

Н. М. БЁЛЯЕВ, А. А. РЯДНО

МЕТОДЫ ТЕОРИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

[в 2-х частях]

ЧАСТЬ I

Допущено
Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных
заведений



МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1982

ББК 22.31

Б44

УДК 536.2(075)

Рецензенты: кафедра теоретических основ теплотехники Московского авиационного института им. С. Орджоникидзе (зав. каф.— д-р техн. наук, проф. В. К. Кошкин); д-р техн. наук, проф. В. С. Зарубин
(Московское высшее техническое училище им. Э. Баумана)

Беляев Н. М., Рядно А. А.

Б44 Методы теории теплопроводности.— Учеб. пособие для вузов. В 2-х частях. Ч. 1.— М.: Высш. школа, 1982.— 327 с., ил.

В пер.: 90 к.

В части 1 изложены точные и приближенные аналитические методы решения линейных краевых задач теории теплопроводности. При проведении расчетов температурных полей значительное внимание уделено числовым примерам. Даны задачи для самостоятельного решения.

Основная цель пособия — обучение студентов и инженеров решению задач теплопроводности, имеющих большое практическое значение.

Б 1704080000—436 70—82
001(01)—82

ББК 22.31
530.1

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее пособие написано в соответствии с программой курса «Методы теории теплообмена», читаемого авторами в течение ряда лет в Днепроропетровском государственном университете на механико-математическом факультете.

Книга содержит также ряд вопросов, которые не входят в программу и могут быть использованы в других специальных курсах.

Пособие состоит из двух частей и приложений.

Первая часть посвящена аналитическим методам решения краевых задач стационарной и нестационарной теплопроводности.

Классические методы и методы интегральных преобразований, позволяющие получить точные аналитические решения, рассмотрены в гл. II—V. Основной акцент сделан на вопросы, связанные с практическим получением решения. Читатель, интересующийся строгим математическим обоснованием этих методов, может обратиться к известным учебникам по математической физике. Вопросы физического анализа аналитических решений детально изложены в книгах А. В. Лыкова и Ю. А. Михайлова, а также А. В. Лыкова, Х. Карслоу и Д. Егера.

В гл. VI объединены вариационные методы решения краевых задач теплопроводности.

В гл. VIII—X ч. 2 учебного пособия значительное внимание уделяется аналитическим методам, с помощью которых можно решать краевые задачи с нелинейными граничными условиями (гл. VIII) или с нелинейным уравнением теплопроводности (гл. X), при этом отдельно рассмотрены задачи при наличии фазовых переходов (гл. IX). Кроме того, в гл. XI ч. 2 изложены теоретические основы конечно-разностного метода. Способы построения, свойства и методы решения сеточных уравнений рассматриваются для конкретных задач теплопроводности — одномерных нестационарных (гл. XII), многомерных нестационарных (гл. XIII), многомерных стационарных (гл. XIV). В основу изложения положены работы [26, 42, 72, 88, 113] и др.

Отличительной особенностью книги является то, что авторы сочли целесообразным основное внимание уделить изложению алгоритмов и числовым примерам их применения для решения конкретных задач.

Предполагается, что читатели знакомы с основами высшей математики, программирования (алгоритмические языки АЛГОЛ и ФОРТРАН) и теории тепло- и массообмена. Изложенные методы иллюстрированы примерами и задачами для самостоятельного решения, многие из которых снабжены ответом или указаниями, облегчающими решение (приложение I).

Как справочный материал в приложении приводятся некоторые сведения из функционального анализа (приложение II), таблицы корней характеристических уравнений, облегчающие решение задач Штурма — Лиувилля (приложение III), таблица изображений функций по Лапласу (приложение IV), некоторые алгоритмы и программы, используемые при

решении задач теплопроводности аналитическими методами (приложение V) (приложения II—V см. в ч. 2 пособия).

В списке литературы приведены лишь те работы, результаты которых использованы при изложении материала. Более полная библиография имеется в рекомендованных монографиях.

Авторы выражают благодарность коллективу кафедры теоретических основ теплотехники МАИ (зав. кафедрой — засл. деят. науки и техники РСФСР, проф. В. К. Кошкин), проф. Дрейцеру Г. А., проф. Зарубину В. С. за ряд ценных замечаний по рукописи учебного пособия. Авторы признательны также сотрудникам кафедры прикладной газовой динамики и тепло-массообмена Днепропетровского государственного университета А. А. Кочубею, А. П. Деркачу, В. В. Каширникову, Г. А. Ивановой за помощь в оформлении рукописи и проведении численных экспериментов.

Отзывы и пожелания просим направлять по адресу: Москва, К-51, Неглинная ул., 29/14, издательство «Высшая школа».

Авторы

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

§ 1.1. Закон теплопроводности Фурье

Способы переноса теплоты. Самопроизвольный необратимый процесс переноса теплоты в пространстве с неоднородным полем температуры называется *теплообменом*. Под процессом переноса теплоты следует понимать процесс обмена внутренней энергией между взаимодействующими физическими областями в форме теплоты. Заметим, что в общем случае перенос теплоты может вызываться не только неоднородностью распределения температуры, но и неоднородностью полей других физических величин, например разностью концентраций.

Перенос теплоты может осуществляться тремя способами: теплопроводностью, конвекцией и тепловым излучением.

Теплопроводностью называется перенос теплоты посредством теплового движения микрочастиц в среде, обусловленный неоднородным распределением температуры.

Конвекцией называется перенос теплоты в среде с неоднородным распределением температуры, осуществляемый макроскопическими элементами среды при их перемещении.

Тепловое излучение представляет собой процесс распространения теплоты электромагнитными волнами, обусловленный лишь температурой и оптическими свойствами излучающего тела. Это излучение осуществляется за счет преобразования внутренней энергии тела (среды) в энергию излучения.

Теплообмен, обусловленный превращением внутренней энергии вещества в энергию излучения, переносом излучения и его поглощением веществом, называется *теплообменом излучением*.

Температурное поле. Основной задачей аналитической теории теплопроводности является определение и изучение пространственно-временного изменения основной физической величины, характеризующей процесс теплопроводности, — температуры $T = f(x, y, z, \tau)$, где x, y, z — пространственные прямоугольные координаты; τ — время.

Температурным полем называется совокупность значений температуры для всех точек пространства в данный момент времени τ . Температурное поле является скалярным, так как сама температура — скаляр. Если температура является функцией одних только пространственных координат (x, y, z) , то поле называется *установившимся* или *стационарным*. Если же в общем случае температура изменяется также во времени, то поле называется *неустановившимся* или *нестационарным*.

Если соединить точки поля, имеющие одинаковую температуру, получим поверхность равной температуры, называемую *изотермической*. При непрерывном температурном поле изотермические поверхности для разных температур не могут пересекаться, так как в одной и той же точке тела одновременно не может быть двух различных значений температуры. Рассмотрим две изотермические поверхности с температурами T и $T+\Delta T$. При перемещении точки вдоль изотермы T (рис. 1.1) изменения температуры не происходит.

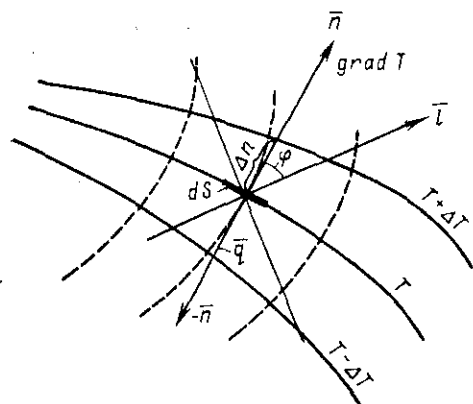


Рис. 1.1. Температурное поле и его характеристики

Перемещаясь вдоль направления i , пересекающего изотерму $T+\Delta T$, наблюдаем изменение температуры. При этом наибольший перепад температуры на единицу длины будет получаться в направлении $\bar{n}$ к изотермической поверхности.

Предел отношения изменения температуры ΔT к расстоянию между изотермами по нормали Δn определяет величину некоторого вектора, который называется *градиентом температуры*. Градиент температуры направлен по нормали к изотермической поверхности, причем за положительное направление этого вектора принимается направление в сторону возрастания температуры; таким образом,

$$\text{grad } T = \bar{I}_n (\partial T / \partial n),$$

где $\bar{I}_n$ — единичный вектор, направленный по нормали в сторону возрастания температуры.

Составляющие градиента температуры по осям прямоугольной системы координат равны соответствующим частным производным:

$$\text{grad } T = \bar{i} (\partial T / \partial x) + \bar{j} (\partial T / \partial y) + \bar{k} (\partial T / \partial z),$$

где $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ — единичные векторы (орты), направленные по осям прямоугольной системы координат.

Тепловой поток. Закон Фурье. Перенос теплоты теплопроводностью может происходить только при условии, что в различных точках тела температурное поле неоднородно, т. е. для того чтобы внутри тела возникал тепловой поток, необходимо наличие градиента температуры, отличного от нуля. Тепловой поток в отличие от температуры (скалярной величины) имеет определенное направление: от точек тела с более высокой температурой к точкам с более низкой температурой.

Для характеристики векторного поля тепловых потоков вводится вектор $\vec{q}$, называемый *вектором плотности теплового потока*. В произвольной точке P непрерывного температурного поля в изотропном теле вектор $\vec{q}$ направлен противоположно градиенту температуры, т. е. его направление совпадает с направлением переноса теплоты, а его значение определяется как количество теплоты dQ , проходящее в единицу времени dt через единицу площади изотермической поверхности dS :

$$q = dQ / (dS dt). \quad (1.1)$$

Согласно предположению Фурье, тепловой поток через элемент изотермической поверхности определяется значением температурного градиента в рассматриваемой точке. Опытные данные показали, что плотность теплового потока прямо пропорциональна градиенту температуры, т. е. вектор плотности теплового потока определяется соотношением

$$\vec{q} = -\lambda \text{grad } T = -\vec{i}_n \lambda (\partial T / \partial n), \quad (1.2)$$

где λ — коэффициент пропорциональности, именуемый теплопроводностью.

Это равенство и составляет содержание основного закона теплопроводности Фурье. Модуль вектора теплового потока $\vec{q}$ определяется по формуле

$$q = -\lambda (\partial T / \partial n). \quad (1.3)$$

Скалярные величины составляющих вектора $\vec{q}$ по осям прямоугольных координат x, y, z :

$$\begin{aligned} q_x &= q \cos(n, x) = -\lambda (\partial T / \partial n) \cos(n, x) = -\lambda (\partial T / \partial x); \\ q_y &= -\lambda (\partial T / \partial y), \quad q_z = -\lambda (\partial T / \partial z). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Теплопроводность λ [Вт/(м·К)] является физическим параметром, характеризующим интенсивность процесса теплопроводности в веществе. В случае однородного изотропного тела теплопроводность λ численно равна количеству теплоты, проходящему через единицу поверхности в единицу времени вследствие теплопроводности при перепаде температуры на единицу длины нормали, равному одному градусу.

В случае изотропной среды, когда λ не зависит от направления, векторы $\vec{q}$ и $\text{grad } T$ лежат на одной прямой, но направлены в противоположные стороны.

В анизотропных телах теплопроводность λ существенно зависит от направления передачи теплоты и представляет собой тензор второго ранга

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{xy} & \lambda_{xz} \\ \lambda_{yx} & \lambda_{yy} & \lambda_{yz} \\ \lambda_{zx} & \lambda_{zy} & \lambda_{zz} \end{pmatrix}.$$

Наибольший интерес для практики из некристаллических анизотропных тел представляет ортотропное твердое тело, имеющее различную теплопроводность в трех взаимно перпендикулярных направлениях. Тепловые потоки в соответствующих направлениях равны: в прямоугольной системе координат x, y, z

$$q_x = -\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}, \quad q_y = -\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y}, \quad q_z = -\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z}; \quad (1.5)$$

в цилиндрической системе координат r, θ, z

$$q_r = -\lambda_r \frac{\partial T}{\partial r}, \quad q_\theta = -\lambda_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta}, \quad q_z = -\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z}$$

и т. д.

Например, теплопроводность древесины поперек волокон по сравнению с теплопроводностью вдоль волокон может изменяться

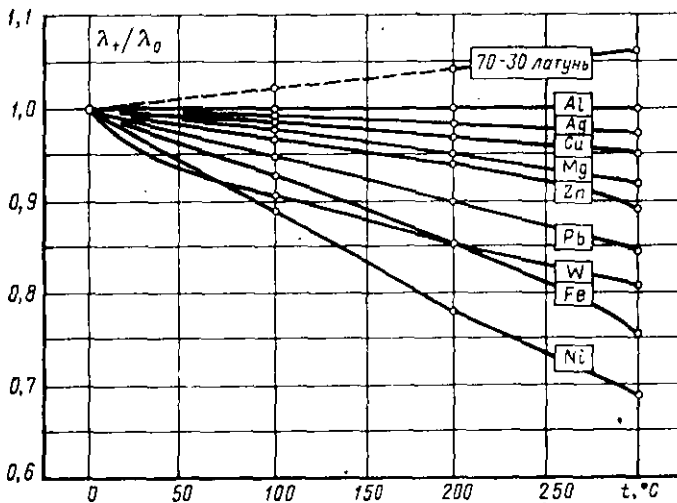


Рис. 1.2. Зависимость теплопроводности от температуры для некоторых чистых металлов

в 3—4 раза. Поэтому соотношения (1.4) для изотропной среды не справедливы для анизотропных тел.

Если использовать формулу для умножения тензора на вектор справа [55], то закон Фурье можно записать для анизотропных тел в проекциях на оси координат:

$$\begin{aligned} -q_x &= \lambda_{xx} (\partial T / \partial x) + \lambda_{xy} (\partial T / \partial y) + \lambda_{xz} (\partial T / \partial z); \\ -q_y &= \lambda_{yx} (\partial T / \partial x) + \lambda_{yy} (\partial T / \partial y) + \lambda_{yz} (\partial T / \partial z); \\ -q_z &= \lambda_{zx} (\partial T / \partial x) + \lambda_{zy} (\partial T / \partial y) + \lambda_{zz} (\partial T / \partial z). \end{aligned} \quad (1.6)$$

В феноменологической* термодинамике [69] утверждается, что коэффициенты системы (1.6) должны удовлетворять соотношениям Онзагера, т. е. должны выполняться равенства

$$\lambda_{xy} = \lambda_{yx}; \lambda_{xz} = \lambda_{zx}; \lambda_{yz} = \lambda_{zy}. \quad (1.7)$$

Это позволяет сделать вывод о симметричности тензора теплопроводности.

Таким образом, в случае теплопроводности в анизотропном теле векторы теплового потока и градиента температуры обычно уже не лежат на одной прямой. И только в частном случае изотропного тела тензор теплопроводности сводится к скаляру и векторы $\bar{q}$ и $\text{grad } T$ всегда лежат на одной линии.

Теплопроводность твердых тел может заметно изменяться не только в зависимости от направления, но и от температуры. Так, при повышении температуры теплопроводность чистых металлов уменьшается (рис. 1.2, [41]), а теплопроводность сплавов увеличивается (рис. 1.3, [41]). Теплопроводность порошкообразных и пористых тел значительно изменяется с изменением объемной плотности материала, теплопроводность пористых тел зависит также и от влажности.

Теплопроводность строительных материалов изменяется в пределах 0,023 ... 2,9 Вт/(м·К). Материалы, имеющие теплопроводность меньше 0,25 Вт/(м·К) и применяемые для тепловой изоляции, называются *теплоизоляционными*.

На рис. 1.4 [41] показано изменение значений теплопроводности строительных и теплоизоляционных материалов с увеличением температуры.

Большинство применяемых в технике материалов в первом приближении можно считать изотропными, а зависимость их теплопроводности от температуры в узком интервале температур можно аппроксимировать линейной функцией

$$\lambda = \lambda_0 (1 + \beta \Delta T), \quad (\Delta T = T - T_0),$$

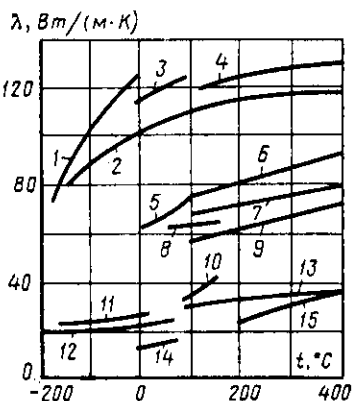


Рис. 1.3. Зависимость теплопроводности от температуры для различных сплавов:

1 — латунь 18; 2 — латунь-30; 3 — латунь-12; 4 — никром; 5 — бронза (88 % Sn, 10 % Sb, 2 % Zn); 6 — марганцовистая бронза; 7 — орудийная бронза; 8 — сплав олова и цинка; 9 — фосфористая бронза; 10 — белый металл; 11 — константан; 12 — монель-металл; 13 — манганин; 14 — никелевая сталь; 15 — жидкий сплав олова с цинком

* Феноменологическое описание термодинамических процессов основано на установлении общих соотношений между определяющими параметрами явления. Феноменологическая термодинамика включает в себя термодинамику равновесных и неравновесных процессов.

где λ_0 — теплопроводность при $T=T_0$; β — коэффициент пропорциональности, определяемый из эксперимента.

§ 1.2. Дифференциальное уравнение теплопроводности твердых тел

Аналитическая теория теплопроводности основана на дифференциальном уравнении теплопроводности Фурье. Физический смысл его заключается в том, что им связывается пространственное распределение температуры с изменением ее во времени. Вывод дифференциального уравнения теплопроводности основан на применении закона сохранения энергии, сочетаемого с законом теплопроводности Фурье.

Уравнение теплопроводности для изотропных твердых тел. Предположим, что рассматриваемое тело изотропно, температурные деформации элементарного объема пренебрежимо малы по сравнению с самим объемом и температурное поле нестационарно.

Рассмотрим бесконечно малый объем с гранями dx , dy , dz , расположенный в трехмерной прямоугольной системе координат, как показано на рис. 1.5.

Согласно закону теплопроводности Фурье, количество теплоты, подводимое к поверхности элементарного объема вдоль оси Ox за время dt , определяется по формуле

$$dQ_x = q_x dy dz dt = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} dy dz dt. \quad (1.8)$$

Количество теплоты, отводимое через противоположную грань, dQ_{x+dx} . Пусть $dQ_x > dQ_{x+dx}$, т. е.

элементарный объем нагревается. Если неизвестную функцию dQ_{x+dx} разложить в ряд Тейлора и сохранить только два первых члена разложения, то получим

$$dQ_{x+dx} = dQ_x + \frac{\partial}{\partial x} (dQ_x) dx + \dots \quad (1.9)$$

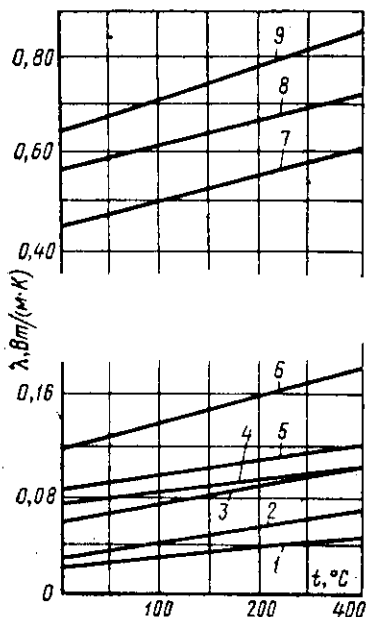


Рис. 1.4. Зависимость теплопроводности от температуры для строительных и теплоизоляционных материалов:

- 1 — воздух; 2 — минеральная шерсть; 3 — шлаковая вата; 4 — Ньювел; 5 — совелит; 6 — диатомитовый кирпич; 7 — красный кирпич; 8 — шлакобетонный кирпич; 9 — шамотный кирпич

Изменение количества теплоты, вызванное теплопроводностью вдоль оси Ox за время $d\tau$, равно

$$dQ_x - dQ_{x+dx} = -\frac{\partial}{\partial x}(q_x) dx dy dz d\tau = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dy dz d\tau. \quad (1.10)$$

Изменения количества теплоты вдоль направлений осей Oy и Oz за время $d\tau$ можно записать аналогично:

$$dQ_y - dQ_{y+dy} = -\frac{\partial}{\partial y}(q_y) dx dy dz d\tau = \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) dx dy dz d\tau; \quad (1.11)$$

$$dQ_z - dQ_{z+dz} = -\frac{\partial}{\partial z}(q_z) dx dy dz d\tau = \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) dx dy dz d\tau. \quad (1.12)$$

Количество теплоты dQ_1 , которое должно накопиться за время $d\tau$ в элементарном объеме вследствие теплопроводности,

$$dQ_1 = - \left[\frac{\partial}{\partial x}(q_x) + \frac{\partial}{\partial y}(q_y) + \frac{\partial}{\partial z}(q_z) \right] dx dy dz d\tau = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] dx dy dz d\tau. \quad (1.13)$$

Внутри тела из-за объемных химических реакций, прохождения электрического тока, испарения влаги и т. д. может выделяться или поглощаться теплота. Объемная плотность теплового потока определяется как количество теплоты, выделяемое (поглощаемое) внутренними источниками (стоками) в элементарном объеме среды в единицу времени, и обозначается через $q_v(x, y, z, \tau)$. Количество теплоты, выделяемое в элементарном объеме за время $d\tau$, равно

$$dQ_2 = q_v dx dy dz d\tau. \quad (1.14)$$

Изменения количества теплоты вследствие теплопроводности элементарного объема (1.13) и действия внутренних источников теплоты (1.14) вызывают изменение энергии вещества, заключенного в элементарном объеме, которое вычисляется по формуле

$$dQ_3 = c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} dx dy dz d\tau,$$

где c — удельная теплоемкость, Дж/(кг·К); ρ — плотность, кг/м³; τ — время, с.

Составим баланс энергии для элементарного объема $dx dy dz$ за время $d\tau$, приравнявая теплоту, аккумулированную данным элемен-

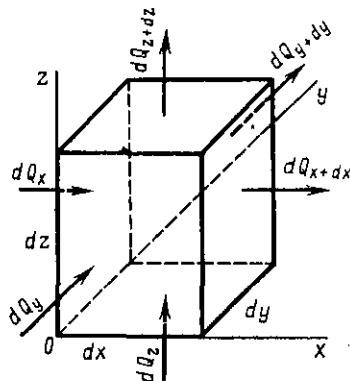


Рис. 1.5. К выводу дифференциального уравнения теплопроводности

том объема, к теплоте, поступающей вследствие теплопроводности, и теплоте, образовавшейся в самом элементарном объеме из-за действия внутренних источников теплоты:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) + q_v. \quad (1.15)$$

Так как $\partial q_x/\partial x + \partial q_y/\partial y + \partial q_z/\partial z = \text{div } \vec{q}$, уравнение (1.15) перепишем:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = -\text{div } \vec{q} + q_v. \quad (1.16)$$

Согласно закону Фурье, уравнение (1.16) можно представить в виде

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = \text{div } (\lambda \text{ grad } T) + q_v. \quad (1.17)$$

В прямоугольной системе координат уравнение (1.17) запишется так:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q_v. \quad (1.18)$$

В уравнениях (1.17), (1.18) c , ρ , λ могут быть в общем случае функциями x , y , z , T , т. е. эти уравнения нелинейны.

Если предположить, что λ , ρ и c постоянны, то уравнение (1.18) существенно упростится и в прямоугольной системе координат примет вид

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{q_v}{c\rho},$$

или

$$\partial T / \partial \tau = a \nabla^2 T + q_v / (c\rho), \quad (1.19)$$

где $\nabla^2 = \Delta$ — оператор Лапласа; $a = \lambda / (c\rho)$ — температуропроводность, являющаяся физическим параметром вещества, м²/с.

Из уравнения (1.19) видно, что при отсутствии внутренних источников теплоты ($q_v = 0$) скорость изменения температурного поля во времени зависит только от одного физического параметра — температуропроводности a . Величина, обратная температуропроводности ($1/a$), характеризует инерционные свойства тела в отношении распространения температурного поля.

В курсах математической физики показано, что уравнение теплопроводности (1.19) относится к дифференциальным уравнениям в частных производных параболического типа.

Уравнение теплопроводности (1.19) может быть записано в сферической и цилиндрической системах координат.

Учитывая связь между прямоугольными и сферическими координатами $x = r \sin \psi \cos \varphi$; $y = r \sin \psi \sin \varphi$; $z = r \cos \psi$, уравнение (1.19) в сферических координатах можно записать в виде

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rT)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\sin \psi \frac{\partial T}{\partial \psi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \psi} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} \right] + \frac{q_v}{c\rho}. \quad (1.20)$$

Прямоугольные и цилиндрические координаты связаны соотношениями $x=r \cos \Theta$, $y=r \sin \Theta$, $z=z$. Выполняя переход к новым координатам r , Θ , z , запишем уравнение теплопроводности в цилиндрических координатах:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \Theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{q_v}{c\rho}. \quad (1.21)$$

Для процессов стационарной теплопроводности, т. е. при $\partial T / \partial \tau = 0$, уравнения (1.17) — (1.21) запишутся в виде: в общем случае

$$\operatorname{div} (\lambda \operatorname{grad} T) + q_v = 0;$$

при $\lambda = \text{const}$

$$\nabla^2 T + \frac{1}{\lambda} q_v = 0.$$

Последнее уравнение в математической физике называется уравнением Пуассона, а при $q_v = 0$, т. е. при отсутствии источников (стоков) теплоты, — уравнением Лапласа. В различных системах координат имеем: в прямоугольной

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q_v}{\lambda} = 0;$$

в сферической

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rT)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{q_v}{\lambda} = 0;$$

в цилиндрической

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \Theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q_v}{\lambda} = 0.$$

Уравнения Лапласа и Пуассона принадлежат к дифференциальным уравнениям эллиптического типа.

Уравнение теплопроводности для анизотропных тел. Уже отмечалось, что многие технические материалы (дерево, кристаллические вещества и т. д.) имеют теплопроводность, значительно изменяющую свое значение в зависимости от направления потока теплоты, проходящего через тело.

Для таких материалов уравнения (1.19) — (1.21), полученные в предположении, что теплопроводность — скалярная величина, непригодны. Однако можно воспользоваться более общей формой дифференциального уравнения (1.16), (1.17), учитывая, что для анизотропных веществ теплопроводность представляет собой тензор второго ранга. В этом случае правую часть уравнения (1.17) можно раскрыть согласно правилам умножения тензора на вектор [55] (в данном случае — тензора λ на вектор $\operatorname{grad} T$).

Получим

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) = \operatorname{div} \left[\begin{pmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{xy} & \lambda_{xz} \\ \lambda_{yx} & \lambda_{yy} & \lambda_{yz} \\ \lambda_{zx} & \lambda_{zy} & \lambda_{zz} \end{pmatrix} \operatorname{grad} T \right] = \operatorname{div} \left[\left(\lambda_{xx} \frac{\partial T}{\partial x} + \right. \right. \\ \left. \left. + \lambda_{xy} \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{xz} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \bar{i} + \left(\lambda_{yx} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{yy} \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{yz} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \bar{j} + \left(\lambda_{zx} \frac{\partial T}{\partial x} + \right. \right. \\ \left. \left. + \lambda_{zy} \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{zz} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \bar{k} \right], \end{aligned} \quad (1.22)$$

где $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ — орты прямоугольной системы координат.

Если компоненты тензора теплопроводности не зависят от координат, выражение (1.22) может быть приведено к виду

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left[\left(\lambda_{xx} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{xy} \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{xz} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \bar{i} + \left(\lambda_{yx} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{yy} \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{yz} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \bar{j} + \right. \\ \left. + \left(\lambda_{zx} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{zy} \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{zz} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \bar{k} \right] = \lambda_{xx} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda_{yy} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \lambda_{zz} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \\ + (\lambda_{xy} + \lambda_{yx}) \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} + (\lambda_{xz} + \lambda_{zx}) \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial z} + (\lambda_{zy} + \lambda_{yz}) \frac{\partial^2 T}{\partial z \partial y}. \end{aligned}$$

Тогда уравнение теплопроводности для анизотропного однородного твердого тела при наличии внутренних источников теплоты запишется так:

$$\begin{aligned} \operatorname{ср} \frac{\partial T}{\partial \tau} = \lambda_{xx} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda_{yy} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \lambda_{zz} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + (\lambda_{xy} + \lambda_{yx}) \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} + \\ + (\lambda_{xz} + \lambda_{zx}) \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial z} + (\lambda_{zy} + \lambda_{yz}) \frac{\partial^2 T}{\partial z \partial y} + q_v. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Уравнению (1.23) можно придать более простой вид заменой независимых переменных. В курсах математической физики (например, [81, 100 и др.]) показано, что всегда можно ввести новые прямоугольные координаты ξ , η , ζ , при которых правая часть уравнения (1.23) не содержит смешанных производных (при $q_v = 0$):

$$\operatorname{ср} \frac{\partial T}{\partial \tau} = \lambda_1 \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} + \lambda_3 \frac{\partial^2 T}{\partial \zeta^2}.$$

Коэффициенты λ_1 , λ_2 , λ_3 называют главными коэффициентами теплопроводности, а новые координатные оси ξ , η , ζ — главными осями теплопроводности.

Если провести дополнительные преобразования координат, то последнее уравнение можно записать в виде, аналогичном уравнению теплопроводности для однородного и изотропного тела,

$$\operatorname{ср} \frac{\partial T}{\partial \tau} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \eta_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \zeta_1^2} \right),$$

где $\xi_1 = \xi (\lambda/\lambda_1)^{1/2}$; $\eta_1 = \eta (\lambda/\lambda_2)^{1/2}$; $\zeta_1 = \zeta (\lambda/\lambda_3)^{1/2}$; λ — произвольно выбранная постоянная.

Следует иметь в виду, что проведенное преобразование координат существенно упростило форму дифференциального уравнения, однако, за исключением частных случаев, задача решения этого уравнения не становится легче, поскольку при переходе к новой системе координат границы рассматриваемого тела приобретают более сложную форму, что ведет к усложнению граничных условий задачи.

Для однородных ортотропных тел, для которых справедливы соотношения (1.5), уравнение теплопроводности в прямоугольной системе координат имеет вид

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = \lambda_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \lambda_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}.$$

Аналогично запишется уравнение теплопроводности для однородного ортотропного тела в цилиндрической системе координат:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\lambda_r}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\lambda_\theta}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \lambda_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}.$$

Задача 1.1. Вывести уравнение теплопроводности в сферических координатах для изотропной однородной среды.

Задача 1.2. Вывести уравнение теплопроводности в цилиндрических координатах для изотропной однородной среды.

Гиперболическое уравнение теплопроводности. Уравнение теплопроводности Фурье (1.17) выведено при неявном предположении, что скорость распространения теплоты является бесконечно большой. Для процессов умеренной интенсивности, обычно встречающихся на практике, возможность такого допущения подтверждается соответствием расчетных и опытных данных. При исследовании высокоинтенсивных нестационарных процессов, например при тепловых взрывах, при обтекании тел сверхзвуковыми потоками газа, необходимо учитывать, что теплота распространяется хоть и с очень большой, но конечной скоростью v_r . Впервые это обстоятельство было отмечено П. Верноттом [124]. Независимо от него Лыковым А. В. [65] была сформулирована гипотеза о конечных скоростях распространения теплоты и массы для процессов тепло- и влагопереноса в капиллярно-пористых телах.

Скорость распространения теплоты

$$v_r = \sqrt{\lambda / (c\rho \tau_r)},$$

где τ_r — постоянная времени, или время релаксации теплового напряжения. Можно теоретически оценить порядок величины τ_r , так для азота $\tau_r = 10^{-9}$ с, для алюминия $\tau_r = 10^{-11}$ с. Для высокоинтенсивных нестационарных процессов зависимость между плотностью теплового потока и градиентом температуры можно представить следующим образом [79, 124]:

$$\bar{q} = -\lambda \nabla T - \tau_r \frac{\partial \bar{q}}{\partial \tau}. \quad (1.24)$$

В частных случаях при стационарном режиме ($\partial q / \partial \tau = 0$) и при стремлении скорости распространения теплоты к бесконечности ($\tau, \rightarrow 0$) уравнение (1.24) переходит в выражение для классического закона теплопроводности Фурье

$$\bar{q} = -\lambda \nabla T.$$

Подставляя значение q_x , определяемое выражением (1.24), в уравнение баланса теплоты для одномерной задачи

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = -\frac{\partial q_x}{\partial x},$$

получим гиперболическое уравнение переноса теплоты

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + \tau \frac{\partial^2 T}{\partial \tau^2} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (1.25)$$

справедливое, как показано в [102], только для одномерного однородного и стационарного пространства. Вопрос о возможности обобщения гиперболического уравнения теплопроводности на случай трехмерного пространства рассмотрен в работе [65], при этом в правой части уравнения (1.25) оператор $\partial^2 / \partial x^2$ заменяется на оператор Лапласа $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

§ 1.3. Постановка краевых задач теории теплопроводности

Дифференциальное уравнение теплопроводности, выведенное на основе общих законов физики, устанавливает связь между временным и пространственным изменениями температуры в любой точке тела, в которой происходит процесс теплопроводности. Дифференциальное уравнение теплопроводности имеет в общем случае бесчисленное множество решений. Чтобы из этого множества выбрать решение, характеризующее конкретный рассматриваемый процесс, и дать полное математическое описание этого процесса, необходимо к основному дифференциальному уравнению присоединить дополнительные условия, включающие геометрические, физические и краевые условия.

Геометрические условия определяют форму и линейные размеры тела.

Физические условия определяют теплофизические параметры: λ — теплопроводность, ρ — плотность тела, c — удельную теплоемкость тела, q_v — объемную плотность теплового потока.

Краевыми условиями называют совокупность начального и граничных условий. Начальные условия задаются только при изучении нестационарных процессов и состоят в задании распределения температуры внутри тела в момент времени, выбранный за начальный. Граничные условия отображают условия теплового взаимодействия между окружающей средой и поверхностью тела.

Способы задания краевых условий. Задание начального условия заключается в том, что для некоторого момента времени $\tau = \tau_0$ (обычно полагают $\tau_0 = 0$) должна быть известна функция $T(x, y, z, \tau_0) = f(x, y, z)$ пространственных координат. Простейшее начальное условие имеет вид $f(x, y, z) = T_0 = \text{const}$. К такому условию, например, относятся начальные условия вывода системы из установившегося режима (разогрев из «холодного» состояния и т. д.) и др. Возможны предельные случаи, когда можно пренебречь начальными условиями. Так, для конечных тел произвольной формы начальные условия оказывают влияние лишь на начальной стадии нестационарной теплопроводности: начиная с некоторого момента τ^* наступает такой режим теплопроводности, при котором распределение температур в теле определяется только граничными условиями и не зависит от начальных.

Граничные условия для изучаемой задачи могут быть заданы несколькими способами; в теории теплопроводности различают граничные условия I, II, III, IV*) родов и др.

Граничные условия I рода. Задается распределение температуры на поверхности S тела как функция координат и времени

$$T_S = \varphi(x, y, z, \tau), \quad x, y, z \in S. \quad (1.26)$$

К граничным условиям I рода можно отнести задачи разогрева и охлаждения системы при заданном изменении температуры на границе или при весьма интенсивном теплообмене на поверхности, когда температура поверхности близка к температуре среды. Однако круг таких практических задач ограничен и граничные условия I рода используются в основном при разработке математических методов решения краевых задач и оценочных расчетах.

Отметим, что при $\varphi(x, y, z, \tau) = 0$ условие (1.26) однородно относительно температуры. Для процессов стационарной теплопроводности функция φ в условии (1.26) не зависит от времени и это условие обычно называют *условием Дирихле*.

Граничные условия II рода. Задается распределение плотности теплового потока на поверхности тела как функция координат и времени

$$q_S = \psi(x, y, z, \tau), \quad x, y, z \in S. \quad (1.27)$$

Согласно закону Фурье, условие (1.27) запишется в виде

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_S = \psi(x, y, z, \tau), \quad x, y, z \in S, \quad (1.28)$$

где $\vec{n}$ — внутренняя нормаль к поверхности S .

В процессах стационарной теплопроводности функция ψ в условиях (1.27) и (1.28) не зависит от времени τ и эти условия обычно именуют *условием Неймана*.

*) Граничные условия IV рода иначе называют *условиями сопряжения*.

В частном случае, когда плотность теплового потока на поверхности тела остается постоянной для любого момента времени в любой точке поверхности, выражение (1.27) имеет вид

$$q_s = q_0 = \text{const.}$$

Такие условия теплообмена могут создаваться при нагревании тел высокотемпературными источниками теплоты, когда теплообмен происходит главным образом излучением по закону Стефана — Больцмана, если при этом собственная температура тела значительно меньше температуры излучающей поверхности.

Кроме того, возможен случай задания однородного граничного условия II рода

$$(\partial T / \partial n)_s = 0,$$

т. е. условия так называемой тепловой изоляции. Такое условие часто задается при равномерном обогреве поверхности тела, имеющего геометрическую симметрию. Например, задача симметричного прогрева пластины толщиной $2R$ ($|x| < R$) (когда на ограничивающих поверхностях $x = \pm R$ задана плотность тепловых потоков $q_1 = q_2 = q_0$) сводится к эквивалентной задаче: задан тепловой поток q_0 на поверхности $x = R$ и задано условие $q = 0$ в плоскости симметрии пластины $x = 0$.

Граничные условия III рода. На поверхности тела задается зависимость плотности теплового потока вследствие теплопроводности со стороны тела от температур поверхности тела T_s и окружающей среды T_c .

В случае охлаждения (нагрева) тела имеем

$$q_s = \pm \alpha (T_s - T_c), \quad (1.29)$$

где α — коэффициент пропорциональности, называемый *коэффициентом теплоотдачи* (теплообмена), Вт/(м²·К). Он характеризует интенсивность теплового взаимодействия среды заданной температуры T_c с поверхностью тела. В нестационарных процессах температура окружающей среды в общем случае изменяется во времени.

Уравнение (1.29) выражает закон Ньютона. Плотность потока, подводимая (отводимая) за счет теплопроводности к (от) поверхности тела, определяется по закону Фурье. Следовательно, на основании закона сохранения энергии с учетом уравнений (1.29) и (1.2) имеем

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_s = \alpha (T_s - T_c), \quad (1.30)$$

где $\bar{n}$ — внутренняя нормаль к поверхности тела.

Уравнение (1.30) является *аналитическим выражением граничного условия III рода*, которое широко применяется при аналитических исследованиях теплопередачи в твердых телах, обтекаемых потоками жидкости или газа на границе между телом и жидкостью.

В отличие от λ коэффициента теплоотдачи α не является физической постоянной, характерной для того или иного вещества. В общем случае он отражает совместное действие конвекции, теплопро-

водности и зависит от многих факторов. Так, например, только конвективная часть α_k определяется геометрической формой и размерами тела, физическими свойствами обтекающего его потока, направлением и скоростью потока, температурными условиями и другими факторами. Поэтому только в первом приближении можно считать коэффициент α постоянным.

Таким образом, постановку условия (1.30) не всегда просто выполнить, так как вся сложность вопроса о теплообмене между телом и окружающей средой сосредоточивается на методе определения коэффициента α при конкретных условиях задачи.

Из граничных условий III рода в частных случаях можно получить граничные условия I и II родов. Так, если отношение α/λ устремить к бесконечности ($\alpha \rightarrow \infty$ при $\lambda = \text{const}$ либо $\lambda \rightarrow 0$ при $\alpha = \text{const}$), то приходим к граничным условиям I рода:

$$T_s - T_c = \lim_{\alpha/\lambda \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\alpha/\lambda} \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_s \right] = 0, \text{ т. е. } T_s = T_c.$$

В случае, если $\alpha \rightarrow 0$, получаем частный случай граничных условий II рода:

$$-\lambda (\partial T / \partial n)_s = 0.$$

Заметим, что граничное условие (1.30) будет однородным относительно температуры поверхности при $T_c = 0$ и λ и α , не зависящих от температуры поверхности.

В работах [65, 68] показано, что для нестационарных задач конвективного теплообмена использование закона Ньютона при формулировке граничных условий приемлемо не всегда. Физически более обоснованным является рассмотрение задач конвективного теплообмена как сопряженных, т. е. при совместном рассмотрении температурных полей тела и окружающей среды. Такое рассмотрение приводит к формулировке граничных условий сопряжения, называемых граничными условиями IV рода.

Граничные условия сопряжения (IV рода) соответствуют теплообмену поверхности тела с окружающей средой (конвективный теплообмен тела с жидкостью) или теплообмену соприкасающихся твердых тел, когда температура соприкасающихся поверхностей одинакова. Задаются они как условия равенства температуры и плотностей теплового потока на поверхности соприкосновения двух сред (или тел):

$$T_{1s} = T_{2s}; \quad (1.31)$$

$$\lambda_1 \left. \frac{\partial T_1}{\partial n} \right|_s = \lambda_2 \left. \frac{\partial T_2}{\partial n} \right|_s, \quad (1.32)$$

где $\partial/\partial n$ означает дифференцирование вдоль нормали к поверхности раздела.

Равенство (1.31) выражает условие непрерывности температурного поля, а равенство (1.32) — закон сохранения энергии на поверхности соприкосновения двух сред (или тел).

Условия (1.31), (1.32) называют еще условиями идеального теплового контакта. В реальных телах теплоперенос между слоями осуществляется не только теплопроводностью, но и конвекцией и тепловым излучением, которые играют здесь существенную роль. Поэтому точное задание граничных условий при контактном теплообмене затруднительно и для расчетов используются более сложные идеализированные схемы.

Задачи с граничными условиями IV рода часто ставятся при расчетах многослойных теплоизоляционных покрытий в металлургии, авиационной и космической технике.

Другие виды граничных условий. Кроме рассмотренных возможна постановка других граничных условий. Например, при наличии фазовых превращений (промерзания, плавления) на поверхности соприкосновения условие (1.32) заменяется следующим:

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} \Big|_S - \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial n} \Big|_S = \rho q \frac{\partial S}{\partial t}, \quad (1.33)$$

где S — движущаяся граница раздела фаз (1 — твердая, 2 — жидкая); q — удельная теплота фазовых превращений; n — нормаль к поверхности S .

Если неизвестна зависимость $S(x, y, z, t)$, то условие (1.33) относит решаемую задачу к классу нелинейных задач и требует особых методов ее решения.

При достаточно высоких температурах поверхность тел излучает теплоту, при этом плотность теплового потока определяется по закону Стефана — Больцмана. Согласно этому закону, в условиях термодинамического равновесия для абсолютно черного тела поверхностная плотность потока излучения R определяется так:

$$R = \sigma T^4,$$

где $\sigma = 5,67032(71) \cdot 10^{-8}$ Вт/(м² · К⁴) — постоянная Стефана — Больцмана.

Применительно к неабсолютно черным телам этот закон принимает вид

$$R' = \varepsilon R = \varepsilon \sigma T^4.$$

Здесь $\varepsilon = 0 \dots 1$ — коэффициент излучения теплового излучателя (коэффициент черноты).

Если тело подвергается нагреву излучением со стороны внешней среды, то граничные условия на поверхности тела в этом случае задаются в виде

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_S = \alpha E - \varepsilon \sigma T^4, \quad (1.34)$$

где n — внутренняя нормаль к поверхности тела; $\alpha = 0 \dots 1$ — коэффициент поглощения; E — поверхностная плотность потока излучения, падающего на поверхность S . В общем случае падающий поток излучения определяется не только внешними источниками излу-

чения, но и теплообменом за счет излучения между отдельными участками поверхности тела.

Граничные условия типа (1.34) формулируются при изучении процессов теплообмена в космосе, при отливке массивных тел, в термоэмиссионных преобразователях энергии и т. д.

Задачи с нелинейными граничными условиями типа (1.34) принято называть задачами с внешней нелинейностью в отличие от задач с внутренней нелинейностью, к которым относятся задачи со свойствами материалов, зависящими от температуры.

Дифференциальное уравнение теплопроводности вместе с заданными дополнительными условиями полностью определяют краевую задачу теплопроводности, подлежащую решению.

Классификация краевых задач. При известной математической модели процесса теплопроводности необходимо выяснить, какие величины и зависимости, входящие в описание, нам известны, а какие необходимо определить. В зависимости от этого возникающие задачи можно разделить на два вида.

Прямая задача. Определить температурное поле, если известно дифференциальное уравнение процесса и заданы дополнительные условия, полностью определяющие краевую задачу.

Обратная задача. Определить граничные условия или коэффициенты, входящие в основное дифференциальное уравнение, если известны математическое описание процесса и температурное поле.

В дальнейшем будем рассматривать только прямые задачи теплопроводности. Методы решения обратных задач подробно изложены в монографиях [2, 97, 101].

Кроме того, краевые задачи можно подразделить на линейные и нелинейные. Напомним, что *уравнение называется линейным*, если оно *линейно относительно неизвестной функции (температуры) и ее производных*.

Если в математическом описании задачи хотя бы одно уравнение нелинейно, то и краевая задача *нелинейна*. В зависимости от того, в каком уравнении и в каком члене уравнения сосредоточена нелинейность, нелинейные краевые задачи можно классифицировать следующим образом [50]:

а) краевая задача с нелинейностью I рода — от температуры зависят теплопроводность $\lambda(T)$, удельная объемная теплоемкость $C_v(T) = c(T)\rho(T)$.

б) краевая задача с нелинейностью II рода — от температуры нелинейно зависит плотность теплового потока на поверхности тела $q(T_s)$.

в) краевая задача с нелинейностью III рода — от температуры нелинейно зависит объемная плотность теплового потока q_v .

Задачи с подвижными границами, когда на границах действуют источники (стоки) теплоты, относят к задачам с нелинейностями II или III рода в зависимости от способа учета источника (стока) теплоты в математической модели.

Однако можно формулировать и решать краевые задачи, содержащие нелинейности всех трех родов.

Вопросы существования, единственности и корректности для краевой задачи. Дифференциальное уравнение нестационарной теплопроводности относится к параболическому типу, а стационарной теплопроводности — к эллиптическому типу дифференциальных уравнений в частных производных, решение которых является одной из задач математической физики.

Решить краевую задачу — значит найти все функции, удовлетворяющие данному дифференциальному уравнению и данным краевым условиям. Как правило, краевые условия стараются формулировать таким образом, чтобы краевая задача имела одно и только одно решение. Это требует в каждом случае доказательства теоремы существования решения и теоремы единственности решения. Для различных частных случаев доказательства теорем существования и единственности для краевых задач теплопроводности имеются, например, в работах [62, 63, 100 и др.]. Однако в самом общем виде доказательств теорем существования и единственности пока не получено.

Кроме вопросов существования и единственности решения важен еще и вопрос о так называемой корректности сформулированной краевой задачи.

Дело в том, что при решении поставленной краевой задачи необходимо учитывать наличие погрешностей разного происхождения. Погрешности первого рода могут быть вызваны тем, что при составлении краевой задачи уравнения недостаточно точно описывают изучаемый физический процесс из-за неполноты теории, неточностей измерений и т. п. Возникает вопрос, как погрешность в данных краевой задачи отразится на получаемом решении. В связи с этим можно дать следующее определение. Решение краевой задачи устойчиво в некоторой области Ω , если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\eta(\varepsilon) > 0$ такое, что при изменении функций, входящих в краевые условия, на величину, модуль которой меньше $\eta(\varepsilon)$, решение основного дифференциального уравнения изменится в области Ω на величину, меньшую ε . Сколь угодно малым изменениям исходных данных в краевых условиях могут соответствовать большие изменения решения, в этом случае решение задачи неустойчиво.

Если решение краевой задачи для какого-либо уравнения или системы уравнений в рассматриваемой области существует, единственно и является устойчивым, то краевая задача поставлена корректно.

Классический пример постановки некорректной краевой задачи принадлежит Адамару [101].

Необходимо получить решение задачи Коши для процесса стационарной теплопроводности в полуплоскости $y > 0$:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0; \quad -\infty < x < \infty; \quad y > 0;$$

$$T(x, 0) = 0;$$

$$\frac{\partial T(x, 0)}{\partial y} = q(x).$$

Функция $q(x)$ относится к исходным данным. Если $q^*(x)=0$, то сформулированная краевая задача имеет тривиальное решение

$$T^*(x, y)=0.$$

Если положить $q_k(x)=\frac{1}{k} \cos kx$, то решение соответствующей краевой задачи

$$T_k(x, y)=\frac{1}{k^2} \cos kx \operatorname{sh} ky.$$

При $k \rightarrow \infty$ функции $q_k(x)$ равномерно сходятся к $q^*(x)$, однако если при этом $y \neq 0$, то решения $T_k(x, y)$ неограниченны и не могут сходиться к $T^*(x, y)$.

Таким образом, при отсутствии устойчивости даже сравнительно небольшая погрешность в исходных данных приводит к тому, что получаемое решение будет далеко от искомого. В предлагаемой книге рассматриваются только корректные постановки краевых задач. Методам построения решений некорректно поставленных задач посвящена специальная литература [101].

Погрешности второго рода связаны с процессом решения краевой задачи. Эти погрешности могут быть двух видов:

1) погрешности метода — при применении приближенных методов не может быть получено точное решение задачи, даже в случае точной реализации метода;

2) вычислительные погрешности — погрешности округления при выполнении арифметических действий, погрешности в вычислении интегралов, производных и т. п.

Оценки вычислительных погрешностей не рассматриваются нами, так как это достаточно сложная математическая задача.

О задачах, математические модели которых изоморфны краевым задачам теплопроводности. Краевые задачи, имеющие математические модели, подобные краевым задачам теплопроводности, ставятся во многих областях науки и техники (металлургия, энергетика, геология, почвоведение, пищевая промышленность и др.). Прежде всего отметим, что процессы диффузии газа, описываемые скалярным полем концентрации; фильтрации жидкости в пористых средах, описываемые скалярной функцией напора; распространения теплоты, описываемые скалярным температурным полем, объединяются общностью математической модели для определения скалярного поля искомой величины (концентрации, напора, температуры).

Так, дифференциальное уравнение диффузии имеет вид

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial \tau} = \operatorname{div} (D \operatorname{grad} \rho_i),$$

где ρ_i — массовая концентрация данного вещества (компонента), равная отношению массы компонента к объему смеси; D — коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом диффузии.

При определенных допущениях плоская задача фильтрации жидкости в плите описывается дифференциальным уравнением Буссинеска относительно пьезометрического напора h

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[f(H+h) \frac{\partial h}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[f(H+h) \frac{\partial h}{\partial y} \right] - \frac{p}{\gamma} \frac{\partial h}{\partial \tau} = - \frac{W}{\gamma},$$

где $f = f(x, y)$ — коэффициент фильтрации; $H = H(x, y)$ — глубина дна пласта; p — пористость слоя; γ — удельный вес; $W = W(x, y, \tau)$ — плотность выпадающих осадков.

Таким образом, методы, разработанные для решения краевых задач теплопроводности, могут применяться и для решения краевых задач диффузии, фильтрации и других процессов, описываемых дифференциальными уравнениями того же типа, что и уравнение теплопроводности.

§ 1.4. О применении теории подобия

При решении краевых задач теории теплопроводности часто встречаются большие математические трудности, что вынуждает исследователей обращаться к экспериментальному пути решения поставленных задач. Правильное моделирование и экспериментальное исследование краевых задач основано на применении теории подобия, которую используют также при аналитическом и численном решениях.

В теории подобия [32, 80, 95] доказывается, что для каждой задачи существует совокупность характерных для нее комплексных переменных, имеющих физический смысл, в которой следует рассматривать эту задачу. Методы теории подобия дают возможность на основе анализа краевой задачи перейти от обычных физических величин к безразмерным величинам комплексного типа.

Анализ задачи в безразмерных величинах имеет ряд преимуществ:

удается сократить число переменных величин;

величины комплексного типа более четко выявляют внутренние связи, характеризующие процесс;

новые переменные по своему существу являются обобщенными, так как заданное значение комплекса величин может быть получено в результате бесчисленного множества различных комбинаций величин, входящих в этот комплекс.

Важной задачей теории подобия является замещение обычных переменных безразмерными.

Для определения безразмерных величин, специфических для краевой задачи, нет необходимости в завершеном аналитическом решении, достаточно располагать дифференциальными уравнениями процесса и формулировкой конкретных краевых условий.

Определим те безразмерные величины, которые отвечают случаю нестационарной теплопроводности при наличии внутренних источников теплоты. Для этого прежде всего необходимо привести к без-

размерному виду основное дифференциальное уравнение теплопроводности, записанное в прямоугольной системе координат.

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{q_v}{c\rho}, \quad (1.35)$$

где теплофизические параметры a , c , ρ и объемная плотность теплового потока q_v постоянны.

В этом уравнении следует различать три вида величин: независимые переменные — время τ , пространственные координаты x , y , z ; зависимую переменную — температура T ; постоянные — a , c , ρ , q_v , которые задаются при постановке задачи.

Выберем некоторый характерный размер тела l за масштаб и введем безразмерные пространственные координаты, так что

$$X = x/l; \quad Y = y/l; \quad Z = z/l.$$

Так как в основное дифференциальное уравнение температура входит только под знаком производной, отсчет температуры можно вести от любой фиксированной для данного процесса температуры T^* . В случае, если начальное распределение температуры характеризуется постоянной величиной $T_0 = \text{const}$, именно эту температуру можно выбрать в качестве T^* .

Если кроме фиксированной температуры T^* задана еще другая фиксированная температура T_* , также являющаяся параметром задачи, то за масштабную разность температур выбирают $\vartheta_0 = T_* - T^*$ или $\vartheta_0 = T^* - T_*$. В качестве T_* можно взять, например, температуру внешней среды. Тогда безразмерная температура Θ определится выражением

$$\Theta = \vartheta/\vartheta_0 = (T - T^*)/(T_* - T^*) = (T^* - T)/(T^* - T_*).$$

Если задана только одна характерная температура T^* (T_*), то в зависимости от условий задачи безразмерная температура имеет вид

$$\Theta = T/T^*, \text{ или } \Theta = (T - T^*)/T^*.$$

Для аperiодических нестационарных процессов, стремящихся при больших значениях времени τ к установившемуся состоянию, не существует такого характерного промежутка времени, который имел бы смысл естественной масштабной единицы. Поэтому, выполняя в уравнении (1.35) подстановки

$$x = lX; \quad y = lY; \quad z = lZ; \quad \vartheta = \vartheta_0 \Theta, \quad (1.36)$$

оставим время τ в его первоначальном виде, тогда получим

$$\vartheta_0 \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \frac{a \vartheta_0}{l^2} \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Z^2} \right) + \frac{q_v}{c\rho}.$$

Разделив обе части уравнения на комплекс $a \vartheta_0 / l^2$, приходим к уравнению

$$\frac{\partial \Theta}{\partial (\alpha \tau / l^2)} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Z^2} + \frac{q_v l^2}{\lambda \vartheta_0}.$$

В последнее уравнение кроме безразмерной температуры Θ и безразмерных пространственных координат входят также безразмерные степенные комплексы, составленные из разнородных физических величин:

$$\alpha\tau/l^2; q_0 l^2/[\lambda(T_* - T^*)].$$

Такие комплексы называются *числами подобия*, им присваиваются имена ученых, внесших выдающийся вклад в развитие соответствующей области науки.

Для аperiodических процессов теплопроводности комплекс $\alpha\tau/l^2$ представляет собой относительную форму выражения текущего времени, поскольку параметр l^2/α может рассматриваться как вполне характерный для конкретного явления масштаб времени. Подобно размерному текущему времени τ , величина $Fo = \alpha\tau/l^2$, называемая *числом Фурье*, представляет собой независимую переменную. Важная роль числа Фурье определяется тем, что оно дает правило сопоставления температурных полей по времени. Если число подобия составлено только из заданных параметров математического описания изучаемого процесса, то его называют *критерием подобия*. Например, для процессов, в которых температура среды, окружающей рассматриваемое тело, изменяется по заданному периодическому закону, число Фурье $\alpha\tau_0/l^2$ приобретает смысл критерия подобия, равного отношению двух характеристических длительностей: длительности τ_0 , представляющей продолжительность задаваемого периода изменения температуры окружающей среды, и длительности, выраженной в форме l^2/α и определяющей темп перестройки температурного поля внутри самого твердого тела. Что касается комплекса

$$Os = q_0 l^2/[\lambda(T_* - T^*)],$$

называемого *числом Остроградского*, то он, будучи составленным из первоначально заданных размерных параметров, является и в безразмерной постановке задачи параметром, принимающим постоянное значение для конкретной задачи.

Таким образом, уравнение теплопроводности (1.35) в безразмерных величинах имеет вид

$$\frac{\partial \Theta}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Z^2} + Os. \quad (1.37)$$

Требуется ответить на вопрос: является ли полученный перечень безразмерных величин полным? Ответ зависит от содержания конкретной краевой задачи теплопроводности.

При постановке задачи прежде всего необходимы данные о форме и размерах тела. Если имеется несколько характерных размеров, то только один из них, например l , будет фигурировать среди перечисленных безразмерных величин. Из остальных же l' , l'' , l''' следует сформировать соотношения l'/l , l''/l , l'''/l , которые служат дополнительными критериями подобия данной задачи.

Формулировка краевой задачи требует также задания краевых условий. Неравномерное начальное распределение температуры $T|_{\tau=0}=f(x, y, z)$ должно быть отражено безразмерными величинами, которые конструируются на основе соответствующей аналитической зависимости.

При граничных условиях I рода, задаваемых температурой на поверхности тела в виде функции пространственных координат и времени, также возникают новые безразмерные величины.

При задании граничных условий II рода в рассмотрение вводится число подобия

$$Ki = q_s l / [\lambda (T_* - T^*)],$$

называемое *числом Кирпичева* (q_s — плотность теплового потока на поверхности тела).

При формулировке граничных условий III рода возникает новый безразмерный комплекс, специфический для этой, практически важной постановки задачи. Для его получения запишем граничные условия III рода в виде

$$-\lambda (\partial \vartheta / \partial n)_s = \alpha \vartheta_s, \quad (1.38)$$

где $\vartheta = T - T_0$.

Выполнив подстановки $n = lN$, $\vartheta = \Theta \vartheta_0$, получаем

$$\alpha \vartheta_0 \Theta_s = -\lambda \frac{\vartheta_0}{l} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial N} \right)_s,$$

а после сокращения на ϑ_0

$$\frac{\alpha l}{\lambda} \Theta_s = - \left(\frac{\partial \Theta}{\partial N} \right)_s.$$

Отсюда видно, что граничным условиям III рода отвечает безразмерный комплекс $\alpha l / \lambda$, называемый *числом Био*:

$$Bi = \alpha l / \lambda.$$

Число Био характеризует связь между полем температуры в твердом теле и условиями теплоотдачи на его поверхности. Такой смысл придает ему содержание уравнения (1.38), из которого это число получается. С другой стороны, это число можно трактовать как меру отношения внутреннего и внешнего тепловых сопротивлений (l/λ) и $(1/\alpha)$ соответственно. Число Био, как вытекающее из уравнения, формирующего граничное условие при заданном коэффициенте теплоотдачи α , сохраняет свою роль критерия подобия для любых процессов изменения температуры в твердом теле, как периодических, так и аperiodических.

Трехмерное температурное поле рассматриваемой краевой задачи при равномерном начальном распределении температуры и при граничном условии (1.38) может быть описано следующим уравнением подобия:

$$\Theta = f(x/l, y/l, z/l, Bi, Os, Fo, l'/l, l''/l, l'''/l). \quad (1.39)$$

Такое представление температурного поля относится к случаям аperiодического (т. е. монотонного) изменения температуры, которые и будут в основном рассматриваться в дальнейшем. При изучении периодических процессов время должно быть введено в уравнение подобия дважды: один раз — в составе числа $Fo' = a\tau_0/l^2$ и второй раз — в параметрическом виде τ/τ_0 :

$$\Theta = f(x/l, y/l, z/l, \tau/\tau_0, Bi, Os, Fo', l'/l, l''/l, l'''/l). \quad (1.40)$$

Можно показать, что уравнение (1.39), отвечающее случаю аperiодического процесса, представляет собой частную форму уравнения (1.40). В самом деле, для аperiодического процесса никакого характеристического времени не существует, а из уравнения (1.40) его необходимо исключить. Для этого взятые порознь число Fo' и относительная переменная τ/τ_0 заменяются их произведением:

$$Fo'(\tau/\tau_0) = (a\tau_0/l^2)(\tau/\tau_0) = a\tau/l^2 = Fo.$$

Наиболее простой вид уравнения подобия (1.39), (1.40) приобретают применительно к телам, форма и размеры которых позволяют рассматривать возникающее в них температурное поле как одномерное.

Безразмерные величины, входящие в уравнения подобия, можно разделить на три вида:

определяемые — числа подобия, которые содержат искомые зависимые переменные (например, Θ);

определяющие — числа подобия, содержащие независимые переменные (например, X, Y, Z, Fo);

критерии подобия — числа подобия, целиком состоящие из наперед заданных параметров (постоянных) математического описания процесса (например, Os, Ki, Bi).

Функциональная зависимость между числами подобия (уравнения подобия) является одинаковой для всех подобных процессов. Общие условия подобия физических процессов следующие [41]:

1) процессы должны иметь одинаковую физическую природу и описываться одинаковыми по форме записи дифференциальными уравнениями;

2) начальные, граничные, физические и геометрические условия процессов должны быть одинаковы во всем, кроме числовых значений размерных постоянных, содержащихся в этих условиях;

3) одноименные определяющие безразмерные величины и критерии подобия процессов должны иметь одинаковые числовые значения.

Ясно поэтому, что если изучаемые процессы описываются одинаковым уравнением, то отсюда еще не следует их физическое подобие. Для физического подобия изучаемых процессов необходимо, чтобы выполнялось третье условие подобия. При этом для подобия процессов в целом достаточно потребовать только равенства чисел подобия.

Наряду с понятием о физическом подобии процессов естественно рассмотреть и понятие о физической аналогии. В первом случае

изучаемые процессы должны быть одинаковой физической природы, а аналогично можно установить среди процессов разного рода, отличающихся качественно друг от друга. Например, в потоке жидкости в трубе при определенных условиях отмечается аналогия между распределениями температур и скоростей. Можно привести и много других примеров физической аналогии. В теории теплопроводности чаще всего используется аналогия тепловых процессов в теле с процессами распространения зарядов в электрических цепях.

Необходимые и достаточные условия существования физической аналогии процессов следующие: 1) сравниваемые процессы физически разнородны, но с формально-математической стороны принадлежат одному типу; 2) условия однозначности заданы качественно единообразно и в количественном отношении тождественно (в безразмерной форме); 3) критерии подобия, входящие аналогичным образом в безразмерные дифференциальные уравнения и построенные из аналогичных размерных параметров, численно равны.

При выполнении этих условий безразмерные поля зависимых переменных физически аналогичных процессов представляют собой тождественные распределения чисел в тождественных пространственно-временных границах изменения независимых переменных.

Решение краевой задачи, описывающей физический процесс в любой из аналогичных систем, является одинаковым по трудности в математическом смысле. Поэтому основное преимущество моделирования состоит в том, что если в одной из аналогичных систем легко решить задачу экспериментально, то полученные результаты несложно распространить и на другие исследуемые аналогичные системы.

Как было отмечено выше, при решении задач теплопроводности наиболее широкое распространение получил метод электротепловой аналогии.

Закон Фурье $\bar{q} = -\lambda \text{ grad } T$ и закон Ома $\bar{\delta} = -\frac{1}{\rho} \text{ grad } V$, где $\bar{\delta}$ —

плотность электрического тока, V — электрический потенциал, ρ — удельное электрическое сопротивление, имеют одинаковое по структуре математическое выражение. Это позволяет установить аналогию между температурным градиентом и напряженностью электрического поля, теплопроводностью и удельной электрической проводимостью. Несложно устанавливается и аналогия между тепловым потоком и силой тока, теплоемкостью и электрической емкостью.

Если масштабы времени электрических и тепловых процессов одинаковы и выполняется условие $a = 1/(\rho_e c_e)$, то уравнения, определяющие функции T и V , становятся тождественными.

Установив таким же образом аналогию между краевыми условиями соответствующих задач, приходят к выводу о подобных распределениях температуры и электрического потенциала. Для использования электротепловой аналогии исследуемую систему можно моделировать средой или (и) сеткой дискретных элементов.

В качестве сплошных сред используют жидкие (ванна с электролитом) или твердые (электропроводная бумага или металлическая фольга) проводники соответствующей формы.

Электрические аналоги, использующие дискретные элементы (R — сетка омических сопротивлений и $R-C$ — сетки омических сопротивлений и емкостей), имеют более широкие возможности применения по сравнению с непрерывными моделями.

Для решения задач теплопроводности применяются такие типы аналоговых вычислительных машин (АВМ) [49]: модели-аналоги, структурные модели, комбинированные модели — сочетание модели-аналога и структурной модели, гибридные модели — сочетание модели-аналога или структурной модели с цифровой вычислительной машиной. Методы решения и результаты расчетов различных задач теплопроводности на АВМ даны в работах [49, 51 и др.].

Задача 1.3. Поставить краевую задачу об определении температуры неограниченной пластины $0 < x < l$, если ее начальная температура является произвольной функцией координаты x ; рассмотреть случаи, когда: а) ограничивающие поверхности поддерживаются при заданной температуре; б) поверхность $x=0$ теплоизолирована, а на поверхности $x=l$ происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона со средой, температура которой задана.

Теплопроводящая среда предполагается однородной.

Задача 1.4. Неограниченная пластина $0 < x < l_2$ получена соединением двух неограниченных пластин $0 < x < l_1$, $l_1 < x < l_2$ с различными теплофизическими коэффициентами. Поставить краевую задачу об определении температуры в этой системе, когда заданы однородное начальное распределение температуры в системе и одно из условий:

а) на ограничивающих тело поверхностях $x=0$ и $x=l_2$ поддерживаются различные температуры;

б) поверхность $x=0$ теплоизолирована, а на поверхности $x=l_2$ происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона со средой, температура которой задана и равна T_c ;

в) поверхность $x=0$ нагревается тепловым потоком $q_0 = \text{const}$, а поверхность $x=l_2$ поддерживается при начальной температуре.

Задача 1.5. Неограниченный полый цилиндр с радиусами R_1 и R_2 имеет начальное распределение температуры T_1 . Температура цилиндра зависит от радиуса и времени. В начальный момент времени цилиндр помещается в среду с постоянной температурой T_c . Коэффициенты теплоотдачи наружной и внутренней поверхностей различны: $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Сформулировать краевую задачу и привести ее к безразмерному виду.

Задача 1.6. Дано сферическое тело (шар) радиуса R с известным начальным распределением температуры T_0 . В начальный момент времени тело помещается в среду с температурой T_c . Теплообмен с окружающей средой происходит по закону Ньютона. Внутри шара действует источник теплоты при $q_0 = \text{const}$. Сформулировать краевую задачу и привести ее к безразмерному виду.

Задача 1.7. Неограниченная пластина ($|x| < R$) имеет начальную температуру $T_0 = \text{const}$. В момент времени $t=0+$ пластина помещается в среду, температура которой изменяется по закону простого гармонического колебания

$$T_c(t) - T_0 = T_m \cos 2\pi \nu t,$$

где T_m — амплитуда колебания, ν — частота колебания температуры среды.

Между ограничивающими поверхностями пластины и окружающей средой происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона. Сформулировать краевую задачу для нахождения распределения температуры в пластине.

§ 1.5. О классификации методов решения краевых задач

Существующие методы решения краевых задач можно классифицировать по различным признакам [50]. Один из них — форма, в которой получаются результаты решений. Решение задачи может быть представлено в виде формулы, которая позволяет по заданному значению аргумента получить значение искомой функции. В этом случае говорят, что решение получено в аналитической форме.

С помощью численных методов решение может быть представлено числовыми значениями функции в некоторых заданных числовых значениях аргумента.

Часто для анализа аналитического решения на некотором этапе необходимо применение численных методов, т. е. в этом случае можно говорить о синтезе аналитических и численных методов.

Аналитические методы позволяют получить более наглядные решения по сравнению с численными методами, по которым легко проанализировать влияние всех факторов на результаты решений.

Использование численных методов даст возможность решать сложные краевые задачи, недоступные для решения аналитическими методами. Однако это не умаляет роли аналитических методов решения краевых задач теплопроводности, особенно в тех случаях, когда аналитическое решение может быть получено дешевле, точнее и быстрее, чем численное [50].

Важным критерием для аналитических методов является возможность решения нелинейных краевых задач. Если метод разработан для решения нелинейных задач, то он применим и для решения линейных задач, обратное же часто невозможно.

Для решения линейных задач теории теплопроводности применяют:

I. Классические методы: 1) метод разделения переменных (метод Фурье); 2) метод функций источников (функций Грина); 3) метод тепловых потенциалов*.

II. Методы интегральных преобразований: 1) в бесконечных пределах; 2) в конечных пределах.

При этом ядра интегральных преобразований выбираются различными в зависимости от формы тела и граничных условий.

Для решения нелинейных краевых задач теории теплопроводности применяют:

III. Вариационные методы: 1) Ритца; 2) Л. В. Канторовича; 3) Треффтца; 4) Лейбензона; 5) Био.

IV. Методы линеаризации (сведение нелинейной краевой задачи к линейной): 1) методы подстановок (алгебраические и ин-

* Метод тепловых потенциалов может применяться для решения задач теплопроводности с нелинейными граничными условиями.

тегральные); 2) приемы линеаризации; 3) методы последовательных приближений; 4) метод возмущений (метод малого параметра).

V. Проекционные методы: 1) коллокаций; 2) Бубнова — Галеркина; 3) моментов; 4) интегральные методы (интегрального теплового баланса и осреднения функциональных поправок).

VI. Методы сведения краевой задачи к уравнениям и задачам других типов: 1) приведение краевой задачи с нелинейными граничными условиями к эквивалентному нелинейному функциональному уравнению; 2) приведение краевой задачи с коэффициентами переноса, зависящими от температуры, к нелинейному интегральному уравнению; 3) приведение краевой задачи теплопроводности к краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения.

Следует сразу оговориться, что приведенная классификация аналитических методов является весьма условной, так как многие методы можно отнести не к одной группе методов, а к нескольким. Естественно, что существует целый ряд методов, которые не попали в данную классификацию.

В предлагаемой книге для удобства освоения аналитических методов выделено три группы методов решения нелинейных задач: 1) методы решения краевых задач с нелинейными граничными условиями; 2) методы решения задач теплопроводности при наличии фазовых переходов; 3) методы решения краевых задач с коэффициентами переноса, зависящими от температуры.

Применяя аналитические методы, можно получить точные или приближенные решения краевых задач.

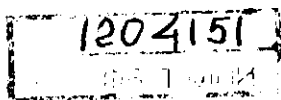
В то же время численные методы всегда приводят к приближенному решению, так как они основаны на замене непрерывной математической модели процесса приближенной дискретной моделью.

Для решения краевых задач теплопроводности применяют такие численные методы: 1) метод конечных разностей (метод сеток); 2) вариационно-разностные методы; 3) метод прямых; 4) статистические (вероятностные) методы.

Наибольшее применение в теории теплопроводности в силу своей универсальности получил метод конечных разностей [26, 42, 50, 72, 88, 113]. Среди вариационно-разностных методов, в которых дискретная модель задачи получается с использованием вариационной формулировки, можно выделить метод локальных вариаций [38] и метод конечных элементов [72].

Применение метода прямых [50] основано на замене производных по всем переменным, кроме одной (например, времени), конечными разностями. Это приводит к системе дифференциальных уравнений (в общем случае нелинейных), для численного решения которой можно использовать методы Рунге — Кутты, Адамса и др. Значительный объем затрат машинного времени, обусловленный многократными вычислениями правых частей уравнений на каждом шаге по выделенной переменной, и большой объем оперативной памяти (для неоднородных задач) ограничивают возможности при-

менения метода прямых. Из вероятностных методов в теории теплопроводности чаще всего используется метод Монте — Карло [42]. Как отмечается в [38], применение этого метода может оказаться эффективным, если необходимо определить значения температуры только в одной или нескольких характерных точках области. Реализация численных методов осуществляется с помощью электронно-цифровых вычислительных машин (ЭЦВМ) или (и) аналоговых вычислительных машин (АВМ).



АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

ГЛАВА II

РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Задачи со стационарным распределением температуры имеют большое практическое значение. В пространственной области Ω , в которой теплота не выделяется и теплопроводность λ постоянна, стационарная температура T удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta T(x, y, z) = 0, \quad x, y, z \in \Omega. \quad (2.1)$$

При действии в области Ω внутренних источников теплоты с объемной плотностью теплового потока q_v стационарное распределение температуры описывается уравнением Пуассона

$$\Delta T(x, y, z) + q_v/\lambda = 0. \quad (2.2)$$

В настоящей главе рассматриваются простейшие стационарные задачи теплопроводности при различных граничных условиях в плоской, цилиндрической и шаровой стенках.

Для решения более сложных задач применяют методы, изложенные в последующих главах. Отметим также, что многие решения сложных задач можно получить из известных решений задач теории упругости, электродинамики и других дисциплин, в которых встречается уравнение Пуассона.

§ 2.1. Теплопроводность однородных тел простейшей геометрической формы

Если предположить, что в однородном и изотропном теле с постоянной теплопроводностью λ температура изменяется только в одном направлении, то уравнение теплопроводности примет вид

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{v}{x} \frac{dT}{dx} + \frac{q_v(x)}{\lambda} = 0, \quad (2.3)$$

где $v=0, 1, 2$ соответствует плоской, цилиндрической и шаровой стенке. Если в теле отсутствуют внутренние источники теплоты, то из уравнения (2.3) имеем

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{v}{x} \frac{dT}{dx} = 0.$$

На ограничивающих тело поверхностях могут реализоваться граничные условия разных типов в зависимости от условий взаимодействия поверхностей тела с окружающей средой. Решения задач с граничными условиями I и III родов получим обобщенным методом [41].

Граничные условия I рода. Пусть известны температуры наружной и внутренней поверхностей стенки, равные соответственно T_{S_1} и T_{S_2} . Полагая, что изотермические поверхности в рассматриваемых одномерных телах при постоянной теплопроводности замкнуты (для плоской стенки изотермы замыкаются на бесконечности), легко видеть, что температура в этом случае будет функцией только одной координаты n — нормали к изотермическим поверхностям.

Согласно закону Фурье, тепловой поток через поверхность рассматриваемого тела может быть определен

$$Q = -\lambda \frac{dT}{dn} S(n), \quad (2.4)$$

где $Q = \text{const}$ для любой изотермической поверхности; $S(n)$ — поверхность рассматриваемого тела.

Тогда можно проинтегрировать уравнение (2.4), предварительно разделив переменные, в пределах по n от n_1 до n_2 , по T от T_{S_1} до T_{S_2} :

$$\frac{Q}{\lambda} \frac{dn}{S(n)} = -dT; \quad \frac{Q}{\lambda} \int_{n_1}^{n_2} \frac{dn}{S(n)} = - \int_{T_{S_1}}^{T_{S_2}} dT; \quad Q = \frac{\lambda (T_{S_1} - T_{S_2})}{\int_{n_1}^{n_2} \frac{dn}{S(n)}}. \quad (2.5)$$

Введем обозначение

$$\int_{n_1}^{n_2} \frac{dn}{S(n)} = N_{n_1}^{n_2}. \quad (2.6)$$

Эту величину назовем приведенной толщиной стенки. Итак,

$$Q = \lambda (T_{S_1} - T_{S_2}) / N_{n_1}^{n_2}. \quad (2.7)$$

Проинтегрировав уравнение (2.4) от n_1 до n и от T_{S_1} до T , получим распределение температуры:

$$\frac{Q}{\lambda} \int_{n_1}^n \frac{dn}{S(n)} = - \int_{T_{S_1}}^T dT; \quad \frac{Q}{\lambda} N_{n_1}^n = T_{S_1} - T; \quad T = T_{S_1} - \frac{Q}{\lambda} N_{n_1}^n,$$

или, подставляя значение Q из (2.7),

$$T = T_{S_1} - (T_{S_1} - T_{S_2}) \frac{N_{n_1}^n}{N_{n_1}^{n_2}}. \quad (2.8)$$

Введем безразмерную температуру

$$\Theta = (T - T_{s_1}) / (T_{s_2} - T_{s_1}). \quad (2.9)$$

Тогда (2.8) примет вид

$$\Theta = 1 - N_{n_1}^n / N_{n_1}^{n_2}. \quad (2.10)$$

Введем безразмерную координату

$$X = N_{n_1}^n / N_{n_1}^{n_2}.$$

Тогда (2.10) примет вид

$$\Theta = 1 - X. \quad (2.11)$$

Уравнение (2.11) является универсальным. Его универсальность заключается в том, что распределение температуры в стенке любой из рассматриваемых форм можно представить единой прямой в отрезках на осях для любого заданного значения температур поверхностей T_{s_1} , T_{s_2} и размеров стенок. Рассмотрим теперь конкретно случаи плоской, цилиндрической и шаровой стенок при граничных условиях I рода (и постоянной теплопроводности).

Плоская стенка. Рассмотрим процесс теплопроводности в плоской однородной стенке толщиной δ .

Граничные условия запишутся в виде

$$T|_{x=0} = T_{s_1}; \quad T|_{x=\delta} = T_{s_2},$$

или в безразмерном виде имеем:

$$\Theta|_{x=0} = 1; \quad \Theta|_{x=\delta} = 0.$$

Определим параметры обобщенного решения:

$$N_{n_1}^n = \int_{n_1}^n \frac{dn}{S(n)}; \quad S(n) = S = \text{const}; \quad n = x, \quad n_1 = 0, \quad n_2 = \delta;$$

$$N_{n_1}^n = \int_0^x dx/S = x/S; \quad N_{n_1}^{n_2} = \delta/S.$$

Тогда тепловой поток Q для плоской пластины определяется так:

$$Q = \lambda (T_{s_1} - T_{s_2}) S / \delta. \quad (2.12)$$

Распределение температуры в стенке имеет вид

$$\Theta = 1 - x/\delta = 1 - X, \quad (2.13)$$

где $X = x/\delta$ — безразмерная координата.

В уравнении (2.12) величина λ/δ называется *тепловой проводимостью стенки*, обратная величина δ/λ — *тепловым или термическим сопротивлением стенки*. Термическое сопротивление стенки представляет собой падение температуры в стенке на единицу плотности теплового потока.

Цилиндрическая стенка. Пусть стационарный процесс теплопроводности осуществляется в цилиндрической стенке (трубе) с внутренним радиусом r_1 и наружным радиусом r_2 .

На поверхностях трубы заданы граничные условия

$$T|_{r=r_1} = T_{S_1}; \quad T|_{r=r_2} = T_{S_2},$$

или в безразмерном виде

$$\Theta|_{r=r_1} = 1; \quad \Theta|_{r=r_2} = 0.$$

Вычислим параметры обобщенного решения:

$$n=r, \quad n_1=r_1, \quad n_2=r_2; \quad S(n)=2\pi r l;$$

$$N_{n_1}^n = \int_{r_1}^r \frac{dr}{2\pi r l} = \frac{1}{2\pi l} \ln \frac{r}{r_1}; \quad N_{n_2}^n = \frac{1}{2\pi l} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

С учетом полученных параметров выражение для теплового потока имеет вид

$$Q = 2\pi l \lambda (T_{S_1} - T_{S_2}) / \ln(r_2/r_1), \quad (2.14)$$

а температура определится по формуле

$$\Theta = 1 - \frac{\frac{1}{2\pi l} \ln(r/r_1)}{\frac{1}{2\pi l} \ln(r_2/r_1)} = 1 - \frac{\ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)}. \quad (2.15)$$

Введем безразмерную координату $R = r/r_1$.

Отношение r_2/r_1 обозначим K_R , тогда выражение (2.15) можно записать в виде

$$\Theta = 1 - \ln R / \ln K_R. \quad (2.16)$$

Величина $\ln(K_R)/(2\lambda)$ называется *линейным термическим сопротивлением* цилиндрической стенки.

Шаровая стенка. Рассмотрим однородный полый шар с внутренним диаметром $d_1 = 2r_1$ и наружным диаметром $d_2 = 2r_2$.

Теплопроводность λ предполагается постоянной: на поверхности заданы равномерно распределенные температуры

$$T|_{r=r_1} = T_{S_1}; \quad T|_{r=r_2} = T_{S_2}.$$

Определяем параметры обобщенного решения:

$$n=r, \quad n_1=r_1, \quad n_2=r_2, \quad S(n)=4\pi r^2;$$

$$N_{n_1}^n = \int_{r_1}^r \frac{dr}{4\pi r^2} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right),$$

$$N_{n_2}^n = \int_{r_2}^r \frac{dr}{4\pi r^2} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Подставляя эти параметры в обобщенные зависимости, имеем

$$\left. \begin{aligned} Q &= 4\pi\lambda (T_{S_1} - T_{S_2}) (1/r_1 - 1/r_2)^{-1}, \\ \Theta &= 1 - (1/r_1 - 1/r) (1/r_1 - 1/r_2)^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

Введем безразмерный радиус $R = r/r_1$, тогда

$$\Theta = 1 - (1 - 1/R) (1 - 1/K_R)^{-1}. \quad (2.18)$$

Рассмотрим те же задачи при условии, что теплопроводность зависит от температуры $\lambda = \lambda(T)$, а именно $\lambda = \lambda_0(1 + bT)$, т. е. имеет место линейная зависимость.

Уравнение (2.4), определяющее тепловой поток через стенку, примет вид

$$Q = -\lambda_0(1 + bT) \frac{dT}{dn} S(n). \quad (2.19)$$

Интегрируя (2.19) в пределах от T_{S_1} до T_{S_2} и от n_1 до n_2 , получим

$$\int_{n_1}^{n_2} \frac{dn}{S(n)} = -\frac{\lambda_0}{Q} \int_{T_{S_1}}^{T_{S_2}} (1 + bT) dT.$$

Вычислив интеграл справа, имеем

$$N_{n_1}^{n_2} = -\frac{\lambda_0}{Q} \left[T_{S_2} - T_{S_1} + \frac{b}{2} (T_{S_2}^2 - T_{S_1}^2) \right],$$

откуда

$$Q = \lambda_0 (T_{S_1} - T_{S_2}) [1 + b(T_{S_1} + T_{S_2})/2] / N_{n_1}^{n_2}.$$

Введем среднеинтегральное значение теплопроводности

$$\lambda_{cp} = \lambda_0 \left(1 + b \frac{T_{S_1} + T_{S_2}}{2} \right) = \frac{1}{T_{S_1} - T_{S_2}} \int_{T_{S_1}}^{T_{S_2}} \lambda(T) dT,$$

тогда тепловой поток Q на поверхности тела определим по формуле

$$Q = \frac{\lambda_{cp}}{N_{n_1}^{n_2}} (T_{S_1} - T_{S_2}). \quad (2.20)$$

Для того чтобы получить распределение температуры в стенке при заданном постоянном тепловом потоке Q на поверхности, необходимо проинтегрировать уравнение (2.19) от T_{S_1} до T и от n_1 до n :

$$QN_{n_1}^n = -\lambda_0 \left[T - T_{S_1} + \frac{b}{2} (T^2 - T_{S_1}^2) \right],$$

тогда

$$\frac{b}{2} T^2 + T + \left(\frac{QN_{n_1}^n}{\lambda_0} - \frac{b}{2} T_{S_1}^2 - T_{S_1} \right) = 0,$$

откуда

$$T_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 2b \left(\frac{h}{2} T_{S_1}^2 + T_{S_1} - Q N_{n_1}^n / \lambda_0 \right)}}{b}.$$

Физическому смыслу задачи удовлетворяет решение, где перед корнем необходимо взять знак плюс. В этом можно убедиться, подставив решение в граничные условия. Итак,

$$T = \sqrt{\frac{1}{b^2} + 2 \frac{1}{b} T_{S_1} + T_{S_1}^2 - \frac{2 Q N_{n_1}^n}{\lambda_0 b}} - \frac{1}{b};$$

или

$$T = \sqrt{\left(\frac{1}{b} + T_{S_1} \right)^2 - \frac{2 Q N_{n_1}^n}{\lambda_0 b}} - \frac{1}{b}. \quad (2.21)$$

Выражение (2.21) дает нам распределение температуры по толщине стенки для всех трех геометрических форм.

Рассмотрим конкретные геометрические формы стенки.

Плоская стенка. Вычислим параметры обобщенного решения:

$$N_{n_1}^n = x/S; \quad N_{n_1}^{n_2} = \delta/S.$$

Тогда тепловой поток на поверхности стенки определим по формуле

$$Q = \lambda_{\text{ср}} (T_{S_1} - T_{S_2}) S / \delta.$$

а распределение температуры — по формуле

$$T = \sqrt{\left(\frac{1}{b} + T_{S_1} \right)^2 - \frac{2 \lambda_{\text{ср}}}{\lambda_0 b} (T_{S_1} - T_{S_2}) \frac{x}{\delta}} - \frac{1}{b}. \quad (2.22)$$

Цилиндрическая стенка. Параметры обобщенного решения имеют вид

$$N_{n_1}^n = \frac{1}{2\pi l} \ln(r/r_1); \quad N_{n_1}^{n_2} = \frac{1}{2\pi l} \ln(r_2/r_1).$$

Тепловой поток, проходящий через цилиндрическую поверхность S ,

$$Q = \frac{\lambda_{\text{ср}}}{\frac{1}{2\pi l} \ln \frac{r_2}{r_1}} (T_{S_1} - T_{S_2}).$$

Выражение для температурного поля имеет вид

$$T = \sqrt{\left(\frac{1}{b} + T_{S_1} \right)^2 + 2 \frac{\lambda_{\text{ср}}}{\lambda_0 b} (T_{S_1} - T_{S_2}) \frac{\ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)}} - \frac{1}{b}. \quad (2.23)$$

Шаровая стенка. Приведенные координаты

$$N_{n_1}^n = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right); \quad N_{n_1}^{n_2} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Подставляя полученное значение N в уравнение (2.20), имеем

$$Q = [\lambda_{\text{ср}} (T_{S_1} - T_{S_2})] / \left[\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \right].$$

Из решения (2.21) получим распределение температуры в шаровой стенке

$$T = \sqrt{\left(\frac{1}{b} + T_{S_1}\right)^2 - \frac{2\lambda_{cp}}{b\lambda_0} (T_{S_1} - T_{S_2}) \frac{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} - \frac{1}{b}}. \quad (2.24)$$

Для расчета теплового потока и температуры в пластине, цилиндрической и сферической стенках при граничных условиях I рода для $\lambda = \text{const}$ и $\lambda = \lambda_0(1 + bT)$ составлена программа на алгоритмическом языке ФОРТРАН для ЭВМ ЕС-1022.

```

С      ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ПЕРВОГО РОДА
1      READ (1,1) N, K
      FORMAT (2I2)
      READ (1,111) TC1, TC2, D1, D2, R1, R2, BLO, B,
      *   DL1, H, F
111     FORMAT (3E20, 10)
      P1=3.14
      BL=BLO * (1+B * (TC1+TC2)/2)
      IF (N-2) 3, 4, 5
      M=DL/H+1
      IF (K-1) 7, 7, 8
      WRITE (3, 6)
6       FORMAT (T20, 'ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ПЛОСКОЙ
      *   СТЕНКИ С ПОСТОЯННОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬЮ')
      DO 9 I=1, M
      X=(I-1) * H
      T=TC1 - X/DL * (TC1 - TC2)
      WRITE (3, 10) X, T
10      FORMAT (T50, 2E20, 10)
9       CONTINUE
      Q=BLO/DL * (TC1 - TC2) * F
      WRITE (3, 11) Q
11      FORMAT (T50, 'ТЕПЛОВОЙ ПОТОК ПЛОСКОЙ
      *   СТЕНКИ
      Q='E20, 10)
      GOTO 10000
8       CONTINUE
      WRITE (3, 12)
12      FORMAT ('ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ПЛОСКОЙ
      *   СТЕНКИ С ПЕРЕМЕННОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬЮ')
      DO 13 I=1, M
      X=(I-1) * H
      T=SQRT ((1/B+TC1) * (1/B+TC1) - 2 * BL/BLO/B *
      *   (TC1 - TC2) * X/DL) - 1/B
      WRITE (3, 10) X, T
13      CONTINUE
      Q=BL/DL * (TC1 - TC2) * F

```

```

4      WRITE (3,11) Q
      GO TO 1000
      CONTINUE
      M=(D2 - D1)/H + 1
      IF (K - 1) 14, 14, 15
14     CONTINUE
      WRITE (3,16)
16     FORMAT (T20, 'ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ЦИЛИН-
      * ДРИЧЕСКОЙ СТЕНКИ С ПОСТОЯННОЙ ТЕПЛО-
      * ПРОВОДНОСТЬЮ')
      DO 17 I=1,M
      D=D1+(I - 1) * H
      T=TC1 - ALOG (D/D1)/ALOG (D2/D1) * (TC1 - TC2)
      WRITE (3, 10) D, T
17     CONTINUE
      Q=2 * PI * DL1 * BLO * (TC1 - TC2)/ALOG (D2/D1)
      WRITE (3,18) Q
18     FORMAT (T50, 'ТЕПЛОВОЙ ПОТОК ЦИЛИНДРИ-
      * ЧЕСКОЙ СТЕНКИ Q=', E20. 10)
      GO TO 1000
15     CONTINUE
      WRITE (3, 19)
19     FORMAT (T20, 'ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ЦИЛИН-
      * ДРИЧЕСКОЙ СТЕНКИ С ПЕРЕМЕННОЙ ТЕПЛОПРО-
      * ВОДНОСТЬЮ')
      DO 20 I=1,M
      D=(I - 1) * H + D1
      T=SQRT ((1/B + TC1) * (1/B + TC1) - 2 * BL/BLO/B *
      * (TC1 - TC2) * ALOG (D/D1)/ALOG (D2/D1)) - 1/B
      WRITE (3,10) D, T
20     CONTINUE
      WRITE (3,18) Q
      GO TO 1000
      CONTINUE
5      M=(R2 - R1) * H + 1
      IF (K - 1) 21, 21, 22
21     CONTINUE
      WRITE (3,23)
23     FORMAT ('ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ШАРОВОЙ
      * СТЕНКИ С ПОСТОЯННОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬЮ')
      DO 24 I=1,M
      R=R1+(I - 1) * H
      T=TC1 - (TC1 - TC2) * (1/R1 - 1/R)/(1/R1 - 1/R2)
      WRITE (3, 10) R, T
24     CONTINUE
      Q=4 * PI * BLO * (TC1 - TC2)/(1/R1 - 1/R2)
      WRITE (3,25) Q
25     FORMAT (T50, 'ТЕПЛОВОЙ ПОТОК ШАРОВОЙ
      * СТЕНКИ Q=', E20.10)

```

```

22 GO TO 1000
CONTINUE
WRITE (3,26)
26 FORMAT (T20, 'ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ШАРО-
* ВОЙ СТЕНКИ С ПЕРЕМЕННОЙ ТЕПЛОПРОВОДНО-
* СТЬЮ')
DO 21 I=1,M
R=R1+(I-1)*H
T=SQRT((1/B+TC1)*(1/B+TC1)-2*BL/B/BLO*
* (TC1-TC2)*(1/R1-1/R)/(1/R1-1/R2))-1/B
WRITE (3,10) R, T
27 CONTINUE
Q=4*PI*BL*(TC1-TC2)/(1/R1-1/R2)
WRITE (3,25) Q
1000 CONTINUE
STOP
END

```

Список идентификаторов. N — параметр формы; N может принимать значения 1, 2, 3, что соответствует плоской, цилиндрической и сферической симметрии задачи; K — параметр; если $\lambda = \text{const}$, то $K=1$; если $\lambda = \lambda_0(1+bT)$, то $K=2$; TC1 и TC2 — заданные температуры на поверхностях стенки; DL — толщина плоской стенки; D1, D2 — диаметры цилиндрической стенки; R1, R2 — радиусы шаровой стенки; BLO — $\lambda = \text{const}$ стенки; B — коэффициент b выражения $\lambda_0(1+bT)$; DL1 — длина цилиндрической стенки; F — площадь поверхности плоской стенки; BL — среднее значение $\lambda(T)$; H — шаг по пространственной координате; X, D, R — координаты в задачах с плоской, цилиндрической и сферической симметрией; T — температура; M — число, показывающее, на сколько частей разбит отрезок; Q — тепловой поток через стенку.

Результаты расчета поля температур с помощью программы, приведенной выше, показаны на рис. 2.1. Из рисунка видно, какое влияние на распределение температуры в плоской стенке оказывает изменение коэффициента b . Поля температур определялись при толщине стенки 0,25 м, $\lambda_0 = 0,72$ Вт/(м·К) и заданных температурах на граничных поверхностях $T_{S_1} = 1350^\circ\text{C}$, $T_{S_2} = 50^\circ\text{C}$.

Граничные условия III рода. Процесс передачи теплоты из одной подвижной среды (жидкости или газа) к другой через разделяющую их твердую стенку любой формы называют *теплопередачей*.

Рассмотрим теплопередачу через однородную стенку плоской, цилиндрической или сферической формы. Пусть заданы размеры, определяющие толщину стенок, температуры окружающей среды T_c и T_{c_1} , причем $T_{c_1} > T_c$, коэффициенты теплоотдачи α_1 и α_2 , теплопроводность стенки λ . Все перечисленные параметры считаем постоянными, неизменными вдоль поверхности, что позволяет рассматривать изменение температуры стенки только в направлении нормали к изотермическим поверхностям.

Тепловой поток от горячей среды к стенке определяется уравнением

$$Q = \alpha_1 S_1 (T_{c_1} - T_{s_1}). \quad (2.25)$$

Учитывая стационарность процесса теплопередачи, получим, что тот же тепловой поток передается теплопроводностью через твердую стенку

$$Q = \frac{\lambda}{N_{n_1}^{n_1}} (T_{S_1} - T_{S_2}). \quad (2.26)$$

[Выражение, аналогичное выражению (2.26), получено нами выше при рассмотрении граничных условий I рода].

Тепловой поток от стенки к менее нагретой среде остается таким же:

$$Q = \alpha_2 S_2 (T_{S_1} - T_{c_2}). \quad (2.27)$$

Уравнения (2.25)–(2.27) можно записать в виде системы двух уравнений

$$\left. \begin{aligned} \lambda (T_{S_1} - T_{S_2}) &= N_{n_1}^{n_1} \alpha_1 S_1 (T_{c_1} - T_{S_1}), \\ \lambda (T_{S_1} - T_{S_2}) &= N_{n_1}^{n_1} \alpha_2 S_2 (T_{S_1} - T_{c_2}). \end{aligned} \right\} \quad (2.28)$$

Система (2.28) относительно двух неизвестных T_{S_1} и T_{S_2} может быть легко решена, например, по правилу Крамера:

$$T_{S_i} = \left(\frac{\lambda}{N_{n_1}^{n_1}} \sum_{k=1}^2 \alpha_k S_k T_{c_k} + \alpha_1 \alpha_2 S_1 S_2 T_{c_1} \right) \times \\ \times \left(\frac{\lambda}{N_{n_1}^{n_1}} \sum_{k=1}^2 \alpha_k S_k + \alpha_1 \alpha_2 S_1 S_2 \right)^{-1} \quad (i=1, 2). \quad (2.29)$$

Подставляя значения температур поверхности (2.29) в уравнение распределения температур в стенке любой из изучаемых форм (2.8), получим

$$T = T_{c_1} + (T_{c_1} - T_{c_2}) \left(1 + \frac{\lambda}{\alpha_2 S_2 N_{n_1}^{n_1}} - \frac{N_{n_1}^{n_1}}{N_{n_1}^{n_1}} \right) \left(1 + \frac{\lambda}{\alpha_1 S_1 N_{n_1}^{n_1}} + \frac{\lambda}{\alpha_2 S_2 N_{n_1}^{n_1}} \right)^{-1}. \quad (2.30)$$

Значение теплового потока вычислим по формуле (2.26):

$$Q = \alpha_1 \alpha_2 S_1 S_2 (T_{c_1} - T_{c_2}) \left(\sum_{k=1}^2 \alpha_k S_k + \frac{N_{n_1}^{n_1}}{\lambda} \alpha_1 \alpha_2 S_1 S_2 \right)^{-1}. \quad (2.31)$$

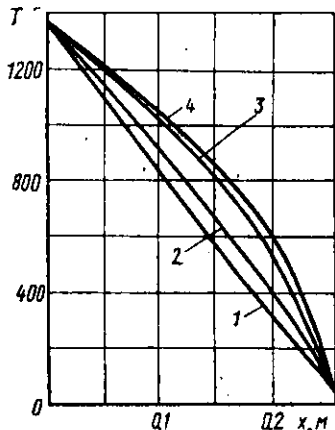


Рис. 2.1. Температурное поле пластины при граничных условиях I рода:

1 — $b = 1 \cdot 10^{-4}$ град $^{-1}$; 2 — $b = 8 \cdot 10^{-4}$ град $^{-1}$; 3 — $b = 0,01$ град $^{-1}$; 4 — $b = 9 \times 10^3$ град $^{-1}$

Подставляя в выражения (2.30) и (2.31) параметры обобщенного решения, получим характеристики процесса теплопередачи в стенках различных форм.

Плоская стенка.

$$T = T_{c_1} + (T_{c_1} - T_{c_2}) \left(1 + \frac{\lambda}{\alpha_2 \delta} - \frac{x}{\delta} \right) \left(1 + \frac{\lambda}{\alpha_1 \delta} + \frac{\lambda}{\alpha_2 \delta} \right)^{-1},$$

$$Q = (T_{c_1} - T_{c_2}) S \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{\delta}{\lambda} \right)^{-1}.$$

Величина $\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \right)^{-1} = K$ называется *коэффициентом теплопередачи*.

Коэффициент теплопередачи имеет ту же размерность, что и коэффициент теплоотдачи, характеризует интенсивность передачи теплоты от одной среды к другой через разделяющую их твердую стенку и численно равен плотности теплового потока на стенке, отнесенной к температурному напору между теплоносителями.

Величина $R = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}$, обратная коэффициенту теплопередачи K , называется *термическим сопротивлением теплопередачи*. Как видно из определения R , термическое сопротивление теплопередачи однородной стенки складывается из: $1/\alpha_1$ — термического сопротивления теплоотдачи от горячей среды к поверхности стенки; δ/λ — термического сопротивления теплопроводности стенки; $1/\alpha_2$ — термического сопротивления теплоотдачи от поверхности стенки к холодной среде.

Цилиндрическая стенка.

$$T = T_{c_1} + (T_{c_1} - T_{c_2}) \frac{\ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{\lambda}{\alpha_2 r_2}}{\ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{\lambda}{\alpha_1 r_1} + \frac{\lambda}{\alpha_2 r_2}},$$

$$Q = \pi l \frac{T_{c_1} - T_{c_2}}{\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1}}.$$

Можно определить плотность теплового потока, проходящего через единицу длины трубы, т. е. линейную плотность теплового потока:

$$\frac{Q}{l} = q_l = \pi \frac{T_{c_1} - T_{c_2}}{\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}}.$$

Величина $\left(\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2} \right)^{-1} = K_l$ называется *линейным коэффициентом теплопередачи*. Она характеризует интенсивность передачи теплоты от одной среды к другой через разделяющую их стенку. Величина K_l численно равна плотности теплового потока, который проходит через стенку трубы длиной 1 м в единицу времени от одной среды к другой при разности температур между ними в 1 К. Единицей коэффициента K_l является Вт/(м·К).

Величина $R_l = 1/K_l$, обратная линейному коэффициенту теплопередачи, называется *линейным термическим сопротивлением теплопередачи*:

$$R_l = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}.$$

Термическое сопротивление теплопередачи состоит из следующих компонентов: $\frac{1}{\alpha_1 d_1}$, $\frac{1}{\alpha_2 d_2}$ — термических сопротивлений теплоотдачи на соответствующих поверхностях; $\frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1}$ — термического сопротивления теплопроводности стенки.

В отличие от плоской стенки линейные термические сопротивления теплоотдачи для трубы определяются не только коэффициентами теплоотдачи α_1 и α_2 , но и соответствующими диаметрами.

Шаровая стенка.

$$T = T_{c_1} + (T_{c_1} - T_{c_2}) \left[1 + \frac{\lambda}{\alpha_2 r_2 (r_2/r_1 - 1)} - \frac{r_1^{-1} - r^{-1}}{r_1^{-1} - r_2^{-1}} \right] \times \\ \times \left[1 + \frac{\lambda}{\alpha_1 r_1 (1 - r_1/r_2)} + \frac{\lambda}{\alpha_2 r_2 (r_2/r_1 - 1)} \right]^{-1}, \\ Q = \frac{\pi (T_{c_1} - T_{c_2})}{\frac{1}{\alpha_1 d_1^2} + \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right) + \frac{1}{\alpha_2 d_2^2}}.$$

Обозначим

$$K_{ш} = \left[\frac{1}{\alpha_1 d_1^2} + \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right) + \frac{1}{\alpha_2 d_2^2} \right]^{-1},$$

тогда

$$Q = \pi K_{ш} (T_{c_1} - T_{c_2}).$$

Величина $K_{ш}$ называется *коэффициентом теплопередачи шаровой стенки*, единицей которого является Вт/К. Величина $R_{ш}$, обратная коэффициенту $K_{ш}$, называется *термическим сопротивлением теплопередачи шаровой стенки*.

При зависимости теплопроводности от температуры по линейному закону $\lambda = \lambda_0 (1 + bT)$ для расчета полей температуры в стенках применяется формула (2.21). Тепловой поток рассчитывается по формуле (2.20), причем в решениях (2.20), (2.21) значения температур поверхностей T_{S_i} , $i=1, 2$, и $\lambda_{ор}$ находятся из следующей системы уравнений:

$$\lambda_{ор} (T_{S_1} - T_{S_2}) = N_{\alpha_1}^* \alpha_1 S_1 (T_{c_1} - T_{S_1});$$

$$\lambda_{ор} (T_{S_1} - T_{S_2}) = N_{\alpha_2}^* \alpha_2 S_2 (T_{S_2} - T_{c_2});$$

$$\lambda_{ор} = \lambda_0 \left(1 + b \frac{T_{S_1} + T_{S_2}}{2} \right).$$

Для облегчения проведения расчетов тепловых потоков и температурных полей в стенках при граничных условиях III рода составлена программа на алгоритмическом языке ФОРТРАН-IV для ЭВМ ЕС-1022, позволяющая исследовать задачи как при $\lambda = \text{const}$, так и при $\lambda = \lambda_0 (1 + bT)$.

Список идентификаторов. TG1, TG2 — заданные температуры окружающей сред; AL1, AL2 — заданные значения коэффициентов теплоотдачи. Остальные идентификаторы имеют тот же смысл, что и в программе расчета характеристик теплопроводности стенок при граничных условиях I рода.

Текст программы приведен ниже.

```

C | ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ТРЕТЬЕГО РОДА
  | READ(1,1) N, K
1 | FORMAT(2I2)
  | READ(1,2) TG1, TG2, AL1, AL2, BLO, B, DL, D1, D2, R1,
  | * R2, F, DLI, H
2 | FORMAT(6F10.5)
  | PI=3.14
  | IF(N-2) 4, 5, 6
4 | CONTINUE
  | M=DL/H+1
  | IF(K-1) 41, 41, 42
41 | CONTINUE
  | WRITE(3,411)
411 | * FORMAT(T20, 'ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ПЛОСКОЙ
  | * СТЕНКИ С ПОСТОЯННОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬЮ')
  | DO 412 I=1, M
  | X=(I-1) * H
  | T=TG2+(TG1-TG2) * (1+BLO/AL2/DL-X/DL)/
  | * (1+BLO/AL1/DL+BLO/AL2/DL)
  | WRITE(3, 7) X, T
7 | FORMAT(T50, 2E20.10)
412 | CONTINUE
  | Q=(TG1-TG2) * F/(1/AL1+DL/BLO+1/AL2)
  | WRITE(3,413) Q
413 | * EORMAT(T50, 'ТЕПЛОВОЙ ПОТОК ПЛОСКОЙ СТЕНКИ
  | * Q='E20.10)
  | GOTO 1000
42 | CONTINUE
  | A1=(AL1 * AL2-BLO * (AL1/DL+AL2/DL)-B * BLO *
  | * (AL1/DL * TG1+AL2/DL * TG2))/(AL1/DL+AL2/DL)
  | A2=(BLO * AL1 * AL2+B * BLO/2 * AL1 * AL2 * (TG1+
  | * +TG2))/(AL1/DL+AL2/DL)
  | BL=-A1/2+SQRT(A1 * A1/4+A2)
  | TC1=(BL * AL1/DL * TG1+BL * AL2/DL * TG2+
  | * +AL1 * AL2 * TG1)/(BL/DL * (AL1+AL2)+AL1 * AL2)
  | TC2=(BL/DL * (AL1 * TG1+AL2 * TG2)+AL1 * AL2 *
  | * TG2)/(BL/DL * (AL1+AL2)+AL1 * AL2)
  | WRITE(3,421)
421 | * FORMAT(T20, 'ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ПЛОСКОЙ
  | * СТЕНКИ С ПЕРЕМЕННОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬЮ')
  | DO 422 I=1, M
  | X=(I-1) * H
  | T=SQRT((1/B+TC1) * (1/B+TC1)-2 * BL/BLO/B *
  | * (TC1-TC2) * X/DL)-1/B
  | WRITE(3,7) X, T
422 | CONTINUE
  | Q=BL/DL * (TC1-TC2) * F
  | WRITE(3,413) Q
  | GO TO 1000
5 | CONTINUE

```

```

M=(D2-D1)/H+1
IF (K-1) 51, 51, 52
51 CONTINUE
WRITE (3,511)
511 FORMAT (T2Ø, 'ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ЦИЛИНДРИ-
* ЧЕСКОЙ СТЕНКИ С ПОСТОЯННОЙ ТЕПЛОПРОВОД-
* НОСТЬЮ')
DO 512 I=1, M
D=D1+(I-1) * H
T=TG2+(TG1-TG2) * (ALOG(D2/D1)+2 * BLO/AL2/D2-
* -ALOG(D/D1))/(ALOG(D2/D1)+2 * BLO * (1/AL1/D1+
* +1/AL2/D2))
WRITE (3,7) D, T
512 CONTINUE
Q=PI * DLI * (TG1-TG2)/(1/AL1/D1+1/AL2/D2+
* +1/2/BLO * ALOG(D2/D1))
WRITE (3,513) Q
513 FORMAT (T5Ø, 'ТЕПЛОВОЙ ПОТОК ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ
* СТЕНКИ Q=, 'E2Ø.1Ø)
GO TO 1ØØØ
52 CONTINUE
A1=(AL1 * AL2 * D1 * D2/4-BLO * ((AL1 * D1+
* +AL2 * D2)/2/ALOG(D2/D1))-B * BLO/2/ALOG(D2/D1) *
* (AL1 * D1 * TG1+AL2 * D2 * TG2))/((AL1 * D1+
* +AL2 * D2)/2/ALOG(D2/D1))
A2=(BLO * AL1 * AL2 * D1 * D2/4+B * BLO/8 * AL1 *
* AL2 * D1 * D2 * (TG1+TG2))/(AL1 * D1+AL2 * D2) * 2 *
* ALOG(D2/D1)
BL=-A1/2+SQRT(A1 * A1/4+A2)
TC1=(BL/2/ALOG(D2/D1) * (AL1 * D1 * TG1+AL2 * D2 *
* TG2)+AL1 * AL2 * D1 * D2/4 * TG1)/(BL/2/ALOG(D2/
* D1) * (AL1 * D1+AL2 * D2)+AL1 * AL2 * D1 * D2/4)
TC2=(BL/2/ALOG(D2/D1) * (AL1 * D1 * TG1+AL2 * D2 *
* TG2)+AL1 * AL2 * D1 * D2/4 * TG2)/(BL/2/ALOG(D2/D1)
* (AL1 * D1+AL2 * D2)+AL1 * AL2 * D1 * D2/4)
WRITE (3,521)
521 FORMAT (T2Ø, 'ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ЦИЛИНДРИ-
* ЧЕСКОЙ СТЕНКИ С ПЕРЕМЕННОЙ ТЕПЛОПРОВОД-
* НОСТЬЮ')
DO 522 I=1, M
D=D1+(I-1) * H
T=SQRT((1/B+TC1) * (1/B+TC1)-2 * BL/BLO/B *
* (TC1-TC2) * ALOG(D/D1)/ALOG(D2/D1))-1/B
WRITE (3,7) D, T
522 CONTINUE
Q=2 * PI * DLI * BL * (TC1-TC2)/ALOG(D2/D1)
WRITE (3,513) Q
GO TO 1ØØØ
6 CONTINUE

```

```

M=(R2-R1)/H+1
IF (K-1) 61, 61, 62
61 CONTINUE
WRITE (3,611)
611 FORMAT (T2Ø, 'ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ШАРОВОЙ
* СТЕНКИ С ПОСТОЯННОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬЮ')
DO 612 I=1,M
R=R1+(I-1) * H
T=TG2+(TG1-TG2) * (1+BLO/AL2/R2+1/(R2/R1-1)-
* -(1/R1-1/R)/(1/R1-1/R2))/(1+BLO/AL2/R2/(R2/R1-1)+
* +BLO/AL1/R1/(1-R1/R2))
WRITE (3,7) R, T
612 CONTINUE
Q=PI * (TG1-TG2)/(1/AL1/D1+1/AL2/D2+
* +(1/D1-1/D2)/2/BLO)
WRITE (3,613) Q
613 FORMAT (T5Ø, 'ТЕПЛОВОЙ ПОТОК ШАРОВОЙ СТЕНКИ
* Q='E2Ø,1Ø)
GO TO 1ØØØ
62 CONTINUE
A1=(BLO * AL1 * AL2 * R1 * R2 * R1 * R2-BLO *
* (AL1 * R1 * R1+AL2 * R2 * R2))/(1/R1-1/R2)-B *
* BLO/(1/R1-1/R2) * (AL1 * R1 * R1 * TG1+AL2 *
* R2 * R2 * TG2))/(AL1 * R1 * R1+AL2 * R2 * R2) *
* (1/R1-1/R2)
A2=BLO * AL1 * AL2 * R1 * R1 * R2 * R2 * (1+B/2 *
* (TG1+TG2))/(AL1 * R1 * R1+AL2 * R2 * R2) * (1/R1-
* -1/R2)
BL=-A1/2+SQRT(A1 * A1/4+A2)
TC1=(BL/(1/R1-1/R2) * (AL1 * R1 * R1 * TG1+AL2 *
* R2 * R2 * TG2)+AL1 * AL2 * R1 * R1 * R2 * R2 * TG1)/
* (BL/(1/R1-1/R2) * (AL1 * R1 * R1+AL2 * R2 * R2)+
* +AL1 * AL2 * R1 * R1 * R2 * R2)
TC2=(BL/(1/R1-1/R2) * (AL1 * R1 * R1 * TG1+
* +AL2 * R2 * R2 * TG2)+AL1 * AL2 * R1 * R1 * R2 *
* R2 * TG2)/(BL/(1/R1-1/R2) * (AL1 * R1 * R1 * AL2 *
* R2 * R2)+AL1 * AL2 * R1 * R1 * R2 * R2)
WRITE (3,621)
621 FORMAT (T2Ø, 'ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ШАРОВОЙ
* СТЕНКИ С ПЕРЕМЕННОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬЮ')
DO 622 I=1, M
R=R1+(I-1) * H
T=SQRT((1/B+TC1) * (1/B+TC1)-2/B/BLO * BL *
* (TC1-TC2) * (1/R1-1/R)/(1/R1-1/R2))-1/B
Q=4 * PI * BL * (TC1-TC2)/(1/R1-1/R2)
WRITE (3,613) Q
1ØØØ CONTINUE
STOP
END

```

С помощью этой программы просчитаны некоторые задачи стационарной теплопроводности. Так, на рис. 2.2 показано влияние изменения коэффициента теплоотдачи α_1 на распределение температуры в плоской стенке при $T_{c_1} = 700^\circ \text{C}$; $T_{c_2} = 30^\circ \text{C}$; $\delta = 0,25 \text{ м}$; $\lambda = 1 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$; $\alpha_2 = 10 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$.

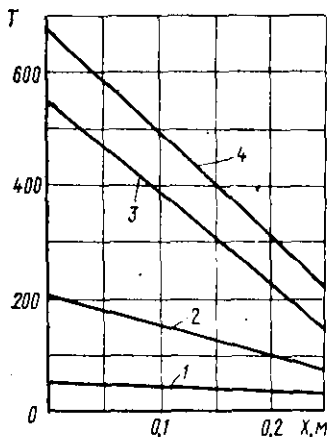


Рис. 2.2. Изменение поля температур пластины в зависимости от значений коэффициента теплоотдачи α_1 , $\text{Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$:

1 — $\alpha_1 = 0$; 2 — $\alpha_1 = 1$; 3 — $\alpha_1 = 10$; 4 — $\alpha_1 = 100$

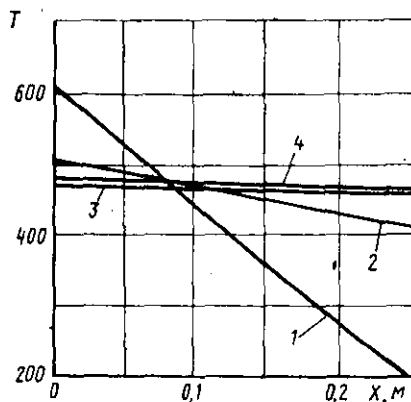


Рис. 2.3. Влияние теплопроводности материала на распределение температуры в пластине (граничные условия III рода):

1 — $\lambda = 1 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$; 2 — $\lambda = 10 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$; 3 — $\lambda = 10^2 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$; 4 — $\lambda = 10^3 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$

По данным рис. 2.3 можно проанализировать влияние изменения теплопроводности на температурное поле плоской стенки ($T_{c_1} = 700^\circ \text{C}$; $T_{c_2} = 30^\circ \text{C}$; $\alpha_1 = 20 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$; $\alpha_2 = 10 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$; $\delta = 0,25 \text{ м}$).

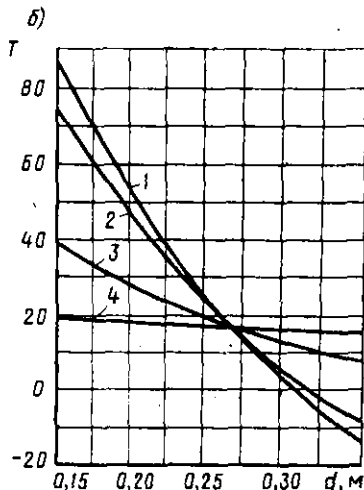
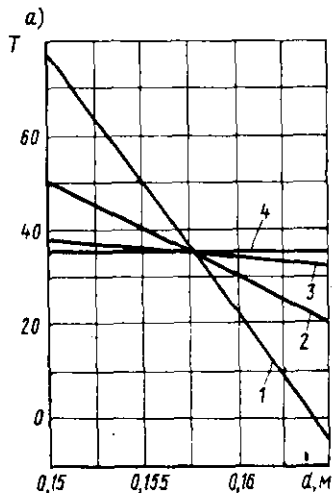


Рис. 2.4. Распределение температуры в цилиндрической стенке при различных значениях теплопроводности (граничные условия III рода):
а — $d_1 = 0,15 \text{ м}$, $d_2 = 0,165 \text{ м}$; б — $d_1 = 0,15 \text{ м}$, $d_2 = 0,35 \text{ м}$; 1 — $\lambda = 1 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$; 2 — $\lambda = 10 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$; 3 — $\lambda = 10^2 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$; 4 — $\lambda = 10^3 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$

Для цилиндрических стенок различной толщины на рис. 2.4 показано распределение температуры при различных значениях теплопроводности. Полагали при расчетах $T_{c_1} = 90^\circ \text{C}$; $T_{c_2} = -15^\circ \text{C}$; $\alpha_1 = \alpha_2 = 1000 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$.

§ 2.2. Теплопроводность многослойных плоских, цилиндрических и шаровых стенок

Пусть многослойное тело состоит из n однородных слоев. Предполагаем, что между слоями имеет место идеальный тепловой контакт и температура соприкасающихся поверхностей двух слоев одинакова. Полагаем также, что температура в рассматриваемых телах будет изменяться только вдоль одной пространственной координаты n — нормали к изотермическим поверхностям. Если теплопроводность λ_i ($i=1, 2, \dots, n$) слоев постоянна, то тепловой поток, проходящий через любую изотермическую поверхность, будет одним и тем же, т. е.

$$\partial Q / \partial n = 0. \quad (2.32)$$

Граничные условия 1 рода. Если заданы температуры внешних поверхностей тела T_{S_1} и $T_{S_{n+1}}$, размеры слоев и значения теплопроводностей λ_i , то с учетом соотношений (2.5) и (2.32) можно записать систему алгебраических уравнений для определения температур поверхностей соприкосновения слоев:

$$\left. \begin{aligned} Q &= \lambda_1 (T_{S_1} - T_{S_2}) \left/ \int_{n_1}^{n_2} dn / S(n); \right. \\ Q &= \lambda_2 (T_{S_2} - T_{S_3}) \left/ \int_{n_2}^{n_3} dn / S(n); \right. \\ &\dots \dots \dots \\ Q &= \lambda_n (T_{S_n} - T_{S_{n+1}}) \left/ \int_{n_n}^{n_{n+1}} dn / S(n). \right. \end{aligned} \right\} \quad (2.33)$$

Обозначим $F_i = \int_{n_i}^{n_{i+1}} dn / S(n)$, тогда, решая систему (2.33), имеем

выражения для:

температуры на границе любых двух слоев

$$\left. \begin{aligned} T_{S_2} &= T_{S_1} - Q F_1 / \lambda_1; \\ T_{S_3} &= T_{S_1} - Q (F_1 / \lambda_1 + F_2 / \lambda_2); \\ &\dots \dots \dots \\ T_{S_{i+1}} &= T_{S_1} - Q \sum_{k=1}^i F_k / \lambda_k; \end{aligned} \right\} \quad (2.34)$$

теплового потока

$$Q = (T_{S_1} - T_{S_{n+1}}) / \sum_{i=1}^n (F_i / \lambda_i). \quad (2.35)$$

Величина $S \sum_{i=1}^n (F_i/\lambda_i)$ равна сумме термических сопротивлений всех n слоев тела и называется *полным термическим сопротивлением многослойного тела*.

Если сравнивать перенос теплоты через стенку из однородного материала и многослойную стенку из разнородных материалов, то в рассмотрение удобно ввести эквивалентную теплопроводность многослойной стенки

$$\lambda_{\text{экв}} = \sum_{i=1}^n F_i / \sum_{i=1}^n (F_i/\lambda_i). \quad (2.36)$$

Из уравнения (2.36) следует, что коэффициент $\lambda_{\text{экв}}$ зависит от числа слоев, теплофизических свойств и толщины слоев, а также и от геометрической формы стенки.

Рассмотрим частные случаи полученных решений.

Плоская стенка. Используя выражение (2.36) и решения (2.34), (2.35), получим расчетные формулы:

$$T_{S_{i+1}} = T_{S_1} - Q \sum_{k=1}^i (\delta_k/\lambda_k);$$

$$Q = (T_{S_1} - T_{S_{n+1}}) / \sum_{i=1}^n (\delta_i/\lambda_i);$$

$$\lambda_{\text{экв}} = \sum_{i=1}^n \delta_i / \sum_{i=1}^n (\delta_i/\lambda_i).$$

Цилиндрическая стенка. Вычислим F_i и, используя решения (2.34), (2.35), (2.36), получим, что температура $T_{S_{i+1}}$ для любого слоя определяется так:

$$T_{S_{i+1}} = T_{S_1} - \frac{q_l}{\pi} \left(\sum_{k=1}^i \frac{1}{2\lambda_k} \ln \frac{d_{k+1}}{d_k} \right);$$

линейную плотность теплового потока $q_l = Q/l$ (l — длина поверхности трубы) определим по формуле

$$q_l = \frac{2\pi (T_{S_1} - T_{S_{n+1}})}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i}}$$

и эквивалентную теплопроводность — по формуле

$$\lambda_{\text{экв}} = \frac{\ln (d_{n+1}/d_1)}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k} \ln \frac{d_{k+1}}{d_k}}.$$

Шаровая стенка. Из полученных обобщенных решений (2.34) — (2.36) имеем формулы для расчета следующих характеристик:
тепловой поток

$$Q = \frac{2\pi (T_{S_1} - T_{S_{n+1}})}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{2\lambda_i} \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_{i+1}} \right)},$$

температура на границе двух соприкасающихся слоев

$$T_{S_{(i+1)}} = T_{S_1} - \frac{Q}{2\pi} \sum_{k=1}^i \frac{1}{2\lambda_k} \left(\frac{1}{r_k} - \frac{1}{r_{k+1}} \right),$$

эквивалентная теплопроводность

$$\lambda_{\text{ЭКВ}} = \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_{n+1}} \right) / \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k} \left(\frac{1}{r_k} - \frac{1}{r_{k+1}} \right) \right).$$

Граничные условия III рода. При теплопередаче через многослойную стенку система уравнений (2.25) — (2.27) заменяется системой алгебраических уравнений, учитывающей сопротивление теплопроводности всех слоев:

$$\left. \begin{aligned} T_{\alpha_1} - T_{S_1} &= \frac{Q}{\alpha_1 S_1}; \\ T_{S_1} - T_{S_2} &= \frac{Q}{\lambda_1} F_1; \\ T_{S_2} - T_{S_3} &= \frac{Q}{\lambda_2} F_2; \\ &\dots\dots\dots \\ T_{S_n} - T_{S_{n+1}} &= \frac{Q}{\lambda_n} F_n; \\ T_{S_{(n+1)}} - T_{\alpha_2} &= \frac{Q}{\alpha_2 S_{n+1}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.37)$$

Решая систему уравнений (2.37), получим

$$Q = (T_{\alpha_1} - T_{\alpha_2}) / \left(\frac{1}{\alpha_1 S_1} + \sum_{i=1}^n \frac{F_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2 S_{n+1}} \right). \quad (2.38)$$

Температура на поверхности и границах слоев будет определяться выражениями

$$\begin{aligned} T_{S_1} &= T_{c_1} - Q/(\alpha_1 S_1); \\ T_{S_1} &= T_{c_1} - Q \left/ \left(\frac{1}{\alpha_1 S_1} + \frac{F_1}{\lambda_1} \right) \right.; \\ &\dots \dots \dots \\ T_{S_{(i+1)}} &= T_{c_1} - Q \left/ \left(\frac{1}{\alpha_1 S_1} + \sum_{k=1}^i \frac{F_k}{\lambda_k} \right) \right.; \\ &\dots \dots \dots \\ T_{S_{(n+1)}} &= T_{c_2} + Q/(\alpha_2 S'_{n+1}). \end{aligned}$$

Проанализируем полученные решения для стенок различной геометрии.

Плоская стенка. Из формулы (2.38) получим выражение для плотности теплового потока через n -слойную стенку:

$$q = \frac{T_{c_1} - T_{c_2}}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}} = K(T_{c_1} - T_{c_2}),$$

где $K = \left(\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2} \right)$ — полный коэффициент теплопередачи через много-

слойную плоскую стенку.

Температура на границе любых двух слоев i и $i+1$ определяется по формуле

$$T_{S_{(i+1)}} = T_{c_1} - q \left(\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{k=1}^i \frac{\delta_k}{\lambda_k} \right).$$

Цилиндрическая стенка. Вычисляя F_i из решений (2.37), (2.38) имеем расчетные формулы для потока теплоты, проходящего через единицу длины цилиндрической стенки:

$$q_l = Q/l = \pi K_l (T_{c_1} - T_{c_2}),$$

где

$$K_l^{-1} = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} + \frac{1}{\alpha_2 d_{n+1}} \text{ — полное термическое сопротивление}$$

многослойной цилиндрической стенки.

Для температуры на поверхностях соприкосновения слоев получим формулу

$$T_{S_{(i+1)}} = T_{c_1} - \frac{q_l}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \sum_{k=1}^i \frac{1}{2\lambda_k} \ln \frac{d_{k+1}}{d_k} \right).$$

Шаровая стенка. Тепловой поток через произвольную изотермическую шаровую поверхность определится по формуле

$$Q = \frac{\pi (T_{c1} - T_{c2})}{\frac{1}{\alpha_1 d_1^2} + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \frac{1}{\lambda_l} \left(\frac{1}{d_l} - \frac{1}{d_{l+1}} \right) + \frac{1}{\alpha_2 d_{n+1}^2}} = K_{ш} \pi (T_{c1} - T_{c2}), \quad (2.39)$$

где $K_{ш}^{-1} = \frac{1}{\alpha_1 d_1^2} + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \frac{1}{\lambda_l} \left(\frac{1}{d_l} - \frac{1}{d_{l+1}} \right) + \frac{1}{\alpha_2 d_{n+1}^2}$.

Температуру на поверхности контакта l -го и $(l+1)$ -го слоев можно рассчитать так:

$$T_{S(l+1)} = T_{c1} - \frac{Q}{\pi} \left[\frac{1}{\alpha_1 d_1^2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^l \frac{1}{\lambda_k} \left(\frac{1}{d_k} - \frac{1}{d_{k+1}} \right) \right]. \quad (2.40)$$

Для расчета тепловых потоков и температур контакта слоев многослойных стенок составлена программа на алгоритмическом языке ФОРТРАН-IV для ЭЦВМ ЕС-1022. Текст программы приводится ниже.

```

С
41  ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ МНОГОСЛОЙНОЙ СТЕНКИ
    *   FORMAT (T5Ø, 'ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ПЕРВОГО
43  *   РОДА')
    *   FORMAT (T5Ø, 'ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ТРЕТЬЕГО
44  *   РОДА')
    *   FORMAT (T5Ø, 'ТЕМПЕРАТУРЫ НА ГРАНИЦАХ
45  *   СЛОЕВ')
46  *   FORMAT (T5Ø, 'ТС (', I2,')=' , E2Ø. 1Ø)
    *   FORMAT (T5Ø, 'ТЕПЛОВОЙ ПОТОК Q=' , E2Ø. 1Ø)
    *   DIMENSION TC(1ØØ), BLO(1ØØ), D(1ØØ),
    *   DL(1ØØ)
42  *   READ (1, 42) N
    *   FORMAT (12)
    *   K=N+1
    *   PI=3.14
    *   READ (1, 47) N1, K1, TG1, TG2, AL1, AL2
47  *   FORMAT (2I2/6F1Ø.5)
    *   READ (1, 48) (DL(I), I=1, N), (BLO(I), I=1, N),
    *   (D(I), I=1, K)
48  *   FORMAT (6F1Ø.5)
    *   IF (N1-2) 1, 2, 3
1   *   CONTINUE
    *   WRITE (3, 1Ø)
1Ø  *   FORMAT (T5Ø, 'ПЛОСКАЯ СТЕНКА')
    *   A=Ø
    *   DO 12 I=1, N

```

12	A=A+DL(I)/BLO(I)
	CONTINUE
	IF(KI - 1) 11, 11, 13
11	CONTINUE
	WRITE (3, 41)
	Q=(TG1 - TG2)/A
	WRITE (3, 46) Q
	WRITE (3, 44)
	TC(1)=TG1
	K=1
	WRITE (3, 45) K, TC(K)
	DO 111 I=1, N
	T1=Ø
	DO 112 K=1, I
	T1=T1+DL(K)/BLO(K)
112	CONTINUE
	TC(I+1)=TC(1) - Q * T1
	K=I+1
	WRITE (3, 45) K, TC(K)
111	CONTINUE
	GO TO 1ØØØ
13	CONTINUE 1
	WRITE (3, 43)
	Q=(TG1 - TG2)/(1/AL1+A+1/AL2)
	WRITE (3, 46) Q
	WRITE (3, 44)
	TC(1)=TG1 - Q/AL1
	K=1
	WRITE (3, 45) K, TC(K)
	DO 131 I=1, N
	T1=Ø
	DO 132 K=1, I
	T1=T1+DL(K)/BLO(K)
132	CONTINUE
	TC(I+1)=TG1 - Q * (1/AL1+A)
	K=I+1
	WRITE (3, 45) K, TC(K)
131	CONTINUE
	GO TO 1ØØØ
2	CONTINUE
	WRITE (3, 2Ø)
2Ø	FORMAT (T5Ø, 'ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ СТЕНКА')
	A=Ø
	DO 22 I=1, N
	A=A+A LOG(D(I+1)/D(I))/2/BLO(I)
22	CONTINUE
	IF(KI - 1) 21, 21, 23
21	CONTINUE
	WRITE (3, 41)

	Q=PI * (TG1 - TG2)/A
	WRITE (3, 46) Q
	WRITE (3, 44)
	TC (1)=TG1
	K=1
	WRITE (3, 45) K, TC (K)
	DO 211 I=1, N
	T1=Ø
	DO 212 K=1, 1
	T1=T1+ALOG (D (K+1)/D (K))/2/BLO (K)
212	CONTINUE
	TC (I+1)=TC (I) - Q/PI * T1
	K=I+1
	WRITE (3, 45) K, TC (K)
211	CONTINUE
	GO TO 1ØØØ
23	CONTINUE
	WRITE (3, 43)
	Q=PI * (TG1 - TG2)/(1/AL1/D (1)+A+1/AL2/D (N+1))
	WRITE (3, 46) Q
	WRITE (3, 44)
	TC (1)=TG1 - Q/PI/AL1/D (1)
	K=1
	WRITE (3, 45) K, TC (K)
	DO 231 I=1, N
	T1= Ø
	DO 232 K=1, 1
	T1=T1+ALOG (D (K+1)/D (K))/2/BLO (K)
232	CONTINUE
	TC (I+1)=TG1 - Q/PI * (1/AL1/D (1)+T1)
	K=I+1
	WRITE (3, 45) K, TC (K)
231	CONTINUE
	GO TO 1ØØØ
3	CONTINUE
	WRITE (3, 3Ø)
3Ø	FORMAT (T5Ø, 'ШАРОВАЯ СТЕНКА')
	A=Ø
	DO 32 I=1, N
	A=A+(1/D (1) - 1/D (I+1))/2/BLO (I)
32	CONTINUE
	IF (K1 - 1) 31, 31, 33
31	CONTINUE
	WRITE (3, 41)
	Q=(TG1 - TG2) * PI/A
	WRITE (3, 46) Q
	WRITE (3, 44)
	TC (1)=TG1
	K=1

	WRITE (3, 45) K, TC(K)
	DO 311 I=1, N
	T1=Ø
	DO 312 K=1, 1
312	T1=T1+(1/D(K) - 1/D(K+1))/2/BLO(K)
	CONTINUE
	TC(I+1)=TG1 - Q/PI * T1
	K=I+1
311	WRITE (3, 45) K, TC(K)
	CONTINUE
	GO TO 1ØØØ
33	CONTINUE
	WRITE (3, 43)
	Q = PI * (TG1 - TG2)/(1/AL1/D(1)/D(1) + A + 1/AL2/
*	D(N+1)/D(N+1))
	WRITE (3, 46) Q
	WRITE (3, 44)
	TC(1)=TG1 - Q/PI/AL1/D(1)/D(1)
	K=1
	WRITE (3,45) K, TC(K)
	DO 331 I=1, N
	T1=Ø
	DO 332 K=1, 1
332	T1=T1+(1/D(K) - 1/D(K+1))/2/BLO(K)
	CONTINUE
	TC(I+1)=TG1 - Q/PI * (1/AL1/D(1)/D(1)+T1)
	K=I+1
	WRITE (3, 45) K, TC(K)
331	CONTINUE
	GO TO 1ØØØ
1ØØØ	CONTINUE
	STOP
	END

Список идентификаторов. N—число слоев в стенке; N1—параметр, равный 1, 2, 3 при плоской, цилиндрической и сферической симметрии соответственно; K1—параметр, задающий вид граничных условий, K1 принимает значения 1 и 2 при условиях I и III родов соответственно; TC—массив значений вычисленных температур на границах слоев; BLO—массив значений коэффициентов теплопроводности для слоев; D—массив диаметров слоев в цилиндрической и сферической стенках; DL—массив толщин слоев плоской стенки; AL1 и AL2—значения коэффициентов теплоотдачи α_1 и α_2 при граничных условиях III рода; TG1, TG2—заданные температуры на поверхностях 1-го и N-го слоев при граничных условиях I рода; заданные температуры окружающих сред при граничных условиях III рода; Q—тепловой поток через стенку; A, T1, K, I—рабочие переменные

Программа позволяет решать краевые задачи для многослойных стенок (плоских, цилиндрических, шаровых) при граничных условиях I или III рода.

На рис. 2.5 и 2.6 приведены результаты расчетов температурных полей 5-слойных стенок различной геометрии при одних и тех же условиях ($T_{s_1} = 250^\circ\text{C}$; $T_{s_2} = 50^\circ\text{C}$).

§ 2.3. Теплопроводность однородных тел простейшей геометрической формы при действии внутренних источников теплоты

Пусть в объеме твердой стенки простейшей формы, толщина которой есть малая величина по сравнению с другими размерами,

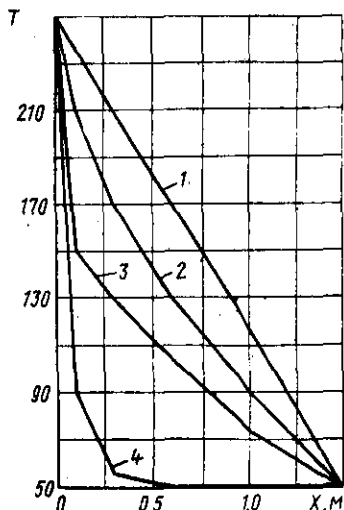


Рис. 2.5. Температурное поле пятислойной плоской стенки при граничных условиях 1 рода:

$\delta_1 = 0,1$ м, $\delta_2 = 0,2$ м, $\delta_3 = 0,3$ м, $\delta_4 = 0,4$ м, $\delta_5 = 0,5$ м; $1 - \lambda_1 = 1$ Вт/(м·К), $2 - \lambda_2 = 5$ Вт/(м·К), $3 - \lambda_3 = 10$ Вт/(м·К), $4 - \lambda_4 = 50$ Вт/(м·К), $\lambda_5 = 50$ Вт/(м·К), $\lambda_6 = 80$ Вт/(м·К), $\lambda_7 = 70$ Вт/(м·К), $\lambda_8 = 100$ Вт/(м·К); $q_v = 1$ Вт/(м·К), $\lambda_9 = 10$ Вт/(м·К), $\lambda_{10} = 10^2$ Вт/(м·К), $\lambda_{11} = \lambda_{12} = 10^3$ Вт/(м·К).

произвольно распределены источники теплоты с объемной плотностью теплового потока q_v , Вт/м³. На поверхностях стенки заданы постоянные коэффициенты теплоотдачи, известны также постоянные температуры T_{c_1} и T_{c_2} подвижных сред, омывающих стенку. Будем считать, что температура стенки изменяется только вдоль одной пространственной координаты (x — плоская стенка, r — цилиндрическая и шаровая стенки) и теплопроводность материала постоянна. Тогда дифференциальное уравнение теплопроводности имеет вид

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{v}{x} \frac{dT}{dx} + \frac{q_v(x)}{\lambda} = 0, \quad x_1 < x < x_2, \quad (2.41)$$

где v — коэффициент формы тела; $v = 0, 1, 2$ для плоской, цилиндрической, шаровой стенок соответственно.

Граничные условия

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=x_1} = -\frac{\alpha_1}{\lambda} (T_{c_1} - T_{s_1}); \quad (2.42)$$

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=x_2} = -\frac{\alpha_2}{\lambda} (T_{s_2} - T_{c_2}).$$

Получим общее решение неоднородного уравнения (2.41). Введем подстановку $u = dT/dx$ и из уравнения (2.41) получим

$$du/dx + vu/x = -q_v(x)/\lambda.$$

Решая последнее уравнение, имеем

$$u(x) = C_1 \left(\frac{x_1}{x} \right)^v - \frac{1}{\lambda x^v} \int_{x_1}^x q_v(t) t^v dt. \quad (2.43)$$

Интегрируя по x уравнение (2.43), приходим к общему решению уравнения (2.41): при $\nu \neq 1$

$$T(x) = C_1 x_1^{\frac{1}{\nu-1}} \left(\frac{1}{x_1^{\frac{\nu}{\nu-1}} - 1} - \frac{1}{x^{\frac{\nu}{\nu-1}} - 1} \right) - \frac{1}{\lambda} \int_{x_1}^x \left(\frac{1}{z^{\frac{\nu}{\nu-1}}} \int_{x_1}^z q_{\nu}(x) x^{\nu} dx \right) \times \\ \times dz + C_2, \quad (2.44)$$

при $\nu=1$ (цилиндрическая симметрия)

$$T(x) = C_1 x_1 \ln \frac{x}{x_1} - \frac{1}{\lambda} \int_{x_1}^x \left(\frac{1}{z} \int_{x_1}^z q_{\nu}(x) x dx \right) dz + C_2.$$

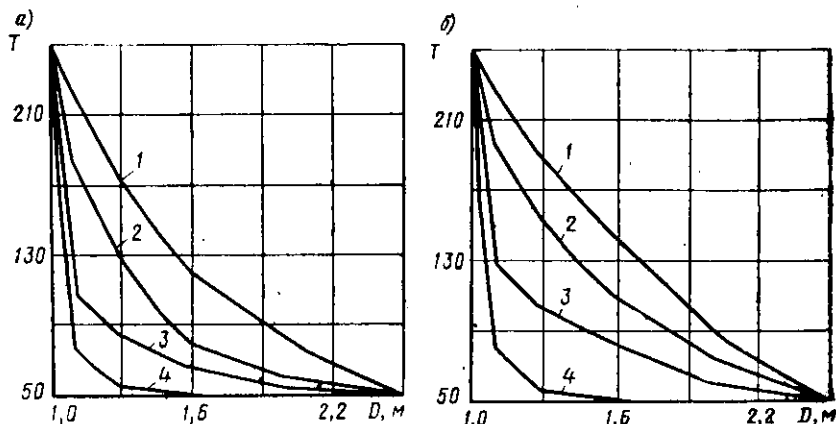


Рис. 2.6. Распределение температуры в пятислойной шаровой (а) и цилиндрической (б) стенках при граничных условиях I рода:

$d_1 = 1$ м, $d_2 = 1,1$ м, $d_3 = 1,3$ м, $d_4 = 1,6$ м, $d_5 = 2$ м, $d_6 = 2,5$ м; 1—4 — те же, что и на рис. 2.5

Определим постоянные C_1 и C_2 , удовлетворяя граничным условиям (2.42): при $\nu \neq 1$

$$C_1 = \frac{\alpha_1}{\lambda} (C_2 - T_{c1});$$

$$C_2 = \frac{\alpha_2 T_{c2} + W(x_2) + (\alpha_2/\lambda) \int_{x_1}^{x_2} W(z) dz + F(\nu) T_{c1}}{\alpha_2 + F(\nu)},$$

где

$$F(\nu) = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\lambda} \frac{x_1}{\nu-1} (x_1^{1-\nu} - x_2^{1-\nu}) + \alpha_1 \left(\frac{x_1}{x_2} \right)^{\nu};$$

$$W(z) = \frac{1}{z^{\nu}} \int_{x_1}^z q_{\nu}(x) x^{\nu} dx;$$

при $\nu=1$

$$C_1 = (\alpha_1/\lambda) (C_2 - T_{c_1});$$

$$C_2 = \left[\alpha_2 T_{c_2} + W(x_2) + (\alpha_2/\lambda) \int_{x_1}^{x_2} W(z) dz + F T_{c_1} \right] / (\alpha_2 + F),$$

где

$$F = \alpha_1 \frac{x_1}{x_2} + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\lambda} x_1 \ln \frac{x_2}{x_1};$$

$$W(z) = \frac{1}{z} \int_{x_1}^z q_v(x) x dx.$$

Из полученных решений можно получить расчетные зависимости для различных частных случаев процессов теплопередачи. Так, при $\alpha_1 \rightarrow \infty$ на соответствующей поверхности получаем решение, соответствующее граничным условиям I рода.

Рассмотрим несколько примеров.

Теплопроводность плоской стенки. Пусть $q_v(x) = q_v = \text{const}$; $x_1 = 0$, $x_2 = \delta$; $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \alpha$; $\nu = 0$; $T_{c_1} = T_c$.

Тогда $C_1 = 0$; $F(\nu) = 0$; $W(z) = q_v z$;

$$C_2 = T_c + q_v \delta / \alpha + q_v \delta^2 / (2\lambda);$$

распределение температуры

$$T(x) = T_c + q_v \delta / \alpha + q_v (\delta^2 - x^2) / (2\lambda).$$

Теплопроводность цилиндрической стенки. Рассмотрим задачу стационарной теплопроводности цилиндрической стенки при $q_v = \text{const}$, когда теплота отводится только через поверхность $x = x_1$ или в других обозначениях $r = r_1$. Тогда, полагая $\alpha_2 = 0$, $\alpha_1 = \alpha$, $\nu = 1$, получим

$$C_1 = (\alpha_1/\lambda) (C_2 - T_{c_1}),$$

$$C_2 = T_{c_1} + W(r_2)/F,$$

где

$$F = \alpha r_1 / r_2, \quad W(r_2) = (q_v / r_2) [(r_2^2 - r_1^2) / 2].$$

Окончательно распределение температуры

$$T(r) = T_{c_1} + \frac{q_v r_1}{2\alpha} \left[\left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 - 1 \right] + \frac{q_v r_1^2}{4\lambda} \left[2 \ln \frac{r}{r_1} + \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 - \left(\frac{r}{r_2} \right)^2 \right].$$

Теплопроводность шаровой стенки. Пусть шаровая оболочка теплоизолирована внутри при $x = x_1$ и отдает теплоту только через внешнюю поверхность при $q_v = \text{const}$. Тогда положим $x_1 = r_1$, $x_2 = r_2$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \alpha$, $\nu = 2$, $T_{c_1} = T_c$.

Вычислим значения коэффициентов, входящих в решение:

$$C_1 = 0, \quad F(\nu) = 0, \quad W(z) = (z^3 - r_1^3) / (3z^2),$$

и распределение температуры в шаровой стенке:

$$T(r) = T_{c_1} + \frac{r_2}{3\alpha_2} \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^3 \right] q_v + \frac{q_v}{6\lambda} (r^2 - r_2^2) + \frac{q_v r_1^3}{3\lambda} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Расчеты процесса теплообмена при наличии источника с произвольной объемной плотностью теплового потока можно выполнить с помощью программы, составленной на алгоритмическом языке ФОРТРАН-IV для ЭВМ типа ЕС.

```

COMMON BLO, BK, B, R1, R2, TG1, TG2, DL, AL1,
* AL2, H, BI
COMMON/A/X
EXTERNAL F1, F2, F3, F5, F6, F7, QV
READ(1, 44)N
44 FORMAT (I2)
READ(1, 48)TG1, TG2, DL, R1, R2, AL1, AL2, BLO, H
48 FORMAT (6F10.5)
BI=AL1/BLO
B=0.5
BK=0.5
WRITE(3, 46)N, TG1, TG2, DL, R1, R2, AL1, AL2,
* BLO, H
46 FORMAT(T50, 'N=', I2/T50, 'TG1=', E20.10,
* TG2=', E20.10/T50, 'DL=', E20.10/T50, 'R1=',
* E20.10, 'R2=', E20.10, 'AL1=', E20.10, 'AL2=',
* E20.10/T50, 'BLO=', E20.10, 'H=', E20.10)
4 FORMAT(T50, 'ПЛОСКАЯ СТЕНКА')
41 FORMAT(T50, 'ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ СТЕНКА')
42 FORMAT(T50, 'ШАРОВАЯ СТЕНКА')
43 FORMAT(20X, 'КООРДИНАТА', 20X, 'ТЕМПЕРА-
* ТУРА', 'ТЕПЛОВОЙ ПОТОК')
45 FORMAT(20X, E20.10, 20X, E20.10, 20X,
* E20.10)
IF(N-2) 1, 2, 3
1 CONTINUE
WRITE(3, 4)
CALL QG10(0, DL, F5, T1)
CALL QG10(0, DL, QV, T2)
C2=(AL2 * T1/BLO/BLO+T2/BLO+AL1 * TG1/BLO+
* +AL2 * TG2/BLO+AL1 * AL2 *
* * DL * TG1/BLO/BLO)/(AL1/BLO+AL2/BLO+AL1 *
* * AL2 * DL/BLO/BLO)
C1=AL1 * (C2-TG1)/BLO
M=DL/H+1
WRITE(3, 43)
DO 11 I=1, M
X=(I-1) * H
CALL QG10(0, X, F3, T1)
T=-T1/BLO+C1 * X+C2
CALL QG10(0, X, QV, T1)
Q=T1-C1 * BLO
WRITE(3, 45)X, T, Q
11 CONTINUE
GO TO 1000
3 CONTINUE
WRITE(3, 42)
CALL QG10(R1, R2, F6, T1)
CALL QG10(R1, R2, F7, T2)

```

```

31      C2=(AL2/BLO/BLO * T2+T1/R2/R2/BLO+AL1/BLO *
      * R1 * R1/R2/R2 * TG1+AL1 * AL2/BLO/BLO * R1 *
      * R1 * (1./R1 - 1./R2) * TG1+AL2/BLO *
      * TG2)/(AL1/BLO * R1 * R1/R2/R2+AL1 *
      * AL2/BLO/BLO * R1 * (1./R1 - 1./R2)+AL2/BLO)
      C1=AL1/BLO * (C2 - TG1)
      M=(R2 - R1)/H+1
      WRITE (3, 43)
      DO 31 I=1, M
      R=R1+(I - 1) * H
      CALL QG1Ø (R1, R, F7, T1)
      T=C1 * R1 * R1 * (1./R1 - 1./R) - T1/BLO+C2
      CALL QG1Ø (R1, R, F6, T1)
      Q=T1/R/R - C1 * BLO * R1 * R1/R/R
      WRITE (3, 45) R, T, Q
      CONTINUE
      GO TO 1ØØØ
2      CONTINUE
      WRITE (3, 41)
      CALL QG1Ø (R1, R2, F1, T2)
      CALL QG1Ø (R1, R2, F2, T1)
      C2=(AL2/BLO/BLO * T1+T2/R2/BLO+AL2/BLO *
      * TG2+AL1/BLO/R2 * R1 * TG1+AL1 *
      * AL2/BLO/BLO * R1 * ALOG (R2/R1) *
      * TG1)/(AL1/BLO * R1/R2+AL1 * AL2/BLO/BLO *
      * R1 * ALOG (R2/R1)+AL2/BLO)
      C1=AL1/BLO * (C2 - TG1)
      M=(R2 - R1)/H+1
      WRITE (3, 43)
      DO 21 I=1, M
      R=R1+(I - 1) * H
      CALL QG1Ø (R1, R, F2, T1)
      T=C1 * R1 * ALOG (R/R1) - T1/BLO+C2
      CALL QG1Ø (R1, R, F1, Q1)
      Q=Q1/R - C1 * BLO * R1/R
      WRITE (3, 45) R, T, Q
      CONTINUE
21      CONTINUE
1ØØØ      STOP
      END
      FUNCTION F7(X)
      COMMON BLO, BK, B, R1, R2, TG1, TG2, DL, AL1,
      AL2, H, BI
      EXTERNAL F6
      CALL QG8(R1, X, F6, F71)
      F7=F71/X/X
      RETURN
      END
      FUNCTION F6(X)

```

```

F6=QV(X)*X*X
RETURN
END
FUNCTION F3(T)
COMMON/A/X
F3=QV(T)*(X-T)
RETURN
END
FUNCTION F5(X)
COMMON BLO BK, B, R1, R2, TG1, TG2, DL, AL1,
* AL2, H, BI
F5=QV(X)*(DL-X)
RETURN
END
FUNCTION F1(X)
F1=QV(X)*X
RETURN
END
FUNCTION QV(X)
COMMON BLO, BK, B, R1, R2, TG1, TG2, DL, AL1,
* AL2, H, BI
QV=BLO*BK*EXP(-B*X)
RETURN
END
FUNCTION F2(X)
COMMON BLO, BK, B, R1, R2, TG1, TG2, DL, AL1,
* AL2, H, BI
EXTERNAL F1
CALL QG8(R1, X, F1, F22)
F2=1./X*F22
RETURN
END

```

Список идентификаторов. N — параметр геометрической формы, равный 1, 2, 3 в задачах с плоской, цилиндрической и сферической симметрией соответственно; BLO — значение теплопроводности стенки; $R1, R2$ — радиусы стенки в задачах с цилиндрической или сферической симметрией; DL — толщина плоской стенки; H — шаг по координате; M — число точек, в которых вычисляются температура и поток; $TG1, TG2$ — температуры окружающих сред; T — температура; Q — тепловой поток; X, R — координаты точки в задачах с плоской и цилиндрической (или сферической) симметрией; $F1, F2, F3, F5, F6, F7$ — рабочие подпрограммы; $C1, C2, T1, T2, Q1$ — рабочие переменные; QV — подпрограмма-функция, задающая вид функции объемной плотности теплового потока внутреннего источника теплоты.

В тексте программы, приведенной выше, описан источник $q_v/\lambda = \gamma \exp(-\beta x)$; в программе BK отвечает γ , а B — β . На рис. 2.7 приведены результаты расчетов температурного поля в стенках различной геометрии при $q_v/\lambda = \gamma \exp(-\beta x)$ с граничными условиями III рода на поверхности стенок ($T_{c1}=1000^\circ\text{C}$; $T_{c2}=0^\circ\text{C}$; $\alpha_1=\alpha_2=1000 \text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot\text{К})$; $\lambda=1 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$; $\beta=10 \text{ м}^{-1}$; $\gamma=0,5 \text{ К}/\text{м}^3$).

Рис. 2.8 иллюстрирует результаты расчета поля температур в стенках различной геометрической формы в зависимости от объемной плотности теплового потока внутренних источников (стоков) при граничных условиях III рода ($T_{c1}=1000^\circ\text{C}$; $T_{c2}=0^\circ$; $\alpha_1=1\text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot\text{К})$; $\alpha_2=1000\text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot\text{К})$; $\lambda_1=1\text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$; $\beta=0,01\text{ м}^{-1}$).

Теплопроводность стенок канала при МГД-течении Куэтта. Пусть в плоском канале, образованном параллельными

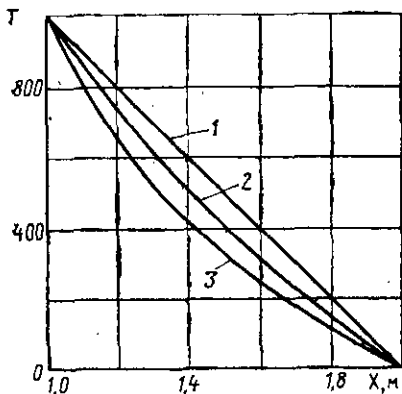


Рис. 2.7. Влияние геометрической формы стенки ($\delta=1\text{ м}$) на распределение температур при действии внутреннего источника теплоты:

1 — плоская стенка; 2 — цилиндрическая стенка; 3 — шаровая стенка

стенками $z=0$ и $z=h$, осуществляется стационарное течение несжимаемой вязкой электропроводящей жидкости, вызываемое движением верхней стенки с постоянной скоростью V_0 и продольным градиентом давления $\partial p/\partial x$.

Стенки канала имеют конечную толщину h_1, h_2 , удельную проводимость σ_1, σ_2 и теплопроводность λ_1, λ_2 . Внешнее магнитное и электрическое поля постоянны:

$$B_z=B_0=\text{const}; \quad E_y=E_0=\text{const}.$$

Установившееся распределение температуры в канале по координате z можно найти, решая следующую систему дифференциальных уравнений, записанных в безразмерном виде [44]:

$$K_{\lambda_1} \frac{d^2 \theta_1}{d\xi^2} + K_{\sigma_1} \text{EcPr} H^2 K^2 = 0; \quad (2.45)$$

$$\frac{d^2 \theta}{d\xi^2} + \text{EcPr} \left[\left(\frac{dV}{d\xi} \right)^2 + H^2 (K - V)^2 \right] = 0; \quad (2.46)$$

$$K_{\lambda_2} \frac{d^2 \theta_2}{d\xi^2} + K_{\sigma_2} \text{EcPr} H^2 (K - 1)^2 = 0, \quad (2.47)$$

при граничных условиях на внешних поверхностях канала

$$\theta_1(-K_{R_1}) = T_1, \quad \theta_2(K_{R_2}) = T_2; \quad (2.48)$$

на внутренних поверхностях канала

$$\theta_1(0) = \theta(0), \quad \left. \frac{d\theta}{d\xi} \right|_{\xi=0} = K_{\lambda_1} \left. \frac{d\theta_1}{d\xi} \right|_{\xi=0}; \quad (2.49)$$

$$\theta_2(1) = \theta(1), \quad \left. \frac{d\theta}{d\xi} \right|_{\xi=1} = K_{\lambda_2} \left. \frac{d\theta_2}{d\xi} \right|_{\xi=1}. \quad (2.50)$$

Здесь $\theta_1, \theta_2, \theta$ — избыточные температуры стенок канала (индексы 1, 2) и жидкости, отнесенные к некоторой характерной разности температур ΔT ; $\xi = z/h$ — безразмерная поперечная координата; $K = E_0/(V_0 B_0)$; $\text{Pr} = \mu c_p/\lambda$; $\text{Ec} = V_0/(c_p \Delta T)$; $H = B_0 h \sqrt{\sigma/\mu}$; $K_{\lambda_1} = \lambda_1/\lambda$;

$K_{\lambda_1} = \lambda_2/\lambda_1$; $K_{\sigma_1} = \sigma_1/\sigma$; $K_{\sigma_2} = \sigma_2/\sigma$; $K_{R_1} = h_1/h$; $K_{R_2} = 1 + h_2/h$ — числа подобия; $V(\xi) = \frac{\text{sh } H\xi}{\text{sh } H} + \frac{P_x \text{Re} - H^2 K}{H^2} \left(\frac{\text{sh } H\xi}{\text{sh } H} + \frac{\text{sh } H(1-\xi)}{\text{sh } H} - 1 \right)$ — безразмерный профиль скорости течения жидкости, где $P_x = \frac{h}{\rho V_0^2} \frac{\partial p}{\partial x}$, $\text{Re} = \frac{\rho h V_0}{\mu}$ — числа подобия.

Общее решение каждого из уравнений (2.45) — (2.47) имеет вид (2.44). Для нахождения шести постоянных C_i в решениях используются шесть граничных условий (2.48) — (2.50).

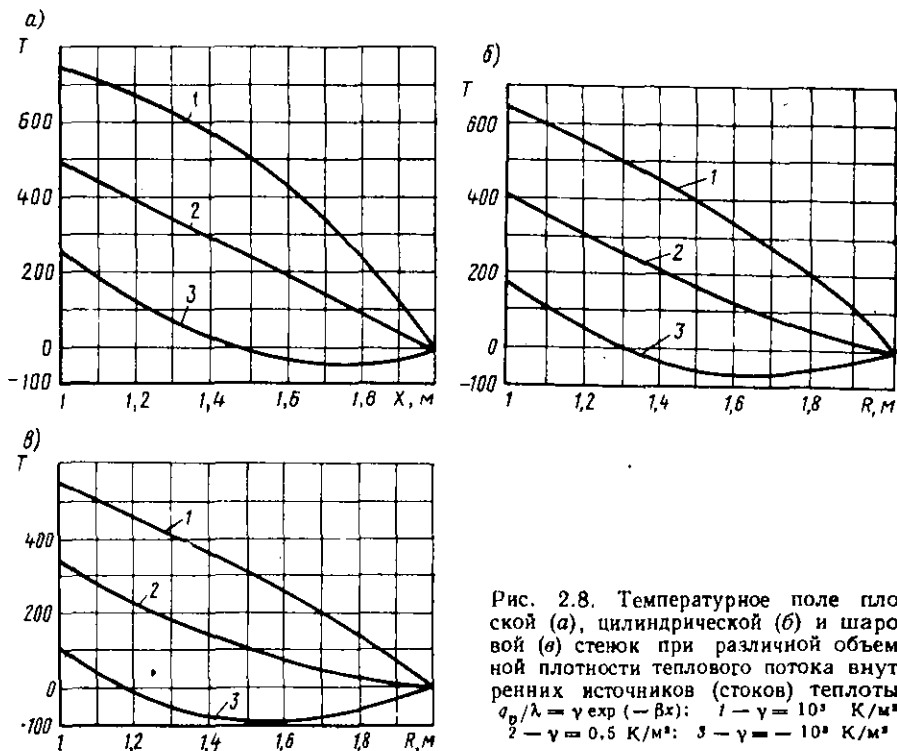


Рис. 2.8. Температурное поле плоской (а), цилиндрической (б) и шаровой (в) стенок при различной объемной плотности теплового потока внутренних источников (стоков) теплоты: $q_0/\lambda = \gamma \exp(-\beta x)$: 1 — $\gamma = 10^3$ К/м³; 2 — $\gamma = 0.5$ К/м³; 3 — $\gamma = -10^3$ К/м³

Определив постоянные, запишем решение задачи (2.45) — (2.50):

$$\Theta(\xi) = -\text{EcPr} [(1-A)^2 \text{ch } 2H\xi + A^2 \text{ch } 2H(1-\xi) - 2A(1+A) \times \\ \times \text{ch } H(1-2\xi)] / (4 \text{sh}^2 H) + 2\text{EcPr} (K+A) [(1+A) \text{sh } H\xi + A \text{sh } H(1-\xi)] / \text{sh } H - 0.5\text{EcPr} H^2 (K+A)^2 \xi^2 + c_1 \xi + c_2;$$

$$\Theta_1(\xi) = -0.5K_{\sigma_1} \text{EcPr} H^2 K^2 \xi (\xi + K_{R_1}) / K_{\lambda_1} + \xi (\kappa_1 - T_1) / K_{R_1} + \kappa_1;$$

$$\Theta_2(\xi) = -0.5K_{\sigma_2} \text{EcPr} H^2 (K-1)^2 (\xi^2 + K_{R_2} - (1+K_{R_2}) \xi) / K_{\lambda_2} + \xi \times \\ \times (\kappa_2 - T_2) / (1-K_{R_1}) + (T_2 - K_{R_2} \kappa_2) / (1-K_{R_1}),$$

где $A = (P_x Re - KH^2)/H^2$; $K_{\lambda_1} = K_{\lambda_1}/K_{R_1}$; $K_{s_1} = K_{\lambda_1}/(K_{R_1} - 1)$;
 $\kappa_1 = c_8 + (1 + K_{s_1}) \kappa_2$; $\kappa_2 = [c_7 - c_8(1 - K_{s_1})]/[(1 + K_{s_1})(1 + K_{s_2}) - 1]$;
 $c_1 = \kappa_2 - c_2 + c_8$;
 $c_2 = \kappa_1 + c_8$; $c_3 = EcPr H (A + 2K) [A (\operatorname{ch} H - 1) - 1]/\operatorname{sh} H$;
 $c_4 = EcPr H [(1 + A) \operatorname{ch} H - A] (1 - A - 2K)/\operatorname{sh} H + EcPr H^2 (K + A)^2$;
 $c_5 = 0,25 EcPr [(1 + A)^2 + A^2 \operatorname{ch} 2H - 2A(1 + A) \operatorname{ch} H - 8A(K + A) \times$
 $\times \operatorname{sh}^2 H]/\operatorname{sh}^2 H$;
 $c_6 = EcPr [0,25(1 + A)^2 \operatorname{ch} 2H + A^2/4 - 0,5A(1 - A) \operatorname{ch} H -$
 $- 2(K + A)(1 + A) \operatorname{sh}^2 H + 0,5(K + A)^2 H^2 \operatorname{sh}^2 H]/\operatorname{sh}^2 H$;
 $c_7 = c_6 - c_5 - c_3 + 0,5K_{\sigma_1} K_{R_1} EcPr H^2 K^2 + K_{s_1} T_1$;
 $c_8 = c_6 - c_5 - c_4 - K_{s_1} T_2 + 0,5K_{\sigma_1} (1 - K_{R_1}) EcPr H^2 (K - 1)^2$.

На рис. 2.9 показано влияние изменения теплопроводности материала первой пластины и числа Гартмана H на распределение тем-

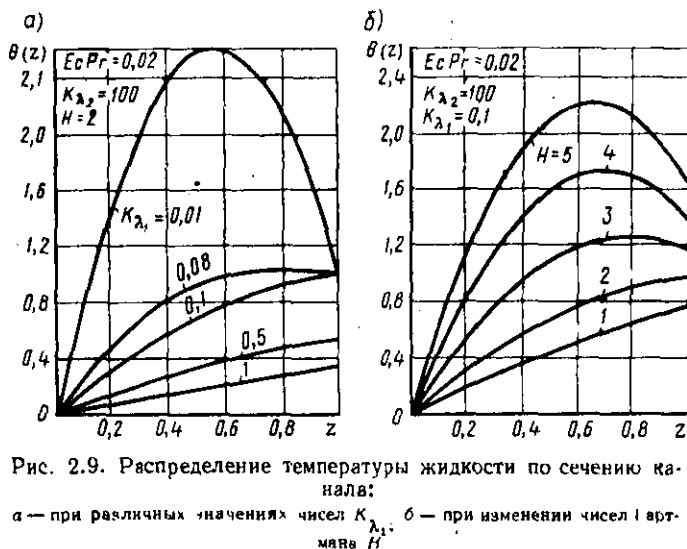


Рис. 2.9. Распределение температуры жидкости по сечению канала:

а — при различных значениях чисел K_{λ_1} ; б — при изменении чисел Гартмана H .

пературы в потоке жидкости при безнапорном течении Куэтта ($P_x Re = 0$), когда $T_1 = 0$; $T_2 = 1$; $K_{R_1} = 0,5$; $K_{R_2} = 1,001$; $K_{\sigma_1} = 10$; $K_{\sigma_2} = 100$.

ПРИМЕНЕНИЕ КЛАССИЧЕСКИХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

§ 3.1. Метод Фурье (метод разделения переменных)

Метод Фурье относится к классическим методам решения линейного дифференциального уравнения теплопроводности. Решение краевой задачи основано на ряде свойств входящего в уравнение теплопроводности оператора $\nabla[\lambda(p) \nabla T]$. В классических работах Фурье этот метод был связан с разделением переменных в дифференциальном уравнении теплопроводности. При этом предполагалось, что частное решение уравнения теплопроводности

$$c(\tau) \rho(\tau) \frac{\partial T}{\partial \tau} = \nabla[\lambda(p) \nabla T], \quad \tau > 0, \quad p \in \Omega, \quad (3.1)$$

в случае декартовых прямоугольных координат $p = \{x_1, x_2, x_3\}$, $\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x_1} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial x_2} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial x_3} \bar{k}$ (где $\bar{i} = \Omega(x_1, x_2, x_3)$ — конечная пространственная область) разыскивалось в виде произведения двух функций:

$$T(x_1, x_2, x_3) = A\Theta(\tau)\Phi(x_1, x_2, x_3). \quad (3.2)$$

Граничные условия для уравнения (3.1) считались приведенными к однородным условиям, например

$$T(p) = 0, \quad p \in S, \quad (3.3)$$

на S — границе области Ω .

Представление решения в виде (3.2) при подстановке его в (3.1) приводит к двум дифференциальным уравнениям: относительно $\Theta(\tau)$

$$c(\tau) \rho(\tau) \frac{d\Theta}{d\tau} = -\mu^2 \Theta(\tau); \quad (3.4)$$

относительно $\Phi(x_1, x_2, x_3)$

$$\nabla[\lambda(x_1, x_2, x_3) \nabla \Phi] = -\mu^2 \Phi, \quad (3.5)$$

где μ^2 — постоянная разделения переменных.

Задача нахождения тех значений постоянной μ_k^2 , для которых существуют нетривиальные (ненулевые) решения уравнения (3.5), удовлетворяющие соответствующим однородным граничным условиям, называется *задачей Штурма — Лиувилля*. Эти решения обычно называют *собственными функциями оператора* $\nabla[\lambda \nabla \Phi]$, а числа μ_k^2 , соответствующие этим собственным функциям, — *собственными числами оператора* $\nabla[\lambda \nabla \Phi]$.

При постоянной теплопроводности $\lambda = \text{const}$ задача Штурма — Лиувилля решена для тел, образованных пересечением ортогональных координатных поверхностей, различных систем координат (табл. 3.1).

Таблица 3.1

Система координат	Вид функций, входящих в решение
Декартова	Экспоненциальные, тригонометрические, гиперболические
Круговая цилиндрическая	Экспоненциальные, Бесселя, тригонометрические
Параболо-цилиндрическая	Тригонометрические, Вебера
Эллиптико-цилиндрическая	Тригонометрические, Матье
Сферическая	Лежандра, тригонометрическая, степенная
Вытянутого сфероида	Тригонометрическая, Лежандра
Сплюсненного	То же
Параболическая	Тригонометрическая, Бесселя
Коническая	Ляме, степенная
Эллипсоидальная	Ляме
Параболоидальная	Бэра

Например, в случае прямоугольных координат и однородных краевых условий $\vartheta|_S = 0$ функции

$$\vartheta_{\kappa}(x_1, x_2, x_3) = A_{\kappa} \sin \frac{n_1 \pi x_1}{d_1} \sin \frac{n_2 \pi x_2}{d_2} \sin \frac{n_3 \pi x_3}{d_3}, \quad (3.6)$$

$$\kappa \in \{\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3\}, A_{\kappa} = \text{const}, n_{\kappa} = 1, 2, 3, \dots,$$

удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\Delta \vartheta_{\kappa} + \mu_{\kappa}^2 \vartheta_{\kappa} = 0; \quad \mu_{\kappa}^2 = \pi^2 \sum_{k=1}^3 \frac{n_k^2}{d_k^2}$$

и обращаются в нуль на поверхности параллелепипеда $0 < x_{\kappa} < d_{\kappa}$, $\kappa = 1, 2, 3$. Таким образом, функции (3.6) являются собственными функциями оператора Лапласа в параллелепипеде, образованном ортогональными плоскостями $x_{\kappa} = 0$, $x_{\kappa} = d_{\kappa}$, $\kappa = 1, 2, 3$. Соответствующие собственные числа этого оператора

$$\mu_{\kappa} = \pi^2 \sum_{k=1}^3 \frac{n_k^2}{d_k^2} > 0, \quad n_{\kappa} = 1, 2, 3. \quad (3.7)$$

Система функций (3.6) ортогональна в метрике $L_2(\Omega)$ (см. приложение II), где Ω — параллелепипед; эта система будет и ортонормированной, если положить

$$A_{\kappa} = 2^{3/2} \prod_{k=1}^3 d_k^{-1/2} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{d_1 d_2 d_3}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{d_1 d_2 d_3}}.$$

Заметим, что система (3.6) полна в метрике $L_2(\Omega)$ (см. приложение II), исходя из того, что система функций $\sin(n\pi x_1/d_1)$ полна в $L_2(0, d_1)$. Формулой (3.6) исчерпывается система собственных функций однородной краевой задачи (3.3) для оператора Лапласа в параллелепипеде $0 \leq x_k \leq d_k$.

Приведем общие решения дифференциальных уравнений для некоторых одномерных задач Штурма — Лиувилля:

$$\frac{d^2\vartheta}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\vartheta}{dr} + \mu_k^2 \vartheta = 0; \quad (3.8)$$

$$\vartheta_k(r) = A_k \left(\frac{1}{r} \sin \mu_k r \right) + B_k \left(\frac{1}{r} \cos \mu_k r \right);$$

в цилиндрических координатах

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{d\vartheta}{dr} \right) + \mu_k^2 r \vartheta = 0; \quad (3.9)$$

$$\vartheta_k(r) = A_k J_0(\mu_k r) + B_k Y_0(\mu_k r),$$

где A_k, B_k — произвольные постоянные; μ_k — собственные числа, которые определяются соответствующими однородными граничными условиями краевой задачи; $J_0(\mu_k r)$ — функции Бесселя 1-го рода нулевого порядка; $Y_0(\mu_k r)$ — функции Бесселя 2-го рода нулевого порядка.

Решение уравнения (3.4) не вызывает затруднений:

$$\Theta_k(\tau) = \exp \left[-\mu_k^2 \int_0^\tau c^{-1}(t) \rho^{-1}(t) dt \right].$$

Общее решение уравнения (3.1) с граничными условиями (3.3) ввиду его линейности можно представить в виде

$$T = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \vartheta_k(p) \exp \left[-\mu_k^2 \int_0^\tau c^{-1}(t) \rho^{-1}(t) dt \right],$$

где $\vartheta_k(p)$ — собственные функции, отвечающие собственным числам μ_k ; коэффициенты A_k определяются из начального условия для уравнения (3.1) [при $\tau=0$ $T(\tau, p) = \varphi(p)$]

$$A_k = \frac{1}{N_k^2} \int_{\Omega} \vartheta_k(p) \varphi(p) d\Omega, \quad p \in \Omega,$$

где Ω — рассматриваемая область; N_k — норма собственной функции $\vartheta_k(p)$, равная $N_k^2 = \|\vartheta_k\|^2 = \int_{\Omega} \vartheta_k^2(p) d\Omega$.

Как отмечается в приложении II, собственные функции симметричного положительно определенного оператора ортогональны и образуют полную в $L_2(\Omega)$ систему функций. Все приведенные выше

операторы, входящие в задачу Штурма — Лиувилля с однородными граничными условиями, обладают такими свойствами.

Окончательно решение краевой задачи (3.1), (3.3) вместе с начальным условием $T(0, p) = \varphi(p)$, $p \in \Omega$, имеет вид

$$T(p, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{N_k} \vartheta_k(p) (\varphi, \vartheta_k) \exp \left[-\mu_k^2 \int_0^{\tau} c^{-1}(t) \rho^{-1}(t) dt \right], \quad (3.10)$$

где $(\varphi, \vartheta_k) = \int_{\Omega} \varphi \vartheta_k d\Omega$.

Ряд (3.10) является классическим (сильным) решением рассматриваемой задачи, если он допускает почленное дифференцирование дважды по пространственным координатам и один раз по времени. Если ряд таков, что его сумма $T(x_1, x_2, x_3, \tau) \in L_2(\Omega)$ и непрерывна по τ , то такое решение будем называть обобщенным решением или слабым. В понятие слабого решения можно включить такое решение

$T(x_1, x_2, x_3, \tau)$, производные которого по координатам $\frac{\partial T}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j}$, принадлежат $L_2(\Omega)$ и непрерывны по τ .

Обширные результаты по слабым решениям уравнения теплопроводности содержатся, например, в [62, 63].

Ряд (3.10) полностью решает краевую задачу, если собственные функции оператора $\nabla[\lambda \nabla \vartheta]$ известны. Однако нахождение этих функций в общем случае, как уже упоминалось, далеко не простая задача. Поэтому естественно попытаться представить решение в виде ряда (3.10), но по собственным функциям более простого оператора — сходного * оператора, например, оператора Лапласа $\Delta \vartheta$:

$$T(x_1, x_2, x_3, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\tau) \vartheta_k(x_1, x_2, x_3). \quad (3.11)$$

Представление решения в форме (3.11), где ϑ_k — собственные функции некоторого сходного положительно определенного оператора, тесно связано со схемой процесса Бубнова — Галеркина в применении к задачам нестационарной теплопроводности. Обычно она приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $c_k(\tau)$ — неизвестных коэффициентов в (3.11).

Метод Бубнова — Галеркина применялся к разным случаям нестационарных задач многими авторами. Обширная библиография по этому вопросу содержится в монографии [62]. Естественно, что в случае представления решения в виде ряда (3.11), где $\vartheta_k(x_1, x_2, x_3)$ — собственные функции оператора $\nabla(\lambda \nabla \vartheta)$, схема Бубнова — Галеркина и решение по методу Фурье формально совпадают.

Задача построения решения уравнения более общего вида, чем (3.1), а именно решение краевой задачи

$$\begin{aligned} c(\tau) \rho(\tau) \frac{\partial T}{\partial \tau} - \nabla[\lambda(p) \nabla T] &= q_v(p, \tau), \quad \tau > 0, \quad p \in \Omega; \\ T(p, 0) &= \varphi(p), \quad \lambda(p) \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_S + N(p) T(p, \tau) \Big|_S = 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

(где S — граница области Ω), строится следующим образом.

* Два самосопряженных положительно определенных оператора A и B называются сходными, если они имеют общую область определения, и полусходными, если их энергетические пространства состоят из одних и тех же элементов.

Допустим, что решение $T(\tau, p)$ задачи (3.12) существует. При любом $\tau > 0$ оно является элементом пространства $L_2(\Omega)$ и разлагается в ряд по любой полной и ортонормированной в $L_2(\Omega)$ системе, в частности по системе собственных функций оператора $\nabla [\lambda(p) \nabla \vartheta]$. Обозначим эти функции через $\vartheta_n = \vartheta_n(p)$, а соответствующие им собственные числа — через μ_n . Обозначая скалярное произведение

$$(T(\tau, p), \vartheta_n(p)) = \int_{\Omega} T(\tau, p) \vartheta_n(p) dp = c_n(\tau), \quad (3.13)$$

получим

$$T(\tau, p) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(\tau) \vartheta_n(p).$$

По определению собственной функции имеем

$$-(\nabla [\lambda \nabla T], \vartheta_n) = \mu_n^2 (T, \vartheta_n) = \mu_n^2 c_n(\tau).$$

Обозначая $(q_\nu(\tau, p), \vartheta_n) = f_n(\tau)$, получим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка для определения коэффициентов $c_n(\tau)$:

$$c_n(\tau) + \mu_n^2 c_n(\tau) = f_n(\tau), \quad \tau > 0. \quad (3.14)$$

Общий интеграл этого уравнения имеет вид

$$c_n(\tau) = e^{-\mu_n^2 \tau} \left[\alpha_n + \int_0^\tau e^{\mu_n^2 t} f_n(t) dt \right], \quad \alpha_n = \text{const.}$$

Начальное условие для уравнения (3.14) получаем из равенства (3.13)

$$c_n(0) = \int_{\Omega} T(0, p) \vartheta_n(p) dp = \int_{\Omega} \varphi(p) \vartheta_n(p) dp = (\varphi(p), \vartheta_n(p)).$$

Отсюда $\alpha_n = (\varphi, \vartheta_n)$ и решение уравнения (3.14) запишется в виде

$$c_n(\tau) = (\varphi, \vartheta_n) e^{-\mu_n^2 \tau} + \int_0^\tau e^{-\mu_n^2 (\tau-t)} f_n(t) dt.$$

Таким образом, если задача (3.12) имеет решение, то она представляется рядом

$$T(\tau, p) = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi, \vartheta_n) e^{-\mu_n^2 \tau} \vartheta_n(p) + \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n(p) \int_0^\tau e^{-\mu_n^2 (\tau-t)} f_n(t) dt. \quad (3.15)$$

Обоснование метода Фурье. Докажем, что ряд (3.15) действительно дает решение краевой задач теплопроводности (3.12). Проверим следующие его свойства:

1) ряд (3.15) сходится в метрике пространства $L_2(\Omega)$ равномерно по $t \in [0, T]$;

2) ряд (3.15) — ортогональный в $L_2(\Omega)$, и достаточно проверить что равномерно на сегменте $[0, T]$ сходится ряд из квадратов коэффициентов. Обозначим $\mu_n^2 = \nu_n$, тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (\varphi, \vartheta_n) e^{-\nu_n \tau} + \int_0^{\tau} e^{-\nu_n (\tau-t)} f_n(t) dt \right\}^2 < 2 \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi, \vartheta_n)^2 e^{-2\nu_n \tau} +$$

$$+ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_0^{\tau} e^{-\nu_n (\tau-t)} f_n(t) dt \right\}. \quad (3.16)$$

Пусть функция $q_v(p, \tau)$ непрерывна при $\tau > 0$ по τ и $q_v \in L_2(\Omega)$ при всех $p \in \Omega$; отсюда следует, что на сегменте $[0, T]$ непрерывна $\|f(\tau)\| = \int_{\Omega} [q_v(p, \tau)]^{1/2} dp$.

Поэтому можно доказать, что ряд в правой части (3.16) сходится равномерно. По неравенству Коши — Буняковского (см. приложение II),

$$\left\{ \int_0^{\tau} e^{-\nu_n (\tau-t)} f_n(t) dt \right\}^2 < \int_0^{\tau} e^{-2\nu_n (\tau-t)} dt \int_0^{\tau} f_n^2(t) dt =$$

$$= \frac{1 - e^{-2\nu_n \tau}}{2\nu_n} \int_0^{\tau} f_n^2(t) dt < \frac{1}{2\nu_n} \int_0^{\tau} f_n^2(t) dt.$$

Заменив здесь ν_n наименьшим значением $\nu_1 > 0$ [здесь используется то, что оператор $\nabla (\lambda \nabla T)$ — положительно определенный], получим, что общий член ряда оценивается $\frac{1}{2\nu_1} \int_0^{\tau} f_n^2(t) dt$. Для $q_v(p, \tau) \in L_2(\Omega)$ при $\tau \in [0, T]$ имеет место равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2(\tau) = \|f(\tau)\|^2 = \int_{\Omega} q_v^2(p, \tau) dp, \quad (3.17)$$

которое показывает, что ряд (3.17) с неотрицательными непрерывными членами сходится и имеет непрерывную сумму. Поэтому ряд (3.17) сходится равномерно на сегменте $[0, T]$ при любом $T > 0$ и, значит, сходится и второй ряд в последнем неравенстве (3.16).

Сходимость ряда $2 \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi, \vartheta_n)^2 e^{-2\nu_n \tau}$ устанавливается следующим образом.

Имеем $2 (\varphi, \vartheta_n)^2 e^{-2\nu_n \tau} < 2 (\varphi, \vartheta_n)^2$, а ряд $2 \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi, \vartheta_n)^2$ сходится в силу того, что $\varphi \in L_2(\Omega)$ и $\{\vartheta_n\}$ — ортонормированная в $L_2(\Omega)$ система функций. Из сказанного следует, что сумма ряда в (3.15) $T(p, \tau)$ является непрерывной по $\tau > 0$ функцией и принадлежит $L_2(\Omega)$ при всех $p \in \Omega$.

Ограничимся доказательством только этого свойства ряда (3.15). Для него можно получить и ряд других свойств, например ряд (3.15) можно дифференцировать по τ . Этот новый ряд будет сходиться в метрике $L_2(\Omega)$ равномерно по τ на интервале $(0, T)$. Вопросы обоснования этих и других свойств ряда рассмотрены, например, в [62].

Примеры, приведенные ниже для некоторых задач нестационарной теплопроводности, в достаточной степени проиллюстрируют сказанное.

Рассмотрим предварительно один из приемов, позволяющих неоднородное уравнение теплопроводности и неоднородные граничные условия привести к однородным [15].

Пусть дана краевая задача

$$\left. \begin{aligned} \partial T(p, \tau) / \partial \tau &= a \nabla^2 T(p, \tau) + q_v(p) / (c\rho), \quad p \in \Omega, \quad \tau > 0; \\ T(p, 0) &= f(p), \quad p \in \Omega; \\ \lambda \partial T(p, \tau) / \partial n + N(p) T(p, \tau) &= g(p), \quad p \in S, \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

т. е. ограничимся случаем, когда неоднородные члены являются функциями только пространственных координат. Задача (3.18) линейна, поэтому представим ее решение в виде суммы функций:

$$T(p, \tau) = T_{\text{ст}}(p) + T_1(p, \tau), \quad (3.19)$$

где функция $T_{\text{ст}}(p)$ не зависит от времени и определяет установившееся распределение температуры, которое находится как решение следующей краевой задачи:

$$a \nabla^2 T_{\text{ст}}(p) + q_v(p) / (c\rho) = 0, \quad p \in \Omega; \quad (3.20)$$

$$\lambda (\partial T_{\text{ст}} / \partial n) + N(p) T_{\text{ст}} = g(p), \quad p \in S. \quad (3.21)$$

Для определения $T_1(p, \tau)$ приходим к уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \partial T_1(p, \tau) / \partial \tau &= a \nabla^2 T_1(p, \tau), \quad p \in \Omega, \quad \tau > 0; \\ \lambda (\partial T_1 / \partial n) + N(p) T_1(p, \tau) &= 0, \quad p \in S; \\ T_1(p, 0) &= f(p) - T_{\text{ст}}(p), \quad p \in \Omega. \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

Таким образом, для определения функции $T_1(p, \tau)$ приходим к краевой задаче с однородным дифференциальным уравнением и однородными граничными условиями, для решения которой можно применить метод Фурье.

Представление решения краевой задачи (3.18) в форме (3.19) возможно не всегда, а именно если значение подводимого количества теплоты задано в каждой точке граничной поверхности тела. В самом деле, применим к уравнению (3.20) теорему Гаусса — Остроградского, тогда получим

$$\lambda \int_S \frac{\partial T}{\partial n} dS = - \int_{\Omega} q_v(p) d\Omega.$$

Однако количество подводимой к телу теплоты, определяемое условием (3.21) при $N(p) = 0$, может и не удовлетворять этому соотношению. С физической точки зрения это означает, что установившееся распределение температуры невозможно, если суммарное количество теплоты подводится к телу со скоростью, отличающейся от той, с которой теплота поглощается внутри тела.

В этом случае решение задачи следует представить в виде

$$T(p, \tau) = \beta\tau + T_{\text{ст}}(p) + T_1(p, \tau), \quad (3.23)$$

где, как и раньше, функция $T_1(p, \tau)$ удовлетворяет системе (3.22) при соответствующем N , а функция $T_{\text{ст}}(p)$ находится как решение следующей краевой задачи:

$$\alpha \nabla^2 T_{\text{ст}}(p) + \frac{1}{c_p} q_v(p) = \beta, \quad p \in \Omega;$$

$$\lambda [\partial T_{\text{ст}}(p) / \partial n] = g(p), \quad p \in S.$$

Применяя формулу Гаусса — Остроградского, получим

$$\beta = \frac{1}{c_p V} \left[\int_{\Omega} q_v(p) d\Omega + \int_S g(p) dS \right],$$

где V — объем тела.

Из решения (3.23) видно: распределение температуры в теле при больших значениях времени изменяется таким образом, что пространственное распределение температуры $T_{\text{ст}}(p)$ остается неизменным, а значение температуры в каждой точке увеличивается с постоянной скоростью β [заметим, что $T_1(p, \tau)$ при этом стремится к некоторому постоянному значению].

Температурное поле стержня прямоугольного сечения. Распределение температуры $T(x, y, \tau)$ в стержне прямоугольного сечения при пренебрежении передачей теплоты по длине стержня описывается уравнением

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} - a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = \frac{q_v(x, y, \tau)}{c_p}; \quad (3.24)$$

$$0 < x < d, \quad 0 < y < b, \quad \tau > 0,$$

при начальных условиях

$$T(x, y, 0) = \varphi(x, y); \quad (3.25)$$

при граничных условиях

$$T(0, y, \tau) = T(d, y, \tau) = 0; \quad (3.26)$$

$$T(x, 0, \tau) = T(x, b, \tau) = 0.$$

Согласно методу Фурье представим решение уравнения (3.24) в виде ряда

$$T(x, y, \tau) = \sum_{m, n=1}^{\infty} c_{mn}(\tau) \vartheta_{mn}(x, y), \quad (3.27)$$

где ϑ_{mn} — ортонормированная система собственных функций, удовлетворяющих граничным условиям (3.26), а $c_{mn}(\tau)$ — неизвестные функции времени, которые подлежат определению. Можно проверить,

что собственные функции оператора Лапласа $\vartheta_{mn} = \frac{2}{\sqrt{db}} \sin \frac{m\pi x}{d} \times \sin \frac{n\pi y}{b}$ ортонормированы в прямоугольнике $\Omega (0 \leq x \leq d, 0 \leq y \leq b)$, т. е.

$$\int_0^a \int_0^b \vartheta_{mn} \vartheta_{ph} (x, y) dx dy = \begin{cases} 0, & n \neq p \text{ или } m \neq h; \\ 1, & n=p, m=h. \end{cases}$$

Дело сводится к определению $c_{nm}(\tau)$. Подставив ряд (3.27) в уравнение (3.24) и умножив его скалярно на $\vartheta_{nm}(x, y)$, получим обыкновенное дифференциальное уравнение для $c_{nm}(\tau)$:

$$c'_{nm}(\tau) + \mu_{nm}^2 c_{nm}(\tau) = f_{nm}(\tau).$$

Здесь

$$\mu_{nm}^2 = \pi^2 (m^2/d^2 + n^2/b^2),$$

$$f_{nm} = \frac{2}{\sqrt{bd}} \int_0^a \int_0^b \frac{q_v(x, y, \tau)}{e\rho} \sin \frac{m\pi x}{d} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy.$$

Общий интеграл последнего уравнения

$$c_{nm}(\tau) = \exp(-\mu_{nm}^2 \tau) \left[\alpha_{nm} + \int_0^\tau \exp(\mu_{nm}^2 t) f_{nm}(t) dt \right].$$

Начальные условия получим из разложения начального условия (3.25) в ряд по ортонормированной системе функций:

$$\alpha_{nm} = (\varphi, \vartheta_{nm}) = \int_0^a \int_0^b \varphi(x, y) \vartheta_{nm}(x, y) dx dy.$$

Таким образом, решение задачи (3.24) — (3.26) представляется рядом следующего вида:

$$T(x, y, \tau) = \sum_{m, n=1}^{\infty} (\varphi, \vartheta_{nm}) \exp(-\mu_{nm}^2 \tau) \vartheta_{nm}(x, y) + \\ + \sum_{m, n=1}^{\infty} \vartheta_{nm}(x, y) \int_0^\tau \exp[-\mu_{nm}^2 (\tau - t)] f_{nm}(t) dt.$$

В случае, если $f_{nm}(\tau)$ является непрерывной функцией τ , а $\varphi(x, y) \in L_2(\Omega)$, этот ряд, как показано выше, сходится к функции $T(x, y, \tau)$, непрерывной по τ на $[0, \tau_0]$, и T принадлежит к функциям, интегрируемым с квадратом по области $\Omega (0 \leq x \leq d, 0 \leq y \leq b)$.

Нагрев неограниченной пластины. Неограниченная пластина, толщина которой равна $2R$ в начальный момент времени, помещается в среду с постоянной температурой $T_c > T(x, 0) = \varphi(x)$. Между ограничивающими поверхностями пластины и окружающей

средой происходит теплообмен по закону Ньютона. Найти распределение температуры по толщине пластины в любой момент времени.

Уравнение теплопроводности и его краевые условия имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \partial T / \partial \tau - a \partial^2 T / \partial x^2 &= q_v(x, \tau) / (c\rho), \quad \tau > 0, \quad -R < x < R; \\ T(x, 0) &= \varphi(x); \\ -\lambda [\partial T(R, \tau) / \partial x] + \alpha [T_c - T(R, \tau)] &= 0; \\ \lambda [\partial T(-R, \tau) / \partial x] + \alpha [T_c - T(-R, \tau)] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.28)$$

Предположим, что функции $q_v(x, \tau)$, $\varphi(x)$ — четные, т. е. $\varphi(x) = \varphi(-x)$, поэтому $\varphi'(0) = 0$. В силу симметрии краевых условий в (3.28) можно предположить, что решение задачи (3.28) — четная функция x . Введем новую функцию $\Theta(x, \tau) = T_c - T(x, \tau)$. Для $\Theta(x, \tau)$ получим следующую задачу:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} - a \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} &= -q_v(x, \tau) / (c\rho), \quad \tau > 0, \quad -R < x < R; \\ T(x, 0) = T_c - \Theta(x) &= \varphi(x) \\ \text{или} \\ \Theta(x) = T_c - \varphi(x) &= \varphi_1(x); \\ \lambda [\partial \Theta(R, \tau) / \partial x] + \alpha \Theta(R, \tau) &= 0; \\ -\lambda [\partial \Theta(-R, \tau) / \partial x] + \alpha \Theta(-R, \tau) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

Запишем общее решение краевой задачи (3.29) в виде

$$\Theta(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n(\tau) \psi_n(x), \quad (3.30)$$

где $D_n(\tau)$ — неизвестные функции переменной τ , а $\psi_n(x)$ — ортонормированная система функций краевой задачи

$$\left. \begin{aligned} \psi'' + \mu^2 \psi &= 0; \\ -\lambda [d\psi(R)/dx] + \alpha \psi(R) &= 0; \\ -\lambda [d\psi(-R)/dx] + \alpha \psi(-R) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.31)$$

Нетрудно видеть, что система функций $\psi_n(x) = \frac{V \mu_n \cos \mu_n x / R}{V R V \mu_n + \sin(2\mu_n)/2}$,

где μ_n — корень характеристического уравнения $\operatorname{ctg} \mu = \mu \lambda / (\alpha R)$ (см. табл. III.1 приложения III), является ортонормированной в $L_2(-R, R)$ и представляет собой нетривиальное решение задачи (3.31). Ряд (3.30) удовлетворяет краевым условиям в (3.29). Для определения коэффициентов $D_n(\tau)$ подставим искомую форму решения (3.30) в уравнение задачи (3.29) и умножим его скалярно на $\psi_m(x)$. Принимая во

внимание ортогональность $\psi_m(x)$ на отрезке $[-R, R]$, получим обыкновенное дифференциальное уравнение для функций $D_n(\tau)$:

$$D_n'(\tau) + (a\mu_n^2/R^2) D_n(\tau) = -f_n(\tau), \quad \tau > 0. \quad (3.32)$$

Здесь

$$f_n(\tau) = \frac{\sqrt{\mu_n}}{\sqrt{R\left(\mu_n + \frac{1}{2} \sin 2\mu_n\right)}} \int_{-R}^R q_v(x, \tau) \cos \frac{\mu_n x}{R} dx.$$

Общий интеграл (3.32) запишется в виде

$$D_n(\tau) = \exp(-a\mu_n^2\tau/R^2) \left[\alpha_n - \int_0^\tau \exp(a\mu_n^2 t/R^2) f_n(t) dt \right].$$

Начальные условия для $D_n(0) = \alpha_n$ получаем из разложения начального условия $\Theta(x, 0) = \varphi_1(x)$ в ряд по ортонормированной системе функций $\psi_n(x)$:

$$\alpha_n = (\varphi_1, \psi_n) = \frac{\sqrt{\mu_n}}{\sqrt{R\left(\mu_n + \frac{1}{2} \sin 2\mu_n\right)}} \int_{-R}^R \varphi_1(x) \cos \frac{\mu_n x}{R} dx.$$

Общее решение краевой задачи (3.29) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \Theta(x, \tau) = T_0 - T(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_1, \psi_n) \exp(-a\mu_n^2\tau/R^2) \psi_n(x) - \\ - \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) \int_0^\tau \exp[-a\mu_n^2(\tau-t)/R^2] f_n(t) dt. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Как и ранее, можно показать, что если $f_n(\tau)$ — непрерывная на $[0, \tau_0]$ функция, а $\varphi_1(x) \in L_2(-R, R)$, то сумма ряда (3.33) является непрерывной на $[0, \tau_0]$ функцией и интегрируемой с квадратом на $(-R, R)$.

Для случая, когда $q_v(x, \tau)/(cp)$ и $\varphi_1(x)$ являются нечетными функциями x , решение краевой задачи (3.29) имеет вид

$$\begin{aligned} \Theta(x, \tau) = T_0 - T(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_1, \chi_n) \exp(-av_n^2\tau/R^2) \chi_n(x) - \\ - \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n(x) \int_0^\tau \exp[-av_n^2(\tau-t)/R^2] f_n(t) dt, \end{aligned} \quad (3.34)$$

где $\chi_n(x) = \frac{\sqrt{v_n} \sin(v_n x/R)}{\sqrt{R(v_n - 0,5 \sin 2v_n)}}$ — ортонормированная в $L(-R, R)$

система нечетных функций, а v_n является корнем трансцендентного уравнения $\operatorname{tg} v = -v/\operatorname{Bi}$. Первые шесть корней этого уравнения приведены в табл. III.2 для различных значений Bi .

При равномерном начальном распределении температуры, т. е. $\varphi(x) = T_0$, и при $q_v(x, \tau) \equiv 0$ решение (3.34) примет форму

$$\Theta(x, \tau) = T_0 - T(x, \tau) = (T_c - T_0) \sum_{n=1}^{\infty} (1, \kappa_n) \exp(-\alpha \nu_n^2 \tau / R^2) \kappa_n(x).$$

На рис. 3.1 схематически показано распределение температуры в неограниченной пластине.

Температурное поле неограниченного цилиндра при охлаждении. В неограниченном цилиндре дано распре-

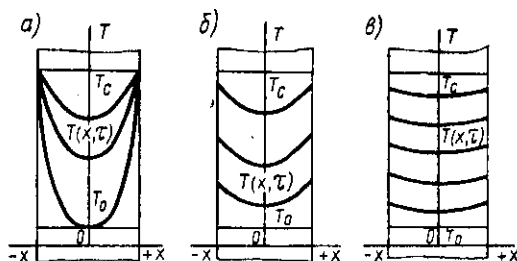


Рис. 3.1. Распределение температуры в неограниченной пластине для различных значений критерия Био:

a — $Bi \rightarrow \infty$; б — $\infty > Bi > 0$; в — $Bi \rightarrow 0$

деление температуры по радиальной координате в виде некоторой функции $\varphi(r)$. В начальный момент времени поверхность цилиндра охлаждается до некоторой температуры T_c , которая поддерживается постоянной на протяжении всего процесса охлаждения.

Найти распределение температуры по радиусу внутри цилиндра в любой момент времени (рис. 3.2).

Математически задача формулируется следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \tau} - \alpha \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) &= q_v(r, \tau) / (c\rho), \quad \tau > 0, \quad 0 < r < R; \\ T(r, 0) &= \varphi(r); \\ \frac{\partial T(0, \tau)}{\partial r} &= 0, \quad T(R, \tau) = T_c, \quad T(0, \tau) \neq \infty. \end{aligned} \right\} \quad (3.35)$$

Введем функцию $\Theta(r, \tau) = T(x, \tau) - T_c$. Тогда задача (3.35) запишется следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} - \alpha \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right) &= q_v(r, \tau) / (c\rho); \\ \Theta(r, 0) &= \varphi(r) - T_c = \varphi_1(r); \\ \partial \Theta(0, \tau) / \partial r &= 0, \quad \Theta(R, \tau) = 0; \\ \Theta(0, \tau) &\neq \infty. \end{aligned} \right\} \quad (3.36)$$

Равенство нулю производной от искомой функции по радиальной координате на оси цилиндра означает, что процесс теплообмена

симметричен относительно оси цилиндра, где температура принимает конечное значение.

Запишем решение краевой задачи (3.36) в виде

$$\Theta(r, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n(\tau) V_n(r), \quad (3.37)$$

где система функций $V_n(r)$ удовлетворяет так называемому уравнению Бесселя

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) + k^2 V = 0; \quad V(R) = 0, \quad V(0) \neq \infty. \quad (3.38)$$

Общее решение (3.38) может быть представлено в виде

$$V(r) = C_1 J_0(kr) + C_2 Y_0(kr), \quad (3.39)$$

где $J_0(kr)$ и $Y_0(kr)$ — функции Бесселя 1-го и 2-го родов нулевого порядка (рис. 3.3); C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Так как $Y_0(kr) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow 0$, то полагаем в (3.39) $C_2 = 0$. Постоянные k определяются из граничного условия $V(R) = 0$ как корни трансцендентного уравнения $J_0(kR) = 0$. Первые корни уравнения $J_0(\mu_n) = 0$ $\mu_n = k_n R$ приведены в табл. III.6 с точностью до четвертого знака после запятой.

Для определения коэффициентов $D_n(\tau)$ ряда (3.37) подставим этот ряд в уравнение задачи (3.36) и умножим его скалярно на $rV_n(r)$. При вычислении интегралов на отрезке $[0, R]$ воспользуемся следующими свойствами функций Бесселя $J_0(k_m r)$:

$$\int_0^R x J_0(k_n x) J_0(k_m x) dx = \frac{k_m x J_0(k_n x) J_1(k_m x) - k_n x J_0(k_m x) J_1(k_n x)}{k_m^2 - k_n^2}.$$

При $k_m \neq k_n$ и $x = R$ правая часть последнего выражения равна нулю вследствие условия $J_0(k_m R) = J_0(k_n R) = 0$. При $m = n$ имеем

$$\int_0^R r J_0^2(k_n r) dr = \frac{R^2}{2} J_1^2(k_n R).$$

Следовательно, если в качестве $V_n(r)$ выбрать систему ортонормированных с весом r функций $V_n(r) = \frac{J_0(k_n r)}{R J_1(k_n R)}$, то граничные условия в (3.36) всегда удовлетворяются.

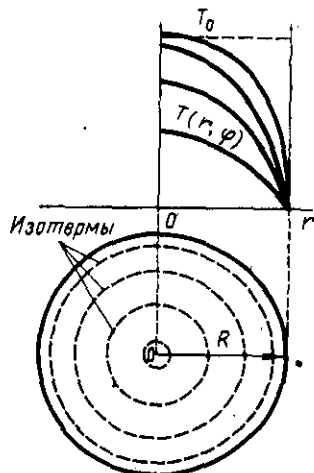


Рис. 3.2. Распределение температуры в неограниченном цилиндре [69]

Учитывая сказанное, получим для $D_n(\tau)$ дифференциальное уравнение вида

$$D'_n(\tau) + ak_n^2 D_n(\tau) = f_n(\tau), \quad (3.40)$$

где $f_n(\tau) = \frac{\sqrt{2}}{RJ_1(k_n R)} \int_0^R r \frac{q_v(r, \tau)}{c\rho} J_0(k_n r) dr$ являются коэффициентами

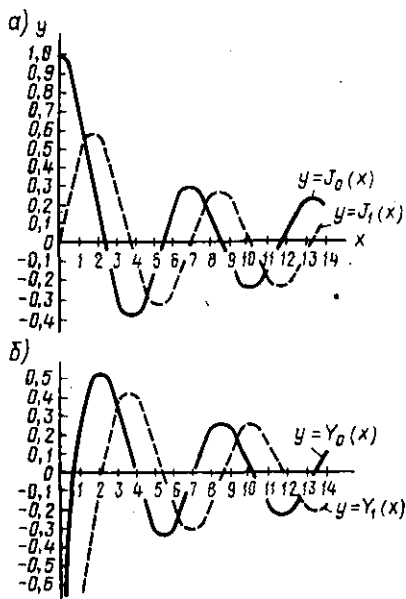


Рис. 3.3. Графики функций Бесселя:
а — 1-го рода; б — 2-го рода

Фурье разложения $q_v(r, \tau)/(c\rho)$ в ряд по ортонормированной с весом r системе функций $V_n(r)$.

Общий интеграл уравнения (3.40) запишем в виде

$$D_n(\tau) = \exp(-a\mu_n^2 \tau / R^2) \times \left[\beta_n + \int_0^\tau \exp(a\mu_n^2 t / R^2) f_n(t) dt \right].$$

$$\text{Здесь } \mu_n = k_n R; \quad \beta_n = (r\varphi_1, V_n) = -\sqrt{2} \int_0^R \frac{r\varphi_1(r) J_0(\mu_n r / R)}{RJ_1(\mu_n)} dr.$$

Общее решение задачи (3.36) представится в форме следующего ряда:

$$\Theta(r, \tau) = T(r, \tau) - T_c = \sum_{n=1}^{\infty} (r\varphi_1, V_n) \exp(-\mu_n^2 a \tau / R^2) V_n(r) + \sum_{n=1}^{\infty} V_n(r) \int_0^\tau \exp[-a\mu_n^2 (\tau - t) / R^2] f_n(t) dt.$$

Сумма ряда $\Theta(r, \tau)$ является непрерывной по τ функцией, если $q_v(r, \tau)/(c\rho)$ непрерывна по τ на отрезке $[0, \tau_0]$, и $\Theta(r, \tau)$ является интегрируемой с квадратом и весом r функцией, если $q_v(r, \tau)/(c\rho)$ и $\varphi_1(r)$ — функции с такими же свойствами. Отметим, что $\Theta(r, \tau)$ может представить собой более гладкое решение (например, иметь в области определения решения $\Theta(\tau > 0, 0 \leq r \leq R)$ непрерывную производную по τ и непрерывные вторые производные по r) в случае наложения на $q_v(r, \tau)$, $\varphi_1(r)$ более жестких условий.

Рассмотрим частный случай задачи, полагая $q_v = 0$, тогда получим

$$\Theta(r, \tau) = T(r, \tau) - T_c = -\frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_n r / R)}{J_1^2(\mu_n)} \exp(-a\mu_n^2 \tau / R^2) \int_0^R r\varphi_1(r) J_0(\mu_n r / R) dr.$$

Из последнего решения при $f(r)=T_0=\text{const}$ имеем выражение для относительной избыточной температуры

$$\Theta(r, \tau) = \frac{T - T_0}{T_0 - T_c} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_n r/R)}{\mu_n J_1(\mu_n)} \exp(-\alpha \mu_n^2 \tau / R^2).$$

На рис. 3.4 представлены кривые распределения относительной избыточной температуры в неограниченном цилиндре по относительному радиусу r/R для различных значений числа Фурье $Fo = \alpha \tau / R^2$.

Температурное поле шара при нагреве переменным тепловым потоком. Для определения нестационарного температурного поля шара при граничных условиях II рода имеем краевую задачу

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial \tau} - \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) &= \frac{q_0(r, \tau)}{c\rho}, \quad 0 < r < R, \quad \tau > 0; \\ -\frac{\partial T(R, \tau)}{\partial r} + \frac{q(\tau)}{\lambda} &= 0, \quad \frac{\partial T(0, \tau)}{\partial r} = 0; \\ T(0, \tau) &\neq \infty, \quad T(r, 0) = f_0(r). \end{aligned} \right\} \quad (3.41)$$

Граничное условие при $r=R$ неоднородно, поэтому представим искомое решение в виде следующего ряда:

$$T(r, \tau) = \frac{q(\tau) r^2}{2\lambda R} + \Theta(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} D_n(\tau) \frac{\sin \mu_n r / R}{r}. \quad (3.42)$$

В выражении (3.42) μ_n является корнем трансцендентного уравнения $\mu_n = \text{tg } \mu_n$, что обеспечивает точное удовлетворение граничным условиям при $r=0$ и $r=R$ в (3.41).

Физический смысл $\Theta(\tau)$ определяется следующим образом. Выведем среднюю температуру шара из равенства

$$\bar{T}(\tau) = \frac{\int_0^R T(r, \tau) dv}{\frac{4}{3} \pi R^3} = \frac{3}{R^3} \int_0^R r^2 T(r, \tau) dr.$$

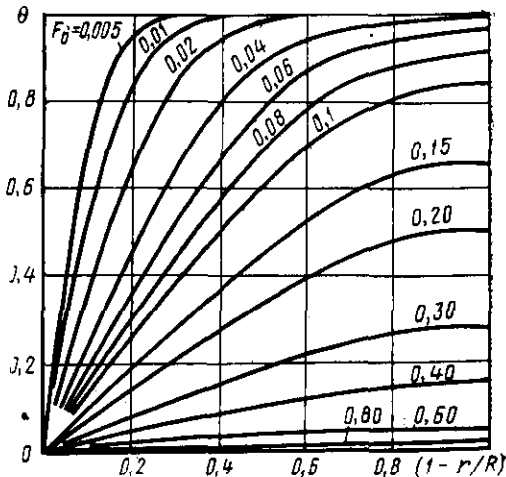


Рис. 3.4. Температурное поле неограниченного цилиндра (граничные условия I рода)

Вычислим среднюю температуру, используя решение в виде (3.42) и дифференциальное уравнение (3.41). Учитывая граничные условия при $r=0$ и $r=R$ и тот факт, что среднее значение ряда в решении (3.42) равно нулю в силу того, что μ_n является корнем трансцендентного уравнения $\mu_n = \operatorname{tg} \mu_n$ (см. табл. III.4), получим

$$\int_0^R r \sin \mu_n \frac{r}{R} dr = \frac{R^2}{\mu_n^2} \int_0^{\mu_n} x \sin x dx = \frac{R^2}{\mu_n^2} (\sin x - x \cos x) \Big|_0^{\mu_n} = 0.$$

После очевидных преобразований имеем следующие соотношения:

$$\bar{T}(\tau) = \frac{3q(\tau)R}{10\lambda} + \Theta(\tau);$$

$$\frac{d\bar{T}}{d\tau} = \frac{3aq(\tau)}{\lambda R} + \frac{3}{c\rho R^3} \int_0^R r^2 q_v(r, \tau) dr,$$

откуда

$$\bar{T}(\tau) = \bar{T}_0 + \frac{3a}{\lambda R} \int_0^\tau q(x) dx + \frac{3}{c\rho R^3} \int_0^\tau \int_0^R r^2 q_v(r, x) dr dx.$$

Для определения постоянной $\bar{T}_0$ используем среднее значение начального распределения температуры в шаре:

$$T(r, 0) = f_0(r) = \frac{q_0 r^2}{2\lambda R} + \Theta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} D_n(0) \frac{\sin \mu_n r / R}{r}.$$

Из последнего равенства для среднего значения по объему шара получим

$$\bar{T}_0 = \frac{3q_0 R}{10\lambda} + \Theta_0 = \frac{3}{R^3} \int_0^R r^2 f_0(r) dr.$$

Окончательно

$$\begin{aligned} \bar{T}(\tau) &= \frac{3a}{\lambda R} \int_0^\tau q(x) dx + \frac{3}{c\rho R^3} \int_0^\tau \int_0^R r^2 q_v(r, \tau) dr d\tau + \frac{3}{R^3} \int_0^R r^2 f_0(r) dr = \\ &= \frac{3q(\tau)R}{10\lambda} + \Theta(\tau). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Таким образом, $\Theta(\tau)$ оказывается линейно связанной со средней температурой шара $\bar{T}(\tau)$.

Для функции $\Theta_1(r, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n(\tau) \frac{\sin \mu_n r / R}{r}$ имеем следующую краевую задачу:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial \Theta_1(r, \tau)}{\partial \tau} - a \left(\frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Theta_1}{\partial r} \right) = \frac{q_v(r, \tau)}{cp} - \\ & - \frac{\dot{q}(\tau)}{10\lambda R} (5r^2 - 3R^2) - \frac{3}{cpR^3} \int_0^R r^2 q_v(r, \tau) dr, \quad 0 < r < R, \quad \tau > 0; \\ & \partial \Theta_1(R, \tau) / \partial r = \partial \Theta_1(0, \tau) / \partial r = 0, \quad \Theta_1(0, \tau) \neq \infty; \\ & \Theta_1(r, 0) = f_0(r) - q_0 r^2 / (2\lambda R) = \Theta_0. \end{aligned} \right\} \quad (3.44)$$

Подставляя в дифференциальное уравнение (3.44) выражение для $\Theta_1(r, \tau)$, умножая обе части равенства на $r \sin \mu_n r / R$ и интегрируя от 0 до R , получим обыкновенное дифференциальное уравнение для определения коэффициентов $D_n(\tau)$:

$$\frac{dD_n(\tau)}{d\tau} + \frac{a\mu_n^2}{R^2} D_n(\tau) = \frac{f_{1n}(\tau)}{\|\sin \mu_n r / R\|^2} = \bar{f}_{1n}(\tau), \quad (3.45)$$

где

$$\begin{aligned} \|\sin \mu_n r / R\|^2 &= \int_0^R \sin^2(\mu_n r / R) dr = \frac{R}{2} \sin^2 \mu_n; \quad f_{1n}(\tau) = \\ &= \int_0^R \left[\frac{q_v(r, \tau)}{cp} - \frac{\dot{q}(\tau)}{10\lambda R} (5r^2 - 3R^2) - \frac{3}{cpR^3} \int_0^R r^2 q_v(r, \tau) dr \right] r \sin(\mu_n r / R) dr. \end{aligned}$$

После несложных преобразований $\bar{f}_{1n}(\tau)$ можно представить в виде $\bar{f}_{1n}(\tau) = f_n(\tau) - \beta_n q(\tau)$,

$$\text{где } f_n(\tau) = \frac{2}{R \sin^2 \mu_n} \int_0^R r q_v(r, \tau) \sin(\mu_n r / R) dr; \quad \beta_n = \frac{2R^3 \sin \mu_n}{\lambda \mu_n^2 R \sin^2 \mu_n} = \frac{2R^2}{\lambda \mu_n^2 \sin \mu_n}.$$

Запишем решение обыкновенного дифференциального уравнения (3.45):

$$\begin{aligned} D_n(\tau) &= \exp\left(-\mu_n^2 \frac{a\tau}{R^2}\right) \left[D_n(0) + \int_0^\tau f_n(x) \exp\left(\mu_n^2 \frac{ax}{R^2}\right) dx - \right. \\ &- \beta_n q(\tau) \exp\left(\mu_n^2 \frac{a\tau}{R^2}\right) + \beta_n q_0 + \beta_n \frac{a\mu_n^2}{R^2} \int_0^\tau q(x) \exp\left(\mu_n^2 \frac{ax}{R^2}\right) dx \Big] = \\ &= -\beta_n q(\tau) + \beta_n q_0 \exp\left(-\mu_n^2 \frac{a\tau}{R^2}\right) + \exp\left(-\mu_n^2 \frac{a\tau}{R^2}\right) \times \\ &\times \left[D_n(0) + \int_0^\tau f_n(x) \exp\left(-\mu_n^2 \frac{ax}{R^2}\right) dx + \beta_n \frac{a\mu_n^2}{R^2} \int_0^\tau q(x) \exp\left(\mu_n^2 \frac{ax}{R^2}\right) dx \right]. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Коэффициенты $D_n(0)$ определяются из начального условия, записанного для функции $\Theta_1(r, 0)$:

$$\Theta_1(r, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n(0) \frac{\sin \mu_n r / R}{r} = f_0(r) - \frac{q_0 r^2}{2\lambda R} - \Theta_0. \quad (3.47)$$

Умножая обе части равенства (3.47) на $r \sin \mu_n r / R$ и интегрируя от 0 до R , получаем

$$D_n(0) = \frac{\int_0^R r f_0(r) \sin \mu_n r / R dr - \frac{q_0}{2\lambda R} \int_0^R r^2 \sin \mu_n r / R dr}{\|\sin \mu_n r / R\|^2} =$$

$$= \frac{2}{R \sin^2 \mu_n} \int_0^R r f_0(r) \sin \mu_n r / R dr - \beta_n q_0 = \gamma_n - \beta_n q_0.$$

С учетом последнего выражения решение (3.45) переписывается следующим образом:

$$D_n(\tau) = \exp\left(-\mu_n^2 \frac{a\tau}{R^2}\right) \left[\gamma_n + \int_0^\tau f_n(x) \exp\left(\mu_n^2 \frac{ax}{R^2}\right) dx - \right.$$

$$\left. - \beta_n q(\tau) \exp\left(\mu_n^2 \frac{a\tau}{R^2}\right) + \beta_n \frac{a\mu_n^2}{R^2} \int_0^\tau q(x) \exp\left(\mu_n^2 \frac{ax}{R^2}\right) dx \right]. \quad (3.48)$$

Определим выражение для $D_n(\tau)$ в случае $q(\tau) = q_0 = \text{const}$, $f_0 \equiv 0$ и $f_n(\tau) \equiv 0$. Из (3.48) получаем

$$D_n(\tau) = -\frac{2R^2 q_0}{\lambda \mu_n^2 \sin \mu_n} \exp\left(-\mu_n^2 \frac{a\tau}{R^2}\right) = -\frac{2q_0 R^2}{\lambda \mu_n^3 \cos \mu_n} \exp\left(-\mu_n^2 \frac{a\tau}{R^2}\right).$$

Общее решение задачи (3.41) запишется в виде ряда:

$$T(r, \tau) = \frac{q(\tau) r^2}{2\lambda R} - \frac{3q(\tau) R}{10\lambda} + \frac{3a}{\lambda R} \int_0^\tau q(x) dx + \frac{3}{cpR^3} \int_0^\tau \int_0^R r^2 q_v(r, x) dr dx +$$

$$+ \frac{3}{R^3} \int_0^R r^2 f_0(r) dr + \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\mu_n^2 \frac{a\tau}{R^2}\right) \left[\gamma_n + \int_0^\tau f_n(x) \exp\left(\mu_n^2 \frac{ax}{R^2}\right) dx - \right.$$

$$\left. - \beta_n q(\tau) \exp\left(\mu_n^2 \frac{a\tau}{R^2}\right) + \beta_n \frac{a\mu_n^2}{R^2} \int_0^\tau q(x) \exp\left(\mu_n^2 \frac{ax}{R^2}\right) dx \right] \frac{\sin \mu_n r / R}{r}. \quad (3.49)$$

Решение (3.49) при $\gamma_n = 0$, $f_n(\tau) \equiv 0$, $q(\tau) = q_0 = \text{const}$ переходит в известное решение о нагреве шара постоянным тепловым потоком без внутренних источников теплоты:

$$T_1(r, \tau) = \frac{q_0 r^2}{2\lambda R} - \frac{3q_0 R}{10\lambda} + \frac{3aq_0 \tau}{\lambda R} - \frac{2R^2 q_0}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \mu_n r / R}{\mu_n^2 r \sin \mu_n} \exp \left(-\mu_n^2 \frac{a\tau}{R^2} \right) = \\ = \frac{q_0 R}{\lambda} \left[\frac{3a\tau}{R^2} - \frac{3R^2 - 5r^2}{10R^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2R \sin \mu_n r / R}{\mu_n^2 \cos \mu_n \mu_n} \exp \left(-\mu_n^2 \frac{a\tau}{R^2} \right) \right].$$

Задача 3.1. Требуется найти распределение температуры внутри шара радиуса R с известным начальным распределением температуры T_0 . В начальный момент времени поверхность шара мгновенно охлаждается до постоянной температуры T_0 , которая поддерживается постоянной на протяжении всего процесса охлаждения.

Задача 3.2. Дан неограниченный полый цилиндр с радиусом внешней поверхности R и внутренней R_0 и с заданным начальным радиальным распределением температуры $f(r)$. В начальный момент времени $\tau = 0^+$ температура внешней и внутренней поверхностей цилиндра станет равной T_1 и T_2 соответственно и остается постоянной на протяжении всего процесса.

Найти распределение температуры в цилиндре в любой момент времени, если изотермы представляют собой коаксиальные цилиндрические поверхности, т. е. температура цилиндра зависит только от радиуса и времени.

Задача 3.3. Найти температуру стержня ($0 < x < l$), если на боковой поверхности его происходит конвективный теплообмен со средой нулевой температуры, а на концах заданы постоянные тепловые потоки. Предполагается, что начальная температура является произвольной функцией x [17].

Расчет нестационарного несимметричного температурного поля в многослойной пластине при граничных условиях III рода

[7]. Постановка задачи. Дана n -слойная неограниченная пластина с известным начальным распределением температуры. На границах между слоями осуществляется идеальный тепловой контакт (т. е. выполняются граничные условия сопряжения). На внешних граничных поверхностях заданы граничные условия III рода. Действием объемных и поверхностных источников теплоты пренебрегаем. Требуется найти распределение температуры по толщине многослойной пластины (рис. 3.5) в любой момент времени.

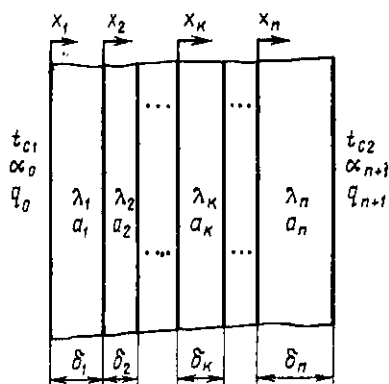


Рис. 3.5. Многослойная пластина

Температурное поле в системе разнородных пластин описывается следующей системой уравнений, представленной в безразмерном виде:

$$\frac{\partial \theta_i(\eta_i, Fo)}{\partial Fo} = k_i \frac{\partial^2 \theta_i(\eta_i, Fo)}{\partial \eta_i^2} \quad (i = 1, 2, \dots, n); \quad (3.50)$$

при начальных условиях

$$\Theta_i(\eta_i, Fo)|_{Fo=0} = f_i(\eta_i) \quad (i=1, 2, \dots, n); \quad (3.51)$$

при граничных условиях на внешних поверхностях системы

$$\left. \begin{aligned} -\partial\Theta_1(0, Fo)/\partial\eta_1 + Bi_1\Theta_1(0, Fo) &= 0; \\ \partial\Theta_n(\Delta_n, Fo)/\partial\eta_n + Bi_n[-D + \Theta_n(\Delta_n, Fo)] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.52)$$

и условиях сопряжения на поверхности стыковки слоев

$$\Theta_{i-1}(\Delta_{i-1}, Fo) = \Theta_i(0, Fo) \quad (i=2, \dots, n); \quad (3.53)$$

$$h_{i-1} \frac{\partial\Theta_{i-1}(\Delta_{i-1}, Fo)}{\partial\eta_{i-1}} = h_i \frac{\partial\Theta_i(0, Fo)}{\partial\eta_i} \quad (i=2, \dots, n), \quad (3.54)$$

где $k_i = a_i/a$, $h_i = \lambda_i/\lambda$ — безразмерные коэффициенты; $Fo = a\tau/\delta^2$ — число Фурье; $Bi_1 = a_0\delta/\lambda_1$, $Bi_n = a_{n+1}\delta/\lambda_n$ — число Био; $\eta_i = x_i/\delta$ ($i=1, 2, \dots, n$) — безразмерная координата i -го слоя пластины; $\Delta_i = \delta_i/\delta$ ($i=1, 2, \dots, n$) — толщина i -го слоя пластины; $\Theta_i(\eta_i, Fo) = (T_{\alpha} - T_i)/(T_{\alpha} - T_0)$ — относительная избыточная температура i -го слоя; $D = (T_{c_1} - T_c)/(T_c - T_0)$ — безразмерная температура; a — наименьшая температуропроводность; λ — теплопроводность слоя с температуропроводностью a .

Общее решение задачи (3.50) — (3.54), удовлетворяющее неоднородным граничным условиям, представим в виде суммы

$$\Theta_i(\eta_i, Fo) = R_i(\eta_i) + N_i(\eta_i, Fo) \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (3.55)$$

где функция $R_i(\eta_i)$ является решением краевой задачи стационарной теплопроводности при соответствующих неоднородных граничных условиях вида (3.52) и соответствующих условиях сопряжения вида (3.53), (3.54), а функция $N_i(\eta_i, Fo)$ является решением нестационарной краевой задачи с однородными граничными условиями и неоднородным начальным условием, которая будет записана ниже. Для нахождения функции $N_i(\eta_i, Fo)$ используем метод разделения переменных.

Итак, функции $R_i(\eta_i)$ должны удовлетворять системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$d^2R_i(\eta_i)/d\eta_i^2 = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

с $2n$ граничными условиями

$$\begin{aligned} -dR_1(0)/d\eta_1 + Bi_1R_1(0) &= 0; \\ dR_n(\Delta_n)/d\eta_n + Bi_n[-D + R_n(\Delta_n)] &= 0; \\ R_i(\Delta_{i-1}) &= R_i(0) \quad (i=1, 2, \dots, n); \\ h_{i-1}dR_{i-1}(\Delta_{i-1})/d\eta_{i-1} &= h_idR_i(0)/d\eta_i \quad (i=1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Решение этой системы представляется в виде

$$R_i(\eta_i) = A_i\eta_i + B_i \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

где для определения постоянных интегрирования A_i и B_i имеем следующие рекуррентные соотношения:

$$A_i = \frac{D}{h_i \chi}; \quad B_i = \frac{1}{Bi_i} A_1 + \frac{D}{\chi} \left(\sum_{k=1}^i \frac{\Delta_k}{h_k} - \frac{\Delta_i}{h_i} \right).$$

Здесь

$$\chi = \frac{1}{Bi_1 h_1} + \frac{1}{Bi_n h_n} + \sum_{k=1}^n \frac{\Delta_k}{h_k}.$$

Для нахождения функций $N_i(\eta_i, Fo)$, описывающих неустановившееся поле температур при однородных граничных условиях, имеем

$$\frac{\partial N_i(\eta_i, Fo)}{\partial Fo} = k_i \frac{\partial^2 N_i(\eta_i, Fo)}{\partial \eta_i^2} \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (3.56)$$

Начальные условия

$$N_i(\eta_i, Fo)|_{Fo=0} = f_i(\eta_i) - R_i(\eta_i) \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (3.57)$$

Граничные условия на внешних поверхностях:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial N_1(0, Fo)}{\partial \eta_1} + Bi_1 N_1(0, Fo) &= 0; \\ \frac{\partial N_n(\Delta_n, Fo)}{\partial \eta_n} + Bi_n N_n(\Delta_n, Fo) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.58)$$

Граничные условия сопряжения на внутренних поверхностях:

$$N_{i-1}(\Delta_{i-1}, Fo) = N_i(0, Fo) \quad (i=1, 2, \dots, n); \quad (3.59)$$

$$h_{i-1} \frac{\partial N_{i-1}(\Delta_{i-1}, Fo)}{\partial \eta_{i-1}} = h_i \frac{\partial N_i(0, Fo)}{\partial \eta_i} \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (3.60)$$

В силу однородности граничных условий частное решение каждого из уравнений системы (3.56) определяется в виде произведения двух функций, одна из которых, $X_i(\eta_i)$, зависит только от безразмерной координаты η_i , а другая представляет собой экспоненциальную функцию числа Фурье Fo :

$$N_i(\eta_i, Fo) = X_i(\eta_i) \exp\left(-\mu^2 \frac{\alpha \tau}{\delta^2}\right) \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (3.61)$$

Подставляя (3.61) в (3.56), получим частное решение в виде

$$N_i(\eta_i, Fo) = A_i \exp\left(-\mu^2 \frac{\alpha \tau}{\delta^2}\right) \sin\left(\frac{\mu \eta_i}{\sqrt{k_i}} + \varphi_i\right) \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Общее решение i -го уравнения системы (3.56) определяется в виде ряда

$$N_i(\eta_i, Fo) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} A_{i\kappa} \exp\left(-\mu_{\kappa}^2 \alpha \tau / \delta^2\right) \sin\left(\frac{\mu_{\kappa} \eta_i}{\sqrt{k_i}} + \varphi_{i\kappa}\right). \quad (3.62)$$

Используя граничные условия (3.59), (3.60) и общее решение (3.62), получим

$$A_{i-1\kappa} \sin \left(\frac{\mu_{\kappa} \Delta_{i-1}}{\sqrt{k_{i-1}}} + \varphi_{i-1\kappa} \right) = A_{i\kappa} \sin \varphi_{i\kappa} \quad (i=2, 3, \dots, n); \quad (3.63)$$

$$\frac{A_{i-1\kappa}}{\sqrt{k_{i-1}}} h_{i-1} \cos \left(\frac{\mu_{\kappa} \Delta_{i-1}}{\sqrt{k_{i-1}}} + \varphi_{i-1\kappa} \right) = \frac{A_{i\kappa}}{\sqrt{k_i}} h_i \cos \varphi_{i\kappa} \quad (i=2, 3, \dots, n). \quad (3.64)$$

Исключая $A_{i\kappa}$ ($i=1, 2, \dots, n$) в уравнениях (3.63), (3.64), получим характеристическую систему в виде цепочного трансцендентного уравнения, определяющую собственные числа μ_{κ} и постоянные $\varphi_{2\kappa}, \dots, \varphi_{n-1\kappa}$:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{k_1}}{h_1} \operatorname{tg} \left(\frac{\mu_{\kappa} \Delta_1}{\sqrt{k_1}} + \varphi_{1\kappa} \right) &= \frac{\sqrt{k_2}}{h_2} \operatorname{tg} \varphi_{2\kappa}; \\ \frac{\sqrt{k_{i-1}}}{h_{i-1}} \operatorname{tg} \left(\frac{\mu_{\kappa} \Delta_{i-1}}{\sqrt{k_{i-1}}} + \varphi_{i-1\kappa} \right) &= \frac{\sqrt{k_i}}{h_i} \operatorname{tg} \varphi_{i\kappa}; \\ \frac{\sqrt{k_{n-1}}}{h_{n-1}} \operatorname{tg} \left(\frac{\mu_{\kappa} \Delta_{n-1}}{\sqrt{k_{n-1}}} + \varphi_{n-1\kappa} \right) &= \frac{\sqrt{k_n}}{h_n} \operatorname{tg} \varphi_{n\kappa}. \end{aligned}$$

Значения постоянных $\varphi_{1\kappa}, \varphi_{n\kappa}$ нетрудно найти, подставляя в граничные условия (3.58) общее решение (3.62):

$$\begin{aligned} \varphi_{1\kappa} &= -\operatorname{arctg} \left(\frac{\mu_{\kappa}}{\operatorname{Bi}_1 \sqrt{k_1}} \right); \\ \varphi_{n\kappa} &= \operatorname{arctg} \left(\frac{\mu_{\kappa}}{\operatorname{Bi}_n \sqrt{k_n}} \right) - \frac{\mu_{\kappa} \Delta_n}{\sqrt{k_n}}. \end{aligned}$$

Используя уравнение (3.63), можно получить следующие соотношения для определения коэффициентов $A_{i\kappa}$:

$$A_{i-1\kappa} = M_{i-1\kappa} A_{1\kappa} \quad (i=3, \dots, n),$$

где $M_{1\kappa} = 1$;

$$M_{i\kappa} = \frac{\prod_{r=1}^{i-1} \sin \left(\frac{\mu_{\kappa} \Delta_r}{\sqrt{k_r}} + \varphi_{r\kappa} \right)}{\prod_{r=1}^i \sin \varphi_{r\kappa}}, \quad \sin \varphi_{r\kappa} \neq 0.$$

С учетом полученных соотношений общее решение (3.62) запишется в виде

$$N_i(\eta_i, Fo) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} A_{i\kappa} M_{i\kappa} \exp\left(-\mu_{\kappa}^2 \frac{a\tau}{\delta^2}\right) \sin\left(\frac{\mu_{\kappa}\eta_i}{\sqrt{k_i}} + \varphi_{i\kappa}\right) \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (3.65)$$

Произвольную постоянную $A_{i\kappa}$ определим из условий ортогональности собственных функций $X_{i\kappa}(\eta_i)$ на отрезке $\sum_{i=1}^n \Delta_i$. Для рассматриваемой задачи это условие имеет вид

$$\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{a_i} \int_0^{\Delta_i} X_{i\kappa}(\eta_i) X_{i\rho}(\eta_i) d\eta_i = \begin{cases} \text{const при } \kappa=\rho, \\ 0 \text{ при } \kappa \neq \rho. \end{cases}$$

Из начальных условий (3.57) с учетом представлений решения (3.61) и (3.65) следует, что

$$N_i(\eta_i, 0) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} X_{i\kappa}(\eta_i) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} A_{i\kappa} M_{i\kappa} \sin\left(\frac{\mu_{\kappa}\eta_i}{\sqrt{k_i}} + \varphi_{i\kappa}\right). \quad (3.66)$$

Умножая (3.66) на $X_{i\kappa}(\eta_i)$ ($i=1, 2, \dots, n$) и используя условие ортогональности, получим

$$A_{i\kappa} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{a_i} M_{i\kappa} \int_0^{\Delta_i} N_i(\eta_i, 0) \sin\left(\frac{\mu_{\kappa}\eta_i}{\sqrt{k_i}} + \varphi_{i\kappa}\right) d\eta_i}{\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{a_i} M_{i\kappa}^2 \int_0^{\Delta_i} \sin^2\left(\frac{\mu_{\kappa}\eta_i}{\sqrt{k_i}} + \varphi_{i\kappa}\right) d\eta_i}.$$

Таким образом, температурное поле в многослойной пластине описывается суммой функций $R_i(\eta_i)$ и $N_i(\eta_i, Fo)$ ($i=1, 2, \dots, n$).

Рассмотрим один из частных случаев, получающихся из вышеописанного решения, а именно задачу нестационарной теплопроводности при постоянном начальном распределении температуры $\Theta_i(\eta_i, 0) = f_i(\eta_i) = 1$, равных температурах омывающих сред $T_c = T_{c*}$ и граничных условиях I и III родов.

Поскольку $T_{c1} = T_{c*}$, то коэффициент $D=0$, поэтому $R_i(\eta_i)$ в (3.57) равна нулю и нестационарное температурное поле будет обуславливаться только неустановившимся состоянием, которое описывается общим решением (3.65), где постоянные μ_{κ} , $\varphi_{1\kappa}$, $\dots$, $\varphi_{n\kappa}$ определяются из ранее приведенных формул, а постоянная $A_{i\kappa}$ — из последнего соотношения при $N_i(\eta_i, 0) = 1$. Полагая в условиях (3.58) $Bi_1 = \infty$, $Bi_n = \infty$ ($Bi_1 = \infty$, $Bi_n \neq \infty$), получим решение поставленной краевой задачи при граничных условиях I (смешанных граничных

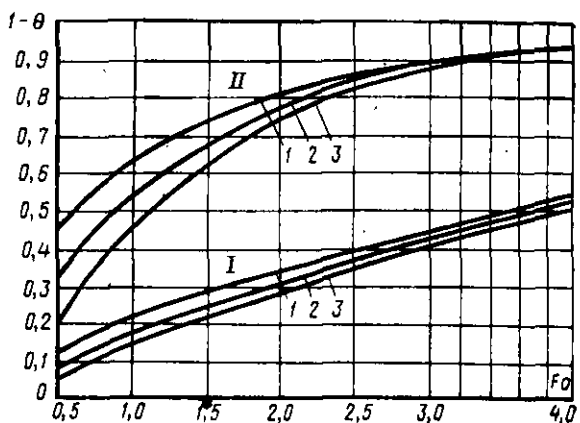


Рис. 3.6. Зависимости $1 - \theta$ от Fo для двухслойной пластины при симметричных граничных условиях

III рода:

1 — $Bi_1 = 0.2$; II — $Bi_1 = 1$; 1 — $\eta_1 = \Delta_1$; 2 — $\eta_1 = \Delta_1/2$; 3 — $\eta_1 = \Delta_1$

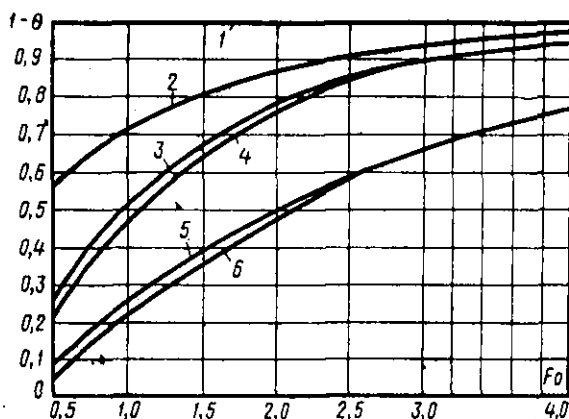


Рис. 3.7. Зависимости $1 - \theta$ от Fo для двухслойной пластины при смешанных граничных условиях I и III родов ($Bi_2 = \infty$):

1 — $Bi_1 = 0.1$; 2 — $Bi_1 = 0.2$; $\eta_1 = \Delta_1/2$; 3 — $Bi_1 = 0.2$, $\eta_1 = \Delta_1$; 4 — $Bi_1 = 0.2$, $\eta_1 = \Delta_1$; 5 — $Bi_1 = 0.1$, $\eta_1 = \Delta_1$; 6 — $Bi_1 = 0.1$, $\eta_1 = \Delta_1$

условиях I и III) рода. В этом случае общее решение также имеет вид (3.65), где $A_{1\kappa}$ определяется, как и прежде, при $N_1(\eta_1, 0)=1$, а постоянные $\mu_\kappa, \varphi_{2\kappa}, \dots, \varphi_{n-1\kappa}$ — из цепочного характеристического уравнения с учетом следующих соотношений для $\varphi_{1\kappa}, \varphi_{n\kappa}$:
границные условия I рода

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{1\kappa} &= \mu_\kappa, \\ \varphi_{n\kappa} &= \mu_\kappa - \frac{\mu_\kappa \Delta_n}{\sqrt{k_n}} \end{aligned} \right\} \kappa=1, 2, \dots$$

смешанные граничные условия I и III родов

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{1\kappa} &= \mu_\kappa, \\ \varphi_{n\kappa} &= -\arctg\left(\frac{\mu_\kappa}{Bi_n \sqrt{k_n}}\right) - \frac{\mu_\kappa}{\sqrt{k_n}} \end{aligned} \right\} \kappa=1, 2, \dots$$

В качестве примера проведем численный расчет нестационарного температурного поля в двухслойной пластине, изготовленной из титана (1-й слой) и стали (2-й слой) при следующих данных:

Титан	$\delta_1=0,004$ м;	$a_1=6 \cdot 10^{-6}$ м ² /с;	$\lambda_1=16,24$ Вт/(м·К)
Сталь	$\delta_2=0,002$ м;	$a_2=12,5 \cdot 10^{-6}$ м ² /с;	$\lambda_2=45,24$ Вт/(м·К)

Для расчетов построен алгоритм численного нахождения собственных чисел и нестационарных температурных полей двухслойных пластин для ЭЦВМ М-222 в трансляторе ТА-1М. Результаты расчетов представлены на рис. 3.6, 3.7, 3.8. На рис. 3.6 показано влияние величины критерия Био на характер распределения температур в двухслойной пластине при симметричных граничных условиях

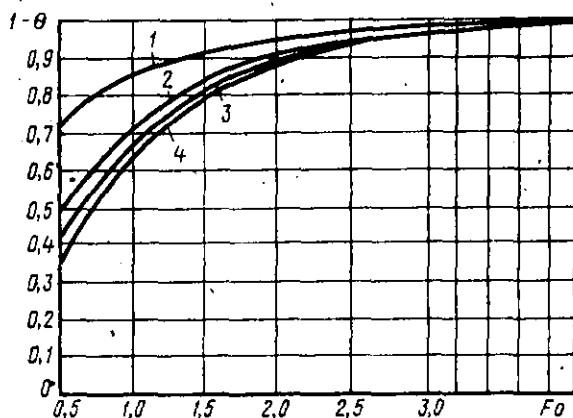


Рис. 3.8. Зависимости $1 - \theta$ от Fo для двухслойной пластины при смешанных граничных условиях I и III родов ($Bi_1=2,0$; $Bi_2=0$):

1 — $\eta_1 = 0$; 2 — $\eta_1 = \Delta_1/2$; 3 — $\eta_1 = 0$; 4 — $\eta_1 = \Delta_1$.

III рода на внешних поверхностях. Поле температур двухслойной пластины при смешанных граничных условиях (I и III родов) показано на рис. 3.7.

Рис. 3.8 иллюстрирует процесс теплообмена двухслойной пластины при смешанных граничных условиях I и III родов на ее внешних поверхностях.

Подводя итоги, следует отметить значительные трудности применения метода разделения переменных при неоднородных граничных условиях и при граничных условиях сопряжения (IV рода). Метод Фурье может быть использован для решения задач теплопроводности в неограниченной области, если вместо суммирования частных решений по индексу, пробегающему целые значения, провести интегрирование по непрерывно изменяющемуся параметру. Непосредственное решение краевых задач методом Фурье в полуограниченных областях невозможно, за исключением тех случаев, когда спектр собственных значений соответствующей задачи Штурма — Лиувилля является дискретным.

При решении задач стационарной теплопроводности основная идея метода Фурье состоит в том, что исходная краевая задача для уравнения в частных производных сводится к двум или трем (в зависимости от числа пространственных независимых переменных) обыкновенным дифференциальным уравнениям, решение которых не вызывает особых затруднений.

Задача 3.4. Дан неограниченный цилиндр радиуса R с однородным распределением температуры в начальный момент времени. Цилиндр нагревается постоянным тепловым потоком равномерно по всей поверхности. Найти распределение температуры по радиусу цилиндра в любой момент времени.

Задача 3.5. Найти температуру неограниченной круглой цилиндрической трубы $R_1 < r < R_2$, если ее начальная температура равна $f(r, \varphi)$ ($0 < \varphi < 2\pi$), а на внешней и внутренней поверхностях происходит конвективный теплообмен со средой, температура которой равна нулю [17].

§ 3.2. Метод функций источников (функций Грина)

Сущность метода функций источника заключается в том, что любой процесс распространения теплоты в теле можно представить в виде суммы процессов выравнивания температур, вызываемых действием множества элементарных количеств теплоты (источников), распределенных в пространстве и времени.

1. Элементарными решениями метода функций источников являются: для одномерного пространства функция точечного мгновенного источника Q'

$$G_0(x, x', \tau, \tau') = \frac{Q'}{2c\rho \sqrt{\pi a(\tau - \tau')}} \exp \left[-\frac{(x - x')^2}{4a(\tau - \tau')} \right]; \quad (3.67)$$

функция точечного мгновенного диполя Q''

$$\frac{\partial G_0(x, x', \tau, \tau')}{\partial x'} = \frac{Q''(x - x')}{4c\rho(\tau - \tau')a \sqrt{\pi a(\tau - \tau')}} \exp \left[-\frac{(x - x')^2}{4a(\tau - \tau')} \right];$$

для случая пространства m измерений функция точечного мгновенного источника Q'

$$G_0(\rho, \rho', \tau, \tau') = \frac{Q'}{c\rho} \left(\frac{1}{2 \sqrt{\pi a(\tau - \tau')}} \right)^m \exp \left[-\frac{r^2}{4a(\tau - \tau')} \right], \quad (3.68)$$

где

$$r = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + \dots + (x_m - x'_m)^2};$$

функция точечного мгновенного диполя Q'' с осью $\vec{n}'$

$$\frac{\partial G_0(p, p', \tau, \tau')}{\partial n'} = \frac{Q''}{c\rho} \left(\frac{1}{2\sqrt{a\pi(\tau-\tau')}} \right)^n \frac{r \cos \varphi'}{2a(\tau-\tau')} \exp \left[-\frac{r^2}{4a(\tau-\tau')} \right],$$

где φ' — угол между векторами $\vec{n}'$ и $p'\vec{p}$ (рис. 3.9). В одномерной задаче $\cos \varphi' = \pm 1$.

2. Применение функции точечного мгновенного источника (диполя) позволяет определить температуру в точке p неограниченного пространства в момент времени τ , полученную от действия точечного мгновенного источника (диполя) теплоты с объемной плотностью теплового потока Q' , помещенного в точку p' в момент времени τ' . При этом полагаем, что в момент времени $\tau=0$ в пространстве Ω температура $T=0$.

Функция $G_0(p, p', \tau, \tau')$ удовлетворяет уравнению теплопроводности по переменным p, τ , что можно проверить непосредственным дифференцированием. Поэтому функцию $G_0(p, p', \tau, \tau')$, определяемую формулами (3.67), (3.68), называют еще фундаментальным решением уравнения теплопроводности.

Выясним еще некоторые свойства функции $G_0(x, x', \tau, \tau')$, определяемой формулой (3.67).

Функция источника $G_0(x, x', \tau, \tau')$ обладает свойством симметрии по пространственной координате $G_0(x, x', \tau, \tau') = G_0(x', x, \tau, \tau')$, т. е. действие в точке x источника, помещенного в точку x' , равно действию в точке x' такого же источника, находящегося в точке x .

Нетрудно убедиться в том, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_0(x, x', \tau, \tau') dx = Q'/(c\rho). \quad (3.69)$$

В самом деле, если положить

$$\xi = \frac{(x-x')}{2\sqrt{a(\tau-\tau')}},$$

то

$$d\xi = dx / [2\sqrt{a(\tau-\tau')}].$$

Известно, что $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\xi^2) d\xi = \sqrt{\pi}$, откуда и получим требуемое.

Формула (3.69) показывает, что количество теплоты на оси x не меняется с течением времени.

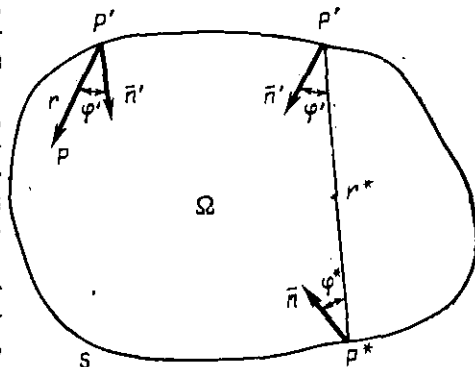


Рис. 3.9. К методу функций источников

Для того чтобы представить графически зависимость функции G_0 от координат, предположим, что $Q'/(c\rho)=1$, и введем новый аргумент $\eta=a(\tau-\tau')$, тогда для G_0 получим зависимость

$$G_0(x, x', \eta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\eta}} \exp\left[-(x-x')^2/(4\eta)\right].$$

На рис. 3.10 представлен график функции G_0 в зависимости от $x-x'$ для различных значений η . Из рисунка видно, что для малых

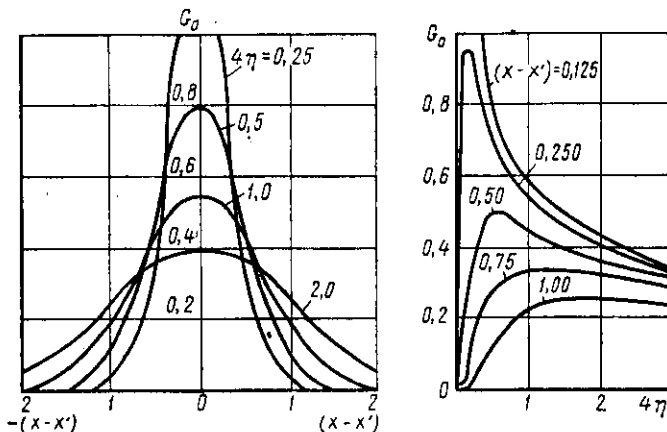


Рис. 3.10. Распределение температур, описываемое функцией точечного мгновенного источника

значений $\tau-\tau' > 0$ почти вся теплота сосредоточена в малой окрестности точки x' и в момент времени $\tau=\tau'$ все количество теплоты находится в точке x' ($x-x'=0$). Температура в точке, где выделяется теплота, неограниченно велика для малых значений η , в остальных точках тела температура $G_0=0$ при $\eta=0$, хотя G_0 остается отличной от нуля для сколь угодно малых моментов времени.

Подобный результат получается в связи с тем, что при выводе уравнения теплопроводности предполагают, что теплота имеет бесконечную скорость распространения. Функция точечного мгновенного диполя описывает более сложное физическое явление.

Если в момент времени $\tau=\tau'$ в точке p'' поместить точечный мгновенный источник теплоты интенсивностью $Q'=1/l$, а в точке p' поместить точечный мгновенный сток теплоты такой же интенсивности (l — расстояние между точками p'' и p'), то температура в точке p в момент времени τ при условии $c\rho=1$ определится выражением

$$T(p, \tau) = [G_0(p, p'', \tau, \tau') - G_0(p, p', \tau, \tau')]/l.$$

При неограниченном приближении p'' к точке p' вдоль отрезка p' , выходящего из точки p' , получим функцию точечного мгновенного диполя

$$\lim_{p'' \rightarrow p'} T(p, \tau) = \frac{\partial}{\partial n} G_0(p, p', \tau, \tau').$$

Для случая одномерного пространства распределение температуры, вызываемое точечным мгновенным диполем, представлено на рис. 3.11.

Качественная картина функций источника и диполя, данная выше, имеет место и для случая пространства m измерений.

3. Решение задачи теплопроводности методом источников заключается в правильном выборе и распределении этих источников. Существует три основных способа задания источников: метод выравнивания, метод отражений, метод непрерывно действующих источников.

Метод выравнивания позволяет получить распределение температур в неограниченном теле в различные моменты времени

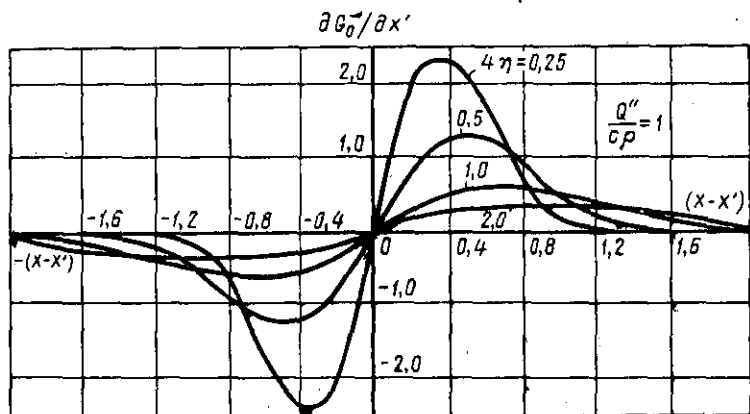


Рис. 3.11. Распределение температур, описываемое функцией точечного мгновенного диполя

в виде суммы распределений температур, вызываемых действием точечных мгновенно действующих источников, распределенных в объеме тела. Пусть $\psi(x)$ характеризует распределение температур в неограниченном теле в начальный момент времени. Количество теплоты, находящееся в плоском слое толщиной dx' , равно $c\rho\psi(x')dx'$, следует рассматривать как мгновенно действующий источник, сосредоточенный в плоскости x' в момент времени $t'=0$. Тогда распределение температуры, вызванное действием этого источника, определим из выражения (3.67), приняв

$$Q' = c\rho\psi(x')dx'.$$

Суммируя действие всех источников, получим искомое распределение температур в теле:

$$T(x, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x') \frac{1}{2\sqrt{\pi a \tau}} e^{-\frac{(x-x')^2}{4a\tau}} dx'. \quad (3.70)$$

Иными словами, функция точечного мгновенного источника дает возможность найти решение задачи Коши для однородного уравнения теплопроводности:

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial \tau} = \Delta T, \quad T|_{\tau=0} = \psi(\rho). \quad (3.71)$$

Решение задачи (3.71) существует в случае одномерного пространства в виде формулы (3.70), а двух- и трехмерного пространств — соответственно в виде равенств

$$T(x, y, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x', y') \left(\frac{1}{2\sqrt{a\pi\tau}} \right)^2 e^{-\frac{r^2}{4a\tau}} dx' dy' \\ (r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}); \quad (3.72)$$

$$T(x, y, z, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x', y', z') \left(\frac{1}{2\sqrt{a\pi\tau}} \right)^3 e^{-\frac{r^2}{4a\tau}} dx' dy' dz' \\ (r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}). \quad (3.73)$$

Выражения (3.70), (3.72), (3.73) называются *формулами Пуассона*.

Метод непрерывно действующих источников. При непрерывно действующих источниках (диполях) теплоты можно выразить заданные условия нагрева в виде суммы мгновенно действующих источников (диполей) $q(\tau)$, распределенных во времени. Температурное поле, вызываемое непрерывно действующим источником (диполем), для одномерного пространства определяется формулами

$$T(x, \tau) = \int_0^{\tau} \frac{q(\tau')}{2c\rho \sqrt{\pi a (\tau - \tau')}} \exp \left[-\frac{(x-x')^2}{4a(\tau - \tau')} \right] d\tau'; \quad (3.74)$$

$$T(x, \tau) = \int_0^{\tau} \frac{(x-x') q(\tau')}{4\lambda (\tau - \tau') \sqrt{\pi a (\tau - \tau')}} e^{-\frac{(x-x')^2}{4a(\tau - \tau')}} d\tau'. \quad (3.75)$$

Для многомерного пространства формулы имеют аналогичный вид.

Сущность метода отражений сводится к продолжению ограниченного тела по пространственным координатам и подбору дополнительных источников в продолженных областях таким образом, чтобы удовлетворялись условия на ограничивающих тело поверхностях.

Использование метода источников позволяет получить решения задач в наиболее простом виде в случае неограниченных размеров тела для начальных периодов распространения теплоты.

Полубесконечное тело при граничных условиях I и II родов. а) Дано полубесконечное тело, ограниченное плоской поверхностью $x=0$. Начальная температура везде одинакова и равна 0.

При $\tau=0^+$ температура на поверхности мгновенно поднимается до значения T_S и далее поддерживается постоянной.

Решение получим, если в плоскости $x'=0$ поместим непрерывно действующий диполь интенсивностью $2\lambda T_S$. Подставив в (3.75) вместо $q(\tau')$ его значение, получим

$$T(x, \tau) = \frac{T_S}{2\sqrt{\pi a}} \int_0^\tau \frac{x}{V(\tau-\tau')^3} e^{-\frac{x^2}{4a(\tau-\tau')}} d\tau'.$$

Полагая $\xi = x/(2\sqrt{a(\tau-\tau')})$, имеем

$$T(x, \tau) = T_S \operatorname{erfc}\left(x/(2\sqrt{a\tau})\right),$$

где $\operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{a\tau}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_u^\infty e^{-\xi^2} d\xi$ — дополнительный интеграл вероятности; здесь $u = x/(2\sqrt{a\tau})$; $\operatorname{erfc} u = 1 - \operatorname{erf} u$, где $\operatorname{erf} u$ — функция ошибок Гаусса:

$$\operatorname{erf} u = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-\xi^2} d\xi.$$

Функция $\operatorname{erfc} u$ изменяется от 1 при $u=0$ до 0 при $u \rightarrow \infty$;

б) тепловой поток через поверхность $x=0$ постоянен и равен q_0 : $q=q_0$, $\tau > 0$; $q=0$, $\tau=0$.

Решение получим, поместив в плоскость $x'=0$ непрерывно действующий источник интенсивностью $2q_0$ и подставив в уравнение (3.74) его значение:

$$T(x, \tau) = \frac{q_0}{c\rho\sqrt{\pi a}} \int_0^\tau \frac{e^{-\frac{x^2}{4a(\tau-\tau')}}}{V\tau-\tau'} d\tau'.$$

Полагая $\xi = x/(2\sqrt{a(\tau-\tau')})$, получим

$$T(x, \tau) = \frac{q_0\sqrt{\tau}}{\sqrt{\lambda c\rho}} 2i \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{a\tau}},$$

где $i \operatorname{erfc} u = \int_u^\infty \operatorname{erfc} \xi d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} - u \operatorname{erfc} u$; $u = \frac{x}{2\sqrt{a\tau}}$.

Рассчитаем температурное поле по полученным аналитическим решениям. Пусть заданы следующие данные: $T_S=800$ К; $q_0=2200$ Вт/м²; $\lambda=37.2$ Вт/(м·К); $c=682$ Дж/(кг·К); $\rho=7800$ кг/м³.

Составим программу для расчета таблицы температур полуограниченного тела в точках $x=10^{-2}$; $5 \cdot 10^{-2}$; $9 \cdot 10^{-2}$; $13 \cdot 10^{-2}$; $17 \cdot 10^{-2}$ м при 10^{-2} $\tau=1, 2, 3, \dots, 20$ с на алгоритмическом языке ФОРТРАН-IV.

```

C      ТЕМПЕРАТУРА ПОЛУОГРАНИЧЕННОГО МАССИВА
DIMENSION T1 (17, 20), T2 (17, 20)
ВЫЧИСЛЕНИЕ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ
DATA F/60000./, S/0.01/, Q/22000./, TS/800./, AM
* /37.2/, R/78000./, C/682./, PI/3.141593/
A=AM/C/R
ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ТЕМПЕРАТУР В ТОЧКАХ
ПОЛУОГРАНИЧЕННОГО МАССИВА
DO 1 I=1, 17, 4
DO J=1, 20
T=F * J
H=S * I
U=H/(2. * SQRT(A * T))
C      ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ПЕРВОГО РОДА
T1(I, J)=TS * (1 - ERF(U))
C      ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ВТОРОГО РОДА
T2(I, J)=2. * Q * SQRT(T/AM/C/R) * EXP(-U) *
* EXP(-U)/SQRT(PI) - U * ERF(U))
C      ПЕЧАТЬ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТА В ВИДЕ ТАБЛИЦ
1  CONTINUE
DO 2 I=1, 17, 4
WRITE (3, 3) I
WRITE (3, 4)
WRITE (3, 5)
WRITE (3, 6)
WRITE (3, 7)
DO 9 J=1, 20
WRITE (3, 8) T1(I, J), T2(I, J)
8  FORMAT (39X, 'I', 3X, E11.4, 3X, 'T', 3X, E11.4, 3X, 'I')
9  CONTINUE
WRITE (3, 5)
WRITE (3, 7)
3  FORMAT (///40X, 'ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ
* ДЛЯ X=', I2)
4  FORMAT ('O', 38X, 37('—'))
5  FORMAT (39X, 'I', 17X, 'T', 17X, 'I')
6  FORMAT (39X, 'I', 7X, T1, 8X, 'T', 7X, T2, 8X, 'I')
7  FORMAT (39X, 37('—'))
2  CONTINUE
STOP
END

```

Список идентификаторов. A — температуропроводность a ; Q — плотность теплового потока q_0 ; TS — температура поверхности тела T_S ; AM — теплопроводность λ ; R — плотность тела ρ ; C — удельная теплоемкость c ; PI — число π ; F — шаг по временной переменной τ ; S — шаг по пространственной переменной x ; T , H — значения переменных τ и x , в которых вычисляются температуры; $T1$, $T2$ — массивы значений температур тела при граничных условиях I и II родов соответственно.

В этой программе встроенная функция ERF вычисляет значения функции $erf u$. Результаты расчетов представлены в табл. 3.2 и 3.3.

Таблица 3.2

Поле температур полуограниченного массива
(граничные условия I рода)

$\frac{x}{m}$ $10^{-3} \tau, c$	$1 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$9 \cdot 10^{-3}$	$13 \cdot 10^{-3}$	$17 \cdot 10^{-3}$
1	0,7780E 03	0,6904E 03	0,6049E 03	0,5230E 03	0,4460E 03
2	0,7844E 03	0,7223E 03	0,6601E 03	0,6009E 03	0,5427E 03
3	0,7873E 03	0,7365E 03	0,6862E 03	0,6365E 03	0,5879E 03
4	0,7890E 03	0,7450E 03	0,7013E 03	0,6580E 03	0,6154E 03
5	0,7902E 03	0,7508E 03	0,7116E 03	0,6728E 03	0,6345E 03
6	0,7910E 03	0,7551E 03	0,7193E 03	0,6838E 03	0,6486E 03
7	0,7917E 03	0,7584E 03	0,7253E 03	0,6923E 03	0,6596E 03
8	0,7922E 03	0,7611E 03	0,7301E 03	0,6992E 03	0,6686E 03
9	0,7927E 03	0,7633E 03	0,7340E 03	0,7049E 03	0,6760E 03
10	0,7930E 03	0,7652E 03	0,7374E 03	0,7098E 03	0,6823E 03
11	0,7934E 03	0,7668E 03	0,7403E 03	0,7139E 03	0,6877E 03
12	0,7936E 03	0,7682E 03	0,7429E 03	0,7176E 03	0,6924E 03
13	0,7939E 03	0,7695E 03	0,7451E 03	0,7208E 03	0,6966E 03
14	0,7941E 03	0,7706E 03	0,7471E 03	0,7237E 03	0,7003E 03
15	0,7943E 03	0,7716E 03	0,7489E 03	0,7262E 03	0,7037E 03
16	0,7945E 03	0,7725E 03	0,7505E 03	0,7286E 03	0,7067E 03
17	0,7947E 03	0,7733E 03	0,7520E 03	0,7307E 03	0,7095E 03
18	0,7948E 03	0,7741E 03	0,7533E 03	0,7326E 03	0,7120E 03
19	0,7949E 03	0,7747E 03	0,7546E 03	0,7344E 03	0,7144E 03
20	0,7951E 03	0,7754E 03	0,7557E 03	0,7361E 03	0,7165E 03

Таблица 3.3

Температурное поле полуограниченного массива
(граничные условия II рода)

$\frac{x}{m}$ $10^{-3} \tau, c$	$1 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$9 \cdot 10^{-3}$	$13 \cdot 10^{-3}$	$17 \cdot 10^{-3}$
1	0,1299E 02	0,1060E 02	0,8645E 01	0,7041E 01	0,5732E 01
2	0,1866E 02	0,1619E 02	0,1404E 02	0,1218E 02	0,1055E 02
3	0,2300E 02	0,2050E 02	0,1826E 02	0,1627E 02	0,1449E 02
4	0,2667E 02	0,2414E 02	0,2185E 02	0,1978E 02	0,1790E 02
5	0,2989E 02	0,2735E 02	0,2503E 02	0,2290E 02	0,2094E 02
6	0,3281E 02	0,3026E 02	0,2791E 02	0,2573E 02	0,2373E 02
7	0,3550E 02	0,3294E 02	0,3056E 02	0,2835E 02	0,2630E 02
8	0,3799E 02	0,3543E 02	0,3303E 02	0,3080E 02	0,2871E 02
9	0,4034E 02	0,3777E 02	0,3536E 02	0,3310E 02	0,3098E 02
10	0,4256E 02	0,3998E 02	0,3756E 02	0,3528E 02	0,3314E 02
11	0,4467E 02	0,4209E 02	0,3965E 02	0,3736E 02	0,3520E 02
12	0,4668E 02	0,4410E 02	0,4165E 02	0,3935E 02	0,3716E 02
13	0,4862E 02	0,4603E 02	0,4358E 02	0,4125E 02	0,3906E 02
14	0,5048E 02	0,4789E 02	0,4543E 02	0,4309E 02	0,4088E 02
15	0,5227E 02	0,4968E 02	0,4721E 02	0,4478E 02	0,4264E 02
16	0,5401E 02	0,5141E 02	0,4894E 02	0,4659E 02	0,4434E 02
17	0,5569E 02	0,5309E 02	0,5062E 02	0,4825E 02	0,4600E 02
18	0,5732E 02	0,5472E 02	0,5234E 02	0,4987E 02	0,4761E 02
19	0,5841E 02	0,5631E 02	0,5382E 02	0,5145E 02	0,4917E 02
20	0,6046E 02	0,5786E 02	0,5537E 02	0,5298E 02	0,5070E 02

4. Метод источников является разновидностью интегрального метода решения задач теплопроводности, заключающегося в переходе от дифференциальных уравнений в частных производных к интегральным уравнениям.

Интегральная форма решения уравнения теплопроводности

$$L\{T\} = \frac{\partial T}{\partial \tau} - a \Delta T = \frac{q_v(p, \tau)}{c\rho}$$

(где Δ — m -мерный оператор Лапласа по координатам m -мерного пространства; p — точка конечной области Ω m -мерного пространства) имеет вид [81]

$$T(p, \tau) = \int_{\Omega} [T(p', \tau') \delta_0]_{\tau'=0} d\Omega' - a \int_0^{\tau} \int_S \left(\delta_0 \frac{\partial T}{\partial n'} - T \frac{\partial \delta_0}{\partial n'} \right) dS' d\tau' + \int_0^{\tau} \int_{\Omega} \frac{q_v(p', \tau')}{c\rho} \delta_0 d\Omega' d\tau', \quad (3.76)$$

где n' — внутренняя нормаль к границе S области Ω в точке p' , причем в случае одномерного пространства ($m=1$) интеграл по S следует заменить выражением

$$\left(\delta_0 \frac{\partial T}{\partial n'} - T \frac{\partial \delta_0}{\partial n'} \right)_S = \left(\delta_0 \frac{\partial T}{\partial x'} - T \frac{\partial \delta_0}{\partial x'} \right) \Big|_{x'=x_1}^{x'=x_2},$$

где x_1 и x_2 — левый и правый концы отрезка Ω ; δ_0 — функция единичного мгновенного источника, получаемая из G_0 при $Q'(c\rho)=1$.

Выражение (3.76) нельзя использовать для решения краевых задач, так как для вычисления интеграла по поверхности S в правой части уравнения надо знать значения температур T и температурных градиентов $\partial T / \partial n$ вдоль поверхности S . В действительности же задание краевых условий предполагает знание либо температур, либо градиентов. Поэтому выражение (3.76) необходимо преобразовать так, чтобы исключить значения температур или температурных градиентов, не заданных в краевых условиях. Это можно осуществить, применив вместо фундаментального решения уравнения теплопроводности G_0 функции Грина G .

5. Пусть $V(p, p', \tau, \tau')$, как функция точки p и времени τ , является решением однородного уравнения теплопроводности. Пусть $V(p, p', \tau, \tau')$ дважды непрерывно дифференцируема по координатам точки p в области Ω , непрерывно дифференцируема по времени τ и непрерывна в замкнутой области $\bar{\Omega} \cup [0, \tau]$.

Тогда если функция

$$G(p, p', \tau, \tau') = \delta_0(p, p', \tau, \tau') + V(p, p', \tau, \tau') \quad (3.77)$$

при $\tau - \tau' = +0$ в области Ω вне точки $p=p'$ обращается в нуль, а на поверхности S области Ω удовлетворяет однородным граничным условиям какой-либо из краевых задач для уравнения тепло-

проводности в области Ω , то она называется функцией Грина соответствующей краевой задачи.

Так же как и функция мгновенного точечного источника, функция Грина имеет простой физический смысл. Она дает распределение температур в области Ω в любой момент времени $\tau > \tau'$ при действии в момент времени τ' в точке p' единичного мгновенного источника теплоты при условии, что на границе S пространственной области во все моменты времени $\tau > \tau'$ имеют место физические условия, соответствующие однородным граничным условиям данной задачи, причем в момент времени τ' температура точек пространственной области Ω равна нулю.

Таким образом, используя функции Грина, можно записать решение краевых задач при граничных условиях: а) $T(p, \tau)|_S = \varphi(p, \tau)|_S - I$ рода, б) $\left. \frac{\partial T(p, \tau)}{\partial n} \right|_S = \varphi(p, \tau)|_S - II$ рода и в) $\left[\frac{\partial T(p, \tau)}{\partial n} - \alpha T(p, \tau) \right]_S = \eta(p, \tau)|_S - III$ рода в интегральной форме соответственно:

$$T(p, \tau) = \int_{\Omega} \psi(p') G(p, p', \tau, 0) d\Omega' + a \int_0^{\tau} \int_S \varphi(p', \tau') \frac{\partial G}{\partial n'} dS' d\tau' + \\ + \int_0^{\tau} \int_{\Omega} \frac{q_v(p', \tau')}{c\rho} G(p, p', \tau, \tau') d\Omega' d\tau'; \quad (3.78)$$

$$T(p, \tau) = \int_{\Omega} \psi(p') G(p, p', \tau, 0) d\Omega' - a \int_0^{\tau} \int_S G \varphi(p', \tau') dS' d\tau' + \\ + \int_0^{\tau} \int_{\Omega} \frac{q_v(p', \tau')}{c\rho} G(p, p', \tau, \tau') d\Omega' d\tau'; \quad (3.79)$$

$$T(p, \tau) = \int_{\Omega} \psi(p') G(p, p', \tau, 0) d\Omega' - a \int_0^{\tau} \int_S G \eta(p', \tau') dS' d\tau' + \\ + \int_0^{\tau} \int_{\Omega} \frac{q_v(p', \tau')}{c\rho} G(p, p', \tau, \tau') d\Omega' d\tau', \quad (3.80)$$

где $\psi(p)$ — заданное начальное распределение температуры.

В решениях (3.78), (3.79), (3.80) $G(p, p', \tau, \tau')$ — функция Грина краевой задачи для области Ω при граничных условиях I, II и III родов соответственно. Решения (3.78), (3.79), (3.80), вообще говоря, носят формальный характер, а при строгом математическом решении необходимо провести дополнительные исследования условий применимости интегральной формулы для оператора уравнения теплопроводности. Но, как правило, эти исследования приводят к положительному результату и вопрос о решении краевой задачи можно свести к нахождению соответствующих функций Грина.

Для ряда важных в практике случаев функции Грина найдены в явном виде [45].

К достоинствам метода функций Грина относят его универсальность, позволяющую применять его для решения краевых задач в общей постановке, например в случае нелинейных граничных условий [13].

Температурное поле квадранта плоскости. Применяя метод функций Грина, решить краевую задачу:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (x > 0, y > 0, \tau > 0); \quad (3.81)$$

$$T(x, y, 0) = f(x, y); \quad (3.82)$$

$$T(x, 0, \tau) = \varphi(x, \tau); \quad (3.83)$$

$$T(0, y, \tau) = \psi(y, \tau). \quad (3.84)$$

Прежде всего необходимо построить функцию Грина при граничных условиях I рода для четверти плоскости $x > 0, y > 0$. С этой целью в точке $p'_1(x', y')$, лежащей в четверти плоскости $x > 0, y > 0$, поместим единичный мгновенный источник

$$\delta_0(p, p'_1, \tau, \tau') = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi a(\tau - \tau')}} \right)^2 \exp \left[-\frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{4a(\tau - \tau')} \right].$$

Функция $\delta_0(p, p'_1, \tau, \tau')$ при $x \neq x', \tau - \tau' = +0$ обращается в нуль, а при $x = 0, \tau > \tau'$ отлична от нуля. Чтобы конструируемая функция Грина удовлетворяла однородному граничному условию (3.84), действие источника $\delta_0(p, p'_1, \tau, \tau')$ необходимо компенсировать единичным мгновенным стоком

$$-\delta_0(p, p'_2, \tau, \tau') = - \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi a(\tau - \tau')}} \right)^2 \exp \left[-\frac{(x + x')^2 + (y - y')^2}{4a(\tau - \tau')} \right],$$

который помещен в точке $p'_2(-x', y')$, симметричной с точкой $p'_1(x', y')$ относительно начала координат.

Чтобы удовлетворить однородному граничному условию по y (3.83), необходимо компенсировать действие источника в точке $p'_1(x', y')$; для этого в точке $p'_4(x', -y')$ поместим единичный мгновенный сток $-\delta_0(p, p'_4, \tau, \tau')$. В точке $p'_3(-x', -y')$ поместим единичный мгновенный источник $\delta_0(p, p'_3, \tau, \tau')$ для компенсации действия стоков в точках p'_2 и p'_4 . Наложение этих источников и стоков обеспечивает равенство нулю температуры на границе четверти плоскости и обращение ее в нуль вне точки $p = p'_1$ при $\tau - \tau' = 0$. Таким образом, функция Грина для данной задачи имеет вид

$$G(p, p', \tau - \tau') = \left[\frac{1}{2\sqrt{\pi a(\tau - \tau')}} \right]^2 \left\{ \exp \left[-\frac{(x - x')^2}{4a(\tau - \tau')} \right] - \exp \left[-\frac{(x + x')^2}{4a(\tau - \tau')} \right] \right\} \left\{ \exp \left[-\frac{(y - y')^2}{4a(\tau - \tau')} \right] - \exp \left[-\frac{(y + y')^2}{4a(\tau - \tau')} \right] \right\}.$$

Решение краевой задачи (3.81)–(3.84) получим в виде

$$T(x, y, \tau) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} G|_{\tau'=0} f(x', y') dx' dy' + \\ + a \int_0^{\tau} d\tau' \left[\int_0^{\infty} \psi(y', \tau') \frac{\partial G}{\partial x'} \Big|_{x'=0} dy' + \int_0^{\infty} \varphi(x', \tau') \frac{\partial G}{\partial y'} \Big|_{y'=0} dx' \right].$$

Задача 3.6. Начальная температура стержня $(-\infty < x < \infty)$ с теплоизолированной боковой поверхностью задана выражением

$$T(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < x < 0, \\ 1 & \text{при } +\infty > x > 0. \end{cases}$$

Найти распределение температуры $T(x, \tau)$ в стержне.

Задача 3.7. Требуется решить краевую задачу:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 < x, \tau < +\infty; \quad T(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < +\infty; \\ -\lambda \frac{\partial T(0, \tau)}{\partial x} = \varphi(\tau), \quad 0 < \tau < +\infty.$$

Задача 3.8. Построить функцию Грина мгновенного точечного источника и с ее помощью решить краевую задачу:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{q_0(x, \tau)}{c\rho}, \quad 0 < x < l, \tau > 0; \\ T(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < l; \quad T(l, \tau) = \varphi(\tau), \quad -\lambda \frac{\partial T(0, \tau)}{\partial x} = \psi(\tau).$$

Задача 3.9. Используя функцию Грина, решить краевые задачи для уравнения теплопроводности [17]

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \nabla^2 T(x, y, z, \tau) + \frac{q_0(x, y, z, \tau)}{c\rho} \\ (-\infty < x, z < +\infty, 0 < y, \tau < +\infty)$$

с начальным условием $T|_{\tau=0} = f(x, y, z)$ и с граничными условиями:

$$\text{а) } T|_{y=0} = \varphi(x, z, \tau); \quad \text{б) } -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = q(x, z, \tau); \\ \text{в) } -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = \alpha [T_c - T|_{y=0}],$$

где $T_c = \psi(x, z, \tau)$.

Задача 3.10. Построить функцию Грина мгновенного точечного источника теплоты для прямоугольного параллелепипеда $0 < x < l_1, 0 < y < l_2, 0 < z < l_3$. Рассмотреть случаи, когда поверхность параллелепипеда: а) поддерживается при нулевой температуре; б) теплоизолирована [17].

Для решения задач стационарной теплопроводности также можно применять метод функций Грина. Применение этого метода в стационарных задачах основано на использовании формулы Грина, являющейся следствием формулы Остроградского — Гаусса.

Рассмотрим область Ω , ограниченную снаружи замкнутой поверхностью S и изнутри — произвольно расположенной сферой s

(рис. 3.12) с радиусом ρ_0 , лежащей целиком внутри S , и пусть $U(x, y, z)$ и $V(x, y, z)$ — две произвольные дважды дифференцируемые функции. Тогда формула Грина для этой области имеет вид

$$\int_s \left(U \frac{\partial V}{\partial n_1} - V \frac{\partial U}{\partial n_1} \right) ds + \int_S \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS = \int_\Omega (U \Delta V - V \Delta U) d\Omega, \quad (3.85)$$

где $\bar{n}_1, \bar{n}$ — единичные векторы внешней нормали к s и S соответственно.

Введем определение функции Грина для задачи Дирихле (трехмерный случай). Обозначим через $r_{P_0 P} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$ расстояние между точкой $P_0(x_0, y_0, z_0)$, лежащей в центре объема, ограниченного сферической поверхностью s (рис. 3.12), и точкой $P(x, y, z)$, принадлежащей области S . Несложно проверить, что функция $1/r_{P_0 P}$ — гармоническая, т. е. удовлетворяет уравнению Лапласа во всех точках, за исключением точки P_0 , где она обращается в бесконечность.

Пусть функция $\omega(x, y, z)$ является решением краевой задачи

$$\Delta \omega = 0, \quad x, y, z \in \Omega, \quad \omega|_{x, y, z \in s} = -1/r_{P_0 P}, \quad P' \in S. \quad (3.86)$$

Тогда функция Грина G определяется равенством

$$G(x, y, z) = 1/r_{P_0 P} + \omega(x, y, z). \quad (3.87)$$

Функция Грина $G(x, y, z)$ является решением уравнения Лапласа $\Delta G = 0$ в области Ω при нулевых граничных условиях на поверхности S

$$G|_S = 0. \quad (3.88)$$

Для решения краевой задачи с граничными условиями 1 рода (задача Дирихле)

$$\Delta T(x, y, z) = 0, \quad x, y, z \in \Omega; \quad (3.89)$$

$$T(x', y', z') = f(x', y', z'), \quad x', y', z' \in S, \quad (3.90)$$

в формуле Грина (3.85) положим $U = G$, $V = T$. Тогда соотношение (3.85) с учетом (3.87), (3.88), (3.89), (3.90) принимает вид

$$\int_s \left(G \frac{\partial T}{\partial n_1} - T \frac{\partial G}{\partial n_1} \right) ds = \int_S f(p') \frac{\partial G}{\partial n} dS. \quad (3.91)$$

Интеграл слева можно представить в виде суммы двух интегралов:

$$I = I_1 + I_2 = \int_{\zeta} \left[\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial T}{\partial n_1} - T \frac{\partial}{\partial n_1} \left(\frac{1}{\rho_0} \right) \right] ds + \int_{\zeta} \left(\omega \frac{\partial T}{\partial n_1} - T \frac{\partial \omega}{\partial n} \right) ds.$$

Так как в области, ограниченной поверхностью s , функции ω и T тоже удовлетворяют уравнению Лапласа, то, применяя в этой области формулу Грина, получим, что интеграл $I_2 = 0$. Таким образом, нам остается вычислить значение интеграла I_1 :

$$I_1 = \frac{1}{\rho_0} \int_{\zeta} \frac{\partial T}{\partial n_1} ds - \frac{1}{\rho_0^2} \int_{\zeta} T ds.$$

Применяя теорему о среднем, имеем

$$I_1 = \frac{1}{\rho_0} 4\pi\rho_0^2 \left\langle \frac{\partial T}{\partial n_1} \right\rangle - \frac{1}{\rho_0^2} 4\pi\rho_0^2 \langle T \rangle, \quad (3.92)$$

где $\left\langle \frac{\partial T}{\partial n} \right\rangle$ и $\langle T \rangle$ — значения соответствующих функций в некоторой точке сферы s .

В пределе при $\rho_0 \rightarrow 0$ значение первого члена в (3.92) стремится к нулю пропорционально ρ_0 , а второго — к $4\pi T(P_0)$. Следовательно,

$$I = \int_{\zeta} \left(G \frac{\partial T}{\partial n_1} - T \frac{\partial G}{\partial n_1} \right) ds = -4\pi T(P_0)$$

и соотношение (3.91) принимает вид

$$4\pi T(P_0) = - \int_S f(P') \frac{\partial G}{\partial n} dS$$

или

$$T(P_0) = - \frac{1}{4\pi} \int_S f(P') \frac{\partial G}{\partial n} dS. \quad (3.93)$$

Так как точка $P_0(x_0, y_0, z_0)$ является центром произвольно расположенной сферы малого радиуса внутри области, ограниченной поверхностью S (т. е. произвольная точка области), то формула (3.93) дает решение задачи Дирихле (3.89), (3.90), если определена функция Грина. Однако ясно, что нахождение функции Грина не намного проще исходной задачи. Тем не менее для некоторых типов областей и ограничивающих их поверхностей функции Грина построены (см., например, [81, 100] и др.). Аналогично вышеизложенному могут быть построены функции Грина и решения краевых задач с граничными условиями других видов (см., например, [100]).

§ 3.3. Метод тепловых потенциалов

Тепловыми потенциалами простого и двойного слоев называются интегралы [81]:

$$U(p, \tau) = \int_0^{\tau} d\tau' \int_S X_1(p', \tau') a \delta_0(p, p', \tau, \tau') dS'; \quad (3.94)$$

$$V(p, \tau) = \int_0^{\tau} d\tau' \int_S X_2(p', \tau') a |\partial \delta_0(p, p', \tau, \tau') / \partial n'| dS'. \quad (3.95)$$

Здесь S — граница m -мерной пространственной области Ω ; $\bar{n}'$ — внутренняя нормаль к S ; $X_1(p', \tau')$ и $X_2(p', \tau')$ — непрерывные функции времени τ' и точки p' , называемые плотностями тепловых потенциалов; $\delta_0(p, p', \tau, \tau')$ — функция точечного мгновенного источника при $Q'/(c\rho) = 1$.

В зависимости от числа измерений пространственной области ($m=1, 2, 3$) говорят об одномерном, двумерном и трехмерном тепловых потенциалах.

При $m=1$ поверхность S состоит из левого x_1 и правого x_2 концов прямолинейного отрезка Ω , параллельного оси x , при $m=2$ S — замкнутая кривая (рис. 3.9), а при $m=3$ S — двумерная поверхность.

В случае $m=1$ под интегралом по S следует понимать сумму значений подынтегральной функции в точках x_1 и x_2 . Таким образом, одномерные тепловые потенциалы имеют вид

$$U(x, \tau) = \int_0^{\tau} \frac{a}{2 \sqrt{\pi a (\tau - \tau')}} \times \\ \times \left[X_1(x_1, \tau') e^{-\frac{r_1^2}{4a(\tau - \tau')}} + X_2(x_2, \tau') e^{-\frac{r_2^2}{4a(\tau - \tau')}} \right] d\tau'; \quad (3.96)$$

$$V(x, \tau) = \int_0^{\tau} \frac{1}{4 \sqrt{\pi a (\tau - \tau')}} \times \\ \times \left[X_2(x_1, \tau') e^{-\frac{r_1^2}{4a(\tau - \tau')}} r_1 \cos \varphi'_1 + X_2(x_2, \tau') r_2 \cos \varphi'_2 e^{-\frac{r_2^2}{4a(\tau - \tau')}} \right] \times \\ \times \frac{d\tau'}{(\tau - \tau')}, \quad (3.97)$$

где $r_1 = |x - x_1|$, $r_2 = |x - x_2|$, φ'_1 и φ'_2 — углы между векторами $\bar{n}'$, $\bar{x}_1 x$ и соответственно $\bar{n}'$, $\bar{x}_2 x$ (если $x_1 < x < x_2$, то $\cos \varphi'_1 = \cos \varphi'_2 = 1$; если $x < x_1$, то $\cos \varphi'_1 = -1$, $\cos \varphi'_2 = 1$; если $x > x_2$, то $\cos \varphi'_1 = 1$, $\cos \varphi'_2 = -1$).

В случае $m=2$ тепловой потенциал простого слоя (3.94) и тепловой потенциал двойного слоя (3.95) соответственно принимают вид

$$U(p, \tau) = \int_0^\tau \int_S X_1(p', \tau') a \left(\frac{1}{2 \sqrt{\pi a (\tau - \tau')}} \right)^2 e^{-\frac{r^2}{4a(\tau - \tau')}} dS' d\tau';$$

$$V(p, \tau) = \int_0^\tau \int_S X_2(p', \tau') \frac{r \cos \varphi'}{(2 \sqrt{\pi a (\tau - \tau')})^2} e^{-\frac{r^2}{4a(\tau - \tau')}} dS' \frac{d\tau'}{2(\tau - \tau')},$$

где $r = |p - p'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$; φ' — угол между векторами $\vec{p}'p$ и нормалью $\vec{n}'$ к контуру S в точке p' (рис. 3.9).

Аналогичный вид имеют тепловые потенциалы в случае $m=3$.

Рассмотрим основные свойства тепловых потенциалов.

1. Тепловые потенциалы вне точки поверхности S , по которой происходит интегрирование, являются решениями однородного уравнения теплопроводности и удовлетворяют однородным начальным условиям: это свойство следует из того, что они строятся на основе фундаментальных решений уравнения теплопроводности (источника и диполя).

2. Тепловой потенциал простого слоя (3.94) в точках поверхности S является непрерывной функцией точки x и времени τ .

3. При подходе к точкам поверхности S тепловой потенциал двойного слоя (3.95) и производная по нормали от теплового потенциала простого слоя терпят разрыв. Аналитически

$$V^+(p^*, \tau) = X_2(p^*, \tau)/2 + V(p^*, \tau); \quad (3.98)$$

$$V^-(p^*, \tau) = -X_2(p^*, \tau)/2 + V(p^*, \tau); \quad (3.99)$$

$$\partial U^+(p^*, \tau)/\partial n = -X_1(p^*, \tau)/2 + \partial U(p^*, \tau)/\partial n; \quad (3.100)$$

$$\partial U^-(p^*, \tau)/\partial n = X_1(p^*, \tau)/2 + \partial U(p^*, \tau)/\partial n, \quad (3.101)$$

где V^+ , U^+ , V^- , U^- — предельные значения тепловых потенциалов при подходе вдоль нормали к точке p^* поверхности S соответственно изнутри и извне; $\partial U(p^*, \tau)/\partial n$ — результат формального дифференцирования $U(p, \tau)$ под знаком интеграла по направлению внутренней нормали $\vec{n}$ к поверхности S в точке p^* ; $V(p^*, \tau)$ — результат формальной подстановки в выражение (3.95) точки p^* вместо p .

Приведенные свойства потенциалов позволяют применить интегральные уравнения к решению краевых задач теплопроводности при граничных условиях I, II и III родов и условий сопряжения и, что особенно важно, к краевым задачам с нелинейными граничными условиями. При этом решение краевой задачи с граничными условиями I рода с однородным начальным условием находится в виде потенциала двойного слоя (3.95), плотность которого определяется из интегрального уравнения, полученного подстановкой (3.95) в граничное условие, с учетом формул для предельных значений теплового потенциала двойного слоя (3.98), (3.99).

Решение краевых задач с граничными условиями II и III родов при однородных начальных условиях следует искать в виде тепловых потенциалов простого слоя (3.94), плотности которых определяются из интегральных уравнений, получающихся при подстановке в граничные условия, с учетом формул для предельных значений нормальной производной теплового потенциала простого слоя (3.100), (3.101).

Решение смешанной краевой задачи определяется в виде суммы теплового потенциала двойного слоя по той части поверхности S , на которой заданы граничные условия I рода, и теплового потенциала простого слоя по той части поверхности S , на которой заданы граничные условия II или III рода.

Отметим, что при ненулевом начальном распределении температуры следует использовать интеграл Пуассона.

В отличие от метода разделения переменных метод тепловых потенциалов позволяет решать краевые задачи с нелинейными граничными условиями: задачи с зависящим от времени и температуры поверхности коэффициентом теплообмена, с подвижными границами и др.

К достоинству метода тепловых потенциалов относится и то, что интегральное уравнение типа Вольтерра второго рода, к которому сводится краевая задача, более удобно для проведения численных расчетов на ЭЦВМ. Однако метод несколько громоздок и его вряд ли следует применять при решении линейных краевых задач с постоянными коэффициентами.

Полуограниченная пластина при смешанных граничных условиях. Пусть задана краевая задача:

$$\partial T / \partial \tau = a \partial^2 T / \partial x^2 \quad (0 < x < R, \tau > 0); \quad (3.102)$$

$$T(x, 0) = 0; \quad (3.103)$$

$$T(0, \tau) = \varphi(\tau); \quad (3.104)$$

$$(\partial T / \partial x - HT)|_{x=R} = \psi(\tau). \quad (3.105)$$

Решение задачи (3.102) — (3.105) ищем в виде суммы тепловых потенциалов двойного слоя (3.97) и простого слоя (3.96):

$$T(x, \tau) = \int_0^\tau X_2(\tau') \frac{x}{2\sqrt{a\pi(\tau-\tau')}} e^{-\frac{x^2}{4a(\tau-\tau')}} \frac{d\tau'}{2(\tau-\tau')} + \\ + \int_0^\tau X_1(\tau') \frac{a}{2\sqrt{a\pi(\tau-\tau')}} e^{-\frac{(x-R)^2}{4a(\tau-\tau')}} d\tau'. \quad (3.106)$$

Подстановка решения (3.106) в граничное условие (3.104) с учетом формул (3.98) и (3.99) дает первое интегральное уравнение Вольтерра для определения плотностей X_1 и X_2

$$\varphi(\tau) = \frac{X_2(\tau)}{2} + \int_0^\tau \frac{X_1(\tau') \sqrt{a}}{2\sqrt{\pi(\tau-\tau')}} e^{-\frac{R^2}{4a(\tau-\tau')}} d\tau'. \quad (3.107)$$

Аналогично из второго граничного условия с учетом (3.100) имеем

$$\psi(\tau) = \frac{X_1(\tau)}{2} - Ha \int_0^1 \frac{X_1(\tau') d\tau'}{2\sqrt{\pi a(\tau - \tau')}} + \\ + \int_0^\tau \frac{X_2(\tau')}{2\sqrt{\pi l(\tau - \tau')}} e^{-\frac{K'}{4a(\tau - \tau')}} \left(\frac{-R^2}{2a(\tau - \tau')} - HR + 1 \right) \frac{d\tau'}{2(\tau - \tau')}. \quad (3.108)$$

Решение системы интегральных уравнений Вольтерра (3.107) и (3.108) может быть получено методом последовательных приближений. Для нахождения аналитического решения системы (3.107), (3.108) можно применить метод интегрального преобразования Лапласа [112].

Неограниченная пластина при несимметричных граничных условиях III рода. Имеем краевую задачу теплопроводности с переменными во времени коэффициентами теплоотдачи:

$$\partial\theta/\partial Fo = \partial^2\theta/\partial X^2, \quad |X| < 1, \quad Fo > 0; \quad (3.109)$$

$$\theta(X, 0) = 0; \quad (3.110)$$

$$[\partial\theta/\partial X - Bi^{(1)}(Fo) \theta]_{X=-1} = \Phi_1(Fo); \quad (3.111)$$

$$[\partial\theta/\partial X + Bi^{(2)}(Fo) \theta]_{X=1} = \Phi_2(Fo). \quad (3.112)$$

Решение краевой задачи (3.109) — (3.112) ищем в виде теплового потенциала простого слоя:

$$\theta(X, Fo) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{Fo} \frac{X_1(Fo')}{\sqrt{Fo - Fo'}} e^{-\frac{(1-X)^2}{4(Fo - Fo')}} dFo' + \\ + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{Fo} \frac{X_2(Fo')}{\sqrt{Fo - Fo'}} e^{-\frac{(1+X)^2}{4(Fo - Fo')}} dFo'. \quad (3.113)$$

Используя второе свойство тепловых потенциалов, получим

$$\lim_{X \rightarrow X_0 \pm 0} \frac{\partial}{\partial X} \frac{1}{\pi} \int_0^{Fo} \frac{X(Fo')}{\sqrt{Fo - Fo'}} e^{-\frac{(X - X_0)^2}{4(Fo - Fo')}} dFo' = \mp X(Fo). \quad (3.114)$$

Подставляя форму искомого решения (3.113) в граничные условия (3.111) и (3.112), с учетом (3.114) получим систему интегральных уравнений Вольтерра для определения плотностей $X_1(Fo)$ и $X_2(Fo)$:

$$\begin{aligned}
 & -X_2(Fo) - Bi^{(1)}(Fo) \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{Fo} \frac{X_1(Fo')}{\sqrt{Fo - Fo'}} e^{-\frac{1}{Fo - Fo'}} dFo' + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{Fo} \frac{X_2(Fo')}{\sqrt{Fo - Fo'}} dFo' \right] + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{Fo} \frac{X_1(Fo') e^{-\frac{1}{Fo - Fo'}}}{\sqrt{(Fo - Fo')^3}} dFo' = \Phi_1(Fo); \\
 & X_1(Fo) + Bi^{(2)}(Fo) \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{Fo} \frac{X_1(Fo')}{\sqrt{Fo - Fo'}} dFo' + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{Fo} \frac{X_2(Fo') e^{-\frac{1}{Fo - Fo'}}}{\sqrt{Fo - Fo'}} dFo' \right] - \\
 & - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{Fo} \frac{X_2(Fo') e^{-\frac{1}{Fo - Fo'}}}{\sqrt{(Fo - Fo')^3}} dFo' = \Phi_2(Fo).
 \end{aligned}$$

Полученная система в общем виде решается численными методами.

Задача 3.11. Используя метод тепловых потенциалов, получить аналитическое решение краевой задачи

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (0 < x < \infty, \tau > 0); \quad T(x, 0) = 0; \quad T(0, \tau) = \varphi(\tau).$$

При решении задач стационарной теплопроводности потенциалами простого и двойного слоев называют интегралы [81] соответственно

$$\left. \begin{aligned}
 U(p_0) &= \int_S \sigma(p) \delta(p_0, p) dS; \\
 V(p_0) &= \int_S \vartheta(p) \mu(p_0, p) dS,
 \end{aligned} \right\} \quad (3.115)$$

где S — произвольная гладкая поверхность (или кривая в двухмерном случае); $\sigma(p)$, $\vartheta(p)$ — определенные на S кусочно-непрерывные, интегрируемые функции, называемые *плотностями соответствующих потенциалов*; $\delta(p_0, p)$ — функция единичного источника в точке p_0

для стационарного уравнения теплопроводности: $\mu(p_0, p)$ — функция единичного диполя в точке p_0 с осью n_0 для уравнения (3.89)*.

Потребуем, чтобы поверхность удовлетворяла еще двум условиям, а именно:

угол $\omega(p'_0, p)$ между нормальными в двух соседних точках p'_0, p_0 поверхности такой, что

$$\omega(p'_0, p) < Ar', \quad A, \lambda = \text{const}, \quad 0 < \lambda \leq 1;$$

шар фиксированного радиуса $\eta > 0$ с центром в любой точке поверхности содержит часть поверхности S , которая всякую прямую, параллельную нормали к поверхности S в центре шара, может встретить только в одной точке**

Воспользуемся свойствами потенциалов (3.115) для решения краевых задач.

Свойства потенциалов. 1. Потенциалы простого и двойного слоев удовлетворяют стационарному уравнению теплопроводности внутри области S , так как функции единичного источника и диполя являются решениями уравнения Лапласа.

2. Потенциал простого слоя непрерывен в точках поверхности S .

3. Потенциал двойного слоя и производная по внутренней нормали потенциала простого слоя в точках поверхности S являются разрывными функциями. Аналитически

$$V_+(p^*) = V(p^*) + \kappa \nu(p^*); \quad (3.116)$$

$$V_-(p^*) = V(p^*) - \kappa \nu(p^*); \quad (3.117)$$

$$(\partial U(p^*)/\partial n)_+ = \partial U(p^*)/\partial n - \kappa \mu(p^*); \quad (3.118)$$

$$(\partial U(p^*)/\partial n)_- = \partial U(p^*)/\partial n + \kappa \mu(p^*), \quad (3.119)$$

где p^* — точка, лежащая на поверхности S ; $\kappa = 2, 1$ для трехмерной и двухмерной задач соответственно; знаки «+», «-» отвечают предельным значениям функций при подходе к точке p^* с внутренней и наружной стороны поверхности соответственно.

* Для случая трехмерной задачи

$$\delta(p_0, p) = 1/(4\pi r),$$

$$\mu(p_0, p) = \frac{\partial}{\partial n_0} \delta(p, p_0) = \cos \varphi_0 / (4\pi r^2),$$

$$\text{где } r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

Для двухмерного уравнения Лапласа

$$\delta(p_0, p) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}, \quad \mu(p_0, p) = \frac{\cos \varphi_0}{2\pi r},$$

$$\text{где } r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

** Поверхности, удовлетворяющие перечисленным условиям, называются *поверхностями Ляпунова*.

Решение краевых задач с граничными условиями I и II родов ищется в виде потенциалов двойного и простого слоев соответственно. При этом для определения плотности потенциалов из условий удовлетворения соответствующим граничным условиям получают интегральные уравнения типа Фредгольма второго рода. При этом, как показано, например, в работе [100], эти интегральные уравнения всегда разрешимы.

Стметим, что метод тепловых потенциалов позволяет эффективно получать численные решения краевых задач для областей сложной формы.

Применение функций Грина и методов теории потенциала для решения стационарных задач теплопроводности в областях сложной формы. Сформулируем задачу Дирихле для области Ω , ограниченной замкнутой кривой $S_1 \cup S_2$, причем кривая S_2 достаточно гладкая и не имеет кратных точек (рис. 3.13):

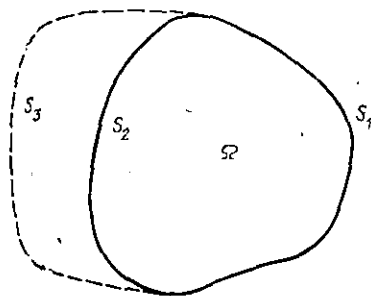


Рис. 3.13. К решению задачи Дирихле

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{1}{\lambda} q_v(x, y) = 0; \quad (3.120)$$

$$T(x, y) = 0, \quad x, y \in S_1 \cup S_2. \quad (3.121)$$

Функция объемной плотности теплового потока внутренних источников теплоты предполагается определенной и непрерывной в области Ω .

Если область Ω имеет достаточно сложную форму, то построение функции Грина для оператора Лапласа в этой области — очень сложная задача, часто практически не выполнимая. Однако ситуация меняется, если область Ω целиком лежит в области V , ограниченной замкнутой кривой $S_1 \cup S_3$ более простой формы. В этом случае, если известна функция Грина $G(x, y, x', y')$ оператора Лапласа для области V , формальное решение краевой задачи (3.120), (3.121) удобно представить с помощью потенциала

$$T(x, y) = \int_{S_2} G(x, y, x', y') \mu(x', y') dS_2(x', y') - \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega} G(x, y, x', y') q_v(x', y') d\Omega(x', y'), \quad (3.122)$$

где $G(x, y, x', y')$ — функция Грина оператора Лапласа для области V ; $\mu(x', y')$ — неизвестная функция плотности потенциала.

Для определения $\mu(x', y')$ выполним предельный переход $\rho(x, y) \rightarrow \rho(x', y') \in S_2$, тогда в силу граничного условия (3.121) значение

температуры в левой части решения (3.122) обращается в нуль и имеем интегральное уравнение типа Фредгольма первого рода

$$\varphi(x, y) = \int_{S_2} G(x, y, x', y') \mu(x', y') dS_2(x', y'), \quad (3.123)$$

где $\varphi(x, y)$ — значение интеграла $\frac{1}{\lambda} \int_{\Omega} G(x, y, x', y') q_v(x', y') d\Omega(x', y')$ на кривой S_2 .

Для проведения численных расчетов удобно представить решение (3.123) в другой форме, используя параметрическое задание кривой S_2 :

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad 0 < t < l.$$

Тогда уравнение (3.123) примет вид

$$\varphi(t) = \int_0^l G(t, \tau) \mu(\tau) \sqrt{x'_{\tau}(\tau)^2 + y'_{\tau}(\tau)^2} d\tau. \quad (3.124)$$

Решение уравнения (3.124) не вызывает принципиальных затруднений и может быть получено численными методами (см., например, [42]). С помощью потенциальных представлений, учитывая, что функция Грина имеет особенность того же типа, что и ядро потенциала простого слоя, можно получить решение краевых задач с граничными условиями II и III родов, однако здесь для определения плотности потенциала получаем интегральное уравнение типа Фредгольма второго рода.

Аналогично можно получить решения краевых задач и для областей более сложного вида — двухсвязных и многосвязных.

Рассмотрим пример применения этого метода для относительно простых задач. Более сложные задачи рассмотрены в работах С. П. Гавели, Ю. А. Мельникова и др.

Стационарное температурное поле в прямоугольнике, ослабленном отверстиями различных форм. Рассмотрим задачу Дирихле для двухсвязной области Ω , ограниченной извне прямоугольником S_1 ($0 \leq x \leq d$, $0 \leq y \leq b$), изнутри — некоторой кривой без самопересечений S_2 :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \quad x, y \in \Omega; \quad (3.125)$$

$$T(x, y) = 0, \quad x, y \in S_1; \quad (3.126)$$

$$T(x, y) = \varphi(x, y), \quad x, y \in S_2. \quad (3.127)$$

Распределение температуры $T(x, y)$ в области Ω ищем в виде потенциала

$$T(x, y) = \int_{S_2} G(x, y, x', y') \mu(x', y') dS_2(x', y'), \quad (3.128)$$

где $G(x, y, x', y')$ — известная функция Грина задачи (3.125)—(3.127) для прямоугольника

$$G(x, y, x', y') = \sum_{m, k=1, 3, 5, \dots} \cos \frac{m\pi x}{2d} \cos \frac{m\pi x'}{2d} \cos \frac{k\pi y}{2b} \cos \frac{k\pi y'}{2b} \left[\left(\frac{m\pi}{2d} \right)^2 + \left(\frac{k\pi}{2b} \right)^2 \right]^{-1/2}.$$

В решении (3.128) граничное условие (3.126) удовлетворяется за счет выбора функции Грина для задачи Дирихле в прямоугольнике, а граничное условие (3.127) — за счет неизвестной функции плотности потенциала.

Удовлетворяя граничному условию (3.127), получим интегральное уравнение относительно функции $\mu(x', y')$:

$$\varphi(x, y) = \int_{S_2} G(x, y, x', y') \mu(x', y') dS_2(x', y') \quad \text{при } x, y \in S_2$$

Предположим, что контур $S_2[x=x(t), y=y(t)]$ расположен внутри прямоугольника симметрично относительно его стороны. Тогда уравнение (3.128), записанное в параметрической форме:

$$\varphi(t) = \int_0^{2\pi} G(t, \tau) \mu(\tau) \sqrt{x'_\tau + y'_\tau} d\tau, \quad (3.129)$$

для сокращения численных расчетов удобно представить в виде

$$\varphi(t) = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} G(t, \tau) \mu(\tau) \sqrt{x'_\tau + y'_\tau} d\tau.$$

Для решения уравнения (3.129) применим метод квадратурных формул (прямоугольников), что приводит к линейной системе алгебраических уравнений

$$\frac{8\pi}{n} \sum_{i=1}^N G(t_j, \tau_i) \mu(\tau_i) D(\tau_i) = \varphi(t_j); \quad (3.130)$$

$$D(\tau) = \sqrt{x'_\tau + y'_\tau}, \quad j=1, 2, 3, \dots, N.$$

Абсолютная погрешность вычислений

$$\delta(x, y) = T(x, y) - T(x, y),$$

где T — приближенное решение задачи (3.125)—(3.127) — представляет собой гармоническую функцию.

Согласно принципу максимума, погрешность вычислений $\delta(x, y)$ в любой точке области не превышает максимального значения погрешности на границе.

Для конкретных форм областей Ω решение системы (3.130) может быть получено методом Гаусса (см. алгоритм 3 приложения V).

Приведем результаты расчетов полей температур для некоторых случаев* при $n=15$, $N=60$ в уравнении (3.130). Если размеры прямоугольной области Ω положить равными $d=b=1$, внутренний контур представляет собой окружность радиуса 0,5, а $\varphi(t)=\cos^{32}t$, то распределение температуры в области Ω , представленное линиями

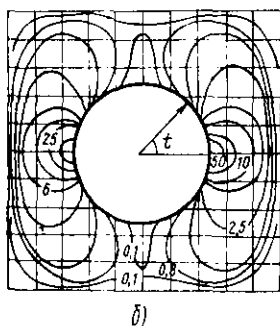
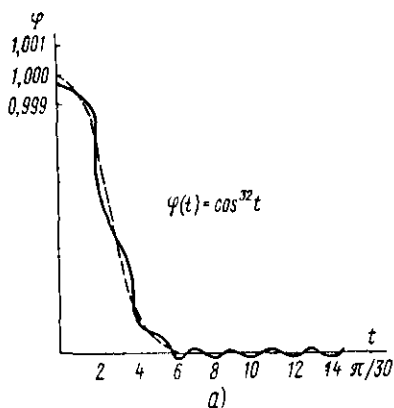


Рис. 3.14. Распределение температур в области Ω и погрешность удовлетворения граничному условию

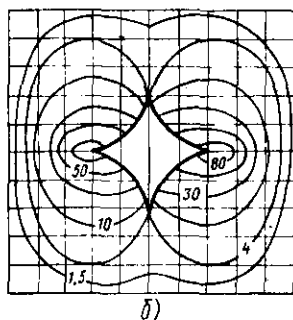
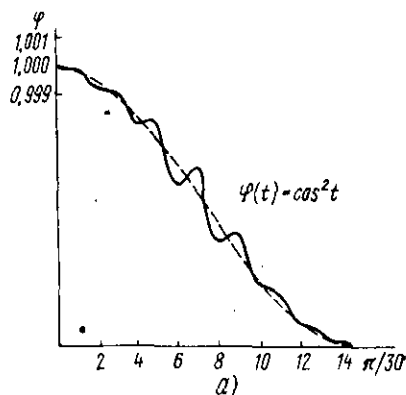


Рис. 3.15. Температурное поле в области, ограниченной квадратом и астроидой

уровня, показано на рис. 3.14, б. На рис. 3.14, а показана зависимость погрешности $\delta(t) = \tilde{T}|s - \varphi(t)$ удовлетворения граничному условию (3.127).

Максимальная относительная погрешность

$$\tilde{\delta}(t) = \frac{\delta(t)}{\max T} 100 \%$$

не превышает в этом случае $6 \cdot 10^{-3} \%$.

Распределение температуры в области Ω , ограниченной снаружи квадратом S_1 ($d=b=1$), а изнутри — астроидой S_2 (уравнение

* Расчеты проведены Б. Г. Азановым.

$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, где $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $0 \leq t \leq 2\pi$ при $a=1/2$, приведено на рис. 3.15, б при $\varphi(t) = \cos^2 t$. А на рис. 3.15, а показано, с какой точностью приближенное решение удовлетворяет граничному условию на контуре S_2 .

На рис. 3.16, а, б приведены линии уровня температуры и погрешность на границе S_2 в области Ω , ограниченной квадратом S_1 ,

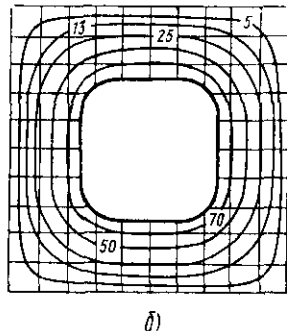
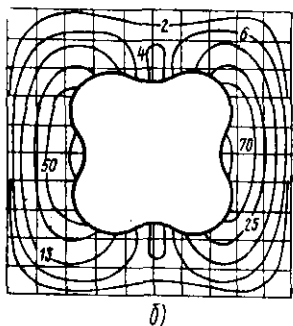
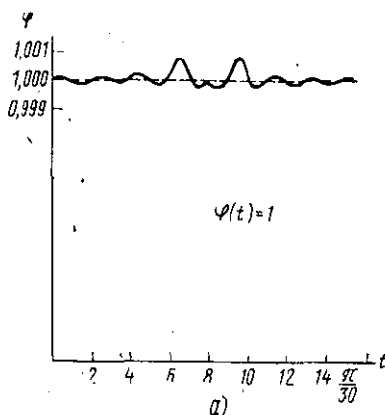
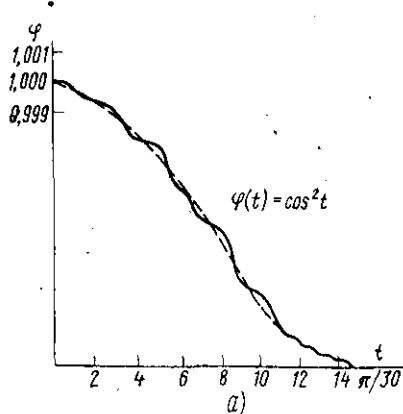


Рис. 3.16. Стационарное температурное поле в области Ω

Рис. 3.17. Стационарное распределение температур в области Ω

($d=b=1$) и кривой четвертого порядка S_2 с уравнением $x^4 + y^4 = a^4(x^2 + y^2)$, $a=1/2$, при $\varphi(t) = \cos^2 t$. Как видно из рисунка, максимальная относительная погрешность решения не превышает 0,1 %. Линии уровня в области, изображенной на рис. 3.17, а, б (уравнение контура S_2 — $x^4 + y^4 = a^4$, $a=1/2$, на контуре S_1 , $d=b=1$), и зависимость отклонения $\delta(t)$ приближенного решения на поверхности S_2 построены при $\varphi(t)=1$. Максимальная относительная погрешность не превышает здесь 0,02 %. Более высокой точности при необходимости можно достигнуть, увеличивая число квадратурных узлов в соответствующих формулах интегрирования или применяя квадратурные формулы повышенной точности.

МЕТОДЫ КОНЕЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Для решения линейных краевых задач теплопроводности при неоднородных начальных и граничных условиях одними из эффективнейших являются методы интегральных преобразований в конечных и бесконечных пределах. Методы интегральных преобразований имеют ряд преимуществ перед классическими методами: стандартность методик применения; получение решений в удобном для расчетов виде; наличие таблиц соответствий между оригиналами и изображениями функций и др.

Интегральные преобразования, применяемые к решению краевых задач теплопроводности, разделим на два класса: интегральные преобразования с конечными пределами и интегральные преобразования с бесконечными пределами интегрирования. В данной главе рассмотрим первый класс интегральных преобразований.

§ 4.1. Общая схема применения метода

Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — функция n переменных, определенная в конечной области Ω . Выражение

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m; x_{m+1}, \dots, x_n) = \int_{\Omega_m} f(x_1, \dots, x_n) \times \\ \times K(x_1, \dots, x_m; \gamma_1, \dots, \gamma_m) dx_1 dx_2, \dots, dx_m, \quad (m \leq n) \end{aligned} \quad (4.1)$$

(где $f(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m; x_{m+1}, \dots, x_n)$ — функция m переменных $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ и $n - m$ переменных $x_{m+1}, \dots, x_n$) будем называть *конечным интегральным преобразованием* функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ по переменным $x_1, x_2, \dots, x_m$ с ядром $K(x_1, x_2, \dots, x_m; \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m)$.

Интеграл (4.1) называют также *изображением* (по переменным $x_1, x_2, \dots, x_m$) функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, которую в этом случае называют *оригиналом*.

Всякое интегральное преобразование считается заданным, если определены ядро $K(x_1, x_2, \dots, x_m; \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m)$, область Ω интегрирования и множество F функций $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, к которым оно применяется.

Преобразование, с помощью которого функция $\tilde{f}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m; x_{m+1}, \dots, x_n)$ снова преобразуется в функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, на-

зывается *обратным преобразованием*. При этом само преобразование (4.1) называют *прямым*.

В качестве примеров конечных интегральных преобразований можно указать:

конечное синус-преобразование Фурье

$$\tilde{f}(\gamma) = \int_0^{\pi} \sin \gamma x f(x) dx;$$

конечное косинус-преобразование Фурье

$$\tilde{f}(\gamma) = \int_0^{\pi} \cos \gamma x f(x) dx;$$

конечное преобразование Лежандра

$$\tilde{f}(\gamma) = \int_{-1}^1 P_{\gamma}(x) f(x) dx,$$

где $P_{\gamma}(x)$ — полином Лежандра степени γ (γ принимает значения 0, 1, 2, ...).

Общая схема применения интегральных преобразований по одной переменной для решения краевых задач состоит в следующем.

Используя интегральное преобразование, исключают дифференцирование по одной из переменных и приходят к более простой задаче относительно преобразованной функции. Определив эту функцию, с помощью обратного преобразования находят неизвестную функцию, дающую решение первоначальной задачи. В случае необходимости интегральные преобразования применяют повторно, последовательно исключая дифференциальные операции по ряду переменных.

Пусть задано линейное уравнение теплопроводности с постоянными коэффициентами вида

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + q_0(x, y, z, \tau) / (c\rho). \quad (4.2)$$

Ниже предполагаем, что все функции, подвергаемые интегральному преобразованию, обладают свойствами, которые делают такое преобразование возможным.

Применим к уравнению (4.2) интегральное преобразование по переменной x :

$$\tilde{T}(\gamma, y, z, \tau) = \int_a^b T(x, y, z, \tau) K(x, \gamma) dx. \quad (4.3)$$

Пределы интегрирования при преобразовании выбирают так, чтобы они совпадали с пределами (d, b) изменения переменной преобразования x . Тогда получим

$$\begin{aligned} & \int_d^b \frac{\partial T}{\partial \tau} K(x, \gamma) dx - a \int_d^b \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} K(x, \gamma) dx - a \int_d^b \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} K(x, \gamma) dx - \\ & - a \int_d^b \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} K(x, \gamma) dx - \int_d^b \frac{q_v(x, y, z, \tau)}{c\rho} K(x, \gamma) dx = 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Найдем условия, обеспечивающие преобразование уравнения (4.2) с соответствующими краевыми условиями к виду, при котором преобразованная задача не содержит операций дифференцирования или интегрирования по переменной преобразования.

Согласно правилам интегрирования, члены, не содержащие дифференциальных операций по x , могут быть представлены в области изображений так:

$$\begin{aligned} & \int_d^b \frac{\partial T}{\partial \tau} K(x, \gamma) dx = \frac{\partial}{\partial \tau} \int_d^b T K(x, \gamma) dx - \int_d^b T \frac{\partial}{\partial \tau} K(x, \gamma) dx = \\ & = \frac{\partial \hat{T}(\gamma, y, z, \tau)}{\partial \tau}; \\ & a \int_d^b \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) K(x, \gamma) dx = a \left(\frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial z^2} \right); \\ & \int_d^b \frac{q_v(x, y, z, \tau)}{c\rho} K(x, \gamma) dx = \frac{\hat{q}_v}{c\rho}. \end{aligned}$$

Второй интеграл в левой части (4.4) проинтегрируем по частям:

$$\begin{aligned} & \int_d^b \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} K(x, \gamma) dx = \frac{\partial T}{\partial x} K(x, \gamma) \Big|_d^b - \int_d^b \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial K(x, \gamma)}{\partial x} dx = \\ & = \frac{\partial T}{\partial x} K(x, \gamma) \Big|_d^b - T \frac{\partial K(x, \gamma)}{\partial x} \Big|_d^b + \int_d^b \frac{\partial^2 K(x, \gamma)}{\partial x^2} dx. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Выражение (4.5) не будет содержать в области изображений интегральных операций по x , если потребуем выполнения следующего равенства:

$$K_{xx}'' = -\lambda^2 K, \quad (4.6)$$

где λ^2 — величина, не зависящая от x .

В самом деле, если удовлетворяется (4.6), то (4.5) представим в виде

$$\int_d^b \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} K(x, y) dx = \left(\frac{\partial T}{\partial x} K - T \frac{dK}{dx} \right) \Big|_d^b - \lambda^2 \hat{T}(y, y, z, \tau). \quad (4.7)$$

Соотношение (4.6) можно рассматривать как уравнение для определения ядра $K(x, y)$. Однако за ядро преобразования нельзя выбрать произвольное решение уравнения (4.6). Дело в том, что внеинтегральный член в (4.7)

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x} K - T \frac{\partial K}{\partial x} \right) \Big|_d^b \quad (4.8)$$

может быть вычислен, если граничные условия задачи допускают выражение условий по переменной x только через известные функции переменных y, z , иначе в преобразованное уравнение кроме функции T войдут и другие неизвестные функции. Но и этого преобразования недостаточно, так как значения T и $\partial T / \partial x$ при других различных значениях x не могут одновременно фигурировать в условиях задачи. Поэтому на ядро преобразования следует наложить граничные условия, которые позволяют вычислить выражение (4.8) и полностью исключить из уравнения задачи дифференциальные и интегральные операции по переменной x .

Для того чтобы установить формулы, осуществляющие прямое и обратное преобразования, представим ядро прямого преобразования в виде

$$K(x, y) = k(x, y) / c_y, \quad (4.9)$$

где c_y — функция от аргумента; y — нормирующий делитель.

Выражение (4.9) подставим в уравнение (4.6), тогда для определения ядра $k(x, y)$ получим

$$\partial^2 k / \partial x^2 = -\lambda^2 k. \quad (4.10)$$

Уравнение вида (4.10) изучено в математической физике в связи с классической задачей Штурма — Лиувилля: найти такие значения параметра λ^2 (т. е. собственные числа задачи), при которых уравнение (4.10) имеет отличные от тождественного нуля решения (собственные функции задачи), удовлетворяющие однородным граничным условиям

$$(\alpha_d \partial k / \partial x - \beta_d k) |_{x=d} = 0; \quad (4.11)$$

$$(\alpha_b \partial k / \partial x + \beta_b k) |_{x=b} = 0. \quad (4.12)$$

Известно, что:

1) собственные числа задачи Штурма — Лиувилля λ^2 образуют бесконечную возрастающую последовательность положительных чисел $\lambda_1^2 < \lambda_2^2 < \lambda_3^2 < \dots$;

2) каждому собственному числу λ_γ соответствует одна собственная функция k_γ ;

3) система собственных функций k_γ ($\gamma=1, 2, 3, \dots$) полна в смысле сходимости в среднем, т. е. любая функция $f(x)$, имеющая квадрат, интегрируемый в интервале (d, b) , может быть представлена в форме ряда $f(x) = \sum_{\gamma=1}^{\infty} a_\gamma k_\gamma$, сходящегося в среднем к функции $f(x)$;

4) собственные функции k_α, k_β попарно ортогональны, т. е.

$$\int_d^b k_\alpha k_\beta dx = \begin{cases} 0 & \text{при } \alpha \neq \beta, \\ c_\gamma & \text{при } \alpha = \beta. \end{cases}$$

Если положить $k(x, \gamma) = k_\gamma(x)$, в граничных условиях для упрощения принять $h = \beta_d / \alpha_d = \beta_b / \alpha_b$, $d=0$, $b=d=d^*$, то решение задачи (4.10) — (4.12) имеет вид

$$k_\gamma(x) = \cos \lambda_\gamma x + (h/\lambda_\gamma) \sin \lambda_\gamma x, \quad (4.13)$$

где λ_γ удовлетворяет трансцендентному уравнению

$$\operatorname{tg}(\lambda/\alpha^*) = 2h\lambda/(\lambda^2 - h^2),$$

корни которого приведены в табл. III.3 приложения III.

Для доказательства осуществимости интегрального преобразования остается показать, как вычисляется выражение (4.8). Если для уравнения (4.2) по координате x заданы граничные условия общего вида

$$(\alpha_d \partial T / \partial x - \beta_d T)_{x=d} = \Phi_d,$$

$$(\alpha_b \partial T / \partial x + \beta_b T)_{x=b} = \Phi_b,$$

то, учитывая, что $k_\gamma(x)$ удовлетворяет граничным условиям (4.11) (4.12), для (4.8) имеем выражение

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x} K - T \frac{\partial K}{\partial x} \right) \Big|_d^b = \frac{1}{c_\gamma} \left[\frac{\Phi_b}{\alpha_b} k_\gamma(b) - \frac{\Phi_d}{\alpha_d} k_\gamma(d) \right]. \quad (4.14)$$

Выражение (4.14) легко вычисляется, так как содержит лишь известные функции. Аналогично могут быть рассмотрены другие виды граничных условий.

Таким образом, после применения к уравнению (4.2) интегрального преобразования (4.3) с ядром (4.9), где $K(x, y)$ определяется по формуле (4.13), в области изображений получим уравнение относительно функции $\tilde{T}(\gamma, y, z, \tau)$:

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tau} - a \left(\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial z^2} \right) + a \lambda^2 \tilde{T} = \frac{1}{c_\gamma} \left(\frac{\Phi_\gamma}{\alpha} \right) \Big|_d^b + \frac{q_\gamma}{c_\gamma}. \quad (4.15)$$

К этому уравнению необходимо присоединить систему краевых условий по координатам y, z , которые преобразованы интегральным

преобразованием (4.3) по координате x . Решая краевую задачу для уравнения (4.15), находим выражение для изображения функции $T(x, y, z, \tau) - \tilde{T}(\gamma, y, z, \tau)$.

Задача обратного интегрального преобразования заключается в нахождении оригинала функции по ее изображению.

Для этого разложим функцию T в ряд

$$T = \sum_{\gamma=1}^{\infty} a_{\gamma} k_{\gamma} \quad (4.16)$$

по полной системе собственных функций k_{γ} задачи Штурма — Лиувилля. Умножая ряд (4.16) на k_{γ} и почленно интегрируя его, учитывая 4-е свойство собственных функций задачи Штурма — Лиувилля, получим

$$a_{\gamma} = \frac{1}{c_{\gamma}} \int_a^b k_{\gamma} T dx.$$

Замечая, что k_{γ}/c_{γ} является ядром $K(x, \gamma)$ прямого преобразования, получим

$$a_{\gamma} = \int_a^b K(x, \gamma) T(x) dx \equiv \tilde{T}(\gamma).$$

Теперь из выражения (4.16) следует, что оригинал T изображения $\tilde{T}$ можно найти по формуле

$$T(x, y, z, \tau) = \sum_{\gamma=1}^{\infty} \tilde{T}(\gamma, y, z, \tau) k_{\gamma}(x)$$

Обычно методом конечных интегральных преобразований исключают дифференцирование по одной или нескольким пространственным координатам, сводя, таким образом, уравнение теплопроводности в области изображений к обыкновенному уравнению по времени.

Следует отметить, что метод конечных интегральных преобразований имеет те же ограничения, что и метод разделения переменных; он применим только к линейным уравнениям теплопроводности с линейными граничными условиями, рассматриваемыми в простейших областях изменения независимых переменных. Поэтому с этой точки зрения метод конечных интегральных преобразований не расширяет круга рассматриваемых задач по сравнению с методом разделения переменных. Метод конечных интегральных преобразований математически эквивалентен также методу собственных функций [41]. Тем не менее во многих случаях применение этого метода гораздо более целесообразно [82].

Во-первых, конечные интегральные преобразования имеют свое физическое обоснование. Любое интегральное преобразование, взятое по пространственным координатам, с физической точки зрения является некоторым усреднением исследуемой физической величины. При этом если усреднение сделано в соответствии с характером процесса, формой тела, граничными условиями, то решение для изображения функции будет представлять самостоятельный интерес. Дело в

том, что анализ решения для усредненных значений исследуемой физической величины позволяет получить ряд закономерностей протекания физических процессов.

Во-вторых, простота техники вычислений, свойственная интегральным методам, стандартность методики позволяют эффективно решать системы дифференциальных уравнений в частных производных.

Нестационарная теплопроводность неограниченного цилиндра при несимметричном нагреве. Задача о нахождении температурного поля несимметрично нагреваемого неограниченного цилиндра сводится к решению уравнения теплопроводности

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T(r, \varphi, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 T(r, \varphi, \tau)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T(r, \varphi, \tau)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T(r, \varphi, \tau)}{\partial \varphi^2}$$

($0 < r < R$, $0 < \varphi < 2\pi$, $\tau > 0$).

Граничные условия:

условие на внешней поверхности цилиндра

$$\lambda \frac{\partial T(R, \varphi, \tau)}{\partial r} + aT(R, \varphi, \tau) = 0;$$

условие ограниченности на оси

$$T(0, \varphi, \tau) < \infty;$$

условие периодичности по углу

$$T(r, \varphi, \tau) = T(r, \varphi + 2\pi, \tau).$$

Начальное условие

$$T(r, \varphi, 0) = T_0(r, \varphi).$$

Ядро интегрального преобразования, позволяющего исключить дифференцирование по φ , имеет вид

$$K(v, \varphi) = \frac{1}{c_v} K_v(\varphi), \quad (4.17)$$

где функция $K_v(\varphi)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 K_v(\varphi)}{\partial \varphi^2} + m^2 K_v(\varphi) = 0 \quad (4.18)$$

и условию периодичности

$$K_v(\varphi) = K_v(\varphi + 2\pi). \quad (4.19)$$

Нормирующий коэффициент c_v определяется по формуле

$$c_v = \int_0^{2\pi} |K_v(\varphi)|^2 d\varphi.$$

Линейно независимыми решениями дифференциального уравнения (4.18) будут функции $\cos m\varphi$ и $\sin m\varphi$. Эти решения взаимно ортогональны и удовлетворяют условию (4.19) при $m=0, 1, 2, \dots$

Так как каждому собственному числу m соответствуют две собственные функции, то перенумеруем $K_\nu(\varphi)$ так:

$$K_\nu(\varphi) = \begin{cases} \cos m\varphi & \text{при } \nu=2m; \\ \sin m\varphi & \text{при } \nu=2m+1. \end{cases}$$

Тогда $c_\nu=2\pi$ при $m=0$ и $c_\nu=\pi$ при $m \neq 0$ независимо от номера ν . Теперь ядро интегрального преобразования, позволяющего исключить операции дифференцирования по φ , можно представить в виде

$$K(\nu, \varphi) = \begin{cases} \frac{1}{\pi e_m} \cos m\varphi & \text{при } \nu=2m; \\ \frac{1}{\pi} \sin m\varphi & \text{при } \nu=2m+1, \end{cases} \quad (4.20)$$

где

$$e_m = \begin{cases} 2 & \text{при } m=0; \\ 1 & \text{при } m \neq 0. \end{cases}$$

Применив преобразование по φ в интервале $[0, 2\pi]$ с ядром (4.20), исходную задачу приведем к виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 T_\nu(r, \tau)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_\nu(r, \tau)}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} T_\nu(r, \tau) &= \frac{1}{a} \frac{\partial T_\nu(r, \tau)}{\partial \tau}; \\ \lambda \frac{\partial T_\nu(R, \tau)}{\partial r} + a T_\nu(R, \tau) &= 0; \\ T_\nu(0, \tau) &< \infty; \\ T_\nu(r, 0) &= T_{0\nu}(r), \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

где $T_\nu(r, \tau) = \int_0^{2\pi} T(r, \varphi, \tau) K(\nu, \varphi) d\varphi$ — изображение функции $T(r, \varphi, \tau)$ по переменной φ .

Ядро интегрального преобразования, позволяющего исключить операции дифференцирования по r , имеет вид

$$N_m(n, r) = \frac{1}{c_{m,n}} r N_{m,n}(r), \quad (4.22)$$

где функция $N_{m,n}(r)$ является собственной функцией задачи Штурма — Лиувилля:

$$\frac{d^2 N_{m,n}(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dN_{m,n}(r)}{dr} + \left(\beta^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) N_{m,n}(r) = 0, \quad (4.23)$$

$$\lambda \frac{\partial N_{m,n}(R)}{\partial r} + a N_{m,n}(R) = 0; \quad (4.24)$$

$$N_{m,n}(0) < \infty. \quad (4.25)$$

Решение уравнения (4.23), удовлетворяющее условию (4.25) с точностью до постоянной, имеет вид

$$N_{m,n}(r) = J_m(\beta_{m,n} r) = J_m(\mu_{m,n} r/R). \quad (4.26)$$

Условие (4.24) определяет собственные числа $\mu_{m,n}$, которые будут корнями трансцендентного уравнения

$$J_m(\mu_{m,n})/J_{m+1}(\mu_{m,n}) = \lambda \mu_{m,n} / (\lambda m + \alpha R). \quad (4.27)$$

Определим нормирующий делитель $c_{m,n}$ ядра (4.22):

$$c_{m,n} = \int_0^R J_m^2\left(\mu_{m,n} \frac{r}{R}\right) r dr = \frac{R^3}{2} \left[J_m^2(\mu_{m,n}) + J_{m+1}^2(\mu_{m,n}) - \right. \\ \left. - 2 \frac{m}{\mu_{m,n}} J_m(\mu_{m,n}) J_{m+1}(\mu_{m,n}) \right]. \quad (4.28)$$

Таким образом, преобразование (4.22) определено формулами (4.26) — (4.28).

Применяя преобразование (4.22) к задаче (4.21), приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{\partial T_{v,n}(\tau)}{\partial \tau} + \frac{\alpha}{R^2} \mu_{m,n}^2 T_{v,n}(\tau) = 0 \quad (4.29)$$

с начальным условием

$$T_{v,n}(0) = \int_0^{2\pi} \int_0^R T_0(r, \varphi) K(v, \varphi) N_m(n, r) dr d\varphi. \quad (4.30)$$

Решение уравнения (4.29) с учетом (4.30) имеет вид

$$T_{v,n}(\tau) = T_{v,n}(0) \exp\left(-\mu_{m,n}^2 \frac{\alpha \tau}{R^2}\right).$$

Последовательно выполняя обратные преобразования, получим:

$$T_v(r, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} T_{v,n}(\tau) J_m\left(\mu_{m,n} \frac{r}{R}\right); \\ T(r, \varphi, \tau) = \sum_{m=0}^{\infty} [T_{2m}(r, \tau) \cos m\varphi + T_{2m+1}(r, \tau) \sin m\varphi]. \quad (4.31)$$

Подставляя соответствующие значения $T_v(r, \tau)$ в (4.31), окончательно получим решение задачи:

$$T(r, \varphi, \tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\mu_{m,n}^2 \frac{\alpha \tau}{R^2}\right) \cos m\varphi J_m\left(\mu_{m,n} \frac{r}{R}\right) \times \\ \times \int_0^{2\pi} \int_0^R T_0(r, \varphi) \frac{\cos m\varphi}{\pi c_m} N_m(n, r) dr d\varphi + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\mu_{m,n}^2 \frac{\alpha \tau}{R^2}\right) \sin m\varphi J_m\left(\mu_{m,n} \frac{r}{R}\right) \times \\ \times \int_0^{2\pi} \int_0^R T_0(r, \varphi) \frac{\sin m\varphi}{\pi} N_m(n, r) dr d\varphi.$$

Задача 4.1. Начальная температура шара ($0 \leq r \leq R$) равна $T(r, 0) = T_0 = \text{const}$, а на поверхности шара с момента времени $\tau = 0$ поддерживается температура $T_c = \text{const}$. Найти температуру шара при $\tau > 0$.

Задача 4.2. На поверхности куба $|x| \leq l, |y| \leq l, |z| \leq l$, равномерно нагретого в начальный момент времени до температуры T_0 , происходит конвективный теплообмен со средой, температура которой равна нулю. Найти выражение для температуры в центре куба [17].

Задача 4.3. Решить задачу об охлаждении бесконечного круглого цилиндра при условии, что начальная температура $T(r, 0) = T_0 (1 - r^2/R^2)$ и на его поверхности поддерживается нулевая температура [17].

Задача 4.4. Найти температуру бесконечной круглой цилиндрической трубы $R_0 \leq r \leq R_1$, если с момента времени $\tau = 0$ через ее внешнюю поверхность подается снаружи постоянный тепловой поток, плотность которого q_0 , а внутренняя поверхность трубы поддерживается при начальной температуре, равной нулю [17].

Задача 4.5. Определить распределение температур в неограниченном брусе с прямоугольным поперечным сечением $0 \leq x \leq x_0, 0 \leq y \leq y_0, -\infty < z < +\infty$, если его начальная температура $T(x, y, z, 0) = f(x, y, z)$, а на поверхности: 1) имеет место тепловая изоляция; 2) поддерживается нулевая температура [17].

Задача 4.6. Неоднородный прямоугольный параллелепипед составлен из двух однородных прямоугольных параллелепипедов $\{0 \leq x \leq x_0, 0 \leq y \leq y_0, 0 \leq z \leq z_0\}$ и $\{x_0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq y_0, 0 \leq z \leq z_0\}$, изготовленных из различных материалов. Найти температуру параллелепипеда, если его поверхность поддерживается при нулевой температуре, а начальная температура $T(x, y, z, 0) = f(x, y, z)$ [17].

§ 4.2. Способы улучшения сходимости решений

Следует иметь в виду, что применение метода конечных интегральных преобразований к задачам нестационарной теплопроводности приводит к решениям в форме бесконечных рядов, которые часто сходятся неравномерно.

Причиной плохой сходимости рядов является то, что они не могут удовлетворять неоднородным граничным условиям, поскольку каждый член ряда удовлетворяет однородным граничным условиям, что обусловлено построением ядер конечного интегрального преобразования. Это приводит к необходимости при расчетах учитывать большое число членов ряда ввиду медленного убывания коэффициентов решения при возрастании их номера. Поэтому такие решения нуждаются в доработке, что впервые было отмечено в работе [27].

Необходимость доработки решений краевых задач с неоднородными граничными условиями, полученных методом конечных интегральных преобразований, проиллюстрируем на примере следующей простой краевой задачи.

Процесс нестационарной теплопроводности в неограниченной пластине ($0 \leq X \leq 1$) с различными постоянными температурами на ограничивающих поверхностях и однородном начальном распределении температуры описывается уравнением теплопроводности и краевыми условиями:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \text{Fo}} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2}, \quad 0 < X < 1, \quad \text{Fo} > 0;$$

$$\Theta(X, 0) = 0; \quad \Theta(0, \text{Fo}) = 1; \quad \Theta(1, \text{Fo}) = \Theta_2,$$

где $\Theta = (T - T_0)/(T_1 - T_0)$, $X = x/\delta$, $\text{Fo} = \alpha\tau/\delta^2$.

Ядро интегрального преобразования $K(x, \gamma)$ представим согласно (4.9) в виде $K(X, \gamma) = k(X, \gamma)/c_\gamma$. Функция $k(X, \gamma)$ должна удовлетворять уравнению (4.10) при однородных граничных условиях $k(0, \gamma) = 0$; $k(1, \gamma) = 0$.

Общее решение уравнения (4.10) имеет вид

$$k(X, \gamma) = A_1 \cos \lambda X + A_2 \sin \lambda X.$$

Из граничных условий для $k(X, \gamma)$ имеем $k(X, \gamma) = k_\gamma(X) = \sin \lambda_\gamma X$, где $\lambda_\gamma = \pi\gamma$

Нормирующий делитель c_γ вычисляется по формуле

$$c_\gamma = \int_0^1 \sin^2 \pi\gamma X dX = 1/2.$$

Таким образом, ядро интегрального преобразования принимает вид

$$K(X, \gamma) = 2 \sin \pi\gamma X.$$

Применим интегральное преобразование по переменной X в пределах от 0 до 1 с выбранным ядром $K(X, \gamma)$ к дифференциальному уравнению теплопроводности нашей задачи. Тогда в области изображений с учетом (4.14) и (4.15) имеем дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{\partial \Theta}{\partial Fo} + \lambda_\gamma^2 \Theta = -(-1)^\nu 2\pi\gamma \Theta_2 + 2\pi\gamma$$

с начальным условием $\Theta(0) = 0$.

Решая последнее уравнение, получим в области изображений

$$\hat{\Theta}(\gamma, Fo) = \exp(-\pi^2 \gamma^2 Fo) \left\{ 2\pi\gamma \int_0^{Fo} \exp(\pi^2 \gamma^2 t) [1 + (-1)^{\nu+1} \Theta_2] dt \right\}.$$

Совершим обратный переход в область оригиналов по формуле

$$\Theta(X, Fo) = \sum_{\gamma=1}^{\infty} \hat{\Theta}(\gamma, Fo) k(X, \gamma).$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} \Theta(X, Fo) = & 2 \sum_{\gamma=1}^{\infty} \exp(-\pi^2 \gamma^2 Fo) \left\{ \pi\gamma \int_0^{Fo} \exp(\pi^2 \gamma^2 t) \times \right. \\ & \left. \times [1 + (-1)^{\nu+1} \Theta_2] dt \right\} \sin \pi\gamma X. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Для улучшения сходимости ряда в (4.32) воспользуемся приемом, предложенным в [27].

Решение (4.32) можно записать в виде

$$\Theta(X, Fo) = \sum_{\gamma=1}^{\infty} \check{\Theta}_\gamma(Fo) \sin \pi\gamma X. \quad (4.33)$$

Если рассматривать $\Theta(X, Fo)$ как известную функцию, то последнее выражение представляет собой ее разложение в ряд Фурье. Согласно теории рядов Фурье, коэффициенты разложения функции $\Theta(X, Fo)$ можно представить в виде [55]

$$\hat{\Theta}_\gamma(Fo) = 2 \int_0^1 \Theta(X, Fo) \sin \pi \gamma X dX.$$

Если в последнем выражении дважды произвести интегрирование по частям, то получим

$$\hat{\Theta}_\gamma(Fo) = \frac{2}{\pi} \left[-\Theta(1, Fo) \frac{(-1)^\gamma}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{\pi \gamma} \sin \pi \gamma X \frac{\partial \Theta}{\partial X} \right) \right]_0^1 - \\ - \frac{1}{\pi^2 \gamma^3} \int_0^1 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} \sin \pi \gamma X dX.$$

Учитывая граничные условия для функции $\Theta(X, Fo)$, имеем

$$\hat{\Theta}_\gamma(Fo) = \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{\gamma} + \Theta_2 \frac{(-1)^{\gamma+1}}{\gamma} \right] - \Phi_\gamma(Fo), \quad (4.34)$$

где

$$\Phi_\gamma(Fo) = \frac{2}{\pi^2 \gamma^3} \int_0^1 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} \sin \pi \gamma X dX.$$

После подстановки (4.34) в (4.33) получим

$$\Theta(X, Fo) = \frac{2}{\pi} \left[\sum_{\gamma=1}^{\infty} \frac{\sin \pi \gamma X}{\gamma} + \Theta_2 \sum_{\gamma=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\gamma+1}}{\gamma} \sin \pi \gamma X \right] - \\ - \sum_{\gamma=1}^{\infty} \Phi_\gamma(Fo) \sin \pi \gamma X.$$

Используя известные разложения

$$\sum_{\gamma=1}^{\infty} (-1)^{\gamma+1} \frac{\sin \pi \gamma X}{\gamma} = \frac{\pi X}{2}, \quad \sum_{\gamma=1}^{\infty} \frac{\sin \pi \gamma X}{\gamma} = \frac{\pi}{2} (1 - X),$$

безразмерную температуру представим в более простой форме:

$$\Theta(X, Fo) = W(X) - \sum_{\gamma=1}^{\infty} \Phi_\gamma(Fo) \sin \pi \gamma X, \quad \text{где } W(X) = 1 - X + \Theta_2 X.$$

Заметим, что ряд

$$\Theta(X, Fo) - W(X) = - \sum_{\gamma=1}^{\infty} \Phi_\gamma(Fo) \sin \pi \gamma X \quad (4.35)$$

сходится равномерно внутри интервала ($0 < X < 1$) и сходится быстрее, чем ряд в (4.33), так как каждый член ряда в (4.35) убывает пропорционально γ^{-2} , а в (4.33) — пропорционально γ^{-1} .

Таким образом, при использовании метода конечных интегральных преобразований целесообразно представлять решение в виде суммы двух функций, одна из которых удовлетворяет неоднородным граничным условиям задачи, а другая — однородным.

С учетом этих соображений можно записать

$$\Theta(X, Fo) = W(X) + \left[\sum_{\nu=1}^{\infty} \Theta_{\nu}(Fo) \sin \pi \gamma X - W(X) \right].$$

Тогда если воспользоваться представлением $W(X)$ через ряд Фурье

$$W(X) = 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \pi \gamma X}{\pi \gamma} + 2\Theta_2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\pi \gamma} \sin \pi \gamma X,$$

то получим решение, содержащее ряд с улучшенной сходимостью по сравнению с рядом в (4.33):

$$\Theta(X, Fo) = W(X) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\Theta_{\nu}(Fo) - \frac{2}{\pi \gamma} - 2\Theta_2 \frac{(-1)^{\nu-1}}{\pi \gamma} \right] \sin \pi \gamma X. \quad (4.36)$$

Результаты расчетов при $\Theta_2 = 2$ по формулам (4.32) и (4.36) представлены в табл. 4.1.

Из таблицы видно, что в граничной точке $X = 1$ решение (4.32) вообще не удовлетворяет граничным условиям, а в точке $X = 0,5$ для получения приемлемого по точности результата необходимо учитывать большое число членов ряда, даже при относительно больших значениях безразмерного времени Fo . В то же время данные табл. 4.1 подтверждают быструю сходимость ряда в решении (4.36). Так, уже при значениях $Fo > 0,1$ и $X = 0,5$ достаточно учитывать один член ряда. Этот пример подтверждает необходимость доработки решений краевых задач с неоднородными граничными условиями при применении конечных интегральных преобразований.

Существует два приема, с помощью которых можно устранить этот недостаток в решениях, получаемых методом конечных интегральных преобразований. В работе [27] разработан общий метод улучшения получаемых в решениях рядов с помощью применения функций Грина некоторых вспомогательных краевых задач.

Для различных задач линейной нестационарной теплопроводности в декартовых координатах в работе [105] приведена таблица расчетных формул этого метода улучшения сходимости рядов и даны конкретные примеры.

Рассмотрим модификацию метода конечных интегральных преобразований, предложенную автором работы [120], при которой реше-

ние исходной краевой задачи теплопроводности представляется как сумма решений для квазистационарной и нестационарной задач.

Нестационарное температурное поле в конечной однородной, изотропной области Ω с внутренним источником теплоты $q_v(p, \tau)$

Таблица 4.1

Результаты расчета нестационарного поля температур
в неограниченной пластине

Число учитываемых членов ряда	Расчет по формуле (4.32)	Расчет по формуле (4.36)
$X=1, \quad Fo=0,1$		
1	0	2,0000
2	0	2,0000
5	0	2,0000
10	0	2,0000
50	0	2,0000
80	0	2,0000
$X=0,5, \quad Fo=0,01$		
3	-0,1952	0,0315
7	-0,1163	0,0013
10	0,0958	0,0013
50	0,0203	0,0012
90	0,0118	0,0012
$X=0,5, \quad Fo=0,1$		
1	1,1980	0,7881
3	0,5615	0,7883
7	0,9435	0,7883
10	0,8828	0,7883
50	0,8073	0,7883
90	0,7988	0,7883
$X=0,5, \quad Fo=0,5$		
1	1,8961	1,4863
3	1,2595	1,4863
7	1,3686	1,4863
10	1,5808	1,4863
50	1,5054	1,4863
80	1,4743	1,4863

при постоянных теплофизических свойствах материала описывается уравнением

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T(p, \tau)}{\partial \tau} = \nabla^2 T(p, \tau) + \frac{1}{\lambda} q_v(p, \tau), \quad p \in \Omega, \quad \tau > 0. \quad (4.37)$$

где p — точка области Ω с координатами x_1, x_2, x_3 .

Граничные условия II рода на поверхности, ограничивающей область Ω , запишутся в виде

$$\lambda \partial T(p, \tau) / \partial n_i = q_i(s_i, \tau), \quad p \in S_i, \quad (4.38)$$

где поверхность S состоит из r непрерывных координатных поверхностей S_i ($i=1, 2, \dots, r$); n_i — внешняя нормаль к поверхности S_i ; s_i — точка на поверхности S_i .

Начальное условие

$$T(p, 0) = F(p), \quad p \in \Omega. \quad (4.39)$$

Вспомогательная задача Штурма — Лиувилля для нахождения собственных чисел μ_m и собственных функций $k_m(p)$ имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 k(p) + \mu^2 k(p) &= 0, \quad p \in \Omega; \\ \partial k(p) / \partial n_i &= 0, \quad p \in S_i. \end{aligned} \right\} \quad (4.40)$$

Собственную функцию $k_m(p) = k(\mu_m p)$ примем в качестве ядра конечного интегрального преобразования. Используя свойство ортогональности собственных функций задачи Штурма — Лиувилля, получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{c_m} &= \int_{\Omega} k_m^2(p) d\Omega; \\ \mu_m^2 &= c_m \int_{\Omega} |\nabla k_m(p)|^2 d\Omega. \end{aligned} \right\} \quad (4.41)$$

Из (4.41) следует, что $\mu_0 = 0$ также является собственным числом для функции $k_0 = \text{const} \neq 0$. Введя функции квазистационарного распределения температуры $T_{0j}(p, \tau)$, являющиеся решениями красовой задачи:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 T_{0j}(p, \tau) + \frac{\delta_{0j}}{\lambda} q_v(p, \tau) &= \frac{1}{a} \frac{dW_j(\tau)}{d\tau}, \quad p \in \Omega; \\ \lambda \frac{\partial T_{0j}(p, \tau)}{\partial n_i} &= \delta_{ij} q_i(s_i, \tau), \quad p \in S_i; \\ \int_{\Omega} T_{0j}(p, \tau) d\Omega &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.42)$$

где δ_{ij} — дельта-функция ($\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$ и $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$);

$$W_j(\tau) = \frac{a}{\lambda V} \left[\delta_{0j} \int_0^\tau \int_{\Omega} q_v(p, t) d\Omega dt + \delta_{1j} \int_0^\tau \int_{S_1} q_1(s_1, t) dS_1 dt \right], \quad (4.43)$$

где V — объем Ω .

Решение системы (4.42) — (4.43) может быть получено, как обычно, методом конечных интегральных преобразований с ядром $k_m(p)$; ее решение имеет вид

$$\begin{aligned} T_{0j}(p, \tau) &= \frac{1}{\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m}{\mu_m^2} k_m(p) \left[\delta_{0j} \int_{\Omega} k_m(p) q_v(p, \tau) d\Omega + \right. \\ &\quad \left. + \delta_{1j} \int_{S_1} k_m(s_1) q_1(s_1, \tau) dS_1 \right]. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Раскладывая ряд по собственным функциям $k_m(p)$ разность $T(p, \tau) - \sum_{j=0}^{\tau} T_{0j}(p, \tau)$, можно записать

$$T(p, \tau) = \sum_{j=0}^{\tau} T_{0j}(p, \tau) + \sum_{m=0}^{\infty} c_m k_m(p) \int_{\Omega} k_m(p) \left[T(p, \tau) - \sum_{j=0}^{\tau} T_{0j}(p, \tau) \right] d\Omega. \quad (4.45)$$

Выделим в (4.45) первое слагаемое при $m=0$ и учтем, что из (4.37) — (4.38) имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \int_{\Omega} T(p, \tau) d\Omega &= \frac{a}{\lambda} \left[\int_{\Omega} q_v(p, \tau) d\Omega + \sum_{i=1}^{\tau} \int_{S_i} q_i(s_i, \tau) dS_i \right]; \\ \int_{\Omega} T(p, \tau) d\Omega &= \int_{\Omega} F(p) d\Omega + \frac{a}{\lambda} \int_0^{\tau} \left[\int_{\Omega} q_v(p, t) d\Omega + \right. \\ &\left. + \sum_{i=1}^{\tau} \int_{S_i} q_i(s_i, t) dS_i \right] dt. \end{aligned}$$

Тогда (4.45) запишется в виде

$$\begin{aligned} T(p, \tau) &= \frac{1}{V} \int_{\Omega} F(p) d\Omega + \sum_{j=0}^{\tau} [W_j(\tau) + T_{0j}(p, \tau)] + \sum_{m=1}^{\infty} c_m k_m(p) \times \\ &\times \int_{\Omega} k_m(p) \left[T(p, \tau) - \sum_{j=0}^{\tau} T_{0j}(p, \tau) \right] d\Omega. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Уравнение (4.45) является решением системы (4.37) — (4.39), поэтому получим, что

$$\frac{d}{d\tau} \int_{\Omega} k_m(p) T(p, \tau) d\Omega = a\mu_m^2 \int_{\Omega} k_m(p) \left[\sum_{j=0}^{\tau} T_{0j}(p, \tau) - T(p, \tau) \right] d\Omega.$$

Проинтегрировав это уравнение по времени и подставляя результаты в (4.46), имеем решение задачи в виде

$$\begin{aligned} T(p, \tau) &= \frac{1}{V} \int_{\Omega} F(p) d\Omega + \sum_{j=0}^{\tau} [W_j(\tau) + T_{0j}(p, \tau)] + \sum_{m=1}^{\infty} c_m k_m(p) \times \\ &\times \exp(-a\mu_m^2 \tau) \left\{ \int_{\Omega} k_m(p) \left[F(p) - \sum_{j=0}^{\tau} T_{0j}(p, 0) \right] d\Omega - \right. \\ &\left. - \sum_{j=0}^{\tau} \int_0^{\tau} \exp(a\mu_m^2 t) \int_{\Omega} k_m(p) \dot{T}_{0j}(p, t) d\Omega dt \right\}. \end{aligned}$$

Здесь точка сверху означает производную по времени. С учетом выражений (4.43) и (4.44) распределение температуры в области Ω представится в виде

$$\begin{aligned}
 T(p, \tau) = & \frac{1}{V} \int_{\Omega} F(p) d\Omega + \frac{a}{\lambda V} \int_0^{\tau} \int_{\Omega} q_v(p, t) d\Omega + \\
 & + \sum_{i=1}^l \int_{S_i} q_i(s_i, t) dS_i \Big] dt + \sum_{j=0}^l T_{0j}(p, \tau) + \sum_{m=1}^{\infty} c_m k_m(p) \exp(-a\mu_m^2 \tau) \times \\
 & \times \left[\int_{\Omega} k_m(p) F(p) d\Omega - \frac{1}{\lambda\mu_m^2} \int_{\Omega} k_m(p) q_v(p, 0) d\Omega + \sum_{i=1}^l \int_{S_i} k_m(s_i) q_i(s_i, 0) \times \right. \\
 & \times dS_i \Big] - \frac{1}{\lambda\mu_m^2} \int_0^{\tau} \exp(a\mu_m^2 t) \left[k_m(p) \dot{Q}(p, t) d\Omega + \sum_{i=1}^l \int_{S_i} k_m(s_i) \times \right. \\
 & \times \dot{q}_i(s_i, t) dS_i \Big] dt \Big\}. \quad (4.47)
 \end{aligned}$$

Ряды в решении (4.47) сходятся равномерно, если мы предположим, что функции $F(p)$, $q_v(p, \tau)$, $q_i(s_i, \tau)$ не только интегрируемы по своим независимым переменным, но и имеют непрерывные первые и вторые частные производные по пространственным переменным, а функции $q_v(p, \tau)$ и $q_i(s_i, \tau)$ имеют еще и непрерывную производную первого порядка по времени.

Теплопроводность сферы (трехмерная задача). Нестационарное температурное поле $\Theta(R, \vartheta, \varphi, Fo)$ в однородной, изотропной сферической области Ω ($0 \leq R < 1$, $0 \leq \vartheta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$) при постоянных теплофизических параметрах материала описывается уравнением теплопроводности

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{R^2} \left[\frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial \Theta}{\partial R} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \Theta}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \varphi^2} \right] + Os(R, \vartheta, \varphi, Fo) = \\
 = \frac{\partial \Theta}{\partial Fo}, \quad (4.48)
 \end{aligned}$$

где $Os(R, \vartheta, \varphi, Fo) = \frac{q_v(r, \vartheta, \varphi, \tau) R_0^2}{\lambda T_*}$ — функция объемной плотности теплового потока внутренних источников теплоты; $\Theta = T/T_*$, $Fo = a\tau/R_0^2$.

На поверхности S области Ω заданы граничные условия II рода

$$\partial \Theta / \partial R = Ki(\vartheta, \varphi, Fo) \quad (R=1, 0 \leq \vartheta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi), \quad (4.49)$$

где $Ki(\vartheta, \varphi, Fo) = q(\vartheta, \varphi, \tau) R_0 / (\lambda T_*)$.

Начальное условие

$$\Theta(R, \vartheta, \varphi, 0) = F(R, \vartheta, \varphi),$$

где $F(R, \vartheta, \varphi) = T_0(r, \vartheta, \varphi) / T_*$.

Задача Штурма — Лиувилля для нахождения собственных чисел и собственных функций запишется в виде

$$\frac{1}{R^2} \left[\frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial k_{lmn}}{\partial R} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial k_{lmn}}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 k_{lmn}}{\partial \varphi^2} \right] + \mu_{ln}^2 k_{lmn} = 0$$

$$(0 \leq R < 1, 0 \leq \vartheta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi); \quad (4.50)$$

$$\partial k_{lmn} / \partial R = 0 \quad (R = 1, 0 \leq \vartheta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi).$$

Применяя для решения задачи (4.50) метод разделения переменных, получим

$$k_{lmn}(R, \vartheta, \varphi) = R^{-1/2} J_{n+\frac{1}{2}}(\mu_{ln} R) P_n^m(\cos \vartheta) \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases} \quad (l, m, n = 0, 1, 2, \dots),$$

где μ_{ln} — собственное число, являющееся l -м неотрицательным корнем уравнения $n J_{n+\frac{1}{2}}(\mu_{ln}) - \mu_{ln} J_{n+\frac{3}{2}}(\mu_{ln}) = 0$; P_n^m — присоединенная функция Лежандра первого рода, порядка m и степени n .

Определим нормирующие коэффициенты c_{lmn} . Согласно формуле (4.41),

$$c_{lmn}^{-1} = \int_0^1 R^2 dR \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} k_{lmn}^2(R, \vartheta, \varphi) d\varphi,$$

$$\text{тогда } c_{lmn} = \alpha_{ln} \beta_{mn} / [\pi(1 + \delta_{m0})], \quad \text{где } \alpha_{ln}^{-1} = \int_0^1 J_{n+\frac{1}{2}}^2(\mu_{ln} R) R dR =$$

$$= \left[\frac{\mu_{ln}^2 - n(n+1)}{2\mu_{ln}^2} \right] J_{n+\frac{1}{2}}^2(\mu_{ln}); \quad \beta_{mn}^{-1} = \int_0^\pi [P_n^m(\cos \vartheta)]^2 \sin \vartheta d\vartheta = \frac{2}{2n+1} \times \\ \times \frac{(n+m)!}{(n-m)!}; \quad \delta_{m0} \text{ — дельта-функция Кронекера.}$$

Определим квазистационарное распределение температуры $\Theta_0(R, \vartheta, \varphi, Fo)$ непосредственно из системы уравнений для ее нахождения. Имеем краевую задачу

$$\frac{1}{R^2} \left[\frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial \Theta_0}{\partial R} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \Theta_0}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \Theta_0}{\partial \varphi^2} \right] + Os(R, \vartheta, \varphi, Fo) = \\ = \frac{d\omega(Fo)}{dFo} \quad (4.51)$$

$$(0 \leq R < 1, 0 \leq \vartheta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi);$$

$$\partial \Theta_0 / \partial R = Ki(\vartheta, \varphi, Fo) \quad (R = 1, 0 \leq \vartheta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi); \quad (4.52)$$

$$\int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \Theta_0(R, \vartheta, \varphi, Fo) R^2 \sin \vartheta dR d\vartheta d\varphi = 0. \quad (4.53)$$

Для решения задачи (4.51) — (4.53) применим двойное интегральное преобразование по переменным φ и ϑ :

$$\Theta_0(R, m, n, Fo, \varphi') = \int_0^{2\pi} \cos m(\varphi - \varphi') d\varphi \int_0^\pi \Theta_0(R, \vartheta, \varphi, Fo) \times \\ \times P_n^m(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta.$$

Тогда в области изображений получим

$$\frac{1}{R^2} \left\{ \frac{d}{dR} \left(R^2 \frac{d\tilde{\Theta}_0}{dR} \right) - n(n+1) \tilde{\Theta}_0 \right\} + \tilde{O}s(R, n, m, Fo, \varphi') = \\ = 4\pi \delta_{m0} \delta_{n0} \frac{d\omega(Fo)}{dFo} \quad (0 \leq R < 1); \quad (4.54)$$

$$\frac{d\tilde{\Theta}_0}{dR} = Ki(n, m, Fo, \varphi') \text{ при } R=1.$$

При этом выполняются соотношения $\int_0^1 \tilde{\Theta}_0(R, 0, 0, Fo, \varphi') R^2 dR = 0$

и $\tilde{\Theta}_0(R, 0, m, Fo, \varphi') = 0$ ($m=1, 2, \dots$).

Определим функцию $\omega(Fo)$ по формуле (4.43) и постоянную V :

$$\omega(Fo) = \frac{3}{4\pi} \int_0^{\pi/2} dt \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} \left[Ki(\vartheta, \varphi, t) + \right. \\ \left. + \int_0^1 Os(R, \vartheta, \varphi, t) R^2 dR \right] d\varphi;$$

$$V = \iiint_{\Omega} d\Omega = 4/3\pi.$$

Решив уравнение (4.54), найдем оригинал функции $\tilde{\Theta}_0$ по формуле

$$\Theta_0(R, \vartheta, \varphi, Fo) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_{mn} P_n^m(\cos \vartheta)}{\pi(1+\delta_{m0})} \tilde{\Theta}_0(R, n, m, Fo, \varphi).$$

Тогда выражение для квазистационарного распределения температуры запишется в виде

$$\Theta_0(R, \vartheta, \varphi, Fo) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} \left(R^2 - \frac{3}{5} \right) Ki(\vartheta, \varphi, Fo) + \right. \\ \left. + \int_0^1 Os(\rho, \vartheta, \varphi, Fo) (\rho - 1) \rho d\rho + \int_0^1 Os(\rho, \vartheta, \varphi, Fo) \left[\frac{1}{2} \rho (\rho^2 + 1) + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + 1 - \frac{9}{5} \rho \Big| \rho \, d\rho \Big\} d\varphi + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_{mn} P_n^m(\cos \vartheta)}{\pi (1 + \delta_{m0})} \int_0^{\pi} P_n^m(\cos \vartheta) \sin \vartheta \, d\vartheta \times \\
& \times \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{n} \operatorname{Ki}(\vartheta, \varphi', Fo) + \frac{(n+1)1}{(2n+1)n} \int_0^1 \operatorname{Os}(\rho, \vartheta, \varphi', Fo) \rho^{n+1} \rho \, d\rho + \frac{1}{(2n+1)} \times \right. \\
& \times \left[\int_0^R \operatorname{Os}(\rho, \vartheta, \varphi', Fo) \rho^{n+1} \rho \, d\rho + \int_R^1 \operatorname{Os}(\rho, \vartheta, \varphi', Fo) \left(\frac{1}{\rho} \right)^n \rho \, d\rho \right] \Big\} \times \\
& \times \cos m(\varphi - \varphi') \, d\varphi'. \tag{4.55}
\end{aligned}$$

Решение исходной системы уравнений (4.48) — (4.41) теперь непосредственно следует из формулы (4.46):

$$\begin{aligned}
\Theta(R, \vartheta, \varphi, Fo) &= \frac{3}{4\pi} \int_0^1 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} F(R, \vartheta, \varphi) R^2 \sin \vartheta \, dR \, d\vartheta \, d\varphi + \Theta(Fo) + \\
& + \Theta_0(R, \vartheta, \varphi, Fo) + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_{ln} \beta_{mn}}{\pi (1 + \delta_{m0})} R^{-1/2} J_{n+1/2}(\mu_{ln} R) P_n^m(\cos \vartheta) \times \\
& \times \exp(-\mu_{ln}^2 Fo) \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^1 \int_0^{\pi} J_{n+1/2}(\mu_{ln} R) P_n^m(\cos \vartheta) F(R, \vartheta, \varphi') R^{3/2} \times \right. \\
& \times \sin \vartheta \, dR \, d\vartheta - \mu_{ln}^{-2} \left[\int_0^1 \int_0^{\pi} J_{n+1/2}(\mu_{ln} R) P_n^m(\cos \vartheta) \operatorname{Os}(R, \vartheta, \varphi', 0) \times \right. \\
& \times R^{3/2} \sin \vartheta \, dR \, d\vartheta + J_{n+1/2}(\mu_{ln}) \int_0^{\pi} P_n^m(\cos \vartheta) \operatorname{Ki}(\vartheta, \varphi', 0) \sin \vartheta \, d\vartheta \Big] - \\
& - \int_0^{Fo} \frac{\exp(-\mu_{ln}^2 t)}{\mu_{ln}^2} \left[\int_0^1 \int_0^{\pi} J_{n+1/2}(\mu_{ln} R) P_n^m(\cos \vartheta) \operatorname{Os}(R, \vartheta, \varphi', t) R^{3/2} \times \right. \\
& \times \sin \vartheta \, dR \, d\vartheta + J_{n+1/2}(\mu_{ln}) \int_0^{\pi} P_n^m(\cos \vartheta) \operatorname{Ki}'_t(\vartheta, \varphi', t) \sin \vartheta \, d\vartheta \Big] dt \Big\} \times \\
& \times \cos m(\varphi - \varphi') \, d\varphi'. \tag{4.56}
\end{aligned}$$

Ряды в выражении (4.56) сходятся равномерно и значительно быстрее, чем в решении, полученном обычным способом

§ 4.3. Применение таблиц интегральных преобразований

Использование интегральных преобразований значительно упрощается наличием таблиц ядер, характеристических уравнений, формул преобразования и обращения интегральных преобразований в прямоугольной, цилиндрической и сферической системах координат для областей различной протяженности при различных видах краевых условий, которые приведены ниже.

Одномерная задача. Неограниченная пластина и полугограниченное тело. Для решения несимметричных краевых задач при однородных граничных условиях III рода (рис. 4.1) можно применить интегральное преобразование

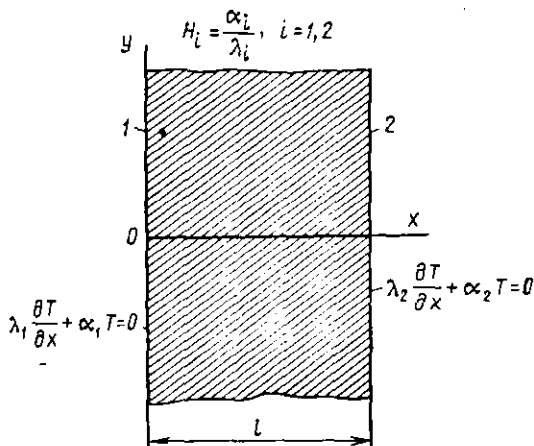


Рис. 4.1. К выбору ядер интегрального преобразования (табл. 4.2) [68]

$$\bar{T}(\mu_n, \tau) = \int_0^l K(\mu_n, x/l) \times T(x, \tau) dx.$$

Ядра интегральных преобразований $K(\mu_n, x/l)$ выбираются из табл. 4.2 ([68]) в зависимости от вида заданных граничных условий.

Переход к оригиналу осуществляется по формуле

$$T(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} K(\mu_n, x/l) T(\mu_n, \tau).$$

Вид ядра конечного интегрального преобразования, характеристическое уравнение и его корни в случае полого цилиндра определяются из табл. 4.3 и III.8 — III.14 (см. приложение III ч. 2) в зависимости от вида граничных условий.

Для сплошного цилиндра ($0 \leq r \leq R$) ядро и характеристическое уравнение определяются из табл. 4.4.

Двух- и трехмерные задачи. Прямоугольная система координат. Методом интегральных преобразований можно решить большое число краевых задач теплопроводности.

В табл. 4.5 приведены формулы преобразования, обращения, выражения для лапласиана в области изображений для различных

пространственных областей. Выражения для ядер K выбираются из табл. 4.2 в случае конечного интервала изменения пространственной координаты и из табл. 4.6 — для полупространственных интервалов.

Таблица 4.2

Ядра конечного преобразования и характеристическое уравнение для неограниченной пластины

Граничные условия		Ядро $K(\mu_n, x/l)$	Характеристическое уравнение для μ_n
при $X=0$	при $X=l$		
$H_1 = \infty$	$H_2 = \infty$	$\sqrt{2/l} \sin \mu_n (x/l)$	$\sin \mu = 0$
$H_1 = \infty$	$H_2 = 0$	$\sqrt{2/l} \sin \mu_n (x/l)$	$\cos \mu = 0$
$H_1 = 0$	$H_2 = \infty$	$\sqrt{2/l} \cos \mu_n (x/l)$	$\sin \mu = 0$
$H_1 = 0$	$H_2 = 0$	$\sqrt{2/l} \cos \mu_n (x/l)^*$	$\sin \mu = 0$
$H_1 = 0$	$H_2 = \text{const}$	$\sqrt{\frac{2}{l}} \left[\frac{\mu_n^2 + H_2^2 l^2}{\mu_n^2 + H_2^2 l^2 + H_2 l} \right]^{1/2} \times$ $\times \cos \mu_n (x/l)$	$\mu \operatorname{tg} \mu = H_2 l$
$H_1 = \text{const}$	$H_2 = \infty$	$\sqrt{\frac{2}{l}} \left[\frac{\mu_n^2 + H_1^2 l^2}{\mu_n^2 + H_1^2 l^2 + H_1 l} \right]^{1/2} \times$ $\times \sin \mu_n (1 - x/l)$	$\mu \operatorname{ctg} \mu = -H_1 l$
$H_1 = \text{const}$	$H_2 = 0$	$\sqrt{\frac{2}{l}} \left[\frac{\mu_n^2 + H_1^2 l^2}{\mu_n^2 + H_1^2 l^2 + H_1 l} \right]^{1/2} \times$ $\times \cos \mu_n (1 - x/l)$	$\mu \operatorname{tg} \mu = H_1 l$
$H_1 = \text{const}$	$H_2 = \text{const}$	$\sqrt{\frac{2}{l}} \mu_n \cos \mu_n (x/l) + H_1 l \sin \mu_n \times$ $\times (x/l) / \left[\left(\mu_n^2 + H_1^2 l^2 \right) \left(1 + \frac{H_2 l}{\mu_n^2 + H_2^2 l^2} + \right. \right.$ $\left. \left. + H_1 l \right) \right]^{1/2}$	$\operatorname{tg} \mu = \mu \times$ $\times \frac{(H_1 l + H_2 l)}{(\mu^2 - H_1 H_2 l^2)}$

Примечание. $H=\infty$ — граничные условия I рода; $H=0$ — граничные условия II рода; $H=\text{const}$ — граничные условия III рода; $\mu=\beta l$.

* Первый корень μ равен нулю.

Рассмотрим пример решения трехмерной задачи:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial \tau}, \quad (4.57)$$

$$T(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z); \quad (4.58)$$

Ядра интегрального преобразования Ханкеля для полого цилиндра [68]
 $(R_1 \leq r \leq R_2) K_\nu(\mu_n, r/R_1) = (1/\sqrt{N}) U_\nu(\mu_n, r/R_1), k = R_2/R_1, \mu_n = \beta_n R_1$

Граничные условия		$L_\nu(\mu_n, r/R_1)$ и N	μ_n (корни характеристического уравнения)
при $r=R_1$	при $r=R_2$		
III рода $\lambda_1 = \text{const}$ $\alpha_1 = \text{const}$	III рода $\lambda_2 = \text{const}$ $\alpha_2 = \text{const}$	$U_\nu(\mu_n, r/R_1) = \frac{J_\nu(\mu_n r/R_1) R_1}{\lambda_2 \mu_n J'_\nu(\mu_n k) + \alpha_2 R_1 J'_\nu(\mu_n k)} -$ $\frac{Y_\nu(\mu_n r/R_1) R_1}{\lambda_2 \mu_n Y'_\nu(\mu_n k) + \alpha_2 R_1 Y'_\nu(\mu_n k)};$ $N = \frac{R_2^2}{2} \left[\frac{\alpha_2^2 R_1^2}{\lambda_2^2 \mu_n^2} + \left(1 - \frac{\nu^2 R_1^2}{\mu_n^2 R_2^2} \right) \right] U_\nu^2(\mu_n, k) -$ $- \frac{R_1^2}{2} \left[\frac{\alpha_1^2 R_1^2}{\lambda_1^2 \mu_n^2} + \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu_n^2} \right) \right] U_\nu^2(\mu_n, 1)$	$\frac{-\mu \lambda_1 J'_\nu(\mu) + \alpha_1 R_1 J'_\nu(\mu)}{\mu \lambda_2 J'_\nu(\mu k) + \alpha_2 R_1 J'_\nu(\mu k)} -$ $\frac{-\mu \lambda_1 Y'_\nu(\mu) + \alpha_1 R_1 Y'_\nu(\mu)}{\mu \lambda_2 Y'_\nu(\mu k) + \alpha_2 R_1 Y'_\nu(\mu k)} = 0$
III рода $\lambda_1 = \text{const}$ $\alpha_1 = \text{const}$	II рода $\alpha_2 = 0$ $\lambda_2 = 1$ $U'_\nu(\mu, k) = 0$	$U_\nu(\mu_n, \frac{r}{R_1}) = \frac{J_\nu(\mu_n r/R_1) R_1}{\mu_n J'_\nu(\mu_n k)} - \frac{Y_\nu(\mu_n r/R_1) R_1}{\mu_n Y'_\nu(\mu_n k)};$ $N = \frac{R_2^2}{2} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu_n^2 k^2} \right) U_\nu^2(\mu_n, k) -$ $- \frac{R_1^2}{2} \left[\frac{\alpha_1^2 R_1^2}{\lambda_1^2 \mu_n^2} + \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu_n^2} \right) \right] U_\nu^2(\mu_n, 1)$	$\frac{-\mu \lambda_1 J'_\nu(\mu) + \alpha_1 R_1 J'_\nu(\mu)}{J'_\nu(\mu k)} -$ $\frac{-\mu \lambda_1 Y'_\nu(\mu) + \alpha_1 R_1 Y'_\nu(\mu)}{Y'_\nu(\mu k)} = 0$

Граничные условия		$U_v(\mu_n, r/R_1)$ и N	μ_n (корни характеристического уравнения)
при $r=R_1$	при $r=R_2$		
III рода $\lambda_1 = \text{const}$ $\alpha_1 = \text{const}$	I рода $\alpha_2 = 1$ $\lambda_2 = 0$ $U_v(\mu, k) = 0$	$U_v\left(\mu_n, \frac{r}{R_1}\right) = \frac{J_v(\mu_n r/R_1)}{J_v(\mu_n k)} - \frac{Y_v(\mu_n r/R_1)}{Y_v(\mu_n k)},$ $N = \frac{R_1^2}{2} U_v^2(\mu_n, k) - \frac{R_1^2}{2} \left[\frac{\alpha_1^2 R_1^2}{\lambda_1^2 \mu_n^2} + \left(1 - \frac{v^2}{\mu_n^2}\right) \right] \times$ $\times U_v^2(\mu_n, 1)$	$-\frac{\mu \lambda_1 J'_v(\mu) + \alpha_1 R_1 J_v(\mu)}{J_v(\mu k)} -$ $-\frac{-\mu \lambda_1 Y'_v(\mu) + \alpha_1 R_1 Y_v(\mu)}{Y_v(\mu k)} = 0$
II рода $\alpha_1 = 0$ $\lambda_1 = 1$ $U'_v(\mu, 1) = 0$	III рода $\alpha_2 = \text{const}$ $\lambda_2 = \text{const}$	$U_v\left(\mu_n, \frac{r}{R_1}\right) = \frac{J_v(\mu_n r/R_1) R_1}{\lambda_2 \mu_n J'_v(\mu_n k) + \alpha_2 R_1 J_v(\mu_n k)} -$ $-\frac{Y_v(\mu_n r/R_1) R_1}{Y_v(\mu_n k) R_1}$ $N = \frac{R_2^2}{2} \left[\frac{\alpha_2^2 R_1^2}{\lambda_2^2 \mu_n^2} + \left(1 - \frac{v^2}{\mu_n^2 k^2}\right) \right] U_v^2(\mu_n, k) -$ $-\frac{R_1^2}{2} \left(1 - \frac{v^2}{\mu_n^2}\right) U_v^2(\mu_n, 1)$	$\frac{J'_v(\mu)}{\mu \lambda_2 J'_v(\mu k) + \alpha_2 R_1 J_v(\mu k)} -$ $-\frac{Y'_v(\mu)}{\mu \lambda_2 Y'_v(\mu k) + \alpha_2 R_1 Y_v(\mu k)} = 0$
II рода $\alpha_1 = 0$ $\lambda_1 = 1$ $U'_v(\mu, 1) = 0$	II рода $\alpha_2 = 0$ $\lambda_2 = 1$ $U'_v(\mu, k) = 0$	$U_v\left(\mu_n, \frac{r}{R_1}\right) = \frac{J_v(\mu_n r/R_1) R_1}{\mu_n J'_v(\mu_n k)} - \frac{Y_v(\mu_n r/R_1) R_1}{\mu_n Y'_v(\mu_n k)}$	$\frac{J'_v(\mu)}{J'_v(\mu k)} - \frac{Y'_v(\mu)}{Y'_v(\mu k)} = 0$

Граничные условия		$U_v(\mu_n, R_1)$ и N	μ_v (корни характеристического уравнения)
при $r = R_1$	при $r = R_2$		
		$N = \frac{R_2^2}{2} \left(1 - \frac{v^2}{\mu_n^2 k^2} \right) U_v^2(\mu_n, k) -$ $- \frac{R_2^2}{2} \left(1 - \frac{v^2}{\mu_n^2} \right) U_v^2(\mu_n, 1)$	
II рода $\alpha_1 = 0$ $\lambda_1 = 1$ $U'_v(\mu, 1) = 0$	I рода $\alpha_2 = 1$ $\lambda_2 = 0$ $U'_v(\mu, k) = 0$	$U_v \left(\mu_n, \frac{r}{R_1} \right) = \frac{J_v(\mu_n r / R_1)}{J_v(\mu_n k)} - \frac{Y_v(\mu_n r / R_1)}{Y_v(\mu_n k)};$ $N = \frac{R_2^2}{2} U_v'^2(\mu_n, k) - \frac{R_1^2}{2} \left(1 - \frac{v^2}{\mu_n^2} \right) U_v^2(\mu_n, 1)$	$\frac{J'_v(\mu)}{J_v(\mu k)} - \frac{Y'_v(\mu)}{Y_v(\mu k)} = 0$
I рода $\alpha_1 = 1$ $\lambda_1 = 0$ $U_v(\mu, 1) = 0$	III рода $\alpha_2 = \text{const}$ $\lambda_2 = \text{const}$	$U \left(\mu_n, \frac{r}{R_1} \right) = \frac{J_v(\mu_n r / R_1) R_1}{\lambda_2 \mu_n J'_v(\mu_n k) + \alpha_2 R_1 J_v(\mu_n k)} -$ $- \frac{Y_v(\mu_n r / R_1) R_1}{\lambda_2 \mu_n Y'_v(\mu_n k) + \alpha_2 R_1 Y_v(\mu_n k)};$	$\frac{J_v(\mu)}{\mu \lambda_2 J'_v(\mu k) + \alpha_2 R_1 J_v(\mu k)} -$ $- \frac{Y_v(\mu)}{\mu \lambda_2 Y'_v(\mu k) + \alpha_2 R_1 Y_v(\mu k)} = 0$

Граничные условия		$U_v(\mu_n, r/R_1)$ и N	μ_n (корни характеристического уравнения)
при $r=R_1$	при $r=R_2$		
		$N = \frac{R_2^2}{2} \left[\frac{a_2^2 R_1^2}{\lambda_2^2 \mu_n^2} + \left(1 - \frac{v^2}{\mu_n^2 k^2} \right) \right] U_v^2(\mu_n, k) -$ $- \frac{R_1^2}{2} U_v'^2(\mu_n, 1)$	
I рода $\alpha_1 = 1$ $\lambda_1 = 0$ $U_v(\mu, 1) = 0$	II рода $\alpha_2 = 0$ $\lambda_2 = 1$ $U_v'(\mu, k) = 0$	$U_v(\mu_n, \frac{r}{R_1}) = \frac{J_v(\mu_n r/R_1) R_1}{\mu_n J_v(\mu_n k)} - \frac{Y_v(\mu_n r/R_1) R_1}{\mu_n Y_v(\mu_n k)}$ $N = \frac{R_2^2}{2} \left(1 - \frac{v^2}{\mu_n^2 k^2} \right) U_v^2(\mu_n, k) - \frac{R_1^2}{2} U_v'^2(\mu_n, 1)$	$\frac{J_v(\mu)}{J_v(\mu k)} - \frac{Y_v(\mu)}{Y_v(\mu k)} = 0$
I рода $\alpha_1 = 1$ $\lambda_1 = 0$ $U_v(\mu, 1) = 0$	I рода $\alpha_2 = 1$ $\lambda_2 = 0$ $U_v(\mu, k) = 0$	$U(\mu_n, \frac{r}{R_1}) = \frac{J_v(\mu_n r/R_1)}{J_v(\mu_n k)} - \frac{Y_v(\mu_n r/R_1)}{Y_v(\mu_n k)}$ $N = \frac{R_2^2}{2} U_v'^2(\mu_n, k) - \frac{R_1^2}{2} U_v'^2(\mu_n, 1)$	$\frac{J_v(\mu)}{J_v(\mu k)} - \frac{Y_v(\mu)}{Y_v(\mu k)} = 0$

$$\left. \begin{aligned} -\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial x} + \alpha_1 T &= f_1(y, z, \tau) \text{ при } x=0; \\ \lambda_2 \frac{\partial T}{\partial x} + \alpha_2 T &= f_2(y, z, \tau) \text{ при } x=l_1; \end{aligned} \right\} \quad (4.59)$$

$$\left. \begin{aligned} -\lambda_3 \frac{\partial T}{\partial y} + \alpha_3 T &= f_3(x, z, \tau) \text{ при } y=0; \\ \lambda_4 \frac{\partial T}{\partial y} + \alpha_4 T &= f_4(x, z, \tau) \text{ при } y=l_2; \end{aligned} \right\} \quad (4.60)$$

$$\left. \begin{aligned} -\lambda_5 \frac{\partial T}{\partial z} + \alpha_5 T &= f_5(x, y, \tau) \text{ при } z=0; \\ \lambda_6 \frac{\partial T}{\partial z} + \alpha_6 T &= f_6(x, y, \tau) \text{ при } z=l_3. \end{aligned} \right\} \quad (4.61)$$

Таблица 4.4

Ядра $K(\mu_n, r/R)$ и характеристические уравнения
интегрального преобразования для конечной области $(0 < r < R)$
в цилиндрической системе координат [68]

Граничные условия при $r=R$	Ядро $K_\nu(\mu_n, r/R)$	Характеристические уравнения
I рода $H = \alpha/\lambda = \infty$ ($\lambda \neq 0$)	$\frac{\sqrt{2}}{R} \frac{J_\nu(\mu_n r/R)}{J'_\nu(\mu_n)}$	$J'_\nu(\mu) = 0$
II рода $H = 0$ ($\alpha = 0$)	$\frac{\sqrt{2}}{R} \left[1 - \frac{v^2}{\mu_n^2} \right]^{-1/2} \frac{J_\nu(\mu_n r/R)}{J_\nu(\mu_n)}$	$J'_\nu(\mu) = 0$
III рода $H = \text{const}$	$\frac{\sqrt{2}}{R} \left[\left(\frac{HR}{\mu_n} \right)^2 + \left(1 - \frac{v^2}{\mu_n^2} \right) \right]^{-1/2} \frac{J_\nu(\mu_n r/R)}{J_\nu(\mu_n)}$	$\mu J'_\nu(\mu) + HR \times J_\nu(\mu) = 0$

Примечание. $\mu_n \approx \beta_n R$; $\mu = \beta R$; $H = \alpha/\lambda \equiv \alpha_1/\lambda_1$.

К системе (4.57) — (4.61) применим интегральное преобразование:

$$\tilde{T}(\beta_n, \gamma_m, \varepsilon_k, \tau) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 K(\beta_n, x) K(\gamma_m, y) K(\varepsilon_k, z) T(x, y, z, \tau) \times \\ \times dx dy dz.$$

В области изображений дифференциальное уравнение (4.57) примет вид

$$d\tilde{T}(\beta_n, \gamma_m, \varepsilon_k, \tau)/d\tau + a(\beta_n^2 + \gamma_m^2 + \varepsilon_k^2) \tilde{T}(\beta_n, \gamma_m, \varepsilon_k, \tau) = F(\beta_n, \gamma_m, \varepsilon_k, \tau), \quad (4.62)$$

Область	Формулы преобразования	Формула обращения	Преобразование $\nabla^2 T$
$0 \leq x \leq l_1$ $0 \leq y \leq l_2$	$T_I = \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} T K(\beta_n, x) K(\gamma_m, y) dx dy$	$T = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} K(\beta_n, x) K(\gamma_m, y) T_I$	$-(\beta_n^2 + \gamma_m^2) T_I + \sum_{i=1}^4 \int_{\lambda_i} \frac{1}{\lambda_i} L_i d\lambda_i$ $L = K(\beta_n, x) K(\gamma_m, y)$
$0 \leq x \leq l_1$ $0 \leq y \leq l_2$ $0 \leq z \leq l_3$	$T_I = \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \int_0^{l_3} T K(\beta_n, x) K(\gamma_m, y) \times$ $\times K(e_k, z) dx dy dz$	$T = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} K(\beta_n, x) K(\gamma_m, y) \times$ $\times K(e_k, z) T_I$	$-(\beta_n^2 + \gamma_m^2 + e_k^2) T_I + \sum_{i=1}^6 \iint_{(S_i)} \frac{1}{\lambda_i} \times$ $\times L_i dS_i$ $L = K(\beta_n, x) K(\gamma_m, y) K(e_k, z)$
$0 \leq x \leq \infty$ $0 \leq y \leq \infty$	$T_I = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} T K(\beta, x) K(\gamma, y) dx dy$	$T = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} K(\beta, x) K(\gamma, y) T_I d\beta d\gamma$	$-(\beta^2 + \gamma^2) T_I + \sum_{i=1}^2 \int_{\lambda_i} \frac{1}{\lambda_i} L_i d\lambda_i$ $L = K(\beta, x) K(\gamma, y)$
$0 \leq x \leq \infty$ $0 \leq y \leq \infty$ $0 \leq z \leq \infty$	$T_I = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} T K(\beta, x) K(\gamma, y) K \times$ $\times (e, z) dx dy dz$	$T = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} K(\beta, x) K(\gamma, y) K(e, z) \times$ $\times T_I d\beta d\gamma de$	$-(\beta^2 + \gamma^2 + e^2) T_I + \sum_{i=1}^3 \iiint_{(S_i)} \frac{1}{\lambda_i} \times$ $\times L_i dS_i$ $L = K(\beta, x) K(\gamma, y) K(e, z)$

Область	Формула преобразования	Формула обращения	Преобразование Ψ^{-1}
$-\infty < x < \infty$ $-\infty < y < \infty$ $-\infty < z < \infty$	$T_I = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp [i (\beta x + \gamma y + e z)] T dx dy dz$	$T = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp [-i (\beta x + \gamma y + e z)] \times \\ \times T_I d\beta d\gamma de$	$-(\beta^2 + \gamma^2 + e^2) T_I$
$0 < y_1 < l_2$ $0 < x < \infty$	$T_I = \int_0^{l_2} \int_0^{\infty} T K (\beta, x) K (\gamma_m, y) dx dy$	$T = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} K (\beta, x) K (\gamma_m, y) T_I d\beta$	$-(\beta^2 + \gamma_m^2) T_I + \sum_{i=1}^2 \int_{l_i}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} L_{ij} d\lambda_i$ $L = K (\beta, x) K (\gamma_m, y)$
$-\infty < x < \infty$ $0 < y < \infty$	$T_I = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{i\beta x} K (\gamma, y) T dx dy$	$T = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\beta x} K (\gamma, y) T_I d\beta d\gamma$	$-(\beta^2 + \gamma^2) T_I + \int_{(l)} \frac{1}{\lambda_j} L_{ij} d\lambda_j$ $L = e^{i\beta x} K (\gamma, y)$
$0 < x < \alpha$ $0 < y < l_2$ $0 < z < l_3$	$T_I = \int_0^{\alpha} \int_0^{l_2} \int_0^{l_3} T K (\beta, x) K (\gamma_m, y) K \times \\ \times (e_k, z) dx dy dz$	$T = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\alpha} \int_0^{l_2} \int_0^{l_3} K (\beta, x) K (\gamma_m, y) \times \\ \times K (e_k, z) T_I d\beta d\gamma dz$	$-(\beta^2 + \gamma_m^2 + e_k^2) T_I + \sum_{j=1}^3 \int_{l_j}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j} \times \\ \times L_{ij} d\lambda_j$ $L = K (\beta, x) K (\gamma_m, y) K (e_k, z)$

Область	Формула преобразования	Формула обращения	Преобразование $\nabla' T$
$-\infty \leq x < \infty$ $-\infty \leq y < \infty$ $0 \leq z \leq l_s$	$T_I = \int_0^\infty \int_0^{l_s} \int_0^{l_s} K(e_k, z) \exp(i\beta x + i\gamma y) \times$ $\times T \, dx \, dy \, dz$	$T = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(e_k, z) \exp \times$ $\times [-i(\beta x + \gamma y)] T_I \, d\beta \, d\gamma$	$-(\beta^2 + \gamma^2 + e_k^2) T_I + \sum_{j=1}^2 \iint \frac{1}{\lambda_j} \times$ $\times L_{jI} \, dS_j;$ $L = K(e_k, z) \exp [i(\beta x + \gamma y)]$
$0 \leq x < \infty$ $0 \leq y < \infty$ $0 \leq z \leq l_s$	$T_I = \int_0^\infty \int_0^{l_s} \int_0^{l_s} K(\beta, x) K(\gamma, y) K(e_k, z) \times$ $\times T \, dx \, dy \, dz$	$T = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty K(\beta, x) K(\gamma, y) K \times$ $\times (e_k, z) T_I \, d\beta \, d\gamma$	$-(\beta^2 + \gamma^2 + e_k^2) T_I + \sum_{j=1}^4 \iint \frac{1}{\lambda_j} \times$ $\times L_{jI} \, dS_j;$ $L = K(\beta, x) K(\gamma, y) K(e_k, z)$

Примечание. Ядро K берется из табл. 4.2; для граничных условий I рода надо заменить K_j/λ_j на величину $\frac{1}{\alpha_j} \frac{dK_j}{dn_j}$, где n_j — направление нормали к поверхности S_j .

где $F(\beta_n, \gamma_m, e_k, \tau) = \frac{a}{\lambda_1} [K(\beta_n, x)]_{x=0} \int_0^1 \int_0^1 K(e_k, z) K(\gamma_m, y) f_1(y, z, \tau) \times$
 $\times dy dz + \frac{a}{\lambda_2} [K(\beta_n, x)]_{x=l_1} \int_0^1 \int_0^1 K(e_k, z) K(\gamma_m, y) f_2(y, z, \tau) dy dz + \frac{a}{\lambda_3} \times$
 $\times [K(\gamma_m, y)]_{y=0} \int_0^1 \int_0^1 K(e_k, z) K(\beta_n, x) f_3(x, z, \tau) dx dz + \frac{a}{\lambda_4} [K(\gamma_m, y)]_{y=l_2} \times$
 $\times \int_0^1 \int_0^1 K(e_k, z) K(\beta_n, x) f_4(x, z, \tau) dx dz + \frac{a}{\lambda_5} [K(e_k, z)]_{z=0} \int_0^1 \int_0^1 K(\beta_n, x) \times$
 $\times K(\gamma_m, y) f_5(x, y, \tau) dx dy + \frac{a}{\lambda_6} [K(e_k, z)]_{z=l_3} \int_0^1 \int_0^1 K(\beta_n, x) K(\gamma_m, y) \times$
 $\times f_6(x, y, \tau) dx dy.$

При этом мы воспользовались формулой для лапласиана из второй строки табл. 4.5.

Таблица 4.6

Ядро интегрального преобразования для полупространственной задачи ($0 < x < \infty$)

Граничные условия при $x=0$	Ядро $K(\beta, x)$
III рода $H = \frac{a}{\lambda} = \text{const}$	$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{\beta \cos \beta x + H \sin \beta x}{\sqrt{\beta^2 + H^2}}$
II рода $H=0$ ($\alpha=0$)	$(2/\pi)^{1/2} \cos \beta x$
I рода $H=\infty$ ($\lambda=0$)	$(2/\pi)^{1/2} \sin \beta x$

Получив решение уравнения (4.62), воспользуемся формулой перехода в область оригиналов из табл. 4.5:

$$T(x, y, z, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \exp[-a(\beta_n^2 + \gamma_m^2 + e_k^2)\tau] K(\beta_n, x) \times$$

$$\times K(\gamma_m, y) K(e_k, z) \left\{ \bar{\varphi}(\beta_n, \gamma_m, e_k) + \int_0^{\tau} \exp[a(\beta_n^2 + \gamma_m^2 + e_k^2)t] F(\beta_n, \gamma_m, e_k, t) dt \right\},$$

где $\bar{\varphi}(\beta_n, \gamma_m, e_k) = [\bar{T}(\beta_n, \gamma_m, e_k, \tau)]_{\tau=0} = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 K(\beta_n, x) K(\gamma_m, y) \times$
 $\times K(e_k, z) \varphi(x, y, z) dx dy dz.$

Вид ядер K приведен в последней строке табл. 4.2.

Цилиндрическая система координат. Если температура цилиндрического тела зависит от двух пространственных координат $T(r, z, \tau)$ или $T(r, \vartheta, \tau)$, то для таких задач формулы преобразования и обращения содержат функции от двух переменных. Формулы интегрального преобразования и изображения лапласиана содержатся в табл. 4.7 для различных интервалов изменения пространственных координат.

Нестационарная теплопроводность клиновидной области. Задача определения нестационарного температурного поля в плоском однородном клине с углом раствора κ ($0 < \vartheta \leq \kappa$, $0 < \kappa < 2\pi$), ограниченном дугой окружности $\rho = \rho_0$, сводится к решению уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial T}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \vartheta^2} \quad (0 < \rho < \rho_0, \quad 0 < \vartheta < \kappa), \quad (4.63)$$

где $Fo = a\tau/R^2$ — число Фурье; $\rho = r/R$ — безразмерный радиус при соответствующих краевых условиях.

Пусть начальная температура клина

$$T(\rho, \vartheta, Fo)|_{Fo=0} = T_0(\rho, \vartheta). \quad (4.64)$$

На гранях клина заданы граничные условия I и II родов, а именно:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } \vartheta = 0 \quad T(\rho, \vartheta, Fo) = f(\rho, Fo); \\ \text{при } \vartheta = \kappa \quad \frac{\lambda}{\rho} \frac{\partial T(\rho, \kappa, Fo)}{\partial \vartheta} = \mu(\rho, Fo), \end{array} \right\} \quad (4.65)$$

и на дуге окружности $\rho = \rho_0$ выполняются граничные условия III рода

$$\frac{\partial T(\rho_0, \vartheta, Fo)}{\partial \rho} + Bi [T(\rho_0, \vartheta, Fo) - T_c(\vartheta, Fo)] = 0.$$

Для того чтобы исключить зависимость от переменной ϑ , применим интегральное синус-преобразование по ϑ (см. табл. 4.2, вторая строка):

$$T(\rho, v_n, Fo) = \int_0^\kappa K(v_n, \vartheta) T(\rho, \vartheta, Fo) d\vartheta,$$

где $K(v_n, \vartheta) = \sqrt{\frac{2}{\kappa}} \sin v_n \vartheta$, $v_n = (2n+1)\pi/(2\vartheta_0)$.

Тогда в области изображений получим задачу

$$\frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \rho} - \frac{v_n^2}{\rho^2} \hat{T} + \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{2}{\kappa}} \left[\frac{(2n+1)\pi}{2\kappa\rho} f(\rho, Fo) - (-1)^n \frac{1}{\lambda} \mu(\rho, Fo) \right] = \frac{\partial \hat{T}}{\partial \tau}, \quad (4.66)$$

$$\hat{T}(\rho, v_n, 0) = T_0(\rho, v_n); \quad (4.67)$$

$$\frac{\partial \hat{T}(\rho_0, v_n, Fo)}{\partial \rho} + Bi [\hat{T}(\rho_0, v_n, Fo) - \hat{T}(v_n, Fo)] = 0. \quad (4.68)$$

Таблица 4.7

Интегральные преобразования Ханкеля для двумерных задач теплопроводности
в цилиндрической системе координат [68]

Область	Формула преобразования	Формула обращения	Изображение ϑ, r
Сплошной цилиндр $0 \leq r \leq R_2$	$T_I = \int_0^{R_2} r K_0(\beta r, r) T dr$	$T = \sum_{n=1}^{\infty} K_0(\beta_n, r) T_I$	$-\beta_n^2 T_I + \left[\frac{K_0(\beta_n, r)}{\lambda_2} \right]_{r=R_2} I_{2I}$
$0 \leq \vartheta < \infty$	$T_I = \int_0^{\infty} r J_0(\beta r) T dr$	$T = \int_0^{\infty} \beta J_0(\beta r) T_I d\beta$	$-\beta^2 T_I$
$0 \leq r \leq R_2,$ $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$	$T_I = \int_0^{R_2} \int_0^{2\pi} r K_0(\beta r, r) \times$ $\times \cos \nu (\vartheta - \vartheta') T d\vartheta' dr$	$T = \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} K_0(\beta_n, r) T_I$	$-\beta_n^2 T_I + R_2 \left[\frac{K_0(\beta_n, r)}{\lambda_2} \right]_{r=R_2} I_{2I}(\nu)$
$0 \leq r \leq R_2,$ $0 \leq z \leq l$	$T_I = \int_0^{R_2} \int_0^l r K_0(\beta r, r) \times$ $\times K(\gamma_m, z) T dz dr$	$T = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} K_0(\beta_n, r) \times$ $\times K(\gamma_m, z) T_I$	$-\beta_n^2 T_I + R_2 \left[\frac{K_0(\beta_n, r)}{\lambda_2} \right]_{r=R_2} \times$ $\times I_{2I}(\gamma_m) + \left[\frac{K(\gamma_m, z)}{\lambda_3} \right]_{z=0} \times$ $\times I_{3I}(\beta_n) + \left[\frac{K(\gamma_m, z)}{\lambda_4} \right]_{z=l} \times$ $\times I_{4I}(\beta_n)$

Область	Формула преобразования	Формула обращения	Изображение $\gamma^* T$
$0 \leq r < R_2,$ $0 \leq z < \infty$	$T_I = \int_0^{R_2} \int_0^\infty r K_0(\beta_n, r) \times$ $\times K(\gamma, z) T dz dr$	$T = \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty K_0(\beta_n, r) \times$ $\times K(\gamma, z) T_I d\gamma$	$-\beta_n^2 T_I + R_2 \left[\frac{K_0(\beta_n, r)}{\lambda_2} \right]_{r=R_2} \times$ $\times I_{2I}(\gamma) + \left[\frac{K(\gamma, z)}{\lambda_3} \right]_{z=0} I_{3I}(\beta_n)$
$0 \leq r < R_2,$ $-\infty < z < \infty$	$T_I = \int_0^{R_2} \int_{-\infty}^\infty r K_0(\beta_n, r) \times$ $\times \exp(i\gamma z) T dz dr$	$T = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \sum_{n=1}^\infty K_0(\beta_n, r) \times$ $\times \exp(-i\gamma z) T_I d\gamma$	$-\beta_n^2 T_I + R_2 \left[\frac{K_0(\beta_n, r)}{\lambda_3} \right]_{r=R_2} \times$ $\times I_{2I}(\gamma)$
$0 \leq r < \infty,$ $0 \leq \theta < 2\pi$	$T_I = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r J_\nu(\beta r) T \times$ $\times \cos \nu(\theta - \theta') d\theta' dr$	$T = \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=0}^\infty \int_0^\infty \beta J_\nu(\beta r) T_I d\beta$	$-\beta^2 T_I$
$0 \leq r < \infty,$ $0 \leq z < l$	$T_I = \int_0^l \int_0^\infty r J_0(\beta r) K(\gamma_m, r) \times$ $\times T dz dr$	$T = \sum_{m=1}^\infty \int_0^\infty \beta J_0(\beta r) \times$ $\times K(\gamma_m, z) T_I d\beta$	$-\beta^2 T_I + \left[\frac{K(\gamma_m, z)}{\lambda_3} \right]_{z=0} I_{3I}(\beta) +$ $+ \left[\frac{K(\gamma_m, z)}{\lambda_4} \right]_{z=l} I_{4I}(\beta)$
$0 \leq r < \infty,$ $0 \leq z < \infty$	$T_I = \int_0^\infty \int_0^\infty r J_0(\beta r) K(\gamma, z) \times$ $\times T dz dr$	$T = \int_0^\infty \int_0^\infty \beta J_0(\beta r) K(\gamma, z) \times$ $\times T_I d\gamma d\beta$	$-\beta^2 T_I + \left[\frac{K(\gamma, z)}{\lambda_3} \right]_{z=0} I_{3I}(\beta)$

Область	Формула преобразования	Формула обращения	Изображение $\gamma z l$
$0 \leq r < \infty,$ $-\infty < z < \infty$	$T_I = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty r J_0(\beta r) \times$ $\times \exp(i\gamma z) T dz dr$	$T = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \beta J_0(\beta r) \times$ $\times \exp(-i\gamma z) T_I d\gamma d\beta$	$-\beta^2 T_I$
$R_1 \leq r \leq R_2$	$T_I = \int_{R_1}^{R_2} r K_0(\beta_n, r) T dr$	$T = \sum_{n=1}^\infty K_0(\beta_n, r) T_I$	$-\beta_n^2 T_I + R_1 \left[\frac{K_0(\beta_n, r)}{\lambda_1} \right]_{r=R_1} \times$ $\times f_{1I} + R_2 \left[\frac{K_0(\beta_n, r)}{\lambda_2} \right]_{r=R_2} f_{2I}$
$R_1 \leq r \leq R_2,$ $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$	$T_I = \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} r K_\nu(\beta_n, r) \times$ $\times \cos(\vartheta - \vartheta') T d\vartheta' dr$	$T = \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=0}^\infty \sum_{n=1}^\infty K_\nu(\beta_n, r) T_I$	$-\beta_n^2 T_I + R_1 \left[\frac{K_0(\beta_n, r)}{\lambda_1} \right]_{r=R_1} \times$ $\times f_{1I}(\nu) + R_2 \left[\frac{K_0(\beta_n, r)}{\lambda_2} \right]_{r=R_2} f_{2I}(\nu)$
$R_1 \leq r \leq R_2,$ $0 \leq z \leq l$	$T_I = \int_{R_1}^{R_2} \int_0^l r K_0(\beta_n, r) \times$ $\times K(\gamma_m, z) T dz dr$	$T = \sum_{m=1}^\infty \sum_{n=1}^\infty K_0(\beta_n, r) K(\gamma_m, z) T_I$	$-\beta_n^2 T_I + R_1 \left[\frac{K_0(\beta_n, r)}{\lambda_1} \right]_{r=R_1} \times$ $\times f_{1I}(\gamma_m) + R_2 \left[\frac{K_0(\beta_n, r)}{\lambda_2} \right]_{r=R_2} \times$ $\times f_{2I}(\gamma_m) + \left[\frac{K(\gamma_m, z)}{\lambda_3} \right]_{z=0} f_{3I}(\beta_n) +$ $+ \left[\frac{K(\gamma_m, z)}{\lambda_4} \right]_{z=l} f_{4I}(\beta_n)$

Область	Формула преобразования	Формула обращения	Изображение ∇T
$R_1 \leq r \leq R_2$ $0 \leq z < \infty$	$T_I = \int_{R_1}^{R_2} \int_0^\infty r K_0(\beta_n, r) \times$ $\times K(\gamma, z) dz dr$	$T = \int_0^\infty \sum_{n=1}^{\infty} K_0(\beta_n, r) K(\gamma, z) T_I dy$	$-\beta_n^2 T_I + R_1 \left[\frac{K_0(\beta_n, r)}{\lambda_1} \right]_{r=R_1} \times$ $\times I_{1I}(\gamma) + R_2 \left[\frac{K_0(\beta_n, r)}{\lambda_2} \right]_{r=R_2} \times$ $\times I_{2I}(\gamma) + \left[\frac{K(\gamma, z)}{\lambda_3} \right]_{z=0} I_{3I}(\beta_n)$
$R_1 \leq r \leq R_2$ $-\infty < z < \infty$	$T_I = \int_{R_1}^{R_2} \int_{-\infty}^\infty r K_0(\beta_n, r) \times$ $\times \exp(i\gamma z) T dz dr$	$T = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \sum_{n=1}^{\infty} K_0(\beta_n, r) \times$ $\times \exp(-i\gamma z) T_I dy$	$-\beta_n^2 T_I + R_1 \left[\frac{K_0(\beta_n, r)}{\lambda_1} \right]_{r=R_1} \times$ $\times I_{1I}(\gamma) + R_2 \left[\frac{K_0(\beta_n, r)}{\lambda_2} \right]_{r=R_2} I_{2I}(\gamma)$

Примечания 1. Корни для переменной r приведены в табл. 4.4 и 4.5. 2. Для граничных условий 1 ряда вместо K/λ_1 нужно брать $(1/\alpha_1) dK/d\alpha_1$. 3. Для граничных условий 2 ряда вместо K/λ_2 нужно брать $(1/\alpha_2) dK/d\alpha_2$. 4. Для граничных условий 3 ряда вместо K/λ_3 нужно брать $(1/\alpha_3) dK/d\alpha_3$. 5. Для граничных условий 4 ряда вместо K/λ_4 нужно брать $(1/\alpha_4) dK/d\alpha_4$. 6. Для граничных условий 5 ряда вместо K/λ_5 нужно брать $(1/\alpha_5) dK/d\alpha_5$. 7. Для граничных условий 6 ряда вместо K/λ_6 нужно брать $(1/\alpha_6) dK/d\alpha_6$. 8. При $\gamma = 0$ I заменяется на $2I$.

Применение к (4.66) — (4.68) преобразования Ханкеля по переменной ρ (см. табл. 4.4, третья строка)

$$\tilde{T}(e_k, v_n, Fo) = \int_0^{\rho_0} \rho K_{v_n}(e_k, \rho) \tilde{T}(\rho, v_n, Fo) d\rho$$

с ядром

$$K_{v_n}(e_k, \rho) = \frac{\sqrt{2}}{\rho_0} \left[\frac{Bi^2}{e_k^2} + \left(1 - \frac{v_n^2}{e_k^2 \rho_0^2} \right) \right]^{-1/2} \frac{J_{v_n}(e_k, \rho)}{J_{v_n}(e_k, \rho_0)},$$

где e_k — положительные корни характеристического уравнения $e J_{v_n}(e \rho_0) + Bi J_{v_n}(e \rho_0) = 0$, приводит к неоднородному обыкновенному дифференциальному уравнению относительно функции $\tilde{T}(e_k, v_n, \tau)$. Решая уравнение, получим

$$\tilde{T}(e_k, v_n, Fo) = \exp(-e_k^2 Fo) \left[\tilde{T}_0(e_k, v_n) + \int_0^{Fo} \exp(e_k^2 t) W(e_k, v_n, t) dt \right],$$

$$\text{где } \tilde{T}_0(e_k, v_n) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\rho_0} \int_0^{\pi} T_0(\rho, \vartheta) \sin \frac{(2n+1)\pi\vartheta}{2\pi} K_{v_n}(e_k, \rho) \rho d\rho d\vartheta;$$

$$W(e_k, v_n, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\rho_0} \left[\frac{(2n+1)\pi t(\rho, t)}{2\pi\rho} - (-1)^n \frac{\mu(\rho, t)}{\lambda} \right] \times \\ \times K_{v_n}(e_k, \rho) d\rho + Bi \rho_0 K_{v_n}(e_k, \rho_0) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} \sin \frac{(2n+1)\pi\vartheta}{2\pi} T_c(\vartheta, t) d\vartheta.$$

Функции T и T_c получим, совершая обратный переход в область оригиналов, по формулам

$$\tilde{T}(\rho, v_n, Fo) = \sum_{k=1}^{\infty} K_{v_n}(e_k, \rho) \tilde{T}(e_k, v_n, Fo);$$

$$T(\rho, \vartheta, Fo) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \sin \frac{(2n+1)\pi\vartheta}{2\pi} \tilde{T}(\rho, v_n, Fo).$$

Тогда распределение температур в клиновидной области имеет вид

$$T(\rho, \vartheta, Fo) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \sin \frac{(2n+1)\pi\vartheta}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} K_{v_n}(e_k, \rho) \times \\ \times \exp(-e_k^2 Fo) \left\{ \tilde{T}_0(e_k, v_n) + \int_0^{Fo} \exp(e_k^2 t) W(e_k, v_n, t) dt \right\}.$$

Сферическая система координат. Уравнение теплопроводности в сферических координатах можно представить в виде

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{\partial T}{\partial \mu} \right] + \frac{1}{r^2 (1 - \mu^2)} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2},$$

где $\mu = \cos \vartheta$.

Разделение переменных приводит к четырем обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$dv(\tau)/d\tau + a\beta^2 v(\tau) = 0; \quad (4.69)$$

$$d^2 u(\varphi)/d\varphi^2 + m^2 u(\varphi) = 0; \quad (4.70)$$

$$\frac{d^2 \omega(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\omega(r)}{dr} + \left[\beta^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right] \omega(r) = 0; \quad (4.71)$$

$$\frac{d}{d\mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{dM(\mu)}{d\mu} \right] + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1 - \mu^2} \right] M(\mu) = 0. \quad (4.72)$$

Частные решения уравнений (4.69) — (4.72) имеют вид соответственно

$$v(\tau) \sim \exp(-a\mu^2 \tau);$$

$$u(\varphi) \sim \sin m\varphi, \cos m\varphi;$$

$$\omega(r) \sim \frac{1}{\sqrt{\beta r}} J_{n+1/2}(\beta r), \quad \frac{1}{\sqrt{\beta r}} Y_{n+1/2}(\beta r);$$

$$M(\mu) \sim P_n^m(\mu), Q_n^m(\mu).$$

Здесь $P_n^m(\mu)$ и $Q_n^m(\mu)$ — соответственно функции Лежандра степени n порядка m первого рода и степени n порядка m второго рода; $J_{n+1/2}(\beta r)$ и $Y_{n+1/2}(\beta r)$ — соответственно функции Бесселя порядка $n+1/2$ 1-го рода и порядка $n+1/2$ 2-го рода.

Функции Бесселя 1-го и 2-го родов, порядок которых равен половине нечетного целого числа, связаны со сферическими функциями Бесселя 1-го и 2-го родов:

$$I_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{n+1/2}(z); \quad y_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} Y_{n+1/2}(z).$$

Для целых значений n сферические функции Бесселя суть элементарные трансцендентные функции:

$$I_n(z) = z^n \left(-\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right)^n \frac{\sin z}{z}, \quad y_n(z) = (-1)^{n+1} I_{n-1}(z) \quad (n=1, 2, \dots);$$

$$I_0(z) = \sin z/z, \quad y_0(z) = -\cos z/z.$$

Переменная $\mu = \cos \vartheta$ изменяется от -1 до $+1$, так как угол ϑ изменяется от 0 до π . Для разных интервалов изменения переменной μ в табл. 4.8 приведены формулы прямого и обратного преобразования, определено ядро преобразования. В табл. 4.9 приведены формула преобразования и обращения, выражение для лапласиана в области оригиналов и изображений при различных

граничных условиях. Вид ядер определен в табл. 4.8. Ядро в последней строке таблицы выражается формулой

$$K_{\text{пр}}(\mu, r) = r^{-1/2} J_{n+1/2}(v_{\text{пр}} r) P_n(\mu) / \sqrt{N_r N_\mu},$$

где $v_{\text{пр}}$ — положительные корни уравнения $J_{n+1/2}(vR_1) = 0$,

$$N_r N_\mu = - \frac{R_1^2}{2n+1} J_{n-1/2}(v_{\text{пр}} R_1) J_{n+3/2}(v_{\text{пр}} R_1).$$

Используя табл. 4.8, 4.9, можно решать конкретные задачи в сферической системе координат.

Двухмерное нестационарное температурное поле шара. Однородный шар ($0 \leq r \leq R$) с начальной температурой $T_0(r, \mu)$ помещен в среду с температурой $T_c(\mu, \tau)$ ($\mu = \cos \vartheta$).

При $\tau > 0$ между поверхностью шара и средой происходит теплообмен по закону Ньютона, причем изнутри шар нагревается источ-

Таблица 4.8

Интегральное преобразование Лежандра
и соответствующие формулы обращения для различных интервалов
изменения переменной μ [68]

Интервал изменения	Интегральное преобразование	Формула обращения	Ядро преобразования
$-1 < \mu < 1$	$T_I(n) = \int_{-1}^1 K_n(\mu) T d\mu$	$T = \sum_{n=0}^{\infty} K_n(\mu) T_I(n)$	$K_n(\mu) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(\mu)$
$0 < \mu < 1$	$T_I(2n+1) = \int_0^1 K_{2n+1}(\mu) T d\mu$	$T = \sum_{n=0}^{\infty} K_{2n+1}(\mu) \times T_I(2n+1)$	$K_{2n+1}(\mu) = -\sqrt{4n+3} P_{2n+1}(\mu)$
$0 < \mu < 1$	$T_I(2n) = \int_0^1 K_{2n}(\mu) T d\mu$	$T = \sum_{n=0}^{\infty} K_{2n}(\mu) T_I(2n)$	$K_{2n}(\mu) = \sqrt{4n+1} P_{2n}(\mu)$
$-1 < \mu < 1$	$T_I(n, m) = \int_{-1}^1 K_n^m(\mu) T d\mu$	$T = \sum_{n=0}^{\infty} K_n^m(\mu) \times T_I(n, m)$	$K_n^m(\mu) = -\sqrt{\frac{2n+1}{2} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} \times P_n^m(\mu)$

ником теплоты с объемной плотностью теплового потока $q_v(r, \mu, \tau)$.

Нахождение температурного поля связано с решением дифференциального уравнения

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{\partial T}{\partial \mu} \right] - \frac{q_v(r, \mu, \tau)}{\lambda}$$

$$(0 < r < R, -1 < \mu < 1, \tau > 0)$$

$$(4.73)$$

Интегральное преобразование (преобразование Лежандра) для оператора Лапласа в сферической системе координат [68]

Область изменения	Граничное условие	Интегральное преобразование	Формула обращения	$\nabla^2 T$	Изображение
$-1 < \mu \leq 1$		$T_I = \int_{-1}^1 K_n(\mu) T d\mu$	$T = \sum_{n=0}^{\infty} K_n(\mu) T_I$	$\frac{\partial}{\partial \mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{\partial T}{\partial \mu} \right]$	$-n(n+1) T_I$
$-1 < \mu \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$	Периодическая температура с периодом 2π	$T_I = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 K_n^m(\mu) T \times \times \cos m(\theta - \theta') d\mu d\theta'$	$T = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} K_n^m(\mu) T_I$ при $m=0$ π заменяется на 2π	$\frac{\partial}{\partial \mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{\partial T}{\partial \mu} \right] + \frac{m^2}{1 - \mu^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}$	$-n(n+1) T_I$
$0 \leq \mu \leq 1$	$\left. \frac{\partial T}{\partial \mu} \right _{\mu=0} = f$	$T_I = \int_0^1 K_{2n}(\mu) T d\mu$	$T = \sum_{n=0}^{\infty} K_{2n}(\mu) T_I$	$\frac{\partial}{\partial \mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{\partial T}{\partial \mu} \right]$	$-\frac{2n(2n+1)}{[K_{2n}(\mu)]_{\mu=0}} T_I$
$0 \leq \mu \leq 1$	$T _{\mu=0} = f$	$T_I = \int_0^1 K_{2n+1}(\mu) T d\mu$	$T = \sum_{n=0}^{\infty} K_{2n+1}(\mu) T_I$	$\frac{\partial}{\partial \mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{\partial T}{\partial \mu} \right]$	$-\frac{(2n+1)(2n+2)}{[dK_{2n+1}(\mu)]_{\mu=0}} T_I + \int_{\mu=0}^f$
$-1 < \mu \leq 1, 0 \leq r \leq R_1$	$T _{r=R_1} = f(\mu)$	$T_I = \int_0^{R_1} \int_{-1}^1 r^2 K_{np}(r, \mu) T \times \times T dr d\mu$	$T = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} K_{np}(r, \mu) T_I$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{\partial T}{\partial \mu} \right]$	$-\frac{v_{np}^2}{[dK_{np}(r, \mu)]_{r=R_1}} T_I \times \times \int_{-1}^1 R_1^2 f(\mu) \times \times \left[\frac{dK_{np}(r, \mu)}{dr} \right]_{r=R_1} d\mu$

Примечание. В настоящей таблице ядра преобразования следующие

$$K_n(\mu) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(\mu); K_{2n}(\mu) = \sqrt{4n+1} P_{2n}(\mu); K_n^m(\mu) = \sqrt{\frac{2n+1}{2} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\mu); K_{2n+1}(\mu) = \sqrt{4n+3} P_{2n+1}(\mu), m \leq n.$$

при начальном условии

$$T(r, \mu, 0) = T_0(r, \mu) \quad (4.74)$$

и граничном условии

$$\lambda \frac{\partial T(R, \mu, \tau)}{\partial r} + \alpha [T(R, \mu, \tau) - T_c(\mu, \tau)] = 0. \quad (4.75)$$

Применяя к задаче (4.73) — (4.75) преобразование Лежандра (см. табл. 4.8, первая строка), получим в области изображений (см. табл. 4.9, первая строка) трансформированную задачу

$$\frac{1}{a} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tau} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \tilde{T}}{\partial r} \right) - \frac{n(n+1)}{r^2} \tilde{T} + q_v(r, n, \tau)/\lambda; \quad (4.76)$$

$$\tilde{T}(r, n, 0) = \tilde{T}_0(r, n); \quad (4.77)$$

$$\lambda \frac{\partial \tilde{T}(R, n, \tau)}{\partial r} + \alpha [\tilde{T}(R, n, \tau) - \tilde{T}_c(n, \tau)] = 0. \quad (4.78)$$

Для того чтобы к уравнению (4.76) можно было применить преобразования Ханкеля, введем новую функцию $z(r, n, \tau)$, связанную с $\tilde{T}(r, n, \tau)$ зависимостью $z = r^{1/2} \tilde{T}$. Тогда задача (4.76) — (4.78) приведет к виду

$$\frac{1}{a} \frac{\partial z}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial z}{\partial r} \right) - \frac{(n+1/2)^2}{r^2} z + r^{1/2} q_v(r, n, \tau)/\lambda; \quad (4.79)$$

$$z(r, n, 0) = r^{1/2} T_0(r, n) \equiv z_0(r, n); \quad (4.80)$$

$$\lambda \frac{\partial z(R, n, \tau)}{\partial r} + \left(\alpha - \frac{\lambda}{2R} \right) z(R, n, \tau) - \alpha \sqrt{R} \tilde{T}_c(n, \tau) = 0. \quad (4.81)$$

Применим к этой задаче интегральное преобразование Ханкеля порядка $\nu = n + 1/2$ (см. табл. 4.4, третья строка), получим в области изображений уравнение первого порядка по переменной τ

$$\frac{dz}{d\tau} + a\gamma_m^2(n) \tilde{z} = W[\gamma_m(n), n, \tau]; \quad (4.82)$$

$$\tilde{z}(0) = z_0, \quad (4.83)$$

где $\gamma_m(n)$ — положительные корни характеристического уравнения (см. табл. 4.4, третья строка)

$$\gamma J_{n+1/2}(\gamma R) + \text{Bi} J_{n+1/2}(\gamma R) = 0;$$

$$\tilde{z}_0 = \int_0^R r^{3/2} K_{n+1/2}[\gamma_m(n), r] z_0(r, n) dr;$$

$$W[\gamma_m(n), n, \tau] = \frac{1}{c\rho} \int_0^R r^{3/2} K_{n+1/2}[\gamma_m(n), r] \frac{q_v(r, n, \tau)}{\lambda} dr +$$

$$+ aR^{3/2} \text{Bi} K_{n+1/2}[\gamma_m(n), R] T_c(n, \tau).$$

Решение задачи (4.82), (4.83) находим элементарно:

$$\hat{z} = \exp \left[-\alpha \gamma_m^2(n) \tau \right] \left\{ \tilde{z}_0 + \int_0^\tau \exp \left[\alpha \gamma_m^2(n) t \right] W \left[\gamma_m(n), n, t \right] dt \right\}.$$

С помощью формул обращения преобразований Ханкеля и Лежандра запишем решение задачи (4.73) — (4.75):

$$T(r, \mu, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} r^{-1/2} K_{n+1/2}(\gamma_m(n), r) K_n(\mu) \exp \left[-\alpha \gamma_m^2(n) \tau \right] \times \\ \times \left\{ \tilde{z}_0 + \int_0^\tau W \left[\gamma_m(n), n, t \right] \exp \left[\alpha \gamma_m^2(n) t \right] dt \right\}.$$

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В БЕСКОНЕЧНЫХ И ОДНОСТОРОННЕ БЕСКОНЕЧНЫХ ПРЕДЕЛАХ

§ 5.1. Виды преобразований и примеры применения

Рассмотрим наиболее часто применяемые в теории теплопроводности интегральные преобразования.

Одностороннее интегральное преобразование Лапласа

$$\tilde{f}(s) = L[f(\tau)] = \int_0^{\infty} f(\tau) \exp(-s\tau) d\tau \quad (5.1)$$

ставит в соответствие каждой однозначной функции (оригиналу) $f(\tau)$ (τ — действительная переменная) единственную функцию $\tilde{f}(s)$ (изображение) комплексной переменной $s = \sigma \pm i\alpha$.

После решения краевой задачи в изображениях переход к оригиналам осуществляется в общем случае по формуле

$$f(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \tilde{f}(s) \exp(s\tau) ds.$$

Путь интегрирования лежит справа от всех особых точек $\tilde{f}(s)$. Подробно вопросы применения интегрального преобразования Лапласа рассмотрены в § 5.2 — 5.5.

Двустороннее преобразование Лапласа задается соотношением

$$\tilde{f}_D(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \exp(-s\tau) d\tau \quad (5.2)$$

и представляет собой некоторое обобщение преобразования Лапласа, применяемое к задачам, где участвуют значения $f(\tau)$ при $\tau < 0$.

Переход к оригиналам осуществляется по формуле

$$f(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_2 + i\infty} \tilde{f}_D(s) \exp(s\tau) ds. \quad (5.3)$$

Интегрирование в (5.3) проводится в комплексной области, при этом $\sigma_1 < \text{Re } s = \sigma < \sigma_2$. Во многих частных случаях двустороннее преобразование Лапласа связано с преобразованием Лапласа простыми зависимостями. Так, например, $L_D[f(\tau)] = L[\tilde{f}(\tau)]$, если $f(\tau) = 0$ при

$\tau \leq 0^*$, $L_D[f(\tau)] = L[f(\tau)] - C/s$, если $f(\tau) = C$ при $\tau \leq 0$. В общем же случае одностороннее преобразование Лапласа связано с двусторонним соотношением

$$L_D[f(\tau)] = L[f(\tau)] + L[f(-\tau)]$$

Вопросы применения двустороннего преобразования Лапласа подробно рассмотрены в [18].

Преобразование Лапласа — Карсона получило широкое распространение наравне с преобразованием Лапласа. Преобразование Лапласа — Карсона задается следующим образом:

$$L_K[f(\tau)] = s \int_0^{\infty} f(\tau) \exp(-s\tau) d\tau.$$

Формула обращения

$$f(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{1}{s} \tilde{f}_K(s) \exp(s\tau) ds.$$

Преобразование Лапласа — Карсона связано с преобразованием Лапласа простым соотношением

$$L_K[f(\tau)] = sL[f(\tau)].$$

Поэтому все результаты, полученные в § 5.2 для преобразования Лапласа, могут быть легко распространены на случай интегрального преобразования Лапласа — Карсона. Наиболее полные таблицы интегрального преобразования Лапласа — Карсона приведены в [34].

Если положить в формулах двустороннего преобразования Лапласа (5.2) и (5.3), что $s = 2\pi i\nu$, то придем к формулам, дающим интегральное преобразование Фурье:

$$\tilde{F}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \exp(-2\pi i\nu\tau) d\tau, \quad (5.4)$$

$$f(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\nu) \exp(2\pi i\nu\tau) d\nu. \quad (5.5)$$

Причем интеграл в правой части формулы (5.5) понимается в смысле главного значения, т. е. как предел

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \tilde{F}(\nu) \exp(2\pi i\nu\tau) d\nu.$$

* Здесь L — оператор одностороннего преобразования Лапласа; L_D — оператор двустороннего преобразования Лапласа.

Преобразование Фурье применимо, если функция $f(\tau)$ абсолютно интегрируема на числовой прямой

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau)| d\tau < \infty. \quad (5.6)$$

Условие (5.6) значительно ограничивает область применимости интегрального преобразования Фурье. Например, условие (5.6) невыполнимо даже для элементарных функций, таких, как $f(\tau) = \text{const}$, $\sin \tau$, $\cos \tau$ и т. д. Отметим, что интегральное преобразование Фурье может быть также применимо в другой форме:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{F}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau; \\ f(\tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\omega) \exp(i\omega\tau) d\omega, \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

или

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau; \\ f(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\omega) \exp(i\omega\tau) d\omega. \end{aligned}$$

Рассмотрим косинус- и синус-преобразования Фурье. Введем соотношения

$$\tilde{F}_c(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(\tau) \cos \alpha\tau d\tau \quad \text{и} \quad f(\tau) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \tilde{F}_c(\alpha) \cos \alpha\tau d\alpha.$$

Функции, связанные указанным образом, называются *парой косинус-преобразований Фурье*. Аналогично вводится пара *синус-преобразований Фурье*:

$$\tilde{F}_s(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(\tau) \sin \alpha\tau d\tau, \quad f(\tau) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \tilde{F}_s(\alpha) \sin \alpha\tau d\alpha.$$

Для применения этих преобразований необходимо, так же как и в случае преобразования Фурье, потребовать абсолютную интегрируемость функции $f(\tau)$:

$$\int_0^{\infty} |f(\tau)| d\tau < \infty. \quad (5.8)$$

Если функция $f(\tau)$ — четная функция, то косинус-преобразование Фурье совпадает с преобразованием Фурье (5.7) $\tilde{F}(\omega) = \tilde{F}_c(\omega)$. Если

функция $f'(\tau)$ — нечетная функция, то синус-преобразование Фурье связано с преобразованием Фурье (5.7) соотношением

$$\tilde{F}(\omega) = i\tilde{F}_s(\omega).$$

Косинус-преобразование Фурье удобно применять для решения краевых задач при граничных условиях II рода [65], а синус-преобразование Фурье удобно при граничных условиях I рода.

Так как условие (5.8) значительно сужает область применения синус- и косинус-преобразований Фурье, то было предложено использовать обобщенные косинус- и синус-преобразования Фурье:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{F}_c(\alpha) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-\sigma\tau} f(\tau) \cos \alpha\tau d\tau; \\ f(\tau) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{\sigma\tau} \tilde{F}_c(\alpha) \cos \alpha\tau d\alpha; \\ \tilde{F}_s(\alpha) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-\sigma\tau} f(\tau) \sin \alpha\tau d\tau; \\ f(\tau) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{\sigma\tau} \tilde{F}_s(\alpha) \sin \alpha\tau d\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

Наличие дополнительных множителей $\exp(\mp\sigma\tau)$ позволяет использовать преобразования (5.9) для тех случаев, когда обычные косинус- и синус-преобразования Фурье неприменимы, например при $f(\tau) = \text{const}$, $\cos \tau$, $\sin \tau$ и т. п.

Рассмотрим интегральное преобразование Меллина. Если в формулах (5.2) заменим s на $-s$ и τ на $t = e^\tau$, то получим:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(-s) &= \int_0^{\infty} f(\ln t) \exp(s \ln t) \frac{dt}{t}; \\ f(\ln t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \tilde{f}(-s) \exp(-s \ln t) ds. \end{aligned}$$

Если теперь положить $f(\ln t) = g(t)$ и $\tilde{f}(-s) = \tilde{g}(s)$, то получим формулы преобразования Меллина:

$$\tilde{g}(s) = \int_0^{\infty} g(t) t^{s-1} dt; \quad g(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{\tilde{g}(s)}{t^s} ds. \quad (5.10)$$

Для применимости этих формул достаточно потребовать выполнения следующих условий:

1) функция $g(t)$ кусочно-непрерывна и имеет конечное изменение на каждом отрезке полуоси $t > 0$;

2) существуют две постоянные σ_1 и σ_2 ($\sigma_1 < \sigma_2$) такие, что интегралы $\int_0^{\infty} g(t) t^{\sigma_1-1} dt$ и $\int_0^{\infty} g(t) t^{\sigma_2-1} dt$ абсолютно сходятся;

3) прямая интегрирования в формуле (5.10) принадлежит полосе $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$.

Условия применимости преобразования Меллина могут иметь и другой вид [61]. Преобразование Меллина является некоторым видоизменением преобразования Лапласа, поэтому ряд свойств преобразования Меллина следует из соответствующих свойств преобразования Лапласа.

Для решения задач в цилиндрических или полярных координатах в полуограниченных областях применяют иногда преобразование Ханкеля. Формулы преобразования Ханкеля порядка n имеют вид

$$\tilde{f}(\alpha) = \int_0^{\infty} r f(r) J_n(\alpha r) dr; \quad f(r) = \int_0^{\infty} \tilde{f}(\alpha) J_n(\alpha r) \alpha d\alpha.$$

Приведем формулу для изображения комбинации производных, встречающуюся в выражении оператора Лапласа:

$$\frac{d^2 f(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df(r)}{dr} - \frac{n^2}{r^2} f(r) \rightarrow -\alpha^2 \tilde{f}(\alpha).$$

[Символ $\rightarrow$, разделяющий, например, функцию $g(r)$ и ее изображение $\tilde{g}(\alpha)$, следует читать так: функции $g(r)$ в области изображений соответствует функция $\tilde{g}(\alpha)$ и, наоборот, функции $\tilde{g}(\alpha)$ в области оригиналов соответствует функция $g(r)$.]

Кроме рассмотренных выше преобразований существует еще ряд интегральных преобразований, в ядро которых входят функции Бесселя (преобразования Канторовича — Лебедева, Мейера и др.). При решении задач теплопроводности эти преобразования применяются редко и не имеют большого практического значения.

Отметим, что в теории теплопроводности часто применяется преобразование Лапласа (одностороннее) и преобразование Лапласа — Карсона по отношению к временной переменной. Однако, когда начальные условия краевой задачи заданы в виде функции пространственных координат, эффективность применения этих методов снижается, так как в области изображений приходится решать неоднородное дифференциальное уравнение относительно пространственных координат.

В таких случаях можно применять: интегральное преобразование Фурье (5.4), (5.5) для тел неограниченной протяженности; косинус- и синус-преобразования Фурье для полуограниченных тел при граничных условиях II и I родов соответственно; интегральное

преобразование Ханкеля для тел полуограниченной протяженности, когда тело имеет осевую симметрию.

При применении разновидностей интегрального преобразования Фурье следует строго проверять условия сходимости соответствующих интегралов, которые являются более ограничительными, чем условия сходимости соответствующих интегралов преобразований Лапласа и Лапласа — Карсона.

Преобразование Меллина может быть использовано для исключения из дифференциальных уравнений выражений вида $\xi(\partial^2 u / \partial \xi^2) + \xi(\partial u / \partial \xi)$ по переменной ξ в полуограниченной области.

Температурное поле системы двух полуограниченных тел [65]. В начальный момент времени два полуограниченных тела с различной начальной температурой приведены в соприкосновение. Определить распределение температур в системе. Тепловой контакт считается идеальным.

Математическая формулировка задачи:

$$\frac{\partial T_1(x, \tau)}{\partial \tau} = a_1 \frac{\partial^2 T_1(x, \tau)}{\partial x^2} \quad (\tau > 0, x > 0); \quad (5.11)$$

$$\frac{\partial T_2(x, \tau)}{\partial \tau} = a_2 \frac{\partial^2 T_2(x, \tau)}{\partial x^2} \quad (\tau > 0, x < 0); \quad (5.12)$$

$$T_1(x, 0) = f_1(x), \quad T_2(x, 0) = f_2(x); \quad (5.13)$$

$$T_1(+0, \tau) = T_2(-0, \tau); \quad (5.14)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1(0, \tau)}{\partial x} = -\lambda_2 \frac{\partial T_2(0, \tau)}{\partial x}; \quad (5.15)$$

$$\frac{\partial T_1(+\infty, \tau)}{\partial x} = \frac{\partial T_2(-\infty, \tau)}{\partial x} = 0. \quad (5.16)$$

Сопряженную краевую задачу (5.11) — (5.16) можно привести к двум задачам, вводя неизвестную функцию теплового потока на поверхности контакта

$$\mu(\tau) = \lambda_1 \frac{\partial T_1(0, \tau)}{\partial x} = -\lambda_2 \frac{\partial T_2(0, \tau)}{\partial x}. \quad (5.17)$$

Для решения задачи применим бесконечное косинус-преобразование Фурье

$$T(\alpha, \tau) = \sqrt{2/\pi} \int_0^\infty T(x, \tau) \cos \alpha x \, dx.$$

Тогда уравнение (5.11) в области изображений с учетом условий (5.16), (5.17) имеет вид

$$\frac{d\tilde{T}_1(\alpha, \tau)}{d\tau} = -\alpha^2 a_1 T_1(\alpha, \tau) - \frac{a_1}{\lambda_1} \sqrt{2/\pi} \mu(\tau). \quad (5.17')$$

К уравнению (5.17') необходимо присоединить начальное условие в области изображений

$$\tilde{T}_1(a, 0) = \sqrt{2/\pi} \int_0^\infty f_1(x) \cos ax \, dx.$$

Тогда решение уравнения (5.17') запишется так:

$$T_1(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a_1 \tau}} \int_0^\infty f_1(x') \left\{ \exp \left[-\frac{(x+x')^2}{4a_1 \tau} \right] + \exp \left[-\frac{(x-x')^2}{4a_1 \tau} \right] \right\} \times \\ \times dx' - \frac{1}{\lambda_1} \sqrt{\frac{a_1}{\pi}} \int_0^\tau \frac{\mu(t)}{\sqrt{\tau-t}} \exp \left[-\frac{x^2}{4a_1(\tau-t)} \right] dt. \quad (5.18)$$

Решение для $T_2(x, \tau)$ получим аналогично, преобразовав область $\Omega (-\infty < x \leq 0)$ в область $\Omega' (0 \leq z < \infty)$ заменой переменной $x = -z$:

$$T_2(-z, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a_2 \tau}} \int_0^\infty f_2(-x') \left\{ \exp \left[\frac{(z+x')^2}{4a_2 \tau} \right] + \right. \\ \left. + \exp \left[-\frac{(z-x')^2}{4a_2 \tau} \right] \right\} dx' - \frac{1}{\lambda_2} \sqrt{\frac{a_2}{\pi}} \int_0^\tau \frac{\mu(t)}{\sqrt{\tau-t}} \exp \left[-\frac{z^2}{4a_2(\tau-t)} \right] dt. \quad (5.19)$$

Неизвестную функцию $\mu(t)$ определим из граничного условия равенства температур при $x=0$

$$\int_0^\tau \frac{\mu(t) dt}{\sqrt{\tau-t}} = F(\tau), \quad (5.20)$$

$$\text{где } F(\tau) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 \sqrt{a_2} + \lambda_2 \sqrt{a_1}) \sqrt{\tau}} \left[\frac{1}{\sqrt{a_1}} \int_0^\infty f(x') \exp \left(-\frac{x'^2}{4a_1 \tau} \right) dx' - \right. \\ \left. - \frac{1}{\sqrt{a_2}} \int_0^\infty f_2(-x') \exp \left(-\frac{x'^2}{4a_2 \tau} \right) dx' \right].$$

Уравнение типа (5.20) называется *интегральным уравнением Абеля* относительно функции $\mu(\tau)$; его решение имеет вид

$$\mu(t) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^\tau \frac{F(t)}{\sqrt{\tau-t}} dt. \quad (5.21)$$

Подстановка выражения для $\mu(t)$ (5.21) в формулы (5.18) и (5.19) дает окончательно распределение температур в системе. Так, в частном случае $f_1(x) = T_{01} = \text{const}$, $f_2(x) = T_{02} = \text{const}$ выражение для правой части в (5.20) упрощается:

$$F(\tau) = \left[(T_{01} - T_{02}) \lambda_1 \lambda_2 \sqrt{\pi} \right] / (\lambda_1 \sqrt{a_2} + \lambda_2 \sqrt{a_1}) = \text{const}$$

и решение интегрального уравнения Абеля (5.21) запишется так:

$$\mu(\tau) = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{(T_{01} - T_{02})}{\sqrt{\pi \tau}},$$

где $\varepsilon_i = \sqrt{\lambda_i c_i \rho_i}$, $i = 1, 2$.

Решения (5.18) и (5.19) имеют вид

$$\begin{aligned} \Theta_1(x, \tau) &= \frac{T_1(x, \tau) - T_{01}}{T_{01} - T_{02}} = - \frac{1}{\pi(1 + K_e)} \int_0^\tau \exp \left[- \frac{x^2}{4a_1(\tau - t)} \right] \times \\ &\times \frac{dt}{\sqrt{t(\tau - t)}}; \\ \Theta_2(x, \tau) &= \frac{T_2(x, \tau) - T_{02}}{T_{01} - T_{02}} = \frac{K_e}{\pi(1 + K_e)} \int_0^\tau \exp \left[- \frac{x^2}{4a_2(\tau - t)} \right] \times \\ &\times \frac{dt}{\sqrt{t(\tau - t)}}. \end{aligned}$$

Теплопроводность анизотропной пластинки [24]. Пусть неограниченная пластинка нагревается движущимся по окружности радиуса R точечным источником теплоты с объемной плотностью теплового потока q_0 . Угловая скорость движения источника постоянна. Пластинка помещена в среду с нулевой температурой и обменивается со средой теплотой по закону Ньютона. Материал пластинки обладает цилиндрической анизотропией в отношении теплофизических свойств. Считаем, что в течение всего процесса теплопроводности пластинка теплоизолирована на бесконечности. В начальный момент времени известно распределение температуры в пластинке $f(r, \Theta)$.

Уравнение теплопроводности в цилиндрических координатах в этом случае имеет вид

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = \lambda_r \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\lambda_\Theta}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \Theta^2} - \alpha^2 T + \frac{q_0}{r} \delta(r - R) \delta(\Theta - \omega \tau), \quad (5.22)$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция; $\alpha^2 = 2\alpha_h/h$; α_h — коэффициент теплоотдачи; $\lambda_r, \lambda_\Theta$ — теплопроводность в радиальном и тангенциальном направлениях; h — толщина пластинки.

Дополним уравнение (5.22) краевыми условиями

$$T(r, \Theta, 0) = f(r, \Theta); \quad (5.23)$$

$$T(\infty, \Theta, \tau) = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial r}(\infty, \Theta, \tau) = 0. \quad (5.24)$$

Решение задачи (5.22) — (5.24) получим с помощью последовательного применения преобразования Фурье по переменной Θ ($0 \leq \Theta \leq 2\pi$) и преобразования Ханкеля порядка ν (см. табл. 4.7, седьмая строка) по переменной r ($0 \leq r < \infty$). Применив преобразование Фурье

$$\tilde{T}(m, \Theta) = \int_0^{2\pi} \cos m(\Theta - \Theta') T(\Theta') d\Theta'$$

к уравнению (5.22), получим в области изображений

$$\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial r} - \frac{\nu^2}{r^2} \tilde{T} - \gamma^2 \tilde{T} - \frac{1}{a} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tau} = -\frac{1}{r} \frac{q_0}{\lambda_r} \delta(r - R) \times$$

$$\times \cos m(\Theta - \omega\tau), \quad (5.25)$$

где $\nu^2 = \lambda_\Theta m^2 / \lambda_r$, $a = \lambda_r / (c\rho)$, $\gamma^2 = a^2 / \lambda_r$.

Присоединим к уравнению (5.25) трансформированные краевые условия

$$\tilde{T}(r, m, \Theta, \tau) = \tilde{f}(r, m, \Theta), \quad (5.26)$$

$$\tilde{T}(\infty, m, \Theta, \tau) = 0, \quad \frac{\partial \tilde{T}}{\partial r}(\infty, m, \Theta, \tau) = 0. \quad (5.27)$$

К задаче (5.25) — (5.27) применим преобразование Ханкеля порядка ν

$$\tilde{T}_\nu(\sigma) = \int_0^\infty r J_\nu(\sigma r) T(r) dr.$$

Тогда получим неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{\partial \tilde{T}_\nu}{\partial \tau} + a(\sigma^2 + \gamma^2) \tilde{T}_\nu = q a J_\nu(\sigma R) \cos m(\Theta - \omega\tau) \quad (5.28)$$

с начальным условием

$$\tilde{\tilde{T}}_\nu(\sigma, m, \Theta, 0) = \tilde{\tilde{f}}(\sigma, m, \Theta), \quad (5.29)$$

где $q = q_0 / \lambda_r$.

Решение задачи (5.28), (5.29) имеет вид

$$\tilde{\tilde{T}}_\nu(\sigma, m, \Theta, \tau) = \tilde{\tilde{f}}_\nu(\sigma, m, \Theta) \exp[-a(\sigma^2 + \gamma^2)\tau] +$$

$$+ \frac{a^2 q (\sigma^2 + \gamma^2) J_\nu(\sigma R)}{m^2 \omega^2 + a^2 (\sigma^2 + \gamma^2)^2} \cos m(\Theta - \omega\tau) - \frac{a m \omega q J_\nu(\sigma R)}{m^2 \omega^2 + a^2 (\sigma^2 + \gamma^2)^2} \times$$

$$\times \sin m(\Theta - \omega\tau).$$

Воспользовавшись обратным преобразованием Ханкеля

$$T(r) = \int_0^{\infty} \sigma J_{\nu}(\sigma r) \tilde{T}_{\nu}(\sigma) d\sigma,$$

получим

$$\begin{aligned} \tilde{T}(r, m, \Theta, \tau) = & \exp(-a\gamma^2\tau) \int_0^{\infty} \sigma J_{\nu}(\sigma r) \tilde{f}_{\nu}(\sigma, m, \Theta) \exp(-a\sigma^2\tau) \times \\ & \times d\sigma + a^2 q \cos m(\Theta - \omega\tau) \int_0^{\infty} \frac{\sigma(\sigma^2 + \gamma^2) J_{\nu}(\sigma R) J_{\nu}(\sigma r)}{m^2\omega^2 + a^2(\sigma^2 + \gamma^2)^2} d\sigma - \\ & - a^2 m \omega q \sin m(\Theta - \omega\tau) \int_0^{\infty} \frac{\sigma J_{\nu}(\sigma R) J_{\nu}(\sigma r)}{m^2\omega^2 + a^2(\sigma^2 + \gamma^2)^2} d\sigma. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Используя выражения для двух последних интегралов в формуле (5.30) из справочника [55], получим решение (5.30) в форме

$$\begin{aligned} \tilde{T}(r, m, \Theta, \tau) = & \exp(-a\gamma^2\tau) \int_0^{\infty} \sigma J_{\nu}(\sigma r) \tilde{f}_{\nu}(\sigma, m, \Theta) \exp(-a\sigma^2\tau) d\sigma + \\ & + \frac{1}{2} q F(r, m, \tau), \end{aligned} \quad (5.31)$$

$$F(r, m, \tau) = \begin{cases} I_{\nu}(rc_1) K_{\nu}(Rc_1) \exp[-im(\Theta - \omega\tau)] + I_{\nu}(rc_2) K_{\nu} \times \\ \times (Rc_2) \exp[im(\Theta - \omega\tau)] \text{ при } 0 < r < R; \\ I_{\nu}(Rc_1) K_{\nu}(rc_1) \exp[-im(\Theta - \omega\tau)] + I_{\nu}(Rc_2) K_{\nu} \times \\ \times (rc_2) \exp[im(\Theta - \omega\tau)] \text{ при } r > R; \end{cases}$$

$$\gamma^2 + im\omega/a = c_1^2, \quad \gamma^2 - im\omega/a = c_2^2, \quad \operatorname{Re} c_1, c_2 > 0.$$

Применяя к выражению (5.31) обратное преобразование Фурье

$$T(\Theta) = \frac{\beta}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{T}(m, \Theta) \quad (\beta = 1/2 \text{ при } m=0,$$

$\beta = 1$ при $m=1, 2, \dots$),

решение задачи (5.22) — (5.24) представим в окончательном виде:

$$\begin{aligned} T(r, \Theta, \tau) = & \frac{\beta}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \exp(-a\gamma^2\tau) \int_0^{\infty} \sigma J_{\nu}(\sigma r) \tilde{f}_{\nu}(\sigma, m, \Theta) \times \right. \\ & \times \exp(-a\sigma^2\tau) d\sigma + \frac{1}{2} q \operatorname{Re} F(r, m, \tau) \Big\}. \end{aligned}$$

§ 5.2. Определение и основные правила выполнения операций преобразования Лапласа

Операционные методы (математические методы, преобразующие символы одной математической операции в символы другой) широко применяются для решения линейных дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа, к которым приводятся многие задачи нестационарной теплопроводности. Эти методы позволяют получить не только точное решение, но и приближенные решения с известной степенью точности.

Операционное исчисление начали развивать в своих работах Эйлер (1707—1783), Лагранж (1736—1813), Лаплас (1749—1827), Фурье (1768—1830), Коши (1789—1857). Систематическое изложение операционного метода было дано в 1862 г. профессором Киевского университета М. Ващенко-Захарченко. Английский инженер-электрик О. Хевисайд (1850—1925) впервые применил операционный метод к решению физико-технических проблем.

Строгое обоснование и дальнейшее развитие операционное исчисление получило в работах Д. Карссона, Бромвича, Ван-дер-Поля и др. Большой вклад в развитие операционного исчисления внесли ученые А. М. Эфрос, А. М. Данилевский, В. А. Диткин, А. П. Прудников и др.

Операционное исчисление на основе интегрального преобразования Лапласа получило широкое применение в теории теплопроводности благодаря работам А. В. Лыкова и Х. С. Карслоу.

Определение бесконечного интегрального преобразования Лапласа. Рассмотрим класс функций $f(\tau)$ действительного аргумента τ , произведения которых на $\exp(-s\tau)$ (где s — комплексное число, вещественная часть которого положительно определенная) стремятся к нулю при $\tau \rightarrow +\infty$ таким образом, что

несобственный интеграл $\int_0^{\infty} f(\tau) \exp(-s\tau) d\tau$ сходится. В результате вычисления этого интеграла получим функцию параметра s , которую обозначим через $\tilde{f}(s)$:

$$\tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} f(\tau) \exp(-s\tau) d\tau. \quad (5.32)$$

Функцию $f(\tau)$ называют *оригиналом*, а $\tilde{f}(s)$ — *изображением* по Лапласу функции $f(\tau)$.

Важно отметить, что не всякая функция $f(\tau)$ имеет изображение по Лапласу (L -изображение). Например, не существует L -изображения от функции $\exp(\tau^2)$, так как произведение $\exp(\tau^2) \exp(-s\tau)$ является возрастающей функцией и не стремится к нулю при $\tau \rightarrow \infty$. Поэтому при применении интегрального преобразования Лапласа предполагают, что функция $f(\tau)$ удовлетворяет следующим трем условиям:

1) $f(\tau)$ непрерывна вместе со своими производными достаточно высокого порядка для всех значений τ , кроме возможных точек разрыва I рода в конечном числе на каждом интервале конечной длины;

2) $f(\tau) = 0$ при $\tau < 0$;

3) существует два таких действительных числа $A > 0$ и $\sigma_0 > 0$, что для любых значений τ

$$|f(\tau)| \leq A \exp(\sigma_0 \tau), \quad (5.33)$$

т. е. модуль $f(\tau)$ растет не быстрее, чем некоторая показательная функция.

В силу условия 1 оригиналы ни при каком значении τ не обращаются в бесконечность. Условие 2 не является стеснительным для практики, так как в практических задачах всегда можно принять за ноль то значение τ , начиная с которого нас интересуют значения функции $f(\tau)$.

Очевидно, что каждой функции $f(\tau)$, удовлетворяющей перечисленным выше трем условиям, соответствует единственная функция $\tilde{f}(s)$, являющаяся ее изображением и вычисляемая по формуле (5.32). Из формулы (5.32) следует также, что изменение значения функции $f(\tau)$ в какой-либо единственной точке $\tau = \tau_0$ не окажет влияния на величину интеграла, поэтому каждому изображению $\tilde{f}(s)$ будет соответствовать в классе разрывных функций бесчисленное множество оригиналов $f(\tau)$.

Тем не менее эти оригиналы могут отличаться друг от друга только на так называемые нуль-функции $N(\tau)$, т. е. на такие функции, для которых при всех положительных τ имеет место

$$\int_0^{\tau} N(t) dt \equiv 0.$$

В классе же непрерывных функций одному изображению $\tilde{f}(s)$ будет соответствовать одна и только одна функция $f(\tau)$, что и составляет содержание теоремы единственности Лерха. Так как в практических задачах теории теплопроводности оригинал обычно предполагается непрерывной функцией, то приведенная теорема позволяет находить решение однозначно.

Рассмотрим некоторые примеры нахождения изображений по Лапласу простейших функций.

1. Найти L -изображение постоянной $f(\tau) \equiv C \equiv \text{const}$:

$$L(C) = \int_0^{\infty} C e^{-s\tau} d\tau = C \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a e^{-s\tau} d\tau = C \lim_{a \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-s\tau}}{-s} \right]_0^a = \frac{C}{s}.$$

2. Найти L -изображение показательной функции $f(\tau) = e^{b\tau}$, где $b = \text{const}$:

$$L(e^{b\tau}) = \int_0^{\infty} e^{-s\tau} e^{b\tau} d\tau = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a e^{-(s-b)\tau} d\tau = \lim_{a \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-(s-b)\tau}}{-(s-b)} \right]_0^a = \frac{1}{s-b},$$

$$\text{Res} > b.$$

Из линейных свойств определенного интеграла вытекают следующие следствия в отношении преобразования Лапласа:

а) при умножении на постоянный множитель оригинала изображение также умножается на этот множитель, т. е. из соотношения $f(\tau) \rightarrow \tilde{f}(s)$ * следует $Cf(\tau) \rightarrow C\tilde{f}(s)$, где $C = \text{const}$;

б) сумме оригиналов в качестве их изображения соответствует сумма их изображений; иными словами, из соотношений $f_1(\tau) \rightarrow \tilde{f}_1(s)$, $f_2(\tau) \rightarrow \tilde{f}_2(s)$ следует $f_1(\tau) + f_2(\tau) \rightarrow \tilde{f}_1(s) + \tilde{f}_2(s)$;

в) любой линейной комбинации оригиналов в качестве их изображения соответствует такая же линейная комбинация их изображений, т. е. из соотношений $f_i(\tau) \rightarrow \tilde{f}_i(s)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) следует

$$\sum_{i=1}^n C_i f_i(\tau) \rightarrow \sum_{i=1}^n C_i \tilde{f}_i(s),$$

где $C_i = \text{const}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Основные правила выполнения операций при преобразовании Лапласа. При применении преобразования Лапласа каждой функции из области оригиналов соответствует определенная функция в области изображений. Однако при решении краевых задач необходимо знать не только изображение отдельных функций, но и правила перевода в область изображений выполняемых над функциями операций. Например, если в области оригиналов производится дифференцирование функции, то в области изображений этой операции должна отвечать вполне определенная другая операция. Приведем основные «правила», или теоремы, преобразования Лапласа, необходимые при решении краевых задач:

1. Теорема подобия. Если аргумент оригинала (изображения) умножается на положительное число, то при этом изображение (оригинал) и его аргумент $s(\tau)$ делятся на это число:

$$\left. \begin{aligned} f(a\tau) &\rightarrow (1/a) \tilde{f}(s/a), \\ &\quad (a > 0) \\ \tilde{f}(as) &\rightarrow (1/a) f(\tau/a). \end{aligned} \right\} \quad (5.34)$$

Докажем первое из соотношений (5.34). Пусть оригинал $f(\tau)$ имеет изображение $\tilde{f}(s)$. Умножим аргумент τ на положительное число a и найдем изображение функции $f(a\tau)$. По определению изображения (5.32) имеем

$$\tilde{f}(as) = \int_0^{\infty} f(a\tau) \exp(-s\tau) d\tau.$$

* Это соотношение читается: «функция $f(\tau)$ имеет своим изображением по Лапласу функцию $\tilde{f}(s)$ » и, наоборот, «функция-изображение $\tilde{f}(s)$ имеет оригинал $f(\tau)$ ».

Произведем замену переменной интегрирования, полагая $a\tau = t$. Тогда получим

$$f(a\tau) \rightarrow \frac{1}{a} \int_0^{\infty} f(t) \exp\left(-\frac{s}{a} t\right) dt = \frac{1}{a} \tilde{f}\left(\frac{s}{a}\right),$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим следующий пример. Зная из таблицы преобразования Лапласа (см. приложение IV), что $\cos x \rightarrow s/(s^2+1)$, для функции $\cos \pi x$, пользуясь теоремой подобия, получим

$$\cos \pi x \rightarrow \frac{1}{\pi} \frac{(s/\pi)}{(s/\pi)^2+1} = \frac{s}{s^2+\pi^2}.$$

Как следствие из этой теоремы можно получить следующие результаты:

а) начальное значение оригинала связано с конечным значением изображения соотношением $f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \tilde{f}(s)$;

б) конечное значение оригинала связано с начальным значением изображения равенством $f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \tilde{f}(s)$, при этом предполагается, что существует конечный предел

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} f(\tau) = f(\infty).$$

Докажем первое утверждение (второе доказывается аналогично). Перейдем к пределу при $a \rightarrow 0$ в соотношении (5.34)

$$\lim_{a \rightarrow 0} f(a\tau) \rightarrow \lim_{a \rightarrow 0} (1/a) \tilde{f}(s/a). \quad (5.35)$$

Но $\lim_{a \rightarrow 0} f(a\tau) = f(0)$ и, как известно из примера, изображением постоянной $f(0)$ служит $f(0)/s$, т. е.

$$f(0) \rightarrow f(0)/s. \quad (5.36)$$

С другой стороны, имеем

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \tilde{f}\left(\frac{s}{a}\right) = \frac{1}{s} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{s}{a} \tilde{f}\left(\frac{s}{a}\right) = \frac{1}{s} \lim_{s' \rightarrow \infty} \tilde{f}(s'),$$

где $s/a = s'$ и при $a \rightarrow 0$ $s' \rightarrow \infty$, оставаясь в правой полуплоскости, поскольку $a > 0$. Таким образом, равенство (5.35) можно записать в виде

$$f(0) \rightarrow \frac{1}{s} \lim_{s \rightarrow \infty} \tilde{f}(s). \quad (5.37)$$

Сравнивая равенства (5.36) и (5.37), получаем требуемый результат.

2. Первая теорема смещения. При запаздывании изменения данного оригинала на значение аргумента $\tau=a>0$ его изображение умножается на $\exp(-sa)$:

$$f(\tau-a) \rightarrow \tilde{f}(s) \exp(-as) \quad (a>0, f(\tau<0)=0). \quad (5.38)$$

Предположение о равенстве нулю $f(\tau)$ для всех отрицательных τ , во многих случаях играющее второстепенную роль, здесь особенно важно и его всегда следует иметь в виду.

При $\tau < a$ аргумент $\tau-a$ отрицателен, поэтому $f(\tau-a)=0$. Следовательно, график функции $f(\tau-a)$ получается из графика функции $f(\tau)$ смещением последнего вправо на расстояние Oa и одновременным дополнением его в интервале между O и a отрезком оси τ (рис. 5.1).

Докажем справедливость соотношения (5.38). Введем обозначение

$$f_a(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } \tau < a; \\ f(\tau-a) & \text{при } \tau > a. \end{cases}$$

Найдем изображение оригинала $f_a(\tau)$. Согласно определению (5.32), имеем

$$\begin{aligned} f_a(\tau) &\rightarrow \int_0^{\infty} f_a(\tau) \exp(-s\tau) d\tau = \int_0^a f_a(\tau) \exp(-s\tau) d\tau + \\ &+ \int_a^{\infty} f_a(\tau) \exp(-s\tau) d\tau = \int_a^{\infty} f(\tau-a) \exp(-s\tau) d\tau, \end{aligned}$$

так как $f_a(\tau)=0$ при $\tau < a$.

Выполнив подстановку $\tau-a=t$, получим

$$f_a(\tau) \rightarrow \int_0^{\infty} f(t) \exp[-s(t+a)] dt = e^{-sa} \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt,$$

т. е. $f(\tau-a) \rightarrow \tilde{f}(s) \exp(-as)$, что и требовалось доказать.

Пример применения теоремы имеется в п. 6 § 5.4.

3. Вторая теорема смещения

$$f(\tau+a) \rightarrow e^{as} \left[\tilde{f}(s) - \int_0^a e^{-s\tau} f(\tau) d\tau \right]. \quad (5.39)$$

Эта теорема противоположна первой теореме смещения в том смысле, что график функции $f(\tau)$ смещается теперь на отрезок Oa не вправо, а влево.

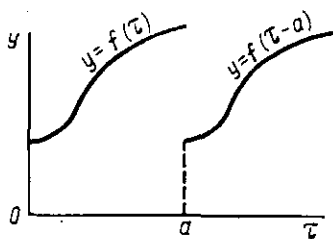


Рис. 5.1. Смещение графика функции $f(\tau)$ вправо

Такое смещение приводит к тому, что начальный участок графика ($0 \leq \tau \leq a$) пропадает, так как новую функцию тоже можно рассматривать только при значениях $\tau \geq 0$. Поэтому ясно, что изображение $\tilde{f}(s)$ не может быть связано непосредственно с новой, усеченной функцией $f(\tau+a)$. Это и объясняет появление в правой части соответствия (5.39) конечного интеграла Лапласа от функции $f(\tau)$ при значениях $0 \leq \tau \leq a$.

4. Теорема затухания. При умножении оригинала на $e^{-\lambda\tau}$ (λ — произвольное комплексное число) в его изображении s заменяется на $s+\lambda$:

$$f(\tau) \exp(-\lambda\tau) \rightarrow \tilde{f}(s+\lambda).$$

Действительное затухание оригинала имеет место только в случае, когда λ представляет собой положительное вещественное число.

Доказательство. Пусть дан оригинал $f(\tau)$, имеющий изображение $\tilde{f}(s)$. Рассмотрим новый оригинал $e^{-\lambda\tau} f(\tau)$ и найдем его изображение. На основании 5.32 имеем

$$e^{-\lambda\tau} f(\tau) \rightarrow \int_0^\infty e^{-s\tau} e^{-\lambda\tau} f(\tau) d\tau = \int_0^\infty e^{-(s+\lambda)\tau} f(\tau) d\tau, \text{ т. е. } e^{-\lambda\tau} \times$$

$$\times f(\tau) \rightarrow \tilde{f}(s+\lambda).$$

Пример применения этой теоремы дан в п. 6 § 5.4.

5. Теорема дифференцирования для оригинала. Предположим, что наивысшая рассматриваемая производная функции $f(\tau)$ существует в каждой точке $\tau > 0$ и имеет изображение. Тогда из этого предположения следует, что более низкие производные, включая первообразную функцию, также имеют изображения:

$$\begin{aligned} f'(\tau) &\rightarrow s\tilde{f}(s) - f(+0); \\ f''(\tau) &\rightarrow s^2\tilde{f}(s) - f(+0)s - f'(+0); \end{aligned} \quad (5.40)$$

$$\begin{aligned} f^n(\tau) &\rightarrow s^n\tilde{f}(s) - f(+0)s^{n-1} - \\ &- f'(+0)s^{n-2} - \dots - f^{(n-2)}(+0)s - f^{(n-1)}(+0). \end{aligned} \quad (5.41)$$

Для решения краевых задач это правило является самым важным. Трансцендентная в области оригиналов операция — дифференцирование — заменяется в области изображений тривиальной операцией — умножением изображения на степень аргумента s с одновременным добавлением многочлена, коэффициенты которого являются «начальными значениями» оригинала. Включение в изображение начальных значений оригинала является особенно ценным при применении теоремы к нестационарным краевым задачам (см. § 5.4).

Докажем справедливость соотношения (5.40). Пусть $f(\tau)$ — дифференцируемая функция и ее производная $f'(\tau)$ также является оригиналом, причем $|f(\tau)| < Me^{a\tau}$, $|f'(\tau)| < M_1 e^{a_1\tau}$ при $\tau > 0$.

Допустим, $f(\tau) \rightarrow \tilde{f}(s)$, $f'(\tau) \rightarrow \tilde{f}_1(s)$. Найдем связь между $\tilde{f}(s)$ и $\tilde{f}_1(s)$. По определению, $\tilde{f}_1(s) = \int_0^{\infty} f'(\tau) \exp(-s\tau) d\tau$. Выберем здесь s так, чтобы одновременно выполнялись неравенства $\operatorname{Re}(s) > \sigma_0$; $\operatorname{Re}(s) > \sigma_1$. Выполняя в правой части последнего равенства интегрирование по частям [$u = \exp(-s\tau)$, $dv = f'(\tau) d\tau$], находим

$$\begin{aligned}\tilde{f}_1(s) &= f(\tau) \exp(-s\tau) \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} f(\tau) \exp(-s\tau) d\tau = \\ &= -f(0) + s \int_0^{\infty} f(\tau) \exp(-s\tau) d\tau = -f(0) + s\tilde{f}(s),\end{aligned}$$

так как $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \exp(-s\tau) f(\tau) = 0$, что и требовалось доказать.

Предполагая, что оригинал $f(\tau)$ можно продифференцировать n раз и что $f^{(n)}(\tau)$ также является оригиналом, методом индукции из формулы (5.40) легко получить более общее соотношение (5.41).

6. Теорема дифференцирования для изображения. Как и в случае дифференцирования оригинала, операция дифференцирования изображения заменяется в пространстве оригиналов элементарной операцией — умножением оригинала на независимую переменную, взятую со знаком минус:

$$\tilde{f}'(s) \rightarrow -\tau f(\tau);$$

$$\tilde{f}''(s) \rightarrow \tau^2 f(\tau);$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\tilde{f}^{(n)}(s) \rightarrow (-1)^n \tau^n f(\tau).$$

Так как изображение является всегда аналитической функцией, то все производные в правой части соотношений существуют.

7. Теорема интегрирования для оригинала. Интегрирование оригинала от нуля до переменной точки τ в области изображений заменяется делением изображения на аргумент s :

$$\int_0^{\tau} f(t) dt \rightarrow \frac{1}{s} \tilde{f}(s).$$

При применении этой теоремы необходимо предполагать, что если функция $f(\tau)$ имеет изображение, то и интеграл от функции $f(\tau)$ имеет изображение.

В самом деле, если $f(\tau)$ — оригинал, то и покажем, что и $\varphi(\tau) = \int_0^{\tau} f(t) dt$ — оригинал. Очевидно, что для функции $\varphi(\tau)$ выполняются условия:

1) при $\tau < 0$ $\varphi(\tau) \equiv 0$;

2) интеграл от кусочно-монотонной и кусочно-непрерывной функции сам будет функцией кусочно-монотонной и непрерывной;

3) из оценки $|f(\tau)| < M e^{-\sigma_0 \tau}$ следует, что

$$|\varphi(\tau)| = \left| \int_0^{\tau} f(\tau) d\tau \right| \leq \int_0^{\tau} |f(\tau)| d\tau \leq M \int_0^{\tau} \exp(\sigma_0 \tau) d\tau = \frac{M}{\sigma_0} [e^{\sigma_0 \tau} - 1].$$

Отсюда имеем: а) при $\sigma_0 > 0$ $|\varphi(\tau)| < (M/\sigma_0) e^{\sigma_0 \tau}$; б) при $\sigma_0 < 0$ $|\varphi(\tau)| < M/\sigma_0$; в) если $\sigma_0 = 0$, то заменим его большим числом и используем оценку а).

Выполнение условий 1, 2, 3 доказывает, что высказанное утверждение справедливо: интеграл от оригинала также является оригиналом.

Найдем теперь изображение функции $\varphi(\tau) = \int_0^{\tau} f(t) dt$. Так как

$f(\tau) = \varphi'(\tau)$, то, полагая $\varphi(\tau) \rightarrow \varphi(s)$, по формуле (5.40) находим связь между $\tilde{\varphi}(s)$ и $\tilde{f}(s)$:

$$\tilde{f}(s) = s\tilde{\varphi}(s) - \varphi_0 = s\varphi(s).$$

Отсюда следует

$$\tilde{\varphi}(s) = \frac{1}{s} \tilde{f}(s), \text{ т. е. } \int_0^{\tau} f(t) dt \rightarrow \frac{1}{s} \tilde{f}(s).$$

См. пример применения этой теоремы в п. 6 § 5.4.

8. Теорема интегрирования изображений. Предполагая, что оригинал $f(\tau)$ удовлетворяет условию $|f(\tau)/\tau| < A$ при $\tau \rightarrow +0$, можно показать, что в этом случае функция $f(\tau)/\tau$ также будет оригиналом. Тогда, рассматривая функции $f(\tau)$, удовлетворяющие этому условию, проинтегрируем равенство

$$\tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} f(\tau) \exp(-s\tau) d\tau$$

по переменной s вдоль любого пути, лежащего в полуплоскости $\operatorname{Re}(s) > \sigma_0$ от произвольной точки s до ∞ , причем $\operatorname{Re}(s) \rightarrow +\infty$:

$$\int_0^{\infty} \tilde{f}(s) ds = \int_0^{\infty} ds \int_0^{\infty} f(\tau) \exp(-s\tau) d\tau.$$

Меняя порядок интегрирования в правой части, находим

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \tilde{f}(s) ds &= \int_0^{\infty} f(\tau) d\tau \int_0^{\infty} \exp(-s\tau) ds = \\ &= \int_0^{\infty} f(\tau) d\tau \left\{ -\frac{\exp(-s\tau)}{\tau} \right\} \Big|_0^{\infty} = \int_0^{\infty} \frac{f(\tau)}{\tau} \exp(-s\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Замена порядка интегрирования в равенстве (5.42) законна, поскольку последний интеграл равномерно сходящийся (так как он определяет изображение оригинала $f(\tau)/\tau$). Таким образом, пришли к следующему результату: если функция $f(\tau)/\tau$ — оригинал, то из соотношения $f(\tau) \rightarrow \tilde{f}(s)$ следует, что

$$\int_0^{\infty} f(s) ds \rightarrow \frac{f(\tau)}{\tau}.$$

9. Теорема свертывания (или умножения изображений). Введем определения. *Сверткой* двух функций $f_1(\tau)$ и $f_2(\tau)$ называется функция

$$f(\tau) = \int_0^{\tau} f_1(\tau) f_2(\tau - t) dt.$$

Символически свертка обозначается так: $f_1(\tau) * f_2(\tau)$, т. е.

$$f_1(\tau) * f_2(\tau) = \int_0^{\tau} f_1(\tau) f_2(\tau - t) dt. \quad (5.43)$$

Операция получения свертки функций называется *свертыванием* функций.

Функции-свертке (5.43) можно придать другой вид, вводя вместо t новую переменную $u = \tau - t$:

$$f_1(\tau) * f_2(\tau) = \int_0^{\tau} f_1(\tau - u) f_2(u) du. \quad (5.44)$$

Из соотношений (5.43), (5.44) ясно также, что при свертывании функций f_1, f_2 эти функции играют одинаковую роль.

Сформулируем теорему свертывания. Изображение свертки двух оригиналов равняется произведению изображений этих оригиналов:

$$f_1(\tau) * f_2(\tau) \rightarrow \tilde{f}_2(s) \tilde{f}_1(s).$$

Сформулированная теорема называется еще *теоремой Э. Бореля*. Для доказательства ее покажем вначале, что если $f_1(\tau)$ и $f_2(\tau)$ — оригиналы, то свертка $f_1(\tau) * f_2(\tau)$ есть тоже оригинал.

Для функции $f_1 * f_2 = \int_0^{\tau} f_1(\tau) f_2(\tau - t) dt$ условия 1 и 2 определения оригинала (см с. 170), очевидно, выполняются. Функция $f_1 * f_2$ удовлетворяет и условию 3 функции оригинала. Покажем это:

$$|f_1(\tau)| < A_0 \exp(s_0 \tau) \text{ и } |f_2(\tau)| < A_1 \exp(s_1 \tau);$$

следовательно,

$$|f_1 * f_2| \leq \int_0^{\tau} |f_1(t)| |f_2(\tau - t)| dt < \int_0^{\tau} A_0 \exp(s_0 t) A_1 \exp[s_1(\tau - t)] dt.$$

Пусть $A_0 A_1 = A_2$ и $s_0 > s_1$, тогда

$$|f_1 * f_2| < A_2 \int_0^{\tau} \exp(s_0 t) \exp[s_0(\tau - t)] dt = A_2 \exp(s_0 \tau) \int_0^{\tau} dt = \\ = A_2 \tau \exp(s_0 \tau) < A_2 \exp[(s_0 + 1)\tau],$$

поскольку при $\tau > 0$ $\tau < \exp(\tau)$.

Следовательно, свертка $f_1 * f_2$ является оригиналом. Далее имеем

$$f_1 * f_2 \rightarrow \int_0^{\infty} f_1 * f_2 e^{-s\tau} d\tau = \int_0^{\infty} e^{-s\tau} \int_0^{\tau} f_1(\tau - t) f_2(t) dt d\tau.$$

В этом равенстве двукратный интеграл по области Ω ($0 \leq \tau < \infty$, $0 \leq t \leq \tau$) (рис. 5.2) сходится абсолютно, так как изображение оригинала $f_1 * f_2$ определено в полуплоскости $\text{Res} > s_0$ при $s_0 > s_1$. Поэтому в двукратном интеграле можно изменить порядок интегрирования:

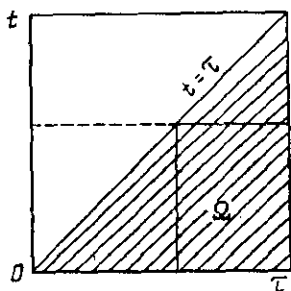


Рис. 5.2. К доказательству теоремы свертывания

$$f_1 * f_2 \rightarrow \int_0^{\infty} f_2(t) dt \int_t^{\infty} f_1(\tau - t) \exp(-s\tau) d\tau.$$

Полагая $\tau - t = u$, получим

$$f_1 * f_2 \rightarrow \int_0^{\infty} f_2(t) \exp(-st) dt \times$$

$$\times \int_0^{\infty} f_1(u) \exp(-su) du,$$

$$\text{т. е. } f_1 * f_2 \rightarrow \hat{f}_1(s) \hat{f}_2(s).$$

Таким образом, свертыванию в пространстве оригиналов соответствует умножение функций в пространстве изображений. Пример применения теоремы см. в п. 3 § 5.4.

10. Теорема обобщенного умножения изображений. А. М. Эфрос доказал важную теорему, из которой как частный случай вытекает теорема Бореля. Если $f(\tau) \rightarrow \hat{f}(s)$ и $\varphi(\tau, t) \rightarrow \hat{\varphi}(s) \exp[-tq(s)]$, где $\hat{\varphi}(s)$ и $q(s)$ — аналитические функции, то

$$\int_0^{\infty} f(t) \varphi(\tau, t) dt \rightarrow \hat{\varphi}(s) \hat{f}[q(s)]. \quad (5.45)$$

Докажем, что соотношение (5.45) справедливо. По определению изображения,

$$\int_0^{\infty} f(t) \varphi(\tau, t) dt \rightarrow \int_0^{\infty} \exp(-s\tau) \left[\int_0^{\infty} f(t) \varphi(\tau, t) dt \right] d\tau.$$

В правой части этого равенства можно изменить порядок интегрирования, так как несобственный интеграл $\int_0^{\infty} f(t) \varphi(\tau, t) dt$ как функция-оригинал существует. Тогда получим

$$\int_0^{\infty} f(t) \varphi(\tau, t) dt \rightarrow \int_0^{\infty} f(t) dt \int_0^{\infty} \exp(-s\tau) \varphi(\tau, t) d\tau.$$

По условию теоремы,

$$\int_0^{\infty} \varphi(\tau, t) \exp(-s\tau) d\tau = \tilde{\psi}(s) \exp[-tq(s)].$$

Из двух последних равенств имеем

$$\int_0^{\infty} f(t) \varphi(\tau, t) dt \rightarrow \tilde{\psi}(s) \int_0^{\infty} f(t) \exp[-tq(s)] dt,$$

или

$$\int_0^{\infty} f(t) \varphi(\tau, t) dt \rightarrow \tilde{\psi}(s) \tilde{f}[q(s)],$$

так как

$$\int_0^{\infty} f(t) \exp[-tq(s)] dt \rightarrow \tilde{f}[q(s)],$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим частный случай теоремы Эфроса, положив $q(s) = s$, тогда $\varphi(\tau, t) \rightarrow \tilde{\psi}(s) \exp(-ts)$ и по первой теореме смещения

$$\varphi(\tau, t) = \begin{cases} \varphi(\tau - t), & \tau > t, \\ 0 & \tau < t. \end{cases}$$

Отсюда следует

$$\int_0^{\infty} f(t) \varphi(\tau, t) dt = \int_0^{\tau} f(t) \varphi(\tau - t) dt,$$

так как

$$\int_0^{\infty} f(t) \varphi(\tau - t) dt = 0.$$

Таким образом, приходим к теореме Бореля

$$\int_0^{\tau} f(t) \varphi(\tau - t) dt \rightarrow \tilde{f}(s) \tilde{\psi}(s).$$

11. Теорема Дюамеля. В 1853 г. Дюамель впервые применил следующие интегральные соотношения.

Если $f_1(\tau) * f_2(\tau) \rightarrow \tilde{f}_1(s) \tilde{f}_2(s)$, то

$$\int_0^{\tau} f_1(t) \frac{\partial f_2(\tau-t)}{\partial \tau} dt + f_1(\tau) f_2(0) \rightarrow \tilde{s} \tilde{f}_1(s) \tilde{f}_2(s) \quad (5.46)$$

или

$$\int_0^{\tau} f_2(t) \frac{\partial f_1(\tau-t)}{\partial \tau} dt + f_2(\tau) f_1(0) \rightarrow \tilde{s} \tilde{f}_1(s) \tilde{f}_2(s). \quad (5.47)$$

Соотношения (5.46), (5.47) называют *интегралами Дюамеля*. Для доказательства соотношений (5.46), (5.47) применим теорему дифференцирования оригинала

$$\frac{d}{d\tau} \int_0^{\tau} f_1(t) f_2(\tau-t) dt \rightarrow \tilde{s} \tilde{f}_1(s) \tilde{f}_2(s)$$

или

$$\frac{d}{d\tau} \int_0^{\tau} f_2(t) f_1(\tau-t) dt \rightarrow \tilde{s} \tilde{f}_1(s) \tilde{f}_2(s),$$

так как по свойству свертки функций $f_1 * f_2 = f_2 * f_1$.

Применив формулу дифференцирования по параметру, известную из анализа:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \int_{\alpha(\tau)}^{\beta(\tau)} F(\tau, t) dt &= \int_{\alpha(\tau)}^{\beta(\tau)} \frac{\partial F(\tau, t)}{\partial \tau} d\tau + F[\tau, \beta(\tau)] \beta'(\tau) - \\ &- F[\tau, \alpha(\tau)] \alpha'(\tau), \end{aligned}$$

получим

$$\frac{d}{d\tau} \int_0^{\tau} f_1(t) f_2(\tau-t) dt = \int_0^{\tau} f_1(t) f_2'(\tau-t) dt + f_1(\tau) f_2(0) \rightarrow \tilde{s} \tilde{f}_1(s) \tilde{f}_2(s).$$

Таким образом, если одна из функций $f_1(\tau)$ и $f_2(\tau)$ дифференцируема, а другая непрерывна, то свертка $f_1 * f_2$ этих функций дифференцируема:

$$\int_0^{\tau} f_1(t) \frac{\partial f_2(\tau-t)}{\partial \tau} dt + f_1(\tau) f_2(0) \rightarrow \tilde{s} \tilde{f}_1(s) \tilde{f}_2(s),$$

$$\int_0^{\tau} f_2(t) \frac{\partial f_1(\tau-t)}{\partial \tau} dt + f_2(\tau) f_1(0) \rightarrow \tilde{s} \tilde{f}_1(s) \tilde{f}_2(s).$$

В теории теплопроводности интегралы Дюамеля применяются при решении краевых задач. Рассмотрим, например, случай граничных условий III рода. Предположим, что тело подвергается нагреву

в среде с температурой $T_c(\tau)$. Распределение температуры в теле является решением краевой задачи

$$\left. \begin{aligned} \partial T(x, y, z, \tau) / \partial \tau &= a \nabla^2 T(x, y, z, \tau); \\ T(x, y, z, 0) &= 0; \\ (\nabla T)_S + H[T_c(\tau) - T_S] &= 0, (H = a/\lambda). \end{aligned} \right\} \quad (5.48)$$

Применяя к задаче (5.48) преобразование Лапласа, получим в области изображений

$$\left. \begin{aligned} s\tilde{T}(x, y, z, s) &= a \nabla^2 \tilde{T}(x, y, z, s), \\ (\nabla \tilde{T})_S + H[\tilde{T}_c(s) - \tilde{T}_S] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.49)$$

Если через $\psi(x, y, z, \tau)$ обозначим решение задачи (5.48) при $T_c(\tau) = 1$, то $\psi(x, y, z, \tau) \rightarrow \tilde{\psi}(x, y, z, s)$. С учетом того, что $1 \rightarrow 1/s$, решение задачи (5.48) при $T_c = T_c(\tau)$ в области изображений имеет вид

$$\tilde{T}(x, y, z, s) = s\tilde{T}_c(s) \tilde{\psi}(x, y, z, s).$$

Переход в область оригиналов совершим с помощью соотношений (5.46), (5.47):

$$T(x, y, z, \tau) = T_c(0) \psi(x, y, z, \tau) + \int_0^\tau T'_c(\tau - t) \psi(x, y, z, t) dt,$$

или

$$T(x, y, z, \tau) = T_c(\tau) \psi(x, y, z, 0) + \int_0^\tau T_c(t) \psi'(x, y, z, \tau - t) dt.$$

Полученные решения можно записать так:

$$T(x, y, z, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\tau T_c(\tau - t) \psi(x, y, z, t) dt, \quad (5.50)$$

или

$$T(x, y, z, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\tau T_c(t) \psi(x, y, z, \tau - t) dt. \quad (5.51)$$

Соотношения (5.50) и (5.51) представляют собой математическое выражение теоремы Дюамеля: если $T_c(\tau)$ и $T'_c(\tau)$ — кусочно-непрерывные функции при $\tau > 0$, а функция $\psi(x, y, z, \tau)$ представляет собой решение краевой задачи (5.48) при $T_c = 1$, то функция $T(x, y, z, \tau)$, определяемая формулой (5.50) или (5.51), является решением краевой задачи (5.48).

С помощью теоремы Дюамеля легко получить решения краевых задач, в которых температура внешней среды изменяется с течением времени, по известным решениям задач с постоянной температурой среды.

Формулы (5.50), (5.51) можно применить и в случае более общего граничного условия вида

$$M(p)(\partial T/\partial n) + N(p)T = \varphi(\tau)K(p) \text{ при } p \in S,$$

где S — граничная поверхность области Ω .

Тогда формулы (5.50) и (5.51) запишутся так:

$$T(p, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\tau \varphi(\tau - t) \psi(p, t) dt, \quad T(p, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\tau \varphi(t) \psi(p, \tau - t) dt,$$

где $\psi(p, \tau)$ — решение соответствующей краевой задачи с нулевым начальным условием и с граничным условием

$$M(p)(\partial \psi/\partial n) + N(p)\psi = K(p) \text{ при } p \in S.$$

Задача 5.1. Пользуясь теоремой подобия, найти изображения функций:

1) $\cos^2 \alpha \tau$; 2) $\sin \alpha \tau \cos \beta \tau$; 3) $\cos \alpha \tau \cos \beta \tau$; 4) $\sin \alpha \tau \sin \beta \tau$.

Задача 5.2. Пользуясь теоремой затухания, найти изображения функций:

1) $e^{3\tau} \cos 3\tau \cos 4\tau$; 2) $\operatorname{ch} 3\tau \sin^2 \tau$;

3) $\frac{\tau^n}{n!} e^{\beta \tau} \cos \alpha \tau$; 4) $\frac{\tau^n}{n!} e^{\beta \tau} \sin \alpha \tau$.

Задача 5.3. Пользуясь теоремой дифференцирования оригинала, найти изображения выражений:

1) $x''(\tau) - 3x'(\tau) + 2x(\tau) = te^\tau$, $x(0) = 1$, $x'(0) = -2$; 2) $x^{IV}(\tau) - 5x^{III}(\tau) - 4x^{II}(\tau) + 2x'(\tau) - x(\tau) + 8 = 0$, $x(0) = 5$, $x'(0) = 0$, $x''(0) = -1$, $x^{III}(0) = 2$;
3) $3x^{III}(\tau) - 2x''(\tau) + 5 = 0$, $x(0) = -1$, $x'(0) = 2$, $x''(0) = -3$.

Задача 5.4. Пользуясь теоремой интегрирования оригинала, найти изображения функций:

$$1) \int_0^\tau \frac{\sin t}{t} dt; \quad 2) \int_0^\tau \frac{\exp(t) - 1}{t} dt; \quad 3) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\tau e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Задача 5.5. Пользуясь теоремой интегрирования изображений, найти изображения функций:

$$1) \frac{\operatorname{sh} \tau}{\tau}; \quad 2) \frac{1 - \exp(\alpha \tau)}{\tau \exp(\tau)}; \quad 3) \frac{\exp(-\alpha \tau) \sin \tau}{\tau}.$$

Задача 5.6 [112]. Пользуясь теоремой умножения изображений, найти оригинал первого из данных в каждом примере изображений. Оригиналы остальных найти по оригиналу первого, пользуясь теоремами дифференцирования или интегрирования оригинала:

$$1) \frac{s}{s^4 - 1}, \frac{1}{s^4 - 1}, \frac{1}{s(s^4 - 1)};$$

$$2) \frac{1}{(s-1)(s^2+1)}, \frac{s}{(s-1)(s^2+1)}, \frac{1}{s(s-1)(s^2+1)};$$

$$3) \frac{1}{(s+1)(s^2+2s+2)}, \frac{s}{(s+1)(s^2+2s+2)}, \frac{1}{s(s+1)(s^2+2s+2)}.$$

§ 5.3. Нахождение оригинала функции по ее изображению

После того как задача решена в изображениях, по данному изображению $\tilde{f}(s)$ следует найти оригинал $f(\tau)$ (т. е. выполнить обратное преобразование Лапласа) по формуле

$$f(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \tilde{f}(s) \exp(s\tau) ds, \quad (5.52)$$

которая называется *формулой обращения*.

Каким же условиям должна удовлетворять функция комплексного переменного $\tilde{f}(s)$, чтобы ее можно было принять за изображение некоторого оригинала $f(\tau)$? Это ясно из следующей теоремы.

Теорема обращения. Пусть функция комплексного переменного $\tilde{f}(s)$ удовлетворяет условиям:

1) функция $\tilde{f}(s)$ — аналитическая в области $\operatorname{Re}(s) > \sigma_0$;

2) в этой области $\lim_{|s| \rightarrow \infty} \tilde{f}(s) = 0$;

3) функция $\tilde{f}(s)$ абсолютно интегрируема вдоль всякой прямой, параллельной мнимой оси, лежащей в полуплоскости $\operatorname{Re}(s) \geq \sigma_1 > \sigma_0$:

$$\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} |\tilde{f}(s)| |ds| = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(\sigma + i\eta)| d\eta = A < \infty.$$

Тогда $\tilde{f}(s)$ является изображением оригинала, которым является функция $f(\tau)$, определяемая по формуле (5.52), где интегрирование проводится по любой прямой, параллельной мнимой оси, лежащей в полуплоскости $\operatorname{Re}(s) \geq \sigma_1 > \sigma_0$.

Так как функция $\tilde{f}(s)$ — аналитическая в правой полуплоскости s , определяемой неравенством $\operatorname{Re}(s) > \sigma_0$, то путь интегрирования можно заменить другим путем при условии, чтобы он кончался у прямой $\sigma \pm i\infty$.

Для многих задач теории теплопроводности функция $\tilde{f}(s)$ такова, что все полюсы лежат на отрицательной действительной оси σ или на мнимой оси η . В первом случае путь интегрирования может быть взят в виде полуокружности с центром на прямой $\sigma = \text{const}$, а во втором случае — в виде прямоугольника (рис. 5.3 и 5.4).

Если построенный контур C содержит внутри себя конечное число особых точек и не проходит ни через одну из них, а функция $\tilde{f}(s)$ на контуре аналитическая и однозначна, то по теореме о вычетах [61] имеем

$$\begin{aligned} f(\tau) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \tilde{f}(s) \exp(s\tau) ds = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \tilde{f}(s) \exp(s\tau) ds = \\ &= \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} [\tilde{f}(s) \exp(s\tau)], \end{aligned}$$

т. е. оригинал может быть определен как сумма вычетов относительно всех особых точек внутри контура C . Таким образом, при определении оригинала функции $\tilde{f}(s)$ могут быть привлечены мощные средства аппарата теории функций комплексного переменного. Однако в большинстве случаев обратное преобразование можно осуществить более элементарными средствами, а именно с помощью: 1) таблицы соответствий между оригиналами и изображениями, приведенной

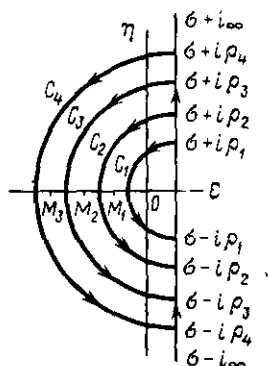


Рис. 5.3. Выбор системы контуров, если полюсы расположены на действительной оси [65]

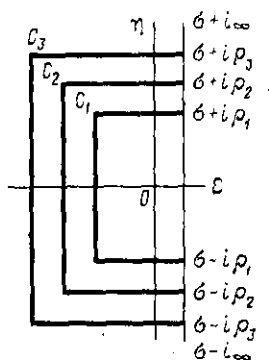


Рис. 5.4. К выбору системы контуров при полюсах, расположенных на действительной и мнимой осях [65]

в приложении IV; 2) формулы обращения, использующей операции дифференцирования и предельного перехода; 3) теорем разложения.

Как доказано, например в [65], вместо формулы (5.52) для определения $f(\tau)$ можно воспользоваться формулой обращения

$$f(\tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n}{\tau} \right)^{n+1} f^{(n)} \left(\frac{n}{\tau} \right) \right], \quad (5.53)$$

не содержащей контурного интегрирования. Например, пусть $\tilde{f}(s) = 1/(s+1)$, тогда

$$\tilde{f}^{(n)}(s) = (-1)^n n! / (s+1)^{n+1}.$$

Согласно формуле (5.53), получаем

$$\begin{aligned} f(\tau) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n}{\tau} \right)^{n+1} \frac{(-1)^n n!}{\left(1 + \frac{n}{\tau} \right)^{n+1}} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{\tau}{n} \right)^{n+1}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{\tau}{n} \right)^n} = \frac{1}{e^\tau} = e^{-\tau}. \end{aligned}$$

Теоремы разложения. Первая теорема разложения. Пусть изображение $\tilde{f}(s)$ разлагается в ряд по отрицательным

степеням s , сходящийся для значений ρ , удовлетворяющих неравенству $|s| > 1/\rho$, $\tilde{f}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k}{s^{k+1}}$. Тогда в области оригиналов имеем

$$f(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \frac{\tau^k}{k!}.$$

Доказательство. Если функция $\tilde{f}(s)$ разлагается в сходящийся степенной ряд по отрицательным степеням s

$$\tilde{f}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k}{s^{k+1}},$$

то, используя таблицу преобразования Лапласа (см. приложение V), формально можно записать оригинал функции $\tilde{f}(s)$ для значений $\tau > 0$ в виде ряда

$$f(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \frac{\tau^k}{k!},$$

предполагая, что $f(\tau) \equiv 0$ при $\tau < 0$.

Для доказательства того, что этот формально найденный ряд действительно определяет оригинал функции $\tilde{f}(s)$, необходимо показать справедливость следующих утверждений:

1) ряд $\sum_{k=0}^{\infty} C_k \frac{\tau^k}{k!}$ сходится для всех $\tau > 0$;

2) сумма ряда $f(\tau)$ удовлетворяет третьему условию для оригинала (см. стр. 170)

$$|f(\tau)| < A \exp(\sigma_0 \tau);$$

3) функции $f(\tau)$ и $\tilde{f}(s)$ связаны определенным соотношением

$$f(\tau) \rightarrow \tilde{f}(s).$$

Эти положения доказаны, например, в [61].

Вторая теорема разложения. Пусть $\tilde{f}(s)$ — рациональная алгебраическая функция, выраженная отношением двух многочленов $\tilde{f}(s) = \varphi(s)/\psi(s)$, причем степень многочлена $\varphi(s)$ выше степени многочлена $\psi(s)$; тогда для вычисления обратного преобразования Лапласа функции $\tilde{f}(s)$ имеем:

1) если $\psi(s) = \alpha_0 (s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n)$ (все корни уравнения $\psi(s) = 0$ простые), то

$$f(\tau) = L^{-1}[\tilde{f}(s)] = L^{-1}\left[\frac{\varphi(s)}{\psi(s)}\right] = \sum_{k=1}^n \frac{\varphi(s_k)}{\psi'(s_k)} \exp(s_k \tau);$$

2) если $\psi(s) = a_0 (s - s_1)^{r_1} (s - s_2)^{r_2} \dots (s - s_n)^{r_n}$ (r_n — степень кратности корня), то

$$f(\tau) = L^{-1}[\tilde{f}(s)] = L^{-1}\left[\frac{\varphi(s)}{\psi(s)}\right] = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{r_k} M_{ki} \tau^{i-1} \exp(s_k \tau), \quad (5.54)$$

где

$$M_{ki} = \frac{1}{(i-1)!(r_k-i)!} \frac{d^{i-1}}{ds^{i-1}} \left[\frac{(s-s_k)^{r_k} \varphi(s)}{\psi(s)} \right]_{s=s_k}.$$

Доказательство. Рассмотрим 1-й случай, когда полином $\psi(s)$ имеет только простые корни. Тогда

$$\frac{\varphi(s)}{\psi(s)} = \frac{\varphi(s)}{(s-s_1)(s-s_2)\dots(s-s_n)} = \sum_{k=1}^n \frac{C_k}{s-s_k}, \quad (5.55)$$

где C_k не зависят от s .

Для нахождения коэффициента C_1 умножим обе части (5.55) на $(s-s_1)$, получим

$$\frac{\varphi(s)(s-s_1)}{\psi(s)} = C_1 + (s-s_1) \left[\sum_{k=2}^n \frac{C_k}{s-s_k} \right]. \quad (5.56)$$

Используя правило Лопиталья, определим C_1 из (5.56), устремив s к s_1 :

$$C_1 = \lim_{s \rightarrow s_1} \frac{\varphi(s)(s-s_1)}{\psi(s)} = \lim_{s \rightarrow s_1} \frac{\varphi'(s)(s-s_1) + \varphi(s)}{\psi'(s)} = \frac{\varphi(s_1)}{\psi'(s_1)}.$$

Итак,

$$C_1 = \varphi(s_1)/\psi'(s_1).$$

Аналогично можно показать, что

$$C_n = \varphi(s_n)/\psi'(s_n).$$

Поэтому выражение (5.55) можно написать в виде

$$\frac{\varphi(s)}{\psi(s)} = \sum_{k=1}^n \frac{C_k}{s-s_k} = \sum_{k=1}^n \frac{\varphi(s_k)}{\psi'(s_k)} \frac{1}{(s-s_k)}.$$

Замечая, что $1/(s-s_k) \rightarrow \exp(s_k \tau)$, получим

$$f(\tau) = L^{-1}[\tilde{f}(s)] = L^{-1}\left[\frac{\varphi(s)}{\psi(s)}\right] = \sum_{k=1}^n \frac{\varphi(s_k)}{\psi'(s_k)} \exp(s_k \tau), \quad (5.57)$$

где $s_1, s_2, \dots, s_n$ — простые корни полинома $\psi(s)$.

Во 2-м случае, когда полином $\psi(s)$ имеет кратные корни, функцию $\tilde{f}(s)$ также можно разложить на сумму простейших дробей.

Так, каждому действительному корню $s_k = a$ уравнения $\psi(s) = 0$ отвечает r_k простых дробей вида

$$C_1/(s-a), C_2/(s-a)^2, \dots, C_{r_k}/(s-a)^{r_k},$$

где r_k — степень кратности корня $s_k = a$.

Разложение функции $\tilde{f}(s)$ можно представить в виде

$$\tilde{f}(s) = \varphi(s)/\psi(s) = \tilde{f}_1(s) + C_{r_k}/(s-s_k)^{r_k}. \quad (5.58)$$

Для определения C_{r_k} умножим обе части (5.58) на $(s-s_k)^{r_k}$ и устремим $s \rightarrow s_k$:

$$C_{r_k} = \lim_{s \rightarrow s_k} \frac{\varphi(s)(s-s_k)^{r_k}}{\psi(s)}. \quad (5.59)$$

Далее, из таблицы преобразования Лапласа известно, что

$$\frac{(r_k-1)!}{(s-s_k)^{r_k}} \rightarrow \tau^{r_k-1} \exp(s_k \tau),$$

поэтому можно написать

$$\frac{C_{r_k}}{(s-s_k)^{r_k}} = \frac{1}{(r_k-1)!} \mathcal{L} \left[C_{r_k} \tau^{r_k-1} \exp(s_k \tau) \right].$$

Подставляя в правую часть последнего выражения значение C_{r_k} из формулы (5.59), получим, выполняя обратное преобразование Лапласа,

$$\begin{aligned} \frac{C_{r_k}}{(s-s_k)^{r_k}} &\rightarrow \frac{1}{(r_k-1)!} \lim_{s \rightarrow s_k} \left\{ \frac{d^{r_k-1}}{ds^{r_k-1}} \left[\frac{(s-s_k)^{r_k} \varphi(s)}{\psi(s)} \right] \exp(s \tau) \right\} = \\ &= \frac{1}{(r_k-1)!} \frac{d^{r_k-1}}{ds^{r_k-1}} \left[\frac{(s-s_k)^{r_k} \varphi(s)}{\psi(s)} \right]_{s=s_k} \exp(s_k \tau). \end{aligned}$$

Слагаемые, содержащие $(s-s_k)$ в степени $i < r_k$, могут быть также переведены в область оригиналов по формуле

$$\frac{C_i}{(s-s_k)^i} \rightarrow \frac{\tau^{i-1} \exp(s_k \tau)}{(i-1)! (r_k-i)!} \frac{d^{i-1}}{ds^{i-1}} \left[\frac{(s-s_k)^{r_k} \varphi(s)}{\psi(s)} \right]_{s=s_k}.$$

Суммируя по i от 1 до r_k члены, соответствующие корню s_k полинома $\psi(s)$ r_k -й кратности, и суммируя по k (число кратных корней) полученные выражения, приходим к формуле (5.54).

Замечание 1. Каждой паре комплексно-сопряженных корней $s_k = a \pm \omega i$ соответствуют r_k простых дробей вида

$$C_1 \frac{s+b_1}{(s-a)^2 + \omega^2}, C_2 \frac{s+b_1}{[(s-a)^2 + \omega^2]^2}, \dots, C_{r_k} \frac{s+b_{r_k}}{[(s-a)^2 + \omega^2]^{r_k}},$$

где r_k — кратность корней s_k . В этом случае обратные преобразования таких слагаемых находятся по таблицам преобразования Лапласа (см. приложение IV), которые затем суммируются.

Замечание 2. Если один из корней s_k уравнения $\psi(s)=0$ является также корнем уравнения $\varphi(s)=0$, то полиномы $\varphi(s)$ и $\psi(s)$ имеют общие множители, на которые их следует сократить.

Замечание 3. Формулу (5.57) можно распространить на случай, когда изображение $\tilde{f}(s)$ представляет собой отношение трансцендентных функций $\varphi(s)$ и $\psi(s)$ [65].

В этом случае функция $\tilde{f}(s)$ может быть разложена в ряд по простейшим дробям и для перехода в область оригиналов можно воспользоваться формулой (5.57). При этом предполагается, что функция $\psi(s)$ есть обобщенный полином (т. е. полином сколь угодно высокой степени) и имеет только простые корни $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$, причем она не имеет нулевого корня. Например, функция $\varphi(s) = \text{ch} \sqrt{s} x$ представляет собой обобщенный полином, так как $\text{ch} \sqrt{s} x = 1 + \frac{1}{2!} x^2 s + \frac{x^4}{4!} s^2 + \dots$, причем этот полином имеет бесчисленное множество простых корней $s_n = -\mu_n^2/x^2$, где $\mu_n = (2n-1)\pi/2$.

Если функции $\varphi_1(s)$ и $\psi_1(s)$ не являются обобщенными полиномами, но их можно привести к ним, умножив на s^k ($|k| < 1$), то также можно воспользоваться теоремой разложения при переходе в область оригиналов, например

$$\frac{\varphi_1(s)}{\psi_1(s)} = \frac{\text{sh} \sqrt{s} x}{(\text{sh} \sqrt{s} + \sqrt{s} \text{sh} \sqrt{s})},$$

где числитель $\varphi_1(s)$ и знаменатель $\psi_1(s)$ не являются обобщенными полиномами, но они могут быть преобразованы в обобщенные полиномы путем умножения на $\sqrt{s}$.

Тогда можно воспользоваться соотношением

$$\frac{\varphi_1(s) \sqrt{s}}{\psi_1(s) \sqrt{s}} = \frac{\varphi(s)}{\psi(s)} = \frac{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots}{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots}$$

и применить теорему разложения, если корни s_n отличны от нуля.

В общем случае имеем

$$\lim_{s \rightarrow s_n} \frac{\varphi(s)}{[\psi(s)]'} = \lim_{s \rightarrow s_n} \frac{s^k \varphi_1(s)}{[s^k \psi_1(s)]'} = \lim_{s \rightarrow s_n} \frac{s^k \varphi_1(s)}{s^k \psi_1'(s) + k s^{k-1} \psi_1(s)}.$$

Если s_n есть корень $\psi_1(s)$, то в результате получим

$$\lim_{s \rightarrow s_n} \frac{\varphi(s)}{\psi'(s)} = \lim_{s \rightarrow s_n} \frac{\varphi_1(s)}{\psi_1'(s)}.$$

При равенстве нулю какого-либо корня s_k изображение $\tilde{f}(s)$ необходимо представить как отношение двух обобщенных полиномов.

Таким образом, необходимое условие теоремы разложения состоит в том, что изображение $\tilde{f}(s)$ должно быть представлено в виде отношения двух сходящихся степенных рядов, показатели степени которых должны быть натуральными числами, при этом постоянная b_0 обязательно равна нулю при a_0 , отличном от нуля.

Это обобщение 2-й теоремы разложения широко используется в теории теплопроводности (см. п. 2, 4, 5 5.4).

Основные правила и теоремы преобразования Лапласа приведены в табл. 5.1.

№ n/σ	$f(\tau)$	$\tilde{f}(s) = L[f(\tau)]$
1	$f(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \tilde{f}(s) e^{s\tau} d\tau$	$\int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau = \tilde{f}(s)$
2	$Af(\tau) + Bg(\tau)$	$A\tilde{f}(s) + B\tilde{g}(s)$
3	$f'(\tau)$	$s\tilde{f}(s) - f(+0)$
4	$f^{(n)}(\tau)$	$s^n \tilde{f}(s) - s^{n-1} f(+0) - s^{n-2} f'(+0) - \dots - f^{(n-1)}(+0)$
5	$e^{a\tau} f(\tau)$	$\tilde{f}(s-a)$
6	$(1/a) f(\tau/a)$	$\tilde{f}(as)$
7	$(1/a) e^{b\tau/a} f(\tau/a)$	$\tilde{f}(as-b)$
8	$f(\tau-b)$, если $f(\tau)=0$, при $\tau < 0$	$e^{-bs} \tilde{f}(s)$
9	$\int_0^{\tau} f(\theta) d\theta$	$\frac{1}{s} \tilde{f}(s)$
10	$\int_0^{\tau} \int_0^{\theta} f(\theta) d\theta d\theta$	$\frac{1}{s^2} \tilde{f}(s)$
11	$\tau f(\tau)$	$-\tilde{f}'(s)$
12	$\tau^n f(\tau)$	$(-1)^n \tilde{f}^{(n)}(s)$
13	$\int_0^{\tau} f_1(\tau-t) f_2(t) dt = f_1 * f_2$	$\tilde{f}_1(s) \tilde{f}_2(s)$
14	$\int_0^{\infty} f(t) \varphi(\tau, t) dt$, где $f(\tau) \rightarrow \tilde{f}(s)$, $\varphi(\tau, t) \rightarrow \tilde{\psi}(s) \exp\{-tq(s)\}$	$\tilde{f}[q(s)] \tilde{\psi}(s)$
15	$\sum_{k=1}^n \frac{\Phi(s_k)}{\Psi'(s_k)} e^{s_k \tau}$	$\frac{\Phi(s)^*}{\Psi(s)}$, где $\Psi(s) = (s-s_1)(s-s_2)\dots(s-s_n)$
16	$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(k-1)!} \times$ $\times \lim_{s \rightarrow s_m} \left\{ \frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}} \left[\frac{\Phi(s)(s-s_m)^k}{\Psi(s)} e^{s\tau} \right] \right\}$ (случай кратных корней)	$\frac{\Phi(s)}{\Psi(s)}$, где $\Psi(s) =$ $= (s-s_1)(s-s_2)\dots(s-s_m)^k \times$ $\times (s-s_{m+1})\dots(s-s_n)$

* $\Phi(s)$ — полином степени меньше n .

§ 5.4. Примеры решения краевых задач с помощью преобразования Лапласа

1. Задача об охлаждении полугограниченного тела [65]. Пусть в начальный момент времени температура полугограниченного тела постоянная и равна T_0 . Начиная с момента времени $\tau=0$ и во время всего процесса на поверхности полугограниченного тела (при $x=0$) поддерживается постоянная температура T_c . Найти температуру $T(x, \tau)$ в любой точке тела и в любой момент времени

$$\partial T / \partial \tau = a (\partial^2 T / \partial x^2), \quad x > 0, \quad \tau > 0; \quad (5.60)$$

$$T(x, 0) = T_0 = \text{const}; \quad (5.61)$$

$$T(0, \tau) = T_c = \text{const}. \quad (5.62)$$

Считаем, что при $x \rightarrow \infty$ нет перепада температуры:

$$\partial T(\infty, \tau) / \partial x = 0. \quad (5.63)$$

Для решения задачи (5.60)–(5.63) применим интегральное преобразование Лапласа. Перейдем в уравнении (5.60) к изображениям

$$L \left[\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} \right] = L \left[a \frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2} \right],$$

где $L \{T(x, \tau)\} = \int_0^\infty T(x, \tau) e^{-s\tau} d\tau = \tilde{T}(x, s)$.

К левой части равенства применим теорему о дифференцировании оригинала функции (см. п. 5 § 5.3)

$$s\tilde{T}(x, s) - T_0 = a \frac{\partial^2}{\partial x^2} L \{T(x, \tau)\} = a \frac{d^2 \tilde{T}(x, s)}{dx^2}. \quad (5.64)$$

В уравнении (5.64) обозначение частной производной заменим на обозначение обыкновенной производной, так как в уравнении встречается производная только по одной из переменных. Перепишем уравнение (5.64) в виде

$$\tilde{T}''(x, s) - (s/a) [\tilde{T}(x, s) - T_0/s] = 0. \quad (5.65)$$

Полученное однородное уравнение второго порядка относительно неизвестной функции $\tilde{T}(x, s) - T_0/s$ имеет характеристическое уравнение

$$\kappa^2 - s/a = 0.$$

Общее решение уравнения (5.65) имеет вид

$$\tilde{T}(x, s) - T_0/s = C_1 e^{\sqrt{s/ax}} + C_2 e^{-\sqrt{s/ax}},$$

где C_1 и C_2 — постоянные, определяемые из изображений граничных условий (5.62) и (5.63). Перейдем к изображениям в условиях (5.62) и (5.63):

$$\tilde{T}(0, s) = T_c/s. \quad (5.66)$$

Так как изображение постоянной $\mathcal{L}[C]=C/s$, то

$$\mathcal{L}[\partial T(\infty, \tau)/\partial x] = d\tilde{T}(\infty, s)/ds = 0. \quad (5.67)$$

Определим постоянные C_1 и C_2 из условий (5.66), (5.67). Используем условие (5.67):

$$d\tilde{T}(\infty, s)/ds = \sqrt{s/a} C_1 e^{\sqrt{s/a}\infty} - \sqrt{s/a} C_2 e^{-\sqrt{s/a}\infty} = 0. \quad (5.68)$$

Левая часть равенства (5.68) может равняться нулю, если только $C_1=0$. Поэтому имеем

$$T(x, s) = C_2 e^{-\sqrt{s/a}x} + T_0/s.$$

Определим C_2 , используя (5.66). Полагая $x=0$, получим

$$C_2 = (T_c - T_0)/s.$$

Итак, решение задачи в изображениях примет вид

$$\tilde{T}(x, s) = [(T_c - T_0)/s] e^{-\sqrt{s/a}x} + T_0/s.$$

Для нахождения оригинала воспользуемся формулой таблицы изображений функций (см. приложение IV)

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s} e^{-k\sqrt{s}}\right) = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{k}{2\sqrt{\tau}}\right).$$

Для нашей задачи $k=x/\sqrt{a}$, поэтому получим

$$T(x, \tau) = (T_c - T_0) \operatorname{erfc}\left[x/(2\sqrt{a\tau})\right] + T_0,$$

где $\operatorname{erfc} u = 1 - \operatorname{erf} u$. Или для определения относительной избыточной температуры Θ имеем формулу

$$\Theta = (T - T_0)/(T_0 - T_c) = \operatorname{erf}\left[x/(2\sqrt{a\tau})\right] = \operatorname{erf}\left[1/(2\sqrt{Fo_x})\right],$$

где $Fo_x = a\tau/x^2$ — число Фурье для координаты x .

2. Температурное поле пластины при краевых условиях III рода. Бесконечная пластина толщиной $2R$, во всех точках которой в момент времени $\tau=0$ температура равна $T_0 = \text{const}$, помещена в среду, температура которой равна $T_c = \text{const}$, $T_c > T_0$. Между ограничивающими поверхностями пластины и окружающей средой происходит теплообмен по закону Ньютона. Найти температурное поле пластины.

Имеем:

$$\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2} \quad (\tau > 0, \quad |x| < R);$$

$$T(x, 0) = T_0;$$

$$-\lambda \frac{\partial T(R, \tau)}{\partial x} + \alpha [T_c - T(R, \tau)] = 0;$$

$$\lambda \frac{\partial T(-R, \tau)}{\partial x} + \alpha [T_c - T(-R, \tau)] = 0. \quad (5.69)$$

Задача симметрична, так как теплообмен между поверхностями и окружающей средой происходит одинаково с обеих сторон. Поэтому вместо условия (5.69) можно записать

$$\partial T(0, \tau)/\partial x = 0.$$

Перейдем в задаче в область изображений, используя теорему 5 (см. § 5.3):

$$\tilde{T}''(x, s) - (s/a)(\tilde{T}(x, s) - T_0/s) = 0, \quad (5.70)$$

$$-\tilde{T}'(R, s) + H[(T_c/s) - \tilde{T}(R, s)] = 0; \quad (5.71)$$

$$\tilde{T}'(0, s) = 0, \quad (5.72)$$

где $H = \alpha/\lambda$ — относительный коэффициент теплообмена.

Общее решение дифференциального уравнения (5.70) имеет вид

$$\tilde{T}(x, s) - T_0/s = C_1 \operatorname{ch} \sqrt{s/ax} + C_2 \operatorname{sh} \sqrt{s/ax}.$$

Из условия симметрии (5.72) сразу получим, что $C_2 = 0$, и решение обратится в следующее:

$$\tilde{T}(x, s) - T_0/s = C_1 \operatorname{ch} \sqrt{s/ax}.$$

Найдем C_1 из условия (5.71):

$$-C_1 \sqrt{s/a} \operatorname{sh} \sqrt{s/aR} + HT_c/s - HT_0/s - HC_1 \operatorname{ch} \sqrt{s/aR} = 0;$$

$$C_1 = \frac{T_c - T_0}{s [\operatorname{ch} \sqrt{s/aR} + (1/H) \sqrt{s/a} \operatorname{sh} \sqrt{s/aR}]},$$

и решение в изображениях имеет вид

$$\tilde{T}(x, s) - \frac{T_0}{s} = \frac{(T_c - T_0) \operatorname{ch} \sqrt{s/ax}}{s [\operatorname{ch} \sqrt{s/aR} + (1/H) \sqrt{s/a} \operatorname{sh} \sqrt{s/aR}]} = \frac{\Phi(s)}{\Psi(s)}. \quad (5.73)$$

В правой части этого уравнения и в числителе, и в знаменателе стоят целые трансцендентные функции от s . Действительно,

$$\operatorname{ch} \sqrt{s/ax} = 1 + \frac{x^2}{2!a} s + \frac{x^4}{4!a^2} s^2 + \dots$$

и в числителе дроби свободный член не равен нулю. В знаменателе находится множитель s , а выражение в квадратных скобках — полином от s , так как $\operatorname{ch} \sqrt{s/ax}$ — полином и выражение $\sqrt{s/a} \operatorname{sh} \sqrt{s/aR}$ тоже полином, а именно

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{s}{a}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a}} R &= \sqrt{\frac{s}{a}} \left(\sqrt{\frac{s}{a}} R + \frac{1}{3!} \left(\sqrt{\frac{s}{a}} R \right)^3 + \dots \right) = \\ &= \frac{R}{a} s + \frac{R}{3!a^2} s^2 + \dots \end{aligned}$$

Следовательно, дробь, стоящая в правой части (5.73), удовлетворяет всем условиям обобщенной теоремы разложения. Переходя в (5.73) к оригиналам, имеем

$$T(x, \tau) - T_0 = (T_c - T_0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(s_n)}{\psi'(s_n)} e^{s_n \tau}.$$

Функция $\psi(s)$ имеет счетное множество корней $s_0, s_1, s_2, \dots$, причем $s_0 = 0$, а остальные корни s_n ($n = 1, 2, \dots$) находятся из уравнения

$$\operatorname{ch} \sqrt{s/a} R + (1/H) \sqrt{s/a} \operatorname{sh} \sqrt{s/a} R = 0,$$

которое можно записать в виде

$$\cos i \sqrt{s/a} R + (1/H) \sqrt{s/a} (1/i) \sin i \sqrt{s/a} R = 0.$$

Здесь использованы соотношения $\operatorname{ch} z = \cos iz$, $\operatorname{sh} z = (1/i) \sin iz$.

Вводя обозначения $i \sqrt{s/a} R = \mu$, $aR/\lambda = Bi$, получим $-\mu \sin \mu + Bi \cos \mu = 0$ или

$$\operatorname{ctg} \mu = (1/Bi) \mu. \quad (5.74)$$

Это трансцендентное уравнение решается различными приближенными методами. Для нахождения приближенных значений корней уравнения (5.74) можно построить графики функций $y_1 = \operatorname{ctg} \mu$ и $y_2 = (1/Bi) \mu$. Абсциссы точек пересечения этих графиков дают корни уравнения (5.74). Для каждого Bi уравнение имеет счетное множество вещественных корней, заключенных в промежутках

$$0 < \mu_1 < \pi/2; \quad \pi < \mu_2 < 3\pi/2; \quad \dots; \quad (k-1)\pi < \mu_k < (2k-1)\pi/2.$$

По известным корням μ_n уравнения (5.14) (см. табл. III.1; ч. 2, прилож. III) можно определить счетное множество значений s_n по формуле

$$s_n = a\mu_n^2/R.$$

Продифференцируем $\psi(s)$ и подставим в него вместо s соответствующее значение корня s_n :

$$\begin{aligned} \psi'(s) &= \left[\operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{a}} R + \frac{1}{H} \sqrt{\frac{s}{a}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a}} R \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{s}{a}} R \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a}} R + \frac{1}{2H} \sqrt{\frac{s}{a}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{a}} R + \frac{1}{2} \frac{sR}{aH} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{a}} R; \\ \lim_{s \rightarrow s_n} \psi'(s) &= -\frac{1}{2} \mu_n \sin \mu_n - \frac{1}{2HR} \mu_n \sin \mu_n - \frac{1}{2} \mu_n^2 \frac{1}{HR} \cos \mu_n = \\ &= -\frac{1}{2} (\mu_n \sin \mu_n + \sin \mu_n \operatorname{ctg} \mu_n + \mu_n \cos \mu_n \operatorname{ctg} \mu_n) = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\sin \mu_n} (\mu_n \sin^2 \mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n + \mu_n \cos^2 \mu_n) = -\frac{\sin \mu_n \cos \mu_n + \mu_n}{2 \sin \mu_n}. \end{aligned}$$

Кроме того, имеем:

$$\psi'(s_0)=1, \quad \varphi(s_0)=T_c-T_0,$$

$$\varphi(s_n)=(T_c-T_0)\cos\mu_n(x/R).$$

Учитывая найденные значения $\varphi(s_n)$ и $\psi'(s_n)$, получим решение задачи в виде

$$\frac{T(x, \tau)-T_0}{T_c-T_0}=1-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n+\sin \mu_n \cos \mu_n} \cos \mu_n \frac{x}{R} e^{-\mu_n^2(a\tau/R^2)},$$

или в безразмерных величинах

$$\Theta=1-\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \mu_n X \exp(-\mu_n^2 Fo),$$

где $\Theta=(T-T_0)/(T_c-T_0)$, $X=x/R$, $Fo=a\tau/R^2$,

$$A_n=2 \sin \mu_n/(\mu_n+\sin \mu_n \cos \mu_n).$$

3. Температурное поле системы ограниченного и полуограниченного тел. Пусть ограниченный стержень приведен в соприкосновение с полуограниченным стержнем, имеющим другие теплофизические коэффициенты. Боковые поверхности стержней теплоизолированы. Начиная с момента соприкосновения на границе тел действует источник теплоты с поверхностной плотностью теплового потока $q(\tau)$. Начальная температура обоих стержней одинакова и равна нулю, при этом температура свободного конца первого стержня на протяжении всего процесса нагрева поддерживается постоянной и равной нулю.

Начало координат выберем на поверхности системы. Тогда имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_1(x, \tau)}{\partial \tau} &= a_1 \frac{\partial^2 T_1(x, \tau)}{\partial x^2} \quad \tau > 0, \quad 0 < x < R; \\ \frac{\partial T_2(x, \tau)}{\partial \tau} &= a_2 \frac{\partial^2 T_2(x, \tau)}{\partial x^2} \quad \tau > 0, \quad R < x < \infty; \\ T_1(x, 0) &= T_2(x, 0) = 0; \\ T_1(0, \tau) &= 0; \\ T_2(\infty, \tau) &= 0; \\ T_1(R, \tau) &= T_2(R, \tau); \\ \lambda_1 \frac{\partial T_1(R, \tau)}{\partial x} - \lambda_2 \frac{\partial T_2(R, \tau)}{\partial x} &= q(\tau). \end{aligned} \right\} \quad (5.75)$$

Применяя интегральное преобразование Лапласа к задаче (5.75), в области изображений получим:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{T}_1''(x, s) - \frac{s}{a_1} \tilde{T}_1(x, s) &= 0; \\ \tilde{T}_2''(x, s) - \frac{s}{a_2} \tilde{T}_2(x, s) &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (5.76)$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{T}_1(0, s) &= 0; \\ \tilde{T}_2(\infty, s) &= 0; \\ \tilde{T}_1(R, s) &= \tilde{T}_2(R, s); \\ \lambda_1 \frac{d\tilde{T}_1(R, s)}{dx} - \lambda_2 \frac{d\tilde{T}_2(R, s)}{dx} &= \tilde{q}(s). \end{aligned} \right\} \quad (5.77)$$

Решение дифференциальных уравнений (5.76) имеет такой вид:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_1(x, s) &= A_1 \exp(\sqrt{s/a_1}x) + B_1 \exp(-\sqrt{s/a_1}x); \\ \tilde{T}_2(x, s) &= A_2 \exp(\sqrt{s/a_2}x) + B_2 \exp(-\sqrt{s/a_2}x). \end{aligned} \quad (5.78)$$

Определив постоянные в выражениях (5.78) из граничных условий (5.77), получим решение поставленной задачи в изображениях:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_1(x, s) &= \frac{1}{(1+K_e)\lambda_2} \sqrt{a_2/s\tilde{q}(s)} \times \\ &\times \left[\frac{\exp(\sqrt{s/a_1}x) - \exp(-\sqrt{s/a_1}x)}{\exp(\sqrt{s/a_1}R) - h \exp(-\sqrt{s/a_1}R)} \right]; \\ \tilde{T}_2(x, s) &= \frac{1}{\lambda_2(1+K_e)} \sqrt{a_2/s\tilde{q}(s)} \exp[-\sqrt{s/a_2}(x-R)] \times \\ &\times \left[\frac{\exp(\sqrt{s/a_1}R) - \exp(-\sqrt{s/a_1}R)}{\exp(\sqrt{s/a_1}R) - h \exp(-\sqrt{s/a_1}R)} \right], \end{aligned}$$

где $K_e = (\lambda_1/\lambda_2) \sqrt{a_2/a_1}$ — критерий, характеризующий тепловую активность первого стержня по отношению ко второму; $h = (1 - K_e)/(1 + K_e)$ — безразмерная величина, абсолютное значение которой всегда меньше единицы.

Сделаем следующее преобразование [65]:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\exp(\sqrt{s/a_1}R) - h \exp(-\sqrt{s/a_1}R)} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} h^{n-1} \exp[-(2n-1)\sqrt{s/a_1}R]. \end{aligned} \quad (5.79)$$

Полученный ряд быстро сходится при $|h| < 1$. Используя преобразование (5.79) и теорему Бореля (см. § 5.3), получим решение в общем виде:

$$T_1(x, \tau) = \frac{\sqrt{a_1}}{\lambda_1} \frac{K_e}{1+K_e} \int_0^\tau q(t) \cdot \frac{1}{\sqrt{(\tau-t)\pi}} \times \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} h^{n-1} \left\{ \exp \left[-\frac{[(2n-1)R-x]^2}{4a_1(\tau-t)} \right] - \exp \left[-\frac{[(2n-1)R+x]^2}{4a_1(\tau-t)} \right] \right\} dt; \quad (5.80)$$

$$T_2(x, \tau) = \frac{\sqrt{a_2}}{\lambda_2} \frac{1}{1+K_e} \int_0^\tau q(t) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi(\tau-t)}} \times \\ \times \left\{ \exp \left[-\frac{(x-R)^2}{4a_2(\tau-t)} \right] - \right. \\ \left. - (1-h) \sum_{n=0}^{\infty} h^{n-1} \exp \left[-\frac{\left[(x-R) + 2nR \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} \right]^2}{4a_2(\tau-t)} \right] \right\} dt. \quad (5.81)$$

Из решений (5.80) и (5.81) при $q=q_0=\text{const}$ получим:

$$T_1(x, \tau) = \frac{\sqrt{a_1}}{\lambda_1} \frac{K_e}{1+K_e} 2q_0 \sqrt{\tau} \sum_{n=1}^{\infty} h^{n-1} \times \\ \times \left\{ \text{ierfc} \frac{(2n-1)R-x}{2\sqrt{a_1\tau}} - \text{ierfc} \frac{(2n-1)R+x}{2\sqrt{a_1\tau}} \right\}; \\ T_2(x, \tau) = \frac{\sqrt{a_2} K_e}{\lambda_2(1+K_e)} 2q_0 \sqrt{\tau} \left\{ \text{ierfc} \frac{x-R}{2\sqrt{a_2\tau}} - \right. \\ \left. - (1-h) \sum_{n=1}^{\infty} h^{n-1} \text{ierfc} \frac{x-R+2nR\sqrt{a_2/a_1}}{2\sqrt{a_2\tau}} \right\}.$$

Решая ту же задачу при $q=q_0\tau^m$, имеем:

$$T_1(x, \tau) = \frac{\sqrt{a_1 K_e}}{\lambda_1 (1 + K_e)} q_0 \Pi(m) (4\tau)^{m+1/2} \sum_{n=1}^{\infty} h^{n-1} \times$$

$$\times \left\{ i^{2m+1} \operatorname{erfc} \frac{(2n-1)R-x}{2\sqrt{a_1 \tau}} - i^{2m+1} \operatorname{erfc} \frac{(2n-1)R+x}{2\sqrt{a_1 \tau}} \right\};$$

$$T_2(x, \tau) = \frac{\sqrt{a_2 q_0} \Pi(m)}{\lambda_1 (1 + K_e)} (4\tau)^{m+1/2} \left\{ i^{2m+1} \operatorname{erfc} \frac{x-R}{2\sqrt{a_2 \tau}} - \right.$$

$$\left. - (1-h) \sum_{n=1}^{\infty} h^{n-1} i^{2m+1} \operatorname{erfc} \frac{x-R+2nR\sqrt{a_2/a_1}}{2\sqrt{a_2 \tau}} \right\},$$

где $\Pi(m) = \Gamma(m+1)$ — гамма-функция или Π -функция Гаусса.

На рис. 5.5 показано влияние коэффициента тепловой активности на изменение температуры поверхности контакта. Температурное поле системы ограниченного и полуограниченного тел представлено на рис. 5.6 при постоянной плотности теплового потока на поверхности соприкосновения тел.

4. Температурное поле шара при граничных условиях II рода [65]. Дан шар радиуса R с равномерной начальной температурой T_0 . С момента времени $\tau=0$ происходит нагревание шара равномерно по всей поверхности при постоянной плотности теплового потока

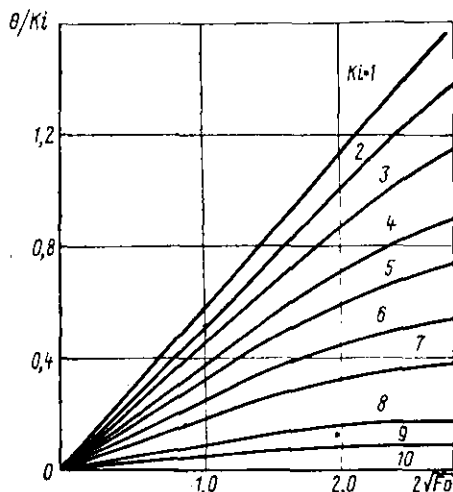


Рис. 5.5. Изменение температуры поверхности контакта неограниченной пластины и полуограниченного массива во времени для различных значений коэффициента тепловой активности

$$\frac{\partial T(r, \tau)}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 T(r, \tau)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial r} \right) (\tau > 0; 0 < r < R); \quad (5.82)$$

$$T(r, 0) = T_0;$$

$$-\partial T(R, \tau)/\partial r + q_0/\lambda = 0;$$

$$\partial T(0, \tau)/\partial r = 0;$$

$$T(0, \tau) \neq 0.$$

Необходимо найти распределение температуры в шаре. Предварительно приведем уравнение (5.82) к виду

$$\frac{\partial [rT(r, \tau)]}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 [rT(r, \tau)]}{\partial r^2}. \quad (5.83)$$

Простым дифференцированием в (5.83) можно показать тождественность уравнений (5.82) и (5.83).

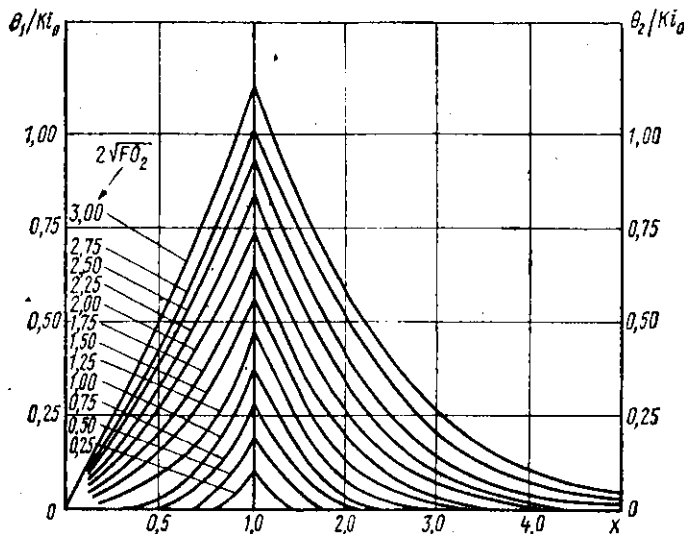


Рис. 5.6. Распределение температуры в системе неограниченная пластина — полуограниченный массив при $q_0 = \text{const}$, $K_e = 1$

Применим интегральное преобразование Лапласа к уравнению (5.83), тогда в области изображений получим

$$[r\hat{T}(r, s)]'' - (s/a) r\hat{T}(r, s) + rT_0/a = 0. \quad (5.84)$$

Решение уравнения (5.84) имеет вид

$$r\hat{T}(r, s) - rT_0/s = A \text{ch} \sqrt{s/ar} + B \text{sh} \sqrt{s/ar}$$

$$\text{или } \hat{T}(r, s) - \frac{T_0}{s} = A \frac{\text{ch} \sqrt{s/ar}}{r} + B \frac{\text{sh} \sqrt{s/ar}}{r}.$$

Граничные условия в области изображений запишутся так:

$$-\hat{T}'(R, s) + q_0/(\lambda s) = 0; \quad (5.85)$$

$$\hat{T}'(0, s) = 0; \quad (5.86)$$

$$\hat{T}(0, s) \neq \infty. \quad (5.87)$$

Удовлетворяя граничным условиям (5.86) и (5.87), получим, что $1=0$ и

$$\hat{T}(r, s) = \frac{T_0}{s} + B \frac{\text{sh} \sqrt{s/a} r}{r}.$$

Постоянную B определим из оставшегося условия (5.85):

$$-B \sqrt{s/a} (1/R) \text{ch} \sqrt{s/a} R + (B/R^2) \text{sh} \sqrt{s/a} R + q_0/(\lambda s) = 0;$$

$$B = \frac{q_0 R^2}{\lambda s (\sqrt{s/a} R \text{ch} \sqrt{s/a} R - \text{sh} \sqrt{s/a} R)}.$$

Таким образом, распределение температуры в шаре в области изображений следующее:

$$\hat{T}(r, s) - T_0/s = \varphi(s)/\psi(s),$$

где

$$\varphi(s) = \frac{q_0 R \text{sh} \sqrt{s/a} r}{\lambda \sqrt{s/a} r};$$

$$\psi(s) = s \left[\text{ch} \sqrt{s/a} R - \frac{1}{\sqrt{s/a} R} \text{sh} \sqrt{s/a} R \right].$$

Функции $\varphi(s)$ и $\psi(s)$ являются обобщенными полиномами; в самом деле,

$$\varphi(s) = \frac{q_0 R}{\lambda} \left(1 + \frac{1}{3!} \frac{r^2}{a} s + \frac{1}{5!} \frac{r^4}{a^2} s^2 + \dots \right),$$

$$\psi(s) = s^2 \left[\left(\frac{1}{2!} + \frac{R^2}{a} + \frac{1}{4!} \frac{R^4}{a^2} s + \dots \right) - \left(\frac{1}{3!} \frac{R^3}{a} + \frac{1}{5!} \frac{R^5}{a^2} s + \dots \right) \right] = s^2 \eta(s),$$

где через $\eta(s)$ обозначено выражение в квадратных скобках, которое представляет собой обобщенный полином относительно s . Полином знаменателя не содержит постоянной, т. е. условия теоремы разложения выполнены.

Применяя теорему разложения, находим: 1) $s=0$ (двукратный корень); 2) $s_n = -a\mu_n^2/R^2$ — бесчисленное множество простых корней, определяемых из характеристического уравнения

$$\text{tg} \mu = \mu, \quad (5.88)$$

которое выводится так:

$$\begin{aligned} \text{ch} \sqrt{s/a} R - \frac{1}{\sqrt{s/a} R} \text{sh} \sqrt{s/a} R &= \cos i \sqrt{s/a} R - \frac{1}{i \sqrt{s/a} R} \sin i \times \\ \times \sqrt{s/a} R &= 0; \\ \cos \mu - \frac{1}{\mu} \sin \mu &= 0, \end{aligned} \quad (5.89)$$

где $i \sqrt{s/a} R = \mu$.

Из (5.89) следует уравнение (5.88).

Для двукратного корня $s=0$ применим вторую теорему разложения:

$$\frac{\varphi(0)}{\psi'(0)} = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{d}{ds} \left(e^{s\tau} \frac{\varphi(s)}{\eta(s)} \right) \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\tau e^{s\tau} \frac{\varphi(s)}{\eta(s)} + e^{s\tau} \frac{\varphi'(s)}{\eta(s)} - \right. \\ \left. - e^{s\tau} \frac{\varphi(s) \eta'(s)}{[\eta(s)]^2} \right] = \frac{q_0 R}{\lambda} \left(\frac{3a\tau}{R^2} + \frac{r^2}{2R^2} - \frac{3}{10} \right),$$

так как $\varphi(0) = q_0 R / \lambda$, $\eta(0) = R^2 / (3a)$,

$$\varphi'(0) = [r^2 / (6a)] (q_0 R / \lambda), \quad \eta'(0) = (1/30) (R^4 / a^2).$$

В случае простых корней воспользуемся обобщенной теоремой разложения (см. § 5.3, с. 188), предварительно найдем $\psi'(s)$ и подставим в него вместо s соответствующее значение корня $s_n = -a\mu_n^2 / R^2$:

$$\psi'(s) = \left[\operatorname{ch} \sqrt{s/a} R - \frac{1}{\sqrt{s/a} R} \operatorname{sh} \sqrt{s/a} R \right] + \frac{1}{2} \sqrt{s/a} R \operatorname{sh} \sqrt{s/a} R - \\ - \frac{1}{2} \operatorname{ch} \sqrt{s/a} R + \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{s/a} R}{\sqrt{s/a} R}.$$

Учитывая характеристическое уравнение (5.88), получим

$$\psi'(s_n) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{i} \sqrt{s_n/a} R \sin i \sqrt{s_n/a} R \right) = \\ = -\frac{1}{2} \mu_n \sin \mu_n = -\frac{1}{2} \mu_n^2 \cos \mu_n.$$

Для $\varphi(s_n)$ имеем

$$\varphi(s_n) = \frac{q_0 R}{\lambda} \frac{\sin i \sqrt{s_n/a} R}{i \sqrt{s_n/a} R} = \frac{q_0 R^2 \sin \mu_n (r/R)}{\lambda \mu_n}.$$

Получим решение в окончательном виде:

$$T(r, \tau) = T_0 + \frac{q_0 R}{\lambda} \left[3a\tau - \frac{3R^2 - 5r^2}{10r^2} - \right. \\ \left. - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_n^2 \cos \mu_n} \frac{R \sin \mu_n \frac{r}{R}}{r \mu_n} \exp \left(-\mu_n^2 \frac{a\tau}{R^2} \right) \right]$$

ли в безразмерном виде:

$$\Theta = \frac{T(r, \tau) - T_0}{T_c - T_0} = Ki \left[3Fo - \frac{1}{10} (3 - 5X^2) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_n^2 \cos \mu_n} \frac{\sin \mu X}{X \mu_n} \exp(-\mu_n^2 Fo) \right],$$

де $Ki = q_0 R / [\lambda (T_c - T_0)]$ — число Кирпичева; $X = r/R$.

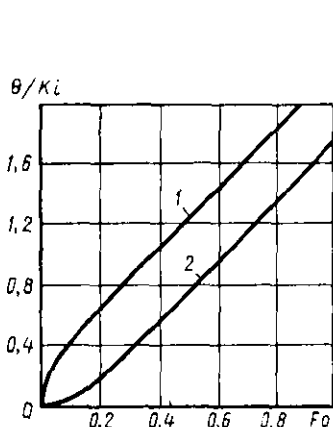


Рис. 5.7. Зависимость между Θ/Ki и безразмерным временем Fo для поверхности (1) и центра (2) шара [65]

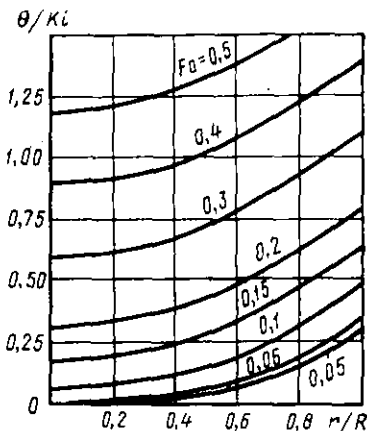


Рис. 5.8. Распределение температуры в шаре при $q_0 = \text{const}$

Ряд в полученном решении в силу неравенств $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \dots$ быстро сходится. Поэтому начиная с некоторого значения им можно пренебречь по сравнению с двумя первыми членами решения. С этого момента времени температура в любой точке шара будет линейной функцией времени (рис. 5.7), а распределение температуры по пространственной координате — параболическим (рис. 5.8), т. е. наступает квазистационарный режим для поля градиента температур.

Метод интегрального преобразования Лапласа позволяет получить отдельное решение, пригодное для малых значений числа Fo . Для этого решение в области изображений запишем в виде

$$\hat{T}(r, s) = \frac{T_0}{s} = \frac{q_0 R^2}{\lambda r} \frac{\text{sh} \sqrt{s/a} r}{s (s/a R \text{ch} \sqrt{s/a} R - \text{sh} \sqrt{s/a} R)}.$$

При $Fo \rightarrow 0$ величина $\sqrt{s/a} R \rightarrow \infty$. Из курса математического анализа известно, что при значениях $\sqrt{s/a} R > 6,0$ с точностью до третьего десятичного знака можно записать:

$$\text{sh } x = \text{ch } x = e^x/2, \quad \text{th } x = \text{cth } x = 1.$$

Поэтому для значений r , близких к R , можно $\text{sh} \sqrt{s/a}r$ заменить на $(1/2 \exp(\sqrt{s/a}r))$ и решение в изображениях примет вид

$$\tilde{T}(r, s) - \frac{T_0}{s} \approx \frac{q_0 R^2}{\lambda r s (\sqrt{s/a}R - 1)} \exp[-\sqrt{s/a}(R - r)].$$

Переход к оригиналам по таблицам изображений функции (см. приложение IV) дает

$$\Theta = \frac{T(r, \tau) - T_0}{T_c - T_0} = \text{Ki} \frac{1}{X} \left[\exp\left(F_0 - \frac{1-X}{X}\right) \text{erfc}\left(\frac{1-X}{2\sqrt{F_0}} - \sqrt{F_0}\right) - \text{erfc}\frac{1-X}{2\sqrt{F_0}} \right].$$

5. Температурное поле цилиндра при граничных условиях I рода [65]. Дано начальное распределение температуры по радиусу неограниченного цилиндра $T_0 = \text{const}$. В начальный момент времени температура поверхности цилиндра мгновенно снижается до температуры $T_c = \text{const}$. Найти радиальное распределение температуры в любой момент времени.

Имеем

$$\frac{\partial T(r, \tau)}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 T(r, \tau)}{\partial r^2} + \frac{\partial T(r, \tau)}{r \partial r} \right) (\tau > 0, 0 < r < R);$$

$$T(r, 0) = T_0;$$

$$T(R, \tau) = T_c;$$

$$\partial T(0, \tau) / \partial r = 0, T(0, \tau) \neq \infty.$$

Применяя интегральное преобразование Лапласа к задаче, получим:

$$\tilde{T}''(r, s) + \frac{1}{r} \tilde{T}'(r, s) - \frac{s}{a} \tilde{T}(r, s) + \frac{T_0}{a} = 0; \quad (5.90)$$

$$\tilde{T}(R, s) = T_c/s; \quad (5.91)$$

$$\partial \tilde{T}(0, s) / \partial r = 0, \tilde{T}(0, s) \neq \infty. \quad (5.92)$$

Уравнение (5.90) представляет собой обыкновенное дифференциальное модифицированное уравнение Бесселя относительно функции $\tilde{T}(r, s)$, его решение состоит из суммы двух частных решений. Первое частное решение представляет собой функцию

$$I_0(z) = J_0(iz) = 1 + \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{z^6}{2^3 \cdot 4^3 \cdot 6^2} + \dots$$

т. е. модифицированную функцию Бесселя 1-го рода нулевого порядка.

Второе частное решение представляет собой модифицированную функцию Бесселя 2-го рода нулевого порядка

$$K_0(z) = -I_0(z) \left[\log\left(\frac{z}{2}\right) + C \right] + \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{2}\right) \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^4}{(2!)^2} + \\ + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^6}{(3!)^2} + \dots,$$

где $C = 0,5722 \dots$ — постоянная Эйлера.

Общее решение уравнения (5.90) имеет вид

$$\tilde{T}(r, s) - T_0/s = A I_0(\sqrt{s/ar}) + B K_0(\sqrt{s/ar}),$$

где A и B — не зависящие от r постоянные, которые определяются из граничных условий.

Постоянную $B = 0$ находят из условия (5.92), так как при $r \rightarrow 0$ $K_0(\sqrt{s/ar}) \rightarrow -\infty$, что противоречит условию (5.92) при $B \neq 0$.

Как видно из разложения, функция $I_0(\sqrt{s/ar})$ — четная, она удовлетворяет условию симметрии задачи.

Определим постоянную A из условия (5.91)

$$\tilde{T}(R, s) = T_0/s + A I_0(\sqrt{s/aR}) = T_c/s, \quad A = -\frac{T_0 - T_c}{s I_0(\sqrt{s/aR})}.$$

Тогда решение задачи имеет вид в области изображений

$$\frac{T_0}{s} - \tilde{T}(r, s) = \frac{(T_0 - T_c) I_0(\sqrt{s/ar})}{s I_0(\sqrt{s/aR})} = \frac{\Psi(s)}{\Phi(s)}. \quad (5.93)$$

Как видно из разложения функции $I_0(z)$, дробь (5.93) представляет собой отношение двух степенных рядов с натуральными показателями относительно s , причем ряд знаменателя не содержит постоянной, т. е. выполнены все условия обобщенной теоремы разложения для перехода от изображения к оригиналу.

Найдем корни функции $\Psi(s)$, для чего приравняем ее нулю:

$$\Psi(s) = s I_0(\sqrt{s/aR}) = s J_0(i \sqrt{s/aR}) = 0. \quad (5.94)$$

Из (5.94) имеем: 1) $s = 0$ (нулевой корень); 2) $i \sqrt{s_n/aR} = \mu_n$ ($n = 1, 2, \dots$) — корни функции Бесселя $J_0(\mu)$ (см. табл. IV. 6; ч. 2, прилож. IV). Для бесчисленного множества корней s_n получим $s_n = -a\mu_n^2/R^2$.

Затем применим теорему разложения для простых корней s_n . Предварительно найдем $\Psi'(s)$, используя соотношения

$$I_1(z) = dI_0(z)/dz, \quad I_1(z) = (1/i) J_1(iz);$$

$$\Psi'(s) = I_0(\sqrt{s/aR}) + \frac{sR}{2\sqrt{as}} I_1(\sqrt{s/aR}) = J_0(i \sqrt{s/aR}) + \\ + \frac{1}{2i} \sqrt{s/aR} J_1(i \sqrt{s/aR}).$$

Таким образом, получим

$$L^{-1} \left[\frac{\varphi(s)}{\psi(s)} \right] = \frac{\varphi(0)}{\psi'(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(s_n)}{\psi'(s_n)} e^{s_n \tau}$$

или

$$T_0 - T(x, \tau) = (T_0 - T_c) - (T_0 - T_c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_0[\mu_n(r/R)]}{\mu_n J_1(\mu_n)} \times \\ \times \exp\left(-\mu_n^2 \frac{\alpha \tau}{R^2}\right).$$

Переход к безразмерному виду дает окончательное решение

$$\Theta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\mu_n X) \exp(-\mu_n^2 Fo),$$

где $\Theta = \frac{T(x, \tau) - T_c}{T_0 - T_c}$, $A_n = \frac{2}{\mu_n J_1(\mu_n)}$, $X = \frac{r}{R}$, $Fo = \frac{\alpha \tau}{R^2}$.

6. Начальный разогрев идеального регенератора [45]. Регенератор служит для передачи теплоты от движущейся горячей жидкости к холодной. При его работе горячая и холодная жидкости попеременно обтекают твердую стенку регенератора. При прохождении горячей жидкости стенка регенератора нагревается, а затем отдает аккумулированную теплоту протекающей холодной жидкости. Далее этот процесс циклически повторяется. Пусть стенку регенератора можно представить в виде полуограниченного твердого тела $y > 0$, а в области $y < 0$ в направлении оси x осуществляется равномерное течение жидкости со скоростью u . Предполагается, что температура жидкости в любой плоскости, перпендикулярной направлению потока, одинакова вследствие интенсивного перемешивания. Однако при этом положим, что перенос теплоты теплопроводностью вдоль потока пренебрежимо мал по сравнению с конвективным переносом.

Обозначим массу жидкости, соприкасающуюся с поверхностью стенки, через M_1 , удельную теплоемкость жидкости — через c_1 , температуру жидкости — через $T(x, \tau)$, температуру поверхности стенки регенератора — через $T_s(x, \tau)$, коэффициент теплоотдачи стенки — через α .

При введенных обозначениях температура жидкости должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + u \frac{\partial T}{\partial x} + H_1(T - T_s) = 0 \quad (\tau > 0, x > 0), \quad (5.95)$$

где $H_1 = \alpha / (M_1 c_1)$.

Температура стенки должна удовлетворять нестационарному уравнению теплопроводности, но упростим задачу, полагая, что стенка выполнена из материала с бесконечно большой теплопровод-

ностью вдоль оси y и нулевой вдоль оси x . Тогда температура поверхности стенки удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial T_s}{\partial \tau} + H(T_s - T) = 0 \quad (\tau > 0, x > 0), \quad (5.96)$$

где $H = a/(Mc)$ (M — масса материала стенки, приходящегося на единицу поверхности стенки, c — его удельная теплоемкость).

Предположим, что начальные температуры жидкости и стенки равны нулю, а в момент $\tau = 0^+$ температура жидкости в плоскости $x=0$ станет равной единице и не изменяется в дальнейшем, т. е.

$$T(x, 0) = 0, \quad T_s(x, 0) = 0, \quad T(0, \tau) = 1. \quad (5.97)$$

Краевую задачу о начальном разогреве идеального регенератора (5.95) — (5.97) решим с помощью интегрального преобразования Лапласа. Используя основные правила выполнения операций (см. § 5.2), получим в области изображений:

$$s\tilde{T} + u d\tilde{T}/dx + H_1(\tilde{T} - T_s) = 0 \quad (x > 0); \quad (5.98)$$

$$s\tilde{T}_s + H(\tilde{T}_s - \tilde{T}) = 0 \quad (x > 0); \quad (5.99)$$

$$\tilde{T}(0, s) = 1/s. \quad (5.100)$$

Начальные условия в (5.97) были учтены при применении теоремы дифференцирования оригинала (см. п. 5 § 5.2).

Определим $\tilde{T}_s$ из уравнения (5.99):

$$\tilde{T}_s = H\tilde{T}/(s+H),$$

подставим его значение в уравнение (5.98). Тогда получим линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно $\tilde{T}$

$$u \frac{d\tilde{T}}{dx} + \left(s + H_1 - \frac{H}{s+H} \right) \tilde{T} = 0.$$

Решение последнего уравнения с учетом граничного условия (5.100) запишется в виде

$$\tilde{T} = \frac{1}{s} \exp \left[-\frac{x(s+H_1)}{u} + \frac{xHH_1}{u(s+H)} \right], \quad (5.101)$$

а для функции $\tilde{T}_s$ имеем выражение

$$\tilde{T}_s = \frac{H}{s(s+H)} \exp \left[-\frac{x(s+H_1)}{u} + \frac{xHH_1}{u(s+H)} \right]. \quad (5.102)$$

Для перехода в область оригиналов воспользуемся формулой приложения IV

$$\frac{1}{s} \exp(k/s) \rightarrow I_0(2\sqrt{k\tau}),$$

где $I_0(x)$ — модифицированная функция Бесселя 1-го рода нулевого порядка.

Согласно теореме затухания (см. п. 4 § 5.2), имеем

$$\frac{1}{s+b} \exp\left(\frac{k}{s+b}\right) \rightarrow \exp(-b\tau) I_0\left(2\sqrt{k\tau}\right). \quad (5.103)$$

Далее воспользуемся теоремой интегрирования для оригинала (см. п. 7 § 5.2)

$$\begin{aligned} \frac{1}{b} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+b} \right) \exp\left(\frac{k}{s+b}\right) &= \frac{1}{s(s+b)} \exp \times \\ \times \left(\frac{k}{s+b} \right) &\rightarrow \int_0^{\tau} \exp(-bt) I_0\left(2\sqrt{kt}\right) dt. \end{aligned}$$

Из последнего равенства и (5.103) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{s} \exp\left(\frac{k}{s+b}\right) &\rightarrow \exp(-b\tau) I_0\left(2\sqrt{k\tau}\right) + \\ + b \int_0^{\tau} \exp(-bt) I_0\left(2\sqrt{kt}\right) dt \end{aligned}$$

или, интегрируя по частям, имеем

$$\frac{1}{s} \exp\left(\frac{k}{s+b}\right) \rightarrow 1 + \sqrt{k} \int_0^{\tau} \exp(-bt) I_1\left(2\sqrt{kt}\right) t^{-1/2} dt, \quad (5.104)$$

где $I_1(z) = dI_0(z)/dz$ — модифицированная функция Бесселя 1-го рода первого порядка.

Воспользуемся формулами (5.103), (5.104) и первой теоремой смещения (см. п. 2 § 5.2), тогда из выражений (5.101) и (5.102) получим, что T и T_S равны нулю при $\tau < x/u$, а при $\tau > x/u$ определяются формулами

$$\begin{aligned} T(x, \tau) &= \exp(-H_1 x/u) \times \\ \times \left\{ 1 + \sqrt{Ax} \int_0^{\tau-x/u} \exp(-Ht) I_1\left(2\sqrt{Axt}\right) t^{-1/2} dt \right\}; \\ T_S(x, \tau) &= H \exp(-H_1 x/u) \int_0^{\tau-x/u} \exp(-Ht) I_0\left(2\sqrt{Axt}\right) dt, \end{aligned}$$

где $A = HH_1/u$.

Приведем пример расчета температур жидкости $T(x, \tau)$ и поверхности регенератора $T_S(x, \tau)$ с помощью ЭВМ М-222. Пусть заданы следующие данные: $u = 80$ м/с; $H = 2,5$; $H_1 = 960$.

Запишем на алгоритмическом языке АЛГОЛ-60 (транслятор ТА-1М) программу расчета $T(x, \tau)$ и $T_S(x, \tau)$ в точках $x_1 = 0,05$ м; $x_2 = 0,1$ м; $x_3 = 0,15$ м; $x_4 = 0,2$ м в моменты времени 0,25; 0,5; 1; 5 с.

BEGIN

REALQ, TAU, U, H, H1, P, X, Y1, Y2, X1, INT1, INT2;

REAL T, TS, Э, Я;

ARRAY IN[1:4]

```

U:=80; H:=2.5; H1:=30;
FOR TAU:=.25,.5, 1, 5 DO
FOR X:=.05,.1,.15,.2 DO
BEGIN
P:=EXP(-A×X/U);
IN[1]:= .00001; IN[2]:=TAU - X/U;
IN[3]:=IN[2]/10; IN[4]:= .0001;
A:=H×H1/U;
IF TAU<(X/U) THEN GO TO FIN;
INT1:=PO655(Q, Y1, IN[1], 1, J);
INT2:=PO655(Q, Y2, IN[1], 1, J);
T:=P×(1+SQRT(A×X)×INT1);
TS:=H×P×INT2;
P1041(TAU, X, T, TS);
GO TO M,
I:BEGIN
X1:=2×SQRT(A×X×Q);
Я:=PO521(X1); Э:=PO522(X1);
Y1:=EXP(-H×Q)×Э/SQRT(Q);
Y2:=EXP(-H×Q)×Я;
I:END;
FIN:T:=0; TS:=0;
P1041(TAU, X, T, TS);
M:END;
END

```

Список идентификаторов. U — скорость движения жидкости u ; $H, H1$ — комплексы H и H_1 соответственно; X — значение координаты x ; TAU — значения времени t ; T, TS — значения температур жидкости и стенки, соответственно; $INT1, Я, Э, P, Y1, Y2, INT2$ — рабочие переменные; IN — рабочий массив; $PO521(Z)$ — подпрограмма вычисления функции $I_0(z)$; $PO522(Z)$ — подпрограмма вычисления функции $I_1(z)$.

Результаты расчетов представлены в табл. 5.2.

Задача 5.7. Пластина толщиной $2R$ находится в тепловом равновесии с окружающей средой, т. е. имеет температуру, равную температуре окружающей среды T_0 . В начальный момент времени температура среды повышается по закону $T_0(t) = T_0 + bt$, где b — постоянная, град/с. Теплообмен между поверхностями пластины и внешней средой осуществляется по закону Ньютона. Найти распределение температуры по толщине пластины в любой момент времени и провести анализ полученного решения.

Задача 5.8. Дано сферическое тело радиуса R при равномерной начальной температуре T_0 . В начальный момент времени оно помещается в среду с температурой $T_0 > T_0$. Теплообмен с окружающей средой происходит по закону Ньютона. Внутри тела действует источник теплоты, объемная плотность теплового потока которого равна q_0 .

Найти распределение температуры при: а) $q_0 = q_{00} = \text{const}$; б) $q_0 = q_{00} \exp \times (-kt)$, $k = \text{const}$.

Задача 5.9. Неограниченный цилиндр радиуса R с постоянной по радиусу начальной температурой T_0 в начальный момент времени помещается в среду с постоянной температурой $T_0 > T_0$. Предполагая, что температура цилиндра зависит только от радиуса и времени, найти распределение температуры в цилиндре в любой момент времени (теплообмен происходит по закону Ньютона).

Задача 5.10. Дана система из двух полуграниченных тел. Начальные температуры тел разные. В начальный момент времени тела приведены в соприкосновение и начиная с момента соприкосновения на границе тел действует источник теплоты, поверхностная плотность теплового потока которого q . Найти распределение температуры в системе при: а) одинаковых начальных температурах, $q = q_0 = \text{const}$; б) различных начальных температурах, $q = q_0 = \text{const}$.

Т а б л и ц а 5.2

Значения температур жидкости и поверхности стенки регенератора

$x, \text{ м}$	0,05	0,10	0,15	0,2
$T, \text{ град}$				
$\tau = 0,25 \text{ с}$				
T_S	0,4334	0,4269	0,4205	0,4141
T	0,9895	0,9791	0,9688	0,9585
$\tau = 0,5 \text{ с}$				
T_S	0,6821	0,6759	0,6689	0,6623
T	0,9942	0,9893	0,9824	0,9765
$\tau = 1 \text{ с}$				
T_S	0,8897	0,8861	0,8825	0,8789
T	0,9979	0,9959	0,9939	0,9918
$\tau = 5 \text{ с}$				
T_S	0,9760	0,9763	0,9768	0,9772
T	0,9996	0,9991	0,9987	0,9983

§ 5.5. О численном обращении преобразования Лапласа

Самым трудным этапом применения операционного метода Лапласа является, как показывает практика, этап нахождения оригинала $f(\tau)$ по его изображению $\tilde{f}(s)$, т. е. задача обращения преобразования Лапласа. Имеющиеся в настоящее время таблицы соответствий между оригиналами и изображениями охватывают далеко не все необходимые для практики случаи. Кроме того, часто значение оригинала выражается через очень сложные функции, которые не всегда табулированы и трудно вычисляемы. Возникает необходимость в построении приближенных методов обращения преобразования Лапласа, которые позволяют находить числовые значения оригинала функции.

Задачу нахождения оригинала $f(\tau)$ по его изображению можно рассматривать как задачу решения интегрального уравнения первого порядка

$$\int_0^{\infty} \exp(-s\tau) f(\tau) d\tau = \tilde{f}(s). \quad (5.105)$$

Эта задача относится к классу некорректных задач, которые можно охарактеризовать двумя свойствами: а) они разрешимы не при всех значениях параметров, определяющих их решение; б) малым изменениям этих параметров может отвечать большое изменение решения.

Вышесказанное очень затрудняет решение таких задач. Пусть, например, изображение $\tilde{f}(s)$ известно на действительной полуоси комплексной плоскости $s > \alpha$ и аргумент s есть действительная переменная. Уравнение (5.105) имеет решение не для всех функций $\tilde{f}(s)$, непрерывных или даже гладких* при $s > \alpha$, оно, в частности, неразрешимо в случае, когда $\tilde{f}(s)$ не является аналитической при $s > \alpha$.

С другой стороны, предположим, что $\tilde{f}(s)$ суть изображение некоторой функции $f(\tau)$ и, следовательно, уравнение (5.105) разрешимо. Проведем замену функции $f(\tau)$ на некоторую другую функцию $f_1(\tau)$, которая отличается от $f(\tau)$ наличием возмущения большой величины на некотором достаточно малом участке. На остальной части полуоси $[0, \infty]$ функции $f(\tau)$ и $f_1(\tau)$ совпадают. Тогда новому оригиналу $f_1(\tau)$ будет соответствовать новое изображение $\tilde{f}_1(s)$, которое мало отличается от $\tilde{f}(s)$ для любых $s > \alpha$. Следовательно, малому возмущению правой части (5.105) может соответствовать большое изменение в решении интегрального уравнения.

Рассмотрим теперь некоторые методы, которые позволяют осуществить численное обращение преобразования Лапласа [58].

Если $f(\tau)$ является оригиналом, а $\tilde{f}(s)$ — его изображением по Лапласу, то для нахождения оригинала по изображению можно пользоваться в комплексной плоскости интегралом

$$f(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \tilde{f}(s) \exp(s\tau) ds, \quad (5.106)$$

где σ — абсцисса в полуплоскости абсолютной сходимости интеграла Лапласа.

Непосредственное вычисление интеграла в (5.106) затруднено тем, что он является несобственным, с колеблющимся ядром и требует знания функции $\tilde{f}(s)$ для комплексных значений $s = \sigma + i\alpha$ ($-\infty < \alpha < \infty$).

В работе [58] изучаются три группы методов численного обращения преобразования Лапласа. Рассмотрим первую из них. Это группа методов обращения преобразования Лапласа, основанных на применении интерполяционных квадратурных формул. Производится замена функции $\tilde{f}(s)$ в интеграле Меллина (5.106) другой функцией, которая интерполирует $f(s)$ по значениям ее в несколь-

* Функция $y(x)$ называется гладкой на промежутке Ω , если функция $y(x)$ непрерывна вместе со своей производной на этом промежутке.

ких точках. Погрешность вычисления интеграла (5.106) зависит в основном от точности, с которой интерполируется функция-изображение $\tilde{f}(s)$. Для обеспечения достаточной точности вычислений следует согласовать способ интерполирования со свойствами функции $\tilde{f}(s)$, являющейся не произвольной, а функцией-изображением.

При интерполировании $\tilde{f}(s)$ можно варьировать как выбором узлов интерполяции s_k , так и выбором функций $\{\omega_\beta(s)\}$, которые используются в процессе интерполирования. Так как изображение $\tilde{f}(s) \rightarrow 0$ при s , стремящемся к бесконечности, то представляет интерес рассмотреть случай, когда $\tilde{f}(s)$ убывает по степенному закону, в частности ее можно представить в виде $\tilde{f}(s) = (s - a)^{-\gamma} \times \chi \psi(s)$ ($\gamma > 0$), где функция $\psi(s)$ регулярна в полуплоскости $\text{Re } s > \sigma_0$ и ограничена в полуплоскости $\text{Re } s > \sigma$ ($\sigma > \sigma_0$). Параметр a должен удовлетворять условию $\text{Re } a \leq \sigma_0$ и выбираться так, чтобы функция $\psi(s)$ в полуплоскости $\text{Re } s > \sigma_0$ обладала «лучшими» свойствами, чем $\tilde{f}(s)$, т. е. чтобы $\psi(s)$ имела меньше особенностей, чем $\tilde{f}(s)$, и чтобы особые точки функции $\psi(s)$ были расположены дальше от прямой $\text{Re } s = \sigma_0$, чем особые точки изображения $\tilde{f}(s)$.

Предположим, $a = 0 \leq \sigma_0 < \sigma$, чего всегда можно добиться параллельным переносом осей координат. После замены функции $\tilde{f}(s)$ в интеграле (5.106) получим

$$f(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \exp(s\tau) s^{-\gamma} \psi(s) ds. \quad (5.107)$$

В интеграле (5.107) интерполируем функцию $\psi(s)$ с помощью линейных комбинаций некоторой полной системы функций $\omega_\beta(s)$, $\beta = 0, 1, 2, \dots$. Так как $\psi(s)$ регулярна в полуплоскости $\text{Re } s > \sigma$, непрерывна в полуплоскости $\text{Re } s \geq \sigma_0$, включая бесконечную точку, то в качестве $\omega_\beta(s)$ можно взять рациональные функции от s , которые должны быть ограниченными при $s \rightarrow \infty$ и полюсы которых лежат в полуплоскости $\text{Re } s \leq \sigma_0$.

Для простоты вычислений лучше всего интерполировать $\psi(s)$ многочленами от $1/s$. Взяв пока произвольные узлы интерполяции s_k ($k = 0, 1, 2, \dots, n$), лежащие в полуплоскости $\text{Re } s > \sigma_0$, построим интерполяционную формулу для $\psi(s)$:

$$\psi(s) = \sum_{k=0}^n l_k(1/s) \psi(s_k) + z_n(s), \quad (5.108)$$

где $l_k(1/s) = \omega_k(1/s) \omega_k(1/s_k)$; $\omega_k(1/s) = \omega(1/s)(1/s - 1/s_k)$; $\omega(1/s) = \prod_{i=1}^n (1/s - 1/s_i)$.

Используя представление (5.108), получим следующую формулу для вычисления интеграла Меллина (5.107):

$$f(\tau) = \sum_{k=0}^n A_k(\tau) \psi(s_k) + R_n \quad (5.109)$$

где $A_k(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \exp(s\tau) s^{-\gamma} l_k(1/s) ds$; $R_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \exp(s\tau) \times$
 $\times s^{-\gamma} r_n(s) ds$ — остаточный член.

Отбросив остаточный член в (5.109) и раскладывая $l_k(1/s)$ в ряд по степеням $\frac{1}{s}$ $\left(l_k(1/s) = \sum_{j=0}^n a_{kj} s^{-j} \right)$, из (5.109) получим

$$A_k(\tau) = \sum_{j=0}^n \frac{a_{kj} \tau^{\gamma+j-1}}{\Gamma(\gamma+j)}, \quad (5.110)$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция.

В (5.110) коэффициенты a_{kj} зависят от выбранных узлов s_k и, зная a_{kj} , можно легко вычислить коэффициенты $A_k(\tau)$ для любых значений τ .

Задача о стремлении остаточного члена $R_n(s)$ (при $n \rightarrow \infty$) к нулю может быть решена только для некоторых конкретных узлов s_k и частных классов функций $\psi(s)$, что затрудняет применение этих методов численного обращения преобразования Лапласа на практике. При построении квадратурной формулы (5.109) необходимая степень точности интерполяции при заданных узлах интерполирования s_k в полуплоскости $\operatorname{Re} s > \sigma_0$ достигалась за счет выбора квадратурных коэффициентов A_k . Степень точности квадратурной формулы может быть увеличена также за счет выбора узлов интерполяции. Вычисление интеграла Меллина при этом сводится (путем замены переменных) к вычислению интеграла:

$$f(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \frac{\exp(\sigma_0 \tau)}{\tau} \int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty} \exp(s') \tilde{f}^*(s') ds', \quad (5.111)$$

где $\epsilon > 0$; $\tilde{f}^*(s') = \tilde{f}(s'/\tau + \sigma_0)$; $s = s'/\tau + \sigma_0$.

Относительно функции $\tilde{f}^*(s)$ предполагаем, что она может быть представлена в виде $\tilde{f}^*(s) = (1/s)^\gamma \psi(s)$, где $\gamma > 0$, функция $\psi(s)$ регулярна в правой полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0$.

Тогда для определения функции $f(\tau)$ необходимо найти значение интеграла

$$J = \frac{1}{2\pi i} \int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty} \exp(s) \tilde{f}^*(s) ds \approx \sum_{k=1}^n A_k \psi(s_k). \quad (5.112)$$

За счет выбора узлов s_k в формуле (5.112) достигают того, что она становится точной для любого многочлена степени $2n-1$ от переменной $x=1/s$.

В формуле (5.112) коэффициенты A_k вычисляются по формуле

$$A_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} \exp(s) s^{-\gamma} \frac{P_n^{(\gamma)}(1/s)}{(1/s - 1/s_k) P_n^{(\gamma)'}(1/s_k)} ds,$$

где производная от $P_n^{(\gamma)}(1/s)$ берется по $x=1/s$.

Узлы интерполяции s_k являются корнями многочлена

$$P_n^{(\gamma)}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+\gamma-1)} \int_0^\infty \tau^{n+\gamma-2} \left(1 - \frac{\tau}{s}\right) \exp(-\tau) d\tau,$$

нахождение их связано с большими вычислительными трудностями и потерей точности при вычислениях.

Существуют также методы вычисления интеграла Меллина с помощью квадратурных формул с равными коэффициентами, т. е. интеграл (5.106) представляют в виде формулы

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} \exp(s) s^{-\gamma} \psi(s) ds \approx c_n \sum_{k=1}^n \psi(s_k). \quad (5.113)$$

Неизвестные c_n и узлы s_k вычисляются так, чтобы формула (5.113) была точной для многочленов степени n от $1/s$: $c_n = 1/[n\Gamma(\gamma)]$.

Применение формулы (5.113) к вычислениям затруднено тем, что с ростом n все большее количество узлов интерполяции s_k выходит из области регулярности функций, т. е. переходит в левую полуплоскость $\text{Re } s \leq \sigma_0$ [58].

Вторая группа методов численного обращения преобразования Лапласа основана на том, что задача вычисления интеграла Меллина может быть приведена к вычислению интеграла Фурье. Последнее является классическим аппаратом исследования широкого круга прикладных задач, и было предложено много способов для его численного осуществления. Каждый из таких способов можно применить к решению задачи обращения. Вычисление интегралов Фурье по значениям преобразуемой функции $f(\tau)$ основано, как и вычисление интеграла Меллина, преимущественно на интерполировании функции $f(\tau)$ с помощью многочленов или рациональных функций, при этом интерполирование выполняется либо во всей области интегрирования, либо в ее частях. Чем более гладкой является функция $f(\tau)$ и чем быстрее она стремится к нулю при $\tau \rightarrow \infty$, тем точнее может быть вычислен интеграл.

При вычислении интегралов Фурье функцию-оригинал $f(\tau)$ можно улучшить в направлениях: а) увеличения плавности изменения; б) увеличения скорости стремления $f(\tau)$ к нулю при неограниченном возрастании ее аргумента; в) улучшения дифференциальных свойств оригинала $f(\tau)$.

Увеличения плавности изменения $f(\tau)$ можно добиться выделением из нее особенностей. Улучшение дифференциальных свойств ори-

гинала $f(\tau)$ предполагает, например, увеличение порядка ее дифференцируемости.

Методы второй группы численного обращения операционного преобразования Лапласа имеют один принципиальный недостаток, а именно: все эти методы не учитывают того, что под знаком интеграла Меллина стоит не произвольная функция $\tilde{f}(s)$ с комплексными значениями, а функция-изображение, которая заведомо обладает некоторыми заранее известными свойствами, такими, например, как регулярность в полуплоскости $\text{Re } s > \sigma_0$ ($\sigma_0 \leq \sigma$), стремление к нулю при удалении точки s в бесконечность и т. д. Поэтому вычислительные методы обращения, отнесенные к первой группе, являются более предпочтительными, так как в них в той или иной мере учитываются свойства изображения.

Важным моментом уточнения методов обращения преобразования Лапласа, основанных как на интерполировании функции-изображения $\tilde{f}(s)$, так и на применении преобразования Фурье для вычисления интеграла Меллина, является вопрос о выделении особенностей функции-изображения $\tilde{f}(s)$ и оригинала $f(\tau)$.

Вычисление оригинала $f(\tau)$ связано с интерполированием изображения $\tilde{f}(s)$ или функции $\psi(s)$, где $\tilde{f}(s) = \psi(s)(s - a)^{-\gamma}$. Интерполирование будет тем более точным, чем более «гладким» будет изменение $\tilde{f}(s)$ или $\psi(s)$ в полуплоскости $\text{Re } s > \sigma_0$. На гладкость изменения функций $\tilde{f}(s)$ и $\psi(s)$ в этой полуплоскости влияют: а) расположение особых точек $\tilde{f}(s)$ [изменение $\tilde{f}(s)$ и $\psi(s)$ будет тем более «гладким», чем дальше особые точки удалены от полуплоскости $\text{Re } s > \sigma_0$]; б) характер особых точек $\tilde{f}(s)$.

На точность интерполирования также влияет скорость стремления величины $|\tilde{f}(s)|$ к нулю при $s \rightarrow \infty$: точность увеличивается при увеличении скорости убывания $|\tilde{f}(s)|$.

Вопрос о выделении особенностей функции-изображения связан с уменьшением влияния особых точек на поведение $\tilde{f}(s)$ или, если это возможно, с устранением ближайших к прямой $\text{Re } s = \sigma_0$ особых точек функции $\tilde{f}(s)$. Это делают с помощью представления $\tilde{f}(s)$ в виде суммы $\tilde{f}(s) = \tilde{f}_1(s) + \tilde{f}_2(s)$; $\tilde{f}_1(s)$ выбирается так, чтобы она имела основные особенности $\tilde{f}(s)$, влияние которых мы хотим ослабить у $\tilde{f}(s)$, или те особенности функции-изображения, которые нужно устранить; $\tilde{f}_1(s)$ должна также быть функцией-изображением, оригинал $f(\tau)$ которой можно найти точно. Построив таким образом $\tilde{f}_1(s)$, можно надеяться, что $\tilde{f}_2(s) = \tilde{f}(s) - \tilde{f}_1(s)$ в полуплоскости $\text{Re } s = \varepsilon > \sigma$ будет изменяться более плавно, чем $\tilde{f}(s)$, и ее оригинал $f_2(\tau)$ может быть найден более точно, чем оригинал $f(\tau)$ функции-изображения $\tilde{f}(s)$.

Кроме рассмотренных выше методов обращения преобразования Лапласа существует третья группа методов, основанных на использовании специальных разложений. Рассмотрим некоторые из них.

Использование полиномов, ортогональных на конечном промежутке. Пусть искомым оригинал $f(\tau)$ — функция, интегрируемая на любом конечном отрезке $[0, t]$:

$$\int_0^{\infty} \beta(\tau) |f(\tau)|^2 d\tau < \infty,$$

где $\beta(\tau)$ — неотрицательная функция на $[0, \infty]$, причем $\int_0^{\infty} \beta(\tau) d\tau < \infty$.

Известно преобразование Лапласа $\tilde{\Phi}(s)$ функции $f(\tau)\beta(\tau)$:

$$\tilde{\Phi}(s) = \int_0^{\infty} \exp(-s\tau) f(\tau) \beta(\tau) d\tau.$$

Необходимо найти оригинал $f(\tau)$.

Путем замены переменной $x = \exp(-\tau)$ можем получить

$$\tilde{\Phi}(s) = \int_0^1 x^s \omega(x) \varphi(x) dx, \quad (5.114)$$

где $\varphi(x) = f(-\ln x)$, $\omega(x) = \beta(-\ln x)/x$. Придавая s значения $0, 1, 2, 3, \dots$, получим так называемые «взвешенные моменты» функции $\varphi(x)$:

$$\mu_k = \tilde{\Phi}(k) = \int_0^1 \omega(x) x^k \varphi(x) dx, \quad k=0, 1, 2, \dots$$

Параметр s может принимать целые положительные значения, так как (5.114) справедливо в полуплоскости $\operatorname{Re} s \geq 0$. В этой постановке задачи необходимо восстановить функцию $\varphi(x)$ по ее взвешенным моментам μ_k .

В частном виде можно рассматривать задачу следующим образом: по заданным $n+1$ взвешенным моментам $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ функции $\varphi(x)$ построить полином $q_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k$ такой, чтобы $(n+1)$ -первые взвешенные моменты его совпадали с заданными моментами функции $\varphi(x)$:

$$\tilde{\Phi}(k) = \int_0^1 \omega(x) x^k q_n(x) dx = \mu_k, \quad k=0, 1, 2, \dots$$

Будем искать полином q_n в виде

$$q_n(x) = \sum_{k=0}^n \tilde{\Phi}(k) \Psi_{k,n}(x), \quad (5.115)$$

где $\Psi_{k,n}(x)$ — полиномы степени n , для которых

$$\int_0^1 x^s (1-x)^\beta x^s \Psi_{k,n}(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } s \neq k, \\ 1 & \text{при } s = k. \end{cases} \quad (5.116)$$

Каждый полином $\Psi_{k,n}(x)$, $0 \leq k \leq n$, будучи заданным своими $(n+1)$ -первыми моментами

$$\mu_i = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq k, \\ 1 & \text{при } i = k, \end{cases} \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

определен однозначно и, следовательно, представление (5.115) единственно.

Рассмотрим некоторые варианты построения функции $\Psi_{k,n}(x)$.

1. Пусть в (5.116) постоянная $\beta = 0$, а весовой множитель $\beta(\tau) = \exp[-(a+1)\tau]$, тогда искомому разложению функции

$$f(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+a+1) a_k P_k^{(a, 0)} \exp(-\tau),$$

где $P_k^{(a, \beta)}(x) = (-1)^n \binom{n+a}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(n+a+\beta+1) \dots (n+a+\beta+k)}{(a+1)(a+2) \dots (a+k)} \times$
 $\times x^k$ — полиномы Якоби; $\binom{n+a}{n} = \frac{(n+a)(n-1+a) \dots (1+a)}{n!}$ — число
 всех сочетаний из $n+a$ различных элементов по n , будет соответствовать разложение преобразования Лапласа $\tilde{\Phi}(s)$ в ряд

$$\tilde{\Phi}(s) = \sum_{k=0}^n (2k+a+1) \frac{s(s-1) \dots (s-k+1)}{(s+a+1) \dots (s+a+k+1)} a_k,$$

где коэффициенты a_k вычисляются из треугольной алгебраической системы

$$\frac{\Gamma(2n+a+1)}{n! \Gamma(n+a+1)} \tilde{\Phi}(n) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+a+1}{2n+a+1} \binom{2n+a+1}{n-k} a_k.$$

Полиномы $\Psi_{k,n}(x)$ сводятся к виду

$$\Psi_{k,n}(x) = (-1)^{n-k} (n+k+a+1) \binom{n}{k} \binom{n+k+a}{n} \times$$

$$\times \sum_{m=0}^n (-1)^{n-m} \frac{m+n+a+1}{m+k+a+1} \binom{n}{m} \binom{n+m+a}{n} x^m.$$

2. Пусть $\alpha = \beta = 0$ и весовой множитель $\beta(\tau) = \exp(-\tau)$. Тогда $f(\tau)$ представима в виде ряда

$$f(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) a_k P_k^{(0, 0)} \exp(-\tau),$$

где $P_k^{(0, 0)}(\tau)$ — полиномы Лежандра.

Этому разложению соответствует разложение преобразования Лапласа в ряд

$$\tilde{\Phi}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) \frac{s(s-1) \dots (s-k+1)}{(s+1)(s+2) \dots (s+k+1)} a_k,$$

где коэффициенты a_k вычисляются из треугольной алгебраической системы

$$\binom{2n}{n} \hat{\Phi}(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{2n+1} \binom{2n+1}{n-k} a_k, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

Таблица 5.3

Результаты численного обращения преобразования Лапласа некоторых функций по алгоритмам 5, 6 (приложение V)

τ	f(τ)=1/√τπ		
	точное значение	данные по алгоритму 6	данные по алгоритму 5
1	0,56419	0,56555	0,56419
2	0,39894	0,39912	0,39894
3	0,32574	0,32655	0,32573
4	0,28209	0,28278	0,28209
5	0,25231	0,25174	0,25231
10	0,17841	0,17796	0,17841

τ	f(τ)=sin τ		f(τ)=1/√τπ exp(-1/τ)	
	точное значение	данные по алгоритму 6	точное значение	данные по алгоритму 6
0,02	0,0199987	0,0199994	0,0000000	-0,71649·10 ⁻⁷
0,04	0,0399893	0,0399908	0,39177·10 ⁻¹⁰	-0,93637·10 ⁻⁶
0,1	0,0799147	0,0799181	0,74336·10 ⁻⁵	0,89342·10 ⁻⁴
0,3	0,2955202	0,2955914	0,0367465	0,0372507
0,5	0,4794255	0,4792505	0,1079819	0,1079373
0,7	0,6442177	0,6419291	0,1616052	0,1611929
1,0	0,8414709	0,8367961	0,2075537	0,2072370

τ	f(τ)=exp(-0,5τ)		
	точное значение	данные по алгоритму 5	данные по алгоритму 6
0,02	0,9900498	0,9900503	0,9900484
0,04	0,9801987	0,9801992	0,9801980
0,10	0,9512294	0,9512299	0,9512273
0,30	0,8607080	0,8607084	0,8607053
0,50	0,7788008	0,7788013	0,7787984
0,70	0,7046880	0,7046886	0,7046870
1,00	0,6065306	0,6065313	0,6065179

Полиномы $\Psi_{k,n}(x)$ имеют вид

$$\Psi_{k,n}(x) = (-1)^{n-k} (n+k+1) \binom{n}{k} \binom{n+k}{n} \times \\ \times \sum_{m=0}^n (-1)^{n-m} \frac{m+n+1}{m+k+1} \binom{n}{m} \binom{n+m}{n} x^m.$$

Методы третьей группы трудно использовать в практике численных расчетов, так как бесконечные системы уравнений с треугольными матрицами для определения коэффициентов α_k неустойчивы относительно роста погрешностей.

В приложении V приведены две программы, реализующие методы численного обращения преобразования Лапласа (алгоритмы 5 и 6), записанные на языке АЛГОЛ-60.

В табл. 5.3 приведены данные расчетов по численному обращению некоторых функций с помощью алгоритмов 5 и 6. Сравнение результатов расчетов показывает более высокую точность расчетов по алгоритму 5. Однако при нахождении оригиналов сложных изображений алгоритм 6 имеет то преимущество перед алгоритмом 5, что при его использовании нет необходимости выделять мнимую и действительную части функции-изображения.

Покажем на примерах, как составить программу численного нахождения оригинала функции с помощью алгоритма 6.

1. Пусть нам задана функция $\tilde{p}_1(x, s)$ в области изображений по Лапласу

$$\tilde{p}_1(x, s) = \frac{\operatorname{sh}(x\sqrt{s})}{s\sqrt{s}x(\operatorname{ch}\sqrt{s} - 1/\sqrt{s}\operatorname{sh}\sqrt{s})}.$$

Требуется составить программу вычисления оригинала $p_1(x, \tau)$ в точках $x=0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1$ для значений $\tau=0,05; 0,1; 0,5; 1$.

Для составления программы расчетов воспользуемся процедурой LINV (см. приложение V, алгоритм 6), записанной на алгоритмическом языке АЛГОЛ-60. Тогда программа численного обращения функции $\tilde{p}_1(x, s)$, записанная на языке АЛГОЛ-60 для ЭЦВМ М-222 (транслятор ТА-1М), имеет вид:

```
BEGIN
REAL PROCEDURE SH(X); VALUE X; REAL X;
SH:=(EXP(X)-EXP(X))/2;
REAL PROCEDURE CH(Y); VALUE Y; REAL Y;
CH:=(EXP(Y)+EXP(-Y))/2;
INTEGER MA, NA; REAL TA, FA; MA:=-5; NA:=-10;
BEGIN
REAL K;
INTEGER I, J;
ARRAY RI[1:5];
REAL T, P, F1;
ARRAY NA[1:NA];
```

```

PROCEDURE LINV(PA, NA, TA, FA, VA, MA);
VALUE NA, TA; INTEGER MA, NA;
REAL TA, FA; ARRAY VA;
REAL PROCEDURE PA;
BEGIN
  INTEGER IA, KA, NH, SN;
  REAL AA;
  ARRAY GA[0:NA], HA[1:NA/2];
  IF MA-NA THEN GO TO CA;
  GA[9]:=-1; NH:=-NA/2;
  FOR IA:-1 STEP 1 UNTIL NA DO
    GA[IA]:=-GA[IA-1]×IA;
    HA[1]:=-2/GA[NH-1];
  FOR IA:-2 STEP 1 UNTIL NH DO
    HA[IA]:=IA↑NH×GA[2×IA]/(GA[NH-IA]×GA[IA]×GA[IA-1])
    SN:=-2×SIGN(NH-NH:-2×2)-1;
  FOR IA:-1 STEP 1 UNTIL NA DO
    BEGIN[VA IA]:=-0;
    FOR KA:-(IA+1):-2 STEP 1 UNTIL
    IF IA<NH THEN IA ELSE NH DO
      VA[IA]:=-VA[IA]+HA[KA]/(GA[IA-KA]×GA[2×KA-IA]);
      VA[IA]:=SN×VA[IA]; SN:=-SN
    END;
    MA:-NA;
    CA:FA:-0; AA:=LN(2)/TA;
    FOR IA:-1 STEP 1 UNTIL NA DO
      FA:-FA+VA[IA]×PA(IA×AA);
      FA:-AA×FA
    END LINV;
  REAL PROCEDURE P1(S1); VALUE S1;
  REAL S1;
  P1:-SH(SQRT(S1)×K)/SQRT(S1)×K/S1/(CH(SQRT(S1))-
  SH(SQRT(S1))/SQRT(S1));
  FOR T:-.05, .1, .5, 1 DO
    BEGIN
      P1041(T);
      I:-0;
      FOR K:-.2 STEP .2 UNTIL 1.001 DO
        BEGIN
          I:-I+1
          LINV(P1, NA, T, F1, VA, MA);
          R1[I]:=-F1;
        END K;
      P1041(R1);
    END;
  END;
  END;
  END;

```

Отметим, что зависимость $\tilde{p}_1(x, s)$ при $x=1$ представляет собой изображение функции безразмерной температуры поверхности шара

$\Theta(1, Fo)/Ki$ при симметричном нагреве его тепловым потоком постоянной плотности (см. с. 201).

Сравнение результатов численных расчетов, представленных в табл. 5.4, с графической зависимостью $\Theta(1, Fo)$, представленной на рис. 5.8, свидетельствует о согласовании данных, полученных различными методами.

2. Если для решения задачи о нагревании неограниченной пластины по закону Ньютона в среде с постоянной температурой при-

Значения функции $p_1(x, \tau)$

Таблица 5.4

τ	x				
	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,05	$0,2467 \cdot 10^{-3}$	$0,3111 \cdot 10^{-2}$	$0,2139 \cdot 10^7$	$0,9601 \cdot 10^{-1}$	0,3122
0,1	$0,2899 \cdot 10^{-2}$	$0,1806 \cdot 10^{-1}$	$0,6834 \cdot 10^{-1}$	0,2001	0,4868
0,5	$0,4880 \cdot 10^{-1}$	0,2008	0,4968	0,9128	1,7000
1	0,1088	0,4428	1,1037	1,9329	3,2000

менить преобразование Лапласа, то в области изображений решение представляется в виде (см. § 5.4)

$$\tilde{T}(x, s) - \frac{T_0}{s} = \frac{(T_c - T_0) \operatorname{ch} \sqrt{s/\alpha x}}{s\psi(s)},$$

где $\psi(s) = \operatorname{ch} \sqrt{s/aR} + (1/H) \sqrt{s/\alpha} \operatorname{sh} \sqrt{s/aR}$, $H = \alpha/\lambda$.

Вычислим значение оригинала $\Theta(X, Fo) = [T(x, \tau) - T_0]/(T_c - T_0)$ в точке $X=1$ в момент времени $Fo = \alpha\tau/R^2 = 0,05; 0,1; 0,5; 1$ при

Значение функции $\Theta(1, Fo)$

Таблица 5.5

$Bi = 0,2$		$Bi = 1$		$Bi = 10$	
Fo	$\Theta(1, Fo)$	Fo	$\Theta(1, Fo)$	Fo	$\Theta(1, Fo)$
0,05	0,0485	0,05	0,2096	0,05	0,7677
0,1	0,0676	0,1	0,2764	0,1	0,8294
0,5	0,1475	0,5	0,4955	0,5	0,9357
1	0,2239	1	0,6519	1	0,9768

значениях критерия $Bi = \alpha R/\lambda = 0,2; 1; 10$ с помощью процедуры численного обращения преобразования Лапласа LINV (см. приложение V, алгоритм 6).

Программа, составленная на языке АЛГОЛ-60, предназначенная для ТА-1М ЭЦВМ М-222, вычисляет значения оригинала следующей функции:

$$\bar{p}_2(s) = \operatorname{ch} \sqrt{s} / \left[s \left(\operatorname{ch} \sqrt{s} + 1/Bi \sqrt{s} \operatorname{sh} \sqrt{s} \right) \right].$$

Программа запишется следующим образом:

```
BEGIN
REAL BI, K;
INTEGER I, J;
ARRAY R2[1:5, 1:3];
REAL T, F2;
ARRAY, VA[1:NA];
PROCEDURE LINV(PA, NA, TA, FA, VA, MA);
VALUE NA, TA; INTEGER MA, NA;
REAL TA, FA; ARRAY VA;
REAL PROCEDURE PA;
BEGIN INTEGER IA, KA, NH, SN;
REAL AA;
ARRAY GA[0:NA], HA[1:NA/2];
IF MA=NA THEN GO TO CA;
GA[0]:=1; NH:=NA/2;
FOR IA:=1 STEP 1 UNTIL NA DO
GA[IA]:=GA[IA-1]×IA;
HA[1]:=2/GA[NH-1];
FOR IA:=2 STEP 1 UNTIL NH DO
HA[IA]:=IA↑NH×GA[2×IA]/(GA[NH-IA]×GA[IA]×GA[IA-1]);
SN:=2×SIGN(NH-NH-:-2×2)-1;
FOR IA:=1 STEP 1 UNTIL NA DO
BEGIN VA[IA]:=0;
FOR KA:=(IA+1)-:-2 STEP 1 UNTIL
IF IA<NH THEN IA ELSE NH DO
VA[IA]:=VA[IA]+HA[KA]/(GA[IA-KA]×GA[2×KA-IA]);
VA[IA]:=SN×VA[IA];
SN:=-SN;
END;
MA:=NA;
CA:FA:=0; AA:=LN(2)/TA;
FOR IA:=1 STEP 1 UNTIL NA DO
FA:=FA+VA[IA]×PA(IA×AA); FA:=AA×FA
END LINV;
REAL PROCEDURE P2(S2); VALUE S2; REAL S2;
P2:=CH(SQRT(S2)×K)/S2/(CH(SQRT(S2)+SQRT(S2))/BI×
×SH(SQRT(S2)));
FOR T:=.05,.1, .5, 1. 0 DO
BEGIN
P1041(T);
I:=0;
FOR K:=.2 STEP. 2 UNTIL 1.001. DO
BEGIN
I:=I+1; I:=0;
FOR BI:=.2, 1, 10 DO
BEGIN
I:=I+1;
LINV(P2, NA, T, F2, VA, MA);
```

```

R2 [1, J]: =F2;
END;
END K;
END T;
END;
END;

```

Результаты вычислений по данной программе представлены в виде табл. 5.5. Данные расчетов [65] по аналитическим решениям показаны на рис. 5.9.

Сравнение результатов расчета численным методом и аналитическим показывает их совпадение.

Задача 5.11. В точках отрезка $0 < \tau < 1$ численно определить значения оригиналов следующих функций в области изображения по Лапласу:

1) $\frac{0,2}{s^{3/2}}$; 2) $\frac{3}{2(s+2,5)}$;

3) $\frac{8}{s^2+3}$;

4) $\frac{1}{\sqrt{s}} \exp(-2\sqrt{s})$.

Вычисления провести с помощью программы, составленной на алгоритмическом языке АЛГОЛ-60 с использованием алгоритмов 5 и 6, приведенных в приложении V.

Результаты вычислений сравнить с точным значением оригиналов, найденных по таблицам соответствий (см. приложение IV).

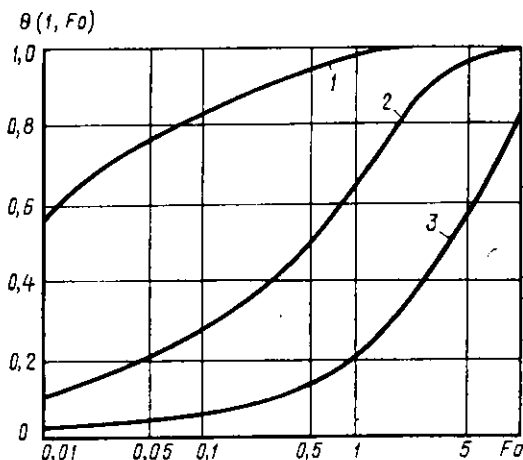


Рис. 5.9. Изменение относительной избыточной температуры поверхности пластины $\Theta(1, Fo)$ во времени при различных значениях числа Bi :
1 — $Bi = 10.0$; 2 — $Bi = 1.0$; 3 — $Bi = 0.2$

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

Краевая задача для дифференциального уравнения теории поля (в том числе и теории теплопроводности) может быть заменена эквивалентной вариационной задачей об экстремуме (обычно минимуме) некоторого функционала, характеризующего рассматриваемый процесс в интегральной форме [36]. При этом дифференциальное уравнение можно рассматривать как уравнение Эйлера — Лагранжа для сформулированного вариационного условия.

Решение вариационной задачи может быть получено непосредственно, прямыми методами. А так как вариационная задача эквивалентна краевой задаче, то эти методы являются одновременно и методами решения краевых задач для уравнения теплопроводности.

В данной главе кроме методов решения вариационных задач рассмотрен также метод Бубнова — Галеркина, который часто относят к вариационным методам, однако возможности его применения шире, так как при использовании этого метода нет необходимости формулировать вариационную задачу.

§ 6. 1. Постановка вариационных задач нестационарной теплопроводности

Для линейного уравнения нестационарной теплопроводности

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} - \operatorname{div} (\lambda (p) \operatorname{grad} T) = 0 \quad (6.1)$$

с соответствующими краевыми условиями дадим вариационную формулировку на основе вариационных принципов неравновесной термодинамики.

Объединяя первое и второе начала равновесной термодинамики [69], получаем соотношение Гиббса

$$TdS = dU - pdV - \sum_{k=1}^n \mu_k dm_k, \quad (6.2)$$

устанавливающее связь между экстенсивными параметрами системы — энтропией S , внутренней энергией U , объемом V , массой k -го компонента m_k в n -компонентной системе и интенсивными величинами — температурой T , давлением p , химическим потенциалом μ_k k -го компонента.

Соотношение (6.2) обобщается на случай неравновесных систем на основе принципа локального равновесия (в элементарных объемах системы при переходе ее во всем масштабе от равновесного состояния к неравновесному предполагается выполнение условий равновесия). Тогда соотношение Гиббса для неравновесных систем можно получить

из (6.2), заменяя полные производные d экстенсивных параметров субстанциональными d_τ и вводя удельные — энтропию s , внутреннюю энергию u и объем v :

$$Td_\tau S = d_\tau u - \rho d_\tau v - \sum_{k=1}^n \mu_k d_\tau c_k, \quad (6.3)$$

где $s = S/m$; $u = U/m$; $v = V/m$; $c_k = m_k/m$; $m = \sum_{k=1}^n m_k$ — общая масса системы.

Уравнению (6.3) можно дать явную интерпретацию с помощью балансовых уравнений — законов сохранения для рассматриваемых субстанций. Так, для непрерывных систем запишем:

баланс внутренней энергии

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial \tau} + \nabla \cdot (\rho u \mathbf{v} + \mathbf{J}_q) = q_v, \quad \rho d_\tau u + \nabla \cdot \mathbf{J}_q = q_v; \quad (6.4)$$

$$q_v \equiv -P : \nabla \mathbf{v} + \sum_{k=1}^n \mathbf{J}_k \cdot \mathbf{F}_k;$$

баланс энтропии

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial \tau} + \nabla \cdot (\rho s \mathbf{v} + \mathbf{J}_s) = \sigma \geq 0; \quad (6.5)$$

$$\rho d_\tau s + \nabla \cdot \mathbf{J}_s = \sigma \geq 0;$$

где $\mathbf{J}_k$ — диффузионный поток k -го компонента системы; $\mathbf{J}_q$, $\mathbf{J}_s$ — потоки теплоты и энтропии; $\mathbf{P}$ — вязкий тензор давления; $\mathbf{F}_k$ — вектор внешних сил, действующих на единицу массы k -го компонента системы; $\mathbf{v}$ — скорость центра масс; q_v — объемная плотность теплового потока внутренних источников энергии; σ — локальное производство энтропии;

баланс массы

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial \tau} + \nabla \cdot \rho_k \mathbf{v}_k = \sum_{i=1}^l \nu_{ki} \omega_i, \quad d_\tau \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0;$$

$$\rho d_\tau c_k + \nabla \cdot \mathbf{J}_k = \sum_{i=1}^l \nu_{ki} \omega_i, \quad (k = 1, 2, \dots, n);$$

$$\mathbf{J}_k = \rho_k (\mathbf{v}_k - \mathbf{v}); \quad \mathbf{v} = \rho^{-1} \sum_{k=1}^n \rho_k \mathbf{v}_k;$$

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{J}_k = 0; \quad \rho = \sum_{k=1}^n \rho_k, \quad \rho_k = \frac{m_k}{v},$$

где ν_{ki} — стехиометрические коэффициенты; l — число химических реакций, протекающих в каждой точке системы; ω_i — угловая скорость

внутреннего вращения элемента объема системы; v_k — скорость k -го компонента системы;

баланс заряда

$$\frac{\partial(\rho\eta)}{\partial\tau} + \nabla \cdot I = 0; \quad \rho d_\tau \eta + \nabla \cdot J = 0;$$

$$\eta = \frac{1}{\rho} \sum_{k=1}^n \rho_k \eta_k; \quad I = \rho \eta v + J; \quad J = \sum_{k=1}^n \eta_k J_k,$$

где η — полный заряд единицы массы; η_k — заряд единицы массы; J , I — диффузионный и полный электрические токи;

баланс импульса

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial\tau} + \nabla \cdot (\rho v v + P) = \sum_{k=1}^n \rho_k F_k, \quad P = \rho U + \Phi;$$

$$\rho d_\tau v + \nabla \cdot P = \sum_{k=1}^n \rho_k F_k;$$

$$F_k \equiv \eta_k (E + c^{-1} [v_k B]) + g + \omega^2 r + 2 [v_k \omega],$$

где E — вектор напряженности электрического поля; B — вектор магнитной индукции; Φ — тензор давления; ρ — давление; U — единичный тензор;

баланс полного момента количества движения

$$\rho d_\tau M = \rho d_\tau (M^s + M^a) = - \nabla \cdot \{[rP] + J_\omega\} + \rho [rF];$$

$$M^a \equiv J_\omega, \quad 2\omega_a \equiv [\nabla v], \quad M^s \equiv [rv],$$

где M — полный момент количества движения единицы массы системы; M^s , M^a — внешний и внутренний моменты количества движения единицы массы системы; J — средний момент инерции частиц, образующих единицу массы системы; J_ω — аксиальный вектор плотности потока внутреннего момента количества движения.

Явную форму баланса энтропии получают при подстановке законов сохранения субстанций в соотношение Гиббса (6.3). Сравнение результата подстановки с законом сохранения энтропии (6.5) приводит к выражениям для потока и производства энтропии:

$$J_s = J_q/T - \frac{1}{T} \sum_{k=1}^n \mu_k J_k \geq 0;$$

$$\sigma = - \frac{1}{T^2} J_q \cdot \nabla T - \sum_{k=1}^n J_k \cdot \nabla \left(\frac{\mu_k}{T} \right) - \frac{1}{T} \Phi : \nabla v -$$

$$- \frac{1}{T} \sum_{i=1}^l A_i d_{\sqrt{s}} \xi_i + \frac{1}{T} \sum_{k=1}^n J_k \cdot \{ \eta_k (E + c^{-1} [v_k B]) + g + \omega^2 r + 2 [v_k \omega] \} \geq 0.$$

Функцию производства энтропии можно рассматривать как билинейную форму от m независимых обобщенных потоков J_j и обобщенных сил X_j :

$$\sigma = \sum_{j=1}^m J_j(\cdot) X_j > 0, \quad (6.6)$$

где $(\cdot)_i$ — кратная свертка; i — ранг тензорной величины.

Если производство энтропии σ умножить на температуру T , то получим так называемое рассеяние энергии в необратимых процессах

$$\psi \equiv \sigma T = \sum_{j=1}^m J_j^*(\cdot) X_j^* > 0,$$

где ψ — диссипативная функция, названная по аналогии с рэлеевской функцией рассеяния в механике.

Подчеркнем, что согласно второму началу неравновесной термодинамики рассеяние энергии ψ и производство энтропии σ должны быть положительно определенными величинами. Установлено, что для исследования неизотермических систем целесообразно использовать энтропийное представление, а для изотермических — энергетическое. Эти представления можно взаимно преобразовать с помощью соотношений $X_j = X_j^*/T$, $j=1, \dots, m$, поэтому в дальнейшем при рассмотрении общих положений термодинамики будем использовать в основном энтропийное представление (6.6).

При термодинамическом равновесии системы производство энтропии σ равно нулю и вместе с ним одновременно обращаются в нуль независимые компоненты скалярных сил и потоков. Если система незначительно отклоняется от положения равновесия, то согласно гипотезе Онзагера обобщенные потоки J_k и силы X_k связаны друг с другом линейно:

$$J_k = \sum_{j=1}^m L_{kj}(\cdot) X_j, \quad k=1, 2, \dots, n,$$

где L_{kj} — тензор, декартовы компоненты которого L_{kij} называются феноменологическими или кинематическими коэффициентами.

В скалярной форме феноменологические уравнения Онзагера имеют вид

$$J_k = \sum_{j=1}^m L_{kj} X_j, \quad (6.7)$$

где J_k , X_k — декартовы компоненты независимых потоков и сил.

Для многих процессов переноса структура уравнения (6.7) известна. Так, при переносе теплоты в изотропном твердом теле для связи теплового потока с градиентом температуры используют закон Фурье

$$q_j = -\lambda \partial T / \partial x_j.$$

По своей структуре это соотношение аналогично уравнениям Онзагера, причем теплопроводность λ интерпретируется как кинематический коэффициент, а градиент температуры — как обобщенная сила.

В линейной теории коэффициенты L_{kj} считаются независимыми от потоков J_k и сил X_j , т. е. от градиентов параметров локального состояния.

Уравнения Онзагера можно записать и в энергетическом представлении:

$$J_k = \sum_{j=1}^m L_{kj} X_j,$$

$$\text{где } L_{kj} = \frac{1}{T} L_{jk}.$$

Феноменологические коэффициенты L_{kj} обладают важным свойством взаимности

$$L_{kj} = L_{jk}, \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

установленным Онзагером для скалярных необратимых процессов. В дальнейшем, при рассмотрении векторных и тензорных процессов, Казимиром были найдены более общие соотношения взаимности, известные как соотношения Онзагера — Казимира. Однако соотношения взаимности не выполняются, если между потоками или силами существуют зависимости. Необходимо отметить также, что основное положение термодинамики неравновесных процессов, выраженное системой феноменологических уравнений Онзагера (6.7), имеет ограничение, устанавливаемое теоремой (принципом) Кюри, т. е. система линейных уравнений (6.7) должна быть инвариантна относительно ряда ортогональных преобразований координат. Согласно принципу Кюри, для изотропной системы представление (6.7) возможно лишь в том случае, когда обобщенные термодинамические силы X_j — тензоры одинакового ранга или разницы в рангах четная. Используя соотношения взаимности Онзагера для феноменологических коэффициентов, можно представить производство энтропии и диссипативную функцию в виде однородных квадратичных выражений относительно обобщенных сил:

$$\sigma = \sum_{k,j=1}^m L_{kj} X_k X_j \geq 0; \quad (6.8)$$

$$\psi = \sum_{k,j=1}^m L_{kj} X_k X_j \geq 0. \quad (6.9)$$

Так как производство энтропии (по крайней мере в необратимых процессах) — величина положительно определенная, то феноменологические коэффициенты должны еще удовлетворять условиям

$$L_{ii} \geq 0, \quad L_{ii} L_{jj} - \frac{1}{4} (L_{ij} + L_{ji})^2 \geq 0, \quad \det L_{ij} \geq 0.$$

В качестве альтернативной формы выражений (6.8), (6.9) используют представления функций σ и ψ через обобщенные потоки:

$$\sigma = \sum_{k, j=1}^m L_{kj}^{-1} J_k J_j \geq 0; \quad (6.10)$$

$$\psi = \sum_{k, j=1}^m L_{kj}^{*-1} J_k^* J_j^* \geq 0. \quad (6.11)$$

Выражения (6.10), (6.11) можно рассматривать как неравновесные потенциальные функции. Другие неравновесные потенциальные функции можно получить, используя локальные потенциалы рассеяния:

в энтропийном представлении

$$G(X, X) = \frac{1}{2} \sum_{k, j=1}^m L_{kj} X_k X_j > 0;$$

$$\Phi(J, J) = \frac{1}{2} \sum_{k, j=1}^m L_{kj}^{-1} J_k J_j > 0; \quad (6.12)$$

в энергетическом представлении

$$G^* = TG, \quad \Phi^* = T\Phi$$

По определению, эти функции по значению равны половинам производства энтропии и диссипативной функции соответственно и, следовательно, подобно энтропии, могут служить локальной мерой неравновесности. Онзагер в 1931 г. сформулировал интегральный вариационный принцип наименьшего рассеяния энергии. В локальной форме [29] этот принцип утверждает экстремальность некоторого функционала, записанного в представлении через варьируемые потоки при постоянстве обобщенных сил X в виде

$$\{\rho \dot{s} + \nabla \cdot J_s - \Phi(J, J)\}_X = \{\sigma(J, X) - \Phi(J, J)\}_X = \max \quad (6.13)$$

или

$$\delta \{\sigma(J, X) - \Phi(J, J)\}_X = 0, \quad \delta J \neq 0, \quad X = \text{const}; \quad \delta X = 0. \quad (6.14)$$

Варьируя, получим

$$\delta \{\sigma(J_i, X_i) - \Phi(J_i, J_k)\}_{X_i} = \sum_{k=1}^m \left\{ \frac{\partial}{\partial J_k} [\sigma(J_i, X_i)]_{X_i} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial J_k} [\Phi(J_i, J_k)] \right\} \delta S_k.$$

Из билинейного выражения производства энтропии (6.6) следует, что

$$(\partial \sigma / \partial J_k)_{X_i} = X_k, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (6.15)$$

Потенциал рассеивания рассматривается как функция только потоков в соответствии с определением (6.12), поэтому, учитывая (6.12), (6.15), необходимое условие экстремума запишем в виде

$$\delta[\sigma - \Phi]_X = \sum_{k=1}^m \left(X_k - \frac{\partial \Phi}{\partial J_k} \right) \delta J_k = 0. \quad (6.16)$$

Отметим, что так как Φ является однородной квадратичной положительно определенной функцией независимых потоков, то экстремум, определяемый условием (6.16), может быть только максимумом.

Можно дать другую формулировку принципа Онзагера, используя представление через силы [36]. При этом в варьируемом выражении вместо потенциала рассеивания Φ используют силовую функцию рассеяния $G(X, X)$

$$[\rho \dot{s} + \nabla \cdot \mathbf{J}_s - G] = [\sigma(\mathbf{J}, \mathbf{X}) - G(X, X)] = \max. \quad (6.17)$$

Варьируя выражение (6.17) по силам X_k при постоянных потоках J_i и учитывая (6.6), (6.7), получим условие экстремума

$$\begin{aligned} & \delta[\sigma(J_i, X_i) - G(X_i, X_h)]_{J_i} = \\ & = \sum_{k=1}^m \left\{ \frac{\partial}{\partial X_k} [\sigma(J_i, X_i)]_{J_i} - \frac{\partial}{\partial X_k} [G(X_i, X_h)] \right\} \delta X_k = \\ & = \sum_{k=1}^m \left(J_k - \frac{\partial G}{\partial X_k} \right) \delta X_k = 0. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Обе формы принципа наименьшего рассеяния энергии можно объединить в одно вариационное условие [36]

$$\delta\{\sigma - \Phi - G\} = 0, \quad (6.19)$$

где варьирование может проводиться как по потокам, так и по силам. Условие локального экстремума (6.19) приводит к принципу экстремума локальной функции Онзагера — Махлупа $\psi = \sigma - \Phi - G$ и включает в себя все положения феноменологической теории Онзагера:

$$\left. \begin{aligned} \delta(\sigma - \Phi - G)_X &= \sum_{k=1}^m \left(X_k - \frac{\partial \Phi}{\partial J_k} \right) \delta J_k = 0; \\ X_i &= \text{const}, \quad \delta X_i = 0; \quad \delta J_h \neq 0, \quad L_{ki}^{-1} = L_{jk}^{-1}; \end{aligned} \right\} \quad (6.20)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta(\sigma - \Phi - G)_J &= \sum_{k=1}^m \left(J_k - \frac{\partial G}{\partial X_k} \right) \delta X_k = 0; \\ J_i &= \text{const}, \quad \delta J_i = 0, \quad \delta X_i \neq 0, \quad L_{hj} = L_{jh}. \end{aligned} \right\} \quad (6.21)$$

Необходимо отметить, что принцип экстремума (6.19) не является в действительности вариационным принципом неравновесной термо-

динамики, а представляет собой некоторый локальный дифференциальный принцип, который должен выполняться в каждой точке сплошной среды. Дьярмати [36] установил справедливость универсального локального принципа в интегральной форме, применимой для всей сплошной среды,

$$\delta \int_V \rho \dot{s} d\Omega = \delta \int_{\Omega} [\rho \dot{s} + \nabla \cdot \mathbf{J}_s - G - \Phi] d\Omega = \delta \int_{\Omega} (\sigma - G - \Phi) d\Omega = 0;$$

$$\delta \mathbf{J} \neq 0, \quad \delta X \neq 0.$$

Из этого принципа можно получить частные соответствующие интегральные формулировки локальных принципов в представлении через потоки или силы. При решении вариационных задач обычно задают постоянные значения интенсивных параметров на границе или потоков через границу.

Не останавливаясь на других вариационных принципах неравновесной термодинамики [4, 14, 25], выведем уравнение переноса, описывающее процесс теплопроводности [36], используя интегральную форму представления принципа наименьшего рассеяния энергии через силы:

$$\delta \int_{\Omega} [\rho \dot{s} + \nabla \cdot \mathbf{J}_s - \Phi]_J d\Omega = \delta \int (\sigma - \Phi) d\Omega = 0, \quad (6.22)$$

где $\mathbf{J}_s = \mathbf{J}_q/T$.

Плотность теплового потока может быть представлена в трех различных формах:

$$\mathbf{J}_q = \lambda \mathbf{X}_q^{**} = L_{qq} \mathbf{X}_q^* = L_{qq} \mathbf{X}_q,$$

где обобщенные силы равны

$$\mathbf{X}_q^{**} = -\nabla T, \quad \mathbf{X}_q^* = -\frac{\Delta T}{T} = -\nabla \ln T, \quad \mathbf{X}_q = \nabla (1/T).$$

Аналогично можно определить производство энтропии:

$$\sigma_q = \frac{\mathbf{J}_q \cdot \mathbf{X}_q^{**}}{T^2} = \frac{\mathbf{J}_q \cdot \mathbf{X}_q^*}{T} = \mathbf{J}_q \cdot \mathbf{X}_q$$

и локальный потенциал рассеяния:

$$\Phi_q^{**} = (\lambda/2)(\nabla T)^2, \quad \Phi_q^* = (L_{qq}/2)(\nabla \ln T)^2, \quad \Phi_q = (L_{qq}/2) \left[\nabla \left(\frac{1}{T} \right) \right]^2,$$

причем выполняются соотношения

$$\Phi_q^{**} = T \Phi_q^* = T^2 \Phi_q.$$

В приведенных выражениях величины даны соответственно в представлении Фурье (λ и величины, отмеченные двумя звездочками), в энергетическом представлении (величины, отмеченные одной звез-

дочкой) и в энтропийном представлении (величины, не отмеченные звездочкой).

Установим теперь, что уравнение теплопроводности можно рассматривать не только как уравнение, эквивалентное системе из уравнения баланса энергии и закона теплопроводности Фурье, но и как уравнение, которому должно удовлетворять искомое распределение температуры в системе, чтобы обеспечить экстремум некоторого функционала.

Представление Фурье. Используя величины в представлении Фурье, условие вариации (6.22) запишем следующим образом:

$$\delta \int_{\Omega} \{ T^2 [\rho s + \nabla \cdot (J_q/T) - \Phi_q^{**}] \}_{J_q} d\Omega = \delta \int_{\Omega} [T^2 \sigma_q - \Phi_q^{**}]_{J_q} d\Omega = 0.$$

Учитывая, что

$$\nabla \cdot (J_q/T) = -\frac{\nabla}{T} \cdot J_q = \nabla \cdot \frac{J_q}{T} - J_q \cdot \nabla (1/T)$$

и для твердого тела

$$\dot{s} = \frac{1}{T} \dot{u} = \frac{c_v}{T} \frac{\partial T}{\partial \tau},$$

из последнего условия получим принцип экстремума

$$L = \int_{\Omega} \left[\rho c_v T \frac{\partial T}{\partial \tau} + T \nabla \cdot J_q - J_q \cdot \nabla T - \frac{\lambda}{2} (\nabla T)^2 \right]_{J_q} d\Omega = \max,$$

где подынтегральное выражение считается зависящим только от температуры.

Из уравнения баланса внутренней энергии для твердого тела

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial \tau} + \nabla \cdot J_q = 0$$

видно, что из постоянства потока $\delta J_q = 0$ следует и постоянство $\rho c_v \frac{\partial T}{\partial \tau}$. Поэтому, варьируя L по температуре при фиксированных

J_q и $\rho c_v \frac{\partial T}{\partial \tau}$, получим необходимое условие максимума

$$\delta L = \int_{\Omega} \left[\left(\rho c_v \frac{\partial T}{\partial \tau} + \nabla \cdot J_q \right) \delta T - (J_q + \lambda \nabla T) \cdot \nabla \delta T \right] d\Omega = 0.$$

Заменяя J_q на $-\lambda \nabla T$, упростим последнее соотношение:

$$\delta L = \int_{\Omega} \left[\rho c_v \frac{\partial T}{\partial \tau} - \nabla \cdot (\lambda \nabla T) \right] \delta T d\Omega = 0.$$

Принимая во внимание, что локальная вариация δT произвольна, получаем в качестве уравнения Эйлера — Лагранжа дифференциальное уравнение теплопроводности Фурье

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial \tau} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T). \quad (6.23)$$

Определим плотность лагранжиана вариационной проблемы. Так как $-\delta T \nabla \cdot (\lambda \nabla T) = -\nabla \cdot (\delta T \lambda \nabla T) + \lambda \nabla T \cdot \nabla \delta T$ и, согласно теореме Гаусса — Остроградского,

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\delta T \lambda \nabla T) d\Omega = \int_S \lambda \delta T \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right) dS$$

(где $\vec{n}$ — внешняя нормаль к поверхности S), получим, учитывая, что $\lambda \nabla T \cdot \nabla \delta T = \delta [(\lambda/2)(\nabla T)^2]$, условие экстремума в виде

$$\delta L = \int_{\Omega} \left\{ \delta \left(\rho c_v T \frac{\partial T}{\partial \tau} \right) + \delta [(\lambda/2)(\nabla T)^2] \right\} d\Omega - \int_S \lambda \delta T \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right) dS = 0.$$

Предположим, что температура вдоль поверхности S не варьируется, тогда необходимое условие максимума L запишется в виде

$$\delta L = \delta \int_{\Omega} \left[\rho c_v T \frac{\partial T}{\partial \tau} + (\lambda/2)(\nabla T)^2 \right] d\Omega = 0.$$

Отсюда можно получить плотность лагранжиана

$$\mathcal{L}_T = \mathcal{L}_T(T, \nabla T) = \rho c_v T \frac{\partial T}{\partial \tau} + (\lambda/2)(\nabla T)^2,$$

с помощью которой представим интегральный принцип в форме

$$\delta L(T) = \delta \int_{\Omega} \mathcal{L}_T d\Omega = 0. \quad (6.24)$$

Соответствующее уравнению (6.24) уравнение Эйлера — Лагранжа имеет вид

$$\frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial T} - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \mathcal{L}_T}{\partial (\partial T / \partial x_j)} = 0.$$

Выполнив дифференцирование, получим уравнение Фурье (6.23).

Энергетическое представление. Воспользовавшись энергетическим представлением величин, условие вариации (6.22) запишем в виде

$$\delta \int_{\Omega} [T (\rho s + \nabla \cdot (J_q/T)) - \Phi_q^*] d\Omega = \delta \int_{\Omega} [T \sigma_q - \Phi_q^*] d\Omega = 0.$$

Из второго равенства в правой части получим принцип максимума

$$- \int_{\Omega} [J_q \cdot \nabla \ln T + (L_{qq}^*/2)(\nabla \ln T)^2] d\Omega = \max.$$

Выполнив преобразования, аналогичные проведенным в представлении Фурье, и варьируя по $\ln T$, фиксируя $\rho c_v (\partial T / \partial \tau)$ и J_q (считаем также, что температура вдоль поверхности S не варьируется), приходим к принципу максимума в виде

$$- \int_{\Omega} \left[c_v \rho \ln T \frac{\partial T}{\partial \tau} + \frac{L_{qq}^*}{2} (\nabla \ln T)^2 \right] d\Omega = \max.$$

Из последнего условия имеем выражение для плотности лагранжиана вариационной задачи

$$\mathcal{L}_{\ln T} = \mathcal{L}_{\ln T}(\ln T, \nabla \ln T) = -c_v \rho \ln T \frac{\partial T}{\partial \tau} - (L_{qq}/2) (\nabla \ln T)^2.$$

Интегральный принцип запишется в форме

$$\delta L[\ln T] = \delta \int_{\Omega} \mathcal{L}_{\ln T} d\Omega = 0, \quad (6.25)$$

откуда получаем уравнение Эйлера — Лагранжа

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\ln T}}{\partial \ln T} - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \mathcal{L}_{\ln T}}{\partial (\partial \ln T / \partial x_j)} = 0.$$

Выполнив дифференцирование, получаем уравнение

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial \tau} = -\nabla \cdot (L_{qq} \nabla \ln T),$$

которое эквивалентно уравнению Фурье (6.23).

Энтропийное представление. Из вариационного принципа (6.22) при энтропийном представлении величин, применяя теорему Гаусса — Остроградского, получим

$$\delta \int_{\Omega} [\rho s - \Phi_q] d\Omega + \delta \int_S J_s dS = 0.$$

Если поток J_q и температура T вдоль поверхности S не варьируются, то с учетом известных выражений для s и Φ_q запишем вариационное условие в форме

$$\delta \int_{\Omega} \left[\rho \frac{c_v}{T} \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{L_{qq}}{2} \left(\nabla \frac{1}{T} \right)^2 \right] d\Omega = 0.$$

Варьируя по $1/T$ при фиксированном $\rho c_v \frac{\partial T}{\partial \tau}$, получим из последнего условия

$$\int_{\Omega} \left\{ \left[\rho c_v \frac{\partial T}{\partial \tau} + \nabla \cdot (L_{qq} \nabla \frac{1}{T}) \right] \delta \left(\frac{1}{T} \right) \right\} d\Omega = 0,$$

откуда имеем уравнение Эйлера — Лагранжа

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial \tau} = -\nabla \cdot (L_{qq} \nabla \frac{1}{T}).$$

Используя выражение для $L_{qq} = \lambda T^2$, последнее уравнение легко привести к уравнению теплопроводности в форме Фурье.

Из необходимого условия вариационной задачи получаем плотность лагранжиана

$$\mathcal{L}_{1/T} = \mathcal{L}_{1/T} \left(\frac{1}{T}, \nabla \frac{1}{T} \right) = \rho \frac{c_v}{T} \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{\dot{L}_{qq}}{2} \left(\nabla \frac{1}{T} \right)^2,$$

используя которую запишем вариационную задачу в виде

$$\delta L \left(\frac{1}{T} \right) = \delta \int_{\Omega} \mathcal{L}_{1/T} d\Omega = 0. \quad (6.26)$$

Уравнение Эйлера — Лагранжа, отвечающее последнему интегральному принципу, имеет вид

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{1/T}}{\partial (1/T)} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \mathcal{L}_{1/T}}{\partial \left[\partial \left(\frac{1}{T} \right) / \partial x_i \right]} = 0.$$

Вариационные условия (6.24) — (6.26) дают выражение в различных представлениях глобального интегрального вариационного принципа термодинамики необратимых процессов, сформулированного Дьярмати [36].

Функцию $\mathcal{L} = \rho s$, или в более общем случае $\mathcal{L} = \sigma - \Phi$, можно рассматривать как термодинамическую плотность лагранжиана, равную разности между «кинетической» частью, выражающей скорость изменения энтропии, и «потенциальной» частью, которая определяется как потенциал рассеяния в представлении термодинамических сил. Тогда для интегральной функции Лагранжа L от m независимых скалярных параметров β_i справедлив интегральный вариационный принцип

$$L = \int_{\Omega} \mathcal{L} d\Omega = \max.$$

Экстремум функционала L реализует система уравнений Эйлера — Лагранжа

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta_i} - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial r_j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \beta_i / \partial r_j)}, \quad i=1, 2, \dots, m,$$

полученная варьированием L по интенсивным параметрам состояния системы при постоянстве потоков. Последнее условие означает обращение в нуль вариации $\delta \beta_i$, и в связи с этим в уравнениях Эйлера — Лагранжа отсутствуют вариации параметра β_i . Это и составляет основное отличие принципа Дьярмати от обобщенного принципа Гамильтона $\delta \int_{\Omega} \int_0^{\tau} \mathcal{L} d\Omega d\tau = 0$ для непрерывных систем.

Используя непосредственно принцип Гамильтона, Био [14] развил иной вариационный подход, с помощью которого решен ряд конкретных задач теплопереноса (подробное описание метода Био см. § 6.6, 8.5, 10.4).

И. Ф. Бахарева [4], сравнивая структуры рассмотренных выше вариационных условий, а также принципов Циглера [106] и Пригожина [25], показала принципиальную эквивалентность этих условий одному общему вариационному принципу, который для скалярных процессов можно записать в дифференциальной форме:

$$\sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\beta}_k} - X_k \right) \delta \beta_k = 0,$$

где $X_k = \partial(\Delta s) / \partial \beta_k$ — термодинамическая сила.

При решении конкретных задач можно использовать различные эквивалентные вариационные принципы.

§ 6.2. Постановка вариационных задач стационарной теплопроводности

Рассмотрим основные краевые задачи стационарной теплопроводности и их эквивалентные вариационные формулировки. Для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами

$$\Delta T = - \sum_{j,k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda_{jk}(p) \frac{\partial T}{\partial x_k} \right) + K(p) T = q_v(p), \quad (6.27)$$

$$p \in \Omega, \quad \lambda_{jk} = \lambda_{kj}$$

сформулируем граничные условия:

$$\text{I рода } T|_S = 0; \quad (6.28)$$

$$\text{II рода } R(T)|_S = 0; \quad (6.29)$$

$$\text{III рода } [R(T) + \alpha(p) T]|_S = 0. \quad (6.30)$$

Линейная функция $R(T)$ в (6.30) определена так:

$$R(T) = \sum_{j,k=1}^m \lambda_{jk}(p) \frac{\partial T}{\partial x_k} \cos(\nu, x_j), \quad (6.31)$$

где p — точка m -мерного евклидова пространства с прямоугольными координатами $x_1, x_2, \dots, x_m$; S — граница конечной области Ω ; ν — внешняя нормаль к S ; λ_{jk} , $j, k = 1 - m$ данные функции, непрерывные вместе со своими производными в замкнутой области Ω ; $K(p) > 0$ — функция, непрерывная в Ω , $\alpha(p) > \alpha_0 > 0$.

Заметим, что в частном случае $\lambda_{jj} = 1$, $\lambda_{jk} = 0$, $j \neq k$, сумма в (6.27) заменится оператором Лапласа.

Уравнение (6.27) предполагается невырождающимся эллиптическим в области Ω , т. е. каковы бы ни были точка $p \in \Omega$ и веще-

ственные числа $l_1, l_2, \dots, l_m$, найдется такая положительная постоянная $\mu_0 > 0$, когда

$$\sum_{j,k=1}^m \lambda_{jk}(p) l_j l_k > \mu_0 \sum_{j=1}^m l_j^2.$$

Каждую краевую задачу математической физики можно записать в виде операторного уравнения

$$A[T] = q_v, \quad (6.32)$$

где $A[T]$ — оператор данной краевой задачи, заданный на соответствующем гильбертовом пространстве; T и q_v — элементы гильбертова пространства (первый — искомый, а второй — данный).

Поясним это на примере [74]. В области Ω , ограниченной поверхностью S , требуется определить функцию $T(p)$, которая удовлетворяет уравнению Пуассона

$$-\Delta T = q_v(p), \quad p \in \Omega, \quad (6.33)$$

с краевым условием

$$T = 0, \quad p \in S. \quad (6.34)$$

где p — переменная точка области Ω .

Предположим, что $q_v(p)$ непрерывна в области Ω и квадратично суммируема в ней, искомая функция $T(p)$ непрерывна в замкнутой области $\bar{\Omega} = \Omega + S$ вместе с первой и второй производными, кроме того, производные суммируемы в открытой области Ω .

Функции $T(p)$ и $q_v(p)$ можно рассматривать как элементы гильбертова пространства, квадратично суммируемые в области Ω ; под оператором A в данном случае понимают оператор Лапласа, взятый с противоположным знаком, заданный на множестве функций M , которые: 1) непрерывны в замкнутой области $\bar{\Omega}$; 2) в открытой области Ω дважды непрерывно дифференцируемы; 3) имеют квадратично суммируемый в Ω лапласиан; 4) обращаются в нуль на границе S .

Теперь ясно, что если на множестве M зададим оператор $A[T] = -\Delta T$, то задачу (6.33), (6.34) можно записать в виде (6.32).

Таким образом, любая из краевых задач, описываемых дифференциальным уравнением (6.27) с соответствующими граничными условиями (6.28) — (6.30), может быть записана в операторном виде (6.32). Через (φ, ψ) обозначим скалярное произведение элементов φ и ψ в соответствующем гильбертовом пространстве. Например, в случае рассматриваемых краевых задач

$$(\varphi, \psi) = \int_{\Omega} \varphi(p) \psi(p) d\Omega,$$

где $d\Omega$ — элемент меры (объема, площади).

Тогда переход от операторной формы записи краевой задачи к вариационной формулировке осуществляется с помощью теоремы [74].

Если A — положительный оператор и уравнение $A[T] = q_v$ имеет решение, то это решение сообщает функционалу

$$F(T) = (A[T], T) - 2(T, q_v) \quad (6.35)$$

наименьшее значение. Если же существует элемент, реализующий минимум функционала (6.35), то этот элемент удовлетворяет уравнению $A[T] = q_v$.

Заметим, что области определения функционала $F[T]$ и оператора $A[T]$ совпадают. Однако может случиться, что оператор определен на недостаточно широком множестве функций M . В этом случае задача о минимуме функционала (6.35) может не иметь решения, поэтому следует расширить множество допустимых функций M , а вместе с ним и оператор $A[T]$, таким образом, чтобы задача о минимуме функционала $F[T]$ была разрешимой. Известно, что такое построение всегда возможно для положительно определенного оператора. В монографии [74] показано, что оператор уравнения (6.27) на множестве функций, непрерывных вместе со своими частными производными до второго порядка включительно в области Ω и удовлетворяющих краевым условиям (6.28), или (6.29), или (6.30), положительно определен. Известно, что если оператор положительно определен, то он тем более положителен. Поэтому для построения функционала можно воспользоваться формулой (6.35).

В случае краевой задачи с граничными условиями I рода вариационная задача сводится к нахождению минимума функционала

$$F(T) = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{j,k=1}^m \lambda_{jk} \frac{\partial T}{\partial x_j} \frac{\partial T}{\partial x_k} + KT^2 - 2q_v T \right\} d\Omega, \quad (6.36)$$

где допустимые функции удовлетворяют краевому условию (6.28).

Краевая задача (6.27), (6.30) с граничными условиями III рода сводится к нахождению минимума несколько иного функционала

$$F(T) = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{j,k=1}^m \lambda_{jk} \frac{\partial T}{\partial x_j} \frac{\partial T}{\partial x_k} + KT^2 - 2q_v T \right\} d\Omega + \int_S \alpha T^2 dS. \quad (6.37)$$

При этом область допустимых функций может быть расширена за счет включения функций, не удовлетворяющих условию (6.30), так как граничные условия учтены при составлении функционала.

При выводе функционалов (6.36) и (6.37) использовалась формула Грина

$$(A[T], T) = \int_{\Omega} T A[T] d\Omega = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{j,k=1}^m \lambda_{jk} \frac{\partial T}{\partial x_j} \frac{\partial T}{\partial x_k} + KT^2 \right\} d\Omega - \\ - \int_S T R[T] dS.$$

Функционал для второй краевой задачи (6.27), (6.29) совпадает с (6.36), причем множество допустимых функций может включать в себя функции, удовлетворяющие и не удовлетворяющие краевому условию (6.29).

Рассматривался случай, когда $K(p) > 0$. В случае, когда коэффициент $K(p)$ может обращаться в нуль где-либо в $\bar{\Omega}$, все полученные результаты остаются в силе, кроме второй краевой задачи (задачи Неймана). При $K(p) \equiv 0$ необходимым и достаточным условием разрешимости задачи Неймана является условие

$$\int_{\Omega} q_v(p) d\Omega = 0.$$

Эквивалентный функционал имеет вид

$$F(T) = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{j,k=1}^m \lambda_{jk} \frac{\partial T}{\partial x_j} \frac{\partial T}{\partial x_k} \right\} d\Omega$$

и для того, чтобы решение было единственным, множество допустимых функций должно удовлетворять равенству $\int_{\Omega} T(p) d\Omega = 0$.

Был рассмотрен случай однородных граничных условий. Сформулируем вариационные задачи для однородного уравнения Лапласа

$$-\nabla^2 T(p) = 0, \quad p \in \Omega$$

при неоднородных краевых условиях

$$\text{I рода } T|_S = f(p), \quad p \in S;$$

$$\text{II рода } \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_S = q(p), \quad p \in S;$$

$$\text{III рода } \left[\lambda \frac{\partial T}{\partial n} + \alpha T \right]_S = \varphi(p), \quad p \in S.$$

Соответствующие вариационные задачи состоят в отыскании минимума функционала:

1. Краевые условия I рода

$$F(T) = \int_{\Omega} (\text{grad } T)^2 d\Omega.$$

Допустимые функции на границе S принимают заданное значение $f(p)$.

2. Краевые условия II рода

$$F(T) = \int_{\Omega} (\text{grad } T)^2 d\Omega - 2 \int_S qT dS.$$

Задача разрешима с точностью до постоянной, если $\int_{\Omega} q(p) dS = 0$, и решение будет единственным, если потребовать, чтобы множество допустимых функций удовлетворяло, например, условию

$$\int_{\Omega} T(p) d\Omega = 0.$$

3. Краевые условия III рода

$$F(T) = \int_{\Omega} (\text{grad } T)^2 d\Omega + \int_S [HT^2 - 2(\varphi/\lambda)T] dS,$$

где $H = \alpha/\lambda$ — относительный коэффициент теплоотдачи.

Допустимые функции могут не удовлетворять краевым условиям.

Пусть $F(T)$ — функционал, значения которого ограничены снизу, определен на некотором классе функций, обычно называемых *допустимыми*. При этом существует точная нижняя граница функционала $F(T)$

$$\inf F(T) = \mu > -\infty.$$

Последовательность функций $T_1, T_2, \dots, T_n$, принадлежащих области определения функционала $F(T)$, назовем минимизирующей, если для этого функционала

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(T_n) = \mu.$$

Пусть для последовательности функций T_n существует предел T_0 и справедлив предельный переход

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(T_n) = F(T_0). \quad (6.38)$$

Тогда $F(T_0) = \mu$ и функция T_0 является искомым решением поставленной вариационной задачи.

Таким образом, для решения вариационной задачи необходимо: а) построить минимизирующую последовательность T_n ; б) доказать существование предельной функции T_0 и возможность предельного перехода (6.38).

Наиболее важными методами построения минимизирующей последовательности являются методы Ритца [74] и Канторовича [43], применяются также методы Треффта, наименьших квадратов, Куранта и др. [30, 111].

§ 6.3. Метод Ритца

Приближенное решение вариационной задачи по Ритцу ищется в классе функций, удовлетворяющих краевым условиям, но не удовлетворяющих основному дифференциальному уравнению.

В конечной области Ω с границей S рассмотрим неоднородное дифференциальное уравнение, которое запишем в виде

$$A[T] = q_v(p), \quad p \in \Omega, \quad (6.39)$$

и пусть заданы краевые условия

$$N(T)|_S = g(p), \quad p \in S. \quad (6.40)$$

Если A — положительно определенный оператор, $N(T)$ — линейная функция, $q_v, g(p)$ — заданные функции, то краевая задача (6.39), (6.40) эквивалентна, как уже известно, вариационной задаче о минимуме функционала

$$F(T) = (A[T], T) - 2(T, q_v) \quad (6.41)$$

на множестве допустимых функций, удовлетворяющих краевому условию (6.40). Заметим, что последнее требование к допустимым функциям не всегда необходимо и часто может быть опущено, как видно на примере задачи (6.27), (6.29).

Задачу о построении функции, реализующей минимум функционала (6.41), приближенно решим следующим образом. Построим последовательность линейно независимых функций

$$T_0(p), T_1(p), \dots, T_n(p), \quad (6.42)$$

удовлетворяющих условиям:

1) $T_i(p)$ ($i=0, 1, 2, \dots, n$) имеют столько непрерывных производных в замкнутой области $\bar{\Omega} = \Omega + S$, каков порядок уравнения (6.39);

2) $T_i(p)$ удовлетворяют однородному краевому условию $N(T_i)|_S = 0$ ($i=1, 2, \dots, n$), а $T_0(p)$ — неоднородному краевому условию (6.40);

3) при любом $\varepsilon > 0$ для любой функции T из множества допустимых вариационной задачи найдутся такие числа a_i , что при определенном конечном значении n

$$\left(A \left[T - \sum_{i=0}^n a_i T_i(p) \right], T - \sum_{i=0}^n a_i T_i(p) \right) - 2 \left(q_v, T - \sum_{i=0}^n a_i T_i(p) \right) < \varepsilon.$$

Совокупность (6.42) назовем *координатной системой функций*. Решение задачи в n -м приближении найдем в виде

$$T_{(n)}(p) = T_0(p) + \sum_{i=1}^n a_i T_i(p), \quad (6.43)$$

при этом $T_{(n)}(p)$ удовлетворяет краевому условию (6.40).

Подставим $T_{(n)}(p)$ вместо T в функционал (6.41); это превратит $F(T)$ в функцию n независимых переменных a_i ($i=1, 2, \dots, n$):

$$F(T_{(n)}) = \Phi(a_1, a_2, \dots, a_n). \quad (6.44)$$

Коэффициенты a_i выберем из необходимого условия минимума функции (6.44), т. е. потребуем выполнения условий

$$\partial\Phi(a_1, a_2, \dots, a_n)/\partial a_i = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (6.45)$$

Производные (6.45) легко вычисляются, и получаемая система алгебраических линейных уравнений является замкнутой и разрешимой. Для решения системы (6.45) можно использовать стандартную программу решения системы алгебраических уравнений (см. приложение VI, алгоритм 3).

Определив коэффициенты a_i и подставив их в (6.43), получим функцию $T_{(n)}(p)$, которую называют *приближенным решением краевой задачи* (6.39) — (6.40) по Ритцу. Сходимость метода Ритца доказывается в [43, 74] для широкого класса краевых задач.

Показано, что приближенное решение $T_{(n)}(p)$ тем ближе к точному, чем больше n , т. е. большее число координатных функций берется при решении.

Однако при использовании большого числа координатных функций в случае их неудачного подбора возможны большие ошибки из-за накапливающихся погрешностей вычислений, поэтому следует различать случаи устойчивости и неустойчивости счета по методу Ритца. Подробно этот вопрос исследован в работе С. Г. Михлина [75].

Нагрев стержня (двухмерная задача). В стержне с квадратным поперечным сечением имеются внутренние источники теплоты постоянной мощности, например, вследствие прохождения электрического тока. Установившееся распределение температуры $T(x, y)$ в безразмерных величинах с учетом теплоотдачи на поверхности стенки по закону Ньютона является решением следующей краевой задачи:

$$\partial^2 T / \partial x^2 + \partial^2 T / \partial y^2 = -1, \quad |x| < 1, \quad |y| < 1; \quad (6.46)$$

$$\partial T / \partial n = -T, \quad |x| = 1, \quad |y| = 1. \quad (6.47)$$

Согласно (6.37), функционал, эквивалентный задаче (6.46), (6.47), имеет вид

$$F(T) = \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 - 2T \right] dx dy + \int_S T^2 dS.$$

Для допустимых функций $T_i(p)$ не требуют удовлетворения краевому условию (6.47).

Приближенное решение, учитывая симметрию задачи, ищем в виде

$$T_{(2)} = a_1 + a_2(x^2 + y^2).$$

Тогда

$$\int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial T_2}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T_2}{\partial y} \right)^2 - 2T_{(2)} \right] dx dy = -8a_1 - \frac{16}{3} a_2 + \frac{32}{3} a_2^2;$$

$$\int_S T_{(2)}^2 dS = 8a_1^2 + \frac{64}{3} a_1 a_2 + \frac{224}{15} a_2^2,$$

т. е. $F(T_{(2)}) = 8 \left(a_1^2 + \frac{8}{3} a_1 a_2 + \frac{48}{15} a_2^2 - a_1 - \frac{2}{3} a_2 \right).$

Условия (6.45) приводят к системе линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов $a_i (i=1, 2)$:

$$1/8 \frac{\partial F}{\partial a_1} = 2a_1 + 8/3 a_2 - 1 = 0;$$

$$1/8 \frac{\partial F}{\partial a_2} = 8/3 a_1 + 88/15 a_2 - 2/3 = 0,$$

решение которой дает $a_1 = 13/16, a_2 = -15/64.$

Приближенное решение имеет вид

$$T_{(2)}(x, y) = 1/64 [52 - 15(x^2 + y^2)]. \quad (6.48)$$

Полученное решение можно уточнить, увеличив число координатных функций до трех:

$$T_{(3)}(x, y) = a_1 + a_2(x^2 + y^2) + a_3 x^2 y^2.$$

При этом

$$1/8 F(T_{(3)}) = a_1^2 + 8/3 a_1 a_2 + 48/15 a_2^2 + 2/3 a_1 a_3 + 88/45 a_2 a_3 + \\ + 7/15 a_3^2 - 2/3 a_2 - 1/9 a_3 - a_1$$

и из линейной системы уравнений для $a_i (i=1, 2, 3)$

$$2a_1 + 8/3 a_2 + 2/3 a_3 - 1 = 0;$$

$$8/3 a_1 + 88/15 a_2 + 88/45 a_3 - 2/3 = 0;$$

$$2/3 a_1 + 88/45 a_2 + 14/15 a_3 - 1/9 = 0$$

получаем:

$$a_1 = 139/168, \quad a_2 = -15/56, \quad a_3 = 5/56.$$

Приближенно решение $T_{(3)}(x, y)$ запишется в виде

$$T_{(3)}(x, y) = 1/168 [139 - 45(x^2 + y^2) + 15x^2 y^2]. \quad (6.49)$$

Сравнение приближенных решений (6.48) и (6.49) с точным дано в табл. 6.1.

Результаты расчета показывают, что решение (6.49) обеспечивает достаточную степень точности определения температуры, так как погрешность не превышает 1 %.

Таблица 6.1

Точка с координатами	Расчет по (6.48)	Погрешность, %	Расчет по (6.49)	Погрешность, %
$x=0, y=0$	0,8125	-1,1	0,82738	+0,7
$x=0, y=1$	0,5781	+3,8	0,55952	+0,4
$x=1, y=1$	0,3438	-9,5	0,38095	+0,25

Задача 6.1. На двух противоположных вершинах однородного тела кубической формы поддерживается соответственно температура в безразмерных величинах +1 и -1. Боковые грани куба теплоизолированы. Стационарное распределение температур удовлетворяет уравнениям

$$\Delta T(x, y, z) = 0, \quad x, y, z \in \Omega \{ |x| < 1, |y| < 1, |z| < 1 \};$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad \text{при } |x| = 1, |y| = 1, |z| = 1;$$

$$T(x, y, z) = K \quad \text{при } x=y=z=K=\pm 1.$$

Обосновать выбор приближенного решения в виде

$$T_{(1)}(x, y, z) = a(x+y+z) + (1-3a)xyz,$$

где a — неопределенный коэффициент, и определить распределение температур $T_{(1)}(x, y, z)$ по методу Рунца.

§ 6.4. Метод Л. В. Канторовича

Приближенное решение вариационной задачи можно получить, задавая поведение неизвестной функции по одной из независимых переменных и оставляя ее произвольной по другим независимым переменным.

Подставляя выбранную форму решения в функционал и интегрируя по выделенной переменной, приходим к функционалу от неизвестных функций, зависящих от других переменных. Эти функции выбираются из условия минимума полученного функционала, что приводит к системе дифференциальных уравнений Эйлера—Лагранжа.

Довольно часто расчет по такому методу проще и обладает большей точностью по сравнению с методом Рунца. К преимуществам этого метода относят и то, что в нем структура приближенного решения по одной из переменных определяется априори, а по другим переменным — в соответствии с характером задачи.

Изложим метод более подробно, следуя [43].

Рассмотрим уравнение стационарной теплопроводности с источником теплоты переменной объемной плотности теплового потока

$$\partial^2 T / \partial x^2 + \partial^2 T / \partial y^2 + q_v(x, y) = 0, \quad x, y \in \Omega, \quad (6.50)$$

при граничных условиях 1 рода

$$T(x, y)|_S = 0. \quad (6.51)$$

Положим, что область Ω ограничена прямыми $x=d$ и $x=b$ и кривыми $y=g(x)$, $y=h(x)$. Функционал, эквивалентный уравнению (6.50), получаем из (6.36), допустимые функции должны удовлетворять условию (6.51).

Предположим, что приближенное решение выберем в виде

$$T_{(n)}(x, y) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x, y) a_i(x), \quad (6.52)$$

где функции $\varphi_i (i=1, 2, \dots, n)$ обращаются в нуль на границе S , за исключением, может быть, прямых $x=d$ и $x=b$.

Подставим выражение (6.52) в функционал (6.36):

$$F(T_{(n)}) = \iint \left[\left(\frac{\partial T_{(n)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T_{(n)}}{\partial y} \right)^2 - 2q_v T_{(n)} \right] dx dy = \\ = \int_d^b \Phi(x, a_i, a_i') dx,$$

где

$$\Phi(x, a_i, a_i') = \int_{g(x)}^{h(x)} \left\{ \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} a_i + \varphi_i \frac{da_i}{dx} \right) \right]^2 + \right. \\ \left. + \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} a_i \right]^2 - 2q_v \left[\sum_{i=1}^n \varphi_i a_i \right] \right\} dy.$$

Итак, задача определения функций $a_i(x)$ свелась к нахождению минимума определенного интеграла. Соответствующая система обыкновенных дифференциальных уравнений имеет вид

$$\frac{d}{dx} \frac{d\Phi}{da_i'} - \frac{d\Phi}{da_i} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (6.53)$$

Полученную систему относительно функций a_i необходимо решить при граничных условиях

$$a_i(d) = a_i(b) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Тогда приближенное решение (6.52) удовлетворяет граничному условию (6.51). Для численного решения системы (6.53) можно использовать стандартную программу решения системы дифференциальных уравнений (см. приложение V, алгоритм 4).

Л. В. Канторович доказал, что уравнение (6.53) можно представить в более простой форме:

$$\int_{g(x)}^{h(x)} \left(\frac{\partial^2 T_{(n)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_{(n)}}{\partial y^2} + q_v \right) \varphi_i dy = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (6.54)$$

Таким образом, метод Л. В. Канторовича сводит интегрирование краевых задач стационарной теплопроводности к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Температурное поле бруса прямоугольного сечения. Найти установившееся распределение температур в бруске прямоугольного сечения ($|x| \leq d$, $|y| \leq b$), если в теле действует источник теплоты с объемной плотностью теплового потока $q_v = 1$, при нулевых краевых условиях 1 рода ($\lambda = 1$):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + 1 = 0, \quad |x| < d, \quad |y| < b;$$

$$T(x, y) = 0, \quad |x| = d, \quad |y| = b.$$

Решение в первом приближении по методу Канторовича ищем в виде

$$T_1(x, y) = \varphi_1(x, y) a(x), \quad (6.55)$$

где

$$\varphi_1(x, y) \equiv \varphi_1(y) = b^2 - y^2.$$

Такой выбор функции $\varphi_1(x, y)$ обеспечивает выполнение краевых условий по одной из независимых переменных.

Подставляя решение (6.55) в (6.54), соответствующее нашему уравнению, получаем дифференциальное уравнение второго порядка для определения функции $a(x)$

$$a'' - \left(\frac{5}{2}b^2\right)a = -\frac{5}{4}b^2 \quad (6.56)$$

при граничных условиях

$$a(\pm d) = 0. \quad (6.57)$$

Решение уравнения (6.56) представим в виде

$$a(x) = A \operatorname{ch} \sqrt{5/2} (x/b) + B \operatorname{sh} \sqrt{5/2} (x/b) + 0,5,$$

где 0,5 — частное решение неоднородного уравнения (6.56).

Постоянные A и B определяются из условий (6.57):

$$B = 0, \quad A = -(1/2) \operatorname{ch}^{-1} \sqrt{5/2} (d/b).$$

Таким образом, получим первое приближение

$$T_{(1)}(x, y) = 0,5 (b^2 - y^2) \left[1 - \frac{\operatorname{ch} \sqrt{2,5} (x/b)}{\operatorname{ch} \sqrt{2,5} (d/b)} \right].$$

Погрешность приближенного решения можно оценить по следующему примеру: при $d = 1$, $b = 1/2$ $T_{(1)}(0, 0) = 0,11443$, а точное значение $T(0, 0) = 0,11387$, т. е. погрешность 0,5 %, что вполне удовлетворительно.

§ 6.5. Метод Треффтца

Идея метода Треффтца в некотором смысле противоположна идее метода Ритца. При конструировании приближенного решения в методе Ритца в качестве координатных выбирают функции, удовлетворяющие краевым условиям, но не удовлетворяющие дифференциальному уравнению, а в методе Треффтца выбирают функции, удовлетворяющие дифференциальному уравнению, но не удовлетворяющие краевым условиям.

Предположим, нам известны частное решение $\tilde{u}$ неоднородного дифференциального уравнения

$$A[T] = q_v(p), \quad p \in \Omega \quad (6.58)$$

и система линейно независимых между собой решений $\{u_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) соответствующего однородного дифференциального уравнения

$$A[\tilde{u}] = q_v, \quad A[u_i] = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Функция

$$T_{(n)} = \tilde{u} + \sum_{i=1}^n a_i u_i$$

является решением неоднородного уравнения (6.58) при любом наборе постоянных a_i . Определим коэффициенты a_i так, чтобы для приближенного решения $T_{(n)}$ наиболее точно выполнялось краевое условие, которому должно удовлетворять точное решение поставленной краевой задачи. Краевые условия представим в виде

$$N[T] = R(T) + \alpha(p)T = g(p), \quad p \in S, \quad (6.59)$$

где $R(T)$ — линейная функция, определяемая по формуле (6.31), если оператор A задан соотношением (6.27).

Рассмотрим случай граничных условий I рода

$$T(p)|_S = g(p)|_S.$$

Так же как и в методе Ритца, образуем функционал

$$F(\varphi, \psi) = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{j,k=1}^m \lambda_{jk} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_k} + K \varphi \psi \right\} d\Omega \quad (6.60)$$

и будем считать, что $F(\varphi) = F(\varphi, \varphi)$.

При сделанных в § 6.2 ограничениях на оператор A функционал $F(\varphi) > 0$ и $F(\varphi) = 0$ только если $\varphi = \text{const}$ (в случае $K > 0$ только для $\varphi \equiv 0$).

Согласно методу Трешфотца потребуем, чтобы погрешность ε от замены точного решения $T(p)$ линейной комбинацией $T_{(n)}(p)$

$$\varepsilon \equiv T_{(n)} - T = \tilde{u} + \sum_{i=1}^n a_i u_i - T \quad (6.61)$$

стала возможно меньшей в области Ω , причем измерение этой погрешности производится посредством величины функционала F , т. е. должно выполняться условие

$$F(\varepsilon) = F\left(\tilde{u} + \sum_{i=1}^n a_i u_i - T\right) = \min. \quad (6.62)$$

Требую выполнения (6.62), приходим к системе n линейных алгебраических уравнений для определения a_i

$$\frac{\partial F(\varepsilon)}{\partial a_k} = 2F\left(\tilde{u} + \sum_{i=1}^n a_i u_i - T, u_k\right) = 2F(\varepsilon, u_k) = 0, \quad (6.63)$$

коэффициенты которой вычисляются через интегралы по пространственной области Ω . Для упрощения вычислений используем формулу Грина

$$\int_{\Omega} \varphi A[\psi] d\Omega = F(\varphi, \psi) - \int_S \varphi R(\psi) dS. \quad (6.64)$$

Тогда, полагая $\varphi = \varepsilon$, $\psi = u_k$, получим выражение (6.64) в виде

$$\int_{\Omega} \varepsilon A[u_k] d\Omega + \int_S \varepsilon R(u_k) dS = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

Учитывая, что $A[u_k] = 0$, получим систему для определения a_k

$$\sum_{i=1}^n a_i \int_S u_i R(u_k) dS = \int_S (T - \tilde{u}) R(u_k) dS \quad (k=1, 2, \dots, n), \quad (6.65)$$

причем в правую часть следует подставить вместо $T(p)$ его заданное значение на границе области S — $g(p)$.

В случае граничных условий более общего вида (6.59) уравнения Трешфотца можно получить другим способом, используя более общую формулу Грина

$$\int_{\Omega} (\varphi A[\psi] - \psi A[\varphi]) d\Omega = - \int_S [\varphi R(\psi) - \psi R(\varphi)] dS. \quad (6.66)$$

Положим в (6.66) $\varphi = T - \tilde{u}$, $\psi = u_k$, тогда интегралы по области Ω обращаются в нуль, так как

$$A[T - \tilde{u}] = A[u_k] = 0,$$

и остается интеграл по поверхности S

$$\int_S [(T - \tilde{u}) R(u_k) - u_k R(T - \tilde{u})] dS = 0. \quad (6.67)$$

Рассмотрим теперь первую краевую задачу. Если в $R(T-\tilde{u})$ заменить приближенно аргумент

$$T-\tilde{u}=\sum_{i=1}^n a_i u_i,$$

то получим систему n линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов a_i :

$$\sum_{i=1}^n a_i \int_S u_k R(u_i) dS = \int_S (g-\tilde{u}) R(u_k) dS \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (6.68)$$

Получается система уравнений (6.68), эквивалентная системе (6.65) в силу равенства

$$\int_S \{u_k R(u_i) - u_i R(u_k)\} dS = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n; \quad i=1, 2, \dots, n),$$

которое следует из формулы Грина (6.66) при $\varphi=u_k$ и $\psi=u_i$.

При граничных условиях II рода [в (6.59) $\alpha(p)=0$] выражение для $R|T$ известно на S , поэтому, заменяя $T-u$ на $\sum_{i=1}^n a_i u_i$, получим систему n линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{i=1}^n a_i \int_S u_i R(u_k) dS = \int_S u_k [R(T) - R(\tilde{u})] dS \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (6.69)$$

В случае граничных условий III рода, считая, что $\alpha(p) \neq 0$, имеем на S

$$T-\tilde{u} = -1/\alpha R(T-\tilde{u}) + \beta, \quad (6.70)$$

где $\beta = g/\alpha - \tilde{u} - (1/\alpha) R(\tilde{u})$.

Подстановка выражения (6.70) в уравнение (6.67) дает

$$\int_S \{R(T-\tilde{u}) [1/\alpha R(u_k) + u_k] - \beta R(u_k)\} dS = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (6.71)$$

Положив в $R|T-\tilde{u}|$ уравнения (6.71)

$$T-\tilde{u} = \sum_{i=1}^n a_i u_i,$$

получим систему n линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов a_i :

$$\sum_{i=1}^n a_i \int_S R(u_i) \left[\frac{1}{\alpha} R(u_k) + u_k \right] dS = \int_S \beta R(u_k) dS \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

Таким образом, во всех трех случаях для определения коэффициентов a_i требуется вычислять только интегралы по поверхности S пространственной области. Поэтому при численной реализации метод Треффтца имеет важное преимущество перед методом Рунге в отношении затрат машинного времени.

Для иллюстрации метода Треффтца рассмотрим следующий пример. Стационарное распределение температуры в стержне квадратного поперечного сечения при граничных условиях I рода и действии источника теплоты с единичной объемной плотностью теплового потока определяется как решение следующей краевой задачи ($\lambda=1$):

$$\partial^2 T / \partial x^2 + \partial^2 T / \partial y^2 + 1 = 0, \quad |x| < 1, \quad |y| < 1;$$

$$T(x, y) = 0 \text{ при } |x| = 1, \quad |y| = 1.$$

Согласно методу Треффтца, приближенным решением сформулированной задачи будет сумма

$$T_{(n)}(x, y) = \tilde{u} + \sum_{i=1}^n a_i u_i(x, y),$$

где $\tilde{u}$ — частное решение неоднородного дифференциального уравнения

$$\partial^2 T / \partial x^2 + \partial^2 T / \partial y^2 + 1 = 0;$$

u_i ($i=1, 2, \dots, n$) — частные решения однородного дифференциального уравнения

$$\partial^2 T / \partial x^2 + \partial^2 T / \partial y^2 = 0$$

в соответствующих областях.

В данной задаче в качестве $\tilde{u}$ можно выбрать полином

$$\tilde{u} = -(x^2 + y^2)/4.$$

Частными решениями уравнения Лапласа в квадрате ($|x| < 1$, $|y| < 1$) будут, например, функции $\operatorname{Re}(x+iy)^n$.

Нечетные степени координат x и y не включаются в выражение для u_i , так как задача симметрична по x и y .

Если ограничиться вторым приближением, т. е. положить $n=2$, то получим

$$u_1 = \operatorname{Re}(x+iy)^4 = x^4 - 6x^2y^2 + y^4,$$

$$u_2 = \operatorname{Re}(x+iy)^8 = x^8 - 28x^6y^2 + 70x^4y^4 - 28x^2y^6 + y^8.$$

Отметим, что функция $u = \text{const}$ также является решением однородного дифференциального уравнения, поэтому пока решение находим с точностью до постоянной.

Коэффициенты a_i находим из системы алгебраических уравнений (6.65), которая в нашем случае приобретает вид

$$\sum_{i=1}^2 a_i \int_0^1 \left(u_i \frac{\partial u_k}{\partial x} \right)_{x=1} dy = - \int_0^1 \left(\tilde{u} \frac{\partial u_k}{\partial x} \right)_{x=1} dy \quad (k=1, 2).$$

После вычисления интегралов получим систему линейных уравнений

$$(48/7)a_1 - (1664/99)a_2 + 1/3 = 0; \quad -208a_1 + (15232/13)a_2 - 11 = 0,$$

решение которой:

$$a_1 = -3619/79856, \quad a_2 = 429/319424.$$

Таким образом, приближенное решение краевой задачи запишется в виде

$$T_{(2)}(x, y) = c - (1/4)(x^2 + y^2) - (3619/79856)(x^2 - 6x^2y^2 + y^4) + \\ + (429/319424)(x^8 - 28x^6y^2 + 70x^4y^4 - 28x^2y^6 + y^8).$$

Постоянную c определим из условия наименьшего отклонения функции от нуля на границе области.

Если положить в $T_{(2)}(x, y)$ $x=1$, то получим

$$T_{(2)}(x, y) = c - \gamma + f(y),$$

где $\gamma = 93\,903/319\,424$, т. е.

$$319\,424f(y) = -5012y^2 + 15\,554y^4 - 12\,012y^6 + 429y^8.$$

Колебание функции $f(y)$ в интервале $0 \leq y \leq 1$ определяется числом $\sigma = 1150/319\,424$. Поэтому, если $c = \gamma + \sigma/2 = 94\,478/319\,424 = 0,295776$, то значения приближенного решения $T_{(2)}(x, y)$ на границе области будут лежать между $-\sigma/2$ и $+\sigma/2$. А поскольку приближенное решение по Треффтцу точно удовлетворяет основному дифференциальному уравнению, то значение погрешности во всей области не превосходит $\sigma/2$.

Представляет интерес сравнение между собой рассмотренных выше методов Рунца, Канторовича и Треффтца. С этой целью получим решения рассмотренной в этом параграфе задачи о стационарном распределении температуры в стержне квадратного поперечного сечения методами Рунца (первое и второе приближения), Канторовича [первое (см. § 6.4) и второе приближения] и разделения переменных (точное решение).

Полученные решения запрограммируем на алгоритмическом языке ФОРТРАН-IV для ЭВМ ЕС-1022. С помощью программы вычисляются значения $T(x, y)$ в точках $x_j = jh_x$, $y_i = ih_y$ ($i, j = 0, 1, 2, 3, 4$; $h_x = h_y = 0,25$) по соответствующим решениям.

Список идентификаторов. НХ, НУ — шаги по переменным x, y соответственно; М — число точек разбиения отрезка $[0, 1]$; Х, У — значения переменных x, y ; RS, RR, RC, RT — одномерные массивы значений температуры в точках x_j ($j = 0, 1, 2, 3, 4$) при фиксированном y_i , вычисленные по точному решению, методу Рунца, методу Канторовича, методу Треффтца соответственно; N — параметр, равный 1 при вычислении первого и 2 — второго приближений.

Приведем текст программы.

```
С СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТА ТЕМПЕРАТУР
С ПЛАСТИНЫ РАЗЛИЧНЫМИ ВАРИАЦИОННЫМИ МЕТО-
С ДАМИ
DIMENSION RS(5), RC(5), RT(5), RR(5)
```

```

M=5
HX=1./(M-1)
HY=HX
N=1
WRITE (3,9)
9 FORMAT ('Ø', 4ØX, 22Н ПЕРВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ)
11 DO 1 I=1, M
  Y=HY * (I-1)
  WRITE (3,3) Y
3 FORMAT ('Ø', 5X, 2HY=, E11.4)
  DO 2 I=1, M
    X=HX * (I-1)
    RS(I)=SOL(X, Y)
    RC(I)=CONT(N, X, Y)
    RT(I)=TREF(N, X, Y)
2 RR(I)=RIT(N, X, Y)
  WRITE (3,4)
  WRITE (3,5) RS
  WRITE (3,6)
  WRITE (3,5) RR
  WRITE (3,7)
  WRITE (3,5) RC
  WRITE (3,8)
  WRITE (3,5) RT
4 FORMAT ('Ø', 4ØX, 16Н ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ)
5 FORMAT ('Ø', 25X, 5E16.5)
6 FORMAT ('Ø', 4ØX, 13Н МЕТОД РИТЦА)
7 FORMAT ('Ø', 4ØX, 19Н МЕТОД КАНТОРОВИЧА)
8 FORMAT ('Ø', 4ØX, 15Н МЕТОД ТРЕФФТЦА)
1 CONTINUE
  IF(N, GT. 1) GO TO 12
  N=N+1
  WRITE (3,1Ø)
1Ø FORMAT ('Ø', 4ØX, 22Н ВТОРОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ)
  GO TO 11
12 CONTINUE
  STOP
  END
C  ВЫЧИСЛЕНИЕ ПО МЕТОДУ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ
  FUNCTION SOL (X, Y)
  CH (Z)=(EXP (Z)+1./EXP (Z))/2.
  PI=3.14159265
  P=PI/2
  HS=2./P ** 3 * (1.-CH (P * X)/CH (P))+COS (P * Y)
  DO 1 K=2,4Ø
    P=(2 * K-1) * PI/2.
1  HS=HS+2./P ** 3 * (-1) ** (K-1) * (1.-CH (P * X)/
  /CH (P)) * COS (P * Y)
  SOL=HS

```

```

RETURN
END
C ВЫЧИСЛЕНИЕ ПО МЕТОДУ РИТЦА
FUNCTION RIT (N, X, Y)
XY=(1-X * X) * (1-Y * Y)
IF (N.EQ.1) HR=5./16.+XY
IF (N.EQ.2) HR=35./32./277.+XY * (74.+15. * (X * X+Y * Y))
RIT=HR
RETURN
END
C ВЫЧИСЛЕНИЕ ПО МЕТОДУ КАНТОРОВИЧА
FUNCTION CONT (N, X, Y)
CH (Z)=(EXP (Z)+1./EXP (Z))/2.
A=1.570815
G=5.05297
YM=Y * Y - 1.
IF (N.EQ.1) HC= - YM * (1. - CH (SQRT (2.5) * X)/
/CH (SQRT (2.5)))/2.
IF (N.EQ.2) HC=YM * (CH (A * X)/CH (A) * (0.51558 -
- 0.114 * Y * Y) - CH (G * X)/CH (G) * (0.01558 -
- 0.114 * Y * Y) - 1./2.)
CONT=HC
RETURN
END
C ВЫЧИСЛЕНИЕ ПО МЕТОДУ ТРЕФТЦА
FUNCTION TREF (N, X, Y)
US= -(X * X+Y * Y)/4.
X2=X * X
Y2=Y * Y
X4=X2 * X2
Y4=Y2 * Y2
U1=X4 - 6. * X2 * Y2+Y4
U2=X4 * X4 - 28. * X2 * Y2(X4 * Y4)+70. * X4 * Y4 *
* Y4 * Y4
IF (N.EQ.1) GO TO 1
GO TO 2
1 C=87./288.
C1= - 7./144.
C2=0.
GO TO 3
2 IF (N.EQ.2) C=94478./319424.
C1= - 3619./79865.
C2=429./319424.
3 TREF=C+US+C1 * U1+C2 * U2
RETURN
END

```

Часть результатов расчета по первому и второму приближениям вариационных методов сравнивается с точным решением (метод разделения переменных) в табл. 6.2.

Результаты расчета температуры пластины различными вариационными методами (первое и второе приближения)

Метод решения	Координаты точки														
	y=0,0					y=0,5					y=1,0				
	x=0,0	x=0,25	x=0,50	x=0,75	x=1,0	x=0,0	x=0,25	x=0,5	x=0,75	x=1,0	x=0,0	x=0,25	x=0,50	x=0,75	x=1,0
Разделения переменных	0,2947	0,2789	0,2293	0,1397	0,0	0,2293	0,2178	0,1811	0,1127	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	0,2947	0,2789	0,2293	0,1397	0,0	0,2293	0,2178	0,1811	0,1127	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
Ритца	0,3125	0,2939	0,2344	0,1367	0,0	0,2344	0,2197	0,1758	0,1025	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	0,2922	0,2774	0,2302	0,1424	0,0	0,2302	0,2185	0,1810	0,1117	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
Канторовича	0,3026	0,2870	0,2376	0,1468	0,0	0,2270	0,2152	0,1782	0,1101	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	0,2947	0,2789	0,2291	0,1391	0,0	0,2293	0,2178	0,1814	0,1134	0,44 · 10 ⁻⁷	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
Треффта	0,3026	0,2863	0,2366	0,1461	0,0035	0,2366	0,2253	0,1892	0,1216	0,0108	0,0035	0,0059	0,0108	0,0115	-0,00035
	0,2958	0,2800	0,2304	0,1410	0,0018	0,2304	0,2189	0,1822	0,1137	0,0003	0,0018	0,0010	0,0003	0,0018	-0,00015

Примечание. В числителе дроби даны результаты первого приближения, а в знаменателе — второго.

Анализ значений $T(x, y)$, вычисленных различными методами, подтверждает более высокую точность метода Канторовича по сравнению с методами Ритца и Треффтца. Но процесс решения системы дифференциальных уравнений (метод Канторовича), безусловно, сложнее решения систем алгебраических уравнений (методы Ритца и Треффтца). Внутри области Ω , вдали от границы S , метод Треффтца дает более точные результаты по сравнению с методом Ритца. Однако при приближении к границе S наблюдается обратное явление.

Ясно, что в общем случае отмеченные в этом примере закономерности могут и не иметь места, так как точность приближенного решения в значительной мере зависит от удачного выбора координатных функций.

§ 6.6. Метод Био

Вариационный принцип, разработанный Био [14], позволяет рассматривать задачи теплопроводности по аналогии с задачами механики, использующими идею обобщенных координат, которые описывают механическую систему, обычно имеющую конечное число степеней свободы. Термодинамическая система является, по существу, физической системой, состоящей из молекул и атомов. В описание же процесса теплопроводности входят макроскопические параметры, такие, как температура, теплопроводность, теплоемкость и др. Поэтому макроскопически систему можно представить в виде конечного, но очень большого набора отдельных ячеек, содержащих достаточное число молекул или атомов для того, чтобы в ней были справедливы макроскопические законы. В то же время каждая такая ячейка должна быть достаточно малой, чтобы ее поведение можно было описать с помощью макроскопических параметров. В классическом описании тепловых явлений используется скалярное температурное поле T . В одном из методов описания процесса теплопроводности Био [14] вводит векторное поле $\vec{H}(x, y, z, \tau)$, которое называется *вектором теплового потока* и определяется уравнением

$$\dot{\vec{H}} = \frac{\partial}{\partial \tau} \vec{H}(x, y, z, \tau), \quad (6.72)$$

где $\dot{\vec{H}}$ — вектор, представляющий локальную плотность потока теплоты на единицу площади.

Рассмотрим закон сохранения энергии без учета источников теплоты

$$\rho c T = -\operatorname{div} \vec{H}, \quad (6.73)$$

где T — температура; $c = c(x, y, z)$ — теплоемкость; $\vec{H} = \int_0^\tau \dot{\vec{H}} d\tau$.

Согласно закону сохранения энергии, имеем

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial \tau} = -\operatorname{div} \dot{\vec{H}} = -\frac{\partial}{\partial \tau} \operatorname{div} \vec{H}. \quad (6.74)$$

В последнем равенстве изменен порядок операции $\frac{\partial}{\partial \tau}$ и div . Умножая обе части этого равенства на $d\tau$ и интегрируя от нуля до τ , получаем (6.73).

Закон сохранения энергий должен выполняться также для вариаций $\delta \vec{H}$ и δT . Поэтому из (6.73) для вариаций вектора $\vec{H}$ и температуры T имеем

$$\rho c \delta T = -\text{div } \delta \vec{H}. \quad (6.75)$$

Закон теплопроводности Фурье запишем в виде

$$\text{grad } T + \frac{1}{\lambda} \dot{\vec{H}} = 0. \quad (6.76)$$

Применим к обеим частям (6.76) операцию дивергенции

$$\text{div } (\lambda \text{ grad } T) + \text{div } \dot{\vec{H}} = 0.$$

Подставляя в последнее равенство соотношение (6.74), получим

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial \tau} - \text{div } (\lambda \text{ grad } T) = 0,$$

т. е. уравнение теплопроводности в его обычной форме без учета внутренних источников теплоты.

Вариационный принцип с использованием вектора плотности потока теплоты получается следующим образом. Умножим уравнение (6.76) на $\delta \vec{H}$ и проинтегрируем по объему среды Ω :

$$\int_{\Omega} \left(\text{grad } T + \frac{1}{\lambda} \dot{\vec{H}} \right) \delta \vec{H} d\Omega = 0. \quad (6.77)$$

Интегрирование первого члена по частям дает

$$\int_{\Omega} \left(-T \text{ div } (\delta \vec{H}) + \frac{1}{\lambda} \dot{\vec{H}} \delta \vec{H} \right) d\Omega = - \int_S T \vec{n} \cdot \delta \vec{H} dS, \quad (6.78)$$

где $\vec{n}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности S , ограничивающей объем Ω . Используя уравнение (6.75), имеем

$$- \int_{\Omega} T \text{ div } (\delta \vec{H}) d\Omega = \int_{\Omega} \rho c T \delta T d\Omega = \delta E. \quad (6.79)$$

Скаляр, играющий роль потенциала тепловой системы Ω , определяется как объемный интеграл

$$E = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho c T^2 d\Omega.$$

Подставив δE в уравнение (6.78), получим

$$\delta E + \int_V \frac{1}{\lambda} \dot{\bar{H}} \delta \bar{H} d\Omega = - \int_S T \bar{n} \cdot \delta \bar{H} dS. \quad (6.80)$$

Последнее выражение является вариационным принципом Био в теплопроводности. Интеграл по объему от $\frac{1}{\lambda} \dot{\bar{H}} \delta \bar{H}$ имеет смысл, связанный с понятием диссипации энергии. Обозначим его вариацию через δD . Тогда из (6.80) получаем основное вариационное уравнение

$$\delta E + \delta D = - \int_S T \bar{n} \cdot \delta \bar{H} dS. \quad (6.81)$$

Равенство (6.81) можно записать в виде уравнений Лагранжа. Для этого выберем для каждой компоненты H_i вектора $\bar{H}$ функцию, зависящую от некоторого набора параметров (обобщенных координат) $q_i(\tau)$ ($i = 1, 2, \dots$):

$$H_i = H_i(q_1, q_2, \dots, q_n, x, y, z, \tau).$$

Тогда для вариации каждой компоненты имеем

$$\delta H_i = \sum_j (\partial H_i / \partial q_j) \delta q_j,$$

с другой стороны,

$$\dot{H}_i = \sum_j (\partial H_i / \partial q_j) \dot{q}_j + \partial H_i / \partial \tau$$

и $\partial \dot{H}_i / \partial q_j = \partial H_i / \partial q_j$.

Вариация векторного поля $\bar{H}$ вычисляется аналогично:

$$\delta \bar{H} = \sum_j (\partial \bar{H} / \partial q_j) \delta q_j. \quad (6.82)$$

Потенциал E будет также функцией обобщенных координат q_j , и можно записать, что

$$\delta E = \sum_{j=1}^n \frac{\partial E}{\partial q_j} \delta q_j. \quad (6.83)$$

Учитывая последнее выражение, запишем уравнение (6.80) в виде

$$\sum_j \left(\frac{\partial E}{\partial q_j} + \int_V \frac{1}{\lambda} \dot{\bar{H}} \frac{\partial \bar{H}}{\partial q_j} d\Omega \right) \delta q_j = - \sum_j \left(\int_S T \frac{\partial \bar{H}}{\partial q_j} \bar{n} dS \right) \delta q_j. \quad (6.84)$$

Поскольку вариации δq_j являются произвольными, из (6.84) вытекает соотношение

$$\frac{\partial E}{\partial q_j} + \int_{\Omega} \frac{1}{\lambda} \dot{\bar{H}} \frac{\partial \bar{H}}{\partial q_j} d\Omega = - \int_S T \frac{\partial \bar{H}}{\partial q_j} \bar{n} dS. \quad (6.85)$$

Обозначим $\frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{1}{\lambda} \dot{\bar{H}}^2 d\Omega = D$, тогда $\frac{\partial D}{\partial q_j} = \int_{\Omega} \frac{1}{\lambda} \dot{\bar{H}} \frac{\partial \bar{H}}{\partial q_j} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{1}{\lambda} \dot{\bar{H}} \frac{\partial \bar{H}}{\partial q_j} d\Omega$

и (6.85) можно переписать в другой форме:

$$\partial E / \partial q_j + \partial D / \partial q_j = Q_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (6.86)$$

где $Q_j = - \int_S T \frac{\partial \bar{H}}{\partial q_j} \bar{n} dS$.

Для решения системы уравнений (6.86) необходимо задаться функцией $\bar{H} = \bar{H}(q_j, x, y, z, \tau)$ с некоторым числом обобщенных координат q_j , выбранным исходя из физического содержания задачи. Затем по выбранному вектору $\bar{H}$ из уравнения (6.73) определяется температурное поле $T = T(q_j, x, y, z, \tau)$. С помощью этих функций находятся величины E, D, Q_j , входящие в выражение (6.86), которые дают n уравнений первого порядка для неизвестных q_j .

Полученные выше результаты применимы к системам с источниками теплоты. Для этого необходимо представить вектор теплового смещения $\bar{H}$ в виде суперпозиции двух отдельных полей $\bar{H} = \bar{H}_1 + \bar{H}_2$, где $\bar{H}_1$ выбирается так же, как и ранее, а вектор $\bar{H}_2$ удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{div} \bar{H}_2 = \int_0^{\tau} q_v(x, y, z, t) dt \quad (6.87)$$

с функцией q_v , обозначающей скорость выделения теплоты внутренними источниками в единице объема. Закон сохранения энергии запишется в виде

$$\rho c T = - \operatorname{div} \bar{H} + \int_0^{\tau} q_v(x, y, z, t) dt. \quad (6.88)$$

Рассмотренный вариационный принцип сформулирован с помощью варьирования вектора теплового смещения $\bar{H}$, выбранного таким образом, чтобы выполнялся закон сохранения энергии (6.73). Поскольку температурное поле T является более естественной физической величиной, чем вектор теплового смещения $\bar{H}$, можно варьировать температурное поле T и выразить в вариационной форме условие непрерывности теплового потока, которое является законом сохранения энергии.

Рассмотрим процесс теплопроводности в телах, свойства которых не зависят от температуры.

Запишем уравнение распространения теплоты в форме

$$\bar{q} = -\lambda \nabla T. \quad (6.89)$$

Здесь $\lambda = \lambda(x, y, z)$ — теплопроводность; $T = T(x, y, z, \tau)$ — температура; $\bar{q}$ — вектор плотности теплового потока.

Закон сохранения энергии запишется в виде

$$\rho c (\partial T / \partial \tau) + \nabla \cdot \bar{q} - q_v = 0. \quad (6.90)$$

Удельная теплоемкость c и плотность ρ могут быть функциями координат, а $q_v(\tau, x, y, z)$ является функцией тепловыделения внутри тела. Умножим уравнение сохранения энергии (6.90) на вариацию δT и проинтегрируем результат по объему Ω :

$$\int_{\Omega} (\rho c \partial T / \partial \tau + \nabla \cdot \bar{q} - q_v) \delta T d\Omega = 0. \quad (6.91)$$

При произвольных вариациях температурного поля δT уравнение (6.91) определяет закон сохранения энергии в интегральной форме. Интегрируя (6.91) по частям, приходим к равенству

$$\int_{\Omega} (\rho c \partial T / \partial \tau - q_v) \delta T d\Omega - \int_{\Omega} \bar{q} \cdot \nabla \delta T d\Omega + \int_S \bar{q} \cdot \bar{n} \delta T dS = 0. \quad (6.92)$$

Поверхностный интеграл в выражении (6.92) берется по поверхности S объема тела Ω , а $\bar{n}$ обозначает единичную внешнюю нормаль к поверхности S .

Преобразуем второй интеграл в уравнении (6.92):

$$- \int_{\Omega} \bar{q} \cdot \nabla \delta T d\Omega = \int_{\Omega} \lambda \nabla T \cdot \nabla \delta T d\Omega = \delta \int_{\Omega} \frac{\lambda}{2} (\nabla T)^2 d\Omega = \delta D, \quad (6.93)$$

$$\text{где } D = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \lambda (\nabla T)^2 d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \lambda (\text{grad } T)^2 d\Omega. \quad (6.94)$$

По физическому смыслу последнее выражение может быть истолковано как вариация диссипативной функции D . С учетом (6.93) и (6.94) выражение (6.92) переписывается в форме

$$\int_{\Omega} \left(\rho c \frac{\partial T}{\partial \tau} - q_v \right) \delta T d\Omega + \delta D + \int_S \bar{q} \cdot \bar{n} \delta T dS = 0. \quad (6.95)$$

Выражение (6.95) представляет собой другую форму вариационного принципа для уравнения теплопроводности.

Применение вариационного метода при решении задач нестационарной теплопроводности можно рассмотреть на примере распространения теплоты в пластине толщиной l , с постоянной теплопроводностью λ и удельной теплоемкостью c . Начальная температура пластины $T = 0$. С момента $\tau = 0$ на стороне пластины при $x = 0$ задается температура $T_0 = T_0(\tau)$, а на другой стороне, при $x = l$, температура $T_1 = T_1(\tau)$.

Счевидно, что задание температурного поля в виде

$$T(\tau, x) = T_0(1 - x/l) + (x/l) T_1 + \sum_{k=1}^n q_k(\tau) \psi_k(x), \quad (6.96)$$

$$\text{где } \psi_k(x) = \sqrt{2/l} \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad (6.97)$$

а $q_k(\tau)$ — обобщенные координаты, точно удовлетворяет заданным температурным условиям на границе пластины.

Закон теплопроводности для этого случая запишется в виде

$$\begin{aligned} \bar{q} = -\lambda \operatorname{grad} T = -\lambda \bar{l} \frac{\partial T}{\partial x} = -\lambda \bar{l} \left[\frac{T_1(\tau) - T_0(\tau)}{l} + \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^n \frac{k\pi}{l} q_k(\tau) \cos \frac{k\pi x}{l} \right] = \bar{q}_1(\tau, x). \end{aligned} \quad (6.98)$$

Диссипативная функция $D(\tau)$ выражается в следующей форме:

$$\begin{aligned} D(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^l \lambda (\operatorname{grad} T)^2 dx = \frac{\lambda}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dx = \\ = \frac{\lambda}{2} \frac{(T_1 - T_0)^2}{l} + \frac{\lambda}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 q_k^2(\tau). \end{aligned} \quad (6.99)$$

Вариационный принцип для процесса теплопроводности в нашем случае можно выразить уравнением

$$\int_0^l \rho c \dot{T} \delta T dx + \delta D + \int_S \bar{q} \cdot \bar{n} \delta T dS = 0. \quad (6.100)$$

В равенстве (6.100) последний интеграл учитывает тепловой поток через обе стороны пластины. Обозначим

$$\Theta = \frac{1}{2} \int_0^l \rho c \dot{T}^2 dx, \quad (6.101)$$

тогда уравнениями Лагранжа будут n уравнений вида

$$\frac{\partial \Theta}{\partial q_k} + \frac{\partial D}{\partial q_k} = P_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (6.102)$$

где

$$P_k = - \int_S \bar{q} \cdot \bar{n} \frac{\partial T}{\partial q_k} dS; \quad (6.103)$$

S представляет собой единичную площадь на стенках $x=0$, $x=l$.

Так как $\partial T / \partial q_k = \psi_k = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{k\pi x}{l}$, то $\partial T / \partial q_k = 0$ при $x=0$ и $x=l$. Поэтому $P_k = 0$ в рассматриваемой задаче.

Вычислим частные производные, входящие в (6.102):

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \dot{q}_k} = \rho c \int_0^l \dot{T} \frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_k} dx = \rho c \int_0^l \dot{T} \frac{\partial T}{\partial q_k} dx = \rho c \int_0^l \dot{T} \psi_k(x) dx; \quad (6.104)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial q_k} &= \lambda \int_0^l \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial q_k} \right) dx = \lambda \int_0^l \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) dx = \\ &= \lambda \int_0^l \frac{\partial T}{\partial x} \frac{d\psi_k}{dx} dx = \lambda \int_0^l \frac{\partial T}{\partial x} \dot{\psi}_k dx. \end{aligned} \quad (6.105)$$

Интегрируя последнее выражение по частям при условии, что $\psi_k(0) = \psi_k(l) = 0$, получим

$$\frac{\partial D}{\partial q_k} = \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \psi_k(x) \Big|_0^l - \lambda \int_0^l \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \psi_k(x) dx = -\lambda \int_0^l \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \psi_k(x) dx. \quad (6.106)$$

Подставляя в (6.102), (6.104) и (6.106), имеем

$$\int_0^l \left[\rho c \frac{\partial T}{\partial \tau} - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right] \psi_k(x) dx = 0, \quad k=1, 2, 3, \dots \quad (6.107)$$

Представление решения в виде (6.96) является приближенным. Точное представление, очевидно, будет при $n \rightarrow \infty$, т. е. в виде

$$T(\tau, x) = T_0 \left(1 - \frac{x}{l} \right) + \frac{x}{l} T_1 + \sum_{k=1}^{\infty} q_k(\tau) \psi_k(x) = \psi(\tau, x) + T_2(\tau, x), \quad (6.108)$$

$$\text{где } \psi(\tau, x) = T_0 \left(1 - \frac{x}{l} \right) + \frac{x}{l} T_1, \quad (6.109)$$

которое является не чем иным, как представлением решения в виде разложения по полной в $L_2(0, l)$ системе функций $\psi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{k\pi x}{l}$. Предполагая, что вектор $R \equiv \rho c \partial T / \partial \tau - \lambda \partial^2 T / \partial x^2$ принадлежит функциональному пространству $L_2(0, l)$ по x и непрерывен по τ , видим, что условие (6.107) означает не что иное, как ортогональность вектора R полной системе функций $\psi_k(x)$. Отсюда можно заключить, что R — нулевой вектор:

$$R \equiv \rho c \partial T / \partial \tau - \lambda \partial^2 T / \partial x^2 = 0. \quad (6.110)$$

Подставляя в (6.107) выражение для $T(\tau, x)$ из (6.108), получим

$$\int_0^l [\rho c \partial T_2 / \partial \tau - \lambda \partial^2 T_2 / \partial x^2 - f] \psi_k(x) dx = 0, \quad k=1, 2, 3, \dots, \quad (6.111)$$

где $f(x, \tau) = \rho c \partial \psi / \partial \tau - \lambda \partial^2 \psi / \partial x^2 = \rho c [\dot{T}_0 (1 - x/l) + (x/l) \dot{T}_1]$.

Система уравнений (6.111) устанавливает связь между уравнениями Лагранжа и методом Галеркина.

Получим теперь систему уравнений для $q_k(\tau)$ — коэффициентов ряда (6.108) или обобщенных координат. Вычислим частные производные, входящие в условие (6.102), ограничиваясь пока конечным представлением температурного поля в виде (6.96):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta}{\partial q_k} &= \rho c \int_0^l \dot{T} \psi_k dx = \rho c \int_0^l \left[\dot{T}_0 \left(1 - \frac{x}{l}\right) + \frac{x}{l} \dot{T}_1 + \sum_{k=1}^n \dot{q}_k \psi_k \right] \psi_k dx = \\ &= \rho c \dot{T}_0 \int_0^l \left(1 - \frac{x}{l}\right) \psi_k dx + \frac{\rho c \dot{T}_1}{l} \int_0^l x \psi_k dx + \rho c \dot{q}_k = \rho c \frac{\sqrt{2l}}{k\pi} [\dot{T}_0 - (-1)^k \dot{T}_1] + \\ &+ \rho c \dot{q}_k; \end{aligned} \quad (6.112)$$

$$\frac{\partial D}{\partial q_k} = -\lambda \int_0^l \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \psi_k dx = -\lambda \int_0^l \left(\sum_{k=1}^n q_k \psi_k'' \right) \psi_k dx.$$

Так как функции $\psi_k(x)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению $\psi_k''(x) + \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \psi_k = 0$, то последнее выражение переписется в виде

$$\frac{\partial D}{\partial q_k} = \lambda \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \int_0^l \left(\sum_{k=1}^n q_k \psi_k \right) \psi_k dx = \lambda \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 q_k \quad (6.113)$$

в силу того, что $\psi_k(x)$ — ортонормированная система функций на $[0, l]$. Из выражений (6.112), (6.113) можно получить окончательно следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений для $q_k(\tau)$:

$$\dot{q}_k(\tau) + a \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 q_k(\tau) = f_k(\tau), \quad (6.114)$$

где $a = \lambda / (\rho c)$, $f_k(\tau) = [(-1)^k \dot{T}_1 - \dot{T}_0] \sqrt{2l} / (k\pi)$. Общий интеграл (6.114) запишется в виде

$$q_k(\tau) = \int_0^\tau e^{-\mu_k(\tau-t)} f_k(t) dt, \quad \mu_k = a(k\pi/l)^2. \quad (6.115)$$

Решение задачи о нагреве (охлаждении) стенки выражается рядом

$$T(\tau, x) = T_0 \left(1 - \frac{x}{l}\right) + \frac{x}{l} T_1 + \sum_{k=1}^n \left(\int_0^{\tau} e^{-\mu_k(\tau-t)} f_k(t) dt \right) \psi_k(x), \quad (6.116)$$

который является не чем иным, как обобщенным (слабым) решением поставленной задачи. При $n \rightarrow \infty$ сходимость этого ряда может быть исследована аналогично тому, как это было сделано в § 3.1.

Температурное поле неограниченной пластины при тепловом ударе [14]. Красная задача имеет вид

$$\partial T / \partial \tau = a (\partial^2 T / \partial x^2), \quad 0 < x < l, \quad \tau > 0,$$

$$T(x, 0) = 0, \quad T(0, \tau) = T_c, \quad \partial T(l, \tau) / \partial x = 0.$$

Согласно методу Био, профиль температуры выберем в виде квадратичной параболы

$$T(x, \tau) = \begin{cases} T_c \left[1 - \frac{x}{q_1(\tau)}\right]^2 & \text{при } x < q_1(\tau), \\ 0 & \text{при } x \geq q_1(\tau), \end{cases}$$

где $q_1(\tau) = \delta(\tau)$ — толщина прогретого слоя. Далее вычисляем все величины, входящие в уравнение Лагранжа (6.86). Определим потенциальную энергию теплового поля:

$$E = \frac{c\rho}{2} \int_0^l T^2(x, \tau) dx = \frac{c\rho}{2} T_c^2 q_1(\tau).$$

Рассматриваемая задача одномерна, поэтому имеем одну составляющую H_j , которую обозначим через H . Интегрируя (6.73), получим

$$H(x, \tau) = - \int_{q_1}^x c\rho T dx = \frac{c\rho T_c}{3} q_1(\tau) \left|1 - \frac{x}{q_1(\tau)}\right|^3$$

с учетом того, что $H(x, \tau) = 0$ при $x = q_1$.

Для функции рассеивания $D(\tau)$ и «температурной силы» Q_1 имеем:

$$D(\tau) = \frac{1}{2\lambda} \int_0^l \dot{H}^2 dx = \frac{13(c\rho T_c)^2}{630\lambda} q_1 \dot{q}_1^2,$$

$$Q_1 = T_c \frac{\partial H}{\partial q_1} \Big|_{x=l} = \frac{1}{3} c\rho T_c^2.$$

Подставляя выражения E , D и Q_1 в уравнение Лагранжа

$$\partial E / \partial q_1 + \partial D / \partial \dot{q}_1 = Q_1,$$

получим

$$\dot{q}_1 q = (147/26) (\lambda / c\rho) = (147/26) a,$$

где a — температуропроводность.

Решая дифференциальное уравнение первого порядка, получаем формулу для определения толщины прогретого слоя

$$q_1(\tau) = \sqrt{(147/13) a \tau} \approx 3,36 \sqrt{a \tau}.$$

Тогда в период, когда понятие толщины прогретого слоя имеет смысл, т. е. при $q_1 \leq l$, получим решение задачи в виде

$$T(x, \tau) = \begin{cases} T_c \left(1 - \frac{x}{3,36 \sqrt{a \tau}} \right)^2 & \text{при } x \leq 3,36 \sqrt{a \tau}, \\ 0 & \text{при } x > 3,36 \sqrt{a \tau}. \end{cases}$$

Начиная с момента времени τ^* , соответствующего достижению толщины прогретого слоя q_1 значения l $\tau^* \approx 0,0885 (l^2/a)$, выражение для температуры непригодно и следует искать решение в тепловом режиме, когда тело участвует в нагреве по всей толщине.

Выберем профиль температур в этом случае таким образом, чтобы удовлетворялись граничные условия задачи

$$T(x, \tau) = (T_c - q_2) (1 - x/l)^2 + q_2 \quad \text{при } \tau > \tau^*.$$

Тогда, проделав описанную выше процедуру, получим для параметра q_2 следующее выражение:

$$q_2(\tau) = T_c \{ 1 - \exp [- 0,214 (\tau/\tau^* - 1)] \}, \quad \tau > \tau^*.$$

Таким образом, полученные формулы позволяют рассчитывать температурное поле пластины в

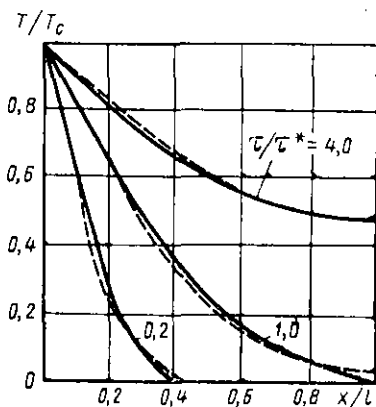


Рис. 6.1. Распределение относительной температуры в неограниченной пластине по относительной координате [15]:

— расчет по численному методу;
- - - расчет по методу Био

любой момент времени.

На рис. 6.1 приведено сравнение результатов расчета по полученным формулам с численным решением этой задачи и видно, что результаты расчетов по методу Био хорошо согласуются с численным решением.

§ 6.7. Метод Бубнова — Галеркина

Метод Бубнова — Галеркина не относится к вариационным методам. Он применим к более широкому кругу задач, а в случае, когда задачу можно решить и методом Рунта, и методом Бубнова — Галеркина, последний в большинстве случаев быстрее приводит к решению.

Рассмотрим применение метода Бубнова — Галеркина к краевой задаче нестационарной теплопроводности. Пусть распределение температур в области Ω описывается линейным уравнением теплопроводности

$$A|T| = \partial T / \partial \tau - a \nabla^2 T - q_v(\tau, x, y) / (c\rho) = 0, \quad x, y \in \Omega, \quad \tau > 0, \quad (6.117)$$

при начальных условиях $T(0, x, y) = f(x, y)$ и произвольных линейных однородных граничных условиях на граничной поверхности S $R(T)|_S = 0$, где $R(T)$ — линейная функция.

Выберем бесконечную последовательность координатных функций $T_1(x, y), \dots, T_n(x, y)$, которые удовлетворяют тем же заданным условиям, что и в методе Рунта. Так как граничное условие линейное, то функция $T_{(n)}(\tau, x, y) = \sum_{k=1}^n a_k(\tau) T_k(x, y)$ удовлетворяет граничным условиям задачи.

Согласно методу Бубнова — Галеркина, коэффициенты $a_k(\tau)$ ($k=1, 2, \dots, n$) определяются из требования, чтобы левая часть уравнения (6.117) стала после подстановки в нее T_n вместо T ортогональной функциям $\{T_i\}$ ($i=1, 2, \dots, n$). Тем самым метод Бубнова — Галеркина приводит к следующей системе n линейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\sum_{k=1}^n \frac{da_k(\tau)}{d\tau} (T_k, T_i) = a \sum_{k=1}^n a_k (\nabla^2 T_k, T_i) + \left(\frac{q_v}{c\rho}, T_i \right) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (6.118)$$

при начальных условиях $\sum_{k=1}^n a_k(0) (T_k, T_i) = (f, T_i)$ ($i=1, 2, \dots, n$).

Если предположить ортонормированность системы координатных функций $\{T_i\}$ ($i=1, 2, \dots, n$), то система (6.118) приобретает нормальный вид

$$\frac{da_i(\tau)}{d\tau} = a \sum_{k=1}^n a_k(\tau) (\nabla^2 T_k, T_i) + \left(\frac{q_v}{c\rho}, T_i \right) \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad \tau > 0, \quad (6.119)$$

с начальными условиями $a_i(0) = (f, T_i)$ ($i=1, 2, \dots, n$).

В случае стационарного температурного поля коэффициенты a_k не зависят от времени; левые части уравнений (6.118) и (6.119) обращаются в нуль и система дифференциальных уравнений (6.118) или (6.119) превращается в систему линейных алгебраических уравнений. При этом она совпадает с системой линейных алгебраических

уравнений, полученной по методу Рунге, если выбраны одинаковые системы координатных функций.

Решение задачи (6.117) методом Бубнова — Галеркина может быть построено несколько иначе [114], а именно функции вида

$$T_{(n)} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \varphi_{ij}(p, \tau), \quad p \in \Omega, \quad \tau > 0, \quad (6.120)$$

где a_{ij} — неизвестные коэффициенты; $\varphi_{ij}(p, \tau)$ — полная A -ортонормальная система функций в области $\Omega \times [0, \infty)$, дает решение задачи (6.117). Оператор A определяется выражением

$$A\varphi_{ij} = \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - a\nabla^2 \right) \varphi_{ij}, \quad (6.121)$$

а условие A -ортонормальности определяется соотношением

$$(A\varphi_{ij}, A\varphi_{lm}) = \begin{cases} 1, & i=j=l=m; \\ 0, & i \neq j \neq l \neq m. \end{cases}$$

Если система функций $\{\varphi_{ij}\}$ является A -ортонормальной, то коэффициенты a_{ij} определяются просто:

$$a_{ij} = \left(\frac{q_v}{c\rho}, A\varphi_{ij} \right) \quad (i, j = 1, 2, \dots).$$

Рассмотрим краевую задачу для простого уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} - a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = q_v(x, \tau)/(c\rho) = f(x, \tau), \quad f(x, \tau) \in L_2([0, 1] \times [0, \infty)) \quad (6.122)$$

с однородными начальными и граничными условиями

$$T(x, 0) = T(0, \tau) = T(1, \tau) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \tau > 0. \quad (6.123)$$

Выберем φ_{ij} в форме

$$\varphi_{ij}(x, \tau) = \sqrt{2} \sin i\pi x \psi_{ij}(\tau) \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 0, 1, \dots, n-1), \quad (6.124)$$

где $\psi_{ij}(\tau)$ являются неизвестными функциями τ , которые определяются так, чтобы функции (6.124) были A -ортонормальным множеством функций в области $[0, 1] \times [0, \infty)$, удовлетворяющими граничным условиям

$$\psi_{ij}(0) = \psi_{ij}(\infty) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 0, 1, 2, \dots, n-1). \quad (6.125)$$

Система функций (6.124) является A -ортонормальной, если функции

$$A\varphi_{ij} = \sqrt{2} \sin i\pi x \dot{\psi}_{ij} + \sqrt{2}a(i\pi)^2 \sin i\pi x \psi_{ij}, \quad (6.126)$$

где $\dot{\psi}_{ij} = \frac{d}{d\tau} \psi_{ij}$, являются полной ортонормальной системой функций

в $L_2([0, 1] \times [0, \infty))$. Такой системой, полной и ортонормальной в $L_2([0, 1] \times [0, \infty))$, является система

$$\sqrt{2} \sin i\pi x \frac{V_{2\alpha}}{j!} e^{-\alpha\tau} L_j(2\alpha\tau) \quad (i=1, 2, \dots; j=0, 1, \dots, \alpha>0), \quad (6.127)$$

где $L_j(u)$ являются полиномами Лагерра [55] порядка j .

Приравнивая правую часть (6.126) функциям (6.127), получаем

$$K\psi_{ij} + \dot{\psi}_{ij} = \frac{V_{2\alpha}}{j!} e^{-\alpha\tau} L_j(2\alpha\tau) \quad (i=1, 2, \dots; j=0, 1, \dots), \quad K = -\alpha \times \\ \times (i\pi)^2, \quad \alpha \neq K.$$

Если приближенное решение задачи (6.122) взять в форме

$$T_{(n)}(x, \tau) = \sqrt{2} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=1}^n a_{ij} \sin i\pi x \psi_{ij}(\tau),$$

где функции $\psi_{ij}(\tau)$ являются решениями последнего уравнения при условиях (6.125), то коэффициенты a_{ij} определяются равенством

$$a_{ij} = \left(f(x, \tau), A \left| \sqrt{2} \sin i\pi x \psi_{ij}(\tau) \right| \right) = \frac{2V_{\alpha}}{j!} \times \\ \times \int_0^{\infty} d\tau \int_0^1 f(x, \tau) \sin i\pi x e^{-\alpha\tau} L_j(2\alpha\tau) dx.$$

Если в качестве координатных функций $\psi_{ij}(p, \tau)$ выбрать полную в $L_2([0, 1] \times [0, \infty))$ систему функций, не A ортонормальную, то для нахождения коэффициентов a_{ij} получим систему алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} (A\psi_{ij}, A\psi_{im}) = (q_c/c\rho), \quad A\psi_{im} \quad (i, m=1, 2, \dots, n). \quad (6.128)$$

Пронлюстрируем этот метод решения для следующей краевой задачи. Дано уравнение теплопроводности с известной объемной плотностью теплового потока внутренних источников теплоты

$$AT = \frac{\partial T}{\partial \tau} - a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = c \sin \pi x \exp(-\gamma\tau), \quad 0 < x < 1, \quad \tau > 0 \quad (c \neq 0, \gamma > 0) \quad (6.129)$$

и с начальными и граничными условиями

$$T(x, 0) = T(0, \tau) = T(1, \tau) = 0. \quad (6.130)$$

Приближенное решение задачи (6.129), (6.130) будем искать в форме (6.120). Рассмотрим три варианта выбора системы координатных функций:

представление А

$$\varphi_{ij} = \sin i\pi x \tau^\alpha \exp(-j\tau) \quad (i, j=1, 2, \dots, n; \alpha > 0 = \text{const});$$

представление В

$$\varphi_{ij} = \sin i\pi x \tau^j \exp(-\alpha\tau) \quad (i, j=1, 2, \dots, n);$$

представление С

$$\varphi_{ij} = \sqrt{2} \sin i\pi x \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sin(2j \operatorname{arctg} \tau)}{\sqrt{1+\tau^2}} \quad (i, j=1, 2, \dots, n).$$

Можно показать [75], что система А неминимальна, система функций В неминимальна, система функций С сильно минимальна в соответствующем энергетическом пространстве (см. приложение II).

В работе [75] доказано, что необходимым и достаточным условием устойчивости вычислительного процесса Бубнова — Галеркина является сильная минимальность системы координатных функций в соответствующем энергетическом пространстве (см. приложение II).

Из систем функций А, В, С только представление координатной системы функций в форме С удовлетворяет этим условиям.

Получим соответствующие решения [114].

Определим функцию $A\varphi_{ij}$ для различных представлений системы координатных функций:

$$A. \quad A\varphi_{ij} = \sin i\pi x [a(i\pi)^2 \tau^\alpha \exp(-j\tau) + \tau^{\alpha-1} (\alpha - j\tau) \exp(-j\tau)];$$

$$B. \quad A\varphi_{ij} = \sin i\pi x [a(i\pi)^2 \tau^j + (j - \alpha\tau) \tau^{j-1}] \exp(-\alpha\tau);$$

$$C. \quad A\varphi_{ij} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \sin i\pi x \left\{ \frac{(i\pi)^2 \sin(2j \operatorname{arctg} \tau)}{\sqrt{1+\tau^2}} + (1+\tau^2)^{-3/2} [2j \times \right. \\ \left. \times \cos(2j \operatorname{arctg} \tau) - \tau \sin(2j \operatorname{arctg} \tau)] \right\}.$$

Вычислим соответствующие скалярные произведения ($A\varphi_{ij}$, $A\varphi_{mn}$):

$$A. \quad (A\varphi_{ij}, A\varphi_{mn}) = \frac{\delta_{im}}{2} \left\{ \frac{(2\alpha-2)!}{(n+j)^{2\alpha-1}} \left[a^2(m\pi)^2 \frac{2\alpha(2\alpha-1)}{(n+j)^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + jn \frac{2\alpha(2\alpha-1)}{(n+j)^2} - \alpha(\alpha-1) \right] \right\};$$

$$B. \quad (A\varphi_{ij}, A\varphi_{mn}) = \frac{\delta_{im}}{2} \left\{ \frac{(n+j-2)!}{(2\alpha)^{n+j-1}} \left[a^2(m\pi)^2 \frac{(j+n)(j+n-1)}{(2\alpha)^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + jn - \frac{(j+n)(j+n-1)}{4} \right] \right\};$$

$$\begin{aligned}
C. (Aq_{ij}, Aq_{mn}) = & \frac{8}{\pi} \left\{ \frac{\delta_{im}}{2} \left[\frac{i^4 \pi^5}{4} \delta_{jm} + 2jn \sum_{p=0}^j \sum_{q=0}^n \binom{2j}{2p} \binom{2n}{2q} \times \right. \right. \\
& \times (-1)^{p+i} B\left(j+n-p-q+\frac{5}{2}, p+q+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{j-1} \sum_{q=0}^{n-1} \binom{2j}{2p+1} \times \\
& \times \binom{2n}{2q+1} (-1)^{p+i} B\left(j+n-p-q+\frac{1}{2}, p+q+\frac{5}{2}\right) + i^2 \pi^2 n \times \\
& \times \sum_{p=0}^{j-1} \sum_{q=0}^n \binom{2j}{2p+1} \binom{2n}{2q} (-1)^{p+i} B(j+n-p-q+1, p+q+1) + i^2 \pi^2 j \times \\
& \times \sum_{p=0}^j \sum_{q=0}^{n-1} \binom{2j}{2p} \binom{2n}{2q+1} (-1)^{p+i} B(j+n-p-q+1, p+q+1) - \\
& - i^2 \pi^2 \sum_{p=0}^{j-1} \sum_{q=0}^{n-1} \binom{2j}{2p+1} \binom{2n}{2q+1} (-1)^{p+i} B(j+n-p-q, p+q+2) - \\
& - i \sum_{p=0}^{j-1} \sum_{q=0}^n \binom{2j}{2p+1} \binom{2n}{2q} (-1)^{p+i} B\left(j+n-p-q+\frac{3}{2}, p+q+\frac{3}{2}\right) - \\
& \left. \left. - n \sum_{q=0}^j \sum_{p=0}^{n-1} \binom{2j}{2p} \binom{2n}{2q+1} (-1)^{p+i} B\left(j+n-p-q+\frac{3}{2}, p+q+\frac{3}{2}\right) \right\} \right\}.
\end{aligned}$$

где бета-функция $B(x, y)$ определяется по формуле

$$B(x, y) = 2 \int_0^{\pi/2} (\cos z)^{2x-1} (\sin z)^{2y-1} dz.$$

Определим скалярные произведения $(c \sin \pi x \exp(-\gamma \tau), Aq_{ij}) = v_{ij}$:

$$A. v_{ij} = \frac{c \delta_{ij}}{2} \left\{ [a(i\pi)^2 - j] \frac{a!}{(j+\gamma)^{a+1}} + \frac{a!}{(j+\gamma)^a} \right\};$$

$$B. v_{ij} = \frac{c \delta_{ij}}{2} \frac{1}{(a+\gamma)^j} \left[\frac{a(i\pi)^2 - a}{a+\gamma} + 1 \right];$$

$$\begin{aligned}
C. v_{ij} = & c \sqrt{\frac{2}{\pi}} \delta_{ij} \left[\pi^2 \int_0^\infty \exp(-\gamma t) \sin(2j \arctg t) (1+t^2)^{-1/2} dt + 2j \times \right. \\
& \times \int_0^\infty \exp(-\gamma t) \cos(2j \arctg t) (1+t^2)^{-3/2} dt - \int_0^\infty t \exp(-\gamma t) \times \\
& \times \sin(2j \arctg t) (1+t^2)^{-3/2} dt \left. \right].
\end{aligned}$$

Таблица 6.3

Значения коэффициентов a_{ij} при выборе решения
в форме А ($\gamma=10$, $c=\gamma-\pi^2$, $a=1$)

Коэффициенты	Значения n		
	2	3	4
det	$5,81 \cdot 10^3$	$1,39 \cdot 10^5$	$5,32 \cdot 10^2$
a_{11}	$-5,13 \cdot 10^{-4}$	$1,18 \cdot 10^{-3}$	$-1,73 \cdot 10^{-3}$
a_{12}	$4,68 \cdot 10^{-3}$	$-2,26 \cdot 10^{-2}$	$5,25 \cdot 10^{-2}$
a_{13}	—	$6,12 \cdot 10^{-2}$	$-3,03 \cdot 10^{-1}$
a_{14}	—	—	$4,30 \cdot 10^{-1}$
a_{15}	—	—	—
a_{16}	—	—	—
a_{17}	—	—	—
a_{18}	—	—	—
ses	$4,81 \cdot 10^{-33}$	$3,04 \cdot 10^{-32}$	$6,47 \cdot 10^{-31}$

$a_{ij}=0$, $i \neq 1$, $j=1, 2, \dots, n$

Продолжение табл. 6.3

Коэффициенты	Значения n			
	5	6	7	8
det	$4,35 \cdot 10^{-2}$	$7,50 \cdot 10^{-26}$	$2,16 \cdot 10^{-67}$	$7,08 \cdot 10^{-103}$
a_{11}	$1,91 \cdot 10^{-3}$	$-1,78 \cdot 10^{-3}$	$1,57 \cdot 10^{-3}$	$-1,38 \cdot 10^{-3}$
a_{12}	$-8,07 \cdot 10^{-2}$	$9,83 \cdot 10^{-2}$	$-1,08 \cdot 10^{-1}$	$1,16 \cdot 10^{-1}$
a_{13}	$7,35 \cdot 10^{-1}$	$-1,25$	$1,80$	$-2,43$
a_{14}	$-2,19$	$5,83$	$-1,17 \cdot 10^1$	$2,05 \cdot 10^1$
a_{15}	$2,02$	$-1,11 \cdot 10^1$	$3,45 \cdot 10^1$	$-8,40 \cdot 10^1$
a_{16}	—	$7,41$	$-4,69 \cdot 10^1$	$1,77 \cdot 10^2$
a_{17}	—	—	$2,40 \cdot 10^1$	$-1,84 \cdot 10^2$
a_{18}	—	—	—	$7,51 \cdot 10^1$
ses	$1,12 \cdot 10^{-23}$	$7,88 \cdot 10^{-29}$	$1,51 \cdot 10^{-27}$	$8,91 \cdot 10^{-26}$

$a_{ij}=0$, $i \neq 1$, $j=1, 2, \dots, n$

Таблица 6.4

Значения коэффициентов a_{ij} при выборе решения
в форме В ($\gamma=10$, $c=\gamma-\pi^2$, $a=1$)

Коэффициенты	Значения n			
	2	3	4	5
det	$2,52 \cdot 10^{-9}$	$8,39 \cdot 10^{-25}$	$1,83 \cdot 10^{-61}$	$1,31 \cdot 10^{-91}$
a_{11}	$1,30 \cdot 10^{-1}$	$1,30 \cdot 10^{-1}$	$1,30 \cdot 10^{-1}$	$1,30 \cdot 10^{-1}$
a_{12}	$-8,39 \cdot 10^{-03}$	$-8,50 \cdot 10^{-8}$	$-8,50 \cdot 10^{-3}$	$-8,50 \cdot 10^{-5}$
a_{13}	—	$3,62 \cdot 10^{-4}$	$3,69 \cdot 10^{-4}$	$3,70 \cdot 10^{-4}$
a_{14}	—	—	$-1,70 \cdot 10^{-5}$	$-1,20 \cdot 10^{-5}$
a_{15}	—	—	—	$3,04 \cdot 10^{-7}$
ses	$1,74 \cdot 10^{-33}$	$1,75 \cdot 10^{-33}$	$3,15 \cdot 10^{-33}$	$3,10 \cdot 10^{-33}$

$a_{ij}=0$, $i \neq 1$, $j=1, 2, \dots, n$

Решение системы алгебраических уравнений (6.128) может быть получено различными численными методами. В частности, используя метод исключения Гаусса (см. приложение V, алгоритм 3), получим значения коэффициентов a_{ij} при различных представлениях систем координатных функций (табл. 6.3 — 6.5). В первых строках этих таблиц даны значения соответствующих определителей системы (6.128), в нижних — значения ошибки

$$SES = \sum_{i=1}^n (g_i - f_i)^2 *$$

Таблица 6.5

Значения коэффициентов a_{ij} при выборе решения в форме С
($\gamma = 10$, $c = \gamma - \pi^2$, $a = 1$)

Коэффициенты	Значения a^*			
	2	3	4	5
del	$1,03 \cdot 10^3$	$1,14 \cdot 10^6$	$1,37 \cdot 10^8$	$1,80 \cdot 10^{10}$
a_{11}	$3,75 \cdot 10^{-4}$	$3,72 \cdot 10^{-4}$	$3,72 \cdot 10^{-4}$	$3,72 \cdot 10^{-4}$
a_{12}	$6,67 \cdot 10^{-4}$	$6,23 \cdot 10^{-4}$	$6,16 \cdot 10^{-4}$	$6,18 \cdot 10^{-4}$
a_{13}	—	$7,81 \cdot 10^{-4}$	$7,02 \cdot 10^{-4}$	$6,93 \cdot 10^{-4}$
a_{14}	—	—	$7,55 \cdot 10^{-4}$	$6,49 \cdot 10^{-4}$
a_{15}	—	—	—	$6,57 \cdot 10^{-4}$
a_{16}	—	—	—	—
a_{17}	—	—	—	—
a_{18}	—	—	—	—
a_{19}	—	—	—	—
ses	$8,38 \cdot 10^{-31}$	$3,01 \cdot 10^{-30}$	$8,28 \cdot 10^{-30}$	$1,10 \cdot 10^{-29}$

$$a_{ij}=0, i \neq j, j=1, 2, \dots, n$$

Продолжение табл. 6.5

Коэффициенты	Значения a			
	6	7	8	9
del	$2,61 \cdot 10^{12}$	$4,16 \cdot 10^{13}$	$7,29 \cdot 10^{16}$	$1,40 \cdot 10^{19}$
a_{11}	$3,72 \cdot 10^{-4}$	$3,72 \cdot 10^{-4}$	$3,72 \cdot 10^{-4}$	$3,72 \cdot 10^{-4}$
a_{12}	$6,18 \cdot 10^{-4}$	$6,18 \cdot 10^{-4}$	$6,18 \cdot 10^{-4}$	$6,18 \cdot 10^{-4}$
a_{13}	$6,97 \cdot 10^{-4}$	$6,97 \cdot 10^{-4}$	$6,97 \cdot 10^{-4}$	$6,97 \cdot 10^{-4}$
a_{14}	$6,42 \cdot 10^{-4}$	$6,48 \cdot 10^{-4}$	$6,47 \cdot 10^{-4}$	$6,47 \cdot 10^{-4}$
a_{15}	$5,38 \cdot 10^{-4}$	$5,36 \cdot 10^{-4}$	$5,43 \cdot 10^{-4}$	$5,41 \cdot 10^{-4}$
a_{16}	$5,45 \cdot 10^{-4}$	$4,22 \cdot 10^{-4}$	$4,26 \cdot 10^{-4}$	$4,33 \cdot 10^{-4}$
a_{17}	—	$4,45 \cdot 10^{-4}$	$3,25 \cdot 10^{-4}$	$3,33 \cdot 10^{-4}$
a_{18}	—	—	$3,62 \cdot 10^{-4}$	$2,49 \cdot 10^{-4}$
a_{19}	—	—	—	$2,96 \cdot 10^{-4}$
ses	$1,66 \cdot 10^{-29}$	$2,61 \cdot 10^{-29}$	$3,95 \cdot 10^{-29}$	$3,83 \cdot 10^{-29}$

$$a_{ij}=0, i \neq j, j=1, 2, \dots, n$$

* Если систему (6.128) записать в виде $A\bar{x}=\bar{f}$, где A — матрица коэффициентов, $\bar{x}$ — вектор неизвестных, $\bar{f}$ — вектор правых частей, а через $\bar{y}$ обозначить приближенное решение системы, то $A\bar{y}=\bar{g}$.

Используя табл. 6.3 — 6.5, вычислим значения $T(x, \tau)$ при $\gamma = 10$, $a = 1$, $c = \gamma - \pi^2$ в некоторых точках (x, τ) . Данные расчетов представлены в табл. 6.6. С целью сравнения результатов методом разделения переменных можно получить точное решение задачи (6.129), (6.130):

$$T(x, \tau) = c \sin \pi x [\exp(-\pi^2 \tau) - \exp(-\gamma \tau)].$$

Результаты расчета температуры по последнему решению приведены в табл. 6.7.

Таблица 6.6

Сравнение значений $T(x, \tau)$, вычисленных методом Бубнова — Галеркина при различном выборе координатных функций

$\tau \backslash x$	1/6	1/3	1/2	2/3	5/6
Представление решения в форме А ($n=8$)					
0,1	$3,11 \cdot 10^{-3}$	$5,38 \cdot 10^{-3}$	$6,21 \cdot 10^{-3}$	$5,38 \cdot 10^{-3}$	$3,11 \cdot 10^{-3}$
0,2	$2,55 \cdot 10^{-3}$	$4,41 \cdot 10^{-3}$	$5,10 \cdot 10^{-3}$	$4,41 \cdot 10^{-3}$	$2,55 \cdot 10^{-3}$
0,3	$1,65 \cdot 10^{-3}$	$2,85 \cdot 10^{-3}$	$3,30 \cdot 10^{-3}$	$2,85 \cdot 10^{-3}$	$1,65 \cdot 10^{-3}$
Представление решения в форме В ($n=5$)					
0,1	$2,41 \cdot 10^{-3}$	$4,18 \cdot 10^{-3}$	$4,82 \cdot 10^{-3}$	$4,18 \cdot 10^{-3}$	$2,41 \cdot 10^{-3}$
0,2	$1,78 \cdot 10^{-3}$	$3,09 \cdot 10^{-3}$	$3,57 \cdot 10^{-3}$	$3,09 \cdot 10^{-3}$	$1,78 \cdot 10^{-3}$
0,3	$9,92 \cdot 10^{-4}$	$1,72 \cdot 10^{-3}$	$1,99 \cdot 10^{-3}$	$1,72 \cdot 10^{-3}$	$9,92 \cdot 10^{-4}$
Представление решения в форме С ($n=9$)					
0,1	$2,30 \cdot 10^{-3}$	$3,98 \cdot 10^{-3}$	$4,59 \cdot 10^{-3}$	$3,98 \cdot 10^{-3}$	$2,30 \cdot 10^{-3}$
0,2	$2,09 \cdot 10^{-3}$	$3,62 \cdot 10^{-3}$	$4,18 \cdot 10^{-3}$	$3,62 \cdot 10^{-3}$	$2,09 \cdot 10^{-3}$
0,3	$8,59 \cdot 10^{-4}$	$1,49 \cdot 10^{-3}$	$1,71 \cdot 10^{-3}$	$1,49 \cdot 10^{-3}$	$8,59 \cdot 10^{-4}$

Таблица 6.7

Значения $T(x, \tau)$, вычисленные по точному решению задачи (6.129), (6.130)

$\tau \backslash x$	1/6	2/3	1/2	2/3	5/6
0,1	$2,414 \cdot 10^{-3}$	$4,182 \cdot 10^{-3}$	$4,828 \cdot 10^{-3}$	$4,182 \cdot 10^{-3}$	$2,414 \cdot 10^{-3}$
0,2	$1,788 \cdot 10^{-3}$	$3,097 \cdot 10^{-3}$	$3,576 \cdot 10^{-3}$	$3,097 \cdot 10^{-3}$	$1,788 \cdot 10^{-3}$
0,3	$9,931 \cdot 10^{-4}$	$1,720 \cdot 10^{-3}$	$1,986 \cdot 10^{-3}$	$1,720 \cdot 10^{-3}$	$9,931 \cdot 10^{-4}$

Из табл. 6.6 видно, что представление решения в форме А приводит к неустойчивости вычислительного процесса, что и следовало ожидать. В то же время представление решений в форме В и С приводит к результатам, хорошо согласующимся с точным решением.

Однако система координатных функций В не является сильно минимальной и хорошее согласование приближенного решения с точ-

ным неожиданно. Как отмечено в работе [114], неустойчивость, связанная с использованием неминимальной системы координатных функций, может не возникать, если первые один или два элемента неминимальной системы определяют очень хорошее первое приближение к решению задачи.

Температурное поле пластины при граничных условиях 1 рода. Найти распределение температур в одномерной пластине при наличии внутренних равномерно распределенных источников теплоты с постоянной плотностью теплового потока и граничных условиях 1 рода:

$$\partial\Theta/\partial Fo = \partial^2\Theta/\partial X^2 + Os, \quad (Os = q_v R^2 / [\lambda (T_0 - T_S)]),$$

$$\Theta(X, 0) = \Theta_0 \quad (|X| < 1, \quad X = x/R, \quad Fo = \alpha t / R^2),$$

$$\Theta(-1, Fo) = \Theta_1(Fo), \quad \Theta(1, Fo) = \Theta_2(Fo).$$

Приближенное решение задачи ищем в виде

$$\Theta_{(n)}(X, Fo) = \frac{1}{2} [\Theta_1 + \Theta_2 + X(\Theta_2 - \Theta_1)] + \sum_{k=1}^n a_k(Fo)(1 - X^2).$$

Решение в такой форме удовлетворяет граничным условиям задачи.

Рассмотрим частный случай задачи, когда в начальный момент времени температура на границах мгновенно принимает заданное значение, которое поддерживается на протяжении всего процесса теплообмена, т. е.

$$\Theta_1(Fo) = \Theta_2(Fo) = \Theta_c = \text{const} \quad \text{и} \quad \partial\Theta(0, Fo) / \partial X = 0$$

Ограничимся нахождением первого приближения решения

$$\Theta_{(1)}(X, Fo) = \Theta_c + a(Fo)(1 - X^2).$$

Реализуем метод Бубнова — Галеркина:

$$\int_0^1 \frac{da}{dFo} (1 - X^2)^2 dX = a \int_0^1 (-2)(1 - X^2) dX + Os \int_0^1 (1 - X^2) dX;$$

$$\int_0^1 [\Theta_c + a(0)(1 - X^2)](1 - X^2) dX = \Theta_0 \int_0^1 (1 - X^2) dX,$$

получим обыкновенное линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно коэффициента $a(Fo)$

$$(4/5)(da/dFo) + 2a = Os$$

с начальным условием

$$a(0) = (5/4)(\Theta_0 - \Theta_c). \quad (6.131)$$

Интеграл уравнения (6.131) с учетом начального условия имеет вид

$$a(Fo) = (Os/2) [1 - \exp(-2,5Fo)] + (5/4)(\Theta_0 - \Theta_c) \exp(-2,5Fo).$$

Таким образом, приближенное решение запишется в виде

$$\Theta_{(1)}(X, Fo) = \Theta_c + \frac{5}{4}(\Theta_0 - \Theta_c)(1 - X^2) \exp(-2,5Fo) + \\ + \frac{Os}{2}(1 - X^2)\{1 - \exp(-2,5Fo)\}.$$

Интересно отметить, что точное решение соответствующей стационарной задачи совпадает с

$$\lim_{Fo \rightarrow \infty} \Theta_{(1)}(X, Fo) = \Theta_c + (Os/2)(1 - X^2).$$

Это свидетельствует о достаточно хорошей сходимости приближенного решения к точному при больших значениях числа Фурье

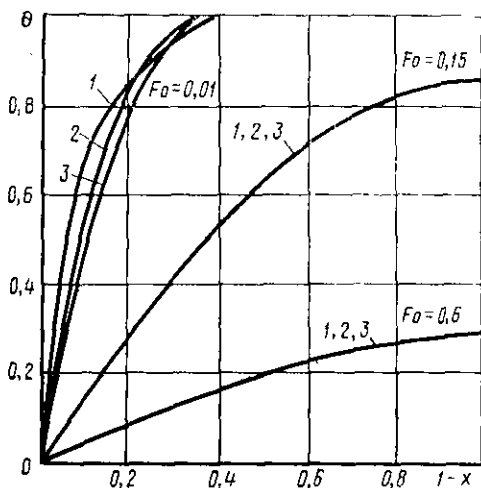


Рис. 6.2. Распределение относительной избыточной температуры по относительной координате x/R :

1 — третье приближение по методу Бубнова — Галеркина; 2 — результаты расчета по точному решению; 3 — первое приближение по методу Бубнова — Галеркина

Аналогично можно получить последующие приближения. На рис. 6.2 представлены результаты расчетов распределения относительной избыточной температуры по относительной координате x/R в первом приближении, в третьем приближении [107] и по точному решению [65]. Из рис. 6.2 видно, что погрешность приближенных решений уменьшается с увеличением номера приближения и значений числа Фурье. Максимальная погрешность имеет место вблизи нулевого значения Фурье. Это объясняется тем, что начальное условие удовлетворяется в среднем, а не точно.

Теплопроводность стержня с формой поперечного сечения в виде эллипса. Рассмотрим более сложную задачу. Тепловыделяющий элемент (представляющий собой неограниченное цилиндрическое тело) с равномерно распределенной объемной плотностью теплового потока источника теплоты q_v имеет температуру на поверхности $\psi(\tau)$. Пренебрегая аксиальной теплопроводностью, найти распределение температуры, если область поперечного сечения цилиндра представляет собой эллипс с полуосями d , b и границей S :

$$S(x, y) = 1 - (x/d)^2 - (y/b)^2.$$

Математическая формулировка задачи

$$\partial T / \partial \tau = a (\partial^2 T / \partial x^2 + \partial^2 T / \partial y^2) + q_v / (c\rho), \quad y \in \Omega, \quad \tau > 0;$$

$$T(x, y, 0) = T_0, \quad T(x, y, \tau)|_S = \varphi(\tau).$$

Приближенное решение, удовлетворяющее граничному условию задачи, будем искать в виде

$$T_{(n)}(x, y, \tau) = \varphi(\tau) + \sum_{k=1}^n a_k(\tau) [1 - (x/d)^2 - (y/b)^2] [(x/d)^2 + (y/b)^2]^k - 1.$$

Ограничимся определением решения в первом приближении. Запишем невязку $A[T_{(n)}] \neq 0$ при $n=1$:

$$\psi'(\tau) + a_1'(\tau) [1 - (x/d)^2 - (y/b)^2] + 2a_1(\tau) (a/d^2 + a/b^2) - q_v / (c\rho) \neq 0.$$

Выполним процедуру метода Бубнова — Галеркина:

$$\int_{\Omega} \{ \psi'(\tau) + a_1'(\tau) [1 - (x/d)^2 - (y/b)^2] + 2a_1(\tau) (a/d^2 + a/b^2) - q_v / (c\rho) \} \times \\ \times [1 - (x/d)^2 - (y/b)^2] d\Omega = 0,$$

получим линейное обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка относительно коэффициента $a_1(\tau)$

$$\frac{1}{\tau} \frac{da_1}{d\tau} + \frac{a(d^2 + b^2)}{d^2 b^2} a_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{q_v}{c\rho} - \psi'(\tau) \right] \quad (6.132)$$

с начальным условием

$$a_1(0) = (3/2) [T_0 - \varphi(0)]. \quad (6.133)$$

Дифференциальное уравнение (6.132) получено при произвольных законах изменения $\varphi(\tau)$. Это позволяет найти приближенное поле температуры при любых конкретных законах изменения температуры поверхности эллипса во времени.

При $\varphi(\tau) = T_c = \text{const}$, решая уравнение (6.132) с начальным условием (6.133), получим

$$a_1(\text{Fo}) = \frac{3}{2} (T_0 - T_c) \exp(-6\text{Fo}) + \frac{q_v d^2 b^2}{2\lambda (d^2 + b^2)} [1 - \exp(-6\text{Fo})],$$

где $\text{Fo} = (a\tau/2) (1/d^2 + 1/b^2)$.

Относительная температура внутри цилиндрического тела эллиптического сечения в первом приближении имеет вид

$$\Theta(\xi, \eta, \text{Fo}) = \left\{ \frac{3}{2} \exp(-6\text{Fo}) + \text{Os} [1 - \exp(-6\text{Fo})] \right\} (1 - \xi^2 - \eta^2),$$

где $\xi = x/d$, $\eta = y/b$, $\text{Os} = q_v d^2 b^2 / [2\lambda (d^2 + b^2) (T_0 - T_c)]$.

Распределение температуры при стационарном режиме совпадает со стационарным распределением температуры, полученным при $\text{Fo} \rightarrow \infty$:

$$T(x, y) = T_c + \frac{q_v d^2 b^2}{2\lambda (d^2 + b^2)} \left[1 - \left(\frac{x}{d} \right)^2 - \left(\frac{y}{b} \right)^2 \right].$$

Поэтому с увеличением значений числа Fo приближенное решение краевой задачи довольно быстро сходится к точному решению

Задача 6.2 [111]. В бесконечном цилиндрическом стержне выделяется теплота внутренними источниками, объемная плотность теплового потока которых

$$q_v = G_1 \sin \vartheta + G_2 r^3 \sin 2\vartheta,$$

где G_1 и G_2 — постоянные.

Запишите дифференциальное уравнение теплопроводности, если предполагается, что процесс установившийся и температура не изменяется вдоль оси цилиндра. Сформулируйте вариационную задачу, эквивалентную краевой задаче теплопроводности, если температура на границе равна нулю ($T(1, \vartheta) = 0$ при всех ϑ).

Выбрав приближенное решение в виде

$$T(r, \vartheta) = a_1(r) \sin \vartheta + a_2(r) \sin 2\vartheta,$$

определите a_1 и a_2 методом Канторовича.

Задача 6.3. Найти функцию $T(x, y)$, реализующую минимум интеграла

$$F(T) = \int_0^1 \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{k}{\lambda} T \sin \pi x \sin \pi y \right] dx dy \quad (6.134)$$

и удовлетворяющую граничным условиям

$$T(1, y) = T(0, y) = T(x, \pi) = T(x, 0) = 0. \quad (6.135)$$

1. Запишите дифференциальную формулировку задачи (6.134), (6.135), если $T(x, y)$ описывает распределение температуры по пластине, на краях которой поддерживается нулевая температура, а отдача теплоты с поверхности ее происходит со скоростью, равной $k \sin \pi x \sin \pi y$.

2. Выбрав функцию $T(x, y)$ в виде $T = x(1-x)a_1(y)$, определить функцию $a_1(y)$ методом Канторовича.

3. Выбрав функцию $T(x, y)$ в виде $T = x(1-x)a_1(y) + x^2(1-x)^2 a_2(y)$, определить функции $a_1(y)$ и $a_2(y)$ методом Канторовича.

4. Сравнить полученные приближенные решения с точным решением

$$T(x, y) = -[1/(\pi^2 + 1)] \sin \pi x \sin \pi y$$

при $x=0,25$; $0,5$ и $y=1$ и дать оценку погрешности приближенных решений в этих точках.

§ 6.8. Совместное применение методов Бубнова — Галеркина и характеристик при решении нестационарных задач теплопроводности

Пусть цилиндрическое тело постоянного поперечного сечения движется прямолинейно вдоль одной из осей прямоугольной системы координат (например, z) с известной скоростью $\omega(\tau)$. Уравнение переноса теплоты в движущемся стержне имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + \omega(\tau) \frac{\partial T}{\partial z} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{q_v}{c\rho}.$$

В отличие от задач теплопроводности для неподвижных тел записанное выше уравнение содержит слагаемое с первой производной по координате, характеризующее изменение плотности тепло-

вого потока вдоль оси z вследствие движения тела. Наличие конвективного члена $\omega \partial T / \partial z$ в уравнении значительно усложняет процесс его решения.

В работе [56] предложен метод решения такого типа задач, состоящий в последовательном применении методов Бубнова — Галеркина и характеристик. Суть метода состоит в том, что приближенное решение задачи, удовлетворяющее граничным условиям на поверхности стержня, ищется в виде ряда с неопределенными коэффициентами, зависящими от времени и аксиальной координаты, а координатные функции зависят от координат плоскости поперечного сечения. Выполняя процедуру метода Бубнова — Галеркина, для определения неизвестных коэффициентов получают систему уравнений гиперболического типа в частных производных первого порядка.

Для решения этой системы применяется метод характеристик [55].

С целью иллюстрации такого подхода рассмотрим нагрев (на участке $0 < z < \infty$) стержня прямоугольного сечения ($|x| \leq b/2$, $|y| \leq d/2$), движущегося со скоростью $\omega = \text{const}$ вдоль оси z . Считаем, что изменение теплового потока вдоль оси стержня, обусловленное теплопроводностью, мало по сравнению с изменением теплового потока вдоль оси, обусловленным движением тела, т. е. $\omega \partial T / \partial z \gg a \partial^2 T / \partial z^2$.

Пусть на входе в участок теплообмена температура тела постоянна во все моменты времени $\tau > 0$ и равна T_0 — начальной температуре тела. На поверхности стержня заданы граничные условия II рода, а внутренние источники теплоты отсутствуют. Тогда соответствующая задача имеет вид

$$\partial T / \partial \tau + \omega \partial T / \partial z = a (\partial^2 T / \partial x^2 + \partial^2 T / \partial y^2);$$

$$\lambda \partial T / \partial \nu = q_{cb} \quad (y = \pm d/2, |x| \leq b/2);$$

$$\lambda \partial T / \partial \nu = q_{ca} \quad (x = \pm b/2, |y| \leq d/2);$$

$$T = T_0 \quad (\tau = 0, z = 0),$$

где ν — нормаль к границе поперечного сечения тела.

Для функции $\Theta = (T - T_0) / \lambda Q_s$ в безразмерных переменных $X = 2x/d_s$, $Y = 2y/d_s$, $Z = 4az/(\omega d_s^2)$, $Fo = 4a\tau/d_s^2$ исходная краевая задача запишется следующим образом:

$$\partial \Theta / \partial Fo + W \partial \Theta / \partial Z = \partial^2 \Theta / \partial X^2 + \partial^2 \Theta / \partial Y^2;$$

$$\partial \Theta / \partial \bar{\nu} = u_0 \quad (Y = \pm (1 + \gamma)/2, |X| \leq (1 + \gamma)/(2\gamma));$$

$$\partial \Theta / \partial \bar{\nu} = \beta u_0 \quad (X = \pm (1 + \gamma)/(2\gamma), |Y| \leq (1 + \gamma)/2);$$

$$\Theta = 0 \quad (Fo = 0, Z = 0),$$

где $\gamma = d/b$; $Q_s = 2(q_{cb}b + q_{ca}d)$; $W = \omega/\bar{\omega}$; $d_s = 2bd/(b+d)$; $\beta = q_{ca}/q_{cb}$, $u_0 = \gamma/[2(1 + \gamma)(1 + \beta\gamma)]$; $\bar{\nu}$ — нормаль к границе, записанная в безразмерных переменных; $\bar{\omega}$ — некоторая характерная скорость движения тела.

Решение задачи ищем в виде

$$\Theta(X, Y, Z, Fo) = a_0(Z, Fo) + u(X, Y) + v(X, Y, Z, Fo),$$

где $a_0(Z, Fo)$ находится из уравнения баланса теплоты в теле; $u(X, Y)$ — решение соответствующей стационарной задачи при неоднородных граничных условиях; функция $v(X, Y, Z, Fo)$ — решение нестационарной краевой задачи при однородных граничных условиях на поверхности тела.

Для определения функции a_0 подставим сумму из первых двух слагаемых последнего выражения в исходное дифференциальное уравнение и проинтегрируем полученное выражение по области поперечного сечения тела D с учетом граничных условий:

$$\iint_D \frac{\partial a_0}{\partial Fo} dD + \iint_D W \frac{\partial a_0}{\partial Z} dD = \iint_D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \right) dD,$$

откуда

$$\frac{\partial a_0}{\partial Fo} + W \frac{\partial a_0}{\partial Z} = \frac{1}{\sigma} \iint_D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \right) dD,$$

где $\sigma = (1 + \gamma)^2 / \gamma$ — площадь поперечного сечения тела.

С использованием формулы Грина

$$\iint_D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \right) dD = \oint_S \frac{\partial u}{\partial \nu} dS$$

получим следующее уравнение для определения функции $a_0(Z, Fo)$:

$$\partial a_0 / \partial Fo + W \partial a_0 / \partial Z = \gamma / (1 + \gamma)^2,$$

решение которого имеет вид

$$a_0(Z, Fo) = \begin{cases} Fo / \sigma, & Z \geq W(Fo), \\ Z / (W\sigma), & Z \leq W(Fo). \end{cases}$$

При $W = W(Fo)$ последнее уравнение может быть решено методом характеристик.

Функция $u(X, Y)$ находится с учетом выражения для $a_0(Z, Fo)$ как решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} = \frac{\partial a_0}{\partial Fo} + w \frac{\partial a_0}{\partial Z}$$

с соответствующими граничными условиями.

Это уравнение решено методом конечных интегральных преобразований (см. гл. IV):

$$u(X, Y) = \frac{u_0}{6} \left(\frac{3X^2 - c^2}{c} + \frac{3Y^2 - f^2}{f} \right) + C_0,$$

где $c = (1 + \gamma) / (2\gamma)$, $f = (1 + \gamma) / 2$, $C_0 = -\frac{1}{cf} \int_0^c \int_0^f u(X, Y) dX dY$.

Определение функции $v(X, Y, Z, F_0)$ сводится к решению краевой задачи

$$\partial v / \partial F_0 + W \partial v / \partial Z = \partial^2 v / \partial X^2 + \partial^2 v / \partial Y^2;$$

$$v = -[a_0(Z, 0) + u(X, Y)], F_0 = 0;$$

$$v = -[a_0(0, F_0) + u(X, Y)], Z = 0;$$

$$\partial v / \partial \bar{v}|_S = 0,$$

вид решения которой по методу Бубнова — Галеркина представим следующим образом:

$$v(X, Y, Z, F_0) = \sum_{k=1}^n a_k(Z, F_0) \psi_k(X, Y),$$

где $\psi_k(X, Y) = \varphi_k - \omega \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial X} \frac{\partial \omega}{\partial X} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial Y} \frac{\partial \omega}{\partial Y} \right) + C_k$ — система координатных функций; $\varphi_k(X, Y)$ — некоторая полная система функций (для данной задачи взяты полиномы Чебышева); $a_k(Z, F_0)$ — неизвестные функции; $\omega(X, Y) = (c^2 - X^2)/(2c) + (f^2 - Y^2)/(2f) - \frac{1}{2} \times$

$\times \sqrt{\frac{c^2 - X^2}{c^2} + \frac{f^2 - Y^2}{f^2}}$; постоянные C_k определяются из условия

$$\int_D v(X, Y, Z, F_0) = 0.$$

Выполняя процедуру метода Бубнова — Галеркина для определения функции $a_k(Z, F_0)$ ($k=1, 2, \dots, n$), получим систему дифференциальных уравнений в частных производных вида

$$\sum_{k=1}^n \left(A_{mk} \frac{\partial a_k}{\partial F_0} + B_{mk} \frac{\partial a_k}{\partial Z} \right) = \sum_{k=1}^n D_{mk} a_k \quad (m=1, 2, \dots, n) \quad (6.136)$$

с условиями однозначности

$$\sum_{k=1}^n A_{mk} a_k(Z, 0) = F_m^{(1)}(Z);$$

$$\sum_{k=1}^n A_{mk} a_k(0, F_0) = F_m^{(2)}(F_0) \quad (m=1, 2, \dots, n),$$

где $A_{mk} = \int_D \psi_k \psi_m dD$; $B_{mk} = \int_D W \psi_k \psi_m dD$;

$$D_{mk} = - \int_D \left(\frac{\partial \psi_k}{\partial X} \frac{\partial \psi_m}{\partial X} + \frac{\partial \psi_k}{\partial Y} \frac{\partial \psi_m}{\partial Y} \right) dD;$$

$$F_m^{(1)}(Z) = - \int_D [a_0(Z, 0) + u(X, Y)] \psi_m dD;$$

$$F_m^{(2)}(F_0) = - \int_D [a_0(0, F_0) + u(X, Y)] \psi_m dD.$$

Данная система решена методом характеристик [55], суть которого заключается в следующем. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ — некоторое непрерывно дифференцируемое решение системы, а $\mathcal{L}$ — некоторая гладкая кривая без кратных точек. Зная решение системы на кривой $\mathcal{L}$, сделаем попытку отыскать на ней частные производные $p_k = \partial a_k / \partial F_0$ и $q_k = \partial a_k / \partial Z$ ($k=1, 2, \dots, n$), значения которых на этой кривой связаны уравнениями

$$\sum_{k=1}^n (A_{mk} p_k + B_{mk} q_k) = \sum_{k=1}^n D_{mk} a_k \quad (m=1, 2, \dots, n)$$

и дифференциальными соотношениями

$$p_k dF_0 + q_k dZ = da_k \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

Предположим, что в некоторой точке кривой $\mathcal{L} dF_0 \neq 0$, тогда

$$p_k = -q_k dZ / dF_0 + da_k / dF_0 \\ (k=1, 2, \dots, n)$$

и для определения q_k получим следующую систему уравнений:

$$\sum_{k=1}^n (B_{mk} dF_0 - A_{mk} dZ) q_k = F_m dX - \sum_{k=1}^n A_{mk} da_k,$$

$$\text{где } F_m = \sum_{k=1}^n D_{mk} a_k \quad (m=1, 2, \dots, n).$$

Если же $dF_0 = 0$, то $dZ \neq 0$ и аналогичную систему уравнений получим для неизвестных p_k .

Если определитель записанной выше системы не равен нулю, т. е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} B_{11} dF_0 - A_{11} dZ & B_{12} dF_0 - A_{12} dZ & \dots & B_{1n} dF_0 - A_{1n} dZ \\ B_{21} dF_0 - A_{21} dZ & B_{22} dF_0 - A_{22} dZ & \dots & B_{2n} dF_0 - A_{2n} dZ \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{n1} dF_0 - A_{n1} dZ & B_{n2} dF_0 - A_{n2} dZ & \dots & B_{nn} dF_0 - A_{nn} dZ \end{vmatrix} \neq 0,$$

то, следовательно, по значениям $a_1, a_2, \dots, a_n$ на кривой $\mathcal{L}$ в каждой ее точке можно однозначно найти частные производные этих функций.

Если $\Delta = 0$, то система имеет бесконечное число решений. В этом случае кривая $\mathcal{L}$ называется характеристикой системы уравнений для определения $a_k(Z, F_0)$ ($k=1, 2, \dots, n$).

Тангенс угла наклона касательной к $\mathcal{L}$ с осью F_0 определяется из уравнения

$$\begin{vmatrix} B_{11} - \lambda A_{11} & B_{12} - \lambda A_{12} & \dots & B_{1n} - \lambda A_{1n} \\ B_{21} - \lambda A_{21} & B_{22} - \lambda A_{22} & \dots & B_{2n} - \lambda A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{n1} - \lambda A_{n1} & B_{n2} - \lambda A_{n2} & \dots & B_{nn} - \lambda A_{nn} \end{vmatrix} = 0,$$

которое имеет n различных корней, соответствующих n различным семействам характеристик.

На характеристике k -го семейства ($k=1, 2, \dots, n$) решение $a_1, a_2, \dots, a_n$ связано двумя условиями: первое — $\Delta=0$, называемое уравнением направления характеристики; второе — $\Delta_k=0$, называемое дифференциальным соотношением на характеристике, где Δ_k — определитель, полученный из Δ заменой k -го столбца столбцом свободных членов исходной системы уравнений, т. е. из системы $\Delta=0, \Delta_1=\Delta_2=\dots=\Delta_n=0$ может быть определено искомое решение $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Таким образом, система уравнений (6.136) решена методом характеристик, при численной реализации которого были использованы алгоритм и программа на языке ФОРТРАН-IV (для ЭЦВМ типа ЕС), приведенная в работе [78].

На рис. 6.3 показано изменение во времени температуры угловой точки боковой поверхности тела ($x=b/2, y=d/2$) для различных значений параметра формы тела γ при отношении плотностей теплового потока $\beta=1$. Задача была решена при $W=\text{const}$.

Аналогично изложенному выше могут быть получены решения задач нестационарной теплопроводности для движущихся тел произвольного поперечного сечения и при других видах граничных условий на боковых поверхностях. Необходимо лишь соответствующим образом выбрать форму решения задачи по методу Бубнова — Галеркина. Численная же реализация метода характеристик при этом останется без изменений.

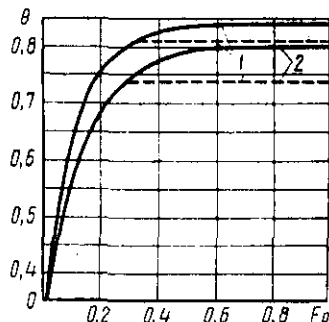


Рис. 6.3. Изменение температуры угловой точки движущегося прямоугольного тела:

$W=1$ (сплошная линия); $W=0,5$ (пунктирная линия);
1 — $\gamma=1$; 2 — $\gamma=0,5$

§ 6.9. Метод совместного применения интегрального преобразования Лапласа и вариационных методов

Метод состоит в следующем. Краевая задача нестационарной теплопроводности подвергается интегральному преобразованию Лапласа по временной переменной и в области изображений приводится к решению граничной задачи по пространственным координатам. Для приближенного решения задачи в области изображений применяется один из вариационных методов или метод Бубнова — Галеркина. Приближенное решение в области изображений обратным преобразованием Лапласа переводится в область оригиналов.

Отметим, что применительно к задачам теплопроводности метод детально разработан в монографии П. В. Цоя [107].

Распределение нестационарной температуры в анизотропном теле при несимметричном обогреве описывается краевой задачей:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + q_v(p, \tau), \quad p = p(x_1, x_2, x_3) \in \Omega, \quad \tau > 0; \quad (6.137)$$

$$T(p, 0) = f(p), \quad p \in \Omega, \quad \tau = 0, \quad (6.138)$$

$$T(p, \tau) = \Phi(p, \tau) = \varphi_1(p) \varphi_2(\tau), \quad p \in S, \quad \tau > 0. \quad (6.139)$$

Отметим, что кроме условия (6.139) на поверхности тела могут быть заданы и другие граничные условия II, III родов.

Если теплофизические параметры c , ρ , λ зависят только от пространственных координат, то к системе (6.137) — (6.139) применим интегральное преобразование Лапласа, предполагая, что функции $T(p, \tau)$, $q_v(p, \tau)$, $\varphi_2(\tau)$ удовлетворяют необходимым условиям применения преобразования Лапласа по временной переменной (см. гл. V, § 5.2).

В области изображений краевая задача (6.137) — (6.139) представится в виде

$$A[\tilde{T}] = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_i \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} \right) - c\rho [s\tilde{T}(p, s) - f(p)] + \tilde{q}_v(p, s) = 0; \quad (6.140)$$

$$\tilde{T}(p, s) = \varphi_1(p) \tilde{\varphi}_2(s), \quad p \in S. \quad (6.141)$$

Для приближенного решения задачи, выраженной формулами (6.140) — (6.141) и содержащей дифференциальные операции только по пространственным переменным, можно применить вариационные методы или метод Бубнова — Галеркина. Поскольку последний не требует вариационной формулировки задачи (6.140) и (6.141), то приближенное решение по методу Бубнова — Галеркина ищем в виде ряда

$$\tilde{T}_n(p, s) = \varphi_1(p) \tilde{\varphi}_2(s) + \sum_{i=1}^n \tilde{a}_i(s) \psi_i(p), \quad (6.142)$$

где координатные функции удовлетворяют однородным граничным условиям.

Коэффициенты-изображения $\tilde{a}_i(s)$, при которых выражение (6.142) дает наилучшее приближение по методу Бубнова — Галеркина, определяются из условий ортогональности невязки

$$\varepsilon_n[\tilde{a}_1(s), \tilde{a}_2(s), \dots, \tilde{a}_n(s); s, p] = A[\tilde{T}_n(p, s)] \quad (6.143)$$

к каждой из координатных функций

$$\int_{\Omega} \varepsilon_n \psi_k(p) d\Omega = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (6.144)$$

Выполнив интегрирование в (6.144), получим систему n линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^n (d_{ik} + b_{ik}s) \tilde{a}_i(s) = \tilde{d}_k(s) \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (6.145)$$

Матрицы коэффициентов системы (6.145) при любом выборе координатных функций для выпуклой области Ω положительны и симметричны [107], т. е. $d_{ik} = d_{ki} > 0$, $b_{ik} = b_{ki} > 0$. Применяя правило Крамера для решения системы (6.145), получим

$$\tilde{a}_i(s) = \sum_{j=1}^n \tilde{d}_j(s) \Delta_{ji}(s) / \Delta(s) \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (6.146)$$

где $\Delta(s) = |d + bs|$ — основной определитель системы (6.145); $\Delta_{ji}(s)$ — алгебраическое дополнение определителя $\Delta(s)$.

Коэффициент-изображение $\tilde{a}_i(s)$ является регулярной функцией параметра s и представляет собой изображение. Применяя к функции (6.146) теорему разложения и теорему умножения изображений (см. гл. V, § 5.2, 5.3), получим в области оригиналов выражение для

$$a_i(\tau) = \sum_{j=1}^n \int_0^{\tau} \left\{ \sum_{m=1}^n \frac{\Delta_{ji}(s_m)}{\Delta'(s_m)} d_j(t) \exp[s_m(\tau - t)] \right\} dt,$$

где $d_j(t) \rightarrow \tilde{d}_j(s)$; $s_m (m=1, 2, \dots, n)$ — простые корни уравнения $\Delta(s) = 0$.

Таким образом, решение задачи (6.137) — (6.139) имеет вид в n -м приближении

$$T_n(p, \tau) = \varphi_1(p) \varphi_2(\tau) + \sum_{i=1}^n a_i(\tau) \psi_i(p).$$

Проиллюстрируем изложенный метод на некоторых примерах и задачах из [107].

Теплопередача через плоскую пластину. Неограниченная пластина толщиной $2R$ служит разделяющей перегородкой двух сред. Температура первой среды ($x < -R$) изменяется во времени по закону $\varphi_1(\tau)$, второй ($x > R$) — по закону $\varphi_2(\tau)$. Начальное распределение температуры в пластине известно и задано функцией

$$T(x, 0) = f(x). \quad (6.147)$$

Распределение температуры в пластине описывается уравнением

$$\partial T / \partial \tau = a (\partial^2 T / \partial x^2) + q_0(x, \tau) / (c\rho), \quad |x| < R, \quad \tau > 0, \quad (6.148)$$

т. е. пластина является тепловыделяющей. Между пластиной и окружающими средами происходит теплообмен по закону Ньютона:

$$-\partial T/\partial x = h_1 [\varphi_1(\tau) - T], \quad x = -R; \quad (6.149)$$

$$\partial T/\partial x = h_2 [\varphi_2(\tau) - T], \quad x = R, \quad (6.150)$$

где $h_i = \alpha_i/\lambda$ ($i = 1, 2$) — относительный коэффициент теплоотдачи.

Применим преобразование Лапласа по временной переменной к краевой задаче (6.147) — (6.150) и получим в области изображений:

$$a(d^2 \tilde{T}/dx^2) - s\tilde{T} = -f(x) - \tilde{q}_v/c\rho; \quad (6.151)$$

$$-d\tilde{T}/dx + h_1\tilde{T} = h_1\varphi_1(s), \quad x = -R; \quad (6.152)$$

$$d\tilde{T}/dx + h_2\tilde{T} = h_2\varphi_2(s), \quad x = R. \quad (6.153)$$

Приближенное решение задачи (6.151) — (6.153) по методу Бубнова — Галеркина ищем в виде

$$T_n(x/R, s) = \tilde{V}(x/R, s) + \sum_{k=1}^n a_k(s) \psi_k(x/R), \quad (6.154)$$

где $\{\psi_k(x/R)\}$ — любая система линейно независимых функций, непрерывных вместе со своими вторыми производными на интервале $-1 \leq x/R \leq 1$, удовлетворяющая нулевым граничным условиям. Функция $\tilde{V}(x/R, s)$ должна удовлетворять условиям (6.152) — (6.153). Положим:

$$\tilde{V}(x/R) = A(s)(x/R) + B(s);$$

$$\psi_1(x/R) = [1 - (x/R)^2 + d(x/R) + d_1];$$

$$\psi_k(x/R) = [1 - (x/R)^2]^2 (x/R)^{2(k-2)} (k=2, 3, \dots, n);$$

$$\tilde{A}(s) = Bi_1 Bi_2 (\varphi_1 - \varphi_2) d_2;$$

$$\tilde{B}(s) = [(1 + Bi_1) Bi_2 \varphi_2 + (1 + Bi_2) Bi_1 \varphi_1] d_2;$$

$$d = 2(Bi_2 - Bi_1) d_2, \quad d_1 = [2(Bi_1 + Bi_2) + 4] d_2;$$

$$Bi_j = h_j R (j=1, 2); \quad d_2 = (Bi_1 + Bi_2 + 2Bi_1 Bi_2)^{-1}.$$

Подставляя приближенное решение (6.154) в условие ортогональности невязки (6.144), получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^n (d_{ik} + b_{ik}s) a_k(s) = c_i(s) \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

где

$$d_{ik} = -\frac{a}{R^2} \int_{-1}^1 \frac{d^2 \psi_k}{dx^2} \psi_i(X) dX, \quad b_{ik} = \int_{-1}^1 \psi_i(X) \psi_k(X) dX;$$

$$c_i = \int_{-1}^1 \left[s\tilde{V}(X, s) - f(X) - \frac{\tilde{q}_v(X, s)}{c\rho} \right] \psi_i(X) dX, \quad X = x/R.$$

В общем случае, формально выполнив обратное преобразование Лапласа, решение можно записать так:

$$T(X, \tau) = A(\tau)X + B(\tau) + a_1(\tau)[1 - X^2 + Xd + d_1] + \\ + (1 - X^2)^2 \sum_{k=2}^n a_k(\tau) X^{2(k-2)},$$

где

$$A(\tau) = L^{-1}[A(s)], \quad B(\tau) = L^{-1}[\tilde{B}(s)];$$

L^{-1} — оператор обратного преобразования Лапласа.

Рассмотрим частный случай, положив: 1) $\varphi_i = T_i = \text{const}$, $T_1 \neq T_2$; 2) $h_1 = h_2 = h$, $Bi_1 = Bi_2 = Bi$; 3) $f(X) = T_0$; 4) $q_v = 0$. Тогда в первом приближении в области изображений получим

$$T_1(X, s) = \frac{Bi(T_1 - T_2)}{2s(Bi + 1)} X + \frac{T_2 + T_1}{2} - \left[\frac{2 + Bi}{Bi} - X^2 \right] a_1(s),$$

$$\text{где } a_1(s) = \frac{5(Bi + 3)Bi}{2(Bi^2 + 10Bi + 15)} \left(\frac{T_2 + T_1}{2} - T_0 \right) \left[s + \frac{\mu^2 a}{R^2} \right]^{-1}, \quad \mu^2 = \frac{5(Bi + 3)Bi}{Bi^2 + 10Bi + 15}.$$

Интересно отметить, что в пределах изменения числа Bi от 0 до 1 значение μ^2 отличается от точного значения μ_1^2 не более чем на 0,08 %. Максимальное отклонение μ^2 от точного значения при $Bi > 10$ не превышает 1,3 %.

Осуществляя обратное преобразование Лапласа с использованием формулы (см. приложение IV)

$$L^{-1}[1/(s+a)] = \exp(-a\tau),$$

получим решение задачи в нашем случае.

$$T(X, Fo) = \frac{Bi(T_2 - T_1)}{2(Bi + 1)} X + \frac{T_2 + T_1}{2} - \frac{\mu^2}{2} \left(\frac{T_2 + T_1}{2} - T_0 \right) \times \\ \times \left(\frac{2 + Bi}{Bi} - X^2 \right) \exp(-\mu^2 Fo),$$

где $Fo = a\tau/R^2$ — число Фурье.

Задача 6.4. Решить задачу, выраженную формулами (6.147) — (6.150), в первом приближении при $f(X) = T_0$, $q_v = 0$, $Bi_1 = Bi_2 = Bi$, $\varphi_1(\tau) = \varphi_2(\tau) = \varphi(\tau)$, полагая: а) $\varphi(\tau) = T_c = \text{const}$; б) $\varphi(\tau) = T_0 + (T_c - T_0)\tau$; в) $\varphi(\tau) = T_0 + \Delta T \sin \omega \tau = T_0 + \Delta T \sin Pd Fo$, где $\Delta T = T_c - T_0$, $Pd = \omega R^2/a$.

2. Решить задачу, выраженную формулами (6.147) — (6.150), во втором приближении при $f(X) = T_0$, $Bi_1 = Bi_2 = Bi$, $q_v = 0$, полагая

$$T(X, s) = \hat{\varphi}(s) + \hat{a}_1(s) \left(\frac{Bi + 2}{Bi} - X^2 \right) + \hat{a}_2(s) (1 - X^2)^2,$$

при $\varphi(\tau) = T_c = \text{const}$ и $Bi = 1$.

Неограниченная равносторонняя призма треугольного сечения. Пусть областью Ω служит треугольное сечение неограниченной призмы (рис. 6.4).

Уравнение контура S , образуемого прямыми $y=kx$, $y=-kx$; $x=h$, имеет вид

$$\psi(x, y) = (y^2 - k^2 x^2)(h - x) = 0.$$

Полагаем, что в теле имеется источник теплоты с равномерно распределенной объемной плотностью теплового потока q_v , температура на боковых гранях поддерживается равномерной по всей поверхности и изменяется во времени по закону $\varphi(\tau)$. Начальное распределение температуры равномерное, равное T_0 . Температурное поле находим из решения краевой задачи

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}) + q_v/(c\rho), \quad (6.155)$$

$$x, y \in \Omega, \tau > 0,$$

Рис. 6.4. Сечение треугольной неограниченной призмы

$$T(x, y, 0) = T_0, \quad T(x, y, \tau)|_{\tau, y \in s} = \varphi(\tau). \quad (6.156)$$

Совершив переход в область изображений, решение по методу Бубнова — Галеркина ищем в виде

$$\begin{aligned} \hat{T}_n(x, y, s) = & \hat{\varphi}(s) + [(x/h)^2 k^2 - (y/h)^2] \times \\ & \times (1 - x/h) \sum_{i=1}^n a_i(s) (y/h)^{2(i-1)} (x/h)^{i-1}. \end{aligned}$$

Решим задачу, выраженную формулами (6.155), (6.156), в первом приближении для равносторонней треугольной призмы $k = \tan 30^\circ = \sqrt{3}/3$.

Выполнив процедуру метода Бубнова — Галеркина, получим в области изображений

$$\hat{a}_1(s) = (63/2) [q_v/(c\rho s) + (T_0 - s\hat{\varphi})] [s + 42a/h^2]^{-1}. \quad (6.157)$$

При постоянной температуре стенок $\varphi(\tau) = T_c$ переход к оригиналам (см. приложение V) в (6.157) дает

$$\begin{aligned} a_1(Fo) = & (3/4) (q_v h^2 / \lambda) [1 - \exp(-42 Fo)] + (63/2) (T_0 - T_c) \times \\ & \times \exp(-42 Fo) \end{aligned}$$

и относительная избыточная температура определяется по формуле

$$\begin{aligned} \Theta(\xi, \eta, Fo) = & (T - T_c)/(T_0 - T_c) = \{ (Os/4) [1 - \exp(-42 Fo)] + \\ & + 10,5 \exp(-42 Fo) \} (1 - \xi) (\xi^3 - 3\eta^2); \end{aligned} \quad (6.158)$$

$$Fo = a\tau/h^2, \quad \xi = x/h, \quad \eta = y/h, \quad Os = q_v h^2 / [\lambda (T_0 - T_c)].$$

Для сравнения приведем точное решение задачи, выраженной формулами (6.155), (6.156), в стационарном режиме:

$$T(x, y) = T_c + [q_v h^2 / (4\lambda)] [(x/h)^2 - 3(y/h)^2] (1 - x/h). \quad (6.159)$$

Наше решение (6.158) при $Fo \rightarrow \infty$ совпадает с (6.159).

Задача 6.5. Найти относительную избыточную температуру призмы [задача (6.155), (6.156)] при $\varphi(\tau) = T_0 + \Delta T \tau$, где ΔT — постоянная скорость изменения во времени температуры границы призмы.

Задача 6.6. Цилиндрическое тело (рис. 6.5) с параболическим перпендикулярным сечением (область Ω ограничена линиями $y = kx^2$, $y = h$, $|x| < a$, $0 < y \leq h$), равномерно нагретое до температуры T_0 , подвергается внезапному охлаждению с нулевой температурой на поверхности.

Выбрав в области изображений первое приближение решения по методу Бубнова — Галеркина в виде

$$\tilde{T}(x, y, s) = \tilde{a}_1(s) (y - kx^2) (h - y),$$

найти распределение температуры по сечению тела в любой момент времени. Предполагается, что теплопроводностью по длине цилиндрического тела пренебрегаем.

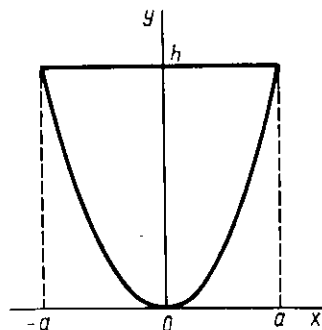


Рис. 6.5. К задаче 6.6

§ 6.10. О выборе системы координатных функций

Применение различных систем координатных функций для решения одной и той же краевой задачи показывает, что при одном и том же количестве координатных функций точность приближенного решения во многом зависит от удачного подбора этих функций. Однако общей методики построения оптимальной системы, при которой заданная точность достигается наименьшим числом координатных функций, не существует.

Напомним, что системой координатных функций называется полная в области Ω система линейно независимых функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, удовлетворяющих однородным граничным условиям задачи. В настоящее время разработаны рекомендации, облегчающие выбор системы координатных функций.

1. Для простых двумерных областей в качестве координатных функций чаще всего выбирают системы степенных функций и системы тригонометрических функций, удовлетворяющих однородным граничным условиям. Построенная таким образом система будет полной в ограниченной области Ω [43], и определение коэффициентов в системах Рунца или Бубнова — Галеркина сводится к вычислению простых интегралов. Например, для прямоугольника со сторонами $2d$ и $2b$ в случае однородных граничных условий II рода

$$\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_s = 0 \quad (6.160)$$

для уравнения

$$\partial^2 T / \partial x^2 + \partial^2 T / \partial y^2 = 0 \quad (6.161)$$

приближенное решение ищем в виде полинома, включающего нечетные степени y и четные степени x [43]:

$$T_{(n)}(x, y) = A_1 + A_2 y + A_3 x^2 + A_4 y^3 + A_5 x^2 y + A_6 x^4 + A_7 x^2 y^3 + A_8 y^5 + A_9 y^7.$$

Подчиним это решение граничным условиям (6.160):

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=\pm d} = \pm (2A_3d + 2A_5yd + 4A_6d^3 + 4A_7yd^3 + 2A_8y^3d) = 0;$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=\pm b} = A_2 + 3A_1b^2 + A_3x^2 + A_7x^4 + 3A_8x^2b^2 + 5A_6b^4 = 0.$$

Приравняв нулю коэффициенты при различных степенях x и y , получим:

$$A_5 = A_7 = A_8 = 0; \quad A_3 = -2A_6d^2, \quad A_2 = -3A_1b^2 - 5A_6b^4.$$

Так как решение уравнений (6.160), (6.161) ищется с точностью до постоянной, то можно положить $A_1 = 0$. В результате приближенное решение ищем в виде

$$T(x, y) = A_6(x^4 - 2d^2x^2) + A_3(y^4 - 3b^2y) + A_6(y^6 - 5b^4y).$$

2. Для двумерных областей с известным уравнением граничного контура в работе [43] даны рекомендации по выбору системы координатных функций в случае граничных условий 1 рода.

Пусть уравнение замкнутого контура S имеет вид

$$\omega(x, y) = 0, \quad x, y \in S,$$

где S — граница поперечного сечения Ω цилиндрического тела, ось которого совпадает с осью Oz . В качестве координатных можно взять функции, составленные из произведений $\omega(x, y)$ и различных степеней x, y :

$$\varphi_1(x, y) = \omega; \quad \varphi_2(x, y) = \omega x; \quad \varphi_3(x, y) = \omega y; \quad \varphi_4(x, y) = \omega xy.$$

Построенные таким образом функции $\varphi_k(x, y)$ обращаются в нуль на границе S области Ω . Отметим, что в качестве функции $\omega(x, y)$ может быть взята любая непрерывная функция, имеющая внутри области Ω ограниченные и непрерывные производные $\partial\omega/\partial x$ и $\partial\omega/\partial y$ и удовлетворяющая условиям

$$\omega(x, y) > 0, \quad x, y \in \Omega, \quad (6.162)$$

$$\omega(x, y) = 0, \quad x, y \in S. \quad (6.163)$$

Если изучаемое температурное поле симметрично относительно одной из осей координат, например оси Ox , то при построении $\varphi_k(x, y)$ контур $\omega(x, y)$ следует умножать только на четные степени y . Например, для равностороннего треугольного бруска $S(y = \pm x\sqrt{3}/3, x = h$, где h — высота треугольника), получим

$$\varphi_k(x, y) = (x^2/3 - y^2)(h - x)x^{k-1}y^{2(k-1)} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Очевидно, что $\omega(x, y) = (x^2/3 - y^2)(h - x)$ удовлетворяет условиям (6.162), (6.163).

Для выпуклого многоугольника, уравнения сторон которого

$$a_i x + b_i y + c_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

следует положить

$$\omega(x, y) = \pm (a_1 x + b_1 y + c_1) \dots (a_m x + b_m y + c_m).$$

Этот же прием справедлив и для криволинейных выпуклых областей. Например, для шпонки, составленной окружностями радиусов R и $R/2$ (рис. 6.6), можно принять

$$\omega(x, y) = (R^2 - x^2 - y^2)(x^2 - Rx + y^2).$$

Для невыпуклых многоугольников при построении функции $\omega(x, y)$ нужно вводить модули и функцию $\omega(x, y)$ задавать различным образом в разных частях области. Например, для обла-

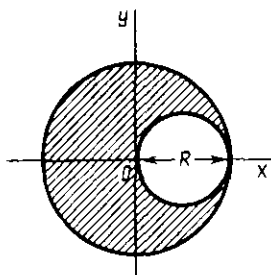


Рис. 6.6. К выбору системы координатных функций в выпуклой области

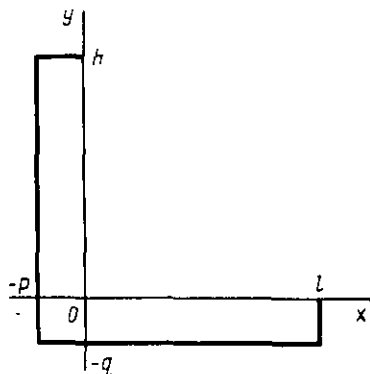


Рис. 6.7. К выбору системы координатных функций в невыпуклом многоугольнике

сти, изображенной на рис. 6.7, $\omega(x, y)$ определяется так [43]:

$$\omega(x, y) = (|x| + |y| - x - y)(x + p)(y + q)(l - x)(h - y) = \begin{cases} -2y(x + p)(y + q)(l - x)(h - y) & [0, l; -q, 0], \\ -2(x + y)(x + p)(y + q)(l - x)(h - y) & [-p, 0; -q, 0], \\ -2x(x + p)(y + q)(l - x)(h - y) & [-p, 0; 0, h]. \end{cases}$$

Вид функции $\omega(x, y)$ не единствен, она может выбираться и в другой форме (подробней об этом см. [43]).

3. Для трехмерных тел, ограниченных поверхностью, которая получена путем вращения непрерывной кривой $y = f(x)$ на отрезке $d \leq x \leq b$ вокруг оси x , можно принять [107]

$$\omega(x, y, z) = (y^2 + z^2) - f^2(x),$$

при этом предполагается, что $f(d) = f(b) = 0$.

Если же $f(d) \neq 0$ и $f(b) \neq 0$, то в качестве функции $\omega(x, y, z)$ можно выбрать

$$\omega(x, y, z) = [(y^2 + z^2) - f^2(x)](x - d)(b - x).$$

Например, при вращении кривой (уравнение эллипса) $y = (b/d) \times \sqrt{d^2 - x^2}$ вокруг оси Ox получим $(z^2 + y^2)/b^2 + x^2/d^2 = 1$ и функция $\omega(x, y, z)$ задается в виде

$$\omega(x, y, z) = 1 - [(x/d)^2 + (z^2 + y^2)/b^2] > 0.$$

Координатные функции для эллипсоида вращения имеют вид

$$\varphi_k(x, y, z) = \left[1 - \left(\frac{x^2}{d^2} + \frac{z^2 + y^2}{b^2} \right) \right] \left(\frac{x^2}{d^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} \right)^{k-1} \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

4. Часто задача выбора системы координатных функций упрощается, если известно преобразование координат, в которых область имеет более простой вид. Для различных областей в [75] приведены примеры таких преобразований. В статье [47], применяя преобразование координат, авторы решают нестационарную задачу теплопроводности методом Бубнова — Галеркина.

Следует иметь в виду, что, упрощая геометрическую форму области, усложняют основное дифференциальное уравнение и тем самым объем вычислений.

5. В работе [107] предлагается при выборе координатных функций использовать асимптотические решения исследуемых краевых задач. Например, построим систему координатных функций для краевой задачи:

$$\partial T / \partial Fo = \partial^2 T / \partial \rho^2 + (1/\rho) (\partial T / \partial \rho) + q_0 R^2 / \lambda, \quad 0 < \rho < 1, \quad \tau > 0; \quad (6.164)$$

$$T(\rho, 0) = T_0; \quad (6.165)$$

$$\partial T / \partial \rho|_{\rho=1} = Bi [T_c - T_s], \quad \partial T / \partial \rho|_{\rho=0} = 0. \quad (6.166)$$

Поле температур, описываемое системой (6.164) и (6.166), при достаточно больших значениях Fo становится стационарным, т. е. $\partial T / \partial Fo = 0$. Поэтому решим вначале стационарную задачу

$$d^2 T / d\rho^2 + (1/\rho) (dT/d\rho) + q_0 R^2 / \lambda = 0$$

при граничных условиях

$$[dT/d\rho + Bi (T_s - T_c)]|_{\rho=1} = 0, \quad dT/d\rho|_{\rho=0} = 0.$$

Ее решение имеет вид

$$T(\rho) = T_c + [q_0 R^2 / (4\lambda)] [\rho^2 - (2 + Bi) / Bi].$$

Теперь ясно, что, для того чтобы приближенное решение задачи (6.164) — (6.166) асимптотически приближалось к точному при больших значениях Fo , в качестве координатных функций следует выбрать систему

$$\varphi_k(\rho) = [(Bi + 2) / Bi - \rho^2] \rho^{2(k-1)} \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

6. В последние годы при решении задач теплопроводности для областей сложной формы со сложными граничными условиями успешно применяется метод R -функций [85, 86 и др.]. Метод R -функций основан на использовании алгебры логики и систем обычных функций для построения априорной формы приближенного решения. Систематическое изложение метода R -функций имеется в работах [85, 86], где рассмотрены также вопросы применения метода к краевым задачам теплопроводности.

7. При увеличении числа координатных функций, учитываемых в приближенном решении, соответствующий вычислительный процесс может оказаться неустойчивым.

Дело в том, что с увеличением порядка приближения матрицы коэффициенты и свободные члены всегда вычисляются с некоторыми, пусть малыми погрешностями. Поэтому при высоком порядке системы погрешность решения может оказаться значительной. Кроме того, эта погрешность может возрасти из-за накапливающихся погрешностей при решении самой системы.

Приведенные в § 6.3 условия, накладываемые на систему координатных функций, практически позволяют получить приближенное решение только при небольшом числе n . Из связи с этим при сравнительно больших значениях n требования к системе координатных функций необходимо усилить. В работах [74, 75] доказано, что устойчивость соответствующего вычислительного процесса определяется свойствами системы координатных функций и даны рекомендации по практическому выбору систем координатных функций, обеспечивающих устойчивость вычислительного процесса для различных видов краевых задач (в частности, и теплопроводности).

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ, В КОТОРЫХ ИСПОЛЬЗУЕТСЯ ПОНЯТИЕ ТЕРМИЧЕСКОГО СЛОЯ

В теории теплопроводности нашли применение различные аналитические методы, характерные тем, что в них в сочетании с другими методами используется понятие толщины (глубины) термического (возмущенного) слоя, называемой еще также глубиной проникания (проникновения).

Это интегральный метод теплового баланса, вариационный метод Био, метод Швеца, метод осреднения функциональных поправок, метод Вейника и др.

Интегральный метод, метод Швеца были предложены для решения нелинейных гидродинамических задач пограничного слоя. Эти методы могут с успехом применяться для решения любой задачи, описываемой уравнением диффузионного типа. Хотя решения, найденные с помощью таких методов, приближенны, тем не менее они часто вполне удовлетворительны с инженерной точки зрения.

Названные методы используют такую модель процесса теплопроводности, согласно которой предполагается, что подводимый тепловой поток постепенно проникает в глубь нагреваемого тела. Толщина $\delta(\tau)$ термического слоя при этом непрерывно увеличивается и только через определенный отрезок времени τ_* тело прогревается по всему сечению. В этот момент заканчивается этап начального (инерционного) и начинается этап регулярного (упорядоченного) нагрева, характеризующегося участием всего тела в процессе нагрева. Применение этой модели затруднено следующим. Несмотря на предположение, что процесс распространения теплоты происходит с конечной скоростью, решение задач теплопроводности с использованием этой модели обычно основывается на классическом уравнении теплопроводности Фурье, которое выведено в предположении, что теплота распространяется с бесконечной скоростью.

Поэтому методы решения краевых задач с использованием инженерной модели теплопроводности требуют дополнительного обоснования. Рассмотрим некоторые из таких методов.

§ 7.1. Метод осреднения функциональных поправок

Идею метода осреднения функциональных поправок применительно к уравнению теплопроводности [83] изложим для одномерной задачи.

Дано уравнение теплопроводности

$$\partial T / \partial (u\tau) = \sigma^2 T / \partial x^2, \quad 0 < x < \infty, \quad \tau > 0, \quad (7.1)$$

с начальным условием

$$T(x, 0) = T_0 = \text{const} \quad (7.2)$$

и граничным условием

$$R\{T(0, \tau)\} = \varphi(\tau), \quad (7.3)$$

где R — линейный оператор; $\varphi(\tau)$ — заданная функция.

Предполагая, что волна теплового возмущения продвигается с конечной скоростью, положим, что для $x \gg \delta(\tau)$

$$T(x, \tau) = T_0. \quad (7.4)$$

А в зоне теплового возмущения $0 \leq x \leq \delta(\tau)$ положим в первом приближении

$$\partial^2 T_1 / \partial x^2 = f_1(\tau), \quad (7.5)$$

где принимаем

$$f_1(\tau) = \frac{1}{\delta(\tau)} \int_0^{\delta(\tau)} \frac{\partial T_1}{\partial (x\tau)} dx \quad (7.6)$$

или

$$f_1(\tau) = \frac{1}{a\delta(\tau)} \left[\frac{d}{d\tau} \int_0^{\delta(\tau)} T_1(x, \tau) dx - T_1(\delta, \tau) \delta'(\tau) \right]. \quad (7.7)$$

Интегрируя уравнение (7.5), получим профиль температуры термического слоя в виде

$$T_1(x, \tau) = f_1(\tau) x^2/2 + a_1(\tau) x + b_1(\tau). \quad (7.8)$$

Для определения произвольных функций интегрирования введем дополнительные условия IV рода, обеспечивающие сопряжение температурных полей прогретой и непрогретой зон тела на границе раздела:

$$T_1(\delta, \tau) = T_0, \quad (7.9)$$

$$\partial T_1(\delta, \tau) / \partial x = 0. \quad (7.10)$$

Подставляя (7.8) в (7.9) и (7.10), имеем:

$$a_1(\tau) = -f_1(\tau) \delta(\tau), \quad (7.11)$$

$$b_1(\tau) = T_0 + f_1(\tau) \delta^2(\tau)/2. \quad (7.12)$$

Профиль температуры (7.8) с использованием (7.11) и (7.12) имеет вид

$$T_1(x, \tau) = T_0 + f_1(\tau) [\delta(\tau) - x]^2/2. \quad (7.13)$$

Связь между неизвестными функциями времени $\delta(\tau)$, $f_1(\tau)$ устанавливается в каждом конкретном случае из условия на границе (7.3) и может быть представлена в виде

$$f_1(\tau) = F[\delta(\tau), \tau]. \quad (7.14)$$

Подставляя (7.13) и (7.14) в условие осреднения (7.6) или (7.7), получим дифференциальное уравнение, определяющее закон продвижения тепловой волны $\delta(\tau)$, т. е. толщину термического слоя. Таким образом, поставленная задача решена в первом приближении.

Второе и последующие приближения находят аналогично. При этом уравнение теплопроводности для второго приближения записывается в виде

$$\partial^2 T_2(x, \tau) / \partial x^2 = \partial T_1(x, \tau) / \partial (a\tau) + f_2(\tau), \quad (7.15)$$

где

$$f_2(\tau) = \frac{1}{a\delta(\tau)} \int_0^{\delta(\tau)} \frac{\partial}{\partial \tau} [T_2(x, \tau) - T_1(x, \tau)] dx \quad (7.16)$$

или

$$f_2(\tau) = \frac{1}{a\delta(\tau)} \left\{ \frac{d}{d\tau} \int_0^{\delta(\tau)} (T_2 - T_1) dx - (T_2 - T_1)|_{x=\delta(\tau)} \delta'(\tau) \right\}. \quad (7.17)$$

Так как рассматривалось полуограниченное тело, то в нем наблюдается только инерционный режим нагрева. В случае тела конечных размеров техника применения метода осреднения функциональных поправок остается такой же. Однако на втором (упорядоченном) этапе нагрева осреднение осуществляется по толщине тела и в качестве начального условия выбирается решение, полученное на первом этапе процесса при $\tau = \tau_*$. При этом время окончания первого этапа τ_* определяется из условия $\delta(\tau) = l$, где l — координата границы тела.

Температурное поле полуограниченного стержня. Найти распределение температуры вдоль полуограниченного стержня при граничных условиях I рода

$$\Theta(0, \tau) = 0 \quad (7.18)$$

и при начальном условии

$$\Theta(x, 0) = 1, \quad (7.19)$$

где $\Theta(x, \tau) = [T(x, \tau) - T_c] / (T_0 - T_c)$.

С учетом условия (7.19) решение (7.13) примет вид

$$\Theta_1(x, \tau) = 1 + f_1(\tau) [\delta(\tau) - x]^2 / 2, \quad (7.20)$$

а соотношение (7.14) устанавливается подстановкой (7.20) в (7.18):

$$f_1(\tau) = -2 / \delta^2(\tau). \quad (7.21)$$

Подставляя (7.20), (7.21) в (7.7), получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$\delta d\delta = 6a\delta\tau \quad (7.22)$$

с начальным условием $\delta(0) = 0$.

Интегрируя (7.22), получим

$$\delta(\tau) = 2 \sqrt{3a\tau}.$$

Таким образом,

$$\Theta_1(x, \tau) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}} - \frac{1}{3,464} \frac{x^2}{4a\tau} \right)$$

или, вводя принятую в задачах для полубесконечных тел переменную Больцмана $\eta = x / (2\sqrt{a\tau})$, имеем

$$\Theta_1(x, \tau) = \Theta_1(\eta) = \left(2 / \sqrt{3} \right) (\eta - \eta^2 / 3,464).$$

Следует иметь в виду, что полученное решение определяет функцию распределения температуры на интервале возмущения $0 \leq x \leq \delta(\tau) = 2\sqrt{3a\tau}$ или $0 \leq \eta \leq \sqrt{3} \approx 1,732$.

Полученное решение можно уточнить, вычислив второе приближение. Для этого первое приближение надо подставить в (7.15), проинтегрировать дважды по x и, используя условия IV рода (сопряжения) (7.9), (7.10) и начальное условие (7.19), получить профиль температур. Затем используется условие на границе (7.18) для определения связи (7.14) и решается дифференциальное уравнение относительно толщины термического слоя $\delta(\tau)$, получаемое из условия (7.17).

В результате получим сложное дифференциальное уравнение, приближенное решение которого имеет вид

$$\Theta_2(\eta) = \left(2 / \sqrt{3} \right) (\eta - \eta^2 / 3 + \eta^4 \cdot 10,4). \quad (7.23)$$

Точное же решение задачи (7.1), (7.18) и (7.19) имеет вид

$$\Theta(\eta) = \operatorname{erf} \eta$$

и может быть представлено в виде ряда

$$\Theta(\eta) = \left(2 / \sqrt{\pi} \right) (\eta - \eta^3 / 3 + \eta^5 / 10 - \eta^7 / 42 + \dots). \quad (7.24)$$

Для сравнения приближенных решений с точным составлена программа на алгоритмическом языке ФОРТРАП-IV для ЭЦВМ ЕС-1022. В программе предусмотрен вывод на печать таблицы значений координаты η , значений первого, второго приближений и точного решения, а также построения графика зависимостей $\Theta_1(\eta)$, $\Theta_2(\eta)$, $\Theta(\eta)$.

Приведем текст программы:

DIMENSION A(99,5), X(99)

EXTERNAL FCT

PI=3.141593

N=99

DX=SQRT(3.0)/(N-1)

X(1)=0.

DO 1 1=2, N

```

1  X(1)=X(1-1)+DX
   DO 2 I=1, N
     Y=X(I)
     A(1,1)=X(I)
     A(1,2)=2./SQRT(3.0) * (Y-Y ** 2/3.464)
     A(1,3)=2./SQRT(3.0) * (Y-Y ** 3/3+Y ** 4/10.4)
     Z=Y * SQRT(2.0)
     CALL NDTR(Z, P, D)
     A(1,5)=0.
     A(1,4)=2 * SQRT(2.0) * (P-0.5)
     A(1,4)=2 * P-1
     A(1,5)=2.0/SQRT(P1) * (Y-Y ** 3/3+Y ** 5/10.-
      -Y ** 7/42)
     CALL QG10(0.0, Y, FCT, A(1,5))
2  CONTINUE
3  FORMAT(5(/), 10X, 99(5G11.3/), 5(/))
   WRITE(3,8)
   WRITE(3,4)
   WRITE(3,7)
   DO 5 I=1, N
5   WRITE(3,6) I, (A(I, J), J=1,5)
4   FORMAT(10X, 85('—'))/
1   10X, 'I', 7X, 'I', 11X, 'I', 4(15X, 'I')/
2   10X, 'I', 3X, 'N', 3X, 'I', 5X, 'X', 5X,
3   'I', 5X, 'TETA1', 5X, 'I', 5X, 'TETA2',
4   5X, 'I', 5X, 'TETA—', 5X, 'I', 5X, 'TETAP', 5X, 'I',/
5   10X, 'I', 7X, 'I', 11X, 'I', 4(15X, 'I')/
6   10X, 85('—'))
   WRITE(3,7)
7   FORMAT(10X, 'I', 7X, 'I', 11X, 'I', 4(15X, 'I'))
8   FORMAT(5(/), 47X, 'ТАБЛИЦА ФУНКЦИЙ'/
1   46X, 18('—'), 3(/))
6   FORMAT(10X, 'I', 3X, 12, 2X, 'I', 3X, F6.4,
*   2X, 'I', 4(2X, G11.3, 2X, 'I'))
9   FORMAT(10X, 85('—'), 5(/))
   WRITE(3,10)
10  FORMAT(52X,
   CALL PLOT(1, A, 99, 5, 99, 0)
   STOP
   END

```

Часть результатов расчета представлена в табл. 7.1, где сравниваются приближенные решения по методу осреднения функциональных поправок с точным.

Как видно из табл. 7.1, уже в первом приближении решение удовлетворительно согласуется с точным. Второе приближение не вносит значительного улучшения в результаты расчетов. Это связано с тем, что решение (7.23) приближенно.

Метод осреднения функциональных поправок может быть применен к задачам с переменным во времени коэффициентом теплообмена [84].

$$\partial \Theta / \partial Fo = (1/X^m) \partial [X^m \partial \Theta / \partial X] / \partial X, \quad 0 < X = x/R < 1, \quad Fo = \alpha \tau / R^2 > 0;$$

$$\partial \Theta(1, Fo) / \partial X = Bi(Fo) [1 - \Theta(1, Fo)];$$

$$\Theta(X, 0) = \Theta_0 = \text{const}; \quad \partial \Theta(0, Fo) / \partial X = 0.$$

Таблица 7.1

η	$\Theta_1(\eta)$	$\Theta_2(\eta)$	$\Theta(\eta)$
0,1060	0,119	0,122	0,119
0,1591	0,175	0,182	0,178
0,2121	0,230	0,241	0,236
0,2651	0,283	0,299	0,292
0,3181	0,334	0,356	0,347
0,3712	0,383	0,411	0,400
0,4242	0,430	0,464	0,451
0,4772	0,475	0,515	0,500
0,5302	0,519	0,564	0,547
0,5832	0,560	0,610	0,591

Опуская промежуточные выкладки, получим на инерционном этапе нагрева в первом приближении ($0 \leq Fo \leq Fo_*$)

$$\frac{1 - \Theta_1(X, Fo)}{1 - \Theta_0} = \exp \left\{ - \frac{Bi(Fo) \delta(Fo)}{2} \left[1 - \frac{1-X}{\delta(Fo)} \right]^2 \right\},$$

где

$$\delta(Fo) = \sqrt{\frac{6(m+1)}{Bi(Fo)} \left[\int Bi(t) dt + D \right]}. \quad (7.25)$$

Здесь постоянная D определяется из начального условия $\delta(0) = 0$. Время окончания первого этапа нагрева Fo_* можно определить по формуле (7.25), положив в ней $Fo = Fo_*$ и $\delta(Fo_*) = 1$. На регулярном этапе нагрева $Fo_* \leq Fo < \infty$ распределение температуры в первом приближении имеет вид

$$\frac{1 - \Theta_1(X, Fo)}{1 - \Theta_0} = \exp \left\{ -\varphi(Fo) + \frac{Bi(Fo)}{2} (1 - X^2) \right\},$$

$$\text{где } \varphi(Fo) = Bi(Fo_*)/6 + Bi(Fo)/3 - \int_{Fo_*}^{Fo} [Bi^2(t)/3 - (m+1)Bi(t)] dt.$$

В работе [84] приведен численный пример, где критерий Био задан в виде $Bi(Fo) = Bi_0 - Bi_1 \exp(-Fo)$ при $Bi_0 = 1, 2$; $Bi_1 = 1, 0$.

В табл. 7.2 приведены результаты расчета температур поверхности $\Theta_s(Fo)$ и срединной плоскости $\Theta_u(Fo)$ для различных моментов времени по численному методу и методу осреднения функциональных поправок (первое приближение) с оценкой относительной погрешно-

сти [84]. Сравнительный анализ показывает эффективность метода осреднения функциональных поправок уже в первом приближении.

Метод осреднения функциональных поправок успешно применялся также для решения нелинейных краевых задач.

Таблица 7.2

Fo	$\theta_s (Fo)$			$\theta_{\Pi} (Fo)$		
	по данным Н. В. Соколова	по методу осред- нения функцио- нальных попра- вок	$(\theta_s^* - \theta_s) \cdot \%$	по данным Н. В. Соколова	по методу осред- нения функцио- нальных попра- вок	$(\theta_{\Pi}^* - \theta_{\Pi}) \cdot \%$
0,50	0,526	0,545	-3,49	0,400	0,390	+2,56
1,00	0,678	0,680	-0,30	0,538	0,516	+4,36
1,50	0,769	0,778	-1,16	0,662	0,638	+3,78
2,00	0,847	0,848	-0,12	0,770	0,738	+4,34
2,50	0,883	0,894	-1,23	0,833	0,814	2,34
3,00	0,921	0,925	-0,43	0,878	0,868	+1,10
3,50	0,947	0,948	-0,11	0,917	0,907	+1,10
4,00	0,964	0,964	0,00	0,944	0,935	+0,96

§ 7.2. Интегральный метод теплового баланса

Математический метод, названный интегральным, позволяет получить приближенные решения ряда нелинейных задач нестационарной теплопроводности. При решении краевых задач нет необходимости их линеаризовать, так как сам метод позволяет преодолеть трудности, вызванные нелинейностью задачи. Например, использование интегрального метода для решения дифференциального уравнения теплопроводности с нелинейными граничными условиями приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению с заданными начальными условиями.

Интегральный метод использует такую модель процесса теплопроводности, когда в рассмотрение вводится величина $\delta(\tau)$, называемая толщиной термического слоя, и для всех значений $x > \delta(\tau)$ считают, что теплота не распространяется за пределы $x = \delta(\tau)$ и температура тела равна начальной температуре.

Для выяснения основных идей интегрального метода рассмотрим простую задачу нестационарной теплопроводности [30].

1. Распределение температур в полуграниченном стержне описывается уравнением теплопроводности

$$\partial T / \partial \tau = a \partial^2 T / \partial x^2, \quad x > 0, \quad \tau > 0; \quad (7.26)$$

начальная температура

$$T(x, 0) = T_0; \quad (7.27)$$

граничное условие

$$-\lambda \partial T(0, \tau) / \partial x = q(\tau). \quad (7.28)$$

Потребуем, чтобы искомое решение (7.26) — (7.28) удовлетворяло не первоначальному уравнению теплопроводности, а осредненному, т. е. уравнению (7.26), умноженному на dx и проинтегрированному по x от $x=0$ до $x=\delta(\tau)$:

$$\int_0^{\delta(\tau)} \frac{\partial T}{\partial \tau} dx = a \int_0^{\delta(\tau)} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx. \quad (7.29)$$

Соотношение (7.29) называют *интегралом теплового баланса*.

Проинтегрировав (7.29), имеем

$$\frac{d}{d\tau} [\Theta - T_0 \delta(\tau)] = a \left[\frac{\partial T}{\partial x} (\delta, \tau) - \frac{\partial T}{\partial x} (0, \tau) \right], \quad (7.30)$$

где $\Theta = \int_0^{\delta(\tau)} T(x, \tau) dx$.

Так как в рассмотрение введена величина $\delta(\tau)$, то необходимо к граничным условиям на граничной поверхности $x=0$ добавить граничные условия на $x=\delta(\tau)$:

$$T(\delta, \tau) = T_0, \quad (7.31)$$

$$\partial T(\delta, \tau) / \partial x = 0. \quad (7.32)$$

Решение дифференциального уравнения (7.30) с граничными условиями (7.28), (7.31), (7.32) ищем в виде многочлена второй степени

$$T = a_0 + a_1 x + a_2 x^2, \quad (7.33)$$

где коэффициенты a_i ($i=0, 1, 2$) в общем случае зависят от времени τ .

Для того чтобы приближенное решение (7.33) удовлетворяло граничным условиям задачи, подставим (7.33) в условия (7.28), (7.31), (7.32) и получим систему трех линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов a_i ($i=0, 1, 2$), решая которую имеем

$$T(x, \tau) = T_0 + q(\tau) / [2\lambda \delta(\tau)] [\delta(\tau) - x]^2. \quad (7.34)$$

В (7.34) входит одна неизвестная функция $\delta(\tau)$ — толщина термического слоя, которая определится из уравнения (7.30). Интеграл теплового баланса (7.29) с учетом граничных условий (7.28), (7.32) и уравнения

$$\Theta = \int_0^{\delta} T dx = T_0 \delta + \delta^2 q / (6\lambda)$$

преобразуется в следующее обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка относительно $\delta(\tau)$:

$$\frac{1}{6} \frac{d}{d\tau} (\delta^2 q) = a q \quad (7.35)$$

с начальным условием

$$\delta(0) = 0,$$

В уравнении (7.35) переменные легко разделяются и решение имеет вид

$$\delta = \sqrt{6a} \left[q^{-1}(\tau) \int_0^\tau q(t) dt \right]^{1/2}. \quad (7.36)$$

В частном случае при постоянной плотности теплового потока $q(\tau) = \text{const}$ из (7.36) получим

$$\delta(\tau) = \sqrt{6a\tau}.$$

Положив $x=0$ в (7.34) и подставив $\delta(\tau)$ из (7.36) в (7.34), определим температуру поверхности тела:

$$T(0, \tau) = T_0 + \sqrt{3/2} \left(\sqrt{a/\lambda} \right) \left[q(\tau) \int_0^\tau q(t) dt \right]^{1/2}. \quad (7.37)$$

При $q(\tau) = q_0 = \text{const}$ из (7.37) получим

$$T(0, \tau) = T_0 + \sqrt{3/2} q_0 \sqrt{a\tau/\lambda}. \quad (7.38)$$

Точное решение этой задачи при $q(\tau) = q_0$ имеет вид

$$T(0, \tau) = T_0 + \sqrt{4/\pi} q_0 \sqrt{a\tau/\lambda}. \quad (7.39)$$

Из сравнения выражений (7.38) и (7.39) видим, что по форме результаты совпадают полностью, за исключением значения числового коэффициента. Так как $\sqrt{4/\pi} \approx 1,13$, а $\sqrt{3/2} = 1,23$, то ошибка $\approx 9\%$. Учитывая грубость принятых допущений, следует признать результат расчета удовлетворительным.

2. Процесс нестационарной теплопроводности в неограниченной пластине, ограниченной плоскостями $x=0$ и $x=R$, описывается уравнением (7.26). Задано нулевое начальное распределение температуры

$$T(x, 0) = 0. \quad (7.40)$$

Поверхность $x=0$ подвергается высокотемпературному нагреву, при этом плотность теплового потока через поверхность $x=0$ выражается нелинейной функцией времени и температуры поверхности

$$-\lambda \frac{\partial T(0, \tau)}{\partial x} = f[\tau, T(0, \tau)]. \quad (7.41)$$

Условие (7.41) может выражать условия лучистого теплообмена, аэродинамического нагрева и т. п.

Поверхность $x=R$ при $\tau > 0$ поддерживается при начальной температуре

$$T(R, \tau) = 0. \quad (7.42)$$

На начальной стадии процесса распространения теплоты граничное условие при $x=R$ не сказывается на распространении температур и пластину можно рассматривать как полубесконечное тело.

Таким образом, на начальной стадии процесса необходимо решить уравнение (7.26) с краевыми условиями (7.41), (7.42). Применяя интегральный метод, получим уравнение теплового баланса (7.30) и дополнительные граничные условия на $x=\delta$ (7.31) и (7.32).

Искомый профиль температуры представим в виде кубической параболы

$$T = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \text{ при } x < \delta(\tau).$$

Для определения четырех коэффициентов параболы необходимо иметь четыре граничных условия. Три граничных условия уже заданы: (7.31), (7.32), (7.41). Четвертое получим следующим образом: продифференцируем соотношение (7.31) по времени и подставим $\partial T(\delta, \tau)/\partial \tau$ в уравнение (7.26):

$$\partial^2 T(\delta, \tau)/\partial x^2 = 0. \quad (7.43)$$

Полученное соотношение называют *условием плавности*, так как, когда оно выполняется, профиль температур более плавно сопрягается с начальным распределением температуры.

Найдем коэффициенты a_i ($i=0, 1, 2, 3$), удовлетворив граничным условиям (7.31), (7.32), (7.41), (7.43). Тогда профиль температуры представится в виде

$$T(x, \tau) = [T(0, \tau)/\delta^3](\delta - x)^3, \quad (7.44)$$

$$\text{где } \delta = 3\lambda T(0, \tau)/f [T(0, \tau), \tau]. \quad (7.45)$$

Таким образом, в формулу (7.44) входит фактически одна неизвестная функция времени, которую определим из интеграла теплового баланса (7.30).

Интеграл теплового баланса (7.30), используя (7.41) и (7.32), представим в виде

$$(a/\lambda)f = d\Theta/d\tau. \quad (7.46)$$

Выразим Θ через $T(0, \tau)$ и δ :

$$\Theta = \int_0^\delta \frac{z}{\delta^3} (\delta - x)^3 dx = \frac{z}{\delta^3} \int_0^\delta u^3 du = z \frac{\delta^4}{4\delta^3} = z \frac{\delta}{4}. \quad (7.47)$$

Используя (7.45), исключим δ из (7.46), (7.47) и получим обыкновенное дифференциальное уравнение относительно $T(0, \tau)$

$$\frac{4}{3} \frac{a}{\lambda^2} f [T(0, \tau), \tau] = \frac{d}{d\tau} \left\{ \frac{T^2(0, \tau)}{f [T(0, \tau), \tau]} \right\} \quad (7.48)$$

с начальным условием $T(0, \tau) = 0$ при $\tau = 0$.

Уравнение (7.48) может быть решено аналитически в двух случаях:

1) f не зависит от τ . Решение (7.48) имеет вид

$$\frac{4}{3} \frac{a}{\lambda^2} \tau = \int_0^{\tau(0, \tau)} \frac{2zf(z) - z^2 f'(z)}{[f(z)]^3} dz; \quad (7.49)$$

2) f не зависит от $T(0, \tau)$. Решение (7.48) имеет вид

$$T(0, \tau) = \left[\frac{4}{3} \frac{a}{\lambda^2} f(\tau) \int_0^{\tau} f(t) dt \right]^{1/2} \quad (7.50)$$

Когда фронт теплового возмущения достигает границы $x=R$, граничное условие на этой границе начинает сказываться на распределении температур по толщине пластины и его следует учитывать.

Начальный период процесса заканчивается и время окончания этого периода τ_* можно определить из уравнения (7.50) при подстановке в него $T(0, \tau) = T_*$, где T_* определяется из уравнения (7.45) при $\delta(\tau) = R$. На этой стадии процесса понятие толщины термического слоя теряет смысл и из четырех граничных условий остаются только два, описываемые уравнениями (7.41), (7.42). Чтобы использовать кубический профиль температуры, необходимо получить еще одно граничное условие. Продифференцируем выражение (7.42) по времени и, используя уравнение (7.26) при $x=R$, получим

$$\partial^2 T(R, \tau) / \partial x^2 = 0. \quad (7.51)$$

Удовлетворяя граничным условиям (7.41), (7.42), (7.51), профиль температуры представим в виде

$$T(x, \tau) = \left(\frac{3}{2} \frac{T(0, \tau)}{R} - \frac{1}{2\lambda} f \right) (R-x) + \frac{1}{2R^2} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{T(0, \tau)}{R} \right) (R-x)^3. \quad (7.52)$$

Подставляя профиль температуры (7.52) в уравнение теплового баланса (при этом интегрирование осуществляется по всей толщине неограниченной пластины от 0 до R), получим для $T(0, \tau)$ дифференциальное уравнение

$$\frac{12a}{R^2} \left[\frac{1}{\lambda} - \frac{T(0, \tau)}{R} \right] = \frac{d}{d\tau} \left[5 \frac{T(0, \tau)}{R} - \frac{1}{\lambda} \right]. \quad (7.53)$$

Аналитическое решение уравнения (7.53) может быть получено в двух случаях: когда f зависит только от $T(0, \tau)$ и когда f зависит только от τ .

В первом случае имеем

$$\frac{12}{R^2} (\tau - \tau_*) = \int_{T_*}^{\tau(0, \tau)} \frac{5/R - f'(z)}{f(z) - z/R} dz \quad (\tau \geq \tau_*).$$

Постоянные τ_* и T_* характеризуют время и температуру в конце начального периода процесса и начале второго периода (регуляр-

ного). Они определены нами выше. Если f не зависит от $T(0, \tau)$, то решение принимает вид

$$T(0, \tau) = \frac{R}{5} f(\tau) + \left[T_* - \frac{R}{5} f(\tau_*) \right] \exp \left[-\frac{12a}{5R^2} (\tau - \tau_*) \right] + \\ + \frac{48a}{25R^2} \int_{\tau_*}^{\tau} f(t) \exp \left[-\frac{12a}{5R^2} (\tau - t) \right] dt.$$

В этом случае постоянные T_* и τ_* определяются из системы двух алгебраических уравнений: уравнения (7.45) при подстановке в него $\delta = R$ и уравнения (7.48) при $\tau = \tau_*$.

3. Все рассмотренные задачи имели плоскую симметрию и иско- мое решение выбиралось в виде полинома.

В задачах цилиндрической и сферической симметрии представле- ние профиля температуры в виде полинома не даст хорошего ре- зультата, так как найденное при этом решение для больших значе- ний времени не стремится к предельному значению стационарного состояния. Это положение объясняется тем, что в случае централь- ной симметрии объем, в который распространяется теплота, не оста- ется одинаковым для равных значений приращения радиуса, как это имеет место в плоских задачах, и, как следствие этого, для по- лучения правильного решения необходимо выбирать другие функ- ции профилей. А именно в случае цилиндрической симметрии пред- лагается следующая форма профиля:

$$T(r, \tau) = (a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \dots) \ln r.$$

Аналогично, для сферической симметрии, так как стационарное ре- шение пропорционально $1/r$, предлагается профиль

$$T(r, \tau) = (a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \dots)/r.$$

4. В настоящее время предложено несколько методов повыше- ния точности приближенных решений, полученных интегральным методом: а) увеличение степени аппроксимирующего полинома; б) решение, полученное интегральным методом, считается первым приближением. Последующие приближения находятся при разде- лении прогретого слоя на два участка и более и на каждом участ- ке производится усреднение. Неизвестными считаются значения искомой температуры на границе каждого участка; число неизвест- ных равно числу интегралов теплового баланса; в) так как рассма- тривается линейное уравнение теплопроводности, то, используя обычные методы (например, тепловых потенциалов или интеграль- ного преобразования Лапласа), температуру поверхности можно выразить в виде интеграла типа свертки, включающего зависимость от теплового потока. Решение, полученное интегральным методом, выбирается в качестве первого приближения, а последующие нахо- дятся из полученного интегрального уравнения, например, методом последовательных приближений.

Задача теплового взрыва гетерогенной системы двух полуограниченных тел [10]. Постановка задачи с учетом диффузии активного компонента. Примем основные допущения работы [23]. Рассмотрим простейшую систему, состоящую из двух полуограниченных областей, в которой горючее занимает область $x < 0$, а газообразный окислитель — область $x > 0$ (рис. 7.1). В момент времени $t=0$ составляющие системы имеют

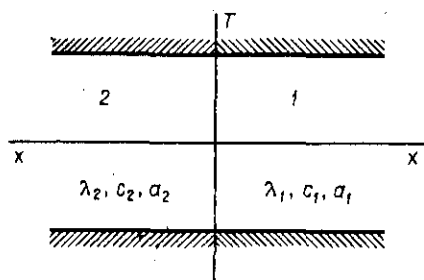


Рис. 7.1. Система двух полуограниченных тел

одинаковую начальную температуру T_0 и в газовую фазу мгновенно вводится активный компонент. Считаем, что с момента времени $t=0$ на поверхности раздела сред $x=0$ протекает экзотермическая реакция, скорость которой определяется законом Аррениуса [3].

Выделяющаяся в результате реакции теплота передается теплопроводностью в горючее и окислитель, кроме того, в газообразной составляющей происходит

диффузия активного компонента и продуктов реакции. Предполагаем, что реагирующий газ представляет собой эффективную бинарную смесь. Гомогенные реакции и фазовые превращения не учитываются. Считаем также, что выделение теплоты вследствие диссоциации энергии пренебрежимо мало. Для того чтобы в первоначальных уравнениях исчез член, учитывающий конвективный теплообмен, полагаем, что поверхность раздела составляющих неподвижна и вводим новую независимую простран-

ственную переменную $\psi = \int_0^x \rho \, dx$.

При этом удовлетворяется уравнение неразрывности для газовой фазы. Математически краевая задача запишется тогда в виде

$$\frac{\partial S(\psi, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \psi} \left[a_3 \frac{\partial S(\psi, t)}{\partial \psi} \right] \quad (0 < \psi < \infty); \quad (7.54)$$

$$\frac{\partial T_i(\psi, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \psi} \left[a_i \frac{\partial T_i(\psi, t)}{\partial \psi} \right] \quad (i=1, 0 < \psi < \infty; \quad i=2, -\infty < \psi < 0); \quad (7.55)$$

$$S(\psi, 0) = S_0, \quad T_i(\psi, 0) = T_0 \quad (i=1, 2); \quad (7.56)$$

$$S(\infty, t) = S_0, \quad T_1(\infty, t) = T_0; \quad (7.57)$$

$$T_2(\psi, t) = T_0 \quad \text{при} \quad \psi = -\infty; \quad (7.58)$$

$$T_1(0, t) = T_2(0, t); \quad (7.59)$$

$$\rho_2 \lambda_2 \frac{\partial T_2(0, t)}{\partial \psi} - \rho_1 \lambda_1 \frac{\partial T_1(0, t)}{\partial \psi} = \rho_1^2 Q D \frac{\partial S(0, t)}{\partial \psi}; \quad (7.60)$$

$$\rho_1^2 D \frac{\partial S(0, t)}{\partial \psi} = k S^n(0, t) \exp[-E/RT_1(0, t)], \quad (7.61)$$

где T — абсолютная температура, К; x — продольная координата, м; t — время, с; S — массовая доля активного компонента; ρ — плотность, кг/м³; λ — теплопроводность, Вт/(м·К); c — массовая теплоемкость, Дж/(кг·К); R — газовая постоянная, Дж/(кг·К); E — энергия активации, Дж/кг; D — коэффициент бинарной диффузии, м²/с; Q — тепловой эффект реакции, Дж/кг; k — предэкспонент, кг/(м²·с); $a_i = \rho_i \lambda_i / c_i$, $i = 1, 2$; $a_3 = \rho_1^2 D$.

Предположим далее, что коэффициенты a_i ($i = 1, 2, 3$) являются постоянными, как отмечено в [23], это условие все еще допускает изменение в небольших пределах теплофизических свойств для газового окислителя.

Сведем систему трех взаимосвязанных дифференциальных уравнений (7.54), (7.55) с краевыми условиями (7.56) — (7.61) к краевой задаче для двух дифференциальных уравнений относительно температур горючего и окислителя. С этой целью к системе уравнений (7.54) — (7.61) применим интегральное преобразование Лапласа по временной переменной t . Тогда в области изображений по Лапласу решения дифференциальных уравнений (7.54), (7.55) представляются в виде

$$\hat{S}_L(\psi, s) - S_0/s = G \exp(-\sqrt{s/a_3} \psi), \quad (7.62)$$

$$\hat{T}_{iL}(\psi, s) - T_0/s = B_i \exp(-\sqrt{s/a_i} \psi) \quad (i = 1, 2). \quad (7.63)$$

Как нетрудно видеть из условия (7.59), имеет место равенство

$$B_1 = B_2 = B.$$

Удовлетворяя в области изображений по Лапласу граничному условию (7.60), имеем

$$\rho_2 \lambda_2 \sqrt{s/a_2} B + \rho_1 \lambda_1 \sqrt{s/a_1} B = Q \rho_1^2 D G (-\sqrt{s/a_3}).$$

Отсюда получим

$$G = -(\sqrt{\rho_1 \lambda_1 c_1} + \sqrt{\rho_2 \lambda_2 c_2}) B / (Q \rho_1 \sqrt{D}).$$

Тогда из уравнений (7.62) и (7.63) при $\psi = 0$ следует

$$\begin{aligned} S_L(0, s) - S_0/s = & - \left[(\sqrt{\rho_1 \lambda_1 c_1} + \sqrt{\rho_2 \lambda_2 c_2}) / (Q \rho_1 \sqrt{D}) \right] |T_L(0, s) - T_0/s|. \end{aligned} \quad (7.64)$$

Переход в область оригиналов в выражении (7.64) позволяет установить связь между функциями $S(0, t)$ и $T(0, t)$

$$S(0, t) = S_0 - \nu |T(0, t) - T_0|, \quad (7.65)$$

где $\nu = (\sqrt{\rho_1 \lambda_1 c_1} + \sqrt{\rho_2 \lambda_2 c_2}) / (Q \rho_1 \sqrt{D})$.

Учитывая функциональную связь (7.65) и вводя безразмерные переменные, задачу (7.54) — (7.61) сводим к системе двух дифференциальных уравнений с соответствующими краевыми условиями:

$$\frac{\partial \Theta_i(\eta, \tau)}{\partial \tau} = K_a^{i-1} \frac{\partial^2 \Theta_i(\eta, \tau)}{\partial \eta^2} \quad (i = 1, 2, \eta > 0, \tau > 0); \quad (7.66)$$

$$\Theta_i(\eta, 0) = 0 \quad (i = 1, 2); \quad (7.67)$$

$$-\sum_{l=1}^2 (-K_\lambda)^{l-1} \frac{\partial \Theta_l(0, \tau)}{\partial \eta} = q[\Theta(0, \tau)]; \quad (7.68)$$

$$\Theta_i(\infty, \tau) = 0; \quad (7.69)$$

$$\Theta_1(0, \tau) = \Theta_2(0, \tau). \quad (7.70)$$

Здесь $\Theta_i = E/(RT_0^2) \cdot (T_i - T_0)$ — безразмерная температура; $\eta = \psi/\gamma$ — безразмерная пространственная координата; $\tau = ta_1/\gamma^2$ — безразмерное время; $q(\Theta) = (1 - \beta\Theta)^m \exp\left(\frac{\Theta}{1+\mu\Theta}\right)$ — безразмерный тепловой поток на поверхности раздела реагирующих сред; $u = RT_0/E_1$ — безразмерный параметр; $\beta = \frac{(\rho_1 \lambda_1 c_1)^{1/2} + (\rho_2 \lambda_2 c_2)^{1/2}}{S_0 \sqrt{D} \rho_1 Q} \frac{RT_0^2}{F}$ — безразмерный

параметр; $\gamma = \frac{\lambda_1 \rho_1 RT_0^2}{EKQS_0^m} \exp\left(\frac{E}{RT_0}\right)$ — масштаб длины; $K_\lambda = \lambda_2 \rho_2 / (\lambda_1 \rho_1)$,

$K_2 = a_2/a_1$ — безразмерные параметры.

Для приближенного решения краевой задачи (7.66) — (7.70) применим интегральный метод. Интегрируя (7.66) в пределах толщины термического слоя δ_i ($i = 1, 2$), с учетом граничного условия (7.32) получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{d\tau} \bar{\Theta}_i = -K_a^{i-1} \frac{\partial \Theta_i(0, \tau)}{\partial \eta} \quad (i = 1, 2), \quad (7.71)$$

где $\bar{\Theta}_i = \int_0^{\delta_i} \Theta_i(\eta, \tau) d\eta$.

Температурные поля по толщинам термических слоев аппроксимируем степенным рядом

$$\Theta_i(\eta, \tau) = \sum_{k=0}^n a_{ik} (\delta_i - \eta)^k. \quad (7.72)$$

Коэффициенты a_{ik} определяются из условий

$$\Theta_i(0, \tau) = \Theta(0, \tau); \quad \Theta_i(\delta_i, \tau) = 0;$$

$$\frac{\partial^j \Theta_i(\delta_i, \tau)}{\partial \eta^j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n-1),$$

что позволяет свести (7.72) к виду

$$\Theta_t(\eta, \tau) = \Theta(0, \tau) (1 - \eta/\delta_t)^n. \quad (7.73)$$

С учетом (7.73) уравнения (7.68), (7.71) преобразуются:

$$n\Theta(0, \tau)(1/\delta_1 + K_\lambda \delta_2) = q[\Theta(0, \tau)]; \quad (7.74)$$

$$\frac{d|\delta_1\Theta(0, \tau)|}{d|\delta_2\Theta(0, \tau)|} = \frac{1}{K_\lambda} \frac{\delta_2}{\delta_1}. \quad (7.75)$$

Из (7.75) очевидно, что

$$\delta_2/\delta_1 = \sqrt{K_\lambda}. \quad (7.76)$$

Решая совместно (7.74) и (7.76), определим

$$\delta_t = n \sqrt{K_\lambda^{-1}} \cdot \frac{\Theta(0, \tau)}{q[\Theta(0, \tau)]}. \quad (7.77)$$

Просуммировав левые и правые части уравнений (7.71) с учетом (7.74) и (7.77), получим нелинейное дифференциальное уравнение для определения температуры поверхности раздела сред

$$\frac{n}{n+1} (1 + K_\varepsilon)^2 \frac{d}{d\tau} \left\{ \frac{\Theta^2(0, \tau)}{q[\Theta(0, \tau)]} \right\} = q[\Theta(0, \tau)] \quad (7.78)$$

с начальным условием $\Theta(0, 0) = 0$,

где $K_\varepsilon = K_\lambda K_a^{-1/2}$ — критерий тепловой активности.

Интеграл уравнения (7.78) имеет вид

$$\begin{aligned} \tau = \frac{n}{n+1} \frac{(1+K_\varepsilon)^2}{u^2} \exp\left(-\frac{2}{u+\beta}\right) & \left\{ \sum_{k=0}^{2m-3} \binom{2m-3}{k} b^{2m-3-k} \times \right. \\ & \times [(b_1 - b_2)\Phi(2m-1-k) - (2b_1 - 4b_2)\Phi(2m-k) - \\ & - 4b_2\Phi(2m+1-k)] + b_3 \sum_{k=0}^{2m-2} \binom{2m-2}{k} b^{2m-2-k} [\Phi(2m-2-k) - \\ & \left. - 4\Phi(2m-1-k) + 4\Phi(2m-k)] \right\}. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Phi(p) &= \frac{r^{p-1}}{(p-1)!} [\overline{\text{Ei}}(rz) - \overline{\text{Ei}}(2r)] - \exp(rz) \times \\ & \times \sum_{i=1}^{p-1} \frac{r^{p-i}}{r^{p-1}(p-1)(p-2)\dots(p-i)} + \exp(2r) \times \\ & \times \sum_{i=1}^{p-1} \frac{r^{p-i}}{2^{p-i}(p-1)(p-2)\dots(p-i)}; \end{aligned}$$

$$r = 1/(u+\beta); \quad b = 2\beta/u; \quad b_1 = 4r^{2m-1}u^{2m-3};$$

$$b_2 = 2m\beta r^{2m}u^{2m-3}; \quad b_3 = (1/2)r^{2m+1}u^{2m-2};$$

$$z = 2\Theta(0, \tau)(1 - u\beta)/[1 + u\Theta(0, \tau)];$$

$\binom{p}{k}$ — число всех сочетаний из p по k ; $\bar{\text{Ei}}(y) = \text{Re Ei}(y)$ — модифицированная интегральная показательная функция, табулированная в [55].

Для случая постоянной концентрации лимитирующего компонента ($m=0$) интеграл уравнения (7.78) запишется в виде

$$\tau = F(y) - F(r), \quad (7.79)$$

где

$$F(y) = \frac{n}{n+1} \frac{(1+K_e)^2}{u^2} \exp\left(-\frac{2}{u}\right) \left\{ 2\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u^3}\right) \bar{\text{Ei}}\left(\frac{y}{u}\right) + \right. \\ \left. + \left[\frac{1}{y} \left(\frac{2}{u} - 4\right) + \frac{4}{y^2} + \frac{1}{2} \right] \exp\left(\frac{y}{u}\right) \right\}; \\ y = 2/(1+u\Theta).$$

Из (7.79) предельным переходом $u \rightarrow 0$ получим

$$\tau = \frac{n}{n+1} \frac{(1+K_e)^2}{2} \left\{ \left[\Theta^2(0, \tau) - \Theta(0, \tau) - \frac{1}{2} \right] \exp\left[-2\Theta(0, \tau) + \frac{1}{2}\right] \right\}$$

и при $u \rightarrow \infty$

$$\tau = \frac{n}{n+1} (1+K_e)^2 \Theta^2(0, \tau).$$

На рис. 7.2—7.6 приведены результаты параметрического исследования влияния величин u , m , β на безразмерную температуру поверхности раздела $\Theta(0, \tau)$ как функции от безразмерного времени τ . Типичные кривые зависимости $\Theta(0, \tau)$ от τ при малых значениях параметра u показывают, что при $\Theta(0, \tau) \rightarrow 0$ $\tau \sim \Theta^2(0, \tau)$, $\Theta(0, \tau) \rightarrow \beta^{-1}$ ($m > 0$), $\tau \rightarrow \infty$. Время задержки воспламенения (соответствующее резкому переходу от низкотемпературного режима к высокотемпературному режиму протекания экзотермической гетерогенной реакции) τ^* определим из уравнения

$$\frac{d^2\Theta(0, \tau)}{d\tau^2} \Big|_{\tau=\tau^*} = 0,$$

корни которого могут быть вычислены с помощью ЭЦВМ.

Различные начальные температуры реагентов. В случае, когда газом, вызывающим воспламенение, является кислород для инициирования процесса воспламенения, необходима высокая начальная температура, поэтому представляет интерес вариант задачи, когда начальные температуры газообразного окислителя T_1^0 и горючего T_2^0 различны ($T_1^0 > T_2^0$). В этом случае все полученные результаты сохраняют силу, однако вместо начальной температуры T_0 в качестве определяющей следует взять

$$T_0 = (T_1^0 + K_e T_2^0) / (1 + K_e). \quad (7.80)$$

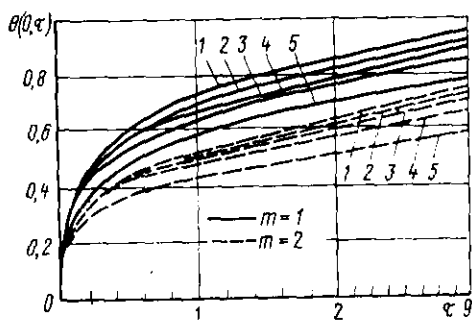


Рис. 7.2. Влияние параметров u и m на изменение температуры поверхности раздела фаз во времени ($K_e = 0$, $\beta = 1$):

1 — $u = 0$; 2 — $u = 0,3$; 3 — $u = 0,5$; 4 — $u = 1,0$; 5 — $u = \infty$

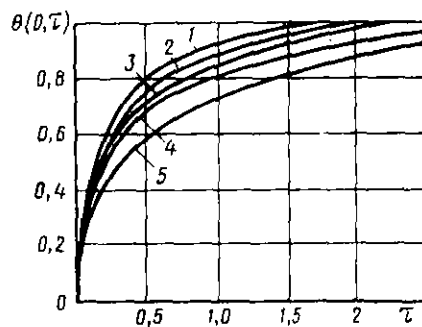


Рис. 7.3. Зависимость температуры поверхности контакта от времени для различных значений параметра u ($K_e = 0$, $\beta = 1$, $m = 0,5$):

1 — $u = 0$; 2 — $u = 0,3$; 3 — $u = 0,5$; 4 — $u = 1,0$; 5 — $u = \infty$

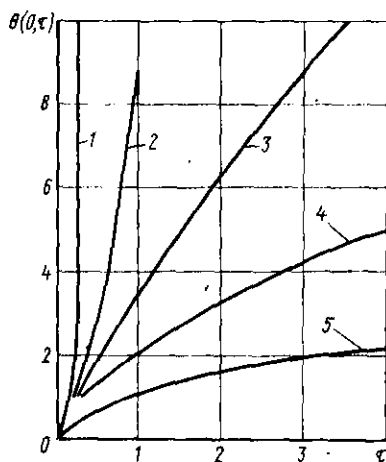


Рис. 7.4. Влияние параметра u на изменение температуры контакта во времени ($K_e = 0$, $m = 0$):

1 — $u = 0,1$; 2 — $u = 0,3$; 3 — $u = 0,5$; 4 — $u = 1$; 5 — $u = \infty$

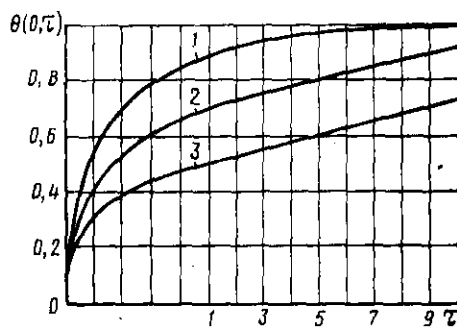


Рис. 7.5. Зависимость температуры поверхности раздела сред от времени для различных значений порядка реакции m ($\beta = 1$, $u = 0,3$):

1 — $m = 0,5$; 2 — $m = 1$; 3 — $m = 2$

При этом безразмерные начальные температуры окислителя и горючего связаны равенством $\Theta_1^0 = -K_e \Theta_2^0$.

Основным отличием получаемых в этом случае результатов является дополнительная зависимость температуры поверхности контакта от давления в газообразном окислителе, так как характеристическая температура T_0 в этом случае зависит от давления.

Нагрев поверхности раздела тепловым потоком. Пусть из области $x > 0$ начиная с момента времени $t = 0^+$ на поверхность реакции падает тепловой поток, плотность которого произвольно изменяется во времени $Q_0(t)$. Тогда, выполнив соответствующие преобразования,

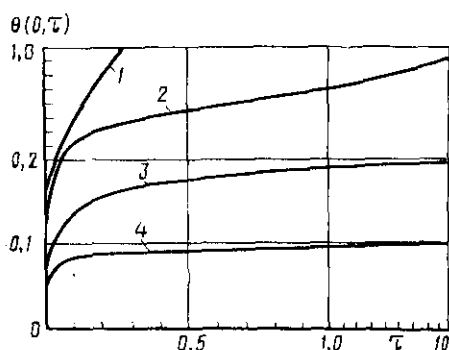


Рис. 7.6. Влияние параметра β на изменение температуры контакта во времени ($m=1$, $u=0,3$):
1 — $\beta = 0$; 2 — $\beta = 1$; 3 — $\beta = 5$; 4 — $\beta = 10$

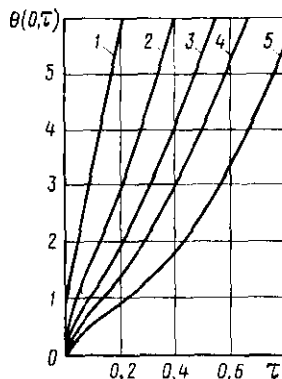


Рис. 7.7. Влияние плотности теплового потока на изменение температуры контакта во времени ($K_e=0$, $u=0,3$):
1 — $\alpha = 5$; 2 — $\alpha = 2$; 3 — $\alpha = 1$; 4 — $\alpha = 0,5$; 5 — $\alpha = 0$

получим, что безразмерная плотность теплового потока $q(\Theta, \tau)$ в задаче (7.66) — (7.70) определится по формуле

$$q(\Theta, \tau) = \left[1 - \beta\Theta + \alpha_1 \int_0^\tau \frac{Q(s)}{V \pi(\tau-s)} ds \right]^m \exp \frac{\Theta}{1+u\Theta} + \alpha_2 Q(\tau),$$

где $\alpha_1 = \frac{q_0 \gamma}{V a_1 \rho_1 Q S_0 V D}$, $\alpha_2 = \frac{q_0}{K S_0^m Q} \exp \frac{k}{RT_0}$.

Уравнение вида (7.78), к которому приходим интегральным методом, в общем случае не допускает разделения переменных и может быть проинтегрировано численно. Однако в случае, когда $m=0$, а $Q_0(\tau) = \text{const}$, интеграл уравнения (7.78) имеет вид

$$\tau = \frac{\pi}{n+1} (1+K_e)^2 \int_0^{\Theta(0, \tau)} \frac{2\Theta q(\Theta) - \Theta^2 q'(\Theta)}{q^3(\Theta)} d\Theta,$$

где $q'(\Theta) = \frac{1}{(1+u\Theta)^2} \exp \left(\frac{\Theta}{1+u\Theta} \right)$.

Влияние плотности теплового потока α_2 на температуру контакта показано на рис. 7.7. Анализ результатов расчета показывает, что наличие теплового потока приводит к уменьшению времени задержки воспламенения.

Нагрев поверхности реакции лучистым потоком теплоты. Пусть поверхность раздела составляющих подвергается воздействию лучистого потока теплоты и сама отдает теплоту в окружающую среду посредством тепловой радиации. Выполнив преобразование Лапласа, получим, как и выше, для плотности теплового потока на поверхности раздела следующее выражение:

$$q(\Theta, \tau) = \left[1 - \beta\Theta - \Pi_1 \int_0^\tau \frac{(1+u\Theta)^4 - (1+u\Theta_\infty)^4}{V \pi(\tau-s)} ds \right] \times \\ \times \exp \frac{\Theta}{1+u\Theta} - \Pi_2 [(1+u\Theta)^4 - (1+u\Theta_\infty)^4], \quad (7.81)$$

где $\Pi_1 = \frac{\sigma_E T_0^4}{V \alpha_1 \rho_1 Q S_0} \frac{1}{V D}$ и $\Pi_2 = \frac{\sigma_E T_0^4}{K S_0^m Q} \exp \frac{E}{RT_0}$ — безразмерные комплексы, характеризующие интенсивность излучения; значение T_0 в этом случае выбирается по формуле (7.80).

Применение интегрального метода при таком выражении для плотности теплового потока $q(\Theta, \tau)$ приводит к уравнению вида (7.78), в котором переменные не разделяются в общем случае и необходимо применить численное интегрирование. Однако при $m=0$ плотность теплового потока зависит только от температуры поверхности:

$$q(\Theta) = \exp \frac{\Theta}{1+u\Theta} - \Pi_2 [(1+u\Theta)^4 - (1+u\Theta_\infty)^4].$$

В этом случае дифференциальное уравнение (7.78) допускает разделение переменных и его решение представим в аналитическом виде:

$$\tau = \frac{n}{n+1} (1+K_F)^2 \psi[\Theta(0, \tau)], \quad (7.82)$$

где $\psi[\Theta(0, \tau)] = \int_0^{\Theta(0, \tau)} \frac{2zq(z) - z^2 q'(z)}{q^3(z)} dz$. Здесь $q'(z) = \frac{1}{(1+uz)^2} \times$

$$\times \exp \left(\frac{z}{1+uz} \right) - 4\Pi_2 u (1+uz)^3.$$

Результаты расчета температуры поверхности раздела по формуле (7.82), представленные в табл. 7.3, показывают, как влияют лучистый поток теплоты и температура газовой среды на изменение контактной температуры при $u=0,01$.

Таблица 7.3

Θ	$\Theta_{\infty}=0,1$			$\Theta_{\infty}=0,5$		
	Π_1			Π_2		
	0,2	1,0	2,0	0,2	1,0	2,0
0,1	0,006	0,006	0,006	0,006	0,004	0,003
0,2	0,022	0,022	0,022	0,020	0,016	0,012
0,3	0,041	0,042	0,042	0,030	0,031	0,024
0,4	0,063	0,064	0,064	0,059	0,048	0,037
0,5	0,085	0,086	0,087	0,080	0,065	0,052
0,6	0,105	0,106	0,108	0,099	0,082	0,066
0,7	0,123	0,125	0,127	0,117	0,098	0,080
0,8	0,139	0,141	0,144	0,133	0,112	0,093
0,9	0,153	0,156	0,159	0,146	0,125	0,105
1,0	0,165	0,167	0,171	0,158	0,136	0,115
1,1	0,174	0,177	0,181	0,167	0,145	0,123
1,2	0,182	0,185	0,190	0,175	0,152	0,131
1,3	0,188	0,192	0,196	0,181	0,159	0,137
1,4	0,193	0,197	0,201	0,186	0,163	0,142
1,5	0,197	0,200	0,205	0,190	0,167	0,146
1,6	0,200	0,203	0,208	0,192	0,170	0,149
1,7	0,202	0,205	0,210	0,194	0,172	0,151
1,8	0,203	0,206	0,211	0,196	0,174	0,152
1,9	0,204	0,207	0,212	0,196	0,175	0,153
2,0	0,204	0,208	0,212	0,196	0,175	0,154

Применение численных методов. Для оценки погрешности решений, получаемых интегральным преобразованием Лапласа, можно получить функциональное решение краевой задачи (7.66) — (7.70):

$$\Theta_t(\eta, \tau) = \frac{1}{(1+K_e)} \int_0^{\tau} \frac{q[\Theta(0, z)]}{\sqrt{\pi(\tau-z)}} \exp \left[\frac{-\eta^2}{4K_e^{t-1}(\tau-z)} \right] dz.$$

Не определенная пока температура поверхности раздела $\Theta(0, \tau)$ определяется из нелинейного интегрального уравнения Вольтерра второго рода

$$\Theta(0, \tau) = \frac{1}{(1+K_e)} \int_0^{\tau} \frac{q[\Theta(0, z)]}{\sqrt{\pi(\tau-z)}} dz. \quad (7.83)$$

В качестве первого приближения при решении уравнения (7.83) методом итераций выбираем решение, полученное интегральным методом. Последующие итерации осуществлялись по формуле

$$\Theta_{n+1}(\tau) = \frac{2(b-a)^{1/2}}{\sqrt{\pi}(1+K_e)} \sum_{i=1}^m W_i^{(2m)} q[\Theta_n(t_i)],$$

где $[a, b]$ — отрезок интегрирования; $t_i = a + (b - a)(1 - x_i^2)$; x_i — абсциссы Гаусса; $W_i^{(2m)}$ — веса Гаусса порядка $2m$.

В тех случаях, когда решение в замкнутой форме интегральным методом получить не удавалось, в качестве первого приближения выбиралось решение трансцендентного уравнения, рекомендуемого в работе [115]:

$$\begin{aligned} \Theta(0, \tau) = & \frac{1}{(1+K_e)} \int_0^{\tau_{m-1}} \frac{q|\Theta(0, z)|}{\sqrt{\pi(\tau-z)}} dz + \\ & + \frac{q|\Theta(0, \tau)|}{(1+K_e)} \int_{\tau_{m-1}}^{\tau} \frac{dz}{\sqrt{\pi(\tau-z)}}, \quad \tau_{m-1} < \tau < \tau_m. \end{aligned} \quad (7.84)$$

На рис. 7.8 и 7.9 приведены результаты решения, вычисленные методом последовательных приближений, где в качестве исходного приближения взято решение, полученное интегральным методом. Приведены также кривые, полученные по формуле (7.84) (пунктир).

В случае $m > 0$ два последовательных приближения берут в вилку истинное решение, которая практически за 2—3 приближения сходится к нулевой. В случае $m = 0$ кривые, полученные интегральным методом, ложатся выше истинного решения и последовательные приближения сходятся к точному с одной стороны. Чем меньше значение τ , тем быстрее сходится метод итераций. При этом в области изменения τ , представляющей практический интерес, расхождение между численным решением и решением, полученным интегральным методом, не превышает 3 %.

Анализ расчетов показывает, что при решении интегрального уравнения (7.83) в данной задаче в качестве первого приближения целесообразно принимать решение, полученное интегральным методом, а не решение, рассчитываемое по формуле (7.84).

На рис. 7.10 сравниваются решения, полученные интегральным способом, методом осреднения функциональных поправок, с численным решением по методу последовательных приближений. Метод осреднения функциональных поправок дает удовлетворительную точность уже во втором приближении.

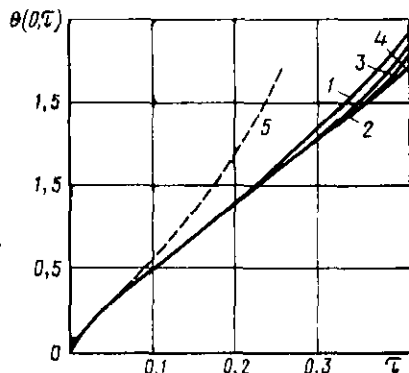


Рис. 7.8. Сравнение решений, полученных интегральным методом (кривая 1), методом последовательных приближений (кривые 2—4), по формуле (7.84) (кривая 5) при $K_e = 0$; $u = 0.3$; $m = 0$

Метод интегрального теплового баланса можно применять и для решения стационарных краевых задач теплопроводности. Рассмотрим схему применения метода для двумерной задачи [122] в пластине Ω ($0 \leq x \leq l$, $0 \leq y \leq d$):

$$\partial^2 T / \partial x^2 + \partial^2 T / \partial y^2 = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 < y < d; \quad (7.85)$$

$$\partial T / \partial y|_{y=0} = \alpha_1 T(x, 0); \quad (7.86)$$

$$\partial T / \partial y|_{y=d} = \alpha_2 T(x, d); \quad (7.87)$$

$$T(0, y) = f_1(y); \quad (7.88)$$

$$T(l, y) = f_2(y). \quad (7.89)$$

Пусть граничные условия таковы, что вектор теплового потока почти параллелен оси Ox . В таких случаях обычно полагают, что температура T не зависит от координаты y , и рассматривают одномерную задачу теплопроводности.

Вместо этого аппроксимируем температурную зависимость от координаты y параболой

Вместо этого аппроксимируем температурную зависимость от координаты y параболой

$$T(x, y) = A_0(x) + A_1(x)y + A_2(x)y^2. \quad (7.90)$$

Потребовав удовлетворения граничным условиям (7.86) и (7.87), выразим два коэффициента A_1 через третий. Пусть этим оставшимся неизвестным коэффициентом будет $A_0(x)$.

Так как задача (7.85) — (7.89) стационарна, то

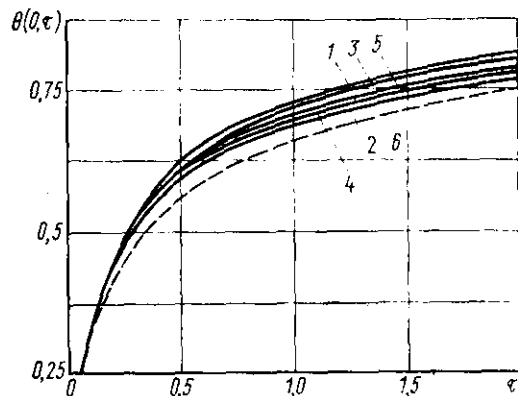


Рис. 7.9. Сравнение решений, полученных интегральным методом (кривая 1), методом последовательных приближений (кривые 2—5), по формуле (7.84) (кривая 6) при $K_e = 0$, $u = 0.3$, $m = 1$, $\beta = 1$

толщину термического слоя положим равной размеру пластины по координате (при установившемся процессе толщина термического слоя постоянна и не зависит от времени). Введем осредненную температуру

$$\Theta = \int_0^d T dy \text{ и получим интеграл теплового баланса}$$

$$\int_0^d (\partial^2 T / \partial x^2) dy + (\partial T / \partial y)_{y=d} - (\partial T / \partial y)_{y=0} = 0;$$

$$d^2 \Theta / dx^2 = \partial T / \partial y|_{y=0} - \partial T / \partial y|_{y=d}. \quad (7.91)$$

Так как $\Theta = \Theta(A_0)$, то для определения коэффициента $A_0(x)$ из (7.91) получим дифференциальное уравнение второго порядка вида

$$d^2 A_0 / dx^2 + F(A_0) = 0. \quad (7.92)$$

К уравнению (7.92) присоединим преобразованные граничные условия (7.88) и (7.89)

$$\Theta|_{A_0(0)} = \Theta_1 = \text{const}, \quad \Theta|_{A_0(l)} = \Theta_2 = \text{const}.$$

Применим описанный метод для решения следующей задачи.

Температурное поле прямолинейного охлаждающего ребра. В области, изображенной на рис. 7.11, имеем краевую задачу

$$\partial^2 T / \partial x^2 + \partial^2 T / \partial y^2 = 0, \quad 0 < x < l, \quad |y| < d/2; \quad (7.93)$$

$$\partial T / \partial y|_{y=\pm d/2} = \mp (\alpha_1 / \lambda) (T_s - T_c); \quad (7.94)$$

$$T|_{x=0} = T(0, y); \quad (7.95)$$

$$\partial T / \partial x|_{x=l} = (\alpha_2 / \lambda) [T(l, y) - T_c], \quad (7.96)$$

где α_1 , α_2 — коэффициенты теплоотдачи на поверхности ребра и в вершине ребра соответственно; T_s — температура поверхности ребра; T_c — температура окружающей ребро жидкости.

Выбрав решение в виде квадратичной параболы (7.90) и удовлетворив граничным условиям (7.94), получим

$$T(x, y) = A_0(x) + T_c + \\ + (Bi/2) A_0(x) [1 - (2y/d)^2],$$

где $A_0(x) = T_s - T_c$ имеет размерность температуры; $Bi = \alpha_1 d / (2\lambda)$ — число Био.

Определим осредненную температуру:

$$\Theta = \int_{-d/2}^{d/2} T(x, y) dy = A_0(x) d (1 + \\ + Bi/3) + d T_c.$$

Подставляя $\Theta[A_0(x)]$ в интеграл теплового баланса, приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$\frac{d^2 A_0(x)}{dx^2} - \frac{2\alpha_1}{\lambda d} \frac{1}{(1+Bi/3)} A_0(x) = 0. \quad (7.97)$$

Граничные условия преобразуются следующим образом:

$$\Theta(0) = \int_{-d/2}^{d/2} T(0, y) dy, \quad (d \Theta / dx)|_{x=l} = -(\alpha_2 / \lambda) [\Theta(l) - T_c d],$$

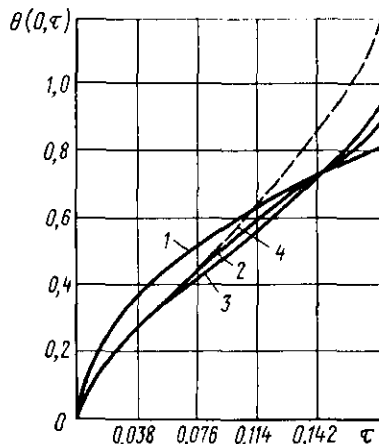


Рис. 7.10. Сравнение решений, полученных интегральным методом (кривая 4), методом итераций (кривая 3), методом осреднения функциональных поправок (кривые 1 и 2 — 1-е и 2-е приближения соответственно) при $K_\epsilon = 0$, $u = 0$, $m = 0$

$$\text{откуда } A_0(0) = T_0, \quad (7.98)$$

где T_0 — температура основания ребра;

$$(d A_0(x)/dx)|_{x=l} = -(\alpha_2/\lambda) A_0(l). \quad (7.99)$$

Решая (7.97) с граничными условиями (7.98), (7.99), получим

$$\frac{A_0(x)}{T_0} = \frac{T_s - T_c}{T_0} = \frac{\operatorname{ch} M(l-x)/H \operatorname{sh} M(l-x)}{\operatorname{ch} M + H \operatorname{sh} M},$$

где $M = \sqrt{\operatorname{Bi}/(1 + \operatorname{Bi}/3)} (2/d)$; $H = \alpha_2/(\lambda M)$.

Для теплового потока в ребре единичной ширины имеем

$$q/(\lambda T_0) = Md (\operatorname{sh} Ml + H \operatorname{ch} Ml) / (\operatorname{ch} Ml + H \operatorname{sh} Ml).$$

На рис. 7.12 представлены результаты расчетов значений теплового потока при различных значениях параметров Bi и $2l/d$, которые сравниваются с результатами расчетов по одномерной теории и согласно численному решению исходной задачи конечно-разностным методом.

Результаты, полученные при использовании интегрального метода баланса, удовлетворительно согласуются с результатами численного решения при всех значениях числа Био, в то время как результаты одномерной теории с увеличением числа Био значительно отличаются от точных.

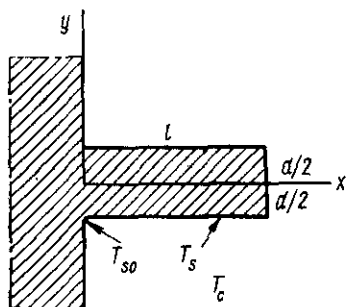


Рис. 7.11. Схема прямолинейного ребра

если известно, что начальная температура шара $T_0 = \text{const}$ и нагрев осуществляется тепловым потоком плотностью $q_0 = \text{const}$.

Задача 7.2. Найти поле температур неограниченной пластины толщиной R ($0 < x < R$), если задано начальное нулевое распределение температуры, температура поверхности $x=0$ в начальный момент времени скачком изменяется до значения T_0 , а поверхность $x=R$ теплоизолирована.

§ 7.3. Метод Швеца

Основная идея метода Швеца [110] заключается в совместном применении метода последовательных приближений и инженерной модели процесса теплопроводности. Схему применения метода Швеца рассмотрим на следующем примере.

Распределение температуры в полуограниченном теле описывается уравнением теплопроводности

$$\partial^2 T / \partial x^2 = (1/a) \partial T / \partial \tau, \quad x > 0, \quad \tau > 0, \quad (7.100)$$

с начальным условием

$$T(x, 0) = 0 \quad (7.101)$$

и граничным условием

$$T(0, \tau) = 1. \quad (7.102)$$

Приближенное решение задачи (7.100) — (7.102) ищем в виде

$$T^{(n)}(x, \tau) = \sum_{k=0}^n T_k(x, \tau),$$

где частные решения $T_k (k=1, 2, \dots, n)$ удовлетворяют уравнению

$$\partial^2 T_k / \partial x^2 = (1/a) \partial T_{k-1} / \partial \tau, \quad (7.103)$$

а T_0 находится из уравнения

$$\partial^2 T_0 / \partial x^2 = 0. \quad (7.104)$$

Как и в интегральном методе, введение толщины термического слоя $\delta(\tau)$ приводит к двум дополнительным граничным условиям:

$$T(\delta, \tau) = 0; \quad (7.105)$$

$$\partial T(\delta, \tau) / \partial x = 0. \quad (7.106)$$

Интегрируя уравнение (7.104), с учетом граничных условий (7.102) и (7.105) получим в нулевом приближении

$$T_0(x) = 1 - x/\delta.$$

Первое приближение $T_1(x, \tau)$ найдем, интегрируя уравнение

$$\partial^2 T_1 / \partial x^2 = \partial T_0(x, \tau) / \partial \tau$$

с граничными условиями (7.102) и (7.105). В результате получим

$$T_1(x, \tau) = 1 - x/\delta(\tau) + [x\dot{\delta}(\tau)/6] (x^2/\delta^2(\tau) - 1), \quad (7.107)$$

где $\dot{\delta}$ — производная по τ .

Толщина термического слоя $\delta(\tau)$ в (7.107) определяется из условия (7.106), которое дает дифференциальное уравнение $\delta\dot{\delta} = 3$ с начальным условием $\delta(0) = 0$.

Решение последнего уравнения имеет вид

$$\delta = 2,45 \sqrt{a\tau}.$$

Таким образом, задача решена в первом приближении.

Интересно, что тепловой поток на поверхности тела $x=0$, вычисленный по первому приближению:

$$\lambda \partial T^{(1)} / \partial x|_{x=0} = -0,61\lambda / \sqrt{a\tau}.$$

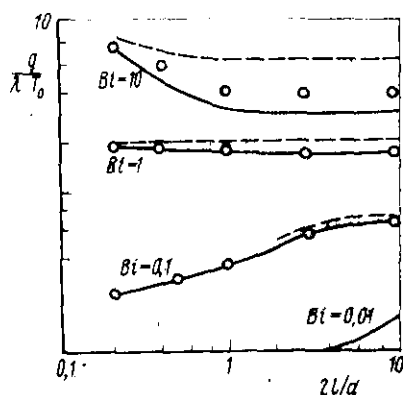


Рис. 7.12. Влияние числа Био на плотность теплового потока в прямолинейных ребрах различного относительного удлинения:

— по одномерной теории;
— по интегральному методу теплового баланса; ○○○○ — численное решение

отличается от точного выражения для теплового потока только числовым множителем (0,564).

Далее с помощью метода Швеца могут быть получены приближения более высокого порядка, при этом порядок дифференциального уравнения для $\delta(\tau)$ и степень аппроксимирующего полинома соответственно повышаются.

Дифференциальное уравнение для толщины прогретого слоя получается после нахождения соответствующего частного решения из условия (7.106).

На рис. 7.13 [110] сравниваются результаты расчетов по приближенным решениям с результатами точного решения. Результаты второго приближения удовлетворительно согласуются с точным решением.

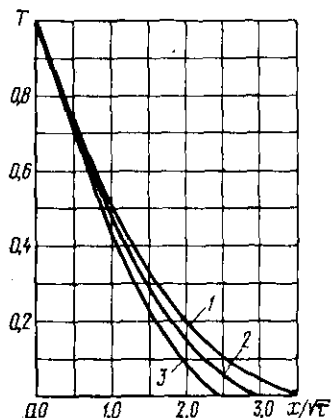


Рис. 7.13. Температурное поле полубесконечного массива:

1 — точное решение; 2 — 1-е приближение; 3 — 2-е приближение

Задача 7.3. На поверхности полуграниченного тела задан тепловой поток постоянной плотности $q_0 = \text{const}$. Зная, что тело имеет нулевую начальную температуру, найти первое приближение распределения температуры по методу Швеца, если нулевое приближение выбрано в таком виде:

а) $T_0 = z(1 - x/\delta)$;

б) $T_0 = q_0(x - \delta)$;

в) $T_0 = z - q_0 x$,

где z — температура поверхности $T(0, \tau)$.

Метод Швеца применим и для решения нелинейных задач теплопроводности.

Температурное поле системы: полубесконечное реагирующее пространство при зажигании нагретой средой [28].

Пусть полубесконечное пространство, заполненное горючим материалом, в момент времени $\tau = 0^+$ вступает в контакт с нагретой средой, имеющей другие теплофизические коэффициенты. В результате происходит зажигание горючего материала, причем полагаем, что имеет место экзотермическая реакция нулевого порядка, все теплофизические коэффициенты постоянны, а на поверхности контакта реализуются граничные условия сопряжения (I рода) (идеальный тепловой контакт). Тогда математическая формулировка задачи имеет вид

$$\partial \Theta_1 / \partial t = \partial^2 \Theta_1 / \partial \eta^2 + \exp \Theta_1, \quad \eta > 0, \quad t > 0; \quad (7.108)$$

$$\partial \Theta_2 / \partial t = \partial^2 \Theta_2 / \partial \xi^2, \quad \xi < 0, \quad t > 0. \quad (7.109)$$

Начальные и граничные условия:

$$\Theta_1(\eta, 0) = \Theta_1(\infty, t) = -\Theta_n; \quad (7.110)$$

$$\Theta_2(\xi, 0) = \Theta_2(-\infty, t) = 0;$$

$$\Theta_1(0, t) = \Theta_2(0, t), \quad \partial \Theta_1(0, t) / \partial \eta = K_s \partial \Theta_2(0, t) / \partial \xi. \quad (7.111)$$

Уравнения (7.108) — (7.111) записаны в безразмерных величинах, имеющих следующий смысл: $\Theta_i = (T_i - T_0) E / (RT_0^2)$ — безразмерная температура; $\eta = x \sqrt{[\kappa_0 E / (\lambda_1 R T_0^2)] \exp \left[-\frac{E}{RT_0} \right]}$ — безразмерная координата; $t = [q \kappa_0 E \tau / (c_1 \rho_1 R T_0^2)] \exp \left[-\frac{E}{RT_0} \right]$ — безразмерное время; T_0 — начальная температура нагретой нереагирующей среды; $\Theta_n = \frac{(T_0 - T_n) E}{RT_0^2}$ — безразмерная начальная температура; $K_e = \sqrt{\lambda_2 \rho_2 c_2 / (\lambda_1 \rho_1 c_1)}$ — коэффициент относительной тепловой активности нереагирующей среды; T_n — начальная температура горючего; индексы 1, 2 соответствуют горючему и нереагирующей среде, остальные обозначения те же, что и в § 7.2.

Для нахождения температурного поля системы применим метод Швеца. Введем толщины прогретых слоев $\delta_1(t)$ и $\delta_2(t)$. Тогда граничные условия на $\pm\infty$ и начальные условия запишутся в виде

$$\Theta_1(\delta_1, t) = -\Theta_n; \quad \Theta_2(-\delta_2, t) = 0, \quad \delta_1(0) = \delta_2(0) = 0. \quad (7.112)$$

Найдем нулевое приближение по методу Швеца:

$$\Theta_1^{(0)} = -\frac{\Theta_n(\delta_2 + K_e \eta)}{\delta_2 + K_e \delta_1}; \quad \Theta_2^{(0)} = -\frac{\Theta_n(\delta_2 + \xi)}{\delta_2 + K_e \delta_1}. \quad (7.113)$$

Дифференциальные уравнения для нахождения первого приближения определим, подставляя выражение (7.113) в уравнения (7.108) и (7.109):

$$\partial^2 \Theta_1^{(1)} / \partial \eta^2 = \frac{\partial}{\partial t} |\Theta_1^{(0)}(\delta, \eta)| - \exp |\Theta_1^{(0)}(\delta, \eta)|; \quad (7.114)$$

$$\frac{\partial^2 \Theta_2^{(1)}}{\partial \xi^2} = \frac{\partial}{\partial t} |\Theta_2^{(0)}(\delta, \xi)|. \quad (7.115)$$

Интегрируя уравнения (7.114), (7.115), получим температурное поле системы в первом приближении:

$$\Theta_1^{(1)} = A_1 \eta + B_1 + \frac{a_1 \eta^3}{6} + \frac{b_1 \eta^2}{2} - \exp \frac{b_1 + a_1 \eta}{a_1^2};$$

$$\Theta_2^{(1)} = A_2 \xi + B_2 + \frac{a_2 \xi^3}{6} + \frac{b_2 \xi^2}{2}.$$

где $a_1 = -K_e \Theta_n / (\delta_2 + K_e \delta_1)$; $a_2 = -\Theta_n / (\delta_2 + K_e \delta_1)$; $b_1 = b_2 = -\Theta_n \delta_2 / (\delta_2 + K_e \delta_1)$.

Коэффициенты A_i , B_i ($i=1, 2$) определим, удовлетворяя условиям (7.111) и (7.112):

$$A_1 = \exp(b_1)/a_1 + K_e A_2; \quad B_1 = \exp(b_1)/a_1^2 + B_2;$$

$$A_2 = (\delta_2 + K_e \delta_1)^{-1} \left[\frac{e}{a_1^2} + \frac{b_1}{2} (\delta_2^2 - \delta_1^2) - \frac{1}{6} (a_2 \delta_2^3 + a_1 \delta_1^3) - \Theta_n - \frac{1+a_1 \delta_1}{a_1^2} \exp(b_2) \right];$$

$$B_2 = A_2 \delta_2 + a_2 \delta_2^3/6 - b_2 \delta_2^2/2,$$

где $e = \exp(-\Theta_n)$; точка сверху обозначает дифференцирование по переменной t .

Для нахождения значений термических слоев $\delta_1(t)$ и $\delta_2(t)$ по-

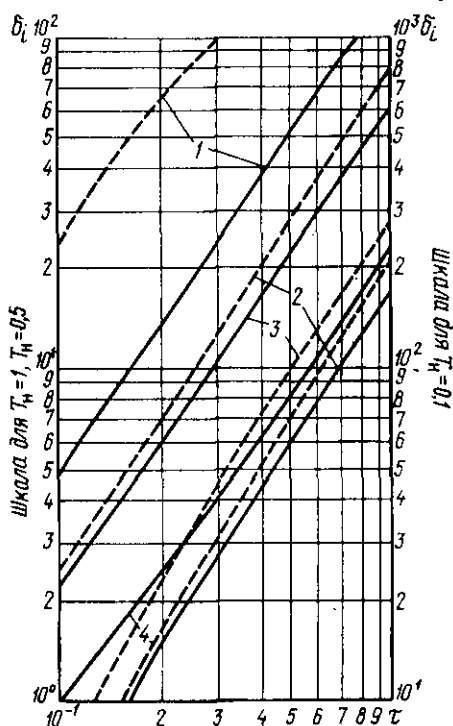


Рис. 7.14. Изменение толщины термических слоев во времени (— — δ_1 , - - - δ_2):

1 — $T_H = 0,1$, $K_e = 0,01$; 2 — $T_H = 0,1$, $K_e = 0,1$; 3 — $T_H = 1$, $K_e = 0,01$; 4 — $T_H = 0,5$, $K_e = 0,1$

лучим два обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнения, удовлетворяя условиям теплопроводности на границах прогретых слоев:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \Big|_{\eta=\delta_1(t)} = -\frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\delta_2(t)} = 0.$$

Тогда имеем:

$$\begin{aligned} & a_1 \delta_1^2 \left(\frac{\delta_2}{2} + K_e \frac{\delta_1}{3} \right) + \\ & + b_1 \left(\frac{K_e \delta_1^2}{2} + \delta_1 \delta_2 + \frac{K_e \delta_2^2}{2} \right) - \\ & - \frac{K_e \delta_2^3 a_2}{6} - K_e \Theta_n + \\ & + \frac{a_1 \delta_2 - K_e}{a_1^2} \exp(b_1) + \frac{e}{a_1^2} [K_e - \\ & - a_1 (\delta_2 + K_e \delta_1)] = 0; \end{aligned} \quad (7.116)$$

$$\begin{aligned} & a_2 \delta_2^2 \left(\frac{\delta_2}{3} + \frac{K_e \delta_1}{2} \right) - \\ & - b_1 \left(\frac{\delta_1^2}{2} + K_e \delta_1 \delta_2 + \frac{\delta_2^2}{2} \right) - \\ & - \frac{a_1 \delta_1^2}{2} - \Theta_n + \\ & + \frac{e - (1 - a_1 \delta_1) \exp(b_1)}{a_1^2} = 0. \end{aligned} \quad (7.117)$$

Для приближенного решения системы (7.116), (7.117) применим метод разложения в ряд:

$$\delta_1(t) = \gamma_1 t^{1/2} + \beta_1 t + \sigma_1 t^{3/2} + \dots,$$

$$\delta_2(t) = \gamma_2 t^{1/2} + \beta_2 t + \sigma_2 t^{3/2} + \dots \quad (7.118)$$

Подставляя (7.118) в уравнения (7.116), (7.117) и приравнявая нулю члены при t с одинаковыми степенями, получим:

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \sqrt{6}; \quad \beta_1 = \beta_2 = 0;$$

$$\sigma_1 = 24(1 + K_e)^2(v - \varepsilon) p_1 / (\sqrt{6} K_e^2 \Theta_n^2);$$

$$\sigma_2 = 24(1 + K_e)^2(v - \varepsilon) p_2 / (\sqrt{6} K_e^2 \Theta_n^2),$$

где $v = \exp(-\Theta_n/(1 + K_e))$; $p_1 = [(9 + 9K_e + 4\Theta_n)(v - \varepsilon) - 9K_e \varepsilon \Theta_n] / [24 \times (1 + K_e)(v - \varepsilon) \Theta_n]$; $p_2 = [9(1 + K_e)(v - \varepsilon) - K_e \Theta_n(6v + 5\varepsilon)] / [24 \times (1 + K_e)(v - \varepsilon) \Theta_n]$.

Можно показать [28], что сходимость метода Швеца для рассматриваемой задачи имеет место для умеренных значений t ($0 < t \leq t_*$), где t_* — время прогрева реагирующей системы, которое можно определить из условия $\frac{\partial \Theta_1}{\partial \eta}(0, t) = 0$.

На рис. 7.14 показано влияние входных данных топливной системы на изменение толщины термических слоев во времени.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ

Глава I. Математическое описание процессов теплопроводности

1.3. Имеем

$$\partial T / \partial \tau = a (\partial^2 T / \partial x^2), \quad 0 < x < l, \quad \tau > 0, \quad T(x, 0) = f(x);$$

$$a) \quad T(0, \tau) = \varphi_1(\tau), \quad T(l, \tau) = \varphi_2(\tau);$$

$$б) \quad \partial T(0, \tau) / \partial x = 0, \quad -\lambda \frac{\partial T(l, \tau)}{\partial x} + \alpha [T_c(\tau) - T(l, \tau)] = 0,$$

где α — коэффициент теплоотдачи.

1.4. Система уравнений теплопроводности:

$$\partial T_1 / \partial \tau = a_1 (\partial^2 T_1 / \partial x^2), \quad \tau > 0, \quad 0 < x < l_1;$$

$$\partial T_2 / \partial \tau = a_2 (\partial^2 T_2 / \partial x^2), \quad \tau > 0, \quad b_1 < x < l_2.$$

Начальные условия:

$$T_1(x, 0) = T_2(x, 0) = T_0.$$

Граничные условия на поверхности контакта:

$$T_1(l_1, \tau) = T_2(l_1, \tau);$$

$$\lambda_1 [\partial T_1(l_1, \tau) / \partial x] = \lambda_2 [\partial T_2(l_1, \tau) / \partial x].$$

На внешних поверхностях:

$$a) \quad T_1(0, \tau) = \varphi_1(\tau), \quad T_2(l_2, \tau) = \varphi_2(\tau);$$

$$б) \quad \partial T_1(0, \tau) / \partial x = 0, \quad -\lambda \frac{\partial T_2(l_2, \tau)}{\partial x} + \alpha [T_c(\tau) - T_2(l_2, \tau)] = 0;$$

$$в) \quad \lambda_1 \frac{\partial T_1(0, \tau)}{\partial x} + q_0 = 0, \quad T_2(l_2, \tau) = T_0 = \text{const.}$$

1.6. В безразмерном виде имеем:

$$\frac{\partial [\rho \Theta(\rho, Fo)]}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 [\rho \Theta(\rho, Fo)]}{\partial \rho^2} + \rho Po, \quad (Fo > 0, \quad 0 < \rho < 1);$$

$$\Theta(\rho, 0) = \Theta_0; \quad \partial \Theta(0, Fo) / \partial \rho = 0; \quad \Theta(0, Fo) \neq \infty; \quad -\partial \Theta(1, Fo) / \partial \rho + Bi [1 - \Theta(1, Fo)] = 0,$$

где $\Theta = T / T_0$; $Bi = \alpha R / \lambda$; $Po = W_0 R^2 / [\lambda (T_c - T_0)]$.

1.7. В безразмерном виде имеем:

$$\partial^2 \Theta / \partial X^2 = \partial \Theta / \partial Fo \quad (Fo > 0, \quad |X| < R);$$

$$\Theta(X, 0) = 0, \quad \partial \Theta(0, Fo) / \partial X = 0;$$

$$-\frac{\partial \Theta(1, Fo)}{\partial X} + Bi [\cos Pd Fo - \Theta(1, Fo)] = 0,$$

где $\Theta = (T - T_0) / T_m$; $Bi = \alpha R / \lambda$; $Pd = 2\pi v R^2 / a$; $X = x / R$; $Fo = a\tau / R^2$.

Глава III. Применение классических методов решения краевых задач

3.1.

$$T(r, \tau) = T_c + (T_0 - T_c) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin(\pi n r / R)}{n\pi (r/R)} \exp\left(-n^2 \pi^2 \frac{\tau}{R^2}\right).$$

3.2. Решение следует искать в виде

$$T(r, \tau) = R(r) + \Theta(r, \tau),$$

где $R(r)$ является решением соответствующей стационарной задачи, а функция $\Theta(r, \tau)$ удовлетворяет основному дифференциальному уравнению, однородным граничным условиям и начальному условию $\Theta(r, 0) = f(r) - R(r)$. Подробное решение задачи приведено в [79].

3.3. Задача сводится к решению краевой задачи

$$\partial T / \partial \tau = a (\partial^2 T / \partial x^2) - HT, \quad 0 < x < l, \quad \tau > 0,$$

где $H = a/\lambda$;

$$-\lambda [\partial T(l, \tau) / \partial x] = q_1; \quad \lambda [\partial T(l, \tau) / \partial x] = q_2; \quad T(x, 0) = f(x).$$

Решение ищем в виде

$$T(x, \tau) = T_{ст}(x) + \Theta(x, \tau),$$

где $T_{ст}(x)$ — решение соответствующей стационарной задачи с неоднородными граничными условиями; $\Theta(x, \tau)$ — решение нестационарной задачи с однородными граничными условиями и соответствующим начальным условием.

3.5. Математическая формулировка задачи

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} \right), \quad R_1 < r < R_2, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad \tau > 0;$$

$$T(r, \varphi, 0) = f(r, \varphi);$$

$$[\partial T / \partial r - H_1 T]_{r=R_1} = 0, \quad [\partial T / \partial r + H_2 T]_{r=R_2} = 0,$$

где $H_i = a/\lambda_i$ — приведенный коэффициент теплоотдачи.

3.6.

$$T(x, \tau) = \frac{1}{2} e^{ax\tau} \operatorname{erfc} \left(-\frac{x}{2\sqrt{a\tau}} \right).$$

3.7. Указание. Функция Грина имеет вид

$$G(x, x', \tau, \tau') = \frac{Q}{2c_p \sqrt{\pi a (\tau - \tau')}} \left\{ \exp \left[-\frac{(x - x')^2}{4a(\tau - \tau')} \right] + \right. \\ \left. + \exp \left[-\frac{(x + x')^2}{4a(\tau - \tau')} \right] \right\}.$$

3.8. Указание. Функция Грина имеет вид

$$G(x, x', \tau, \tau') = \frac{1}{2\sqrt{a(\tau - \tau')}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \left\{ \exp \left[-\frac{(x - x' + 2nl)^2}{4a(\tau - \tau')} \right] - \exp \left[-\frac{(x + x' + 2nl)^2}{4a(\tau - \tau')} \right] \right\}.$$

8.10. Указание. Предполагается, что задача может быть разделена на три одномерных задачи.

Глава IV. Методы конечных интегральных преобразований

4.1.

$$T(r, \tau) = T_c + (T_0 - T_c) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2R \sin \mu_n \frac{r}{R}}{r \mu_n} \exp \left(-\mu_n^2 \frac{a\tau}{R^2} \right),$$

где $\mu_n = n\pi$.

4.2.

$$T(0, 0, 0, \tau) = 8T_0 H^3 \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{1 + \frac{H^2}{\mu_n^2}}}{l(\mu_n^2 + H^2) + H} \exp(-\mu_n^2 a\tau) \right\},$$

где μ_n ($n=0, 1, 2, \dots$) — положительные корни уравнения

$$\operatorname{tg} \mu l = H/\mu, \quad H = \alpha/\lambda.$$

4.3.

$$T(r, \tau) = 8T_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0 \left(\mu_n \frac{r}{R} \right)}{\mu_n^3 J_1(\mu_n)} \exp \left(-\mu_n^2 \frac{a\tau}{R^2} \right),$$

где μ_n — положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

4.4.

$$T(r, \tau) = T_{cr}(r) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k [J_0(\mu_k R_0) Y_0(\mu_k r) - Y_0(\mu_k R_0) J_0(\mu_k r)] \times \\ \times \exp(-\mu_k^2 a\tau),$$

где $T_{cr}(r) = \frac{q_0 R_1}{\lambda} \ln \frac{r}{R_0}$ — решение соответствующей стационарной задачи, удовлетворяющее граничным условиям; μ_k — положительные корни уравнения

$$J_0(\mu R_0) Y_0'(\mu R_1) - Y_0(\mu R_0) J_0'(\mu R_1) = 0.$$

Коэффициенты A_k определяются по формуле

$$A_k = \frac{\pi^2 \mu_k^2}{2} \frac{J_1^2(\mu_k R_1)}{J_0^2(\mu_k R_0) - J_1^2(\mu_k R_1)} \int_0^{R_1} r T_{CT}(r) [J_0(\mu_k R_0) Y_0(\mu_k r) - Y_0(\mu_k R_0) J_0(\mu_k r)] dr.$$

4.6. Математическая формулировка задачи

$$c_1 \rho_1 \frac{\partial T}{\partial \tau} = \lambda_1 \left\{ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right\}, \quad 0 < x < x_0, \quad 0 < y < y_0, \\ 0 < z < z_0, \quad \tau > 0;$$

$$c_2 \rho_2 \frac{\partial T}{\partial \tau} = \lambda_2 \left\{ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right\}, \quad x_0 < x < l, \quad 0 < y < y_0, \\ 0 < z < z_0, \quad \tau > 0;$$

$$T(x_0, y, z, \tau) = T(x_0, y, z, \tau);$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial x}(x_0, y, z, \tau) = \lambda_2 \frac{\partial T}{\partial x}(x_0, y, z, \tau);$$

$$T|_{x=0} = T|_{x=l} = T|_{y=0} = T|_{y=y_0} = T|_{z=0} = T|_{z=z_0} = 0;$$

$$T(x, y, z, 0) = f(x, y, z).$$

Глава V. Интегральные преобразования в бесконечных и односторонне бесконечных пределах

5.7.

$$T(x, \tau) = T_0 + b\tau - \frac{b}{2a} \left[R^2 \left(1 + \frac{2}{Bi} \right) - x^2 \right] + \frac{bR^2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\mu_n^2} \times \\ \times \cos \mu_n \frac{x}{R} \exp(-\mu_n^2 Fo),$$

где μ_n — корни уравнения $\operatorname{ctg} \mu = (1/Bi) \mu$; $Fo = a\tau/R^2$;

$$A_n = \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n} = (-1)^{n+1} \frac{2Bi \sqrt{Bi^2 + \mu_n^2}}{\mu_n (Bi^2 + Bi + \mu_n^2)}.$$

$$a) T(r, \tau) = T_0 + (T_c - T_0) \left\{ 1 + \frac{1}{6} \text{Os} \left(1 + \frac{2}{\text{Bi}} - \frac{r^2}{R^2} \right) - \right. \\ \left. - \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\text{Os}}{\mu_n^2} \right) A_n \frac{R \sin \mu_n \frac{r}{R}}{r \mu_n} \exp(-\mu_n^2 \text{Fo}) \right\},$$

где $\text{Os} = \frac{q_v R^2}{\lambda (T_c - T_0)}$ — число Остроградского;

$$A_n = \frac{2(\sin \mu_n - \mu_n \cos \mu_n)}{\mu_n - \sin \mu_n \cos \mu_n} = (-1)^{n+1} \frac{2\text{Bi} \sqrt{\mu_n^2 + (\text{Bi} - 1)^2}}{\mu_n^2 + \text{Bi}^2 - \text{Bi}},$$

μ_n — корни уравнения $\text{tg} \mu = -\mu/(\text{Bi} - 1)$;

$$b) T(r, \tau) = T_0 + (T_c - T_0) \left\{ 1 - \frac{\text{Os}}{\text{Pd}} \times \right. \\ \times \left[1 - \frac{R\text{Bi} \sin \sqrt{\text{Pd}} (r/R)}{r[(\text{Bi} - 1) \sin \sqrt{\text{Pd}} + \sqrt{\text{Pd}} \cos \sqrt{\text{Pd}}]} \right] \exp(-\text{Pd} \text{Fo}) - \\ \left. - \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\text{Os}}{\text{Pd} - \mu_n^2} \right) A_n \frac{R \sin \mu_n (r/R)}{r \mu_n} \exp(-\mu_n^2 \text{Fo}) \right\},$$

где $\text{Pd} = (k/a) R^2$ — число Предводителя, остальные обозначения те же, что и в а).

5.9. Указание. В области изображений решение задачи имеет вид

$$\hat{T}(r, s) - \frac{T_0}{s} = \frac{(T_c - T_0) I_0(\sqrt{s/a} r)}{s [J_0(\sqrt{s/a} R) + (1/H) \sqrt{s/a} I_1(\sqrt{s/a} R)],}$$

где $I_0(x)$, $I_1(x)$ — модифицированные функции Бесселя 1-го рода, первого и второго порядка соответственно.

В области оригиналов получим

$$\Theta = \frac{T(r, \tau) - T_0}{T_c - T_0} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right) \exp(-\mu_n^2 \text{Fo}),$$

где μ_n — корни характеристического уравнения;

$$J_0(\mu)/J_1(\mu) = (1/\text{Bi}) \mu; \quad A_n = \frac{2\text{Bi}}{[(\text{Bi} + 1) J_1(\mu_n) + \mu_n J_1'(\mu_n)] \mu_n}.$$

Глава VI. Методы решения вариационных задач

6.1. Приближенное решение имеет вид

$$T_{(1)}(x, y, z) = \frac{1}{6}(x+y+z) + \frac{1}{2}xyz.$$

6.2. Дифференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \Theta^2} + G_1 \sin \Theta + G_2 r^3 \sin 2\Theta = 0.$$

6.3.

2. Функционал $F(T)$ запишется в виде

$$F(T) = \int_0^\pi \left[\frac{1}{3} a_1^2 + \frac{1}{30} \left(\frac{da_1}{dy} \right)^2 + \frac{8}{\pi^3} a_1 \sin y \right] dy.$$

Условие стационарности функционала $F(T)$ имеет вид

$$\frac{d^2 a_1}{dy^2} - 10a_1 = \frac{120}{\pi^3} \sin y, \quad a_1(\pi) = a_1(0) = 0.$$

Тогда для коэффициента $a_1(y)$ получим выражение

$$a_1(y) = -\frac{1}{\pi^3} \frac{120}{11} \sin y.$$

3. Система дифференциальных уравнений Эйлера — Лагранжа имеет вид

$$-\frac{1}{15} \frac{d^2 a_1}{dy^2} - \frac{1}{70} \frac{d^2 a_2}{dy^2} + \frac{2}{3} a_1 + \frac{2}{15} a_2 + \frac{8}{\pi^3} \sin y = 0;$$

$$-\frac{1}{70} \frac{d^2 a_1}{dy^2} - \frac{1}{315} \frac{d^2 a_2}{dy^2} + \frac{1}{15} a_1 + \frac{4}{105} a_2 + \left(\frac{96}{\pi^3} - \frac{8}{\pi^3} \right) \sin y = 0$$

с граничными условиями

$$a_1(\pi) = a_1(0) = 0; \quad a_2(\pi) = a_2(0) = 0.$$

Решение этой системы имеет вид

$$a_1(y) = -\frac{8,87791}{\pi^3} \sin y; \quad a_2(y) = -\frac{10,0912}{\pi^3} \sin y.$$

6.4.

б)

$$\Theta = (\xi, \eta, Fo) = \frac{T(\xi, \eta, Fo) - T_0}{T_1 - T_0} = 1 + A(1 - \xi) -$$

$$- \frac{3}{2} (1 + A)(1 - \xi^2 - \eta^2) \exp(-6Fo),$$

где $A = \Delta T / (T_1 - T_0)$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Предисловие	3
Глава I. Математическое описание процессов теплопроводности	5
§ 1.1. Закон теплопроводности Фурье	5
§ 1.2. Дифференциальное уравнение теплопроводности твердых тел	10
§ 1.3. Постановка краевых задач теории теплопроводности	16
§ 1.4. О применении теории подобия	24
§ 1.5. О классификации методов решения краевых задач	31
Часть I. Аналитические методы	
Глава II. Решения одномерных стационарных краевых задач теплопроводности	34
§ 2.1. Теплопроводность однородных тел простейшей геометрической формы	34
§ 2.2. Теплопроводность многослойных плоских, цилиндрических и шаровых стенок	50
§ 2.3. Теплопроводность однородных тел простейшей геометрической формы при действии внутренних источников теплоты	58
Глава III. Применение классических методов решения краевых задач	67
§ 3.1. Метод Фурье (метод разделения переменных)	67
§ 3.2. Метод функций источников (функций Грина)	92
§ 3.3. Метод тепловых потенциалов	106
Глава IV. Методы конечных интегральных преобразований	117
§ 4.1. Общая схема применения метода	117
§ 4.2. Способы улучшения сходимости решений	126
§ 4.3. Применение таблиц интегральных преобразований	137
Глава V. Интегральные преобразования в бесконечных и односторонне бесконечных пределах	159
§ 5.1. Виды преобразований и примеры применения	159
§ 5.2. Определение и основные правила выполнения операций преобразования Лапласа	169
§ 5.3. Нахождение оригинала функции по ее изображению	183
§ 5.4. Примеры решения краевых задач с помощью преобразования Лапласа	190
§ 5.5. О численном обращении преобразования Лапласа	208
Глава VI. Методы решения вариационных задач	222
§ 6.1. Постановка вариационных задач нестационарной теплопроводности	222
§ 6.2. Постановка вариационных задач стационарной теплопроводности	234
§ 6.3. Метод Ритца	238
§ 6.4. Метод Л. В. Канторовича	242
§ 6.5. Метод Треффтца	245
§ 6.6. Метод Био	253
§ 6.7. Метод Бубнова — Галеркина	263

	<i>Стр.</i>
§ 6.8. Совместное применение методов Бубнова — Галеркина и характеристик при решении нестационарных задач теплопроводности	274
§ 6.9. Метод совместного применения интегрального преобразования Лапласа и вариационных методов	279
§ 6.10. О выборе системы координатных функций	285
<i>Глава VII. Приближенные методы, в которых используется понятие термического слоя</i>	<i>290</i>
§ 7.1. Метод осреднения функциональных поправок	290
§ 7.2. Интегральный метод теплового баланса	296
§ 7.3 Метод Швеца	314
<i>Приложение. Ответы и указания к задачам</i>	<i>320</i>

*Николай Михайлович Беляев,
Александр Андреевич Рядно*

МЕТОДЫ
ТЕОРИИ
ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Зав. редакцией К. И. Аношина. Редактор издательства
М. Т. Самсонова. Мл. редактор Т. А. Дорофеева.
Художественный редактор Н. К. Гуторов. Художник
В. З. Казакевич. Технический редактор Э. М. Чижев-
ский. Корректор Г. И. Кострикова.

ИБ № 3377

Изд. № ОТ-342. Сдано в набор 19.11.81. Подп. к печати 02.08.82.
Т-13529. Формат 60х90^{1/16}. Бум. тип. № 3. Гарнитура лите-
ратурная. Печать высокая. Объем 20,5 усл. п. л. Усл. кр.-отт.
20,5. Уч. изд. л. 19,56. Тираж 10 000 экз. Зак. 558. Цена 90 коп.
Издательство «Высшая школа», Москва, К-51, Неглидная ул.,
д. 29/14

Типография изд-ва «Уральский рабочий», г. Свердловск,
проспект Ленина, 49.