента

Понятие напряжения. Оказывается необходимым ввести характеристику интенсивности сил взаимодействия — напряжения, которые в разных точках сечения могут быть, разумеется, различными.

Пусть на малую площадку ΔF, расположенную в окрестности точки A (рис.2.1,*б*), действует сила ΔP.

Назовем напряжением p в точке A рассматриваемого сечения предел соотношения

$$p = \lim_{\Delta F \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta F} \tag{1}$$

при условии, что ΔF стремится к нулю.

Вектор напряжения совпадает по направлению с вектором усилия ΔP. Отметим, что напряжения в сечении элемента не могут быть определены только из уравнений статики (уравнений равновесия). Для их нахождения, как будет ясно из дальнейшего, необходимо разобраться в характере деформаций элемента. Однако в ряде случаев можно сделать некоторые обоснованные предположения о распределении напряжений, что позволит найти их значения и без рассмотрения деформаций. Использование предположений (гипотез), основанных на результатах экспериментальных исследований и дающих достаточную точность при решении инженерных задач, характерно для технических дисциплин, в частности для сопротивления материалов.

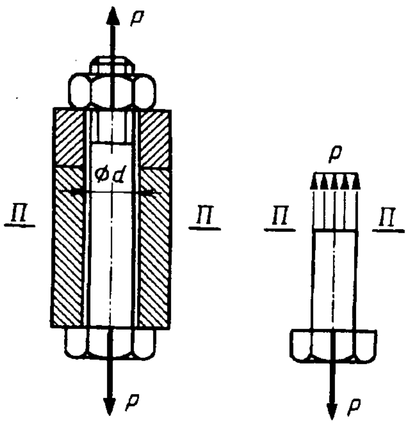


Рис. 2.2. Напряжения растяжения в сечении болта

При растяжении болта усилием P (рис.2.2) есть все основания предположить, что напряжения в сечении П (поперечное сечение стержня болта) направлены нормально к плоскости сечения и распределены равномерно. Тогда значение растягивающего напряжения

$$p = \frac{P}{F} = \frac{4P}{\pi d^2}. \tag{2}$$

Из последнего равенства очевидно, что напряжение имеет размерность силы, деленной на площадь. В Международной системе единиц (СИ) для измерения напряжения (давления) применяется специальная единица — паскаль: 1 Па = 1Н/м^2. Это очень маленькая величина, и при практических расчетах напряжение измеряют в мегапаскалях (МПа):

$$1\ \text{МПа} = 10^6\ \text{Па} = 10^6\ \text{Н/м}^2 = 1\ \text{Н/мм}^2 .$$

В технической литературе напряжение часто измеряют в единицах системы МКС — в килограмм-силах. Связь единиц такова: $1\ \text{МПа} = 0{,}1\ \text{кгс/мм}^2$.

В общем случае напряжения в разных точках сечения могут быть различными.

Еще одно важное обстоятельство состоит в том, что напряжение в точке зависит также и от положения плоскости сечения. Поэтому надо всегда указывать не только точку тела, в которой определяется напряжение, но и ориентацию сечения (площадки), проходящего через рассматриваемую точку.

Нормальные и касательные напряжения. Напряжение p есть вектор, и, как всякий вектор, оно может быть представлено нормальной (по отношению к площадке) и касательной составляющими (рис.2.3). Нормальную составляющую вектора напряжений будем обозначать σ, касательную τ. Экспериментальными исследованиями установлено, что влияние нормальных и касательных напряжений на прочность материала различно, и потому в дальнейшем окажется необходимым всегда раздельно рассматривать составляющие вектора напряжений.

При растяжении болта (см.рис.2.2) в поперечном сечении действует нормальное напряжение

$$\sigma = \frac{4P}{\pi d^2} . \qquad (3)$$

При работе болта на срез (рис.2.4) в сечении П должно возникать усилие, уравновешивающее усилие P.

Из условий равновесия следует, что

$$Q = P . \qquad (4)$$

Если приближенно считать, что касательные напряжения во всех точках сечения одинаковы, то они будут равны

$$\tau = \frac{Q}{F} = \frac{4P}{\pi d^2} . \qquad (5)$$

В действительности последнее соотношение определяет некоторое среднее напряжение по сечению, которым иногда пользуются для приближенных оценок прочности. На рис.2.4 показан вид болта после воздействия на него значительных усилий. Началось разрушение болта, и одна его половина сместилась относительно другой: произошла деформация сдвига.

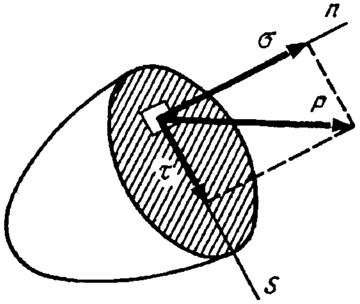


Рис. 2.3. Нормальное σ и касательное τ напряжения в площадке

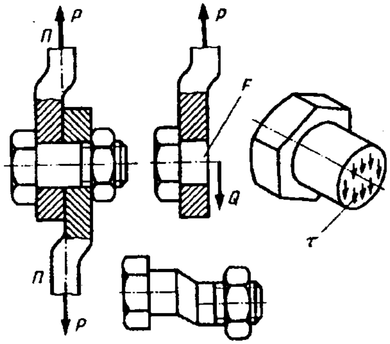


Рис. 2.4. Касательное напряжение при работе болта на срез

Примеры определения напряжений в элементах конструкций. Разберем простейшие примеры, в которых предположение о равномерном распределении напряжений можно считать практически приемлемым. В таких случаях напряжения определяются с помощью метода сечений из уравнений статики (уравнений равновесия).

Кручение тонкостенного круглого вала. Тонкостенный круглый вал (труба) передает крутящий момент (например, от авиационного двигателя на воздушный винт). Требуется определить напряжения в поперечном сечении вала (рис.2.5,*а*). Проведем плоскость сечения П перпендикулярно оси вала и рассмотрим равновесие отсеченной части (рис.2.5,*б*).

Из условия осевой симметрии, учитывая малую толщину стенки, можно принять, что напряжения во всех точках поперечного сечения одинаковы. Строго говоря, такое предположение справедливо только при очень малой толщине стенки, но в практических расчетах его используют, если толщина стенки

$$\delta \le 0{,}2 R_{\text{ср}},$$

где $R_{\text{ср}}$ — средний радиус сечения.

Внешние силы, приложенные к отсеченной части вала, сводятся только к крутящему моменту, и потому нормальные напряжения в поперечном сечении должны отсутствовать. Крутящий момент уравновешивается касательными напряжениями, момент которых равен

$$\tau \cdot 2\pi R_{\text{ср}}^2 \delta = M_{\text{к}}.$$

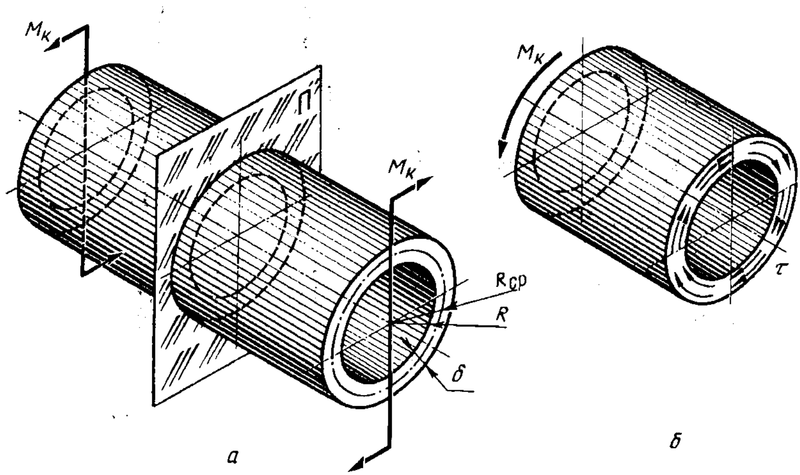


Рис. 2.5. Кручение тонкостенного круглого вала

Из последнего соотношения находим касательное напряжение в сечении вала:

$$\tau = \frac{M_к}{2\pi R_{ср}^2 \delta}. \tag{6}$$

Н а п р я ж е н и я в т о н к о с т е н н о м ц и л и н д р и ч е с к о м с о с у д е (т р у б е). В тонкостенном цилиндрическом сосуде действует давление p (рис.2.6,*а*). Проведем сечение плоскостью П, перпендикулярной оси цилиндрической оболочки, и рассмотрим равновесие отсеченной части. Давление p, действующее на крышку сосуда, создает усилие

$$P = \pi\left(R_{ср} - \frac{1}{2}\delta\right)^2 p \approx \pi R_{ср}^2 p. \tag{7}$$

Это усилие уравновешивается силами, возникающими в поперечном сечении оболочки, и интенсивность указанных сил (напряжение σ_1) будет равна

$$\sigma_1 = \frac{P}{2\pi R_{ср}\delta} = \frac{\pi R_{ср}^2 p}{2\pi R_{ср}\delta} = p\,\frac{R_{ср}}{2\delta}. \tag{8}$$

Толщина оболочки δ предполагается малой по сравнению со средним радиусом $R_{ср}$, напряжения σ_1 считаются равномерно распределенными во всех точках поперечного сечения (рис.2.6,*б*).

Однако на материал трубы действуют не только напряжения в продольном направлении, но и окружные (или кольцевые) напряжения в перпендикулярном направлении. Для их выявления выделим двумя сечениями кольцо длиной l (рис.2.7), а затем проведем диаметральное сечение, отделяющее половину кольца.

На рис.2.7,*а* показаны напряжения на поверхностях сечения. На внутреннюю поверхность трубы радиусом R_1 действует давление p.

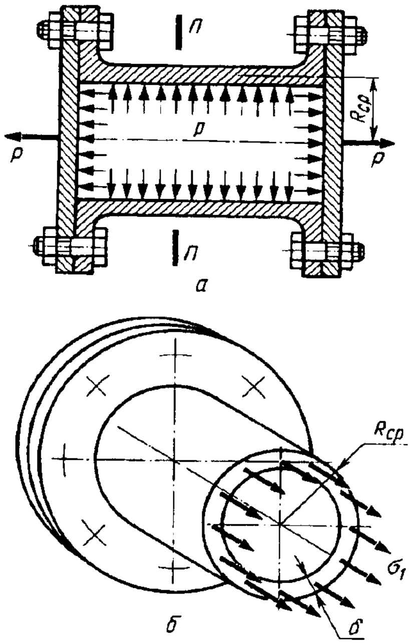


Рис. 2.6. Напряжения в продольном направлении в стенке цилиндрической трубы

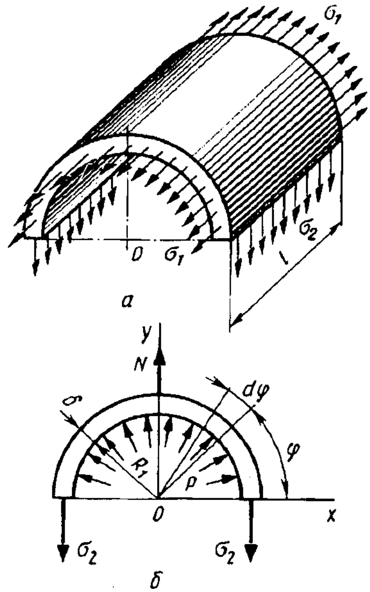


Рис. 2.7. Напряжения в стенке цилиндрической трубы в окружном направлении

Рассмотрим теперь равновесие половины кольца (рис. 2.7,*б*). Найдем сначала равнодействующую силу давления, спроектировав силы на вертикальную ось. К элементу поверхности $lR_1d\varphi$ приложено усилие, вертикальная составляющая которого

$$plR_1d\varphi\sin\varphi\,.$$

Интегрируя по всей поверхности, найдем вертикальное усилие:

$$N = \int_0^\pi plR_1 \sin\varphi \, d\varphi = 2plR_1 .$$

Из условия равновесия половины кольца получаем

$$2l\delta\sigma_2 = N,$$

что дает следующее равенство:

$$\sigma_2 = p\frac{R_1}{\delta} . \qquad (9)$$

В приближенных расчетах полагают $R_1 \approx R_{ср}$, и тогда

$$\sigma_2 = p\frac{R_{ср}}{\delta} . \qquad (10)$$

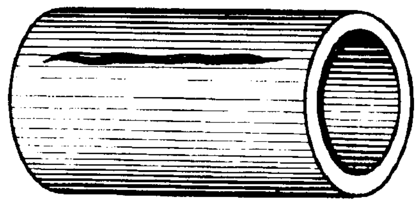


Рис. 2.8. Трещина в цилиндрической оболочке при действии разрушающего внутреннего давления

Сопоставляя равенства (10) и (8), заключаем, что в тонкостенной цилиндрической оболочке окружные напряжения σ_2 в два раза больше продольных.

На рис.2.8 показан общий вид разрушения оболочки (трубы) от значительного внутреннего давления. Трещина возникает под действием растягивающих напряжений σ_2.

4. Напряженное состояние в точке

Для оценки надежности элемента конструкции следует рассмотреть наиболее напряженные места, а в них — наиболее опасные точки. Именно в таких точках при неблагоприятных условиях будет начинаться разрушение. Надо знать напряжения во всех площадках, проходящих через опасную точку, т.е. знать напряженное состояние в точке.

В рассматриваемой точке тела поместим начало системы координат x, y, z (рис.2.9) и бесконечно близкими параллельными сечениями выделим параллелепипед, размеры ребер которого равны dx, dy, dz. Действие остальной части тела на параллелепипед заменим соответствующими напряжениями.

Обозначение напряжений и правило знаков. На рис.2.9 показаны нормальные и касательные напряжения по граням параллелепипеда. Нормальные напряжения в площадке обозначаются символом σ, касательные — символом τ. Нижний индекс в обозначении нормальных напряжений указывает направление нормали к площадке (σ_x, σ_y, σ_z).

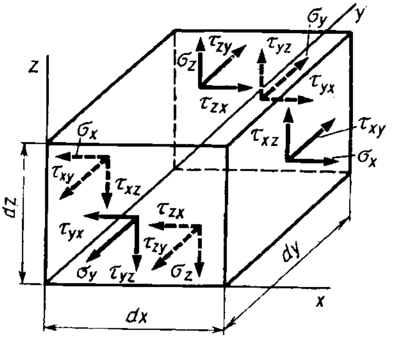


Рис. 2.9. Напряжения на гранях элемента

В обозначении касательных напряжений два нижних индекса: первый указывает направление нормали к площадке, второй — направление вектора касательных напряжений.

Нормальные напряжения растяжения считаются положительными. Векторы растягивающих нормальных напряжений направлены в сторону внешней нормали (от внутренних частиц параллелепипеда — наружу). Знаки и, следовательно, направления нормальных напряжений весьма существенны — многие материалы значительно лучше сопротивляются напряжениям сжатия, чем напряжениям растяжения. Растягивающие напряжения понижают сопротивление материала действию повторных нагрузок, тогда как сжимающие напряжения повышают его.

Условимся о следующем правиле знаков для касательных напряжений: если внешняя нормаль к площадке совпадает с направлением одной из осей координат, то положительное касательное напряжение направлено вдоль соответствующей оси. В противоположном случае (внешняя нормаль к площадке идет по отрицательному направлению оси) положительное касательное напряжение имеет обратное направление.

На рис.2.9 и 2.10 сплошными линиями показаны положительные векторы напряжений на «видимых» гранях прямоугольного элемента. На грани, нормаль к которой идет вдоль оси x, векторы положительных касательных напряжений направлены вдоль осей y и z соответственно. Для передней грани (направление внешней нормали противоположно направлению оси y) положительное касательное напряжение направлено противоположно оси x. Разумеется, векторы напряжений приложены по всем шести граням элемента. Элементарный параллелепипед часто необходимо рассматривать в цилиндрической системе координат (r, θ, z). На рис.2.10 показаны обозначения напряжений в цилиндрической системе координат. Нормальные напряжения σ_r называются радиальными, σ_θ — окружными.

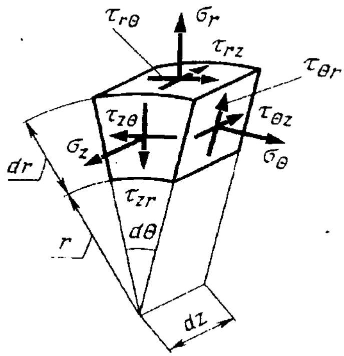


Рис. 2.10. Напряжения на гранях элемента тела в цилиндрической системе координат

Отметим, что по двум параллельным граням элемента (см.рис.2.9 и 2.10) действующие напряжения могут различаться только на бесконечно малые величины, так как расстояния между площадками бесконечно малы, а направления площадок одинаковы (см.рис.2.9). Поэтому следует считать, что напряжения на гранях элементарного параллелепипеда — это напряжения в площадках, проходящих через рассматриваемую точку.

Если направления площадок, проходящих через одну и ту же точку, различны, то различными (в общем случае) будут и действующие в них напряжения. Например, в тонкостенной оболочке (см. рис. 2.7) нормальные напряжения в двух взаимно перпендикулярных площадках различаются в два раза.

Свойства парности касательных напряжений. Так как элемент тела находится в равновесии, то сумма моментов всех сил относительно любой оси должна обращаться в нуль. Как известно из теоретической механики, для равновесия достаточно выполнения этих условий относительно любых трех осей, не лежащих в одной плоскости (три составляющие вектора главного момента обращаются в нуль). Рассмотрим условия равновесия моментов. Силы, распределенные по граням параллелепипеда, будем заменять равнодействующими, приложенными в центре грани (см. рис. 2.9). Строго говоря, последнее допущение не обязательно, и можно показать, что учет изменения напряжений в пределах бесконечно малой грани дает добавки более высокого порядка малости. Последнее относится и к массовым распределенным усилиям, которые будем считать приложенными в центре тяжести элемента (составляющие массовой силы обозначаются X, Y, Z).

Рассмотрим сумму моментов относительно оси x. Отличные от нуля моменты дают векторы τ_{zy}(верхняя грань) и τ_{yz} (задняя грань):

$$-(\tau_{zy}\,dx\,dy)\,dz + (\tau_{yz}\,dx\,dz)\,dy - (\rho Y\,dx\,dy\,dz)\cdot\frac{1}{2}dz +$$

$$+ (\rho Z\,dx\,dy\,dz)\cdot\frac{1}{2}dy = 0, \tag{11}$$

где ρ — плотность материала.

Два последних слагаемых в левой части уравнения (11) можно отбросить, так как они имеют более высокий порядок малости.

В результате получим

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}. \tag{12}$$

Подобным образом получаем три условия парности касательных напряжений:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx};\ \tau_{yz} = \tau_{zy};\ \tau_{zx} = \tau_{xz}. \tag{13}$$

Общий вывод таков: касательные напряжения в точке, действующие по двум взаимно перпендикулярным площадкам, одинаковы. Взаимно перпендикулярные площадки всегда имеют общее ребро. Касательные напряжения в силу свойства парности направлены оба вместе или к ребру, или от ребра. Принятое ранее правило знаков для касательных напряжений (см.рис.2.9 и 2.10) обеспечивает выполнение указанного условия. Свойство парности касательных напряжений справедливо для взаимно перпендикулярных площадок элементарного объема в любой ортогональной системе координат, например в цилиндрической.

Замечания. 1. При выводе уравнения (11) учитывалось направление векторов напряжений по рис.2.9 и соответствующим образом определялся знак момента (положительное направление — вращение против часовой стрелки). Выводы уравнений с помощью чертежа будут часто встречаться в дальнейшем.

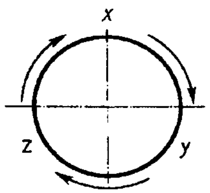


Рис. 2.11. Иллюстрация правила перестановки индексов

2. Вывод одного из трех уравнений (13) позволяет записать два недостающих с помощью правила круговой перестановки индексов. Иллюстрация правила дана на рис.2.11: при круговой перестановке индекс x замещается индексом y, индекс y замещается индексом z, а последний — снова индексом x. Например, подобным образом из условия (12) могут быть получены все соотношения (13).

Правило круговой перестановки индексов применяется во многих разделах механики сплошной среды (в гидродинамике, теории упругости и др.) во всех случаях, когда векторные соотношения записываются с помощью трех скалярных в прямоугольной (декартовой) системе координат.

5. Плоское напряженное состояние

Рассмотрим тонкую пластинку, на которую действуют силы, лежащие в плоскости пластинки (рис.2.12). В этой плоскости расположим систему координат (x, y). Торцевые (фасадные) поверхности пластинки свободны от напряжений, и поэтому

$$\sigma_z = 0\,,\ \tau_{zx} = 0\,,\ \tau_{xy} = 0\,. \qquad (14)$$

Так как пластинка тонкая, то можно считать условия (14) справедливыми для всех площадок, нормальных к оси z (лежащих в плоскости пластинки).*

---

* Строгое доказательство вытекает из того, что на малом участке функция обращается в нуль по концам участка, а производная функции ограничена.

Векторы напряжений σ_x, σ_y и τ_{xy} лежат в одной плоскости, и напряженное состояние называется *плоским*. Отметим, что все точки пластинки находятся в плоском напряженном состоянии. В общем случае понятие «*плоское напряженное состояние*» относится к рассматриваемой точке элемента конструкции.

Если в данной точке A существует площадка, в которой отсутствуют (нормальное и касательное) напряжения, то напряженное состояние в точке является плоским. Например, в точках свободной поверхности детали (рис.2.13) напряженное состояние будет плоским (ось z в точке A направлена по нормали к поверхности).

Особое значение плоского напряженного состояния связано с тем, что оно реализуется в точках поверхности элементов конструкции, которые часто являются «опасными точками» (точками с наибольшими напряжениями в поверхностном слое).

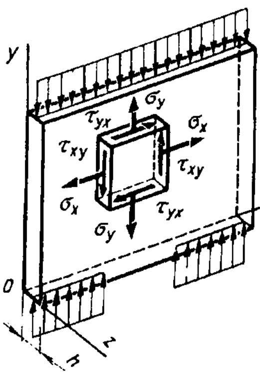


Рис. 2.12. Плоское напряженное состояние

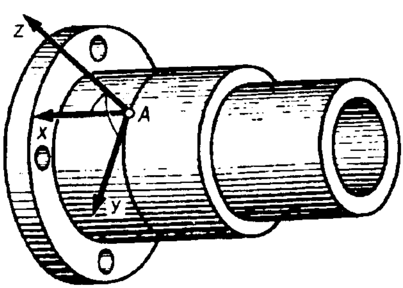


Рис. 2.13. Плоское напряженное состояние в точках свободной поверхности детали

Напряжения в косых площадках при плоском напряженном состоянии. Изучим напряжения в косых площадках, перпендикулярных плоскости пластинки (рис. 2.14).

Условный термин «косая», или «наклонная», площадка означает, что нормаль к площадке не совпадает ни с одной из осей выбранной системы координат.

В площадке BC, нормаль к которой ν составляет угол α с осью x, действуют нормальное σ_ν и касательное τ_ν напряжения. Напряжения распределены равномерно по толщине пластинки h, торцевые грани

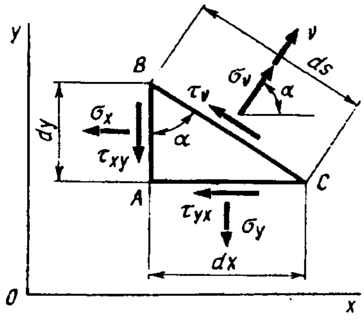


Рис. 2.14. Напряжения в косой площадке при плоском напряженном состоянии

элемента *ABC* не загружены. Ближайшая задача состоит в определении величин σ_ν и τ_ν из условий равновесия элемента *ABC*. Проектируя все усилия на направление нормали ν, найдем

$$\sigma_\nu\, ds\, h = (\sigma_x\, dy \cos\alpha + \sigma_y\, dx \sin\alpha)\, h +$$

$$+ \tau_{xy}(dy \sin\alpha + dx \cos\alpha)\, h\,. \qquad (15)$$

Действующие на элемент массовые силы

$$\rho X \frac{1}{2} dx\, dy\, h\,; \qquad \rho Y \frac{1}{2} dx\, dy\, h$$

составляют усилия второго порядка малости, и в уравнении (15) они отсутствуют. Учитывая, что из рис. 2.14 следует

$$\frac{dx}{ds} = \sin\alpha\,, \qquad \frac{dy}{ds} = \cos\alpha\,, \qquad (16)$$

получаем из соотношения (15)

$$\sigma_\nu = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \sin^2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha\,. \qquad (17)$$

Проектируя все усилия на направление вектора τ_ν, найдем

$$\tau_\nu ds\, h = (\sigma_y\, dx \cos\alpha - \sigma_x\, dy \sin\alpha)\, h +$$

$$+ \tau_{xy}(dy \cos\alpha - dx \sin\alpha)\, h \qquad (18)$$

или

$$\tau_\nu = \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x)\sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha\,. \qquad (19)$$

Формулы (17) и (19) дают значения нормальных и касательных напряжений в косой площадке.

Замечания. 1. Следует четко уяснить, что при выводе уравнений (15) и (18) рассматриваются условия равновесия не напряжений (таких условий не существует!), а действующих усилий по граням элемента.

2. Напряжения по граням элементарного объема (см.рис.2.14) распределяются равномерно. Косую площадку можно рассматривать как косое сечение в элементар-

ном параллелепипеде (рис.2.15), и те же результаты (равенства (17) и (19)) вытекают из условий равновесия заштрихованной части параллелепипеда.

3. Неизвестные векторные величины, для которых принято определенное правило знаков, при выводе следует принимать положительно направленными. Например, σ_ν на рис.2.14 направлено как растягивающее напряжение.

Направление τ_ν выбрано таким, чтобы при $\alpha = 0$ (рис.2.16) оно совпадало с направлением для τ_{xy} (см.рис.2.9). Впрочем, знак касательного напряжения в отличие от нормального обычно несуществен.

4. Кроме рассмотренных косых площадок можно с помощью дополнительных сечений образовать и другие косые площадки.

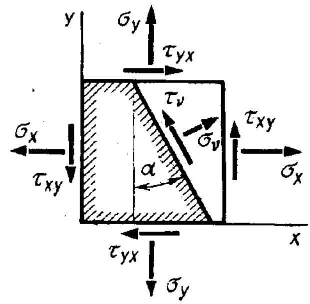


Рис. 2.15. Косая площадка как сечение в элементарном параллелепипеде

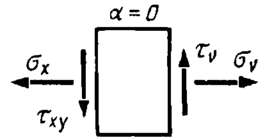


Рис. 2.16. Косая площадка при $\alpha = 0$

Метод определения напряжений в косых площадках остается всегда одним и основывается на условиях равновесия малого элемента.

Главные площадки при плоском напряженном состоянии. Главными площадками называются площадки, в которых отсутствуют касательные напряжения; нормальные напряжения в таких площадках называются *главными напряжениями*.

При плоском напряженном состоянии одну из главных площадок в точке тела можно указать сразу — это площадка, нормаль к которой направлена по оси z (см.рис.2.12), т.е. площадка, лежащая на свободной торцевой поверхности. В такой площадке отсутствуют и касательное, и нормальное напряжения (главное напряжение равно нулю). Найдем главные площадки в точке A среди площадок, перпендикулярных основной плоскости.

Как уже указывалось, грани треугольного элемента на рис.2.14 представляют такие площадки.

Из условия $\tau=0$ получим с помощью соотношения (19)

$$\operatorname{tg} 2\alpha^* = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}, \tag{20}$$

где α^* — угол, который составляет нормаль ν главной площадки с осью x.

Так как $\operatorname{tg}\alpha$ — периодическая функция с периодом π, то уравнению (20) будут удовлетворять углы

$$2\alpha_n^* = 2\alpha^* + n\pi \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

Таким образом,

$$\alpha_0^* = \alpha^*; \quad \alpha_1^* = \alpha^* + \pi/2, \quad \alpha_2^* = \alpha^* + \pi, \quad \alpha_3^* = \alpha^* + 3\pi/2,$$

$$\alpha_4^* = \alpha^* + 2\pi, \ldots \qquad (21)$$

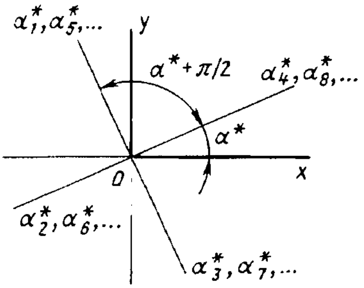


Рис. 2.17. Главные направления при плоском напряженном состоянии

Из рис.2.17 видно, что существуют всего два взаимно перпендикулярных направления, которые составляют с осью x углы α^* и $\alpha^* + \pi/2$. Эти направления называются *главными*.

Проведенный анализ показывает: среди рассматриваемых площадок (нормали к площадкам лежали в плоскости действия напряжений σ_x, σ_y, τ_{xy}) имеются две главные площадки: касательные напряжения в таких площадках отсутствуют. Если учесть еще главную площадку, перпендикулярную оси z, то имеются всего три главные площадки (рис.2.18). Нормальные напряжения в главных площадках (главные напряжения) обозначаются символами σ_1, σ_2, σ_3. При плоском напряженном состоянии $\sigma_3 = 0$.

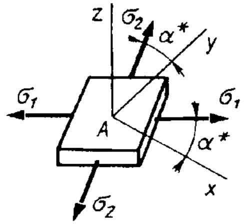


Рис. 2.18. Главные площадки при плоском напряженном состоянии

В дальнейшем будет показано, что в любой точке тела при действии произвольной системы внешних сил в общем случае имеются всего три главные площадки, или, что то же самое, три взаимно перпендикулярных главных направления.

Замечание. При анализе уравнения (20) исключался из рассмотрения случай, когда

$$\sigma_x = \sigma_y; \qquad \tau_{xy} = 0. \qquad (22)$$

Такое напряженное состояние создается в пластине, равномерно растягиваемой одинаковыми усилиями в двух взаимно перпендикулярных направлениях.

При условии (22) из уравнения (19) вытекает, что в любой косой площадке касательные напряжения отсутствуют и главных площадок бесчисленное множество. Поэтому более строгое утверждение таково: или существуют три главные площадки, или (в отдельных частных случаях) их может быть бесчисленно много.

Случай, когда главных направлений бесконечно много, встречается, конечно, редко (например, всестороннее сжатие или растяжение) и не содержит каких-либо сложностей, затрудняющих анализ напряженного состояния. Важно, что не может быть одного, двух, четырех, пяти и т.д. главных направлений: их или три, или бесконечно много.

Главные напряжения при плоском напряженном состоянии.

Главные напряжения могут быть определены из уравнения (17) при $\alpha = \alpha^*$:

$$\sigma_v = \sigma_x \cos^2\alpha^* + \sigma_y \sin^2\alpha^* + \tau_{xy} \sin 2\alpha^* =$$

$$= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\alpha^* + \tau_{xy}\sin 2\alpha^* . \qquad (23)$$

Учитывая равенства

$$\cos 2\alpha^* = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2 2\alpha^*}}, \qquad \sin 2\alpha^* = \pm \frac{\mathrm{tg}\, 2\alpha^*}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2 2\alpha^*}} \qquad (24)$$

и соотношение (20), получим после нескольких громоздких, но простых выкладок выражение

$$\sigma_v = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} . \qquad (25)$$

Последнее равенство дает два значения главных напряжений:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} ; \qquad (26)$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} . \qquad (27)$$

Третье главное напряжение при плоском напряженном состоянии

$$\sigma_3 = 0 . \qquad (28)$$

Так как корень в равенствах (26) и (27) имеет арифметическое (положительное) значение, то $\sigma_1 > \sigma_2$ (в алгебраическом смысле, с учетом знака напряжения).

Приведем теперь другой способ нахождения главных напряжений, который будет использоваться в дальнейшем и для объемного (неплоского) напряженного состояния.

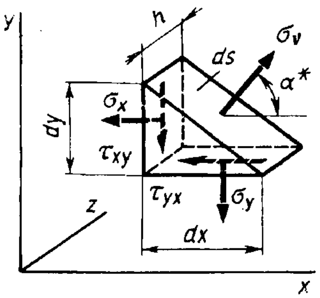


Рис. 2.19. Определение главных напряжений из равновесия элементарной треугольной призмы, одной из граней которой является главная площадка

Рассмотрим равновесие элементарной треугольной призмы (рис.2.19), одной из граней которой является главная площадка. На главной площадке действует нормальное напряжение σ_v; касательное напряжение отсутствует.

Нормаль к главной площадке составляет с осями x, y углы соответственно α^* и $\pi/2-\alpha^*$. Косинусы углов нормали (они называются направляющими косинусами) обозначаются символами l и m:

$$l = \cos\alpha^* \; ; \; m = \cos(\pi/2-\alpha^*) = \sin\alpha^* . \tag{29}$$

Площадь косой площадки равна $ds\,h$, площади прямых площадок составляют

$$\begin{aligned} ds_x &= ds\,h\,l = ds\,h\cos\alpha^* , \\ ds_y &= ds\,h\,m = ds\,h\cos(\pi/2-\alpha^*) = ds\,h\sin\alpha^* . \end{aligned} \tag{30}$$

Проектируя все силы на направления осей x и y, найдем

$$\begin{aligned} \sigma_x\,ds\,l + \tau_{xy}\,ds\,m &= \sigma_v\,ds\,l , \\ \tau_{xy}\,ds\,l + \sigma_y\,ds\,m &= \sigma_v\,ds\,m . \end{aligned} \tag{31}$$

Из уравнений (31) получаем однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных величин l и m:

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_v)\,l + \tau_{xy}m &= 0 , \\ \tau_{xy}l + (\sigma_y - \sigma_v)\,m &= 0 . \end{aligned} \tag{32}$$

При любом значении σ_v (оно заранее тоже неизвестно) система (32) не может иметь нулевых решений относительно l и m , так как $l^2 + m^2 = \cos^2\alpha^* + \sin^2\alpha^* = 1$.

По известной теореме линейной алгебры детерминант системы (32)

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_v & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_v \end{vmatrix} = (\sigma_x - \sigma_v)(\sigma_y - \sigma_v) - \tau_{xy}^2 = 0 . \tag{33}$$

Записав уравнение (33) в виде

$$\sigma_v^2 - (\sigma_x + \sigma_y)\,\sigma_v + \sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2 = 0 , \tag{34}$$

найдем два корня уравнения, выражаемые равенствами (26) и (27).

Уравнения (32) позволяют достаточно просто указать расположение площадок, в которых действуют напряжения σ_1 и σ_2.

Для того чтобы найти направляющие косинусы нормали площадки, в которой действует напряжение σ_1, достаточно внести значение σ_1 в любое из двух уравнений (32), например в первое.

Тогда получим

$$\frac{m_1}{l_1} = \operatorname{tg} \alpha^*_{(1)} = \frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xy}}. \tag{35}$$

Аналогично для напряжения σ_2

$$\frac{m_2}{l_2} = \operatorname{tg} \alpha^*_{(2)} = \frac{\sigma_2 - \sigma_x}{\tau_{xy}}. \tag{36}$$

В последних соотношениях $\alpha^*_{(1)}$ и $\alpha^*_{(2)}$ — углы с осью x площадок, где действуют напряжения σ_1 и σ_2 соответственно. Величины σ_1 и σ_2 определяются равенствами (26) и (27).

Если направления линий, соответствующих углам $\alpha^*_{(1)}$ и $\alpha^*_{(2)}$, взаимно перпендикулярны, то

$$\operatorname{tg} \alpha^*_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha^*_2 = \frac{\sin \alpha^*_{(1)}}{\cos \alpha^*_{(2)}} \cdot \frac{\sin(\alpha^*_{(1)} + \pi/2)}{\cos(\alpha^*_{(1)} + \pi/2)} = -1. \tag{37}$$

Учитывая зависимости (35), (36), (26) и (27), находим

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xy}} \cdot \frac{\sigma_2 - \sigma_x}{\tau_{xy}} = -1, \tag{38}$$

что доказывает взаимную перпендикулярность главных площадок.

Замечания. 1. Были найдены значения главных напряжений, но не было указано, какое именно главное направление соответствует большему напряжению σ_1 и какое — меньшему σ_2. Это будет сделано чуть позже.

2. Были даны два различных вывода формул главных напряжений и два доказательства ортогональности главных напряжений.

Различные параллельные способы получения решения характерны для технического анализа, в котором прежде всего необходима достоверность. Никогда не следует жалеть времени на то, чтобы получить дополнительное подтверждение результата!

Разберем вопрос о наибольших нормальных напряжениях в рассматриваемых площадках. Нормальное напряжение, как следует из формулы (17), зависит от угла наклона площадки α. Для отыскания максимума или минимума функции приравняем нулю производную:

$$\frac{d\sigma_v}{d\alpha} = -2\sigma_x \cos\alpha \sin\alpha + 2\sigma_y \sin\alpha \cos\alpha + 2\,\tau_{xy} \cos 2\alpha = 0\,. \tag{39}$$

Теперь получим значение угла, при котором достигается экстремум (максимум или минимум функции).

Из равенства (39) находим

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\,\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\,. \tag{40}$$

Сопоставляя формулу (40) с формулой (20), заключаем: нормальные напряжения достигают наибольшего или наименьшего значения в главных площадках.

Для различения максимума или минимума функции составим выражение второй производной:

$$\frac{d^2\sigma_v}{d\alpha^2} = -2\Big[\,(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\alpha + 2\,\tau_{xy} \sin 2\alpha\,\Big]. \tag{41}$$

Последнее равенство представим так:

$$\frac{d^2\sigma_v}{d\alpha^2} = -2\cos 2\alpha\Big[\,\sigma_x - \sigma_y + 2\,\tau_{xy} \operatorname{tg} 2\alpha\,\Big] =$$

$$= -\frac{2\cos 2\alpha}{\sigma_x - \sigma_y}\Big[\,(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\,\tau_{xy}^2\,\Big]. \tag{42}$$

Условие существования максимума

$$\frac{d^2\sigma_v}{d\alpha^2} < 0$$

реализуется в двух случаях:

$$\cos 2\alpha > 0\,, \qquad \sigma_x > \sigma_y\,;$$
$$\cos 2\alpha < 0\,, \qquad \sigma_x < \sigma_y\,.$$

В первом случае ($\sigma_x > \sigma_y$) нормаль к площадке, где действует напряжение σ_1, составляет с осью x угол $0 < |2\alpha| < \pi/2$ или $-\pi/4 < \alpha^* < \pi/4$. Во втором случае ($\sigma_x < \sigma_y$) угол лежит в пределах $\pi/4 < |\alpha^*| < 3\pi/4$. В перпендикулярной главной площадке напряжение равно σ_2.

Наибольшие касательные напряжения. Выясним вопрос о максимальных касательных напряжениях в косых площадках. С помощью зависимости (19) находим

$$\frac{d\tau_\nu}{d\alpha} = (\sigma_y - \sigma_x)\cos 2\alpha - 2\tau_{xy}\sin 2\alpha .$$

Приравнивая нулю производную, получаем

$$\operatorname{tg} 2\alpha_\tau = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2\tau_{xy}}, \tag{43}$$

где α_τ — угол нормали к площадке с осью x.

Внося зависимость (43) и равенство (19) и учитывая формулы (24), приходим к следующему значению экстремальных касательных напряжений:

$$\tau_\nu = \pm\frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} . \tag{44}$$

Максимальное и минимальное значения касательного напряжения равны и различаются только знаком, что, как указывалось ранее, несущественно для обычных конструкционных материалов.

Вспоминая формулы (26) и (27) для главных напряжений, находим

$$\tau_{\max} = |\tau_\nu(d_\tau)| = \frac{1}{2}|\sigma_1 - \sigma_2| . \tag{45}$$

Максимальное значение касательных напряжений равно абсолютному значению полуразности главных напряжений.

Аналогично можно установить, что площадки с наибольшими (по абсолютной величине) касательными напряжениями взаимно перпендикулярны. Такой вывод следует также из свойства парности касательных напряжений.

Как же расположены площадки с максимальными касательными напряжениями по отношению к главным площадкам?

Сопоставляя равенства (20) и (43), находим

$$\operatorname{tg} 2\alpha_\tau \operatorname{tg} 2\alpha^* = -1 . \tag{46}$$

Из этого условия следует, что стороны углов $2\alpha_\tau$ и $2\alpha^*$ взаимно перпендикулярны: $2\alpha_\tau = 2\alpha^* + \pi/2$, и потому $\alpha_\tau = \alpha^* + \pi/4$.

Плоскость площадок с наибольшими (максимальными) касательными напряжениями делит пополам прямой угол между плоскостями главных площадок. Этот вывод оказывается справедливым и для любого (не только плоского) напряженного состояния.

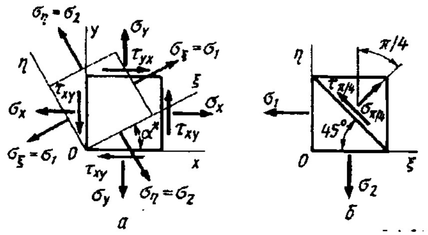


Рис. 2.20. Главные направления ξ и η и площадки с максимальными касательными напряжениями

На рис.2.20,*а* показаны главные направления ξ и η, которые можно рассматривать как оси координат, повернутые на угол α^* к основной системе координат.

По граням элементарного параллелепипеда, построенного на осях ξ, η, будут действовать только нормальные напряжения $\sigma_\xi = \sigma_1$; $\sigma_\eta = \sigma_2$.

Рассмотрим теперь напряжения в площадке, составляющей угол $\pi/4=45°$ с главными осями (рис.2.20,*б*). В этой площадке должны действовать максимальные касательные напряжения. Из условия равновесия треугольной призмы аналогично выводам уравнений (27) и (19) находим

$$\sigma_{\pi/4} = \frac{1}{2}\,(\sigma_1 + \sigma_2), \tag{47}$$

$$\tau_{\pi/4} = -\frac{1}{2}\,(\sigma_1 - \sigma_2). \tag{48}$$

Равенство (48) подтверждает сделанный ранее вывод о значении максимального касательного напряжения. Примечательно, что в площадках, где действует τ_{max}, имеются и нормальные напряжения.

6.Объемное напряженное состояние

Ранее указывалось, что в любой точке нагружаемого тела существуют три главные площадки, в которых действуют главные (нормальные) напряжения, а касательные напряжения отсутствуют.

Если все три главных напряжения отличны от нуля, то напряженное состояние в точке называется *объемным* или *трехмерным*. При условии равенства нулю одного из главных напряжений напряженное состояние считается *плоским* или *двумерным*. Наконец, при отличии от нуля только одного главного напряжения напряженное состояние будет *линейным* или *одномерным*.

Для анализа объемного напряженного состояния необходимо рассмотреть площадки произвольной ориентации, проходящие через данную точку тела.

Произвольная наклонная площадка. Ранее при исследовании напряжений в наклонных (косых) площадках рассматривались площадки определенного вида — нормаль к ним лежала в плоскости x, y. Для плоского напряженного состояния этого было почти достаточно, но в общем случае требуется значение напряжений в произвольной наклонной площадке, заданной в выбранной системе координат.

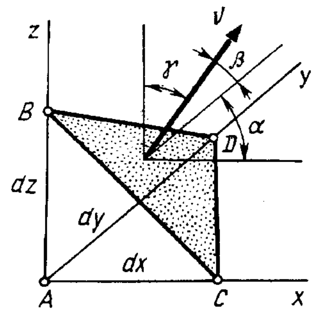


Рис. 2.21. Произвольная косая площадка

Рассмотрим теперь элементарный четырехгранник (тетраэдр), построенный на осях прямоугольной системы координат с центром в точке A (рис.2.21).

Произвольная косая площадка BCD характеризуется единичным вектором нормали ν. Составляющие вектора по осям x, y и z равны l, m, n:

$$\nu = (l, m, n). \tag{49}$$

По физическому смыслу величины l, m и n являются косинусами углов вектора нормали ν с осями координат:

$$l = \cos\alpha; \quad m = \cos\beta, \quad n = \cos\gamma. \tag{50}$$

Величины l, m и n часто называются направляющими косинусами. Если обозначить площадь наклонной грани dS, то площадь грани ABD

$$dS_x = l\,dS. \tag{51}$$

Площади граней ABC и ACD:

$$dS_y = m\,dS, \quad dS_z = n\,dS. \tag{52}$$

Подобные соотношения в частном случае использовались ранее (уравнения (30)), а сейчас установим их с помощью наглядных физических представлений.

Из повседневного опыта ясно, что если поместить в жидкость тетраэдр из материала с тем же удельным весом, то он будет находиться в равновесии при любом давлении столба жидкости.

Так как размеры тетраэдра бесконечно малы, можно считать, что давление по всем его граням одинаково (рис.2.22).

Проектируя все силы на направление x, находим

$$p\,dS_x - p\,l\,dS = 0\,, \quad dS_x = l\,dS\,. \tag{53}$$

Аналогично по другим осям

$$p\,dS_y - p\,m\,dS = 0\,, \quad dS_y = m\,dS\,,$$

$$p\,dS_z - p\,n\,dS = 0\,, \quad dS_z = n\,dS\,.$$

Конечно, последние соотношения можно было установить из чисто геометрических соображений, но проведенный анализ дает дополнительную информацию.

Если по трем взаимно перпендикулярным площадкам действуют одинаковые нормальные напряжения, а касательные напряжения отсутствуют, то в любой наклонной площадке действует то же нормальное напряжение и так же отсутствует касательное напряжение. Это пример, когда главных площадок оказывается бесконечно много.

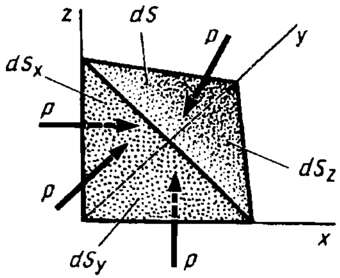


Рис. 2.22. Частный случай равновесия тетраэдра: по всем граням действует одинаковое давление p

Напряжения в произвольной косой площадке. В наклонной площадке, нормаль к которой ν (рис.2.23), действуют нормальное σ_ν и касательное τ_ν напряжения, подлежащие определению. По грани ABC приложены известные напряжения σ_y, τ_{yx}, τ_{yz}; по двум другим граням — соответственно σ_x, τ_{xy}, τ_{xz} и σ_z, τ_{zx}, τ_{zy}. Так как размеры элементарного тетраэдра бесконечно малы, то напряжения по граням представляют, в сущности, напряжения в различных площадках, проходящих через точку A (или какую-либо другую точку тетраэдра — разницы нет).

Бесконечно малые размеры четырехгранника (тетраэдра) дают также возможность пренебречь массовыми силами по сравнению с поверхностными, приложенными по его граням.

Для определения напряжений в наклонной площадке проще всего найти сначала составляющие полного напряжения по осям. Проектируя силы (а не напряжения), действующие по граням тетраэдра, на направления осей, находим

$$\sigma_x\, dS_x + \tau_{yx}\, dS_y + \tau_{zx}\, dS_z = p_x\, dS\,,$$
$$\tau_{xy}\, dS_x + \sigma_y\, dS_y + \tau_{zy}\, dS_z = p_y\, dS\,, \qquad (54)$$
$$\tau_{xz}\, dS_x + \tau_{yz}\, dS_y + \sigma_z\, dS_z = p_z\, dS\,.$$

Учитывая зависимости (51), (53), получаем важные соотношения

$$p_x = \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n\,, \qquad (55)$$

$$p_y = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n\,, \qquad (56)$$

$$p_z = \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n\,. \qquad (57)$$

Напомним, что в силу парности касательных напряжений

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}\,,\ \ \tau_{yz} = \tau_{zy},\ \ \tau_{zx} = \tau_{xz}\,. \qquad (58)$$

Для того чтобы найти значение нормального напряжения, надо спроектировать каждую из составляющих вектора p_ν на направление ν и образовать их сумму:

$$\sigma_\nu = p_x l + p_y m + p_z n\,.$$

Ссылаясь на соотношения (55) — (57), можно утверждать, что

$$\sigma_\nu = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy} lm + 2\tau_{yz} mn + 2\tau_{zx} nl\,. \qquad (59)$$

В частном случае плоского напряженного состояния, когда рассматривается наклонная площадка, параллельная оси z, будем иметь $n=0$, и тогда

$$\sigma_\nu = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + 2\tau_{xy} lm\,. \qquad (60)$$

Так как в разбираемом случае

$$l = \cos\alpha\,,\ m = \cos\beta =$$

$$= \cos(\pi/2 - \alpha) = \sin\alpha\,,$$

то формула (60) совпадает с аналогичной формулой (17). Касательное напряжение в косой площадке равно

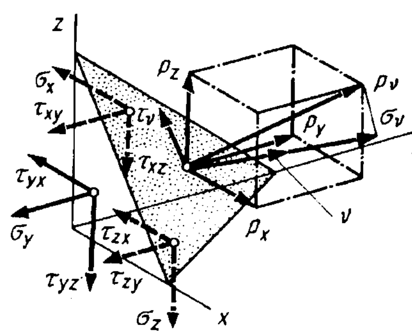


Рис. 2.23. Нормальное σ_ν и касательное τ_ν напряжения в косой площадке; p_ν — вектор полного напряжения в площадке ($p_\nu^2 = \sigma_\nu^2 + \tau_\nu^2$); p_x, p_y, p_z — проекции полного напряжения на оси x, y, z

$$\tau_\nu = \sqrt{p_\nu^2 - \sigma_\nu^2} = \left\{ p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - (p_x l + p_y m + p_z n)^2 \right\}^{1/2}. \qquad (61)$$

Направление τ_ν можно определить из условия, что линия действия касательного напряжения является линией пересечения плоскости, содержащей векторы p_ν и σ_ν. Однако направление τ_ν для дальнейшего несущественно, и детализацию вопроса опустим.

Замечания. 1. Знание напряжений (нормальных и касательных) по трем взаимно перпендикулярным площадкам, проходящим через данную точку тела, дает возможность определить напряжения в любой другой площадке, также проходящей через эту точку.

2. После получения общей формулы для нормальных напряжений в косой площадке она была применена для уже известного частного случая (плоского напряженного состояния). Такая процедура всегда желательна, и тем более она необходима при исследовании новых вопросов.

Главные площадки и главные напряжения при объемном напряженном состоянии. Пусть косая площадка (рис.2.24) является главной. Тогда полное напряжение в площадке совпадает с нормальным напряжением, касательное напряжение отсутствует. Для главной площадки

$$p_x = \sigma_\nu l\,, \; p_y = \sigma_\nu m\,, \; p_z = \sigma_\nu n\,, \qquad (62)$$

где $l = \cos\alpha$, $m = \cos\beta$, $n = \cos\gamma$.

Теперь из (55) — (57) получаем систему линейных однородных уравнений:

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_\nu)\, l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n &= 0, \\ \tau_{xy} l + (\sigma_y - \sigma_\nu)\, m + \tau_{zy} n &= 0, \\ \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + (\sigma_z - \sigma_\nu)\, n &= 0. \end{aligned} \qquad (63)$$

Основными неизвестными в этой системе являются величины l, m, n, характеризующие положение главной площадки. Они связаны соотношением

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1\,, \qquad (64)$$

так как являются проекциями на оси x, y, z единичного вектора нормали ν ($|\nu| = 1$).

В силу равенства (64) величины l, m и n не могут все одновременно быть равными нулю.

Из линейной алгебры известно, что однородная система уравнений может обладать ненулевым решением только в том случае, когда детерминант системы обращается в нуль:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_\nu & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_\nu & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_\nu \end{vmatrix} = 0 . \qquad (65)$$

Развертывая определитель и учитывая свойства парности касательных напряжений, находим:

$$(\sigma_x - \sigma_\nu)(\sigma_y - \sigma_\nu)(\sigma_z - \sigma_\nu) + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} -$$

$$-(\sigma_x - \sigma_\nu)\tau_{yz}^2 - (\sigma_y - \sigma_\nu)\tau_{zx}^2 - (\sigma_z - \sigma_\nu)\tau_{xy}^2 = 0 . \qquad (66)$$

Последнее уравнение третьей степени относительно σ_ν, которое запишем в виде

$$\sigma_\nu^3 - \sigma_\nu^2 J_1 - \sigma_\nu J_2 - J_3 = 0 , \qquad (67)$$

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z , \qquad (68)$$

$$J_2 = -\sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_z - \sigma_z\sigma_x + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 , \qquad (69)$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 . \qquad (70)$$

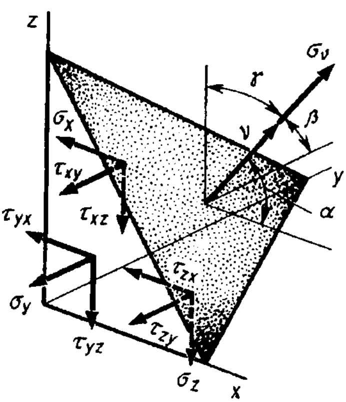


Рис. 2.24. Определение главных площадок и главных напряжений

Уравнение (67) называется характеристическим уравнением напряженного состояния. Корни характеристического уравнения (значения σ_ν) представляют главные напряжения. В частном случае плоского напряженного состояния $\sigma_z = 0$, $\tau_{zx} = 0$, $\tau_{yz} = 0$ оно соответствует уравнению (34). Для плоского напряженного состояния коэффициент $J_3 = 0$ и один из корней характеристического уравнения равен нулю, т.е. одно из главных напряжений обращается в нуль.

В случае линейного напряженного состояния два главных напряжения равны нулю и, следовательно, в уравнении (67) должно быть $J_2 = J_3 = 0$.

В общем случае характеристическое уравнение (67) имеет три действительных корня: σ_1, σ_2, σ_3 — три главных напряжения.

Внося значения σ_1 в любые два уравнения (63) и присоединяя уравнение (64), получаем систему уравнений для определения значений $l_{(1)}$, $m_{(1)}$, $n_{(1)}$, характеризующих положение главной площадки с напряжением σ_1. Подобным образом находятся направляющие косинусы двух других главных площадок.

Корни уравнения (67) могут быть найдены по точным формулам для решения кубических уравнений (формулам Кардано). Во многих случаях удобно воспользоваться численным методом Ньютона, представив уравнение (67) в виде

$$f(\sigma_v) = \sigma_v^3 - \sigma_v^2 J_1 - \sigma_v J_2 - J_3 = 0. \qquad (71)$$

Если $\sigma_{v(i)}$ — i-е приближение для значения корня, то следующее приближение

$$\sigma_{v(i+1)} = \sigma_{v(i)} - \frac{f(\sigma_{v(i)})}{\dfrac{df}{d\sigma_v}(\sigma_{v(i)})}, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots; \qquad (72)$$

производная

$$\frac{df}{d\sigma_v}(\sigma_{v(i)}) = 3\sigma_{v(i)}^2 - 2\sigma_{v(i)} J_1 - J_2.$$

Схема численного решения показана на рис.2.25. Для выбора исходного приближения полезно предварительно определить области перемены знака функции $f(\sigma_v)$. Расчет по формуле (72) заканчивается, когда исходное и последующее приближения достаточно близки.

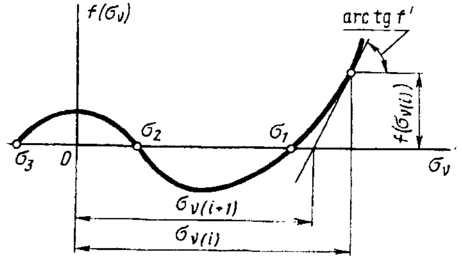


Рис. 2.25. Схема численного решения характеристического уравнения $f(\sigma_v) = 0$ методом Ньютона

Инварианты напряженного состояния в точке. Расположение главных площадок и значения главных напряжений в точке зависят от геометрии детали, действующих на нее нагрузок и других факторов. Например, при растяжении трубы одна из главных площадок в точке поперечного сечения будет лежать в плоскости сечения; при кручении трубы такая площадка не будет главной, так как в ней будут действовать касательные напряжения.

Понятно, что расположение главных площадок и значения главных напряжений не могут зависеть от того или иного выбора системы координат или принятого направления осей. Тогда коэффициенты характеристического уравнения напряженного состояния (уравнения (67)) не должны зависеть от выбора системы координат, т.е. быть инвариантными при изменении системы координат (например, при повороте системы координат). Коэффициенты характеристического уравнения называются инвариантами напряженного состояния. Величина J_1 называется линейным, J_2 — квадратичным и J_3 — кубичным инвариантом (по отношению к компонентам напряжений).

Понятие о тензоре напряженного состояния. В механике много фундаментальных понятий связано с векторными величинами (сила, скорость, ускорение и т.п.). Вектор в обычной (трехмерной) системе координат можно представить в виде столбца

$$a = \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{Bmatrix}, \qquad (73)$$

где a_x, a_y и a_z — три скалярные величины — проекции вектора на оси координат.

Для векторных величин определены аналитические операции: сложение, вычитание, умножение.Например, сумма двух векторов a и b равна

$$a + b = \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{Bmatrix}. \qquad (74)$$

Однако существуют физические понятия более сложной природы, например напряженное состояние в точке нагруженного тела, которое нельзя описать с помощью какой-либо векторной величины. Тогда вводится понятие «тензор», который образуется из трех векторных величин подобно тому, как сам вектор образуется из трех скалярных величин. Таким образом, тензор характеризуется девятью скалярными величинами — компонентами тензора, которые записываются в виде таблицы. Например, тензор напряжений записывается в следующем виде:

$$T_\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{Bmatrix}. \qquad (75)$$

Понятно, что тензор напряжений может полностью характеризовать напряженное состояние, так как его таблица включает компоненты напряжений по трем взаимно перпендикулярным площадкам. Из предыдущего нам известно, что этих данных достаточно, чтобы выяснить напряжения в произвольной площадке.

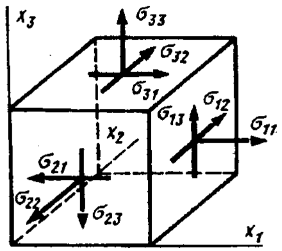


Рис. 2.26. Обозначения напряжений при тензорном описании напряженного состояния

Тензор напряжений является симметричным, так как таблица (матрица) тензора симметричная. Симметрия тензора напряжений является следствием парности касательных напряжений. Симметричный тензор характеризуется не девятью, а шестью скалярными величинами. К более компактной записи векторов и тензоров ведет несколько иной способ обозначения осей, если вместо символов x, y, z обозначить оси символами x_1, x_2, x_3. Компоненты напряженного состояния в осях x_1, x_2, x_3 (рис.2.26) обозначаются символами σ_{11}, $\sigma_{12}\dots$

Тензор напряжений в компактной записи будет таким:

$$T_\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{Bmatrix} = \left\{ \sigma_{ij} \right\}, \quad i\,, j = 1, 2, 3. \tag{76}$$

Тензор, к сожалению, не имеет геометрического образа, однако по отношению к тензорным величинам определен ряд операций. Например, сумма двух тензорных величин $T_\sigma^{(1)}$ и $T_\sigma^{(2)}$ есть тензор, причем

$$T_\sigma = T_\sigma^{(1)} + T_\sigma^{(2)} = \left\{ \sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)} \right\}. \tag{77}$$

Действия над тензорами во многих случаях совпадают с действиями над матрицами.

Тензор напряжений имеет компоненты с двумя индексами, пробегающими значения от 1 до 3. В силу этого он называется тензором второго ранга. Существуют тензоры более высоких рангов; с другой стороны, вектор можно называть тензором первого ранга.

При повороте системы координат компоненты тензора изменяются, так как по физическому смыслу они представляют собой напряжения в координатных площадках. Однако величины J_1, J_2 и J_3 (см.формулы (68)—(70)) являются инвариантами тензора напряжений.

7. Дифференциальные уравнения равновесия элемента тела и краевые условия

Ранее при анализе напряженного состояния рассматривались условия равновесия элементов тела для определения напряжений в различных площадках. Изменение напряжений по граням элементов в связи с приращением координат не учитывалось, поскольку учет указанных изменений приводил к бесконечно малым более высокого порядка малости. По этой же причине исчезли из уравнений и массовые силы (силы тяжести, силы инерции и др.).

При анализе напряжений в косых площадках достаточно было считать, что на параллельных гранях основного параллелепипеда (рис.2.27) с точностью до бесконечно малых первого порядка напряжения одинаковы. Приступим к дальнейшим уточнениям, необходимым для анализа распределения напряжений в различных точках тела.

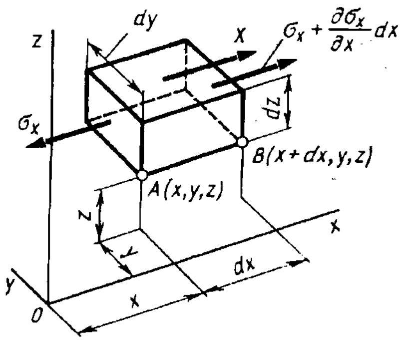


Рис. 2.27. К выводу дифференциального уравнения равновесия элемента в случае одноосного напряженного состояния — растяжения вдоль оси

Уравнение равновесия элемента тела в случае одноосного растяжения. В точке $A(x, y, z)$ выделен элементарный параллелепипед (см.рис.2.27) с размерами ребер dx, dy, dz. Будем считать, что на грани, проходящей через точку A, действует нормальное напряжение σ_x.

Так как рассматривается только растяжение (сжатие) вдоль оси x, то по другим граням нормальных напряжений нет, а касательные напряжения по всем координатным граням отсутствуют.

В элементарных площадках, перпендикулярных оси x, не проходящих через различные точки тела, напряжения σ_x будут в общем случае также различными, т.е.

$$\sigma_x = f(x, y, z).$$

Тогда следует заключить, что на грани, проходящей через точку B, действует нормальное напряжение

$$\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx, \tag{78}$$

где $\partial\sigma_x/\partial x = \partial f(x, y, z)/dx$ — частная производная функции $\sigma_x = f(x, y, z)$; дифференцирование ведется по переменной x; переменные y и z условно считаются постоянными величинами.

Например, если напряжение σ_x является линейной функцией координат

$$\sigma_x = C_0 + C_1 x + C_2 y + C_3 z, \tag{79}$$

то

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} = C_1. \tag{80}$$

На тело действует массовая сила (на единицу массы) X (центробежная сила, сила тяжести и т.п.). Массовая сила, приложенная к элементарному объему,

$$dF_V = \rho X\,dx\,dy\,dz, \tag{81}$$

где ρ — плотность материала.

Из условия равновесия элемента получаем

$$-\sigma_x dy\,dz + \left(\sigma_x + \frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx\right)dy\,dz + \rho X\,dx\,dy\,dz = 0 \tag{82}$$

или в окончательной форме

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \rho X = 0. \tag{83}$$

Замечание. При выводе условия равновесия напряжение σ_x в пределах грани считалось постоянным. Можно показать, ссылаясь на бесконечно малые размеры граней, что учет изменения напряжений в различных точках грани дал бы слагаемое более высокого (четвертого) порядка малости.

Пример. Определить распределение растягивающих напряжений в бурильной штанге под действием собственного веса. Схема бурильной установки показана на рис.2.28. Штанга рассматривается как стержень постоянного сечения. Распределение растягивающих напряжений по поперечному сечению предполагается постоянным . Ось x направляем вдоль оси стержня. На штангу действует усилие веса.

Если γ — удельный вес материала штанги, измеряемый отношением его веса к объему (Н/см^3), то на единицу массы приходится усилие

$$X = \frac{\gamma}{\rho}. \tag{84}$$

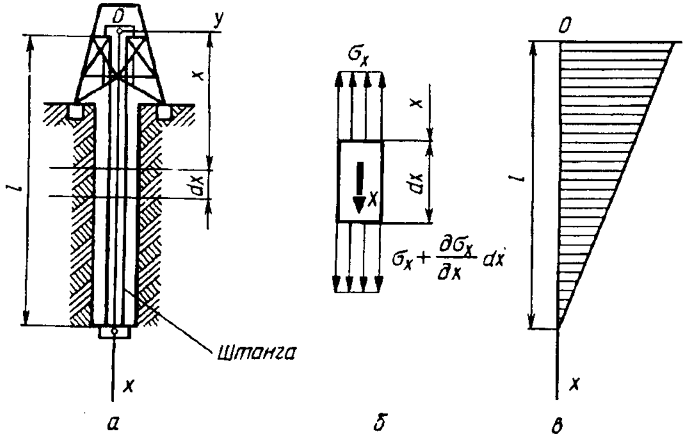


Рис. 2.28. Расчетная схема бурильной штанги:
а — общая схема; *б* — элемент штанги; *в* — эпюра распределения растягивающих напряжений по длине штанги

Из условия равновесия (83) следует выражение

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \rho X = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \gamma = 0 . \tag{85}$$

Из последнего уравнения получаем $\sigma_x(x) = -\gamma x + C$.

Произвольная постоянная C находится из краевого условия:
при $x = l$

$$\sigma_x(l) = -\gamma l + C = 0 .$$

Определяя C, находим

$$\sigma_x(x) = \gamma (l - x) . \tag{86}$$

Наибольшее напряжение получается в сечении x=0:

$$\sigma_{x\max} = \gamma l . \tag{87}$$

Из формулы (87) вытекает, что длина штанги не может быть беспредельной: она ограничивается прочностью материала на растяжение.

Если допустимое напряжение на растяжение

$$\left[\sigma_{\text{р}} \right] = \frac{\sigma_{\text{в}}}{n} , \tag{88}$$

где $\sigma_{\text{в}}$ — предел прочности, n — запас прочности (обычно n =1,5÷2,5), то предельная длина штанги постоянного сечения по равенству (87)

$$l_{пр} = \frac{[\sigma]_p}{\gamma} = \frac{1}{n}\cdot\frac{\sigma_в}{\gamma}. \qquad (89)$$

Из последней формулы следует, что для штанги наиболее подходящими будут материалы, обладающие высоким пределом прочности и малым удельным весом. Отношение

$$\frac{\sigma_в}{\gamma} \doteq \sigma_в \qquad (90)$$

иногда называют удельным пределом прочности.Он имеет размерность длины. Эта характеристика чрезвычайно важна для авиационных материалов, так как вес авиационной конструкции является одним из ее основных показателей; обычно $\sigma_в = 10 \div 40$ км.

Дифференциальные уравнения равновесия элемента тела. Рассмотрим равновесие элемента тела, примыкающего к точке A с координатами x, y, z (рис.2.29); размеры ребер dx, dy, dz. На гранях элемента, содержащих точку A, напряжения имеют следующие значения:

$$ADEF:\ \sigma_x,\ \tau_{xy},\ \tau_{xz};$$
$$ABCD:\ \sigma_y,\ \tau_{yx},\ \tau_{yz};$$
$$ABGF:\ \sigma_z,\ \tau_{zx},\ \tau_{zy}.$$

На рис. 2.29 показаны не все напряжения, чтобы излишне не загромождать чертеж. На других гранях будем иметь:

$$HGBC:\ \sigma_x + \frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx,\ \tau_{xy} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}dx,\ \tau_{xz} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}dx;$$
$$HGFE:\ \sigma_y + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y}dy,\ \tau_{yx} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}dy,\ \tau_{yz} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}dy;$$
$$HCDE:\ \sigma_z + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z}dz,\ \tau_{zx}\ \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}dz,\ \tau_{zy} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}dz.$$

Приращение напряжений по отношению к другой параллельной грани связано с приращением одной из координат. Кроме напряжений на гранях элемента, на него действует массовая сила, компоненты которой обычно обозначают X, Y, Z.

Составим суммы проекций всех сил на оси координат. Удобно сразу рассматривать две параллельные грани, так как напряжения на них направлены в разные стороны. Рассмотрим проекцию сил на ось x. На гранях $ADEF$ и $BCHG$ составляющие по оси x имеют только нормальные напряжения:

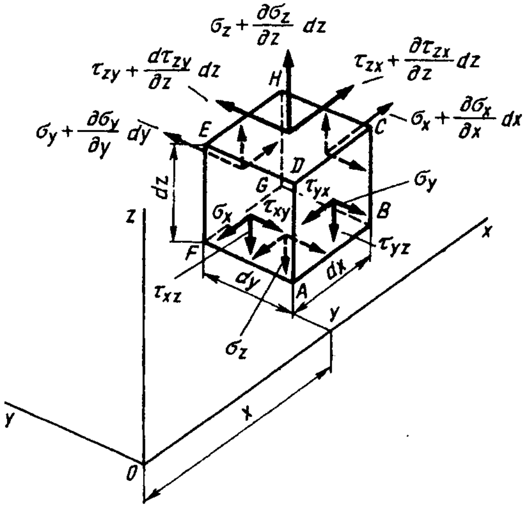


Рис. 2.29. Условия равновесия элемента тела

$$- \sigma_x \, dy \, dz + \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy \, dz .$$

Среди сил, действующих по граням *ADCB* и *FEHG*, проекцию на ось x дают касательные напряжения:

$$- \tau_{yx} \, dx \, dz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx \, dz .$$

Силы на гранях *ABGF* и *DCHE* составляют проекцию на ось x:

$$- \tau_{zx} \, dx \, dy + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx \, dy.$$

Сумма проекций всех сил с учетом массовой силы дает следующее условие:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho X = 0 . \qquad (91)$$

Аналогично для других осей:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho Y = 0 , \qquad (92)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho Z = 0 . \tag{93}$$

Уравнения (91)-(93) представляют собой три *дифференциальных уравнения равновесия* элемента тела в прямоугольных (декартовых) координатах.

Из механики известно, что в общем случае для любого тела, находящегося в равновесии, должны выполняться шесть условий равновесия (три — для составляющих усилия и три — для составляющих момента). Три условия для моментов были рассмотрены ранее, и они не изменяются при учете приращения напряжений по граням элемента. Эти три условия представляют свойства парности касательных напряжений:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} , \ \tau_{yz} = \tau_{zy} , \ \tau_{zx} = \tau_{xz} . \tag{94}$$

Дифференциальное уравнение равновесия элемента в тензорной форме. Вспоминая тензорные обозначения и учитывая свойство парности касательных напряжений $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, можно записать уравнения равновесия в следующем виде:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + \rho X_1 = 0 , \\
\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + \rho X_2 = 0 , \\
\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \rho X_3 = 0 .
\end{gathered} \tag{95}$$

Числовая индексация осей позволяет применить приемы сокращенной записи. Три уравнения (95) запишем в виде

$$\sigma_{ij,j} + \rho X_i = 0 , \qquad i = 1,2,3 . \tag{96}$$

В уравнении (96) запятая в индексе означает дифференцирование по координате, указываемой следующим за запятой индексом. Далее в тензорной записи используется правило Эйнштейна: по двум одинаковым индексам проводится суммирование от 1 до 3. В уравнении (96) такое суммирование проводится по индексу j. Давая индексу i значения 1,2,3, получаем каждый раз одно из уравнений (95).

Краевые условия для напряжений. Уравнения равновесия (94)-(96) справедливы для всех внутренних элементов. Равновесие элементов, примыкающих к поверхности тела, обеспечивается выполнением краевых условий (рис.2.30,*а*,*б*).

Допустим, что на поверхности тела заняты внешние распределенные нагрузки (напряжения на поверхности). Вектор напряжения

$$p_\nu(p_x, p_y, p_z)$$

имеет составляющие по осям x, y и z соответственно p_x, p_y, p_z. Элемент поверхности dS, нормаль к которому ν, можно рассматривать как косую площадку и записать аналогично соотношениям (55)—(57):

$$\begin{aligned} \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n = p_x, \\ \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n = p_y, \\ \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n = p_z, \end{aligned} \qquad (97)$$

где l, m, n — составляющие единичного вектора нормали (направляющие косинусы нормали); $\sigma_x, \ldots, \tau_{yx} \ldots$ — компоненты напряженного состояния в точках поверхности.

Если часть поверхности свободна от действия внешней нагрузки, то для точек этой части поверхности

$$p_x = 0, \ p_y = 0, \ p_z = 0. \qquad (98)$$

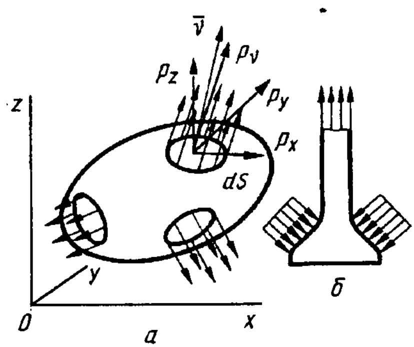


Рис. 2.30. Краевые условия для напряжений:
а — общий случай действия распределенной по поверхности нагрузки;
б — поверхностные нагрузки, действующие на хвостовик лопатки компрессора газотурбинного двигателя

Действие сосредоточенных сил. В конструкциях встречаются внешние нагрузки, приложенные к небольшим участкам поверхности (рис.2.31).

В таких случаях удобно ввести понятие (модель) сосредоточенного воздействия, или сосредоточенной силы.

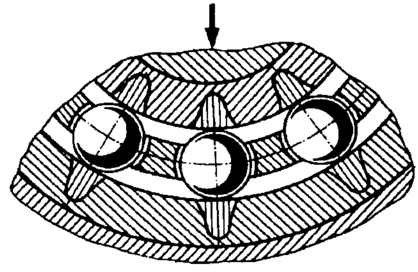


Рис. 2.31. Пример действия сосредоточенных сил (взаимодействие вала и шарикоподшипника)

Пусть на участке поверхности S_0 (рис.2.32) приложены внешние распределенные нагрузки, интенсивность которых (напряжение) равна p. Если площадь S_0 мала, а напряжения p велики, то их действие можно заменить сосредоточенным усилием

$$P = p\,S_0 . \tag{99}$$

На достаточном удалении от малой площадки S_0 в двух схемах действия внешней нагрузки напряжения будут практически одинаковыми, что дает основания для использования представления о сосредоточенном воздействии внешней нагрузки. Точнее, под сосредоточенной силой понимается предел

$$\lim_{\substack{p \to \infty \\ S_0 \to 0}} (p\,S_0) = P . \tag{100}$$

В местах приложения сосредоточенных сил интенсивность поверхностной нагрузки стремится к бесконечности. Это заключение в соответствии с равенствами (97) относится и к компонентам напряженного состояния в точке приложения силы (в некоторой малой области).

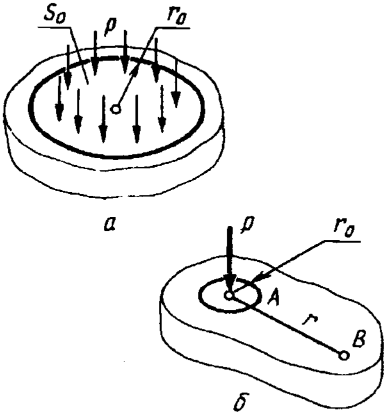


Рис. 2.32. Сосредоточенная сила как результат предельного перехода:
а — поверхностная распределенная нагрузка; *б* — замена распределенной нагрузки сосредоточенной силой

Следует всегда иметь в виду, что модель сосредоточенного воздействия является расчетной схемой, дающей достоверные результаты на некотором удалении от точки приложения силы. Однако представление о сосредоточенном воздействии часто очень удобно, и оно широко применяется в технических расчетах.

Принцип Сен-Венана для краевых условий. Рассмотрим тело, которое нагружается на одном из небольших участков распределенными усилиями. В одном случае (рис.2.33,*а*) нагрузка распределена в пределах участка равномерно, в другом (рис.2.33,*б*) — неравномерно. Равнодействующие двух распределенных нагрузок

$$P = \int_{S_0} p\,dS_0 \tag{101}$$

одинаковы.

Отметим, что системы внешних сил на участке, имеющие одинаковые значения равнодействующего усилия, называются статически эквивалентными. В двух случаях нагружения напряженные состояния в детали в пределах участка нагружения будут, конечно, различными, но на некотором удалении от рассматриваемого участка окажутся практически одинаковыми.

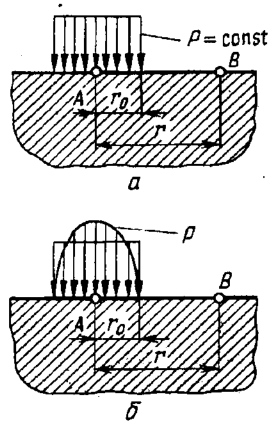


Рис. 2.33. Принцип Сен-Венана

Сущность принципа Сен-Венана состоит в следующем. На удалении от нагруженного участка поверхности порядка наибольшего линейного размера участка особенности распределения нагрузки в пределах участка несущественны, важно только значение равнодействующего усилия. Для нагружения, показанного на рис.2.33, при $r \gg r_0$ напряжения и деформации в точке B будут практически одинаковыми. Принцип Сен-Венана имеет большое практическое значение, так как часто позволяет упростить краевые условия, если основной интерес представляют напряжения и деформации на некотором удалении от места приложения нагрузки.

Принцип назван в честь французского ученого-инженера Б.Сен-Венана (1797—1886), одного из создателей современной теории упругости.

Глава 3
ДЕФОРМАЦИИ

Из опыта известно, что под действием внешних усилий элементы машин и конструкций изменяют свои первоначальные размеры и форму (удлинение болта, прогиб труб и балок и т.п.).

В большинстве случаев изменения размеров и формы после приложения нагрузки невелики, но в ряде случаев они могут препятствовать нормальной работе. Умение определить деформации и установить их допустимые значения имеет важное значение при проектировании и расчете конструкций. Рассмотрение деформаций необходимо также для выяснения закона распределения напряжений в элементах конструкций, для оценки работоспособности по условиям прочности.

В теории деформаций сопоставляются начальное и деформированное состояния тела. Время деформирования, траектории точек тела в процессе деформации, физические свойства тела оставляются в стороне. Изучается геометрическая задача — изменение длины и взаимных углов поворота линейных элементов тела.

8. Понятие о перемещениях и деформациях

Перемещения и деформации в случае простого растяжения. Если к стержню, закрепленному в корневом сечении (рис.3.1), приложить на другом торце осевое усилие, то произойдет удлинение стержня — точка A перейдет в точку A^*.

Перемещение точки A в процессе деформации (отрезок AA^*) обозначается на рис.3.1 величиной u. Чем длиннее будет стержень, тем больше перемещение его конца под действием нагрузки. Деформацию материала стержня характеризует отношение перемещения к первоначальной длине:

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{u}{l_0}. \tag{1}$$

Величина ε является безразмерной и называется линейной деформацией или, более кратко, *деформацией*. При сжатии стержня ($l < l_0$

и $u < 0$) деформация становится отрицательной ($\varepsilon < 0$). Деформация в материале конструкции в рабочих условиях составляет сотые, редко десятые доли процента. При разрушении деформация конструкционных материалов достигает десятков процентов (обычно до 30%). Равенство (1) используют для определения малых деформаций ($\varepsilon < 0{,}1$). При больших деформациях следует рассмотреть весь процесс деформирования. Пусть в данный момент нагружения перемещение конца стержня составляет u и происходит приращение перемещения du. Тогда приращение деформации

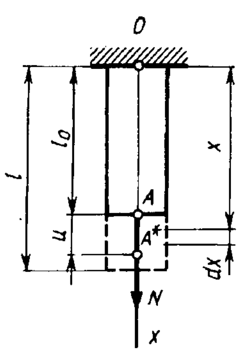


Рис. 3.1. Удлинение — деформация стержня при растяжении

$$d\varepsilon = \frac{du}{l_0 + u}.$$

Деформация стержня при изменении его длины от l_0 до l составит

$$\varepsilon_и = \int\limits_0^{l - l_0} \frac{du}{l_0 + u} = \int\limits_{l_0}^{l} \frac{dx}{x} = \ln \frac{l}{l_0}. \qquad (2)$$

Величина $\varepsilon_и$, определяемая из последнего равенства, называется *истинной деформацией* (или логарифмической деформацией). Разлагая в ряд выражение (2), находим

$$\varepsilon_и = \ln(1 + \varepsilon) = \frac{u}{l_0} - \frac{1}{2}\left(\frac{u}{l_0}\right)^2 + \ldots = \varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{3}\varepsilon^3 - \ldots$$

При малых ε формулы (1) и (2) совпадают, при $\varepsilon > 1\%$ расхождение может быть заметным, при $\varepsilon > 10\%$ — существенным.

В дальнейшем основное значение имеет случай малых деформаций, что позволяет использовать наиболее простую зависимость (1).

Погрешность равенства (1)

$$\Delta = \left| \frac{\varepsilon - \varepsilon_и}{\varepsilon} \right| < \frac{1}{2} |\varepsilon|. \qquad (3)$$

Например, если, как обычно, деформация в рабочих условиях меньше 0,5%, то погрешность формулы (1) меньше 0,25%; такая погрешность вполне допустима в технических расчетах, так как она меньше погрешности самих измерений.

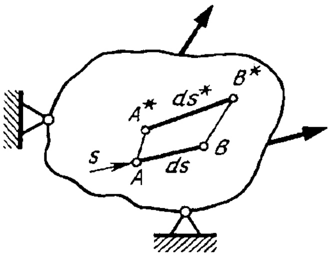


Рис. 3.2. Определение линейной деформации в точке А в заданном направлении

Линейная деформация. Рассмотрим определение линейной деформации в точке A деформируемого тела (рис. 3.2). Линейная деформация в различных направлениях будет различна, и следует указать не только точку, в которой определяется деформация, но и ее направление. Пусть деформация определяется в направлении, задаваемом единичным вектором S (см. рис. 3.2).

На указанной прямой рассматривается вторая, бесконечно близкая точка B и прослеживается изменение отрезка $AB=dS$ в результате деформации. После общей деформации тела точка A перешла в точку A^*, точка B — в точку B^*.

Будем называть *линейной деформацией* в точке A в направлении S следующую величину:

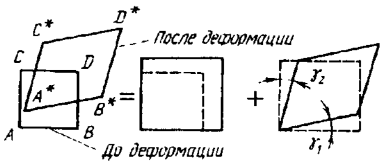


Рис. 3.3. Общая деформация элемента как сумма линейной и угловой деформаіции

$$\varepsilon_s = \frac{A^*B^* - AB}{AB} = \frac{ds^* - ds}{ds}, \qquad (4)$$

где $A^*B^* = ds^*$ — длина отрезка ds после деформации.

В дальнейшем будет показано, каким образом вычисляется линейная деформация, если известны перемещения точек в деформированном теле.

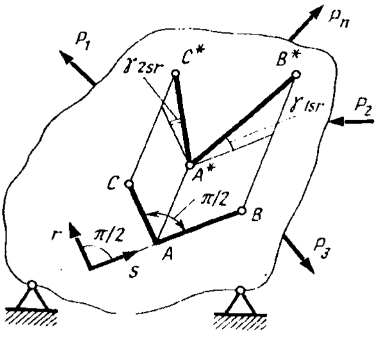


Рис. 3.4. Определение угловой деформации в точке между двумя взаимно перпендикулярными направлениями

Угловая деформация. Линейная деформация не может полностью охарактеризовать изменение элемента тела при его деформировании, так как возможно не только изменение линейных размеров, но и скос граней. На рис.3.3 показан общий случай деформации плоского элемента. Переход от начального состояния $ABCD$ в конечное $A^*B^*C^*D^*$ (точки A и A^* условно совмещены) осуществляется за счет изменения длины (без изменения углов) и за счет изменения углов (без изменения длины).

Изменение угла между двумя взаимно перпендикулярными до деформации направлениями называется *деформацией сдвига*. В общем случае для определения деформации сдвига в точке A между направлениями s и r рассматриваются два бесконечно малых отрезка AB и AC вдоль указанных направлений (рис. 3.4). Деформация сдвига

$$\gamma_{sr} = \gamma_{1sr} + \gamma_{2sr}, \tag{5}$$

где γ_{1sr}, γ_{2sr} — углы поворота отрезков в плоскости sr относительно первоначальных направлений.

9. Связь перемещений и деформаций

Перемещения, составляющие перемещений. Допустим, что имеется система координат x, y, z (рис.3.5), неподвижная в пространстве (например, жестко связанная с точками закрепления тела). Произвольная точка тела до деформации имеет координаты x, y, z .

После деформации точка A перейдет в точку A^*. Вектор A^*A представляет собой перемещение точки A. Перемещения точек тела в результате деформации обычно считаются малыми относительно линейных размеров конструкции.

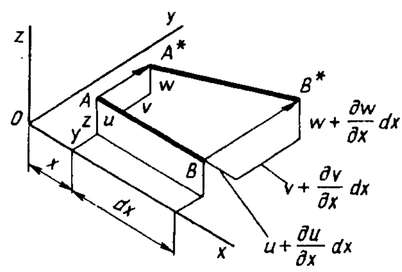


Рис. 3.5. Определение линейной деформации в направлении оси ε_z

Замечание. Следует подчеркнуть, что порядок малости всегда предполагает наличие «эталонных» величин, относительно которых определяется порядок малости. Например, перемещения точек поверхности Земли в результате температурных напряжений могут составлять 50—100 км, однако эти перемещения являются малыми по сравнению с радиусом Земли $R \approx 6400$ км.

Составляющие перемещения точки A по осям x, y, z обозначим u, v, w. Рассмотрим отрезок AB, параллельный оси x. Длина отрезка равна dx. Составляющие перемещения точки B будут отличаться от составляющих в точке A, так как функции u, v, w получат приращения (координата вдоль оси x в точке B имеет значение $(x + dx)$. Составляющие перемещения в точке B будут такими:

$$u + \frac{\partial u}{\partial x} dx, \quad v + \frac{\partial v}{\partial x} dx, \quad w + \frac{\partial w}{\partial x} dx.$$

В результате деформирования точки A и B перейдут в точки A^* и B^*. Координаты указанных точек A, B, A^*, B^*:

$$A\,(x, y, z)\,,\ B\,(x + dx, y, z)\,,$$
$$A^*(x + u, y + v, z + w)\,,$$
$$B^*\left(x + dx + u + \frac{\partial u}{\partial x}dx\,, y + v + \frac{\partial v}{\partial x}dx\,, z + w + \frac{\partial w}{\partial x}dx\right).$$

Формулы Коши для линейных деформаций. Линейная деформация в точке $A\ (x, y, z)$ в направлении оси x будет равна

$$\varepsilon_x = \frac{A^*B^* - AB}{AB}. \tag{6}$$

Из аналитической геометрии известно, что расстояние l между двумя точками с координатами (x_2, y_2, z_2) и (x_1, y_1, z_1) равно

$$l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,.$$

Применяя эту формулу для определения длины отрезка A^*B^*, получаем

$$A^*B^* = dx\sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2}\,.$$

Учитывая, что $AB = dx$, находим из равенства (6)

$$\varepsilon_x = \sqrt{1 + 2\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} - 1\,. \tag{7}$$

Рассмотрим теперь случай малой деформации, когда

$$\frac{\partial u}{\partial x} \ll 1\,,\ \frac{\partial v}{\partial x} \ll 1\,,\ \frac{\partial w}{\partial x} \ll 1\,. \tag{8}$$

Вспоминая, что при $\alpha \ll 1$

$$(1 + \alpha)^n = 1 + n\alpha + \ldots\,,$$

из соотношения (8) находим

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]. \tag{9}$$

Членами, стоящими в квадратных скобках, при малых деформациях (условие (8)) допустимо пренебречь, и тогда

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}. \qquad (10)$$

Соотношение (10), которое представляет первую формулу Коши, можно получить сразу, если воспользоваться правилом, справедливым при малых деформациях: для определения линейной деформации в заданном направлении достаточно рассмотреть проекции перемещения точек на заданное направление. Иными словами, для определения малой деформации вдоль оси x достаточно принять во внимание только составляющие перемещения по оси x.

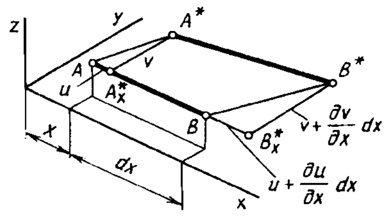


Рис. 3.6. Определение малой линейной деформации в направлении оси x

На рис. 3.6 показаны проекции точек A^* и B^* на направление AB, параллельное оси x. Отрезок A_x^*A равен u, а $B_x^*B = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$. Малая деформация в точке A в направлении оси x равна

$$\varepsilon_x = \frac{A_x^* B_x^* - AB}{AB} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} dx}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Аналогичным образом можно найти следующие зависимости:

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad (11)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}. \qquad (12)$$

Соотношения (10) — (12) составляют три первые формулы Коши.

Формулы Коши для угловых деформаций. Рассмотрим определение деформации сдвига в точке A (рис. 3.7) в плоскости, параллельной плоскости yOx. Для этого проследим за изменением угла между отрезками AB и AC, составляющими первоначально прямой угол. Длина отрезков до деформации $AB=dx$, $AC=dy$. Предполагая деформации малыми, достаточно рассмотреть проекции перемещений на плоскость xOy (условно считая $w=0$).

Проекции отрезка A^*B^* на оси x и y будут $dx+\frac{\partial u}{\partial x}dx$, $\frac{\partial v}{\partial x}dx$.

Далее находим

$$\operatorname{tg}\gamma_1 \approx \gamma_1 = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}dx}{dx\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)} \approx \frac{\partial v}{\partial x},$$

так как $\partial u/\partial x \ll 1$.

Проекции отрезка A^*C^* на оси x и y соответственно равны $\frac{\partial u}{\partial y}dy$, $dy+\frac{\partial v}{\partial y}dy$ и $\operatorname{tg}\gamma_2 \approx \gamma_2 = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}dy}{dy\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)} \approx \frac{\partial u}{\partial y}$.

Угол сдвига

$$\gamma_{xy} = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{13}$$

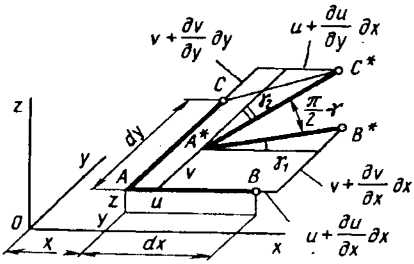


Рис. 3.7. Определение деформации сдвига в точке A в плоскости yOx

Аналогичным образом можно получить

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \tag{14}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \tag{15}$$

Формулы (13) — (15) представляют формулы Коши для малых деформаций сдвига.

Сводка результатов. При малых деформациях, когда производные перемещений по координатам значительно меньше единицы, связь перемещений и деформаций выражается формулами Коши:

$$\begin{gathered}\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x},\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y},\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z};\\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x};\ \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y};\ \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}.\end{gathered} \tag{16}$$

Тензор деформаций. Тензор деформаций имеет структуру, полностью аналогичную тензору напряжений (см. разд. 6):

$$T_\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{Bmatrix}. \tag{17}$$

Отметим, что тензорная деформация сдвига $\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{xy}$. По аналогии с инвариантами напряженного состояния запишем инварианты деформированного состояния

$$J_{1\varepsilon} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z; \tag{18}$$

$$J_{2\varepsilon} = \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_z\varepsilon_x - \frac{1}{4}\gamma_{xy}^2 - \frac{1}{4}\gamma_{yz}^2 - \frac{1}{4}\gamma_{zx}^2; \tag{19}$$

$$J_{3\varepsilon} = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix}. \tag{20}$$

Напомним, что инвариантами деформированного (или напряженного) состояния называются величины, не зависящие от выбора системы координат. Разберем физический смысл первого инварианта деформируемого состояния. Найдем изменение объема элемента тела (рис. 3.8) при деформации. Первоначальный объем элемента

$$dV = dx\,dy\,dz. \tag{21}$$

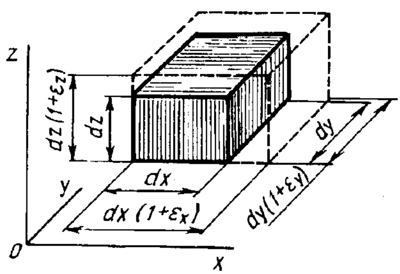


Рис. 3.8. Изменение объема элемента тела при деформации

После деформации ребра получили деформации ε_x, ε_y, ε_z. Новый объем можно вычислить, пренебрегая деформациями сдвига:

$$dV = (1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z)\,dx\,dy\,dz. \tag{22}$$

Объемная деформация составит

$$\varepsilon_V = \frac{dV - dV_0}{dV_0} = (1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z) - 1 \tag{23}$$

или в пределах малых деформаций

$$\varepsilon_V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z . \tag{24}$$

Первый вариант $J_{1\varepsilon}$ представляет объемную деформацию, т.е. относительное изменение объема частицы материала. Это изменение зависит от свойств материала и напряженного состояния и не может зависеть от выбора осей системы координат.

Отметим, что тензор деформаций является симметричным, так как по определению

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx}, \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy}, \quad \gamma_{zx} = \gamma_{xz} . \tag{25}$$

Если применяются для осей x, y, z обозначения x_1, x_2, x_3, то тензор деформации имеет следующий вид:

$$T_\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{Bmatrix} = \{\varepsilon_{ij}\}, \tag{26}$$

где $\varepsilon_{11} = \varepsilon_x$, $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{xy}$, $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\gamma_{xz}$.

Компоненты перемещения обозначаются u_1, u_2, u_3.

Замечание. Преимущества тензорных обозначений легко видеть на примере тензорной записи уравнений Коши для компонентов тензора деформаций:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \qquad i, j = 1, 2, 3, \tag{27}$$

где запятая в нижнем индексе обозначает дифференцирование по координате, указываемой следующим за запятой индексом. Например,

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) \text{ и т. д.}$$

10. Уравнения совместности деформаций

Первая группа уравнений. Деформация в окрестности точки деформированного тела описывается шестью скалярными величинами: линейными деформациями ε_x, ε_y и ε_z по трем взаимно перпендикулярным направлениям и угловыми деформациями γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{zx}.

Вместе с тем из формул Коши следует, что шесть величин ε_x, ε_y, ε_z, γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{zx} выражаются через производные трех функций u, v, w. Следовательно, между компонентами деформаций должны существовать зависимости, вытекающие из условия, что для непрерывных дифференцируемых функций порядок дифференцирования не сказывается на окончательном результате, например:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}.$$

Возьмем для сопоставления следующие формулы Коши:

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x};\quad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y};\quad \gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Дифференцируя величину γ_{xy} по x и по y, найдем

$$\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2}+\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\partial y}=\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}. \tag{28}$$

Подобным образом или способом круговой перестановки индексов можно получить

$$\frac{\partial^2\gamma_{yz}}{\partial y\,\partial z}=\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial y^2}, \tag{29}$$

$$\frac{\partial^2\gamma_{zx}}{\partial z\,\partial x}=\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial z^2}. \tag{30}$$

Уравнения (28)—(30) образуют *первую группу уравнений совместности деформаций.*

Вторая группа уравнений. Существуют еще три тождества, которые получаются несколько более сложным путем.

Выпишем выражения для деформаций сдвигов:

$$\gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{31}$$

$$\gamma_{yz}=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}, \tag{32}$$

$$\gamma_{zx}=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}. \tag{33}$$

Для того чтобы связать производные деформаций сдвигов с производной от ε_x, попытаемся исключить из правых частей уравнений (31) функции V и w. Так как следует сохранить в правой части одну производную от u, то нужно продифференцировать уравнение (31) по z, а уравнение (33) — по y. Тогда получим

$$\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} + \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial z}, \tag{34}$$

$$\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}. \tag{35}$$

Из (34) и (35) найдем

$$\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} + \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}. \tag{36}$$

Сумма двух последних членов в правой части равенства в силу зависимости (32) равна

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}.$$

Тогда можно записать

$$\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}. \tag{37}$$

Теперь, чтобы получить в правой части равенства производную от ε_x, достаточно продифференцировать соотношение (37) по x:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}\right) = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y\,\partial z}. \tag{38}$$

С помощью круговой перестановки индексов получим еще два тождества:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z\,\partial x}, \tag{39}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\right) = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x\,\partial y}. \tag{40}$$

Уравнения (38)—(40) составляют *вторую группу уравнений совместности деформаций.*

Замечание. Шесть уравнений совместности деформаций (уравнения (28)—(30), (38), (40) были установлены Б.Сен-Венаном. Уравнения совместности часто называют тождествами Сен-Венана.

Физический смысл уравнений совместности деформаций состоит в следующем. Компоненты деформации однозначно описывают деформацию элемента тела. В деформированном состоянии все элементы должны образовывать единое тело. Если условия совместности деформаций нарушаются, то из отдельных элементов нельзя составить тело без разрывов и пустот (рис.3.9). В том случае, когда уравнения совместности удовлетворяются в каждой точке тела, перемещения u, v и w будут непрерывными функциями координат, что гарантирует непрерывное преобразование начальной формы тела в конечную (деформированную).

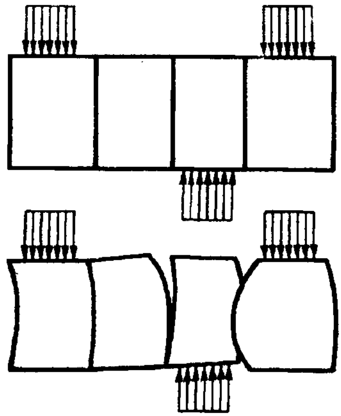


Рис. 3.9. Деформированное состояние тела при нарушении условий совместности деформаций

Если решение задачи о напряженном и деформированном состояниях сводится к отысканию перемещений u, v, w и последние выбираются среди класса непрерывных функций с непрерывными частными производными до третьего порядка, то уравнения совместности деформаций удовлетворяются тождественно.

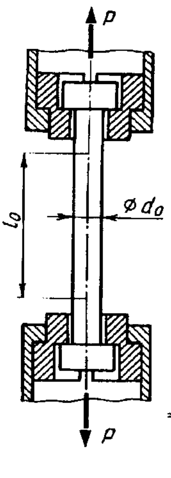
Глава 4

МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КОНСТРУКЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Для оценки прочностной надежности конструкций необходимо изучить поведение материала в служебных условиях при действии внешних нагрузок, температур и т.п.

В соответствии с принятой моделью материала — моделью сплошной среды — мы отказываемся от изучения внутренней микроструктуры материала (поведения кристаллической решетки, развития дислокаций и т.д.) и будем использовать феноменологический подход. Такой подход означает, что, не вдаваясь в сущность внутренних процессов, феномен изучают по его внешним проявлениям при различных внешних воздействиях.

Не обсуждая общности подобного метода, используемого во многих областях науки и техники, укажем, что феноменологический подход предопределяет необходимость экспериментального изучения механических свойств материалов. Эти свойства изучаются в системе опытов с образцами материалов простой формы при воспроизведении основных особенностей нагружения.



11. Диаграммы деформирования, пределы текучести и прочности

Испытания на растяжение образцов материала. Основным способом определения механических свойств материала является получение зависимости между напряжениями и деформациями при растяжении. На рис. 4.1 показана схема испытания образцов в специальных испытательных машинах. Головки образца размещаются в захватах машины, к которым прикладывается внешнее усилие P. В процессе испытания измеряются усилие и средняя деформация на опреде-

Рис. 4.1. Схема испытания круглых образцов на растяжение ленной длине образца l_0. В результате строится зависимость между напряжениями и деформациями в образце материала:

$$\sigma = f(\varepsilon), \qquad (1)$$

которая называется *диаграммой деформирования*.

Напряжение в цилиндрической испытуемой части образца

$$\sigma = P/F, \qquad (2)$$

где P — внешнее усилие; F — площадь поперечного сечения образца ($F = \pi d^2/4$, d — диаметр образца).

Деформация

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0}, \qquad (3)$$

где l — длина контрольного участка образца после деформации.

Упругость, модуль упругости, пластичность, закон разгрузки и закон упрочнения. При проведении опытов с растяжением образцов выявляются общие свойства конструкционных материалов — свойства упругости и пластичности (рис. 4.2). Если напряжение σ не превышает предела упругости $\sigma_у$, то зависимость между напряжением σ и деформацией ε оказывается линейной:

$$\sigma = E\varepsilon. \qquad (4)$$

В этой зависимости E — модуль упругости материала. Величина E является важной характеристикой материала. Так как деформация — безразмерная величина, то размерность модуля упругости совпадает с размерностью напряжения.

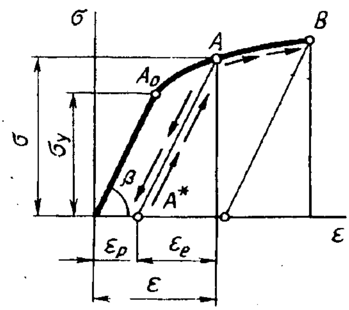


Рис. 4.2. Свойства упругости и пластичности материала, определяемые при испытании на растяжение

Модуль упругости имеет размерность силы, деленной на площадь. На практике он измеряется в мегапаскалях (1 МПа = 1 Н/мм^2).

В технической системе единиц величина E измеряется обычно в кгс/см^2.

Значение E для некоторых конструкционных материалов таково: для сплавов на основе железа $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, для титановых сплавов $E = 1 \cdot 10^5$ МПа, для алюминиевых сплавов $E = 0{,}78 \cdot 10^5$ МПа.

Значение E на кривой деформирования при определенных масштабах для σ и ε численно равно тангенсу угла наклона линейного участка:

$$E = \operatorname{tg} \beta. \quad (5)$$

Линейная зависимость между напряжениями и деформациями является важным проявлением упругости материала. Однако основное проявление упругости материала состоит в следующем.

Если при $\sigma < \sigma_y$ прекратить нагружение материала и снять внешнюю нагрузку, деформация материала исчезнет (точка, изображающая состояние материала, вернется в начало координат).

Напомним, что свойство упругости материала как раз и заключается в том, что после снятия внешнего воздействия все размеры детали (элемента конструкции) восстанавливаются. Для подавляющего большинства конструкционных материалов, как показывает опыт, свойство упругости сохраняется до определенного значения действующего напряжения.

При возрастании напряжений свыше предела упругости ($\sigma > \sigma_y$) зависимость σ от ε перестает быть линейной.

Если в некоторый момент нагружения A прекратить нагружение и снять нагрузку, то разгрузка пойдет по прямой AA^*, приблизительно параллельной начальному участку *(закон разгрузки)*. Точка A перейдет в точку A^*, и в материале сохранится остаточная деформация ε_p, которая представляет собой пластическую деформацию в материале, образовавшуюся при его нагружении. Полная деформация ε в момент нагружения A

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p, \quad (6)$$

где упругая деформация

$$\varepsilon_e = \sigma / E. \quad (7)$$

Уравнение (6) справедливо для любого момента деформации. Упругая составляющая деформации не исчезает при появлении пластических деформаций, поэтому следует говорить об упругопластических деформациях материала. Однако если упругая деформация для металлов достигает значения примерно 0,2—0,8%, то пластическая деформация может быть 20—40%. В тех случаях, когда пластическая деформация значительно больше упругой (пластическое деформирование при технологических процессах и т.п.), упругими деформациями пренебрегают (модели жесткопластического тела).

Значение модуля упругости E в формуле (7) принимается в большинстве расчетов не зависящим от пластической деформации. Однако опыты свидетельствуют, что пластические деформации оказывают некоторое влияние на значение E: при $\varepsilon_p > 1\%$ возможно снижение E на 5—10%.

При повторном нагружении из точки A^* процесс нагружения пойдет по прямой A^*A, т.е. зона упругой деформации (по уровню напряжений) возрастет. После предварительной пластической деформации происходит упрочнение материала *(закон упрочнения)*, при дальнейшем нагружении (переход от точки A к точке B) деформирование идет так же, как в случае однократного нагружения.

Замечание. Закон упрочнения прогнозирует повышение сопротивления материалов возникновению пластических деформаций при повторном нагружении — повышение предела упругости после предварительной пластической деформации. Существенно, что повторное деформирование идет в том же направлении. Если после пластической деформации растяжения провести деформирование в противоположном направлении (на сжатие), то упрочнение не наблюдается.

Предел текучести и предел прочности. На рис. 4.3 показана зависимость между условным напряжением σ и деформацией ε. Условное напряжение вычисляется по формуле

$$\sigma = \frac{P}{F_0} = \frac{4P}{\pi d_0^2}, \tag{8}$$

где d_0 — первоначальный диаметр образца.

При значительных деформациях ($\varepsilon > 1\%$) заметна разность между условными и истинными напряжениями:

$$\sigma_и = \frac{P}{F_{эф}} = \frac{4P}{\pi d^2}, \tag{9}$$

где d — диаметр образца в процессе нагружения (деформирования). Значение $\sigma_и$ на диаграмме деформирования показано штриховой линией.

Наиболее важными характеристиками сопротивления материала внешним нагрузкам являются пределы текучести и прочности. Предел текучести характеризует сопротивление материала возникновению пластических деформаций. Так как переход от участка упругости к зоне появления пластических деформаций для большинства матери-

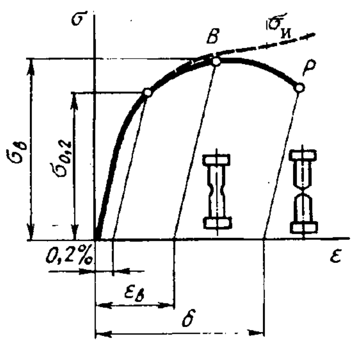


Рис. 4.3. Определение пределов пластичности и прочности на диаграмме деформирования

алов носит плавный характер, то условились назначить определенную границу, после которой пластические деформации признаются существенными. Такой границей выбрано значение остаточной деформации 0,2%.

Пределом текучести $\sigma_{0,2}$ называется напряжение, которому соответствует остаточная (пластическая) деформация 0,2%. Часто предел текучести называется пределом пластичности; в технической литературе предел текучести $\sigma_{0,2}$ обозначается также символами $\sigma_т$, σ_s. Важнейшей характеристикой прочности является предел прочности. Он определяется как отношение

$$\sigma_в = \frac{P_{max}}{F_0}, \tag{10}$$

где P_{max} — наибольшее растягивающее усилие в процессе испытания до разрушения; F_0 — первоначальная площадь поперечного сечения образца (для круглого образца $F_0 = \pi d_0^2/4$).

На последнем этапе растяжения образца в его цилиндрической части образуется местное сужение ("шейка", см. рис. 4.3) и процесс разрушения идет при уменьшающемся внешнем усилии P. В точке B происходит потеря устойчивости равномерного пластического деформирования (пластическая деформация в этой точке $\varepsilon_в$), и на последнем этапе деформация происходит лишь в зоне шейки.

Наибольшее усилие при разрыве образца P_{max} (оно действует в точке B) легко определяется измерительным устройством, так как нарастание усилия идет плавно.

Поскольку величины P_{max} и F_0 определяются просто, учитывая, что в момент отрыва истинное сопротивление $\sigma_и > \sigma_в$ (см. рис. 4.3), условились определять предел прочности по равенству (10).

Пределом прочности $\sigma_в$ называется напряжение, соответствующее наибольшему усилию при разрушении образца, отнесенному к первоначальной площади поперечного сечения. Значения пределов текучести и пределов прочности для некоторых конструкционных материалов приведены в табл.1.

Обычно пределы текучести составляют $\sigma_{0,2} = (0,5 \div 0,9)\,\sigma_в$, причем большие значения относятся к пределу прочности для легированных сталей и титановых сплавов.

Определение предела прочности материала с помощью испытания твердости. В заводских условиях часто требуется определить прочность материала детали, например для проверки правильности проведенной термообработки. Вырезка образца из окончательно изготовленной детали невозможна, и для косвенного определения прочности материала применяют испытания на твердость.

Таблица 1

Значения пределов прочности, текучести и удлинения при растяжении

Материал	$\sigma_в$, МПа	$\sigma_{0,2}$, МПа	δ, %
Низкоуглеродистые стали	300—400	180—250	20—40
Среднеуглеродистые стали	500—700	300—500	10—20
Легированные стали	800—1200	600—900	8—16
Титановые сплавы	900—1100	800—900	8—20
Алюминиевые сплавы	200—450	180—300	8—20

Наиболее распространенными являются испытания на твердость по Бринеллю (рис.4.4,*а*) и Роквеллу (рис.4.4,*б*).

Твердость по Бринеллю, обозначаемая НВ, определяется диаметром отпечатка при вдавливании в материал твердого шарика диаметром 10 мм под нагрузкой 30 000 Н. Твердость по Бринеллю принимается равной напряжению сжатия на поверхности полученного отпечатка

$$HB = \frac{2P}{\pi D\,(D - \sqrt{D^2 - d^2}\,)} \approx \frac{4P}{\pi d^2},$$

где D — диаметр вдавливаемого шарика; d — диаметр отпечатка.

Чем выше твердость (прочность), тем меньше диаметр отпечатка. Например, для хромоникелевой стали с $\sigma_в$ = 1600 МПа d =2,71 мм, для той же стали при $\sigma_в$= 1100 МПа d =3,42 мм. Диаметр отпечатка измеряется с помощью лупы.

Твердость по Роквеллу (шкала С), обозначаемая HR_C, определяется как разность глубин проникновения алмазного конуса при действии основной нагрузки (1500 Н) и предварительной (100 Н). Твердость по Роквеллу используют для контроля закаленных деталей (поверхности зубьев шестерен и т.п.).

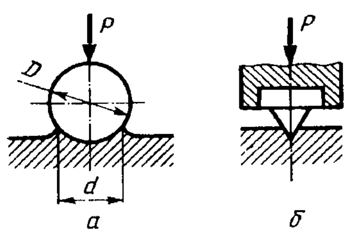


Рис. 4.4. Испытания на твердость по Бринеллю (*а*) и по Роквеллу (*б*)

12. Деформации и характеристики пластичности

Продольная деформация при растяжении образцов. Продольная деформация образца при растяжении, как уже указывалось, определяется по формуле (3)

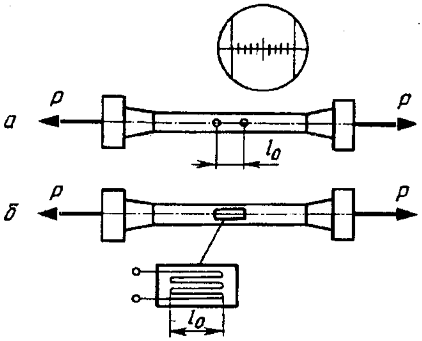


Рис. 4.5. Измерение деформаций оптическим методом (*а*) и с помощью тензометра (*б*)

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0}.$$

Деформация измеряется оптическим методом или тензометрами (рис.4.5).

Поперечная деформация, коэффициент Пуассона. Измерения показывают, что при растяжении происходит не только увеличение длины образца, но и уменьшение его поперечных размеров.

Деформация в поперечном направлении

$$\varepsilon_{\perp} = \frac{d - d_0}{d_0}, \tag{11}$$

где d — диаметр цилиндрической части образца после растяжения.

Экспериментально установлено, что при упругих деформациях

$$\varepsilon_{\perp} = -\mu\varepsilon, \tag{12}$$

где μ — коэффициент Пуассона (постоянная материала).

Для большинства конструктивных материалов $\mu \approx 0{,}3$. Объемная деформация при растяжении

$$\varepsilon_V = \frac{\Delta V}{V} = \frac{V - V_0}{V_0} = (Fl - F_0 l_0)\frac{1}{F_0 l_0}, \tag{13}$$

где первоначальный объем материала $V_0 = F_0 l_0$. Учитывая соотношения (11)-(13), найдем при упругих деформациях

$$\varepsilon_V = (1 - \mu\varepsilon)^2(1 + \varepsilon) - 1. \tag{14}$$

Пренебрегая малыми членами, получаем следующее значение объемной деформации при растяжении:

$$\varepsilon_V = \varepsilon(1 - 2\mu). \tag{15}$$

Из физических соображений очевидно, что при растяжении объем материала не должен уменьшаться, и потому $\mu \le 0{,}5$.

Для изотропного материала коэффициент Пуассона должен лежать в пределах $-1 < \mu \le 0{,}5$.

Отрицательная нижняя граница связана с энергетическими соображениями, рассмотрение которых опускаем.

Практически отсутствуют материалы, имеющие отрицательное значение коэффициента Пуассона, и потому следует считать

$$0 < \mu \le 0{,}5. \tag{16}$$

Коэффициент Пуассона в упругопластической стадии. Соотношение (12) справедливо и при появлении пластических деформаций, но при этом значение μ становится зависящим от величины деформации: $\varepsilon_\perp = -\mu(\varepsilon)\,\varepsilon$.

При возрастании деформации и появлении значительных пластических деформаций $\mu(\varepsilon) \to 0{,}5$.

Экспериментально установлено, что пластическая деформация протекает без изменения объема материала. Последнее обстоятельство становится физически понятным, если учесть, что деформация пластичности образуется за счет сдвига слоев материала.

Относительное удлинение при разрыве. Важной характеристикой пластичности материала является остаточное (относительное) удлинение при разрыве. На рис. 4.6 показан образец до и после разрушения. Для простого измерения удлинения на образец предварительно начосят две риски на расстоянии l_0; после деформации определяют расстояние между рисками $l_к$, складывая вместе две половинки образца;

$$\delta = \frac{l_к - l_0}{l_0} \cdot 100\%. \tag{17}$$

Остаточное удлинение принято измерять в процентах.

Так как после образования шейки удлинение материала происходит только в этом районе, то величина δ зависит от соотношения длины и диаметра образца. Для стандартных образцов применяют $l_0/d_0 = 5$ и $l_0/d_0 = 10$ и соответственно обозначают удлинение при разрыве δ_5 и δ_{10}.

Расположение сечения разрыва на образце в его цилиндрической части может быть случайным, связанным с некоторыми нарушениями однородности свойств материала по длине.

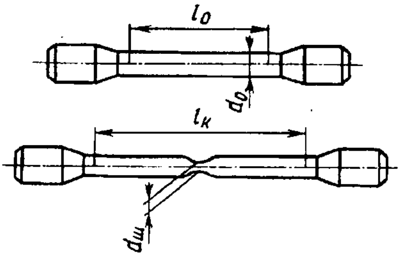


Рис. 4.6. Измерение удлинения образца и диаметра шейки при обрыве

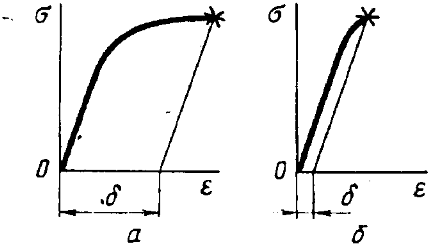


Рис. 4.7. Диаграммы деформирования для пластичного (*а*) и хрупкого (*б*) материалов

Если обрыв произошел в сечении, близком к головке образца, то развитие пластической деформации в шейке было затруднено и значение δ получилось заниженным. В подобных случаях либо повторяют испытание, либо используют для оценки δ ту часть образца, в которой пластическая деформация не была стеснена.

Пластичные и хрупкие материалы при испытаниях на растяжение. На рис.4.7 показаны диаграммы деформирования для пластичных и хрупких материалов.

Материалы, обладающие к моменту разрушения значительной величиной δ ($\delta > 10\%$), называются пластичными. Значения δ для некоторых конструкционных материалов приведены в табл.1. Материалы, для которых остаточное удлинение δ меньше 3%, относят к хрупким материалам. Для элементов конструкций в подавляющем большинстве случаев необходимо применять достаточно пластичные материалы.

Пластичные материалы обладают способностью повышенного сопротивления в условиях концентрации напряжений, ударных и тепловых воздействий, при наличии трещин и поверхностных повреждений и т.п. Материалы с высокими характеристиками прочности часто не могут использоваться в конструкциях, если они являются хрупкими. Малейший поверхностный дефект в виде риски, царапины приводит к значительной потере прочности (достаточно привести пример резки стекла). Часто хрупкие материалы очень сложны в производстве, так как не позволяют использовать сварку, клепку, рихтовку, правку, не выдерживают перенапряжения.

Замечание. Не следует считать, что в современной технике невозможно применение малопластичных материалов. Широкое использование жаропрочных литых материалов для лопаток турбин опровергает такое мнение. При правильном проектировании (в первую очередь если исключены концентраторы напряжений и работа на растяжение) могут оказаться работоспособными конструкционные материалы с удлинением при разрыве в пределах 0,5—3%.

Относительное сужение поперечного сечения при разрыве. Второй важной характеристикой пластичности материала является сужение поперечного сечения образца при разрыве:

$$\Psi = \frac{F_0 - F_к}{F_0} \cdot 100\%, \qquad (18)$$

где F_0 — первоначальная площадь поперечного сечения образца, $F_к$ — конечная площадь сечения в шейке образца после разрушения:

$$F_0 = \pi d_0^2/4, \quad F_к = \pi d_ш^2/4, \qquad (19)$$

где $d_ш$ — диаметр шейки образца.

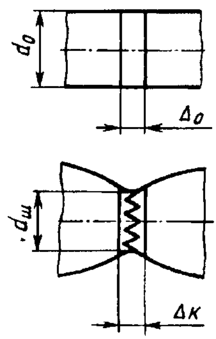


Рис. 4.8. Деформация материалов в зоне шейки

Обычно величину Ψ, которую называют *поперечным сужением*, измеряют в процентах. Величина Ψ как характеристика пластичности имеет преимущество по сравнению с величиной δ — удлинением при разрыве, так как не зависит от геометрической формы цилиндрического образца (отношения l_0/d_0).

Естественно, что поперечное сужение связано с максимальной деформацией растяжения в шейке образца. Эту связь можно установить, принимая, что пластическая деформация протекает без изменения объема.

Рассмотрим слой материала образца толщиной Δ_0 (рис. 4.8), который в момент разрушения оказался в зоне шейки. Из условия постоянства объема находим

$$F_к\Delta_к = F_0\Delta_0. \qquad (20)$$

Учитывая равенства

$$F_к/F_0 = 1 - \Psi, \qquad (21)$$

$$\Delta_к/\Delta_0 = 1 + \varepsilon_к, \qquad (22)$$

где $\varepsilon_к = (\Delta_к - \Delta_0)/\Delta_0$ — относительное удлинение материала образца в зоне шейки, Ψ — поперечное сужение,получаем

$$1 - \Psi = \frac{1}{1 + \varepsilon_к}. \qquad (23)$$

Из последнего соотношения вытекает

$$\Psi = \frac{\varepsilon_к}{1 + \varepsilon_к}, \tag{24}$$

$$\varepsilon_к = \frac{\Psi}{1 - \Psi}. \tag{25}$$

Следует отметить, что $\varepsilon_к$ существенно больше δ, так как выражает местную, а не среднюю деформацию на длине l_0.

Для большинства материалов

$$\delta < \Psi < \varepsilon_к.$$

Истинная деформация в момент разрушения определяется из условия постоянства объема материала при его пластической деформации:

$$\varepsilon_к = \ln\frac{\Delta_к}{\Delta_0} = \ln\frac{F_0}{F_к} = \ln\frac{1}{1 - \Psi_к}. \tag{26}$$

Дополнительные характеристики хрупкости и пластичности материала. Ранее отмечалась необходимость оценки хрупкости и пластичности для правильного выбора материала детали (элемента конструкции). Важное значение для этих целей имеет испытание на удар — определение ударной вязкости. Принципиальные схемы испытания на удар даны на рис.4.9. Груз падает и ударяет по образцу; разность энергии груза до и после удара должна быть равна работе, поглощенной в процессе деформации образца, если пренебречь имеющим место небольшим рассеиванием энергии.

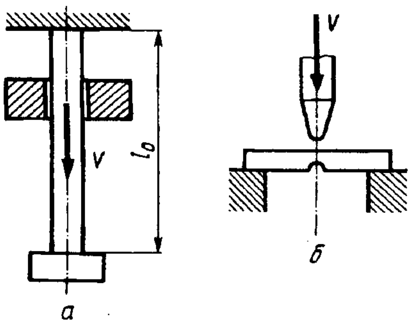


Рис. 4.9. Принципиальные схемы испытания на удар:
а — испытание на ударное растяжение;
б — испытание на ударный изгиб

Если первоначальная длина образца l_0, то работа деформации может быть определена по формуле

$$A = \int_0^{u_к} P(u)\,du, \tag{27}$$

где u — перемещение головки образца; $u_к$ — перемещение в момент, предшествующий разрушению.

Если известны диаграмма деформирования

$$\sigma = P/F_0 = f(\varepsilon) \tag{28}$$

и деформация $\varepsilon = u/l_0$, найдем из соотношений (27) и (28)

$$A = F_0 l_0 \int_0^\delta f(\varepsilon)\, d\varepsilon = F_0 l_0 A_1, \tag{29}$$

где δ — предельная деформация при растяжении; $A_1 = \int_0^\delta f(\varepsilon)\, d\varepsilon$ — площадь диаграммы деформирования (работа деформации на единицу объема материала).

Из соотношения (29) следует, что способность поглощать энергию удара за счет деформации зависит от площади диаграммы деформирования (рис. 4.10), т.е. от способности материала получать пластические деформации. Обычно при испытании на удар для выявления хрупкости материала образцы снабжают концентраторами напряжений. Тогда энергия удара поглощается в сравнительно небольшой области, и ее относят к поперечному сечению стандартного образца.

Ударной вязкостью называют величину

$$a_н = A/F, \tag{30}$$

где A — работа, идущая на разрушение образца; F — площадь поперечного сечения.

Для сталей ударная вязкость лежит в пределах $a_н = 50 \div 100$ Н · м/см^2. Материалы с ударной вязкостью $a_н < 30$ Н · м/см^2 относятся к числу хрупких.

Еще одной важной характеристикой хрупкости материала является чувствительность к концентрации напряжений. Для исследования применяются образцы с выточкой стандартного профиля (рис. 4.11,*а*) и образцы с предварительно образованной трещиной (рис. 4.11,б; до испытаний образец подвергается действию переменных напряжений для образования трещины). Если диаметр выточки стержня d, то предел прочности образца с концентрацией напряжений

$$\sigma_{в.к} = \frac{4P_{max}}{\pi d^2}.$$

Материал может быть отнесен к числу хрупких, если

$$\sigma_{\text{в.к}} \le \sigma_{\text{в}},$$

где $\sigma_{\text{в}}$ — предел прочности гладкого образца.

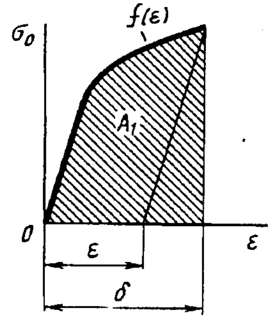


Рис. 4.10. Работа деформации при разрушении материалов

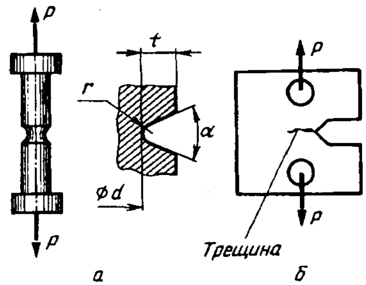


Рис. 4.11. Испытания образцов с концентрацией напряжений:
а — образец с выточкой;
б —образец с трещиной

Схематизация кривых деформирования. Для построения приближенных моделей материала часто используются схематизированные кривые деформирования.

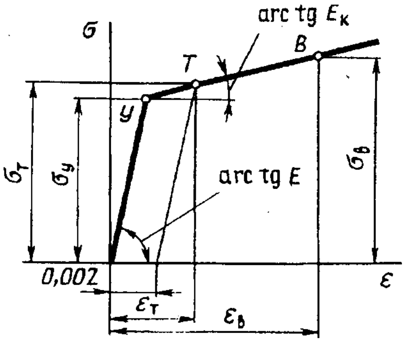


Рис. 4.12. Кривая деформации с линейным упрочнением

Простая схематизация состоит в том, что при $\sigma > \sigma_y$ принимается линейное упрочнение (рис. 4.12) с касательным модулем $E_к$. Деформация в точке T

$$\varepsilon_т = \frac{\sigma_т}{E} + 0{,}002,$$

так как предел текучести соответствует пластической деформации 0,2%.

Величина предела упругости

$$\sigma_y \approx \sigma_т + 0{,}002E_к. \qquad (31)$$

Если известна деформация $\varepsilon_в$, соответствующая пределу прочности $\sigma_в$, то допустимо считать, что линия упрочнения проходит через точки предела прочности и предела текучести (см.рис. 4.12), тогда

$$E_к = \frac{\sigma_в - \sigma_т}{\varepsilon_в - \varepsilon_т}. \tag{32}$$

Обычно

$$E_к = (0{,}05 \div 0{,}15)\,E.$$

Иногда используется аппроксимация следующего вида:

$$\varepsilon = \varepsilon_y + \varepsilon_p = \frac{\sigma}{E} + 0{,}002\left(\frac{\sigma}{\sigma_т}\right)^n. \tag{33}$$

Показатель n обычно равен 6 — 10.

Наконец, для анализа поведения конструкции при развитых пластических деформациях используется степенная аппроксимация:

$$\varepsilon = \varepsilon_т\left(\frac{\sigma}{\sigma_т}\right)^n = B\sigma^n. \tag{34}$$

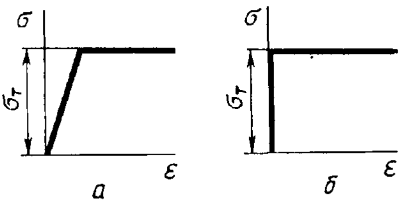


Рис. 4.13. Схематизированные кривые деформирования без учета упрочнения материала

Для построения приближенных решений используются схематизированные кривые деформации, в которых упрочнение материала не учитывается (рис. 4.13). Пластичность без упрочнения называется иногда идеальной пластичностью (рис. 4.13,*а*). Применяются и схемы жесткопластического тела (рис. 4.13,*б*), в которых упругими деформациями пренебрегают.

13. Ползучесть и длительная прочность

Влияние повышенных температур. В современных условиях конструкции часто работают при высоких температурах. Элементы конструкций сверхзвуковых самолетов нагреваются в полете до 200°С и выше, детали газовых турбин авиационных двигателей работают при температуре 600—1000°С. С действием высоких температур приходится считаться, например, в энергетическом и химическом машиностроении.

При повышенных температурах конструкционные материалы обнаруживают два новых свойства — ползучесть и длительную прочность. *Ползучестью* называется возрастание пластической (остаточной) деформации при постоянных нагрузках; *длительной прочностью* назы-

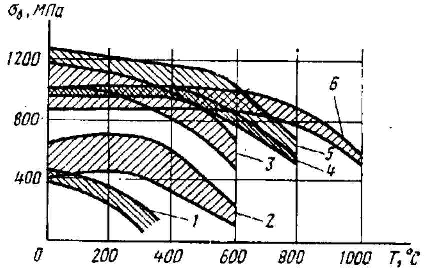


Рис. 4.14. Снижение пределов прочности при увеличении температуры (кратковременные испытания):
1 — алюминиевые сплавы (АКЧ-1, ВД-17);
2 — углеродистые стали (сталь 20, сталь 45);
3 — титановые сплавы ВТ3; 4 — хромоникелевые стали; 5 — деформируемые жаропрочные сплавы на никелевой основе;
6 — литые жаропрочные сплавы на никелевой основе

вается зависимость разрушающих напряжений (пределов прочности) от длительности работы.

Ползучесть и длительная прочность проявляются у углеродистых сталей при T>300°С, у легированных сталей при T>350°С. У алюминиевых сплавов при T>100°С. У некоторых материалов (полимеров, бетонов и др.) указанные свойства наблюдаются и при нормальных температурах.

В условиях повышенных температур снижаются обычные пределы прочности и текучести, определяемые при кратковременных испытаниях. На рис. 4.14 представлены зависимости пределов прочности различных конструкционных материалов от температуры. Наиболее резкое снижение $\sigma_в$ наблюдается у алюминиевых сплавов. Углеродистые стали в области 200—300°С обнаруживают некоторое повышение пределов прочности, а затем монотонное снижение. Наибольшие значения $\sigma_в$ при высокой температуре показывают литые жаропрочные сплавы, содержащие 70—80% никеля.

Снижение пределов текучести при повышении температуры происходит примерно так же, как и снижение $\sigma_в$. При высоких температурах снижается значение модуля упругости на 30—40% (в предельной области температур, при которых используются материалы). При высоких температурах поверхность изделия интенсивно окисляется и часто приходится защищать ее специальными покрытиями.

Наиболее существенной особенностью прочности при высоких температурах является сильное влияние на нее времени нагружения. Это объясняется тем, что, начиная с определенных значений температуры, в материалах происходят структурные и фазовые превращения, развивающиеся во времени.

При исследовании прочности элементов конструкций, работающих при высоких температурах, необходимо проводить не только кратковременные, но и длительные испытания материалов (получение кривых ползучести и определение длительной прочности).

Кривые ползучести. Пределы ползучести. Графическое изображение зависимости остаточной деформации от времени испытаний при постоянных напряжении и температуре называют *кривой ползучести* (рис. 4.15). При испытаниях образец находится внутри электронагревательного устройства, удлинение измеряется механическим или оптическим методом. Начальная деформация образца (она может быть упругой или упругопластической) не учитывается. Остаточная (пластическая) деформация, увеличивающаяся во времени при постоянном напряжении, называется *деформацией ползучести* и обозначается ε_c (индекс *c* — начальная буква слова «creep» — ползучесть). Скорость деформации ползучести, или, короче, скорость ползучести

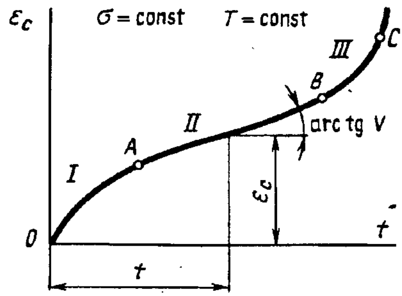


Рис. 4.15. Кривая ползучести:
I — стадия неустановившейся ползучести; *II* — стадия установившейся ползучести; *III* — стадия разрушения

$$V = \frac{d\varepsilon_c}{dt}. \tag{35}$$

Эксперименты показывают, что на кривых ползучести

$$\varepsilon_c = f(t)$$

наблюдатюся три характерные стадии. Первая стадия (участок *OA*) — стадия неустановившейся ползучести. Скорость ползучести, наибольшая в начальный момент, постепенно уменьшается. Вторая стадия (участок *AB*) характеризуется постоянной (минимальной) скоростью ползучести. Наконец, третья стадия (участок *BC*) представляет собой стадию разрушения; на образце образуется сетка трещин, стадия заканчивается хрупким изломом или, при высоких уровнях напряжений, вязким изломом с местным утонением. Ползучесть материала в элементах конструкций допустима до определенной величины. Например, при ползучести ротора турбины может произойти касание рабочих лопаток о корпус.

Для оценки ползучести материала используется специальная характеристика — предел ползучести. *Пределом ползучести* называется напряжение, при котором деформация ползучести за определенный промежуток времени достигает заданного значения. Например, для никелевого жаропрочного сплава ХН77ТЮР (нимоник-80) при температуре 700°С за время 100 ч и деформации ползучести 0,2% предел ползучести составляет 400 МПа:

$$\sigma_{0,2/100}(700) = 400\,\text{МПа}.$$

При обозначении предела ползучести указываются значение деформации, время и температура испытаний.

Скорость ползучести. Основное время развития ползучести приходится обычно на установившуюся стадию с постоянной скоростью ползучести.

Результаты экспериментального определения скорости ползучести на установившейся стадии представляют в виде степенной зависимости

$$V = B\sigma^{n}, \tag{36}$$

где B, n — параметры материала, зависящие от температуры.

В логарифмических координатах уравнение (36) соответствует линейной зависимости $\lg V$ от $\lg \sigma$.

Параметр n является безразмерным и обычно лежит в пределах 3 — 6, т.е. зависимость скорости ползучести от напряжения весьма существенна. Единица измерения параметра B зависит от выбранных единиц V, σ и значения n.

Влияние ползучести на напряженное состояние в элементах конструкций. Как уже указывалось, ползучесть материала приводит к росту деформаций, что может быть нежелательным или недопустимым по конструктивным соображениям. Однако наибольшее влияние ползучесть материала оказывает на перераспределение напряжений в элементах конструкций, так как деформации ползучести сопоставимы с упругими деформациями, а часто и превышают их. Указанное явление приводит, например, к релаксации (падению) напряжений затяжки в болтах, к релаксации благоприятных остаточных напряжений после применения упрочняющей технологии и т.д.

Длительная прочность, предел длительной прочности. Свойство длительной прочности материала при повышенных температурах ограничивает ресурс изделий и приводит к необходимости учета времени нагружения в моделях прочностной надежности. Прочность материала при повышенных температурах характеризуется пределом длительной прочности.

Пределом длительной прочности называется напряжение, при котором материал разрушается не ранее заданного времени. Например, для никелевого жаропрочного сплава ХН77ТЮР (нимоник-80) при температуре 700°С и времени 1000 ч предел длительной прочности составляет 330 МПа:

$$\sigma_{\text{дл}\,1000}(700) = 330\,\text{МПа}.$$

При обозначении предела длительной прочности указываются длительность нагружения и температура испытания. Для сравнения отметим, что пределы прочности и текучести того же сплава при температуре 700°С при кратковременных испытаниях

$$\sigma_в = 830\,МПа, \quad \sigma_{0,2} = 560\,МПа.$$

Во многих случаях пределы длительной прочности ниже пределов текучести при кратковременных испытаниях.

Зависимость пределов длительной прочности от времени нагружения. Эта зависимость получается при испытаниях в условиях постоянной температуры (рис. 4.16).

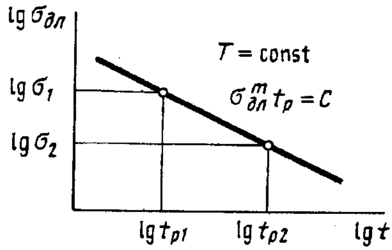


Рис. 4.16. Кривые длительной прочности в логарифмических координатах

Кривые длительной прочности выражают зависимость пределов длительной прочности от времени испытаний. Эта зависимость применяется в виде

$$\sigma_{дл}^m t_р = C, \tag{37}$$

где $m = m(T)$, $C = C(T)$ — параметры материала, зависящие от температуры; $t_р$ — время до разрушения.

Параметр m обычно находится в пределах $m = 4 \div 16$, что показывает резкую зависимость времени до разрушения $t_р$ от уровня действующих напряжений. При повышении температуры параметр m уменьшается.

Испытания на двух уровнях напряжений σ_1 и σ_2 и определение времени до разрушения позволяют определить параметры m и C:

$$\sigma_1^m t_{р1} = \sigma_2^m t_{р2}, \tag{38}$$

$$m = \frac{\lg(t_{р2}/t_{р1})}{\lg(\sigma_1/\sigma_2)}, \quad C = \sigma_1^m t_{р1}. \tag{39}$$

Рассеяние долговечности при испытаниях длительной прочности. Эксперименты показывают, что время работы образца без разрушения (долговечность) при заданном уровне напряжений и температуры имеет существенное рассеяние. Зависимость (37) определяется для среднего времени до разрушения $t_р$.

Долговечность (время до разрушения) целесообразно рассматривать как случайную величину, имеющую статистическое распределение. Экспериментально доказано, что для логарифма долговечности можно использовать нормальное распределение, плотность которого

$$f = \frac{1}{s_x\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{s_x}\right)^2}, \tag{40}$$

где $\bar{x}$ — среднее значение случайной величины, s_x — среднее квадратичное отклонение.

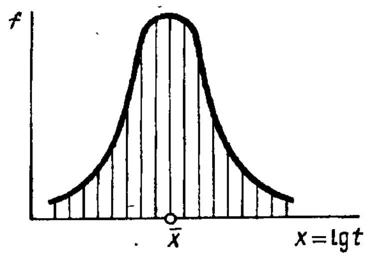


Рис. 4.17. Рассеяние логарифма долговечности при испытаниях длительной прочности

Плотность вероятности ("вероятность на единицу длины") показана на рис. 4.17; по мере удаления от среднего значения плотность вероятности падает.

Замечание. При любом повторном опыте наблюдается рассеяние результатов вследствие влияния множества второстепенных факторов. Стабильность опыта можно охарактеризовать коэффициентом вариации $v = s_x/x$. Разброс данных наблюдается при определении обычных пределов прочности, текучести и других характеристик, но с относительно низким коэффициентом вариации (0,01—0,05). При испытаниях долговечности v достигает значений 0,2—0,3 и статистическое описание результатов эксперимента становится необходимым.

Зависимость предела длительной прочности от температуры. С увеличением температуры предел длительной прочности снижается (рис. 4.18). Отметим, что при 1000°С предел кратковременной прочности составляет 540 МПа, тогда как предел сточасовой прочности 150 МПа.

Длительная пластичность и особенности разрушения при длительной прочности. После работы материала при высокой температуре происходит снижение начальных показателей пластичности δ и Ψ

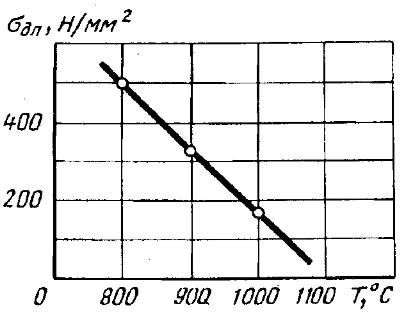


Рис. 4.18. Зависимость предела длительной прочности литого жаропрочного сплава на никелевой основе ЖС6–К от температуры

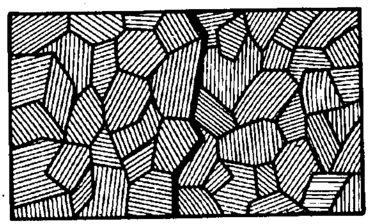


Рис. 4.19. Разрушение при длительной прочности, идущее по границам зерен

часто на 30—50%. Разрушение жаропрочных материалов при длительной прочности носит хрупкий характер. Разрушение идет по границам зерен (рис.4.19), начальный участок трещины обычно сильно окислен.

14. Усталость материалов и элементов конструкций

Явление усталости. Усталостные поломки являются основным видом разрушения деталей машин и нередко приводят к тяжелым последствиям, так как возникают внезапно. Разрушение происходит без заметной пластической деформации, как правило, в зоне концентрации напряжений. Источником усталостного разрушения является действие переменных (по времени) напряжений.

При повторном циклическом деформировании в неблагоприятно расположенных зернах материала происходит накопление микропластических деформаций. При увеличении 500 видны следы остаточных сдвигов (рис. 4.20).

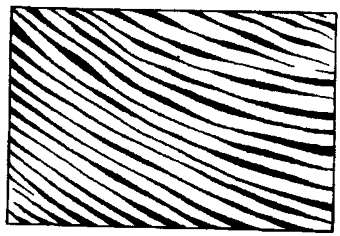


Рис. 4.20. Следы микропластической деформации при повторном нагружении (увеличение на электронном микроскопе)

Процесс постепенного накопления микропластических деформаций приводит к образованию микротрещины, которая начинает расти при повторных приложениях нагрузки в результате концентрации напряжений у ее краев. Усталостное разрушение — разрушение в результате постепенного развития трещины при повторных нагружениях.

При усталостном разрушении на поверхности излома всегда обнаруживаются две зоны (рис. 4.21): зона зарождения и развития трещины и зона окончательного излома. Зона развития трещины обычно имеет гладкую поверхность, так как микронеровности «стираются» при повторном сближении краев трещины. Излом происходит в результате ослабления сечения, когда статическая прочность оказывается недостаточной. Если статическая нагрузка невелика, усталостная зона излома может составлять 50—70% общей поверхности излома.

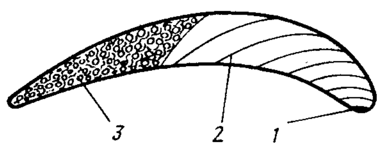


Рис. 4.21. Усталостный излом лопатки:
1 — место зарождения трещины;
2 — зона развития трещины;
3 —зона окончательного излома

Начало усталостного излома возникает в местах действия наибольших переменных напряжений, обычно на поверхности детали.

При высоком уровне переменных напряжений может возникнуть несколько очагов развития усталостной трещины.

Усталостное разрушение часто начинается от забоин, рисок в местах концентрации напряжений. Особое значение для усталостной прочности имеют поверхностные слои элемента конструкции. Усталостное разрушение в отличие от статического имеет резко выраженный локальный характер.

Циклы переменных напряжений. Рассмотрим циклически изменяющиеся напряжения (рис. 4.22). Обозначим символами σ_{max} и σ_{min} наибольшее и наименьшее напряжения цикла.

Действие цикла напряжений можно представить как сумму постоянной составляющей

$$\sigma_m = \frac{1}{2}(\sigma_{max} + \sigma_{min}) \qquad (41)$$

и периодически изменяющихся напряжений с амплитудой

$$\sigma_a = \frac{1}{2}(\sigma_{max} - \sigma_{min}). \qquad (42)$$

Величина σ_m называется *средним напряжением* цикла, величина σ_a — амплитудой переменных напряжений или *переменным напряжением*.

Переменное напряжение изменяется во времени:

$$\sigma_a(t) = \sigma_a \cos\left(\frac{2\pi}{t_ц} t\right) = \sigma_a \cos(2\pi f t), \qquad (43)$$

где $t_ц$ — период цикла, с; $f = 1/t_ц$ — частота цикла, Гц (один герц равен одному колебанию в секунду).

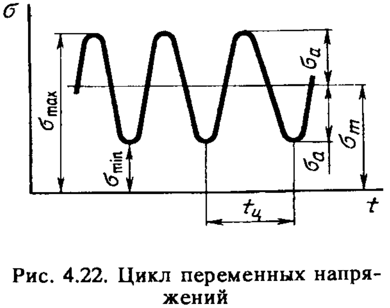


Рис. 4.22. Цикл переменных напряжений

Если среднее напряжение $\sigma_m = 0$, цикл напряжений называют симметричным, при $\sigma_m \neq 0$ — асимметричным.

Для характеристики цикла используется коэффициент асимметрии

$$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}. \qquad (44)$$

Для симметричного цикла $R = -1$; для отнулевого, или пульсирующего, цикла $R = 0$; при действии постоянных напряжений $R = 1$.

Испытания на усталость. Испытания усталостной прочности проводятся на специальных испытательных машинах обычно при симметричном цикле нагружения. В процессе испытания, как правило, задается амплитуда переменного напряжения и определяется число циклов нагружения, при которых образуется трещина определенной величины или происходит поломка. Испытание усталостной прочности материала проводят на образцах диаметра 7—10 мм. Часто проводятся испытания на усталость натурных деталей.

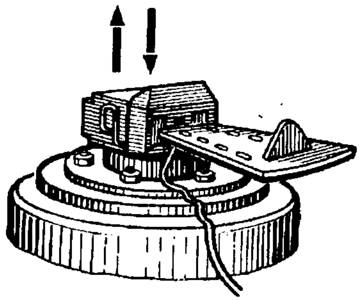


Рис. 4.23. Электродинамический стенд для испытаний лопаток компрессоров и турбин на усталость

На рис. 4.23 показан электродинамический стенд для испытания лопаток компрессоров и турбин на усталость. С помощью генератора частоты возбуждаются колебания, близкие к частоте собственных колебаний лопатки; амплитуда колебаний поддерживается автоматически; напряжения определяются с помощью проволочных тензометров, наклеенных на лопатку.

Влияние числа циклов нагружения на усталостную прочность. Кривые выносливости. Пределы выносливости. Зависимости среднего числа циклов до разрушения от величины амплитуды переменных напряжений цикла называются *кривыми выносливости* (рис. 4.24). В логарифмических координатах кривые выносливости представлены полигональными кривыми (отрезками прямых линий).

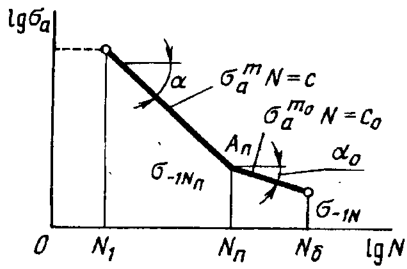


Рис. 4.24. Кривая выносливости (в логарифмических координатах)

Кривая обычно имеет точку перелома. Точка перелома, как правило, соответствует $N = 10^6 \div 10^7$ циклам. После точки перелома обычно происходит замедление усталостного разрушения (легированные стали, титановые сплавы). Для некоторых материалов (алюминиевых сплавов, жаропрочных сплавов в определенном интервале температур) в связи с изменением механизма усталостного разрушения — переходом от сдвигового к диффузионному разрушению — точки перелома при большом числе циклов не существует и темп снижения усталостной прочности остается неизменным до момента разрушения ($\alpha_0 = \alpha$).

Замечание. При малом числе циклов ($N_1 = 10^2 \div 10^3$) кривые усталости имеют перелом, связанный с переходом в малоцикловую область. Проблема малоцикловой усталости будет рассматриваться в следующем разделе.

Условный предел выносливости определяют для выбранного числа циклов — база испытаний $N_б$; обычно принимают $N_б = 2 \cdot 10^6 — 5 \cdot 10^7$ циклов. Условным пределом выносливости называется значение амплитуды переменного напряжения, при котором происходит разрушение при базовом числе циклов.

Условные пределы выносливости обозначаются $(\sigma_{-1})_N$ или σ_{-1N}.

Уравнение кривых выносливости. Кривые выносливости в логарифмических координатах в общем случае состоят из двух участков. В интервале числа циклов $N_1 < N < N_п$ уравнение кривой выносливости имеет вид

$$\sigma^m N = c \quad (N_1 < N < N_п), \tag{45}$$

где m и c — параметры материала. Тангенс угла наклона

$$\operatorname{tg}\alpha = 1/m. \tag{46}$$

Обычно $m = 4 \div 12$, для деталей с концентрацией напряжений $m = 4 \div 8$. Параметры m и c определяются по формулам, аналогичным соотношениям (38) и (39).

На втором участке ($N > N_п$) уравнение кривой выносливости

$$\sigma^{m_0} N = c_0 \quad (N > N_п). \tag{47}$$

Параметр m_0 обычно значительно больше m : $m_0 = (5 \div 10)\,m$. При возрастании m_0 направление линии второго участка приближается к направлению оси абсцисс.

Так как в точке $A_п$ (рис.4.24) обе прямые пересекаются, то параметры уравнений (45) и(47) связаны соотношением

$$c_0 = c\,\sigma_{-1п}^{m_0 - m}. \tag{48}$$

Замечания. 1. Испытаниям на усталость при постоянной амплитуде переменных напряжений свойствен большой разброс значений числа циклов до разрушения. В уравнениях кривых выносливости под N понимается среднее число циклов до разрушения.

2. Для моделей второго и третьего типов происходит монотонное снижение пределов выносливости при увеличении числа циклов нагружения. Не означает ли это не-

избежное разрушение деталей машин, испытывающих переменные напряжения? Например, в лопатках турбомашин, в коленчатых валах двигателей и др. всегда имеется «фон» переменных напряжений около 10—20 МПа.

Простой подсчет показывает, что при сравнительно высокой частоте нагружения (10^3 Гц) за 100 лет непрерывной работы деталь должна выдержать

$$N = 10^3 \cdot 3{,}6 \cdot 10^3 \cdot 8{,}7 \cdot 10^3 \cdot 10^2 \approx 3 \cdot 10^{12} \text{ циклов.}$$

Принимая для точки перелома $N_0 = 10^7$, находим амплитуду разрушающих напряжений при $N = 10^{14}$, $m_0 = 20$:

$$\sigma_{-1}^{20} \cdot 10^{14} = \sigma_0^{20} \cdot 10^7,$$

$$\sigma_{-1} \approx \sigma_0 \cdot 10^{-7/20} \approx 0{,}44\sigma_0 .$$

При амплитуде переменных напряжений порядка $\frac{1}{3}(\sigma_{-1})N_0$ практически не происходит усталостное разрушение за неопределенно долгий срок.

Влияние постоянных напряжений на усталостную прочность. Эксперименты показывают, что наличие средних растягивающих напряжений снижает предел выносливости — предельную амплитуду цикла (рис. 4.25).

Существенно, что при действии постоянных сжимающих напряжений усталостная прочность возрастает. Это дает основание для применения упрочняющей технологии (обдувка дробью, шариками и т.п.), создающей в наиболее напряженных поверхностных слоях остаточные напряжения сжатия.

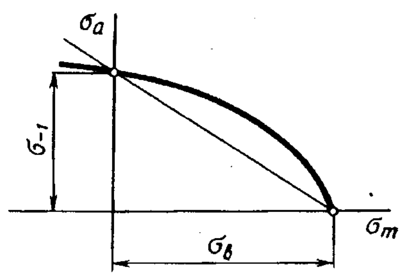


Рис. 4.25. Зависимость предельной амплитуды цикла от средних напряжений

Наибольшее практическое применение получила линейная зависимость предельной амплитуды переменного напряжения от величины σ_m:

$$\sigma_a = \sigma_{-1} - \Psi_\sigma \sigma_m . \qquad (49)$$

Коэффициент Ψ_σ

$$\Psi_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_в}, \tag{50}$$

где $\sigma_в$ — предел прочности материала. Кроме линейных можно использовать зависимости более общего вида:

$$\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_{-1}}\right)^m = 1 - \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_в}\right)^n. \tag{51}$$

Для углеродистых и легированных сталей удовлетворительные результаты получают при $m=2$, $n=1$.

В этом случае

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_{-1}} = \sqrt{1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_в}}. \tag{52}$$

В уравнениях (49) и (52) растягивающее напряжение $\sigma_m > 0$, сжимающее $\sigma_m < 0$.

Влияние концентрации напряжений. Концентрация напряжений оказывает очень сильное влияние на усталостную прочность, так как усталостное разрушение носит локальный характер. Максимальное напряжение в месте концентрации напряжений для упругого материала определяется с помощью теоретического коэффициента концентрации напряжений α_σ:

$$\sigma_{max} = \alpha_\sigma \sigma_н, \tag{53}$$

где $\sigma_н$ — номинальные напряжения, определяемые без учета концентрации напряжений. Например, для концентрации напряжений в пластинке с отверстием (рис. 4.26) принимается

$$\sigma_н = \sigma \frac{H - d}{H}. \tag{54}$$

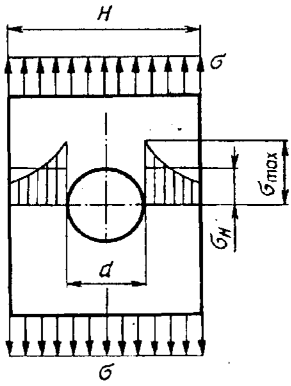


Рис. 4.26. Пример элемента конструкции с концентрацией напряжений

Замечание. Способ определения номинального напряжения, для которого дано значение α_σ, должен быть всегда четко указан.

Если считать, что в момент усталостного разрушения в точке максимального напряжения достигается предел выносливости материала, то предел выносливости детали с концентрацией напряжений должен быть

$$\sigma_{-1\,к} = \frac{\sigma_{-1}}{\alpha_\sigma}. \tag{55}$$

В действительности, как показывают опыты,

$$\sigma_{-1\,к} = \frac{\sigma_{-1}}{K_\sigma}, \tag{56}$$

где K_σ — эффективный коэффициент концентрации напряжений, причем

$$K_\sigma \le \alpha_\sigma. \tag{57}$$

Равенство достигается только для деталей больших размеров, выполненных из материалов с высокой чувствительностью к концентрации. В практических расчетах эффективный коэффициент концентрации оценивают согласно зависимости

$$K_\sigma = 1 + q\,(\alpha_\sigma - 1), \tag{58}$$

где q — коэффициент чувствительности концетрации напряжений.

В приближенных расчетах принимают: для литых материалов $q = 0{,}1 \div 0{,}2$; для малоуглеродистых сталей и жаропрочных деформируемых сплавов $q = 0{,}2 \div 0{,}4$; для алюминиевых сплавов $q = 0{,}3 \div 0{,}5$; для легированных сталей $q = 0{,}6 \div 0{,}8$; для титановых сплавов $q = 0{,}8 \div 0{,}9$. Величина q зависит от числа циклов нагружения, при $N < 10^5$ она уменьшается.

Замечание. Литые материалы менее чувствительны к «внешней» концентрации напряжений, так как они имеют «внутренние» источники концентрации, понижающие усталостную прочность.

Влияние поверхностного слоя. Это влияние оказывается весьма существенным и зависит от трех основных факторов: качества поверхности (шероховатость), коррозионного воздействия и поверхностного упрочнения.

Если σ_{-1} — предел выносливости образца, поверхностный слой которого признается эталонным, то предел выносливости материала с фактически имеющимся поверхностным слоем

$$(\sigma_{-1})_п = \beta\sigma_{-1}, \tag{59}$$

где β — коэффициент влияния поверхностного слоя.

Коэффициент β может быть представлен в виде произведения частных коэффициентов:

$$\beta = \beta_{ш}\beta_{кор}\beta_{уп}. \qquad (60)$$

Коэффициент $\beta_{ш}$ учитывает шероховатость поверхности. Обычно для полированной поверхности принимают $\beta_{ш} = 1$; для шлифованной поверхности (без наличия прижогов) $\beta_{ш} = 0{,}8 \div 0{,}9$; после тонкого точения $\beta_{ш} = 0{,}7 \div 0{,}9$; после грубого точения, фрезерования $\beta_{ш} = 0{,}6 \div 0{,}7$. Меньшие значения относятся к стали и сплавам повышенной прочности ($\sigma_в > 1000$ МПа). Чем более прочным является материал, тем большие требования предъявляются к качеству поверхности для реализации потенциальных возможностей материала.

Коэффициент $\beta_{кор}$ показывает влияние коррозии. При нормальной атмосфере принимается $\beta_{кор}=1$; при следах коррозийного повреждения $\beta_{кор} = 0{,}8 \div 0{,}9$; при наличии морской воды или агрессивных сред $\beta_{кор} = 0{,}5 \div 0{,}8$.

Коэффициент $\beta_{уп}$ учитывает технологическое упрочнение. При пластическом деформировании (наклепе) обдувкой дробью $\beta_{уп} = 1{,}1 \div 1{,}4$; при химико-термической обработке $\beta_{уп} = 1{,}1 \div 1{,}3$. При наличии концентрации напряжений значение $\beta_{уп}$ должно быть увеличено на 30—50%.

Влияние абсолютных размеров деталей. С увеличением размеров деталей машин, элементов конструкций предел выносливости уменьшается (масштабный эффект). Это объясняется статистической теорией, в соответствии с которой увеличивается вероятность пребывания «слабых» зерен в зонах повышенных напряжений. Следует также учитывать, что при увеличении размеров усложняются технологические процессы, ухудшается однородность и т.п.

Предел выносливости детали с характерным диаметром d

$$(\sigma_{-1})_d = \varepsilon_\sigma \sigma_{-1}, \qquad (61)$$

где ε_σ — коэффициент масштабного фактора; σ_{-1}— предел выносливости материала, определяемый на образцах диаметром 7—10 мм.

Коэффициент ε_σ может быть представлен в виде

$$\varepsilon_\sigma = \varepsilon_\infty + (1 - \varepsilon_\infty)\, e^{-\lambda d}. \qquad (62)$$

В приближенных расчетах принимают $\varepsilon_\infty=0{,}5$ для деформируемых материалов, $\varepsilon_\infty=0{,}4$ для литых материалов. В первом приближении $\lambda = 0{,}01 \div 0{,}03$ 1/мм, значение d принимается в миллиметрах.

Оценка пределов выносливости элементов конструкций. Для ответственных деталей машин, элементов конструкций предел выносливости определяется путем натурных испытаний. В тех случаях, когда требуется предварительная оценка усталостной прочности, используется следующая приближенная формула:

$$\sigma_{-1\,д} = \frac{\beta\varepsilon}{K_\sigma}\sigma_{-1}, \qquad (63)$$

где σ_{-1} — предел выносливости материала при симметричном цикле переменных напряжений; β, ε и K — коэффициенты влияния поверхностного слоя, масштабного эффекта и эффективный коэффициент концентрации напряжений.

Предел выносливости σ_{-1} связан с величиной $\sigma_в$ следующей приближенной зависимостью:

$$\sigma_{-1} \approx (0{,}55 \div 0{,}0001\sigma_в)\,\sigma_в,$$

где $\sigma_в$ — предел прочности, МПа.

Равенство (63) оценивает значение предела выносливости детали при симметричном цикле.

При действии постоянных напряжений σ_m, принимая зависимость (49), получаем

$$\sigma_{-1\,д} = \frac{\beta\cdot\varepsilon}{K_\sigma}\sigma_{-1}\left(1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_в}\right). \qquad (64)$$

Формула (64) служит для приближенной оценки предела выносливости детали. Влияние концентрации напряжений учитывается только для переменных напряжений цикла; предел выносливости σ_{-1} определяется для базового числа циклов нагружения.

Приведенные ранее соотношения для приближенной оценки усталостной прочности справедливы и для случая переменных касательных напряжений. Естественно, что во всех формулах индексы нормальных напряжений σ заменяются индексами τ; в некоторых случаях изменяются также числовые коэффициенты. Значение предела выносливости при кручении определяется по формуле

$$\tau_{-1} \approx 0{,}6\sigma_{-1}.$$

Рассеяние усталостной долговечности. При экспериментальных исследованиях, как уже отмечалось, наблюдается разброс значений числа циклов до разрушения при одинаковом значении амплитуды переменных напряжений. При обработке опытных данных число циклов до разрушения рассматривается как случайная величина.

Доказано, что для логарифма числа циклов до разрушения можно использовать нормальное распределение. Плотность распределения определяется формулой (40), в которой $x = \lg N$.

При сравнительно невысоком уровне амплитуд переменных напряжений оказывается целесообразным ввести «пороговое значение» числа циклов до разрушения N_0. Предполагается, что при $N > N_0$ усталостное разрушение не происходит. При наличии порога нормальное распределение относится к величине

$$x = \lg(N - N_0).$$

Пороговое значение числа циклов до разрушения N_0 оказывается дополнительным параметром распределения.

15. Малоцикловая усталость

Циклическое деформирование. Кривая деформирования при растяжении и сжатии показана на рис. 4.27. Предел текучести при растяжении обозначен $\sigma_т^+$, при сжатии $\sigma_т^-$. Для большинства конструкционных металических сплавов (углеродистых и легированных сталей, титановых и алюминиевых сплавов и др.) пределы текучести при растяжении и сжатии приблизительно одинаковы:

$$\sigma_т^+ \approx \sigma_т^-. \tag{65}$$

Рассмотрим деформированное «растяжение-сжатие» при циклическом изменении внешних напряжений от σ до $-\sigma$, причем $\sigma > \sigma_т$ (рис. 4.28,*а*). При первом нагружении точка, изображающая состояние материала в плоскости σ, ε, движется по кривой OAB. Далее напряжения уменьшаются и точка продолжает движение по участку BB_1A_1. После достижения минимального напряжения в точке A_1 снова начинается нагружение по кривой A_1AB. На рис. 4.28,*б* показан цикл деформаций, сопровождающий цикл изменения внешней нагрузки.

Размах упругопластических деформаций

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon_{max} - \varepsilon_{min}, \tag{66}$$

где ε_{max} и ε_{min} — наибольшая и наименьшая (в алгебраическом смысле!) деформация за цикл.

Размах пластической деформации

$$\Delta\varepsilon_p = \varepsilon_{p\,max} - \varepsilon_{p\,min}, \tag{67}$$

где $\varepsilon_{p\,\max}$ и $\varepsilon_{p\,\min}$ — наибольшая и наименьшая пластические деформации при циклическом изменении деформаций.

Изотропное и анизотропное упрочнения при пластических деформациях. Пластическая деформация приводит к повышению «мгновенного» предела текучести. Если в точке *B* (см. рис. 4.27) снизить нагрузку до нуля, а затем опять произвести нагружение, то переход к пластическому деформированию начнется при $\sigma \geq \sigma_т(\varepsilon_p)$ и процесс нагружения пройдет по начальной кривой деформирования (см. разд. 11).

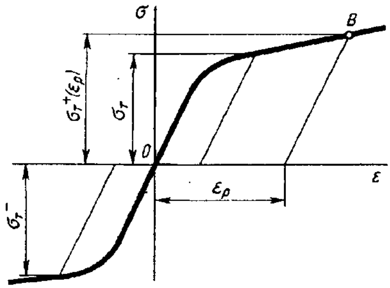


Рис. 4.27. Кривая деформирования при растяжении и сжатии: $\sigma_т^+$ — предел текучести при растяжении; $\sigma_т^-$ —предел текучести при сжатии

Предел текучести при повторном нагружении называется *мгновенным пределом текучести*. В первом приближении можно считать, что значение мгновенного предела текучести зависит от значения пластической деформации в данный момент нагружения.

В наиболее простой модели поведения материала (в модели изотропного упрочнения, рис. 4.29,а) предполагается, что кривые деформирования при повторном нагружении (кривые O_1BC и $O_1B_1A_1$ на рис. 4.29) зависят только от величины достигнутой пластической деформации и не зависят от ее знака.

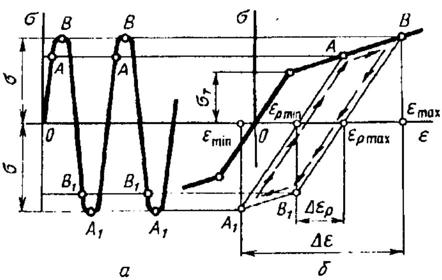


Рис. 4.28. Циклическое деформирование: *а* — изменение действующих напряжений во времени; *б* — цикл деформаций

Кривые деформирования после предварительной пластической деформации ε_p (кривая $A_1B_1O_1BC$) или после $-\varepsilon_p$ представляют собой одинаковые кривые, но «сдвинутые» по оси абсцисс.

В модели изотропного упрочнения мгновенные пределы текучести на растяжение и сжатие одинаковы не только при начальном, но и при повторном деформировании (см. рис. 4.29,*а*). Экспериментально установлено, что у многих конструкционных материалов наблюдается понижение мгновенного предела текучести при изменении знака деформирования. Такой эффект, называемый *эффектом Баушингера*, связан с анизотропным упрочнением материала, т.е. упрочнением, зависящим от направления нагружения (рис. 4.29,*б*).

После разгрузки в точке *B* мгновенный предел текучести понижается:

$$\sigma_т^-(\varepsilon_p) < \sigma_т^+(\varepsilon_p).$$

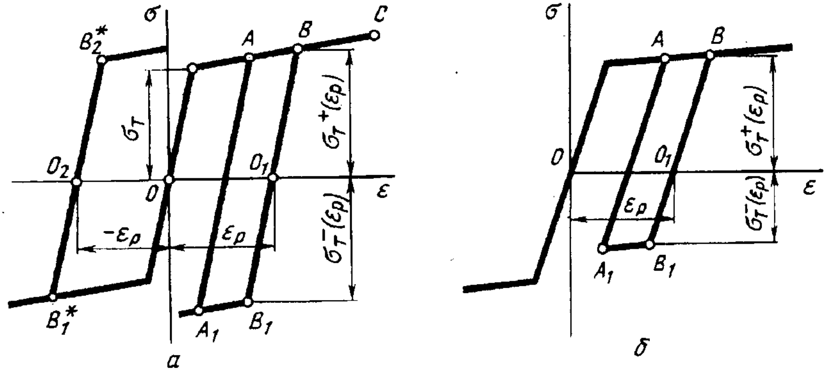


Рис. 4.29. Изотропное (*а*) и анизотропное (*б*) упрочнения при пластических деформациях

При изменении знака пластической деформации мгновенный предел текучести на сжатие будет меньше, чем при растяжении.

В простой модели анизотропного упрочнения (принцип Мазинга) предполагается, что в любой момент нагружения

$$\sigma_т^+(\varepsilon_p) + \sigma_т^-(\varepsilon_p) = 2\sigma_т. \tag{68}$$

Замечание. Модели поведения материала при циклическом деформировании являются приближенными. В ответственных случаях связь напряжений и деформаций при циклическом деформировании должна устанавливаться на основании экспериментальных данных.

Явление малоцикловой усталости. Малоцикловой усталостью называются разрушения при повторных упругопластических деформациях. Обычно разрушения малоцикловой усталости происходят при числе циклов повторения нагрузки $N < 10^5$.

Малоцикловая усталость имеет много общего с обычной усталостью, но отличается от нее наличием макропластических деформаций в зоне излома. Как и при обычной (многоцикловой) усталости, разрушение начинается в местах концентрации напряжений в результате развития первоначально образовавшейся трещины. Однако механизм малоциклового разрушения значительно отличается от механизма усталостного разрушения, так как пластические деформации возникают в значительно больших объемах материала.

В частности, различие сказывается в том, что сопротивление материалов малоцикловой усталости существенно зависит от их пластичности, тогда как подобная зависимость для обычной усталости проявляется слабо.

В машиностроении малоцикловая усталость часто определяет ресурс (долговечность) изделий в связи с повторением циклов «запуск —работа — останов». Характерный пример — диски авиационных двигателей, испытывающих (5—10) $\cdot 10^3$ выходов на максимальную частоту вращения, при которой напряжения приближаются к пределу текучести материала.

Характеристики нагруженности при малоцикловой усталости. При обычной усталости в качестве характеристики нагруженности используются переменные напряжения цикла (амплитуда переменных напряжений σ_a). Переменные деформации, возникающие при действии переменных напряжений в упругой области, однозначно определяются соотношением

$$\varepsilon_a = \frac{1}{E}\sigma_a, \qquad (69)$$

где E — модуль упругости; ε_a — амплитуда переменных деформаций.

При малоцикловой усталости, наблюдающейся в упругопластической области при процессах нагружения и разгрузки, зависимость

$$\varepsilon_a = f(\sigma_a) \qquad (70)$$

имеет значительно более сложный характер, а для материалов с отсутствующим или очень малым упрочнением она практически не является однозначной. На рис. 4.30,*а* показаны два цикла деформаций с переменным напряжением

$$\sigma_{a1} = \sigma_{a2} = \sigma_т, \qquad (71)$$

где $\sigma_т$ — предел текучести материала.

При отсутствии упрочнения, что свойственно малоуглеродистым сталям при $\varepsilon_p < 2\%$, цикл переменных напряжений не определяет реальных условий деформирования. Условию (71) может соответствовать цикл ABB_1A_1 или ACC_1A_1 в зависимости от деформаций на границах упругопластической области.

Для материала с пластическим упрочнением (рис. 4.30,*б*) наибольшие изменения амплитуды переменных напряжений (от σ_{a1} до σ_{a2}) приводят к значительным изменениям амплитуды переменных пластических деформаций (циклы OBB_1A_1AB и OCC_1O_1OC). Указанные соотношения обосновывают целесообразность использования при анализе малоцикловой усталости переменных деформаций в качестве характеристик нагруженности. Для пластически упрочняющихся материалов возможно описание малоцикловой усталости с помощью переменных напряжений.

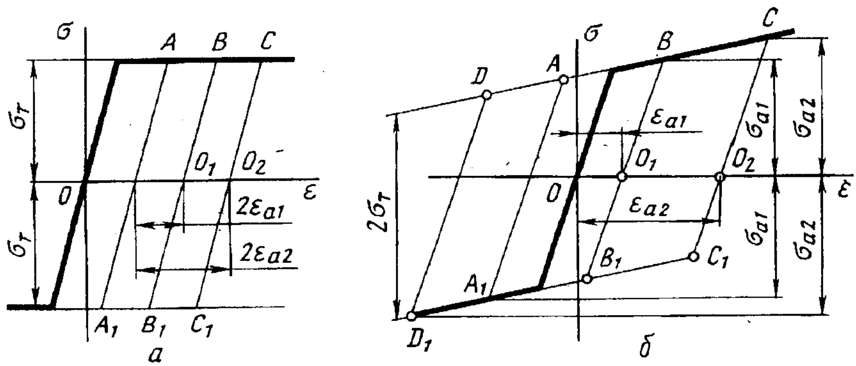


Рис. 4.30. Циклы напряжений и деформаций на диаграммах деформирования

При экспериментальном определении малоцикловой прочности используются режимы жесткого и мягкого нагружений. При жестком нагружении задается амплитуда переменных деформаций ε_a или размах деформаций

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon_{max} - \varepsilon_{min} = 2\varepsilon_a . \qquad (72)$$

Жесткое нагружение встречается в элементах конструкций при «принудительной» деформации (например, циклический нагрев стержня при жесткой заделке его концов). Жесткое нагружение характерно для работы материала в зонах концентрации напряжений, где приближенно можно считать, что деформация задается смещением границ упругой области.

При испытаниях в условиях жесткого нагружения измеряется деформация образца. При мягком нагружении происходит циклическое изменение внешнего усилия, действующего на образец.

Условия разрушения при малоцикловой усталости. При испытаниях с постоянной амплитудой переменных деформаций (жесткое нагружение) установлена следующая зависимость:

$$\varepsilon_{ap}^{m_p} N_p = C_p , \tag{73}$$

где ε_{ap} — амплитуда пластических деформаций; N_p — среднее число циклов до малоциклового разрушения; C_p , m_p — параметры материала.

Условие (73) представляет модель малоциклового разрушения, предложенную Коффином. Величину C_p определяют , используя уравнение (73) для случая однократного (статического) разрушения, принимая условно $N = 1/4$ (в первой четверти цикла происходит нагружение до максимального значения) и полагая $m_p = 2$, $\varepsilon_{ap} = \varepsilon_к/2$. Тогда

$$C_p = \frac{1}{16} \varepsilon_к^2 , \tag{74}$$

где $\varepsilon_к = \ln\frac{1}{1 - \Psi}$ — истинная деформация в момент разрушения (см.разд.12); Ψ — поперечное сужение материала.

Условие малоциклового разрушения будет таким:

$$\varepsilon_{ap}^2 N_p = \frac{1}{16}\left(\ln\frac{1}{1 - \Psi}\right)^2 . \tag{75}$$

Из последнего соотношения следует, что малоцикловая прочность зависит от пластичности материала. Чем больше относительное сужение в шейке при разрыве образца Ψ, тем выше прочность при повторных пластических деформациях.

Условие (75) не включает упругую деформацию цикла и пригодно для случаев, когда пластическая часть переменной деформации существенно превышает упругую. При таких условиях число циклов N до разрушения обычно меньше 10^3. В общем случае условие малоцикловой прочности должно учитывать и обычную усталость в области больших переменных напряжений.

В практических расчетах часто используется экспериментально установленная формула Менсона, связывающая амплитуду полных деформаций цикла (пластических и упругих) с числом циклов до разрушения N_p:

$$\varepsilon_a = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{1 - \Psi}\right)^{0,6} N_p^{-0,6} + \frac{1,75\sigma_в}{E} N_p^{-0,12} , \tag{76}$$

где $\sigma_в$ и E — предел прочности и модуль упругости материала.

Первое слагаемое в правой части уравнения (76) выражает сопротивление материала повторным пластическим деформациям, второе — переменным упругим деформациям. При малом числе циклов до разрушения основное значение имеет первое слагаемое, при $N_р > 10^3$ — второе.

Недостатком формулы Менсона является приближенный учет сопротивления повторным упругим деформациям.

Используя закономерности усталости при высоких напряжениях (см. разд. 14)

$$\sigma_a^m N = \sigma_{-1}^m N_п, \tag{77}$$

где σ_{-1} — предел выносливости для базового числа циклов $N_п$ (точки перелома); m — показатель кривой усталости ($m = 6 \div 20$), можно найти амплитуду переменных деформаций

$$\varepsilon_a = \frac{\sigma_a}{E} = \frac{\sigma_{-1}}{E} N_п^{-1/m} N^{-1/m}. \tag{78}$$

Условие разрушения при малоцикловой усталости можно записать в виде модифицированного уравнения Менсона:

$$\varepsilon_a = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{1-\Psi}\right)^{0,6} N_р^{-0,6} + N_п^{1/m}\frac{\sigma_{-1}}{E} N_р^{-1/m}. \tag{79}$$

Влияние постоянного напряжения цикла. Постоянные напряжения оказывают влияние на малоцикловую прочность, причем главным образом на сопротивление повторным упругим деформациям. Учитывая значения предела выносливости при действии постоянных напряжений (см. формулу (49))

$$(\sigma_{-1})_m = \sigma_{-1}(1 - \sigma_m/\sigma_в), \tag{80}$$

получаем из (79) следующее условие разрушения при наличии постоянных напряжений:

$$\varepsilon_a = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{1-\Psi}\right)^{0,6} N_р^{-0,6} + N_0^{1/m}\frac{\sigma_{-1}(1-\sigma_m/\sigma_в)}{E} N_р^{-1/m}. \tag{81}$$

Формула Менсона с учетом соотношения (80) принимает вид

$$\varepsilon_a = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{1-\Psi}\right)^{0,6} N_р^{-0,6} + 1,75\frac{\sigma_в - \sigma_m}{E} N_р^{-0,12}. \tag{82}$$

Средние напряжения растяжения понижают прочность при малоцикловом нагружении, средние напряжения сжатия — повышают.

Глава 5

МОДЕЛИ УПРУГОСТИ, ПЛАСТИЧНОСТИ И ПОЛЗУЧЕСТИ

Ранее изучалась картина напряжений и деформаций в твердом деформируемом теле. Связь напряжений в различных площадках, проходящих через рассматриваемую точку тела, и условия равновесия элемента тела устанавливались с помощью уравнений статики и не зависели от физических свойств материала. Связь перемещений и деформаций, условия совместности деформаций выводились из геометрических соображений и также не зависели от физических свойств материала. При изучении напряжений (статическая задача) и деформаций (геометрическая задача) материал рассматривался как сплошная однородная среда и знания конкретных свойств материала не требовалось. Теперь необходимо выяснить общие связи между деформациями и напряжениями, что представляет собой физическую задачу, так как при этом должно учитываться поведение реальных тел.

В предыдущей главе мы познакомились с результатами экспериментальных исследований, проводимых главным образом при растяжении образцов материала. Наша ближайшая задача — обобщение экспериментальных данных для случая нагружения при многоосном напряженном состоянии. Всякое обобщение представляет собой модель явления, и нам предстоит рассмотреть модели упругости, пластичности и ползучести.

Установление зависимостей между параметрами, описывающими явление, и есть, в сущности, построение модели. Можно говорить о модели идеального газа, жидкости и т.д. Каждая модель, отражая объективную реальность, имеет область существования, в которой она дает необходимую точность. Наиболее универсальные, практически проверенные модели называются законами.

16. Модели упругости

Связь относительных линейных деформаций и нормальных напряжений. При экспериментальном исследовании растяжения образца были установлены в пределах упругих деформаций зависимости для продольной и поперечной деформаций соответственно:

$$\varepsilon = \frac{1}{E}\sigma ; \qquad (1)$$

$$\varepsilon_{\perp} = -\mu\varepsilon , \qquad (2)$$

где E — модуль упругости материала, МПа; μ — *коэффициент Пуассона.* Форма образца (цилиндрическая или призматическая) несущественна для приведенных зависимостей.

Если на призматический образец (рис. 5.1,*а*) наклеить на боковые грани тензометры для измерения линейных деформаций, то при действии напряжения σ_1 вдоль оси образца получим следующие значения деформаций:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\sigma_1 , \ \varepsilon_2 = -\mu\varepsilon_1 = -\frac{\mu}{E}\sigma_1 , \ \varepsilon_3 = -\mu\varepsilon_1 = -\frac{\mu}{E}\sigma_1 . \qquad (3)$$

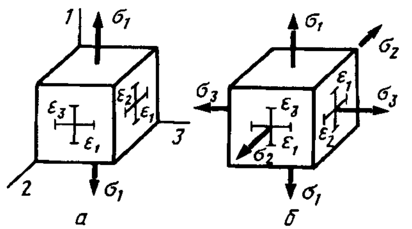


Рис. 5.1. Напряжения и линейные деформации при одноосном (*а*) и трехосном (*б*) напряженных состояниях

Зависимости (1) — (3) следует считать экспериментально установленными для изотропного материала, т.е. материала, упругие свойства которого во всех направлениях одинаковы. В случае трехосного (объемного) напряженного состояния (рис.5.1,б) следует учесть действие всех трех напряжений: σ_1 , σ_2 , σ_3 .

Принимая в пределах малых упругих деформаций постулат независимости действия сил, представим линейную деформацию в направлении *1* в виде

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\sigma_1) + \varepsilon_1(\sigma_2) + \varepsilon_1(\sigma_3) . \qquad (4)$$

Деформация в направлении *1* от действия напряжения σ_1

$$\varepsilon_1(\sigma_1) = \sigma_1/E .$$

Направление *1* является поперечным для направлений *2* и *3*, и потому

$$\varepsilon_1(\sigma_2) = -\frac{\mu}{E}\sigma_2 ;$$

$$\varepsilon_2(\sigma_3) = -\frac{\mu}{E}\sigma_3 .$$

Окончательно

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)\right]. \tag{5}$$

Подобным образом устанавливаем зависимости для линейных деформаций в направлении осей *2* и *3*. В результате будем иметь следующие важные соотношения, которые называются *законом Гука* для линейных деформаций:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)\right],$$
$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left[\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)\right], \tag{6}$$
$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}\left[\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)\right].$$

Уравнения (6) неоднократно подтверждались с помощью экспериментальных исследований при двухосном напряженном состоянии и другими способами. Соотношения упругости для линейных деформаций были установлены для главных направлений (в перпендикулярных площадках действовали только нормальные напряжения).

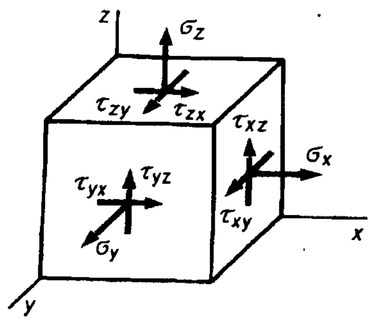


Рис. 5.2. Общий случай трехосного напряженного состояния

Используя приведенные в разд. 4 и 10 соотношения для нормальных напряжений и линейных деформаций в косых площадках, можно показать, что соотношения (6) будут справедливы для любых трех взаимно перпендикулярных направлений (осей x, y, z на рис. 5.2):

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)\right],$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)\right], \tag{7}$$
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)\right],$$

где ε_x, ε_y, ε_z — относительные линейные деформации вдоль соответствующих осей; σ_x, σ_y, σ_z — нормальные напряжения в площадках, перпендикулярных осям x, y, z соответственно.

Соотношения (7) справедливы и при наличии касательных напряжений в соответствующих площадках. Последнее понятно, так как при малых деформациях вызываемый касательными напряжениями скос (сдвиг) не влияет на изменение длины отрезков.

Связь деформаций сдвига и касательных напряжений. Можно экспериментально определить зависимость деформаций сдвига от касательных напряжений, наблюдая скручивание тонкостенной трубы (рис.5.3). В результате деформации точки A и B на образующей цилиндра перейдут в точки A^* и B^*. Эксперименты показывают, что деформация сдвига при упругих деформациях пропорциональна действующим касательным напряжениям:

$$\gamma = \frac{1}{G}\tau, \tag{8}$$

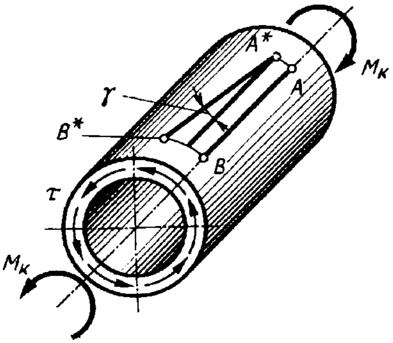


Рис. 5.3. Экспериментальное определение зависимости деформации сдвига от действующих касательных напряжений

где G — модуль сдвига, МПа. Модуль сдвига G представляет параметр материала, который, как будет показано ниже, зависит от модуля упругости и коэффициента Пуассона. В общем случае деформация сдвига (изменение прямого угла) между направлениями x и y (см. рис. 5.2) вызывается касательными напряжениями τ_{xy}:

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}. \tag{9}$$

Подобным образом для трехосного напряженного состояния можно записать три уравнения, выражающие закон Гука для деформаций сдвига в изотропном материале:

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy}, \\ \gamma_{yz} &= \frac{1}{G}\tau_{yz}, \\ \gamma_{zx} &= \frac{1}{G}\tau_{zx}. \end{aligned} \tag{10}$$

Существенно, что деформация сдвига в изотропном материале не зависит от нормальных напряжений в тех же площадках. Действие нормальных напряжений приводит к удлинению вдоль направлений осей x, y, z, но не изменяет угол между указанными направлениями.

Связь модуля сдвига с модулем упругости и коэффициентом Пуассона. Эту связь установим на простом примере одноосного растяжения (рис. 5.4).

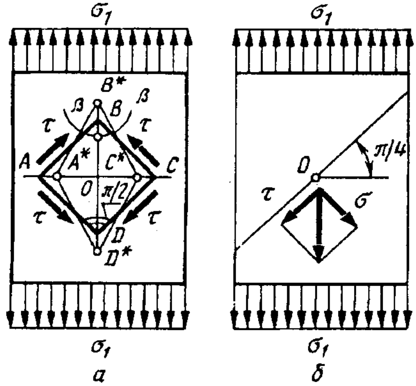


Рис. 5.4. Деформация сдвига между направлениями, составляющими угол $\pi/4$ с направлением растяжения

Найдем деформацию сдвига между направлениями, составляющими угол $\pi/4$ с направлением одноосного растяжения пластинки. Рассмотрим деформацию квадрата $ABCD$ (рис. 5.4,*а*), диагонали которого равны $2l$ $(AC = BD = 2l)$. После деформации вершины квадрата будут в точках A^*, B^*..., и произойдет деформация сдвига (изменение угла) между направлениями AB и BC

$$\gamma = 2(\pi/4 - \beta)\,. \tag{11}$$

Деформация растяжения в продольном направлении равна ε_1, в поперечном она составляет $\mu\varepsilon_1$, и потому

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{OA^*}{OB^*} = \frac{(1 - \mu\varepsilon_1)l}{(1 + \varepsilon_1)l} = 1 - \varepsilon_1(1 + \mu)\,. \tag{12}$$

В последнем равенстве учтено, что величина ε_1 мала по сравнению с единицей. Тогда

$$\frac{1}{1 + \varepsilon_1} = 1 - \varepsilon_1 - 0(\varepsilon_1^2) \approx 1 - \varepsilon_1\,. \tag{13}$$

Символом $0(\varepsilon_1^2)$ обозначены члены, порядок малости которых не ниже ε_1^2.

Из соотношения (11) получаем

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\operatorname{tg}\pi/4 - \operatorname{tg}\gamma/2}{1 + \operatorname{tg}\pi/4\,\operatorname{tg}\gamma/2} = \frac{1 - \gamma/2}{1 + \gamma/2} = 1 - \gamma\,, \tag{14}$$

так как деформация сдвига мала по сравнению с единицей ($\operatorname{tg}\gamma/2 \approx \gamma/2$, $\gamma \ll 1$). Сопоставляя зависимости (12) и (14), находим

$$\gamma = (1+\mu)\varepsilon_1 . \tag{15}$$

По граням действуют касательное напряжение

$$\tau = \frac{1}{2}\sigma_1 \tag{16}$$

и такое же нормальное напряжение (на рис. 5.4,*а* оно не показано). Равенство (16) вытекает из результатов , полученных в разд. 5, но его легко получить непосредственно, рассматривая напряжения в площадке под углом 45° (рис. 5.4,*б*).

Используя равенство (8) и учитывая, что

$$\varepsilon_1 = \sigma_1/E_1 ,$$

находим из соотношения (15)

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = (1+\mu)\frac{\sigma_1}{E} .$$

Ссылаясь на зависимость (16), получаем важный вывод:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} . \tag{17}$$

Температурная деформация. Многие элементы конструкций в современной технике работают при высокой температуре. При анализе деформаций должно быть учтено тепловое расширение, что свойственно всем физическим телам.

Линейная деформация при наличии нагрева состоит из двух частей:

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{сил}} + \varepsilon_{\text{т}} , \tag{18}$$

здесь $\varepsilon_{\text{сил}}$ — деформация, вызванная силовым воздействием элементов; $\varepsilon_{\text{т}}$ — температурная деформация, вызванная тепловым расширением:

$$\varepsilon_{\text{т}} = \alpha T ,$$

где α — коэффициент линейного расширения; T — изменение температуры при нагреве. В технических расчетах температура измеряется в градусах Цельсия (°С) или в кельвинах (К).

Коэффициент линейного расширения α составляет для сталей $(11—12) \cdot 10^{-6}\ K^{-1}$, для алюминиевых сплавов $(20—25) \cdot 10^{-6}\ K^{-1}$, для жаропрочных сплавов на никелевой основе $(12—20) \cdot 10^{-6}\ K^{-1}$, для титановых сплавов $(8—10) \cdot 10^{-6}\ K^{-1}$.

Для линейной упругой деформации

$$\varepsilon = \sigma/E + \alpha T. \tag{19}$$

В изотропном материале температурная деформация не изменяет угол между направлениями, а приводит в данной точке к одинаковым удлинениям во всех направлениях. При неравномерном нагреве или при стеснении границ тела с равномерным распределением температуры могут возникнуть не только температурные деформации, но и температурные напряжения.

Замечание. Учет температурных деформаций обычно проводится при предположении, что распределение температур не зависит от напряженного состояния тела. Для большинства конструкционных материалов это вполне оправданно (так называемые несвязанные задачи термоупругости).

Общая форма закона упругости. Уравнения упругости для линейных и угловых деформаций с учетом температурных деформаций получаются из соотношений (7), (10) и (19).

Для произвольной ортогональной системы координат

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)\right] + \alpha T,\\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)\right] + \alpha T,\\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)\right] + \alpha T,\\
\gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy},\ \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz},\ \gamma_{zx} = \frac{1}{G}\tau_{zx}.
\end{aligned} \tag{20}$$

Уравнения (20) выражают общую форму закона упругости (закона Гука). Они содержат два независимых параметра упругости, в качестве которых обычно принимают модуль упругости E и коэффициент Пуассона μ.

Уравнения упругости можно записать в более краткой форме:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)\right] + \alpha T, \ldots,\ \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}, \ldots (x,y,z). \tag{21}$$

Символ (x,y,z) означает, что недостающие уравнения выписываются по правилу круговой перестановки индексов.

Другие формы закона упругости. Вычитая из уравнения для ε_x среднюю деформацию ε, получаем

$$\varepsilon_x - \varepsilon = \frac{2(1+\mu)}{3E}\left[\sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z)\right] = \frac{1+\mu}{E}(\sigma_x - \sigma).$$

В результате приходим к *девиаторной форме закона Гука*:

$$\varepsilon_x - \varepsilon = \frac{1+\mu}{E}(\sigma_x - \sigma), \ldots, \frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{1+\mu}{E}\tau_{xy}, \ldots (x, y, z), \tag{22}$$

где средние деформации и напряжения

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z), \\ \sigma &= \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \end{aligned} \tag{23}$$

Для полной эквивалентности уравнений (20) и (22) к последним следует добавить условие, связывающее ε и σ:

$$\varepsilon = \frac{1-2\mu}{E}\sigma + \alpha T. \tag{24}$$

Эти соотношения получаются из (20), если сложить первые три равенства.

Во многих задачах оказывается необходимым выразить зависимость напряжений от деформаций, являющуюся следствием закона упругости. Это проще всего получить из соотношений (22) и (24):

$$\sigma_x = \frac{E}{1+\mu}\varepsilon_x + \sigma - \varepsilon\frac{E}{1+\mu} = 2G\varepsilon_x + \varepsilon\left(\frac{E}{1-2\mu} - \frac{E}{1+\mu}\right) - \frac{E}{1-2\mu}\alpha T.$$

Подобные соотношения можно найти для σ_y и σ_z.

В результате получим

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2G\varepsilon_x + 3\lambda\varepsilon - \frac{E}{1-2\mu}\alpha T, \\ \sigma_y &= 2G\varepsilon_y + 3\lambda\varepsilon - \frac{E}{1-2\mu}\alpha T, \\ \sigma_z &= 2G\varepsilon_z + 3\lambda\varepsilon - \frac{E}{1-2\mu}\alpha T, \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}, \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz}, \quad \tau_{zx} = G\gamma_{zx}, \end{aligned} \tag{25}$$

где $G = \dfrac{E}{2(1+\mu)}$ — модуль сдвига; $\lambda = \dfrac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)}$ — постоянная Ламе.

Величина ε представляет среднюю деформацию (23).

Матричная запись закона упругости. Линейные зависимости (21) удобно записать в матричной форме:

$$\{\varepsilon\} = [a]\{\sigma\} + \{\alpha T\}, \tag{26}$$

где векторы деформаций, напряжений и температурных деформаций

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}, \quad \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}, \quad \{\alpha T\} = \begin{Bmatrix} \alpha T \\ \alpha T \\ \alpha T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \tag{27}$$

матрица (матрица податливости материала)

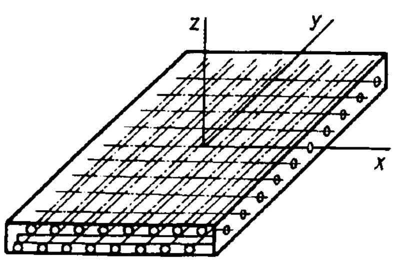
$$[a] = \begin{bmatrix} 1/E & -\mu/E & -\mu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\mu/E & 1/E & -\mu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\mu/E & -\mu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix}. \tag{28}$$

Матрица податливости симметрична.

Замечание. Представление совокупности скалярных величин в виде многомерного вектора — удобный прием современной вычислительной математики, позволяющий использовать аппарат матричной алгебры.

Следует, однако, помнить, что такое представление не имеет физического обоснования и справедливо при неизменной системе координат. Шесть компонентов напряженного и деформированного состояний образуют тензоры (см.разд.6 и 10). Тем не менее векторные представления наглядны и удобны, и ими широко пользуются в современной механике.

Модель упругости для анизотропного тела. В современной технике используются анизотропные материалы. В частности, к таким материалам относятся композиционные материалы, состоящие из набора прочных волокон (нитей стекла, углерода, бора и т.п.) и наполнителя (связующего) в виде смолы мягких материалов и т.п. На рис. 5.5 схе-



Рси. 5.5. Композиционный материал с волокнами в двух взаимно перпендикулярных направлениях

матически показан образец композиционного материала, имеющего волокна в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Для такого материала оси x, y, z являются осями упругой симметрии. Материал, обладающий тремя взаимно перпендикулярными осями упругой симметрии, называется *ортотропным*. Уравнения упругости для ортотропного материала можно представить в виде (28), причем матрица податливости

$$[a] = \begin{bmatrix} 1/E_x & -\mu_{xy}/E_y & -\mu_{xz}/E_z & 0 & 0 & 0 \\ -\mu_{yz}/E_x & 1/E_y & -\mu_{yz}/E_z & 0 & 0 & 0 \\ -\mu_{zx}/E_x & -\mu_{zy}/E_y & 1/E_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{yz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{zx} \end{bmatrix}, \quad (29)$$

где E_x, E_y, E_z — модули упругости в направлении осей x, y, z; $\mu_{xy}, \ldots, \mu_{zy}$ — коэффициенты Пуассона; G_{xy}, G_{yz}, G_{zx} — модули сдвига.

Матрица (29) содержит 12 параметров упругости, но независимых всего 9, так как в силу симметрии матрицы существуют следующие зависимости:

$$\frac{\mu_{yx}}{E_x} = \frac{\mu_{xy}}{E_y}, \quad \frac{\mu_{zy}}{E_y} = \frac{\mu_{yz}}{E_z}, \quad \frac{\mu_{xz}}{E_z} = \frac{\mu_{zx}}{E_x}. \quad (30)$$

Для ортотропного тела

$$\{\alpha T\} = \begin{Bmatrix} \alpha_x T \\ \alpha_y T \\ \alpha_z T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (31)$$

В общем случае для анизотропного тела модель упругости представляет линейные зависимости деформаций от шести компонентов напряжений:

$$\varepsilon_x = a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z + a_{14}\tau_{xy} + a_{15}\tau_{yx} + a_{16}\tau_{zx} + a_x T, \ldots (x, y, z)\,. \quad (32)$$

Матрица податливости является квадратной матрицей шестого порядка, содержащей 36 упругих параметров. Из условия симметрии матрица содержит 21 независимый параметр (6 на главной диагонали и 15 — на боковых). Температурные деформации образуют тензор.

В уравнениях упругости (26) вектор температурных деформаций

$$\{\alpha T\} = \begin{Bmatrix} \alpha_x T \\ \alpha_y T \\ \alpha_z T \\ \alpha_{xy} T \\ \alpha_{yz} T \\ \alpha_{zx} T \end{Bmatrix}. \quad (33)$$

В анизотропном теле в общем случае температурная деформация приводит не только к дополнительным удлинениям, но и к сдвигам.

17. Модели пластичности

Стремление к наименьшим массе и габаритам изделий приводит к необходимости увеличения напряжений в элементах конструкций и наиболее полного использования прочностных возможностей материала. Во многих деталях машин, особенно в местах концентрации напряжений, в рабочих условиях возникают пластические деформации.

Для оценки надежности подобных конструкций необходимо знать распределение напряжений и деформаций в упругопластической области. Модели пластичности позволяют определить несущую способность элементов конструкций, т.е. внешние усилия, при которых происходит потеря работоспособности изделия. Изучение пластичности весьма важно для понимания механизма многих технологических процессов.

В настоящее время существует несколько моделей поведения материала при упругопластических деформациях. Наиболее простая модель пластичности строится на основе деформационной теории Генки — Ильюшина.

Основные уравнения деформационной теории пластичности. В основу деформационной теории пластичности положены следующие основные допущения.

1. Объемная деформация материала является упругой.

По уравнению (23) для упругих деформаций

$$\varepsilon = \frac{1-2\mu}{E}\sigma + \alpha T, \tag{34}$$

где ε — средняя деформация:

$$\varepsilon = \frac{1}{3}\varepsilon_V = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z); \tag{35}$$

σ — среднее напряжение:

$$\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z), \tag{36}$$

E, μ и αT — модуль упругости, коэффициент Пуассона и температурная деформация соответственно.

Опыты, проводимые при всестороннем давлении до 2000 МПа, подтверждают, что средняя деформация остается упругой.

2. Тензор-девиатор деформаций пропорционален тензору-девиатору напряжений (слово «девиация», от которого образован термин «девиатор», означает «отклонение»).

Ранее приводились тензоры деформаций и напряжений (см. разд. 6 и 10):

$$T_\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{Bmatrix}, \quad T_\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{Bmatrix}. \tag{37}$$

Напомним, что в тензор деформаций входят $\frac{1}{2}\gamma_{xy}$, $\frac{1}{2}\gamma_{yz}$, $\frac{1}{2}\gamma_{zx}$, так как исключается поворот элемента, вызванный деформацией сдвига (см. рис. 3.7).

Тензором-девиатором называется тензор, первый инвариант которого (сумма элементов главной диагонали) равен нулю.

Тензоры-девиаторы деформаций и напряжений будут такими:

$$D_\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon \end{Bmatrix}, \quad D_\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{Bmatrix}, \tag{38}$$

где ε и σ — средние деформации и напряжения.

Для D_ε и D_σ суммы компонентов главной диагонали равны нулю (проверьте!):

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z - 3\varepsilon = 0, \quad \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z - 3\sigma = 0.$$

Понятно, что для описания пластичности используются именно девиаторы напряжений и деформаций.

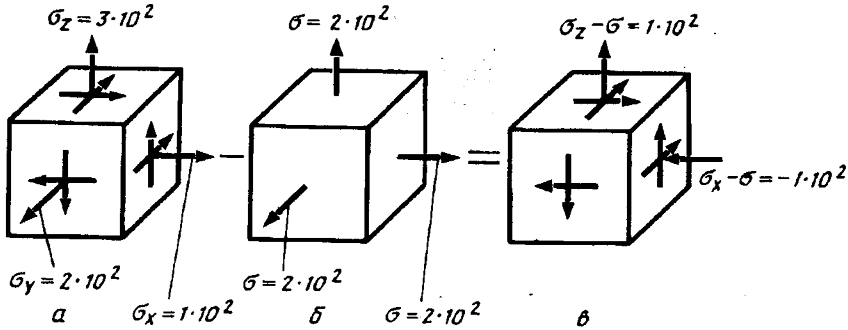


Рис. 5.6. Переход от основного напряженного состояния (*а*) к девиаторному (*б,в*). Нормальные напряжения выражены в Па; $\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$. Касательные напряжения при переходе не изменяются

Девиаторы D_ε и D_σ получаются из T_ε и T_σ после «вычитания» деформаций и напряжений, соответствующих всестороннему растяжению или сжатию. На рис. 5.6 показан переход от основного напряженного состояния к соответствующему девиаторному состоянию. Касательные напряжения для обоих состояний остались неизменными.

Девиатор напряжений характеризует отклонение данного напряженного состояния от состояния всестороннего растяжения или сжатия. Такие отклонения и вызывают деформации сдвига и связанные с ними пластические деформации.

Условие пропорциональности девиаторов деформаций и напряжений записывается в виде

$$D_\varepsilon = kD_\sigma, \tag{39}$$

где k — коэффициент пропорциональности, который удобно подставить в следующем виде:

$$k = \Psi \frac{1+\mu}{E}. \tag{40}$$

В равенстве (40) Ψ — безразмерный коэффициент, называемый *параметром пластичности*. Если материал находится в упругом состоянии, то $\Psi=1$ и уравнение (29) соответствует уравнениям (22).

Из тензорного равенства (39) вытекают девять скалярных равенств, из которых в силу симметрии тензоров ($\gamma_{xy}=\tau_{yx}$, $\tau_{xy}=\tau_{yx}$) различными будут только шесть:

$$\begin{gathered}
\varepsilon_x-\varepsilon=\Psi\frac{1+\mu}{E}(\sigma_x-\sigma),\\
\varepsilon_y-\varepsilon=\Psi\frac{1+\mu}{E}(\sigma_y-\sigma),\\
\varepsilon_z-\varepsilon=\Psi\frac{1+\mu}{E}(\sigma_z-\sigma),\\
\frac{1}{2}\gamma_{xy}=\Psi\frac{1+\mu}{E}\tau_{xy},\quad \frac{1}{2}\gamma_{yz}=\Psi\frac{1+\mu}{E}\tau_{yz},\\
\frac{1}{2}\gamma_{zx}=\Psi\frac{1+\mu}{E}\tau_{zx}.
\end{gathered}\tag{41}$$

Уравнения (41) называются *уравнениями Генки — Ильюшина*. Они аналогичны закону Гука для упругого материала, если присоединить к ним условие (34).

Уравнения пластичности в векторной форме. В девиаторы деформаций и напряжений входят девять скалярных величин, которые можно представить как составляющие девятимерных векторов:

$$\{e\}=\left\{\varepsilon_x-\varepsilon,\ \varepsilon_y-\varepsilon,\ \varepsilon_z-\varepsilon,\ \frac{1}{2}\gamma_{xy},\frac{1}{2}\gamma_{yx},\frac{1}{2}\gamma_{zy},\frac{1}{2}\gamma_{yz},\frac{1}{2}\gamma_{zx},\frac{1}{2}\gamma_{xz},\right\}^{\text{т}},\tag{42}$$

$$\{s\}=\{\sigma_x-\sigma,\ \sigma_y-\sigma,\ \sigma_z-\sigma,\ \tau_{xy},\tau_{yx},\tau_{zy},\tau_{yz},\tau_{zx},\tau_{xz},\}^{\text{т}}.\tag{43}$$

Верхний индекс «т» означает операцию транспонирования, при которой столбец заменяется строкой. Конечно, в равенствах (42) и (43) выписаны по три «лишние» составляющие, так как $\tau_{xy}=\tau_{yx}$, $\gamma_{xy}=\gamma_{yx}, \ldots$. Это сделано из физических соображений, с тем чтобы «размерности» вектора и тензора совпадали.

Уравнения пластичности в векторной форме будут такими:

$$\{e\}=\Psi\frac{1+\mu}{E}\{s\}.\tag{44}$$

Вектор-девиатор деформаций $\{e\}$ коллинеарен (пропорционален) вектору-девиатору напряжений $\{s\}$.

Из уравнения (44) следует, что и модули векторов (их длины) связаны тем же соотношением:

$$|e| = \Psi \frac{1+\mu}{E} |s| . \qquad (45)$$

Модули векторов характеризуют интенсивность напряжений и деформаций в точке:

$$|s| = \sqrt{(\sigma_x - \sigma)^2 + (\sigma_y - \sigma)^2 + (\sigma_z - \sigma)^2 + 2\tau_{xy}^2 + 2\tau_{yz}^2 + 2\tau_{zx}^2} , \qquad (46)$$

$$|e| = \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon)^2 + \frac{1}{2}\gamma_{xy}^2 + \frac{1}{2}\gamma_{yz}^2 + \frac{1}{2}\gamma_{zx}^2} . \qquad (47)$$

Для случая одноосного растяжения отличны от нуля следующие величины:

$$\sigma_x = \sigma_0 , \ \varepsilon_x = \varepsilon_0 , \ \varepsilon_y = -\mu^* \varepsilon_0 , \ \varepsilon_z = -\mu^* \varepsilon_0 , \qquad (48)$$

где μ^* — коэффициент Пуассона при упругопластических деформациях ($\mu < \mu^* < 0{,}5$).

Из равенства (46) находим для одноосного растяжения (проверьте!)

$$|s| = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_0 . \qquad (49)$$

Для более удобного и наглядного сопоставления с результатами экспериментальных исследований при простом растяжении определим интенсивность напряжений σ_i следующим образом:

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{3}{2}} |s| . \qquad (50)$$

Тогда для случая одноосного растяжения

$$\sigma_i = \sigma_0 . \qquad (51)$$

Интенсивность напряжений при одноосном растяжении совпадает с растягивающим напряжением.

Значение $|e|$ при простом растяжении в соответствии с равенствами (47) и (48) будет таким:

$$|e| = \sqrt{\frac{2}{3}} (1 + \mu^*) \varepsilon_0 . \qquad (52)$$

Целесообразно определить интенсивность деформаций ε_i следующим образом:

$$\varepsilon_i = \sqrt{\frac{2}{3}}\, | e |\,. \tag{53}$$

Тогда для одноосного растяжения

$$\varepsilon_i = \frac{2(1+\mu^*)}{3}\varepsilon_0\,. \tag{54}$$

При коэффициенте Пуассона $\mu^*=0{,}5$ интенсивность деформаций при одноосном растяжении совпадает с деформацией растяжения.

Учитывая равенства (50), (53) и (45), получаем важную зависимость:

$$\varepsilon_i = \frac{2}{3}\frac{1+\mu}{E}\Psi\sigma_i\,. \tag{55}$$

Замечание. Зависимость (55) можно получить непосредственно из уравнений пластичности (41), если каждое из шести равенств возвести в квадрат, сложить их, предварительно удвоив последние три равенства, и извлечь из суммы квадратный корень.

Интенсивность напряжений и деформаций. Понятия интенсивности напряжений и деформаций занимают центральное место в деформационной теории пластичности, так как позволяют установить эквивалентность между сложным напряженно-деформированным состоянием и простым растяжением.

Интенсивности напряжений и деформаций были определены следующими зависимостями:

$$\begin{aligned}\sigma_i &= \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{(\sigma_x-\sigma)^2+(\sigma_y-\sigma)^2+(\sigma_z-\sigma)^2+2\tau_{xy}^2+2\tau_{yz}^2+2\tau_{zx}^2}\,,\\ \varepsilon_i &= \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{(\varepsilon_x-\varepsilon)^2+(\varepsilon_y-\varepsilon)^2+(\varepsilon_z-\varepsilon)^2+\frac{1}{2}\gamma_{xy}^2+\frac{1}{2}\gamma_{yz}^2+\frac{1}{2}\gamma_{zx}^2}\,.\end{aligned} \tag{56}$$

Приведем другие выражения для σ_i и ε_i, более удобные для практических расчетов. Учитывая, что

$$(\sigma_x-\sigma)^2+(\sigma_y-\sigma)^2+(\sigma_z-\sigma)^2 = \sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2-3\sigma^2 =$$

$$= \frac{2}{3}(\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2-\sigma_x\sigma_y-\sigma_y\sigma_z-\sigma_z\sigma_x) =$$

$$= \frac{1}{3}\left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 \right], \qquad (57)$$

получаем из равенства (56) часто применяемую формулу для интенсивности напряжений

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \;. \qquad (58)$$

С помощью аналогичных преобразований находим

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)} \;. \qquad (59)$$

Отметим, что для любого напряженного и деформированного состояния величины σ_i и ε_i положительны (модули векторов).

Интенсивность напряжений пропорциональна касательному напряжению в октаэдрической площадке.

Октаэдрической площадкой называется площадка, нормаль к которой наклонена одинаково по отношению к главным направлениям. Октаэдрическая площадка является гранью правильного восьмигранника — октаэдра (рис. 5.7,*б*). Направляющие косинусы нормали

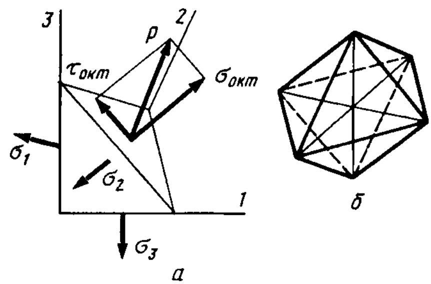


Рис. 5.7. Нормальное и касательное напряжения в октаэдрической площадке: *а* — напряжения в октаэдрической площадке; *б* — правильный октаэдр

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1\,, \qquad l = m = n = 1/\sqrt{3}\,.$$

Нормальное напряжение в октаэдрической площадке (рис. 5.7,*а*) определяется по формуле (59) гл. 2:

$$\sigma_{окт} = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \sigma\,. \qquad (60)$$

Касательное напряжение (рис.5.7,а)

$$\tau_{окт} = \sqrt{p^2 - \sigma_{окт}^2}\,. \qquad (61)$$

В силу равенств (55)—(57) гл.2

$$p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = \frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2). \tag{62}$$

Из последних соотношений вытекает

$$\tau_{\text{окт}} = \sqrt{\frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{1}{9}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \tag{63}$$

Учитывая выражение σ_i для главных напряжений ($\sigma_x = \sigma_1$, $\sigma_y = \sigma_2$, $\sigma_z = \sigma_3$, $\tau_{xy} = 0$, $\tau_{yz} = 0$, $\tau_{zx} = 0$), получаем

$$\sigma_i = \frac{3}{\sqrt{2}}\tau_{\text{окт}}. \tag{64}$$

Замечание. Величина σ_i отражает не общий уровень напряжений, а интенсивность касательных напряжений, что вытекает из равенства σ_i=0 для всестороннего растяжения или сжатия.

Общепринятый термин «интенсивность напряжений» не вполне точен. Лучше говорить о «приведенной интенсивности касательных напряжений, выраженной через эквивалентное нормальное напряжение при простом растяжении», или, короче, об «эквивалентном напряжении растяжения».

Интенсивность упругих и пластических деформаций. Как известно, общая деформация материала ε состоит из упругой и пластической частей (рис. 5.8). При простом растяжении

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_0^p + \varepsilon_0^e. \tag{65}$$

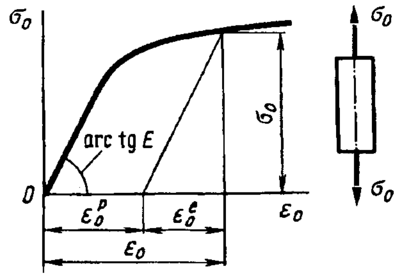


Рис. 5.8. Кривая деформирования при растяжении

Здесь и в дальнейшем верхние индексы p и e означают соответственно пластичность и упругость.

Уравнения пластичности (41) относятся к общим деформациям, но их можно записать отдельно для упругих и пластических деформаций. Полагая Ψ=1, получаем для упругих деформаций

$$\varepsilon_x^e - \varepsilon^e = \frac{1+\mu}{E}(\sigma_x - \sigma), \ldots, \frac{1}{2}\gamma_{xy}^e = \frac{1+\mu}{E}\tau_{xy}, \ldots, (x, y, z). \quad (66)$$

В разд.18 эти соотношения были получены из уравнений упругости. Вычитая равенства (66) из (41), находим значения пластических деформаций:

$$\varepsilon_x^p = (\Psi - 1)\frac{1+\mu}{E}(\sigma_x - \sigma), \ldots, \frac{1}{2}\gamma_{xy}^p = (\Psi - 1)\frac{1+\mu}{E}\tau_{xy}, \ldots, (x, y, z). \quad (67)$$

При выводе последних равенств было учтено, что пластические деформации протекают без изменения объема материала:

$$\varepsilon^p = \frac{1}{3}(\varepsilon_x^p + \varepsilon_y^p + \varepsilon_z^p) = 0, \quad (68)$$

и потому $\varepsilon = \varepsilon^e$.

Из уравнений (67) следует

$$\varepsilon_x^p - \varepsilon_y^p = (\Psi - 1)\frac{1+\mu}{E}(\sigma_x - \sigma_y), \ldots, \frac{1}{2}\gamma_{xy}^p = (\Psi - 1)\frac{1-\mu}{E}\tau_{xy}, \ldots, (x, y, z). \quad (69)$$

Возводя каждое равенство в квадрат, складывая все шесть равенств, предварительно умножив три последние на 6, и извлекая квадратный корень из суммы, находим

$$\varepsilon_i^p = (\Psi - 1)\frac{2(1+\mu)}{3E}\sigma_i. \quad (70)$$

Интенсивность упругих деформаций в силу зависимостей (66) или равенства (55) при $\Psi = 1$ равна

$$\varepsilon_i^e = \frac{2(1+\mu)}{3E}\sigma_i. \quad (71)$$

Последние соотношения приводят к важному результату:

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i^e + \varepsilon_i^p. \quad (72)$$

Интенсивность деформаций равна сумме интенсивностей упругих и пластических деформаций (равенство Генки — Беляева).

Обобщенная кривая деформирования. Ранее было установлено соотношение (55), содержащее пока неизвестный параметр пластичности Ψ. Соотношение (55) показывает, что между интенсивностью деформаций ε_i и интенсивностью напряжений σ_i должна существовать зависимость

$$\sigma_i = f(\varepsilon_i), \qquad (73)$$

которая называется *обобщенной кривой деформирования.*

Зависимость (73) в рамках деформационной теории пластичности следует считать справедливой для любого напряженного состояния.

Для несжимаемого материала ($\mu = \mu^* = 0{,}5$) по уравнениям (51) и (54) находим $\varepsilon_i = \varepsilon_0$, $\sigma_i = \sigma_0$ и обобщенная кривая деформирования совпадает с обычной кривой деформирования при растяжении образцов.

В общем случае, используя уравнения

$$\sigma_i = \sigma_0, \; \varepsilon_i = \frac{2(1+\mu)}{3}\varepsilon_0, \qquad (74)$$

можно построить зависимость (73) (рис. 5.9) по значениям ε_0, σ_0, взятым из опытов на растяжение, и по экспериментальному или расчетному значению коэффициента Пуассона μ^* при упругопластических деформациях.

С помощью обобщенной кривой деформирования выясняется значение и физический смысл параметра пластичности (см.уравнение (55) и рис. 5.9):

$$\Psi = \frac{3E}{2(1+\mu)}\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} = \frac{\sigma_i^*}{\sigma_i}, \qquad (75)$$

где σ_i^* — значение интенсивности напряжений в идеально упругом теле, соответствующее интенсивности деформаций ε_i в упругопластическом теле.

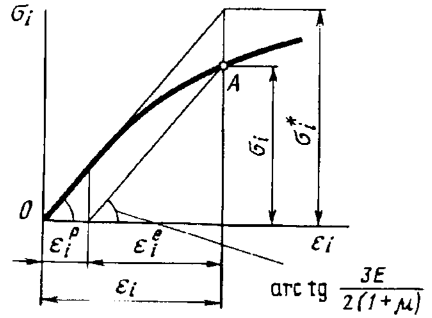


Рис. 5.9. Обобщенная кривая деформирования

Однако построение обобщенной диаграммы деформирования ε_i, σ_i не обязательно для расчета упругопластического деформирования. Можно (и гораздо удобнее) в качестве обобщенной кривой деформирования принять обычную кривую деформирования ε_0, σ_0 при растяжении, понимая под ε_0 и σ_0 эквивалентные деформации и напряжения.

При простом растяжении интенсивность пластической деформации

$$\varepsilon_i^p = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_x^p - \varepsilon_y^p)^2 + (\varepsilon_y^p - \varepsilon_z^p)^2 + (\varepsilon_z^p - \varepsilon_x^p)^2} = \varepsilon_0^p, \qquad (76)$$

так как $\varepsilon_x^p = \varepsilon_0^p$, $\varepsilon_y^p = -\frac{1}{2}\varepsilon_0^p$, $\varepsilon_z^p = -\frac{1}{2}\varepsilon_0^p$,

где ε_0^p — пластическая деформация при растяжении (см. рис. 5.8).

Интенсивность упругой деформации по (71)

$$\varepsilon_i^2 = \frac{2(1+\mu)}{E}\sigma_0,$$

и потому интенсивность деформации при простом растяжении

$$\varepsilon_i = \varepsilon_0^p + \frac{2(1+\mu)}{3E}\sigma_0 = \varepsilon_0 - \frac{\sigma_0}{E} + \frac{2(1+\mu)}{3E}\sigma_0$$

или

$$\varepsilon_i = \varepsilon_0 - \frac{1-2\mu}{3}\frac{\sigma_0}{E}. \qquad (77)$$

Интенсивность напряжений в опытах на растяжение $\sigma_1 = \sigma_0$.

Из последних соотношений получаем *эквивалентные деформации и напряжения*:

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_i + \frac{1-2\mu}{3}\frac{\sigma_i}{E}, \quad \sigma_0 = \sigma_i. \qquad (78)$$

Кривая деформирования при растяжении может рассматриваться как обобщенная кривая деформирования (рис. 5.10), если эквивалентные деформации и напряжения определяются по формулам (78).

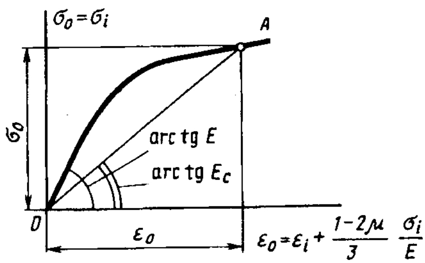


Рис. 5.10. Кривая деформирования при растяжении стержня как обобщенная кривая деформирования ($E_c = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$ — секущий модуль)

Еще одна форма уравнений Генки — Ильюшина. После того как выяснена связь величин ε_i и σ_i, можно указать еще одну форму уравнений Генки — Ильюшина. Подставив в соотношения (41) значения Ψ из уравнения (75), найдем

$$\varepsilon_x - \varepsilon = \frac{3\varepsilon_i}{2\sigma_i}(\sigma_x - \sigma), \ldots, \quad \frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{3\varepsilon_i}{2\sigma_i}\tau_{xy}, \ldots, (x, y, z) \qquad (79)$$

и далее

$$\varepsilon_x - \varepsilon = \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_i}{f(\varepsilon_i)}(\sigma_x - \sigma), \ldots, \frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_i}{f(\varepsilon_i)}\tau_{xy}, \ldots, (x, y, z).$$

Коэффициент Пуассона при упругопластических деформациях. Деформационная теория пластичности позволяет определить коэффициент Пуассона при упругопластических деформациях. Из соотношений (74) и (77) находим

$$\varepsilon_i = \frac{2(1+\mu^*)}{3}\varepsilon_0 = \varepsilon_0 - \frac{1-2\mu}{3}\frac{\sigma_0}{E} \qquad (80)$$

или

$$\mu^* = \frac{1}{2} - \frac{1-2\mu}{2}\frac{E_c}{E},$$

где $E_c = \sigma_0/\varepsilon_0$ — секущий модуль на кривой деформирования (см. рис. 5.10).

Рис. 5.11 показывает удовлетворительное совпадение значений μ^*, полученных экспериментально и определяемых по уравнению (80). Отметим, что если в упругой области μ=0,5 (упруго несжимаемый материал), то и в упругопластической области по равенству (80) μ^*=0,5.

Интенсивность деформаций при растяжении в соответствии с равенством (77)

$$\varepsilon_i = \left(1 - \frac{1-2\mu}{3}\frac{E_c}{E}\right)\varepsilon_0.$$

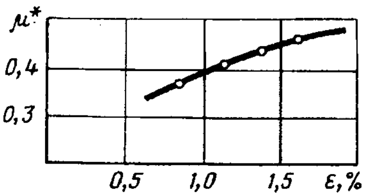


Рис. 5.11. Сопоставление экспериментального и теоретического значений коэффициента Пуассона в упругопластической области

Метод переменных параметров упругости. Уравнения пластичности, связывающие деформации и напряжения, при $\sigma_i > \sigma_т$ нелинейны. Если в пределах упругих деформаций ($\sigma_i < \sigma_т$) увеличение напряжений в k раз вызывает такое же увеличение деформаций, то при появлении пластических деформаций пропорциональность нарушается. Нелинейность уравнений Генки — Ильюшина отчетливо проявляется в их записи в форме (79). Нелинейность физических уравнений теории пластичности создает большие трудности при решении практических задач (нарушается принцип независимости действия отдельных нагрузок и т.п.).

Метод переменных параметров упругости сводит решение задач деформационной теории пластичности к решению последовательности обычных задач упругости, что существенно облегчает расчеты.

Уравнения пластичности Генки — Ильюшина (зависимости (41)) сначала запишем формально в виде уравнений упругости. Например, соотношение

$$\varepsilon_x - \varepsilon = \Psi \frac{1+\mu}{E}(\sigma_x - \sigma)$$

с учетом зависимости (33) будет таким:

$$\varepsilon_x = \Psi \frac{1+\mu}{E}(\sigma_x - \sigma) + \varepsilon = \Psi \frac{1+\mu}{E}(\sigma_x - \sigma) + \frac{1+2\mu}{E}\sigma + \alpha T.$$

Продолжая преобразования, представим уравнения пластичности в виде

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E^*}\left[\sigma_x - \mu^*(\sigma_y + \sigma_z)\right] + \alpha T, \ldots, \gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu^*)}{E^*}\tau_{xy}, \ldots, (x, y, z). \quad (81)$$

Здесь

$$E^* = E\frac{3}{2(1+\mu)\Psi + 1 - 2\mu}, \quad (82)$$

$$\mu^* = \frac{\Psi(1+\mu) - (1-2\mu)}{2\Psi(1+\mu) + (1-2\mu)}, \quad (83)$$

где E — модуль упругости, μ — коэффициент Пуассона (в упругой области), Ψ — параметр пластичности.

Параметры E^* и μ^* называются *переменными параметрами упругости*, так как они зависят от напряженного состояния в точке (параметра пластичности Ψ). В упругой области $\Psi=1$ и $E^* = E$, $\mu^* = \mu$.

Для несжимаемого тела (коэффициент Пуассона $\mu=0{,}5$)

$$E^* = \frac{E}{\Psi} = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} = E_c, \quad (84)$$

$$\mu^* = 0{,}5. \quad (85)$$

Принимая в качестве обобщенной кривой деформирования кривую деформирования при растяжении, получаем для параметра пластичности из соотношений (75) и (77) следующее выражение:

$$\Psi = \frac{3E}{2(1+\mu)}\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} = \frac{3}{2(1+\mu)}\left(\frac{E}{E_c} - \frac{1-2\mu}{3}\right), \quad (86)$$

где $E_c = \sigma_0/\varepsilon_0$ — секущий модуль.

Теперь из уравнений (82), (83) и (86) вытекают основные формулы метода переменных параметров упругости:

$$E^* = E_c, \tag{87}$$

$$\mu^* = \frac{1}{2} - \frac{1-2\mu}{2}\frac{E_c}{E}. \tag{88}$$

Уравнения деформационной теории пластичности можно представить как уравнения теории упругости, если модуль упругости в них заменить секущим модулем (рис. 5.12). Менее существенной является поправка значения коэффициента Пуассона по формуле (88).

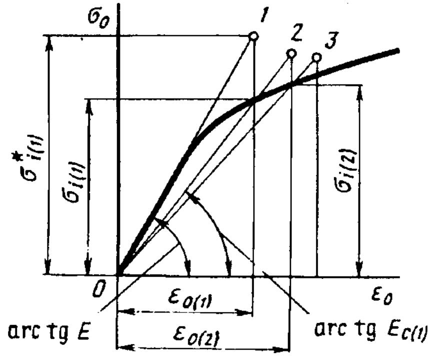


Рис. 5.12. Схема расчета по методу переменных параметров упругости

Замечание. Влияние коэффициента Пуассона на распределение напряжений обычно невелико, и часто проводят расчеты при $\mu = 0{,}5$, т.е. для несжимаемого материала.

Использование простых равенств (87) и (88) не требует каких-либо предположений относительно значений коэффициента Пуассона.

Соотношения (87) и (88) можно получить более простым путем, если представить уравнения (79) в виде зависимости

$$\varepsilon_x - \varepsilon = \frac{1+\mu^*}{E^*}(\sigma_x - \sigma), \tag{89}$$

что соответствует одной из форм закона Гука (см. уравнение (24)). Будем иметь

$$\frac{1+\mu^*}{E^*} = \frac{3\varepsilon_i}{2\sigma_i}.$$

Используя эквивалентные значения ε_0 и σ_0, находим

$$\frac{1+\mu^*}{E^*}=\frac{3}{2}\,\frac{1-\dfrac{1-2\mu}{3}\,\dfrac{E_c}{E}}{E_c}\,. \tag{90}$$

Используя соотношение (80), приходим к равенствам (87),(88).

Запись уравнений пластичности в форме уравнений упругости еще не дает решения, так как значения секущего модуля и коэффициента Пуассона заранее неизвестны. Решение задачи находят методом последовательных приближений.

В первом приближении (см. рис. 5.12) материал считается упругим ($E_1^* = E$, $\mu_{(1)}^* = \mu$) и решается обычная задача упругости. В результате определяются интенсивность напряжений $\sigma_{i(1)}$ в упругом теле и соответствующее значение эквивалентной деформации

$$\varepsilon_{0(1)} = \sigma_{i(1)}^*/E\,.$$

По значению $\varepsilon_{0(1)}$ определяются по кривой деформирования величина $\sigma_{i(1)}$ и секущий модуль

$$E_{c(1)} = \sigma_{i(1)}/\varepsilon_{0(1)}\,.$$

Во втором приближении полагают

$$E_{(2)}^* = E_{c(1)}\,, \qquad \mu_{(2)}^* = \frac{1}{2} - \frac{1-2\mu}{2}\,\frac{E_{c(1)}}{E}\,.$$

и снова решают задачу упругости при полученных значениях параметров упругости. В результате определяют значения $\sigma_{i(2)}^*$, $\varepsilon_{0(2)}$ и новое значение секущего модуля $E_{c(2)} = \sigma_{i(2)}/E_{0(2)}$.

Процесс считается законченным, если для n-го приближения

$$\left|\,\sigma_{i(n)} - \sigma_{i(n-1)}\,\right| < \Delta_1\,; \quad \left|\,\sigma_{i(n)}^* - \sigma_{i(n)}\,\right| < \Delta_2\,, \tag{91}$$

где Δ_1 — принятая точность сходимости приближений; Δ_2 — принятая точность расчета.

В плоскости эквивалентных напряжений и деформаций σ_0, ε_0 (см. рис. 5.12) точки «упругого» расчета стремятся к кривой деформирования. Не останавливаясь на доказательстве сходимости процесса, отметим, что обычно необходимая точность достигается после нескольких приближений. Условия (91) гарантируют сходимость и точность решения.

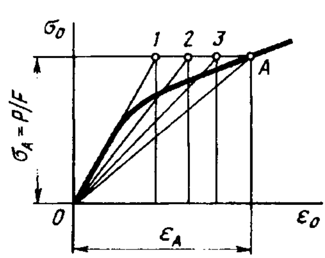


Рис. 5.13. Определение деформации растяжения при заданном напряжении по методу переменных параметров упругости

На рис. 5.13 дана иллюстрация метода переменных параметров для простейшей задачи — определения деформации при растяжении с заданным напряжением σ_A. Решение задачи соответствует пересечению линии σ_A=const с кривой деформирования. Последовательные приближения показаны точками *1*, *2*, *3*.

Замечание. Метод последовательных приближений является одним из наиболее общих математических методов. Для решения задачи разрабатывается процедура (алгоритм), при которой в каждом последующем шаге учитываются результаты предыдущего шага (предыдущего приближения). Метод является строгим, если доказаны сходимость последовательных приближений к точному решению и независимость результата от выбора исходного приближения.

В технических задачах доказательство сходимости, как правило, несущественно — ее наличие или отсутствие видно уже после первых шагов. Важно иметь возможность проверки правильности полученного результата.

Ограничения при использовании модели пластичности на основе деформационной теории. Эксперименты показали, что лежащие в основе модели пластичности уравнения Генки — Ильюшина достаточно хорошо описывают процесс монотонного нагружения. При таком процессе на всех этапах нагружения (внешними силами, температурами и т.п.) интенсивность напряжений σ_i возрастает.

Монотонное нагружение обычно реализуется при простом нагружении, когда все внешние силовые факторы изменяются пропорционально одному возрастающему параметру. При простом нагружении соотношение между внешними нагрузками в процессе нагружения остается неизменным. Если начинается процесс разгрузки, когда во всех точках тела интенсивность напряжений убывает (например, при снятии внешних усилий), то приращение (уменьшение) напряжений и деформаций на этапе разгрузки определяется на основе уравнений упругости по закону разгрузки (рис. 5.14). Основные ограничения рассматриваемой модели пластичности связаны с тем, что уравнения пластичности относятся к конечной точке процесса

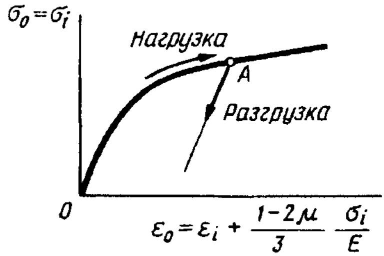


Рис. 5.14. Процесс разгрузки при упругопластическом деформировании

и потому не учитывают историю нагружения. Если из физических соотношений ясно, что имеет место монотонное нагружение, то указанный недостаток несуществен.

В рамках применяемой модели пластичности можно учесть действительную историю нагружения, если рассматривать нагружение как совокупность нескольких этапов. Если на каком-либо промежуточном этапе происходит разгрузка, то при расчете используют уравнения упругости.

Другие модели пластичности. Более совершенной, но и значительно более сложной является модель пластичности, основанная на теории пластического течения Сен-Венана, Мизеса, Прандтля и Рейса. В соответствии с этой теорией рассматриваются раздельно приращения деформаций упругости и пластичности:

$$d\varepsilon_x = d\varepsilon_x^e + d\varepsilon_x^p, \ldots, d\gamma_{xy} = d\gamma_{xy}^e + d\gamma_{xy}^p, \ldots, (x, y, z). \tag{92}$$

Приращение пластической деформации принимается пропорциональным составляющим девиатора напряжений:

$$d\varepsilon_x^p = F(\sigma_i)\, d\sigma_i\, (\sigma_x - \sigma), \ldots, \frac{1}{2}\gamma_{xy}^p = F(\sigma_i)\, d\sigma_i \tau_{xy}, \ldots, (x, y, z), \tag{93}$$

где $d\sigma_i$ — приращение интенсивности напряжений; функция $F(\sigma_i)$ определяется на основании экспериментальных данных при растяжении образцов.

Изложение теории пластического течения и описание других моделей пластичности можно найти в специальной литературе.

18. Модели ползучести и вязкоупругости

Как уже указывалось в разд. 13, ползучестью материала называется возрастание деформаций с течением времени (при постоянном нагружении). Ползучесть металлов наблюдается главным образом в теплонапряженных элементах конструкций, при работе в условиях повышенных температур. Ползучесть полимерных и композиционных материалов, бетонов и др. проявляется и при нормальной температуре. При исследовании подобных материалов обычно используются модели вязкоупругости.

Практическая важность проблемы приводит к необходимости оценки влияния ползучести на работоспособность конструкции. Ползучесть влияет на перераспределение напряжений в элементах конструкций, а в ряде случаев приводит к недопустимому возрастанию деформаций. Разберем сначала модели ползучести металлических конструкционных материалов.

Основы моделей ползучести. Модели ползучести основаны на следующих допущениях.

Первое допущение заключается в представлении общих деформаций, вызываемых действующими напряжениями и нагревом в виде суммы деформаций упругости, пластичности, ползучести и температурной деформации:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^e + \varepsilon_x^p + \varepsilon_x^c + \alpha T + \ldots (x, y, z)\,. \tag{94}$$

Верхние индексы указывают природу деформации (e — упругость, p — пластичность, c — ползучесть); α — коэффициент линейного расширения; T — температура.

На рис. 5.15 приведена схематическая модель материала, соответствующая равенству (94).

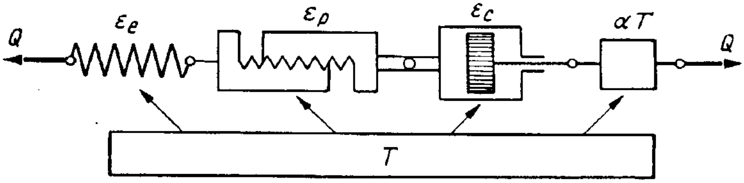


Рис. 5.15. Схематическая модель материала

Материал рассматривается как последовательное соединение элементов. Тепловое воздействие вызывает тепловое расширение, а также влияет на параметры всех элементов (уменьшение модуля упругости в результате нагрева и т.п.).

Часто деформацию упругости и пластичности объединяют (деформационная теория пластичности), относя к ним и температурную деформацию. Равенство (94) справедливо и в дифференциальной форме:

$$d\varepsilon_x = d\varepsilon_x^e + d\varepsilon_x^p + d\varepsilon_x^c + d\,(\alpha T) + \ldots (x, y, z)\,. \tag{95}$$

В практических расчетах под $d\varepsilon_x$ понимают приращение деформации $\Delta\varepsilon_x$ за малый промежуток времени Δt.

Второе допущение, используемое при построении моделей ползучести, состоит в том, что скорости деформаций ползучести или суммарные деформации пропорциональны составляющим девиатора напряжений.

С помощью моделей ползучести результаты простых экспериментов (растяжение стержня при постоянных температуре и напряжении) распространяются на общий случай деформирования.

Модели ползучести, основанные на теории старения. Изохронные кривые ползучести. Наиболее простой теорией ползучест является теория старения. В соответствии с этой теорией должна существовать зависимость

$$F(\varepsilon_0, \sigma_0, t, T) = 0, \tag{96}$$

где ε_0 и σ_0 — суммарная деформация и напряжение при простом растяжении; t и T — время и температура нагружения.

В соответствии с равенством (94) суммарная деформация

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_0^e + \varepsilon_0^p + \varepsilon_0^c + \alpha T. \tag{97}$$

Для сложного напряженного состояния зависимость (96) относится к интенсивностям деформаций и напряжений:

$$F(\varepsilon_i, \sigma_i, t, T) = 0 \tag{98}$$

или в другой форме

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i(\sigma_i, t, T). \tag{99}$$

Интенсивность суммарной деформации (упругости, пластичности и ползучести) определяется в данный момент нагружения интенсивностью напряжений, временем и температурой нагружения.

Для стационарного режима нагружения (σ_0=const, T=const) зависимость

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\sigma_0, t, T) \tag{100}$$

может быть определена из эксперимента (кривых ползучести). Основная гипотеза теории старения состоит в том, что зависимость (99) считается справедливой при нестационарном нагружении (σ = var , T = var). Влиянием изменений σ_i и T по времени ("историей" нагружения) пренебрегают, что приближенно справедливо при монотонном нагружении.

Расчет ползучести основывается на кривых ползучести (см. разд. 13), построенных при постоянных температурах для различного уровня напряжений. На рис. 5.16 показана сетка кривых ползучести при напряжениях

$$\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3 < \sigma_4.$$

По оси абсцисс откладывается время, по оси ординат — деформация при растяжении стержня (образца) при постоянном напряжении. В момент t = 0 (начало отсчета) начальная деформация соответствует мгновенной деформации (упругой или упругопластической) в результате действия приложенного напряжения.Температурная деформация

$$\varepsilon_т = \alpha T$$

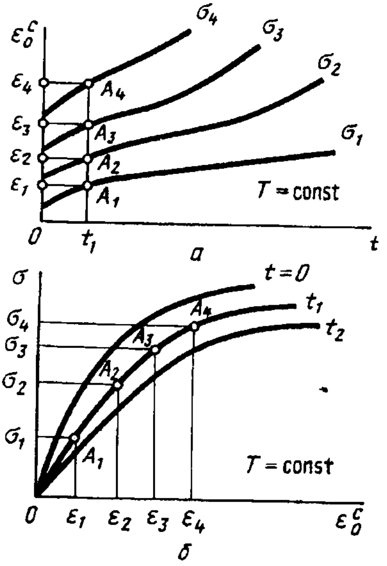


Рис. 5.16. Построение изохронных кривых ползучести (*б*) по сетке кривых ползучести (*а*)

при построении кривых ползучести, так же как и кривых деформирования, не учитывается.

Если провести сечение t = const, например $t = t_1$, то прямая $t = t_1$ пересечет кривые ползучести в точках A_1, A_2, A_3, A_4, которым соответствуют деформации ползучести ε_1, ε_2, ε_3, ε_4. В каждой точке $A_1, A_2, \ldots$ известно значение действующего напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$. Эти данные позволяют построить зависимость

$$\varepsilon_0 = \varphi(\sigma_0)_{t=t_1} = \varphi(\sigma_0, t_1). \quad (101)$$

На рис. 5.16 кривая (101) проходит через точки O, A_1, A_2, A_3, A_4. Зависимость (101) описывает *изохронную кривую ползучести* для времени t_1.

Для начального значения времени t=0 изохронная кривая совпадает с обычной кривой деформирования (при растяжении стержня).

По теории старения, которая излагается в трактовке Ю.Н.Работнова, ползучесть приводит к уменьшению упругопластического сопротивления материалов: с увеличением времени условные кривые деформирования «понижаются», материал «стареет».

Отметим, что деформации ползучести возникают и при напряжениях, меньших предела текучести, и потому «понижение» происходит и на упругом участке условных кривых деформирования.

После нахождения изохронных кривых ползучести задача сводится к расчету упругопластического тела по деформационной теории пластичности (разд. 19). Для начального момента времени (t= 0) расчет полностью совпадает с определением напряжений и деформаций по деформационной теории пластичности.

Для момента времени t проводится точно такой же расчет, но в качестве кривой деформирования принимается изохронная кривая ползучести для соответствующего момента времени.

Основным недостатком теории старения, как уже указывалось, является отрицание влияния истории нагружения. Из уравнения (98) следует, что в момент времени t данному напряжению соответствует определенная деформация ползучести. Следовательно, если напряжение мгновенно возрастет, то должна мгновенно увеличиться и деформация ползучести, что, конечно, произойти не может. Более правильно считать, как это делается в других теориях ползучести, что при мгновенном возрастании напряжений подобным образом увеличивается скорость ползучести.

Модели ползучести, основанные на теории старения, пригодны для описания монотонного, или стационарного, нагружения, процессов релаксации (падения) напряжений при неизменной деформации.

Модели ползучести, основанные на теории течения и теории упрочнения. На рис. 5.17 показана кривая ползучести при одноосном растяжении — зависимость деформации ползучести ε_0^c от времени нагружения. Мгновенная деформация в начальный момент, связанная с упругостью и пластичностью материала, не учитывается. В теориях течения и упрочнения деформация ползучести рассматривается отдельно от деформации упругости и пластичности. Скорость деформации ползучести

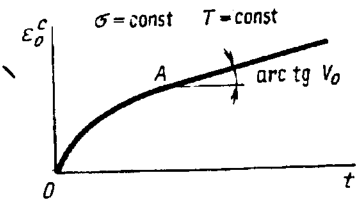


Рис. 5.17. Кривая ползучести при σ = const, T = const

$$V_0 = \dot{\varepsilon}_0^c = \frac{d\varepsilon_0^c}{dt}. \tag{102}$$

Для кривых ползучести V_0 представляет (в определенном масштабе) тангенс угла наклона касательной (рис. 5.17).

Проводя испытания при различных напряжениях и температурах, по кривым ползучести можно установить зависимость

$$V_0 = V_0(\sigma_0, t, T). \tag{103}$$

В теории течения для общего случая напряженного состояния в уравнении (103) величина V_0 заменяется интенсивностью скоростей деформации

$$V_i = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(V_x - V_y)^2 + \ldots + \frac{3}{2}V_{xy}^2 + \ldots}\,, \tag{104}$$

где $V_x = \dot{\varepsilon}_x = \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t}$; $V_y = \dot{\varepsilon}_y = \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial t}$; ..., $V_{xy} = \dot{\gamma}_{xy} = \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial t}$ — скорости компонентов деформации; величина σ_0 заменяется интенсивностью напряжений

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \ldots + 6\tau_{xy}^2 + \ldots}\ . \tag{105}$$

По теории течения предполагается, что должна существовать зависимость

$$F(V_i,\ \sigma_i,\ t,\ T) = 0 \tag{106}$$

или в другой форме

$$V_i = V_i(\sigma_i,\ t,\ T)\,. \tag{107}$$

Интенсивность скоростей деформации ползучести определяется интенсивностью напряжений, временем и температурой в данный момент нагружения.

Основная гипотеза теории течения состоит в том, что зависимости (103) и (107) остаются справедливыми не только для стационарного режима нагружения ($\sigma_i = \mathrm{const}$, $T = \mathrm{const}$), но и при нестационарном нагружении ($\sigma_i = \mathrm{var}$, $T = \mathrm{var}$).

Деформация ползучести, как и всякая остаточная деформация, происходит без увеличения объема:

$$\varepsilon_x^c + \varepsilon_y^c + \varepsilon_z^c = 0\,. \tag{108}$$

Из последнего соотношения после дифференцирования по времени вытекает равенство нулю скорости объемной деформации:

$$V = \dot{\varepsilon}_x^c + \dot{\varepsilon}_y^c + \dot{\varepsilon}_z^c = V_x + V_y + V_z = 0\,, \tag{109}$$

где V — скорость средней деформации.

В соответствии с общими принципами построения моделей ползучести девиатор скоростей деформации ползучести принимается пропорциональным девиатору напряжений:

$$V_x = \dot{\varepsilon}_x^c = k(\sigma_x - \sigma)\,, \ldots,\ \frac{1}{2}V_{xy} = \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{xy}^c = k\tau_{xy}\,, \ldots, (x, y, z)\,. \tag{110}$$

В левые части зависимости (110) не входит скорость средней деформации, так как $V = 0$. Равенства (110) можно записать в эквивалентной форме:

$$V_x - V_y = k(\sigma_x - \sigma_y), \ldots, \frac{1}{2} V_{xy} = k\tau_{xy}, \ldots, (x, y, z). \tag{111}$$

Символ (x, y, z), как и раньше, означает, что недостающие соотношения выписываются с помощью круговой перестановки индексов. Возводя каждое из шести равенств (111) в квадрат, складывая все шесть равенств, предварительно умножив последние три соотношения на 6, и извлекая квадратный корень, получаем

$$\sqrt{(V_x - V_y)^2 + \ldots + \frac{3}{2} V_{xy}^2 + \ldots} =$$
$$= k\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \ldots + 6\tau_{xy}^2 + \ldots}.$$

С учетом зависимостей (104) и (105) находим

$$V_i = \frac{2}{3} k\,\sigma_i, \quad k = \frac{3V_i}{2\sigma_i}. \tag{112}$$

Для случая одноосного растяжения

$$V_i = V_0 = \varepsilon_0^c, \quad \sigma_i = \sigma_0, \tag{113}$$

$$k = \frac{3V_0(\sigma_0, t, T)}{2\sigma_0}. \tag{114}$$

В общем случае для двухосного (плоского) или трехосного (объемного) напряженного состояния

$$k = \frac{3V_0(\sigma_i, t, T)}{2\sigma_i}, \tag{115}$$

где V_0 — скорость деформации ползучести в момент времени t в опытах на растяжение, проводимых при напряжении $\sigma_0 = \sigma_i$ и температуре T.

Модель ползучести по теории течения характеризуется следующими соотношениями:

$$V_x = \dot{\varepsilon}_x^c = \frac{3V_0(\sigma_i, t, T)}{2\sigma_i}(\sigma_x - \sigma), \ldots, \frac{1}{2} V_{xy} = \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{xy}^c =$$
$$= \frac{3V_0(\sigma_i, t, T)}{2\sigma_i}\tau_{xy}, \ldots, (x, y, z). \tag{116}$$

Обращает на себя внимание аналогия с уравнениями деформационной теории пластичности, если вместо деформаций рассматривать скорости деформации.

Подобные зависимости справедливы и для модели ползучести по теории упрочнения, в которой принимается

$$V_0 = V_0(\sigma_0,\ \varepsilon_0^c,\ T). \tag{117}$$

Зависимость (117) отличается от (103) тем, что скорость характеризуется не временем нагружения, а достигнутым значением деформации ползучести.

Установившаяся ползучесть. Процесс ползучести, протекающий при постоянных, не изменяющихся во времени напряжениях, называется *установившейся ползучестью*. Очевидно, установившаяся ползучесть может иметь место только при неизменных во времени внешних усилиях и нагреве. При постоянных напряжениях приращения деформации упругости и пластичности должны отсутствовать, и из уравнения (95) при постоянной температуре следует

$$d\varepsilon_x = d\varepsilon_x^c, \ldots, (x, y, z). \tag{118}$$

Разделив обе части равенства на dt, найдем

$$V_x = V_x^c. \tag{119}$$

При установившейся ползучести скорость изменения деформации равна скорости ползучести.

Для ползучести при одноосном напряженном состоянии (растяжении) по сетке кривых ползучести (см. рис. 5.17) для различных напряжений можно найти скорость V_0 на участках с постоянной скоростью ползучести

$$V_0 = B(T)\,\sigma_0^{n(T)}. \tag{120}$$

Расчет установившейся ползучести более прост, чем расчет общего случая ползучести.

Часто используется зависимость (120), и тогда в соответствии с соотношениями (116) уравнения установившейся ползучести имеют вид

$$V_x = \frac{3}{2} B(T)\,\sigma_i^{n(T)-1}(\sigma_x - \sigma), \ldots, \frac{1}{2} V_{xy} =$$

$$= \frac{3}{2} B(T)\,\sigma_i^{n(T)-1}\tau_{xy}, \ldots, (x, y, z). \tag{121}$$

Сопоставляя уравнения (121) и соотношения (79) для деформационной теории пластичности, приходим к следующему выводу. Распределение напряжений в установившейся стадии ползучести совпадает с распределением напряжений при упругопластических деформациях, если кривая деформирования имеет степенной вид:

$$\varepsilon_i = B\,(T)\,\sigma_i^{n(T)}\,. \tag{122}$$

Предполагается также, что при упругопластических деформациях материал является несжимаемым ($\mu = 0{,}5$, $\varepsilon = 0$). Вместо деформаций рассматриваются их скорости, что не изменяет решения задачи, так как все уравнения сохраняют прежний вид после соответствующей замены обозначений.

Модели вязкоупругости. В классической механике со времен Ньютона используется модель вязкой жидкости, в которой касательные напряжения пропорциональны скорости деформации сдвига

$$\tau_{xy} = \eta\,\frac{\partial}{\partial t}\,(\,\gamma_{xy}\,)\,,\;\ldots\,,\;(x, y, z\,)\,, \tag{123}$$

где η — коэффициент вязкости.

Если рассмотреть сплошную среду, обладающую свойствами вязкой жидкости и упругости, то получим модели вязкоупругости, которые были предложены Максвеллом и Фойгтом в связи с изучением свойств густых растворов, суспензий и упругих тел. В дальнейшем оказалось, что модели вязкоупругости пригодны для описания полимерных материалов, имеющих широкое распространение в современной технике.

Модель Максвелла представляет последовательное соединение элемента упругости и элемента вязкости (последний иллюстрируется в виде движения поршня с зазором внутри цилиндра с вязкой жидкостью (рис. 5.18)). Относительное перемещение точек A и B

$$\delta = \delta^e + \delta^c\,, \tag{124}$$

где упругая часть перемещения пропорциональна действующему усилию:

$$\delta^e = \lambda\,Q\,. \tag{125}$$

Для вязкого элемента усилие Q пропорционально скорости движения поршня относительно цилиндра:

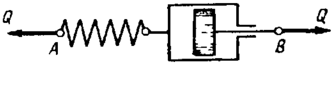


Рис. 5.18. Модель Максвелла

$$Q = \eta \frac{d\delta^c}{dt}. \qquad (126)$$

Дифференцируя равенство (127) по времени и учитывая соотношения (125) и (129), находим

$$\frac{d\delta}{dt} = \lambda \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{\eta} Q. \qquad (127)$$

Для элемента тела при одноосном напряженном состоянии аналогично последнему уравнению получаем

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta}, \qquad (128)$$

где σ и ε — напряжение и деформация растяжения; E — модуль упругости; η — постоянная вязкости, определяемая из экспериментальных данных. Величины ε и η зависят от температуры T.

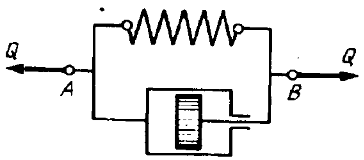


Рис. 5.19. Модель Фойгта

Модель Максвелла совпадает с основной моделью тела при упругих деформациях и деформациях ползучести, для которой скорость ползучести линейно зависит от напряжения (см. рис. 5.15).

Модель Максвелла с нелинейной вязкостью

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{1}{\eta} \sigma^n \qquad (129)$$

может быть использована для приближенного описания деформации не только полимерных материалов, но и металлов.

Модель Фойгта (рис. 5.19) представляет параллельное соединение элементов упругости и вязкости, для которого общее усилие

$$Q = Q^e + Q^c = \frac{1}{\lambda} \delta + \eta \frac{d\sigma}{dt}, \qquad (130)$$

где $\delta = \delta^e = \delta^c$ — относительное перемещение точек A и B.

Для элемента тела при одноосном напряженном состоянии, подобно равенству (130), получаем

$$\sigma = E\varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt}. \qquad (131)$$

Модель Фойгта не дает правильной картины поведения конструкционных материалов под нагрузкой, но она может быть использована для описания микропроцессов в материале, в частности внутреннего трения при переменных напряжениях.

Обобщенная модель (рис. 5.20) представляет собой соединение моделей Максвелла и Фойгта.

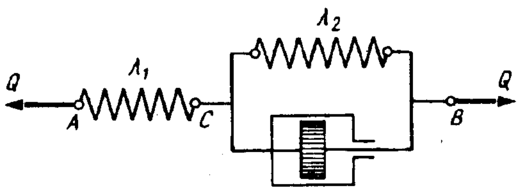


Рис. 5.20. Обобщенная модель вязкоупругости

Для обобщенной модели относительное перемещение точек A и B

$$\delta = \delta_{AC} + \delta_{CB}, \tag{132}$$

где $\delta_{AC} = \lambda_1 Q$ — перемещение звена AC.

Дифференцируя соотношение (132), находим

$$\frac{d\delta}{dt} = \lambda_1 \frac{dQ}{dt} + \frac{d\delta_{CB}}{dt}. \tag{133}$$

С помощью равенства (130) для модели Фойгта находим

$$\frac{d\delta_{CB}}{dt} = \frac{Q}{\eta} - \frac{1}{\lambda_2 \eta}\delta_{CB} = \frac{Q}{\eta} - \frac{1}{\lambda_2 \eta}(\delta - \lambda_1 Q). \tag{134}$$

Из соотношений (133) и (134) вытекает равенство

$$\frac{d\delta}{dt} + \frac{1}{\lambda_2 \eta}\delta = \frac{1}{\eta}\left(1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)Q + \lambda \frac{dQ}{dt}. \tag{135}$$

В последнем соотношении λ_1 и λ_2 — коэффициенты податливости упругих элементов. Переходя к элементу тела при одноосном растяжении, имеем

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{E_2 \varepsilon}{\eta} = \frac{1}{E_1}\frac{d\sigma}{dt} + \frac{1}{\eta}\frac{E_1 + E_2}{E_1}\sigma. \tag{136}$$

Если $E_1 = E$, $E_2 = 0$, то уравнение (136) совпадает с уравнением (128) для модели Максвелла; при $E_1 \to \infty$, $E_2 = E$ получается соотношение (131) для модели Фойгта.

Глава 6

РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ СТЕРЖНЕЙ

19. Растяжение и сжатие стержней сосредоточенными и распределенными силами

Пример точного решения. Рассмотрим растяжение призматического стержня усилиями на его торцах (рис. 6.1). Допустим, что внешние силы распределены равномерно по площади сечения и создают растягивающие напряжения σ. Материал стержня предполагается упругим.

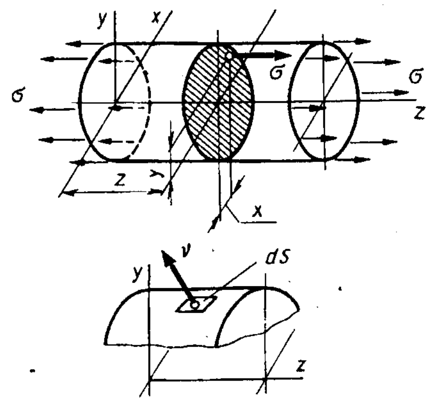


Рис. 6.1. Растяжение стержня усилиями на его торцах

Найдем распределение напряжений и деформаций в стержне, не прибегая к каким-либо допущениям. Решение построим так называемым обратным методом; сначала предположим, что существует некоторое решение, а затем проверим, выполняются ли все необходимые условия.

Допустим, что напряженное состояние в произвольной точке стержня (точке A) таково:

$$\sigma_x = 0\,,\ \sigma_y = 0\,,\ \sigma_z = \sigma\,,\ \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0\,. \tag{1}$$

Единственная отличная от нуля компонента напряженного состояния предполагается постоянной во всех точках тела.

Проверим справедливость уравнений равновесия (уравнений разд.7). Они удовлетворяются, так как производные обращаются в нуль, а массовая сила отсутствует.

Далее проверяем выполнение краевых условий. Составляющие вектора полного напряжения на поверхности (см.уравнения (103) гл.2):

$$
\begin{aligned}
p_x &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n\,, \\
p_y &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n\,, \\
p_z &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n\,,
\end{aligned} \tag{2}
$$

где l, m, n — направляющие косинусы нормали к поверхности.

На боковых поверхностях стержня $p_x = p_y = p_z = 0$ — внешние напряжения на боковой поверхности отсутствуют. Условия (2) выполняются, так как $n = 0$.

На торцевых поверхностях

$$
p_x = 0\,,\ p_y = 0\,,\ p_z = \sigma\,,
$$

что не противоречит решению (1). Для завершения проверки следует определить деформации по закону Гука и убедиться, что уравнения совместности выполняются.

Из уравнений упругости (уравнений (20) гл. 5) следует

$$
\begin{gathered}
\varepsilon_x = -\frac{\mu}{E}\sigma\,,\ \varepsilon_y = -\frac{\mu}{E}\sigma\,,\ \varepsilon_z = \frac{\sigma}{E}\,, \\
\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0\,.
\end{gathered} \tag{3}
$$

Уравнения совместности (уравнения (41)-(43) гл.3) удовлетворяются, так как производные деформаций обращаются в нуль. Следовательно, напряжения (1) и деформации (3) составляют точное решение задачи. Определим перемещения точек стержня. Так как

$$
\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\mu}{E}\sigma\,,\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\mu}{E}\sigma\,,\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\sigma}{E}\,, \tag{4}
$$

то, интегрируя, находим

$$
\begin{gathered}
u = -\int_0^x \frac{\mu}{E}\sigma\,dx + u_0 = u_0 - \frac{\mu\sigma}{E}x\,,\ v = v_0 - \frac{\mu\sigma}{E}y\,, \\
w = w_0 + \frac{\sigma}{E}z\,,
\end{gathered} \tag{5}
$$

где u_0, v_0, w_0 — смещения точки стержня, совпадающей с началом координат.

Наличие в решении постоянных u_0, v_0, w_0 показывает, что перемещения определяются с точностью до смещения стержня как твердого тела.

Из равенства (5) следует, что точки плоскости поперечного сечения ($z = \text{const}$) в результате деформирования получают одинаковое смещение w , т.е. сечения стержня остаются плоскими. Далее отметим, что напряженное состояние является одноосным. Волокна стержня испытывают лишь растяжение вдоль оси z. Точки стержня получают также смещения в плоскости сечения. Если конец стержня закреплен в массивной детали, то указанные смещения стеснены и в районе закрепления (рис. 6.2) возникает искажение одноосного напряженного состояния. По принципу Сен-Венана (см. разд. 7) эти искажения должны иметь местный характер и распространяться на длину порядка диаметра стержня.

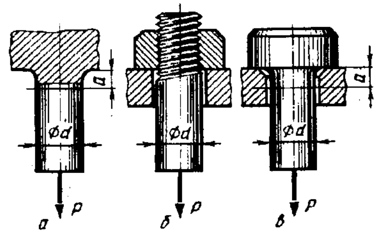


Рис. 6.2. Различные способы закрепления конца стержня

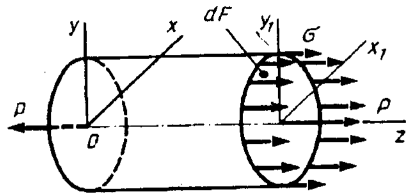


Рис. 6.3. Растяжение стержня сосредоточенными усилиями

Определим равнодействующую внешних усилий, приложенных к торцам стержня (рис. 6.3). В качестве точки приведения выберем центр тяжести сечения, где и поместим начало местной системы координат x_1 , y_1. Сумма всех сил равна усилию

$$P = \int_F \sigma\, dF = \sigma F, \tag{6}$$

где F — площадь поперечного сечения.

Моменты относительно осей x_1, и y_1 равны соответственно

$$M_{x_1} = \int_F \sigma y_1 dF = \sigma \int_F y_1 dF = 0\,,\ M_{y_1} = -\int_F \sigma x_1 dF = -\sigma \int_F y_1 dF = 0\,,$$

так как начало координат лежит в центре тяжести. Статические моменты площади

$$\int_F y_1 dF = 0\,, \quad \int_F x_1 dF = 0 \tag{7}$$

относительно осей, проходящих через центр тяжести сечения, равны нулю. Система равномерно распределенных по площади напряжений статически эквивалентна растягивающей силе $P = \sigma F$, приложенной в центре тяжести сечения.

Правильно и обратное утверждение: растягивающая сила, действующая вдоль оси стержня, вызывает в сечениях стержня равномерно распределенные нормальные напряжения. Отличия имеют место только возле торцов стержня. Системы внешних сил (распределенные или сосредоточенные усилия) статически эквивалентны, и указанные отличия по принципу Сен-Венана распространяются вдоль оси стержня на расстояние порядка размеров поперечного сечения.

На рис. 6.2 показаны различные условия закрепления конца стержня при его растяжении. Во всех случаях в концевой зоне стержня создаются статически эквивалентные системы внешних усилий, влияние которых сказывается в концевой области. Вне пределов краевого эффекта можно принимать равномерное распределение напряжений.

Приближенные модели растяжения и сжатия стержней. В приближенных моделях растяжения и сжатия стержней используются два основных допущения:

1) поперечные сечения стержня остаются плоскими (напряжения распределяются равномерно по поперечному сечению);

2) напряженное состояние в стержне является одноосным.

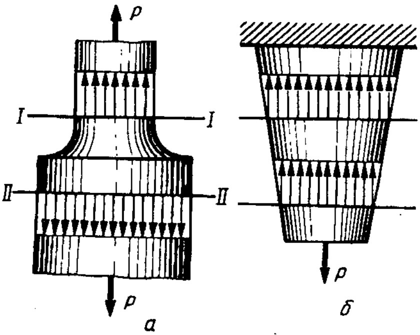


Рис. 6.4. Нарушение допущений приближенной модели

Как было показано для идеального случая растяжения (стержень постоянного сечения при равномерно распределенных по торцам внешних усилиях), принятые допущения вполне оправданны. Однако эти допущения и принцип Сен-Венана применяются и в тех случаях, когда существуют зоны резких отклонений небольшой протяженности (рис. 6.4,*а*) или небольшие отклонения, но распространяющиеся на весь стержень (рис. 6.4,*б*).

Для решения задач на основе сделанных допущений нет необходимости рассматривать условия равновесия и деформации бесконечно малых элементов. Появляется возможность сразу учесть равновесие и деформирование участков стержней или всего стержня в целом.

Растяжение стержня с учетом действия собственного веса. Рассмотрим длинную трубу, опущенную в шахту (рис. 6.5,*а*). На конце трубы действует вес G. В сечении z приложено растягивающее усилие

$$N(z) = G + \gamma F(l - z), \qquad (8)$$

где F — площадь поперечного сечения стержня, см^2; $\gamma = \rho g$ — удельный вес материала, Н/см^3; ρ — плотность материала, кг/см^3; g =981 см/с^2 — ускорение свободного падения.

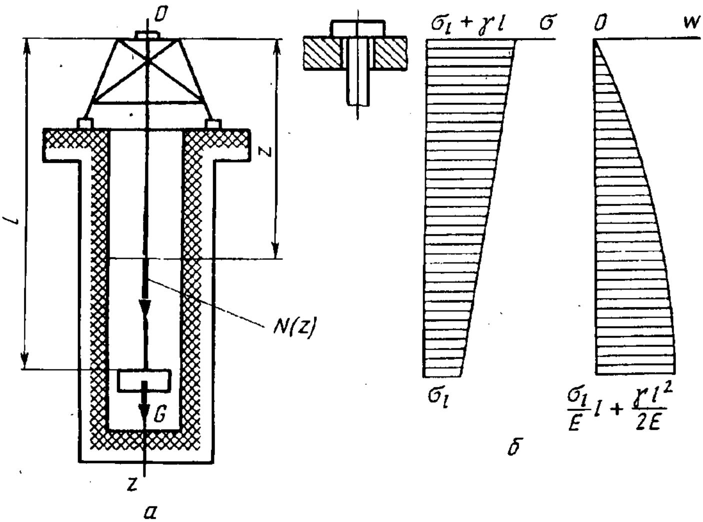


Рис. 6.5. Распределение напряжений и перемещений:
а — при растяжении стержня (трубы) с учетом собственного веса;
б — эпюра нормальных напряжений, эпюра упругих перемещений

Напряжение растяжения

$$\sigma(z) = N(z)/F = \sigma_l + \gamma(l - z), \qquad (9)$$

где $\sigma_l = G/F$ — напряжение от усилия на конце трубы. Деформация удлинения в сечении z для упругого материала с модулем упругости E составит

$$\varepsilon(z) = \frac{\sigma(z)}{E} = \frac{\sigma_l}{E} + \frac{\gamma}{E}(l - z). \qquad (10)$$

Упругое перемещение сечения z (при z = 0 перемещение отсутствует)

$$w(z) = \int_0^z \frac{\sigma(z_1)}{E} dz_1. \qquad (11)$$

В равенстве (11) величина z_1 является переменной интегрирования

$$0 < z_1 < z.$$

Учитывая (10), найдем перемещение в сечении z:

$$w(z) = \int_0^z \left[\frac{\sigma_l}{E} + \frac{\gamma}{E}(l - z_1) \right] dz_1 = \frac{\sigma_l}{E} z - \frac{\gamma}{2E}(l - z_1)^2 \Bigg|_0^z = \\ = \frac{\sigma_1}{E} z + \frac{\gamma z}{2E}(2l - z). \tag{12}$$

На рис. 6.5,*б* показаны эпюры распределения напряжений и перемещений по длине стержня.

Растяжение стержня в поле центробежных сил. Рассмотрим растяжение лопатки осевого компрессора или турбины, лопасти воздушного винта или вертолета в поле центробежных сил. Лопатка рассматривается как стержень переменного поперечного сечения. Ось лопатки (геометрическое место центров тяжести поперечных сечений) совпадает с осью z (рис. 6.6).

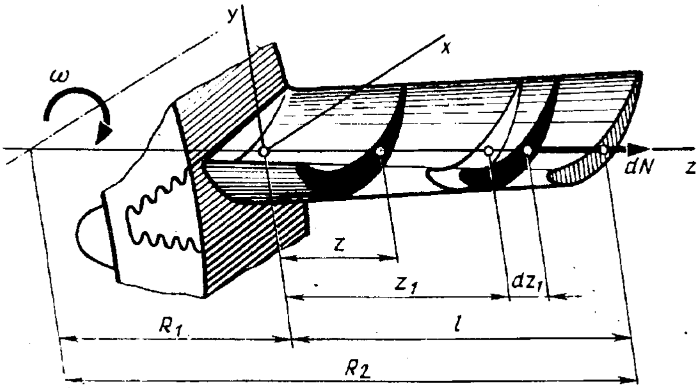


Рис. 6.6. Растяжение лопатки осевого компрессора или турбины под действием центробежных сил

Начало системы координат помещено в центре тяжести корневого сечения, на расстоянии R_1 от оси вращения. Внешний радиус лопатки равен R_2. Найдем напряжение растяжения в поперечном сечении лопатки.

Центробежная сила, действующая на элемент стержня,

$$dN = \omega^2 (R_1 + z_1)\rho F(z_1)\,dz_1, \tag{13}$$

где ω — угловая скорость, рад/с; ρ — плотность, кг/см^3; $F(z_1)$ — площадь поперечного сечения, см^2.

При определении центробежной силы элемент стержня рассматривается как точечная масса, сосредоточенная в центре тяжести сечения. Растягивающее усилие в сечении z

$$N(z) = \rho\omega^2 \int_z^l (R_1 + z_1) F(z_1)\,dz_1 . \tag{14}$$

Напряжение растяжения

$$\sigma(z) = \frac{N(z)}{F(z)} = \rho\omega^2 \frac{1}{F(z)} \int_z^l (R_1 + z_1) F(z_1)\,dz_1 . \tag{15}$$

Для стержня (лопатки) постоянного сечения

$$\sigma(z) = \frac{1}{2}\rho\omega^2 R_2^2 \left[1 - \left(\frac{R_1 + z}{R_2} \right)^2 \right]. \tag{16}$$

Величина

$$\omega R_2 = u \tag{17}$$

представляет окружную скорость на внешнем радиусе лопатки R_2.

Формулу (16) представим в виде

$$\sigma(z) = \frac{1}{2}\rho u^2 \left[1 - \left(\frac{R_1 + z}{R_2} \right)^2 \right].$$

Наибольшее напряжение получается в корневом сечении при $z = 0$:

$$\sigma_{max} = \sigma(0) - \frac{1}{2}\rho u^2 \left(1 - \frac{R_1^2}{R_2^2} \right). \tag{18}$$

Выражение

$$\rho u^2 = \sigma_к \tag{19}$$

составляет напряжение растяжения во вращающемся тонком кольце. Значения $\sigma_к$ приведены в табл.2.

Значения $\sigma_к$ (МПа) и типичные значения предела прочности материала

Материал	ρ, 10^{-3} кг/см^3	u, м/с					$\sigma_в$, МПа
		100	200	300	400	500	
Алюминиевые сплавы	2,75	28	112	252	448	700	150—450
Титановые сплавы	4,5	46	184	415	735	1150	700—1100
Стали	7,85	80	320	720	1280	2000	500—1200

Из формулы (15) следует, что напряжения не зависят от абсолютного размера площади поперечного сечения.

При изменении площади $F(z)$ на всех радиусах в k раз напряжения растяжения остаются прежними. Для уменьшения напряжений растяжения сечения лопатки на больших радиусах уменьшают (рис. 6.7).

Приближенная модель прочностной надежности лопатки газовой турбины. Приближенная модель оценивает надежность лопатки по запасу длительной прочности. Условие надежности имеет вид

$$n_{\min} = \frac{\sigma_{дл}(z)}{\sigma(z)} > [n], \tag{20}$$

где $n_{\min}$ — минимальное значение запаса длительной прочности в различных сечениях лопатки; $\sigma_{дл}(z)$ — предел длительной прочности (см. разд. 16) материала при температуре в рассматриваемом сечении стержня (лопатки), $\sigma(z)$ — напряжения растяжения; $[n]$— допустимое значение запаса прочности. Для лопаток газовых турбин обычно принимают $[n] = 2 — 2{,}5$. Значение запаса прочности зависит от температуры сечения и длительности работы.

На рис. 6.8 для одной из лопаток газовой турбины показаны распределения растягивающих напряжений, температуры, длительной прочности при продолжительности работы 1000 ч и запаса длительной прочности. Минимальный запас имеет место в средней части лопатки, для которой характерен более высокий уровень температуры.

Замечание. В неравномерно нагретых стержнях опасное сечение — сечение с минимальным запасом прочности — не всегда совпадает с сечением, в котором напряжение максимальное.

Связь запаса прочности по напряжениям и запаса прочности по долговечности. В моделях прочностной надежности, связанных с длительной прочностью материала, используется запас прочности по напряжениям (формула (20)) при требуемой продолжительности работы t.

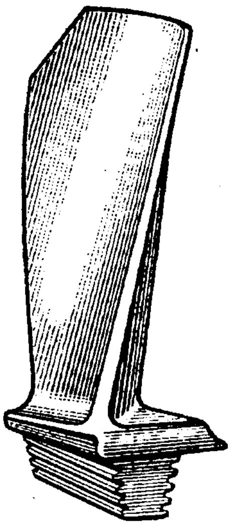


Рис. 6.7. Лопатка газовой турбины авиационного двигателя

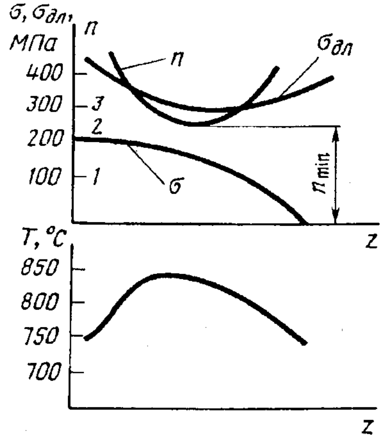


Рис. 6.8. Распределение напряжений растяжения σ, температуры T, длительной прочности $\sigma_{дл}$ за время 1000 ч и запаса прочности n

Для определения запаса прочности по долговечности воспользуемся связью значений пределов длительной прочности и времени работы (уравнение (37) раздела 13):

$$\sigma_{дл}^{m}(t)\, t = C\,. \tag{21}$$

На рис. 6.9 показана точка A, характеризующая работу материала лопатки (стержня) — напряжение σ и продолжительность работы t.

Запас прочности по напряжениям

$$n_\sigma = \sigma_{дл}(t)/\,\sigma\,, \tag{22}$$

запас прочности по длительности работы (долговечности)

$$n_t = t_р/\,t\,, \tag{23}$$

где $t_р$ — время работы до разрушения при напряжении σ.

Так как точки A_1 и A_2 находятся на одной прямой, то

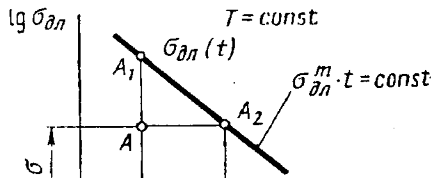


Рис. 6.9. Связь запаса прочности по напряжениям и запаса прочности по долговечности

$$\sigma^m_{\text{дл}}(t)\,t = \sigma^m t_\text{р},$$

и потому

$$\sigma^m_{\text{дл}}(t)\,t/\,\sigma^m = t_\text{р}/\,t$$

или

$$n_t = n^m_\sigma\,. \tag{24}$$

Так как обычно $m = 6 \div 20$, то запас по долговечности существенно выше запаса прочности по напряжениям.

20. Статически неопределимые задачи растяжения и сжатия стержней

Понятие статической неопределимости. Рассмотрим задачу (рис. 6.10). На стержень, оба конца которого приварены к двум недеформирующимся и неподвижным плитам, действует усилие P. Требуется найти распределение усилий и напряжений в стержне.

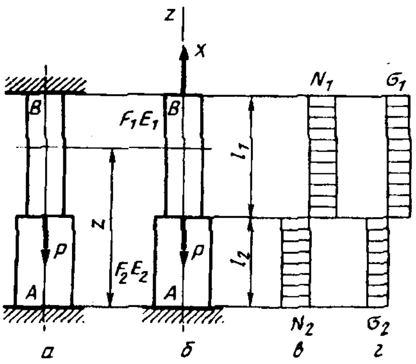


Рис. 6.10. Стержень, жестко заделанный в неподвижной плоскости:
а — статически неопределимая система; *б* — эквивалентная статически определимая система; *в* — распределение усилий; *г* — распределение напряжений

Система, показанная на рис. 6.10*а*, статически неопределима в том смысле, что усилие в произвольном сечении z неизвестно и из уравнений статики не может быть определено. Метод сечений (например, сечение стержня плоскостью $z = \text{const}$) не дает решения, так как неизвестны усилия, приложенные к отсеченной части.

Задачи сопротивления материалов, для решения которых недостаточно уравнений статики, называются *статически неопределимыми*.

Один из общих методов решения статически неопределимых задач. Метод заключается в последовательном проведении двух процедур:

1. Система освобождается от лишних связей, взамен которых прикладываются неизвестные силовые факторы, т.е. система превращается в статически определимую (формально).

2. Составляются уравнения, дополнительные к статическим, в которых учитываются действительные условия деформирования элементов системы.

В рассматриваемой задаче (см. рис. 6.10) на первом этапе отсекаем одну из заделок стержня, например верхнюю, заменяем ее действие неизвестным усилием X. Полученная система (рис. 6.10,*б*) является статически определимой.

Второй этап решения состоит в учете уравнения

$$w_B = 0, \tag{25}$$

что выражает невозможность перемещения точки B в статически неопределимой системе (рис. 6.10,*а*).

Перемещение точки B равно

$$w_B = \frac{X l_1}{E_1 F_1} - \frac{(P - X) l_2}{E_2 F_2}, \tag{26}$$

так как на первом участке постоянная деформация

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{X}{E_1 F_1}, \tag{27}$$

а на втором участке

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E_2} = -\frac{P - X}{E_2 F_2}. \tag{28}$$

В последних равенствах F_1, F_2 и E_1, E_2 — площади поперечного сечения и модули упругости. Из уравнения (25) получаем

$$X = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} P, \tag{29}$$

где $\lambda_1 = l_1 / (E_1 F_1)$, $\lambda_2 = l_2 / (E_2 F_2)$ — коэффициенты податливости, мм/Н. Величины $E_1 F_1$ и $E_2 F_2$ называются жесткостями сечений стержня на растяжение.

На первом участке действует растягивающее усилие

$$N_1 = X = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} P, \tag{30}$$

на втором участке — усилие

$$N_2 = -P + X = -\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} P. \quad (31)$$

Усилие, растягивающее стержень, будем считать положительным, сжимающее — отрицательным (в соответствии с правилом знаков для нормальных напряжений). Распределение усилий и напряжений по длине стержня показано на рис. 6.10,*в* и *г*.

Величина X по формуле (29) получилась положительной. Это означает, что предварительно выбранное направление неизвестного усилия X (рис. 6.10,*б*) оказалось правильным. Можно было предварительно принять усилие X направленным в другую сторону. Легко убедиться, что это не повлияло бы на решение (проверьте!).

Рассмотренный метод является общим, применимым для любых статически неопределимых систем. Он называется *методом сил*, так как в качестве неизвестных принимаются усилия. Однако метод отнюдь не является единственным. Существуют и другие, достаточно общие методы, например метод перемещений, которые в некоторых случаях приводят к более простым расчетным схемам.

Прочностная модель болтового соединения. Конструктивная схема болтового соединения — очень важного разъемного соединения во многих конструкциях — показана на рис. 6.11. Промежуточные детали *1* и *2* соединения стягиваются болтом *О*.

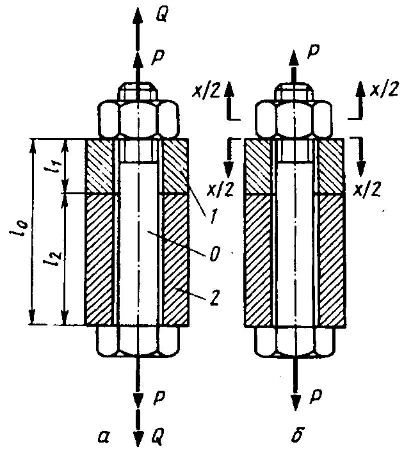


Рис. 6.11. Прочностная модель болтового соединения:
а — конструктивная схема; *б* — расчетная модель по методу спаянного стыка; *1,2* — промежуточные детали соединения; *О* — болт

Промежуточные детали моделируются эквивалентными по жесткости втулками, имеющими площади поперечных сечений F_1, F_2, модули упругости E_1, E_2.

Болтовые соединения всегда предварительно затягиваются, что, как будет ясно из дальнейшего, уменьшает дополнительную нагрузку на болт. Если усилие затяжки Q_0, то болт растягивается силой Q_0, а промежуточные детали (втулки) сжимаются той же силой.

Теперь допустим, что на соединение начинает действовать основная нагрузка — внешнее растягивающее усилие P, которое прикладывается в опорных сечениях. Ясно, что болт должен получить дополнительную вытяжку, а напряжения сжатия во втулках, созданные при затяжке, должны уменьшиться.

Будем считать, как это всегда делается на практике, что усилие затяжки превышает основную нагрузку ($Q_0 > P$) и стык деталей не «раскрывается». Тогда при анализе действия внешнего усилия плоскости стыка можно считать «спаянными». Предполагая детали соединения работающими в упругой области, разберем по принципу независимости действия сил отдельно действие внешнего усилия P.

Для раскрытия статической неопределимости (неизвестно, какая часть усилия P воспринимается болтом и какая — втулками) проводим сечение на стыке гайки и втулки (не перерезая болт). Обозначив неизвестное усилие символом X, запишем равенство удлинения болта и втулок в виде

$$(P+X)\frac{l_0}{E_0 F_0} = -\frac{X l_1}{E_1 F_1} - \frac{X l_2}{E_2 F_2}, \tag{32}$$

где l_i, E_i и F_i — длины, модули упругости и площади сечений.

В правую часть равенства (32) входят величины со знаком минус, так как усилие X (см. рис. 6.11,*б*) предполагалось направленным на сжатие втулок. Из равенства (32) находим

$$X = -\frac{P\lambda_0}{\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2}, \tag{33}$$

где

$$\lambda_i = l_i/(E_i F_i), \qquad i = 0, 1, 2 \tag{34}$$

— коэффициенты податливости болта и промежуточных деталей.

Знак минус в равенстве (33) означает, что действительно направление X противоположно предварительно выбранному. Дополнительное усилие на болт в результате действия усилия P

$$Q_д = P + X = P - \frac{\lambda_0 P}{\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2} P = \chi P, \tag{35}$$

где $\chi = \dfrac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2}$ — коэффициент основной нагрузки.

Общее растягивающее усилие, действующее на болт:

$$Q = Q_0 + \chi P. \tag{36}$$

Усилие сжатия, приложенное к промежуточным деталям (усилие на стыке):

$$Q_c = -Q_0 + (1-\chi)P. \tag{37}$$

Коэффициент основной нагрузки χ зависит от соотношения между податливостью промежуточных деталей и податливостью стержня болта. Для того чтобы усилие на болт при приложении внешней (основной) нагрузки возрастало незначительно, т.е. для уменьшения коэффициента основной нагрузки, надо делать «жесткие фланцы — податливые болты». Это — правило конструирования болтовых соединений, особенно для работающих при переменной нагрузке. При возрастании P может наступить раскрытие стыка ($Q > 0$).

Из равенства (37) находим условие потери плотности стыка:

$$P(1 - \chi) \geq Q_0. \tag{38}$$

После раскрытия стыка, например в результате частичного отворота гайки и уменьшения усилия Q_0, внешняя нагрузка полностью передается на болт:

$$Q = P. \tag{39}$$

Вот почему во всех динамически нагруженных конструкциях принимают специальные меры, предотвращающие отворот гаек (специальные контровки, шайбы и т.п.).

Модель прочностной надежности болта при действии статической нагрузки (нагрузки, постоянной по времени). Запас прочности

$$n = \frac{\sigma_в}{\sigma_{max}} \geq [n], \tag{40}$$

где $\sigma_в$ — предел прочности материала, σ_{max} — максимальное напряжение в стержне болта.

Допустимый запас прочности при статических нагрузках принимается небольшим: $[n] = 1{,}3 \div 1{,}5$.

Учитывая соотношение (36), находим условие надежности

$$\frac{\pi \sigma_в d_{min}^2}{4(Q_0 + \chi P)} \geq [n], \tag{41}$$

где d_{min} — минимальный диаметр стержня болта.

Модель прочностной надежности болта при действии переменных нагрузок. Допустим, что внешняя нагрузка на болт периодически изменяется от 0 до P. Тогда на болт будет действовать переменная нагрузка, имеющая максимальное и минимальное значения:

$$Q_{max} = Q_0 + \chi P, \quad Q_{min} = Q_0. \tag{42}$$

При переменной нагрузке опасными становятся места концентрации напряжений. В болте (рис. 6.12) типичными являются три таких места: резьба, выточка и галтель — переход от головки болта к стержню. Особенно опасным является концентрация напряжений в резьбе, для которой (теоретический) коэффициент концентрации $\alpha_0 \approx 5$. Цикл переменных напряжений в резьбовой части болта

$$\sigma_{max} = \frac{4Q_{max}}{\pi d_1^2}, \quad \sigma_{min} = \frac{4Q_{min}}{\pi d_1^2}, \qquad (43)$$

где d_1 — внутренний диаметр резьбы.

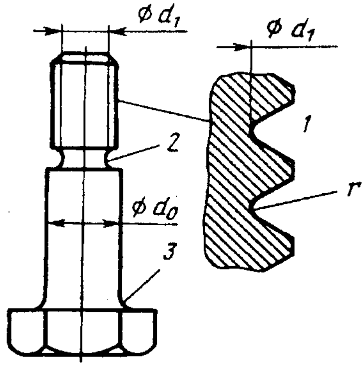


Рис. 6.12. Места концентрации напряжений в болте:
1 — резьба; *2* — выточка; *3* — галтель

В резьбовой части болта действует переменное напряжение (см. разд. 16)

$$\sigma_a = \frac{1}{2}(\sigma_{max} - \sigma_{min}) = \frac{2}{\pi d_1^2}\chi P \qquad (44)$$

и постоянное напряжение

$$\sigma_m = \frac{1}{2}(\sigma_{max} + \sigma_{min}) = \frac{2}{\pi d_1^2}(2Q_0 + \chi P) \approx \sigma_0, \qquad (45)$$

где $\sigma_0 = \dfrac{4Q_0}{\pi d_1^2}$ — напряжение затяжки.

Отметим, что амплитуда переменных напряжений в болте пропорциональна коэффициенту основной нагрузки. Модель прочностной надежности болта при действии переменных напряжений (модель усталостной прочности) имеет вид

$$n_a \geq [n_a], \qquad (46)$$

где $[n_a]$ — допустимое значение запаса прочности по переменным напряжениям.

Так как значение коэффициента основной нагрузки определяется приближенно и поскольку рассеяние усталостной прочности при наличии технологических отклонений значительно, принимается $[n_a] \geq 4$. Запас прочности по переменным напряжениям

$$n_a = \frac{\sigma_{-1\text{д}}}{\sigma_a}, \tag{47}$$

где $\sigma_{-1\text{д}}$ — предел выносливости детали (болта).

По равенству (79) гл.4

$$\sigma_{-1\text{д}} = \frac{\beta\varepsilon}{K_\sigma}\sigma_{-1}, \tag{48}$$

где β и ε — коэффициенты, учитывающие состояние поверхности и масштабный фактор; K_σ — эффективный коэффициент концентрации напряжений:

$$K_\sigma = 1 + q(\alpha_\sigma - 1), \tag{49}$$

где q — коэффициент чувствительности материала.

Модель усталостной надежности болтового соединения имеет вид

$$\frac{\pi d_1^2 \beta\varepsilon\sigma_{-1}(1 - \sigma_0/\sigma_\text{в})}{2K_\sigma\chi P} \geq [n_a]. \tag{50}$$

Повышению усталостной надежности способствует уменьшение коэффициента концентрации напряжений, коэффициента основной нагрузки, увеличение предела выносливости материала.

Приближенные модели термоциклической прочности элемента конструкции. Детали теплонапряженных конструкций часто подвергаются циклическому нагреву, причем деформации элемента ограничиваются другими частями конструкции. В таких условиях работают поверхностные слои материала при нестационарных тепловых воздействиях. В качестве типичной модели термоциклической прочности элемента конструкции рассмотрим стержень, закрепленный между двумя жесткими неподвижными и холодными плитами и подвергающийся циклическому нагреву до температуры T (рис. 6.13,*а*).

Рассмотрим сначала случай, когда температурные напряжения при нагреве не превышают предела текучести материала. Определим напряжение в стержне при нагреве до температуры T.

Для решения задачи отсекаем верхнюю заделку и заменяем ее действие усилием X (рис. 6.13,*б*). Перемещение точки B с учетом температурных деформаций при нагреве

$$w_B = -\frac{Xl}{EF} + \alpha T l = 0, \tag{51}$$

где E — модуль упругости материала; α — коэффициент линейного расширения.

Из соотношения (51) находим температурные напряжения в стержне:

$$\sigma = -E\alpha T. \qquad (52)$$

Температурные напряжения пропорциональны модулю упругости материала и коэффициенту линейного расширения. Такое заключение, вытекающее из формулы (52), справедливо и в других, более общих случаях.

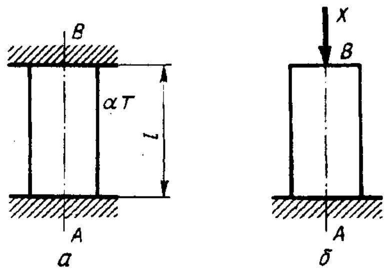


Рис. 6.13. Стержень, закрепленный между двумя жесткими плитами при циклическом нагреве

Изменение температуры во времени показано на рис. 6.14. Напряжение в стержне изменяется от нуля в точке C_1 до $-E\alpha T$ в точке C_2, далее сохраняется на участке C_2C_3 (ползучесть материала не учитывается) и снова обращается в нуль в конце цикла на участке C_4C_5.

Так как наибольшая (по модулю) деформация материала отрицательна, то следует считать

$$\varepsilon_{max} = 0, \quad \varepsilon_{min} = -\sigma/E = -\alpha T.$$

Амплитуда цикла деформации

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{2}(\varepsilon_{max} - \varepsilon_{min}) = \frac{1}{2}\alpha T. \qquad (53)$$

При повторении циклов термических напряжений обычно наиболее опасной является малоцикловая усталость.

Приближенная модель термоциклической прочности элемента конструкции выражается в виде

$$n_ц = \frac{N_p^*}{N_ц} \geq [n_ц], \qquad (54)$$

где $n_ц$ — запас по числу циклов; N_p^* — среднее число циклов до разрушения; $N_ц$ — число циклов за ресурс изделия; $[n_ц]$ — необходимый запас по числу циклов:

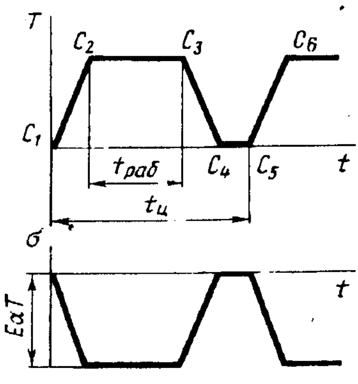


Рис. 6.14. Изменение температуры и температурных напряжений по времени

$$[n_ц] \geq 5. \tag{55}$$

Высокие значения $[n_ц]$ принимаются главным образом для учета рассеяния малоцикловой прочности и сильного влияния параметров нагружения на долговечность.

Величина N_p определяется из уравнения Менсона:

$$\frac{1}{2}\alpha T = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{1-\Psi}\right)^{0,6} N_p^{-0,6} + 1,75\frac{\sigma_в}{E}N_p^{-0,12}. \tag{56}$$

При упругих деформациях первым слагаемым можно пренебречь, полагая

$$\alpha T = \frac{3,5\sigma_в}{E}N_p^{-0,12}.$$

Тогда число циклов до разрушения

$$N_p = \left(\frac{3,5\,\sigma_в}{E\alpha T}\right)^{1/0,12} \geq [n_ц]. \tag{57}$$

Модель термоциклической прочности при повторных нагревах (соотношения (54) и (57)) имеет вид

$$n_ц = \frac{1}{N_ц}\left(\frac{3,5\,\sigma_в}{E\alpha T}\right)^{8,3} \geq [n_ц]. \tag{58}$$

Влияние параметров модели термоциклической прочности на запас по числу циклов. Запас по числу циклов нагревов (формула (58)) зависит от ряда параметров:

$$n_ц = F(N_ц,\ \sigma_в,\ E,\ \alpha,\ T), \tag{59}$$

каждый из которых известен при разработке конструкции с определенной точностью.

Оценим относительное влияние параметров. Рассмотрим сначала вопрос в общем виде, предполагая, что имеется функция параметров x и y следующего вида:

$$F = Cx^m y^n. \tag{60}$$

Тогда по правилу дифференцирования функции многих переменных

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = Cmx^{m-1}y^n dx + Cnx^m y^{n-1}dy.$$

Разделив обе части равенства на F, найдем

$$\frac{dF}{F} = m\frac{dx}{x} + n\frac{dy}{y}. \tag{61}$$

Для малых относительных приращений

$$\frac{\Delta F}{F} = m\frac{\Delta x}{x} + n\frac{\Delta y}{y}. \tag{62}$$

Последнее соотношение имеет четкий физический смысл: 1% отклонения параметра x дает m % отклонения величины F; 1% отклонения параметра y дает n % указанного отклонения.

Применяя этот прием для анализа зависимости (58), находим

$$\frac{\Delta n_{ц}}{n_{ц}} = -\frac{\Delta N_{ц}}{N_{ц}} + 8{,}3\left(\frac{\Delta\sigma_{ц}}{\sigma_{в}} - \frac{\Delta E}{E} - \frac{\Delta(\alpha T)}{\alpha T}\right). \tag{63}$$

Знак минус перед отдельными слагаемыми означает, что приращение параметра вызывает уменьшение запаса числа циклов $n_{ц}$.

С помощью зависимости (63) устанавливаем, например, что погрешность в определении температуры нагрева на 1% вызывает погрешность 8,3% запаса по долговечности.

Учет ползучести материала при определении температурных напряжений. Рассмотрим теперь влияние ползучести на температурные напряжения в стержне с заделанными концевыми сечениями (см. рис. 6.13).

Будем считать в начальный момент времени

$$\sigma(0) = -E\alpha T. \tag{64}$$

Далее следует учесть, что в любой момент времени сумма упругой деформации $\varepsilon_e(t)$, деформации ползучести $\varepsilon_c(t)$ и температурной деформации равна нулю:

$$\varepsilon_e(t) + \varepsilon_c(t) + \alpha T = 0, \tag{65}$$

так как расстояние между заделками и температура не изменяются.

Упругая деформация

$$\varepsilon_e(t) = \frac{\sigma(t)}{E}. \tag{66}$$

Дифференцируя по времени зависимость (65) и учитывая, что температура после нагрева остается постоянной, находим

$$\frac{1}{E}\frac{d\sigma}{dE}+\frac{d\varepsilon_c(t)}{dt}=0. \tag{67}$$

Пренебрегая неустановившейся стадией ползучести, примем для скорости ползучести степенную зависимость (см. разд. 20)

$$\frac{d\varepsilon_c(t)}{dt}=V=B\sigma^n, \tag{68}$$

где B, n — параметры материала.

Теперь из соотношения (67) получаем

$$\frac{1}{E}\frac{d\sigma}{dt}=-B\sigma^n,\ \frac{1}{BE}\frac{d\sigma}{\sigma^n}=-dt. \tag{69}$$

Интегрируя в пределах от 0 до t, находим

$$\frac{1}{(n-1)BE}\left[\sigma^{1-n}(t)-\sigma^{1-n}(0)\right]=t. \tag{70}$$

Учитывая, что в практических случаях $n > 1$, записываем последнее равенство так:

$$\sigma(t)=\frac{1}{\sqrt[n-1]{\dfrac{1}{\sigma^{n-1}(0)}+(n-1)BEt}}, \tag{71}$$

или

$$\sigma(t)=\frac{\sigma(0)}{\sqrt[n-1]{1+at}}, \tag{72}$$

где $a=(n-1)BE\sigma^{n-1}(0)$; значение $\sigma(0)$ определяется равенством (64).

С увеличением времени t абсолютная величина температурного напряжения в результате влияния ползучести падает. Этот процесс называется *релаксацией температурных напряжений*.

Деформация ползучести представляет собой остаточную деформацию. Из уравнения (65) можно получить

$$\varepsilon_c(t)=-\frac{\sigma(t)}{E}-\alpha T.$$

Если в момент времени t снять нагрев, то в стержне возникает остаточное напряжение растяжения

$$\sigma_{ост} = -E\varepsilon_c(t)\,, \qquad (73)$$

так как длина стержня должна оставаться неизменной, а материал стержня в результате ползучести получил остаточную деформацию сжатия $\varepsilon_c(t)$. В силу образования остаточных деформаций ползучести температурные напряжения сжатия в момент нагрева все время падают, а в период останова в стержне появляются растягивающие остаточные напряжения.

21. Стержневые системы (фермы)

В различного рода конструкциях (подмоторных рамах двигателей, пространственных конструкциях крепления корпусов, отсеков и т.п.), в подъемно-транспортных сооружениях (кранах, подъемниках), в строительных конструкциях (мостах, перекрытиях, каркасах и т.д.) часто используются стержневые системы (фермы), в которых стержни работают на растяжение или сжатие. На рис. 6.15,*а—д* представлены неко-

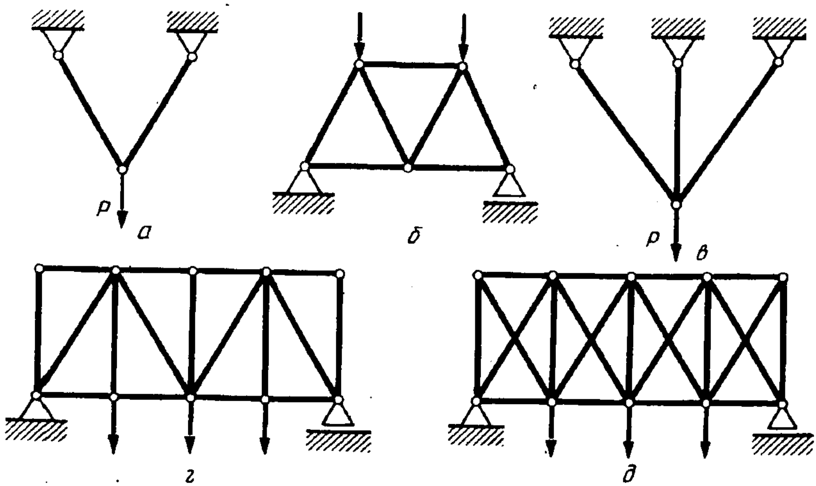


Рис. 6.15. Системы стержней

торые типы стержневых систем. Наклонные стержни фермы часто называют раскосами, подкосами, тягами; вертикальные стержни — стойками; горизонтальные стержни — поперечинами (траверсами).

Фермы бывают *плоскими и пространственными*. В дальнейшем ограничимся рассмотрением плоских ферм.

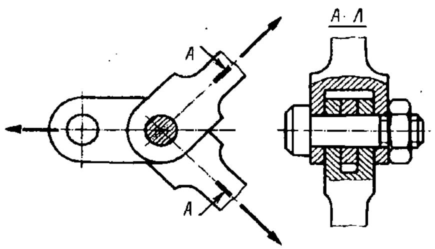


Рис. 6.16. Конструктивная схема шарнирного соединения стержней

Для того чтобы стержни передавали усилия, направленные вдоль оси, соединения стержней должны быть шарнирными, т.е. допускать относительный поворот. На рис. 6.16 приведена конструктивная схема шарнирного соединения. Предполагается, что трение в шарнире пренебрежимо мало. Если стержень имеет два шарнирных конца и поперечная нагрузка на стержень отсутствует, то из условия его равновесия немедленно следует, что усилие на стержень действует вдоль его оси. Эти усилия могут быть растягивающими или сжимающими. При значительных усилиях сжатия возможна потеря устойчивости стержня, но эти вопросы временно исключим из рассмотрения. Внешние силы, действующие на фермы, приложены в узлах. Узлами называются точки соединения стержней. Собственный вес стержней обычно значительно меньше внешних нагрузок и при расчете в большинстве случаев не учитывается. Фермы обычно имеют несколько узлов, опирающихся на другие элементы конструкции или на фундамент.

Опорные узлы (рис. 6.17) предполагаются шарнирными, причем закрепление опорных узлов должно допускать свободное температурное расширение стержней фермы.

Замечание. Узлы фермы часто выполняют с помощью сварки (рис. 6.18). Определение усилий в стержнях в предположении шарнирного соединения узлов является в таком случае приближенным. Для длинных стержней погрешность приближения невелика.

Статически определимые фермы. В статически определимых фермах усилия в стержнях полностью определяются условиями равновесия. На рис. 6.15 такими фермами являются фермы *а*, *б*, *г*; фермы *в*, *д* на рис. 6.15 статически неопределимые. В дальнейшем будет указано правило, позволяющее сразу определить статическую определимость или неопределимость фермы.

Расчет статически определимых ферм проводится методом сечений, сущность которого поясним несколькими примерами.

Пример 1. Двухраскосная ферма (рис. 6.19) с одинаковыми стержнями. Проводим сечение, вырезающее узел A, заменяем внутренние силы усилиями N в стержнях и рассматриваем условие равновесия узла A:

$$2N\cos\alpha = P, \tag{74}$$

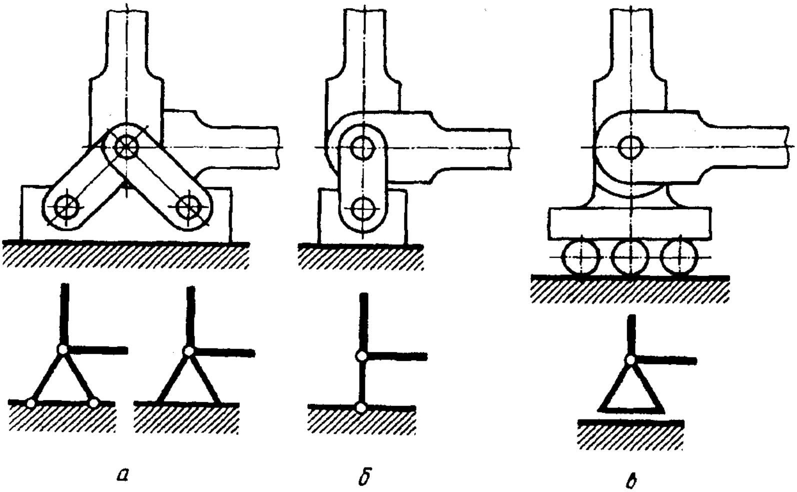


Рис. 6.17. Схемы опорных узлов фермы и их условные обозначения:
а — опорный узел, не допускающий смещений; *б*, *в* — опорный узел, допускающий смещение в одном (горизонтальном) направлении

откуда усилие в стержнях

$$N = \frac{P}{2\cos\alpha}. \qquad (75)$$

Заметим, что при $\alpha \to \pi/2$ $N \to \infty$. Знак плюс в формуле (75) означает, что предварительно выбранное направление усилий оказалось правильным.

В некоторых случаях может понадобиться значение перемещения точки A. Удлинение стержня составит

$$u_1 = u_2 = u = \frac{Nl}{EF} = \frac{Pl}{2\cos\alpha EF}, \qquad (76)$$

где EF — жесткость сечения стержня на растяжение.

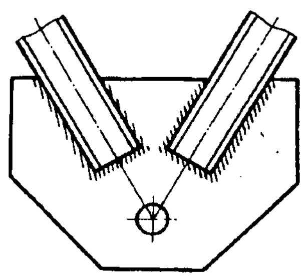


Рис. 6.18. Схема сварного узла

Положение точки A после нагружения можно найти, если провести две дуги радиусом $l+u$, приняв в качестве центров опорные узлы. Так как деформации малы, то достаточно отложить отрезки на оси стержня

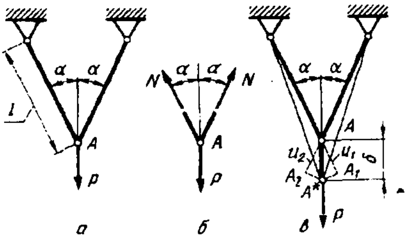


Рис. 6.19. Определение усилий в двухраскосной ферме:
а — расчетная схема; *б* — равновесие узла *А*; *в* — определение перемещений точки *А*

и восстановить перпендикуляры из точек A_1 и A_2 (см. рис. 6.19). Это правило можно сформулировать так: удлинение (или укорочение) стержня равно проекции перемещения конца стержня на первоначальное направление оси. В общем случае следует составить разность проекций перемещений концов стержня (если оба конца подвижны). Таким образом, перемещение точки *А* равно

$$\delta = \frac{u}{\cos\alpha} = \frac{Pl}{2\cos^2\alpha\, EF}.$$

Замечание. На рис.6.20 показана двухраскосная ферма, работающая в «распор». Усилия в стержнях очень велики, если угол α близок к $\pi/2$.

Избегайте в конструкциях стержней, работающих в «распор»!

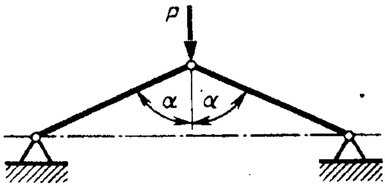


Рис. 6.20. Ферма, работающая в распор

Пример 2. Треугольная ферма (рис. 6.21). Расчет начнем с определения реакций опор.

В точке *В* действует реакция опоры R_B, в точке *С* — реактивные усилия *Н* и R_C. По отношению к ферме реактивные усилия следует рассматривать как внешние нагрузки.

Проектируя все силы на горизонтальное и вертикальное направления, находим

$$R_C + R_B + P\sin\theta = 0\,, \quad H - P\cos\theta = 0\,. \tag{77}$$

Из условия равенства нулю момента относительно какой-либо точки, например точки *С*, получаем

$$R_B a + Ph\cos\theta + Pa_1\sin\theta = 0\,. \tag{78}$$

Из приведенных общих уравнений равновесия фермы (77) и (78) следует

$$R_B = -P\left(\frac{h}{a}\cos\theta + \frac{a_1}{a}\sin\theta\right), \; R_C = P\left[\frac{h}{a}\cos\theta + \left(\frac{a_1}{a} - 1\right)\sin\theta\right]P\,.$$

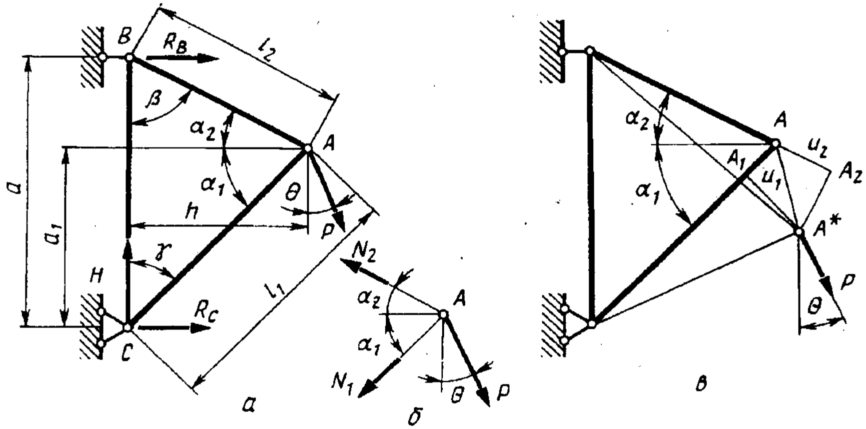


Рис. 6.21. Треугольная ферма:
а — расчетная схема; *б* — равновесие узла *A*; *в* — определение перемещений точки *A*

Методом сечения выделим узел *A* и рассмотрим условия его равновесия. Приравнивая нулю сумму проекций сил на горизонтальное и вертикальное направления, приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} -N_1 \cos\alpha_1 - N_2 \cos\alpha_2 + P \sin\theta = 0, \\ -N_1 \sin\alpha_1 - N_2 \sin\alpha_2 - P \cos\theta = 0. \end{aligned} \tag{79}$$

Из последних соотношений находим

$$N_1 = -P\frac{\cos(\alpha_2 + \theta)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}, \quad N_2 = -P\frac{\cos(\alpha_1 - \theta)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}. \tag{80}$$

Соотношения (80) можно получить и проще, спроектировав усилия, приложенные к *A*, на направления, перпендикулярные N_1 и N_2. Проекции полного смещения точки *A* на направления стержней (удлинения стержней)

$$u_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 F_1}, \quad u_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 F_2}, \tag{81}$$

где l_i и $E_i F_i$ — длины и жесткости стержней.

Восстановив перпендикуляры из точек A_1 и A_2, найдем на их пересечении точку A^*, в которой окажется узел *A* после приложения нагрузки.

На рис. 6.22 дана картина перемещения точки А. Проекция полного перемещения δ на ось первого стержня показана с учетом его действительного знака по равенству (81). Отрезки $A_1A^* = V_1$ и $A_2A^* = V_2$ легко определяются, если спроектировать отрезок $AA^* = \delta$ на направления стержней:

$$u_1 = u_2\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + V_2\sin(\alpha_1 + \alpha_2),$$
$$u_2 = u_2\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + V_1\sin(\alpha_1 + \alpha_2). \qquad (82)$$

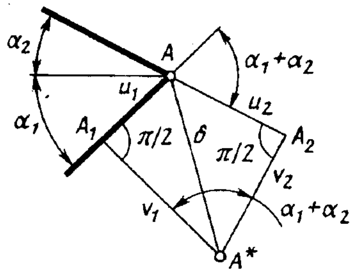


Рис. 6.22. Перемещения точки A

Так как значения u_1 и u_2 известны, то становятся известными значения V_1 и V_2 и величина

$$\delta = \sqrt{u_1^2 + V_1^2} = \sqrt{u_2^2 + V_2^2}. \qquad (83)$$

Пример 3. Ферма составлена из равнобедренных треугольников (рис. 6.23). При большом числе узлов и стержней полезно установить общее правило для их обозначения. Будем обозначать узлы A_1, A_2 и т.д. в порядке обхода контура по часовой стрелке.

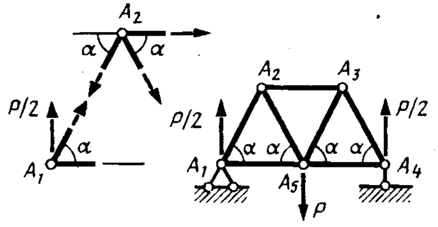


Рис. 6.23. Ферма из равнобедренных треугольников

Обозначения усилий в стержнях составим из номеров узлов, которые они соединяют: $N_{1,2}$, $N_{2,5}\ldots$, номера узлов разделяются запятой, так как возможны многоразрядные номера.

Расчет начинается с определения усилий в опорных узлах. Они составляют $P/2$. Далее удобно рассмотреть условия равновесия узла, к которому подходят не более двух стержней (например, узла A_1).

Из условия равновесия A_1 (неизвестные усилия считаем направленными на растяжение стержней) получаем

$$N_{1,2}\sin\alpha + \frac{1}{2}P = 0, \quad N_{1,2}\cos\alpha + N_{1,5} = 0,$$

откуда

$$N_{1,2} = -\frac{1}{2\sin\alpha}P, \quad N_{1,5} = \frac{\cos\alpha}{2\sin\alpha}P. \tag{84}$$

Условия равновесия узла A_2 дают

$$-N_{1,2}\sin\alpha - N_{2,5}\sin\alpha = 0, \quad (N_{2,5} - N_{1,2})\cos\alpha + N_{2,3} = 0.$$

Учитывая соотношения (84), получаем

$$N_{2,5} = \frac{1}{2\sin\alpha}P, \quad N_{2,3} = -\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}P.$$

Окончательные результаты имеют вид

$$\begin{aligned} N_{1,2} &= N_{3,4} = -\frac{1}{2\sin\alpha}P, \\ N_{2,3} &= -\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}P, \\ N_{4,5} &= N_{1,5} = \frac{\cos\alpha}{2\sin\alpha}P, \\ N_{2,5} &= N_{3,5} = \frac{1}{2\sin\alpha}P. \end{aligned} \tag{85}$$

Объясните, почему стержень 2,3 оказался сжатым.

Общие замечания о статически определимых фермах и сопоставление их со статически неопределимыми. В статически определимых системах стержней (фермах) усилие, приходящееся на стержень, не зависит от размеров его поперечного сечения и физических свойств материала. Следовательно, усилия будут одинаковыми при упругих и пластических деформациях материала, при его ползучести и т.п.

При разрушении одного из стержней разрушается сразу вся статически определимая система, которая превращается после этого в механизм. Вместе с тем в таких фермах получаются вполне определенные значения усилий в стержнях; отсутствуют начальные (монтажные) и температурные напряжения.

В статически неопределимых системах размеры сечения и свойства материала стержней влияют не только на деформации и перемещения, но и на усилия в стержнях. В таких системах имеется *резервирование*: при выходе из строя одного из стержней нагрузка передается на другие.

Распределение усилий в стержнях статически неопределимой фермы зависит от целого ряда факторов (точности изготовления, начальных и температурных напряжений и т.д.). Оптимальный выбор силовой схемы системы стержней зависит от особенностей конструкции и условий работы. В машиностроении чаще используются статически определимые системы стержней.

Определение статической определимости или неопределимости ферм. В простых случаях удается сразу сделать вывод о характере системы. Например, для системы на рис. 6.15,*а* ясна ее статическая определимость, для системы на рис. 6.15,*в* — неопределимость. Для ферм на рис. 6.15,*б*,*г* и д решение подобного вопроса требует специального анализа.

Остановимся сначала на условиях закрепления.

Если реакции (усилия) в опорах фермы от внешних сил могут быть определены из условий равновесия, то закрепление называется *статически определимым*. Так как опоры являются шарнирными, то они могут воспринимать только силы и не могут воспринимать моменты (отсутствуют «плечи» для уравновешивания).

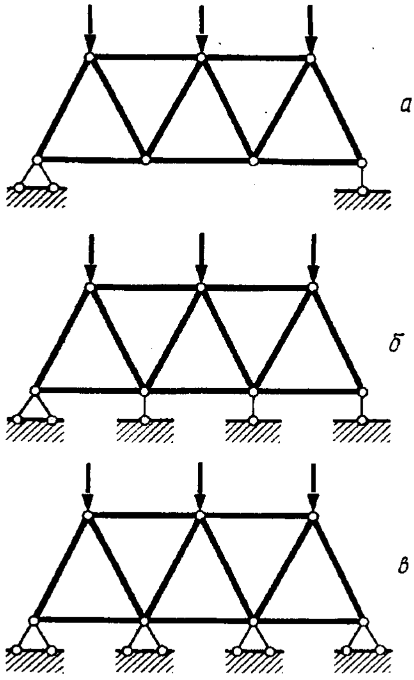


Рис. 6.24. Статическая определимость закрепления фермы

В зависимости от структуры опора уравновешивает силу произвольного направления (см. рис. 6.17,*а*) или только одного направления (рис. 6.17,*б*). В первом случае опора обладает двумя связями (двумя «стерженьками»), во втором — одной связью (одним «стерженьком»).

Как известно, плоская система сил может быть уравновешена силами в двух точках плоскости. Одна из точек должна иметь возможность воспринять силу произвольного направления, вторая — силу, создающую момент относительно другой точки. Следовательно, статически определимое закрепление фермы при плоской системе сил осуществляется двумя опорами, одна из которых воспринимает силу произвольного направления.

На рис. 6.24,*а* показана ферма со статически определимыми опорами. Она имеет три опорные связи (три опорных стержня). На рис. 6.24,*б* в опорных узлах имеются две дополнительные связи (система два раза статически неопределима по опорным узлам). Ферма на рис. 6.24,*в* по условиям закрепления пять раз статически неопределима (имеет пять «лишних» опорных стержней).

Замечание. Статическая определимость закрепления определяется числом связей в опорах. Для плоской фермы оно должно быть равно трем, так как имеются три условия равновесия плоской системы сил (равенство нулю двух проекций равнодействующей внешней системы сил и равенство нулю момента относительно произвольной точки). Однако имеется один исключительный случай, когда при трех связях (в двух точках) уравнения равновесия не могут быть удовлетворены.Такое закрепление называется мгновенно изменяемым. Оно характеризуется тем, что в точке закрепления с одной связью направление связи проходит через другую точку закрепления, и потому опоры не могут воспринимать момент от внешних сил. Такая конструкция неработоспособна! Закрепление называется мгновенно изменяемым, так как после некоторого довольно значительного поворота включится в работу имеющаяся связь и движение фермы остановится.

Установление степени статической неопределимости ферм. В основе конструкции всякой фермы лежит ячейка в виде треугольника как геометрически неизменяемой конфигурации с шарнирными узлами. Каждый новый узел в статически определимой ферме присоединяется двумя стержнями.

При статически определимом закреплении число стержней c и число узлов n в статически определимой ферме связаны соотношением

$$c = 2n - 3. \tag{86}$$

В число узлов n входят и опорные узлы. Например, ферма на рис. 6.23 имеет пять узлов и семь стержней и условие статической определимости (86) соблюдается: $7 = 2 \cdot 5 - 3$. При $c > 2n - 3$ система шарнирно связанных стержней статически неопределима, при $c < 2n - 3$ система превращается в механизм (имеет свободное движение).

Для фермы со статически неопределимым закреплением опорных узлов условие статической определимости всей конструкции

$$c = 2n - 3 - r, \tag{87}$$

где r — число статической неопределимости или число «лишних» связей в опорном закреплении. Например, для системы стержней на рис. 6.15,*а* r =1, r =2, n =3. Условие (87) удовлетворяется:

$$2 = 2 \cdot 3 - 3 - 1.$$

Будем условно называть степенью статической неопределимости системы стержней число «лишних» связей (стержней) в системе.

Обозначая степень статической неопределимости R, получаем с помощью равенства (87)

$$R = c - 2n + 3 + r. \tag{88}$$

Для системы, показанной на рис. 6.15,*в*,

$$R = 3 - 2 \cdot 4 + 3 + 3 = 1. \tag{89}$$

Степень статической неопределимости R показывает, что удаление R стержней из системы делает ее статически определимой.

22. Статически неопределимые стержневые системы

Всякое деформируемое тело при определении в нем напряжений и деформаций представляет собой в общем случае статически неопределимую систему, так как уравнений статики недостаточно для решения задачи.

Статически неопределимые стержневые системы являются простейшими моделями общих задач механики деформируемого тела. Они позволяют выявить закономерности поведения элементов конструкции в процессе работы материала в упругой области при возникновении пластичности и ползучести, температурных напряжений и т.д. Однако изучение статически неопределимых стержневых систем полезно не только по методическим соображениям — такие системы встречаются в различного рода машинах и сооружениях.

Особенности поведения статически неопределимых систем разберем на примере трехстержневой системы.

Трехстержневая система. Работа в упругой области. Модель надежности по допускаемым напряжениям. Система показана на рис. 6.25. Усилие P воспринимается тремя стрежнями, причем крайние стержни одинаковые. Требуется определить усилия и напряжения в стержнях при работе материала в упругой области и построить модель прочностной надежности системы. Статические уравнения задачи представляют собой условие равновесия узла A (рис. 6.25,*б*):

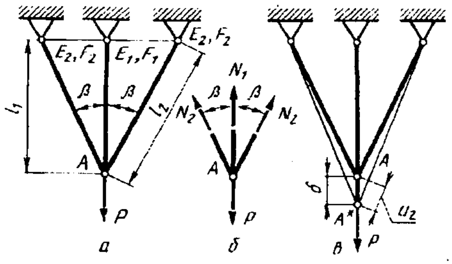


Рис. 6.25. Трехстержневая система: *а* — расчетная схема; *б* — равновесие узла A; *в* — определение перемещений точки A

$$N_1 + 2N_2 \cos\beta = P, \tag{90}$$

где N_1, N_2 — усилия в стержнях.

Геометрические уравнения связывают перемещение точки A и удлинение стержней:

$$u_1 = \delta, \tag{91}$$

$$u_2 = \delta \cos\beta, \tag{92}$$

где δ — перемещение точки A в результате действия усилия P.

Из последних уравнений вытекает равенство

$$u_2 = u_1 \cos\beta, \tag{93}$$

которое представляет собой условие совместности перемещений стержней в узле A.

Деформации в стержнях связаны соотношением

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \cos^2\beta, \tag{94}$$

так как

$$l_1 = l_2 \cos\beta. \tag{95}$$

Физические уравнения выражают работу материала стержней в упругой области (см. гл. 5):

$$\varepsilon_1 = \sigma_1/E_1, \tag{96}$$

$$\varepsilon_2 = \sigma_2/E_2, \tag{97}$$

где ε_i, σ_i, E_i ($i = 1, 2$) — деформация, напряжение, модуль упругости.

Так как

$$\varepsilon_1 = u_1/l_1, \ \varepsilon_2 = u_2/l_2, \ \sigma_1 = N_1/F_1, \ \sigma_2 = N_2/F_2, \tag{98}$$

находим перемещения концов стержней:

$$u_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 F_1}, \tag{99}$$

$$u_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 F_2}. \tag{100}$$

Соотношения (90)—(92), (94) и (98) образуют систему линейных уравнений, которая легко решается относительно перемещений u_1 и u_2 или усилий (напряжений).

При решении задачи в «перемещениях» усилия N_1 и N_2 в уравнении равновесия выражают через удлинения стержней. Из уравнений (99) и (100) получаем

$$N_1 = \frac{E_1F_1}{l_1} u_1, \tag{101}$$

$$N_2 = \frac{E_2F_2}{l_2} u_2. \tag{102}$$

Внося значения N_1 и N_2 в соотношение (90) и учитывая зависимость (93),получаем

$$\frac{E_1F_1}{l_1} u_1 + 2\cos\beta \frac{E_2F_2}{l_2} u_1 \cos\beta = P. \tag{103}$$

Из последнего соотношения находим

$$u_1 = \frac{P}{E_1F_1/l_1 + 2\cos^2\beta\,(E_2F_2/l_2)}. \tag{104}$$

Внося значение u_1 в равенство (101) и учитывая (95), находим

$$N_1 = \frac{P}{1 + 2\cos^3\beta\,(E_2F_2/E_1F_1)} = \frac{P}{1 + 2\lambda\cos^3\beta}. \tag{105}$$

Из условия (90) следует, что

$$N_2 = \left(P - N_1\right)\frac{1}{2\cos\beta} = \frac{\lambda\cos^2\beta\,P}{1 + 2\lambda\cos^3\beta}. \tag{106}$$

В последних соотношениях коэффициент

$$\lambda = \frac{E_2F_2}{E_1F_1} \tag{107}$$

представляет отношение жесткостей сечений стержня. Удлинение центрального стержня

$$u_1 = \delta = \frac{Pl_1}{E_1F}\,\frac{1}{1 + 2\lambda\cos^3\beta}. \tag{108}$$

Если модули упругости материала и площади поперечных сечений стержней одинаковы, то $\lambda=1$.

Для решения задачи «в напряжениях или усилиях» используем уравнение совместности (93), куда вносятся значения u_1 и u_2 из соотношений упругости:

$$\frac{N_2 l_2}{E_2 F_2} = \frac{N_1 l_1}{E_1 F_1} \cos\beta$$

или

$$N_2 = \lambda N_1 \cos^2\beta . \qquad (109)$$

Используя уравнение равновесия (90), получим соотношения (105) и (106). В рассматриваемом случае решение задачи в усилиях проще, чем в перемещениях.

Модель надежности по допускаемым напряжениям исходит из условия

$$\sigma_{max} \le [\,\sigma\,] = \frac{\sigma_в}{n_в}, \qquad (110)$$

где σ_{max} — наибольшее напряжение растяжения; $[\,\sigma\,]$ — допускаемое напряжение; $\sigma_в$ — предел прочности материала; $n_в$ — запас прочности по пределу прочности.

Так как материалы стержней разные, то допускаемое значение для внешней нагрузки P определяется по условиям прочности отдельных стержней.

Из условия прочности для центрального стержня

$$\sigma_{max} = \sigma_1 = N_1/F_1 \le \sigma_{в_1}/n_в , \qquad (111)$$

где $\sigma_{в_1}$ — предел прочности материала центрального стержня.

Для боковых стержней условие прочности имеет вид

$$\sigma_{max} = \sigma_2 = N_2/F_2 \le \sigma_{в_2}/n_в , \qquad (112)$$

где $\sigma_{в_2}$ — предел прочности материала боковых стержней.

Модель надежности системы будет содержать два условия:

$$P \le \frac{\sigma_{в_1} F_1}{n_в}\left(1 + 2\lambda\cos^2\beta \right), \qquad (113)$$

$$P \le \frac{\sigma_{в_2} F_2}{n_в} \frac{(1 + 2\lambda\cos^3\beta)}{\lambda\cos^2\beta} . \qquad (114)$$

Неравенства (113) и (114) вытекают из (111) и (112), если учесть соотношения (105) и (106).

По условиям надежности ограничение усилия P определяется наиболее слабым звеном системы, т.е. минимальным значением P.

Если площади сечений и материалы стержней одинаковы ($F_1 = F_2 = F$, $E_1 = E_2 = E$), надежность лимитируется центральным стержнем:

$$P \le \frac{\sigma_в F}{n_в}\left(1 + 2\cos^3\beta\right). \quad (115)$$

В некоторых случаях запас прочности определяют относительно предела текучести $\sigma_т$. Тогда модель надежности приобретает следующий вид:

$$P \le \frac{\sigma_{т_1} F_1}{n_т}\left(1 + 2\lambda\cos^3\beta\right), \quad (116)$$

$$P \le \frac{\sigma_{т_2} F_2}{n_т}\frac{(1 + 2\lambda\cos^3\beta)}{\lambda\cos^2\beta}, \quad (117)$$

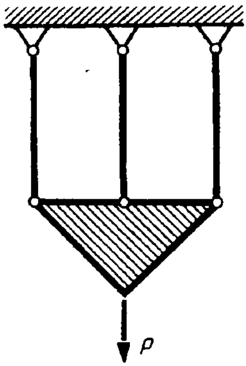


Рис. 6.26. Трехстержневая система при β=0

где $n_т$ — запас прочности по пределу текучести.

Анализ работы конструкции проведем для случая стержней с одинаковой площадью поперечного сечения и выполненных из одного материала ($\lambda = 1$). Из формулы (109) сразу следует

$$N_2 = N_1\cos^2\beta.$$

Центральный стержень под действием усилия P (рис. 6.26)загружен существенно больше боковых. Например, при β=45°

$$N_2 = 0{,}5N_1.$$

Это объясняется тем, что удлинение центрального стержня больше удлинений боковых ($u_1 > u_2$), а деформация еще больше, так как $l_2 > l_1$. При $\beta = \pi/4$ центральный стержень воспринимает больше половины всей нагрузки:

$$N_1 = \frac{P}{1 + 2\cos^3\pi/4} = \frac{P}{1 + \sqrt{2}/2} = 0{,}59P.$$

С точки зрения оптимального проектирования целесообразно принять β=0 (см. рис. 6.26), и тогда $N_1 = N_2 = N_3 = P/3$. Такое решение является оптимальным, если на систему не могут действовать случайные (нерасчетные) усилия, имеющие составляющие, перпендикулярные оси стержней.

Замечание. При создании инженерных конструкций необходимо учесть все возможные внешние силы не только в рабочих условиях, но и при транспортировке, монтаже и т.п.

Здравый смысл, жизненный опыт крайне необходимы при проектировании!

Работа статически неопределимой системы после возникновения пластических деформаций. Продолжим рассмотрение трехстержневой системы (см. рис. 6.25). Напряжение в центральном стержне в упругой области

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = \frac{P}{F_1}\frac{1}{1+2\lambda\cos^3\beta}. \qquad (118)$$

В боковых стержнях

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{F_2} = \frac{P}{F_2}\frac{\lambda\cos^2\beta}{1+2\lambda\cos^3\beta}. \qquad (119)$$

Примем для материалов стержней схематизированные диаграммы деформирования (рис. 6.27).

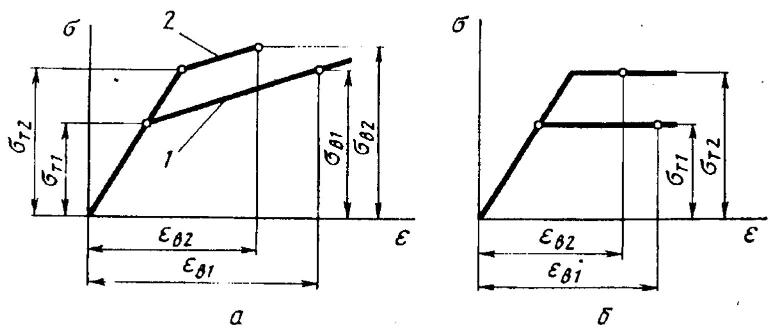


Рис. 6.27. Схематизированные диаграммы деформирования материалов стержня: *а* — диаграмма с учетом упрочнения; *б* — диаграмма без учета упрочнения

Если при возрастании нагрузки Р напряжение σ_1 превысит предел текучести $\sigma_{\text{т}_1}$, то в центральном стержне возникнут пластические деформации; то же самое можно сказать о боковых стержнях, если $\sigma_2 > \sigma_{\text{т}_2}$.

Рассмотрим приближенное решение, когда упрочнение материала не учитывается (рис. 6.27,*б*). Такое решение пригодно для материалов, у которых значения пределов текучести и прочности близки.Оно применяется и в тех случаях, когда возникновение больших пластических деформаций недопустимо, а материалы имеют незначительное упрочнение на начальном участке пластического деформирования (типа «площадок» текучести). Предельное значение усилия в центральном стержне

$$N_{1\text{т}} = \sigma_{\text{т}1}F_1 = P_{1\text{т}}\frac{1}{1 + 2\lambda\cos^3\beta}, \qquad (120)$$

где $P_{1\text{т}}$ — значение внешней нагрузки, при которой возникает пластичность в центральном стержне (предполагается $\sigma_{\text{т}1} \leq \sigma_{\text{т}2}$).

При дальнейшем увеличении нагрузки (при $P > P_{1\text{т}}$) усилие в стержне *1* остается неизменным, а усилия в боковых стержнях *2* будут возрастать до предельного значения

$$N_{2\text{т}} = \sigma_{\text{т}2}F_2\,. \qquad (121)$$

Внешнее усилие P при возникновении пластических деформаций во всех стержнях достигает для принятых кривых деформирования (см. рис. 6.27,*б*) предельного значения $P = P_{\text{разр}}$.

Так как в предельном состоянии усилия в стержнях известны, то из условия равновесия имеем

$$P = N_{1\text{т}} + 2n_{2\text{т}}\cos\beta = \sigma_{\text{т}1}F_2 + 2\sigma_{\text{т}2}F_2\cos\beta\,. \qquad (122)$$

Построим зависимость перемещения точки приложения силы (точки A, см. рис. 6.25) от величины P.

На первом этапе деформирования ($P \leq P_{1\text{т}}$) перемещение определяется соотношениями упругости (формула (104)). Максимальное смещение на первом этапе — точка C_1 на рис. 6.28,*а*.

На втором этапе ($P_{1\text{т}} < P \leq P_{\text{разр}}$) наибольшее смещение будет в точке C_2, когда наступает текучесть в боковых стержнях:

$$\delta_2 = \frac{u_2}{\cos\beta} = \frac{\varepsilon_2 l_2}{\cos\beta} = \frac{\sigma_{\text{т}2} l_2}{\cos\beta E_2}\,.$$

В этот момент исчерпывается несущая способность системы. Даже при небольшом повышении нагрузки сверх $P_{\text{разр}}$ перемещение точки A резко возрастает ($\delta \to \infty$).

В точке C_1 деформация центрального стержня (см. рис. 6.28,*б*)

$$\varepsilon_{1(1)} = \frac{\sigma_{\mathrm{т}_1}}{E_1}, \quad \varepsilon_{2(1)} = \varepsilon_{1(1)} \cos^2\beta .$$

В точке C_2

$$\varepsilon_{2(2)} = \frac{\sigma_{\mathrm{т}_2}}{E_2}, \quad \varepsilon_{1(2)} = \frac{\varepsilon_{2(2)}}{\cos^2\beta} .$$

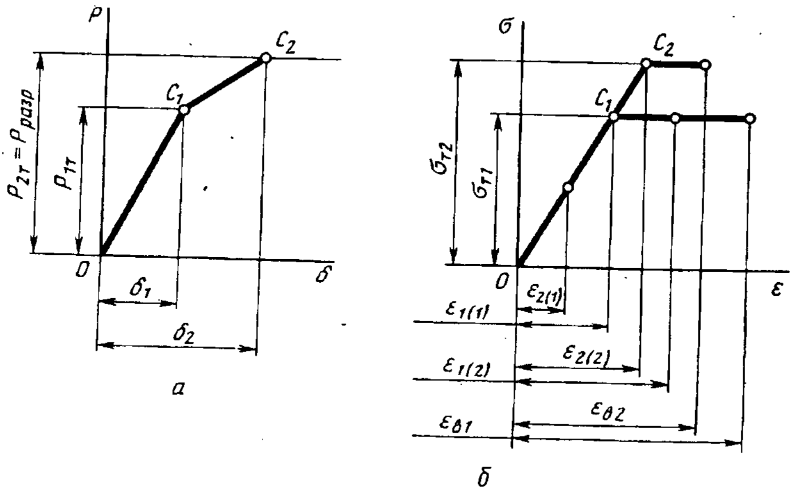


Рис. 6.28. Зависимости усилие — перемещение (*а*) и напряжение — деформация (*б*) для трехстержневой системы

Какой из стержней разрушится раньше при возрастании нагрузки? Это зависит от свойств материалов стержней.

Соотношение между деформациями стержней (94) справедливо в любой момент нагружения.

Если (рис. 6.28,*б*)

$$\frac{\varepsilon_{\mathrm{в}_1}}{\varepsilon_{\mathrm{в}_2}} < \frac{1}{\cos^2\beta},$$

то первым разрушится центральный стержень.

Модель надежности по несущей способности. Несущая способность трехстержневой системы (см. рис. 6.25) исчерпывается, когда нагрузка достигает величины $P_{\text{разр}}$.

Модель надежности по предельной нагрузке имеет вид

$$P \le \frac{P_{разр}}{n_н}, \tag{123}$$

где $n_н$ — запас прочности по несущей способности.

Для принятых кривых деформирования (без упрочнения) допускаемая нагрузка

$$P \le \frac{1}{n_н}\left(\sigma_{т_1}F_1 + 2\cos\beta\,\sigma_{т_2}F_2\right). \tag{124}$$

Сопоставление двух моделей надежности. Сопоставим допускаемую нагрузку в моделях надежности по напряжениям и по несущей способности.

Для этого сравним значение P из уравнений (116), (117) и (124) при одинаковом запасе прочности ($n_т = n_н$). Предполагая, как и раньше, $E_1 = E_2$, получаем из условий (116) и (117) при $\lambda = F_2/F_1$

$$P \le \frac{1}{n_т}\left(\sigma_{т_1}F_1 + \alpha\cos^3\beta\,\sigma_{т_1}F_2\right), \tag{125}$$

$$P \le \frac{1}{n_т\cos^2\beta}\left(\sigma_{т_2}F_1 + 2\cos^3\beta\,\sigma_{т_2}F_2\right). \tag{126}$$

При $\sigma_{т1} \le \sigma_{т2}$ определяющим будет условие (125).

Сопоставляя значения P (по формулам (124) и (125)), при равенстве пределов текучести материалов стержней ($\sigma_{т1} = \sigma_{т2}$) и равенстве запасов прочности, получим

$$\frac{P_{нес.сп}}{P_{доп.напр.}} = \frac{F_1 + 2\cos\beta F_2}{F_1 + 2\cos^3\beta F_2} \ge 1 .$$

Допускаемое усилие по несущей способности $P_{нес.сп}$ больше, чем усилие по допускаемым напряжениям $P_{доп.напр}$. Это понятно, так как в модели надежности по допускаемым напряжениям считается опасной нагрузка P, при которой в каком-либо одном элементе системы возникает напряжение, равное пределу текучести. В модели надежности по несущей способности допускаемое усилие определяется при условии, что пластичность охватывает все элементы системы.

Замечание. Не следует думать, что во всех случаях надо применять модель по несущей способности: она эффективна для оценки прочности при действии однократной статической нагрузки.

При циклических нагрузках разрушение наступает в наиболее напряженном элементе конструкции задолго до того, как исчерпывается несущая способность всей конструкции.

Для расчета инженер должен выбирать подходящую модель надежности!

Расчет в упругопластической стадии методом переменных параметров упругости. Метод переменных параметров упругости (см. разд. 19) является общим методом определения напряжений и деформаций при работе конструкции в упругопластической стадии. Покажем применение метода для рассматриваемой трехстержневой системы (см. рис. 6.25) и построим зависимость усилие — перемещение при произвольных кривых деформирования (рис. 6.29,*а*).

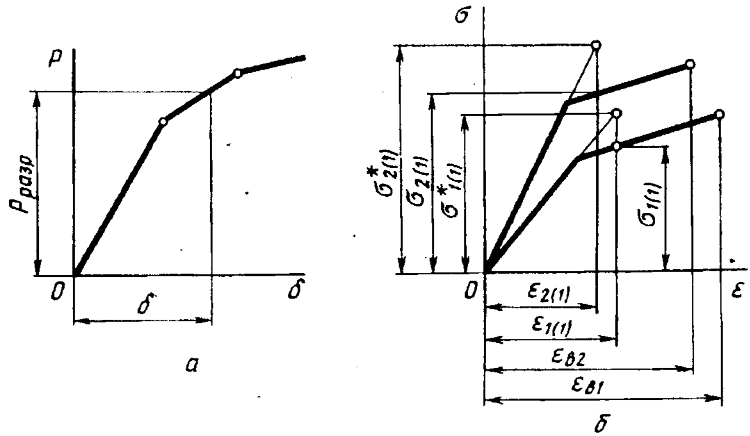


Рис. 6.29. Зависимости усилие — перемещение (*а*) и напряжение — деформация (*б*) для трехстержневой системы. Решение методом переменных параметров упругости

Пусть задано действующее усилие P и требуется найти напряжения в стержнях и перемещение точки приложения силы. Расчет ведется методом последовательных приближений. В первом приближении материал считается упругим. Из равенств (118) и (119) находим напряжения первого приближения:

$$\sigma^*_{1(1)} = \frac{P}{F_1} \frac{1}{1 + 2\lambda_{(1)} \cos^3\beta}, \tag{127}$$

$$\sigma^*_{2(1)} = \frac{P}{F_2} \frac{\lambda_{(1)} \cos^2\beta}{1 + 2\lambda_{(1)} \cos^3\beta}, \tag{128}$$

где

$$\lambda_{(1)} = \frac{E_2 F_2}{E_1 F_1}.$$

На кривых деформирования напряжениям $\sigma^*_{1(1)}$ и $\sigma^*_{2(1)}$ соответствуют деформации $\varepsilon_{1(1)}$ и $\varepsilon_{2(1)}$ (рис .6.29,*б*) и напряжения $\sigma_{1(1)}$ и $\sigma_{2(1)}$. Во втором приближении рассматривается снова упругая конструкция, имеющая параметры упругости

$$E_1 = E_{1\,c(1)} = \frac{\sigma_{1(1)}}{\varepsilon_{1(1)}}, \quad E_2 = E_{2\,c(1)} = \frac{\sigma_{2(1)}}{\varepsilon_{2(1)}}.$$

Напряжения в стержнях во втором приближении

$$\sigma^*_{1(2)} = \frac{P}{F_1} \frac{1}{1 + 2\lambda_2 \cos^3\beta}, \tag{129}$$

$$\sigma^*_{2(2)} = \frac{P}{F_2} \frac{\lambda_2 \cos^2\beta}{1 + 2\lambda_2 \cos^3\beta}, \tag{130}$$

где

$$\lambda_{(2)} = \frac{E_{2\,c(1)} F_2}{E_{1\,c(1)} F_1}.$$

Процесс продолжается до n-го приближения, когда $\sigma^*_{1(n)} \approx \sigma_{1(n)}$ и $\sigma^*_{2(n)} \approx \sigma_{2(n)}$. Обычно это достигается после трех-четырех приближений. После определения $\varepsilon_1 \approx \varepsilon_{1(n)}$ находят $\delta = \varepsilon_1 l_1$ и получается точка (P, δ) (см. рис. 6.29,*а*).

Глава 7
КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЕЙ

Элементы конструкции, как уже указывалось, часто схематизируются в виде стержней. Такая модель формы используется и для расчета валов, передающих крутящий момент. Примерами являются валы, приводящие в движение воздушные винты или лопасти вертолета; валы редукторов, станков и т.п.

Работа стержней на кручение встречается во многих других элементах конструкций.

23. Кручение круглых валов

Деформация и напряжения при кручении круглого вала. Экспериментально установлено, что при кручении круглого вала (рис. 7.1) приложенным на его торце крутящим моментом поперечные сечения остаются плоскими (рис. 7.2). Можно считать, что поперечные сечения как жесткие круглые диски поворачиваются относительно оси вала на угол $\varphi(z)$.

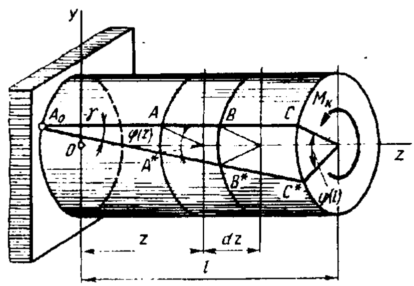


Рис. 7.1. Кручение круглого вала

Образующие, расположенные на цилиндрической поверхности радусом r, поворачиваются на угол γ, постоянный по длине цилиндра (вала). Для малых углов

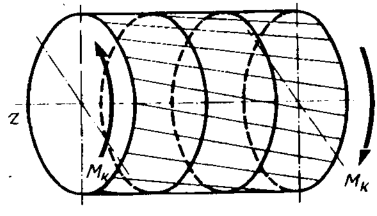


Рис. 7.2. Кручение модели вала с предварительно нанесенной сеткой

$$\gamma(r) = \operatorname{tg}\gamma = \frac{CC^*}{A_0C} = \frac{\varphi(l)r}{l} = \vartheta r, \qquad (1)$$

где $\vartheta = \varphi(l)/l$ — угол поворота на единицу длины вала, рад/м.

Угол поворота в сечении z

$$\varphi(z) = z\varphi(l)/l = \vartheta z. \tag{2}$$

Из последнего соотношения можно установить, что

$$\vartheta = \frac{d\varphi}{dz}. \tag{3}$$

Рассмотрим перемещения и деформации в произвольной точке поперечного сечения A, лежащей на расстоянии r от оси вала (рис. 7.3). Перемещение точки A_1 равно $A_1A_1^*$ и направлено перпендикулярно радиусу. В кольцевом слое толщиной dr возникает деформация сдвига (рис. 7.4)

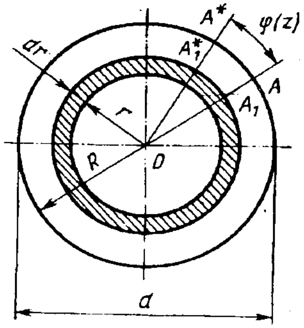


Рис. 7.3. Перемещения точек вала при кручении

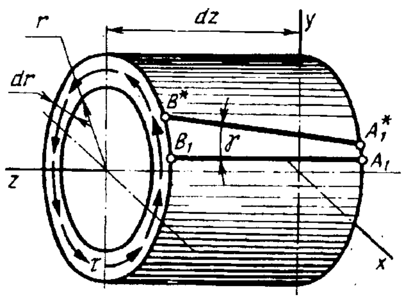


Рис. 7.4. Деформация сдвига в кольцевом слое

$$\gamma(r) = \frac{d\varphi(z)r}{dz} = \vartheta r. \tag{4}$$

По закону упругости углу сдвига соответствует касательное напряжение (см. разд. 18)

$$\tau = G\gamma,$$

где G — модуль сдвига; $G = \dfrac{E}{2(1+\mu)}$.

Учитывая (4), находим важную зависимость:

$$\tau(r) = G\gamma(r) = \vartheta G r. \tag{5}$$

Касательное напряжение $\tau(r)$ направлено по касательной к окружности радиусом r. Касательное напряжение пропорционально радиусу (рис.7.5).

Из общих условий равновесия следует, что касательные усилия $\tau(r)\,dF$ должны создавать крутящий момент

$$M_{\text{к}} = \int\limits_F \tau r\,dF = \vartheta G \int\limits_F r^2 dF = \vartheta G J_p\,, \tag{6}$$

где $J_p = \int\limits_F r^2 dF$ — полярный момент инерции сечения вала, который легко вычислить, приняв

$$dF = 2\pi r dr\,.$$

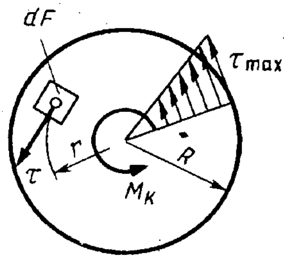


Рис. 7.5. Распределение касательных напряжений при кручении

Тогда

$$J_p = \int\limits_0^R 2\pi r^3 dr = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}\,. \tag{7}$$

Из соотношения (6) получаем формулу угла закрутки, отнесенного к длине вала:

$$\vartheta = \frac{M_{\text{к}}}{GJ_p}\,. \tag{8}$$

Величина GJ_p называется *жесткостью* (сечения) *вала на кручение*. Угол поворота сечения вала

$$\varphi(z) = \vartheta z = \frac{M_{\text{к}} z}{GJ_p}\,.$$

Взаимный поворот сечений на участке вала длиной l

$$\varphi(l) = \frac{M_{\text{к}} l}{GJ_p}\,. \tag{9}$$

Внося значение ϑ в формулу (5), находим важную расчетную зависимость:

$$\tau(r) = \frac{M_{\text{к}}}{J_p} r\,. \tag{10}$$

Наибольшее касательное напряжение получается на внешнем радиусе:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{к}}}{J_p} \cdot \frac{d}{2} = \frac{M_{\text{к}}}{\pi d^3/16}\,. \tag{11}$$

Величина

$$W_к = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0{,}2d^3 \tag{12}$$

называется *моментом сопротивления кручению*.

Таким образом,

$$\tau_{max} = M_к / W_к. \tag{13}$$

Анализ решения методами теории упругости. Полученное решение о распределении напряжений и деформаций при кручении вала основывалось на экспериментальных наблюдениях. Попробуем подвергнуть его анализу с позиции общих уравнений механики деформируемого тела.

В соответствии с принятой моделью деформации вала перемещение точки $A_1(x, y)$, равное $A_1A_1^*$ (рис. 7.6), имеет составляющие по осям

$$\begin{aligned} u &= -r\varphi(z)\sin\theta = -r\varphi(z)\frac{y}{r} = -\varphi(z)y, \\ v &= r\varphi(z)\cos\theta = r\varphi(z)\frac{x}{r} = \varphi(z)x. \end{aligned} \tag{14}$$

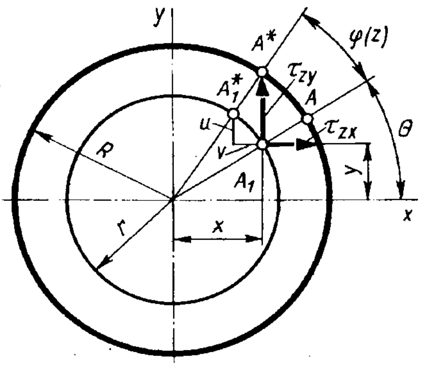


Рис. 7.6. Кручение круглого вала. Расчет методом теории упругости

Перемещение вдоль оси z отсутствует ($w=0$). Составляющие касательного напряжения равны

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= G\gamma_{zx} = -G\frac{d\varphi}{dz}y = -G\vartheta y, \\ \tau_{zy} &= G\gamma_{zy} = G\frac{d\varphi}{dz}x = G\vartheta x. \end{aligned} \tag{15}$$

Полное касательное напряжение

$$\tau = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} = G\vartheta r,$$

что совпадает с равенством (5).

Можно показать, что при $M_к = \text{const}$ удовлетворяются уравнения равновесия и краевые условия на боковых поверхностях вала. Принятую модель деформации круглого вала следует признать точной.

Замечания. 1. Предполагается, что в концевых сечениях вала внешний крутящий момент реализуется в виде линейно распределенных касательных напряжений (см.рис.7.5). В действительности момент обычно прикладывается по-другому (например с помощью шлицевого соединения (рис.7.7)), и поэтому в соответствии с принципом Сен-Венана решение будет справедливым для распределения напряжений и деформаций на некотором удалении от торцов.

Более строго следовало бы сказать, что решение является точным для неконцевых областей вала.

2. Граница между понятиями точного и приближенного решения в применении к практическим задачам часто носит условный характер. Например, можно получить точное решение для весьма приближенной модели (расчетной схемы) или приближенное решение для более точной модели. Что лучше для практических целей? Однозначного ответа на этот вопрос не существует.

На основании практического опыта вырабатываются модели различных уровней, используемые на разных этапах проектирования (предварительный выбор размеров на стадии технического предложения, составление более точных моделей на этапах эскизного и рабочего проектирования).

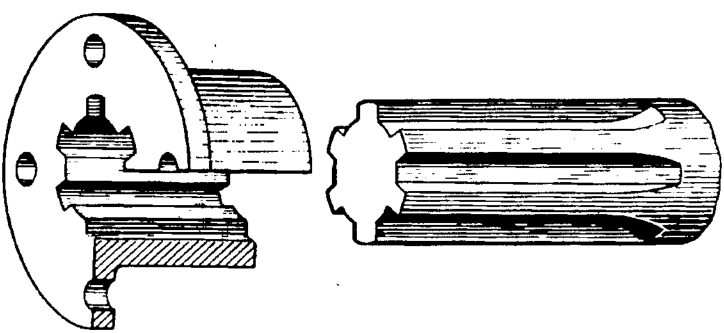


Рис. 7.7. Шлицевое соединение

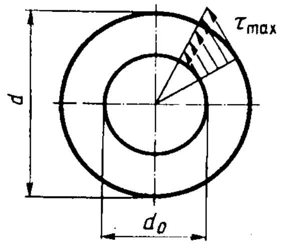


Рис. 7.8. Распределение касательных напряжений при кручении полого вала

Кручение полого вала. Для передачи крутящего момента часто используют полые круглые валы (трубы), так как это позволяет уменьшить массу конструкции. Кинематическая картина деформации остается такой же, как при кручении сплошного круглого вала. Распределение касательных напряжений определяется соотношением (10). Полярный момент инерции сечения будет таким:

$$J_p = \frac{\pi}{32}\left(d^4 - d_0^4 \right),$$

где d_0 — внутренний диаметр вала (рис.7.8).

Наибольшее касательное напряжение

$$\tau_{max} = \frac{M_к}{J_p}\frac{d}{2} = \frac{M_к}{\frac{\pi}{16}\left(d^3 - \frac{1}{d} d_0^4 \right)}. \tag{16}$$

Кручение вала с переменными параметрами упругости по радиусу. Такая модель описывает кручение вала с покрытиями из другого материала, биметаллического вала и т.п. Модель используется для расчета упругопластической деформации вала. Кинематическая картина деформации остается прежней, что можно показать с помощью точного решения. Касательное напряжение в соответствии с равенством (5) составит

$$\tau(r) = \vartheta G(r) r, \tag{17}$$

где $G(r)$ — модуль сдвига материала в слое на расстоянии r.

Из условия равновесия (6) имеем

$$M_к = \int_F \tau r dF = \vartheta \int_F G(r) r^2 dF. \tag{18}$$

Относительный угол закручивания

$$\vartheta = \frac{M_к}{\int_F G(r) r^2 dF}. \tag{19}$$

Теперь для касательного напряжения получаем из соотношений (17) и (19)

$$\tau(r) = \frac{G(r)\,M_{\text{к}}}{\int\limits_F G(r)\,r^2 dF}\,r\,. \qquad (20)$$

При $G(r) = \text{const} = G$ равенства (20) и (10) совпадают.

Замечание. Структура формулы (20) представляет интерес. Кольцевой слой воспринимает касательное напряжение пропорционально модулю сдвига (модулю упругости) слоя. Это означает, что слой из непрочного материала может работать на поверхности высокопрочного вала, если слой имеет малый модуль упругости.

Кручение вала переменного сечения при переменных по длине крутящих моментах. Полученные ранее расчетные зависимости установлены для круглого вала постоянного сечения при действии постоянного по длине крутящего момента. В этом случае решение удовлетворяет уравнениям теории упругости. Если крутящий момент изменяется по длине или диаметр вала различен на разных участках, то в инженерных расчетах используется приближенное решение, так как точного решения для общего случая не существует, а в частных случаях решения весьма громоздкие.

Касательное напряжение в сечении вала определяется по формуле

$$\tau = \frac{M_{\text{к}}(z)}{J_p(z)}\,r\,. \qquad (21)$$

Угол закрутки на единицу длины вала

$$\frac{d\varphi(z)}{dz} = \frac{M_{\text{к}}(z)}{GJ_p(z)}\,. \qquad (22)$$

Таким образом, основные расчетные зависимости (21) и (22) используются для определения параметров рассматриваемого сечения вала.

Замечание. Приближенный метод, несколько расширяющий область применения расчетных зависимостей за пределы принятых допущений, является типичным для инженерных расчетов прикладных моделей надежности. Уравнения (21) и (22) строго справедливы только для вала постоянного сечения при действии крутящего момента по концам вала.

В приближенном решении предполагается, что каждый малый участок вала ведет себя так, как будто весь вал имеет такое же сечение и закручен тем же моментом. Влияние соседних участков признается второстепенным.

Справедливость приближенных методов обосновывается практическим опытом и экспериментальными исследованиями. Часто весьма убедительным оказывается сопоставление с примерами более точных решений, полученных численными или аналитическими методами.

Кручение вала в упругопластической стадии. Если напряжения при кручении

$$\tau > \tau_{т}, \tag{23}$$

где $\tau_т$ — предел текучести при сдвиге (кручении), то в материале вала возникнут пластические деформации.

На рис.7.9 показаны кривые деформирования при кручении (зависимости $\tau(\gamma)$). Они могут быть получены при кручении тонкостенных труб, для которых можно считать известным значение касательных напряжений при заданной величине крутящего момента:

$$\tau = \frac{M_к}{2\pi R_0^2 \delta}, \tag{24}$$

где R_0 и δ — средний радиус и толщина трубы.

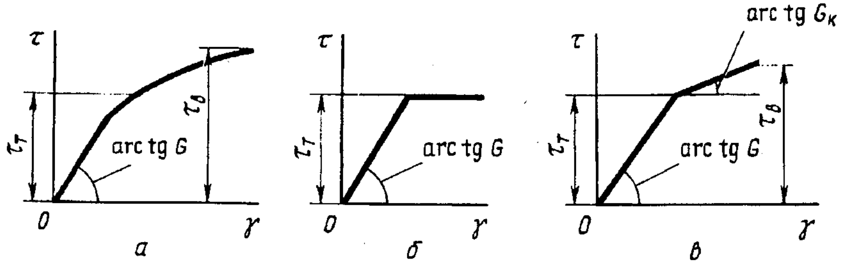


Рис. 7.9. Кривые деформирования при кручении ($\tau_т$ —предел текучести на срез, $\tau_в$ — предел прочности на срез):
а — экспериментальная кривая деформирования; *б* — кривая деформирования без упрочнения; *в* — кривая деформирования с линейным упрочнением

Приближенно кривые деформирования при кручении могут быть найдены из обычных кривых деформирования, если положить

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_0, \quad \gamma = \sqrt{3}\,\varepsilon_0,$$

где σ_0, ε_0 — напряжение и деформация при растяжении образцов.

Часто для упрощенных оценок принимается кривая деформирования без упрочнения (рис.7.9,*б*).

Рассмотрим кручение сплошного вала при наличии пластических деформаций. При крутящем моменте

$$M^0_{\text{кт}} = \tau_{\text{т}} \frac{\pi d^3}{16} \tag{25}$$

впервые появляется пластическая деформация на наружной поверхности вала.

Эксперименты показывают, что при возникновении пластичности кинематическая картина деформаций вала остается неизменной — сечения остаются плоскими, радиальные направления остаются радиальными и после деформации.

Рассмотрим упрощенную диаграмму деформирования без упрочнения. При $M_{\text{к}} > M^0_{\text{кт}}$ в сечении возникают две зоны (рис. 7.10).

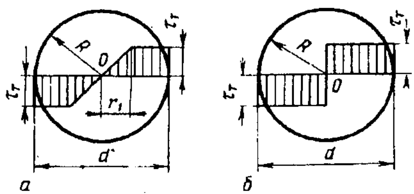


Рис. 7.10. Распределение касательных напряжений при кручении вала (без упрочнения материала):
а — упругопластическая деформация;
б — распределение напряжений при действии предельного момента

При $r < r_1$ (зона упругих деформаций)

$$\tau = \tau_{\text{т}} \frac{r}{r_1}. \tag{26}$$

При $r \geq r_1$ (зона пластических деформаций).

$$\tau = \tau_{\text{т}}. \tag{27}$$

Из условия равновесия имеем

$$M_{\text{к}} = \int_F \tau r dF = 2\pi \int_0^{r_1} \tau_{\text{т}} \frac{r^3}{r_1} dr + 2\pi \int_{r_1}^{R} \tau_{\text{т}} r^2 dr$$

или

$$M_{\text{к}} = \tau_{\text{т}} 2\pi \left(\frac{1}{3} R^3 - \frac{1}{12} r_1^3 \right).$$

Из последнего соотношения получим

$$r_1 = \sqrt[3]{4R^3 - \frac{6M_{\text{к}}}{\pi \tau_{\text{т}}}}. \tag{28}$$

Зависимость (28) показывает, что при возрастании крутящего момента зона упругих деформаций в центре вала уменьшается.

При $r_1=0$ наступает предельное состояние — крутящий момент достигает наибольшего (предельного) значения:

$$M_{\text{кт}} = \frac{2}{3}\pi R^3\tau_{\text{т}} = \tau_{\text{т}}\frac{\pi d^3}{12}. \tag{29}$$

Сопоставляя равенства (25) и (29), получаем

$$M_{\text{кт}} = \frac{4}{3}M^0_{\text{кт}}. \tag{30}$$

Развитие пластических деформаций увеличивает приблизительно на 30% сопротивление вала. Угол закрутки вала на единицу длины (см. формулу (4))

$$\vartheta = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{\gamma}{r}.$$

Применяя это равенство при $r = r_1$ ($\tau = \tau_{\text{т}}$), находим

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{\tau_{\text{т}}}{Gr_1} = \frac{\tau_{\text{т}}}{G}\frac{1}{\sqrt[3]{4R^3 - \dfrac{6M_{\text{к}}}{\pi\tau_{\text{т}}}}}. \tag{31}$$

При приближении $M_{\text{к}}$ и $M_{\text{кт}}$ величина $d\varphi / dz \to \infty$ и деформация вала резко возрастает.

Более полное описание свойств материала дает схематизация в виде кривой деформирования с линейным упрочнением (см.рис.7.9,*в*). Распределение касательных напряжений при действии предельного момента показано на рис.7.11. Имеем

$$\tau = \tau_{\text{т}} + \frac{r}{R}(\tau_{\text{в}} - \tau_{\text{т}}), \tag{32}$$

где $\tau_{\text{в}}$ — предел прочности на срез (сдвиг).

Из условия равновесия находим крутящий момент, разрушающий вал:

$$M_{\text{к разр}} = \int_F r\tau dF = 2\pi\int_0^R\left[\tau_{\text{т}} + \frac{r}{R}(\tau_{\text{в}} - \tau_{\text{т}})\right]r^2dr.$$

После интегрирования получаем

$$M_{\text{к разр}} = \frac{\pi R^3}{2}\tau_{\text{в}} + \frac{\pi R^3}{6}\tau_{\text{т}} = \frac{2\pi}{3}R^3\tau_{\text{т}} + \frac{\pi R^3}{2}(\tau_{\text{в}} - \tau_{\text{т}}). \tag{33}$$

Из сравнения равенств (29) и (33) устанавливаем влияние учета упрочнения материала. Например, если

$$\tau_в = \frac{4}{3}\tau_т,$$

то

$$M_{к\,разр} = 1{,}25 M_{кт}.$$

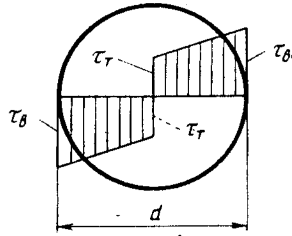


Рис. 7.11. Распределение касательных напряжений при кручении вала из материала с линейным упрочнением. (предельный момент)

В общем случае для расчета применяется метод переменных параметров упругости (рис. 7.12). В первом приближении рассматривается вал из упругого материала.

Из соотношения (21) находим

$$\tau^*_{(1)} = \frac{M_к}{J_p} r,$$

затем

$$\gamma_{(1)} = \frac{\tau^*_{(1)}}{G}, \quad G_1 = \frac{\tau_{(1)}}{\gamma_{(1)}}.$$

Далее по равенству (20) находим второе приближение:

$$\tau^*_{(2)} = \frac{G_{(1)}(r) M_к}{\int_F G_{(1)}(r) r^2 dF}$$

и, следовательно,

$$\gamma_{(2)} = \frac{\tau^*_{(2)}}{G_{(1)}}, \quad G_{(2)} = \frac{\tau_{(2)}}{\gamma_{(2)}}$$

и т.д. Обычно достаточную точность дает второе-третье приближение. В рассматриваемом случае можно найти замкнутое решение, если учесть линейное распределение деформации сдвига по радиусу. Однако в более сложных случаях (например, при действии

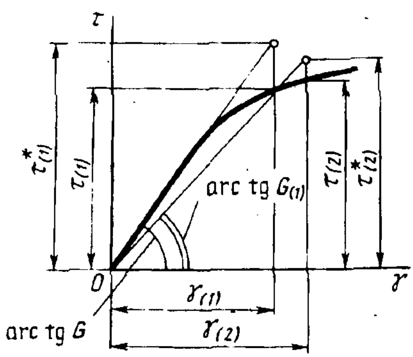


Рис. 7.12. Применение метода переменных параметров упругости

крутящего момента и осевой силы) приходится использовать метод переменных параметров упругости.

Кручение вала в стадии установившейся ползучести. В этой стадии скорость возрастания деформации сдвига зависит только от касательного напряжения. Применяя уравнение (124) из гл.5 для случая кручения ($\tau_{xy} = \tau$, $\gamma_{xy} = \gamma$, остальные компоненты напряжений и деформаций равны нулю), находим

$$V_{xy} = \frac{d\gamma}{dt} = 3B\sigma_i^{n-1}\tau, \tag{34}$$

где B и n — параметры экспериментальных кривых ползучести (гл.5, формула (121)).

Так как

$$\sigma_i = \sqrt{3}\,\tau,$$

то получаем

$$\frac{d\gamma}{dt} = 3^{(n+1)/2} B\tau^n = B_\text{к}\tau^n. \tag{35}$$

Кинематическая картина деформации остается такой же, как в упругой стадии, и поэтому

$$\gamma = \vartheta r. \tag{36}$$

Из последних соотношений находим

$$\tau = \left(\frac{d\vartheta}{dt}\,\frac{1}{B_\text{к}}\right)^{1/n} r^{1/n}. \tag{37}$$

При ползучести касательные напряжения кручения распределяются по закону $r^{1/n}$.

Из условия равновесия

$$M_\text{к} = \int_F \tau r\,dF = 2\pi\int_0^R \tau r^2 dr, \tag{38}$$

учитывая соотношение (37), находим

$$M_\text{к} = 2\pi\left(\frac{d\vartheta}{dt}\,\frac{1}{B_\text{к}}\right)^{1/n} \frac{1}{3+1/n} R^{3+1/n}. \tag{39}$$

Теперь по равенству (37) получаем

$$\tau = \left(3 + \frac{1}{n}\right)\frac{M_к}{2\pi R^{3+1/n}}\, r^{1/n}. \tag{40}$$

При $n = 1$ касательные напряжения распределяются по линейному закону и формулы (40) и (10) совпадают.

Замечание. Интересно отметить, что распределение касательных напряжений кручения (40) при установившейся ползучести совпадает с распределением напряжений в упругопластической стадии, если принять уравнение кривой деформирования в виде

$$\gamma = B_к \tau^n .$$

Действительно, в силу равенства (36) получаем

$$\tau = (\vartheta / B_к)^{1/n} r^{1/n}$$

и далее отношение (39), в котором вместо $d\vartheta/dt$ стоит ϑ, и, наконец, формулу (40). При одинаковом распределении напряжений в стадии ползучести и пластичности есть существенная разница в поведении вала: при ползучести все время увеличивается угол закрутки вала, тогда как при пластичности он не изменяется во времени.

Деформации или скорости деформаций часто играют одну и ту же роль в механике твердого деформируемого тела — они отражают геометрическую картину деформации.

Модели прочностной надежности вала при кручении. При построении модели прочностной надежности (разд.2) следует прежде всего рассмотреть характер напряженного состояния, условия работы вала в составе всего изделия, особенности нагружения и возможных разрушений.

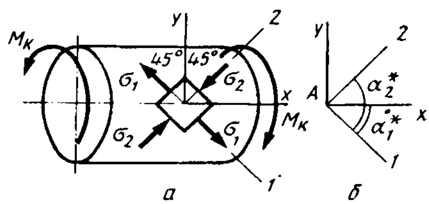


Рис. 7.13. Площадки главных напряжений при кручении вала:
а — схема напряженного состояния;
б — главные направления

На площадках, лежащих в плоскости поперечного сечения скручиваемого вала, действуют только касательные напряжения. Рассмотрим точку A, находящуюся на поверхности вала, и расположим оси x, y так, как показано на рис.7.13,*б*. Напряженное состояние характеризуется следующими значениями компонентов:

$$\sigma_x = 0,\ \sigma_y = 0,\ \tau_{xy} = -\tau,\ \sigma_z = 0,\ \tau_{yz} = 0,\ \tau_{zx} = 0 .$$

Напряженное состояние в каждой точке вала является плоским, так как в площадках, нормаль к которым совпадает с осью r (радиальное направление), напряжения отсутствуют. Главные напряжения вычислим по формулам (26) и (27) гл.2:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}} = \tau, \\ \sigma_2 &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}} = -\tau. \end{aligned} \tag{41}$$

Далее устанавливаем

$$\operatorname{tg} 2\alpha^* = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \infty, \ 2\alpha^* = \frac{\pi}{2}, \ \alpha^* = \frac{\pi}{4}.$$

Площадки главных напряжений направлены под углом 45° к оси вала. По формулам (35) и (36) из гл.2 находим

$$\operatorname{tg} \alpha_1^* = \frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xy}} = \frac{\tau}{-\tau} = -1, \ \operatorname{tg} \alpha_2^* = \frac{\sigma_2 - \sigma_x}{\tau_{xy}} = \frac{-\tau}{-\tau} = 1.$$

Растягивающее главное напряжение σ_1 направлено вдоль винтовой линии; при взаимном повороте поперечных сечений такие волокна растягиваются (направление α_1^*). Для волокон, идущих по ортогональным винтовым линиям (направление α_2^*), при действии момента $M_к$ (см. рис. 7.13,*а*) происходит укорочение.

Замечание. Анализ напряженного состояния очень важен, например, для правильного конструирования деталей из композиционных материалов. Если труба из материала, усиленного волокнами, должна работать на кручение, то волокна следует располагать по винтовым линиям, составляющим угол 45° с осью вала.

При построении модели статической прочности исходят из условия прочности для пластичного материала

$$\tau_{max} \le \tau_в / n_в, \tag{42}$$

где $n_в$ — запас по напряжениям, $\tau_в$ — предел прочности материала на срез (сдвиг).

Используя равенство (11), находим допускаемое значение крутящего момента:

$$M_к \le \frac{\tau_в}{n_в} \frac{\pi}{16} d^3. \tag{43}$$

Модель статической прочности по несущей способности использует условие

$$M_к \le \frac{1}{n_{н.с}} M_{к.разр}, \tag{44}$$

где $n_{н.с}$ — коэффициент запаса по несущей способности.

С учетом равенства (33) получаем допускаемую величину крутящего момента

$$M_к \le \frac{1}{n_{н.с}}\left(\frac{\pi d^3}{12}\tau_т + \frac{\pi d^3}{16}(\tau_в - \tau_т)\right) = \frac{1}{n_{н.с}}\left(\tau_в\frac{\pi d^3}{16} + \tau_т\frac{\pi d^3}{48}\right). \tag{45}$$

При одинаковых значениях $n_в$ и $n_{н.с}$ условие (45) дает значение $M_к$ на 15—30% большее. Однако это увеличение может быть использовано только при действии однократной статической нагрузки, например для оценки величины крутящего момента, разрушающего вал.

Если вал выполнен из хрупкого материала (удлинение при разрыве меньше 3%), то условие статической прочности следует принять, исходя из величины наибольшего растягивающего напряжения:

$$\sigma_{1\,max} < \sigma_в / n_в, \tag{46}$$

где $\sigma_в$ — предел прочности материала на растяжение.

Так как

$$\sigma_{1\,max} = \tau_{max}, \tag{47}$$

то допускаемое значение крутящего момента

$$M_к \le \frac{\sigma_в}{n_в}\frac{\pi d^3}{16}. \tag{48}$$

Значение $n_в$ для хрупких материалов обычно принимается в 1,5—2 раза большим, чем для пластичных материалов. Значение $M_к$ по условию (47) одновременно характеризует и несущую способность вала, так как у хрупких материалов перераспределения напряжений не происходит — они работают в упругой области практически до разрушения. При построении моделей статической прочности вопросы концентрации напряжений не являются главными, так как у пластичных материалов происходит выравнивание напряжений.

Для моделей прочностной надежности, связанных с усталостью (вал при действии переменных напряжений), прочность в местах концентрации напряжений обычно является определяющей.

В некоторых случаях при построении моделей прочностной надежности используют ограничения по углу поворота (на единицу длины вала)

$$\vartheta = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_к}{GJ_p} \le [\,\vartheta\,] \tag{49}$$

или по полному углу поворота

$$\varphi = \frac{M_к l}{GJ_p} \le [\,\varphi\,]. \tag{50}$$

Наконец, дополнительные ограничения могут быть связаны с динамическими явлениями (например, с необходимостью устранения крутильных колебаний). Эти вопросы частично рассматриваются в дальнейшем. Перейдем к изучению работы на кручение стержней некруглого сечения.

24. Общая задача о кручении стержней и концентрации напряжений

Перемещения и деформации. Рассмотрим кручение упругого стержня постоянного сечения под действием крутящего момента. Сечение стержня показано на рис. 7.14.

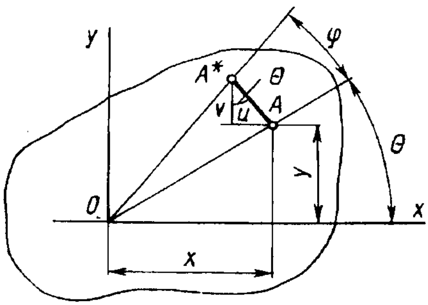


Рис. 7.14. Перемещения точек при кручении стержня

Допустим сначала, что общая картина перемещений остается такой же, как при кручении круглого вала: сечение стержня как жесткая пластинка поворачивается вокруг оси стержня. Тогда точка сечения A на расстоянии r от оси переходит в точку A^*, а сечение поворачивается на угол

$$\varphi = \vartheta z, \tag{51}$$

где ϑ — угол поворота на единицу длины — постоянная величина. Составляющие перемещения по осям x и y:

$$u = -AA^* \sin\theta = -r\varphi\sin\theta = -r\varphi\frac{y}{r} = -\vartheta zy, \tag{52}$$

$$V = AA^* \cos\theta = r\varphi \cos\theta = r\varphi \frac{x}{r} = \vartheta z x . \qquad (53)$$

Далее допустим, что перемещение вдоль оси z (оси стержня)

$$w = w(x, y) \qquad (54)$$

не зависит от координаты z.

При кручении круглого вала $w = 0$; в общей задаче кручения существует перемещение, перпендикулярное плоскости поперечного сечения w, которое называется депланацией.

С помощью формул Коши (разд.9) находим следующие значения деформаций:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 0 , \quad \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y} = 0 , \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 ,$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 , \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y} + \vartheta x , \qquad (55)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} - \vartheta y .$$

Напряжения, условия равновесия. Так как линейные деформации равны нулю, то по уравнениям упругости (разд. 18) обращаются в нуль и нормальные напряжения:

$$\sigma_x = 0 , \quad \sigma_y = 0 , \quad \sigma_z = 0 . \qquad (56)$$

Касательное напряжение τ_{xy} также равно нулю. Отличными от нуля будут только касательные напряжения, действующие в плоскости поперечного сечения:

$$\tau_{zx} = G\gamma_{zx} = G\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \vartheta y \right), \qquad (57)$$

$$\tau_{zy} = G\gamma_{zy} = G\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \vartheta x \right), \qquad (58)$$

где G — модуль сдвига.

Перейдем к рассмотрению уравнений равновесия (разд. 7).

Первые два уравнения удовлетворяются тождественно (массовые силы считаем отсутствующими), а из третьего уравнения вытекает

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 . \qquad (59)$$

Учитывая соотношения (57) и (58), получаем

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0. \qquad (60)$$

Из последнего уравнения следует важный результат: для того чтобы удовлетворились уравнения равновесия, осевое смещение не может быть произвольной функцией — оно должно удовлетворять уравнению Лапласа (уравнению (60)).

Краевые условия. Рассмотрим теперь краевые условия для напряжений. Нормаль к боковой поверхности (рис. 7.15) образует с осями x, y, z углы соответственно α, $\pi/2-\alpha$, $\pi/2$. Направляющие косинусы указанных углов

$$l=\cos\alpha,\quad m=\sin\alpha,\qquad n=0.$$

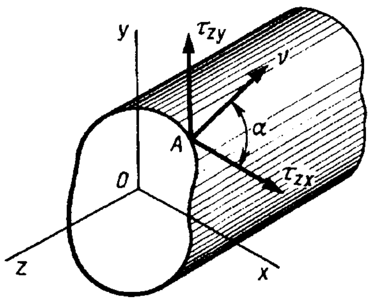


Рис. 7.15. Краевые условия на боковой поверхности стержня

Считая боковую поверхность стержня свободной от распределенных усилий, получим из краевых условий (формула (103) гл.2)

$$\tau_{zx}l+\tau_{zy}m=0 \qquad (61)$$

или

$$\tau_{zx}\cos\alpha+\tau_{zy}\sin\alpha=0. \qquad (62)$$

Величины τ_{zx} и τ_{zy} представляют собой составляющие касательного напряжения в точке поперечного сечения по осям x и y. В точке A, лежащей на контуре поперечного сечения, составляющая полного касательного напряжения по направлению нормали

$$\tau_\nu=\tau_{zx}\cos\alpha+\tau_{zy}\sin\alpha=0. \qquad (63)$$

Краевое условие на боковой поверхности (условие (62)) означает, что в точках контура касательное напряжение направлено вдоль касательной к контуру, составляющая по нормали равна нулю. Соотношение (63) можно было написать сразу из условия парности касательных напряжений, так как на боковой поверхности касательные напряжения отсутствуют. Из равенства (62) возникают краевые условия для $w(x,y)$. Внося в (62) соотношения (57) и (58), получаем

$$G\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\vartheta y\right)\cos\alpha+G\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\vartheta x\right)\sin\alpha=0 \qquad (64)$$

или

$$\frac{\partial w}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial w}{\partial y}\sin\alpha=\vartheta\,(y\cos\alpha-x\sin\alpha)\,. \tag{65}$$

Рассмотрим теперь краевые условия на торцах стержня, где приложен крутящий момент. Точное распределение внешних касательных условий неизвестно — оно зависит от конструктивных особенностей передачи крутящего момента. Но при любом способе задания внешних распределенных усилий на торцах стержня они должны быть статически эквивалентными крутящему моменту $M_к$.

Краевые условия на торцевых поверхностях будем выполнять не в отдельных точках, а для всего сечения в целом:

$$\int_F (\tau_{zy}x-\tau_{zx}y)\,dF=M_к\,. \tag{66}$$

Последнее условие можно также рассматривать как условие равновесия участка стержня (рис. 7.16).

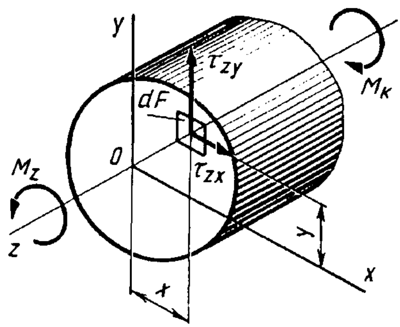


Рис. 7.16. Краевые условия на торцевой поверхности стержня

Краевые условия, которые выполняются интегрально для главного вектора или главного момента внешних сил, называются *краевыми условиями Сен-Венана,* по имени знаменитого французского ученого и инженера, впервые решившего задачи о кручении и изгибе стержней.

Отказ от строгого, пунктуального выполнения краевых условий во всех точках поверхности тела, использование интегрального краевого условия составили новый этап развития механики деформируемого тела. Существенно, что искажения напряженного состояния, вызванные различными способами передачи крутящего момента, при условии (66) характерны только для областей вблизи торцов стержня (принцип Сен-Венана).

Математическая постановка задачи. Функция кручения. Математическая постановка задачи означает сведение задачи к разрешающей системе уравнений и условиям однозначного их решения.

Полученные ранее основные уравнения достаточны для математической постановки задачи, но часто оказывается целесообразным преобразовать уравнения, перейти к другим переменным и т.п. Для решения задачи введем *функцию кручения* $\Phi(x,y)$, положив осевое смещение

$$w(x,y) = \vartheta\Phi(x,y)\,; \tag{67}$$

тогда из уравнения (60) следует, что

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0\,. \tag{68}$$

Для точек контура сечения находим из условия (65)

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\sin\alpha = y\cos\alpha - x\sin\alpha\,. \tag{69}$$

Отметим, что для всех контурных точек можно считать известными их координаты и значение угла нормали контура с осью x (угла α).

По физическому смыслу функция кручения численно равна осевому смещению при $\vartheta = 1$.

Краевое условие (69) можно записать в виде

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = y\cos\alpha - x\sin\alpha\,, \tag{70}$$

где $\partial\Phi/\partial\nu$ — производная функции $\Phi(x,y)$ вдоль направления нормали.

Из общего правила определения производной вдоль направления имеем

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{dx}{d\nu} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{dy}{d\nu}\,.$$

Так как (рис. 7.17)

$$\frac{dx}{d\nu} = \cos\alpha\,, \quad \frac{dy}{d\nu} = \sin\alpha\,,$$

то получаем условия (69) или (70). Если функция $\Phi(x,y)$ определена, то

$$\tau_{zx} = G\vartheta\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} - y\right), \tag{71}$$

$$\tau_{zy} = G\vartheta\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y} + x\right). \tag{72}$$

Для полного решения задачи требуется определить величину ϑ, что можно сделать по условию (66). Внося в это условие уравнения (71) и (72), находим

$$G\vartheta\int\limits_F\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}+x\right)x-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}-y\right)y\right]dF=M_к. \qquad (73)$$

Примем обозначение

$$\int\limits_F\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}+x\right)x-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}-y\right)y\right]dF=J_к \qquad (74)$$

и будем называть $J_к$ *геометрической жесткостью стержня на кручение*. Для круглого стержня поперечное сечение при кручении остается плоским:

$$w=\vartheta\,\Phi(x,y)=0, \qquad (75)$$

и тогда

$$J_к=\int\limits_F(x^2+y^2)\,dF=J_p. \qquad (76)$$

Из равенства (73) получаем угол закрутки, отнесенный к длине стержня:

$$\vartheta=\frac{M_к}{GJ_к}. \qquad (77)$$

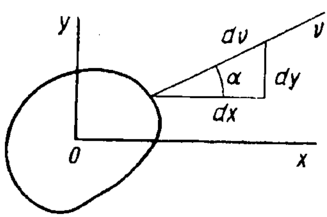


Рис. 7.17. Определение производной вдоль направления v для функции $\Phi(x,y)$

Теперь ясно, что значение функции кручения $\Phi(x,y)$ полностью решает задачу, т.е. позволяет найти напряжения и деформации при кручении упругого стержня произвольного сечения заданным крутящим моментом. Тем не менее решение с помощью функции кручения является одним из возможных способов решения. Другой способ (в некоторых случаях более удобный) связан с функцией напряжения.

Функция напряжения. Предположим, что касательные напряжения при кручении можно представить в следующем виде:

$$\tau_{zx}=G\,\vartheta\,\frac{\partial F}{\partial y}, \qquad (78)$$

$$\tau_{zy}=-G\,\vartheta\,\frac{\partial F}{\partial x}, \qquad (79)$$

где $F(x,y)$ — подлежащая определению функция напряжения, G — модуль сдвига, ϑ — относительный угол закручивания.

Такая форма представления позволяет сразу удовлетворить уравнениям равновесия (59). Из соотношений (71) и (72) находим связь функций напряжения и кручения:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} - y, \tag{80}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + x\right). \tag{81}$$

Дифференцируя равенство (80) по y, а равенство (81) по x и складывая, находим

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -2. \tag{82}$$

Это уравнение называется *уравнением Пуассона*. Оно отличается от уравнения Лапласа наличием заданной функции в правой части уравнения.

Для точек контура из условия (62) получаем

$$\frac{\partial F}{\partial y}\cos\alpha - \frac{\partial F}{\partial x}\sin\alpha = 0. \tag{83}$$

Далее следует учесть соотношения для элемента дуги контура

$$\cos\alpha = \frac{dy}{ds}, \quad \sin\alpha = \frac{dx}{ds}, \tag{84}$$

и тогда из равенства (83) с необходимостью следует

$$\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{ds} = \frac{\partial F}{\partial s} = 0. \tag{85}$$

В точках контура производная функции $F(x,y)$вдоль дуги равна нулю. Следовательно, для точек контура

$$F(x,y) = C, \tag{86}$$

где C — постоянная.

Для односвязной области, т.е. для поперечного сечения без внутренних полостей, постоянную C можно принять равной нулю, и тогда для точек контура

$$F(x,y) = 0. \tag{87}$$

Итак, задача кручения сводится к нахождению функции напряжения как решению уравнения Пуассона при постоянном значении функции на контуре.

Перейдем к определению величины ϑ. Из условия (66) находим

$$-G\vartheta\int\limits_{F_0}\left(\frac{\partial F}{\partial x}x+\frac{\partial F}{\partial y}y\right)dF_0=M_\text{к}, \tag{88}$$

где F_0 — площадь поперечного сечения. Учитывая очевидные соотношения

$$\frac{\partial F}{\partial x}x=\frac{\partial}{\partial x}(Fx)-F;$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}y=\frac{\partial}{\partial y}(Fy)-F,$$

находим

$$M_\text{к}=2G\vartheta\int\limits_{F_0}F\,dF_0, \tag{89}$$

так как в силу условия (87)

$$\int\limits_{F_0}\left[\frac{\partial}{\partial x}(Fx)+\frac{\partial}{\partial y}(Fy)\right]dF_0=0. \tag{90}$$

Доказательство условия (90) можно провести различными путями: преобразуя интеграл по площади в интеграл по контуру или проводя интегрирование по dx и dy с учетом условия (87). Геометрическая жесткость стержня на кручение (для односвязного сечения)

$$J_\text{к}=2\int\limits_{F_0}F\,dF_0. \tag{91}$$

Мембранная аналогия для функции напряжения. Рассмотрим мембрану, например тонкую резиновую пленку, закрепленную по контуру Г (рис. 7.18). Мембрана предварительно растягивается в двух направлениях с напряжением σ на плоском диске, имеющем отверстие по форме сечения стержня, и затем изнутри дается давление p. В результате мембрана получит прогибы $f(x,y)$, но на контуре сечения прогиб $f=0$. Предполагается, что прогибы мембраны невелики и предварительные напряжения σ не изменятся в процессе прогиба. В каждом из направлений мембрана ведет себя как гибкая нить (разд. 25).

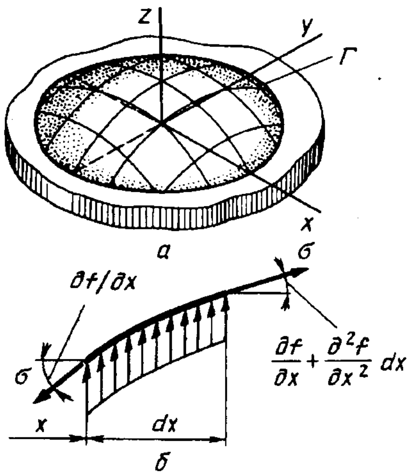


Рис. 7.18. Мембранная аналогия для функции кручения:
а — прогиб мембраны; *б* — к выводу уравнения мембраны

Условие равновесия мембраны составляется как равенство нулю сил, действующих в вертикальном направлении. В результате изменения прогибов f вдоль оси x составляющая от растяжения мембраны будет равна

$$\sigma\delta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\, dx\, dy,$$

где δ — толщина мембраны.

С учетом изменения прогибов вдоль оси y получим

$$\frac{\partial^2(f\delta)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(f\delta)}{\partial y^2} = -\frac{p}{\sigma}, \tag{92}$$

где p — давление на мембрану.

Принимая $p/\sigma = 2$ и сопоставляя уравнения (82) и (92), находим

$$F = f\delta, \tag{93}$$

так как функции F и $f\delta$ удовлетворяют одинаковым уравнениям и краевым условиям. Прогиб мембраны под действием внутреннего давления пропорционален функции напряжения. В этом и состоит мембранная аналогия, позволяющая экспериментально решать задачу кручения при соответствующем выборе давления, натяжения и толщины мембраны.

Отметим, что опорный контур мембраны может соответствовать контуру сечения стержня и в некотором масштабе, что приведет только к изменению множителя.

Достоинство мембранной аналогии заключается также и в том, что она позволяет представить поведение функции напряжения $F(x,y)$, так как характер прогибов (провисания) мембраны можно предвидеть из физических соображений. Например, для контура сечения в виде вытянутого прямоугольника (рис. 7.19,*а*) прогибы мембраны вдоль длинной стороны будут практически постоянными (за исключением областей, примыкающих к малым сторонам).

Касательные напряжения пропорциональны углу наклона поверхности мембраны:

$$\tau_{zx} = k\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad \tau_{zy} = -k\frac{\partial f}{\partial x}, \tag{94}$$

где k — коэффициент пропорциональности. Примерное распределение касательных напряжений показано на рис. 7.19,*б*. В углах прямоугольника напряжения равны нулю.

Примеры точных решений. Стержень эллиптического сечения. Рассмотрим кручение стержня эллиптического сечения (рис. 7.20), контур которого описывается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (95)$$

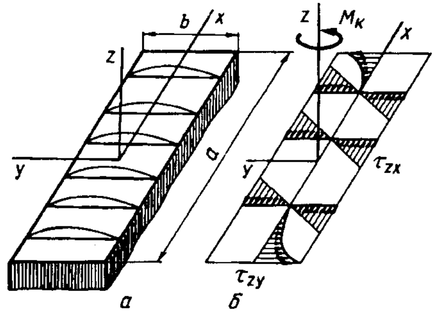


Рис. 7.19. Прогибы мембраны (функция напряжений) для сечения стержня в виде вытянутого прямоугольника:
а — прогибы мембраны; *б* — распределение касательных напряжений

где a, b — полуоси эллипса.

Решим задачу с помощью функции напряжения. Так как функция $F(x,y)$ обращается в нуль на контуре, то примем

$$F(x,y)=C\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right). \qquad (96)$$

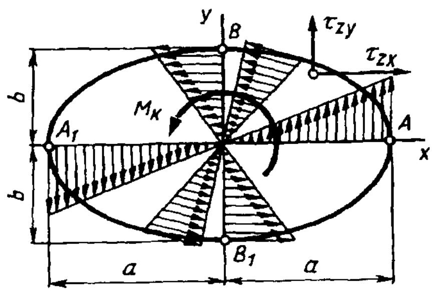


Рис. 7.20. Кручение стержня эллиптического сечения

Постоянную C определяем из уравнения (82).

Учитывая соотношения

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{2C}{a^2}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=\frac{2C}{b^2},$$

получаем

$$\frac{2C}{a^2}+\frac{2C}{b^2}=-2,$$

откуда

$$C=-\frac{a^2 b^2}{a^2+b^2}. \qquad (97)$$

По формулам (78) и (79) находим напряжения

$$\tau_{zx} = -G\vartheta \frac{2a^2}{a^2+b^2} y, \quad \tau_{zy} = G\vartheta \frac{2b^2}{a^2+b^2} x. \tag{98}$$

В точках $A\,(a, 0)$ и $B\,(0, b)$ напряжения равны

$$\tau_{zxA} = 0, \quad \tau_{zyA} = G\vartheta \frac{2b^2 a}{a^2+b^2},$$

$$\tau_{zxB} = -G\vartheta \frac{2a^2 b}{a^2+b^2}, \quad \tau_{zyB} = 0.$$

Положительные направления для касательных напряжений показаны на рис. 7.20. В точке B касательные напряжения (по модулю) больше, чем в точке A при $a > b$.

Геометрическая жесткость стержня на кручение по формуле (91)

$$J_{\text{к}} = 2\int_{F_0} C\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) dF_0 = 2\frac{a^2 b^2}{a^2+b^2}\left(F_0 - \frac{1}{a^2} J_y - \frac{1}{b^2} J_x\right),$$

где F_0 и J_y, J_x — площадь и моменты инерции сечения стержня.

Вычисления дают

$$J_{\text{к}} = \pi \frac{a^3 b^3}{a^2+b^2}. \tag{99}$$

Для случая $a = b = R$

$$J_{\text{к}} = \frac{1}{2}\pi R^4 = J_p,$$

что совпадает с решением для круглого стержня. Взаимный угол поворота сечений вала на участке длиной l

$$\varphi(l) = \frac{M_{\text{к}} l}{G J_{\text{к}}}. \tag{100}$$

Учитывая равенства (98), найдем расчетные зависимости для определения напряжений:

$$\tau_{zx} = -\frac{M_{\text{к}}}{J_{\text{к}}} \frac{2a^2}{a^2+b^2} y = -\frac{M_{\text{к}} y}{\pi/2\, ab^3}, \quad \tau_{zy} = \frac{M_{\text{к}} x}{\pi/2\, a^3 b}. \tag{101}$$

Если $a > b$ (эллипс вытянут вдоль оси x), то наибольшее касательное напряжение будет в точках B_1 и B:

$$\tau_{\max} = M_{к}/W_{к}, \tag{102}$$

где момент сопротивления

$$W_{к} = \frac{\pi}{2} ab^2 .$$

Представляет интерес определить осевое перемещение (депланацию) при кручении. Как известно (уравнение (67)),

$$w(x,y) = \vartheta\Phi(x,y).$$

С помощью равенств (80) и (81) находим

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} + y = \frac{2C}{b^2}y + y = -y\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2},$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = -\frac{\partial F}{\partial x} - x = -\frac{2C}{a^2}x - x = -x\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}.$$

Из последних равенств устанавливаем

$$\Phi(x,y) = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}xy .$$

Далее находим

$$w(x,y) = -\frac{M_{к}(a^2 - b^2)}{G\pi a^3 b^3}xy. \tag{103}$$

На рис. 7.21 показаны линии равных значений осевого перемещения. В первой и третьей четверти $w < 0$, во второй и четвертой $w > 0$.

Для круглого сечения ($a = b$) осевое смещение $w(x,y) = 0$.

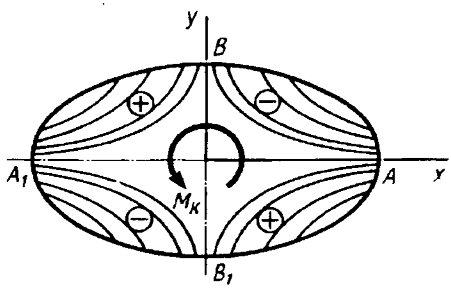


Рис. 7.21. Линии равных значений осевого перемещения при кручении стержня (гиперболы $\omega = -kxy$)

Стержень прямоугольного сечения. В этом случае (рис. 7.22) решение получается более сложным. Оно представляется в виде ряда Фурье

$$F(x,y) = \sum_{k} f_k(y)\cos\frac{k\pi x}{b}, \tag{104}$$

где $f_k(y)$ — функции, подлежащие определению.

Так как функция $F(x, y)$ (прогибы мембраны) должна обращаться в нуль на контуре, то в (104) используются только нечетные значения k (k = 1, 3, 5, ...). Внося выражение (104) в уравнение (82), находим

$$\sum_{k=1,3\ldots}\left(\frac{d^2 f_k(y)}{dy^2} - \frac{k^2\pi^2}{b^2} f_k(y)\right)\cos\frac{k\pi x}{b} = -2. \qquad (105)$$

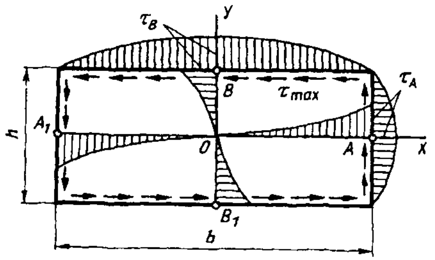


Рис. 7.22. Распределение касательных напряжений в точках контура при кручении стержня прямоугольного сечения

Для решения разложим правую часть уравнения в следующий ряд:

$$-2 = \sum_{k=1,3\ldots} A_k \cos\frac{k\pi x}{b}, \qquad (106)$$

где коэффициенты A_k могут быть найдены общим способом (умножением обеих частей равенства (106) на $\cos(k\pi x/b)$ и интегрированием по x в пределах от $-b/2$ до $b/2$).

Тогда из (85) следует, что функции $f_k(y)$ должны удовлетворять уравнениям

$$\left(\frac{d^2 f_k(y)}{dy^2}\right) - \left(\frac{k\pi}{b}\right)^2 f_k(y) = A_k, \quad k = 1, 3, 5\ldots \qquad (107)$$

Две постоянные при решении уравнений (107) определяются из условия

$$f_k(h/2) = 0, \quad f_k(-h/2) = 0.$$

Опуская подробности решения, приведем конечные результаты: геометрическая жесткость на кручение ($b > h$)

$$J_к = K_1 b h^3; \qquad (108)$$

момент сопротивления кручению ($b > h$)

$$W_к = K_2 b h^2; \qquad (109)$$

максимальное касательное напряжение (оно действует в точках B и B_1 в середине длинной стороны прямоугольника)

$$\tau_{max} = \frac{M_к}{W_к}.$$

Значения коэффициентов K_1 и K_2 в зависимости от отношения b/h приведены в табл. 3.

Таблица 3

Коэффициенты для геометрической жесткости и моментов сопротивления при кручении стержня прямоугольного сечения

b/h	1,0	2,0	3,0	4,0	10,0	∞
K_1	0,141	0,229	0,263	0,281	0,312	0,333
K_2	0,208	0,246	0,267	0,282	0,312	0,333

Примерная эпюра распределения касательных напряжений вдоль контура сечения показана на рис.7.22. В середине малой стороны

$$\tau_A = k\,\tau_{max}, \tag{110}$$

причем значение k изменяется от $k = 1$ при $b/h = 1$ до $k = 0{,}743$ при $b/h = \infty$.

Для коэффициентов K_1 и K_2 можно использовать приближенные формулы ($b > h$):

$$K_1 \approx 1/(3 + 2(h/b + h^2/b^2)), \tag{111}$$

$$K_2 \approx 1/(3 + 1{,}8h/b). \tag{112}$$

Для сильно вытянутого прямоугольника ($b \gg h$)

$$K_1 = K_2 = \frac{1}{3} \approx 0{,}333.$$

Концентрация напряжений при кручении. При кручении вала, имеющего шпоночные канавки, шлицы и т.п.,возможно появление мест, в которых наблюдается резкое повышение напряжений — концентрация напряжений. При кручении стержней возрастание напряжений происходит возле острых углов, направленных внутрь сечения (точки A на рис.7.23). Если во внутренних углах скругление отсутствует ($r \to 0$), то касательные напряжения кручения в этих точках теоретически становятся бесконечно большими. Противоположное наблюдается во внешних углах (точка B на рис.7.23). В вершинах внешних углов касательные напряжения отсутствуют. Эти важные выводы можно получить из точных решений соответствующих задач о кручении, но они вытекают из мембранной аналогии (в вершинах внутренних углов прогиб мембраны резко изменяется).

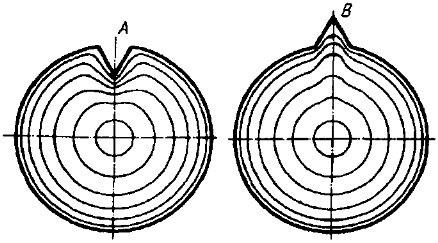


Рис. 7.23. Распределение касательных напряжений при кручении стержня

Укажем на существование физически наглядной гидродинамической аналогии. Касательное напряжение численно равно скорости жидкости, вращающейся внутри цилиндрического сосуда, стенки которого совпадают с боковой поверхностью вала. На рис.7.23 показаны линии тока: во внутренних углах жидкость обтекает препятствие и скорости (касательные напряжения) резко возрастают. Вдоль линии тока значения функции напряжений (или прогиба мембраны) остаются постоянными.

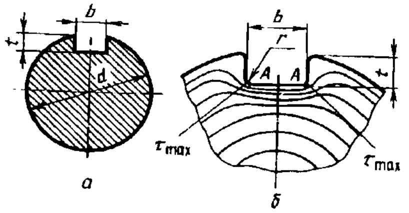


Рис. 7.24. Концентрация напряжений при кручении вала со шпоночной канавкой:
а — сечение вала; *б* — линии тока (гидродинамическая аналогия) или линии постоянного прогиба мембраны (мембранная аналогия) возле шпоночной канавки

Рассмотрим кручение вала со шпоночной канавкой (рис.7.24). Максимальное касательное напряжение действует в точках *А* и может быть выражено следующим равенством:

$$\tau_{max} = \alpha_\tau \tau_н , \qquad (113)$$

где $\tau_н$ — номинальное напряжение; α_τ — коэффициент концентрации напряжений (безразмерная величина).

В качестве номинального напряжения обычно принимается напряжение в вале, определяемое без учета концентрации напряжений.

Для круглого вала со шпоночной канавкой принимают

$$\tau_н = \frac{16 M_к}{\pi d^3} , \qquad (114)$$

т.е. максимальное напряжение, которое действовало бы в вале при отсутствии шпоночной канавки.

Коэффициент концентрации напряжений должен зависеть от относительных величин, характеризующих геометрию канавки:

$$\alpha_\tau = f(r/t, \ t/d, \ t/b) .$$

Из физических аналогий вытекает, что α_τ должно возрастать при уменьшении радиуса скругления. При действии переменных напряже-

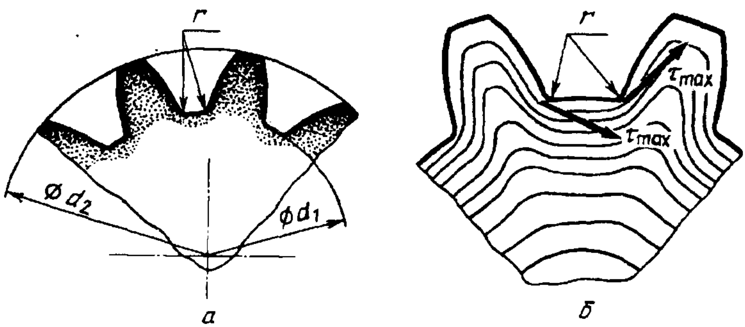


Рис. 7.25. Концентрация напряжений при кручении шлицевого вала:
а — сечение шлицевого вала; *б* — линии тока или постоянного прогиба мембраны

ний малый радиус скруглений часто является причиной усталостных поломок. На рис.7.25 показана концентрация напряжений в шлицевом валу.

25. Кручение тонкостенных стержней

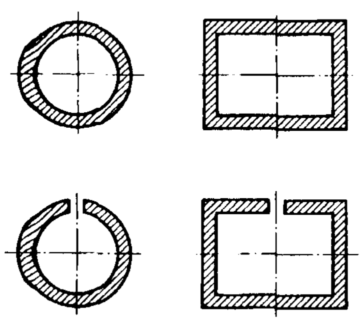


Рис. 7.26. Стержни замкнутого и открытого профиля

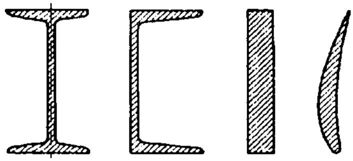


Рис. 7.27. Стержни открытого профиля

Тонкостенные стержни замкнутых и открытых профилей. Стержень называется тонкостенным, если один из размеров поперечного сечения существенно меньше другого. Поперечное сечение тонкостенного стержня часто называется профилем. На рис.7.26 показаны замкнутые и открытые (разомкнутые) профили тонкостенных стержней. Наиболее часто применяются стержни открытого профиля (рис.7.27).

Распределение касательных напряжений при кручении в стержнях замкнутого и незамкнутого сечений принципиально различно. Это понятно из гидродинамической аналогии, если представить касательные напряжения как скорости циркулирующей внутри сечения жидкости. В замкнутом сечении тонкостенного стержня касательные напряжения распределяются по толщине почти равномерно; в не-

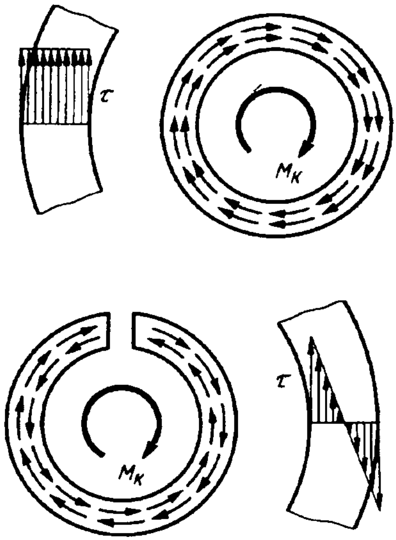


Рис. 7.28. Схема потоков касательных напряжений в замкнутом и открытом профилях

замкнутом сечении распределение происходит по линейному закону, причем на средней линии профиля касательные напряжения обращаются в нуль (рис.7.28).

Примером распределения касательных напряжений в замкнутом профиле может служить распределение в тонкостенном кольце, в открытом профиле — распределение в вытянутом прямоугольнике.

Легко понять, что стержень с замкнутым профилем значительно лучше сопротивляется кручению, чем стержень открытого профиля. Общая теория стержней, изложенная в предыдущем разделе, позволяет полностью решить задачу о кручении стержня произвольного сечения с помощью решения уравнений Лапласа или Пуассона при соответствующих краевых условиях. Однако условие тонкостенности сечения стержня позволяет использовать простые приближенные решения, что представляет практический интерес в инженерном деле.

Кручение стержня замкнутого профиля. Рассмотрим приближенное решение задачи о кручении трубчатого тонкостенного стержня (рис.7.29). Предположим, что касательные напряжения распределены

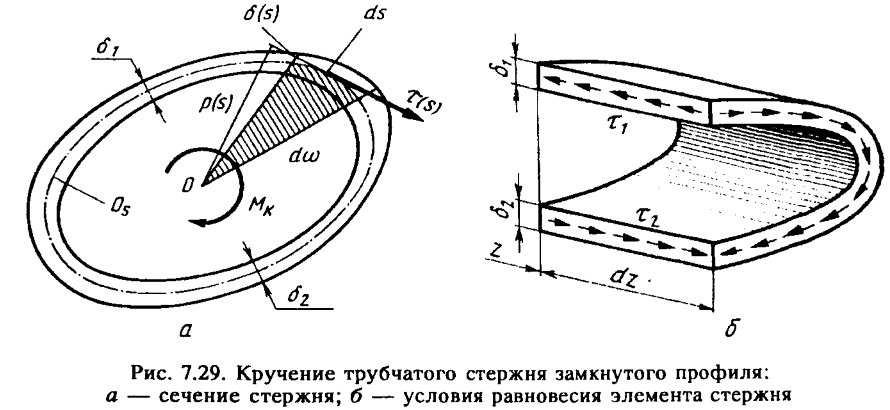


Рис. 7.29. Кручение трубчатого стержня замкнутого профиля:
а — сечение стержня; *б* — условия равновесия элемента стержня

равномерно по толщине стенки и направлены по касательной к средней линии профиля. Составим условие равновесия части стержня (рис.7.29,*б*). Так как сумма всех сил в направлении оси стержня равна нулю, то

$$\tau_1\delta_1 = \tau_2\delta_2$$

или

$$\tau(s)\,\delta(s) = \text{const} = C, \tag{115}$$

где $\tau(s)$ — касательное напряжение; $\delta(s)$ — толщина стенки в точке A средней линии контура (положение точки A характеризуется длиной дуги s, отсчитываемой от некоторой точки O_s).

Замечание. Исходя из гидродинамической аналогии, условие (115) означает, что «расход жидкости» одинаков во всех сечениях.

Момент касательных усилий относительно оси, проходящей через точку О, выражается следующим образом (рис.7.29,*а*). На участке ds создается момент $p(s)\,\tau(s)\,\delta(s)\,ds$, где $p(s)$ — плечо силы, длина перпендикуляра, опущенного из точки O на касательную к средней линии контура); полный момент равен

$$\int_0^L p(s)\,\tau(s)\,\delta(s)\,ds = M_к.$$

Интеграл берется по всему контуру L. Учитывая равенство (115), находим

$$\tau(s)\,\delta(s)\int_0^L p(s)\,ds = M_к. \tag{116}$$

Так как $\frac{1}{2}p(s)\,ds = d\omega$, где $d\omega$ — площадь сектора, соответствующего дуге ds, то

$$\int_0^L p(s)\,ds = 2\omega, \tag{117}$$

где ω — площадь, ограниченная средней линией контура (рис.7.30).

Из соотношений (116) и (117) вытекает

$$\tau(s) = \frac{M_к}{2\delta(s)\,\omega}. \tag{118}$$

При кручении трубы замкнутого сечения максимальное касательное напряжение возникает в наиболее тонком месте.

Пример. Рассмотрим сначала определение напряжений в тонкостенной круглой трубе для сопоставления приближенного и точного решения (рис.7.31).

По формуле (118) находим касательное напряжение

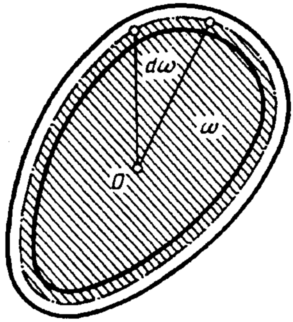


Рис. 7.30. Площадь, ограниченная средней линией контура

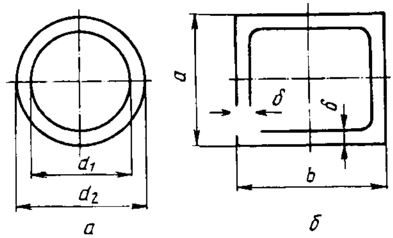


Рис. 7.31. Два сечения стержня замкнутого профиля

$$\tau = \frac{M_к}{2\delta \dfrac{\pi d_c^2}{4}} = \frac{2M_к}{\pi \delta d_c^2}, \tag{119}$$

где $\delta = \frac{1}{2}(d_2 - d_1)$ — толщина трубы; $d_c = \frac{1}{2}(d_1 + d_2)$ — средний диаметр.

Из точного решения для полого вала (разд.23) получаем следующее значение для максимального напряжения при кручении:

$$\tau_{max} = \frac{M_к \frac{1}{2} d_2}{J_p} = \frac{M_к d_2}{\dfrac{\pi}{16}(d_2^4 - d_1^4)}. \tag{120}$$

Учитывая соотношения $d_2 = d_c + \delta$, $d_1 = d_c - \delta$ и полагая $\delta \leq d_c$, находим, что равенства (119) и (120) совпадают.

Для трубы прямоугольного сечения с толщиной стенки δ (см.рис.7.31) касательное напряжение при кручении

$$\tau = \frac{M_к}{2\delta\left(a - \frac{1}{2}\delta\right)\left(b - \frac{1}{2}\delta\right)} \approx \frac{M_к}{2\delta ab}. \tag{121}$$

Замечания. 1. Приближенное решение задачи о кручении трубчатых стержней достаточно точно описывает распределение напряжений на основе гипотезы равномерного распределения по толщине. Деформационная картина оказывается сложнее, так как при кручении некруглой трубы возникает депланация (перемещение вдоль оси трубы). В связи с этим вопрос об угле закручивания рассмотрим после того, как познакомимся с энергетическими методами.

2. При кручении тонкостенных труб может возникнуть потеря устойчивости (образование складок по винтовым линиям). Это обстоятельство надо иметь в виду при практических расчетах.

Приближенные формулы для решения задачи о кручении стержней открытого профиля. В основе приближенного метода лежит замена участка профиля участком сечения в виде вытянутого прямоугольника. Для стержня прямоугольного сечения ($\delta \times L$), когда толщина δ значительно меньше длины L, было получено ранее (см.разд.27): геометрическая жесткость на кручение

$$J_{\text{к}} = \frac{1}{3}\,\delta^3 L\,; \tag{122}$$

максимальное касательное напряжение

$$\tau = M_{\text{к}}\delta / J_{\text{к}}\,. \tag{123}$$

Распределение касательных напряжений (за исключением концевых областей) является линейным по толщине стенки. Предполагая, что каждый участок работает как часть прямоугольного сечения, представим приближенно геометрическую жесткость на кручение в следующем виде:

$$J_{\text{к}} = \frac{1}{3}\int_0^L \delta^3(s)\,ds\,, \tag{124}$$

где интегрирование ведется вдоль средней линии профиля (рис.7.32).

Для полого профиля эта формула была обоснована приближенным представлением функции напряжения. Кривизна профиля несущественно влияет на распределение касательных напряжений. Продолжая обобщение, представим касательные напряжения в точках контура равенством

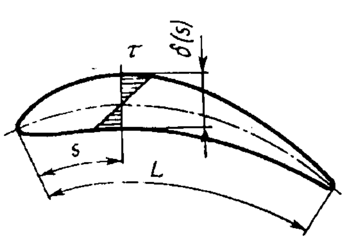


Рис. 7.32. К выводу приближенных формул для тонкостенного открытого профиля

$$\tau(s) \approx \frac{M_{\text{к}}}{J_{\text{к}}} \delta(s). \tag{125}$$

Пример. Сравним жесткость на кручение и касательные напряжения тонкостенной трубы замкнутого сечения и при наличии продольного разреза.

Для сплошного сечения геометрическая жесткость на кручение (см.разд.24)

$$J_{\text{к}} = J_p = \frac{\pi}{32}\left[d_2^4 - d_1^4\right] = \frac{\pi}{32}\left[\left(d_s + \delta\right)^4 - \left(d_{\text{c}} - \delta\right)^4\right] = \frac{\pi d_{\text{c}}^3}{4}\delta.$$

Для сечения с тонким продольным разрезом

$$J_{\text{к}} = \frac{1}{3}\int_0^L \delta^3 ds = \frac{1}{3}\delta^3 \pi d_{\text{c}} = \frac{\pi}{3} d_{\text{c}} \delta^3.$$

Отношение жесткостей на кручение

$$\frac{J_{\text{к. спл}}}{J_{\text{к. пр}}} = \frac{3}{4}\left(\frac{d_{\text{c}}}{\delta}\right)^2, \tag{126}$$

где $J_{\text{к. спл}}$ — жесткость на кручение сплошной трубы; $J_{\text{к. пр}}$ — жесткость на кручение трубы с продольным разрезом.

Касательные напряжения в сплошной трубе (формула (119))

$$\tau_{\text{спл}} = \frac{2M_{\text{к}}}{\pi \delta d_{\text{c}}^2},$$

в трубе с продольным разрезом

$$\tau_{\text{пр}} = \frac{3M_{\text{к}}}{\pi \delta^2 d_{\text{c}}}.$$

Отношение максимальных касательных напряжений

$$\frac{\tau_{\text{спл}}}{\tau_{\text{пр}}} = \frac{2}{3}\frac{\delta}{d_{\text{c}}}. \tag{127}$$

Из соотношений (126) и (127) вытекает, что разрез трубы вдоль образующей существенно понижает сопротивление трубы крутящим нагрузкам.

Глава 8

ИЗГИБ СТЕРЖНЕЙ

26. Гипотеза плоских сечений и нормальные напряжения изгиба

Силовые факторы в сечении стержня. Рассмотрим стержень (крыло самолета, лопатку компрессора и т.д.) под действием поперечной нагрузки (рис.8.1). Ось z направлена вдоль оси стержня, оси x, y лежат в плоскости A поперечного сечения.

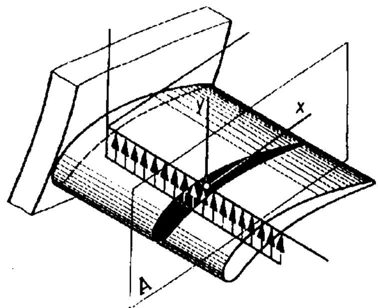


Рис. 8.1. Лопатка компрессора под действием изгибающей нагрузки

Проведем сечение и заменим отброшенную правую часть тела равнодействующими внутренних сил (рис.8.2). В общем случае для равновесия оставленной части тела необходимо и достаточно приложить три составляющие вектора усилия и три составляющие вектора момента. Векторы Q_x и Q_y — *поперечные, перерезывающие силы*; N — *продольная,* или *нормальная, сила*; M_x и M_y — *изгибающие моменты;* M_z — *крутящий момент.*

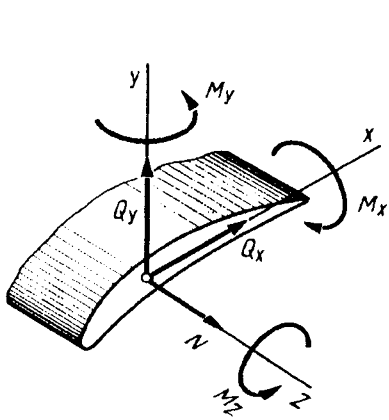


Рис. 8.2. Силовые факторы в сечении стержня

В пределах упругости материала кручение можно рассматривать независимо от других деформаций, оно было описано ранее, и потому в дальнейшем считаем $M_z = 0$.

Положительные направления изгибающих моментов соответствуют положительным направлениям вращения, принятым для правосторонней системы координат.Согласно этому момент или вращение считается положительным в том случае, когда поворот осуществляется против часовой стрелки, если смотреть со стороны положительного направления оси к началу координат. Усилия Q_x и Q_y будем считать положительными, если они направлены вдоль осей x и y соответственно.

Замечание. В приведенном соглашении о знаках силовых факторов существенно, что рассматриваются усилия, действующие на левую часть стержня (нормаль к сечению идет в положительном направлении оси z). В силу равенства действия и противодействия в таком же сечении, но принадлежащем правой части стержня (рис.8.3), силы и момент будут точно такими же, но противоположно направленными. Естественно, что для правой части стержня (внешняя нормаль к сечению направлена вдоль отрицательного направления оси z) положительные направления будут противоположными. Подобное обстоятельство встречалось ранее (разд.3) при установлении знаков напряжений.

Таким образом, правило знаков (рис.8.3,*б*) зависит от направления внешней нормали к сечению и принятой системы координат. На рис.8.3,*а* показаны положительные силовые факторы в сечении стержня.

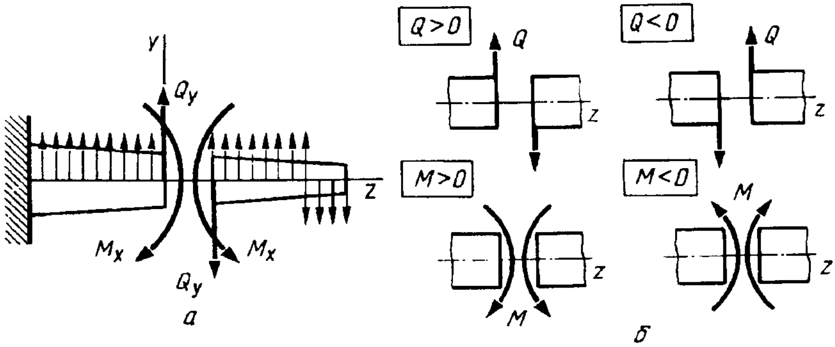


Рис. 8.3. Силовые факторы, приложенные к левой и правой частям стержня: *а* — положительные силовые факторы в сечении стержня; *б* — правило знаков для перерезывающей силы и изгибающего момента

Гипотеза плоских сечений. Точное решение задачи о распределении нормальных и касательных напряжений при изгибе стержня представляет большие трудности. В инженерной практике нашло широкое признание приближенное решение, основанное на знаменитой «гипотезе плоских сечений», впервые использованной (в простейших случаях) еще в работах Бернулли и Эйлера.

Гипотеза плоских сечений состоит в следующем: точки плоскости поперечного сечения после деформации лежат в одной плоскости.

Физически это означает, что сечение стержня можно представить как тонкую, абсолютно жесткую пластинку, получающую в результате деформации стержня линейное смещение и углы поворота. Перемещение точки A поперечного сечения (рис.8.4) вдоль оси z по гипотезе плоских сечений будет таким:

$$w = w_0 + \varphi_x y - \varphi_y x, \qquad (1)$$

где φ_x и φ_y — углы поворота сечения относительно осей x и y соответственно; w_0— смещение вдоль оси z точек оси стержня.

Величины w_0, φ_x, φ_y одинаковы для всех точек сечения, но в общем случае зависят от z. Углы упругого поворота сечения в формуле (1) считаются малыми, так что

$$\sin\varphi_x \approx \varphi_x, \ \sin\varphi_y \approx \varphi_y.$$

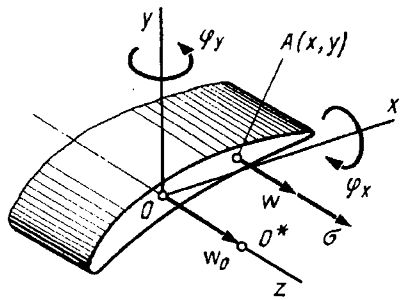


Рис. 8.4. Распределение упругого смещения в поперечном сечении стержня при изгибе

Замечание. Гипотеза плоских сечений является важнейшим приближенным методом описания деформации изгиба и растяжения стержней. Исследования показывают, что основой гипотезы плоских сечений является предположение о малости углов сдвига элементов по сравнению с углами их поворотов.

При изгибе стержней из анизотропных материалов, у которых модуль сдвига может быть на порядок меньше модуля упругости при растяжении, деформации сдвига возрастают и область применения гипотезы плоских сечений становится ограниченной.

Распределение нормальных напряжений изгиба. Относительная деформация в точке поперечного сечения в направлении продольной оси стержня z

$$\varepsilon_z = \frac{dw}{dz} = \varepsilon_0 + y\frac{d\varphi_x}{dz} - x\frac{d\varphi_y}{dz}, \qquad (2)$$

где $\varepsilon_0 = dw_0/dz$ — деформация в точках, лежащих на оси стержня.

Таким образом, из гипотезы плоских сечений вытекает линейное распределение деформации ε_z по плоскости поперечного сечения. При определении напряжений σ_z, действующих перпендикулярно плоскости сечения, примем, что два других нормальных напряжения σ_x и σ_y отсутствуют (гипотеза одномерного напряженного состояния, или *гипотеза о ненадавливании*).

Для деформаций в области упругости материала справедлив закон Гука, согласно которому между напряжениями и деформациями существует линейная зависимость

$$\varepsilon_z = \sigma_z/E + \alpha_T T, \tag{3}$$

где E — модуль упругости материала, α_T — коэффициент теплового линейного расширения, T — изменение температуры материала.

В дальнейшем для простоты индексы в выражении (3) опускаем, так как будут рассматриваться деформации и напряжения только вдоль оси z.

Из уравнения (3) следует, что

$$\sigma = E\varepsilon - E\alpha_T T. \tag{4}$$

С учетом равенства (2) получим

$$\sigma = E\left(\varepsilon_0 + y\frac{d\varphi_x}{dz} - x\frac{d\varphi_y}{dz}\right) - E\alpha_T T. \tag{5}$$

Напряжение σ будет известно в том случае, когда известны параметры деформации ε_0, $d\varphi_x/dz$, $d\varphi_y/dz$.

Замечание. Величина ε_0 представляет собой деформацию волокна, совпадающего с осью стержня (геометрическим местом центров тяжести сечения). Физический смысл параметров $d\varphi_x/dz$ и $d\varphi_y/dz$ будет разъяснен в дальнейшем — они выражают составляющие вектора кривизны оси стержня после деформации.

Для определения параметров деформации воспользуемся общими условиями равновесия (рис.8.5). Изгибающие моменты и нормальная сила в сечении стержня, которые определяются условиями равновесия отсеченной (правой) части стержня, одновременно являются равнодействующими внутренних сил в сечении, т.е. усилий σdF:

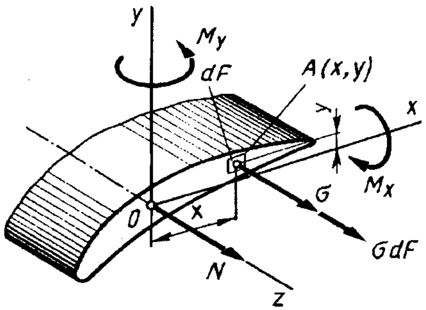


Рис. 8.5. Общие условия равновесия при изгибе стержня

$$\int_F \sigma dF = N, \tag{6}$$

$$\int_F \sigma y\, dF = M_x, \tag{7}$$

$$\int_F \sigma x\, dF = -M_y. \tag{8}$$

Знак минус в последнем равенстве связан с тем, что момент относительно оси y, создаваемый вектором σdF, противоположен моменту M_y.

Замечание. При согласовании знаков в составляемых уравнениях надо всегда руководствоваться рисунком, на котором все участвующие в уравнении величины принимаются положительными.

Например, на рис.8.5 нормальное напряжение показано растягивающим, величины x и y в точке A положительны, момент M_y принят положительным.

Система уравнений для определения нормальных напряжений изгиба и растяжения стержня и ее упрощение. Эта система получается путем подстановки значения σ из соотношения (5) в уравнения равновесия (6) — (8). Для общности будем считать, что модуль упругости E и температура T не одинаковы в различных точках сечения.

Внося (5) в равенства (6) — (8), получаем следующую систему уравнений, записанную в матричной форме:

$$\left[C_{ij}\right]\{\chi\} = \{M\} + \{M_T\}, \tag{9}$$

где

$$\{\chi\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \\ d\varphi_x/dz \\ d\varphi_y/dz \end{Bmatrix}$$ — вектор параметров деформации;

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} N \\ M_x \\ M_y \end{Bmatrix}$$ — вектор внешних нагрузок;

$$\{M_T\} = \begin{Bmatrix} N_T \\ M_{xT} \\ M_{yT} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int\limits_F E\alpha_T T dF \\ \int\limits_F Ey\alpha_T T dF \\ -\int\limits_F Ex\alpha_T T dF \end{Bmatrix}$$ — вектор температурного нагружения.

Симметричная матрица (3 x 3) коэффициентов жесткости имеет следующие элементы:

$$\begin{gathered} C_{11} = \int\limits_F E\,dF,\ C_{12} = C_{21} = \int\limits_F yE\,dF,\ C_{13} = C_{31} = -\int\limits_F xE\,dF, \\ C_{22} = \int\limits_F y^2E\,dF,\ C_{23} = C_{32} = -\int\limits_F xyE\,dF,\ C_{33} = \int\limits_F x^2E\,dF. \end{gathered} \tag{10}$$

Основное уравнение гипотезы плоских сечений (уравнение (1)) справедливо для произвольных осей x, y.

Покажем, что с помощью рационального выбора осей координат можно существенно упростить матрицу жесткости $\left[C_{i,j} \right]$, приведя ее к диагональному виду. Выберем начало координат в приведенном центре тяжести сечения.

Если представить себе сечение как очень тонкую пластинку с равномерно распределенной массой, то центр тяжести сечения, как известно из теоретической механики, характеризуется тем, что статические моменты относительно любой проходящей через него оси обращаются в нуль:

$$\int_F x\,dF = 0, \quad \int_F y\,dF = 0. \tag{11}$$

Для приведенного центра тяжести

$$\int_F x E\,dF = 0, \quad \int_F y E\,dF = 0. \tag{12}$$

При определении обычного центра тяжести все элементы dF обладают одинаковой массой. При нахождении приведенного центра тяжести элементу dF приписывается масса, пропорциональная модулю упругости E. Для стержня с постоянным модулем упругости ($E = \text{const}$) приведенный центр тяжести совпадает с обычным. В следующем разделе будут указаны способы нахождения центров тяжести поперечных сечений стержня. При условии (12) обращаются в нуль элементы C_{12}, C_{21}, C_{13} и C_{31} матрицы жесткости. Начало координат еще не полностью определяет положение всей системы. На рис.8.6 показаны две центральные системы координат, т.е. системы, имеющие начало в центре тяжести или в приведенном центре тяжести сечения.

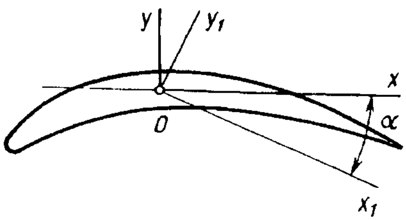


Рис. 8.6. Главные оси сечения

Положение системы x, y будем характеризовать углом α, на который она повернута относительно заранее выбранной системы координат x_1, y_1. Угол α принят таким, чтобы

$$\int_F x y E\,dF = 0. \tag{13}$$

Последнее условие вместе с условиями (12) определяет главную систему координат, оси которой называются *главными осями сечения.* В следующем разделе будут указаны способы нахождения главных осей сечения.

При условии (13)

$$C_{23} = C_{32} = 0 .$$

Итак, если оси x, y являются главными центральными осями сечения, то матрица жесткости становится диагональной, т.е. отличные от нуля элементы расположены на главной диагонали. Тогда получаем

$$\varepsilon_0 = \frac{N + N_T}{C_{11}} = \frac{N}{\int\limits_F E\,dF} + \frac{\int\limits_F E\,\alpha_T T\,dF}{\int\limits_F E\,dF}, \tag{14}$$

$$\frac{d\varphi_x}{dz} = \frac{M_x + M_{xT}}{C_{22}} = \frac{M_x}{\int\limits_F y^2 E\,dF} + \frac{\int\limits_F E\,y\,\alpha_T T\,dF}{\int\limits_F y^2 E\,dF}, \tag{15}$$

$$\frac{d\varphi_y}{dz} = \frac{M_y + M_{yT}}{C_{33}} = \frac{M_y}{\int\limits_F x^2 E\,dF} - \frac{\int\limits_F E\,x\,\alpha_T T\,dF}{\int\limits_F x^2 E\,dF}. \tag{16}$$

В правых частях равенств (14) — (16) первое слагаемое выражает действие внешних усилий, второе — влияние изменения температуры.

В общем случае из системы (9) вытекает, что

$$\{\chi\} = [\,C_{ij}\,]^{-1}\left(\{M\} + \{M_T\}\right),$$

где $[\,C_{ij}\,]^{-1}$ — матрица, обратная матрице жесткости $[\,C_{ij}\,]$.

Если оси x, y являются главными осями, то матрица жесткости и обратная матрица имеют вид

$$[\,C_{ij}\,] = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 & 0 \\ 0 & C_{22} & o \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix}, \quad [\,C_{ij}\,]^{-1} = \begin{bmatrix} 1/C_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1/C_{22} & o \\ 0 & 0 & 1/C_{33} \end{bmatrix}.$$

Гипотеза плоских сечений и, следовательно, соотношения (14) — (16), полученные на основании гипотезы плоских сечений, справедливы и для стержней переменного сечения, если сечения достаточно «плавно» изменяются по длине стержня. В местах резкого (ступенчатого) изменения сечений может возникнуть концентрация напряжений, которая рассматривается в дальнейшем.

Напряжения растяжения и изгиба в стержне от действия внешних сил. Предположим, что температура тела во время работы не изменяется. Тогда, полагая в соотношении (5) $\alpha_T T = 0$, получаем

$$\sigma = E\left(\varepsilon_0 + y\frac{d\varphi_x}{dz} - x\frac{d\varphi_y}{dz}\right).$$

Учитывая равенства (14)—(16), найдем общую формулу для нормальных напряжений в стержне при действии внешних силовых факторов:

$$\sigma = E\left\{\frac{N}{\int\limits_F E\,dF} + y\frac{M_x}{\int\limits_F y^2E\,dF} - x\frac{M_y}{\int\limits_F x^2E\,dF}\right\}$$

или

$$\sigma = E\left\{\frac{N}{A} + y\frac{M_x}{B_x} - x\frac{M_y}{B_y}\right\}, \tag{17}$$

где $A = \int\limits_F E\,dF$ — жесткость при растяжении; $B_x = \int\limits_F y^2E\,dF$; $B_y = \int\limits_F x^2E\,dF$ — жесткости при изгибе.

Для стержня с постоянным модулем упругости (основной расчетный случай)

$$\sigma = \frac{N}{F} + y\frac{M_x}{J_x} - x\frac{M_y}{J_y}, \tag{18}$$

где $F = \int\limits_F dF$ — площадь поперечного сечения;

J_x и J_y — моменты инерции сечения относительно осей x и y соответственно:

$$J_x = \int\limits_F y^2 dF, \quad J_y = \int\limits_F x^2 dF. \tag{19}$$

Первый член в правой части равенства (18) выражает напряжения от растяжения или сжатия, два последующих члена — напряжения изгиба.

Замечания. 1. Формула (18) является одной из основных во всем курсе сопротивления материалов. Она показывает, что для анализа напряжений за начало координат надо принять центр тяжести сечения и к этой точке сечения (точнее, к системе координат) привести внешние силы. Нормальное усилие, действующее в центре тяжести, вызывает напряжения растяжения или сжатия, одинаковые во всех точках сечения. Напряжения изгиба зависят от изгибающих моментов, геометрических характеристик сечения (моментов инерции) и координат точки.

2. Нормальные напряжения от внешних силовых факторов зависят не от абсолютного значения модуля упругости материала, а только от его распределения в точках сечения. Из равенства (17) следует, что при изменении модуля упругости во всех точках сечения одновременно в k раз напряжения остаются прежними.

Если модуль упругости одинаков во всех точках сечения (формула (18)), то напряжения в стержне не зависят от E. В стальном или дюралевом стержне при одинаковых геометрических размерах и действующих нагрузках напряжения не различаются. Упругие перемещения стержней будут, разумеется, разными. Для закона распределения напряжений (формула (18)) решающим было предположение об упругости материала. Подобный результат имеет общее значение в задачах теории упругости.

3. Формулы (17) и (18) применимы и для стержней переменного сечения, когда упругогеометрические характеристики сечения изменяются по длине стержня достаточно плавно.

Пример и некоторые дополнительные понятия. Определим напряжения при изгибе стержня прямоугольного сечения под действием сосредоточенной силы P (рис.8.7). Рассмотрим сечение на расстоянии z от заделки. Начало координат поместим в центр тяжести сечения.

Изгибающий момент возрастает по мере удаления от точки приложения силы. Напряжения изгиба определим по формуле (18), считая модуль упругости материала стержня постоянным.

Учитывая, что осевое усилие N и изгибающий момент M_y отсутствуют, получаем

$$\sigma = y\frac{M_x}{J_x} = y\frac{P(l-z)}{J_x}.$$

Остается определить момент инерции поперечного сечения:

$$J_x = \int\limits_F y^2 dF = b\int\limits_{-h/2}^{h/2} y^2 dy = \frac{bh^3}{12}.$$

Окончательно

$$\sigma = y\frac{12P(l-z)}{bh^3}. \qquad (20)$$

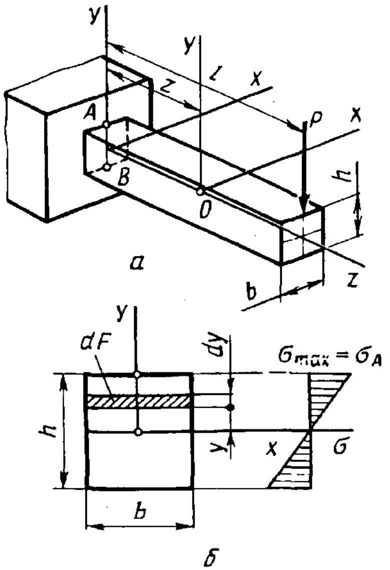


Рис. 8.7. Изгиб стержня прямоугольного сечения:
а — стержень; *б* — поперечное сечение стержня

Опасным будет сечение, в котором действует наибольшее напряжение. Если стержень призматический, то опасным будет сечение, в котором изгибающий момент наибольший. В рассматриваемом примере оно расположено в заделке стержня.

Как следует из равенства (20), напряжения изгиба распределяются линейно по высоте сечения. В точках сечения, лежащих на линии $y = 0$, напряжения изгиба отсутствуют. Линия, в точках которой напряжения изгиба отсутствуют, называется *нейтральной линией* сечения. В рассматриваемом примере нейтральной линией является ось x. По мере удаления от нейтральной линии напряжения изгиба возрастают. В опасном сечении ($z = 0$) точки с наибольшими напряжениями изгиба называются опасными точками.

Максимальное напряжение изгиба будет при $y = h/2$:

$$\sigma_{\text{и}\max} = \frac{Pl}{\frac{1}{6}bh^2} = \frac{Pl}{W} = \frac{M}{W}, \qquad (21)$$

где M — действующий в рассматриваемом сечении изгибающий момент.

Величина $W = \frac{1}{6}bh^2 = \frac{J_x}{y_{\max}}$ называется *моментом сопротивления сечения* изгибу. В точке B ($y = -h/2$) напряжение изгиба будет таким же по величине, но противоположным по знаку:

$$\sigma_{\text{в}} = -\frac{Pl}{\frac{1}{6}bh^2}.$$

Расчетные формулы (17) и (18) для нормальных напряжений в стержне по своей структуре достаточно просты, затруднения могут возникнуть при определении главных осей и упругогеометрических характеристик сечения, что будет разобрано в следующем разделе, а сейчас рассмотрим вкратце расчет температурных напряжений.

Температурные напряжения. В пределах упругости материала напряжения от внешних сил и нагрева можно находить независимо. Рассмотрим температурные напряжения в стержне, считая, что внешние нагрузки отсутствуют. Внося равенства (14)—(16) в соотношение (5), получим формулу температурных напряжений:

$$\sigma_T = E\left(\frac{\int\limits_F E\,\alpha_T T\,dF}{\int\limits_F E\,dF} + y\frac{\int\limits_F E y\,\alpha_T T\,dF}{\int\limits_F y^2 E\,dF} + x\frac{\int\limits_F E x\,\alpha_T T\,dF}{\int\limits_F x^2 E\,dF} - \alpha_T T\right). \qquad (22)$$

Покажем, что в равномерно нагретом стержне, когда

$$\alpha_T T = \text{const} = C, \qquad (23)$$

температурные напряжения отсутствуют. Подставляя значение $\alpha_T T$ из (23), находим $\sigma_T = 0$, так как оси x, y проходят через приведенный центр тяжести. Результат справедлив при статически определимых условиях закрепления, когда температурные деформации стержня не стеснены (например, один из торцов стержня свободен от закрепления).

Если однородный стержень нагревается до температур, при которых изменением модуля упругости можно пренебречь ($E = \text{const}$), то из соотношения (22) получаем более простую зависимость:

$$\sigma_T = E\left(\frac{\int\limits_F \alpha_T T\,dF}{F} + y\frac{\int\limits_F y\,\alpha_T T\,dF}{J_x} + x\frac{\int\limits_F x\,\alpha_T T\,dF}{J_y} - \alpha_T T\right). \qquad (24)$$

Рассмотрим в качестве примера температурные напряжения в стержне прямоугольного сечения (рис.8.8,*а*), основание которого b, высота h. Температура изменяется по степенному закону (рис8.8,*б*):

$$T(x) = T_{\max}\left(\frac{2x}{b}\right)^n, \qquad (25)$$

причем показатель степени n является четным и температура имеет симметричное распределение, по координате y температура не изменяется. Предполагается для простоты, что влиянием нагрева на модуль упругости можно пренебречь.

Отметим, что

$$\int_F y\,\alpha_T T\,dF = 0\,, \quad \int_F x\,\alpha_T T\,dF = 0 \qquad (26)$$

как статические моменты площади сечения с симметрично распределенным «весом»; это вытекает из физических предпосылок, так как принятое распределение температур не вызывает изгиба стержня. Наконец, равенство (26) доказывается строго с помощью интегрирования по площади сечения. Далее находим

$$F = bh\,, \quad J_y = \frac{hb^3}{12}\,,$$

$$\int_F \alpha_T T\,dF = 2\alpha_T T_{\max} h \int_0^{b/2} \left(\frac{2x}{b}\right)^n dx = $$

$$= \frac{\alpha_T T_{\max} hb}{n+1}\,.$$

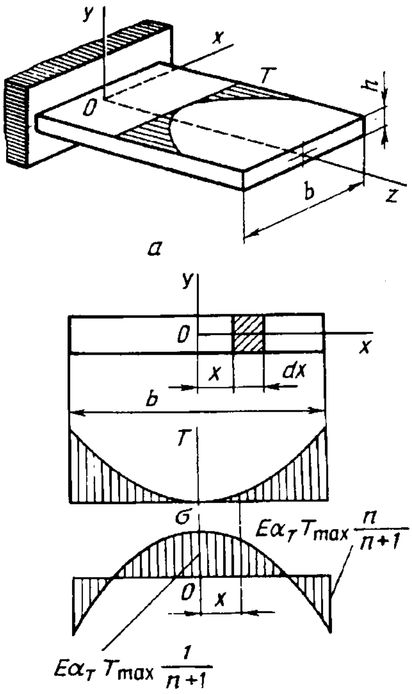


Рис. 8.8. Определение температурных напряжений в стержне:
а — неравномерный нагрев стержня;
б — распределение температур и температурных напряжений

Из формулы (24) вытекает

$$\sigma_T = E\,\alpha_T T_{\max}\left[\frac{1}{n+1} - \left(\frac{2x}{b}\right)^n\right]. \qquad (27)$$

Распределение температурных напряжений по координате x показано на рис.8.8,*б*.

В более нагретых частях стержня возникают сжимающие температурные напряжения. Физически это объясняется тем, что крайние волокна стержня получают большую температурную деформацию и при отсутствии поперечных связей стержня деформируются так, как показано на рис.8.9,*а*. Поперечные связи удерживают крайние волокна (рис.8.9,*б*), создавая в них напряжения сжатия, а в менее нагретых частях стержня — растяжения.

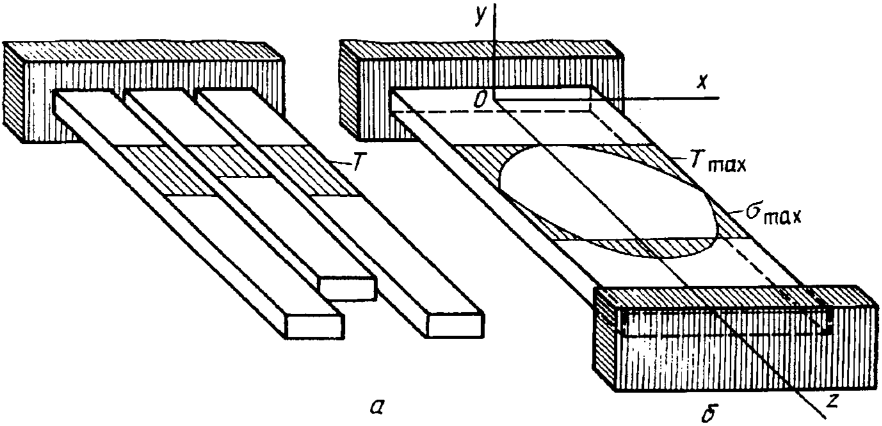


Рис. 8.9. Температурные деформации в стержне:
а — поперечные связи отсутствуют; *б* — в конце стержня имеется жесткая пластинка

Замечания. 1. При выводе формулы для температурных напряжений (22) или (24) предполагалась справедливость гипотезы плоских сечений. При определении температурных напряжений она нарушается вблизи свободного торца стержня.

Действительно, по равенству (22) температурные напряжения одинаковы по всей длине стержня, вместе с тем свободный торец стержня свободен от каких-либо напряжений. Если же на торце стержня имеется жесткая пластинка, то температурные напряжения будут во всем стержне одинаковыми по длине и строго соответствующими формуле (22). При свободном торце в концевой области должны возникнуть касательные напряжения (поперечные связи), которые на некотором удалении от свободного торца (порядка размера сечения) сделают все-таки поперечные сечения плоскими и, следовательно, формулы (22) и (24) справедливыми.

2. Напряжения от неравномерного нагрева (температурные напряжения) в статически определимом стержне (или свободном от закрепления) всегда самоуравновешены. Это означает, что

$$\int_F \sigma_T dF = 0, \quad \int_F x\,\sigma_T dF = 0, \quad \int_F y\,\sigma_T dF = 0.$$

В сущности, эти условия были использованы при выводе уравнений (6)—(8); уравнения (22) и (24) удовлетворяют этим условиям при любом распределении температуры.

Свойством самоуравновешенности обладают и остаточные напряжения, существующие в элементах конструкции после их изготовления. Температурные и остаточные напряжения имеют, в сущности, одну причину возникновения — неравномерные первоначальные деформации (в результате нагрева или в процессе изготовления).

Обоснование гипотезы плоских сечений. Пусть имеется стержень постоянного сечения с постоянными силовыми факторами по длине (рис.8.10). Предполагается, что температура материала стержня одинакова по всей длине, но может быть различной в точках поперечного сечения. Если внешние факторы нагружения постоянны по длине стержня, то, за исключением концевых областей, напряжения и деформации не будут зависеть от координаты z.

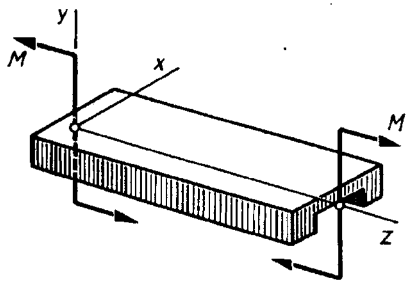


Рис. 8.10. Стержень с постоянными силовыми факторами по длине

В этом случае в уравнениях совместности деформаций (разд.11) производные по z обращаются в нуль и тогда

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = 0, \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \, \partial y} = 0. \quad (28)$$

Из последних соотношений при

$$\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial z} = 0 \quad (29)$$

следует

$$\varepsilon_z = C_0 + C_1 x + C_2 y, \quad (30)$$

где C_0, C_1, C_2 — постоянные величины.

Условие (30) совпадает с равенством (2) и выражает гипотезу плоских сечений.

Замечание. В основе доказательства гипотезы плоских сечений лежит предположение о постоянстве силовых факторов по длине стержня. Это справедливо, когда стержень загружен по торцам изгибающими моментами и осевыми усилиями, но данное предположение не соблюдается при наличии поперечной нагрузки. При изгибе от поперечной нагрузки для стержней переменного сечения расчет по гипотезе плоских сечений является приближенным методом.

Часто в инженерных расчетах решения, строго доказанные при определенных ограничениях, успешно используются за пределами таких ограничений, если, разумеется, возникающие погрешности оказываются второстепенными.

27. Упругогеометрические характеристики сечения стержня при изгибе. Главные оси, главные моменты инерции

Упругогеометрические характеристики. При определении напряжений изгиба и растяжения (по формуле (17)), температурных напряжений (по формуле (22)) необходимо знать упругогеометрические характеристики сечения стержня: жесткость при растяжении

$$A = \int_F E\,dF; \tag{31}$$

жесткость при изгибе относительно главной оси x

$$B_x = \int_F y^2 E\,dF; \tag{32}$$

жесткость при изгибе относительно главной оси y

$$B_y = \int_F x^2 E\,dF. \tag{33}$$

Главные оси сечения проходят через приведенный центр тяжести сечения, и для главных осей координат выполняются условия

$$\int_F x E\,dF = 0, \quad \int_F y E\,dF = 0, \quad \int_F xy E\,dF = 0; \tag{34}$$

жесткости A, B_x и B_y называются упругогеометрическими характеристиками сечения при изгибе.

При постоянном (в точках сечения) модуле упругости

$$A = EF, \; B_x = EJ_x, \; B_y = EJ_y, \tag{35}$$

где F — площадь поперечного сечения; J_x, J_y — осевые (экваториальные) моменты инерции сечения относительно осей x и y соответственно. Величины F, J_x и J_y называются *геометрическими характеристиками сечения*, так как они определяются только геометрической конфигурацией сечения. Упругогеометрические характеристики зависят также от распределения модуля упругости по сечению.

Определение приведенного центра тяжести сечения. Для определения приведенного центра тяжести сечения выберем произвольным образом вспомогательную систему координат x_2, y_2 (рис.8.11).

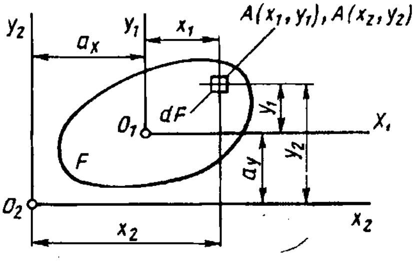


Рис. 8.11. Определение центра тяжести сечения (точка O_1)

Пусть точка O_1 — приведенный центр тяжести. Во вспомогательной системе его координатами будут a_x, a_y.

Если оси x_1, y_1, параллельные осям x_2, y_2, проходят через приведенный центр тяжести, то статические моменты сечения относительно указанных осей обращаются в нуль:

$$S^*_{x_1} = \int_F y_1 E\, dF = 0, \quad S^*_{y_1} = \int_F x_1 E\, dF = 0. \tag{36}$$

В последних равенствах E — модуль упругости в данной точке сечения ($E > 0$). Отметим, что dF всегда считается положительным ($dF > 0$). Из рис.8.11 следует, что

$$x_1 = x_2 - a_x, \quad y_1 = y_2 - a_y. \tag{37}$$

Теперь из равенств (35) находим

$$\int_F (y_2 - a_y) E\, dF = 0, \quad \int_F (x_2 - a_x) E\, dF = 0. \tag{38}$$

Координаты приведенного центра тяжести определяются зависимостями

$$a_x = \frac{\int_F x_2 E\, dF}{\int_F E\, dF}, \quad a_y = \frac{\int_F y_2 E\, dF}{\int_F E\, dF}. \tag{39}$$

При постоянном модуле упругости получаем значения координат центра тяжести, известные из курса теоретической механики:

$$a_x = \frac{1}{F}\int_F x_2\, dF, \quad a_y = \frac{1}{F}\int_F y_2\, dF. \tag{40}$$

Отметим, что если какая-либо ось является осью симметрии сечения, то центр тяжести сечения обязательно лежит на этой оси. Для приведенного центра тяжести это справедливо, если распределение модуля упругости симметрично относительно указанной оси. При двух осях симметрии центр тяжести сечения лежит на их пересечении.

Замечание. Если статический момент относительно какой-либо оси равен нулю, то ось проходит через центр тяжести сечения. Доказательство основано на том, что по определению центр тяжести удовлетворяет условиям (36). Но если статический момент обращается в нуль для двух осей, то он равен нулю и для любой оси, проходящей через точку пересечения этих осей (докажите!).

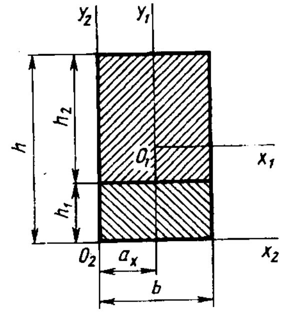


Рис. 8.12. Определение приведенного центра тяжести для биметаллического стержня прямоугольного сечения

Пример определения приведенного центра тяжести. Рассмотрим биметаллический стержень прямоугольного сечения (рис.8.12) и выберем начало вспомогательной системы координат в левом нижнем углу. Так как сечение имеет ось симметрии, то $a_x = b/2$.

Величину a_y определяем по формуле (39). Предварительно вычислим жесткость при растяжении и жесткость при изгибе:

$$\int\limits_F E\,dF = E_1 b h_1 + E_2 b h_2 ,$$

$$\int\limits_F y_2 E\,dF = bE_1 \int\limits_0^{h_1} y_2 dy_2 + bE_2 \int\limits_{h_1}^{h} y_2 dy_2 = bE_1 \frac{h_1^2}{2} + bE_2 \frac{1}{2}(h^2 - h_1^2) .$$

Далее находим

$$a_y = \frac{E_1 h_1^2 + E_2 (h^2 - h_1^2)}{2(E_1 h_1 + E_2 h_2)} .$$

При одинаковых значениях модулей упругости ($E_1 = E_2$) получаем $a_y = h/2$.

Геометрические характеристики сечения стержня. Рассмотрим сначала наиболее часто встречающийся случай однородного стержня, когда все точки сечения имеют одинаковый модуль упругости ($E =$ const). В этом случае сопротивление стержня изгибу и растяжению зависит от геометрических характеристик сечения (моментов инерции относительно главных осей и т.д.). В следующих разделах рассматривается круг вопросов, связанных с определением геометрических свойств сечений. Затем полученные результаты легко распространяются на определение упругогеометрических характеристик сечения.

В рассматриваемом случае ($E =$ const) требуется найти оси x, y, проходящие через центр тяжести сечения и удовлетворяющие условию

$$\int_F xy\,dF = 0\,. \tag{41}$$

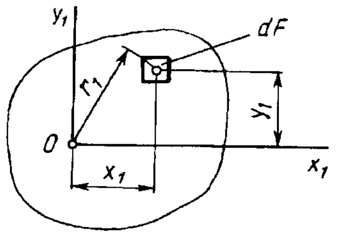


Рис. 8. 13. Определение центральных моментов инерции сечения

Пусть имеются произвольные центральные оси x, y (рис.8.13); начало координат расположено в центре тяжести сечения.

Осевым, или экваториальным, *моментом инерции* относительно оси x_1 называется интеграл

$$J_{x_1} = \int_F y_1^2\,dF\,. \tag{42}$$

По определению момент инерции — величина положительная. Размерность момента инерции $\dim J_x = L^4$, где L — размерность длины (обычно момент инерции выражается в $см^4$ или $мм^4$). Символ dim образован из начальных букв английского слова dimension — размерность.

Для оси y_1 осевой момент

$$J_{y_1} = \int_F x_1^2\,dF\,. \tag{43}$$

В расчетных соотношениях часто встречается величина

$$J_{x_1 y_1} = \int_F x_1 y_1\,dF\,, \tag{44}$$

которая называется *центробежным моментом инерции* сечения относительно системы координат x_1, y_1. Несколько странное название момента связано с тем, что это понятие встречалось в механике при учете момента центробежных сил.

Отметим еще *полярный момент инерции* сечения

$$J_{p_1} = \int_F r^2\,dF = \int_F (x_1^2 + y_1^2)\,dF\,, \tag{45}$$

где r — расстояние от элемента площади до центра тяжести сечения (см.рис.8.13).

Очевидно, что

$$J_{p_1} = J_{y_1} + J_{x_1} . \qquad (46)$$

Полярный момент инерции сечения рассматривался ранее в задачах кручения круглых стержней (валов).

Для главный осей сечения центробежный момент инерции равен нулю:

$$J_{xy} = \int_F xy\, dF = 0 . \qquad (47)$$

Напомним, что оси x_1, y_1 имеют произвольное, заранее выбранное направление. Пусть главные оси x, y повернуты на угол α по отношению к осям x_1, y_1. Прежде всего нам понадобится известная из математики формула для координат точки в новой, повернутой системе координат. Проектируя отрезок OA (рис.8.14) на ось x, получаем

$$x = x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha . \qquad (48)$$

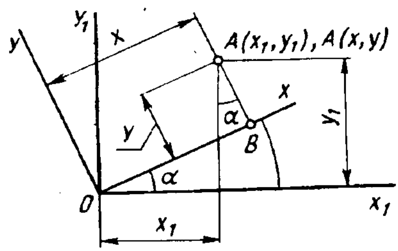


Рис. 8.14. Изменение координат точки A при повороте системы координат

Подобным образом

$$y = -x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha . \qquad (49)$$

Замечание. Формулы (48) и (49) часто встречаются в различных технических задачах, а их вывод надо обязательно усвоить и повторить самостоятельно.

Угол поворота главных осей найдем из равенства (41) после учета соотношений (48) и (49):

$$J_{xy} = \int_F xy\, dF = \int_F (x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha)(-x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha)\, dF = 0$$

или

$$J_{xy} = \frac{1}{2}(J_{x_1} - J_{y_1}) \sin 2\alpha + J_{x_1 y_1} \cos 2\alpha = 0 . \qquad (50)$$

Из последнего равенства получаем важную зависимость

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2 J_{x_1 y_1}}{J_{y_1} - J_{x_1}}, \tag{51}$$

где α_0 — значение угла α, удовлетворяющее условию (50).

Полученная формула определяет углы, на которые должна быть повернута система координат x, y по отношению к системе координат x_1, y_1. Так как тангенс угла — функция периодическая с периодом π, то уравнение (51) справедливо и при углах

$$2\alpha_0 \pm k\pi = 2\alpha_k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

или

$$\alpha_k = \alpha_0 \pm k\frac{\pi}{2}. \tag{52}$$

Различные положения системы координат x, y ($k = 0, 1, 2, 3, 4$) показаны на рис.8.15. Однако все они соответствуют одним и тем же главным направлениям *1* и *2*. В связи с этим условимся об определенном выборе угла α, характеризующего положение главных осей.

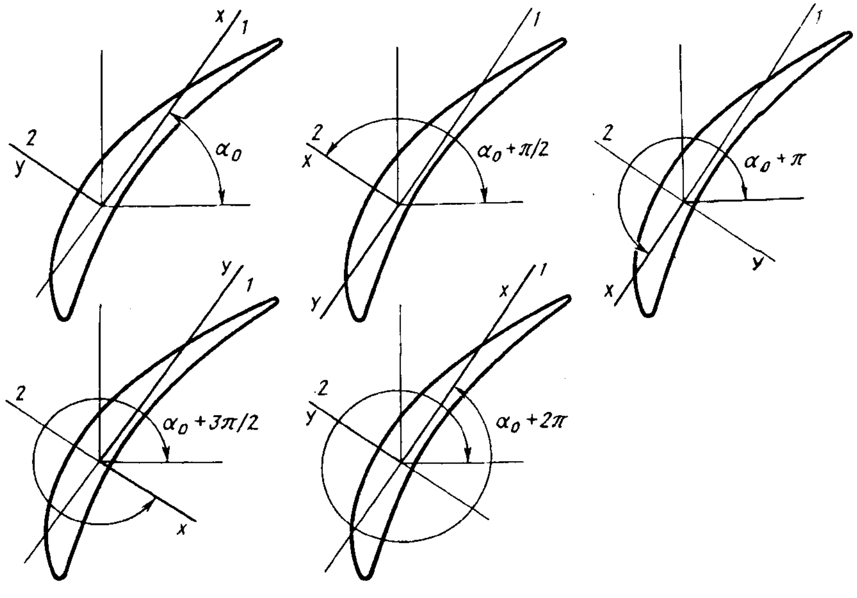


Рис. 8.15. Различные положения системы координат, соответствующие одним и тем же главным направлениям *1* и *2*

Для положительных значений $\operatorname{tg} 2\alpha_0$ имеем $0 < 2\alpha_0 < \pi/2$ и будем считать $0 \le \alpha_0 \le \pi/4$. Для отрицательных значений $\operatorname{tg} 2\alpha_0$ получим $-\pi/2 < 2\alpha_0 < 0$ и $-\pi/4 \le \alpha_0 \le 0$. Таким образом, достаточно рассматривать поворот главной системы координат в пределах

$$-\pi/4 < \alpha_0 < \pi/4 . \qquad (53)$$

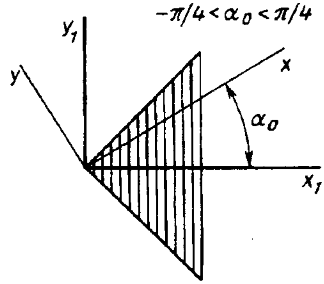


Рис. 8.16. Положение главных осей x, y относительно вспомогательных x_1, y_1

Положение главных осей x, y относительно вспомогательных x_1, y_1 показано на рис.8.16. Во многих случаях главные оси сечения могут быть названы без предварительного расчета. Например, если какая-либо ось является осью симметрии сечения, то она и любая ей перпендикулярная образуют главные оси сечения (рис.8.17). В самом деле, элементу площади dF всегда соответствует «нормальный» элемент, у которого изменился знак одной из координат, и поэтому для показанных на рис.8.17 осей

$$J_{xy} = \int_F xy\, dF = 0 .$$

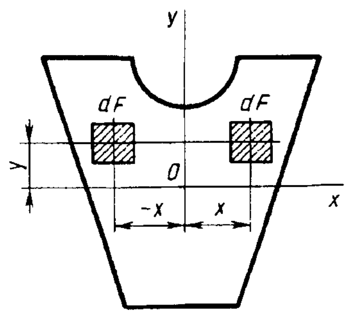


Рис. 8.17. Симметричное сечение (ось симметрии всегда является одной из главных осей сечения)

Замечание. Сколько главных (центральных) осей имеет сечение? Только две (оси x, y) или бесчисленное множество. Последний случай встречается не так часто; к нему относятся сечения, имеющие бесконечно много осей симметрии (например, круглые) или сечения с полной циклической симметрией (например, квадратные).

Главные моменты инерции сечения. Осевые моменты инерции относительно главных осей x, y называются *главными моментами инерции*.

Если ось x составляет угол α с осью x_1, то осевой момент инерции

$$J_x = \int_F y^2\, dF = \int_F (-x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha)^2\, dF .$$

Из последнего соотношения получаем

$$J_x = J_{x_1} \cos^2\alpha + J_{y_1} \sin^2\alpha - J_{x_1 y_1} \sin 2\alpha . \qquad (54)$$

Так как

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha), \quad \sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha),$$

то зависимость (54) представим в виде

$$J_x = \frac{1}{2}(J_{x_1} + J_{y_1}) - \frac{1}{2}(J_{y_1} - J_{x_1})\cos 2\alpha - J_{x_1 y_1}\sin 2\alpha. \tag{55}$$

Равенство (55) справедливо для любой оси x, составляющей угол α с осью x_1. Для главной оси $\alpha = \alpha_0$ и в силу условия (51) можно написать

$$J_x = \frac{1}{2}(J_{x_1} + J_{y_1}) - \frac{1}{2}(J_{y_1} - J_{x_1})\frac{1}{\cos 2\alpha_0}. \tag{56}$$

Учитывая тождество

$$\cos 2\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha_0}}, \tag{57}$$

справедливое при условии (53), и формулу (51), находим для главной оси x

$$J_x = \frac{1}{2}(J_{x_1} + J_{y_1}) - \frac{1}{2}(J_{y_1} - J_{x_1})\sqrt{1 + \frac{4J_{x_1 y_1}^2}{(J_{y_1} - J_{x_1})^2}}. \tag{58}$$

Ось x составляет с осью x_1 угол α_0, причем

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2J_{x_1 y_1}}{J_{y_1} - J_{x_1}}, \quad -\frac{\pi}{4} < \alpha_0 \le \frac{\pi}{4}. \tag{59}$$

Величина J_x представляет один из главных моментов инерции сечения. Второй главный момент соответствует осевому моменту инерции относительно оси y. При повороте осей координат на угол α

$$J_y = \int_F x^2 dF = \int_F (x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha)^2 dF =$$

$$= J_{y_1}\cos^2\alpha + J_{x_1}\sin^2\alpha + J_{x_1 y_1}\sin 2\alpha. \tag{60}$$

Если $\alpha = \alpha_0$, то для главного момента инерции получим равенство, аналогичное (56):

$$J_y = \frac{1}{2}(J_{x_1} + J_{y_1}) + \frac{1}{2}(J_{y_1} - J_{x_1})\frac{1}{\cos 2\alpha_0} \tag{61}$$

или

$$J_y = \frac{1}{2}(J_{x_1} + J_{y_1}) + \frac{1}{2}(J_{y_1} - J_{x_1})\sqrt{1 + \frac{4J^2_{x_1y_1}}{(J_{y_1} - J_{x_1})^2}}\,. \tag{62}$$

Формулы (58) и (62) дают значения осевых моментов инерции относительно главных осей x, y (главные моменты инерции сечения).

Свойство экстремальности главных моментов инерции. Осевой момент J_x относительно оси, повернутой на произвольный угол, определяется равенством (55). Найдем значение угла α, при котором J_x получает экстремальное (наибольшее или наименьшее) значение. Для этого приравняем нулю производную:

$$\frac{dJ_x}{d\alpha} = -2J_{x_1}\cos\alpha\sin\alpha + 2J_{y_1}\sin\alpha\cos\alpha - 2J_{x_1y_1}\cos 2\alpha = 0\,,$$

что дает для угла α^*

$$\operatorname{tg} 2\alpha^* = \frac{2J_{x_1y_1}}{J_{y_1} - J_{x_1}}\,.$$

Так как значения α^* и α_0 совпадают, то, следовательно, момент инерции относительно главной оси x обладает свойством экстремальности — он или наименьший, или наибольший для осей, проходящих через начало координат. Сумма моментов инерции относительно любых двух взаимно перпендикулярных осей с общим началом постоянна:

$$J_x + J_y = J_{x_1} + J_{y_1} = J_p\,.$$

Следовательно, если J_x имеет минимальное значение, то J_y — максимальное, и наоборот.

При $J_{y_1} > J_{x_1}$ значение J_x по формуле (58) минимальное (рис.8.18). Из среднего значения $(J_{x_1} + J_{y_1})/2$ вычитается положительная величина.

При $J_{y_1} > J_{x_1}$ получим из равенства (58)

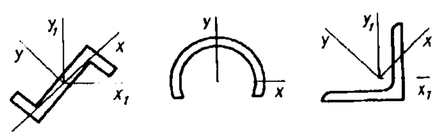


Рис. 8.18. Ось x, относительно которой момент инерции имеет минимальное значение ($J_x = J_{\min}$). Ось расположена так, что среднее квадратичное отклонение элементов площади от оси минимально

$$J_x = J_{\min} = \frac{1}{2}(J_{x_1} + J_{y_1}) - \frac{1}{2}\sqrt{(J_{y_1} - J_{x_1})^2 + 4J_{x_1y_1}^2}\,. \tag{63}$$

При $J_{y_1} < J_{x_1}$ момент относительно оси x будет иметь максимальное значение:

$$J_x = J_{\max} = \frac{1}{2}(J_{x_1} + J_{y_1}) + \frac{1}{2}\sqrt{(J_{y_1} - J_{x_1})^2 + 4J_{x_1y_1}^2}\,. \tag{64}$$

Последнее соотношение вытекает из (58), если учесть, что при $J_{y_1} < J_{x_1}$

$$\sqrt{1 + \frac{4J_{x_1y_1}^2}{(J_{y_1} - J_{x_1})^2}} = -\frac{1}{J_{y_1} - J_{x_1}}\sqrt{(J_{y_1} - J_{x_1})^2 + 4J_{x_1y_1}^2}\,. \tag{65}$$

Моменты инерции относительно произвольных осей, выраженные через главные моменты. Будем характеризовать произвольную (центральную) систему координат углом α, который она образует с главной системой координат x, y. В связи с этим изменим обозначения и будем теперь считать, что оси x_1, y_1 повернуты на угол α. Тогда после простого изменения обозначений получим из равенств (50), (54), (60)

$$J_{x_1y_1} = \frac{1}{2}(J_x - J_y)\sin 2\alpha\,, \tag{66}$$

$$J_{x_1} = J_x \cos^2\alpha + J_y \sin^2\alpha\,, \tag{67}$$

$$J_{y_1} = J_x \sin^2\alpha + J_y \cos^2\alpha\,. \tag{68}$$

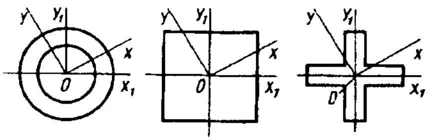


Рис. 8.19. Сечения, имеющие одинаковые главные моменты

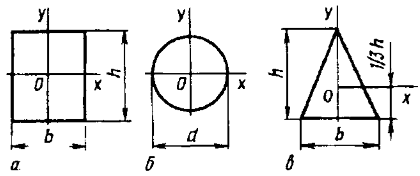


Рис. 8.20. Моменты инерции простейших сечений:
а — прямоугольного $J_x = bh^3/12$, $J_y = hb^3/12$);
б — круглого ($J_x = J_y = \pi d^4/64$);
в — треугольного ($J_x = bh^3/36$, $J_y = hb^3/48$)

Из последних соотношений вытекают интересные выводы. Если главные моменты инерции равны ($J_x = J_y$), то все оси сечения являются главными, так как $J_{x_1y_1} = 0$ для любого значения α. При одинаковых главных моментах инерции $J_x = J_y$ моменты инерции относительно любой центральной оси имеют одинаковые значения. На рис.8.19 показаны некоторые сечения с одинаковыми главными моментами.

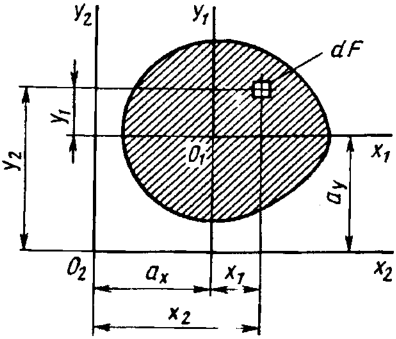


Рис. 8.21. Соотношения между моментами инерции для параллельных осей

Расчет геометрических характеристик сечения. Геометрические характеристики простейших сечений стержня показаны на рис.8.20.

Для расчета сложных сечений полезными являются соотношения между моментами инерции для параллельных осей (рис.8.21, оси x_1, y_1 являются центральными):

$$J_{x_2} = \int_F y_2^2\,dF = \int_F (y_1 + a_y)^2 dF = J_{x_1} + a_y^2 F, \tag{69}$$

$$J_{y_2} = \int_F x_2^2\,dF = J_{y_1} + a_x^2 F, \tag{70}$$

$$J_{x_2y_2} = \int_F (y_1 + a_y)(x_1 + a_x) = J_{x_1y_1} + a_x a_y F. \tag{71}$$

Момент инерции сечений (рис.8.22) можно рассматривать как разность:

$$J_{x_2} = \int_F y_2^2\,dF = \int_{F_1} y_2^2\,dF_1 - \int_{F_2} y_2^2\,dF_2, \tag{72}$$

где F_1, F_2 — площади, ограниченные наружным и внутренним контурами.

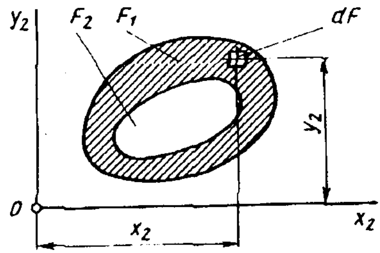


Рис. 8.22. Момент инерции полых (неодносвязных) сечений

Для сложных сечений геометрические характеристики находят с помощью численного расчета на ЭВМ. Координаты профиля задаются во

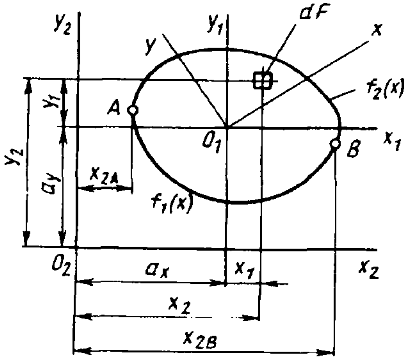


Рис. 8.23. К расчету геометрических характеристик сложных сечений (оси x, y — главные центральные оси)

вспомогательной системе координат x_2, y_2 в виде значений (рис.8.23) ординат $y_{верх} = f_2(x_2)$, $y_{ниж} = f_1(x_1)$.

Площадь сечения

$$F = \int_{x_{2A}}^{x_{2B}} (f_2(x_2) - f_1(x_2))dx_2 . \quad (73)$$

Координаты центра тяжести находят по формуле (40):

$$a_x = \frac{1}{F}\int_{x_{2A}}^{x_{2B}} x_2 [f_2(x_2) - f_1(x_2)]\, dx_2 ,$$

$$a_y = \frac{1}{2F}\int_{x_{2A}}^{x_{2B}} [f_2^2(x_2) - f_1^2(x_2)]\, dx_2 . \quad (74)$$

Моменты инерции относительно осей x_2, y_2 могут быть вычислены по следующим формулам:

$$J_{x_2} = \frac{1}{3}\int_{x_{2A}}^{x_{2B}} [f_2^3(x_2) - f_1^3(x_2)]\, dx_2 ,$$

$$J_{y_2} = \int_{x_{2A}}^{x_{2B}} x_2^2 [f_2(x_2) - f_1(x_2)]\, dx_2 , \quad (75)$$

$$J_{x_2 y_2} = \frac{1}{2}\int_{x_{2A}}^{x_{2B}} x_2 [f_2^2(x_2) - f_1^2(x_2)]\, dx_2 .$$

При выводе равенств (75) использовались соотношения для элементарного прямоугольника с размерами $[f_2(x_2) - f_1(x_2)]$ и dx_2. Моменты относительно осей x_1, y_1 определяются формулами (69), (70), угол — равенством (51).

Главные моменты инерции находят с помощью зависимостей (58) и (62). Для дополнительной проверки можно использовать формулы для J_{min} и J_{max}.

Для расчета напряжений изгиба необходимо знать координаты точек профиля в главной системе координат. С помощью соотношений (48) и (49) находим

$$
\begin{aligned}
x &= (x_2 - a_x)\cos\alpha_0 + (y_2 - a_y)\sin\alpha_0, \\
y &= -(x_2 - a_x)\sin\alpha_0 + (y_2 - a_y)\cos\alpha_0,
\end{aligned}
\tag{76}
$$

где координаты точек x_2, y_2 заданы (см.рис.8.23).

Упругогеометрические характеристики сечения стержня. Из сопоставления упругогеометрических характеристик с чисто геометрическими характеристиками (соотношения (42) — (47)) следует практически важный вывод: упругогеометрические характеристики сечения получаются из геометрических, если каждому элементу площади приписать множитель ("вес"), численно равный значению модуля упругости в данной точке сечения.

Приведенный центр тяжести определяется соотношениями (12). Положение главных приведенных осей находится с помощью зависимости

$$
\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\int\limits_F x_1 y_1 E\,dF}{\int\limits_F x_1^2 E\,dF - \int\limits_F y_1^2 E\,dF}. \tag{77}
$$

При $E = \text{const}$ соотношения (77) и (51) совпадают. Жесткость сечения при изгибе относительно главной оси x (равенство (32)) представляет приведенный момент инерции относительно этой оси:

$$
B_x = J_x^* = \int\limits_F y^2 E\,dF. \tag{78}
$$

Аналогично формулам (56) и (61) будем иметь

$$
\begin{aligned}
B_x &= \frac{1}{2}(B_{x_1} + B_{y_1}) - \frac{1}{2}(B_{y_1} - B_{x_1})\frac{1}{\cos 2\alpha_0}, \\
B_y &= \frac{1}{2}(B_{x_1} + B_{y_1}) + \frac{1}{2}(B_{y_1} - B_{x_1})\frac{1}{\cos 2\alpha_0}, \\
B_{x_1} &= J_{x_1}^* = \int\limits_F y_1^2 E\,dF, \quad B_{y_1} = J_{y_1}^* = \int\limits_F x_1^2 E\,dF.
\end{aligned}
\tag{79}
$$

Соответствующим образом переносятся и другие результаты, полученные для однородных сечений. В частности, формулы для параллельных осей (69)-(71) будут иметь следующий вид:

$$
B_{x_2} = B_{x_1} + a_y^2 A, \quad B_{y_2} = B_{y_1} + a_x^2 A, \quad B_{x_2 y_2} = B_{x_1 y_1} + a_x a_y A, \tag{80}
$$

где $A = \int_F E\,dF$ — жесткость сечения при растяжении, a_x, a_y — координаты приведенного центра тяжести.

Пример определения упругогеометрических характеристик. Рассмотрим биметаллический стержень прямоугольного сечения (см.рис.8.12). Оси x_1, y_1, проходящие через приведенный центр тяжести, будут одновременно и главными (центральными) осями x, y; жесткость при растяжении

$$A = \int_F E\,dF = E_1 b h_1 + E_2 b h_2 .$$

Координаты приведенного центра тяжести сечения были определены ранее:

$$a_x = \frac{1}{2} b , \quad a_y = \frac{E_1 h_1^2 + E_2 (h^2 - h_1^2)}{2 (E_1 h_1 + E_2 h_2)} .$$

Для определения жесткости сечения на изгиб относительно главной оси $x_1 = x$ найдем сначала жесткость относительно вспомогательной оси x_2:

$$B_{x_2} = \int_F y_2^2 E\, b\, dy_2 = \frac{1}{3} b\, E_2 (h^3 - h_1^3) + \frac{1}{3} b\, E_1 h_1^3 .$$

Далее определяем B_x:

$$B_x = \int_F y^2 dF = B_{x_2} - a_y^2 A = \frac{1}{3} b E_2 (h^3 - h_1^3) + \frac{1}{3} b E_1 h_1^3 -$$

$$- \frac{b}{4} [E_1 h_1^2 + E_2 (h^2 - h_1^2)]^2 (E_1 h_1 + E_2 h_2)^{-1} .$$

Величина B_y определяется просто:

$$B_y = \frac{E_1 h_1 b^3}{12} + \frac{E_2 h_2 b^3}{12} .$$

28. Условия равновесия элемента стержня и касательные напряжения изгиба

Изгиб стержня часто происходит при действии сосредоточенных или распределенных нагрузок, перпендикулярных оси стержня (рис.8.24). В сечении стержня будут действовать не только изгибающие моменты, но и перерезывающие усилия. Эти усилия создают в поперечном сечении касательные напряжения.

Рассмотрим сначала условия равновесия элемента стержня.

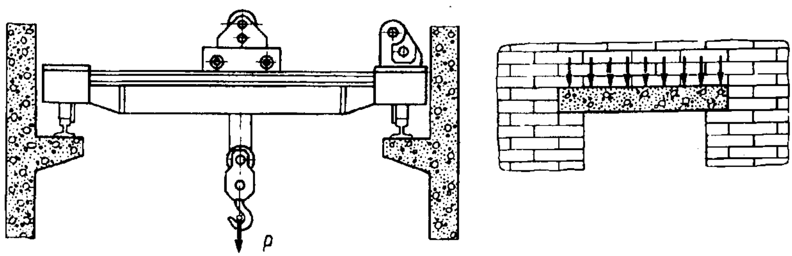


Рис. 8.24. Примеры изгиба стержней (балок) под действием поперечной нагрузки

Условия равновесия элемента стержня. Пусть в сечении (рис.8.25) действуют изгибающий момент $M_x = M(z)$ и перерезывающая сила $Q_y = Q(z)$. В простейших случаях, когда это не может вызвать недоразумений, индексы моментов и сил будем для краткости опускать. Направление силовых факторов предполагается положительным.

На стержень действует распределенная нагрузка $q(z)$, имеющая размерность силы, деленной на длину. Единицей распределенной нагрузки может быть, например, Н/м.

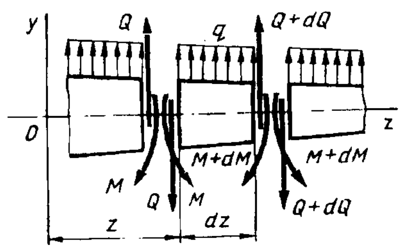


Рис. 8.25. Условия равновесия элемента стержня

Так как силовые факторы изменяются по длине стержня, то в сечении $z + dz$ действуют сила $Q + dQ$ и момент $M + dM$.

Рассмотрим равновесие элемента стержня, выделенного двумя поперечными сечениями; размер элемента вдоль оси стержня равен dz.

Проектируя все силы на вертикальное направление, находим

$$dQ + q\,dz = 0 \quad \text{или} \quad dQ / dz = -q . \tag{81}$$

Составим сумму моментов относительно оси x, лежащей в сечении $z + dz$:

$$-M - Q\,dz + \frac{1}{2} q\,dz^2 + M + dM = 0 .$$

Отбрасывая $q\,dz^2/2$ как бесконечно малую второго порядка, получаем

$$dM/dz = Q. \tag{82}$$

Производная изгибающего момента равна перерезывающей силе. Уравнения (81) и (82) образуют условия равновесия элемента стержня при изгибе.

Замечание. Полученные условия равновесия справедливы для стержня постоянного или переменного сечений, при любых свойствах материала стержня они являются прямым следствием состояния равновесия.

При движении с ускорением элемента стержня к распределенным усилиям следует добавить по принципу Д'Аламбера инерционные усилия.

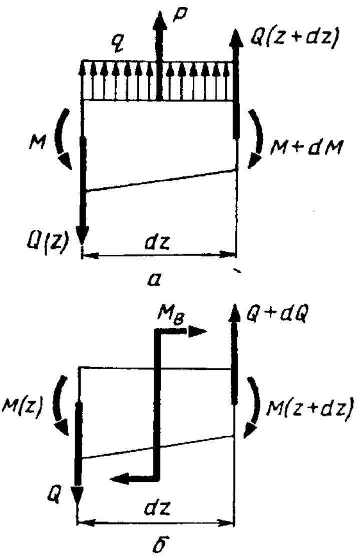


Рис. 8.26. Действие на элемент сосредоточенных силы (*а*) и момента (*б*)

Скачки перерезывающей силы и изгибающего момента. Допустим теперь, что в пределах элемента dz на стержень действует внешняя сосредоточенная сила P (рис.8.26,*а*).

Тогда из условия равновесия сил получаем

$$-Q(z) + q\,dz + P + Q(z + dz) = 0$$

или

$$Q(z + dz) = Q(z) - P. \tag{83}$$

В результате действия внешней сосредоточенной силы перерезывающая сила в сечении получает конечное приращение на участке dz — скачок, равный силе

$$\Delta Q = Q(z + dz) - Q(z) = -P. \tag{84}$$

В зависимости от направления действия силы P скачок может быть положительным ($Q(z + dz) > Q(z)$) или отрицательным. Если в пределах участка dz к стержню приложен сосредоточенный момент (рис.8.26,*б*), то из условия равновесия моментов получаем

$$-M(z) - Q\,dz + \frac{1}{2}q\,dz^2 + M_B + M(z + dz) = 0$$

или, отбрасывая бесконечно малые слагаемые,

$$M(z + dz) = M(z) - M_В, \tag{85}$$

где $M_В$ — внешний изгибающий момент. При действии внешнего изгибающего момента общий изгибающий момент получает конечное приращение на участке dz, т.е. скачок, равный приложенному моменту:

$$\Delta M = M(z + dz) - M(z) = -M_В. \tag{86}$$

Знак скачка зависит от направления момента $M_В$.

Замечание. Как уже отмечалось ранее (разд.2), представление о сосредоточенном воздействии силы является идеализацией. На рис.8.27,*а* и *б* показаны реальные случаи передачи силы и момента на стержень. Для расчетной схемы удобно представить, что участок Δl является малым, в пределе — бесконечно малым.

Условие равновесия элемента стержня при наличии распределенных изгибающих моментов. В некоторых случаях (рис.8.28) на стержень могут действовать распределенные моменты (например, от продольных сил, приложенных с эксцентриситетом относительно оси стержня). Условие равновесия для сил (уравнение (81)) остается без изменений, а для равновесия моментов получим

$$-M - Q\,dz + \frac{1}{2} q\,dz^2 - m\,dz + M + dM = 0.$$

Пренебрегая членами второго порядка малости, находим

$$dM / dz = Q + m, \tag{87}$$

где m — интенсивность распределенных моментов; величина m имеет размерность силы.

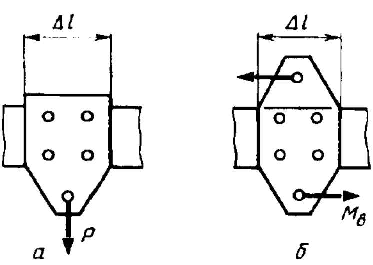


Рис. 8.27. Сосредоточенная сила (*а*) и момент (*б*), приложенные к стержню

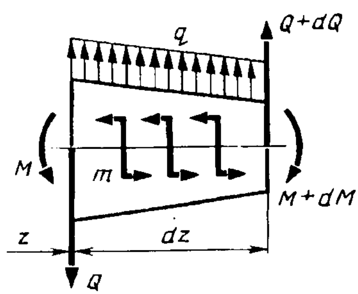


Рис. 8.28. Условия равновесия элемента стержня при наличии распределенных изгибающих моментов

Касательные напряжения изгиба. При изгибе от поперечных нагрузок в стержне возникают касательные напряжения, уравновешивающие перерезывающую силу. Рассмотрим плоский изгиб стержня (рис.8.29), происходящий в плоскости y, z; пусть ось y является осью

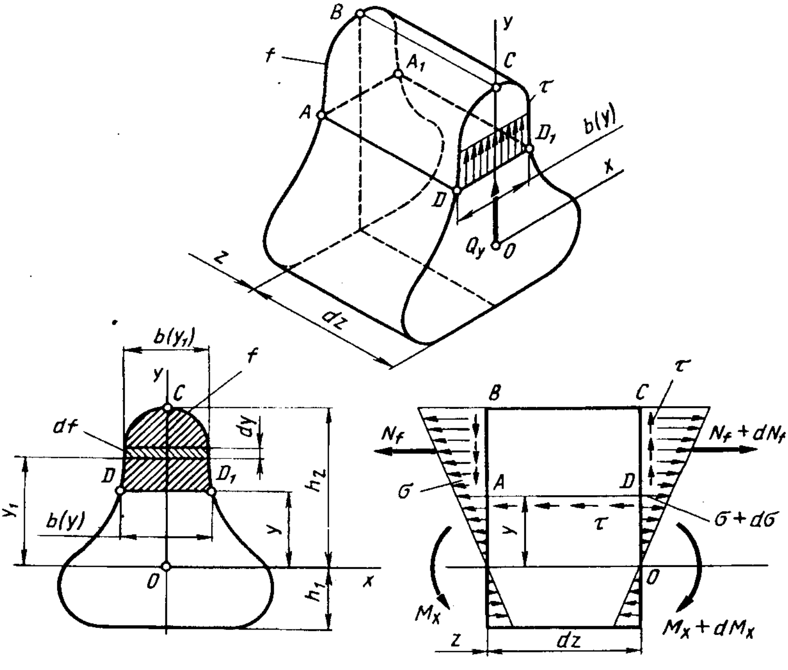


Рис. 8.29. Определение касательных напряжений изгиба

симметрии сечения. Основное допущение при определении касательных напряжений состоит в следующем: касательные напряжения направлены параллельно плоскости изгиба и распределены равномерно по прямой $y = \text{const}$ (т.е. постоянны по ширине сечения $b(y)$).

Рассмотрим два близких поперечных сечения на расстоянии dz. Оси x, y проходят через центр тяжести сечения, ось x является нейтральной линией (в точках этой линии $\sigma = 0$). Проведем сечение $y = \text{const}$ и рассмотрим равновесие отсеченной части элемента стержня (части ABA_1D_1CD). Вдоль линии DD_1 действуют касательные напряжения τ. Такие же напряжения в силу парности касательных напряжений должны действовать в площадке AA_1D_1D, размеры которой dz и $b(y)$.

Нормальные напряжения в сечении

$$\sigma = \frac{M_x(z)}{J_x(z)} y. \tag{88}$$

В общем случае изгибающий момент и момент инерции сечения могут зависеть от z. Нормальное усилие, действующее на рассматриваемую заштрихованную часть сечения, площадь которой составляет f, будет равно

$$N_f = \int_F \sigma \, dF = \int_y^{h_2} \sigma \, b(y_1)\, dy_1 , \tag{89}$$

где y_1 — переменная интегрирования ($y \le y_1 \le h_2$).

Внося значение напряжения из соотношения (88), находим

$$N_f = \frac{M_x(z)}{J_x(z)} \int_y^{h_1} y_1 b(y_1)\, dy_1 = \frac{M_x(z)\, S_f}{J_x(z)} , \tag{90}$$

где S_f — статический момент части сечения:

$$S_f = \int_y^{h_2} y_1 b(y_1)\, dy_1 . \tag{91}$$

В общем случае $S_f = S_f(y, z)$, так как величина $h_2 = h_2(z)$.

Выражения (88) и (90) справедливы для стержня с постоянным по сечению модулем упругости. Для стержня с переменным модулем упругости, симметрично распределенным относительно плоскости yz,

$$\sigma = \frac{E(z)\, M_x(z)}{B_x(z)} y , \tag{92}$$

где жесткость сечения стержня на изгиб

$$B_x = \int_F y^2 E \, df . \tag{93}$$

Нормальное усилие, приложенное к части сечения f,

$$N_f = \int_f \sigma \, dF = \frac{M_x(z)}{B_x(z)} S_{Ef} , \tag{94}$$

где S_{Ef} — упругостатический момент части сечения:

$$S_{Ef} = \int_f y E \, dF. \tag{95}$$

Рассмотрим теперь условие равновесия отсеченной части элемента стержня. Проектируя все силы на направление оси z, получаем

$$-N_f - \tau b \, dz + N_f + \frac{\partial N_f}{\partial z} dz = 0.$$

Приращение N_f выражено с помощью частной производной, так как величина N_f зависит также от y.

Далее получаем

$$\frac{\partial N_f}{\partial z} = \tau b. \tag{96}$$

Из последнего равенства вытекает важная формула

$$\tau = \frac{1}{b} \frac{\partial N_f}{\partial z}. \tag{97}$$

Замечания. 1. Физический смысл соотношений (96) и (97) состоит в следующем: касательные напряжения образуются вследствие необходимости уравновесить изменение осевых сил по длине стержня. Если в стержне постоянного сечения нормальные напряжения постоянны по длине, то никакие касательные напряжения не возникают.

2. В соответствии с равенствами (88) или (89) рассматриваются нормальные напряжения изгиба от действия внешних сил. В более общем случае, изучение которого опустим, нормальные напряжения могут быть связаны с действием продольных сил и (или) неравномерного нагрева. Если продольное усилие постоянно по длине, то оно не вызывает касательных напряжений.

Распределение касательных напряжений. Если модуль упругости постоянен по сечению стержня, то усилие, приложенное к части сечения, определяется по равенству (90). Теперь из соотношений (90) и (97) получаем

$$\tau = \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{M_x S_f}{J_x} \right). \tag{98}$$

Так как сечения стержня по длине предполагаются одинаковыми, то от z зависит лишь величина $M_x(z)$ и

$$\tau = \frac{dM_x}{dz}\frac{S_f}{bJ_x} = \frac{QS_f}{bJ_x}, \tag{99}$$

где по соотношению (82)

$$Q = \frac{dM_x}{dz}.$$

Важная для дальнейшего формула (99) называется формулой Журавского, по имени выдающегося русского инженера — специалиста в области моторостроения.

Покажем, что перерезывающая сила в сечении является равнодействующей касательных напряжений. Интегрируя равенство (99) по y, находим

$$\int_{-h_1}^{h_2} \tau b\, dy = \frac{Q}{J_x}\int_{-h_1}^{h_2} S_f\, dy = Q.$$

С помощью интегрирования по частям устанавливаем

$$\int_{-h_1}^{h_2} S_f\, dy = \int_{-h_1}^{h_2}\left(\int_{y}^{h_2} b(y_1)\, y_1\, dy_1\right) dy = \int_{-h_1}^{h_2} b(y)\, y^2 dy = J_x.$$

Для стержня с переменным модулем упругости

$$\tau = \frac{QS_{Ef}}{bB_x}. \tag{100}$$

Примеры. Рассмотрим распределение касательных напряжений в стержне прямоугольного сечения (рис.8.30). Статический момент отсеченной части

$$S_f = \int_{y}^{h/2} by_1\, dy_1 = \frac{1}{2} b\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right).$$

Перерезывающая сила в сечении стержня в соответствии с принятым правилом знаков

$$Q = -P.$$

Учитывая значение момента инерции сечения

$$J_x = bh^3/12,$$

по формуле (99) находим

$$\tau = -\frac{P}{bh}\left(\frac{3}{2} - 6\frac{y^2}{h^2}\right). \qquad (101)$$

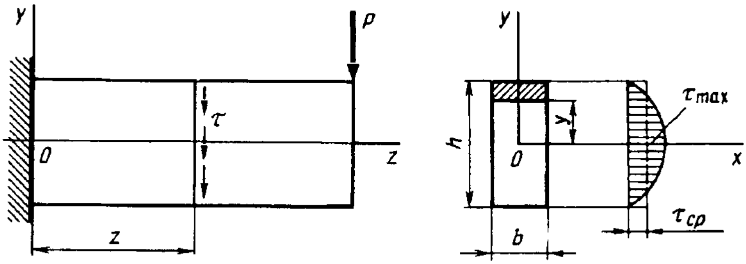


Рис. 8.30. Распределение касательных напряжений в стержне прямоугольного сечения

Знак минус означает, что касательные напряжения направлены противоположно вектору поперечного усилия Q (см.рис.8.28).

Максимальное (по модулю) касательное напряжение получается в точках оси x ($y = 0$) и равно

$$\tau_{\max} = \frac{3P}{2bh} = \frac{3}{2}\tau_{\text{ср}}, \qquad (102)$$

где $\tau_{\text{ср}} = P/(bh)$ — среднее касательное напряжение.

Рассмотрим теперь распределение касательных напряжений в стержне круглого сечения (рис.8.31).

Статический момент отсеченной части

$$S_f = 2\int_y^r y_1\sqrt{r^2 - y_1^2}dy_1 .$$

После замены переменных

$$y_1 = r\cos\theta, \quad dy_1 = -r\sin\theta\, d\theta$$

получаем

$$S_f = \frac{2}{3}r^3\sin^3\theta = \frac{2}{3}\left(\sqrt{r^2 - y^2}\right)^3 .$$

По формуле (99) находим при

$$J_x = \frac{\pi r^4}{4}, \quad b(y) = 2\sqrt{r^2 - y^2}$$

следующую зависимость для касательного напряжения:

$$\tau = -\frac{4Q}{3\pi r^2}\left(1 - \frac{y^2}{r^2}\right). \tag{103}$$

Максимальное касательное напряжение будет при $y = 0$:

$$\tau_{max} = \frac{4}{3}\frac{Q}{\pi r^2} = \frac{4}{3}\tau_{ср}, \tag{104}$$

где $\tau_{ср} = Q/(\pi r^2)$ — среднее касательное напряжение. Распределение касательных напряжений вдоль оси y показано на рис.8.31.

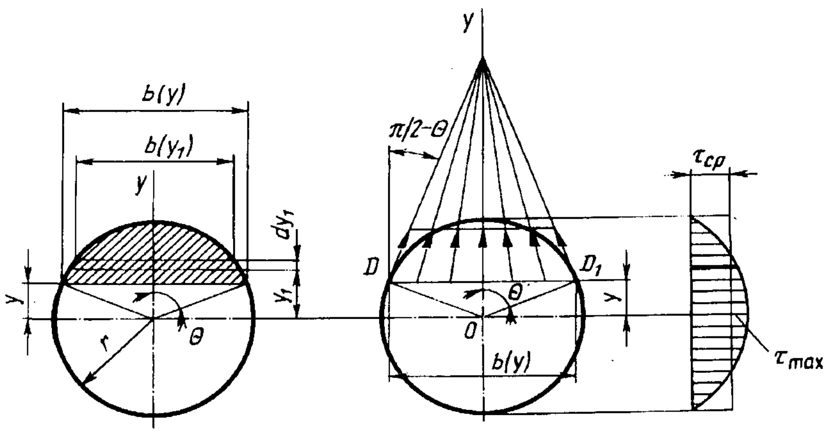


Рис. 8.31. Распределение касательных напряжений в стержне круглого сечения

Замечание. В рассматриваемом примере допущение о том, что касательные напряжения параллельны оси y, строго не выполняется. В крайних точках (точки D и D_1) вектор касательного напряжения должен быть направлен по касательной к контуру в силу свойства парности касательных напряжений (иначе должно действовать на свободной боковой поверхности стержня касательное напряжение). Поэтому допущение о постоянстве касательных напряжений по прямой можно заменить более общим условием: постоянство составляющих касательных напряжений вдоль оси y. Более строго следовало бы назвать величину τ по формуле Журавского осредненным значением касательного напряжения по прямой, параллельной оси x.

Касательные напряжения изгиба в тонкостенных стержнях. При анализе касательных напряжений изгиба в стержнях с массивным (компактным) поперечным сечением (см.рис.8.29) было сделано допущение об их равномерном распределении вдоль прямой $y=$ const. Было показано на примере круглого сечения (см.рис.8.31), что в ряде случаев такое допущение носит приближенный характер, так как вектор касательного напряжения в точках контура не направлен по касательной к контуру. Для стержней с тонкостенным сечением касательные напряжения изгиба можно определить более точно, так как их направление практически известно заранее. Они должны быть направлены вдоль средней линии тонкостенного профиля (рис.8.32). Так как толщина профиля δ мала, то касательные напряжения изгиба можно считать постоянными по толщине.

Таким образом, предполагается, что касательные напряжения направлены вдоль средней линии тонкостенного профиля и постоянны по толщине.

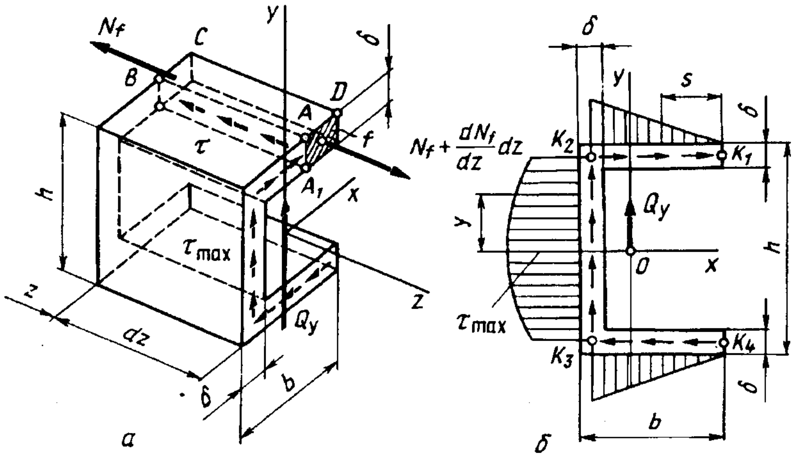


Рис. 8.32. Касательные напряжения при изгибе в тонкостенных стержнях

Рассматривается изгиб в плоскости y, z (см.рис.8.32). Для определения касательного напряжения отсекается часть элемента стержня, показанная на рис.8.32,*а*. Равнодействующая нормальных усилий, приложенных к площади отсеченной части f, обозначается, как и раньше, N_f. Из условия равновесия отсеченной части находим

$$\tau=\frac{1}{\delta}\frac{\partial N_f}{\partial z}. \tag{105}$$

Для стержня постоянного сечения с постоянными модулями упругости

$$N_f = \frac{M_x(z)\, S_f}{J_x}, \tag{106}$$

и тогда получаем формулу Журавского — Власова для тонкостенных стержней:

$$\tau = \frac{QS_f}{\delta J_x}. \tag{107}$$

Примеры. Рассмотрим стержень, имеющий сечение швеллерного типа, причем толщина стенки δ мала по сравнению с высотой h и шириной b (рис.8.32,*б*).

Момент инерции поперечного сечения

$$J_x = \frac{\delta h^3}{12} + \frac{1}{2} b\delta h^2 = \frac{\delta h^2}{12}(h + 6b).$$

Для определения касательных напряжений в верхней полке (участок K_1K_2) проведем сечение на расстоянии s (рис.8.32); площадь отсеченной части $f = s\delta$, статический момент $S_f = \frac{1}{2} s\delta h$. Касательное напряжение в верхней полке

$$\tau = \frac{Qh}{2J_x} s = \frac{6Qs}{h(h + 6b)} \tag{108}$$

пропорционально величине s.

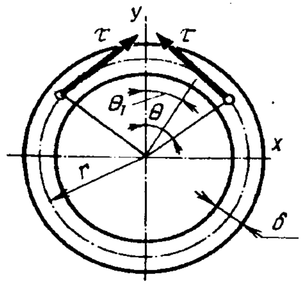
В вертикальной стенке на расстоянии y статический момент отсеченной части

$$S_f = \frac{1}{2} b\delta h + \frac{1}{2}\delta\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right).$$

Первый член правой части выражает статический момент верхней полки, второй — участка вертикальной стенки от y до $h/2$. Наибольшее касательное напряжение будет при $y = 0$:

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2}\,\frac{Q}{\delta h}\,\frac{h + 4b}{h + 6b}. \tag{109}$$

Распределение касательных напряжений показано на рис.8.32,*б*. Вертикальная стенка воспринимает существенную часть касательных напряжений, она полностью уравновешивает перерезывающее усилие Q.



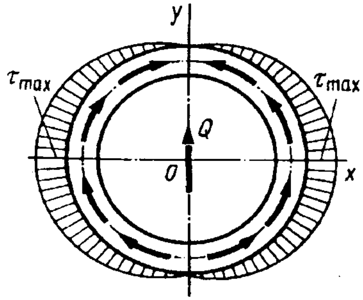


Рис. 8.33. Касательные напряжения при изгибе в тонкостенной трубе

Замечание. Внимательный читатель, по-видимому, обратил внимание на то, что поток касательных напряжений изгиба (см.рис.8.32) не только уравновешивает усилие Q, но и создает крутящий момент. Это означает, что при приложении внешней нагрузки в центр тяжести сечения стержень будет закручиваться.

Рассмотрим теперь касательные напряжения при изгибе тонкостенной трубы (рис.8.33,*а*). Толщина стенки δ считается малой по отношению к радиусу средней линии r.

Момент инерции сечения

$$J_x = \frac{1}{2} J_p = \frac{1}{2} 2\pi r\delta r^2 = \pi r^3\delta .$$

Отсеченную часть примем в виде части кольцевой области, соответствующей центральному углу 2θ; касательное напряжение

$$\tau(\theta) = \frac{QS_f}{2\delta J_x} . \qquad (110)$$

При $\delta \ll r$ статический момент

$$S_f = 2\int_0^{\theta} r\cos\theta_1 \delta r \, d\theta_1 = 2\delta r^2 \sin\theta ; \qquad (111)$$

касательное напряжение

$$\tau(\theta) = \frac{Q\, 2\delta r^2 \sin\theta}{2\delta\pi r^3\delta} = \frac{Q}{\pi r\delta}\sin\theta . \qquad (112)$$

Максимальное касательное напряжение (рис.8.33,*б*) будет при $\theta = \pi/2$ ($y = 0$):

$$\tau_{max} = \frac{Q}{\pi r\delta} = 2\tau_{cp} , \qquad (113)$$

где $\tau_{cp} = Q/(2\pi r\delta)$ — среднее касательное напряжение.

Роль касательных напряжений при изгибе стержня. Обычно для достаточно длинных стержней касательные напряжения малы по сравнению с нормальными напряжениями изгиба.

Например, для консольного стержня постоянного сечения наибольшие нормальные и касательные напряжения равны

$$\sigma_{max} = \frac{6Pl}{bh^2}, \quad \tau_{max} = \frac{3P}{2bh}.$$

Отношение

$$\frac{\tau_{max}}{\sigma_{max}} = \frac{1}{4}\frac{h}{l}$$

уменьшается по мере увеличения длины стержня l.

Влияние касательных напряжений на прочность балок из обычных конструкционных материалов проявляется только в коротких стержнях ($l \le 2h$). Для композиционных материалов влияние касательных напряжений изгиба оказывается более существенным, так как их сопротивление сдвигу обычно значительно меньше, чем сопротивление растяжению и сжатию. Однако основное значение касательных напряжений состоит в том, что они обеспечивают совместную деформацию всех частей стержня при его изгибе.

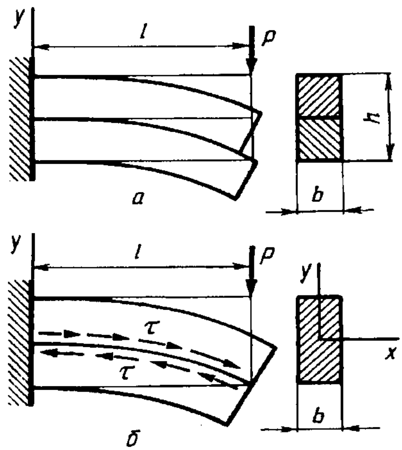


Рис. 8.34. Касательные напряжения при изгибе консольного стержня

На рис.8.34 изображены два случая изгиба консольного стержня. В первом случае (рис.8.34,*а*) связь двух половин нарушена и стержень изгибается так, что каждая часть воспринимает половину нагрузки. Во втором случае (рис.8.34,*б*) части стержня спаяны и сечение остается при изгибе плоским.

Для двух параллельно работающих стержней максимальное напряжение изгиба

$$\sigma_{1\,max} = \frac{6}{2}\frac{Pl}{b(h/2)^2} = \frac{12Pl}{bh^2}.$$

Во втором случае

$$\sigma_{2\,max} = \frac{6Pl}{bh^2} = \frac{1}{2}\sigma_{1\,max}.$$

При отсутствии касательных напряжений изгиба на поверхности контакта нормальные напряжения изгиба в рассматриваемом случае возрастают в два раза!

В еще большей степени падает жесткость стержня на изгиб.

Для первого случая суммарный момент инерции

$$J_1 = 2\frac{b\,(h/2)^3}{12} = \frac{bh^3}{48}; \qquad (114)$$

при совместном деформировании

$$J_2 = \frac{bh^3}{12}, \qquad (115)$$

что превышает J_1 в четыре раза!

Отметим, что при изгибе стержня моментами (так называемый чистый изгиб стержня) касательные напряжения не возникают (рис.8.35). Совместная деформация всех частей стержня обеспечивается наличием жестких пластинок по торцам стержня или линейным распределением внешних нагрузок в концевых сечениях в соответствии с гипотезой плоских сечений. В этом случае можно считать, что продольные волокна стержня работают независимо. Учет касательных напряжений в изгибе важен при расчете стержней (балок) составного сечения. На рис.8.36 показана балка, состоящая из стенки, на которой закреплены стержни уголкового профиля.

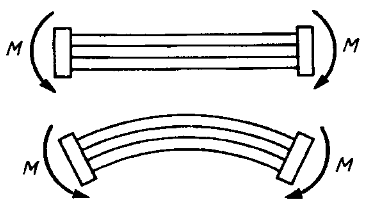


Рис. 8.35. Изгиб стержня моментами, при котором касательные напряжения не возникают

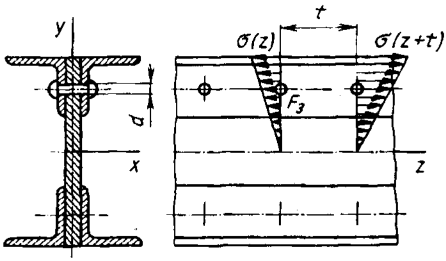


Рис. 8.36. Касательные напряжения при изгибе составных балок

Сечение работает на изгиб совместно, так как через заклепки передается касательное усилие S_3:

$$S_3 = N_f(z) - N_f(z+t) = \frac{QS_f}{J_x} t, \qquad (116)$$

где t — шаг заклепок (расстояние между заклепками); S_f — статический момент уголка; J_x — момент инерции всего сечения стержня относительно оси x.

Напряжение среза в заклепке

$$\tau_з = \frac{S_з}{F_з} = \frac{QS_f t}{F_з J_x}, \qquad (117)$$

где $F_з$ — площадь сечения заклепки.

Распределение касательных напряжений изгиба имеет важное значение при армировании (укреплении) материала прочными волокнами (в композиционных материалах, армированном бетоне и др.). Прочные волокна должны располагаться по линиям действия главных напряжений.

29. Изгиб и растяжение стержней с учетом деформаций пластичности и ползучести

Применение гипотезы плоских сечений. Деформации пластичности и ползучести могут достигать сравнительно больших величин (примерно 5-10% и более). Возникает вопрос о возможности использования гипотезы плоских сечений.

Опыты по пластическому деформированию полосы свидетельствуют, что гипотеза практически пригодна при деформациях порядка десятков процентов. На рис.8.37 показаны полосы (риски), нанесенные на боковую поверхность стержня при изгибе на круглой оправке; после значительного изгиба риски остаются прямыми. Гипотеза плоских сечений связана с кинематической картиной деформации при изгибе изотропных материалов. Практически установлено, что она применима при работе материала в стадии пластичности и ползучести.

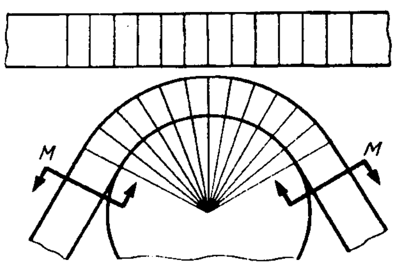


Рис. 8.37. Экспериментальное подтверждение гипотезы плоских сечений при больших деформациях

Схематизация кривой деформирования. Если при изгибе и растяжении в упругой области использовалась линейная зависимость напряжений и деформаций, то при пластичности в основу принимается кривая деформирования (рис.8.38,*а*)

$$\sigma = f\ (\varepsilon)\ . \qquad (118)$$

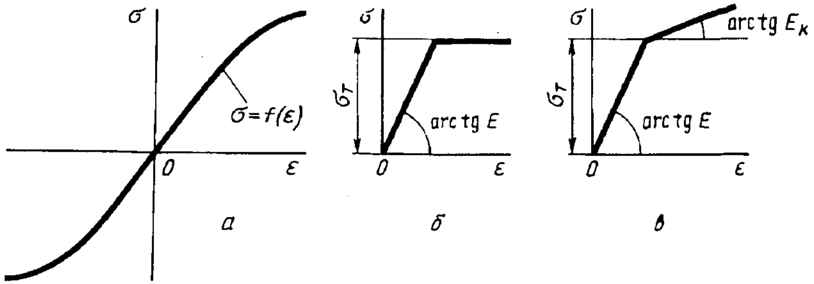


Рис. 8.38. Кривые деформирования и их схематизации

В общем случае зависимость (118) может быть различной при растяжении и сжатии. Для расчета часто принимаются схематизированные кривые деформирования (рис.8.38), причем одинаковые в области растяжения и сжатия.

Кривая, имеющая при $\sigma = \sigma_т$ ($\sigma_т$ — предел текучести) горизонтальный участок, описывает пластичность без упрочнения (рис. 8.38,*б*); используется кривая деформирования с линейным упрочнением (рис.8.38,*в*). Учет пластичности материала, если исключить процессы разгрузки, может быть использован для описания изгиба стержней из нелинейно-упругого материала.

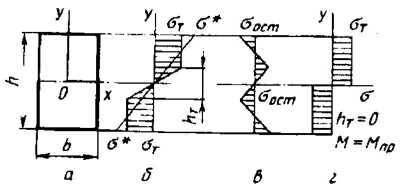


Рис. 8.39. Упругопластическая деформация стержня прямоугольного сечения (пластичность без упрочнения)

Изгиб стержней при пластичности без упрочнения. Предельный изгибающей момент. Рассмотрим сначала стержень прямоугольного сечения. Это наиболее простой случай,который помогает выяснить основные особенности задачи (рис.8.39,*а*).

Пусть на стержень действует изгибающий момент M. Если наибольшее значение напряжения изгиба

$$\sigma_{max} = \frac{6M}{bh^2} \le \sigma_т \qquad (119)$$

или

$$M \le \frac{\sigma_т b h^2}{6},$$

то стержень работает при упругих деформациях.

При возрастании M в наиболее удаленных от нейтральной линии ($y = h/2$) точках возникнет пластическая деформация и напряжение изгиба станет равным $\sigma_т$ (рис.8.39,*б*, пластичность без упрочнения). Пусть при данном значении момента пластические деформации занимают область $\frac{1}{2}h_т < |y| < \frac{1}{2}h$. При $|y| < \frac{h_т}{2}$ в области упругости напряжения изменяются по линейному закону:

$$\sigma = \sigma_т \frac{2y}{h_т}. \tag{120}$$

Из условия равновесия

$$\int_F \sigma_y \, dF = M$$

находим

$$2b\int_{h_т/2}^{h/2} \sigma_т y\,dy + 2b\int_0^{h_т/2} \frac{2\sigma_т}{h_т} y^2\,dy = \frac{\sigma_т b}{4}(h^2 - h_т^2) + \sigma_т b\frac{h_т^2}{12} = M.$$

Из последнего равенства получаем

$$\frac{b\sigma_т}{12}h_т^2 = \frac{b\sigma_т h^2}{4} - M \tag{121}$$

или

$$h_т = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{\sigma_т b}}\sqrt{\frac{1}{4}\sigma_т b h^2 - M}. \tag{122}$$

Так как $h_т \ge 0$, то предельное значение изгибающего момента равно

$$M_{пр} = \frac{1}{4}\sigma_т b h^2. \tag{123}$$

Легко проверить, что такое значение M получается при распределении напряжений изгиба по рис.8.39,*г*.

Сечение стержня из материала без упрочнения в стадии пластичности не может воспринять момент $M > M_{пр}$: в сечении образуется пластический шарнир (точнее, сечение представляет собой шарнир, в котором действует «момент трения», равный $M_{пр}$).

Остаточные напряжения. Определим остаточные напряжения в стержне после снятия момента, вызвавшего пластическую деформацию. Если материал стержня идеально упругий, то момент M приведет к напряжениям

$$\sigma^* = \frac{12M}{bh^3} y .$$

По такой зависимости будут убывать напряжения при снятии момента, так как при разгрузке деформации становятся упругими.

Остаточные напряжения (рис.8.39,*в*).

$$\sigma_{ост} = \sigma - \sigma^* , \qquad (124)$$

где σ — напряжения при упругопластических деформациях; значения σ и σ^* соответствуют одному и тому же изгибающему моменту, причем σ^* — напряжение в идеально упругом теле (такое тело деформируется по законам упругости при любом уровне напряжений).

Общий случай расчета стержня в упругопластической стадии. Метод переменных параметров упругости. Расчет проводится по формуле (17) с помощью последовательных приближений (рис.8.40).

В первом приближении материал считается (идеально) упругим ($E^{(1)} = E$) и находится напряжение

$$\sigma_*^{(1)} = \frac{N}{F} + y\frac{M_x}{J_x} - x\frac{M_y}{J_y} . \qquad (125)$$

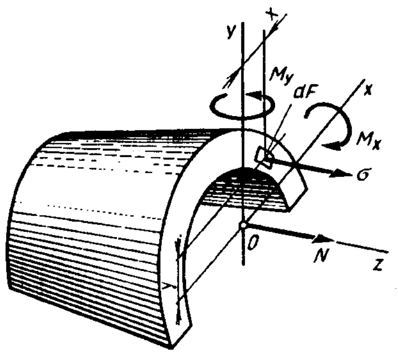


Рис. 8.40. Общий случай изгиба в упругопластической стадии

Звездочка в индексе означает, что напряжения относятся к упругому материалу. Далее по кривой деформирования находим

$$\varepsilon^{(1)} = \sigma_*^{(1)} / E \qquad (126)$$

и соответствующее значение $\sigma^{(1)}$.

Во втором приближении принимаем в каждой точке сечения

$$E^{(2)} = \sigma^{(1)} / \varepsilon^{(1)} . \qquad (127)$$

Теперь заново находим положение приведенного центра тяжести и главных осей сечения. Напряжение второго приближения

$$\sigma_*^{(2)} = E^{(2)}\left\{\frac{N}{A^{(2)}} + y\frac{M_x}{B_x^{(2)}} - x\frac{M_y}{B_y^{(2)}}\right\}, \tag{128}$$

где

$$A^{(2)} = \int_F E^{(2)}\,dF, \quad B_x^{(2)} = \int_F y^2 E^{(2)}\,dF, \quad B_y^{(2)} = \int_F x^2 E^{(2)}\,dF.$$

Далее находим

$$\varepsilon^{(2)} = \sigma_*^{(2)} / E^{(2)}$$

и значение «модуля упругости» для следующего приближения:

$$E^{(3)} = \sigma^{(2)} / \varepsilon^{(2)}. \tag{129}$$

Расчет заканчивается при достаточной близости двух соседних приближений

$$|\,\sigma^{(n)} - \sigma^{(n-1)}\,| < \Delta_1 \tag{130}$$

и при условии, что изображающая точка лежит на кривой деформирования:

$$|\,\sigma_*^{(n)} - \sigma^{(n)}\,| < \Delta_2. \tag{131}$$

Величины Δ_1 и Δ_2, имеющие размерность напряжений, характеризуют необходимую точность расчета (обычно $\Delta_1 = \Delta_2 = 5 \div 10$ МПа).

Учет деформации ползучести при изгибе стержня. Сведения о ползучести материала получаются из сетки кривых ползучести при различных напряжениях и температурах. Расчет на ползучесть по теории старения сводится к построению изохронных кривых ползучести, которые рассматриваются как условные кривые деформирования. Распределение напряжений такое же, как при учете упругопластических деформаций (рис.8.41).

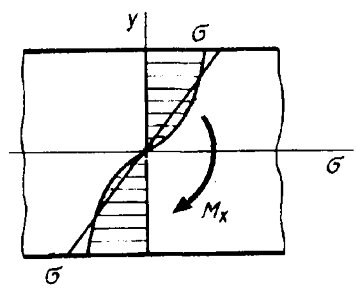


Рис. 8.41. Распределение напряжений изгиба при установившейся ползучести (стержень имеет прямоугольное или другое двусимметричное сечение)

Если нагрузки на стержень остаются неизменными во времени, то после обычно непродолжительного первоначального периода наступает *установившаяся ползучесть*. При установившейся ползучести скорость ползучести выражается следующей зависимостью:

$$V_0 = \frac{d\varepsilon}{dt} = B(T)\,\sigma^{n(T)}, \tag{132}$$

где положительные параметры B и n зависят от температуры.

Рассмотрим общий случай, когда на неравномерно нагретый стержень действует переменная по времени нагрузка. Ограничимся для простоты изучением изгиба стержней, сечения которых обладают осью симметрии. Нагружение разбивается по времени на этапы $\Delta_1 t,\ \Delta_2 t, \ldots, \Delta_n t$.

Пусть за время от t_i до t_{i+1} изгибающий момент в сечении стержня и растягивающая сила получили приращения $\Delta_i M_x$ и $\Delta_i N$.

Приращение деформаций на i-м этапе нагружения

$$\Delta_i \varepsilon = \frac{\Delta_i \sigma}{E} + \Delta_i(\alpha T) + \Delta_i \varepsilon^c. \tag{133}$$

Первый член правой части соответствует приращению упругой деформации, второй — температурной, третий — приращению деформации ползучести.

Используя гипотезу плоских сечений и уравнения равновесия, как при выводе формул (17), получим

$$\Delta_i \sigma = E\left\{\frac{\Delta_i N}{\int\limits_F E\,dF} + y\frac{\Delta_i M_x}{\int\limits_F y^2 E\,dF}\right\} + \Delta_i \sigma_{\text{темп}} + \Delta_i \sigma_{\text{пол}}, \tag{134}$$

где приращение температурных напряжений

$$\Delta_i \sigma_{\text{темп}} = E\left\{\frac{\int\limits_F \Delta_i \alpha T\,dF}{\int\limits_F E\,dF} + y\frac{\int\limits_F y\Delta_i \alpha T\,dF}{\int\limits_F y^2 E\,dF} - \Delta_i \alpha T\right\}. \tag{135}$$

Аналогично определяется приращение напряжений, вызванное деформацией ползучести:

$$\Delta_i \sigma_{\text{пол}} = E\left\{\frac{\int\limits_F \Delta_i \varepsilon^c\,dF}{\int\limits_F E\,dF} + y\frac{\int\limits_F y\Delta_i \varepsilon^c\,dF}{\int\limits_F y^2 E\,dF} - \Delta_i \varepsilon^c\right\}. \tag{136}$$

Суммарные напряжения и деформации в стержне после i-го этапа нагружения в момент времени t_{i+1} равны соответственно

$$\sigma(t_{i+1}) = \sigma(t_i) + \Delta_i \sigma, \quad \varepsilon(t_{i+1}) = \varepsilon(t_i) + \Delta_i \varepsilon .$$

Остается конкретизировать приращение деформации ползучести. Оно определяется по напряжениям, деформациям и температурам в начале этапа нагружения, так как сами этапы считаются достаточно малыми:

$$\Delta_i \varepsilon^c = V_0 [\, \sigma(t_i),\ T(t_i),\ \varepsilon^c(t_i) \,] \Delta_i t, \tag{137}$$

где V_0 — скорость ползучести, соответствующая начальному этапу нагружения и определяемая по кривым ползучести.

Расчет проводится последовательно, начиная с первого этапа.

30. Модели прочностной надежности при изгибе

Назначение и структура моделей. Модели прочностной надежности используются при выборе материала и размеров конструкции, технологии изготовления, обеспечивающих отсутствие отказов (разрушений) при определенных условиях эксплуатации в течение заданного времени. Общая структура моделей приведена на рис.1.2.

Рассматривается частный случай моделей для элементов конструкций,которые могут быть представлены в виде стержней при деформации изгиба. Главным при построении моделей прочностной надежности является характер нагружения.

Модель прочностной надежности при статической нагрузке по разрушающим усилиям. Статическое нагружение означает постепенное возрастание нагрузки до максимального значения. Модель статического нагружения является идеализированной, так как в чистом виде практически встречается редко. Наиболее близкими к условиям статических нагружений являются условия работы несущих стержней (балок) в строительных сооружениях (зданиях) при воздействии силы тяжести. В машиностроении модель статического нагружения (статической прочности) используется главным образом для определения статических разрушающих нагрузок или для сравнительных оценок напряженности.

Детерминированные модели прочностной надежности содержат определение запасов прочности по разрушающим усилиям и сопоставление их с рекомендуемыми значениями. Для пластичных материалов запас по разрушающей нагрузке

$$n = \frac{M_{\text{разр}}}{M_{\max}} \geq [\, n_{\text{р}} \,], \tag{138}$$

где $M_{разр}$ — изгибающий момент в сечении, вызывающий разрушение стержня; M_{max} — наибольший изгибающий момент в рассматриваемом сечении стержня при наиболее неблагоприятном сочетании внешних нагрузок; $[n_р]$ — допустимое значение запаса прочности по разрушающим усилиям (обычно $[n_р] = 1{,}4 \div 2$).

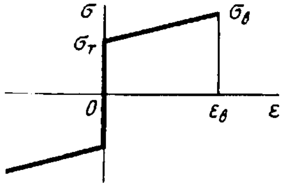


Рис. 8.42. Схематизированная диаграмма деформирования при наличии больших пластических деформаций (жестко-пластическое тело)

Величина $M_{разр}$ определяется из условия, что при распределении напряжений с учетом пластических деформаций напряжение изгиба достигает предела прочности материала (рис.8.42).

Для материала, обладающего площадкой текучести или слабым упрочнением (алюминиевые сплавы и некоторые высоколегированные стали), принимают (прямоугольное сечение, формула (123))

$$M_{разр} = \sigma_т \frac{1}{4} bh^2 = \sigma_т W_т , \qquad (139)$$

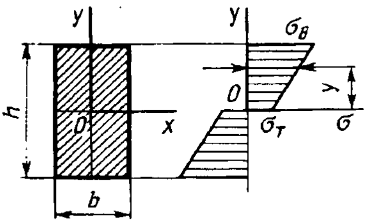


рис. 8.43. Распределение напряжений при действии разрушающего момента

где $W_т = \frac{1}{4} bh^2$ — пластический момент сопротивления прямоугольного сечения.

При наличии упрочнения в пластической области разрушающий момент изгиба определяется по схематизированной диаграмме деформирования. В крайней точке прямоугольного сечения ($y = \frac{1}{2} h$) возникает напряжение, равное пределу прочности $\sigma_в$ (рис.8.43).

Распределение напряжений при действии разрушающего момента имеет вид

$$\sigma = \sigma_т + (\sigma_в - \sigma_т) \frac{2y}{h} . \qquad (140)$$

Из условия

$$\int_{-h/2}^{h/2} y \sigma_y b \, dy = M_{разр} \qquad (141)$$

находим

$$M_{\text{разр}} = 2\int_0^{h/2} [\,\sigma_{\text{т}} + (\sigma_{\text{в}} - \sigma_{\text{т}})\frac{2y}{h}\,]\,y\,b\,dy$$

или

$$M_{\text{разр}} = \sigma_{\text{т}} W_{\text{т}} + (\sigma_{\text{в}} - \sigma_{\text{т}})W, \tag{142}$$

где $W = bh^2/6$ — момент сопротивления стержня прямоугольного сечения в упругой области.

Отметим, что при выводе формулы (142) для разрушающего момента изгиба изменением сечения стержня в процессе деформации пренебрегали. Основная область применения прочностных моделей по разрушающим усилиям — однократное статическое нагружение достаточно пластичных материалов. Это связано с тем, что при определении запаса прочности предполагается перераспределение напряжений с учетом пластических деформаций.

Модель прочностной надежности при статической нагрузке по напряжениям. Рассмотренный выше запас по разрушающим усилиям является интегральной характеристикой предельного опасного состояния материала стержня по всему сечению. Вместе с тем для малопластичных материалов или для всех конструкционных материалов, но при повторном статическом нагружении разрушение носит локальный характер и начинается в наиболее напряженных точках сечения. Детерминированная модель прочностной надежности содержит условие для запасов прочности:

$$n = \frac{\sigma_{\text{в}}}{\sigma_{\max}} \geq [\,n_{\text{c}}\,], \tag{143}$$

где $\sigma_{\text{в}}$ — предел прочности материала; $\sigma_{\max}$ — наибольшее напряжение (изгиба); $[\,n_{\text{c}}\,]$ — допустимое значение запаса статической прочности по напряжениям (обычно $n_{\text{c}} = 1{,}3 \div 2{,}5$).

В общем случае при действии нормальных и касательных напряжений изгиба модель прочностной надежности имеет вид

$$n = \frac{\sigma_{\text{в}}}{\sigma_{e\,\max}} \leq [\,n_{\text{c}}\,]. \tag{144}$$

Наибольшее эквивалентное напряжение принимается в виде

$$\sigma_{e\,\max} = \sigma_{i\,\max}, \tag{145}$$

где σ_i — интенсивность напряжений:

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}\,. \tag{146}$$

Модель прочностной надежности при переменной нагрузке. На элемент конструкции (рис.8.44) действует переменное усилие:

$$P(t) = P_a \cos \omega t; \tag{147}$$

где ω — круговая частота нагружения; t — время. Частота нагружения

$$f = \omega / (2\pi)\,. \tag{148}$$

Опасным сечением в рассматриваемом элементе является сечение AA_1, где начинается переход к более прочному участку.

Напряжения изгиба в точках A и A_1 в момент времени t

$$\sigma(t) = \frac{P(t)\, l}{W} = \frac{P_a l}{W} \cos \omega t = \sigma_a \cos \omega t\,,$$

где σ_a — амплитудное значение переменного напряжения:

$$\sigma_a = P_a l / W\,. \tag{149}$$

Момент сопротивления прямоугольного сечения

$$W = bh^2 / 6\,.$$

Величина σ_a представляет номинальное (условное) значение амплитуды переменных напряжений (разд.14), так как в точках перехода A и A_1 имеется концентрация напряжений. Наибольшее амплитудное значение переменного напряжения изгиба

$$\sigma_{a\,\max} = \alpha_\sigma \sigma_a\,, \tag{150}$$

где α_σ— коэффициент концентрации напряжений; значение α_σ определяется методами теории упругости аналитически или численными методами.

В инженерных расчетах часто используется зависимость

$$\alpha_\sigma \approx 1 + k\frac{h}{r}\,, \tag{151}$$

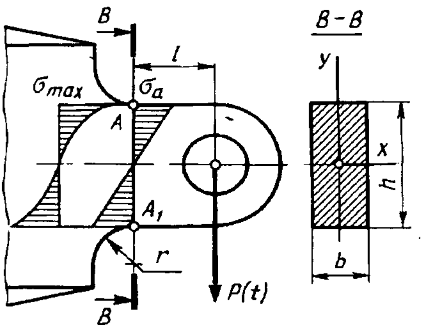


Рис. 8.44. Модель прочностной надежности при переменном изгибе

где r — радиус скругления; коэффициент k обычно принимают равным 0,15-0,20.

Рассмотрим модель прочностной надежности при большом числе нагружений (число циклов нагружения $N > 10^6$), что соответствует длительности нагружения (в часах)

$$t > \frac{10^6}{3{,}6 \cdot 10^3 f} = \frac{10^3}{3{,}6 f}.$$

Иными словами, рассмотрим модель надежности при усталостном разрушении. Детерминированная модель прочностной надежности состоит в условии

$$n_a = \frac{\sigma_{-1\,\text{д}}}{\sigma_a} \geq [\,n_a\,], \tag{152}$$

где $\sigma_{-1\,\text{д}}$ — предел выносливости детали, определяемый для базового числа циклов N_0 (обычно $N_0 \approx 2 \cdot 10^7$); σ_a — наибольшее (номинальное) напряжение (амплитудное значение переменного напряжения в опасной точке); $[\,n_a\,]$ — допустимый запас усталостной прочности (обычно $[\,n_a\,]=2\div4$).

Величина $\sigma_{-1\,\text{д}}$ определяется с помощью натурных испытаний элемента конструкции на усталость. При невозможности или нецелесообразности подобных испытаний величина $\sigma_{-1\,\text{д}}$ оценивается расчетным путем по формуле (см.разд.14)

$$\sigma_{-1\,\text{д}} = \frac{\beta\varepsilon}{K_\sigma}\sigma_{-1}, \tag{153}$$

где σ_{-1} — предел выносливости материала, определяемый на гладких образцах, изготовленных по стандартной технологии; β и ε — коэффициенты, характеризующие поверхностный слой и влияние абсолютных размеров; K_σ — эффективный коэффициент концентрации напряжений (разд.14).

Детерминированная и статистическая модели усталостной прочности лопатки компрессора или турбины, вероятность разрушения. Основная причина разрушения лопаток компрессора или турбин в эксплуатации — изгибные колебания, возникающие в результате неравномерности потока воздуха или газа (рис.8.45). Детерминированная модель усталостной прочности состоит в условии

$$n_a = \sigma_{-1\,\text{д}} / \sigma_a \geq [\,n_a\,], \tag{154}$$

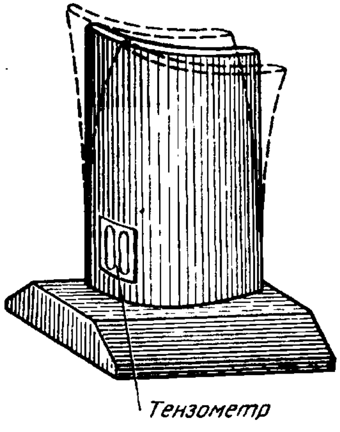


Рис. 8.45. Определение переменных напряжений в лопатке компрессора при изгибных колебаниях

где $\sigma_{-1\text{д}}$ — экспериментально определенный предел выносливости лопатки на базе $2 \cdot 10^7$ циклов; σ_a — экспериментально замеренное с помощью проволочных тензометров (тензорезисторов) наибольшее переменное напряжение при изгибных колебаниях.

Так как предел выносливости и амплитуда действующих напряжений имеют рассеяние, то обычно указываются условия их определения. В «запас прочности» значение $\sigma_{-1\text{д}}$ принимается наименьшим по техническим условиям или по нескольким испытаниям, тогда как значение σ_a принимается наибольшим среди измеренных. Более полно рассеяние результатов экспериментальных исследований учитывается в *статической модели надежности*, с помощью которой определяют вероятность разрушения.

На рис.8.46 представлены плотности распределения пределов выносливости и амплитуды переменных напряжений в лопатках определенного типа турбомашин. Величины $\sigma_{-1\text{д}}$ и σ_a выражают средние значения для всей совокупности лопаток.

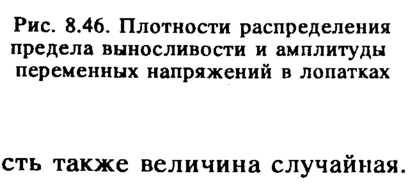


Рис. 8.46. Плотности распределения предела выносливости и амплитуды переменных напряжений в лопатках

Рассеяние $\sigma_{-1\text{д}}$ связано с неизбежными отклонениями свойств материала и технологии изготовления; разброс σ_a вызывается различными условиями возбуждения и демпфирования колебаний. Все это дает основание рассматривать для каждой конкретной лопатки величины $\sigma_{-1\text{д}}$ и σ_a как случайные.

Разность случайных величин

$$\zeta = \sigma_{-1\text{д}} - \sigma_a \qquad (155)$$

есть также величина случайная. Вероятность разрушения

$$p_{\text{разр}} = p\,(\zeta < 0) = F(\zeta) \qquad (156)$$

равна вероятности того, что случайная величина ζ окажется отрицательной; $F(\zeta)$ — функция распределения случайной величины ζ.

Предполагая, что $\sigma_{-1\,д}$ и σ_a имеют нормальное распределение, найдем

$$F(\zeta) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{\zeta - \zeta}{s_\zeta}\right), \tag{157}$$

где $\Phi(x)$ — функция Лапласа:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{1}{2}u^2}\, du\,. \tag{158}$$

Среднее значение и среднеквадратичное отклонение равны соответственно

$$\zeta = \bar{\sigma}_{-1\,д} - \bar{\sigma}_a\,, \tag{159}$$

$$s_\zeta = \sqrt{s^2_{\sigma_{-1\,д}} + s^2_{\sigma_a}}\,, \tag{160}$$

где $s_{\sigma_{-1\,д}}$, s_{σ_a} — среднеквадратичные отклонения случайных величин $\sigma_{-1\,д}$ и σ_a. При определении s_ζ случайные величины $\sigma_{-1\,д}$ и σ_a предполагались независимыми.

Вероятность разрушения

$$p_{разр} = F(0) = \frac{1}{2} + \Phi\left(-\frac{\zeta}{s_\zeta}\right) = \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{\zeta}{s_\zeta}\right). \tag{161}$$

Статистическая модель усталостной прочности представляет собой условие

$$p_{разр} \le [p_{разр}]\,, \tag{162}$$

где $[p_{разр}]$ — допустимое значение вероятности разрушения (обычно $[p_{разр}] = 10^{-6} \div 10^{-3}$).

Значение $p_{разр}$ определяется величиной

$$\frac{\zeta}{s_\zeta} = \frac{\bar{\sigma}_{-1\,д} - \bar{\sigma}_a}{\sqrt{s^2_{\sigma_{-1\,д}} + s^2_{\sigma_a}}} = \frac{\bar{n}_a - 1}{\sqrt{\bar{n}_a^2\,\vartheta^2_{\sigma_{-1\otimes}} + \vartheta^2_{\sigma_\alpha}}}\,,$$

где $\bar{n}_a = \bar{\sigma}_{-1\,д} / \bar{\sigma}_a$ — запас прочности по средним значениям; $\vartheta_{\sigma_{-1\otimes}} = s_{\sigma_{-1\,д}} / \bar{\sigma}_{-1\,д}$, $\vartheta_{\sigma_\alpha} = s_{\sigma_a} / \bar{\sigma}_a$ — коэффициенты вариации случайных величин $\sigma_{-1\,д}$ и σ_a.

Связь вероятности разрушения и запаса прочности (по средним значениям) выражается равенством

$$p_{\text{разр}} = \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{\bar{n}_a - 1}{\sqrt{\bar{n}_a^2 \vartheta^2_{\sigma_{-1\otimes}} + \vartheta^2_{\sigma_\alpha}}}\right). \tag{163}$$

Для лопаток компрессоров и турбин коэффициенты вариации обычно составляют

$$\vartheta_{\sigma_{-1\otimes}} \approx 0{,}1 \div 0{,}2; \quad \vartheta_{\sigma_\alpha} = 0{,}1 \div 0{,}3.$$

Модель прочностной надежности валов. Валы являются ответственными высоконагруженными элементами машин. При построении моделей прочностной надежности рассматривается «опасное сечение» вала, в котором имеется точка с наибольшими напряжениями (точка A на рис.8.47).

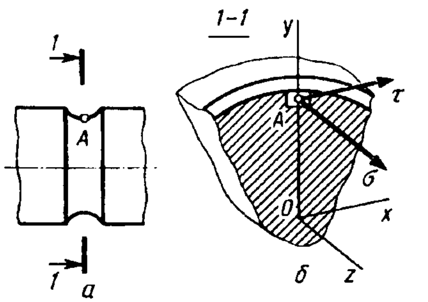


Рис. 8.47. Модель прочностной надежности вала:
а — опасное сечение вала; *б* — нормальное σ и касательное τ напряжения в опасной точке вала

Обычно наиболее важным оказывается обеспечение надежности при переменных напряжениях с асимметричным циклом. В опасной точке действуют нормальное и касательное напряжения. Рассмотрим сначала случаи, когда эти напряжения изменяются по симметричному циклу (т.е. не имеют постоянных составляющих). Условие усталостной прочности для гладкого участка вала (при отсутствии концентрации напряжений) имеет вид

$$\sigma^*_{ia} = \sqrt{\sigma_a^{*2} + 3\tau_a^{*2}} = \sigma_{-1}, \tag{164}$$

где σ^*_a, τ^*_a — значения амплитуд переменных напряжений в момент разрушения.

Если σ_a и τ_a — амплитуды действующих переменных напряжений, то в момент разрушения

$$\sigma^*_a = n_a \sigma_a, \quad \tau^*_a = n_a \tau_a. \tag{165}$$

Запас усталостной прочности из соотношений (164) и (165) будет таким:

$$n_a = \frac{\sigma_{-1}}{\sqrt{\sigma_a^2 + 3\tau_a^2}} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{ia}}. \tag{166}$$

Модель прочностной надежности имеет вид

$$n_a \geq [n_a]. \tag{167}$$

При наличии концентрации напряжений и с учетом влияния других факторов в условие усталостной прочности следует подставлять эквивалентные напряжения, и тогда в момент разрушения имеем

$$\sqrt{\left(\sigma_a^* \frac{K_\sigma}{\beta_\sigma \varepsilon_\sigma}\right)^2 + 3\left(\tau_a^* \frac{K_\tau}{\beta_\tau \varepsilon_\tau}\right)^2} = \sigma_{-1}, \tag{168}$$

где K_σ, K_τ — эффективные коэффициенты концентрации при изгибе и кручении; β_σ, ε_σ, β_τ, ε_τ — коэффициенты состояния поверхности и учета масштабного фактора.

Значения K_σ, β_σ, ε_σ указаны в разд.16; в первом приближении можно принимать

$$\beta_\tau = \beta_\sigma, \quad \varepsilon_\tau = \varepsilon_\sigma.$$

Модель прочностной надежности по зависимости (166) будет такой:

$$n_a = \frac{\sigma_{-1}}{\sqrt{\left(\sigma_a \frac{K_\sigma}{\beta_\sigma \varepsilon_\sigma}\right)^2 + 3\left(\tau_a \frac{K_\tau}{\beta_\tau \varepsilon_\tau}\right)^2}} \geq [n_a]. \tag{169}$$

При асимметричном цикле нагружения эквивалентные нормальные и касательные напряжения будут следующими:

$$\sigma_{ea} = \sigma_a \frac{K_\sigma}{\beta_\sigma \varepsilon_\sigma} + \psi_\sigma \sigma_m, \tag{170}$$

$$\tau_{ea} = \tau_a \frac{K_\tau}{\beta_\tau \varepsilon_\tau} + \psi_\tau \tau_m, \tag{171}$$

где ψ_σ, ψ_τ — коэффициенты влияния постоянных напряжений (обычно принимают $\psi_\sigma = \sigma_{-1} / \sigma_в$, $\psi_\tau = \tau_{-1} / \tau_в$).

Модель прочностной надежности при усталостных разрушениях, связанных с асимметричными циклами нагружения, имеет вид

$$n_a = \frac{\sigma_{-1}}{\sqrt{\left(\sigma_a \dfrac{K_\sigma}{\beta_\sigma \varepsilon_\sigma} + \psi_\sigma \sigma_m\right)^2 + 3\left(\tau_a \dfrac{K_\tau}{\beta_\tau \varepsilon_\tau} + \psi_\tau \tau_m\right)^2}} \geq [n_a]. \quad (172)$$

31. Прогибы стержней

Во многих случаях важно обеспечить не только прочность стержней, но и отсутствие значительных прогибов под нагрузкой. Прогибы вала, несущего шестерню, могут нарушить правильность зацепления. Прогибы вала турбины могут привести к недопустимому касанию лопаток о корпус и т.п.

Учитывать прогибы стержня весьма важно при решении задач устойчивости колебания и в ряде других задач. Наконец, расчет прогибов необходим для решения статически определимых задач, когда изгибающий момент в сечении заранее неизвестен. Оставляя пока в стороне статически неопределимые условия закрепления, изучим сначала прогибы стержня, считая силовые факторы в сечении стержня известными.

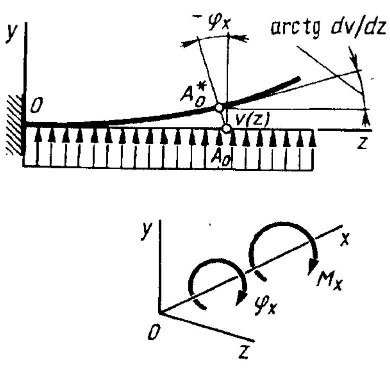


Рис. 8.48. Связь прогибов оси стержня $v(z)$ и углов поворотов $\varphi(z)$ сечений

Параметры деформации и их физический смысл. Рассмотрим изгиб стержня в главной плоскости yOz (рис.8.48). По гипотезе плоских сечений (см.уравнение (2) гл.2) деформация в точках поперечного сечения стержня

$$\varepsilon_z = \varepsilon_0 + y \frac{d\varphi_x}{dz}. \quad (173)$$

Для параметров деформации ε_0 и $d\varphi_x / dz$ были установлены следующие зависимости для равномерно нагретого стержня (уравнения (14) гл.2):

$$\varepsilon_0 = \frac{N}{\int\limits_F E\,dF} = \frac{N}{A} = \frac{N}{EF}\,, \tag{174}$$

$$\frac{d\varphi_x}{dz} = \frac{M_x}{\int\limits_f y^2 E\,dF} = \frac{M_x}{B_x} = \frac{M_x}{EJ_x}\,, \tag{175}$$

где F, J_x — соответственно площадь и момент инерции поперечного сечения стержня.

Как известно, гипотеза плоских сечений предполагает, что сечение стержня остается после деформации плоским. Второе важное допущение — пренебрежение деформациями сдвига. Тогда плоскость поперечного сечения останется перпендикулярной изогнутой оси стержня после деформации.

Ось стержня — геометрическое место центров тяжестей сечения — в деформированном состоянии показана на рис.8.48. Прогибы стержня в плоскости yOz обозначены $v(z)$. Ось стержня в деформированном состоянии часто называют *упругой линией стержня.*

Физический смысл параметра деформации ε_0 ясен; он представляет удлинение оси стержня. Сечение стержня как жесткая пластинка составляет угол $\pi/2$ с касательной к оси стержня. Учитывая положительное направление отсчета, принятое для угла φ_x, следует записать:

$$\varphi_x = -\operatorname{arctg}\frac{dv}{dz}\,. \tag{176}$$

Если углы поворота малы, то

$$\varphi_x \approx -\frac{dv}{dz}\,. \tag{177}$$

Угол поворота сечения равен (по модулю) производной от функции прогиба стержня.

Дифференцируя равенство (177), находим

$$\frac{d\varphi_x}{dz} = -\frac{d^2v}{dz^2}\,. \tag{178}$$

Параметр изгибной деформации при малых углах поворота сечения равен (по модулю) второй производной прогиба.

Замечание. Допущение об отсутствии сдвига существенно упрощает картину деформации стержня при изгибе. Стержень можно представить в виде проволоки (ось стержня), к которой припаяны жесткие пластинки (поперечные сечения). Прогибы оси стержня и ее растяжение полностью определяют изменение расстояний, а следовательно, и деформации во всех точках стержня.

Геометрическая картина изгибной деформации. Рассмотрим чисто изгибную деформацию, когда удлинение оси стержня отсутствует ($\varepsilon_0 = 0$). Картина деформации приведена на рис.8.49. Угол поворота сечения стержня φ_x показан в положительном направлении.

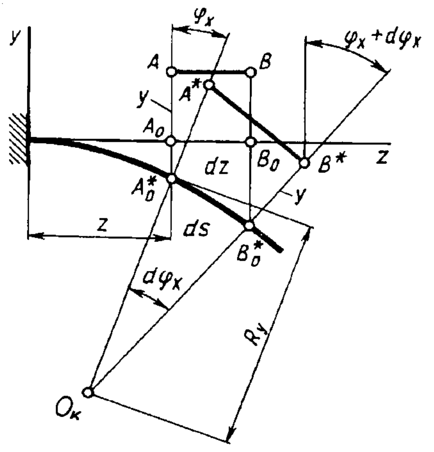


Рис. 8.49. Геометрическая интерпретация изгибной деформации

Отрезок AB на расстоянии y после деформации приобретает длину A^*B^*. Отрезок A_0B_0 на оси стержня после деформации сохраняет свою длину ($\varepsilon_0 = 0$):

$$A_0B_0 = AB = A_0^*B_0^* = ds. \qquad (179)$$

Деформация растяжения волокна на расстоянии y от оси стержня

$$\varepsilon_z = \frac{A^*B^* - AB}{AB} =$$

$$= \frac{d\varphi_x (R_y + y) - ds}{ds} = \frac{d\varphi_x}{ds} y; \qquad (180)$$

здесь использовано очевидное соотношение

$$ds = R_y \, d\varphi_x. \qquad (181)$$

Величина R_y выражает радиус кривизны упругой линии. Кривизна кривой — величина, обратная радиусу кривизны:

$$\chi_y = \frac{1}{R_y} = \frac{d\varphi_x}{ds}. \qquad (182)$$

Деформация удлинения оси стержня может быть добавлена к чисто изгибной деформации, и тогда

$$\varepsilon_z = \varepsilon_0 + y \frac{d\varphi_x}{ds}. \qquad (183)$$

При малых поворотах сечений соотношения (183) и (173) совпадают, так как

$$ds = dz\sqrt{1+\left(\frac{dv}{dz}\right)^2}, \tag{184}$$

и при

$$\left(\frac{dv}{dz}\right)^2 \ll 1 \tag{185}$$

получим

$$ds = dz. \tag{186}$$

Применение условия (185) практически возможно при углах поворота до 20-30°.

Замечание. Переход от уравнения (176) к (177) связан с использованием условия (185). В общем случае из соотношения

$$\operatorname{tg}\varphi_x = -\frac{dv}{dz}$$

после дифференцирования по z получаем

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\sin\varphi_x}{\cos\varphi_x}\right) = \frac{1}{\cos^2\varphi_x}\frac{d\varphi_x}{dz} = -\frac{d^2v}{dz^2}. \tag{187}$$

Так как

$$\frac{1}{\cos^2\varphi_x} = 1 + \operatorname{tg}^2\varphi_x = 1 + \left(\frac{dv}{dz}\right)^2,$$

находим из соотношения (187)

$$\frac{d\varphi_x}{ds} = \frac{1}{R_y} = -\frac{d^2v/dz^2}{[\,1+(dv/dz)^2\,]^{3/2}}. \tag{188}$$

Если углы поворота сечения малы и условие (185) выполняется, то формулы (173) и (183) совпадают.

Уравнение упругой линии стержня. Продолжим рассмотрение изгиба в одной из главных плоскостей (в плоскости yOz) и будем считать, что нормальные усилия N в сечениях стержня отсутствуют. Тогда из уравнений (175) и (178) находим

$$\frac{d^2v(z)}{dz^2} = -\frac{M_x(z)}{EJ_x(z)}. \tag{189}$$

Полученное соотношение представляет уравнение упругой линии в дифференциальной форме.

Проинтегрировав обе части уравнения (189) от 0 до z, получим

$$\frac{dv}{dz}(z) = -\int_0^z \frac{M_x(z_1)}{EJ_x(z_1)}\,dz_1 + \frac{dv}{dz}(0), \tag{190}$$

где z_1 — переменная интегрирования ($0 \le z_1 \le z$). В последнем равенстве $\frac{dv}{dz}(0)$ — угол поворота (точнее, угол поворота в сечении стержня $z = 0$).

Проинтегрировав обе части равенства (190) в тех же пределах, найдем

$$v(z) = -\int_0^z\int_0^{z_1} \frac{M_x(z_2)}{EJ_x(z_2)}\,dz_2\,dz_1 + v(0) + \frac{dv}{dz}(0)\,z, \tag{191}$$

где $v(0)$ — прогиб стержня в сечении $z = 0$.

Уравнение (191) представляет собой уравнение упругой линии,. Входящие в него значения прогиба и угла поворота сечения при $z = 0$ определяются из условия закрепления стержня и граничных условий.

Замечание. Напомним, что величина интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования. Например:

$$\int_0^x x^2\,dx = \int_0^x \xi^2\,d\xi = \int_0^x x_1^2\,dx_1 = \frac{1}{3}x^3.$$

Одинаковое обозначение переменной интегрирования и переменного предела интегрирования может приводить к недоразумениям, поэтому в равенствах (190) и (191) вводятся обозначения z_1 и z_2.

Пример 1. Прогиб консольного стержня постоянного сечения под действием сосредоточенной силы P (рис.8.50). Стержень называется консольным, если одно из концевых сечений жестко закреплено, а другое свободно. Жесткое закрепление в сечении $z=0$ (заделка) означает, что

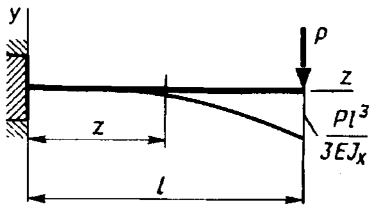


Рис. 8.50. Прогиб консольного стержня под действием сосредоточенной силы

$$v(0) = 0, \quad \frac{dv}{dz}(0) = 0,$$

т.е. смещение и угол поворота в заделке отсутствуют. Изгибающий момент в сечении z

$$M_x(z) = P(l - z).$$

Из уравнения (191) получаем

$$v(z) = -\frac{P}{EJ_x}\int_0^z\int_0^{z_1}(l - z_2)\,dz_2\,dz_1 = -\frac{P}{EJ_x}\int_0^z\left(lz_1 - \frac{1}{2}z_1^2\right)dz_1$$

или

$$v(z) = -\frac{P}{EJ_x}\left(\frac{1}{2}lz^2 - \frac{1}{6}z^3\right).$$

Наибольший прогиб будет $z = l$:

$$v(l) = -\frac{Pl^3}{3EJ_x}.$$

Пример 2. Прогиб консольного стержня постоянного сечения под действием распределенной нагрузки (рис.8.51). Решение начинаем с определения изгибающего момента в сечении. Равнодействующая сил, приложенных к отсеченной части, равна $q(l - z)$; плечо равнодействующей $(l - z)/2$, следовательно,

$$M_x(z) = -q(l - z)^2\frac{1}{2}.$$

Из уравнения (191) находим

$$v(z) = -\frac{q}{2EJ_x}\int_0^z\int_0^{z_1}(l - z_2)^2\,dz_2\,dz_1 = -\frac{q}{2EJ_x}\int_0^z\left(l^2z_1 - lz_1^2 + \frac{1}{3}z_1^3\right) =$$

$$= -\frac{q}{2EJ_x}\left(\frac{l^2z^2}{2} - \frac{lz^3}{3} + \frac{z^4}{12}\right).$$

Прогиб конца стержня $(z = l)$

$$v(l) = -\frac{ql^4}{8EJ_x}.$$

Пример 3. Прогиб двухопорного стержня постоянного сечения под действием распределенной нагрузки (рис.8.52). В опорах стержня возникают реакции

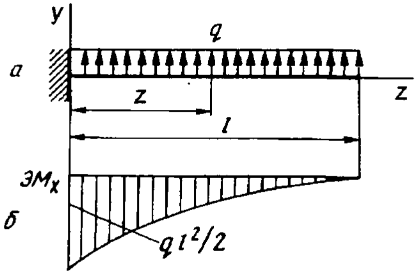


Рис. 8.51. Прогиб консольного стержня под действием распределенной нагрузки: *а* — расчетная схема; *б* — эпюра изгибающих моментов

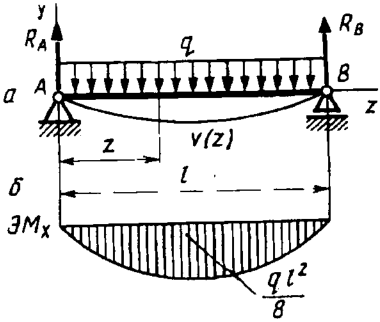


Рис. 8.52. Прогиб двухопорного стержня (балки) под действием распределенной нагрузки: *а* — расчетная схема; *б* — эпюра изгибающих моментов

$$R_A = R_B = \frac{1}{2} ql .$$

Изгибающий момент в сечении z

$$M_x(z) = -\frac{1}{2} qlz + \frac{1}{2} qz^2 .$$

В рассматриваемом случае условия закрепления таковы:

$$v(0) = 0 , \quad v(l) = 0 .$$

Из уравнения упругой линии (191) находим

$$v(z) = \frac{q}{2EJ_x} \int_0^z \int_0^{z_1} (lz_2 - z_2^2) \, dz_2 \, dz_1 + \frac{dv}{dz}(0) \, z .$$

После интегрирования получим

$$v(z) = \frac{q}{12EJ_x} (lz^3 - \frac{1}{2} z^4) + \frac{dv}{dz}(0) \, z .$$

Из краевого условия при $z = l$ определяем

$$\frac{dv(0)}{dz} = -\frac{ql^3}{24EJ_x} .$$

Производная от функции в начале координат отрицательна (рис.8.52). Подставляя значение $\frac{dv}{dz}(0)$ в уравнение упругой линии, получаем

$$v(z) = -\frac{q}{12EJ_x}\left(\frac{1}{2}l^3z - lz^3 + \frac{1}{2}z^4\right).$$

Наибольший прогиб при $z = l/2$:

$$v\left(\frac{1}{2}l\right) = -\frac{5}{384}\frac{ql^4}{EJ_x}.$$

Замечание. В технической литературе стержень, работающий на изгиб, часто называют балкой. Особенно распространено такое наименование в строительной технике, судостроении и в других областях. Так как термин «стержень» обозначает геометрическую форму элемента конструкции, то в дальнейшем преимущественно он и будет использоваться. В старой технической литературе вместо термина «стержень» использовался термин «брус», который сейчас практически вышел из употребления.

Основная форма дифференциального уравнения плоского изгиба стержня. Ранее было установлено дифференциальное уравнение изгиба (уравнение (189)). Запишем его в следующей форме:

$$EJ_x(z)\frac{d^2v(z)}{dz^2} = -M_x(z). \tag{192}$$

После интегрирования уравнения (189) или (192) были получены значения прогиба $v(z)$ и угла поворота dv/dz (соотношения (190) и (191)). Однако во многих случаях более удобно определить в результате интегрирования все основные параметры: прогибы, углы поворота, изгибающие моменты и перерезывающие силы. Для этого следует перейти к другой, эквивалентной форме дифференциального уравнения изгиба.

Дифференцируя равенство (192) по z и используя уравнение равновесия (82), получим

$$\frac{d}{dz}\left(EJ_x(z)\frac{d^2v(z)}{dz^2}\right) = -Q_y(z). \tag{193}$$

Снова повторяя дифференцирование и ссылаясь на соотношение (81), приходим к следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{d^2}{dz^2}\left(EJ_x(z)\frac{d^2v(z)}{dz^2}\right) = -q_y(z). \tag{194}$$

Это и есть основная форма дифференциального уравнения плоского изгиба стержня.

Для стержня постоянного сечения ($J_x(z) = \text{const}$) уравнение (194) будет таким:

$$\frac{d^4 v(z)}{dz^4} = \frac{q_y(z)}{EJ_x}. \qquad (195)$$

Дифференциальное уравнение определяет широкий класс функций. Из него должна быть выбрана функция, удовлетворяющая краевым условиям задачи (т.е. условиям закрепления концов стержня). Разберем эти условия при $z = 0$; при $z = l$ они имеют точно такой же вид.

Конец заделан (рис.8.53,*а*): $v(0) = 0, \ \frac{dv}{dz}(0) = 0$.

Шарнирное закрепление (рис.8.53,*б*): $v(0) = 0, \ \frac{d^2v}{dz^2}(0) = 0$.

Свободный конец (рис.8.53,*в*): $\frac{d^2v}{dz^2}(0) = 0, \ \frac{d}{dz}\left(EJ_x \frac{d^2v}{dz^2} \right)\bigg|_{z=0} = 0$.

Загруженный конец (рис.8.53,г): $\frac{d^2v}{dz^2}(0) = -\frac{M}{EJ_x(0)}$,

$$\frac{d}{dz}\left[EJ_x \frac{d^2v}{dz^2} \right]\bigg|_{z=0} = -P.$$

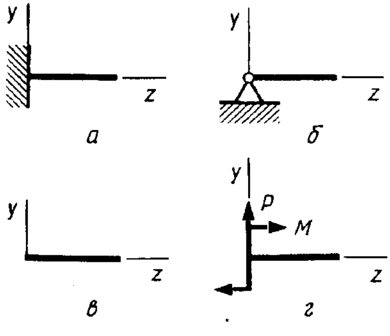


Рис. 8.53. Виды закрепления конца стержня:
а — заделка; *б* — шарнирное закрепление; *в* — свободный конец; *г* — загруженный конец

Если производная dJ_x / dz ограничена при $z = 0$, то второе условие для свободного конца может быть принято в более простом виде:

$$\frac{d^3v}{dz^3}(0) = 0.$$

Условия на загруженном конце согласованы с правилами знаков для M_x и Q_x и условиями (192) и (193) (см.рис.8.3).

Уравнение (174) представляет собой дифференциальное уравнение четвертого порядка, и для однозначности решения должны быть заданы четыре краевых условия (по два на каждом конце). При наличии сосредоточенных моментов и сил должны быть заданы скачки производных в соответствующих сечениях.

Замечание. Уравнение (194) называется основным, так как объединяет основные уравнения изгиба: геометрические, физические и статические. Уравнение (192) включает уравнения равновесия только косвенно (при определении изгибающего момента).

В форме (194) уравнение изгиба используется в задачах колебания и устойчивости стержней и других задачах, где требуется более полный анализ. Уравнение изгиба в основной форме является разрешающим, т.е. позволяет по заданной функции $q(z)$ найти основные параметры задачи без предварительного определения изгибающего момента в сечении.

Дифференциальное уравнение плоского изгиба в матричной форме. Уравнения изгиба (194) можно представить в виде совокупности четырех уравнений первого порядка. Введем следующие функции $y_i(z)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, подлежащие определению:

$$y_1(z) = v(z)\,,\; y_2(z) = \frac{dv(z)}{dz}\,,\; y_3(z) = M_x(z)\,,\; y_4(z) = Q_y(z)\,.$$

Тогда из уравнений (192) — (194) получим

$$y_1'(z) = y_2(z)\,,\; y_2'(z) = -\frac{1}{EJ_x(z)}y_3(z)\,,\; y_3'(z) = y_4(z)\,,\; y_4'(z) = q_y(z)\,, \qquad (196)$$

где штрих означает производную по z.

Систему уравнений (196) запишем в матричной форме

$$\{y'\} = [\,A\,]\{y\} + \{F\}\,, \qquad (197)$$

где вектор состояния

$$\{y\}^{\mathrm{T}} = \{y_1\,,\, y_2\,,\, y_3\,,\, y_4\} = \{v\,,\, v'\,,\, M_x\,,\, Q_y\}\,; \qquad (198)$$

матрица

$$[\,A\,] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/(EJ_x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

вектор внешней нагрузки

$$\{F\}^{\mathrm{T}} = \{\,0\,,\; 0\,,\; 0\,,\; q_y(z)\,\}\,. \qquad (199)$$

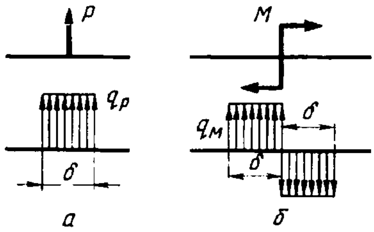


Рис. 8.54. Замена сосредоточенных воздействий распределенными

Уравнения в матричной форме хорошо приспособлены для численного интегрирования на ЭВМ. Обычно для этих целей используются метод Рунге — Кутта и его различные модификации. Но весьма эффективным для решения уравнения (197) является метод последовательных приближений.

При наличии сосредоточенных силовых факторов их следует заменить эквивалентными распределенными нагрузками, действующими на малых участках (рис.8.54).

При действии силы P на участке δ (рис.8.54,*а*) прикладывается распределенная нагрузка

$$q_P = P / \delta\,; \tag{200}$$

Момент M (рис.8.54,*б*) заменяется парой распределенных нагрузок и интенсивностью

$$q_M = M / \delta^2\,. \tag{201}$$

Величина δ в равенствах (200) и (201) может быть задана произвольно, но она должна отражать реальные условия нагружения и особенности передачи сосредоточенных усилий на конструкцию (ширину накладок, местные утолщения и т.п.).

Замечание. Следует отметить, что понятие сосредоточенного воздействия является идеализированным. В действительности такие воздействия осуществляются в виде распределенных нагрузок на малых участках (см.рис.8.27).

Статически неопределимые задачи изгиба стержней. Если силовые факторы в сечении стержня (изгибающий момент, перерезывающая сила) не могут быть определены из условий равновесия (отсеченной части), то такие задачи относят к числу статически неопределимых. Рассмотрим несколько примеров решения подобных задач.

Пример I.Стержень под действием распределенных усилий. Одно из концевых сечений заделано, другое шарнирно оперто (рис.8.55,*а*). В системе имеется «лишнее» закрепление — шарнирное закрепление в точке A. Отбросим «лишнее» закрепление, заменив его неизвестным усилием X_1 (рис.8.55,*б*).

Тогда получим статически определимую систему, которая называется основной. По условиям задачи

$$v(l) = \delta_{1P} + X_1\delta_{11} = 0\,, \tag{202}$$

где δ_{1P} — прогиб точки A от заданной нагрузки P в направлении усилия X_1; δ_{11} — прогиб от единичной силы, приложенной в точке A, в направлении усилия X_1.

Направление неизвестного усилия всегда предполагается заранее. Если в результате решения неизвестная величина X_1 получается со знаком минус, то, следовательно, она направлена в противоположную сторону. Значение δ_{1P} может быть взято из решения задачи, представленной на рис. 8.51:

$$\delta_{1P} = \frac{ql^4}{8EJ_x}.$$

Величина δ_{11} определяется из решения задачи, представленной на рис. 8.50:

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{3EJ_x}.$$

Теперь из уравнения (202) находим

$$X_1 = -\frac{3}{8}ql.$$

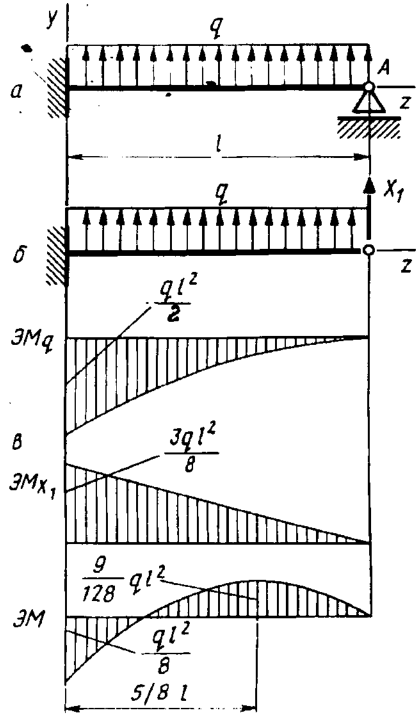


Рис. 8.55. Решение статически неопределимой задачи изгиба:
а — расчетная схема; *б* — основная (эквивалентная) система; *в* — эпюры изгибающих моментов

Эпюры изгибающих моментов (от нагрузки q, реакции в средней опоре и суммарная) показаны на рис.8.55.

Пример 2. Стержень на трех шарнирных опорах под действием распределенной нагрузки (рис.8.56,*а*). Первый этап расчета — превращение системы в статически определимую путем отсечения «лишних» связей и замены их действия неизвестными усилиями (рис. 8.56,*б*). Выберем основную систему в виде балки с двумя шарнирными опорами.

Прогиб в точке A отсутствует, и потому

$$\delta_{1P} + X_1\delta_{11} = 0. \qquad (203)$$

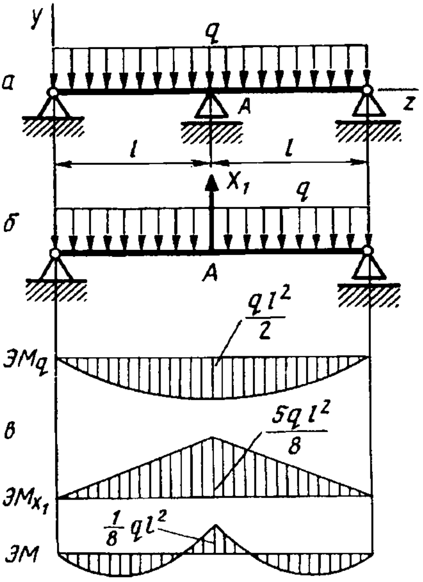


Рис. 8.56. Расчет балки на трех опорах: *а* — расчетная схема; *б* — основная (эквивалентная) система; *в* — эпюры изгибающих моментов

Прогиб от внешней нагрузки в основной системе δ_{1P} может быть определен из ранее решенной задачи (рис.8.52). Учитывая, что общая длина балки $2l$, найдем

$$\delta_{1p} = -\frac{5}{384}\frac{q(2l)^4}{EJ_x} = -\frac{5}{24}\frac{ql^4}{EJ_x}.$$

Величину δ_{11} — прогиб в направлении X_1 от единичной силы того же направления — принимаем из решения, приведенного выше:

$$\delta_{11} = \frac{1\cdot(2l)^3}{48EJ_x} = \frac{1\cdot l^3}{6EJ_x}.$$

Теперь из уравнения (203) находим

$$X_1 = \frac{5}{4}ql.$$

Эпюры изгибающих моментов (от нагрузки q реакции в средней опоре и суммарная) приведены на рис.8.56,*в*.

Замечание. Общий прием решения статически неопределимых задач изгиба (отбрасывание лишних связей, замена их неизвестными усилиями и определение последних из условий закрепления) составляет *метод сил.*

Учет деформации сдвига при изгибе стержня. Как уже указывалось, для коротких стержней и для стержней из материалов с небольшим сопротивлением сдвигу (композиционные материалы) перемещения, вызванные деформацией сдвига, оказываются соизмеримыми с перемещениями при деформации изгиба. Экспериментальные исследования и анализ точных решений показали, что деформации сдвига можно рассматривать независимо от деформации изгиба (модель Тимошенко). На рис. 8.57 показана деформация сдвига консольного стержня под действием поперечной нагрузки P. Сечения стержня получают перемещения вдоль оси y, взаимный поворот сечений отсутствует.

Деформацию сдвига на оси стержня между направлениями y и z при работе материала в упругой области можно принять следующей:

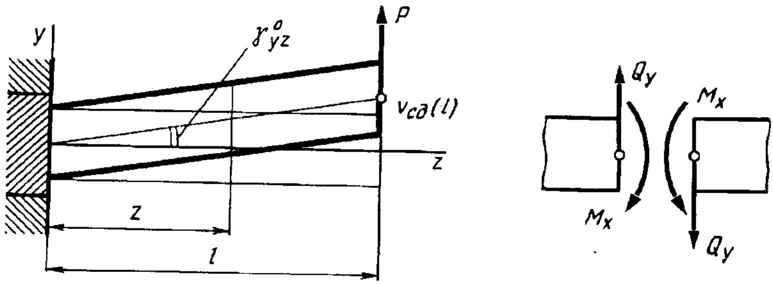


Рис. 8.57. Деформация сдвига при поперечной нагрузке консольного стержня

$$\gamma^0_{yz} = K_y(z)\,\frac{Q_y(z)}{GF(z)}, \tag{204}$$

где G — модуль сдвига; $F(z)$ — площадь поперечного сечения; $Q_y(z)$ — перерезывающая сила в сечении; $K_y(z)$ — безразмерный коэффициент, учитывающий неравномерное распределение касательных напряжений при поперечном изгибе (рекомендации по определению величины K_y будут даны ниже).

Перемещение и деформация сдвига элемента стержня показаны на рис. 8.58.

Кроме поступательного смещения на $v_{сд}(z)$, элемент может повернуться как жесткое целое на угол φ_0, одинаковый для всех элементов стержня, так как взаимный поворот сечений отсутствует. Приращение прогиба, вызванное деформацией сдвига на участке dz

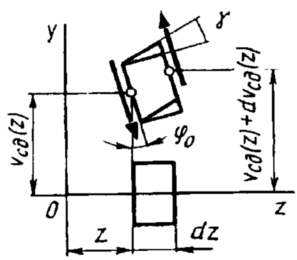


Рис. 8.58. Перемещение и деформация сдвига элемента стержня при деформации сдвига

$$dv_{сд}(z) = K_y\,\frac{Q_y}{GF}\,dz + \varphi_0\,dz, \tag{205}$$

откуда

$$\frac{dv_{сд}(z)}{dz} = K_y\,\frac{Q_y}{GF} + \varphi_0. \tag{206}$$

Проинтегрировав обе части равенства в пределах от 0 до z, найдем

$$v_{сд}(z) = \int_0^z K_y\,\frac{Q_y}{GF}\,dz + v_{сд}(0) + \varphi_0 z, \tag{207}$$

где $v_{сд}(0)$ и φ_0 — соответственно прогиб и угол поворота сечения $z = 0$.

Уравнение (207) — основное уравнение для определения прогиба стержней в результате деформации сдвига.

Пример I. Определить прогиб сдвига для консольного стержня под действием усилия P (см.рис. 8.57). Перерезывающая сила в сечении стержня $Q_y = P$. По формуле (207) находим прогиб на конце (угол поворота сечения и прогиб при z=0 отсутствуют):

$$v_{сд}(l) = K_y \frac{Pl}{GF}.$$

Прогиб конца стержня в результате изгиба, как было установлено выше, равен

$$v_{п}(l) = \frac{Pl^3}{3EJ_x}.$$

Отношение прогибов

$$\lambda = \frac{v_{сд}(l)}{v_{п}(l)} = K_y \frac{3EJ_x}{GFl^2}. \tag{208}$$

Для прямоугольного сечения $b \times h$ (h — высота сечения)

$$F = bh\,,\ \ J_x = bh^3 / 12\,.$$

Касательное напряжение при изгибе стержня прямоугольного сечения на оси

$$\tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{Q_y}{F},$$

деформация сдвига

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{max}}{G} = \frac{3}{2}\frac{Q_y}{GF}.$$

Приняв $K_y = 3/2$, получим для прямоугольного сечения

$$\lambda = \frac{3}{8}\frac{E}{G}\frac{h^2}{l^2}.$$

Для обычного конструкционного материала

$$E / G = 2(1 + \mu),$$

где μ — коэффициент Пуассона.

Отношение прогибов сдвига и изгиба

$$\lambda = \frac{3}{4}(1+\mu)\frac{h^2}{l^2}.$$

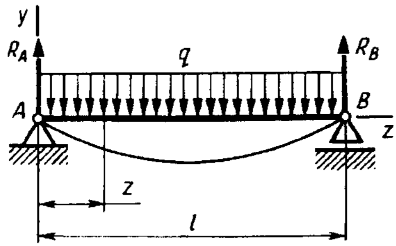


Рис. 8.59. Определение прогиба сдвига двухопорной балки

При высоте сечения $h = l$ прогибы приблизительно одинаковы. При расчете на прочность зубьев шестерни, витков резьбы деформация сдвига должна обязательно учитываться.

Пример 2. Определить прогиб двухопорного стержня в результате деформации сдвига (рис. 8.59).

Реакции в опорах

$$R_A = R_B = \frac{1}{2}ql.$$

Перерезывающая сила в сечении

$$Q_y(z) = -\frac{1}{2}ql + qz.$$

По формуле (207) находим прогиб двухопорного стержня

$$v_{\text{сд}}(z) = \int_l^z \frac{K_y}{GF}\left(-\frac{1}{2}ql + qz_1\right)dz_1 + \varphi_0 z.$$

Для стержня постоянного сечения

$$v_{\text{сд}}(z) = -\frac{K_y}{GF}\frac{q}{2}(lz - z^2) + \varphi_0 z.$$

Из условия $v_{\text{сд}}(l) = 0$ находим $\varphi_0 = 0$.

Последний результат можно установить сразу, так как сечение $z = l/2$ не поворачивается вследствие симметрии.

Окончательно получим

$$v_{\text{сд}}(z) = -\frac{K_y}{2GF}q(lz - z^2).$$

Замечание. Нельзя сделать вывод, что сечения стержня вообще не поворачиваются при деформации сдвига. Если, например, в задаче на рис. 8.59 половина балки имела бы другие размеры сечения, то $\varphi_0 \neq 0$. При наличии заделки или плоскости симметрии $\varphi_0 = 0$.

Уравнение упругой линии стержня при изгибе в двух главных плоскостях. Как уже указывалось, если нагрузки действуют в плоскости, совпадающей с одной из главных, то стержень испытывает плоский изгиб. В этом случае упругая линия стержня является плоской кривой.

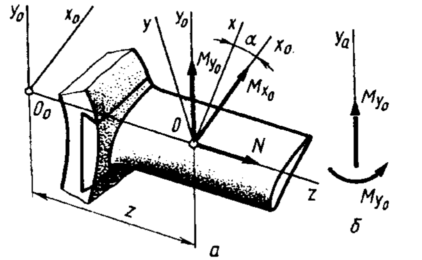


Рис. 8.60. Изгиб стержня в двух главных плоскостях (YO_z и XO_z):
а — изгиб лопатки компрессора (изгибающие моменты изображаются векторами); *б* — правило изображения

Однако часто нагрузки действуют не в главной плоскости или даже не в одной плоскости либо стержень обладает начальной закруткой (воздушные винты и др). Тогда приходится решать задачи пространственного изгиба стержня.

На рис. 8.60 рассматриваются изгиб и растяжение лопатки турбины. Главные оси сечения x, y повернуты относительно осей конструкции x_0, y_0 на угол α (ось x_0 направлена вдоль оси вращения; ось z — вдоль оси лопатки в радиальном направлении).

В сечении z действуют растягивающее усилие N и изгибающие моменты M_{x_0} и M_{y_0}. На рис. 8.60 они изображены векторами, причем момент стремится осуществить поворот против часовой стрелки, если смотреть от конца вектора момента к его началу (правая система координат). Наиболее важное правило при исследовании пространственного изгиба состоит в следующем: изгибы в главных плоскостях можно рассматривать независимо друг от друга.

Изгибающий момент, действующий в главной плоскости yOz (рис. 8.61):

$$M_x = M_{x_0} \cos\alpha + M_{y_0} \sin\alpha . \tag{209}$$

По уравнению (189)

$$\frac{d^2 v}{dz^2} = -\frac{M_x}{EJ_x} = -\frac{1}{EJ_x}\left(M_{x_0} \cos\alpha + M_{y_0} \sin\alpha \right). \tag{210}$$

Изгибающий момент, осуществляющий изгиб в главной плоскости xOz :

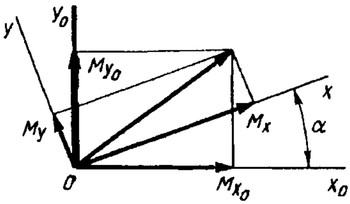


Рис. 8.61. Определение изгибающего момента относительно главных осей

$$M_y = M_{y_0}\cos\alpha - M_{x_0}\sin\alpha. \qquad (211)$$

Из уравнения (16) при отсутствии температурной деформации и при постоянном модуле упругости получаем

$$\frac{d\varphi_y}{dz} = \frac{M_y}{EJ_y}, \qquad (212)$$

где $J_y = \int\limits_F x^2\,dF$ — момент инерции сечения относительно оси y.

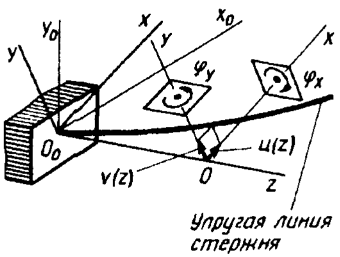


Рис. 8.62. Пространственная упругая линия стержня

Будем обозначать компоненты смещения центра тяжести сечения по осям x и y соответственно $u(z)$ и $v(z)$. Учитывая принятое правило знаков для углов поворота сечения (рис. 8.62) и считая их малыми, имеем

$$\varphi_x = -\frac{dv(z)}{dz}, \qquad (213)$$

$$\varphi_y = \frac{du(z)}{dz}. \qquad (214)$$

(Объясните, почему формулы (213) и (214) имеют в правых частях разные знаки !)

Из соотношений (211), (212) и (214) находим

$$\frac{d^2u}{dz^2} = \frac{M_y}{EJ_y} = \frac{1}{EJ_y}\left(M_{y_0}\cos\alpha - M_{x_0}\sin\alpha\right). \qquad (215)$$

В общем случае изгиба упругая линия является пространственной кривой — точки оси стержня смещаются по направлениям x и y. Уравнения (210) и (215) определяют прогибы стержня в общем случае изгиба.

Напряжения в точках поперечного сечения стержня находятся по формуле (18):

$$\sigma = \frac{N}{F} + y\frac{M_x}{J_x} - x\frac{M_y}{J_y}. \qquad (216)$$

Замечание. Приведенные уравнения пространственной упругой линии относятся к призматическим стержням. Если главные оси сечений в начальном состоянии взаимно повернуты (стержни с первоначальной закруткой: воздушные винты, лопатки и т.п.), то уравнения (210) и (215) дают компоненты вектора кривизны, которые следует проектировать на общие оси x_0, y_0.

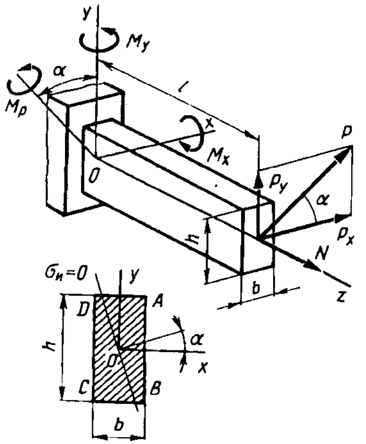


Рис. 8.63. Пространственный изгиб стержня

Пример. Стержень прямоугольного сечения изгибается силой P и растягивается усилием N (рис. 8.63). Требуется найти напряжения в точках стержня и перемещения точки приложения сил. Главные оси сечений — оси x, y.

Изгибающие моменты в опасном сечении (т.е. в сечении, где имеются точки с наибольшими напряжениями) определим двумя способами. Сначала определим общий момент, модуль которого $M_P = Pl$, а проекции момента на оси x и y

$$M_x = -Pl\sin\alpha\,,\quad M_y = Pl\cos\alpha\,.$$

Более просто в рассматриваемом примере разложить усилие P на составляющие P_x и P_y и найти значения M_x и M_y. Напряжения в поперечном сечении

$$\sigma = \sigma_р + \sigma_и = \frac{N}{F} + y\frac{M_x}{J_x} + x\frac{M_y}{J_y}\,,$$

где $\sigma_р$ — напряжение растяжения, распределенное равномерно по площади поперечного сечения; $\sigma_и$ — напряжения изгиба:

$$\sigma_и = y\frac{M_x}{J_x} - x\frac{M_y}{J_y}\,. \tag{217}$$

В поперечном сечении существует линия, в точках которой напряжение изгиба равно нулю. Она называется нейтральной. Уравнение этой линии, проходящей через центр тяжести сечения, имеет вид

$$\sigma_и = y\frac{M_x}{J_x} - x\frac{M_y}{J_y} = 0\,,\quad \frac{y}{x} = \frac{M_y}{M_x}\frac{J_x}{J_y}\,.$$

В рассматриваемом примере

$$\frac{y}{x} = -\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left(\frac{b}{h}\right)^2 .$$

Если $b = h$, то нейтральная линия перпендикулярна плоскости действия нагрузки.

32. Полупространственные модели стержня

В обычной теории стержней нормальные напряжения направлены вдоль оси стержня; нормальные напряжения, действующие «в плоскости сечения», т.е. перпендикулярно оси стержня, считаются отсутствующими (гипотеза о ненадавливании волокон стержня).

В некоторых случаях, например при неравномерном нагреве стержней с массивным поперечным сечением, пренебрегать указанными напряжениями нельзя.

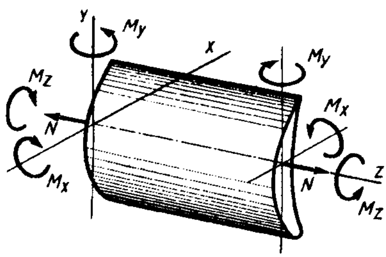


Рис. 8.64. Стержень с постоянными напряжениями по длине

Основные уравнения. Нормальные напряжения в поперечном сечении. Рассмотрим сначала стержень постоянного сечения, загруженный по торцам моментами и осевым усилием (рис. 8.64). Температурное поле по длине стержня не изменяется. В этих условиях можно считать напряжения и, следовательно, деформации постоянными по длине стержня.

Из уравнений совместности деформаций (см. разд.11) после приравнивания нулю производных по z находим

$$\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x\,\partial y} = 0. \tag{218}$$

При постоянных по длине стержня напряжениях и деформациях осевая деформация ε_z распределяется по поперечному сечению по линейному закону относительно координат x и y:

$$\varepsilon_z = c_0 + c_1 x + c_2 y . \tag{219}$$

Соотношение (219) удовлетворяет условиям (218). В соответствии с принципом независимости действия сил кручение стержня можно рассматривать в пределах упругих деформаций отдельно, и в дальнейшем будем считать $M_z = 0$. При действии изгибающих моментов и осевой силы линейное распределение ε_z эквивалентно гипотезе плоских сечений.

В соответствии с гипотезой плоских сечений (см. разд.27)

$$\varepsilon_z = \varepsilon_0 + \frac{d\varphi_x}{dz} y - \frac{d\varphi_y}{dz} x, \tag{220}$$

где параметры деформации ε_0, $d\varphi_x/dz$, $d\varphi_y/dz$ в рассматриваемом случае — постоянные величины.

На основании обобщенного закона Гука имеем

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] + \alpha T. \tag{221}$$

Используя соотношение (220), находим

$$\sigma_z = E\left(\varepsilon_0 + y\frac{d\varphi_x}{dz} - x\frac{d\varphi_y}{dz}\right) - E\alpha T + \mu(\sigma_x + \sigma_y). \tag{222}$$

Условия равновесия отсеченной части стержня

$$\int_F \sigma_z\, dF = N, \quad \int_F \sigma_z y\, dF = M_x, \quad \int_F \sigma_z x\, dF = -M_y \tag{223}$$

приводят к системе трех уравнений относительно параметров деформации ε_0, $d\varphi_x/dz$ и $d\varphi_y/dz$.

Для главных осей сечения x, y, удовлетворяющих условиям

$$\int_F Ex\, dF = 0, \quad \int_F Ey\, dF = 0, \quad \int_F Exy\, dF = 0, \tag{224}$$

указанные уравнения существенно упрощаются.

После нахождения параметров деформации из равенства (222) получаем

$$\sigma_z = \sigma_{и} + \sigma_{тем} + \sigma_{доп}, \tag{225}$$

где изгибные $\sigma_{и}$ и температурные $\sigma_{тем}$ напряжения определяются прежними формулами (разд.27), а дополнительные напряжения

$$\sigma_{доп} = -E\left(\frac{\int_F \mu(\sigma_x + \sigma_y)\, dF}{A} + \frac{y}{B_x}\int_F \mu(\sigma_x + \sigma_y)\, y\, dF + \right.$$

$$+\frac{x}{B_y}\int_F \mu(\sigma_x+\sigma_y)\,dF-\frac{\mu}{E}(\sigma_x+\sigma_y)\Bigg). \qquad (226)$$

Нормальные напряжения в поперечном сечении стержня зависят от напряжений σ_x и σ_y, действующих «в плоскости поперечного сечения».

Напряжения в плоскости поперечного сечения. На рис.8.65 показан элемент стержня,выделенный двумя поперечными сечениями на расстоянии dz друг от друга.

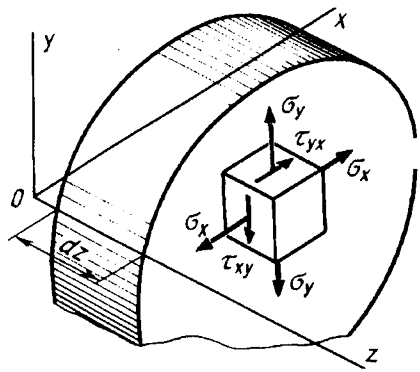


Рис. 8.65. Напряжения в плоскости поперечного сечения стержня

Напряжения σ_x , σ_y и τ_{xy} будем для краткости называть напряжениями в плоскости поперечного сечения (точнее, напряжениями, векторы которых лежат в указанной плоскости). Так как напряжения не зависят от z и составляющие массовых сил отсутствуют,то первые два уравнения равновесия будут удовлетворены, если положить

$$\sigma_x=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2},\quad \sigma_y=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2},\quad \tau_{xy}=-\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}, \qquad (227)$$

где $F = F(x, y)$ — функция напряжений.

Третье уравнение равновесия будет удовлетворено, так как напряжение σ_z постоянно по длине, а касательные напряжения τ_{zx} и τ_{zy} отсутствуют (кручение стержня не рассматривается). Из соотношений упругости следует, что

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E}\,[\,\sigma_x-\mu(\sigma_y+\sigma_z)\,]+\alpha T=\frac{1}{E}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}-\mu\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right]+\alpha T-\mu\frac{\sigma_z}{E}, \qquad (228)$$

$$\varepsilon_y=\frac{1}{E}\,[\,\sigma_y-\mu(\sigma_z+\sigma_x)\,]+\alpha T=\frac{1}{E}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}-\mu\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right]+\alpha T-\mu\frac{\sigma_z}{E}, \qquad (229)$$

$$\gamma_{xy}=\frac{1}{G}\tau_{xy}=-\frac{2(1+\mu)}{E}\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}. \qquad (230)$$

Рассмотрим теперь уравнения совместности деформаций (см разд.11). Из первого уравнения и зависимостей (228) — (230) получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{E}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{E}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)+2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{1+\mu}{E}\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\right)-$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\mu}{E}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\mu}{E}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)=-\nabla^2(\alpha T)+\nabla^2\left(\mu\frac{\sigma_z}{E}\right), \tag{231}$$

где ∇^2 — двумерный оператор Лапласа:

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

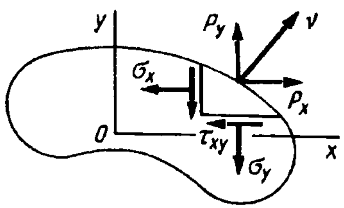


Рис. 8.66. Краевые условия для функции напряжений

Все остальные уравнения совместности деформаций будут выполняться. Уравнение (231) представляет собой уравнение плоской задачи с дополнительным членом, зависящим от напряжения σ_z.

Краевые условия для функции напряжений вытекают из условий равновесия элемента, примыкающего к контуру стержня (рис. 8.66):

$$\begin{aligned}\sigma_x\cos(\nu, x)+\tau_{xy}\cos(\nu, y)&=p_x,\\ \sigma_y\cos(\nu, y)+\tau_{xy}\cos(\nu, x)&=p_y,\end{aligned} \tag{232}$$

где ν — вектор нормали к контуру; p_x, p_y — распределенная нагрузка на поверхности в мегапаскалях); $\cos(\nu, x)$, $\cos(\nu, y)$ — косинусы углов между направлением ν и осями x и y. Распределенные нагрузки p_x и p_y должны быть постоянными по длине и самоуравновешенными. Используя зависимости (227), получаем краевые условия (в точках контура) для функции напряжений:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\cos(\nu, x)-\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\cos(\nu, y)&=p_x,\\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\cos(\nu, y)-\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\cos(\nu, x)&=p_y.\end{aligned} \tag{233}$$

Расчет стержней по полупространственной теории. Напряжения в стержнях описываются связанной системой уравнений (225) и (231) (в уравнение (225) входят $\mu(\sigma_x + \sigma_y)$, в уравнение (231) — величина $\mu\sigma_z / E$).

Для случая постоянного коэффициента μ уравнение плоской задачи (231) может быть решено независимо от уравнения (225). В большинстве практических задач допущение $\mu = \mathrm{const}$ не вызывает существенной погрешности.

При постоянном μ из соотношения (225) получаем

$$\mu\nabla^2\left(\frac{\sigma_z}{E}\right) = \mu\left[-\nabla^2(\alpha T) + \mu\nabla^2\left(\frac{1}{E}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{1}{E}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)\right]. \tag{234}$$

Простой вид равенства (234) связан с тем, что формулы (225) содержат линейные члены относительно x и y, которые после двукратного дифференцирования исчезают. Внося значение (234) в уравнение (231), получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{E}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{E}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) + \frac{2}{1-\mu}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{1}{E}\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\right) -$$

$$-\frac{\mu}{1-\mu}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{E}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{E}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)\right] = -\frac{1}{1-\mu}\nabla^2(\alpha T). \tag{235}$$

Наконец, при постоянном модуле упругости E из уравнения (235) находим

$$\nabla^4 F = -\frac{1}{1-\mu}\nabla^2(\alpha T), \tag{236}$$

где ∇^4 — бигармонический оператор:

$$\nabla^4 = (\nabla^2)^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}.$$

Уравнения (235) или (236) являются уравнениями плоской задачи теории упругости (задачи о плоской деформации) для области, представляющей собой поперечное сечение стержня.

После решения плоской задачи становятся известными значения σ_x и σ_y которые подставляются затем в равенство (226). Полученные результаты распространяются на приближенный расчет стержней переменного сечения при наличии поперечных нагрузок. Уравнения

(225) и (235) используются для каждого сечения независимо от других, как это принято в обычной теории стержней.

Касательные напряжения изгиба определяются из уравнений равновесия.

Замечания 1. Из приведенного решения следует, что напряжения в плоскости сечения связаны главным образом с действием неравномерного нагрева. Если коэффициент Пуассона постоянный и распределенные усилия на боковой поверхности отсутствуют, то в равномерно нагретом стержне $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = 0$ (однородное уравнение (235) при однородных краевых условиях имеет только нулевое решение).

2. Возникновение указанных напряжений при изменении коэффициента Пуассона в точках поперечного сечения не имеет практического значения ввиду малости этих напряжений. Сказанное подтверждает используемую в обычной теории стержней гипотезу об одноосном напряженном состоянии, за исключением случаев неравномерного нагрева сечения стержня и (или) значительной (самоуравновешенной) поперечной нагрузки.

Глава 9

ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ. ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ. ОБЩИЕ СВОЙСТВА УПРУГИХ СИСТЕМ

Ранее для анализа распределения напряжений и деформаций применялись дифференциальные методы, основанные на геометрических, статических и физических соотношениях, описывающих поведение частицы материала или элемента конструкции. В результате получались дифференциальные уравнения, характеризующие «условия жизни» малого элемента. Интегрирование указанных уравнений давало описание работы всей конструкции, т.е. учитывало совместную работу всех сопряженных элементов. Краевые условия при интегрировании дифференциальных уравнений отражали особенности поведения элементов, примыкающих к границам тела. Однако существуют и другие методы анализа, которые могут быть названы *вариационными*. Эти методы основаны на изучении общих количественных характеристик конструкции (функционалов), таких, как энергия деформации, работа внешних сил при деформации конструкции и т.п. Условие, в соответствии с которым функционал для всей конструкции должен приобретать минимальное значение, накладывает определенные ограничения на поведение каждого элемента. Эти ограничения или условия описываются как раз теми дифференциальными уравнениями, которые изучались ранее. Таким образом, дифференциальные и вариационные методы не противоречат друг другу, а взаимно дополняют друг друга. Общность анализа, возможность использования приближенных методов, удобных для численной реализации на ЭВМ, делают вариационные методы весьма важными для прочностного анализа конструкции.

Вариационные методы связаны с понятием функционала. ***Функционалом*** называется скалярная величина (число), зависящая от поведения функции или нескольких функций в определенной области. Например, длина кривой, соединяющей две заданные точки пространства, является функционалом; он имеет минимальные значения для линейной функции (прямой).

Вариационные методы приложимы для различных моделей материала, но в дальнейшем ограничимся рассмотрением работы конструкций в упругой области.

33. Потенциальная энергия деформации

При деформации упругое тело накапливает энергию деформации за счет работы внешних сил. Сжатая пружина может возвратить затраченную на ее сжатие работу, так как обладает потенциальной энергией деформации. Это явление используется в ряде технических устройств (заводные пружины часов, пружины воздушных тормозов железнодорожных вагонов и т.п.). Ближайшая задача состоит в получении общих формул для определения потенциальной энергии деформации, но начнем с рассмотрения простейшего случая — растяжения стержня.

Потенциальная энергия деформации при растяжении и сжатии стержней. Рассмотрим растяжение стержня усилием N (рис. 9.1,*а*).

Усилие возрастает медленно от 0 до N и по закону упругости: пропорционально силе увеличивается удлинение стержня. Пренебрегая кинетической энергией частиц стержня и изменением их тепловой энергии в процессе нагружения, считаем по закону сохранения энергии, что потенциальная энергия деформации U равна работе внешней силы:

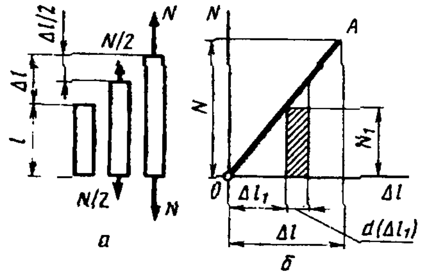


Рис. 9.1. Зависимость силы N и удлинения Δl при растяжении стержня:
а **— этапы нагружения;** ***б*** **— изменение усилия и удлинения в процессе нагружения**

$$U = \int_0^{\Delta l} N_1 \, d(\Delta l_1), \tag{1}$$

где N_1 и Δl_1 — значения усилия и удлинения в промежуточный момент нагружения.

По физическому смыслу интеграл (1) равен площади под прямой *OA* на рис.9.1,*б*:

$$U = \frac{1}{2} N \Delta l. \tag{2}$$

При растяжении стержней

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF}, \tag{3}$$

где E — модуль упругости; F — площадь поперечного сечения (изменением F в процессе деформации пренебрегают как малой величиной); l — первоначальная длина стержня.

Множитель 1/2 в формуле (2) появился потому, что в процессе нагружения усилие было переменным (от 0 до N). Из равенств (2) и (3) получаем два эквивалентных выражения:

$$U = \frac{1}{2}\frac{N^2 l}{EF} = \frac{1}{2}\frac{EF(\Delta l)^2}{l}. \tag{4}$$

Введем понятие удельной потенциальной энергии деформации U_1, или потенциальной энергии деформации, приходящейся на единицу объема. Тогда

$$U = \iiint_V U_1 \, dV, \tag{5}$$

где V — объем тела.

При растяжении стержня силой N величина U_1 одинакова для всех элементов стержня, и потому

$$U_1 = \frac{U}{lF},$$

где $lF = V$ — объем стержня.

Из соотношения (4) находим

$$U_1 = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{E} = \frac{1}{2}E\varepsilon^2, \tag{6}$$

где $\sigma = N/F$ и $\varepsilon = \Delta l / l$ — напряжения и деформации в стержне.

Важное для дальнейшего рассмотрения равенство (6) можно получить непосредственно из уравнения (1).

Введем замену переменных, обозначив

$$\Delta l_1 = \varepsilon_1 l,$$

где $\varepsilon_1 = \Delta l_1 / l$ — деформация в данный момент нагружения (новая переменная).

Тогда из равенства (1) получим

$$U = lF\int_0^{\varepsilon} \sigma_1 \, d\varepsilon_1 .$$

Удельная энергия деформации

$$U_1 = \int_0^{\varepsilon} \sigma_1 \, d\varepsilon_1 . \tag{7}$$

Приняв соотношение упругости

$$\sigma_1 = E\varepsilon_1,$$

найдем

$$U_1 = \frac{1}{2}E\varepsilon_2,$$

что совпадает с равенством (6).

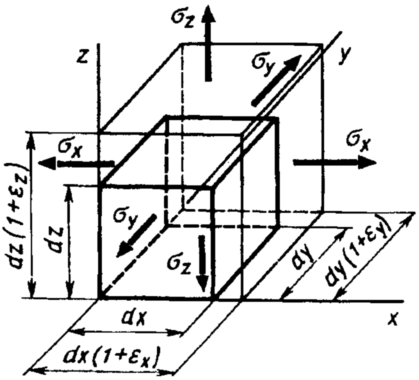


Рис. 9.2. Определение потенциальной энергии деформации при трехосном растяжении (сжатии)

Удельная потенциальная энергия деформации. Рассмотрим теперь общий случай определения потенциальной энергии деформации произвольно нагруженного упругого тела. Сначала будем считать, что на элемент тела действуют только нормальные напряжения (рис. 9.2). По граням элемента приложены напряжения σ_x, σ_y, σ_z. Изменения этих величин, вызванные приращением координат в пределах элемента, можно не учитывать, так как соблюдаются уравнения равновесия.

Работа внутренних сил упругости в результате деформации будет такой:

$$dU = \frac{1}{2}\sigma_x\,dy\,dz\cdot\varepsilon_x\,dx + \frac{1}{2}\sigma_y\,dz\,dx\cdot\varepsilon_y\,dy +$$

$$+\frac{1}{2}\sigma_z\,dx\,dy\cdot\varepsilon_z\,dz = \frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z)\,dV,$$

где $dV = dx\,dy\,dz$.

Потенциальная энергия деформации

$$U = \iiint\limits_V \frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z)\,dV,$$

а удельная потенциальная энергия деформации

$$U_1 = \frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z). \qquad (8)$$

В частном случае одноосного растяжения получаются прежние зависимости.

Перейдем к определению удельной потенциальной энергии при деформациях сдвига. На рис. 9.3 изображен элемент тела, испытывающий деформацию сдвига в плоскости xy.

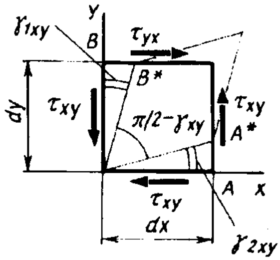


Рис. 9.3. Определение потенциальной энергии деформации при сдвиге

Первоначально прямой угол между осями x и y после деформации изменяется на величину

$$\gamma_{xy} = \gamma_{1\,xy} + \gamma_{2\,xy}\,. \tag{9}$$

Работа внутренних сил упругости, характеризующихся касательными усилиями на гранях элемента, может быть выражена таким образом:

$$dU = \frac{1}{2}\left(\tau_{xy}\,dy\,dz \cdot \gamma_{1\,xy}\,dx + \tau_{yx}\,dx\,dz \cdot \gamma_{2\,xy}\,dy\right).$$

Множитель 1/2, как и раньше, связан со статическим приложением усилий (от нуля до максимального значения) к упругому телу.

Вследствие свойства парности касательных напряжений

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}\,.$$

С помощью соотношения (9) находим

$$dU = \frac{1}{2}\,\tau_{xy}\,\gamma_{xy}\,dV.$$

Удельная потенциальная энергия деформации при сдвиге в плоскости xy

$$U_1 = \frac{1}{2}\,\tau_{xy}\,\gamma_{xy}\,. \tag{10}$$

Существенно , что удлинение ребер элемента не влияет на энергию деформации сдвига, так как касательные напряжения не производят работы при деформациях ε_x и ε_y. Соотношения, подобные (10), справедливы при сдвиге в других плоскостях.

Объединяя результаты, полученные при исследовании деформации растяжения и сдвига, запишем общую формулу удельной потенциальной энергии деформации:

$$U_1 = \frac{1}{2}\left(\sigma_x\,\varepsilon_x + \sigma_y\,\varepsilon_y + \sigma_z\,\varepsilon_z + \tau_{xy}\,\gamma_{xy} + \tau_{yz}\,\gamma_{yz} + \tau_{zx}\,\gamma_{zx}\right). \tag{11}$$

В более кратком виде формулу (11) можно записать так:

$$U_1 = \frac{1}{2}\{\sigma\}^{\text{т}}\{\varepsilon\} = \frac{1}{2}\{\varepsilon\}^{\text{т}}\{\sigma\}, \tag{12}$$

где $\{\sigma\}$ и $\{\varepsilon\}$ — векторы напряжений и деформаций; т — знак транспонирования.

Другие формулы для удельной потенциальной энергии деформации получаются из основной зависимости (11) при учете соотношений упругости (разд.16).

Если не принимать во внимание температурную деформацию, то для изотропного тела

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)\right], \ldots, \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}, \ldots (x, y, z). \tag{13}$$

Подставив соотношения (13) в формулы (11), получим после несложных преобразований

$$U_1 = \frac{1}{2E}\left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\mu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) + \right.$$

$$\left. + 2(1+\mu)(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)\right]. \tag{14}$$

При выводе (14) была учтена зависимость между модулем упругости и модулем сдвига G:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}.$$

Формулу (14) можно записать в более кратком виде, если представить соотношения упругости в матричной форме (разд.16):

$$\{\varepsilon\} = [A]\{\sigma\}. \tag{15}$$

Тогда получим следующий результат:

$$U_1 = \frac{1}{2}\{\sigma\}^{\text{т}}[A]\{\sigma\}. \tag{16}$$

Последняя зависимость справедлива и для анизотропного тела, что отражается только в структуре матрицы.

Представим теперь удельную потенциальную энергию деформации как квадратичную функцию деформаций. Для изотропного упругого тела, пренебрегая температурными деформациями, имеем (разд.16)

$$\sigma_x = 2G\varepsilon_x + \frac{3E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}\varepsilon, \tag{17}$$

где $\varepsilon = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)/3$ — средняя деформация.

Из соотношения (11) получаем

$$U_1 = \frac{E}{2(1+\mu)}\left[\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + \frac{9\mu}{1-2\mu}\varepsilon^2 + \frac{1}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)\right] \tag{18}$$

или в другой форме

$$U_1 = \frac{E}{2(1+\mu)}\left[\frac{1-\mu}{1-2\mu}(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + \frac{2\mu}{1-2\mu}(\varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_z\varepsilon_x) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)\right]. \tag{19}$$

Запишем уравнения (18) и (19) в матричной форме. Так как

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\}, \tag{20}$$

где $[C] = [A]^{-1}$ — матрица коэффициентов жесткости, то из соотношения (12) получаем

$$U_1 = \frac{1}{2}\{\varepsilon\}^{\mathrm{T}}[C]\{\varepsilon\}. \tag{21}$$

Последнее равенство справедливо и для анизотропного тела, если соответствующим образом выбрать матрицу коэффициентов жесткости.

Отметим еще две группы соотношений, представляющие интерес в теоретическом плане. Они получаются непосредственным дифференцированием равенств (14) и (19):

$$\frac{\partial U_1}{\partial \sigma_x} = \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] = \varepsilon_x, \quad \frac{\partial U_1}{\partial \tau_{xy}} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy} = \gamma_{xy}, \tag{22}$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial \varepsilon_x} = 2G\varepsilon_x + \frac{3E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}\varepsilon = \sigma_x, \quad \frac{\partial U_1}{\partial \gamma_{xy}} = \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy} = \tau_{xy}. \tag{23}$$

Потенциальная энергия деформации стержней при растяжении и изгибе. Ранее была установлена формула для потенциальной энергии при растяжении стержня постоянного сечения двумя усилиями по концам:

$$U = \frac{N_2}{2EF}l. \tag{24}$$

Получим теперь более общую формулу с помощью выражения (14).

При растяжении стержня отличным от нуля является нормальное напряжение $\sigma_z = \sigma$ (ось z направлена вдоль оси стержня).

Из соотношения (14) следует, что

$$U_1 = \frac{\sigma^2}{2E}.$$

Потенциальная энергия стержня:

$$U = \iiint\limits_V U_1\,dV = \int\limits_0^l \left(\int\limits_F \frac{\sigma^2}{2E}\,dE \right) dz. \tag{25}$$

Здесь предполагается, что ось стержня прямолинейна и совпадает с осью z.

В общем случае стержень может состоять из отдельных участков, оси которых направлены под углом друг к другу, или быть криволинейным. Тогда

$$U = \int\limits_0^l \left(\int\limits_F \frac{\sigma^2}{2E}\,dF \right) ds, \tag{26}$$

где ds — элемент длины стержня; l — полная длина стержня.

Для стержня с постоянными параметрами упругости

$$\sigma = \frac{N(z)}{F(z)},$$

$$\int\limits_F \frac{\sigma^2}{2E}\,dF = \frac{N^2(z)}{2EF^2(z)} \int\limits_F dF = \frac{N^2(z)}{2EF(z)}.$$

Потенциальная энергия стержня при растяжении

$$U = \frac{1}{2} \int\limits_0^l \frac{N^2(z)}{EF(z)}\,dz. \tag{27}$$

В частном случае при постоянных значениях $N(z)$ и $F(z)$ получается равенство (24).

Для стержня с переменными параметрами упругости (разд.4)

$$\sigma = \frac{EN}{\int\limits_F E\,dF}. \tag{28}$$

Теперь из равенства (25) находим

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{N^2(z)}{A(z)} dz,$$

где $A(z) = \int_F E\, dF$ — жесткость сечения стержня на растяжение.

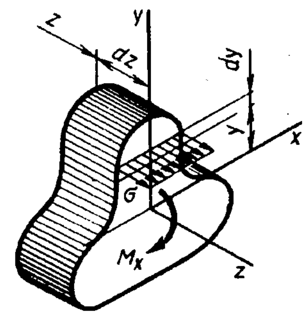


Рис. 9.4. Определение потенциальной энергии деформации при изгибе стержня

Рассмотрим теперь потенциальную энергию деформации при плоском изгибе стержня с постоянными параметрами упругости (рис.9.4). Пренебрегая сначала касательными напряжениями изгиба, воспользуемся равенством (25), полагая

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} y.$$

Так как

$$\int_F \frac{\sigma^2}{2E} dF = \frac{M_x^2}{2EJ_x},$$

то получаем значение энергии деформации:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_x^2}{EJ_x} dz. \tag{29}$$

Аналогичное соотношение имеет место при изгибе в плоскости xOz:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_y^2}{EJ_y} dz.$$

Потенциальная энергия деформации при одновременном растяжении и изгибе стержня:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{N^2}{EF} dz + \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_x^2}{EJ_x} dz + \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_y^2}{EJ_y} dz. \tag{30}$$

Для стержня с переменными параметрами упругости получаем подобную зависимость:

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{N^2}{A}dz + \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M_x^2}{B_x}dz + \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M_y^2}{B_y}dz, \tag{31}$$

где $A = \int_F E\,dF$, $B_x = \int_F Ey^2\,dF$, $B_y = \int_F Ex^2\,dF$ — жесткости сечения стержня на растяжение и изгиб.

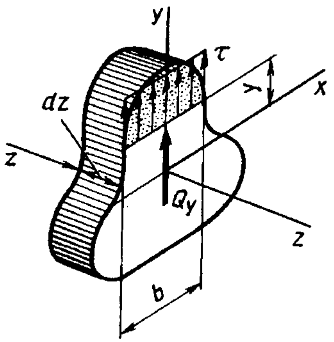


Рис. 9.5. Определение потенциальной энергии деформации, связанной с касательными напряжениями изгиба

Потенциальная энергия деформации, связанная с касательными напряжениями изгиба. При изгибе стержней поперечной нагрузкой возникают касательные напряжения (разд.28).

Для плоского изгиба (рис. 9.5) касательное напряжение

$$\tau = \frac{Q_y S_{xf}}{b\,I_x}, \tag{32}$$

где Q_y — перерезывающая сила в сечении; $S_{xf} = \int_F y\,dF$ — статический момент части сечения.

Потенциальная энергия деформации по формуле (14)

$$U = \iiint_V U_1\,dV = \int_0^l \left(\int_F \frac{\tau^2}{2G}dF \right) dz, \tag{33}$$

так как учитывается только касательное напряжение $\tau_{yz} = \tau$.

Далее найдем с помощью равенства (32)

$$\int_F \frac{\tau^2}{2G}dF = \frac{Q_y^2}{2GJ_x^2}\int_F \frac{S_{xf}^2}{b^2}dF = K_y(z)\frac{Q_y^2(z)}{GF(z)}, \tag{34}$$

где безразмерный коэффициент

$$K_y(z) = \frac{F(z)}{J_x^2(z)}\int_F \frac{S_{xf}^2}{b^2}dF \tag{35}$$

учитывает неравномерное распределение по поперечному сечению касательных напряжений изгиба.

Потенциальная энергия деформации, связанная с касательными напряжениями изгиба:

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l K_y \frac{Q_y^2(z)}{GF(z)}\,dz\,. \qquad (36)$$

Если касательное напряжение распределяется равномерно по сечению:

$$\tau = \frac{Q_y(z)}{F(z)}\,,$$

то из уравнений (34) и (35) $K_y = 1$.

Зависимость, подобная (36), существует и для изгиба в другой главной плоскости:

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l K_x \frac{Q_x^2(z)}{GF(z)}\,dz\,. \qquad (37)$$

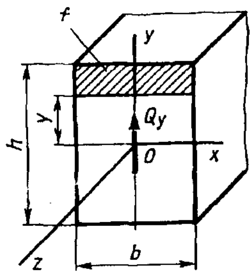


Рис. 9.6. Расчет коэффициента касательных напряжений

Пример определения коэффициентов касательных напряжений. Рассмотрим стержень прямоугольного сечения (рис.9.6). Для такого сечения

$$F = bh\,,\; J_x = \frac{bh^3}{12}\,,\; S_{xf} = \frac{1}{2}b\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right).$$

Расчет проводим по формуле (35). Находим

$$\int_F \frac{S_{xf}^2}{b^2}\,dF = \frac{b}{4}\int_{-h/2}^{h/2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)^2 dy = \frac{bh^5}{120}\,.$$

Далее получаем

$$K_y = \frac{F}{J_x^2}\int_F \frac{S_{xf}^2}{b^2}\,dF = \frac{bh\cdot 12^2}{b^2\cdot h^6}\cdot\frac{bh^5}{12\cdot 10} = \frac{6}{5} = 1{,}2\,.$$

Замечание. Коэффициент K_y определяется в результате осреднения энергии деформации сдвига. При учете влияния сдвига на прогибы стержня (разд.31) принималось для прямоугольного сечения $K_y = 3/2$ по максимальному значению касательных напряжений.

Величину $K_y = 1{,}2$, выражающую «среднеквадратичное касательное напряжение», следует считать более точной.

В общем случае в сечении стержня действуют растягивающее усилие N, перерезывающие усилия Q_x и Q_y, изгибающие моменты M_x, M_y, крутящий момент $M_к$.

Потенциальная энергия деформации выражается следующим равенством:

$$U = \frac{1}{2}\left\{\int_0^l \frac{N_z^2}{EF}ds + \int_0^l \frac{M_x^2}{EJ_x}ds + \int_0^l \frac{M_y^2}{EJ_y}ds + \int_0^l K_x\frac{Q_x^2}{GF}ds + \right.$$
$$\left. + \int_0^l K_y\frac{Q_y^2}{GF}ds + \int_0^l \frac{M_к^2}{J_к}ds\right\}. \tag{38}$$

Формула (38) объединяет ранее рассмотренные составляющие энергии деформации.

Возможность простого суммирования энергии растяжения и изгиба вытекает из того, что оси x и y являются главными осями сечения. Элемент длины вдоль оси стержня обозначен ds (см.формулу (26)), так что имеется возможность использования равенства (38) для стержней с непрямой осью. Последний член в равенстве (38) выражает потенциальную энергию при кручении стержня (гл.7).

Замечание. В большинстве практических задач при вычислении потенциальной энергии деформации слагаемыми, связанными с учетом касательных напряжений изгиба, можно пренебречь.

34. Вариационные методы

После приложения внешней нагрузки произойдет деформация конструкции (тела) и установится равновесие. Состояние равновесия можно проверить по выполнению условий равновесия каждого элемента тела, но можно использовать и другой путь: проанализировать поведение системы при малых возможных отклонениях (вариациях). Именно этим путем в теоретической механике (механике твердого, недеформируемого тела) были получены общие уравнения равновесия Лагранжа (начало возможных перемещений). Состояние упругой деформированной системы может быть однозначно описано перемещениями ее точек в процессе деформации — функциями u, v, w. Полная потенциальная энергия, как будет показано в дальнейшем, может рассматриваться как функционал

$$J = J(u, v, w). \qquad (39)$$

При вариациях функций u, v, w (малых отклонениях, согласованных со связями), которые обозначаются δu, δv, δw, изменяется величина функционала. Считая отклонения достаточно малыми, можно записать

$$\delta J = J(u + \delta u, v + \delta v, w + \delta w) - J(u, v, w). \qquad (40)$$

Состояние равновесия системы характеризуется условием

$$\delta J = 0.$$

Прежде чем перейти к дальнейшему изложению, остановимся вкратце на математической стороне вопроса.

Пусть имеется функционал, зависящий от функции $f(x)$:

$$J(f) = \int_a^b F(f, f', f'', x)\, dx, \qquad (41)$$

где F — некоторая функция, зависящая от функции f, ее первых производных и независимого переменного x. Например, если $f(x)$ представляет кривую, проходящую через две заданные точки A и B (рис.9.7), то функционал

$$J(f) + \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2 dx}$$

равен длине кривой L.

Рассмотрим другую функцию $f_1(x)$ — функцию сравнения, которая проходит через те же точки, и назовем вариацией функции

$$\delta f(x) = f_1(x) - f(x). \qquad (42)$$

Вариацию функции можно дифференцировать, причем

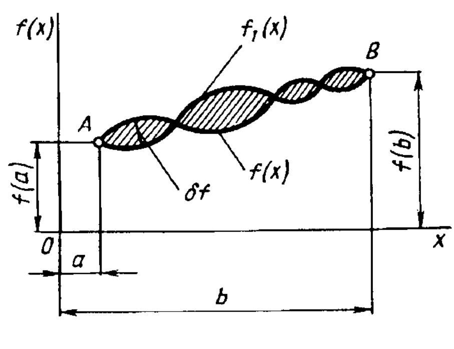


Рис. 9.7. Вариация функции

$$\frac{d}{dx}(\delta f(x)) = \frac{df_1}{dx} - \frac{df}{dx} = \delta f'(x). \qquad (43)$$

Операции варьирования и дифференцирования переставимы: $\delta f'(x)$ означает вариацию функции $f'(x)$. Вариация функционала (41) равна приращению функционала в результате вариации функции f и ее производных:

$$\delta J(f) - \int_a^b F(f+\delta f, f'+\delta f', f''+\delta f'', x)\,dx - \int_a^b F(f, f', f'', x)\,dx =$$

$$= \int_a^b [F(f+\delta f, f'+\delta f', f''+\delta f'', x) - F(f, f', f'', x)]\,dx. \qquad (44)$$

Считая вариации функции малыми величинами и рассматривая f, f' и f'' как независимые аргументы функции F, запишем

$$F(f+\delta f, f'+\delta f', f''+\delta f'', x) = F(f, f', f'', x) +$$

$$+ \frac{\partial F}{\partial f}\delta f + \frac{\partial F}{\partial f'}\delta f' + \frac{\partial F}{\partial f''}\delta f'' + \mathrm{O}(\delta f, \delta f', \delta f''), \qquad (45)$$

где $\mathrm{O}(\delta f, \delta f', \delta f'')$ — величина более высокой степени малости относительно δf, $\delta f'$, $\delta f''$.

Теперь, используя соотношение (45) и пренебрегая $\mathrm{O}(\delta f, \delta f', \delta f'')$, находим из равенства (44)

$$\delta J(f) = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial f}\delta f + \frac{\partial F}{\partial f'}\delta f' + \frac{\partial F}{\partial f''}\delta f'' \right) dx. \qquad (46)$$

Замечание. Поясняя равенство (45), напомним, что функция многих переменных $\Phi(x,y,z)$ может быть разложена в ряд в окрестности точки x_0, y_0, z_0 по формуле

$$\Phi(x,y,z) = \Phi(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial \Phi}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\Delta z + O(\Delta x, \Delta y, \Delta z),$$

где $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, $\Delta z = z - z_0$.

Равенство (45), в сущности, совпадает с приведенной формулой. Например, если

$$F(f, f', f'', x) = ff' + f'''x + f'^2,$$

то

$$\frac{\partial F}{\partial f} = f', \quad \frac{\partial F}{\partial f'} = f + 2f', \quad \frac{\partial F}{\partial f''} = x.$$

В равенстве (45) отсутствует частная производная по x, так как величина x не варьируется.

Условия экстремума функционала. Уравнение Эйлера-Пуассона. Метод Рэлея-Ритца. Поставим задачу — отыскать функцию $f(x)$, для которой первая вариация функционала обращается в нуль:

$$\delta J(f) = 0\,. \tag{47}$$

Функция $f(x)$ в этом случае называется экстремалью, а значение $J(f)$ — экстремумом функционала.

Равенство (46) не дает сразу ответа, так как подынтегральные члены разнородны. Преобразуем правую часть уравнения (46) с помощью интегрирования по частям. Предварительно проинтегрируем второе слагаемое:

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial f'}\,\partial f'\,dx = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial f'}\frac{d}{dx}(\delta f)\,dx = \frac{\partial F}{\partial f'}\,\delta f\,\Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial f'}\right)\delta f\,dx\,. \tag{48}$$

Подобные преобразования дают

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial f''}\,\delta f''\,dx = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial f''}\frac{d}{dx}(\delta f')\,dx = \frac{\partial F}{\partial f''}\,\delta f'\,\Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial f''}\right)\delta f'\,dx\,. \tag{49}$$

Повторяя интегрирование по частям в последнем члене равенства (49), находим

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial f''}\,\delta f''\,dx = \frac{\partial f}{\partial f''}\,\delta f'\,\Big|_a^b - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial f''}\right)\delta f\,\Big|_a^b + \\ + \int_a^b \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial f''}\right)\delta f\,dx\,. \tag{50}$$

Теперь условие (47) можно записать так:

$$\delta J(f) = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial f'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial f''}\right)\right]\delta f\,dx + \\ + \left[\frac{\partial F}{\partial f'} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial f''}\right)\right]\delta f\,\Big|_a^b + \frac{\partial F}{\partial f''}\,\delta f'\,\Big|_a^b = 0\,. \tag{51}$$

Равенство (51) должно быть справедливым для произвольной вариации δf. В частности, если рассматривать вариации δf и $\delta f'$, обращающиеся в нуль на концах интервала, а в промежуточных точках произвольные, то интеграл будет равен нулю только при условии

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial f'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial f''}\right) = 0. \tag{52}$$

Это и есть *дифференциальное уравнение Эйлера — Пуассона* для функции $f(x)$. Опять же в силу произвольности вариации δf должны выполняться краевые условия

$$\left[\frac{\partial F}{\partial f'} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial f''}\right)\right]\delta f\,\Big|_a^b = 0, \tag{53}$$

$$\frac{\partial F}{\partial f''}\,\delta f'\,\Big|_a^b = 0. \tag{54}$$

Итак, для решения вариационного уравнения (47) следует найти решение уравнения (52) при краевых условиях (53) и (54).

Построение точных решений дифференциальных уравнений часто оказывается затруднительным, и для решения уравнения (47) применяют приближенные методы, в частности метод Рэлея—Ритца.

Метод Рэлея—Ритца состоит в следующем. Допустим, что функция $f(x)$ может быть представлена рядом

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x), \tag{55}$$

где $f_i(x)$ — заранее выбранные функции, удовлетворяющие наложенным на систему связям; c_i — коэффициенты, подлежащие определению.

Соответственно

$$f'(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i'(x), \tag{56}$$

$$f''(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i''(x). \tag{57}$$

Подставив значения $f(x)$, $f'(x)$ и $f''(x)$ в равенство (47) и проведя интегрирование, найдем

$$J(f) = J(c_1, c_2, \ldots, c_n). \tag{58}$$

Вариация функционала теперь определяется так:

$$\delta J(f) = \frac{\partial J_1}{\partial c_1}\delta c_1 + \frac{\partial J_2}{\partial c_2}\delta c_2 + \ldots + \frac{\partial J_n}{\partial c_n}\delta c_n .$$

Учитывая условия (47) и считая вариации δc_i совершенно произвольными, получаем n уравнений

$$\frac{\partial J}{\partial c_i} = 0, \qquad i = \overline{1, n}, \tag{59}$$

из которых определяем n неизвестных: $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Примеры использования уравнения Эйлера—Пуассона и метода Рэлея—Ритца будут приведены в дальнейшем.

Точное решение вариационного уравнения

$$\delta J(f) = 0$$

должно обеспечивать его выполнение при произвольных вариациях f, разумеется, согласованных со связями системы. В методе Рэлея—Ритца вариация

$$\delta f = \sum_{i=1}^{n} \delta c_i f_i(x).$$

Класс вариаций функций ограничен выбором и числом функций, что означает наложение дополнительных связей на систему, повышающих ее «жесткость». Очевидно, если система функций обладает достаточной полнотой, приближенное решение будет ближе к точному.

Применение принципа возможных перемещений. Вариационное уравнение Лагранжа. Пусть имеется твердое деформируемое тело (рис.9.8), к поверхности которого приложены распределенные нагрузки p, а на элементы тела действуют массовые (объемные) силы F.

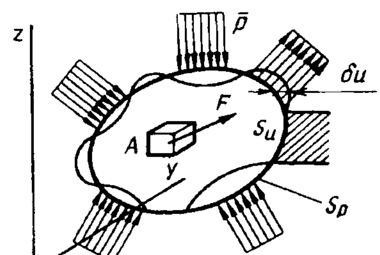


Рис. 9.8. Применение принципа возможных перемещений

Допустим, что упругие смещения точек тела u, v, w получили вариации (возможные перемещения) δu, δv, δw, совместимые с геометрическими связями. Поэтому на части поверхности S_u, где смещения являются заданными (например, поверхность заделки), вариации смещений отсутствуют. В результате вариации смещений изменится потенциальная энергия деформации и произойдет работа внешних сил

$$\delta W = \iint_{S_p} (p_x \delta u + py\delta v + p_z \delta w)\, ds + \iiint_V (F_x \delta u + F_y \delta v + F_z \delta w)\, dV, \quad (60)$$

где S_p — часть поверхности тела, к которой приложены заданные внешние усилия.

Принцип возможных перемещений применительно к деформируемому телу формируется следующим образом: в состоянии равновесия возможная работа внешних сил равна приращению потенциальной энергии деформации:

$$\delta U = \delta W. \quad (61)$$

Принцип возможных перемещений (73) можно записать в виде *вариационного уравнения Лагранжа*:

$$\delta \Pi = \delta (U - W) = 0, \quad (62)$$

где U — потенциальная энергия деформации; W — возможная работа внешних сил:

$$W = \iint_{S_p} (p_x u + p_y v + p_z w)\, dS + \iiint_V (F_x u + F_y v + F_z w)\, dV. \quad (63)$$

При определении возможной работы значения и направления внешних нагрузок считаются неизменными (множитель 1/2 отсутствует).

Вариация функции W (уравнение (60)) получается в результате варьирования перемещений при постоянных внешних силах. Легко видеть, что W равна удвоенной работе внешних сил, приложенных статически к упругому телу:

$$W = 2A. \quad (64)$$

Величина

$$\Pi = U - W \quad (65)$$

называется полной потенциальной энергией системы.

Величину Π можно представить в матричной форме (см.уравнение (12)):

$$\Pi = \frac{1}{2}\iiint_V \{\sigma\}^{\mathrm{T}} \{\varepsilon\}\, dV - \iint_{S_p} \{p\}^{\mathrm{T}} \{u\}\, dS - \iiint_V \{F\}^{\mathrm{T}} \{u\}\, dV, \quad (66)$$

где $\{u\}$, $\{p\}$, $\{F\}$ — векторы перемещений, поверхностной нагрузки и массовых сил:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}, \quad \{p\} = \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{Bmatrix}, \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix}.$$

При решении задач теории упругости с помощью вариационного уравнения Лагранжа обычно в качестве основных неизвестных принимаются смещения u, v, w, что обеспечивает выполнение условий совместности деформаций.

Вариационное уравнение

$$\delta\Pi = 0 \tag{67}$$

гарантирует выполнение уравнений равновесия и краевых условий, т.е. приводит к точному решению задачи.

Замечание 1. При выводе формулы полной потенциальной энергии системы (функционала Лагранжа) не требовалось выражение для вариации энергии деформации. Оно имеет следующий вид:

$$\delta U = \iiint\limits_V \{\sigma\}^{\mathrm{T}} \{\delta\varepsilon\}\, \delta V. \tag{68}$$

В правой части равенства (60) стоит возможная работа внешних силовых факторов, которые при вариации деформаций считаются постоянными. В связи с этим принцип возможных перемещений для деформируемого тела можно представить в более общей форме, пригодной и для неупругих систем:

$$\iiint\limits_V \{\sigma\}^{\mathrm{T}} \{\delta\varepsilon\}\, dV = \iint\limits_{S_p} \{p\}^{\mathrm{T}} \{\delta u\}\, dS + \iiint\limits_V \{F\}^{\mathrm{T}} \{\delta u\}\, dV. \tag{69}$$

В состоянии равновесия возможная работа внешних сил равна возможной работе внутренних силовых факторов.

2. Вариация полной потенциальной энергии происходит в результате вариации перемещений. Последние должны удовлетворять наложенным на систему связям (внешним — условиям закрепления и т.п. и внутренним — условиям непрерывности деформаций).

Полная потенциальная энергия деформации выражается через перемещения и их производные. Методы, основанные на начале возможных перемещений, часто называют *методами вариации перемещений.*

Вариационное уравнение изгиба стержня. Применим общее вариационное уравнение (67) к плоскому изгибу стержня переменного сечения (рис.9.9). Стержень подвергается дей-

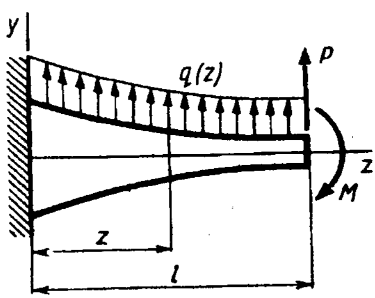


Рис. 9.9. К выводу вариационного уравнения изгиба стержня

ствию распределенной нагрузки $q(z)$ усилия P и момента M.

Потенциальная энергия деформации стержня

$$U = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{M^2}{EJ_x}dz = \frac{1}{2}\int_0^1 EJ_x\left(\frac{d^2v}{dz^2}\right)^2 dz\,. \tag{70}$$

В равенстве (70) $v(z)$ представляет прогиб оси стержня.

Возможная работа внешних сил

$$W = \int_0^l q(z)\,v(z)\,dz + P\,v(l) - M\frac{dv}{dz}(l)\,. \tag{71}$$

Полная потенциальная энергия системы

$$\Pi = U - W = \int_0^l \left[\frac{1}{2}EJ_x\left(\frac{d^2v}{dz^2}\right)^2 - q(z)\,v(z)\right]dz - Pv(l) + M\frac{dv}{dz}(l)\,.$$

Вариационное уравнение изгиба стержня

$$\delta\Pi = \delta\int_0^l \left[\frac{1}{2}EJ_x(v'')^2 - qv\right]dz - P\delta v(l) + M\delta v'(l) = 0\,. \tag{72}$$

Можно считать

$$\int_0^l \left[\frac{1}{2}EJ_x(v'')^2 - qv\right]dz = \int_0^l F(\,v\,,\,v'\,,\,v''\,,\,z\,)\,dz\,,$$

где $F = EJ_x(\,v''\,)^2/2 - qv$. Далее находим

$$\frac{\partial F}{\partial v} = -q\,,\quad \frac{\partial F}{\partial v'} = 0\,,\quad \frac{\partial F}{\partial v''} = EJ_xv''\,. \tag{73}$$

Пользуясь формулой (51) и полагая $f = v$, $x = z$, получаем

$$\delta\int_a^b \left[\frac{1}{2}EJ_x(v'')^2 - qv\right]dz = \int_0^l \left[-q + \frac{d^2}{dz^2}\left(EJ_x\frac{d^2v}{dz^2}\right)\right]\delta v\,dz -$$

$$-\frac{d}{dz}\left(EJ_x\frac{d^2v}{dz^2}\right)\delta v\,\Big|_0^l + EJ_x\frac{d^2v}{dz^2}\,\delta\frac{dv}{dz}\,\Big|_0^l . \tag{74}$$

Вариационное уравнение изгиба стержня (70) можно записать в такой форме:

$$\delta\Pi = \int_0^l \left[-q + \frac{d^2}{dz^2}\left(EJ_x\frac{d^2v}{dz^2}\right)\right]\delta v\,dz - \left[P + \frac{d}{dz}\left(EJ_x\frac{d^2v}{dz^2}\right)\right]_l \delta v(l) +$$

$$+\left[EJ_x\frac{d^2v}{dz^2} - M\right]_l \delta v'(l) = 0 , \tag{75}$$

так как $\delta v = \delta v' = 0$ при $z = 0$ (заделка).

Уравнение (75) должно быть справедливо для произвольной вариации, и потому оно эквивалентно уравнению

$$\frac{d^2}{dz^2}\left(EJ_x\;\frac{d^2v}{dz^2}\right) = q \tag{76}$$

и краевым условиям при $x = l$

$$EJ_x\frac{d^2v}{dz^2} = -M_x , \tag{77}$$

$$\frac{d}{dz}\left(EJ_x\frac{d^2v}{dz^2}\right) = -P . \tag{78}$$

Уравнение (76) является дифференциальным уравнением изгиба стержня, условия (77), (78) — силовые краевые условия при $x = l$. Краевые условия при $x = 0$ должны выполняться для функции $v(z)$ по построению

$$v(0) = 0 , \quad \frac{dv}{dz}(0) = 0 . \tag{79}$$

Таким образом, вариационное уравнение эквивалентно дифференциальному уравнению и краевым условиям.

Применение метода Рэлея—Ритца при решении задачи изгиба стержня. Метод Рэлея — Ритца применяется для решения многих задач, связанных с определением напряжений и деформаций в твердых деформируемых телах. Покажем алгоритм метода на простом примере

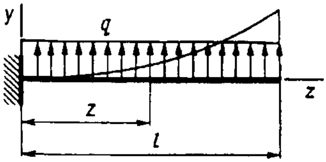


Рис. 9.10. Применение метода Рэлея—Ритца при решении задачи изгиба стержня

изгиба стержня постоянного сечения под действием равномерной нагрузки (рис.9.10).

Полная потенциальная энергия деформации

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^l EJ_x (v'')^2\,dz - \int_0^l qv\,dz\,. \qquad (80)$$

В соответствии с равенством (55) примем прогиб стержня равным

$$v(z) = \sum_{i=1}^{h} c_i f_i(z)\,, \qquad (81)$$

где $f_i(z)$ — возможные функции для прогиба стержня. В рассматриваемом примере они должны удовлетворять наложенным (геометрическим) связям

$$f_i(0) = 0\,, \quad f_i'(0) = 0\,. \qquad (82)$$

Можно принять

$$f_1 = \left(\frac{z}{l}\right)^2, \ f_2 = \left(\frac{z}{l}\right)^3, \ldots, \ f_i = \left(\frac{z}{l}\right)^{i+1}.$$

Решим сначала задачу с одним параметром, положив

$$v(z) = c_1\left(\frac{z}{l}\right)^2, \quad v''(z) = \frac{2c_1}{l^2}.$$

Подставляя значения v и v'' в равенство (80), находим

$$\Pi = \frac{EJ_x}{2}\int_0^l \frac{4c_1^2}{l^4}\,dz - q\int_0^l c_1\left(\frac{z}{l}\right)^2 dz = \frac{2EJ_x}{l^3}c_1^2 - \frac{qc_1}{l^2}\frac{l^3}{3}.$$

Из условия

$$\frac{\partial\Pi}{\partial c_1} = \frac{4EJ_x}{l^3}c_1 - \frac{ql}{3} = 0$$

находим

$$c_1 = \frac{ql^4}{12\,EJ_x}, \quad v(z) = \frac{ql^2z^2}{12\,EJ_x}.$$

Наибольший прогиб составит

$$v(l) = \frac{ql^4}{12\,EJ_x}, \tag{83}$$

что отличается от точного значения (см.разд.31)

$$v(l) = \frac{ql^4}{8\,EJ_x}.$$

Для уточнения решения примем

$$v(z) = c_1\left(\frac{z}{l}\right)^2 + c_2\left(\frac{z}{l}\right)^3, \quad v''(z) = \frac{2c_1}{l^2} + \frac{6c_2}{l^2}\frac{z}{l}$$

и далее

$$\Pi = \frac{EJ_x}{2}\int_0^l \left(\frac{2c_1}{l^2} + \frac{6c_2}{l^2}\frac{z}{l}\right)^2 dz - q\int_0^l \left(c_1\left(\frac{z}{l}\right)^2 + c_2\left(\frac{z}{l}\right)^3\right)dz.$$

Дифференцируя последнее соотношение по c_1 и c_2, получаем систему уравнений

$$\frac{\partial\Pi}{\partial c_1} = EJ_x\int_0^l \left(2\frac{c_1}{l^2} + \frac{6c_2}{l^2}\frac{z}{l}\right)\frac{2}{l^2}dz - q\int_0^l \left(\frac{z}{l}\right)^2 dz = 0,$$

$$\frac{\partial\Pi}{\partial c_2} = EJ_x\int_0^l \left(2\frac{c_1}{l^2} + \frac{6c_2}{l^2}\frac{z}{l}\right)\frac{6z}{l^3}dz - q\int_0^l \left(\frac{z}{l}\right)^3 dz = 0$$

или

$$c_1 + \frac{3}{2}c_2 = \frac{1}{12}\frac{ql^4}{EJ_x}, \quad c_1 + 2c_2 = \frac{1}{24}\frac{ql^4}{EJ_x}.$$

Из последних уравнений находим

$$c_1 = \frac{5}{24}\frac{ql^4}{EJ_x}, \quad c_2 = -\frac{ql^4}{12\,EJ_x},$$

и далее

$$v(z)=\frac{5}{24}\frac{ql^2z^2}{EJ_x}-\frac{qlz^3}{12EJ_x}. \qquad (84)$$

Наибольшее значение прогиба равно

$$v(l)=\frac{ql^4}{8EJ_x},$$

что совпадает с точным решением.

Как видно, добавление одного параметра в ряде (81) существенно повысило точность расчета.

Применение принципа возможных перемещений для определения прогибов стержней. Интеграл Мора. Этот метод нашел широкое распространение при решении практических задач. Пусть имеется стержень, загруженный произвольными силами (основная система, рис. 9.11,*а*), и в сечении *а* возник прогиб $v(a)$. Для его определения поступим следующим образом.

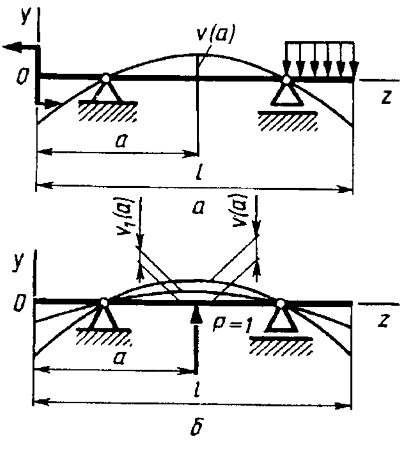


Рис. 9.11. Вывод интеграла Мора из принципа возможных перемещений: *а* — основная система; *б* — единичная система

Рассмотрим тот же стержень под действием единичного усилия $P=1$ (единичная система, рис.9.11,*б*). Стержень получит прогиб $v_1(z)$, в сечениях стержня под действием единичной силы возникнут изгибающий момент $M_{1x}(z)$ и перерезывающая сила $Q_{1y}(z)$.

Допустим теперь, что единичной системе (рис.9.11,*б*) сообщили возможные смещения, равные действительным прогибам стержня в основной системе:

$$\delta v_1(z)=v(z). \qquad (85)$$

Равенство (85) вполне закономерно — прогибы $v(z)$ являются малыми величинами, удовлетворяющими связям системы.

Так как возможная работа внешних сил равна возможной работе внутренних силовых факторов (начало возможных перемещений), то

$$1 \cdot v(a) = \int_0^l M_{1x}(z)\, d\varphi(z) + \int_0^l Q_{1y}(z)\, \gamma_{yz}(z)\, dz =$$

$$= \int_0^l M_{1x}(z) \frac{d\varphi_x}{dz} dz + \int_0^l Q_{1y}(z)\, \gamma_{yz}(z)\, dz, \qquad (86)$$

где $d\varphi_x / dz$ и γ_{yz} соответствуют прогибам $v(z)$ в основной системе.

Далее имеем с учетом температурных деформаций (см.уравнение (12) гл.8)

$$\frac{d\varphi_x}{dz} = \frac{M_x + M_{xT}}{B_x}, \qquad (87)$$

где $B_x = \int_F y^2 E\, dF$ — жесткость сечения на изгиб; $M_{xT} = \int_F E y\, \alpha_T T\, dF$ — температурный момент.

Деформация сдвига (см.разд.31) равна

$$\gamma_{yz} = K_y \frac{Q_y}{A_\gamma}. \qquad (88)$$

Таким образом, прогиб в сечении a будет

$$v(a) = \int_0^l \frac{M_{1x}(z)\, M_x(z)}{B_y} dz + \int_0^l K_y \frac{Q_{1y}(z)\, Q_y(z)}{A_\gamma} dz + \int_0^l \frac{M_{1x}(z)\, M_{xT}(z)}{B_x} dz. \qquad (89)$$

Это и есть *интеграл Мора* для вычисления прогиба стержня.

Для того чтобы найти прогиб в заданном сечении, нужно приложить единичную силу в этом сечении, определить изгибающий момент и перерезывающую силу от единичной силы и вычислить интеграл Мора (89). Если величина $v(a)$ получается положительной, то прогиб совпадает по направлению с единичной силой.

Во многих практических задачах интеграл, связанный с действием перерезывающей силы, может быть опущен.

Для стержня с постоянными параметрами упругости, пренебрегая перерезывающими усилиями и неравномерным нагревом, имеем

$$v(a) = \frac{M_{1x}(z)\, M_x(z)}{EJ_x(z)} dz. \qquad (90)$$

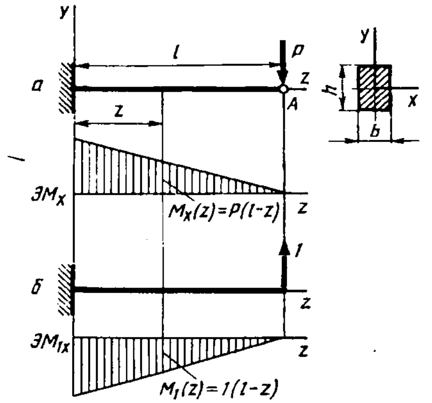


Рис. 9.12. Определение прогиба стержня с помощью интеграла Мора:
а — основная система; *б* — единичная система

Замечание. Следует отметить, что $M_{1x}(z)$ имеет размерность длины, а $Q_{1y}(z)$ — безразмерная величина, так как в равенстве (86) была сокращена размерная единица силы (см.примеры).

Пример. Пусть требуется определить прогиб конца консольного стержня прямоугольного сечения, загруженного силой P (рис.9.12), с учетом деформации сдвига.

Воспользуемся формулой (89), считая параметры упругости постоянными, материал стержня равномерно нагретым ($M_{xT}=0$),

$$v(l)=-\int_0^l \frac{(l-z)P(l-z)}{EJ_x}dz-K_y\int_0^l \frac{1\cdot P}{FG}dF=$$

$$=-\left(\frac{Pl^3}{3EJ_x}+\frac{6}{5}\frac{Pl}{GF}\right)=-\left(\frac{4Pl^3}{Ebh^3}+\frac{6}{5}\frac{Pl}{Gbh}\right).$$

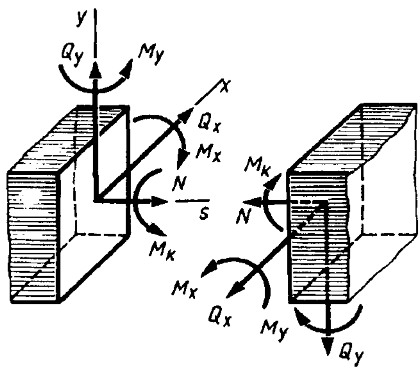


Рис. 9.13. Правило знаков для изгибающих моментов и сил (показаны положительные направления)

Знак минус означает, что прогиб направлен в сторону, противоположную приложенной единичной силе.

Решение совпадает с прежними результатами (см.разд.31).

Общий случай определения прогибов с помощью интеграла Мора. Одно из основных преимуществ интеграла Мора состоит в том, что он, в сущности, не связан с какой-либо общей системой координат. Правило знаков для силовых факторов выбрано заранее в местной системе координат (рис.9.13), которая может быть ориентирована произвольным образом в пространстве. Ось s в каждом сечении направлена по касательной к оси стержня.

Важно только, что для силовых факторов от внешней нагрузки и единичного силового фактора применяется единое правило знаков. Перемещение точки стержня в направлении единичной силы определяется следующим равенством:

$$\delta = \int_0^l \frac{N_1 N}{EF} ds + \int_0^l \frac{M_{1x} M_x}{EJ_x} ds + \int_0^l \frac{M_{1y} M_y}{EJ_y} ds + \int_0^l K_x \frac{Q_{1x} Q_x}{GF} dz +$$

$$+ \int_0^l K_y \frac{Q_{1y} Q_y}{GF} ds + \int_0^l \frac{M_{1\text{к}} M_\text{к}}{GJ_\text{к}} ds . \qquad (91)$$

Напомним, что оси x, y являются главными осями сечения; N_1, M_{1x}, M_{1y}, $M_{1\text{к}}$, Q_{1x}, Q_{1y} — силовые факторы в сечении стержня от действия единичной силы. Подчеркнем, что по смыслу вывода величина δ не является полным перемещением точки оси стержня, а представляет собой ее проекцию на направление действия единичной силы (возможная работа единичной силы!). Например, для стержня, показанного на рис.9.14, полное перемещение точки A равно u_A, а интеграл Мора дает величину δ.

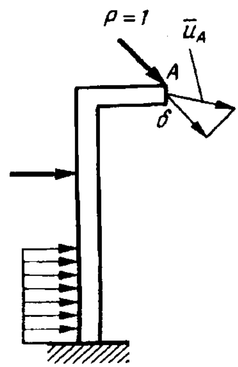


Рис. 9.14. Физический смысл интеграла Мора

Для неравномерно нагретых стержней к величине δ добавляется

$$\delta_T = \int_0^l \frac{N_1 N_T}{EF} ds + \int_0^l \frac{M_{1x} M_{xT}}{EJ_x} ds + \int_0^l \frac{M_{1y} M_{yT}}{EJ_y} ds , \qquad (92)$$

где в соответствии с равенствами (11)—(13) гл. 8 температурные усилия равны

$$N_T = \int_F E \alpha_T T dF , \; M_{xT} = \int_F y E \alpha_T T dF , \; M_{yT} = -\int_F x E \alpha_T T dF . \qquad (93)$$

Определение угла поворота с помощью интеграла Мора. Для этого в сечении (рис.9.15), где требуется определить угол поворота, прикладывается единичный момент (M =1). В стержне под действием единичного момента $M=1$ возникнут силовые факторы $M_{1x}(z)$, $Q_{1y}(z)$ и т.д.

Считая прогибы стержня под действием внешней нагрузки возможными перемещениями для единичной системы, получим, подобно равенству (90),

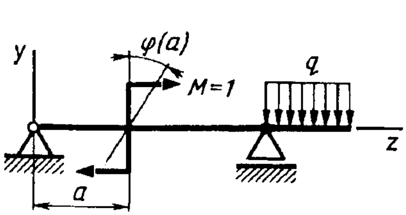


Рис. 9.15. Работа единичного момента

$$1 \cdot \varphi(a) = \int_0^l \frac{M_{1x}(z)\, M_x(z)}{EJ_x}\, dz,$$

где $M_x(z)$ — изгибающий момент от внешней нагрузки.

В общем случае справедлива формула (91), в которой δ заменяется величиной φ, а силовые факторы N_1, M_{1x}, M_{1y}, $M_{1к}$ определяются в зависимости от единичного момента.

Вычисление интеграла Мора по правилу Верещагина. В общем случае (стержень переменного сечения, сложная система нагрузок) интеграл Мора определяется путем численного интегрирования. Во многих практически важных случаях, когда жесткость сечения постоянна по длине стержня, интеграл Мора может быть вычислен по правилу Верещагина. Рассмотрим определение интеграла Мора на участке от a до b (рис.9.16).

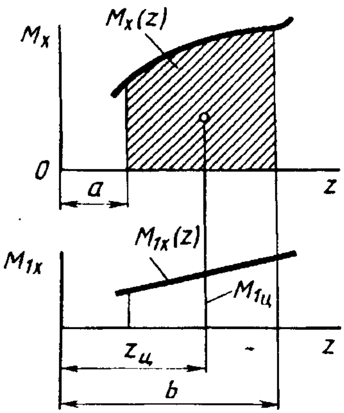


Рис. 9.16. Правило Верещагина для вычисления интеграла Мора

Эпюры момента от единичного силового фактора состоят из отрезков прямых. Не нарушая общности, предположим, что в пределах участка

$$M_{1x}(z) = Az + B, \tag{94}$$

где A и B — параметры прямой.

Интеграл Мора на рассматриваемом участке постоянного сечения имеет вид

$$\int_a^b \frac{M_{1x}(z)\, M_x(z)}{EJ_x}\, dz = \frac{1}{EJ_x} \int_a^b (Az + B)\, M_x(z)\, dz =$$

$$= \frac{1}{EJ_x} \left(A \int_a^b z\, M_x(z)\, dz + B \int_a^b M_x(z)\, dz \right); \tag{95}$$

при этом

$$\int_a^b M_x(z)\,dz = F, \tag{96}$$

где F — площадь эпюры изгибающих моментов от внешних сил на участке z (площадь под кривой $M_x(z)$).

Далее следует учесть, что статический момент площади эпюры моментов равен

$$\int_a^b z\,M_x(z)\,dz = z_ц F, \tag{97}$$

где $z_ц$ — абсцисса центра тяжести площади F.

Равенство (97) справедливо, когда $M_x(z)$ в пределах участка не изменяет знака и $M_x(z)\,dz = dF$ может рассматриваться как элемент площади эпюры. Теперь из соотношений (95)-(97) получаем

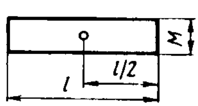
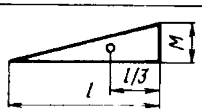
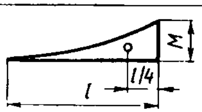
$$\int_a^b \frac{M_{1x}(z)\,M_x(z)}{EJ_x}\,dz = \frac{FM_{1ц}}{EJ_x}, \tag{98}$$

где $M_{1ц}$ — момент от единичной нагрузки в сечении $z = z_ц$:

$$M_{1ц} = Az_ц + B\,.$$

Ниже приводится вспомогательная таблица для использования правила Верещагина.

Площади и положения центров тяжести эпюр моментов

Эпюра	Площадь	Абсцисса центра тяжести
	Ml	$1/2\,l$
	$1/2\,Ml$	$1/3\,l$
	$1/3\,Ml$	$1/4\,l$

Замечания. 1. Если эпюра от действия внешних сил на участке линейна (например, при действии сосредоточенных сил и моментов), то правило можно применять в обращенном виде: площадь эпюры от единичного силового фактора F_1 умножить на ординату эпюры $M_x(z)$, соответствующую центру тяжести площади F_1. Это вытекает из приведенного доказательства.

2. Правило Верещагина может быть распространено на интеграл Мора в общем виде (уравнение (91)). Основное требование при этом состоит в следующем: в пределах участка внутренние силовые факторы от единичной нагрузки (N_1, M_{1x}, M_{1y}, Q_{1x}, Q_{1y}) должны быть линейными функциями вдоль оси стержня (линейность эпюр!).

Пример 1. Определить прогиб в точке A консольного стержня при действии сосредоточенного момента M (рис.9.17,a).

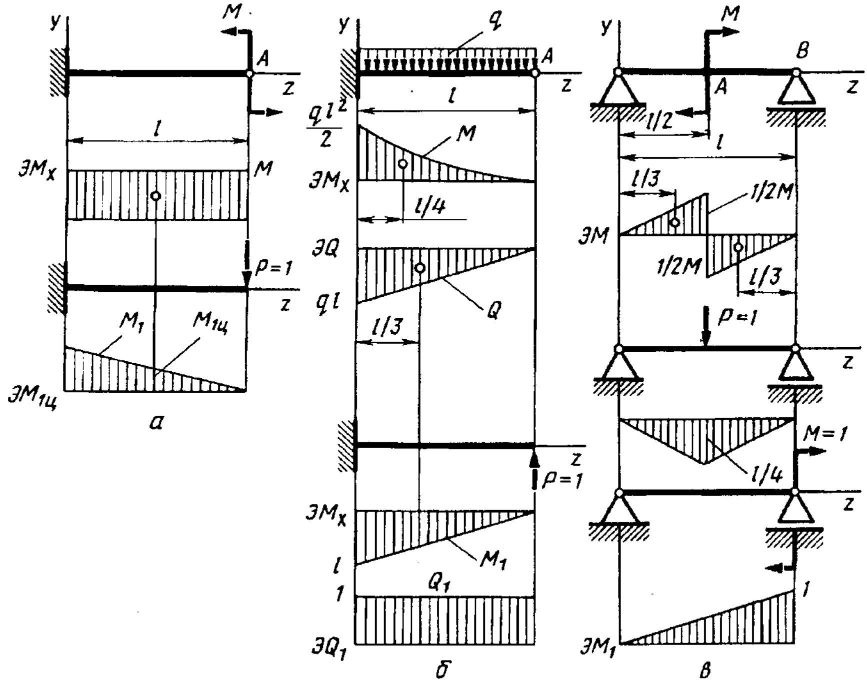


Рис. 9.17. Примеры определения прогибов и углов поворота по правилу Верещагина

Прогиб в точке A определяем по формуле (для краткости индекс момента опускается)

$$\delta_A = \int_0^l \frac{M_1 M}{EJ} dz = -\frac{1}{EJ} F M_{1ц} = -\frac{1}{EJ} Ml \frac{1}{2} l = -\frac{Ml^2}{2EJ}.$$

Знак минус связан с тем, что M_1 и M имеют разные знаки.

2. Определить прогиб в точке A в консольном стержне под действием распределенной нагрузки.

Прогиб определяем по формуле

$$\delta_A = \int_0^l \frac{M_1 M}{EJ} dz + \int_0^l K \frac{Q_1 Q}{GF} dz.$$

Эпюры изгибающего момента M и перерезывающей силы Q от внешней нагрузки показаны на рис.9.17,*б*, на этом же рисунке приведены эпюры M_1 и Q_1 при действии единичной силы.

Далее находим

$$\delta_A = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{3} \frac{ql^2}{2} \cdot l \cdot \frac{3}{4} \cdot l + \frac{K}{GF} \cdot \frac{1}{2} ql \cdot l \cdot 1 = \frac{ql^4}{8EJ} + \frac{Kql^2}{2GF}.$$

3. Определить прогиб в точке A и угол поворота в точке B для двухопорной балки, нагруженной сосредоточенным моментом (рис.9.17,*в*).

Прогиб определяем по формуле (деформацией сдвига пренебрегаем)

$$\delta_A = \int_0^l \frac{M_1 M}{EJ} dz.$$

Так как эпюра момента от единичной силы не изображается одной линией, то интеграл разбиваем на два участка:

$$\delta_A = -\frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} M \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} l + \frac{1}{EJ} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} M \frac{l}{2} \frac{2}{3} \frac{1}{4} l = 0.$$

Угол поворота в точке B

$$\varphi_A = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} M \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{6} \cdot 1 - \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} M \frac{l}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \right) \cdot 1 = -\frac{1}{EJ} \frac{Ml}{24}.$$

Замечание. Из приведенных примеров видно, что способ Верещагина в простых случаях позволяет быстро определить прогибы и углы поворота. Важно только применять единое правило знаков для $M(z)$ и $M_1(z)$. Если условиться при изгибе стержня строить эпюры изгибающих моментов на «растянутом волокне» (см.рис.9.17), то сразу легко увидеть положительные и отрицательные значения моментов.

Особое преимущество правила Верещагина состоит в том, что оно может быть использовано не только для стержней, но и для рам (разд.21).

Ограничения для применения правила Верещагина. Эти ограничения вытекают из вывода формулы (98), но обратим на них внимание еще раз.

1. Эпюра изгибающего момента от единичной нагрузки должна быть в виде одной прямой линии. На рис.9.18,*а* показан случай, когда это условие не соблюдается. Интеграл Мора необходимо вычислять отдельно для участков I и II.

2. Изгибающий момент от внешней нагрузки в пределах участка должен иметь один знак. На рис.9.18,*б* показан случай, когда правило

Верещагина следует применять для каждого участка в отдельности. Это ограничение не относится к моменту от единичной нагрузки.

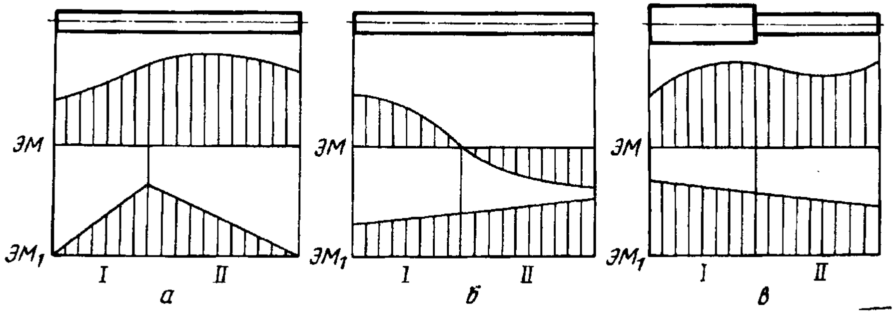


Рис. 9. 18. Ограничения при использовании правила Верещагина:
а — эпюра имеет излом; *б* — эпюра имеет разные знаки; *в* — стержень имеет разные сечения

3. Жесткость стержня в пределах участка должна быть постоянна, иначе интегрирование следует распространять отдельно на участки с постоянной жесткостью. Ограничения по постоянной жесткости можно избежать, если строить эпюры $M(z) / (EJ(z))$.

35. Метод вариации напряжений и общие свойства упругих систем

Метод вариации напряжений. Ранее рассматривался вариационный метод, основанный на принципе возможных перемещений (метод вариации перемещений). Перемещения предполагались достаточно непрерывными функциями, с тем, чтобы выполнялись условия совместности (непрерывности) деформаций. Условия равновесия и краевые условия для напряжений удовлетворялись с помощью вариационного уравнения Лагранжа.

Другой вариационный метод — *метод вариации напряжений* — основан на сравнении двух близких напряженных состояний, каждое из которых удовлетворяет условиям равновесия и краевым условиям. Вариационное уравнение метода эквивалентно условиям совместности деформаций.

В некотором смысле методы противоположны: при вариации перемещений условия совместности удовлетворяются заранее и находится решение, соответствующее уравнениям равновесия. В качестве основных неизвестных принимаются перемещения. В методе вариации напряжений заранее выполняются уравнения равновесия и краевые условия и строится решение, удовлетворяющее условиям совместности; основными неизвестными являются напряжения.

В общем случае вариационное уравнение метода вариации напряжений имеет следующий вид:

$$\delta U = \iiint\limits_V (\varepsilon_x \delta\sigma_x + \varepsilon_y \delta\sigma_y + \ldots + \gamma_{zx}\delta\tau_{zx})\, dV =$$

$$= \iint\limits_{S_p} (u\delta p_x + v\delta p_y + w\delta p_z) dS + \iiint\limits_V (u\delta F_x + v\delta F_y + w\delta F_z) dV. \qquad (99)$$

Вариация потенциальной энергии деформации равна работе вариаций внешних сил на действительных перемещениях.

Действительные перемещения — это перемещения в упругой системе от действия внешних нагрузок.

Вариация энергии деформации всего тела равна

$$\delta U = \iiint\limits_V \delta U_1\, dV, \qquad (100)$$

где U_1 — удельная потенциальная энергия:

$$\delta U_1 = \varepsilon_x \delta\sigma_x + \varepsilon_y \delta\sigma_y + \ldots + \gamma_{zx}\delta\tau_{zx}. \qquad (101)$$

Удельная потенциальная энергия деформации в методе вариации напряжений выражается через основные неизвестные — напряжения:

$$U = U_1(\sigma_x, \sigma_y, \ldots, \tau_{zx}). \qquad (102)$$

Вариация удельной потенциальной энергии деформации может быть представлена в такой форме:

$$\delta U_1 = \frac{\partial U_1}{\partial \sigma_x}\delta\sigma_x + \frac{\partial U_1}{\partial \sigma_y}\delta\sigma_y + \ldots + \frac{\partial U_1}{\partial \tau_{zx}}\delta\tau_{zx}. \qquad (103)$$

Из формулы для потенциальной энергии упругого тела (соотношение (14)) получаем

$$\frac{\partial U_1}{\partial \sigma_x} = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\mu\sigma_y}{E} - \frac{\mu\sigma_z}{E} = \varepsilon_x, \qquad (104)$$

что подтверждает идентичность зависимостей (101) и (103), а также и то обстоятельство, что левая часть уравнения (99) содержит вариацию потенциальной энергии деформации.

Вариационное уравнение (99) можно представить в матричной форме:

$$\iiint\limits_V \{\varepsilon\}^{\mathrm{T}}\{\delta\sigma\}\,dV = \iint\limits_{S_p} \{u\}^{\mathrm{T}}\{\delta p\}\,dS + \iiint\limits_V \{u\}^{\mathrm{T}}\{\delta F\}\,dV. \qquad (105)$$

При упругих деформациях

$$\iiint\limits_V \{\varepsilon\}^{\mathrm{T}}\{\delta\sigma\}\,dV = \delta V. \qquad (106)$$

Замечание. В уравнении (99) или (105) вариация внешних сил может быть произвольной. Некоторые нагрузки могут рассматриваться как постоянные, другая часть сил или даже одна сила могут варьироваться. Вариации напряжений связаны с вариациями внешних сил условиями равновесия и краевыми условиями.

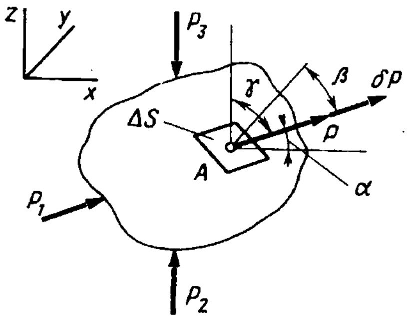


Рис. 9.19. К доказательству теоремы Кастильяно

Теорема Кастильяно. Пусть на малом участке поверхности ΔS приложена сила P, вектор которой составляет углы α, β, γ с осями координат (рис.9.19). Косинусы углов (направляющие косинусы):

$$\cos\alpha = l,\ \cos\beta = m,\ \cos\gamma = n. \qquad (107)$$

Рассматривая сосредоточенную силу как распределенную нагрузку на малом участке, будем иметь следующие компоненты поверхностной нагрузки:

$$p_x\Delta S = lP,\quad p_y\Delta S = mP,\quad p_z\Delta S = nP. \qquad (108)$$

Проводя вариацию этих компонент нагрузки, получаем

$$\delta p_x\Delta S = l\delta P,\quad \delta p_y\Delta S = m\delta P,\quad \delta p_z\Delta S = n\delta P. \qquad (109)$$

Предполагая, что варьируется только сила P, получаем из вариационного уравнения (99)

$$\delta U = (u_A l + v_A m + w_A n)\,\delta P = \delta_P \delta P, \qquad (110)$$

где $\delta_P = u_A l + v_A m + w_A n$ — проекция полного перемещения точки приложения силы на направление ее действия.

Приращение потенциальной энергии деформации вызвано приращением усилия δP, и потому

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial P}\delta P. \tag{111}$$

Теперь из равенств (110) и (111) получаем

$$\frac{\partial U}{\partial P} = \delta_P. \tag{112}$$

Равенство (112) составляет *теорему Кастильяно.*

Частная производная потенциальной энергии деформации по силе равна проекции полного перемещения точки приложения силы на направление ее действия.

Замечания. 1. Вполне естественно, что по теореме Кастильяно определяется только проекция перемещения точки приложения силы на направление силы, а не полное перемещение. Это вытекает из того, что вариационное уравнение содержит работу вариации силы (скалярное произведение перемещения и силы).

По условиям (109) вариация силы происходит в направлении ее действия.

2. Величина δ_P определяется не только усилием P, значение которого варьировалось, а всеми приложенными к телу нагрузками (проекция действительного перемещения точки A на направление усилия P). Все другие нагрузки влияют на потенциальную энергию деформации и ее частную производную по P.

Элементарное доказательство теоремы Кастильяно. Рассмотрим в качестве примера упругой системы балку, нагруженную силами P и Q (рис.9.20). Прогибы в точках приложения сил P и Q обозначены символами δ_P и δ_Q. Считая для упругих систем действие сил независимым, можно записать

$$\delta_P = \delta_{PP}P + \delta_{PQ}Q, \tag{113}$$

где δ_{PP} — перемещение в точке A от единичной силы в точке A, δ_{PQ} — перемещение в точке A от единичной силы в точке B.

Будем считать, что потенциальная энергия деформации не зависит

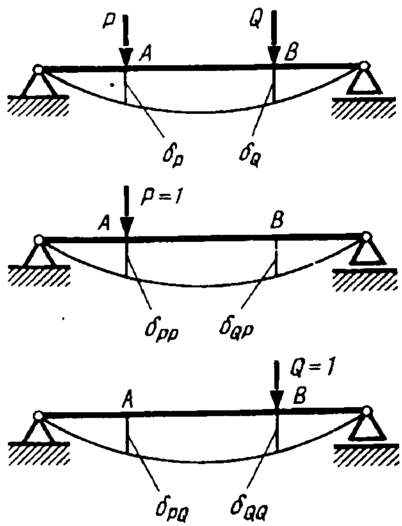


Рис. 9.20. К доказательству теоремы Кастильяно элементарным способом

от порядка приложения нагрузок и определяется работой внешних сил.

Пусть к балке сначала приложена только сила P. Она совершит работу

$$A_1 = \frac{1}{2} P\, \delta_{PP} P = \frac{1}{2} \delta_{PP} P^2 .$$

При втором нагружении статически прикладывается сила Q, причем сила P в процессе второго нагружения остается постоянной. Работа внешних сил при втором нагружении

$$A_2 = \frac{1}{2} Q\,(\delta_{QQ} Q) + P\,(\delta_{PQ} Q) = \frac{1}{2} \delta_{QQ} Q^2 + \delta_{PQ} PQ .$$

Потенциальная энергия системы после двух нагружений

$$U = A_1 + A_2 = \frac{1}{2} \delta_{PP} P^2 + \frac{1}{2} \delta_{QQ} Q^2 + \delta_{PQ} PQ .$$

Дифференцируя по P, находим

$$\frac{\partial U}{\partial P} = \delta_{PP} P + \delta_{PQ} Q = \delta_P , \tag{114}$$

что и составляет теорему Кастильяно.

Существенно, что перемещения от единичных сил зависят только от геометрических размеров системы и модуля упругости и не зависят от внешних усилий (в пределах упругости материала) — при дифференцировании они должны рассматриваться как постоянные.

Замечание. Можно привести несколько других элементарных доказательств теоремы Кастильяно, но всегда используется прием двух нагружений: независимость результата от порядка приложения нагрузок. Во всех доказательствах не рассматриваются другие порядки нагружения, так как они требуют привлечения теоремы взаимности. Однако элементарные доказательства всегда привлекательны — в них более четко выступает физическая сущность вопроса.

Пример 1. *Прогиб консольного стержня при действии силы на конце стержня* (рис.9.21). Для определения прогиба в точке A составляем выражение потенциальной энергии деформации:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_x^2\, dz}{EJ_x} = \frac{P^2}{2\, EJ_x} \int_0^l (l - z)^2\, dz = \frac{P^2 l^3}{6\, EJ_x} .$$

По теореме Кастильяно имеем

$$\delta_P = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{Pl^3}{3EJ_x},$$

что соответствует ранее полученным результатам.

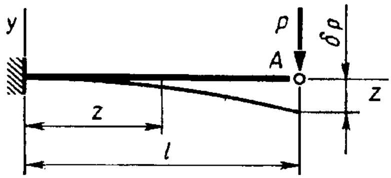


Рис. 9.21. Определение прогиба стержня с помощью теоремы Кастильяно

Пример 2. Определение прогиба в произвольной точке стержня (рис.9.22). К стержню приложен момент M, и требуется определить прогиб в точке A. Для этого приложим в этой точке A силу Ф, применим теорему Кастильяно, но в окончательном результате положим Ф=0.

Потенциальная энергия деформации стержня (по участкам) равна

$$U = \frac{1}{2}\int\limits_0^{l/2} \frac{[M - \Phi(l - z_1)]^2}{EJ_x}dz_1 + \frac{1}{2}\int\limits_{l/2}^{l} \frac{\Phi^2(l - z_2)^2}{EJ_x}dz_2 =$$

$$= \frac{M^2 l}{4EJ_x} - \frac{3M\Phi l^2}{8EJ_x} + \frac{\Phi^2 l^3}{6EJ_x}.$$

Далее находим

$$\frac{\partial U}{\partial \Phi} = -\frac{3ML^2}{8EJ_x} + \frac{\Phi l^3}{3EJ_x}.$$

Прогиб в точке A получаем при $\Phi = 0$:

$$\delta_A = \left.\frac{\partial U}{\partial \Phi}\right|_{\Phi=0} = -\frac{3Ml^2}{8EJ_x}.$$

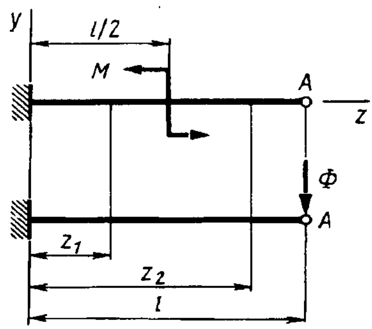


Рис. 9.22. Определение прогиба в произвольной точке стержня по теореме Кастильяно (способ фиктивной силы)

В рассматриваемом случае результат можно получить проще, если провести дифференцирование под знаком интеграла и положить $\Phi = 0$. Тогда получаем

$$\delta_A = \left.\frac{\partial U}{\partial \Phi}\right|_{\Phi=0} = \left.\int\limits_0^l \frac{M(z)\frac{\partial M}{\partial \Phi}dz}{EJ_x}\right|_{\Phi=0} = -\int\limits_0^{l/2} \frac{M(l - z)}{EJ_x}dz = -\frac{3ML^2}{8EJ_x}.$$

Знак минус показывает, что прогиб направлен противоположно силе Ф.

Пример 3. Определение перемещения фермы в точке приложения нагрузки (рис.9.23). Определяем усилия в стержнях по условиям равновесия:

$$N_1 \cos\beta = N_2 \cos\alpha\,,\; N_1 \sin\beta + N_2 \sin\alpha = P\,.$$

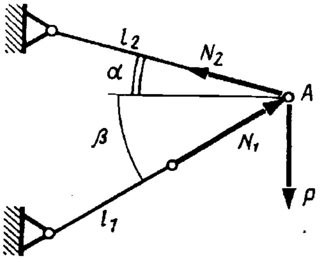


Рис. 9.23. Определение перемещений фермы с помощью теоремы Кастильяно

Из этих равенств получаем

$$N_1 = P\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}\,,\quad N_2 = P\frac{\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\,.$$

Потенциальная энергия деформации системы

$$U = \frac{1}{2}\frac{N_1^2 l_1}{EF} + \frac{1}{2}\frac{N_2^2 l_2}{EF} =$$

$$= \frac{P^2}{2EF}(\,l_1\cos^2\alpha + l_2\cos^2\beta\,)\frac{1}{\sin^2(\alpha+\beta)}\,.$$

Перемещение точки A в направлении действия силы P по теореме Кастильяно равно

$$\delta_P = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{P}{EF}(\,l_1\cos^2\alpha + l_2\cos^2\beta\,)\frac{1}{\sin^2(\alpha+\beta)}\,.$$

Замечание. В рассматриваемом примере очевидна эффективность метода вариации напряжений (усилий) при определении перемещений в сложных системах. Решение задачи на основании геометрических соображений значительно сложнее.

Общие свойства упругих систем. Рассмотрим два важных свойства линейных упругих систем произвольной структуры, которые называются принципом независимости действия сил и принципом взаимности.

Принцип независимости действия сил утверждает, что в упругой системе напряжения и деформации от действия одной нагрузки не зависят от наличия или отсутствия других нагрузок. Более строгая формулировка требует указания о линейности системы; напряжения и деформации должны быть пропорциональны действующей нагрузке.

Например, при контактной деформации упругих шаров принцип независимости действия сил несправедлив, так как зависимость перемещения от силы оказывается нелинейной. По этой же причине принцип независимости действия сил не может использоваться при наличии пластических деформаций или деформаций ползучести. Из принципа независимости действия сил вытекает, что действие суммы сил равно сумме действий каждой силы в отдельности.

Важным следствием принципа является утверждение, что результат действия суммы сил не зависит от порядка их приложения.

Принцип независимости действия сил подтверждается экспериментально и хорошо проверен на практике. Его теоретическое доказательство основывается на том, что линейные упругие системы описываются линейными дифференциальными уравнениями, для которых справедлив принцип суперпозиций.

Замечания. 1. Важным условием, сопутствующим применению принципа независимости действия сил, является принцип начальных размеров, в соответствии с которым условия равновесия рассматриваются для начального. недеформированного состояния. Если принцип начальных размеров в рассматриваемой задаче не может быть использован, то, как правило, неприменим и принцип независимости действия сил.

2. Для справедливости принципа независимости действия сил требуется одинаковая линейная зависимость усилий и перемещений при нагружении и разгрузке.

3. Упругие конструкции, у которых параметры упругости зависят от знака действующих напряжений, не относятся к числу линейных систем, и для них, следовательно, принцип независимости действия сил неприменим.

Принцип взаимности основан на принципе независимости действия сил и является его следствием.

Рассмотрим произвольное упругое тело (рис.9.24), к которому приложены единичные силы $P_1 = 1$ и $P_2 = 1$. Пусть δ_1 — перемещение точки A_1 при действии только одного усилия P_1 и δ_{11} — проекция этого перемещения на направление P_1. В точке A_2 от единичного усилия возникает перемещение в направлении усилия P_2, равное δ_{21}. Если к телу приложена единичная сила $P_2 = 1$, то она вызывает перемещение точки A_2, обозначенное δ_{22}, и перемещение точки A_1, обозначенное δ_{12}.

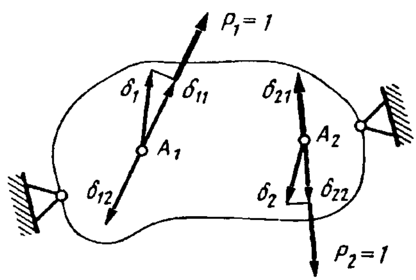


Рис. 9.24. Принцип взаимности для упругих систем

В соответствии с принципом независимости действия сил результат воздействия, в частности потенциальная энергия деформации, не должен зависеть от порядка приложения нагрузки. Пусть к упругой системе статически приложена сначала сила $P_1 = 1$. Тогда потенциальная энергия деформации, равная работе внешних сил, составит

$\frac{1}{2}\delta_{11}\cdot 1$. Если затем статически приложено усилие $P_2 = 1$, то произойдет увеличение потенциальной энергии деформации за счет работы внешних сил. Усилие P_2 совершит работу $\frac{1}{2}\delta_{22}\cdot 1$, но, что самое важное, произведет работу усилие $P_1 = 1$, которое в процессе возрастания усилия P_2 оставалось постоянным (работа равна $1\cdot\delta_{21}\cdot 1$). При указанном порядке нагружения (сначала P_1, затем P_2) потенциальная энергия деформации равна

$$U_{(1)} = \frac{1}{2}\delta_{11}\cdot 1 + \frac{1}{2}\delta_{22}\cdot 1 + \delta_{21}\cdot 1\,. \qquad (115)$$

Если изменить порядок нагружения (сначала P_2, затем P_1), получим

$$U_{(2)} = \frac{1}{2}\delta_{22}\cdot 1 + \frac{1}{2}\delta_{11}\cdot 1 + \delta_{12}\cdot 1\,. \qquad (116)$$

Приравнивая значения $U_{(1)}$ и $U_{(2)}$, находим

$$\delta_{12} = \delta_{21}\,. \qquad (117)$$

Перемещения δ_{12} и δ_{21} от единичных сил в других точках называются *коэффициентами влияния*.

Принцип взаимности утверждает: коэффициенты влияния являются симметричными, т.е. не изменяются при перестановке их индексов.

В общем случае

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}\,. \qquad (118)$$

Замечание. В общем случае принцип взаимности утверждает: работа сил первой системы на перемещениях от второй системы сил равна работе сил второй системы на перемещениях от первой системы. В частном случае, когда первая система представляет собой единичную силу P_1, а вторая — единичную силу P_2, получается равенство (117).

Доказательство в общем случае полностью повторяет приведенный вывод.

Глава 10

КОЛЬЦА И ПРУЖИНЫ

36. Изгиб колец

В технике часто используются кольца как силовые элементы конструкций (рис.10.1). Они служат для подкрепления оболочек (силовые кольца, шпангоуты), особенно при передаче сосредоточенных усилий, и нередко представляют собой самостоятельные конструктивные элементы.

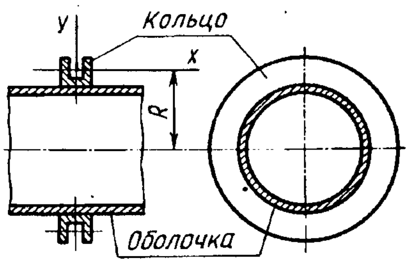


Рис. 10.1. Кольца как элементы конструкции

Рассмотрим замкнутые круговые кольца, у которых одна из главных осей поперечного сечения лежит в плоскости кольца. Будем считать, что нагрузки совпадают с главной осью и действуют в плоскости кольца и что размеры поперечного сечения малы по сравнению с радиусом кольца.

Основные уравнения. Задача о замкнутом кольце под действием произвольной нагрузки (в плоскости кольца) является статически неопределимой задачей.

Разрезав кольцо в произвольном месте (рис.10.2), получим статически определимую систему, в которой действуют три неизвестных силовых фактора: нормальное усилие X_1, перерезывающее усилие X_2 и изгибающий момент X_3.

Замкнутое кольцо является три раза статически неопределимой системой.

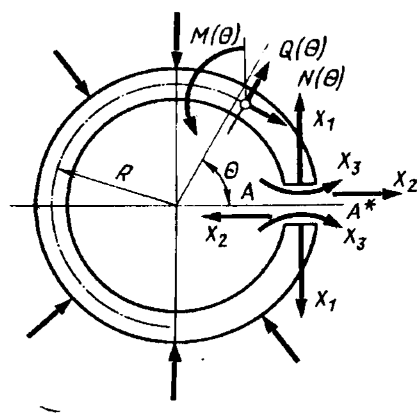


Рис. 10.2. Основная система при расчете колец

При определении перемещений будем использовать интеграл Мора:

$$\delta = \int\limits_l \frac{M_p M_1}{EJ_x} ds + \int\limits_l \frac{N_p N_1}{EF} ds + \int\limits_l \frac{KQ_p Q_1}{GF} ds, \qquad (1)$$

где M_p, N_p, Q_p — соответственно изгибающий момент, перерезывающая и нормальная силы от внешних нагрузок в разрезанном кольце; M_1, N_1, Q_1 — то же от единичных силовых факторов; EJ_x, EF, GF — соответственно жесткости на изгиб, растяжение и сдвиг; K — коэффициент, зависящий от формы сечения.

Анализ показывает, что влиянием перерезывающих и нормальных сил для колец в большинстве случаев можно пренебречь.

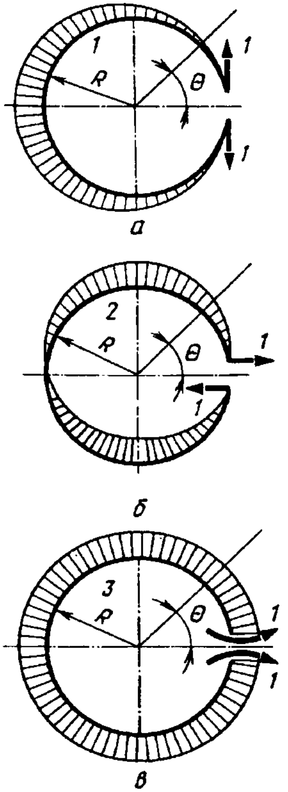


Рис. 10.3. Эпюры изгибающих моментов от единичных силовых факторов

В качестве основной системы принимаем кольцо, разрезанное в сечении A (рис.10.2).

Составим канонические уравнения метода сил, считая относительные смещения точек A и A^* равными нулю:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1p} = 0, \qquad (2)$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2p} = 0, \qquad (3)$$

$$\delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3p} = 0. \qquad (4)$$

Уравнение (2) выражает отсутствие относительного смещения разреза (в основной системе) в направлении силы X_1, уравнение (3) обращает в нуль взаимное смещение разреза в направлении силы X_2, уравнение (4) свидетельствует об отсутствии взаимного поворота разреза.

Для определения коэффициентов канонических уравнений (2)-(4) построим эпюры изгибающих моментов (рис.10.3). Используя свойства произведения симметричных и кососимметричных эпюр, находим

$$\delta_{12} = \delta_{21} = 0, \quad \delta_{23} = \delta_{32} = 0.$$

Из уравнения (3) находим

$$X_2 = -\Delta_{2p} / \delta_{22}. \qquad (5)$$

Уравнения (2) и (4) принимают вид

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1p} = 0, \quad \delta_{31}X_1 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3p} = 0$$

и приводят к следующим значениям неизвестных силовых факторов:

$$X_1 = \frac{\Delta_{3p}\delta_{13} - \Delta_{1p}\delta_{33}}{\delta_{11}\delta_{33} - \delta_{13}^2}, \quad X_2 = \frac{\Delta_{1p}\delta_{31} - \Delta_{3p}\delta_{11}}{\delta_{11}\delta_{33} - \delta_{13}^2}. \qquad (6)$$

Перейдем к вычислению коэффициентов влияния.

Изгибающий момент в сечении под углом Θ в эпюре *1* (рис.10.3,*а*):

$$M_{11}(\Theta) = 1 \cdot R\,(1 - \cos\Theta).$$

Изгибающие моменты будем считать положительными, если они уменьшают кривизну стержня (положительное направление $M(\Theta)$ показано на рис.10.2).

Изгибающие моменты в эпюрах *2* и *3* от единичных силовых факторов (рис.10.3,*б* и *в*):

$$M_{12}(\Theta) = 1 \cdot R\sin\Theta, \quad M_{13}(\Theta) = 1.$$

Далее вычисляем

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ_x}\int_0^{2\pi} M_{11}^2 R\,d\Theta = \frac{R^3}{EJ_x}\int_0^{2\pi}(1 - \cos\Theta)^2 d\Theta = \frac{3\pi R^3}{EJ_x},$$

$$\delta_{13} = \frac{1}{EJ_x}\int_0^{2\pi} M_{11}M_{13}R\,d\Theta = \frac{R^2}{EJ_x}\int_0^{2\pi}(1 - \cos\Theta)\,d\Theta = \frac{2\pi R^2}{EJ_x},$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EJ_x}\int_0^{2\pi} M_{12}^2 R\,d\Theta = \frac{R^3}{EJ_x}\int_0^{2\pi}\sin^2\Theta\,d\Theta = \frac{\pi R^3}{EJ_x},$$

$$\delta_{33} = \frac{1}{EJ_x}\int_0^{2\pi} M_{13}^2 R\,d\Theta = \frac{R}{EJ_x}\int_0^{2\pi} d\Theta = \frac{2\pi R}{EJ_x}.$$

Перемещения под действием внешних нагрузок составляют

$$\Delta_{1p} = \frac{1}{EJ_x}\int_0^{2\pi} M_p M_{11} R\,d\Theta = \frac{R^2}{EJ_x}\int_0^{2\pi} M_p\,(1 - \cos\Theta)\,d\Theta,$$

$$\Delta_{2p} = \frac{1}{EJ_x} \int_0^{2\pi} M_p M_{12} R \, d\Theta = \frac{R^2}{EJ_x} \int_0^{2\pi} M_p \sin\Theta \, d\Theta ,$$

$$\Delta_{13} = \frac{1}{EJ_x} \int_0^{2\pi} M_p M_{13} R \, d\Theta = \frac{R^2}{EJ_x} \int_0^{2\pi} M_p \, d\Theta ,$$

где $M_p(\Theta)$ — изгибающий момент от внешних нагрузок в сечении под углом Θ в разрезанном кольце.

Подставляя вычисленные значения в формулы (6), найдем после несложных преобразований

$$X_1 = \frac{1}{\pi R} \int_0^{2\pi} M_p(\Theta) \cos\Theta \, d\Theta , \tag{7}$$

$$X_2 = -\frac{1}{\pi R} \int_0^{2\pi} M_p(\Theta) \sin\Theta \, d\Theta , \tag{8}$$

$$X_3 = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M_p(\Theta) \, d\Theta - -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} M_p(\Theta) \cos\Theta \, d\Theta . \tag{9}$$

Изгибающий момент в сечении Θ в замкнутом кольце

$$M(\Theta) = M_p(\Theta) + X_1 R \, (1 - \cos\Theta) + X_2 R \sin\Theta + X_3 . \tag{10}$$

Учитывая равенства (7)-(9), получаем основную формулу:

$$M(\Theta) = M_p(\Theta) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M_p(\Theta) \, d\Theta - \frac{\cos\Theta}{\pi} \int_0^{2\pi} M_p(\Theta) \cos\Theta \, d\Theta -$$

$$- \frac{\sin\Theta}{\pi} \int_0^{2\pi} M_p(\Theta) \sin\Theta \, d\Theta . \tag{11}$$

Изгибающий момент в сечении замкнутого кольца равен изгибающему моменту в разрезанном кольце за вычетом трех первых членов разложения этого момента в ряд Фурье. При вычислении интегралов можно пользоваться приближенными численными методами.

В равенстве (11) угол Θ отсчитывается от сечения разреза, которое можно выбрать произвольным. Если внешние нагрузки имеют ось симметрии или ось асимметрии, то «разрез» кольца целесообразно проводить по этим осям.

Для нагрузки, симметричной относительно линии разреза:

$$M(\Theta) = M_p(\Theta) - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} M_p(\Theta)\,d\Theta - \frac{2\cos\Theta}{\pi}\int_0^{\pi} M_p(\Theta)\cos\Theta\,d\Theta . \qquad (12)$$

Для нагрузки, кососимметричной относительно линии разреза:

$$M(\Theta) = M_p(\Theta) - \frac{2\sin\Theta}{\pi}\int_0^{\pi} M_p(\Theta)\sin\Theta\,d\Theta . \qquad (13)$$

Замечание. При раскрытии статической неопределимости кольца учитывались только изгибающие моменты. В некоторых случаях, например при действии на кольцо большого числа одинаковых радиальных сил, существенное значение приобретают нормальные усилия, и их следует учесть в равенстве (1). Это понятно, потому что при равномерном давлении на кольцо изгибающие моменты в нем отсутствуют и вся деформация происходит за счет усилий N.

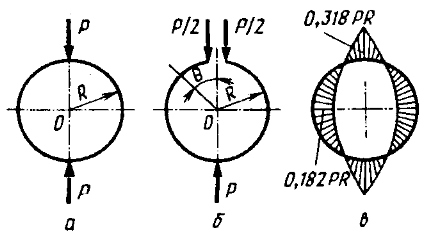


Рис. 10.4. Кольцо под действием сосредоточенных сил

Пример I. Определить изгибающие моменты в кольце под действием сосредоточенных сил (рис.10.4,*а*). Разрежем кольцо по оси симметрии и распределим нагрузку поровну по краям разреза (рис.10.4,*б*).

Изгибающий момент в сечении под углом

$$M_p(\Theta) = -\frac{1}{2}PR\sin\Theta .$$

Применяя формулу (12), находим

$$\int_0^{\pi} M_p(\Theta)\,d\Theta = -\frac{1}{2}PR\int_0^{\pi}\sin\Theta\,d\Theta = -PR ,$$

$$\int_0^{\pi} M_p(\Theta)\cos\Theta\,d\Theta = -\frac{1}{2}PR\int_0^{\pi}\sin\Theta\cos\Theta\,d\Theta = 0$$

и окончательно

$$M(\Theta) = PR\left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}\sin\Theta\right).$$

При $\Theta = 0$ и $\Theta = \pi/2$

$$M(\Theta) = \frac{1}{\pi}PR = 0{,}318PR, \quad M\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}\right)PR = -0{,}182PR.$$

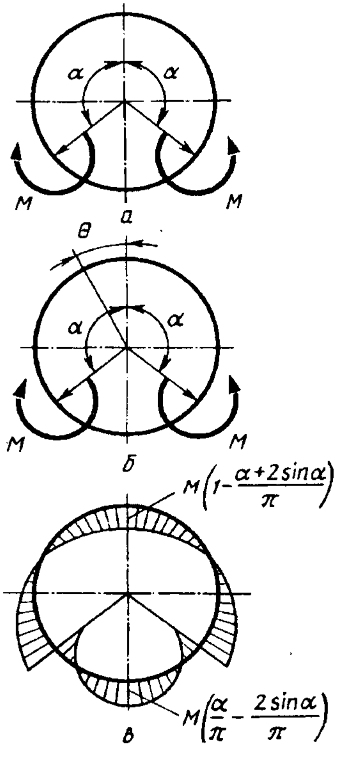


Рис. 10.5. Кольцо под действием сосредоточенных моментов

Распределение изгибающих моментов показано на рис.10.4,*в*.

Пример 2. Определить изгибающие моменты в кольце, загруженном двумя сосредоточенными моментами M (рис.10.5,*а*). Проведем разрез по оси симметрии (рис.10.5,*б*). Изгибающий момент в основной системе в сечении под углом Θ

$$M_p(\Theta) = \begin{cases} 0, & 0 \le \Theta \le \alpha; \\ -M, & \alpha < \Theta \le \pi. \end{cases}$$

Определяем

$$\int_0^{\pi} M_p(\Theta) = -\int_{\alpha}^{\pi} M\,d\Theta = -M(\pi - \alpha),$$

$$\int_0^{\pi} M_p(\Theta)\cos\Theta\,d\Theta = -M\int_{\alpha}^{\pi}\cos\Theta\,d\Theta =$$

$$= M\sin\alpha.$$

Далее по формуле (12) находим

$$M(\Theta) = M_p(\Theta) + M\left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right) - \frac{2\cos\alpha}{\pi}M\sin\alpha.$$

При $0 \le \Theta \le \alpha$

$$M(\Theta) = M\left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right) - \frac{2\cos\Theta}{\pi}M\sin\alpha.$$

При $\alpha < \Theta \le \pi$

$$M(\Theta) = -M\left(\frac{\alpha}{\pi} + \frac{2\cos\Theta}{\pi}\sin\alpha\right).$$

Эпюра изгибающих моментов показана на рис.10.5,*в*.

37. Винтовые пружины

Наиболее широкое применение в различных технических изделиях имеют винтовые пружины, которые обычно могут рассматриваться как стержни малой кривизны. Винтовые пружины (рис.10.6,*а*) изготавливаются чаще всего путем навивки на цилиндрическую оправку проволоки диаметром от 0,2 до 50 мм и более. Диаметр цилиндрической поверхности, содержащей центры тяжести сечений (средний диаметр), обозначен D_0 , диаметр проволоки d, шаг навивки t, ось стержня является винтовой линией с углом подъема α:

$$\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha = \frac{t}{\pi D_0}. \qquad (14)$$

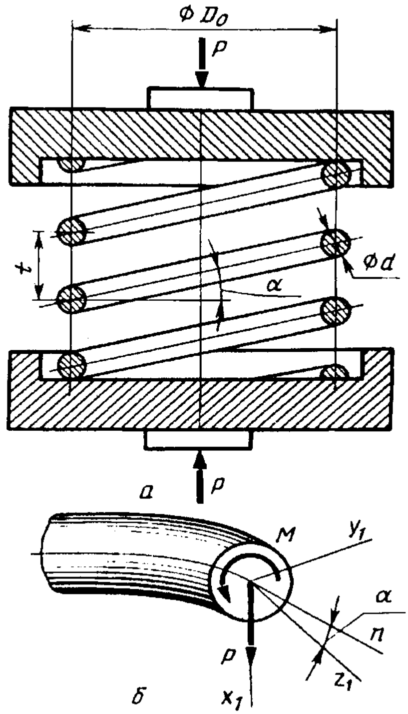


Рис. 10.6. Расчетная схема витой пружины:
а — конструктивная схема; *б* —силовые факторы в сечении пружины

В большинстве случаев угол α — малая величина ($\operatorname{tg}\alpha \le 0{,}2$, $\alpha \le 12°$). Наибольшее распространение получили пружины, работающие на сжатие (рис.10.6): клапанные пружины, пружинные рессоры и т.п. Через тарелки или торцевые плоскости передается усилие P, действующее вдоль оси пружины.

Напряжения в пружинах. В поперечном сечении создается крутящий момент (рис.10.6,*б*)

$$M_к = M\cos\alpha \approx \frac{1}{2}PD_0, \qquad (15)$$

так как $\cos\alpha \approx 1$.

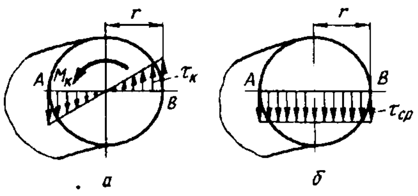


Рис. 10.7. Касательные напряжения кручения $\tau_к$ и среза $\tau_{ср}$ в сечении пружины

Изгибающим моментом в сечении при малых углах α можно пренебречь.

Важным геометрическим параметром витой пружины является ее индекс c:

$$c = D_0 / d, \tag{16}$$

где D_0 — средний диаметр пружины; d — диаметр проволоки.

Для пружин с большим индексом ($c \geq 8$) распределение касательных напряжений при действии крутящего момента такое же, как при кручении прямого вала (рис.10.7,*а*):

$$\tau_{к\,\max} = \frac{16 M_к}{\pi d^3} = \frac{8 P D_0}{\pi d^3}. \tag{17}$$

Перерезывающая сила в сечении $Q = P$ дает касательные напряжения (рис.10.7,*б*), приближенно равные

$$\tau_{ср} = \frac{4P}{\pi d^2}. \tag{18}$$

Максимальное касательное напряжение находится в точке поперечного сечения, ближайшей к оси пружины (точка A на рис.10.7):

$$\tau_{\max} = \tau_{к\,\max} + \tau_{ср} =$$

$$= \tau_{к\,\max}\left(1 + \frac{\tau_{ср}}{\tau_{к\,\max}}\right) = \frac{8 P D_0}{\pi d^3}\left(1 + \frac{d}{2D_0}\right) = \frac{8 P D_0}{\pi d^3}\left(1 + \frac{1}{2c}\right). \tag{19}$$

Разрушение пружины обычно начинается в точке A, где напряжения наибольшие.

В общем случае максимальное касательное напряжение

$$\tau_{\max} = \alpha_\tau \frac{8 P D_0}{\pi d^3}, \tag{20}$$

где $\alpha_\tau = \alpha_\tau(c)$ — коэффициент концентрации напряжений на внутреннем волокне пружины (в точке A).

Приближенно можно принять, что при кручении касательные напряжения на внутреннем волокне возрастают пропорционально отношению радиусов винтовых линий:

$$\alpha_{\tau_{кр}} \approx \frac{R_0}{R_A} = \frac{R_0}{R_0 - \frac{1}{2} d_0} = \frac{c}{c-1}.$$

Такое предположение основано на том, что при кручении сечение стержня остается неизменным, а углы сдвига и касательные напряжения изменяются обратно пропорционально длинам винтовых линий. Коэффициент концентрации касательных напряжений

$$\alpha_\tau \approx \frac{c}{c-1} + \frac{1}{2c}. \tag{21}$$

При уменьшении индекса c величина α_τ возрастает.

Для определения осадки пружины (сближения точек приложения усилий P) найдем потенциальную энергию деформации:

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M_к^2\, ds}{GJ_к} + \frac{1}{2}\int_0^l \frac{KQ^2\, ds}{GF}. \tag{22}$$

В качестве длины стержня принимают

$$l = \pi D n, \tag{23}$$

где n — число рабочих витков.

Для передачи осевого усилия на пружину витки на концах пружины поджимаются при навивке и сошлифовываются для получения опорной плоскости (см.рис.10.6). Обычно принимается число рабочих витков

$$n = n_0 - \Delta, \tag{24}$$

где $\Delta = 1,..., 2$ — число концевых витков.

Учитывая, что

$$J_к = J_p = \pi d^4 / 32, \quad F = \pi d^2 / 4$$

и принимая $K \approx 1$, получаем из соотношения (22)

$$U = \frac{1}{2}\left(\frac{8\, P^2 D_0^2\, \pi D_0 n}{G \pi d^4} + \frac{4\, P^2 D_0\, \pi n}{G\pi d^2} \right) = \frac{1}{2}\left(\frac{8\, P^2 D_0^3 n}{G d^4} + \frac{4\, P^2 D_0 n}{G d^2} \right). \tag{25}$$

Потенциальная энергия деформации равна работе внешней силы (закон сохранения энергии)

$$U = \frac{1}{2} P \delta, \tag{26}$$

где δ — осадка пружины.

Из уравнений (25) и (26) находим

$$\delta = \frac{8PD_0^3 n}{Gd^4} + \frac{4PD_0 n}{Gd^2} = \frac{8PD_0^3 n}{Gd^4}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{d^2}{D_0^2}\right). \quad (27)$$

Вторым слагаемым практически можно пренебречь; тогда

$$\delta = \frac{8PD_0^3 n}{Gd^4} = \lambda n, \quad (28)$$

где λ — осадка одного витка:

$$\lambda = \frac{8PD_0^3 n}{Gd^4}. \quad (29)$$

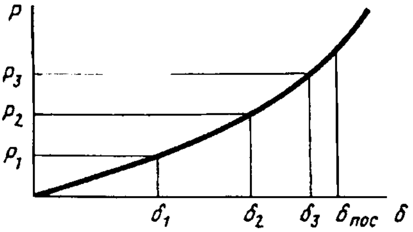


Рис. 10.8. Связь осадки пружины δ и действующего усилия P

Формулы (20) и (28) являются основными для расчета пружин. Связь осадки пружины δ и действующего усилия P показана на рис.10.8. Усилие предварительной затяжки (осадки) P_1 принимается в зависимости от назначения пружины в пределах

$$P_1 = (0{,}1 - 0{,}5)P_2, \quad (30)$$

где P_2 — максимальная нагрузка на пружину. Величина P_2 представляет наибольшую допустимую нагрузку по условиям статической прочности.

При осадке пружины $\delta_{пос}$ происходит соприкосновение (посадка) витков и удар. Необходимо выполнение очевидного условия

$$\delta < \delta_{пос}. \quad (31)$$

Из этого условия назначается шаг пружины (в свободном состоянии)

$$t \geq d + \frac{k\delta_3}{n}, \quad (32)$$

где δ_3 — осадка при допустимой (статической) нагрузке; n — число рабочих витков; k = 1,1; ... ; 1,3 — коэффициент, гарантирующий зазор между витками при наибольшей нагрузке.

В качестве материала пружин используются высокоуглеродистые и легированные стали, термообработанные на высокий предел прочности ($\sigma_в$ =1200 ÷ 3000 МПа). Они характеризуются сравнительно малой пластичностью. В качестве критерия разрушения можно принять максимальные растягивающие напряжения σ_1; при напряженном состоянии типа кручения или сдвига

$$\sigma_1 = \tau_{max}. \tag{33}$$

Модель прочностной надежности пружин при статических нагрузках. Максимальное растягивающее напряжение

$$\sigma_1 = \alpha_\tau \frac{8PD_0}{\pi d^3} \le \frac{\sigma_в}{n_{ст}}, \tag{34}$$

где $\sigma_в$ — предел прочности материала; $n_{ст}$ — запас статической прочности. Обычно при расчете пружин принимают

$$n_{ст} = 1{,}7 \div 3{,}5. \tag{35}$$

Предел прочности $\sigma_в$ зависит от диаметра проволоки: при уменьшении диаметра проволоки $\sigma_в$ возрастает.

Модель прочностной надежности пружин при циклических нагрузках. При числе циклов нагружений $N \ge 10^6$ опасным становится усталостное разрушение. Условие усталостной прочности имеет вид

$$\tau_a^* \frac{K_\tau}{\beta\varepsilon} + \psi_\tau \tau_m^* = \tau_{-1}, \tag{36}$$

где τ_a^* и τ_m^* — амплитуда переменных напряжений и постоянное напряжение в момент разрушения; τ_{-1} — предел выносливости для касательных напряжений; K_τ, β, ε — соответственно эффективный коэффициент концентрации напряжений, коэффициент поверхности и масштабный фактор; ψ_τ — коэффициент влияния постоянных напряжений.

При подобии рабочего и предельного циклов имеем

$$\tau_a^* = n_{пд}\tau_a, \quad \tau_m^* = n_{пд}\tau_m, \tag{37}$$

где τ_a, τ_m — наибольшие переменные и постоянные напряжения в рабочих условиях; $n_{пд}$ — запас по подобному циклу.

Из соотношений (36) и (31) находим

$$n_{\text{пд}} = \frac{\tau_{-1}}{\tau_a \dfrac{K_\tau}{\beta\varepsilon} + \psi_\tau \tau_m}. \tag{38}$$

При возрастании только переменной части напряжений

$$\tau_a^* = n_a \tau_a, \quad \tau_m^* = \tau_m. \tag{39}$$

Получаем из соотношений (36) и (39)

$$n_a = \frac{\tau_{-1} - \psi_\tau \tau_m}{\tau_a \dfrac{K_\tau}{\beta\varepsilon}}. \tag{40}$$

Запас по переменным напряжениям n_a применяется в тех случаях, когда имеется опасность усталостных разрушений пружин вследствие резонансных явлений. Если внешняя нагрузка циклически изменяется от $P_{\max} = P_2$ до $P_{\min} = P_1$, то

$$\tau_a = \alpha_\tau \frac{8 P_a D_0}{\pi d^3}, \quad \tau_m = \alpha_\tau \frac{8 P_m D_0}{\pi d^3}, \tag{41}$$

где

$$P_a = \frac{1}{2}(P_{\max} - P_{\min}), \quad P_m = \frac{1}{2}(P_{\max} + P_{\min}). \tag{42}$$

Так как «концентрация напряжений» отражена в величинах τ_a и τ_m, то ее дополнительный учет не требуется — можно принять в равенствах (38) и (40) $K_\tau \approx 1$. Величина β при наличии упрочняющей обработки (например, обдувки микрошариками) принимается равной 1,3—1,4. Влияние чистоты поверхности, коррозии и других факторов на величину β рассматривалось в разд.14.

Масштабный фактор ε принимается по формулам разд.14, $\psi_\tau \approx 0{,}1$. Запас прочности по подобному циклу $n_{\text{пд}} = 1{,}4 \div 2{,}5$; запас по переменным напряжениям $n_a = 2 \div 3$.

Замечание. Возрастание касательных напряжений на внутренних волокнах (в окрестности точки A) происходит плавно и только условно относится к концентрации напряжений. В сущности, коэффициент α_τ вводится скорее как приближенная поправка к простым формулам для прямого бруса, позволяющая избегать более точного, но громоздкого расчета.

Модель прочностной надежности пружин при ударном нагружении. Рассмотрим действие на пружину груза весом Q, падающего с начальной скоростью V_0 (рис.10.9).

Для определения наибольшей динамической нагрузки используется приближенное решение, основанное на том, что энергия падающего груза $U_{гр}$ переходит в потенциальную энергию сжатия пружины $U_{пр}$. Будем сначала пренебрегать массой пружины и покрывающей тарелки по сравнению с массой груза.

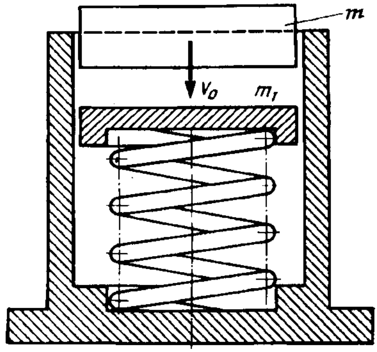


Рис. 10.9. Ударное нагружение пружины

Статическая осадка пружины под действием усилия Q:

$$\delta_{ст} = \delta_{11} Q, \qquad (43)$$

где δ_{11} — осадка пружины при единичной (статической) силе.

После удара груза в пружине возникают динамическая осадка $\delta_д$ и потенциальная энергия пружины

$$U_{пр} = \frac{1}{2}\delta_д Q_д = \frac{1}{2}\frac{1}{\delta_{11}}\delta_д^2 \quad (\delta_д = \delta_{11} Q_д). \qquad (44)$$

Изменение энергии груза равно разности энергии груза в момент соприкосновения и после полной осадки пружины:

$$U_{гр} = U_{1\,гр} - U_{2\,гр} = \frac{1}{2}\frac{Q}{g}V_0^2 + QH - Q(H - \delta_д) = \frac{1}{2}\frac{Q}{g}V_0^2 + Q\delta_д, \qquad (45)$$

где QH — потенциальная энергия груза в поле силы тяжести (H — высота).

Предполагается, что груз останавливается при полном сжатии пружины. Пренебрегая рассеянием энергии и приравнивая $U_{пр}$ и $U_{гр}$, находим

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\delta_{11}}\delta_д^2 - Q\delta_д - \frac{1}{2}\frac{Q}{g}V_0^2 = 0, \qquad (46)$$

что дает

$$\delta_д = \delta_{ст}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{V_0^2}{g\delta_{11}Q}}\right) = \delta_{ст}K_д, \qquad (47)$$

где коэффициент динамического усилия

$$K_{д} = 1 + \sqrt{1 + \frac{V_0^2}{g\delta_{11}Q}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{V_0^2}{g\delta_{ст}}} . \qquad (48)$$

Коэффициент динамического усилия показывает, во сколько раз возрастает осадка (прогиб) упругой системы при динамическом приложении внешней нагрузки по сравнению с осадкой со статическим (медленно возрастающим) ее приложением.

Если нагрузка прикладывается мгновенно, но с нулевой скоростью ($V_0 = 0$), из формулы (48) получаем

$$K_{д} = 2 . \qquad (49)$$

При наличии начальной скорости $K_{д} > 2$. Для уменьшения $K_{д}$ следует увеличивать податливость системы (величину δ_{11}).

Максимальное напряжение в пружине при ударе

$$\tau_{max} = \alpha_\tau \frac{8\, Q_{д} D_0}{\pi d^3} = \alpha_\tau \frac{8\, \delta_{д} D_0}{\delta_{11} \pi d^3} . \qquad (50)$$

Рассмотрим теперь удар падающего груза при наличии на торце пружины массы m_1 (буфера).

Если удар неупругий, то после соударения массы m и m_1 начнут двигаться с общей скоростью V_1, которую можно определить из равенства количества движения:

$$V_1 = V_0 \frac{m}{m + m_1} = V_0 \frac{1}{1 + m_1/m} . \qquad (51)$$

Повторяя предыдущий вывод, найдем для рассматриваемого случая

$$K_{д} = 1 + \sqrt{1 + \frac{V_0^2}{g\delta_{ст}(1 + m_1/m)}} . \qquad (52)$$

Наличие массы m_1 перед пружиной понижает динамические напряжения в пружине. Ранее считалось, что масса пружины пренебрежимо мала по сравнению с массой груза. Для приближенного учета массы пружины к m_1 должна быть добавлена приведенная масса (приведенная к сечению пружины, воспринимающему удар).Если скорость начального сечения V_{max}, то кинетическую энергию приведенной массы и всей конструкции (пружины) получим в виде

$$\frac{1}{2} m_{1\,пр} V_{max}^2 = K_1, \tag{53}$$

где K_1 — кинетическая энергия, которую приобретает пружина после удара.

При статическом приложении усилия осадка витков линейно изменяется по длине:

$$\delta(s) = \delta_{max} \frac{s}{l}, \tag{54}$$

где s — длина вдоль проволоки пружины; l — общая длина пружины; δ — максимальная осадка (при $s = l$).

В нижнем сечении ($s = 0$) осадка (перемещение) отсутствует. Предполагая приближенно, что распределение динамического прогиба (осадки) остается подобным статическому распределению, получаем, дифференцируя равенство (54) по времени:

$$V(s) = V_{max} \frac{s}{l}.$$

Кинетическая энергия пружины

$$K_1 = \frac{1}{2} \int_0^l \mu V^2(s)\, ds = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \mu l V_{max}^2,$$

где μ — масса единицы длины пружины, $\mu l = m_{пр}$ — масса всей пружины. Из равенства (53) находим приведенную массу пружины:

$$\frac{1}{2} m_{1\,пр} V_{max}^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} V_{max}^2 \tag{55}$$

или

$$m_{1\,пр} = \frac{1}{3} m_{пр}.$$

Коэффициент динамического усилия с учетом массы пружины:

$$K_д = 1 + \sqrt{1 + \frac{V_0^2}{g\delta_{ст}\left(1 + \dfrac{m_1 + m_{пр}}{m}\right)}}. \tag{56}$$

Замечание. Приближенная модель ударного воздействия, рассмотренная на примере пружины, используется для общего случая ударного нагружения конструкций (рис.10.10). Формула для коэффициента динамического усилия (56) остается прежней, но изменяются $\delta_{ст}$ — прогиб оси статического воздействия груза — и значение приведенной массы $m_{пр}$.

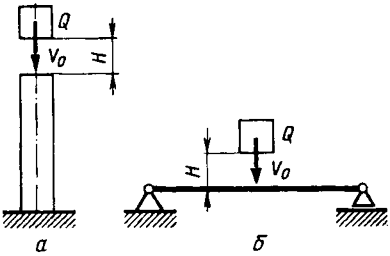


Рис. 10.10. Ударное нагружение конструкций:
а — балки; *б* — стержня

Для стержня (рис.10.10,*а*) приведенная масса

$$m_{пр} = \frac{1}{3} m_{стер},$$

для балки (рис.10.10,*б*)

$$m_{1\,пр} = \frac{17}{35} m_{бал},$$

где $m_{стер}$ — масса стержня, $m_{бал}$ — масса балки.

Глава 11

ДИНАМИКА И УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕЙ

Колебания элементов конструкций часто являются причиной разрушений и катастроф. При проектировании технической системы необходимо знать ее частотные характеристики и избегать динамического усиления внешних возбуждений. Основы теории колебаний излагаются в курсе теоретической механики. Однако колебания упругих систем, особенно систем с распределенными параметрами, имеют ряд особенностей, с которыми необходимо познакомиться.

38. Изгибные колебания стержней

Колебания груза, закрепленного на стержне (балке). Такая динамическая схема встречается, например, при расчете фундаментных балок и стержней, крепящих тяжелые агрегаты (дизели, турбины и т. п.). Будем считать массу стержня малой по отношению к массе груза.

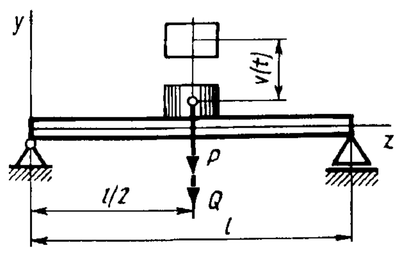


Рис. 11.1. Свободные колебания груза, закрепленного на стержне

Рассмотрим сначала свободные колебания балки с грузом (рис.11. 1), вызванные случайным первоначальным отклонением.

В отклоненном положении, которое характеризуется смещением $V(t)$, зависящим от времени t, на груз действуют сила тяжести Q и сила упругости

$$F = \frac{1}{\delta_{11}} V(t), \qquad (1)$$

где δ_{11} — прогиб балки в месте приложения груза (массы) от единичной силы.

Уравнение движения груза имеет вид

$$m\frac{d^2V(t)}{dt^2} = -\frac{1}{\delta_{11}}V(t) - Q\,, \tag{2}$$

где Q — вес груза; $m = Q/g$ — масса груза.

Обозначая круговую частоту буквой p, записываем

$$p^2 = \frac{1}{\delta_{11}m}\,. \tag{3}$$

Получим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2V(t)}{dt^2} + p^2V(t) = -\frac{Q}{m}\,. \tag{4}$$

Общий интеграл этого уравнения можно представить так:

$$V(t) = V(0)\cos pt + \frac{dV}{dt}(0)\frac{1}{p}\sin pt + V_{ст}(1 - \cos pt)\,, \tag{5}$$

где $V_{ст} = -Q\delta_{11}$ — прогиб балки под действием силы веса; $V(0)$, $\frac{dV}{dt}(0)$ — начальное отклонение и скорость (при $t = 0$).

Пусть в начальный момент времени груз получил отклонение

$$V(0) = V_{ст} + V_0\,. \tag{6}$$

Тогда из соотношения (5), считая начальную скорость равной нулю, получим

$$V(t) = V_{ст} + V_0\cos pt\,. \tag{7}$$

После начального отклонения система начинает совершать колебания с круговой частотой p, амплитудой V относительно положения статического равновесия (прогиба $V_{ст}$). В дальнейшем постоянные во времени силы не будут рассматриваться, следует только считать, что система совершает колебания относительно положения равновесия.

Замечание. Как известно из курса математики, для дифференциального уравнения колебаний

$$\frac{d^2V(t)}{dt^2} - p^2V(t) = f(t) \tag{8}$$

нормальными фундаментальными функциями являются следующие:

$$V_1(t) = \cos pt\,,\quad V_2(t) = \frac{1}{p}\sin pt\,, \tag{9}$$

и общее решение уравнения (8) примет вид

$$V(t) = V(0)\cos pt + \frac{dV}{dt}(0)\frac{1}{p}\sin pt + \frac{1}{p}\int_0^t \sin p(t - t_1) f(t_1)\,dt_1 . \tag{10}$$

При $f(t) = -Q/m$ получаем решение (5).

Собственные колебания груза. Колебания условно разделяют на *свободные*, при которых внешние возбуждающие силы отсутствуют, и *вынужденные*, происходящие под действием переменных по времени внешних нагрузках. Силы трения в материале (внутреннее трение), в узлах сочленений (конструкционное демпфирование) и другие виды трения считаются всегда присутствующими. Поэтому свободные колебания — всегда затухающие. Силы демпфирования обычно невелики и не сказываются на частоте и форме колебаний системы.

При анализе частот и форм колебаний рассматриваются свободные колебания без учета сил демпфирования. Такие колебания называются собственными. В расчетную модель собственных колебаний входят лишь силы инерции и силы упругости. Уравнение собственных колебаний груза (см.рис.11.1) имеет вид

$$m\frac{d^2V(t)}{dt^2} + \frac{1}{\delta_{11}}V(t) = 0 . \tag{11}$$

Частотное решение этого уравнения можно принять в виде

$$V(t) = V\cos pt , \tag{12}$$

где V — амплитуда колебания, p — круговая частота. Внося равенство (12) в уравнение (11), получаем

$$p = \frac{1}{\sqrt{\delta_{11}m}} . \tag{13}$$

Частота колебаний измеряется в герцах:

$$f = \frac{p}{2\pi} . \tag{14}$$

Период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{p} = \frac{1}{f} . \tag{15}$$

Частота колебаний в соответствии с равенством (13) тем меньше, чем больше масса груза и упругая податливость системы.

Отметим важную для дальнейшего статическую аналогию упругих колебаний. Решение (12) приводит к тому, что уравнение (11) превращается в уравнение для амплитудных прогибов

$$-p^2 mV + \frac{1}{\delta_{11}} V = 0. \tag{16}$$

Его можно было написать сразу, если считать, что усилие, с которым колеблющаяся масса действует на балку, равно

$$F_и = p^2 mV. \tag{17}$$

и направлено в сторону прогиба.

Условие равновесия дает

$$p^2 mV - \frac{1}{\delta_{11}} V = 0,$$

т.е. уравнение (16).

Замечание. Величина V в решении (12) при собственных колебаниях остается неопределенной; она равна произвольному начальному отклонению. Но частота колебаний не зависит от амплитуды (свойство изохронности малых колебаний). В нелинейных системах проявляется зависимость частоты колебаний от величины первоначального отклонения.

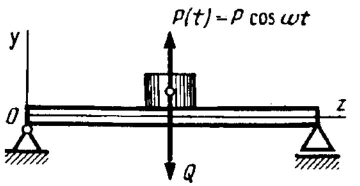


Рис. 11.2. Вынужденные колебания груза, закрепленного на стержне

Вынужденные колебания груза. Пусть на сосредоточенную массу действует внешняя возбуждающая сила $P(t)$ (рис.11.2):

$$P(t) = P\cos\omega t, \tag{18}$$

где ω — круговая частота возбуждающей силы.

Например, если масса представляет турбину с частотой вращений ротора n мин,$^{-1}$, то при наличии неуравновешенности ротора возникает возбуждающая сила с частотой

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = 2\pi n_1, \tag{19}$$

где n_1 — число оборотов в секунду.

Уравнение движения груза будет таким:

$$m\frac{d^2V(t)}{dt^2} = -\frac{1}{\delta_{11}}V(t) + P\cos\omega t. \tag{20}$$

В системе возникают собственные колебания, связанные с начальными условиями движения, которые вскоре затухают вследствие действия неизбежных сил трения. Вынужденные колебания соответствуют частному решению неоднородного уравнения (20), которое можно искать в виде

$$V(t) = V\cos\omega t\,. \tag{21}$$

Внося решение (21) в равенство (20), получаем

$$V = \frac{P\,\delta_{11}}{1-\omega^2/p^2} = \frac{V_0}{1-\omega^2/p^2}, \tag{22}$$

где $p = 1/\sqrt{\delta_{11}m}$ — круговая частота собственных колебаний, $V_0 = \boldsymbol{P}\,\delta_{11}$ — отклонение системы под действием амплитудного значения возбуждающей силы при ее статическом приложении. Отношение

$$k_д = \left|\frac{V}{V_0}\right| = \frac{1}{\left|1-\omega^2/p^2\right|} \tag{23}$$

называется *коэффициентом динамического усиления*.

При совпадении частоты возбуждающей силы и частоты собственных колебаний наступает *резонанс*: прогиб балки $V \to \infty$, коэффициент динамического усиления $k_д \to \infty$. В действительных условиях амплитуда колебаний остается конечной, так как в системе неизбежно присутствуют силы трения, однако резонансные колебания могут представлять серьезную опасность для конструкции.

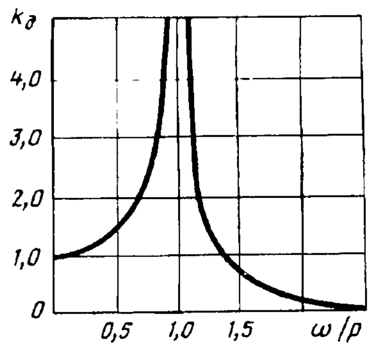


Рис. 11.3. Зависимость коэффициента динамического усиления от частоты возбуждающей силы

На рис.11.3 показана зависимость коэффициента динамического усиления от частоты. Обычно рекомендуется исключать из зоны рабочих режимов частоту возбуждения $0{,}7p < \omega < 1{,}3p$.

Отметим, что очень высокие частоты колебаний не опасны для конструкции с низкой собственной частотой ($k_д \to 0$ при $\omega \to \infty$).

Замечание. Если на конструкцию действует возбуждающая сила с частотой ω, то конструкция испытывает стационарные колебания с этой же частотой. Вынужденные колебания конструкции происходят с частотой возбуждающей силы.

Собственные колебания стержня с несколькими сосредоточенными массами. Рассмотрим сначала колебания балки с двумя сосредоточенными массами (рис.11.4). Воспользуемся статической аналогией и будем считать, что в отклоненном положении на массы действуют усилия

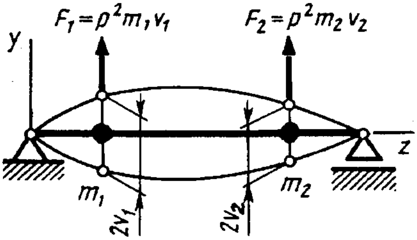


Рис. 11.4. Колебания упругой системы с двумя сосредоточенными массами

$$F_1 = p^2m_1V_1, \quad F_2 = p^2m_2V_2,$$

где V_1, V_2 — амплитудные отклонения точек закрепления масс.

Прогибы стержня под действием усилий F_1 и F_2 (рис.11.5):

$$\begin{aligned} V_1 &= \delta_{11}F_1 + \delta_{12}F_2 = \delta_{11}p^2m_1V_1 + \delta_{12}p^2m_2V_2, \\ V_2 &= \delta_{12}F_1 + \delta_{22}F_2 = \delta_{12}p^2m_1V_1 + \delta_{22}p^2m_2V_2, \end{aligned} \tag{24}$$

где δ_{ij} — коэффициенты влияния (прогиб в сечении i от единичной силы в сечении j; они определяются с помощью интеграла Мора).

Напомним, что коэффициенты влияния удовлетворяют условиям взаимности:

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}. \tag{25}$$

Равенства (24) приводят к системе однородных уравнений относительно V_1 и V_2:

$$\begin{aligned} (p^2\delta_{11}m_1 - 1)V_1 + p^2\delta_{12}m_2V_2 &= 0, \\ p^2\delta_{12}m_1V_1 + (p^2\delta_{22}m_2 - 1)V_2 &= 0. \end{aligned} \tag{26}$$

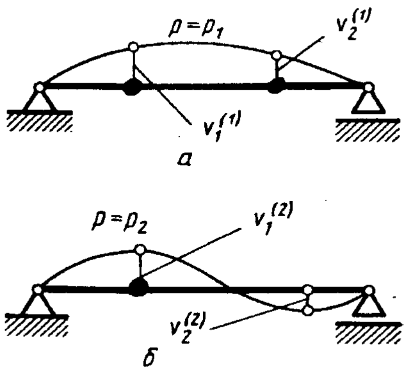


Рис. 11.5. Формы колебаний, соответствующие двум частотам колебаний двухмассовой системы:
а — первая форма; *б* — вторая форма

Эту же систему можно получить другим путем, считая, что на стержень действуют силы инерции масс

$$F_1 = -m_1\frac{\partial^2 v_1(t)}{\partial t^2}, \quad F_2 = -m_2\frac{\partial^2 v_2(t)}{\partial t^2}.$$

Предполагая далее

$$v_1(t) = V_1\cos pt, \quad v_2(t) = V_2\cos pt,$$

получаем соотношения (24)

Однородная система уравнений (26) будет иметь отличное от нуля решение только в том случае, когда определитель системы равен нулю:

$$\begin{vmatrix} p^2\delta_{11}m_1 - 1 & p^2\delta_{12}m_2 \\ p^2\delta_{12}m_1 & p^2\delta_{22}m_2 - 1 \end{vmatrix} = 0 . \qquad (27)$$

Из условия (27) получаем характеристическое уравнение для определения частот колебаний:

$$p^4 m_1 m_2 (\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2) - p^2(\delta_{11}m_1 + \delta_{22}m_2) + 1 = 0 . \qquad (28)$$

Решая это уравнение относительно p, находим два значения квадратов круговой частоты:

$$p_1^2 = \frac{\delta_{11}m_1 + \delta_{22}m_2 - \sqrt{(\delta_{11}m_1 + \delta_{22}m_2)^2 - 4m_1m_2(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)}}{2m_1m_2(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)}, \qquad (29)$$

$$p_2^2 = \frac{\delta_{11}m_1 + \delta_{22}m_2 + \sqrt{(\delta_{11}m_1 + \delta_{22}m_2)^2 - 4m_1m_2(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)}}{2m_1m_2(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)}, \qquad (30)$$

Низшей частоте p_1 соответствует первая форма колебания (рис. 11.5,*а*), когда обе массы двигаются в одну сторону; частоте p_2 отвечает движение грузов в разные стороны (вторая форма колебаний, рис. 11.5,*б*).

Если определитель системы уравнений равен нулю, то соотношение между прогибами V_1 и V_2 при данной частоте можно получить из любого (одного) уравнения системы (26). Например, из первого уравнения находим

$$\frac{V_1^{(1)}}{V_2^{(1)}} = -\frac{p_1^2\delta_{12}m_2}{p_1^2\delta_{11}m_1 - 1}, \quad \frac{V_1^{(2)}}{V_2^{(2)}} = -\frac{p_2^2\delta_{12}m_2}{p_2^2\delta_{11}m_1 - 1}. \qquad (31)$$

Величина отклонений при данной частоте колебаний остается неопределенной, но соотношение амплитудных прогибов масс — форма колебаний — строго определено равенствами (31).

Рассмотрим теперь колебания упругой системы с n сосредоточенными массами (рис. 11.6).

Амплитудный прогиб i -й массы

$$V_i = p^2\delta_{i1}m_1V_1 + p^2\delta_{i2}m_2V_2 + \ldots + p^2\delta_{ij}m_jV_j + \ldots + p^2\delta_{in}m_nV_n\,. \qquad (32)$$

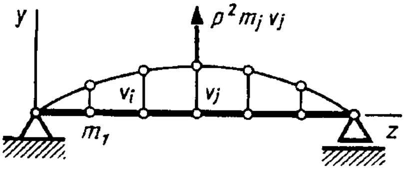


Рис. 11.6. Колебания многомассовой системы

Составив выражения прогиба для всех масс (i =1, 2, 3,..., n), придем к системе однородных уравнений, которую представим в матричной форме:

$$(p^2[\delta_{ij}m_j] - [E])\{V\} = 0, \qquad (33)$$

где E — единичная матрица порядка n:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & \ldots \\ . & . & . & \ldots \end{bmatrix};$$

$\{V\}^{\mathrm{T}} = \{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$ — вектор амплитудных прогибов.

Частотное уравнение получается после приравнивания нулю определителя системы:

$$\left| p^2[\delta_{ij}m_j] - [E] \right| = 0\,. \qquad (34)$$

Уравнение (34) дает значения n квадратов собственных частот колебаний $p_1^2, p_2^2, \ldots, p_n^2$, и каждой частоте соответствует своя форма колебаний.

Дифференциальное уравнение изгибных колебаний стержней. Рассмотрим теперь непрерывное распределение массы. Пусть

$$m = \rho_n F, \qquad (35)$$

где m — масса, приходящаяся на единицу длины стержня (ρ — плотность материала, F — площадь поперечного сечения стержня).

При изгибных колебаниях на единицу длины стержня действует распределенная нагрузка q:

$$q = -m\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\rho F\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\,. \qquad (36)$$

Уравнение изгибных колебаний можно получить из основного уравнения изгиба стержней (см.разд.29):

$$\frac{d^2}{dz^2}\left(EJ_x(z)\,\frac{d^2V(z)}{dz^2}\right)= q_y(z)\,, \tag{37}$$

где q_y — интенсивность распределенной нагрузки (рис.11.7). Применительно к колебаниям величина q_y определяется равенством (36).

Прогиб оси стержня $V(z,t)$ зависит теперь не только от z но и от времени t, и потому в уравнение (37) должны входить частные производные

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(EJ_x(z)\,\frac{\partial^2V(z,t)}{\partial z^2}\right)= -\rho F\,\frac{\partial^2V(z,t)}{\partial t^2}\,. \tag{38}$$

При анализе собственных колебаний предположим, что

$$V(z,t)= V(z)\cos pt\,, \tag{39}$$

где p — круговая частота колебаний, $V(z)$ — амплитудное значение прогиба при колебаниях.

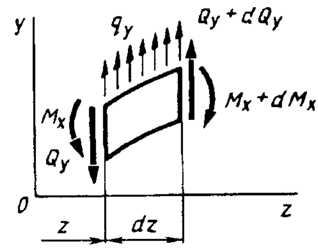


Рис. 11.7. К выводу уравнения колебаний стержня

С помощью соотношения (39) получаем обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2}{dz^2}\left(EJ_x\,(z)\,\frac{d^2V(z)}{dz^2}\right)- p^2\rho F(z)V(z) = 0\,. \tag{40}$$

Этот результат можно было сразу получить из статической аналогии, положив

$$q = p^2\rho FV\,. \tag{41}$$

Изгибные колебания стержней постоянного сечения. Для стержней постоянного сечения при колебании в главной плоскости yOz уравнение изгибных колебаний (40) будет таким:

$$\frac{d^4V(z)}{dz^4} - p^2\,\frac{\rho F}{EJ_x}\,V(z) = 0\,. \tag{42}$$

Рассмотрим в качестве примера балку, закрепленную по концам на двух шарнирных опорах (рис.11.8).

Краевые условия для амплитудного прогиба:

$$V(0) = V(l) = 0\,, \quad \frac{d^2V}{dz^2}(0) = \frac{d^2V}{dz^2}(l) = 0\,, \tag{43}$$

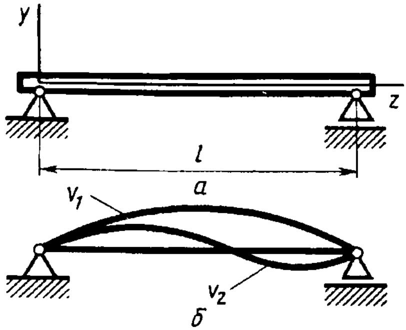


Рис. 11.8. Колебания стержня постоянного сечения:
а — расчетная схема; *б* — две первые формы колебаний

т.е. прогибы и изгибающие моменты на концах балки отсутствуют.

Уравнению (42) и условиям (43) соответствует функция

$$V(z) = V \sin\left(k \frac{\pi}{l} z\right) \quad (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{44}$$

Внося выражение (44) в уравнение (42), находим

$$p^2 = \frac{k^4 \pi^4}{l^4} \frac{EJ_x}{\rho F}.$$

Каждому значению k соответствует определенная частота колебаний

$$p_k = \frac{k^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ_x}{\rho F}}. \tag{45}$$

Наименьшая (первая) круговая частота колебаний получается при $k = 1$:

$$p_1 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ_x}{\rho F}}. \tag{46}$$

Первая частота колебаний (в герцах) равна

$$f_1 = \frac{p_1}{2\pi} = \frac{\pi}{2l^2} \sqrt{\frac{EJ_x}{\rho F}}. \tag{47}$$

Из формул (44) и (45) вытекают выводы, справедливые и при других условиях закрепления стержня. Система с непрерывным распределением масс имеет бесчисленное количество частот и форм колебаний. Каждой собственной частоте p_k соответствует своя форма колебаний V_k. Спектр собственных частот упругой системы — дискретный, как это следует из равенства (45). Разберем общее решение уравнения (42), которое запишем в виде

$$\frac{d^4 V(z)}{dz^4} - \lambda^4 V(z) = 0, \quad \lambda^4 = p^2 \frac{\rho F}{EJ_x}. \tag{48}$$

Непосредственным дифференцированием можно проверить, что функции

$$V_1 = \cos\lambda z\,,\ V_2 = \sin\lambda z\,,\ V_3 = \operatorname{ch}\lambda z\,,\ V_4 = \operatorname{sh}\lambda z$$

являются частными решениями уравнения (48). Из них можно составить нормальные фундаментальные функции (функции Крылова)

$$\begin{aligned} V_1(z) &= \frac{1}{2}(\operatorname{ch}\lambda z + \cos\lambda z)\,, \quad V_2(z) = \frac{1}{2\lambda}(\operatorname{sh}\lambda z + \sin\lambda z)\,, \\ V_3(z) &= \frac{1}{2\lambda^2}(\operatorname{ch}\lambda z - \cos\lambda z)\,, \quad V_4(z) = \frac{1}{2\lambda^3}(\operatorname{sh}\lambda z - \sin\lambda z)\,, \end{aligned} \tag{49}$$

удовлетворяющие условию

$$\frac{d^j V_i}{dz^j}(0) = \begin{cases} 0\,, & j \neq i-1\,, \\ 1\,, & j = i-1\,. \end{cases} \tag{50}$$

Например,

$$V_1(0) = 1\,,\ \frac{dV_1}{dz}(0) = 0\,,\ \frac{d^2V_1}{dz^2}(0) = 0\,,\ \frac{d^3V_1}{dz^3}(0) = 0\,;$$

$$V_2(0) = 0\,,\ \frac{dV_2}{dz}(0) = 1\,,\ \frac{d^2V_2}{dz^2}(0) = 0\,,\ \frac{d^3V_2}{dz^3}(0) = 0\,.$$

Общее решение уравнения (49) будет таким (проверьте!)

$$V(z) = V(0)\,V_1(z) + d\frac{V}{dz}(0)\,V_2(z) + \frac{d^2V}{dz^2}(0)\,V_3(z) + \frac{d^3V}{dz^3}(0)\,V_4(z)\,. \tag{51}$$

Начальные параметры $V(0)$, $V'(0)$,... определяются из краевых условий. Для определения частоты получается определитель второго порядка; два из четырех краевых факторов известны заранее.

Изгибные колебания стержня переменного сечения (лопатки газотурбинного двигателя). Решение с помощью интегральных уравнений. Уравнение изгибных колебаний запишем в виде

$$\frac{d^2}{dz^2}\left(EJ_x(z)\frac{d^2V(z)}{dz^2}\right) = p^2\rho F(z)V(z)\,. \tag{52}$$

Из соотношений (29) и (30) разд.31 следует

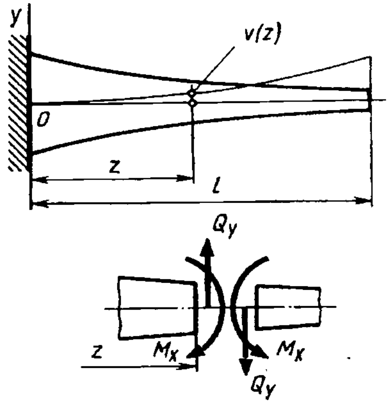


Рис. 11.9. Изгибные колебания стержней переменного сечения

$$\frac{d}{dz}\left(EJ_x(z)\,\frac{d^2V(z)}{dz^2}\right) = -Q_y(z)\,, \tag{53}$$

$$EJ_x(z)\,\frac{d^2V(z)}{dz^2} = -M_x(z)\,, \tag{54}$$

где $Q_y(z)$, $M_x(z)$ — амплитудные значения перерезывающей силы и изгибающего момента при колебаниях балки (рис.11.9).

Уравнение (52) может быть приведено к форме интегрального уравнения, что дает ряд преимуществ для приближенного решения. Проинтегрируем уравнение (52) в пределах от z до l. Учтем, что перерезывающая сила при $z = l$ отсутствует. Получим

$$-\frac{d}{dz}\left(EJ_x(z)\,\frac{d^2V(z)}{dz^2}\right) = p^2 \int\limits_z^l \rho F(z_1)\,V(z_1)\,dz_1\,. \tag{55}$$

Повторим операцию с учетом условия $M_x(l) = 0$:

$$EJ_x(z)\,\frac{d^2V(z)}{dz^2} = p^2 \int\limits_z^l \int\limits_{z_1}^l \rho F(z_2)\,V(z_2)\,dz_2\,dz_1\,.$$

Теперь, перенося $EJ_x(z)$ в правую часть равенства и дважды интегрируя от 0 до z, с учетом условий

$$V(0) = 0\,, \quad \frac{dv}{dz}(0) = 0 \tag{56}$$

получаем интегральное уравнение колебаний консольного стержня

$$V(z) = p^2 \int\limits_0^z \int\limits_0^{z_1} \frac{1}{EJ_x(z_2)} \int\limits_{z_2}^l \int\limits_{z_3}^l \rho F(z_4)\,\overline{V(z_4)}\,dz_4\,dz_3\,dz_2\,dz_1\,. \tag{57}$$

Это — однородное краевое интегральное уравнение, эквивалентное дифференциальному уравнению и соответствующим краевым условиям. Оно называется интегральным потому, что неизвестная функция входит под знак интеграла (в дифференциальном уравнении неизвестная функция подчиняется операциям дифференцирования). В кратком виде уравнение (57) записывается так:

$$V = p^2 KV, \tag{58}$$

где KV — интегральный оператор, входящий в правую часть уравнения (57).

Легко видеть, что если $V(z)$ является решением уравнения, то функция $cV(z)$, где c — произвольное число, также представляет его решение (амплитудные прогибы при собственных колебаниях задаются с точностью до множителя).

Уравнение (58) имеет решение $V \equiv 0$, которое называется тривиальным, но при некоторых значениях $p^2 = p_1^2,\ p_2^2,\ \ldots$ оно имеет отличные от нуля решения. Каждому значению $p_1^2,\ p_2^2,\ \ldots,$ которые называются *собственными значениями* уравнения (оператора), соответствуют решения $V_1,\ V_2,\ \ldots$ — формы колебаний стержня (собственные функции).

Для отыскания первой собственной частоты применяется *метод последовательных приближений*. Задаемся произвольно первым приближением для формы колебаний, например

$$V_{(1)} = (z / l)^2. \tag{59}$$

Следующее приближение находим из уравнения (59) по схеме

$$V_{(2)} = p_1^2 KV_{(1)}. \tag{60}$$

Если бы $V_{(1)}$ было точным решением, то функции $V_{(1)}$ и $V_{(2)}$ совпадали бы во всех сечениях. Найдем величину $p_{(1)}$ из условия, что значения $V_{(1)}$ и $V_{(2)}$ совпадают на конце стержня, где прогибы наибольшие.

Из условия $V_{(2)}(l) = V_{(1)}(l) = 1$ получаем

$$p_{(1)}^2 = \frac{1}{KV_{(1)}\Big|_{z=l}} = \frac{1}{\int\limits_0^l \int\limits_0^{z_1} \frac{1}{EJ_x} \int\limits_{z_2}^l \int\limits_{z_3}^l \rho F \frac{z_4^2}{l^2} dz_4\, dz_3\, dz_2\, dz_1}. \tag{61}$$

Обычно уже первое приближение дает погрешность не более 2-5%.

Можно показать, что процесс последовательных приближений всегда сходится к первой собственной частоте. Для получения таким способом последующих частот и форм колебаний требуется ортогонализация.

Решение с помощью матричного уравнения. Примем в качестве основных переменных следующие функции (см.разд.29):

$$Y_1(z) = V(z)\,,\ Y_2(z) = \frac{d\,V(z)}{dz}\,,\ Y_3(z) = M_x(z)\,,\ Y_4(z) = Q_y(z) \tag{62}$$

и представим уравнение (53) в виде системы четырех уравнений первого порядка, учитывая, конечно, соотношения (53) и (54):

$$\begin{aligned} &Y_1'(z) = Y_2(z)\,, \quad Y_2'(z) = -\frac{1}{EJ_x} Y_3(z)\,, \\ &Y_3'(z) = Y_4(z)\,, \quad Y_4'(z) = -p^2 \rho F(z) Y_1(z)\,, \end{aligned} \tag{63}$$

где штрих, как и раньше, означает дифференцирование по z.

В матричной форме уравнения будут такими:

$$\{Y\}' = [A]\,\{Y\}\,, \tag{64}$$

где вектор состояния

$$\{Y\}^{\mathrm{T}} = \{Y_1\, Y_2\, Y_3\, Y_4\} = \{V,\ V',\ M_x,\ Q_y\}\,; \tag{65}$$

матрица

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{EJ_x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -p^2\rho F & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{66}$$

Расчет частот и форм колебаний покажем на примере колебаний консольного стержня. Задаемся сначала некоторым значением частоты p; тогда все элементы матрицы $[A]$ становятся известными.

Учитывая условия (56), находим два частных решения $\{\Phi_3(z)\}$ и $\{\Phi_4(z)\}$ уравнения (64) при начальных условиях

$$\Phi_3(0) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \Phi_4(0) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}. \tag{67}$$

Интегрирование уравнения (64) проводим одним из численных методов, например методом Рунге — Кутта. Общее решение уравнения (64) можно представить в виде

$$\{ Y(z) \} = \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{Bmatrix} = c_3 \{ \Phi_3(z) \} + c_4 \{ \Phi_4(z) \} = c_3 \begin{Bmatrix} \Phi_{31} \\ \Phi_{32} \\ \Phi_{33} \\ \Phi_{34} \end{Bmatrix} + c_4 \begin{Bmatrix} \Phi_{41} \\ \Phi_{42} \\ \Phi_{43} \\ \Phi_{44} \end{Bmatrix}, \qquad (68)$$

поскольку краевые условия при $z = 0$ удовлетворены выбором начальных условий (67).

Так как в концевом сечении $Y_3(l)$ и $Y_4(l)$ обращаются в нуль, то

$$\begin{aligned} Y_3(l) &= c_3\Phi_{33}(l\,; p^2) + c_4\Phi_{43}(l\,; p^2) = 0\,, \\ Y_4(l) &= c_4\Phi_{34}(l\,; p^2) + c_4\Phi_{44}(l\,; p^2) = 0\,. \end{aligned} \qquad (69)$$

В записи уравнений (69) подчеркивается зависимость от p^2, так как эта величина входит в матрицу $[A]$. Из условия существования решения (69) получим

$$F(p^2) = \begin{vmatrix} \Phi_{33}(l\,;\, p^2) & \Phi_{43}(l\,;\, p^2) \\ \Phi_{34}(l\,;\, p^2) & \Phi_{44}(l\,;\, p^2) \end{vmatrix} = 0. \qquad (70)$$

Так как выбранное заранее значение p^2 не удовлетворяет условию (70), то расчет проводят заново и находят значения p_1^2, p_2^2, ... — корни уравнения (70). Это и будут частоты колебаний стержня.

Применение вариационного метода для определения частот и форм изгибных колебаний. Ранее было получено вариационное уравнение изгиба стержня в виде (разд.38)

$$\delta\Pi = 0\,, \qquad (71)$$

где

$$\Pi = U - W = \frac{1}{2}\int_0^l EJ_x\left(\frac{d^2v}{dz^2}\right)^2 dz - \int_0^l q_y v\, dz\,. \qquad (72)$$

Возможная работа внешних сил при вариации прогиба равна

$$\delta W = \int_0^l q_y\, \delta v\, dz\,.$$

Для задачи о колебаниях стержня

$$q_y = p^2 \rho F v,$$

вариация возможной работы

$$\delta W = p^2 \int_0^l \rho F v \delta v \, dz.$$

Возможная работа внешних сил

$$W = \frac{p^2}{2} \int_0^l \rho F v^2 \, dz. \tag{73}$$

По физическому смыслу величина W представляет амплитудное значение кинетической энергии при колебаниях стержня. Полная потенциальная энергия системы равна

$$\Pi = U - W = \frac{1}{2} \int_0^l EJ_x \left(\frac{d^2 v}{dz^2} \right)^2 dz - \frac{1}{2} p^2 \int_0^l \rho F v^2 \, dz. \tag{74}$$

Величина Π равна разности между потенциальной энергией деформации и ее кинетической энергией. Наиболее простое решение по методу Рэлея — Ритца получается для одного параметра, когда предполагается

$$v = c_1 f_1(z), \tag{75}$$

где $f_1(z)$ — заранее выбранная функция из числа допустимых.

Например, для консольного стержня можно принять

$$f_1(z) = z^2/l^2. \tag{76}$$

Более точные результаты, но при несколько более сложных вычислениях получаются, если принять $f_1(z)$ пропорциональной прогибу консольного стержня постоянной толщины при действии равномерной статической нагрузки:

$$f_1(z) = \frac{z^2}{l^2} - \frac{2}{3} \frac{z^3}{l^3} + \frac{1}{6} \frac{z^4}{l^4}. \tag{77}$$

В этом случае выполняются не только необходимые (кинематические) условия при $z = 0$:

$$f_1(0) = 0\,,\quad f_1'(0) = 0\,,$$

но и (силовые) краевые условия при $z = l$:

$$f_1''(l) = 0\,,\; f_1'''(l) = 0\,.$$

В соответствии с методом Рэлея — Ритца частота колебаний находится из уравнения

$$\frac{\partial \Pi}{\partial c_1} = \frac{\partial}{\partial c_1}\frac{1}{2}\left\{c_1^2\int\limits_0^l EJ_x\,(f_1'')^2 dz - c_1^2 p^2\int\limits_0^l \rho F f_1^2\, dz\right\} = 0\,. \tag{78}$$

Отсюда

$$p^2 = \frac{\int\limits_0^l EJ_x\,(f_1'')^2\, dz}{\int\limits_0^l \rho F f_1^2\, dz}\,. \tag{79}$$

Метод Рэлея — Ритца всегда дает несколько завышенное значение частоты колебаний, так как он накладывает дополнительные связи на систему. Наиболее точное решение по формуле (81) дает функция, обеспечивающая минимум p. Формулу (81) часто называют *формулой Рэлея*. Высокую точность расчета дает использование нескольких параметров при аппроксимации прогиба функцией

$$v = \sum_{j=1} c_j f_j(z)\,. \tag{80}$$

Полная потенциальная энергия деформации равна

$$\Pi = \frac{1}{2}\left\{\int\limits_0^l EJ_x\left(\sum_{j=1}^{n} c_j f_j''(z)\right)^2 dz - p^2\int\limits_0^l \rho F\left(\sum_{j=1}^{n} c_j f_j(z)\right)^2 dz\right\}. \tag{81}$$

Из вариационного уравнения

$$\delta\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial c_1}\,\delta c_1 + \ldots + \frac{\partial \Pi}{\partial c_n}\,\delta c_n = 0$$

следует

$$\frac{\partial \Pi}{\partial c_i} = 0 , \qquad i = 1 , 2 , \dots , n , \tag{82}$$

что и образует систему n линейных однородных уравнений для определения c_1 , c_2 , . . . , c_n.

Частная производная полной потенциальной энергии имеет вид

$$\frac{\partial \Pi}{\partial c_i} = \frac{1}{2} \int_0^l EJ_x \left(\sum_{j=1}^{n} c_j f_j''(z) f_i''(z) \right) dz -$$

$$- p^2 \int_0^l \rho F \left(\sum_{j=1}^{n} c_j f_j(z) \right) f_i(z)\, dz , \quad i = 1 , \dots , n .$$

В матричной форме имеем

$$\left([\, \alpha_{ij} \,] - p^2 [\, \beta_{ij} \,] \right) \{c\} = 0 , \tag{83}$$

где элементы матрицы для i -й строки и j -го столбца равны

$$\alpha_{ij} = \int_0^l EJ_x f_i'' f_j''\, dz , \quad \beta_{ij} = \int_0^l \rho F f_i f_j\, dz , \tag{84}$$

$$\{c\}^{\mathrm{T}} = \{c_1 , c_2 , \dots , c_n\} .$$

Из условия равенства нулю определителя системы:

$$f(p^2) = \left| \, [\, \alpha_{ij} \,] - p^2 [\, \beta_{ij} \,] \, \right| = 0 \tag{85}$$

находим значения частоты p_1^2 , p_2^2 , . . .

Например, при двух членах ряда (80) уравнение (85) будет таким:

$$F(p^2) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} - p^2 \beta_{11} & \alpha_{12} - p^2 \beta_{12} \\ \alpha_{21} - p^2 \beta_{21} & \alpha_{22} - p^2 \beta_{22} \end{vmatrix} = 0 . \tag{86}$$

Отметим, что коэффициенты α_{ij} и β_{ij} обладают свойством симметрии:

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} , \quad \beta_{ij} = \beta_{ji} ,$$

что вытекает из равенства (85).

39. Критические частоты вращения и крутильные колебания валов

При расчете вал рассматривается как стержень. Такая модель пригодна для большинства валов. Исключение могут составить тонкостенные полые валы (роторы), для которых оказываются существенными оболочечные эффекты, и очень короткие валы, где следует учитывать пространственное напряженное состояние.

При построении динамических моделей валов следует учитывать критические частоты вращения и возможность крутильных колебаний.

Понятие о критической частоте вращения. Рассмотрим вращение двухопорного вала с диском посредине (рис. 11.10). Для того чтобы выяснить, является ли вращение вала с прямолинейной осью устойчивым, дадим ему некоторое отклонение v. Центр тяжести диска будет двигаться по окружности радиусом v, и возникнет центробежная сила

$$C = \omega^2 m v, \tag{87}$$

где ω — угловая скорость вала (рад/с), m — масса диска.

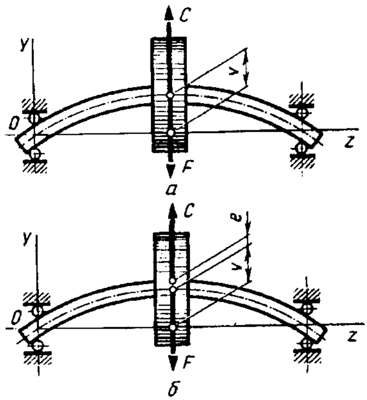


Рис. 11.10. Критическая частота вращения двухопорного вала с диском посредине:
а — идеально уравновешенный диск; *б* — диск с начальным эксцентриситетом

Отклонение вала приведет к появлению силы упругости, стремящейся вернуть вал в недеформированное состояние:

$$F = \frac{1}{\delta_{11}} v, \tag{88}$$

где δ_{11} — прогиб сечения вала от единичной силы в том же сечении.

Для вала постоянного сечения

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{48\,EJ}, \tag{89}$$

где J — момент инерции поперечного сечения (индекс x опускается, так как сечение вала предполагается круглым).

Пренебрегая весом диска, можно заключить, что при $C < F$ вращение вала будет устойчивым, так как после отклонения вал вернется в первоначальное положение. В момент равновесия, когда $C = F$, прогибы вала могут неограниченно возрастать: в любом отклоненном положении центробежные силы и восстанавливающие силы упругости равны. Частота вращения вала, при которой наступает равенство центробежных сил и сил упругости при отклоненном положении вала, называется критической. Приравнивая значения C и F, находим

$$\omega_к^2 m V = \frac{1}{\delta_{11}} V \tag{90}$$

или

$$\omega_к = \frac{1}{\sqrt{\delta_{11} m}} \tag{91}$$

Критическая частота вращения, равная числу оборотов в минуту (1/мин):

$$n_к = \frac{60}{2\pi} \omega_к = \frac{30}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\delta_{11} m}}. \tag{92}$$

Можно допустить, что при критической частоте вращения вал совершенно теряет жесткость на изгиб — даже малая внешняя сила может вызвать опасные прогибы.

Замечание. Из равенства (91) и формулы (14) получается, что критическая частота вращения вала равна круговой частоте собственных изгибных колебаний. Этот вывод справедлив и в более общих случаях (вал с распределенными массами и т.п.), если детали, закрепленные на валу, рассматриваются как точечные массы, т.е. когда пренебрегают инерцией поворота.

Учет начального эксцентриситета центра тяжести диска. В практических задачах центр тяжести диска имеет некоторый эксцентриситет (смещение) e по отношению к оси вращения (геометрической оси вала). Для быстроходных машин обязательно применяется предварительная балансировка роторов с целью уменьшения e. Точность балансировки характеризуется величиной неустранимого (остаточного) дисбаланса

$$D = Ge, \tag{93}$$

где G — вес диска.

Обычно значение D составляет от $(2\text{–}10) \cdot 10^{-2}$ Н · см (при массе ротора 5-10 кг) до 1–10 Н · см (при массе ротора 100-500 кг). Следует учесть, что в рабочих условиях вследствие нагрева, остаточных деформаций дисбаланс возрастает.

При наличии эксцентриситета e центробежная сила (см. рис. 11.10) будет равна

$$C = \omega^2 m (V + e). \tag{94}$$

Сила упругости определяется, как и раньше, равенством (88). Наличие эксцентриситета делает возможным состояние устойчивого статического равновесия, когда $C = F$:

$$\omega^2 m (V + e) = \frac{1}{\delta_{11}} V. \tag{95}$$

Из равенства (95) находим

$$V = \frac{e\,\omega^2 m}{1/\delta_{11} - \omega^2 m} = \frac{e}{\omega_к^2/\omega^2 - 1}. \tag{96}$$

Зависимость абсолютной величины прогиба вала от его угловой скорости показана на рис. 11.11.

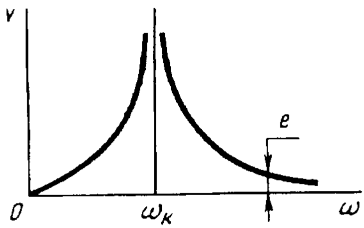


Рис. 11.11. Зависимость прогиба вала от его угловой скорости

При наличии эксцентриситета e прогиб вала возникает при любой угловой скорости ω, так как на вал действует неуравновешенная центробежная сила. Если $\omega < \omega_к$, то прогиб направлен в сторону эксцентриситета. Когда ω достигает критического значения ($\omega \to \omega_к$), то прогиб $V \to \infty$. Анализ поведения вала при наличии начального эксцентриситета подтверждает сделанный ранее вывод об опасности критического режима вращения.

В реальных динамических системах при наличии значительного демпфирования в опорах, при тщательной и надежной балансировке удается работать на критических режимах, но опасная ситуация сохраняется.

При $\omega > \omega_к$ (закритический режим) $V < 0$, что означает противоположность направлений V и e. В закритической области центр тяжести диска расположен ближе к оси вращения, чем точка крепления диска к валу. При очень большой частоте вращения $V = -e$, т.е. центр тяжести диска оказывается на оси вращения. Такое явление называется самоустановлением диска в закритической области.

Замечание. Проведенный анализ основывался на формуле (96), выражающей условие равновесия. Однако вопрос об устойчивости положения равновесия не обсуждался. Из физических соображений ясно, что равновесие вала будет ($\omega < \omega_к$) устойчивым (при отклонении силы упругости больше центробежных сил). Анализ показывает, что в закритической области движение ротора оказывается неустойчивым. Для создания устойчивости движения и успокоения колебаний требуется введение дополнительного демпфирования (упругодемпфирующих опор и др.). Во всех случаях желательно работать с жесткими роторами.

Работа с гибкими роторами ($\omega_{max} > \omega_к$) возможна, но требует применения специальных опор или других средств демпфирования.

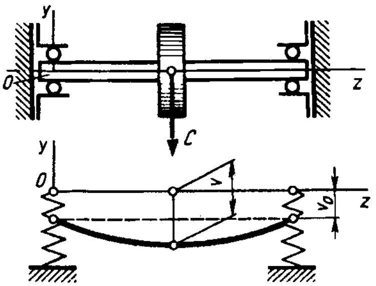


Рис. 11.12. Расчетная схема вала на упругих опорах

Учет упругости опор. В действительных условиях опоры роторов (подшипники, узлы крепления) не являются абсолютно жесткими. На рис.11.12 приведена схема ротора на упругих опорах. Податливость (одинаковых) опор характеризуется коэффициентом подаливости δ_0 (см/кг). Смещение в опоре

$$V_0 = \delta_0 R, \tag{97}$$

где R — реакция в опоре.

Центр тяжести диска (начальный эксцентриситет отсутствует) двигается по окружности радиусом V, центры опор — по окружности радиусом V_0. Центробежная сила диска

$$C = \omega_к^2 m V. \tag{98}$$

Сила упругости вала

$$F = \frac{1}{\delta_{11}}(V - V_0). \tag{99}$$

Так как

$$R = \frac{1}{2} C,$$

то из равенства $C = F$ следует, что

$$\omega_к = \frac{1}{\sqrt{\delta_{11} m}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{2}\frac{\delta_0}{\delta_{11}}}} = \omega_{кж} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{2}\frac{\delta_0}{\delta_{11}}}}, \tag{100}$$

где $\omega_{кж} = 1/\sqrt{\delta_{11} m}$ — критическая угловая скорость ротора на жестких опорах.

Из формулы (100) вытекает, что поправка, связанная с учетом податливости опор, зависит от податливости вала. Чем более жестким является вал, тем важнее для него учет податливости опор.

Силы, действующие на вращающийся диск при прогибах вала. В предыдущем изложении диски представлялись точечными массами. Рассмотрим теперь силы, приложенные к диску, при вращении относительно оси z (рис.11.13). Ось диска (ось z_1) составляет угол φ с направлением оси вращения; V — прогиб вала в месте крепления диска и одновременно смещение центра тяжести диска (точки O_1). На элемент массы диска dm в точке A действует центробежная сила

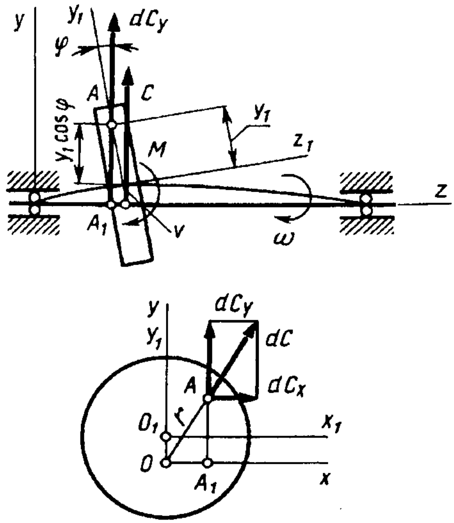


Рис. 11.13. Силы, действующие на вращающийся диск

$$dC = \omega^2 r\, dm\,, \qquad (101)$$

где r — расстояние от точки A до оси вращения.

Центробежная сила dC может быть разложена на две составляющие dC_x и dC_y. Усилия dC_x вследствие симметрии образуют вазимно уравновешенную систему сил и для дальнейшего не существенны.

Сила

$$dC_y = \omega^2 (y_1 \cos\varphi + V)\, dm\,. \qquad (102)$$

Величина $y_1 \cos\varphi + V = AA_1$ представляет проекцию радиуса r на ось y (см.рис.11.13).

Приведем центробежные силы элементов диска к равнодействующим силе и моменту, приложенным в центре тяжести диска. Тогда

$$C = C_y = \int_V dC_y = \omega^2 \int_V (V + y_1 \cos\varphi)\, \rho\, dV, \qquad (103)$$

где интеграл распространяется на весь объем диска V; $\rho\, dV = dm$ — масса элемента диска.

Так как величины V (смещение центра тяжести) и φ (угол поворота плоскости диска) одинаковы для всех точек диска, то

$$C = \omega^2 V \int_V \rho\, dV + \omega^2 \cos\varphi \int_V y_1\, \rho\, dV. \qquad (104)$$

Интеграл

$$\int_V y_1 \rho\, dV = \int_V y_1\, dm = 0$$

как статический момент относительно прямой, проходящей через центр тяжести диска. Из равенства (104) получаем важный результат:

$$C = \omega^2 v m\,. \qquad (105)$$

Равнодействующая центробежных сил такова, как если бы вся масса диска была сосредоточена в его центре тяжести. Но центробежные силы создают момент

$$M = \omega^2 \int_V (v + y_1 \cos\varphi)\, y_1 \sin\varphi\, \rho\, dV$$

или

$$M = \omega^2 v \sin\varphi \int_V y_1\, dV + \omega^2 \cos\varphi \sin\varphi \int_V y_1^2 \rho\, dV. \qquad (106)$$

Первый интеграл в правой части равенства (106) обращается в нуль, как статический момент, и тогда

$$M = \omega^2 \cos\varphi \sin\varphi\, J_m\,, \qquad (107)$$

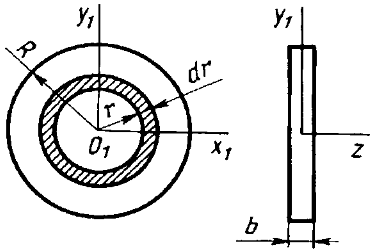


Рис. 11.14. Определение полярного момента инерции массы диска

где $J_m = \int_V y_1^2 \rho\, dV$ — осевой момент инерции массы диска. Для тонких дисков

$$J_m = \frac{1}{2} J_{pm}\,, \qquad (108)$$

где J_{pm} — полярный момент инерции массы диска. Например, для диска постоянной толщины b и радиуса R (рис. 11.14)

$$J_{pm} = b \int_0^R r^2 \rho\, 2\pi r\, dr = \frac{1}{2} \rho b\, \pi R^4 = \frac{1}{2} m R^2\,, \qquad (109)$$

где $m = \rho \pi R^2 b$ — масса диска.

Так как рассматриваются малые прогибы вала, то следует принять

$$\sin\varphi \approx \varphi, \quad \cos\varphi \approx 1 .$$

Угол поворота плоскости диска

$$\varphi = \frac{dV(z)}{dz}, \tag{110}$$

где $V(z)$ — прогиб вала.

Из равенства (107) получаем важную формулу

$$M = \omega^2 J_m d\frac{V}{dz}. \tag{111}$$

Если при прогибах вала плоскость диска отклоняется от первоначального положения, то на диск действует момент, препятствующий повороту плоскости диска. Такой момент называется *гироскопическим*, так как он впервые был изучен в связи с движением гироскопов (простейший пример гироскопа — «волчок»; гироскопы — важнейшие приборы в системе управления самолетами и ракетами). Гироскопический момент пропорционален углу поворота плоскости диска.

Замечание. Рассматриваемое движение вала и диска (диск неподвижен относительно плоскости, содержащей изогнутую ось вала) называется прямой синхронной прецессией. Возможны и другие, более сложные движения вала, напоминающие движения гибкого валика в изогнутой и вращающейся трубчатой обойме. Такого рода движения (несинхронные прецессии) на практике встречаются в двухвальных и трехвальных роторах и в дальнейшем не рассматриваются.

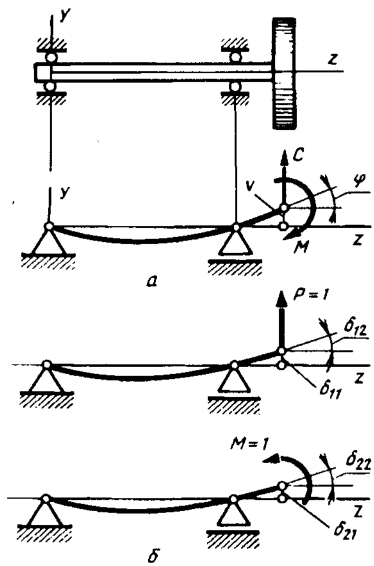


Рис. 11.15. Вал с диском ротора газовой турбины:
а — конструктивная схема; *б* — расчетная схема

Критическая частота вращения вала с дисками. Будем пренебрегать массой вала по сравнению с массой дисков. На рис.11.15 даны конструктивная и расчетная схемы (динамическая модель) ротора газовой турбины. Рассмотрим движение ротора при наличии прогиба вала. При вращении вала в изогнутом состоянии диск действует на вал с усилием и моментом соответственно

$$C = \omega^2 m v, \quad M = \omega^2 J_m \varphi. \tag{112}$$

Для определения деформации вала рассмотрим единичные силы и момент (рис.11.15,*б*), приложенные в точке крепления диска. Обозначим δ_{11} прогиб от единичной силы (первого силового фактора) в направлении силы, δ_{22} — угол поворота от единичного момента (второго силового фактора) в направлении действия единичного момента, δ_{12} — угол поворота от единичной силы в направлении второго силового фактора, δ_{21} — прогиб от единичного момента в направлении первого силового фактора. По условиям взаимности получим

$$\delta_{12} = \delta_{21}.$$

Прогиб вала и угол поворота в месте крепления диска:

$$v = \delta_{11} C - \delta_{21} M, \tag{113}$$

$$\varphi = \delta_{12} C - \delta_{22} M. \tag{114}$$

Знак минус в этих равенствах согласован с разным направлением M и M_1. Учитывая зависимости (112), получаем систему однородных уравнений относительно v и φ :

$$v\omega^2\delta_{11}(m - 1) - \varphi\omega^2\delta_{21}J_m = 0,$$

$$v\omega^2\delta_{12}m - \varphi(\omega^2\delta_{22}J_m + 1) = 0.$$

Отличные от нуля значения v и φ получаются в том случае, когда детерминант системы обращается в нуль:

$$\begin{vmatrix} \omega^2\delta_{11}m - 1 & \omega^2\delta_{21}J_m \\ \omega^2\delta_{12}m & \omega^2\delta_{22}J_m + 1 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\omega^4(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)mJ_m + \omega^2(\delta_{11}m - \delta_{22}J_m) - 1 = 0. \tag{115}$$

Из последнего уравнения находим критическую угловую скорость

$$\omega_к = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}(\delta_{11}m - \delta_{22}J_m) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\delta_{11}m - \delta_{22}J_m)^2 + mJ_m(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)}}} \qquad (116)$$

Как будет показано в дальнейшем, для всех упругих систем

$$\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2 > 0, \qquad (117)$$

и потому формула содержит только одно действительное значение критической угловой скорости (знак минус в формуле (116) должен быть отброшен). При $J_m = 0$ из формулы (116) получаем известный результат:

$$\omega_к = 1/\sqrt{\delta_{11}m}.$$

Гироскопический момент дисков повышает критические угловые скорости, так как препятствует повороту плоскости диска. Разберем предельный случай $J_m \to \infty$. Разделив в равенстве (115) все члены на J_m и сохраняя те, которые не содержат в знаменателе J_m, найдем

$$\omega_к^2 = \frac{1}{(\delta_{11} - \delta_{12}^2/\delta_{22})m} = \frac{1}{\delta_{11}^* m}. \qquad (118)$$

Здесь $\delta_{11}^* = \delta_{11} - \delta_{12}^2/\delta_{22}$ — прогиб от единичной силы при отсутствии поворота сечения, где закреплен диск. Получим этот результат другим путем, считая заранее, что поворот диска отсутствует (рис. 11.16). При смещении диска на величину v возникают сила C и реактивный момент $M_з$.

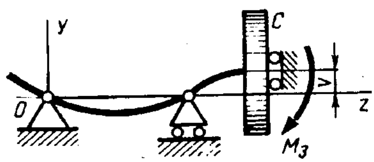


Рис. 11.16. Схема деформации вала при защемленном конце ротора

Из условия $\varphi \neq 0$ (уравнение (114) находим

$$M_з = \frac{\delta_{12}}{\delta_{22}} C.$$

Прогиб вала в месте крепления диска

$$v = \delta_{11}C - \delta_{21}M_з = \left(\delta_{11} - \frac{\delta_{12}^2}{\delta_{22}}\right)C = \frac{1}{\delta_{22}}\left(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2\right)C. \qquad (119)$$

Из физических соображений ясно, что прогиб V должен быть направлен в сторону действия силы (объясните, почему!), что и доказывает условие (116). Соотношения (119) и (112) приводят к равенству (116).

При $J_m \to \infty$ плоскость сечения диска при деформации вала не поворачивается. Влияние гироскопического момента диска сказывается сильно, если диск закреплен вблизи опоры.Когда вал имеет опоры в концевых сечениях и несет несколько дисков, влияние гироскопического момента обычно оказывается небольшим. Если пренебречь влиянием гироскопического эффекта дисков, то, как указывалось, критическая частота вращения совпадает с круговой частотой собственных изгибных колебаний балок. Следовательно, для расчета могут быть использованы формулы разд. 38.

Критическая частота вращения вала переменного сечения с непрерывно распределенными массами. Роторы осевых компрессоров, паровых турбин часто могут быть представлены динамической моделью в виде стержня переменного сечения с непрерывным распределением масс. Будем пренебрегать гироскопическим эффектом дисков, ограничиваясь нижней оценкой критической частоты вращения. Отдельные диски также могут быть заменены в пределах участка распределенной массой. В изогнутом положении на вал действует распределенная нагрузка (рис. 11.17)

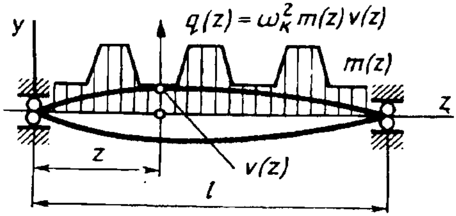


Рис. 11.17. Вал с непрерывно распределенными массами (ротор компрессора)

$$q(z) = \omega^2 m(z)\, V(z)\,, \tag{120}$$

где $m(z)$ — масса, приходящаяся на единицу длины вала.

Перерезывающая сила в сечении z равна

$$Q_y = -R_1 - \int_0^z q(z_1)\, dz_1\,. \tag{121}$$

Учитывая, что

$$\frac{dM_x}{dz} = Q_y\,,$$

находим

$$M_x(z) = -R_1 z - \int\limits_0^z \int\limits_0^{z_1} q(z_2)\, dz_2\, dz_1 . \tag{122}$$

Из условия

$$M_x(l) = 0$$

следует

$$R_1 = -\frac{1}{l} \int\limits_0^l \int\limits_0^{z_1} q(z_1)\, dz_2\, dz_1 .$$

Подставляя значение R_1 в равенство (122), получаем

$$M_x(z) = -\int\limits_0^z \int\limits_0^{z_1} q(z_2)\, dz_2\, dz_1 + \frac{z}{l} \int\limits_0^l \int\limits_0^{z_1} q(z_2)\, dz_2\, dz_1 . \tag{123}$$

Выражение (123) определяет изгибающий момент в сечении стержня (см.рис. 11.17) при произвольной распределенной нагрузке $q(z)$.

Учитывая равенство (120), можно записать:

$$M_x(z) = \omega^2 \left(\frac{z}{l} \int\limits_0^l \int\limits_0^{z_1} m(z_2)\, V(z_2)\, dz_2\, dz_1 - \int\limits_0^z \int\limits_0^{z_1} m(z_2)\, V(z_2)\, dz_2\, dz_1 \right) =$$

$$= \omega^2 A_V(z) , \tag{124}$$

где оператор

$$A_V(z) = \frac{z}{l} \int\limits_0^l \int\limits_0^{z_1} m(z_2)\, V(z_2)\, dz_2\, dz_1 - \int\limits_0^z \int\limits_0^{z_1} m(z_2)\, V(z_2)\, dz_2\, dz_1 . \tag{125}$$

Если задана величина $V(z)$, то по формуле (125) может быть вычислено значение $A_V(z)$ в каждом сечении z. Будем использовать уравнение упругой линии (разд. 31).

$$V(z) = -\int\limits_0^z \int\limits_0^z \frac{M_x(z_2)}{EJ_x(z_2)}\, dz_2\, dz_1 + V(0) + z\,\frac{dV(0)}{dz} . \tag{126}$$

В рассматриваемом случае $V(0) = 0$, а из условия $V(l) = 0$ находим значение $V(0)$, что дает

$$V(z) = \frac{z}{l}\int\limits_0^l\int\limits_0^{z_1} \frac{M_x(z_2)}{EJ_x(z_2)}\,dz_2\,dz_1 - \int\limits_0^z\int\limits_0^{z_1} \frac{M_x(z_2)}{EJ_x(z_2)}\,dz_2\,dz_1 . \qquad (127)$$

Выражение (127) определяет прогиб вала при произвольном распределении изгибающего момента. Внося в равенство (127) величину $M_x(z)$, из соотношения (124) получаем интегральное уравнение для критической частоты вращения

$$v = \omega^2 K v, \qquad (128)$$

где интегральный оператор равен

$$Kv = \frac{z}{l}\int\limits_0^l\int\limits_0^{z_1} \frac{A_V(z_2)}{EJ_x(z_2)}\,dz_2\,dz_1 - \int\limits_0^z\int\limits_0^{z_1} \frac{A_V(z_2)}{EJ_x(z_2)}\,dz_2\,dz_1 . \qquad (129)$$

Интегральное уравнение (129) может быть решено методом последовательных приближений по схеме

$$v_{(i+1)} = \omega^2_{(i)} K v_{(i)} .$$

В качестве исходного приближения принимается

$$v_{(i)} = \frac{4z\,(l - z)}{l^2} .$$

Частота вращения находится из равенства прогибов

$$v_{(i+1)}(l/2) = v_{(i)}(l/2) .$$

Расчет проводится точно таким же методом, как и в разд. 38.

Крутильные колебания валов. В валах поршневых машин (двигателях внутреннего сгорания, поршневых компрессорах и т.п.) часто наблюдаются крутильные колебания, связанные с неравномерностью (по времени) вращающего момента или момента сопротивления. Крутильные колебания могут возникать и в других машинах, если крутящий момент, передаваемый валом, не является постоянным. В качестве динамической модели при крутильных колебаниях обычно используется вал с дисками. Моменты инерции масс дисков J_1, J_2, ..., J_n рассматриваются как приведенные моменты инерции. Например, в поршневых машинах инерционные массы связаны с движением поршней, шатунов и других элементов и приводятся к дискам с эквивалентными моментами инерции. Жесткость участков валов, соединяющих диски, принимается как эквивалентная для участков с непрямой осью (коленчатые валы и др.), при шлицевых соединениях и т.п. На рис. 11.18,*а* показаны конструктивная схема коленчатого вала двигателя внутреннего сгорания, на рис.11.18,*б* — динамическая модель крутильных колебаний. Существуют более сложные модели крутильных колебаний с несколькими ветвями, что определяется конструктивными особенностями машин. Остановимся на схеме «цепочной системы» (рис. 11.19).

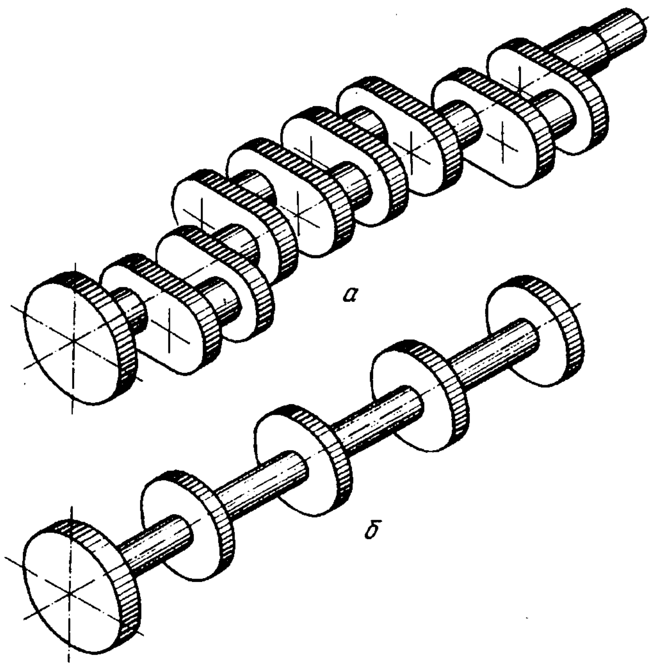


Рис. 11.18. Конструктивная схема коленчатого вала двигателя внутреннего сгорания и динамическая модель крутильных колебаний

Выведем уравнение крутильных колебаний для системы из дисков. Рассмотрим уравнение движения i -го диска (рис. 11.20). Обозначив угол поворота i -го диска $\Theta_i(t)$, получим

$$J_i \frac{d^2\Theta_i(t)}{dt^2} = M_i - M_{i-1}, \tag{130}$$

где M_i, M_{i-1} — крутящие моменты, действующие на диск со стороны валов правого (i -го) и левого (i - 1)-го участков. Угол поворота диска зависит от времени.

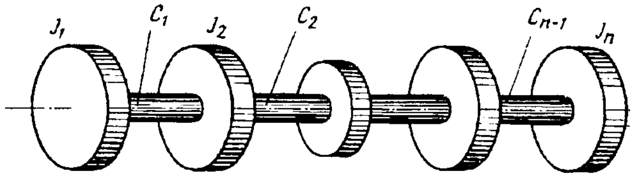


Рис. 11.19. Динамическая модель крутильных колебаний в машинах

Если обозначить жесткость i -го участка C_i, то

$$M_i = C_i\,(\,\Theta_{i+1}(t) - \Theta_i(t)\,)\,. \tag{131}$$

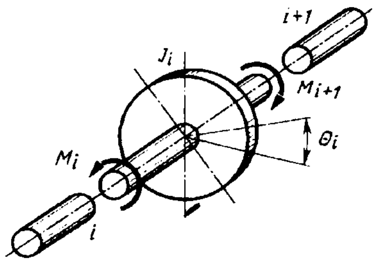


Рис. 11.20. К выводу уравнений крутильных колебаний

Здесь Θ_{i+1}, Θ_i — углы поворота конечных сечений i -го участка; $\Theta_{i+1} - \Theta_i$ — упругий угол поворота вала на i -м участке;

$$C_i\,\frac{GJ_{pi}}{l_i}\,, \tag{132}$$

где l_i — длина участка; J_{pi} — эквивалентная жесткость вала на кручение; G — модуль сдвига.

Подобным образом получаем

$$M_{i-1} = C_{i-1}\,(\,\Theta_i(t) - \Theta_{i-1}(t)\,)\,.$$

Теперь из уравнения (131) находим

$$J_i\,\frac{d^2\Theta_i(t)}{dt^2} = C_i\,(\,\Theta_{i+1}(t) - \Theta_i(t)\,) - C_{i-1}\,(\,\Theta_i(t) - \Theta_{i-1}(t)\,)\,. \tag{133}$$

Пренебрегая моментами инерции участков вала, можем считать, уравнение (133) при $i = 1, \ldots, n$ дифференциальным уравнением крутильных колебаний цепочной системы. Полагая

$$\Theta_i(t) = \Theta_i \cos pt\,, \tag{134}$$

где Θ_i — амплитудное значение угла поворота; p — круговая частота крутильных колебаний, из уравнения (133) получаем

$$C_{i-1}\Theta_{i-1} + [p^2 J_i - (C_{i-1} + C_i)]\,\Theta_i + C_i\Theta_{i+1} = 0$$

$$(i = 1, \ldots, n\,;\, C_0 = 0,\ C_{n+1} = 0)\,. \tag{135}$$

Это и есть уравнение амплитудных углов поворота при крутильных колебаниях цепочной системы.

Пример. Рассмотрим крутильные колебания динамической модели, состоящей из двух дисков, соединенных валом (рис. 11.21). Применяя уравнение (135) при $i = 1$ и $i = 2$, находим

$$(p^2 J_1 - C_1)\,\Theta_1 + C_1\Theta_2 = 0,\ \ C_1\Theta_1 + (p^2 J_2 - C_1)\,\Theta_2 = 0\,.$$

Приравниваем нулю детерминант системы:

$$\begin{vmatrix} p^2 J_1 - C_1 & C_1 \\ C_1 & p^2 J_2 - C_1 \end{vmatrix} = (p^2 J_1 - C_1)(p^2 J_2 - C_1) - C_1^2 = 0\,;$$

находим

$$p^4 J_1 J_2 - C_1 p^2 (J_1 + J_2) = 0\,.$$

Из этого уравнения получим

$$p_1 = 0,\ \ p_2 = p = \sqrt{C_1 \frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2}} = \sqrt{C\left(\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2}\right)}\,. \tag{136}$$

Замечание. Нулевая частота характерна для любой незакругленной системы, которая может двигаться как недеформируемое твердое тело. Поскольку «возвращающие» силы упругости отсутствуют, частота системы равна нулю.

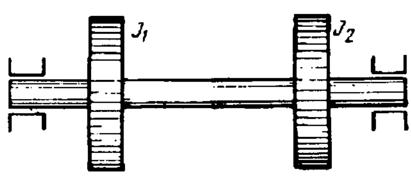


Рис. 11.21. Система из двух дисков и вала

Уравнение крутильных колебаний в матричной форме. Систему n уравнений (135) представим в матричной форме:

$$[C]\{\Theta\} = 0\,, \tag{137}$$

где вектор состояния $\{\Theta\}^{\mathrm{T}} = \{\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_n\}$ и динамическая матрица

$$[C]=\begin{bmatrix} p^2J_1-C_1 & C_1 & 0 & 0 & 0 \\ C_1 & p^2J_2-(C_1+C_2) & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{n-1} & p^2J_n-(C_{n-1}+C_n) \end{bmatrix}. \quad (138)$$

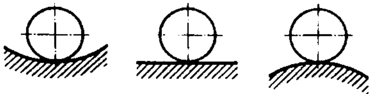
Частотное уравнение получается из условия

$$\det[C]=|[C]|=0.$$

Система с n дисками имеет n частот, среди которых одна нулевая.

40. Устойчивость стержней

Непосредственный жизненный опыт приводит к понятию об устойчивости и неустойчивости системы. На рис. 11.22 показаны три формы раровесия механической системы: устойчивое равновесие, безразличное и неустойчивое. Равновесное положение системы считается устойчивым, если после случайного отклонения система стремится к своему первоначальному положению. Естественно, что оценка устойчивости может зависеть от величины случайного отклонения. На рис. 11.23 изображена система, «устойчивая в малом» и «неустойчивая в большом».



а б в

Рис. 11.22. Три формы равновесия механической системы:
а — устойчивое; *б* — безразличное (критическое); *в* — неустойчивое

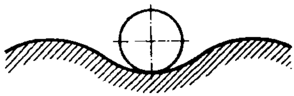


Рис. 11.23. Система, устойчивая при малых отклонениях и неустойчивая при больших

В теоретической механике рассматриваются проблемы устойчивости движения и даются строгие критерии устойчивости на основе теории Пуанкаре — Ляпунова. В механике деформируемого твердого тела оценка устойчивости основывается обычно на анализе статического поведения конструкции.

На рис. 11.24 показаны результаты простейшего эксперимента. При некотором усилии стержень (линейка) начнет изгибаться. Явление резкого увеличения прогибов при сжимающем осевом усилии называется потерей устойчивости стержня.

Для нормальной работы конструкций потеря устойчивости недопустима.

Перейдем к анализу устойчивости стержней.

Критическая нагрузка для стержня с шарнирно закрепленными концами. Формула Эйлера. Рассмотрим двухопорный стержень (рис. 11.25), сжатый осевыми силами N, и предположим, что стержень получил прогиб в плоскости yOz. Если в сечении стержня возникнут изгибающие моменты, способные удержать стержень в изогнутом состоянии, то первоначальная прямолинейная форма равновесия стержня окажется неустойчивой.

Рис. 11.24. Потеря устойчивости стержня при сжатии

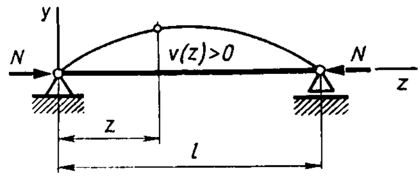


Рис. 11.25. Потеря устойчивости двухопорного стержня

Уравнение изгиба стержня имеет вид

$$EJ_x \frac{d^2v}{dz^2} = -M_x . \tag{139}$$

Изгибающий момент в сечении равен

$$M_x = Nv(z) . \tag{140}$$

Из уравнений (139) и (140) получаем дифференциальное уравнение изгиба стержня

$$\frac{d^2v(z)}{dz^2} + \lambda^2 v(z) = 0 , \tag{141}$$

где

$$\lambda^2 = \frac{N}{EJ_x} . \tag{142}$$

Решение уравнения (141) можно записать в виде

$$v(z) = C_1 \cos \lambda z + C_2 \sin \lambda z , \tag{143}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

При $z = 0$ прогиб $v(0) = 0$, поэтому получаем ($C_1 = 0$)

$$V(z) = C_2 \sin \lambda z = 0 . \tag{144}$$

Прогиб снова обращается в нуль при $z = l$, и поэтому

$$C_2 \sin \lambda l = 0 . \tag{145}$$

Здесь $C_2 \neq 0$, так как при $C_2 = 0$ прогиб стержня вообще отсутствует, а рассматривается изогнутое состояние стержня.

При $C_2 \neq 0$

$$\sin \lambda l = 0 ,$$

и, следовательно,

$$\lambda l = k\pi , \tag{146}$$

где k =0, 1, 2, ... Значение k =0 не представляет интереса, так как соответствует прямолинейному состоянию стержня.

Равенства (142) и (146) приводят к формуле Эйлера:

$$N_{\text{кр}} = \frac{k^2 \pi^2 E J_x}{l^2} \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \tag{147}$$

Из соотношения (147) вытекает, что имеются бесчисленные значения N, при которых могут существовать изогнутые формы равновесия стержня.

Наименьшее значение осевой силы (первое критическое значение) получается при k =1:

$$N = N_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E J_x}{l^2} . \tag{148}$$

При $N \geq N_{\text{кр}}$ уже возможна потеря устойчивости стержня, и поэтому значение осевой силы, найденное по формуле (148), называется *критическим*.

При рассмотрении изогнутого состояния предполагалось, что изгиб происходит в плоскости yOz. Точно такой же вывод справедлив и для изгиба в другой главной плоскости, что дает

$$N_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E J_y}{l^2} . \tag{149}$$

Очевидно, выпучивание при действии усилия $N = N_{\text{кр}}$ произойдет раньше в той плоскости, где жесткость сечения меньше. Поэтому формулу для определения критической силы записывают в таком виде:

$$N_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{l^2}. \tag{150}$$

Замечания. 1. Уравнение (141) имеет решение $V \cong 0$, что соответствует прямолинейной форме равновесия. При $N > N_{кр}$ возможны две формы равновесия: первоначальная прямолинейная форма $V = 0$ и изогнутая форма равновесия

$$V = C \sin \pi z. \tag{151}$$

Прямолинейная форма равновесия оказывается устойчивой при $N < N_{кр}$ и неустойчивой при $N > N_{кр}$. Изогнутая форма равновесия (150), наоборот, будет устойчивой при $N > N_{кр}$. Существование новой устойчивой формы равновесия при $N > N_{кр}$ и неустойчивость прежней прямолинейной формы делают конструкцию неустойчивой: при возрастании силы N может произойти выпучивание — система (стержень) внезапно перейдет к другой форме равновесия, прогибы стержня и напряжения в нем резко возрастают.

2. Более длительный анализ показывает, что при всех высоких значениях критической силы (при $k = 2, 3, 4, ...$) равновесие оказывается неустойчивым: практическое значение имеет только первая критическая сила, или просто критическая сила (формула (148)).

3. Существенным моментом вывода уравнения (141) явилось составление условия равновесия (140) для стержня (системы) в деформированном состоянии. В этом уже содержится отказ от линейной постановки задачи, при которой перемещения считаются настолько малыми, что деформированное и недеформированное состояния при составлении условий равновесия не различаются (принцип начальных размеров).

4. Рассматриваемая модель устойчивости стержня (уравнение (141) и рис. 11.26) является приближенной. Она позволяет найти критическое значение силы из условия существования нетривиального (ненулевого) решения однородного линейного дифференциального уравнения. Это — задача о собственных значениях, которая была основной при изучении собственных колебаний (разд.35). Величина прогибов определяется решением (144) с точностью до масштаба величины C. Модель не дает возможности описать состояние системы при $N \neq N_{кр}$.

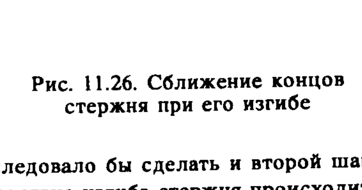


Рис. 11.26. Сближение концов стержня при его изгибе

Более точная модель основана на строгой нелинейной постановке задачи. Сделав один шаг по учету деформированного состояния — приняв во внимание изгибающий момент от осевой силы, следовало бы сделать и второй шаг — уточнить краевые условия при $z = l$, так как вследствие изгиба стержня происходит смещение опоры на величину Δ (рис. 11.26).

Пренебрегая деформацией сжатия стержня, может представить, что элемент стержня dS проектируется на ось z как отрезок dz, и в результате

$$\Delta = \int_0^l (ds - dz) = \int_0^l \left(\sqrt{1 + \left(d\frac{V}{dz} \right)^2} \, dz - dz \right) = \frac{1}{2} \int_0^l \left(d\frac{V}{dz} \right)^2 dz. \quad (152)$$

Краевое условие на втором конце стержня будет таким:

$$V(l - \Delta) = 0. \quad (153)$$

Далее следует использовать точное выражение для кривизны стержня, и тогда дифференциальное уравнение изгиба становится следующим:

$$EJ_x \frac{d^2V/dz^2}{[1 + (dV/dz)^2]^{3/2}} + NV(z) = 0. \quad (154)$$

Уравнение (154) и краевое условие (153) позволяют получить точное решение. Не рассматривая самого решения, укажем простую зависимость, вытекающую из него:

$$\frac{V_{\max}}{l} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \sqrt{1 - \frac{N_{кр}}{N}}.$$

Например, если усилие N превысит критическое значение на 1,5%, стержень длиной 1 м получит прогиб 11 см.

Для практики важно установить усилие, при котором конструкция перестает быть работоспособной. Рассматриваемая приближенная модель позволяет это сделать.

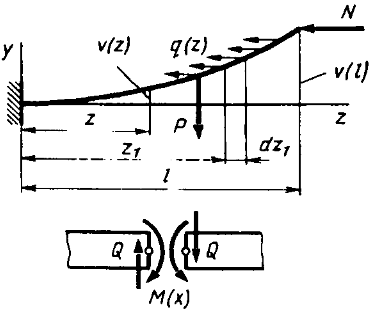


Рис. 11.27. Определение изгибающего момента в сечении стержня

Общее дифференциальное уравнение устойчивости стержня и краевые условия. Рассмотрим более общий случай, когда на стержень действует осевая сила N, приложенная на конце стержня, распределенная осевая нагрузка $q(z)$ (рис. 11.27) и поперечные нагрузки P. Изгибающий момент в сечении z

$$M_x(z) = \widetilde{M}_x(z) - N\,[V(l) - V(z)] - \int_z^l q(z_1)\,[V(z_1) - V(z)]\,dz_1, \quad (155)$$

где $\widetilde{M}_x(z)$ — изгибающий момент от поперечной нагрузки.

Подставляем (155) в уравнение (139):

$$EJ_x \frac{d^2V}{dz^2} = -\widetilde{M}_x(z) + N\,[V(l) - V(z)] + \int_z^l q_z(z_1)\,[V(z_1) - V(z)]\,dz_1, \quad (156)$$

Дифференцируя это равенство по z, получаем

$$\frac{d}{dz}\left(EJ_x\frac{d^2v}{dz^2}\right) = -\tilde{Q}_y - N\frac{dv}{dz} - \int\limits_z^l q_z(z_1)\,dv\frac{(z)}{dz}\,dz\,, \tag{157}$$

где $\tilde{Q}_y = d\tilde{M}_x/dz$ — перерезывающая сила от поперечных нагрузок.

Повторяя операцию дифференцирования, находим

$$\frac{d^2}{dz^2}\left(EJ_x\frac{d^2v}{dz^2}\right) + N\frac{d^2v}{dz^2} - q_z\,dv\frac{(z)}{dz} = 0\,. \tag{158}$$

Предполагается, что поперечная распределенная нагрузка q_y отсутствует. Уравнение (158) представляет собой общее дифференциальное уравнение устойчивости стержня.

Рассмотрим краевые условия для уравнения устойчивости на примере консольного стержня. При $z = 0$ стержень имеет заделку, и потому

$$v(0) = 0\,,\quad \frac{dv}{dz}(0) = 0\,.$$

На конце $z = l$ изгибающий момент отсутствует:

$$\frac{d^2v}{dz^2}(l) = 0\,.$$

Для перерезывающей силы из уравнения (157) получаем при $z = l$

$$\frac{d}{dz}\left(EJ_x\frac{d^2v}{dz^2}\right)_{z=l} = -N\frac{dv}{dz}(l)\,. \tag{159}$$

Условная перерезывающая сила на конце стержня появляется за счет проекции усилия N (рис. 11.28).

Отметим, что уравнение (158) является дифференциальным уравнением четвертого порядка, и для его однозначного решения должны быть указаны четыре краевых условия (обычно по два при $z = 0$ и $z = l$).

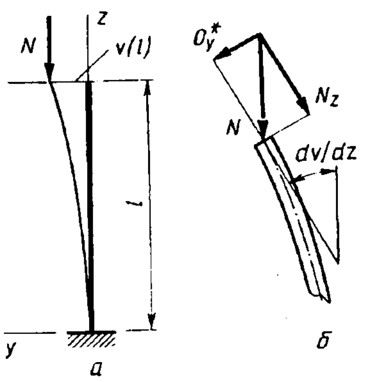


Рис. 11.28. Краевые условия в задачах устойчивости стержней:
а — расчетная схема; *б* — условная перерезывающая сила

Замечания. 1. Напомним правило дифференцирования определенного интеграла по параметру:

$$\frac{d}{dz}\left(\int\limits_{A(z)}^{B(z)} F(z, z_1)\, dz_1\right) = \int\limits_{A(z)}^{B(z)} \frac{\partial F}{\partial z}(z, z_1)\, dz_1 + \frac{dB}{dz} F(z, B) - \frac{dA}{dz} F(z, A). \tag{160}$$

Это правило легко установить, рассматривая приращение

$$dJ = \int\limits_{A(z)+\frac{dA}{dz}dz}^{B(z)+\frac{dB}{dz}dz} F(z + dz, z_1)\, dz_1 - \int\limits_{A(z)}^{B(z)} F(z, z_1)\, dz_1 .$$

Соотношение (160) применялось при дифференцировании уравнения (176).

2. Следует обратить внимание на то, что при выводе краевого условия (159) направление усилия N оставалось неизменным. Если усилие N считать направленным по касательной к оси стержня ("следящая" нагрузка), то решение задачи усложняется.

Решение дифференциального уравнения устойчивости для стержня постоянного сечения. Уравнение устойчивости при отсутствии распределенной осевой нагрузки q_z будет таким:

$$\frac{d^4 v}{dz^4} + \lambda^2 \frac{d^2 v}{dz^2} = 0 . \tag{161}$$

Предполагая частные решения в виде

$$v = C e^{\mu z},$$

получаем характеристическое уравнение

$$\mu^2 (\mu^2 + \lambda^2) = 0,$$

которое имеет четыре корня:

$$\mu_1 = 0, \quad \mu_2 = 0, \quad \mu_3 = i\lambda, \quad \mu_4 = -i\lambda .$$

Решение уравнения (161) можно записать так:

$$v = C_1 + C_2 z + C_3 \cos\lambda z + C_4 \sin\lambda z . \tag{162}$$

Построим теперь решение по методу начальных параметров, основываясь на применении нормальных фундаментальных функций:

$$v(z) = v(0)\, V_1(z) + v'(0)\, V_2(z) + v''(0)\, V_3(z) + v'''(0)\, V_4(z) . \tag{163}$$

Функции $V_i(z)$ являются частными решениями уравнения (161) и удовлетворяют условию

$$\frac{d^j V_i}{dz^j}(0) = \begin{cases} 0, & j \neq i-1, \\ 1, & j = i-1 \end{cases} \quad (j = 0, 1, 2, 3). \tag{164}$$

Для нахождения нормальных фундаментальных функций воспользуемся общим решением (162). Допустим, требуется определить функцию $V_1(z)$. Полагая

$$V_1 = C_1 + C_2 z + C_3 \cos \lambda z + C_4 \sin \lambda z,$$

имеем при $z = 0$ в соответствии с условиями (164)

$$V_1(0) = C_1 + C_3 = 1, \quad V_1'(0) = C_2 + \lambda C_4 = 0,$$

$$V_1''(0) = -\lambda^2 C_3 = 0, \quad V_1'''(0) = -\lambda^3 C_4 = 0.$$

Из последних соотношений получаем

$$V_1(z) = 1.$$

Подобным образом находим всю систему решений:

$$V_1(z) = 1, V_2(z) = z, V_3(z) = \frac{1}{\lambda^2}(1 - \cos \lambda z), V_4(z) = \frac{1}{\lambda^3}(\lambda z - \sin \lambda z). \tag{165}$$

С помощью равенства (163) и формулы (165) получаем следующие важные для дальнейшего соотношения:

$$\begin{aligned} V(z) &= V(0) \cdot 1 + V'(0)\, z + V''(0) \frac{1}{\lambda^2}(1 - \cos \lambda z) + V'''(0) \frac{1}{\lambda^3}(\lambda z - \sin \lambda z), \\ V'(z) &= 0 + V'(0) + V''(0) \frac{1}{\lambda} \sin \lambda z + V'''(0) \frac{1}{\lambda^2}(1 - \cos \lambda z), \\ V''(z) &= 0 + 0 + V''(0) \cos \lambda z + V'''(0) \frac{1}{\lambda} \sin \lambda z, \\ V'''(z) &= 0 + 0 - V''(0)\, \lambda \sin \lambda z + V'''(0) \cos \lambda z. \end{aligned} \tag{166}$$

Последние соотношения можно записать в матричной форме:

$$\{V(z)\} = [V]\{V(0)\}, \tag{167}$$

где столбец-решение имеет вид

$$\{V(z)\}^{\mathrm{T}} = \{V, V', V'', V'''\} \tag{168}$$

и столбец начальных праметров —

$$\{V(0)\}^{\mathrm{T}} = \{V(0),\ V'(0),\ V''(0),\ V'''(0)\}. \tag{169}$$

Элементы нормальной фундаментальной матрицы легко установить из уравнений (166). Решение (167) называется решением дифференциального уравнения (161) в матричной форме.

Влияние условий закрепления концов стержня на критическую силу. Ранее была определена критическая сила для стержня с двумя шарнирными опорами по концам (формула Эйлера). Рассмотрим на нескольких примерах другие случаи закрепления.

Пример 1. Устойчивость консольного стержня под действием сжимающей силы.

Краевые условия задачи таковы:

$$V(0) = 0,\ V'(0) = 0,\ V''(l) = 0,\ V'''(l) = -\frac{N}{EJ_x}V'(l) = -\lambda^2 V'(l).$$

Из решения (166) для краевых условий находим

$$V''(0)\cos\lambda l + V'''(0)\frac{1}{\lambda}\sin\lambda l = 0, \tag{170}$$

$$-V''(0)\,\lambda\sin\lambda l + V'''(0)\cos\lambda l = -\lambda^2(V''(0)\frac{1}{\lambda}\sin\lambda l +$$

$$+ V'''(0)\frac{1}{\lambda^2}(1 - \cos\lambda l)). \tag{171}$$

Из уравнения (171)получаем $V'''(0) = 0$, и уравнение (170) дает

$$V'''(0)\cos\lambda l = 0.$$

Так как $V''(0) \neq 0$, то из условия $\cos\lambda l = 0$ находим $\lambda l = k\pi/2$ (k =1, 2, 3,...). Критическое значение (k =1)

$$N_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ_x}{4l^2} \tag{172}$$

получилось в четыре раза меньше, чем для стержня той же длины, но с шарнирными опорами. Этот результат вполне естествен, так как консольный стержень работает в тех же условиях, что и шарнирно опертый стержень двойной длины (рис. 11.29). Полученное решение дает не только значение критического усилия (172), но и форму прогиба. Из формулы (163) находим

$$V(z) = V''(0)V_3(z) = C(1 - \cos\lambda z), \tag{173}$$

где C — произвольная постоянная.

Ввиду важного значения рассматриваемой задачи приведем обычное элементарное решение. Будем использовать уравнение (139):

$$EJ_x \frac{d^2V}{dz^2} = -M_x(z) = N\,(\,V(l) - V(z)\,)$$

или

$$\frac{d^2V}{dz^2} + \lambda^2 V = \lambda^2 V(l)\,. \tag{174}$$

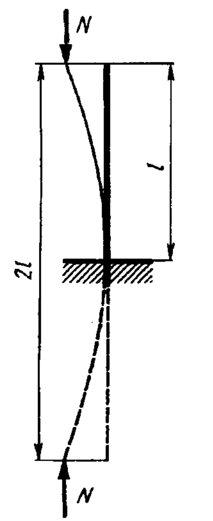


Рис. 11.29. Сравнение значений критической силы при консольном и шарнирном закреплении

Общее решение этого уравнения можно представить так:

$$V(z) = C_1 \cos\lambda z + C_2 \sin\lambda z + V(l)\,. \tag{175}$$

Из краевых условий при $z = 0$ находим

$$V(0) = C_1 + V(l) = 0\,, \quad V'(0) = -\lambda C_2 = 0\,.$$

Таким образом, решение (175) приобретает вид

$$V(z) = V(l)\,(\,1 - \cos\lambda z\,)\,. \tag{176}$$

В равенстве (176) $V(l)$ — неопределенный прогиб в конце стержня (см.рис. 11.28). При $z = l$ равенство (176) сохраняется, если $\cos\lambda l = 0$, что приводит к формуле (172).

В рассматриваемом частном случае решение получилось простым, но менее общим, так как краевые условия использовались в неявной форме.

Пример 2. Устойчивость стержня с двумя заделанными сечениями (рис. 11.30). Краевые условия будут такими:

$$V(0) = 0\,, \quad V'(0) = 0\,, \quad V(l) = 0\,, \quad V'(l) = 0\,.$$

Из последних краевых условий с учетом равенств (166) получаем

$$V''(0)\,\frac{1}{\lambda^2}\,(\,1 - \cos\lambda l\,) + V'''(0)\,\frac{1}{\lambda^2}\,(\,l - \frac{1}{\lambda}\sin\lambda l\,) = 0\,,$$

$$V''(0)\,\frac{1}{\lambda}\sin\lambda l + V'''(0)\,\frac{1}{\lambda^2}\,(\,1 - \cos\lambda l\,) = 0\,.$$

Определитель этих уравнений должен обращаться в нуль, что дает

$$(1-\cos\lambda l)^2+\sin^2\lambda l-\lambda l\sin\lambda l=0$$

или

$$2(1-\cos\lambda l)-\lambda l\sin\lambda l=4\sin^2\frac{\lambda l}{2}-2\lambda l\sin\frac{\lambda l}{2}\cos\frac{\lambda l}{2}=0.$$

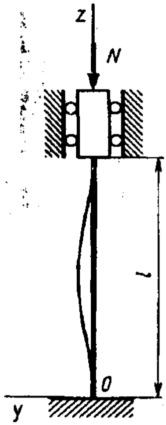


Рис. 11.30. Устойчивость стержня с двумя заделанными сечениями

Из последнего уравнения находим

$$\sin\frac{\lambda l}{2}=0, \tag{177}$$

$$\mathrm{tg}\,\frac{\lambda l}{2}=\frac{\lambda l}{2}. \tag{178}$$

Наименьшие корни этих уравнений имеют вид

$$\frac{\lambda l}{2}=\pi, \tag{179}$$

$$\frac{\lambda l}{2}=4{,}493\approx\frac{\pi}{0{,}7}. \tag{180}$$

Наименьшее значение критической силы соответствует значению (179):

$$N_{\text{кр}}=4\pi^2EJ_x/l^2. \tag{181}$$

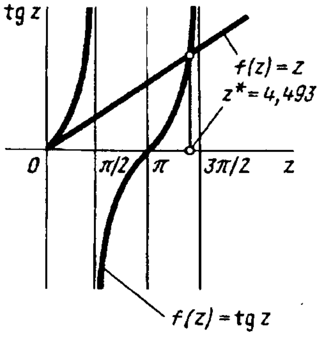


Рис. 11.31. Схема решения уравнения $\mathrm{tg}\,z\approx z$

Замечание. Схема решения уравнения $\mathrm{tg}\,z\approx z$ показана на рис.11.31. Так как при малых z имеем $\mathrm{tg}\,z>z$, то пересечение прямой $f(z)=z$ и тангенсоиды получается при значении z^*, несколько меньшем $3\pi/2=4{,}71$. Точное значение корня $z^*=4{,}493$.

Пример 3. Устойчивость стержня с одним заделанным и другим шарнирным концами (рис. 11.32).

Краевые условия имеют вид

$$V(0)=0,\ V'(0)=0,\ V(l)=0,\ V''(l)=0.$$

Из решения (166) находим

$$v''(0)\,\frac{1}{\lambda^2}\,(\,1-\cos\lambda l\,)+v'''(0)\,\frac{1}{\lambda^2}\,(\,l-\frac{1}{\lambda}\sin\lambda l\,)=0\,,$$

$$v''(0)\cos\lambda l+v'''(0)\,\frac{1}{\lambda}\sin\lambda l=0\,.$$

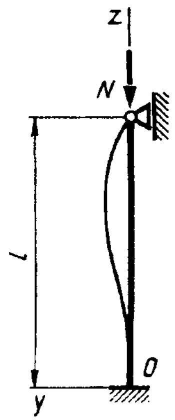


Рис. 11.32. Устойчивость стержня с одним заделанным и другим шарнирным концом

Из равенства нулю определителя уравнения получаем

$$\sin\lambda l-\lambda l\cos\lambda l=0$$

или

$$\operatorname{tg}\lambda l=\lambda l\,.$$

Наименьший корень этого уравнения (см.рис. 11.31) равен

$$\lambda l=4{,}493\approx\pi/0{,}7\,.$$

Критическая сила составит

$$N_{\text{кр}}=\frac{\pi^2 EJ_x}{(\,0{,}7l\,)^2}\,. \tag{182}$$

Приведенная длина стержня. Обобщенная формула Эйлера. Разобранные примеры показывают, что критическое значение сжимающего осевого усилия на стержень можно выразить по формуле

$$N_{\text{кр}}=\frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(\,\nu l\,)^2}\,, \tag{183}$$

где νl — приведенная длина стержня.

Коэффициенты приведения:

$\nu=1$ — шарнирное закрепление обоих концов;

$\nu=2$ — консольный стержень;

$\nu=0{,}5$ — стержень с двумя заделками;

$\nu=0{,}7$ — стержень с заделкой и шарнирной опорой.

Формула (183) называется обобщенной формулой Эйлера. Напомним, что она справедлива, если напряжения и деформации в стержне в момент потери устойчивости находятся в упругой области:

$$\sigma_{\text{кр}}=\frac{N_{\text{кр}}}{F}=\frac{\pi^2 EJ_{\min}}{F(\,\nu l\,)^2}\le\sigma_{\text{пц}}\,, \tag{184}$$

где $\sigma_{\text{пц}}$ — предел пропорциональности материала.

Величина

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{F}} \qquad (185)$$

называется *минимальным радиусом инерции* поперечного сечения. Введем одно важное понятие — гибкость стержня

$$\lambda = \frac{\nu l}{i_{\min}}. \qquad (186)$$

Тогда обобщенную формулу Эйлера можно представить в простой форме:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \qquad (187)$$

Условие (184) ограничивает область применения формулы Эйлера.

Минимальное значение гибкости, ниже которого формула Эйлера перестает быть пригодной, равно

$$\lambda_{\min} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{пц}}}. \qquad (188)$$

Например, для малоуглеродистой стали при $E = 2 \cdot 10^5$ МПа и $\sigma_т = 200$ МПа

$$\lambda_{\min} = \pi \sqrt{\frac{2 \cdot 10^5}{2 \cdot 10^2}} \approx 99.$$

Формулу Эйлера можно применять, если $\lambda > \lambda_{\min}$.

Замечание. Критическое напряжение, конечно, является сжимающим. В задачах устойчивости по традиции, чтобы устранить знак «минус» в расчетных формулах, критические сжимающие напряжения считаются положительными.

Устойчивость стержней при упругопластических деформациях. Рассмотрим случай, когда $\sigma_{кр} \geq \sigma_т$ и деформация стержня происходит в пластической области.

После предварительного сжатия напряжениями $\sigma = -\sigma_{кр}$ начинается изгиб стержня и на стороне растяжения (рис. 11.33) происходит разгрузка, а на стороне сжатия продолжается нагружение. Состояние материала стержня после предварительного сжатия характеризуется точкой A на рис. 11.34. При изгибе получается приращение напряжений, причем в силу закона разгрузки (разд. 17)

$$\text{при разгрузке} \quad \Delta\varepsilon = \frac{\Delta\sigma}{E},$$
$$\text{при нагрузке} \quad \Delta\varepsilon = \frac{\Delta\sigma}{E_к}, \qquad (189)$$

где E и $E_к$ — модуль упругости и касательный модуль.

Появление пластических деформаций снижает устойчивость конструкций, делает их более податливыми.

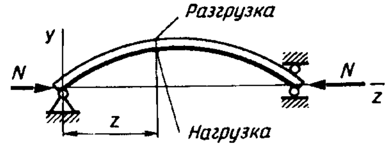


Рис. 11.33. Точки разгрузки и нагрузки при боковом прогибе стержня после предварительного сжатия

Наиболее неблагоприятный случай — потеря устойчивости при таком возрастании нагрузки, когда, несмотря на изгиб, напряжения сжатия возрастают во всех точках сечения (рис. 11.35).

$$\Delta\varepsilon = \frac{1}{E_к}\Delta\sigma. \qquad (190)$$

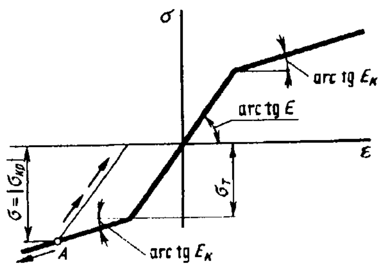


Рис. 11.34. Зависимость напряжение-деформация при анализе устойчивости сжатого стержня

Для материалов с линейным упрочнением ($E_к$ = const) можно считать при анализе дополнительного изгиба, что материал имеет «модуль упругости» $E_к$. Выражение для критической нагрузки будет таким:

$$N_{кр} = \pi^2 E_к J_{min}/l^2. \qquad (191)$$

Эта формула, полученная Энгессером и Шенли, совпадает с формулой Эйлера, где модуль упругости E заменяется касательным модулем $E_к$.

В другой форме

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E_к}{\lambda^2}. \qquad (192)$$

Формулы (191) и (192) справедливы при условии

$$\sigma_{кр} \geq \sigma_т. \qquad (193)$$

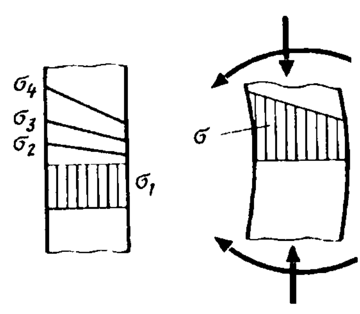


Рис. 11.35. Изгиб в условиях продолжающегося нагружения осевыми силами

Если

$$\frac{\pi^2 E_к}{\lambda^2} < \sigma_т, \tag{194}$$

то принимается $\sigma_{кр} = \sigma_т$.

Таким образом, в упругопластической области

$$\sigma_{кр} = \left\{ \begin{matrix} \dfrac{\pi^2 E_к}{\lambda^2} \\ \sigma_т \end{matrix} \right|_{max} < \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \tag{195}$$

Значение $\sigma_{кр}$ принимается наибольшим из двух указанных формулой (195) при условии, что любое из выбранных значений меньше критического напряжения по формуле Эйлера.

Замечание. Любопытна история вывода формулы Энгессера — Шенли. Работы Эйлера по устойчивости стержней были выполнены еще в 1744 г. и долгое время не находили практического применения. К ним обратились во второй половине XIX века, когда начали возводить железные конструкции, особенно железнодорожные мосты. Тогда выяснилось, что для коротких стержней формула Эйлера дает завышенные и, следовательно, непригодные для использования в практических расчетах значения напряжений. Причина этого — работа стержня в неупругой области — была установлена русским инженером Ф.С. Ясинским. Вскоре была опубликована первая статья Энгессера (1889 г.), в которой была предложена формула (191).

Эта работа подвергалась критике, так как не принималось во внимание явление разгрузки. Задача устойчивости стержня с учетом разгрузки была решена Карманом. Энгессер признал правильными критические замечания и отказался от формулы (191). В 1947 г. Шенли вновь вернулся к ней, считая ее справедливой в условиях продолжающегося нагружения.

Следует отметить, что в упругопластической области, в отличие от упругой, задача становится физически нелинейной и прогиб стержня не может быть неопределенной величиной, как в задачах о собственных значениях.

Формула Энгессера — Шенли справедлива как нижняя граница начала выпучивания (изгиба) стержня.

Обобщенные кривые устойчивости. Кривые связывают значения критического напряжения $\sigma_{кр}$ и гибкости в упругой и упругопластической областях. Параллельно кривой $\sigma_{кр} = f(\lambda)$ строится кривая деформирования (σ, ε). На рис. 11.36 изображена схематизированная кривая деформирования с линейным упрочнением. При $\sigma_{кр} < \sigma_т$ $(\lambda > \lambda_{пред})$ справедлива гипербола Эйлера (зависимость между $\sigma_{кр}$ и λ гиперболического типа)

$$\sigma_{кр} = \pi^2 E/\lambda^2 .$$

При напряжениях $\sigma_{кр} > \sigma_т$ используется гипербола Энгессера — Шенли

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E_к}{\lambda^2} .$$

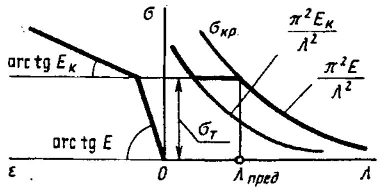


Рис. 11.36. Обобщенные кривые устойчивости

Значение $\sigma_{кр} = \sigma_т$ соответствует горизонтальному участку кривой изменения λ.

Практические расчеты на устойчивость. При действии на стержень сжимающей силы N запас устойчивости определяется следующим равенством:

$$n_у = N_{кр}/N , \tag{196}$$

где $N_{кр}$ — усилие, вызывающее потерю устойчивости стержня (появление новой формы равновесия стержня в изогнутом состоянии).

Еще задолго до приближения N к $N_{кр}$ в стержне могут возникнуть большие прогибы в результате эксцентричного приложения усилия, наличия первоначального искривления и т.п.

Запас устойчивости обычно назначают для различных материалов в пределах $n_у = 1{,}6 \div 5$, причем для стержней с большой гибкостью значение $n_у$ принимают большим, так как для таких стержней влияние начальных отклонений сказывается сильнее.

Запас устойчивости можно представить в виде

$$n_у = \sigma_{кр}(\lambda)/\sigma , \tag{197}$$

где $\sigma_{кр} = N_{кр}/F$ и $\sigma = N/F$ — критическое напряжение и предельное напряжение на сжатие в стержне (в задачах устойчивости по традиции напряжения сжатия считаются положительными).

Значение $\sigma_{кр}(\lambda)$ определяется по зависимости типа рис. 11.36 или по экспериментальным данным. При проектировочном расчете, когда требуется выбрать тип сечения (трубчатое, коробчатое и т.п.) и его размеры или определить их в процессе расчета, используется метод последовательных приближений.

Расчетные уравнения имеют вид

$$\frac{N}{F} = \frac{\sigma_{кр}(\lambda)}{n_у} , \quad \lambda^2 = \frac{(\nu l)^2 F}{J_{\min}} . \tag{198}$$

Сначала задаются типом и размерами сечения (величинами $F_{(1)}$ и $J_{\min(1)}$) и находят

$$\sigma_{(1)} = \frac{N}{F_{(1)}}, \ \sigma_{\text{кр}\,(1)} = \sigma_{\text{кр}}(\lambda_{(1)}), \ \lambda_{(1)}^2 = \frac{(\nu l)^2 F_{(1)}}{J_{\min(1)}}.$$

Если $\sigma_{\text{кр}\,(1)}/\sigma_{(1)} < n_{\text{у}}$, то повторяют расчет, выбирая большие размеры. При $\sigma_{\text{кр}\,(1)}/\sigma_{(1)} > n_{\text{у}}$ во втором приближении размеры сечения уменьшают или расчет заканчивается, если превышение невелико.

Замечание. В строительной технике распространен расчет на устойчивость с помощью «коэффициента ослабления» φ, при котором допускаемое напряжение на устойчивость равно

$$[\sigma]_{\text{у}} = \varphi\,[\sigma_{-}] = \varphi\,\frac{\sigma_{\text{т}}}{n},$$

где $[\sigma_{-}] = \sigma_{\text{т}}/n$ — допускаемое напряжение на сжатие.

Значения коэффициента φ в зависимости от λ рекомендуются специальными таблицами. Техника расчета приводится во всех курсах сопротивления материалов. Метод обладает принципиальным недостатком — он не дает отчетливого представления о действительном запасе устойчивости стержня, и его рассмотрение опускаем.

Напомним, что цель расчета не число, а понимание.

Глава 12

МОДЕЛИ РАЗРУШЕНИЯ

При построении моделей прочностной надежности необходимо знать условия разрушения материала конструкций. Соотношения, связывающие напряжения и деформации в момент разрушения с характеристиками материала, называются *моделями разрушения.*

Модели разрушения различаются в зависимости от условий нагружения, в первую очередь от числа циклов нагружения, от свойств материала (пластичности или хрупкости) и, наконец, могут быть представлены в детерминированной или статистической формах. В детерминированных моделях (основной вид моделей разрушения при практическом использовании) действующие напряжения и характеристики материала имеют вполне определенные (детерминированные) значения. Обычно рассматриваются наиболее опасные расчетные случаи, когда действующие напряжения имеют максимальные значения, а характеристики материала соответствуют нижним границам технических условий.

В статистических моделях напряжения и (или) параметры материала считаются величинами случайными, представленными средними значениями и среднеквадратичными отклонениями. В дальнейшем основное внимание уделяется детерминированным моделям разрушения.

41. Модели статического и длительного разрушения

Статическое нагружение — медленное возрастание нагрузки от нуля до максимальной величины. Предполагается, что нагружение осуществляется однократно. Примерами статического нагружения могут служить нагружение металлического каркаса зданий, сосуда при гидравлическом испытании, болта при его затяжке. Практически к статическому нагружению относят случай, когда нагружение повторяется несколько раз, однако встречается и заметное понижение прочности даже после малого числа циклов нагружений ($N < 10$).

В ряде случаев разрушение происходит в результате предположительного действия нагрузки — длительное разрушение (см. разд. 13). Модели статического и длительного разрушения можно представить в следующем виде:

$$\sigma_{экв} = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3; \lambda_0, \lambda_1, \ldots) = \sigma_{кр}(T, t), \tag{1}$$

где $\sigma_{экв}$ — эквивалентное напряжение; $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — главные напряжения, причем $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$; $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$ — параметры, зависящие от механических свойств материала.

Величина $\sigma_{кр}$ представляет критическое напряжение, зависящее в общем случае от температуры T и времени нагружени t. Для статической прочности принимается $\sigma_{кр} = \sigma_в$, где $\sigma_в$ — предел прочности материала при растяжении; для длительной прочности $\sigma_{кр} = \sigma_{дл}$, где $\sigma_{дл}$ — предел длительной прочности.

Если во всех точках материала конструкции

$$\sigma_{экв} < \sigma_{кр}, \tag{2}$$

условия прочности считаются выполненными.

Если

$$\sigma_{экв} \geq \sigma_{кр}, \tag{3}$$

в опасной точке наступает разрушение.

Величина $\sigma_{экв}$ в равенстве (1) называется *критерием прочности*. Эквивалентное напряжение приводит сложное напряженное состояние к эквивалентному по опасности разрушения одноосному растяжению. Прочность при одноосном растяжении считается известной по экспериментальным данным.

Модели статического разрушения пластичных материалов. У пластичных материалов разрушение связано с появлением значительной деформации сдвига. Для таких материалов, как показали экспериментальные исследования, в качестве критерия разрушения могут быть приняты интенсивность напряжений или максимальные касательные напряжения.

Критерий интенсивности напряжений. В соответствии с этим критерием

$$\sigma_{экв} = \sigma_i, \tag{4}$$

где σ_i — интенсивность напряжений:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}. \tag{5}$$

Модель статического разрушения имеет вид

$$\sigma_i = \sigma_в. \tag{6}$$

Если оси x, y, z являются главными осями напряженного состояния, то

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2} \ . \tag{7}$$

В частном случае плоского напряженного состояния ($\sigma_z = 0$)

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y} = \sigma_в \tag{8}$$

изображается в плоскости главных напряжений в виде эллипса (рис. 12.1), оси которого повернуты на 45° к осям x и y. Точка A соответствует одноосному растяжению по оси x, точка C — одноосному растяжению по оси y. Наибольшее «превышение» ординаты эллипса над прямой $\sigma_y = \sigma_в$ получается при $\sigma_x = \sigma_y/2$ и составляет $0{,}115\,\sigma_в$. Если точка (σ_x, σ_y), изображающая напряженное состояние, находится внутри эллипса, материал остается прочным, при выходе этой точки за границы эллиптической области происходит разрушение.

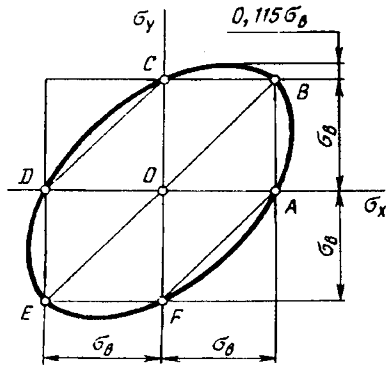


Рис. 12.1. Критерии статической прочности для пластичных материалов в плоскости главных напряжений σ_x и σ_y

Критерий интенсивности напряжений предписывает одинаковую прочность при растяжении и сжатии, так как интенсивность напряжений в обоих случаях одинакова.

Замечания. 1. Критерий интенсивности напряжений был предложен Губером (1902 г.) и независимо Мизесом (1913 г.) на основании совершенно различных исходных предположений. При постоянном значении σ_i оказываются постоянными:

а) касательное напряжение в октаэдрической площадке;

б) удельная потенциальная энергия изменения формы;

в) среднее значение касательного напряжения по всем площадкам, проходящим через точку.

2. Критерий прочности для пластичных материалов часто используется как критерий появления пластических деформаций:

$$\sigma_i = \sigma_т , \tag{9}$$

где $\sigma_т$ — предел текучести при одноосном растяжении. Значение σ_i, так же как и максимальное значение касательного напряжения τ_{max}, отражает интенсивность сдвига в рассматриваемой точке тела.

Критерий максимальных касательных напряжений. Ответственными за разрушение признаются касательные напряжения. Разрушение наступает, если значение максимального касательного напряжения равно

$$\tau_{max} = \tau_в , \qquad (10)$$

где $\tau_в$ — предел прочности материала при действии касательных напряжений.

Применяя условие (10) для растяжения стержня и учитывая, что при растяжении стержня

$$\tau = \frac{1}{2}\sigma ,$$

получаем

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}\sigma_в . \qquad (11)$$

При сложном напряженном состоянии

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) , \qquad (12)$$

где σ_1 и σ_3 — наибольшее (в алгебраическом смысле) и наименьшее главные напряжения.

Из соотношений (11) и (12) получаем модель разрушения

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_в$$

или

$$\sigma_{экв} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_в . \qquad (13)$$

Если главные напряжения σ_x, σ_y, σ_z не упорядочены по величине, то $\sigma_{экв}$ равно наибольшей по модулю разности:

$$\sigma_{экв} = \left\{ \begin{array}{c} |\sigma_x - \sigma_y| \\ |\sigma_y - \sigma_z| \\ |\sigma_z - \sigma_x| \end{array} \right\} = \sigma_в . \qquad (14)$$

Рассмотрим двухосное напряженное состояние ($\sigma_z = 0$), и пусть σ_x и σ_y — главные напряжения. Если $\sigma_x > 0$ и $\sigma_y > 0$ (первая четверть на рис. 12.1), то при $\sigma_x > \sigma_y$ имеем $\sigma_1 = \sigma_x$, $\sigma_3 = 0$, и условия (13) и (14) дают $\sigma_x = \sigma_в$ (прямую *AB* на рис. 12.1). При тех же условиях

($\sigma_x > 0$, $\sigma_y > 0$), но при $\sigma_y > \sigma_x$ получаем $\sigma_y = \sigma_в$ (прямую CB). Если $\sigma_x < 0$, $\sigma_y > 0$ (вторая четверть), то $\sigma_1 = \sigma_y$, $\sigma_3 = \sigma_x$, и тогда по условию (13) имеем

$$\sigma_y - \sigma_x = \sigma_в . \tag{15}$$

Уравнение (15) изображается прямой DC. Подобным образом находим, что условие (13) при плоском напряженном состоянии изображается шестиугольником $ABCDEF$.

Как видно из рис. 12.1, модели разрушения для пластичных материалов по критерию интенсивности напряжений или по критерию максимальных касательных напряжений дают довольно близкие результаты.

Замечания. 1. Критерий максимальных касательных напряжений был впервые указан Треска на основании экспериментальных исследований и использован Сен-Венаном как критерий пластичности.

2. Экспериментальные данные свидетельствуют, что критерий максимальных касательных напряжений уступает по точности критерию интенсивности напряжений, однако иногда его применение оказывается проще для анализа предельных состояний конструкции, и его использование «идет в запас прочности».

Предельные поверхности по критериям интенсивности напряжений и максимальных касательных напряжений. Для двухосного напряженного состояния ($\sigma_z = 0$) на рис. 12.1 были указаны предельные кривые по критериям интенсивности напряжений (эллипс) и максимальных касательных напряжений (шестиугольник, вписанный в эллипс). Для точек предельных кривых выполняются условия (6) или (14). При объемном напряженном состоянии критерии прочности характеризуются предельными поверхностями, в точках которых значение критерия постоянно и равно предельному значению.

Рассмотрим сначала критерий интенсивности напряжений. Пусть σ_x, σ_y и σ_z представляют главные напряжения (рис. 12.2). В пространстве главных напряжений напряженное состояние характеризуется точкой M. Ось ξ одинаково наклонена к осям x, y и z, а ее направляющие косинусы равны:

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = 1/\sqrt{3} .$$

Ось ξ называется гидростатической осью, так как величина

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

пропорциональна среднему (гидростатическому) напряжению. Проведем плоскость D, содержащую точку M и перпендикулярную оси ξ; эта плоскость называется девиаторной. Расстояние r от точки M до оси ξ найдем по формуле

$$r^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 =$$

$$= \frac{2}{3}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_z - \sigma_z\sigma_x) = \frac{2}{3}\sigma_i^2$$

или

$$r = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\sigma_i. \tag{16}$$

Модель статического разрушения по критерию интенсивности напряжений соответствует постоянному значению

$$r = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\sigma_i = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\sigma_в \tag{17}$$

и, следовательно, изображается круговым цилиндром, ось которого совпадает с гидростатической осью (рис. 12.3). При пересечении цилиндра с плоскостью $\sigma_z = 0$ получается эллипс, изображенный на рис. 12.1. Для критерия максимальных касательных напряжений предельная поверхность представляет собой правильную шестигранную призму, вписанную в цилиндр (см. рис. 12.3). При объемном напряженном

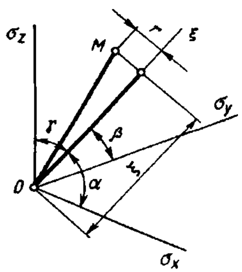


Рис. 12.2. Пространство главных напряжений

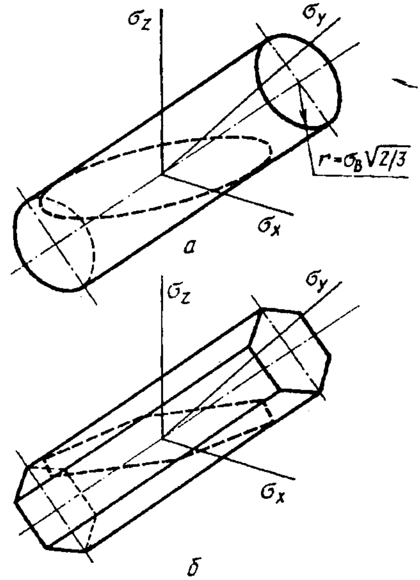


Рис. 12.3. Предельные поверхности по критерию интенсивности напряжений (*а*) и максимальных касательных напряжний (*б*)

состоянии возможен случай равномерного (гидростатического) растяжения

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma .$$

В этом случае оба критерия прогнозируют бесконечную прочность, что не соответствует физическому смыслу понятия прочности. При объемном напряженном состоянии в тех случаях, когда все три главных напряжения растягивающие (но не обязательно одинаковые), модель статического нагружения пластичных материалов должна быть дополнена ограничением по наибольшим растягивающим напряжениям.

Замечание. Интенсивность напряжений обращается в нуль и при всестороннем равномерном сжатии. Опыты показывают, что при таком напряженном состоянии применяющиеся в технике материалы обладают практически неограниченной прочностью. В связи с этим не имеет места ограничение по наибольшим сжимающим напряжениям.

Более общие двупараметрические модели статического разрушения. При построении моделей разрушения пластичных и хрупких материалов учитывались возможности разрушения путем среза или путем отрыва. Первый вид разрушения характерен для пластичных материалов, второй — для хрупких. Разделение материалов на пластичные и хрупкие по опытам на простое растяжение не является исчерпывающим. При всестороннем растяжении пластичный материал ведет себя как хрупкий; при всестороннем сжатии хрупкий материал проявляет пластические свойства.

Более общие модели статической прочности учитывают взаимное влияние двух механизмов разрушения (среза и отрыва) и потому справедливы как для пластичных, так и для хрупких материалов.

Критерий Мора. Этот критерий является дальнейшим развитием критерия максимальных касательных напряжений. Предполагается, что в момент разрушения в опасной площадке касательное напряжение зависит от величины и знака действующего в этой площадке нормального напряжения

$$\tau_* = f(\sigma_*) . \qquad (18)$$

В качестве опасной площадки принимается площадка с максимальными касательными напряжениями

$$\tau_* = \tau_{max} . \qquad (19)$$

Тогда $\sigma_* = \sigma_{\tau_{max}}$ — нормальное напряжение в площадке максимальных касательных напряжений.

В общем случае напряженного состояния

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) , \qquad (20)$$

$$\sigma_{\tau_{max}} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3), \qquad (21)$$

где σ_1, σ_3 — наибольшее и наименьшее (в алгебраическом смысле) главные напряжения.

По гипотезе Мора прочность не зависит от промежуточного главного напряжения σ_2.

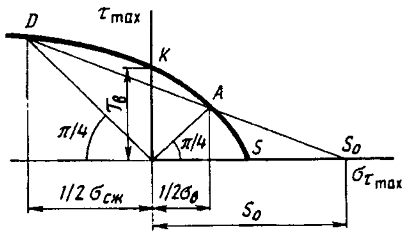


Рис. 12.4. Кривая предельных напряжений в плоскости ($\sigma_{\tau_{max}}$, τ_{max}) по гипотезе Мора

На рис. 12.4 представлена кривая предельных напряжений в плоскости (τ_{max}, $\sigma_{\tau_{max}}$) по гипотезе Мора. Точка A соответствует одноосному растяжению, точка D — одноосному сжатию, точка K — кручению В первом приближении предельная кривая заменяется прямой

$$\tau_{max} = a_1\sigma_{\tau_{max}} + a_0, \qquad (22)$$

где a_0, a_1 — параметры прямой.

Наиболее полная аппроксимация получается в том случае, когда прямая проводится через точки A и D. Тогда для точек A и D имеем

$$\frac{1}{2}\sigma_в = a_1\frac{1}{2}\sigma_в + a_0, \quad \frac{1}{2}\sigma_{сж} = -a_1\cdot\frac{1}{2}\sigma_{сж} + a_0,$$

где $\sigma_в$ — предел прочности, $\sigma_{сж}$ — предел прочности при сжатии (абсолютная величина сжимающих напряжений при разрушении).

Далее находим

$$a_0 = \frac{\sigma_в\sigma_{сж}}{\sigma_{сж} + \sigma_в}, \qquad a_1 = -\frac{\sigma_{сж} - \sigma_в}{\sigma_{сж} + \sigma_в}. \qquad (23)$$

Уравнение (22) с учетом соотношений (20), (21) и (23) будет таким:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = -\frac{\sigma_{сж} - \sigma_в}{\sigma_{сж} + \sigma_в}(\sigma_1 + \sigma_3) + 2\frac{\sigma_{сж}\sigma_в}{\sigma_{сж} + \sigma_в}$$

или, после простых преобразований,

$$\sigma_1 - \frac{\sigma_в}{\sigma_{сж}} \sigma_3 = \sigma_в . \tag{24}$$

Предельное сопротивление отрыву S_0 (при $\tau_{max} = 0$) будет по (22) равно

$$S_0 = -\frac{a_0}{a_1} = \frac{\sigma_в \sigma_{сж}}{\sigma_в - \sigma_в} = \frac{\sigma_в}{1 - \sigma_в/\sigma_{сж}} .$$

Если $\sigma_{сж}$ считается известным, то предел прочности на срез составит

$$\tau_в = a_0 = \frac{\sigma_в}{1 + \sigma_в/\sigma_{сж}} .$$

В соответствии с условием (24) эквивалентное напряжение (критерий Мора)

$$\sigma_{экв} = \sigma_1 - \frac{\sigma_в}{\sigma_{сж}} \sigma_3 . \tag{25}$$

Если $\sigma_{сж} = \sigma_в$, то критерий Мора совпадает с критерием максимальных касательных напряжений. При $\sigma_{сж} \to \infty$ критерий Мора переходит в критерий наибольших растягивающих напряжений для хрупких материалов.

Предельную прямую можно провести через точку K (кручение, сдвиг) и A (растяжение), если известно экспериментальное значение $\tau_в$. Тогда

$$a_0 = \tau_в ,$$

$$a_1 = -(2\tau_в/\sigma_в - 1) ,$$

и критерий Мора будет таким:

$$\sigma_{экв} = \sigma_1 - \sigma_3 (\sigma_в/\tau_в - 1) = \sigma_в . \tag{26}$$

Предел прочности на сжатие и сопротивление отрыву прогнозируются следующими величинами:

$$\sigma_{сж} = \frac{\sigma_в}{\sigma_в/\tau_в - 1} , \tag{27}$$

$$S_0 = \frac{\sigma_в}{2 - \sigma_в/\tau_в} . \tag{28}$$

Замечания. 1. При традиционном изложении теории прочности Мора (1902 г.) исходят из геометрической интерпретации с помощью кругов Мора. Предельная кривая представляется как огибающая предельных кругов Мора для различных напряженных состояний. Однако геометрическая интерпретация напряженного состояния с помощью кругов Мора не связана с механической трактовкой процесса разрушения и потому необязательна.

2. Критерий Мора принадлежит к числу двухпараметрических критериев — требуется знание двух экспериментальных характеристик материала ($\sigma_в$ и $\sigma_{сж}$ или $\sigma_в$ и $\tau_в$). При задании $\sigma_в$ и $\tau_в$ (см. рис. 12.4) получается более точная аппроксимация, но в более узком диапазоне напряженных состояний при $\sigma_1 > 0$.

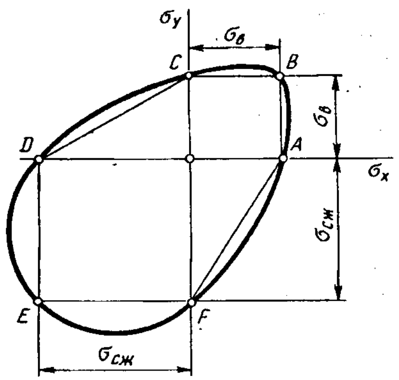


Рис. 12.5. Критерий Мора (шестиугольник) и критерий Писаренко—Лебедева (неправильный эллипс) для плоского напряженного состояния

Предельная поверхность в пространстве главных напряжений по критерию Мора. Для плоского напряженного состояния ($\sigma_z = 0$) предельная поверхность переходит в предельную линию (неправильный шестиугольник), показанную на рис. 12.5. В первой четверти ($\sigma_x > 0$, $\sigma_y > 0$) величина $\sigma_3 = 0$ и критерий Мора совпадает с критерием максимальных касательных напряжений. Во второй четверти ($\sigma_x < 0$, $\sigma_y > 0$) $\sigma_1 = \sigma_y$, $\sigma_3 = \sigma_x$ и по равенству (25)

$$\sigma_y - \frac{\sigma_в}{\sigma_{сж}} \sigma_x = \sigma_в . \qquad (29)$$

Уравнение (29) выражается прямой DC. В третьей четверти ($\sigma_x < 0$, $\sigma_y < 0$) $\sigma_1 = 0$, тогда по условию (25) имеем

$$-\sigma_3 = \sigma_{сж},$$

что соответствует прямым DE (при $|\sigma_x| > |\sigma_y|$) или EF (при $|\sigma_y| > |\sigma_x|$).

Предельная поверхность в пространстве главных напряжений представлена на рис. 12.6. В сечении плоскостью $\sigma_z = 0$ получается шестиугольник (см. рис. 12.5); вершина поверхности (точка S_0) лежит на гидростатической оси. При $\sigma_{сж} = \sigma_в$ точка S_0 уходит в бесконечность и поверхность на рис. 12.6,*а*, совпадает с поверхностью на рис.12.3,*б*.

Критерий Писаренко — Лебедева основан на существовании зависимости

$$\sigma_i = f(\sigma_1)\,, \tag{30}$$

связывающей интенсивность напряжений σ_i и наибольшее нормальное напряжение σ_1 в момент разрушения (рис. 12.7).

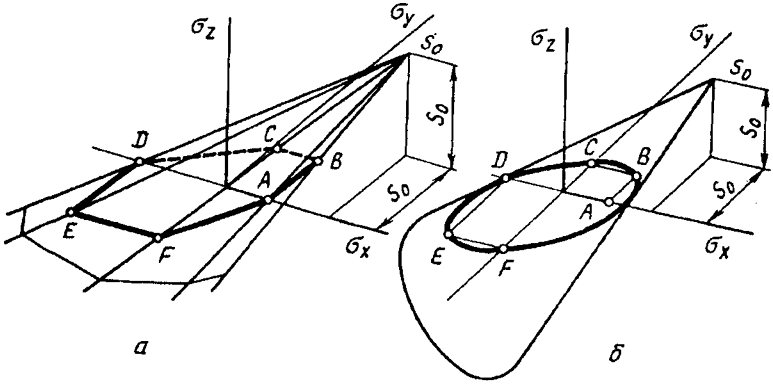


Рис. 12.6. Предельные поверхности в пространстве главных напряжений по критерию Мора (*а*) и по критерию Писаренко—Лебедева (*б*)

Заменяя в первом приближении зависимость (30) прямой

$$\sigma_i = a_1\sigma_1 + a_0\,, \tag{31}$$

находим параметры a_1 и a_0 из условия, что прямая проходит через точки A и D (точки одноосного растяжения и сжатия). Получаем

$$a_1 = -(\sigma_{сж}/\sigma_в - 1)\,, \quad a_0 = \sigma_{сж}\,,$$

так как в точке D $\sigma_1 = 0$, $\sigma_i = \sigma_{сж}$, где $\sigma_{сж}$ — предел прочности на сжатие.

Из условия (31) следует

$$\frac{\sigma_в}{\sigma_{сж}}\sigma_i + \left(1 - \frac{\sigma_в}{\sigma_{сж}}\right)\sigma_1 = \sigma_в\,. \tag{32}$$

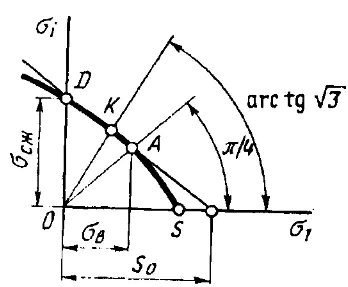


Рис. 12.7. Кривая предельных напряжений в плоскости (σ_i, σ_1) по гипотезе Писаренко—Лебедева

Эквивалентное напряжение по гипотезе Писаренко — Лебедева (критерий прочности):

$$\sigma_{экв} = \frac{\sigma_в}{\sigma_{сж}} \sigma_i + \left(1 - \frac{\sigma_в}{\sigma_{сж}} \right) \sigma_1 . \qquad (33)$$

Предельная поверхность в пространстве напряжений по критерию Писаренко — Лебедева. Для плоского напряженного состояния ($\sigma_z = 0$) уравнение (32) представляет неправильный эллипс, описанный вокруг шестиугольника Мора (см. рис. 12.5). Предельная поверхность в пространстве главных напряжений представляет круговой конус, вершина которого лежит на оси, одинаково наклоненной к направлениям главных напряжений (см. рис. 12.6). Сопротивление отрыву по соотношению (32):

$$S_0 = \frac{\sigma_в}{1 - \sigma_в/\sigma_{сж}} .$$

Модели длительного разрушения. В современной технике часто встречаются конструкции, элементы которых работают при повышенных температурах (900°С и более). В этих условиях прочность конструкционных материалов, особенно металлов и их сплавов, существенно зависит от температуры и длительности нагружения.

Разрушение, наступающее вследствие длительного действия нагрузки, называется длительным разрушением. Связь между пределом длительной прочности $\sigma_{дл}$ и временем до разрушения $t_р$ устанавливается зависимостью

$$\sigma_{дл}^m t_р = C , \qquad (34)$$

где $m = m(T)$, $C = C(T)$ — константы материала, зависящие от температуры.

В логарифмических координатах зависимость (34) выражается прямой линией. В некоторых случаях наблюдается перелом после времени нагружения $t_{р1}$ (рис.12.8), и более общая зависимость имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{дл}^m t_р &= C \quad \text{при } t_р < t_{р1} , \\ \sigma_{дл}^m t_р &= C_1 \quad \text{при } t_р \geq t_{р1} . \end{aligned} \qquad (35)$$

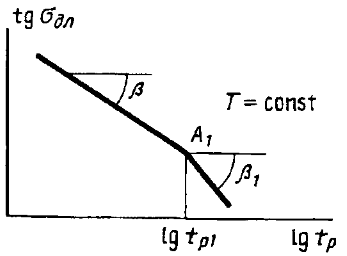


Рис. 12.8. Зависимость предела длительной прочности от времени нагружения (в логарифмических координатах)

Константы материала связаны зависимостью, вытекающей из того, что точка A_1 принадлежит одновременно двум участкам:

$$\frac{1}{m}(\lg C - \lg t_{\text{р}1}) = \frac{1}{m_1}(\lg C_1 - \lg t_{\text{р}1}). \tag{36}$$

Модель длительного разрушения при стационарном (постоянном по времени) нагружении имеет вид

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_{\text{дл}}(t, T), \tag{37}$$

где $\sigma_{\text{дл}}(t, T)$ — предел длительной прочности при растяжении, t и T — длительность и температура нагружения. Эквивалентное напряжение можно принимать по критерию Мора (24):

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \frac{\sigma_{\text{дл}}}{\sigma_{\text{дл.сж}}}\sigma_3, \tag{38}$$

где $\sigma_{\text{дл.сж}}$ — предел длительной прочности на сжатие.

По экспериментальным данным обычно

$$\sigma_{\text{дл.сж}} > 2\sigma_{\text{дл}}. \tag{39}$$

Принимая

$$\sigma_{\text{дл.сж}} = 2\sigma_{\text{дл}}, \tag{40}$$

получаем

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \frac{1}{2}\sigma_3. \tag{41}$$

В качестве критерия длительной прочности используется критерий Сдобырева

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{1}{2}(\sigma_i + \sigma_1), \tag{42}$$

который можно рассматривать как критерий Писаренко — Лебедева при условии (40).

Модель длительного разрушения при нестационарном нагружении. Принципы линейного суммирования повреждений. Часто элементы конструкций работают на различных режимах нагружения. Например, авиационный двигатель пассажирского самолета работает 2 — 4% своего ресурса на наиболее тяжелом (взлетном) режиме, 20 — 30% — на номинальном режиме, остальное время — на более легких режимах.

Допустим, что нагружение состоит из k режимов (рис. 12.9), причем на i-м режиме (в опасной точке) действуют температура T_i и на-

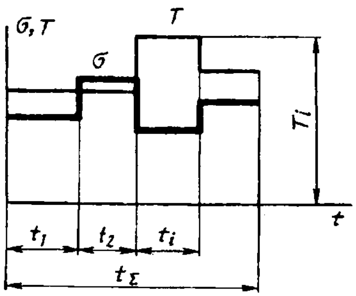


Рис. 12.9. Изменение напряжений и температур при нестационарном нагружении

пряжение σ_i ; длительность i -го режима равна t_i ; суммарное время работы обозначим t_Σ . Пусть t_{pi} составляет время до разрушения при непрерывной работе в условиях i-го режима (т.е. при температуре T_i и напряжении σ_i). Назовем *повреждением*, полученным материалом в результате работы на i -м режиме, величину

$$r_i = \frac{t_i}{t_{pi}} . \tag{43}$$

Очевидно, что

$$0 \le r_i \le 1 .$$

При $t_i = 0$ повреждение отсутствует, при $t_i = t_{pi}$ ($r_i = 1$) материал разрушается полностью за счет работы на i -м режиме.

При работе на нескольких режимах в соответствии с *принципом линейного суммирования повреждений* разрушение наступает при

$$\frac{t_1}{t_{p1}} + \frac{t_2}{t_{p2}} + \ldots + \frac{t_k}{t_{pk}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{t_i}{t_{pi}} = 1 . \tag{44}$$

Условие (44) представляет модель длительного разрушения при нестационарном нагружении. При непрерывном изменении режимов нагружения повреждение за время dt равно

$$dr = \frac{1}{t_p [\, \sigma(t) \,,\ T(t) \,]} dt , \tag{45}$$

где $t_p (\sigma , T)$ — время до разрушения при напряжении σ и температуре T в данное время t (рис. 12.10).

Модель длительного разрушения при непрерывном изменении режимов имеет вид

$$\int_0^{t_\Sigma} dr = \int_0^{t_\Sigma} \frac{dt}{t_p [\, \sigma(t) \,,\ T(t) \,]} = 1 . \tag{46}$$

Замечание. Принцип линейного суммирования повреждений был впервые выдвинут Пальгреном (1924 г.) при оценке долговечности шарикоподшипников. Для длительной прочности этот принцип был применен Робинсоном (1952 г.). Принцип получен как обобщение экспериментальных данных. Он может быть обоснован, если принять скорость развития повреждений равной

$$\frac{dr}{dt} = f(\sigma, T), \tag{47}$$

где $f(\sigma, T)$ — функция произвольной структуры, зависящая от напряжения и температуры.

Существенно, что время t не входит в явном виде в правую часть равенства (47), т.е. процессы старения (диффузии, коррозии и др.) исключаются из рассмотрения. Они считаются второстепенными по сравнению с влиянием напряжения и температуры.

Эквивалентные напряжения и запасы прочности при нестационарном нагружении. Рассмотрим длительную прочность на i -м режиме (рис. 12.11). Точка $A(\sigma_i, t_i)$ характеризует напряжения σ_i и длительность работы t_i на i -м режиме. Запас длительной прочности по напряжениям на i -м режиме

$$n_{\sigma_i} = \sigma_{pi} / \sigma_i .$$

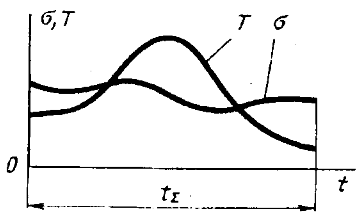


Рис. 12.10. Нестационарное нагружение при неправильном изменении режимов

Запас длительной прочности на i —м режиме по времени нагружения

$$n_{t_i} = t_{pi} / t_i . \tag{48}$$

Уравнение длительной прочности (34) позволяет установить важное соотношение между величинами n_{σ_i} и n_{t_i}. Учитывая, что точки $A_{p\sigma}$ и A_{pt} удовлетворяют уравнению длительной прочности

$$\sigma^{m_i} t = C_i , \tag{49}$$

запишем

$$\sigma_{pi}^{m_i} t_i = \sigma_i^{m_i} t_{pi} \tag{50}$$

или

$$\frac{t_i}{t_{pi}} = \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_{pi}}\right)^{m_i} . \tag{51}$$

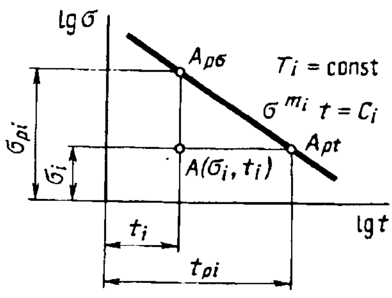


Рис. 12.11. Длительная прочность при работе на i-м режиме

В другой форме имеем

$$n_{t_i} = \left(n_{\sigma_i}\right)^{m_i}. \tag{52}$$

Запас по долговечности равен запасу по напряжениям в степени m_i. Так как показатель длительной прочности m лежит в пределах m = 4,...,16, то запас по долговечности значительно превышает запас по напряжениям. Условие линейного суммирования повреждений с учетом зависимости (51) представим в таком виде:

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{p1}}\right)^{m_1} + \ldots + \left(\frac{\sigma_k}{\sigma_{pk}}\right)^{m_k} = \frac{1}{n_{\sigma_1}^{m_1}} + \ldots + \frac{1}{n_{\sigma_k}^{m_k}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n_{\sigma_i}^{m_i}} = 1. \tag{53}$$

Допустим, что все режимы приводятся к условиям первого режима, но при действии эквивалентного напряжения $\sigma_{экв}$. При наличии только одного (первого) режима условие прочности (53) будет следующим:

$$\left(\frac{\sigma_{экв}}{\sigma_{p1}}\right)^{m_1} = \frac{1}{n_{\sigma_{экв}}^{m_1}} = 1. \tag{54}$$

Запишем равенство (53) так:

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{p1}}\right)^{m_1} \left(1 + \frac{n_{\sigma_1}^{m_1}}{n_{\sigma_2}^{m_2}} + \ldots + \frac{n_{\sigma_1}^{m_1}}{n_{\sigma_k}^{m_k}}\right) = 1. \tag{55}$$

Приравнивая выражения (54) и (55), находим

$$\sigma_{экв} = \sigma_1 \left(1 + \frac{n_{\sigma_1}^{m_1}}{n_{\sigma_2}^{m_2}} + \ldots + \frac{n_{\sigma_1}^{m_1}}{n_{\sigma_k}^{m_k}}\right)^{\frac{1}{m_1}}. \tag{56}$$

Эквивалентное напряжение приведено к первому режиму, в качестве которого обычно принимают наиболее тяжелый (режим с минимальным запасом прочности). Из уравнений (53) и (54) получаем формулу для эквивалентного запаса прочности:

$$\frac{1}{n_{\sigma_{экв}}^{m_1}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n_{\sigma_i}^{m_i}}. \tag{57}$$

Соотношения (56) и (57) показывают, что основное значение для повреждаемости имеют режимы с наименьшими запасами прочности.

Это обстоятельство используется для проведения ускоренных испытаний на надежность.

Линейная механика разрушения. В ряде случаев оказывается необходимым оценить прочность элементов конструкции при наличии трещин.

Трещины могут быть пропущены при контроле технологических дефектов (линейных, ковочных и сварочных трещин) или возникнуть под действием внешних нагрузок. Влияние трещин на работоспособность конструкций зависит прежде всего от вида нагружения. При переменных нагрузках почти все конструкционные материалы резко снижают прочность при наличии трещин (в два-три раза и более), так как в вершине трещины образуется высокая концентрация напряжений. При статических нагрузках существенное влияние трещин проявляется у хрупких материалов (высокопрочных сталей и сплавов с удлинением при разрыве $\delta < 3\%$).

Практика показывет, что возникновение трещины часто не означает окончания безопасного периода работы конструкции. До некоторого критического размера повреждение оказывается безопасным. Если имеется возможность обнаружения и слежения за дефектом, то это дает основание для эксплуатации дорогостоящей конструкции « по техническому состоянию».

Анализ распределения напряжений возле трещин и других линейных дефектов, изучение условий роста трещин и их влияния на прочность составляют теперь специальный раздел механики твердого деформируемого тела — линейную механику разрушения.

Распределение напряжений возле вершины трещины. Рассмотрим узкую трещину длиной $2\,l$ в тонком листе (рис. 12.12). В окрестности вершины трещины напряжения определяются следующими равенствами:

$$\begin{aligned}
\sigma_y &= K_1 \frac{\cos\frac{1}{2}\Theta}{\sqrt{2\pi r}}\left(1 + \sin\frac{1}{2}\Theta\sin\frac{3}{2}\Theta\right),\\
\sigma_x &= K_1 \frac{\cos\frac{1}{2}\Theta}{\sqrt{2\pi r}}\left(1 - \sin\frac{1}{2}\Theta\sin\frac{3}{2}\Theta\right),\\
\tau_{xy} &= K_1 \frac{\cos\frac{1}{2}\Theta}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{1}{2}\Theta\cos\frac{3}{2}\Theta,
\end{aligned} \qquad (58)$$

где $K_1 = \sigma\sqrt{\pi l}$; r, Θ — полярные координаты точки; σ — напряжение растяжения в листе.

Величина

$$K_1 = \sigma\sqrt{\pi l} \tag{59}$$

называется *коэффициентом интенсивности напряжений.*

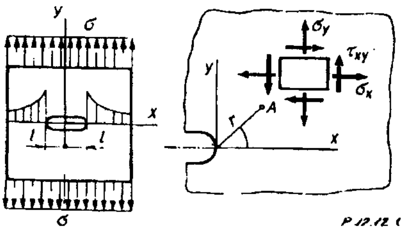


Рис. 12.12. Распределение напряжений возле вершины трещины

Формулы (58) получены из решения Инглиса для эллиптического отверстия в тонкой пластинке. При щели в толстом листе (случай плоской деформации) формулы (58) остаются справедливыми, но возникает дополнительно напряжение

$$\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y), \tag{60}$$

где μ — коэффициент Пуассона.

Из соотношений (58) вытекает, что по мере приближения к вершине трещины напряжения стремятся к бесконечности, как $1/\sqrt{r}$ при $r \to 0$.

Критическая длина трещины. Формула Гриффитса. При образовании трещины длиной $2\,l$ (см. рис. 12.12) освобождается упругая энергия, так как берега трещины и область, к ним примыкающая, освобождаются от действия напряжений. Вертикальное перемещение точек берега трещины из решения Инглиса имеет вид

$$u(x) = \frac{2\sigma}{E}\sqrt{l^2 - x^2}\,. \tag{61}$$

Изменение энергии упругой деформации можно считать равным работе, которую совершает напряжение σ при «закрытии» трещины:

$$W = 2\left(\frac{1}{2}\sigma h\int_{-l}^{l} u\,dx\right) = \frac{\pi l^2\sigma^2 h}{E}, \tag{62}$$

где h — толщина листа.

При росте трещины на величину Δl освобождается упругая энергия

$$\Delta W = \frac{\pi(l + \Delta l)^2\sigma^2 h}{E} - \frac{\pi l^2\sigma^2 h}{E} \approx \frac{2\pi\sigma^2 lh}{E}\Delta l\,;$$

с другой стороны, должна быть затрачена работа на продвижение трещины

$$\Delta A = 2\cdot 2\Delta l h\gamma,$$

где γ — плотность поверхностной энергии разрушения.

Критическая длина трещины l_* находится из условия

$$\Delta W = \Delta A ,$$

что дает

$$\sigma \sqrt{\pi l_*} = \sqrt{2E\gamma} . \qquad (63)$$

Формула (63) была впервые установлена Гриффитсом. Величина

$$\sqrt{2E\gamma} = K_{1C}$$

получила название *вязкости разрушения*; она считается постоянной материала. Условие начала быстрого роста трещины состоит в следующем:

$$K_1 \geq K_{1C} .$$

В момент начала лавинного разрушения коэффициент интенсивности напряжений в вершине трещины равен критическому значению вязкости разрушения. Единицей вязкости разрушения K_{1C} и коэффициента интенсивности напряжений K_1 является МПа$\sqrt{м}$. Для конструкционных сталей, титановых сплавов K_{1C} = (30 — 100) МПа$\sqrt{м}$.

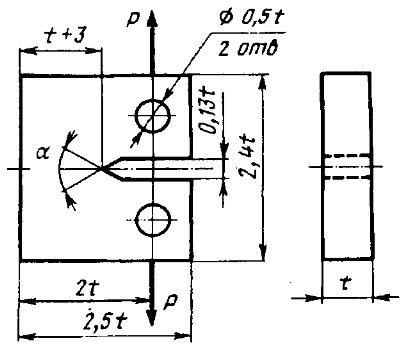


Рис. 12.13. Схема образцов для определения K_{1C} (по ГОСТ 90215—76)

Образцы для определения вязкости разрушения. Для определения K_{1C} используются образцы с надрезом (рис. 12.13). В вершине надреза с помощью специальных испытательных машин (пульсаторов) получают усталостную трещину длиной не менее 1,5 мм.

Далее осуществляется статическое нагружение образца усилиями P и расчет K_{1C} проводится по максимальному значению растягивающего усилия, предшествующего разрушению образца.

42. Модели усталостного и малоциклового разрушения

Ранее были изложены основные сведения об усталостных разрушениях элементов конструкций (разд. 14).

Усталостные разрушения возникают при действии переменных нагрузок при числе циклов $N > 10^5$ и характеризуются резким влиянием концентрации напряжений и качества поверхности.

Усталостные разрушения не имеют следов пластической деформации в очагах зарождения трещин. При числе циклов нагружения $N < 10^5$ наблюдаются разрушения в результате малоцикловой усталости. Закономерности малоциклового разрушения занимают промежуточное положение между статической и усталостной прочностью. В частности, локальный характер усталостной прочности, зависимость от состояния поверхности проявляются при малоцикловой усталости в меньшей степени.

Рассмотрим сначала модели усталостного разрушения.

Модели усталостного разрушения при одноосном напряженном состоянии. Модель усталостного разрушения принимается в виде условия

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{K_\sigma}{\beta\varepsilon}\sigma_a^* + \psi_\sigma\sigma_m^* = \sigma_{-1}, \tag{64}$$

где K_σ — эффективный коэффициент концетрации (нормальных) напряжений; β и ε — коэффициенты влияния поверхности и масштабного эффекта; ψ_σ — коэффициент постоянных (нормальных) напряжений (их значения указаны в разд. 14).

В равенстве (64) σ_a^* и σ_m^* — переменное и постоянное напряжения в момент разрушения; σ_{-1} — предел выносливости стандартного гладкого образца.

Если в рабочих условиях в опасной точке детали действуют переменное и постоянное (номинальные) напряжения σ_a и σ_m и к моменту разрушения происходит их пропорциональное возрастание, то

$$\sigma_a^* = n\,\sigma_a, \quad \sigma_m^* = n\,\sigma_m, \tag{65}$$

где n — запас усталостной прочности по подобному циклу (разрушающий и рабочий циклы подобны).

Из соотношений (64) и (65) находим запас по подобному циклу:

$$n = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{K_\sigma}{\beta\varepsilon}\sigma_a + \psi_\sigma\sigma_m}. \tag{66}$$

Запас по подобному циклу применяется для прочностной модели зубьев шестерен и в других случаях. Чрезвычайно широко распространено нагружение, при котором возрастают только переменные напряжения (резонансные режимы работы конструкций и т.д.). Тогда в момент разрушения

$$\sigma_a^* = n_a \sigma_a , \quad \sigma_m^* = \sigma_m , \tag{67}$$

где n_a — запас усталостной прочности по переменным напряжениям.

Из модели усталостного разрушения (64) находим

$$n = \frac{\sigma_{-1} - \psi_\sigma \sigma_m}{\dfrac{K_\sigma}{\beta\varepsilon}\sigma_a} . \tag{68}$$

Геометрическая иллюстрация модели усталостной прочности при одноосном напряженном состоянии дана на рис. 12.14 для постоянного значения

$$\psi_\sigma = \sigma_{-1} / \sigma_в , \tag{69}$$

где $\sigma_в$ — предел прочности материала.

При $\sigma_m = 0$ получаем предел выносливости детали при симметричном цикле:

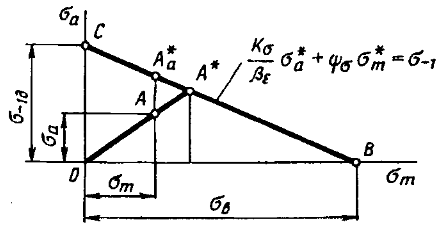


Рис. 12.14. Определение запасов усталостной прочности (геометрическая иллюстрация)

$$\sigma_{-1д} = \sigma_{-1}\beta\varepsilon / K_\sigma , \tag{70}$$

при $\sigma_m = \sigma_в$ (точка B) материал не может сопротивляться переменным напряжениям.

При подобном цикле точка A перемещается вдоль луча OA^*, при возрастании переменной составляющей — по направлению AA_a^*.

Рассматриваемая модель усталостного разрушения справедлива при действии касательных напряжений

$$\frac{K_\tau}{\beta\varepsilon}\tau_a^* + \psi_\tau \tau_m^* = \tau_{-1} , \tag{71}$$

где τ_a^*, τ_m^* — переменное и постоянное касательные напряжения; τ_{-1} — предел выносливости при кручении.

Замечание. Запас прочности по подобному циклу всегда меньше, чем по переменным напряжениям:

$$n < n_a.$$

Однако не следует считать, что можно ограничиться определением величины n как наименьшей. Дело в том, что допускаемые значения для n и n_a различны! Часто принимают

$$[n] = 1{,}5 \div 2, \quad [n_a] = 2{,}5 \div 4.$$

Модели усталостного разрушения при многоосном (многокомпонентном) напряженном состоянии. Рассмотрим многоосное напряженное состояние, при котором составляющие тензора напряжений имеют переменные и постоянные части (рис. 12.15):

$$\sigma_x = \sigma_{xa} + \sigma_{xm}, \ \sigma_y = \sigma_{ya} + \sigma_{ym}, \ \ldots, \ \tau_{zx} = \tau_{zxa} + \tau_{zxm}.$$

Определим интенсивность переменных напряжений

$$\sigma_{ia} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{xa} - \sigma_{ya})^2 + \ldots + 6\tau_{zxa}^2}. \qquad (72)$$

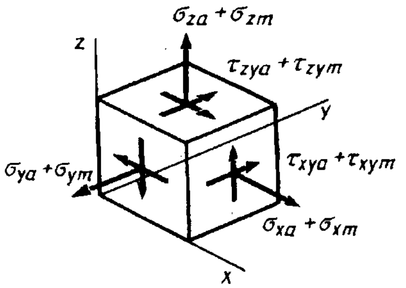


Рис. 12.15. Многокомпонентное нагруженное состояние при действии переменных и постоянных нагружений

Модель усталостного разрушения при сложном напряженном состоянии и при симметричном цикле изменения напряжений можно принять в виде

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_{ia} = \sigma_{-1}. \qquad (73)$$

Например, для случая действия переменных напряжений изгиба $\sigma_{xa} = \sigma_a$ и кручения $\tau_{xya} = \tau_a$ (другие компоненты напряженного состояния отсутствуют) получим из условия (73)

$$\sqrt{\sigma_a^2 + 3\tau_a^2} = \sigma_{-1}. \qquad (74)$$

При действии одних касательных напряжений (переменное кручение) из соотношения (81) находим

$$\tau_{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_{-1} \approx 0{,}57\sigma_{-1},$$

что является хорошим приближением для пластичных конструкционных материалов. Для хрупких материалов (легированных сталей, сплавов повышенной твердости) модель усталостного разрушения при многоосном напряженном состоянии

$$\sigma_{экв} = \sigma_{1a} = \sigma_{-1}, \qquad (75)$$

где σ_{1a} — наибольшее переменное напряжение.

Модель усталостного разрушения при многокомпонентном напряженном состоянии и асимметричном цикле действующих напряжений является обобщением условия (73) и может быть представлена в виде

$$\sigma_{экв} = \sigma_{ia} + \psi_{\sigma}\sigma_{1m} = \sigma_{-1}, \qquad (76)$$

где σ_{1m} — наибольшее постоянное нормальное напряжение. При наличии концентрации напряжений при сложном напряженном состоянии величина σ_{ia} относится к истинным максимальным переменным напряжениям:

$$\sigma_{ia} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(K_x\sigma_{xa} - K_y\sigma_{ya})^2 + \ldots + 6K_{zx}^2\tau_{zx}^2} = K_i\sigma_{ia}, \qquad (77)$$

где K_x, K_y, ..., K_{zx} — коэффициенты концентрации напряжений σ_x, σ_y, ..., τ_{zx}; K_i — коэффициент концентрации интенсивности напряжений.

Модели малоциклового разрушения при одноосном и сложном напряженных состояниях. В разд. 14 была приведена модель малоциклового разрушения при одноосном напряженном состоянии (условие разрушения Мэнсона):

$$\varepsilon_a = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{1-\psi}\right)^{0,6} N^{-0,6} + 1{,}75\frac{\sigma_в}{E}N^{-0,12}, \qquad (78)$$

где ε_a — амплитуда изменения деформаций; ψ — коэффициент поперечного сужения при разрыве; $\sigma_в$ — предел прочности материала; E — модуль упругости; N — число циклов до разрушения.

Величина ε_a включает в себя пластическую и упругую части циклической деформации. При сложном напряженном состоянии величина ε_a в уравнении (78) заменяется эквивалентной деформацией:

$$\varepsilon_a = \varepsilon_{экв} = \varepsilon_{ia}, \qquad (79)$$

где ε_{ia} — интенсивность амплитудных значений деформаций:

$$\varepsilon_{ia} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_{xa} - \varepsilon_{ya})^2 + \ldots + \frac{3}{2}\gamma_{zxa}^2}. \qquad (80)$$

Величины ε_{xa}, ε_{ya}, ..., γ_{zxa} являются амплитудными значениями циклически изменяющихся компонент деформаций.

При асимметричном цикле изменений деформаций, когда имеются переменные и постоянные составляющие цикла, эквивалентная деформация

$$\varepsilon_{\text{экв}} = \varepsilon_{ia} + \psi_{\varepsilon}\varepsilon_{1m}, \tag{81}$$

где ε_{1m} — наибольшая постоянная линейная деформация.

Модели малоциклового разрушения при нестационарном нагружении. При работе элемента конструкции на разных режимах с циклическими деформациями ε_{a1}, ε_{a2}, ..., ε_{ak} условие разрушения может быть принято в виде

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{N_j}{N_{\text{р}j}} = 1, \tag{82}$$

где N_j — число циклов нагружения на j-м режиме, накопленное к моменту разрушения при нестационарном режиме нагружения; $N_{\text{р}j}$ — число циклов до разрушения при работе только на одном j-м режиме. Условие (82) выражает принцип линейного суммирования повреждений при малоцикловой усталости.

Глава 13
ЦИЛИНДРЫ И ДИСКИ

Многие ответственные элементы машин и сооружений могут рассматриваться как полые цилиндры, работающие при действии внутреннего или внешнего давления (толстостенные трубы, цилиндрические сосуды высокого давления, валы и втулки при наличии прессовых посадок и т.д.). Часто применяются высоконагруженные, быстровращающиеся диски (турбины, осевые компрессоры), шлифовальные круги и т.д.

43. Толстостенные трубы и цилиндры. Напряжения и деформации

Рассмотрим круговой цилиндр при осесимметричном, постоянном по длине нагружении. На рис. 13.1 представлен участок толстостенной трубы под внутренним давлением. Внешний радиус цилиндра обозначим буквой b, внутренний — буквой a. Предположим, что по длине цилиндра (по оси z) нагрузка N и температурное поле не изменяются. Длина цилиндра l существенно больше его радиуса, и при указанных условиях поперечные сечения цилиндра остаются плоскими. Искажения, которые могут возникнуть только возле торцов, занимают, по принципу Сен-Венана, небольшие области, и ими пренебрегаем.

Выделим элемент цилиндра двумя поперечными сечениями, отстоящими друг от друга на расстояние dz , двумя цилиндрическими поверхностями радиусами r и $r+dr$ и, наконец, двумя меридиональными плоскостями, составляющими угол $d\Theta$ (рис. 13.2,*а*). По граням этого элемента будут действовать радиальное σ_r, окружное σ_Θ и осевое σ_z напряжения (рис. 13.2,*б*).

В силу осевой симметрии и постоянства нагружения по оси указанные напряжения будут главными: по граням элемента (рис. 13.2,*б*) касательные напряжения отсутствуют. Точка A цилиндра (рис. 13.3) получает радиальное смещение $u(r)$.

Для определения деформации в радиальном направлении в соответствии с общей теорией деформации (разд. 9) рассматриваем две точки A и B, отстоящие одна от другой на расстояние dr. Так как пе-

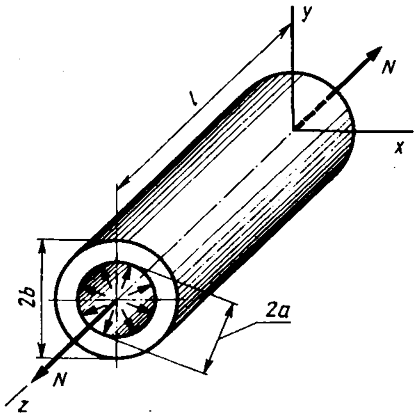


Рис. 13.1. Круговой цилиндр при осесимметричном, постоянном по длине нагружении

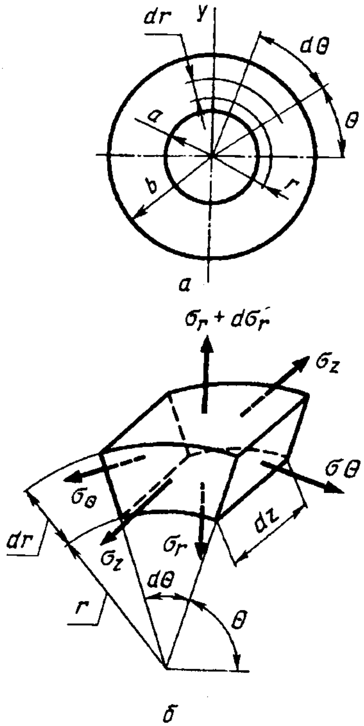


Рис. 13.2. Напряжения по граням элемента цилиндра

ремещение u зависит от радиуса, то радиальное перемещение в точке B будет равно $u + \frac{du}{dr}dr$. Деформация в радиальном направлении равна

$$\varepsilon_r = \frac{A^*B^* - AB}{AB} =$$

$$= \frac{u + \frac{du}{dr}dr + dr - u - dr}{dr} = \frac{du}{dr}. \quad (1)$$

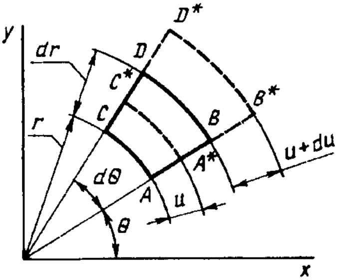


Рис. 13.3. Перемещения и деформации в цилиндре при осесимметричном нагружении

Для определения деформации в окружном направлении надо проследить за изменением длины отрезка AC. Тогда

$$\varepsilon_\Theta = \frac{A^*C^* - AC}{AC} = \frac{(r+u)\,d\Theta - r\,d\Theta}{r\,d\Theta} = \frac{u}{r}. \qquad (2)$$

Формулы (1) и (2) выражают деформации в полярной системе координат (r, Θ) при осесимметричном нагружении.

Выражение для осевой деформации ε_z имеет такой же вид, как и в декартовой системе координат (разд. 9):

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z},$$

где w — перемещение в направлении оси z.

При плоской деформации величина ε_z постоянна:

$$\varepsilon_z = \text{const} = e. \qquad (3)$$

Уравнения равновесия элемента цилиндра. На рис. 13.4,*а* представлены элемент цилиндра и действующие на него усилия. По граням элемента приложены напряжения σ_r, σ_Θ и σ_z, зависящие от радиуса r; по Θ и z напряжения постоянны. К элементу цилиндра может быть приложена распределенная массовая сила, которая при вращении цилиндра равна

$$F_r = \omega^2 r, \qquad (4)$$

где ω — угловая скорость.

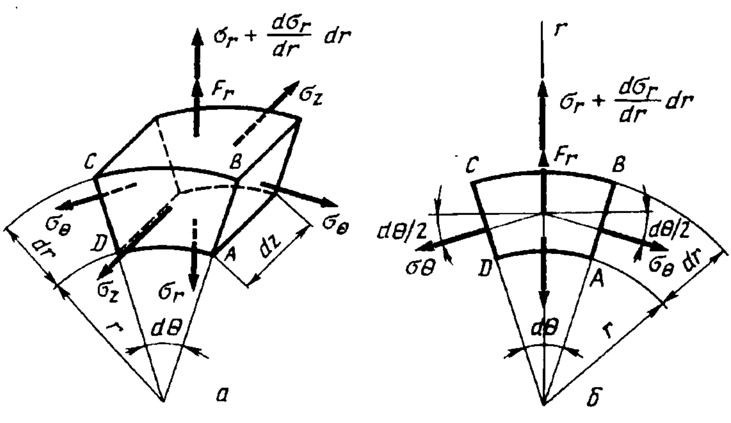


Рис. 13.4. Условия равновесия элемента цилиндра

Окружное напряжение σ_Θ одинаково на двух противоположных гранях, составляющих угол $d\Theta$, так как оно не зависит от угла Θ. Постоянным на гранях элемента оказывается и напряжение σ_z, так как напряжения не изменяются по координате z. Разными будут радиальные напряжения из-за увеличения радиуса соответствующих граней (r и $r + dr$).

Рассмотрим равновесие сил в радиальном направлении. На рис. 13.4,*б* показана проекция элемента на плоскость, перпендикулярную оси цилиндра (оси z). Проектируя все силы на ось r, проходящую через центр тяжести элемента, получаем

$$-\sigma_r r\, d\Theta\, dz + \left(\sigma_r + \frac{d\sigma_r}{dr} dr\right)(r + dr)\, d\Theta\, dz -$$

$$-2\sigma_\Theta \sin(d\Theta/2)\, dr\, dz + \rho F_r r\, d\Theta\, dr\, dz = 0, \tag{5}$$

где ρ — плотность материала.

В уравнении (5) учитывается, что усилия на боковых гранях дают составляющие на направление r (рис. 13.4,*б*).

Полагая, что

$$\sin\left(\frac{1}{2} d\Theta\right) = \frac{1}{2} d\Theta,$$

и пренебрегая величинами высшего порядка, получаем

$$\sigma_r\, dr\, d\Theta\, dz + r\frac{d\sigma_r}{dr} dr\, d\Theta\, dz - \sigma_\Theta\, dr\, d\Theta\, dz + \rho\omega^2 r^2\, dr\, d\Theta\, dz = 0.$$

Так как $dr\, d\Theta\, dz \neq 0$, то

$$r\frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_\Theta + \rho\omega^2 r^2 = 0. \tag{6}$$

Уравнение (6) представляет условие равновесия для элемента цилиндра. Два других условия (проекции на направление, перпендикулярное r, и на ось z) выполняются по условиям задачи.

Уравнения упругости. Рассматривая изотропное упругое тело, имеем следующее соотношение упругости (разд. 16):

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}\left[\sigma_r - \mu(\sigma_\Theta + \sigma_z)\right] + \alpha T, \tag{7}$$

$$\varepsilon_\Theta = \frac{1}{E}\left[\sigma_\Theta - \mu(\sigma_z + \sigma_r)\right] + \alpha T, \tag{8}$$

$$\varepsilon_z = e = \frac{1}{E}\Big[\,\sigma_z - \mu\,(\,\sigma_r + \sigma_\Theta\,)\,\Big] + \alpha T. \tag{9}$$

В дальнейшем потребуется выразить напряжение через деформации.

В рассматриваемой задаче, учитывая условие (3), удобно исключить величину σ_z из соотношений (7) и (8) с помощью равенства (9):

$$\sigma_z = Ee + \mu\,(\,\sigma_r + \sigma_\Theta\,) - E\alpha T. \tag{10}$$

Подставив последнее соотношение в уравнения (7) и (8), представим их так:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E_0}(\,\sigma_r - \mu_0\sigma_\Theta\,) + \alpha_0 T - \mu e\,, \tag{11}$$

$$\varepsilon_\Theta = \frac{1}{E_0}(\,\sigma_\Theta - \mu_0\sigma_r\,) + \alpha_0 T - \mu e\,, \tag{12}$$

где параметры упругости для плоской деформации имеют вид

$$E_0 = \frac{E}{1-\mu^2}, \quad \mu_0 = \frac{\mu}{1-\mu} \tag{13}$$

и коэффициент линейного расширения равен

$$\alpha_0 = \alpha\,(\,1 + \mu\,). \tag{14}$$

Из уравнений (11) и (12) легко находим

$$\sigma_r = \frac{E_0}{1-\mu_0^2}(\,\varepsilon_r + \mu_0\varepsilon_\Theta\,) - \frac{E_0\alpha_0 T}{1-\mu_0} + \frac{E_0\mu}{1-\mu_0}e\,, \tag{15}$$

$$\sigma_\Theta = \frac{E_0}{1-\mu^2}(\,\varepsilon_\Theta + \mu_0\varepsilon_r\,) - \frac{E_0\alpha_0 T}{1-\mu_0} + \frac{E_0\mu}{1-\mu_0}e\,. \tag{16}$$

В тех случаях, когда напряжение σ_z в цилиндре отсутствует, соотношения (7) и (8) приводят к более простым зависимостям:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2}(\,\varepsilon_r + \mu\varepsilon_\Theta\,) - \frac{E\alpha T}{1-\mu}, \tag{17}$$

$$\sigma_\Theta = \frac{E}{1-\mu^2}(\,\varepsilon_\Theta + \mu\varepsilon_r\,) - \frac{E\alpha T}{1-\mu}, \tag{18}$$

которые также будут использованы в дальнейшем.

Основное дифференциальное уравнение. Это уравнение составляем относительно радиального перемещения $u(r)$. Если воспользоваться уравнением равновесия (6)

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\Theta) = -\rho\omega^2 r \qquad (19)$$

и внести значения σ_r и σ_Θ из соотношений (15) и (16), то, учитывая формулы (1) и (2), получаем

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{E_0}{1-\mu_0^2}\left(\frac{du}{dr} + \mu_0\frac{u}{r}\right)\right] + \frac{1}{r}\,\frac{E_0}{1+\mu_0}\left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r}\right) =$$

$$= -\rho\omega^2 r + \frac{d}{dr}\left(\frac{E_0\alpha_0 T}{1-\mu_0}\right) - \frac{d}{dr}\left(\frac{E_0\,\mu}{1-\mu_0}\right)e\,. \qquad (20)$$

Уравнение (20) представляет неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка относительно функции $u(r)$.

Если параметры упругости E и μ постоянны вдоль радиуса, то из уравнения (20) находим

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = f(r)\,, \qquad (21)$$

где функция

$$f(r) = -\frac{1-\mu_0^2}{E_0}\rho\omega^2 r + (1+\mu_0)\frac{d}{dr}(\alpha_0 T) =$$

$$= -\frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E(1-\mu)}\rho\omega^2 r + \frac{1+\mu}{1-\mu}\frac{d}{dr}(\alpha T)\,. \qquad (22)$$

С помощью небольших преобразований уравнение (21) можно представить в более удобном для последующего интегрирования виде:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d(ur)}{dr}\right) = f(r)\,. \qquad (23)$$

Толстостенная труба под действием внутреннего и внешнего давлений. Рассмотрим равномерно нагретый цилиндр с постоянными параметрами упругости вдоль радиуса, нагруженный давлением (рис. 13.5); вращение отсутствует ($\omega = 0$), и торцы цилиндра свободны от напряжений. Для указанного случая $f(r) = 0$, и дифференциальное уравнение (21) будет таким:

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}-\frac{u}{r^2}=\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d(ur)}{dr}\right)=0. \qquad (24)$$

Решение уравнения (24) можно искать в следующем виде:

$$u=Cr^k. \qquad (25)$$

После подстановки в уравнение (24)

$$C[k(k-1)+k-1]r^{k-2}=0$$

приходим к характеристическому уравнению $k^2-1=0$, корни которого равны $k_1=1$, $k_2=-1$.

Решение уравнения (24) будет таким:

$$u=C_1r+C_2/r, \qquad (26)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Этот же результат можно получить другим способом. Из уравнения (24) имеем

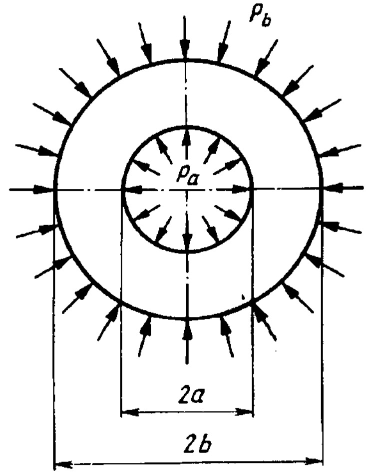


Рис. 13.5. Цилиндр под действием внутреннего и внешнего давлений

$$\frac{1}{r}\frac{d(ur)}{dr}=\text{const}=2C_1. \qquad (27)$$

Перенося r в правую часть равенства и интегрируя, получаем

$$ur=C_1r^2+C_2, \qquad (28)$$

что совпадает с решением (26).

Так как на торцах цилиндра внешние усилия отсутствуют, то можно положить $\sigma_z=0$ и воспользоваться соотношениями (17) и (18), пренебрегая температурными членами. Тогда

$$\sigma_r=\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{du}{dr}+\mu\frac{u}{r}\right), \qquad (29)$$

$$\sigma_\Theta=\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{u}{r}+\mu\frac{du}{dr}\right). \qquad (30)$$

Подставляя u из уравнения (26), находим

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2}\left[(1+\mu)C_1 - \frac{1-\mu}{r^2}C_2\right], \tag{31}$$

$$\sigma_\Theta = \frac{E}{1-\mu^2}\left[(1+\mu)C_1 + \frac{1-\mu}{r^2}C_2\right]. \tag{32}$$

Постоянные C_1 и C_2 следует определять из краевых условий (для радиальных напряжений)

$$\sigma_r(a) = -p_a \qquad \text{при } r = a,$$

$$\sigma_r(b) = -p_b \qquad \text{при } r = b.$$

Имеем

$$(1+\mu)C_1 - \frac{1-\mu}{a^2}C_2 = -\frac{1-\mu^2}{E}p_a, \tag{33}$$

$$(1+\mu)C_1 - \frac{1-\mu}{b^2}C_2 = -\frac{1-\mu^2}{E}p_b. \tag{34}$$

Из последних соотношений находим

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \frac{1-\mu}{E}\,\frac{a^2p_a - b^2p_b}{b^2-a^2}, \\ C_2 &= \frac{1+\mu}{E}\,\frac{a^2b^2(p_a-p_b)}{b^2-a^2}. \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Внося значения C_1 и C_2 в равенства (31) и (32), получаем формулы Ламе:

$$\sigma_r = \frac{a^2p_a - b^2p_b}{b^2-a^2} - \frac{1}{r^2}\,\frac{a^2b^2(p_a-p_b)}{b^2-a^2}, \tag{36}$$

$$\sigma_\Theta = \frac{a^2p_a - b^2p_b}{b^2-a^2} + \frac{1}{r^2}\,\frac{a^2b^2(p_a-p_b)}{b^2-a^2}. \tag{37}$$

Для радиального перемещения из соотношений (26) и (35) устанавливаем следующую зависимость:

$$u(r) = \frac{1-\mu}{E}\frac{a^2p_a - b^2p_b}{b^2 - a^2}r + \frac{1+\mu}{E}\frac{a^2b^2(p_a - p_b)}{b^2 - a^2}\frac{1}{r}. \tag{38}$$

Замечания. 1. Обоснованность предположения, что $\sigma_z = 0$, сделанного при построении решения, доказывается следующим образом. Из уравнений (31) и (32) (или (36) и (37)) вытекает, что на всех радиусах

$$\sigma_r + \sigma_\Theta = \text{const}.$$

Так как в рассматриваемых задачах $e = \text{const}$, то из соотношения (10) при $\alpha T = 0$ получаем, что напряжение σ_z также должно быть постоянным. Внешнее усилие вдоль оси цилиндра отсутствует, и потому напряжение σ_z должно обращаться в нуль (иначе условия равновесия не удовлетворяются).

2. Для сплошного цилиндра в общем решении (26) следует положить $C_2 = 0$, так как при $C_2 \neq 0$ перемещение $u \to \infty$ при $r \to 0$. Из условия на внешнем контуре (34) получим

$$C_1 = -\frac{1-\mu}{E}p_b,$$

и тогда из соотношений (29) и (30)

$$\sigma_r = \sigma_\Theta = -p_b. \tag{39}$$

Интересный результат!

3. Напряжение в цилиндре не зависит от природы упругого материала, формулы (36) и (37) не содержат модуля упругости и коэффициента Пуассона.

4. Формулы для напряжений в цилиндре были впервые получены Ламе (1795 — 1870) — французским ученым, долгое время работавшим в России.

Действие осевого усилия. Если на цилиндр (рис. 13.6) действует осевое усилие N, то при постоянных параметрах упругости решение задачи будет таким:

$$\sigma_r = 0, \quad \sigma_\Theta = 0, \quad \sigma_z = \frac{N}{\pi(b^2 - a^2)}, \tag{40}$$

$$\varepsilon_r = \varepsilon_\Theta = -\frac{\mu\sigma_z}{E}, \quad \varepsilon_z = e = \frac{\sigma_z}{E}. \tag{41}$$

Очевидно, что уравнения равновесия и совместности деформаций удовлетворяются. Эти уравнения дифференциальные, а напряжения и деформации по равенствам (40) и (41) — постоянные величины. На торцах цилиндра краевое условие выполняется в интегральном смысле:

$$\int_F \sigma_z\, dF = N. \tag{42}$$

Точное решение требует приложения на торцах цилиндра постоянных напряжений.

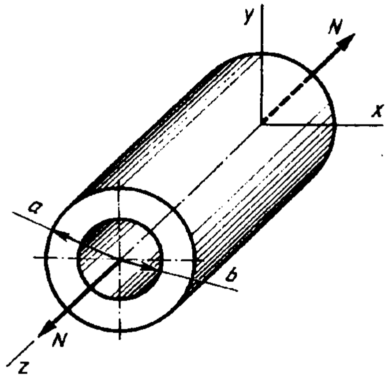
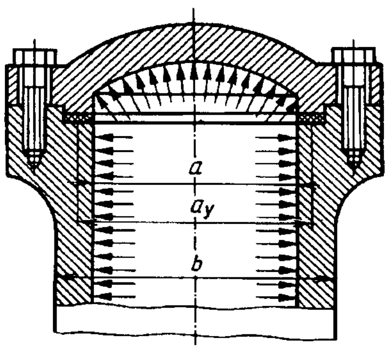
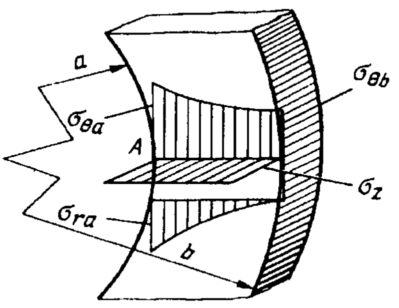


Рис. 13.6. Цилиндр под действием осевого усилия



а



б

Рис. 13.7. Прочностная модель цилиндрической части сосуда высокого давления

При действии давлений по цилиндрическим поверхностям и осевого усилия в пределах упругих деформаций напряжения и деформации суммируются.

Модель прочностной надежности цилиндрической части сосуда высокого давления. Рассмотрим напряженное состояние в цилиндрической части сосуда высокого давления (рис. 13.7,*а*) при действии внутреннего давления p. Внешнее давление считаем отсутствующим. Осевое усилие равно

$$N = \pi a_{\mathrm{y}}^2 p .$$

Напряжение в пределах упругости материала определяем по формулам (36), (37) и (40):

$$\sigma_r = \frac{a^2}{b^2 - a^2} p - \frac{1}{r^2} \frac{a^2 b^2 p}{b^2 - a^2}, \tag{43}$$

$$\sigma_\Theta = \frac{a^2}{b^2 - a^2} p + \frac{1}{r^2} \frac{a^2 b^2 p}{b^2 - a^2}, \tag{44}$$

$$\sigma_z = \frac{a^2 p}{b^2 - a^2}. \tag{45}$$

Распределение напряжений по толщине показано на рис. 13,7,*б*. Наиболее напряженными являются точки внутренней поверхности (точки A), в которых (при $a_{\mathrm{y}} \approx a$)

$$\sigma_r = -p \, , \; \sigma_\Theta = \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} p \, ,$$

$$\sigma_z = \frac{a^2 p}{b^2 - a^2}. \tag{46}$$

Модель статической прочности примем в виде условия прочности Мора

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \chi\sigma_3 = \sigma_{\text{в}}, \tag{47}$$

где $\chi = \sigma_{\text{в}} / \sigma_{\text{сж}}$; $\sigma_{\text{в}}$ — предел прочности материала.

В рассматриваемом случае $\sigma_1 = \sigma_\Theta$, $\sigma_3 = \sigma_r$. Модель статической прочности имеет вид

$$\left(\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} + \chi \right) p = \sigma_{\text{в}}. \tag{48}$$

В запас прочности можно считать $\chi = 1$.

Модель малоцикловой прочности используется при повторении циклов нагружений.

На основании условия Мэнсона имеем

$$\varepsilon_a = \frac{1}{2}\left(\ln \frac{1}{1-\psi} \right)^{0,6} N^{-0,6} + 1,75 \frac{(\sigma_{\text{в}} - \sigma_m)}{E} N^{-0,12},$$

где ε_a — амплитуда переменных деформаций; ψ — поперечное сужение материала; σ_m — среднее напряжение; N — число циклов до разрушения.

Цикл нагружения соответствует возрастанию давления от 0 до p. При сложном деформированном состоянии под ε_a понимается амплитуда эквивалентной деформации

$$\varepsilon_{\text{экв}\,a} = \frac{1}{2} \varepsilon_i, \tag{49}$$

где ε_i — интенсивность деформаций в опасной точке при действии давления p; множитель 1/2 связан с тем, что нагружение от 0 до p можно представить в виде постоянного нагружения давлением $p/2$ и переменного нагружения давлением с амплитудой $p/2$.

Интенсивность напряжений

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_r - \sigma_\Theta)^2 + (\sigma_\Theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2}.$$

С учетом соотношений (46)

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{1+n^2}{1-n^2} + 1 \right)^2 + \left(\frac{1+n^2}{1-n^2} - \frac{n^2}{1-n^2} \right)^2 + \left(\frac{n^2}{1-n^2} + 1 \right)^2}\, p,$$

где для краткости обозначено $n = a/b$.

В окончательном виде имеем

$$\sigma_i = \sqrt{3}\,\frac{b^2}{b^2 - a^2}\,p. \qquad (50)$$

Интенсивность деформаций в упругой области

$$\varepsilon_i = \frac{2(1+\mu)}{3E}\,\sigma_i = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{(1+\mu)\,b^2}{b^2 - a^2}\,\frac{p}{E}. \qquad (51)$$

Модель малоцикловой прочности с учетом соотношений (49) — (51) принимает следующий вид:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{1+\mu}{E}\,\frac{b^2}{b^2 - a^2}\,p = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{1-\psi}\right)^{0,6} N^{-0,6} + 1{,}75\,\frac{(\sigma_в - \sigma_m)}{E}\,N^{-0,12},$$

где

$$\sigma_m = \frac{1}{2}\,\sigma_\Theta = \frac{1}{2}\,\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2}\,p. \qquad (52)$$

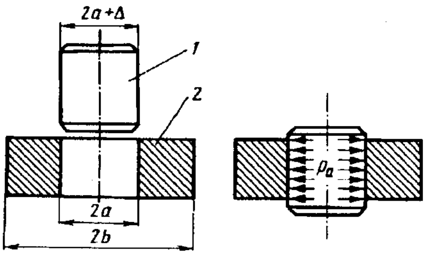


Рис. 13.8. Прочностная модель прессового соединения

Условие (52) связывает размеры цилиндра, циклически действующее давление и характеристики материала с числом циклов до разрушения. Допускаемое число циклов нагружения в рабочих условиях

$$[N] = N / n_N,$$

где n_N — запас по числу циклов.

Учитывая рассеяние результатов из-за отклонений по свойствам материала, технологическим и другим факторам, принимают

$$n_N = 3 \div 5.$$

Модель прочностной надежности прессового соединения. Прессовое соединение (рис. 13.8) получается за счет сборки с натягом двух сопрягаемых деталей (например, кольца шарикоподшипника и вала). За счет сил упругости на поверхности сопряжения создается давление p_a.

При построении модели прочностной надежности требуется найти условия, при которых в соединении не возникнут пластические деформации. Давление p_a вызовет радиальное перемещение охватывающей детали, которое может быть определено по формуле (38). Полагая $p_a = p$ и $p_b = 0$, получаем

$$u_2(a) = \left((1-\mu_2)\frac{a^2}{b^2-a^2} + (1+\mu_2)\frac{b^2}{b^2-a^2} \right)\frac{aP}{E_2} = \left(\frac{b^2+a^2}{b^2-a^2} + \mu_2 \right)\frac{aP}{E_2}. \quad (53)$$

Радиальное перемещение внутреннего сплошного цилиндра ($p_b = p$) равно

$$u_1(a) = \frac{1}{E_1}(\sigma_\Theta - \mu_1\sigma_r)\,a = -\frac{(1-\mu_1)}{E_1}aP, \quad (54)$$

так как $\sigma_\Theta = \sigma_r = -p$ (формула (39)).

Разность радиальных перемещений должна быть равна радиальному натягу (по условиям неразрывности деформаций натяг «компенсируется» перемещениями):

$$u_2(a) - u_1(a) = \frac{1}{2}\Delta. \quad (55)$$

Учитывая равенства (53) и (54), находим

$$p = \frac{1}{2}\frac{\Delta}{a}\frac{1}{\left(\dfrac{1}{E_2}\dfrac{b^2+a^2}{b^2-a^2} + \mu_2\right) + \dfrac{1-\mu_1}{E_1}}. \quad (56)$$

Если наружный диаметр втулки очень велик (отверстие в листе), то при

$$p = \frac{1}{2}\frac{\Delta}{a}\frac{1}{\dfrac{1+\mu_2}{E_2} + \dfrac{1-\mu_1}{E_1}} \quad (57)$$

наибольшее напряжение по втулке будет на поверхности с радиусом a:

$$\sigma_{2r}(a) = -p, \quad \sigma_{2\Theta}(a) = \frac{b^2+a^2}{b^2-a^2}p.$$

Интенсивность напряжений

$$\sigma_{i2} = \sqrt{\sigma_{2r}^2 - \sigma_{2r}\sigma_{2\Theta} + \sigma_{2\Theta}^2} = p\sqrt{1 + \frac{b^2+a^2}{b^2-a^2} + \left(\frac{b^2+a^2}{b^2-a^2}\right)^2} =$$

$$= p\frac{\sqrt{3b^4+a^4}}{b^2-a^2}.$$

Напряжения в цилиндре (валике)

$$\sigma_{1r} = \sigma_{1\Theta} = -p\,,\ \sigma_{i1} = p\,.$$

Модель прочностной надежности прессового соединения имеет вид

$$\frac{\sqrt{3b^4+a^4}}{b^2-a^2}\,\frac{1}{\dfrac{1}{E_2}\left(\dfrac{b^2+a^2}{b^2-a^2}+\mu_2\right)+\dfrac{1-\mu_1}{E_1}}\,\frac{\Delta}{2a}\le\frac{\sigma_{2\text{т}}}{n_\text{т}}, \qquad (58)$$

$$\frac{1}{\dfrac{1}{E_2}\,\dfrac{b^2+a^2}{b^2-a^2}+\mu_2+\dfrac{1-\mu_1}{E_1.}}\,\frac{\Delta}{2a}\le\frac{\sigma_{1\text{т}}}{n_\text{т}}, \qquad (59)$$

где $\sigma_{1\text{т}}$, $\sigma_{2\text{т}}$ — пределы текучести материала втулки и валика; $n_\text{т}$ — запас по пределу текучести (обычно $n_\text{т} \ge 1{,}3$).

Условие (58) обеспечивает отсутствие пластических деформаций во втулке, условие (59) — в валике. Предполагается, что величина Δ соответствует «эффективному» натягу, учитывающему «сминание» гребешков на поверхности (обычно $\Delta = 0{,}6 \div 0{,}9\,\Delta_0$, где Δ_0 — номинальный натяг).

Температурные напряжения и напряжения от центробежных сил. Рассматривается цилиндр с постоянными параметрами упругости. При неравномерном нагреве и вращении дифференциальное уравнение для радиального смещения будет неоднородным (уравнение (23)).

Интегрируя уравнение (23) от a до r, получаем

$$\frac{1}{r}\frac{d\,(ur)}{dr} = \int_0^r f(r_1)\,dr_1 + 2C_1\,, \qquad (60)$$

где $2C_1$ — произвольная постоянная (множитель 2 взят для удобства дальнейших записей). Перенося r в правую часть равенства и повторяя операцию интегрирования, находим

$$u = \frac{1}{r}\int_0^r r_1\int_0^{r_1} f(r_2)\,dr_2\,dr_1 + C_1 r + \frac{C_2}{r}. \qquad (61)$$

Формула (61) выражает общее решение уравнения (23) при произвольной правой части. Далее составляются выражения для σ_r и σ_Θ и находятся постоянные C_1 и C_2 из краевых условий для радиального напряжения:

$$\sigma_z(a) = 0\,, \quad \sigma_r(b) = 0\,. \tag{62}$$

Решения для случая, когда на цилиндрических поверхностях действуют давления, были получены ранее. Решение для общего случая читатель может построить в порядке упражнения.

44. Модели прочностной надежности дисков

Наиболее ответственными элементами ротора авиационного газотурбинного двигателя являются диски. Окружная скорость составляет 400 м/с и более. Разрушение дисков влечет за собой катастрофические последствия. Обеспечение надежности дисков составляет одну из основных проблем проектирования, производства и эксплуатации газотурбинных двигателей, паровых и газовых турбин, ультрацентрифуг и т.д. Наибольшее практическое применение получило представление диска как тонкой круглой пластинки переменной толщины (рис. 13.9). При инженерной оценке надежности диска используются два основных предположения.

I. Напряженное состояние в диске двухосное. В диске действуют радиальные и окружные напряжения; напряжение σ_z считается отсутствующим.

2. Напряжения постоянны по толщине диска $h(r)$.

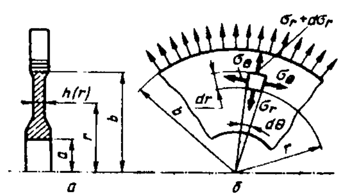


Рис. 13.9. Конструктивная схема диска (*а*), радиальные σ_r и окружные σ_Θ напряжения (*б*)

Оба эти предположения оправдываются для тонких дисков, обладающих плоскостью симметрии. Предполагается, что центробежные силы и температурное поле симметричны относительно оси вращения; рассматривается растяжение диска в его срединной плоскости.

Замечание. В реальных дисках действуют поперечные нагрузки вследствие разности давления среды, неравномерный нагрев по толщине и другие факторы, вызывающие деформацию изгиба. Они рассматриваются в следующей главе. В большинстве случаев наибольшие напряжения в диске связаны с его растяжением центробежными усилиями и неравномерным нагревом по радиусу.

Напряжения, условия равновесия. В диске возникают (рис. 13.9) радиальные $\sigma_r(r)$ и окружные $\sigma_\Theta(r)$ напряжения и соответствующие усилия

$$N_r = \sigma_r h(r)\,, \tag{63}$$

$$N_\Theta = \sigma_\Theta h(r)\,. \tag{64}$$

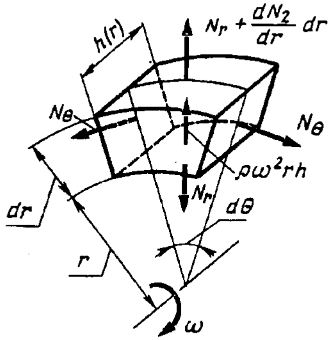


Рис. 13.10. Равновесие элемента диска

Рассмотрим равновесие элемента диска, образованного двумя цилиндрическими сечениями радиусами r и $r + dr$ и двумя меридиональными сечениями, образующими угол $d\Theta$ (рис. 13.10). Касательные напряжения на гранях элемента отсутствуют. Если на грани элемента, лежащей на цилиндрической поверхности радиусом r, действует (на единицу длины) радиальное усилие N_r, то на противоположной грани его значение будет равно $N_r + dN_r$. Усилие N_Θ одинаково по двум меридиональным граням элемента диска. Составим проекцию внешних сил, приложенных к элементу диска, на радиальное направление:

$$-N_r\, r\, d\Theta + \left(N_r + \frac{dN_r}{dr}dr\right)(r + dr)\, d\Theta - 2N_\Theta \sin\frac{d\Theta}{2}dr + \rho\omega^2 rhr\, d\Theta\, dr = 0\,.$$

Члены первого порядка малости взаимно уничтожаются. Пренебрегая членами высшего порядка малости, находим

$$N_r\, dr\, d\Theta + \frac{dN_r}{dr}dr\, r\, d\Theta - N_\Theta\, d\Theta\, dr + \rho\omega^2 r^2 h\, d\Theta\, dr = 0$$

или

$$\frac{dN_r}{dr} + \frac{1}{r}(N_r - N_\Theta) + \rho\omega^2 rh = 0\,. \tag{65}$$

Уравнение (65) представляет собой уравнение равновесия элемента диска.

Деформации и соотношения упругости. Вследствие осевой симметрии точки диска получают радиальные смещения $u(r)$, одинаковые по толщине диска. Радиальная и окружная деформации равны

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \tag{66}$$

$$\varepsilon_\Theta = \frac{u}{r}. \tag{67}$$

Соотношения упругости представим так:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \mu\sigma_\Theta) + \alpha T + \varepsilon_r^0, \tag{68}$$

$$\varepsilon_\Theta = \frac{1}{E}(\sigma_\Theta - \mu\sigma_r) + \alpha T + \varepsilon_\Theta^0, \tag{69}$$

где E, μ — модуль упругости и коэффициент Пуассона; αT — температурная деформация; ε_r^0, ε_Θ^0 — дополнительная деформация, которая может рассматриваться как остаточная деформация, деформация ползучести или деформация другой природы, не связанной с упругостью материала.

Из уравнений (68) и (69) получаем

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_r + \mu\varepsilon_\Theta) - \frac{E\alpha T}{1-\mu} - \sigma_r^0, \tag{70}$$

$$\sigma_\Theta = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_\Theta + \mu\varepsilon_r) - \frac{E\alpha T}{1-\mu} - \sigma_\Theta^0, \tag{71}$$

где «дополнительные напряжения»

$$\sigma_r^0 = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_r^0 + \mu\varepsilon_\Theta^0), \tag{72}$$

$$\sigma_\Theta^0 = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_\Theta^0 + \mu\varepsilon_r^0) \tag{73}$$

представляют условные напряжения, которые соответствуют дополнительным деформациям в упругом теле.

Краевые условия. Краевые условия в большинстве случаев задаются для радиальных напряжений. На внешнем контуре диска

$$\sigma_r(b) = \sigma_{rb}, \tag{74}$$

где σ_{rb} — напряжения от центробежных сил лопаток и замковых частей диска. На внутреннем контуре диска чаще всего

$$\sigma_{ra} = 0\,. \tag{75}$$

В случаях, когда применяется прессовая посадка диска на вал,

$$\sigma_r(a) = -p\,, \tag{76}$$

где p — давление на поверхности $r = a$ в рабочих условиях.

Дифференциальное уравнение для диска постоянной толщины с постоянными параметрами упругости. Для диска постоянной толщины $h = \mathrm{const}$ уравнение равновесия (65) будет таким:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\Theta) + \rho\omega^2 r = 0\,. \tag{77}$$

Из соотношений упругости (70) и (71) при отсутствии дополнительных напряжений находим

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{du}{dr} + \mu\frac{u}{r}\right) - \frac{E\alpha T}{1-\mu}, \tag{78}$$

$$\sigma_\Theta = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{u}{r} + \mu\frac{du}{dr}\right) - \frac{E\alpha T}{1-\mu}\,. \tag{79}$$

Внося зависимости (78) и (79) в уравнение (77), получаем

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = f(r)\,, \tag{80}$$

где

$$f(r) = -\frac{1-\mu}{E}\rho\omega^2 r + (1+\mu)\frac{d}{dr}(\alpha T)\,. \tag{81}$$

Уравнение (80) совпадает с уравнением для цилиндра (соотношение (21)), если значения E_0, μ_0, α_0 заменить на E, μ, α.

Замечание. Полученный результат не является случайным, так как задачи об осесимметричном напряженном состоянии цилиндра (плоская деформация) и диска (плоское напряженное состояние) являются вариантами одной и той же задачи.

Напряжения в диске постоянной толщины. Как было показано ранее, общий интеграл уравнения (80) можно записать так:

$$u(r) = C_1 r + C_2\frac{1}{r} + \frac{1}{r}\int_a^r r_1 \int_a^{r_1} f(r_2)\,dr_2\,dr_1\,. \tag{82}$$

Учитывая равенство (81), находим

$$\int\limits_a^{r_1} f(r_2)\,dr_2 = -\frac{1-\mu^2}{E}\rho\omega^2\frac{1}{2}(r_1^2 - a^2) + (1+\mu)(\alpha T(r_1) - \alpha_a T_a),$$

$$\frac{1}{r}\int\limits_a^{r} r_1 \int\limits_a^{r_1} f(r_2)\,dr_2 = -\frac{1-\mu^2}{E}\rho\omega^2\left(\frac{r^3}{4} + \frac{a^4}{4r} - \frac{a^2 r}{2}\right) +$$

$$+ (1+\mu)\frac{1}{r}\int\limits_a^{r} r_1\alpha T(r_1)\,dr_1 - (1+\mu)\alpha_a T_a\left(\frac{1}{2}r - \frac{a^2}{2r}\right). \qquad (83)$$

Подставляя (83) в равенство (82) и включая постоянные величины, относящиеся к $r = a$, в произвольные постоянные, получаем

$$u(r) = C_1^* r + C_2^*\frac{1}{r} - \frac{1-\mu}{8E}\rho\omega^2 r^3 + (1+\mu)\frac{1}{r}\int\limits_a^{r} r_1\alpha T(r_1)\,dr_1, \qquad (84)$$

где C_1^*, C_2^* — новые значения произвольных постоянных, что для дальнейшего несущественно.

Дифференцируя равенство (84), находим

$$\frac{du}{dr}(r) = C_1^* - C_2^*\frac{1}{r^2} - \frac{3(1-\mu^2)}{8E}\rho\omega^2 r^2 - \frac{(1+\mu)}{r^2}\int\limits_a^{r} r_1\alpha T(r_1)\,dr_1 +$$

$$+ (1+\mu)\alpha T. \qquad (85)$$

Внося значения u и du/dr в соотношения упругости, имеем

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2}\left[(1+\mu)C_1^* - \frac{1-\mu}{r^2}C_2^*\right] - \rho\omega^2 r^2\frac{(3+\mu)}{8} - EF(r), \qquad (86)$$

$$\sigma_\Theta = \frac{E}{1-\mu^2}\left[(1+\mu)C_1^* + \frac{1-\mu}{r^2}C_2^*\right] - \rho\omega^2 r^2\frac{(1+3\mu)}{8} - E(F(r) - \alpha T), \qquad (87)$$

где

$$F(r) = \frac{1}{r^2}\int\limits_a^{r} r_1\alpha T(r_1)\,dr_1. \qquad (88)$$

Из краевых условий для радиальных напряжений

$$\sigma_r(a) = \sigma_{ra}, \quad \sigma_r(b) = \sigma_{rb}$$

находим значения произвольных постоянных:

$$C_1^* = \frac{1-\mu}{E}\frac{1}{b^2-a^2}\left(\sigma_{rb}b^2 - \sigma_{ra}a^2\right) +$$

$$+\frac{\rho\omega^2}{8E}(3+\mu)(1-\mu)(b^2+a^2) + (1-\mu)\frac{a^2b^2}{b^2-a^2}F(b), \tag{89}$$

$$C_2^* = \frac{1+\mu}{E}\frac{a^2b^2}{b^2-a^2}(\sigma_{rb}-\sigma_{ra}) + \frac{\rho\omega^2}{8E}(3+\mu)(1+\mu)a^2b^2 +$$

$$+(1+\mu)\frac{a^2b^2}{b^2-a^2}F(b). \tag{90}$$

Если теперь подставить значения C_1^* и C_2^* в равенства (86) и (87), получим следующие важные формулы:

$$\sigma_r = \sigma_{rb}\frac{b^2}{b^2-a^2}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right) - \sigma_{ra}\frac{a^2}{b^2-a^2}\left(1-\frac{b^2}{r^2}\right) + \sigma_{r\omega} + \sigma_{rT}, \tag{91}$$

$$\sigma_\Theta = \sigma_{rb}\frac{b^2}{b^2-a^2}\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right) - \sigma_{ra}\frac{a^2}{b^2-a^2}\left(1+\frac{b^2}{r^2}\right) + \sigma_{\Theta\omega} + \sigma_{\Theta T}, \tag{92}$$

где напряжения от центробежных сил

$$\sigma_{r\omega} = \frac{3+\mu}{8}\rho\omega^2\left(b^2+a^2-\frac{a^2b^2}{r^2}-r^2\right), \tag{93}$$

$$\sigma_{\Theta\omega} = \frac{3+\mu}{8}\rho\omega^2\left(b^2+a^2+\frac{a^2b^2}{r^2}-\frac{1+3\mu}{3+\mu}r^2\right). \tag{94}$$

Температурные напряжения

$$\sigma_{rT} = E\left[F(b)\frac{b^2}{b^2-a^2}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right) - F(r)\right], \tag{95}$$

$$\sigma_{\Theta T} = E\left[F(b)\frac{b^2}{b^2-a^2}\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right) + F(r) - \alpha T \right], \tag{96}$$

где $F(r)$ определяется соотношением (88).

Первые группы членов в равенствах (91) и (92) дают напряжения от контурных нагрузок. Сопоставление с формулами (36) и (37) показывает, что напряжения от контурных нагрузок в диске постоянной толщины и цилиндре одинаковы.

Перемещения в диске находятся из соотношения

$$u = \frac{r}{E}(\sigma_\Theta - \mu\sigma_r) + r\alpha T, \tag{97}$$

где значения σ_Θ и σ_r определяются из формул (91) и (92).

Рассмотрим теперь диск без центрального отверстия (сплошной диск). В центре диска $r = 0$ содержится особая точка, в которой в силу осевой симметрии

$$\sigma_{r_0} = \sigma_{\Theta_0}. \tag{98}$$

Дифференциальное уравнение (84) остается справедливым, но в его решении (82) следует считать $C_2 = 0$, так как иначе в центре диска перемещение не обращается в нуль. Решение уравнения (80) следует принять таким:

$$u(r) = C_1 r + \frac{1}{r}\int_0^r r_1 \int_0^{r_1} f(r_2)\,dr_2\,dr_1. \tag{99}$$

Несмотря на наличие множителя $1/r$, второй член равен нулю при $r = 0$. Учитывая значение $f(r)$, получаем

$$u(r) = C_1^* r - \frac{1-\mu^2}{8E}\rho\omega^2 r^3 + (1+\mu)\frac{1}{r}\int_0^r r_1 \alpha T(r_1)\,dr_1.$$

Продолжая выкладки, находим напряжения в сплошном диске:

$$\sigma_r = \sigma_{rb} + \frac{3+\mu}{8}\rho\omega^2(b^2 - r^2) + E(F(b) - F(r)), \tag{100}$$

$$\sigma_\Theta = \sigma_{rb} + \frac{3+\mu}{8}\rho\omega^2\left(b^2 - \frac{1+3\mu}{3+8}r^2\right) + E(F(b) + F(r) - \alpha T), \tag{101}$$

где

$$F(r) = \frac{1}{r^2}\int_0^r r_1 \alpha T(r_1)\, dr_1 . \qquad (102)$$

В центре сплошного диска

$$\sigma_r(0) = \sigma_\Theta(0) = \sigma_{rb} + \frac{3+\mu}{8}\rho\omega^2 b^2 + E\left(F(b) - \frac{1}{2}\alpha T(0)\right), \qquad (103)$$

так как

$$F(0) = \lim_{r\to 0}\frac{1}{r^2}\int_0^r r_1\alpha T(r_1)\, dr_1 = \alpha T(0)\lim_{r\to 0}\frac{1}{r^2}\int_0^r r_1\, dr_1 = \frac{1}{2}\alpha T(0).$$

Распределение напряжений в диске постоянной толщины. Распределение напряжений при действии контурной нагрузки и центробежных сил представлено на рис. 13.11 и 13.12; значения напряжений на внешнем и внутреннем контурах вытекают из формул (91), (92), (100), (101).

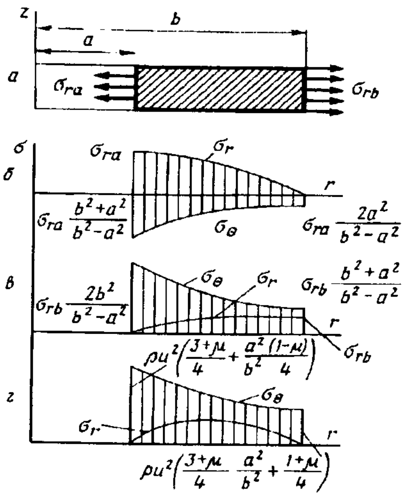


Рис. 13.11. Распределение напряжений в диске с отверстием:
а — эскиз; *б* — напряжения от контурной нагрузки на радиусе a; *в* — напряжения от контурной нагрузки на радиусе b; *г* — напряжения от центробежных сил

Из рис. 13.11 видно, что возле отверстия окружные напряжения существенно повышаются. При малом центральном отверстии величина окружного напряжения становится приблизительно в два раза больше, чем в сплошном диске. В циклически нагруженных дисках отверстия нежелательны, так как концентрация напряжений возле отверстий снижает циклическую долговечность.

Определим температурные напряжения в сплошном диске, считая температуру возрастающей по степенному закону ($n > 0$):

$$T(r) = T(0) + \Delta T(r/b)^n , \qquad (104)$$

где $\Delta T = T(b) - T(0)$ — перепад температуры между ободом и центром диска; коэффициент линейного расширения α предполагаем постоянным.

Из соотношения (102) находим

$$F(r) = \frac{1}{2}\alpha T(0) + \frac{\alpha\Delta T}{n+2}\frac{r^n}{b^n}.$$

Формулы (100) и (101) дают следующие значения температурных напряжений:

$$\sigma_{rT} = \frac{E\alpha\Delta T}{n+2}\left(1 - \frac{r^n}{b^n}\right), \quad \sigma_{\Theta T} = \frac{E\alpha\Delta T}{n+2}\left(1 - (n+1)\frac{r^n}{b^n}\right).$$

Как следовало ожидать, постоянная температура не вызывает в диске температурных напряжений. При возрастании температуры по радиусу в ободе возникает сжимающее напряжение

$$\sigma_{\Theta T}(0) = -E\alpha\Delta T\frac{n}{n+2}.$$

Распределение температурных напряжений в сплошном диске показано на рис. 13.13.

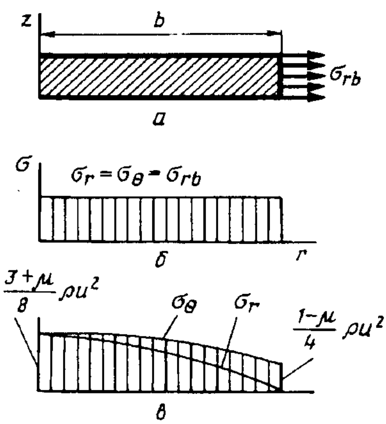


Рис. 13.12. Распределение напряжений в сплошном диске:
а — эскиз; *б* — напряжения от контурной нагрузки; *в* — напряжения от центробежных сил

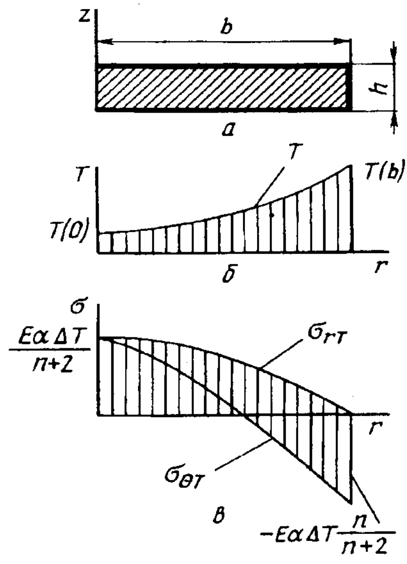


Рис. 13.13. Распределение температурных напряжений в сплошном диске:
а — эскиз; *б* — распределение температур; *в* — температурные напряжения

Напряжения в диске переменной толщины с переменными параметрами упругости. В общем случае расчет дисков на растяжение проводится приближенными методами. Важность проблемы прочности дисков обусловила большое число исследований, и в настоящее время известно свыше сорока различных методов расчета. Основные методы можно подразделить на следующие группы:

1) методы разбиения на участки с последующим их сопряжением;
2) методы конечных разностей;
3) методы интегральных уравнений;
4) методы численного интегрирования.

Указанные методы типичны и для других сложных задач инженерного дела. В первой группе диск разбивается на участки более простых профилей, для которых могут быть использованы точные решения (например, на участки дисков постоянной толщины и т.п.). Во второй группе дифференциальные уравнения заменяются конечно-разностными. Методы интегральных уравнений основывались на их численном решении с помощью последовательных приближений. Наконец, численные методы используют прямое интегрирование системы дифференциальных или интегральных уравнений первого порядка. Эти методы, получившие широкое применение в связи с расчетами на ЭВМ, излагаются ниже. Рассматривается диск с переменными параметрами упругости и дополнительными деформациями, что дает возможность учета деформаций пластичности и ползучести. Составим систему дифференциальных уравнений первого порядка относительно радиального усилия $N_r(r)$ и радиального перемещения $u(r)$. Эти переменные не претерпевают разрывов даже при скачкообразном изменении параметров диска (толщины, модуля упругости, температуры и т.п.).

Одно из уравнений непосредственно следует из соотношения упругости (70), которое представим в виде

$$N_r = \frac{Eh}{1-\mu^2}\left(\frac{du}{dr} + \mu\frac{u}{r}\right) - \frac{Eh\alpha T}{1-\mu} - N_r^0, \tag{105}$$

где $N_r = \sigma_r h$, $N_r^0 = \sigma_r^0 h$ — радиальные усилия.

Из равенства (105) вытекает

$$\frac{du}{dr} = \frac{1-\mu^2}{Eh}N_r - \mu\frac{u}{r} + (1+\mu)\alpha T + \frac{1-\mu^2}{Eh}N_r^0. \tag{106}$$

Далее используем уравнение равновесия (65):

$$\frac{dN_r}{dr} = -\frac{1}{r}(N_r - N_\Theta) - \rho\omega^2 rh. \tag{107}$$

Из соотношений упругости (70) и (71) имеем

$$N_r - N_\Theta = \frac{E}{1-\mu^2}(1-\mu)\left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r}\right) - N_r^0 + N_\Theta^0,$$

и потому

$$\frac{dN_r}{dr} = -\frac{1}{r}\left[\frac{E}{1-\mu^2}(1-\mu)\left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r}\right) - N_r^0 + N_\Theta^0\right] - \rho\omega^2 rh.$$

Подставляя в это уравнение значение du/dr из уравнения (106), получаем

$$\frac{dN_r}{dr} = -\frac{1-\mu}{r}N_r + \frac{Eh}{r^2}u - \frac{Eh}{r}\alpha T - \rho\omega^2 rh + \frac{\mu}{r}N_r^0 - \frac{1}{r}N_\Theta^0. \qquad (108)$$

Зависимости (106) и (108) образуют систему дифференциальных уравнений

$$\{Y\}' = [A]\{Y\} + \{f_\omega\} + \{f_T\} + \{f_0\}, \qquad (109)$$

где

$$\{Y\} = \begin{Bmatrix} N_r \\ u \end{Bmatrix}, \quad \{f_\omega\} = \begin{Bmatrix} -\rho\omega^2 rh \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \{f_T\} = \begin{Bmatrix} -\dfrac{Eh}{r}\alpha T \\ (1+\mu)\alpha T \end{Bmatrix}. \qquad (110)$$

Вектор дополнительной нагрузки

$$\{f_0\} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\mu}{r}N_r^0 - \dfrac{1}{r}N_\Theta^0 \\ \dfrac{1-\mu^2}{Eh}N_r^0 \end{Bmatrix}. \qquad (111)$$

Элементы матрицы равны

$$A_{11} = -\frac{1-\mu}{r}, \quad A_{12} = \frac{Eh}{r^2}, \quad A_{21} = \frac{1-\mu^2}{Eh}, \quad A_{22} = -\frac{\mu}{r}.$$

Уравнение (109) решают по методу начальных параметров, представляя решение в виде

$$\{Y\} = N_{ra}\{Y_1\} + u_a\{Y_2\} + \{Y^*\}, \qquad (112)$$

где $\{Y_1\}$ — решение однородного уравнения

$$\{Y_1\}' = [A]\{Y_1\}$$

при начальном значении

$$\{Y_1(a)\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Вектор $\{Y_2\}$ соответствует решению однородного уравнения при начальных условиях

$$\{Y_2(a)\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

Вектор $\{Y^*\}$ представляет решение неоднородного уравнения (109) при начальном значении

$$\{Y^*(a)\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Неизвестные значения начальных параметров определяются из краевых условий. Для дисков с отверстием величина N_{ra} обычно известна, и тогда векторы $\{Y_1\}$ и $\{Y^*\}$ объединяются: решение принимается в форме

$$\{Y\} = \{Y_1^*\} + u_a \{Y_2\}, \tag{113}$$

где $\{Y_1^*\}$ является решением уравнения (109) при начальном условии

$$\{Y_1^*(a)\} = \begin{Bmatrix} N_{ra} \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Для сплошных дисков для устранения числовых погрешностей краевое условие удобно ставить на некотором малом радиусе a (обычно $a = (0{,}05 \div 0{,}1)в$).

Тогда, полагая для сплошного диска

$$N_r(a) = N_\Theta(a), \tag{114}$$

получим из соотношений упругости

$$\frac{u_a}{a} = \frac{1 - \mu_a}{E_a} N_{ra} + \alpha_a T_a + \varepsilon^0_{\Theta a}, \tag{115}$$

где нижний индекс a указывает, что значение параметра относится к радиусу a.

Зависимости между N_{ra} и u_a возникают при упругом закреплении дисков.

Модели общей статической и длительной прочности диска. Модель общей статической и длительной прочности содержит условие

$$K_в = \frac{n_{разр}}{n_{max}} \geq [K_в], \tag{116}$$

где $n_{разр}$ — частота вращения, при которой произойдет разрушение диска с учетом температуры и длительности работы; n_{max} — максимальная частота вращения диска в рабочих условиях; $K_в$ — запас прочности по разрушающей частоте вращения (разрушающим оборотам); $[K_в]$ — допустимое значение запаса.

Разрушение может произойти по диаметральному (меридиональному) или по цилиндрическому сечению, и соответственно различают запасы.

При определении запаса по диаметральному сечению исходят из предположения, что в момент разрушения окружное напряжение

$$\sigma_\Theta(r) = \sigma_{дл}(r), \tag{117}$$

где $\sigma_{дл}(r)$ — предел длительной прочности, соответствующий температуре на радиусе r и заданной длительности работы.

Рассмотрим равновесие диска непосредственно в момент разрушения. Радиальное напряжение на внешнем радиусе диска будет равно

$$\sigma^*_{rb} = \sigma_{rb}\frac{\omega^2_{разр}}{\omega^2_{max}}, \tag{118}$$

где σ_{rb} — радиальное напряжение на ободе диска при максимальной угловой скорости (или частоте вращения).

Определим равнодействующую центробежных сил, приложенных к массе диска. На элемент диска действует центробежная сила

$$dC = \rho\omega^2_{разр} r h r\, d\Theta\, dr = \rho\omega^2_{разр} r^2\, dF\, d\Theta,$$

где $dF = h\, dr$ — элемент площади диаметрального сечения.

Равнодействующая центробежных сил, приложенных к половине диска:

$$C = \int_0^\pi \int_a^b dC \sin\Theta = \rho\omega^2_{разр} \int_a^b r^2\, dF \cdot \int_0^\pi \sin\Theta\, d\Theta$$

или

$$C = 2\rho\omega_{разр}^2 \int_F r^2\,dF = 2\rho\omega^2 J, \qquad (119)$$

где $J = \int_a^b r^2 h\,dr$ — момент инерции половины диаметрального сечения диска относительно оси вращения.

Проектируя все силы на вертикальное направление, получаем

$$2\sigma_{rb}\frac{\omega_{разр}^2}{\omega_{max}^2} b h_b + 2\rho\omega_{разр}^2 J = 2\int_a^b \sigma_{дл} h\,dr. \qquad (120)$$

Напряжениями на внутреннем контуре $r = a$ пренебрегают (свободное отверстие). Если даже в рабочих условиях по внутреннему контуру была запрессовка, то к моменту разрушения давление запрессовки исчезает.

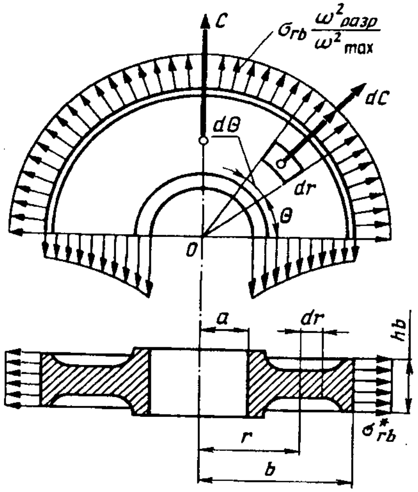


Рис. 13.14. Определение запаса по диаметральному сечению

Из равенства (120) находим запас по разрушающей частоте вращения по диаметральному сечению (рис.13.14):

$$K_{в1} = \frac{\omega_{разр}}{\omega_{max}} = \frac{\int_a^b \sigma_{дл} h\,dr}{\sigma_{rb} b h_b + \rho\omega^2 J}. \qquad (121)$$

При кратковременном разрушении или при работе в условиях нормальной температуры длительная прочность $\sigma_{дл}$ заменяется пределом прочности $\sigma_в$. Из формулы (121) следует, что для увеличения прочности диска надо увеличивать толщину ближе к центру диска (в области ступицы), так как при этом момент инерции возрастает медленнее, чем площадь сечения. В достаточно надежных дисках

$$K_{в1} = 1{,}5;\ \ldots;\ 1{,}6.$$

Перейдем к определению запаса по цилиндрическому сечению. В этом случае разрушение происходит по цилиндрической поверхности радиусом $r_ц$ и по участкам диаметрального сечения (рис.13.15). Считаем для общности, что на радиусе $r_ц$ имеется z отверстий диаметром d.

Рассматривая равновесие сил в вертикальном направлении, находим

$$2\sigma_{rb}\frac{\omega^2_{разр}}{\omega^2_{max}}bh_b + 2\rho\omega^2_{разр}J_ц = 2\int\limits_{r_ц}^{b}\sigma_{дл}h\,dr + \sigma_{дл}(r_ц)\,r_ц h_ц\left(1-\frac{zd}{2\pi r_ц}\right), \quad (122)$$

где $J_ц = \int\limits_{r_ц}^{b} r^2 h\,dr$.

Из условия (122) получаем

$$K_{в2} = \frac{\omega_{разр}}{\omega_{max}} = \sqrt{\frac{\int\limits_{r_ц}^{b}\sigma_{дл}h\,dr + \sigma_{дл}(r_ц)\,r_ц h_ц\left(1-\frac{zd}{2\pi r_ц}\right)}{\sigma_{rb}bh_b + \rho\omega^2 J_ц}}. \quad (123)$$

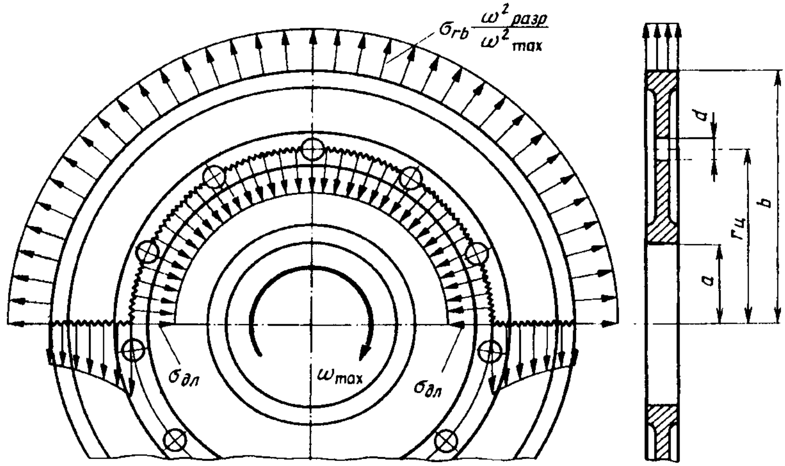


Рис. 13.15. Определение запаса по цилиндрическому сечению

Расчет проводят для различных радиусов $r_ц$ и для оценки прочности учитывается минимальное значение $K_{в2}$. Обычно это значение соответствует подободной части диска. В удовлетворительно работающих дисках $[K_{в2}] = 1{,}4;\ \ldots;\ 1{,}5$.

Замечания. 1. Допускаемое значение $[K_{в1}] > [K_{в2}]$ так как диаметральное разрушение диска более опасно по своим последствиям.

2. Запас $K_{в2}$ определяют для $r_ц > a$, иначе отверстие предполагается «несущим», что неправильно. При $r = a$ следует считать $K_{в2} = K_{в1}$.

3. В общей модели статической прочности температурные напряжения не учитываются. Предполагается, что к моменту разрушения идут процессы пластичности и ползучести, приводящие к релаксации температурных напряжений. Влияние температуры сказывается на значениях $\sigma_{дл}(r)$.

Эквивалентный запас по разрушающей частоте вращения. Если диск работает на различных режимах с температурами T_i с длительностью t_i, то определяется эквивалентный запас по разрушающей частоте вращения по принципу линейного суммирования повреждений (гл.12):

$$\frac{1}{\left(K^2_{в\,экв}\right)^{m_{экв}}} = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\left(K^2_{в(i)}\right)^{m_i}}, \tag{124}$$

где $m_{экв} = m_1$, если, как обычно, режим 1 относится к режиму наименьшего запаса прочности. В равенстве (124) $K_{в(i)}$ входят во второй степени, так как запас по частоте вращения соответствует квадрату запаса по напряжениям.

Модели локальной статической и длительной прочности диска. Эти модели служат дополнительными критериями прочностной надежности диска, оценивая местные запасы прочности

$$K_m = \frac{\sigma_{дл}(T,t)}{\sigma_{экв\,max}}, \tag{125}$$

где $\sigma_{дл}(T,t)$ — предел длительной прочности при температуре T и длительности нагружения t; $\sigma_{экв\,max}$ — наибольшее эквивалентное напряжение.

В практических расчетах часто принимают

$$\sigma_{экв\,max} = \sigma_{max},$$

где σ_{max} — наибольшее напряжение (радиальное или окружное) на данном радиусе.

Значение K_m определяется для сечения, в котором K_m минимально. При работе диска на различных режимах определяется эквивалентный запас прочности. Обычно принимают

$$[K_m] > 1{,}6.$$

Модели малоцикловой прочности диска. Модель малоцикловой прочности диска содержит условие

$$K_N = N_{разр}/N \geq [K_N], \tag{126}$$

где $N_{разр}$ — число циклов нагружения до разрушения диска; N — число циклов нагружения в процессе эксплуатации, K_N — запас по циклической долговечности.

Для удовлетворительно работающих дисков расчетный запас долговечности равен $[K_N] = 5$. При экспериментальном определении запаса долговечности в составе изделия $[K_N] = 3$. Минимальные значения K_N получаются в местах концентрации напряжений.

Глава 14

ПЛАСТИНКИ И ОБОЛОЧКИ

В современной технике многие элементы конструкций могут рассматриваться как тела, у которых один размер (толщина) мал по сравнению с двумя другими.

Если срединная поверхность таких тел плоская, то они называются *пластинками*, если искривленная — *оболочками*.

45. Пластинки

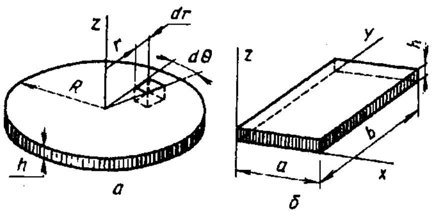


Рис. 14.1. Круглые (*а*) и прямоугольные (*б*) пластинки

По форме срединной поверхности в плане различают круглые и прямоугольные пластинки (рис. 14.1). Значительно реже используются расчетные модели в виде эллиптических, треугольных и других пластинок.

В зависимости от относительной толщины пластинки (h/R, h/a) различают тонкие ($h/R < 0{,}1$) и толстые ($h/R > 0{,}4$) пластинки (плиты). Расчетные модели для указанных пластинок различны.

В дальнейшем ограничимся изучением прочностных моделей тонких пластинок.

Основные гипотезы при построении прочностных моделей пластинок. В инженерной практике применяются две основные гипотезы при построении прочностных моделей тонких пластинок.

Обе они используют то обстоятельство, что толщина пластинки мала по сравнению с ее размерами в плане.

Первая гипотеза, принадлежащая Кирхгофу, утверждает, что нормаль к срединной поверхности (плоскости) оболочки остается нормалью к ней после деформации. Эта гипотеза, вполне аналогичная гипотезе плоских сечений при изгибе и растяжении стержней, называется *гипотезой жесткой нормали*.

Вторая гипотеза утверждает, что напряженное состояние в точках пластинки является двуосным; нормальными и касательными напряжениями в площадках, перпендикулярных оси z, можно пренебречь.

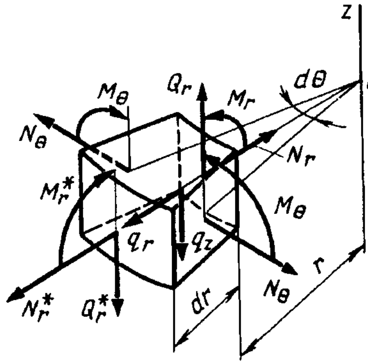


Рис. 14.2. Усилия и моменты, приложенные к элементу пластинки

Уравнения равновесия для осесимметричного изгиба и растяжения круглых пластинок. Осесимметричная деформация круглых пластинок возникает, когда нагружение и условия закрепления являются осесимметричными. В общем случае к элементу пластинки (рис. 14.2) приложены распределенные (на единицу площади срединной поверхности) нагрузки q_r и q_z. По граням элемента действуют (на единицу длины) изгибающие моменты M_r и M_Θ, усилия N_r, N_Θ и перерезывающее усилие Q_r. В силу симметрии $Q_\Theta = 0$.

Измененное значение силового фактора в связи с приращением координаты r отмечено верхним индексом (звездочкой).

Составим проекцию всех сил на радиальное направление (см. разд.44):

$$-N_r r\,d\Theta + \left(N_r + \frac{dN_r}{dr}dr\right)(r + dr)\,d\Theta - N_\Theta\,d\Theta\,dr + q_r r\,d\Theta\,dr = 0$$

или

$$\frac{dN_r}{dr} + \frac{1}{r}(N_r - N_\Theta) + q_r - 0\,. \tag{1}$$

При действии центробежных сил получим

$$q(r) = \rho\omega^2 rh\,. \tag{2}$$

Уравнение (1) было выведено ранее (в разделе о растяжении дисков). Равновесие сил в вертикальном направлении приводит к следующему равенству:

$$Q_r r\,d\Theta - \left(Q_r + \frac{dQ_r}{dr}dr\right)(r + dr)\,d\Theta - q_z r\,d\Theta\,dr = 0$$

или

$$\frac{d}{dr}(Q_r r) = -q_z r. \qquad (3)$$

Теперь составим уравнение моментов относительно касательной к окружности радиусом r :

$$-M_r r\,d\Theta + \left(M_r + \frac{dM_r}{dr}dr\right)(r + dr)\,d\Theta - M_\Theta\,dr\,d\Theta -$$
$$-\left(Q_r + \frac{dQ_r}{dr}dr\right)(r + dr)\,d\Theta\,dr - q_z r\,d\Theta\,dr\frac{1}{2}dr = 0. \qquad (4)$$

Моменты M_Θ вошли в уравнение, так как имеют составляющие $2M_\Theta \sin(d\Theta/2)$ относительно рассматриваемой оси. В уравнении (4) должны быть сохранены члены второго порядка малости, так как члены первого порядка взаимно уничтожаются, члены третьего порядка, и среди них момент от поперечной распределенной нагрузки, должны быть отброшены.

В результате получим

$$\frac{dM_r}{dr} + \frac{1}{r}(M_r - M_\Theta) - Q_r = 0. \qquad (5)$$

Деформации круглых пластинок. Точка A_0, лежащая в срединной плоскости пластинки, при осесимметричной деформации получает смещение u_0 вдоль радиального направления (рис. 14.3) и смещение (прогиб) w вдоль оси z. Положительное направление прогиба w примем противоположным направлению оси z. Перемещение в радиальном направлении точки A, отстоящей на расстояние z от точки A_0, будет равно

$$u = u_0 + z\varphi(r), \qquad (6)$$

где $\varphi(r)$ — угол поворота нормали (отрезка A_0A) в результате деформации.

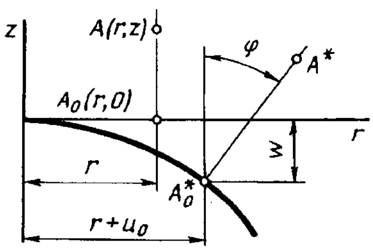


Рис. 14.3. Деформации при осесимметричном нагружении круглых пластинок

Соотношение (6) является выражением гипотезы жесткой нормали.

При осесимметричной деформации имеем

$$\varepsilon_r = du/dr, \qquad (7)$$

$$\varepsilon_\Theta = u/r\,. \tag{8}$$

Внося в последние равенства соотношение (6), находим

$$\varepsilon_r = \varepsilon_{r_0} + z\frac{d\varphi}{dr}, \tag{9}$$

$$\varepsilon_\Theta = \varepsilon_{\Theta_0} + z\frac{\varphi}{r}, \tag{10}$$

где $\varepsilon_{r_0} = du_0/dr$, $\varepsilon_{\Theta_0} = u_0/r$ — деформации срединной поверхности. Из равенств (9) и (10) вытекает, что деформации в пластинке распределяются по толщине стенки линейно.

Соотношения упругости для круглых пластинок. При двуосном напряженном состоянии (вторая гипотеза)

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \mu\sigma_\Theta) + \alpha T, \tag{11}$$

$$\varepsilon_\Theta = \frac{1}{E}(\sigma_\Theta - \mu\sigma_r) + \alpha T \tag{12}$$

или, в другой форме,

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_r + \mu\varepsilon_\Theta) - \frac{E}{1-\mu}\alpha T, \tag{13}$$

$$\sigma_\Theta = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_\Theta + \mu\varepsilon_r) - \frac{E}{1-\mu}\alpha T. \tag{14}$$

Температура в точках пластинки

$$T = T(r, z) \tag{15}$$

изменяется по радиусу и толщине.

Учитывая соотношения (9) и (10), запишем уравнения (13) и (14) в такой форме (при отсутствии нагрева):

$$\sigma_r = \sigma_{r_0} + \sigma_{r_\text{и}}, \tag{16}$$

$$\sigma_\Theta = \sigma_{\Theta_0} + \sigma_{\Theta r_\text{и}}, \tag{17}$$

где напряжения в плоскости пластинки (напряжения растяжения) равны

$$\sigma_{r_0} = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_{r_0} + \mu\varepsilon_{\Theta_0}), \qquad (18)$$

$$\sigma_{\Theta_0} = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_{\Theta_0} + \mu\varepsilon_{r_0}), \qquad (19)$$

а напряжения изгиба —

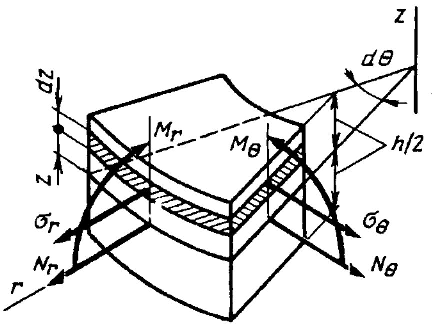


Рис. 14.4. Связь напряжений и силовых факторов

$$\sigma_{r_и} = z\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{d\varphi}{dr} + \mu\frac{\varphi}{r}\right), \qquad (20)$$

$$\sigma_{\Theta_и} = z\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\varphi}{r} + \mu\frac{d\varphi}{dr}\right). \qquad (21)$$

Отметим, что напряжения изгиба линейно изменяются по толщине стенки. Для точек срединной плоскости они обращаются в нуль. Усилия и моменты (на единицу длины), действующие на пластинке, связаны с напряжениями следующими простыми соотношениями (рис. 14.4):

$$N_r = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r\, dz \cdot 1, \quad N_\Theta = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\Theta\, dz \cdot 1,$$

$$M_r = -\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r z\, dz \cdot 1, \quad M_\Theta = -\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\Theta z\, dz \cdot 1. \qquad (22)$$

Подставляя в последние равенства зависимости (13), (14) и считая параметры упругости постоянными, получаем важные соотношения:

$$N_r = \frac{Eh}{1-\mu^2}\left(\frac{du_0}{dr} + \mu\frac{u_0}{r}\right) - N_T, \qquad (23)$$

$$N_\Theta = \frac{Eh}{1-\mu^2}\left(\frac{u_0}{r} + \mu\frac{du_0}{dr}\right) - N_T, \qquad (24)$$

$$M_r = -D\left(\frac{d\varphi}{dr} + \mu\frac{\varphi}{r}\right) + \frac{E}{1-\mu}\int\limits_{-h/2}^{h/2} \alpha T z\, dz\,, \tag{25}$$

$$M_\Theta = -D\left(\frac{\varphi}{r} + \mu\frac{d\varphi}{dr}\right) + \frac{E}{1-\mu}\int\limits_{-h/2}^{h/2} \alpha T z\, dz\,, \tag{26}$$

где N_T — жесткость на изгиб единицы длины сечения (множитель $(1-\mu^2)$ в знаменателе связан с плоским напряженным состоянием):

$$N_T = \frac{E}{1-\mu}\int\limits_{-h/2}^{h/2} \alpha T\, dz\,, \quad D = \frac{1}{1-\mu^2}\int\limits_{-h/2}^{h/2} E z^2\, dz = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}\,. \tag{27}$$

Из уравнений (23) — (26) и уравнений равновесия вытекает существенный результат: напряженные состояния в плоскости пластинки определяются независимо от ее изгиба.

Усилия N_r и N_Θ определяются из условия равновесия (1) и соотношений (23), (24). Они соответствуют уравнениям, полученным для растяжения пластинки.

Для определения изгибных напряжений в пластинке используются уравнения равновесия (3), (5) и соотношения (25), (26).

Круглая пластинка постоянной толщины с постоянными параметрами упругости. Подставляя в уравнение равновесия (5) значения изгибающих моментов из соотношений (25) и (26), приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr} - \frac{1}{r^2}\varphi = -\frac{Q_r}{D} + \frac{1}{D}\frac{dM_T}{dr}\,, \tag{28}$$

где M_T — температурный изгибающий момент:

$$M_T = \frac{E}{1-\mu}\int\limits_{-h/2}^{h/2} \alpha T z\, dz\,. \tag{29}$$

Уравнение изгиба пластинки (28), составленное относительно угла поворота нормали $\varphi(r)$, оказалось точно таким же, как уравнение для радиального перемещения $u(r)$ при растяжении пластинки.

В соответствии с решением (82) разд. 44 можно записать

$$\varphi(r) = C_1 r + C_2\frac{1}{r} - \frac{1}{rD}\int\limits_a^r r_1 \int\limits_a^{r_1} Q_r(r_2)\, dr_2\, dr_1 + \frac{1}{rD}\int\limits_a^r r_1 M_T(r_1)\, dr_1\,. \tag{30}$$

Внося значение $\varphi(r)$ в равенства (25) и (26), получаем

$$M_r(r) = -D(1+\mu)C_1 + D\frac{1-\mu}{r^2}C_2 + \int_a^r Q_r(r_1)\,dr_1 -$$

$$-\frac{1-\mu}{r^2}\int_a^r r_1\int_a^{r_1} Q_r(r_2)\,dr_2\,dr_1 + \frac{1-\mu}{r^2}\int_a^r r_1 M_T(r_1)\,dr_1, \tag{31}$$

$$M_\Theta = -D(1+\mu)C_1 - \frac{D(1-\mu)}{r^2}C_2 + \mu\int_a^r Q_r(r_1)\,dr_1 +$$

$$+\frac{1-\mu}{r^2}\int_a^r r_1\int_a^{r_1} Q_r(r_2)\,dr_2\,dr_1 - \frac{1-\mu}{r^2}\int_a^r r_1 M_T(r_1)\,dr_1 + (1-\mu)M_T. \tag{32}$$

После интегрирования по частям второго интеграла представим равенства (31) и (32) в таком виде:

$$M_r = -D(1+\mu)C_1 + \frac{D(1-\mu)}{r^2}C_2 - F_1(r) + F_2(r) + F(r), \tag{33}$$

$$M_\Theta = -D(1+\mu)C_1 - \frac{D(1-\mu)}{r^2}C_2 + F_1(r) - F_2(r) - F(r) + (1-\mu)M_T, \tag{34}$$

где функции нагрузки

$$F_1(r) = \frac{1+\mu}{2}\int_a^r Q_r(r_1)\,dr_1, \tag{35}$$

$$F_2(r) = \frac{1-\mu}{2r^2}\int_a^r r_1^2 Q_r(r_1)\,dr_1 \tag{36}$$

и температурная функция

$$F(r) = \frac{1-\mu}{r^2}\int_a^r r_1 M_T(r_1)\,dr_1. \tag{37}$$

Произвольные постоянные определяются из краевых условий

$$M_r(a) = M_{ra}, \quad M_r(b) = M_{rb}, \tag{38}$$

где M_{ra}, M_{rb} — заданные (распределенные) изгибающие моменты на внутреннем и внешнем контурах пластинки.

Из соотношений (33) — (37) имеем

$$D(1+\mu)C_1 = \frac{1}{b^2 - a^2}\left[a^2 M_{ra} - b^2 M_{rb} - F_1(b) - F_2(b) - F(b)\right],$$

$$D(1-\mu)C_2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2}\left[M_{ra} - M_{rb} + F_1(b) + F_2(b) + F(b)\right].$$

Подставляя значения произвольных постоянных в равенства (33) и (34), получаем следующие формулы:

$$M_r = M_{rb}\frac{b^2}{b^2 - a^2}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) - M_{ra}\frac{a^2}{b^2 - a^2}\left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right) -$$

$$-\left(F_1(b) + F_2(b)\right)\frac{b^2}{b^2 - a^2}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) + F_1(r) + F_2(r) -$$

$$- F(b)\frac{b^2}{b^2 - a^2}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) + F(r), \tag{39}$$

$$M_\Theta = M_{rb}\frac{b^2}{b^2 - a^2}\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) - M_{ra}\frac{a^2}{b^2 - a^2}\left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) -$$

$$-\left(F_1(b) + F_2(b)\right)\frac{b^2}{b^2 - a^2}\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) + F_1(r) - F_2(r) -$$

$$- F(b)\frac{b^2}{b^2 - a^2}\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) - F(r) + (1-\mu)M_T. \tag{40}$$

Для сплошной пластинки (пластинки без центрального отверстия) следует считать $C_2 = 0$ из условия ограниченности решения при $r \to 0$. Полагая в равенствах (39) и (40) $a = 0$, находим

$$M_r = M_{rb} - F_1(b) - F_2(b) + F_1(r) + F_2(r) - F(b) + F(r), \tag{41}$$

$$M_\Theta = M_{rb} - F_1(b) - F_2(b) + F_1(r) - F_2(r) - F(b) - F(r) + (1-\mu)M_T. \tag{42}$$

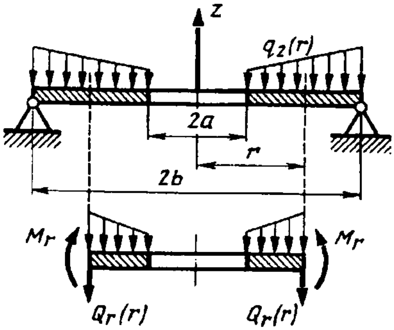


Рис. 14. 5. Определение перерезывающей силы

Функции $F_1(r)$, $F_2(r)$ и $F(r)$ вычисляются при $a = 0$. В центре пластинки

$$F_1(0) = 0\,, F_2(0) = 0\,, F(0) = \frac{1-\mu}{2} M_T.$$

Соотношения (39) и (40) позволяют определить изгибающие моменты в пластинке, если известно значение перерезывающего усилия $Q_r(r)$. Величина $Q_r(r)$ может быть определена из условия равновесия при наличии закрепления только на одном контуре (статически определимое закрепление пластинки).

Рассматривая равновесие части пластинки радиуса r (рис. 14.5), получаем

$$2\pi a Q_{ra} - 2\pi \int_a^r r_1 q_z(r_1)\, dr_1 - 2\pi r\, Q_r(r) = 0$$

или

$$Q_r(r) = \frac{1}{r}\left(a Q_{ra} - \int_a^r r_1 q_z(r_1)\, dr_1 \right). \tag{43}$$

При наличии двух опорных контуров необходимо сначала найти неизвестные силовые факторы, действующие на одном из контуров закрепления, из условия отсутствия прогибов или углов поворота. Во многих случаях удобно функции $F_1(r)$, $F_2(r)$ и $F(r)$ находить путем численного интегрирования.

Напряжения изгиба в круглой пластинке. Если учесть зависимости (25) и (26), то получим следующие формулы для напряжений:

$$\sigma_r = -z \frac{E}{(1-\mu^2) D} M_r + z \frac{E}{(1-\mu)(1-\mu^2) D} \int_{-h/2}^{h/2} \alpha T z\, dz - \frac{E\alpha T}{1-\mu}, \tag{44}$$

$$\sigma_\Theta = -z \frac{E}{(1-\mu^2) D} M_\Theta + z \frac{E}{(1-\mu)(1-\mu^2) D} \int_{-h/2}^{h/2} \alpha T z\, dz - \frac{E\alpha T}{1-\mu}. \tag{45}$$

Так как $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$, то формулы для изгибных напряжений приобретают следующий вид:

$$\sigma_r = -z\frac{12M_r}{h^3} + \frac{E}{1-\mu}\left(z\frac{12}{h^3}\int\limits_{-h/2}^{h/2}\alpha Tz\,dz - \alpha T\right),$$
$$\sigma_\Theta = -z\frac{12M_\Theta}{h^3} + \frac{E}{1-\mu}\left(z\frac{12}{h^3}\int\limits_{-h/2}^{h/2}\alpha Tz\,dz - \alpha T\right). \tag{46}$$

Вторые слагаемые связаны с неравномерным нагревом по толщине пластинки.

Определение прогибов круглой пластинки. Из соотношений (25) и (26) вытекает, что

$$\frac{d\varphi}{dr} + \mu\frac{\varphi}{r} = -\frac{M_r}{D} + \frac{M_T}{D},$$
$$\frac{\varphi}{r} + \mu\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{M_\Theta}{D} + \frac{M_T}{D}, \tag{47}$$

где, как и раньше,

$$M_T = \frac{E}{1-\mu}\int\limits_{-h/2}^{h/2}\alpha Tz\,dz.$$

Из равенства (47) следует важная формула:

$$\frac{\varphi}{r} = -\frac{1}{(1-\mu^2)D}(M_\Theta - \mu M_r) + \frac{1}{(1+\mu)D}M_T. \tag{48}$$

Угол поворота $\varphi(r)$ и прогиб $w(r)$ связаны соотношением

$$\frac{dw(r)}{dr} = \varphi(r). \tag{49}$$

Если при $r = c$ прогиб обращается в нуль, то

$$w(r) = w(c) + \int\limits_c^r \varphi(r_1)\,dr_1. \tag{50}$$

Прогибы часто оказывается удобным определить численным методом, так как аналитическое выражение обычно весьма громоздко.

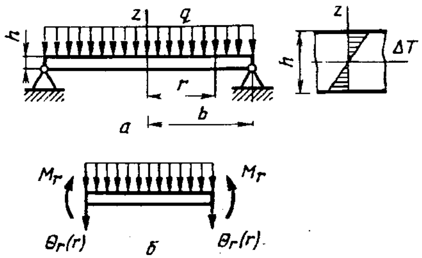


Рис. 14.6. Пример определения напряжений и прогибов пластинки

Пример. Рассмотрим сплошную, шарнирно опертую пластинку (рис. 14.6) под действием распределенной нагрузки q и с линейным распределениым температуры по толщине $\Delta T = \kappa z$. Значение $Q_r(r)$ находим по формуле (43):

$$Q_r(r) = -\frac{1}{r}\int_0^r r_1 q_z\, dr_1 = -\frac{1}{2}qr.$$

Далее вычисляем

$$M_T = \frac{E}{1-\mu}\int_{-h/2}^{h/2} \alpha \Delta T z\, dz = \frac{E}{1-\mu}\alpha k\frac{h^3}{12},$$

$$F_1 = \frac{1+\mu}{2}\int_0^r Q_r\, dr_1 = -\frac{(1+\mu)q}{8}r^2,$$

$$F_2 = \frac{1-\mu}{2r^2}\int_0^r r_1^2 Q_r\, dr_1 = -\frac{1-\mu}{16}qr^2,$$

$$F(r) = \frac{1-\mu}{r^2}\int_0^r r_1 M_T\, dr = \frac{E\alpha k h^3}{24}.$$

По формулам (41) и (42) определяем

$$M_r = \frac{3+\mu}{16}q\left(b^2 - r^2\right),$$

$$M_\Theta = \frac{3+\mu}{16}q\left(b^2 - \frac{1+3\mu}{3+\mu}r^2\right).$$

Отметим, что выражения для M_r и M_Θ не содержат температурных членов. Напряжения в пластинке находим по формулам (46):

$$\sigma_r = -z\frac{12M_r}{h^3} + \frac{E}{1-\mu}\left(z\frac{12}{h^3}\alpha k\frac{h^3}{12} - \alpha kz\right) = -z\frac{12M_r}{h^3},$$

$$\sigma_\Theta = -z\frac{12M_\Theta}{h^3} + \frac{E}{1-\mu}\left(z\frac{12}{h^3}\alpha k\frac{h^3}{12} - \alpha kz\right) = -z\frac{12M_\Theta}{h^3}.$$

При линейном распределении температуры по толщине стенки и шарнирном опирании на контуре температурные напряжения отсутствуют. Напряжения растяжения возникают при $z < 0$ и достигают наибольшего значения:

$$\sigma_r\left(-\frac{h}{2}\right) = \frac{6M_r}{h^2}, \quad \sigma_\Theta\left(-\frac{h}{2}\right) = \frac{6M_\Theta}{h^2}.$$

Угол поворота нормали по формуле (48):

$$\varphi = \frac{r}{(1-\mu^2)D}\frac{(3+\mu)q}{16}\left[b^2 - \frac{1+3\mu}{3+\mu}r^2 - \mu(b^2 - r^2)\right] + \frac{r}{(1+\mu)D}M_T =$$

$$= -\frac{r}{(1+\mu)D}\frac{q}{16}\left[(3+\mu)b^2 - (1+\mu)r^2\right] + \frac{r}{(1+\mu)D}M_T.$$

Прогиб определяем по формуле (50), полагая $c = b$:

$$w(r) = -\int_r^b \varphi(r_1)\,dr_1.$$

Прогиб в центре пластинки ($r = 0$):

$$w(0) = -\int_0^b \varphi(r_1)\,dr_1 = \frac{q}{(1+\mu)D}\frac{b^4}{64}(5+\mu) - \frac{M_T b^2}{2(1+\mu)D}.$$

Прогиб, вызванный температурной деформацией:

$$w_T(0) = -\frac{M_T b^2}{2(1+\mu)D} = \frac{E\alpha k h^3 b^2}{2(1-\mu^2)\dfrac{12Eh^3}{12(1-\mu^2)}} = -\frac{\alpha k b^2}{2}.$$

Линейное изменение температуры не вызывает напряжений в пластинке, но приводит к прогибу.

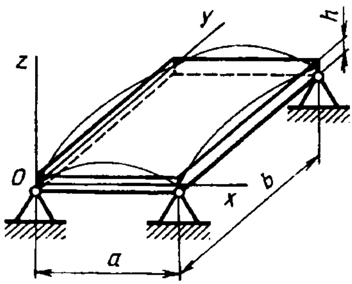


Рис. 14.7. Изгиб прямоугольной пластинки

Изгиб прямоугольных пластинок. Деформации. Рассмотрим прямоугольную пластинку (рис. 14.7), отнесенную к системе координат X, Y, Z. Элемент поверхности после деформации показан на рис. 14.8; точка A_0 до деформации лежит в срединной плоскости, после деформации она получает смещения u_0, v_0, $w_0 = w$. Точка A, отстоящая на расстояние z от точки A_0, после деформации переходит в точку A^*. Угол поворота «жесткости нормали» (гипотеза Кирхгофа) имеет составляющие φ_x и φ_y в координатных плоскостях.

Перемещения произвольной точки пластинки (точка A) равны

$$u = u_0 + z\varphi_x\,, \; v = v_0 + z\varphi_y\,, \; w = w_0\,, \quad (51)$$

где u_0, v_0, w_0 — смещения точки A_0, лежащей в срединной плоскости.

Деформацией в направлении нормали пренебрегаем. В соответствии с формулами для деформаций имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_{x0} + z\,\frac{\partial \varphi_x}{\partial x}\,, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_{y0} + z\,\frac{\partial \varphi_y}{\partial y}\,, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \\ &= \gamma_{xy0} + z\left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x}\right), \end{aligned} \quad (52)$$

где ε_{x0}, ε_{y0}, γ_{xy0} — деформации в срединной плоскости пластинки:

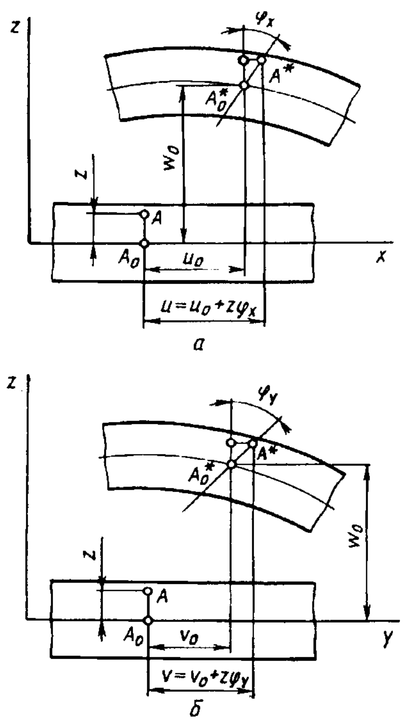


Рис. 14.8. Деформации изгиба прямоугольной пластинки:
а — в плоскости zx; *б* — в плоскости zy

$$\varepsilon_{x0} = \frac{\partial u_0}{\partial x}, \ \varepsilon_{y0} = \frac{\partial v_0}{\partial y}, \ \gamma_{xy0} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}.$$

Учитывая, что

$$\varphi_x = -\frac{\partial w}{\partial x}, \ \ \varphi_y = -\frac{\partial w}{\partial y}, \tag{53}$$

получаем следующие зависимости:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{x0} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \ \varepsilon_y = \varepsilon_{y0} - z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \ \gamma_{xy} = \gamma_{xy0} - 2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y}. \tag{54}$$

Уравнение упругости. Предполагается, что напряженное состояние является плоским. Пренебрегая для простоты температурной деформацией, имеем

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y), \ \sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x), \ \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy}. \tag{55}$$

Внося в (55) равенства (54), получаем

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_{x0} - z\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \\ \sigma_y &= \sigma_{y0} - z\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \\ \tau_{xy} &= \tau_{xy0} - z(1-\mu)\frac{E}{1-\mu^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y}, \end{aligned} \tag{56}$$

где σ_{x0}, σ_{y0}, τ_{xy0} — нормальные и касательное напряжения в срединной плоскости пластинки. Они определяются по равенствам (55) для значений ε_{x0}, ε_{y0}, γ_{xy0}.

Силовые факторы в сечениях прямоугольной пластинки. В слое dz (рис. 14.9) действуют нормальные (σ_x, σ_y) и касательное (τ_{xy}) напряжения, которые создают усилия и моменты (на единицу длины):

$$\begin{aligned} N_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x\, dz, \ \ N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y\, dz, \ \ N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy}\, dz, \\ M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z\, dz, \ \ M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z\, dz, \ \ M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z\, dz. \end{aligned} \tag{57}$$

Подставив значения σ_x, σ_y и τ_{xy} из формул (56), найдем для усилий в срединной плоскости

$$N_x = \sigma_{x0} h = N_{x0}\,,\ N_y = \sigma_{y0} h = N_{y0}\,,\ N_{xy} = \tau_{xy0} h = N_{xy0}\,.$$

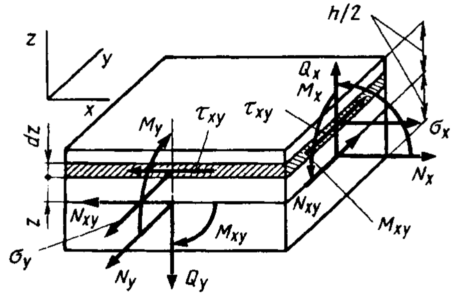


Рис. 14.9. Силовые факторы в сечении пластинок

Для изгибающих и крутящих моментов получим

$$M_x = D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \tag{58}$$

$$M_y = D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \tag{59}$$

$$M_{xy} = (1-\mu)\,D\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}, \tag{60}$$

где

$$D = \frac{E}{1-\mu^2}\int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}. \tag{61}$$

Величина D называется жесткостью (единицы длины) пластинки.

Замечание. Отметим очевидное свойство парности касательных напряжений

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

и вытекающие из него условия для касательных усилий и крутящих моментов:

$$N_{xy} = N_{yx}\,,\quad M_{xy} = M_{yx}\,.$$

Условия равновесия элемента прямоугольной пластинки. На рис. 14.9 показаны усилия и моменты, действующие на грани элемента пластинки.

Рассматривая равновесие сил по осям x и y, приходим к следующим уравнениям:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0\,, \tag{62}$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0\,. \tag{63}$$

Условие равновесия сил по оси z дает

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = q\,. \qquad (64)$$

Условие равновесия для моментов приводит к двум уравнениям:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + Q_x = 0\,, \qquad (65)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + Q_y = 0\,. \qquad (66)$$

Пять условий равновесия (62) — (66) характеризуют равновесие элемента пластинки.

Замечание. Шестое уравнение равновесия относительно оси z приводит к уже известному результату

$$N_{xy} = N_{yx}\,.$$

Разрешающие уравнения. Ранее были рассмотрены три группы уравнений: геометрические уравнения (51) — (54), описывающие геометрию деформаций пластинки; физические уравнения (55), (56), устанавливающие связь деформаций и напряжений; статические уравнения равновесия (62) — (66).

Первая группа параметров: u_0, v_0, ε_{x0}, ε_{y0}, γ_{xy0}, N_{x0}, N_{y0}, N_{xy0} — характеризует усилия и деформации в плоскости пластинки. Уравнения равновесия будут удовлетворены, если положить

$$N_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\,,\; N_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\,,\; N_{xy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\,.$$

Используя уравнение совместности деформаций

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{x0}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{y0}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy0}}{\partial x\,\partial y}\,,$$

приходим к бигармоническому уравнению для функции усилий F. Легко заметить, что для определения усилий в плоскости пластинки получается плоская задача, разобранная в гл.2.

Усилия, напряжения и деформации в плоскости пластинки определяются независимо от деформации изгиба.

Вторая группа параметров: $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}$, M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y — характеризует изгиб пластинки.

Разрешающее уравнение (уравнение, решение которого позволяет определить неизвестные параметры задачи) получается следующим образом. Дифференцируя уравнение (65) по x, уравнение (66) по y, затем складывая их, получаем с учетом соотношения (64)

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{2\,\partial^2 M_{xy}}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q\,. \tag{67}$$

С помощью зависимостей (58) — (60) находим для пластинок постоянной толщины

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\frac{q}{D}\,. \tag{68}$$

Это и есть разрешающее уравнение изгиба пластинки постоянной толщины. В более краткой форме оно записывается так:

$$\nabla^4 w = -\frac{q}{D}\,, \tag{69}$$

где ∇^4 — бигармонический оператор:

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\,.$$

Определение прогибов и напряжений в пластинке вариационным методом. Будем использовать вариационный метод Галёркина, в соответствии с которым примем следующее выражение прогиба:

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^{m} C_i\,\varphi_i\,(x, y)\,,$$

где $\varphi_i\,(x, y)$ — заранее выбранные функции, удовлетворяющие краевым условиям задачи; C_i — коэффициенты, подлежащие определению.

Коэффициенты C_i найдем из системы уравнений

$$\int_0^a\!\!\int_0^b \left(\nabla^4 w + \frac{q}{D}\right)\varphi_i\,dx\,dy = 0 \qquad (i = 1\,, \ldots, m)\,.$$

Система уравнений может быть представлена в матричной форме:

$$[A_{ij}]\{C_i\} = \{f_i\},\ A_{ij} = \int_0^a\int_0^b (\varphi_i \nabla^4 \varphi_j)\,dx\,dy,\ f_i = -\frac{1}{D}\int_0^a\int_0^b q\varphi_i\,dx\,dy. \qquad (70)$$

Точность решения возрастает при увеличении числа членов ряда.

Пример. Определить прогиб пластинки, шарнирно опертой по четырем сторонам (рис. 14.10), при действии равномерно распределенного давления. Краевые условия состоят в отсутствии прогибов и изгибающих моментов по краям пластинки. Этим условиям удовлетворяет функция

$$w = C_1 \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}.$$

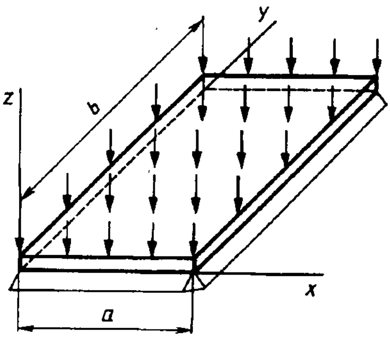


Рис. 14.10. Прямоугольная пластинка, шарнирно опертая по четырем сторонам, под действием постоянного давления

При одном параметре из уравнений (70) находим

$$C_1 = \frac{\displaystyle\int_0^a\int_0^b q\varphi_1\,dx\,dy}{\displaystyle D\int_0^a\int_0^b \varphi_1\nabla^4\varphi_1\,dx\,dy}.$$

Вычисления дают

$$\int_0^a\int_0^b \varphi_1\,dx\,dy = \int_0^a\int_0^b \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}\,dx\,dy = \int_0^a \sin\frac{\pi x}{a}\,dx\int_0^b \sin\frac{\pi y}{b}\,dy = \frac{4ab}{\pi^2}.$$

$$\int_0^a\int_0^b \varphi_1\nabla^4\varphi_1\,dx\,dy = \left(\frac{\pi^2}{a^2}+\frac{\pi^2}{b^2}\right)\int_0^a\int_0^b \sin^2\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}\,dx\,dy = \left(\frac{\pi^2}{a^2}+\frac{\pi^2}{b^2}\right)\cdot\frac{1}{4}ab.$$

Окончательно получаем

$$w = -\frac{16qa^4b^4}{\pi^6(a^2+b^2)^2D}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b},$$

что дает погрешность порядка 10%. Знак минус означает, что прогиб направлен противоположно оси z.

Замечание. В круглых и прямоугольных пластинках применялось различное правило знаков для положительного значения прогиба. Разумеется, окончательные результаты не зависят от правила знаков, но следует выработать умение делать вывод, сопоставляя его с расчетной схемой и принятыми в ней положительными направлениями.

46. Цилиндрические оболочки

Гипотеза жесткой нормали, деформации. При осесимметричной деформации цилиндрической оболочки (рис. 14.11) точка срединной поверхности A_0 (рис. 14.12) получает смещения по оси оболочки u_0 вдоль радиуса w_0. Точка A, отстоящая от срединной поверхности на расстояние z, будет иметь перемещения u_0, w, нормаль к срединной поверхности повернется на угол φ. По гипотезе жесткой нормали получим

$$u = u_0 - z\varphi. \tag{71}$$

Если пренебречь деформацией материала тонкостенной оболочки в радиальном направлении, то

$$w = w_0. \tag{72}$$

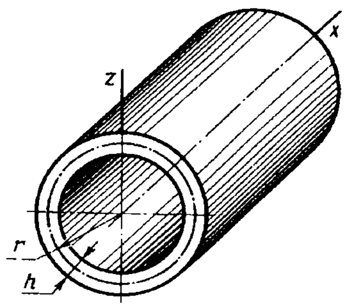


Рис. 14.11. Цилиндрическая оболочка

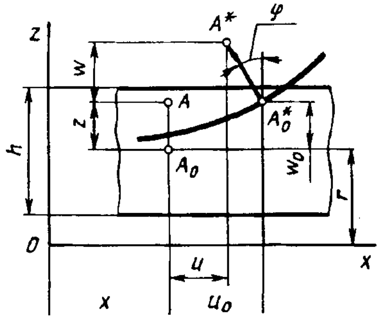


Рис. 14.12. Схема деформации оболочки

Деформации в слое z

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_{x0} - z\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \tag{73}$$

$$\varepsilon_\Theta = \frac{w}{r_z} = \frac{w_0}{r + z}, \qquad (74)$$

где $\varepsilon_{x0} = \partial u_0 / \partial x$ — деформация в точках срединной поверхности. По гипотезе жесткой нормали имеем

$$\varphi = \frac{\partial w_0}{\partial x}. \qquad (75)$$

Полагая для тонкостенной оболочки $r + z \approx r$, получаем

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{x0} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \qquad (76)$$

$$\varepsilon_\Theta = w / r. \qquad (77)$$

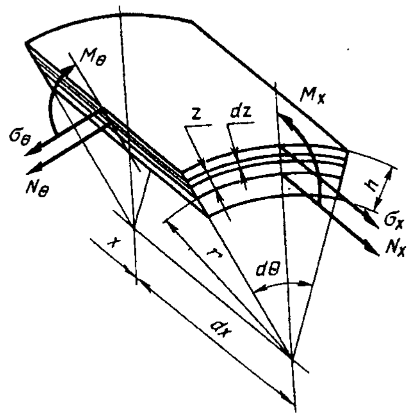


Рис. 14.13. Усилия и моменты, действующие на единицу длины сечений оболочки

Напряжения и силовые факторы. В слое на расстоянии z от срединной поверхности действуют напряжения σ_x и σ_Θ (рис. 14.13), создающие усилия и моменты (на единицу длины сечения):

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \, dz, \quad N_\Theta = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\Theta \, dz,$$
$$M_x = -\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z \, dz, \quad M_\Theta = -\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\Theta z \, dz. \qquad (78)$$

Уравнения упругости. Напряжения и деформации связаны следующими соотношениями упругости:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu\sigma_\Theta\right] + \alpha T, \qquad (79)$$

$$\varepsilon_\Theta = \frac{1}{E}\left[\sigma_\Theta - \mu\sigma_r\right] + \alpha T, \qquad (80)$$

где E и μ — модуль упругости и коэффициент Пуассона; α — коэффициент линейного расширения; T — температура.

Из уравнений (79) и (80) следует, что

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_\Theta\right) - \frac{E}{1-\mu}\alpha T, \tag{81}$$

$$\sigma_\Theta = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_\Theta + \mu\varepsilon_x\right) - \frac{E}{1-\mu}\alpha T. \tag{82}$$

В дальнейшем для упрощения будем пренебрегать температурной деформацией, полагая $\alpha T \approx 0$.

Учитывая соотношения (76) и (77), находим

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_{x0} - z\frac{d^2w}{dx^2} + \mu\frac{w}{r}\right), \tag{83}$$

$$\sigma_\Theta = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\mu\varepsilon_{x0} - \mu z\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{w}{r}\right). \tag{84}$$

Подставляя величины σ_x и σ_Θ из соотношений (81) и (82) в (78), получаем

$$N_x = \frac{Eh}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_{x0} + \mu\frac{w}{r}\right), \tag{85}$$

$$N_\Theta = \frac{Eh}{1-\mu^2}\left(\frac{w}{r} + \mu\varepsilon_{x0}\right), \tag{86}$$

$$M_x = D\frac{d^2w}{dx^2}, \tag{87}$$

$$M_\Theta = \mu D\frac{d^2w}{dx^2}, \tag{88}$$

где

$$D = \frac{E}{1-\mu^2}\int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}. \tag{89}$$

Величина D называется *цилиндрической жесткостью*. По физическому смыслу она представляет жесткость на изгиб полоски, ширина которой единица, а высота h (множитель $1/(1-\mu^2)$ связан с плоской деформацией).

Равенства (85) и (86) позволяют выразить деформации срединной поверхности через усилия

$$\varepsilon_{x0} = \frac{du_0}{dx} = \frac{1}{Eh}(N_x - \mu N_\Theta), \tag{90}$$

$$\varepsilon_{\Theta 0} = \frac{w}{r} = \frac{1}{Eh}(N_\Theta - \mu N_x). \tag{91}$$

Уравнения равновесия. Рассмотрим равновесие элемента оболочки (рис. 14.14). Будем считать, что к срединной поверхности приложены внешние распределенные нагрузки (на единицу площади) q_x и q_z. Проектируя силы на направление осей x и z, находим

$$\frac{dN_x}{dx} + q_x = 0, \tag{92}$$

$$\frac{dQ}{dx} - \frac{1}{r}N_\Theta + q_z = 0. \tag{93}$$

Условие равновесия для моментов приводит к соотношению, которое встречается при изгибе стержней:

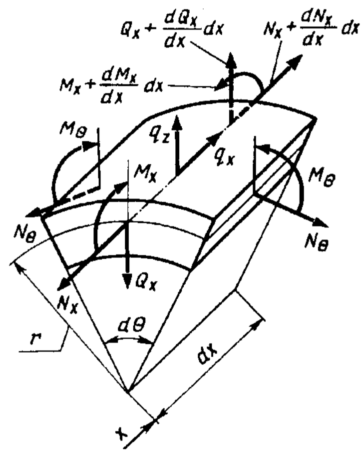


Рис. 14.14. Условие равновесия элемента оболочки

$$\frac{dM_x}{dx} + Q = 0. \tag{94}$$

Дифференцируя уравнение (94) по x и принимая во внимание зависимость (93), находим

$$\frac{d^2M_x}{dx^2} + \frac{1}{r}N_\Theta = q_z. \tag{95}$$

Замечание. Следует помнить, что усилия и моменты в уравнениях равновесия относятся к единице длины соответствующих сечений.

Разрешающее дифференциальное уравнение. Оно получается из уравнения равновесия (95), если выразить силовые факторы через прогиб срединной поверхности $w(x)$. Замечая, что из соотношения (91) следует

$$N_{\Theta} = \frac{Eh}{r} w + \mu N_x, \tag{96}$$

и используя зависимость (87), находим из уравнения (95) разрешающее уравнение

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(D \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + \frac{Eh}{r^2} w = q_z - \frac{\mu}{r} N_x. \tag{97}$$

Для оболочки постоянной толщины с постоянными параметрами упругости разрешающее уравнение будет таким:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\beta^4 w = \frac{1}{D}\left(q_z - \frac{\mu}{r} N_x \right), \tag{98}$$

где

$$4\beta^4 = \frac{Eh}{r^2 D} = \frac{12(1-\mu)^2}{r^2 h^2} \tag{99}$$

или

$$\beta = \frac{\sqrt[4]{3(1-\mu)^2}}{\sqrt{rh}}.$$

При обычном значении коэффициента Пуассона $\mu = 0{,}3$ имеем

$$\beta = \frac{1{,}285}{\sqrt{rh}}. \tag{100}$$

Напряжения в сечениях оболочки. Если известно значение прогиба оболочки $w(x)$, то силовые факторы определяются равенствами (87), (88) и (96). Осевое усилие (на единицу длины) равно

$$N_x = \frac{N}{2\pi r}, \tag{101}$$

где N — осевое усилие, действующее на оболочку.

Перерезывающее усилие Q (на единицу длины) находится из соотношений (94) и (87):

$$Q = -D \frac{d^3 w}{dx^3}. \tag{102}$$

В поперечном сечении оболочки нормальные напряжения распределяются по толщине стенки линейно (рис. 14.15)

$$\sigma_x = \sigma_{x0} + \sigma_{x\text{и}} = \frac{N_x}{h} - \frac{12M_x}{h^3} z . \quad (103)$$

В продольном (меридиональном) сечении

$$\sigma_\Theta = \sigma_{\Theta 0} + \sigma_{\Theta\text{и}} = \frac{N_\Theta}{h} - \frac{12M_\Theta}{h^3} z . \quad (104)$$

Отметим (см. соотношения (87) и (88)), что

$$M_\Theta = \mu M_x . \quad (105)$$

Касательные напряжения существуют только в поперечном сечении и распределяются так же, как в стержне прямоугольного сечения:

$$\tau = \frac{Q}{h}\left(\frac{3}{2} - \frac{6z^2}{h^2}\right). \quad (106)$$

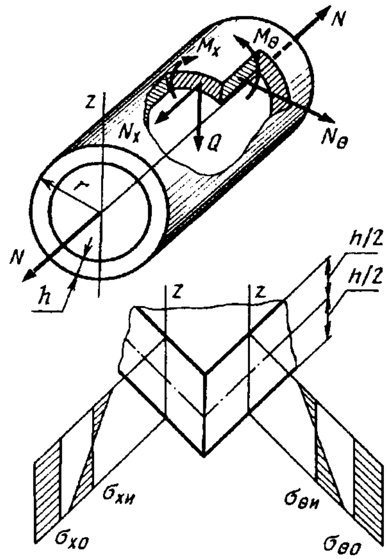


Рис. 14.15. Силовые факторы и напряжения в сечениях оболочки

Длинные оболочки. Цилиндрическая оболочка называется длинной, если

$$\beta l = 1{,}285 \frac{l}{\sqrt{rh}} > 3 , \quad (107)$$

где l — длина оболочки.

Решение уравнения (98) для длинной оболочки следует принять в виде

$$w(x) = C_1 e^{-\beta x} \cos \beta x + C_2 e^{-\beta x} \sin \beta x + w_*(x) , \quad (108)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, определяемые из условий закрепления оболочки, $w_*(x)$ — частное решение уравнения (98).

Дифференцируя равенство (108), получаем следующие зависимости (штрих означает производную по x):

$$w'(x) = -C_1 \beta e^{-\beta x}(\cos \beta x + \sin \beta x) + C_2 \beta e^{-\beta x}(\cos \beta x - \sin \beta x) + w'_*(x) , \quad (109)$$

$$w''(x) = 2C_1 \beta^2 e^{-\beta x} \sin \beta x - 2C_2 \beta^2 e^{-\beta z} \cos \beta x + w_*''(x) , \quad (110)$$

$$w'''(x) = 2C_1\beta^3 e^{-\beta x}(\cos\beta x - \sin\beta x) + 2C_2\beta^3 e^{-\beta x}(\cos\beta x + \sin\beta x) +$$

$$+ w_*'''(x)\,. \tag{111}$$

Из структуры решения (108) видно, что первая часть, зависящая от условий закрепления при $x = 0$, имеет множитель $e^{-\beta x}$ и по мере возрастания x затухает (при $\beta x > 3$ ею можно пренебречь). Таким образом, в зоне закрепления оболочки имеется краевой эффект. Решение (108) описывает прогибы оболочки возле края $x = 0$. Для определения прогибов возле края оболочки $x = l$ используется то же решение, но для координаты

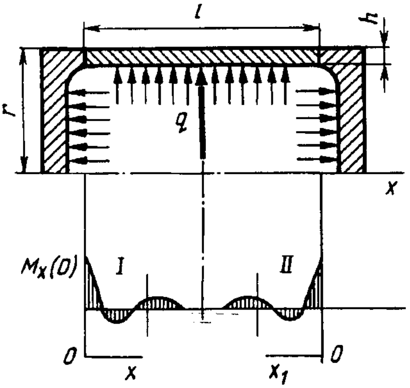


Рис. 14.16. Длинная оболочка под действием внутреннего давления:
I, II — зоны краевого эффекта

$$x_1 = l - x\,. \tag{112}$$

Рассмотрим в качестве примера цилиндрическую оболочку под действием внутреннего давления q (рис. 14.16). Края оболочки приварены к жестким диафрагмам. Считая радиус внутренней поверхности оболочки r приближенно равным радиусу срединной поверхности, получаем

$$q_z = q\,; \tag{113}$$

осевое усилие $N = \pi r^2 q$ и

$$N_x = \frac{N}{2\pi r} = \frac{qr}{2}\,. \tag{114}$$

Частное решение уравнения (98) будет постоянной величиной:

$$4\beta^4 w_* = \frac{1}{D}\left(q - \frac{\mu}{2}q\right)$$

или

$$w_* = \frac{r^2\left(1 - \frac{1}{2}\mu\right)}{Eh}q\,. \tag{115}$$

Легко понять физический смысл частного решения. В оболочке, свободной от закрепления, под действием внутреннего давления q создаются окружные напряжения

$$\sigma_{\Theta 0} = q\frac{r}{h}.$$

При действии осевого усилия напряжения в поперечном сечении

$$\sigma_{x0} = \frac{N_x}{h} = \frac{1}{2}q\frac{r}{h}.$$

Деформации в окружном направлении

$$\varepsilon_{\Theta 0} = \frac{w}{r} = \frac{1}{E}(\sigma_\Theta - \mu\sigma_x) = \frac{r\left(1 - \frac{1}{2}\mu\right)}{Eh}q.$$

Следовательно, частное решение (115) представляет прогиб (перемещение) срединной поверхности оболочки, свободной от закрепления, под действием внешней нагрузки. Произвольные постоянные C_1 и C_2 найдем из условий при $x = 0$:

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 0. \tag{116}$$

Из уравнения (108) и (109) получаем

$$C_1 = -w^*(0) = -\frac{r^2\left(1 - \frac{1}{2}\mu\right)}{Eh}q, \quad C_2 = C_1.$$

Для прогиба оболочки

$$w(x) = \frac{r^2\left(1 - \frac{1}{2}\mu\right)}{Eh}q\left[1 - e^{-\beta x}(\cos\beta x + \sin\beta x)\right]. \tag{117}$$

Изгибающий момент M_x (на единицу длины) найдем из соотношений (110):

$$M_x = Dw''(x) = \frac{q\left(1 - \frac{1}{2}\mu\right)}{2\beta^2}e^{-\beta x}(\cos\beta x - \sin\beta x). \tag{118}$$

Осевое усилие постоянно по длине:

$$N_x = \frac{1}{2} qr .$$

Окружное усилие определяется по формуле (96):

$$N_\Theta(x) = qr\left[1 - \left(1 - \frac{1}{2}\mu \right) e^{-\beta x} (\cos\beta x + \sin\beta x) \right]. \tag{119}$$

При $\beta x > 3$ ($e^{-\beta x} < 1/20$) можно считать, что

$$w(x) = w_*(x) = \frac{r^2\left(1 - \frac{1}{2}\mu\right)}{Eh} q , \tag{120}$$

$$N_\Theta(x) = qr ,$$

т.е. влияние закрепления оболочки не сказывается. Расчетные соотношения справедливы и для края $x = l$, если расстояние x отсчитывать от этого края (замена x на x_1). Модель прочности оболочки содержит раздельную оценку общих и местных напряжений (напряжений в зоне краевого эффекта).

Условие прочности по общим напряжениям имеет вид

$$\frac{\sigma_в}{\sqrt{\sigma_{x0}^2 + \sigma_{\Theta 0}^2 - \sigma_{x0}\sigma_{\Theta 0}}} \geq [n_0], \tag{121}$$

где $\sigma_{\Theta 0} = N_\Theta / h$, $\sigma_{x0} = N_x / h$, $\sigma_в$ — предел прочности материала, $[n_0]$ — допускаемое значение запаса по общим напряжениям.

Условие прочности для местных напряжений (в сечениях $x = 0$ и $x = l$)

$$\frac{\sigma_в}{\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_\Theta^2 - \sigma_x \sigma_\Theta}} \geq [n_м], \tag{122}$$

где $[n_м]$ — допускаемое значение запаса по местным напряжениям; σ_x, σ_Θ — наибольшие напряжения в оболочке при $z = \pm h/2$ (см. уравнения (103) и (104)); обычно принимается

$$[n_м] \approx \frac{1}{1{,}5}[n_0] .$$

Меньшее значение принимается потому, что за счет появления пластических деформаций изгибные напряжения уменьшаются.

Замечания. 1. Для оболочек из хрупких материалов следует принимать

$$[n_м] \approx [n_0].$$

2. Модель прочности учитывает однократное статическое нагружение. При повторных (циклических) нагружениях роль местных напряжений возрастает.

Краевой эффект и безмоментное напряженное состояние в длинных цилиндрических оболочках. Для длинной оболочки прогиб можно представить в виде

$$w = w_* + w_1 + w_2. \tag{123}$$

Здесь w_* — прогиб оболочки при безмоментном напряженном состоянии:

$$w_1 = C_1 e^{-\beta x} \cos \beta x + C_2 e^{-\beta x} \sin \beta x, \tag{124}$$

$$w_2 = C_1^* e^{-\beta(l-x)} \cos \beta(l-x) + C_2^* e^{-\beta(l-x)} \sin \beta(l-x), \tag{125}$$

где произвольные постоянные C_1 и C_2 определяются из условия закрепления при $x = 0$; C_1^* и C_2^* — из краевых условий при $x = l$. Предполагается, что условия закрепления при $x = 0$ и $x = l$ не сказываются друг на друге. Решения w_1 и w_2 выражают *краевой эффект*. Для примера на рис. 14.16 имеем

$$w_* = \frac{r^2\left(1 - \frac{1}{2}\mu\right)}{Eh} q.$$

Возможность представления (123) вытекает из того, что дифференциальное уравнение (97) содержит малый параметр при старшей производной (изгибная жесткость D для тонких оболочек является малой величиной). Если q_z и N_x — достаточно плавные функции и их производными можно пренебречь, то частное решение можно принять в виде

$$w_*(x) = \frac{1}{4\beta^4 D}\left(q_z - \frac{\mu}{r} N_x\right) = \frac{r^2}{Eh}\left(q_z - \frac{\mu}{r} N_x\right). \tag{126}$$

Прогиб $w_*(x)$ выражает безмоментное напряженное состояние, при котором $M_x \approx 0$, $M_\Theta \approx 0$, $Q \approx 0$. Решение (123) представляет приближенное решение уравнения цилиндрической оболочки. Это решение называется асимптотическим, так как его точность возрастает при $h \to 0$. Приближенное решение позволяет проводить раздельное определение произвольных постоянных для краевых условий и дает общую приближенную формулу для частного решения (формула (126)).

Замечания. 1. Зоны возмущения возникают не только в зонах закрепления оболочки, но и в зонах, где приложены сосредоточенные воздействия.

2. Уравнение с малым параметром при старшей производной и краевой эффект для таких уравнений встречаются и в других задачах математической физики (например, в задачах теплопроводности).

Короткие оболочки. Для коротких оболочек ($\beta l > 3$) решение уравнения (98) удобно представить с помощью нормальных фундаментальных функций (функций Крылова):

$$w(x) = w(0)Y_1(x) + w'(0)Y_2(x) + w''(0)Y_3(x) + w'''(0)Y_4(x) + Y_*(x), \quad (127)$$

где $Y_1(x)$, $Y_2(x)$, $Y_3(x)$, $Y_4(x)$ — функции Крылова:

$$\begin{aligned} Y_1(x) &= \operatorname{ch}\beta x \cos\beta x, \\ Y_2(x) &= \frac{1}{2\beta}(\operatorname{ch}\beta x \sin\beta x + \operatorname{ch}\beta x \cos\beta x), \\ Y_3(x) &= \frac{1}{2\beta^2}\operatorname{sh}\beta x \sin\beta x, \\ Y_4(x) &= \frac{1}{4\beta^3}(\operatorname{ch}\beta x \sin\beta x - \operatorname{sh}\beta x \cos\beta x). \end{aligned} \quad (128)$$

Функция

$$Y_*(x) = \int_0^x Y_4(x - x_1)\frac{1}{D}\left(q_z(x_1) - \frac{\mu}{r}N_x(x_1)\right)dx_1 \quad (129)$$

выражает частное решение уравнения (98). Для коротких оболочек приближенное решение (123) непригодно, так как зоны краевого эффекта занимают всю длину оболочки. Модели прочности коротких оболочек основываются на решении (127).

При оценке прочности учитывается различная опасность равномерно распределенных напряжений по толщине стенки (напряжений от усилий) и изгибных напряжений, которые уменьшаются при появлении пластических деформаций.

47. Приближенные методы расчета прочности и устойчивости оболочек вращения при осесимметричном нагружении

Срединная поверхность оболочек вращения может быть образована путем вращения отрезка кривой вокруг оси (рис. 14.17,*а*—*в*). Оболочки вращения (цилиндрические, конические, сферические, тороидальные и др.) широко применяются в технике (корпуса дви-

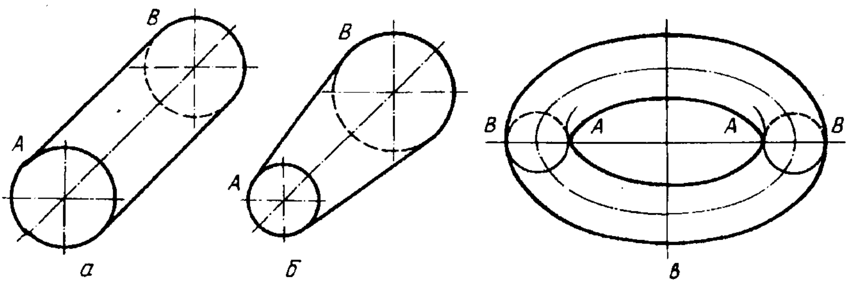


Рис. 14.17. Оболочки вращения и отрезки кривых, вращением которых они образуются

гателей, летательных аппаратов, сосуды и т.п.). Элемент оболочки вращения показан на рис. 14.18 (n — вектор, нормальный к срединной поверхности). Плоскость, проходящая через точку A и ось вращения, называется меридиональной плоскостью: AA_1 — элемент кривой меридионального сечения; R_1 — радиус кривизны в точке A ; O_1 — центр кривизны дуги меридионального сечения. Через нормаль к поверхности можно провести множество плоских сечений (среди них — два главных). Одним из главных сечений является меридиональное.

Второе главное сечение проходит через нормаль n и перпендикулярно меридиональной плоскости. Радиус кривизны плоской кривой в указанном

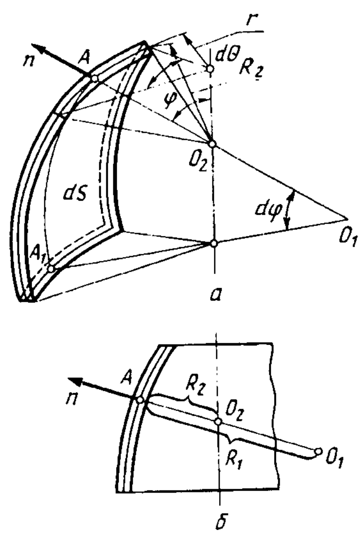


Рис. 14.18. Радиусы кривизны срединной поверхности оболочки вращения

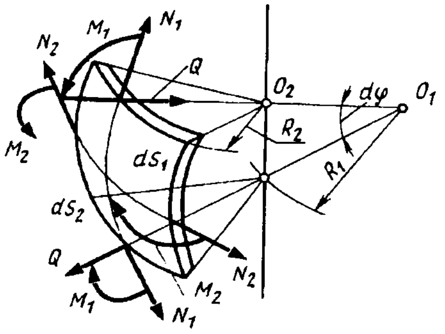


Рис. 14.19. Силовые факторы в сечениях оболочки вращения

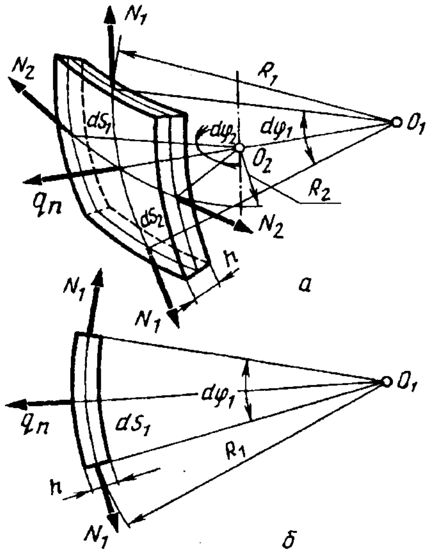


Рис. 14.20. Условие равновесия элемента оболочки при безмоментном напряженном состоянии:
а — элемент оболочки; *б* — сечение в меридиональной плоскости

сечении равен R_2, центр кривизны лежит на оси вращения в точке O_2.

Безмоментное напряженное состояние и условие равновесия элемента оболочки. В общем случае осесимметричного нагружения в оболочке действуют нормальные усилия N_1 и N_2, перерезывающее усилие Q, изгибающие моменты M_1 и M_2 (рис. 14.19). На некотором удалении от края и других зон возмущения в оболочке возникает безмоментное напряженное состояние, при котором изгибающими моментами и перерезывающей силой можно пренебречь. Ранее это было показано для цилиндрической оболочки, но такое явление происходит и в других оболочках вращения.

Рассмотрим условие равновесия элемента оболочки при безмоментном напряженном состоянии (рис. 14.20).

По граням элемента действуют (на единицу длины) усилия N_1 и N_2; на срединной поверхности распределены нормальные усилия (на единицу площади) q_n. В большинстве практических задач q_n — давление среды в мегапаскалях. Составим проекцию сил, приложенных к элементу оболочки, на направление нормали n:

$$q_n dS_1\, dS_2 = 2N_1\, dS_2 \sin d\varphi_1 + 2N_2\, dS_1 \sin d\varphi_2 . \qquad (130)$$

Так как

$$\sin d\varphi_1 \approx d\varphi_1\,,\quad \sin d\varphi_2 \approx d\varphi_2 \tag{131}$$

и

$$d\varphi_1 = dS_1/R_1\,,\quad d\varphi_2 = dS_2/R_2\,, \tag{132}$$

то из условия (130) находим важное соотношение

$$N_1/R_1 + N_2/R_2 = q_n\,. \tag{133}$$

Считая нормальные напряжения σ_1 и σ_2 равномерно распределенными по толщине оболочки h, получаем $\sigma_1 h = N_1$, $\sigma_2 h = N_2$. Теперь из соотношения (132) следует, что

$$\sigma_1/R_1 + \sigma_2/R_2 = q_n/h\,. \tag{134}$$

Уравнение (134) часто называют уравнением Лапласа.

Замечания. 1. Уравнение (134) и рис. 14.20 показывают, что при безмоментном напряженном состоянии оболочка противостоит внешнему давлению за счет кривизны элемента.

2. Напряжение σ_1 называется меридиональным, напряжение σ_2 — кольцевым или окружным. При осесимметричной деформации оболочек вращения напряжения σ_1 и σ_2 являются главными. Однако не следует считать, как это часто делается при анализе напряженного состояния, что σ_1 является наибольшим напряжением. Здесь индексы 1 и 2 присваиваются направлениям действия напряжений.

Общее условие равновесия произвольной части оболочки. Для определения действующих в оболочке усилий и напряжений необходимо рассмотреть равновесие части оболочки (рис. 14.21). Допустим, рассматривается часть оболочки, заполненная жидкостью, выделенная сечением A_1A_2. В соответствии с методом сечения в каждой точке поверхности должны быть приложены действующие усилия. При сечении «по металлу» прикладываются напряжения σ_1, при сечении «по жидкости» — давление p. Условие равновесия всех сил в направлении оси оболочки имеет вид

$$\sigma_1 h \cos\alpha \cdot 2\pi r = p\pi r^2 + G_ж + G_{об}\,, \tag{135}$$

где $G_ж$ — вес жидкости; $G_{об}$ — вес оболочки.

Из уравнения (135) находим

$$\sigma_1 = \frac{pr}{2h\cos\alpha} + \frac{G_ж + G_{об}}{2\pi r h\cos\alpha}\,. \tag{136}$$

При составлении условия равновесия радиусы внутренней и средней поверхностей оболочки считались приблизительно одинаковыми.

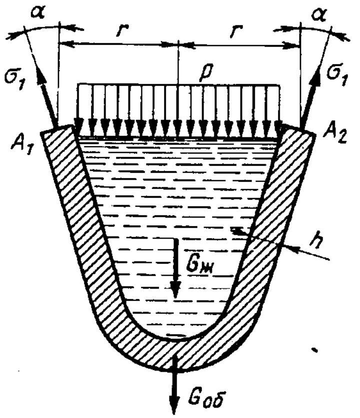


Рис. 14.21. Условие равновесия части оболочки

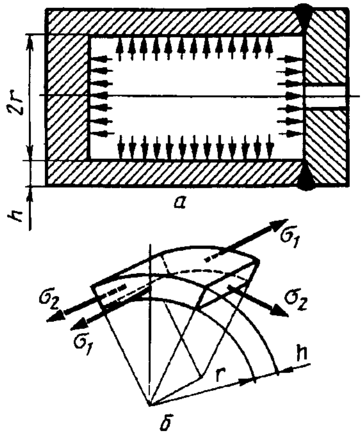


Рис. 14.22. Цилиндрический сосуд

Пример 1. Цилиндрический сосуд под действием газообразной среды с давлением p. Радиус цилиндрической оболочки равен r, толщина стенки h (рис. 14.22). В рассматриваемом случае главные радиусы кривизны $R_1 = \infty$, $R_2 = r$. Из уравнения (134) получаем кольцевое напряжение

$$\sigma_2 = p\frac{r}{h}. \tag{137}$$

Меридиональное напряжение находим из уравнения (136), пренебрегая весом среды и весом оболочки ($\alpha = 0$):

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}p\frac{r}{h}. \tag{138}$$

В цилиндрической оболочке при действии внутреннего давления окружные напряжения в два раза больше, чем продольные (меридиональные). Этим, кстати, объясняется, почему в трубах при избыточном давлении трещины идут вдоль образующих.

Пример 2. Сферический сосуд под действием газообразной среды с давлением p. Радиус сферической оболочки равен r; толщина стенки h (рис. 14.23):

$$R_1 = R_2 = r\,,\quad \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma\,.$$

По формуле (134) получаем

$$\sigma = \frac{1}{2} p \frac{r}{h}\,. \qquad (139)$$

Сопоставляя равенства (137) и (139), находим, что наибольшие напряжения в стенке сферического сосуда в два раза меньше, чем в стенке сосуда цилиндрического. Поэтому часто сосуды для хранения газообразной среды под давлением делают сферическими.

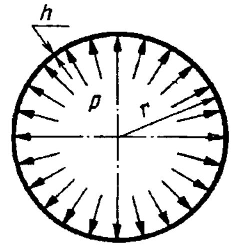


Рис. 14.23. Сферический сосуд

Пример 3. Сосуд с тяжелой жидкостью (рис. 14.24,*а*). Сосуд имеет цилиндрический и конический участки, заполнен тяжелой жидкостью с удельным весом γ. Рассмотрим сначала напряжения в цилиндрической части сосуда. Кольцевые напряжения по формуле (134) равны

$$\sigma_2(x_1) = p(x_1)\frac{r_0}{h} = \gamma x_1 \frac{r_0}{h}\,, \qquad (140)$$

где $p(x_1) = \gamma x_1$ — давление жидкости на расстоянии x_1 от свободной поверхности.

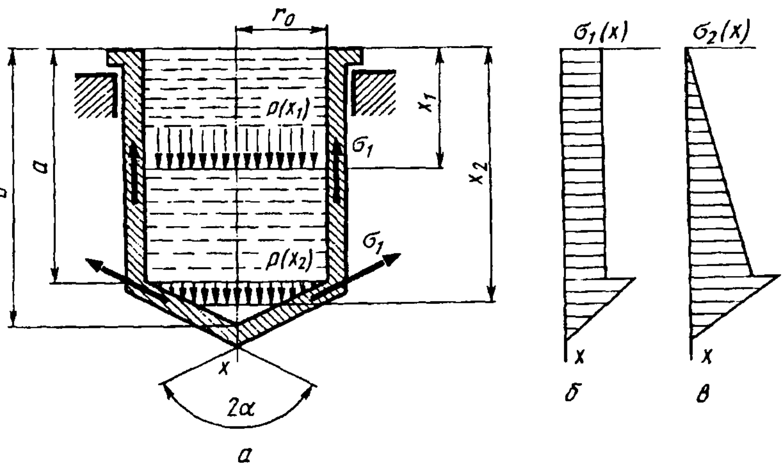


Рис. 14.24. Определение напряжений в стенках сосуда с тяжелой жидкостью

Продольное напряжение определим из уравнения (136). Пренебрегая весом оболочки, получаем

$$\sigma_1(x_1) = \frac{1}{2}\gamma x_1 \frac{r_0}{h} + \frac{1}{2\pi r_0 h}\left[\pi r_0^2(a - x_1)\gamma + \frac{1}{3}\pi r_0^2(b - a)\gamma\right]$$

или

$$\sigma_1(x_1) = \frac{1}{2}\gamma a \frac{r_0}{h} + \frac{1}{6}\gamma(b - a)\frac{r_0}{h}. \tag{141}$$

Продольные (меридиональные) напряжения в цилиндрической части сосуда постоянны по длине. Определим напряжения в конической части сосуда ($x_2 > a$). Из условия равновесия (136) имеем

$$\sigma_1(x_2) = \frac{1}{2}\gamma x_2 \frac{r(x_2)}{h\cos\alpha} + \frac{1}{2\pi r(x_2)\, h\cos\alpha}\cdot\frac{1}{3}\pi r^2(x_2)\,(b - x_2)\,\gamma.$$

Так как

$$r(x_2) = (b - x_2)\operatorname{tg}\alpha,$$

то

$$\sigma_1(x_2) = \frac{1}{2}\gamma x_2 \frac{(b - x_2)\sin\alpha}{h\cos^2\alpha} + \frac{\sin\alpha}{6h\cos^2\alpha}(b - x_2)^2\gamma. \tag{142}$$

Для конической части сосуда главные радиусы кривизны равны

$$R_1(x_2) = \infty, \quad R_2(x_2) = r(x_2)\frac{1}{\cos\alpha} = (b - x_2)\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}.$$

Из уравнения (134) находим

$$\sigma_2(x_2) = p(x_2)\frac{R_2(x_2)}{h} = \frac{\gamma x_2}{h}(b - x_2)\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}. \tag{143}$$

В сечении $x_1 = 0$

$$\sigma_1(0) = \frac{1}{2}a\gamma\frac{r_0}{h} + \frac{1}{6}(b - a)\gamma\frac{r_0}{h}, \quad \sigma_2(0) = 0.$$

В сечении $x_2 = a$

$$\sigma_1(a) = \frac{1}{2}a\gamma\frac{r_0}{h} + \frac{1}{6}(b - a)\gamma\frac{r_0}{h}, \quad \sigma_2(a) = a\gamma\frac{r_0}{h}.$$

Примерное распределение напряжений $\sigma_1(x)$ и $\sigma_2(x)$ показано на рис. 14.24,*б*,*в*. В месте перехода от цилиндрической части сосуда к конической имеется скачок напряжений. Кроме того, в месте перехода возникает моментное напряженное состояние, и потому переходные зоны в оболочках подкрепляются кольцевыми поясами.

Приближенная модель прочности оболочки вращения при осесимметричном нагружении. При построении приближенной модели принимается, что основное напряженное состояние оболочки является безмоментным. Краевой эффект учитывается приближенно с помощью расчета «эквивалентной цилиндрической оболочки» (рис. 14.25). Напряжения в оболочке при безмоментном напряженном состоянии определяются на основе зависимостей (134) и (136).

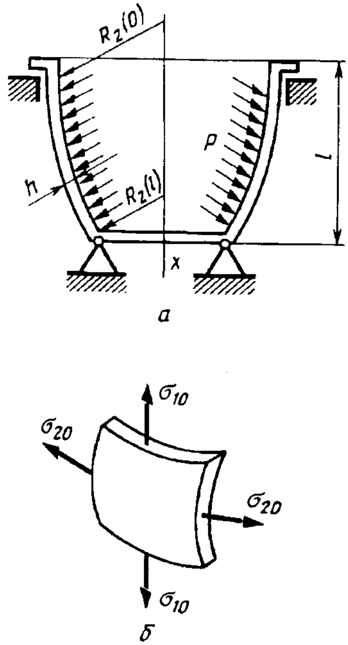


Рис. 14.25. Приближенная модель прочности оболочки вращения: *а* — схема оболочки; *б* — напряжения при безмоментном напряженном состоянии

Местные изгибные напряжения возникают в зонах крепления оболочки. Для определения моментного напряженного состояния возле сечения $x = 0$ оболочка вращения замещается полубесконечной цилиндрической оболочкой с радиусом

$$r = R_2(0)\,. \tag{144}$$

Для расчета используется решение (124)

$$w = C_1 e^{-\beta_0 x} \cos \beta_0 x + C_2 e^{-\beta_0 x} \sin \beta_0 x\,, \tag{145}$$

где при $\mu = 0{,}3$

$$\beta_0 = \frac{1{,}285}{\sqrt{R_2(0) h(0)}}\,,$$

$R_2(0)$ и $h(0)$ — второй главный радиус кривизны оболочки и толщина оболочки в сечении $x = 0$.

Произвольные постоянные C_1 и C_2 определяются из условий закрепления края $x = 0$. Например, при заделке края эквивалентной цилиндрической оболочки

$$C_1 = C_2 = -\frac{R_2(0)}{Eh}\left(N_1(0) - \mu N_2(0)\right).$$

Для края при $x = l$ моментное напряженное состояние определяется из решения

$$w = C_1^* e^{-\beta_l(l-x)} \cos\beta_l(l-x+\ ) + C_2^* e^{-\beta_l(l-x)} \sin\beta_l(l-x), \quad (146)$$

где при $\mu = 0{,}3$

$$\beta_l = \frac{1{,}285}{\sqrt{R_2(l)\, h(l)}}.$$

Модель прочности при статическом нагружении по общим (безмоментным) напряжениям

$$\frac{\sigma_в}{\sqrt{\sigma_{10}^2 + \sigma_{20}^2 - \sigma_{10}\sigma_{20}}} \geq [n_0], \quad (147)$$

где $\sigma_в$ — предел прочности материала; $[n_0]$ — допускаемое значение запаса по общим напряжениям, обычно принимается

$$[n_0] = 1{,}3 \div 2{,}5.$$

Модель прочности по местным напряжениям имеет вид

$$\frac{\sigma_в}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2}} \geq [n_м], \quad (148)$$

где σ_1, σ_2 — напряжения, учитывающие изгибную деформацию оболочки; $[n_м]$ — допускаемое значение запаса по местным напряжениям.

Приближенные модели устойчивости оболочки. Потеря устойчивости (внезапный рост прогибов и деформаций) может возникнуть в оболочках, если в них имеются значительные зоны, в которых действуют (общие) сжимающие напряжения. При внешнем давлении q в цилиндрической оболочке возникают сжимающие окружные напряжения

$$\sigma_2 = -q\frac{r}{h},$$

и, следовательно, при

$$q \leq q_{кр} \tag{149}$$

в оболочке может возникнуть потеря устойчивости ($q_{кр}$ — значение внешнего давления, соответствующее потере устойчивости оболочки).

По приближенной формуле Папковича (вывод формулы опускается)

$$q_{кр} = 0{,}92\frac{Eh^2}{lr}\sqrt{\frac{h}{r}}\,, \tag{150}$$

где E — модуль упругости; r, h, l — радиус, толщина и длина оболочки (расстояние между закрепленными контурами). Приближенная модель устойчивости цилиндрической оболочки при внешнем давлении имеет вид

$$q \leq \frac{1}{[n_у]}0{,}92\frac{Eh^2}{lr}\sqrt{\frac{h}{r}}\,, \tag{151}$$

где $[n_у]$ — допускаемое значение запаса устойчивости оболочки; обычно $[n_у] = 1{,}5 \div 2{,}5$.

При недостаточном запасе устойчивости проводится подкрепление оболочки кольцевыми и продольными стержнями.

Стенки оболочки могут потерять устойчивость при сжимающих продольных напряжениях

$$\sigma_{1кр} = 0{,}6E\frac{h}{r}\,. \tag{152}$$

Эта величина может служить оценкой для опасных (в смысле устойчивости) напряжений сжатия при изгибе тонкостенных оболочек.

Глава 15

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Современные ЭВМ дают возможность широкого использования численных методов определения напряжений и деформаций в элементах конструкций сложной формы. Среди таких методов наибольшее практическое значение имеет метод конечных элементов, разработанный и усовершенствованный в последние годы.

48. Введение в метод конечных элементов

Связь вариационных методов и метода конечных элементов. В вариационных методах упругие смещения, возникающие в теле под нагрузкой, представлялись в виде

$$u = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i(x, y, z),\ v = \sum_{i=1}^{n} b_i \varphi_i(x, y, z),$$
$$w = \sum_{i=1}^{n} c_i \psi_i(x, y, z), \tag{1}$$

где f_i, φ_i, ψ_i — заранее выбранные функции; a_i, b_i, c_i — неизвестные коэффициенты, определяемые из условия минимума полной потенциальной энергии системы.

Основные трудности при использовании вариационных методов состоят в выборе аппроксимирующих функций f_i, φ_i, ψ_i. Разумеется, что с помощью увеличения числа таких функций точность решения может быть повышена, однако учет местных особенностей напряженного состояния (концентрации напряжений) остается весьма трудным.

В методе конечных элементов тело разбивается на малые, но конечные элементы. Аппроксимация функций u, v, w проводится в каждом элементе отдельно. В качестве основных неизвестных принимаются смещения в узловых точках, сопрягающих отдельные конечные элементы (рис. 15.1).

Аппроксимация смещения внутри малой области позволяет использовать простейшие функции (линейные и квадратичные функции координат). Как и в вариационных методах, для получения разрешающей системы уравнений относительно неизвестных смещений узлов используется начало возможных перемещений:

$$\iiint\limits_V \{\delta\varepsilon\}^{\mathrm{T}}\{\sigma\}\,dV - \iiint\limits_V \{\delta u\}^{\mathrm{T}}\{F\}\,dV - \iint\limits_S \{\delta u\}^{\mathrm{T}}\{p\}\,dS = 0\,, \tag{2}$$

где $\{F\}$, $\{p\}$ — векторы объемной и поверхностной нагрузки; $\{\delta\varepsilon\}$, $\{\delta u\}$ — вариации (малые отклонения) векторов деформаций и смещений; верхний индекс «т» означает транспонирование.

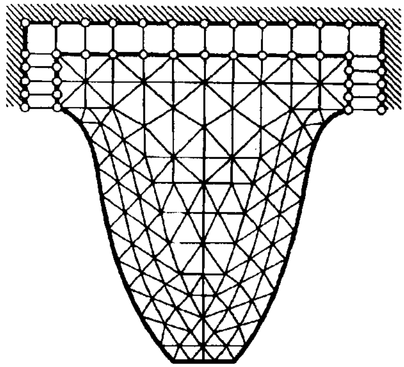


Рис. 15.1. Разбиение области на конечные элементы

Основные этапы решений в методе конечных элементов:

1. Разбиение конструкций на элементы.
2. Выражение перемещений и деформаций в элементе через смещения граничных точек (узлов) элемента.
3. Составление разрешающих уравнений с помощью начала возможных перемещений.
4. Определение узловых смещений, деформаций и напряжений.

В качестве конечных элементов могут использоваться не обязательно малые элементы. Важно только, чтобы поведение элемента (части конструкции) достаточно точно описывалось смещениями его узлов. Например, в качестве конечного элемента можно использовать стержень и т.п.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Статически неопределимая ферма (рис. 15.2). Считаем конечными элементами стержни; узлами элементов являются шарниры.

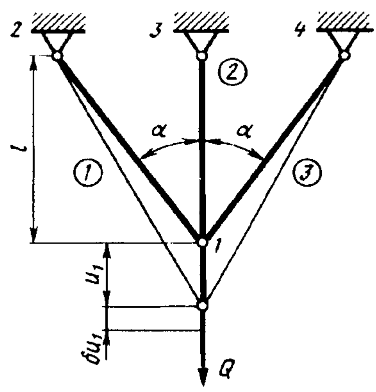


Рис. 15.2. Расчет статически неопределимой фермы методом конечных элементов

Отличным от нуля будет узловое смещение u_1.

Деформация в элементе *2* :

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{l} u_1 .$$

Деформация в элементах *1* и *3* :

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = \frac{\cos^2\alpha}{l} u_1 .$$

Напряжения в элементах:

$$\sigma_1 = \sigma_3 = \frac{E\cos^2\alpha}{l} u_1 , \quad \sigma_2 = \frac{E}{l} u_1 .$$

Начало возможных перемещений (2) запишем для системы в следующем виде:

$$\sum_{n=1}^{3} \iiint_{V_n} \{\delta\varepsilon_n\}^{\mathrm{T}} \{\delta_n\} \, dV - \iint_S \{\delta u\}^{\mathrm{T}} \{p\} \, dS = 0 . \qquad (3)$$

В этом равенстве интеграл по объему тела рассматривается как сумма интегралов по объему каждого элемента. Так как

$$\delta\varepsilon_1 = \delta\varepsilon_3 = \frac{\cos^2\alpha}{l} \delta u_1 , \quad \delta\varepsilon_2 = \frac{1}{l} \delta u_1 ,$$

то

$$\sum_{n=1}^{3} \iiint_{V_n} \{\delta\varepsilon_n\}^{\mathrm{T}} \{\delta_n\} \, dV = 2 \frac{\cos^2\alpha}{l} \delta u_1 \frac{E\cos^2\alpha}{l} u_1 \frac{l}{\cos\alpha} F +$$

$$+ \frac{1}{l} \delta u_1 \frac{E}{l} u_1 l F ,$$

где F — площадь сечения стержней.

По физическому смыслу

$$\iint_S \{\delta u\}^{\mathrm{T}} \{p\} \, dS = \delta u_1 Q$$

представляет возможную работу внешних сил при вариации смещения узла *1*. В соответствии с равенством (3)

$$\delta u_1 \left(\frac{EF}{l} (1 + 2\cos^3\alpha) u_1 - Q \right) = 0 \text{ или } \delta u_1 (K_{11} u_1 - Q) = 0 ,$$

где $K_{11} = \dfrac{EF (1 + 2\cos^2\alpha)}{l}$.

Так как $\delta u_1 \neq 0$, то получаем

$$u_1 = \frac{Q}{K_{11}} = \frac{Ql}{EF} \frac{1}{1 + 2\cos^3\alpha} .$$

Усилия в стержнях

$$N_1 = N_3 = \sigma_1 F = \frac{E \cos^2\alpha}{l} \frac{Ql}{EF} \frac{1}{1 + 2\cos^3\alpha} F = Q \frac{\cos^2\alpha}{1 + 2\cos^3\alpha} ,$$

$$N_2 = \sigma_2 F = \frac{E}{l} \frac{Ql}{EF} \frac{1}{1 + 2\cos^3\alpha} F = Q \frac{1}{1 + 2\cos^3\alpha} .$$

По физическому смыслу K_{11} представляет усилие, которое следует приложить в узле *1* для единичного смещения узла ($u_1 = 1$). Величина K_{11} называется коэффициентом жесткости.

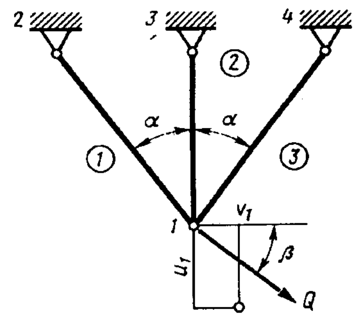


Рис. 15.3. Расчет статически неопределимой фермы под действием произвольной силы методом конечных элементов

Пример 2. Статически неопределимая ферма под действием произвольной нагрузки (рис. 15.3). Смещение узла *1* имеет составляющие u_1 и v_1. Для определения деформаций в стержнях находим проекцию полного смещения узла *1* на направления стержней и относим эту величину к его длине l :

$$\varepsilon_1 = \frac{(u_1 \cos\alpha + u_1 \sin\alpha)}{l} \cos\alpha = \frac{\cos^2\alpha}{l} u_1 + \frac{\sin\alpha \cos\alpha}{l} v_1 ,$$

$$\varepsilon_2 = \frac{u_1}{l} ,$$

$$\varepsilon_3 = \frac{(u_1 \cos\alpha - v_1 \sin\alpha)}{l} \cos\alpha = \frac{\cos^2\alpha}{l} u_1 - \frac{\sin\alpha \cos\alpha}{l} v_1 .$$

Напряжения в стержне

$$\sigma_1 = E\varepsilon_1\,,\ \sigma_2 = E\varepsilon_2\,,\ \sigma_3 = E\varepsilon_3\,. \tag{4}$$

Используя начало возможных перемещений (уравнение (3)), получаем

$$\begin{gathered}\left(\delta u_1 \frac{\cos^2\alpha}{l} + \delta v_1 \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{l}\right)\left(u_1 \frac{\cos^2\alpha}{l} + v_1 \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{l}\right) EF\frac{l}{\cos\alpha} + \\ + \delta u_1 \frac{1}{l}\frac{u_1}{l} EFl + \left(\delta u_1 \frac{\cos^2\alpha}{l} - \delta v_1 \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{l}\right)\times \\ \times\left(u_1 \frac{\cos^2\alpha}{l} - v_1 \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{l}\right) EF\frac{l}{\cos\alpha} - Q_u\delta u_1 - Q_v\delta v_1 = 0\,,\end{gathered} \tag{5}$$

где

$$Q_u = Q\sin\beta\,,\quad Q_V = Q\cos\beta\,. \tag{6}$$

Собирая члены при одинаковых вариациях, находим

$$\begin{gathered}\delta u_1\left\{\left(\frac{2\cos^3\alpha\, EF}{l} + \frac{EF}{l}\right)u_1 - Q_u\right\} + \\ + \delta v_1\left(\frac{2\sin^2\alpha\cos\alpha}{l} v_1 - Q_v\right) = 0\end{gathered} \tag{7}$$

или

$$\begin{Bmatrix}\delta u_1\\ \delta v_1\end{Bmatrix}^{\text{т}}\left\{[K]\begin{Bmatrix}u_1\\ v_1\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}Q_u\\ Q_V\end{Bmatrix}\right\} = 0\,, \tag{8}$$

где матрица жесткости

$$[K] = \frac{EF}{l} = \begin{bmatrix}1 + 2\cos^3\alpha & 0\\ 0 & 2\sin^3\alpha\cos\alpha\end{bmatrix}. \tag{9}$$

В силу произвольности вариаций из уравнения (8) получаем

$$[K]\begin{Bmatrix}u_1\\ v_1\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}Q_u\\ Q_V\end{Bmatrix} = 0\,. \tag{10}$$

Зависимости (10) позволяют определить смещение и затем деформации и напряжения в стержнях.

49. Основные уравнения метода конечных элементов

Аппроксимация перемещений внутри элемента. Ограничимся рассмотрением плоской задачи (например, растяжение листа с отверстием и т.п.). Область тела разбивается на малые, но конечные элементы, в частности треугольного типа, изображенного на рис. 15.4. Упругие перемещения в пределах n-го элемента будем считать линейными функциями координат

$$u(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y, \qquad (11)$$

$$V(x,y) = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y. \qquad (12)$$

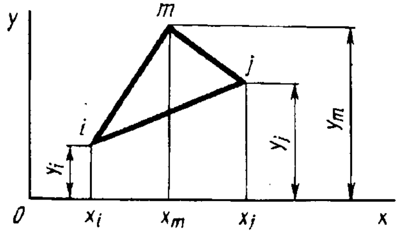


Рис. 15.4. Конечный элемент при решении плоской задачи

Неизвестные параметры $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_6$ выразим через смещения узлов.

Применяя равенство (11) для узлов i, j, m, получаем

$$\begin{aligned} &\alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i = u_i, \\ &\alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j = u_j, \\ &\alpha_1 + \alpha_2 x_m + \alpha_3 y_m = u_m. \end{aligned} \qquad (13)$$

В матричной форме имеем

$$\begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{Bmatrix}. \qquad (14)$$

Определяя из этого уравнения α_1, α_2, α_3, представляем равенство (11) в таком виде:

$$u(x,y) = (a_i + b_i x + c_i y)\, u_i + (a_j + b_j x + c_j y)\, u_j + $$
$$+ (a_m + b_m x + c_m y)\, u_m. \qquad (15)$$

Коэффициенты a_i, b_i, c_i определяются выражениями

$$a_i = (x_j y_m - x_m y_i)\frac{1}{2\Delta},$$
$$b_i = (y_j - y_m)\frac{1}{2\Delta}, \qquad (16)$$
$$c_i = (x_m - x_j)\frac{1}{2\Delta},$$

где

$$2\Delta = x_j y_m - x_m y_j + x_i(y_j - y_m) + y_i(x_m - x_j).$$

По физическому смыслу Δ — площадь треугольника $i\,j\,m$. Остальные коэффициенты $a_j, \ldots, c_m$ получаются из равенств (16) с помощью круговой перестановки индексов i, j, m. Например, $a_j = \dfrac{(x_m y_i - x_i y_m)}{2\Delta}$ и т.д. Для смещения вдоль оси y имеем

$$\begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_i \\ V_j \\ V_m \end{Bmatrix}. \qquad (17)$$

Формула для v аналогична (15):

$$V(x,y) = (a_i + b_i x + c_i y)V_i + (a_j + b_j x + c_j y)V_j +$$
$$+ (a_m + b_m x + c_m y)V_m. \qquad (18)$$

Равенства (15) и (18) выражают смещения точек треугольного конечного элемента через смещения его вершин (узлов).

В матричной форме уравнения (15) и (18) представим так:

$$\{u_n\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \{[\Phi_i],\ [\Phi_j],\ [\Phi_m]\} \begin{Bmatrix} U_i \\ U_j \\ U_m \end{Bmatrix}, \qquad (19)$$

где матрицы

$$[\Phi_i] = (a_i + b_i x + c_i y)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = f_i(x,y)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ldots \qquad (20)$$

и векторы смещений узлов

$$U_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ V_i \end{Bmatrix}, \qquad U_m = \begin{Bmatrix} u_m \\ V_m \end{Bmatrix}. \qquad (21)$$
$$U_j = \begin{Bmatrix} u_j \\ V_j \end{Bmatrix},$$

По физическому смыслу матрица формы [Φ_i] выражает перемещения точек элемента в случае, когда компоненты смещения узла i равны единице ($u_i = 1$, $V_i = 1$), а смещения других узлов отсутствуют. В соотношении (19) вектор-строка и вектор-столбец имеют блочную структуру; в более компактной форме зависимость (19) можно записать следующим образом:

$$\underset{1\times 1}{\overset{2\times 1}{\{u_n\}}} = \underset{1\times 3}{\overset{2\times 2}{[\Phi_n]}} \underset{3\times 1}{\overset{2\times 1}{\{U_n\}}}, \qquad (22)$$

где

$$\{U_n\} = \begin{Bmatrix} U_i \\ U_j \\ U_m \end{Bmatrix}. \qquad (23)$$

В равенстве (22) и в некоторых случаях в дальнейшем указаны числа строк и столбцов в блоках (верхние цифры) и числа строк и столбцов в самой матрице или векторе (нижние цифры).

Замечание. Главное преимущество при разбиении матрицы на блоки состоит в следующем: в дальнейшем блоки могут рассматриваться как обычные элементы матрицы. При умножении матриц (вектор также рассматривается как матрица) «внутренние» числа, указывающие размерности матриц и их блоков (попарно одинаковые), пропадают! Например, в равенстве (22) такими числами являются 3 в нижней строке и 2 в верхней. Крайние числа показывают числа строк и столбцов в той матрице и ее блоках, которые получаются в результате перемножения.

Деформации и напряжения внутри элемента. В плоской задаче связь деформаций и перемещений в n -м элементе устанавливается известными соотношениями (см. разд. 9):

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}. \qquad (24)$$

Запишем эти равенства в векторной форме:

$$\{\varepsilon_n\} = [\,D\,]\,\{u_n\}, \qquad (25)$$

где вектор деформаций в n -м элементе

$$\{\varepsilon_n\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix}, \quad \{u_n\} = \begin{Bmatrix} u \\ V \end{Bmatrix} \quad . \tag{26}$$

и матрица дифференцирования

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}. \tag{27}$$

Если учесть соотношение (22), то

$$\{\varepsilon_n\} = [D][\Phi_n]\{U_n\} = [B_n]\{U_n\}, \tag{28}$$

где матрица

$$[B_n] = [D][\Phi_n]. \tag{29}$$

Получим теперь равенство (29) непосредственно из соотношений (15) и (18). Дифференцируя, находим

$$\begin{aligned} &\varepsilon_x = b_i u_i + b_j u_j + b_m u_m, \quad \varepsilon_y = c_i V_i + c_j V_j + c_m V_m, \\ &\gamma_{xy} = c_i u_i + b_i V_i + c_j u_j + b_j V_j + c_m u_m + b_m V_m. \end{aligned} \tag{30}$$

В матричной форме имеем

$$\{\varepsilon_n\} = \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ V_i \\ u_j \\ V_j \\ u_m \\ V_m \end{Bmatrix}, \tag{31}$$

причем матрица

$$[B_n] = \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m \end{bmatrix}. \tag{32}$$

В дальнейшем матрицу $[B_n]$ удобно представить в блочной форме:

$$[B_n] = \Big[\, [B_i],\ [B_j],\ [B_m] \,\Big] = \underset{1\times 3}{\overset{3\times 2}{[B_n]}}. \tag{33}$$

Каждый блок матрицы относится к определенному узлу.
Соотношения упругости для плоской задачи:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y) + \alpha T,\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x) + \alpha T,\ \gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}$$

или

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) - \frac{E}{1-\mu}\alpha T,\ \sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x) - \frac{E}{1-\mu}\alpha T,$$
$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy}. \tag{34}$$

Последние уравнения представим в матричной форме:

$$\{\sigma\} = [A](\{\varepsilon\} - \{\alpha T\}), \tag{35}$$

где матрица

$$[A] = \frac{E}{1-\mu^2}\begin{vmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\mu}{2} \end{vmatrix},\ \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}. \tag{36}$$

Вектор температурной деформации

$$\{\alpha T\} = \alpha T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}. \tag{37}$$

Учитывая формулу (28), получаем

$$\underset{1\times 1}{\overset{3\times 3}{\{\sigma\}}} = \underset{1\times 1}{\overset{3\times 3}{[A]}} \left(\underset{1\times 3}{\overset{3\times 2}{[B_n]}} \underset{3\times 1}{\overset{2\times 1}{\{U_n\}}} - \underset{1\times 1}{\overset{3\times 1}{\{\alpha T\}}} \right). \tag{38}$$

В последнем равенстве снова указана блочная структура матриц, приспособленная к принятой структуре матрицы $[B_n]$.

Вариационное уравнение метода конечных элементов. Применяя начало возможных перемещений для всего тела, запишем

$$\iiint\limits_V \{\delta\varepsilon\}^{\mathrm{T}}\{\sigma\}\,dV - \iiint\limits_V \{\delta u\}^{\mathrm{T}}\{F\}\,dV - \iint\limits_S \{\delta u\}^{\mathrm{T}}\{p\}\,dS = 0, \qquad (39)$$

где V и S — объем и площадь поверхности тела.

Векторы объемной и поверхностной нагрузки

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix}, \quad \{p\} = \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix}. \qquad (40)$$

Интеграл по всему объему равен сумме интегралов по объемам элементов:

$$\sum_{n=1}^{N_э}\left(\iiint\limits_{V_n}\{\delta\varepsilon_n\}^{\mathrm{T}}\{\sigma_n\}\,dV - \iiint\limits_{V_n}\{\delta u_n\}^{\mathrm{T}}\{F\}\,dV - \iint\limits_{S_n\in S}\{\delta u_n\}^{\mathrm{T}}\{p\}\,dS\right) = 0, \qquad (41)$$

где $N_э$ — число элементов.

Последний интеграл распространяется только на участки поверхности элементов, принадлежащие внешней поверхности тела ($S_n \in S$). Из равенства (28) вытекает

$$\{\delta\varepsilon_n\} = [B_n]\,\{\delta U_n\} \qquad (42)$$

и для транспонированного вектора

$$\{\varepsilon_n\}^{\mathrm{T}} = \{\delta U_n\}^{\mathrm{T}}\,[B_n]^{\mathrm{T}}. \qquad (43)$$

С помощью соотношения (22) находим

$$\{\delta U_n\} = [\Phi_n]\,\{\delta U_n\} \qquad (44)$$

и далее

$$\{\delta u\}^{\mathrm{T}} = \{\delta U_n\}^{\mathrm{T}}\,[\Phi_n]^{\mathrm{T}}. \qquad (45)$$

Учитывая соотношения (43), (45) и (35), записываем уравнение (41) в таком виде:

$$\sum_{n=1}^{N_э} \{\delta U_n\}^{\mathrm{T}} \left(\left(\iiint\limits_{V_n} [B_n]^{\mathrm{T}} [A] [B_n] \, dV \right) \{U_n\} - \iiint\limits_{V_n} [B_n]^{\mathrm{T}} [A] \{\alpha T\} \, dV - \right.$$
$$\left. - \iiint\limits_{V_n} [\Phi_n]^{\mathrm{T}} \{F\} \, dV - \iint\limits_{S_n \in S} [\Phi_n]^{\mathrm{T}} \{p\} \, dS \right) = 0 . \tag{46}$$

Уравнение (46) представляет вариационное уравнение метода конечных элементов для плоской задачи.

Матрица жесткости элемента. В основном вариационном уравнении (46) элемент представлен матрицей жесткости

$$\underset{3\times 3}{\overset{2\times 2}{[K^n]}} = \iiint\limits_{V_n} \underset{3\times 1}{\overset{2\times 3}{[B_n]^{\mathrm{T}}}} \underset{1\times 1}{\overset{3\times 3}{[A]}} \underset{1\times 3}{\overset{3\times 2}{[B_n]}} \, dV . \tag{47}$$

Отметим, что при транспонировании матрицы числа строк и столбцов меняются местами.

В развернутой форме получим

$$[K^{(n)}] = \begin{bmatrix} [K_{ii}] & [K_{ij}] & [K_{im}] \\ [K_{ji}] & [K_{jj}] & [K_{jm}] \\ [K_{mi}] & [K_{mj}] & [K_{mm}] \end{bmatrix}, \tag{48}$$

где квадратные подматрицы — блоки n -го элемента (индекс n для краткости опускается):

$$[K_{ij}] = \iiint\limits_{V} [B_i]^{\mathrm{T}} [A] [B_j] \, dV . \tag{49}$$

Матрица $[K_{ij}]$ содержит компоненты усилий в i -м узле при единичных смещениях j -го узла при условии,что остальные узлы смещений не имеют.

Узловые нагрузки. В уравнении (46) внешние воздействия приводятся к эквивалентным нагрузкам, приложенным к узлам элемента. Если элемент примыкает к внешней поверхности тела ($S_n \in S$) , то распределенная нагрузка дает следующий вектор статически эквивалентных узловых усилий:

$$\{Q_p^{(n)}\} = \iint\limits_{S_n \in S} [\Phi_n]^{\mathrm{T}} \{p\} \, dS . \tag{50}$$

$$\{U\} = \underset{1\times N}{\overset{1\times 2}{\begin{Bmatrix} U_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ U_N \end{Bmatrix}}}, \qquad \{Q\} = \underset{1\times N}{\overset{1\times 2}{\begin{Bmatrix} Q_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ Q_N \end{Bmatrix}}}; \tag{59}$$

где N — общее число узлов.

Записанное в общей форме уравнение (58) является основным разрешающим уравнением метода конечных элементов. Матрица $[K]$ называется *матрицей жесткости конструкции*.

Матрица $[K]$ является квадратной матрицей $N{\times}N$, элементы которой также квадратные матрицы. Каждая строчка матрицы соответствует узлу и содержит кроме смещения соответствующего узла еще и смещения других узлов элементов, примыкающих к данному узлу.

Строчка матрицы для плоской задачи содержит два линейных уравнения относительно компонентов смещений.

В общем случае можно записать для i-й строчки основного уравнения (58) следующее выражение, вытекающее из уравнения (53):

$$\sum_{n\in i} \left([K_i^{(n)}]\,\{U_n\} - \{Q^{(n)}\} \right) = 0 . \tag{60}$$

Символ $n\in i$ означает, что в уравнение входят только элементы, примыкающие к i-му узлу; матрица $[K_i^{(n)}]$ содержит только одну строчку матрицы $[K^{(n)}]$, относящуюся к узлу с номером i. Например, для второго уравнения (57) получим из равенства (60) при $i=2$, $n=1,2$:

$$[[K_{21}^{(1)}][K_{22}^{(1)}][K_{23}^{(1)}]] \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} \{Q_2^{(1)}\} + [[K_{22}^{(2)}][K_{23}^{(2)}][K_{24}^{(2)}]] \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} - \{Q_2^{(2)}\} = 0 ,$$

что совпадает со вторым уравнением (57).

Замечания. 1. Основная система уравнений метода конечных элементов (58) обладает положительно определенной симметричной матрицей ленточной структуры. Для численного решения часто используют метод блочного исключения Гаусса, метод Холецкого и др.

2. Описанный вариант метода является простейшим. Применяются более сложные элементы с большим числом узлов и обобщенных узловых смещений. В качестве конечного элемента можно использовать участки пластинок, оболочек и т.п.

Теперь запишем уравнение (55) в другой форме, суммируя все члены, содержащие вариацию смещения данного узла:

$$\begin{aligned}
&\{\delta U_1\}^{\mathrm{T}}\Big([K_{11}^{(1)}]\{U_1\}+[K_{12}^{(1)}]\{U_2\}+[K_{13}^{(1)}]\{U_3\}-\{Q_1^{(1)}\}\Big)+\\
&+\{\delta U_2\}^{\mathrm{T}}\Big([K_{21}^{(1)}]\{U_1\}+\Big([K_{22}^{(1)}]+[K_{22}^{(2)}]\Big)\{U_2\}+\Big([K_{23}^{(1)}]+[K_{23}^{(2)}]\Big)\{U_3\}+\\
&+[K_{24}^{(2)}]\{U_4\}-\{Q_2^{(1)}\}-\{Q_2^{(2)}\}\Big)+\{\delta U_3\}^{\mathrm{T}}\Big([K_{31}^{(1)}]\{U_1\}+\\
&+\Big([K_{32}^{(1)}]+[K_{32}^{(2)}]\Big)\{U_2\}+\Big([K_{33}^{(1)}]+[K_{33}^{(2)}]\Big)\{U_3\}+[K_{34}^{(2)}]\{U_4\}-\{Q_3^{(1)}\}-\\
&-\{Q_3^{(2)}\}\Big)+\{\delta U_4\}^{\mathrm{T}}\Big([K_{42}^{(2)}]\{U_2\}+[K_{43}^{(2)}]\{U_3\}+[K_{44}^{(2)}]\{U_4\}-\{Q_4^{(2)}\}\Big)=0.
\end{aligned} \tag{56}$$

Вариации смещения узлов могут быть совершенно произвольными, и равенство (56) возможно только в том случае, когда выражения при вариациях обращаются в нули. Отсюда получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных узловых смещений:

$$\begin{aligned}
&[K_{11}^{(1)}]\{U_1\}+[K_{12}^{(1)}]\{U_2\}+[K_{13}^{(1)}]\{U_3\}-\{Q_1\}=0,\\
&[K_{21}^{(1)}]\{U_1\}+\Big([K_{22}^{(1)}]+[K_{22}^{(2)}]\Big)\{U_2\}+\Big([K_{23}^{(1)}]+[K_{23}^{(2)}]\Big)\{U_3\}+\\
&+[K_{24}^{(2)}]\{U_4\}-\{Q_2\}=0,\\
&[K_{31}^{(1)}]\{U_1\}+\Big([K_{32}^{(1)}]+[K_{32}^{(2)}]\Big)\{U_2\}+\Big([K_{33}^{(1)}]+[K_{33}^{(2)}]\Big)\{U_3\}+\\
&+[K_{34}^{(2)}]\{U_4\}-\{Q_3\}=0,\\
&[K_{42}^{(2)}]\{U_2\}+[K_{43}^{(2)}]\{U_3\}+[K_{44}^{(2)}]\{U_4\}-\{Q_4\}=0,
\end{aligned} \tag{57}$$

где $\{Q_i\}$ — вектор усилий, действующих на узел i со стороны всех примыкающих к узлу элементов. Например,

$$\{Q_2\}=\{Q_2^{(1)}\}+\{Q_2^{(2)}\}.$$

Уравнения (57) представим в матричной форме:

$$[K]\{U\}=\{Q\}, \tag{58}$$

где векторы узловых смещений и усилий равны

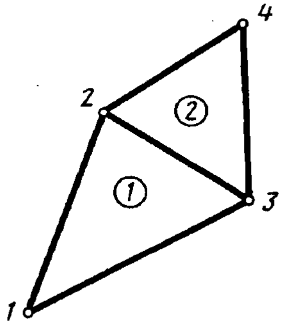


Рис. 15.5. Формирование матрицы жесткости для двух элементов

Для внутренних границ элементов $\{ Q_p^{(n)} \} = 0$. Вклад массовых сил и температурных воздействий в узловые усилия составляет

$$\{ Q_F^{(n)} \} = \iiint_{V_n} [\, \Phi_n \,]^{\mathrm{T}} \{ F \} \, dV, \tag{51}$$

$$\{ Q_T^{(n)} \} = \iiint_{V_n} [\, B_n \,]^{\mathrm{T}} [\, A \,] \{ \alpha T \} \, dV. \tag{52}$$

Отметим, что узловые нагрузки не зависят от искомых смещений и могут считаться заданными.

Разрешающая система линейных алгебраических уравнений метода конечных элементов (МКЭ). Уравнение (46) представим в следующей записи:

$$\sum_{n=1}^{N_э} \{ \delta U_n^{\mathrm{T}} \} \Big([\, K^{(n)} \,] \{ U_n \} - \{ Q^{(n)} \} \Big) = 0, \tag{53}$$

где суммарный вектор узловых усилий равен

$$\{ Q^{(n)} \} = \{ Q_T^{(n)} \} + \{ Q_F^{(n)} \} + \{ Q_p^{(n)} \}. \tag{54}$$

Рассмотрим в качестве простейшего примера плоское тело, разбитое на два конечных элемента (рис. 15.5). Для указанного тела уравнение (53) в развернутой форме будет таким:

$$\begin{aligned}
&\{\delta U_1\}^{\mathrm{T}} \Big([\, K_{11}^{(1)} \,] \{U_1\} + [\, K_{12}^{(1)} \,] \{U_2\} + [\, K_{13}^{(1)} \,] \{U_3\} - \{Q_1^{(1)}\} \Big) + \\
&+ \{\delta U_2\}^{\mathrm{T}} \Big([\, K_{21}^{(1)} \,] \{U_1\} + [\, K_{22}^{(1)} \,] \{U_2\} + [\, K_{23}^{(1)} \,] \{U_3\} - \{Q_2^{(1)}\} \Big) + \\
&+ \{\delta U_3\}^{\mathrm{T}} \Big([\, K_{31}^{(1)} \,] \{U_1\} + [\, K_{32}^{(1)} \,] \{U_2\} + [\, K_{33}^{(1)} \,] \{U_3\} - \{Q_3^{(1)}\} \Big) + \\
&+ \{\delta U_2\}^{\mathrm{T}} \Big([\, K_{22}^{(2)} \,] \{U_2\} + [\, K_{23}^{(2)} \,] \{U_3\} + [\, K_{24}^{(2)} \,] \{U_4\} - \{Q_2^{(2)}\} \Big) + \\
&+ \{\delta U_3\}^{\mathrm{T}} \Big([\, K_{32}^{(2)} \,] \{U_2\} + [\, K_{33}^{(2)} \,] \{U_3\} + [\, K_{34}^{(2)} \,] \{U_4\} - \{Q_3^{(2)}\} \Big) + \\
&+ \{\delta U_4\}^{\mathrm{T}} \Big([\, K_{42}^{(2)} \,] \{U_2\} + [\, K_{43}^{(2)} \,] \{U_3\} + [\, K_{44}^{(2)} \,] \{U_4\} - \{Q_4^{(2)}\} \Big) = 0.
\end{aligned} \tag{55}$$

В уравнении (55) вектор $\{U_i\}$ содержит компоненты смещения u_i, v_i узла i ($i = 1, 2, 3, 4$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. — М.:Машиностроение, 1975.
2. Биргер И.А. Стержни, пластинки, оболочки. — М.: Наука, 1992.
3. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике.—М.: Мир, 1975.
4. Мавлютов Р.Р. Концентрация напряжений в элементах авиационных конструкций.—М.: Наука, 1981.
5. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести.—М.: Машиностроение, 1975.
6. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела.—М.: Наука, 1979.
7. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов.—М.: Наука, 1967.
8. Филин А.П. Прикладная механика твердого деформируемого тела.—М.: Наука, 1975. — Т. 1-3.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ИБ № 130

Лицензия № 040211 от 15.01.92
Сдано в набор 11.08.93. Подписано в печать 03.10.94
Формат $60 \times 84^{1}/_{16}$. Бумага кн.-журн. Гарнитура Таймс
Печать офсетная. Усл. печ. л. 29,76.
Тираж 5000 экз. Заказ 203. С-123

Издательство МАИ, 125871, Москва, Волоколамское шоссе, 4

Отпечатано с готового оригинал-макета
в типографии ИПО «Полигран»
125438, Москва, Пакгаузное шоссе, 1