

Е. Ю. БАРЗИЛОВИЧ

МОДЕЛИ ТЕХНИЧЕСКОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

Допущено Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов высших
технических учебных заведений



МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1982

ББК 22.11
Б26
УДК 510(022)

Рецензенты:

кафедра прикладной математики МВТУ им. Н. Э. Баумана
и проф. В. К. Дедков

Барзилович Е. Ю.

Б26 Модели технического обслуживания сложных систем:
Учеб. пособие. — М.: Высш. школа, 1982. — 231 с., ил.

В пер.: 80 к.

В пособии дается краткая характеристика сложных систем и средств их обслуживания. Излагаются различные математические модели эксплуатации сложных систем. Подробно рассматриваются вопросы повышения достоверности контроля сложных систем, диагностики их технического состояния, взаимодействия оператора и сложной системы. Приводятся задачи групповой эксплуатации сложных систем и задачи информационного обеспечения программ эксплуатации сложных систем.

Предназначается для студентов вузов. Может быть полезно специалистам, работающим в области эксплуатации сложных технических систем различного назначения, а также студентам факультетов прикладной математики.

Б 1502000000—171 32—82
001(01)--82

ББК 22.11
517

ПРЕДИСЛОВИЕ

В основу настоящего учебного пособия положены курсы лекций, прочитанных автором в высших технических учебных заведениях, в различных научно-производственных объединениях и научно-исследовательских организациях, а также выборочно в МГУ им М. В. Ломоносова. Большой интерес, проявленный слушателями к этим лекциям, послужил стимулом к систематизированному изложению как теоретических основ технического обслуживания сложных систем, так и принципиальных вопросов, связанных с реализацией математических моделей обслуживания в автоматизированных системах контроля и управления.

Известно, что за счет совершенствования математического обеспечения технического обслуживания сложных систем в процессе эксплуатации можно получить существенный экономический эффект. Именно поэтому в «Основных направлениях экономического и социального развития СССР на 1981—1985 годы и на период до 1990 года» большое внимание уделено необходимости осуществления мер по радикальному улучшению технического обслуживания сложного оборудования, ускорению внедрения автоматизированных методов и средств контроля качества его работы, совершенствованию вычислительной техники и ее математического обеспечения, средств и систем сбора, передачи и обработки информации.

Среди имеющихся в настоящее время пособий по теории эксплуатации сложных систем следует отметить книгу В.К. Дедкова и Н. А. Северцева «Основные вопросы эксплуатации сложных систем», получившую Золотую медаль ВДНХ. Однако за последние годы не только получили дальнейшее развитие изложенные в этой книге математические модели, но были получены и новые результаты, связанные с эксплуатацией сложных систем по состоянию, их контролем и диагностикой, взаимодействием операторов и сложной системы, эксплуатацией систем в отсутствие или при ограничении запасного комплекта элементов. Все это нашло отражение в настоящем пособии.

Пособие состоит из девяти глав.

В гл. I даны общие понятия, определения и показатели, используемые в пособии, характеризуются средства технического обслуживания сложных систем и классифицируются применяемые математические методы.

В гл. II подробно изложены оптимальные модели эксплуатации «стареющих» элементов систем по ресурсу. Рассмотрены стареющие элементы различной структуры. Показано, как можно рассчитать объем запасного комплекта для оптимальной эксплуатации элементов по ресурсу.

В последние годы большое внимание уделяется моделям и методам эксплуатации сложных систем по состоянию, реализация которых на практике может дать существенный экономический эффект при сохранении (а в ряде случаев и при увеличении) надежности систем. Вопросам эксплуатации сложных систем по состоянию посвящены гл. III и IV. В этих главах рассмотрены модели, лежащие в основе создания программ эксплуатации сложных систем по состоянию, изложены методики оценки предполагаемого эффекта от внедрения моделей и методов эксплуатации сложных систем по состоянию. Приведены технические решения, позволяющие реализовать с помощью автоматизированных устройств контроля (на базе вычислительной техники) рассмотренные модели эксплуатации систем по состоянию.

В процессе измерения (контроля) состояния системы практически всегда имеют место ошибки измерения. Поэтому возникает вопрос о достоверности (правильности) результатов контроля состояния системы. Методы оценки и повышения достоверности контроля сложных систем в процессе эксплуатации изложены в гл. V.

В гл. VI дано описание моделей эксплуатации систем в условиях, когда отказ может быть обнаружен только при очередном контроле (проверке). Рассматриваемые модели критичны к имеющейся информации о надежности системы и времени ее эксплуатации.

В гл. VII пособия рассмотрены проблемные вопросы эксплуатации сложных систем, связанные с теоретическим и практическим решением задач контроля и диагностики, адаптивной диагностики, оценкой взаимодействия операторов и сложной системы, эксплуатацией системы, в которой при отказах допускается изменение структуры для сохранения приемлемой эффективности (работоспособности).

Гл. VIII посвящена вопросам оптимизации, возникающим при эксплуатации групп однотипных систем. Дается характеристика управляемых систем массового обслуживания и подробно рассматривается задача массового обслуживания, известная в литературе как задача В. В. Филиппова. Уделено внимание перспективным моделям повышения производительности труда, позволяющим анализировать системы производства, в которых возможно прерывание работ по обслуживанию техники (§ 8.2 написан В. В. Филипповым).

В гл. IX изложены вопросы информационного обеспечения, возникающие при эксплуатации сложных технических систем. Показаны роль и место вычислительной техники при решении этих вопросов.

Автор считает необходимым отметить, что создание настоящего пособия было бы невозможным, если бы он не имел возможности использовать советы и помощь Б. В. Гнеденко, Ю. К. Беляева, В. А. Каштанова, И. Н. Коваленко, А. Д. Соловьева и А. Н. Ширяева.

Автор выражает глубокую благодарность инициатору данного пособия Н. А. Северцеву, написавшему § 3 гл. VI, коллегам по работе В. Б. Алексеевой, В. Ф. Воскобоеву, Г. С. Гладуну, В. В. Корнееву, В. В. Плямоватому, Ю. А. Юркову; полученные ими результаты были использованы при написании гл. VII, а также В. Г. Мезенцеву и А. В. Кравченко.

Особую благодарность автор приносит рецензентам книги.

ВВЕДЕНИЕ

Под программой эксплуатации системы понимают совокупность взаимосвязанных по месту, времени и содержанию работ, которые обеспечивают хранение, транспортировку и поддержание системы в заданном состоянии для применения ее по назначению. Работам по техническому обслуживанию в программах эксплуатации отводится значительное место.

Оптимальная программа эксплуатации заключается в обеспечении наилучшего применения системы по назначению при выполнении обслуживающим персоналом фиксированного объема работ во время ее эксплуатации. Для создания оптимальных программ эксплуатации применяют современные математические методы и вычислительные средства. Оптимальные программы эксплуатации, по существу, являются оптимальными программами управления в общей постановке задачи управления.

Основной в теории управления является теория оптимизации, позволяющая максимально улучшить качество управления. До 50-х годов в теории оптимального управления изучались задачи расчета траекторий ракет для достижения заданной высоты, дальности и траектории при минимальном расходе горючего и задачи отыскания оператора обратной связи как функции фазовых координат системы. Затем эти задачи решали в рамках единой теории управления, общие методы которой используют в настоящее время и в теории эксплуатации сложных систем. Бурное развитие теории оптимального управления получила после работ Л. С. Понтрягина, в которых был сформулирован принцип максимума. В настоящее время язык теории оптимальных процессов является универсальным языком современной теории управления. В технике возник термин «оптимальные системы». Это понятие еще не имеет [27] четкого математического содержания. При проектировании оптимальных систем управления систему нельзя охарактеризовать одним критерием. По мнению автора, некоторую аналогию здесь можно провести и с понятием «оптимальная программа эксплуатации системы». Последняя представляет собой набор определенным образом оформленных решений оптимальных задач. Характер многих из этих задач и методы их решения подробно описаны ниже.

Отметим также, что управляющее воздействие на эксплуатируемую систему должно осуществляться либо в соответствии с программой эксплуатации, которую составляют заранее, исходя из априорных сведений о системе, либо в виде так называемой позиционной стратегии, соответствующей управлению состоянием системы по принципу обратной связи. В последнем случае управляющее воздействие на экс-

платируемую систему формируется апостериорно, на основании дополнительной информации о состоянии системы, которая становится известной при измерении параметров ее состояния в процессе эксплуатации. Такое управление системой далее называется *эксплуатацией системы по состоянию*. Модели, лежащие в основе определения программ эксплуатации системы, требуют полной информации об исходных данных (о надежности и ремонтпригодности системы, о статистике случайных процессов изменения ее параметров, о накоплении нарушений в системе и др.). Однако на практике требование полноты исходных данных выполняется не всегда. Поэтому в настоящем пособии рассмотрен и вопрос формирования программ эксплуатации в случае неполных исходных данных о надежности системы.

Программы эксплуатации реализуются автоматически или операторами с помощью технических средств (автоматов контроля и вычислителей, пультов управления, контрольно-измерительных приборов и т. д.). Для одиночной системы программа эксплуатации в большинстве случаев сводится к указанию последовательности работ по техническому обслуживанию системы в процессе эксплуатации.

Многие из математических моделей технического обслуживания сложной системы можно описать следующей общей схемой. Пусть в дискретные моменты времени наблюдается векторный случайный процесс $Z(t) = X(t) + N(t)$ с известными статистическими характеристиками составляющих $X(t)$ и $N(t)$, где $X(t)$ — вектор состояния (характеризуемый, например, набором выходных контролируемых параметров) сложной системы, контролируемой идеальными техническими средствами; $N(t)$ — аддитивный вектор ошибок измерений (как правило, это гауссовский случайный процесс). Обозначим через $R(t)$ векторную неслучайную функцию, имеющую ту же размерность, что и $Z(t)$, и являющуюся дискретно наблюдаемыми реализациями (траекториями) вектора $Z(t)$. На наблюдаемых траекториях случайного процесса $Z(t)$ зададим некоторый функционал потерь

$$\Phi \{R(t)\}, \quad (B.1)$$

которые определяются как потери на управление процессом $Z(t)$ для удержания его в заданной области $D(t)$. Физически функционал $\Phi \{R(t)\}$ означает потери времени или стоимости на техническое обслуживание сложной системы в процессе ее эксплуатации, а область $D(t)$ — эксплуатационные допуски на все контролируемые параметры системы (как правило, $D(t) = D$).

Обозначим, далее, через $\delta_{t_i}(Z_{t_i})$, $i = 0, 1, 2, \dots$ решение на управление процессом $Z(t_i)$ в момент t_i . Назовем набор решений

$$\delta_T(Z_T) = \{\delta_1(Z_1), \delta_2(Z_2), \dots, \delta_k(Z_k = Z_T)\} \quad (B.2)$$

стратегией управления на периоде $(0, T)$, где T — период эксплуатации сложной системы (не исключен случай $T \rightarrow \infty$). Физически стратегия $\delta_T(Z_T)$ означает все воздействия, которым подвергается сложная система в процессе эксплуатации со стороны обслуживающего персонала (регулировка, замена блоков системы и т. п.).

Задача состоит в выборе стратегии управления $\delta_T(Z_T) = \delta_T^*(Z_T)$, минимизирующей математическое ожидание функционала потерь на периоде эксплуатации $(0, T)$, т. е. обеспечивающей

$$\min_{\delta_T^*} M[\Phi\{R(t)\}]. \quad (B.3)$$

При решении сформулированной задачи важно знать вид функционала потерь $\Phi\{R(t)\}$ и класс известных процессов, которыми можно аппроксимировать реальный процесс $Z(t)$.

Если состояние системы полностью определяется выходными параметрами, то для поиска оптимальной стратегии управления состоянием системы применяют либо аппарат марковских (полумарковских) управляемых случайных процессов, либо правила оптимальной остановки, либо моделирование. Аппарат марковских и полумарковских управляемых случайных процессов применяют, если параметры характеризуются слабыми зависимостями в последовательные моменты измерений. Рассматривая для такой системы математическое ожидание функционала потерь (B.1) как показатель затрат на эксплуатацию системы, получаем однородную и марковскую оптимальную стратегию управления состоянием системы [42]. Если выбранное в фиксированный момент времени управление состоянием системы зависит только от этого момента времени, то его называют *марковским*, а стратегию, определяемую этими управлениями, — *марковской* стратегией. Если это управление не зависит от времени, то оно называется *однородным* и *марковским*. Стратегия из марковских однородных управлений является однородной марковской стратегией управления.

Для отыскания оптимальной марковской однородной стратегии управления состоянием системы широкое применение получили методы динамического и линейного программирования. Отметим, что для полумарковского процесса оптимальная стратегия управления также является однородной марковской стратегией. (Полумарковский процесс задается помимо набора вероятностей переходов из состояния в состояние в соседние моменты времени функциями распределения времени пребывания процесса в каждом из состояний перехода.)

Если параметры, которые характеризуют состояние системы в процессе эксплуатации, не являются марковскими, то помимо отыскания оптимальной стратегии методом моделирования для параметров (процессов) монотонного типа, характеризующих естественный износ и старение системы, можно воспользоваться аналитическим методом, основанным на лемме Д. Дуба [23].

Рассмотрим процедуру использования этой леммы при отыскании оптимальной стратегии технического обслуживания системы. Приведем правило остановки наблюдений. Пусть наблюдается последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$. *Правило остановки процесса наблюдения есть функция $v(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots)$, принимающая значения $0, 1, 2, \dots$. Функция $v(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots)$ имеет следующий смысл: если $v(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = m$, то это означает (при условии, что $\xi_1 = x_1, \dots, \xi_m = x_m$), что процесс наблюдения случайной последовательности заканчивается на m -м шаге.*

Если $v(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots) = 0$, то принимают решение не проводить наблюдения над случайными величинами.

Определим для любых $x_1, \dots, x_n$ ($n \geq 0$) функцию убыва

$$y = y_n(x_1, \dots, x_n) \quad (B.4)$$

как убыток, имеющий место при остановке наблюдений на n -м шаге, когда $\xi_1 = x_1, \dots, \xi_n = x_n$. Если известна функция распределения случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$, то при заданном правиле остановки $v(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots)$ можно определить математическое ожидание значения процесса y_n в момент остановки наблюдений, т. е. величину

$$M[y_v(\xi_1, \xi_2, \dots)(\xi_1, \dots, \xi_n)]. \quad (B.5)$$

Правило v^* называется *оптимальным правилом остановки*, если оно обеспечивает минимальное математическое ожидание (B.5). Для эффективного практического отыскания оптимальных правил остановки для функционала (B.1) или (B.4) важную роль играет следующая лемма.

Лемма Дуба. Если существует правило остановки $v^*(x_1, x_2, \dots)$, для которого выполняются следующие условия:

- 1) $M[v^*]$ существует и конечно;
- 2) для любых $n \geq 0$ и $x_1, \dots, x_{n-1}$ при $n \leq v^*(x_1, \dots, x_{n-1}, \dots)$ выполняется соотношение $M[y_n(x_1, \dots, x_{n-1}, \xi_n)] \leq y_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})$, при $n \geq v^*(x_1, \dots, x_{n-1}, \dots)$ — соотношение

$$M[y_n(x_1, \dots, x_{n-1}, \xi_n)] \geq y_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1});$$

- 3) при любых $n, x_1, \dots, x_{n-1}$ для некоторой константы K

$$M[|y_n(x_1, \dots, x_{n-1}, \xi_n) - y_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})|] \leq K,$$

то v^* — оптимальное правило остановки.

При решении задач технического обслуживания сложных систем 1) и 3) условия леммы выполняются всегда.

Рассмотрим процедуру проверки условия 2) при решении оптимальной задачи эксплуатации по состоянию сложной системы. Пусть дискретно контролируемый параметр системы $X(t)$, определяющий в процессе эксплуатации ее работоспособность, изменяется монотонно (монотонно возрастает). Допустимая область изменения $X(t)$ задана соотношением $0 \leq X(t) \leq D$, где D — верхняя граница допуска на параметр системы. Параметр контролируется безошибочно в дискретные моменты $t_i = i\Delta t$ с интервалом Δt ($i = 0, 1, 2, \dots$).

Рассмотрим управление, заключающееся в том, что параметр можно регулировать с обязательным возвращением в нулевое состояние в любой момент контроля при нахождении в пределах допуска. Кроме того, параметр подлежит обязательному управлению в момент контроля, когда впервые обнаружен выход его за границу D (аварийная регулировка).

Обозначим приращения параметра $X(t)$ по шагам контроля через ξ_i ($i = 1, 2, \dots$), примем их независимыми и имеющими общую функцию

распределения $F(x)$. Функция убытка на n -м шаге

$$y_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, \xi_n) = \begin{cases} C, & \text{если } X(t_n) \leq D, \\ \xi_1 = x_1, \dots, \xi_{n-1} = x_{n-1}; \\ C + A, & \text{если } X(t_n) > D, \\ \xi_1 = x_1, \dots, \xi_{n-1} = x_{n-1}. \end{cases}$$

где C — время, затрачиваемое на управление (регулировку) параметра $X(t)$, если он не вышел за допустимый уровень D ; $C + A$ — время на регулировку вышедшего за допуск параметра $X(t)$ (A — некоторое дополнительное время (штраф), возникающее в результате выхода параметра за уровень D).

Естественно предположить, что в момент контроля t_{n-1} известны все приращения процесса $X(t)$ и процесс находится ниже уровня D . Величина $y_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, \xi_n)$ является случайным убытком (в силу того, чтоб убытки C и $C + A$ возникают с определенными вероятностями на каждом шаге наблюдения), имеющим место при остановке наблюдения на $(n - 1)$ -м шаге (известно, что $\xi_1 = x_1, \dots, \xi_{n-1} = x_{n-1}$).

Введем удельный убыток $\hat{y}_n$, обозначив через t_z момент выхода параметра $X(t)$ за уровень D :

$$\hat{y}_n(x_1, \dots, x_{n-1}, \xi_n) = \begin{cases} C/t_n, & \text{если } t_n < t_z, \\ \xi_1 = x_1, \dots, \xi_{n-1} = x_{n-1}, \xi_n = ?; \\ (C + A)/t_n, & \text{если } t_n \geq t_z, \\ \xi_1 = x_1, \dots, \xi_{n-1} = x_{n-1}. \end{cases}$$

Запись $\xi_n = ?$ означает, что величина ξ_n еще не наблюдалась (наблюдения закончились на $(n - 1)$ -м шаге). Для условного математического ожидания удельного убытка $\hat{y}_n$ для n -го шага наблюдения процесса $X(t)$ при условии, что приращения процесса наблюдались до $(n - 1)$ -го шага включительно, применяя формулу полной вероятности, имеем

$$\begin{aligned} M[\hat{y}_n(x_1, \dots, x_{n-1}, \xi_n)] &= \frac{C}{t_n} P\{\xi_n < D - X_{t_{n-1}} / \xi_1 = x_1, \dots, \\ &\dots, \xi_{n-1} = x_{n-1}\} + \frac{C + A}{t_n} [1 - P\{\xi_n < D - X_{t_{n-1}} / \xi_1 = x_1, \dots, \xi_{n-1} = x_{n-1}\}] = \\ &= \frac{C}{t_n} + \frac{A}{t_n} [1 - P\{\xi_n < D - X_{t_{n-1}} / \xi_1 = x_1, \dots, \xi_{n-1} = x_{n-1}\}]. \quad (\text{B.6}) \end{aligned}$$

Проверим условие 2) леммы Дуба. Запишем это условие для $n \geq 0$ и удельного убытка $\hat{y}_n$: при $n - 1 \leq v^*(x_1, \dots, x_{n-1}, \dots)$

$$M[\hat{y}_n(x_1, \dots, x_{n-1}, \xi_n)] \leq \hat{y}_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}),$$

при $n - 1 \geq v^*(x_1, \dots, x_{n-1}, \dots)$

$$M[\hat{y}_n(x_1, \dots, x_{n-1}, \xi_n)] \geq \hat{y}_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Покажем, что при $n - 1 \leq v^* (x_1, \dots, x_{n-1}, \dots)$

$$M[\hat{y}_n(x_1, \dots, x_{n-1}, \xi_n)] \leq C/t_{n-1} = \hat{y}_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-2}, \xi_{n-1}), \quad (B.7)$$

и наоборот (см. условие 2) леммы). Докажем, что условие (B. 7) выполняется при

$$1 - P\{\xi_n < D - X_{t_{n-1}}/\xi_1 = x_1, \dots, \xi_{n-1} = x_{n-1}\} \leq C/[A(n-1)]. \quad (B.8)$$

В самом деле, подставляя в (B.6) вместо $1 - P\{\xi_n < D - X_{t_{n-1}}/\xi_1 = x_1, \dots, \xi_{n-1} = x_{n-1}\}$ большее или равное значение $C/[A(n-1)]$, сразу же получаем (B.7). Аналогично проверяется и вторая часть условия 2). Следовательно, $v^*(x_1, \dots, x_{n-1}, \dots) = n^* - 1$, где n^* — наибольшее n , при котором еще верно соотношение (B.8).

Таким образом удастся получить в явном аналитическом виде оптимальный алгоритм эксплуатации сложной системы по состоянию. Если под параметром состояния системы понимать ее наработку, то в поиске оптимальной стратегии управления состоянием системы в процессе эксплуатации по показателю оперативной готовности (вероятности заставить систему в произвольный момент времени в исправном состоянии и безотказно проработать некоторое (малое по сравнению со средним временем ее безотказной работы) заданное время) фундаментальную роль играет теорема В. А. Каштанова [4].

Пусть имеем дробно-линейный функционал (относительно функций $G_i(x)$)

$$h(\vec{G}) = \frac{\int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty A(x_1, x_2, \dots, x_N) dG_1(x_1) dG_2(x_2) \dots dG_N(x_N)}{\int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty B(x_1, x_2, \dots, x_N) dG_1(x_1) dG_2(x_2) \dots dG_N(x_N)}, \quad (B.9)$$

где $A(x_1, x_2, \dots, x_N)$ и $B(x_1, x_2, \dots, x_N)$ — произвольные функции; $G_i(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$, — функции распределения некоторых положительных случайных величин. Теорема Каштанова позволяет облегчить процедуру определения экстремумов функционала $h(\vec{G})$ на множество Ω функций распределений $\vec{G} = \{G_1(x_1), G_2(x_2), \dots, G_N(x_N)\}$.

Теорема. Если функционал (B. 9) ограничен на множестве Ω и $B(x_1, x_2, \dots, x_N)$ сохраняет постоянный знак при любых аргументах, то локальные экстремумы функционала достигаются на множестве Ω^* функций распределения

$$G_i(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{при } x_i \leq \tau_i, \\ 1 & \text{при } x_i > \tau_i, \end{cases} \quad i = \overline{1, N}. \quad (B.10)$$

Применяя эту теорему при решении задач технического обслуживания сложных систем, можно переходить от решения вариационных задач (отыскания экстремумов функционалов) к решению задач на определение экстремума функций одного или нескольких аргументов. В приложениях функции $G_i(x_i)$ имеют смысл функций распределения

времени между моментами окончания предупредительных замен элементов сложной системы, а функции вида (В. 10) означают, что замены элементов осуществляют через детерминированные времена τ_i , $i = \overline{1, N}$.

Если параметром состояния сложной системы (или ее элемента) является наработка, то математическое ожидание функционала (В. 9) является показателем оперативной готовности — дробно-линейным функционалом относительно $G(x)$. Все условия теоремы Каштанова в этом случае выполнены, и можно сравнительно просто решить задачу по определению сроков предупредительных замен стареющих элементов сложной системы (элементов с монотонно возрастающей функцией интенсивности отказов $\lambda(t)$).

В основе успешного применения моделей технического обслуживания сложных систем на практике лежит объективная и оперативная информация об их надежности, эксплуатационной технологичности и ремонтпригодности. В процессе эксплуатации сложных систем большое внимание уделяется весьма сложным вопросам оперативной передачи информации. Здесь, безусловно, должен быть учтен как накопленный опыт, так и новые технические средства передачи данных (буквопечатание по радио, дистанционный ввод (вывод) данных в машину, передача кодированием по радио); в ряде случаев могут оказаться достаточно оперативными и обычные средства передачи данных.

Для ускорения внедрения современных вычислительных систем (цифровых, аналоговых, комбинированных и специализированных вычислительных машин) в практику эксплуатации сложных технических систем необходимо решить следующие задачи: разработать требования к вычислительным системам по быстродействию, объему памяти, способам и времени ввода данных в машину, формам представления обработанных данных и т. д.; создать алгоритмы и рабочие программы для вычислительных систем, решающих задачи обработки информации контроля и выдачи рекомендаций обслуживающему персоналу; разработать алгоритмы решения задач по составлению расписания группового обслуживания систем, учитывающие их наработку и состояние и обеспечивающие максимальную готовность групп систем.

ГЛАВА I

ТЕОРИЯ ЭКСПЛУАТАЦИИ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ КАК НАУКА

§ 1.1. Основные понятия, термины и определения *

Сложная система. Под сложной технической системой (далее просто системой) будем понимать совокупность функционально связанных разнородных устройств, предназначенных для выполнения общих функций и решения стоящих перед системой задач. Сложная система состоит из большого числа элементов, однако сложность системы в основном определяется связями, возникающими между элементами в процессе работы системы. Примерами сложных систем являются современный летательный аппарат, корабль, радиоэлектронный комплекс, космический корабль и др.

Сложные системы в процессе эксплуатации, как правило, взаимодействуют с оператором (операторами). В этом случае вводят понятие человеко-машинного комплекса или системы. Если сложные системы объединены организационно, то их рассматривают как большую систему или систему большого масштаба (такой системой, например, является парк самолетов гражданской авиации, таксомоторный парк большого города и т. д.).

Под элементом будем понимать часть системы, восстанавливаемую в процессе эксплуатации только путем замен. Для элементов стареющего типа вводятся предупредительные замены (до отказа) по истечении заданной наработки (ресурса).

Программа эксплуатации сложной системы. Программа эксплуатации — это совокупность взаимосвязанных по месту, времени и содержанию работ, обеспечивающих эксплуатацию системы (систем) в заданном состоянии готовности, а также применение ее (их) по назначению. В программе эксплуатации сложной системы помимо работ по техническому обслуживанию предусматривают ее взаимодействие с операторами и другими системами, участвующими в решении общих задач; учет различных режимов работы; перестройку структуры системы при возникновении нарушений; организацию ремонтов; модернизацию и продление ресурса системы.

Реализация положений программы эксплуатации системы должна обеспечить значения показателей качества ее работы, предусмотренных нормативной документацией.

Техническое обслуживание системы. Техническое обслуживание определим как комплекс работ для поддержания исправности или толь-

* В пособии использованы ГОСТ 16263—70, 183—73, 13377—75 и 1.25—76.

ко работоспособности системы при ее подготовке и использовании по назначению, хранении и транспортировке. В процессе технического обслуживания восстанавливается качество работы системы. Техническое обслуживание предусматривает проведение предупредительного (профилактического) обслуживания либо текущее обслуживание (текущий ремонт) системы.

Эксплуатационные свойства сложной системы. Эксплуатационные свойства определяются ее безотказностью, сохраняемостью, долговечностью, ремонтпригодностью, степенью готовности к выполнению стоящей перед системой задачи и приспособленностью к техническому обслуживанию в заданных условиях эксплуатации.

Определим *ремонт* как комплекс работ для поддержания и восстановления исправности или работоспособности системы. Ремонт, предусмотренный в нормативной документации и осуществляемый в плановом порядке, назовем *плановым*. Ремонт, выполнение которого отложено в нормативной документации, но осуществляемый в неплановом порядке, назовем *неплановым*.

Ремонт, осуществляемый в процессе эксплуатации для гарантированного обеспечения работоспособности системы и состоящий в замене и восстановлении ее отдельных частей и их регулировке, определим как *текущий*.

Ремонт, осуществляемый для восстановления исправности и полного или близкого к полному восстановления ресурса системы с заменой или восстановлением любых ее частей, включая базовые, и их регулировкой, назовем *капитальным*.

Обеспечение ремонтпригодности системы обусловливается мероприятиями при ее проектировании, создании и эксплуатации, направленными на сокращение продолжительности технического обслуживания и затрат на его проведение. По способу использования сложные системы подразделяются на: *непрерывно работающие, системы разового действия и дежурные*.

Понятия, термины и определения, связанные с контролем сложной системы. *Объект контроля* — система, информацию о техническом состоянии которой необходимо иметь в процессе производства и эксплуатации.

Измерительная информация — информация, поступающая из объекта контроля в аппаратуру контроля и характеризующая состояние объекта контроля.

Контроль — процесс приема, обработки и отображения информации, характеризующей соответствие состояния объекта контроля предъявленным к нему требованиям и обеспечивающей принятие решения на техническое обслуживание и выдачу управляющих воздействий.

Информационная система контроля — совокупность измерительной информации об объекте контроля (сложной системе), средствах контроля, измерения и передачи измерительной информации.

Контрольно-измерительная аппаратура — комплекс технических средств для решения задачи контроля и измерения параметров объекта контроля. Она может быть ручной, полуавтоматической и автоматической.

Контролепригодность характеризует приспособленность объекта контроля к проведению контроля.

Контролируемый параметр — величина, определяющая техническое состояние системы или составной ее части (вплоть до элемента).

Классификация видов контроля сложной системы. По целевому назначению различают: контроль на функционирование (без количественной оценки); контроль работоспособности (количественный); диагностический контроль; прогнозирующий контроль; профилактический контроль (обнаружение и замена элементов с параметрами, близкими к предельным значениям).

По оценке результатов контроль можно подразделить на: допусковой («да» — «нет», «меньше — норма — больше»); количественный.

По анализу параметров различают: выборочный контроль; последовательный контроль.

По времени выполнения имеют место: непрерывный контроль (в процессе работы объекта); циклический контроль (в процессе работы объекта); периодический контроль (в течение срока эксплуатации объекта).

По виду контроля различают: динамический контроль — контроль выходных характеристик объекта без разрыва обратных связей; статический контроль — контроль объекта по отдельным параметрам.

По степени автоматизации контроль можно подразделить на: ручной; полуавтоматический (автоматизированный); автоматический (без участия человека в процессе контроля).

По организации контроль делится на: программный; схемный с помощью встроенного в объект оборудования; дистанционный и централизованный.

Алгоритм контроля — последовательность операций для осуществления процесса контроля.

Математическое обеспечение задач контроля, управления и диагностики. Математическое обеспечение — это совокупность алгоритмов контроля, управления и диагностики для обеспечения эксплуатации сложной системы.

Введем понятие *управляемого случайного процесса*, играющее фундаментальную роль при решении оптимальных задач эксплуатации по состоянию сложных технических систем. Проиллюстрируем определение этого понятия на примере марковской управляемой цепи. Известно, что случайный процесс (характеризующий состояние некоторой системы) с дискретным временем $\xi = \{\xi_{t_n}, n = 0, 1, \dots\}$ образует марковскую (неуправляемую) цепь, если

$$P\{\xi_{t_{n+1}} = x_{n+1} / \xi_{t_0}, \dots, \xi_{t_n}\} = P\{\xi_{t_{n+1}} = x_{n+1} / \xi_{t_n}\}.$$

Для определения управляемой цепи предположим, что заданы некоторое пространство D' управлений d_{t_n} и набор переходных вероятностей или матриц вероятностей перехода (что одно и то же)

$$P\{\xi_{t_{n+1}} = x_{n+1} / \xi_{t_n}, d_{t_n}\}, n = 0, 1, \dots, \quad (1.1)$$

зависящих от управлений $d_{t_n} \in D'$.

нического обслуживания (при эксплуатации сложных систем по состоянию) иллюстрируется графически.

Коэффициент оперативной готовности $p(x, t)$ — вероятность заставить элемент (систему) в исправном состоянии в произвольный момент t и проработать безотказно с момента t заданное оперативное время x . Стационарное значение коэффициента оперативной готовности

$$p(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} p(x, t).$$

используемое в гл. II, при $x = 0$ имеет смысл широко известного в литературе коэффициента готовности.

После определения оптимального значения заданного ресурса стареющего элемента τ_0 (см. § 2. 1) эксплуатация его организуется по схеме, приведенной на рис. 1.1, на которой x_1, x_2, x_3 — реализации случайной величины X' — времени безотказной работы элемента. В момент $t = 0$ элемент устанавливают в систему и планируют его профилактическую замену через время τ_0 . Однако элемент отказывает через время

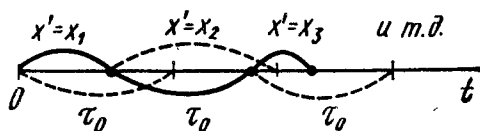


Рис. 1.1

$x_1 < \tau_0$. Поэтому при $t = x_1$ его замену перепланируют (для простоты полагаем мгновенным время замены элемента): по плану она должна выполняться в момент $x_1 + \tau_0$, если от момента $t = x_1$ до момента $x_1 + \tau_0$ элемент не откажет (этот момент и изображен на рис. 1.1, где $x_2 > \tau_0$). Следовательно, в момент $x_1 + \tau_0$ осуществляют плановую предупредительную (профилактическую) замену элемента. В момент $x_1 + \tau_0$ вновь назначают плановую замену через время τ_0 (она должна проводиться в момент $x_1 + 2\tau_0$). Но после последней замены элемент отказывает через время $x_3 < \tau_0$ и в момент $x_1 + \tau_0 + x_3$ его очередную замену перепланируют. В указанном порядке осуществляют и дальнейшую замену элемента.

Показатель средних удельных затрат в виде математического ожидания отношения двух случайных величин используют в задачах оптимизации, когда имеет место первый выход параметра за пределы установленного допуска. Оптимальная стратегия эксплуатации системы, полученная с помощью этого показателя, отличается от оптимальной стратегии эксплуатации, полученной по показателю, который называется показателем средних удельных затрат в виде отношения математических ожиданий двух случайных величин. Строго говоря, первый показатель применяют для систем однократного действия, второй — для систем, эксплуатируемых в течение длительного времени. Однако использование обоих показателей для систем длительной эксплуатации (на примере параметра марковского типа) показало, что оптимальная стратегия эксплуатации для систем одноразового действия является квазиоптимальной для систем длительной эксплуатации.

Поясним подробнее смысл введенных показателей. Обозначим через C затраты на регулировку параметра системы. Тогда:

$$C = \begin{cases} C_1, & \text{если осуществляется предупредительная регулировка;} \\ C_2, & \text{если осуществляется аварийная регулировка.} \end{cases}$$

Пусть T — время до регулировки параметра. Тогда

$$T = \begin{cases} T_1, & \text{если имеет место предупредительная регулировка;} \\ T_2, & \text{если имеет место аварийная регулировка.} \end{cases}$$

Величины C и T являются случайными. Поэтому введенные показатели средних удельных затрат можно соответственно записать как

$$\hat{y} = M[C/T] \text{ или } u = M[C]/M[T].$$

Очевидно, что $M[C/T] \neq M[C]/M[T]$.

Показатели оценки эффективности применения методом моделирования различных моделей технического обслуживания систем. Используют следующие показатели: *средние затраты на отказ; среднее время до первого отказа; коэффициент готовности системы; средние затраты на регулировку и (отдельно) восстановление системы; составной показатель «затраты — надежность».*

При минимизации средних суммарных затрат на эксплуатацию системы или средних удельных затрат важно учитывать и показатель надежности (ненадежности) системы — вероятность ее безотказной работы (вероятность отказа) за фиксированное время. Обозначим заданную вероятность безотказной работы за шаг контроля через $P_{\Delta t}$. Тогда, например, для всех моментов остановки наблюдений $n < n^* - 1$ (см. выражение (В.8)) должно выполняться неравенство

$$P\{\xi_n < D - X_{t_{n-1}}/\xi_1 = x_1, \dots, \xi_{n-1} = x_{n-1}\} \geq P_{\Delta t}.$$

Если это неравенство выполняется и для момента $n^* - 1$, то по показателю надежности система в течение очередного отрезка времени Δt может выполнять свои задачи.

Показатели, связанные с достоверностью контроля параметров системы. Под *достоверностью контроля* понимают вероятность правильной оценки состояния параметров (параметра) системы. Все используемые в дальнейшем показатели достоверности выражаются через «риск изготовителя» (ошибка первого рода) и «риск заказчика» (ошибка второго рода). Прежде чем перейти к показателю достоверности контроля (при многократных измерениях параметра), определим *риск изготовителя* как вероятность того, что работоспособная система будет в результате контроля признана негодной, а *риск заказчика* — как вероятность того, что неработоспособная система будет признана по результатам контроля годной.

Введем показатель оптимизации по достоверности — *решающую функцию* $P(k, n)$, $k \leq n$. Определим ее следующим образом. Пусть происходит n -кратное измерение высокочувствительным средством контроля одного и того же параметра. Если не менее k раз ($k \leq n$) средство контроля покажет, что параметр находится в заданном кванте, то принимают решение о нахождении контролируемого параметра

в этом кванте. Такую процедуру (систему) принятия решения назовем (k, n) -процедурой.

Решающей функцией $P(k, n)$ назовем условную вероятность получить заключение, что параметр находится в заданном кванте, если в k повторных измерениях из n ($1 \leq k \leq n$) отмечается нахождение параметра в заданном кванте при условии, что в действительности параметр находится в заданном кванте, и о том, что параметр не находится в заданном кванте, если в не более чем $(k-1)$ -м измерении из n отмечается его нахождение в заданном кванте при условии, что параметр в этом кванте не находится. Обычно стремятся при фиксированном n выбрать такое $k = k_{\text{опт}}$, чтобы обеспечить

$$\max_{1 \leq k \leq n} P(k, n) = \max_{k_{\text{опт}}} P(k, n).$$

При этом минимизируются ошибки первого и второго рода, которые в рассматриваемом случае трактуются следующим образом: *ошибка первого рода* — вероятность того, что при наличии не менее k показаний о нахождении параметра в заданном кванте принимается решение о нахождении параметра в этом кванте, хотя в действительности параметр там не находится; *ошибка второго рода* — вероят-

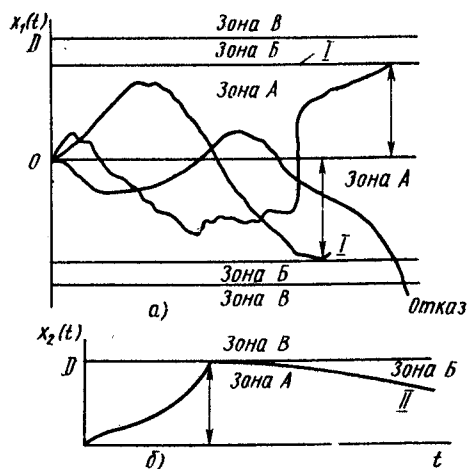


Рис. 1.2

ность того, что при наличии по крайней мере $(k-1)$ -го показания о нахождении параметра в заданном кванте принимается решение, что параметр там не находится, когда в действительности он в этом кванте находится.

Важным показателем, связанным с достоверностью контроля, который используется ниже в одной из оптимальных моделей технического обслуживания, является *вероятность отсутствия после контроля системы (группы функциональных элементов) необнаруженных отказов*.

В заключение рассмотрим важный вопрос о характере получаемых при эксплуатации систем по состоянию оптимальных стратегий управления. Марковская однородная стратегия управления для параметра с двусторонним допуском изображена на рис. 1.2, а, неоднородная стратегия управления для параметра (немарковского) монотонно возрастающего типа с односторонним допуском — на рис. 1.2, б. В обоих случаях поле возможных изменений параметра разбито на три зоны (А, Б и В), которые мысленно можно окрасить (по аналогии со светофором) соответственно в зеленый, желтый и красный цвета. При нахождении параметра в зоне А регулировки (преграды к изменению) параметра не назначают, зона Б предупреждающая — необходима предупредитель-

ная (упреждающая) регулировка («остановиться, осмотреться, иначе двигаться дальше опасно»), хотя система не отказала (параметр не вышел в аварийную зону В). При попадании параметра в зону В осуществляют аварийную регулировку (дальнейшие изменения параметра недопустимы — аналогия с красным сигналом светофора).

В гл. III показано, как выбрать границу между зонами А, Б и В так, чтобы обеспечить минимум рассматриваемых показателей затрат и сохранить высокую надежность системы. Получаемые при этом оптимальные стратегии управления имеют вид стратегий, изображенных на рис. 1.2 (стратегии I и II).

§ 1.3. Технические средства контроля и диагностики сложных систем как инструмент эксплуатации по состоянию

При совершенствовании программ эксплуатации сложных систем и переходе к их эксплуатации по состоянию возникают проблемы создания алгоритмов обработки статистической информации, накапливаемой с помощью средств контроля, с целью выдачи оптимальных (по показателям готовности и надежности) рекомендаций обслуживающему персоналу о проведении необходимых (упреждающих или аварийных) регулировок или об оптимальных путях поиска неисправностей. При обслуживании по состоянию предполагается широкое использование текущей информации, получаемой в результате измерений параметров систем.

В настоящее время получили широкое применение встроенные в систему средства автоматизированного контроля, которые позволяют быстро оценивать работоспособность оборудования, а при наличии неисправностей выдавать сигнал «негоден». Однако эти средства автоконтроля пока выполняют свои функции с небольшой достоверностью и точностью; по мере совершенствования микроэлектроники и вычислительной техники встроенные средства контроля также совершенствуются, что позволит обеспечить более оперативное и эффективное использование различных технических систем по своему прямому назначению.

Для обслуживания систем существуют стационарные пункты и устройства контроля и диагностики, с помощью которых выполняются работы, связанные с аварийными или профилактическими заменами (регулировками), ремонтом, осуществлением мероприятий сезонного характера, различными доработками.

В ряде случаев встроенные автоматизированные системы контроля (например, на транспортных самолетах) могут выдавать инструкции по ремонту (замене съемных блоков) непосредственно в полете или после посадки.

Все средства автоконтроля должны быть универсальными, легко приспособляемыми к различным системам. Они должны не только указывать (с точностью до сменного блока системы) место неисправности, но и выдавать по результатам контроля необходимые рекомендации на обслуживание, прогнозируя и предупреждая о возможных неисправностях, одновременно сокращая до минимума трудозатраты на

обслуживание. Задача сводится к созданию алгоритмов анализа накапливаемой информации с помощью автоматизированных систем контроля. Такие алгоритмы обработки информации контроля непосредственно разрабатывают для ЭВМ, входящих в системы автоконтроля, используя априорную информацию о техническом состоянии контролируемого оборудования. По существу, задача сводится к управлению ходом случайного процесса изменения контролируемого параметра системы и установлению границ его изменения на основании информации о протекании процесса. Это позволяет по мере накопления опыта эксплуатации либо уменьшать, либо увеличивать допуски на рабочие характеристики системы.

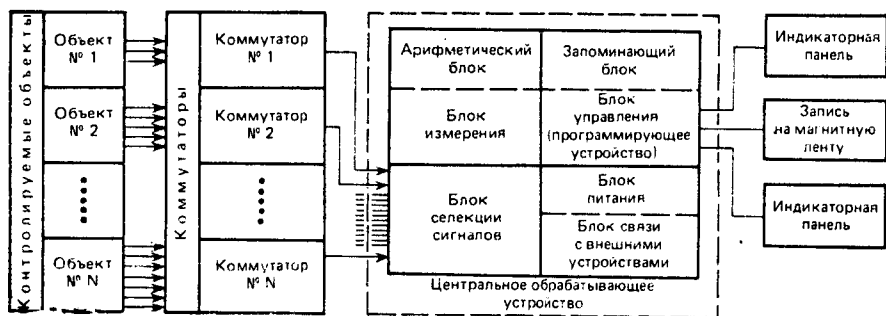


Рис. 1.3

Проблемы самоконтроля систем автоматизированного контроля, высокой их надежности, малого веса и достоверности выдаваемых результатов измерений очевидны.

Рассмотрим типовую блок-схему встроенной (или конструктивно объединенной с системой) автоматизированной системы контроля, в которой отображена возможность реализации алгоритмов управления техническим состоянием объектов и выдачи по результатам контроля обоснованных рекомендаций обслуживающему персоналу. Укрупненная блок-схема такой встроенной типовой автоматизированной системы контроля изображена на рис. 1.3. Рассмотрим отдельные элементы, входящие в ее состав. Коммутаторы предназначены для выбора и подключения контрольных точек, согласования выходов источников сигналов с последующими целями. В современных системах контроля адреса контрольных точек поступают на коммутатор в виде последовательного кода, а затем с помощью сдвигового регистра разворачиваются в параллельный (или параллельно-последовательный) код. Коммутация контрольных точек, как правило, двухпроводная. Каждый коммутатор питается от сети питания системы отдельно.

Центральное обрабатывающее устройство содержит следующие блоки: управления (программирующий блок); селекции сигналов (коммутации, нормализации и преобразования сигналов в постоянные напряжения); блок измерения и вычисления, состоящий из преобразо-

вателей «аналог — код» и вычислительного устройства; блок питания, в который может входить устройство управления выводом и индикацией.

Блок управления включает долговременное запоминающее устройство (ДЗУ), выполняемое обычно на диодах. В ДЗУ содержатся программа контроля и информация по каждому контролируемому параметру (номинал, предельно допустимые и упреждающие профилактические допуски). Управляется ДЗУ, как правило, от счетчика, который одновременно выполняет функции регистра и счетчика команд. В числе команд должны находиться операции безусловного перехода с возвратом, что позволяет организовать стандартное программирование и менять последовательность проверок. Обычно программа контроля одного параметра содержит несколько команд. Команды, считанные с ДЗУ, поступают на счетчик команд, регистр управления селекцией сигналов, регистр команд и регистр выбора контрольных точек.

Блок селекции сигналов служит для выбора необходимого коммутатора, подключения выхода коммутатора к цепям нормализации и преобразования и запоминания мгновенного значения сигнала для измерения. В блоке селекции имеются: коммутатор для подключения выхода коммутаторов параметров к нормализаторам и преобразователям в любой комбинации, буферные усилители, схемы запоминания напряжения, нормализаторы, детекторы, усилители и другие элементы. В блоке селекции измеряются следующие величины: постоянное напряжение, отношение постоянных напряжений, пиковое значение переменного напряжения, среднее значение переменного напряжения, отношение пиковых значений переменного напряжения, частота, период.

Блок измерения преобразует методом поразрядного кодирования аналоговые сигналы в цифровую форму. Собственно блок измерения почти всегда включает схему сравнения и преобразователь «код — аналог». В качестве регистров управления преобразователями часто используют регистры арифметического блока.

Арифметическое устройство выполняет четыре арифметических действия. В гл. III будет показано, что часто для каждого параметра не нужно хранить результаты всех предыдущих измерений, а необходимо только запоминать значение параметра в момент измерения, хранить в памяти номинал и признак (номер) допустимого диапазона отклонения параметра. Это позволяет значительно уменьшить объем памяти, необходимой для хранения информации о параметрах.

Таким образом, для каждого параметра вычисляется отклонение измеренного значения от заданного номинала, которое затем нормализуется и сравнивается с одним из диапазонов допустимого отклонения.

Перспективным является создание такого арифметического блока, в котором были бы предусмотрены контроль переходных процессов и функциональный (тестовый) контроль системы, а структура и функциональные возможности блока были бы тесно связаны, как с методами решения задач контроля переходных режимов аппаратуры, так и со структурой блока измерения.

Продолжим описание блок-схемы. Блок питания и связи выдает питающие эталонные напряжения на центральное обрабатывающее уст-

роизводство, устройство записи на магнитную ленту, блоки управления и выдачи сигналов для индикаторных панелей, блоки выдачи и контроля правильности записи на магнитную ленту и на счетчики измерения времени. Встроенная в систему индикаторная панель предназначена для выдачи персоналу обобщенного представления о состоянии и возможности дальнейшего использования систем оборудования (индикация работоспособности). Наиболее распространенная конструкция такой панели — световое табло. Обычно все системы (при контроле с помощью встроенных средств) подразделяются на отдельные группы (для вывода на табло). В каждой группе может быть несколько подсистем или характерных мест отказов.

Кроме того, на специальную панель может выдаваться информация о месте отказа с точностью до сменного блока. Эта информация должна сохраняться до конца использования системы. В этой панели используется не световое табло, а бленкеры. При срабатывании бленкера его невозможно закрыть до тех пор, пока не заменен отказавший блок. На панель выводятся также сигналы самоконтроля автоматизированных средств контроля (АСК).

Блок записи на магнитную ленту предназначен для записи параметров прогнозирования (которые затем обрабатывают отдельно с помощью особых приставок для уточнения значений оптимальных упреждающих допусков, содержащихся в ДЗУ) и параметров, вышедших за границы установленных допусков. Питание и управление блоком осуществляется от центрального обрабатывающего устройства. Параметр может записываться, например, в виде 12-разрядного слова (в две строки, по шесть разрядов в каждой).

Как видно из описания приведенной блок-схемы автоматизированной системы контроля, в ней, по существу, применена цифровая специализированная вычислительная машина. Однако это не исключает возможности выполнения задач управления контролем, анализа результатов, хранения программ и исходных данных с помощью универсальной ЭВМ. Следует только учитывать, что усложнение оборудования и решаемых с его помощью задач значительно увеличивает требования к ЭВМ. Поэтому решение с ее помощью еще и задач управления контролем потребует увеличения возможностей ЭВМ или компромисса между решением задач контроля и выполнением других задач.

Возможно использование ЭВМ при решении наиболее сложных или специфических задач контроля, когда АСК и ЭВМ связаны через схему прерывания.

Степень комплектования сложной системы различным оборудованием влияет на организацию процесса его контроля. Так, в зависимости от типа системы часть функций по контролю и индикации работоспособности может осуществляться на уровне всей системы, а часть — на уровне ее отдельных подсистем. В первом случае для автоконтроля и поиска неисправностей возможно применение центральной или отдельной ЭВМ. Во втором случае для этого используют либо ЭВМ системы, выполняющую наряду с основными функциями и функции контроля, либо специализированное вычислительное устройство. Не ис-

ключено также использование резервных возможностей ДЗУ ЭВМ одной подсистемы для автоконтроля других подсистем.

Выше отмечалось, что для выработки сигнала «система исправна — неисправна» (по результатам контроля параметров) необходима единственная операция сравнения. Обычно измеренные в различных контрольных точках аналоговые сигналы после нормализации и преобразования в цифровые подаются в специализированную (или центральную) ЭВМ, где сравниваются с допустимыми (аварийными) или упреждающими профилактическими пределами (допусками), хранящимися в ДЗУ. Однако этот традиционный путь измерения может быть нарушен: операции измерения контролируемых параметров могут быть заменены непосредственно операциями их сравнения с допустимыми пределами, выполняемыми схемами сравнения, которые встраивают в контролируемый блок (подсистему).

Ограничения по весу не всегда позволяют устанавливать во встроенных системах контроля точные генераторы стимулирующих сигналов и различные устройства обработки информации по результатам контроля работоспособности и поиска неисправностей. Эти устройства часто используются автономно. Автономные средства автоконтроля систем находят применение при более детальном поиске неисправностей в системе после установления факта наличия неисправности с помощью встроенных средств автоконтроля, на складах в процессе контроля снятых с эксплуатации систем и находящихся на хранении отдельных подсистем с указанием места неисправности до уровня отдельных блоков, модулей, плат; в ремонтных базах и мастерских с локализацией неисправности внутри блока, модуля, платы до уровня отдельных элементов. Большая часть этой работы выполняется автоматически, однако остаются еще и многочисленные ручные операции. После устранения неисправностей, выполнения ремонтных и регламентных работ автономные устройства автоконтроля осуществляют более глубокую проверку всего контролируемого оборудования, чем встроенные средства автоконтроля. При этом ЭВМ во встроенной системе контроля должна работать совместно с ЭВМ автономного средства автоматизированного контроля (например, в процессе записи на магнитную ленту автономная ЭВМ анализирует те дополнительные параметры, которые не подвергались анализу с помощью ЭВМ, входящей в состав встроенных средств контроля).

Отметим также, что функции автоматического (аварийного или профилактического) ремонта, ограниченные на первом этапе операциями замены отказавших блоков и регулировками параметров, могут быть реализованы на базе современной техники. Например, перебои в том или ином устройстве могут быть устранены автоматической регулировкой его рабочих характеристик.

На основании накопленного опыта конструирования, производства и эксплуатации аналоговых систем, опыта проведения испытаний систем, впервые поступающих в эксплуатацию, назначают (приближенно) основные и упреждающие (профилактические) допуски на все измеряемые в процессе эксплуатации параметры. Если обслуживание в эксплуатации производят с помощью средств автоконтроля, то для

уточнения введенных допусков собирается информация о поведении параметров оборудования во времени. Далее эта информация обрабатывается по однотипным системам, эксплуатируемым в пределах одной климатической зоны. Затем проверяют различные модели реальных процессов изменения параметров. Последующие алгоритмы обработки такой информации представляют собой во многих случаях стандартные алгоритмы решения задач математического программирования или простых вероятностных неравенств (как правило, со случайным аргументом). Для решения задач по имеющимся алгоритмам управления (и прогнозирования) техническим состоянием систем используют стационарные ЭВМ. Для хранения, обработки, использования (в том числе и выборочного) накопленной информации могут быть применены методы новой науки — теории информатики.

После уточнения основных (предельных) и упреждающих профилактических допусков все регулировки (аварийные и профилактические) осуществляют непосредственно при эксплуатации систем.

§ 1.4. Методы исследования сложных систем как объектов эксплуатации

Задачи эксплуатации сложных систем, выдвигаемые практикой, последние два десятилетия решали с помощью математических моделей, на которые накладывали такие большие допущения, что целесообразность применения полученных решений вызывала большое сомнение. В настоящее время к исследованиям все шире привлекают математиков. Это такие крупные советские ученые, как Б. В. Гнеденко, Ю. К. Беляев, А. Д. Соловьев, И. Н. Коваленко, В. А. Каштанов и др., из иностранных ученых следует упомянуть Р. Барлоу, С. Дермана, Ф. Прошана и др.

При решении задач эксплуатации систем стали, по существу, в полном объеме применять методы математической статистики, особенно нового раздела этой науки — статистики случайных процессов, метод статистического моделирования.

В последнее время для решения все усложняющихся задач эксплуатации сложных систем с успехом применяли следующие методы: управляемых марковских и полумарковских процессов, теории восстановления, последовательного анализа (правила остановки наблюдений), теории управления запасами, математического программирования (рис. 1.4).

Следует отметить, что многие задачи эксплуатации еще не решены либо из-за сложности разработки подходящих математических методов, либо из-за непреодолимых пока трудностей вычислительного характера (например, при решении задач большой размерности методом динамического программирования).

Все это позволяет говорить о перспективе широкого использования современных математических методов для решения задач эксплуатации сложных систем и о теории эксплуатации сложных технических систем как о новом, практически важном и перспективном научном направлении.

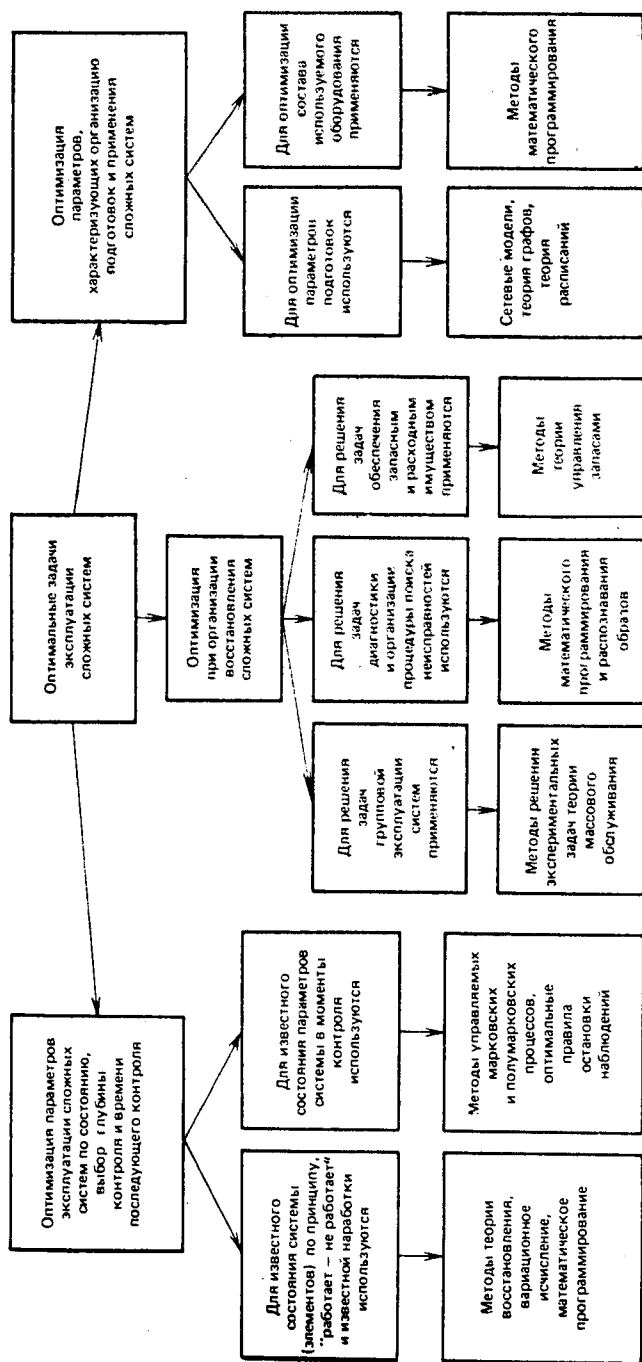


Рис. 1.4

В знак признания достижений науки об эксплуатации сложных систем в ряде публикаций ее называют эксплуатационной кибернетикой. Следует также подчеркнуть, что ряд проблем, рассматриваемых при эксплуатации сложных систем, относится не только к прикладной математике, но и к медицине, инженерной психологии и педагогике (например, проблема повышения качества работы операторов, взаимодействующих в процессе эксплуатации со сложными системами). Проблема выявления причин износа и разрушения элементов и узлов сложных систем при эксплуатации уже сейчас занимает умы химиков, физиков, металлургов и математиков.

Ниже рассмотрено применение современных математических методов для решения разнообразных (в большинстве случаев экстремальных) задач эксплуатации сложных технических систем. Изложение теоретического материала сопровождается иллюстрирующими примерами (которые в ряде случаев имеют и самостоятельный интерес) и техническими решениями, позволяющими автоматически реализовать предлагаемые алгоритмы.

ГЛАВА II

ОРГАНИЗАЦИЯ ЭКСПЛУАТАЦИИ ЭЛЕМЕНТОВ СИСТЕМЫ ПО ЗАДАННОМУ РЕСУРСУ

Создавая современные технические системы (особенно высокоответственные), отказы в которых могут поставить под угрозу безопасность человека или привести к невыполнению заданий, стремятся спроектировать и изготовить систему на основе так называемого «принципа равнопрочности». Образующие такую систему элементы одного иерархического уровня (например, системы, входящие в сложный авиационный радиоэлектронный комплекс, или элементы внутри каждой системы этого комплекса) должны обладать высокой и примерно одинаковой надежностью.

Однако принцип равной прочности далеко не всегда удается реализовать на практике. Причин много: различные нагрузки (механические или электрические) на элементы конструкции, неодинаковое воздействие окружающей среды, отличия в технологии изготовления элементов и др. Поэтому в реальных системах в процессе эксплуатации возникают так называемые «слабые» или «узкие места» — некоторые элементы отказывают наиболее часто и очень важно заменить такой элемент до отказа, но сделать это наиболее экономично. К элементам подобного типа в радиоэлектронной аппаратуре принадлежат, например, некоторые типы генераторных ламп, разрядников, различные трущиеся детали др. Эти элементы, как правило, при отказе «разрушаются» настолько, что не подлежат восстановлению. В дальнейшем будем называть такие элементы *стареющими*. Время до их отказа часто подчиня-

ется нормальному закону распределения, а функция интенсивности отказов возрастает со временем.

Функция интенсивности отказов невосстанавливаемых элементов имеет вид

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)},$$

где $F(t)$ — функция распределения времени безотказной работы элемента; $f(t) = F'(t)$. Статистически функция $\lambda(t)$ определяется следующим образом. Пусть имеются данные по отказам N однотипных элементов и пусть n_k — число отказов на k -м интервале $[(k-1)h, kh]$ длины h . Тогда для k -го интервала статистическое значение функции $\lambda(t)$ (обозначим его через $\lambda^*(t)$) определяется [19] по формуле

$$\lambda^*(t) = \frac{n_k}{(N - n_1 - \dots - n_{k-1})h}, \quad (k-1)h \leq t \leq kh.$$

В дальнейшем предполагается, что стареющие элементы обладают монотонно возрастающей функцией $\lambda(t)$, т. е. $\lambda'(t) > 0$.)

Проанализируем сначала модель выбора оптимального значения ресурса стареющего элемента, рассматриваемого как «черный ящик». Далее в качестве стареющего рассмотрим зарезервированный элемент с известной структурой соединения входящих в него подэлементов. Затем будет рассмотрена процедура выбора комплекта запасных элементов, необходимых для осуществления технического обслуживания системы с элементами стареющего типа.

Важнейшим результатом всей главы является вывод о том, насколько повышается надежность системы при эксплуатации элементов стареющего типа по заданному (выбираемому оптимально по показателю оперативной готовности) для каждого элемента ресурсу. Далее рассматривается модель технического обслуживания стареющих элементов с учетом зависимости по времени обслуживания. Применение полученных здесь результатов на практике позволит создать для ряда систем оптимальный регламент технического обслуживания при эксплуатации элементов по ресурсу.

§ 2.1. Определение оптимальной величины задаваемого ресурса для элемента стареющего типа

Рассмотрим непрерывно работающий в системе элемент стареющего типа. Предполагаем, что стареющие элементы в технических системах функционируют независимо и имеют пренебрежимо малую вероятность отказа при простоях системы.

Считается, что отказ элемента происходит мгновенно и факт появления отказа сразу же становится известным обслуживающему персоналу или фиксируется с помощью автоматической аппаратуры контроля. Элемент может быть заменен исправным в порядке профилактического обслуживания или в аварийном порядке (при отказе). Считается, что в среднем известно время замены отказавшего и исправного элементов. Обозначим эти значения соответственно через T_1 и T_2 .

Очевидно, что $T_1 \geq T_2$, так как после замены отказавшего элемента часто планируют дополнительные проверки. Предполагается также, что во время любой замены элемент нельзя использовать по назначению.

Определим заданный ресурс элемента как наработку, по истечении которой он должен быть заменен. Показателем, по которому выбирают оптимальное значение заданного ресурса стареющего элемента, является коэффициент оперативной готовности $p(x, t)$. Этот показатель имеет смысл вероятности заставить элемент в исправном состоянии в произвольный момент времени t и проработать безотказно после момента t в течение времени x . Предположим вначале (затем от такого обобщения откажемся), что времена плановых замен элемента являются реализациями некоторой случайной величины Y , имеющей функцию распределения $G(t)$. Интервалы между заменами элемента образуют во времени последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин (образуют процесс восстановления). Обозначим математическое ожидание числа восстановлений к моменту t через $H(t)$. Функцию $H(t)$ предполагают дифференцируемой и называют функцией восстановления.

Предполагаем длительную эксплуатацию системы, поэтому рассмотрим показатель $p(x, t)$ при $t \rightarrow \infty$, т. е. $p(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} p(x, t)$.

Запишем выражение для $p(x, t)$ через функции $G(t)$, $F(t)$ и $H(t)$ и перейдем к пределу при $t \rightarrow \infty$.

Событие, заключающееся в том, что элемент безотказно проработает в промежутке $(t, t+x)$, является суммой следующих событий: в промежутке $(0, t)$ не планируется замена исправного элемента и в интервале $(0, t+x)$ элемент не отказал (в течение времени оперативной работы x его замена не планируется); в момент ξ ($0 \leq \xi \leq t$) закончилась замена элемента (исправного или после отказа) и далее в интервале (ξ, t) не планируется замена исправного элемента, а в промежутке времени $(\xi, t+x)$ не произошло отказов элемента.

Вероятность первого события такова: $[1 - F(t+x)][1 - G(t)]$. Вероятность второго события равна $\int_0^t [1 - G(t-\xi)][1 - F(t+x-\xi)] dH(\xi)$ (ξ может принимать любые значения от 0 до t , поэтому применяем формулу полной вероятности)

$$\int_0^t [1 - G(t-\xi)][1 - F(t+x-\xi)] dH(\xi).$$

Рассмотренные события несовместны, следовательно, окончательно получаем

$$p(x, t) = [1 - G(t)][1 - F(t+x)] + \int_0^t [1 - G(t-\xi)][1 - F(t+x-\xi)] dH(\xi). \quad (2.1)$$

Чтобы в выражении (2.1) перейти к пределу при $t \rightarrow \infty$, воспользуемся узловой теоремой восстановления [25]: если $Q(t)$ — неотрицательная, невозрастающая функция, определенная при всех t и $Q(t) < \infty$, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t Q(t-u) dH(u) = \frac{1}{\mu} \int_0^\infty Q(u) du.$$

Теорема сформулирована применительно к процессу восстановления, поэтому $Q(t) = [1 - G(t)][1 - F(t+x)]$; μ — математическое ожидание интервала между заменами элемента (либо после отказа, либо после выработанного расчетного ресурса). Тогда

$$p(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} [1 - G(t)][1 - F(t+x)] dt. \quad (2.2)$$

Определим μ по формуле полного математического ожидания:

$$\mu = \int_0^{\infty} [1 - G(t)][1 - F(t)] dt + T_1 \int_0^{\infty} F(t) dG(t) + T_2 \int_0^{\infty} G(t) dF(t). \quad (2.3)$$

Здесь первое слагаемое есть математическое ожидание времени работы элемента без отказов и замен, второе слагаемое характеризует долю времени (от величины T_1) на замены отказавших элементов на фиксированной позиции, а последнее слагаемое — долю времени (от величины T_2), приходящуюся на предупредительные замены исправного элемента.

Учитывая выражение (2.3), запишем (2.2) в виде

$$p(x) = \frac{\int_0^{\infty} [1 - G(t)][1 - F(t+x)] dt}{\int_0^{\infty} [1 - G(t)][1 - F(t)] dt + T_1 \int_0^{\infty} F(t) dG(t) + T_2 \int_0^{\infty} [1 - F(t)] dG(t)}.$$

Интегрируя по частям, можно получить для $p(x)$ выражение вида

$$p(x) = \int_0^{\infty} A(t) dG(t) \left/ \int_0^{\infty} B(t) dG(t) \right. \quad (2.4)$$

Последнее выражение является дробно-линейным функционалом относительно $G(t)$.

Строго говоря, следовало бы найти такой закон распределения $G(t)$, при котором вероятность $p(x)$ принимала бы максимальное значение, т. е. решить сложную задачу вариационного исчисления. Однако мы сведем данную задачу к исследованию на экстремум функции одного аргумента, воспользовавшись тем, что максимум дробно-линейного функционала типа (2.4) необходимо искать в классе функций распределения

$$G(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq \tau, \\ 1 & \text{при } t > \tau. \end{cases} \quad (2.5)$$

Прежде чем перейти к отысканию экстремума функции $p(x)$, покажем, что ее действительно можно привести к виду (2.4). В самом деле, если обозначить

$$\psi(t, x) = \int_t^{t+x} [1 - F(t)] dt = \int_0^t [1 - F(t+x)] dt,$$

то можно записать

$$p(x) = \frac{\int_0^{\infty} \psi(t, x) dG(t)}{\int_0^{\infty} [\varphi(t, 0) + T_2 + (T_1 - T_2) F(t)] dG(t)}, \quad (2.6)$$

где $A(t) = \psi(t, 0) > 0$; $B(t) = \varphi(t, 0) + T_2 + (T_1 - T_2) F(t) > 0$.
Подставляя $G(t)$ из (2.5) в (2.6), получаем

$$p(x, \tau) = \frac{\int_0^{\tau} [1 - F(t+x)] dt}{\int_0^{\tau} [1 - F(t)] dt + T_2 + (T_1 - T_2) F(\tau)}. \quad (2.7)$$

Дифференцируя (2.7) по τ и приравнявая полученный результат нулю, находим необходимое условие экстремума функции $p(x, \tau)$:

$$\begin{aligned} \frac{T_2}{T_1 - T_2} = & \left[\frac{F(\tau+x) - 1}{1 - F(\tau)} F(\tau) + \lambda(\tau) \int_0^{\tau} [1 - F(t)] dt \right] \frac{1 - F(\tau)}{1 - F(\tau+x)} + \\ & + \frac{1}{T_1 - T_2} \left[\frac{1 - F(\tau)}{1 - F(\tau+x)} \int_0^{\tau} [1 - F(t+x)] dt - \int_0^{\tau} [1 - F(t)] dt \right]. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Уравнение (2.8) имеет хотя бы один корень, в чем можно убедиться, сравнивая значения его левой и правой частей в точках $\tau = 0$ и $\tau = \infty$. Пусть $\tau_1, \dots, \tau_n$ — корни уравнения (2.8). В данном случае $\lambda'(t) > 0$, поэтому оптимальным значением корня (обозначим его через τ_0) следует считать наименьший положительный корень уравнения, так как в этом случае функция $\max_{\tau_i} p(x, \tau_i)$, $i = \overline{1, n}$, является монотонно убывающей по τ_i . При некоторых допущениях уравнение (2.8) можно упростить. Так, если считать, что $x \ll \int_0^{\tau} [1 - F(t)] dt$ (время оперативной работы элемента мало по сравнению со средним временем его без отказной работы, что чаще всего и бывает на практике), то

$$1 - F(1+x) \approx 1 - F(t) + [1 - F(t)]' x = 1 - F(t) - f(t) x.$$

В этом случае (2.7) преобразуется к виду

$$p(x) \approx \frac{\int_0^{\tau} [1 - F(t)] dt - x F(\tau)}{\int_0^{\tau} [1 - F(t)] dt + T_2 - (T_1 - T_2) F(\tau)}. \quad (2.9)$$

Дифференцируя (2.9) по τ и приравнявая полученный результат нулю, получаем уравнение (необходимое условие экстремума функции $p(x, \tau)$ с учетом введенного допущения)

$$\frac{T_2}{T_1 - T_2 + x} \cong -F(\tau) + \lambda(\tau) \int_0^{\tau} [1 - F(t)] dt - \frac{T_2}{T_1 - T_2 + x} x \lambda(\tau), \quad (2.10)$$

решение которого определяет оптимальное значение заданного ресурса элемента; по истечении этого ресурса элемент должен быть обязательно заменен. Если ввести еще одно часто выполняемое на практике допущение $T_2 f(\tau) x \ll 1$, то уравнение (2.10) принимает вид уравнения Трулава [63]:

$$\frac{T_2}{T_1 + x} \cong 1 - \frac{1}{1 - F(\tau) + \lambda(\tau) \int_0^{\tau} [1 - F(t)] dt}. \quad (2.11)$$

Таблица 2.1

а, отк/ч ²	α	b, отк/ч	τ , при значениях отношения $T_2/(T_1 + x)$										T , ч
			0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	
0,004	1,05—1,25	0—0,08	5	7	10	12	15	20	30	40	50	80	10
	0,95	0—0,04	6	8	12	20	24	30	37	65	115	200	20
	0,93	0—0,04	6	9	13	21	26	34	46	68	120	250	21
	0,85	0—0,02	6	9	15	21	27	36	50	75	128	310	22
0,0015	1,10—1,25	0—0,03	7	10	16	22	28	37	51	76	130	315	25
	0,85—1,05	0—0,3	8	13	18	24	30	40	57	80	140	340	37
0,001	1,10—1,25	0—0,02	9	14	20	25	32	42	58	82	145	345	40
	0,85—1,05	0—0,02	10	16	25	30	41	52	70	110	150	400	42
0,0006	1,10—1,25	0—0,012	12	20	27	35	45	57	75	120	160	410	43
	0,85—1,05	0—0,012	15	23	30	40	50	60	85	140	230	500	60
0,0004	0,85—1,05	0—0,008	20	27	45	55	60	80	100	200	300	600	70
0,00015	0,85—1,05	0—0,003	30	45	60	90	110	140	200	250	400	1000	120
0,0001	0,85—1,5	0—0,002	35	50	75	100	140	180	260	350	600	1300	150
0,00006	0,85—1,05	0—0,00012	50	75	120	150	200	250	350	500	700	1700	200

Таблица 2.2

а, отк/ч ²	b, отк/ч	τ ₀ при значениях отношения $T_2/(T_1+x)$									T ₀ , ч
		0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,9	
0,01	0—0,2	3	5	8	12	15	20	25	30	100	7,5
0,008	0—0,16	4	6	9	13	17	22	27	35	120	8,5
0,006	0—0,12	5	7	10	15	19	25	32	45	140	10
0,004	0—0,08	6	8	12	17	22	28	35	50	150	12
0,003	0—0,06	7	9	14	18	25	32	40	60	200	17
0,002	0—0,04	8	11	17	22	28	37	48	70	230	21
0,0016	0—0,032	9	12	19	25	33	44	58	76	260	25
0,0012	0—0,024	10	14	21	29	37	49	65	90	280	29
0,0008	0—0,016	12	17	26	35	45	60	72	100	340	37
0,0006	0—0,012	14	20	30	40	52	65	82	115	380	43
0,0004	0—0,008	17	24	37	50	62	80	100	140	450	54
0,0003	0—0,006	19	28	42	57	72	92	120	165	500	63
0,00026	0—0,005	21	31	47	62	80	102	127	175	550	72
0,0002	0—0,004	23	34	52	70	88	110	145	190	600	80
0,00015	0—0,003	28	40	59	77	100	120	160	220	670	93
0,0001	0—0,002	33	46	71	98	125	150	200	270	850	110
0,00008	0—0,0016	36	53	81	107	138	175	226	310	950	130
0,00006	0—0,0012	44	62	92	125	160	205	260	350	1050	150
0,00004	0—0,0008	53	77	115	152	196	250	320	430	1300	185
0,00003	0—0,0006	60	85	132	177	225	285	370	500	1500	215
0,000025	0—0,0005	66	95	145	193	247	312	400	540	1600	240
0,00002	0—0,0004	74	108	163	216	275	350	450	630	1800	270
0,000016	0—0,00032	84	119	181	242	307	390	500	670	2000	300
0,000014	0—0,00028	90	128	193	257	330	417	535	720	2150	325
0,000012	0—0,00024	95	139	209	279	355	450	575	775	2350	350
0,00001	0—0,0002	105	153	229	305	390	492	635	850	2550	385

Уравнения (2.10) и (2.11) удобно решать (если нет возможности использовать ЭВМ) графически: строят график функции, стоящей в правой части уравнений, по оси ординат откладывают отношения $T_2/(T_1 - T_2 + x)$ или $T_2/(T_1 + x)$. Точка пересечения построенной функции, имеющей монотонно возрастающий характер, и прямой $T_2/(T_1 - T_2 + x)$ или $T_2/(T_1 + x)$, параллельной оси абсцисс, определяет значение τ_0 .

На практике поступают следующим образом. После определения вида функции $\lambda^*(t)$ и сглаживания ее с помощью монотонно возрастающей кривой для использования соотношения (2.11) необходимо знать T_1 , T_2 , x и функцию $F(t)$. Значения T_1 , T_2 определяют простым расчетом непосредственно из статистики, величину x задают условиями применения системы, а функция $F(t)$ после нахождения $\lambda(t)$ имеет вид

$$F(t) = 1 - e^{-\int_0^t \lambda(t) dt} \quad (2.12)$$

Для удобства использования предлагаемой методики на ЭВМ с помощью алгоритма (2.11) были рассчитаны оптимальные сроки замен элементов по наработке. При этом варьировалось отношение $T_2/(T_1 + x)$ и были взяты наиболее распространенные функции вида $\lambda(t) = at^a + b$.

где a характеризует тенденцию роста кривой $\lambda(t)$, α — скорость ее роста, b — начальное значение функций $\lambda(t)$.

В табл. 2.1 приведены значения τ_0 при изменении $T_2/(T_1 + x)$ от 0,05 до 0,9 и различных a , b , α , а в табл. 2.2 — при $\alpha = 1$. В табл. 2.1 и 2.2 T_0 — среднее время безотказной работы элемента:

$$T_0 = \int_0^{\infty} [1 - F(t)] dt,$$

$1 - F(t) = 0$ при $T > T_{\max}$, где $T_{\max}$ — максимальное значение реализации случайной величины T в рассматриваемой выборке.

Определим эффективность предлагаемых оптимальных замен элементов по ресурсу (наработке), считая, что все элементы с внезапными выходами из строя эксплуатируются до отказа (по уровню надежности) и по заданному оптимальному ресурсу. Оценим эффект по числу предупрежденных отказов, получаемый в результате применения предлагаемой эксплуатации по ресурсу. Очевидно, что общее число замен при этом увеличивается. Пусть имеем систему из десяти съемных элементов (узлов). Эксплуатация системы по наработке должна длиться 2000 ч. Интенсивности отказов каждого из 10 элементов, значения T_1 , T_2 , $T_2/(T_1 + x)$ и рассчитанные по алгоритму (2.11) значения τ_0 для каждого элемента приведены в табл. 2.3.

Таблица 2.3

N_0 элемента	$\lambda(t)$, 1/ч	T_2 , ч	T_1 , ч	$\frac{T_2}{T_1 + x}$	τ_0 , ч
1	0,006—0,02	3	6	0,27	20
2	0,004—0,015	3	6	0,27	22
3	0,002—0,015	4	5	0,40	31
4	0,008—0,01	4	14	0,21	23
5	0,0015—0,0005	4	5	0,40	55
6	0,001—0,0005	4	12	0,24	36
7	0,004—0,0004	3	5	0,30	51
8	0,002—0,0003	4	5	0,40	72
9	0,0006—0,0002	4	12	0,24	56
10	0,0008—0,00008	12	13	0,67	203

Полученные методом моделирования количественные данные, характеризующие число предупрежденных отказов системы в течение 2000 ч ее эксплуатации, и необходимый запасной комплект элементов приведены в табл. 2.4*.

Как видно из табл. 2.4, при эксплуатации элементов системы по ресурсу процент упрежденных (внезапных) отказов элементов системы доходит до 60 (относительно числа выходов из строя элементов системы при их эксплуатации по уровню надежности, т. е. до отказа). При этом число замен при отказах и предупредительных замен (а следовательно, и ЗИПа) возрастает примерно в 1,5—2 раза.

* Эти данные впервые приведены в [24].

Таблица 2.4

Номер элемента системы	Число требуемых замен (запасной комплект)		Процент учрежденных отказов при эксплуатации по ресурсу
	при эксплуатации до отказа	при эксплуатации по ресурсу	
1	62	98	33
2	50	88	58
3	52	68	44
4	48	78	60
5	34	49	30
6	38	52	46
7	40	54	33
8	28	30	31
9	22	35	47
10	14	15	8

В § 2.3 выведены аналитические зависимости для определения комплекта ЗИПа в условиях организации оптимальной эксплуатации элементов стареющего типа по заданному ресурсу.

§ 2.2. Эксплуатация по заданному ресурсу зарезервированного элемента

Зарезервированным назовем элемент, содержащий n элементов, из которых m являются основными ($m < n$), а $n - m$ — резервными. Резерв может быть любого вида. При современной технологии изготовления элементов, входящих в сложные системы, зарезервированный элемент может быть выполнен в виде отдельного модуля, содержащего устройство автоматического подключения резервных элементов вместо отказавших основных. Будем считать, что модуль отказывает, если при отсутствии резервных элементов происходит отказ хотя бы одного из m основных элементов. При этом модуль подлежит восстановлению путем замены отказавших и регулировок исправных элементов.

Рассмотрим длительную эксплуатацию зарезервированного элемента. Так как зарезервированный элемент обладает монотонно возрастающей интенсивностью отказов, т. е. является стареющим элементом, то выражение

$$p(x, t) = \int_0^{\tau} [1 - F(t + x)] dt / \mu$$

справедливо и в данном случае. Только здесь интервал τ — наработка зарезервированного элемента, по истечении которой он должен быть подвергнут регламентным работам, заключающимся в замене отказавших элементов и восстановительных мероприятиях (регулировках и наладках) исправных элементов. Поэтому в рассматриваемом случае

$$\mu = p_0(\tau)T_0 + p_1(\tau)T_1 + \dots + p_n(\tau)T_n + \tau,$$

где $p_i(\tau)$, $i = \overline{0, n}$, — вероятность иметь к началу регламентных работ i отказавших элементов, T_i , $i = \overline{0, n}$, — среднее время полного восстановления зарезервированного элемента во время регламентных работ при условии, что имеется i отказавших элементов. Очевидно, что $\sum_{i=0}^n p_i(\tau) = 1$. Таким образом, имеем

$$p(x, t) = \frac{\int_0^{\tau} [1 - F(t+x)] dt}{p_0(\tau) T_0 + \dots + p_n(\tau) T_n + \tau} \quad (2.13)$$

Далее для каждого вида резерва определяют функции $F(t)$, $p_i(t)$, $i = \overline{0, n}$, и из условия

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial \tau} = 0 \quad (2.14)$$

при существовании единственного (или глобального) максимума функции $p(x, t)$ находят искомый оптимальный период регламентных работ для зарезервированного элемента по наработке.

Вычислим оптимальный период выполнения регламентных работ для зарезервированного элемента, состоящего из одного основного и одного, двух и трех элементов в ненагруженном резерве. Считаем, что время безотказной работы элемента на основной позиции распределено экспоненциально с интенсивностью λ . Пусть зарезервированный элемент сначала состоит из двух элементов — основного и резервного (резерв ненагруженный). В этом случае

$$F(t) = 1 - (1 + \lambda t) e^{-\lambda t}.$$

Тогда

$$p(x, \tau) = \frac{\int_0^{\tau} [1 + \lambda(t+x)] e^{-\lambda(t+x)} dt}{T_0 e^{-\lambda\tau} + T_1 \lambda \tau e^{-\lambda\tau} + T_2 [1 - (1 + \lambda\tau) e^{-\lambda\tau}] + \tau}.$$

Убеждаясь в существовании единственного максимума функции $p(x, \tau)$, полагая для простоты $x = 0$ и используя условие (2.14), получаем уравнение для определения оптимального периода профилактики τ_0 :

$$\begin{aligned} & 2\tau e^{-\lambda\tau} + T_2 e^{-\lambda\tau} - T_2 e^{-2\lambda\tau} + \lambda\tau^2 e^{-\lambda\tau} - \frac{2}{\lambda} + \\ & + \frac{2}{\lambda} e^{-\lambda\tau} + 2T_0 e^{-\lambda\tau} - T_0 e^{-2\lambda\tau} + 2\lambda T_1 \tau e^{-\lambda\tau} - \\ & - \lambda T_1 \tau e^{-2\lambda\tau} - T_2 \lambda \tau e^{-\lambda\tau} = 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Уравнение (2.15) можно решить графически.

Для зарезервированного элемента, состоящего из одного основного элемента и двух ненагруженных резервных элементов,

$$p(\tau) = \frac{\int_0^{\tau} \left(1 + \lambda t + \frac{\lambda^2 t^2}{2}\right) e^{-\lambda t} dt}{T_0 e^{-\lambda \tau} + T_1 \lambda \tau e^{-\lambda \tau} + T_2 \frac{\lambda^2 \tau^2}{2} e^{-\lambda \tau} + T_3 \left[1 - \frac{\int_0^{\tau} \left(1 + \lambda t + \frac{\lambda^2 t^2}{2}\right) e^{-\lambda t} dt}{-\left(1 + \lambda \tau + \frac{\lambda^2 \tau^2}{2}\right) e^{-\lambda \tau}} + \tau\right]} \quad (2.16)$$

где λ — интенсивность отказов одного элемента; T_0 — среднее время контроля системы, если все три элемента исправны; T_1 — среднее время контроля системы при неисправности одного элемента; T_2 — среднее время контроля системы при неисправности двух элементов; T_3 — среднее время контроля системы при неисправности всех элементов.

Считаем, что при контроле все неисправности устраняются, поэтому $T_0 < T_1 < T_2 < T_3$. Из выражения (2.16), выполняя требование (2.14) и производя преобразования, получаем трансцендентное уравнение для определения оптимального периода регламентных работ зарезервированного элемента, состоящего из одного основного и двух резервных элементов

$$\begin{aligned} & 3\tau e^{-\lambda \tau} + (3/2) \lambda \tau^2 e^{-\lambda \tau} + (\lambda^2/2) \tau^3 e^{-\lambda \tau} - 2T_0 e^{-2\lambda \tau} + \\ & + \lambda \tau T_0 e^{-2\lambda \tau} - \lambda^2 \tau^2 T_1 e^{-2\lambda \tau} + T_2 e^{-\lambda \tau} - 2\lambda \tau T_2 e^{-\lambda \tau} + \\ & + (\lambda^2/2) \tau^2 T_2 e^{-\lambda \tau} - T_2 e^{-2\lambda \tau} + \lambda \tau T_2 e^{-2\lambda \tau} - (3/2) \lambda^2 \tau^2 T_2 e^{-2\lambda \tau} + \\ & + T_3 e^{-\lambda \tau} + \lambda \tau T_3 e^{-\lambda \tau} - \lambda^2 \tau^2 T_3 e^{-\lambda \tau} - T_3 e^{-2\lambda \tau} - 2\lambda \tau T_3 e^{-2\lambda \tau} - \\ & - (\lambda^2/2) \tau^3 T_3 e^{-2\lambda \tau} - \lambda^3 \tau^3 T_3 e^{-2\lambda \tau} + (3/\lambda) e^{-\lambda \tau} + 3T_0 e^{-\lambda \tau} + \\ & + 3T_1 e^{-2\lambda \tau} - 3T_1 e^{-\lambda \tau} + (\lambda^2/2) \tau^2 T_1 e^{-2\lambda \tau} + 3\lambda \tau T_1 e^{-\lambda \tau} + \\ & + 2\lambda^2 \tau^2 T_2 e^{-\lambda \tau} - 3/\lambda = 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Для зарезервированного элемента, состоящего из одного основного и трех резервных элементов ($x = 0$, резерв ненагруженный)

$$p(\tau) = \frac{\int_0^{\tau} (1 + \lambda t + \lambda^2 t^2/2 + \lambda^3 t^3/6) e^{-\lambda t} dt}{T_0 e^{-\lambda \tau} + T_1 \lambda \tau e^{-\lambda \tau} + T_2 (\lambda^2 \tau^2 e^{-\lambda \tau}/2) + \frac{\int_0^{\tau} (1 + \lambda t + \lambda^2 t^2/2 + \lambda^3 t^3/6) e^{-\lambda t} dt}{+ T_3 \left(\frac{\lambda^3 \tau^3}{6} e^{-\lambda \tau} \right) + T_4 \left[1 - \left(1 + \lambda \tau + \frac{\lambda^2 \tau^2}{2} + \frac{\lambda^3 \tau^3}{6} \right) e^{-\lambda \tau} \right] + \tau}} \quad (2.18)$$

Выполняя требования (2.14), можно получить исходное уравнение для определения τ_0 в данном случае. Решения этого уравнения и уравнений (2.15) и (2.17) приведены в табл. 2.5. Исходные уравнения были решены на ЭВМ методом деления отрезка пополам или методом пропорциональных частей. Корень каждого уравнения находился в два этапа. Сначала функция $p(\tau)$ исследовалась на знакопеременность и определялся интервал, в котором находится максимум. Затем в этом интервале, но с меньшим шагом, отыскивался корень τ_0 . Исследования функций $p(\tau)$ на знакопеременность показали, что эти функции гладкие, не терпят разрывов и каждая имеет только один максимум.

Значения $\tau_0^{(2)}$, $\tau_0^{(3)}$, $\tau_0^{(4)}$ для случаев, когда зарезервированный элемент состоит соответственно из двух, трех и четырех элементов, при наиболее часто встречающихся на практике значениях λ , T_0 , T_1 , T_2 , T_3 и T_4 приведены в табл. 2.5.

Таблица 2.5

№ п/п	λ , отк/ч	Время регламентных работ, ч					Оптимальная периодичность проведения регламентных работ, ч		
		T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	$\tau_0^{(2)}$	$\tau_0^{(3)}$	$\tau_0^{(4)}$
1	0,05	0,1	0,2	0,3	0,5	0,7	5,21	9,03	13,8
2	0,02	0,2	0,4	0,8	1,1	1,2	11,9	21,0	28,6
3	0,01	0,3	0,5	0,9	1,3	1,7	21,7	40,3	60,6
4	0,004	0,6	0,9	1,4	1,9	2,5	50,4	96,8	148,1
5	0,002	0,8	1,2	2,0	2,6	3,4	87,5	174,6	273,1
6	0,0012	1,2	1,8	2,6	3,2	4,0	140,8	285,6	460,5
7	0,001	1,3	2,0	2,8	3,4	4,2	163,2	334,7	545,6
8	0,00084	1,5	2,2	3,2	3,9	4,6	192,1	394,7	641,8
9	0,00015	1,9	2,6	3,4	4,2	5,0	647,2	1514,7	2749
10	0,00005	2,5	3,2	3,8	4,9	6,0	1467,6	3678	7003

§ 2.3. Выбор числа запасных элементов для обеспечения оптимальной эксплуатации по заданному ресурсу

В данном параграфе приведена модель выбора запасных элементов, которая тесно связана с моделями определения оптимальной наработки элементов при их эксплуатации по ресурсу, изложенными в двух предыдущих параграфах. Заметим, что для применения излагаемой ниже модели к задаче, рассмотренной в § 2.2, необходимо знать функцию интенсивности отказов всего зарезервированного (старееющего) элемента и осуществлять его замену либо после рассчитанного по алгоритмам § 2.1 ресурсу, либо после его отказа (при отказе $(n - m - 1)$ -го элемента) *.

* Приведенные ниже результаты впервые получены Э. Н. Степановым и В. Н. Степановым [36].

Для определения запасного комплекта воспользуемся сначала следующим асимптотическим (при $t \rightarrow \infty$) результатом, справедливым для конечных $M[T]$ и $D[T]$ ([19]):

$$P \left\{ \frac{v(t) - t/M[T]}{\sqrt{D[T]t/(M[T])^3}} < x \right\} \approx \Phi(x). \quad (2.19)$$

Выражение (2.19) выведено для мгновенного времени осуществления замен. Здесь $v(t)$ — число замен элемента (фиксированной позиции) за время t ; $M[T]$ — среднее время до замены элемента (либо после отказа, либо после выработанного ресурса); $D[T]$ — дисперсия среднего времени T до замены элемента; $\Phi(x)$ — функция Лапласа.

Применительно к случаю мгновенной замены элементов

$$F_T(t) = \begin{cases} F(t) & \text{при } t \leq T, \\ 1 & \text{при } t > T; \end{cases} \quad (2.20)$$

для мгновенного времени замен

$$M[T] = \int_0^{\infty} [1 - F_T(t)] dt = \int_0^T [1 - F(t)] dt;$$

$$D[T] = M[T^2] - (M[T])^2,$$

где $M[T^2] = \int_0^T 2t[1 - F(t)] dt.$

Приведенный алгоритм определения запасного комплекта элементов верен при их эксплуатации как по ресурсу, так и по надежности (до отказа). Он имеет, с одной стороны, самостоятельный интерес, а с другой — будет полезен при изложении модели выбора запасного комплекта в более сложном случае — при учете конечного времени замен для модели эксплуатации по ресурсу элемента стареющего типа.

В излагаемой ниже модели выбора запасного комплекта для длительной эксплуатации стареющего элемента времени замены элемента после отказа и до него рассматриваются как случайные величины. Обозначим случайное время восстановления отказавшего элемента, затрачиваемое на поиск причины отказа, на устранение последствий отказа и на замену элемента, через γ_1 , а неотказавшего — через γ_2 . В § 2.1 математическое ожидание интервала между заменами элемента было обозначено через μ , пусть $M[\gamma_1] = T_1$, $M[\gamma_2] = T_2$. Обозначим далее $F_1(t) = P\{\gamma_1 < t\}$, $F_2(t) = P\{\gamma_2 < t\}$.

Интервал между заменами складывается либо из интервала от момента предыдущей замены до момента начала замены исправного элемента (замены по ресурсу), либо до момента начала замены отказавшего элемента и из длительности самой замены элемента (обозначим ее через γ_B). Смысл рассматриваемых ниже функций распределений $F(t)$ и $G(t)$ такой же, как и в § 2.1, т. е. $F(t) = P\{X < t\}$; $G(t) = P\{Y < t\}$.

Ниже рассмотрен вырожденный вид функций $G(t)$ со скачком в точке τ (τ_0 — оптимальный период замены элемента по ресурсу).

Момент «обновления» (замены) элемента (момент регенерации) на фиксированной позиции наступит, очевидно, через время $\min(X, \tau) + \gamma_B$. Если из двух значений X и τ меньшим является значение τ (это записывается так: $\min(X, \tau) = \tau$), то $\gamma_B = \gamma_2$, если наоборот, то $\gamma_B = \gamma_1$.

По аналогии с выражением (2.20) можно записать:

$$P\{\min(X, \tau) < t\} = \begin{cases} F(t) & \text{при } t \leq \tau, \\ 1 & \text{при } t > \tau. \end{cases}$$

Обозначим через π случайную величину — время между соседними заменами элемента ($M[\pi] = \mu$). Для определения числовых характеристик случайной величины π рассмотрим сначала распределение суммы зависимых случайных величин γ_B и $\min(X, \tau) = \eta$ при $t < \tau$ и $t \geq \tau$. При $t < \tau$, применяя формулу полной вероятности, получаем

$$P\{\eta + \gamma_B < t\} = \int_0^t dF(y) P\{\gamma_B < y\} = \int_0^t F_1(t-y) dF(y):$$

при $t \geq \tau$.

$$\begin{aligned} P\{\eta + \gamma_B < t\} &= \int_0^{\tau} dF(y) P\{\gamma_1 < t-y\} + [1-F(\tau)] P\{\gamma_2 < t-\tau\} = \\ &= \int_0^{\tau} F_1(t-y) dF(y) + [1-F(\tau)] F_2(t-\tau). \end{aligned}$$

Воспользовавшись выражением для распределения суммы случайных величин, запишем

$$\begin{aligned} \mu &= \int_0^{\tau} t \int_0^t f_1(t-y) dF(y) dt + \int_{\tau}^{\infty} t \int_0^{\tau} f_1(t-y) dF(y) dt + \\ &+ \int_{\tau}^{\infty} t [1-F(\tau)] f_2(t-\tau) dt = \int_0^{\tau} dF(t) \int_0^{\tau} t f_1(t-y) dt + \\ &+ \int_0^{\tau} dF(y) \int_{\tau}^{\infty} t f_1(t-y) dt + \int_{\tau}^{\infty} [1-F(t)] t f_2(t-\tau) dt, \end{aligned}$$

где $f_1(t) = F'(t)$, $f_2(t) = F_2'(t)$

Окончательно имеем

$$\begin{aligned} \mu &= M[\pi] = \int_0^{\tau} y dF(y) + T_1 F(\tau) + (T_2 + \tau) [1-F(\tau)] = \\ &= \int_0^{\tau} [1-F(y)] dy + T_1 F(\tau) + T_2 [1-F(\tau)]. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Дисперсию случайной величины π находим по формуле

$$D[\pi] = M[\pi^2] - (M[\pi])^2.$$

Таким образом,

$$D(\pi) = \int_0^{\tau} t^2 \int_0^t f_1(t-y) dy dt + \int_{\tau}^{\infty} t^2 \int_0^{\tau} f_1(t-y) dF(y) dt + \\ + \int_{\tau}^{\infty} t^2 [1-F(\tau)] f_2(t-\tau) dt - (M[\pi])^2 = \\ = \int_0^{\tau} dF(y) \int_y^{\infty} t^2 f_1(t-y) dt + \int_{\tau}^{\infty} [1-F(\tau)] t^2 f_2(t-\tau) dt - M([\pi])^2.$$

Полагая $z = t - y$, имеем

$$D[\pi] = M[\gamma_1^2] F(\tau) + 2T_1 \int_0^{\tau} y f(y) dy + \int_0^{\tau} y^2 f(y) dy + [1-F(\tau)] \times \\ \times M[\gamma_2^2] + 2\tau T_2 [1-F(\tau)] + \tau^2 [1-F(\tau)] - (M[\pi])^2,$$

где $M[\gamma_B^2] = D[\gamma_B] + (M[\gamma_B])^2$.

Выражение (2.19) в данном случае принимает вид

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{v(t) - t/\mu}{\sqrt{\sigma^2 t/\mu^3}} \geq x \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-u^2/2} du, \quad (2.22)$$

где $\mu = M[\pi]$; $\sigma^2 = D[\pi]$; v/t — случайное число замен элемента за время эксплуатации t . Выражение (2.22) удобно записать в следующем виде:

$$P\{v(t) \leq n\} = P \left\{ \frac{v(t) - t/\mu}{\sqrt{\sigma^2 t/\mu^3}} \leq \frac{n - t/\mu}{\sqrt{\sigma^2 t/\mu^3}} \right\} = \Phi \left(\frac{n - t/\mu}{\sqrt{\sigma^2 t/\mu^3}} \right).$$

Например, для доверительной вероятности 0,975 по таблицам для нормального закона находим

$$\Phi \left(\frac{n - t/\mu}{\sqrt{\sigma^2 t/\mu^3}} \right) = \Phi(2),$$

откуда $(n - t/\mu)/\sqrt{\sigma^2 t/\mu^3} = 2$, или

$$n = t/\mu + 2\sigma/\mu \sqrt{t/\mu} = (1/\mu) (t + 2\sigma \sqrt{t\mu}).$$

Таблица 2.6

α , отк/ч ²	τ_0 , ч	n , шт., при t , ч				
		720	2160	4320	8640	17 280
0,2 · 10 ⁻⁵	340	3	7	14	28	55
0,1 · 10 ⁻⁵	480	2	5	10	20	39
0,5 · 10 ⁻⁶	650	1	4	8	15	29
0,25 · 10 ⁻⁶	920	1	3	5	11	21

По изложенной выше методике (с использованием алгоритма (2.11), приведенного в § 2.1 при определении оптимальной наработке τ_0 для замены элемента по ресурсу) в [36] подсчитано при доверительной вероятности 0,975 и $\lambda(t) = at + b$ необходимое число запасных элементов при различных t , $M[\gamma_1^2]$, $M[\gamma_2^2]$, τ_0 , T_2/T_1 . Результаты проведенных расчетов сведены в табл. 2.6, в которой $T_2/T_1 = 0,1$; $M[\gamma_2^2] = 1,3 \text{ ч}^2$ и $M[\gamma_1^2] = 125 \text{ ч}^2$, $b = 0,2 \cdot 10^{-5}$ отк/ч.

§ 2.4. Обобщение задачи эксплуатации стареющего элемента по заданному ресурсу

Рассмотрим систему, состоящую из двух элементов $\mathfrak{E}_1$ и $\mathfrak{E}_2$ стареющего типа. Пусть k_1 и k_2 — соответствующие стоимости раздельной замены элементов, k_{12} — стоимость совместной замены элементов. Будем считать элементы $\mathfrak{E}_1$ и $\mathfrak{E}_2$ зависимыми по стоимости замен, если $k_{12} \neq k_1 + k_2$ или, что одно и то же, $k_{12} = (1 - \beta)(k_1 + k_2)$, где $0 \leq \beta < 1$. Полагаем, что состояния системы определяются в установленные моменты времени NT_{Π} , где T_{Π} — период (цикл проверки), $N = 1, 2, \dots$. Система работоспособна, если оба элемента исправны. Если система отказала в момент $x \in [NT_{\Pi}, (N+1)T_{\Pi}]$, то в промежутке времени $(N+1)T_{\Pi}$ — она не работоспособна и при этом возникают потери $k^*[(N+1) \times T_{\Pi} - x]$, где k^* — удельная стоимость (потери) простой системы.

Под состоянием элемента будем понимать его наработку с учетом отказов и замен. Если элемент отказал в данном цикле, то до очередной проверки он находится в состоянии, которое условно обозначим символом ∞ . Такой элемент при очередной проверке всегда заменяется. Возможны следующие решения о замене элементов системы: d^{11} — заменяются оба элемента; d^{10} — заменяется только первый элемент; d^{01} — заменяется только второй элемент; d^{00} — замены элементов не проводятся.

Переход элементов из одного состояния в другое при принятии решения d происходит следующим образом. Если, например, элементы находятся в состоянии (A_1, A_2) и принято решение $d_{A_1 A_2}$, то система переходит в состояние (L_1, L_2) , из которого по истечении времени T_{Π} может перейти в класс состояний (C_1, C_2) (рис. 2.1).

Условные вероятности перехода в каждое из состояний можно вычислить, если заданы функции распределения времени «жизни» элементов $F_1(t)$ и $F_2(t)$, по формулам

$$p(\infty, \infty / L_1, L_2) = \frac{F_1(L_1 + T_{\Pi}) - F_1(L_1)}{\bar{F}_1(L_1)} \frac{F_2(L_2 + T_{\Pi}) - F_2(L_2)}{\bar{F}_2(L_2)},$$

где $\bar{F}(t) = 1 - F(t)$, $\bar{F}_2(t) = 1 - F_2(t)$.

$$\text{Обозначая } \Phi(L_2; x) = 1 - \frac{\bar{F}_1(L_1 + x)}{\bar{F}_1(L_1)} \text{ и } \Psi(L_2; x) = 1 - \frac{\bar{F}_2(L_2 + x)}{\bar{F}_2(L_2)},$$

$\bar{F}_1(L_1; x) = 1 - F_1(L_1; x)$, $\bar{F}_2(L_2 + x) = 1 - F(L_2 + x)$, запишем

$$p(\infty, \infty / L_1, L_2) = \Phi(L_1; T_{\Pi}) \Psi(L_2; T_{\Pi}).$$

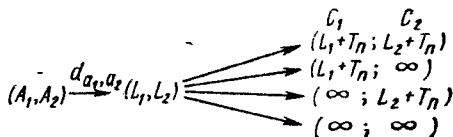


Рис. 2.1

Аналогично имеем:

$$\left. \begin{aligned} p(\infty, L_2 + T_{\Pi}/L_1, L_2) &= \Phi(L_1; T_{\Pi}) [1 - \Psi(L_2; T_{\Pi})], \\ p(L_1 + T_{\Pi}, \infty/L_1, L_2) &= [1 - \Phi(L_1; T_{\Pi})] \Psi(L_2; T_{\Pi}), \\ p(L_1 + T_{\Pi}, L_2 + T_{\Pi}/L_1, L_2) &= [1 - \Phi(L_1; T_{\Pi})] [1 - \Psi(L_2; T_{\Pi})]. \end{aligned} \right\} (2.23)$$

Вероятность отказа системы равна вероятности того, что по крайней мере один из элементов откажет, поэтому функция распределения времени «жизни» системы имеет вид

$$H(L_1, L_2; x) = \frac{F_1(L_1 + x) - F_1(L_1)}{\bar{F}_1(L_1)} + \frac{F_2(L_2 + x) - F_2(L_2)}{\bar{F}_2(L_2)} - \frac{F_1(L_1 + x) - F_1(L_1)}{\bar{F}_1(L_1)} \frac{F_2(L_2 + x) - F_2(L_2)}{\bar{F}_2(L_2)},$$

или

$$H(L_1, L_2; x) = 1 - \bar{\Phi}(L_1; x) \bar{\Psi}(L_2; x); \quad \bar{\Phi}(L_1; x) = 1 - \Phi(L_1; x); \\ \bar{\Psi}(L_2; x) = 1 - \Psi(L_2; x).$$

Зная $H(L, L_2; x)$, можно определить среднее время пребывания системы в состоянии отказа:

$$T_{\text{ср}} = \int_0^{T_{\Pi}} (T_{\Pi} - x) dH(L_1, L_2; x),$$

следовательно, потери простоя для одного цикла работы системы равны

$$k^* \int_0^{T_{\Pi}} (T_{\Pi} - x) dH(L_1, L_2; x).$$

Введем коэффициенты ξ_1 и ξ_2 :

$$\xi_1 = \begin{cases} 1 & \text{при } d^{11} \text{ и } d^{10}, \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases} \\ \xi_2 = \begin{cases} 1 & \text{при } d^{11} \text{ и } d^{01}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда потери от замен выразятся так: $\xi_1 k_1 + \xi_2 k_2 - \xi_1 \xi_2 \beta (k_1 + k_2)$. Суммируя потери от простоев, получаем общее выражение для потерь на одном цикле:

$$r[(A_1, A_2), d_{A_1}, A_2] = \xi_1 k_1 + \xi_2 k_2 - \xi_1 \xi_2 \beta (k_1 + k_2) + \\ + k^* \int_0^{T_{\Pi}} (T_{\Pi} - x) dH(L_1, L_2; x). \quad (2.24)$$

Однако процесс эксплуатации является многоэтапным, поэтому для общих потерь имеет место следующее функциональное уравнение [54]:

$$V^*(A_1, A_2) = \min \left\{ r[(A_1, A_2), d_{A_1}, A_2] + \right. \\ \left. + \sum_{(C_1, C_2)} p[(C_1, C_2)/(A_1, A_2), d_{A_1}, A_2] V^*(C_1, C_2) \right\}. \quad (2.25)$$

Используя функциональное уравнение (2.25), можно найти оптимальную стратегию замен элементов системы. При этом следует заменить программу вычислений с числом циклов, стремящихся к ∞ , на программу с конечным числом цик-

лов N ($N < \infty$). С ростом N приближаемся к значению $d_N^*(A_1, A_2)$. При определении оптимального значения $d_N^*(A_1, A_2)$ следует учитывать, что оптимальная стратегия эксплуатации не должна изменяться при дальнейшем увеличении числа итераций, т. е. при некотором N $d_N^*(A_1, A_2) = d_{N-1}^*(A_1, A_2)$, и

$$\max_{(A_1, A_2)} \left| \frac{V_N(A_1, A_2) - V_{N-1}(A_1, A_2)}{V_N(A_1, A_2)} \right| < \varepsilon,$$

где ε — любая сколь угодно малая величина.

Пусть в начальный момент система находится в состоянии (A_1, A_2) , для которого необходимо получить оптимальное решение по минимуму средних суммарных потерь. Используя (2.24), для первого цикла итерационного процесса величину минимальных потерь находим из системы уравнений

$$\begin{aligned} & V_1^*(A_1, A_2) = \\ & \left. \begin{aligned} & V_1^{11}(A_1, A_2) \equiv r[(A_1, A_2), d^{11}] = k_1 + k_2 - \beta(k_1 + k_2) + \\ & \quad + k^* \int_0^{T_{\Pi}} (T_{\Pi} - x) dH(0, 0; x), \\ & V_1^{10}(A_1, A_2) \equiv r[(A_1, A_2), d^{10}] = k_1 + k^* \int_0^{T_{\Pi}} (T_{\Pi} - x) dH(0, L_2; x), \\ & V_1^{01}(A_1, A_2) \equiv r[(A_1, A_2), d^{01}] = k_2 + k^* \int_0^{T_{\Pi}} (T_{\Pi} - x) dH(L_1, 0; x), \\ & V_1^{00}(A_1, A_2) \equiv r[(A_1, A_2), d^{00}] = k^* \int_0^{T_{\Pi}} (T_{\Pi} - x) dH(L_1, 0; x). \end{aligned} \right\} \quad (2.26) \end{aligned}$$

Для N -го цикла итерационного процесса, учитывая (2.25), получаем

$$\begin{aligned} & V_N^*(A_1, A_2) = \\ & \left. \begin{aligned} & V_N^{11}(A_1, A_2) = V_1^{11}(A_1, A_2) + p(T_{\Pi}, T_{\Pi}/0, 0) V_{N-1}^*(T_{\Pi}, T_{\Pi}) + \\ & \quad + p(\infty, T_{\Pi}/0, 0) V_{N-1}^*(\infty, T_{\Pi}) + p(T_{\Pi}, \infty/0, 0) V_{N-1}^*(T_{\Pi}, \infty) + \\ & \quad + p(\infty, \infty/0, 0) V_{N-1}^*(\infty, \infty); \\ & V_N^{10}(A_1, A_2) = V_1^{10}(A_1, A_2) + p(T_{\Pi}, T_{\Pi} + L_2/0, L_2) \times \\ & \quad \times V_{N-1}^*(T_{\Pi}, L_2 + T_{\Pi}) + p(\infty, L_2 + T_{\Pi}/0, L_2) V_{N-1}^*(\infty, L_2 + T_{\Pi}) + \\ & \quad + p(T_{\Pi}, \infty/0, L_2) V_{N-1}^*(T_{\Pi}, \infty) + p(\infty, \infty/0, L_2) V_{N-1}^*(\infty, \infty); \\ & V_N^{01}(A_1, A_2) = V_1^{01}(A_1, A_2) + p(L_1 + T_{\Pi}, T_{\Pi}/L_1, 0) \times \\ & \quad \times V_{N-1}^*(L_1 + T_{\Pi}, T_{\Pi}) + p(L_1 + T_{\Pi}, \infty/L_1, 0) V_{N-1}^*(L_1 + T_{\Pi}, \infty) + \\ & \quad + p(\infty, T_{\Pi}/L_1, 0) V_{N-1}^*(\infty, T_{\Pi}) + p(\infty, \infty/L_1, 0) V_{N-1}^*(\infty, \infty); \\ & V_N^{00}(A_1, A_2) = V_1^{00}(A_1, A_2) + p(L_1 + T_{\Pi}, L_2 + T_{\Pi}/L_1, L_2) \times \\ & \quad \times V_{N-1}^*(L_1 + T_{\Pi}, L_2 + T_{\Pi}) + p(L_1 + T_{\Pi}, \infty/L_1, L_2) V_{N-1}^* \times \\ & \quad \times (L_1 + T_{\Pi}, \infty) + p(\infty, L_2 + T_{\Pi}/L_1, L_2) V_{N-1}^*(\infty, L_2 + T_{\Pi}) + \\ & \quad + p(\infty, \infty/L_1, L_2) V_{N-1}^*(\infty, \infty). \end{aligned} \right\} \quad (2.27) \end{aligned}$$

Структура уравнений для определения оптимальных стратегий в случае системы из m зависимых в отмеченном выше смысле элементов прежняя. Если, например, рассматривается система из трех элементов, то взаимную зависимость элементов по стоимости можно учесть с помощью коэффициентов β_{12} , β_{13} , β_{23} и β_{123} , которые позволяют характеризовать экономию средств за счет одновременной замены элементов.

Функция распределения времени «жизни» системы, состоящей из трех элементов; $H(L_1, L_2, L_3; x)$, определяется также с помощью функций распределения каждого из элементов $F_1(t)$, $F_2(t)$ и $F_3(t)$. Возможны следующие решения о замене элементов системы, находящейся в состоянии (A_1, A_2, A_3) : d^{111} , d^{110} , d^{101} , d^{100} , d^{011} , d^{010} , d^{001} , d^{000} . Учитывая сказанное, для одного цикла итерационного процесса в данном случае величину средних минимальных потерь получаем из следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned}
 & V_1^*(A_1, A_2, A_3) = \\
 & V_1^{111}(A_1, A_2, A_3) = k_1 + k_2 + k_3 - \beta_{123}(k_1 + k_2 + k_3) + \\
 & \quad + k^* \int_0^{T_{\Pi}} (T_{\Pi} - x) dH(0, 0, 0; x), \\
 & V_1^{110}(A_1, A_2, A_3) = k_1 + k_2 - \beta_{12}(k_1 + k_2) + \\
 & \quad + k^* \int_0^{T_{\Pi}} (T_{\Pi} - x) dH(0, 0, L_3; x), \\
 & V_1^{101}(A_1, A_2, A_3) = k_1 + k_3 - \beta_{13}(k_1 + k_3) + \\
 & \quad + k^* \int_0^{T_{\Pi}} (T_{\Pi} - x) dH(0, L_2, 0; x), \\
 = \min & \quad V_1^{100}(A_1, A_2, A_3) = k_1 + k^* \int_0^{T_{\Pi}} (T_{\Pi} - x) dH(0, L_2, L_3; x), \quad (2.28) \\
 & V_1^{011}(A_1, A_2, A_3) = k_2 + k_3 - \beta_{23}(k_2 + k_3) + \\
 & \quad + k^* \int_0^{T_{\Pi}} (T_{\Pi} - x) dH(L_1, 0, 0; x), \\
 & V_1^{010}(A_1, A_2, A_3) = k_2 + k^* \int_0^{T_{\Pi}} (T_{\Pi} - x) dH(L_1, 0, L_3; x), \\
 & V_1^{001}(A_1, A_2, A_3) = k_3 + k^* \int_0^{T_{\Pi}} (T_{\Pi} - x) dH(L_1, L_2, 0; x), \\
 & V_1^{000}(A_1, A_2, A_3) = k^* \int_0^{T_{\Pi}} (T_{\Pi} - x) dH(L_1, L_2, L_3; x).
 \end{aligned}$$

Для N -го шага

$$\begin{aligned}
 & V_N^* (A_1, A_2, A_3) = \\
 & \left\{ \begin{aligned}
 & V_{N-1}^{111} (A_1, A_2, A_3) = V_{N-1}^{111} (A_1, A_2, A_3) + p (T_{\Pi}, T_{\Pi}, T_{\Pi}/0, 0, 0) \times \\
 & \times V_{N-1}^* (T_{\Pi}, T_{\Pi}, T_{\Pi}) + p (T_{\Pi}, T_{\Pi}, \infty/0, 0, 0) V_{N-1}^* (T_{\Pi}, T_{\Pi}, \infty) + \\
 & + p (T_{\Pi}, \infty, T_{\Pi}/0, 0, 0) V_{N-1}^* (T_{\Pi}, \infty, T_{\Pi}) + p (T_{\Pi}, \infty, \infty/0, 0, 0) \times \\
 & \times V_{N-1}^* (T_{\Pi}, \infty, \infty) + p (\infty, T_{\Pi}, T_{\Pi}/0, 0, 0) V_{N-1}^* (\infty, T_{\Pi}, T_{\Pi}) + \\
 & + p (\infty, T_{\Pi}, \infty/0, 0, 0) V_{N-1}^* (\infty, T_{\Pi}, \infty) + p (\infty, \infty, T_{\Pi}/0, 0, 0) \times \\
 & \times V_{N-1}^* (\infty, \infty, T_{\Pi}) + p (\infty, \infty, \infty/0, 0, 0) V_{N-1}^* (\infty, \infty, \infty), \\
 & \dots \dots \dots \\
 & V_{N-1}^{000} (A_1, A_2, A_3) = V_{N-1}^{000} (A_1, A_2, A_3) + \\
 & + p (L_1, T_{\Pi}, L_2 + T_{\Pi}, L_3 + T_{\Pi}/L_1, L_2, L_3), \\
 & V_{N-1}^* (L_1 + T_{\Pi}, L_2 + T_{\Pi}) + p (L_1 + T_{\Pi}, L_2 + T_{\Pi}, \infty/L_1, L_2, L_3), \\
 & V_{N-1}^* (L_1 + T_{\Pi}, L_2 + T_{\Pi}, \infty) + \dots + \\
 & + p (\infty, \infty, \infty/L_1, L_2, L_3) V_{N-1}^* (\infty, \infty, \infty).
 \end{aligned} \right. \quad (2.29)
 \end{aligned}$$

Оптимальным является решение d_{A_1, A_2, A_3}^* , которое позволяет минимизировать $V_N^* (A_1, A_2, A_3)$.

Рассмотрим основные этапы решения на ЭВМ уравнений (2.26) и (2.27). На первом этапе вычисляют: $V_1^* (A_1, A_2)$ для всех возможных состояний системы. При этом A_1 и A_2 можно ограничить сверху значениями $q_1 T_{\text{ср}1}$ и $q_2 T_{\text{ср}2}$, где $T_{\text{ср}1}$ и $T_{\text{ср}2}$ — среднее время жизни элементов $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ соответственно; значения q_1 и q_2 задаются. Особенностью вычисления потерь за N этапов является то, что решение системы уравнений (2.27) осуществляется с использованием величин оптимальных потерь за $N - 1$ этап и соответствующих значений переходных вероятностей. Алгоритм решения уравнений (2.27) приведен на рис. 2.2. Если решения удовлетворяют отмеченным выше условиям, то на печать в качестве оптимального выводится решение $d_N^* (A_1, A_2)$. В противном случае N увеличивают на единицу и процесс решения повторяют.

Рассмотрим пример. Пусть имеется система из двух зависимых (по стоимости) элементов со следующими исходными данными: $F_1(t) = 1 - \exp[-t^2/(2\sigma_1^2)]$, $F_2(t) = 1 - \exp[-t^2/(2\sigma_2^2)]$, $\sigma_1 = 80$ ч, $\sigma_2 = 100$ ч, $k_1 = 2$ усл. ед. ст., $k_2 = 2,3$ усл. ед. ст., $k^* = 1,5$ усл. ед. ст./ч, $\beta = 0,1$, $T_{\Pi} = 6$ ч.

Ясно, что $T_{\text{ср}} = \int_0^{T_{\Pi}} \exp[-t^2/(2\sigma^2)] dt$, откуда $T_{\text{ср}1} = 100$ ч, $T_{\text{ср}2} = 125$ ч.

Примем $q_1 = q_2 = 1,5$, тогда $T'_{\text{ср}1} = 150$ ч при $A'_1 = 1,5$ и $T'_{\text{ср}2} = 188$ ч при $A'_2 = 1,5$. Будем искать оптимальные решения для состояний системы ($A_1 \leq A'_1$ и $A_2 \leq A'_2$). Используя (2.26), находим:

$$\begin{aligned}
 dH(0, 0; x) &= \exp(-x^2/(2\sigma_1^2) - x/(2\sigma_1^2)) (2x/(2\sigma_1^2) + 2x/(2\sigma_1^2)) dx; \\
 dH(0, L_2; x) &= \{\exp[-x^2/(2\sigma_1^2) - (L_2 + x)^2/(2\sigma_2^2)] [2\sigma_1^2 + 2(L_2 + x)/(2\sigma_2^2)] / [1 - \exp(-L_2^2/(2\sigma_2^2))] \} dx; \\
 dH(L_1, 0; x) &= \{\exp[-(L_1 + x)^2/(2\sigma_1^2) - x^2/(2\sigma_2^2)] [2(L_1 + x)/(2\sigma_1^2) + L(L_2 + x)/(2\sigma_2^2)] / [1 - \exp(-L_1^2/(2\sigma_1^2))] \} dx; \\
 dH(L_1, L_2; x) &= \{\exp[-(L_1 + x)^2/(2\sigma_1^2) - (L_2 + x)^2/(2\sigma_2^2)] [2(L_1 + x)/(2\sigma_1^2) + 2(L_2 + x)/(2\sigma_2^2)] / [1 - \exp(-L_1^2/(2\sigma_1^2))] [1 - \exp(-L_2^2/(2\sigma_2^2))] \} dx.
 \end{aligned}$$

Для определения $V_N^*(A_1, A_2), \dots, V_N^{00}(A_1, A_2)$ необходимо в уравнении (2.27) знать условные вероятности тех состояний, в которые может перейти система после N -го цикла. Легко видеть, что $p(T_{\Pi}, T_{\Pi}/0, 0)$, $p(\infty, T_{\Pi}/0, 0)$, $p(T_{\Pi}, \infty/0, 0)$ и $p(\infty, \infty/0, 0)$ постоянны при любых состояниях A_1 и A_2 . Остальные 12

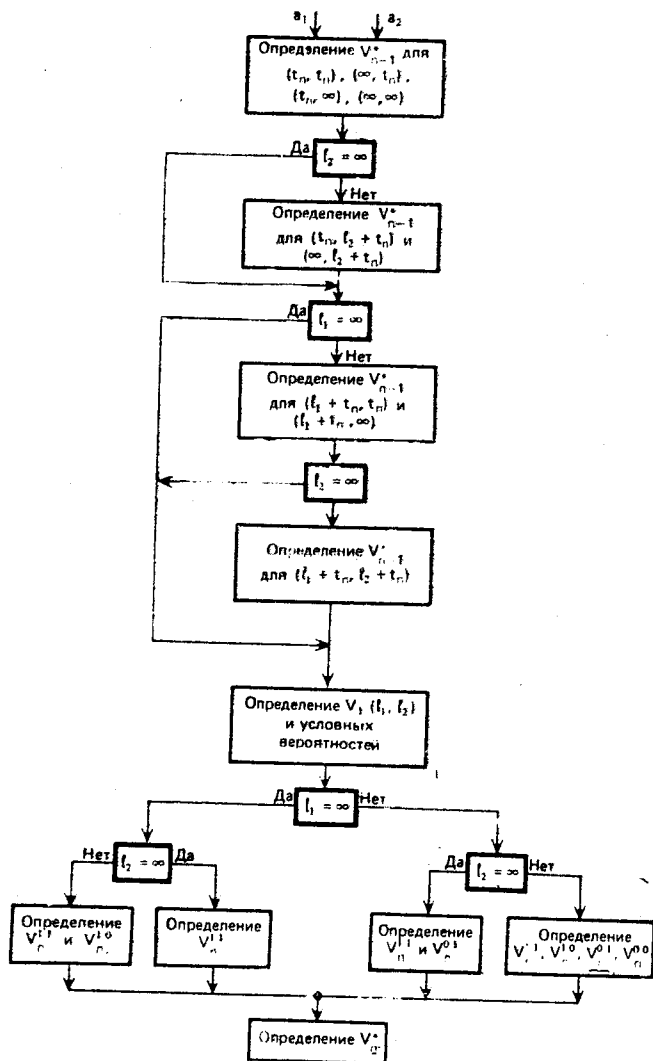


Рис. 2.2

значений условных вероятностей, входящих в (2.27), легко определить. Например,

$$p(L_1 + T_{\Pi}, L_2 + T_{\Pi}/L_1, L_2) = \{\exp[-(L_1 + T_{\Pi})^2/(2\sigma_1^2)]/\exp[-L_1^2/(2\sigma_1^2)]\} \times \\ \times \exp[-(L_2 + T_{\Pi})^2/(2\sigma_2^2)]/\exp[-L_2^2/(2\sigma_2^2)]\},$$

если принято решение d^{00} и элементы к очередному циклу не отказывают. Остальные значения условных вероятностей определяют аналогично из (2.23). Графическая интерпретация решения рассматриваемого примера приведена на рис. 2.3.

Таким образом, стратегия замен, учитывающая взаимные связи между элементами, для двухэлементной системы состоит из четырех областей решений: d^{00} , d^{10} , d^{01} , d^{11} . Вид граничной линии зависит от степени связи между элементами, их показателей надежности, стоимости замены каждого из них и потерь, связанных с пребыванием системы в состоянии отказа.

Результаты, приведенные на рис. 2.3, используют следующим образом. Если, например, в момент проверки наработки первого элемента равна A_1 (в предыдущий момент проверки эта наработка находилась в пределах отрезка оси абсцисс, являющейся границей области решений d^{00} , поэтому первый элемент замене не подлежал), а наработка второго — A_2 , то в рассматриваемый момент проверки необходима одновременная замена первого и второго элементов (пунктирные линии на рис. 2.3, которые пересекаются в области решений d^{11}).

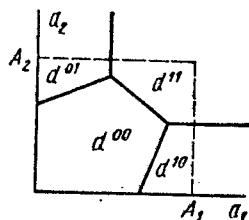


Рис. 2.3

В заключение отметим, что в данном параграфе изложены результаты, полученные на основе работы [54]. В [6] приведен общий алгоритм решения системы, состоящей из произвольного числа стареющих элементов.

§ 2.5. Организация эксплуатации системы с элементами стареющего типа

При конструировании современных технических систем стремятся положить в основу так называемый «принцип равной прочности». Однако осуществить этот принцип на практике удается далеко не всегда. Более того, в сложных радиоэлектронных системах всегда существуют наиболее часто отказывающие элементы, которые хотя и малочисленны, но дают большой процент от общего числа отказов. Таким образом, в процессе эксплуатации сложной системы возникает проблема учета так называемых слабых звеньев. Элементы, образующие такие звенья, часто являются элементами стареющего типа и, как уже отмечалось, несут большую нагрузку механического или электрического характера. Несмотря на то что эти элементы отказывают внезапно, появление отказов можно (см. § 2.1) предотвратить своевременной заменой (после выработки элементом запланированного, расчетного оптимального ресурса по наработке). При этом удается обеспечить наименьшие (в среднем) потери на эксплуатацию элементов стареющего типа и значительно повысить надежность системы в целом в процессе эксплуатации.

В программе эксплуатации системы, которая должна составляться на этапе проектирования, необходимо предусмотреть систематический анализ информации о работе элементов, подозреваемых в старении (по опыту эксплуатации таких элементов в системах аналогичного назначения). По мере получения информации о надежности элементов в эксплуатации необходимо строить функции интенсивностей отказов взятых под наблюдение элементов, проверять эти функции на монотонное возрастание и, учитывая характеристики эксплуатационной технологичности системы (величина T_0 для стареющего элемента) и ее ремонтно-

пригодности (величина T_1), рассчитывают по алгоритмам § 2.1 оптимальные сроки замен для всех элементов стареющего типа в системе.

Если же к моменту начала эксплуатации системы по результатам стендовых испытаний известны значения интенсивностей отказов всех стареющих элементов системы, то в программе эксплуатации или в инструкции по эксплуатации системы должна быть предусмотрена обязательная замена таких элементов после выработки установленного (рассчитанного по алгоритмам § 2.1) ресурса. При этом может возникнуть вопрос о группировании сроков замен некоторых элементов стареющего типа, так как регламентные или ремонтные работы для всей системы могут устанавливаться в жестко определенные сроки. В этом случае для оценки риска при отступлении от оптимальных сроков замен элементов по наработке рекомендуется строить для каждого стареющего элемента график функции $p(x, \tau)$ по τ . Например, для пологого участка графика функции $p(x, \tau)$ в окрестностях максимума отступление от оптимального срока замены данного элемента может быть значительным.

Для удобства планирования таких замен желательно иметь заданные значения разности $p(x, \tau_0) - p(x, \tau_3)$ для каждого элемента, где τ_3 — время замены элемента; τ_0 — расчетное оптимальное время его замены, $\tau_3 \geq \tau_0$.

Для удобства сбора и обработки статистики об отказах элементов стареющего типа или подозреваемых в старении необходимо иметь карточку отказов элемента (по каждой позиции, на которой устанавливается стареющий элемент) (табл. 2.7).

Карточка учета отказов (замен) элемента
Схемная позиция №

Таблица 2.7

Дата установки	15.10.1974	20.05. 1975	3.06. 1976	2.10. 1976	15.11. 1977	12.12. 1977
Эксплуатаци- онные харак- теристики элемента	Наработка до отказа	50 ч	—	30 ч		10 ч
	Наработка до замены	—	100 ч	—	100 ч	—
	Время замены исправного элемента	—	0,8 ч	—	0,7 ч	—
	Время замены отказавшего элемента	1,3 ч	—	1,1 ч	—	1,4 ч

Сбор статистического материала по таким карточкам позволяет не только рассчитать или уточнить оптимальные сроки замен элементов

по ресурсу, но и оценить их эффект. Для удобства чтения карточка заполнена цифрами, иллюстрирующими записи необходимых данных при эксплуатации системы. Как видно, $\tau_0 = 100$ ч.

Необходимо отметить, что если в системе ненадежно работает только небольшая группа элементов, а среднее время отказов остальных элементов (элементов с постоянной интенсивностью отказов) значительно превышает технический ресурс системы, то проблема продления ресурса системы в целом решается выбором ресурса всех элементов стареющего типа и их заменой после выработки расчетного (оптимального) ресурса по наработке.

В ряде случаев информация с датчиков наработки стареющих элементов системы поступает в ЭВМ автоматизированного устройства контроля системы, где происходит ее сравнение по каждому элементу с набором констант (расчетными оптимальными сроками их замен). По результатам сравнения с некоторым упреждением во времени обслуживающему персоналу выдается команда о замене соответствующих элементов системы.

Разумеется, что при эксплуатации элементов системы по ресурсу элементы должны быть выполнены в виде отдельных легко снимаемых и устанавливаемых блоков или модулей. После замены такой блок или модуль, как правило, не подлежит восстановлению. В противном случае необходимо предположить, что после ремонта стареющий блок или модуль полностью восстанавливается (обновляется), т. е. ведет себя статистически как новый.

ГЛАВА III

МОДЕЛИ ЭКСПЛУАТАЦИИ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ ПО СОСТОЯНИЮ

В основе теории разработки моделей эксплуатации сложных систем по состоянию лежит общая теория управляемых случайных процессов. Создание этой теории — крупное достижение современной математики. Одним из быстро развивающихся прикладных направлений теории управляемых случайных процессов является теория эксплуатации сложных технических систем.

Аналитические методы теории управляемых случайных процессов находят развитие при марковской и полумарковской аппроксимации реальных процессов изменения параметров сложных систем различного назначения. Считают, что задача управления, решенная для марковского случая, может быть решена и для полумарковского случайного процесса.

Развитие «чистой» теории управляемых случайных процессов связано, в первую очередь, с именами А. Н. Колмогорова, Л. С. Понтря-

гина, Р. Беллмана, А. Н. Ширяева. Приложения общей теории управляемых случайных процессов к задачам профилактики технических систем содержатся в работах С. Дермана [47—49], М. Клейна [52], И. Н. Коваленко [24], А. В. Притцкера [55—58]. С. Осаки, Х. Майне [62], В. Ф. Воскобоева [12, 13], а также в книге [4].

Немарковские случаи управления применительно к задачам профилактики систем основываются на общих идеях теории статистического последовательного анализа (раздел «Оптимальная остановка наблюдений»), которая изложена в монографии А. Н. Ширяева [42]. Не исключено также использование методов моделирования для решения более сложных задач в области управляемых случайных процессов.

Основные понятия, определения, термины и некоторые конечные результаты теории управляемых случайных процессов, а также показатели управления приведены в § 1.1, 1.2.

В настоящей главе приведены модели управляемых случайных процессов применительно к задачам эксплуатации сложных технических систем по состоянию. Изложение иллюстрируется примерами, имеющими в большинстве случаев нетривиальный характер и представляющими самостоятельный интерес.

§ 3.1. Проблема эксплуатации сложных систем по состоянию

Работы по техническому обслуживанию сложных систем в процессе эксплуатации можно осуществлять двумя способами: проводить регулярно, через выбранные заранее промежутки времени (например, рассчитанные оптимально так, как в моделях гл. II) или сначала измерять некоторые параметры системы, которые изменяются в результате действия внешних факторов и старения (разрегулировок, разладок, износа), наблюдаемого в составляющих систему блоках, устройствах, модулях и т. д., а затем решать вопрос о проведении того или иного вида работ по техническому обслуживанию системы, т. е. организовывать это обслуживание в зависимости от фактического состояния системы. Организуемая таким образом эксплуатация системы получила название *эксплуатации по текущему состоянию* или просто *эксплуатации по состоянию*.

Развитие автоматических и автоматизированных устройств количественного контроля состояния технических систем, с одной стороны, и создание математических моделей обработки измеряемой информации для оперативной выдачи обязательных рекомендаций персоналу (или управляющему устройству) по обслуживанию системы — с другой, обусловили повышенное внимание специалистов к эксплуатации по состоянию как к прогрессивному методу обслуживания техники в различных отраслях народного хозяйства. Это объясняется тем, что при эксплуатации по состоянию используют более глубокую количественную информацию о техническом состоянии системы по сравнению с информацией только о моментах отказов системы, которая берется за основу при организации эксплуатации по первому из упомянутых выше способов. Именно большой объем знаний о состоянии системы позво-

ляет так организовать ее эксплуатацию по состоянию, чтобы было можно значительно улучшить эксплуатационные показатели.

При организации эксплуатации системы по состоянию возникают следующие задачи:

- выбор минимально необходимого числа контролируемых параметров, несущих достаточную информацию о состоянии системы в любой момент времени;

- обоснование допустимых областей изменения выбранных для контроля параметров;

- разработка алгоритмов математического обеспечения для обоснования программ эксплуатации по состоянию;

- создание технических средств контроля и диагностики (обеспечивающих высокую точность измерения параметров в пределах допустимых областей изменения и определение места неисправности), регистрации и оперативной обработки измеряемой информации.

Ниже приведены модели оптимальной эксплуатации по состоянию, в которых рассматриваются критерии минимума средних удельных эксплуатационных затрат при выполнении некоторых ограничений (например, на заданный высокий уровень надежности системы в процессе длительной эксплуатации). Если оптимальная эксплуатация по состоянию системы строится по набору независимых параметров, то и в целом система эксплуатируется оптимально (по одному и тому же показателю).

§ 3.2. Управление при монотонном изменении параметра

Условимся считать, что управления (регулировки) параметра системы осуществляются на основе его дискретного измерения в моменты t_n , $n = 0, 1, 2, \dots$. На рис. 3.1 изображена реализация монотонно возрастающего случайного процесса $S(t)$ с независимыми приращениями X_n , $n = 1, 2, \dots$, в моменты контроля (заметим, что предположение о независимости приращения не является принципиальным и потребовалось только для упрощения изложения материала). Таким образом, наблюдаем некоторую последовательность случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$. Назовем функцию $\varphi(X_1, X_2, \dots, X_n, \dots)$, принимающую значения $0, 1, 2, \dots$, *правилом остановки* (наблюдений). Будем считать, что если, например, $\varphi(X_1, \dots, X_n, \dots) = m < n$, т. е. если $X_1 = x_1, \dots, X_m = x_m$, то процесс наблюдения заканчивается на m -м шаге. Если $\varphi(X_1, \dots, X_n, \dots) = 0$, то это означает, что принято решение вообще не производить наблюдений над случайными величинами.

Отметим, что обозначения $x_1, x_2, \dots, x_n$ относятся к уже наблюдавшимся приращениям (реализациям случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$),

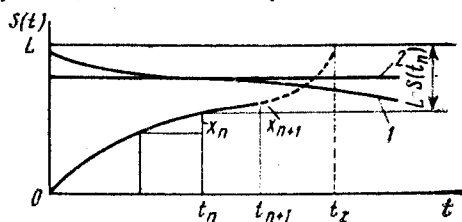


Рис. 3.1

если же приращение не наблюдалось, то считаем его случайным и обозначаем символом X , например если последнее наблюдение закончилось в момент t_{n-1} , то приращение процесса $S(t)$ от t_{n-1} до t_n обозначим через X_n .

Далее также для простоты изложения будем считать, что все случайные величины X_n , $n = 1, 2, \dots$, имеют одинаковое распределение. Рассматриваемый метод может быть применен и к процессам с зависимыми приращениями, характеризруемыми условными распределениями приращений при условии наблюдения процесса на определенном шаге контроля.

Введем следующую функцию удельных потерь:

$$\hat{y}_{n+1}(x_1, \dots, x_n, X_{n+1}) = \begin{cases} C/t_{n+1}, & t_{n+1} < t_z, \\ (C+A)/t_{n+1}, & t_{n+1} \geq t_z. \end{cases} \quad (3.1)$$

Наблюдая процесс $S(t)$ до момента t_n включительно, далее решают, какие средние удельные потери имеют место, если процесс остановлен в момент t_n . В (3.1) C — среднее время возвращения процесса в ноль, если $S(t_{n+1}) < L$; $C+A$ — среднее время его возвращения в ноль при $S(t_{n+1}) \geq L$, где L — допускаемая граница изменения процесса $S(t)$, t_z — момент выхода процесса $S(t)$ за уровень L . Так как числитель дроби в правой части (3.1) случаен, то найдем оптимальное правило φ^* , минимизирующее средние удельные затраты, т. е. определим $\min_{\varphi^*} M[\hat{y}_{n+1}(x_1, \dots, x_n, X_{n+1})]$. Запишем выражение для средних удельных потерь:

$$\begin{aligned} M[\hat{y}_{n+1}(x_1, \dots, x_n, X_{n+1})] &= \frac{C}{t_{n+1}} P\{X_{n+1} < L - S(t_n)\} + \\ &+ \frac{C+A}{t_{n+1}} [1 - P\{X_{n+1} < L - S(t_n)\}] = \frac{C}{t_{n+1}} + \frac{A}{t_{n+1}} \times \\ &\times [1 - P\{X_{n+1} < L - S(t_n)\}]. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Покажем, что $M[\hat{y}_{n+1}(x_1, \dots, x_n, X_{n+1})] \leq \hat{y}_n(x_1, \dots, x_{n-1}, X_n)$, если процесс наблюдения остановить не позже момента, соответствующего значению φ^* , т. е. при

$$n \leq \varphi^*(x_1, \dots, x_n) \quad (3.3)$$

и если

$$1 - P\{X_{n+1} < L - S(t_n)\} \leq C/(An). \quad (3.4)$$

Действительно, подставляя (3.4) в (3.2), убеждаемся, что утверждение верно. И наоборот, покажем, что $M[\hat{y}_{n+1}(x_1, \dots, x_n, X_{n+1})] \geq \hat{y}_n(x_1, \dots, x_{n-1}, X_n)$, если процесс наблюдения остановить не раньше момента, соответствующего значению φ^* , т. е. при

$$n \geq \varphi^*(x_1, \dots, x_n) \quad (3.5)$$

и если

$$1 - P\{X_{n+1} < L - S(t_n)\} \geq C/(An). \quad (3.6)$$

Подставляя в (3.2) выражение (3.6), убеждаемся, что и обратное утверждение справедливо.

Пусть n^* есть такое n , при котором имеет место знак равенства в (3.3) и (3.5). Покажем, что тогда

$$\varphi^*(x_1, \dots, x_n, X_{n+1}) = n^*. \quad (3.7)$$

Действительно, в данном случае выполняются все условия оптимальной леммы, доказанной в § 3.3, откуда и следует, что утверждение (3.7) справедливо и n^* нужно отыскивать как наибольшее n , при котором еще верно выражение (3.4). Найдем из (3.4) уравнение кривой оптимального упреждающего допуска (кривая I на рис. 3.1). Из (3.4) имеем

$$F(L - S(t_n)) \geq 1 - C/(An).$$

Взяв от обеих частей этого равенства функцию, обратную F , получаем

$$L - S(t_n) \geq F^{-1}(1 - C/(An)),$$

или

$$S(t_n) \leq L - F^{-1}(1 - C/(An)).$$

На рис. 3.1 прямая 2 — «аппроксимирующая» линия для кривой I , более удобная для практической реализации в системах контроля (для уменьшения объема памяти ЭВМ при контроле многих параметров).

В следующем параграфе приведены некоторые сведения из современной теории построения оптимальных правил остановки и показано, какое место среди них занимает фундаментальный результат, который был использован в § 3.2 для явного отыскания оптимального правила остановки наблюдений.

§ 3.3. Некоторые математические результаты, лежащие в основе модели эксплуатации по состоянию (монотонный случай)

Воспользуемся графической интерпретацией правила остановки и доказательством его оптимальности, предложенными И. Н. Коваленко. Для случая, когда каждая из случайных величин может принимать лишь конечное число значений (рис. 3.2), процесс реализации случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$ можно представить в виде дерева. Каждой вершине 1-го ранга соответствует некоторое значение ξ_1 , каждой вершине 2-го ранга — некоторое значение пары (ξ_1, ξ_2) и т. д. Правило остановки в этом случае можно интерпретировать как «обрубание» веток дерева. На рис. 3.3 изображено «обрубленное» дерево. Заметим, что даже при небольшом числе возможных значений случайных величин ξ_n задание правила остановки с помощью дерева громоздко. Возможен другой путь: определить некоторые функции $\varphi_n = \varphi_n(\xi_1, \dots, \xi_n)$ и принять решение остановить процесс наблюдения на n -м шаге на основании значения φ_n . В этом случае правило остановки можно представить себе как систему барьеров для блуждающей частицы (рис. 3.4).

Если блуждающая точка $(n; \varphi_n)$ попадет на один из барьеров при $n = m$, то это означает, что процесс наблюдения заканчивается на m -м шаге. Как же сравнить все возможные правила остановки и выбрать оптимальное?

Допустим, что для любого $n \geq 0$ и любых $x_1, \dots, x_n$ определена некоторая функция убытка $y_n = y_n(x_1, \dots, x_n)$. Эта функция интерпретируется как убыток, имеющий место в случае, если процесс наблюдения остановлен на n -м шаге и при этом первые n наблюдений приняли значения $\xi_1 = x_1, \dots, \xi_n = x_n$. Предположим, что известен вероятностный закон, управляющий образованием случайных вели-

чин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$. Тогда при заданном правиле остановки $v(\xi_1, \xi_2, \dots)$ можно вычислить среднюю характеристику

$$I(v) = My_v(\xi_1, \xi_2, \dots)(\xi_1, \dots, \xi_v).$$

Байесовский принцип оптимальности правила остановки состоит в выборе такого правила остановки v^* , для которого $I(v^*) = \min_v I(v)$, где v^* — оптимальное (байесовское) правило остановки процесса наблюдения.

Фундаментальную роль в теории оптимальных правил остановки играет система рекуррентных уравнений для

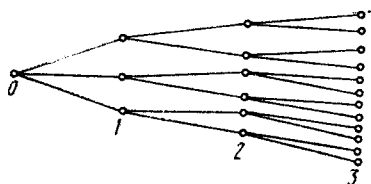


Рис. 3.2

минимального риска. Пусть используется [24] некоторое правило остановки v . Каждой возможной траектории случайной последовательности $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots)$ соответствует некоторое значение убытка $y_v(\xi_1, \dots, \xi_v)$, где $v = v(\xi_1, \xi_2, \dots)$. Было отмечено, что оптимальное правило состоит в минимизации $I(v)$, т. е. математического ожидания этого убытка. Предположим теперь, что получены наблюдения $\xi_1 = x_1, \dots, \xi_n = x_n$. Тогда поведение после n -го наблюдения должно быть таким, чтобы минимизировать условное ма-

тематическое ожидание $\rho^v(x_1, \dots, x_n)$ убытка при условии, что получены указанные наблюдения. Функция $\rho^v(x_1, \dots, x_n)$ называется *риском после n наблюдений*. Вид этой функции зависит от правила остановки v . Минимум функции по всем допустимым v называется *оптимальным риском* и обозначается $\rho(x_1, \dots, x_n)$. Получив n наблюдений $x_1, \dots, x_n$, можно принять одно из решений: провести еще хотя бы одно наблюдение или остановиться. Допустим, что принято первое из решений. Тогда имеем $n+1$ наблюдение $x_1, \dots, x_n, \xi_{n+1}$. Следуя затем оптимальному правилу остановки, понесем убыток, математическое ожидание кото-

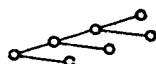


Рис. 3.3

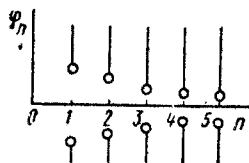


Рис. 3.4

рого $\rho(x_1, \dots, x_n, \xi_{n+1})$. Таким образом, риск после n наблюдений при условии, что будет сделано еще хотя бы одно наблюдение и после этого применено оптимальное правило остановки, равен

$$\rho_1(x_1, \dots, x_n) = M\{\rho(x_1, \dots, x_n, \xi_{n+1}) / \xi_1 = x_1, \dots, \xi_n = x_n\}.$$

Предположим теперь, что принято решение остановить процесс наблюдений. Тогда понесен убыток $y_n = (x_1, \dots, x_n)$.

Определим оптимальный риск. Если $y_n(x_1, \dots, x_n) \leq \rho_1(x_1, \dots, x_n)$, то выгоднее сделать остановку после n наблюдений, т. е. $\rho(x_1, \dots, x_n) = y_n(x_1, \dots, x_n)$; если же $y_n(x_1, \dots, x_n) > \rho_1(x_1, \dots, x_n)$, то выгоднее сделать еще одно наблюдение, так что $\rho(x_1, \dots, x_n) = \rho_1(x_1, \dots, x_n)$. Объединяя эти два случая, получаем рекуррентную формулу для оптимального риска:

$$\rho(x_1, \dots, x_n) = \min\{y_n(x_1, \dots, x_n), M\{\rho(x_1, \dots, x_n, \xi_{n+1}) / \xi_1 = x_1, \dots, \xi_n = x_n\}\}.$$

Зная $\rho(x_1, \dots, x_{n+1})$, можно по этой формуле вычислить $\rho(x_1, \dots, x_n)$. Оптимальное правило остановки теперь таково: если получены n наблюдений $\xi_1 = x_1, \dots$

..., $\xi_n = x_n$, то вычисляют значения $\rho_1 = \rho_1(x_1, \dots, x_n)$ и $y_n = y_n(x_1, \dots, x_n)$; при $y_n < \rho$ обязательно делают остановку; при $y_n > \rho_1$ обязательно делают еще хотя бы одно наблюдение; если, наконец, $y_n = \rho_1$, то оба решения (остановка и продолжение наблюдений) равнозначны в смысле риска и можно принять любое из них.

Однако любая рекуррентная формулировка требует некоторых начальных условий: нужно задать $\rho(x_1, \dots, x_N)$, тогда можно вычислить $\rho(x_1, \dots, x_n)$ при всех $n < N$. Эффективный метод такого задания состоит в следующем. Ограничим число наблюдений некоторым N и выберем квазиоптимальное правило остановки $v^{(N)}$ при этом ограничении. Отметив все введенные выше функции при данном ограничении индексом (N) , получим:

$$\rho^{(N)}(x_1, \dots, x_n) = \min \{y_n(x_1, \dots, x_n), M\{\rho^{(N)}(x_1, \dots, x_n, \xi_{n+1})/\xi_1 = x_1, \dots, \xi_n = x_n\}\}, \quad n < N;$$

$$\rho^{(N)}(x_1, \dots, x_N) = y_N(x_1, \dots, x_N).$$

Таким образом, процесс вычисления $\rho^{(N)}(x_1, \dots, x_n)$ вполне определен. Правило остановки $v^{(N)}$, как и выше, определяется функциями $y_n(x_1, \dots, x_n)$, $\rho_1^{(N)}(x_1, \dots, x_n)$.

Для оптимального правила остановки v^* имеем $I(v) = \rho$, где ρ — частный случай $\rho(x_1, \dots, x_n)$ при $n = 0$. Далее получаем $I(v^{(N)}) = \rho^{(N)}$. Очевидно, $\rho \leq \rho^{(N)}$. Если при достаточно большом N $\rho^{(N)} - \rho \leq \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — допустимое отклонение от оптимального риска, то вместо v^* можно использовать $v^{(N)}$. Таким образом, следует лишь найти соответствующее N , если оно существует.

Пусть

$$y_n = y_n(x_1, \dots, x_n) = C_n + \gamma(x_1, \dots, x_n),$$

где $0 \leq \gamma(x_1, \dots, x_n) \leq K$, K — некоторая константа. Тогда если $\beta = P(v > N)$, то $\rho^{(N)} - \rho \leq \beta K$; в то же время при любом $n \geq 0$

$$\beta \leq My_n / C_{N+1},$$

следовательно,

$$\rho^N - \rho \leq \frac{1}{C_{N+1}} K \inf_{n \geq 0} My_n \leq \frac{1}{C_{N+1}} K^2.$$

Таким образом, если $C_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, то по любому $\varepsilon > 0$ найдется соответствующее значение N . В [24] отмечено, что, несмотря на принципиальную простоту построения оптимального правила остановки, фактическое вычисление оптимального риска — трудная задача. Однако при выполнении определенных условий монотонности, как следует из приведенной выше и повторяемой далее леммы, возможно непосредственное определение оптимального управления процессом. Это оптимальное управление случайного процесса монотонного типа (для непрерывного и дискретного случаев) используется ниже.

Пусть имеется возможность наблюдать последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$. Совместный закон распределения этих случайных величин предполагаем известным. Пусть, далее, задана функция убытка $y_n = y_n(x_1, \dots, x_n)$, $n \geq 0$, имеющая, согласно предыдущему, смысл убытка при остановке процесса на n -м шаге после получения наблюдений со значениями $\xi_1 = x_1, \dots, \xi_n = x_n$.

Лемма [24]. Пусть существует правило остановки $v^*(x_1, x_2, \dots)$, обладающее следующими свойствами: 1) M_{v^*} существует и конечно; 2) для любых $n \geq 0$ и $x_1, \dots, x_n$ выполняются неравенство $My_{n+1}(x_1, \dots, x_n, \xi_{n+1}) \leq y_n(x_1, \dots, x_n)$ при $n \leq v^*(x_1, \dots, x_n)$ и неравенство $My_{n+1}(x_1, \dots, x_n, \xi_{n+1}) \geq y_n(x_1, \dots, x_n)$ при $n \geq v^*(x_1, \dots, x_n, \dots)$;

3) $|y_{n+1}(x_1, \dots, x_n, \xi) - y_n(x_1, \dots, x_n)| \leq K$ для некоторой константы K , каковы бы ни были $n, x_1, \dots, x_n$.

Тогда v^* — оптимальное правило остановки среди всех правил остановки v , для которых Mv конечно.

В силу определения правила остановки выполнение неравенств $n \leq v(x_1, \dots, x_n, \dots)$ и $n \geq v(x_1, \dots, x_n, \dots)$ не зависит от переменных $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots$. Величина $My_{n+1}(x_1, \dots, x_n, \xi_{n+1})$ является условным математическим ожиданием $y_{n+1}(\xi_1, \dots, \xi_n, \xi_{n+1})$ при условии $(\xi_1, \dots, \xi_n) = (x_1, \dots, x_n)$.

Заметим, что в соответствии с основным определением оптимальность правила остановки понимается в смысле минимизации функционала $I(v)$.

Приведем доказательство леммы, предложенное И. Н. Коваленко [24]. Докажем сначала следующее утверждение. Пусть v — произвольное правило остановки. Зафиксируем некоторое $N \geq 0$ и зададим правило остановки $v^{(N)}$: если для последовательности $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, $v(x_1, \dots, x_n, \dots) \leq N$, то $v^{(N)}(x_1, \dots, x_n, \dots) = v(x_1, \dots, x_n)$; если $v(x_1, \dots, x_n, \dots) > N$, то $v^{(N)}(x_1, \dots, x_n) = N$; $v^{(N)}$ — усеченное правило остановки.

Пусть далее выполняется третье условие леммы. Если v — вновь произвольное заданное правило остановки, для которого $Mv < \infty$, то, $|I(v)| < \infty$ и для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое N , что $|I(v^{(N)})| \leq |I(v)| + \varepsilon$, т. е. если правило остановки усекают достаточно далеко, то математическое ожидание y_v претерпевает сколь угодно малое изменение.

Докажем лемму. Пусть $E(A)$ — случайная величина, принимающая значение 1, если происходит событие A , и 0 — в противном случае. Тогда

$$I(v) = \sum_{n=0}^{\infty} My_n E(v=n),$$

так что $|I(v)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} M|y_n| E(v=n)$. Предположим, что $v \geq 0$. В этом случае без ограничения общности можно считать, что $y_0 = 0$, и последняя формула принимает вид

$$|I(v)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} M|y_k - y_{k-1}| \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n M|y_k - y_{k-1}| E(v=n).$$

Изменяя порядок суммирования, имеем

$$|I(v)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} M|y_k - y_{k-1}| \sum_{n=k}^{\infty} E(v=n).$$

Так как $\sum_{n=k}^{\infty} E(v=n) = E(v \geq k)$, то получаем

$$|I(v)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} M|y_k - y_{k-1}| E(v \geq k).$$

Событие $\{v \geq k\}$ зависит только от $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{k-1}$; это событие означает, что процесс наблюдения не остановлен после $(k-1)$ -го шага. Далее имеем:

$$M|y_k - y_{k-1}| E(v \geq k) = P(v \geq k) M\{|y_k - y_{k-1}| | v \geq k\}.$$

Очевидно, $M\{|y_k - y_{k-1}| | v \geq k\} \leq K$. Суммируя по всем k , находим

$$|I(v)| \leq K \sum_{k=1}^{\infty} P(v \geq k) = KMv < \infty.$$

Первое утверждение свойства усекаемости доказано.

Рассмотрим теперь правило остановки $v^{(N)}$. Имеем

$$I(v^{(N)}) = \sum_{n=0}^{N-1} M y_n E(v \leq n) + M y_N E(v \geq N),$$

откуда, учитывая, что $I(v) = \sum_{n=0}^{\infty} M y_n E(v = n)$, имеем

$$\begin{aligned} I(v) - I(v^{(N)}) &= \sum_{n=N}^{\infty} M (y_n - y_N) E(v = n) = \\ &= \sum_{n=N}^{\infty} \sum_{k=N+1}^{\infty} M (y_k - y_{k-1}) E(v = n) = \\ &= \sum_{k=N+1}^{\infty} M (y_k - y_{k-1}) \sum_{n=k}^{\infty} E(v = n) = \sum_{k=N+1}^{\infty} M (y_k - y_{k-1}) E(v \geq k). \end{aligned}$$

Последнее выражение представляет собой остаток сходящегося ряда. Отсюда $I(v^{(N)}) \rightarrow I(v)$, что и требовалось доказать.

Сформулируем теперь вспомогательную лемму, из которой на основании свойства усекаемости следует доказываемая лемма.

Вспомогательная лемма. Пусть выполнены условия основной леммы. Тогда для любого N

$$I(v^{*(N)}) \leq I(v^{(N)}),$$

каково бы ни было правило остановки v .

Докажем, что из вспомогательной леммы следует основная. Пусть v — любое правило остановки с конечным Mv . Тогда $I(v^{*(N)}) \leq I(v^{(N)})$ при любом N , в то же время $I(v^{*(N)}) \rightarrow I(v)$, $I(v^{(N)}) \rightarrow I(v)$. Отсюда $I(v^*) \leq I(v)$, что и требовалось доказать.

Докажем вспомогательную лемму. Для простоты [24] ограничимся случаем, когда ξ_n принимает конечное число различных значений.

Допустим, что v — некоторое правило остановки, для которого $v \leq N$, причем $v^{(N)}$ не совпадает с $v^{*(N)}$. Существуют две, не исключающие одна другую, возможности: 1) найдется набор $x_1^0, \dots, x_n^0$ ($n < N$) такой, что $v^{*(N)}(x_1^0, \dots, x_n^0, \dots) > n$, $v(x_1^0, \dots, x_n^0, \dots) = n$; 2) найдется набор $x_1^0, \dots, x_n^0$ ($n \leq N$) такой, что

$$v^{*(N)}(x_1^0, \dots, x_n^0, \dots) < n, v(x_1^0, \dots, x_n^0, \dots) = n.$$

Рассмотрим первый случай. Определим новое решающее правило μ . Имеем $\mu(x_1^0, \dots, x_n^0, \dots) = n+1$; если $(x_1, \dots, x_n) \neq (x_1^0, \dots, x_n^0)$, то $\mu(x_1, \dots, x_n, \dots) = v^{*(N)}(x_1, \dots, x_n, \dots)$. По формуле полного математического ожидания,

$$\begin{aligned} I(v) &= P((\xi_1, \dots, \xi_n) = (x_1^0, \dots, x_n^0)) M y_n (x_1^0, \dots, x_n^0) + \\ &+ P((\xi_1, \dots, \xi_n) \neq (x_1^0, \dots, x_n^0)) M \{y_n / (\xi_1, \dots, \xi_n) \neq (x_1^0, \dots, x_n^0)\}, \end{aligned}$$

но

$$\begin{aligned} I(\mu) &= P((\xi_1, \dots, \xi_n) = (x_1^0, \dots, x_n^0)) M y_{n+1}(x_1^0, \dots, x_n^0) + \\ &+ P((\xi_1, \dots, \xi_n) \neq (x_1^0, \dots, x_n^0)) M \{y_v / (\xi_1, \dots, \xi_n) \neq (x_1, \dots, x_n)\}, \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned} I(\mu) - I(v) &= M [y_{n+1}(x_1^0, \dots, x_n^0) - y_n(x_1^0, \dots, x_n^0)] P((\xi_1, \dots, \xi_n) = \\ &= (x_1^0, \dots, x_n^0)). \end{aligned}$$

Так как $n < v(x_1^0, \dots, x_n^0, \dots)$, то по второму условию леммы последнее выражение меньше или равно нулю. Значит, если согласно правилу остановки v процесс наблюдения останавливается раньше, чем предписывается правилом остановки, определенным леммой, то можно определить новое правило остановки, такое, что для рассматриваемого значения вектора наблюдений $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ решение об остановке принимается на шаг позднее. Очевидно, эту процедуру можно осуществить для произвольного вектора $(x_1^0, \dots, x_n^0)$, для которого $v(x_1^0, \dots, x_n^0) = n$, $v^{*(N)}(x_1^0, \dots, x_n^0, \dots) > 0$. Таким образом, не увеличивая значения $I(v)$, можно полностью исключить существование векторов указанного вида.

Рассмотрим теперь второй случай. Пусть существуют векторы $(x_1^0, \dots, x_n^0)$, для которых $v^{*(N)}(x_1^0, \dots, x_n^0, \dots) \leq n$, $v(x_1^0, \dots, x_n^0, \dots) > n + 1$. Выберем вектор, для которого n максимально (такой вектор найдется, так как, по определению, $v^{*(N)}(x_1, x_2, \dots) \leq N$ для любых $x_1, x_2, \dots$). Таким образом, $v(x_1^0, \dots, x_n^0, z) = n + 1$ для любого z . По формуле полного математического ожидания,

$$I(v) = P((\xi_1, \dots, \xi_n) = (x_1^0, \dots, x_n^0)) M y_{n+1}(x_1^0, \dots, x_n^0, \xi_{n+1}) + \\ + P((\xi_1, \dots, \xi_n) \neq (x_1^0, \dots, x_n^0)) M \{y_v / (\xi_1, \dots, \xi_n) \neq (x_1^0, \dots, x_n^0)\}.$$

Определим новое правило остановки μ . Имеем

$\mu(x_1^0, \dots, x_n^0, \dots) = n$; если $(x_1, \dots, x_n) \neq (x_1^0, \dots, x_n^0)$, то $\mu(x_1, \dots, x_n, \dots) = v^{*(N)}(x_1, \dots, x_n, \dots)$. Тогда

$$I(\mu) = P((\xi_1, \dots, \xi_n) = (x_1^0, \dots, x_n^0)) M y_n(x_1^0, \dots, x_n^0) + \\ + P((\xi_1, \dots, \xi_n) \neq (x_1^0, \dots, x_n^0)) M \{y_v / (\xi_1, \dots, \xi_n) \neq (x_1^0, \dots, x_n^0)\}.$$

Вычитая из этого выражения предыдущее, получаем

$$I(\mu) - I(v) = P((\xi_1, \dots, \xi_n) = (x_1^0, \dots, x_n^0)) [y_n(x_1^0, \dots, x_n^0) - \\ - M y_{n+1}(x_1^0, \dots, x_n^0, \xi_{n+1})].$$

По второму условию леммы, $I(\mu) - I(v) \leq 0$. Следовательно, правило остановки v можно заменить правилом остановки μ , для которого решение об остановке принимается ранее. Эту процедуру повторяют до тех пор, пока не получают правило остановки $v^{*(N)}$, которое удовлетворяет второму условию леммы. Это утверждение завершает доказательство основной леммы.

§ 3.4. Эксплуатация по состоянию системы с параметрами полумарковского и марковского типов *

Рассмотрим параметр системы, число состояний которого конечно ($i = \overline{0, L}$). Назовем состояние параметра 0 *новым*, а состояние L — *состоянием отказа* системы. Будем считать, что процесс изменения состояний системы является управляемым полумарковским процессом, т. е. для каждого состояния заданы **: множество $\{d_{ik}\}$ вероятностей

* В настоящем параграфе изложены результаты В. Ф. Воскобоева [12, 13], опирающиеся на работы [47, 48, 52, 62].

** Полумарковский процесс считается заданным, если помимо набора переходных вероятностей из состояния в состояние задан соответствующий набор условных распределений времен пребывания для этих же состояний [13].

того, что в состоянии i принято решение k , $i = \overline{0, L}$, $k = \overline{1, K}$; матрица переходных вероятностей с учетом принятия решения d_{ik} — $\|p_{ij}\|^k$; матрица распределений времен пребывания в состоянии i при известном следующем состоянии j с учетом принятого решения d_{ik} — $\|F_{ij}\|^k$; r_i^k — затраты в единицу времени, связанные с принятием решения d_{ik} .

Тогда средние удельные затраты

$$u = \frac{\sum_{j=0}^L \sum_{k=1}^K \pi_j \eta_j^k r_j^k d_{jk}}{\sum_{j=0}^L \sum_{k=1}^K \pi_j \eta_j^k d_{jk}}, \quad (3.8)$$

где π_j , $j = \overline{0, L}$, удовлетворяют системе уравнений

$$\pi_j \geq 0; \quad \pi_j - \sum_{i=0}^L \sum_{k=1}^K \pi_i p_{ij}^k d_{ik} = 0; \quad j = \overline{0, L}, \quad \sum_{j=0}^L \pi_j = 1. \quad (3.9)$$

В выражениях (3.8) и (3.9) π_j — стационарная вероятность пребывания параметра в состоянии j ; η_j^k — математическое ожидание безусловного времени пребывания параметра в состоянии j с учетом принятого решения k , т. е.

$$\eta_j^k = \sum_{i=1}^L p_{ij}^k b_{ij}^k,$$

где b_{ij}^k — математическое ожидание времени пребывания параметра в состоянии j с учетом принятого решения k :

$$b_{ij}^k = \int_0^{\infty} t dF_{ij}(t).$$

Вводя обозначение $\pi_j d_{jk} = x_{jk}$, получаем

$$u = \frac{\sum_{j=0}^L \sum_{k=0}^K \eta_j^k r_j^k x_{jk}}{\sum_{j=0}^L \sum_{k=0}^K \eta_j^k x_{jk}}, \quad x_{jk} \geq 0, \quad j = \overline{0, L}, \quad k = \overline{1, K}; \quad (3.10)$$

$$\sum_{k=1}^K x_{jk} - \sum_{i=0}^L \sum_{k=1}^K p_{ij}^k x_{jk} = 0; \quad j = \overline{0, L}, \quad (3.11)$$

$$\sum_{j=0}^L \sum_{k=1}^K x_{jk} = 1.$$

Теперь задача сводится к выбору переменных x_{jk} таким образом, чтобы минимизировать целевую функцию (3.10) при выполнении огра-

ничений (3.11). Приведем сформулированную задачу к задаче линейного программирования. Введем следующие обозначения:

$$y_{jk} = \eta_j^k x_{jk} / \left(\sum_{j=0}^L \sum_{k=1}^K \eta_j^k x_{jk} \right), \quad (3.12)$$

$$y = 1 / \left(\sum_{j=0}^L \sum_{k=1}^K \eta_j^k x_{jk} \right). \quad (3.13)$$

Тогда (3.10) и (3.11) принимают соответственно вид

$$u = \sum_{j=0}^L \sum_{k=1}^K r_j^k y_{jk}, \quad y_{jk} \geq 0, \quad j = \overline{0, L}, \quad k = \overline{1, K}; \quad (3.14)$$

$$\sum_{k=1}^K \sum_{i=0}^L p_{ij}^k \frac{y_{jk}}{\eta_j^k} - \sum_{k=1}^K \frac{y_{jk}}{\eta_j^k} = 0; \quad j = \overline{0, L}, \quad (3.15)$$

$$\sum_{j=0}^L \sum_{k=1}^K y_{jk} = 1.$$

Таким образом, данная задача сведена к следующей задаче линейного программирования: минимизировать линейную форму (3.14) при линейных ограничениях (3.15) по переменным y_{jk} .

Рассмотрим частный случай, при котором изменение состояния системы является управляемой цепью Маркова со стационарными вероятностями переходов. Напомним, что марковская цепь есть полумарковский процесс, в котором каждое распределение безусловного времени пребывания является вырожденным и сосредоточенным в единице времени. В этом случае

$$\eta_j^k = 1, \quad y_{jk} = \frac{x_{jk}}{\sum_{j=0}^L \sum_{k=1}^K x_{jk}} = x_{jk};$$

выражение (3.14) принимает вид

$$u = \sum_{j=0}^L \sum_{k=1}^K r_j^k x_{jk}, \quad (3.16)$$

а ограничения (3.15) — вид (3.11).

Ниже на примерах показано, что оптимальная стратегия управления для марковского случая является однородной марковской. Для полумарковского случая характер оптимальной стратегии не изменится. Однородность оптимальной стратегии означает выбор упреждающего допуска параллельно основному допуску.

Рассмотрим [12] параметр марковского типа, характеризующий работу системы и находящийся в исходном состоянии 0 в начале эксплуатации. Область допустимых в процессе эксплуатации состояний параметра заключена между состояниями 0 и L . Предположим, что эта область разбита на семь одинаковых состоя-

ний (квантов). Пусть заданы следующие затраты на управление (регулировки) параметра в процессе эксплуатации:

$$r_i^k = \begin{cases} T_{\Pi}, & \text{если } i \in \overline{0, L-1}, k \in \overline{0, L-1}; \\ T_p, & \text{если } i = L, k \in \overline{0, L-1}; \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где T_{Π} — среднее время регулировки параметра до выхода за фиксированный уровень L ; T_p — среднее время регулировки после выхода за уровень L (на практике всегда $T_p \geq T_{\Pi}$). Пусть $\rho = T_{\Pi}/T_p$. Тогда (3.16) можно записать в виде

$$u = \sum_{s=0}^{L-1} x_{L_s} + \rho \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{s=0}^{L-1} x_{is}, \quad (3.17)$$

где $x_{is} = \pi_i D_{is}$.

Считаем далее, что для исследуемого параметра известна матрица стационарных вероятностей перехода $\|q_{ij}\|$, значения которых должны определяться для управляемой цепи. Тогда

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^L q_{ik} D_{kj},$$

где D_{kj} — вероятность перевести параметр из состояния k в j . Пусть

$$\|q_{ij}\| = \begin{pmatrix} 0,30 & 0,20 & 0,20 & 0,12 & 0,10 & 0,05 & 0,03 \\ 0,10 & 0,30 & 0,20 & 0,13 & 0,12 & 0,08 & 0,07 \\ 0,08 & 0,10 & 0,30 & 0,20 & 0,12 & 0,10 & 0,10 \\ 0,05 & 0,10 & 0,10 & 0,30 & 0,20 & 0,15 & 0,10 \\ 0,05 & 0,10 & 0,10 & 0,15 & 0,30 & 0,20 & 0,10 \\ 0,32 & 0,08 & 0,10 & 0,10 & 0,20 & 0,30 & 0,20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Минимизация (3.17) при ограничениях (3.11) была осуществлена [12] с помощью алгоритма линейного программирования, в результате была найдена искомая матрица решений $\|D_{ij}\|$. В каждой строке этой матрицы имеется один элемент, равный единице, остальные элементы строки равны нулю. Часть элементов матрицы, равных единице, расположены на главной диагонали, остальные — в первом столбце. Наличие единиц в первом столбце матрицы означает обязательную регулировку параметра с возвращением его в исходное состояние, нахождение единиц на диагонали означает, что параметр регулировке не подлежит.

При $\rho = 0,09$ искомая матрица решений для исследуемого параметра имеет вид

$$\|D_{ij}\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача решена для значений ρ из интервала $0 \leq \rho \leq 1$ (табл. 3.1).

Таблица 3.1

ρ	0—0,01	0,05—0,08	0,09	0,10—0,020	0,4—1,0
i^*	1	2	3	5	6

В табл. 3.1 i^* — номер состояния, при попадании параметра в которое должна проводиться оптимальная регулировка. В данном случае $\rho = 0,4$, $i^* = 6$.

Рассмотрим параметр, после допуска которого также разбито на семь состояний. Для этого параметра

$$q_{ij} = \begin{pmatrix} 0,30 & 0,20 & 0,20 & 0,12 & 0,10 & 0,05 & 0,03 \\ 0 & 0,30 & 0,20 & 0,15 & 0,15 & 0,12 & 0,08 \\ 0 & 0 & 0,30 & 0,25 & 0,20 & 0,15 & 0,10 \\ 0 & 0 & 0 & 0,30 & 0,30 & 0,25 & 0,15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,30 & 0,35 & 0,33 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,30 & 0,30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решения задачи линейного программирования для данного параметра и различных значений ρ приведены в табл. 3.2, где i^* имеет прежний смысл.

Таблица 3.2

ρ	0—0,05	0,09	0,1	0,2—0,4	0,6	0,8—1,0
i^*	1	2	3	4	5	6

При $\rho = 0,4$ значение оптимального (стационарного, однородного марковского) упреждающего допуска составляет примерно 0,7 от основного допуска ($i^* = 4$). Этот допуск имеет вид прямой, параллельной основному допуску.

§ 3.5. Модели эксплуатации по состоянию системы с параметрами гауссовско-марковского типа *

В настоящем параграфе рассмотрены случайные процессы гауссовско-марковского типа, которые с ненулевой вероятностью выходят за границы допусков. Определим допуски как границы для изменения параметров системы. Параметры, находящиеся внутри границ, не подвергаются регулировкам, а параметры, вышедшие за эти границы, обязательно (с помощью регулировок) должны быть возвращены в исходное начальное состояние.

Считают, что выход параметра за пределы выбираемых допусков не приводит к отказу системы, однако ее эксплуатация при этом экономически невыгодна.

Для простоты рассмотрим систему, имеющую один непрерывный параметр, который измеряется в дискретные, равноотстоящие моменты времени. Регулировка системы заключается в том, что при выходе параметра за допуск его возвращают в исходное состояние. Основное допущение состоит в предположении статистически идентичного поведения параметра до и после регулировки.

При решении излагаемой ниже задачи должна использоваться статистическая информация о параметрах системы, характеризующая ее состояние в процессе эксплуатации и позволяющая аппроксимировать процессы изменения параметров случайными процессами гауссовско-марковского типа.

Часто в сфере производства бывает важно экономически оценить ущерб от отклонения параметра прибора, станка или другого устройства от номинала и при заданных стоимости регулировки параметра и интервале его проверок выбрать границу поля допуска. Если допуск на параметр выбирают без строгого учета этих экономических факторов, то возникает ситуация, когда система продолжает «удовлетворительно» работать даже с вышедшими за границу поля допуска

* В § 3.5 и 3.6 изложены работы А. Притцкера [55—58].

параметрами. Следует отметить, что если в системе трудно оценить «ущерб», вызванный разрегулировкой параметра, и в то же время к ней предъявляется требование выполнить задание с высоким качеством, что не допускает большого накопления разрегулировки, излагаемый ниже подход неприемлем.

Считаем, что стоимость измерения параметра, стоимость регулировки и ущерб, вызванный его разрегулировкой, который выражается в единицах стоимости, могут быть определены и заданы. Введем следующие обозначения: C_m — единичная стоимость одной регулировки; C_c — единичная стоимость одной проверки (одного измерения); C_i — единичная стоимость разрегулировки; $\bar{C}^{(i)}$ — ожидаемая средняя стоимость за одну проверку для j -го случая, где $1 \leq j \leq y + 1$, а y — число квантованных уровней между верхним и нижним допусками.

Заметим, что к превышению параметрами допусков чувствительны как стоимость регулировки, так и стоимость разрегулировки. Другими словами, при увеличении допуска стоимость регулировки уменьшается (регулировки выполняют реже), а стоимость разрегулировки возрастает, и, наоборот, при уменьшении допуска стоимость регулировки увеличивается (в силу более частых регулировок), а стоимость разрегулировки уменьшается. Поэтому интуитивно ясно, что можно выбирать такую величину допуска, которая минимизирует значение $\bar{C}^{(i)}$.

Пусть далее (рис. 3.5) x_n — измеренная величина параметра в момент t_n ; L — интервал между верхним и нижним допусками; k_i — интервал между i -м верхним и нижним квантованными уровнями (кванты имеют одинаковую нумерацию вверх и вниз от нулевого уровня).

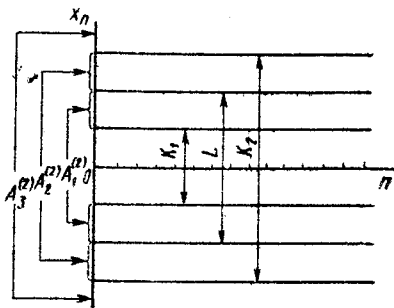


Рис. 3.5

Определим используемые ниже случайные события и соответствующие им вероятности. Запишем выражение $P(n, S, T) = P\{x_{n-1} \in S / x_n \in T\}$, где S и T — постоянные величины соответствующих интервалов изменения параметра x_n . В частности, $P(0, S, T) = 1$ при $n = 0$ и $P(1, S, T) = P\{x_1 \in T\}$ при $n = 1$.

Обозначим промежуточное число квантованных уровней через j . Тогда, очевидно, $1 \leq j \leq y + 1$; например, $k_2 < L \leq k_3$ при $j = 3$ или $k_y < L$ при $j = y + 1$.

Определим событие $A_i^{(j)}$ следующим образом. Для всех событий, которые происходят внутри наибольшего интервала с числом квантованных уровней i такого, что $i < y + 1$, если $i < j - 1$, то $A_i^{(j)}$ — событие $x \in k_{i+1}$ и $x \notin k_i$, если $i = j - 1$, то $A_i^{(j)}$ — событие $x \in L$ и $x \notin k_{j-1}$, где $j - 1 > 0$; если $i = j$, то $A_i^{(j)}$ — событие $x \in k_j$ и $x \notin L$, где $j < y + 1$; если $i > j$, то $A_i^{(j)}$ — событие $x \in k_i$ и $x \notin k_{i-1}$.

Для всех событий, которые происходят вне наибольшего интервала i такого, что $i = j + 1$, если

$j < y + 1$, то $A_{y+1}^{(j)}$ — событие $x \notin k_y$; если $j = y + 1$, то $A_{y+1}^{(j)}$ — событие $x \notin k$.

Пусть $V_{i,n}^{(j)} = P\{A_i^{(j)} \text{ происходит к моменту } n\text{-го измерения}\}$; $Q_{i,n}^{(j)} = P\{A_i^{(j)} \text{ происходит к моменту } n\text{-го измерения при условии, что в } (n - 1)\text{-м предыдущем измерении регулировки не производились}\}$.

Нужно так выбрать допуск, чтобы минимизировать величину $\bar{C}^{(i)}$. Стоимость проверки C_c нечувствительна к выбору допуска, если интервалы проверки

заданы. Поэтому, применяя формулу полной вероятности, выражение для $\bar{C}^{(j)}$ запишем в виде

$$\bar{C}^{(j)} = C_m \sum_{i=j}^{y+1} \lim_{n \rightarrow \infty} V_{i,n}^{(j)} + \sum_{i=1}^{j-1} C_i \lim_{n \rightarrow \infty} V_{i,n}^{(j)} + \sum_{i=j}^{y+1} C_{i-1} \lim_{n \rightarrow \infty} V_{i,n}^{(j)}. \quad (3.18)$$

Будем считать, что $\bar{C}^{(j)}$ имеет предел. Первый член уравнения (3.18) определяет среднюю стоимость регулировки, приходящуюся на единичный интервал проверки. Второй член определяет среднюю стоимость разрегулировки за один интервал проверки в случае, когда регулировки не выполняются, третий член определяет среднюю стоимость разрегулировки, приходящуюся на один интервал проверки.

Покажем, что минимизация величины $\bar{C}^{(j)}$ по L эквивалентна минимизации по L величины $\bar{C}^{(1)}$ ($j = 1$).

Перепишем выражение (3.18) для $j = 1$:

$$\bar{C}^{(1)} = C_m \sum_{i=1}^{y+1} \lim_{n \rightarrow \infty} V_{i,n}^{(1)} + \sum_{i=1}^{y+1} C_{i-1} \lim_{n \rightarrow \infty} U_{i,n}^{(1)}. \quad (3.19)$$

Значение допуска, минимизирующее $\bar{C}^{(1)}$, может быть получено в результате дифференцирования уравнения (3.19) и решения полученного уравнения относительно L . Существование оптимального решения и особенности численного отыскания этого решения продемонстрированы ниже на примере, в котором параметр x — марковский гауссовский неоднородный случайный процесс.

Теперь докажем, что $\bar{C}^{(j)} = \bar{C}^{(1)}$. Для этого сначала выведем выражение для $\lim_{n \rightarrow \infty} V_{i,n}^{(j)}$. Выпишем для $j < i$, $j = i$ и $j > i$ значения вероятностей $Q_{i,n}^{(j)}$.

Вероятности $Q_{i,n}^{(j)}$ представляют собой вероятности события $A_i^{(j)}$, которое осуществляется в первый раз к моменту n -й проверки при условии, что в предыдущей $(n-1)$ -й проверке регулировки не проводились. Запишем выражения для $Q_{i,n}^{(j)}$:

$$j < i \begin{cases} Q_{i,n}^{(j)} = P(n; L; K_i) - P(n; L; K_{i-1}), \\ Q_{y+1,n}^{(j)} = P(n-1; L; L) - P(n; L; K_y), \quad i = y+1; \end{cases} \quad (3.20)$$

$$j = i \begin{cases} Q_{j,n}^{(j)} = P(n; L; K_j) - P(n; L; L), \quad j \neq y+1; \\ Q_{y+1,n}^{(j)} = P(n; L; K_j) - P(n; L; L), \quad j = y+1; \end{cases} \quad (3.21)$$

$$j > i \begin{cases} Q_{i,n}^{(j)} = P(n; L; K_{i+1}) - P(n; L; K_i), \\ Q_{j-1,n}^{(j)} = P(n; L; L) - P(n; L; K_{j-1}), \quad i = j-1. \end{cases} \quad (3.22)$$

Для пояснения смысла уравнений (3.20) — (3.22) положим $y = 2$, $i = 1$, $j = 2$ (см. рис. 3.5). Тогда (так как здесь имеет место случай $j > i$ и $i = j - 1$) из второго выражения уравнения (3.22) получаем

$$Q_{1,n}^{(2)} = P(n; L; L) - P(n; L; K_1),$$

т. е. вероятность того, что $x_n \in L$ и $x_n \notin K_1$ при условии, что $x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \in L$, есть вероятность того, что $x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \in L$ и x_n , минус вероятность того, что $x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \in L$ и $x_n \in K_1$.

Вероятность $V_{i,n}^{(j)}$ есть вероятность события $A_i^{(j)}$ при фиксированном n . Эта вероятность равна сумме вероятностей всех событий, которые имеют место к моменту n -й проверки. Событие $A_i^{(j)}$ может произойти к моменту n -й проверки при условии, что при $(n-1)$ -й предыдущей проверке с вероятностью $Q_{i,n}^{(j)}$ не было

необходимости в регулировках. Событие $A_i^{(j)}$ может произойти к моменту n -й проверки и при следующем условии: к моменту m -й проверки ($m < n$) регулировка выполнялась, а в последующие $n - m - 1$ проверок (n -ю проверку не учитываем, так как к моменту ее проведения и относится вероятность события $A_i^{(j)}$) регулировка не выполнялась. Вероятность выполнения хотя бы одной регулировки к моменту m -й проверки равна $V_{i,m}^{(j)} + \dots + V_{y+1,m}^{(j)}$, а вероятность того, что событие « $A_i^{(j)}$ произойдет к моменту n -й проверки, когда известно, что к моменту m -й проверки была выполнена регулировка и в последующие $n - m - 1$ проверок она не выполнялась» есть $Q_{i,n-m}^{(j)}$ (считаем, что вероятностное распределение последовательности регулировок известно; кроме того, предполагаем, что поведение параметра после регулировки статистически эквивалентно его поведению до регулировки).

Таким образом, вероятность события $A_i^{(j)}$ во втором случае есть

$$Q_{i,n-m}^{(j)} [V_{i,m}^{(j)} + \dots + V_{y+1,m}^{(j)}].$$

Так как m принимает значения от 0 до n , то

$$V_{i,n}^{(j)} = Q_{i,n}^{(j)} + Q_{i,n}^{(j)} * [V_{i,n}^{(j)} + \dots + V_{y+1,n}^{(j)}], \quad (3.23)$$

где $V_{i,0} = Q_{i,0} = 0$ и свертка $*$ определяется как

$$a_n * b_n = \sum_{m=0}^n a_m b_{n-m}.$$

Можно показать, что

$$Q_{i,n}^{(j)} * \left[\sum_{k=j}^{y+1} V_{r,n}^{(k)} \right] = \left[\sum_{k=j}^{y+1} Q_{k,n}^{(j)} \right] * V_{i,n}^{(j)}.$$

Поэтому уравнение (3.23) перепишем в виде

$$V_{i,n}^{(j)} = Q_{i,n}^{(j)} + [Q_{i,n}^{(j)} + \dots + Q_{y+1,n}^{(j)}] * V_{y+1,n}^{(j)} = Q_{i,n}^{(j)} + \left[\sum_{r=j}^{y+1} Q_{r,n}^{(j)} \right] * V_{i,n}^{(j)}. \quad (3.24)$$

Если выполнены [38] условия $\sum_{n=0}^{\infty} Q_{i,n}^{(j)} < \infty$ и $\sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{r=j}^{y+1} Q_{r,n}^{(j)} \right] = 1$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_{i,n}^{(j)} = \sum_{n=0}^{y+1} Q_{r,n}^{(j)} / \bar{n}^{(j)}, \quad (3.25)$$

где

$$\bar{n}^{(j)} = \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\sum_{r=j}^{y+1} Q_{r,n}^{(j)} \right). \quad (3.26)$$

Второе условие будет выполнено, если $\lim_{n \rightarrow \infty} P(n; L; L) = 0$.

Из уравнений (3.20) и (3.21) имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{r=j}^{y+1} Q_{r,n}^{(j)} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} [P(n-1; L; L) - P(n; L; L)].$$

В частности, N -й член суммы, стоящей в правой части равенства,

$$S_N = 1 - P(N; L; L) \text{ и } \lim_{N \rightarrow \infty} S_N = 1, \text{ если } \lim_{N \rightarrow \infty} P(N; L; L) = 0.$$

Теперь покажем, что уравнения (3.18) и (3.19) эквивалентны.

Перепишем уравнения (3.20) — (3.22) для случая $j = 1$ и $j > 1$.

При $j = 1$

$$Q_{1,n}^{(1)} = P(n; L; K_1) - P(n; L; L); \quad (3.27)$$

$$Q_{i,n}^{(1)} = P(n; L; K_i) - P(n; L; K_{i-1}); \quad 1 < i < y+1; \quad (3.28)$$

$$Q_{y+1,n}^{(1)} = P(n-1; L; L) - P(n; L; K_y); \quad (3.29)$$

при $j > 1$

$$Q_{i,n}^{(j)} = P(n; L; K_{i+1}) - P(n; L; K_i), \quad j-1 > i;$$

$$Q_{j-1,n}^{(j)} = P(n; L; L) - P(n; L; K_{j-1}), \quad j-1 = i;$$

$$Q_{j,n}^{(j)} = P(n; L; K_j) - P(n; L; L), \quad j = i < y+1;$$

$$Q_{i,n}^{(j)} = P(n; L; K_i) - P(n; L; K_{i-1}), \quad j < i, \quad i < y+1;$$

$$Q_{y+1,n}^{(j)} = P(n-1; L; L) - P(n; L; K_y), \quad j \neq i = y+1;$$

$$Q_{y+1,n}^{(y+1)} = P(n-1; L; L) - P(n; L; L), \quad j = i = y+1.$$

Из приведенных выражений видно, что

$$Q_{i,n}^{(j)} = Q_{i+1,n}^{(1)} \text{ при } j-1 > i; \quad (3.30)$$

$$Q_{j-1,n}^{(j)} = - \sum_{s=1}^{j-1} Q_{s,n}^{(1)} \text{ при } j-1 = i; \quad (3.31)$$

$$Q_{j,n}^{(j)} = \sum_{s=1}^j Q_{s,n}^{(1)} \text{ при } j = i; \quad (3.32)$$

$$Q_{i,n}^{(j)} = Q_{i,n}^{(1)} \text{ при } j < i. \quad (3.33)$$

Подставляя (3.25) в уравнение (3.19) и полагая $B_i = \sum_{n=0}^{\infty} Q_{i,n}^{(1)}$, имеем

$$\bar{C}^{(1)} = \frac{1}{\bar{n}^{(1)}} \left[C_m \sum_{i=1}^{y+1} B_i + \sum_{i=2}^{y+1} C_{i-1} B_i \right]. \quad (3.34)$$

Подставляя уравнение (3.25) в уравнение (3.18), получаем

$$\bar{C}^{(j)} = \frac{1}{\bar{n}^{(j)}} \left[C_m \sum_{i=j}^{y+1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} Q_{i,n}^{(j)} \right) + \sum_{i=1}^{j-1} C_i \left(\sum_{n=0}^{\infty} Q_{i,n}^{(j)} \right) + \sum_{i=j}^{y+1} C_{i-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} Q_{i,n}^{(j)} \right) \right].$$

Подставляя в последнее уравнение выражения (3.30)–(3.33) и используя выражение для B_i , имеем

$$\begin{aligned} \bar{C}^{(j)} = \frac{1}{\bar{n}^{(j)}} & \left[C_m \sum_{i=j}^{y+1} \left(\sum_{s=1}^j B_s + \sum_{i=j+1}^{y+1} B_i \right) + \left(\sum_{i=1}^{j-1} C_i B_{i+1} - C_{j-1} \sum_{s=1}^{j-1} B_s \right) + \right. \\ & \left. + \left(C_{j-1} \sum_{s=1}^j B_s + \sum_{i=j+1}^{y+1} C_{i-1} B_i \right) \right] = \frac{1}{\bar{n}^{(j)}} \left[C_m \sum_{i=1}^{y+1} B_i + \sum_{i=2}^{j-1} C_{i-1} B_i + \right. \\ & \left. + C_{j-1} B_j + \sum_{j=j+1}^{y+1} C_{i-1} B_i \right] = \frac{1}{\bar{n}^{(j)}} \left[C_m \sum_{i=1}^{y+1} B_i + \sum_{i=2}^{y+1} C_{i-1} B_i \right]. \quad (3.35) \end{aligned}$$

Сравнивая уравнения (3.34) и (3.35), видим, что

$$\bar{n}^{(j)} \bar{C}^{(j)} = \bar{n}^{(1)} \bar{C}^{(1)}.$$

Следовательно,

$$\bar{n}^{(j)} = \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\sum_{r=j}^{y+1} Q_{r,n}^{(j)} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\sum_{r=1}^{y+1} Q_{r,n}^{(1)} \right) = \bar{n}^{(1)},$$

поэтому $\bar{C}^{(j)} = \bar{C}^{(1)}$, что и требовалось доказать.

Таким образом, допуск, который минимизирует среднюю стоимость, приходящуюся на единичный интервал проверки, может быть определен из исходного выражения для $\bar{C}^{(j)}$ при любом j , в частности при $j = 1$. Определим допуск для неоднородного гауссовского марковского случайного процесса вида $x_n = ax_{n-1} + u_n$, $x_0 = 0$, где u_n — случайная нормально распределенная величина с нулевым средним и дисперсией σ^2 . Рассмотрим верхнюю половину симметрично относительно нуля допуска. Аналогично обстоит дело и с уровнем квантования K_1 .

Так как уравнение для $\bar{C}^{(j)}$ не критично к индексу j , то опустим его и преобразуем уравнение (3.19) следующим образом ($i = 1, 2$):

$$\begin{aligned} \bar{C} = C_m \lim_{n \rightarrow \infty} V_{1,n} + C_m \lim_{n \rightarrow \infty} V_{2,n} + C_1 \lim_{n \rightarrow \infty} V_{2,n} = C_m \lim_{n \rightarrow \infty} V_{1,n} + \\ + (C_m + C_1) \lim_{n \rightarrow \infty} V_{2,n}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Разделив это уравнение на $C_m + C_1$ и вводя обозначение $\eta = C_m / (C_m + C_1)$, получаем

$$\bar{C} / (C_m + C_1) = \eta \lim_{n \rightarrow \infty} V_{1,n} + \lim_{n \rightarrow \infty} V_{2,n}. \quad (3.37)$$

Ниже рассмотрен пример, в котором случайный процесс x_n характеризуется следующими параметрами:

$$M[x_n] = 0, \quad \sigma_n^2 = M[x_n^2] = \sigma^2 \left[\frac{1 - (a^2)^n}{1 - a^2} \right],$$

где $a = 1,4$;

$$r_n = \frac{M[x_{n-1} x_n]}{\sigma_{n-1} \sigma_n} = a \frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_n}.$$

Все реализации этого процесса начинаются с нуля. Дисперсия составляющей u_n равна $\sigma_{u_n} = 81$.

Введем новое обозначение: $\alpha = L / K_1$, где K_1 — уровень квантования, соответствующий условному отказу системы.

Таким образом, необходимо определить допуск из условия $L \leq K_1$, однако для получения общих зависимостей будем изменять α от 0,2 до 2,5 (при значениях $i = 1, 2$). Значение L в этом случае также соответствующим образом изменяется. Для данного примера

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_{i,n} \text{ и } \frac{d}{d\alpha} (\lim_{n \rightarrow \infty} V_{i,n}), \quad i = 1, 2,$$

определяются аналитически, но их выражения громоздки и здесь не приводятся. Ниже показана процедура получения решения и приведены числовые результаты решения для исходных данных примера.

Дифференцируя уравнение (3.37) по α , приравнявая полученный результат нулю, получаем исходное уравнение

$$\eta \frac{d}{d\alpha} (\lim_{n \rightarrow \infty} V_{1,n}) + \frac{d}{d\alpha} (\lim_{n \rightarrow \infty} V_{2,n}) = 0. \quad (3.38)$$

При решении этого уравнения относительно α при фиксированном η необходимо производить итерации и для некоторых величин η решение может не существовать. Более приемлем поэтому другой путь — получение решения для η в терминах α :

$$\eta = - \frac{\frac{d}{d\alpha} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} V_{2,n} \right)}{\frac{d}{d\alpha} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} V_{1,n} \right)}. \quad (3.39)$$

После решения уравнения (3.39) строят график η в функции предполагаемых α . Полученную кривую затем используют для определения α , минимизирующего отношение $\bar{C}/(C_m + C_1)$ при выбранном η . Для рассматриваемого примера результаты расчетов помещены в табл. 3.3.

Таблица 3.3

α	η	$\lim_{n \rightarrow \infty} V_{1,n}$	$\lim_{n \rightarrow \infty} V_{2,n}$	$\min \left(\frac{\bar{C}}{C_m + C_1} \right)$
0,2	0,0241	0,6766	0,0133	0,0279
0,4	0,1508	0,3544	0,0305	0,0839
0,6	0,4127	0,2972	0,0699	0,1554
0,8	0,6296	0,0958	0,1287	0,1890
1,0	0,7367	0	0,1947	0,1947
1,05	0,7516	-0,0215	0,2107	0,1945
1,1	0,7635	-0,0420	0,2262	0,1941
1,5	0,8009	-0,1693	0,3263	0,1907
2,0	0,8092	-0,2646	0,4031	0,1890
2,5	0,8113	-0,3251	0,4521	0,1884

Табл. 3.3. содержит необходимые сведения для выбора допусков при каждом фиксированном η минимизирующих $\bar{C}$. Напомним, что C_m — стоимость регулировки, приходящаяся на единичный проверочный интервал.

При измерении периодичности регулировки C_m также изменяется, следовательно, изменяется и η . Таким образом, в табл. 3.3 отражена (через стоимость) связь между периодом регулировки и оптимальным допуском.

При таком подходе период регулировки задается и изложенная методика дает возможность выбрать оптимальный допуск из соображений экономического характера.

Может случиться, что средства, отпущенные на эксплуатацию системы, ограничены, тогда для выбора допусков полезен график $\bar{C}_{\min} = f(\alpha_{\text{опт}})$, который можно построить по данным табл. 3.3. Укажем графическую связь между величиной $\alpha_{\text{опт}}$ (значением α , которое минимизирует $\bar{C}$) и отношением стоимости η . Эта зависимость представлена на рис. 3.6. Из графика видно, что $L_{\text{опт}} \leq K_1$.

если $\eta \leq 0,7$. При небольшой стоимости регулировки (величины C_m) по сравнению с C_1 определяющим величину η будет значение стоимости разрегулировки C_1 ; в этом случае η определена в меньшем диапазоне допустимых значений, например равна 0,3. Тогда $L_{\text{опт}} \approx 0,5 K_1$, т. е. регулировка будет производиться чаще (так как стоит меньше, чем, например, при $\eta \approx 0,6 \div 0,7$). Наоборот, при

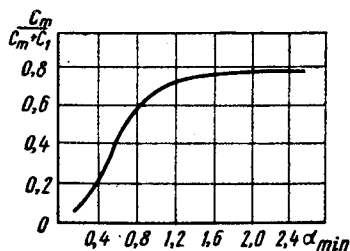


Рис. 3.6

сравнительно большой стоимости регулировки (по сравнению со стоимостью разрегулировки) определяющим значение η является именно стоимость регулировки, в этом случае значение η должно быть увеличено.

Выше была описана процедура выбора допусков при постоянных интервалах проверки, теперь покажем принципиальную возможность одновременного оптимального выбора как допусков, так и интервалов проверки. Общая средняя стоимость $\bar{C}(i)$ была определена на интервале проверки. Теперь аналогичную величину стоимости определим за фиксированный период времени, внутри которого будем варьировать интервалы проверки.

Кроме того, стоимость разрегулировки представим как функцию интервала проверки, так как значение разрегулировки системы, например, увеличивается при возрастании интервала проверки. Допустим здесь линейную зависимость стоимости разрегулировки от длины интервала проверки. Тогда уравнение для стоимости $\bar{C}$ за период T для одного допустимого уровня квантования можно записать в виде

$$\bar{C} = \frac{T}{\tau} [C_m \lim_{n \rightarrow \infty} V_{1, n} + (C_m + C_1 k \tau) \lim_{n \rightarrow \infty} V_{2, n} + C_c], \quad (3.40)$$

где T — общий период; τ — интервал проверки; k — константа, $0 \leq k \leq 1$. Остальные обозначения не отличаются от уже известных. Рассмотрим случай, соответствующий $j = 1$. Преобразуем уравнение (3.40) к виду

$$\bar{C} = \frac{T}{\tau} C_m (\lim_{n \rightarrow \infty} V_{1, n} + \lim_{n \rightarrow \infty} V_{2, n}) + C_1 k T \lim_{n \rightarrow \infty} V_{2, n} + C_c \frac{T}{\tau}. \quad (3.41)$$

Взяв частные производные от правой части уравнения (3.41) по α и τ , имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{C}}{\partial \alpha} &= \frac{T}{\tau} \left[C_m \frac{\partial}{\partial \alpha} (\lim_{n \rightarrow \infty} V_{1, n} + \lim_{n \rightarrow \infty} V_{2, n}) \right] + C_1 k T \frac{\partial}{\partial \alpha} (\lim_{n \rightarrow \infty} V_{2, n}); \\ \frac{\partial \bar{C}}{\partial \tau} &= \frac{T C_m}{\tau^2} \left[\tau \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \lim_{n \rightarrow \infty} V_{1, n} + \frac{\partial}{\partial \tau} \lim_{n \rightarrow \infty} V_{2, n} \right) - (\lim_{n \rightarrow \infty} V_{1, n} + \right. \\ &\quad \left. + \lim_{n \rightarrow \infty} V_{2, n}) \right] + C_1 k T \frac{\partial}{\partial \tau} (\lim_{n \rightarrow \infty} V_{2, n}) + C_c T \left(-\frac{1}{\tau^2} \right). \end{aligned}$$

Полагая $\frac{\partial \bar{C}}{\partial \alpha}$ и $\frac{\partial \bar{C}}{\partial \tau}$ равными нулю и решая полученные уравнения относительно $\delta = C_m/(C_1 k)$ и $h = C_c/(C_1 k)$, имеем

$$\delta = -\tau \left[\frac{\frac{\partial}{\partial \alpha} (\lim_{n \rightarrow \infty} V_{2, n})}{\frac{\partial}{\partial \alpha} (\lim_{n \rightarrow \infty} V_{1, n}) + \frac{\partial}{\partial \alpha} (\lim_{n \rightarrow \infty} V_{2, n})} \right] \quad (3.42)$$

и

$$\begin{aligned} h &= \delta \left[\tau \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \lim_{n \rightarrow \infty} V_{1, n} + \frac{\partial}{\partial \tau} \lim_{n \rightarrow \infty} V_{2, n} \right) - (\lim_{n \rightarrow \infty} V_{1, n} + \lim_{n \rightarrow \infty} V_{2, n}) \right] + \\ &\quad + \tau^2 \frac{\partial}{\partial \tau} (\lim_{n \rightarrow \infty} V_{2, n}). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Выражения для h и δ записаны в неявном виде, так как выражения $\alpha = f(h, \delta)$ и $\tau = f(h, \delta)$ в явном виде очень сложны и численные решения для α и τ в терминах h и δ громоздки. Так как уравнение (3.42) не дает зависимости по L , то сначала необходимо определить δ при заданных α и τ , затем подставить

это значение в уравнение (3.43) и найти h . Вычисляемые δ и h являются стоимостными величинами, для которых соответствующие значения α и t минимизируют $\bar{C}$. Изменяя α и t , можно получить диапазон значений δ и h , для которого α и t минимизируют $\bar{C}$. После решения уравнений (3.42) и (3.43) может быть выбрана величина k , которая характеризует допустимый уровень изменения (разрегуливки) параметра системы.

В заключение рассмотрим применение метода статистических испытаний (Монте-Карло) для выбора допусков. При аналитическом подходе к определению допусков делалось одно из основных допущений, позволившее воспользоваться результатами теории восстановления, а именно предполагалось, что после регуливки система ведет себя как новая. При использовании метода Монте-Карло это ограничение снимается, также может быть снято и ограничение о том, что стоимость разрегуливки — дискретная функция измеряемого параметра. По-прежнему будем считать заданным описание работы системы и проводимых на ней регулировок.

Несмотря на перечисленные преимущества, метод Монте-Карло имеет и существенный недостаток: он дает наилучшее решение лишь среди всех предполагаемых решений и не позволяет непосредственно обобщить результаты. Перечислим последовательность действий по методу Монте-Карло, приводящую к выбору оптимальных значений допусков.

1. Предварительный выбор допусков, перекрывающих возможный диапазон величин допусков.
2. Выбор величин, характеризующих изменение параметра системы.
3. Вычисление стоимости регуливки и разрегуливки.
4. Прекращение изменения параметра, если его значение в момент проверки превышает допуск, и выбор величины параметра при последующей проверке с учетом эффекта регуливки.
5. Суммирование подсчитанных стоимостей разрегуливки и регуливки со всеми предыдущими их значениями.

§ 3.6. Применение метода статистических испытаний для выбора профилактических допусков

Ниже рассмотрены примеры, иллюстрирующие использование метода Монте-Карло для выбора допусков.

Пример 1. Для представления стоимости разрегуливки используется непрерывная функция. Параметр во времени задается с помощью рассмотренного выше стохастического уравнения

$$x_0 = 0; x_n = 1,4x_{n-1} + u_n, n > 0, \quad (3.44)$$

где u_n — случайное отклонение, распределенное нормально с нулевым средним и дисперсией $\sigma^2 = 0,09$. Моделирование показало, что этот процесс быстро развивается и является процессом «взрывного» типа. Такой процесс может характеризовать, например, параметр износа после периода накопления усталости. Из уравнения (3.44) следует, что $x_1 = u_1$. Предположим, что регуливки таковы, что значение переменной в течение проверки, следующей за регуливкой, определяется как u_n . Показателем, по которому производят вычисления, является стоимость за период T , т. е.

$$C_T = C_m N_0 + C_i \sum_{i=1}^N x_i^2 \quad (3.45)$$

или

$$\frac{C_T}{NC_m} = \frac{N_0}{N} + \frac{C_i}{C_m} \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{N},$$

где C_T — общая стоимость N проверок; C_m и C_i — единичные стоимости регуливки и разрегуливки; N_0 — число регулировок, соответствующих N проверкам; N — число проверок в системе, сделанных в течение ее оперативной жизни T .

С помощью метода Монте-Карло определим допуск L , который минимизирует величину $C_T/(NC_m)$. Из уравнения (3.45) видно, что стоимость разрегулировки является функцией квадрата измеряемой переменной x . В этом уравнении стоимости проверок не учтены, так как интервалы проверок выбраны одинаковыми и постоянными.

Приведем упрощенную последовательность выполнения программы на ЭВМ при решении данной задачи.

1. Генерация случайных чисел R_i , равномерно распределенных в интервале $(0, 1)$.

2. Использование этих чисел для получения стандартного нормального случайного отклонения ξ_n .

3. Подсчет $u_n = \sigma \xi_n + \mu = 0,3 \xi_n$, так как u_n — нормально распределенная случайная величина с параметрами $\mu = 0$ и $\sigma = 0,3$. Таким образом, если случайное число $R_i = 0,7$, то $\xi_n = 0,524$ и $u_n = 0,157$.

4. Подсчет $x_n = 1,4x_{n-1} + u_n$.

5. Определение x_n^2 .

6. Суммирование x_n^2 и $\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2$ для получения

$$\sum_{i=1}^n x_i^2.$$

7. Проверка условия $|x_n| \geq L$. Если условие выполнено, то переход к п. 8, если нет, то переход к п. 9.

8. Прибавление единицы к N_0 и получение $x_n = 0$.

9. Прибавление единицы к переменному индексу n .

10. Проверка условия $n = N + 1$. Если условие выполняется, то переход к п. 11, если нет, то переход к п. 1.

11. Вычисление для различных значений C_i/C_m

$$\frac{C_T}{NC_m} = \frac{N_0}{N} + \frac{C_i}{C_m} \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{N}.$$

12. Выдача результатов на печать.

13. Установление новой величины L или останов.

При моделировании использованы следующие данные: $N = 2000$; $C_i/C_m = 0,05 \div 1,00$ через $0,05$; $L = 0,25 \div 1,75$ через $0,25$.

Результаты вычислений сведены в табл. 3.4 и 3.5, где приведены значение $C_T/(NC_m)$ для нескольких комбинаций значений L и C_i/C_m и оптимальные значения L при заданных C_i/C_m и $C_T/(NC_m)$.

Таблица 3.4

C_i/C_m	$C_T/(NC_m)$						
	$L=0,25$	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75
0,05	0,434	0,272	0,228	0,197	0,186	0,182	0,205
0,20	0,450	0,301	0,278	0,272	0,286	0,315	0,394
0,40	0,471	0,340	0,344	0,372	0,421	0,493	0,645
0,60	0,492	0,379	0,411	0,472	0,555	0,671	0,896
0,80	0,513	0,418	0,477	0,573	0,690	0,849	1,147
1,00	0,534	0,457	0,544	0,673	0,824	0,027	1,399

Таблица 3.5

C_i/C_m	$L_{\text{опт}}$	$C_T/(NC_m)$
0,05	1,370	0,176
0,20	1,000	0,265
0,40	0,610	0,335
0,60	0,538	0,380
0,80	0,450	0,415
1,00	0,425	0,453

По данным табл. 3.4 построены графики, которые изображены на рис. 3.7 и 3.8. На рис. 3.7 представлена зависимость $C_T/(NC_m) = f(L)$ при различных значениях отношения C_i/C_m ; на рис. 3.8 — зависимость $C_i/C_m = f(L_{\text{опт}})$, где точки $L_{\text{опт}}$ взяты из рис. 3.7 (они соответствуют нулевым наклонам кривых). Из графика рис. 3.8 может быть определено значение $L_{\text{опт}}$, которое минимизирует стоимостную функцию C_T при заданном C_i/C_m .

Был исследован также [1] гауссовско-марковский процесс $x_n = ax_{n-1} + u_n$, $n > 0$, $x_0 = 0$ (u_n — нормально распределенная случайная величина с нулевым средним и дисперсией σ^2) при $a = 1,4$; 1; 0,4 и различных σ .

Результаты моделирования для данных примера 1 приведены на графиках рис. 3.9—3.11.

Пример 2. Предположим, что параметр x описывается следующим стохастическим уравнением:

$$x_0 = 0; x_1 = u_1; x_n = 1,4x_{n-1} + 0,2x_{n-2} + u_n, n > 1, \quad (3.46)$$

где u_n — нормально распределенная случайная величина с нулевым средним и дисперсией, равной 9.

Будем считать, что регулировка блока, состояние которого характеризуется параметром x , осуществляется при выходе параметра за выбираемый допуск путем замен всего блока и режим изменения параметра после замены блока остается таким же, каким он был у параметра предыдущего блока. Кроме того, предположим, что замена блока происходит при достижении параметром значений ± 23 (отказовый допуск)*. Обозначим интервал замены блока через F .

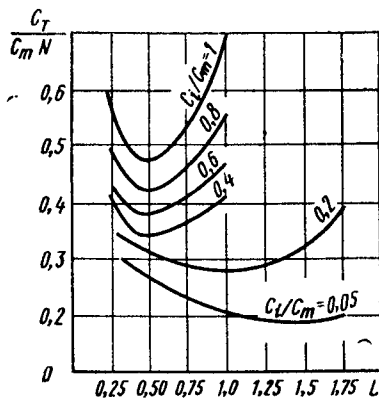


Рис. 3.7

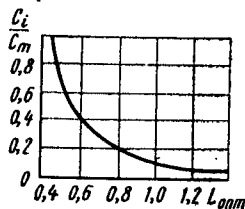


Рис. 3.8

Таким образом, если значение параметра x меньше чем -23 и больше чем $+23$, то происходят отказы, после которых немедленно осуществляются регулировки. Будем считать, что стоимость разрегулировки имеет смысл только тогда, когда происходит отказ, следовательно, стоимость отказа равна $C_m + C_i$. Задача заключается в таком выборе допусков для значений параметра внутри отказовых допусков, при котором общая стоимость для контролируемого параметра минимальна.

* Считаем, что отказовый допуск в данном случае выбирается (назначается) из соображений неэкономического характера.

Общее уравнение стоимости для данного примера запишем следующим образом:

$$C_T = C_m N_l + (C_m + C_i) N_f,$$

или (после нормализации)

$$\frac{C_T}{(C_m + C_i)N} = \eta \frac{N_l}{N} + \frac{N_f}{N}, \quad (3.47)$$

где N_l — число регулировок, выполненных при достижении параметром выбираемых (в данном случае упреждающих) допусков (отказов не было); N_f — число

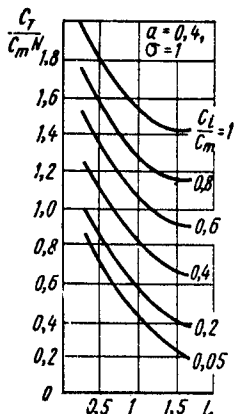


Рис. 3.9

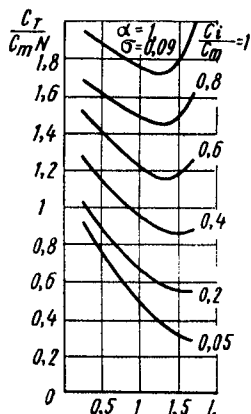


Рис. 3.10

регулировок, выполненных при достижении параметром отказовых допусков (произошли отказы); $\eta = C_m / (C_m + C_i)$. Следовательно, общее число регулировок $N_0 = N_l + N_f$.

Последовательность вычислений на ЭВМ для получения искомого решения аналогична приведенной в примере 1.

При моделировании контроля параметра x были использованы следующие величины: $N = 1000$, $\eta = 0, 0.05, 0.10, 0.20, \dots, 1.0$; $\alpha = L/F = 0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$.

Результаты вычислений приведены в табл. 3.6.

На основании данных табл. 3.6 по формуле (3.47) были найдены значения $C_T / [N (C_m + C_i)]$ для различных α при

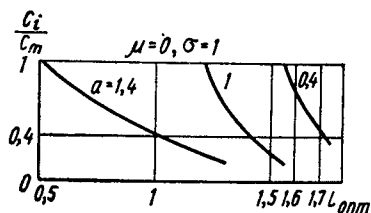


Рис. 3.11

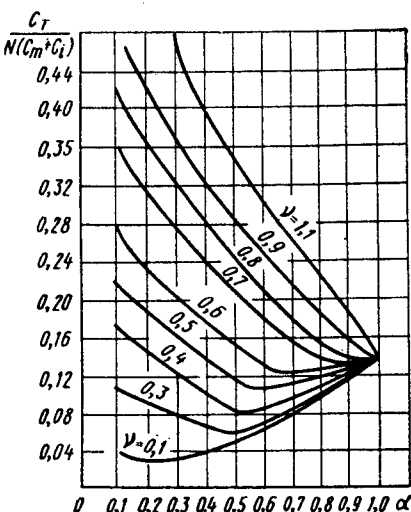


Рис. 3.12

Таблица 3.6

$\alpha = L/F$	N_l	N_f
0,1	4788	0
0,2	2800	0
0,4	1907	3
0,6	1537	84
0,8	740	713
1,0	0	376

заданных η . Результаты этих расчетов представлены на графике рис. 3.12, анализируя который приходим к следующим выводам. Во-первых, при $\eta \geq 0,8$, упреждающие допуски должны быть выбраны равными отказовым допускам ($\alpha = 1$). Во-вторых, при $0 < \eta \leq 0,7$ имеется область оптимальных значений α по критерию минимальной стоимости (на графике видны точки с наименьшими значениями отношения $C_T/[N(C_m + C_i)]$). Например, $\alpha_{\text{опт}} = 0,055$ при $\eta = 0,3$.

Сделаем еще несколько замечаний о применении метода Монте-Карло к решению рассмотренных задач.

Отметим достоинства этого метода.

1. При исследованиях с помощью метода Монте-Карло можно описывать процесс x_n любым способом.
2. Ограничения на функции стоимостей не накладываются.
3. Допуски не обязательно должны быть симметричными.
4. Возможны различные типы регулировок.
5. С помощью метода Монте-Карло можно оценить эффект ошибок в описании процесса x_n .

ГЛАВА IV

ОЦЕНКА ЭФФЕКТА ОТ ВНЕДРЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ ЭКСПЛУАТАЦИИ СИСТЕМЫ ПО СОСТОЯНИЮ

Интуитивно очевидно, что эксплуатация систем по состоянию в силу достаточно подробной информации, имеющейся при контроле системы, должна обеспечить лучшие значения показателей эксплуатации системы (связанных с ее готовностью и надежностью в процессе применения) по сравнению с эксплуатацией систем по наработке или календарному времени.

В настоящей главе на основе моделирования реальных процессов изменения параметров состояний систем и реализации применительно к этим процессам некоторых оптимальных алгоритмов управления, описанных в гл. III, получены количественные соотношения показателей, характеризующих эксплуатацию систем по состоянию и по наработке.

§ 4.1. Оценка эффективности оптимальных моделей эксплуатации системы по состоянию

В настоящем параграфе приведены результаты сравнения оптимальной стратегии эксплуатации системы по состоянию (системы с одним определяющим параметром монотонного типа) и такой оптимальной стратегии эксплуатации системы по наработке, которая была получе-

на на основе статистики только по отказам системы (по моментам выхода определяющего ее параметра за фиксированный уровень). Аналогичное сравнение можно провести для оценки качества и других рассмотренных выше оптимальных моделей эксплуатации по состоянию.

Рассмотрим процесс $S(t_n)$, изображенный на рис. 4.1 [7]. Он характеризует процесс изменения определяющего параметра некоторой системы. На этом же рисунке представлена плотность распределения моментов выхода процесса $S(t_n)$ за уровень L . Эта информация исполь-

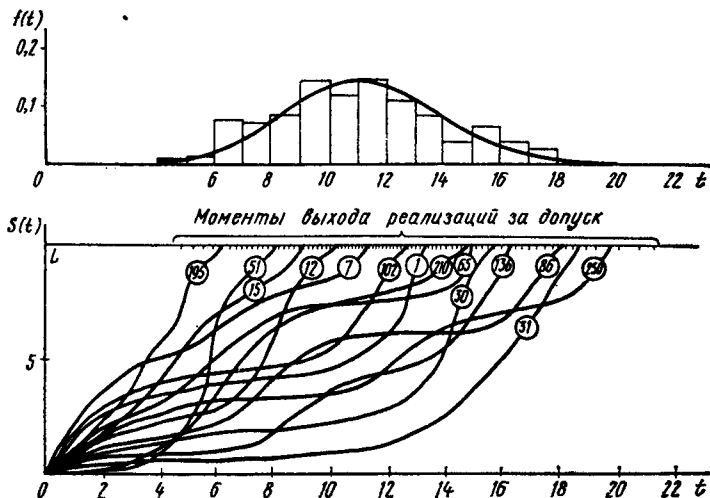


Рис. 4.1

зована далее при построении функции $\lambda(t)$, для которой, как увидим ниже, $\lambda'(t) > 0$. Следовательно, в этом случае для выбора оптимального интервала регулировок параметра $S(t_n)$ при известных моментах выхода его за уровень L (и при неизвестных значениях параметра $S(t_n)$ внутри поля допуска) можно воспользоваться моделью эксплуатации по ресурсу элемента стареющего типа, изложенной в § 2.1.

Оценку качества оптимальной модели эксплуатации системы по состоянию произведем в сравнении с результатами использования оптимальной стратегии модели § 2.1, полученной для случая, когда известна статистика только по моментам выхода параметра $S(t_n)$ за уровень L .

Представляет интерес провести сравнительную оценку как затрат времени на обслуживание, так и получаемой надежности системы (среднего времени наработки до первого отказа) при различных методах управления случайным процессом $S(t_n)$, $n = 0, 1, \dots$. Реализации исследуемого монотонно возрастающего процесса $S(t_n)$ (процесса с независимыми приращениями) получены при

$$F(x) = P\{X_n < x\} = 1 - e^{-\gamma x},$$

где $1/\gamma = M[X_n]$, $n = 1, 2, \dots$

Для этого процесса было рассчитано среднее время $\bar{T}$ до первого выхода за границу поля допуска L (равную 10 усл. ед.) в случае отсутствия управления (регулировки), при оптимальном управлении процессом $S(t_n)$ по средним характеристикам выхода реализаций за уровень L (см. § 2.1) и при оптимальном управлении процессом по отдельным реализациям*. Эти величины обозначены соответственно через $\bar{T}^{(1)}$, $\bar{T}^{(2)}$, $\bar{T}^{(3)}$.

В первом случае

$$\bar{T}^{(1)} = \sum_{i=1}^N n_i / N,$$

где n_i — количество условных единиц времени (шагов) до выхода i -й реализации за допуск L ; N — количество реализаций.

Было получено, что $\bar{T}^{(1)} = 13,2$ ед. времени, выраженных в числе шагов Δt ($t_n = n\Delta t$).

Для расчета $\bar{T}^{(2)}$ предварительно была определена интенсивность выходов процесса $S(t_n)$ за уровень L (интенсивность отказов) при $n = 1, 2, \dots, 20$:

$$\lambda_n = m_n / \left(N - \sum_{k=0}^{n-1} m_k \right),$$

где m_n — количество отказов на n -м шаге.

Окончательные результаты приведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

$\bar{n}$	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
m_n	0	5	6	7	13	15	6	11	6	12	7	5	4	3
λ_n	0	0,50	0,63	0,79	0,160	0,218	0,111	0,230	0,187	0,388	0,368	0,416	0,576	1,0

Сглаженная λ -характеристика, изображенная на рис. 4.2, является монотонно возрастающей функцией времени и аппроксимируется выражением $\lambda(t) = at^{5/2}$, где $a = 0,001$ [отк/ч²].

При управлении по средним характеристикам случайного процесса $S(t_n)$ исходной для расчета оптимального периода замен τ_0 (см. § 2.1) является величина $\lambda(t)$. Оптимальный период для монотонно-возрастающей $\lambda(t)$ рассчитывался по алгоритму (2.11), который в данном случае можно записать так:

$$\frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{1}{e^{-\int_0^{\tau_0} \lambda(t) dt} + \lambda(\tau_0) \int_0^{\tau_0} e^{-\int_0^t \lambda(t) dt} dt}. \quad (4.1)$$

* Рассматриваемое управление процессом по отдельным реализациям и является в общепринятом смысле управлением или эксплуатацией системы по состоянию.

Оптимальный период τ_0 находился графически, для чего правая часть выражения (4.1) была обозначена * через

$$\varphi(\tau_0) = 1 - \frac{1}{e^{-\int_0^{\tau_0} \lambda(t) dt} + \lambda(\tau_0) \int_0^{\tau_0} e^{-\int_0^t \lambda(t) dt} dt}.$$

Полученные значения $\varphi(\tau_0)$ приведены в табл. 4.2.

Таблица 4.2

n	5	8	10	12	14	16	18	19	20
$\varphi(\tau_0)$	0,045	0,197	0,370	0,523	0,656	0,767	0,832	0,862	0,923

По данным табл. 4.2 построен график функции $\varphi(\tau_0)$, изображенный на рис. 4.3, где по оси ординат отложены значения T_2/T_1 . Задаваясь различными значениями T_2 , а следовательно, и отношения T_2/T_1

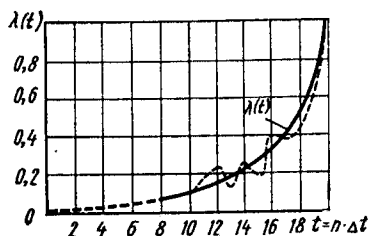


Рис. 4.2

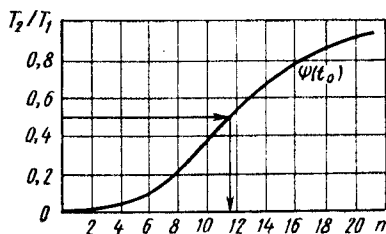


Рис. 4.3

при фиксированном значении $T_1 - T_2 = A$, определяем оптимальный срок профилактики τ_0 (на рис. 4.3 эта процедура показана стрелками), выраженный в условных единицах времени n (числе шагов контроля). Принимаем $A = 1$ (одной условной единице времени), $T_2 = 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1,2, 1,4, 1,8$. Для различных T_2 были получены значения τ_0 , приведенные в табл. 4.3.

Таблица 4.3

T_2	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8
T_2/T_1	0,167	0,286	0,395	0,445	0,500	0,546	0,538	0,615	0,643
τ_0	8,0	9,0	10,0	11,0	11,7	12,4	13,0	13,4	14,0

* Расчет приведен «вручную» из чисто методических соображений, чтобы раскрыть процедуру получения решения. На практике следует использовать ЭВМ.

При управлении по средним статистическим характеристикам предполагался равновероятным выбор реализации после возвращения процесса $S(t_n)$ в первоначальное исходное состояние. Момент выхода процесса за допуск определялся непосредственно при моделировании и был обозначен через T_q , при этом было введено обозначение: $k^{(q)}$ — индикатор реализации, соответствующей q -му выходу процесса $S(t_n)$ за уровень L , $k^{(q)} = 1$ при $q = 1, 2, \dots$

На основании полученных данных для каждого τ_0 были найдены среднее время до первого отказа $T^{(2)} = \sum_q T_q / N$, где $N = \max_q = 500$;

затраты на регулировку системы (в единицах времени — шагах) $C^{(2)} = T_2 \sum_q k^{(q)}$;

затраты на восстановление (ремонт) $A^{(2)} = T_1 N$;

средние затраты на один отказ $\alpha^{(2)} = (C^{(2)} + A^{(2)}) / N$;

средние затраты на единицу времени (шаг) $\beta^{(2)} = (C^{(2)} + A^{(2)}) / \sum_q T_q$;

коэффициент готовности (вероятность в произвольный момент времени находиться системе в рабочем состоянии) $k_r^{(2)} = \bar{T}^{(2)} / (\bar{T}^{(2)} + \alpha^{(2)})$.

Результаты расчетов значений $\bar{T}^{(2)}$, $\alpha^{(2)}$, $\beta^{(2)}$ и $k_r^{(2)}$ приведены в табл. 4.4.

Таблица 4.4

T_2/T_1	0,167	0,286	0,375	0,445	0,500	0,546	0,583	0,615	0,643
$\bar{T}^{(2)}$	123	74,5	71,5	43,8	37,4	29,6	27,6	35,1	24,6
$\alpha^{(2)}$	4,4	4,2	5,5	4,4	4,7	4,0	6,0	4,2	4,4
$\beta^{(2)}$	0,036	0,059	0,078	0,100	0,126	0,136	0,216	0,170	0,182
$k_r^{(2)}$	$A=1$	0,970	0,948	0,928	0,918	0,887	0,880	0,872	0,856
	$A=2$	0,954	0,895	0,965	0,835	0,800	0,785	0,775	0,747
	$A=3$	0,941	0,850	0,810	0,726	0,726	0,710	0,697	0,664
	$A=4$	0,928	0,808	0,770	0,715	0,665	0,648	0,633	0,595

При управлении по реализациям, как и в предыдущем случае, по таблице случайных чисел выбирался номер реализации, для которой на каждом шаге проверялось неравенство (3.4), принимающее в рассматриваемом случае вид

$$e^{-\gamma(L-S(t_{n-1}))} \geq \frac{T_2}{(T_1 - T_2)(n-1)},$$

где $\gamma = 1$.

При первом выполнении данного стохастического неравенства определялся шаг, соответствующий моменту оптимальной регулировки — $(n^* - 1)$. Указанная процедура повторялась для следующей реализации и так до тех пор, пока процесс $S(t_n)$ (в пределах рассматриваемой реализации) не выходил за уровень L . Это событие фиксировалось как отказ и подсчитывались количество просмотренных реализаций и накопленное по всем реализациям время до отказа T_q .

Значения T_2 и $T_1 - T_2$ были те же, что и при управлении на основании знания момента выхода процесса $S(t_n)$ за уровень L . Далее для всех имевших место отказов среди рассматриваемого числа реализаций подсчитывалось общее суммарное время $\sum Tq$. По полученным дан-

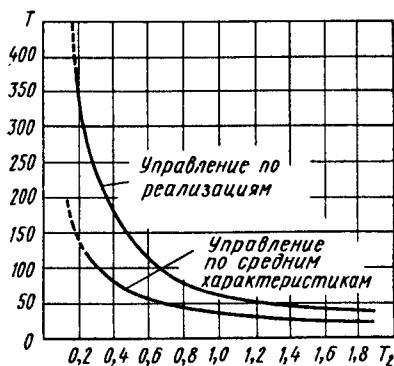


Рис. 4.4

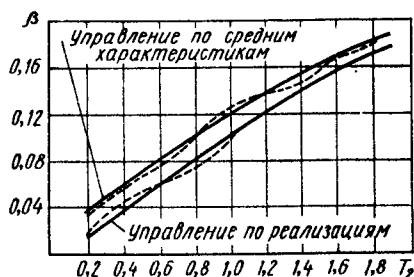


Рис. 4.5

ным для каждого отношения $T_2/(T_1 - T_2)$ были рассчитаны показатели $\bar{T}^{(3)}$, $\alpha^{(3)}$, $\beta^{(3)}$ и $k_r^{(3)}$. Значения показателей приведены в табл. 4.5.

Таблица 4.5

$\frac{T_2}{T_1 - T_2}$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6
$\bar{T}^{(3)}$	365	169	89	78	64	50	44	45
$\alpha^{(3)}$	6,0	7,0	5,3	5,7	6,4	6,2	6,0	6,9
$\beta^{(3)}$	0,036	0,041	0,060	0,073	0,090	0,122	0,139	0,156
$k_r^{(3)}$	$A=1$	0,968	0,960	0,945	0,930	0,910	0,890	0,865
	$A=2$	0,950	0,920	0,885	0,861	0,834	0,803	0,762
	$A=3$	0,937	0,882	0,850	0,807	0,770	0,732	0,681
	$A=4$	0,908	0,852	0,792	0,753	0,716	0,672	0,616

Одновременно была рассчитана кривая оптимального упреждающего допуска, уравнение которой имеет вид

$$L_n = L - F^{-1} \left(1 - \frac{T_2}{(T_1 - T_2)n} \right).$$

Кривая оптимального упреждающего допуска для экспоненциального закона распределения приращений X_n имеет вид кривой 1 на рис. 3.1.

По данным табл. 4.4 и 4.5 построены зависимости (рис. 4.4, 4.5, 4.6, 4.7) среднего времени до первого отказа $\bar{T}$, средних удельных за-

трат по наработке системы β , средних затрат на один отказ α и коэффициента готовности k_r от затрат на регулировку системы T_2 для управления по средним характеристикам процесса и управления по реализациям. Анализируя эти графики, можно сделать следующие выводы.

1. Среднее время до первого отказа (рис. 4.4) для обоих случаев возрастает при уменьшении T_2 , причем при управлении по реализациям до $T_2 = 0,8$ оно примерно в два раза больше, чем при управлении по средним характеристикам. При $T_2 = 0,2$ отношение $\bar{T}^{(3)}/\bar{T}^{(2)} \approx 3$.

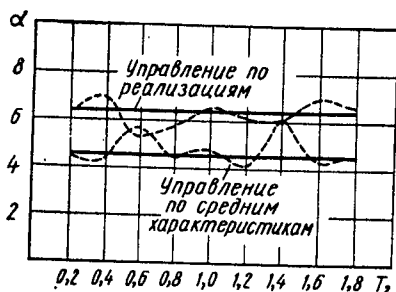


Рис. 4.6

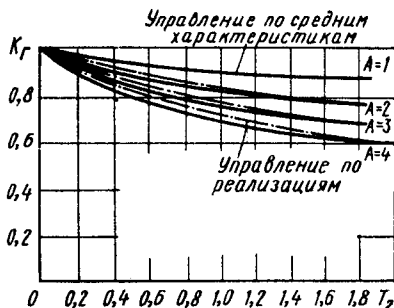


Рис. 4.7

2. Затраты β (рис. 4.5) с увеличением T_2 увеличиваются. При $T_2 = 0,2$ $\beta^{(2)}/\beta^{(3)} = 2$. Затраты на один отказ при управлении по реализациям несколько больше (рис. 4.6) соответствующих затрат при управлении по средним характеристикам.

3. Коэффициент готовности k_r (рис. 4.7), рассчитанный для фиксированных значений $T_1 - T_2$, примерно одинаков для обоих методов управления и уменьшается с увеличением T_2 . Следовательно, при уменьшении времени регулировок по сравнению с временем ремонта (при малых T_2) управление по реализациям дает существенный выигрыш в надежности и средних затратах на единицу времени наработки системы по сравнению с управлением по средним характеристикам процесса $S(t_n)$.

§ 4.2. Эксплуатация системы по состоянию составляющих элементов с учетом критерия «стоимость» (готовность) — эффективность»

Рассмотрим сложную техническую систему с избыточностью по надежности (эффективности). Эта избыточность меняется в зависимости от выполняемых системой задач. Рассмотрим сначала общую математическую схему эксплуатации такой системы по состоянию, когда состояние системы определяется исправностью или неисправностью составляющих систему элементов (блоков, подсистем и т. д.).

Пусть система состоит из N элементов (блоков, подсистем и т. д.). Обозначим через $v_i(t)$, $i = \overline{1, N}$, параметр, характеризующий по принципу «да» — «нет» состояние i -го элемента в процессе работы системы:

$$v_i(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } i\text{-й элемент исправен в момент } t, \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть $\Theta_i(t)$ — наработка i -го элемента системы к моменту t . Следовательно, в произвольный момент t состояние системы может быть описано вектором $v(t) = \{v_1(t), \Theta_1(t); \dots; v_N(t), \Theta_N(t)\}$. Обозначим через A множество всех состояний элементов системы с учетом их наработки, образованных по принципу «да» — «нет» для каждого элемента (например, все элементы системы исправны, неисправен один элемент и т. д.). Очевидно, что в множестве A содержится некоторое подмножество A_0 , при попадании в которое вектора $v(t)$ система не может выполнять стоящую перед ней задачу с заданной эффективностью. Опишем изменение состояния системы при ее работе с учетом проводимого технического обслуживания на основании наблюдения за состоянием составляющих вектора $v(t)$. Считаем, то перед применением система полностью прошла предусмотренное нормами техническое обслуживание (все элементы работоспособны, счетчик отсчета времени наработки системы установлен на нуль, т. е. $t_0 = 0$). В процессе использования системы предусмотрим контроль элементов в моменты $t_i = i\Delta t$, $i = 1, 2, \dots$. Такой контроль может осуществляться автоматически (по отработанной программе) и практически мгновенно. В результате контроля определяется вектор $v(t)$ и фиксируются наработки элементов системы. Область A_0 применительно к выполняемой системой задаче вводится в виде матрицы в вычислительное устройство.

Если в процессе контроля и сравнения вектора $v(t)$ с границей области A_0 обнаруживается, что в момент t_i ($i = 1, 2, \dots$) система не может выполнять стоящую перед ней задачу с приемлемой эффективностью в результате отказа одного или нескольких элементов (в этом случае $v(t_i) \in A_0$), то автоматически выдается команда о прекращении функционирования системы. Если же составляющие вектора $v(t)$ не принадлежат в момент контроля области A_0 , то это значит, что либо не отказал ни один из элементов системы, либо произошел отказ некоторых элементов, что, однако, незначительно повлияло на эффективность системы и она продолжает выполнять поставленную задачу. При этом вырабатываются рекомендации (например, вычислительным устройством, имеющимся в системе) по наиболее эффективному использованию исправных элементов системы. Вычислительное устройство может также в случае необходимости выдавать информацию о вероятности выполнения системой задачи с приемлемой эффективностью, начиная с любого момента контроля. Информация выдается в виде двух цифр, означающих условную вероятность выполнения системой задач при условии, что ее состояние в момент t_i известно, и условное среднее время, в течение которого система способна выполнить задачу при условии, что в момент t_i известно состояние ее элементов.

Рассмотрим потери (выраженные в единицах стоимости, времени, трудозатрат и т. д.), которые связаны с эксплуатацией системы. Пусть на подготовку системы, в процессе которой проверяется работоспособность всех элементов и в случае необходимости происходит восстановление (в основном путем замен) неработоспособных элементов, расходуется C_1 единиц затрат. Ниже обслуживание системы оценивается по критерию «стоимость-эффективность», поэтому под C_1 будем понимать средние затраты стоимости на проверку системы, включающие затраты на амортизацию аппаратуры проверки, самих элементов системы и стоимость ремонта замененных элементов.

Следует отметить, что все эти расходы, как правило, пропорциональны времени проверки. Поэтому проводимая ниже оптимизация технического обслуживания системы по критерию стоимости с учетом эффективности эквивалентна оптимизации по критерию «готовность — эффективность».

Введем теперь затраты, связанные с невыполнением системой задания (при $v(t_i) \in A_0$). Обозначим средние затраты, связанные с невыполнением системой задания, через C_2 . Если C_2 придать смысл стоимости, то это стоимость расхода системой ресурса энергии или горючего и масел, денежное содержание обслуживающего персонала, отнесенное к времени «холостого функционирования», плюс стоимость проверки и стоимость брака «продукции», вызванного неисправно функционирующей системой. Очевидно, всегда $C_2 \geq C_1$. Задача заключается в оптимальном разбиении по составному критерию «стоимость—эффективность» области A возможных состояний системы $\{v(t_k), t_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, на три непересекающиеся подобласти A_0, A_1, A_2 . Подобласть A_0 определена выше. Подобласть A_1 — подобласть состояний системы, при нахождении в которой она способна выполнить задачу с заданным уровнем эффективности без проведения каких-либо работ по техническому обслуживанию. Обнуление счетчика времени наработки системы происходит после проведения подготовительных работ. По определению, такая подготовка проводится либо сразу после отказа системы (при $v(t_i) \in A_0$), либо при первом попадании вектора $v(t_i)$ из области A_1 в область A_2 . Подобласть A_2 — подобласть состояний системы, при нахождении в которой она еще способна выполнять задачу с заданным уровнем эффективности, но должна пройти техническое обслуживание (подготовку к работе с обнулением счетчика времени после ее завершения) и быть возвращена в начальное состояние (в область A_1). Если же в условиях дефицита времени подготовки такое обслуживание не проводится, то принимают во внимание значение двух показателей — условной вероятности выполнения задачи в течение фиксированного времени и условного среднего времени успешного (с эффективностью не ниже заданной) выполнения задачи. По этим значениям принимают решения о направлении системы на выполнение задачи или о ее техническом обслуживании. В случае вынужденного направления системы на выполнение задания без требуемой подготовки счетчик времени не обнуляется и производится более тщательная проверка системы, например контроль элементов с меньшим интервалом времени.

Введем показатель (критерий), по которому будем оптимизировать выбранную модель эксплуатации системы. Свяжем этот показатель с эффективностью системы (через времена переходов из области A_1 в A_2 и в A_0 и из A_2 в A_0) и с ее стоимостью (готовностью) через затраты на обслуживание системы — величины C_1 и C_2 .

Показатель оптимизации определим, как и ранее:

$$M[y_t(A_0, A_1, A_2)] = y_t, \quad (4.2)$$

где

$$y_t = \begin{cases} C_1/t, & \text{если в момент } t \text{ осуществлен переход вектора } v(t) \text{ в} \\ & \text{область } A_2; \\ C_2/t, & \text{если в момент } t \text{ осуществлен переход вектора } v(t) \text{ в об-} \\ & \text{ласть } A_0. \end{cases}$$

Задача сводится теперь к определению таких областей A_1^* , A_2^* ($A_0 \cup A_1^* \cup A_2^* = A$), для которых

$$M[y_t(A_0, A_1^*, A_2^*)] = \min_{\substack{A_0, A_1, A_2 \\ A_0 \cup A_1 \cup A_2 = A}} M[y_t(A_0, A_1, A_2)]. \quad (4.3)$$

И в данном случае оптимальное правило эксплуатации системы определяется неравенством

$$P\{[v(t_i), t_i] \in A_0 / \{v(t_k), t_k\}, k = \overline{0, i-1}\} \leq \frac{C_1}{(C_2 - C_1)(i-1)} \quad (4.4)$$

типа неравенства (3.4), решение которого и является искомым алгоритмом работы вычислительного устройства системы.

Условная вероятность выполнения задания системой при условии наблюдения состояния ее элементов (см. левую часть выражения (4.4)) определяется так:

$$P_0(t) = 1 - P\{[v(t), t] \in A_0 / [v(t_k), t_k], k = \overline{0, i-1}\},$$

где $t > t_{i-1}$; тогда условное среднее время функционирования системы с заданной эффективностью таково:

$$M[\tilde{T}] = \int_{t_{i-1}}^{\infty} P_0(t) dt,$$

где $\tilde{T}$ — время функционирования системы с заданной эффективностью с момента t_{i-1} .

Отметим, что для каждой выполняемой системой задачи должна быть составлена схема соединения ее элементов по надежности. Чаще всего это параллельно-последовательная схема соединения элементов. Для каждой задачи должен быть задан также свой уровень эффективности. Это означает, что q -я задача характеризуется значением подобласти $A_0^{(q)}$, $q = \overline{1, n}$, где n — число решаемых системой задач.

Покажем, используя алгоритм (4.4), как должна осуществляться оптимальная эксплуатация системы, если за время функционирования решается n задач. Пусть при решении q -й задачи используются N_q элементов системы, $q = \overline{1, n}$, $N_q \leq N$. Допустим, что, например, при ре-

шении q -й и $(q + 1)$ -й задач могут быть использованы одни и те же элементы. Все элементы с начала функционирования системы включаются в работу. Система функционирует непрерывно до момента вывода на профилактику (т. е. техническое обслуживание до отказа) или до такого момента времени, когда система не может решить хотя бы одну из n поставленных задач. Последовательность решения задач во времени при этом не принимается во внимание.

Пусть $A_0^{(q)}$, $q = \overline{1, n}$, — подобласть состояний системы, при попадании в которую вектора $v(t) = \{v_1(t), \Theta_1(t), \dots, v_{N_q}(t), \Theta_{N_q}(t)\}$ система не может с заданной эффективностью выполнить q -ю задачу, $q = \overline{1, n}$. Тогда для q -й задачи алгоритм, аналогичный (4.4), запишется так:

$$P\{[v_q(t_i) t_i] \in A_0^{(q)} / [v_q(t_k), t_k, k = \overline{0, i-1}]\} \leq \frac{C_1^{(q)}}{(C_2^{(q)} - C_1^{(q)})(i-1)}. \quad (4.5)$$

Пусть $t_i^{(b)}$ и $t_z^{(q)}$ — соответствующие моменты первого невыполнения (4.5) и первого наблюдателя события $[v_q(t), t] \in A_0^{(q)}$ (с точностью до шага контроля). Тогда момент вывода системы на техническое обслуживание (предупредительные регулировки или ремонт) определяется как (общий отсчет времени ведется с начала работы системы, т. е. с $t_0 = 0$) $\min(t_1^{(1)}, t_2^{(1)}, \dots, t_i^{(n)}, t_z^{(n)})$. Таким образом, считаем, что систему нельзя использовать по назначению, если она не в состоянии выполнять любую из поставленных задач либо из-за отказа, либо из-за того, что не должна, по предположению, использоваться после моментов $t_1^{(1)}, \dots, t_i^{(n)}$ без проведения технического обслуживания. Здесь возможно и другое предположение: система не может быть использована по назначению, если не в состоянии выполнить задачу в течение фиксированного отрезка времени. В этом случае также нужно с момента начала работы системы для каждой задачи вести вычисления по алгоритму (4.5). Отметим, что при этом в вычислитель помимо аргумента времени должна вводиться и информация о фактическом состоянии элементов, участвующих в выполнении конкретной задачи. В вычислителе по-прежнему содержится информация, необходимая для принятия решения о возможности выполнить системой любую задачу с момента последнего контроля ее состояния. Если в момент $t_i^{(q)}$ для q -й задачи впервые не выполняется (4.5), то вывод на техническое обслуживание системы осуществляется сразу после этого момента.

Таким образом, рассмотрен оптимальный алгоритм, который лежит в основе эксплуатации комплекса средств (технической системы с избыточностью) по состоянию, определяемому по принципу: работает каждое средство или не работает. При этом критерием оптимизации являлся составной критерий «стоимость (готовность) — эффективность».

Пример работы алгоритма (4.4) системы с резервированием подробно изложен в [21]. Для удобства применения описанной в настоящем параграфе модели выпишем левую часть управляющего неравен-

ства (4.4) для типовых избыточных схем соединения элементов систем по надежности.

1. Система рассматривается как единое устройство с функцией интенсивности отказов $\Lambda(t)$, $\Lambda'(t) > 0$. В этом случае условная вероятность отказа системы, стоящая в левой части выражения (4.4), имеет вид

$$1 - \exp \left\{ - \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Lambda(t) dt \right\}.$$

2. Система имеет параллельно-последовательное соединение различных по надежности элементов. Число последовательно соединенных элементов равно N , параллельно соединенных — n . Отказ системы происходит при отказе любого из последовательно соединенных элементов и более m ($0 < m < n$) параллельно соединенных (резерв нагруженный).

Подключение резервных элементов по мере отказа основных происходит мгновенно (с вероятностью, равной единице). Времена безотказной работы последовательных элементов имеют функции распределения $F_j(t)$, $j = \overline{1, N}$; параллельных — $\Phi_i(t)$, $i = \overline{1, n}$.

Пусть $\bar{F}(t) = 1 - F(t)$; $\bar{\Phi}(t) = 1 - \Phi(t)$. В этом случае левая часть выражения (4.4) принимает вид

$$1 - \left[\prod_{j=1}^N \bar{F}_j(t_i) / \bar{F}_j(t_{i-1}) \left\{ 1 - \prod_{k \neq k_1, \dots, k_q} [1 - \bar{\Phi}_k(t_i) / \bar{\Phi}_k(t_{i-1})] \right\} \right],$$

где $k_1, \dots, k_q$ — номера отказавших элементов параллельной группы к моменту t_{i-1} ($0 \leq q \leq m < n$).

3. Система состоит из одного основного элемента и n аналогичных элементов в ненагруженном резерве. Отказ системы наступает при отказе $(n+1)$ -го элемента. Обозначим число отказов элементов в системе к моменту t_i через x_i и наработку функционирующего элемента к моменту t_i — через Θ_i .

Пусть $F_1(t)$ — функция распределения времени безотказной работы каждого элемента системы ($\bar{F}_1(t) = 1 - F_1(t)$). Тогда левую часть выражения (4.4) можно записать так:

$$P\{x_i = n+1/x_{i-1}, \Theta_{i-1}, t_{i-1}\} = F_2(\Theta_{i-1} + \Delta t) * \underbrace{F_1(\Delta t) * \dots * F_1(\Delta t)}_{n-x_{i-1} \text{ раз}},$$

где

$$F_2(\Theta + \Delta t) = 1 - \bar{F}_1(\Theta + \Delta t) \bar{F}_1(\Theta),$$

$$F_1(t) * F_1(t) = \int_0^t F_1(t-x) dF_1(x).$$

4. Система состоит из одного основного элемента и n идентичных элементов в нагруженном резерве; остальные обозначения те же, что

и в предыдущем пункте. В этом случае левая часть выражения (4.4) имеет вид

$$P\{x_i = n + 1/x_{i-1}, t_{i-1}\} = q^{n+1-x_{i-1}},$$

где $q_i = 1 - \bar{F}_1(t_i)/\bar{F}_1(t_{i-1})$.

5. Система имеет ветвящуюся схему соединения элементов по надежности. Все элементы нагружены и равнонадежны. Число одинаковых ветвящихся структур равно L , в каждой структуре коэффициент ветвления равен K , а M — количество рангов (рассмотрим случай $K = 4$ и $M = 5$). В каждой структуре допустимое число отказов выходных элементов равно m ($m = qK^{M-1}$, $0 < q < 1$).

Обозначим через $p(t)$ вероятность безотказной работы любого элемента структуры за время t , $q(t) = 1 - p(t)$.

Левую часть выражения (4.4) можно записать в виде

$$1 - \bar{F}(t_i)/\bar{F}(t_{i-1}),$$

где

$$\begin{aligned} \bar{F}(t) = & \sum_{s_1=0}^{4m} \sum_{s_2=0}^{4m-s_1} \sum_{s_3=0}^{4m-s_1-s_2} \sum_{s_4=0}^{4m-s_1-s_2-s_3} P_{s_1}(K, M, t) P_{s_2}(K, M, t) \times \\ & \times P_{s_3}(K, M, t) P_{s_4}(K, M, t). \end{aligned}$$

Вероятности $P_s(K, M, t)$ вычисляют рекуррентно:

$$P_s(K, L+1, t) = \sum_{n=0}^{[s/K]} P_n(K, L, t) C_{K^L-nK}^{s-nK} P^{s-nK}(t) q^{K^L-s}(t),$$

где $[s/K]$ — целая часть s/K , $0 \leq s \leq K^L$, $1 \leq L \leq M-1$. Область суммирования: $0 < s_4 \leq 4m - s_1 - s_2 - s_3$, $0 \leq s_3 \leq 4m - s_1 - s_2$, $0 \leq s_2 \leq 4m - s_1$, $0 \leq s_1 \leq 4m$, $4m \leq K^{M-1}$.

§ 4.3. О технической реализации моделей эксплуатации системы по состоянию

Технические средства, реализующие правила оптимального управления состоянием систем, могут быть различными в зависимости от конструктивного выполнения систем, средств автоматизированного контроля, требуемого качества решения задач технического обслуживания и т. д.

При наличии систем контроля реализовать правила оптимального обслуживания можно либо с помощью ЭВМ, либо с помощью специальных приставок к системам контроля. Наличие ЭВМ позволяет построить такую систему обслуживания, в которой информация о техническом состоянии аппаратуры от автоматов контроля собирается и обрабатывается централизованно. При таком техническом обслуживании ЭВМ должна иметь запоминающее устройство для хранения информации (например, об оптимальном допуске, вычисленном заранее) для каждого процесса логической программы, позволяющей выбирать

из этого массива нужные величины (при решении задачи оптимального управления). Необходимо также выделить определенное количество рабочих ячеек для хранения информации, поступающей от систем контроля.

Можно говорить и о более совершенной системе обработки эксплуатационной информации, включающей элементы самообучения. В такой системе на основании дополнительных данных о параметрах, например таких, которые были рассмотрены в § 3.4, производится уточнение оценок переходных вероятностей, с учетом новых данных решается задача линейного программирования по определению оптимальных уровней остановки наблюдаемых случайных процессов, а затем с полученными уровнями сравниваются текущие данные от автоматов контроля. Следует отметить, что при такой системе обработки информации к ЭВМ необходимо предъявлять более жесткие требования как по объему запоминающего устройства, так и по быстродействию. Это вытекает из необходимости дополнительно выделить, например, место в запоминающем устройстве для алгоритма определения оценок переходных вероятностей, кроме того, при решении задачи линейного программирования по определению оптимального упреждающего уровня требуемый минимальный объем запоминающего устройства (по числу рабочих ячеек) для запоминания информации о параметре равен $n(m + n)$, где n — число переменных, m — число ограничений. Непосредственно сам алгоритм линейного программирования занимает примерно 200 ячеек.

Для того чтобы получить оценку времени решения задачи, приведем данные о времени решения задачи линейного программирования на ЭВМ с быстродействием 10 тыс. операций/с. При таком быстродействии время решения задачи по определению уровня оптимальной установки составляет: при делении области работоспособности на 6 квантов — 1 мин 22 с; при делении области работоспособности на 10 квантов — 4 мин 12 с. Отсюда понятно, что при необходимости решения большого числа задач (имеющему, например, по числу измеряемых параметров порядок 1000—2000) время решения может быть очень большим. Так, при разбиении области работоспособности на 10 квантов для 1000 параметров время решения составляет 70 ч (при быстродействии 10 тыс. операций/с). Такие расчеты следует производить заранее, при отладке программ, поэтому в реальных условиях эксплуатации при внедрении описанных методов управления решения о регулировках параметров (рекомендации обслуживающему персоналу) выдаются за приемлемое время.

Вторым возможным направлением реализации методов оптимального управления параметрами технических систем является создание специальных приставок к автоматам контроля. (Возможны как автоматические приставки с заложенной жесткой программой проверки, так и полуавтоматические с ручным управлением порядком проверки аппаратуры.) Это позволит, например, непосредственно на проверяемом объекте определить блок, подлежащий замене.

Третье направление связано с созданием решающих элементов, встроенных в блоки проверяемой аппаратуры. Этот способ весьма удо-

бен, например, для радиоэлектронной аппаратуры на твердых схемах и пленках.

Следует заметить, что при таком исполнении аппаратуры вопрос об использовании ЭВМ и централизованных автоматов контроля в системе обслуживания требует специального исследования, так как неизбежны трудности при стыковке такой аппаратуры с автоматическими системами контроля.

Встроенные в блоки аппаратуры элементы, принимающие решения, могут изготавливаться непосредственно на заводах-изготовителях, что способствует удешевлению системы технического обслуживания (отсутствуют ЭВМ, автоматы контроля, затраты времени на обработку информации о результатах измерения).

Вместе с тем такой подход требует, с одной стороны, большой априорной статистики о поведении каждого выбранного параметра, а с другой — нельзя корректировать уровень оптимальной остановки для вывода системы на регулировку.

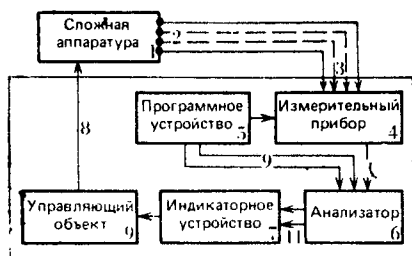


Рис. 4.8

Рассмотрим идею технической реализации моделей эксплуатации систем по состоянию. На рис. 4.8 изображена функциональная схема реализации способа управления техническим состоянием сложной аппаратуры. Аппаратура 1 имеет контрольные выходы 2, с которых снимают контролируемые сигналы и подают их на входы 3 измерительного прибора 4, который по сигналам с программного устройства 5 производит операции измерений в заданные моменты времени. Величина измеренного сигнала оценивается в анализаторе 6, куда с программного устройства вводятся значения номинала и допуска на измеряемый параметр. Если параметр находится в пределах допуска, то анализатор 6 выдает на индикаторное устройство 7 команду «Годен». Однако такое решение является недостаточным для оптимального управления (с помощью цепи 8) состоянием аппаратуры. Поэтому сигналы управления поступают по цепи от управляющего объекта 9. В роли управляющего объекта может выступать оператор или кибернетическое устройство. В схеме предлагается дополнительно с программного устройства вводить в анализатор значение упреждающего допуска 10. При превышении параметром упреждающего допуска выдается решение 11 на индикатор 7 для управляющего объекта 9 (решение о регулировке параметров сложной аппаратуры), в случае превышения параметром основного допуска фиксируется отказ аппаратуры. Если к моменту измерений контролируемый параметр не превысил значения упреждающего допуска, то регулировочные воздействия на аппаратуру 1 не назначаются. По мере накопления статистических данных контролируемые значения упреждающих допусков корректируются.

Следует особо отметить, что при организации эксплуатации систем по состоянию возрастают требования и к накопителям информации, в которых должна записываться, сортироваться и храниться информа-

ция об изменении параметров системы во времени. Общие вопросы обработки, передачи и отображения эксплуатационной информации более подробно рассмотрены в гл. IX.

Рассмотрим устройство, в котором реализуются принципы контроля с использованием оптимальных упреждающих допусков. Это устройство предложено Л. А. Корневским и В. В. Пигиным и предназначено для периодического контроля параметров системы на соответствие установленным допускам, проверки по упреждающим допускам и регистрации текущего значения параметров. Проверка по упреждающим допускам введена для получения возможности определения рационального момента для производства регулировки, настройки или ремонта. Наличие регистрации позволяет, кроме того, получить исходные данные для последующего прогнозирования, а принятая форма записи на перфокарту облегчает автоматизацию прогноза.

Для упрощения контрольного устройства в системе установлен унификационный ряд допусков, который разработан таким образом, что каждый меньший допуск является упреждающим для большего. Исследования показали, что для широкого класса параметров системы минимизация стоимости эксплуатации достигается при упреждающем допуске, составляющем 60—80% от основного. Этот коэффициент был использован при разработке унифицированных допусков, которые приведены в табл. 4.7.

Таблица 4.7

№ п/п	Величина рабочего (основного) допуска, %	Упреждающий допуск, %	
		расчетный	принятый
1	100	60 — 80	80
2	80	48 — 64	50
3	50	30 — 40	30
4	30	18 — 24	20
5	20	12 — 16	15
6	15	9 — 12	10
7	10	6 — 8	5

Применение метода предварительного группирования контролируемых сигналов по видам нормализованных электрических сигналов и замена проверки каждого сигнала по своему допуску проверкой всех сигналов по всем допускам с переходом от последовательного к комбинационному поиску позволяет создавать относительно простые устройства, обладающие большой универсальностью и пригодные для контроля целого класса систем. Рассмотрим один из возможных вариантов такого устройства, функциональная схема которого приведена на рис. 4.9. Устройство работает следующим образом: сосредоточенные в определенном порядке сигналы с выхода группирователя поступают на коммутатор, который по командам формирователя допусков после-

довательно опрашивает все точки выходного разъема группирователя и передает сигналы, снятые с этих точек, на вход нуль-органа. На второй вход нуль-органа из формирователя поступают опорные напряжения (уставки). Измерительное устройство сравнивает сигнал с очередной уставкой и выдает результат сравнения.

Чтобы устранить необходимость сравнения каждого сигнала с заданной уставкой, применяется последовательная поэтапная проверка каждого выхода группирователя на соответствие всей заранее установленной гамме допусков. Только после измерения подключенного сигнала по всем допускам формирователь допусков выдает команду на подключение коммутатором следующего сигнала и на продвижение карты для записи на один шаг.

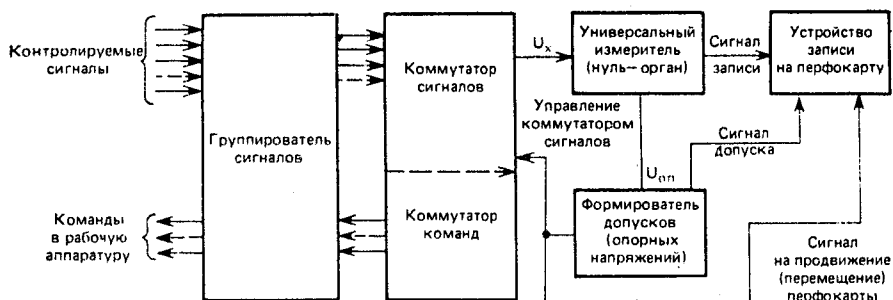


Рис. 4.9

С выхода нуль-органа результат измерения поступает на устройство записи, на второй вход которого из формирователя допусков поступает команда, соответствующая допуску, по которому в данный момент проверяется измеряемый сигнал. Результат каждого измерения записывается на карте в месте, соответствующем номеру сигнала и допуску, по которому он в данный момент проверяется.

Таким образом, по окончании работы устройства все измеряемые сигналы проверены на соответствие всем допускам установленного ряда, т. е. получено закодированное абсолютное значение каждого нормализованного электрического сигнала, а результаты измерения записаны на карте в виде определенных знаков, пробитых отверстий, отпечатанных точек и т. д.

Выявление минимально необходимой для допусковой оценки сигналов полезной информации и исключение лишней (ложной) производится предварительным нанесением на карту контура, который делит ее на четыре зоны: упреждающую, зону исправности, зону неисправности и зону избыточности информации. Разделение на зоны производится в зависимости от максимально допустимых уходов каждого измеряемого сигнала; зоны избыточности информации представляют собой участки карты, соответствующие сигналам, которые отсутствуют в данной конкретной группе.

Признаком выхода какого-либо сигнала за пределы допуска является запись знака в зоне неисправности в столбце, соответствующем номеру данного сигнала.

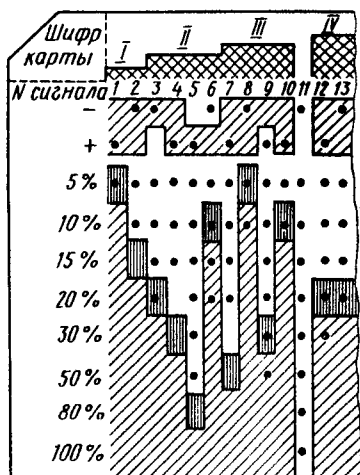
Во многих случаях измеряемые сигналы зависимы, поэтому для диагностики вводят приоритетные признаки каждого сигнала в виде номеров, начиная с входных и кончая выходными сигналами. Приоритетные признаки в виде номеров, вырезов, специальных знаков и т. д. наносят на карту в каждом столбце, соответствующем порядковому номеру сигнала. Здесь же могут быть нанесены обозначения устройств, из которых состоит объект контроля и состояние которых характеризуется измеряемыми сигналами.

При диагностике состояния устройств по результатам измерения, зарегистрированным на карте, в качестве неисправных идентифицируют устройства, сигналы которых имеют минимальный приоритетный номер и знак в зоне неисправности. То же относится и к сигналам в упреждающей зоне.

Для облегчения работы оператора часть поверхности карт, соответствующую указанным зонам, можно выделить окрашиванием, например, в разные цвета. При этом отдельно выделяют зону, соответствующую упреждающим допускам. Примерный вид карты приведен на рис. 4.10.

По сравнению со специализированным автоматом, предназначенным для проверок одного объекта, рассмотренное устройство требует увеличения емкости коммутатора и наличия подготовленных карт.

Вместо рассмотренных выше карт, по информации на которых применяются решение об управлении состоянием системы, могут быть использованы и стандартные перфокарты. При использовании стандартных перфокарт расшифровка результатов производится с помощью шаблона. В этих перфокартах номера столбцов соответствуют номерам контролируемых параметров, а в строках проставляют номера допусков (например, номера основного и упреждающего допусков). Области, находящиеся вне допуска, для каждого параметра вновь закрашивают определенным цветом (чаще всего красным). Оформленная таким образом перфокарта становится документом, который может быть включен в состав технической документации на контролируемый объект.



- — Зона исправности
- ▨ — Зона упреждения
- ▩ — Зона неисправности
- зона избыточной информации совмещена с зоной исправности
- I–IV — приоритетные номера сигналов

Рис. 4.10

Каждый параметр должен быть последовательно проверен на соответствие основному и упреждающему допускам. Вначале проверяют, не вышел ли параметр за основной допуск, затем проверяют, вышел или не вышел параметр за пределы упреждающего допуска. Если впервые зафиксировано нахождение параметра вне допуска (например, упреждающего), то сигнал, соответствующий номеру упреждающего допуска, заставляет срабатывать перфоратор и выбивать отверстие на строке перфокарты, являющейся координатой упреждающего допуска. На перфокарте можно регистрировать и абсолютное значение измеряемого параметра. Так как информация о значении параметра на перфокарте выражена в позиционном коде, то рекомендуется использовать специальное устройство сопряжения автомата контроля с универсальным перфоратором. В ряде случаев удобно использовать специализированный перфоратор.

В процессе контроля все контролируемые сигналы приводятся к одному уровню (нормализуются), поэтому абсолютные значения допусков для всех контролируемых сигналов одинаковы.

Специализированные автоматы допускового контроля рассмотренного выше типа могут быть как встроенные, так и сервисные (подвижные, расположенные конструктивно вне контролируемого объекта). В последнем случае контролируемые сигналы (параметры) должны быть выведены на контрольную панель и сгруппированы по описанному способу. В этом случае при контроле можно использовать один автомат для любых объектов с индивидуальными перфораторами.

ГЛАВА V

МОДЕЛИ ПОВЫШЕНИЯ ДОСТОВЕРНОСТИ КОНТРОЛЯ СОСТОЯНИЯ СЛОЖНОЙ СИСТЕМЫ

Для управления состоянием сложных систем в процессе эксплуатации важно знать достоверность контроля их состояния. В моделях управления состоянием сложных систем, рассмотренных в гл. III и IV, предполагалось, что достоверность контроля состояния равна единице. Во всех рассмотренных моделях управления можно учесть фактор достоверности контроля состояния систем. Это привело бы к усложнению процедур получения решений, но не изменило бы их характера (например, в задачах с управляемым параметром марковского типа учет достоверности контроля привел бы к изменению уровня упреждающего допуска, а оптимальная стратегия управления осталась бы однородной и марковской).

В настоящей главе рассмотрены модели, лежащие в основе оценки достоверности контроля сложных систем (§ 5.1) и основанные на известных результатах (см. например, [9, 15]), и две модели повышения достоверности контроля: мажоритарная (§ 5.2) и оптимальная (§ 5.3).

Показывается, что мажоритарная модель приемлема на практике по точности получаемых решений и более проста с точки зрения аппаратной реализации (§ 5.4).

В заключение рассмотрена модель выбора оптимального числа контролируемых в процессе эксплуатации параметров сложной системы по показателю достоверности.

§ 5.1. Достоверность контроля состояния сложной системы

В процессе определения технического состояния сложной системы при контроле каждого параметра возможны следующие независимые и единственно возможные события: годный параметр оценивается системой контроля как годный; годный параметр оценивается системой контроля как негодный; негодный параметр оценивается системой контроля как негодный; негодный параметр оценивается системой контроля как годный.

Под годным понимаем параметр, находящийся в пределах установленного допуска (кванта), под негодным — параметр, вышедший за пределы допуска (кванта).

Введем следующие обозначения: A_i — i -й параметр годный; $\bar{A}_i$ — i -й параметр негодный; B_i — i -й параметр оценивается системой контроля как годный; $\bar{B}_i$ — i -й параметр оценивается системой контроля как негодный.

Тогда перечисленные выше сложные события можно записать в виде $A_i B_i$, $A_i \bar{B}_i$, $\bar{A}_i \bar{B}_i$, $\bar{A}_i B_i$, а их вероятности — соответственно $P(A_i B_i)$, $P(A_i \bar{B}_i)$, $P(\bar{A}_i \bar{B}_i)$, $P(\bar{A}_i B_i)$.

Указанные события составляют полную группу событий, поэтому сумма их вероятностей равна единице:

$$P(A_i B_i) + P(A_i \bar{B}_i) + P(\bar{A}_i \bar{B}_i) + P(\bar{A}_i B_i) = 1. \quad (5.1)$$

По теореме умножения вероятностей имеем:

$$P(A_i B_i) = P(A_i)P(B_i/A_i), \quad (5.2)$$

$$P(A_i \bar{B}_i) = P(A_i)P(\bar{B}_i/A_i), \quad (5.3)$$

$$P(\bar{A}_i \bar{B}_i) = P(\bar{A}_i)P(\bar{B}_i/\bar{A}_i), \quad (5.4)$$

$$P(\bar{A}_i B_i) = P(\bar{A}_i)P(B_i/\bar{A}_i). \quad (5.5)$$

В формулах (5.2)—(5.5) $P(B_i/A_i)$ — условная вероятность оценки параметра годным при условии, что параметр годен; $P(\bar{B}_i/A_i)$ — условная вероятность оценки параметра негодным при условии, что параметр годен; $P(\bar{B}_i/\bar{A}_i)$ — условная вероятность оценки параметра негодным при условии, что параметр негоден; $P(B_i/\bar{A}_i)$ — условная вероятность оценки параметра годным при условии, что параметр негоден.

Очевидно, что

$$P(B_i/A_i) + P(\bar{B}_i/A_i) = 1, \quad (5.6)$$

$$P(\bar{B}_i/\bar{A}_i) + P(B_i/\bar{A}_i) = 1. \quad (5.7)$$

Приведем формулы, вытекающие из (5.2)—(5.5):

$$P(A_i) = P(A_i B_i) + P(A_i \bar{B}_i), \quad (5.8)$$

$$P(\bar{A}_i) = P(\bar{A}_i B_i) + P(\bar{A}_i \bar{B}_i), \quad (5.9)$$

$$P(B_i) = P(A_i B_i) + P(\bar{A}_i B_i), \quad (5.10)$$

$$P(\bar{B}_i) = P(A_i \bar{B}_i) + P(\bar{A}_i \bar{B}_i). \quad (5.11)$$

Неправильная оценка параметров системой контроля имеет место при наступлении событий $A_i \bar{B}_i$ и $\bar{A}_i B_i$. Тогда достоверность контроля параметра (D_i), под которой понимается вероятность правильной оценки системой контроля состояния параметра, выражается формулой

$$D_i = P(A_i B_i) + P(\bar{A}_i \bar{B}_i). \quad (5.12)$$

Вероятности неправильной оценки состояний i -го параметра $P(\bar{A}_i B_i)$ и $P(A_i \bar{B}_i)$ представляют собой соответственно ошибку второго рода (риск заказчика) и ошибку первого рода (риск изготовителя.)

Для того чтобы было можно определять вероятности D_i , $P(\bar{A}_i B_i)$ и $P(A_i \bar{B}_i)$ по характеристикам параметра и системы контроля (величине допуска, среднему квадратическому отклонению, точности измерения), запишем аналитические выражения для этих вероятностей.

Введем ряд обозначений (рис. 5.1). На этом рисунке $f(x_i)$ и $f_1(x_i)$ — соответственно плотности распределения параметра и ошибок измерения; x_{ni} и x_{bi} — соответственно нижняя и верхняя границы допуска на i -й параметр; x_{0i} — номинальное значение параметра; $\Delta_i(1 + k_i) = x_{bi} - x_{ni}$ — величина допуска на параметр; $k_i = (x_{bi} - x_{0i}) / (x_{0i} - x_{ni})$ — коэффициент несимметричности поля допуска. Тогда

$$P(A_i B_i) = \int_{x_{ni}}^{x_{bi}} f(x_i) \left[\int_{x_{ni}-x}^{x_{bi}-x} f_1(t_i) dt_i \right] dx_i, \quad (5.13)$$

$$P(A_i \bar{B}_i) = \int_{x_{ni}}^{x_{bi}} f(x_i) \left[\int_{-\infty}^{x_{ni}-x} f_1(t_i) dt_i + \int_{x_{bi}-x}^{\infty} f_1(t_i) dt_i \right] dx_i, \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} P(\bar{A}_i \bar{B}_i) = & \int_{-\infty}^{x_{ni}} f(x_i) \left[\int_{-\infty}^{x_{ni}-x} f_1(t_i) dt_i + \int_{x_{bi}-x}^{\infty} f_1(t_i) dt_i \right] dx_i + \\ & + \int_{x_{bi}}^{\infty} f(x_i) \left[\int_{-\infty}^{x_{ni}-x} f_1(t_i) dt_i + \int_{x_{bi}-x}^{\infty} f_1(t_i) dt_i \right] dx_i. \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} P(\bar{A}_i B_i) = & \int_{-\infty}^{x_{ni}} f(x_i) \left[\int_{x_{ni}-x}^{x_{bi}-x} f_1(t_i) dt_i \right] dx_i + \int_{x_{bi}}^{\infty} f(x_i) \left[\int_{x_{ni}-x}^{x_{bi}-x} f_1(t_i) dt_i \right] dx_i. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Для практического использования формул (5.13)—(5.16) необходимо выразить их через характеристики параметров. Обычно в состав контролируемых систем входит большое число элементов, на которые в процессе эксплуатации действуют различные дестабилизирующие факторы. В результате влияния большого числа факторов и равномерного их воздействия на основании центральной предельной теоремы теории вероятностей можно полагать, что параметры системы распределены по нормальному закону. Опыт эксплуатации систем данное допущение, как правило, подтверждает. Следует заметить, что в подавляющем большинстве случаев встречается нормальный закон распределения погрешностей. На основании этого подставим в формулы (5.13)—(5.16) плотность распределения параметра $f(x_i)$ и плотность распределения ошибок измерения $f_1(t_i)$ для нормального закона:

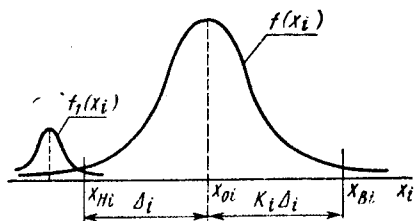


Рис. 5.1

$$f(x_i) = \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} e^{-(x_i - x_{0i})^2 / (2\sigma_i^2)}, \quad (5.17)$$

$$f_1(t_i) = \frac{1}{\sigma_{1i} \sqrt{2\pi}} e^{-(t_i - t_{0i})^2 / (2\sigma_{1i}^2)}. \quad (5.18)$$

Здесь σ_i — среднее квадратическое отклонение параметра x_i ; σ_{1i} — средняя квадратическая погрешность измерения параметра x_i системой контроля.

Будем полагать в дальнейшем, что систематическая ошибка измерения отсутствует, т. е. $t_{0i} = 0$. Пусть $\Delta_i/\sigma_i = r_i$ — характеристика производства, $3\sigma_{1i}/\Delta_i = z_i$ — характеристика точности измерения. Произведем замену переменных: $y = (x_i - x_{0i})/\sigma_i$ и $\tau = t_i/\sigma_{1i}$.

В результате преобразований получим следующие выражения:

$$P(A_i B_i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-r_i}^{k_i r_i} e^{-\frac{y_i^2}{2}} \left[\int_{-3\frac{r_i + y_i}{r_i z_i}}^{3\frac{k_i r_i - y_i}{r_i z_i}} e^{-\frac{\tau_i^2}{2}} d\tau_i \right] dy_i, \quad (5.19)$$

$$P(A_i \bar{B}_i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-r_i}^{k_i r_i} e^{-\frac{y_i^2}{2}} \left[\int_{-\infty}^{-3\frac{r_i + y_i}{r_i z_i}} e^{-\frac{\tau_i^2}{2}} d\tau_i + \int_{3\frac{k_i r_i - y_i}{r_i z_i}}^{\infty} e^{-\frac{\tau_i^2}{2}} d\tau_i \right] dy_i. \quad (5.20)$$

$$P(\bar{A}_i \bar{B}_i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{-r_i} e^{-\frac{y_i^2}{2}} \left[\int_{-\infty}^{-\frac{r_i+y_i}{r_i z_i}} e^{-\frac{\tau_i^2}{2}} d\tau_i + \int_{\frac{k_i r_i - y_i}{r_i z_i}}^{\infty} e^{-\frac{\tau_i^2}{2}} d\tau_i \right] dy_i +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{k_i r_i}^{\infty} e^{-\frac{y_i^2}{2}} \left[\int_{-\infty}^{-\frac{r_i+y_i}{r_i z_i}} e^{-\frac{\tau_i^2}{2}} d\tau_i + \int_{\frac{k_i r_i - y_i}{r_i z_i}}^{\infty} e^{-\frac{\tau_i^2}{2}} d\tau_i \right] dy_i, \quad (5.21)$$

$$P(\bar{A}_i B_i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{-r_i} e^{-\frac{y_i^2}{2}} \left[\int_{\frac{k_i r_i - y_i}{r_i z_i}}^{\infty} e^{-\frac{\tau_i^2}{2}} d\tau_i \right] dy_i +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{k_i r_i}^{\infty} e^{-\frac{y_i^2}{2}} \left[\int_{-\frac{r_i+y_i}{r_i z_i}}^{\frac{k_i r_i - y_i}{r_i z_i}} e^{-\frac{\tau_i^2}{2}} d\tau_i \right] dy_i. \quad (5.22)$$

Так как интегралы в формулах (5.19)—(5.22) не выражаются через элементарные функции, то определить их можно численными методами. Имеются [15] номограммы для расчета вероятностей $P(A_i \bar{B}_i)$ и $P(\bar{A}_i B_i)$. Аналогичные номограммы можно построить и для вероятностей $P(A_i B_i)$, $P(\bar{A}_i \bar{B}_i)$. По данным номограммам, зная характеристики параметра r_i , k_i , z_i (z_i определяют по результатам испытаний системы контроля), можно определить любую из вероятностей $P(A_i B_i)$, $P(A_i \bar{B}_i)$, $P(\bar{A}_i \bar{B}_i)$, $P(\bar{A}_i B_i)$. В частности, по номограммам можно решить и обратную задачу: определить допустимую погрешность измерения параметра и выбрать поле допуска на параметр, при котором вероятности неправильной оценки системой контроля состояния параметра $P(A_i \bar{B}_i)$ и $P(\bar{A}_i B_i)$ находятся в заданных пределах.

Напомним, что указанные вероятности относятся к одному параметру. Однако по контролируемой системе в целом (по совокупности m контролируемых параметров) также можно определить вероятности $P(AB)$, $P(A\bar{B})$, $P(\bar{A}\bar{B})$, $P(\bar{A}B)$. В конечном счете важны именно последние вероятности, так как они дают правильную оценку технического состояния контролируемой сложной системы.

Далее контролируемую систему будем называть (для удобства изложения) *объектом контроля* (ОК).

Безусловно, вероятности $P(AB)$, $P(A\bar{B})$, $P(\bar{A}\bar{B})$, $P(\bar{A}B)$ определяются соответствующими вероятностями контролируемых парамет-

ров. Найдем эти зависимости. Прежде всего определим, что следует понимать под годным объектом контроля (характеризующимся m контролируемыми параметрами). Будем полагать, что контролируемые параметры являются независимыми.

Из физических соображений ясно, что годным (исправным) объектом контроля следует считать ОК, у которого годны (находятся в пределах установленных допусков) все контролируемые параметры, и соответственно негодным (неисправным) — объект контроля, у которого негоден хотя бы один параметр. Это записывается следующим образом:

$$P(A) = \prod_{i=1}^m P(A_i), \quad (5.23)$$

$$P(\bar{A}) = \prod_{i=1}^m P(\bar{A}_i) - \sum_{i,j} P(\bar{A}_i \bar{A}_j) + \sum_{i,j,k} P(\bar{A}_i \bar{A}_j \bar{A}_k) - \dots + (-1)^{m-1} P(\bar{A}_1 \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_m) = 1 - \prod_{i=1}^m P(A_i), \quad i \neq j \neq k. \quad (5.24)$$

Вторым условием перехода от вероятностей отдельных параметров к вероятностям для всего объекта контроля является условие

$$P(B) = \prod_{i=1}^m P(B_i), \quad (5.25)$$

$$P(\bar{B}) = \sum_{i=1}^m P(\bar{B}_i) - \sum_{i,j} P(\bar{B}_i \bar{B}_j) + \sum_{i,j,k} P(\bar{B}_i \bar{B}_j \bar{B}_k) - \dots + (-1)^{m-1} P(\bar{B}_1 \bar{B}_2, \dots, \bar{B}_m) = 1 - \prod_{i=1}^m P(B_i). \quad (5.26)$$

Очевидность условия (5.25) заключается в том, что оценка объекта контроля «Годен» возможна, если каждый из параметров оценен системой контроля как годный.

Учитывая формулы (5.8), (5.10), (5.23) и (5.25), запишем выражения для $P(A)$ и $P(B)$:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(AB) + P(A\bar{B}) = P(A)P(B/A) + P(A)P(\bar{B}/A) = \\ &= \prod_{i=1}^m [P(A_i)P(B_i/A_i) + P(A_i)P(\bar{B}_i/A_i)] = \\ &= \prod_{i=1}^m [P(A_i)P(B_i/A_i)] + \prod_{i=1}^m P(A_i) [1 - \prod_{i=1}^m P(B_i/A_i)], \\ P(B) &= P(AB) + P(\bar{A}B) = P(A)P(B/A) + P(B)P(\bar{A}/B) = \\ &= \prod_{i=1}^m [P(A_i)P(B_i/A_i) + P(B_i)P(\bar{A}_i/B_i)] = \\ &= \prod_{i=1}^m [P(A_i)P(B_i/A_i)] + \prod_{i=1}^m P(B_i) [1 - \prod_{i=1}^m P(A_i/B_i)]. \end{aligned}$$

Окончательно имеем:

$$P(AB) = \prod_{i=1}^m P(A_i B_i), \quad (5.27)$$

$$P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A}) - P(B) + \prod_{i=1}^m P(A_i B_i) = P(\bar{B}) - P(A) + \prod_{i=1}^m P(A_i B_i), \quad (5.28)$$

$$P(A\bar{B}) = P(A) - \prod_{i=1}^m P(A_i B_i), \quad (5.29)$$

$$P(\bar{A}B) = P(B) - \prod_{i=1}^m P(A_i B_i). \quad (5.30)$$

Таким образом, зная вероятности $P(A_i B_i)$, $P(\bar{A}_i \bar{B}_i)$, $P(A_i \bar{B}_i)$, $P(\bar{A}_i B_i)$ и определив предварительно $P(A_i)$, $P(B_i)$, $P(A)$, $P(B)$ соответственно по формулам (5.8), (5.10), (5.23), (5.25), по формулам (5.27)–(5.30) определяем вероятности $P(AB)$, $P(\bar{A}\bar{B})$, $P(A\bar{B})$, $P(\bar{A}B)$.

Приведем формулы, которые используют при вычислении вероятностей $P(AB)$, $P(\bar{A}\bar{B})$, $P(A\bar{B})$, $P(\bar{A}B)$:

$$P(B/A) = \prod_{i=1}^m P(B_i/A_i), \quad (5.31)$$

$$P(\bar{B}/A) = 1 - \prod_{i=1}^m P(B_i/A_i), \quad (5.32)$$

$$P(A/B) = \prod_{i=1}^m P(A_i/B_i), \quad (5.33)$$

$$P(\bar{A}/B) = 1 - \prod_{i=1}^m P(A_i/B_i). \quad (5.34)$$

Выразить вероятности $P(\bar{B}/\bar{A})$, $P(B/\bar{A})$, $P(\bar{A}/\bar{B})$, $P(A/\bar{B})$ через соответствующие вероятности отдельных параметров в простом виде не представляется возможным.

Примем за количественную оценку достоверности контроля вероятность правильного определения системой контроля технического состояния объекта контроля. В общем виде достоверность контроля зависит от методической достоверности, под которой понимается вероятность правильного определения технического состояния объекта контроля по контролируемым параметрам при условии правильной их оценки системой контроля, и инструментальной достоверности, т. е. вероятности правильной оценки системой контроля контролируемых параметров. Причем достоверность контроля равна произведению методической и инструментальной достоверностей.

В настоящей главе рассмотрена только инструментальная достоверность контроля, которая в дальнейшем для краткости называется

просто достоверностью контроля и обозначается D . В соответствии с определением

$$D = P(AB) + P(\bar{A}\bar{B}).$$

Рассмотрим, как изменяется достоверность контроля в зависимости от количества контролируемых параметров объекта контроля. Примем следующие значения вероятностей для одного параметра: $P(A_i B_i) = 0,9990$, $P(\bar{A}_i \bar{B}_i) = 0,0007$, $P(A_i \bar{B}_i) = 0,0002$, $P(\bar{A}_i B_i) = 0,0001$ и будем считать, что все контролируемые параметры одинаковы, т. е. характеризуются одними и теми же вероятностями.

Графики изменения достоверности контроля D и вероятностей $P(\bar{A}\bar{B})$ и $P(A\bar{B})$ в зависимости от количества контролируемых параметров приведены на рис. 5.2. Из графика $D = \varphi(m)$ видно, что с увеличением числа контролируемых параметров достоверность контроля сначала уменьшается, достигает минимума, а затем увеличивается.

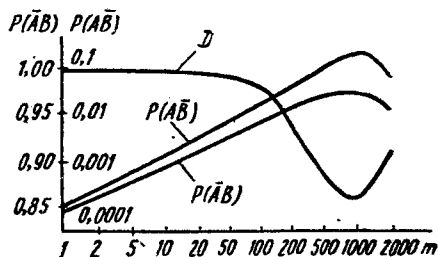


Рис. 5.2

Поэтому необходимо отметить, что утверждение о безусловном уменьшении D при увеличении m не соответствует действительности.

Минимальное значение достоверности $D_{\min}$ имеет место при m , определяемом из следующего уравнения (при одинаковых параметрах)*:

$$\begin{aligned} \frac{dD}{dm} = 2 [P(A_i B_i)]^m \ln P(A_i B_i) - [P(A_i)]^m \ln P(A_i) - \\ - [P(B_i)]^m \ln P(B_i) = 0. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Для графика, приведенного на рис. 5.2, $D_{\min}$ соответствует $m \approx 1100$. Вероятности $P(A\bar{B})$ и $P(\bar{A}\bar{B})$ имеют максимум при m , определяемом из уравнений (также при одинаковых параметрах)

$$\frac{dP(A\bar{B})}{dm} = [P(A_i)]^m \ln P(A_i) - [P(A_i B_i)]^m \ln P(A_i B_i) = 0, \quad (5.36)$$

$$\frac{dP(\bar{A}\bar{B})}{dm} = [P(B_i)]^m \ln P(B_i) - [P(A_i B_i)]^m \ln P(A_i B_i) = 0. \quad (5.37)$$

В рассматриваемом примере $m \approx 1100$.

Для повышения достоверности контроля наряду с повышением точности измерения и рациональным выбором допусков на параметры можно использовать метод введения избыточности в систему контроля.

* При дифференцировании m принимают непрерывной величиной.

§ 5.2. Мажоритарная модель повышения достоверности контроля

Под *избыточностью* будем понимать установление некоторого порогового уровня, например k такого, что если среди n ($k \leq n$) измерений одного и того же параметра по крайней мере k раз система контроля выдает решение «Годен», то тогда общее решение системы по данному параметру — «Годен». Такая система принятия решения относится к (k, n) -системе принятия решения (системе «голосования»). Естественно потребовать, чтобы выбранное k , $1 \leq k \leq n$, минимизировало вероятность принятия системой контроля неправильного решения. Излагаемая ниже оптимальная модель повышения достоверности исследована в работах [21, 59].

Рассмотрим выражение для вероятностей $P(A_i B_i)$, $P(\bar{A}_i \bar{B}_i)$ при использовании (k, n) -системы:

$$P_{(k, n)}(A_i B_i) = P(A_i) \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} P^i(B_i/A_i) P^{n-i}(\bar{B}_i/A_i), \quad (5.38)$$

$$P_{(k, n)}(\bar{A}_i \bar{B}_i) = P(\bar{A}_i) \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} P^i(B_i/\bar{A}_i) P^{n-i}(\bar{B}_i/\bar{A}_i). \quad (5.39)$$

Достоверность контроля i -го параметра равна

$$\begin{aligned} D_{(k, n) i} = & P(A_i) \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} P^j(B_i/A_i) P^{n-j}(\bar{B}_i/A_i) + \\ & + P(\bar{A}_i) \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j} P^j(B_i/\bar{A}_i) P^{n-j}(\bar{B}_i/\bar{A}_i). \end{aligned} \quad (5.40)$$

Из выражения (5.38) получаем

$$\begin{aligned} D_{(k, n) i} = & D_{(k+1, n) i} + \binom{n}{k} [P(A_i) P^k(B_i/A_i) P^{n-k}(\bar{B}_i/A_i) - \\ & - P(\bar{A}_i) P^k(B_i/\bar{A}_i) P^{n-k}(\bar{B}_i/\bar{A}_i)]. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Решим разностное уравнение:

$$\begin{aligned} \Delta D = & \binom{n}{k} [P(A_i) P^k(B_i/A_i) P^{n-k}(\bar{B}_i/A_i) - \\ & - P(\bar{A}_i) P^k(B_i/\bar{A}_i) P^{n-k}(\bar{B}_i/\bar{A}_i)] = 0, \end{aligned} \quad (5.42)$$

где $\Delta D = D_{(k+1, n)} - D_{(k, n)}$. Если n' — решение этого уравнения, то

$$n' = \frac{\log [P(A_i) P^n(\bar{B}_i/A_i)] - \log [P(\bar{A}_i) P^n(\bar{B}_i/\bar{A}_i)]}{\log [P(B_i/\bar{A}_i) P(\bar{B}_i/A_i)] - \log [P(B_i/A_i) P(\bar{B}_i/\bar{A}_i)]}. \quad (5.43)$$

При $P(B_i/\bar{A}_i) < P(B_i/A_i)$

$$k_n = \begin{cases} n, & \text{если } [n'] \geq n, \\ [n'] + 1, & \text{если } 1 \leq [n'] < n, \\ 1, & \text{если } [n'] < 1, \end{cases} \quad (5.44)$$

где $[n']$ — наибольшее целое число, не превосходящее n' , а k_n — значение k , при котором для i -го параметра максимизируется функция $D_{(k,n)}$. При $P(B_i/\bar{A}_i) > P(B_i/A_i)$ и при $P(B_i/\bar{A}_i) = P(B_i/A_i)$ соответственно имеем:

$$k_n = \begin{cases} 1, & \text{если } n' > n, \\ n, & \text{если } n' < 1. \end{cases} \quad (5.45) \quad k_n = \begin{cases} 1, & \text{если } P(A_i) > P(\bar{A}_i), \\ n, & \text{если } P(A_i) < P(\bar{A}_i). \end{cases} \quad (5.46)$$

Если помимо $P(B_i/\bar{A}_i) = P(B_i/A_i)$ еще и $P(A_i) = P(\bar{A}_i)$, то $D_{(k,n)i} = 0,5$ для любого $1 \leq k \leq n$. Наибольший интерес из приведенных зависимостей для k_n представляет (5.44), поскольку практически всегда выполняется условие $P(B_i/\bar{A}_i) < P(B_i/A_i)$ (табл. 5.1).

Т а б л и ц а 5.1

$P(A)=0.89; P(B/A)=0.9$										
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(B/\bar{A})=0,01$	0,033 (0)	0,37 (0)	0,71 (0)	1,05 (1)	1,39 (1)	1,73 (1)	2,07 (2)	2,41 (2)	2,75 (2)	3,09 (3)
$P(B/\bar{A})=0,06$	0,05 (0)	0,5 (0)	0,97 (0)	1,45 (1)	1,92 (1)	2,38 (2)	2,85 (2)	3,32 (3)	3,78 (3)	4,25 (4)
$P(B/\bar{A})=0,11$	0,073 (0)	0,6 (0)	1,14 (1)	1,68 (1)	2,21 (2)	2,75 (2)	3,28 (3)	3,82 (3)	4,35 (4)	4,89 (4)
$P(B/A)=0.93$										
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(B/\bar{A})=0,01$	0,08 (0)	0,45 (0)	0,82 (0)	1,19 (1)	1,56 (1)	1,93 (1)	2,3 (2)	2,67 (2)	3,05 (3)	3,41 (3)
$P(B/\bar{A})=0,06$	0,1154 (0)	0,61 (0)	1,11 (1)	1,61 (1)	2,1 (2)	2,6 (2)	3,1 (3)	3,6 (3)	4,1 (4)	4,6 (4)
$P(B/\bar{A})=0,11$	0,14 (0)	0,7 (0)	1,27 (1)	1,83 (1)	2,4 (2)	2,97 (2)	3,53 (3)	4,09 (4)	4,66 (4)	5,23 (5)
$P(B/A)=0.96$										
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(B/\bar{A})=0,01$	0,15 (0)	0,56 (0)	0,97 (0)	1,39 (1)	1,8 (1)	2,22 (2)	2,63 (2)	3,05 (3)	3,46 (3)	3,87 (3)
$P(B/\bar{A})=0,06$	0,2 (0)	0,74 (0)	1,3 (1)	1,82 (1)	2,36 (2)	2,9 (2)	3,45 (3)	3,99 (3)	4,53 (4)	5,07 (5)
$P(B/\bar{A})=0,11$	0,23 (0)	0,83 (0)	1,44 (1)	2,04 (2)	2,65 (2)	3,26 (3)	3,86 (3)	4,67 (4)	5,08 (5)	5,68 (5)

$P(B/A)=0,99$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(B/\bar{A})=0,01$	0,27 (0)	0,78 (0)	1,28 (1)	1,78 (1)	2,28 (2)	2,78 (2)	3,28 (3)	3,78 (3)	4,28 (4)	4,78 (4)
$P(B/\bar{A})=0,06$	0,34 (0)	0,97 (0)	1,59 (1)	2,22 (2)	2,84 (2)	3,47 (3)	4,09 (4)	4,72 (4)	5,34 (5)	5,97 (5)
$P(B/\bar{A})=0,11$	0,38 (0)	1,06 (1)	1,75 (1)	2,43 (2)	3,14 (3)	3,79 (3)	4,47 (4)	5,16 (5)	5,84 (5)	6,52 (6)

 $P(A)=0,94; P(B/A)=0,9$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(B/\bar{A})=0,01$	0,064 (0)	0,275 (0)	0,14 (0)	0,95 (0)	1,29 (1)	1,63 (1)	1,97 (1)	1,31 (1)	2,65 (2)	2,99 (2)
$P(B/\bar{A})=0,06$	0,076 (0)	0,39 (0)	0,86 (0)	1,32 (1)	0,79 (0)	2,25 (2)	2,72 (2)	3,05 (3)	3,65 (3)	4,12 (4)
$P(B/\bar{A})=0,11$	0,073 (0)	0,46 (0)	0,99 (0)	1,53 (1)	2,07 (2)	2,6 (2)	3,14 (3)	3,67 (3)	4,21 (4)	4,74 (4)

 $P(B/A)=0,93$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(B/\bar{A})=0,01$	0,01 (0)	0,36 (0)	0,73 (0)	1,1 (1)	1,47 (1)	1,84 (1)	2,21 (2)	2,58 (2)	2,95 (2)	3,32 (3)
$P(B/\bar{A})=0,06$	0,06 (0)	0,49 (0)	0,99 (0)	1,49 (1)	1,99 (1)	2,49 (2)	2,98 (2)	3,48 (3)	3,98 (3)	4,48 (4)
$P(B/\bar{A})=0,11$	0,05 (0)	0,57 (0)	1,14 (1)	1,7 (1)	2,27 (2)	2,83 (2)	3,39 (3)	3,96 (3)	4,53 (4)	5,09 (5)

 $P(B/A)=0,96$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(B/\bar{A})=0,01$	0,06 (0)	0,48 (0)	0,89 (0)	1,3 (1)	1,72 (1)	2,13 (2)	2,55 (2)	2,96 (2)	3,38 (3)	3,79 (3)
$P(B/\bar{A})=0,06$	0,09 (0)	0,63 (0)	1,17 (1)	1,71 (1)	2,26 (2)	2,79 (3)	3,34 (3)	3,88 (3)	4,42 (4)	4,97 (4)
$P(B/\bar{A})=0,11$	0,1 (0)	0,71 (0)	1,32 (1)	1,92 (1)	2,53 (2)	3,14 (3)	3,74 (3)	4,35 (4)	4,96 (4)	5,56 (5)

 $P(B/A)=0,99$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(B/\bar{A})=0,01$	0,2 (0)	0,7 (0)	1,2 (1)	1,74 (1)	2,21 (2)	2,71 (2)	3,21 (3)	3,71 (3)	4,21 (4)	4,71 (4)
$P(B/\bar{A})=0,06$	0,3 (0)	0,88 (0)	1,51 (1)	2,13 (2)	2,76 (2)	3,38 (3)	4,0 (4)	4,63 (4)	5,25 (5)	5,88 (5)
$P(B/\bar{A})=0,11$	0,3 (0)	0,97 (0)	1,65 (1)	2,33 (2)	3,01 (3)	3,69 (3)	4,38 (4)	5,06 (5)	5,74 (5)	6,43 (6)

$$P(A)=0,99; P(B/A)=0,9$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(B/\bar{A})=0,01$	0,34 (0)	0,004 (0)	0,34 (0)	0,68 (0)	1,02 (1)	1,36 (1)	1,7 (1)	2,04 (2)	2,38 (2)	2,72 (2)
$P(B/\bar{A})=0,06$	0,44 (0)	0,03 (0)	0,49 (0)	0,96 (0)	1,42 (1)	1,89 (1)	2,36 (2)	2,82 (2)	3,29 (3)	3,76 (3)
$P(B/\bar{A})=0,11$	0,48 (0)	0,054 (0)	0,59 (0)	1,12 (1)	1,66 (1)	2,19 (2)	2,73 (2)	3,26 (3)	3,79 (3)	4,43 (4)

$$P(B/A)=0,93$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(B/\bar{A})=0,01$	0,27 (0)	0,1 (0)	0,47 (0)	0,84 (0)	1,22 (1)	1,59 (1)	1,96 (1)	2,33 (2)	2,7 (2)	3,07 (3)
$P(B/\bar{A})=0,06$	0,34 (0)	0,16 (0)	0,65 (0)	1,15 (1)	1,64 (1)	2,15 (2)	2,65 (2)	3,14 (3)	3,64 (3)	4,14 (4)
$P(B/\bar{A})=0,11$	0,37 (0)	0,19 (0)	0,76 (0)	1,33 (1)	1,79 (1)	2,46 (2)	3,02 (3)	3,59 (3)	4,15 (4)	4,72 (4)

$$P(B/A)=0,96$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(B/\bar{A})=0,01$	0,18 (0)	0,24 (0)	0,65 (0)	1,07 (1)	1,48 (1)	1,89 (1)	2,31 (2)	2,72 (2)	3,14 (3)	3,55 (3)
$P(B/\bar{A})=0,06$	0,22 (0)	0,32 (0)	0,87 (0)	1,41 (1)	1,95 (1)	2,49 (2)	3,03 (3)	3,58 (3)	4,12 (4)	4,66 (4)
$P(B/\bar{A})=0,11$	0,23 (0)	0,38 (0)	0,98 (0)	1,59 (1)	2,2 (2)	2,8 (2)	3,41 (4)	4,01 (4)	4,62 (4)	5,23 (5)

$$P(B/A)=0,99$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(B/\bar{A})=0,01$	0,002 (0)	0,5 (0)	1,0 (1)	1,51 (1)	2,01 (2)	2,51 (2)	3,01 (3)	3,51 (3)	4,01 (4)	4,51 (4)
$P(B/\bar{A})=0,06$	0,01 (0)	0,63 (0)	1,26 (1)	1,88 (1)	2,51 (2)	3,13 (3)	3,76 (3)	4,38 (4)	5,01 (5)	5,63 (5)
$P(B/\bar{A})=0,11$	0,02 (0)	0,7 (0)	1,38 (1)	2,07 (2)	2,75 (2)	3,43 (3)	4,11 (4)	4,8 (4)	5,48 (5)	6,16 (6)

Примечание. В таблице указаны значения n' и $[n']$ (в скобках); значения k_n выбираются согласно (5.44).

Рассмотрим как увеличивается достоверность контроля при использовании системы «голосования» (или системы принятия решения по

большинству «голосов», т. е. мажоритарной системы принятия решения). Для этого положим, что вероятности для одного параметра (при одном измерении) равны значениям, принятым ранее, а именно: $P(A_i B_i) = 0,9990$, $P(\bar{A}_i \bar{B}_i) = 0,0007$, $P(A_i \bar{B}_i) = 0,0002$, $P(\bar{A}_i B_i) = 0,0001$.

Найдем n' и k_n для различных n и величину получаемой достоверности контроля при этих значениях k_n . При данном n это максимальная величина достоверности контроля.

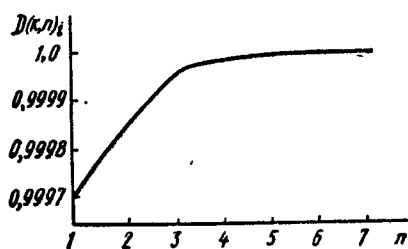


Рис. 5.3

Результаты расчетов приведены в табл. 5.1. График зависимости $D_{(k,n)i}$ от количества измерений n изображен на рис. 5.3.

Выбрав допустимую величину $D_{(k,n)i}$, по графику можно определить необходимое количество измерений и затем по табл. 5.2 — значение k_n . При этом желательно, чтобы количество измерений было не слишком велико.

Из рис. 5.3 следует, что $D_{(k,n)i}$ при $n > 3$ увеличивается незна-

чительно, поэтому целесообразно, чтобы выполнялось условие $n \leq 3$. Примем $n = 3$, при этом $k_n = 2$, что не вызывает затруднений при аппаратурной реализации системы голосования. Вероятности $P(A_i B_i)$, $P(\bar{A}_i \bar{B}_i)$, $P(A_i \bar{B}_i)$, $P(\bar{A}_i B_i)$ соответственно равны: $P_{(2,3)}(A_i B_i) = 0,99919987$, $P_{(2,3)}(\bar{A}_i \bar{B}_i) = 0,00076562$, $P_{(2,3)}(A_i \bar{B}_i) = 0,00000013$, $P_{(2,3)}(\bar{A}_i B_i) = 0,00003438$.

Таблица 5.2

n	n'	$k_n = \lceil \frac{n}{n'} \rceil + 1$	$P_{(k,n)}(A_i B_i)$	$P_{(k,n)}(\bar{A}_i \bar{B}_i)$	$D_{(k,n)i}$
1	—	1	0,9990	0,0007	0,9997
2	0,9	1	0,99919936	0,00061250	0,99981186
3	1,7	2	0,99919987	0,00076562	0,99996549
4	2,5	3	0,99919976	0,00079433	0,99999409
5	3,3	4	0,99919960	0,00079913	0,99999873
6	4,1	5	0,99919939	0,00079987	0,99999926
7	4,9	5	0,99919999	0,00079954	0,99999953

Достоверность контроля, например, при 100 и 500 контролируемых параметрах (одинаковых) соответственно равна 0,993 и 0,997. Ранее достоверность контроля при 100 и 500 контролируемых параметрах была равна 0,970 и 0,899, т. е. выигрыш в оптимальном случае значительный. Если вероятности для одного параметра соответственно равны: $P(A_i B_i) = 0,56$, $P(\bar{A}_i \bar{B}_i) = 0,21$, $P(A_i \bar{B}_i) = 0,14$, $P(\bar{A}_i B_i) = 0,09$, то по формулам (5.38) — (5.40), (5.43) и (5.44) получаем значения n' , k_n , $P_{(k,n)}(A_i B_i)$, $P_{(k,n)}(\bar{A}_i \bar{B}_i)$, $D_{(k,n)i}$, приведенные в табл. 5.3.

Таблица 5.3

n	n'	k_n	$P_{(k,n)}(A_i B_i)$	$P_{(k,n)}(\bar{A}_i \bar{B}_i)$	$D_{(k,n) i}$
1	0,192	1	0,56	0,21	0,77
2	0,75	1	0,67	0,147	0,817
3	1,3	2	0,6272	0,2352	0,8627
4	1,87	2	0,68096	0,19551	0,87647
5	2,4	3	0,657356	0,251076	0,908432
6	3	3	0,688128	0,223293	0,911421

Результаты, приведенные в табл. 5.3, показывают, как можно увеличить достоверность контроля при заданном числе измерений и оптимально выбранном k . Если при одном измерении достоверность контроля $D_{(1,1) i} = 0,77$, то при трех измерениях получаем $D_{(2,3) i} = 0,8627$, а при $n = 6$ и $k_n = 3$ $D_{(3,6) i} = 0,911421$.

Таким образом, использование системы с голосованием позволяет значительно увеличить достоверность контроля при измерении состояния сложной технической системы.

Изложенная в настоящем параграфе мажоритарная схема принятия решений (несмотря на отмеченные ошибки при определении состояния системы) является универсальной и может быть применена, например, при определении категории ремонта неисправной системы, решении задач разведки полезных ископаемых, определении состояния сложной системы с резервированием, обработке информации в целях решения задач диагностики.

В следующих двух параграфах рассмотрено применение мажоритарной схемы принятия решений в автоматических системах контроля (АСК) и при принятии решения о состоянии сложной системы с резервированием.

§ 5.3. Оптимальные модели повышения достоверности и их применение в автоматических системах контроля *

Одной из важнейших характеристик автоматических (автоматизированных, с частичным участием человека) систем контроля является достоверность результатов контроля — степень объективности отражения результатами контроля истинного технического состояния контролируемого объекта. При организации эксплуатации объекта (системы) по состоянию необходима оценка результатов измерения параметров с учетом достоверности контроля для определения точности измерения параметра относительно поля допуска.

Для контроля объектов по состоянию эта точность в АСК должна быть повышена и составлять не более 0,1 от поля допуска на контролируемый параметр. В практике контроля нашли широкое применение следующие показатели достоверности результатов контроля работо-

* В написании настоящего параграфа принимали участие Р. Н. Белоконь и В. Г. Кендель.

способности: абсолютная достоверность результатов контроля — вероятность принятия правильного решения

$$D = 1 - \alpha - \beta; \quad (5.47)$$

достоверность результата «Годен» — апостериорная вероятность работоспособности объекта, признанного годным по результатам контроля:

$$D^+ = (P - \alpha) / (P - \alpha + \beta), \quad (5.48)$$

достоверность результата «Брак» — апостериорная вероятность неработоспособности объекта, признанного негодным по результатам контроля:

$$D^6 = (1 - P - \beta) / (1 - P + \alpha - \beta), \quad (5.49)$$

где P — вероятность работоспособности объекта; α — риск изготовления — вероятность того, что работоспособный объект признан негодным (см. выражение (5.3)); β — риск заказчика — вероятность того, что неработоспособный объект признан годным (см. выражение (5.5)).

Как следует из (5.47)—(5.49), все показатели достоверности результатов контроля работоспособности объектов выражаются через риски изготовителя и заказчика, поэтому величины α и β будем называть *характеристиками достоверности контроля*.

Для повышения достоверности контроля в АСК вводится информационная избыточность в виде n -кратных измерений контролируемого параметра (КП) с помощью одного измерительного устройства (ИУ) (временная избыточность) либо однократного измерения КП n идентичными ИУ (аппаратурная избыточность). В обоих случаях имеем n результатов измерения $y_i = \xi + \eta_i$ ($i = \overline{1, n}$), где ξ — значение КП; η_i — погрешность i -го измерения (i -го ИУ), причем будем полагать $\{\eta_i, \dots, \eta_n\}$ независимыми реализациями случайной величины η . Совокупность правил, в соответствии с которыми обрабатывают результаты измерений и принимают решение о годности параметра, называется *алгоритмом контроля*. Оптимальный алгоритм контроля максимизирует один из показателей достоверности контроля.

Показано [9], что с точки зрения теории статистических решений критерий $\max D$ эквивалентен критерию идеального наблюдателя, а критерии $\max D^+$ и $\max D^6$ — критерию Неймана—Пирсона, причем $\max D^+$ соответствует $\min \beta$ при $\alpha \leq \alpha_d$, а $\max D^6$ — $\min \alpha$ при $\beta \leq \beta_d$, где α_d и β_d — некоторые специально выбранные константы.

В настоящее время широкое распространение получил оптимальный алгоритм контроля, опирающийся на решающие правила, разработанные в теории статистических решений. При оптимизации по критерию идеального наблюдателя решающее правило состоит в том, что параметр признается годным, если

$$\int_a^b \psi(\xi/y_i, i = \overline{1, n}) d\xi \geq 1/2, \quad (5.50)$$

где $[a, b]$ — гарантийный допуск на КП; $\psi(\xi/y_i, (i = \overline{1, n}))$ — апостериорная (условная) плотность распределения значений КП при условии полученных результатов измерения, и негодным, если неравенство (5.50) не выполняется.

Показано [9], что в случае нормального закона распределения КП и погрешности измерения алгоритм контроля, оптимальный по критерию идеального наблюдателя, заключается в получении оценки параметра

$$\hat{\xi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad (5.51)$$

и сравнении ее с оптимальным контрольным допуском $[\tilde{a}, \tilde{b}]$:

$$\tilde{a} = a + \frac{(a - m_{\xi}) \sigma_{\eta}^2}{n \sigma_{\xi}^2}; \quad \tilde{b} = b + \frac{(b - m_{\xi}) \sigma_{\eta}^2}{n \sigma_{\xi}^2}, \quad (5.52)$$

где m_{ξ} , σ_{ξ} — соответственно математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение КП; σ_{η} — среднее квадратическое отклонение погрешности измерения.

Характеристики достоверности контроля при оптимальном алгоритме вычисляются по формулам:

$$\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-kx}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-kx}^x e^{-\frac{t^2}{2}} \left[\frac{\frac{x(1+z^2)-t}{z}}{\frac{-kx(1+z^2)-t}{z}} e^{-\frac{\tau^2}{2}} d\tau \right] dt; \quad (5.53)$$

$$\begin{aligned} \beta_0 = & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-kx \sqrt{1+z^2}}^{x \sqrt{1+z^2}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \frac{1}{2\pi} \times \\ & \times \int_{-kx}^x e^{-\frac{t^2}{2}} \left[\frac{\frac{x(1+z^2)-t}{z}}{\frac{-kx(1+z^2)-t}{z}} e^{-\frac{\tau^2}{2}} d\tau \right] dt; \end{aligned} \quad (5.54)$$

$$D_{0\max} = 1 - \alpha_0 - \beta_0, \quad (5.55)$$

где $x = (b - m_{\xi})/\sigma_{\xi}$ — нормированный гарантийный допуск на КП; $k = (m_{\xi} - a)/(b - m_{\xi})$ — коэффициент несимметрии поля допуска; $z = \sigma_{\eta}/\sigma_{\xi} \sqrt{n}$ — нормированное среднее квадратическое отклонение погрешности измерения.

Алгоритм контроля, оптимальный по критерию Неймана—Пирсона, заключается в получении оценки КП $\hat{\xi}$ (5.51) и сравнении с опти-

мальным контрольным допуском, который определяется из уравнений: при максимизации D^*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-kx}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-kx}^x e^{-\frac{t^2}{2}} \left[\int_{(-kx-t)/z}^{(\tilde{x}-t)/z} e^{-\frac{\tau^2}{2}} d\tau \right] dt - \alpha_g = 0, \quad (5.56)$$

при максимизации D^6

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-k\tilde{x}/\sqrt{1+z^2}}^{x/\sqrt{1+z^2}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-kx}^x e^{-\frac{t^2}{2}} \left[\int_{-kx-t/z}^{-(\tilde{x}+t)/z} e^{-\frac{\tau^2}{2}} d\tau \right] dt - \beta_g = 0, \quad (5.57)$$

где $[\tilde{x} = (\tilde{b} - m_{\xi})/\sigma_{\xi}; k\tilde{x} = (m_{\xi} - \tilde{a})/\sigma_{\xi}]$ — нормированный контрольный допуск.

В § 5.2 описан алгоритм контроля, который был назван мажоритарным. Дадим интерпретацию полученных в § 5.2 результатов применительно к контролю работоспособности объектов с помощью АСК.

Мажоритарный алгоритм контроля состоит в сравнении каждого результата измерения с гарантийным допуском $[a, b]$. Имеем m исходов «результат измерения в допуске» и $n - m$ исходов «результат измерения вне допуска». Если $m \geq S$, где S (или k_n) — заданный порог (число), то принимается решение «Годен»; если $m < S$, то принимается решение «Негоден».

Условная вероятность получения m результатов измерения в допуске, а $n - m$ — вне допуска, согласно теореме о повторении опытов применительно к измерению параметра, равна:

$$P(m, n, \xi) = \binom{n}{m} P^m(\xi) [1 - P(\xi)]^{n-m}, \quad (5.58)$$

где $P(\xi) = \int_{y \in [a, b]} f(y/\xi) dy$ — условная вероятность того, что результат измерения параметра окажется в допуске; $f(y/\xi)$ — условная плотность распределения результата измерения при фиксированном значении КП.

Условная вероятность забраковать годный параметр (ошибка первого рода) равна, очевидно, вероятности того, что число m окажется меньшим заданного порога S при условии, что действительное значение КП принадлежит допуску:

$$\tilde{\alpha}(S, n, \xi) = P\{m < S, n/\xi \in [a, b]\} = \sum_{i=0}^{S-1} P_i(m, n, \xi), (\xi \in [a, b]). \quad (5.59)$$

Условная вероятность принятия негодного параметра (ошибка второго рода) равна вероятности того, что число m окажется равным или

большим порога S при условии, что действительное значение КП не принадлежит допуску:

$$\bar{\beta}(S, n, \xi) = P\{m \geq S, n/\xi \in [a, b]\} = \sum_{i=S}^n P_i(m, n, \xi), (\xi \in [a, b]). \quad (5.60)$$

Для того чтобы получить выражения для рисков изготовителя и заказчика, необходимо умножить правые части (5.59), (5.60) на вероятность того, что параметр принимает значение ξ , равную $\varphi(\xi)d\xi$, и проинтегрировать полученные выражения в соответствующих пределах. В результате получаем:

$$\alpha(S, n) = \sum_{i=0}^{S-1} \binom{i}{n} \int_{\xi \in [a, b]} \varphi(\xi) \left[\int_{y \in [a, b]} f(y/\xi) dy \right]^i \times \\ \times \left[1 - \int_{y \in [a, b]} f(y/\xi) dy \right]^{n-i} d\xi; \quad (5.61)$$

$$\beta(S, n) = \sum_{i=S}^n \binom{i}{n} \int_{\xi \in [a, b]} \varphi(\xi) \left[\int_{y \in [a, b]} f(y/\xi) dy \right]^i \times \\ \times \left[1 - \int_{y \in [a, b]} f(y/\xi) dy \right]^{n-i} d\xi. \quad (5.62)$$

При нормальном законе распределения КП и погрешности измерения выражения (5.60), (5.61) принимают вид

$$\alpha(S, n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{i=0}^{S-1} \binom{i}{n} \int_{-kx}^x e^{-t^2/2} F^i(t) [1 - F(t)]^{n-i} dt; \quad (5.63)$$

$$\beta(S, n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{i=S}^n \binom{i}{n} \left\{ \int_{-\infty}^{-kx} e^{-t^2/2} F^i(t) [1 - F(t)]^{n-i} + \right. \\ \left. + \int_x^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} F(t) [1 - F(t)]^{n-i} dt \right\}, \quad (5.64)$$

где $F(t) = \Phi_0\left(\frac{x-t}{z_1}\right) + \Phi_0\left(\frac{kx+t}{z_1}\right)$; $z_1 = \frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}$; $\Phi_0(P) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\tau^2/2} d\tau$

— нормированная функция Лапласа.

Перейдем к оптимизации мажоритарного алгоритма по критерию идеального наблюдателя. Очевидно, необходимо найти такое $S = S_0$, при котором достигается $\max_{1 \leq S \leq n} \{D(S, n) = 1 - \alpha(S, n) - \beta(S, n)\}$. Аналитическое исследование функции $D(S)$ невозможно из-за ее сложности, однако расчеты на ЭВМ при различных значениях параметров k, x, z и n показывают, что она либо монотонно возрастает, либо монотонно убывает, либо имеет максимум. Следовательно, в первом случае $S_0 = n$, во втором случае $S_0 = 1$, а в третьем случае

$1 < S_0 < n$. При этом максимальное значение абсолютной достоверности контроля

$$D_{M \max} = 1 - \alpha(S_0, n) - \beta(S_0, n). \quad (5.65)$$

Оптимизация мажоритарного алгоритма по критерию Неймана—Пирсона вытекает из следующих свойств характеристик достоверности контроля.

$$\text{Свойство 1. } \max_{\substack{1 \leq S \leq n \\ 1 \leq n \leq n^*}} \alpha(S, n) = \alpha(n^*, n^*). \quad (5.66)$$

$$\text{Свойство 2. } \min_{\substack{1 \leq S \leq n \\ 1 \leq n \leq n^*}} \beta(S, n) = \beta(n^*, n^*). \quad (5.67)$$

Для доказательства первого свойства определим приращения функции $\alpha(S, n)$ по S и n :

$$\begin{aligned} \Delta \alpha_S(S, n) &= \alpha(S+1, n) - \alpha(S, n) = \\ &= \binom{S}{n} \int_{\xi \in [a, b]} \varphi(\xi) \left[\int_{y \in [a, b]} f(y/\xi) dy \right]^S \left[1 - \int_{y \in [a, b]} f(y/\xi) dy \right]^{n-S} d\xi > 0; \end{aligned} \quad (5.68)$$

$$\begin{aligned} \Delta \alpha_n(n, n) &= \alpha(n+1, n+1) - \alpha(n, n) = \int_{\xi \in [a, b]} \varphi(\xi) \times \\ &\times \left[\int_{y \in [a, b]} f(y/\xi) dy \right]^n \left[1 - \int_{y \in [a, b]} f(y/\xi) dy \right] d\xi > 0. \end{aligned} \quad (5.69)$$

Следовательно, функция $\alpha(S, n)$ — возрастающая, поэтому справедливо неравенство (5.68). Аналогично доказывается второе свойство.

На основании свойств (5.66), (5.67) можно сформулировать оптимальный мажоритарный алгоритм контроля, максимизирующий, например, достоверность результата «Годен»: принимается решение «Годен», если результат измерения ни разу не вышел за пределы допуска; при этом оптимальным числом измерений n^* является наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству

$$P - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-kx}^x e^{-t^2/2} \left[\Phi_0\left(\frac{x-t}{z_1}\right) + \Phi_0\left(\frac{kx+t}{z_1}\right) \right]^{n^*} dt - \alpha_g \leq 0. \quad (5.70)$$

Максимальное значение достоверности результата «Годен»

$$D_{M \max}^* = \frac{P - \alpha(n^*, n^*)}{P - \alpha(n^*, n^*) + \beta(n^*, n^*)}. \quad (5.71)$$

Сравнение рассмотренных оптимальных алгоритмов контроля с точки зрения аппаратной реализации показывает несомненное преимущество мажоритарного алгоритма, которое заключается в следующем.

1. Для реализации оптимального алгоритма нужно иметь в памяти АСК результаты измерений, соответствующая обработка которых дает оценку КП, необходимую для сравнения с оптимальными допусками и принятия решения о годности или негодности параметра. При использовании мажоритарного алгоритма отпадает необходимость получения результатов измерения; измеряемая величина непосредственно подается на ИУ — компаратор, формирующий результат контроля. Поэтому, в то время как мажоритарный алгоритм применим как в случае допускового контроля, так и в случае количественного контроля, оптимальный алгоритм можно использовать лишь в АСК, реализующей количественный контроль.

2. Аппаратурная реализация мажоритарного алгоритма проще оптимального, так как для осуществления последнего необходимо иметь вычислительное устройство, в то время как мажоритарный алгоритм требует несложного счетчика команд «в допуске», поступающих от компаратора.

Эффективность алгоритмов контроля сравнивалась при $k = 1$, $x = 2$, $z_1 = 1$. Анализ результатов расчета, приведенных в табл. 5.4, 5.5, показывает, что: 1) оптимальный алгоритм контроля более эффективен; 2) при увеличении количества получаемой информации о КП, т. е. при увеличении количества измерений n , «приращение эффективности» двух алгоритмов $\Delta D_{\text{п. max}} = D_{0 \text{ max}} - D_{M \text{ max}}$ ($\Delta D_{0 \text{ max}} = D_{0 \text{ max}} - D_{M \text{ max}}$) уменьшается. Поэтому при возможности введения достаточно большой информационной избыточности предпочтительно применение мажоритарного алгоритма контроля, как более простого при аппаратурной реализации.

Таблица 5.4

n	Оптимальный алгоритм		Мажоритарный алгоритм	
	$\tilde{x}_0$	$D_{0 \text{ max}}$	S_0	$D_{M \text{ max}}$
1	4	0,9556	1	0,855
2	3	0,9592	1	0,9457
4	2,5	0,9655	1	0,9606
9	2,22	0,9741	4	0,9696
16	2,125	0,9798	7	0,9756
25	2,08	0,9836	12	0,9802

Таблица 5.5

α_g	Оптимальный алгоритм		Мажоритарный алгоритм	
	$\tilde{x}_0$	$D_{0 \text{ max}}^T$	n^*	$D_{M \text{ max}}^T$
0,228	1,48	0,9925564	2	0,9910160
0,271	1,27	0,99718	3	0,99546
0,376	0,92	0,9996178	4	0,9979701
0,59	0,56	0,9999998	9	0,9999400
0,74	0,38	1,0	16	0,9999994

§ 5.4. Принципы автономной технической реализации мажоритарного алгоритма контроля

При наличии ЭВМ в автоматических или автоматизированных системах контроля состояния сложных систем рассмотренные выше алгоритмы повышения достоверности контроля реализуются программно. При автоматизации контроля сложных систем намечается тенденция децентрализованного контроля (контроля состояния отдельных подсистем, блоков) с автономной обработкой результатов измерения и выдачей рекомендаций на обслуживание подсистемы или блока. В этом случае возникает необходимость в разработке схем контроля, в которых учитывалась бы специфика алгоритмов повышения достоверности контроля.

Рассмотрим два этапа технической реализации (на уровне блок-схем, поясняющих принципы такой реализации) предложенного в § 5.2 алгоритма контроля на примере построения автоматического устройства индикации отказов в резервированном комплексе. В этом комплексе при отказе системы, входящей в состав основного оборудования, автоматически подключается резервная система (рассмотрим случай, когда резервные элементы находятся в нагруженном состоянии). При определении состояния основных систем (для выявления состояния отказа) возможны ошибки первого и второго рода (соответственно риск изготовителя и риск заказчика). С целью их минимизации предлагается в автономную схему автоматического контроля состояния системы и выдачи команд на переключатель резерва включать как составное звено схему, реализующую мажоритарный способ организации контроля.

Рассмотрим сначала принцип работы автоматического индикатора отказов, не содержащего мажоритарного звена. В этом индикаторе формируется сигнал отказа сложной системы (комплекса) с нагруженным резервом при ее самоконтроле. Ранее были известны индикаторы отказа сложных систем с ненагруженным резервом, у которых для снижения уровня текущей информации, поступающей к оператору, и перенесения части функций с оператора на автомат в системе «человек—автомат» между выходом устройства самоконтроля рабочей подсистемы и индикатором отказа системы был включен интегрирующий накопитель, например реверсивный счетчик, объем памяти которого равен общему числу резервирующих друг друга подсистем. Подобные устройства предназначены для использования в системах с ненагруженным резервом, т. е. в системах, в которых в любой момент времени (до отказа системы) имеется одна рабочая и некоторое количество резервных подсистем. Их применение в системах с нагруженным резервом, т. е. когда в общем случае в любой момент времени (до отказа системы) имеется несколько рабочих подсистем в нагруженном резерве и некоторое количество подсистем в ненагруженном резерве, вызывает увеличение объема аппаратуры, так как подобное устройство необходимо подключать к каждой из рабочих, резервирующих друг друга подсистем. Чтобы исключить этот недостаток, между устройствами самоконтроля каждой из рабочих подсистем и указанным реверсивным

счетчиком включают предварительный сумматор, выполненный, например, в виде ячейки ИЛИ с числом входов, равным количеству подсистем. Схема такого индикатора отказов приведена на рис. 5.4.

В общем случае система 3 с нагруженным резервом состоит из $a + b$ идентичных подсистем с устройствами самоконтроля 8. Причем a подсистем 6 являются рабочими и, следовательно, функционируют как нагруженный резерв, а b подсистем 7 являются ненагруженным резервом. Кроме того, в систему 3 включены входной 4 и выходной 5

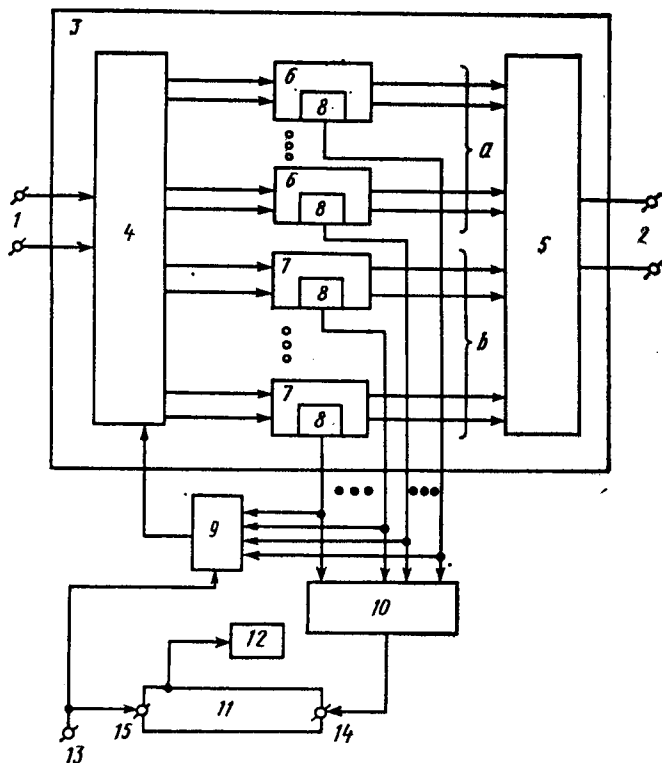


Рис. 5.4

коммутаторы, служащие для подключения входа 1 и выхода 2 системы к соответствующим (работающим в выбранный момент времени) подсистемам. Каждая из подсистем 6 и 7 имеет встроенное устройство 8 самоконтроля. Выходы устройств 8 подключены к дешифратору-анализатору 9 и к предварительному сумматору 10. Выход сумматора 10 подключен к одному из счетных входов 14 реверсивного счетчика 11, к выходу которого подключен индикатор отказов системы 3. К реверсивному счетному входу 15 счетчика 11 подключен источник 13 сигналов восстановления подсистем 6 и 7.

Работу системы лучше всего рассматривать с момента подачи на нее питания. При этом полагается, что подсистемы 6 и 7 исправны, а вся система 3 считается работоспособной до тех пор, пока исправны не менее a подсистем, т. е. до тех пор, пока не наступит $(b - 1)$ -й отказ (без учета восстановления резерва в процессе работы). Пусть, далее, одна (произвольная) из рабочих подсистем 6 вышла из строя. Сигнал об этом с соответствующего устройства 8 самоконтроля попадает в дешифратор-анализатор 9, который, проанализировав его, отключит с помощью коммутаторов 3 и 4 неисправную подсистему и включит вместо нее одну из подсистем 7.

Сигнал устройства 8, пройдя предварительный сумматор 10, поступает через счетный вход 14 в счетчик 11 и увеличивает число, записанное в нем (в начальный момент эксплуатации счетчик 11 обнулен), на «единицу» и т. д. до тех пор, пока в счетчике 11 не будет записано число $b - 1$; в этом случае срабатывает индикатор отказа системы 12 и оператору подается сигнал «Система вышла из строя», который несет следующую информацию: «Весь исправный резерв использован, в рабочем состоянии осталось количество подсистем, число которых меньше требуемого на единицу». По этому сигналу оператор принимает решение (в зависимости от обстановки) о выводе системы на обслуживание или о дальнейшем использовании, но уже с меньшей эффективностью.

Если по мере выхода подсистем 6 из строя производится их восстановление (ремонт), то по окончании процесса каждого такого восстановления восстановленная подсистема переводится в число подсистем 7 ненагруженного резерва; о чем на клемму 13 подается сигнал, который затем поступает на реверсный счетный вход 15 счетчика 11 и уменьшает число, записанное в нем, на единицу; кроме того, этот же сигнал подается на дешифратор 9 и стирает в его памяти информацию о выходе соответствующей подсистемы из строя. В результате такая подсистема может быть использована повторно.

Для уменьшения ошибок первого и второго рода при подключении резерва предлагается осуществлять его контроль по мажоритарной схеме, предложенной выше. Необходимо информацию с выходов устройства 8, подключенных к дешифратору-анализатору 9, предварительному сумматору 10 и реверсному счетчику 11, обрабатывать по схеме, изображенной на рис. 5.5.

Техническое решение, автономно реализующее алгоритм, предложенный в § 5.2, изображено на рис. 5.5. Принцип реализации данного технического решения поясним на примере проверки резервных устройств или блоков (в автоматизированной системе контроля). Рассмотрим устройство для автоматического (количественного, а в ряде случаев качественного) контроля сложных систем с проверкой резервных устройств или блоков (например, блока анализа), так как подключение резервного устройства или блока без предварительной проверки может привести к увеличению времени контроля и получению ложных результатов контроля. Для технического решения задачи в автоматизированной системе контроля дополнительно используем вспомога-

тельное устройство, выдающее серию одинаковых кодов, распределитель импульсов и счетчик импульсов «Годен».

Опишем работу устройства, изображенного на рис. 5.5. Оператор с помощью органов управления с пульта 1 в заданный момент времени начинает контроль. Сигнал с пульта управления поступает на устройство управления 2, которое выдает дискретные команды управления на все устройства информационно-измерительной системы. Эти

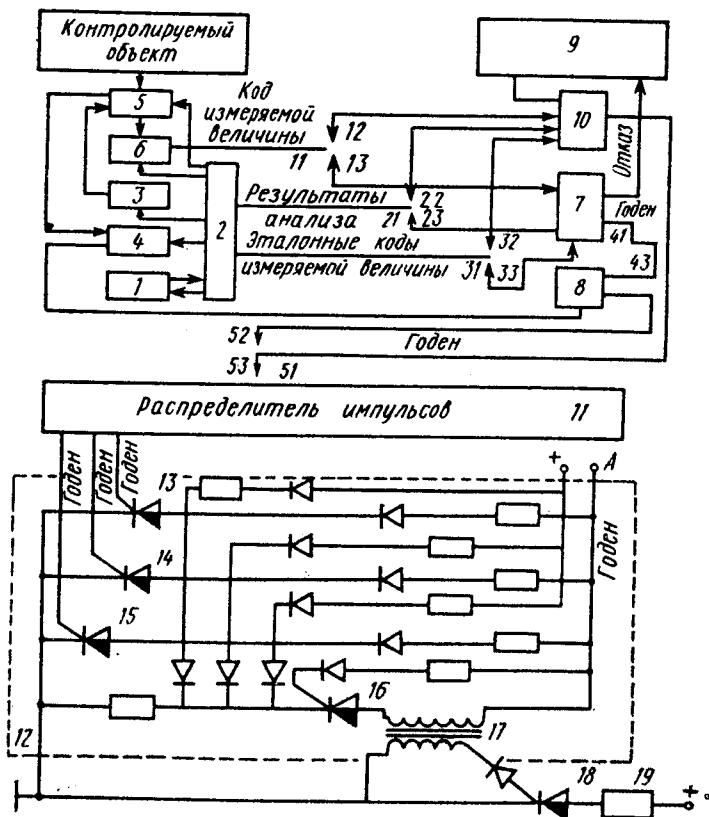


Рис. 5.5

команды определяют характер и последовательность работы системы контроля. Устройство управления 2 воздействует на датчик управляющих сигналов, прибор времени 4 и коммутатор 5, который создает электрические цепи, связывающие контролируемый объект с соответствующими устройствами информационно-измерительной системы. Сигналы от контролируемого объекта (сложной системы) через коммутатор 5 подаются на устройство 6, которое преобразует измеряемую величину в цифровой код. По окончании преобразования код вводится в основное устройство анализа 7, где полученный при измерении код

сравнивается с кодом, соответствующим номинальному значению преобразуемой величины.

В устройстве 7 полученная разность сравнивается с нижним и верхним допусками на измеряемую величину. В результате устройство анализа формирует сигналы о состоянии проверяемой величины. Результат анализа подается в устройство управления 2, пульт управления 1 и прибор регистрации 8. В процессе проверки измеряемых параметров объекта возможна ситуация, когда откажет один из блоков самой аппаратуры контроля, например блок анализа 7. При отказе устройства анализа в нем вырабатывается сигнал «Отказ», который воздействует на вспомогательное устройство 9, задающее серию одинаковых кодов. Это устройство выдает в блок анализа 10 серию проверочных кодов, соответствующих сигналу «Годен» на выходе блока 10.

Сигналы с блока 10 подаются на распределитель импульса 11, а затем на счетчик импульсов «Годен» 12 и одновременно на общую точку А и на один из управляющих электродов тиристоров 13, 14 и 15. Таким образом подсчитывается число показаний прибора об исправности резерва при многократном осуществлении одних и тех же операций контроля и сравнивается это число с некоторой константой k_n , определяемой по формулам, приведенным в § 5.2.

Число циклов, выдаваемых устройством 9, вполне определено, поэтому в соответствии с расчетным числом k_n (например, $k_n = 3$) устанавливается соответствующее число тиристорных ключей (названному случаю соответствуют ключи 13, 14 и 15).

На рис. 5.5 показано включение дополнительного тиристорного ключа 16, который включается при срабатывании тиристора 15 и обеспечивает прохождение импульса тока через первичную обмотку трансформатора 17, вторичная обмотка которого включена в цепь тиристора 18, управляющего реле 19. Это реле, сработав, отключит устройство анализа 7 и подключит устройство анализа 10.

§ 5.5. Обоснование оптимального алгоритма контроля системы с учетом достоверности *

Характерной особенностью эксплуатации многих сложных систем является необходимость контроля их технического состояния по некоторым выходным параметрам. При этом желательно так организовать проверку параметров, чтобы информация об исправности системы, полученная по результатам контроля, давала наибольшую уверенность в готовности ее к выполнению возложенных функций. Однако во многих случаях время контроля ограничено и меньше, чем время, отводимое на полный контроль системы. Тогда показателем эффективности контроля технического состояния служит вероятность отсутствия после контроля системы необнаруженных отказов. Обозначим эту вероятность через P_0 . Этот показатель характеризует полноту и достоверность контроля. Указанная вероятность тем выше, чем большее

* В параграфе использованы результаты, полученные А. И. Бондаренко, А. Н. Киселенко и В. А. Мироненко.

количество выходных параметров проверяемой системы охвачено контролем и чем выше достоверность результатов контроля каждого из этих параметров.

Увеличение количества проверяемых параметров и применение только высокоточных, а следовательно, и наиболее сложных средств контроля явно противоречит ограничению на время контроля. Объединим все элементы системы в n независимых групп по выполняемым системой функциям. Тогда при некоторой организации контроля можно добиться

$$\max P_0 = \max \prod_{i=1}^n p_i \quad (5.72)$$

при условии

$$\sum_{i=1}^n a_i \leq b, \quad (5.73)$$

где p_i — вероятность отсутствия после контроля i -й группы элементов необнаруженных отказов; a_i — время, затраченное на контроль i -й группы элементов ($i = \overline{1, n}$); b — заданное время контроля системы.

Контроль функциональных элементов может быть следующим: контроль на работоспособность, контроль на правильность функционирования (менее полный, чем предыдущий).

Для каждой i -й группы функциональных элементов сочетания различных совокупностей контролируемых параметров и видов их контроля образуют множество K различных вариантов контроля. Варианты контроля i -й группы характеризуются последовательностью

$$(p_{ij}; a_{ij}), j = \overline{1, K}. \quad (5.74)$$

Следует отметить, что значения p_{ij} зависят не только от числа контролируемых параметров и вида контроля, но и от степени их взаимосвязи.

Предполагаем, что при проверке системы перед применением каждая i -я группа элементов контролируется только по одному из возможных вариантов, поэтому (5.72) можно записать так:

$$P_0 = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^K p_{ij}^{x_{ij}}, \quad i = \overline{1, n}, j = \overline{1, K}, x_{ij} = 0 \text{ или } x_{ij} = 1, \quad (5.75)$$

при ограничении

$$\sum_{j=1}^K x_{ij} = 1. \quad (5.76)$$

Логарифмируя (5.75), получаем

$$\ln P_0 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^K x_{ij} \ln p_{ij}.$$

Введем следующие обозначения: $\ln P_0 = g$, $\ln p_{ij} = C_{ij}$. Тогда рассматриваемая задача принимает вид

$$g = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^K C_{ij} x_{ij} \rightarrow \max, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, K}, \quad (5.77)$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^K a_{ij} x_{ij} \leq b, \sum_{j=1}^K x_{ij} = 1, x_{ij} = 0 \text{ или } x_{ij} = 1. \quad (5.78)$$

Поясним сформулированную задачу. Имеем систему, предназначенную для выполнения n функциональных задач. Время проверки системы ограничено и равно b . Устройства (совокупности элементов, составляющих части системы), предназначенные для решения i -й функциональной задачи, можно проконтролировать одним из K возможных вариантов. Вариантам контроля i -й функциональной задачи соответствуют векторы

$$\{C_{i1}, C_{i2}, \dots, C_{ij}, \dots, C_{iK}\}, \{a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ij}, \dots, a_{iK}\},$$

где C_{ij} — «полезность»; a_{ij} — продолжительность контроля по j -му варианту для i -й функциональной задачи.

Необходимо для каждой функциональной задачи, решаемой системой, указать такой вариант контроля, при котором суммарное время проверки системы не превышало бы заданного значения, а «полезность» контроля была бы максимальной. При решении данной задачи производят ранжировку продолжительности вариантов контроля для каждой выполняемой функции и учитывают тот факт, что суммарные продолжительности вариантов контроля для некоторых из n функций превосходят величину b . Предполагается также, что за большую «полезность» контроля приходится «платить» и большей продолжительностью контроля.

Для решения сформулированной задачи широко используется общий алгоритм, разработанный в ВЦ Рижского НИИ Гражданской авиации под руководством А. М. Андропова. Этот алгоритм состоит из приближенного (А) и точного (Б) алгоритмов. Алгоритм А основан на методе линейного программирования и следующих предпосылках:

а) среди множества оптимальных решений (без условия целочисленности (5.78)) найдется такое, для которого не более двух переменных, соответствующих одному множеству $\{x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iK}\}$, являются нецелочисленными;

б) необходимыми и достаточными условиями оптимальности решения задачи (5.77) при ограничениях (5.78) и при

$$x_{1v(1)} = 1, x_{2v(2)} = 1, \dots, x_{rv} \leq 1, x_{rv(r)} = 1 - x_{rv}, \dots, x_{iv(i)} = 1, \dots, x_{nv(n)} = 1 \text{ и } x_{ij} = 0$$

для всех остальных индексов являются неравенства

$$C_{iv(i)} - C_{i\xi} \geq (a_{iv(i)} - a_{i\xi}) \frac{C_{rv(r)} - C_{rv}}{a_{rv(r)} - a_{rv}}$$

при $i = \overline{1, n}$; $\xi = \overline{1, K}$ ($a_{iv(i)} > a_{i\xi}$ соответствуют одному множеству $\{x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iK}\}$);

$$a_{iv(1)} + a_{iv(2)} + \dots + a_{rv} + a_{rv(r)} + \dots + a_{iv(i)} + \dots + a_{nv(n)} = b.$$

Алгоритм *Б* основан на использовании метода ветвей и границ в комбинации с оценками, вытекающими из приближенных решений задачи по алгоритму *А*.

Опыт решения задач по алгоритмам *А* и *Б* свидетельствует об их больших возможностях по сравнению с вычислительными алгоритмами, основанными на методе динамического программирования.

Пример. Имеется система, в которой выделены сгруппированные по решаемым задачам конструктивные элементы, образующие функциональные тракты. Зададим для каждого i -го ($i = \overline{1, n}$) функционального тракта системы следующие вероятности: p_i — вероятность того, что до момента контроля любой («постепенный» или «внезапный») отказ в тракте не возникает; u_i — вероятность того, что до момента контроля в тракте не возникнет «постепенный» отказ; v_i — вероятность того, что до момента контроля в тракте не возникнет «внезапный» отказ; s_i — вероятность того, что в течение контроля функционального тракта отказ его из-за «отрицательного» влияния контроля не возникнет.

Значения этих вероятностей определяют априорную информацию о надежных и точностных характеристиках системы.

В практике эксплуатации систем (например, радиоэлектронных) в основном реализуют контроль работоспособности и правильности функционирования. Применение этих видов контроля позволяет найти приемлемое соотношение между количественной оценкой, полученной по результатам контроля информации о техническом состоянии системы и величиной затрат на ее получение и реализацию.

При оценке достоверности результатов контроля технического состояния системы важно знать, с какой вероятностью объект контроля, признанный годным, на самом деле является неисправным. Достоверность этого события для каждого функционального элемента системы может быть оценена следующими вероятностями: q_i — вероятностью обнаружения отказа в i -м функциональном тракте при контроле его работоспособности; k_i — вероятностью обнаружения отказа в i -м функциональном тракте при контроле правильности его функционирования.

Вероятности p_i , u_i , v_i , s_i , q_i и k_i далее считаются заданными. В качестве целевой функции принимаем вероятность отсутствия после контроля системы необнаруженных отказов, приводящих к невыполнению задания.

Если i -й функциональный тракт проверяется на работоспособность, то вероятность отсутствия после такого контроля i -го функционального тракта необнаруженных отказов равна

$$P_i^{(1)} = p_i s_i + (1 - p_i) q_i + p_i (1 - s_i) q_i = q_i (1 - p_i s_i) + p_i s_i; \quad (5.79)$$

$P_i^{(1)}$ — соответственно сумма вероятностей следующих несовместных событий: вероятности того, что отказ до контроля работоспособности не возник и не был вызван контролем; вероятности того, что отказ до контроля имел место и был во время контроля обнаружен, и вероятности того, что отказ возник в процессе контроля и был обнаружен при контроле.

Если i -й тракт контролируется на правильность функционирования, то вероятность отсутствия после контроля в i -м функциональном тракте необнаруженных отказов, приводящих к невыполнению задания, равна

$$P_i^{(2)} = u_i [v_i s_i + (1 - v_i) k_i + v_i (1 - s_i) k_i] = k_i u_i (1 - v_i s_i) + p_i s_i. \quad (5.80)$$

В квадратных скобках заключена сумма вероятностей взаимоисключающих событий: вероятности того, что внезапный отказ до контроля не существовал и не был вызван контролем; вероятности того, что внезапный отказ до контроля существовал и был обнаружен при контроле, и вероятности того, что внезапный отказ возник в процессе контроля и был при этом обнаружен.

Если контроль i -го функционального тракта не проводится, то вероятность того, что в нем к моменту окончания контроля системы отказа не будет, равна

$$P_i^{(3)} = p_i. \quad (5.81)$$

Введем переменные $x_{ij} = 0$ или $x_{ij} = 1$, $i = \overline{1, n}$; $j = 1, 2, 3$, и ограничение

$$\sum_{j=1}^3 x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1, n}. \quad (5.82)$$

В случае, когда выходные параметры функциональных трактов независимы, значение целевой функции P равно:

$$P = \prod_{i=1}^n [P_i^{(1)}]^{x_{i1}} [P_i^{(2)}]^{x_{i2}} [P_i^{(3)}]^{x_{i3}}. \quad (5.83)$$

Вероятность q_i обнаружения отказа в i -м функциональном тракте при контроле его работоспособности есть условная вероятность события, состоящего в том, что среди неисправных элементов в i -м функциональном тракте, поступивших на контроль, окажутся элементы, признанные негодными. Эта вероятность определяется соотношением

$$q_i = p_{\text{вз}i}^{(\bar{r})} / (1 - p_i) = 1 - p_{\text{нз}i}^{(\bar{r})} / (1 - p_i), \quad (5.84)$$

где $p_{\text{вз}i}^{(\bar{r})}$ — вероятность верного заключения о результате контроля «Негоден», соответствующего состоянию i -го функционального тракта «Неисправен»; $p_{\text{нз}i}^{(\bar{r})}$ — вероятность получения результата контроля «Годен», соответствующего состоянию i -го функционального тракта «Неисправен». Значения $p_{\text{нз}i}^{(\bar{r})}$ обычно определяют с помощью номограмм [15].

Вероятность k_i обнаружения отказа в i -м функциональном тракте при контроле правильности его функционирования (условная вероятность события, состоящего в том, что неисправные по внезапным отказам элементы в i -м функциональном тракте окажутся признанными негодными) определяется соотношением

$$k_i = \frac{v_{\text{вз}i}^{(\bar{r})}}{1 - v_i} = 1 - \frac{v_i (v_{\text{ск}} - r_{\text{нн}})}{v_{\text{ск}} - r_{\text{н}}}, \quad (5.85)$$

где $v_{\text{вз}i}^{(\bar{r})}$ — вероятность верного заключения о результате контроля «Негоден», соответствующего состоянию i -го функционального тракта «Неисправен» по внезапным отказам; $v_{\text{ск}}$ — вероятность того, что в пределах наработки до момента контроля не возникает внезапный отказ средства контроля; $r_{\text{нн}}$ — вероятность возникновения такого отказа средства контроля, при котором неисправный контролируемый тракт признается годным; $r_{\text{н}}$ — вероятность возникновения такого отказа средства контроля, при котором контролируемый тракт признается неисправным независимо от его действительного технического состояния.

Уверенность в исправности системы будет наибольшей, если на каждом этапе эксплуатации контролировать работоспособность всех ее функциональных трактов, что не всегда возможно. Нередки случаи, когда система должна быть проверена в ограниченное время. Поэтому задача состоит в выборе такой совокупности параметров и способов их контроля, которая соответствует максимальному значению целевой функции (5.83) при соблюдении ограничения на время технического обслуживания

$$\sum_{i=1}^n [x_{i1} t_{ki}^{(1)} + x_{i2} t_{ki}^{(2)} + x_{i3} t_{ki}^{(3)}] \leq b, \quad (5.86)$$

где $t_{ki}^{(1)}$ — среднее время контроля работоспособности i -го функционального тракта; $t_{ki}^{(2)}$ — среднее время контроля правильности функционирования i -го тракта; $t_{ki}^{(3)}$ — среднее время подготовки к работе i -го функционального тракта, если контроль его технического состояния на данном этапе эксплуатации не проводится (но проводится, например, внешний осмотр, ввод исходных данных, смена программ и т. п.); b — заданное время на техническое обслуживание системы.

Линейный вид целевой функции получим, прологарифмировав выражение (5.83):

$$\ln P = \sum_{i=1}^n \{x_{i1} \ln P_i^{(1)} + x_{i2} \ln P_i^{(2)} + x_{i3} \ln P_i^{(3)}\}. \quad (5.87)$$

Таким образом, задача состоит в следующем: максимизировать P , а следовательно, $\ln P$ (см. (5.87)) при ограничениях (5.86) и (5.82).

Для решения задач небольшой размерности можно перебором перечислить все комбинации проверок и выбрать программу контроля, которая дает максимальное значение целевой функции (5.87) и удовлетворяет отмеченным ограничениям. Однако при увеличении размерности задачи эффективным является общий алгоритм, рассмотренный в начале параграфа. Результаты его применения для исходных данных, приведенных в табл. 5.6 и 5.7, помещены в табл. 5.8. В табл. 5.6 приведены значения $\ln P_i^{(1)}$, $\ln P_i^{(2)}$, $\ln P_i^{(3)}$, в табл. 5.7 — значения $t_{ki}^{(1)}$, $t_{ki}^{(2)}$ и $t_{ki}^{(3)}$ (с). Из табл. 5.8 видно, что максимальное значение целевой функции ($P_{\max} = 0,98121$ при времени проверки $b = 2$ ч) достигнуто за счет перераспределения проверок на работоспособность функциональных трактов (x_{21} , x_{31} , $x_{51} = 1$) и проверок на правильность функционирования (x_{42} , x_{62} , x_{72} , x_{82} , $x_{92} = 1$). При этом первый тракт должен допускаться к применению без контроля технического состояния.

Т а б л и ц а 5.6

$i \backslash j$		Варианты контроля		
		1	2	3
Функциональные тракты	1	—0,00001	—0,00003	—0,00100
	2	—0,00160	—0,00270	—0,01816
	3	—0,00612	—0,07644	—0,13000
	4	—0,00007	—0,00017	—0,03118
	5	—0,00270	—0,02481	—0,05604
	6	—0,00280	—0,00321	—0,03304
	7	—0,00342	—0,00411	—0,23004
	8	—0,00001	—0,00003	—0,00090
	9	—0,00001	—0,00003	—0,00090

Таблица 5.7

$i \backslash j$		Варианты контроля		
		1	2	3
Функциональные тракты	1	1360	985	5
	2	610	243	6
	3	3600	300	10
	4	1560	810	160
	5	95	20	2
	6	345	120	2
	7	3260	1800	3
	8	1240	70	20
	9	1240	70	25

Таблица 5.8

$i \backslash j$		Значения x_{ij}			$\ln P_i$	t_{hi}
		1	2	3		
Функциональные тракты	1	0	0	1	-0,00100	5
	2	1	0	0	-0,00160	610
	3	1	0	0	-0,00612	3600
	4	0	1	0	-0,00017	810
	5	1	0	0	-0,00270	95
	6	0	1	0	-0,00321	120
	7	0	1	0	-0,00411	1800
	8	0	1	0	-0,00003	70
	9	0	1	0	-0,00003	70

ГЛАВА VI

МОДЕЛИ ОБСЛУЖИВАНИЯ СИСТЕМЫ ПРИ ОГРАНИЧЕННОЙ ИНФОРМАЦИИ О НАДЕЖНОСТИ

В гл. II—V рассматривались задачи эксплуатации сложных систем по состоянию, т. е. управления состоянием неотказавшей системы. Задачи управления состоянием отказавшей системы, связанные с контролем и диагностикой, будут рассмотрены в § 7.1 и 7.2.

Особый круг задач в теории обслуживания сложных систем составляют задачи, в которых предполагается наличие неполной информации о надежности систем. Эти задачи чаще всего встречаются на практике, особенно на начальном периоде эксплуатации систем. Их специфика потребовала разработки специальных прикладных математических методов исследования, близких к теории игр и основанных на минимаксных подходах. Эти методы позволяют проследить за количественным улучшением показателей обслуживания по мере уменьшения степени неполноты используемой информации о надежности системы.

В основу излагаемого в данной главе материала положены книга [5], некоторые постановки задач из учебного пособия [21] и работы [30, 46, 60, 61]. В [5] дан обзор работ в области обслуживания систем по неполным данным о надежности.

В данной главе приводятся общие схемы технической реализации получаемых в рамках рассматриваемых моделей решений. Такой порядок представления материала позволяет «перекинуть мостик» от «чистой» теории к ее реализации на практике, что особенно важно при создании автоматизированных систем управления различного назначения, в которых обеспечивается единство алгоритмов математического обеспечения и технических средств их реализации.

§ 6.1. Описание круга рассматриваемых задач

В практике эксплуатации технических систем часто возникают ситуации, при которых невозможно собрать достаточно статистических данных об их отказах, неисправностях или предпосылках к появлению отказов или неисправностей. Это, например, имеет место, если эксплуатируется новая система, или в тех случаях, когда существующими методами контроля и диагностики не удается обнаружить возникновение некоторых неисправностей или предпосылок к неисправностям или отказам. Возникает задача такой организации проверок, при которой с заданной уверенностью (вероятностью обнаружения отказа при проверке, если он возник до начала ее проведения) будут обнаружены возникшие в системе отказы, а время пребывания системы в состоянии отказа (неисправности, предпосылки к неисправности или отказу) в среднем наименьшее. При этом естественно предположить, что такие модели проверок разные в зависимости от имеющейся информации о надежности системы и тем лучше (в смысле получения выигрыша по критерию стоимости или готовности, причем готовность характеризуется средним временем пребывания системы в состоянии отказа), чем большая информация имеется о надежности системы.

Ниже рассмотрены следующие модели организации проверок системы: модель проверок при полном отсутствии информации о надежности системы; модель проверок при наличии минимальной информации о надежности системы; модель проверок при полной информации о надежности системы.

Первая модель описана для конечного (и заданного) времени эксплуатации системы, модели проверок при наличии минимальной информации о надежности системы рассмотрены как для случая конечного (заданного) времени эксплуатации системы, так и для случая бесконечного времени ее эксплуатации. Термин «бесконечное время» понимается в общепринятом математическом смысле (предельные значения вводимых величин определяются при $t \rightarrow \infty$), а физически это означает, что рассматривается длительно эксплуатируемая система, восстанавливаемая полностью (путем замены или профилактически) после каждого отказа.

Область применения каждой из рассматриваемых моделей описана, а применение моделей проиллюстрировано на примерах. Изложены

принципы технической реализации полученных результатов на практике.

При создании моделей проверок в случае отсутствия информации о надежности системы или при наличии ее в минимальном объеме (под минимальным объемом известной информации о надежности системы имеем в виду знание одной точки функции распределения времени между отказами, неисправностями или предпосылками к неисправностям и отказам системы) будем использовать так называемый минимаксный принцип. Этот принцип широко используется, например, в теории игр, когда игрок строит свою стратегию в предположении, что партнер применит самую «хитрую» стратегию (нанесет максимальный ущерб), а он выбором своей стратегии должен минимизировать предполагаемый максимальный ущерб и добиться своих целей в игре. При этом стратегия игрока строится в предположении, что он ничего не знает о замыслах своего партнера.

Аналогичная ситуация возникает и при построении моделей проверок. Ничего или почти ничего не зная о надежности системы, будем предполагать, что система имеет наихудшую (в смысле выбранного критерия) надежность (в этом случае имеем наибольшие (максимальные) средние потери). Это имеет место, например, если отказ системы происходит сразу же после какой-либо из проверок. Далее задача будет заключаться в выборе плана проверок (при конечном времени проверки), обеспечивающем минимум предполагаемых максимальных средних потерь для системы на рассматриваемом периоде эксплуатации. При этом получаем некоторое гарантированное (минимаксное) значение выбранного критерия. В любом другом случае (при наличии дополнительной информации о надежности системы) значение выбранного критерия меньше (в смысле потерь стоимости, времени). Разумеется, и модель при этом претерпит изменения или задача будет решаться другими методами.

§ 6.2. Определение плана проверок системы при отсутствии информации о надежности

Пусть новая система (блок, узел и т.п.), о надежности которой ничего не известно, должна эксплуатироваться в течение заданного календарного времени T . Во время эксплуатации система может отказаться. Для поддержания ее готовности к работе назначают проверки. Отказ системы можно обнаружить только при проверке. Если учесть стоимость проверок и потери от пребывания системы после отказа в неисправном состоянии, то ясно, что, с одной стороны, нельзя слишком часто назначать проверки, а с другой стороны, редкие проверки также приводят к большим потерям. (Вместо стоимостей проверок и затрат от пребывания системы в состоянии отказа можно рассматривать средние времена проверок и время пребывания системы в состоянии отказа. В этом случае решаемая ниже задача приводит к оптимизации плана проверок системы по готовности.) Предположим, что функция распределения времени до отказа ξ неизвестна. Если в системе произошел отказ, то во время очередной проверки (при реализации выбран-

ного плана проверок) он выявляется с вероятностью p и эксплуатация системы прекращается. План проверок системы зададим последовательностью $x_0 = 0 < x_1 < x_2 \dots < x_n < x_{n+1} = T$.

Пусть $G_{X_n}(\xi)$ — функция потерь, которые имеют место, если отказ системы происходит в момент ξ и принят план проверок $X_n = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Система хранится в течение времени, не превышающего T , поэтому $G_{X_n}(\xi) = G_{X_n}(T)$, если $\xi > T$.

Выражение для средних потерь за период хранения системы T имеет вид

$$M_F G_{X_n}(\xi) = \int_0^T G_{X_n}(u) dF(u) + G_{X_n}(T) [1 - F(T)]. \quad (6.1)$$

Так как функция $F(t)$ неизвестна, то определим такой план проверок X^* , при котором достигается минимума $\sup_F M_F G_{X_n}(\xi) = \mu_{X_n}$, т. е. определим $\mu_{X^*} = \min_{X_n} \mu_{X_n}$.

Для рассматриваемой системы функция $G_{X_n}(\xi)$ имеет следующий вид:

$$G_{X_n}(\xi) = \begin{cases} nC & \text{при } \xi > T, \\ nC + v(T - \xi) & \text{при } x_n < \xi \leq T, \\ kC + p[v(x_{k+1} - \xi) + C] + p \sum_{s=1}^{n-k-1} (1-p)^s [v(x_{k+s+1} - \xi) + \\ + (S+1)C] + (1-p)^{n-k} [v(T - \xi) + (n-k)C] & \text{при} \\ x_k < \xi \leq x_{k+1} \quad (k = \overline{0, n-1}), \end{cases} \quad (6.2)$$

где C — стоимость одной проверки; v — потери от пребывания системы в состоянии отказа в единицу времени.

Преобразуем выражение для $G_{X_n}(\xi)$ ($x_k < \xi \leq x_{k+1}$). Введем обозначения $k + S = i$, $q = 1 - p$, тогда

$$G_{X_n}(\xi) = p(k+1)C + pv(x_{k+1} - \xi) + p \sum_{i=k-1}^{n-1} q^{i-k} [(i+1)C + \\ + v(x_{i+1} - \xi)] + q^{n-k} [nC + v(T - \xi)] = g(x_1, x_2, \dots, x_n, \xi) \\ (k = \overline{0, n-1}). \quad (6.3)$$

Учитывая (6.3), перепишем выражение (6.2):

$$G_{X_n}(\xi) = \begin{cases} nC & \text{при } \xi > T, \\ nC + v(T - \xi) & \text{при } x_n < \xi \leq T, \\ g(x_1, \dots, x_n; \xi) & \text{при } x_k < \xi \leq x_{k+1} \quad (k = \overline{0, n-1}). \end{cases}$$

Математическое ожидание потерь $M_F G$ является линейным функционалом относительно F . В этом случае можно показать, что $\sup_F M_F G$ достигается на вырожденной функции распределения со скачком в некоторой точке x .

Для вырожденной функции распределения $F(t) M_F G = G_{x_n}(x)$, поэтому

$$\mu_{x_n} = \sup_F M_F G = \max_{0 \leq x \leq T} G_{x_n}(x).$$

Из определения (6.2) функции $G_{x_n}(x)$ следует, что $\max_{0 \leq x \leq T} G_{x_n}(x) = \max_k g(x_1, \dots, x_n; x_b + 0) = g(x_1, \dots, x_n; x_S + 0)$, где x_S — точка максимума. Таким образом, максимальные средние потери достигаются на вырожденной функции распределения $F_{S, x}$ со скачком в точке x_S .

Найдем оптимальный план проверок X^* . Обозначим через C_n класс проверок объема n . Тогда для класса проверок $\tilde{C}_M$, объем которых не превышает M , имеем $\tilde{C}_M = \bigcup_{n \leq M} C_n$. Обозначим через C_n^* ($C_n^* \subset C_n$) класс проверок объема n , для которого $x_1, \dots, x_n$ определяются из условия

$$g(x_1, \dots, x_n; x_0 + 0) = g(x_1, \dots, x_n; x_1 + 0) = \dots = g(x_1, \dots, x_n; x_n + 0), \quad (6.4)$$

$$\tilde{C}_{M^*} = \bigcup_{n \leq M} C_n^*.$$

Докажем, что оптимальный план проверок $X^* \in \tilde{C}_{N^*}$, т. е. число проверок в оптимальном плане, не превышает N^* , где N^* — максимальное положительное число, для которого выполняется неравенство

$$N(N-1) \leq 2vT/(pC). \quad (6.5)$$

Пусть X_n — произвольный план проверок из класса C_n , $n > N^*$. Покажем сначала, что для любого плана проверок X_n найдется лучший план проверок X из класса $\tilde{C}_{N^*}$: $\mu_{X_n} \geq \mu_X$, $X \in \tilde{C}_{N^*}$. Очевидно, что $\mu_{X_n} \geq nC$. План проверок $X \in \tilde{C}_{N^*}$ возьмем из более узкого класса $C_{N^*}^*$, поэтому для такого плана имеем

$$g(x_1, \dots, x_{N^*}; x_0 + 0) = g(x_1, \dots, x_{N^*}; x_1 + 0) = \dots = g(x_1, \dots, x_{N^*}; x_{N^*} + 0), \quad (6.6)$$

т. е. $X \in C_{N^*}^* \subset C_{N^*} \subset C_{N^*}$.

Покажем, что для выбранного плана

$$\mu_X = \left\{ vT + \frac{N^* C}{2} [(N^* + 1)p + 2] \right\} / (pN^* + 1). \quad (6.7)$$

В самом деле, при $k \leq N^* - 1$

$$\begin{aligned}
 g(x_1, \dots, x_{N^*}; x_k + 0) &= p(k+1)C + pv(x_{k+1} - x_k) + \\
 &+ p \sum_{i=k+1}^{N^*-1} q^{i-k} [(i+1)C + v(x_{k+1} - x_k)] + q^{N^*-k} [N^*C + v(T - x_k)] = \\
 &= C \left\{ p(k+1) + p \sum_{i=k+1}^{N^*-1} (i+1)q^{i-k} + N^*q^{N^*-k} \right\} + \\
 &+ v \left\{ p \sum_{i=k}^{N^*-1} q^{i-k} \sum_{s=k}^i \Delta_s + q^{N^*-k} \sum_{s=R}^{N^*} \Delta_s \right\} = C \left\{ p \sum_{i=k}^{N^*-1} (i+1)q^{i-k} + \right. \\
 &+ N^*q^{N^*-k} \left. \right\} + v \left\{ p \sum_{s=k}^{N^*-1} \Delta_s \sum_{i=s}^{N^*-1} q^{i-k} + q^{N^*-k} \sum_{s=k}^{N^*} \Delta_s \right\} = \\
 &= C \left\{ p \sum_{i=k}^{N^*-1} (i+1)q^{i-k} + N^*q^{N^*-k} \right\} + v \left\{ \sum_{s=k}^{N^*} q^{s-k} \Delta_s \right\}, \\
 \Delta_R &= x_{k+1} - x_k, \quad k = \overline{1, N^*-1}.
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

Из (6.8) следует, что для любого плана проверок из класса C_{N^*}

$$\begin{aligned}
 g(x_1, \dots, x_{N^*}; x_{k-1} + 0) &= qg(x_1, \dots, x_{N^*}; x_k + 0) + Cp k + v\Delta_{k-1}, \\
 g(x_1, \dots, x_{N^*}; x_{N^*} + 0) &= CN^* + v\Delta_{N^*}, \quad k = \overline{1, N^*},
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

Если $g(x_1, \dots, x_{N^*}; x_{k-1} + 0) = g(x_1, \dots, x_{N^*}; x_k + 0)$, $k = \overline{1, N^*}$, то имеет место план проверок $X \in C_{N^*}^*$, для которого из (6.9) получим

$$g(x_1, \dots, x_{N^*}; x_k + 0) = Ck + (v/p) \Delta_{k-1}, \quad k = \overline{1, N^*}. \tag{6.10}$$

Учитывая (6.6) и (6.10), имеем $N^* - 1$ уравнение

$$\Delta_k = \Delta_{k-1} - Cp v, \quad k = \overline{1, N^*-1} \tag{6.11}$$

и уравнение

$$\Delta_k = \Delta_{k-1}/p, \quad k = N^*. \tag{6.12}$$

Из уравнений (6.11), (6.12), принимая во внимание нормирующее условие $\sum_{i=0}^{N^*} \Delta_i = T$, непосредственно получаем

$$\begin{aligned}
 T &= \Delta_{N^*} (1 + pN^*) + \frac{Cp}{v} \frac{N^* (N^* - 1)}{2}; \\
 \Delta_{N^*} &= \frac{T - CpN^* (N^* - 1)/2v}{pN^* + 1}.
 \end{aligned} \tag{6.13}$$

Поэтому для плана $X \in C_{N^*}^*$ на основании (6.9) и (6.13) имеем

$$\mu_X = g(x_1, \dots, x_{N^*}; x_{N^*} + 0) = N^*C + v\Delta_{N^*} = \frac{vT + N^*C[p(N^* + 1) + 2]/2}{pN^* + 1}, \tag{6.14}$$

что доказывает справедливость (6.7).

Теперь покажем, что $\mu_{x_n} \geq \mu_X$, $X \in C_{N^*}$. Так как $\mu_{x_n} \geq nC$ и $n > N^*$, то, учитывая (6.5), имеем

$$\mu_{x_n} - \mu_X \geq nC - \frac{vT + N^* C [p(N^* + 1) + 2]/2}{pN^* + 1} \geq \frac{C}{pN^* + 1} > 0.$$

Значит, оптимальный план $X^* \in \tilde{C}_{N^*}$.

Далее покажем, что $X^* \in C_n^*$ (n — произвольное), $n^* \leq N^*$ (n^* соответствует плану X^*), и определим значение n^* . Убедимся, что произвольный план объема n ($X_n \in C_n$) хуже плана $X \in C_{n^*}$, для которого выполняется (6.4). Для этого необходимо доказать, что

$$\max_k \{g(x_1, \dots, x_n; x_k + 0)\} \geq \frac{vT + nC [p(n+1) + 2]/2}{pn + 1}. \quad (6.15)$$

Покажем справедливость (6.15) методом от противного. Пусть справедливо обратное утверждение:

$$\max_k \{g(x_1, \dots, x_n; x_k + 0)\} < \frac{vT + nC [p(n+1) + 2]/2}{pn + 1}.$$

Это значит, что при любом k

$$g(x_1, \dots, x_n; x_k + 0) < \frac{vT + nC [p(n+1) + 2]/2}{pn + 1}. \quad (6.16)$$

Тогда

$$\sum_{k=0}^n g(x_1, \dots, x_n; x_k + 0) = S_n < n \frac{vT + nC [p(n+1) + 2]/2}{pn + 1} = S_{n^*}. \quad (6.17)$$

Из (6.9), добавляя тождество $pg(x_0, x_1, \dots, x_n; x_0 + 0) = pg(x_0, x_1, \dots, x_n; x_0 + 0)$, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} pg(x_1, \dots, x_n; x_k + 0) &= g(x_1, \dots, x_n; x_k + 0) - \\ &- g(x_1, \dots, x_n; x_{k-1} + 0) + v\Delta_{k-1} + Ckp \quad (k = \overline{1, n}), \\ pg(x_0, x_1, \dots, x_n; x_0 + 0) &= pg(x_0, x_1, \dots, x_n; x_0 + 0). \end{aligned}$$

Суммируя левые и правые части системы уравнений, имеем

$$\begin{aligned} pS_n &= -(1-p)g(x_0, x_1, \dots, x_n; x_0 + 0) + \\ &+ g(x_1, \dots, x_n; x_n + 0) + v \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k + Cp \frac{n(n+1)}{2}, \end{aligned}$$

откуда, учитывая, что $g(x_1, \dots, x_n; x_n + 0) = Cn + v\Delta_n$, получаем

$$pS_n + qg(x_0, x_1, \dots, x_n; x_0 + 0) = vT + nC [2 + p(n+1)]/2. \quad (6.18)$$

Так как правая часть (6.18) не зависит от плана проверок, то уравнение (6.18) справедливо и для плана из класса C_n^* . Поэтому

$$pS_{n^*} + qg^*(x_0, x_1, \dots, x_n; x_0 + 0) = pS_n + qg(x_0, x_1, \dots, x_n; x_0 + 0).$$

На основании (5.17) $S_{n^*} > S_n$ следовательно,

$$g(x_0, x_1, \dots, x_n; x_0 + 0) > g^*(x_0, x_1, \dots, x_n; x_0 + 0) = \\ = \left\{ vT + \frac{nC}{2} [p(n+1) + 2] \right\} / (pn+1),$$

что противоречит принятому предположению (6.16). Значит, при любом n план из класса C_n^* лучше другого плана того же объема. Поэтому оптимальный план X^* надо искать в классе $\tilde{C}_{N^*}^*$, т. е. можно записать $X^* \in \tilde{C}_{N^*}^* \subset \tilde{C}_{N^*}$.

Теперь определим объем оптимального плана X^* , т. е. найдем, при каком $n^* \leq N^*$ меняет знак разность

$$\mu_{X_n^*} - \mu_{X_{n-1}^*} = \Delta\mu_n; X_n^* \in C_n^*; X_{n-1}^* \in C_{n-1}^*.$$

Ясно, что

$$\Delta\mu_n = \frac{vT + nC [2 + p(n+1)]/2}{pn+1} - \frac{vT + (n+1)C (2 + np)/2}{(n-1)p+1}.$$

В результате простых преобразований имеем

$$\Delta\mu_n = \frac{n^2 + n(1+q)/p + 2(C - vTp)/Cp^2}{2(pn+1)[1+(n-1)p]}, n > 0. \quad (6.19)$$

Так как знаменатель выражения (6.19) положителен, то для определения n^* , доставляющего минимум функции $\mu_{X_n^*}$ как функции n , необходимо исследовать числитель выражения (6.19), представляющий собой квадратный трехчлен (обозначим его через $f(n)$). При анализе поведения функции $f(n)$ необходимо учесть два варианта: либо n^* определяется как наибольшее n , для которого $f(n) \leq 0$ при $C < vTp$, т. е. $Cp^2n^2 + 2(Cpn + C - vTp) - Cp^2n \leq 0$, либо $n^* = 0$, если $C \geq vTp$.

Покажем, что $n^* \leq N^*$, для которого еще справедливо (6.5), т. е. $N^{*2} - N^* - 2vT/Cp = \varphi(N^*) \leq 0$. Определим в интервале $[0, N^*]$ искомые значения n^* . Из (6.19) имеем $f(n) = n^2 + n(1+q)/p + 2(C - vTp)/Cp^2 = n^2 - n - 2Tv/Cp + [2/p^2 + 2n/p]$, откуда следует, что $f(0) > \varphi(0) = -2vT/Cp$ и $\varphi'(N) = 2N - 1 < f'(n) = 2N - 1 + 2/p$ при $n = N = 0$. Запишем явное выражение для плана X^* . Из (6.11) после элементарных преобразований получаем

$$\Delta_k = p\Delta_N + Cp(N - 1 - k)/v. \quad (6.20)$$

Подставляя (6.13) в (6.20), имеем

$$\Delta_k = p \left\{ \frac{T}{pN+1} - (k+1) \frac{C}{v} + \frac{C[2N + 2N^2p - pN^2 + pN]}{2v(pN+1)} \right\} = \\ = p \left\{ \frac{T}{pN+1} - (k+1) \frac{C}{v} + \frac{C}{2v} \frac{N[(N+1)p + 2]}{pN+1} \right\}. \quad (6.21)$$

Покажем, что для момента проверок, определяющих оптимальный план X^* , имеет место следующая формула при любом $k = i + 1 > 0$, $k \leq N - 1$:

$$x_i = ip \left\{ \frac{T}{pN+1} + \frac{C}{2v} \frac{N[(N+1)p+2]}{pN+1} - \frac{i+1}{2} \frac{C}{v} \right\}. \quad (6.22)$$

Для этого достаточно показать, что разность Δ_k ($k = \overline{0, n}$), определенная с помощью (6.22), совпадает с (6.21):

$$\begin{aligned} x_{k+1} - x_k &= \Delta_k = kp \left\{ \frac{T}{pN+1} + \frac{C}{2v} \frac{N[(N+1)p+2]}{pN+1} \right\} + \\ &+ p \left\{ \frac{T}{pN+1} + \frac{C}{2v} \frac{N[(N+1)p+2]}{pN+1} \right\} - \frac{(k+1)p(k+2)C}{2v} - \\ &- kp \left\{ \frac{T}{pN+1} + \frac{C}{2v} \frac{N[(N+1)p+2]}{pN+1} \right\} + \frac{kp(k+1)C}{2v} = \\ &= p \left\{ \frac{T}{pN+1} + \frac{C}{2v} \frac{N[(N+1)p+2]}{pN+1} \right\} - \frac{Cp}{2v} [2(k+1)] = \\ &= p \left\{ \frac{T}{pN+1} - (k+1) \frac{C}{v} + \frac{C}{2v} \frac{N[(N+1)p+2]}{pN+1} \right\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим примеры применения изложенной модели и укажем область ее возможного применения.

Пример 1. Рассмотрим выбор оптимального плана проверок системы по готовности. Известно, что среднее время одной проверки системы равно 0,5 ч, вероятность обнаружения во время проверки имеющегося в системе отказа $p = 0,8$. Проверки необходимо спланировать на время работы системы $T = 24$ ч.

Рассчитывая по формуле (6.22) план и число проверок, получаем с точностью до 1 ч следующий план оптимальных проверок: число проверок равно 10; времена проверок, отсчитываемые с момента начала эксплуатации системы, равны (ч): $x_1 = 4$, $x_2 = 8$, $x_3 = 11$, $x_4 = 14$, $x_5 = 17$, $x_6 = 19$, $x_7 = 20$, $x_8 = 22$, $x_9 = x_{10} = 23$.

Режим эксплуатации системы следующий: работа—проверка—работа и т. д. Например, с начала эксплуатации система работает 4 ч, затем 0,5 ч проверяется, далее работает 3,5 ч, после 8 ч общей эксплуатации начинается вторая проверка и т. д.

По формуле (6.14) находим $\mu_{X^*} = 6$ ч. Это означает, что при выбранном оптимальном плане проверок система всегда находится в неработоспособном состоянии (на проверках или в состоянии отказа) не более 6 ч. При $p = 1$ это время уменьшается.

Пример 2. Рассмотрим оптимизацию плана проверок системы по стоимости на периоде эксплуатации (хранения) $T = 24$ мес. Партию новых систем одновременно закладывают на хранение на два года, во время хранения каждая система может отказаться. Под системами можно понимать, например, запасное оборудование на складах, хранящиеся пищевые продукты, медикаменты и т. п. Таким образом, каждая система в любой момент времени хранения может потребоваться к немедленному использованию по назначению. Поэтому нужно так организовать проверки, чтобы их суммарное время за два года и время пребывания в непригодном для применения системы состоянии (отказе) были бы в среднем минимальны, точнее, не превышали бы некоторой гарантированной (минимаксной) величины. Говоря, что потери должны быть в среднем минимальны, понимаем применение выбираемого плана проверок для большого числа систем (например, нескольких сотен систем). Так как системы новые, то об их надежности ничего не известно. Поэтому воспользуемся изложенной вы-

ше моделью. О системе известна такая информация: стоимость одной проверки системы $C = 0,5$ ед. стоимости, стоимость от пребывания системы в состоянии отказа в течение месяца $v = 10$ ед. стоимости. Под единицей стоимости будем понимать некоторую условную единицу, выраженную, например, в рублях, сотнях рублей и т. д. Выбор и обоснование v производится специалистами той области, в которой решается задача, с учетом экономического убытка от пребывания систем (продукции) в негодном состоянии при хранении. Как было показано выше, случай $v = 1$ характеризует оптимизацию (минимизацию в минимаксном смысле) среднего времени пребывания системы на проверках и в состоянии отказа (при этом нахождение системы на проверке считается неблагоприятным событием, если система не может быть использована по назначению до окончания проверки).

Расчеты по формулам (6.22) и (6.14) показывают, что за два года на каждой системе нужно провести 33 проверки (времени проверок по дням месяца для каждой системы приведены в табл. 6.1), средние потери стоимости равны 17 ед.

Из табл. 6.1 видно, что частота проверок к концу второго года заметно возрастает. Это объясняется тем, что если достаточно долго при проверках не было обнаружено отказа, то к концу периода вероятности появления и обнаружения отказа возрастают. Увеличение вероятности появления отказа с течением времени очевидно, а возрастание вероятности обнаружения отказа можно пояснить следующим образом. Пусть $q_i = q$ — вероятность необнаружения отказа при i -й проверке (в рассматриваемом примере $i = 1, 33$, очевидно, что $q = 1 - p$). Предположим, что проведено 20 проверок и отказ не обнаружен, хотя на самом деле он имел место уже после 15-й проверки. Тогда вероятность обнаружения отказа при 16, 17, 18, 19 и 20-й проверках равна $1 - q^5$.

Таблица 6.1

Первый год	Номер проверки	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	Число, месяц	9 февр.	23 марта	3 мая	9 июня	15 июля	22 авг.	23 сент.	4 нояб.	2 дек.	29 дек.
	Номер проверки	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	Число, месяц	28 январ.	24 февр.	26 марта	21 апр.	15 мая	8 июня	29 июня	19 июля	10 авг.	29 авг.
Второй год	Номер проверки	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
	Число, месяц	12 сент.	2 окт.	18 окт.	30 окт.	11 нояб.	21 нояб.	26 нояб.	5 дек.	10 дек.	14 дек.
	Номер проверки	31	32	33							
	Число, месяц	20 дек.	26 дек.	28 дек.							

Примечание. Февраль каждого года условно имеет 28 дней.

Очевидно, что при увеличении числа проверок вероятность обнаружения отказа растет. Следовательно, при планировании проверок для заданного интервала эксплуатации необходимо в его конце и из соображений наилучшего (по вероятности) обнаружения отказа увеличить частоту проверок. Напомним, что система при обнаружении отказа восстановлению не подлежит и снимается с эксплуатации.

В заключение укажем область возможных применений изложенной в настоящем параграфе модели. Это хранение технических систем (станков, оборудования, запасного фонда) на складах, в специальных помещениях, контейнерах и др.; эксплуатация оборудования, работающего в труднодоступных местах или не допускающего непрерывных проверок (метеорологическая аппаратура в горах, некоторое оборудование на спутниках и космических станциях, в системах с автоматизированным режимом функционирования).

Следует отметить также, что модели проверок системы при полном отсутствии информации о надежности и модели проверок с частичной (минимальной) информацией о ее надежности при конечном и бесконечном времени эксплуатации имеют одни и те же области применения.

§ 6.3. Определение плана проверок при ограниченной информации о надежности системы

Предположим, что в эксплуатацию поступает система, функция распределения времени безотказной работы ξ которой известна в одной точке: $F(y) = P\{\xi \leq y\} = p$. Самостоятельной индикации отказа в системе не происходит, поэтому для обнаружения появившегося отказа в заранее назначенные моменты времени x_k ($k = \overline{0, N}$) проводятся проверки. В отличие от предположения, сделанного в § 6.2, будем считать, что при очередной проверке отказ, появившийся в системе после предыдущей проверки, обнаруживается с вероятностью, равной единице ($p = 1$). Эксплуатация системы длится либо до момента обнаружения отказа, либо до некоторого назначенного момента T , если не был обнаружен отказ до этого момента. За проведение каждой проверки взимается плата C . Кроме того, при простое системы в неработоспособном состоянии за единицу времени теряется стоимость v , т. е., как и ранее, считаем, что если отказ появился в момент t , а был обнаружен в момент x ($x > t$), то потери составляют $v(x - t)$. Задача состоит в определении моментов x_k , при которых минимизировались бы максимально возможные ожидаемые потери за указанный период эксплуатации $(0, T)$.

Выпишем функцию потерь, если отказ произойдет в момент x . Из постановки задачи следует, что при фиксированном плане проверок

$$X = (x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_m \leq y \leq x_{m+1} < \dots < x_{m+n} < x_{m+n+1} = T)$$

функция потерь имеет вид

$$G_X(x) = \begin{cases} (k+1)C + v(x_{k+1} - x) & \text{при } x_k \leq x < x_{k+1}, k = \overline{0, m+n}; \\ (m+n)C + v(T - x) & \text{при } x_{m+n} \leq x < T; \\ (m+n)C & \text{при } x \geq T = x_{m+n+1}. \end{cases} \quad (6.23)$$

Ожидаемые потери есть линейный функционал

$$I(F) = \int_0^{\infty} G_X(x) dF(x). \quad (6.24)$$

Обозначим через $m(1, y, \pi)$ множество функций распределения, которые в заданной точке y принимают заданное значение π . Тогда нужно определить план X^* , при котором достигается

$$\min_X \max_{F \in m(1, y, \pi)} I(F). \quad (6.25)$$

При решении первой части задачи — определении наихудшей функции распределения F^* , при которой достигается максимум $I(F)$ по $F \in m(1, y, \pi)$, заметим, что экстремум $I(F)$ достигается на функции распределения, имеющей два скачка: величины π в интервале $(0, y]$ и величины $1-\pi$ в интервале (y, ∞) (этот факт известен в теории функционального анализа и вариационного исчисления), т. е.

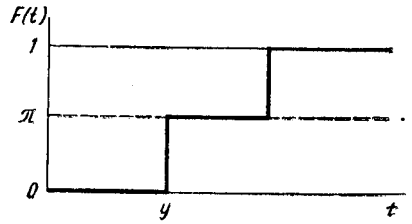


Рис. 6.1

$$\max_{F \in m(1, y, \pi)} I(F) = \max_{F \in m^*(1, y, \pi)} I(F),$$

где $m^*(1, y, \pi)$ — множество ступенчатых функций распределения, имеющих в каждом интервале $(0, y]$, $(y, +\infty)$ только одну точку роста и для которых $F(y) = \pi$ (одна из таких функций распределения представлена на рис. 6.1). Тогда пусть $\tau_1^* = x_s$, для которого $G_X(\tau_1^*) = G_X(x_s) = \max_{0 \leq k \leq m} G_X(x_k)$, и $\tau_2^* = y$, если $G_X(y) = \max\{G_X(y), G_X(x_k), k > m\}$, или $\tau_2^* = x_{m+v}$, если $G_X(x_{m+v}) = \max\{G_X(y), G_X(x_k), k > m\}$. Построим функцию распределения

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq \tau_1^*, \\ \pi & \text{при } \tau_1^* < x \leq \tau_2^*, \\ 1 & \text{при } x > \tau_2^* \end{cases} \quad (6.26)$$

и покажем, что $F^*(x)$ — экстремальная функция. В самом деле, для любой $F \in m^*(1, y, \pi)$, имеющей две точки роста: τ_1 и τ_2 , $0 \leq \tau_1 < y \leq \tau_2$, можно записать

$$I(F) = G_X(\tau_1)\pi + G_X(\tau_2)(1-\pi) \leq G_X(\tau_1^*)\pi + G_X(\tau_2^*)(1-\pi) = I(F^*)$$

в силу выбора точек τ_1^* и τ_2^* и убывания функции $G_X(x)$ на каждом интервале $[x_k, x_{k+1})$. Следовательно,

$$I(F^*) = \max_{F \in m(1, y, \pi)} I(F) = \pi \max_{1 \leq k \leq m} G_X(x_k) + (1-\pi) \max_{x=y, x_{m+1}, \dots, x_{m+n}} G_X(x), \quad (6.27)$$

т. е. при фиксированном плане X можно определить наихудшую функцию распределения $F^*(x)$.

Далее выберем план X^* , минимизирующий наихудшие потери. Зафиксируем сначала моменты и количество проверок до y , т. е. величины $m, x_1, \dots, x_m$ фиксированы, и определим оптимальные моменты $x_{m+1}, \dots, x_{m+n}$ и величину $n \geq 0$. Из определения функции потерь $G_X(x)$ имеем

$$H_n = \sum_{s=1}^n G_X(x_{m+s}) + G_X(y) = \sum_{s=1}^n [(m+s+1)C + v(x_{m+s+1} - x_{m+s}) - C + (m+1)C + v(x_{m+1} - y) = v(T-y) + \\ + C\{m(n+1) + n(n/2 + 3/2)\}.$$

Заметим, что H_n не зависит от моментов x_{m+s} , а зависит от количества проверок n после момента y . Таким образом, чтобы минимизировать $\max G_X(x)$ в равенстве (6.27) по всем возможным $x = y, x_{m+1}, \dots, x_{m+n}$ при фиксированных $m, n, x_1, \dots, x_m$, нужно решить только одну задачу: определить точку $(z_1^*, \dots, z_n^*)$ на гиперплоскости $z_1 + z_2 + \dots + z_n = \text{const} = H$ ($z_i \geq 0$), в которой достигается минимума функция $f(z_1, \dots, z_n) = \max_{1 \leq i \leq n} z_i$. Нетрудно заметить, что искомая точка определяется равенством

$$z_i^* = H/n, i = \overline{1, n}. \quad (6.28)$$

Для точки, определяемой равенством (6.28),

$$f(z_1^*, z_2^*, \dots, z_n^*) = H/n.$$

Покажем, что

$$\min_{z_1 + z_n = A} f(z_1, \dots, z_n) = H/n.$$

Предположим противное. Пусть существует такая точка $(z_1^0, \dots, z_n^0)$

$$z_1^0 + \dots + z_n^0 = H, \quad (6.29)$$

для которой

$$\max_{1 \leq i \leq n} z_i^0 = f(z_1^0, \dots, z_n^0) < \frac{H}{n}.$$

Но тогда $\sum_{i=1}^n z_i^0 \leq n \max_{1 \leq i \leq n} z_i^0 < H$, что противоречит условию (6.29). Противоречие приводит к доказательству сформулированного утверждения.

Таким образом, приходим к выводу, что при фиксированных $m, n, x_1, \dots, x_m$ значения $x_{m+1}, \dots, x_{m+n}$ нужно выбрать из условия

$$G_X(y) = G_X(x_{m+1}) = \dots = G_X(x_{m+n}) = \frac{H_n}{n+1}. \quad (6.30)$$

Выпишем значения x_{m+s} , $s = \overline{1, n}$, в явном виде из условия (6.30). Пусть $n > 0$. Тогда при $s = \overline{2, n}$

$$\sum_{l=1}^{s-1} G_X(x_{m+l}) + G_X(y) = \frac{sH_n}{n+1} = v(x_{m+s} - y) + CmsC \frac{s(s+1)}{2}$$

или

$$x_{m+s} = y + s \left[\frac{T-y}{n+1} + \frac{C}{2v} \left(\frac{n(n+3)}{n+1} - s - 1 \right) \right]. \quad (6.31)$$

При $s = 1$ из условия $G_X(y) = H_n/(n+1)$ получаем аналогичный результат. Равенство (6.31) определяет x_{m+s} при $s = \overline{1, n}$. Для этих значений должны выполняться неравенства $x_{m+s+1} - x_{m+s} > 0$ при $s = \overline{1, n-1}$; $T - x_{m+n} > 0$.

Проверим эти условия:

$$x_{m+s+1} - x_{m+s} = \frac{T-y}{n+1} + \frac{C}{2v} \frac{n(n+3)}{n+1} - \frac{C(s+1)}{v}.$$

Полученная разность как функция s убывает. При $s = n-1$

$$x_{m+n} - x_{m+n-1} = \frac{T-y}{n+1} - \frac{Cn(n-1)}{2v(n+1)} \geq 0,$$

если выполняется условие

$$n(n-1) < \frac{2v}{C}(T-y). \quad (6.32)$$

Следовательно, при выполнении условия (6.32) $x_{m+1} < x_{m+2} < \dots < x_{m+n} < T$ (справедливость последнего неравенства при условии (6.32) проверяется непосредственно). Выберем оптимальное n . Из условия (6.32) определяем n^* как наибольшее целое, удовлетворяющее этому неравенству. При $0 \leq n \leq n^*$ строим планы проверок из условия (6.30) и сравниваем их. Сравниваем значения $H_n/(n+1)$ при различных n из области $0 \leq n \leq n^*$:

$$\frac{H_n}{n+1} - \frac{H_{n-1}}{n} = \frac{1}{n(n+1)} \{C(n^2 + n + 2) - 2v(T-y)\} \leq 0 \quad (6.33)$$

при

$$n(n+1) \leq \frac{2v}{C}(T-y) - 2. \quad (6.34)$$

Выбираем $\tilde{k}$ как наибольшее целое, удовлетворяющее (6.34). Если $\frac{2v}{C}(T-y) - 2 \leq 0$, то считаем $\tilde{n} = 0$. Пусть $N = \min(\tilde{n}, n^*)$. Тогда можно утверждать, что N определяет оптимальное число проверок, проводимых после y .

В самом деле, если $N = \tilde{n}$, то в силу условия (6.33) $H_n/(n+1)$ при $n = N$ достигает минимума и $N < n^*$, т. е. удовлетворяет усло-

вию (6.32). Если $N = n^*$, то достаточно показать, что планы, у которых количество проверок после момента y больше n^* , хуже построенного плана. Возьмем наименьшее целое, для которого $n(n-1) > (2v/C)(T-y)$. Обозначим его через n^0 . Тогда по определению n^0

$$(n^0-1)(n^0-2) \leq \frac{2v}{C}(T-y).$$

Величина n^0-1 принадлежит $[0, n^*]$ ($n^0-1 = n^*$), поэтому оптимальные потери при таком числе проверок после y равны в соответствии с (6.30)

$$\frac{v(T-y)}{n^0} + \frac{C}{n^0} \left\{ mn^0 + (n^0-1) \frac{(n^0+2)}{2} \right\},$$

с другой стороны, потери при любых m и n больше $(m+n)C$, но при $n \geq n^0$

$$\begin{aligned} (m+n)C - \frac{v(T-y)}{n^0} - Cm - \frac{C}{2} \frac{(n^0-1)(n^0+2)}{n^0} = \\ = -\frac{v(T-y)}{n^0} + C \left\{ n - \frac{(n^0-1)(n^0+2)}{2n^0} \right\} > -\frac{C(n^0-1)(n^0-2)}{2n^0} + \\ + Cn - \frac{C(n^0-1)(n^0+2)}{2n^0} = Cn - \frac{C}{2n^0}(n^0-1)2n^0 = Cn - C(n^0-1) = \\ = C(n - n^0 + 1) > 0, \end{aligned}$$

следовательно, планы с числом проверок $n > n^*$ хуже. Разработка алгоритма определения оптимального плана проверок после момента y при фиксированных $m, x_1, \dots, x_m$ завершена.

Теперь переходим к выбору моментов $x_k, k \leq m$, и величины m . Исследуем семейство планов, у которых $x_m = y$. Пусть m фиксировано. Тогда, используя приведенные выше рассуждения, можно показать, что оптимальный выбор величин x_k соответствует условию

$$G_X(0) = G_X(x_1) = \dots = G_X(x_m) = H_m/m,$$

где $H_m = C(m+1)/2 + vy/m$. В этом случае

$$x_i = i \left[\frac{y}{m} + \frac{C}{2v}(m-i) \right], \quad i = \overline{0, (m-1)}.$$

Для того чтобы выполнялись условия $x_{i+1} - x_i > 0$, необходимо и достаточно выполнение условия

$$m(m-1) < 2vy/C. \quad (6.35)$$

Оптимальное m выбирают таким, чтобы минимизировать величину

$$\pi \left[\frac{C}{2}(m+1) + \frac{v}{m}y \right] + (1-\pi) \left[\frac{v(T-y)}{n+1} + C \left(m + \frac{n(n+3)}{2(n+1)} \right) \right] = A_m.$$

Исследуя поведение разности $A_{m+1} - A_m$, получаем, что нужно взять минимальное целое положительное m , для которого

$$m(m+1) > \frac{2\pi y}{(2-\pi)C}, \quad (6.36)$$

или максимальное целое положительное m , для которого

$$m(m-1) \leq \frac{2\pi y}{(2-\pi)C}. \quad (6.37)$$

Заметим, что $m > 0$, так как при $m = 1$ неравенство выполняется. Итак,

$$m(m-1) \leq \frac{2\pi y}{(2-\pi)C} < m(m+1). \quad (6.38)$$

Проверим, выполняется ли при таком m $x_{i+1} - x_i > 0$, $i = 0, (m-1)$. Если выполняется условие (6.38), то выполняется условие (6.35), так как $\pi/(2-\pi) \leq 1$. Следовательно, условия $x_{i+1} - x_i > 0$ при $i = 0, m-1$ выполняются.

Таким образом, приведенные рассуждения позволяют следующим образом строить оптимальные планы при условии $y = x_m$.

1. Определяем $n = N = \max(0, \min(\tilde{n}, n^*))$, где n^* — наибольшее целое, удовлетворяющее неравенству

$$n(n-1) < \frac{2v}{C}(T-y);$$

$\tilde{n}$ — наибольшее целое, удовлетворяющее условию

$$n(n+1) \leq \frac{2v}{C}(T-y) - 2.$$

2. Определяем m как наибольшее целое, удовлетворяющее неравенству

$$m(m-1) \leq \frac{2\pi y}{(2-\pi)C}.$$

3. Находим

$$x_j = j \left(\frac{y}{m} + \frac{C}{2v}(m-j) \right) \text{ при } 0 \leq j \leq m.$$

4. Определяем

$$x_{m+j} = y + j \left[\frac{T-y}{n+1} + \frac{C}{2v} \left(\frac{n+3}{n+1} n - j - 1 \right) \right] \text{ при } j = \overline{1, n}.$$

5. Вычисляем минимаксные потери:

$$\pi \left[\frac{C(m+1)}{2} + \frac{vy}{m} \right] + (1-\pi) \left[\frac{v(T-y)}{n+1} + C \left(m + \frac{n(n+3)}{2(n+1)} \right) \right]. \quad (6.39)$$

Исследуем теперь семейство планов, для которых $x_m < y$. Оптимальный выбор моментов $x_1, \dots, x_m$ при $n > 0$ обеспечивает условие

$$G_X(0) = G_X(x_1) = \dots = G_X(x_m) = H_m/(m+1),$$

но в случае

$$H_m = C \frac{(m+1)(m+2)}{2} + vx_{m+1}$$

из этих условий получаем

$$x_s = \frac{sx_{m+1}}{m+1} + \frac{C}{2v} s(m-s+1), \quad (6.40)$$

причем для выполнения условия $x_{s+1} - x_s > 0$, $s = \overline{0, m}$, необходимо и достаточно выполнения условия

$$(m+1)(m-2) < \frac{2v}{C} x_{m+1}. \quad (6.41)$$

Равенство (6.40) позволяет определять оптимальные моменты проверок до момента y , если зафиксированы m и x_{m+1} . Теперь решим вопрос о выборе m . Заметим, что второе слагаемое суммарных потерь зависит только от m , причем n и x_{m+1} от m не зависят. Значение m выбираем таким, чтобы минимизировать суммарные потери

$$\pi \left[\frac{m+2}{2} C + \frac{vx_{m+1}}{m+1} \right] + (1-\pi) \left[\frac{v(T-y)}{n+1} + Cm + C \frac{n(n+3)}{2(n+1)} \right] = B_m. \quad (6.42)$$

Исследуя знак разности $B_{m+1} - B_m$, приходим к выводу, что оптимальное m есть целое число, удовлетворяющее условию

$$m(m+1) \leq \frac{2\pi}{2-\pi} \frac{vx_{m+1}}{C} < (m+1)(m+2). \quad (6.43)$$

Теперь необходимо проверить условие $x_{s+1} - x_s > 0$, $s = \overline{0, m}$. Условие $x_{s+1} - x_s > 0$ очевидно при $s = \overline{0, m}$, так как из выполнения условия (6.43) следует выполнение условия (6.41).

Если $n=0$, то $H_m = C \frac{m(m+3)}{2} + vT$. Тогда получаем, что минимальная стоимость

$$C_m = \pi \left[\frac{m(m+3)}{2(m+1)} C + \frac{vT}{m+1} \right] + (1-\pi)(C_m + v(T-y)), \quad (6.44)$$

где m — максимальное неотрицательное целое, для которого

$$m(m+1) \leq \frac{2\pi(Tv-C)}{(2-\pi)C}.$$

При этом из условия $G_X(0) = G_X(x_1) = \dots = G_X(x_m)$ получаем

$$x_i = i \left(\frac{T}{m+1} + \frac{C}{2v} \left(\frac{m(m+3)}{m+1} - i - 1 \right) \right).$$

Итак, можно следующим образом построить оптимальный план при $x_m < y$.

1. Определяем $n = N = \max(0, \min(\tilde{n}, n^*))$, где n^* — наибольшее целое, удовлетворяющее неравенству

$$n(n-1) < \frac{2v}{C} (T-y);$$

$\tilde{n}$ — наибольшее целое, удовлетворяющее неравенству

$$n(n+1) < \frac{2v}{C} (T-y) - 2.$$

2. Если $n > 0$, то определяем m как наибольшее положительное целое, удовлетворяющее условию

$$m(m+1) \leq \frac{2\pi}{2-\pi} - \frac{vx_{m-1}}{C}.$$

Тогда

$$x_i = i \left[\frac{x_{m+1}}{m+1} + \frac{C}{2v} (m-i+1) \right], \quad i = \overline{1, m};$$

$$x_{m+j} = y + j \left[\frac{T-y}{n+1} + \frac{C}{2v} \left(\frac{n(n+3)}{n+1} - j-1 \right) \right], \quad j = \overline{1, n},$$

и минимаксная стоимость равна

$$\pi \left[\frac{m+2}{2} C + \frac{vx_{m+1}}{m+1} \right] + (1-\pi) \left[\frac{v(T-y)}{n+1} + Cm + C \frac{n(n+3)}{2(n+1)} \right].$$

3. Если $n = 0$, то определяем m как наибольшее положительное целое, для которого

$$m(m+1) \leq \frac{2\pi(vT-C)}{(2-\pi)C};$$

$$x_i = i \left[\frac{T}{m+1} + \frac{C}{2v} \left(\frac{m(m+3)}{m+1} - i-1 \right) \right], \quad i = \overline{1, m},$$

и минимаксную стоимость

$$\pi \left(\frac{m(m+3)}{2(m+1)} C + \frac{vT}{m+1} \right) + (1-\pi) (Cm + v(T-y)).$$

Окончательный ответ получаем, сравнивая минимаксные стоимости (6.43) и (6.39), если $n > 0$, или (6.44) и (6.39), если $n = 0$. Если при $n > 0$ выполняется неравенство $B_m < A_m$, то выбираем план с $x_m < y$; если противоположное неравенство, то в качестве оптимального нужно выбрать план с $x_m = y$.

Аналогично и для случая $n = 0$. Если при $n = 0$ выполняется неравенство $C_m < A_m$, то оптимальным является план с $x_m < y$; в противном случае — план с $x_m = y$.

Пример. Предположим, что в течение года следует эксплуатировать систему по схеме, изложенной в начале настоящего параграфа (время эксплуатации $T = 8760$ ч). Априори известно, что при эксплуатации большого количества

Таблица 6.2

Номер проверки	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Время проверки, ч, отсчитывае- мое от нача- ла эксплуа- тации систем	355	699	1034	1358	1673	2121	2480	2829	3169	3498	3817	4126	4425	4714	4993	5262	5522	5771	6010	6239	6458

Продолжение табл. 6.2

Номер проверки	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41
Время проверки, ч, отсчитывае- мое от нача- ла эксплуа- тации систе- мы	6667	6867	7056	7235	7404	7563	7712	7851	7981	8100	8209	8308	8397	8476	8545	8605	8654	8693	8722	8741

аналоговых систем через $t = 1752$ ч отказало 0,12 от всех систем, поступающих при $t = 0$ в эксплуатацию ($\pi = 0,12$). Пусть, далее, стоимость одной проверки $C = 10$ ед. стоимости, $v = 1$ ед. стоимости. Требуется определить оптимальное (минимаксное) число проверок, указать их конкретные значения и рассчитать ожидаемую минимаксную стоимость эксплуатации системы в течение года.

Используя приведенные в данном параграфе алгоритмы и формулы, получаем, что оптимальное число проверок $n^* = 41$, а минимаксная стоимость равна 424 усл. ед. Значения составляющих оптимального плана проверок приведены в табл. 6.2 (в календарных часах эксплуатации системы, которые легко при необходимости пересчитать, как это было сделано в табл. 6.1).

Анализируя расчетные формулы (для определения числа проверок) и табл. 6.2, можно сделать вывод, что знание одной точки функции распределения времени безотказной работы системы существенно влияет как на число проверок, так и на интервалы между ними. Так как до момента $t = 1752$ ч ($F(t) = \pi = 0,12$) вероятность отказа системы сравнительно невелика, то проверки до $t \approx 5500$ ч планируются с существенно более продолжительными интервалами, чем впоследствии. Причем интенсивность проверок возрастает по мере приближения к концу планируемого периода эксплуатации.

Отметим теперь следующие важные обстоятельства. Расчеты [21, 30] показывают, что знание одной точки функции распределения позволяет планировать проверки таким образом, что минимаксная стоимость эксплуатации системы уменьшается в ряде случаев на 70—80%. Например, при $F(0,95T) = 0,001$ для $C = 8$ усл. ед. и $v = 1$ усл. ед. выигрыш по минимаксной стоимости (по сравнению со случаем, когда функция $F(t)$ полностью неизвестна) составляет 80%. Однако для наиболее типичных ситуаций этот выигрыш в среднем равен 10—20%.

Следуя [60], можно указать для больших значений vT/C формулу для определения η — доли сокращения расходов на эксплуатацию системы, для которой известно одно значение функции $F(t)$ (при этом за единицу принимается минимаксная стоимость эксплуатации системы, для которой функция $F(t)$ полностью неизвестна):

$$\eta = \sqrt{\pi(2-\pi)t/T} + (1-\pi) \sqrt{(T-t)/T}.$$

Таким образом, по мере накопления информации о надежности системы улучшается планирование проверок на заданном периоде эксплуатации. Однако решить задачу, аналогичную изложенной выше, даже для двух известных точек функции распределения $F(t)$ пока не удастся. Тем не менее предельное решение этой задачи, когда функция $F(t)$ полностью известна, а $T \rightarrow \infty$, получено (см. § 6.5).

§ 6.4. Определение плана проверок системы при длительной эксплуатации и наличии минимальной информации о надежности

В настоящем параграфе рассмотрен случай длительной эксплуатации системы. Все остальные допущения о системе те же, что и в предыдущем параграфе. Таким образом, рассматривается система, в которой проводятся проверки работоспособности и ремонт, полностью обновляющий систему. Предполагаем, что в системе нет самостоятельной индикации отказа. Проверки системы осуществляются в заранее назначенные моменты времени и планируются в момент $t = 0$ на пери-

од $(0, T)$. Планирование заключается в выборе $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ моментов проведения проверок работоспособности системы и количества этих проверок n за период $(0, T)$. Составляющие вектора X выбираются так, что $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < T = x_n + 1$.

Если в некоторый момент x_k ($k = \overline{1, n}$) система работоспособна, то производится проверка, если система неисправна (что выявляется с вероятностью, равной единице), то осуществляется ремонт, полностью обновляющий систему (или система заменяется на новую, исправную), и далее процесс обслуживания повторяется. При отсутствии отказа до момента T проводится в момент T профилактический ремонт, также полностью обновляющий систему, и процесс обслуживания вновь повторяется. Моменты окончания ремонтов являются моментами регенераций (обновлений системы). Считаем, что эксплуатация системы длится бесконечно долго. Это означает, что число периодов регенерации стремится к бесконечности. Предполагаем, что система проверяется и ремонтируется (восстанавливается) настолько быстро, что временем проверки и ремонта можно пренебречь. Таким образом, в момент $t = 0$ для периода работы системы $(0, T)$ планируем проведение n проверок; $(n + 1)$ -я проверка всегда планируется в момент T ($x_{n+1} = T$). Пусть C — средняя стоимость проведения одной проверки, а v — средняя стоимость потерь за единицу времени пребывания системы в состоянии необнаруженного отказа (система пребывает в состоянии отказа от момента его возникновения до очередной проверки). Например, если отказ системы произошел после n -й проверки, то общая стоимость G эксплуатации системы, очевидно, равна $nC + v\Delta t$, где Δt — время от момента возникновения отказа до очередной $(n + 1)$ -й проверки (в момент T).

Обозначим через ξ случайное время до отказа системы. Тогда

$$G(\xi) = \begin{cases} (k+1)C + v(x_{k+1} - \xi) & \text{при } x_k < \xi \leq x_{k+1}, k = \overline{0, n-1}, \\ nC + v(T - \xi) & \text{при } x_n < \xi \leq T, \\ nC & \text{при } T < \xi. \end{cases}$$

Обозначим через $Z(\xi)$ промежуток времени от момента $t = 0$ до замены системы (при проверке, следующей за моментом ее отказа, или в момент T). Назовем этот промежуток *периодом регенерации* (циклом замены системы). Тогда

$$Z(\xi) = \begin{cases} x_{k+1}, & \text{если } x_k < \xi \leq x_{k+1}, k = \overline{0, n}, \\ T, & \text{если } T < \xi. \end{cases}$$

При бесконечной эксплуатации для средней удельной стоимости эксплуатации системы имеем

$$C_F(Z) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{N(t)} G(Z^{(i)}, \xi_i), \quad (6.45)$$

где $N(t)$ — число циклов замен, завершенных к моменту t . Очевидно, что $C(Z)$ зависит от функции распределения $F(t)$ случайной величины ξ . Предполагаем, что о функции $F(t)$ ничего не известно, кроме ее

значения в точке T , т. е. $F(T) = P\{\xi < T\} = \pi$, $T > 0$. Математические ожидания величин G и Z зависят от F .

В данном случае средние удельные потери (стоимости) при бесконечной эксплуатации системы можно определить как отношение средних потерь за период регенерации к средней длительности этого периода. Поэтому предел (6.45) можно записать так:

$$C_F(Z) = M_F[G(Z, \xi)] / M_F[Z(X, \xi)]. \quad (6.46)$$

Выбирая план проверок X , мы хотим минимизировать $\max_F C_F(X)$, так как $F(t)$ неизвестна, кроме значения при $t = T$, т. е. вновь, как и во всех предыдущих задачах настоящей главы, стремимся определить гарантированную среднюю величину рассматриваемого функционала. В данном случае таким функционалом является $C_F(X)$, поэтому задача сводится к определению $G_{F^*}(X) = \min_X \max_F C_F(X)$ и функции F^* , на которой это экстремальное значение функционала достигается.

Решим сформулированную минимаксную задачу. Очевидно, что

$$\begin{aligned} M_F[G(X, \xi)] &= \int_0^\infty G(t) dF(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} [(k+1)C + v(x_{k+1} - \\ &\quad - t)] dF(t) + \int_{x_n}^T [nC + v(T-t)] dF(t) + \int_T^\infty nC dF(t); \\ M_F[Z(X, \xi)] &= \int_0^\infty Z(t) dF(t) = \sum_{k=0}^n \int_{x_k}^{x_{k+1}} x_{k+1} dF(t) + \\ &\quad + \int_T^\infty T dF(t) = \sum_{k=0}^n P_k x_{k+1} + (1-\pi)T, \end{aligned}$$

где $P_k = F(x_{k+1}) - F(x_k)$.

Воспользовавшись (6.46) и выражениями для $M_F[G]$ и $M_F[Z]$, получаем (если считать при записи правой части неравенства, что отказ всегда происходит немедленно после проверки)

$$\begin{aligned} G_F(X) &= \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} [(k+1)C + v(x_{k+1} - t)] dF(t) + \\ &\quad + \int_{x_n}^T [nC + v(T-t)] dF(t) + \int_T^\infty nC dF(t)}{\sum_{k=0}^n P_k x_{k+1} + (1-\pi)T} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{\sum_{k=0}^n P_k x_{k+1} + (1-\pi)T}{\sum_{k=0}^n P_k x_{k+1} + (1-\pi)T} \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \leq \frac{\sum_{k=0}^{k-1} P_k [(k+1) C + v (x_{k+1} - x_k)] + P_n [nC + v (T - x_n)] +}{\sum_{k=0}^n P_k x_{k+1} + (1-\pi) T} \rightarrow \\
& \rightarrow \frac{+ (1-\pi) nC}{\sum_{k=0}^n P_k x_{k+1} + (1-\pi) T} = \max_F C_F(X). \quad (6.47)
\end{aligned}$$

Очевидно, что

$$\sum_{k=0}^n P_k = F(x_{k+1}) = F(T) = \pi. \quad (6.48)$$

Обозначим

$$\begin{aligned}
U_k &= \frac{\pi (k+1) C + \pi v (x_{k+1} - x_k) + (1-\pi) nC}{\pi x_{k+1} + (1-\pi) T}, \quad k = \overline{0, n-1}; \\
U_n &= \frac{\pi nC + \pi v (T - x_n) + (1-\pi) nC}{\pi T + (1-\pi) T} \quad (6.49)
\end{aligned}$$

и предположим, что вектор X равен вектору X' с составляющими $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ такими, что

$$U_0 = U_1 = \dots = U_n = U. \quad (6.50)$$

Тогда из (6.49) и (6.50) следует, что

$$\begin{aligned}
[\pi x'_{k+1} + (1-\pi)T]U &= \pi (k+1)C + \pi v (x_{k+1} - x_k) + \\
&+ (1-\pi)nC, \quad k = \overline{0, n-1}; \quad (6.51)
\end{aligned}$$

$$[\pi T + (1-\pi)T]U = \pi nC + \pi v (T - x'_n) + (1-\pi)nC.$$

Используя (6.47) и учитывая (6.48) и (6.51), можно непосредственно показать, что $C_F(X') \leq U$. Это означает (так как рассматриваются только отказы, происходящие сразу же после проверки), что $\max_F C_F(X') = U$.

Найдем частные производные функции U_k ($k = \overline{0, n-1}$) по x_k и $x_{(k+1)}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_k}{\partial x_k} &= -\frac{\pi v}{\pi x_{k+1} + (1-\pi) T} < 0; \\
\frac{\partial U_k}{\partial x_{k+1}} &= \frac{(1-\pi) v T - \pi (k+1) C + \pi v x_k - (1-\pi) nC}{[\pi x_{k+1} + (1-\pi) T]^2} = \\
&= \frac{Cn [(1-\pi) T + \pi x_k] - \{C [(k+1) \pi + (1-\pi) n]\}}{[\pi x_{k+1} + (1-\pi) T]^2}.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\partial U_k / \partial x_{k+1} > 0$, если $v [(1-\pi)T + \pi x_k] > > C [(k+1)\pi + (1-\pi)n]$.

Далее рассмотрим стратегии, для которых выполняется последнее неравенство. Оказывается, что в данном случае

$$\max_F C_F(X') = C_{F^*}(X^*) = \min_X \max_F C_F(X).$$

Запишем теперь алгоритм для найденного минимаксного плана проверок. Введем следующие обозначения: $Q = C / (vT)$, $h_i = U_i/v$, $\gamma_i = x_i/T$. Тогда из (6.49) получаем:

$$h_k = (1 - \pi)nC + \pi[(k+1)Q + \gamma_{k+1} - \gamma_k], \quad k = \overline{0, n-1};$$

$$h_n = nQ + \pi(1 - \gamma_n). \quad (6.52)$$

На основании (6.50) имеем $h_0 = h_1 = \dots = h_n = h$. Решая каждое из уравнений (6.52) относительно γ_k и приравнявая каждый раз h_k к h ($k = \overline{0, n}$), получаем

$$\gamma_k = \frac{(1-\pi)h - (1-\pi)nQ - k\pi Q + \pi\gamma_{k-1}}{\pi(1-h)}, \quad k = \overline{1; n};$$

$$\gamma_{n+1} = 1 - \frac{(1-\pi)h - (1-\pi)nQ - n\pi Q + \pi\gamma_n}{\pi(1-h)}. \quad (6.53)$$

Исключая γ_k , после преобразований окончательно имеем

$$(1-h)^{n+1} = 1 - \pi - \frac{\pi Q}{h(h-nQ)} [1 - (1-h)^n], \quad (6.54)$$

откуда можно найти оптимальное число проверок n^* для заданного интервала $(0, T)$.

Далее составляющие плана вычисляют рекуррентно из соотношений (6.52), для чего последние преобразуют к виду

$$\pi\gamma_n = n^*Q + \pi - h;$$

$$\pi\gamma_{k-1} = (1-h)\pi\gamma_n - (1-\pi)(h - n^*Q) + \pi kQ. \quad (6.55)$$

Остановимся на применении полученных результатов. Уравнение (6.54) нельзя решить явно относительно h . Однако для заданной пары значений π и Q можно получить численными методами оптимальное значение n , следовательно, и оптимальный план проверок. Пусть n^* — оптимальное значение n ; h^* — оптимальное значение h . Как n^* , так и h^* зависят от $Q = C / (vT)$ и π . Очевидно, что n^* при $\pi = \text{const}$ увеличивается, если Q уменьшается, а h^* уменьшается с уменьшением Q . Следовательно, при $\pi = \text{const}$ должно существовать такое значение $Q = Q_n$, меньше которого нужно принять $n^* = n$, а больше — $n^* = n - 1$.

Запишем, используя соотношение (6.54), явное выражение для π :

$$\pi = \frac{1 - (1-h)^{n+1}}{1 + \frac{Q}{h(h-nQ)} [1 - (1-h)^n]}. \quad (6.56)$$

Таблица 6.3

n^*	n^*	Q	π	План проверок на интервале 0, ..., 100 ч	План проверок на интервале 0, ..., 1000 ч
0,1	1	0,0474	0,1	47,37	473,68
	3	0,0161	0,1870	23,26; 47,32; 72,28	232,61; 473,23; 722,75
	6	0,008	0,3028	12,39; 25,28; 38,5; 52,72; 67,42; 82,85	123,94; 252,76; 386,99; 527,23; 674,15; 828,49
	9	0,0053	0,4023	8,06; 16,42; 25,13; 34,21; 43,72; 53,7; 64,19; 75,27; 86,98	80,57; 164,22; 251,28; 342,13; 437,2; 536,95; 641,9; 752,65; 869,81
0,4	1	0,15	0,4	37,5	375
	3	0,0529	0,6089	17,08; 36,58; 60,36	170,23; 365,8; 603,62
	6	0,0230	0,8036	6,83; 14,37; 23,11; 33,83; 47,86; 67,42	68,29; 143,73; 231,09; 338,31; 478,64; 674,14
	9	0,0118	0,9044	3,22; 6,63; 10,34; 14,57; 19,66; 26,18; 35,09; 47,97; 67,48	32,2; 66,26; 103,42; 145,72; 196,62; 261,82; 350,89; 479,72; 674,82
0,6	1	0,1714	0,6	28,57	285,71
	3	0,0602	0,7960	11,8; 26,25; 47,32	118,03; 262,54; 473,24
	6	0,0184	0,9299	3,24; 6,75; 10,95; 16,86; 27,03; 47,88	32,41; 67,55; 109,52; 168,56; 270,31; 478,79
	9	0,0053	0,9841	0,9; 1,82; 3,91; 5,35; 7,62; 11,95; 21,46; 43,9	9,02; 18,25; 28; 39,09; 53,48; 76,15; 119,51; 214,59; 438,99
0,8	1	0,1333	0,8	16,67	166,66
	3	0,0421	0,9266	5,63; 12,75; 27,29	56,32; 127,5; 279,91
	6	0,0049	0,9922	0,6; 1,25; 1,97; 3,18; 6,78; 22,31	6,14; 12,46; 19,75; 31,8; 67,75; 232,12
	9	0,0005	0,9993	0,06; 0,11; 0,17; 0,23; 0,32; 0,5; 1,19; 4,42; 20,35	0,57; 1,14; 1,72; 2,34; 3,16; 5; 11,92; 44,23; 203,52

При постоянном значении h в граничной точке (π, Q) плана должно выполняться равенство $\pi(n) = \pi(n-1)$, т. е.

$$\frac{1 - (1-h)^{n+1}}{1 + \frac{Q[1 - (1-h)^n]}{h(h-nQ)}} = \frac{1 - (1-h)^n}{1 + \frac{Q[1 - (1-h)^{n-1}]}{h[h - (n-1)Q]}}. \quad (6.57)$$

Решая (6.57) относительно Q , получаем некоторое граничное значение Q_n , больше которого ($Q > Q_n$) имеем $n^* = n-1$, меньше — ($Q < Q_n$) $n^* = n$:

$$Q = Q_n = \frac{h}{h + \frac{h}{2(1-h)} + \sqrt{\frac{h^2}{4(1-h)^2} + \frac{[1 - (1-h)^{n-1}]}{h[h - (n-1)Q]}}}. \quad (6.58)$$

Подставляя значение Q_n в (6.56), находим для заданных величин n и h соответствующее значение π .

Пример 1. Пусть $\pi = 0,25$ и $Q = 0,0013$. Определить значения h^* и n^* . Из (6.58) и (6.56) находим, что $h_1^* = 0,04$ при $Q_1 = 0,0013$ и $\pi_1 = 0,2764$ и $h_2^* = 0,03$ при $Q_2 = 0,0013$ и $\pi_2 = 0,1660$. Методом интерполяции определяем, что значениям $\pi = 0,2500$ и $Q = 0,0013$ соответствует $h^* = 0,038$.

Итак, $n_1^* = 15$ (при $h_1^* = 0,04$, $Q_1 = 0,0013$ и $\pi_1 = 0,2764$) и $n_2^* = 11$ (при $h_2^* = 0,03$, $Q_2 = 0,0013$ и $\pi_2 = 0,1660$). Искомое значение n^* , соответствующее значениям $Q = 0,0013$, $\pi = 0,2500$ и $h^* = 0,038$, находим методом интерполяции: $n^* = 14$.

Пример 2. Определить оптимальные планы проверок для наборов исходных данных Q и π , приведенных в табл. 6.3.

Используя выражения (6.58) и (6.56), определяем значения n^* и h^* для каждой пары исходных данных. По найденным значениям n^* и h^* , используя соотношение (6.55), находим оптимальные планы проверок. Результаты расчетов также приведены в табл. 6.3.

§ 6.5. Определение плана проверок системы при длительной эксплуатации и полностью известной информации о надежности

Предположим, что о надежности системы, находящейся в процессе длительной эксплуатации, известно столько сведений, что можно построить функцию распределения времени безотказной работы и считать ее заданной.

Как будет показано ниже, для рассматриваемого случая при использовании в качестве показателя оптимизации оперативного коэффициента готовности интервалы между проверками в оптимальном плане являются не переменными величинами, как это было выше, а постоянны и одинаковы на всем периоде эксплуатации системы.

Предположим, что V — время контроля (проверки) исправной системы, U — неисправной, X — время от момента окончания контроля до отказа системы, Y — время между последовательными моментами контроля (от момента окончания предыдущего контроля до начала последующего контроля). Вначале считаем, что все эти времена явля-

ются случайными с соответствующими функциями распределения $F_v(t)$, $F_u(t)$, $F(t)$, $G(t)$.

Обозначим через Z следующую величину:

$$Z = \begin{cases} Y + V, & \text{если } X > Y, \\ Y + U, & \text{если } X < Y. \end{cases}$$

Основное допущение состоит в предположении, что $\{Z_k\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, т. е. эти величины образуют процесс восстановления с $\mu = M[Z]$ и функцией восстановления $H(t) = M[N_t]$, где $N_t = \max n$. Здесь n — число, при котором $S_n \leq t$, $S_n = Z_1 + Z_1 + \dots + Z_n$. Тогда дифференциал $dH(t)$ можно трактовать как вероятность того, что контроль системы закончится в момент t . Действительно, для малого отрезка Δt

$$M[N_{\Delta t}] = 0 \cdot p_0(\Delta t) + 1 \cdot p_1(\Delta t) + 2p_2(\Delta t) + \dots \approx p_1(\Delta t) + 0(\Delta t),$$

где $p_1(\Delta t)$ — вероятность того, что контроль системы закончится на малом отрезке времени Δt .

В § 2.2 было показано (этот результат верен и здесь), что вероятность заставить систему в произвольный момент t исправной и вероятность того, что система с момента t безотказно проработает время x , определяется выражением

$$p(x, t) = [1 - G(t)][1 - F(t + x)] + \int_0^t [1 - G(\xi)][1 - F(\xi = x)] dH(t - \xi), \quad (6.59)$$

так как за время x система, по предположению, не должна подвергаться контролю (отсюда при $x = 0$ имеем нестационарное значение коэффициента готовности). Выражение (6.59) определяет коэффициент оперативной готовности. Как и в гл. II, он является показателем оптимизации и в рассматриваемой здесь задаче выбора оптимального плана проверок системы.

Произведем в выражении (6.59) замену переменной интегрирования ($\xi = t - \omega$) и воспользуемся узловой теоремой восстановления; в результате получим

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(x, t) = p(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} [1 - G(\omega)][1 - F(\omega + x)] d\omega,$$

где $\mu = M[Z]$. Определим μ . Очевидно, $\mu = M[Y + V]$, если $X > Y$, или $M[Y + U]$, если $X < Y$.

Пусть $\varphi(z) = P\{Z < z\} = P\{X + V < z, X > Y\} + P\{Y + U < z, X < Y\}$. Тогда

$$\varphi(z) = \int_{\substack{y+v < z \\ x > y}} dF(x) dG(y) dF_v(v) + \int_{\substack{y+u < z \\ x < y}} dF(x) dG(y) dF_u(u),$$

следовательно,

$$\mu = \int_0^{\infty} [1 - \varphi(z)] dz.$$

Далее будем считать, что случайные величины V , U и Y постоянны и соответственно равны T_v , T_u и T_k . Тогда эти постоянные величины, являющиеся частными случаями величин V , U и Y , можно формально характеризовать вырожденными функциями распределения:

$$F_v(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \geq T_v, \\ 0, & \text{если } t < T_v; \end{cases} \quad (6.60)$$

$$F_u(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \geq T_u, \\ 0, & \text{если } t < T_u; \end{cases} \quad (6.61)$$

$$G(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \geq T_k, \\ 0, & \text{если } t < T_k. \end{cases} \quad (6.62)$$

Допущение о неслучайном характере V и U можно объяснить тем, что контроль и диагностика технических систем на практике часто осуществляются с помощью автоматических систем контроля, а восстановление — простой заменой отказавшего блока, причем доступ к заменяемому блоку предполагается достаточно удобным (замена любого блока должна занимать примерно одинаковое время).

Переход к выражению (6.62) объясняется тем, что максимум функционала $p(x)$ достигается в классе вырожденных функций $G(t)$ (см. § 2.2), т. е. интервалы между проверками для рассматриваемой системы длительной эксплуатации должны быть одинаковыми.

Последовательно интегрируя выражение для $\varphi(z)$, учитывая (6.60), (6.61), имеем

$$\begin{aligned} \mu &= \int_0^{T_k} dt + T_u \int_{T_k}^{\infty} F(x) dG(x) + T_v \int_{T_k}^{\infty} dF(x) = \\ &= T_k + T_u F(T_k) + T_v [1 - F(T_k)]. \end{aligned}$$

Этот результат можно получить и непосредственно из определения величины μ , используя введенные выше допущения. Теперь выражение для $p(x)$ запишем следующим образом:

$$p(x, T_k) = \frac{\int_0^{T_k} [1 - F(\omega + x)] d\omega}{T_k + T_u F(T_k) + T_v [1 - F(T_k)]},$$

откуда, дифференцируя по T_k и приравнявая полученный результат нулю, имеем

$$\frac{1 - F(x + T_{k_{\text{опт}}})}{\int_0^{T_{k_{\text{опт}}}} [1 - F(x + \omega)] d\omega} = \frac{(T_u - T_v) f(T_{k_{\text{опт}}}) + 1}{T_{k_{\text{опт}}} + (T_u - T_v) F(T_{k_{\text{опт}}}) + T_v}, \quad (6.63)$$

где $f(t) = F'(t)$. Уравнение (6.63) нельзя решить аналитически. Однако существование решения очевидно из качественного анализа поведения его левой и правой частей в точках $T_h = 0$ и ∞ .

Рассмотрим частный случай. Пусть $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Тогда, вводя обозначения $u = \lambda T_{h_{\text{опт}}}$, $a = \lambda T_c + 1$, $a > 1$, $V = u + a$, $V > 1$, из (6.63) получаем

$$e^{-u}(u + a) - 1 = 0. \quad (6.64)$$

Логарифмируя (6.64), имеем

$$-(V - a) + \ln V = 0, \text{ или } \ln V = V - a, V > 1.$$

Так как $\lambda T_{h_{\text{опт}}} = u = V - a$, то искомый (одинаковый на всем периоде эксплуатации) оптимальный интервал между проверками системы равен

$$T_{h_{\text{опт}}} = (V - a)/\lambda,$$

где разность $V - a$ можно определить непосредственно, если построить графики прямой $V - a$ и функции $\ln V$ (рис. 6.2).

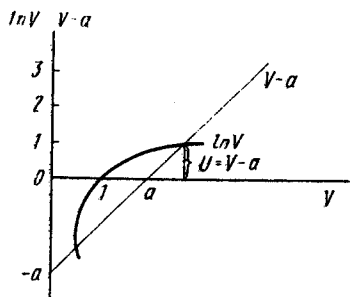


Рис. 6.2

Пример. Пусть имеется устройство, регистрирующее параметры окружающей среды и работающее в труднодоступном для проверки месте. Поэтому проверки не могут осуществляться непрерывно. При отказе регистратора записи информации не происходит.

Для контроля работы регистратора необходимо назначить проверки. Известно, что время безотказной работы регистратора подчиняется экспоненциальному закону со средним $T_0 = 1/\lambda = 150$ сут. Время проверки всей аппаратуры регистратора $T_v = 12$ ч.

Запишем уравнение (6.64) в виде

$$e^{-\lambda T_{h_{\text{опт}}}}(\lambda T_{h_{\text{опт}}} + \lambda T_v) - 1 = 0,$$

откуда $T_{h_{\text{опт}}} \cong 12$ сут.

§ 6.6. Принципы технической реализации оптимальных моделей проверок системы

На практике при большом числе однотипных систем, находящихся в эксплуатации, организация проверок каждой из них в расчетное оптимальное время (например, по методикам, рассмотренным в предыдущих параграфах настоящей главы) при ограничениях на средства контроля и количество обслуживающего персонала, что часто имеет место, встречает большие трудности. Поэтому необходимо, с одной стороны, автоматизировать процесс выдачи рекомендаций о проведении проверок по изложенным выше алгоритмам с некоторым упреждением, а с другой — организовать процедуру проверок так, чтобы проверки проводились в расчетное время с наименьшими потерями, связанными с простоями персонала и средств обслуживания, перемещениями средств обслуживания или их коммутацией и т. д.

Остановимся на двух возможных путях технической реализации приведенных выше оптимальных моделей проверок систем. Предлагаемые устройства могут найти применение на базовых складах хранения сложных однотипных технических систем, требующих проверки с помощью автоматических систем контроля и средств вычислительной техники.

Предполагаем, что сроки проведения проверок систем предварительно рассчитываются для каждой системы и заносятся в журнал дежурного оператора. Дежурный по складу, просматривая журнал, определяет системы, требующие проверки, и вызывает контролируемую машину.

Практически изделия поступают на хранение в большом количестве и неравномерно по времени. Поэтому часто допускаются ошибки в определении очередности проведения проверок и ошибки, связанные с проведением дежурным по складу канцелярской работы. Эти ошибки снижают готовность хранящихся систем к применению.

В приведенном ниже индикаторе сроков проверки хранящихся систем каждое штатное место хранения укомплектовывается реле времени, выходы которых подключаются к управляющему входу автоматической системы контроля через устройство управления очередью.

На рис. 6.3 изображена схема предлагаемого устройства индикации.

В исходном состоянии системы 1 отсутствуют, ключи 3 штатных мест 2 хранения разомкнуты, вычислительное устройство 20 обнулено и индикаторы 6 и 12 находятся в погашенном состоянии. Пусть, далее, на склад поступает на хранение партия систем. При установке каждой такой системы 1 на свое место 2 замыкаются концевые выключатели 3. При этом напряжение питания через контакты выключателей 3 и управляемый умножитель частоты 17 поступает к индикатору 7 номера штатного места. На индикаторной панели высвечивается (цветом, принятым для индикации нормальной ситуации, например зеленым) номер штатного места, на котором размещена хранящаяся система. Одновременно напряжение питания подается на реле времени 4 и в вычислительное устройство 20, где на единицу увеличивается число, записанное в регистре памяти количества годных систем. Индикация числа годных систем, находящихся на складе, производится с помощью индикатора 12. По истечении очередного срока хранения системы (установка сроков хранения производится уставками, задаваемыми на вход 24 реле времени с пульта 18 оператором по цепям 21) сигнал с входа 23 поступает на выход 25 реле времени 5, а затем — на управляющий вход умножителя частоты 17. При этом цветность номера штатного места изменяется на «тревожную» (требующую внимания оператора, например оранжевый цвет), что означает необходимость проведения проверки системы, расположенной на этом месте.

Одновременно с выхода 25 сигнал поступает на устройство управления очередью 13 и через ячейку ИЛИ 26 на индикатор 9 «На очереди». Устройство управления очередью подключает входные цепи автоматической системы контроля 14 к выбранному объекту (по порядку получения заявок на обслуживание; в особых случаях очередность

The diagram illustrates a control system for a machine tool. It features two cross-sectional views of a machine tool head at the top and bottom, showing a rotating workpiece (1) and a tool (2) with a feed mechanism (3). The top view includes electrical inputs U_{num} and U_{num} . The bottom view includes U_{num} and U_{num} inputs, with output signals labeled $\kappa 17$ and $\kappa 4$.

The central block diagram represents the control system, consisting of numerous interconnected blocks and signal lines. Key components include:

- Block 19:** A circular component at the top left, likely a sensor or actuator.
- Block 7:** A block labeled "№п. На очереди" (Queue number).
- Block 10:** A block labeled "НЕ" (Not).
- Block 11:** A block labeled "Годен" (Suitable).
- Block 12:** A block labeled "315".
- Block 13:** A large rectangular block in the center.
- Block 14:** A block below 13.
- Block 15:** A block below 14.
- Block 16:** A block below 15.
- Block 17:** Multiple blocks, some labeled "17" and others "17 ... 17".
- Block 18:** A block at the bottom center.
- Block 20:** A block at the bottom right.
- Block 21:** A circular component with inputs 23, 24, and 25.
- Block 22:** A block labeled "κ 26".
- Block 26:** A block labeled "26".
- Block 27:** A block labeled "27".
- Block 28:** A block labeled "28".
- Block 29:** A block labeled "29".
- Block 30:** A block labeled "30".
- Block 31:** A block labeled "31".
- Block 32:** A block labeled "32".
- Block 33:** A block labeled "33".
- Block 34:** A block labeled "34".
- Block 35:** A block labeled "35".
- Block 36:** A block labeled "36".
- Block 37:** A block labeled "37".
- Block 38:** A block labeled "38".
- Block 39:** A block labeled "39".
- Block 40:** A block labeled "40".
- Block 41:** A block labeled "41".
- Block 42:** A block labeled "42".
- Block 43:** A block labeled "43".
- Block 44:** A block labeled "44".
- Block 45:** A block labeled "45".
- Block 46:** A block labeled "46".
- Block 47:** A block labeled "47".
- Block 48:** A block labeled "48".
- Block 49:** A block labeled "49".
- Block 50:** A block labeled "50".
- Block 51:** A block labeled "51".
- Block 52:** A block labeled "52".
- Block 53:** A block labeled "53".
- Block 54:** A block labeled "54".
- Block 55:** A block labeled "55".
- Block 56:** A block labeled "56".
- Block 57:** A block labeled "57".
- Block 58:** A block labeled "58".
- Block 59:** A block labeled "59".
- Block 60:** A block labeled "60".
- Block 61:** A block labeled "61".
- Block 62:** A block labeled "62".
- Block 63:** A block labeled "63".
- Block 64:** A block labeled "64".
- Block 65:** A block labeled "65".
- Block 66:** A block labeled "66".
- Block 67:** A block labeled "67".
- Block 68:** A block labeled "68".
- Block 69:** A block labeled "69".
- Block 70:** A block labeled "70".
- Block 71:** A block labeled "71".
- Block 72:** A block labeled "72".
- Block 73:** A block labeled "73".
- Block 74:** A block labeled "74".
- Block 75:** A block labeled "75".
- Block 76:** A block labeled "76".
- Block 77:** A block labeled "77".
- Block 78:** A block labeled "78".
- Block 79:** A block labeled "79".
- Block 80:** A block labeled "80".
- Block 81:** A block labeled "81".
- Block 82:** A block labeled "82".
- Block 83:** A block labeled "83".
- Block 84:** A block labeled "84".
- Block 85:** A block labeled "85".
- Block 86:** A block labeled "86".
- Block 87:** A block labeled "87".
- Block 88:** A block labeled "88".
- Block 89:** A block labeled "89".
- Block 90:** A block labeled "90".
- Block 91:** A block labeled "91".
- Block 92:** A block labeled "92".
- Block 93:** A block labeled "93".
- Block 94:** A block labeled "94".
- Block 95:** A block labeled "95".
- Block 96:** A block labeled "96".
- Block 97:** A block labeled "97".
- Block 98:** A block labeled "98".
- Block 99:** A block labeled "99".
- Block 100:** A block labeled "100".

The diagram shows a complex network of signal lines connecting these blocks, representing the control logic of the machine tool.

к индикатору 6. Если система или объект 1, прошедший проверку, годен, то число, записанное в регистре памяти количества годных систем устройства 20, не изменится и показания, индицируемые индикатором 12, также останутся без изменений; если же объект не годен, то это число уменьшится на единицу, что соответственно отразится на показаниях индикатора 12. Далее, если объект годен, то сигнал возбуждения с выхода дешифратора 16 подается только на индикатор год-

ности объектов, причем этот сигнал индицируется зеленым цветом (сигнал возбуждения проходит через устройство 17 без умножения частоты); если же система не годна, то сигнал с выхода дешифратора 16 подается на управляющий вход умножителя 17, а затем на индикаторы 10—11 негодности объекта, в этом случае «засветка» производится «тревожным» цветом, например оранжевым.

По окончании процесса проверки, обработки данных и фиксации на панели 5 соответствующих сигналов оператор принимает решение о выводе объекта на регулировочно-восстановительные работы, если он не годен, или о назначении нового срока проверки, если объект годен. Новый срок назначается путем подачи с пульта оператора новой уставки по цепи 21 на вход 24 реле времени 4, в результате чего сам датчик и индикатор 6 возвращаются в исходное состояние, соответствующее тому, в котором они находились после установки на штатное место новой системы.

В случае необходимости установления готовности хранящихся систем к заранее заданному сроку такой срок в виде кода задается с пульта оператора на индикатор 8 и одновременно на вычислительное устройство 20. Вычислительное устройство по результатам предварительных проверок (данные о них хранятся в устройстве документирования 15) производит прогнозирующие расчеты, а на индикаторную панель 5 выдает следующие данные:

- о системах, срок годности которых истекает до намеченного оператором времени, — через коммутатор-дешифратор 16 и соответствующие умножители частоты 17 на индикаторы 10—11 негодности этих систем;

- о системах, которые до намеченного срока должны быть подвергнуты очередной проверке (но срок годности которых в пределах намеченного оператором времени не истекает) — через соответствующие ячейки ИЛИ 26 к индикаторам 9 «На очереди»;

- о системах, срок годности которых в пределах заданного времени не истекает и которые не требуют проверки в пределах заданного срока, данные не выдаются.

Вычислительное устройство из общего числа хранящихся систем вычитает число систем, срок хранения которых к заданному времени истекает, и систем, которые к заданному времени должны находиться на проверке, и эта разность подается на индикатор 12 общего состояния.

Обкладки электролюминесцентных конденсаторов, из которых выполнены индикаторы панели 5, соединены с передающими устройствами 19 телемеханической системы связи склада с управлением запасами систем данного класса, поэтому в последнем всегда имеется информация о состоянии систем как на отдельных складах, так и о всех имеющихся в наличии запасах.

Таким образом, описанное устройство позволяет автоматизировать процесс контроля на хранения при минимуме затрат. Следует отметить, что работа рассмотренного индикатора сроков проверок хранящихся систем весьма чувствительна к изменению в сети питающего напряжения. Эта сеть должна резервироваться при работе данного индикатора.

Для исключения потери информации, вызываемой, например, кратковременными перерывами в работе систем электроснабжения, можно между выходом электронного реле времени и индикатором сроков проверки хранящихся систем дополнительно установить электро-механическое отсчитывающее устройство, например шаговый искатель.

Принципиальная электрическая схема предполагаемого устройства изображена на рис. 6.4.

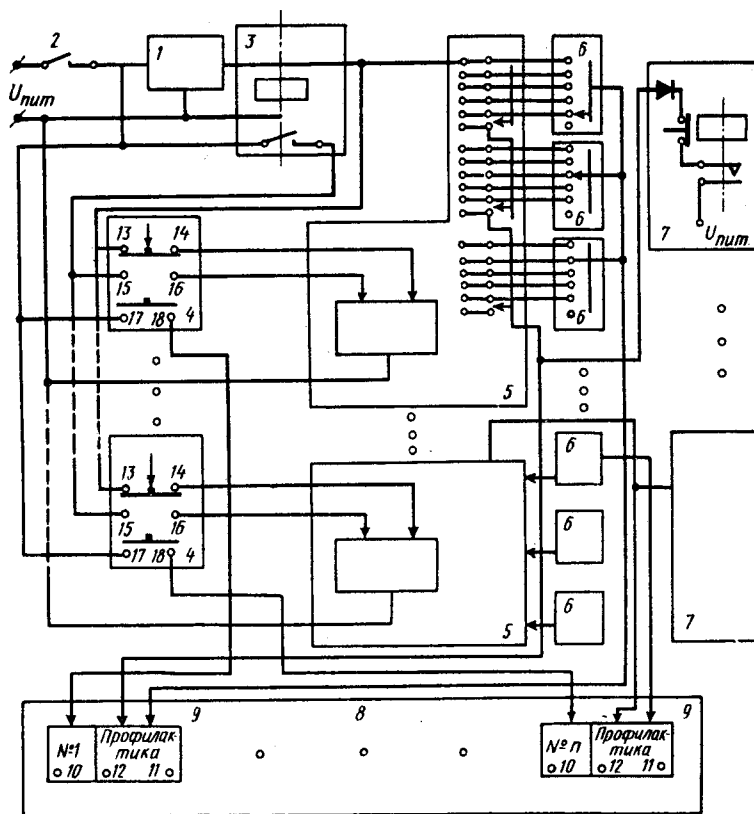


Рис. 6.4

Устройство состоит из штатных мест (на рисунке не показаны) хранения систем, подвергающихся проверкам. Каждое штатное место укомплектовано концевым выключателем 4 с нормально-замкнутыми контактами 13 и 14 и нормально-разомкнутыми контактами 15—18. Кроме того, в него входят: реле времени 1 с выходным ключом 8, электро-механические отсчитывающие устройства 5 (по числу штатных мест хранения), переключатели 6, служащие для задания интервалов проведения профилактических работ, например переключатели галетного типа, устройства самоблокировки 7 и индикаторная панель 8, состоя-

шая из индикаторных табло 9 (по количеству штатных мест хранения). Каждое индикаторное табло состоит из индикатора 10 загруженности штатного места и индикаторов 11 и 12 соответственно нормального и аварийного сроков проведения проверок.

В исходном состоянии штатные места хранения не загружены, концевые выключатели находятся в нормальном состоянии, шаговые искатели 5 — в нулевом положении, ключ 2 разомкнут, реле времени 1 обесточено и индикаторы 10, 11 и 12 погашены.

Перед установкой систем на штатные места хранения для них назначаются сроки проведения проверок, которые в виде уставок задаются с помощью соответствующих переключателей 6. После этого системы устанавливаются на штатные места хранения (при этом срабатывают концевые выключатели 4) и с помощью ключа 2 на схему подается питание.

Напряжение питания через контакты 17, 18 выключателей 4 поступает к индикаторам 10 загруженности штатных мест хранения и «зажигает» их. Одновременно запускается реле времени 1, которое выдает сигналы с помощью ключа 3 с заранее установленной дискретностью, например 10, 15 или 20 ч. Эти сигналы через контакты 15, 16 концевых выключателей поступают на вход шаговых искателей 5 и заставляют их срабатывать. Устройство работает до тех пор, пока ламели шаговых искателей не займут расчетное положение, что произойдет в момент, соответствующий расчетному моменту проведения проверок на выбранной системе. В этом случае с выхода шагового искателя 5 сигнал через переключатели 6 поступит на индикатор 11 нормального (расчетного) срока проведения проверок и «зажжет» его, например, желтым цветом. По этому сигналу оператор вызывает контролирующее устройство и проверяет соответствующую систему.

Если по истечении расчетного срока хранения данную систему проверить невозможно, то устройство продолжает работать и по истечении некоторого количества циклов реле времени (количество циклов выбирается таким, чтобы временная задержка не превышала допустимой задержки в проведении проверок) с выхода шаговых искателей на индикаторы 12 аварийного срока проведения проверок соответствующих индикаторных табло 9 поступят сигналы и «зажгут» их, например, красным цветом. В этом случае оператор должен принимать экстренные меры по обслуживанию системы, допустимый срок проведения проверки которой истек.

Сигнал с выхода шагового искателя подается также на устройство самоблокировки, поэтому если даже обслуживающий персонал не в состоянии проверить систему в течение одного цикла реле времени, то при дальнейшем срабатывании шагового искателя сигнал возбуждения с индикатора 12 не снимается.

Если в процессе работы устройства по каким-либо причинам временно прекращена подача электропитания (с последующим восстановлением цепи электроснабжения), то это вызовет сбой в работе только реле времени 1 и не отразится на положении электромеханических элементов устройства (шаговых искателей 5 и переключателей 6), поэтому ошибка в выдержке заданного временного интервала будет не бо-

лее одного цикла реле времени, незначительного по сравнению с временным интервалом от начала хранения до момента проведения проверки. Кроме того, эта ошибка (в зависимости от величины) может быть скомпенсирована оператором с помощью переключателей 6.

Для проведения проверок систему снимают со штатного места хранения и помещают на контрольную позицию. При этом концевые переключатели переводят в нормальное положение и через нормально-замкнутые контакты 13 и 14 на шаговые искатели подается обнуляющий сигнал, по которому подвижные элементы шаговых искателей занимают свое первоначальное положение.

По окончании проверки систему вновь устанавливают на штатное место хранения и работа возобновляется по описанному принципу. При этом измененный (скорректированный) срок хранения до очередной проверки задается оператором с помощью переключателей 6.

Индикаторы 11 и 12 могут быть выполнены как в виде сигнальных фонарей, так и в виде электролюминесцентных табло, позволяющих изменять цветность в зависимости от информации, заложенной в индицируемом сигнале.

ГЛАВА VII

ПРОБЛЕМНЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ЭКСПЛУАТАЦИИ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

В данной главе рассмотрены некоторые новые и важные вопросы теории эксплуатации сложных систем, решение которых позволит расширить круг задач теории и практики эксплуатации сложных систем и указать направление дальнейших исследований. К перспективным направлениям исследований в области теории эксплуатации сложных систем относится направление, связанное с контролем и диагностикой состояния динамических систем [14].

Существо предлагаемого в [14] нового подхода заключается в автоматическом анализе сигнала сложной формы и оперативном классифицировании и отображении имеющейся в нем диагностической информации. В основе метода лежит теория распознавания образов — многомерная математическая статистика. Контроль и диагностика систем осуществлялись в динамических режимах, обратные связи внутри систем не разрывались. Применение на практике методов контроля и диагностики существенно увеличивает число определяемых отказов и неисправностей сложных систем и в перспективе позволит синтезировать единую систему контроля управления состоянием и диагностики сложных систем в процессе эксплуатации. Вопросы контроля и диагностики сложных динамических систем изложены в § 7.1. Задачи, связанные с адаптивной диагностикой состояния сложной системы, рассмотрены в § 7.2, в котором показано, как по мере накопления опыта ана-

лиза признаков об отказах и неисправностях сложной системы совершенствуется процесс диагностики.

За последние годы за рубежом интенсивно развивается направление исследований в области теории «выживания» сложных систем (теории каннибализма) [31]. Суть этой теории состоит в том, что в сложных системах, всегда имеющих избыточность по надежности (эффективности), в условиях дефицита или отсутствия запасных элементов при отказах системы можно за счет перестановок работающих элементов (при их унификации и стандартизации) поддерживать надежность части систем (или отдельной системы) на приемлемом уровне. Например, при отказе двух систем почти всегда удается сделать одну работоспособной (при отсутствии запасных элементов), а перестановка передних колес автомашины со старыми покрышками и задних колес с менее стертыми покрышками увеличивает безопасность движения.

Такой взгляд на сложную систему, которая «поедает» себя в процессе длительной работы, но продолжает функционировать с приемлемой эффективностью, позволил создать схемы оценок избыточных систем, в которые укладываются все задачи резервирования.

Проблема оценки взаимодействия оператора со сложной системой в процессе эксплуатации не является новой [26]. Однако привлечение современных математических методов исследования к решению задач оценки сложных систем «человек—техника» по количественным показателям является весьма перспективным.

§ 7.1. Принципиальные пути решения комплексной задачи контроля и диагностики сложной системы *

В общей проблеме эксплуатации сложных систем одной из самостоятельных задач является задача определения состояния системы и в случае обнаружения неисправностей — их поиска. Определение состояния системы и поиск неисправностей с помощью традиционных автоматов контроля требует измерения большого числа различных по величине и виду параметров. Это приводит к трудностям построения самих автоматов контроля и систем связи их с контролируемыми объектами, а также к большим затратам времени на контроль и самоконтроль.

Перспективным направлением построения систем контроля является направление, связанное с измерением (оценкой) обобщенных параметров систем на основе методов распознавания образов.

Сформулируем задачу определения состояния системы как задачу распознавания образов. Пусть эволюция состояний системы однозначно описывается с помощью параметра $X(t)$, являющегося случайным эргодическим процессом. Параметр $X(t)$ назовем обобщенным параметром системы. Рассмотрим случай, когда все возможные состояния системы относятся к одному из двух классов A_0 и A_1 , т. е. $P\{X(t) \in A_0 \cup A_1\} = 1$ для произвольного t . Распределения состояний внутри каждого класса описываются условной плотностью вероятности

* Параграф написан В. Ф. Воскобоевым, В. Б. Алексеевой и Ю. А. Юрковым.

$f_i(x/A_i)$, $i = 0, 1$. Обозначим оператор преобразования системы распознавания через $\psi(x)$. Тогда реакцию системы распознавания можно представить в виде выражения

$$S_i = \int_{-\infty}^{\infty} f_i(x/A_i) \psi(x) dx, \quad i = 0, 1. \quad (7.1)$$

Поверхность, разделяющая классы A_0 и A_1 , описывается уравнением

$$S = S_0 - S_1 = 0, \quad (7.2)$$

решающее правило имеет вид

$$\begin{cases} x \in A_0, & \text{если } S > 0, \\ x \in A_1, & \text{если } S \leq 0. \end{cases} \quad (7.3)$$

Для реализации системы, работающей по указанному правилу, необходимо определить условные плотности вероятности $f_i(x/A_i)$ и выбрать оператор $\psi(x)$.

Определение условных априорных плотностей вероятностей по экспериментальным данным затруднений не вызывает. Поэтому остановимся на выборе оператора преобразования, так как от этого в значительной мере зависит физическая реализуемость системы распознавания. Определим вид оператора преобразования, обеспечивающего разделение состояний в соответствии с (7.3), причем выберем $\psi(x) = \psi^*(x)$ так, чтобы

$$|S_0[\psi^*(x)] - S_1[\psi^*(x)]| = \max_{\psi(x)} |S_0[\psi(x)] - S_1[\psi(x)]|. \quad (7.4)$$

Рассмотрим случай, когда распределения $f_i(x/A_i)$ имеют дискретный характер и заданы при некоторых x_j , $j = 1, 2, \dots$. Пусть существует точка $x = x_h$, в которой плотность распределения $f_0(x/A_0)$ отличается от $f_1(x/A_1)$ на $\epsilon > 0$, т. е.

$$f_0(x_h/A_0) - f_1(x_h/A_1) = \epsilon > 0. \quad (7.5)$$

Из условия нормировки следует, что всегда существует по крайней мере еще одна точка x'_k , в которой

$$f_0(x'_k/A_0) - f_1(x'_k/A_1) = -\epsilon. \quad (7.6)$$

Допустим для простоты, что во всех остальных точках x , таких, что $x \neq x_h$ или $x \neq x'_k$, $f_0(x/A_0) = f_1(x/A_1)$. Для дискретного аргумента реакцию системы распознавания (7.1) можно представить в виде

$$S_i = \sum_{j=1}^{\infty} f_i(x_j/A_i) \psi(x_j). \quad (7.7)$$

Тогда при сделанных предположениях разность реакций системы

$$\begin{aligned} S &= \sum_{j=1}^{\infty} [f_0(x_j/A_0) - f_1(x_j/A_1)] \psi(x_j) = \\ &= [f_0(x_h/A_0) - f_1(x_h/A_1)] \psi(x_h) + [f_0(x'_k/A_0) - f_1(x'_k/A_1)] \psi(x'_k) = \\ &= \epsilon \psi(x_h) - \epsilon \psi(x'_k). \end{aligned} \quad (7.8)$$

Очевидно, что при сколь угодно малых $\epsilon > 0$ величина $\epsilon\psi(x_k)$ максимальна, если

$$\psi(x_k) = \delta(x - x_k), \quad (7.9)$$

где $\delta(x - x_k)$ — дельта-функция Дирака. Кроме того, необходимо выбрать знак $\delta(x - x_k)$ так, чтобы разность (7.8) не оказалась равной нулю. Отсюда следует, что оператор преобразования $\psi(x)$ надо выбирать по правилу:

$$\psi(x_k) = \begin{cases} \delta(x - x_k), & \text{если } f_0(x_k/A_0) > f_1(x_k/A_1), \\ -\delta(x - x_k), & \text{если } f_0(x_k/A_0) < f_1(x_k/A_1), \\ 0 & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases} \quad (7.10)$$

В этом случае разность реакций (7.8) $S = 2\epsilon\delta(x - x_k)$ максимальна возможна.

Таким образом, оператор преобразования системы распознавания должен иметь бесконечную амплитуду соответствующего знака. В этом случае любое конечное отличие в распределениях позволяет системе распознавания классифицировать исследуемый сигнал, относя его к одному или другому классу.

При выводе вида оператора преобразования характер распределений $f_i(x/A_i)$ предполагается дискретным. Правило (7.10) не изменится, если $f_i(x/A_i)$ непрерывны или кусочно-непрерывны.

Далее, из способа задания оператора $\psi(x)$ ясно, что, во-первых, он (точнее, последовательность в чередовании знаков) зависит от отношения плотностей $f_i(x/A_i)$ для каждого состояния или группы состояний. Во-вторых, если условные плотности $f_i(x/A_i)$ зависят от времени, то оператор $\psi(x)$ может быть нестационарным.

Рассматриваемый способ определения технического состояния состоит из двух традиционных для систем распознавания этапов: обучения и собственно распознавания.

В процессе обучения нужно выполнить следующие операции: получить условные плотности распределения; после их анализа по правилу (7.10) определить вид оператора $\psi(x)$; найти значение выходной реакции, соответствующее границе между классами.

На этапе распознавания по реализации обобщенного параметра необходимо оценить условную плотность распределения, преобразуя которую и решают задачу определения технического состояния системы (объекта) по правилу (7.3).

Покажем принципиальную реализуемость описанного подхода к распознаванию технического состояния контролируемого объекта на примере различения сигналов разной формы (синусоидальных сигналов с различными видами искажений). Блок-схема экспериментальной установки изображена на рис. 7.1. Блок формирования синусоидального сигнала представляет собой стандартный генератор звуковых колебаний ГЗ-33 с собственным уровнем нелинейных искажений 0,2—0,3%.

Блок формирования сигналов с искажениями предназначен для внесения искажений в синусоидальный сигнал, получаемый с выхода звукового генератора. Он позволяет получить сигналы с искажениями

трех типов: а) с искаженной фронтальной частью; б) с искаженной вершинной частью; в) с искажениями и фронтальной и вершинной частей. В схеме предусмотрена возможность плавного изменения искажений каждого типа.

Нелинейный функциональный преобразователь можно выполнить на базе специального преобразователя, получившего название *политрона* [14]. Основной характеристикой, определяющей преобразование, является время взаимодействия исследуемых сигналов с каждой из десяти пар функциональных пластин. Признак-функция выбирается в виде распределения времени пребывания сигналов на заданном уровне. Генератор шума — стандартный генератор низкочастотного шума Г2-37. Интегратор выполнен на основе стандартных блоков модели-

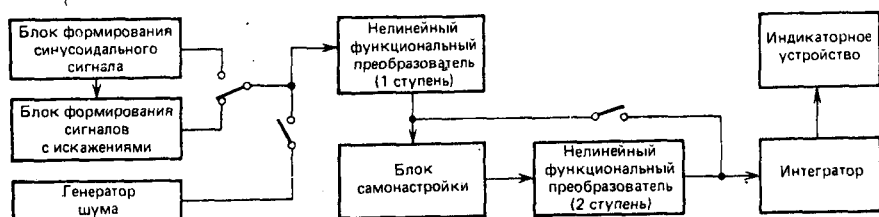


Рис. 7.1

рующей машины МН-7. В качестве индикатора использован цифровой периодомер ЧЗ-22, который отсчитывает время накопления на интеграторе. Описанное устройство позволяет различать сигналы с различным уровнем и типами искажений, классифицировать сигналы при наличии низкочастотных шумов и др.

Проиллюстрируем принцип работы устройства распознавания на примере классификации сигналов, отличающихся по уровню нелинейных искажений во фронтальной части. Пусть заданы два класса сигналов: класс A_0 — уровень искажений $< 14\%$; класс A_1 — уровень искажений $\geq 14\%$. Граница соответствует уровню 14% .

Сформируем оператор преобразования, для чего на вход поочередно подадим сигналы классов A_0 и A_1 , а на функциональные пластины — некоторое постоянное напряжение (последовательно на каждую пару). Результаты измерений выходных реакций помещены в табл. 7.1, в последней строке которой на основании правила (7.10) сформирована последовательность знаков оператора.

Таблица 7.1

Вид сигнала	Функциональные пластины									
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
A_0	1530	1487	1590	1539	1542	1543	1542	1538	1527	1541
A_1	1536	1499	1590	1537	1505	1519	1547	1545	1529	1546
$\Psi(x)$	—	—	0	+	+	+	—	—	—	—

Для границы разделения классов выходная реакция $S = 1405$. Поэтому классификация осуществляется по правилу: если $S < 1405$, то $x \in A_0$, если $S \geq 1405$, то $x \in A_1$.

При подаче сигналов с уровнями искажений 2,0 и 22,0% получены следующие реакции: $S = 1259$ для $k_f = 2,0\%$; $S = 1504$ для $k_f = 22,0\%$.

Применение устройства распознавания позволяет уверенно отнести первый из них к классу A_0 , а второй — к классу A_1 .

Рассмотрим некоторые особенности построения устройства распознавания. Применение однократного нелинейного преобразования позволило различить (с вероятностью, равной единице) сигналы, нелинейные искажения которых отличались на 2% во всем исследуемом диапазоне (от 0,2 до 40%) изменения нелинейных искажений, т. е. одинаково хорошо различались сигналы с уровнями нелинейных искажений, например 0,5 и 2,5% в начале диапазона и 38 и 40% в его конце. Следует отметить, что при реализации нелинейного оператора $\psi(x)$ на политроне амплитуда была равна 10 В.

Одним из способов повышения чувствительности устройства распознавания является последовательное применение нелинейного преобразования с конечной амплитудой, например введение второй ступени преобразования с оператором $\psi_2(x) \neq \psi_1(x)$, что позволяет увеличить разрешающую способность установки, а именно разделять сигналы, отличающиеся на 0,5% нелинейных искажений во всем диапазоне.

Было установлено, что при последовательном применении нелинейного преобразования не полностью реализуются возможности классификации электрических сигналов, так как конструктивные особенности политрона накладывают ограничения на выбор оператора. Дальнейшее увеличение разрешающей способности устройства распознавания может быть осуществлено за счет более глубокого и полного анализа распределений амплитудных значений исследуемых сигналов при введении специального блока самонастройки между блоками первичного и вторичного нелинейных преобразований. Экспериментально показано, что если принять разрешающую способность устройства преобразования с однократным преобразованием за единицу, то при двукратном преобразовании разрешающая способность увеличится в 4,5 раза, а при введении блока самонастройки — в 11,6 раза.

Важным свойством устройств анализа технического состояния ряда систем является возможность распознавания состояния по обобщенному параметру при наличии шумов, которые могут быть обусловлены как собственными внутренними шумами исследуемых объектов (например, радиоэлектронных объектов), так и шумами от внешних источников.

Для системы распознавания с однократным преобразованием были проведены исследования по разделению в шумах сигналов, имеющих различные вид и степень искажений основного (синусоидального) сигнала.

Критерием качества распознавания была выбрана вероятность суммарной ошибки P_Σ , вычисленная при условии равенства ошибок первого и второго рода:

$$P_\Sigma = P\{x < m_2 - \alpha\sigma_2\} + P\{x > m_1 + \alpha\sigma_1\},$$

где m_1 , σ_1 , m_2 , σ_2 — числовые характеристики распределений двух разделяемых сигналов: $\alpha = (m_2 - m_1)/(\sigma_2 + \sigma_1)$.

В результате статистической обработки массивов измерений выходных сигналов получено, что последние распределены по нормальному закону. В табл. 7.2 приведены числовые характеристики распределений выходных сигналов при отношении сигнал/шум, равном 1,5, для двух видов искажений (в вершинной и фронтальной частях). Как видно из табл. 7.2, выходная реакция устройства распознавания монотонно возрастает с увеличением коэффициента искажений. Вероятность суммарной ошибки распознавания практически равна нулю (с точностью до шестого знака после запятой) при выбранном соотношении сигнал/шум. Уменьшение отношения сигнал/шум до 1 и 0,7 (табл. 7.3) приводит к существенному увеличению величины суммарной ошибки (до 0,0002 и 0,2150 соответственно).

В устройстве с двумя ступенями преобразования при наличии шумов различались сигналы, имеющие соответственно уровни искажений 0,2 и 20%.

Таблица 7.2

Тип искажения	Параметры	Неискаженный сигнал, $k_f = 0,2\%$	Процент искажений [k_f]		
			10	20	40
I	Математ. ожидание	1498	1617	1746	2074
	Среднеквадр. откл.	11,8	12,8	15	15,7
II	Математ. ожидание	1519	1670	1780	1978
	Среднеквадр. откл.	9,13	10,5	12,7	14,2

Таблица 7.3

Отношение сигнал/шум	Параметры	Уровень нелинейного искажения, %	Кратность нелинейного преобразования	
			1	2
1	Математическое ожидание, мс	0,2 20	1480 1587	2224 3330
	Среднеквадратическое отклонение, мс	0,2 20	12,5 15,6	43,1 64,9
	Вероятность суммарной ошибки распознавания		0,0002	0
0,7	Математическое ожидание, мс	0,2 20	1483 1517	2514 2889
	Среднеквадратическое отклонение, мс	0,2 20	13,2 14,2	53,6 58,5
	Вероятность суммарной ошибки распознавания		0,2150	0,0008

Статистическая обработка массивов измерений показала, что выходные сигналы двухступенчатого устройства распознавания распределены по нормальному закону с параметрами, представленными в табл. 7.3. В этой же таблице приведены величины вероятности суммарной ошибки распознавания при выбранных отношениях сигнал/шум. Из табл. 7.3 видно, что применение двукратного преобразования снижает вероятность суммарной ошибки распознавания в шумах более чем в 250 раз! Достигнутое увеличение разрешающей способности устройства распознавания электрических сигналов позволяет достоверно судить о состоянии обобщенных параметров обследуемых объектов или при заданной величине ошибки распознавания обеспечивает возможность принятия решения в условиях более интенсивных помех.

До настоящего времени рассматривался в основном процесс распознавания сигналов, отличающихся уровнем нелинейных искажений при их фиксированном типе. Однако имеется возможность различать не только уровень нелинейных искажений, но и их тип. Пусть набор сигналов состоит из: сигнала I с уровнем искажений $k_f = 0,25\%$; сигнала II с искаженной вершинной частью, $k_f = 20\%$; сигнала III с искаженной фронтальной частью, $k_f = 20\%$.

Возможны различные варианты разбиения этих сигналов на классы: 1) $I \in A_0$, $\{II, III\} \in A_1$; 2) $II \in A_0$, $\{I, III\} \in A_1$; 3) $III \in A_0$, $\{I, II\} \in A_1$. Для этих вариантов на основе вышеизложенного были построены операторы, приведенные в табл. 7.4.

Таблица 7.4

Обозначение оператора	№ ФП Вариант	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
ψ_1	1	—	—	+	+	—	—	+	+	—	—
ψ_2	2	—	—	—	—	+	+	—	—	—	—
ψ_3	3	+	+	—	—	—	—	—	—	—	+

Выходная реакция, соответствующая классу A_0 , нормировалась к уровню 1500 ± 15 . В ходе проведенного далее распознавания для каждого оператора были получены следующие выходные реакции (табл. 7.5).

Таблица 7.5

Оператор	Выходная реакция системы при подаче сигнала типа		
	I	II	III
ψ_1	1502	2017	3005
ψ_2	5424	1506	8778
ψ_3	3338	8050	1514

Как следует из табл. 7.5, при любом варианте разбиения сигналов на классы обеспечивается однозначное выделение выбранного сигнала.

Из рассмотренных примеров видно, что применение устройства распознавания позволяет решать задачу определения состояния и поиска неисправностей системы. Тип состояний зависит от физического смысла решаемой задачи. Если, например, класс A_0 содержит все работоспособные состояния, а класс A_1 — неработоспособные, то состояния классифицируются по принципу «работоспособен—отказал» (решается задача сигнализации о наличии отказа). Если в класс A_1 включить состояния области оптимальной остановки (см. § 3.2 и 3.3), а в класс A_0 — все остальные из заданного множества, то система распознавания обеспечит выработку рекомендаций о необходимости проведения предупредительного восстановления из условий экстремума заданного критерия качества (решаются задачи сигнализации о работоспособном состоянии или необходимости проведения технического обслуживания, ремонта).

Возможность различать и выделять сигналы, отличающиеся типом нелинейных искажений, открывает новую принципиальную возможность создания устройств локализации неисправностей.

§ 7.2. Адаптивный алгоритм диагностики состояния сложной системы

В настоящем параграфе изложен подход, связанный с адаптивной диагностикой состояния сложной системы и основанный на работах в области создания методов автоматической обработки больших массивов информации [16, 17]. Ниже рассмотрен метод диагностики состояния в сложных системах, основанный на запоминании в структуре специального графа (сети) наборов признаков, сопровождающих отказ или неисправность. Хранение информации о признаках неисправностей в форме специального графа удобно, так как дает возможность наглядно выделять наборы признаков (типы неисправностей), облегчая тем самым процесс технической диагностики.

Отыскание неисправностей — сложный процесс, на который даже опытный обслуживающий персонал тратит большую часть активного времени ремонта. Поэтому разработка мер по его упрощению позволит сократить не только основную долю времени активного ремонта, но и уменьшить физическую и умственную нагрузку обслуживающего персонала.

Необходимость поиска неисправностей в сложных системах предъявила особые требования к специалистам, осуществляющим этот поиск.

В отличие от других видов деятельности по техническому обслуживанию систем процесс поиска неисправностей следует в большей мере отнести к творческой деятельности, так как при его реализации вырабатывается способность решать задачи и находить новые стратегии поиска.

Специальные инженерно-психологические исследования показали, что значительные резервы повышения эффективности мыслительной деятельности связаны с внедрением новых структурных средств выдачи информации, разработкой методов поиска решений, исследованием закономерностей и механизмов процесса решения задач человеком с целью автоматизации указанного процесса и разработки устройств

(программ)-«советчиков» (более подробно эти вопросы применительно к эксплуатации системы в целом рассмотрены в гл. IX, здесь же они рассмотрены только применительно к диагностике состояния сложной системы).

С помощью устройств (программ)-«советчиков» обслуживающий персонал получит возможность оперативно использовать накопленный опыт, а «рекомендации» этих устройств служат дополнительным веским доводом для принятия правильного решения.

Современный уровень науки позволяет раскрыть некоторые принципиальные моменты сложнейших информационных регуляторных механизмов, которые лежат в основе психических процессов при принятии решений. Так, представляется несомненным построение с помощью специального «языка» информационных аналогов (моделей) решаемых человеком задач. На создание таких моделей человек тратит значительное время и энергию, а эффективность мыслительной деятельности зависит от уровня сформированности модели. А это значит, что даже предварительная разработка элементов информационных моделей по поиску неисправностей облегчит умственную нагрузку обслуживающего персонала, позволит оперативно использовать накопленный опыт.

Рассмотрим общую схему поиска решений при отыскании неисправностей при следующих начальных данных:

1) исходная ситуация — система отказала, неисправность не обнаружена;

2) целевая ситуация — неисправность определена;

3) набор разрешенных действий (операторов) задан.

Предполагается, что все ситуации описаны наборами признаков. Требуется с помощью заданных операторов получить ситуацию, удовлетворяющую целевой.

Решением задачи является последовательность операторов, преобразующих исходную ситуацию в целевую (такая задача получила название *задачи преобразования*). Поиск решения задачи преобразования можно интерпретировать как поиск пути в связном графе, вершины которого соответствуют ситуациям, а ребра — операторам. Решениям соответствуют пути между вершиной, представляющей исходную ситуацию, и вершинами, представляющими целевые ситуации.

Необходимость применения специальных методов поиска решений возникает, если граф настолько велик, что поиск путей простым перебором невозможен. В этом часто встречающемся случае нужны некоторые правила, по которым можно было бы отобрать наиболее предпочтительный оператор и ситуацию на каждом шаге поиска. Такой отбор фактически осуществляется в процессе поиска неисправностей. Накопленный практический опыт поиска неисправностей можно отобразить в форме элементов информационных моделей в программах-«советчиках».

1. Модель объекта управления и описания протекающих в нем процессов является семиотической (знаковой) и строится на основе текстов, написанных на некотором языке. Модель описания ситуаций также является семиотической, базирующейся на некотором (возможно, естественном) языке.

2. Модель объекта управления и протекающих в нем процессов создается специалистом либо до ввода в ЭВМ, либо на основании анализа поведения объекта в различных ситуациях, проводимого самой ЭВМ. В последнем случае в ЭВМ должны быть заложены механизмы для осуществления такого анализа.

3. Модель управления объектом строится либо на основе обучения, либо на основе опыта, накапливаемого ЭВМ в процессе работы.

4. Для построения модели управления необходимо наличие специальных механизмов обобщения, с помощью которых строится обобщенное описание (понятие) задач и ситуаций.

Формирование понятий (обобщенной информации), по сути, является процессом выделения закономерностей, свойственных объектам управления. На этих принципах разработан метод поиска неисправностей в сложных системах, в основу которого положено обобщенное описание классов неисправностей с помощью методов, развитых в рамках направления, получившего название *формирование понятий с помощью растущих пирамидальных сетей* [17].

Метод растущих пирамидальных сетей служит для запоминания информации, представленной неупорядоченными наборами признаков. Анализ известных типов организации памяти, ускоряющих информационный поиск, показывает, что метод растущих пирамидальных сетей, являясь новым типом организации памяти, обеспечивает более эффективный информационный поиск. В растущих пирамидальных сетях информация хранится не в виде кодов отдельных слов, а запоминается в структуре сети (памяти). Внесение новой информации в такую память вызывает перераспределение связей между запоминающими элементами, т. е. изменение структуры сети (памяти).

Введем ряд определений. *Датчиком признака неисправности* назовем элемент сети, который сигнализирует о наличии конкретного признака неисправностей.

Ассоциативным назовем элемент с одним выходом и n входами ($n > 1$), одновременный приход на которые сигнализирует о наличии признаков неисправностей, с датчиками признаков неисправностей соединены все входы ассоциативного элемента.

Распознающим неисправности назовем элемент, выход на который сигнализирует о неисправности блока.

Множество, включающее ассоциативный элемент a и все элементы, от которых на графе сети имеются пути в направлении стрелок к элементу a , назовем *субмножеством* элемента a .

Множество всех элементов, к которым на графе сети имеются пути в направлении стрелок от элемента a , назовем *супермножеством* элемента a .

Растущая пирамидальная сеть представляет собой множество датчиков признаков и ассоциативных элементов, соединенных между собой с выполнением следующих условий: а) выход элемента может быть соединен с любым числом входов других элементов, не включенных в его субмножество; б) каждый вход не может быть соединен более чем с одним выходом. Такую сеть можно представить ориентированным графом (рис. 7.2, $a, б, в$).

Элементы из сублимножества элемента a , связанные с ним непосредственно, образуют 0 -сублимножество элемента.

Элементы из супермножества элемента a , связанные с ним непосредственно, образуют 0 -супермножество элемента.

Алгоритм ввода. До ввода информации о неисправностях сеть состоит только из датчиков признаков неисправностей. Алгоритм ввода, по сути, является алгоритмом построения сети.

Введение в сеть информации о неисправностях осуществляется одновременным «возбуждением» датчиков признаков конкретной неисправности. К алгоритму ввода необходимо обращаться при вводе каждой очередной неисправности. Алгоритм ввода описывается следующими двумя правилами.

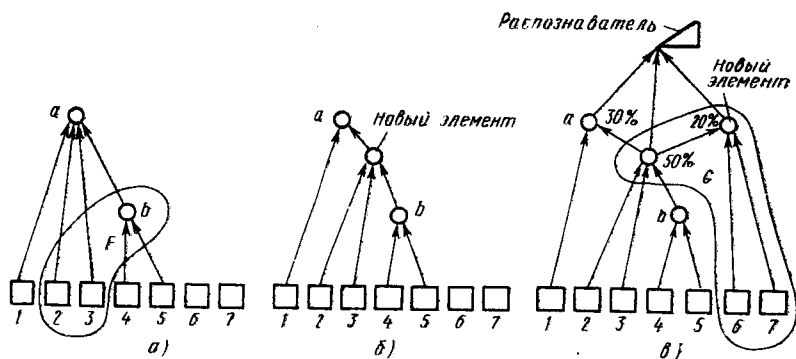


Рис. 7.2

Правило 1. Если при восприятии неисправности «возбуждается» множество элементов F , составляющее часть 0 -сублимножества некоторого ассоциативного элемента a и содержащее не менее двух элементов, связи элемента a с элементами из множества F ликвидируют (при вычерчивании сети на бумаге стирают). К сети же присоединяют новый ассоциативный элемент, входы которого соединяют с выходами всех элементов множества F , а выход — с одним из входов элемента a .

Действие правила 1 показано на рис. 7.2, б. После применения правила 1 применяют правило 2.

Правило 2. Пусть G — множество «возбужденных» элементов сети, не имеющих ассоциативных элементов в своих 0 -супермножествах. Если G содержит не менее двух элементов, то к сети присоединяют новый ассоциативный элемент, входы которого соединяют с выходами всех элементов из множества G .

Действие правила 2 показано на рис. 7.2, в.

В результате применения правил 1 и 2 получают пирамиду, в основании которой находятся датчики признаков неисправностей, ее вершины соответствуют типам неисправностей, входящим в описание понятия неисправного блока. Понятие неисправного блока — набор всех типов неисправностей. Статистику по признакам неисправностей со-

бирают следующим образом. В процессе работы после обнаружения неисправности заполняют таблицу описания неисправностей (табл. 7.6).

Таблица 7.6

№ п/п	Наименование отказавшего блока	Признаки неисправностей и их коды		
		A_1 (нет развертки)	B_1 (четвертая лампочка на контрольном пульте горит)	C_1 (напряжения питания в норме)
1	Блок 1	+	+	+
2	Блок 2	+	—	—

Каждая строка табл. 7.6 является описанием одной неисправности в признаках, ее сопровождающих. Знаком «+» отмечают наличие признака, знаком «—» — его отсутствие. В табл. 7.6 фиксируют каждую неисправность независимо от того, была она раньше или нет.

Для удобства заполнения табл. 7.6 рекомендуется заполнять перечень признаков неисправностей (табл. 7.7). В этом случае в графе «Признаки неисправностей и их коды» (табл. 7.6) записывают только коды признаков.

Таблица 7.7

№ п/п	Код признака неисправности	Описание признака неисправностей
1	A_1	Нет развертки
2	B_1	Четвертая лампочка контрольного пульта горит
3	C_1	Напряжения питания в норме

К признакам неисправностей, занесенным в табл. 7.6, применяют правила 1 и 2, в результате чего получают пирамидальную сеть, вершины которой соединяют с распознавателями отказа блока, выход на распознаватели свидетельствует о появлении неисправности, имевшей ранее место и описанной набором признаков соответствующей вершины. Например, пирамида, возглавляемая элементом a (рис. 7.2, a), служит для запоминания набора признаков соответствующей вершины. Напирамида, возглавляемая элементом b (признаки 4, 5), соответствует набору признаков, которые могут входить в описание различных типов неисправностей.

Каждому вершинному элементу сети ставят в соответствие «вес» — процент неисправностей от общего числа отказов, сопровождаемый набором признаков соответствующей вершины. Чем больше вес вершины, тем вероятнее появление отказа, описанного набором признаков этой вершины.

Для иллюстрации на рис. 7.3 изображена часть сети, хранящая информацию о неисправностях системы. При появлении, например, признака, который входит в набор 1, 2, 3 и 1, 9, 10, целесообразно в пер-

вую очередь проверить, есть ли признаки 2 и 3, так как «вес» набора 1, 2, 3 (40%) больше «веса» набора 1, 9, 10 (10%).

Если в процессе диагностики выявляется неверное распознавание отказавшего блока (сеть недостаточно «обучена»), то новую информацию вводят по приведенным правилам. Сеть изменит структуру, фиксируя новую информацию.

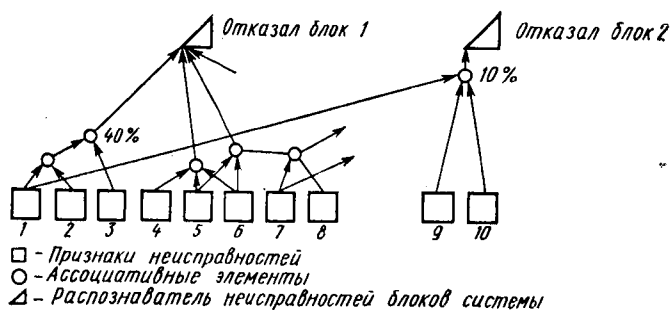


Рис. 7.3

Метод растущих пирамидальных сетей позволяет наглядно запоминать большое количество типов неисправностей и логические связи между их признаками, обеспечивая тем самым их быстрый поиск. Методические рекомендации по поиску неисправностей в форме растущих пирамидальных сетей особенно полезно иметь на стадии освоения новой сложной техники, когда обслуживающий персонал еще не имеет достаточного опыта и знаний.

§ 7.3. Проблема эксплуатации системы в условиях отсутствия или ограниченности запасного комплекта элементов

В настоящем параграфе рассмотрено интересное направление, связанное с автономной или почти автономной эксплуатацией систем. Показано, в каких системах возможна рассматриваемая ниже перестройка структуры после отказов. При этом использованы идеи некоторых зарубежных авторов [50], изложенные и развитые В. В. Плямоватым [31].

1. Сложные системы с «выживанием». Сложную техническую систему можно представить в виде совокупности взаимосвязанных простых устройств, разновидность которых ограничена. Отличия между отдельными сложными системами, их индивидуальность определяются, в принципе, количеством составляющих простых устройств и характером связей между ними.

Действительно, например, любая радиотехническая система состоит из совокупности простейших элементов: резисторов, конденсаторов, индуктивностей и т. п. Эту же систему можно представить как совокупность взаимосвязанных различных усилителей, преобразователей форм и частоты сигналов, генераторов и других аналогичных устройств. Характер связей определяет и то общее, что позволяет классифицировать и анализировать сложную техническую систему.

Рассмотрим класс сложных систем, имеющих следующие особенности.

1) совокупность простых устройств, образующих систему, можно разбить на группы однотипных по принципу действия, выполняемым функциям или другим признакам устройств;

2) связь между отдельными группами или отдельными устройствами «слабая». Здесь понятие «слабая связь» интуитивно и количественно не определяется. Слабость связи говорит о том, что изъятие устройства не приводит к потере работоспособности всей системы, а лишь ухудшает качество функционирования.

Примером такой системы является цех по изготовлению деталей, технологический процесс производства которых требует обработки на нескольких типах станков. Отказ одного из станков ухудшает работу цеха, но не выводит его из строя. Вторым примером служит автомобильное хозяйство, состоящее из совокупности однотипных или разнотипных автомобилей. Отказ одного или нескольких автомобилей не выводит из строя всего автохозяйства. Пусть автомобильное хозяйство испытывает дефицит запасных частей. В процессе функционирования, по мере появления отказов, накапливаются неисправные автомобили. В таких условиях часть из них можно восстановить за счет других и тем самым приостановить процесс ухудшения качества всей системы. Иными словами, путем частичного «самоуничтожения» система продлевает существование на заданном уровне функционирования, т. е. «выживает».

Приведем еще один интересный пример. Рассмотрим сложную систему — самолет, имеющий на борту радиотехническое устройство управления стрельбой и радионавигационное устройство. Каждое из них питается от собственного источника электроэнергии. Источники имеют одинаковые технические характеристики и взаимозаменяемы. При отказе одного из источников самолет полностью выполняет свои функции, так как задачи стрельбы и навигации решаются, как правило, последовательно во времени. В данном примере самолет «изменяет» свою структуру во времени, «уничтожая» на некоторый период одно устройство в интересах другого, «выживает» в условиях отказа. Выживание позволяет поддерживать функционирование системы за счет перестановок исправных устройств из менее ответственных мест в более ответственные взамен отказавших. Такие перестановки возможны в случае, если в структуре отсутствуют тесные связи между отдельными устройствами, т. е. при их определенной автономности. Выживание предполагает зависимость состояния системы как от состояния отдельных устройств, так и от их места в структурной схеме.

Рассмотрим абстрактную систему, состоящую из двух устройств, каждое из которых может выполнять две функции: x_1 и x_2 . Обозначим показатель качества функционирования системы через W . Пусть $W = S_2$, если система одновременно выполняет x_1 и x_2 . Считаем, что $W = S_1$ соответствует случаю, когда одна из функций не выполняется; $S_1 \leq S_2$. Равенство $W = 0$ справедливо, если система не выполняет ни одной функции. Факт, что i -я функция не выполняется, обозначим через $\bar{x}_i$. Состояние системы определяется набором четырех величин $x_i^{(j)}$, где верхний индекс определяет номер устройства, выполняющего i -ю функцию. При $W = 0$ имеем единственный набор величин

$$\{\bar{x}_1^{(1)} \bar{x}_2^{(1)} \bar{x}_1^{(2)} \bar{x}_2^{(2)}\}. \quad (7.11)$$

Равенство $W = S_1$ возможно в двух случаях: 1) произвольная, но только одна величина принимает значение $x_i^{(j)}$, а остальные — $\bar{x}_i^{(j)}$; 2) состояние системы характеризуется одним из наборов:

$$\{\bar{x}_1^{(1)} x_2^{(1)} \bar{x}_1^{(2)} x_2^{(2)}\}, \{x_1^{(1)} \bar{x}_2^{(1)} x_1^{(2)} \bar{x}_2^{(2)}\}. \quad (7.12)$$

Равенство $W = S_2$ имеет место, если: 1) одно устройство полностью исправно; 2) состояние системы характеризуется одним из следующих наборов:

$$\{\bar{x}_1^{(1)} x_2^{(1)} x_1^{(2)} \bar{x}_2^{(2)}\}, \{x_1^{(1)} \bar{x}_2^{(1)} \bar{x}_1^{(2)} x_2^{(2)}\}. \quad (7.13)$$

Сравнивая выражения (7.12) и (7.13), видим, что и в том, и в другом случае система состоит из двух наполовину отказавших устройств, количество невыполняемых функций также одинаково, а показатели качества функционирования отличаются.

Применительно к записи (7.13) система «выжила» за счет превращения двух частично функционирующих устройств в одно полностью исправное.

2. Модель системы с «выживанием». В дальнейшем будет предполагать, что выполнение определенной функции эквивалентно наличию исправного элемента в данном месте структурной схемы. Итак, любую сложную систему, обладающую свойством выживать, представим в виде набора n элементов

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}. \quad (7.14)$$

Величина α_i определяет состояние элемента и положение в наборе.

Для простоты положим, что каждый элемент может находиться в двух состояниях: работоспособном ($\alpha_i = 1$) и состоянии отказа ($\alpha_i = 0$), (это верно и если элемент отсутствует вообще). В произвольный момент времени система описывается n -мерным вектором. Каждая его компонента может принимать значение 0 или 1. Количество всевозможных состояний системы равно 2^n . Два вектора, описывающие состояние системы, можно сравнивать. Векторы v и v' удовлетворяют неравенству $v \leq v'$ только тогда, когда для компонент справедливо неравенство $v_i \leq v'_i$. Каждому значению вектора соответствует определенное значение показателя качества функционирования W . Множеству 2^n векторов однозначно сопоставлено множество C показателя качества функционирования. Без потери общности положим $C = \{0, 1, 2, \dots, Q\}$. Не делая предположений о характере функциональной зависимости $W(v)$, естественно считать, что функция $W(v)$ монотонна, т. е. из $v \leq v'$ следует $W(v) \leq W(v')$. При $v = \{0, 0, 0, \dots, 0\}$ вектор $W = 0$, при $v = \{1, 1, 1, \dots, 1\}$ вектор $W = Q$.

Наличие избыточности в сложных системах позволяет весь набор элементов представить в виде набора групп $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N\}$. Величина β_j определяет совокупность α_i -х, которые выполняют одинаковые функции (совокупность блонкинг-генераторов, совокупность резисторов, совокупность приемников и т. п.). Предположим, что в пределах β_j все элементы взаимозаменяемы.

Две системы можно сравнивать не только по состоянию всех компонент α_i , но и по состоянию элементов только данного типа β_j . Для этого рассмотрим $r_j = \sum v_i$. Суммирование ведется по составляющим вектора v , для которых номер i принадлежит номерам α_i из группы β_j . Учитывая, что v_i принимает только значения 0 и 1, величину r_j можно трактовать как количество работоспособных элементов группы β_j . Для любого v выполняется двойное неравенство $0 \leq r_j \leq |\beta_j|$, где $|\beta_j|$ — число элементов множества β_j .

Два вектора v и v' назовем r_j -эквивалентными, если количество работоспособных элементов группы β_j у них одинаково, т. е. $r_j(v) = r_j(v')$.

Обозначим r_j -эквивалентность так: $v^j \sim v'$. Два вектора v и v' назовем просто эквивалентными (пусть $v \sim v'$), если они r_j -эквивалентны для любого $1 \leq j \leq N$. Иными словами, $v \sim v'$ предполагает равное количество исправных элементов во всех группах. Множество эквивалентных или r_j -эквивалентных векторов обозначим $[v]$ или $[v]_{r_j}$.

Взаимозаменяемыми могут быть только элементы одной группы или одного типа, поэтому операция обмена местами элементов системы соответствует преобразованию вектора v в вектор v' в пределах множества эквивалентности $[v]_{r_j}$. Свойству выживания теперь можно дать математическую интерпретацию: выживание — это такое преобразование вектора v (обозначим это преобразование через T) в вектор v_1 , при котором вектор v_1 не выходит за пределы множества эквивалентности:

$$v_1 = T(v) \in [v].$$

Из $v^j \sim v'$ следует, что $T(v)^j \sim v'$ и $T(v)^j \sim T(v')$. Аналогично, из $v \sim v'$ вытекает $T(v) \sim v'$ и $T(v) \sim T(v')$. Операция выживания преобразует и показатель качества функционирования $W(v)$ в $W[T(v)]$. Изменение качества функционирования после выживания определяется разностью $W[T(v)] - W(v)$. Если эта разность неотрицательна, то выживание считают рациональным. Рациональность определяется равенством

$$W[T(v)] = \max_{v' \in [v]} W(v').$$

Могут существовать несколько типов рационального выживания, которые объединяются в класс G такой, что из $T \in G$ следует

$$W(v) \leq W[T(v)] = W^0(v).$$

Преобразование выживания не изменяет количество исправных элементов типа β_j , а лишь меняет их местами:

$$W^0(v) = \max_{v \in [v]_{r_j}} W(v).$$

До сих пор не учитывалась зависимость W от различных групп элементов. Чтобы учесть это влияние, введем преобразование S_i . Действие S_i на вектор v заключается в том, что в текущем значении v все $\alpha_i \notin \beta_j$ принимают значения, равные 1, а $\alpha_i \in \beta_j$ остаются без изменения. Преобразование S_i эквивалентно предположению, что все элементы, отличные от элементов группы β_j , абсолютно надежны.

Преобразование S_i — неубывающее, т. е. $S_i(v) \leq S_i(v_1)$ при $v \leq v_1$. При $v \sim v_1$ имеем $S_i(v) \sim S_i(v_1)$; кроме того, очевидно свойство S_i : если $v^{r_j} \sim v_1$, то $S_i(v) \sim S_i(v_1)$. К вектору $S_i(v)$ можно применить преобразование выживания, при этом вектор v не выходит за пределы множества эквивалентности: $T[S_i(v)] \sim S_i(v)$. В частности, $T[S_i(v)] \sim S_i(v)^{r_j} \sim v$.

Преобразования S_i и T не перестановочны, тем не менее если $v^{r_j} \sim v_1$, то $v^{r_j} \sim T(v_1)$, так что $S_i(v) \sim S_i[T(v_1)]$. Применяя преобразование T к вектору $S_i(v)$, получаем

$$T[S_i(v)] \sim S_i[T(v_1)].$$

Качество функционирования системы после преобразования S_i характеризуется величиной $W[S_i(v)] = W_i(v)$. На основании определения S_i справедливо неравенство $W(v) \leq W_i(v)$.

Показатель качества функционирования для систем с выживанием. Пусть состояние системы в некоторый момент времени определяется некоторым v . Каждому $S_j(v)$, где $1 \leq j \leq N$, соответствует величина $W_j(v)$, причем $W(v) \leq W_j(v)$ для любого j . Превращение некоторого неравенства при фиксированном j в равенство свидетельствует, что качество функционирования системы в данный момент определяется только элементами группы β_i . Существуют системы, для которых с достаточной степенью точности может выполняться равенство

$$W(v) = \min_{1 \leq j \leq N} W_j(v). \quad (7.15)$$

Такие системы можно назвать *системами с определяющим типом элементов*. Конкретное значение j , для которого справедливо (7.15), может изменяться в зависимости от состояния системы. Доказано [50] утверждение, что если для системы выполняется равенство (7.15), то при рациональном (целесообразном) выживании

$$W^0(v) = \min_{1 \leq j \leq N} W[T(S_i(v))] = \min_{1 \leq j \leq N} W^0[S_i(v)] = \min_{1 \leq j \leq N} W_j^0(v). \quad (7.16)$$

Более того, если справедливо (7.16), то для целесообразного выживания преобразования T и S_i перестановочны, т. е.

$$\min_{1 \leq j \leq N} W\{T[S_i(v)]\} = \min_{1 \leq j \leq N} W\{S_i[T(v)]\}.$$

Для систем с определяющим типом элементов и способных к выживанию можно получить явное выражение для $W^0(v)$. Отметим, что каждое множество эквивалентности $[v]_{r_j}$ соответствует множеству состояний этих систем, для которых $W^0(v)$ и $W_j^0(v)$ постоянны в пределах $[v]_{r_j}$. В свою очередь, множество эквивалентности можно рассматривать как подмножество некоторого множества $z_{j,C}$. Множество $z_{j,C}$, где $1 \leq j \leq N$, $0 \leq C \leq Q$ (по определению, дискретная величина C является текущим значением W), объединяет различные $[v]_{r_j}$, для которых

$W_j^0(v) \geq C = \text{const.}$ Очевидно, что $z_{j,1} \supset z_{j,2} \supset \dots \supset z_{j,Q}$, $1 \leq j \leq N$. Для каждого вектора v из множества $z_{j,C}$ существует минимальное число элементов $k_j(C)$ типа β_j , $1 \leq j \leq N$, для которого выполняется неравенство $W_j^0(v) \geq C$. Условием того, что этот вектор находится в множестве $z_{j,C}$, является выполнение неравенства $k_j(C) \leq r_j \leq |\beta_j|$ для всех $1 \leq j \leq N$.

Переходу вектора v из $z_{j,C}$ в $z_{j,C+1}$ соответствует увеличение $W_j^0(v)$ ровно на единицу. Введем в рассмотрение индикаторную функцию

$$I_z = \begin{cases} 1 & \text{при } v \in z_{j,C}, \\ 0 & \text{при } v \notin z_{j,C}. \end{cases}$$

Функция $I_z = 1$ для каждого $z_{j,C}$, если $r_j \geq \max_{1 \leq j \leq N} k_j(C)$ для произвольного $v \in z_{j,C}$. Если $\min_{1 \leq j \leq N} W_j^0(v) = C_1$, то равенство

$$I_{\{r_j \geq \max_{1 \leq j \leq N} k_j(C)\}} = \prod_{j=1}^N I_{\{r_j \geq k_j(C)\}} = \prod_{j=1}^N I_{\{r_j \geq k_j(C)\}} = 1$$

справедливо для любого $C \leq C_1$. При $C = C_1 + 1$ найдется хотя бы один вектор $v \notin z_{j,C}$ и

$$\prod_{j=1}^N I_{\{r_j \geq k_j(C)\}} = 0.$$

Таким образом, если для системы выполняется условие $W^0(v) = \min_{1 \leq j \leq N} W_j^0(v)$, то

$$W^0(v) = \sum_{c=1}^Q \prod_{j=1}^N I_{\{r_j \geq k_j(c)\}} = \sum_{c=1}^Q \prod_{j=1}^N I_{\{r_j \geq k_j(c)\}}. \quad (7.17)$$

Действительно, при $\min W^0(v) = C_1$

$$\sum_{c=1}^Q \prod_{j=1}^N I_{\{r_j \geq k_j(c)\}} = \sum_{c=1}^{C_1} \prod_{j=1}^N I_{\{r_j \geq k_j(c)\}} + \sum_{c=C_1+1}^Q \prod_{j=1}^N I_{\{r_j \geq k_j(c)\}} = C_1.$$

Условие (7.15) очень сильное, однако существует много типов сложных систем, которые ему удовлетворяют. Прежде всего это системы, состоящие из совокупности однотипных устройств (автопарки, заводские цехи и т. п.). Условию (7.15) удовлетворяют и системы с определяющим типом элементов.

Предположим теперь, что вектор v — случайная величина, т. е. количество исправных элементов данной группы r_j случайным образом изменяется (уменьшается) во времени. Предположим также, что вероятность отказов элементов данной группы не зависит от места элемента в группе и отказы взаимно независимы. Показателем качества функционирования системы является случайная величина

$$W^0[v(t)] = W^0(t) = \sum_{c=1}^Q \prod_{j=1}^N I_{\{r_j(t) \geq k_j(c)\}}. \quad (7.18)$$

Обозначим через M оператор математического ожидания, тогда из (6.18) следует, что

$$\begin{aligned} M\{W^0(t)\} &= P\{W^0(t) \geq C\} = \sum_{c=1}^Q \prod_{j=1}^N M\{I_{\{r_j(t) \geq k_j(c)\}}\} = \\ &= \sum_{c=1}^Q \prod_{j=1}^N P\{r_j(t) \geq k_j(c)\}, \end{aligned} \quad (7.19)$$

где $P\{r_j(t) \geq k_j(c)\}$ — вероятность того, что в момент t количество исправных элементов типа β_j больше или равно некоторой величине $k_j(c)$.

Зависимость (7.19) имеет общий характер. Из нее как частные случаи можно получить выражения для вероятности безотказной работы простой системы. Действительно, для простых систем множество значений W определяется множеством $C = \{0, 1\}$ и $M\{W^0(t)\}$ имеет смысл вероятности того, что $C=1$, или вероятности безотказной работы; количество типов элементов N равно общему количеству элементов n ; $k_j(C) = 1$. Выражение (7.19) принимает вид

$$P\{W=1\} = \prod_{j=1}^n P\{r_j(t) \geq 1\}. \quad (7.20)$$

Формула (6.20) определяет вероятность безотказной работы простой системы с раздельным резервированием, где $r_j(t)$ — кратность резервирования элемента j в момент t , а $P\{r_j(t) \geq 1\}$ — вероятность того, что в момент t число работающих элементов за номером j не меньше единицы. При $r_j(t) = 1$ получаем вероятность безотказной работы n последовательно соединенных элементов.

Рассмотрим следующий пример. В цехе имеется три станка по обработке деталей. Для обработки каждой детали требуются три операции. Первая операция на всех станках осуществляется с вероятностью $p_1 = 0,5$, вторая — с вероятностью $p_2 = 0,6$, третья — с вероятностью $p_3 = 0,8$. Найдем вероятность того, что система из трех станков будет функционировать, т. е. выпускать детали, если она: а) не способна выживать; б) приспособлена к выживанию.

В первом случае необходимо найти вероятность $P(C \geq 1)$ исправности не менее одного станка. Станок исправен, если на нем можно выполнять все три операции. Событие $C \geq 1$ противоположно событию $C = 0$, заключающемуся в том, что все станки неисправны:

$$P(C \geq 1) = 1 - P(C = 0),$$

где $P(C = 0)$ — вероятность одновременного отказа трех станков, $P(C \geq 1) = 1 - (1 - p_1 p_2 p_3)^3 = 1 - (1 - 0,5 \cdot 0,6 \cdot 0,8)^3 = 0,55$.

Пусть система способна к выживанию. За показатель качества функционирования выберем число исправных станков. В данном примере количество групп $N = 3$, $k_j(1) = 1$ и $|\beta_j| = 3$. Используя формулу (7.19), находим вероятность того, что исправен хотя бы один станок:

$$P\{W^0 \geq 1\} = \sum_{c=1}^1 \prod_{j=1}^3 P\{r_j \geq 1\} = \prod_{j=1}^3 P\{r_j \geq 1\}.$$

Дискретная случайная величина r_j имеет биномиальное распределение, поэтому

$$P\{r_j \geq 1\} = \sum_{i=1}^3 \binom{3}{i} p_j^i (1-p_j)^{3-i} = 1 - (1-p_j)^3,$$

где вероятность p_j равна соответственно 0,5, 0,6 и 0,8. Далее находим: $P\{r_1 \geq 1\} = 0,87$, $P\{r_2 \geq 1\} = 0,94$, $P\{r_3 \geq 1\} = 0,99$, откуда $P\{W^0 \geq 1\} = 0,82$.

Для систем с выживанием легко получить аналитическое выражение времени спада функционирования. Формула (7.19) определяет математическое ожидание величины $W^0(t) \geq C$. Момент, когда $W^0(t) = C$, и определяет время спада функционирования. Из формулы (7.19) очевидно, что

$$P\{W^0(t) \geq C\} = \prod_{i=1}^N P\{r_j(t) \geq k_j(C)\}.$$

единица — функционированию согласно техническим требованиям. Система полностью откажет, если все $\alpha_{ji} = 0$. Каждая строка матрицы моделирует одну вполне определенную функцию. Равенство $\alpha_{ji} = 0$ для фиксированного j отражает факт невыполнения некоторой функции, хотя система продолжает существовать.

Пусть в произвольный момент состояние системы характеризуется матрицей

$$\Theta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \end{vmatrix}.$$

Под действием оператора выживания система трансформируется к виду

$$T(\Theta) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \end{vmatrix}.$$

Считается, что оператор действует мгновенно. Произвольный элемент α_{ji} может находиться в состоянии 1 с вероятностью P_{ji} и в состоянии 0 с вероятностью $1 - P_{ji}$. Вероятности P_{ji} независимы по двум индексам.

Качество выполнения j -й функции зависит от количества функционирующих элементов в j -й строке. Матрице состояний $T(\Theta)$ сопоставляется матрица событий размера $N \times (h+1)$:

$$A[T(\Theta)] = \begin{bmatrix} a_1(h) & a_1(h-1) & \dots & a_1(r) & \dots & a_1(0) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_j(h) & a_j(h-1) & \dots & a_j(r) & \dots & a_j(0) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_N(h) & a_N(h-1) & \dots & a_N(r) & \dots & a_N(0) \end{bmatrix}. \quad (7.25)$$

Событие $a_j(r)$ заключается в том, что r элементов типа j функционируют. Каждое событие $a_j(r)$ соответствует длине ряда, составленного из функционирующих элементов в одноименной строке матрицы Θ . Матрицы (7.24) и (7.25) обладают следующими свойствами: при перестановке строк матрицы не изменяются; перестановка элемента α_{ji} в пределах строки изменяет матрицу (7.24). Перестановка элементов строки в матрице (7.25) недопустима. Перестановка α_{ji} в матрице (7.24) в пределах столбца возможна.

Все события $a_j(r)$ в j -й строке составляют полную группу. Множество $W = \{0, 1, \dots, C, \dots, W_{\max} = h\}$. Вероятность того, что в данный момент в j -й строке функционирует ровно r элементов,

$$P_j(r) = \sum_{m=1}^{\binom{h}{r}} \prod_{i \in Y_m} P_{ji} \prod_{i \in Y_m}^{h-r} (1 - P_{ji}), \quad (7.26)$$

где $\binom{h}{r}$ — количество всевозможных выборок r элементов из h ; Y_m — подмножество m -й выборки из множества B_j , составляющего строку;

$$Y'_m = B_j / Y_m. \quad (7.27)$$

При равенстве вероятностей P_{ji} по индексу i

$$P_j(r) = \binom{h}{r} P_j^r (1 - P_j)^{h-r}. \quad (7.28)$$

Таким образом, каждому событию $a_j(r)$ матрицы A соответствует вероятность $P_j(r)$. На матрице событий A определена матрица вероятностей

$$P = \begin{bmatrix} P_1(h) & P_1(h-1) & \dots & P_1(r) & \dots & P_1(0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_j(h) & P_j(h-1) & \dots & P_j(r) & \dots & P_j(0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_N(h) & P_N(h-1) & \dots & P_N(r) & \dots & P_N(0) \end{bmatrix}. \quad (7.29)$$

Свойства матрицы P вытекают из свойств матрицы A : сумма вероятностей в каждой строке равна 1; матрица не изменяется, если строки поменять местами; перестановка столбцов не допускается; вероятности событий в различных строках независимы. Множество всех событий $a_j(r)$ должно однозначно отображаться в множество W . В качестве такого отображения можно выбрать соответствие между вероятностью события $P\{W \geq C\}$ и вероятностью пересечения событий, заключающихся в том, что в каждой строке количество исправных элементов не менее r :

$$P\{W \geq C\} = P\left\{\bigcap_{j=1}^N a(k_j \geq r_j)\right\} = \prod_{j=1}^N P\{k_j \geq r_j\}. \quad (7.30)$$

Из физических соображений ясно, что вероятность $P\{W \geq C\}$ монотонна по аргументу C и возрастает при уменьшении C .

Согласно (7.30),

$$P\{W=C\} = P\{W \geq C\} - P\{W \geq C-1\} = \prod_{j=1}^N P\{k_j \geq r_j\} - \prod_{j=1}^N P\{k_j \geq r_j + 1\}. \quad (7.31)$$

Вероятности $P\{k_j \geq r\}$ определяются матрицей P :

$$P\{k_j \geq r_j\} = \sum_{k=r}^h P_j(k). \quad (7.32)$$

Идея процедуры вычислений основана на том, что события в каждой строке составляют полную группу, а две произвольные строки независимы.

Рассмотрим матрицу, состоящую из двух строк, принадлежащих матрице (7.29):

$$P = \begin{bmatrix} P_1(h) & \dots & P_1(r) & \dots & P_1(0) \\ P_2(h) & \dots & P_2(r) & \dots & P_2(0) \end{bmatrix}. \quad (7.33)$$

Возможны три варианта совершения события, вероятность которого равна $P\{W=C\}$: произошли события $a_1(r)$ и $a_2(k > r)$ с результирующей вероятностью $P_1(r) \sum_{k=r+1}^h P_2(k)$; произошли события $a_2(r)$ и $a_1(k > r)$ с результирующей вероятностью $P_2(r) \sum_{k=r+1}^h P_1(k)$; произошло событие $a_1(r) \cap a_2(r)$ с вероятностью $P_1(r) P_2(r)$.

Таким образом, для матрицы (7.33)

$$P\{W=C\} = P_1(r) \sum_{k=r+1}^h P_2(k) + P_2(r) \sum_{k=r+1}^h P_1(k) + P_1(r) P_2(r). \quad (7.34)$$

Вероятности $P\{W=C\}$ составляют новую строку размера $h+1$. Вновь полученную строку можно объединить описанным выше способом с третьей строкой матрицы (7.29) и т. д., пока не получится одна строка

$$[P\{W=W_{\max}\} P\{W=W_{\max}-1\} \dots P\{W=C\} \dots P\{W=0\}], \quad (7.35)$$

которая определяется отображением матрицы P в плотность распределения случайной дискретной величины W . Если вероятности $1 - P_{ji}$ в формулах (7.26) и (7.28) рассматривать как распределение времени функционирования элемента $F_{ji}(t)$, то распределение (7.35) как функция времени характеризует процесс функционирования сложной системы во времени. Если P_{ji} — вероятность правильного включения элемента α_{ji} , то распределение (7.35) служит обобщенным критерием безошибочных действий оператора.

Сложная система может иметь различное количество элементов в строках. Алгоритм получения распределения (7.35) и в этом случае остается прежним, если предварительно перенормировать все строки к строке максимального размера. Нормировка состоит в присвоении вероятностям $P_j(r_j)$ новых номеров $P_j(r_j^{(1)})$,

где $r_j^{(1)} = r_j \frac{h_{\max}}{h_j}$. Например, если $h_{\max} = 8$, $h_j = 6$, то $h_1^{(1)} = 8$, $h_1^{(1)} - 1 \approx 7$ и т. д. Получаем новую нумерацию для строки $h_j = 6$: $\{8, 7, \emptyset, 5, 4, 3, \emptyset, 1, 0\}$. Тем местам строки, для которых номер отсутствует, присваиваем значение вероятности $P\{\emptyset\} = 0$ и нормируем строку в масштабе $h_{\max} = 8$. В результате получаем матрицу с равновеликими строками, к которой применимо изложенное выше правило.

§ 7.4. Проблема оценки взаимодействия оператора и сложной системы в процессе эксплуатации*

Известно несколько методов, позволяющих априорно или апостериорно оценить деятельность человека (оператора) при взаимодействии его со сложными техническими системами. К ним относятся [29]: структурный метод, основанный на подробном анализе структуры деятельности с последующим описанием алгоритмов преобразования информации человеком как совокупности дискретных операций определенного типа; метод статистического эталона, основанный на оценке совокупности количественных показателей (времени и вероятности безошибочного выполнения операций), получаемых при выполнении оператором конкретных операций в зависимости от факторов сложности операторской деятельности; операционно-психофизиологический метод, основанный на декомпозиции деятельности по критерию инвариантности психологического содержания отдельных действий и учитывающий влияние на качество работы оператора специфической и неспецифической напряженности; метод оценки надежности технических объектов с учетом деятельности людей (операторов и обслуживающего персонала); метод оценки надежности и устойчивости систем «человек — машина» (СЧМ), основанный на концепции постоянного конфликта между человеком и машиной; методы, основанные на моделировании деятельности человека-оператора с использованием теории массового обслуживания, ситуационного управления, теории автоматического регулирования.

Из аналитических методов наиболее разработанным является структурный метод. Он применим главным образом для систем, в которых возможна дифференцированная оценка безошибочности выполнения и вероятности своевременного выполнения заданного алгоритма. При

* Параграф написан автором совместно с М. Т. Богдановым и В. В. Корневым.

этом используется смещенное гамма-распределение времени выполнения операций. Структура деятельности в случае применения этого метода состоит из таких функциональных единиц, как сенсорные, моторные, логические блоки, блоки задержки, блоки с обратной связью, диагностические блоки и блоки самоконтроля. В рассматриваемом методе приняты следующие допущения: независимость функциональных единиц в структуре деятельности, однозначно детерминированная последовательность их выполнения.

Метод статистического эталона наиболее подходит для СЧМ, в которых безошибочность выполнения алгоритмов взаимодействия зависит от времени, выделяемого на их выполнение. При этом используется смещенное экспоненциальное распределение времени безошибочного выполнения операций. Метод не требует детального анализа выполняемых операций и связей между ними. Он может быть применен, если имеется возможность с помощью стандартизованного эксперимента получить исходные данные по типовым действиям, характерным для данной конкретной деятельности.

В основе операционно-психофизиологического метода лежит разделение деятельности оператора на составляющие операции, для которых известны исходное значение времени, точность и надежность выполнения, а также значение психофизиологической напряженности, с последующим синтезом структуры деятельности и получением интегральных характеристик. При этом учитываются закономерности изменения характеристик в различных условиях деятельности и закономерности интеграции отдельных действий и операций в единый процесс. Предлагается перечень относительно простых инвариантных и типовых действий человека, которые входят в состав любой деятельности, для них даются числовые значения исходных показателей. Существенной особенностью этого метода является учет таких психофизиологических обусловленных факторов, как влияние специфической напряженности (темпы поступления сигналов, их значимость и т. п.) и взаимовлияние совмещенных (параллельных и последовательных) действий.

Рассмотрим возможные случаи исследования надежности технических систем с учетом деятельности операторов в процессе их эксплуатации. Введем следующие допущения [43, 44, 51, 53]: появление отказа технической системы и появление ошибки оператора — независимые редкие случайные события; появление двух (и более) одноименных событий за период $(t, t + \Delta t)$ применения системы практически невозможно; способность к компенсации ошибки и к безошибочной работе — независимые свойства операторов. Обычно выделяют четыре типа технических систем с операторами.

1. Системы с некомпенсируемыми ошибками операторов и отказами техники. Невозможность компенсации последствий отказов может быть следствием отсутствия обмена информацией между оператором и технической системой, отсутствием самопроверки деятельности оператора и т. д.

Для безотказной работы технической системы с некомпенсируемыми ошибками и отказами необходимо, чтобы она не отказывала и опе-

ратор не ошибался. Поэтому вероятность безотказной работы такой системы в течение времени $(t_1, t_1 + \Delta t)$

$$P_{\text{СЧМ}_1}(t_1, \Delta t) = P_T(t_1, \Delta t) P_0(t_1, \Delta t),$$

где $P_T(t_1, \Delta t)$ — вероятность безотказной работы технической системы в течение времени $(t_1, t_1 + \Delta t)$; $P_0(t_1, \Delta t)$ — вероятность безошибочной работы операторов в течение времени Δt при условии, что техническая система работает безотказно; t_1 — общее время эксплуатации технической системы; Δt — рассматриваемый период применения.

СЧМ с некомпенсируемыми ошибками операторов и отказами техники сравнительно редко встречаются на практике. Надежность таких систем можно считать нижней границей надежности СЧМ.

2. Системы с компенсацией ошибок операторов. В таких системах операторы своевременно исправляют (компенсируют) часть допущенных ими ошибок. Если учесть, что вероятность одновременного появления двух ошибок и более пренебрежимо мала и считать, что каждая ошибка может быть «мгновенно» компенсирована с вероятностью ρ , то вероятность безотказной работы СЧМ в течение времени $(t_1, t_1 + \Delta t)$

$$P_{\text{СЧМ}_2}(t_1, \Delta t) = P_T(t_1, \Delta t) \{P_0(\Delta t) + [1 - P_0(t)] \rho\}.$$

Компенсация ошибок — дополнительный способ повышения надежности СЧМ. Введение в конструкцию технических систем приспособлений, облегчающих исправление ошибок (аварийные краны, выключатели и т. п.), повышает надежность СЧМ.

3. Системы с компенсацией последствий отказов технических систем. Компенсация последствий отказа приводит к увеличению надежности систем. Такие системы работают безотказно, если оператор не совершал сшибок, техническая система не отказывает или отказывает, но благодаря вмешательству оператора выполняет свои функции. Вероятность безотказной работы системы в течение времени $(t_1, t_1 + \Delta t)$

$$P_{\text{СЧМ}_3}(t_1, \Delta t) = P_c(\Delta t) [P_T(t_1, \Delta t) + P_y(t_1, \Delta t, \delta)],$$

где $P_y(t_1, \Delta t, \delta)$ — вероятность безотказной работы СЧМ в течение заданного времени $(t_1, t_1 + \Delta t)$ с компенсацией последствий отказа при условии, что в момент δ произошел отказ ($t_1 < \delta < t_1 + \Delta t$).

4. Системы с компенсацией ошибок операторов и последствий отказов технических систем. В таких системах операторы не только снижают надежность систем из-за возможных ошибок, но и повышают эту надежность, компенсируя последствия отказа техники. СЧМ такого вида работает безотказно в течение времени $(t_1, t_1 + \Delta t)$ при следующих возможных событиях: система не отказывала и оператор не совершал ошибки; техническая система не отказывала, оператор совершил ошибку, но исправил (компенсировал) ее; оператор не совершал ошибки, техническая система отказывала, но благодаря вмешательству оператора СЧМ выполняла свои функции; оператор совершил ошибку, но исправил (компенсировал) ее, техническая система отказывала, но благодаря вмешательству оператора СЧМ выполняла свои функции.

Вероятность безотказной работы СЧМ с компенсацией ошибок и отказов в течение времени $(t_1, \Delta t)$

$$P_{\text{счм}} = \{P_0(\Delta t) + [1 - P_0(\Delta t)]\rho\} [P_T(t_1, \Delta t) + P_B(t_1, \Delta t, \delta)].$$

В настоящее время для исследования и оценки качества деятельности оператора широкое применение находят методы моделирования с использованием физических, логических и математических моделей. Основу физических моделей составляют реальные элементы исследуемой СЧМ, макеты, тренажеры, на которых проводятся эксперименты с участием операторов. Логические модели представляют собой формализованное описание отдельных составляющих деятельности и связей между ними в виде системы обобщенных уравнений с последующим аналитическим решением. Моделирование на математических моделях базируется на возможности имитации основных закономерностей деятельности с использованием ЭВМ. Моделирование с помощью ЭВМ имеет преимущество перед другими методами, состоящее прежде всего в возможности учета значительного количества случайных событий, имитация которых возможна с помощью ЭВМ. Например, для предсказания надежности СЧМ с помощью статистического моделирования можно учесть характеристики человека и оборудования. Из многих разработанных математических моделей оценки качества деятельности с помощью ЭВМ практически значимые результаты получены при использовании методов, основанных на формализации деятельности оператора с использованием математического аппарата теории массового обслуживания и передаточных функций [44].

Характерным для моделирования деятельности оператора с помощью теории массового обслуживания является представление этой деятельности в виде обслуживания потока заявок. При моделировании входного потока осуществляют следующие операции: формирование входного потока; выбор заявок и постановка их в очередь; обслуживание заявок оператором; определение качества и степени обслуживания (обслужена, частично обслужена, получила отказ); формирование дополнительных потоков заявок, возникающих из-за ошибок оператора.

Эти модели позволяют определять такие характеристики деятельности, как вероятность и время успешного выполнения задания, количественные характеристики загрузки оператора, вероятность обслуживания отдельных заявок с определенным качеством и т. д.

Широкое распространение для оценки деятельности оператора получили математические модели, основанные на методах автоматического регулирования [53]. Обычно эти модели включают как составные части в более общие модели систем с замкнутым контуром. Функционирование технических звеньев такой системы описывается с помощью передаточных функций, поэтому и деятельность оператора также пытаются описывать передаточной функцией.

С развитием современной теории автоматического регулирования (теории оптимального управления) в настоящее время разрабатываются модели оптимального управления, осуществляемого человеком. Модель оптимального управления летательным аппаратом, осуществляемого человеком, изображена на рис. 74. Основополагающим

в разработке таких моделей является тот факт, что хорошо обученный и тренированный оператор ведет себя «почти оптимальным образом» при решении требуемой задачи. В модели, приведенной на рис. 7.4, предполагается, что человеку присущи недостатки, связанные с временными задержками τ и искажениями (случайность) при восприятии и обработке информации. Случайность моделирует непосредственно, учитывая связь белого шума «наблюдения» $\xi_n(t)$ с каждым воспроизведенным выходным сигналом и белого шума «двигателя» $\xi_m(t)$ с каждым управляющим входным сигналом. Характеристики человека моделируют каскадной комбинацией фильтра Калмана (оценивающее устройство) и упреждающего (прогнозирующего) устройства. Фильтр

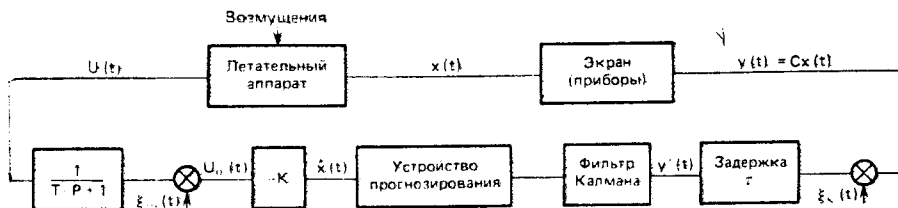


Рис. 7.4

Калмана определяет состояние летательного аппарата на основе воспроизведенной информации. Упреждающее устройство оптимальным образом компенсирует запаздывание τ и выдает оптимальные коэффициенты усиления K , которые изменяют по предсказанной оценке состояния для получения желаемого результата управления. Коэффициенты усиления выбираются таким образом, чтобы минимизировать соответствующий стоимостный функционал, связывающий цели управления с решаемой задачей. Необходимо заметить, что выбор стоимостного функционала является нетривиальной задачей и предполагает понимание и учет всех требований, предъявляемых к СЧМ.

Движение летательного аппарата описывается векторно-матричным уравнением

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + W(t),$$

где $x(t)$ — состояние летательного аппарата; $u(t)$ — управляющий входной сигнал; $W(t)$ — внешние возмущения.

При управлении летательным аппаратом оператор воспринимает информацию не о векторе $x(t)$, а о векторе $y'(t) = Cx(t - \tau) + \xi_n(t - \tau)$ с помехами (шумом «наблюдения») и временной задержкой τ . Основой модели человека является фильтр Калмана, который обеспечивает наилучшую оценку $\hat{x}(t - \tau)$ состояния летательного аппарата в соответствии с уравнением фильтра [10, 53]

$$\dot{\hat{x}}(t - \tau) = A \hat{x}(t) + B \hat{u}(t - \tau) - G[Cx(t - \tau) + \xi_n(t - \tau) - C\hat{x}(t - \tau)]. \quad (7.36)$$

В уравнении (7.36) содержится точная модель динамики летательного аппарата, представленная с помощью заданных матриц A , B , C и G .

Определив динамику летательного аппарата, условия задачи и ограничения оператора, можно получить множество показателей качества работы как оператора, так и СЧМ. В частности, можно получить среднее значение и дисперсию параметра любого состояния, выходного или управляющего сигнала системы. Описанную модель «человека-оператора» можно, в частности, применить для расчета надежности СЧМ при заходе самолета на посадку.

Встречаются, например, [43] работы, в которых для оценки надежности и стабильной работы СЧМ предлагается подход, основанный на концепции постоянного конфликта между человеком и машиной. Основное предположение при этом состоит в том, что конфликт между человеком и машиной возникает из-за потребностей в «средствах» для своего существования (функционирования). Для того чтобы человек или машина могли выполнять возложенные функции, они нуждаются в «средствах» для своего существования (функционирования). Например, для работы машины необходимы: энергия; техническое обслуживание; гарантированный ресурс; обученные операторы и др. Человек же нуждается в хороших условиях труда, отдыхе, ему также присущи психологические, эмоциональные, социологические и духовные потребности. Отсюда следует, что надежность и стабильность работы СЧМ зависят от потребностей в «средствах» для существования (функционирования), так как они представляют величины, зависящие от времени. В самом деле, даже в течение рабочего дня потребности человека изменяются и во многих случаях наблюдаются изменения в процессе функционирования СЧМ.

Воздействие человека на машину определяется отношением меры потребностей машины, удовлетворяемой им, к мере всех ее потребностей. Аналогично определяется воздействие машины на человека. Производная воздействия по времени характеризует процессы, определяющие надежность и устойчивость СЧМ.

Процесс функционирования СЧМ, выходной сигнал $y(t)$ которой в течение всего времени работы надо поддерживать в определенных границах, чтобы обеспечить успешное выполнение задания, можно рассматривать как последовательную смену ее состояний. Очевидно, что выходной сигнал системы $y(t)$ — случайная функция времени. Отказом системы следует считать выход сигнала $y(t)$ за установленные границы. Если тем или иным способом найден выходной сигнал СЧМ и установлены его границы, то для определения выбросов за допустимые пределы как проявлений нарушения надежности системы можно воспользоваться теорией выбросов случайных процессов.

Известно, что для определения числа выбросов за допустимые пределы, если система линейная, можно воспользоваться спектральным анализом. Если число выбросов в единицу времени достаточно мало, то приближенно можно считать появление последовательных выбросов независимыми редкими событиями, подчиняющимися закону

Пуассона. Тогда вероятность безотказной работы системы

$$P(t) = e^{-\lambda t},$$

где λ — интенсивность потока выбросов.

Таким образом, в настоящее время для оценки надежности сложных систем имеются различные подходы и методы, которые пока еще находятся в стадии разработки. Некоторые из них могут быть с успехом использованы для оценки надежности СЧМ уже на ранних этапах проектирования.

ГЛАВА VIII

ЗАДАЧИ ГРУППОВОЙ ЭКСПЛУАТАЦИИ СИСТЕМ С ОПТИМИЗАЦИЕЙ

В практике эксплуатации группы однотипных систем возникают сложные и интересные задачи. Ниже рассмотрены: задача оптимальной организации эксплуатации группы однотипных систем (связанная с перераспределением средств, занятых обслуживанием систем), требующих два вида обслуживания (подготовку и ремонт). Критерием оптимизации является интенсивность потока обслуженных требований на выходе системы обслуживания [39];

задача оптимальной организации эксплуатации группы однотипных систем, когда допускаются перерывы в обслуживании. Критерием оптимизации может быть один из критериев системы обслуживания, например среднее время ожидания обслуживания системой (для удобства изложения обслуживаемые системы назовем объектами) [34];

задача планирования группового технического обслуживания с рандомизацией (учетом случайных временных характеристик при обслуживании объектов) [3].

На примерах этих задач дается представление о новом научном направлении в области эксплуатации сложных систем, связанном с организацией эксплуатации групп систем. Все изложенное ранее в основном касалось обслуживания одной системы. При групповой эксплуатации систем все полученные результаты остаются в силе и должны быть учтены при длительном периоде эксплуатации систем. Глобальные задачи групповой эксплуатации систем не изучаются. Ограничимся рассмотрением эксплуатации систем при проведении определенных работ (ремонт, подготовки и т. д.), а не всего комплекса работ в течение длительного времени эксплуатации.

Сначала кратко остановимся на подходах к решению задач групповой эксплуатации систем.

§ 8.1. Состояние вопроса групповой эксплуатации сложных систем

В последнее десятилетие для исследования вероятностных стационарных характеристик длительно эксплуатируемых однотипных технических систем применяли результаты теории массового обслуживания. На взгляд автора, использование этих результатов затруднено, так как при исследованиях предполагается неизменной структура системы массового обслуживания (СМО), что приводит к получению фиксированных вероятностных характеристик СМО, чаще всего для установившегося режима работы (стационарных характеристик). При этом, с одной стороны, невозможно отыскать наилучшую структуру системы массового обслуживания, а с другой стороны, возникает вопрос, удовлетворяют ли нас полученные стационарные вероятностные характеристики СМО (например, вероятность заставить систему свободной от обслуживания требований или занятой обслуживанием фиксированного числа требований и др.). Поэтому необходимо исследовать СМО с переменной структурой (под переменной структурой понимаем изменение, например, интенсивности обслуживания требований) для максимизации выходного потока обслуженных требований в единицу времени.

С целью разработки моделей СМО с переменной структурой проанализируем так называемые экстремальные задачи теории массового обслуживания [11].

В рамках допущений о марковости процессов, характеризующих эксплуатацию групп систем, удобно использовать так называемый итерационный алгоритм Р. А. Ховарда [40]. Перспективным при исследовании задач групповой эксплуатации систем является использование результатов решения и других экстремальных задач теории массового обслуживания.

Впервые предприняли попытку решить экстремальные задачи ТМО с помощью метода оптимального управления Л. С. Понтрягина его ученики, которые для стохастического варианта применили это управление при отыскании оптимального режима использования обслуживающего прибора с изменяемой интенсивностью обслуживания требований, поступающих на его вход. Если требование заставляло прибор занятым, то оно направлялось в бункер, а при заполненном бункере — терялось. Задача заключалась в нахождении моментов переключения интенсивности обслуживания прибора с минимальной на максимальную для максимизации потока требований на выходе прибора обслуживания в единицу времени.

Интересны следующие два подхода. Учет при исследовании оптимальной стратегии управления однолинейной системой массового обслуживания следующих факторов: случайного времени обслуживания, случайного времени безотказной работы и восстановления прибора, возможности в любой момент времени произвести контроль прибора. Предполагается, что при отказе прибора время, затраченное на обслуживание требований, теряется, т. е. после восстановления прибора требование обслуживается заново. Задача оптимизации состоит в максимизации функции $f(t, \tau)$ — математического ожидания числа требований, обслуженных за время t при условии, что в начальный момент времени возраст обслуживающего прибора равен τ .

Второй подход заключается в том, что при рассмотрении однолинейной СМО с i потоками пуассоновского типа на входе ($\lambda_i \neq \lambda_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots$) учитывают следующие моменты: в СМО образуется очередь и за определенный промежуток времени ожидания в очереди требование i -го потока штрафует величину C_i . Время обслуживания требований имеет вид произвольной функции распределения. Задача состоит в выборе оптимальной дисциплины обслуживания, минимизирующей средний убыток за определенный промежуток времени.

Можно рассматривать СМО с потерями и с двумя приборами обслуживания, произвольным распределением независимых требований на входе и произвольным временем обслуживания требований каждым прибором с интенсивностями обслуживания μ_1 и μ_2 соответственно. Положим $\mu_1 > \mu_2$. Пусть, например, имеются две группы обслуживания: одна, состоящая из опытных специалистов, а другая — из специалистов, не имеющих опыта самостоятельной практической работы. Можно попытаться для минимизации стационарной вероятности потери требования в случае, когда оба прибора свободны, посылать поступившие тре-

бования на первый из них (интенсивность обслуживания μ_1) и найти оптимальное значение μ_1 при условии, что $\mu_1 + \mu_2$ фиксировано. В частном случае (когда на входе имеется простейший поток требований) известно соотношение [11]:

$$\mu_1 = \frac{\sqrt{1+1/\rho}}{1+\sqrt{1+1/\rho}} (\mu_1 + \mu_2),$$

где $\rho = \lambda/(\mu_1 + \mu_2)$, λ — интенсивность входящего потока.

Можно также решать задачу оптимального выбора μ_1 при фиксированном $\mu_1 + \mu_2$ для системы с ограниченной очередью. В литературе решены задачи оптимизации СМО при одновременном обслуживании Q требований (рассматривается оптимизация путей выбора Q).

Рассмотрим математическую модель, с помощью которой можно попытаться отобразить работу группы однотипных систем, учитывая работу исправных систем, систем, находящихся на восстановлении и неиспользуемых, но исправных систем. В основе успешного применения данной модели, как и любой математической модели, лежит проверка выполнения на практике допущений, лежащих в основе модели. В настоящее время пытаются создать модель функционирования групп систем даже при грубых допущениях, так как дальнейшие совершенствования моделей всегда проще создания новых.

Функционирование группы однотипных систем можно в ряде случаев рассмотреть как некоторую обобщенную систему, которая описывается линейным стохастическим дифференциальным уравнением

$$dx(t) = [A(t)x(t) + B(t)u(t)] dt + Cdw(t); \quad 0 \leq t \leq T, \quad x(t_0) = x_0,$$

где $x(t)$ — n -мерный процесс состояния системы; $u(t)$ — скалярное управление; $w(t)$ — известный стандартный случайный процесс; C — постоянная матрица. В этом уравнении матрицы $A(t)$ и $B(t)$ зависят от некоторого марковского процесса $r(t)$, принимающего конечное число значений с известными переходными вероятностями. Процессы $r(t)$ и $w(t)$ предполагают известными. Если $x(t)$, например, производственный процесс, то $r(t)$ содержит информацию о том, сколько однотипных систем в момент t выполняют производственное задание, сколько — находятся на восстановлении и сколько — находятся в состоянии готовности к работе.

Цель модели может заключаться в выборе стратегии, минимизирующей заданный квадратичный функционал. Для некоторых функционалов найдены [11] эффективные алгоритмы для определения оптимальных стратегий, основанные на решении уравнений Беллмана. При использовании данных алгоритмов для исследования организации эксплуатации больших групп систем неизбежно возникают вычислительные трудности, которые, однако, при современном уровне вычислительной техники с учетом ближайших перспектив ее развития не являются непреодолимыми.

При анализе входящих потоков в СМО, которые можно использовать для исследования организации функционирования групп систем, возникает проблема описания входящего потока, т. е. задача оценки параметров СМО при неопределенности задания входящего потока требований.

В общих чертах математические модели обслуживания конечного числа объектов, подверженных отказам, с учетом различных факторов, в том числе и маршрутов движения объектов между пунктами обслуживания, описаны в [11]. При выборе оптимальной структуры учитывают ремонт приборов обслуживания, их технологичность и численность обслуживающего персонала.

При описании работы группы систем в определенные моменты времени возникает задача перераспределения обслуживающего персонала для выполнения предстоящих работ. В настоящее время имеются попытки решения подобных задач. Известна [11] еще одна довольно общая модель обслуживания с разделением времени. Она характеризуется наличием нескольких фаз обслуживания с самостоятельной очередью у каждой из них. Требования, поступающие в СМО по закону Пуассона, случайным образом направляются на одну из фаз. По окончании некоторой фазы обслуживания требование по случайному закону либо направляется на другую фазу для обслуживания, либо покидает систему. «Раз-

деление времени» характеризуется тем, что в любой момент может выполняться лишь одна фаза обслуживания. Переключение с одной фазы на другую определяется общим алгоритмом, исключающим лишь возможность прерывания обслуживания. Описанную модель изучают методом вложенных цепей Маркова. Найден оптимальный алгоритм переключения (при заданных стоимостях определенного промежутка времени ожидания требования) для различных фаз обслуживания.

В практике групповой эксплуатации систем часто встречаются «потoki» систем, которые направляются на обслуживание в исправном и требующем ремонта состояниях. При этом приборы обслуживания могут быть общими для обоих потоков. Для анализа режимов эксплуатации и загрузки СМО в данном случае полезно использовать подходящие модели теории массового обслуживания. Проще начинать изучение с однолинейной системы обслуживания с двумя входящими потоками и возможностью выбора на обслуживание из большей очереди.

Учет коррелированности обслуживающих приборов в СМО представляет большой практический интерес. Здесь также можно начинать рассмотрение с одно- или двухлинейной системы с ограниченной очередью при простейшем входящем потоке и зависимом характере обслуживания приборами. Можно рассматривать также и случай, когда требования, образующие простейший поток, последовательно обслуживаются двумя приборами. Образование очереди в такой СМО не допускается. По заданной сумме интенсивностей обслуживания приборов находят их значения, при которых вероятность потери требования минимальна для экспоненциального закона обслуживания. Здесь удастся показать, что интенсивность обслуживания на первом приборе должна быть больше, чем на втором.

Пусть состояние СМО описывается марковским процессом $\{Y_t, t \geq 0\}$, а доход от ее функционирования до момента t задается функцией $f(Y_t)$. Система работает до момента T , являющегося моментом остановки процесса Y_t . Если ввести понятие оптимального стохастического управления, состоящего в выборе момента остановки, для которого максимизируется $M\{f(Y_T)\}$, то задачу в такой постановке можно решить для однолинейной СМО с простейшим входным потоком и общим распределением времени обслуживания.

Решен [11] вопрос «диспетчеризации» — выбора требований в однолинейной СМО с N потоками на входе и r местами для ожидания требований. Доказана оптимальность нерандомизированного (неслучайного) правила выбора требований при функции потерь, линейно зависящей от стационарного распределения вероятностей состояния системы. Решена задача «диспетчеризации» для двух простейших потоков на входе СМО (и в стохастическом варианте), а также задача для однолинейной СМО с ожиданием, обслуживающей требования нескольких типов. Интенсивность поступления требования того или иного типа зависит от числа имеющихся в очереди требований различных типов, а также от типа обслуживаемого в данный момент требования. При этом задается общее рандомизированное правило «диспетчеризации» — выбора требований из очереди при освобождении прибора. Методом линейного программирования решается задача оптимального выбора требований из очереди при потерях, задаваемых в виде математического ожидания функции от состояния системы в установившемся режиме.

Интересна и такая постановка задачи, когда рассматривается СМО, в которой поступающие требования имеют назначение на обслуживание в определенные моменты времени. Однако фактические моменты поступления требований в систему имеют случайные отклонения от назначенных и требования могут даже вообще не прибывать на обслуживание.

Изучаются и СМО с прерываниями в обслуживании требований (см. § 8.3). Рассмотрена однолинейная СМО с N простейшими входящими потоками требований интенсивности $\lambda_i, i = \overline{1, N}$, и неограниченной очередью. Длительности обслуживания требований постоянны. Обслуживание требования i -го потока может быть прервано по двум причинам: поступило требование из потоков $1, i - 1$; отсутствует промежуточная информация для обслуживания. Найден оптимальное правило прерывания обслуживания, которое обеспечивает минимум

$F = \sum_{i=1}^N C_i \lambda_i v_i$, где C_i и v_i — штраф за определенный промежуток времени об-

служивания и среднее время нахождения требования i -го потока в системе соответственно. Такие модели могут формализовать многие системы управления производством и допускать получение решения с помощью ЭВМ.

Полностью решена задача для однолинейной СМО с двумя пуассоновскими потоками требований на входе, найдено правило переключения обслуживания в системе за конечное время и в одном частном случае оптимизируются значения параметра, определяющего моменты переключений при обслуживании находящихся в системе требований.

С позиций теории массового обслуживания можно рассматривать и задачу проектирования объектов, предназначенных для обслуживания потока вызовов, связанную с нахождением оптимальной схемы расположения и закрепления операторов за объектами и выбором режимов обслуживания объектов. В качестве критерия оптимальности распределения операторов при случайном характере вызовов принято минимальное время ожидания обслуживания или время реакции (подготовка к обслуживанию) системы. Эта методика особенно эффективна в условиях недостатка информации о целесообразном обслуживании поступающих требований.

Известны работы [11], в которых изучается стоимостная структура СМО, формулируются критерии для выбора оптимального объема обслуживания и исследуется возможность установления приоритетных правил обслуживания самими требованиями, решается задача максимизации прибыли от эксплуатации СМО с неограниченной очередью, когда СМО управляется изменением цены за обслуживание в зависимости от текущего состояния системы.

В случае, когда время обслуживания требования зависит от величины времени ожидания в очереди, можно показать, что порядок очереди оказывает значительное влияние на максимальную интенсивность входящего потока, при которой СМО находится в устойчивом состоянии.

Можно предложить идею изучения сложных моделей путем разбиения таких моделей на части и сведения задачи исследования сложной модели (сети) к исследованию ее частей как систем массового обслуживания. Для возможности такого исследования необходимо изучить свойства выходящего потока систем массового обслуживания.

Представляет определенный интерес и сравнение различных алгоритмов так называемого приоритетного обслуживания, которому в последние годы в теории массового обслуживания уделяется большое внимание. Такое сравнение обычно проводится на основании средних времен ожидания. Здесь исследованы случаи, когда оптимальным является алгоритм обслуживания, при котором всегда выбирается требование с минимальным отношением среднего остаточного времени обслуживания к стоимости единицы времени ожидания. Рассматриваются вопросы оптимального выбора заявок на обслуживание в зависимости от текущего состояния СМО с конечным числом мест ожидания. Предлагается процедура такого выбора для двух типов систем: с общей конечной очередью и несколькими раздельными конечными очередями. При этом минимизируется функционал потерь от ожидания заявок в очереди и отказов системы принять заявку на обслуживание из-за переполнения очереди. В этом случае имеются методы определения зависящих от состояния СМО управлений.

В литературе [11] уже делались попытки исследования СМО, моделирующих работу разнотипных систем для конечного числа потоков разнородных требований, при этом решалась задача определения оптимальной организации обслуживания в системе при условии минимизации вероятности потерь.

Известно, что при исследовании СМО основным аппаратом является теория марковских процессов. Поэтому проблемы (в том числе и вычислительного характера) управления марковскими процессами с конечным числом состояний представляют большой практический интерес.

В настоящее время для определения оптимального управления марковскими процессами применяются в основном методы динамического и линейного программирования. Однако в силу большой размерности задач, которые решаются с помощью управляемых процессов в теории массового обслуживания, эти методы

приводят к значительным вычислительным трудностям. Поэтому желательно здесь появление работ, в которых бы приводились методы определения оптимальных управлений марковскими процессами, специально предназначенные для данного класса задач.

В настоящем параграфе мы не преследовали цель изложить обзор публикаций работ (кстати, пока весьма немногочисленных), лежащих в основе организации эксплуатации групп однотипных систем. Мы преследовали цель в общих чертах познакомить читателя с зарождающимся новым научным направлением, связанным, с одной стороны, с эксплуатацией больших групп технических систем или, как их иногда называют, систем большого масштаба, а с другой — опирающимся на исследования и разработку математических моделей управляемых систем массового обслуживания и методов планирования и управления.

Ниже мы рассмотрим некоторые конкретные модели в этой области.

§ 8.2. Оптимальная модель групповой эксплуатации систем при двух видах обслуживания

При решении задач групповой эксплуатации систем часто возникает ситуация, когда помимо подготовки исправных систем обслуживающий персонал должен решать с помощью только своих сил и средств и задачи восстановления (ремонта) неисправных систем.

Если заниматься только подготовкой исправных систем, то число требующих восстановления (ремонта) систем будет расти, в противном случае (при проведении только ремонта) к функционированию не будут допускаться не прошедшие подготовку системы.

Рассмотрим случай, когда число бригад, которые могут заниматься как подготовкой систем, так и ремонтом, равно n . Пусть интервалы времени между поступлениями исправных систем на подготовку и неисправных на ремонт имеют экспоненциальные распределения с интенсивностями λ_1 и λ_2 соответственно, а время подготовки исправной системы и время ее ремонта распределены произвольно с интенсивностями μ_1 и μ_2 ($\mu_1 > \mu_2$), которые можно интерпретировать как средние числа обслуженных требований в единицу времени первого и второго типов требований соответственно.

Пусть t_0 — среднее время обслуживания наугад взятого требования; $\tau_{\text{обсл}}^1$, $\tau_{\text{обсл}}^2$ — случайное время обслуживания требования первого и второго типов; A_1 , A_2 — события, соответствующие поступлению требований первого и второго типов. Тогда

$$t_0 = P\{A_1\} M[\tau_{\text{обсл}}^1/A_1] + P\{A_2\} M[\tau_{\text{обсл}}^2/A_2]. \quad (8.1)$$

Если T — календарное время работы СМО, то максимальное среднее число требований на выходе равно числу бригад (приборов) обслуживания n , умноженному на среднее число требований, обслуженных одной бригадой за время T , т. е. на T/t_0 . Тогда максимальное значение интенсивности выходного потока

$$\Lambda_{\text{max}} = \frac{n(T/t_0)}{T} = \frac{n}{t_0}.$$

Интенсивность выходного потока не зависит от управления (т. е. требования обслуживают в порядке поступления), если

$$\lambda_1 + \lambda_2 < n/t_0 = \Lambda_{\text{max}}.$$

т. е. при

$$t_0 (\lambda_1 + \lambda_2) < n. \quad (8.2)$$

Если интенсивность выходного потока не зависит от управления, то это свойство СМО называется *эргодическим*. Имеем:

$$P\{A_1\} = \lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2); \quad P\{A_2\} = \lambda_2/(\lambda_1 + \lambda_2);$$

$$M[\tau_{\text{обсл}}^1/A_1] = 1/\mu_1; \quad M[\tau_{\text{обсл}}^2/A_2] = 1/\mu_2.$$

В этом случае

$$t_0 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \frac{1}{\mu_1} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \frac{1}{\mu_2} = \frac{\lambda_1/\mu_1 + \lambda_2/\mu_2}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Подставляя выражение для t_0 в (8.2), получаем

$$\frac{(\lambda_1/\mu_1 + \lambda_2/\mu_2)(\lambda_1 + \lambda_2)}{\lambda_1 + \lambda_2} < n,$$

т. е. $\lambda_1/\mu_1 + \lambda_2/\mu_2 < n$. Это означает, что в данном случае нужно брать требования на обслуживание в порядке их поступления (без приоритета).

Полученный результат и его толкование представляют интерес и не являются очевидными, так как интуиция всегда подсказывает, что нужно отдавать предпочтение подготовке исправных систем, а не ремонту неисправных, если за фиксированное время необходимо подготовить наибольшее число систем или обеспечить максимальный темп их подготовки.

Рассмотрим теперь случай работы СМО, когда на ее входе образуется очередь требований первого и второго типов. Дадим строгую математическую формулировку задачи для этого случая.

Предположим, что в систему массового обслуживания, состоящую из n обслуживающих приборов, поступает пуассоновский поток требований первого типа с интенсивностью λ_1 . Кроме того, имеется склад, на котором находится неограниченное число требований второго типа, каждое из которых можно мгновенно взять на обслуживание. Время обслуживания требований первого (второго) типа распределено по показательному закону с параметром μ_1 (μ_2). Обслуживание непрерывное. Поступающие требования первого типа принимаются на обслуживание без задержки, если есть свободные приборы. В противном случае они становятся в очередь. В момент окончания обслуживания, когда освобождается прибор, на обслуживание берется требование первого типа, если есть очередь из этих требований. Если же требований первого типа нет, то в момент окончания обслуживания принимаем одно из следующих двух решений: d_0 — дожидаться следующего момента окончания обслуживания; d_1 — принять на обслуживание требование второго типа.

Состояние процесса обслуживания задается парой чисел (i, j) , $i = 0, 1, 2, \dots$; $j = 0, n$, где i — число требований первого типа, находящихся в системе, т. е. обслуживающихся или стоящих в очереди; j — число обслуживающихся требований второго типа.

Таким образом, управление $d = d(i, j)$ есть функция состояния системы, принимающая значения d_0 и d_1 , а управляющие моменты — это моменты окончания обслуживания.

Если выбрано управление, то стационарные вероятности процесса $p_{ij} = p_{ij}(d)$ являются функциями от управления. Выберем некоторую функцию цены $V(i, j)$, которую можно считать доходом за единицу времени в состоянии (i, j) . Тогда средний доход на единицу времени

$$V = V(d) = \sum_{i,j} V(i, j) p_{ij}(d) \quad (8.3)$$

является функцией управления. Задача оптимизации управления состоит в нахождении такого управления $d^{(0)}$, при котором

$$V(d^{(0)}) = \max_{d \in D} V(d), \quad (8.4)$$

где D — выбранный класс управлений (не обязательно брать полный класс управлений, можем взять некоторый подкласс). На параметры системы наложим два ограничения:

$$\lambda_1 < n\mu_1, \quad \mu_2 < \mu_1. \quad (8.5)$$

Первое условие необходимо и достаточно для того, чтобы процесс обслуживания был эргодическим при любом управлении; второе условие означает, что требования первого типа обслуживаются быстрее требований второго типа.

Определим управление, дающее наибольшую интенсивность выходящего потока. Возьмем в качестве средней функции цены

$$V_1 = \Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2, \quad (8.6)$$

где Λ_1 — интенсивность выходящего потока требований первого типа; Λ_2 — интенсивность выходящего потока требования второго типа в стационарном режиме.

Покажем, что для такой функции цены оптимальной является следующая дисциплина. В каждый управляющий момент нужно принимать на обслуживание требование второго типа (если, конечно, нет ожидающих требований первого типа). Такое управление означает, что в стационарном режиме все приборы заняты обслуживанием, но требования первого типа имеют относительный приоритет перед требованиями второго типа. Покажем это, основываясь на эргодичности процесса. Возьмем большой интервал времени $(0, T)$. За время T придут $\lambda_1 T$ требований и их обслуживание займет время $\lambda_1 T / \mu_1$. Следовательно, для обслуживания останется время $nT - \lambda_1 T / \mu_1$. При любом управлении за это время обслужатся не более $(nT - \lambda_1 T / \mu_1) \mu_2$ требований. Таким образом,

$$\Lambda_1 = \lambda_1, \quad \Lambda_2 \leq (n - \lambda_1 / \mu_1) \mu_2 \quad \text{и} \quad \Lambda \leq \lambda_1 + (n - \lambda_1 / \mu_1) \mu_2.$$

С другой стороны, при дисциплине, когда все свободные приборы занимаются требованиями второго типа, интенсивность Λ , очевидно, наибольшая:

$$\Lambda = \lambda_1 + (n - \lambda_1 / \mu_1) \mu_2.$$

Заметим, что приведенные рассуждения нетрудно сделать совершенно строгими, опираясь на эргодичность процесса и закон больших чисел.

Учтем теперь стоимость ожидания. Возьмем функцию цены

$$V = C_1 \Lambda_1 + C_2 \Lambda_2 - C_0 n_1, \quad (8.7)$$

где C_1 — цена обслуживания одного требования первого типа; C_2 — цена обслуживания одного требования второго типа; C_0 — стоимости единицы времени пребывания требования в системе; n_1 — среднее число требований первого типа в системе. Для данного случая

$$V(i, j) = C_1 \mu_1 \min(i, n - j) + C_2 \mu_2 j - C_0 i. \quad (8.8)$$

Пусть $A = \{(i, j) : d(i, j) = d_0\}$, другими словами, A — это множество состояний, в которых в момент окончания обслуживания на обслуживание не берутся требования второго типа. Пусть $\bar{A} = \{(i, j) : d(i, j) = d_1\}$, $\bar{A}$ — дополнительное множество. Множество A должно удовлетворять условию: если $(i, j) \in A$ и $i' \geq i, j' \geq j$, то $(i', j') \in A$. Это условие означает, что если в данном состоянии на обслуживание не берутся требования второго типа, то тем более их не следует брать для более за-

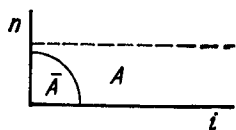


Рис. 8.1

груженной системы. Области A и $\bar{A}$ изображены на рис. 8.1. Область $\bar{A}$ однозначно задается набором чисел $n > j_0 \geq j_1 \geq j_2 \dots \geq j_{n-1} \geq 0, i + j_i < n$. Состояние $(i, j) \in \bar{A}$, если $j \leq j_i$.

Число таких наборов не превышает

$$C_{2n}^n = (2n)! / (n!)^2 \sim 2^{2n} / \sqrt{\pi n}.$$

Даже при небольшом n это очень большое число. Для каждой выбранной области $\bar{A}$ надо составлять и решать систему уравнений для стационарных вероятностей и вычислять функцию цены по формуле (8.3). Поэтому предложим приближенный метод оптимизации, ограничившись классом управлений вида

$$D = \{\bar{A}_r\}, \bar{A}_r = \{(i, j); i + j \leq r\}, r = \overline{0, n-1}. \quad (8.9)$$

Для одинаковых или близких цен C_1 и C_2 в формуле (8.7) такой класс управлений представляется разумным. Составим уравнения для стационарных вероятностей p_{ij} . Заметим, во-первых, что в стационарном режиме процесс находится только в состояниях, для которых $i + j > r$. Действительно, рано или поздно процесс попадет в область $\bar{A}_r$ и никогда из нее не выйдет, так как при попадании на границу $i + j = r$ мгновенно добавляется заявка второго типа и имеет место состояние, при котором $i + j = r + 1$. Поэтому $p_{ij} = 0$ для $i + j \leq r$ и необходимо составить уравнения только для вероятностей p_{ij} , для которых $i + j > r$. Заметим, что $j \leq r + 1$. Найдем отличные от нуля интенсивности перехода из состояния в состояние (интенсивности ставим

над стрелкой, указывающей переход). Тогда (случай 1) при $i + j = r + 1$

$$(i, j) \xrightarrow{\lambda_1} (i + 1, j), (i, j) \xrightarrow{i\mu_1} (i - 1, j + 1).$$

При $r + 1 < i + j < n$ (случай 2)

$$(i, j) \xrightarrow{\lambda_1} (i + 1, j), (i, j) \xrightarrow{i\mu_1} (i - 1, j), (i, j) \xrightarrow{j\mu_2} (i, j - 1).$$

При $i + j \geq n$ (случай 3)

$$(i, j) \xrightarrow{\lambda_1} (i + 1, j), (i, j) \xrightarrow{(n-j)\mu_1} (i - 1, j), (i, j) \xrightarrow{j\mu_2} (i, j - 1).$$

Для случая 3 необходимо отметить, что из i заявок первого типа $n - j$ обслуживаются, а остальные $i + j - n$ стоят в очереди. Если найдены интенсивности переходов, то сразу можно записать уравнения для вероятностей.

Составление уравнений для вероятностей поясним подробно на примере случая 1. Заметим, что $i\mu_1$ и $j\mu_2$ есть интенсивности переходов при уменьшении на единицу состояния i или j соответственно. Покажем это. Пусть Δt — малый отрезок времени. Тогда если на обслуживании в системе находятся k требований ($k = i$ или $k = j$), то вероятность того, что за время Δt не будет закончено обслуживание одного требования, равна $e^{-\Delta t\mu_k}$, а вероятность, что не закончится обслуживание ни одного из k требований, есть $(e^{-\Delta t\mu_k})^k = e^{-\Delta tk\mu_k}$.

Вероятность того, что за время Δt закончится обслуживание хотя бы одного требования из k (это значит, что закончится обслуживание 1, 2, ..., k требований), равна $1 - e^{-\Delta tk\mu_k}$.

В силу малости Δt

$$e^{-\Delta tk\mu_k} \approx 1 - \Delta tk\mu_k, \text{ т. е. } 1 - e^{-\Delta tk\mu_k} = k\mu_k \Delta t + o(\Delta t).$$

Так как вероятностью того, что за малое время закончится обслуживание двух (и более) требований, можно пренебречь, то $k\mu_k \Delta t$ есть вероятность за время Δt изменить состояние СМО на единицу. Например, изменение состояния с i на $i - 1$ произойдет за время Δt с вероятностью $i\mu_1 \Delta t$, с j на $j - 1$ — с вероятностью $j\mu_2 \Delta t$. В этом случае сомножители при Δt называются *интенсивностями перехода* из состояния i в состояние $i - 1$ и из j в $j - 1$ соответственно. Если же осуществлен переход, например, из состояния $j + 1$ в j , то интенсивность этого перехода равна $(j + 1)\mu_2$ и т. д. Напомним, что λ_1 — интенсивность поступления требования первого типа в систему.

В случаях 1 и 2 рассматривалось значение $r + 1$, а не r , так как в момент управления требование всегда покидает систему и это нужно учитывать при анализе состояний системы.

Составим теперь уравнения для стационарных вероятностей состояний системы. Рассмотрим для случая 1 возможные переходы за малое время Δt из состояния (i, j) и, наоборот, в это состояние $(i + j = r + 1)$ и запишем соответствующее уравнение. Диаграммы изменения состояний и интенсивности переходов для этого случая приведены на рис. 8.2.

На левой и правой диаграммах изображен переход $(i, j) \xrightarrow{j\mu_2} (i, j)$, который означает следующее: за малое время Δt освобождается один прибор, занятый обслуживанием требований второго типа (вероятность этого события равна $j\mu_2\Delta t$, а интенсивность перехода — $j\mu_2$), но так как $i + j = r$, то на обслуживание сразу же берем требование второго типа и переводим состояние $j - 1$ в j , т. е. за время Δt состояние j в этом случае не меняется.

Используя эти диаграммы, легко составить искомые алгебраические уравнения, которые называют *уравнениями равновесия*. Мнемоническое правило составления таких уравнений заключается в том,

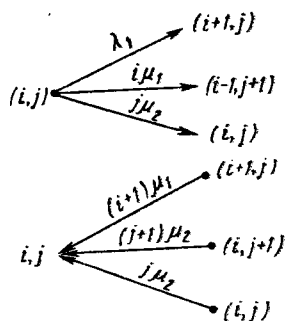


Рис. 8.2

что для левой части уравнения (см. левую диаграмму на рис. 8.2) нужно вероятность состояния (i, j) , из которого на диаграмме выходят стрелки, умножить на сумму всех интенсивностей переходов (их значения поставлены над стрелками) в состояния, на которые указывают концы стрелок, т. е. левая часть уравнения имеет вид $p_{ij}(\lambda_1 + i\mu_1 + j\mu_2)$. Для составления правой части уравнения нужно воспользоваться нижней диаграммой и записать слагаемые как вероятности состояний, из которых выходят стрелки, умноженные на соответствующие интенсивности переходов, поставленные над стрелками. Итак, правая часть уравнения такова: $p_{i+1, j}(i+1)\mu_1 + p_{i, j+1}(j+1)\mu_2 + p_{ij}j\mu_2$.

Таким образом, уравнение для случая 1 имеет вид

$$p_{i, j}(\lambda_1 + i\mu_1 + j\mu_2) = p_{i+1, j}(i+1)\mu_1 + p_{i, j+1}(j+1)\mu_2 + p_{ij}j\mu_2.$$

Приводя подобные члены, окончательно получаем уравнение для случая 1. Уравнения для случаев 2 и 3 получают аналогично. Приведем уравнения для всех трех случаев:

1) при $i + j = r + 1$

$$p_{i, j}(\lambda_1 + i\mu_1) = p_{i+1, j}(i+1)\mu_1 + p_{i, j+1}(j+1)\mu_2 + p_{i+1, j-1}(i+1)\mu_1;$$

2) при $i + j > r + 1$, $i + j < n$

$$p_{i, j}(\lambda_1 + i\mu_1 + j\mu_2) = p_{i-1, j}\lambda_1 + p_{i+1, j}(i+1)\mu_1 + p_{i, j+1}(j+1)\mu_2;$$

3) при $i + j \geq n$

$$p_{i, j}[\lambda_1 + \mu_1(n-j) + j\mu_2] = p_{i-1, j}\lambda_1 + p_{i+1, j}(n-j)\mu_1 + p_{i, j+1}(j+1)\mu_2. \quad (8.10)$$

Решая системы уравнений (8.10), определяем вероятности p_{ij} , $i = 1, 2, \dots$; $j = \overline{1, n}$, которые являются неявными функциями параметра r .

Далее, для каждого фиксированного r определяем интенсивность выходного потока СМО:

$$\Lambda = \sum_{i+j=n} p_{ij}(i\mu_1 + j\mu_2) + \sum_{i+j>n} p_{ij}[(n-i)\mu_1 + j\mu_2]. \quad (8.11)$$

Поясним формулу (8.11). Если $i + j \leq n$, то за время Δt из СМО выйдет в среднем $p_{ij} (i\mu_1 + j\mu_2)$ требований, а при $i + j > n$ среднее число требований на выходе системы за Δt равно $p_{ij} [(n - j)\mu_1 + j\mu_2] \Delta t$.

Решая систему (8.10), найдем стационарные вероятности, которые подставим в (8.3), где функция цены определяется формулой (8.8), и найдем среднюю цену $V = V(r)$. Если вычислить среднюю цену для всех $r = 0, n - 1$, то можно найти значение r , при котором $V(r)$ принимает наибольшее значение (рис. 8.3).

Сделаем некоторые дополнительные замечания.

1. Если в формулах (8.7) и (8.8) взять нелинейную цену за пребывание требований первого типа в системе, то задача усложняется, так как в этом случае среднюю цену уже нельзя выразить через стационарные вероятности. Наиболее интересен случай, когда цена за время пребывания

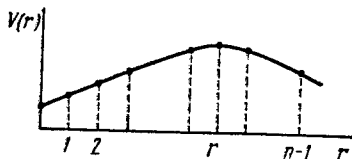


Рис. 8.3

$$C(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < T, \\ C_0 & \text{при } t \geq T, \end{cases}$$

где C_0 — штраф за невыполнение работы в срок.

2. Пусть в некотором комплексе имеется N технических устройств, каждое из которых может отказать с интенсивностью $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$, причем при отказе с вероятностью $\pi_1 = \lambda_1/\lambda$ возникает отказ первого рода с интенсивностью ремонта μ_1 , а с вероятностью $\pi_2 = \lambda_2/\lambda$ возникает отказ второго рода с интенсивностью ремонта $\mu_2 > \mu_1$. Если $\xi(t)$ — число неисправных устройств, то $N - \xi(t)$ — число исправных устройств. Как и выше, n — число ремонтных приборов.

Если надо выбрать управление, при котором среднее число исправных устройств $V = M[N - \xi(t)]$ было бы максимальным, то, как нетрудно показать, оптимальным является управление, при котором требованиям первого типа предоставляется относительный приоритет. Задача также очень интересна, если расширить класс принимаемых решений: допустить в управляющие моменты возможность принятия к обслуживанию более одного требования.

Рассмотрим численное решение системы уравнений (8.10). Необходимо для каждого r определить стационарные вероятности $p_{ij} = p_{ij}(r)$ с заданной точностью ϵ . При заданном (фиксированном) r $p_{ij} = 0$ для $j \geq r + 2$, $i = 0, 1, \dots$, $p_{ij} = 0$ для $i + j \leq r$. Поэтому отыскиваем значения p_{ij} для $i + j \geq r + 1$ и $j \leq r + 1$. Система уравнений (8.10) имеет место при соблюдении условия нормировки

$$\sum_{j=0}^{r+1} \sum_{i=0}^{\infty} p_{ij} = 1.$$

Заменяя в первом уравнении (8.10) $(i + 1)p_{i+1,j}\mu_1$ на $ip_{i+1,j}\mu_1$, получаем систему уравнений для $r = n - 1$. Найдем численное ре-

шение уравнений (8.10) и уравнения для $r = n - 1$. Зададим некоторое число $N \geq n + 1$ и решим конечную систему N уравнений, которая имеет вид:

1) при $i + j = r + 1, j = \overline{0, r + 1}$

$$(-\lambda_1 - i\mu_1) p_{ij}^{(N)} + (i + 1) \mu_1 p_{i+1, j}^{(N)} + (j + 1) \mu_2 p_{i, j+1}^{(N)} + (i + 1) \mu_1 p_{i+1, j-1}^{(N)} = 0;$$

2) при $r + 1 < i + j < n, j = \overline{0, r + 1}$

$$(-\lambda_1 - i\mu_1 - j\mu_2) p_{ij}^{(N)} + (i - 1) \mu_1 p_{i-1, j}^{(N)} + (j + 1) \mu_2 p_{i, j+1}^{(N)} + \lambda_i p_{i-1, j}^{(N)} = 0;$$

3) при $n \leq i \leq N - 1, j = \overline{0, r + 1}$

$$[-\lambda_1 - (n - j) \mu_1 - j\mu_2] p_{ij}^{(N)} + (n - j) \mu_1 p_{i+1, j}^{(N)} + (j + 1) \mu_2 p_{i, j+1}^{(N)} + \lambda_1 p_{i-1, j}^{(N)} = 0; \quad (8.12)$$

4) при $i + j = N$

$$p_{i, i+1}^{(N)} = p_{i+1, j}^{(N)} = 0, \\ -[(n - j) \mu_1 + j\mu_2] p_{ij}^{(N)} + \lambda_1 p_{i-1, j}^{(N)} = 0.$$

Для $r = n - 1$ уравнения получаем, заменяя первые из уравнений (8.12) на уравнение

$$(-\lambda_1 - i\mu_1) p_{ij}^{(N)} + (n - j) \mu_1 p_{i+1, j}^{(N)} + (j + 1) \mu_2 p_{i, j+1}^{(N)} + (i + 1) \mu_1 p_{i+1, j-1}^{(N)} = 0,$$

$i + j = r + 1 = n, j = \overline{0, r + 1}$.

Уравнения для $r = n - 1$ решают при условии

$$\sum_{\substack{r+1 \leq i+j \leq N, \\ i \geq 0, 0 \leq j \leq r+1}} p_{ij}^{(N)} = 1;$$

в остальных случаях $p_{ij}^{(N)} = 0$.

Окончательная система уравнений состоит из $(N - 2)(r + 2)$ линейных уравнений с неизвестными $p_{ij}^{(N)}, r + 1 \leq i + j \leq N, j = \overline{0, r + 1}; i = 0, 1, \dots$. После определения $p_{ij}^{(N)}(r)$ для $r = \overline{0, n - 1}$ по формуле (8.3) вычисляют значения среднего дохода $V_N(r)$, учитывая (8.8) (при суммировании по $i + j \geq r + 1$). Затем находят $V_{N+1}(r)$ и $V_{N+2}(r), r = \overline{0, n - 1}$, и проверяют условие

$$\delta_{N+1, N+2} = \left| \frac{V_{N+1}(r)}{V_{N+2}(r)} - 1 \right| < \varepsilon, \quad \delta_{N, N+1} < \varepsilon,$$

где ε — заданная точность вычислений.

Далее определяют такое $r = R$, при котором $V(R) = \max_{0 \leq r \leq n-1} V(r)$.

Результаты решения исходной системы уравнений для значений $\lambda_1, \mu_1, \mu_2, n, C_0, C_1, C_2, \varepsilon$ приведены в табл. 8.1*.

* Результаты получены А. В. Кравченко по алгоритмам, разработанным в межфакультетской лаборатории статистических методов МГУ.

Таблица 8.1

$$C_0 = C_1 = C_2 = 0,95, \varepsilon = 0,03$$

$\mu_1 = 0,5, \mu_2 = 0,05$ [трѐб./ед. врем.]	$\lambda_1 = 0,05$ [трѐб. ед. врем.]	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		R	0	0	1	2	3	4	5	6	7	8
	$\lambda_1 = 0,1$	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		R	0	0	1	2	3	4	5	6	7	8
	$\lambda_1 = 0,5$	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		R	—	0	0	0	1	2	3	4	5	7
	$\lambda_1 = 1,0$	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		R	—	—	0	0	0	0	2	3	4	5
	$\lambda_1 = 1,5$	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		R	—	—	—	0	0	0	0	1	2	4
$\mu_1 = 1,0, \mu_2 = 0,1$	$\lambda_1 = 0,01$	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		R	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	$\lambda_1 = 0,05$	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		R	0	0	1	2	3	5	6	7	8	9
	$\lambda_1 = 0,1$	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		R	0	0	1	2	3	4	5	6	7	8
	$\lambda_1 = 0,5$	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		R	0	0	0	1	2	3	5	6	7	8
	$\lambda_1 = 1,0$	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		R	—	—	0	0	0	1	3	4	5	6
	$\lambda_1 = 1,5$	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		R	—	0	0	0	0	2	3	4	5	6
	$\lambda_1 = 2,0$	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		R	—	—	0	0	0	1	2	3	4	5
	$\lambda_1 = 2,5$	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		R	—	—	0	0	0	0	1	3	4	5

$$C_0 = C_1 = C_2 = 0,95, \quad \varepsilon = 0,03$$

$\mu_1 = 5,0, \mu_2 = 0,5$	$\lambda_1 = 0,01$	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		R	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	$\lambda_1 = 0,05$	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		R	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	$\lambda_1 = 0,1$	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		R	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	$\lambda_1 = 0,5$	n	1		3	4	5	6	7	8	9	10
		R	0	0	2	3	4	5	6	7	8	9
	$\lambda_1 = 1,0$	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		R	0	0	1	2	4	5	6	7	8	9
	$\lambda_1 = 1,5$	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		R	0	0	1	2	3	4	6	7	8	9
	$\lambda_1 = 2,0$	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		R	0	0	1	2	3	4	5	6	7	9
	$\lambda_1 = 2,5$	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		R	0	0	1	2	3	4	5	6	7	8
	$\lambda_1 = 5,0$	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		R	—	0	0	1	2	4	5	6	7	8
	$\lambda_1 = 7,5$	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		R	—	0	0	0	2	3	4	5	6	7
$\mu_1 = 10, \mu_2 = 1,0$	$\lambda_1 = 0,01$	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		R	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	$\lambda_1 = 0,05$	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		R	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

$C_0=C_1=C_2=0,95, \quad \varepsilon=0,03$												
$\mu_1=10, \mu_2=1,0$	$\lambda_1=0,1$	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		R	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	$\lambda_1=0,5$	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		R	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	$\lambda_1=1,0$	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		R	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	$\lambda_1=1,5$	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		R	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	$\lambda_1=2,0$	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		R	0	0	2	3	4	5	6	7	8	9
	$\lambda_1=2,5$	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		R	0	0	1	3	4	5	6	7	8	9
	$\lambda_1=5,0$	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		R	0	0	1	2	3	4	5	6	7	8
	$\lambda_1=7,5$	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		R	0	0	1	2	3	4	5	6	7	9
$\lambda_1=0,1, \mu_2=0,01$	$\mu_1=0,5$	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		R	0	0	0	1	2	3	4	5	6	7
	$\mu_1=1,0$	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		R	0	0	0	1	3	4	5	6	7	8
$\lambda_1=0,5, \mu_2=0,01$	$\mu_1=0,5$	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		R	—	0	0	0	0	1	2	3	4	5
	$\mu_1=1,0$	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		R	0	0	0	0	2	2	3	4	5	6

Примечание. Знак «—» означает, что для соответствующего значения n вычисления не проводились вследствие ограничения ($\lambda_1 < n\mu_1$).

Физический смысл R в табл. 8.1 следующий. В момент окончания обслуживания требования второго типа начинают обслуживаться только при наличии не менее R свободных приборов. В результате многократного применения этой процедуры обслуживания требований обеспечивается максимальный средний доход, получаемый при эксплуатации системы массового обслуживания рассматриваемого типа в единицу времени.

§ 8.3. Модель групповой эксплуатации систем с прерыванием обслуживания

В § 8.1 было упомянуто об оптимальных моделях СМО, в которых допускается прерывание в обслуживании требований. Рассматривая такие модели, как правило, всегда предполагают, что прерывание не увеличивает общего времени обслуживания требования, т. е. происходит очень быстро. Однако технология подготовок или ремонта сложных технических систем не всегда допускает прерывание в обслуживании требований. Тем не менее, где это допустимо, можно существенно улучшить ряд характеристик СМО, в частности такую важную характеристику, как среднее время ожидания требованиями обслуживания (по сравнению с СМО без прерывания).

Опишем модель СМО с оптимизацией, в которой допускается прерывание в обслуживании требований. При этом будем опираться на результаты, полученные А. Д. Соловьевым и В. В. Козловым [34]. Рассмотрим базу (прибор обслуживания), на которую поступают для ремонта технические системы (поток требований). Считаем, что моменты поступления требований имеют как случайный, так и детерминированный характер, т. е. поток требований, поступающий на обслуживающий прибор, произволен. Предполагаем, что потеря требований недопустима.

Остановимся на понятии скорости обслуживания [34], которое поможет при рассмотрении СМО с прерыванием обслуживания.

Определим скорость обслуживания из соотношения

$$\eta_0 = \int_t^{t+\eta} C(x) dx, \quad (8.13)$$

где $C(x)$ — скорость обслуживания требования, поступившего в СМО; η — действительное время обслуживания требования со скоростью $C(x)$; η_0 — время обслуживания требования с единичной скоростью.

Если $C(x) = 1$, то равенство (8.13) имеет место только при $\eta_0 = \eta$, т. е.

$$\eta_0 = \int_t^{t+\eta_0} dx = \eta_0.$$

При большой скорости обслуживания η уменьшается и наоборот (см. формулу (8.13)).

Назовем *дисциплиной обслуживания* d набор скоростей обслуживания, зависящих в общем случае от процесса обслуживания:

$$d = \{C_{ki}(\omega), t, k = 0, 1, \dots; 1 \leq i \leq k\}, \quad (8.14)$$

где $\omega = \{t_1, t_2, \dots, t_n, \dots; x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$, $0 < t_1 < t_2 < \dots$ — моменты поступления требований; x_n — длина n -го требования; $C_{ki}(\omega, t)$ — скорость обслуживания i -го по порядку поступления требования в момент t , когда в СМО находятся k требований.

Физический смысл скорости обслуживания поясним на примере, когда прибор может одновременно обслуживать только одно требование (хотя в СМО может быть несколько требований). В этом случае обслуживание с заданной скоростью можно реализовать следующим образом (при возможности прерывания обслуживания требования). Рассмотрим малый интервал времени h . Если поочередно обслуживать требования с единичной скоростью в течение времени Ch , а на время $(1 - C)h$ (здесь $C < 1$) переключаться на обслуживание других требований, то при $h \rightarrow 0$ такая дисциплина эквивалентна обслуживанию рассматриваемого требования со скоростью C .

Обозначим через ξ_t число требований в СМО в момент t . Тогда процесс обслуживания $\xi_t = \xi_t(\omega, d)$ определен на пространстве $\{(\omega, d)\}$. Ниже приведена процедура нахождения такой дисциплины d , которая оптимизирует некоторый функционал от процесса ξ_t .

Рассмотрим такую дисциплину обслуживания, для которой при любых t, ω и k

$$\sum_{i=1}^k C_{ki}(\omega, t) = 1. \quad (8.15)$$

Сохраняя терминологию, предложенную в [34], введенную дисциплину обслуживания будем называть консервативной. Условие (8.14) означает, что требования, находящиеся в СМО, обслуживает один прибор.

Определим период занятости СМО. Пусть в момент t находящееся в СМО требование имеет остаточную длину (оставшееся время обслуживания), которую назовем *длиной требования* в момент t . Тогда при фиксированной точке ω процесс $\xi_t(\omega)$ не что иное, как сумма длин всех требований, находящихся в момент t в СМО. Период занятости СМО — период, на котором $\xi_t(\omega) > 0$. Оказывается, что при консервативной дисциплине обслуживания период занятости не зависит от дисциплины d .

Рассмотрим два типа информации о процессе обслуживания в момент t .

1. Известно прошлое каждого требования, находящегося в СМО в момент t . Также известно, какая часть его длины обслужена. Если у фиксированного требования обслужена длина x , то оставшаяся не-обслуженной длина $\eta_0(x)$ распределена следующим образом:

$$P\{\eta_0(x) > t\} = \bar{G}(x + t)/\bar{G}(x), \quad (8.16)$$

где $G(x)$ — функция распределения длины требования η_0 , $\bar{G}(x) = 1 - G(x)$.

2. Помимо информации первого типа в момент поступления каждого n -го требования становится известной реализация его длины $\eta_0 = x_n$.

При длительной эксплуатации групп технических систем информация отмеченных выше типов в подавляющем большинстве случаев известна либо точно, либо с некоторым достаточным приближением. Рассмотрим консервативную дисциплину d_0 , которая характеризуется тем, что в каждый момент времени с единичной скоростью обслуживается требование, имеющее наименьшую длину. Тогда в классе консервативных дисциплин при любых ω , t и d

$$\xi_t(\omega, d_0) \leq \xi_t(\omega, d). \quad (8.17)$$

Это утверждение для общего случая доказано в [34]. Дисциплина d_0 является оптимальной для следующих характеристик процесса ξ_t : для средней очереди на входе СМО $M[\xi_t]$; для вероятности превышения уровня — $P\{\xi_t > n\}$.

Проиллюстрируем эффективность оптимальных дисциплин обслуживания для восстанавливаемых систем с избыточностью (при наличии информации первого или второго типа). Такая система с избыточностью изучена в [20] с других позиций. Система характеризуется тем, что в нее входит марковский поток с интенсивностями λ_k , длина требования имеет произвольное распределение $G(x)$, число обслуживающих приборов равно r , а число мест для ожидания неограниченно; $\xi_t = 0$ при $t = 0$. Считаем, что система исправна в момент t , если $\xi_t \leq n$, и неисправна, если $\xi_t > n$. Переход ξ_t из состояния $n + 1$ назовем *отказом системы*, а переход из состояния $n + 1$ в n — ее *восстановлением*.

Исследование такой системы при $r = 1$, т. е. при одной ремонтной единице, показало, что при использовании оптимальной дисциплины d_0 основные характеристики ее надежности асимптотически совпадают с аналогичными характеристиками системы при неограниченном числе ремонтных единиц и дисциплиной обслуживания d_1 , при которой требования обслуживаются в порядке поступления. Этот результат позволяет надеяться на получение большого эффекта от внедрения обслуживания с прерыванием в практику эксплуатации групп технических систем.

Рассмотрим еще две дисциплины обслуживания d_2 и d_3 , которые не являются оптимальными, но при их применении можно в ряде случаев повысить производительность труда в случае, если поиск оптимальной дисциплины затруднен. Предположим, что известна информация первого типа. Дисциплина d_2 такова: в каждый момент обслуживается то требование, для которого математическое ожидание оставшейся длины минимально. Если же таких требований k , то каждое из них обслуживается со скоростью $1/k$. Дисциплина d_3 состоит в следующем. В каждый момент обслуживается последнее по времени прибытия в систему требование.

Методом моделирования можно получить результаты для более широкого класса СМО при рассмотрении дисциплин d_0 , d_1 , d_2 и d_3 .

Возможна такая процедура обслуживания: если прерывание в обслуживании требований невозможно, то в момент окончания обслуживания следует из очереди брать требование с наименьшим временем обслуживания.

§ 8.4. Проблема организации проверок группы систем при ограничениях на средства проверок

Выше были описаны технические возможности реализации оптимальных алгоритмов проверок систем. Однако при ограничениях на число средств, выполняющих проверки, организовать последние в строго расчетные сроки, как правило, не удастся. Например, при одинаковой частоте проверок большой группы однотипных систем и одном устройстве проверки могут возникать ситуации, при которых устройство в одно и то же время может потребоваться для проведения проверок на различных системах. В этом случае отступают от расчетных сроков проведения проверок. Задача состоит в том, чтобы с некоторой заданной точностью приблизить сроки выполнения проверок к расчетным и обеспечить наименьшие потери, связанные с перемещениями, коммутацией и амортизацией средств проверки. Назовем группу систем, на которых нам следует организовывать проверки, *комплексом*.

Задача профилактического обслуживания группы систем (в общем случае различных) ограниченным числом средств типична. Она возникает при обслуживании станков, транспортных средств, авиационных систем и даже различных систем бытового назначения (холодильников, радиоприемников, телевизоров и т. д.).

Рассмотрим длительную эксплуатацию систем. Приведем общий алгоритм составления расписания проверок для систем комплекса при ограниченных средствах обслуживания. Предположим, что имеется комплекс, состоящий из N различных независимо работающих систем, которые обслуживаются одним прибором, осуществляющим проверку систем комплекса через заданные для каждой системы периоды времени τ_i , $i = \overline{1, N}$. Обозначим $f_i = 1/\tau_i$, $i = \overline{1, N}$, и потребуем, чтобы выполнялось соотношение $\sum_{i=1}^N f_i \leq 1$. На практике это соотношение выполняется всегда, так как значения τ_i являются большими (значительно больше единицы) величинами, а N ограничено. Эксплуатацию систем комплекса строят таким образом, что отказы между проверками устраняются обслуживающим персоналом без использования прибора, осуществляющего проверку систем комплекса. Поэтому задача состоит в том, чтобы с помощью этого прибора производить проверку через заданные промежутки времени τ_i , $i = \overline{1, N}$, в процессе длительной эксплуатации комплекса. Трудность заключается в том, что прибор обслуживания может потребоваться в отдельные моменты времени сразу для ряда систем комплекса, а это при составлении расписания недопустимо. Известно, что при проверке i -й системы затрачивается время (стоимость) $T_{\Pi}^{(i)}$, $i = \overline{1, N}$. Очевидно, что существует много

вариантов обхода систем комплекса прибором обслуживания с интервалом обхода τ_i , $i = \overline{1, N}$. Однако потери, связанные с затратами на обслуживание, для различных вариантов разные. Поэтому необходимо составить такое расписание выполнения проверок систем комплекса, при котором средние потери на обслуживание, отнесенные к единице времени эксплуатации комплекса, минимальны.

Дадим строгую математическую формулировку задачи. Если рассматривается i -я система комплекса, проверка которой проводится через время τ_i , то будем считать, что следующая проверка имеет место для j -й системы с вероятностью p_{ij} , $i, j = \overline{0, N}$ ($i, j = 0$ соответствует случаю нахождения прибора проверки в первоначальном месте вне систем комплекса). Предположим, что величины f_i , $i = \overline{1, N}$, — средние значения некоторых случайных величин (о допустимых дисперсиях этих величин сказано ниже). Введение вероятностей p_{ij} , $i, j = \overline{0, N}$, предполагает существование класса рандомизированных (случайных) правил проведения проверок систем комплекса. Обозначим этот класс через C и охарактеризуем матрицей $P_m = \{p_{ij}\}$, где $p_{ij} \geq 0$, $\sum_j p_{ij} = 1$.

Пусть $\{X_t : t = 0, 1, \dots\}$ — последовательность систем, проверяемых достаточно большое (бесконечное) время. В этом случае при наличии матрицы P_m последовательность $\{X_t : t = 0, 1, \dots\}$ является марковской цепью с состояниями $\{0, 1, \dots, N\}$ и стационарными вероятностями перехода p_{ij} . Предположим, что цепь начинается с состояния 0 ($P\{X_0 = 0\} = 1$). Запишем выражение для средних затрат (потерь систем комплекса) в единицу времени:

$$Y(P_m) = \sum_i \sum_j f_i p_{ij} T_{ij}^{(ii)}, \quad (8.18)$$

где f_i должны удовлетворять (единственным образом) системе уравнения

$$f_j \geq 0; \sum_i f_i p_{ij} = f_j; \sum_j f_j = 1, \quad i, j = \overline{0, N}; \quad (8.19)$$

$T_{ij}^{(ii)}$ — средние потери на проверку j -й системы, выполняемую после осуществления проверки i -й системы.

Задача заключается в выборе такого правила $P_m \in C$ проведения проверок систем комплекса, при котором значение $Y(P_m)$ было бы минимальным при следующих ограничениях: последовательность $\{X_t : t = 0, 1, \dots\}$ имеет единственный эргодический класс (выражение этого требования в числовой форме мы приведем в примере); имеет место система уравнений (8.19)*.

Сформулированная задача является типичной задачей линейного программирования. Предложенный алгоритм построения расписаний проверок систем комплекса имеет ряд преимуществ по сравнению с алгоритмом организации проверок систем комплекса детерминированно.

* Эта задача известна в литературе как задача о «марковской упаковке» или задача о «бродячем торговце».

Детерминированная процедура профилактики для систем комплекса может быть вообще неприемлема для некоторого набора частот проверок или вычисление оптимальной процедуры проверок приводит к большим трудностям (например, даже для простого случая, когда каждая система комплекса должна проверяться одинаково часто). Преимущества рандомизированной процедуры проверок или профилактик систем комплекса следующие: всегда (при сумме частот, не превышающей единицы) существует правило построения расписания проверок систем комплекса; это правило может быть сравнительно легко составлено; можно ожидать, что затраты в единицу времени на проверку при эксплуатации систем комплекса будут более низкие, чем в случае детерминированной процедуры.

Недостаток использования рандомизированного правила проверок систем комплекса заключается в том, что системы (или их параметры) проверяются не в установленные заранее сроки. Однако случайные колебания моментов проведения проверок систем комплекса в некоторых пределах допустимы. Более того, в процессе решения конкретной задачи дисперсию времени проведения профилактики каждой системы комплекса можно ограничить (задать в приемлемых пределах).

Пример. Пусть число проверяемых параметров системы равно 5. Частоты проверок соответственно равны: $f_1 = 0,14$; $f_2 = 0,16$; $f_3 = 0,19$; $f_4 = 0,24$; $f_5 = 0,17$; $f_0 = 0,1$.

Матрица значений $T_n^{(ij)}$ имеет вид (в некоторых условных единицах), представленный в табл. 8.2.

Т а б л и ц а 8.2

<i>i</i>	<i>j</i>					
	0	1	2	3	4	5
0	100	2	1	1	1	0,5
1	0,25	100	0,5	0,5	0,5	0,25
2	0,25	1	100	0,5	0,5	0,25
3	0,25	1	0,5	100	0,5	0,4
4	0,25	1	0,5	0,5	100	0,7
5	0,25	0,5	0,3	0,5	0,7	100

Требование существования единственного эргодического класса в первом приближении можно записать так: $p_{0j} \geq \varepsilon_{0j}$, $p_{j0} \geq \varepsilon_{j0}$, $j = 0, 1, 2, \dots, 5$, где $\varepsilon_{0j} = \varepsilon_{j0} = 0,01$. В общем виде ограничение на дисперсию имеет вид

$$f^{(i)} [E - P_M^{(i)}]^{-1} \mathbf{1} \leq (1/2) \{f_i \bar{V}_{ii} + (1 - f_i) / f_i\}, \quad (8.20)$$

где $f^{(i)}$ — последовательность значений $f_0, f_1, \dots, f_{i-1}, f_{i+1}, \dots, f_N$; E — единичная матрица; $\mathbf{1}$ — вектор-столбец, составленный из единиц; $\bar{V}_{ii}$ — заданное верхнее значение отклонения от срока проведения профилактических работ (проверок) по i -й системе; $P_M^{(i)}$ — матрица, полученная из матрицы P_M вычеркиванием i -й строки и i -го столбца. В первом приближении нелинейное ограничение (8.20) можно заменить выражением:

$$f^{(i)} [E + P_M^{(i)}] \leq (1/2) \{f_i \bar{V}_{ii} + (1 - f_i) / f_i\},$$

полученным после разложения обратной матрицы $[E - P_M(i)]^{-1}$ в бесконечный ряд по степеням матрицы $P_M(i)$ и выделения только первых двух членов этого разложения.

В [3] была использована и другая форма ограничений на дисперсию $\bar{V}_{ii}$. Величина $\bar{V}_{ii}$ не должна превышать значения

$$\frac{1}{k(k+1)} [(k+1)(k+2) + \bar{V}_{ii} + \{1 - (2k+3)f_i\}/f_i^2],$$

которое получается после выделения линейных частей из членов разложения до k -го включительно. Такой подход позволяет расширить область решений, чувствительную к изменению значений дисперсий $\bar{V}_{ii}$.

Решение, полученное в [3], имеет следующий вид (вероятности p_{ij} помещены в табл. 8.3).

Таблица 8.3

i						
	0	1	2	3	4	5
0	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,95
1	0,01	0	0	0	0,454	0,536
2	0,01	0	0	0	0,99	0
3	0,179	0,732	0	0	0,089	0
4	0,212	0	0	0,788	0	0
5	0,065	0	0,935	0	0	0

Для получения решения была использована ЭВМ.

ГЛАВА IX

ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ПРОГРАММ ЭКСПЛУАТАЦИИ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

Основой теории эксплуатации, безусловно, являются статистические методы исследования — задачи о проверке статистических гипотез, о выборочном контроле, о статистике случайных процессов, непараметрические задачи математической статистики. После решения статистических задач, связанных с обработкой исходной информации о состоянии сложных систем в процессе испытаний и эксплуатации, возникают задачи, рассмотренные в гл. II—VIII настоящего пособия и лежащие в основе выбора программы эксплуатации сложных систем или их отдельных блоков и элементов.

В настоящей главе рассмотрена информация, необходимая для организации процесса эксплуатации сложных систем, а также специфика возникающих при эксплуатации систем статистических задач на

примерах различения статистических гипотез о возрастании (невозрастании) интенсивности отказов невосстанавливаемых элементов системы в процессе эксплуатации; статистического оценивания функции восстановления или функции плотности восстановления (функции параметра потока отказов для восстанавливаемых систем), характеризующей монотонным возрастанием во времени, и получения статистических оценок переходных вероятностей для марковских цепей, с помощью которых можно промоделировать процесс дискретного и безошибочного измерения параметров систем.

Материал данной главы изложен конспективно, так как главная цель — привлечь внимание к статистическим методам исследования в теории эксплуатации сложных систем.

Большое внимание в главе уделено вопросам построения системы обработки информации (СОИ) для обоснования программ эксплуатации.

§ 9.1. Некоторые статистические задачи теории эксплуатации сложных систем

1. Статистические тесты для стареющих распределений. Напомним, что стареющим называем распределение $F(t)$, для которого $\lambda(t) = f(t)/(1 - F(t))$, $\lambda'(t) > 0$, где $f(t) = F'(t)$. Например, гамма-распределение с плотностью

$$f(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^{\alpha-1} e^{-\lambda t}}{\Gamma(\alpha)}, \quad \lambda > 0, \alpha \geq 1, t \geq 0,$$

(здесь $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция) и распределение Вейбулла с плотностью

$$f(t) = \lambda \alpha t^{\alpha-1} e^{-\lambda t^\alpha}, \quad \lambda > 0, \alpha \geq 1, t \geq 0,$$

являются распределениями стареющего типа.

Однако на практике вид распределения неизвестен и требуется определить с определенной степенью достоверности (в статистическом смысле) по реализациям случайной величины (например, по моментам появления отказов), является ли распределение случайной величины стареющим или нет. Таким образом, тест, лежащий в основе такого различия, должен быть непараметрическим.

Опишем тест, впервые предложенный Прошаном и Пайком [8].

Пусть имеется n реализаций (значений) случайной величины X , имеющей распределение $F(t)$ и плотность $f(t)$ при $t \geq 0$. Обозначим их через $x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nn}$ и расположим в порядке возрастания (вводя другие обозначения); тогда получим статистический ряд $T_{n1} \leq T_{n2} \leq \dots \leq T_{nn}$. На основании этого ряда нужно различить две статистические гипотезы: гипотезу H_0 , состоящую в утверждении, что для наблюдаемой случайной величины X функция $\lambda(t) = \lambda$, где λ — неизвестная положительная константа; альтернативную гипотезу H_1 , в которой утверждается, что $\lambda(t)$ — возрастающая во времени функция.

Рассмотрим процедуру различия гипотез H_0 и H_1 . Пусть

$$D_{n1} = T_{n1}, D_{n2} = T_{n2} - T_{n1}, \dots, D_{nn} = T_{nn} - T_{nn-1}$$

и

$$\bar{D}_{n1} = nD_{n1}; \bar{D}_{n2} = (n-1)D_{n2}, \dots, \bar{D}_{nn} = D_{nn}.$$

Пусть далее

$$V_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } \bar{D}_{ni} \geq \bar{D}_{nj}, \quad i, j = \overline{1, n}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Обычно при различении гипотез в статистике находят некоторую вспомогательную случайную величину с известным распределением и с ее помощью получают необходимую информацию для различения исходных гипотез.

В рассматриваемом случае в качестве такой вспомогательной величины выберем величину

$$V_n = \sum_{i, j=1, i < j}^n V_{ij}.$$

Тогда нулевая гипотеза H_0 отвергается при уровне значимости α , если $V_n > v_{n\alpha}$, а $v_{n\alpha}$ определено так, что $P\{V_n > v_{n\alpha} / H_0\} = \alpha$.

Для практических расчетов можно считать величину V_n асимптотически нормальной. После установления факта возрастания $\lambda(t)$ для случайной величины X возникает задача статистической оценки наблюдаемой на практике функции $\lambda_n(t)$ (при n наблюдениях величины X), т. е. степени ее приближения к $\lambda(t)$ при возрастании n . Тесты для ограниченных выборок имеются в [19].

2. Статистическая оценка функции восстановления. Напомним, что при восстановлении сложных систем важной характеристикой является функция восстановления — среднее число восстановлений системы на фиксированном отрезке времени. Это число восстановлений зависит от отрезка времени $[0, t]$, поэтому является функцией времени. Выше функция восстановления обозначена через $H(t)$, а плотность восстановления (среднее число отказов в единицу времени) — через $h(t) = H'(t)$. Очевидно,

$$H(t) = \int_0^t h(t) dt.$$

Функцию $H(t)$ можно найти согласно закону больших чисел как среднее арифметическое n функций $H_j(t)$, $j = \overline{1, n}$, каждая из которых есть число отказов за время $[0, t]$ в n независимых опытах. По закону больших чисел при $n \rightarrow \infty$ функция

$$\bar{H}_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n H_j(t)$$

при любом t сходится по вероятности к функции $H(t)$.

Воспользуемся для оценки отклонения $\bar{H}_n(t)$ от $H(t)$ результатом, доказанным Ю. К. Беляевым: если $H_n(t)$ — непрерывная функция, то для любых T и $x > 0$ при $n \rightarrow \infty$

$$P \left\{ \max_{0 \leq t \leq T} |\bar{H}_n(t) - H(t)| < x \sqrt{\bar{H}_n(t) n} \right\} \rightarrow L(x) = \int_0^x \left[\frac{4}{V 2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k+1) e^{-(2k+1)^2 x^2 / 2} \right] dx. \quad (9.1)$$

На основании сформулированного утверждения, если необходимо, чтобы ошибка в определении функции $H(t)$ на интервале $[0, T]$ с вероятностью p не превышала величины α , нужно определить значение x из уравнения $L(x_p) = p$ и затем последовательно проводить наблюдения (при нарастании n) за функцией $\bar{H}_n(T)$ до тех пор, пока не будет выполнено неравенство

$$x_p^2 \frac{\bar{H}_n(T)}{n} \leq \alpha^2.$$

Функция $\bar{H}_n(t)$ при большом n является достаточно хорошей аппроксимацией функции $H(t)$. Однако для получения хорошего приближения функции $\bar{H}_n(t)$ к $H(t)$ требуется большое число испытаний n , так как сходимость в соотношении (9.1) происходит довольно медленно.

Для отыскания функции $h(t)$ нужно аппроксимировать $\bar{H}_n(t)$ кривой, имеющей по возможности простое аналитическое выражение.

В табл. 9.1 приведены результаты расчетов на ЭВМ (по правилу (9.1)) ошибки в определении функции $H(T)$ на некотором интервале $[0, T]$ для различных значений p , α и n .

Например, если на интервале $[0, T]$ функция $\bar{H}_n(T) = 1$, 0 при $n = 273$, то ошибка в определении функции $H(T)$ не превышает 0,1 ($\alpha = 0, 1$) с вероятностью 0,8 ($p = 0,8$).

Покажем, при решении каких задач исследователи используют функцию $H(t)$ или $h(t)$, а следовательно, должны применять (в случае ограниченного n) изложенный выше результат, лежащий в основе получения оценки функции $\bar{H}_n(t)$. Рассмотрим ситуацию, при которой сложная система эксплуатируется следующим образом. После проведения профилактики система непрерывно работает до следующей профилактики, в результате которой она полностью восстанавливает свойства. При отказах между профилактиками и при проведении профилактики система не используется по назначению. После отказа происходит восстановление работоспособности системы в результате проведения работ только по устранению отказа. Требуется выбрать период проведения профилактических работ таким, чтобы в среднем максимизировать долю времени работы системы по назначению в процессе ее длительной эксплуатации.

Обозначим через T_n среднюю длительность профилактики, через τ — время между двумя последовательными профилактиками, через

Таблица 9.1

$\begin{matrix} p \\ \alpha \\ H_n(T) \end{matrix}$	0,8			0,9			0,95			0,99		
	0,05	0,1	0,2	0,05	0,1	0,2	0,05	0,1	0,2	0,05	0,1	0,2
0,1	108	27	7	156	39	10	200	50	12	316	79	20
0,5	544	136	34	790	192	48	1008	252	63	1580	395	99
1,0	1092	273	68	1580	385	96	2020	505	126	3160	790	197
5,0	5500	1365	341	7700	1925	481	10100	2525	631	15800	3950	987
10,0	10920	2730	682	15800	3850	962	20200	5050	1262	31600	7900	1975

$M(\tau)$ — математическое ожидание суммарного времени, затраченного на восстановление системы при отказах между двумя профилактиками. Очевидно, что доля времени, в течение которого система успешно работает, равна

$$1 - \frac{M(\tau) + T_n}{\tau + T_n + M(\tau)} = k(\tau).$$

Для систем, обладающих сравнительно высокими характеристиками надежности и ремонтпригодности, $\tau \gg M(\tau)$, поэтому можно записать:

$$k(\tau) \approx 1 - (M(\tau) + T_n) / (\tau + T_n). \quad (9.2)$$

Обозначим через Θ среднее время восстановления системы при отказе. Тогда

$$M(\tau) = \Theta H(\tau),$$

где $H(\tau)$ — функция восстановления, которую на практике заменяют функцией $\bar{H}_n(t)$, статистическая оценка которой уже была рассмотрена. Перепишем выражение (9.2) следующим образом:

$$k(\tau) = 1 - (\Theta H(\tau) + T_n) / (\tau + T_n).$$

Дифференцируя это выражение по τ и приравнявая полученную производную нулю, имеем уравнение для определения такого $\tau = \tau_0$, при котором $k(\tau_0) = \max_{\tau} k(\tau)$. Это уравнение имеет вид

$$\Theta h(\tau) (\tau + T_n) = \Theta \int_0^t h(s) ds + T_n, \quad (9.3)$$

где $h(t) = H'(t)$.

Пусть $h(t) = p + qt$. Тогда из (9.2) имеем

$$\tau^2 + 2\tau T_{\pi} + (2/q)(pT_{\pi} - T_{\pi}/\Theta) = 0$$

и получаем приближенную формулу

$$\tau_0 = T_{\pi} \left[\sqrt{1 + 2 \frac{1 - p\Theta}{q\Theta T_{\pi}}} - 1 \right] \approx 1,41 T_{\pi} \sqrt{\frac{1 - p\Theta}{q\Theta T_{\pi}}},$$

где $p\Theta < 1$.

3. Особенности обработки статистики случайных процессов изменения параметров технических систем при эксплуатации. В настоящее время процессы изменения контролируемых (и неконтролируемых) параметров сложных технических систем при эксплуатации считают случайными функциями времени. Правда, высказываются предположения, что поведение параметра при длительной эксплуатации системы часто определяет некоторая детерминированная составляющая, обусловленная стабильностью технологии изготовления и ремонта систем, а также «жесткими» (электрическими или механическими) связями, существующими в системе.

Аппроксимация процессов изменения параметров технических систем случайными процессами известного вида приводит к вычислительным трудностям, связанным с обработкой измеренных значений параметров. Покажем сложность получения оценок на сравнительно простом примере идеального измерения параметра марковского типа, который можно в моменты измерения представить дискретной цепью Маркова со стационарными вероятностями переходов. Разобьем поле допуска на параметр на m квантов (считаем, что выход параметра за границу допуска всегда приводит к отказу системы). Рассмотрим нестационарную марковскую цепь первого порядка. Обозначим через $\tau = 0, 2t, \dots, kt$ моменты наблюдения (измерения) параметра. Пусть имеется n значений (реализаций) параметра, измеренного в моменты τ . Если $n_{ij}(\tau)$ — число реализаций, наблюдаемых в момент $\tau - 1$ в состоянии i и в состоянии j в момент τ ($i, j = 1, \dots, m$), то

$$n_i(\tau - 1) = \sum_{b=1}^m n_{ib}(\tau),$$

где $n_i(\tau - 1)$ — общее (безусловное) число реализаций, находящихся в момент $\tau - 1$ в состоянии i .

Рассмотрим процедуру получения статистических оценок для переходных вероятностей $\{p_{ij}\}$ в данной цепи. Обозначим через $\hat{p}_{ij}(\tau)$ оценку вероятности $p_{ij}(\tau)$. Применим метод максимального правдоподобия. Функция правдоподобия имеет вид

$$L = \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^m [p_{ij}(\tau)]^{n_{ij}(\tau)}$$

и максимальна при

$$p_{ij}(\tau) = \hat{p}_{ij}(\tau) = \frac{n_{ij}(\tau)}{n_i(\tau - 1)}.$$

Значение $\hat{p}_{ij}(\tau)$ и есть оценка $p_{ij}(\tau)$, которая имеет асимптотически нормальное распределение со средним $p_{ij}(\tau)$ и обладает свойствами эффективной, состоятельной и несмещенной оценки. Переходные вероятности затем проверяют на стационарность, далее обычно применяют статистическую процедуру определения порядка марковской цепи.

Достаточной статистикой является набор $\{n_{ij}(\tau)\}$ для каждого $\tau = 0, 2t, \dots, kt$ и $i, j = \overline{1, m}$.

Приведенные выше примеры дают некоторое представление об объеме статистической информации, с которой приходится иметь дело при информационном обеспечении программ эксплуатации сложных систем. Полная исходная статистическая информация, необходимая для обеспечения программ эксплуатации, должна включать статистическую информацию о различных случайных величинах (например, о времени выполнения различных видов подготовок систем к работе, их восстановлений и ремонтов, регулировок параметров), случайных процессах изменения определяющих параметров систем во времени, о достоверности измерительных систем (об ошибках первого и второго рода) и др.

При организации процессов эксплуатации сложных систем всегда следует иметь в виду их назначение, характер работы, допустимые простои и т. д. Однако существует ряд общих проблем информационного обеспечения программ эксплуатации систем, носящих технический и организационный характер. Эти вопросы рассмотрены в последующих параграфах настоящей главы.

§ 9.2. Общие сведения о структуре систем обработки информации

Реализация рассмотренных в настоящем пособии оптимальных моделей, лежащих в основе математического обеспечения программ эксплуатации сложной системы, групп однотипных систем или систем большого масштаба, немыслима без стройной системы сбора, хранения, передачи и обработки массивов информации о состоянии технических систем и составляющих их частей. Разработка, внедрение и использование программ эксплуатации сложных систем должны быть направлены на повышение эффективности применения систем в соответствии с их основным назначением (в промышленности, энергетике, на транспорте и других областях человеческой деятельности).

Практическое использование программ эксплуатации современных технических систем возможно на базе систем обработки информации, появившихся как результат достижений в области кибернетики, вычислительной техники, теории информации. Современные системы обработки информации могут основываться на вычислительных сетях, включающих рассредоточенные ЭВМ, источники и потребители информации, объединенные каналами связи. В таких системах возможно перераспределение вычислительных мощностей в зависимости от нагрузки, они позволяют собирать информацию непосредственно в пунктах ее возникновения.

В системах обработки информации вычислительные машины не только выполняют арифметические операции, но и обрабатывают информацию.

Объем информации, которая возникает при эксплуатации объектов в промышленности, при планировании, разработке различных АСУ и в других областях, увеличивается со всевозрастающим темпом. Например, очень быстро растет объем технической документации. Поиск нужной информации сейчас уже невозможен без использования технических средств на базе ЭВМ.

В основе построения системы обработки данных должны лежать управляемая система, система обработки данных и управляющий объект. Если управляемая система довольно сложная, то для оперативного восприятия и переработки данных система обработки информации должна строиться на базе ЭВМ. Задача системы обработки информации — обобщение и преобразование исходной информации для получения сведений, которые в данный момент необходимы для принятия решения.

Источники данных и пользователи системы обработки информации (СОИ) могут находиться в разных местах, что вызывает необходимость включения каналов передачи информации. Связь с периферийными устройствами СОИ осуществляется через устройство сопряжения. В территориально удаленных пунктах, входящих в СОИ, функции устройства сопряжения выполняют концентраторы (они собирают информацию от подключенных к ним оконечных устройств — терминалов). Концентраторы формируют поступающие сообщения в обобщенные блоки и передают последние по каналам связи к устройству сопряжения СОИ.

В периферийных устройствах предусмотрены специальные преобразователи цифровых сигналов от ЭВМ в удобную для передачи аналоговую форму.

В СОИ сбор и сортировка (классификация) информации — одна из основных задач, так как избыточная информация приводит к увеличению ее стоимости в эксплуатации. Исходная информация полностью определяет все возможности СОИ, поэтому при ее создании вопросам сбора информации, обеспечения требуемой достоверности и своевременности поступления уделяется большое внимание. Наряду с проблемой сбора информации возникают не менее важные проблемы ее передачи и обработки. Информация может собираться от большого числа разнесенных территориально пунктов, удаленных на значительное расстояние от центра обработки. В этих случаях эффективная работа СОИ во многом определяется быстротой и достоверностью передачи информации по проводным, кабельным, радиорелейным и другим каналам электросвязи. Информация по любому каналу передается в двоичной форме.

Входным устройством передачи информации в канал могут быть машинописная клавиатура, устройства чтения с перфолент, перфокарт, магнитных лент. Таким входным устройством может являться и сама ЭВМ. Прием информации осуществляется печатающим устройством для записи на магнитную ленту или ввода в ЭВМ.

При обработке информации в СОИ, как правило, соблюдается иерархический принцип. Так, руководители нижнего уровня используют сведения для оперативного руководства подразделениями, на высшем уровне рассматривается информация, необходимая, например, для перспективного планирования или организации в целом. Система обработки информации выполняет следующие функции.

1. Сбор и отображение исходных данных. В ряде случаев исходная информация поступает на обработку в виде машинописных или рукописных отчетов, представлений, различных форм и т. п.

Иногда с этих документов производится перезапись на носители (перфоленты или перфокарты и др.) для последующего считывания информации ЭВМ.

2. Сортировку (классификацию) информации.

3. Вычисление по заданным алгоритмам (решение некоторых оптимальных задач, определение критериев и др.).

4. Обобщение данных для получения итогового результата.

5. Хранение данных (бумажные документы, микрофильмы, записи на магнитных носителях, перфолентах и т. д.).

6. Поиск информации (нахождение требуемых сведений в устройствах хранения информации); этот процесс может быть полностью автоматизирован.

7. Размножение данных (копирование).

8. Передачу информации между различными блоками в СОИ. Информация при обработке может принимать различные формы, что следует учитывать при передаче информации.

Основные характеристики, принимаемые во внимание при определении требований к СОИ, кратко можно формулировать так: надежность математического обеспечения, экономичность, достоверность, оперативность, полнота информации и обеспечение ее избирательности, сжатость сведений, их обобщенность, представление в удобной форме (графики, диаграммы и т. д.).

СОИ могут быть централизованными и децентрализованными, состоящими из ряда «равноправных» ЭВМ. Централизованные СОИ строятся по иерархическому принципу. Интересно отметить, что сейчас, например, в системах СОИ уделяется значительное внимание «интеллектуальным» терминалам — терминалам, осуществляющим не только ввод или вывод информации, но и предварительную ее обработку. Эти терминалы выполняют роль нижнего иерархического звена обработки информации в СОИ. В практике эксплуатации сложных систем такими терминалами могут быть решающие элементы, встраиваемые в контролируемый блок и осуществляющие операцию сравнения текущего значения контролируемого параметра блока с упреждающим и граничным допусками. Рассмотрим кратко технические средства, применяемые в системах обработки данных. Это ЭВМ (с периферийным оборудованием) и каналы передачи информации. В ЭВМ осуществляется преобразование информации и координируется работа всех подсистем СОИ. Периферийное оборудование ЭВМ (внешнее устройство) в СОИ служит для сбора, хранения и передачи информации от источников к ЭВМ и выдачи результатов обработки потребителю.

Рассмотрим информацию на входе внешних устройств СОИ. Информация на входе этих устройств бывает в алфавитно-цифровой форме, двоичной форме (в таком виде она поступает после аналого-цифрового преобразования и хранится на промежуточных носителях — на перфолентах, перфокартах, магнитных лентах и т. д.), в графической и речевой форме, иногда эта информация может быть и визуальной.

Остановимся подробнее на устройствах ввода информации. К таким устройствам относятся: машинные носители (перфокарты, перфоленты, магнитные ленты и т. д.); оптические устройства считывания данных с документов, напечатанных на пишущей машинке магнитными чернилами; устройства непосредственного ввода в ЭВМ (без промежуточных носителей) информации, поступающей от человека.

Рассмотрим наиболее распространенный в настоящее время ввод информации — ввод с машинных носителей. Достоинство перфокарт — высокая надежность хранения информации, доступность записей для проверки и обновления. Однако площадь перфокарты используется малоэффективно (на одной перфокарте можно записать не более 80 знаков, в то время как при машинописной печати на той же площади можно разместить до 2000 знаков). Скорость записи информации на перфокарты от 60 до 500 карт/мин [33].

Перфоленты также служат для хранения вводимой в ЭВМ информации. По сравнению с перфокартами их достоинство состоит в том, что при записи информации нет ограничений по длине блока; они дешевле перфокарт, однако на ленте труднее исправлять и корректировать записи.

В устройствах ввода информации с перфолент используется электромеханический или фотоэлектрический способ считывания. В первом случае скорость ввода данных не более нескольких сотен знаков в секунду. При втором способе она составляет примерно 2000 знаков/с. Скорость перфорации лент от 10 до 300 знаков/с.

Магнитные ленты в СОИ являются основными средствами хранения, ввода и вывода информации для ЭВМ. Основное достоинство этого носителя информации — компактность записи и высокая скорость ввода — вывода. Ленты помещают в кассеты. Емкость одной магнитной ленты может превышать 20 млн. знаков, что эквивалентно 250 тыс. перфокарт [33]. Максимальная скорость ввода и вывода на магнитных лентах в 100 раз больше скорости ввода информации с перфокарт и более чем в 400 раз — скорости вывода информации на перфокарты. Магнитную ленту можно многократно использовать для записи, она надежна в эксплуатации. Ввод информации с ленты в ЭВМ и вывод информации на ленту производятся лентопротяжными устройствами, скорость движения ленты от 25 до 50 м/с, разгон ленты до номинальной скорости занимает миллисекунды.

Число лентопротяжных устройств в ЭВМ, используемых в СОИ, от 6 до 200 [33]. На ленты можно осуществлять запись при выводе информации из ЭВМ, с перфокарт и перфолент (с помощью специальных преобразователей). Созданы специальные устройства записи информации с клавиатуры на ленту. Иногда запись на ленту производится с накопителя — магнитного диска. Основным недостатком магнитной лен-

ты является необходимость специальных условий хранения (определенная влажность, отсутствие магнитных полей, пыли и др.).

Перечислим устройства вывода информации. Они подразделяются на: устройства вывода на машинные носители информации (перфолен-ты, магнитные ленты и др.); устройства вывода на документы (печатающие устройства, микрофильмирование и т. п.); устройства вывода при организации диалога между человеком и ЭВМ (электрическая пишущая машинка, дисплей, речевой ответчик и др.).

В аппаратуре передачи данных в настоящее время можно выделить две группы систем передачи данных: системы с коммутируемыми и выделенными каналами.

§ 9.3. Возможная структура системы обработки информации для обеспечения программ эксплуатации

Рассмотрим централизованную систему обработки информации для обеспечения (реализации) программ эксплуатации однотипных сложных технических систем.

Структурная схема СОИ для обеспечения программ эксплуатации сложных систем приведена на рис. 9.1.

На центральную ЭВМ поступает обобщенная информация о состоянии технических систем, за эксплуатацию которых отвечает руководящий обслуживающий персонал высшего ранга. Информация может быть следующей: содержать сведения об общем числе исправных систем, систем в неисправном состоянии, находящихся в ремонте, на техническом обслуживании, на доработках, планируемый отход систем в ремонт, число систем, выработавших установленный ресурс, пополняющих парк эксплуатируемых систем, основные обобщенные эксплуатационные показатели по климатическим зонам эксплуатации систем, сроки установленных ресурсов и значения упреждающих допусков на все контролируемые параметры систем, показатели избыточности систем по эффективности и др.

Эти данные накапливаются в центральной ЭВМ, сортируются, хранятся и выдаются по требованию в виде справок, документов, донесений руководящему обслуживающему персоналу высшего ранга. Команды от руководящего персонала высшего ранга по каналам связи передаются руководящему обслуживающему персоналу среднего ранга. Эти команды содержат информацию об изменении эксплуатационных режимов работы систем, о проведении на них доработок, о корректировках сроков и объемов работ по техническому обслуживанию, корректировках технической документации, изучений дополнительных распоряжений и указаний по организации работ по обслуживанию и изменениям технологии выполнения этих работ и другие материалы. Аналогичный обмен оперативной информацией осуществляется между персоналом, занятым непосредственным обслуживанием систем, и руководящим обслуживающим персоналом среднего ранга. Более подробная информация передается всем звеньям обслуживающего персонала по системе центральной и периферийных ЭВМ, математиче-

ское обеспечение которых позволяет реализовать программы эксплуатации сложных систем.

Таким образом, все ЭВМ (кроме ЭВМ низшего уровня) обрабатывают вторичную информацию. На каждом уровне накапливаются свои массивы данных; обобщенные данные передаются на следующий уровень. Порядок обработки данных и формы обобщения при переходе от уровня к уровню определяются центральной ЭВМ. Периферийные ЭВМ низшего уровня могут входить в состав технических систем. Эти ЭВМ

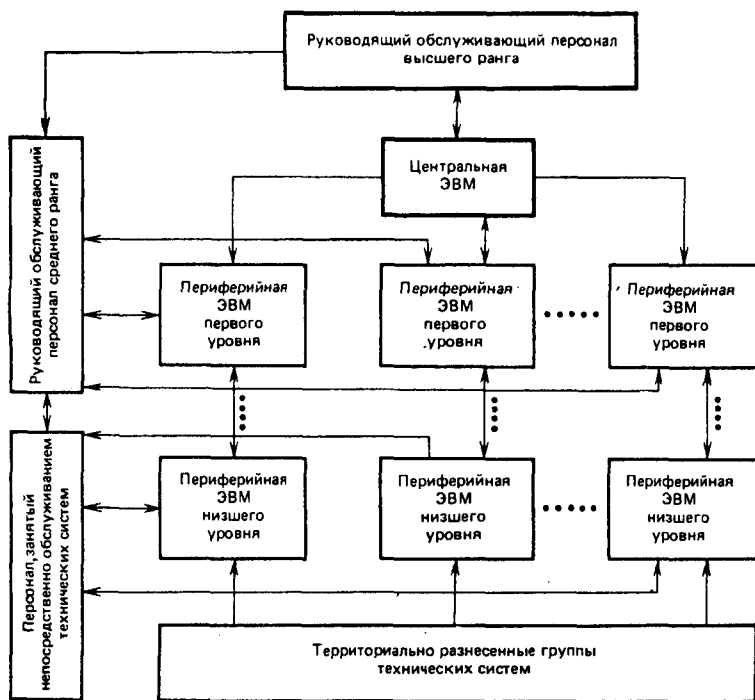


Рис. 9.1

непосредственно накапливают, классифицируют, хранят и отображают в удобной для последующего использования форме информацию, получаемую в момент контроля состояния технических систем. (Это информация о состоянии контролируемых параметров системы, о наработке различных ее элементов, блоков, подсистем и системы в целом, об отказах системы, трудозатратах на эксплуатацию, о требуемом количестве запасного имущества, точности измерения параметров, необходимом числе повторных измерений, значениях выбранных основных и упреждающих допусков на параметры, сроках и объемах работ по техническому обслуживанию системы, сроках направления системы на восстановление ресурса и т. д.).

Недостатки, имеющие место при обработке эксплуатационной информации без СОИ, следующие:

— несвоевременность информации (возрастающий объем информации и необходимость принятия срочных мер по изменению режимов эксплуатации систем заставляют перерабатывать информацию с помощью ЭВМ);

— неполнота информации о техническом состоянии систем (в ряде случаев при ручной обработке информации руководящий состав может не получить данные, полезные при принятии решений);

— несоответствие формы представления и самой информации (иногда возникает необходимость рассмотрения представленных ранее данных в другом аспекте; руководящий состав может получить не ту информацию и т. д.);

— высокая стоимость информации, получаемой вручную или с помощью вычислительных машин малой мощности.

В памяти ЭВМ, используемой в СОИ, хранятся все сведения, необходимые для подготовки ответов на поступающие запросы. При этом руководящий состав может быстро получать ответы на самые разнообразные запросы, а в СОИ используется вся имеющаяся информация по данному запросу, но выдаются только сведения, в полной мере соответствующие запросу. При разработке СОИ должны быть учтены конкретные условия использования данной системы обработки.

Рассмотрим общие принципы проектирования и разработки систем, не зависящие от специфики применения.

Основная задача СОИ — повышение эффективности управления объектами: СОИ являются звеньями более сложных систем, включающих комплексы технических устройств и коллективы людей. Эти сложные системы можно почти всегда рассматривать как системы управления с обратной связью.

При управлении сложной организационной структурой система управления может состоять из сотен и тысяч связанных подсистем с обратной связью. Такие подсистемы взаимодействуют по иерархическому принципу. При создании структуры, включающей СОИ, первоначально основное внимание уделяют описанию входных и выходных информационных потоков. На следующем этапе раскрывают организацию исследуемой структуры, описывая ее как совокупность взаимодействующих частей. СОИ должна обобщить поступающие в рассматриваемую структуру данные и представить обработанные результаты руководителям различных уровней. Решения в сложных структурах принимают на нескольких уровнях. Чем выше уровень руководителя, тем чаще обобщенная информация поступает к нему.

При создании СОИ, например для реализации программ эксплуатации, необходимо сначала изучить техническую систему как объект эксплуатации, т. е. ее структуру, контроль, ремонтпригодность, выполняемые функции, техническую документацию по ее эксплуатации и обслуживанию, описание алгоритмов ее функционирования и определения основных характеристик в процессе эксплуатации, роль и место автоматизированного контроля состояния системы и т. д. Необходимо также выделить основные показатели, по которым оценивается успешная работа технической системы (групп технических систем). Далее описывают входные и выходные потоки, связывающие систему

с внешней средой и характеризующие ее надежность, ремонтпригодность, эксплуатационную технологичность и эффективность. Затем выделяют отдельные подсистемы, входящие в состав исследуемой подсистемы, и детально анализируют функционирование этих систем.

Подробно должны быть рассмотрены режимы функционирования системы и всех ее подсистем, каналы обмена информацией между подсистемами в процессе работы системы.

Качество функционирования системы совершенствуется на базе использования СОИ для реализации программ эксплуатации. Основные задачи СОИ в данном случае заключаются в регистрации, учете и обработке информации, контроле и диагностике текущего состояния управляемого объекта (технической системы).

Техническое состояние системы никогда нельзя точно предсказать, и для его контроля и стохастического прогнозирования в ЭВМ вводят данные об изменении определяющих параметров системы и о наработке. На основании этих данных ЭВМ (после их обработки) выдает рекомендации по эксплуатации систем и передает обобщенную информацию на верхний уровень иерархии.

На основании поступающих данных ЭВМ непрерывно накапливает информацию об определяющих контролируемых параметрах системы и вносит уточнения в выдаваемые рекомендации о дальнейшей эксплуатации системы.

В случае отказа системы ЭВМ немедленно выдает соответствующую аварийную информацию.

Для оценки эффективности функционирования СОИ используют следующие параметры: стоимость, быстродействие, помехоустойчивость, надежность, удобство использования и др. При этом определяют допустимые границы их изменения.

Проектирование СОИ необходимо осуществлять одновременно с проектированием технической системы, для реализации программ эксплуатации которой СОИ предназначается. При проектировании СОИ решают вопросы об объединении некоторых потоков информации, о форме входных данных, удобных для ввода в ЭВМ, о точности ввода данных, о допустимых колебаниях в объеме выходных данных и т. д. Аналогично рассматривают и выходные потоки информации.

При работе с массивами информации определяют частоту обращения к массивам, скорость изменения массива, частоту обновления данных в массиве, возможность объединения массивов, затраты машинного времени на обработку информации и др. Главные задачи, которые решают в процессе реализации СОИ, — это разработка программ математического обеспечения работы СОИ, их отладка и проверка, испытание СОИ. Внедрение СОИ — сложная задача, связанная с работой больших коллективов людей, которые должны изучать новые методы работы и освоить способы использования СОИ.

ЭВМ в процессе эксплуатации СОИ обрабатывает поступающую информацию о текущем состоянии системы, сортирует, уплотняет информацию и отображает в удобной для выдачи форме. Далее ЭВМ подготавливает оперативные инструкции для обслуживающего персонала, выдает инструкции о характере и объеме работ по техническому обслуживанию.

живанию системы. ЭВМ также должна сигнализировать о приближающихся критических ситуациях, связанных, например, с безопасностью персонала, который взаимодействует с системой, или с поломками и разрушениями системы. Руководящий обслуживающий персонал высшего ранга использует сведения, хранящиеся в ЭВМ, для получения необходимой для принятия решений информации.

В настоящее время актуальным является вопрос распределения автоматизированных и других операций при техническом обслуживании систем и использования ЭВМ, входящих в состав СОИ, для обучения персонала, занятого эксплуатацией сложных технических систем различного назначения. Важны также проблемы быстрого поиска информации в больших разнородных массивах в СОИ с использованием опыта работы библиотек и служб научно-технической информации. Опыт этой работы обобщает новая наука, называемая *информатикой*.

**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
ПО РЕАЛИЗАЦИИ МАТЕРИАЛОВ ПОСОБИЯ
В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ (ПРИ КУРСОВОМ
И ДИПЛОМНОМ ПРОЕКТИРОВАНИИ)
ПО ДИСЦИПЛИНАМ ЭКСПЛУАТАЦИОННОГО ПРОФИЛЯ**

Содержащийся в учебном пособии материал может быть использован в лекционных курсах высших учебных заведений технического профиля по эксплуатационным дисциплинам, при проведении практических занятий, лабораторных работ, курсовом и дипломном проектировании.

Ниже приведен примерный перечень тем дипломного проектирования. Указаны основные вопросы дипломного задания по каждой теме и даны рекомендации по составлению тем курсового проектирования, которое должно предшествовать выполнению дипломной работы. При составлении задания на проектирование слово «аппаратура» следует заменить наименованием технической системы конкретного назначения.

В заданиях имеются определения автоматизированных и автоматических систем контроля. При этом подразумевается, что в автоматизированной системе контроля во время ее функционирования часть операций контроля выполняется с участием оператора. В автоматической системе контроля такие операции отсутствуют.

Следует также учитывать и то обстоятельство, что реализация тех или иных алгоритмов контроля в аппаратуре возможна как с помощью ЭВМ, так и автономных решающих устройств-терминалов.

**ПЕРЕЧЕНЬ ТЕМ И ОСНОВНЫХ ВОПРОСОВ
ДЛЯ КУРСОВОГО И ДИПЛОМНОГО
ПРОЕКТИРОВАНИЯ**

Тема 1 (дипломная работа по материалам гл. II): «Разработка системы технического обслуживания элементов аппаратуры по заданному ресурсу».

1. Разработать автоматизированную систему сбора и отображения информации об отказах стареющих элементов аппаратуры (перечень стареющих элементов аппаратуры указывается в задании).

2. Рассчитать для каждого элемента по заданным функциям $\lambda_i(t)$, $\lambda'_i(t) > 0$, характеристикам ремонтпригодности и эксплуатационной технологичности (соответствующим значениям T_{1i} и T_{2i}) и оперативному времени работы аппаратуры x ($i = \overline{1, n}$, где n — число старею-

щих элементов аппаратуры) значения оптимальных ресурсов и объем запасных элементов на заданный период эксплуатации.

3. Провести электрический расчет тракта преобразования информации о наработке элементов, устройства реализации алгоритмов расчетов (предполагается, что в системе технического обслуживания отсутствует универсальная ЭВМ).

Выполнению проектирования по теме 1 должно предшествовать курсовое проектирование с включением п. 1 и 2 или 1 и 3 задания.

Тема 2 (дипломная работа по материалам гл. III): «Автоматизированная система контроля параметров аппаратуры с детальной разработкой устройства принятия решения о техническом обслуживании».

1. Разработать функциональную схему автоматизированной системы контроля состояния аппаратуры.

2. Составить перечень контролируемых параметров на различных этапах эксплуатации аппаратуры.

3. Обосновать алгоритмы контроля и принятия решения для всего перечня выбранных параметров (статистическое описание параметров задается руководителем).

4. Разработать устройство принятия и отображения решения по результатам контроля параметров и произвести электрический расчет преобразовательного тракта, включая устройство ввода информации в ЭВМ.

Тема 3 (дипломная работа по материалам гл. IV): «Автоматическая система контроля состояния аппаратуры с детальной разработкой специализированного вычислительного блока».

1. Разработать функциональную схему автоматической системы контроля состояния аппаратуры.

2. Разработать предложения по контролю обобщенных характеристик блоков аппаратуры (например, по контролю передаточных функций), позволяющему получать оперативную информацию о работоспособности блоков.

3. Обосновать требования к устройству сопряжения контролируемой аппаратуры с ЭВМ.

4. Разработать специализированный вычислительный блок и произвести его электрический расчет.

Перед выполнением тем 2, 3 задаются курсовые работы с выполнением п. 1 и 2 каждой темы.

Тема 4 (дипломная работа по материалам гл. V): «Автоматизированная система контроля параметров и состояния аппаратуры с детальной разработкой устройства повышения достоверности измерений».

1. Разработать функциональную схему автоматизированной системы контроля параметров и состояния аппаратуры.

2. Обосновать перечень контролируемых параметров на различных этапах эксплуатации аппаратуры и предложения по выдаче обобщенной информации о работоспособности блоков.

3. Рассчитать оптимальное число повторных измерений для параметров, при контроле которых учитываются ошибки первого и второго рода.

4. Разработать устройство повышения достоверности измерений и произвести его электрический расчет.

Перед выполнением проектирования по теме 4 задается курсовая работа с обязательным включением п. 1 и 2, или 1 и 3, или 3 и 4 задания.

Тема 5 (дипломная работа по материалам гл. VI): «Автоматизированная система контроля находящейся на складском хранении однотипной аппаратуры с детальной разработкой тракта отображения информации о моментах проверок аппаратуры».

1. Разработать функциональную схему автоматизированной системы контроля однотипной аппаратуры в режиме хранения.

2. Обосновать перечень контролируемых параметров аппаратуры.

3. Рассчитать сроки проверок аппаратуры, обеспечивающие минимум затрат в условиях ограниченной информации о надежности аппаратуры (степень ограничения информации о надежности аппаратуры уточняется руководителем).

4. Разработать устройство отображения информации о моментах проверок аппаратуры и произвести его электрический расчет.

Перед выполнением проектирования по теме 5 задается курсовая работа с обязательным включением п. 1 и 2, или 1 и 3, или 1 и 4 задания.

Тема 6 (дипломная работа по материалам гл. VII): «Комплексная система контроля и диагностики состояния аппаратуры с обоснованием требований к нелинейному функциональному преобразователю».

1. Разработать функциональную схему системы контроля и диагностики состояния аппаратуры.

2. Обосновать требования к нелинейному функциональному преобразователю.

3. Произвести электрический расчет блоков индикации и обработки входных сигналов.

Перед выполнением проектирования по теме 6 задается курсовая работа с обязательным включением п. 1 и 2 задания.

Тема 7 (дипломная работа по материалам гл. VIII): «Система реализации приоритетов при организации технического обслуживания однотипной аппаратуры».

1. Составить схему обслуживания аппаратуры заданным количеством бригад при наличии потоков поступлений аппаратуры на ремонт и проверки.

2. Разработать систему автоматизации сбора, отображения информации и выдачи управляющей информации о порядке принятия на обслуживание поступающей аппаратуры.

3. Составить алгоритм расчета оптимальной дисциплины обслуживания аппаратуры, требующей ремонта и проверки.

4. Произвести электрический расчет устройства отображения информации о занятости обслуживающих бригад и выдачи командной информации.

Перед выполнением проектирования по теме 7 задается курсовая работа по п. 1 и 3 задания.

Тема 8 (дипломная работа по материалам гл. IX): «Разработка комплексной системы сбора, регистрации и отображения эксплуатационной информации о работе аппаратуры».

1. Обосновать требования к комплексной системе сбора, регистрации и отображения информации.

2. Определить роль и место ЭВМ в комплексной системе сбора, регистрации и отображения информации.

3. Рассчитать характеристики ЭВМ, устройств ввода—вывода и хранения информации, исходя из заданного ее объема и частоты обращений к ней.

4. Разработать схему использования эксплуатационной информации с учетом иерархической структуры отрасли.

5. Исследовать и обосновать систему датчиков, преобразователей и коммутаторов.

П р и м е ч а н и я: 1. При наличии автоматизированных систем контроля аппаратуры, в состав которых входит ЭВМ, и серийной аппаратуры регистрации необходимо обеспечить согласованное их использование в комплексной системе сбора, регистрации и отображения информации.

2. Тему 8 могут выполнять несколько дипломников (совместно). Перед выполнением проектирования по теме 8 курсовая работа может быть задана по каждому пункту задания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеева В. Б., Сидин Э. Ф. Об оптимальном правиле регулировок параметров неоднородного гауссовского марковского типа. — В сб.: Основные вопросы теории и практики надежности. М., 1975.
2. Барзилович Е. Ю. Об оптимальном управлении контролируемым монотонно возрастающим случайным процессом. — Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1964, № 3.
3. Барзилович Е. Ю., Воскобоев В. Ф. Организация профилактики технических комплексов с учетом ограничений на средства обслуживания. — В сб.: Надежность и массовое обслуживание. М., 1969.
4. Барзилович Е. Ю., Каштанов В. А. Некоторые математические вопросы теории обслуживания сложных систем. М., 1971.
5. Барзилович Е. Ю., Каштанов В. А. Организация обслуживания при ограниченной информации о надежности системы. М., 1975.
6. Барзилович Е. Ю., Павленко М. И., Тиньков Л. А. Оптимизация обслуживания системы с зависимыми элементами. — Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1979, № 3.
7. Барзилович Е. Ю., Захаренко С. К. Сравнительная оценка оптимальных методов управления монотонно возрастающим случайным процессом с независимыми приращениями. — В сб.: О надежности сложных технических систем. М., 1966.
8. Барлоу Р., Прошан Ф. Математическая теория надежности. М., 1969.
9. Белокопъ Р. Н., Кендель В. Г. Об одном оптимальном алгоритме допускового контроля работоспособности изделий. — В сб.: Оптимизация автоматизированных систем и технологических процессов. Киев, 1973.
10. Боднер В. А. Оператор и летательный аппарат. М., 1976.
11. Бруевич Н. Г., Филиппов В. В., Барзилович Е. Ю. Некоторые новые направления в области исследования сложных систем. — В сб.: Основные вопросы теории и практики надежности. М., 1980.
12. Воскобоев В. Ф. Об оптимальном управлении состоянием технической системы при наличии ограничений. — В сб.: Основные вопросы теории и практики надежности. М., 1975.
13. Воскобоев В. Ф. Замечания о характере решения задачи линейного программирования для полумарковского управляемого процесса. — В сб.: Основные вопросы теории и практики надежности. М., 1975.
14. Воскобоев В. Ф., Алексеева В. Б., Юрков Ю. А. К вопросу распознавания технического состояния сложных систем. — В сб.: Основные вопросы теории и практики надежности. М., 1980.
15. Визман Б. А., Дунаев Б. Б. Определение точности допусковых контрольно-измерительных устройств. — Измерительная техника, 1963, № 1.
16. Гладун Г. С. Автоматизация диагностики состояния сложных систем на основе метода растущих пирамидальных сетей. — В сб.: Основные вопросы теории и практики надежности. М., 1980.
17. Гладун В. Н. Эвристический поиск в сложных средах. Киев, 1978.
18. Глушков В. М., Гладун В. Н., Погребинский С. Б. Обработка информационных массивов в автоматизированных системах управления. Киев, 1970.
19. Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д. Математические методы в теории надежности. М., 1965.
20. Гнеденко Д. Б., Соловьев А. Д. Одна общая модель резервирования с восстановлением. — Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1974, № 6.

21. Дедков В. К., Северцев Н. А. Основные вопросы эксплуатации сложных систем. М., 1976.
22. Дружинин Г. В. Процессы технического обслуживания автоматизированных систем. М., 1973.
23. Дуб Дж. Вероятностные процессы. М., 1956.
24. Коваленко И. Н., Москатов Г. К., Барзилович Е. Ю. Полумарковские модели в задачах проектирования систем управления летательными аппаратами. М., 1973.
25. Кокс Д., Смит В. Теория восстановления. М., 1967.
26. Маньшин Г. Г. Управление режимами профилактики сложных систем. Минск, 1976.
27. Моисеев Н. Н. Элементы теории оптимальных систем. М., 1975.
28. Новиков В. С. Техническая эксплуатация и надежность авиационного радиооборудования. М., 1970.
29. Материалы по второму Всесоюзному симпозиуму по надежности системы «человек—техника» Под ред. А. И. Губинского. М., 1971.
30. Павленко М. И. Сравнение моделей технического обслуживания систем по неполным данным. — В сб.: Основные вопросы теории и практики надежности. М., 1975.
31. Плямоватый В. В. К теории «выживания» сложных систем. — В сб.: Основные вопросы теории и практики надежности. М., 1980.
32. Рябинин И. А. Основы теории и расчет надежности судовых электроэнергетических систем. Л., 1971.
33. Самойленко И. С. Системы обработки информации. М., 1975.
34. Соловьев А. Д., Козлов В. В. Оптимальные характеристики надежности восстанавливаемых систем. — Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1977, № 6.
35. Сомик В. В., Коньков Н. Г. Автомат проверяет самолет и ракету. М., 1967.
36. Степанов Э. Н., Степанов В. Н. О выборе комплекта ЗИПа при оптимальных заменах. — В сб.: Основные вопросы теории и практики надежности. М., 1980.
37. Козлов Б. А., Ушаков И. А. Справочник по расчету надежности аппаратуры радиоэлектроники и автоматики. М., 1975.
38. Феллер В. Введение в теорию вероятностей. Т. I. М., 1967.
39. Филиппов В. В. Об одной экстремальной задаче в теории массового обслуживания. — В сб.: Основные вопросы теории и практики надежности. М., 1980.
40. Ховард Р. А. Динамическое программирование и марковские процессы. М., 1964.
41. Широков А. М. Основы надежности и эксплуатации электронной аппаратуры. Минск, 1965.
42. Ширяев А. Н. Статистический последовательный анализ. М., 1976.
43. Albanese R. A. Reliability of Human Control. «Reabiab. and Biomet. Statist. Anal. Liefelength.» Pa, 1974.
44. Baron S. Application of the Optimal Control Model for the Human Operation to Reliability Assessment. «IEEE Transactions Man—Machine Syst». VR—22, 1973, № 3.
45. Blanchard B. S. Const Effectiveness, Integrated Logistics Support and Maintainability. «IEEE Trans. Reliabil.», 16, 1967, № 3.
46. Derman C. On Minimax Surveillance Schedules. «Naval Res. Logist. Quart.», 8, 1961, № 4.
47. Derman C. On Sequential Decisions and Markov Chains. «Manag. Sci», v. 9, 1962, № 1.
48. Derman C. Markovian Sequential Processes, Denumerable State Space. «J. Math. Anal. Appl.», 1965, 10.
49. Derman C., Sacks J. Replacement of Periodically Inspected Equipment. «Naval Res. Logist. Quart.», 7, 1960, № 4.
50. Hirsch W. M., Meisner M., Boll C. Cannibalization in Multicomponent System and the Theory of Reliability. «Naval Res. Logist. Quart.», 1968, № 15.

51. *Huston P., Siranss A.* Human Reliability in Man—Machine Interactions. «Annal. Reliability and Maintainability Symposium.» Los. Angeles, 1974.
52. *Klein M.* Inspection—Maintenance—Replacement Schedules under Markovian Deterioration. «Manag. Sci.», v. 9, 1962, № 1.
53. *Kleinman D., Perkins R.* Modeling Human Performance in a Time—Varying Anti—Aircraft Tracking Loop. «IEE Transactions on Automatic Control», v. AC-19, 1974, № 4.
54. *Mucha A.* Zur optimal Instandhaltung von Mehr—Komponenten—System. Diss., Fak. Allg. Techn. Univ., München, 1972.
55. *Pritsker A. B.* The Optimal Control of Discrete Stochastic Processes. «Bull. Engng. Experim. Stat. Coll. Engng.» Ohio State Univ., 30, 1961, № 4.
56. *Pritsker A. B.* Analysis of a Procedure for Controlling Discrete Stochastic Processes. «Operat. Res.», 10, 1962, № 5.
57. *Pritsker A. B.* The Setting of Maintenance Tolerance Limits. «J. Industr. Engng.», 14, 1963, № 2.
58. *Pritsker A. B.* The Monte—Carlo Approach to Setting Maintenance Tolerance Limits. «J. Industr. Engng.», 14, 1963, № 3.
59. *Rau J. G.* Redundancy in Decision—Making Systems. «Operat. Res.», v. 14, 1966, № 1.
60. *Roeloffs R.* Minimax Surveillance Schedules with Partial Information. «Naval Res. Logist. Quant.», 10, Dec., 1963.
61. *Roeloffs R.* Minimax Surveillance Schedules for Replacement Units. «Naval Res. Logist. Quart.», 14, 1967, № 4.
62. *Shunji Osaki, Hisashi Mine.* Programming Algorithms for Semi-Markovian Decision Processes. «J. of Math. Anal. and Appl.», 1968, № 22.
63. *Truelove A. J.* Strategic Reliability and Preventive Maintenance. «Operat. Res.», v. 9, 1961, № 1.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Аварийная замена 27
— регулировка 19
- Вероятность выхода за допуск 63, 75
— отказа 27, 72
— системы условная 52
— перехода 59, 61, 211, 212
— пропуска отказа при проверке 124
Время безотказной работы среднее 33
— —, плотность распределения 27
— восстановления
— среднее 210
— выполнения регламентных работ 209
— замены 27
— среднее 27, 28
- Диагностика системы 157, 164, 165, 169
— — адаптивная 4, 164
Допуск 62, 63, 67, 69, 70, 72, 75, 86, 111
— основной 75, 89
— упреждающий 53, 74, 88, 89
— оптимальный 53, 78, 79
— —, графическая интерпретация 18
Достоверность контроля 17, 92, 103, 104, 112, 116
- Запасной комплект элементов 27, 33, 34, 37, 38, 41, 170, 175
Затраты минимальные, средние 78, 83, 126, 133
— на проверку 63, 64, 124
— удельные 52
— средние 52
- Измерение параметра 18, 95, 108
— — многократное 17, 18, 100, 108
— — повторное 104
— —, оптимальное число 101, 102, 103, 104, 105
- Интенсивность отказов 27, 32
— потока выходных требований 184, 191
Информация статистическая 19, 62
— эксплуатационная 87
- Коэффициент готовности 78, 79, 80
— — оперативной 15
- Лемма Дуба 7, 8, 55
- Маркова процесс 14, 60
— цепь 14, 60
— — управляемая 14, 15
Модели технического обслуживания апостериорные 4, 49, 50, 53
— — — априорные 27, 34, 37, 41, 210
- Надежность системы 17, 35
— элемента 27, 33
Наработка 11, 34, 47, 81, 85
- Оператор 158, 159, 160, 161, 163, 178, 179, 180
Отказ системы 73
— —, мгновенная индикация 27, 28
— —, отсутствие индикации 124, 132, 140
Ошибка второго рода 18, 161
— первого рода 18, 161
- Параметр потока отказов 207
Период (оптимальный) выполнения регламентных работ 37, 211
— — замены элемента 16, 31, 32
Программа эксплуатации 4, 12, 19
- Моделирование статистическое 17, 70, 71, 72, 74
- Ресурс 26, 27, 37, 38, 41, 49
— заданный 26, 33, 34, 41
Ремонт 13, 78, 164, 200

Система большого масштаба 12
 — групповая 184, 185, 186, 187, 188, 189
 — длительного действия 231
 — информационного обеспечения 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 220
 — контроля 19
 — — автоматическая 27, 221
 — — автоматизированная 23, 49, 83, 86
 — — встроенная 23
 — массового обслуживания 185, 186, 187, 188, 189, 190, 193, 194, 200
 — однократного действия 161
 —, производительность 202
 — с выживанием 169, 171, 172
 — — избыточностью 80, 84
 — сложная 12, 14
 — человекомашина 12, 178, 180, 181, 182, 183, 184
 —, эффективность 81, 82, 84
 Среднее время безотказной работы системы 83
 — — — элемента 33
 — — восстановления системы 35
 — — — элемента 27
 — — выполнения регламентных работ 209
 — — между соседними восстановлением 29
 — — регулировки параметра 52
 — — ремонта системы 210
 — число отказов 85
 Старейший элемент 3, 26, 27, 41, 47, 48, 49
 Процесс восстановления 15
 — гауссовский марковский 62, 64, 67, 72
 — полумарковский 58, 60

Стоимость проверки 63, 68, 70, 124, 132
 — регулировки 63, 68, 69, 70
 — регулировки 63, 68, 69, 70
 Стратегия управления 6, 7, 15
 — — группой систем 185, 189
 — — оптимальная 7, 18, 19, 74
 — — при неполных данных о надежности системы 132, 140
 — — — полностью неизвестных данных о надежности системы 124
 — — полных данных о надежности системы
 — — — систем с избыточностью 83, 146
 — — — марковская 7
 — — — однородная 7
 — эксплуатации технической системы 74

Теорема восстановления узловая 28
 — Каштанова 10, 11
 Техническое обслуживание системы 12, 81, 84, 86, 164
 — решение 4, 112
 Требование 189, 190, 191, 192, 200, 201
 —, два типа 189, 191

Функция восстановления 15, 148
 — распределения времени безотказной работы системы 35
 — — — — элемента 27
 — — — плановых замен элемента 28
 — — приращений параметра 53

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Введение	5
Глава I. Теория эксплуатации сложных систем как наука	12
§ 1.1. Основные понятия, термины и определения	12
§ 1.2. Используемые показатели, интерпретация некоторых математических результатов	15
§ 1.3. Технические средства контроля и диагностики сложных систем как инструмент эксплуатации по состоянию	19
§ 1.4. Методы исследования сложных систем как объектов эксплуатации	24
Глава II. Организация эксплуатации элементов системы по заданному ресурсу	25
§ 2.1. Определение оптимальной величины задаваемого ресурса для элемента стареющего типа	27
§ 2.2. Эксплуатация по заданному ресурсу зарезервированного элемента	34
§ 2.3. Выбор числа запасных элементов для обеспечения оптимальной эксплуатации по заданному ресурсу	37
§ 2.4. Обобщение задачи эксплуатации стареющего элемента по заданному ресурсу	41
§ 2.5. Организация эксплуатации системы с элементами стареющего типа	47
Глава III. Модели эксплуатации сложных систем по состоянию	49
§ 3.1. Проблема эксплуатации сложных систем по состоянию	50
§ 3.2. Управление при монотонном изменении параметра	51
§ 3.3. Некоторые математические результаты, лежащие в основе модели эксплуатации по состоянию (монотонный случай)	53
§ 3.4. Эксплуатация по состоянию системы с параметрами полумарковского и марковского типов	58
§ 3.5. Модели эксплуатации по состоянию системы с параметрами гауссовско-марковского типа	62
§ 3.6. Применение метода статистических испытаний для выбора профилактических допусков	70
Глава IV. Оценка эффекта от внедрения оптимальных моделей эксплуатации системы по состоянию	74
§ 4.1. Оценка эффективности оптимальных моделей эксплуатации системы по состоянию	74
§ 4.2. Эксплуатация системы по состоянию составляющих элементов с учетом критерия «стоимость (готовность) — эффективность»	80
§ 4.3. О технической реализации моделей эксплуатации системы по состоянию	86
Глава V. Модели повышения достоверности контроля состояния сложной системы	92
§ 5.1. Достоверность контроля состояния сложной системы	93

§ 5.2. Мажоритарная модель повышения достоверности контроля	100
§ 5.3. Оптимальные модели повышения достоверности и их применение в автоматических системах контроля	105
§ 5.4. Принципы автономной технической реализации мажоритарного алгоритма контроля	112
§ 5.5. Обоснование оптимального алгоритма контроля системы с учетом достоверности	116
Глава VI. Модели обслуживания системы при ограниченной информации о надежности	122
§ 6.1. Описание круга рассматриваемых задач	123
§ 6.2. Определение плана проверок системы при отсутствии информации о надежности	124
§ 6.3. Определение плана проверок при ограниченной информации о надежности системы	132
§ 6.4. Определение плана проверок системы при длительной эксплуатации и наличии минимальной информации о надежности	141
§ 6.5. Определение плана проверок системы при длительной эксплуатации и полностью известной информации о надежности	147
§ 6.6. Принципы технической реализации оптимальных моделей проверок системы	150
Глава VII. Проблемные вопросы теории эксплуатации сложных систем	156
§ 7.1. Принципиальные пути решения комплексной задачи контроля и диагностики сложной системы	157
§ 7.2. Адаптивный алгоритм диагностики состояния сложной системы	164
§ 7.3. Проблема эксплуатации системы в условиях отсутствия или ограниченности запасного комплекта элементов	169
§ 7.4. Проблема оценки взаимодействия оператора и сложной системы в процессе эксплуатации	178
Глава VIII. Задачи групповой эксплуатации систем с оптимизацией	184
§ 8.1. Состояние вопроса групповой эксплуатации сложных систем	185
§ 8.2. Оптимальная модель групповой эксплуатации систем при двух видах обслуживания	189
§ 8.3. Модель групповой эксплуатации систем с прерыванием обслуживания	200
§ 8.4. Проблема организации проверок группы систем при ограничениях на средства проверок	203
Глава IX. Информационное обеспечение программ эксплуатации сложных систем	206
§ 9.1. Некоторые статистические задачи теории эксплуатации сложных систем	207
§ 9.2. Общие сведения о структуре систем обработки информации	212
§ 9.3. Возможная структура системы обработки информации для обеспечения программ эксплуатации	216
Методические рекомендации по реализации материалов пособия в учебном процессе (при курсовом и дипломном проектировании) по дисциплинам эксплуатационного профиля	221
Перечень тем и основных вопросов для курсового и дипломного проектирования	221
Литература	225
Предметный указатель	228

Евгений Юрьевич Барзилович

МОДЕЛИ
ТЕХНИЧЕСКОГО
ОБСЛУЖИВАНИЯ
СЛОЖНЫХ
СИСТЕМ

Зав. редакцией Е. С. Гридасова
Редактор Ж. И. Яковлева
Художник В. Н. Хомяков
Художественный редактор В. И. Пономаренко
Технический редактор А. К. Нестерова
Корректор Г. И. Кострикова

ИБ № 3581

Изд. № ФМ-675. Сдано в набор 09.09.81. Подп. в печать 30.03.82. Т-03756.
Формат 60×90^{1/16}. Бум. № 2 офсет. Гарнитура литературная. Печать офсетная.
Объем 14,5 усл. печ. л. 14,5 усл. кр.-отт. 15,88 уч.-изд. л. Тираж 10 000 экз.
Зак. № 479 Цена 80 коп.

Издательство «Высшая школа», Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14

Московская типография № 4 Союзполиграфпрома
при Государственном комитете СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
129041, Москва, Б. Переяславская ул., д. 46