Н. М. БЕЛЯЕВ, А. А. РЯДНО

МЕТОДЫ ТЕОРИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

(в 2-х частях)

ЧАСТЬ 2

Допущено
Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных
заведений

МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1982

ББК 22.31
Б44
УДК 536.2(075)

Рецензенты: *кафедра* теоретических основ теплотехники Московского авиационного института им. С. Орджоникидзе (зав. каф.— д-р техн. наук, проф. В. К. Кошкин); д-р техн. наук, проф. *В. С. Зарубин* (Московское высшее техническое училище им. Н. Э. Баумана)

Беляев Н. М., Рядно А. А.

Б44 Методы теории теплопроводности.— Учеб. пособие для вузов. В 2-х частях. Ч. 2.— М.: Высш. школа, 1982.— 304 с., ил.

В пер.: 85 к.

В части 2 изложены аналитические методы решения нелинейных краевых задач, а также численные (конечно-разностные) методы решения краевых задач теории теплопроводности. Приведены примеры расчета температурных полей с помощью ЭВМ на различных алгоритмических языках. Даны задачи для самостоятельного решения и ответы к ним.

Предназначено для студентов теплофизических и теплоэнергетических специальностей.

Б $\frac{1704060000-578}{001(01)-82}$ 70—82

ББК 22.31
530.

ЧАСТЬ 2

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ. МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

Расчеты температурных полей, выполненные на основе линейных математических моделей процесса теплопроводности, не всегда приводят к удовлетворительным результатам, особенно в тех случаях, когда температура изменяется в значительном диапазоне. Поэтому для построения наиболее адекватной реальному процессу математической модели необходимо учитывать зависимость от температуры теплофизических характеристик материалов, плотностей поверхностных потоков и внутренних источников теплоты, изменение формы тела и возможные фазовые и структурные превращения.

Во второй части учебного пособия изложены приближенные аналитические методы решения краевых задач с нелинейными граничными условиями (гл. VIII), при наличии фазовых превращений (гл. IX) и при зависящих от температуры плотности, удельной теплоемкости и теплопроводности материалов тел (гл. X). Однако, как отмечено в монографии [50], при решении нелинейных двухмерных и трехмерных краевых задач теплопроводности в областях со сложной конфигурацией границ необходимо применять численные методы. В практике вычислений чаще всего применяется метод сеток (конечно-разностный метод).

В главе XI пособия изложены теоретические основы метода сеток. Далее рассмотрены вопросы применения этого метода для решения одномерных нестационарных (гл. XII), многомерных нестационарных (гл. XIII), многомерных стационарных (гл. XIV) линейных и нелинейных задач теплопроводности. Разностные методы решения краевых задач математической физики, появившись в 30-х годах XX в., получили широкое распространение в связи с развитием быстродействующей вычислительной техники с достаточно большим объемом оперативной памяти.

Существенный вклад в развитие методов построения разностных аналогов краевых задач и методов их решения сделан советскими учеными [19, 26, 72, 88—91, 94, 113 и др.].

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПРИ НЕЛИНЕЙНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

В настоящее время в связи с развитием высокотемпературной теплофизики уделяется значительное внимание разработке аналитических методов решения нелинейных задач теплопроводности. При высоком температурном уровне существенную роль может играть теплообмен излучением, могут протекать различные физико-химические процессы с перемещением границ фаз. Учет этих явлений приводит к задачам математической физики с существенной нелинейностью в граничном условии, при решении которых встречаются серьезные трудности. Если при этом зависимость коэффициентов переноса от температуры в заданном интервале не оказывает существенного влияния на изучаемый процесс, краевую задачу можно формулировать на основе линеаризованного уравнения теплопроводности, что дает возможность воспользоваться преимуществами метода суперпозиции. Один из приближенных методов решения задач теплопроводности при нелинейных граничных условиях был рассмотрен в § 7.2. Это интегральный метод теплового баланса. В этой главе рассмотрим другие часто используемые методы приближенного решения задач с нелинейной зависимостью теплового потока на поверхности от температуры самой поверхности.

§ 8.1. Метод сведения краевой задачи к эквивалентному интегральному уравнению

Метод перехода от нелинейной краевой задачи к эквивалентному интегральному уравнению смешанного типа является одним из первых, предложенных для решения задач теплопроводности с нелинейными граничными условиями [99].

Для перехода от краевой задачи к эквивалентному интегральному уравнению могут быть использованы различные методы: метод *тепловых потенциалов* [13, 81, 99], *метод функций Грина* [12], метод интегрального преобразования Лапласа [9], [92].

Рассмотрим метод перехода от краевой задачи нестационарного теплоизлучения к эквивалентному интегральному уравнению с помощью функций Грина.

1. Постановка краевой задачи. Рассмотрим однородное тело Ω, ограниченное гладкой поверхностью S типа Ляпунова*.

Пусть поверхность S состоит из двух частей S_1 и S_2. На поверхности S_2 происходит теплообмен по закону Стефана — Больцмана.

* См. § 3.3, с. 111.

а на поверхности S_1 задана температура $\varphi(p, \tau)$, $p \in S_1$. Внутри тела Ω действуют источники теплоты, объемная плотность теплового потока которых $q_v(p)$.

Кроме данных, определяющих поведение температуры на поверхности S, пусть дана начальная температура $f(p)$, $p \in \Omega$. Тогда для определения нестационарной температуры тела $T(p, \tau)$ имеем уравнение теплопроводности

$$(1/a)(\partial T/\partial \tau) = \nabla^2 T + q_v/\lambda, \quad p \in \Omega, \quad \tau > 0, \tag{8.1}$$

внутри тела Ω при начальном условии

$$T(p, 0) = f(p), \quad p \in \Omega; \tag{8.2}$$

при линейном граничном условии на S_1

$$T(p, \tau) = \varphi(p, \tau), \quad p \in S_1, \quad \tau > 0, \tag{8.3}$$

и нелинейном граничном условии на S_2

$$-\lambda(\partial T/\partial n_p) = q[(T(p, \tau))], \quad p \in S_2, \quad \tau > 0, \tag{8.4}$$

где n_p — внешняя нормаль в точке p поверхности.

Определим функцию плотности теплового потока q в уравнении (8.4). Закон Стефана — Больцмана является одним из основных фундаментальных законов теории теплового излучения. Он имеет место при остывании тел в вакууме и заключается в том, что количество теплоты q, отнесенное к единицам времени и площади, излучаемое в окружающее пространство поверхностью абсолютно черного тела, пропорционально четвертой степени абсолютной температуры T поверхности тела:

$$q = \sigma T^4.$$

Величина $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м$^2 \cdot$ К^4) называется *константой излучения Стефана — Больцмана*. В применении к серым телам закон излучения целесообразно представить в следующем виде:

$$q = \sigma \varepsilon(T) T^4.$$

Величину $\varepsilon(T)$ называют *коэффициентом черноты серого тела*; она равна отношению энергетической яркости серого тела к энергетической яркости абсолютно черного тела при одинаковой их температуре.

Значения $\varepsilon(T)$ могут изменяться в пределах $0 \leqslant \varepsilon(T) \leqslant 1$ и незначительно зависят от температуры.

Применяя закон теплопроводности Фурье и закон Стефана — Больцмана, получим на поверхности S_2

$$\lambda(\partial T/\partial n_p) = -\sigma\varepsilon(T) T^4, \quad p \in S_2, \quad \tau > 0.$$

Если на данную поверхность падает поток теплоты, плотность которого равна $q_1(p, \tau)$, то

$$\lambda(\partial T/\partial n_p) = q_1 - \sigma\varepsilon(T) T^4, \quad p \in S_2, \quad \tau > 0,$$

и если этот поток обусловлен излучением теплоты со стороны внешней среды с температурой $T_c(p, \tau)$, то

$$q_1(p, \tau) = \sigma\varepsilon(T_c) T_c^4 .$$

Уравнение теплового баланса в этом случае преобразуется к виду

$$\lambda(\partial T/\partial n_p) = -\sigma[\varepsilon(T) T^4 - \varepsilon(T_c) T_c^4], \ p \in S_2. \qquad (8.5)$$

Условия (8.4), (8.5) нелинейны, так как в них входит температура в четвертой степени. Отметим, что на части поверхности S_1 возможны и другие граничные условия. Например, поверхность S_1 может быть поверхностью раздела двух сред с различной теплопроводностью λ_1 и λ_2

$$\lambda_1(\partial T_1/\partial n_1) = -\lambda_2(\partial T_2/\partial n_2), \quad p \in S_1, \ \tau > 0,$$

$$T_1 = T_2, \quad p \in S_1, \quad \tau > 0,$$

где n_1 и n_2 — внутренние нормали для первой и второй сред соответственно.

Поверхность S_1 может быть теплоизолированной, т. е.

$$\partial T/\partial n_p = 0, \ p \in S_1, \ \tau > 0.$$

В монографии [13] показано, что система уравнений (8.1) — (8.4) допускает только одно положительное решение.

2. Приведение нестационарной задачи теплоизлучения к эквивалентному интегральному уравнению. Нелинейное интегральное уравнение, эквивалентное нестационарной задаче теплопроводности с нелинейными граничными условиями (8.5), получим с помощью функции Грина для уравнения теплопроводности при нулевом начальном условии и соответствующих однородных граничных условиях:

$$\left.\begin{aligned} &\Delta_p G - (1/a)(\partial G/\partial\tau) = -4\pi\delta(p-Q)\,\delta(\tau - t), \ p \in \Omega, \\ &\qquad Q \in \Omega, \ \tau \geqslant t; \\ &G(p, Q, 0) = 0, \ p \in \Omega, \ Q \in \Omega; \\ &G(p, Q, \tau - t) = 0, \ p \in S_1, \ Q \in \Omega + S, \ \tau > t; \\ &\frac{\partial}{\partial n} G(p, Q, \tau - t) = 0, \ p \in S_2, \ Q \in \Omega + S, \ \tau > t. \end{aligned}\right\} \qquad (8.6)$$

Напомним, что мгновенный точечный источник $4\pi\lambda\delta(p-Q) \times \delta(\tau - t)$ означает, что в момент времени $\tau = t$ в точке Q выделяется количество теплоты $4\pi\lambda$, а функция Грина $G(p, Q, \tau - t)$ описывает распределение температуры в дальнейшие моменты времени $\tau > t$ для любой точки тела p, т. е. функция Грина описывает распространение теплоты от ее исходного распределения, при этом начальная температура тела равна нулю, а на поверхности тела S выполняются однородные граничные условия в (8.6).

По определению δ-функции известно, что

$$\int_0^{\tau}\int_{\Omega} g(Q,\ t)\,\delta(p-Q)\,\delta(\tau-t)\,\mathrm{d}\,\Omega_Q\,\mathrm{d}t=g(p,\tau).$$

Функция Грина удовлетворяет условию причинности и существенно положительна при $\tau>t$:

$$\left.\begin{aligned}&G(p,\ Q,\ \tau-t)=0,\ \tau<t;\\&G(p,\ Q,\ \tau-t)>0,\ \tau>t.\end{aligned}\right\}\tag{8.7}$$

Эту функцию определяем как $G(p,\ Q,\ \tau-t)=\delta_0(p,\ Q,\ \tau-t)-$ $-\varkappa(p,\ Q,\ \tau-t)$, где $\delta_0(p,\ Q,\ \tau-t)=\dfrac{1}{\left(2\sqrt{\pi a(\tau-t)}\right)^3}\exp\times$ $\times\left[-\dfrac{r_{pQ}^2}{4a(\tau-t)}\right]$ — фундаментальное решение уравнения теплопроводности, а $\varkappa(p,\ Q,\ \tau-t)$ удовлетворяет по p, τ при фиксированных Q, t однородному уравнению теплопроводности, нулевым начальным условиям и неоднородным граничным условиям:

$$\left.\begin{aligned}&\nabla_p^2\varkappa-(1/a)(\partial\varkappa/\partial\tau)=0;\\&\varkappa(p,\ Q,\ 0)=0;\\&\varkappa(p,\ Q,\ \tau-t)=\delta_0(p,\ Q,\ \tau-t),\ p\in S_1;\\&\frac{\partial}{\partial n_p}\varkappa(p,\ Q,\ \tau-t)=\frac{\partial}{\partial n_p}\delta_0(p,\ Q,\ \tau-t),\ p\in S_2.\end{aligned}\right|\tag{8.8}$$

Для существования функции Грина G необходимо потребовать, чтобы поверхность S тела Ω была настолько гладкой, чтобы существовало решение краевой задачи (8.8).

Отметим, что функция Грина $G(p,\ Q,\ \tau-t)$, как функция Q, t удовлетворяет сопряженному дифференциальному уравнению

$$\Delta_Q G+(1/a)(\partial G/\partial t)=4\pi\delta(p-Q)\,\delta(\tau-t).\tag{8.9}$$

Теперь, используя функцию Грина $G(p,\ Q,\ \tau-t)$, получим нелинейное интегральное уравнение, эквивалентное краевой задаче (8.1) — (8.4). С этой целью умножим уравнение (8.1) на $G(p,\ Q,$ $\tau-t)$, а уравнение (8.9) — на $T(Q,\ t)$, вычтем первое из второго и проинтегрируем по области Ω и по времени t от 0 до $\tau+0$:

$$\int_0^{\tau+0}dt\int_{\Omega}[T\nabla_Q^2G-G\nabla_p{}^2T]\,\mathrm{d}\Omega_Q+\frac{1}{a}\int_{\Omega}\mathrm{d}\Omega_Q\int_0^{\tau+0}\left[T\frac{\partial G}{\partial t}+G\frac{\partial T}{\partial t}\right]\mathrm{d}t=$$

$$=\frac{1}{\lambda}\int_0^{\tau+0}\mathrm{d}t\int_{\Omega}q_v(Q,\ t)\,G\,\mathrm{d}\,\Omega_Q-4\pi T(p,\ \tau).\tag{8.10}$$

К первому из интегралов в (8.10) применим вторую формулу Грина

$$\int\limits_{\Omega}[T\nabla^2 G-G\nabla^2 T]\,\mathrm{d}\Omega_Q=\oint\limits_{S}\left[G\frac{\partial T}{\partial n_Q}-T\frac{\partial G}{\partial n_Q}\right]\mathrm{d}S_Q.$$

Второе слагаемое в (8.10) проинтегрируем по времени:

$$\int(TG'+T'G)\,\mathrm{d}\tau=TG+\mathrm{const}.$$

Тогда решая (8.10) относительно $T(p,\ \tau)$, получим

$$T(p,\ \tau)=\frac{1}{4\pi\lambda}\int\limits_{0}^{\tau+0}\mathrm{d}t\int\limits_{\Omega}q_v(Q,\ t)\,G(p,\ Q,\ \tau-t)\,\mathrm{d}\Omega_Q+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{0}^{\tau+0}\mathrm{d}t\oint\limits_{S}\left[G\frac{\partial T}{\partial n_Q}-T\frac{\partial G}{\partial n_Q}\right]\mathrm{d}S_Q-\frac{1}{4\pi a}\int\limits_{\Omega}[TG]\Big|_{t=0}^{t=\tau+0}\mathrm{d}\Omega_Q. \quad (8.11)$$

Выражение (8.11) можно упростить, учитывая граничные и начальные условия (8.2) — (8.4), (8.6) и условие причинности (8.7). В результате получим искомое функциональное решение краевой задачи (8.1) — (8.4):

$$T(p,\ \tau)=T_л(p,\ \tau)-\frac{\sigma}{4\pi\lambda}\int\limits_{0}^{\tau}\mathrm{d}t\int\limits_{S_2}\varepsilon(T)\,T^4(Q,\ t)\,G(p,\ Q,\ \tau-t)\times$$

$$\times\mathrm{d}S_Q,\quad Q\in S_2,\ p\in G+S, \quad (8.12)$$

где $T_л(p,\ \tau)$ — решение соответствующей линейной задачи, когда часть поверхности S_2 только воспринимает тепловой поток плотностью $\varepsilon(T_c)\sigma T_c^4(p,\ \tau)$, часть поверхности S_1 поддерживается при температуре $\varphi(p,\ \tau)$, внутри тела имеются источники теплоты, объемная плотность теплового потока которых $q_v(p,\ \tau)$, а также задано начальное распределение температуры $f(p)$:

$$T_л(p,\ \tau)=\frac{1}{4\pi a}\int\limits_{\Omega}f(Q)\,G(p,\ Q,\ \tau-0)\,\mathrm{d}\Omega_Q+$$

$$+\frac{1}{4\pi\lambda}\int\limits_{0}^{\tau}\mathrm{d}t\int\limits_{\Omega}q_v(Q,\ t)\,G(p,\ Q,\ \tau-t)\,\mathrm{d}\Omega_Q-$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{0}^{\tau}\mathrm{d}t\int\limits_{S_1}\varphi(Q,\ t)\frac{\partial G(p,\ Q,\ \tau-t)}{\partial n_Q}\mathrm{d}S_Q+\frac{\sigma}{4\pi\lambda}\int\limits_{0}^{\tau}\mathrm{d}t\int\limits_{S_2}\varepsilon(T_c)\times$$

$$\times T_c^4(Q,\ t)\,G(p,\ Q,\ \tau-t)\,\mathrm{d}S_Q.$$

Решение (8.12) называем функциональным, поскольку правая часть формулы (8.12) зависит от значения искомой функции на поверхности S_2. Полагая в уравнении (8.12) $p\in S_2$, приходим к нелинейному интегральному уравнению для определения $T(p,\ \tau)$

на поверхности S_2, которое по p является уравнением типа Фредгольма, а по τ — типа Вольтерра. В частном случае, пренебрегая незначительной зависимостью коэффициента черноты тела ε от температуры, получим нелинейное интегральное уравнение в виде

$$T(p,\ \tau)=T_л(p,\ \tau)-\frac{\gamma}{4\pi}\int\limits_0^\tau dt\int\limits_{S_2}T^4(Q,\ t)G(p,\ Q,\ \tau-t)\times \tag{8.13}$$
$$\times dS_Q,\ Q\in S_2,\ p\in S_2,$$

где $\gamma=\sigma\varepsilon/\lambda$ — постоянная.

3. Решение нелинейного интегрального уравнения. В статье [99] для случая граничных условий II рода (т. е. когда $S=S_2$) доказана разрешимость нелинейного интегрального уравнения (8.13) методом последовательных приближений. В монографии [13] доказана разрешимость нелинейного интегрального уравнения (8.13) методом последовательных приближений в общем случае смешанной краевой задачи. Единственное решение интегрального уравнения (8.13) дается рядом

$$T(p,\ \tau)=T_1(p,\ \tau)+[T_2(p,\ \tau)-T_1(p,\ \tau)]+$$
$$+[T_3(p,\ \tau)-T_2(p,\ \tau)]+\ldots,$$

n-я частная сумма которого равна $T_n(p,\ \tau)$.

Общий член ряда $T_n(p,\ \tau)$ может быть подсчитан согласно рекуррентной формуле

$$T_n(p,\ \tau)=T_л(p,\ \tau)-\frac{\gamma}{4\pi}\int\limits_0^\tau dt\int\limits_{S_2}T_{n-1}^4(Q,\ t)G(p,\ Q,\ \tau-t)\times$$
$$\times dS_Q,\ Q\in S_2,\ p\in S_2(n=2,\ \ldots).$$

В качестве первого приближения $T_1(p,\ \tau)$, как правило, выбирают решение соответствующей линейной краевой задачи

$$T_1(p,\ \tau)=T_л(p,\ \tau).$$

Тогда, для того чтобы второе и все последующие приближения имели физический смысл, необходимо потребовать выполнения неравенства

$$T_л(p,\ \tau)>\frac{\gamma}{4\pi}\int\limits_0^\tau dt\int\limits_{S_2}T_л^4(p,\ \tau)G(p,\ Q,\ \tau-t)\,dS_Q,\ p\in S_2,\ Q\in S_2.$$

Метод последовательных приближений применялся при решении конкретных задач нестационарной теплопроводности в работах [13, 87 и др.].

Для решения нелинейного интегрального уравнения могут быть использованы и другие приближенные методы.

Приведем примеры расчетов температурных полей рассмотренным методом.

Остывание теплоизлучающего полуограниченного массива [99]. Рассмотрим однородное полупространство, температура которого $T(x, \tau)$ зависит только от времени τ и одной пространственной координаты $x\,(0 \leqslant x < \infty)$. Пусть в начальный момент времени известно однородное распределение температуры T_0, поверхность $x=0$ излучает теплоту по закону Стефана — Больцмана во внешнюю среду с нулевой температурой.

В дифференциальной формулировке имеем

$$\left.\begin{aligned} &\partial^2 T(x, \tau)/\partial x^2 = (1/a)(\partial T/\partial \tau); \\ &T(x, 0) = T_0; \\ &\partial T(0, \tau)/\partial x = \gamma T^4(0, \tau). \end{aligned}\right\} \tag{8.14}$$

С помощью функции Грина $G(x, x', \tau - t)$ для одномерного уравнения теплопроводности

$$\partial^2 G/\partial x^2 - (1/a)(\partial G/\partial \tau) = -4\pi\delta(x - x')\,\delta(\tau - t);$$

$$G(x, x', 0) = 0, \quad \partial G/\partial x\,|_{x=0} = 0$$

сведем задачу, выраженную уравнениями (8.14), к нелинейному интегральному уравнению типа Вольтерра. Функция Грина в этом случае имеет вид

$$G(x, x', \tau - t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a(\tau - t)}}\left[e^{-\frac{(x - x')^2}{4a(\tau - t)}} + e^{-\frac{(x + x')^2}{4a(\tau - t)}}\right]. \tag{8.15}$$

Подставляя (8.15) в (8.13), приходим к нелинейному интегральному уравнению Вольтерра для определения температуры поверхности $x=0$ полупространства

$$T(0, \tau) = T_0 - \frac{\gamma}{\sqrt{\pi a}} \int_0^\tau \frac{T^4(0, t)}{\sqrt{\tau - t}}\, dt. \tag{8.16}$$

После того как найдено решение $T(0, \tau)$ нелинейного интегрального уравнения (8.16), распределение температуры в пространстве $x > 0$ в любой момент времени τ определяется квадратурой

$$T(x, \tau) = T_0 - \frac{\gamma}{\sqrt{\pi a}} \int_0^\tau \frac{T^4(0, t)}{\sqrt{\tau - t}} \exp\left[-\frac{x^2}{4a(\tau - t)}\right] dt. \tag{8.17}$$

Введем новые переменные z и ξ: $\tau = z/\varkappa^2$, $\xi = t/\varkappa^2$, где $\varkappa = \gamma T_0^3/\sqrt{\pi a}$, и положим $\Theta(z) = T(0, z/\varkappa^2)/T_0$, тогда для определения $\Theta(z)$ получаем нелинейное интегральное уравнение типа Вольтерра

$$\Theta(z) = 1 - \int_0^z \frac{\Theta^4(\xi)}{\sqrt{z - \xi}}\, d\xi. \tag{8.18}$$

Если решить это уравнение, то $T(0, \tau)=T_0\Theta(\tau\ \varkappa^2)$ и распределение температуры в полупространстве определится вычислением интеграла в (8.17).

Таким образом, процесс остывания равномерно нагретого полупространства при выборе соответствующих масштабов температуры и времени определяется одной и той же кривой $\Theta(z)$, являющейся решением некоторого стандартного нелинейного интегрального уравнения Вольтерра.

Введем новую функцию $\varphi(z)=\Theta^4(z)$ и перепишем уравнение (8.18) в виде

$$\varphi(z)=\left[1-\int_0^z \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{z-\xi}}\, d\xi\right]^4. \tag{8.19}$$

В работе А. Н. Тихонова [99] доказано, что решение уравнения (8.19) существует и единственно. Это решение может быть получено методом последовательных приближений:

$$\varphi_n(z)=\left[1-\int_0^z \frac{\varphi_{n-1}(\xi)}{\sqrt{z-\xi}}\, d\xi\right]^4.$$

При этом все $\varphi_n(z)$ с четными номерами меньше $\varphi(z)$, а все $\varphi_n(z)$ с нечетными номерами больше $\varphi(z)$, если в качестве $\varphi_0(z)$ выбрана функция, заведомо меньшая решения $\varphi(z)$. Действительно, так как $\varphi_0(z)\leqslant\varphi(z)$, то

$$\varphi_1(z)=\left[1-\int_0^z \frac{\varphi_0(\xi)}{\sqrt{z-\xi}}\, d\xi\right]^4\geqslant\left[1-\int_0^z \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{z-\xi}}\, d\xi\right]^4=\varphi(z),$$

но если $\varphi_1(z)\geqslant\varphi(z)$, то

$$\varphi_2(z)=\left[1-\int_0^z \frac{\varphi_1(\xi)}{\sqrt{z-\xi}}\, d\xi\right]^4\leqslant\left[1-\int_0^z \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{z-\xi}}\, d\xi\right]^4=\varphi(z) \tag{8.20}$$

и т. д. Таким образом, последовательные приближения сходятся к решению уравнения (8.19), подходя с разных сторон.

Однако может случиться, что

$$\int_0^z \frac{\varphi_1(\xi)}{\sqrt{z-\xi}}\, d\xi>1$$

для некоторого значения $z>z_0^{(1)}$, и тогда неравенство (8.20) может не иметь места.

В этом случае введем функцию

$$\psi_2(z)=\left[1-\int\limits_0^z \frac{\varphi_1(\xi)}{\sqrt{z-\xi}}\,d\xi\right]^4$$

и полагаем

$$\varphi_2(z)=\begin{cases}\psi_2(z), & 0\leqslant z\leqslant z_0^{(1)},\\ 0, & z>z_0^{(1)}.\end{cases}$$

Очевидно, что $\varphi_2(z)\leqslant\varphi(z)$ для любых значений z. Третье приближение, как и первое, при этом будет больше $\varphi(z)$, т. е. $\varphi_3(z)\geqslant\geqslant\varphi(z)$ и т. д. Если начать вычислительный процесс с $\varphi_0(z)=0$, то последовательные приближения графически представятся в виде кривых, показанных на рис. 8.1.

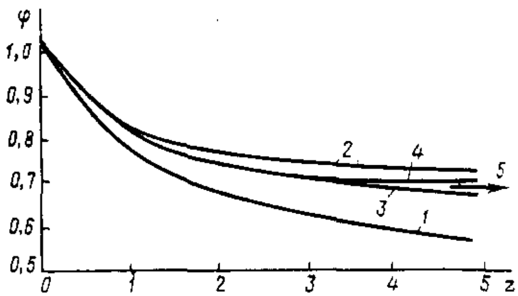


Рис. 8.1. Зависимость функции $\varphi(z)$ от безразмерного времени z:

1, 2, 3, 4 — соответственно 2, 3, 4, 5-е приближения по методу итераций; 5 — точное решение

Изложенный метод решения задачи применим также и в случае, когда начальная температура полупространства изменяется по координате x.

Высокотемпературный разогрев неограниченной пластины. Задача определения температурного поля неограниченной пластины $0\leqslant X=x/R\leqslant 1$ при высокотемпературном разогреве сводится к решению краевой задачи с нелинейным граничным условием.

В безразмерных величинах имеем

$$\left.\begin{aligned}&\partial^2\Theta(X,\,\mathrm{Fo})/\partial X^2=\partial\Theta(X,\,\mathrm{Fo})/\partial\mathrm{Fo},\ 0<X<1,\ \mathrm{Fo}>0;\\ &\Theta(X,\,0)=\Theta_0;\\ &\partial\Theta(0,\,\mathrm{Fo})/\partial X=0;\\ &-\partial\Theta(1,\,\mathrm{Fo})/\partial X+f[\Theta(1,\,\mathrm{Fo}),\,\mathrm{Fo}]=0,\end{aligned}\right\}\quad(8.21)$$

где $\Theta=T(x,\,\tau)/T_{\max}$ — безразмерная температура; $\mathrm{Fo}=a\tau/R^2$ — число Фурье; $f[\Theta(1,\,\mathrm{Fo}),\,\mathrm{Fo}]$ — произвольная интегрируемая функция безразмерной температуры поверхности и безразмерного времени.

Запись граничных условий в (8.21) является достаточно общей, так как включает в себя режимы:
аэродинамического нагрева

$$f[\Theta(1,\,\mathrm{Fo}),\,\mathrm{Fo}]=\mathrm{Bi}(\mathrm{Fo})[\Theta_r(\mathrm{Fo})-\Theta(1,\,\mathrm{Fo})]-\mathrm{Bi}_p\Theta^4(1,\,\mathrm{Fo});$$

нагрева (охлаждения) тепловым излучением

$$f[\Theta(1,\ \mathrm{Fo}),\ \mathrm{Fo}] = \pm \mathrm{Bi}_p \left[\Theta_c^4(\mathrm{Fo}) - \Theta^4(1,\ \mathrm{Fo})\right] \tag{8.22}$$

и др.

Здесь $\mathrm{Bi} = \alpha R/\lambda$ — число Био; $\mathrm{Bi}_p = \varepsilon\sigma_0 R T_{\max}^3/\lambda$ — радиационное число Био; $\Theta_r(\mathrm{Fo})$ — безразмерная температура восстановления в пограничном слое; $\Theta_c(\mathrm{Fo})$ — безразмерная температура источника теплового излучения.

Сведем краевую задачу (8.21) к эквивалентному интегральному уравнению. Функциональное решение задачи, выраженной уравнениями (8.21), получим, применяя метод интегрального преобразования Лапласа (см. гл. V)

$$\tilde{y}(s) = \int_0^\infty e^{-s\tau} y(\tau)\, d\tau.$$

В области изображений система (8.21) запишется в виде

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}^2\tilde{\Theta}(X,\ s)/\mathrm{d}X^2 - s\tilde{\Theta}(X,\ s) + \Theta_0 &= 0;\\ \mathrm{d}\tilde{\Theta}(0,\ s)/\mathrm{d}X &= 0;\\ -\mathrm{d}\tilde{\Theta}(1,\ s)/\mathrm{d}X + \tilde{\chi}(s) &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{8.23}$$

где $\tilde{\chi}(s) = \int_0^\infty f[\Theta(1,\ \mathrm{Fo}),\ \mathrm{Fo}] \exp(-s\mathrm{Fo})\, \mathrm{dFo}$.

Решение уравнения в (8.23) имеет вид

$$\tilde{\Theta}(X,\ s) - \Theta_0/s = A\,\mathrm{ch}\sqrt{s}\,X + B\,\mathrm{sh}\sqrt{s}\,X.$$

Определив постоянные A и B из граничных условий в (8.23), получим

$$\tilde{\Theta}(X,\ s) - \Theta_0/s = \tilde{\chi}(s)\,\mathrm{ch}\sqrt{s}\,X \Big/ \left(\sqrt{s}\,\mathrm{sh}\sqrt{s}\right).$$

Для перехода в область оригиналов воспользуемся теоремой разложения и теоремой умножения изображений (см. § 5.2, 5.3). В результате получим функциональное решение краевой задачи (8.21), которое содержит неизвестную функцию $\Theta(1,\ \mathrm{Fo})$ под знаком интеграла:

$$\Theta(X,\ \mathrm{Fo}) = \Theta_0 + \int_0^{\mathrm{Fo}} f[\Theta(1,\ t),\ t]\,\mathrm{d}t + 2\sum_{n=1}^\infty (-1)^n \cos\mu_n X \times$$

$$\times \int_0^{\mathrm{Fo}} f[\Theta(1,\ t),\ t] \exp\left[-\mu_n^2(\mathrm{Fo} - t)\right] \mathrm{d}t, \tag{8.24}$$

где $\mu_n = n\pi$.

Положив в решении (8.24) $X=1$, приходим к нелинейному интегральному уравнению типа Вольтерра второго рода относительно неизвестной функции $\Theta(1, \mathrm{Fo})$:

$$\Theta(1, \mathrm{Eo})=\Theta_0+\int_0^{\mathrm{Fo}} f[\Theta(1, t), t]\,\mathrm{d}t+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos\mu_n\times$$

$$\times\int_0^{\mathrm{Fo}} f[\Theta(1, t), t]\exp\left[-\mu_n^2(\mathrm{Fo}-t\right]\mathrm{d}t.$$

Уравнение можно записать в виде

$$z(\mathrm{Fo})=\Theta_0+\int_0^{\mathrm{Fo}} k(\mathrm{Fo}-t)f[z(t), t]\,\mathrm{d}t, \tag{8.25}$$

где $z(\mathrm{Fo})=\Theta(1, \mathrm{Fo})$ — температура поверхности пластины; $k(\mathrm{Fo}-t)=1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos\mu_n\exp[-\mu_n(\mathrm{Fo}-t)]$ — ядро интегрального уравнения.

Для решения нелинейного интегрального уравнения (8.25) применим метод аппроксимации ядра интегрального уравнения $k(\mathrm{Fo}-t)$ конечной суммой [57].

Приближение нулевого порядка находится при предположении, что ядро имеет вид $k(\mathrm{Fo}-t)=1$. Тогда уравнение (8.25) запишется так:

$$z(\mathrm{Fo})=\Theta_0+\int_0^{\mathrm{Fo}} f[z(t), t]\,\mathrm{d}t. \tag{8.26}$$

Дифференцирование обеих частей уравнения (8.26) по времени приводит нас к нелинейному дифференциальному уравнению первого порядка

$$z'(\mathrm{Fo})=f[z(\mathrm{Fo}), \mathrm{Fo}] \tag{8.27}$$

при начальном условии $z(0)=\Theta_0$. Уравнение (8.27) является уравнением энергии для неограниченной пластины в предельном случае бесконечно большой теплопроводности, и его решение часто может быть получено аналитически. Приближение первого порядка находится при предположении, что ядро $k(\mathrm{Fo}-t)$ имеет вид

$$k(\mathrm{Fo}-t)=1-2\cos\mu_1\exp\left[-\mu_1^2(\mathrm{Fo}-t)\right].$$

В результате приходим к интегральному уравнению такого вида:

$$z(\mathrm{Fo})=\Theta_0+\int_0^{\mathrm{Fo}} f[z(t), t]\,\mathrm{d}t-2\cos\mu_1 J_1(\mathrm{Fo}), \tag{8.28}$$

где $J_1(\mathrm{Fo})=\exp(-\mu_1^2\mathrm{Fo})\int_0^{\mathrm{Fo}}\exp(\mu_1^2 t)f[z(t), t]\,\mathrm{d}t.$

Вычислим первую и вторую производные по Fo от обеих частей уравнения (8.28):

$$\left.\begin{aligned} z'(\mathrm{Fo}) &= (1-2\cos\mu_1) f(z, \mathrm{Fo}) + 2\mu_1^2 \cos\mu_1 J_1(\mathrm{Fo}), \\ z''(\mathrm{Fo}) &= (1-2\cos\mu_1) f'(z, \mathrm{Fo}) + 2\mu_1^2 \cos\mu_1 - 2\cos\mu_1 J_1(\mathrm{Fo})\mu_1^4. \end{aligned}\right\} \tag{8.29}$$

Если из уравнений (8.29) исключить интеграл $J_1(\mathrm{Fo})$, то получим дифференциальное уравнение второго порядка

$$z''(\mathrm{Fo}) + \mu_1^2 z'(\mathrm{Fo}) = (1-2\cos\mu_1) f'(z, \mathrm{Fo}) - \mu_1^2 f(z, \mathrm{Fo}).$$

с начальными условиями

$$z(0) = \Theta_0, \quad z'(0) = (1-2\cos\mu_1) f(\Theta_0, 0).$$

Первое приближение является более точным, чем нулевое, потому что ядро в этом случае представлено более точно. И вообще i-е приближение находится при предположении, что ядро имеет вид

$$k(\mathrm{Fo}-t) = 1 + \sum_{n=1}^{i} (-1)^n \cos\mu_n \exp\left[-\mu_n^2(\mathrm{Fo}-t)\right].$$

Дифференцирование $i+1$ раз обеих частей получаемого интегрального уравнения приводит к интегро-дифференциальному уравнению. Исключение интегралов из интегро-дифференциального уравнения дает нелинейное дифференциальное уравнение

$$z^{(i+1)}(\mathrm{Fo}) = \Phi(f, f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(i)}; z^{(i)}, z^{(i-1)}, \ldots, z),$$

к которому необходимо присоединить начальные условия.

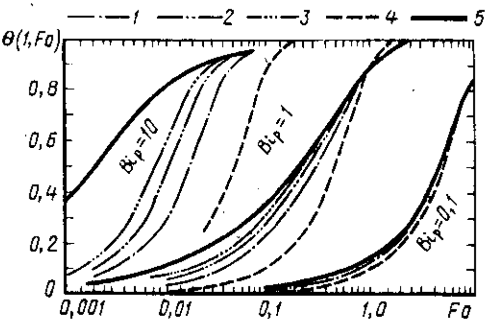


Рис. 8.2. Сравнение решений, полученных методом аппроксимации ядра интегрального уравнения, с точным решением:

1, 2, 3, 5 — соответственно 1, 2, 3, 0-е приближения; *5* — точное решение

Таким образом, краевая задача нестационарной теплопроводности с нелинейными граничными условиями в итоге приводится к решению задачи Коши для нелинейного дифференциального уравнения. Самый простой путь решения таких задач — численное интегрирование.

На рис. 8.2 приведены результаты расчета [57] температуры поверхности пластины путем использования формул Рунге — Кутта четвертого порядка при граничных условиях нагрева тепловым излучением (8.22).

Анализ результатов показывает, что точность аппроксимации возрастает с увеличением времени и порядка приближения. Кроме того, результаты расчетов улучшаются по мере уменьшения радиационного числа Био $\mathrm{Bi_p}$.

§ 8.2. Метод линеаризующих подстановок

Метод сводится к выбору подстановки, связывающей искомую температуру с некоторой новой функцией таким образом, что краевая задача относительно новой функции будет иметь линейное граничное условие. Предложены различные виды подстановок [22, 40, 92].

Рассмотрим подстановку, которая содержит корректирующий параметр, на примере аэродинамического нагрева [40].

Нестационарная теплопроводность неограниченной пластины при аэродинамическом нагреве. Для нахождения температурного поля обшивки летательного аппарата в условиях аэродинамического нагрева при малой теплопроводности материала обшивки или большой ее толщине необходимо решить уравнение теплопроводности

$$c\rho \frac{\partial T(x,\ \tau)}{\partial \tau} = \lambda \frac{\partial^2 T(x,\ \tau)}{\partial x^2} \quad (|x| < R,\ \tau > 0) \tag{8.30}$$

с начальным условием

$$T(x,\ 0) = T_0$$

и граничными условиями

$$\lambda(\partial T(R,\ \tau)/\partial x) = q_{\text{конв}} + q_{\text{солн}} - q_{\text{изл}} = \alpha[T_r - T(R,\ \tau)] + q_{\text{солн}} - \varepsilon\sigma_0 T^4(R,\ \tau); \tag{8.31}$$

$$\partial T(0,\ \tau)/\partial x = 0. \tag{8.32}$$

Полагая, что теплофизические характеристики материала, температура восстановления T_r, коэффициент теплоотдачи постоянны, систему (8.30)—(8.32) запишем в безразмерных переменных:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \Theta(X,\ \mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}} = \frac{\partial^2 \Theta(X,\ \mathrm{Fo})}{\partial X^2} \quad (|X| < 1,\ \mathrm{Fo} > 0);\\
&\Theta(X,\ 0) = \Theta_0;\\
&\partial\Theta(1,\ \mathrm{Fo})/\partial X = \mathrm{Bi_p}\{(\mathrm{Bi}/\mathrm{Bi_p})[1 - \Theta(1,\ \mathrm{Fo})] +\\
&+ \mathrm{Ki}/\mathrm{Bi_p} - \Theta^4(1,\ \mathrm{Fo})\} = \mathrm{Bi_p} f(\Theta);\\
&\partial\Theta(0,\ \mathrm{Fo})/\partial X = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{8.33}$$

где $\Theta(X,\ \mathrm{Fo}) = T/T_r$, $X = x/R$, $\mathrm{Fo} = a\tau/R^2$, $\mathrm{Bi} = \alpha R/\lambda$ — число Био; $\mathrm{Ki} = q_{\text{солн}} R/(\lambda T_r)$ — число Кирпичева, $\mathrm{Bi_p} = \varepsilon\sigma_0 T_r^3 R/\lambda$ — радиационное число Био.

Применим для решения задачи, выраженной уравнениями (8.33), интегральную подстановку

$$\frac{\ln\Phi(X,\ \mathrm{Fo})}{-p}=\int_0^\Theta\frac{d\Theta}{(\mathrm{Bi}/\mathrm{Bi_p})\,(1-\Theta)+\mathrm{Ki}/\mathrm{Bi_p}-\Theta^4}=F(\Theta), \tag{8.34}$$

где p — корректирующий параметр, который определяется ниже. Выполнив подстановку (8.34), получим в новых переменных

$$\left.\begin{aligned}&\partial\Phi(X,\ \mathrm{Fo})/\partial\mathrm{Fo}=\partial^2\Phi(X,\ \mathrm{Fo})/\partial X^2+\psi(X,\ \mathrm{Fo});\\&\Phi(X,\ 0)=\exp[-pF(\Theta_0)]=\Phi_0;\\&\partial\Phi(1,\ \mathrm{Fo})/\partial X=-p\mathrm{Bi_p}\Phi(1,\ \mathrm{Fo});\\&\partial\Phi(0,\ \mathrm{Fo})/\partial X=0,\end{aligned}\right\} \tag{8.35}$$

где $\psi(X,\ \mathrm{Fo})=p\Phi\dfrac{(\partial\Theta/\partial X)^2}{[(\mathrm{Bi}/\mathrm{Bi_p})\,(1-\Theta)+\mathrm{Ki}/\mathrm{Bi_p}-\Theta^4]^2}(\mathrm{Bi}/\mathrm{Bi_p}+4\Theta^3-p)$.

В случае, когда нелинейный комплекс $\psi(X,\ \mathrm{Fo})=0$, решение задачи, выраженной уравнениями (8.35), легко может быть получено известными методами. Поэтому корректирующий параметр p найдем из условия, чтобы комплекс $\psi(X,\ \mathrm{Fo})\to 0$. Для выполнения этого условия достаточно потребовать

$$p\to\mathrm{Bi}/\mathrm{Bi_p}+4\Theta^3(X,\ \mathrm{Fo}).$$

В процессе нагрева искомая температура $\Theta(X,\ \mathrm{Fo})$ находится в пределах $\Theta_0\leqslant\Theta(X,\ \mathrm{Fo})\leqslant\Theta_{\text{уст}}$, где значение установившейся температуры $\Theta_{\text{уст}}=\lim\limits_{\mathrm{Fo}\to\infty}\Theta(X,\ \mathrm{Fo})$ определяется из уравнения

$$\mathrm{Bi}(1-\Theta)+\mathrm{Ki}-\mathrm{Bi_p}\Theta^4=0.$$

Корни этого уравнения приведены в табл. 8.1.

Разобьем диапазон изменения температуры $\Theta_{\text{уст}}-\Theta_0$ на несколько интервалов (Θ_0, Θ_1, Θ_2, Θ_3, ..., Θ_n, $\Theta_{\text{уст}}$) и, полагая для каждого интервала $p_i=\mathrm{Bi}/\mathrm{Bi_p}+4\Theta_i^3$, приближенно обеспечим выполнение требования $\psi(X,\ \mathrm{Fo})=0$.

Далее определение нестационарного поля температур выполняется в два этапа.

1. Для каждого интервала (Θ_{i-1}, Θ_i) решается краевая задача (8.35) при $\psi(X,\ \mathrm{Fo})=0$. При этом начальным условием для i-го интервала является распределение температуры в конце $(i-1)$-го интервала.

2. Используя полученное решение и зависимость (8.34), находим искомую функцию $\Theta(X,\ \mathrm{Fo})$. Сравнение результатов расчета по данному методу с числовыми данными по методу сеток, полученными на ЭЦВМ, показало [40], что погрешность в определении температуры $\Theta(X,\ \mathrm{Fo})$ не превышает 6 % в области

$$\mathrm{Bi}/\mathrm{Bi_p}\leqslant 2{,}0;\quad 0\leqslant\mathrm{Ki}/\mathrm{Bi_p}\leqslant 1{,}0;\quad \Theta_{\text{уст}}-\Theta_0\leqslant 0{,}8,$$

включающей большинство реальных процессов нагрева. При этом для значений $Bi_p<1$ число интервалов N может быть взято равным 1, для $1{,}0<Bi_p<2{,}0$ $N=2$, для $2{,}0<Bi_p<3{,}0$ $N=3$. С увеличением числа интервалов N точность расчетов увеличивается [40].

Таблица 8.1

Ki	Bi \ Bi_p	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	5	10
Ki=0	0,2	1,00000	0,72449	0,64780	0,60310	0,57195	0,54825	0,39450	0,33907
	0,4	1,00000	0,79762	0,72449	0,67975	0,64780	0,62311	0,45661	0,39450
	0,6	1,00000	0,83666	0,76803	0,72449	0,69281	0,66805	0,49593	0,43003
	0,8	1,00000	0,86198	0,79762	0,75557	0,72449	0,69995	0,52504	0,45661
	1	1,00000	0,88004	0,81955	0,77902	0,74867	0,72449	0,54825	0,47799
	5	1,00000	0,96527	0,93805	0,91565	0,89660	0,88004	0,72449	0,64780
	10	1,00000	0,98144	0,96527	0,95094	0,93805	0,92636	0,79762	0,72449
Ki=1	0	—	1,49535	1,25743	1,13622	1,05737	1,00000	0,66874	0,56234
	0,2	6,00000	1,45972	1,24194	1,12883	1,05448	1,00000	0,67922	0,57396
	0,4	3,50000	1,42695	1,22776	1,12208	1,05184	1,00000	0,68865	0,58438
	0,6	2,66667	1,39701	1,21480	1,11592	1,04944	1,00000	0,69724	0,59385
	0,8	2,25000	1,36981	1,20295	1,11028	1,04724	1,00000	0,70511	0,60253
	1	2,00000	1,34516	1,19212	1,10511	1,04521	1,00000	0,71237	0,61054
	5	1,20000	1,13388	1,08793	1,05266	1,02405	1,00000	0,79684	0,70524
	10	1,10000	1,07344	1,05116	1,03195	1,01507	1,00000	0,84504	0,76231
Ki=5	0	—	2,23607	1,88030	1,69904	1,58114	1,49535	1,00000	0,84090
	0,2	26,00000	2,20854	1,86384	1,68725	1,57201	1,48800	1,00000	0,84222
	0,4	13,50000	2,18126	1,84758	1,67560	1,56302	1,48076	1,00000	0,84352
	0,6	9,33333	2,15425	1,83153	1,66413	1,55417	1,47363	1,00000	0,84478
	0,8	7,25000	2,12757	1,81570	1,65282	1,54545	1,46662	1,00000	0,84603
	1	6,00000	2,10123	1,80009	1,64169	1,53687	1,45972	1,00000	0,84725
	5	2,00000	1,68077	1,54462	1,45789	1,39466	1,34516	1,00000	0,86747
	10	1,50000	1,41893	1,36225	1,31861	1,28314	1,25328	1,00000	0,88541
Ki=10	0	—	2,65915	2,23607	2,02051	1,88030	1,77828	1,18921	1,00000
	0,2	51,00000	2,63711	2,22227	2,01023	1,87205	1,77138	1,18809	1,00000
	0,4	26,00000	2,61512	2,20854	2,00000	1,86384	1,76452	1,18698	1,00000
	0,6	17,66666	2,59318	2,19487	1,98982	1,85569	1,75771	1,18588	1,00000
	0,8	13,50000	2,57132	2,18126	1,97970	1,84758	1,75095	1,18479	1,00000
	1	11,00000	2,54954	2,16772	1,96965	1,83953	1,74423	1,18371	1,00000
	5	3,00000	2,14818	1,91780	1,78413	1,69118	1,62057	1,16403	1,00000
	10	2,00000	1,79320	1,68077	1,60341	1,54462	1,49733	1,14390	1,00000

§ 8.3. Метод последовательных приближений (метод итераций)

В тех случаях, когда нагреваемое тело является термически массивным (в случае радиационно-конвективного нагрева число Bi не превышает 0,5), для определения температуры в одномерных телах классической формы можно применить метод последовательных приближений [21].

Процесс нагревания твердых тел, теплота к которым подводится одновременно конвекцией и излучением, описывается краевой задачей *

$$\left.\begin{aligned}&\partial\Theta(X,\ \mathrm{Fo})/\partial\mathrm{Fo}=\partial^2\Theta(X,\ \mathrm{Fo})/\partial X^2+(\nu/X)\times\\&\times[\partial\Theta(X,\ \mathrm{Fo})/\partial X]\ (|X|<1,\ \mathrm{Fo}>0);\\&\Theta(X,\ 0)=\Theta_0;\\&\partial\Theta(0,\ \mathrm{Fo})/\partial X=0;\\&\partial\Theta(1,\ \mathrm{Fo})/\partial X=\mathrm{Bi_p}\{p[1-\Theta(1,\ \mathrm{Fo})]+1-\Theta^4(1,\ \mathrm{Fo})\},\end{aligned}\right\}\qquad(8.36)$$

где $p=\mathrm{Bi}/\mathrm{Bi_p}\geqslant 0$, $\nu=0,\ 1,\ 2$, для задач плоской, цилиндрической и сферической симметрии соответственно.

Для решения задачи, выраженной уравнениями (8.36), применим метод последовательных приближений. В качестве m-го приближения ($m=1,\ 2,\ \ldots$) можно принять аналитическое решение краевой задачи

$$\left.\begin{aligned}&\partial\Theta_m(X,\ \mathrm{Fo})/\partial\mathrm{Fo}=\partial^2\Theta_m(X,\ \mathrm{Fo})/\partial X^2+(\nu/X)\times\\&\times[\partial\Theta_m(X,\ \mathrm{Fo})/\partial X];\\&\partial\Theta_m(0,\ \mathrm{Fo})/\partial X=0;\\&\partial\Theta_m(1,\ \mathrm{Fo})/\partial X=\mathrm{Bi}_m[1-\Theta_m(1,\ \mathrm{Fo})],\end{aligned}\right\}\qquad(8.37)$$

которое может быть получено любым классическим методом.

Первое приближение вычисляется при $\mathrm{Bi}_1=\mathrm{Bi_p}(p+4)=\mathrm{const}$. В последующих приближениях при решении системы (8.37) полагают

$$\mathrm{Bi}_m=\mathrm{Bi_p}[p+1+\Theta_{m-1}(1,\ \mathrm{Fo}^*)+\Theta^2_{m-1}(1,\ \mathrm{Fo}^*)+\Theta^3_{m-1}(1,\ \mathrm{Fo}^*)]=\\=\mathrm{const},$$

где Fo^* — момент времени, для которого необходимо найти изменение температуры по сечению тела.

В силу того, что имеют место соотношения

$$\mathrm{Bi}_1=\mathrm{Bi_p}(p+4)\geqslant\mathrm{Bi}_2=\mathrm{Bi_p}[p+1+\Theta_1(1,\ \mathrm{Fo}^*)+\Theta_1^2(1,\ \mathrm{Fo}^*)+\Theta_1^3\times\\\times(1,\ \mathrm{Fo}^*)]\geqslant\mathrm{Bi}_3=\ \ldots\ \geqslant\mathrm{Bi_p}[p+1+\Theta(1,\ \mathrm{Fo}^*)+\Theta^2(1,\ \mathrm{Fo}^*)+\\+\Theta^3(1,\ \mathrm{Fo}^*)],$$

для последующих приближений будут выполняться неравенства вида

$$\Theta_1(X,\ \mathrm{Fo}^*)\geqslant\Theta_2(X,\ \mathrm{Fo}^*)\geqslant\Theta_3(X,\ \mathrm{Fo}^*)\geqslant\ \ldots\ \geqslant\Theta(X,\ \mathrm{Fo}).$$

Как правило, достаточно ограничиться третьим приближением, потому что аппроксимации более высокого порядка дают незначительные уточнения.

Анализ результатов использования метода итераций показал (табл. 8.2, [21]), что максимальная погрешность расчетов имеет наибольшее значение в начальный момент времени для теплового центра тела и не превышает 6 %. С увеличением значений Fo расхождение быстро уменьшается. При прочих равных условиях точность определения температурного поля для шара и цилиндра выше, чем для пластины.

Таблица 8.2

Сравнение результатов расчета температуры неограниченной пластины ($Bi_p=2$; $Bi=0$; $\Theta_0=0{,}2$)

Fo	Θ (1, Fo), вычисленная		
	численным методом	методом итераций	δ, %
0,1	0,7548	0,7810	3,47
0,2	0,8391	0,8512	1,42
0,3	0,8774	0,8855	0,92
0,4	0,9026	0,9092	0,73
0,5	0,9215	0,9267	0,56
0,6	0,9364	0,9407	0,46
0,7	0,9483	0,9519	0,38
0,8	0,9579	0,9610	0,32
0,9	0,9719	0,9741	0,23
	Θ (0, Fo)		
0,1	0,2146	0,2198	2,42
0,2	0,3012	0,3191	5,94
0,3	0,4087	0,4315	5,58
0,4	0,5070	0,5301	4,56
0,5	0,5910	0,6131	3,74
0,6	0,6614	0,6817	3,07
0,7	0,7201	0,7384	2,54
0,8	0,7589	0,7851	2,11
0,9	0,8093	0,8235	1,75
1,0	0,8428	0,8550	1,45

§ 8.4. Метод малого параметра

В настоящее время асимптотические методы решения нелинейных уравнений в частных производных с малым параметром [73, 76] стали широко применяться в теории нелинейного теплопереноса [50].

Суть применяемых методов, называемых еще методами возмущений, заключается во введении небольших поправок к основному (невозмущенному) решению задачи в виде ряда. При этом параметрами разложения являются содержащиеся в краевой задаче малые числовые коэффициенты.

В случае граничных условий, содержащих несущественные нелинейности, методы возмущений дают приближенные решения при сравнительно несложных вычислениях [105].

В последние годы разработаны новые приемы и варианты метода малого параметра для решения краевых задач нестационарной теплопроводности с существенно нелинейными граничными условиями.

Изложим метод [50], который позволяет решать задачи с нелинейными граничными условиями для тел любой геометрической формы.

Необходимо определить температурное поле в теле произвольной геометрической формы в случае постоянных λ, c, ρ при совместном радиационно-конвективном теплообмене в среде, температура которой есть произвольная функция времени.

Математическая постановка задачи имеет вид

$$\partial T/\partial\tau = a\nabla^2 T, \ p \in \Omega, \ \tau > 0; \tag{8.38}$$

$$T|_{\tau=0} = f(p); \tag{8.39}$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n}\bigg|_s + \alpha_\Sigma [T_c(\tau) - T_s] = 0, \tag{8.40}$$

где α_Σ — так называемый суммарный коэффициент теплоотдачи, который в общем случае произвольно зависит от температуры поверхности тела T_s и температуры среды T_c.

В выражении для α_Σ выделим зависящую и не зависящую от T_s части:

$$\alpha_\Sigma [T_s, T_c, \tau] = \alpha_{\Sigma_0}(T_c, \tau) + F(T_s, T_c(\tau), \tau).$$

Например, в случае радиационно-конвективного нагрева коэффициент

$$\alpha_\Sigma = \alpha_k [T_s, T_c, \tau] + \sigma_в \left[(T_c^4 - T_s^4)/(T_c(\tau) - T_s)\right]$$

(где $\sigma_в$ равно произведению постоянной Стефана—Больцмана на коэффициент черноты поверхности тела), т. е.

$$\alpha_\Sigma = \alpha_{\Sigma_0}(T_c, \tau) + \varphi(T_s, T_c, \tau) + \sigma_в \left[(T_c^4 - T_s^4)/(T_c - T_s)\right].$$

Тогда, вводя параметр ε ($0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$) в граничное условие (8.40), после выделения линейной части получим

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n}\bigg|_s + \alpha_{\Sigma_0}(T_c - T_s) + \varepsilon F(T_s, T_c, \tau) = 0, \tag{8.41}$$

где $\alpha_{\Sigma_0}(T_c, \tau) = \alpha_{k_0}(T_c, \tau) + \sigma_в T_c^3$; $F[T_s, T_c, \tau] = \varphi[T_s, T_c, \tau](T_c - T_s) + \sigma_в \left[T_c^3 T_s - T_s^4\right]$.

Предполагаем, что выполняется условие малости $F[T_s, T_c, \tau]$, необходимое для применения теории возмущений:

$$|F[T_s, T_c, \tau]/(\alpha_{\Sigma_0} T_c)| \ll 1. \tag{8.42}$$

Последнее условие выполняется всегда при $\varphi = 0$. Если же $\varphi(T_s, T_c, \tau) \neq 0$, то необходимо установить область изменения T_s, в которой выполняется условие (8.42). Граничное условие (8.41) совпадает с граничным условием (8.40), если положить $\varepsilon = 1$, а в случае

$\varepsilon=0$ имеем граничное условие линейной, так называемой «невозмущенной», краевой задачи, математическое описание которой имеет вид

$$\left.\begin{aligned}&\nabla^2 T_0-\frac{1}{a}\frac{\partial T_0}{\partial\tau}=0\ (p\in\Omega,\ \tau>0);\\&T_0|_{\tau=0}=f(p);\\&-\lambda\frac{\partial T_0}{\partial n}\Big|_s+\alpha_{\Sigma_0}[T_c(\tau)-T_{s_0}]=0.\end{aligned}\right\}\tag{8.43}$$

Методы решения задачи (8.43) известны.

Искомое решение задачи (8.38), (8.39), (8.41) согласно методу возмущений представим в виде ряда по возрастающим степеням ε

$$T(p,\ \tau,\ \varepsilon)=\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^m T_m(p,\ \tau,\ \varepsilon),\tag{8.44}$$

где функции $T_m(p,\ \tau,\ \varepsilon)$ определяются последовательным решением, начиная с решения «невозмущенной» задачи (при $m=0$), имеющей математическую модель (8.43).

Подставляя (8.44) в (8.38), (8.39) и (8.41) и раскладывая в (8.41) $F(T_s,\ T_c,\ \tau)$ в ряд Тейлора по степеням параметра ε, выбираем члены, содержащие коэффициенты при одинаковых степенях ε. Получаем систему уравнений для определения T_m, $m=1,\ 2,\ \ldots$:

$$\left.\begin{aligned}&\nabla^2 T_m-\frac{1}{a}\frac{\partial T_m}{\partial\tau}=0\ \ (p\in\Omega,\ \tau>0);\\&T_m|_{\tau=0}=0;\\&-\lambda\frac{\partial T_m}{\partial n}\Big|_s+\alpha_\Sigma[T_{c_m}-T_{s_m}]=0,\end{aligned}\right\}\tag{8.45}$$

где $T_{c_m}=F_m[T_s,\ T_c,\ \tau]/\alpha_{\Sigma_0}$ в отличие от случая, когда $m=0$, не заданная функция $T_c(\tau)$, а функция, определяемая из предыдущих приближений и зависящая от вида $F(T_s,\ T_c,\ \tau)$. В общем случае

$$F_1=F(T_s(\varepsilon),\ T_c(\tau),\ \tau)|_{T_s=T_{s_0}},\ \ \varepsilon=0;$$

$$F_2=\left(\frac{\partial F}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$F_m=\frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{\partial^{m-1}F}{\partial\varepsilon^{m-1}}\right)_{\varepsilon=0}.$$

В результате с помощью метода малого параметра краевая задача с нелинейным граничным условием (8.45) сводится к решению последовательности краевых задач по определению коэффициентов разложения $T_m(p,\ \tau)$ формального решения (8.44). При этом задачи (8.43) и (8.45) имеют одинаковые структуры и для их решения можно воспользоваться единым методом.

На первом шаге определяется функция T_0 как решение задачи (8.43), а затем последовательно определяются функции $T_m(x, \tau)$, $m=1, 2, \ldots$, как решение задач (8.45).

Для получения решения нелинейной краевой задачи (8.38)—(8.40) в виде суммы ряда (8.44) при $\varepsilon=1$

$$T(p, \tau, \varepsilon)=T(p, \tau, 1)=\sum_{m=0}^{\infty} T_m(p, \tau)$$

достаточно ограничиться двумя-тремя приближениями и точность расчета при $m=1 \ldots 3$ достигается в пределах 1 % [50].

Итак, основная идея описанной методики применения метода малого параметра к решению нестационарных нелинейных задач теплопроводности заключается в выделении линейной и нелинейной частей в суммарном коэффициенте теплоотдачи α_Σ. Достоинство методики состоит в том, что может быть получено решение такой краевой задачи с нелинейными граничными условиями, у которой есть решение соответствующей линейной задачи (невозмущенной).

В [50] приведены результаты решения методом малого параметра такой задачи:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau}=a\,(\partial^2 T/\partial x^2), \quad |x|<R, \quad \tau>0;$$

$$\mp\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=-R}^{x=R}+\alpha(T_s)\,[T_c-T_s]=0;$$

$$T(x, 0)=T_0,$$

где $\alpha(T_s)=\alpha_\Sigma(T_s)=\alpha_k+\sigma_в\left[(T_c^4-T_s^4)/(T_c-T_s)\right]$.

Для расчета выбраны следующие значения величин: $T_c=1873$ К; $T_0=281$ К; $R=0{,}25$м; $\alpha_k=109{,}5$ Вт/(м$^2\cdot$К); $\lambda=27{,}4$ Вт/(м$\cdot$К); $a=0{,}6\times10^{-5}$ м^2/с; $\sigma_в=1{,}67\cdot10^{-8}$ Вт/(м$^2\cdot$К^4).

Результаты расчетов представлены графически на рис. 8.3 [50], при этом результат третьего приближения полностью совпадает с кривой 2. Анализ результатов показывает, что погрешности метода малого параметра зависят от времени: при $\mathrm{Fo}=a\tau/R^2<0{,}3$ достаточно использовать 1-е приближение, при $\mathrm{Fo}<0{,}6$ необходимо вы-

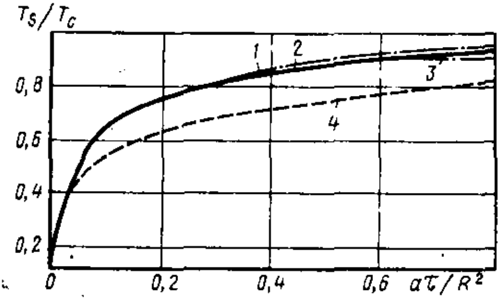


Рис. 8.3. Изменение относительной температуры поверхности неограниченной пластины во времени при совместном нагреве конвекцией и радиацией:

1 — 1-е приближение при решении методом малого параметра; 2 — решение методом работы [19]; 3 — 2-е приближение; 4 — 0-е приближение

полнить 2-е приближение. Сравнение кривых 4 и 2 свидетельствует о той погрешности, которая возникает при решении линейной задачи по сравнению с решением нелинейной.

§ 8.5. Метод Био

В своих работах Био [14] при решении линейных задач теплопроводности предложил использовать запись уравнений в форме Лагранжа. В работах [14, 118, 121] вариационный метод Био применяется для решения задач с нелинейными граничными условиями. Рассмотрим метод Био в применении к задачам с нелинейными граничными условиями на примере теплоизлучающего полупространства [121].

Температурное поле аппроксимируется с помощью $n+p$ основных координат

$$T=T(x,\ y,\ z,\ q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_{n+p}).$$

Как и в случае линейной задачи, использование первых n обобщенных координат приводит к системе дифференциальных уравнений, записанных в форме Лагранжа (6.86):

$$\partial E/\partial q_j+\partial D/\partial \dot{q}_j=Q_j. \tag{8.46}$$

Координаты $q_\nu > 0$ с номерами $\nu=n+1, n+2, \ldots, n+p$ используются для приближенного удовлетворения нелинейным граничным условиям краевой задачи $R(T)|_S=0$, где $R(T)$ — нелинейная функция.

Требуется выполнение до некоторой степени произвольного уравнения баланса энергии на поверхности S

$$\int\limits_S R(T)\, q_\nu\, dS=0,\quad \nu=n+1,\ \ n+2,\ \ldots,\ n+p. \tag{8.47}$$

Уравнение (8.47) представляет собой систему p алгебраических уравнений.

Пусть дана следующая краевая задача:

$$c\rho\,(\partial T/\partial\tau)=\lambda\,(\partial^2 T/\partial x^2),\quad x>0,\quad \tau>0;$$

$$T(x,\ 0)=T_0;$$

$$\lambda\,[\partial T(0,\ \tau)/\partial x]+h\left[T^m(0,\ \tau)-T_c^m\right]=0,$$

где в случае конвективного теплообмена $m=1$, $h=\alpha$ — коэффициент теплоотдачи, а при радиационном теплообмене $m=4$; $h=-\varepsilon\sigma$ (ε — коэффициент черноты поверхности; σ — постоянная Стефана — Больцмана); T_c — абсолютная температура окружающей среды.

Введем две обобщенные координаты: q_1 — абсолютная температура на границе, q_2 — глубина прогретого слоя — и представим функцию температуры в виде

$$\Theta=T-T_0=\begin{cases} -(T_0-q_1)\left[1-\left(\dfrac{x}{q_2}\right)\right]^2, & 0\leqslant x\leqslant q_2,\\ 0, & x>q_2.\end{cases} \tag{8.48}$$

Подставляя профиль температуры (8.48) в выражение (6.74), находим вид вектора теплового потока:

$$\bar{H}=-\bar{e}\,\{(1/3)\,c\rho q_2\,(T_0-q_1)\,[1-(x/q_2)]^3, \tag{8.49}$$

где $\bar{e}$ — единичный вектор, направленный вдоль оси x.

Используя (8.48), получим выражения для функций E и D:

$$E=(1/10)\,c\rho q_2\,(T_0-q_1)^2,$$

$$D=\frac{1}{630}\,\frac{(c\rho)^2}{\lambda}\,q_2\left[5q_2^2q_1^2-15\,(T_0-q_1)\,q^2q_1q_2+13\,(T_0-q_1)^2q_2^2\right].$$

С учетом выражений для Θ (8.48) и H (8.49) определим «температурную» силу Q_1 по формуле

$$Q_1=\int\limits_S \Theta\bar{n}\,\frac{\partial\bar{H}}{\partial q_1}\,\mathrm{d}S=\frac{1}{3}\,c\rho\,(T_0-q_1)\,q_2.$$

Подставляя выражения для E и D в формулу (8.46), получим уравнение Лагранжа для координаты q_1:

$$84\,(T_0-q_1)+5\,(c\rho/\lambda)\,q_2[2q_2q_1-3\,(T_0-q_1)\,q_2]=0. \tag{8.50}$$

Связь между координатами q_1 и q_2 находим, удовлетворяя условию (8.47):

$$2\,(\lambda/h)\,(T_0-q_1)-\left(q_1^m-T_c^m\right)q_2=0. \tag{8.51}$$

Выразим q_2 через q_1 из уравнения (8.51) и подставим его значение в уравнение (8.50). Приходим к дифференциальному уравнению первого порядка с начальным условием $q_1=T_0$ при $\tau=0$, которое легко интегрируется:

$$\int\limits_1^z \frac{(1-z)\left[5\left(z^m-z_0^m\right)+3m\,(1-z)\,z^{m-1}\right]}{\left(z^m-z_0^m\right)^3}\,dz=-\frac{21}{5}\,t.$$

Здесь $t=[h^2/(c\rho\lambda)]\,T_0^{2\,(m-1)}\,\tau,\quad z=q_1/T_0,\quad z_0=T_0/T_c.$

В частных случаях:

при $m=1$

$$\frac{21}{5}\,t=\frac{3}{2}\left(\frac{1-z}{z-z_0}\right)^2+2\,\frac{1-z}{z-z_0}+2\ln\frac{z-z_0}{1-z_0}; \tag{8.52}$$

при $m=4$

$$\frac{42}{5}\,t=\frac{(1-z)\left[z^5+z_0^4\,(3-4z)\right]}{\left(z^4-z_0^4\right)^2-z_0^4}+\frac{1}{2z_0^6}\left[\ln\frac{\left(z_0^2+z^2\right)\left(z_0^2-1\right)}{\left(z_0^2-z^2\right)\left(z_0^2+1\right)}-\right.$$

$$\left.-\frac{3}{2z_0}\ln\frac{(z_0+z)\,(z_0-1)}{(z_0-z)\,(z_0+1)}-\frac{3}{z_0}\,\mathrm{arctg}\,\frac{(z-1)\,z_0}{z_0^2+z}\right]. \tag{8.53}$$

На рис. 8.4 [121] представлены результаты расчетов по формулам (8.52) и (8.53) при $T_c=0$, $T_c=0{,}5T_0$, $T_c=2T_0$. Сравнение этих данных с точным решением при $m=1$ и $T_c=0$ показывает вполне удовлетворительное согласование результатов.

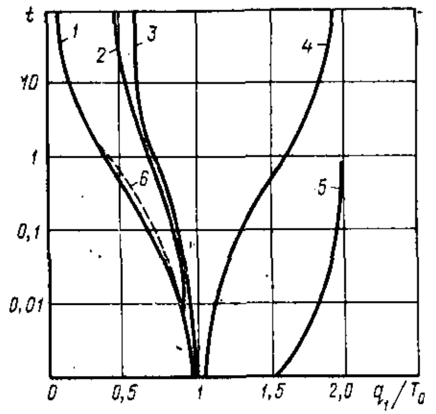


Рис. 8.4. Изменение температуры поверхности для полупространства в случае, когда тепловой поток на поверхности пропорционален m-й степени температуры поверхности:
1 — $m=1$, $T_c=0$; 2 — $m=4$, $T_c=0$; 3 — $m=4$, $T_c=0{,}5T_0$; 4 — $m=1$, $T_c=2T_0$; 5 — $m=4$, $T_c=2T_0$; 6 — точное решение, $m=1$, $T_c=0$

§ 8.6. Построение асимптотических решений задач с нелинейными граничными условиями

На основе исследования аналитических свойств решений преобразованных по Лапласу краевых задач получены асимптотические решения уравнений параболического типа с нелинейными граничными условиями [92].

Проиллюстрируем метод на примере одномерной задачи теплопроводности с однородным начальным распределением температуры. Имеем

$$\left.\begin{aligned}&\partial\Theta/\partial\mathrm{Fo}=\partial^2\Theta/\partial X^2+(1/\nu)(\partial\Theta/\partial X),\quad 0<X<1,\quad \mathrm{Fo}>0;\\&\Theta(X,\ 0)=\Theta_0;\\&\partial\Theta(1,\ \mathrm{Fo})/\partial X=\mathrm{Bi}\,[\Theta(1,\ \mathrm{Fo})]\,[\Theta_c-\Theta(1,\ \mathrm{Fo})];\\&\partial\Theta(0,\ \mathrm{Fo})/\partial X=0,\end{aligned}\right\}\tag{8.54}$$

где ν — коэффициент формы тела.

Нелинейное граничное условие в (8.54) можно представить в виде

$$\partial\Theta(1,\ \mathrm{Fo})/\partial X=\mathrm{Bi}\,[\Theta(1,\ \mathrm{Fo})]\,[\Theta_c-\Theta(1,\ \mathrm{Fo})]\equiv q(\mathrm{Fo}),\tag{8.55}$$

где функция $q(\mathrm{Fo})$ допускает интегральное преобразование по Лапласу.

Применим к задаче, записанной уравнениями (8.54), (8.55), интегральное преобразование Лапласа (см. гл. V) и в области изображений получим решение в виде

$$\bar{\Theta}(X,\ s)-\Theta_0/s=\bar{q}(s)\,F(X,\ s),\tag{8.56}$$

где
$$F(X,\ s)=\begin{cases}\mathrm{ch}\left(\sqrt{s}\,X\right)/\sqrt{s}\,\mathrm{sh}\sqrt{s}, & \nu=0;\\ J_0\left(\sqrt{s}\,X\right)/\sqrt{s}\,J_1\left(\sqrt{s}\right), & \nu=1;\\ \mathrm{sh}\left(\sqrt{s}\,X\right)/\sqrt{s}\,X\left(\mathrm{ch}\sqrt{s}+s^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{sh}\sqrt{s}\right), & \nu=2.\end{cases}$$

Решение для больших значений времени. Известно [61], что поведение функции при больших значениях времени $\mathrm{Fo}\to\infty$ определяется в области изображений самой правой особой точкой в комплексной области. Такой точкой для функции $F(X, s)$ является полюс $s=0$. Тогда, учитывая, что $\widetilde{q}(s) \to q(\mathrm{Fo})$, $F(X, s) \xrightarrow[s\to 0]{} \to \operatorname{res} F(X, s) = \nu+1$, и применяя теорему умножения изображений (см. § 5.2), осуществим переход к оригиналам в (8.56):

$$\Theta(X, \mathrm{Fo}) - \Theta_0 \approx (\nu+1) \int_0^{\mathrm{Fo}} \mathrm{Bi}[\Theta(1, t)][\Theta_c - \Theta(1, t)]\, dt$$

при $\mathrm{Fo} \to \infty$. (8.57)

Полученное решение (8.57) не учитывает распределения температуры по пространственной координате X. Поэтому для получения последующих приближений, учитывающих неоднородность распределения температуры по пространственной координате, выделим второй член в асимптотическом разложении изображения. С этой целью представим правую часть выражения (8.56) в таком виде:

$$[s\widetilde{q}(s) - q(0)]\, F(X, s)\, (1/s).$$

Учитывая, что $s\widetilde{q}(s) - q(0) \to q'(\mathrm{Fo})$ и $\frac{F(X, s)}{s} \to \sum_{k=1}^{2} \operatorname*{res}_{s_k\to 0} \frac{F(X, s)}{s} = (\nu+1)\,\mathrm{Fo} + \frac{(\nu+3)\,X^2 - (\nu+1)}{2\,(\nu+3)}$, используя теорему умножения изображений, получим

$$\Theta(X, \mathrm{Fo}) - \Theta_0 \simeq (\nu+1) \int_0^{\mathrm{Fo}} q(t)\, dt + q(\mathrm{Fo}) \left[\frac{(\nu+3)\,X^2 - (\nu+1)}{2\,(\nu+3)}\right]. \quad (8.58)$$

По этому методу можно получить дальнейшие приближения к истинному температурному полю при больших значениях времени. В n-м приближении полное асимптотическое разложение для больших значений времени запишется в виде

$$\Theta(X, \mathrm{Fo}) - \Theta_0 \simeq \sum_{k=1}^{n} \Theta_k(X)\, \psi_k(\mathrm{Fo}). \quad (8.59)$$

Функции $\varphi_k(X)$ представляют собой полиномы, совпадающие с собственными функциями температурного поля при граничных условиях II рода [65]. Полученные асимптотические решения являются формальными, так как функции $\psi_k(\mathrm{Fo})$ нелинейно зависят от значения искомой функции на границе $\Theta(1, \mathrm{Fo})$. Для определения температуры поверхности из уравнений (8.57), (8.58) и (8.59) всегда можно получить интегродифференциальные уравнения. Например, уравнение (8.58) при $X=1$ представляет собой нелинейное интегральное уравнение типа Вольтерра второго рода и его решение представимо в виде

$$(\nu+1)(\mathrm{Fo} - \mathrm{Fo}^*) = \int_{\Theta^*}^{\Theta(1, \mathrm{Fo})} \left\{1 - \frac{1}{\nu+3} \frac{d}{d\Theta} [\mathrm{Bi}(\Theta)(\Theta_c - \Theta)]\right\} \times$$

$$\times \frac{d\Theta}{\mathrm{Bi}(\Theta)(\Theta_c - \Theta)}. \quad (8.60)$$

Здесь Θ^* — начальное значение искомой функции $\Theta(1, \mathrm{Fo})$ для данного интегрального уравнения, которое может быть определено из алгебраического уравнения

$$\Theta^* = \Theta_0 + \mathrm{Bi}(\Theta^*)(\Theta_c - \Theta^*)[1/(\nu+3)].$$

Вопрос о нахождении момента времени Fo^*, соответствующего значению температуры Θ^*, не может быть решен точно. Поэтому для нахождения времени Fo^* можно применять различные методы: метод интегрального теплового баланса (см. § 7.2), метод, основанный на принципе максимума для параболических уравнений. После того как определена температура поверхности тела $\Theta(1, \mathrm{Fo})$, распределение температур по толщине находится элементарно:

$$\Theta(X, \mathrm{Fo}) \cong \Theta(1, \mathrm{Fo}) + \mathrm{Bi}[\Theta(1, \mathrm{Fo})][\Theta_c - \Theta(1, \mathrm{Fo})](1/2)(X^2 - 1). \tag{8.61}$$

Решение для малых значений времени. Поведение функции для малых значений времени может быть определено с помощью упрощения ее выражения в области изображений при больших значениях параметра s.

Для асимптотического анализа решения (8.56) используем асимптотические разложения специальных функций, входящих в $F(X, s)$ [92]. Так, например, при $s \to \infty$

$$\mathrm{ch}\left(\sqrt{s}\,X\right)/\,\mathrm{sh}\sqrt{s} \simeq \exp\left[-\sqrt{s}\,(1-X)\right] + \\ +\exp\left[-\sqrt{s}\,(1+X)\right].$$

В результате в области изображений получим

$$\bar{\Theta}(X, s) - \frac{\Theta_0}{s} \simeq \begin{cases} \left[\bar{q}(s)\sqrt{s}\right]\left\{\exp\left[-\sqrt{s}\,(1-X)\right] + \right. \\ \left. +\exp\left[-\sqrt{s}\,(1+X)\right]\right\}, \quad \nu=0; \\ \left[\bar{q}(s)/\sqrt{s}\right]\left[1/\sqrt{X} + (1+3X)/\left(8\sqrt{s}\,\times\right.\right. \\ \left.\left.\times X\sqrt{X}\right)\right]\exp\left[-\sqrt{s}\,(1-X)\right], \quad \nu=1; \\ \left[\bar{q}(s)/\sqrt{s}\,X\right]\exp\left[-\sqrt{s}\,(1-X)\right], \\ \nu=2. \end{cases} \tag{8.62}$$

Осуществив переход в область оригиналов в (8.62), с использованием теоремы умножения изображений получим:
при $\nu=0$

$$\Theta(X, \mathrm{Fo}) - \Theta_0 \simeq \int_0^{\mathrm{Fo}} \frac{q(t)}{\sqrt{\pi(\mathrm{Fo}-t)}}\left\{\exp\left[-\frac{(1-X)^2}{4(\mathrm{Fo}-t)}\right] + \right. \\ \left. +\exp\left[-\frac{(1+X)^2}{4(\mathrm{Fo}-t)}\right]\right\}dt; \tag{8.63}$$

при $\nu=1$

$$\Theta(X,\ \mathrm{Fo})-\Theta_0\simeq\int\limits_0^{\mathrm{Fo}}\frac{q(t)}{\sqrt{X}}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi(\mathrm{Fo}-t)}}\exp\left[-\frac{(1-X)^2}{4(\mathrm{Fo}-t)}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{1+3X}{8\sqrt{X}}\operatorname{erfc}\frac{1-X}{2\sqrt{\mathrm{Fo}-t}}\right\}dt; \tag{8.64}$$

при $\nu=2$

$$\Theta(X,\ \mathrm{Fo})-\Theta_0\simeq\int\limits_0^{\mathrm{Fo}}\frac{q(t)}{X}\,\frac{1}{\sqrt{\pi(\mathrm{Fo}-t)}}\exp\left[-\frac{(1-X)^2}{4(\mathrm{Fo}-t)}\right]dt. \tag{8.65}$$

Отметим, что представление (8.62) в случае $\nu=1,2$ несправедливо вблизи центра симметрии, так как в этом случае $\sqrt{s}\,X\to 0$. Для этой области вблизи центра симметрии можно воспользоваться другим представлением специальных функций [92].

Полученные функциональные решения (8.63)—(8.65) представляют собой при $X=1$ нелинейные интегральные уравнения типа Вольтерра второго рода. Приближенное решение этих уравнений можно получить, аппроксимируя функцию теплового потока рядом Тейлора

$$q(t)\simeq q(\mathrm{Fo})+(t-\mathrm{Fo})\,q'(\mathrm{Fo})+\ \dots\ +\frac{(t-\mathrm{Fo})^n}{n!}\,q^{(n)}(\mathrm{Fo}). \tag{8.66}$$

Тогда, подставляя (8.66) в формулы (8.63)—(8.65) и ограничиваясь двумя членами ряда в разложении, получим:

при $\nu=0$

$$\Theta(1,\ \mathrm{Fo})-\Theta_0\simeq q\,[\Theta(1,\ \mathrm{Fo})]\,2\sqrt{\mathrm{Fo}}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}+2i\operatorname{erfc}\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Fo}}}\right)-$$

$$-\frac{8}{3}q'\,[\Theta(1,\ \mathrm{Fo})]\left[\frac{\mathrm{Fo}\sqrt{\mathrm{Fo}}}{4\sqrt{\pi}}+\frac{\exp\left(-\frac{1}{\mathrm{Fo}}\right)}{2\sqrt{\pi}}\,\mathrm{Fo}\sqrt{\mathrm{Fo}}\right]; \tag{8.67}$$

при $\nu=1$

$$\Theta(1,\ \mathrm{Fo})-\Theta_0\simeq q\,[\Theta(1,\ \mathrm{Fo})]\left(2\frac{\sqrt{\mathrm{Fo}}}{\sqrt{\pi}}+\frac{\mathrm{Fo}}{2}+\frac{\mathrm{Fo}^{3/2}}{2\sqrt{\pi}}\right)-$$

$$-q'\,[\Theta(1,\ \mathrm{Fo})]\left(\frac{2\mathrm{Fo}^{3/2}}{3\sqrt{\pi}}+\frac{\mathrm{Fo}^2}{4}+\frac{6\mathrm{Fo}^2\sqrt{\mathrm{Fo}}}{10\sqrt{\pi}}\right); \tag{8.68}$$

при $\nu=2$

$$\Theta(1,\ \mathrm{Fo})-\Theta_0\simeq q\,[\Theta(1,\ \mathrm{Fo})]\left(\frac{2\sqrt{\mathrm{Fo}}}{\sqrt{\pi}}+\ \dots\right)+$$

$$+q'\,[\Theta(1,\ \mathrm{Fo})]\left(\frac{2\sqrt{\mathrm{Fo}}^{\,3/2}}{3\sqrt{\pi}}+\ \dots\right). \tag{8.69}$$

Из полученных решений видно, что каждый последующий член имеет более высокий порядок малости.

Если ограничиться в (8.67)—(8.69) первым членом, то получим алгебраическое уравнение для нахождения температуры поверхности $\Theta(1, \mathrm{Fo})$:

$$\frac{\Theta(1, \mathrm{Fo})-\Theta_0}{q[\Theta(1, \mathrm{Fo})]} \simeq \begin{cases} 2\sqrt{\mathrm{Fo}}\left(1/\sqrt{\pi}+2\,\mathrm{ierfc}\,1/\sqrt{\mathrm{Fo}}\right), & \nu=0; \\ 2\sqrt{\mathrm{Fo}}\left[1/\sqrt{\pi}+\sqrt{\mathrm{Fo}}/4+\mathrm{Fo}/\left(4\sqrt{\pi}\right)\right], \\ \nu=1; \\ 2\sqrt{\mathrm{Fo}}\left(1/\sqrt{\pi}+\sqrt{\mathrm{Fo}}/3+\ \ldots\right), & \nu=2. \end{cases}$$

В табл. 8.3 [92] приведены результаты расчета безразмерной температуры Θ на поверхности и в центре пластины, проведенного по формулам (8.60) и (8.61), в сравнении с точными значениями, полученными в [65] при $\mathrm{Bi}=4$.

Таблица 8.3

Сравнение результатов расчета температуры для больших значений Fo

Fo	Θ (1, Fo) точное решение	Θ (1, Fo) расчет по (8.60)	Θ (0, Fo) точное решение	Θ (0, Fo) расчет по (8.61)
0,3	0,7697	0,7437	0,2306	0,2310
0,4	0,8041	0,7842	0,3513	0,3525
0,5	0,8334	0,8181	0,4476	0,4543
1	0,9251	0,9228	0,7517	0,7684
2	0,9962	0,9851	0,9445	0,9583
3	0,9999	0,9992	0,9996	0,9998

Анализ показывает удовлетворительную точность метода во втором приближении.

На основе данных расчета по аналитическим зависимостям для малых и больших значений чисел Фурье Fo и с использованием разностных методов в переходной области В. В. Саломатовым и его сотрудниками [92] построены номограммы для расчета температурного поля тела простой формы при условиях высокотемпературного теплообмена на поверхностях тел.

Общая погрешность расчета по номограммам не превышает 2—3 % в сторону занижения результата расчета.

При построении номограмм использовалось свойство практически линейной зависимости температурного поля в режимах нагрева от начального распределения Θ_0, при прочих равных значениях определяющих чисел подобия и $\Theta_0 \leqslant 0{,}6$.

Аналитически это свойство можно записать так:

$$\Theta(X, \mathrm{Fo}) \simeq \Theta^{\mathrm{I}}(X, \mathrm{Fo}) - \left(\Theta_0-\Theta_0^{\mathrm{I}}\right)\left[\Theta^{\mathrm{II}}(X, \mathrm{Fo})-\Theta^{\mathrm{I}}(X, \mathrm{Fo})\right]/\left(\Theta_0^{\mathrm{II}}-\Theta_0^{\mathrm{I}}\right). \tag{8.70}$$

Используя соотношение (8.70), по известным распределениям температуры для значений начальной температуры Θ_0^{I} и Θ_0^{II} можно определять температурное поле для произвольного значения $(\Theta_0^{I}<\Theta_0<\Theta_0^{II})$. На рис. 8.5—8.10 построены номограммы для неограниченной пластины и неограниченного цилиндра в условиях лучистого нагрева:

$$\partial\Theta(1, \mathrm{Fo})/\partial X = \mathrm{Bi}_p[1-\Theta^4(1, \mathrm{Fo})].$$

Для условий аэродинамического нагрева $\dfrac{\partial\Theta(1, \mathrm{Fo})}{\partial X} = \mathrm{Bi}[1-\Theta(1, \mathrm{Fo})] - \mathrm{Bi}_p\Theta^4(1, \mathrm{Fo})$ на рис. 8.11—8.14 приведены номограммы для расчета относительной температуры неограниченной пластины и неограниченного цилиндра.

При совместном действии теплового излучения и конвекции $\partial\Theta(1, \mathrm{Fo})/\partial X = \mathrm{Bi}[1-\Theta(1, \mathrm{Fo})] + \mathrm{Bi}_p[1-\Theta^4(1, \mathrm{Fo})]$ расчет относительных температур пластины и цилиндра можно провести по номограммам, показанным на рис. 8.15—8.18. В условиях нагрева пластины и цилиндра от источника теплового излучения, изменяющего свою температуру по линейному закону $\partial\Theta(1, \mathrm{Fo})/\partial X = \mathrm{Bi}_p[(1 + \mathrm{Pd}\,\mathrm{Fo})^4 - \Theta^4(1, \mathrm{Fo})]$, следует использовать номограммы на рис. 8.19—8.22.

Радиационный нагрев квадратного бруса можно рассчитывать по номограммам, приведенным на рис. 8.23 и 8.24.

Для процессов охлаждения тел необходимо применять другой алгоритм расчета. На рис. 8.25—8.27 приведены номограммы расчета относительной температуры пластины и цилиндра в условиях лучистого охлаждения

$$\partial\Theta(1, \mathrm{Fo})/\partial X = \mathrm{Bi}_p[\Theta^4(1, \mathrm{Fo}) - 1].$$

С помощью номограмм просто решаются две основные задачи, встречающиеся на практике.

Определение температуры тела по известной начальной температуре и времени прогрева рассмотрим на следующем примере [92]. Плоский образец из углеродистой стали толщиной $\delta=0{,}35$ м нагревается на сплошном поду в печи с постоянной температурой газов $T_c=1273$ К. Необходимо определить температуру внешней поверхности, центральной плоскости, а также среднюю по массе образца через 2 ч после начала прогрева, если начальная температура металла $T=293$ К. Теплофизические свойства стали заданы: $c_p = 0{,}65$ кДж/(кг·К); $\rho=7800$ кг/м^3; $a=0{,}024\cdot 6{,}6\cdot 10^{-6}$ м^2/с; $\lambda=35$ Вт/(м·К) (среднее значение в интервале 293—1273 К).

Значение видимого коэффициента излучения $\sigma_в=3{,}5$ Вт/(м·К^4).

Вычислим значения чисел подобия: $\mathrm{Bi}_p=\sigma_в\delta T_c^3/\lambda=0{,}722$; $\Theta_0 = T_0/T_c=0{,}230$; $\mathrm{Fo}=a\tau/\delta^2=0{,}392$ и с помощью номограммы на рис. 8.5—8.7 определим температуру поверхности: $\Theta_S=0{,}668$, $T_S=850$ К; плоскости симметрии: $\Theta_ц=0{,}386$, $T_ц=491$ К; среднюю по массе: $\bar\Theta=0{,}477$, $\bar T=607$ К соответственно.

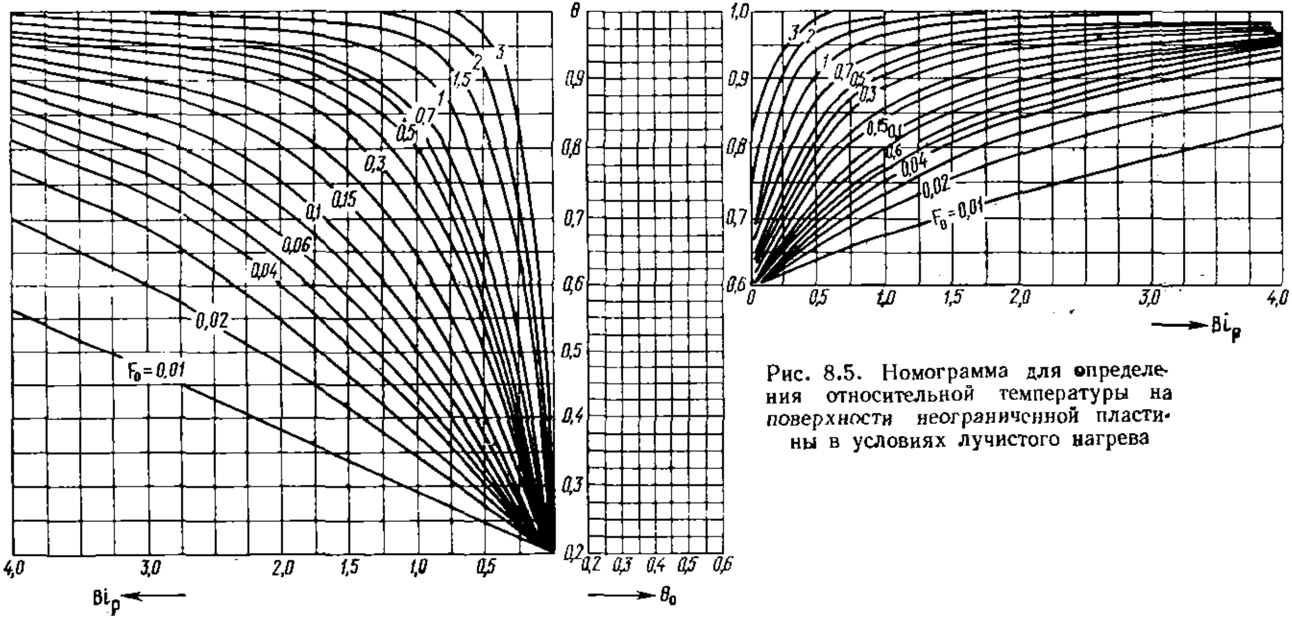


Рис. 8.5. Номограмма для определения относительной температуры на поверхности неограниченной пластины в условиях лучистого нагрева

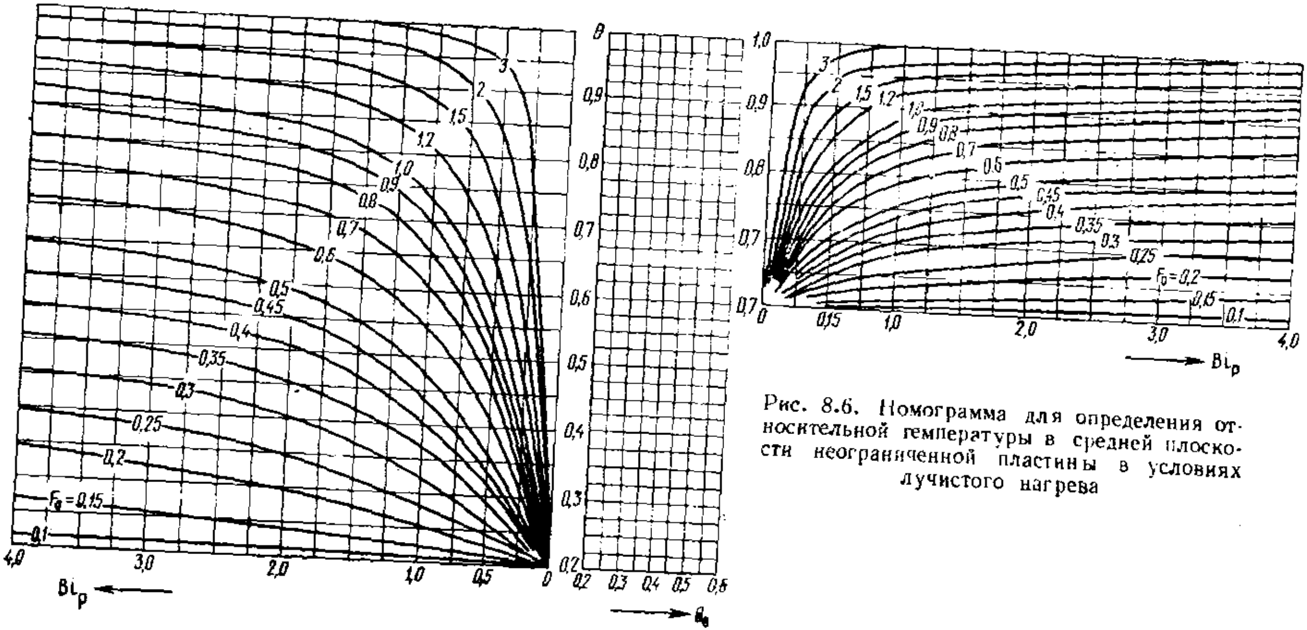


Рис. 8.6. Номограмма для определения относительной температуры в средней плоскости неограниченной пластины в условиях лучистого нагрева

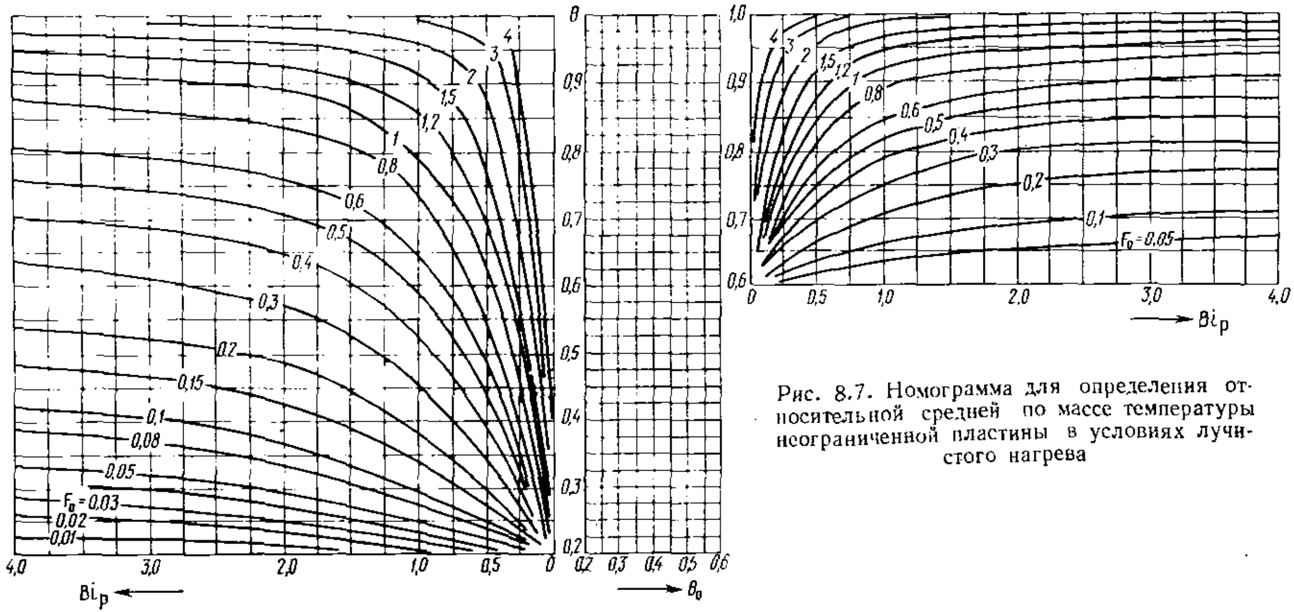


Рис. 8.7. Номограмма для определения относительной средней по массе температуры неограниченной пластины в условиях лучистого нагрева

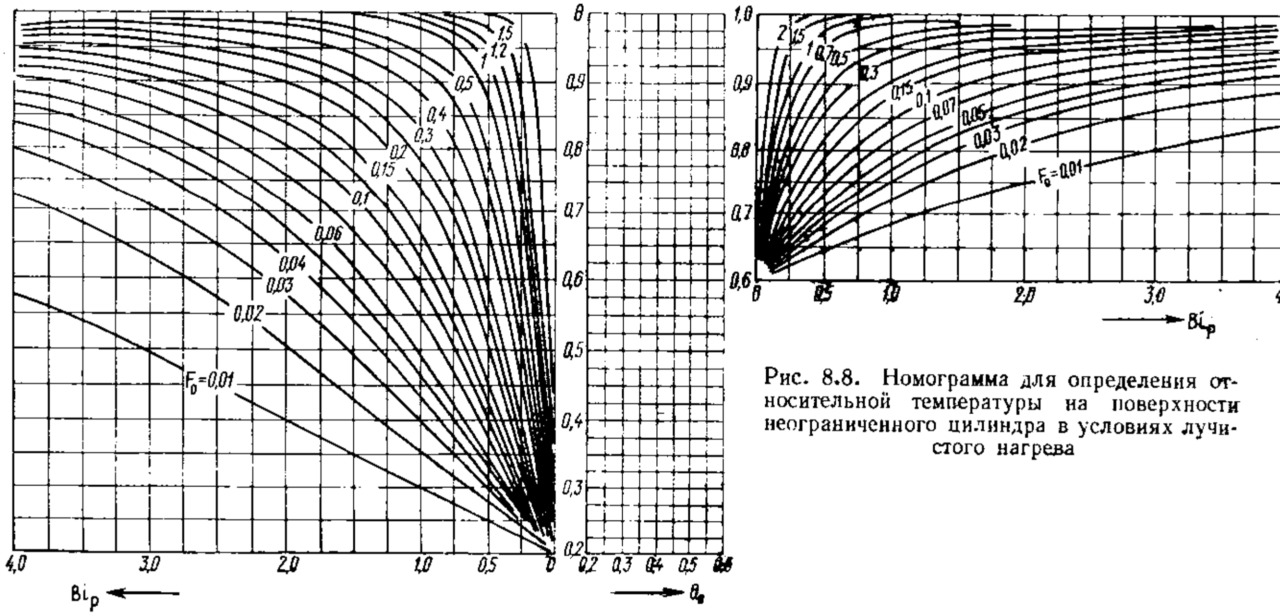


Рис. 8.8. Номограмма для определения относительной температуры на поверхности неограниченного цилиндра в условиях лучистого нагрева

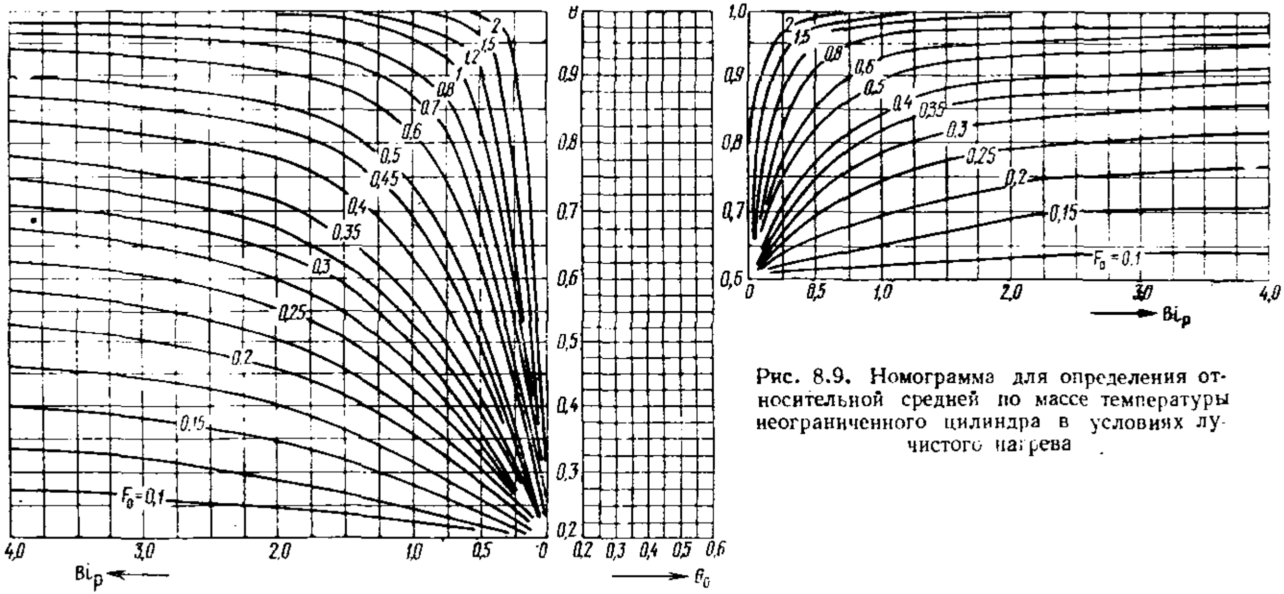


Рис. 8.9. Номограмма для определения относительной средней по массе температуры неограниченного цилиндра в условиях лучистого нагрева

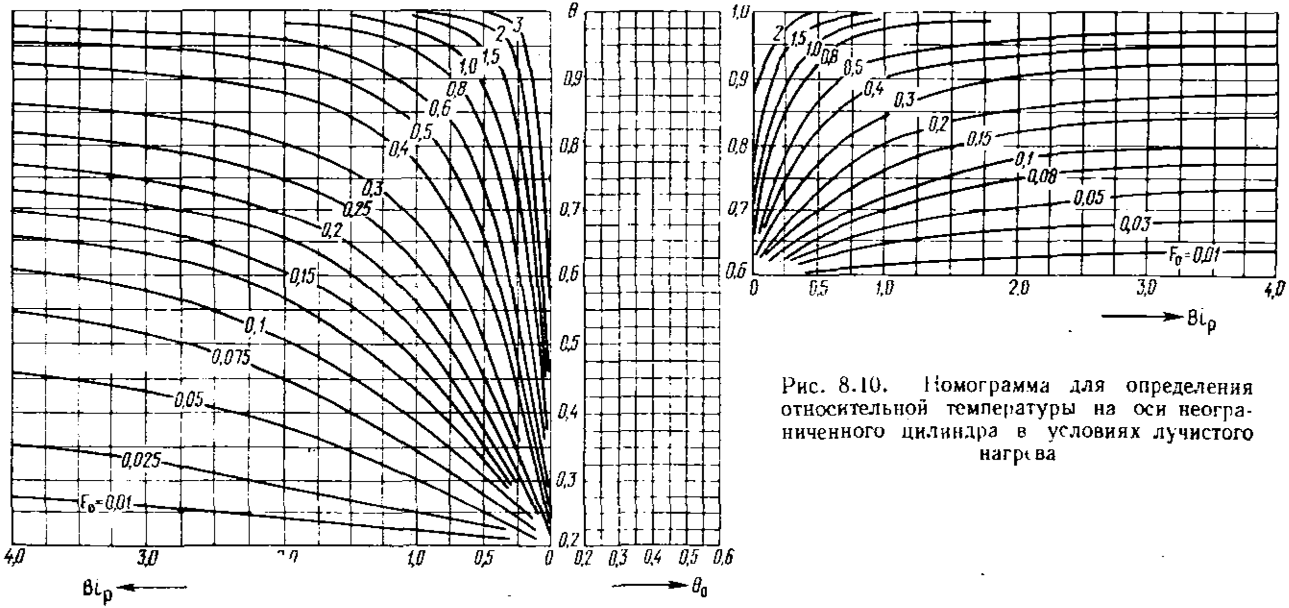


Рис. 8.10. Номограмма для определения относительной температуры на оси неограниченного цилиндра в условиях лучистого нагрева

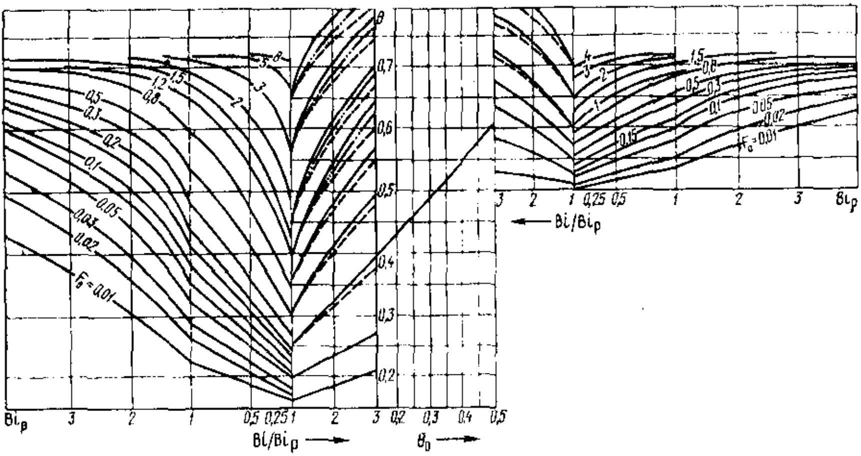


Рис. 8.11. Номограмма для расчета относительной температуры на поверхности плоского элемента в условиях аэродинамического нагрева:

——— — $Bi_p=0{,}25$; — — — — $Bi_p=4{,}0$; —··— — $Bi_p=0{,}5$; —·— — $Bi_p=2{,}0$

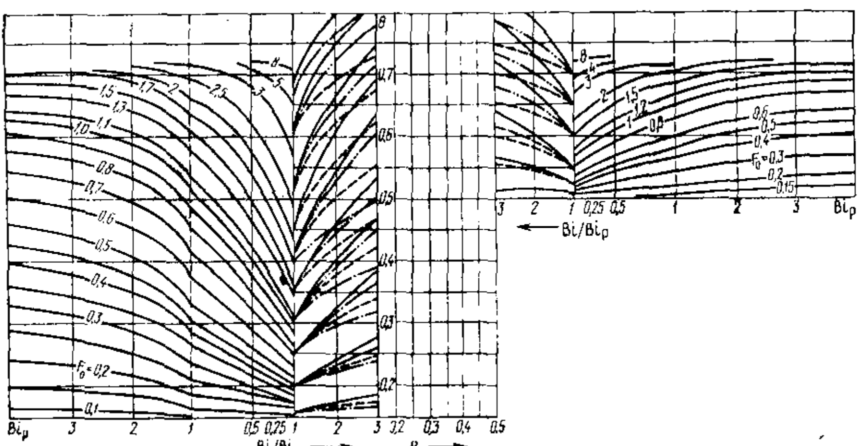


Рис. 8.12. Номограмма для расчета относительной температуры в адиабатном сечении плоского элемента в условиях аэродинамического нагрева (обозначения см. на п/п рис. 8.11)

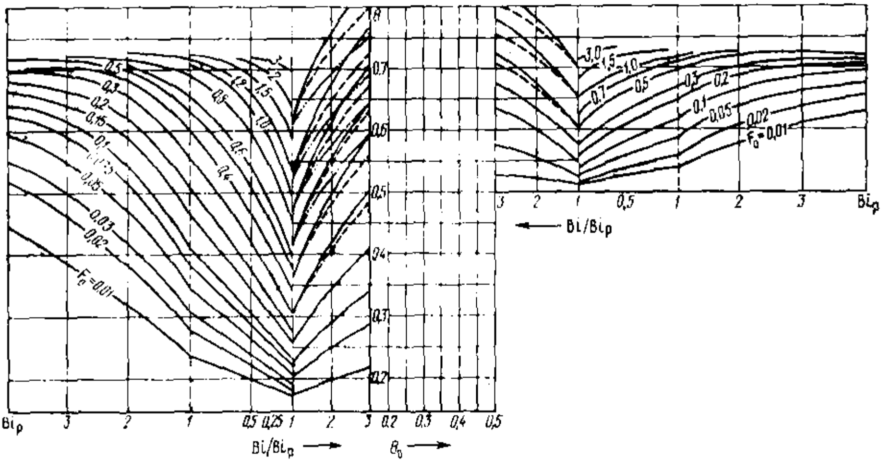


Рис. 8.13. Номограмма для расчета относительной температуры на поверхности цилиндрического элемента в условиях аэродинамического нагрева (обозначения см. на п/п рис. 8.11)

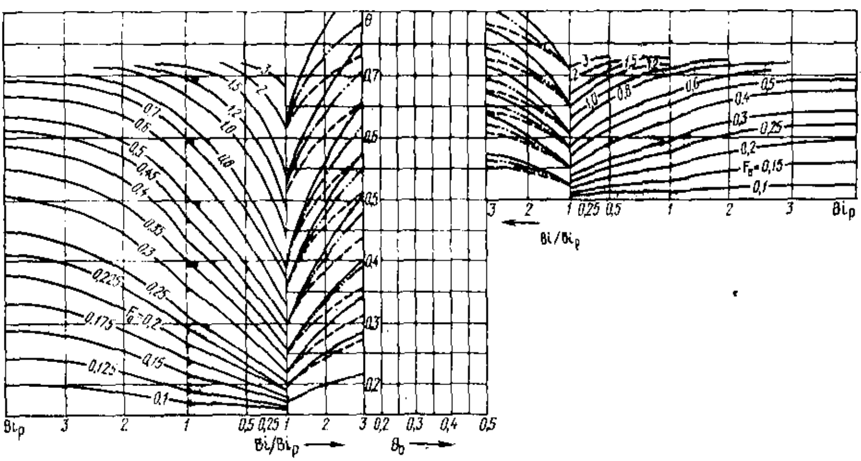


Рис. 8.14. Номограмма для расчета относительной температуры в адиабатном сечении цилиндрического элемента в условиях аэродинамического нагрева (обозначения см. на п/п рис. 8.11)

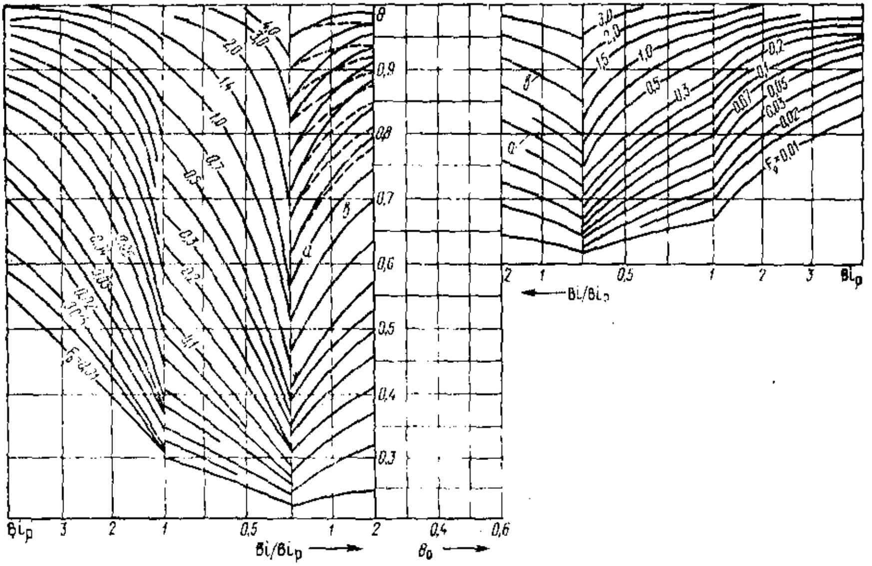


Рис. 8.15. Номограмма для расчета относительной температуры на поверхности неограниченной пластины в условиях лучисто-конвективного нагрева:

а — $Bi_p = 0.25$; *б* — $Bi_p = 1.0$; *в* — $Bi_p = 4.0$

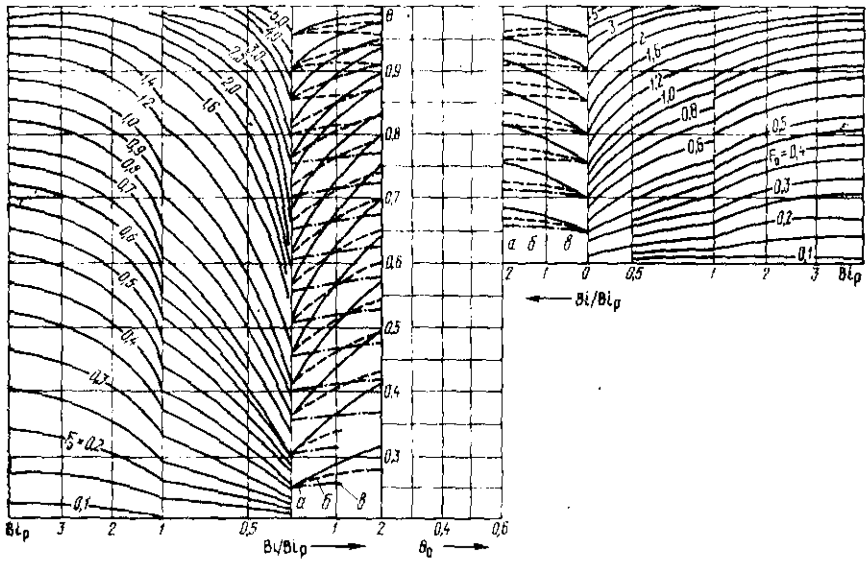


Рис. 8.16. Номограмма для расчета относительной температуры в центре неограниченной пластины в условиях лучисто конвективного нагрева (значения Bi см. на п/п рис. 8.15)

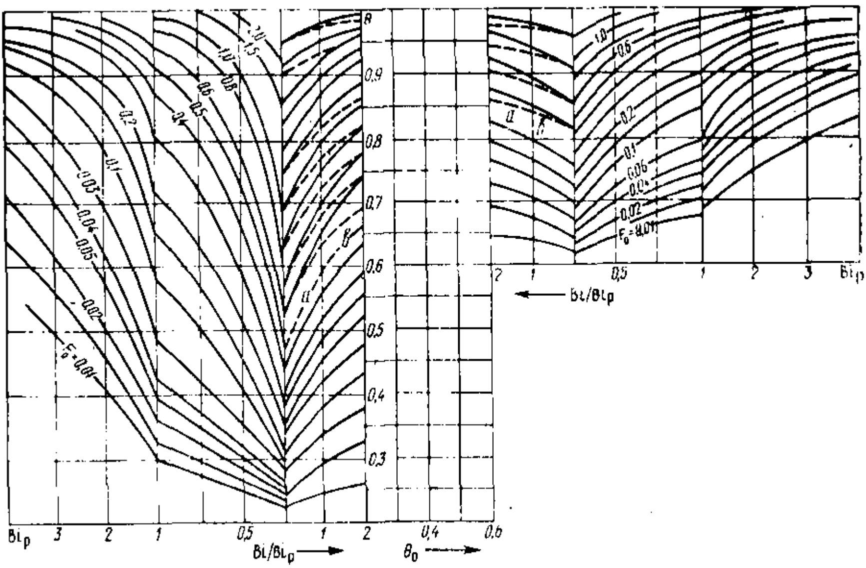


Рис. 8.17. Номограмма для расчета относительной температуры на поверхности бесконечного цилиндра в условиях лучисто-конвективного нагрева (значения Bi см. на п/п рис. 8.15)

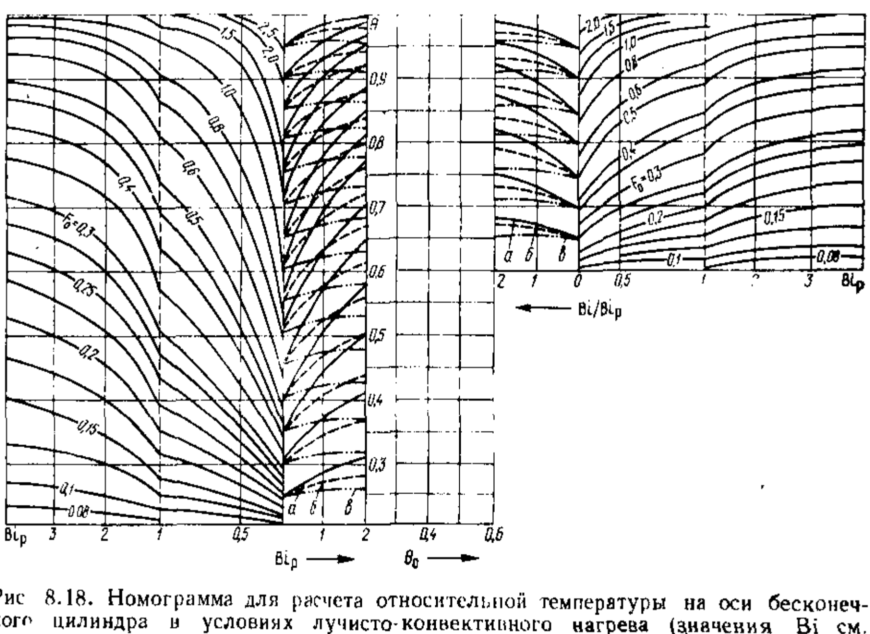


Рис 8.18. Номограмма для расчета относительной температуры на оси бесконечного цилиндра в условиях лучисто-конвективного нагрева (значения Bi см. на п/п рис. 8.15)

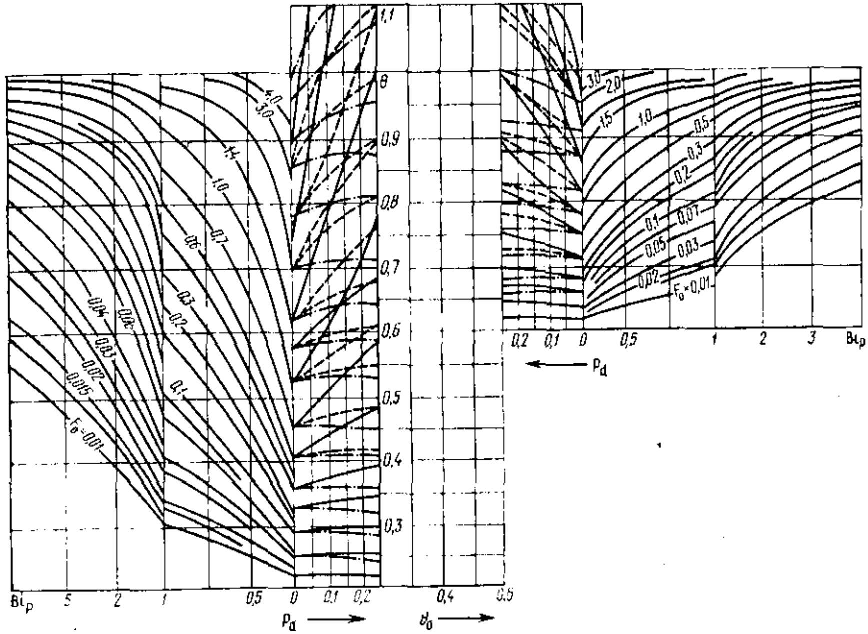


Рис. 8.19. Номограмма для расчета относительной температуры на поверхности неограниченной пластины, нагреваемой от лучистого источника теплоты, изменяющего свою температуру по линейному закону (обозначения см. на п/п рис. 8.11)

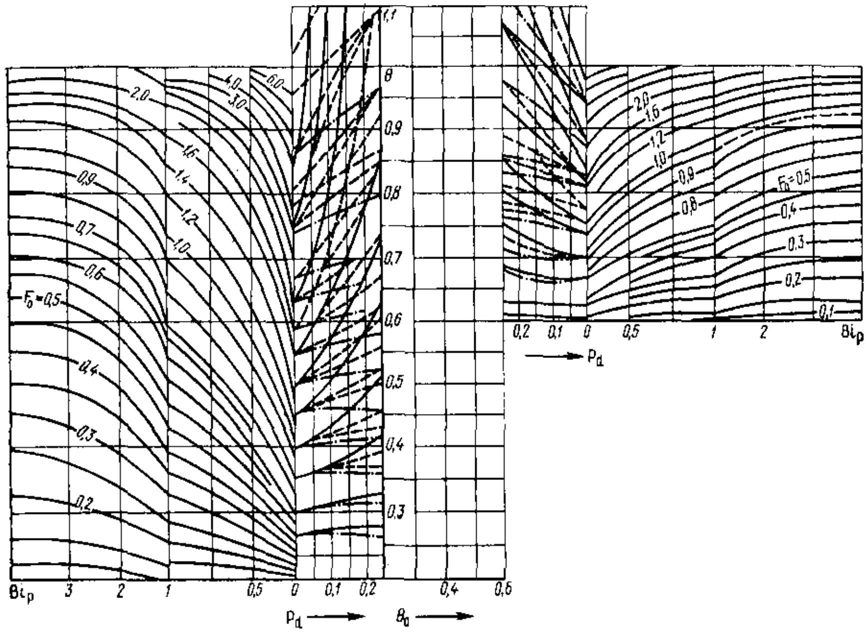


Рис. 8.20. Номограмма для расчета относительной температуры в центре неограниченной пластины, нагреваемой от лучистого источника теплоты, изменяющего свою температуру по линейному закону (обозначения см. на п/п рис. 8.11)

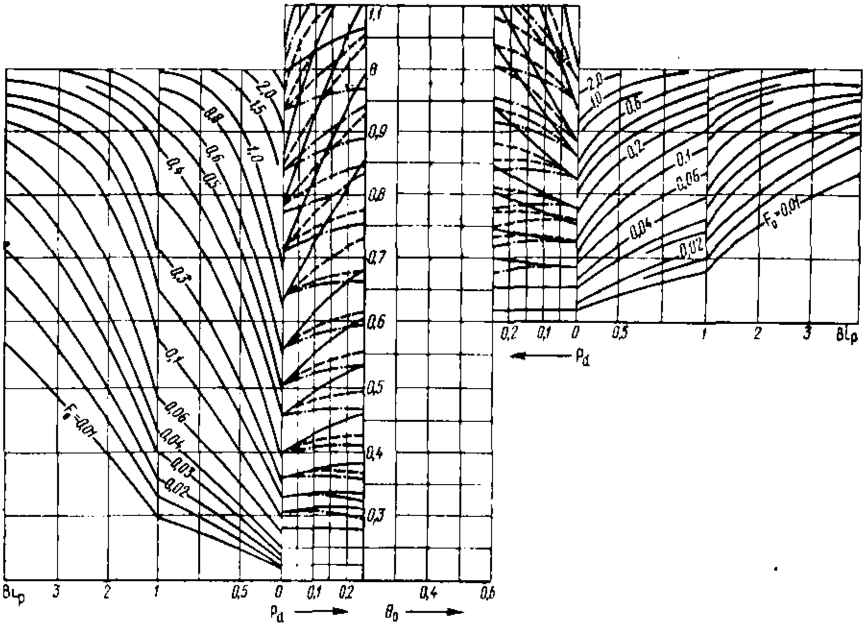


Рис. 8.21. Номограмма для расчета относительной температуры на поверхности бесконечного цилиндра, нагреваемого от лучистого источника теплоты, изменяющего свою температуру по линейному закону (обозначения см. на п/п рис. 8.11)

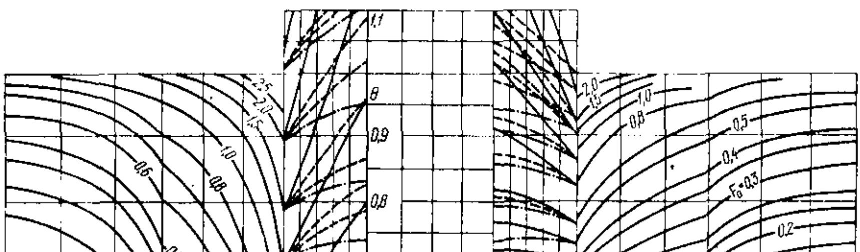


Рис. 8.22. Номограмма для расчета относительной температуры на оси бесконечного цилиндра, нагреваемого от лучистого источника теплоты, изменяющего свою температуру по линейному закону (обозначения см. на п/п рис. 8.11)

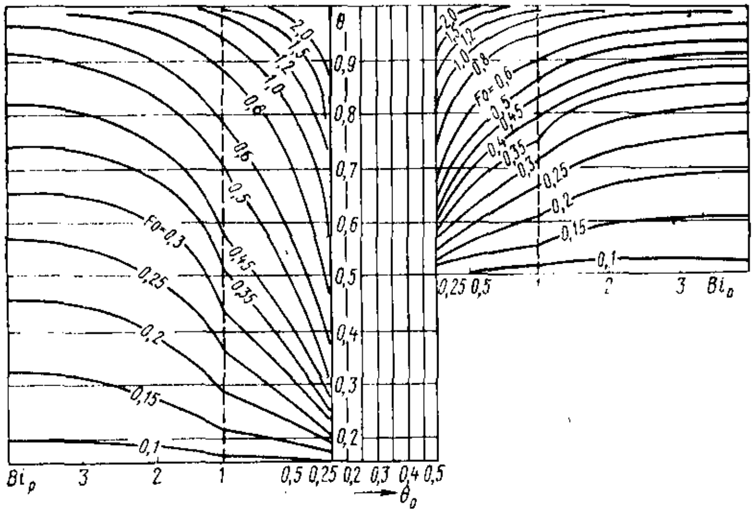


Рис. 8.23. Номограмма для расчета относительной температуры центра бруса квадратного сечения в условиях лучистого нагрева

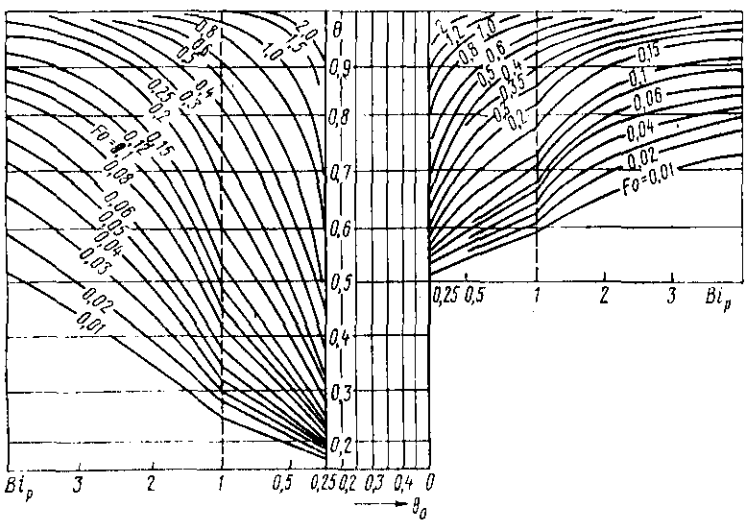


Рис. 8.24. Номограмма для расчета относительной температуры середины грани квадратного бруса в условиях лучистого нагрева

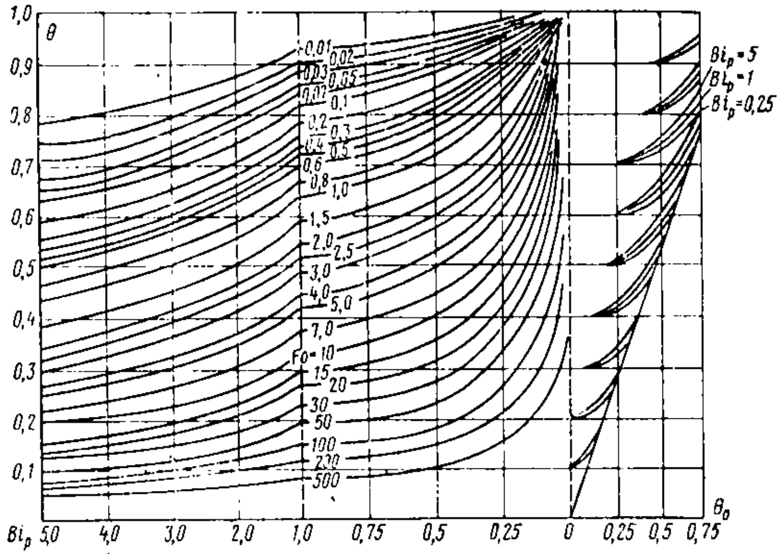


Рис. 8.25. Номограмма для расчета относительной температуры на поверхности неограниченной пластины в условиях радиационного охлаждения

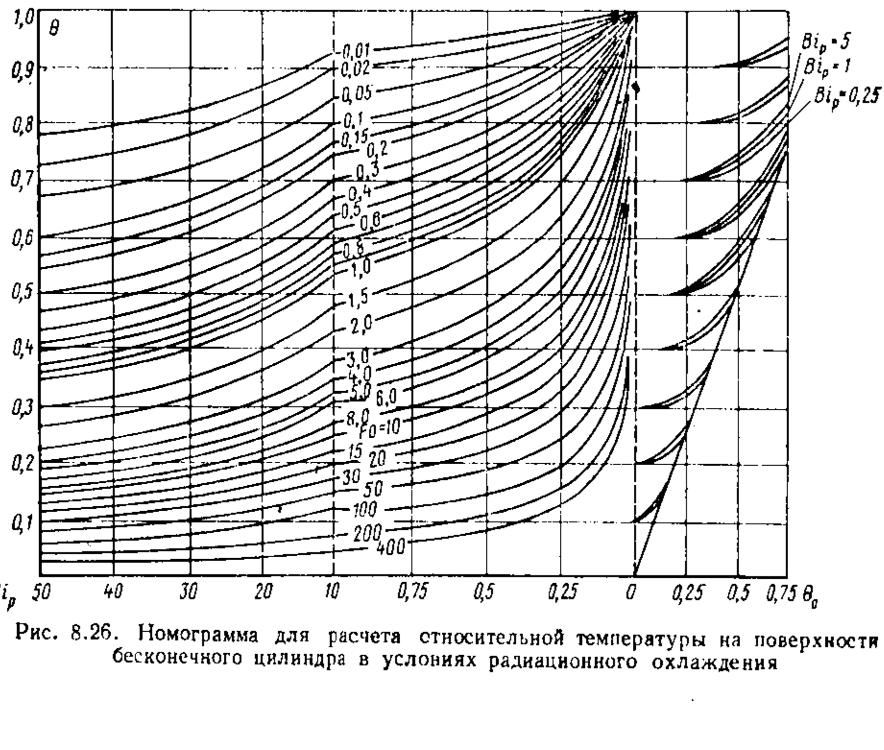


Рис. 8.26. Номограмма для расчета относительной температуры на поверхности бесконечного цилиндра в услониях радиационного охлаждения

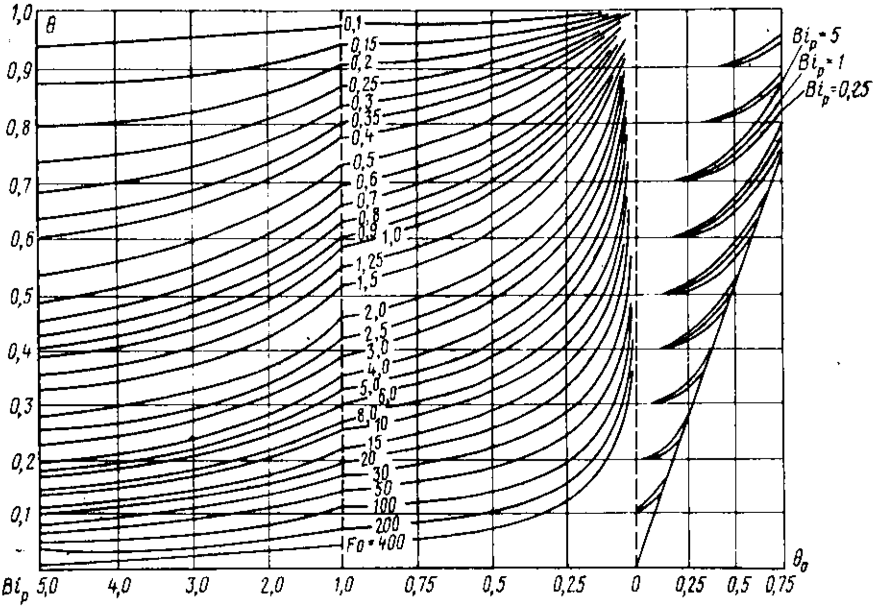


Рис. 8.27. Номограмма для расчета относительной температуры на оси бесконечного цилиндра в условиях радиационного охлаждения

Сформулируем вторую часто встречающуюся задачу.

Определить время прогрева стального слитка цилиндрической формы от $T_0=273$ К до средней по массе температуры $\overline{T}=1373$ К в печи с постоянной температурой $T_c=1573$ К [92]. Диаметр нагреваемого образца $2R=750$ мм, теплопроводность (средняя в интервале от 273 до 1373 К) $\lambda=45,36$ Вт/(м·К). Другие данные, необходимые для расчета: $c_p=0,712$ кДж/(кг·К); $\rho=7500$ кг/м^3; $a=0,0305$ м^2/ч; $\sigma_в=4,65$ Вт/(м^2·К^4).

Значения чисел подобия: $\Theta_0=0,173$; $\mathrm{Bi}_p=1,5$; $\overline{\Theta}=0,87$.

По значению Θ_0 на среднем графике номограммы (см. рис. 8.9) находим точку, соответствующую значению $\overline{\Theta}$. Затем через эту точку проводим прямую под произвольным наклоном к оси абсцисс до пересечения с прямыми $\Theta_0=0,2$ и $\Theta_0=0,6$. По значениям $\overline{\Theta}$, полученным в точках пересечения, и заданному значению числа Bi_p определяем число Fo из левого и правого графиков номограммы. Сравнивая найденные значения числа Фурье, изменяем наклон прямой на среднем графике так, чтобы значения чисел Фурье слева и справа совпадали. Это значение и будет искомым числом Фурье. В рассматриваемом примере значение $\mathrm{Fo}=0,44$, а соответствующее время нагрева $\tau\approx2$ ч. Кроме рассмотренных выше двух задач с помощью номограмм можно решить и другие задачи, например нахождение скорости изменения температуры, скалярной величины градиента температурного поля и др.

Отметим,что при построении номограмм для расчетов процессов нагрева при линейном изменении во времени температуры высокоинтенсивного источника теплоты (рис. 8.19—8.22), наряду с данными численных расчетов, использовались также следующие закономерности [92]. В процессе нагрева условно выделили две стадии: а) инерционного теплового режима, когда температурное поле внутри тела слабо зависит от потока собственного излучения и существенно определяется первоначальным распределением температуры; б) теплового режима, когда собственное излучение теплоты играет решающую роль в формировании температурного поля.

ГЛАВА IX

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ПРИ НАЛИЧИИ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ

Теоретическое изучение процессов теплопроводности при наличии в изучаемых системах фазовых переходов (процессы плавления и затвердевания материалов, процессы горения и т. д.) в значительной мере усложняется тем, что математические модели этих процессов представляют собой *нелинейные краевые задачи теории теплопроводности*.

Для исследования математических моделей этих процессов широко применяются приближенные аналитические методы, позволяющие решать одномерные задачи, а в последнее время, в связи с быстрым развитием вычислительной техники, все более широкое применение находят численные методы решения таких задач. Точные решения задач теплопроводности при наличии фазовых превращений из-за их нелинейности получить, как правило, не удается.

При решении краевых задач теории теплопроводности с нелинейностью, обусловленной фазовыми переходами, наиболее широко применяются следующие приближенные аналитические и численные методы: методы взвешенных вычетов [30], интегральный метод [30, 50, 67, 77], вариационные методы [14, 50, 93], метод малого параметра [50], метод итераций [50, 71], методы сведения к интегральным и дифференциальным уравнениям [87], метод сеток [50, 79, 88], метод прямых [50, 88].

Рассмотрим примеры *применения некоторых из вышеперечисленных* приближенных аналитических методов к нелинейным краевым задачам теплопроводности (процессы теплопроводности при наличии фазовых переходов).

§ 9.1. Метод сведения краевых задач *к интегральным уравнениям типа Вольтерра*

Основные положения метода сведения краевых задач нестационарной теплопроводности к интегральным уравнениям типа Вольтерра (метод тепловых потенциалов) были изложены нами ранее в § 3.3. Теперь рассмотрим вопрос о применении данного метода к решению задач нестационарной теплопроводности при наличии фазовых переходов. В качестве примера рассмотрим одномерную задачу Стефана о процессе распределения теплоты в среде, сопровождающемся выделением скрытой теплоты фазового превращения [87] (*считается, что конвективный теплообмен отсутствует*).

В математической формулировке задача об отыскании полей температур твердой $[T_1(x, \tau)]$ и жидкой $[T_2(x, \tau)]$ фаз, а также границы раздела фаз $[x=y(\tau)]$ сводится к интегрированию следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial T_1}{\partial \tau}=a_1\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}, \quad 0<x<y(\tau); \tag{9.1}$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial \tau}=a_2\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}, \quad y(\tau)<x<l; \tag{9.2}$$

$$\left.\begin{aligned} &T_1(0,\ \tau)=f_1(\tau)\leqslant 0, \quad \tau>0;\\ &T_1(y(\tau),\ \tau)=T_2(y(\tau),\ \tau)=0, \quad \tau\geqslant 0;\\ &T_2(l,\ \tau)=f_2(\tau)\geqslant 0, \quad \tau>0;\end{aligned}\right\} \tag{9.3}$$

$$\left.\begin{aligned} &T_1(x,\ 0)=\varphi_1(x), \quad \varphi_1(y,\ 0)=0;\\ &T_2(x,\ 0)=\varphi_2(x), \quad \varphi_2(y,\ 0)=0;\end{aligned}\right\} \tag{9.4}$$

где a_1 и a_2 — температуропроводности сред.

Положение границы раздела твердой и жидкой фаз при затвердевании последней определяется из условия Стефана

$$\rho_1 Q\dot{y}(\tau)=\lambda_1\left.\frac{\partial T_1}{\partial x}\right|_{x=y(\tau)-0}=-\lambda_2\left.\frac{\partial T_2}{\partial x}\right|_{x=y(\tau)+0}, \tag{9.5}$$

где Q — теплота фазового превращения; ρ_1 — плотность твердой фазы.

Так как рассматривается задача при граничных условиях I рода, то ее решение [в силу условий (9.3), (9.4)] ищем в виде

$$T_i(x,\ \tau)=(-1)^{i+1}\left[a_i\int\limits_0^\tau f_i(t)\frac{\partial}{\partial\xi}g_i(x,\ y_i,\ \tau,\ t)\,\mathrm{d}t+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{y_i}^{y(0)}\varphi_i(\xi)g_i(x,\ \xi,\ \tau,\ 0)\,\mathrm{d}\xi+a_i\int\limits_0^\tau v_i(t)g_i(x,\ y(t),\ \tau,\ t)\,\mathrm{d}t\right], \tag{9.6}$$

где $y_1=0$, $y_2=l$; $v_i=\partial T_i/\partial x|_{x=y(\tau)+(-1)^{i+1}\cdot 0}$; $i=1,\ 2$; $g_i(x,\ \xi,\ \tau,\ t)$ — функции Грина первой краевой задачи для уравнений теплопроводности;

$$\partial T_i/\partial\tau=a_i\,\partial^2 T_i/\partial x^2 \quad (i=1,\ 2) \tag{9.7}$$

соответственно (для полупрямой $x\geqslant 0$ в случае $i=1$ и для полупрямой $x\leqslant l$ в случае $i=2$).

Положим $q_i(x,\ \tau)=\partial T(x,\ \tau)/\partial x$, $\tau>0$, причем $i=1$ в случае $0<x<y(\tau)$ и $i=2$ в случае $y(\tau)<x<l$. Рассматривая процесс при $\tau>0$ и считая, что для твердой и жидкой фаз координата x изменяется в пределах $0<x<y(\tau)$ и $y(\tau)<x<l$ соответственно, при определении q можно производить операцию дифференцирования под знаками интегралов в (9.6). По аналогии с вышеизложенным введем в рассмотрение функции $G_i(x,\ \xi,\ \tau,\ t)$, равные функциям Грина для второй краевой задачи уравнений теплопроводности (9.7). Очевидно,

что функции g_i и G_i $(i=1,2)$ взаимно сопряжены [87]. Пользуясь сопряженностью функций Грина и выполняя интегрирование по частям, для $q_i(x, \tau)$ получим следующие выражения:

$$q_i(x, \tau)=(-1)^{i+1}\Bigg\{[\varphi_i(y_i)-f_i(0)]G_i(x, 0, \tau, 0)-$$

$$-\int_0^{\tau}\dot{f}_i(t)G_i(x, y_i, \tau, t)\,dt+\int_{y_i}^{y(0)}\dot{\varphi}_i(\xi)G_i(x, \xi, \tau, 0)\,d\xi+$$

$$+a_i\int_0^{\tau}\dot{v}_i(t)\frac{\partial}{\partial x}g_i(x, y(t), \tau, t)\,dt\Bigg\}, \tag{9.8}$$

где $i=1,2$; точки над знаком функции от одной переменной означают полную производную по этой переменной.

Перейдем теперь в равенствах (9.8) к пределам при $x\to y(\tau)+(-1)^{i+1}\cdot 0$ $(i=1,2)$. Наряду с этим будем пользоваться свойствами теплового потенциала двойного слоя, а именно тем его свойством, что при подходе к точкам границы рассматриваемой области тепловой потенциал двойного слоя терпит разрыв. Это свойство теплового потенциала двойного слоя рассмотрено нами ранее в § 3.3, там же дано его аналитическое выражение.

Из уравнения (9.8) получим

$$v_i(\tau)=\lim_{x\to y(\tau)+(-1)^{i+1}\cdot 0}q_i(x, \tau)=(-1)^{i+1}\Bigg\{[\varphi_i(y_i)-f_i(0)]\times$$

$$\times G_i(y(\tau), 0, \tau, 0)-\int_0^{\tau}\dot{f}_i(t)G_i(y(\tau), y_i, \tau, t)\,dt+\int_{y_i}^{y(0)}\dot{\varphi}_i(\xi)\times$$

$$\times G_i(y(\tau), \xi, \tau, 0)\,d\xi+a_i\int_0^{\tau}\dot{v}_i(t)\frac{\partial}{\partial x}g_i(y(\tau), y(t), \tau, t)\,dt\Bigg\}+\frac{v_i(\tau)}{2}.$$

Из последнего равенства следует, что

$$v_1(\tau)=2\Bigg\{[\varphi_1(0)-f_1(0)]G_1(y(\tau), 0, \tau, 0)-$$

$$-\int_0^{\tau}\dot{f}_1(t)G_1(y(\tau), 0, \tau, t)\,dt+\int_0^{y(0)}\dot{\varphi}_1(\xi)G_1(y(\tau), \xi, \tau, 0)\,d\xi+$$

$$+a_1\int_0^{\tau}\dot{v}_1(t)\frac{\partial}{\partial x}g_1(y(\tau), y(t), \tau, t)\,dt\Bigg\};$$

$$v_2(\tau)=2\left\{[f_2(0)-\varphi_2(l)]\,G_2(y(\tau),\ 0,\ \tau,\ 0)+\right.$$

$$+\int_0^\tau \dot{f}_2(t)\,G_2(y(\tau),\ l,\ \tau,\ t)\,dt+\int_{y(0)}^{l}\varphi_2(\xi)\,G_2(y(\tau),\ \xi,\ \tau,\ 0)\,d\xi-$$

$$\left.-a_2\int_0^\tau v_2(t)\frac{\partial}{\partial x}g_2(y(\tau),\ y(t),\ \tau,\ t)\,dt\right\}.$$

Добавив к этим двум уравнениям выражение

$$y(\tau)=y(0)+\frac{1}{\rho_1 Q}\int_0^\tau [\lambda_1 v_1(t)-\lambda_2 v_2(t)]\,dt,$$

которое представляет собой интегральную форму записи условия (9.5), получим систему интегральных уравнений типа Вольтерра, к которой свелась исходная краевая задача. Искомые поля температур твердой и жидкой фаз выражаются через функции $v_i(\tau)$ ($i=1,2$) и $y(\tau)$ с помощью квадратур.

В работе [87] показано, что полученная система интегральных уравнений может быть решена разностно-итерационным методом. При численном решении интегральных уравнений интегралы в правых частях системы заменяются конечными суммами с помощью квадратурных формул. Затем полученные уравнения решаются итерационным методом.

Программа решения уравнения Вольтерра, записанная на языке АЛГОЛ-60, имеется в приложении V (алгоритм 7).

В работах [87, 98] методом сведения к интегральным уравнениям решены некоторые задачи нестационарной теплопроводности при наличии фазовых превращений. В ряде случаев получены точные решения задач, в отдельных случаях получаемые системы интегральных уравнений решаются итерационными методами.

В качестве примера, иллюстрирующего процесс применения метода сведения краевой задачи теплопроводности при фазовых превращениях к системе интегральных уравнений и последующего ее решения методом последовательных приближений, рассмотрим процедуру решения одномерной задачи Стефана [87]: теплопроводящая двухфазная среда заполняет слой $0<x<1$ таким образом, что первая фаза расположена внутри слоя $y_1(\tau)<x<y_2(\tau)$, а вторая — вне этого слоя. В начальный момент времени температура первой фазы равна температуре фазового превращения (принята равной нулю), температура второй фазы линейна в каждом из слоев $0<x<y_1(\tau)$ и $y_2(\tau)<x<1$, $y_1(0)=0{,}25$, а $y_2(0)=0{,}75$. Температура второй фазы в точках $x=0$ и $x=1$ равна -1.

Согласно описанной выше физической модели, математическая модель рассматриваемого процесса представляет собой задачу об определении поля температур второй фазы и границы фазового перехода $y(\tau)$ и сводится к интегрированию уравнения теплопроводности (температуропроводность и отношение $\lambda/\rho Q$ приняты равными единице)

$$\partial T/\partial\tau=\partial^2 T/\partial x^2,\quad 0<x<y(\tau),\quad \tau>0, \tag{9.9}$$

с начальными и граничными условиями вида

$$\left.\begin{aligned} &T(0,\ \tau)=-1;\ T(x,\ 0)=-4(0{,}25-x);\ T(y(\tau),\ \tau)=0;\\ &\frac{\partial y}{\partial\tau}=v(\tau)\equiv\left.\frac{\partial T(x,\ \tau)}{\partial x}\right|_{x=y(\tau)};\ y(0)=0{,}25. \end{aligned}\right\} \tag{9.10}$$

Перед тем как приступить к расчетам, приведем без доказательства лемму [87]: пусть U_1 и U_2 определены и непрерывны в областях $0\leqslant x\leqslant y(\tau)$ и соответственно $y(\tau)\leqslant x\leqslant 1$ при $0\leqslant\tau\leqslant t$, причем в этих областях

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2}-\frac{\partial U_1}{\partial\tau}\geqslant 0;\ U_1|_{x=0}\leqslant f_1(\tau);\ U_1|_{\tau=0}\leqslant\varphi_1(x);\\ &U_1|_{x=y(\tau)}=0;\\ &\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2}-\frac{\partial U_2}{\partial\tau}\geqslant 0;\ U_2|_{x=1}\leqslant f_2(\tau);\ U_2|_{\tau=0}\leqslant\varphi_2(x);\\ &U_2|_{x=y(\tau)}=0. \end{aligned}\right\} \tag{9.11}$$

Тогда неравенства

$$y(\tau)\geqslant z(\tau)\ \text{при}\ 0\leqslant\tau\leqslant\tau_0<t; \tag{9.12}$$

$$\frac{\partial y}{\partial\tau}>\left.\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}-\frac{\partial U_2}{\partial x}\right)\right|_{x=y(\tau)}\ \text{при}\ 0\leqslant\tau\leqslant t \tag{9.13}$$

влекут за собой неравенство

$$z(\tau)\leqslant y(\tau)\ \text{при}\ \tau_0\leqslant\tau\leqslant t. \tag{9.14}$$

Изменение знака в неравенствах (9.11) — (9.13) влечет за собой изменение знака в неравенстве (9.14). Краевая задача (9.9) — (9.10), как это сделано ранее, сводится к системе двух интегральных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &v(\tau)=4\left(\operatorname{erf}\frac{y(\tau)+0{,}25}{2\sqrt{\tau}}-\operatorname{erf}\frac{y(\tau)-0{,}25}{2\sqrt{\tau}}\right)-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\times\\ &\times\int_0^\tau v(t)\left\{\frac{y(\tau)-y(t)}{4(\tau-t)}\mathrm{e}^{-\frac{[y(\tau)-y(t)]^2}{4(\tau-t)}}-\frac{y(\tau)+y(t)}{4(\tau-t)}\times\right.\\ &\left.\times\mathrm{e}^{-\frac{[y(\tau)+y(t)]^2}{4(\tau-t)}}\right\}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\tau-t}};\\ &y(\tau)=0{,}25+\int_0^\tau v(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}\right\} \tag{9.15}$$

С помощью леммы можно предварительно оценить длительность процесса по времени. Полагая

$$|\overline{T}| = -\left(1 - \frac{\operatorname{erf}\dfrac{x}{2\sqrt{\tau}}}{\operatorname{erf}\gamma}\right); \quad z(\tau) = 2\gamma\sqrt{\tau},$$

выберем параметр γ таким образом, чтобы выполнялось условие

$$\dot{z}(\tau) = \frac{dz}{d\tau} = \frac{\gamma}{\sqrt{\tau}} < \left.\frac{\partial \overline{T}}{\partial x}\right|_{x=z(\tau)},$$

т. е. $\dot{z}(\tau) < \dfrac{\exp(-\gamma^2)}{\sqrt{\pi\tau}\operatorname{erf}\gamma}$.

Определенные таким образом функции $\overline{T}(x, \tau)$ и $z(\tau)$ удовлетворяют всем условиям сформулированной выше леммы, и, следовательно, $z(\tau) \leqslant y(\tau)$ для всего времени протекания процесса. Положив $\gamma = 0{,}6$, получаем, что $z(\tau)$ станет равно 0,5 за время $\tau \simeq 0{,}174$, т. е. время протекания процесса $t < 0{,}174$. Мажоранта для $y(\tau)$ определяется следующим образом: $y(\tau) < \bar{z}(\tau) = \sqrt{0{,}0625 + 2\tau}$, что приводит к неравенству $t > 0{,}093$. Таким образом, $0{,}093 < t < 0{,}174$.

Далее вычислительный процесс проводится следующим образом. С учетом последней оценки задаемся интервалом $(0, t)$ и точками его разбиения τ_k $(k = 0, 1, 2, \ldots, N)$, причем $\tau_0 = 0$, $\tau_N = t$. Начальные приближения $v_0(\tau_k)$ выбираются путем графической экстраполяции для $\tau > 0{,}01$ с помощью формулы

$$v_0(\tau_{k+1}) = v_0(\tau_k) - \beta\,\frac{v_0(\tau_{k-1}) - v_0(\tau_k)}{\tau_k - \tau_{k-1}}\,(\tau_{k+1} - \tau_k)$$

при $0{,}00002 \leqslant \tau \leqslant 0{,}01$. Здесь β — поправочный коэффициент; $v_0(0{,}00001)$ принято равным $v_0(0) = v(0) = 4$.

Интегралы в правых частях уравнений (9.15) считались по формуле Симпсона или по формуле

$$\int_{t_1}^{t_2} \omega(t, \tau)\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \cong \sum_{k=0}^{N-1} [\omega(t, \tau_k) + \omega(t, \tau_{k+1})]\left(\sqrt{t - t_1} - \right.$$

$$\left. - \sqrt{t - t_2}\right) \quad (t_1 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_N = t_2)$$

в том случае, когда формула Симпсона неприменима. После вычислений начальных приближений $v_0(\tau_k)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, N)$ вычисляются $y_0(\tau_k)$. Затем вычисляются $v_1(\tau_k)$, $y_1(\tau_k)$ и так далее до достижения заданной точности.

В табл. 9.1 представлены результаты расчетов $v_n(\tau)$ и $y_n(\tau)$ для различных значений времени. Погрешность итераций при вычислениях, как следует из этой таблицы, невелика. Несколько большая

Таблица 9.1

τ	n=0		n=1		n=2		n=3		n=4		n=5		n=6
	v	y	v	y	v	y	v	y	v	y	v	y	v
0	4	0,25		0,250000									
0,00001	4	0,250040	3,942	0,2500	3,943	0,250040	3,943	0,250040					
0,00002	3,915	0,250079	3,921	0,250079	3,920	0,25079	3,920	0,25079					
0,00004	3,904	0,250157	3,889	0,250157	3,889	0,250157	3,889	0,250157					
0,00007	3,874	0,250274	3,854	0,250273	3,854	0,250273	3,854	0,250273					
0,0001	3,846	0,250389	3,827	0,250889	3,828	0,250389	3,828	0,250389					
0,0002	3,793	0,250770	3,760	0,250767	3,762	0,250767	3,762	0,250767					
0,0004	3,713	0,251514	3,677	0,251509	3,673	0,251508	3,674	0,251508					
0,0010	3,540	0,253683	3,504	0,253671	3,509	0,253673	3,508	0,253673					
0,0025	3,304	0,258776	3,278	0,258759	3,281	0,258760	3,281	0,258760					
0,0050	3,092	0,266730	3,047	0,266675	3,061	0,266693	3,058	0,266690	3,059	0,266690			
0,01	2,906	0,281480	2,787	0,281302	2,811	0,281359	2,805	0,281347	2,806	0,281347			
0,02	2,615	0,308268	2,487	0,307806	2,517	0,307958	2,508	0,307906	2,511	0,307925	2,510	0,307925	
0,03	2,311	0,332060	2,319	0,332077	2,318	0,332077							
0,04	2,188	0,354607	2,165	0,354495	2,172	0,354533	2,169	0,354519	2,170				
0,06	2,018	0,39607	1,858	0,394757	1,970	0,395685	1,936	0,395394	1,948	0,395495	1,943	0,395471	1,945
0,08	1,774	0,432557	1,778	0,423601	1,777	0,432581	1,777	0,432581					
0,10	1,670	0,466951	1,641	0,466724	1,650	0,466777	1,647	0,466754	1,647				
0,125	1,515	0,506209	1,519	0,506248	1,517	0,506240	1,518						

погрешность итераций при вычислениях $v_n(\tau)$ для значений времени $\tau=0,02$ и $\tau=0,06$ объясняется тем, что для этих точек экстраполяция начальных («нулевых») приближений была проведена несколько менее удачно.

§ 9.2. Метод последовательных приближений

Идея метода последовательных приближений (метода итераций) была изложена нами применительно к краевым задачам теории нестационарной теплопроводности при нелинейных граничных условиях в § 8.3, а применительно к задачам при коэффициентах переноса, зависящих от температуры, будет изложена в § 10.6. Ранее было отмечено, что этот метод может быть использован при решении задач нестационарной теплопроводности при наличии фазовых переходов. Здесь рассмотрим задачу о промерзании жидкости, в которую помещен цилиндрический бесконечный стержень [71].

Пусть жидкость заполняет некоторую область $r>r_0$. Температура жидкости поддерживается постоянной и равной T_c, причем T_c выше температуры фазового перехода T_L. Начиная с момента времени $\tau=0$ на поверхности стержня ($r=r_0$) поддерживается заданный тепловой режим (задан тепловой поток постоянной величины), вследствие чего жидкость начинает промерзать.

В данной задаче искомыми функциями являются толщина намороженного слоя $r=y(\tau)$ и температурное поле в нем $T(r, \tau)$. Будем считать, что теплофизические свойства намерзающего на стержень льда заданы и постоянны, а также известна теплота фазового перехода Q. При сделанных допущениях для определения искомых функций $T(r, \tau)$ и $y(\tau)$ приходим к осесимметричной однофазной задаче Стефана:

$$\rho c\,\frac{\partial T}{\partial \tau}=\lambda\cdot\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial T}{\partial r}\right),\quad r_0<r<y(\tau),\quad \tau>0; \tag{9.16}$$

$$\lambda\,\frac{\partial T}{\partial r}\bigg|_{r=r_0}=q_S; \tag{9.17}$$

$$T\,(y(\tau),\ \tau)=T_L=\mathrm{const}; \tag{9.18}$$

$$\lambda\,\frac{\partial T}{\partial r}\bigg|_{r=y(\tau)}=\alpha\,(T_c-T_L)+\rho Q\dot{y}; \tag{9.19}$$

$$y(0)=r_0, \tag{9.20}$$

где α — коэффициент теплоотдачи на поверхности раздела фаз; ρ, c, λ — плотность, удельная теплоемкость и теплопроводность льда соответственно; q_S — плотность теплового потока на поверхности стержня, $\dot{y}=\mathrm{d}y/\mathrm{d}\tau$; T_L — температура на границе раздела.

Проинтегрируем уравнение теплопроводности (9.16) в пределах от r_0 до r:

$$\lambda r\,\frac{\partial T}{\partial r}=\lambda r_0\,\frac{\partial T}{\partial r}\bigg|_{r=r_0}+\rho c\int\limits_{r_0}^{r} r\,\frac{\partial T}{\partial \tau}\,\mathrm{d}r.$$

С учетом условия на поверхности стержня (9.17) последнее выражение записывается в виде

$$\lambda r \frac{\partial T}{\partial r} = r_0 q_S + \rho c \int_{r_0}^{r} r \frac{\partial T}{\partial \tau}\, \mathrm{d}r. \tag{9.21}$$

Из последнего выражения с использованием (9.19) будем иметь

$$\alpha (T_c - T_l) + \rho Q \dot{y} = \frac{r_0 q_S}{y(\tau)} + \frac{\rho c}{y(\tau)} \int_{r_0}^{y(\tau)} r \frac{\partial T}{\partial \tau}\, \mathrm{d}r,$$

откуда получим, что

$$\dot{y} = \frac{\alpha}{\rho Q} (T_L - T_c) + \frac{r_0 q_S}{\rho Q} \cdot \frac{1}{y(\tau)} + \frac{c}{Q} \cdot \frac{1}{y(\tau)} \int_{r_0}^{y(\tau)} r \frac{\partial T}{\partial \tau}\, \mathrm{d}r.$$

Проинтегрируем уравнение (9.21) в пределах от r до $y(\tau)$, предварительно разделив его на r:

$$T(y(\tau), \tau) - T = \frac{r_0 q_S}{\lambda} \ln \frac{y}{r} + \frac{\rho c}{\lambda} \int_{r}^{y(\tau)} \frac{1}{r} \int_{r_0}^{r} r \frac{\partial T}{\partial \tau}\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}r.$$

Учтя в последнем равенстве граничное условие (9.18), получим следующее выражение:

$$T(r, \tau) = T_L - \frac{r_0 q_S}{\lambda} \ln \frac{y}{r} - \frac{\rho c}{\lambda} \int_{r}^{y(\tau)} \frac{1}{r} \int_{r_0}^{r} r \frac{\partial T}{\partial \tau}\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}r. \tag{9.22}$$

Воспользуемся далее тем обстоятельством, что $\partial/\partial\tau = \dot{y}\partial/\partial y$ и производная $\dot{y}$ не зависит от координаты r:

$$\dot{y} = \frac{\alpha}{\rho Q} (T_l - T_c) + \frac{r_0 q_S}{\rho Q} \frac{1}{y(\tau)} + \frac{c\dot{y}}{Q y(\tau)} \int_{r_0}^{y(\tau)} r \frac{\partial T}{\partial y}\, \mathrm{d}r.$$

После несложных преобразований получаем выражение для скорости движения границы раздела фаз $\dot{y}$ в виде

$$y = \frac{\alpha (T_L - T_c) + r_0 q_S / y(\tau)}{\rho Q \left(1 - \frac{c}{Q y(\tau)} \int_{r_0}^{y(\tau)} r \frac{\partial T}{\partial y}\, \mathrm{d}r \right)}. \tag{9.23}$$

Учитывая в уравнении (9.22), что $\partial/\partial\tau = \dot{y}\partial/\partial y$, и подставляя в него полученное выражение для $\dot{y}$, будем иметь

$$T(r, \tau) = T_L + \frac{r_0 q_S}{\lambda} \ln\frac{r}{y} - \frac{c}{\lambda Q} \frac{\alpha(T_L - T_c) + r_0 q_S/y}{1 - \frac{c}{Qy}\int\limits_{r_0}^{y} r\frac{\partial T}{\partial y}\,dr} \times$$

$$\times \int\limits_{r}^{y(\tau)} \frac{1}{r} \int\limits_{r_0}^{r} r\frac{\partial T}{\partial y}\,dr\,dr. \qquad (9.24)$$

Разделим переменные в уравнении (9.23) и проинтегрируем полученное равенство в пределах от 0 до τ (от r_0 до $y(\tau)$) с учетом условия (9.20). Это можно сделать вследствие того, что правая часть (9.23) не зависит явно от времени. Получим, что

$$\tau = \int\limits_{r_0}^{y(\tau)} \left[\frac{\rho Q\left(1 - \frac{c}{Qy}\int\limits_{r_0}^{y} r\frac{\partial T}{\partial y}\,dr\right)}{\alpha(T_l - T_c) + r_0 q_S/y} \right] dy. \qquad (9.25)$$

Последнее уравнение позволяет вычислить значение времени, за которое граница раздела фаз дойдет до положения $r = y(\tau)$ [т. е. толщина льда станет равной $y(\tau) - r_0$].

С целью облегчения дальнейших выкладок введем безразмерные переменные и величины:

$$\Theta = \lambda(T - T_l)/(q_S r_0);\ \xi = r/r_0;\ \mathrm{Fo} = \lambda\tau/(\rho c r_0^2);$$
$$z = y/r_0;\ \gamma = \alpha(T_c - T_l)/q_S;\ \beta = Q\lambda/(c r_0 q_S).$$

Запишем выражения (9.24) и (9.25) в безразмерном виде:

$$\Theta(\mathrm{Fo}, \xi) = \ln\frac{\xi}{z} - \frac{(1 - \gamma z)\int\limits_{\xi}^{z} \frac{1}{\xi}\int\limits_{1}^{\xi} \xi\frac{\partial\Theta}{\partial z}\,d\xi\,d\xi}{\beta z - \int\limits_{1}^{z} \xi\frac{\partial\Theta}{\partial z}\,d\xi}; \qquad (9.26)$$

$$\mathrm{Fo} = \int\limits_{1}^{z} \left(\frac{\beta z - \int\limits_{1}^{z} \xi\frac{\partial\Theta}{\partial z}\,d\xi}{1 - \gamma z} \right) dz. \qquad (9.27)$$

Уравнение (9.26) представляет собой нелинейное интегро-дифференциальное уравнение, которое решается методом последовательных приближений (методом итерации), вычислительная схема которого имеет следующий вид:

$$\Theta_{k+1}=\ln\frac{\xi}{z}-\frac{(1-\gamma z)\int\limits_{\xi}^{z}\frac{1}{\xi}\int\limits_{1}^{\xi}\xi\frac{\partial\Theta_k}{\partial z}\,d\xi\,d\xi}{\beta z-\int\limits_{1}^{z}\xi\frac{\partial\Theta_k}{\partial z}\,d\xi}; \tag{9.28}$$

$$\mathrm{Fo}_k=\int\limits_{1}^{z}\left(\frac{\beta z-\int\limits_{1}^{z}\xi\frac{\partial\Theta_k}{\partial z}\,d\xi}{1-\gamma z}\right)dz. \tag{9.29}$$

В качестве нулевого приближения берется выражение

$\Theta_0=\ln\xi/z$,

что соответствует равенству нулю величины $\partial\Theta_k/\partial z$ в уравнении (9.28) (случай, когда теплоемкость намерзающего вещества стремится к нулю).

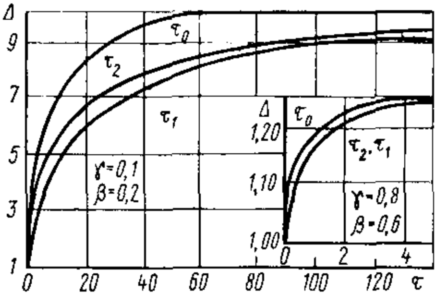


Рис. 9.1. Изменение положения границы фазового перехода в зависимости от времени (индексы соответствуют номерам приближений) [71]

Зная Θ_0, вычисляем по (9.29) начальное приближение Fo_0, затем Θ_1, Fo_1; Θ_2, Fo_2 и т. д. Выражения для последующих приближений (первого, второго и т. д.) громоздки, и авторы работы [71] их не приводят. Тем не менее итерационный процесс (9.28), (9.29) сходится достаточно быстро. Характер сходимости этого процесса представлен на рис. 9.1 для различных комбинаций параметров γ и β. На рисунке видно, что в данном примере методика удовлетворяет требованиям сходимости.

Метод последовательных приближений применён здесь для решения задачи Стефана при граничных условиях II рода. Механизм его использования мало отличается от описанного выше при решении задач с граничными условиями I и III родов.

§ 9.3. Вариационный метод

Вариационные методы решения линейных стационарных и нестационарных задач теплопроводности рассмотрены в гл. VI. Здесь остановимся на решении задачи о затвердевании плоской отливки вариационным методом Био [93]. Этот метод использован также для решения задач нестационарной теплопроводности при нелинейных граничных условиях (см. § 8.5) и при коэффициентах переноса, зависящих от температуры (см. § 10.4).

При рассмотрении процесса затвердевания плоской отливки примем следующие допущения: теплофизические свойства затвердевающего вещества постоянны; переохлаждение расплава у фронта кристаллизации пренебрежимо мало; температура жидкой фазы затвердевающей отливки постоянна и равна температуре кристаллизации T_L.

При этом считаем, что начало координатной системы находится на поверхности отливки, охлаждение которой осуществляется за счет теплообмена с жидкостью по закону Ньютона. Толщина отливки S, температура охлаждающей жидкости T_c постоянна. В начальный момент времени ($\tau=0$) температура твердой фазы является функцией координаты x. В математической постановке приходим к нестационарной краевой задаче:

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial\tau}=\lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2},\quad \tau>0,\quad 0<x<y(\tau)\leqslant S; \tag{9.30}$$

$$\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=0}=\alpha(T_S-T_c); \tag{9.31}$$

$$\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=y(\tau)}=\rho Q\frac{\partial y}{\partial\tau}; \tag{9.32}$$

$$T(y(\tau),\ \tau)=T_L; \tag{9.33}$$

$$T(x,\ 0)=\varphi(x); \tag{9.34}$$

$$y(0)=y_0, \tag{9.35}$$

где λ, c, ρ, α — теплопроводность, удельная теплоемкость, плотность, коэффициент теплоотдачи соответственно; τ — время; x — координата; Q — удельная теплота кристаллизации.

В работе [20] задача о затвердевании отливки в постановке (9.30) — (9.35) *решалась интегральным методом. Профиль температур в сечении твердой фазы задавался формулой*

$$T(x,\ \tau)=T_L-\frac{T_L-T_c}{1-n\lambda/(\alpha y)}\left[1-\frac{x}{y(\tau)}\right]^n. \tag{9.36}$$

Значение n определено в [20] для случая, когда внутреннее тепловое сопротивление (S/λ) твердой фазы отливки велико по сравнению с внешним тепловым сопротивлением ($1/\alpha$).

Применим для решения задачи (9.30) — (9.35) вариационный метод Био. Следуя процедуре данного метода, которая подробно описана в § 6.6, для рассматриваемой одномерной задачи получим дифференциальное уравнение

$$\partial E/\partial y+\partial D/\partial\dot{y}=W. \tag{9.37}$$

Уравнение (9.37) получено из (6.86) при $j=1$, и в качестве обобщенной координаты взята толщина затвердевшего слоя. Согласно методу и учитывая специфику рассматриваемой задачи, для потенциальной энергии теплового поля E, функции рассеивания D и «температурной силы» W (обозначение принято только в данном параграфе) имеем следующие выражения:

$$E=\frac{c\rho}{2}\int_0^S \Theta^2\,dx;\quad D=\frac{1}{2\lambda}\int_0^S H^2\,dx;$$

$$W=\Theta_S\left.\frac{\partial H}{\partial y}\right|_{x=0},$$

где $\Theta=T_L-T$; $H=c\rho\int_x^S \Theta\,dx+\mathrm{const}$.

По определению вектора теплового поля H и согласно закону сохранения энергии (см. § 6.6, формулы (6.72), (6.73)) имеем

$$\dot H=-\lambda\partial\Theta/\partial x;\quad -c\rho\Theta=\operatorname{div}H.$$

Учитывая, что $\dot H=\frac{\partial H}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \tau}$, и полагая $\frac{\partial H}{\partial y}=\rho Q+c\rho\frac{\partial}{\partial y}\int_x^y \Theta\,dx$, мы тем самым удовлетворяем граничному условию (9.32). В самом деле,

$$\lambda\frac{\partial\Theta}{dx}=-\dot y\frac{\partial H}{\partial y}=-\rho Q\dot y-c\rho\dot y\frac{\partial}{\partial y}\int_x^y \Theta\,dx,$$

что при $x=y(\tau)$ и с учетом выражения для Θ дает нам условие (9.32).

Профиль температур в сечении твердой фазы выберем в виде функции (9.36), которая имеет вид

$$\Theta=\frac{\Theta_c}{1+n/(z\,\mathrm{Bi})}\left(1+\frac{X}{z}\right)^n, \tag{9.38}$$

где $\mathrm{Bi}=\alpha S/\lambda$; $z=y/S$; $X=x/S$.

Подставляя выражение (9.38) в уравнение (9.37), в результате приходим к дифференциальному уравнению для определения обобщенной координаты z:

$$\left[K^2\left(z+\frac{n}{\mathrm{Bi}}\right)^4+\frac{2Kz}{(n+1)\,(n+2)}\left(z+\frac{n}{\mathrm{Bi}}\right)^2\left(2z+3\,\frac{n}{\mathrm{Bi}}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{(5n+3)\,z^4+(16n+9)\,z^3n/\mathrm{Bi}+(13n+7)\,(zn/\mathrm{Bi})^2}{(n+1)^3\,(2n+1)\,(2n+3)}\right]\frac{dz}{d\,\mathrm{Fo}}=K\left(z+\frac{n}{\mathrm{Bi}}\right)^3+$$

$$+z\left(z+\frac{n}{\mathrm{Bi}}\right)\frac{z+2n/\mathrm{Bi}}{n+1}-\frac{z\,(z+n/\mathrm{Bi})\,(z+3n/\mathrm{Bi})}{2\,(2n+1)},$$

где $\mathrm{Fo}=a\tau/S^2$; $K=Q\,(T_L-T_c)/c$ — критерий интенсивности тепловыделения.

Считая, что в начальный момент времени толщина затвердевшего слоя равна нулю ($y_0=0$), интегрируем последнее уравнение:

$$M\,\mathrm{Fo}=2(\alpha_1-\beta_1)z+z^2+2\gamma_1 A_2\ln\frac{|\bar z-z|}{\bar z}+\gamma_1 B_2\ln\times$$

$$\times\left(\frac{1}{b_2}|z^2+a_2z+b_2|\right)+\gamma_1(2c_2-B_2a_2)f(z).$$

Здесь: 1) $f(z)=\dfrac{2}{\sqrt{4b_2-a_2^2}}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{4z+a^2}{\sqrt{4b_2-a_2^2}}-\operatorname{arctg}\dfrac{a_2}{\sqrt{4b_2-a_2^2}}\right)$,

если $4b_2-a_2^2>0$;

2) $f(z)=\dfrac{1}{\sqrt{a_2^2-4b_2^2}}\ln\dfrac{\left|\left(2z+a_2-\sqrt{a_2^2-4b_2}\right)/\left(2z+a_2+\sqrt{4b_2-a_2^2}\right)\right|}{\left|\left(a_2-\sqrt{a_2^2-4b_2}\right)/\left(a_2+\sqrt{a_2^2-4b_2}\right)\right|}$,

если $4b_2-a_2^2<0$,

3) $f(z)=2[1/a_2-1/(2z+a_2)]$, если $4b_2-a_2^2=0$,

где $\bar z$ — корень уравнения $\bar z^3+\beta_1\bar z^2+\beta_2\bar z+\beta_3=0$;

$A_2=\dfrac{\bar z^2+a_1\bar z+b_1}{\bar z^2+a_2\bar z+a_2}$; $B_2=1-A_2$; $C_2=\dfrac{A_2b_2-b_1}{\bar z}$; $a_1=\gamma_2/\gamma_1$; $b_1=\gamma_3/\gamma_1$; $a_2=\beta_1+\bar z$; $b_2=-\beta_3/\bar z$; $\gamma_1=\alpha_2-\beta_2-\beta_1(\alpha_1-\beta_1)$; $\gamma_2=\alpha_3-\beta_3-\beta_2\times$ $\times(\alpha_1-\beta_1)$; $\gamma_3=\alpha_4-\beta_3(\alpha_1-\beta_1)$; $\alpha_1=B_1/A_1$; $\alpha_2=C_1/A_1$; $\alpha_3=D_1/A_1$; $\alpha_4=E_1/A_1$; $\beta_1=G_1/F_1$; $\beta_2=H_1/F_1$; $\beta_3=L_1/F_1$; $M=2F_1/A_1$. При этом $A_1=K^2+4K/G_2+(5n+3)/L_2$; $B_1=n[4K^2+14K/G_2+(16n+9)/L_2]/\mathrm{Bi}$; $C_1=n^2[6K^2+16K/G_2+(13n+7)/L_2]/\mathrm{Bi}^2$; $D_1=n^3[4K^2+6K/G_2]/\mathrm{Bi}^3$; $E_1=$ $=n^4K^2/\mathrm{Bi}^4$; $F_1=K+(3n+1)/(2F_2)$; $G_1=n[3K+(4n+1)/F_2]/\mathrm{Bi}$; $H_1=$ $=n^2[3K+(5n+1)/(2F_2)]/\mathrm{Bi}^2$; $L_1=n^3K/\mathrm{Bi}^3$; $G_2=(n+1)(n+2)$; $L_2=$ $=(n+1)^2(2n+1)(2n+3)$; $F_2=(n+1)(2n+1)$.

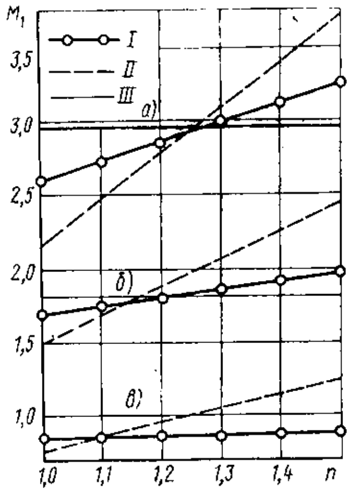
Определив таким образом неизвестную толщину слоя $y(\tau)$, можно получить выражение для H, откуда легко определяется искомая температура.

При $\mathrm{Bi}\to\infty$ (в частности) для толщины затвердевшего слоя $z(\mathrm{Fo})$ решение имеет вид

$$z(\mathrm{Fo})=\sqrt{M\,\mathrm{Fo}}.$$

На рис. 9.2 представлены результаты расчетов коэффициента M как функции от n. Там же представлены результаты расчетов этого коэффициента, соответствующие решению из работы [20] и точному решению [65]. Значения коэффициентов M, полученные в работах [93, 20], близки в точках пересечения с кривыми, соответствующими точному решению.

Результаты расчетов по формулам работ [20, 93] практически совпадают при использовании значений показателя n, которые рассчитаны в [93] по методу сеток и представлены на рис. 9.3 для различных значений чисел Bi и K.



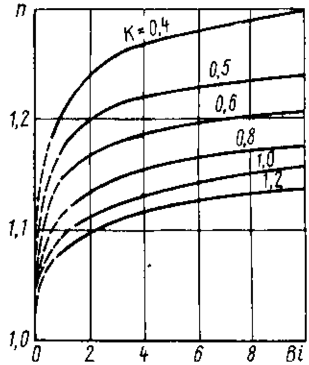


Рис. 9.2. Изменение коэффициентов M, рассчитанных вариационным методом — I, по формулам работы [20] — II, по точному решению [65] — III. Значения K соответственно равны: a — 0,413; $б$ — 0,823; $в$ — 2,03 [93]

Рис. 9.3. Результаты расчета значений показателя n

В заключение отметим, что пока еще вариационные методы применяются при решении нестационарных задач теплопроводности при наличии фазовых переходов лишь для одномерных задач в случае выделения внутренней теплоты при постоянной температуре. Кроме этого, вариационные методы, обладающие сравнительно высокой точностью, в ряде случаев приводят к довольно громоздким соотношениям по сравнению с другими методами.

§ 9.4. Интегральный метод

Интегральный метод нашел широкое применение при решении различных задач теории теплопроводности. В § 7.2 кратко изложены основы интегрального метода теплового баланса, в настоящем параграфе рассмотрим особенности применения этого математического аппарата к решению краевых задач теплопроводности при наличии фазовых переходов.

Рассмотрим стационарную задачу горения конденсированного топлива, содержащего плоские, равноотстоящие друг от друга теплопроводящие элементы [5]. Предположим, что теплофизические параметры топлива и теплопроводящих элементов не зависят от температуры. Теплопроводящие элементы тонкие ($\delta/\lambda_м \ll d/\lambda$), поэтому распределением температуры поперек элемента можно пренебречь. Температура продуктов сгорания топлива постоянна. Здесь δ и d — половина толщины теплопроводящего элемента и половина расстояния между ними соответственно; λ и $\lambda_м$ — теплопроводность топлива и металлического элемента соответственно.

На рис. 9.4 приведена схема горения конденсированного топлива с плоскими теплопроводящими элементами. Система координат связана с поверхностью топлива, отделяющей конденсированную фазу (слева от поверхности) от продуктов сгорания. Тепловые потоки от продуктов сгорания к поверхности конденсированной фазы и поверхности плавления металлических элементов считаются известными. Закон теплообмена между продуктами сгорания и выступающей частью теплопроводящего элемента соответствует обтеканию полубесконечной пластины ламинарным потоком.

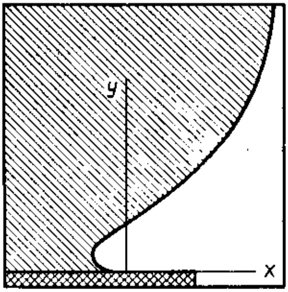


Рис. 9.4. Схема процесса горения конденсированного топлива с плоскими теплопроводящими элементами

Математическая модель рассматриваемого процесса состоит из уравнений теплопроводности для конденсированной фазы, внутренней и выступающей частей теплопроводящего элемента:

$$\partial\Theta/\partial X = \partial^2\Theta/\partial X^2 + \partial^2\Theta/\partial y^2; \tag{9.39}$$

$$\frac{d\Theta_м}{dX} = K_a \frac{d^2\Theta_м}{dX^2} + \frac{K_a}{K_\lambda u} \frac{\partial\Theta}{\partial y}\Big|_{y=0}; \tag{9.40}$$

$$\frac{d\Theta_м}{dX} = K_a \frac{d^2\Theta_м}{dX^2} + \frac{\varkappa}{u} \frac{\Theta_b - \Theta_м}{\sqrt{K_a X}} \tag{9.41}$$

и граничных условий:

$$X = F(y),\ \Theta = \Theta_s,\ W + Lu_n = u\partial\Theta/\partial N; \tag{9.42}$$

$$X \to -\infty;\ \Theta = \Theta_м = 0; \tag{9.43}$$

$$X = F(0) = 0,\ \Theta_м = \Theta_s(0) = 1;\ d\Theta_м(+0)/dX = d\Theta_м(-0)/dX; \tag{9.44}$$

$$X = H,\ (\Theta_m < \Theta_b),\ \Theta_м = \Theta_m,\ W_м/u + L_м = d\Theta_м/dX; \tag{9.45}$$

$$X \to \infty,\ (\Theta_m > \Theta_b),\ \Theta_м = \Theta_b,\ d\Theta_м/dX = 0; \tag{9.46}$$

$$y = 0,\ \Theta = \Theta_м \tag{9.47}$$

$$y = uK_\delta,\ \partial\Theta/\partial y = 0,\ \partial F/\partial y = 0, \tag{9.48}$$

где $X = F(y)$ — искомое уравнение подвижной границы топлива, причем функциональная зависимость между температурой поверхности конденсированной фазы и фундаментальной скоростью горения топлива считается известной; u_n — проекция скорости на внешнюю нормаль к поверхности конденсированной фазы.

В выражениях (9.39) — (9.48) приняты следующие обозначения:

$X=vx/a$; $y=vy/a$; $N=vn/a$; $u=v\delta/a$;

$\Theta=(T-T_\infty)/(T_0-T_\infty)$; $K_a=a_м/a$; $K_\lambda=\lambda_м/\lambda$; $K_\delta=d/\delta$;

$L=l/[c(T_0-T_\infty)]$; $L_м=l_м/[K_a c_м(T_0-T_\infty)]$;

$W=q\delta/[\lambda(T_0-T_\infty)]$; $W_м=q_м\delta/[\lambda_м(T_0-T_\infty)]$;

$$\varkappa=\frac{0,332}{\Pr_b/6}\sqrt{\frac{2c_b\lambda_b}{c\lambda}\cdot\frac{K_a^{3/2}}{K_\lambda}},$$

где v — скорость горения топлива; x, y — координаты; a, $a_м$ — температуропроводности топлива и теплопроводящего элемента; T — температура; T_0 и T_∞ — температура в точке (0, 0) и на бесконечности; l и $l_м$ — теплоты фазового (химического) превращения, c и $c_м$ — удельные теплоемкости топлива и металлического элемента; q и $q_м$ — плотности теплового потока от продуктов сгорания к поверхности конденсированной фазы и поверхности плавления металлических элементов соответственно; $\Pr_b$, c_b, λ_b — число Прандтля, теплоемкость и теплопроводность продуктов сгорания, h — длина выступающей части теплопроводящего элемента.

Система дифференциальных уравнений (9.39) — (9.41) с граничными условиями (9.42) — (9.48) позволяет при известных значениях параметров K_a, K_λ, K_δ, $\varkappa$, W, $W_м$, L, $L_м$, Q_b (безразмерная температура на поверхности сгорания), Θ_m (безразмерная температура на поверхности плавления металлического элемента) и известной функциональной зависимости температуры поверхности конденсированной фазы от скорости нормального горения топлива рассчитать распределения температуры в конденсированной фазе и теплопроводящих элементах, скорость горения u и форму поверхности конденсированной фазы $F(y)$.

Для решения краевой задачи (9.39) — (9.48) применим интегральный метод.

В данном случае одно из дифференциальных уравнений является уравнением эллиптического типа, что требует некоторой модификации интегрального метода. Проинтегрируем дифференциальное уравнение (9.39) по X в пределах от $-\infty$ до $F(y)$. Меняя порядок дифференцирования и интегрирования в последнем члене правой части (9.39), с учетом граничных условий (9.42), (9.43) получим уравнение

$$\vartheta''-\Theta_S-F''\Theta_S-2F'\Theta_S'+(1+F'^2)G=0, \tag{9.49}$$

$$\text{где}\quad \vartheta=\int_{-\infty}^{F}\Theta\,dx \tag{9.50}$$

— безразмерная толщина теплового пограничного слоя; $G(y)=\partial\Theta(F(y),y)/\partial X$; $\Theta_S=\Theta(F(y),y)$, штрихом обозначены полные производные по y.

Уравнение (9.49) устанавливает зависимость толщины теплового пограничного слоя от формы и температуры поверхности конденсированной фазы, а также градиента температуры в направлении оси X на данной поверхности. Граничные условия для дифференциального уравнения (9.49) имеют вид

$$y=0,\ \vartheta'-F'+uK_\lambda(G_0-1/K_a)=0,\ F=0; \tag{9.51}$$

$$y=uK_\delta,\ \vartheta'=0,\ F'=0. \tag{9.52}$$

Условие (9.51) получено интегрированием по X уравнения (9.40) в пределах от $-\infty$ до 0 с использованием (9.46). Условие симметрии (9.52) следует из (9.48).

Из (9.42) можно получить еще одно дифференциальное уравнение, устанавливающее связь между формой поверхности конденсированной фазы и распределением температуры вблизи этой поверхности.

Действительно, так как $u_N=u(1+F'^2)^{-1/2}$, $\partial\Theta(F,\ y)/\partial N=$ $=(1+F'^2)^{1/2}G-(1+F'^2)^{-1/2}F'\Theta_S'$, то из (9.42) следует

$$(1+F'^2)G-(W/u)(1+F'^2)^{1/2}-F'\Theta_S'-L=0. \tag{9.53}$$

Используя (9.53), исключим из (9.49) член, содержащий G. Тогда уравнение (9.49) перепишем в виде

$$\vartheta''-\Theta_S-(F'\Theta_S)'+(W/u)(1+F'^2)^{1/2}+L=0. \tag{9.54}$$

Считая Θ_S и F известными величинами, уравнение (9.54) можно формально проинтегрировать:

$$\vartheta'=F'\Theta_S-\int\limits_y^{uK_\delta}\Theta_S\,dy+\frac{W}{u}\int\limits_y^{uK_\delta}(1+F'^2)^{1/2}\,dy+L(uK_\delta-y); \tag{9.55}$$

$$\vartheta=\vartheta(0)+\int\limits_0^y F'\,\Theta_S\,dy-\int\limits_0^y dy\int\limits_y^{uK_\delta}\Theta_S\,dy+\frac{W}{u}\int\limits_0^y dy\int\limits_y^{uK_\delta}(1+F'^2)^{1/2}\,dy+$$
$$+Ly(uK_\delta-y/2). \tag{9.56}$$

С помощью выражения (9.55) из граничного условия (9.51) можно исключить ϑ' и получить интеграл теплового баланса в конденсированной фазе

$$\int\limits_0^{uK_\delta}\Theta_S\,dy=uK_\lambda(G_0-1/K_a)+\frac{W}{u}\int\limits_0^{uK_\delta}(1+F'^2)^{1/2}\,dy+LuK_\delta, \tag{9.57}$$

в котором левая часть представляет собой количество теплоты, расходуемое на прогрев конденсированной фазы до температуры Θ_S, первый член правой части — тепловой поток от теплопроводящего элемента к конденсированной фазе, второй член — тепловой поток от продуктов сгорания к поверхности конденсированной фазы, третий — теплоту химической реакции, происходящей в поверхностном слое.

При отсутствии теплопроводящих элементов температурное поле конденсированного топлива подчиняется экспоненциальному закону распределения $\Theta=\exp(X)$. Поэтому при наличии теплопроводящих элементов температурное поле удобно аппроксимировать зависимостью

$$\Theta=\Theta_S\{\varepsilon(y)\exp(X-F)+[1-\varepsilon(y)]\exp[(X-F)/K]\}, \qquad (9.58)$$

где K и $\varepsilon(y)$ — подлежащие определению параметр и функция. Из (9.58) следует, что ϑ и G связаны зависимостью

$$G=\frac{K+1}{K}\Theta_S-\frac{\vartheta}{K}. \qquad (9.59)$$

Таким образом, при наличии функциональной зависимости между температурой поверхности конденсированной фазы и фундаментальной скоростью горения топлива

$$\Theta_S=\Phi(u_N)=\Phi\left(u/\sqrt{1+F'^2}\right)$$

поставленная задача сводится к решению интегро-дифференциального уравнения (9.53) с нулевым граничным условием, причем G определяется по формулам (9.59) и (9.57).

Скорость горения топлива является собственным значением уравнения (9.53) и должна удовлетворять соотношению

$$G(uK_б)-W/u-L=0, \qquad (9.60)$$

полученному из (9.52) и (9.53).

Следовательно, для определения неизвестных параметров u и K имеется два уравнения (9.57) и (9.60). Третьим неизвестным параметром является тепловой поток G_0 от выступающей части теплопроводящего элемента к внутренней его части. Значение G_0 определяется из решения дифференциального уравнения (9.41) и условия (9.44).

Дифференциальное уравнение (9.41) с граничными условиями (9.44) — (9.46) не имеет точного аналитического решения. Поэтому будем искать решение (9.41) в виде функциональной зависимости, совпадающей с решением уравнения теплопроводности с постоянным коэффициентом теплоотдачи α и удовлетворяющей интегралу теплового баланса, полученному интегрированием (9.41) по X в пределах от 0 до H (при $\Theta_m \geqslant \Theta_b$ от 0 до ∞):

$$\Theta_m-1=K_a\left(\frac{W_м}{u}+L_м-G_0\right)+\frac{\varkappa}{u}\int_0^H\frac{\Theta_b-\Theta_м}{\sqrt{K_aX}}\,dX \quad (\Theta_m<\Theta_b);$$

$$\Theta_b-1=\frac{\varkappa}{u}\int_0^\infty\frac{\Theta_b-\Theta_m}{\sqrt{K_aX}}\,dX-K_aG_0 \quad (\Theta_m>\Theta_b).$$

Данная функциональная зависимость имеет вид

$$\Theta_м=\Theta_b-(\Theta_b-1)\{(1+c)\exp(-\omega X/K_a)-c\exp[(\omega+1)X/K_a]\},$$

где c, H и ω определяются из следующих соотношений: при $\Theta_m<\Theta_b$

$$c=\frac{\exp(-\omega H/K_a)-(\Theta_b-\Theta_m)/(\Theta_b-1)}{\exp[(\omega+1)H/K_a]-\exp(-\omega H/K_a)};$$

$$\frac{W_м}{u}+L_м=\omega\frac{c+1}{K_a}\exp(-\omega H/K_a)+c\frac{(\omega+1)}{K_a}\exp[(\omega+1)H/K_a];$$

$$\frac{\Theta_m-1}{K_a}=\frac{W_м}{u}+L_м-G_0+\frac{\varkappa}{u}\,\frac{\Theta_b-1}{K_a}\left[\frac{c+1}{\sqrt{\omega}}\gamma\left(\frac{1}{2},\ \frac{\omega H}{K_a}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{c}{\sqrt{\omega+1}}\gamma\left(\frac{1}{2},\ -\frac{\omega H}{K_a}\right)\right], \qquad (9.61)$$

где $\gamma(a,\ x)=\int\limits_0^x e^{-t}t^{a-1}\,dt$ — неполная гамма-функция; при $\Theta_m>\Theta_b$, $H\to\infty$

$$c=0,\ (\varkappa/u)(\pi/\omega)^{1/2}=1+\omega. \qquad (9.62)$$

Тепловой поток от выступающей части теплопроводящего элемента к внутренней его части определяется по формуле

$$G_0=(\Theta_b-1)(\omega+2\omega c+c)/K_a. \qquad (9.63)$$

Теперь рассмотрим вопрос об определении скорости горения и формы выгорающей поверхности конденсированной фазы при постоянной температуре данной поверхности, т. е. при $\Theta_S=1$.

В этом случае интегро-дифференциальное уравнение (9.53) значительно упрощается и может быть записано в виде

$$(1+F'^2)G-\frac{W}{u}(1+F'^2)^{1/2}-L=0, \qquad (9.64)$$

где $G=G_0+\frac{1}{K}\left[(1-L)y\left(uK_б-\frac{y}{2}\right)-F-\frac{W}{u}\int\limits_0^y dy\int\limits_y^{uK_б}(1+F'^2)^{1/2}\,dy\right]$.

Производная F' определяется из уравнения (9.64) с точностью до знака.

В зависимости от знака F' в окрестности точек $y=0$ и $y=uK_б$ можно получить четыре вида кривых функции F (рис. 9.5). При этом из (9.64) следует, что в окрестности точки $y=uK_\delta$ знак F' совпадает со знаком выражения $1-L-W/u$, т. е. если введение металлических элементов в топливо приводит к увеличению скорости его горения, то в окрестности точки $y=uK_\delta$ функция F является выпуклой (рис. 9.5, *а*, *б*), в противном случае — вогнутой (рис. 9.5, *в*, *г*). Очевидно, что тип поверхности конденсированной фазы, представленной на рис. 9.5, на практике не реализуется.

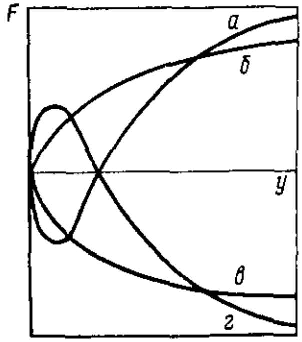


Рис. 9.5. Качественный характер формы поверхности конденсированной формы

Уравнение (9.64) значительно проще исходной системы уравнений (9.39) — (9.41), однако точного аналитического решения не допускает. Будем искать приближенное решение уравнения (9.64) в виде функции, непрерывной вместе со своей производной на промежутке $0 \leqslant y \leqslant uK_\delta$, обращающейся в нуль в точке $y=0$ и достигающей экстремума в точке $y=uK_\delta$.

Для проведения расчетов удобно пользоваться следующей функциональной зависимостью для F и F':

$$F=\begin{cases} \dfrac{y_0}{A_0}\left[\operatorname{ch} A_0-\operatorname{ch} A_0\left(1-\dfrac{y}{y_0}\right)\right], & y \leqslant y_1; \\ C_1-\dfrac{uK_\delta}{A_1}\operatorname{ch} A_1\left(1-\dfrac{y}{uK_\delta}\right), & y>y_1; \end{cases} \tag{9.65}$$

$$F'=\begin{cases} \operatorname{sh} A_0\left(1-\dfrac{y}{y_0}\right), & y \leqslant y_1; \\ \operatorname{sh} A_1\left(1-\dfrac{y}{uK_\delta}\right), & y>y_1, \end{cases} \tag{9.66}$$

где $y_1=y_0uK_\delta(A_0-A_1)/(A_0uK_\delta-A_1y_0)$; $C_1=\dfrac{y_0}{A_0}\operatorname{ch} A_0+\left(\dfrac{uK_\delta}{A_1}-\dfrac{y_0}{A_0}\right)\times$ $\times\operatorname{ch} A_0\left(1-\dfrac{y_1}{y_0}\right)$.

Постоянные A_0, A_1 и y_0 определим из условия выполнения уравнения (9.64) в окрестности точек $y=0$, $y=y_0$ и «в среднем». Подставляя выражения (9.65) и (9.66) в (9.64), получим следующую систему уравнений:

$$G_0\operatorname{ch}^2 A_0-(W/u)\operatorname{ch} A_0-L=0; \tag{9.67}$$

$$\int\limits_0^{uK_\delta}(1+F'^2)G\,dy-\frac{W}{u}\int\limits_0^{uK_\delta}(1+F'^2)^{1/2}dy-LuK_\delta=0; \tag{9.68}$$

$$C_2^2G(y_0)-WC_2/u-L=0, \tag{9.69}$$

где $C_2=\begin{cases} 1, & y_0 \leqslant y_1; \\ \operatorname{ch} A_1\left(1-\dfrac{y_0}{uK_\delta}\right), & y_0>y_1. \end{cases}$

Таким образом, для определения u, K, G_0, A_0, A_1 и y_0 необходимо решить систему уравнений (9.57), (9.60), (9.61), (9.67) — (9.69). В первом приближении уравнение формы поверхности конденсированного топлива находится из выражения (9.65). Из (9.64) можно получить уравнение формы выгорающей поверхности во втором приближении

$$F(y)=\int_0^y i\sqrt{Z^2(y)-1}\,dy, \tag{9.70}$$

где

$$Z(y)=\left(W/u+\sqrt{W^2/u^2+4LG}\right)/(2G),\quad i=\begin{cases}\operatorname{sign}(A_0), & y\leqslant y_0;\\ \operatorname{sign}(A_1), & y>y_0;\end{cases}$$

$G(y)$ определяется из выражений (9.59), (9.56), (9.65), (9.66). Система уравнений (9.57), (9.60), (9.61), (9.67) — (9.69) решалась численно на ЭЦВМ. Некоторые результаты решения представлены на рис. 9.6—9.8.

На рис. 9.6 приведена зависимость скорости горения топлива от безразмерного теплового потока W при следующих значениях параметров: $K_a=10^2$; $K_\lambda=10^3$; $K_\delta=20$; $\varkappa=0{,}5$; $\Theta_b=9$; $\Theta_m=8$. Из рисунка видно, что с уменьшением толщины теплопроводящих элементов скорость горения конденсированного топлива возрастает.

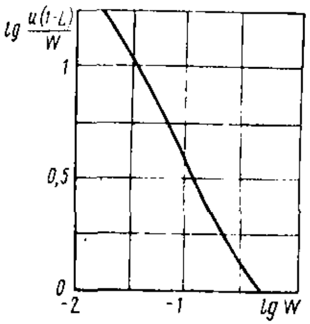


Рис. 9.6. Зависимость скорости горения конденсированного топлива от безразмерного теплового потока

Вид поверхности конденсированной фазы при различных значениях W, рассчи-

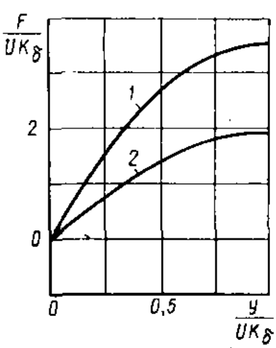


Рис. 9.7. Влияние теплового потока на форму выгорающей поверхности:
1 — $W=0{,}02$; 2 — $W=0{,}2$

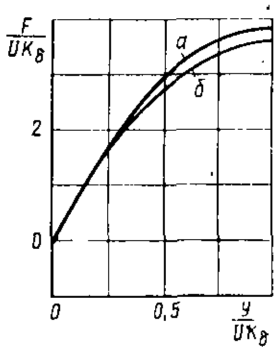


Рис. 9.8. Сравнительные результаты расчета формы выгорающей поверхности по формулам 1-го и 2-го приближений:
а — первое приближение; б — второе приближение

танный по формуле (9.70), показан на рис. 9.7. Из рис. 9.8 видно, что совпадение кривых первого и второго приближений удовлетворительное.

Представленные расчеты показывают, что интегральный метод является достаточно эффективным при исследовании процессов горения конденсированного топлива с плоскими теплопроводящими элементами. Анализ поставленной задачи, произведенный на основе интегрального метода, позволил выявить различные типы формы выгорающей изотермической поверхности.

Метод решения интегро-дифференциального уравнения (9.64) легко распространить и на случай неизотермической поверхности конденсированной фазы.

§ 9.5. Метод малого параметра

Метод малого параметра (метод возмущений) применяют не только при решении некоторых нелинейных задач нестационарной теплопроводности (см. § 8.4, 10.7), но и при решении задач теории теплопроводности при наличии фазовых превращений в системах тел. В настоящем параграфе рассмотрим пример использования этого метода для решения задачи о промерзании жидкости при граничных условиях I рода [119].

Жидкость заполняет полупространство $x>0$ и имеет температуру, равную температуре фазового перехода (температура образования льда) $T_L=0$. С момента времени $\tau=0$ в плоскости $x=0$ поддерживается заданный тепловой режим, задана температура как функция времени $T_S(\tau)$, в результате этого начиная с плоскости $x=0$ идет образование льда. Считая теплофизические свойства твердой фазы (льда) постоянными и теплоту фазового перехода Q заданной, математическую модель рассматриваемого процесса можно записать в виде краевой задачи

$$\partial T/\partial\tau = a\partial^2 T/\partial x^2,\quad \tau>0,\ 0<x<y(\tau); \tag{9.71}$$

$$\left.\begin{aligned} &T(0,\ \tau)=T_S(\tau);\\ &T(y(\tau),\ \tau)=0;\\ &\lambda\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=y(\tau)}=\rho Q\dot{y};\\ &y(0)=0,\end{aligned}\right\} \tag{9.72}$$

где $T(x,\ \tau)$ — искомое поле температур; a, λ — температуропроводность и теплопроводность льда; ρ — плотность льда; $y(\tau)$ — граница раздела фаз; $\dot{y}=\mathrm{d}y/\mathrm{d}\tau$.

В безразмерном виде краевая задача (9.71) — (9.72) может быть записана следующим образом:

$$\partial^2\Theta/\partial X^2 = \mathrm{Sf}\,\partial\Theta/\partial t; \tag{9.73}$$

$$\Theta(0,\ t) = \Theta_S(t); \tag{9.74}$$

$$\Theta(z(t),\ t) = 0; \tag{9.75}$$

$$\partial\Theta/\partial X\,|_{X=z(t)} = \mathrm{d}z/\mathrm{d}t; \tag{9.76}$$

$$z(0) = 0, \tag{9.77}$$

где $t=\tau/\tau_c$; $X = x\sqrt{\rho Q/(\lambda T_c \tau_c)}$; $\Theta = T/T_c$; $z = y\sqrt{\rho Q/(\lambda T_c \tau_c)}$; T_c и τ_c — некоторые характерные величины температуры и времени; $\mathrm{Sf} = c_p T_c/Q$ — число Стефана; c_p — изобарная теплоемкость льда.

Для системы лед — вода число $\mathrm{Sf} \ll 1$, поэтому решение краевой задачи (9.73) — (9.77) ищем в виде ряда:

$$\Theta(X,\ t,\ \mathrm{Sf}) = \Theta_0(X,\ t) + \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Sf}^k \Theta_k(X,\ t). \tag{9.78}$$

Подставив выражение (9.78) в уравнение (9.73) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях Sf, для определения функций $\Theta_k(X,\ t)$ получим систему дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\partial^2\Theta_0/\partial X^2 = 0;\\ &\Theta_0(0,\ t) = \Theta_S(t);\\ &\Theta_0(z(t),\ t) = 0; \end{aligned}\right\} \tag{9.79}$$

$$\left.\begin{aligned} &\partial^2\Theta_k/\partial X^2 = \partial\Theta_{k-1}/\partial t;\\ &\Theta_k(0,\ t) = 0;\\ &\Theta_k(z(t),\ t) = 0\ \ (k=1,\ 2,\ \ldots). \end{aligned}\right\} \tag{9.80}$$

Решая систему уравнений (9.79) — (9.80), получим следующее выражение для поля температур:

$$\Theta(X,\ t,\ \mathrm{Sf}) = \left(1 - \frac{X}{z}\right)\Theta_S + \mathrm{Sf}\,\Theta_S\left[-\left(\frac{1}{3!}\dot{z} + \frac{z\dot{\Theta}_S}{3\Theta_S}\right)X + \right.$$
$$\left. + \frac{\dot{\Theta}_S}{\Theta_S}\frac{X^2}{2!} + \left(\frac{\dot{z}}{z^2} - \frac{\dot{\Theta}_S}{z\Theta_S}\right)\frac{X^3}{3!}\right] + \ldots, \tag{9.81}$$

где $\dot{z} = \mathrm{d}z/\mathrm{d}t$, $\dot{\Theta}_S = \mathrm{d}\Theta_S/\mathrm{d}t$.

По аналогии со сделанным выше, аналитическое выражение для границы раздела фаз представим в виде

$$z(t,\mathrm{Sf}) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Sf}^k z_k(t,\mathrm{Sf}). \tag{9.82}$$

С использованием условия (9.76), как и ранее, приходим к системе дифференциальных уравнений для определения функций $z_k(t, Sf)$:

$$\begin{aligned} &dz_0/dt = \partial\Theta_0/\partial X\,|_{X=z(t)}; \\ &dz_k/dt = \partial\Theta_k/\partial X\,|_{X=z(t)} \quad (k=1,\ 2,\ \ldots). \end{aligned} \tag{9.83}$$

Если в первом уравнении системы (9.83) использовать выражение для функции $\Theta_0(X,\ t)$ из (9.82), то получим уравнение

$$dz_0/dt = -\Theta_S(t)/[z_0 + Sf\,z_1 + O(Sf^2)],$$

интегрирование которого с учетом условия (9.77) [условие (9.77) записывается так: $z_k(0)=0$ ($k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$)] приводит к следующему выражению:

$$z_0(t, Sf) = f_0(t) + \frac{Sf}{f_0(t)} \int\limits_0^t \frac{z_1(t, Sf)\,\Theta_S(t)}{f_0(t)}\,dt, \tag{9.84}$$

где $f_0(t) = \sqrt{-2\int\limits_0^t \Theta_S(t)\,dt}$.

Аналогично сделанному выше второе уравнение системы (9.83) (при $k=1$) может быть редуцировано к виду

$$dz_1/dt = \Theta_S(t)\,[z_0(t)\,\dot\Theta_S(t)/\Theta_S(t) - 2\Theta_S(t)/z_0(t)]/6.$$

Последнее равенство можно проинтегрировать с учетом граничного условия (9.77) и привести, учитывая формулу (9.84), к виду

$$z_1(t, Sf) = \frac{1}{6}\int\limits_0^t f_0(t)\dot\Theta_S(t)\,dt - \frac{1}{3}\int\limits_0^t [\Theta_S(t)]^2/f_0(t)\,dt. \tag{9.85}$$

Выражение (9.85) получено с учетом (9.84), при этом второе слагаемое там не учитывалось.

Таким образом, уравнения (9.82), (9.84) и (9.85) определяют границу раздела фаз системы лед — жидкость в первом приближении.

В качестве конкретного примера рассмотрим процесс образования льда в жидкости в случае, когда $\Theta_S(t)$ является периодической функцией, и пусть $\Theta_S(t) = -\sin t$ ($0 \leqslant t < \pi$). В этом случае формула (9.81) примет вид

$$\Theta(X, Sf, f) = -\left(1 - \frac{X}{z}\right)\sin t - Sf\sin t\left[-\left(\frac{\dot z}{2} + \frac{z\cos t}{3\sin t}\right)X + \right.$$
$$\left. + \operatorname{ctg} t\,\frac{X^2}{2} + \left(\frac{\dot z}{z^2} - \frac{\operatorname{ctg} t}{z}\right)\frac{X^3}{6}\right] + \ldots .$$

Из уравнения (9.85) имеем

$$z_1(t, Sf) = -2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3}\cos\frac{t}{2} - \frac{4}{9}\cos^3 t\right).$$

Подставляя последнее равенство в уравнение (9.84) (с учетом того, что $f_0(t) = 2\sin t$), а затем полученное выражение в (9.82) ($k = 0, 1$), после несложных преобразований получим

$$z(t, Sf) = 2\sin\frac{t}{2} - \frac{Sf}{3}\sin\frac{t}{2}\sin t. \quad (9.86)$$

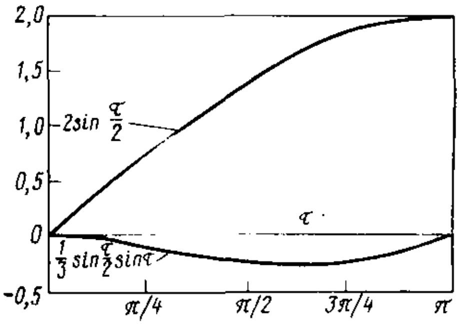


Рис. 9.9. Сравнение изменения во времени функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$

На рис. 9.9 показано изменение функций $f_1(t) = 2\sin\frac{t}{2}$ и $f_2(t) = -\frac{1}{3}\sin\frac{t}{2}\sin t$, откуда следует, что функция f_1 по абсолютному значению значительно превышает функцию f_2. Этот факт свидетельствует о том, что для достижения достаточной точности вычислений можно ограничиваться несколькими приближениями решений. В данном случае оказывается достаточным решение, учитывающее нулевое и первое приближения.

В случае, когда функция $\Theta_S(t)$ изменяется по степенному закону ($\Theta_S = -t^n$), соответствующие выражения для Θ и z примут вид

$$\Theta(X, t) = -\left(1 - \frac{X}{z}\right)t^n - Sf\left[-\left(\frac{\dot z}{6} + \frac{nz}{3t}\right)X + \frac{n}{t}\frac{X^2}{4} + \left(\frac{\dot z}{z^2} - \frac{n}{zt}\right)\frac{X^3}{6}\right]t^n; \; z(t, Sf) = \sqrt{\frac{2}{n+1}}\,t^{\frac{n+1}{2}} - \frac{Sf}{6}\sqrt{\frac{2}{n+1}}\,t^{\frac{3n+1}{2}}.$$

МЕТОДЫ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Получение решения дифференциального уравнения теплопроводности с коэффициентами, зависящими от температуры, связано с большими трудностями из-за нелинейности краевой задачи. Поэтому точное аналитическое решение в настоящее время получено для ограниченного круга задач.

Как отмечено в [65], разработка приближенных методов решения нелинейных краевых задач является первостепенной задачей теории теплопроводности.

§ 10.1. Преобразования зависимых переменных

Многие приемы получения точного аналитического решения нелинейных уравнений теплопроводности основаны на преобразованиях зависимых переменных, которые иногда позволяют линеаризовать исходные уравнения или привести исходную задачу к обыкновенным дифференциальным уравнениям или изменить тип нелинейного уравнения.

Рассмотрим некоторые из них.

Преобразование Кирхгофа. Пусть нелинейное уравнение нестационарной теплопроводности имеет вид

$$c(T)\,\rho(T)\,\partial T/\partial\tau = \mathrm{div}\,(\lambda(T)\,\mathrm{grad}\,T). \qquad (10.1)$$

Преобразованием Кирхгофа называется следующее преобразование зависимой переменной:

$$\Theta = \int\limits_0^T \frac{1}{\lambda_0}\,\lambda(T)\,\mathrm{d}T, \qquad (10.2)$$

где λ_0 — теплопроводность при температуре, равной 0.

Впервые подстановка (10.2) была применена в работах Кирхгофа [116, 117].

Дифференциальные соотношения для перехода к новой искомой функции имеют вид

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\tau} = \frac{\lambda}{\lambda_0}\cdot\frac{\partial T}{\partial\tau};\quad \nabla\Theta = \frac{\lambda}{\lambda_0}\nabla T;\quad \nabla\lambda = \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}T}\nabla T. \qquad (10.3)$$

Применение преобразования Кирхгофа к уравнению (10.1) приводит к уравнению

$$\frac{1}{a}\frac{\partial\Theta}{\partial\tau}=\nabla^2\Theta, \tag{10.4}$$

где $a(\Theta)=\lambda(\Theta)/[c(\Theta)\rho(\Theta)]$.

При этом полагаем, что функция $\Theta=\Theta(T)$ имеет обратную $T=T(\Theta)$.

Для случая нестационарной задачи теплопроводности часто полагают $a(\Theta)=\mathrm{const}$.

Это условие достаточно хорошо выполняется для многих чистых металлов, графита и некоторых теплозащитных материалов.

Для решения краевой задачи с уравнением (10.4) покажем изменение краевых условий при преобразовании (10.2).

Легко видеть, как изменяются начальные условия задачи $T(x, 0)=f(x)$; $\Theta(x, 0)=\Theta[f(x)]$. Граничные условия I рода также не изменяются по форме при преобразовании (10.2):

$$T(x, \tau)|_S=\varphi(x, \tau)|_S;\ \Theta(x, \tau)|_S=\Theta[\varphi(x, \tau)]|_S.$$

При граничных условиях II рода

$$\lambda(T)\,\partial T/\partial n|_S=\psi(x, \tau),\ x\in S,$$

преобразование Кирхгофа приводит к линейному граничному условию

$$\lambda_0\,\partial\Theta/\partial n|_S=\psi(x, \tau),\ x\in S.$$

При стационарном поле температур, описываемом уравнением Пуассона

$$\mathrm{div}\,(\lambda(T)\,\mathrm{grad}\,T)=-q_v, \tag{10.5}$$

преобразование Кирхгофа (10.2) позволяет полностью линеаризовать исходное уравнение (10.5). Линейное уравнение относительно новой функции Θ имеет вид

$$\mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\,\Theta)=-q_v.$$

Теплопроводность пластины при линейной зависимости коэффициента теплопроводности от температуры. Имеем краевую задачу

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial\tau}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)+q_v(x, \tau)\ (0<x<R,\ \tau>0); \tag{10.6}$$

$$T(x, 0)=f(x);\ T(0, \tau)=\varphi(\tau);$$

$$\lambda\frac{\partial T(R, \tau)}{\partial x}=q(\tau).$$

Если теплопроводность зависит от температуры по линейному закону $\lambda(T)=\lambda_0(1+\beta T)$, то преобразование Кирхгофа сводится к подстановке

$$\Theta=\frac{1}{\lambda_0}\int\limits_0^T \lambda(T)\,\mathrm{d}T=T+\frac{\beta T^2}{2}.$$

Преобразованное уравнение теплопроводности примет вид

$$\frac{1}{a}\frac{\partial\Theta}{\partial\tau}=\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}+\frac{q_v(x,\ \tau)}{\lambda_0} \tag{10.7}$$

с краевыми условиями

$$\left.\begin{aligned}&\Theta(x,\ 0)=f(x)+\beta f^2(x)/2\equiv F(x);\\&\Theta(0,\ \tau)=\varphi(\tau)+\beta\varphi^2(\tau)/2=\Phi(\tau);\\&\lambda_0[\partial\Theta(R,\ \tau)/\partial x]=q(\tau).\end{aligned}\right\} \tag{10.8}$$

Задача (10.7), (10.8) может быть решена аналитически при $a=$ $=\mathrm{const}$. Переход от Θ к T в этом случае осуществляется по формуле

$$T(x,\ \tau)=\{[1+2\beta\Theta(x,\ \tau)]^{1/2}-1\}/\beta.$$

Таким образом, преобразование Кирхгофа не изменяет области изменения независимых переменных и позволяет полностью линеаризовать квазилинейную краевую задачу стационарной теплопроводности при граничных условиях I и II родов. При нестационарном температурном поле преобразование позволяет записать исходное уравнение в более простой форме, которая, в частности, более удобна при дальнейшем решении задачи, например с помощью ЭЦВМ.

Разделение переменных. В некоторых специальных случаях при степенной зависимости теплофизических коэффициентов материала от температуры ($c\sim T^m$, $\lambda\sim T^n$) удается получить точные решения краевых задач для квазилинейного уравнения теплопроводности методом разделения переменных [12]. Уравнение теплопроводности в этом случае имеет вид

$$\frac{1}{a_0}T^m\frac{\partial T}{\partial\tau}=\operatorname{div}(T^n\operatorname{grad}T), \tag{10.9}$$

где $a_0=\lambda_0/(c_0\rho)$ — температуропроводность при $m=n=0$ и температуре T_0.

Применим преобразование Кирхгофа

$$\Theta=(m+1)\int\limits_0^T T^m\,\mathrm{d}T=T^{m+1}$$

к уравнению (10.9), тогда с учетом соотношений

$$T = \Theta^{1/(m+1)}; \quad T^n_m = \Theta^{n/(m+1)};$$

$$\operatorname{grad} T = \frac{1}{m+1} \Theta^{-m/(m+1)} \operatorname{grad} \Theta;$$

$$T^m \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{1}{m+1} \frac{\partial \Theta}{\partial \tau}$$

уравнение (10.9) преобразуется в следующее:

$$\frac{1}{a_0} \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \operatorname{div} (\Theta^{(n-m)/(m+1)} \operatorname{grad} \Theta). \tag{10.10}$$

Уравнение (10.10) имеет вид уравнения теплопроводности со степенной зависимостью от температуры только теплопроводности. Поэтому будем рассматривать только уравнения вида

$$\frac{1}{a_0} \frac{\partial T}{\partial \tau} = \operatorname{div} (T^k \operatorname{grad} T),$$

ограничиваясь одномерной задачей по пространственным переменным. Вводя показатель геометрии пространства ν, имеем

$$\frac{1}{a_0} \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{1}{r^{\nu-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(T^k r^{\nu-1} \frac{\partial T}{\partial r} \right), \tag{10.11}$$

где $\nu = 1$, 2, 3 для прямоугольной, цилиндрической и сферической систем координат соответственно.

Частные решения уравнения (10.11) ищем в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит только от одного аргумента

$$T(r, \tau) = V(\eta) U(\tau), \tag{10.12}$$

где аргумент $\eta = r/R(\tau)$; $R(\tau)$ — пока не известная функция, определяемая в дальнейшем.

Переменную η называют *подобной переменной*, так как значение функции $V(\eta)$ в точке η_0 не изменяется для всех точек кривой $r = \eta_0 R(\tau)$ на плоскости r, τ. Полагая, что уравнение (10.11) допускает решение в форме разделенных переменных (10.12), подставим (10.12) в (10.11) и получим обыкновенные уравнения для определения функций $U(\tau)$, $V(\eta)$, $R(\tau)$.

Вычислим значения производных в уравнении (10.11):

$$\frac{\partial T}{\partial \tau}=V(\eta)U'(\tau)-r\frac{U(\tau)R'(\tau)}{R^2(\tau)}\frac{dV}{d\eta}=V(\eta)U'(\tau)-\eta\frac{R'(\tau)}{R(\tau)}U(\tau)\frac{dV}{d\eta};$$

$$\frac{\partial T}{\partial r}=\frac{U(\tau)}{R(\tau)}\frac{dV}{d\eta};$$

$$T^k r^{\nu-1}\frac{\partial T}{\partial r}=\frac{U^{k+1}(\tau)}{R(\tau)}r^{\nu-1}V^k(\eta)\frac{dV}{d\eta};$$

$$\frac{1}{r^{\nu-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(T^k r^{\nu-1}\frac{\partial T}{\partial r}\right)=\left[\frac{1}{R(\tau)\eta}\right]^{\nu-1}\frac{1}{R(\tau)}\frac{d}{d\eta}\left[\frac{U^{k+1}(\tau)}{R(\tau)}R^{\nu-1}(\tau)\times\right.$$

$$\left.\times\eta^{\nu-1}V^k(\eta)\frac{dV}{d\eta}\right]=\frac{U^{k+1}(\tau)}{R^2(\tau)}\frac{1}{\eta^{\nu-1}}\frac{d}{d\eta}\left[V^k(\eta)\eta^{\nu-1}\frac{dV}{d\eta}\right].$$

Подставляя полученные значения производных в уравнение (10.11) и умножая обе части получившегося уравнения на $R^2(\tau)\neq 0$, получим

$$U^{k+1}(\tau)\frac{1}{\eta^{\nu-1}}\frac{d}{d\eta}\left[V^k(\eta)\eta^{\nu-1}\frac{dV}{d\eta}\right]=\frac{R(\tau)}{a_0}\left[R(\tau)U'(\tau)V(\eta)-\right.$$

$$\left.-\eta U(\tau)R'(\tau)\frac{dV}{d\eta}\right]. \qquad (10.13)$$

Для того чтобы в уравнении (10.13) переменные разделились, потребуем, чтобы функции $U(\tau)$ и $R(\tau)$ были связаны между собой дифференциальным уравнением

$$U(\tau)R'(\tau)=-CU'(\tau)R(\tau), \qquad (10.14)$$

где C — произвольная постоянная.

Интеграл уравнения (10.14) имеет вид

$$R(\tau)=[U(\tau)]^{-C} \text{ или } U(\tau)=[R(\tau)]^{-1/C}.$$

С учетом связи (10.14) правая часть уравнения (10.13) запишется в виде

$$R(\tau)[R(\tau)U'(\tau)V(\eta)-\eta U(\tau)R'(\tau)dV/d\eta]=R^2(\tau)U'(\tau)\times$$
$$\times[V(\eta)+C\eta\, dV/d\eta]. \qquad (10.15)$$

Произведем разделение переменных в уравнении (10.13) с учетом (10.15):

$$\frac{\frac{1}{\eta^{\nu-1}}\frac{d}{d\eta}\left[V^k(\eta)\eta^{\nu-1}\frac{dV}{d\eta}\right]}{V(\eta)+C\eta\frac{dV}{d\eta}}=\frac{R^2(\tau)U'(\tau)}{a_0U^{k+1}(\tau)}=-B,$$

где B — постоянная разделения.

Для определения функций $V(\eta)$ и $R(\tau)$ имеем обыкновенные дифференциальные уравнения

$$\frac{d}{d\eta}\left[V^k(\eta)\,\eta^{\nu-1}\frac{dV}{d\eta}\right]+CB\eta^\nu\frac{dV}{d\eta}+B\eta^{\nu-1}V(\eta)=0; \tag{10.16}$$

$$R^{(C+k)/C}(\tau)\,R'(\tau)=a_0CB. \tag{10.17}$$

Уравнение (10.17) легко интегрируется, его общее решение имеет вид

$$R(\tau)=\left[\frac{a_0C^2B}{2C+k}(\tau_0+\tau)\right]^{C/(2C+k)}, \tag{10.18}$$

где τ_0 — произвольная постоянная интегрирования.

По известной функции $R(\tau)$ легко определяется

$$U(\tau)=\left[\frac{a_0C^2B}{2C+k}(\tau_0+\tau)\right]^{-1/(2C+k)}. \tag{10.19}$$

Для определения функции $V(\eta)$ перепишем уравнение (10.16) в более удобном для интегрирования виде:

$$\frac{d}{d\eta}\left[\eta^{(1-C)/C}V^k(\eta)\frac{dV}{d\eta}\right]-\frac{1-\nu C}{(k+1)C}\eta^{(1-2C)/C}\frac{dV^{k+1}}{d\eta}+$$

$$+CB\frac{d}{d\eta}[\eta^{1/C}V(\eta)]=0. \tag{10.20}$$

Уравнение (10.20) может быть проинтегрировано по η один раз в двух специальных случаях: $C=1/\nu$; $C=1/2$.

Рассмотрим первый случай. Опуская постоянную интегрирования, получим дифференциальное уравнение первого порядка

$$\eta^{\nu-1}V^k(\eta)\frac{dV}{d\eta}+\frac{B}{\nu}\eta^\nu V(\eta)=0;$$

так как $\eta^{\nu-1}V(\eta)\neq0$, то, производя сокращение на этот множитель, получим

$$\frac{dV^k(\eta)}{d\eta}=-\frac{k}{\nu}B\eta.$$

Интеграл последнего уравнения запишется в виде

$$V(\eta)=\left[\frac{k}{2\nu}B\left(\eta_0^2-\eta^2\right)\right]^{1/k}, \tag{10.21}$$

где η_0 — постоянная интегрирования.

Из решения (10.21) видно, что при $\eta=\eta_0$ функция принимает нулевое значение. А из дифференциального уравнения (10.16) следует, что при $\eta=\eta_0$ обращаются в нуль первая и все последующие производные функции $V(\eta)$. Поэтому для всех $\eta\geqslant\eta_0$ функция $V(\eta)$ тождественно равна нулю. Поэтому с учетом решений (10.18), (10.19), (10.21) семейство частных решений исходного уравнения (10.11) представится в следующей форме:

$$T(r,\ \tau)=\begin{cases}\left[\dfrac{a_0B}{(2+\nu k)\,\nu}(\tau_0+\tau)\right]^{-\frac{\nu}{2+\nu k}}\left[\dfrac{kB}{2\nu}\left(\eta_0^2-\eta^2\right)\right]^{\frac{1}{k}}, & 0\leqslant\eta\leqslant\eta_0;\\ 0, & \eta_0\leqslant\eta<\infty.\end{cases}\qquad(10.22)$$

где $\eta=\dfrac{r}{R(\tau)}=r\left[\dfrac{a_0B}{(2+\nu k)\,\nu}(\tau_0+\tau)\right]^{-1/(2+\nu k)}$.

Полученное семейство решений, зависящее от трех произвольных постоянных B, τ_0, η_0, позволяет получать точные аналитические решения конкретных краевых задач.

Специфической чертой процессов, описываемых нелинейными уравнениями теплопроводности со степенной зависимостью теплопроводности от температуры, является наличие конечной области влияния. Граница фронта, отделяющая возмущенную среду от среды, до которой в данный момент времени τ возмущение еще не дошло, определяется выражением

$$\delta(\tau)=\eta_0\left[\frac{a_0B}{(2+\nu k)\,\nu}(\tau_0+\tau)\right]^{1/(2+\nu k)},$$

а конечная скорость распространения возмущения

$$v=\frac{\eta_0a_0B}{(2+\nu k)^2\,\nu}\left[\frac{a_0B}{(2+\nu k)\,\nu}(\tau_0+\tau)\right]^{-(1+\nu k)/(2+\nu k)}.$$

Таким образом, в нелинейной теории теплопроводности, если в начальный момент времени теплопроводность равна нулю, то в каждый данный момент времени тепловое возмущение охватывает только определенный конечный объем.

Рассмотрим второй случай, когда $C=1/2$, тогда

$$\frac{d}{d\eta}\left[\frac{\eta}{k+1}\frac{dV^{k+1}}{d\eta}-\frac{2-\nu}{k+1}V^{k+1}(\eta)+\frac{1}{2}B\eta^2V(\eta)\right]=0.\qquad(10.23)$$

Интегрируя (10.23) и опуская постоянную интегрирования, получим

$$\eta\frac{dV^k}{d\eta}-\frac{(2-\nu)\,k}{k+1}V^k(\eta)=-\frac{k}{2}B\eta^2.$$

Семейство решений нелинейного уравнения (10.23) найдем, интегрируя последнее уравнение:

$$V(\eta)=\begin{cases} \eta^{\frac{2-\nu}{k+1}}\left[\dfrac{k(k+1)}{2(2+\nu k)}B\left(\eta_0^{\frac{2+\nu k}{k+1}}-\eta^{\frac{2+k\nu}{k+1}}\right)\right]^{\frac{1}{k}}, & 0\leqslant\eta\leqslant\eta_0;\\ 0, & \eta_0\leqslant\eta<\infty. \end{cases}$$

Тогда семейство частных решений нелинейного уравнения теплопроводности (10.11) запишется в виде

$$T(r,\tau)=\begin{cases} \left[\dfrac{a_0B}{4(1+k)}(\tau_0+\tau)\right]^{-\frac{1}{1+k}}\eta^{\frac{2-\nu}{1+k}}\left[\dfrac{k(k+1)}{2(2+\nu k)}B\times\right.\\ \left.\times\left(\eta_0^{\frac{2+k\nu}{k+1}}-\eta^{\frac{2+k\nu}{k+1}}\right)\right]^{\frac{1}{k}}, & 0\leqslant\eta\leqslant\eta_0;\\ 0, & \eta_0\leqslant\eta<\infty, \end{cases} \tag{10.24}$$

где $\eta=r\left[\dfrac{a_0B}{4(1+k)}(\tau_0+\tau)\right]^{-1/[2(1+k)]}$.

В полученных решениях (10.22) и (10.24) можно легко избавиться от параметра τ_0 посредством сдвига во времени, т. е. вместо $\tau_0+\tau$ пишут τ. При этом дифференциальное уравнение (10.11) инвариантно относительно сдвига по τ.

Рассмотрим пример определения постоянных B и η_0 в полученных решениях при конкретных краевых условиях задачи. Пусть в начальный момент времени в точке пространства, являющейся началом координат, мгновенно выделяется количество теплоты Q. Необходимо найти решение уравнения (10.11), описывающего процесс распространения тепловой волны, вызываемой этим мгновенным точечным источником. Согласно закону сохранения, общее количество теплоты в рассматриваемом пространстве не изменяется во времени, т. е. должно выполняться условие

$$\int_0^\infty T(r,\tau)\,r^{\nu-1}\,dr=Q/S_\nu=\text{const}, \tag{10.25}$$

где S_ν — площадь единичной сферы в пространстве соответствующей геометрии.

Если подставить выражение (10.12) в (10.25) и перейти к переменной интегрирования η, то получим

$$\int_0^\infty T(r,\ \tau)\, r^{\nu-1}\,\mathrm{d}r = R^\nu(\tau)\, U(\tau) \int_0^\infty V(\eta)\,\eta^{\nu-1}\,\mathrm{d}\eta =$$

$$= U^{1-Cn}(\tau) \int_0^\infty V(\eta)\,\eta^{\nu-1}\,\mathrm{d}\eta = Q/S_\nu, \qquad (10.26)$$

а это возможно в случае, когда $C=1/n$.

Этот случай нами исследован выше, и решения представлены в виде выражения (10.22). Однако среди решений (10.22) физический интерес представляют только решения, для которых выполняется условие

$$\partial T(0,\ \tau)/\partial r = 0,\ T(\infty,\ \tau) = 0. \qquad (10.27)$$

Второе условие в (10.27) удовлетворяется автоматически, так как $T(r,\ \tau)=0$ при $\eta \geqslant \eta_0$, т. е. при $r > \delta(\tau)$.

Первое условие также выполняется для решений (10.22), так как $\mathrm{d}V(0)/\mathrm{d}\eta = 0$, что следует из решения (10.21).

Таким образом, для определения постоянных B и η_0 у нас остается только одно условие (10.26). Подставляя в условие (10.26) выражение (10.21), перепишем его в виде

$$\int_0^\infty V(\eta)\,\eta^{\nu-1}\,\mathrm{d}\eta = \left(\frac{kB}{2\nu}\right)^{1/k} \int_0^{\eta_0} \left(\eta_0^2-\eta^2\right)^{1/k} \eta^{\nu-1}\,\mathrm{d}\eta =$$

$$= \left(\frac{k}{2\nu}\right)^{1/k} \left(B\eta_0^{2+k\nu}\right)^{\frac{1}{\nu}} \int_0^1 (1-t^2)^{1/k} t^{\nu-1}\,\mathrm{d}t = Q/S_\nu.$$

Из последнего равенства имеем

$$\left(B\eta_0^{2+k\nu}\right)^{1/k} = \frac{Q}{S_\nu}\left(\frac{2\nu}{k}\right)^{1/k} J_{k\nu}; \qquad (10.28)$$

где $$J_{k\nu}^{-1} = \int_0^1 (1-t^2)^{1/k} t^{\nu-1}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2+k}\,\dfrac{\Gamma(1/k)}{\Gamma(1/2+1/k)}, & \nu=1; \\ \dfrac{k}{2(1+k)}, & \nu=2; \\ \dfrac{k\sqrt{\pi}}{2(2+3k)}\,\dfrac{\Gamma(1+1/k)}{\Gamma(3/2+1/k)}, & \nu=3 \end{cases}$$

($\Gamma(x)$ — гамма-функция).

Вычислим площадь единичной сферы $S_\nu = 2\left(\sqrt{\pi}\right)^\nu \Gamma(\nu/2)$ и запишем (10.28) в виде

$$\eta_0^2 B^{2/(2+\nu k)} = \left(\frac{2\nu}{k}\,\frac{Q^k}{\varphi_{k\nu}^k}\right)^{2/(2+\nu k)}, \qquad (10.29)$$

где $\varphi_{k\nu} = S_\nu J_{k\nu}^{-1} = \dfrac{2\left(\sqrt{\pi}\right)^\nu}{2+\nu k}\,\dfrac{\Gamma(1/k)}{\Gamma(\nu/2+1/k)}$. Использовав все условия поставленной задачи, удалось определить только связь между параметрами η_0 и B. Однако этого достаточно для однозначного решения задачи, так как анализ решений (10.22) и (10.24) показывает, что они зависят фактически только от комбинации $\eta_0^2 B^{2/(2+\nu k)}$ постоянных η_0 и B.

В самом деле,

$$T(r,\ \tau)=U(\tau)\,V\left(\frac{r}{R(\tau)}\right)=U(\tau)\,R^{-2/k}(\tau)\,B^{1/k}\left(\frac{k}{2\nu}\right)^{1/k}\times$$

$$\times\left[\eta_0^2 R^2(\tau)-r^2\right]^{1/k}=\left(\frac{Bk}{2\nu}\right)^{1/k}R^{-(2+\nu k)/k}(\tau)\left[\eta_0^2 R^2(\tau)-r^2\right]^{1/k}=$$

$$=\left[\frac{(2+\nu k)\,k}{2a\tau}\right]^{1/k}\left\{\eta_0^2 B^{2/(2+\nu k)}\left[\frac{a\tau}{(2+\nu k)\,\nu}\right]^{2/(2+\nu k)}-r^2\right]^{1/k},\quad 0\leqslant r\leqslant\delta(\tau). \tag{10.30}$$

где $\delta(\tau)=\eta_0 B^{1/(2+\nu k)}\left[\dfrac{a\tau}{(2+\nu k)\,\nu}\right]^{1/(2+\nu k)}$.

Подставляя в решение (10.30) значения комбинации постоянных η_0 и B (20.29), получим точное решение задачи о распространении тепловой волны в виде

$$T(r,\ \tau)=\begin{cases}\left\{\left[\dfrac{(2+\nu k)\,k}{2a\tau}\right]^{n}\left(\dfrac{Q}{\varphi_{k\nu}}\right)^{2}\right\}^{1/(2+\nu k)}\left[1-\dfrac{r^2}{\delta^2(\tau)}\right], \\ 0\leqslant r\leqslant\delta(\tau), \\ 0,\quad \delta(\tau)\leqslant r<\infty,\end{cases}$$

где

$$\delta(\tau)=\frac{2}{k}\left[\frac{a\tau}{2+\nu k}\left(\frac{Q}{\varphi_{k\nu}}\right)^{k}\right]^{1/(2+\nu k)};$$

$$\varphi_{k\nu}=\frac{2}{2+\nu k}\,\pi^{\frac{\nu}{2}}\,\frac{\Gamma(1/\nu)}{\Gamma(\nu/2+1/k)}.$$

Итак, в рассматриваемом случае нам удалось довести решение сложной нелинейной задачи до конца и получить точное аналитическое решение.

Однако такие случаи очень редки. Поэтому считается, что при решении нелинейных задач методом разделения переменных даже сведение исходной краевой задачи к частных производных к исследованию обыкновенных дифференциальных уравнений — это значительное продвижение на пути получения конечного результата.

Точное решение нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, как правило, не может быть получено. В этих случаях следует применить численные или приближенные аналитические методы интегрирования получаемых обыкновенных дифференциальных уравнений.

6*

Подстановка Гудмэна. Интегральное преобразование зависимой переменной T типа

$$H=\int_0^T C_V dT,\ \partial H/\partial T=C_V, \tag{10.31}$$

где H — однозначная функция T, называется *подстановкой Гудмэна* или *преобразованием Гудмэна*; $C_V=c(T)\rho(T)$.

Применение преобразования (10.31) к уравнению (10.1) с учетом соотношений $\partial H/\partial\tau=C_V\partial T/\partial\tau$, $\nabla H=C_V\nabla T$ позволяет привести уравнение (10.1) к виду $\partial H/\partial\tau=\operatorname{div}[a(H)\operatorname{grad}H]$, где $a(H)=$ $=\lambda(H)/C_V(H)$.

Несмотря на то что подстановка Гудмэна не позволяет линеаризовать исходное уравнение, она меняет тип нелинейного уравнения, что может быть полезно при дальнейшем исследовании уравнения. Преобразование Гудмэна часто применяют совместно с преобразованием Кирхгофа.

§ 10.2. Преобразования независимых переменных (метод подобия)

Для упрощения задачи решения нелинейного дифференциального уравнения теплопроводности можно применять различные преобразования независимых переменных, приводящие к нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Решение нелинейного уравнения теплопроводности при зависимости теплофизических свойств от температуры получено аналитически только в случае некоторых краевых задач для полуограниченного тела. Для тел конечных размеров разработаны приближенные методы решения.

Преобразование Больцмана. Необходимо решить дифференциальное уравнение теплопроводности

$$c(T)\rho(T)\partial T/\partial\tau=\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right]\ (x>0,\ \tau>0) \tag{10.32}$$

при краевых условиях

$$T(x,\ 0)=T_0,\ T(0,\ \tau)=T_c. \tag{10.33}$$

Анализ размерности величин, входящих в уравнение (10.32), показывает, что уравнение остается без изменений, если масштаб длины изменить в k раз, а масштаб времени — в k^2 раз. При таком совместном изменении масштабов длины и времени краевые условия (10.33) также не изменяются, $T(kx,\ k^2\tau)\equiv T(x,\ \tau)$ при любых значениях x, τ, k.

Введем $k=1/\left(2\sqrt{\tau}\right)$, тогда получим

$$T(x,\ \tau)=T\left(x/\left(2\sqrt{\tau}\right),\ 1/4\right)=T^*f(\eta),$$

где T^* представляет собой некоторое фиксированное значение температуры, а $\eta=x/\left(2\sqrt{\tau}\right)$.

Таким образом, T зависит только от переменной η. Поэтому следует искать зависимость температуры от аргумента η, который является комбинацией переменных x и τ.

Вычислим производные, входящие в уравнение (10.32):

$$\frac{\partial T}{\partial \tau}=-\frac{xT^*}{4\tau\sqrt{\tau}}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\eta}=-T^*\frac{\eta}{2\tau}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\eta};$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{T^*}{2\sqrt{\tau}}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\eta};\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial\left(2\sqrt{\tau}\,\eta\right)}\left(\lambda\frac{T^*}{2\sqrt{\tau}}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\eta}\right)=$$

$$=\frac{T^*}{4\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\lambda\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\eta}\right).$$

Подставляя полученные соотношения в уравнение (10.32), получим для $f(\eta)$ уравнение в полных дифференциалах

$$-2c(f)\rho(f)\eta\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\eta}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left[\lambda(f)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\eta}\right] \qquad (10.34)$$

с краевыми условиями

$$f(\infty)=T_0/T^*,\ f(0)=T_c/T^*.$$

В случаях, когда получение аналитического решения уравнения (10.34) затруднено, можно воспользоваться численными методами. Преобразование независимых переменных $\eta=x/\left(2\sqrt{\tau}\right)$ называют *преобразованием Больцмана*. Подстановка применима к уравнению (10.32) только в случае теплопереноса в неограниченной или полуограниченной среде, в противном случае не удается так разделить переменные, чтобы граничные условия зависели только от одной переменной η. Например, в случае неограниченной пластины толщиной R при граничных условиях

$$T(0,\ \tau)=T_c,\ T(R,\ \tau)=T_S$$

нельзя использовать подстановку Больцмана, так как аргумент во втором условии после преобразования становится зависящим от времени τ.

Теплопроводность полупространства при линейной зависимости коэффициента температуропроводности от температуры. При постоянной объемной теплоемкости $c\rho=\mathrm{const}$ уравнение теплопроводности запишется так:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau}=\frac{\partial}{\partial x}\left[a(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right],$$

где $a(T)=\lambda(T)/(c\rho)$.

Рассмотрим случай [82], когда $a=a_0(T/T_0)$ для полупространства $0<x<\infty$ с краевыми условиями $T(0, \tau)=T_0=\text{const}$, $T(x, 0)=0$.

Тогда, применяя подстановку

$$\xi = x/\left(2\sqrt{a_0\tau}\right),$$

получим уравнение в полных дифференциалах

$$2\xi(\mathrm{d}\Theta/\mathrm{d}\xi)+(\mathrm{d}\Theta/\mathrm{d}\xi)^2+\Theta(\mathrm{d}^2\Theta/\mathrm{d}\xi^2)=0,$$

где

$$\Theta=T/T_0.$$

Последнее уравнение можно упростить, положив $\vartheta=\Theta^2$:

$$\mathrm{d}^2\vartheta/\mathrm{d}\xi^2+\left(2\xi/\sqrt{\vartheta}\right)(\mathrm{d}\vartheta/\mathrm{d}\xi)=0,$$

граничные условия примут вид

$$\vartheta=1 \text{ при } \xi=0, \ \vartheta=0 \text{ при } \xi=\infty.$$

Дальше необходимо применить численные методы интегрирования дифференциальных уравнений второго порядка [55].

Сведение краевой задачи для полупространства к нелинейному интегральному уравнению. Приведем метод решения нелинейного уравнения теплопроводности для полупространства ($0<x<\infty$), изложенный в работе [69]. Имеем краевую задачу

$$c(T)\rho(T)\frac{\partial T}{\partial\tau}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right] \quad (0<x<\infty, \ \tau>0); \tag{10.35}$$

$$T(x, 0)=T_0;$$

$$T(0, \tau)=T_c; \ \partial T(\infty, \tau)/\partial x=0.$$

Сократим число независимых переменных в задаче, описываемой уравнениями (10.35), с помощью подстановки $\xi=x/\sqrt{\tau}$. Тогда уравнения (10.35) запишутся в виде

$$-\frac{\xi}{2}c\rho\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\xi}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(\lambda\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\xi}\right);$$

$$T(\infty)=T_0; \ T(0)=T_c; \ \mathrm{d}T(\infty)/\mathrm{d}\xi=0. \tag{10.36}$$

Понизим порядок дифференциального уравнения в (10.36) введением подстановки $\mathrm{d}T/\mathrm{d}\xi=u$, тогда уравнение в (10.36) примет вид

$$-\frac{\xi}{2}c\rho\frac{\mathrm{d}\xi}{\lambda}=\frac{\mathrm{d}(\lambda u)}{\lambda u}. \tag{10.37}$$

Интегрируя уравнение (10.37), получим выражение

$$\ln(\lambda u) = -c\rho \int_0^{\xi} \xi/(2\lambda)\, d\xi + \ln A$$

или $\lambda u = A \exp\left[-c\rho \int_0^{\xi} \xi/(2\lambda)\, d\xi\right]$.

Вспоминая определение функции u, проинтегрируем последнее уравнение еще раз:

$$T = A \int_0^{\xi} \exp\left[-c\rho \int_0^{t} \frac{\xi}{2\lambda} d\xi\right] \frac{dt}{\lambda} + B.$$

Постоянные интегрирования A и B определим из граничных условий в (10.36). Решение в безразмерном виде представится в окончательной форме:

$$\Theta(x, \tau) = \frac{T_c - T(x, \tau)}{T_c - T_0} = \frac{\int_0^{\xi} \exp\left[-c\rho \int_0^{t} \frac{\xi}{2\lambda} d\xi\right] \frac{dt}{\lambda}}{\int_0^{\infty} \exp\left[-c\rho \int_0^{t} \frac{\xi}{2\lambda} d\xi\right] \frac{dt}{\lambda}}. \qquad (10.38)$$

Уравнение (10.38) дает функциональное решение задачи (10.35) и представляет собой нелинейное интегральное уравнение, так как в его правую часть входит температура T.

Одним из возможных методов решения нелинейного интегрального уравнения (10.38) является метод последовательных приближений. Если уравнение (10.38) записать в виде $\Theta = F(\Theta)$, то последовательные приближения находят по формуле

$\Theta_{n+1} = F(\Theta_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Процедура расчета повторяется до тех пор, пока отличие между следующими друг за другом приближениями не даст результат с интересующей нас точностью.

Получим формулу для определения начального — нулевого приближения. С этой целью в функциональном решении (10.38) положим $c\rho = \text{const}$, тогда получим

$$\Theta(x, \tau) = \frac{\int_0^{\eta} \exp\left[-\int_0^{\eta} \frac{2\eta}{\lambda^*} d\eta\right] \frac{d\eta}{\lambda^*}}{\int_0^{\infty} \exp\left[-\int_0^{\eta} \frac{2\eta}{\lambda^*} d\eta\right] \frac{d\eta}{\lambda^*}}, \qquad (10.39)$$

где $\lambda^* = \lambda/\lambda_0 = \lambda^*(\Theta)$; $\eta = x/\left(2\sqrt{a_0\tau}\right)$; $a_0 = \lambda_0/(c\rho)$, λ_0 — теплопроводность при температуре, равной начальной T_0.

Положив в (10.39) $\lambda^*=1$, т. е. допуская, что $\lambda=\lambda_0$, из (10.39) получим нулевое приближение для процедуры последовательных приближений $\Theta=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\eta \exp(-\eta^2)\,d\eta=\operatorname{erf}\eta$.

При проведении расчетов следует иметь в виду, что *для значений $\eta\geqslant3{,}0$ функция $\operatorname{erf}\eta=1$ с высокой степенью точности и, следовательно,* тем самым определяется целесообразный интервал изменения η.

Реализация метода последовательных приближений целесообразна с использованием ЭЦВМ.

Общее преобразование подобия. *Преобразование Больцмана* является частным случаем общего метода автомодельных решений (метода подобия) или метода теории групп, который часто применяется для получения асимптотических оценок поведения искомой функции.

Рассмотрим, в частности, *более общее одновременное преобразование* независимых и зависимой переменных [12]:

$$\eta=Ag(\tau)h(x);\quad T=Bk(\tau)l(x)f(\eta), \tag{10.40}$$

где A, B — произвольные постоянные; g, h, k, l, f — функции, подбираемые и определяемые как решения нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Отметим, что преобразование (10.40) включает в себя как частный случай и метод разделения переменных.

Нелинейное дифференциальное уравнение теплопроводности (10.32) с помощью преобразований зависимой переменной можно привести к одному из видов:

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\tau}=\frac{\partial}{\partial x}\left[a(\Theta)\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right]$$

или

$$\frac{1}{a(\Theta)}\,\frac{\partial\Theta}{\partial\tau}=\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}.$$

Первое уравнение можно получить, используя преобразование Гудмэна, а второе — преобразование Кирхгофа.

Пусть коэффициент $a(\Theta)$ является степенной функцией, тогда решение краевой задачи

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\tau}=a_0\frac{\partial}{\partial x}\left[\Theta^k\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right](a_0=\text{const},\ k>0); \tag{10.41}$$

$$\Theta(x,\ 0)=0,\ \Theta(0,\ \tau)=\Theta_0\tau^n,\ \Theta(\infty,\ \tau)=0\ (n>0)$$

получим, применив общее преобразование подобия (10.40).

Пусть $\eta=x/(c\tau^m)$, $\Theta(x,\tau)=\tau^n f(\eta)$, где $c=\mathrm{const}$, тогда

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\tau}=\tau^{n-1}\left(nf-m\eta\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\eta}\right),\quad \frac{\partial\Theta}{\partial x}=\frac{1}{c}\tau^{n-m}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\eta};$$

$$\Theta^k\frac{\partial\Theta}{\partial x}=\frac{1}{c}\tau^{n(1+k)-m}f^k\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\eta};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\Theta^k\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)=\frac{1}{c^2}\tau^{n(1+k)-2m}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(f^k\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\eta}\right)$$

и уравнение (10.41) принимает вид

$$\tau^{n-1}\left(nf-m\eta\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\eta}\right)=\frac{a_0}{c^2}\tau^{n(1+k)-2m}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(f^k\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\eta}\right).$$

Упростим последнее уравнение, исключив зависимость от τ, использовав право выбора числа m.

Положим $n-1=n(1+k)-2m$, откуда $m=(1+nk)/2$.

Сокращая получившееся уравнение на τ^{n-1}, имеем обыкновенное нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка для функции $f(\eta)$

$$nf-\frac{1+nk}{2}n\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\eta}=\frac{a_0}{c^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(f^k\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\eta}\right), \tag{10.42}$$

к которому присоединим преобразованные граничные условия

$$f(0)=\Theta_0,\quad f(\infty)=0.$$

В общем случае уравнение (10.42) интегрируют численно. Рассмотрим частный случай, когда $n=1/k$.

Тогда, полагая $u(\eta)=f(\eta)/\Theta_0$, получим краевую задачу

$$\frac{1}{k}u-\eta\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\eta}=\frac{a_0\Theta_0^k}{c^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(u^k\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\eta}\right),\quad u(0)=1,\quad u(\infty)=0. \tag{10.43}$$

Положим $c^2=a_0\Theta_0^k/k$, тогда уравнение в (10.43) примет вид

$$\frac{1}{k}u-\eta\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\eta}=k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(u^k\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\eta}\right). \tag{10.44}$$

Ищем решение уравнения (10.44) $u(\eta)=(1-\eta)^\alpha$, удовлетворяющее первому из граничных условий в (10.43). При этом $\mathrm{d}u/\mathrm{d}\eta=-\alpha(1-\eta)^{\alpha-1}=-\alpha(1-\eta)^{-1}u(\eta)$, $u^k\mathrm{d}u/\mathrm{d}\eta=-\alpha(1-\eta)^{\alpha k-1}u(\eta)$, поэтому, полагая $\alpha=1/k$, запишем уравнение (10.44) в виде $u/k-\eta\,\mathrm{d}u/\mathrm{d}\eta=-\mathrm{d}u/\mathrm{d}\eta$.

Частное решение последнего уравнения есть

$$u(\eta)=(1-\eta)^{1/k}.$$

Так как при этом $k>0$, то это решение вещественно только на отрезке $0 \leqslant \eta \leqslant 1$.

Для того чтобы получить решение краевой задачи (10.43) на всем интервале $0 \leqslant \eta < \infty$, рассмотрим краевую задачу для уравнения (10.44) в области $1 \leqslant \eta < \infty$, а именно $u(1)=0$, $u(\infty)=0$.

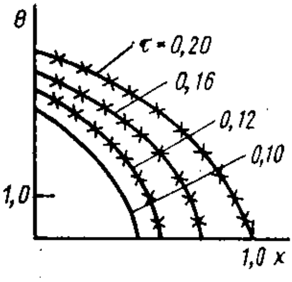


Рис. 10.1. Распределение температуры в полуограниченном массиве [100]

В силу непрерывности решения дифференциального уравнения (10.44) следует, что $\mathrm{d}u(1)/\mathrm{d}\eta$ и все производные более высоких порядков при $\eta=1$ равны нулю. Поэтому решение $u(\eta)=(1-\eta)^{1/k}$ следует продолжить на полуось $1 \leqslant \eta < \infty$ тождественным нулем, т. е. $u(\eta)=0$ при $\eta \geqslant 1$. Таким образом, решение краевой задачи (10.41) при $n=1/k$, $m=1$ получим в виде

$$\Theta(x, \tau)=\begin{cases} \Theta_0 \tau^{1/k} (1-x/(c\tau))^{1/k}, & 0 \leqslant x \leqslant c\tau; \\ 0 & , x > c\tau \end{cases}$$

Анализ решения показывает, что и в этом случае волна теплового возмущения движется с конечной скоростью $c=\sqrt{a_0 \Theta_0^k / k}$. На рис. 10.1 показано распределение $\Theta(x, \tau)$ для значений параметров $k=2$, $\Theta_0=10$, $a_0=0{,}5$.

При $k \to 0$ $a=a_0\Theta^k \to a_0$, а скорость распространения теплового возмущения $c \to \infty$.

§ 10.3. О способах линеаризации нелинейного уравнения теплопроводности

Последовательность операций над нелинейной краевой задачей, в результате выполнения которой получаем линейную краевую задачу, соответствующую исходной нелинейной, назовем *линеаризацией*.

Линеаризация может быть неполной, т. е. в результате проведенных операций исходная нелинейная краевая задача упростилась, но осталась нелинейной. Такая линеаризация называется частичной, например преобразования Кирхгофа, Гудмэна.

Ошибкой линеаризации (или частичной линеаризации) назовем разность между решениями линеаризованной (или частично линеаризованной) краевой задачи и исходной нелинейной краевой задачи. Рассмотрим факторы, влияющие на ошибки линеаризации, на примере одномерного уравнения теплопроводности, записанного в прямоугольной системе координат,

$$c(T)\rho(T)\frac{\partial T}{\partial \tau}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right)+q_v(T), \tag{10.45}$$

которое запишем в более удобной форме:

$$\frac{c(T)\rho(T)}{\lambda(T)}\frac{\partial T}{\partial \tau}-\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}-\frac{1}{\lambda(T)}\frac{\partial \lambda}{\partial T}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2-\frac{q_v(T)}{\lambda(T)}=0. \tag{10.46}$$

Простейший прием линеаризации уравнения (10.45) состоит в замене значений $\lambda(T)$, $c(T)$, $\rho(T)$, $q_v(T)$ некоторыми постоянными значениями λ_0, c_0, ρ_0, q_{v0}, тогда уравнениям (10.45), (10.46) отвечает линеаризованное уравнение

$$\frac{c_0\rho_0}{\lambda_0}\frac{\partial T}{\partial \tau}-\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}-\frac{q_{v0}}{\lambda_0}=0. \tag{10.47}$$

Сравнение уравнений (10.46), (10.47) показывает, что ошибка линеаризации зависит от законов изменения от температуры тепло-

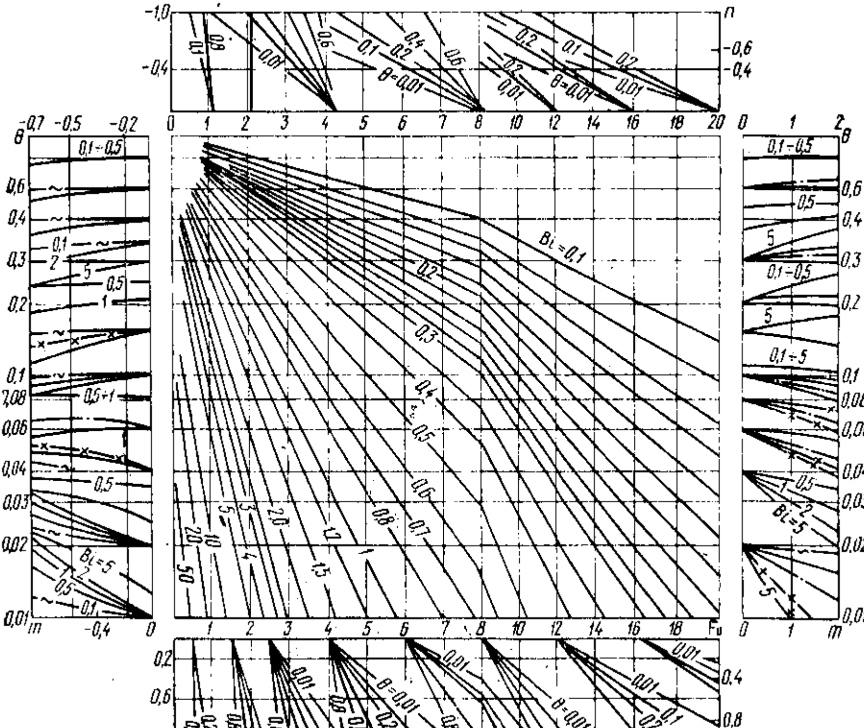


Рис. 10.2. Время нагрева поверхности неограниченной пластины ($\Theta=1-\vartheta_п$) при $T(x,\ 0)=T_0$ в среде с $T_с=$ const, если теплофизические коэффициенты тела заданы уравнениями:

$\lambda=\lambda_0(1+m\vartheta)$ и $c=c_0(1+n\vartheta)$, где $\vartheta=(T-T_0)/(T_с-T_0)$ [33]

физических характеристик $c_v(T)$, $\lambda(T)$; закона изменения объемной плотности теплового потока внутренних источников теплоты $q_v(T)$; градиентов изменения температуры во времени и в пространстве (которые, в свою очередь, зависят не только от λ, c_v, q_v, но и от краевых условий, геометрической формы тела).

К настоящему времени благодаря развитию главным образом численных методов проведено большое число исследований (см., например, [51]), показывающих, что ошибки линеаризации могут быть не только велики количественно, но и изменять качественную картину исследуемого процесса.

Температурное поле тел простейшей формы с линейным изменением теплофизических коэффициен-

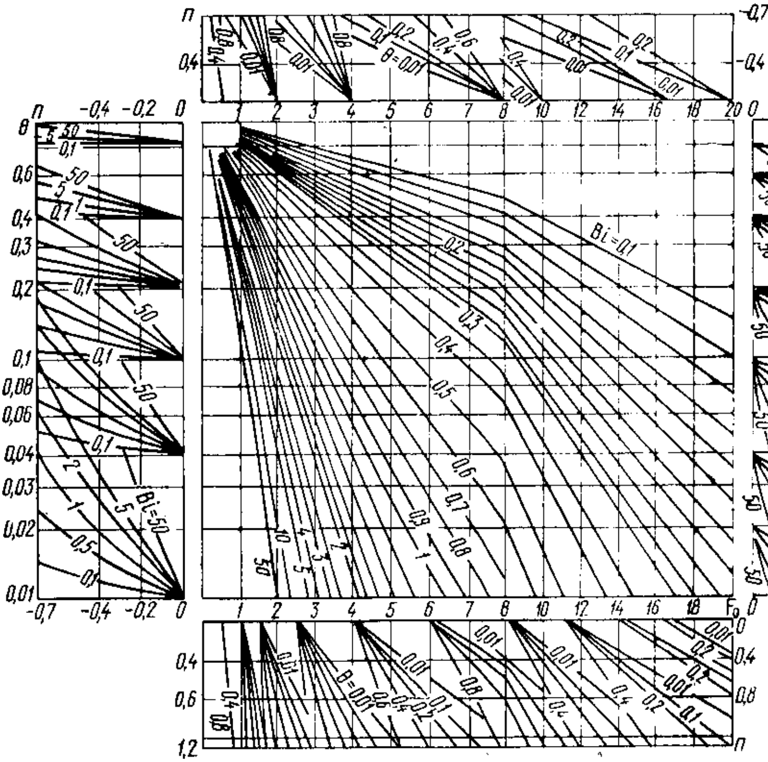


Рис. 10.3. Время нагрева средней плоскости пластины ($\Theta = 1 - \vartheta_ц$). Условия и теплофизические характеристики те же, что и на рис. 10.2

тов. Если зависимости массовой теплоемкости c_v и теплопроводности λ от температуры можно аппроксимировать линейной функцией $c_v = c_0(1 + n\vartheta)$; $\lambda = \lambda_0(1 + m\vartheta)$ $\left(\text{где } \vartheta = \dfrac{T - T_0}{T_c - T_0};\ T_0 - \text{начальная температура тела; } T_c - \text{температура окружающей среды}\right)$, то при теплообмене на поверхности тела по закону Ньютона соответствующая математическая модель, описывающая процесс нестационарной теплопроводности в теле, имеет вид

$$
\left.\begin{aligned}
&(1+n\vartheta)\frac{\partial\vartheta}{\partial\,\mathrm{Fo}}=\frac{\partial}{\partial X}\left[(1+m\vartheta)\frac{\partial\vartheta}{\partial X}\right]+\frac{\nu}{X}(1+m\vartheta)\frac{\partial\vartheta}{\partial X};\\
&\vartheta(X,\ 0)=0;\ (1+m\vartheta)\,\partial\vartheta(1,\ \mathrm{Fo})/\partial X=\mathrm{Bi}\,[1-\vartheta(1,\ \mathrm{Fo})];\\
&\partial\vartheta(0,\ \mathrm{Fo})/\partial X=0,
\end{aligned}\right\}\qquad(10.48)
$$

где $X=x/R$; $\mathrm{Fo}=\lambda_0\tau/(c_0R^2)$; $\mathrm{Bi}=\alpha R/\lambda_0$; $\nu=0,\ 1,\ 2$ в прямоугольной, цилиндрической, сферической системах координат соответственно.

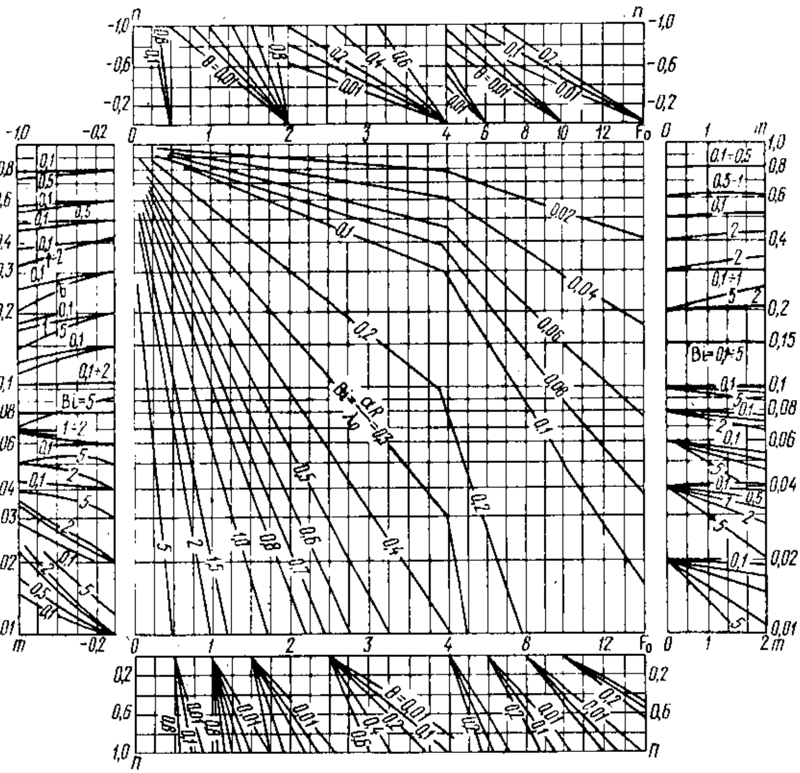


Рис. 10.4. Время нагрева поверхности шара при $T(x,\ 0)=T_0$ в среде с $T_c=\mathrm{const}$ при задании зависимости физических свойств тела уравнениями $\lambda=\lambda_0\,(1+m\vartheta)$ и $c=c_0\,(1+n\vartheta)$, где $\vartheta=(T-T_0)/(T_c-T_0)$ [16]

Нелинейная краевая задача (10.48) решена методом конечных разностей, и по результатам расчетов построены номограммы [16, 33], предлагающиеся для инженерных расчетов. Для неограниченной пластины номограммы приведены на рис. 10.2 и 10.3. Определение изменения температур поверхности и центра шара производится по номограммам, представленным на рис. 10.4 и 10.5.

Центральные поля номограмм повторяют известные номограммы Д. В. Будрина, построенные для постоянных значений λ, c_0, α ($m=0$, $n=0$): $\Theta=-\vartheta=f(\mathrm{Fo}, \mathrm{Bi})$. На полях к центральному полю расположены четыре поправочные номограммы, учитывающие переменность теплофизических характеристик. Верхняя и нижняя по-

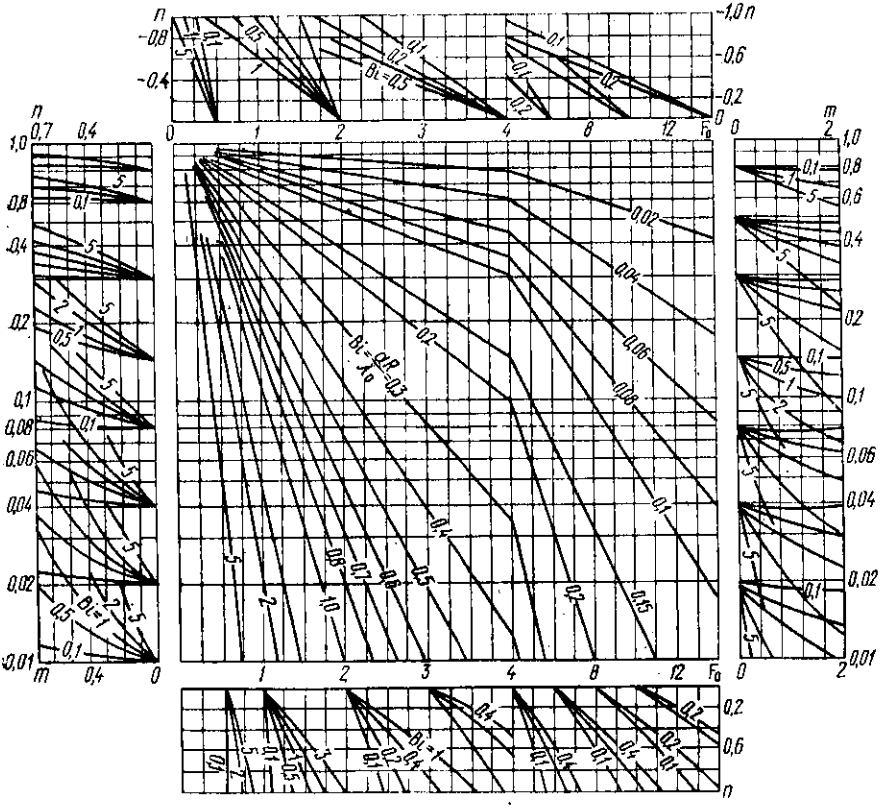


Рис. 10.5. Температура в центре шара при $T(x\ 0)=T_0$, нагреваемом в среде с $T_c=\mathrm{const}$, если физические свойства тела заданы уравнениями $\lambda=\lambda_0(1+m\vartheta)$ и $c=c_0(1+n\vartheta)$, где $\vartheta=(T-T_0)/(T_c-T_0)$ [16]

правочные номограммы учитывают влияние переменности теплоемкости (значение n), а левая и правая — теплопроводности (значение m) тела.

Как пользоваться номограммами? Пусть заданы Bi_1, m_1, n_1. Тогда для определения времени прогрева Fo_1 до значения температуры Θ_1 начинают с определения точки пересечения прямых, соответствующих заданным значениям Θ_1 и m_1. От точки пересечения по кривой $\mathrm{Bi}_1=\mathrm{const}$ определяют значение Θ^* как пересечение кривой Bi_1 с ординатой $m=0$. Пересечение абсциссы $\Theta=\Theta^*$ в пределах центрального поля дает значение Fo^*, которое соответствует решению задачи при $n_1=0$. При $n_1=\text{const}$ окончательный ответ $\text{Fo}=\text{Fo}_1$ находится как пересечение кривой ($\text{Fo}=\text{Fo}^*$, $\Theta=\Theta_1$) с абсциссой $n=n_1$ верхней или нижней поправочной номограммы.

Как пример пользования номограммами определим время нагрева и температуру центра шара радиуса $R=0{,}25$ м из стали 1Х18Н9Т в среде $T=1000$°С при $\alpha=29{,}1$ Вт/(м$^2\cdot$°С) от начальной температуры $T_0=0$ °С до $T(R, \tau_1)=800$ °С. Теплофизические коэффициенты стали 1Х18Н9Т в интервале температур 0—800 °С аппроксимируем линейными зависимостями

$$\lambda(T)=15{,}1\,(1+0{,}00187T)\ \text{Вт/(м}\cdot\text{°С)};$$

$$c_v(T)=0{,}537\,(1+0{,}00054T)\ \text{кДж/(кг}\cdot\text{°С)},$$

или

$$\lambda(\vartheta)=15{,}1\,(1+1{,}87\vartheta)\ \text{Вт/(м}\cdot\text{°С)};$$

$$c_v(\vartheta)=0{,}537\,(1+0{,}54\vartheta)\ \text{кДж/(кг}\cdot\text{°С)}.$$

Тогда для расчета по номограммам имеем: $\text{Bi}_1=\alpha R/\lambda_0=0{,}481$; $m_1=1{,}87$; $n_1=0{,}54$; $\Theta_1=1-\vartheta_1=\frac{1000-800}{1000}=0{,}2$. По данным Bi_1 Θ_1, m_1 находим $\text{Fo}^*=1{,}15$ (см. рис. 10.4). Поправка на значение $n_1=0{,}54$ даст $\text{Fo}_1=1{,}75$ или $\tau_1=\text{Fo}\,R^2/a_0=0{,}336$ ч. Далее, при заданных Bi_1, Fo_1, n_1 находим $\text{Fo}^*=1{,}22$ (рис. 10.5) и соответствующее ему $\Theta^*=0{,}18$. Поправка на $m=1{,}87$ (рис. 10.5) дает окончательное значение температуры центра шара $\Theta=0{,}25$ или $T_ц=750$ °С. При нагреве пластины толщиной $R=0{,}025$ м из стали той же марки в среде с $T_c=1200$ °С и коэффициентом теплоотдачи 310 кДж/(м$\cdot$°С) в том же интервале температур по номограмме, представленной на рис. 10.2, находим время нагрева поверхности $\text{Fo}_1=2{,}13$ или $\tau=0{,}106$ ч.

Если же оценивать время нагрева при линеаризованной постановке задачи [$a_{ср}=4{,}72\cdot10^{-6}$ м^2/с, $\lambda_{ср}=0{,}209$ Вт/(м$\cdot$К)], то по номограмме (см. рис. 10.2, центральное поле) найдем $\tau=0{,}00864$ ч.

В табл. 10.1 [33] показана погрешность вычислений температуры поверхности и центра пластины для случаев расчета с помощью номограмм с использованием нелинейной модели (10.48) — δ^* и расчета с помощью линеаризованной посредством усреднения теплофизических характеристик модели (10.48) — δ по сравнению с численным решением задачи (10.48) методом сеток.

Из таблицы видно, что максимальные ошибки в определении температуры с использованием линеаризованной модели достигают 38 %, а с помощью номограмм — всего 4 %. Таким образом, в первом случае ошибки на порядок больше.

Приведенные выше оценки ошибок линеаризации получены для конкретных примеров. В общем случае при других зависимостях $\lambda(T)$, $c_v(T)$, других граничных условиях и т. п. ошибки линеаризации могут быть меньше или больше.

При линеаризации краевой задачи путем выбора вместо нелинейной величины ее некоторого фиксированного значения оно (постоянное значение) выбирается по среднему значению температуры. Это значение обычно определяется как полусумма минимального и максимального значений температуры в рассматриваемом интервале. Однако такой выбор не является оптимальным. В работе [51] показаны возможности уменьшения ошибок линеари-

Таблица 10.1

	$\Theta=1-\vartheta_п=0,1$											
	Bi=5				Bi=1				Bi=0,5			
	$\delta_п$, %	$\delta_ц$, %	$\delta_п^*$, %	$\delta_ц^*$, %	$\delta_п$, %	$\delta_ц$, %	$\delta_п^*$, %	$\delta_ц^*$, %	$\delta_п$, %	$\delta_ц$, %	$\delta_п^*$, %	$\delta_ц^*$, %
$m=2$, $n=1$	7,3	–2,64	1,3	1,34	10,95	–1,57	1,17	0,46	14,2	6,2	0,77	0,33
$m=-0,7$, $n=-0,7$	–30	28,8	2,5	3,03	–17,3	25,9	3,06	1,96	–18,2	17,5	2,36	1,2
	$\Theta=1-\vartheta_п=0,05$											
	Bi=5				Bi=1				Bi=0,5			
	$\delta_п$, %	$\delta_ц$, %	$\delta_п^*$, %	$\delta_ц^*$, %	$\delta_п$, %	$\delta_ц$, %	$\delta_п^*$, %	$\delta_ц^*$, %	$\delta_п$, %	$\delta_ц$, %	$\delta_п^*$, %	$\delta_ц^*$, %
$m=2$, $n=1$	7,7	–20	1,99	0,77	10,1	–11,0	2,68	0,9	12,6	–9,3	–9,6	0,21
$m=-0,7$, $n=-0,7$	–25	38,4	0,47	5,7	–28,0	38,8	4,1	1,56	–27,7	27,8	1,8	0,55

зации, зависящих от законов изменения теплофизических характеристик и краевых условий, вследствие правильного выбора постоянных величин теплофизических характеристик. Необходимо заметить, что некоторые приемы линеаризации при определенных условиях позволяют свести ошибки линеаризации к нулю (например, преобразование Кирхгофа для стационарной краевой задачи теплопроводности с граничными условиями I рода). Поэтому видоизменение математической модели с помощью специальных преобразований, а затем обоснованный выбор постоянных значений соответствующих нелинейных величин во многих случаях позволяют получить минимальную ошибку линеаризации. Отметим еще две возможности линеаризации нелинейного уравнения теплопроводности.

Предположим, что выполняются следующие упрощающие условия: кривую зависимости $\lambda(T)$ с достаточно высокой точностью можно представить линейной или экспоненциальной зависимостью $c\rho=\mathrm{const}$.

В этом случае нелинейное уравнение теплопроводности допускает линеаризацию [108].

Уравнение нелинейной теплопроводности

$$c(T)\rho(T)\partial T/\partial\tau=\operatorname{div}[\lambda(T)\operatorname{grad}T]$$

можно записать в виде

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial\tau}=\operatorname{div}\left[\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial\lambda}\operatorname{grag}\lambda\right].$$

Если в последнем уравнении

$$\lambda\partial T/\partial\lambda=A=\text{const},\ \partial T/\partial\lambda=B=\text{const}, \tag{10.49}$$

то придем к линейному уравнению теплопроводности с постоянными коэффициентами относительно функции λ. Первое из условий (10.49) соответствует экспоненциальному виду кривой $\lambda(T)$

$$\lambda_1=\lambda_0\exp[(T_1-T_0)/A],$$

а второе — ее линейной аппроксимации

$$\lambda=\lambda_0+(T_1-T_0)/B.$$

Условия (10.49) противоречивы, за исключением случая $\lambda=\text{const}$. Поэтому можно предполагать, что лишь одно из них выполняется точно, а в другом величину A или B надо заменить ее средним значением в рассматриваемом интервале изменения температуры. Можно также обе величины A и B заменить их средними значениями в рассматриваемом интервале температур.

Еще один способ линеаризации состоит в применении преобразования Кирхгофа

$$\Theta=\frac{1}{\lambda_0}\int_{T_1}^{T}\lambda(T)\,dT,$$

с помощью которого исходное уравнение приводится к виду

$$c\rho(\partial T/\partial\Theta)(\partial\Theta/\partial\tau)=\lambda_0\nabla^2\Theta.$$

Если в последнем уравнении

$$c\rho\partial T/\partial\Theta=\text{const}, \tag{10.50}$$

то также получится линейное уравнение.

Существуют и другие способы линеаризации нелинейного уравнения теплопроводности для различных частных видов зависимости коэффициентов переноса от температуры [65].

§ 10.4. Вариационный метод Био

Рассмотрим пример определения температурного поля полуограниченного тела, удельная объемная теплоемкость c_v которого зависит от температуры [14].

Математическая формулировка задачи такова:

$$c_v(T)\,\partial T/\partial\tau=\lambda\partial^2T/\partial x^2 \quad (x>0,\ \tau>0);$$
$$T(x,\ 0)=0;\ T(0,\ \tau)=T_s, \tag{10.51}$$

где полагаем

$$c_v(T)=c_0(1+T/T_s).$$

Теплопроводность λ и температуру поверхности тела T_s считаем постоянными.

В работе [14] показано, что вариационный принцип в случае нелинейной краевой задачи формально тождествен вариационной формулировке для линейного случая и приводит к системе n уравнений Лагранжа

$$\partial E/\partial q_j+\partial D/\partial\dot{q}_j=Q_j\ (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Здесь диссипативная функция D и «температурная сила» Q_j (по аналогии с силами в механике) определяются по тем же формулам, что и в § 6.6, а именно:

$$D=\iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{2\lambda}\dot{H}_i^2\mathrm{d}\Omega; \tag{10.52}$$

$$Q_j=\iint\limits_{S}Tn_i\frac{\partial H_i}{\partial q_j}\,\mathrm{d}S. \tag{10.53}$$

Однако суммарная потенциальная энергия теплового поля E определяется иначе:

$$E=\iiint\limits_{\Omega}F\mathrm{d}\Omega; \tag{10.54}$$

здесь функция F связана с температурой T и удельной объемной энтальпией h тела следующей зависимостью:

$$F=\int_0^h T\mathrm{d}h. \tag{10.55}$$

Удельная объемная энтальпия определяется формулой

$$h=\int_0^T c_v(T)\,\mathrm{d}T. \tag{10.56}$$

Отметим, что в случае, когда c_v не зависит от температуры, выражение для F принимает вид

$$F=\int_0^T c_vT\mathrm{d}T=c_vT^2/2, \tag{10.57}$$

что совпадает с подынтегральным выражением для потенциальной энергии в § 6.6.

Приступим к решению краевой задачи, описываемой уравнениями (10.51). Поле температур аппроксимируем квадратичной параболой

$$T=T_S(1-x/q)^2, \tag{10.58}$$

где толщина термического (возмущенного) слоя q играет роль обобщенной координаты. Отметим, что такой выбор приближенного решения обеспечивает точное удовлетворение граничному условию задачи (10.51). Вычислим значения функций, определенных формулами (10.54)—(10.57), для рассматриваемой задачи. Имеем:

$$h=\int_0^T c_v(T)\,\mathrm{d}T=c_0T+c_0T^2/(2T_S);$$

$$\mathrm{d}h=c_v(T)\,\mathrm{d}T;$$

$$F=\int_0^T c_v(T)\,T\mathrm{d}T=c_0T^2/2+c_0T^3/(3T_S);$$

$$E=\int_0^q F\mathrm{d}x=31c_0T_S^2q/210.$$

Вектор теплового поля H определим по формуле $H=\int_x^q h\mathrm{d}x$, тогда

$$H=\int_0^q [c_0T_S(1-x/q)^2+c_0T_S(1-x/q)^4/2]\,\mathrm{d}x$$

и, полагая $z=1-x/q$, получим

$$\dot{H}=(z^3/3+z^5/10)\,c_0T_S\,q.$$

Подставляя в формулу (10.52) выражение для $\dot{H}$, получим для диссипативной функции D следующее соотношение:

$$D=\frac{1}{2\lambda}\int_0^q \dot{H}^2\mathrm{d}x=\frac{0,0648}{2\lambda}\,c_0^2T_S^2q\dot{q}^2.$$

Из (10.53) в случае $j=1$ $Q\delta q=T_S\,\delta H$ (где $\delta H=13/30c_0T_S\,\delta q$ — вариация H при $x=0$). Из последнего равенства находим выражение для «температурной» силы

$$Q=13/30c_0T_S^2.$$

Подставляя полученные выражения для E, D, Q в уравнение Лагранжа при $j=1$, получим

$$0,0648q\dot{q}=2/7\,(\lambda/c_0).$$

С учетом начального условия $q|_{\tau=0}=0$ интеграл последнего уравнения имеет вид

$$q \approx 2{,}97\,(\lambda\tau/c_0)^{1/2}. \qquad (10.59)$$

Формулы (10.58) и (10.59) позволяют рассчитать температурное поле в полуограниченном теле.

Необходимо отметить, что решение краевой задачи для уравнения теплопроводности с теплопроводностью, зависящей от температуры, также может быть проведено методом Био. С этой целью необходимо предварительно применить преобразование Кирхгофа (см. § 10.1). Вид краевых условий при этом не изменится, в уравнении теплопроводности остается температурозависящий параметр — температуропроводность, что позволяет применить описанный выше метод.

Задача 10.1. Применить метод Био для решения задачи об охлаждении полуограниченного тела от температуры $T=T_0$ до температуры $T=0$, если теплофизические параметры тела такие же, как и в задаче, описываемой уравнениями (10.51). Сравнить полученное решение с решением задачи о нагревании (10.51).

§ 10.5. Сведение краевой задачи в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям

Кроме преобразований подобия (см. § 10.2) для понижения порядка нелинейности применяют и другие методы.

Метод Бубнова — Галеркина*. Метод Бубнова — Галеркина широко применяют при решении нелинейных нестационарных задач теплопроводности в сочетании с другими методами и подходами [30]. Основная цель применения метода состоит в сведении краевой задачи в частных производных к краевой задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений. Применение метода Бубнова — Галеркина к задачам, содержащим нелинейность в дифференциальном уравнении, рассмотрим на следующем примере [107].

Дана краевая задача

$$\frac{\partial T}{\partial \tau}=\frac{\partial}{\partial x}\left[a_0(1+\beta T)\,\frac{\partial T}{\partial x}\right],\ |x|<R,\ \tau>0; \qquad (10.60)$$

$$T(\pm R,\ \tau)=T_c,\ T(x,\ 0)=T_0.$$

Введем безразмерные независимые переменные $\mathrm{Fo}=a_0\tau/R^2$, $X=x/R$, тогда задачу (10.60) можно представить в виде

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial T}{\partial \mathrm{Fo}}=\frac{\partial^2 T}{\partial X^2}+\beta\,\frac{\partial}{\partial X}\left[T\,\frac{\partial T}{\partial X}\right];\\ &T(\pm 1,\ \mathrm{Fo})=T_c,\ T(X,\ 0)=T_0.\end{aligned}\right\} \qquad (10.61)$$

---

* В случае, когда неопределенные коэффициенты приближенного решения зависят от координат, этот метод называют иногда методом Л. В. Канторовича.

Согласно методу Бубнова — Галеркина, приближенное решение задачи (10.61) ищем в семействе функций, точно удовлетворяющих граничным условиям задачи

$$T(X,\ \mathrm{Fo}) = T_c + \sum_{i=1}^{n} a_i(\mathrm{Fo})\,\varphi_i(X), \tag{10.62}$$

где коэффициенты $a_i(\mathrm{Fo})$ определяются из условия ортогональности невязки уравнения (10.61) к каждой из координатных функций $\varphi_i(X)$.

В первом приближении примем, что

$$T(X,\ \mathrm{Fo}) = T_c + a(\mathrm{Fo})(1 - X^2). \tag{10.63}$$

Подставим выражение (10.63) в уравнение (10.61) и потребуем выполнения условия ортогональности невязки к функции $(1 - X^2)$, тогда получим нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{da(\mathrm{Fo})}{d\mathrm{Fo}} = -\frac{5}{2}\,a(\mathrm{Fo})\,[1 + 0{,}4\beta a(\mathrm{Fo})]. \tag{10.64}$$

Разделяя переменные в уравнении (10.64) и интегрируя, получим

$$a(\mathrm{Fo})/[1 + 0{,}4\beta a(\mathrm{Fo})] = C\exp(-2{,}5\,\mathrm{Fo}).$$

Определим постоянную интегрирования C из начального условия задачи

$$[T(X,\ 0) - T_c]\,dX = a(0)\int_0^1 (1 - X^2)\,dX = T_0 - T_c,$$

откуда

$$a(0) = (3/2)(T_0 - T_c) \ \text{ и } \ C = 1{,}5\,(T_0 - T_c)/[1 + 0{,}6\beta\,(T_0 - T_c)].$$

Таким образом, функция $a(\mathrm{Fo})$ имеет вид

$$a(\mathrm{Fo}) = [1{,}5\Delta T\exp(-2{,}5\,\mathrm{Fo})]/[1 + 0{,}6H\exp(-2{,}5\,\mathrm{Fo})], \tag{10.65}$$

где

$$\Delta T = T_0 - T_c,\quad H = \beta\Delta T.$$

Подставим значение (10.65) в выражение (10.63) и получим формулу для определения относительной избыточной температуры в первом приближении

$$\Theta(X,\ \mathrm{Fo}) = \frac{T(X,\ \mathrm{Fo}) - T_c}{\Delta T} = \frac{1{,}5\exp(-2{,}5\,\mathrm{Fo})}{1 + 0{,}6H\exp(-2{,}5\,\mathrm{Fo})}(1 - X^2).$$

В случае выполнения процедуры Бубнова — Галеркина для последующих приближений будем приходить к нелинейным системам n обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которых возможно только с помощью ЭЦВМ. Однако задача решения системы дифференциальных уравнений первого порядка, как правило, проще, чем решение исходной задачи в частных производных.

Алгоритм решения системы нелинейных дифференциальных уравнений n-го порядка приведен в приложении V.

Интегральный метод теплового баланса. Изложенный в § 7.2 метод интегрального теплового баланса может быть применен для решения задач с температурозависящими теплофизическими характеристиками.

Пусть дано нелинейное уравнение теплопроводности

$$M(\Theta)\frac{\partial\Theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial X}\left[L(\Theta)\frac{\partial\Theta}{\partial X}\right], \tag{10.66}$$

где $\Theta=(T-T_0)/\Delta T$ — безразмерная температура; $X=x/l$ — относительная координата; $C=c/c_0$ — относительная удельная теплоемкость; $L=\lambda/\lambda_0$ — относительная теплопроводность; $R=\rho/\rho_0$ — относительная плотность тела; $t=\tau\lambda_0/(\rho_0 c_0 l^2)$ — безразмерное время; $M=CR$ — относительная объемная теплоемкость; величины при начальной температуре T_0 тела имеют индекс 0.

В соответствии с теорией интегрального метода получим уравнение интегрального теплового баланса; для этого умножим уравнение (10.66) на dX и проинтегрируем от X_0 до $\delta(t)$:

$$\int\limits_{X_0}^{\delta(t)} M(\Theta)\frac{\partial\Theta}{\partial t}\,\mathrm{d}X=\int\limits_{X_0}^{\delta(t)}\frac{\partial}{\partial X}\left[L(\Theta)\frac{\partial\Theta}{\partial X}\right]\mathrm{d}X, \tag{10.67}$$

где X_0 — координата поверхности тела, подверженного тепловому воздействию.

Зададим профиль температуры известной функцией пространственной координаты (например, полиномом $\Theta=a_0+a_1X+a_2X^2$). Тогда с помощью граничных условий задачи можно выразить все коэффициенты в соответствующих членах, зависящих от температуры, через толщину термического слоя $\delta(t)$ и известные функции времени из граничных условий. Имеем:

$$\int\limits_{X_0}^{\delta(t)} M(\Theta)\frac{\partial\Theta}{\partial t}\,\mathrm{d}X=\int\limits_{X_0}^{\delta(t)} M[\delta(t),\ t,\ X]\frac{\partial\Theta(\delta(t),\ t,\ X)}{\partial t}\,\mathrm{d}X=$$

$$=F(\delta(t),\ t)\,\mathrm{d}\delta(t)/\mathrm{d}t;$$

$$\int\limits_{X_0}^{\delta(t)}\frac{\partial}{\partial X}\left[L(\Theta)\frac{\partial\Theta}{\partial X}\right]\mathrm{d}X=f(\delta(t),\ t).$$

Таким образом, интеграл теплового баланса (10.67) приводится к виду

$$F(\delta(t),\ t)\,\mathrm{d}\delta(t)/\mathrm{d}t = f(\delta(t),\ t) \text{ при } \delta(t)|_{t=0} = X_0,$$

т. е. к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению относительно функции $\delta(t)$. Решение уравнения (10.67) справедливо до момента времени t^*, когда толщина прогретого слоя станет равной толщине тела. Для моментов времени $t > t^*$ интеграл теплового баланса видоизменяется: верхний предел интегрирования в (10.67) станет постоянным и равным X_1 — координате другой ограничивающей поверхности тела. В температурном профиле $\Theta(a_i,\ X)$ остается одна неизвестная функция времени a_k (остальные выражаются через известные функции из граничных условий), которая определяется из интеграла теплового баланса

$$F(a_k,\ t)\,\mathrm{d}a_k/\mathrm{d}t = f(a_k,\ t). \tag{10.68}$$

Здесь

$$F(a_k,\ t) = \int\limits_{X_0}^{X_1} M[\Theta(a_k,\ t,\ X)]\,\partial\Theta(a_k,\ t,\ X)/\partial a_k \mathrm{d}X;$$

$$f(a_k,\ t) = \int\limits_{X_0}^{X_1} \frac{\partial}{\partial X}\left\{L[\Theta(a_k,\ t,\ X)]\frac{\partial\Theta(a_k,\ t,\ X)}{\partial X}\right\}\mathrm{d}X.$$

Уравнение (10.68) также представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка. Уравнения вида (10.67) и (10.68) редко удается решить аналитически. Поэтому чаще всего приходим к необходимости численного интегрирования уравнений (10.67) и (10.68), что не представляет особых трудностей.

Интегрирование уравнений (10.67), (10.68) может быть выполнено с помощью стандартных процедур Рунге — Кутта, Адамса, Милна и др. [55] и требует меньших затрат машинного времени по сравнению с методом конечных разностей.

Метод теплового интегрального баланса позволяет решать одномерные задачи при самых различных функциональных зависимостях теплофизических характеристик тела от координаты и времени при граничных условиях всех видов.

§ 10.6. Метод последовательных приближений (метод итераций)

Простой алгоритм решения нелинейного уравнения теплопроводности методом последовательных приближений рассмотрим применительно к одномерной задаче с граничными условиями II рода:

$$c(T)\rho(T)\frac{\partial T}{\partial\tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right] \quad (0 < x < R,\ \tau > 0);$$

$$T(x,\ 0) = 0;\ \partial T(0,\ \tau)/\partial x = 0;$$

$$\lambda(T)\,\partial T(R,\ \tau)/\partial x = q(\tau).$$

Используя преобразование Кирхгофа $\Theta(x, \tau)=\frac{1}{\lambda_0}\int_0^{\cdot}\lambda(T)\,dT$ и полагая, что зависимость коэффициента a от температурного аналога Θ имеет вид $a(\Theta)=\sum_{k=0}^{n} a_k\Theta^k$, получим:

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{Fo}}=\sum_{k=0}^{n} A_k\Theta^k\frac{\partial^2\Theta}{\partial X^2}\quad(0<X<1,\ \mathrm{Fo}>0);$$

$$\Theta(X,\ 0)=0;$$

$$\partial\Theta(0,\ \mathrm{Fo})/\partial X=0;\tag{10.69}$$

$$\partial\Theta(1,\ \mathrm{Fo})/\partial X=q^*(\mathrm{Fo}),$$

где $X=x/R$; $A_k=a_k/a_0$; $q^*=qR/\lambda_0$; $\mathrm{Fo}=a_0\tau/R^2$.

Для решения задачи, выраженной уравнениями (10.69), применим метод последовательных приближений, тогда i-е приближение находится как решение следующей краевой задачи:

$$\frac{\partial\Theta_i(X,\ \mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}=\frac{\partial^2\Theta_i(X,\ \mathrm{Fo})}{\partial X^2}+\sum_{k=0}^{n} A_k\Theta_{i-1}^k(X,\ \mathrm{Fo})\frac{\partial^2\Theta_{i-1}(X,\ \mathrm{Fo})}{\partial X^2};$$

$$\Theta_i(X,\ 0)=0;$$

$$\partial\Theta_i(0,\ \mathrm{Fo})/\partial X=0;\ \partial\Theta_i(1,\ \mathrm{Fo})/\partial X=q^*(\mathrm{Fo}).\tag{10.70}$$

Решая задачу (10.70) с помощью интегрального преобразования Лапласа, для i-го приближения получим формулу

$$\Theta_i(X,\ \mathrm{Fo})=\int_0^{\mathrm{Fo}} q^*(t)\,dt+\int_0^{\mathrm{Fo}}\int_0^1 F[\Theta_{i-1}(X,\ t)]\,dX\,dt+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\cos\mu_n X\int_0^{\mathrm{Fo}}\left\{(-1)^n q^*(t)+\int_0^1 F[\Theta_{i-1}(X,\ t)]\cos\mu_n X\,dX\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left[-\mu_n^2(\mathrm{Fo}-t)\right]\right\}dt,\tag{10.71}$$

где $\mu_n=n\pi$; $F[\Theta_{i-1}(X,\ t)]=\sum_{k=1}^{n} A_k\Theta_{i-1}^k(X,\ \mathrm{Fo})\,\partial^2\Theta_{i-1}(X,\ \mathrm{Fo})/\partial X^2$.

Расчеты по формуле (10.71) продолжают до тех пор, пока $|\Theta_i-\Theta_{i-1}|$ не станет меньше заданной величины. Затем осуществляется переход к функции $T(x,\ \tau)$.

Изложенный метод применим также к решению задач с фазовыми переходами, с переменными коэффициентами и произвольными граничными условиями на ограничивающих тело поверхностях.

Решение задач может производиться в прямоугольной, цилиндрической и сферической системах координат.

§ 10.7. Метод возмущений (метод малого параметра)

Сущность метода малого параметра применительно к дифференциальным уравнениям состоит в следующем. Прежде всего должно выполняться предположение о том, что дифференциальный оператор, входящий в нелинейное дифференциальное уравнение, может быть представлен в виде

$$A(T)-q_v=0;\quad A(T)=F_0+\varepsilon F_1, \tag{10.72}$$

где ε — малый параметр; F_0 — линейный дифференциальный оператор, удовлетворяющий соотношению

$$F_0\left(\sum_{i=1}^{n} c_i T_i\right)=\sum_{i=1}^{n} c_i F_0(T_i).$$

Решение уравнения (10.72) ищется в виде ряда, расположенного по степеням параметра ε:

$$T=\sum_{k=0}^{\infty} T_k \varepsilon^k, \tag{10.73}$$

где T_k — функции, подлежащие определению.

Подставляя ряд (10.73) в уравнение (10.72) и собирая коэффициенты при одинаковых степенях параметра ε, получим систему дифференциальных уравнений для определения неизвестных функций

$$F_0(T_k)+\Phi_{k-1}=0. \tag{10.74}$$

Функции Φ_{k-1} представляют собой выражение, в состав которого могут входить функции T_0, T_1, ..., T_{k-1} и их производные, известные из решения предыдущих дифференциальных уравнений. Следовательно, решение линейного уравнения (10.74) не должно вызывать затруднений.

Покажем применение метода малого параметра к нелинейной задаче нестационарной теплопроводности [105].

Уравнение теплопроводности запишем в виде

$$c(T)\frac{\partial T}{\partial \tau}=\mathrm{div}\,[\lambda(T)\nabla T]+q_v,\quad p\in\Omega,\ \tau>0. \tag{10.75}$$

Предположим, что коэффициенты $c(T)$ и $\lambda(T)$ зависят от температуры по линейному закону

$$c(T)=c_0(1-\beta T);\quad \lambda(T)=\lambda_0(1+\beta T),$$

где c_0, λ_0, β — постоянные.

Тогда уравнение (10.75) представим в виде

$$c_0 \frac{\partial T}{\partial \tau} = \lambda_0 \nabla^2 T + \beta \left[\lambda_0 \operatorname{div} (T \nabla T) - c_0 T \frac{\partial T}{\partial \tau} \right) \Big] + q_v, \quad p \in \Omega, \ \tau > 0. \tag{10.76}$$

Решение уравнения (10.76) ищем в виде ряда

$$T = \sum_{k=0}^{\infty} T_k \beta^k, \tag{10.77}$$

где функции T_k последовательно определяются из уравнений вида

$$c_0 \frac{\partial T_k}{\partial \tau} = \lambda_0 \nabla^2 T_k + \Phi_{k-1}, \ x \in \Omega, \ \tau > 0 \ (k=1, \ 2, \ \ldots)$$

при соответствующих краевых условиях.

Рассмотрим, как формируются краевые условия для решения k-й задачи. Пусть заданы краевые условия к уравнению (10.76), состоящие из начального условия $T(p, \tau) = \varphi(p)$ при $\tau = 0$ и граничного условия III рода

$$[\lambda(T) \partial T / \partial n + \alpha T] |_S = \psi(p, \ \tau) \text{ при } p \in S.$$

Тогда, подставляя в уравнение (10.76) ряд (10.77), начальное и граничное условия и приравняв коэффициенты при β в нулевой степени, получим, что нулевое приближение находится как решение следующей краевой задачи:

$$c_0 \partial T_0 / \partial \tau = \lambda_0 \nabla^2 T + q_v, \ p \in \Omega, \ \tau > 0;$$

$$T_0(p, \ \tau) = \varphi(p), \ p \in \Omega, \ \tau = 0;$$

$$(\partial T_0 / \partial n + H T_0) |_S = \psi(p, \ \tau) / \lambda_0, \ p \in S, \ \tau > 0,$$

где $H = \alpha / \lambda_0$.

Приравняв коэффициенты при β в первой степени, уравнение для первого приближения запишем в таком виде:

$$c_0 \partial T_1 / \partial \tau = \lambda_0 \nabla^2 T_1 + \Phi_0 [T_0(p, \ \tau)], \ p \in \Omega, \ \tau > 0;$$

$$T_1(p, \ \tau) = 0, \ p \in \Omega, \ \tau = 0;$$

$$(\partial T_1 / \partial n + H T_1) |_S = f_0 [T_0(p, \ \tau)], \ p \in S, \ \tau > 0,$$

где $f_0 [T_0(p, \ \tau)] = - T_0 \partial T_0 / \partial n, \ p \in S, \ \tau > 0.$

Аналогично определяются и краевые задачи для нахождения последующих приближений. Необходимо отметить, что вопросы применения метода малого параметра к решению нелинейных задач теплопереноса требуют дальнейшей разработки.

Теплопроводность пластины при температуразависящих теплопроводности и объемной плотности теплового потока внутренних источников теплоты. Рассмотрим задачу решения нелинейного дифференциального уравнения теплопроводности с нелинейным источником теплоты при однородных краевых условиях [67]:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right] + \omega_0(x, \tau)\,Q(T), \; 0 < x < R, \; \tau > 0;$$

$$T(x, 0) = 0; \; T(0, \tau) = 0, \; T(R, \tau) = 0,$$

где $\omega_0(x, \tau)$ — аналитическая функция от x, τ, удовлетворяющая условиям $\omega_0(0, \tau) = \omega_0(R, \tau) = 0$.

Предположим, что нелинейные функции $\lambda(T)$ и $Q(T)$ аппроксимированы полиномами:

$$\lambda(T) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \varepsilon^k T^k; \; Q(T) = \sum_{k=0}^{l} q_k \varepsilon^k T^k,$$

где ε — параметр $(0 \leqslant \varepsilon \leqslant \rho < \infty)$; λ_k и q_k — заданные постоянные.

Решение исходной задачи ищем в виде ряда по степеням параметра ε

$$T = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i T_i(x, \tau).$$

Потребуем, чтобы ряд формально удовлетворял исходному дифференциальному уравнению. С этой целью преобразуем это уравнение, подставив в него соотношения для $\lambda(T)$ и $Q(T)$:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = \lambda_0 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \sum_{k=1}^{n}\left\{\lambda_k \varepsilon^k \left[kT^{k-1}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + T^k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right]\right\} +$$

$$+ \omega_0(x, \tau)\sum_{k=0}^{l} q_k \varepsilon^k T^k.$$

Подставим разложение искомой функции в последнее уравнение и введем некоторые необходимые обозначения. Пусть дан ряд $y = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n y_n$, который сходится абсолютно в некоторой окрестности нулевой точки. Обозначим через $y_n^{(k)}$ коэффициент при ε^n ряда, полученного после возведения y в степень $k\,(k \geqslant 2)$. Тогда

$$y^k = \sum_{n=0}^{\infty} y_n^{(k)} \varepsilon^n.$$

Коэффициенты полученного ряда обладают следующим свойством:

$$y_n^{(k)} = \sum_{i=0}^{n} y_i^{(m)} y_{n-i}^{(k-m)},$$

где m — целое положительное число или нуль и удовлетворяет неравенству $m \leqslant k$.

При этом принимаем, что

$$y_n^{(1)}=y_n, \qquad y_n^{(0)}=\begin{cases}1, & n=0;\\ 0, & n=1,\ 2,\ \ldots .\end{cases}$$
$$y_{-n}^{(k)}=0,$$

Тогда с учетом введенных обозначений получим

$$c\rho\frac{\partial}{\partial\tau}\sum_{m=0}^{\infty}T_m\varepsilon^m=\lambda_0\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sum_{m=0}^{\infty}T_m\varepsilon^m+\sum_{k=1}^{n}\left\{\lambda_k\varepsilon^k\left[k\left(\sum_{j=0}^{\infty}T_j^{(k-1)}\varepsilon^j\right)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_j^{(2)}\varepsilon^j+\left(\sum_{j=0}^{\infty}T_j^{(k)}\varepsilon^j\right)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\partial^2T_j}{\partial x^2}\varepsilon^j\right]\right\}+$$

$$+\omega_0(x,\ \tau)\sum_{k=0}^{l}q_k\varepsilon^k\sum_{j=0}^{\infty}T_j^{(k)}\varepsilon^j.$$

Систему уравнений для определения неизвестных функций получим из последнего уравнения, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях параметра ε:

$$\frac{\partial T_m}{\partial\tau}=\lambda_0\frac{\partial^2T_m}{\partial x^2}+F_m(x,\ \tau)\ \ (0<x<R,\ \tau>0);$$

$$T_m(x,\ 0)=0;\ T_m(0,\ \tau)=T_m(R,\ \tau)=0\ \ (m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

где функция $F_m(x,\ \tau)$ содержит T_j, $\partial T_j/\partial x$, $\partial^2T_j/\partial x^2$ со всеми номерами j, удовлетворяющими неравенству $j<m$.

Решение краевой задачи можно представить в виде

$$T_m(x,\ \tau)=\int_0^{\tau}\int_0^{R}G(x,\ \eta,\ \tau-t)\,F_m(\eta,\ t)\,d\eta\,dt,$$

где $G(x,\ \eta,\ \tau-t)=\dfrac{2}{R}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left[-\left(\frac{n\pi}{R}\right)^2\lambda_0(\tau-t)\right]\sin\frac{n\pi}{R}x\sin\frac{n\pi}{R}\eta.$

Суммируя функции $T_m(x,\ \tau)$, получим формальное решение исходной задачи

$$T(x,\ \tau)=\int_0^{\tau}\int_0^{R}G(x,\ \eta,\ \tau-t)\left[\sum_{l=0}^{\infty}\varepsilon^lF_l(\eta,\ t)\right]d\eta\,dt.$$

Стационарная теплопроводность двухсвязной пластинки [104]. Пусть имеется изотропная пластинка, имеющая в плане вид двухсвязной области, ограниченной гладкими кривыми S_1

(внешний контур) и S_2 (внутренний контур). Уравнения контура S_i имеют вид

$$x=R_i(\cos\vartheta+\varepsilon_i\cos n_i\vartheta);\quad y=R_i(\sin\vartheta-\varepsilon_i\sin n_i\vartheta),\quad i=1,\ 2,$$

где ε_i — малый параметр ($|\varepsilon_i|<1$).

Например, при значениях параметров $R_i=R_i$, $\varepsilon_1=1/5$, $\varepsilon_2=0$, $n_1=2$(I) и $R_i=R_i$, $\varepsilon_1=1/9$, $\varepsilon_2=0$, $n_1=3$(II) пластинки имеют форму, показанную на рис. 10.6.

Предполагая, что теплопроводность материала зависит от температуры, применим преобразование Кирхгофа. Тогда распределение температурного аналога в пластинке (обозначение для температурного аналога оставим T) описывается уравнением Лапласа

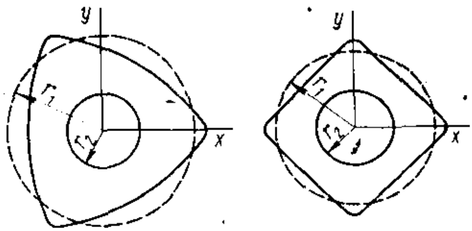


Рис. 10.6. Вид пластинок, форма которых определена параметрическими уравнениями (I) и (II)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\vartheta^2}=0. \tag{10.78}$$

На поверхностях пластинки рассмотрим преобразованные граничные условия I рода

$$\left.\begin{aligned}T(r,\ \vartheta)|_{S_1}=T_{S_1}=\text{const},\\ T(r,\ \vartheta)|_{S_2}=T_{S_2}=\text{const},\end{aligned}\right\} \tag{10.79}$$

которые более целесообразно записать в декартовой системе координат x, y:

$$T(x_i+\varepsilon_i h_i,\ y_i+\varepsilon_i k_i)=T_{S_i},\ x_i,\ y_i\in S_i. \tag{10.80}$$

Здесь $x_i=r_i\cos\vartheta$, $y_i=r_i\sin\vartheta$ — координаты точки, расположенной на окружности радиуса R_i; $h_i=R_i\cos n_i\vartheta$, $k_i=-R_i\sin n_i\vartheta$ — величины приращений координат x_i, y_i, которые устанавливают соответствие между точками окружности радиуса R_i и точками контура S_i.

Для решения задачи (10.78), (10.80) применим метод малого параметра. В качестве малого параметра выбираем величину $\varepsilon=\varepsilon_1$.

Запишем разложение функции T в ряд по степеням параметра ε

$$T=\sum_{k=0}^{N}\varepsilon^k T_k. \tag{10.81}$$

Подставляя разложение (10.81) в уравнение (10.78), получим

$$\sum_{k=0}^{N}\varepsilon^k\nabla^2 T_k=0,$$

т. е. каждая из функций T_k удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2 T_k=0.$$

Получим граничные условия для функций $T_k(k=0, 1, \ldots, N)$. С этой целью разложим в ряд Тейлора функции температурного аналога в точках внешнего и внутреннего контуров, тогда граничные условия (10.80) запишутся в виде

$$T(x_i, y_i)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\varepsilon_i^n\Delta_n T(x_i, y_i)=T_{S_i}, \tag{10.82}$$

где $\Delta_n=(h_i\partial/\partial x+k_i\partial/\partial y)^n$; $\varepsilon_1=\varepsilon$, $\varepsilon_2=m\varepsilon$. Подставив разложение (10.81) в условия (10.82) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях параметра ε, получим граничные условия для функций T_k:

$$\left.\begin{aligned}&T_0(x_i, y_i)=T_{S_i};\\&T_k(x_i, y_i)=-\sum_{n=1}^{k}\frac{\delta_i}{n!}\Delta_n T_{k-n}(x_i, y_i),\end{aligned}\right\} \tag{10.83}$$

где $i=1, 2$; $\delta_i=\begin{cases}1 \text{ при } i=1;\\ m \text{ при } i=2.\end{cases}$

Если ограничиться третьим приближением, то получим

$$T=T_0+\varepsilon T_1+\varepsilon^2 T_2+\varepsilon^3 T_3, \tag{10.84}$$

где $T_0=\varphi_0(r)$; $T_1=f(r^{\nu_1})\cos\nu_1\vartheta+f(r^{\nu_2})\cos\nu_2\vartheta$; $T_2=\varphi_2(r)+f(r^{2\nu_1})\times\cos 2\nu_1\vartheta+f(r^{2\nu_2})\cos 2\nu_2\vartheta+f(r^{\mu})\cos\mu\vartheta+f(r^{\varkappa})\cos\varkappa\vartheta$; $T_3=F(r^{\nu_1})\times\cos\nu_1\vartheta+f(r^{3\nu_1})\cos 3\nu_1\vartheta+\Phi(r^{\nu_2})\cos\nu_2\vartheta+f(r^{3\nu_2})\cos 3\nu_2\vartheta+f(r^{\beta_1})\times\cos\beta_1\vartheta+f(r^{\beta_2})\cos\beta_2\vartheta+f(r^{\omega_1})\cos\omega_1\vartheta+f(r^{\omega_2})\cos\omega_2\vartheta$.

Здесь $\varphi_k=A_k\ln r+B_k$ $(k=0, 2)$; $f(r^s)=C_s r^s+D_s r^{-s}$; $F(r^{\nu_1})=Cr^{\nu_1}+Dr^{-\nu_1}$; $\Phi(r^{\nu_2})=Er^{\nu_2}+Nr^{-\nu_2}$; $\nu_1=n_1+1$; $\nu_2=n_2+1$; $\mu=n_1-n_2$; $\varkappa=n_1+n_2+2$; $\beta_1=2n_1+n_2+3$; $\beta_2=2n_2+n_1+3$; $\omega_1=2n_1-n_2+1$; $\omega_2=2n_2-n_1+1$.

Постоянные A_k, B_k, C_s, D_s, C, D, E, N определяются из граничных условий (10.83):

$$\begin{aligned}&T_0=T_{S_i};\ T_1=-\delta_i r_i\frac{dT_0}{dr}\cos(n_i+1)\vartheta;\ T_2=-\delta_i\left\{\frac{\delta_i r_i}{4}\left[\frac{d}{dr}\left(T_0+\right.\right.\right.\\&\left.+r_i\frac{dT_0}{dr}\right)-\frac{d}{dr}\left(T_0-r_i\frac{dT_0}{dr}\right)\cos 2(n_i+1)\vartheta\Bigg]+r_i\frac{\partial T_1}{\partial r}\cos(n_i+1)\vartheta-\\&\left.-\frac{\partial T_1}{\partial\vartheta}\sin(n_i+1)\vartheta\right\};\ T_3=-\delta_i\left\{\frac{\delta_i^2 r_i}{8}\left[\frac{d}{dr}\left(-T_0+r_i\frac{dT_0}{dr}+\right.\right.\right.\\&\left.+r_i^2\frac{d^2T_0}{dr^2}\right)\cos(n_i+1)\vartheta+\frac{d}{dr}\left(T_0-r_i\frac{dT_0}{dr}+\frac{r_i^2}{3}\frac{d^2T_0}{dr^2}\right)\times\\&\times\cos 3(n_i+1)\vartheta\Bigg]+\frac{\delta_i}{2}\left[r_i^2\frac{\partial^2T_1}{\partial r^2}\cos^2(n_i+1)\vartheta+\left(r_i\frac{\partial T_1}{\partial r}+\frac{\partial^2T_1}{\partial\vartheta^2}\right)\times\right.\\&\left.\times\sin^2(n_i+1)\vartheta+\sin 2(n_i+1)\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(T_1-r_i\frac{\partial T_1}{\partial r}\right)\right]+r_i\frac{\partial T_2}{\partial r}\times\\&\left.\times\cos(n_i+1)\vartheta-\frac{\partial T_2}{\partial\vartheta}\sin(n_i+1)\vartheta\right\},\ i=1, 2.\end{aligned} \tag{10.85}$$

Полученное решение (10.84), (10.85) можно значительно упростить для случая, когда внутренний контур является круговым, т. е. $\delta_2 = m = 0$. Распределение температур в пластинке в этом случае выражается следующим образом:

$$T(r, \vartheta) = \varphi_0(r) + \varepsilon f(r^{\nu_1}) \cos \nu_1\vartheta + \varepsilon^2 [\varphi_2(r) f(r^{2\nu_1}) \cos 2\nu_1\vartheta] + \\ + \varepsilon^3 [F(r^{\nu_1}) \cos \nu_1\vartheta + f(r^{3\nu_1}) \cos 3\nu_1\vartheta].$$

Постоянные интегрирования, входящие в решение, имеют такой вид:

$$A_0 = (T_{S_1} - T_{S_2})/\ln(r_1/r_2); \quad B_0 = (T_{S_2} \ln r_1 - T_{S_1} \ln r_2)/\ln(r_1/r_2);$$

$$A_2 = Hr_1^{\beta}/\ln(r_1/r_2); \quad B_2 = -Hr_1^{\beta} \ln r_2/\ln(r_1/r_2); \quad C_{k\nu_1} = P^{(k)} r_1^{k\beta}/r_1^{2k\beta};$$

$$D_{k\nu_1} = -P^{(k)} r_1^{k\beta} r_2^{k\beta}/(r_1^{2k\beta} - r_2^{2k\beta}); \quad C = Qr_1^{\beta}/(r_1^{2\beta} - r_2^{2\beta});$$

$$D = -Qr_1^{\beta} r_2^{2\beta}/(r_1^{2\beta} - r_2^{2\beta}),$$

где $H = -\beta C_{1\nu_1}$; $P^{(1)} = -A_0$; $P^{(2)} = \beta r_1^{-\beta} D_{1\nu_1} + A_0/2$; $P^{(3)} = 2\beta r_1^{-2\beta} D_{2\nu_1} - \beta(\beta+1) r_1^{-\beta} D_{1\nu_1}/2 - A_0/3$; $Q = -[A_2 + 2\beta r_1^{2\beta} C_{2\nu_1} + n_1 \beta r_1^{\beta} C_{1\nu_1}/2]$; $\beta = n_1 + 1$.

В табл. 10.2 и 10.3 показано распределение температурного аналога T/T_S в пластинках, представленных на рис. 10.6 в различных приближениях по методу малого параметра. Полагали, что $T_{S_1} = T_S$, а $T_{S_2} = 0$, отношение r_2/r_1 для треугольной пластинки равно 1/3, для квадратной — 1/2. При удовлетворении граничным условиям наибольшая погрешность равна 1,2 % для треугольной пластинки (табл. 10.2) и не более 1 % для квадратной пластинки (табл. 10.3). Таким образом, погрешность расчетов вполне удовлетворительная для приближенного метода.

Таблица 10.2

Приближения	$\vartheta = 0°$				$\vartheta = 60°$			
	$1{,}5\ r_2$	$2{,}1\ r_2$	$3\ r_2$	на S_1	$1{,}2\ r_2$	$1{,}5\ r_2$	$2{,}1\ r_2$	на S_1
0	0,368	0,675	1	1,166	0,163	0,368	0,675	0,795
1	0,348	0,613	0,774	0,850	0,171	0,388	0,737	0,889
2	0,371	0,689	0,902	1,033	0,189	0,411	0,813	0,981
3	0,369	0,682	0,880	1,012	0,190	0,413	0,820	0,992

Таблица 10.3

Приближения	$\vartheta = 0°$			$\vartheta = 45°$		
	$1{,}4\ r_2$	$2\ r_2$	на S_1	$1{,}2\ r_2$	$1{,}4\ r_2$	на S_1
0	0,485	1	1,152	0,264	0,485	0,831
1	0,449	0,839	0,908	0,280	0,521	0,938
2	0,484	0,919	1,012	0,299	0,556	1,001
3	0,483	0,918	1,000	0,300	0,555	1,000

§ 10.8. Интегральный метод Лейбензона

На возможность решения задач нестационарной теплопроводности с помощью применения интегральных соотношений впервые указал А. С. Лейбензон [64].

Рассмотрим применение метода интегральных соотношений Лейбензона для приближенного решения нелинейных задач теплопроводности [59].

Вместо избыточной температуры $\vartheta = T - T_0$ вводится энтальпия

$$i = \int_0^{\vartheta} c_p(\vartheta)\,d\vartheta + i_0.$$

Тогда нелинейная краевая задача нестационарной теплопроводности (в простейшем случае граничного условия I рода) запишется в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} &\partial\Theta/\partial\mathrm{Fo} = \operatorname{div}[A(\Theta)\operatorname{grad}\Theta], \ p \in \Omega, \ \mathrm{Fo} > 0;\\ &\Theta(p, 0) = \Theta_0(p), \ p \in \Omega, \ \mathrm{Fo} = 0;\\ &\Theta(p, \mathrm{Fo}) = 0, \ p \in S, \ \mathrm{Fo} > 0, \end{aligned} \tag{10.86}$$

где $\Theta = (i - i_0)/(i_m - i_0)$; $A(\Theta) = a/a_0$; $\mathrm{Fo} = a_0\tau/l^2$; $l = \Omega^*/S^*$; i_m, i_0 — соответственно максимальное и минимальное значения энтальпии; Ω^*, S^* — соответственно объем тела и площадь поверхности, ограничивающие тело; a_0 — температуропроводность при температуре T_0.

Безразмерную температуропроводность с известным приближением можно представить в виде полинома

$$A(\Theta) = 1 + k_1\Theta + k_2\Theta^2 + \ldots + k_n\Theta^n. \tag{10.87}$$

Умножая обе части уравнения (10.86) на $d\Omega$ и затем интегрируя и применяя при этом к правой части теорему Остроградского, получим

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{Fo}} \int_{\Omega} \Theta\, d\Omega = \int_S A(\Theta)_S \left(\frac{\partial\Theta}{\partial n}\right)_S dS. \tag{10.88}$$

Учитывая разложение (10.87) и граничное условие (10.86), получим так называемое интегральное соотношение Л. С. Лейбензона, записанное в обобщенной безразмерной форме:

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{Fo}} \int_{\Omega} \Theta\, d\Omega = \int_S \left(\frac{\partial\Theta}{\partial n}\right)_S dS. \tag{10.89}$$

Выражение (10.89) показывает, что при граничных условиях I рода нелинейная задача нестационарной теплопроводности линеаризуется относительно новой переменной Θ.

Приближенное решение уравнения (10.89) ищем в виде

$$\Theta = c\varphi(p),$$

где c — неизвестная функция безразмерного времени, а $\varphi(p)$ — выбранная нами координатная функция пространственных переменных.

Тогда от интегрального соотношения (10.89) приходим к дифференциальному уравнению относительно $c(\mathrm{Fo})$

$$\mathrm{d}c/c = -\mu \mathrm{dFo}, \tag{10.90}$$

где $-\mu = \int\limits_S \left[\frac{\partial}{\partial n}\varphi(p)\right]_S \mathrm{d}S / \int\limits_\Omega \varphi(p)\,\mathrm{d}\Omega.$

Интеграл (10.90) имеет вид

$$c = c_0 \exp(-\mu \mathrm{Fo}).$$

Произвольная постоянная c_0 может быть определена из условия минимума функционала $\delta \int\limits_\Omega [\Theta_0(p) - c_0\varphi(p)]^2 \mathrm{d}\Omega = 0$, откуда

$$c_0 = \int\limits_\Omega \Theta_0(p)\,\varphi(p)\,\mathrm{d}\Omega / \int\limits_\Omega \varphi^2(p)\,\mathrm{d}\Omega.$$

Следовательно, приближенное решение задачи имеет вид

$$\Theta = c_0\varphi(p)\exp(-\mu \mathrm{Fo}),$$

и задача решена.

В частном случае одномерной модели функцию φ задаем в виде $\varphi(\nu_k^2 X)$. Собственные числа ν_k^2 при этом, согласно условию (10.86), находятся из уравнения $\varphi(\nu_k^2) = 0$ ($X = 1$ — координата поверхности пластины). Тогда частное решение можно записать в виде

$$\Theta = c_{0,k}\varphi_k(\varphi_k^2 X)\exp(-\mu_k \mathrm{Fo}),$$

где $\mu_k = -\int\limits_S \left[\frac{\partial}{\partial X}\varphi_k(\nu_k^2 X)\right]_S \mathrm{d}S / \int\limits_\Omega \varphi_k(\nu_k^2 X)\,\mathrm{d}\Omega.$

В силу линейности (10.89) общий интеграл представляется в виде

$$\Theta = \sum_{k=1}^{\infty} c_{\Theta,k}\varphi_k(\nu_k^2 X)\exp(-\mu_k \mathrm{Fo}).$$

Нормирование коэффициентов $c_{0,k}$ производится при отыскании минимума функционала относительно начального условия

$$\delta \int\limits_\Omega \left[\Theta_0(X) - \sum_{k=1}^{\infty} c_{0,k}\varphi_k(\nu_k^2 X)\right]^2 \mathrm{d}\Omega = 0. \tag{10.91}$$

Если система функций $\varphi_k\left(\nu_k^2 X\right)$ обладает свойством ортогональности

$$\int\limits_{\Omega} \varphi_k\left(\nu_k^2 X\right) \varphi_i\left(\nu_i^2 X\right) d\Omega = \begin{cases} 0, & k \neq i; \\ b_k^2 > 0, & k = i, \end{cases}$$

то из (10.91) следует

$$c_{0,k} = \frac{\int\limits_{\Omega} \Theta_0(X)\, \varphi_k\left(\nu_k^2 X\right) d\Omega}{\int\limits_{\Omega} \varphi_k^2\left(\nu_k^2 X\right) d\Omega} = \frac{1}{b_k^2} \int\limits_{\Omega} \Theta_0(X)\, \varphi_k\left(\nu_k^2 X\right) d\Omega.$$

Рассмотренный метод применим и для решения более сложных задач, например в случае граничных условий III рода.

Задача 10.2. Рассмотрим задачу об охлаждении шара для граничных условий I рода. Для переменной $t = (T - T_0)/(T_m - T_0)$ краевая задача определяется системой

$$c_p(t)\, \rho \frac{\partial t}{\partial \mathrm{Fo}} = \frac{1}{X^2} \frac{\partial}{\partial X} \left(X^2 \lambda(t) \frac{\partial t}{\partial X}\right), \quad |X| < 1, \ \mathrm{Fo} > 0;$$

$$t(X, 0) = 1;$$

$$t(0, \mathrm{Fo}) \neq \infty, \quad t(1, \mathrm{Fo}) = 0, \quad \partial t(0, \mathrm{Fo})/\partial X = 0.$$

Требуется, используя выражение для энтальпии, разложение (10.87) и применяя метод Лейбензона, найти приближенное решение задачи в виде

$$\Theta = (i - i_0)/(i_m - i_0) = c(1 - X^2).$$

§ 10.9. Сведение краевой задачи к интегральному уравнению типа Фредгольма

Согласно методу, описанному в [67], решение нелинейной задачи теплопроводности сводится к решению интегрального уравнения типа Фредгольма. Решение последнего ищется в виде ряда по функциям времени и пространственных координат. Рассматривается два способа выбора функций пространственных координат: а) собственные функции симметричного ядра интегрального уравнения; б) функции, построенные специальным образом.

Рассмотрим применение этого метода для решения одномерной задачи, представленной в безразмерном виде:

$$C(T) \frac{\partial T}{\partial \mathrm{Fo}} = \frac{\partial}{\partial X} \left[\Lambda(T) \frac{\partial T}{\partial X}\right] + \frac{\nu}{X} \Lambda(T) \frac{\partial T}{\partial X}, \quad |X| < 1, \quad \mathrm{Fo} > 0;$$

$$T(X, 0) = F(X); \tag{10.92}$$

$$\partial T(0, \mathrm{Fo})/\partial X = 0, \quad T(1, \mathrm{Fo}) = \Phi(\mathrm{Fo}),$$

где $X = x/R$; $\mathrm{Fo} = a\tau/R^2$; $\Lambda = \lambda/\lambda_0$; $C = c/c_0$; R — характерный размер; $\nu = 0, 1, 2$ для плоской, цилиндрической и сферической симметрий соответственно.

Уравнение (10.92) можно записать, выделив линейный оператор Лапласа:

$$\nabla^2 T = \Psi(T,\ X,\ \mathrm{Fo}),\ |X|<1,\ \mathrm{Fo}>0,$$

где $\Psi(T,\ X,\ \mathrm{Fo}) = \frac{C}{\Lambda}\frac{\partial T}{\partial \mathrm{Fo}} - \frac{\partial T}{\partial X}\left(\frac{\nu}{X} + \frac{1}{\Lambda}\frac{\partial \Lambda}{\partial X}\right)$.

С помощью функций Грина

$$G_0(X,\ \xi) = \begin{cases} X-1, & 0\leqslant\xi\leqslant X, \\ \xi-1, & X\leqslant\xi\leqslant 1, \end{cases} \quad \nu=0;$$

$$G_1(X,\ \xi) = \begin{cases} \ln X, & 0\leqslant\xi\leqslant X, \\ \ln\xi, & X\leqslant\xi\leqslant 1, \end{cases} \quad \nu=1;$$

$$G_2(X,\ \xi) = \begin{cases} \frac{1}{X}(X-1), & 0\leqslant\xi\leqslant X, \\ \frac{1}{\xi}(\xi-1) & X\leqslant\xi\leqslant 1, \end{cases} \quad \nu=2,$$

перейдем от краевой задачи (10.92) к интегральному уравнению Фредгольма

$$T(X,\ \mathrm{Fo}) = \Phi(\mathrm{Fo}) + \int_0^1 G_\nu(X,\ \xi)\,\Psi(T,\ \xi,\ \mathrm{Fo})\,d\xi. \tag{10.93}$$

Предполагая выполнение теоремы существования и единственности решения, решение уравнения (10.93) ищем в виде

$$T(X,\ \mathrm{Fo}) = \Phi(\mathrm{Fo}) + \sum_{k=1}^{n} \beta_{k\nu}(X)\,\varphi_k(\mathrm{Fo}), \tag{10.94}$$

где $\varphi_k(\mathrm{Fo})$ — неизвестные функции времени, подлежащие определению; $\beta_{k\nu}(X)$ — такие функции пространственных координат, по которым функция Грина может быть разложена в билинейный равномерно сходящийся ряд, а именно для случая (а)

$$G_\nu(X,\ \xi) = \sum_{k=1}^{n} \beta_{k\nu}(X)\,\beta_{k\nu}(\xi)/\mu_{k\nu}^2.$$

Здесь $\beta_{k\nu}$, $\mu_{k\nu}$ — соответственно собственные функции и собственные числа ядра $G(X,\ \mathrm{Fo})$.

Для $\nu=0,\ 1,\ 2$ собственные функции и собственные числа имеют следующий вид соответственно:

$$\beta_{k0}(X) = \sqrt{2}\cos[(2k-1)\pi X/2],\quad \mu_{k0} = (2k-1)\pi/2;$$

$$\beta_{k1}(X) = \sqrt{2}\,J_0(\mu_{k1}X)/J_1(\mu_{k1}),$$

где μ_{k1} — корни уравнения $J_0(\mu)=0$; $\beta_{k2}(X) = \sqrt{2}\sin k\pi X$, $\mu_{k2} = k\pi$.

Подставляя форму решения (10.94) в уравнение (10.93) и учитывая ортонормируемость собственных функций, получаем систему нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка для определения неизвестных функций времени $\varphi_k(\mathrm{Fo})$:

$$\varphi_i(\mathrm{Fo}) = \sum_{k=1}^{n} [\chi_{ik}\varphi_k'(\mathrm{Fo}) + l_{ik}\varphi_k(\mathrm{Fo})] + N_i; \tag{10.95}$$

где $\chi_{ik} = -\frac{1}{\mu_{i\nu}^2}\int\limits_0^1 \beta_{k\nu}(\xi)\beta_{i\nu}(\xi)\frac{C}{\Lambda}\,d\xi$; $l_{ik} = \frac{1}{\mu_{i\nu}^2}\int\limits_0^1 \beta_{i\nu}(\xi)\beta_{k\nu}'(\xi)\left[\frac{\nu}{\xi} + \frac{1}{\Lambda}\times\right.$

$\left.\times\frac{\partial\Lambda}{\partial\xi}\right]d\xi$; $N_i = -\frac{1}{\mu_{i\nu}^2}\int\limits_0^1 \beta_{i\nu}(\xi)\frac{C}{\Lambda}\Phi(\mathrm{Fo})\,d\xi$.

Из начального условия в (10.92) при подстановке в него (10.94) с учетом ортонормируемости собственных функций получим начальные условия для системы (10.95):

$$\varphi_i(0) = -\Phi(0)\int\limits_0^1 \beta_{i\nu}(X)\,dX + \int\limits_0^1 F(X)\beta_{i\nu}(X)\,dX. \tag{10.96}$$

Решение системы (10.95) с начальными условиями (10.96) может быть получено численно методами Рунге — Кутта, Эйлера, Адамса [55] и др.

В случае (б) для функции Грина предлагается разложение в специальный билинейный равномерно сходящийся ряд

$$G(X, \xi) = \sum_{k=1}^{n} f_k(X) f_k(\xi),$$

где $f_k(X) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_k\Delta_{k-1}}}\begin{vmatrix} \gamma_k & \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_{k-1} \\ c_{k,1} & c_{11} & c_{21} & \dots & c_{k-1,1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{k,k-1} & c_{1,k-1} & c_{2,k-1} & \dots & c_{k-1,k-1} \end{vmatrix}$;

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{21} & \dots & c_{k1} \\ c_{12} & c_{22} & \dots & c_{k2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{1k} & c_{2k} & \dots & c_{kk} \end{vmatrix}. \tag{10.97}$$

Здесь $\gamma_k(X)=\int\limits_0^1 G(X,\ \xi)\,p_k(\xi)\,d\xi$; $c_{ik}=\int\limits_0^1\int\limits_0^1 G(X,\ \xi)\ p_i(X)\ p_k(\xi)\,dX\,d\xi$ $(i,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$.

Последовательность $p_k(X)$ является произвольной системой функций, удовлетворяющей условию полноты, например полиномы Лежандра [55].

Определив функции f_k по формуле (10.97) и выбрав решение в форме (10.94), можно получить систему дифференциальных уравнений, аналогичную (10.95).

ГЛАВА XI

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

Для приближенного решения краевых задач теплопроводности широко применяется метод конечных разностей (метод сеток). Идея метода состоит в следующем. Область непрерывного изменения аргументов заменяется расчетной сеткой — дискретным множеством точек (узлов). Вместо функции непрерывных аргументов вводятся функции дискретных аргументов — сеточные функции, определяемые в узлах сетки. Частные производные, входящие в дифференциальное уравнение и граничные условия, заменяются (аппроксимируются) разностными соотношениями *.

В результате такой замены краевая задача в частных производных сводится к системе разностных уравнений (алгебраических уравнений), называемых еще *разностной схемой*.

Если решение системы разностных уравнений существует и при измельчении сетки стремится к решению поставленной задачи (т. е. сходится), то это решение и является искомым приближенным решением краевой задачи. Несмотря на то что число неизвестных в этой системе алгебраических уравнений весьма значительно, решение ее с точки зрения математических трудностей более просто, чем исходной задачи.

При решении конкретной задачи необходимо рассмотреть следующие вопросы: 1. Каким образом выбрать сетку? 2. Как построить разностную схему? 3. Определить, с какой точностью разностная схема аппроксимирует исходную задачу. 4. Проверить устойчивость разностной схемы. 5. Выяснить скорость сходимости решения разностной задачи к решению исходной краевой задачи.

§ 11.1. Построение сетки. Сеточные функции и сеточные аналоги норм

Итак, заменим область непрерывного изменения аргументов Ω искомой функции T некоторым конечным множеством точек, лежащих в этой области. Это множество назовем *разностной сеткой*,

* Если рассматривать функцию целочисленного аргумента $u(k)$, где $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, то можно образовать разности в точке k первого порядка:

правую: $\Delta u_k = u(k+1) - u(k)$,

левую: $\nabla u_k = u(k) - u(k-1)$.

Обозначив $u_k = u(k)$, получим

$\Delta u_k = u_{k+1} - u_k$, $\nabla u_k = u_k - u_{k-1}$.

Тогда для разности второго порядка имеем

$\Delta^2 u_k = \Delta(\Delta u_k) = \Delta(u_{k+1} - u_k) = (u_{k+2} - u_{k+1}) - (u_{k+1} - u_k) = u_{k+2} - 2u_{k+1} + u_k$.

Аналогично определяется разность n-го порядка:

$\Delta^n u_k = \Delta(\Delta^{n-1} u_k)$.

сами точки — *узлами сетки*, а функции, определенные тем или иным способом на этой сетке, — *сеточными функциями*.

Расположение узлов сетки в области может быть произвольным и определяться спецификой решаемой задачи.

Рассмотрим примеры сеток.

1. В простейшем случае одномерной задачи $\Omega=\{0\leqslant x\leqslant l\}$ можно ввести равномерную сетку. Для этого отрезок $[0, l]$ разобьем на N равных частей точками $x_k=kh$, $k=0, 1, \ldots, N$ (рис. 11.1).

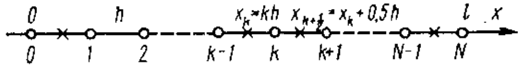


Рис. 11.1. К расположению узлов на отрезке $(0, l)$

Расстояние между узлами $x_{k+1}-x_k=h$ называется шагом сетки. Так как в рассматриваемом случае $h=l/N=\text{const}$, то множество узлов x_k, $k=0, 1, \ldots, N$, представляет собой равномерную сетку на отрезке $0\leqslant x\leqslant l$ и обозначается $\overline{\Omega}_h=(x_k=kh,\ k=0, 1, 2, \ldots, N)$.

В качестве области определения сеточных функций кроме узлов, называемых еще *целыми точками*, часто используют *полуцелые точки* $x_{k+1/2}=x_k+0{,}5h$, отмеченные на рис. 11.1 крестиками. Если отрезок $[0, l]$ разбит на N частей произвольно взятыми точками $0<x_1<<x_2<\ldots<x_k<x_{k+1}<\ldots<x_{N-1}<l$, причем $x_0=0$, $x_N=l$, то получим неравномерную сетку с шагом $h_k=x_k-x_{k-1}$, зависящим от номера k узла x_k.

2. Сетка на плоскости. Пусть $\Omega=\{0\leqslant x\leqslant d,\ 0\leqslant y\leqslant b\}$ — прямоугольник. Отрезки $[0, d]$ и $[0, b]$ разобьем соответственно на N и M частей и через точки $x_k=kh$, $k=0, 1, \ldots, N$, $h=d/N$, $y_j=jp$, $j=0, 1, \ldots, M$, $p=b/M$ проведем прямые, параллельные координатным осям.

Множество точек (x_k, y_j) образует сетку в прямоугольнике Ω. Полученная сетка равномерна по каждой из переменных x и y. Если $h\neq p$, то сетка называется *прямоугольной*, а в случае $h=p$ — *квадратной*. Если построить сетку неравномерной хотя бы по одной координате, то полученная сетка будет называться *неравномерной*. На рис. 11.2 дан пример прямоугольной сетки.

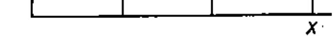


Рис. 11.2. Выбор сетки в прямоугольной области

3. Приведем пример неравномерной изометрической сетки на плоскости. Область $\Omega=(R_1\leqslant r\leqslant R_2,\ 0\leqslant\Theta\leqslant 2\pi)$, представляющую собой кольцо, покроем окружностями

$$r_i=R_1\exp(ih),\ \text{где}\ h=(1/N)\ln(R_2/R_1),\ i=0, 1, \ldots, N,$$

и лучами $\Theta_k=kp$, где $p=2\pi/M$, $k=0, 1, \ldots, M-1$. Множество узлов (r_i, Θ_k) и представляет собой сетку в рассматриваемой области (рис. 11.3).

4. Рассмотрим сетку из правильных треугольников (рис. 11.4). Узлы сетки области Ω образованы пересечением прямых:

$$\left.\begin{aligned} &y_k=\left(\sqrt{3}/2\right)kh,\ y_k=\sqrt{3}x+\left(\sqrt{3}/2\right)kh;\\ &y_k=-\sqrt{3}x+\left(\sqrt{3}/2\right)kh,\ h>0,\ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (11.1)$$

5. По аналогии с разностной сеткой для пространственных областей вводится сетка по временной переменной τ. В общем слу-

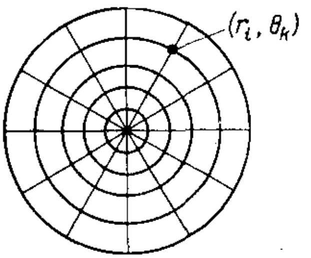


Рис. 11.3. Пример неравномерной изометрической сетки на плоскости

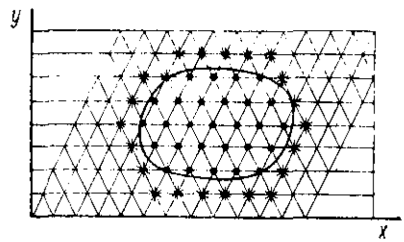


Рис. 11.4. К выбору треугольной сетки

чае эта сетка может быть неравномерной и тогда η_i — шаг сетки — зависит от номера шага. Узлы сетки определяются точками $\overline{\Omega}_\eta = =(\tau_i,\ i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ M;\ \eta_i=\tau_{i+1}-\tau_i)$.

Для решения, например, одномерной по пространственным координатам нестационарной задачи используют произведение сеток

$$\overline{\Omega}_{h\eta}=\overline{\Omega}_h\times\overline{\Omega}_\eta=\{(x_k,\ \tau_i),\quad x_{k+1}=x_k+h_k,\quad \tau_{i+1}=\tau_i+\eta_i;\quad k=0,\ 1,$$
$$2,\ \ldots,\ N;\ i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ M;\ x_0=0,\ x_N=l,\ \tau_0=0,\ \tau_M=t\}, \qquad (11.2)$$

представляющее собой *пространственно-временную* разностную сетку (рис. 11.5). Совокупность узлов сетки, лежащих на линии $t=\tau_i$, называют *i-м слоем*. Для простых областей, рассмотренных ранее, всегда можно ввести такую сетку, чтобы «крайние» естественные узлы сетки попадали на границу области. Эти узлы называются *граничными*, а остальные — *внутренними*. Граничные условия задачи следует задавать именно в этих граничных узлах. Однако для областей более сложной формы, например когда граница двумерной области криволинейна, «крайние» естественные узлы сетки далеко не все попадут на границу области (рис. 11.6).

Тогда следует рассматривать два возможных подхода к заданию граничных условий: 1) ввести дополнительные узлы в точках пересечения линий сетки с границей (см., например, рис. 11.6) и в них задавать граничные условия; 2) границу области аппроксимировать ломаной, проходящей через ближайшие к границе естественные узлы (жирная линия на рис. 11.6) и перенести каким-то образом заданные граничные условия на эту ломаную.

Вопрос оптимального выбора шага сетки и тем самым количества ее узлов является непростым. С одной стороны, чем большая требуется точность, с которой необходимо получить решение, тем более мелкий шаг желателен. С другой стороны, слишком мелкий шаг значительно увеличивает число неизвестных, что повышает требования к быстродействию и объему памяти ЭВМ. Очевидно, должны существовать некоторые «оптимальные» сетки со сравнительно небольшим числом узлов. Такие сетки принято называть *грубыми* или *реальными*.

Построение разностной схемы проводится таким образом, чтобы получаемая в результате решения сеточная функция u была как

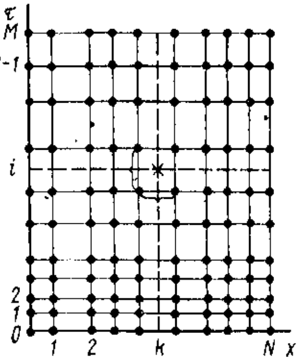


Рис. 11.5. Пример пространственно-временной сетки

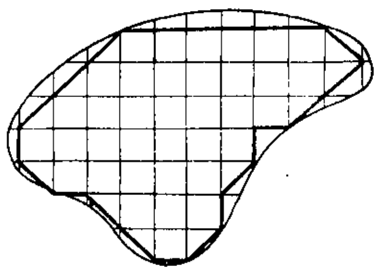


Рис. 11.6. К выбору сетки в области сложной формы

можно ближе к решению T соответствующей краевой задачи теплопроводности. Так как функция u есть функция дискретного аргумента, а T — функция непрерывного аргумента, то они принадлежат разным функциональным пространствам.

Для определения степени близости этих функций обычно поступают так. Осуществляется переход от непрерывных функций к сеточным по правилу: значение сеточной функции в узле равно значению непрерывной функции в этой же точке. Например, в узле (x_k, τ_i) сетки одномерной нестационарной задачи

$$T_k^i = T(x_k, \tau_i), \tag{11.3}$$

причем пространственные узлы сетки обозначают подстрочными индексами, а временные — надстрочными. В этом случае говорят, что сеточная функция T_k^i является проекцией функции T на пространство сеточных функций. Для обозначения сеточной функции можно использовать и другую запись: к символу, обозначающему функцию, ставится внизу индекс h, например u_h, T_h.

Существуют и другие способы проектирования решения T на пространство сеточных функций. Например, если функция имеет разрывы первого рода или только интегрируемая по x, то полагают

$$T_k^l=\frac{1}{h}\int\limits_{x_k-h/2}^{x_k+h/2} T(x,\ \tau_l)\,\mathrm{d}x. \qquad (11.4)$$

В случае, когда T является непрерывной функцией x, значения сеточных функций, определенных формулами (11.3) и (11.4), совпадают.

Для оценки близости функций u и T рассматривается величина $\|u-T_h\|$, где $\|\cdot\|$ — некоторая норма в пространстве сеточных функций. Нормы в сеточных пространствах вводят так, чтобы при стремлении шага сетки к нулю они переходили в нормы в обычных функциональных пространствах. Наиболее часто используются: сеточный аналог чебышевской нормы в пространстве непрерывных функций C

$$\|u\|_c=\max_{x_k\in\Omega_h}\|u\|; \qquad (11.5)$$

сеточный аналог гильбертовой нормы в L_2

$$\|u\|_{l_2}=\Big(\sum_{x_k\in\Omega_h} Hu^2(x)\Big)^{1/2}, \qquad (11.6)$$

где $H=h$ в одномерном случае; $H=h_1h_2$ в двухмерном случае.

Тогда если при бесконечном дроблении сетки величина $\|u-T_h\|\to 0$, то можно говорить о близости решений разностной задачи u и краевой задачи T.

§ 11.2. Построение разностных схем. Порядок аппроксимации

Решение исходной краевой задачи сводится, таким образом, к нахождению таблицы числовых значений функции T_k в точках сетки на соответствующей области. Для приближенного вычисления этой таблицы необходимо дифференциальный оператор краевой задачи A, заданный в классе непрерывного аргумента, приближенно заменить (аппроксимировать) разностным оператором A_h, заданным на множестве сеточных функций. Разностный аналог, аппроксимирующий исходную краевую задачу, можно построить различными способами. В связи с этим возникает задача построения такой разностной схемы, которая была бы оптимальной в определенном смысле. Обычно требуют, чтобы построенная разностная схема на сравнительно грубых сетках обеспечивала необходимый уровень точности для получаемого приближенного решения. Поэтому при построении разностных схем важнейшие свойства исходных операторных уравнений должны сохраняться и у их разностных аналогов.

Среди множества возможных конструктивных подходов к построению разностных аналогов для дифференциальных операторов выделим основные: 1) метод формальной замены производных конечно-разностными выражениями; 2) метод интегральных тождеств (интегро-интерполяционный метод); 3) вариационные методы построения разностных схем; 4) метод неопределенных коэффициентов.

Метод формальной замены производных конечно-разностными отношениями. Метод конструирования разностных схем с помощью замены производных конечно-разностными выражениями основан на использовании разложения в ряд Тейлора достаточно гладких функций, что, как правило, позволяет сохранить локальные свойства дифференциальных уравнений. Заменим каждую из производных, входящих в краевую задачу, разностным отношением, содержащим значения сеточной функции в нескольких узлах сетки, образующих некоторую определенную конфигурацию. Такая совокупность узлов называется *шаблоном*. Узлы, в которых разностная схема записана на шаблоне, называют *регулярными*, а остальные узлы — *нерегулярными*. Рассмотрим возможные способы аппроксимации дифференциального оператора вида

$$A[T]=\mathrm{d}T/\mathrm{d}x, \qquad (11.7)$$

определенного на множестве непрерывных в области $\Omega=\{d<x<b\}$ функций, имеющих ограниченные производные до третьего порядка включительно. Пусть $\Omega_h=\{x_k=kh,\ 0<k<N,\ h=(b-d)/N\}$ — равномерная сетка на отрезке Ω. Тогда наиболее естественный способ замены производной основывается на определении производной как предела

$$\mathrm{d}T/\mathrm{d}x=\lim_{h\to 0}[T(x+h)-T(x)]/h.$$

Если зафиксировать h в этом равенстве, то получим приближенную формулу для первой производной через конечные разности

$$\mathrm{d}T/\mathrm{d}x\approx[T(x+h)-T(x)]/h.$$

Или в k-м узле имеем *правое разностное отношение*

$$T_{x,k}=(T_{k+1}-T_k)/h. \qquad (11.8)$$

Аналогично вводится *левое разностное отношение*

$$T_{\bar{x},k}=(T_k-T_{k-1})/h. \qquad (11.9)$$

Можно рассматривать и линейную комбинацию (11.8) и (11.9)

$$\sigma T_{x,k}+(1-\sigma)T_{\bar{x},k}, \qquad (11.10)$$

где σ — любое вещественное число. При $\sigma=1/2$ получим *центральное разностное отношение*

$$T_{\mathring{x},k}=(T_{k+1}-T_{k-1})/(2h). \qquad (11.11)$$

При замене оператора $A[T]$ разностными выражениями (11.8) — (11.11) допускается погрешность $\psi_h(x)=A_h[T_h]-(A[T])_h$, называемая *погрешностью аппроксимации* оператора A разностным оператором A_h в точке x.

Для вычисления оценки $\psi_h(x_k)$ разложим $T(x)$ в каждом внутреннем узле x_k сетки Ω_h:

$$T(x_k\pm h)=T(x_k)\pm hT'(x_k)+\frac{h^2}{2!}T''(x_k)\pm\frac{h^3}{3!}T'''(x_k)+0(h^4). \qquad (11.12)$$

Тогда в точке x_k получим следующие выражения, соответствующие разностным отношениям (11.8) — (11.11):

$$\psi_h(x_k)=T_{x,k}-T'(x_k)=\frac{h}{2!}T''(x_k)+0(h^2); \qquad (11.13)$$

$$\psi_h(x_k)=T_{\bar{x},k}-T'(x_k)=-\frac{h}{2!}T''(x_k)+0(h^2); \qquad (11.14)$$

$$\psi_h(x_k)=T_{\sigma x,k}-T'(x_k)=\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)hT''(x_k)+0(h^2); \qquad (11.15)$$

$$\psi_h(x_k)=T_{\overset{\circ}{x},k}-T'(x_k)=\frac{h^2}{6}T'''(x_k)+0(h^4). \qquad (11.16)$$

Разностный оператор A_h аппроксимирует дифференциальный оператор A с порядком n в точке x, если

$$\psi_h(x)=A_h[T_h(x)]-(A[T(x)])_h=0(h^n).$$

Факт аппроксимации в точке называют часто *локальной аппроксимацией*. Тогда из равенств (11.12) — (11.16) следует, что порядок локальной аппроксимации оператора в узловой точке сетки разностными операторами (11.8) — (11.11) равен единице в первых трех случаях и двум — в последнем.

Отметим, что разностная производная (11.8) является правой относительно узла x_k и в то же время левой относительно узла x_{k+1}. Относительно полуцелой точки $x_{k+1/2}=x_k+0{,}5h$ эта же производная будет центральной. Поэтому разностная производная (11.8) аппроксимирует производную $\mathrm{d}T/\mathrm{d}x$ с первым порядком в узлах k и $k+1$ и со вторым порядком в полуцелой точке $k+1/2$.

Таким образом, видим, что выбор шаблона существенно влияет на свойства разностного оператора.

При решении задач теплопроводности необходимо уметь аппроксимировать и вторую производную

$$A[T]=\mathrm{d}^2T/\mathrm{d}x^2.$$

В отличие от первой производной, для аппроксимации которой достаточно двухточечного шаблона, для второй производной выберем трехточечный шаблон $(x_{k-1},\ x_k,\ x_{k+1})$. Тогда в k-м узле получим разностный оператор

$$A_h[T_k]=(T_{k+1}-2T_k+T_{k-1})/h^2. \qquad (11.17)$$

Пользуясь разложением в ряд Тейлора функции $T(x_k \pm h)$ (11.12), получим, что порядок аппроксимации в этом случае равен двум, так как

$$A_h[T_k] = \frac{1}{h^2}\left[T(x_h) + hT'(x_k) + \frac{h^2}{2!}T''(x_k) + \frac{h^3}{3!}T'''(x_k) + \frac{h^4}{4!}T^{IV}(x_k) + \right.$$

$$+\frac{h^5}{5!}T^{V}(x_k) + \frac{h^6}{6!}T^{VI}(x_h) + 0(h^7) - 2T(x_k) + T(x_h) - hT'(x_k) +$$

$$+\frac{h^2}{2!}T''(x_k) - \frac{h^3}{3!}T'''(x_k) + \frac{h^4}{4!}T^{IV}(x_k) - \frac{h^5}{5!}T^{V}(x_k) + \frac{h^6}{6!}T^{VI}(x_k) +$$

$$\left.+0(h^7)\right] = \frac{1}{h^2}\left[h^2T''(x_k) + \frac{2h^4T^{IV}}{4!} + 0(h^6)\right];$$

$$A_h[T_k] - T''(x_k) = \frac{h^2}{12}T^{IV}(x_k) + 0(h^4) = 0(h^2).$$

Рассмотрим оператор одномерного уравнения теплопроводности

$$A[T] = \partial T/\partial\tau - a\partial^2 T/\partial x^2 \text{ в области } \Omega = \{0 < x < d,\ 0 < \tau \leqslant t\}, \quad (11.18)$$

предполагая, что функция температуры непрерывна вместе со своими производными до четвертого порядка по переменной x и до второго порядка по времени τ. Область непрерывного изменения аргументов заменим сеточной областью

$$\Omega_{h\eta} = \{(x_k,\ \tau_i),\ x_k = kh,\ \tau_i = i\eta,\ 0 < k < N,\ 0 < i \leqslant M;\ \ \eta = t/M\}.$$

Аппроксимируем производную по времени правым разностным отношением

$$T^i_\tau = (T^{i+1}_k - T^i_k)/\eta, \quad (11.19)$$

а для второй производной по переменной x можно записать разностное отношение (11.17) на временнóм слое i:

$$T^i_{\bar{x}x,\ k} = (T^i_{k+1} - 2T^i_k + T^i_{k-1})/h^2 \quad (11.20)$$

или на временнóм слое $i+1$:

$$T^{i+1}_{\bar{x}x,\ k} = (T^{i+1}_{k+1} - 2T^{i+1}_k + T^{i+1}_{k-1})/h^2. \quad (11.21)$$

В соответствии с этим можно рассмотреть две различные аппроксимации оператора (11.8)

$$A_{h\eta}[T] = T^i_\tau - aT^i_{\bar{x}x,\ k}; \quad (11.22)$$

$$A_{h\eta}[T] = T^i_\tau - aT^{i+1}_{\bar{x}x,\ k} \quad (11.23)$$

на шаблонах, изображенных на рис. 11.7, *а*, *б*, соответственно.

Погрешность локальной аппроксимации оператора (11.18) разностными операторами (11.22) и (11.23) будет равна соответственно

$$A_{h\eta}[T_{h\eta}]-(A[T])_{h\eta}=\frac{\eta}{2}\,\frac{\partial^2 T_k^i}{\partial\tau^2}+0(\eta^2)-\frac{ah^2}{12}\,\frac{\partial^4 T_k^i}{\partial x^4}-0(h^4)=0(\eta+h^2);$$

$$A_{h\eta}[T_{h\eta}]-(A[T])_{h\eta}=\frac{-\eta}{2}\,\frac{\partial^2 T_k^i}{\partial\tau^2}+0(\eta^2)-\eta\frac{\partial^2 T_k^i}{\partial x^2}-0(\eta^2)-$$

$$-\frac{ah^2}{12}\,\frac{\partial^4 T_k^{i+1}}{\partial x^4}+0(h^4)=0(\eta+h^2).$$

Оператор (11.18) можно аппроксимировать и на шеститочечном шаблоне (рис. 11.7, *в*), образовав линейную комбинацию уравнений (11.22) и (11.23):

$$A_{h\eta}[T_{h\eta}]=T_\tau^i-a\left(\sigma_1 T^i_{\bar{x}x,\,k}+\sigma_2 T^{i+1}_{\bar{x}x,\,k}\right). \qquad (11.24)$$

Оценим порядок локальной аппроксимации оператора (11.18) разностным оператором (11.24):

$$A_{h\eta}[T_{h\eta}]-(A[T])_{h\eta}=\frac{\partial T_k^i}{\partial\tau}+\frac{\eta}{2}\,\frac{\partial^2 T_k^i}{\partial\tau^2}+0(\eta^2)-a\sigma_1\left[\frac{\partial^2 T_k^i}{\partial x^2}+\eta\frac{\partial^3 T_k^i}{\partial x^2\,\partial\tau}+\right.$$

$$\left.+0(\eta^2)+0(h^2)\right]-a\sigma_2\left[\frac{\partial^2 T_k^i}{\partial x^2}+0(h^2)\right]-(A[T])_{h\eta}=a(1-\sigma_1-\sigma_2)\times$$

$$\times\frac{\partial^2 T_k^i}{\partial x^2}+\eta\left(\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 T_k^i}{\partial\tau^2}-\sigma_1 a\,\frac{\partial^3 T_k^i}{\partial x^2\,\partial\tau}\right)+0(\eta^2+h^2).$$

Если предположить $\sigma_1+\sigma_2=1$, то $A_{h\eta}[T_{h\eta}]-(A[T])_{h\eta}=0(\eta+h^2)$. При $\sigma_1=\sigma_2=1/2$ $A_{h\eta}[T_{h\eta}]-(A[T])_{h\eta}=\frac{\eta}{2}\,\frac{\partial}{\partial\tau}(A[T])_{h\eta}+0(\eta^2+h^2)=$ $=0(\eta^2+h^2)$, т. е. в этом случае оператор $A[T]$ аппроксимируется со вторым порядком по η.

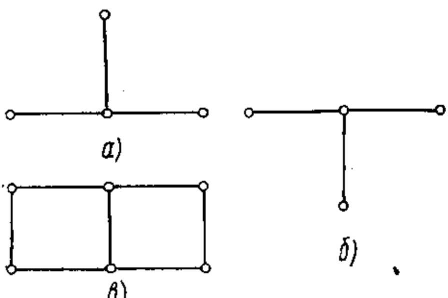


Рис. 11.7. К выбору шаблона для нестационарного уравнения теплопроводности

Метод интегральных тождеств. Интегро-интерполяционный метод. При численном решении краевых задач естественно потребовать, чтобы для построенной разностной схемы выполнялись основные законы сохранения субстанции (теплоты, энергии, массы и т. п.), положенные в основу при постановке краевой задачи в дифференциальной форме. Разностные схемы, для которых удовлетворяется это требование, называются *консервативными*; схемы, в которых нарушаются законы сохранения, — *неконсервативными*. А. Н. Тихоновым и А. А. Самарским предложен один из наиболее эффективных методов построения консервативных разностных схем — интегро-интерполяционный.

Суть метода состоит в следующем. После выбора шаблона область изменения независимых переменных разбивается на элементарные ячейки, связанные с шаблоном. Затем исходное дифференциальное уравнение интегрируют по ячейке и приходят с помощью формул векторного анализа к интегральным соотношениям, выражающим законы сохранения для этой элементарной ячейки. Интегралы и производные, входящие в эти соотношения, заменяются затем разностными отношениями так, чтобы не нарушались законы сохранения. Поскольку разностные отношения могут быть взяты не единственным образом, то можно получить различные разностные схемы. В качестве примера рассмотрим уравнение нестационарной теплопроводности с переменной теплопроводностью

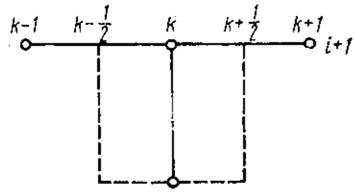


Рис. 11.8. К построению консервативной схемы

$$c\rho\,\frac{\partial T}{\partial \tau}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\,(x,\ \tau)\,\frac{\partial T}{\partial x}\right). \qquad (11.25)$$

На шаблоне, изображенном на рис. 11.8, выберем ячейку Ω_{kl} $\left(x_{k-\frac{1}{2}}\leqslant x\leqslant x_{k+\frac{1}{2}},\ \tau_l\leqslant\tau\leqslant\tau_{l+1}\right)$, показанную пунктиром, и составим уравнение теплового баланса для этой ячейки:

$$\iint\limits_{\Omega_{kl}} c\rho\,\frac{\partial T}{\partial \tau}\,d\tau\,dx=\iint\limits_{\Omega_{kl}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\,(x,\ \tau)\,\frac{\partial T}{\partial x}\right)d\tau\,dx.$$

Используя формулу Грина

$$\iint\limits_{\Omega_{kl}}\left(\frac{\partial f_1}{\partial \tau}+\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)d\tau\,dx=\oint\limits_{\Gamma_{kl}}(f_1\,dx+f_2\,d\tau),$$

преобразуем уравнение баланса к виду

$$c\rho\int\limits_{x_{k-1/2}}^{x_{k+1/2}}[T\,(x,\ \tau_{l+1})-T\,(x,\ \tau_l)]\,dx=\int\limits_{\tau_l}^{\tau_{l+1}}\left[\lambda\,(x_{k+1/2},\ t)\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{k+1/2}-\right.$$

$$\left.-\lambda\,(x_{k-1/2},\ t)\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{k-1/2}\right]dt. \qquad (11.26)$$

Обозначим

$$q\,(x,\ \tau)=-\lambda\,(x,\ \tau)\,\partial T/\partial x \qquad (11.27)$$

и вычислим приближенно интегралы в (11.26):

$$\int\limits_{x_{k-1/2}}^{x_{k+1/2}} [T(x, \tau_{i+1}) - T(x, \tau_i)]\,dx \approx h[T(x_k, \tau_{i+1}) - T(x_k, \tau_i)];$$

(11.28)

$$\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} [q(x_{k-1/2}, \tau) - q(x_{k+1/2}, \tau)]\,d\tau \approx \frac{\eta}{2}[q(x_{k-1/2}, \tau_{i+1}) -$$

$$- q(x_{k+1/2}, \tau_{i+1}) - q(x_{k+1/2}, \tau_i) + q(x_{k-1/2}, \tau_i)]. \qquad (11.29)$$

С учетом (11.27) — (11.29), заменяя в правой части (11.29) плотности тепловых потоков разностями, получим разностную аппроксимацию уравнения (11.25):

$$\frac{u_k^{i+1} - u_k^i}{\eta} = \frac{1}{2c\rho h}\left[\left(\lambda^{i+1}_{k+\frac{1}{2}} \frac{u_{k+1}^{i+1} - u_k^{i+1}}{h} - \lambda^{i+1}_{k-\frac{1}{2}} \frac{u_k^{i+1} - u_{k-1}^{i+1}}{h}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\lambda^i_{k+\frac{1}{2}} \frac{u_{k+1}^i - u_k^i}{h} - \lambda^i_{k-\frac{1}{2}} \frac{u_k^i - u_{k-1}^i}{h}\right)\right]. \qquad (11.30)$$

Отметим, что в уравнении (11.30) вместо символа T, обозначающего точное решение уравнения (11.25), использован символ u. Одним из преимуществ интегро-интерполяционного метода является возможность его применения для уравнений с разрывными коэффициентами $\lambda(x, \tau)$, так как интегральная запись закона сохранения субстанции позволяет выделить из всех математически допустимых решений краевой задачи именно то, которое представляет физически правильное обобщенное решение.

Вариационные методы построения разностных схем. Напомним, что если краевая задача теплопроводности может быть представлена в виде операторного уравнения

$$A[T] = q_v, \qquad (11.31)$$

где $A[T]$ — положительный оператор, заданный на соответствующем гильбертовом пространстве, то эта задача может быть сведена к эквивалентной задаче отыскания функции, реализующей минимум функционала

$$F(T) = (A[T], T) - 2(T, q_v) \qquad (11.32)$$

на соответствующем множестве допустимых функций.

Поэтому если имеется вариационная формулировка исходной краевой задачи, то можно использовать один из вариационных методов для построения вариационно-разностной схемы. В самом простом случае рассматривается сетка Ω_h, на которой вводится дискретная аппроксимация $F_h(u_h)$ функционала $F(T)$. Значения u_h в узлах сетки Ω_h определяются из условий минимизации функционала $F_h(u_h)$. Более общий прием построения вариационно-разностных схем, называемый *методом конечных элементов* (МКЭ), основан на минимизации функционала с помощью специального выбора конечного числа непересекающихся сеточных элементов и координатных функций, построенных для этих элементарных областей.

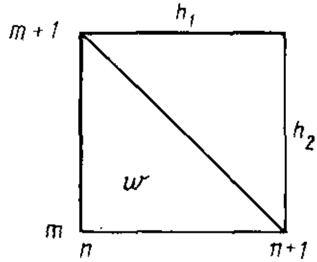


Рис. 11.9. Прямоугольный сеточный элемент

Для примера построим вариационно-разностный аналог уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{1}{\lambda}\,q_v(x,\ y)=0$$

на прямоугольной сетке с шагами h_1 и h_2. Функционал (11.32) в этом случае имеет вид

$$F(T)=\int\limits_{\Omega}\!\!\int\left[(\partial T/\partial x)^2+(\partial T/\partial y)^2-\frac{2}{\lambda}\,Tq_v(x,\ y)\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \qquad (11.33)$$

Каждый прямоугольный сеточный элемент разобьем на два треугольных (рис. 11.9). В каждом треугольнике можно аппроксимировать искомую функцию интерполяционным полиномом степени N, используя, например, сплайновую интерполяцию *.

Ограничимся рассмотрением линейной аппроксимации ($N=1$) функции $T(x,\ y)$ в треугольном элементе ω. Тогда

$$T(x,\ y)\approx u(x,\ y)=u_{nm}+(1/h_1)(x-x_n)(u_{n+1,\ m}-u_{n,\ m})+(1/h_2)\times$$
$$\times(y-y_m)(u_{n,\ m+1}-u_{n,\ m}),\ \ x,\ y\in\omega, \qquad (11.34)$$

$$\text{и}\ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=(1/h_1^2)(u_{n+1,\ m}-u_{n,\ m})^2+(1/h_2^2)(u_{n,\ m+1}-u_{n,\ m})^2,$$
$$x,\ y\in\omega. \qquad (11.35)$$

Объемную плотность тепловых потоков внутренних источников теплоты в элементе ω можно аппроксимировать, например, так:

$$\frac{1}{\lambda}\,(q_v)_{nm}=W_{nm}. \qquad (11.36)$$

---

* Задача интерполяции функции одной переменной сплайном сводится к построению многочлена n-й степени

$$u(x)=\sum_{i=0}^{n}a_{ki}x^i,\quad x_{k-1}<x<x_k,$$

коэффициенты которого постоянны и который в узлах интерполяции принимает заданные значения и непрерывен вместе со своими $n-1$ производными.

Используя выражения (11.34) — (11.36), вычислим интеграл в (11.33) по элементарной области ω:

$$\int\limits_{\omega}\left[(\partial u/\partial x)^2+(\partial u/\partial y)^2-\frac{2}{\lambda}uq_v\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int\limits_0^{h_1}\mathrm{d}x\int\limits_0^{h_2-\frac{h_2}{h_1}x}\left[\frac{1}{h_1^2}(u_{n+1,\,m}-\right.$$

$$-u_{nm})^2+\frac{1}{h_2^2}(u_{n,\,m+1}-u_{nm})^2-2W_{nm}u_{nm}+\frac{2W_{nm}}{h_1}(x-x_n)\times$$

$$\left.\times(u_{n+1,\,m}-u_{nm})+\frac{2W_{nm}}{h_2}(y-y_m)(u_{n,\,m+1}-u_{nm})\right]\mathrm{d}y=\frac{h_1h_2}{2}\times$$

$$\times\left[\frac{1}{h_1^2}(u_{n+1,\,m}-u_{nm})^2+\frac{1}{h_2^2}(u_{n,\,m+1}-u_{nm})^2-\frac{2}{3}W_{nm}(u_{nm}+\right.$$

$$\left.+u_{n+1,\,m}+u_{n,\,m+1})\right].$$

Суммируя интегралы в прямолинейной ячейке, а затем и по всем треугольным элементам, получим функционал

$$F(u)=\frac{h_1h_2}{2}\sum_{n,\,m}\left[\frac{1}{h_1^2}(u_{n+1,\,m}-u_{nm})^2+\frac{1}{h_1^2}(u_{n+1,\,m+1}-u_{n,\,m+1})^2+\right.$$

$$+\frac{1}{h_2^2}(u_{n,\,m+1}-u_{nm})^2+\frac{1}{h_2^2}(u_{n+1,\,m+1}-u_{n+1,\,m})^2-\frac{2}{3}W_{nm}(u_{nm}+$$

$$+u_{n+1,\,m}+u_{n,\,m+1})-\frac{2}{3}W_{n+1,\,m+1}(u_{n+1,\,m+1}+u_{n+1,\,m}+$$

$$\left.+u_{n,\,m+1})\right]=\min.$$

Для нахождения минимума этого функционала приравняем нулю его производные по u_{nm}. В результате для нахождения неизвестных u_{nm} получаем систему линейных уравнений

$$\frac{1}{h_1^2}(u_{n+1,\,m}-2u_{nm}+u_{n-1,\,m})+\frac{1}{h_2^2}(u_{n,\,m+1}-2u_{nm}+u_{n,\,m-1})+$$

$$+\frac{1}{6}(2W_{nm}+W_{n+1,\,m}+W_{n-1,\,m}+W_{n,\,m+1}+W_{n,\,m-1})=0. \qquad (11.37)$$

Это стационарная разностная схема, которая, как легко видеть, аппроксимирует дифференциальное уравнение стационарной теплопроводности. Для того чтобы получить разностную схему более высокой точности, следует вместо линейной аппроксимации искомой функции в конечном элементе использовать аппроксимацию более высокого порядка.

Метод неопределенных коэффициентов. Суть метода заключается в том, что для аппроксимации дифференциального оператора записывают линейную комбинацию значений сеточной функции в узлах априори выбранного шаблона. Неопределенные постоянные коэффициенты этой комбинации определяют из условия получения наивысшего порядка аппроксимации в данной точке дифференциального оператора разностным. Например, для оператора $A[T]=\partial^2T/\partial x^2+\partial^2T/\partial y^2$ в точке p_0 на шаблоне «крест» составим разностную аппроксимацию в следующем виде:

$$A_h[u]=u(p_0)+\sum_{i=1}^{4} c_i u(p_i); \tag{11.38}$$

здесь координаты точки p_i определены следующим образом:

$$p_0=p_0(x_k,\ y_j);\ p_1=p_1(x_k+h,\ y_j);\ p_2=p_2(x_k,\ y_j+h);\ p_3=p_3(x_k-h,\ y_j);\ p_4=p_4(x_k,\ y_j-h).$$

По свойству инвариантности оператора Лапласа относительно любого поворота системы координат выражение (11.38) можно упростить и представить в виде

$$A_h[u]=c_0u(p_0)+c_1\sum_{i=1}^{4} u(p_i). \tag{11.39}$$

Предполагая существование непрерывных четвертых производных по x и y, разложим в ряд Тейлора $u(p_k)$ в окрестности точки p_0 и составим невязку для (11.39), ограничиваясь для простоты членами $0(h^4)$:

$$\psi=\frac{\partial^2T}{\partial x^2}(p_0)+\frac{\partial^2T}{\partial y^2}(p_0)-c_0T(p_0)-c_1\Big[T(p_0)+h\frac{\partial T}{\partial x}(p_0)+\frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2T}{\partial x^2}(p_0)+$$
$$+\frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3T}{\partial x^3}(p_0)+\frac{h^4}{4!}\frac{\partial^4T}{\partial x^4}(x_k+\theta_1h,\ y_j)+T(p_0)+h\frac{\partial T}{\partial y}(p_0)+\frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2T}{\partial y^2}(p_0)+$$
$$+\frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3T}{\partial y^3}(p_0)+\frac{h^4}{4!}\frac{\partial^4T}{\partial y^4}(x_k,\ y_j+\theta_2h)+T(p_0)-h\frac{\partial T}{\partial x}(p_0)+$$
$$+\frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2T}{\partial x^2}(p_0)-\frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3T}{\partial x^3}(p_0)+\frac{h^4}{4!}\frac{\partial^4T}{\partial x^4}(x_k-\theta_3h,\ y_j)+T(p_0)-h\times$$
$$\times\frac{\partial T}{\partial y}(p_0)+\frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2T}{\partial y^2}(p_0)-\frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3T}{\partial y^3}(p_0)+\frac{h^4}{4!}\frac{\partial^4T}{\partial y^4}(x_k,\ y_j-\theta_4h)\Big].$$

Требуя далее, чтобы порядок невязки ψ был равен $0(h^m)$ (где m — как можно большее число), для нахождения коэффициентов c_i получим систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} c_0+4c_1=0; \\ h^2c_1=1, \end{cases}$$

откуда $c_0=-4/h^2,\ c_1=1/h^2$.

Подставляя коэффициенты c_l в (11.39), получим разностную аппроксимацию оператора Лапласа в виде

$$A_h[u] = -\frac{4}{h^2}u(p_0) + \frac{1}{h^2}\sum_{l=1}^{4} u(p_l) = (u_{k+1,\,j} + u_{k,\,j+1} + u_{k-1,\,j} + u_{k,\,j-1} - 4u_{k,\,j})/h^2.$$

А для порядка «локальной» аппроксимации имеем

$$\psi = -\frac{h^4}{4!}c_1\left[\frac{\partial^4 T}{\partial x^4}(x_k + \theta_1 h,\ y_j) + \frac{\partial^4 T}{\partial y^4}(x_k,\ y_j + \theta_2 h) + \frac{\partial^4 T}{\partial x^4}(x_k - \theta_3 h,\ y_j) + \frac{\partial^4 T}{\partial y^4}(x_k,\ y_j - \theta_4 h)\right] = O(h^2).$$

Отметим, что применение метода неопределенных коэффициентов предполагает наличие достаточного числа раз непрерывно дифференцируемых коэффициентов и решений. Он часто используется для того, чтобы среди аппроксимаций данного порядка найти наилучшую по определенному признаку. Однако из-за своей громоздкости этот метод используется реже, чем методы, описанные выше.

Погрешность аппроксимации на сетке и ее порядок. Приведенные выше оценки порядка погрешности аппроксимации дифференциальных операторов носят локальный характер (так как получены для одного узла сетки). Обычно интерес представляет получение оценки порядка разностей аппроксимации на всей сетке. При этом для решения задачи теплопроводности необходимо аппроксимировать как основное дифференциальное уравнение, так и краевые условия. А порядок аппроксимации разностной схемы в целом зависит не только от порядка аппроксимации дифференциального уравнения, но и от порядков аппроксимации каждого из граничных условий.

Пусть в области Ω переменных $p = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, ограниченной поверхностью S, корректно поставлена краевая задача

$$A[T(p)] = q_v(p),\ p \in \Omega;$$
$$R[T(p)] = \varphi(p),\ p \in S. \qquad (11.40)$$

Область непрерывного изменения аргументов $\Omega + S$ заменим сеткой с шагом h, состоящей из множества внутренних узлов Ω_h и множества граничных узлов S_h. Тогда на сетке $\Omega_h + S_h$ запишем сеточный аналог задачи (11.40):

$$A_h[u_h(p)] = \omega_h(p),\ p \in \Omega_h;$$
$$R_h[u_h(p)] = \mu_h(p),\ p \in S_h. \qquad (11.41)$$

Сеточные функции

$$\psi_h(p) = (A[T] - q_v) - (A_h[T] - \omega_h),\ p \in \Omega_h;$$
$$\gamma_h(p) = (R[T] - \varphi) - (R_h[T] - \mu_h),\ p \in S_h,$$

определяют степень близости разностной схемы (11.41) к краевой задаче (11.40) в точке p.

Введем определение.

Разностная схема (11.41) аппроксимирует краевую задачу (11.40) на сетке, если

$$\|\psi\|_{\omega_h}\to 0,\ \|\gamma_h\|_{\mu_h}\to 0 \text{ при } h\to 0; \qquad (11.42)$$

порядок аппроксимации равен n, если

$$\|\psi\|_{\omega_h}=O(h^n),\ \|\gamma_h\|_{\mu_h}=O(h^n) \text{ при } h\to 0. \qquad (11.43)$$

Отметим, что так как функции T, q_v, φ принадлежат разным классам функций, то каждую из них можно оценивать в своей норме, то же относится и к их сеточным аналогам u_h, ω_h, μ_h.

Выбор нормы в (11.42), (11.43) определяется двумя противоречивыми соображениями. С одной стороны, чем слабее норма $\|\ \ldots\ \|_T$, тем легче построить и исследовать сходящееся в этой норме разностное решение; с другой стороны, желательно, чтобы разностное решение u было близко к точному решению T как можно в более сильной норме. В выражениях (11.42), (11.43) для случая неравномерной сетки под шагом h следует понимать какую-либо норму сеточной функции h_k, например

$$h=\|h_k\|_c=\max_k h_k.$$

В случае многих переменных определение аппроксимации в основном не изменяется, необходимо только потребовать, чтобы к нулю стремились размеры шагов по всем переменным. Порядок аппроксимации может быть различным по разным переменным. Например, если для двухмерной задачи

$$\|\psi\|_{\omega_h}=O(\eta^k+h^r) \text{ при } \eta\to 0,\ h\to 0, \qquad (11.44)$$

то говорят, что аппроксимация имеет k-й порядок по времени и r-й — по переменной x.

Если погрешность аппроксимации вида (11.44) стремится к нулю при любом законе стремления шагов к нулю, то аппроксимацию называют *безусловной* или *абсолютной*.

Пусть, например,

$$\|\psi\|_{\omega_h}=O(\eta^k+h^r+\eta^\nu/h^m) \text{ при } \eta\to 0 \text{ и } h\to 0,$$

тогда, для того чтобы $\|\psi\|_{\omega_h}\to 0$, надо дополнительно потребовать, чтобы $(\eta^\nu/h^m)\to 0$. Аппроксимацию такого вида называют *условной*. В определение невязки $\psi_h(p)$ и $\gamma_h(p)$ входит решение $T(p)$ исходной задачи (11.40), которое, вообще говоря, неизвестно. Поэтому, как правило, вместо функции $T(p)$ берут какую-то функцию $y(p)$, принадлежащую достаточно широкому классу Y, к которому заведомо принадлежит и $T(p)$. Тогда если на всех функциях класса Y имеет место аппроксимация порядка n

$$\|A[y(p)]-A_h[y(p)]+\omega_h(p)-q_v(p)\|_{\omega_h}=O(h^n) \text{ при } h\to 0,$$

то и аппроксимация на решении $T(p)$ будет порядка не ниже n.

§ 11.3. Устойчивость и сходимость разностных схем

Пусть требуется найти решение $T(x, \tau)$ краевой задачи теплопроводности:

$$\partial T/\partial\tau = a(x, \tau)\,\partial^2 T/\partial x^2, \quad 0<\tau\leqslant t, \quad d<x<b; \tag{11.45}$$

$$\left.\begin{aligned} &T(x, 0)=\varphi(x),\\ &[\partial T/\partial x-\alpha(\tau)T]_{x=d}=\mu(\tau),\\ &[\partial T/\partial x-\gamma(\tau)T]_{x=b}=\nu(\tau), \end{aligned}\right\} \tag{11.46}$$

где a, γ, μ, ν — заданные функции переменной τ.

Введем прямоугольную сетку узлов $x_k=d+kh$ $(k=0, 1, \ldots, N)$, $\tau_i=i\eta$ $(i=0, 1, \ldots, M)$, где $h=(b-d)/N$, $\eta=t/M$. С помощью метода разностной аппроксимации запишем три варианта разностной схемы для уравнения (11.45), при этом вместо индекса времени i будем применять более удобные обозначения:

$$u(x_k, \tau_i)=u_k, \quad u(x_k, \tau_{i+1})=\hat{u}_k, \quad u(x_k, \tau_{i-1})=\check{u}_k.$$

Тогда, варьируя аппроксимацию производной $\partial T/\partial\tau$, имеем **вариант I**

$$(\hat{u}_k-u_k)/\eta=a_k(u_{k+1}-2u_k+u_{k-1})/h^2 \quad (k=1, 2, \ldots, N-1;$$
$$i=0, 1, \ldots, M-1); \tag{11.47}$$

вариант II

$$(u_k-\check{u}_k)/\eta=a_k(u_{k+1}-2u_k+u_{k-1})/h^2 \quad (k=1, 2, \ldots, N-1;$$
$$i=1, 2, \ldots, M); \tag{11.48}$$

вариант III

$$(\hat{u}_k-\check{u}_k)/(2\eta)=a_k(u_{k+1}-2u_k+u_{k-1})/h^2 \quad (k=1, 2, \ldots, N-1;$$
$$i=1, \ldots, M-1). \tag{11.49}$$

Так как число неизвестных в уравнениях (11.47)—(11.49) больше числа уравнений, то к каждому из уравнений необходимо присоединить начальные и граничные условия, записанные в разностной форме:

$$\left.\begin{aligned} &u_k^0=\varphi_k \quad (k=0, 1, \ldots, N);\\ &(u_1-u_0)/h-\alpha u_0=\mu;\\ &(u_N-u_{N-1})/h-\gamma u_N=\nu \quad (i=1, 2, \ldots, M). \end{aligned}\right\} \tag{11.50}$$

Обозначим $\eta/h^2=\beta$ и представим уравнения (11.47)—(11.49) в такой форме:

$$\hat{u}_k=(1-2\beta a_k)\,u_k+\beta a_k\,(u_{k+1}+u_{k-1}) \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ N-1,$$
$$i=0,\ 1,\ \ldots,\ M-1); \tag{11.51}$$

$$(1+2\beta a_k)\,u_k-\beta a_k\,(u_{k+1}+u_{k-1})=\check{u}_k \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ N-1;$$
$$i=1,\ 2,\ \ldots,\ M); \tag{11.52}$$

$$\hat{u}_k=2\beta a_k\,(u_{k+1}-2u_k+u_{k-1})+\check{u}_k \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ N-1;$$
$$i=1,\ \ldots,\ M-1), \tag{11.53}$$

а краевые условия (11.50) — в таком виде:

$$\left.\begin{array}{l} u_1-(1+h\alpha)\,u_0=h\mu \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ M); \\ (1-h\gamma)\,u_N-u_{N-1}=h\nu \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ M); \\ u_k^0=\varphi_k \quad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ N). \end{array}\right\} \tag{11.54}$$

Можно показать, что уравнения (11.51) и (11.52) аппроксимируют уравнение (11.45) с порядком $0(\eta+h^2)$, а уравнение (11.53) — с порядком $0(\eta^2+h^2)$. Погрешность аппроксимации краевых условий (11.46) уравнениями (11.50) имеет первый порядок относительно h. Поэтому разностные схемы (11.51), (11.54); (11.52), (11.54) и (11.53), (11.54) имеют по пространственной переменной порядок $0(h)$.

Какую схему из полученных целесообразнее использовать для получения приближенного решения и какое соотношение между шагами η и h можно брать? С точки зрения численного процесса, приводящего к искомому решению, наиболее просты уравнения (11.51), (11.53).

Разностные схемы, позволяющие вычислять значение искомой функции $\hat{u}_k\equiv u_k^{i+1}$ на $(i+1)$-м временно́м слое непосредственно по известным значениям функции на слоях с номерами $j\,(j\leqslant i)$, называют *явными*. При нахождении приближенного решения по схеме (11.52) для вычисления u_k^i на i-м временно́м слое необходимо решить систему $N-1$ или $N+1$ линейных алгебраических уравнений. Такие разностные схемы называют *неявными*. В случае неявных схем численный процесс нахождения решения более сложен по сравнению с явной схемой.

При решении задачи с помощью третьей схемы (11.53), после того как вычислены значения решения на первом временно́м слое, организация счета так же проста, как и в схеме (11.51). Поэтому эта схема также относится к явным разностным схемам. Значения решения на первом слое можно получить с помощью разложения в ряд Тейлора искомой функции:

$$u_k^1=u_k^0+\eta\,(\partial u/\partial\tau)_k^0+0\,(\eta^2) \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ N-1). \tag{11.55}$$

Используя основное дифференциальное уравнение теплопроводности, получим, что

$$(u_\tau)_k^0 = a_k^0 (u_{xx})_k^0, \tag{11.56}$$

и подставим (11.56) в (11.55); тогда

$$u_k^1 = u_k^0 + \eta a_k^0 (u_{xx})_k^0.$$

Заменяя производную $(u_{xx})_k^0$ разностным отношением и пренебрегая бесконечно малыми порядка $0(\eta^2)$ и $0(h^2)$, получим

$$u_k^1 = (1 - 2\beta a_k^0)\, u_k^0 + \beta a_k^0 \left(u_{k+1}^0 + u_{k-1}^0 \right).$$

Таким образом, на первый взгляд кажется, что целесообразней всего вести расчет задачи по схеме (11.53) (вариант III); с точки зрения точности аппроксимации это уравнение лучше по сравнению с двумя первыми. Составим программу расчета поля температур для задачи (11.45), (11.46) на алгоритмическом языке ФОРТРАН-IV для ЭВМ ЕС-1020. Программа состоит из «головной» программы, подпрограмм: печати заголовка, решения по I, II, III вариантам разностных схем; подпрограмм-функций для вычисления коэффициентов a_k^l, ψ_k, α^l, γ^l, μ^l, ν^l. При решении системы алгебраических уравнений, получаемой по II варианту разностной схемы, использовался метод прогонки (см. § 12.1).

Приведем текст программы для случая, когда $a(x, \tau) = 1$, $\psi(x) = 0$, $\alpha(\tau) = 0$, $\mu(\tau) = 0$, $\gamma(\tau) = 0$, $\nu(\tau) = 1$.

```
C   . ГОЛОВНАЯ ПРОГРАММА (ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИ-
C     ВОСТИ)
      DIMENSION U (4Ø1, 11)
      READ (1, 2) A, B, AL, N, M
    2 FORMAT (3F7.4, 2I3)
      H=(B — A)/(N — 1)
      RO=AL/(H * H)
      CALL RAZSH1 (N, M, A, H, AL, RO, U)
      CALL RAZSH2 (N, M, A, H, AL, RO, U)
      CALL RAZSH3 (N, M, A, H, AL, RO, U)
      STOP
      END
C     ПОДПРОГРАММА ПЕЧАТИ ЗАГОЛОВКА
      SUBROUTINE WRTBL (K, N, M, A, H, AL, RO)
      DIMENSION X (11)
      WRITE (3, 2Ø) RO, H, AL
   2Ø FORMAT(9X, 3HRO=, F5.3, 4X, 2HH=, F5.3, 4X, 2HL=, F6.4)
      WRITE (3,5) K
    5 FORMAT (9X//28X, 18H РАЗНОСТНАЯ СХЕМА, I1/)
      DO 6 I=1, N
    6 X(I)=A+(I — 1) * H
      WRITE (3, 7) (X(I), I=1, N, 2)
```

```
  7   FORMAT (9X, 78('—')/9X, '* ______ * ', 6(1Ø('__'),
      '* ')/9X, * '* _N_ * _T/X', '___ * ', 6(F1Ø.3, ' * ')/9X,
      ' *______*_____' *_____', 6(1Ø('__'), '* ')/9X, 78('—'))
      RETURN
      END
C     РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ПО ПЕРВОЙ РАЗНОСТ-
C     НОЙ СХЕМЕ
      SUBROUTINE RAZSH1 (N, M, A, H, AL, RO, U)
      DIMENSION U(M, N)
      K=1
      CALL WRTBL (K, N, M, A, H, AL, RO)
      DO 6I=1, N
      X=A+(I — 1) * H
  6   U(1, I)=EI(X)
      L=Ø
      T=Ø
      WRITE (3, 1Ø) L, T, (U(1, I), I=1, N, 2)
 1Ø   FORMAT (9X, ' * ', I3, ' * ', F6.3, ' * ', 6(F1Ø.3, ' * '))
      N1=N — 1
      DO 7 I=2, N1
      X=A+(I — 1) * H
  7   U(2, I)=(1 — 2 * RO * (AM(X, T)) * * 2) *U(1, I)+RO *
      ((AM(X, T))
    * * * 2) * (U(1, I+1)+U(1, I — 1))
      K1=2
      K2=6
 13   DO5 I=K1, K2
      T=AL * (J — 1)
  2   U(J, 1)=(U(J, 2) — ALF1(T) * H)/(1+H * ALFØ(T))
      U(J, N)=(U(J, N — 1)+H * BET1(T))/(1 — H * BETØ(T))
      IF(J — M) 3, 5, 3
  3   DO 8 I=2, N1
      X=A+(I — 1) * H
  8   U(J+1, I)=(1 — 2 * RO * (AM(X, T)) * * 2) * U(J, I)+
      +RO * ((AM(X, T))
    * * * 2) * (U(J, I+1)+U(J, I — 1))
  5   L=L+1
      IF(K2 — M) 11, 12, 12
 11   I1=K2
      DO 15 I2=I1, I1
 15   WRITE (3, 1Ø) L, T, (U(I2, I), I=1, N, 2)
      K1=K1+5
      K2—K2+5
      IF(K2 — M) 13, 13, 14
 14   K2=M
      GO TO 13
 12   DO 16 J1=M, M
 16   WRITE(3, 1Ø) L, T, (U(J1, I), I=1, N, 2)
      WRITE (3, 9)
```

```
    9 FORMAT (9X, 78('')///)
      RETURN
      END
C     РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ПО ВТОРОЙ РАЗНОСТ-
C     НОЙ СХЕМЕ
      SUBROUTINE RAZSH2 (N, M, A, H, AL, RO, U)
      DIMENSION P(4Ø1, 11), Q(4Ø1, 11), U(M, N)
      K=2
      DO6 I=1, N
      X=A+(I-1)*N
    6 U(1, I)=FI(X)
      N1=N-1
      DO 5 J=2, M
      T=AL*(J-1)
      P(J, 1)=1/(1+H*ALFØ(T))
      Q(J, 1)=-H*ALF1(T)/(1+H*ALFØ(T))
      RS=1-H*BETØ(T)
      ALS=-H*BET1(T)
      DO 8 I=1, N1
      X=A+(I-1)*H
      B=1+1/(2*RO*(AM(X, T))**2)
      D=-U(J-1, I)/(RO*(AM(X, T))**2)
      P(J, I+1)=1/(2*B-P(J, I))
    8 Q(J, I+1)=(Q(J, I)-D)*P(J, I+1)
      U(J, N)=(ALS-Q(J, N))/(P(J, N)-RS)
      U(J, N-1)=P(J, N)*U(J, N)+Q(J, N)
      DO 2 I=2, N1
    2 U(J,N-I)=P(J,N-I+1)*U(J,N-I+1)+Q(J,N-I+1)
    5 CONTINUE
      CALL WRTBL (K, N, M, A, H, AL, RO)
   11 L=Ø
      DO 1Ø J=1, M, 5
      T=AL*(J-1)
      WRITE (3, 9) L, T, (U(J, I), I=1, N, 2)
    9 FORMAT (9X, '*', I3, '*', F6.3, '*', 6(F1Ø.3, '*'))
   1Ø L=L+5
      WRITE(3, 3)
    3 FORMAT (9X, 78('—')///)
      RETURN
      END
C     РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ПО ТРЕТЬЕЙ РАЗНОСТ-
C     НОЙ СХЕМЕ
      SUBROUTINE RAZSH3 (N, M, A, H, AL, RO, U)
      DIMENSION U(M, N)
      K=3
      CALL WRTBL (K, N, M, A, H, AL, RO)
      DO 6 I=1, N
      X=A+(I-1)*H
    6 U(1, I)=FI(X)
```

```
      L=∅
      T=∅
      WRITE (3, 1∅) L, T, (U(1, I), I=1, N, 2)
1∅    FORMAT (9X, '*', I3, '*', F6.3, '*', 6(F1∅.3, '*'))
      N1=N-1
      DO 7 I=2, N1
      X=A+(I-1)*H
7     U(2, I)=(1-2*RO*(AM(X, T))**2)*U(1, I)+RO*
     *((AM(X, T))**2
     *)*(U(1, I+1)+U(1, I-1))
      K1=2
      K2=6
13    DO 5 J=K1, K2
      T=AL*(J-1)
      U(J, 1)=(U(J, 2)-H*ALF1(T))/(1+H*ALF∅(T))
      U(J, N)=(U(J, N-1)+H*BET1(T))/(1-H*BET∅(T))
      IF(J-M) 3, 5, 3
3     DO 8 I=2, N1
      X=A+(I-1)*H
8     U(J+1, I)=2*RO*((AM(X, T)**2)*(U(J, I+1)-2*
      U(J, I)+
     *U(J, I-1))+U(J-1, I)
5     L=L+1
      IF(K2-M) 11, 12, 12
11    I1=K2
      DO 15 I2=I1, I1
15    WRITE (3, 1∅) L, T, (U(I2, I), I=1, N, 2)
      K1=K1+5
      K2=K2+5
      IF(K2-M) 13, 13, 14
14    K2=M
      GO TO 13
12    DO 16 J1=M, M
16    WRITE (3, 1∅) L, T, (U(J1, I), I=1, N, 2)
      WRITE (3, 9)
9     FORMAT (9X, 78('-')///)
      RETURN
      END
C     ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ A(X, TAU)
      FUNCTION AM(Z, Y)
      AM=1.∅
      RETURN
      END
C     ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ НАЧАЛЬНОГО
C     РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ
      FUNCTION FI(Z)
      FI=∅.∅
      RETURN
      END
```

```
C     ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ГРАНИЧНЫХ ФУНКЦИЙ
C     ПРИ X=A
      FUNCTION ALFØ(Y)
      ALFØ=Ø.
      RETURN
      END
      FUNCTION ALF1(Y)
      ALF1=Ø.
      RETURN
      END
C     ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ГРАНИЧНЫХ ФУНКЦИЙ,
C     ПРИ X=B
      FUNCTION BETØ(Y)
      BETØ=Ø.
      RETURN
      END
      FUNCTION BET1(Y)
      BET1=1.Ø
      RETURN
      END
```

Приведем часть результатов расчетов по трем схемам для следующих данных: $a(x, \tau)=1$, $\varphi(x)=0$, $\alpha(\tau)=0$, $\mu(\tau)=0$, $\gamma(\tau)=0$, $\nu(\tau)=1$, $d=0$, $b=1$, $0\leqslant\tau\leqslant 1$.

При $\beta=1$ результаты расчетов даны в табл. 11.1, при этом $h=0,1$; $\eta=0,01$.

Из таблицы видно, что расчеты по II варианту дают качественно приемлемые результаты, а расчеты по I и III вариантам разностной схемы приводят к абсурдным результатам, по крайней мере уже на временно́м слое $\tau_5=0,050$. В случае I и III вариантов разностной схемы встречаемся с явлением, которое называется *неустойчивостью* разностной схемы. Суть этого явления заключается в том, что при счете по неустойчивой схеме вычислительные погрешности, избежать которых невозможно хотя бы из-за округления чисел, появляясь на некотором временно́м слое, быстро растут и вскоре приводят к неприемлемым результатам.

Если же возникающие в процессе расчетов вычислительные погрешности имеют тенденцию убывать (по крайней мере, не возрастают), то разностная схема называется *устойчивой*.

Теперь уменьшим шаг по временно́й переменной, пусть $\eta=0,005$, тогда $\beta=1/2$. Проведем расчет температурного поля по трем вариантам схем для сформулированной выше краевой задачи. Результаты расчетов приведены в табл. 11.2.

Здесь в отличие от табл. 11.1 счет по I варианту разностной схемы устойчив и результаты расчетов по I и II варианту близки между собой. Счет по III варианту неустойчив. Если при достаточно малых шагах по разным переменным для устойчивости разностной схемы шаги должны удовлетворять дополнительным соотношениям, то устойчивость называется *условной*; I вариант разностной схемы относится к условно устойчивым схемам. Ниже будет показано, что разностное уравнение (11.51) устойчиво только при $a\eta/h^2 \leqslant 1/2$.

Уменьшим еще раз шаг по временно́й переменной, полагая $\eta = 0{,}0025$; тогда $\beta = 1/4$. Результаты расчетов приведены в табл. 11.3.

Таблица 11.1

i	τ_i \ x	0,0	0,200	0,400	0,600	0,800	1,000
	I вариант *						
0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
5	0,050	0,0	0,0	0,0	0,100	0,300	0,200
10	0,100	0,100	—0,600	—5,900	—17,500	—16,500	6,900
15	0,150	167,400	659,699	1871,097	3102,396	2230,497	—822,999
20	0,200	58911,469	******	*****	*****	*****	127146,063
25	0,250	******	******	*****	*****	*****	******
30	0,300	******	******	*****	*****	*****	******
	II вариант						
0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
5	0,050	0,001	0,004	0,014	0,044	0,126	0,300
10	0,100	0,012	0,021	0,049	0,110	0,223	0,405
15	0,150	0,034	0,050	0,093	0,173	0,300	0,486
20	0,200	0,066	0,087	0,140	0,231	0,367	0,554
25	0,250	0,104	0,129	0,188	0,286	0,428	0,616
30	0,300	0,147	0,174	0,237	0,339	0,484	0,673
	III вариант						
0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
5	0,050	0,0	0,0	0,0	1,600	13,200	—7,100
10	0,100	51,200	—742,399	21638,352	*****	******	74718,438
15	0,150	******	*******	*******	*****	******	******
20	0,200	******	*******	*******	*****	******	******

* Печатание звездочек означает, что значения функций достигли такого размера, что не могут вместиться в формат печати.

Из табл. 11.3 видно, что значения температур, рассчитанные по вариантам I и II, меньше отличаются друг от друга, чем в табл. 11.2. В то же время счет по III варианту по-прежнему неустойчив.

Разностные схемы, которые при достаточно малых шагах по независимым переменным и любом сколь угодно малом $\beta > 0$ неустойчивы, называются *абсолютно неустойчивыми*: пример — разностная схема III варианта.

Если же факт устойчивости имеет место при любом соотношении шагов по различным переменным, лишь бы они были достаточно малы, то схема называется *безусловно устойчивой*: пример — неявная разностная схема II варианта.

Дадим строгое определение устойчивости разностных схем. Разностная схема (11.41)

$$A_h[u]=\omega, \quad p\in\Omega_h; \quad R_h[u]=\mu, \quad p\in S_h$$

Таблица 11.2

i	τi \ x	0,0	0,200	0,400	0,600	0,800	1,000
				I вариант			
0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
5	0,025	0,0	0,0	0,0	0,006	0,056	0,219
10	0,050	0,000	0,001	0,007	0,036	0,121	0,296
15	0,075	0,003	0,006	0,023	0,072	0,175	0,354
20	0,100	0,012	0,016	0,043	0,105	0,220	0,402
25	0,125	0,025	0,032	0,066	0,138	0,261	0,445
30	0,150	0,042	0,050	0,090	0,169	0,298	0,484
35	0,175	0,062	0,071	0,115	0,200	0,333	0,519
40	0,200	0,084	0,093	0,141	0,230	0,366	0,553
				II вариант			
0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
5	0,025	0,000	0,000	0,002	0,014	0,066	0,229
10	0,050	0,001	0,003	0,012	0,044	0,128	0,302
15	0,075	0,004	0,010	0,029	0,078	0,180	0,359
20	0,100	0,010	0,020	0,049	0,111	0,225	0,407
25	0,125	0,020	0,033	0,070	0,143	0,265	0,449
30	0,150	0,032	0,049	0,093	0,173	0,302	0,487
35	0,175	0,047	0,067	0,116	0,203	0,336	0,522
40	0,200	0,064	0,086	0,140	0,231	0,368	0,555
				III вариант*			
0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
5	0,025	0,0	0,0	0,0	0,100	0,900	—0,300
10	0,050	0,100	—1,400	—44,400	—302,999	—467,999	201,800
15	0,075	—4511,477	20221,227	132815,563	370276,875	357747,125	*****
20	0,100	******	*******	*******	******	******	*****
25	0,125	******	*******	*******	******	******	******
30	0,150	******	*******	*******	******	******	*****
35	0,175	******	*******	*******	******	******	******
40	0,200	******	*******	*******	******	******	*****

* Печатание звездочек означает, что значения искомой функции достигли такого размера, что не могут вместиться в формат печати.

устойчива, если решение системы разностных уравнений непрерывно зависит от входных данных ω, μ, причем эта зависимость равномерна относительно шага сетки. Или для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta(\varepsilon)>0$, что для данного решения u разностной схемы (11.41) и любого $\widetilde{u}$, являющегося решением разностной задачи

$$A_h[\widetilde{u}]=\widetilde{\omega}, \quad p\in\Omega_h; \quad R_h[\widetilde{u}]=\widetilde{\mu}, \quad p\in S_h,$$

выполняется неравенство $\|u-\tilde{u}\|_{u_h} \leqslant \varepsilon$ одновременно для всех $h\,(0<h<h_0)$, как только $\|\omega-\tilde{\omega}\|_{\omega_h} \leqslant \delta$, $\|\mu-\tilde{\mu}\|_{\mu_h} \leqslant \delta$.

Таблица 11.3

t	$\tau_i \backslash x$	0,0	0,200	0,400	0,600	0,800	1,000
				I вариант			
0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
5	0,012	0,0	0,0	0,0	0,000	0,022	0,173
10	0,025	0,000	0,000	0,001	0,009	0,061	0,226
15	0,037	0,000	0,000	0,004	0,023	0,096	0,267
20	0,050	0,001	0,001	0,009	0,040	0,126	0,301
25	0,062	0,002	0,004	0,017	0,057	0,153	0,331
30	0,075	0,005	0,008	0,026	0,074	0,178	0,358
35	0,087	0,009	0,013	0,035	0,092	0,202	0,383
40	0,100	0,014	0,019	0,046	0,108	0,224	0,406
45	0,112	0,020	0,026	0,057	0,125	0,244	0,427
50	0,125	0,028	0,034	0,069	0,141	0,264	0,448
				II вариант			
0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
5	0,012	0,000	0,000	0,000	0,003	0,030	0,180
10	0,025	0,000	0,000	0,002	0,013	0,067	0,231
15	0,037	0,000	0,001	0,006	0,028	0,100	0,270
20	0,050	0,001	0,003	0,012	0,044	0,129	0,304
25	0,062	0,002	0,005	0,019	0,061	0,156	0,334
30	0,075	0,004	0,009	0,028	0,078	0,181	0,360
35	0,087	0,006	0,014	0,038	0,094	0,204	0,385
40	0,100	0,010	0,019	0,048	0,111	0,226	0,408
45	0,112	0,014	0,026	0,059	0,127	0,246	0,430
50	0,125	0,019	0,033	0,070	0,143	0,266	0,450
				III вариант*			
0	0,0	0,0	0,0	0,0.	0,0	0,0	0,0
5	0,012	0,0	0,0	0,0	0,006	0,094	0,119
10	0,025	0,000	−0,003	−0,114	−1,194	−2,645	1,527
15	0,037	−0,504	2,647	26,012	104,209	128,937	−53,119
20	0,050	147,500	−585,331	−3040,449	−7574,238	−7035,031	2742,474
25	0,062	−22383,219	77906,938	282880,313	1463,188	418375,188	*****
30	0,075	*****	******	******	******	*****	*****
35	0,087	*****	******	******	******	*****	******
40	0,100	*****	******	******	******	*****	******
45	0,112	*****	******	******	******	*****	******
50	0,125	*****	******	******	******	*****	******

* См. сноску к табл. 11.1 и 11.2.

Если операторы A_h и R_h линейны, то разностное решение линейно зависит от входных данных и схема (11.41) устойчива при выполнении неравенства

$$\|u-\tilde{u}\|_{u_h} \leqslant N\,\|\omega-\tilde{\omega}\|_{\omega_h} + N_1\,\|\mu-\tilde{\mu}\|_{\mu_h}, \tag{11.57}$$

где постоянные N и N_1 не зависят от шага h.

Разностную схему называют *устойчивой по правой части*, если разностное решение непрерывно зависит от ω, и *устойчивой по граничному условию*, если разностное решение непрерывно зависит от μ. Если в краевой задаче задано начальное условие, то устойчивость по начальному условию при $\tau=\tau_0$ называется *устойчивостью по начальным данным*.

Рассмотрим вопросы устойчивости разностных схем для нестационарных задач теплопроводности. При этом отметим, что и стационарные краевые задачи теплопроводности часто численно решают с помощью постановки соответствующей нестационарной задачи (счет на установление).

Будем рассматривать только двухслойные схемы, т. е. схемы, содержащие только один слой с известными значениями искомой функции и один слой с неизвестными значениями искомой функции, например схемы (11.51), (11.52).

Для двухслойной схемы решение нестационарной краевой задачи теплопроводности на некотором слое τ^* можно рассматривать как начальное условие для последующих временны́х слоев. Двухслойная разностная схема называется *равномерно устойчивой по начальным данным*, если она устойчива относительно возмущений, вносимых на каждом временно́м слое.

Если разностная схема линейна, то условие равномерной устойчивости выражается неравенством

$$\| u(\tau)-\breve{u}(\tau) \| \leqslant K \| u(\tau^*)-\breve{u}(\tau^*) \|, \quad \tau_0 \leqslant \tau^* < \tau < t, \tag{11.58}$$

где постоянная K не зависит от h и τ^*; $\breve{u}$, u — решения разностной схемы $A_h[u]=\omega$ с разными начальными данными и одной и той же правой частью. Значение $K=1$ в условии (11.58) обеспечивает ненарастание погрешностей, вносимых на каждом временно́м слое.

Из установленного факта равномерной устойчивости по начальным данным следует обычная устойчивость по начальным данным.

Сформулируем признаки устойчивости двухслойных разностных схем [42].

Признак равномерной устойчивости по начальным данным. Пусть u^{I} и u^{II} — решения разностного уравнения $A_h[u]=\omega$ при различных начальных условиях, тогда для равномерной устойчивости по начальным данным достаточно, чтобы при всех i выполнялось неравенство

$$\| \hat{u}^{\mathrm{I}}-\hat{u}^{\mathrm{II}} \| \leqslant (1+A\eta) \| u^{\mathrm{I}}-u^{\mathrm{II}} \|, \quad \eta=\tau_{i+1}-\tau_i, \quad A \geqslant 0. \tag{11.59}$$

Записанное неравенство означает, что ошибка, имеющаяся на i-м слое, при переходе на следующий временно́й слой возрастает не более чем в $1+A\eta$ раз.

Признак устойчивости по правой части. Пусть схема $A_h[u]=\omega$ равномерно устойчива по начальным данным и такова, что если два разностных решения схем $A_h[u^{\mathrm{I}}]=\omega^{\mathrm{I}}$, $A_h[u^{\mathrm{II}}]=\omega^{\mathrm{II}}$ равны на некотором слое $u^{\mathrm{I}}=u^{\mathrm{II}}$, то на следующем слое выполняется неравенство

$$\|\hat{u}^{\mathrm{I}}-\hat{u}^{\mathrm{II}}\|<\beta\eta\|\omega^{\mathrm{I}}-\omega^{\mathrm{II}}\|,\ \beta=\mathrm{const}. \tag{11.60}$$

Тогда разностная схема устойчива по правой части.

Следствие. Если выполнены соотношения (11.59) и (11.60), то разностная схема устойчива и по начальным данным, и по правой части.

Для исследования устойчивости разностных схем существует несколько методов: принцип максимума, метод разделения переменных, метод энергетических неравенств, метод операторных неравенств и др.

Принцип максимума позволяет исследовать устойчивость разностных схем в $\|\cdot\|_c$. Двухслойную разностную схему можно записать в виде

$$\sum_k \gamma_k \hat{u}_{n+k}=\sum_m \beta_m u_{n+m}+\omega_n, \tag{11.61}$$

где суммирование на каждом слое проводится по узлам шаблона вокруг n-го узла, причем коэффициенты γ_k перенумеруем так, чтобы $|\gamma_0|=\max\limits_k|\gamma_k|$. Тогда сформулируем достаточный признак устойчивости двухслойных линейных разностных схем вида (11.61) [42].

1. Схема равномерно устойчива по начальным данным, если

$$(1+A\eta)|\gamma_0|\geqslant\sum_{k\neq 0}|\gamma_k|+\sum_m|\beta_m|,\ A=\mathrm{const}. \tag{11.62}$$

2. Схема устойчива по правой части, если выполнено неравенство (11.62) и

$$|\gamma_0|-\sum_{k\neq 0}|\gamma_k|\geqslant c/\eta,\ c=\mathrm{const}>0. \tag{11.63}$$

Данный признак, как правило, применим к разностным схемам точности $0(\eta)$. Отметим также, что схемы вида (11.61) имеют краевые условия, которые тоже представимы в форме (11.61). Поэтому этот признак справедлив для исследования устойчивости по краевым условиям.

Например, уравнение теплопроводности

$$\partial T/\partial\tau=a\partial^2 T/\partial x^2+q_v/(c\rho)$$

с краевыми условиями

$$T(0,\ x)=\varphi(x),$$

$$T(d,\ \tau)=\varphi_1(\tau),\ T(b,\ \tau)=\varphi_2(\tau)$$

аппроксимируем неявной разностной схемой на равномерной сетке:

$$(\hat{u}_k - u_k)/\eta = (a/h^2)(\hat{u}_{k+1} - 2\hat{u}_k + \hat{u}_{k-1}) + \hat{\omega}_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant N-1,$$
$$u_k^0 = \varphi_k, \ \hat{u}_0 = \hat{\varphi}_1, \ \hat{u}_N = \hat{\varphi}_2. \tag{11.64}$$

Тогда, чтобы представить эту схему в виде (11.61), примем

$$\gamma_0 = 1/\eta + 2a/h^2, \ \gamma_{-1} = \gamma_1 = a/h^2, \ \beta_0 = 1/\tau \text{ при } 1 \leqslant k \leqslant N-1;$$
$$\beta_0 = -1 \text{ при } i = 0;$$
$$\gamma_0 = 1, \ \beta_0 = 0 \text{ при } k = 0, \ k = N.$$

Остальные коэффициенты равны нулю.

Теперь легко видеть, что условие (11.62) выполняется во всех узлах сетки, а условие (11.63) — в регулярных узлах сетки. Поэтому *неявная схема* (11.64) *безусловно устойчива по начальным данным, правой части и граничным условиям.*

Метод разделения переменных позволяет исследовать устойчивость разностных схем в $\|\cdot\|_{l_2}$.

Пусть линейная двухслойная схема записана в канонической форме

$$B(\hat{u} - u)/\eta + Au = \omega, \tag{11.65}$$

где A, B — разностные операторы, действующие на сеточные функции u и $\hat{u}$ как функции пространственных переменных.

Зафиксируем правую часть уравнения (11.65) и внесем ошибку на исходном слое δu, тогда ошибка $\delta\hat{u}$ на следующем слое удовлетворяет уравнению

$$B\delta\hat{u} = (B - \eta A)\,\delta u. \tag{11.66}$$

Частное решение уравнения (11.66) имеет вид разностной гармоники

$$\delta u(x_k, \tau_j) = \mu_n^j e^{inx_k}, \tag{11.67}$$

где i — мнимая единица; n — произвольное действительное число.

Величина μ_n называется *множителем роста n-й гармоники* при переходе слоя на слой, так как

$$\delta\hat{u} = \mu_n \delta u.$$

Для определения μ_n подставим (11.67) в уравнение (11.66):

$$\mu_n B e^{inx} = (B - \eta A)\,e^{inx}. \tag{11.68}$$

Если система разностных уравнений (11.65) имеет постоянные коэффициенты и определена на равномерной сетке, то величина μ_n, *определенная из уравнения* (11.68), *не будет зависеть от* x *и* τ.

Сформулируем необходимое условие устойчивости.

Разностная схема (11.65) при постоянных коэффициентах устойчива по начальным данным, если для всех n имеет место неравенство

$$|\mu_n| \leqslant 1 + A\eta, \quad A - \text{const}. \tag{11.69}$$

Условие (11.69) часто называют *условием Неймана.*

При выполнении условия (11.69) и дополнительного условия (11.63) разностная схема (11.65) устойчива по правой части в $\|\cdot\|_{l_2}$. При проверке условия (11.69) часто полагают $A=0$, так как при бо́льших значениях постоянной A устойчивость будет слабой. Метод разделения переменных применяется для исследования устойчивости разностных схем в задачах с двумя (и более) пространственными координатами. Например, для двух измерений частное решение ищется в виде

$$\delta u(x_k, \ y_m, \ \tau_j) = \mu_{n\gamma}^j \, e^{inx_k + i\gamma y_m},$$

а условие Неймана можно записать в виде $|\mu_{n\gamma}| \leqslant 1$ для всех n и γ.

При переменных коэффициентах в уравнении (11.65) или при неравномерной сетке непосредственно применить *признак* (11.69) нельзя, так как решение уравнения (11.68) относительно μ_n будет содержать неустранимую зависимость от k и множитель роста μ_n не будет постоянным для данной гармоники. В этом случае часто пользуются принципом «замораживания» коэффициентов. Суть его состоит в том, что значения коэффициентов схемы в некотором k-м узле считают постоянными и определяют μ_n из уравнения (11.68). *Тогда если при любых* k *и* n *выполняется условие Неймана, то схема считается устойчивой.* Получаемые при этом условия устойчивости более жестки, чем в задачах с постоянными коэффициентами. Принцип «замораживания» коэффициентов хорошо себя зарекомендовал в практике решения уравнений с достаточно гладкими коэффициентами. Однако известны примеры [90], когда применение этого метода даже к задачам с кусочно-гладкими коэффициентами приводит к неверным результатам.

Из других методов исследования устойчивости разностных схем наиболее известен метод энергетических неравенств, подробно изложенный в работах [88, 90]. Основная идея метода состоит в том, что для оценки погрешности разностного решения выбирается метрика, в которой разностная схема устойчива, а затем устанавливается эквивалентность выбранной метрики с энергетической нормой разностного оператора. С помощью этого метода доказана устойчивость и получены операторные оценки точности для многих краевых задач стационарной и нестационарной теплопроводности с переменными коэффициентами.

Сходимость. При решении разностной задачи необходимо, чтобы разностное решение стремилось к точному решению соответствующей краевой задачи при уменьшении шагов сетки. Будем говорить, что решение u разностной задачи

$$A_h[u(x)]=\omega(x),\ x\in\Omega_h;\quad R_h[u(x)]=\mu(x),\ x\in S_h, \tag{11.70}$$

сходится к точному решению краевой задачи

$$A[T]=q_v(x),\ x\in\Omega;\quad R[T]=\varphi(x),\ x\in S, \tag{11.71}$$

если при $h\to 0$

$$\|u(x)-T(x)\|_{u_h}\to 0.$$

Причем если $\|u(x)-T(x)\|_{u_h}=0(h^p)$ при $h\to 0$, то разностное решение имеет порядок точности p. Свойство сходимости разностной схемы — основной критерий качества разностной схемы. Как видим на примере решения задачи (11.53), (11,54), *наличие факта аппроксимации* еще не обеспечивает сходимости разностного решения к точному. Кроме аппроксимации необходимо еще потребовать и выполнения свойства устойчивости разностной схемы.

Разностную схему назовем *корректной*, если решение ее существует и единственно для любых данных ω, μ, принадлежащих заданным классам функций, и схема устойчива.

В случае, если граница S области Ω состоит из нескольких участков с различными граничными условиями, то для существования решения разностной схемы должны выполняться условия согласования этих граничных условий между собой.

Сформулируем одну из важнейших теорем теории разностных схем.

Если решение $T[q_v, \varphi]$ краевой задачи (11.71) *существует, разностная схема* (11.70) *аппроксимирует задачу* (11.71) *на данном решении и корректна, то разностное решение сходится к точному.*

Доказательство. Из определения невязки можно записать:

$$\begin{aligned} &A_h[T(x)]=\omega(x)-\psi(x),\quad x\in\Omega_h;\\ &R_h[T(x)]=\mu(x)-\gamma(x),\quad x\in S_h. \end{aligned} \tag{11.72}$$

Разностная схема (11.72) и схема (11.70) различаются только правыми частями на величину невязки. Так как схема (11.70) корректна, а значит и устойчива, то для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta(\varepsilon)$ такое, что $\|u-T\|_{u_h}\leqslant\varepsilon$, если $\|\psi\|_{\omega_h}\leqslant\delta(\varepsilon)$, $\|\gamma\|_{\mu_h}\leqslant\delta(\varepsilon)$. Из факта аппроксимации следует, что для любого $\delta>0$ существует такое $h_0(\delta)$, что $\|\psi\|_{\omega_h}\leqslant\delta$, $\|\gamma\|_{\mu_h}\leqslant\delta$, как только $h\leqslant h_0(\delta)$. Таким образом, для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $h_0(\delta(\varepsilon))$, что $\|u-T\|_{u_h}\leqslant\varepsilon$, как только $h\leqslant h_0$, откуда следует сходимость разностного решения к точному.

Замечание 1. Нетрудно видеть, что устойчивость является необходимым условием сходимости. Так как любые, даже сколь угодно малые, ошибки исходных данных в случае неустойчивости разностной схемы приводят к значительной погрешности решения, то сходимости быть не может.

Замечание 2. Если выполнены условия теоремы сходимости, операторы A_h и R_h — линейные, порядок аппроксимации равен p, то и сходимость разностной схемы (11.70) имеет порядок не ниже p. Доказательство этого утверждения несложно.

Определим погрешность разностного решения:

$z(x)=u(x)-T(x)$.

Тогда в силу линейности операторов A_h и R_h для $z(x)$ имеем разностную схему

$$\begin{aligned} &A_h[z(x)]=\psi(x), \quad x\in\Omega_h;\\ &R_h[z(x)]=\gamma(x), \quad x\in S_h. \end{aligned} \tag{11.73}$$

В силу устойчивости (по условию теоремы сходимости) получим оценку

$$\|z\|_u\leqslant M_1\|\psi\|_{\omega_h}+M_2\|\gamma\|_{\mu_h}. \tag{11.74}$$

Так как схема (11.73) и схема (11.70) имеют одинаковый порядок аппроксимации p то

$$\|\psi\|_{u_{vh}}\leqslant\nu_1 h^p, \quad \|\gamma\|_{\mu_h}\leqslant\nu_2 h^p.$$

Подставляя эти оценки в выражение (11.74), получим априорную мажорантную оценку погрешности

$\|z\|_u=\|u-T\|\leqslant Mh^p$, где $M=M_1\nu_1+M_2\nu_2$.

В качестве примера рассмотрим неявную схему (11.64). В § 11.2 была установлена аппроксимация этой схемы с погрешностью $\|\psi\|_c=O(\eta+h^2)$ Применяя принцип максимума (см. § 11.4), показали, что схема (11.64) безусловно устойчива по начальным данным, правой части и граничным условиям в $\|\cdot\|_c$. Отсюда следует сходимость в $\|u-T\|_c$ с первым порядком точности по времени и вторым — по пространству

Задача 11.1. Применяя метод формальной замены производных конечными разностями, для уравнения стационарной теплопроводности в стержне

$$\frac{d^2T}{dx^2}-\frac{\alpha}{\lambda l}T+\frac{1}{\lambda}q_v(x)=0, \quad 0<x<1$$

(l — отношение площади стержня к периметру сечения) с граничными условиями

$$\lambda\frac{dT(0)}{dx}=\alpha_1(T(0)-T_c), \quad T(1)=T_S$$

составить разностные схемы с первым и вторым порядками аппроксимации на решении поставленной краевой задачи.

Задача 11.2. Составить консервативную разностную схему для краевой задачи стационарной теплопроводности

$$\frac{d}{dx}\left(\lambda(x)\frac{dT}{dx}\right)-\frac{\alpha(x)}{l}T+q_v(x)=0, \quad 0<x<1;$$

$$T(0)=T_{c_1}, \quad T(1)=T_{c_2},$$

пользуясь интегро-интерполяционным методом (l — то же, что и в задаче (11.1). Функции $\lambda(x)$, $\alpha(x)$ и $q_v(x)$ кусочно-непрерывны.

Задача 11.3. Для уравнения теплопроводности $\partial T/\partial\tau=a\partial^2T/\partial x^2$ на шаблоне рис. 11.8 составить разностную схему методом неопределенных коэффициентов, представив разностное уравнение в виде

$$A\hat{u}_{k-1}+B\hat{u}_k+C\hat{u}_{k+1}+Du_k=0.$$

Задача 11.4. С помощью вариационного метода Ритца (см. гл. IV) построить разностную схему для краевой задачи стационарной теплопроводности:

$$\frac{d}{dx}\left(\lambda(x)\frac{dT}{dx}\right)-\frac{\alpha(x)}{l}T+q_v(x)=0,\ 0<x<1,\ \alpha(x)>0;$$

$$\lambda(0)\,dT(0)/dx=\alpha_1(T(0)-T_C),\ \alpha_1>0;$$

$$\lambda(1)\,dT(1)/dx=\alpha_2(T(1)-T_S),\ \alpha_2>0.$$

Задача 11.5. Для уравнения стационарной теплопроводности

$$\frac{d}{dx}\left(\lambda(x)\frac{dT}{dx}\right)+q_v(x)=0,$$

где $q_v(x)$ — непрерывная функция, а при $x=0$ $\lambda(x)$ имеет разрыв первого рода и, следовательно, заданы граничные условия сопряжения

$$T(+0)=T(-0);$$

$$\lambda(+0)\,dT(+0)/dx=\lambda(-0)\,dT(-0)/dx,$$

записать разностные аппроксимации граничных условий сопряжения с первым и вторым порядками аппроксимации на решении сформулированной задачи.

Задача 11.6. Используя метод разделения переменных, исследовать устойчивость явной разностной схемы

$$(\hat{u}_k-u_k)/\eta=a(u_{k+1}-2u_k+u_{k-1})/h^2,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ N-1.$$

ГЛАВА XII

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ОДНОМЕРНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

§ 12.1. Однопараметрическое семейство схем

Рассмотрим простейшую задачу о распространении теплоты в неограниченной пластине ($0 \leqslant x \leqslant d$), нагреваемой за счет внутренних источников, с граничными условиями I рода на границах

$$\partial T/\partial\tau = a\partial^2 T/\partial x^2 + q_v(x, \tau)/(c\rho)$$

$$(0 < x < d;\ 0 < \tau < t,\ a = \mathrm{const} > 0); \tag{12.1}$$

$$T(x, 0) = f(x); \tag{12.2}$$

$$T(0, \tau) = \mu(\tau),\ T(d, \tau) = \nu(\tau). \tag{12.3}$$

В области $\Omega = [0 \leqslant x \leqslant d] \times [0 \leqslant \tau \leqslant t]$ выберем прямоугольную равномерную сетку с шагами h и η (рис. 12.1). На сетке возьмем шеститочечный шаблон (рис. 12.1) и составим на нем двухслойную разностную схему с параметром σ:

$$\frac{1}{\eta}(\hat{u}_k - u_k) = \frac{a\sigma}{h^2}(\hat{u}_{k-1} - 2\hat{u}_k + \hat{u}_{k+1}) + (1 - \sigma)\frac{a}{h^2}(u_{k-1} - 2u_k +$$

$$+ u_{k+1}) + \bar{\omega}_k,\ 1 \leqslant k \leqslant K - 1; \tag{12.4}$$

$$u_k^0 = f(kh); \tag{12.5}$$

$$\hat{u}_0 = \mu(\tau_{l+1}),\quad \hat{u}_k = \nu(\tau_{l+1}), \tag{12.6}$$

где $\bar{\omega}_k$ можно вычислить по формуле

$$\bar{\omega}_k = \frac{1}{c\rho} q_v(x_k,\ \tau_l + \eta/2). \tag{12.7}$$

Изменяя параметр σ в уравнении (12.4), можно получать разностные схемы с различными свойствами. Так, при $\sigma = 1$ получим схему с шаблоном, показанным на рис. 11.7, *б*, которая называется *чисто неявной*, при $\sigma = 0$ шаблон схемы (12.4) строится тоже только на четырех точках (рис. 11.7, *а*) и такая схема называется *явной*. При $\sigma = 1/2$ получаем *симметричную* схему (имеется в виду симметрия по времени, так как схема (12.4) по x симметрична при любом значении σ), известную еще и как схема Кранка — Никольсона (шеститочечный шаблон на рис. 12.1).

П о р я д о к а п п р о к с и м а ц и и. Вычислим порядок невязки схемы (12.4) в точке $(x_k,\ \tau_l + \eta/2)$:

$$\psi_k = \left(T_\tau - aT_{xx} - \frac{q_v}{c\rho}\right)_{x=x_k}^{\tau=\tau_l+\eta/2} - \frac{1}{\eta}(\hat{T}_k - T_k) +$$

$$+ \frac{a\sigma}{h^2}(\hat{T}_{k-1} - 2\hat{T}_k + \hat{T}_{k+1}) + \frac{a(1-\sigma)}{h^2}(T_{k-1} - 2T_k + T_{k+1}) + \bar{\omega}_k.$$

Для этого разложим решение в узлах шаблона в ряд Тейлора, выбирая за центр разложения полуцелую точку $(x_k,\ \tau_i+\eta/2)$:

$$\hat{T}_{k+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{\eta}{2}\frac{\partial}{\partial\tau}+h\frac{\partial}{\partial x}\right)^n T=T+\frac{\eta}{2}T_\tau+hT_x+$$

$$+\frac{\eta^2}{8}T_{\tau\tau}+\frac{\eta h}{2}T_{\tau x}+\frac{h^2}{2}T_{xx}+\frac{\eta^3}{48}T_{\tau\tau\tau}+\frac{\eta^2 h}{8}T_{\tau\tau x}+\frac{\eta h^2}{4}T_{\tau xx}+$$

$$+\frac{h^3}{6}T_{xxx}+\frac{\eta^4}{384}T_{\tau\tau\tau\tau}+\frac{\eta^3 h}{48}T_{\tau\tau\tau x}+\frac{\eta^2 h^2}{16}T_{\tau\tau xx}+\frac{\eta h^3}{12}T_{\tau xxx}+$$

$$+\frac{h^4}{24}T_{xxxx}+\ \cdots,$$

где значения функции и производных отнесены к точке $(x_k,\ \tau_i+\eta/2)$. Тогда получим

$$\psi_k=a\eta\,(\sigma-1/2)\,T_{\tau xx}+\frac{\eta^2}{8}(aT_{\tau\tau xx}-T_{\tau\tau\tau}/3)+\frac{ah^2}{12}T_{xxxx}+$$

$$+\bar{\omega}_k-\frac{\bar{q}_{v\,(k)}}{c\rho}+O(\eta^2+h^2). \qquad (12.8)$$

Из последнего выражения следует, что если $\bar{\omega}_k$ вычислить по формуле (12.7), то при $\sigma\neq 1/2$ локальная погрешность аппроксимации уравнения (12.4) равна $O(\eta+h^2)$, схема с весом $\sigma=1/2$ имеет более точную аппроксимацию $O(\eta^2+h^2)$.

Рис. 12.1. К выводу однопараметрического разностного уравнения

Погрешность аппроксимации схемы определяется, вообще говоря, не только разностным уравнением, но и краевыми условиями. Краевые условия (12.2), (12.3) нами аппроксимированы точно разностными выражениями (12.5), (12.6). А в случае граничных условий не I рода аппроксимация граничных условий обязательно содержит некоторую погрешность, которую необходимо учитывать при оценке порядка погрешности аппроксимации разностной схемы.

Схемы повышенной точности. Преобразуем выражение для невязки (12.8), учитывая, что решение $T(x,\ \tau)$ дифференциального уравнения теплопроводности (12.1) удовлетворяет соотношению

$$T_{\tau xx}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}T_\tau=aT_{xxxx}+\frac{1}{c\rho}\frac{\partial^2 q_v}{\partial x^2}.$$

Тогда

$$\psi_k=\frac{\eta^2}{8}\left(aT_{\tau\tau xx}-\frac{1}{3}T_{\tau\tau\tau}\right)+\left[a^2\eta\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)+\frac{ah^2}{12}\right]T_{xxxx}+$$

$$+\left[a\eta\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{c\rho}\frac{\partial^2\bar{q}_v}{\partial x^2}+\bar{\omega}_k-\frac{1}{c\rho}\bar{q}_v\right]+0(\eta^2+h^2). \qquad (12.9)$$

Если в (12.9) выбрать значения σ и $\bar{\omega}_k$ из условий обращения в нуль выражений в квадратных скобках, то получим

$$\sigma=\sigma^*=\frac{1}{2}-\frac{h^2}{12a\eta};\quad \bar{\omega}_k=\frac{1}{c\rho}\left(\bar{q}_v+\frac{h^2}{12}\frac{\partial^2\bar{q}_v}{\partial x^2}\right)_k \qquad (12.10)$$

и погрешность аппроксимации схемы (12.4) и (12.10) будет $0(\eta^2+h^2)$. Более того, если в разложении Тейлора удержать большее число членов ряда, то можно показать, что невязка (12.9) при выборе σ и ω_k по формулам (12.10) имеет порядок

$$\psi_k=0(\eta^2+h^4).$$

Если в выражении (12.10) $\frac{\partial^2\bar{q}_v}{\partial x^2}$ заменить второй пространственной разностью, то получим более удобную формулу:

$$\bar{\omega}_k=\frac{1}{c\rho}\left(\frac{1}{12}\bar{q}_{v(k-1)}+\frac{5}{6}\bar{q}_{v(k)}+\frac{1}{12}\bar{q}_{v(k+1)}\right). \qquad (12.11)$$

Порядок погрешности аппроксимации при этом сохраняется $0(\eta^2+h^4)$.

Полученные оценки погрешности аппроксимации имеют место, если непрерывны производные решения $T(x,\tau)$, входящие в выражение главного члена невязки.

Исследование устойчивости. Применим метод разделения переменных, полагая

$$u_k=\exp(i\pi z x_k/d),\quad \hat{u}_k=\mu_z\exp(i\pi z x_k/d).$$

Подставим значения u_k, $\hat{u}_k$ в разностное уравнение (12.4) при $\bar{\omega}_k=0$ и получим после сокращения на общий множитель

$$\frac{1}{\eta}(\mu_z-1)=\frac{a\sigma}{h^2}\left[\exp\left(-i\pi z\frac{h}{d}\right)-2+\exp\left(i\pi z\frac{h}{d}\right)\right]\mu_z+$$

$$+(1-\sigma)\frac{a}{h^2}\left[\exp\left(-i\pi z\frac{h}{d}\right)-2+\exp\left(i\pi z\frac{h}{d}\right)\right].$$

Учитывая, что $\operatorname{sh}x=[\exp(x)-\exp(-x)]/2$ и $\sin x=-i\operatorname{sh}(ix)$, из последнего уравнения находим

$$\mu_z=\left[1-\frac{4a\eta}{h^2}(1-\sigma)\sin^2\frac{\pi zh}{2d}\right]\Big/\left(1+\frac{4a\eta}{h^2}\sigma\sin^2\frac{\pi zh}{2d}\right).$$

Согласно признаку устойчивости, схема (12.4) с постоянными коэффициентами устойчива по начальным данным. если для всех z выполняется неравенство $|\mu_z|\leqslant 1$.

Последнее неравенство выполняется при

$$\sigma\geqslant(^1/_2-h^2/(4a\eta)), \tag{12.12}$$

причем это неравенство является условием равномерной устойчивости схемы (12.4) по начальным данным в норме $\|\cdot\|_{l_2}$.

Схема (12.4) устойчива и по правой части при выполнении условия (12.12), так как для нее при любых h и η имеет место и неравенство (11.63).

Условие (12.12) выполняется при любом соотношении шагов h и η для значений $\sigma={}^1/_2$, 1, σ^*, т. е. симметричная, чисто неявная схема и схема повышенной точности безусловно устойчивы.

При $\sigma=0$ условие (12.12) выполняется только при $a\eta/h^2\leqslant 1/2$, т. е. в этом случае схема устойчива условно (это было обнаружено нами и раньше в § 11.3). Применяя принцип максимума, можно доказать, что выполнение неравенства

$$\sigma\geqslant 1-h^2/(2a\eta) \tag{12.13}$$

является достаточным условием устойчивости схемы (12.4) в норме $\|\cdot\|_c$. Отметим, что условие (12.13) более жесткое по сравнению с условием (12.12).

Исследование сходимости. Если проверить выполнение условий теоремы сходимости, то окажется, что на решениях $T(x, \tau)$, имеющих достаточное число непрерывных производных при выполнении условия (12.13), разностное решение схемы (12.4) — (12.6) равномерно сходится к точному. При этом

$$\|u-T\|_c=\begin{cases} 0(\eta+h^2), & \sigma\neq{}^1/_2;\\ 0(\eta^2+h^2), & \sigma={}^1/_2;\\ 0(\eta^2+h^4), & \sigma=\sigma^*.\end{cases}$$

Вычисление разностного решения. Наиболее простой алгоритм вычисления разностного решения у явной схемы. При $\sigma=0$ из (12.4) имеем формулу

$$\hat{u}_k=(1-2\beta)\,u_k+\beta\,(u_{k+1}+u_{k-1}), \tag{12.14}$$

где $\beta=a\eta/h^2$.

Так как из начального условия (12.5) известны значения решения в узлах начального слоя сетки, то по ним легко находятся значения решения в узлах первого слоя, затем второго слоя и т. д.

В качестве примера рассмотрим применение явной схемы решения задачи теплопроводности в неограниченной пластине:

$$\left.\begin{aligned} &\partial\Theta/\partial\,\mathrm{Fo}=\partial^2\Theta/\partial x^2,\ 0<x<1,\ \mathrm{Fo}>0;\\ &\Theta(x,\ 0)=0;\\ &\Theta(1,\ \mathrm{Fo})=\Theta(0,\ \mathrm{Fo})=1,\end{aligned}\right\} \tag{12.15}$$

где $\Theta=(T-T_0)/(T_c-T_0)$, $\mathrm{Fo}=a\tau/l^2$, $X=x/l$.

Для расчетов составим программу на алгоритмическом языке ФОРТРАН. Вводные данные включают η (шаг по безразмерному времени Fo), M — число интервалов h по пространственной координате x, Θ_{max} (значение максимальной температуры в центре пластины, представляющее интерес) и некоторое определенное число,

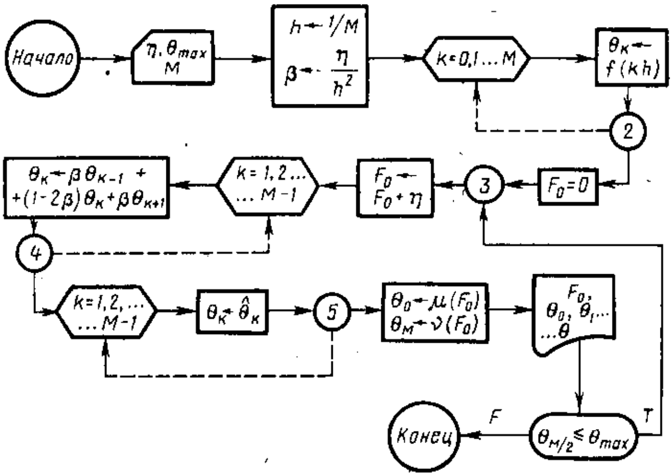


Рис. 12.2. Блок-схема решения разностной задачи по явной схеме

показывающее, через сколько шагов по времени будет осуществляться выдача на печать результатов расчета температурного поля пластины.

Блок-схема программы приведена на рис. 12.2.

Список идентификаторов. CONST — $1-2\beta$; DX — пространственный интервал h; DTAU — временной шаг η; F — функция, задающая начальное условие, $f(x)$; I — индекс, обозначающий k-й узел сетки. Согласно ограничениям ФОРТРАНа, $1<I<M+1$ соответствует $0<k<M$ в тексте; ICOUNT — счетчик числа шагов по времени; IFREQ — число временных шагов, через которое осуществляется печать; M — число интервалов h на отрезке $[0, 1]$; RATIO — $\beta=\eta/h^2$; TAU — время, Fo; TMAX — максимальная температура в центре пластины, до значения которой ведется расчет; TOLD, TNEW — массивы значений температур в начале и конце временного шага соответственно; X — массив координат X каждого узла сетки.

Текст программы приведен ниже:

```
C       НЕСТАЦИОНАРНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ПЛАСТИНЫ
C       ЯВНАЯ СХЕМА
C
C       НАЧАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ
C       ЗАДАЕТСЯ ФУНКЦИЕЙ F(X). ЗНАЧЕНИЯ
C       ТЕМПЕРАТУРЫ ПРИ X=0 И X=1 ЗАДАЮТСЯ
C       ФУНКЦИЯМИ GØ(TAU) И G1(TAU) СООТВЕТСТВЕННО.
C       ЗНАЧЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ ПЕЧАТАЮТСЯ НА
C       КАЖДОМ IFREQ ВРЕМЕННОМ ШАГЕ, ПОКА
```

```
C       НЕ ДОСТИГАЕТСЯ ЗАДАННАЯ ТЕМПЕРАТУРА
C       TMAX В ЦЕНТРЕ ПЛАСТИНЫ
C
C       .....ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ
C       НАЧАЛЬНЫХ И ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ.....
        F(DIST)=Ø.Ø
        GØ(TIME)=1.Ø
        G1(TIME)=1.Ø
        DIMENSION TOLD(21), TNEW(21), X(21), ARRAY(25ØØ)
C       .....ВВОД ПАРАМЕТРОВ И ВЫЧИСЛЕНИЕ
C       ПОСТОЯННЫХ.....
      1 READ (1, 1ØØ) DTAU, TMAX, M, IFREQ
        INT=M/1Ø
        FLOATM=M
        CX=1.Ø/FLOATM
        RATIO=DTAU/(DX * DX)
        WRITE(3, 2ØØ) DX, DTAU, TMAX, M, IFREQ, RATIO
        CONST=1.Ø - 2.Ø * RATIO
C       .....ВЫЧИСЛЕНИЕ И ПЕЧАТЬ НАЧАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ
C       ТЕМПЕРАТУР.....
        MP1=M+1
        DO 2I=1, MP1
        FLOATI=I
        X(I)=(FLOATI - 1.Ø)/FLOATM
      2 TOLD(I)=F(FLOATI * DX)
        TAU=Ø.Ø
        WRITE (3,2Ø1)
        WRITE (3,2Ø2) TAU, (TOLD(I), I=1, MP1, INT)
        ICOUNT=Ø
C       .....ВЫЧИСЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУР НА
C       ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ВРЕМЕННЫХ СЛОЯХ.....
    3   TAU=TAU+DTAU
        ICOUNT=ICOUNT+1
        DO 4 I=2, M
    4   TNEW(I)=RATIO * (TOLD(' - 1)+TOLD(I+1))+
       +CONST * TOLD(I)
C       .....ЗАМЕНА СТАРЫХ ЗНАЧЕНИЙ ТЕМПЕРАТУРЫ
C       НОВЫМИ.....
        DO 5 I=2, M
    5   TOLD(I)=TNEW(I)
C       .....ВЫЧИСЛЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ.....
        TOLD(1)=GO(TAU)
        TOLD(NP1)=G1(TAU)
C       .....ПЕЧАТЬ ТЕМПЕРАТУРЫ.....
        IF((ICOUNT/IFREQ) * IFREQ. NE. ICOUNT) GO TO 3
        MOVER2=M/2
        WRITE (3,2Ø2) TAU, (TOLD(I), I=1, MP1, INT)
        IF((TNEW/MOVER2). LF. TMAX) GO TO 3
C       .....ФОРМАТЫ ДЛЯ ВВОДА И ПЕЧАТИ ДАННЫХ.....
```

```
1∅∅  FORMAT (6X, F7.4. 1∅X, F5.2, 6X, I3, 1∅X, I3, 11X, I3)
2∅∅  FORMAT (82H1____НЕСТАЦИОНАРНАЯ
    1 ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ПЛАСТИНЫ, ЯВНАЯ СХЕМА,
    2 С ВВОДНЫМИ ДАННЫМИ/12HO____DX______=
    3 =_, _F1∅.5/12H_____DTAU__=_, _F1∅.5/12H_
    4 ____TMAX___=_, _F1∅.5/12H______M_______=
      =_, _I4/12H______IFREQ_=_, I4/12H_____
      RATIO=_, _F1∅.5)
 2∅1  FORMAT (8HO____ВРЕМЯ, 18X, 39H ЗНАЧЕНИЯ
    1 ТЕМПЕРАТУРЫ В УЗЛАХ СЕТКИ)
 2∅2  FORMAT (1H_, F7.3/(1H_, _7X, _11F8.5))
      END
```

Просчитано поле температур для четырех вариантов вводных данных:

DTAU=0,005, TMAX=0,95, M=10 IFREQ=5,
DTAU=0,0025, TMAX=0,95, M=10 IFREQ=10,
DTAU=0,001, TMAX=0,95, M=10 IFREQ=25,
DTAU=0,001, TMAX=0,95, M=20 IFREQ=25.

Вид печати результатов расчетов по четвертому варианту приведен ниже:

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ПЛАСТИНЫ, ЯВНАЯ СХЕМА, С ВВОДНЫМИ ДАННЫМИ .
DX=0,05000, DTAU=0,00100, TMAX=0,95000, M=20, IFREQ=25, RATIO=0,40000.

Время	Значения температуры в узлах сетки				
0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
0,025	1,00000	0,65225	0,36671	0,17539	0,07450
0,050	1,00000	0,75439	0,53563	0,36562	0,25878
0,075	1,00000	0,81085	0,64050	0,50568	0,41936
0,100	1,00000	0,85258	0,71962	0,61414	0,54645
0,125	1,00000	0,88492	0,78111	0,69873	0,64584
0,150	1,00000	0,91015	0,82909	0,76477	0,72347
0,175	1,00000	0,92984	0,86656	0,81633	0,78408
0,200	1,00000	0,94522	0,89580	0,85659	0,83141
0,275	1,00000	0,97392	0,95039	0,93172	0,91974
0,300	1,00000	0,97963	0,96126	0,94669	0,93733
0,325	1,00000	0,98410	0,96975	0,95837	0,95106
0,350	1,00000	0,98758	0,97638	0,96749	0,96178

Время						
0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
0,025	0,04429	0,07450	0,17539	0,36671	0,65225	1,00000
0,050	0,22245	0,25878	0,36562	0,53363	0,75439	1,00000
0,075	0,38967	0,41936	0,50568	0,64050	0,81085	1,00000
0,100	0,52312	0,54645	0,61414	0,71962	0,85258	1,00000
0,125	0,62762	0,64584	0,69873	0,78111	0,88492	1,00000
0,150	0,70924	0,72347	0,76477	0,82909	0,91015	1,00000
0,175	0,77297	0,78408	0,81633	0,86656	0,92984	1,00000
0,200	0,82273	0,83141	0,85659	0,89580	0,94522	1,00000
0,275	0,91561	0,91974	0,93172	0,95039	0,97392	1,00000
0,300	0,93410	0,93733	0,94669	0,96126	0,97693	1,00000
0,325	0,94854	0,95106	0,95837	0,96975	0,98410	1,00000
0,350	0,95982	0,96173	0,96749	0,97638	0,98758	1,00000

Точность вычислений разностного решения можно оценить по данным, приведенным ниже, где результаты расчетов по четырем вариантам вводных данных сравниваются с результатами расчетов по аналитическому решению. Принимая во внимание небольшое число используемых узлов сетки, согласование результатов расчета следует считать удовлетворительным. Более высокая точность достигается увеличением числа узлов сетки:

Время, FO	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25
$\Theta_ц$ (точное значение)	0,228	0,526	0,710	0,823	0,892
$\Theta_ц$ (I вариант)	0,219	0,526	0,713	0,826	0,895
$\Theta_ц$ (II вариант)	0,216	0,520	0,707	0,822	0,891
$\Theta_ц$ (III вариант)	0,226	0,523	0,708	0,822	0,891
$\Theta_ц$ (IV вариант)	0,222	0,523	0,709	0,823	0,892

При $\sigma=1$ (чисто неявная схема) для нахождения значений решения в узлах i-го временного слоя при известных значениях решения в узлах предыдущих слоев необходимо решать систему алгебраических уравнений с большим числом неизвестных.

Известное из курса высшей алгебры правило Крамера для решения систем линейных алгебраических уравнений непрактично, так как требует большого количества арифметических действий для вычисления определителей — минимум $^2/_3\, K^4$ (где K — порядок системы).

Применение метода последовательных приближений для решения системы алгебраических уравнений также невыгодно с точки зрения численной реализации, так как увеличение шага по времени (допустимое для неявных схем) вызывает увеличение числа итераций, необходимых для получения разностного решения с заданной точностью. Один из лучших методов решения линейных систем общего вида — метод Гаусса с выбором главного элемента [42]. Расчет по формулам этого метода требует $\sim {}^2/_3\, K^3$ арифметических операций. Однако при решении системы разностных уравнений следует учитывать ее специфику. Дело в том, что матрица коэффициентов системы разностных уравнений имеет трехдиагональную форму и это позволяет организовать вычисления по методу Гаусса так, чтобы обойти массивы нулевых элементов. Тем самым объем вычислений значительно уменьшается.

Рассмотрим наиболее важный частный случай метода Гаусса — *метод прогонки*. Систему разностных уравнений (чисто неявная схема)

$$\frac{\hat{u}_k - u_k}{\eta} = \frac{a\sigma}{h^2}\left(\hat{u}_{k-1} - 2\hat{u}_k + \hat{u}_{k+1}\right) + \omega_k \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ K-1);$$

$$\hat{u}_0 = \hat{\mu},\quad \hat{u}_K = \hat{\nu},\quad u_k^0 = f(kh) \quad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ K)$$

можно записать в каноническом виде:

$$a_k x_{k-1} + b_k x_k + c_k x_{k+1} = d_k,\quad 1 \leqslant k \leqslant K-1 \quad (a_1 = c_{K-1} = 0),$$

$$x_0 = \hat{\mu},\quad x_K = \hat{\nu}, \tag{12.16}$$

где полагаем $x_k = \hat{u}_k$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ K)$.

Решение системы (12.16) будем искать в виде

$$x_k=\gamma_k+\beta_k x_{k+1} \quad (k=K-1,\ K-2,\ \ldots,\ 1), \tag{12.17}$$

где γ_k и β_k — неизвестные коэффициенты.

Соотношение (12.17) справедливо для всех значений индекса k, поэтому можно записать

$$x_{k-1}=\gamma_{k-1}+\beta_{k-1}x_k. \tag{12.18}$$

Подставим значение x_{k-1} в (12.16):

$$a_k(\gamma_{k-1}+\beta_{k-1}x_k)+b_kx_k+c_kx_{k+1}=d_k$$

и запишем последнее уравнение в виде (12.17):

$$x_k=\frac{d_k-a_k\gamma_{k-1}}{b_k+a_k\beta_{k-1}}-\frac{c_k}{b_k+a_k\beta_{k-1}}x_{k+1}. \tag{12.19}$$

Сравнивая выражения (12.17) и (12.19), находим рекуррентные соотношения для определения коэффициентов γ_k и β_k:

$$\left.\begin{aligned}\gamma_k&=\frac{d_k-a_k\gamma_{k-1}}{b_k+a_k\beta_{k-1}} \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ K-1);\\ \beta_k&=-\frac{c_k}{b_k+a_k\beta_{k-1}} \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ K-1).\end{aligned}\right\} \tag{12.20}$$

Из граничного условия в точке $x=0$ имеем $\gamma_0=\hat{\mu}$, $\beta_0=0$. Далее по формулам (12.20) находим γ_k, β_k при $k=1,\ 2,\ \ldots,\ K-1$. По известному из второго граничного условия значению $x_K=\hat{\nu}$, используя рекуррентную формулу (12.18), можно определить последовательно x_{K-1}, x_{K-2}, ..., x_1. Таким образом, система линейных алгебраических уравнений (12.16) решена. Необходимым условием устойчивости счета по формулам прогонки является условие $|\beta_k|<1$.

Достаточное условие устойчивости прогонки называют *условием преобладания диагональных элементов*; это условие имеет вид

$$|b_i|\geqslant|a_i|+|c_i|.$$

Для решения системы (12.16) по методу прогонки требуется $\sim 9K$ арифметических действий, т. е. гораздо меньше, чем в методах Гаусса или Крамера.

Существуют разнообразные варианты метода прогонки. В частности, разработан метод матричной прогонки для решения систем разностных уравнений многомерных задач. Методам решения систем разностных уравнений посвящена монография [91].

Составим программу решения системы (12.16) методом прогонки для краевой задачи теплопроводности (12.15).

Список идентификаторов для программы тот же, что и в явной схеме, исключая TOLD, TNEW, и добавлены следующие: A, B, C, D — векторы коэффициентов системы уравнений (12.16); T — вектор значений температуры в каждом узле сетки; TRIDAG — подпрограмма решения системы уравнений, имеющих трехдиагональную матрицу коэффициентов, методом прогонки; BETA, GAMMA — векторы для вычисления коэффициентов β_k и γ_k; IF, L — индексы, соответствующие первому и последнему уравнениям системы; V — вектор, содержащий вычисленное решение.

Текст программы приведен ниже. Блок-схема программы дана на рис. 12.3, *а*, а на рис. 12.3, *б* показана блок-схема подпрограммы

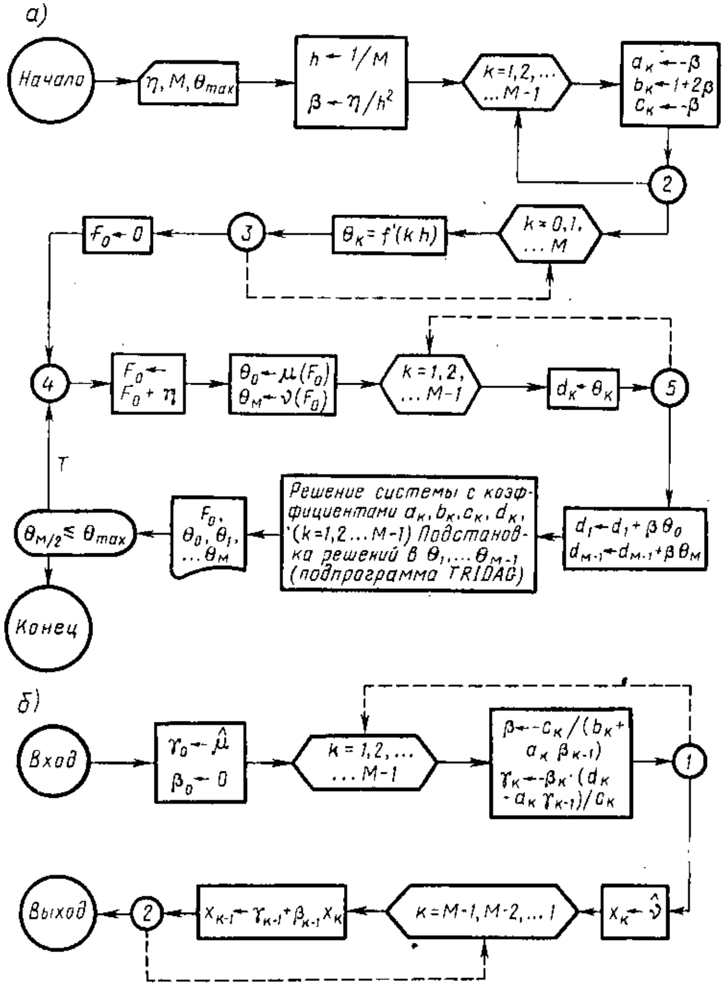


Рис. 12.3. Блок-схема решения разностной задачи по чисто неявной схеме

TRIDAG для решения системы алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей коэффициентов методом прогонки.

```
C       НЕСТАЦИОНАРНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ПЛАСТИНЫ
C       НЕЯВНАЯ СХЕМА
C
```

```
C       НАЧАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ ЗАДА-
C       ЕТСЯ ФУНКЦИЕЙ  F(X). ЗНАЧЕНИЯ  ТЕМПЕРАТУРЫ
C       ПРИ X=Ø И X=1 ЗАДАЮТСЯ ФУНКЦИЯМИ GØ(TAU)
C       И G1(TAU) СООТВЕТСТВЕННО.
C       ЗНАЧЕНИЯ  ТЕМПЕРАТУРЫ ПЕЧАТАЮТСЯ  НА КАЖ-
C       ДОМ IFREQ ВРЕМЕННОМ ШАГЕ, ПОКА НЕ ДОСТИГА-
C       ЕТСЯ  ЗАДАННАЯ  ТЕМПЕРАТУРА  TMAX  В  ЦЕНТРЕ
C       ПЛАСТИНЫ. ТРЕХТОЧЕЧНОЕ РАЗНОСТНОЕ УРАВНЕ-
C       НИЕ НА КАЖДОМ ВРЕМЕННОМ СЛОЕ РЕШАЕТСЯ С
C       ПОМОЩЬЮ ПОДПРОГРАММЫ  TRIDAG.
C
C       .....ОПРЕДЕЛЕНИЕ  ФУНКЦИЙ  ДЛЯ  ВЫЧИСЛЕНИЯ
C       НАЧАЛЬНЫХ И ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ.....
        F(DIST)=Ø.Ø
        GØ(TIME)=1.Ø
        G1(TIME)=1.Ø
        DIMENSION  A(21), B(21), C(21), D(21), T(21)
C       .....ВВОД ПАРАМЕТРОВ  И  ВЫЧИСЛЕНИЕ  МАССИВОВ
C       A, B, C.....
      1 READ(1, 1ØØ) DTAU, TMAX, M, IFREQ
        FLOATM=M
        DX=1.Ø/FLOATM
        RATIO=DTAU/(DX * DX)
        WRITE(3, 2ØØ) DX, DTAU, TMAX, M, IFREQ, RATIO
        DO 2 I=2, M
        A(I)=-RATIO
        B(I)=1.Ø+2.Ø * RATIO
      2 C(I)=-RATIO
C       .....ВЫЧИСЛЕНИЕ И ПЕЧАТЬ НАЧАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ
C       ТЕМПЕРАТУР.....
        MP1=M+1
        DO 3 I=1, MP1
        FLOATI=I
      3 T(I)=F(FLOATI * DX)
        TAU=Ø.Ø
        WRITE(3, 2Ø1)
        WRITE(3, 2Ø2) TAU, (T(I), I=1, MP1)
        ICOUNT=Ø
C       .....ОРГАНИЗАЦИЯ ПОСЛЕДУЮЩИХ ШАГОВ.....
      4 TAU=TAU+DTAU
        ICOUNT=ICOUNT+1
C       .....МНОЖЕСТВО ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ.....
        T(1)=GØ (TAU)
        T(MP1)=G1 (TAU)
C       .....ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕКТОРА D.....
        DO 5 I=2, M
      5 D(I)=T(I)
        D(2)=D(2)+RATIO * T(1)
        D(M)=D(M)+RATIO * T(MP1)
```

```
C       .....ВЫЧИСЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУР НА ОЧЕРЕДНОМ
C       ШАГЕ.....
        CALL TRIDAG(2, M, A, B, C, D, T)
C       ПЕЧАТЬ ТЕМПЕРАТУР
        IF((ICOUNT/IFREQ) * IFREQ.NE.ICOUNT)GO TO 4
        MOVER 2=M/2
        WRITE(3, 2∅2) TAU, (T(I), I=1, MP1)
        IF(T(MOVER2). LE. TMAX) GO TO 4
        GO TO 1
C       .....ФОРМАТЫ ДЛЯ ПЕЧАТИ И ВВОДА.....
  1∅∅   FORMAT(6X, F7.4, 1∅X, F5.2, 6X, I3, 1∅X, I3, 11X, I3)
  2∅∅   FORMAT(82H1_ _ _НЕСТАЦИОНАРНАЯ ТЕПЛОПРО-
      1 ВОДНОСТЬ ПЛАСТИНЫ, НЕЯВНАЯ СХЕМА, С ВВОДНЫ-
        МИ ДАННЫМИ/12 HO_ _ _DX_
      2 _ _ _=_, _F1∅.5/12H_ _ _ _DTAU_ _ _, _
        F1∅.5/12H_
      3 _ _ _TMAX_ _=_, _F1∅.5/12H_ _ _ _ _M_ _
        _ _ _=_, _I4/12H
      4 _ _ _ _IFREQ_=_, I4/12H _ _ _ _RATIO_=_,
        _F1∅.5)
  2∅1   FORMAT(8HO_ _ _ВРЕМЯ, 18X, 39H ЗНАЧЕНИЯ ТЕМ-
      1 ПЕРАТУРЫ В УЗЛАХ СЕТКИ)
  2∅2   FORMAT(1H_, F7.3/(1H_, _7X, _11F8.5))
        END
C       ПОДПРОГРАММА РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ
C       УРАВНЕНИЙ С ТРЕХДИАГОНАЛЬНОЙ МАТРИЦЕЙ
C       КОЭФФИЦИЕНТОВ. УРАВНЕНИЯ ПРОНУМЕРОВАНЫ
C       ОТ IF ДО L И ИХ ПОДДИАГОНАЛЬНЫЕ, ДИАГОНАЛЬ-
C       НЫЕ И НАДДИАГОНАЛЬНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ЗАПО-
C       МИНАЮТСЯ В МАССИВАХ A, B, C. ЗНАЧЕНИЯ ВЫЧИС-
C       ЛЕННОГО РЕШЕНИЯ V(IF), ..., V(L) ЗАПОМИНАЮТСЯ
C       В МАССИВЕ V.
C
        SUBROUTINE TRIDAG(IF, L, A, B, C, D, V)
        DIMENSION A(L), B(L), C(L), D(L), V(L), BETA(1∅1),
        GAMMA(1∅1)
C       .....ВЫЧИСЛЕНИЕ МАССИВОВ BETA И GAMMA.....
        BETA(IF)=B(IF)
        GAMMA(IF)=D(IF)/BETTA(IF)
        IFP1=IF+1
        DO 1 I=IFP1, L
        BETA(I)=B(I) — A(I) * C(I — 1)/BETA(I — 1)
      1 GAMMA(I)=(D(I) — A(I) * GAMMA(I — 1))/BETA(I)
C       .....ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕКТОРА РЕШЕНИЯ V
        V(L)=GAMMA(L)
        LAST=L — IF
        DO 2 K=1, LAST
        I=L — K
      2 V(I)=GAMMA(I) — C(I) * V(I+1)/BETA(I)
```

```
      RETURN
      END
```

Поле температур просчитано для двух вариантов данных:

DTAU=0,0025, TMAX=0,95, M=10 IFREQ=10;

DTAU=0,0125, TMAX=0,95, M=10 IFREQ=2.

Печать результатов для второго варианта данных имеет вид:

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ПЛАСТИНЫ, ЧИСТО НЕЯВНАЯ СХЕМА, С ВВОДНЫМИ ДАННЫМИ DX= =0,10000, DTAU=0,01250, TMAX=0,95000, M=10, IFREQ=2, RATIO=1,25000.

Время	Значения температуры в узлах сетки					
0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
0,025	1,00000	0,59326	0,32471	0,17391	0,10104	0,07965
0,050	1,00000	0,73394	0,51047	0,35033	0,25667	0,22612
0,075	1,00000	0,80014	0,62336	0,48730	0,40248	0,37377
0,100	1,00000	0,84392	0,70394	0,59387	0,52385	0,49986
0,125	1,00000	0,87671	0,76568	0,67782	0,62157	0,60222
0,150	1,00000	0,90227	0,81416	0,74429	0,69948	0,68404
0,175	1,00000	0,92246	0,85251	0,79702	0,76140	0,74913
0,200	1,00000	0,93845	0,88293	0,83887	0,81058	0,80084
0,225	1,00000	0,95114	0,90706	0,87209	0,84963	0,84189
0,250	1,00000	0,96121	0,92622	0,88846	0,88063	0,87448
0,275	1,00000	0,96921	0,94143	0,91939	0,90524	0,90036
0,300	1,00000	0,97556	0,95350	0,93600	0,92477	0,92090
0,325	1,00000	0,98059	0,96309	0,94920	0,94028	0,93720
0,350	1,00000	0,98459	0,97070	0,95967	0,95259	0,95015

Время					
0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
0,025	0,10104	0,17391	0,32471	0,59326	1,00000
0,050	0,25667	0,35033	0,51047	0,73394	1,00000
0,075	0,40248	0,48730	0,62336	0,80014	1,00000
0,100	0,52385	0,59387	0,70394	0,84392	1,00000
0,125	0,62157	0,67782	0,76568	0,87671	1,00000
0,150	0,69948	0,74429	0,81416	0,90227	1,00000
0,175	0,76140	0,79702	0,85251	0,92246	1,00000
0,200	0,81058	0,83887	0,88293	0,93845	1,00000
0,225	0,84963	0,87209	0,90706	0,95114	1,00000
0,250	0,88063	0,89845	0,92622	0,96121	1,00000
0,275	0,90523	0,91939	0,94143	0,96921	1,00000
0,300	0,92477	0,93600	0,95350	0,97566	1,00000
0,325	0,94028	0,94920	0,96309	0,98059	1,00000
0,350	0,95259	0,95967	0,97070	0,98459	1,00000

Печать результатов, приведенная выше, содержит значения безразмерной температуры на каждом втором временно́м шаге. Ниже даны значения безразмерной температуры центра пластины $\Theta_ц$ для двух вариантов вводных данных в сравнении с известным точным решением:

Время, Fo	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25
$\Theta_ц$ (η=0,0025)	0,231	0,520	0,704	0,817	0,887
$\Theta_ц$ (η=0,0125)	0,226	0,500	0,684	0,801	0,874
$\Theta_ц$(точное решение)	0,228	0,526	0,710	0,823	0,892

Из приведенных значений видно, что не очень малый шаг по времени $\eta=0{,}0025$ дает удовлетворительный по точности результат. Даже шаг $\eta=0{,}0125$ пригоден для грубых инженерных расчетов, особенно если учитывать минимально необходимое в этом случае машинное время. Заметим, что в последнем случае $\beta=1{,}25$, в то время как для явной схемы верхний предел $\beta=0{,}5$.

Рассмотрим особенности аппроксимации граничных условий III рода, например вместо условий (12.3) имеем

$$\left.\begin{aligned} \partial T(0,\ \tau)/\partial x&=\alpha_1 T(0,\ \tau)+\beta_1(\tau),\ \alpha_1=\text{const}>0,\\ \partial T(d,\ \tau)/\partial x&=\alpha_2 T(d,\ \tau)+\beta_2(\tau),\ \alpha_2=\text{const}>0.\end{aligned}\right\} \qquad (12.21)$$

Аппроксимируем производную в первом уравнении (12.21) односторонней разностью, тогда

$$\left(\hat{u}_1-\hat{u}_0\right)/h=\alpha_1\hat{u}_0+\hat{\beta}_1.$$

Оценим невязку этого разностного уравнения:

$$\nu_0=\left(\hat{T}_x\right)_0-\frac{1}{h}\left(\hat{T}_1-\hat{T}_0\right)=-\frac{h}{2}T_{xx}+0(h),$$

т. е. в точке на границе порядок малости меньше, чем в регулярных узлах внутри области. Это невыгодно с точки зрения общей точности расчета.

Применим **метод уменьшения невязки** для получения разностного граничного условия точности $0(h^2)$. Разложим в ряд Тейлора функцию $T(x_1,\ \tau)$:

$$T(x_1,\ \tau)=T(x_0,\ \tau)+hT_x(x_0,\ \tau)+\frac{1}{2}h^2T_{xx}(x_0,\ \tau)+\ \ldots$$

В силу того что уравнение (12.1) справедливо в точке x_0, запишем

$$T_x(x_0,\ \tau)=\frac{1}{h}\left[T(x_1,\ \tau)-T(x_0,\ \tau)\right]-$$
$$-\frac{1}{2}h\left[\frac{1}{a}\frac{\partial T(x_0,\ \tau)}{\partial\tau}-\frac{1}{\lambda}q_v(x_0,\ \tau)\right]+,\ \ldots.$$

Заменяя производную $\partial T(x_0,\ \tau)/\partial\tau$, аппроксимируем ее разностным выражением $\left(\hat{T}_0-T_0\right)/\eta$. Получим разностную аппроксимацию производной $\partial T/\partial x$ в точке $x=x_0$ с погрешностью $0(h^2)$. Тогда, подставляя это выражение в первое условие (12.21), запишем последнее в виде, аналогичном разностному уравнению (12.4) с параметром σ:

$$\sigma\left(\frac{\hat{u}_1-\hat{u}_0}{h}-\alpha_1\hat{u}_0\right)+(1-\sigma)\left(\frac{u_1-u_0}{h}-\alpha_1 u_0\right)=$$
$$=\frac{h}{2}\left(\frac{\hat{u}_0-u_0}{a\eta}-\bar{\omega}_0\right)+\bar{\beta}, \qquad (12.22)$$

где $\bar{\beta}=\beta^{j+1/2}$, ω_0 — сеточная аппроксимация источника теплоты в точке $x=0$.

Можно показать, что при конкретном значении параметра σ разностное выражение (12.22) аппроксимирует граничное условие (12.21) в точке $x=0$ с той же точностью, с которой аппроксимируется уравнение теплопроводности (12.4).

Условие (12.22) можно привести к виду, удобному для применения метода прогонки. Если

$$\psi_0=\frac{\sigma}{\sigma(1+\alpha_1 h)+h^2/(2a\eta)};$$

$$\varphi_0=\frac{\psi_0}{\sigma}\left\{(1-\sigma)u_1+\left[\frac{h^2}{2a\eta}-(1-\sigma)(1+\alpha_1 h)\right]u_0+\frac{h^2}{2}\bar{\omega}_0-h\bar{\beta}\right\},$$

то условие (12.22) запишется так:

$$\hat{u}_0=\varphi_0+\psi_0\hat{u}_1. \tag{12.23}$$

Проводя аналогичные выкладки, аппроксимируем второе граничное условие в (12.21) в точке $x=d$:

$$\hat{u}_K=\varphi_K+\psi_K\hat{u}_{K-1}, \tag{12.24}$$

где $\psi_K^{-1}=1-\alpha_2 h+h^2/(2\sigma a\eta)$;

$$\varphi_K=-\frac{\psi_K}{\sigma}\left\{\left[(1-\sigma)(1-\alpha_2 h)-\frac{h^2}{2a\eta}\right]\times\right.$$

$$\left.\times u_K-(1-\sigma)u_{K-1}-\frac{h^2}{2}\bar{\omega}_K-h\bar{\beta}_2\right\}.$$

Если в задаче (12.1), (12.2), (12.21) предположить, что с боковой поверхности стержня происходит теплоотдача в окружающую среду с нулевой температурой, то уравнение (12.1) запишется в виде

$$\frac{\partial T}{\partial\tau}=a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}-\frac{\alpha}{c\rho\gamma}T+\frac{q_v(x,\tau)}{c\rho}, \tag{12.25}$$

где α — коэффициент теплоотдачи с боковой поверхности стержня; γ — отношение площади сечения стержня к периметру его сечения.

Уравнение (12.25) аппроксимируем уравнением, аналогичным (12.4):

$$\frac{1}{\eta}\left(\hat{u}_k-u_k\right)=\sigma\left[\frac{a}{h^2}\left(\hat{u}_{k-1}-2\hat{u}_k+\hat{u}_{k+1}\right)-\frac{\alpha}{c\rho\gamma}\hat{u}_k\right]+$$

$$+(1-\sigma)\left[\frac{a}{h^2}(u_{k-1}-2u_k+u_{k+1})-\frac{\alpha}{c\rho\gamma}u_k\right]+\omega_k. \tag{12.26}$$

Присоединим к этому уравнению разностные аналоги начального условия (12.5) и граничных условий (12.23), (12.24) *. Для решения

* Граничные условия (12.21) при этом задаются в виде
$\partial T(0,\tau)/\partial x=\alpha_1 T(0,\tau)-\beta_1(\tau)$; $-\partial T(d,\tau)/\partial x=\alpha_2 T(d,\tau)-\beta_2(\tau)$,
соответственно изменяются и коэффициенты φ_0, ψ_0, φ_K, ψ_K.

системы алгебраических уравнений (12.26), (12.5), (12.23), (12.24) применим метод прогонки, предварительно записав уравнение (12.26) в виде

$$a_k\hat{u}_{k-1}+b_k\hat{u}_k+c_k\hat{u}_{k+1}=d_k, \qquad (12.27)$$

где $a_k=c_k=\eta\sigma a/h^2$; $b_k=-[2a/h^2+\alpha/(c\rho\gamma)]\sigma\eta+1$; $d_k=-\eta(1-\sigma)\times\times\left[\frac{a}{h}\frac{(u_{k+1}-u_k)}{h}-\frac{a}{h}\frac{(u_k-u_{k-1})}{h}-\frac{\alpha}{c\rho\gamma}u_k\right]+\eta\omega_k+u_k$.

Тогда, воспользовавшись известными формулами прогонки (12.17) — (12.20) и полагая $\gamma_0=\varphi_0$, $\beta_0=\psi_0$, $\hat{u}_K=(\psi_K\gamma_{K-1}+\varphi_K)/(1-\psi_K\beta_{K-1})$, решаем задачу (12.27), (12.5), (12.23), (12.24). Для реализации описанного алгоритма составлена программа * на алгоритмическом языке АЛГОЛ-60.

Для того чтобы расчет с помощью прогонки был устойчивым, достаточно выполнения условий

$$\frac{\alpha}{c\rho\gamma}\geqslant-\frac{1}{\eta\sigma},\quad \alpha_1\alpha_2\geqslant-\frac{h}{2a\sigma}\left(\frac{1}{\eta}+\frac{\alpha}{c\rho\gamma}\right).$$

Список вводимых идентификаторов. E1, E2 — числовые параметры, задающие вид граничных условий; E1=E2=0 — граничные условия I рода; E1=E2=1 — граничные условия *II* и *III* родов; *E1=0, E2=1 или E1=1, E2=0* — смешанные граничные условия; A1, A2 — числовые параметры α_1, α_2 в граничных условиях II и III родов; A, Q — значения температуропроводности a и комплекса $\alpha/(c\rho\gamma)$ соответственно; N — число интервалов, на которые разбит отрезок $[0, d]$; AL — параметр σ схемы; H — шаг по координате x; TA — значение момента времени, при котором следует закончить счет; K — число шагов по времени τ, через которое осуществляется выдача результатов на печать; TAU — шаг η по времени τ.

Кроме ввода перечисленных величин необходимо еще оформить процедуры: НУ (V) — задание начального условия в массив V; C4 (X, T, F) — задание объемной плотности теплового потока внутренних источников теплоты $q_v/(c\rho)$ как функции F от координаты X и времени T; Ф1 (T, F1), Ф2 (T, F1) — задание температур на границах тела при граничных условиях I рода; KB (T, B1, B2) — задание функций $\beta_1(\tau)$ и $\beta_2(\tau)$ при граничных условиях II и III родов.

Тогда программа расчета температурного поля ограниченного стержня запишется следующим образом:

```
BEGIN
REAL AL, TAU, H, O, A, T, TA, R, Я, D2, A2, A1;
REAL B1, B2, B3, B4, B5, FI, X;
NTEGER S, I, N, C2, K, E1, E2;
PROCEDURE HY(V);
REAL ARRAY V;
BEGIN
FOR I: =0 STEP 1 UNTIL N DO V[I]: =0
END;
```

* Кряквина С. А. Программа решения одномерного уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами/Под общ. ред. В. В. Воеводина. Вып. 28, М., Изд-во МГУ, 1967.

```
PROCEDURE C4(X, T, F); VALUE X, T; REAL X, T, F;
BEGIN F:=0 END;
PROCEDURE Φ1(T, FI); VALUE T; REAL T, FI;
BEGIN FI:=1 END;
PROCEDURE Φ2(T, FI); VALUE T; REAL T, FI;
FI:=IF T НЕ МЕНЬШЕ 0.40 AND T НЕ БОЛЬШЕ 0,6 THEN 0,0
ELSE 1;
PROCEDURE KB(T, B1, B2); VALUE T; REAL T, B1, B2;
BEGIN B1:=0; B2:=1 END;
P0042 (E1, E2, A1, A2, A, Q, N, AL, H, TA, K, TAU);
BEGIN REAL ARRAY W, B, V[0:N];
SWITCH F:=F1, F2, F3, F4, F5;
GO TO M1;
L:D2:=AL×E2/(AL×(1+A2×H)+H↑2×(1/TAU + Q×AL)/(A×2));
W[1]:=AL×E1/(AL×(1+A1×H)+H↑2×(1/TAU + Q×AL)/(A×2));
T:=0, S:=1;
GO TO Г,
F1:R:=TAU/H↑2;
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL N—1 DO
W[I+1]:=AL×R × A/(2×AL×R×A+1 — AL×R×A×W[I]+AL
×Q×TAU);
L1:C2:=0;
L2:T:=T+TAU; B3:=B1; B4:=B2; S:=2; GO TO Г;
F2:S:=3; X:=0; GO TO P;
F3:B[1]:=W[1]×H×(AL×B1 +(1 — AL)×(—V[0]×(1/H +A1)
+V[1]/H +B3)+H×(Я+V[0]×(1/TAU —(1 — AL)×Q))/(2×A))/AL
+(1 — E1)×FI;
S:=4; X:=N×H;
GO TO P;
F4:B5:=D2×H×(B2×AL+(1 — AL)×(—V[N]×(1/H+A2)+
V[N — 1]/H +B4)+H×(V[N]×(1/TAU —Q×(1 — AL))+Я)/(2×
A))/AL +(1 — E2)×FI;
FOR I=1 STEP 1 UNTIL N—1 DO
BEGIN S:=5; X:=I×H; GO TO P;
F5:B[I+1]:=W[I+1]×(AL×R×A×B[I]+TAU×Я+V[I]+(1
— AL)×TAU×(A×(V[I+1]—2×V[I]+V[I — 1])/H↑2 — Q×V
[I]))/(AL×R×A)
END;
V[N]:=(D2×B[N]+B5)/(1 — D2×W[N]);
FOR I=N — 1 STEP — 1 UNTIL 0 DO
V[I]:=W[I+1]×V[I+1]+B[I+1]; C2:=C2+1;
IF T НЕ МЕНЬШЕ TA+TAU THEN GO TO M ELSE
BEGIN
IF C2=K THEN P1041(V) ELSE
GO TO L2;
GO TO L1
END;
M1:HY(V);
GO TO L;
```

```
Г:KB(T, B1, B2);
GO TO F[S];
P:C4(X, T, Я);
IF X=0 THEN Ф1(T, FI) ELSE Ф2(T, FI);
GO TO F[S];
M:END
END;
```

§ 12.2. Свойство монотонности

Если для уравнения теплопроводности

$$\partial T/\partial\tau = a\partial^2 T/\partial x^2$$

задано монотонное начальное условие и температура на границе тела постоянна, то полученное точное решение сохраняет монотонность профиля температуры в любой момент времени.

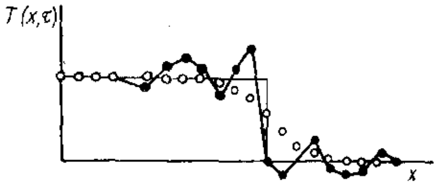


Рис. 12.4. Качественная картина счета по немонотонной схеме

Возникает вопрос: сохраняется ли свойство монотонности у разностного решения? Или, если профиль u_k монотонен, будет ли монотонным профиль $\hat{u}_k$? Однородные разностные схемы, сохраняющие монотонность профиля разностного решения, называются *монотонными*. Свойство монотонности особенно проявляется при решении задач с разрывными и быстропеременными точными решениями. Качественная картина решения таких задач по монотонной и немонотонной схемам показана на рис. 12.4. Расчет по немонотонной схеме дает «разболтку», по монотонной — сглаженную кривую. Не следует путать «разболтку» с неустойчивостью схемы.

Признак монотонности. Явная двухслойная линейная однородная схема

$$\hat{u}_k = \sum_m \beta_m u_{k+m} \tag{12.28}$$

монотонна тогда и только тогда, когда все $\beta_m \geqslant 0$ [42]. Используя этот признак, легко показать, что схема (12.14) сохраняет монотонность профиля температуры для задачи с начальными условиями на бесконечной прямой при определенных условиях. В самом деле, явная схема может быть записана в виде (12.28):

$$\hat{u}_k = \sum_{m=-1}^{1} \beta_m u_{k+m};\ \beta_0 = 1 - 2a\eta/h^2;\ \beta_1 = \beta_0 = a\eta/h^2.$$

При выполнении условия устойчивости для явной схемы $a\eta/h^2 \leqslant 1/2$ все $\beta_m \geqslant 0$ и схема монотонна. В общем же случае при $\sigma \neq 0$, полагая $\omega_k=0$, можно получить для неявной схемы (12.4) достаточное условие монотонности

$$a\eta/h^2 \leqslant 1/[2(1-\sigma)] \quad (12.29)$$

и менее строгое необходимое и достаточное условие монотонности схемы (12.4)

$$a\eta/h^2 \leqslant (2-\sigma)/[4(1-\sigma^2)]. \quad (12.30)$$

Из условий (12.29), (12.30) видно, что неявные схемы монотонны при очень малом шаге по времени $\eta \sim h^2$. Исключение — это чисто неявная схема ($\sigma=1$), которая монотонна при любом соотношении шагов. Это свойство позволяет успешно использовать ее при решении нелинейных задач. Ввиду того что чисто неявная схема дает решение, имеющее невысокую точность, достаточно гладкие решения на подробных сетках можно находить и по немонотонным схемам.

§ 12.3. Явные схемы

Выше были рассмотрены две явные схемы. Классическая двухслойная (12.14), которая является условно устойчивой, и трехслойная схема Ричардсона (11.49), которая имеет локальную погрешность аппроксимации $O(\eta^2+h^2)$, но безусловно неустойчива. Явные схемы имеют несомненное преимущество перед неявными в простоте организации вычислений. Однако большинство явных схем является условно устойчивыми и это снижает их эффективность.

Рассмотрим некоторые известные явные схемы.

Схема Дюфорта — Франкела получается из схемы Ричардсона заменой в правой части схемы (11.49) значения u_k на полусумму $(\hat{u}_k+\check{u}_k)/2$:

$$\frac{1}{2\eta}(\hat{u}_k-\check{u}_k)=\frac{a}{h^2}(u_{k-1}-\hat{u}_k-\check{u}_k+u_{k+1})+\omega_k. \quad (12.31)$$

В формулу (12.31) входят значения сеточной функции u на трех слоях по времени. Уравнение (12.31) легко разрешимо относительно $\hat{u}_k$. После того как вычислено решение на первых двух слоях (см. § 11.3), вычисление решения на последующих не вызывает затруднений.

Применяя метод разделения переменных, можно показать, что схема (12.31) безусловно устойчива.

В самом деле, для множителя роста n-й гармоники получаем уравнение

$$\mu_n^2-\mu_n\frac{4\beta}{1+2\beta}\cos nh-\frac{1-2\beta}{1+2\beta}=0,$$

откуда

$$\mu_n=\frac{2\beta\cos nh\pm\sqrt{4\beta^2\cos^2 nh-4\beta^2+1}}{2\beta+1}=\left(2\beta\cos nh\pm\sqrt{1-\varepsilon}\right)/(1+2\beta),$$

где $\beta=a\eta/h^2$; $\varepsilon=4\beta^2\sin^2 nh\geqslant 0$. При $\varepsilon>1$ корни μ_{n_1}, μ_{n_2} — комплексные, сопряженные и

$$|\mu_{n_{1,2}}|\leqslant\sqrt{(2\beta-1)/(2\beta+1)}<1;$$

при $\varepsilon\leqslant 1$ имеем, что $\sqrt{1-\varepsilon}=\gamma\leqslant 1$ и

$$|\mu_{n_{1,2}}|=(2\beta\cos nh\pm\gamma)/(2\beta+1)\leqslant 1.$$

Таким образом, схема (12.31) безусловно устойчива в $\|\cdot\|_{l_2}$ по начальным данным. Оценим погрешность аппроксимации схемы (12.31). Составим невязку:

$$\psi=\left(\frac{\partial T}{\partial\tau}-a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_{x=x_k}^{\tau_i}-\frac{1}{2\eta}(\hat{T}_k-\check{T}_k)+\frac{a}{h^2}(T_{k-1}-\hat{T}_k-\check{T}_k+T_{k+1}).$$

Предположим, что функция температуры $T(x,\ \tau)$ достаточное число раз дифференцируема, тогда, раскладывая решение в узлах шаблона в ряд Тейлора, получим

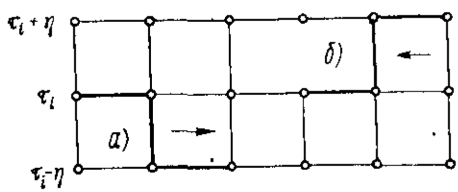


Рис. 12.5. Шаблон схемы бегущего счета

$$\psi=a(\eta/h)^2(\partial^2T/\partial\tau^2)_{x=x_k}^{\tau_i}+$$
$$+0(\eta^2)+0(h^2)+0(\eta^4/h^4).$$

Схема (12.31) обладает условной аппроксимацией $0(\eta^2+h^2+\eta^2/h^2)$, поэтому сходимость имеет место только когда $\eta/h\to 0$ при $h\to 0$.

Тем не менее схема (12.31) выгоднее классической явной схемы (12.14), так как при расчетах отношение $a\eta/h^2$ будет влиять только на точность решения, а не на устойчивость схемы.

Схема бегущего счета строится на шаблоне рис. 12.5. Расчет на четных слоях по времени идет слева направо (рис. 12.5, *а*) по формулам

$$\frac{1}{\eta}(u_k-\check{u}_k)=\frac{a}{h^2}(u_{k-1}-u_k-\check{u}_k+\check{u}_{k+1})+\frac{q_v(x_k,\ \tau-\eta/2)}{c\rho},\qquad(12.32)$$

а на нечетных слоях — справа налево (рис. 12.5, *б*) по формулам

$$\frac{1}{\eta}(\hat{u}_k-u_k)=\frac{a}{h^2}(u_{k-1}-u_k-\hat{u}_k+\hat{u}_{k+1})+\frac{q_v(x_k,\ \tau+\eta/2)}{c\rho}.\qquad(12.33)$$

Порядок аппроксимации каждого из уравнений есть $0(\eta^2+\eta h+h^2+\eta/h)$. Однако при переходе со слоя на слой происходит сложение погрешностей прямого и обратного ходов; в результате получим, что суммарный порядок аппроксимации схемы (12.32), (12.33) равен $0(\eta^2+h^2+\eta^2/h^2)$, т. е. такой же, как и в схеме Дюфорта — Франкела.

Применяя метод разделения переменных, нетрудно показать, что схема бегущего счета безусловно устойчива. Таким образом, схема Дюфорта — Франкела и схема бегущего счета близки по своим свойствам.

Рассмотрим пример применения простейшей явной схемы для решения краевой задачи с нелинейными граничными условиями.

Нагрев неограниченной пластины тепловым излучением. При лучистом теплообмене на поверхности неограниченной пластины для определения температурного поля пластины имеем следующую краевую задачу:

$$\partial\Theta(X,\ \mathrm{Fo})/\partial\mathrm{Fo}=\partial^2\Theta(X,\ \mathrm{Fo})/\partial X^2,\ 0<X<1,\ \mathrm{Fo}>0;$$

$$\Theta(X,\ 0)=\Theta_0(X);$$

$$\partial\Theta(1,\ \mathrm{Fo})/\partial X=\mathrm{Bi_p}[1-\Theta^4(1,\ \mathrm{Fo})];\ \partial\Theta(0,\ \mathrm{Fo})/\partial X=0.$$

Здесь $\Theta=T/T_c$, $\Theta_0=T_0(x)/T_c$, $X=x/l$, $\mathrm{Fo}=a\tau/l^2$, $\mathrm{Bi_p}=\sigma_0 T_c^3 l/\lambda$.

Соответствующая краевой задаче явная разностная схема запишется так:

$$\hat{u}_k=(1-2\beta)\,u_k+\beta\,(u_{k+1}+u_{k-1}),\ 2\leqslant k\leqslant K-1;$$

$$u_k^0=\Theta_0(kh),\ \hat{u}_1=\hat{u}_2;\ \hat{u}_K=\hat{u}_{K-1}+\mathrm{Bi_p}\,(1-\hat{u}_K^4)\,h,$$

где $\beta=\eta/h^2$.

Последнее уравнение имеет четыре корня. Из них выбирается только корень $\hat{u}_K^*$, который стремится к $\hat{u}_{K-1}$ при $h\to 0$. Можно показать [109], что полученная явная схема при таком выборе $\hat{u}_K^*$ будет устойчива только при $\beta\leqslant 1/2$.

Выполним расчет температурного поля пластины при следующих значениях входных данных: $\Theta_0=0{,}15$; $\mathrm{Bi_p}=0{,}5$; $h=0{,}1$; $\eta=0{,}005$.

Составим программу на алгоритмическом языке ФОРТРАН-IV для ЭВМ типа ЕС.

Список идентификаторов. L — координата правой границы; DX — шаг сетки по координате X; DT — шаг сетки по числу Fo; U — массив значений температуры; AL — коэффициент β; XR, XI — массивы действительных частей и коэффициентов при мнимых частях корней уравнения четвертой степени соответственно; N, K — число узлов сетки по координате X и безразмерному времени Fo соответственно; A — число $\mathrm{Bi_p}$; FI (X) — функция начального распределения $\Theta_0(X)$.

```
C     ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ НЕОГРАНИЧЕННОЙ
C     ПЛАСТИНЫ ПРИ ТЕПЛООБМЕНЕ ИЗЛУЧЕНИЕМ
      DIMENSION U (11, 11), C (5), XR (4), XI (4), Z (4), W (4)
    1 FORMAT (3F7.4)
    2 FORMAT (2I2)
```

```
      REAL L
      READ (1, 1) L, T, A
      WRITE (3, 1) L, T, A
      READ (1, 2) N, K
      DX=L/(N-1)
      DT=T/(K-1)
      AL=DT/DX/DX
      DO 3I=1, N
      X=DX * (I-1)
    3 U(I, 1)=F1(X)
      DO 4 I=2, K
      N1=N-1
C     ВЫЧИСЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ ВО ВНУТРЕННИХ
C     ТОЧКАХ ПЛАСТИНЫ
      DO 5 I=2, N1
    5 U(I, J)=(1-2* AL)* U(I, J-1)+AL* (U(I+1, J-1)+
     +U(I-1, J-1))
C     ВЫЧИСЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ НА ЛЕВОЙ ГРАНИЦЕ
C     ПЛАСТИНЫ
      U(1, J)=U(2, J)
C     РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ 4-ГО
C     ПОРЯДКА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ НА
C     ПРАВОЙ ГРАНИЦЕ ПЛАСТИНЫ
      C(1)=A* DX
      C(2)=Ø.
      C(3)=Ø.
      C(4)=1.
      C(5)=-(U(N-1, J)+A* DX)
      CALL QUART (Ø, XR, XI)
C     ПЕЧАТЬ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ (XR) И МНИМЫХ (XI)
C     ЧАСТЕЙ КОРНЕЙ УРАВНЕНИЯ
      WRITE (3, 6) (XR(I), I=1, 4)
      WRITE (3, 6) (XI(I), I=1, 4)
    6 FORMAT (4E11.4)
      M=Ø
      DO 7 I=1, 4
      IF (XI(I)-Ø.) 7, 8, 7
      W(M)=XR(I)
    7 CONTINUE
      WRITE (3, 6) (W(I), I=1, M)
      DO 1Ø I=1, M
   1Ø Z(I)=ABS(W(I)-U(N-1, J))
      RM=Z(1)
      MM=1
      DO 11 I=1, M
      IF(RM-Z(I)) 11, 11, 12
   12 RM=Z(I)
      MM=I
   11 CONTINUE
```

```
      WRITE (3, 6) RM
C     ВЫЧИСЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ НА ПРАВОЙ ГРАНИЦЕ
C     ПЛАСТИНЫ
      U(N, J)=W(MM)
      WRITE (3, 2) M, MM
C     ПЕЧАТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ НА J-ОМ
C     ВРЕМЕННОМ СЛОЕ
    4 WRITE (3, 13) (U(I, J), I=1, N)
   13 FORMAT (11E11.4)
      STOP
      END
C     ФУНКЦИЯ НАЧАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
C     ТЕМПЕРАТУРЫ
      FUNCTION FI(X)
      FI=Ø.15
      RETURN
      END
```

В табл. 12.1 показаны результаты расчетов температурного поля неограниченной пластины при лучистом нагреве при $\beta=0{,}5$ (числитель) и $\beta=0{,}75$ (знаменатель). Из таблицы видно, что результаты расчетов температуры при $\beta=3/4$ не имеют физического смысла.

Таблица 12.1

Fo	Значения координаты X					
	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,015	$\frac{0{,}1500}{0{,}1500}$	$\frac{0{,}1500}{0{,}1500}$	$\frac{0{,}1500}{0{,}1500}$	$\frac{0{,}1625}{0{,}1500}$	$\frac{0{,}1874}{0{,}1874}$	$\frac{0{,}2373}{0{,}2375}$
0,030	$\frac{0{,}1516}{0{,}1500}$	$\frac{0{,}1547}{0{,}1500}$	$\frac{0{,}1656}{0{,}1711}$	$\frac{0{,}1843}{0{,}1710}$	$\frac{0{,}2185}{0{,}2201}$	$\frac{0{,}2683}{0{,}2698}$
0,045	$\frac{0{,}1560}{0{,}1618}$	$\frac{0{,}1650}{0{,}1460}$	$\frac{0{,}1794}{0{,}2026}$	$\frac{0{,}2047}{0{,}1779}$	$\frac{0{,}2408}{0{,}2483}$	$\frac{0{,}2904}{0{,}2980}$

§ 12.4. Решение задач с переменными коэффициентами

При теплопроводности λ, зависящей от времени τ и координаты x, рассмотрим уравнение теплопроводности вида

$$\frac{\partial T}{\partial \tau}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(x,\ \tau)\frac{\partial T}{\partial x}\right)+q_v(x,\ \tau),\ (c\rho=1). \tag{12.34}$$

Будем считать, что $\lambda(x,\ \tau)$ и $q_v(x,\ \tau)$ — кусочно-непрерывные функции. В практике этот случай часто встречается (теплопроводность слоистых сред, задачи с фазовыми переходами и др.).

В конечном числе точек разрывов первого рода функций $\lambda(x, \tau)$ и $q_v(x, \tau)$ функция температуры $T(x, \tau)$ имеет особенности, т. е. решение будет обобщенным.

Для того чтобы получаемое разностное решение сходилось к допустимому обобщенному для составления консервативной разностной схемы, используем метод баланса.

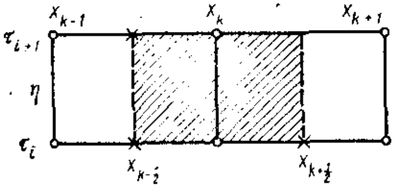


Рис. 12.6. Шаблон консервативной разностной схемы

Уравнение (12.34) запишем в виде системы двух уравнений

$$\left.\begin{aligned} \partial T/\partial\tau &= -\partial q/\partial x + q_v(x, \tau); \\ q &= -\lambda(x, \tau)\,\partial T/\partial x. \end{aligned}\right\} \tag{12.35}$$

На шеститочечном шаблоне выделим элементарную ячейку (рис. 12.6) и путем интегрирования первого уравнения (12.35) составим уравнение баланса энергии для ячейки:

$$\int\limits_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} (\hat{T} - T)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\tau}^{\tau+h} \left(q_{k-\frac{1}{2}} - q_{k+\frac{1}{2}}\right) \mathrm{d}\tau + \int\limits_{\tau}^{\tau+\eta} \mathrm{d}\tau \int\limits_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} q_v(x, \tau)\,\mathrm{d}x. \tag{12.36}$$

Второе уравнение в (12.35) проинтегрируем по интервалу сетки $[x_k, x_{k+1}]$:

$$T_{k+1} - T_k = -\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{q}{\lambda(x\ \ \tau)}\,\mathrm{d}x. \tag{12.37}$$

Несмотря на то что на интервале $[x_k, x_{k+1}]$ $\lambda(x, \tau)$ может иметь разрывы, формула (12.37) имеет смысл благодаря свойству аддитивности операции интегрирования. Приближенно вычислим интегралы в (12.36), (12.37) по простейшим квадратурным формулам. Интеграл $\int q\,\mathrm{d}\tau$ вычислим по двухточечной формуле с весом σ на верхнем слое, а в (12.37), учитывая свойство непрерывности теплового потока в точках разрыва первого рода, функцию $q(x, \tau)$ заменим ее средним значением

$$T_{k+1} - T_k \approx q_{k+\frac{1}{2}} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{\mathrm{d}x}{\lambda(x\ \ \tau)}.$$

В результате получим консервативную разностную схему:

$$\frac{1}{\eta}(\hat{u}_k - u_k) = \frac{\sigma}{h_k^*}\left(\hat{q}_{k-\frac{1}{2}} - \hat{q}_{k+\frac{1}{2}}\right) + \frac{1-\sigma}{h_k^*}\left(q_{k-\frac{1}{2}} - q_{k+\frac{1}{2}}\right) + \omega_k; \tag{12.38}$$

$$q_{k+\frac{1}{2}} = \bar{a}_{k+\frac{1}{2}} \frac{u_k - u_{k+1}}{h_k}, \quad \hat{q}_{k+\frac{1}{2}} = \bar{a}_{k+\frac{1}{2}} \frac{\hat{u}_k - \hat{u}_{k+1}}{h_k}, \tag{12.39}$$

где $h_k^* = x_{k+1/2} - x_{k-1/2}$, $h_k = x_{k+1} - x_k$;

$$\bar{a}_{k+\frac{1}{2}} = \left[\frac{1}{h_k}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{dx}{\lambda(x, \bar{\tau})}\right]^{-1}, \quad \bar{\tau} = \tau + \eta/2; \tag{12.40}$$

$$\omega_k = \frac{1}{\eta h_k^*}\int\limits_{\tau}^{\tau+h} d\tau \int\limits_{x_{k-1/2}}^{x_{k+1/2}} q_v(x, \tau)\, dx. \tag{12.41}$$

Интегралы (12.40) и (12.41) при решении конкретных задач можно также аппроксимировать с помощью известных квадратурных формул. Если разностная сетка выбрана таким образом, что ее узлы совпадают с точками разрыва $\lambda(x, \tau)$ и $q_v(x, \tau)$, то можно рекомендовать следующие формулы:

$$\bar{a}_{k+1/2} \approx \lambda(x_{k+1/2}, \bar{\tau}), \quad \bar{a}_{k+1/2} \approx (\lambda(x_k, \bar{\tau}) + \lambda(x_{k+1}, \bar{\tau}))/2;$$

$$\bar{a}_{k+1/2} = \frac{2\lambda(x_k, \bar{\tau})\,\lambda(x_{k+1}, \bar{\tau})}{\lambda(x_k, \bar{\tau}) + \lambda(x_{k+1}, \bar{\tau})}, \quad \bar{a}_{k+1/2} = \sqrt{\lambda(x_k, \bar{\tau})\cdot\lambda(x_{k+1}, \bar{\tau})};$$

$$\omega_k = \frac{x_k - x_{k-1/2}}{h^*} q_v(x_{k-1/2}, \bar{\tau}) + \frac{x_{k+1/2} - x_k}{h_k^*} q_v(x_{k+1/2}, \bar{\tau});$$

$$\omega_k = \frac{1}{2}[q_v(x_k + 0, \bar{\tau}) + q_v(x_k - 0, \bar{\tau})].$$

Рассмотрим свойства схемы (12.38), (12.39). При $\sigma \neq 0$ для определения $\hat{u}_k$ приходим к линейной системе алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей. Диагональные элементы матрицы преобладают, так что решение, получаемое методом прогонки, единственно и устойчиво. Достаточное условие устойчивости по начальным данным для схемы (12.38), (12.39) имеет вид

$$\sigma \geqslant 1/2 - 1/(4\eta)\min(h^2/a), \tag{12.42}$$

следовательно, при $\sigma \geqslant 0{,}5$ разностная схема (12.38), (12.39) абсолютно устойчива.

При $\sigma < 0{,}5$ необходимое условие устойчивости

$$\eta < \min(h^2/a)\,[1/(4(0{,}5 - \sigma))].$$

Поэтому явная схема, получаемая при $\sigma=0$, устойчива лишь при $\eta\leqslant(1/2)\min(h^2/a)$, что существенно затрудняет ее применение при больших значениях теплопроводности.

Для случая, когда $\lambda(x, \tau)$ и $q_v(x, \tau)$ кусочно-непрерывны вместе со своими первыми и вторыми производными, причем линии разрыва на плоскости x, τ параллельны оси τ, можно доказать сходимость схемы (12.38), (12.39) [88].

Сформулируем окончательный результат.

Схема (12.38), (12.39) при выполнении условия устойчивости (12.42) равномерно сходится на специальных сетках с точностью $O(\eta^{\nu}+h_c^2)$, где $\nu=2$ при $\sigma=1/2$, $\nu=1$ при $\sigma\neq 1/2$.

Здесь $h_c=\sqrt{(h, h)}$ — средний шаг специальной сетки, выбранной так, что все точки разрыва функций $\lambda(x, \tau)$ и $q_v(x, \tau)$ и их указанных производных являются ее узлами. Скалярное произведение вводится по формуле

$$(y, v)=\sum_{-\infty}^{+\infty} h_k^* y_k v_k.$$

Если $\lambda(x, \tau)$ и $q_v(x, \tau)$ дважды непрерывно дифференцируемы, то при выполнении условия устойчивости схема (12.38), (12.39) равномерно сходится на произвольных сетках с точностью $O(\eta^{\nu}+h_c^2)$.

Схему (12.38), (12.39) в связи с ее высокой точностью часто называют *наилучшей*.

Используя признак монотонности, можно показать, что наилучшая схема монотонна при $\eta\leqslant[1/(2(1-\sigma))]\min\limits_k(h_k^2/a_k)$ для всех значений σ, исключая $\sigma=1$. Чисто неявная схема ($\sigma=1$) монотонна при любом соотношении шагов. Отметим, что при рассмотрении свойств схемы (12.38), (12.39) считалось, что краевые условия аппроксимированы точно.

§ 12.5. Особенности решения задач в криволинейных координатах

Рассмотрим особенности численного решения краевых задач теплопроводности в цилиндрических и сферических координатах для случая, когда температурное поле не зависит от углов Θ и φ.

Уравнение теплопроводности с переменной теплопроводностью $\lambda(r, \tau)$ и объемной плотностью теплового потока внутренних источников теплоты $q_v(r, \tau)$ можно записать в виде ($c\rho=1$)

$$\frac{\partial T}{\partial \tau}=\frac{1}{r^{\nu}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{\nu}\lambda(r, \tau)\frac{\partial T}{\partial r}\right)+q_v(r, \tau), \qquad (12.43)$$

где $\nu=1$, 2, 3 соответственно для задач в прямоугольных, цилиндрических и сферических координатах.

Пользуясь интегро-интерполяционным методом, можно получить разностную схему для уравнения (12.43), являющуюся обобщением наилучшей схемы (12.38), (12.39). Уравнение (12.43) представим в виде системы двух уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial T}{\partial \tau}=-\frac{1}{r^{\nu}}\,\frac{\partial}{\partial r}(r^{\nu} q)+q_v(r,\ \tau); \\ &q=-\lambda(r,\ \tau)\,\frac{\partial T}{\partial r} \end{aligned}\right\} \tag{12.44}$$

и первое из них проинтегрируем по элементу объема элементарной ячейки $r^{\nu}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\tau$, связанной с шеститочечным шаблоном, а второе уравнение — по радиусу:

$$\int\limits_{r_{k-1/2}}^{r_{k+1/2}} (\hat{T}-T)\,r^{\nu}\,\mathrm{d}r=\int\limits_{\tau}^{\tau+\eta}\left(r_{k-1/2}^{\nu}q_{k-1/2}-r_{k+1/2}^{\nu}q_{k+1/2}\right)\mathrm{d}\tau+$$

$$+\int\limits_{\tau}^{\tau+\eta}\mathrm{d}\tau\int\limits_{r_{k-1/2}}^{r_{k+1/2}} q_v(r,\ \tau)\,r^{\nu}\,\mathrm{d}r; \tag{12.45}$$

$$T_{k+1}-T_k=-\int\limits_{r_k}^{r_{k+1}}\frac{q}{\lambda(r,\ \tau)}\,\mathrm{d}r. \tag{12.46}$$

Заменим интегралы в уравнениях теплового баланса (12.45), (12.46) квадратурными формулами. При этом отнесем значения температуры к узлам сетки, а значения тепловых потоков — к серединам интервалов («полуцелые» точки). Тогда, так же как и в § 12.4, получим консервативную разностную схему с весами:

$$\frac{1}{\eta}(\hat{u}_k-u_k)=\frac{\sigma}{V_k}\left(r_{k-1/2}^{\nu}\hat{q}_{k-1/2}-r_{k+1/2}^{\nu}\hat{q}_{k+1/2}\right)+$$

$$+\frac{(1-\sigma)}{V_k}\left(r_{k-1/2}^{\nu}q_{k-1/2}-r_{k+1/2}^{\nu}q_{k+1/2}\right)+\omega_k;$$

$$q_{k+1/2}=\bar{a}_{k+1/2}\,\frac{u_k-u_{k+1}}{h_k};\quad h_k=r_{k+1}-r_k; \tag{12.47}$$

$$\bar{a}_{k+1/2}=\left[\frac{1}{h_k}\int\limits_{r_k}^{r_{k+1}}\frac{\mathrm{d}r}{\lambda(r,\ \bar{\tau})}\right]^{-1}, \tag{12.48}$$

$$\omega_k=\frac{1}{\eta V_k}\int\limits_{\tau}^{\tau+\eta}\mathrm{d}\tau\int\limits_{r_{k-1/2}}^{r_{k+1/2}} q_v(r,\ \tau)\,r^{\nu}\,\mathrm{d}r, \tag{12.49}$$

где V_k — объем кольцевого или сферического слоя:

$$V_k=\int\limits_{r_{k-1/2}}^{r_{k+1/2}} r^{\nu}\,\mathrm{d}r=\frac{1}{\nu+1}\left(r_{k+1/2}^{\nu+1}-r_{k-1/2}^{\nu+1}\right).$$

Для вычисления a можно использовать формулы, аналогичные формулам § 12.4.

Для правой части ω_k в работе [88] рекомендуется формула

$$\omega_k=\left[1+\frac{(h_k+h_{k-1})^2(\nu-1)}{48r_k^2}\right]q_v(r_k,\ \tau+\eta/2).$$

Необходимо отметить, что при $\nu=1,\ 2$ уравнение (12.43) имеет особенности в точке $r=0$; это необходимо учитывать при построении разностной схемы. Чаще всего в этой точке решение задачи должно быть ограничено и в силу симметрии формулируется граничное условие

$$\partial T/\partial r|_{r=0}=0. \tag{12.50}$$

Применяя условие (12.50) и правило Лопиталя при $r\to 0$, правую часть уравнения (12.43) представим в виде

$$\lim_{r\to 0}\left[\frac{1}{r^\nu}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^\nu\lambda(r,\ \tau)\frac{\partial T}{\partial r}\right)+q_v(r,\ \tau)\right]=\lim_{r\to 0}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda(r,\ \tau)\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\nu}{r}\lambda(r,\ \tau)\frac{\partial T}{\partial r}+q_v(r,\ \tau)\right]=(1+\nu)\frac{\partial}{\partial r}\left[\lambda(0,\ \tau)\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=0}+q_v(0,\ \tau). \tag{12.51}$$

Используя представление (12.51) и соотношение $u_{-1}=u_1$ (симметричность поля температур T), получаем разностное уравнение

$$\frac{\hat{u}_0-u_0}{\eta}=\frac{2(1+\nu)}{h_0^2}\bar{a}_{\frac{1}{2}}[\sigma(\hat{u}_1-\hat{u}_0)-(1-\sigma)(u_1-u_0)]+$$
$$+q_v\left(0,\ \tau+\frac{\eta}{2}\right). \tag{12.52}$$

Если граничное условие на внешней поверхности тела аппроксимировано точно, то разностная схема (12.47), (12.52) аппроксимирует уравнение теплопроводности (12.43) с условием (12.50), имея погрешность $0(\eta+h_*^2+\nu h_*^2/r)$ при любом значении $\sigma\neq 1/2$ и погрешность $0(\eta^2+h_*^2+\nu h_*^2/r)$ при $\sigma=1/2$, где $h_*=\max\limits_k h_k$.

Для решения системы разностных уравнений (12.47), (12.52) обычно применяется метод прогонки.

§ 12.6. Нелинейное уравнение теплопроводности

При исследовании высокотемпературных процессов необходимо учитывать зависимость теплофизических свойств материала и источников (стоков) теплоты от температуры. Квазилинейное уравнение теплопроводности в этом случае запишется в виде

$$C(T)\frac{\partial T}{\partial \tau}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right)+q_v(T);\ C(T)>0,\ \lambda(T)>0. \tag{12.53}$$

Это уравнение с помощью преобразования Гудмэна $\Theta=\int\limits_0^T C(T)\,\mathrm{d}T$ можно привести к виду

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\tau}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(\Theta)\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)+W(\Theta). \qquad (12.54)$$

На примере уравнения (12.54) рассмотрим основные особенности построения разностного алгоритма для нелинейных краевых задач. Применение явных схем для решения таких задач нецелесообразно, так как условие устойчивости для разностного аналога уравнения (12.54) $\eta\leqslant h^2/[2\max\lambda(\Theta)]$ требует значительного уменьшения шага по времени. Наиболее удобной для решения уравнения (12.54) оказывается чисто неявная схема ($\sigma=1$), устойчивая и монотонная при любом соотношении шагов по x и τ.

Наиболее часто на практике применяется два варианта таких схем, которые могут быть получены интегро-интерполяционным методом.

Первый из них

$$\frac{\hat{u}_k-u_k}{\eta}=\frac{1}{h}\left[a_{k+1/2}\frac{(\hat{u}_{k+1}-\hat{u}_k)}{h}-a_{k-1/2}\frac{(\hat{u}_k-\hat{u}_{k-1})}{h}\right]+\omega_k \qquad (12.55)$$

назовем *линейным*, а второй

$$\frac{\hat{u}_k-u_k}{\eta}=\frac{1}{h}\left[\hat{a}_{k+1/2}\frac{(\hat{u}_{k+1}-\hat{u}_k)}{h}-\hat{a}_{k-1/2}\frac{(\hat{u}_k-\hat{u}_{k-1})}{h}\right]+\hat{\omega}_k \qquad (12.56)$$

— *нелинейным* вариантом.

Значения a, ω в уравнениях (12.55), (12.56) определяются по формулам:

I) $a_{k+1/2}=\lambda\left(\frac{u_k+u_{k+1}}{2}\right)$; II) $a_{k+1/2}=\frac{1}{2}[\lambda(u_k)+\lambda(u_{k+1})]$;

III) $a_{k+1/2}=[\lambda(u_k)\lambda(u_{k+1})]^{1/2}$; IV) $a_{k+1/2}=\frac{2\lambda(u_k)\lambda(u_{k+1})}{\lambda(u_k)+\lambda(u_{k+1})}$;

$\omega_k=W(u_k)$.

Сравним схемы (12.55) и (12.56).

Схемы (12.55), (12.56) имеют одинаковый порядок аппроксимации $O(\eta+h^2)$ на четырежды непрерывно дифференцируемых решениях и кроме свойств абсолютной устойчивости и монотонности обладают еще свойством консервативности. Линейный вариант проще по сравнению с нелинейным в организации вычисления $\hat{u}_k$, так как уравнение (12.55) линейно относительно $\hat{u}_k$. Поэтому разностное решение $\hat{u}_k$ по схеме (12.55) легко находится прогонкой, которая устойчива ввиду преобладания диагональных элементов. В нелинейном варианте система разностных уравнений (12.56) нелинейна по $\hat{u}_k$, так как коэффициенты $\hat{a}_{k+1/2}$, $\hat{a}_{k-1/2}$ и функция $\hat{\omega}_k$ зависят от $\hat{u}_k$.

Вещественное решение системы (12.56) существует при достаточно малом шаге η. Для нахождения значений $\hat{u}_k$ на каждом временно́м шаге необходимо организовать итерационный процесс.

Например, в методе простой итерации в качестве нулевого приближения $\hat{u}_k^{(0)}$ берут значения u_k с известного предыдущего слоя и s-е приближение находят следующим образом:

$$\frac{1}{\eta}\left(u_k^{(s)}-u_k\right)=\frac{1}{h}\left[\hat{a}_{k+1/2}^{(s-1)}\frac{\hat{u}_{k+1}^{(s)}-\hat{u}_k^{(s)}}{h}-\hat{a}_{k-1/2}^{(s-1)}\frac{\left(\hat{u}_k^{(s)}-\hat{u}_{k-1}^{(s)}\right)}{h}\right]+$$

$$+\hat{\omega}_k^{(s-1)}, \tag{12.57}$$

где $\hat{a}^{(s-1)}=\hat{a}\left(\hat{u}_k^{(s-1)}\right)$. На каждом итерационном шаге значения $\hat{u}_k^{(s)}$ находятся из системы (12.57) методом прогонки.

Процесс итераций проводится до тех пор, пока не выполнится условие

$$\max_k\left|u_k^{(s+1)}-u_k^{(s)}\right|<\varepsilon\max_k\left|u_k^{(s+1)}\right|,$$

где ε — заданная точность вычислений.

Итерационный процесс для большинства встречающихся на практике законов изменения λ и W сходится линейно и, вообще говоря, не быстро. Более эффективным способом решения системы (12.56) является метод Ньютона. В методе Ньютона считается известным некоторое приближение с номером s $u_k^{(s)}$ к корню $\hat{u}_k$. Затем нелинейная задача аппроксимируется линейной. Получаемая линеаризованная задача представляет собой систему линейных алгебраических уравнений относительно приращений известных величин. Решение этой системы дает приращение, которое складывается с $u_k^{(s)}$ для получения $u_k^{(s+1)}$, а последнее, как правило, является более хорошим приближением к решению нелинейной системы. Этот процесс продолжается до выполнения условия сходимости, причем в отличие от метода простых итераций для метода Ньютона это условие имеет вид

$$\max_k\left|u_k^{(s+1)}-u_k^{(s)}\right|\leqslant\varepsilon. \tag{12.58}$$

Более подробно ньютоновский процесс заключается в следующем. В уравнение (12.56) вместо $\hat{u}_k$ подставляем $\hat{u}_k^s+\delta\hat{u}_k^{(s)}$. Далее проводим линеаризацию получаемой системы, разлагая в ряд нелинейные функции $\hat{a}_{k+1/2}$, $\hat{a}_{k-1/2}$, $\hat{\omega}_h$ и ограничиваясь двумя членами ряда, например

$$\hat{a}_{k+1/2} \approx \hat{a}_{k+1/2}\left(\hat{u}_k^{(s)}, \hat{u}_{k+1}^{(s)}\right) + \frac{\partial \hat{a}_{k+1/2}}{\partial u_k^{(s)}} \delta \hat{u}_k^{(s)} + \frac{\partial \hat{a}_{k+1/2}}{\partial u_{k+1}^{(s)}} \delta \hat{u}_{k+1}^{(s)}.$$

Тогда получим систему линейных алгебраических уравнений относительно приращений $\delta u_k^{(s)}$ с трехдиагональной матрицей коэффициентов

$$\delta \hat{u}_{k+1}\left[\hat{a}_{k+1/2} + \frac{\partial \hat{a}_{k+1/2}}{\partial \hat{u}_{k+1}}(\hat{u}_{k+1} - \hat{u}_k)\right] - \delta \hat{u}_k\left[\frac{h^2}{\eta} + \hat{a}_{k+1/2} + \hat{a}_{k-1/2} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial \hat{a}_{k+1/2}}{\partial \hat{u}_k}(\hat{u}_{k+1} - \hat{u}_k) + \frac{\partial \hat{a}_{k-1/2}}{\partial \hat{u}_k}(\hat{u}_k - \hat{u}_{k-1}) - h^2 \frac{\partial \hat{\omega}_k}{\partial \hat{u}_k}\right] + \delta \hat{u}_{k-1} \times$$

$$\times \left[\hat{a}_{k-1/2} - \frac{\partial \hat{a}_{k-1/2}}{\partial \hat{u}_{k-1}}(\hat{u}_k - \hat{u}_{k-1})\right] = \frac{h^2}{\eta}(\hat{u}_k - u_k) - \hat{a}_{k+1/2} \times$$

$$\times (\hat{u}_{k+1} - \hat{u}_k) + \hat{a}_{k-1/2}(\hat{u}_k - \hat{u}_{k-1}) - h^2 \hat{\omega}_k$$

(индекс s в этом уравнении опущен).

Определив методом прогонки $\delta \hat{u}_k^{(s)}$, получаем $(s+1)$-е приближение $\hat{u}_k^{(s+1)} = \hat{u}_k^{(s)} + \delta \hat{u}_k^{(s)}$. В качестве нулевого приближения целесообразно брать решение, получаемое по линейному варианту. При достаточно малом шаге η приближенное решение быстро сходится, так как сходимость вблизи корня квадратична. А это значит, что на каждом итерационном шаге число верных десятичных знаков примерно удваивается (пока не достигнут уровень округлений). Может случиться, что сходимость итераций недостаточно быстрая, в этом случае рекомендуется уменьшить шаг по времени η.

Опыт использования схем (12.55), (12.56) показал, что фактическая точность и устойчивость нелинейного варианта (12.56) значительно выше, чем у линейного варианта (12.55). Для достижения заданной точности схема (12.56) позволяет использовать более крупный шаг по времени η и, несмотря на проведение итераций, требует меньшего объема вычислений.

Для уравнения (12.54) с краевыми условиями

$$\Theta(x, 0) = \Phi(x), \quad \gamma_1(\tau)\,\Theta(0, \tau) + \sigma_1(\tau) = 0, \quad \gamma_2(\tau)\,\Theta(1, \tau) + \sigma_2(\tau) = 0$$

составим программы (на алгоритмическом языке ФОРТРАН-IV) решения краевой задачи с использованием линейного (12.55) и нелинейного (12.56) вариантов аппроксимации уравнения (12.54).

```
C       ГОЛОВНАЯ ПРОГРАММА РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ
C       КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ИСПОЛЬ-
C       ЗОВАНИЕМ ЛИНЕЙНОГО ВАРИАНТА АППРОКСИМА-
C       ЦИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ
        DIMENSION TP(1Ø, 3Ø), F(3Ø), P(1Ø), Q(1Ø), TV(1Ø),
      * TR(1Ø), TF(8)
        EXTERNAL CM, SC, FX, FF, A
        N=1Ø
        M=3Ø
        N1=N-1
        DO 1I=1, M
    1   F(I)=(I-1)+Ø.Ø1
        EPS=1.ØE-4
        CALL BNMPR (N, M, F, EPS, TP, GM, SG, FX, FF, A,
      * P, Q, TU, T)
        DO 2 J=1, M
        T=F(J)
        DO 3 I=2, N1
    3   TF(I-1)=TP(I, J)
        WRITE(3, 4) T, (TF(I), I=1,8).
    4   FORMAT ('Ø', E 15.5)
    2   CONTINUE
        STOP
        END
        SUBROUTINE BNMPR (N, M, F, EPS, TEMP, CM, SC, FX,
      * FF, A, P, Q, TR1, TR2)
        DIMENSION TEMP(N, M), F(M), P(N), Q(N), TR1(N),
      * TR2(N)
        AK(TØ, T1)=A((TØ+T1)/2.)
        H=1./(N-2)
        FB=Ø.Ø
        X=-H/2.
        TEMP(1, 1)=FX(X)
        DO 1 I=2, N
        X=X+M
    1   TEMP(I, 1)=FX(X)
        N1=N-1
        M1=M-1
        K=2
   1Ø   FS=(F(L+1)-FB)/K
        DO 22 I=1, N
   22   TR1(I)=TEMP(I, L)
        DO 5 J=1, K
        FØ=FB+FS*J
C       ПРЯМОЙ ХОД ПРОГОНКИ
        BB=Ø.Ø
        GG=H*GM(Ø, FØ)
        BG=BB-GG
        P(2)=(BB+GG)/BG
```

```
      Q(2)=2.* H * SG(Ø, FØ)/BG
      DO 3 I=2, N1
      TØ=TR1(I-1)
      T1=TR1(I)
      CIM=AK(TØ, T1)
      TØ=T1
      T1=TR1(I+1)
      AIM=AK(TØ, T1)
      BIM=(AIM * CIM+H * H/FS)/2.
      DIM=-H+H * (TØ/FS+FF(TØ))
      ABC=2.* BIM-CIM * P(I)
      P(I+1)=AIM/ABC
      Q(I+1)=(CIM * Q(I)-DIM)/ABC
    3 CONTINUE
C     ОБРАТНЫЙ ХОД ПРОГОНКИ
      BB=Ø.Ø
      GG=H * GM(1, FØ)
      BG=BB-GG
      RØ=(BB+GG)/BG
      SØ=2.* H * SC(1, FØ)/BG
      TR1(N)=(Q(N)-SØ)/(RØ-P(N))
      DO 4 I1=1, N1
      I=N-I1
    4 TR1(I)=P(I+1) * TR1(I+1)+Q(I+1)
    5 CONTINUE
      IF(K-3) 6, 7, 7
    6 DO 9 I=1, N
    9 TR2(I)=TR1(I)
      K=K+1
      GO TO 1Ø
    7 DO 11 I=1, N
   11 TR2(I)=ABS(TR1(I)-TR2(I))
      DO 12 I=2, N
      IF(TR2(I)-TR2(I-1)) 14, 12, 12
   14 TR2(I)=TR2(I-1)
   12 CONTINUE
      IF(TR2(N)-EPS) 15, 15, 16
   16 DO 17 I=1, N
   17 TR2(I)=TR1(I)
      K=K+1
      GO TO 1Ø
   15 DO 18 I=1, N
      TR2(I)=TEMP(I, L)
   18 TEMP(I, L+1)=TR1(I)
      WRITE(3, 1ØØ) FB, (TR2(I), I=2,9)
  1ØØ FORMAT ('Ø', 9E13.5)
    2 FB=F(L+1)
      RETURN
      END
```

```
FUNCTION GM(IX, T)
IF(IX. EQ. Ø) GMG=1.
IF(IX. EQ. 1) GMG=1.
GM=GMG
RETURN
END
FUNCTION SG(IX, T)
IF(IX. EQ. Ø) SGS=-1.
IF(IX. EQ. 1) SGS=-1.
SG=SGS
RETURN
END
FUNCTION FX(X)
FX=Ø.2
RETURN
END
FUNCTION FF(T)
FF=Ø.Ø
RETURN
END
FUNCTION A(T)
A=T+T/2
RETURN
END
```

Обращение к подпрограмме, соответствующей линейному варианту разностной схемы, осуществляется оператором CALL BNMPR (N, M, F, EPS TEMP GM, SG, FX, FF, A, PQ, TR1, TR2).

Здесь N — число точек, на которое разбивается отрезок [0, 1]; M — число точек по времени, для которых проводится счет; F — массив размерностью M, перед обращением к подпрограмме BNMPR должен содержать значения времени, для которых проводится счет; EPS — задаваемая точность расчета; TEMP — массив размерности N, M, после работы подпрограммы содержит значения вычисленных температур; GM, SG — подпрограммы-функции, зависящие от двух параметров IX и T, вычисляют значения коэффициентов γ_k и σ_k соответственно в зависимости от времени T; параметр IX принимает значения 0, 1, что соответствует значениям $k=1$, 2 соответственно; FX — подпрограмма-функция, зависящая от параметра X, вычисляет начальное распределение функции Θ — $\Phi(x)$; F — подпрограмма-функция, зависящая от параметра Θ, вычисляет значения функции W; A — подпрограмма-функция, вычисляющая значения теплопроводности $\lambda(\Theta)$; P, Q, TR1, TR2 — рабочие массивы с размерностью N.

Первым оператором в подпрограмме BNMPR является оператор-функция AK (TØ, T1), который вычисляет значение функции $a_{k-1/2}(u_k, u_{k-1})$.

Задаваемая точность вычислений имеет следующий смысл: при вычислениях временной отрезок F (L+1) — F (L) делится на две части (K=2) и значения температуры в момент времени F (L+1) присваиваются элементам массива TR1 (I) (I=1, 2, ..., N). Затем значение K увеличивается на единицу, проводится расчет температуры и значения ее в момент времени F (L+1) присваиваются элементам массива TR2 (I) (I=1, 2, ..., N). Если выполняется условие

$$\max_{1<I<N} \{abs\,|TR1(I) - TR2(I)|\} < EPS,$$

то вычисления прекращаются и проводятся расчеты для следующего момента времени F (L+2). В противном случае элементам массива TR1 присваиваются значения элементов массива TR2, значению переменной К присваивается значение К+1 и вычисления продолжаются до момента достижения точности. Выше приведен текст программы решения сформулированной краевой задачи при $\lambda(\Theta)=0{,}5\Theta^2$; $W(\Theta)=0$; $\Phi(x)=0{,}2$; $\gamma_1(\tau)=1$; $\gamma_2(\tau)=1$; $\sigma_1(\tau)=\sigma_2(\tau)=1$ с использованием подпрограммы BNMPR. Вычисление коэффициента $a_{k-1/2}$ осуществляется *по варианту I*.

Часть результатов расчета значений функции $\Theta(x, \tau)$ приведена в табл. 12.2.

Таблица 12.2

Результаты расчета температурного поля пластины по «линейному» варианту разностной схемы $\left(a_{k+1/2}=\lambda\left(\frac{u_k+u_{k+1}}{2}\right)\right)$

τ	Значения координаты x			
	x_1	x_2	x_3	x_4
0,01	0,5664	0,2070	0,20002	0,20000
0,02	0,7472	0,2354	0,2003	0,20000
0,03	0,8299	0,2817	0,2013	0,20001
0,04	0,8665	0,3370	0,2039	0,20004
0,05	0,8832	0,3949	0,2077	0,20011
0,06	0,8916	0,4512	0,2144	0,20026
0,08	0,9014	0,5404	0,2373	0,20098
0,18	0,9331	0,7518	0,4752	0,2408
0,20	0,9363	0,7665	0,5185	0,2628
0,22	0,9391	0,7782	0,5551	0,2903
0,24	0,9416	0,7905	0,5852	0,3225
0,26	0,9438	0,8005	0,6101	0,3584
0,28	0,9459	0,8093	0,6312	0,3967

Подпрограмма, соответствующая нелинейному варианту разностной схемы, *имеет такой заголовок:* SUBROUTINE BNMIT (N, M, V, EP, EPS, TEMP, GM, SG, FX, FF, A, P, Q, T, TR, TM, TV). Здесь параметры N, M, V, EP, TEMP, BT, SG, FX, FF, A имеют тот же смысл, что и в подпрограмме BNMPR; P, Q, T, TR, TM, TV — рабочие массивы с размерностью N.

Первый оператор в подпрограмме *BNMIT — оператор-функция AK (TØ, T1)*, который вычисляет значение коэффициента $a_{k-1/2}(u_k, u_{k-1})$ по одной из четырех формул, приведенных выше; EPS — заданная точность итераций ε.

Точность процесса итераций контролируется условием

$$\max_k \left|u_k^{s+1}-u_k^s\right| \leqslant \varepsilon \max_k \left|u_k^{s+1}\right|.$$

Приведем текст программы решения краевой задачи для уравнения (12.54) с использованием подпрограммы BNMIT при тех же условиях, что и в линейном варианте разностной схемы (вычисление коэффициента $a_{k-1/2}$ осуществляется по варианту IV).

```
C     ГОЛОВНАЯ ПРОГРАММА РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ
C     КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ИСПОЛЬ-
C     ЗОВАНИЕМ НЕЛИНЕЙНОГО ВАРИАНТА АППРОКСИ-
C     МАЦИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ
      DIMENSION TP(1Ø, 3Ø), F(1Ø), P(1Ø), Q(1Ø), TU(1Ø),
     1 TR(1Ø), TF(8), V(3Ø), TV(1Ø)
      EXTERNAL BT, GM, SG, FX, FF, A
```

```
      N=1∅
      M=3∅
      N1=N-1
      EP=1.∅E-4
      EPS=1.∅E-4
      DO 1I=1, M
 1    V(I)=(I-1) * ∅.∅1
      CALL BNMIT(N, M, V, EP, EPS, TP, BT, GM, SG, FX,
      FF, A, P, Q, TU, TR, F, TV)
      DO 2 J=1, M
      T=V(J)
      DO 3 I=2, N1
 3    TF(I-1)=TP(I, J)
      WRITE(3, 4) T, (TF(I), I=1,8)
 4    FORMAT ('∅', 9E13.5)
 2    CONTINUE
      STOP
      END
      SUBROUTINE BNMIT(N, M, V, EP, EPS, TEMP, GM, SG,
 1    FX, FF, A, P, Q, T, TR, TM, TV)
      DIMENSION TEMP(N, M), V(M), P(N), Q(N), T(N), TR(N),
      TM(N), TV(N)
      AK(T∅, T1)=2.* A(T∅) * A(T1)/(A(T∅)+A(T1))
      H=1./(N-2)
      FB=∅.∅
      X=-H/2.
      TM(1)=FX(X)
      TEMP(1, 1)=TM(1)
      DO 1 I=2, N
      X=X+M
      TM(I)=FX(X)
 1    TEMP(I, 1)=TM(I)
      N1=N-1
      M1=M-1
      DO 2 L=1, M1
      KK=2
 31   SF=(V(L+1)-FB)/KK
      DO 3∅ I=1, N
 3∅   TR(I)=TEMP(I, L)
      DO 12 I=1, KK
      K=1
      F∅=FB+SF * J
      DO 32 I=1, N
      TV(I)=TR(I)
 32   T(I)=TV(I)
C     ПРЯМОЙ ХОД ПРОГОНКИ
      BB=∅.∅
      GG=H * GM(∅, F∅)
      BG=BB-GG
```

```
      P(2)=(BB+GG)/BG
      Q(2)=2.* H * SC(Ø, FØ)/BG
      BB=Ø.Ø
      GG=H * GM(1, FØ)
      BG=BB - GG
      RØ=(BB+GG)/BG
      SØ=2.* M * SC(1, FØ)/BG
 1Ø   DO 3 I=2, N1
      TØ=TM(I - 1)
      T1=TR(I)
      CIM=AK(TØ, T1)
      TØ=T1
      T1=TK(I+1)
      AIM=AK(TØ, T1)
      BIM=(AIM+CIM+H * H/SF)/2
      DIM=-H * H * (TV(I)/SF+FF(TØ))
      ABC=2.* BIM - CIM * P(I)
      P(I+1)=AIM/ABC
      Q(I+1)=(CIM * Q(I) - DIM)/ABC
  3   CONTINUE
C     ОБРАТНЫЙ ХОД ПРОГОНКИ
      TR(N)=(Q(N) - SØ)/(RØ - P(N))
      DO 4 I1=1, N1
      I=N - I1
      TR(I)=P(I+1) * TR(I+1)+Q(I+1)
      DO 6 I=1, N
  6   T(I)=ABS(TR(I) - T(I))
      XAM=ABS(TR(1))
      DO 7 I=2, N
      IF(T(I) - T(I - 1)) 8, 9, 9
  8   T(I)=T(I - 1)
  9   IF(ABS(TR(I)) - XAM) 7, 11, 11
 11   XAM=ABS(TR(I))
  7   CONTINUE
      IF(T(N)/XAM - EPS) 12, 12, 14
 14   DO 15 I=1, N
 15   T(I)=TR(I)
      K=K+1
      GO TO 1Ø
 12   CONTINUE
      DO 16 I=1, N
 16   TM(I)=ABS(TR(I) - TM(I))
      DO 17 I=2, N
      IF(TM(I) - TM(I - 1)) 18, 17, 17
 18   TM(I)=TM(I - 1)
 17   CONTINUE
      IF(TM(N) - EP) 19, 19, 2Ø
 2Ø   DO 21 I=1, N
 21   TM(I)=TR(I)
```

```
      KK=KK+1
      GO TO 31
19    DO 22 I=1, N
      TEMP(I, L+1)=TR(I)
22    TM(I)=TR(I)
2     FB=V(L+1)
      RETURN
      END
      FUNCTION GM(IX, T)
      IF(IX. EQ. Ø) GMG=1.
      IF(IX. EQ. 1) GMG=1.
      GM=GMG
      RETURN
      END
      FUNCTION SG(IX, T)
      IF(IX. EQ. Ø) SGS=-1
      IF(IX. EQ. 1) SGS=-1
      SG=SGS
      RETURN
      END
      FUNCTION FX(X)
      FX=Ø.2
      RETURN
      END
      FUNCTION FF(T)
      FF=Ø.Ø
      RETURN
      END
      FUNCTION A(T)
      A=T * T/2
      RETURN
      END
```

Значения функции $\Theta(x, \tau)$, вычисленные по программе, приведены в табл. 12.3.

Сопоставление температурных полей, рассчитанных по различным вариантам разностных схем (табл. 12.2 и 12.3), показывает, что отличие в значениях функции $\Theta(x, \tau)$ может превышать 100 %. В связи с этим температурное поле пластины $\Theta(x, \tau)$ (при тех же данных, что и выше) просчитали для четырех различных законов аппроксимации теплопроводности, используя линейный (табл. 12.4) и нелинейный (табл. 12.5) варианты-схемы. Сопоставление результатов табл. 12.4 и 12.5 свидетельствует о том, что данные расчетов при различных законах аппроксимации коэффициента $a_{k+1/2}$ лучше согласуются между собой для нелинейного варианта. Наиболее надежными представляются значения $\Theta(x, \tau)$, рассчитанные по I и II видам аппроксимации $a_{k+1/2}$, хорошо согласующиеся между собой при использовании как линейного, так и нелинейного вариантов схемы. Кроме того, при некоторых значениях x и τ в распреде-

Таблица 12.3

Результаты расчета температурного поля пластины по нелинейному варианту разностной схемы $\left(a_{k+1/2} = \dfrac{2\lambda(u_k)\lambda(u_{k+1})}{\lambda(u_k)+\lambda(u_{k+1})}\right)$

τ	Значения координаты x			
	x_1	x_2	x_3	x_4
0,01	0,2491	0,2004	0,2000	0,2000
0,02	0,3198	0,2018	0,20002	0,2000
0,03	0,4214	0,2052	0,20006	0,2000
0,04	0,5556	0,2118	0,20017	0,2000
0,05	0,6972	0,2229	0,2004	0,20001
0,06	0,8084	0,2393	0,20085	0,20002
0,08	0,9122	0,2866	0,2028	0,20008
0,18	0,9216	0,6771	0,2754	0,2041
0,20	0,9279	0,7265	0,3110	0,2074
0,22	0,9340	0,7582	0,3449	0,2124
0,24	0,9384	0,7760	0,4053	0,2200
0,26	0,9411	0,7852	0,4585	0,2308
0,28	0,9426	0,7903	0,5099	0,2455

Таблица 12.4

Сравнение результатов расчета температурного поля пластины при различных законах аппроксимации зависимости теплопроводности от температуры (линейный вариант)

Номер варианта	τ	Значения координаты x			
		x_1	x_2	x_3	x_4
I	0,05	0,8832	0,3950	0,2077	0,2001
II		0,8798	0,4432	0,2131	0,2002
III		0,7493	0,2714	0,2018	0,2002
IV		0,6782	0,2210	0,2004	0,2000
I	0,1	0,9099	0,6233	0,2734	0,2027
II		0,9114	0,6459	0,3034	0,2047
III		0,8007	0,3822	0,2138	0,2046
IV		0,9339	0,3450	0,2065	0,2002
I	0,15	0,9268	0,7226	0,3994	0,2183
II		0,9276	0,7280	0,4367	0,2256
III		0,8255	0,4540	0,2388	0,2248
IV		0,9202	0,5558	0,2343	0,2013
I	0,20	0,9363	0,7665	0,5186	0,2628
II		0,9368	0,7706	0,5421	0,2875
III		0,8411	0,5006	0,2783	0,2771
IV		0,9274	0,7203	0,3033	0,2066

Таблица 12.5

Сравнение результатов расчета температурного поля пластины при различных законах аппроксимации зависимости теплопроводности от температуры (нелинейный вариант)

Номер варианта	τ	Значения координаты x			
		x_1	x_2	x_3	x_4
I	0,05	0,8824	0,3982	0,2082	0,2001
II		0,8791	0,4456	0,2139	0,2002
III		0,8838	0,3237	0,2034	0,2005
IV		0,6972	0,2229	0,2004	0,2000
I	0,7	0,9096	0,6250	0,2763	0,2030
II		0,9112	0,6466	0,3064	0,2050
III		0,9081	0,5701	0,2422	0,2014
IV		0,9320	0,3534	0,2071	0,2002
I	0,75	0,9267	0,7226	0,4036	0,2195
II		0,9273	0,7279	0,4397	0,2303
III		0,9242	0,7092	0,3447	0,2098
IV		0,9188	0,5687	0,2374	0,2016
I		0,9361	0,7663	0,5214	0,2660
II		0,9367	0,7704	0,5438	0,2910
III		0,9352	0,7604	0,4746	0,2386
IV		0,9279	0,7165	0,3110	0,2074

Таблица 12.6

Примеры «разболтки» значений температуры при использовании III и IV видов аппроксимации теплопроводности

Схема III ($\tau=0,27$)

Вариант	Значения x			
	x_1	x_2	x_3	x_4
Линейный	0,8595	0,5624	0,3721	0,4034
Нелинейный	0,9436	0,7988	0,6032	0,3319

Схема IV ($x=x_1$)

Вариант	Значения τ								
	0,08	0,09	0,10	0,11	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20
Линейный	0,9086	0,9272	0,9339	0,9341	0,9309	0,9229	0,9191	0,9215	0,9274
Нелинейный	0,9122	0,9282	0,9330	0,9320	0,9285	0,9200	0,9184	0,9217	0,9279

лении функции $\Theta(x, \tau)$, полученном при III и IV видах аппроксимации $a_{k+1/2}$, наблюдалось нарушение монотонности профиля температуры (табл. 12.6).

В работе [53] приведены результаты численного решения краевой задачи с нелинейным параболическим уравнением

$$C(T)\frac{\partial T}{\partial \tau}=\frac{1}{x^{\nu}}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^{\nu}\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right)+q_v(T)\ \ (0<x<l,\ \tau>0) \tag{12.59}$$

при начальном условии

$$T(x,\ 0)=\varphi(x) \tag{12.60}$$

и граничных условиях III рода

$$\left.\begin{aligned}&\left(A_1T+A_2\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)\Big|_{x=0}=A_3;\\&\left(B_1T+B_2\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)\Big|_{x=l}=B_3,\end{aligned}\right\} \tag{12.61}$$

где теплофизические характеристики и источник теплоты аппроксимированы степенными зависимостями вида

$$\lambda(T)=a_\lambda+b_\lambda T^m;\ c(T)=a_\gamma+b_\gamma T^m;\ q_v(T)=a_f+b_fT^m. \tag{12.62}$$

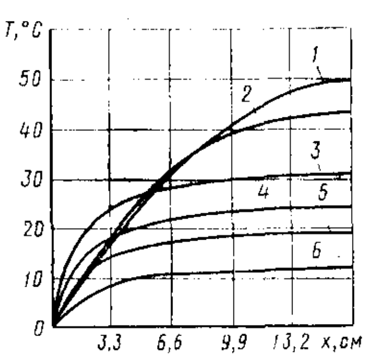


Рис. 12.7. Изменение распределения температуры с течением времени:

1 — начальное распределение температуры; 2 — $\tau=4{,}29$ с при $a_\lambda=2{,}2$, $b_\lambda=0{,}0001$, $m=3$; — $\tau=0{,}66$ с; 4 — $\tau=1{,}98$ с; 5 — $\tau=4{,}29$ с при $a_\lambda=2{,}2$, $b_\lambda=0{,}01$, $m=3$; 6 — $\tau=1{,}98$ с при $a_\lambda=2{,}2$, $b_\lambda=0{,}1$, $m=3$

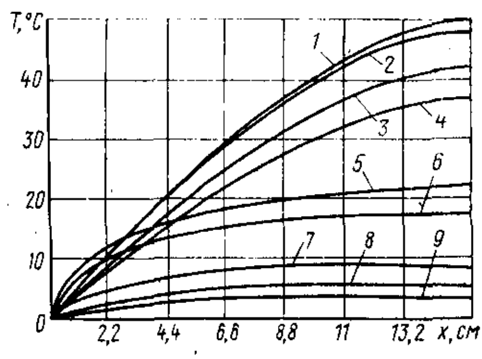


Рис. 12.8. Распределение температуры в стержне при $\lambda=(2{,}2+\lambda_п T^2)$:

1 — начальное распределение температуры; 2 — $\tau=3{,}3$ с; 3 — $\tau=16{,}5$ с; 4 — $\tau=29{,}7$ с при $\lambda_п=0$; 5,6 — $\tau=3{,}3$ с; 7 — $\tau=16{,}5$ с при $\lambda_п=0{,}4$; 8 — $\tau=16{,}5$ с; 9 — $\tau=29{,}7$ с при $\lambda_п=1$ [53]

Уравнение (12.59) записывается в конечно-разностной форме с использованием чисто неявной схемы [нелинейный вариант типа (12.56)] с погрешностью аппроксимации $O(h^2+\eta)$. Граничные условия (12.61) аппроксимируются по координате со вторым порядком.

Для решения соответствующей нелинейной системы алгебраических уравнений используется метод простых итераций в сочетании с методом прогонки. Выход из итерационного цикла осуществляется по условию (12.58).

Во всех исследуемых вариантах начальное условие задавалось в виде $T(x, 0) = 50\sin(\pi x/33)$ (x выражается в см), кроме того, оставались неизменными величины $a_\lambda = 921{,}8$ Вт/(м·К); $a_\gamma = 8{,}38 \times \times 10^6$ Дж/(м^3·К); $a_f = 0$.

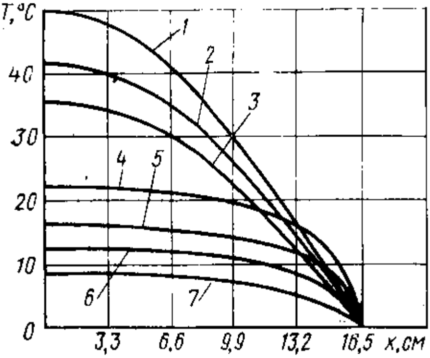


Рис. 12.9. Температурное поле в случае сферической симметрии:

1 — начальное распределение температуры; 2 — $\tau=1{,}98$ с; 3 — $\tau=4{,}29$ с при $a_\lambda=2{,}2$, $b_\lambda=0{,}1$, $m=1$; 4 — $\tau=0{,}66$ с; 5 — $\tau=1{,}98$ с; 6 — $\tau=4{,}29$ с; 7 — $\tau=10{,}89$ с при $a_\lambda=2{,}2$, $b_\lambda=0{,}01$, $m=3$ [53]

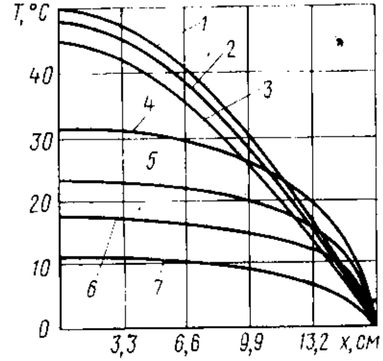


Рис. 12.10. Изменение распределения температуры с течением времени в случае цилиндрической симметрии:

1 — начальное распределение температуры; 2 — $\tau=4{,}29$ с; 3 — $\tau=10{,}23$ с при $a_\gamma=2$, $b_\gamma=0{,}091$, $m=2$, 4 — $\tau=0{,}66$ с; 5 — $\tau=1{,}98$ с; 6 — $\tau=4{,}29$ с; 7 — $\tau=10{,}89$ с при $a_\lambda=2{,}2$, $b_\lambda=0{,}1$, $m=2$ [53]

Рассмотрим результаты расчетов при граничных условиях I рода, которые задавались в таком виде: при $\nu=0$ $T|_{x=0}=T|_{x=33}=0$; при $\nu=1,2$ $T|_{x=-16,5}=T|_{x=16,5}=0$.

Влияние изменения теплопроводности $\lambda(T)$ на температурное поле неограниченной пластины при $c(T)=a_\gamma=\text{const}$ и $q_v(T)=a_f=0$ показано на рис. 12.7 и 12.8.

При увеличении параметра b_λ уровень температуры понижается (рис. 12.7), однако более существенно на уровень температурного поля влияет закон изменения зависимости $\lambda(T)$ (рис. 12.8).

Анализ температурных полей на рис. 12.9 и 12.10 показывает, что при прочих равных условиях одинаковое увеличение $\lambda(T)$ вызывает более значительное снижение уровня температурного поля шара по сравнению с цилиндром.

Сопоставление рис. 12.11 и 12.12 показывает, что с увеличением $C(T)$ значительно проявляется тепловая инерция, а влияние коэффициента b_γ незначительно.

Для случая неограниченной пластины на рис. 12.13 и 12.14 показано влияние источника теплоты $q_v(T)$ на температурное поле. Если сопоставить температурные поля при соответствующих значениях времени, то заметна общая тенденция к повышению температуры.

Граничные условия II рода при решении задачи (12.59)—(12.61) задавались в таком виде:

$$\lambda(T)\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0}=A_3(T),\quad -\lambda(T)\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=l}=B_3(T),$$

где $A_3(T)=a_q+b_qT^m$.

Динамика изменения температурного поля показана на рис. 12.15, 12.16 (цилиндр) и 12.17 (шар). Как видно на рис. 12.15, при отсутствии теплового потока на поверхности цилиндра увеличение теплопроводности $\lambda(T)$ может значительно интенсифицировать тепловой процесс. При решении задачи с граничными условиями III рода (12.61) в неограниченной пластине при $x=l$ задавались граничные условия I рода. Изменение распределений температуры во времени показано на

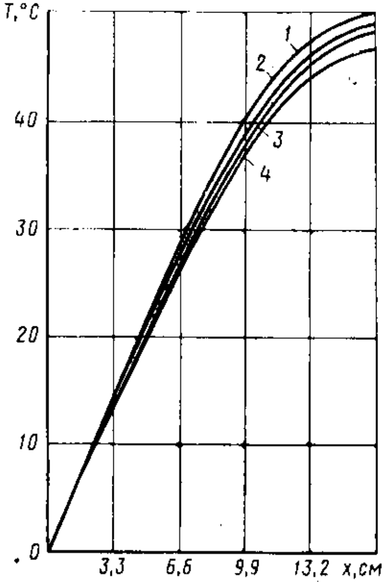


Рис. 12.11. Распределение температуры в стержне:

1 — начальное распределение температуры; 2 — $\tau=9{,}24$ с при $a_\gamma=2$, $b_\gamma=0{,}0001$, $m=3$; 3 — $\tau=6{,}6$ с; 4 — $\tau=13{,}2$ с при $a_\gamma=2$, $b_\gamma=0{,}001$, $m=2$ [53]

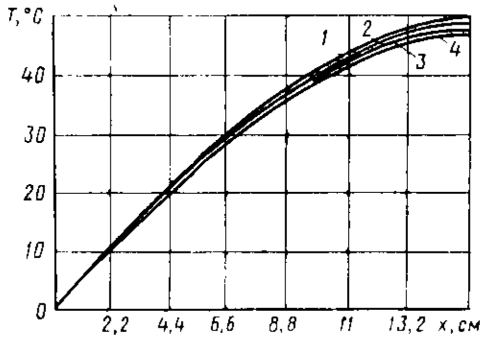


Рис. 12.12. Изменение распределения температуры в стержне с течением времени при $a_\gamma=2$, $b_\gamma=0{,}1$:

1 — начальное распределение температуры; 2 — $\tau=3{,}3$ с; 3 — $\tau=16{,}5$ с; 4 — $\tau=29{,}7$ с [53]

рис. 12.18: $A_1=-10^{-4}$, $A_3=20\cdot10^{-4}$; на рис. 12.19: $A_1=-10^{-2}$, $A_3=-40\cdot10^{-2}$, на рис. 12.20: $A_1=-10^{-2}$, $A_3=-20\cdot10^{-2}$.

Сопоставление рисунков показывает влияние зависимости теплофизических характеристик от температуры на характер процесса теплообмена на граничной поверхности.

Задача 12.1. Дана неограниченная пластина толщиной $2l$ с заданным начальным распределением температуры в виде функции $f(x)$. В момент времени $\tau=0+$ пластина помещается в среду, температура которой изменяется по известному закону $T_c(\tau)>T(x,0)$. Между поверхностями пластины и окружающей средой происходит теплообмен по закону Ньютона. Сформулировать краевую задачу для определения температуры пластины и составить разностную схему, имеющую погрешность аппроксимации $O(\eta+h^2)$, где η, h — шаги сетки по временной и пространственной переменным.

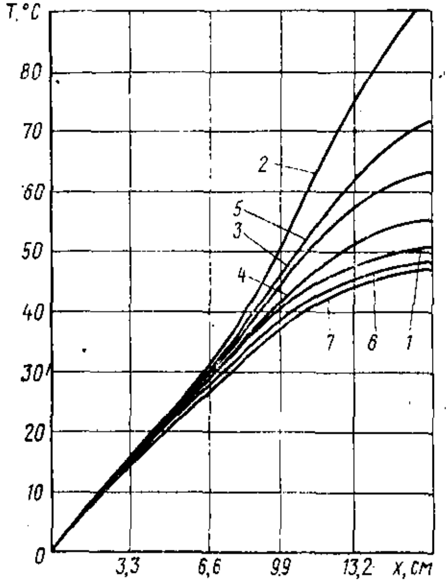


Рис. 12.13. Распределение температуры с течением времени в стержне:

1 — начальное распределение температуры; 2 — $\tau=5{,}28$ с, 3 — $\tau=3{,}3$ с; 4 — $\tau=1{,}65$ с при $a_f=0$, $b_f=10^{-6}$, $m=4$; 5 — $\tau=0{,}33$ с при $a_f=0$, $b_f=10^{-6}$, $m=4$; 6 — $\tau=6{,}6$ с; 7 — $\tau=3{,}3$ с при $a_f=0$, $b_f=10^{-7}$, $m=4$ [53]

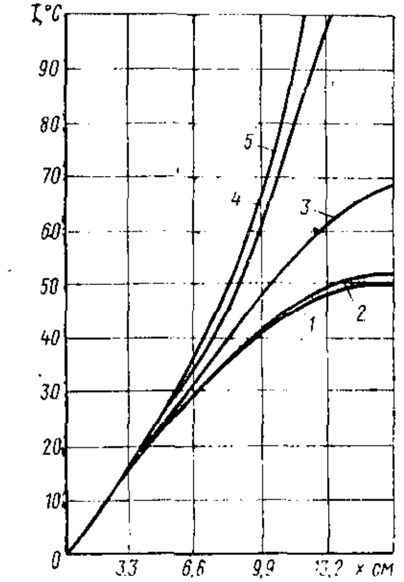


Рис. 12.14. Изменение распределения температуры в стержне с течением времени:

— начальное распределение температуры при $a_f=0$, $b_f=0{,}0001$ $m=3$; 2 — $\tau=0{,}33$ с; 3 — $\tau=1{,}98$ с; 4 — $\tau=3{,}63$ с; 5 — $\tau=3{,}96$ [53]

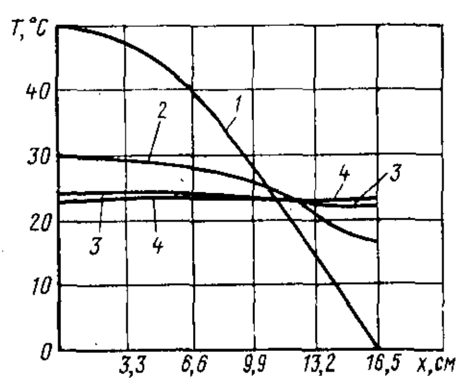


Рис. 12.15. Распределение температуры в случае цилиндрической симметрии:

1 — начальное распределение температуры при $a_\lambda=2{,}2$, $b_\lambda=0{,}01$, $m=3$; 2 — $\tau=0{,}66$ с; 3 — $\tau=0{,}99$ с; 4 — $\tau=4{,}29$ с [53]

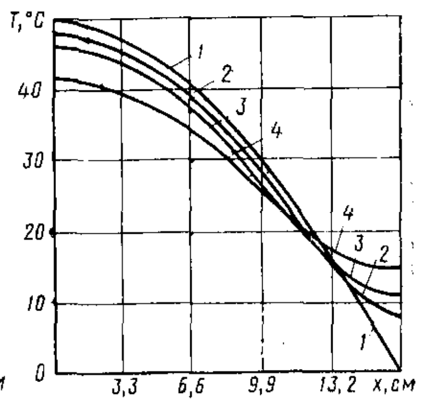


Рис. 12.16. Температурное поле цилиндра:

1 — начальное распределение температуры при $A_s=0{,}0001$ T^3; 2 — $\tau=1{,}98$ с; 3 — $\tau=4{,}29$ с; 4 — $\tau=8{,}58$ с [53]

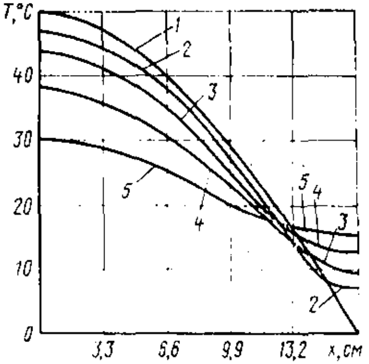


Рис. 12.17. Изменение распределения температуры с течением времени в сфере:

1 — начальное распределение температуры при $A_s=0$; 2 — $\tau=1,98$ с; 3 — $\tau=4,29$ с. 4 — $\tau=8,58$ с; 5 — $\tau=15,54$ с [53]

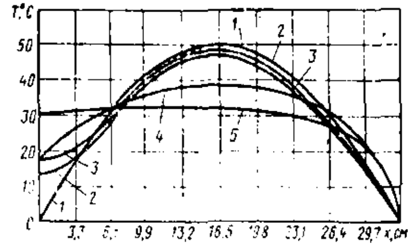


Рис. 12.18. Изменение температурного поля во времени:

1 — начальное распределение температуры; 2 — $\tau=5,61$ с; 3 — $\tau=9,9$ с при $a_\gamma=2$, $b_\gamma=0,00001$, $m=3$; 4 — $\tau=1,65$ с; 5 — $\tau=5,61$ с при $a_\lambda=2,2$, $b_\lambda=0,001$, $m=3$ [53]

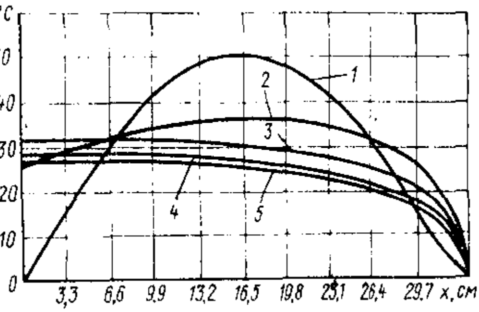


Рис. 12.19. Изменение распределения температуры с течением времени:

1 — начальное распределение температуры; 2 — $\tau=0,33$ с; 3 — $\tau=1,32$ с; 4 — $\tau=3,3$ с; 5 — $\tau=4,29$ с при $a_\lambda=2,2$, $b_\lambda=0,01$, $m=3$ [53]

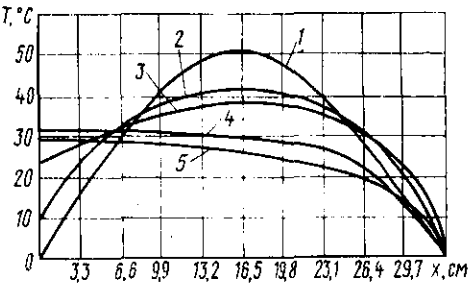


Рис. 12.20. Изменение температуры поля с течением времени при $a_\lambda=2,2$, $b_\lambda=0,1$, $m=2$:

1 — начальное распределение температуры; 2 — $\tau=0,33$ с; 3 — $\tau=0,66$ с; 4 — $\tau=3,3$ с; 5 — $\tau=6,6$ с [53]

Задача 12.2. Сферическое тело (шар) радиуса R с известным начальным распределением температуры $f(r)$ с момента времени $\tau=0+$ нагревается равномерно по всей поверхности ($r=R$) тепловым потоком, плотность которого является известной функцией времени $q(\tau)$. Записать соответствующую краевую задачу теплопроводности и неявную разностную схему с порядком аппроксимации $O(\eta^2+h^2)$, где η и h — шаги сетки по временной и пространственной переменным.

Задача 12.3. При симметричном нагреве цилиндрической заготовки в зоне выдержки нагревательных или термических печей краевая задача теплопроводности запишется в виде

$$\frac{\partial T}{\partial \tau}=a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial T}{\partial r}\right),\ 0<r<R,\ \tau>0;\quad T(r,\ 0)=f(r);\quad T(R,\ \tau)=T_c=\mathrm{const};$$

$$\partial T(0,\ \tau)/\partial r=0,\ T(0,\ \tau)\neq\infty.$$

Составить неявную разностную схему, соответствующую сформулированной краевой задаче с погрешностью аппроксимации $O(\eta^2+h^2)$.

Задача 12.4. Составить разностную схему Дюфорта—Франкела (с погрешностью аппроксимации $(\eta^2+h^2+(\eta/h)^2)$ и программу расчета температуры неограниченной пластины, если краевая задача теплопроводности сформулирована в виде

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\tau}=a\,\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}+\frac{q_v(x,\ \tau)}{c\rho(T_0-T_c)},\ 0<x<l,\ \tau>0;\quad \Theta(x,\ 0)=1;$$

$$\partial\Theta(0,\ \tau)/\partial x=0,\ \Theta(l,\ \tau)=0;$$

где $\Theta=(T-T_c)/(T_0-T_c)$.

Расчет поля температур провести при следующих данных: $a=1$ м^2/с; $q_v=0$, $l=1$ м; шаг по времени $\eta=0{,}004$ с, шаг по координате x $h=0.1$. Сравнить результаты расчетов по численному, точному решениям (точное решение может быть легко получено методом разделения переменных).

Задача 12.5. Для измерения лучистой энергии в инфракрасной части спектра наиболее часто применяют термоэлемент. Краевая задача для определения температурного поля термоэлемента имеет вид [109]

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\tau}=a\,\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}-H\Theta-g\left(\Theta^4-\Theta_c^4\right).$$

где $H=\alpha p/(c\rho S)$, $g=\varepsilon\sigma p/(c\rho S)$; p — периметр; S — площадь поперечного сечения термоэлемента; $\Theta=T/T_0$; T_0 — *начальная температура теплового источника*; $\Theta_c=T_c/T_0$; T_c — температура теплового источника; σ — постоянная Стефана—Больцмана; ε — коэффициент черноты поверхности тела;

$$\Theta(x,\ 0)=F(x),\ \Theta(-l,\ \tau)=\Theta(l,\ \tau)=0.$$

Составить явную разностную схему и программу на алгоритмическом языке ФОРТРАН для решения сформулированной задачи.

Задача 12.6. Процесс нестационарной теплопроводности в многослойных конструкциях, применяемых в летательных аппаратах и двигателях, при определенных условиях [38] описывается системой дифференциальных уравнений

$$C_i\,\frac{\partial T_i}{\partial\tau}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_i\,\frac{\partial T_i}{\partial x}\right)\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

с произвольным начальным распределением температуры в слоях и граничными условиями:

на внешних поверхностях многослойной стенки

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} = \alpha_1 (T_1 - \Theta_1) + \varepsilon_1 \sigma_0 T_1^4 \text{ при } x = x_1;$$

$$\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} = \alpha_2 (\Theta_2 - T_n) - \varepsilon_n \sigma_0 T_n^4 \text{ при } x = x_2,$$

где $\Theta_1 = T_{1,c} + q_1/\alpha_1$; $\Theta_2 = T_{2,c} + q_2/\alpha_2$; на поверхности контакта l-го и $(l+1)$-го слоев

$$T_l = T_{l+1}, \; \lambda_l \partial T_l/\partial x = \lambda_{l+1} \partial T_{l+1}/\partial x.$$

Составить неявную разностную схему, используя нелинейный вариант аппроксимации дифференциальных уравнений типа (12.56) и программу расчета температур на алгоритмическом языке АЛГОЛ-60.

ГЛАВА XIII

РЕШЕНИЕ МНОГОМЕРНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

§ 13.1. Экономичные схемы

Численное исследование нестационарных задач теплопроводности в двух- и трехмерном пространствах принципиально сложней, чем решение задач в одномерном случае. При этом не вызывает затруднений само построение разностных аналогов краевых задач. Большинство рассмотренных выше конечно-разностных схем можно обобщить на случай двух (и более) измерений, применяя известные методы построения разностных схем (см. § 11.2).

Однако число неизвестных в разностных схемах в многомерном случае значительно возрастет. Если выбрать равномерный шаг h по всем пространственным переменным, то на каждом временном шаге необходимо решать систему алгебраических уравнений с $\sim h^{-p}$ неизвестными, где p — число измерений. В связи с этим значительно возрастет объем физических операций, необходимых для решения системы разностных уравнений. Так, если в прямоугольнике ($0 \leqslant x_1 \leqslant d$, $0 \leqslant x_2 \leqslant b$) задана краевая задача с граничными условиями I рода

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2}\right) + \frac{1}{c\rho} q_v(x_1, x_2, \tau) \ (0 < x_1 < d,\ 0 < x_2 < b,\ 0 < \tau < t); \tag{13.1}$$

$$T(x_1, x_2, \tau) = f(x_1, x_2), \quad \tau = 0; \tag{13.2}$$

$$T(0, x_2, \tau) = \mu(x_2, \tau), \quad T(d, x_2, \tau) = \gamma(x_2, \tau); \tag{13.3}$$

$$T(x_1, 0, \tau) = \nu(x_1, \tau), \quad T(x_1, b, \tau) = \chi(x_1, \tau), \tag{13.4}$$

то на прямоугольной сетке $h_1 \neq h_2$ (рис. 13.1), выбрав шаблон, изображенный на рис. 13.2, можно составить неявную двухслойную разностную схему с весами:

$$(\hat{u}_{nm} - u_{nm})/\eta = (\Lambda_1 + \Lambda_2)[\sigma \hat{u}_{nm} + (1 - \sigma) u_{nm}] + \omega_{nm}; \tag{13.5}$$

$$u_{nm}^{(0)} = f(nh, mh); \tag{13.6}$$

$$\hat{u}_{0m} = \hat{\mu}(mh), \quad \hat{u}_{Nm} = \hat{\gamma}(mh); \tag{13.7}$$

$$\hat{u}_{n0} = \hat{\nu}(nh); \quad \hat{u}_{nM} = \hat{\chi}(nh). \tag{13.8}$$

Здесь введены разностные операторы

$$\begin{aligned} \Lambda_1 u_{nm} &= a(u_{n+1,\,m} - 2u_{nm} + u_{n-1,\,m})/h_1^2, \\ \Lambda_2 u_{nm} &= a(u_{n,\,m+1} - 2u_{nm} + u_{n,\,m-1})/h_2^2. \end{aligned} \tag{13.9}$$

По аналогии с § 12.1 устанавливается, что схема (13.5) — (13.8) среднеквадратично сходится с точностью $0(\eta^\nu + h_1^2 + h_2^2)$, где $\nu=2$ при $\sigma=1/2$ и $\nu=1$ при $\sigma\neq 1/2$, если выполняется условие устойчивости в $\|\cdot\|_{l_2}$:

$$\sigma \geqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{4a\eta}\left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}\right)^{-1}.$$

Посмотрим с точки зрения объема вычислительной работы на полученную схему, полагая, что число узлов по каждой переменной равно N. При $\sigma=0$ схема (13.5) явная и для вычисления $\hat{u}_{nm}$ по известным значениям u_{nm} требуется выполнить общее число действий, пропорциональное числу узлов сетки ($\sim h^{-2}=N^2$). В случае пространства p-измерений число действий $\sim N^p$.

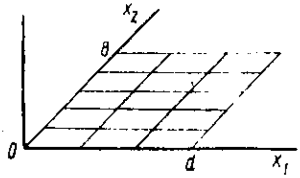


Рис. 13.1. Сетка в прямоугольной области

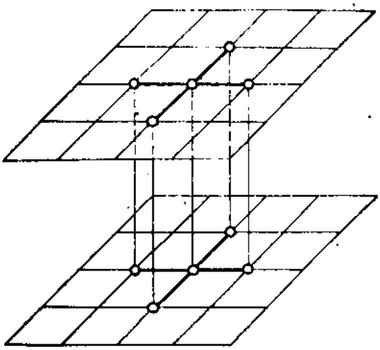


Рис. 13.2. К выбору шаблона для неявной двухслойной схемы

В этом смысле нет необходимости улучшать явную схему, но явная схема устойчива лишь при жестких ограничениях на шаг по времени

$$2a\eta \leqslant 1/\left(h_1^2 + h_2^2\right) \sim N^{-2}.$$

Такое дробление шага по времени не связано с требованиями точности решения и приводит к неоправданно большому объему вычислений (полный расчет требует $\sim N^{p+2}$ действий).

При $\sigma\neq 0$ схема (13.5) неявна. Она устойчива при любых шагах η и h. Если взять $\eta \sim h$, то на каждом временно́м слое необходимо решить систему N^p уравнений. Для решения этой системы методом Гаусса необходимо провести $\sim N^{3p-2}$ действий. Значит, полный расчет до момента времени t требует N^{3p-1} действий. При $p \geqslant 2$ расчет по неявной схеме даже менее эффективен, чем по явной.

Таким образом, явная и неявная схемы имеют свои положительные качества. Явная — объем вычислений пропорционален числу узлов разностной схемы, неявная — безусловная устойчивость схемы. Разностные схемы, сочетающие эти положительные свойства явных и неявных схем, называют *экономичными*.

Наибольшее распространение получили экономичные разностные схемы, основанные на методе дробных шагов по временно́й переменной [113]. Экономичность решения многомерных задач с помощью разностных схем, основанных на методе дробных шагов, достигается сведением многомерной задачи к решению *последовательности одномерных*, для решения которых применим метод прогонки.

Рассмотрим некоторые наиболее часто используемые экономичные схемы.

§ 13.2. Метод переменных направлений (продольно-поперечная схема)

Метод переменных направлений является одним из лучших для решения двухмерных краевых задач нестационарной теплопроводности. *Для построения разностного аналога уравнения* (13.1) введем сетку с координатами узлов $x_{1n}=nh_1$ ($n=0, 1, 2, \ldots, N$), $x_{2m}=mh_2$ ($m=0, 1, 2, \ldots, M$), $\tau_j=j\eta$ ($j=0, 1, 2, \ldots$).

Выберем на сетке шаблон, содержащий полуцелый слой $\bar\tau=\tau+\eta/2$ (рис. 13.3), и составим на нем следующую разностную схему:

$$(\bar u_{nm} - u_{nm})/\eta = (\Lambda_1 \bar u_{nm} + \Lambda_2 u_{nm} + \bar\omega_{nm})/2; \tag{13.10}$$

$$(\hat u_{nm} - \bar u_{nm})/\eta = (\Lambda_1 \bar u_{nm} + \Lambda_2 \hat u_{nm} + \bar\omega_{nm})/2, \tag{13.11}$$

где разностные операторы Λ_1 и Λ_2 определены выражением (13.9).

Из уравнений (13.10), (13.11) видно, что переход от j-го временно́го слоя к $(j+1)$-му временно́му слою осуществляется в два шага. Сначала с помощью уравнения (13.10) вычисляют промежуточные значения искомой функции $\bar u_{nm}$. Уравнение (13.10) содержит три неизвестных $\bar u_{n-1,m}$, $\bar u_{nm}$, $\bar u_{n+1,m}$; остальные значения u определены на исходном слое, т. е. уравнение (13.10) *неявно по координате* x_1 *и явно* по координате x_2. При любом фиксированном m уравнение (13.10) может быть решено методом одномерной прогонки по направлению x_1. Далее, схема (13.11), содержащая неизвестные $\hat u_{n,m-1}$, $\hat u_{nm}$, $\hat u_{n,m+1}$, неявна по направлению x_2 и явна по направлению x_1. Поэтому решение системы (13.11) можно получить одномерной прогонкой по направлению x_2. Таким образом, переход с j-го временно́го слоя на $(j+1)$-й совершается с помощью одномерного метода прогонки вначале в продольном, а затем в поперечном направлении. Отсюда и произошло название этой схемы.

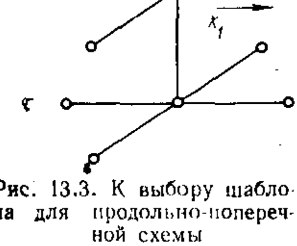


Рис. 13.3. К выбору шаблона для продольно-поперечной схемы

Как и в одномерном случае, в уравнениях (13.10), (13.11) диагональные элементы преобладают, следовательно, прогонка устойчива, разностное решение существует и единственно. При исследовании аппроксимации разностной схемы (13.10), (13.11) обычно определяют промежуточные значения $\bar{u}_{nm}$, вычитая уравнение (13.11) из уравнения (13.10):

$$\bar{u}_{nm}=(\hat{u}_{nm}+u_{nm})/2-\Lambda_2(\hat{u}_{nm}-u_{nm})\eta/4. \qquad (13.12)$$

Затем, сложив уравнения (13.10) и (13.11), исключают из них значения разностного решения на полуцелом слое:

$$(\hat{u}_{nm}-u_{nm})/\eta=(\Lambda_1+\Lambda_2)(\hat{u}_{nm}+u_{nm})/2-\Lambda_1\Lambda_2(\hat{u}_{nm}-u_{nm})\eta/4+$$
$$+\bar{\omega}_{nm}. \qquad (13.13)$$

Оценим предпоследнее слагаемое в уравнении (13.13):

$$\Lambda_1\Lambda_2(\hat{u}_{nm}-u_{nm})\eta/4\approx\eta^2 T_{x_1^2 x_2^2 \tau}/4=0(\eta^2).$$

С точностью до $0(\eta^2)$ уравнение (13.13) совпадает с симметричным вариантом схемы (13.5), имеющей порядок аппроксимации $0\left(\eta^2+\right.$ $\left.+h_1^2+h_2^2\right)$. Следовательно, и схема (13.10), (13.11) имеет погрешность локальной аппроксимации на равномерной сетке, равную $0\left(\eta^2+h_1^2+h_2^2\right)$. Рассмотрим вопрос аппроксимации граничных условий (13.3), (13.4). Постановка разностных граничных условий на целом слое не вызывает затруднений:

$$\hat{u}_{n0}=\nu(x_{1n},\ \hat{\tau}),\quad \hat{u}_{nM}=\chi(x_{1n},\ \hat{\tau})\quad (1\leqslant n\leqslant N-1). \qquad (13.14)$$

Для прогонки по направлению x_2 необходимо задавать значение $\bar{u}_{nm}$ при $n=0$ и $n=N$. Однако задавать $\bar{u}_{0m}=\bar{\mu}$ и $\bar{u}_{Nm}=\bar{\gamma}$ нецелесообразно, так как значения $\bar{u}$ не вполне соответствуют моменту $\bar{\tau}$ и при этом вносилась бы погрешность $0(\eta)$. Поэтому при аппроксимации граничных условий на полуцелом слое необходимо воспользоваться уравнением (13.12) в узлах $n=0$ и $n=N$:

$$\bar{u}_{0m}=(\hat{\mu}_m+\mu_m)/2-\Lambda_2(\hat{\mu}_m-\mu_m)\eta/4\quad (1\leqslant m\leqslant M-1);$$
$$\bar{u}_{Nm}=(\hat{\gamma}_m+\gamma_m)/2-\Lambda_2(\hat{\gamma}_m-\gamma_m)\eta/4\quad (1\leqslant m\leqslant M-1). \qquad (13.15)$$

Выбрав граничные условия в виде (13.14), (13.15), обеспечим второй порядок аппроксимации граничных условий (13.3), (13.4) по времени. Применяя метод разделения переменных, можно показать, что схема (13.10), (13.11) равномерно и безусловно устойчива по начальным данным и устойчива по правой части. Из фактов аппроксимации и устойчивости следует, что схема (13.10), (13.11) безусловно сходится в $\|\cdot\|_{l_2}$. Можно показать, что в прямоугольной области на равномерной сетке схема (13.10), (13.11) сходится с точностью $0\left(\eta^2+h_1^2+h_2^2\right)$, если решение имеет непрерывные производные не ниже пятого порядка.

Продольно-поперечная схема может быть обобщена на случай уравнения теплопроводности с теплопроводностью, зависящей от пространственных координат и времени $\lambda(x, y, \tau)$. Расчетная схема для $\lambda(x, y, \tau)$ имеет тот же вид (13.10), (13.11), где разностные операторы Λ_1 и Λ_2 определяются следующим образом:

$$\Lambda_1 u_{nm} = a_{1\,(n+1/2,\,m)}(u_{n+1,\,m} - u_{nm})/h_{1n} - a_{1\,(n-1/2,\,m)} \times$$
$$\times (u_{nm} - u_{n-1,\,m})/h_{1n}; \tag{13.16}$$

$$\Lambda_2 u_{nm} = a_{2\,(n,\,m+1/2)}(u_{n,\,m+1} - u_{nm})/h_{2m} - a_{2\,(n,\,m-1/2)} \times$$
$$\times (u_{nm} - u_{n,\,m-1})/h_{2m}. \tag{13.17}$$

В расчетной практике применяются два варианта вычисления коэффициентов a_1 и a_2. В первом на всех трех слоях — исходном, полуцелом и новом целом — коэффициенты a_i вычисляются при $\tau = \tau + \eta/2$, т. е. им приписываются значения на полуцелом слое; во втором варианте на этих слоях полагают соответственно $a_i(\tau)$, $a_i(\tau + \eta/2)$, $a_i(\tau + \eta)$. Предпочтительней пользоваться вторым вариантом, так как в областях прямоугольной формы для него доказана безусловная сходимость с точностью $0(\eta^2 + h_1^2 + h_2^2)$, когда теплопроводность непрерывна вместе со своими вторыми производными.

Отметим, что если область определения решения имеет не прямоугольную форму, а более сложную, то теоретическое обоснование продольно-поперечной схемы более сложно, особенно при неоднородных краевых условиях. В частности, при задании граничных условий I рода на границе области сложной формы

$$T|_S = \varphi(p, \tau)|_S \tag{13.18}$$

соответствующий разностный аналог имеет вид

$$\left.\begin{aligned} \bar{u}|_S &= \varphi(p, \bar{\tau})|_S; \\ \hat{u}|_S &= \varphi(p, \hat{\tau})|_S, \end{aligned}\right\} \tag{13.19}$$

где S — множество граничных узлов.

Погрешность аппроксимации условия (13.18) на полуцелом слое равна $0(\eta)$, что снижает порядок точности схемы (13.10), (13.11), который в области произвольной формы с граничными условиями (13.19) будет равен $0(\eta + h_1^2 + h_2^2)$.

Температурное поле бруса квадратного сечения. Брус бесконечной длины с квадратным поперечным сечением со стороной $2l$ имеет в начальный момент времени температуру $T_0 = \mathrm{const}$. В момент времени $\tau = 0^+$ температура на его боковых поверхностях принимает значение $T_c \neq T_0$. Необходимо вычислить значения температуры в последующие моменты времени.

Введем безразмерные величины

$$X = x/l,\ Y = y/l,\ \mathrm{Fo} = a\tau/l^2,\ \Theta = (T - T_0)/(T_c - T_0)$$

и запишем уравнение теплопроводности в виде

$$\partial\Theta/\partial \mathrm{Fo}=\partial^2\Theta/\partial X^2+\partial^2\Theta/\partial Y^2,\ |X|<1,\ |Y|<1,\ \mathrm{Fo}>0. \quad (13.20)$$

Так как задача симметрична, то можно рассматривать только четверть области (рис. 13.4), тогда краевые условия запишутся в виде

$$\Theta(X,\ Y,\ 0)=0; \quad (13.21)$$

$$\Theta(1,\ Y,\ \mathrm{Fo})=1,$$
$$\Theta(X,\ 1,\ \mathrm{Fo})=1; \quad (13.22)$$

$$\partial\Theta(0,\ Y,\ \mathrm{Fo})/\partial X=0,$$
$$\partial\Theta(X,\ 0,\ \mathrm{Fo})/\partial Y=0. \quad (13.23)$$

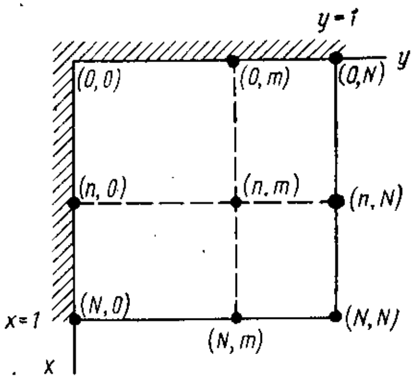


Рис. 13.4. К постановке краевой задачи (13.20) — (13.23)

Для численного решения задачи (13.20) — (13.23) применим метод переменных направлений, основывающийся на формулах (13.10), (13.11). Граничные условия (13.23) аппроксимируем со вторым порядком по временной переменной, применяя метод уменьшения невязки. Тогда, например, система уравнений (13.10) для нахождения $\bar{u}_{nm}$ при фиксированном m имеет вид

$$\left\{\begin{array}{ll} b\bar{u}_{0m}-2\bar{u}_{1m} & =d_0, \\ -\bar{u}_{0m}+b\bar{u}_{1m}-\bar{u}_{2m} & =d_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ -\bar{u}_{n-1,\,m}+b\bar{u}_{nm}-\bar{u}_{n+1,\,m} & =d_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ -\bar{u}_{N-3,\,m}+b\bar{u}_{N-2,\,m}-\bar{u}_{N-1,\,m} & =d_{N-2}, \\ -\bar{u}_{N-2,\,m}+b\bar{u}_{N-1,\,m} & =d_{N-1}, \end{array}\right. \quad (13.24)$$

где $\left.\begin{array}{l} d_n=u_{n,\,m-1}+fu_{nm}+u_{n,\,m+1},\ \text{для } n=0,\ 1,\ \dots,\ N-2, \\ d_{N-1}=u_{N-1,\,m-1}+fu_{N-1,\,m}+u_{N-1,\,m+1}+u_{Nm}, \end{array}\right\}$ при $m\neq 0$;

$\left.\begin{array}{l} d_n=2u_{n1}+fu_{n0},\ \text{для } n=0,1,\ \dots,\ N-2, \\ d_{N-1}=2u_{N-1,\,1}+fu_{N-1,\,0}+u_{N0} \end{array}\right\}$ при $m=0$; $b=2(1/\beta+1)$, $f=2(1/\beta-1)$, $\beta=\eta/h^2$.

Отметим, что вторая форма для вычисления d_n, когда $m=0$, связана с рассмотрением граничного условия $\partial\Theta(0,\ Y,\ \mathrm{Fo})/\partial X=0$. Матрица коэффициентов уравнений (13.24) имеет трехдиагональный вид, и для ее решения применяем метод прогонки. Процедура повторяется для последующих значений $m=0,\ 1,\ \dots,\ N-1$, пока не будут определены все значения $\bar{u}$ на полуцелом временно́м слое. Температура на втором полушаге по времени находится аналогично с использованием уравнения (13.11) и соответствующей аппроксимации граничных условий по Y.

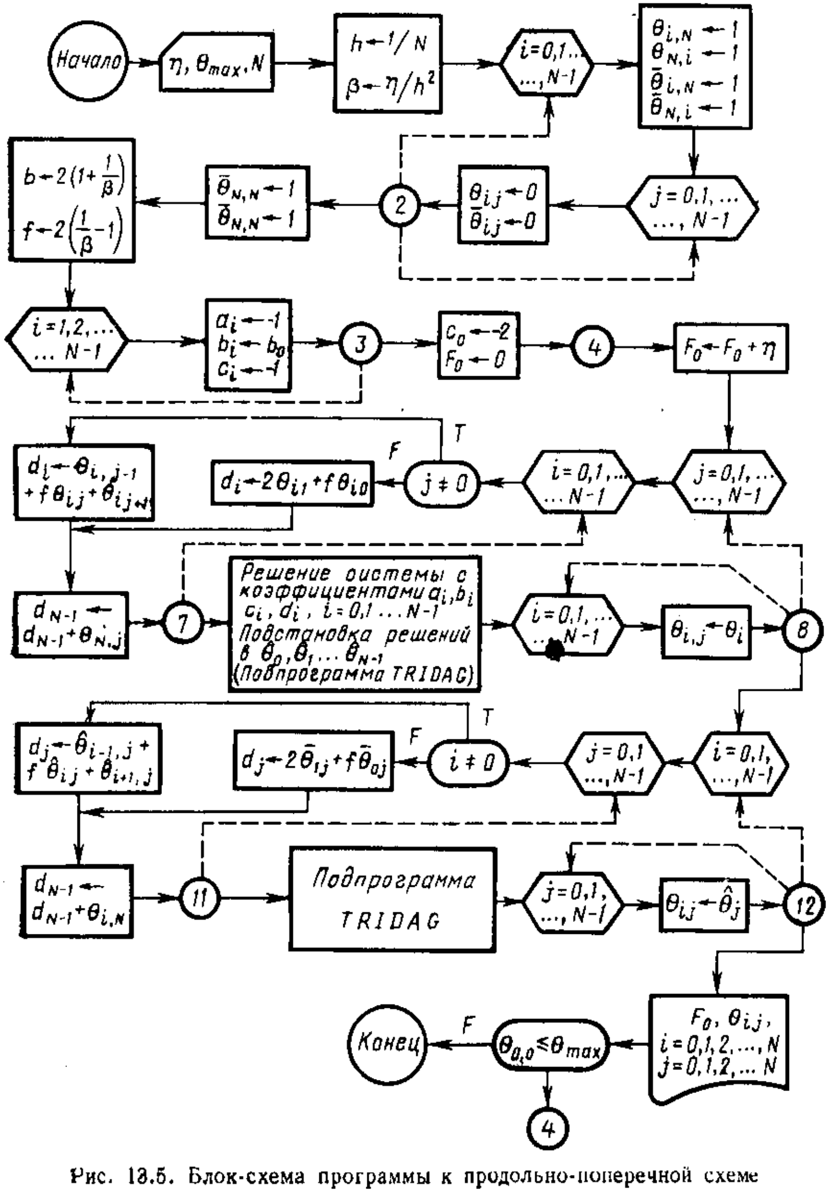


Рис. 13.5. Блок-схема программы к продольно-поперечной схеме

Процесс решения задачи (13.20) — (13.23) методом переменных направлений опишем программой на алгоритмическом языке ФОРТРАН-IV для ЭВМ типа ЕС. Блок-схема программы представлена на рис. 13.5.

Список идентификаторов. DTAU — временной шаг η по переменной Fo; DX — пространственный интервал h; F — $f=2(1/\beta-1)$; I, J — индексы по строкам и столбцам; ICOUNT — число шагов по времени; IFREQ — число шагов по времени, через которое печатается поле температур; N — число пространственных интервалов между $X=0$ и $X=1$; RATIO — $\beta=\eta/h^2$; T — массив значений Θ в каждой точке сетки; TAU — время Fo; TMAX — максимальная температура в центре пластины, до значения которой ведется расчет; TPRIME — массив для хранения значений температуры, вычисляемой подпрограммой TRIDAG; TRIDAG — подпрограмма решения трехдиагональной системы алгебраических уравнений; TSTAR — массив значений температур на первой половине временного шага; A, B, C, D — массивы коэффициентов трехдиагональной системы алгебраических уравнений.

Ниже представлен текст программы:

```
C      НЕСТАЦИОНАРНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ БРУСА
C      С КВАДРАТНЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ
C      ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНАЯ СХЕМА
       DIMENSION A(22), B(22), C(22), D(22), T(22, 22),
     1 TSTAR (11, 11), TPRIME (11)
C      .....ВВОД И ПЕЧАТЬ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ.....
     1 READ (1, 1ØØ) DTAU, TMAX, N, IFREQ
       NP1=N+1
       FLOATN=N
       DX=1 Ø/FLOATN
       RATIO=DTAU/(DX * DX)
       WRITE (3,2ØØ) DTAU, DX, RATIO, TMAX, N, IFREQ
C      .....ЗАДАНИЕ НАЧАЛЬНЫХ И ГРАНИЧНЫХ
C      УСЛОВИЙ.....
       DO 2 I=1, N
       T(1, NP1)=1.Ø
       T(NP1, I)=1.Ø
       TSTAR (I, NP1)=1 Ø
       TSTAR (NP1,I)=1.Ø
       DO 2 J=1, N
       T(I, J)=Ø.Ø
     2 TSTAR(I, J)=Ø.Ø
       T(NP1, NP1)=1 Ø
       TSTAR(NP1, NP1)=1.Ø
C      .....ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ МАССИВОВ A,
       B, C.....
       B(1)=2.Ø *(1.Ø/RATIO+1 Ø)
       F=2.Ø *(1.Ø/RATIO - 1.Ø)
       DO 3 I=2, N
       A(I)=-1.Ø
       B(I)=B(1)
     3 C(I)=-1.Ø
       C(1)=-2.Ø
```

```
      ICOUNT=∅
      TAU=∅.∅
C     .....ПОДГОТОВКА ВЫЧИСЛЕНИЙ НА ПОСЛЕДУЮЩИХ
C     ВРЕМЕННЫХ СЛОЯХ
    4 TAU=TAU+DTAU
      ICOUNT=ICOUNT+1
C     .....ВЫЧИСЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУР НА ПОЛУЦЕЛОМ
      СЛОЕ.....
      DO 8 J=1, N
      DO 7 I=1, N
      IF (J. NE. 1) GO TO 6
      D(I)=2.∅ *T(I, 2)+F *T(I, 1)
      GO TO 7
    6 D(I)=T(I, J-1)+F *T(I, J)+T(I, J+1)
    7 D(N)=D(N)+T(NP1, J)
      CALL TRIDAG (1, N, A, B, C, D, TPRIME)
      DO 8 I=1, N
    8 TSTAR(I, J)=TPRIME(I)
C     .....ВЫЧИСЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУР НА ЦЕЛОМ СЛОЕ.....
      DO 12 I=1, N
      DO 11 J=1, N
      IF (I. NE. 1) GO TO 1∅
      D(J)=2.∅ *TSTAR(2, J)+F *TSTAR(1, J)
      GO TO 11
   1∅ D(J)=TSTAR(I-1, J)+F *TSTAR(I, J)+TSTAR(I+1, J)
   11 D(N)=D(N)+TSTAR(I, NP1)
      CALL TRIDAG (1, N, A, B, C, D, TPRIME)
      DO 12 J=1, N
   12 T(I, J)=TPRIME(J)
C     .....ПЕЧАТЬ ТЕМПЕРАТУРЫ В ОБЛАСТИ.....
      IF (ICOUNT.NE. IFREQ) GO TO 15
      ICOUNT=∅
      WRITE (3,2∅1) TAU
      DO 14 I=1, NP1
   14 WRITE (3,2∅2) (T(I, J), J=1, NP1)
   15 IF(T(1, 1)-TMAX) 4, 4, 1
C     .....ФОРМАТЫ ДЛЯ ВВОДА И ПЕЧАТИ ДАННЫХ.....
  1∅∅ FORMAT (6X, F6.3, 1∅X, F5.2, 7X, I3, 11X, I2)
  2∅∅ FORMAT(47H_____ТЕМПЕРАТУРНОЕ_ПОЛЕ_БРУСА_
     1 КВАДРАТНОГО СЕЧЕНИЯ/)
     2 12HO____DTAU___=__, _F1∅.5/12H_____
      DX_____=__, F1∅.5/
     3 12H______RATIO_=__, F1∅.5/12H_____TMAX___=
      =__, F1∅.5/
     4 12H______N______=, I4/12H_____IFREQ_=_, I4)
  2∅1 FORMAT (12HO_____ВРЕМЯ_=__, _F8.5/
     1 23HO_____ЗНАЧЕНИЯ_ТЕМПЕРАТУР/1H_/)
  2∅2 FORMAT (4H______, 11F8.5)
      END
```

Время = 0,05000

Значения температур

0,01579	0,01737	0,02272	0,03398	0,05566	0,09644	0,17262	0,31467	0,57943	1,07278	1,00000
0,01737	0,01894	0,02428	0,03552	0,05717	0,09788	0,17394	0,31577	0,58010	1,07266	1,00000
0,2272	0,02428	0,02959	0,04077	0,06230	0,10279	0,17844	0,31949	0,58238	1,07227	1,00000
0,3398	0,03552	0,04077	0,05183	0,07311	0,11313	0,18790	0,32734	0,58720	1,07143	1,00000
0,05566	0,05717	0,06230	0,07311	0,09391	0,13304	0,20613	0,34243	0,59646	0,69983	1,00000
0,09644	0,09788	0,10279	0,11313	0,13304	0,17047	0,24041	0,37083	0,61389	1,06681	1,00000
0,17262	0,17394	0,17844	0,18790	0,20613	0,24041	0,30445	0,42387	0,64644	1,06118	1,00000
0,31467	0,31577	0,31949	0,32734	0,34243	0,37083	0,42387	0,52279	0,70714	1,05068	1,00000
0,57943	0,58010	0,58238	0,58720	0,59646	0,61389	0,64644	0,70714	0,82024	1,03110	1,00000
1,07278	1,07266	1,07227	1,07143	1,06983	1,06682	1,06118	1,05068	1,03110	0,99462	1,00000
1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000

Время = 0,10000

Значения температур

0,09333	0,09942	0,11890	0,15546	0,21508	0,30496	0,42973	0,58082	0,70958	0,66423	1,00000
0,09942	0,10546	0,12481	0,16113	0,22035	0,30962	0,43356	0,58363	0,71153	0,66648	1,00000
0,11890	0,12481	0,14374	0,17927	0,23721	0,32455	0,44581	0,59264	0,71777	0,67370	1,00000
0,15546	0,16113	0,17927	0,21333	0,26886	0,35258	0,46881	0,60954	0,72948	0,68724	1,00000
0,21508	0,22035	0,23721	0,26886	0,32048	0,39829	0,50631	0,63711	0,74858	0,70932	1,00000
0,30496	0,30962	0,32455	0,35258	0,39829	0,46719	0,56284	0,67866	0,77737	0,74260	1,00000
0,42973	0,43356	0,44581	0,46881	0,50631	0,56284	0,64132	0,73635	0,81733	0,78881	1,00000
0,58082	0,58363	0,59264	0,60954	0,63711	0,67866	0,73635	0,80620	0,86573	0,84476	1,00000
0,70958	0,71153	0,71777	0,72948	0,74858	0,77737	0,81733	0,86753	0,90697	0,89245	1,00000
0,66423	0,66648	0,67370	0,68724	0,70932	0,74260	0,78881	0,84476	0,89245	0,87565	1,00000
1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000

Время = 0,20000

Значения температур

0,40354	0,41077	0,43205	0,46633	0,51243	0,57037	0,64334	0,73701	0,84127	0,84398	1,00000
0,41077	0,41790	0,43893	0,47279	0,51834	0,57558	0,64766	0,74020	0,84319	0,84587	1,00000
0,43205	0,43893	0,45919	0,49183	0,53574	0,59091	0,66039	0,74958	0,84885	0,85144	1,00000
0,46633	0,47279	0,49184	0,52251	0,56376	0,61560	0,68089	0,76470	0,85798	0,86041	1,00000
0,51243	0,51834	0,53574	0,56376	0,60145	0,64881	0,70846	0,78503	0,87025	0,87247	1,00000
0,57037	0,57558	0,59091	0,61560	0,64881	0,69054	0,74310	0,81057	0,88566	0,88762	1,00000
0,64334	0,64766	0,66039	0,68089	0,70846	0,74310	0,78673	0,84275	0,90508	0,90671	1,00000
0,73701	0,74020	0,74958	0,76470	0,78503	0,81057	0,84275	0,88405	0,93001	0,931121	1,00000
0,84127	0,84319	0,84885	0,85798	0,87025	0,88567	0,90508	0,93001	0,95776	0,95848	1,00000
0,84398	0,84587	0,85144	0,86041	0,87247	0,88762	0,90671	0,93121	0,95848	0,95919	1,00000
1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000

Время = 0,40000

Значения температур

0,77532	0,77809	0,78636	0,79998	0,81851	0,84105	0,86674	0,89726	0,93831	0,95512	1,00000
0,77809	0,78082	0,78899	0,80224	0,82074	0,84301	0,86838	0,89853	0,93907	0,95567	1,00000
0,78636	0,78899	0,79685	0,80980	0,82742	0,84886	0,87328	0,90231	0,94134	0,95732	1,00000
0,79997	0,80244	0,80980	0,82192	0,83842	0,85849	0,88136	0,90854	0,94508	0,96004	1,00000
0,81851	0,82074	0,82742	0,83842	0,85339	0,87160	0,89235	0,91701	0,95017	0,96374	1,00000
0,84105	0,84301	0,84886	0,85849	0,87160	0,88755	0,90572	0,92732	0,95636	0,96825	1,00000
0,86674	0,86838	0,87328	0,88136	0,89235	0,90572	0,92096	0,93906	0,96341	0,97338	1,00000
0,89726	0,89853	0,90231	0,90853	0,91701	0,92732	0,93906	0,95302	0,97179	0,97948	1,00000
0,93831	0,93907	0,94134	0,94508	0,95017	0,95636	0,90341	0,97179	0,98306	0,98768	1,00000
0,95512	0,95567	0,95732	0,96004	0,96375	0,96825	0,97338	0,97948	0,98768	0,99103	1,00000
1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000

Если ввести данные DTAU=0,05, TMAX=0,95, N=10, IFREQ=1, то печать результатов имеет вид: ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ БРУСА КВАДРАТНОГО СЕЧЕНИЯ DTAU= =0,05000 DX=0,10000 RATIO= =5,00000 TMAX=0,95000 N=10 IFREQ=1.

Выше представлены значения безразмерной температуры в каждом узле пространственной сетки в квадрате ($n=0, 1, \ldots, 10$; $m=0, 1, \ldots, 10$) для некоторых значений безразмерного времени Fo. Шаг по времени был выбран равным 0,05, т. е. в 20 раз больше, чем максимально возможный шаг при решении задачи по явной схеме.

Таким большим значением шага η объясняется появление на первом шаге по времени значения температуры больше 1. Но так как схема обладает свойством устойчивости, то в результате расчетов для последующих значений времени получаются удовлетворительные результаты.

В табл. 13.1 сравниваются значения температуры в центре квадратного бруса, вычисленные методом сеток с точным решением.

Таблица 13.1

Время, Fo	$T_ц$ (по неявной схеме)	$T_ц$ (по точному решению)
0,1	0,09333	0,09883
0,2	0,40354	0,40354
0,3	0,63224	0,63179
0,4	0,77532	0,77486
0,5	0,86283	0,86252
0,6	0,91624	0,91607
0,7	0,94886	0,94877

Время = 0,75000

Значения температур

0,96003	0,96052	0,96199	0,96439	0,96767	0,97170	0,97650	0,98213	0,98705	0,99430	1,0000
0,96032	0,96101	0,96246	0,96483	0,96806	0,97205	0,97679	0,98235	0,98720	0,99437	1,0000
0,96199	0,96246	0,96385	0,96614	0,96925	0,97309	0,97765	0,98301	0,98768	0,99458	1,0000
0,96439	0,96483	0,96614	0,96828	0,97120	0,97479	0,97907	0,98408	0,98846	0,99492	1,0000
0,96766	0,96806	0,96925	0,97120	0,97384	0,97711	0,98099	0,98555	0,98952	0,99539	1,0000
0,97170	0,97205	0,97309	0,97479	0,97711	0,97997	0,98336	0,98735	0,99083	0,99596	1,0000
0,97650	0,97679	0,97765	0,97907	0,98093	0,98336	0,98618	0,98950	0,99238	0,99665	1,0000
0,98213	0,98235	0,98301	0,98408	0,98555	0,98735	0,98950	0,99201	0,99421	0,99745	1,0000
0,98704	0,98720	0,98768	0,98846	0,98952	0,99083	0,99238	0,99421	0,99580	0,99815	1,0000
0,99430	0,99437	0,99458	0,99492	0,99531	0,99597	0,99665	0,99745	0,99815	0,99910	1,0000
0,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,0000

§ 13.3. Методы расщепления (локально-одномерная схема)

Метод переменных направлений нельзя непосредственно применить к задачам теплопроводности с числом измерений $p \geqslant 3$. В самом деле, рассмотрим p-мерное уравнение анизотропной теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \sum_{k=1}^{p} A_k T; \quad A_k = \lambda_k \frac{\partial^2}{\partial x^2}; \quad \lambda_k = \text{const}. \qquad (13.25)$$

Если ввести $p-1$ промежуточных слоев и на каждом слое составить схему, неявную по одному из направлений и явную по остальным, типа (13.10), (13.11), то окажется, что построенная схема обладает двумя нежелательными свойствами. Во-первых, схема условно устойчива и, следовательно, неэкономична. Во-вторых, она в силу своей несимметричности имеет лишь первый порядок аппроксимации по времени. Можно непосредственно построить симметричную неявную схему для уравнения (13.25)

$$\frac{1}{\eta}(\hat{u} - u) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{p} \Lambda_k (\hat{u} + u), \qquad (13.26)$$

где разностные операторы Λ_k можно аппроксимировать формулами типа (13.9), имеющими второй порядок аппроксимации по пространственным координатам. Несмотря на то что схема (13.26) в этом случае имеет погрешность аппроксимации $O\left(\eta^2 + \sum_k h_k^2\right)$, применение этой схемы нецелесообразно, так как она неэкономична.

Изложим идею метода расщепления. Пусть требуется найти решение задачи Коши для уравнения (13.25) на интервале времени $\tau_i \leqslant \eta \leqslant \tau_{i+1}$. Предположим, что значения температуры известны на слое τ_i и надо определить функцию температуры на временном слое τ_{i+1}. Ввведем число промежуточных временных слоев, равное размерности уравнения (13.26) по пространству. На каждом слое заменим в правой части уравнения (13.26) $\sum_{k=1}^{p} \Lambda_k (\hat{u} + u)$ на $p\Lambda_k \times$ $\times (\hat{u} + u)$ и в левой части выберем шаг η/p. Решение соответствующих разностных задач на промежуточных слоях обозначим через v_k ($k = 1, 2, \ldots, p$). Тогда вместо решения задачи (13.26) приходим к последовательному решению системы уравнений вида

$$\frac{1}{\eta}(\hat{v}_k - v_k) = \frac{1}{2} \Lambda_k (\hat{v}_k + v_k) \quad (k = 1, 2, \ldots, p); \qquad (13.27)$$

$$v_1 = u, \quad v_2 = \hat{v}_1, \quad v_3 = \hat{v}_2, \quad \ldots, \quad v_p = \hat{v}_{p-1}, \quad \hat{u} = \hat{v}_p. \qquad (13.28)$$

Разностные уравнения (13.27) — одномерные, так как операторы Λ_k одномерны. Поэтому схему (13.27), (13.28) называют еще *локально-одномерной*. Каждое разностное уравнение представляет собой неявную симметричную схему типа (12.4) при $\sigma=1/2$. Значит, учитывая устойчивость схемы (12.4), можно заключить, что и схема (13.27), (13.28) безусловно устойчива, так как ошибка начальных данных не будет возрастать при переходе со слоя на слой. *Для* решения уравнений (13.27) применяется метод прогонки, причем выполняются условия устойчивости прогонки, поэтому разностное решение $\hat{u}$ существует и единственно.

Так как схема безусловно устойчива, то расчет можно вести с шагом по времени $\eta \sim h$. На каждом целом временном слое необходимо выполнить прогонки по p направлениям. Значит, на каждый узел сетки требуется $\sim 10p$ действий независимо от размеров шагов по пространственным переменным, т. е. схема (13.27), (13.28) экономична. При исследовании аппроксимации схемы (13.27), (13.28) разностное решение сравнивается с точным только на целых слоях, а на промежуточных решения (13.27), (13.28) вообще не аппроксимируют уравнение (13.25). Погрешности аппроксимации промежуточных слоев суммируются и компенсируются так, что на целых слоях погрешность аппроксимации равна

$$0\left(\eta^2+\sum_{k=1}^{p} h_k^2\right).$$

Локально-одномерную схему можно построить и для уравнения с переменными коэффициентами

$$\partial T/\partial\tau=\sum_{k=1}^{p} A_k[T]+q_v(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_p,\ \tau), \tag{13.29}$$

где

$$A_k[T]=\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\lambda_k(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_p,\ \tau)\frac{\partial T}{\partial x_k}\right]. \tag{13.30}$$

Однако операторы $A_k[T]$, задаваемые формулой (13.30), не обладают свойствами коммутативности, поэтому схема типа (13.27), (13.28) для уравнения (13.29) будет иметь порядок аппроксимации $0\left(\eta+\sum_{k=1}^{p} h_k^2\right)$. При этом разностные операторы должны строиться по образцу наилучшей одномерной схемы (12.38), (12.39). Такой же порядок аппроксимации будет иметь и чисто неявная локально-одномерная схема

$$\frac{1}{\eta}(\hat{v}_k-v_k)=\Lambda_k\hat{v}_k+\omega_k; \tag{13.31}$$

здесь $v_k=\hat{v}_{k-1}$, $\sum_{k=1}^{p}\omega_k=q_v$

с разностными граничными условиями I рода

$$\hat{v}_k\big|_{S_h}=\mu(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_p,\ \tau+\eta)\big|_{S_h}. \tag{13.32}$$

Схему более высокого порядка аппроксимации можно построить, применяя симметричный алгоритм по времени. Для этой цели на интервале $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ вводится полуцелый слой $\bar{\tau}$. С помощью симметричной схемы типа (13.27), (13.28) вычисляем значения приближенного решения на полуцелом слое, затем по этой же схеме, только в обратном порядке, $k=p$, $p-1, \ldots, 1$, перейдем на целый слой τ_{i+1}. Построенная таким образом схема имеет порядок аппроксимации $0\left(\eta^2+\sum_{k=1}^{p} h_k^2\right)$. Схема (13.31) может быть использована при решении квазилинейных уравнений теплопроводности. При решении задачи (13.31) с зависимостью теплопроводности от температуры на каждом слое (так же как и в § 12.6) можно пользоваться двумя вариантами вычисления $\lambda(p, \tau, T)$ — линейным и нелинейным.

В области Ω с криволинейной границей можно построить безусловно устойчивую и равномерно сходящуюся с точностью

$$0\left(\eta+\sum_{k=1}^{p} h_k^2\right)$$

разностную схему для уравнения (13.29), если точное решение $T(p, \tau)$ краевой задачи непрерывно вместе со своими четвертыми производными всюду в Ω, включая границу области S. С этой целью во внутренних узлах области Ω уравнение (13.29) аппроксимируем чисто неявной локально-одномерной схемой (13.31), а в нерегулярных узлах, образованных точками пересечения линий сетки с границей, зададим естественные граничные условия I рода.

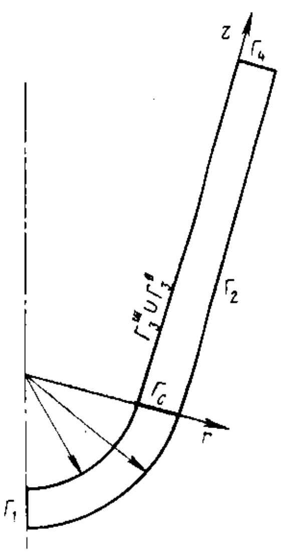


Рис. 13.6. Расчетная область

Температурное поле чаши унифицированного шлаковоза. Рассмотрим задачу нестационарной теплопроводности для одного из агрегатов металлургического оборудования — шлаковоза для уборки доменного и сталеплавильного шлаков. Одним из наиболее напряженных мест шлаковоза является шлаковая чаша, представляющая собой толстостенную оболочку, состоящую из сферического сектора, сопряженного с полым усеченным конусом конечной длины.

Задача рассматривается для сферической части чаши в сферических координатах, для конической — в цилиндрических. На стыке решения согласовываются с помощью граничных условий сопряжения (IV рода).

Ввиду того что чаша является телом вращения, а граничные условия симметричны относительно оси вращения, достаточно решить задачу для области, изображенной на рис. 13.6.

Так как угол между образующей конуса и осью вращения относительно мал (около 15°), то можно рассматривать коническую стенку как цилиндрическую.

Математическая модель задачи примет следующий вид:

$$\frac{\partial T_i}{\partial \tau}=a\nabla^2 T_i, \quad i=1,\ 2;$$

$$\nabla^2 T_1=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T_1}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial T_1}{\partial\vartheta}\right);$$

$$\nabla^2 T_2=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T_2}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2},$$

где $R_1<r<R_2,\quad 0<\vartheta<\vartheta_0,\quad 0<z<L,\quad 0<\tau\leqslant t.$

Запишем граничные условия:

$$\left.\frac{\partial T_1}{\partial\vartheta}\right|_{\Gamma_1}=0,\quad \vartheta=0,\quad R_1\leqslant r\leqslant R_2;\quad T_1|_{\Gamma_c}=T_2|_{\Gamma_c};$$

$$\frac{1}{r}\left.\frac{\partial T_1}{\partial\vartheta}\right|_{\Gamma_c}=\left.\frac{\partial T_2}{\partial z}\right|_{\Gamma_c},\quad (\vartheta=\vartheta_0)\wedge(z=0),\quad R_1\leqslant r\leqslant R_2;$$

$$-\lambda\left.\frac{\partial T_2}{\partial z}\right|_{\Gamma_4}=\alpha_4(T_2|_{\Gamma_4}-T_0),\quad z=L,\quad R_1\leqslant r\leqslant R_2;$$

$$-\lambda\left.\frac{\partial T_i}{\partial r}\right|_{\Gamma_2}=\alpha_2(T_i|_{\Gamma_2}-T_c),\quad i=1,2,\quad r=R_2,\quad 0\leqslant\vartheta\leqslant\vartheta_0,\quad 0\leqslant z\leqslant L.$$

Условие на поверхности чаши, омываемой шлаком, представим в виде

$$\lambda\left.\frac{\partial T_i}{\partial r}\right|_{\Gamma_3^{\text{ш}}}=\frac{\lambda_{\text{ш}}}{\delta}\left(T_i\big|_{\Gamma_3^{\text{ш}}}-T_{\text{ш}}\right)+\sigma_c\left[\left(T_i\big|_{\Gamma_3^{\text{ш}}}+273\right)^4-(T_{\text{ш}}+273)^4\right],$$

$i=1,\ 2,\ r=R_1,\quad (\vartheta\cup z)\in\Gamma_3^{\text{ш}}(\tau);\quad \lambda\left.\dfrac{\partial T_i}{\partial r}\right|_{\Gamma_3^{\text{в}}}=\alpha_3\left(T_i\big|_{\Gamma_3^{\text{в}}}-T_c\right),\quad i=1,\ 2,$

$r=R_1,\quad (\vartheta\cup z)\in\Gamma_3^{\text{в}},$

где $\Gamma_3^{\text{ш}}(\tau)$ зависит от уровня заполнения чаши шлаком; $\lambda_{\text{ш}}$, λ — теплопроводности шлака и материала чаши; δ — величина газового зазора между шлаком и стенкой; $T_{\text{ш}}$, T_c — температуры шлака и окружающей среды; α_2, α_3, α_4 — эффективные коэффициенты теплоотдачи стенок чаши в окружающую среду; a — температуропроводность материала чаши.

В начальный момент времени задана температура чаши $T_i|_{\tau=0}=T_0$ $(i=1,\ 2)$, равная температуре окружающей среды $(T_0=T_c)$. Физически это соответствует моменту первой заливки шлака в чашу.

Для перехода от дифференциальных уравнений к конечно-разностным уравнениям введем в расчетной области сетку. Для этого отрезки $(0,\ \vartheta_0)$ и $(0,\ L)$ вдоль образующей чаши разобьем соответственно на N_1-1 и N_2-N_1 равных частей с шагом $h_\vartheta=\vartheta_0/(N_1-1)$ в сферической части и с шагом $h_z=L/(N_2-N_1)$ в конической. Аналогично, отрезок (R_1, R_2) разобьем на $M-1$ равных частей с шагом $h_r=\dfrac{R_2-R_1}{M-1}$. Точки вдоль образующей чаши пронумеруем от 1 до N_1 в сферической части, от N_1+1 до N_2 — в конической. Точки по нормали к образующей пронумеруем от 1 до M.

Значения температуры в узлах сетки обозначим нижними индексами k и j. Поле температур на сетке рассматривается в фиксированные моменты времени с некоторым шагом η от 0 до t так, что $0<\tau\leqslant t$, $\tau_i=i\eta$ $(i=0, 1, \ldots, t/\eta)$.

Используя локально-одномерный метод, заменим исходную краевую задачу разностной:

$$\frac{\bar{u}_{k,j}-u_{k,j}}{\eta}=\frac{a}{r_i^2}\,\frac{1}{\sin\vartheta_j}(\sin\vartheta\bar{u}_{\bar{\vartheta}})_{\vartheta}\qquad (k=1, 2, \ldots, M);$$

$$j=2, \ldots, N_1-1;\quad i=0, 1, \ldots, p),\quad p=t/\eta; \tag{13.33}$$

N_1 — номер слоя, соответствующий стыку сферической части с конической; $u_{k,j}^{(0)}=T_0$;

$$-\lambda\,\frac{-\bar{u}_{k,3}+4\bar{u}_{k,2}-3\bar{u}_{k,1}}{2h_{\vartheta}}\bigg|_{\Gamma_1}=0\quad (k=1, 2, \ldots, M); \tag{13.34}$$

$$\bar{u}_{k,N_1}\big|_{\Gamma_c}=\bar{W}_{k,N_1}\big|_{\Gamma_c},\qquad \frac{3\bar{u}_{k,N_1}-4\bar{u}_{k,N_1-1}+\bar{u}_{k,N_1-2}}{2h_{\vartheta}r_k}\bigg|_{\Gamma_c}=$$

$$=\frac{4\bar{u}_{k,N_1+1}-\bar{u}_{k,N_1+2}-3\bar{u}_{k,N_1}}{2h_z}\bigg|_{\Gamma_c}\quad (k=1, 2, \ldots, M); \tag{13.35}$$

$$\frac{1}{\eta}(\bar{W}_{k,j}-W_{k,j})=a(\bar{W}_{\bar{z}})_z\quad (k=1, \ldots, M;\quad j=N_1+1, \ldots, N_2); \tag{13.36}$$

$$-\lambda(3\bar{W}_{k,N_2}-4\bar{W}_{k,N_2-1}+\bar{W}_{k,N_2-2})=2h_z(\alpha_4)_k(\bar{W}_{k,N_2}|_{\Gamma_4}-T_c); \tag{13.37}$$

$$(\hat{\varphi}_l)_{k,j}-(\bar{\varphi}_l)_{k,j}=\frac{a\eta}{r^l}(\bar{r}^l(\hat{\varphi}_l)_{\bar{r}})_r\quad (k=2, \ldots, M-1;\ j=1, \ldots, N_2), \tag{13.38}$$

где l — коэффициент формы, равный 1 и 2 в цилиндрических и сферических координатах соответственно; $\varphi_1=u$, $\varphi_2=W$;

$$-\lambda\,\frac{3(\hat{\varphi}_l)_{M,j}-4(\hat{\varphi}_l)_{M-1,j}+(\hat{\varphi}_l)_{M-2,j}}{2h_r}\bigg|_{\Gamma_2}=(\alpha_2)_j((\hat{\varphi}_l)_{M,j}|_{\Gamma_2}-T_c)$$

$$(l=1, 2;\quad j=1, \ldots, N_2); \tag{13.39}$$

$$-\lambda \frac{-(\hat{\varphi}_l)_{3,j}+4(\hat{\varphi}_l)_{2,j}-3(\hat{\varphi}_l)_{1,j}}{2h_r}\Bigg|_{\Gamma_3^{\text{ш}}}=\frac{\lambda_{\text{ш}}}{\delta}\left((\hat{\varphi}_l)_{1,j}\Big|_{\Gamma_3^{\text{ш}}}-T_{\text{ш}}\right)+$$

$$+\sigma_c\left|\left((\hat{\varphi}_l)_{1,j}\Big|_{\Gamma_3^{\text{ш}}}+273\right)^4-(T_{\text{ш}}+273)^4\right|; \qquad (13.40)$$

$$\lambda=\frac{4(\hat{\varphi}_l)_{2,j}-(\hat{\varphi}_l)_{3,j}-3(\varphi_l)_{1,j}}{2h_r}\Bigg|_{\Gamma_3^{\text{в}}}=(\alpha_3)_j\left((\hat{\varphi}_l)_{1,j}\Big|_{\Gamma_3^{\text{в}}}-T_c\right) \quad (l=1,\ 2;$$

$$j=1,\ \ldots,\ N_2). \qquad (13.41)$$

Полученные сеточные уравнения решаем методом прогонки.

Из разностной схемы (13.33) с помощью рекуррентного соотношения

$$\bar{u}_{k,j}=\gamma_{k,j}\bar{u}_{k,j+1}+\beta_{k,j} \qquad (13.42)$$

получаем общие коэффициенты прогонки для сферической части чаши:

$$\begin{aligned}\gamma_{k,j}&=\frac{\sin\vartheta_{j+1}}{\sin\vartheta_{j+1}+\sin\vartheta_j(1-\gamma_{k,j-1})+h_\vartheta^2 r_k^2\sin\vartheta_j/(a\eta)};\\ \beta_{k,j}&=\frac{\sin\vartheta_j\beta_{k,j-1}+u_{k,j}h_\vartheta^2 r_k^2\sin\vartheta_j/(a\eta)}{\sin\vartheta_{j+1}+\sin\vartheta_j(1-\gamma_{k,j-1})+h_\vartheta^2 r_k^2\sin\vartheta_j/(a\eta)},\end{aligned} \qquad (13.43)$$

где $j=2,\ \ldots,\ N_1-1;\quad k=1,\ \ldots,\ M.$

Из граничных условий (13.34) и соотношений (13.43) при $j=2$ найдем $\gamma_{k,1}$, $\beta_{k,1}$, а затем по формулам (13.43) вычислим $\gamma_{k,j}$, $\beta_{k,j}$ $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ M;\quad j=2,\ \ldots,\ N_1-1)$.

Из разностной схемы (13.36) с помощью соотношения, аналогичного соотношению (13.42), получим формулы коэффициентов прогонки для конической части чаши:

$$\gamma_{k,j}=\frac{R}{1+2R-R\gamma_{k,j-1}};\quad \beta_{k,j}=\frac{R\beta_{k,j-1}+W_{k,j}}{1+2R-R\gamma_{k,j-1}}, \qquad (13.44)$$

где $R=a\eta/h_z^2;\quad j=N_1+1,\ \ldots,\ N_2-1;\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ M.$

Из граничных условий (13.35), соотношений (13.42) и (13.43) при $j=N_1-2$, N_1-1, соотношений (13.44) при $j=N_1+1$ найдем γ_{k,N_1} и β_{k,N_1}, а затем по формулам (13.44) найдем $\gamma_{k,j}$ $\beta_{k,j}$ $(k=1,\ \ldots,\ M;\ j=N_1+1,\ \ldots,\ N_2-1)$.

Пользуясь граничным условием (13.37) и соотношением типа (13.42), найдем $\bar{W}_{k,N_2}$, а затем по формулам (13.42)

$\bar{W}_{k,j}(j=N_1,\ \ldots,\ N_2-1),\quad \bar{u}_{k,j}(j=1,\ \ldots,\ N_1-1);\quad k=1,\ \ldots,\ M.$

Теперь по известным $\bar{W}_{k,j}$ и $\bar{u}_{k,j}$ найдем $\hat{W}_{k,j}$ и $\hat{u}_{k,j}$. Из разностной схемы (13.38) с помощью рекуррентного соотношения

$$(\hat{\varphi}_l)_{k+1,j}=\xi_{k+1,j}(\hat{\varphi}_l)_{k,j}+\nu_{k+1,j} \quad (l=1,\ 2) \tag{13.45}$$

получаем общие коэффициенты поперечной прогонки:

$$\xi_{k,j}=r^l_{k-1/2}H^l/\left[1+H^l\left[r^l_{k-1/2}+r^l_{k+1/2}(1-\xi_{k+1,j})\right]\right];$$

$$\nu_{k,j}=\frac{(\bar{\varphi}_l)_{k,j}+H^l r^l_{k+1/2}\nu_{k+1,j}}{1+H^l\left[r^l_{k-1/2}+r^l_{k+1/2}(1-\xi_{k+1,j})\right]}, \tag{13.46}$$

где $H^l=a/(h_r r^l_k)$ $(l=1,\ 2;\quad k=M-1,\ \ldots,\ 2;\quad j=1,\ \ldots,\ N_2)$.

Из граничных условий (13.39) и соотношений (13.46), взятых при $k=M-1$, найдем $\xi_{M,j}$, $\nu_{M,j}$, а затем по формулам (13.46) вычислим $\xi_{k,j}$, $\nu_{k,j}$ $(k=M-1,\ \ldots,\ 2;\ j=1,\ \ldots,\ N_2)$.

Из граничных условий (13.40), решая уравнение 4-й степени, или из граничных условий (13.41) с помощью соотношения (13.45) найдем $\hat{u}_{1,j}$ и $\hat{W}_{1,j}$, а затем по формулам (13.45) вычислим $\hat{u}_{k,j}$, $\hat{W}_{k,j}$ $(j=1,\ \ldots,\ N_2;\ k=2,\ \ldots,\ M)$.

Аналогичные вычисления производятся при переходе со слоя $(i+1)\eta$ на слой $(i+2)\eta$ и т. д.

В табл. 13.2 приведены результаты расчета одного из вариантов задачи: граничное условие (13.40) линеаризовано путем введения

Таблица 13.2

Изменение температуры во времени в характерных сечениях чаши

Время, мин	Температура в сечении *I*, °C		Температура в сечении *II*, °C		Температура в сечении *III*, °C	
	внутренняя поверхность	внешняя поверхность	внутренняя поверхность	внешняя поверхность	внутренняя поверхность	внешняя поверхность
15,5	179,9	98,0	341,9	176,7	394,9	205,5
31	269,0	188,7	483,4	334,7	546,5	376,5
46,5	338,6	266,3	576,2	447,7	641,9	492,9
77,5	432,4	371,7	669,2	560,0	730,6	598,9
93	459,5	402,6	684,6	581,0	742,4	616,0
124	483,2	432,9	680,7	588,9	731,8	617,8

Примечание. Сечение *I* — дно чаши ($\vartheta=0$); сечение *II* — стык сферической и конической частей чаши ($\vartheta=\vartheta_0$, $z=0$); сечение *III* — район опорного кольца чаши ($z=1{,}932$ м).

эффективного коэффициента теплоотдачи $\alpha_ш$, определенного экспериментально.

В расчете приняты следующие значения величин, входящих в математическую модель: $\vartheta_0=75°$; $L=2{,}576$ м; $t=155$ мин; $R_1=1{,}07$ м; $R_2=1{,}17$ м; $h_\vartheta=1{,}5°$; $h_r=0{,}01$ м; $h_z=0{,}1288$ м;

$\eta=930$ с; $T_c=T_0=20$ °C; $\rho=7850$ кг/м^3.

Теплопроводность и удельная теплоемкость материала чаши (стали 30Л) считались постоянными: $\lambda = 32{,}5656$ Вт/(м·К), $c = 0{,}67$ кДж/(кг·К). Температура шлака и эффективный коэффициент теплоотдачи от шлака к стенке на границе $\Gamma_3^{ш}$ задавались линейными функциями времени:

$$T_ш = T_1 - (T_1 - T_2)/t\eta i; \quad \alpha_ш = \alpha_1 - (\mu_1 - \mu_2)/t\eta i \quad (i=0,\ 1,\ \ldots,\ t/\eta),$$

где $T_1 = 1200$ °С; $T_2 = 1050$ °С; $\mu_1 = 176$ Вт/(м²·К); $\mu_2 = 53{,}5$ Вт/(м²·К).

Эффективные коэффициенты теплоотдачи α_2, α_3 определялись в виде суммы $\alpha_c + (\alpha_л)_j$, где $\alpha_c = 9{,}3$ Вт/(м²·К);

$$(\alpha_л)_j = \frac{A\left[(u_{M,\,j}+273)^4 - (T_c+273)^4\right]}{u_{M,\,j} - T_c};$$

$A = 4{,}77 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м²·К⁴);

$j = 1,\ \ldots,\ N_2$.

Аналогично определялся коэффициент α_1.

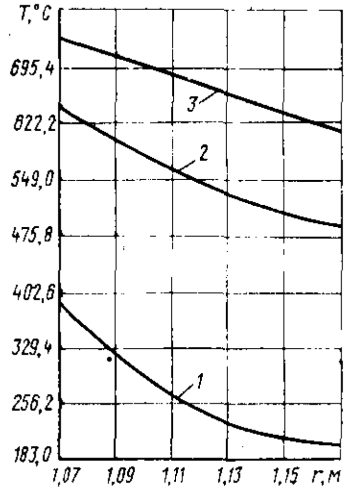


Рис. 13.7. Распределение температуры в сечении *III*:
1 — τ=15,5 мин, *2* — τ=46,5 мин, *3* — τ=124 мин

Расчетная область по сечению чаши была разбита сеткой с количеством узлов 71×11. Программа составлена на языке ФОРТРАН. Время счета и печати значений температур для одного момента времени на ЭВМ ЕС-1022 составляло 45 с*.

Проведенные исследования показывают (рис. 13.7), что в начальный период времени после заливки шлака по толщине стенки чаши возникают наибольшие градиенты температуры. С увеличением времени по мере прогрева чаши происходит выравнивание температур по сечению стенки

Ниже приводится список основных идентификаторов и текст программы.

Список идентификаторов. U, UP — массивы значений температур на целом и полуцелом слоях ($U \sim u_{k,\,j}$, $UP \sim \hat{u}_{k,\,j}$); A, B, Q, D — массивы коэффициентов продольной и поперечной прогонки ($A \sim \gamma$, $B \sim \beta$, $Q \sim \xi$, $D \sim \nu$); TET — массив значений угла ϑ ($0 < \vartheta < \vartheta_0$); R — массив значений радиуса r ($R_1 < r < R_2$); ALFA, ALF1, ALF2 — массив коэффициентов теплоотдачи от стенок чаши в воздух (ALFA $\sim \alpha_2$, ALF1 $\sim \alpha_3$, ALF2 $\sim \alpha_4$); T — массив моментов времени; HR — шаг по радиусу (HR $\sim h_r$); HTET — шаг по углу ϑ (HTET $\sim h_\vartheta$); HZ — шаг по оси z (вдоль конической части) (HZ $\sim h_z$); HT — шаг по времени (HT $\sim \eta$); AT — температуропроводность (AT $\sim a$); LJAMDA — теплопроводность (LJAMDA $\sim \lambda$); TT — температура шлака (TT — $T_ш$); L — количество моментов

* Численные расчеты на ЭВМ выполнены В. И. Завелионом.

времени (L ~ t/η); TS — температура окружающей среды (воздуха) (TS ~ T_c); N1 — номер слоя, соответствующий стыку сферы с конусом; $N2$ — номер слоя в продольном направлении, соответствующий торцу чаши; M1 — число точек по толщине чаши (r_k, $k=1, \ldots, M1$).

```
      DIMENSION  A (11,71),  B (11,71),  U (11,71),  UP (11,71),
     * TET(51),  R(11),  ALF2(11),  D(11,71),  Q(11,71),  ALF1 (71),
     * ALFA (71),  T (1∅)
      REAL  LJAMDA
      DATA  HR/∅.∅1/,  HZ/∅.1288/,  N1/51/,  N2/71/,  M1/11/,
     * L/1∅/,  TS/2∅./,  PI/3.1415926/,  HT/99∅./
      J7=69
      P7=J7
      M=1
      DO 7∅  I=1, M1
7∅    R(I)=1.∅7+(I − 1) * HR
      B1=PI/18∅∅
      B2=PI/18∅∅ * 75
      M11=M1 − 1
      N11=N1 − 1
      N22=N2 − 1
      N12=N1+1
      LJAMDA=28./36∅∅
      AT=28./∅.16/785∅/36∅∅
      HTET=(B2 − B1)/N11
      DO 1 I=1, N1
1     TET (I)=B1+(I − 1) * HTET
      DO 2 I=1, L
2     T (I)=HT * I
      DO 3 I=1, M1
      ALF2 (I)=(8+4.1 * 1.E − ∅8 * 4 * 293 ** 3)/36∅∅
      DO 3 J=1, N2
      ALF1 (J)=(8+4.1 * 1.E − ∅8 * 4 * 293 ** 3)/36∅∅
      ALFA (J)=ALF1 (J)
3     4 (I, J)=2∅.1
24    CONTINUE
      TT=12∅∅. − 2∅∅./L * M
      DO 4 I=1, M1
      A (I, 1)=HTET ** 2 * R(I) * SIN(TET (2)) * R(I)/HT/AT/
     * (SIN (TET (2)) − 3 * SIN (TET (3)))+1
      A (I, 2)=1./(4 − 3 * A (I, 1))
      B (I, 1)=U (I, 1) * HTET ** 2 * R (I) ** 2 * SIN
     * (TET (2))/HT/AT/(3 * A (I, 2) * (SIN (TET (2)) *
     * (1 − A (I, 1)) + HTET ** 2 * R (I) ** 2 * SIN (TET (2))/
     * HT/AT) − SIN (TET (3)))
      DO 5 J=2, N11
      H=HTET ** 2 * R (I) ** 2 * SIN (TET (J))/HT/AT
      Z=SIN (TET (J+1))+SIN (TET (J)) * (1 − A (I, J − 1))+H
      A (I, J)=SIN (TET (J+1))/Z
5     B (I, J)=(SIN (TET (J)) * B (I, J − 1)+U (I, J) * H)/Z
```

```
      XA=-∅.5/HZ
      XB=2./HZ
      XC=-1,5/HZ-1/R (I)/2/HTET+(-4 * A (I, N1-1)+
     * +3+A(I, N1-2) * A (I, N1-1))
      XD=(4 * B (I, N1-1)-A (I, N1-2) * B (I, N1-1)-
     - B(I, N1-2))/R (I)/2/HTET
      XR=AT * HT/HZ ** 2
      A (I, N1)=(XB * XR+(1+2 * XR) * XA)/XR/(XA-XC)
      Z=1+2 * XR-XR * A (I, N1)
      A (I, N1+1)=XR/Z
      B (I, N1)=(XA * U (I, N1)-A (I, N1+1) * XD * Z)/
     * (A (I, N1+1) * XC * Z-XA * XR)
      DO 6 J=N12, N22
      A (I, J)=XR/((1+2 * XR)-XR * A (I, J-1))
6     B (I, J)=(XR * B (I, J-1)+U (I, J)) (1+2 * XR-
     - XR * A (I, J-1))
      UP (I, N2)=(2 * ALF2 (I) * TS * HZ/LJAMDA+4 *
     * B (I, N22)-A (I, N22-1) * B (I, N22)-B (I, N22-1))/
     * (3+2 * ALF2 (I) * HZ/LJAMDA-4 * A (I, N22)+
     +A (I, N22-1) * A(I, N22))
      DO 7 J=1, N22
      K=N22-J+1
7     UP (I, K)=UP (I, K+1) * A (I, K)+B (I, K)
4     CONTINUE
      DO 8 J=1, N1
      ALF1 (J)=-ALF1 (J)
      D (M1, J)=(HR ** 2 * R (M1-1)/AT/HT-3 *
     * R (M1-2)+R(M1))/(R(M1)-3 * R(M1-2)-2 *
     * R(M1-2) * ALFA (J) * HR/LJAMDA)
      Z1=UP (M1-1, J) * (2 * LJAMDA/HR-D (M1, J) *
     * (3 * LJAMDA/2/HR+ALFA (J)))+ALFA (J) * TS *
     * (1-AT * HT/HR ** 2/R (M1-1) * (D(M1, J) * R (M1)-
     - R(M1)-R (M1-2)))
      Z2=(3 * LJAMDA/2/HR+ALFA (J))-1-AT * HT/HR **
     * 2/R (M1-1) * (D (M1, J) * R (M1)-R (M1)-
     * -R (M1-2)))-AT * HT * R (M1)/HR ** 2/R (M1-1) *
     * 2 * LJAMDA/HR-D(M1, J) * (3 * LJAMDA/2/HR+
     +ALFA (J)))
      Q(M1, J)=Z1/Z2
      DO 9 I=2, M11
      K=M1-I+1
      Z3=1-AT * HT/HR ** 2/R(K) * (D(K+1,J) * R(K+1)-
     - R(K+1)-R(K-1))
      D (K, J)=AT * HT * R (K-1)/HR ** 2/R (K)/Z3
      Q (K, J)=(UP(K, J)+AT * HT * R(K+1)/HR ** 2/R(K) *
     * Q (K+1, J))/Z3
9     CONTINUE
      AL=(152.-1∅6./L * (M-1))/36∅∅
      IF (J.LE.J7) AL=AL * (1.-2 * (P7-J)/P7/3)
```

```
      AL=-AL
      IF (J-J1) 1Ø, 1Ø, 11
1Ø    U (1, J)=(-2 * AL * TT * HR/LJAMDA-D (3, J) *
     * Q (2, J)-Q (3, J)+4 * Q (2, J))/(D (3, J) * D (2, J)-
     -4 * D (2, J)+3-2 * AL * HR/LJAMDA)
      GO TO 12
11    4 (1, J)=(-2 * ALF1 (J) * TS * HR/LJAMDA-D (3, J) *
     * Q (2, J)-Q (3, J)+4 * Q (2, J))/D(3, J) * D (2, J)-
     -4 * D (2, J)+3-2 * ALF1 (J) * HR/LJAMDA)
12    DO 13 I=1, M11
13    U (I+1, J)=D (I+1, J) * U (I, J)+Q (I+1, J)
      ALFA (J)=(8+4.1 * 1.E-Ø8 * ((U (M1, J)+273) ** 4-
     * -(TS+273) ** 4)/(U (M1, J)-TS))/36ØØ
      ALF1 (J)=(8+4.1 * 1.E-Ø8 * ((U (1, J)+273) ** 4-
     * -(TS+273) ** 4)/(U (1, J)-TS))/36ØØ
8     CONTINUE
      DO 14J=N12, N2
      TT=12ØØ.-2ØØ./L * M
      ALF1 (J)=-ALF1 (J)
      IF (J.GE.65.OR.J.LE.68) TT=12ØØ.-5Ø./L * (M-1)
      H1=-LJAMDA/2/HR/ALFA (J)
      Z=3+1./H1
      H=AT * HT/R (M1)/HR/HR
      D (M1, J)=(3 * (R (M1)-3 * HR/2)-1./H-R (M1)+
     * +HR/2)/(Z * (R (M1)-3 * HR/2)-R (M1)+HR/2)
      D1=1+H * R (M1)-3 * HR/2+(R (M1)-HR/2) * (1-
     -D (M1, J)))
      D (M1-1, J)=1./(4-Z * D (M1, J))
      Q (M1, J)=(UP (M1, J)+TS/H1 * D (M1-1, J) * D1)/
     * (D1 * Z * D (M1-1, J)-H * (R (M1)-HR/2))
      DO 15 I=2, M11
      K=M1-I+1
      H=AT * HT/R (K)/HR/HR
      Z=1+H * (R(K)-HR/2+(R (K)+HR/2) * (1-D(K+1, J)))
      D (K, J)=H * (R (K)-HR/2)/Z
      Q (K, J)=(UP (K, J)+H * (R (K)+HR/2) * Q (K+1, J))/Z
15    CONTINUE
      AL=(152.-1Ø6./L * (M-1))/36ØØ
      IF (J.LE.J7) AL=AL * (1.-2 * (P7-J)/P7/3)
      AL=-AL
      IF (J-J2) 16, 16, 17
16    U (1, J)=(-2 * AL * TT * HR/LJAMDA-D (3, J) *
     * Q (2, J)-Q (3, J)+4 * Q (2, J))/(D (3, J) * D (2, J)-
     -4 * D (2, J)+3-2 * ALF1 (J) * HR/LJAMDA)
      GO TO 18
17    U (1, J)=(-2 * ALF1 (J) * TS * HR/LJAMDA-D (3, J) *
     * Q (2, J)-Q (3, J)+4 * Q (2, J))/(D (3, J) * D (2, J)-
     -4 * D (2, J)+3-2 * ALF1 (J) * HR/LJAMDA)
18    DO 19 I=1, M11
```

```
19    U (I+1, J)=D (I+1, J) * U (I, J)+Q (I+1, J)
      ALFA (J)=(8+4.1 * 1.E-Ø8 * ((U (M1, J) + 273) ** 4 -
     * -(TS+273) ** 4)/(U (M1, J) - TS))/36ØØ
      ALF1 (J)=(8+4.1 * 1.E-Ø8 * ((U (1, J)+273) ** 4 -
     * -(TS+273) ** 4)/(U (1, J) - TS))/36ØØ
      DO 8Ø I=1, M1
      ALF2 (I)=(8+4.1 * 1.E-Ø8 * ((U (I, N2)+273) ** 4 -
     * -(TS+273) ** 4)/(U (I, N2) - TS))/36ØØ
8Ø    CONTINUE
14    CONTINUE
      WRITE (3, 2Ø) T (M)
      WRITE (3,21)
      WRITE (3,22)
      WRITE (3,23) (I, I=1,11)
      WRITE (3,22)
      WRITE (3,25)
      WRITE (3,22)
      WRITE (3,21)
      DO 36 J=1,51,2
      WRITE (3,22)
      WRITE (3,26) J, (U (I, J), I=1,11)
      WRITE (3,22)
      WRITE (3,21)
      WRITE (3,22)
      WRITE (3,27)
      WRITE (3,22)
      WRITE (3,21)
      DO 28 J=52, 71
      WRITE (3,22)
      WRITE (3,26) J, (U (I, J), I=1,11)
      WRITE (3,22)
28    WRITE (3,21)
2Ø    FORMAT (2X, 'T=', F6.Ø)
21    FORMAT (2X, 117 ('-'))
22    FORMAT (2X, 'I', 5X, 'I', 11 (9X, 'I'))
23    FORMAT (2X, 'I', 5X, 'I', 11 (3X, 'I=', I2, 2X, 'I'))
25    FORMAT (2X, 'I', 'СФЕРИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ', 98X, 'I')
26    FORMAT (2X, 'I', 'J=', I3, 'I', 11 (F9.4, 'I'))
27    FORMAT (2X, 'I', 'КОНИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ', 99X, 'I')
      IF (M-L) 4Ø, 5Ø, 5Ø
4Ø    M=M+1
      GO TO 24
5Ø    STOP
      END
```

Задача 13.1. Определение полей температур при затвердевании и охлаждении отливки прямоугольного сечения ($x, y \in \Omega_1$) в песчаной форме ($x, y \in \Omega_2$) сводится к решению нелинейной нестационарной сопряженной краевой задачи теплопроводности: дифференциальное уравнение

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial \tau}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right),\quad x,\ y\in\Omega_1\cup\Omega_2,\quad \tau>0,$$

где теплофизические коэффициенты c, ρ, λ — функции температуры, принимающие различные значения в областях Ω_i $(i=1,\ 2)$; начальные условия задаются в момент заливки жидкого металла в форму:

$$T(0,\ x,\ y)=T_1,\quad x,\ y\in\Omega_1\ ((0<x<d_1)\wedge(0<y<b_1)),$$

$$T(0,\ x,\ y)=T_0,\quad x,\ y\in\Omega_2\ ((d_1<x<d)\wedge(b_1<y<b_2)),$$

где T_1 — температура заливки металла; T_0 — начальная температура песчаной формы; d, b, d_1, b_1 — характерные размеры; граничные условия вдоль осей координат x и y

$$\partial T(\tau,\ 0,\ y)/\partial x=0,\quad \partial T(\tau,\ x,\ 0)/\partial y=0;$$

граничные условия на поверхности формы

$$-\lambda\,\partial T(\tau,\ d,\ y)/\partial x=\alpha\,[T(\tau,\ d,\ y)-T_c];$$

$$-\lambda\,\partial T(\tau,\ x,\ b)/\partial y=\alpha\,[T(\tau,\ x,\ b)-T_c],$$

где α — эффективный коэффициент теплоотдачи на поверхности системы тел; T_c — температура окружающей среды.

Используя метод переменных направлений, разработать алгоритм решения сформулированной краевой задачи.

Задача 13.2. Нестационарное осесимметричное распределение температуры в ортотропном полом цилиндре конечной длины при конвективном теплообмене на всех его поверхностях описывается уравнением

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial \tau}=\lambda_r\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\lambda_z\frac{\partial^2 T}{\partial z^2},\quad R_1<r<R_2,\quad 0<z<l,$$

с начальным и граничными условиями

$$T=\Theta_0(r,\ z)\quad \text{при } \tau=0;$$

$$\lambda_r\,\partial T/\partial r=\alpha_2\,[T-\Theta_2(z,\ \tau)]\quad \text{при } r=R_1;$$

$$\lambda_r\,\partial T/\partial r=-\alpha_1\,[T-\Theta_1(z,\ \tau)]\quad \text{при } r=R_2;$$

$$\lambda_z\,\partial T/\partial z=\alpha_4\,[T-\Theta_4(r,\ \tau)]\quad \text{при } z=0;$$

$$\lambda_z\,\partial T/\partial z=-\alpha_3\,[T-\Theta_3(r,\ \tau)]\quad \text{при } z=l.$$

Используя локально-одномерный метод, записать разностную схему, соответствующую сформулированной краевой задаче.

ГЛАВА XIV

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ СТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

§ 14.1. Метод счета на установление

Краевая задача стационарной теплопроводности в теле Ω, ограниченном областью S, при граничных условиях I рода запишется в виде

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{div}(\lambda(p)\operatorname{grad}T(p))+q_v(p)=0,\ p\in\Omega;\\ &T(p)|_S=g(p),\ p\in S,\end{aligned}\right\}\qquad(14.1)$$

где $p=p(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_к)$ — точка к-мерного пространства.

Поставим в соответствие стационарной задаче (14.1) нестационарную задачу теплопроводности с тем же граничным условием и произвольно выбранными начальными данными:

$$\left.\begin{aligned} &\partial\Theta(p,\ \tau)/\partial\tau=\operatorname{div}(\lambda(p)\operatorname{grad}\Theta(p,\ \tau))+q_v(p),\\ &p\in\Omega,\ \tau>0\ \ (c\rho=1);\\ &\Theta(p,\ 0)=f(p);\\ &\Theta(p,\ \tau)|_S=g(p).\end{aligned}\right\}\qquad(14.2)$$

Для того чтобы сравнить решение $T(p)$ стационарной (14.1) и решение $\Theta(p,\ \tau)$ нестационарной (14.2) задач, рассмотрим функцию $\psi(p,\ \tau)=\Theta(p,\ \tau)-T(p)$. Если из уравнений (14.2) вычесть соответствующие уравнения (14.1), то для функции $\psi(p,\ \tau)$ получим нестационарную краевую задачу:

$$\left.\begin{aligned} &\partial\psi(p,\ \tau)/\partial\tau=\operatorname{div}(\lambda(p)\operatorname{grad}\psi(p,\ \tau)),\ p\in\Omega,\ \tau>0;\\ &\psi(p,\ 0)=\psi_0(p)=f(p)-T(p);\\ &\psi(p,\ \tau)|_S=0,\end{aligned}\right\}\qquad(14.3)$$

где без ограничения общности $\psi_0(p)$ можно считать произвольной функцией.

Применяя метод разделения переменных (см. § 3.1), запишем решение задачи (14.3) в виде ряда

$$\psi(p,\ \tau)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k\varphi_k(p)\exp(-\mu_k\tau),\qquad(14.4)$$

где φ_k и μ_k — собственные функции и собственные числа соответствующей задачи Штурма — Лиувилля; A_k — коэффициенты разложения начального условия по системе собственных функций.

Известно, что собственные функции задачи Штурма — Лиувилля образуют полную ортонормированную систему в $\Omega(p)$, а собственные значения $\mu_k > 0$ и образуют неубывающую последовательность

$$0 < \mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \mu_3 \leqslant \ldots \tag{14.5}$$

Оценим норму функции $\psi(p, \tau)$ с учетом свойств собственных функций и собственных чисел:

$$\|\psi(p, \tau)\|_{L_2} = \left[\sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 \exp(-2\mu_k\tau)\right]^{1/2} \leqslant \exp(-\mu_1\tau) \times$$
$$\times \left[\sum_{k=1}^{\infty} A_k^2\right]^{1/2} = \exp(-\mu_1\tau)\|\psi_0(p)\|_{L_2}. \tag{14.6}$$

Вспоминая определение функции $\psi(p, \tau)$, из неравенства (14.6) заключим, что при $\tau \to \infty$ функция $\psi(p, \tau) \to 0$ и решение нестационарной задачи $\Theta(p, \tau)$ среднеквадратично сходится к решению $T(p)$ стационарной задачи. Можно показать, что если решения $T(p)$ и $\Theta(p, \tau)$ имеют в области Ω равномерно ограниченные по τ производные, то сходимость $\Theta(p, \tau)$ к $T(p)$ при $\tau \to \infty$ будет равномерной. Нетрудно понять, что в качестве решения стационарной задачи (14.1) можно взять решение нестационарной задачи (14.2) при достаточно большом значении времени τ.

Такой способ решения стационарных задач называется *методом установления*. Применение этого метода дает возможность решения стационарных задач теплопроводности известными методами решения не одномерных по пространству нестационарных краевых задач теплопроводности (метод переменных направлений, метод дробных шагов и др.), причем сам процесс установления стационарного режима интереса не вызывает. Более того, часто он является функцией последовательных приближений и лишен смысла. Само установление стационарного режима теплопроводности происходит довольно быстро за счет экспоненциальной зависимости решения от начального распределения температуры. Из оценки (14.6) видно, что если требуемая точность $\sim\varepsilon$, то расчет надо вести до значения $\tau = \tau^*$:

$$\tau^* = (1/\mu_1)\ln(1/\varepsilon). \tag{14.7}$$

Рассмотрим некоторые вычислительные аспекты применения метода установления.

Для решения нестационарной к-мерной задачи (14.2) можно применить один из экономичных методов (см. § 13.2, 13.3). Для того чтобы установившееся распределение температуры было достаточно близким к решению $T(p)$ стационарной задачи, необходимо выбирать достаточно малые шаги η и h_l ($1 \leqslant l \leqslant к$). С другой стороны (так как нас не интересует сам процесс установления), для уменьшения вычислительных затрат на решение стационарной задачи желательно выбрать шаг по времени максимально возможным. Поэтому желательно найти оптимальный шаг η_0 по времени.

Рассмотрим двухмерную задачу стационарной теплопроводности с граничными условиями I рода в прямоугольнике:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{q_v(x, y)}{\lambda}=0,\ 0<x<d,\ 0<y<b;\\ &T(x, y)|_S=g(x, y).\end{aligned}\right\} \tag{14.8}$$

Задаче (14.8) поставим в соответствие нестационарную задачу:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\Theta}{\partial\tau}=\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2}+\frac{q_v(x, y)}{\lambda};\\ &0<x<d,\ 0<y<b,\ \tau>0;\\ &\Theta(x, y, 0)=f(x, y);\\ &\Theta(x, y, \tau)|_S=g(x, y).\end{aligned}\right\} \tag{14.9}$$

Для решения задачи (14.9) одним из экономичных методов в области $\{0\leqslant x\leqslant d,\ 0\leqslant y\leqslant b\}$ введем равномерную сетку $\{x_n=nh_1,\ y_m=mh_2,\ 0\leqslant n\leqslant N,\ 0<m\leqslant M\}$.

Если применить метод переменных направлений (13.10), (13.11), то можно показать (см., например, [42]), что оптимальный шаг по времени выбирается по формуле

$$\eta_0\approx(1/\pi)(d^2/N^2+b^2/M^2)^{1/2}(1/d^2+1/b^2)^{-1/2}, \tag{14.10}$$

причем для достижения заданной точности расчета ε необходимо сделать минимум Φ шагов

$$\Phi(\eta_0)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{d^2}{N^2}+\frac{b^2}{M^2}\right)^{-1/2}\left(\frac{1}{d^2}+\frac{1}{b^2}\right)^{-1/2}\ln\frac{1}{\varepsilon}. \tag{14.11}$$

Сравнение выражений (14.7) и (14.10) дает

$$\Phi(\eta_0)=\frac{\tau^*}{\eta_0}.$$

Исследование локально-одномерной схемы (13.27), (13.28) применительно к задачам (14.8), (14.9) показывает, что формулы (14.10), (14.11) справедливы и в этом случае.

К сожалению, оценки типа (14.10), (14.11) удается получить только для краевых задач с известными границами спектра разностного оператора. Однако формулы (14.10), (14.11) можно использовать и при решении более сложных задач. Например, при исследовании температурных полей в областях сложной формы можно подставить в (14.10) характерные размеры области, число узлов сетки и определить порядок величины η_0. Значение η_0 оказывает существенное влияние на число шагов $\Phi(\eta_0)$, необходимых для установления нестационарного решения с заданной точностью. Качественная картина зависимости $\Phi_\varepsilon(\eta)$ показана на рис. 14.1. Минимум кривой $\Phi_\varepsilon(\eta)$ достигается в точке $\eta=\eta_0$. Небольшое отклонение шага от оптимального значения увеличивает требуемое число шагов Φ во столько раз, во сколько η отличается от η_0.

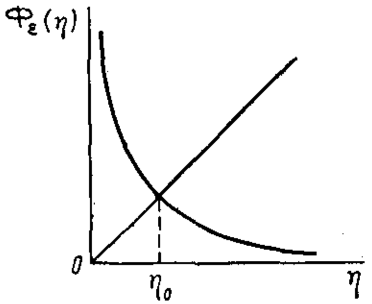


Рис. 14.1. Зависимость необходимого числа шагов для установления с заданной точностью Φ_ε от шага η

Так как в общем случае неизвестно необходимое число шагов по времени для достижения установления решения, на практике вычисления прекращают при выполнении одного из условий:

$$\|\hat{u} - u\| \leqslant \varepsilon; \tag{14.12}$$

$$\|\hat{u} - u\| \leqslant \varepsilon\left(1 - \frac{\|\hat{u} - u\|}{\|\check{u} - u\|}\right). \tag{14.13}$$

Условие (14.13) является более надежным по сравнению с условием (14.12). Как показано выше, эффективность метода установления увеличивается, если при расчетах использовать оптимальный шаг η_0 по временной переменной. Другой эффективный прием уменьшения требующегося времени счета на установление заключается в комплексной организации расчета.

Суть ее заключается в следующем. В пространственной области $\Omega(p)$ строится последовательность сгущающихся вдвое сеток. На исходной, самой грубой, сетке задаются начальные значения температуры, которые можно выбирать и из физических соображений. Так как число узлов сетки в этом случае невелико, то установление достигается при небольшом числе вычислений. Полученное решение интерполируется на следующую, более мелкую, сетку и выбирается на ней в качестве начального условия и т. д. Полученное в результате решение можно далее уточнить способом Рунге* с использованием всех сеток. В работах [72, 88] показано также, что счет на установление можно проводить с переменным шагом по времени.

Для краевых задач с известными границами спектра разностных операторов построены специальные наборы шагов $\eta_i\ (1 \leqslant i \leqslant \Phi)$,

---

* Опишем способ Рунге для задачи с одной пространственной переменной. Пусть имеются значения численного решения на двух последовательных сетках $u(x;\ h)$ и $u(x;\ kh)$, где $k>1$. Тогда погрешность решения на сетке с меньшим шагом равна

$$\Delta u(x;\ h) \approx |u(x;\ h) - u(x;\ kh)|/(k^\nu - 1),$$

где ν — порядок точности схемы по переменной x. Если погрешность $\Delta u(x;\ h)$ суммировать с численным решением, то тем самым мы уточним его:

$$\check{u}(x;\ h) = u(x;\ h) + [u(x;\ h) - u(x;\ kh)]/(k^\nu - 1).$$

расчет с которыми обеспечивает более быстрое установление, чем использование постоянного оптимального шага. Так, при счете на установление задачи с граничными условиями I рода в кубе по экономичным схемам с чебышевским набором шагов требуется $\sim\sqrt{N}$ шагов, а с постоянным оптимальным шагом $\sim N$ шагов, где N — число узлов по одной координате.

§ 14.2. Стационарные разностные схемы и прямые методы вычисления разностного решения

Численное исследование стационарных задач теплопроводности возможно и на основе решения краевой задачи для стационарного уравнения теплопроводности

$$\operatorname{div}(\lambda(p)\operatorname{grad} T(p))+q_v(p)=0. \tag{14.14}$$

С помощью известных методов построения разностных схем (см. § 11.2) можно перейти к аппроксимирующему уравнение (14.14) разностному аналогу. Например, для краевой задачи стационарной теплопроводности в прямоугольнике (при $\lambda=\text{const}$) с граничными условиями I рода с помощью вариационного метода можно составить следующую стационарную разностную схему:

$$(u_{n-1,m}-2u_{nm}+u_{n+1,m})/h_1^2+(u_{n,m-1}-2u_{nm}+u_{n,m+1})/h_2^2+\omega_{nm}=0 \tag{14.15}$$

на сетке $x_n=nh_1$, $y_m=mh_2$ $(0\leqslant n\leqslant N,\ 0\leqslant m\leqslant M)$.

Задача решения схем типа (14.15) является сложным вопросом. Матрица системы типа (14.15) — ленточная, слабо заполнена. При небольших N и M вычисление разностного решения возможно методом исключения Гаусса. Но уже при решении трехмерной задачи методом Гаусса число действий неприемлемо велико, так как в этом методе не используется слабое заполнение ленты матрицы. Чаще всего для решения стационарных схем теплопроводности используются итерационные методы (см. § 14.3). А для некоторых краевых задач в области простой формы (прямоугольник, круг, ступенчатые области) разработаны быстрые прямые методы (преобразование Фурье, метод декомпозиции) [88].

Рассмотрим, например, применение метода быстрого преобразования Фурье к решению уравнения (14.15). Согласно методу разделения переменных, представим разностное решение в виде ряда

$$u_{nm}=\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{M-1}c_{jk}v^{nj}w^{mk}, \tag{14.16}$$

где $v=\exp(2\pi i/N)$, $w=\exp(2\pi i/M)$. Для определения коэффициентов c_{jk} подставим выражение (14.16) в уравнение (14.15), результаты умножим на $v^{-nr}w^{-mp}$ и просуммируем по n от 0 до $N-1$ и по

m от 0 до $M-1$. Тогда, учитывая условие ортогональности гармоник, получим выражения для коэффициентов Фурье

$$c_{jk}=d_{jk}\Big/\left(\frac{4}{h_1^2}\sin^2\frac{\pi j}{N}+\frac{4}{h_2^2}\sin^2\frac{\pi k}{M}\right), \tag{14.17}$$

где $$d_{jk}=\frac{1}{NM}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1}\omega_{nm}v^{-nj}w^{-mk},\ 0\leqslant j\leqslant N-1,\ 0\leqslant k\leqslant M-1. \tag{14.18}$$

Расчет по формулам (14.17), (14.18) неэкономичен. Если числа N и M разлагаются на множители, то формулу (14.18) можно преобразовать так, что число действий для нахождения коэффициентов d_{jk} значительно уменьшится. В этом случае расчет по методу Фурье по экономичности практически не уступает даже методу прогонки.

§ 14.3. Применение итерационных методов

Для решения стационарных разностных схем типа (14.15) наиболее эффективными являются итерационные методы. Рассмотрим некоторые общие вопросы решения систем линейных уравнений методом итераций. Система линейных разностных уравнений может быть записана в форме

$$A\vec{u}=\vec{\varphi}, \tag{14.19}$$

где $\vec{u}$ — вектор неизвестных; A — матрица коэффициентов при неизвестных; $\vec{\varphi}$ — вектор свободных членов.

Матрица A не выраждена, поэтому всегда имеет обратную и решение уравнения (14.19) можно записать в виде

$$\vec{u}=A^{-1}\vec{\varphi}. \tag{14.20}$$

С помощью элементарных преобразований уравнение (14.20) можно привести к более удобной форме для итерационного процесса:

$$\vec{u}=B\vec{u}+\vec{g}. \tag{14.21}$$

Тогда алгоритм нахождения $(k+1)$-го приближения записывается в виде

$$\vec{u}^{(k+1)}=B\vec{u}^{(k)}+\vec{g}\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{14.22}$$

Для определения погрешности приближенного решения имеем на k-й итерации $\vec{\varepsilon}^{(k)}=\vec{u}-\vec{u}^{(k)}$.

Тогда

$$\vec{\varepsilon}^{(k+1)}=\vec{u}-\vec{u}^{(k+1)}=\vec{u}-B\vec{u}^{(k)}-\vec{g},$$

и так как из (14.21) $(E-B)\vec{u}=\vec{g}$, то $\vec{\varepsilon}^{(k+1)}=\vec{u}-B\vec{u}^{(k)}-[E-B]\vec{u}.$

$$\tag{14.23}$$

Из равенства (14.22) следует

$$\vec{\varepsilon}^{(k+1)}=B\vec{\varepsilon}^{(k)}=B^2\vec{\varepsilon}^{(k-2)}=\ldots=B^k\vec{\varepsilon}^{(0)}. \qquad (14.24)$$

Записанная последовательность равенств показывает, что метод итераций (14.22) сходится при любых $\varepsilon^{(0)}$, если все собственные числа матрицы B по модулю меньше единицы. Таким образом, условие сходимости итерационного алгоритма

$$\rho(B)<1,$$

где $\rho(B)=\max\limits_m|\mu_m|$; μ_m — m-е собственное число матрицы B.

Рассмотрим некоторые итерационные методы, наиболее часто применяемые в практике решения стационарных задач теплопроводности. Простейшим алгоритмом является метод простой итерации, называемый еще *точечным методом Якоби.* Запишем разностную аппроксимацию уравнения Пуассона в декартовых координатах на равномерной пространственной сетке с шагом h:

$$(u_{n+1,\,m}-2u_{nm}+u_{n-1,\,m})/h^2+(u_{n,\,m+1}-2u_{nm}+u_{n,\,m-1})/h^2+$$
$$+\omega_{nm}=0\ (n=1,\ 2,\ \ldots,\ N-1;\ m=1,\ 2,\ \ldots,\ M-1).$$

Представим последнюю систему уравнений в виде (14.21)

$$u_{nm}=(u_{n+1,\,m}+u_{n-1,\,m}+u_{n,\,m+1}+u_{n,\,m-1})/4+h^2\omega_{nm}/4,$$

откуда следует простейший итерационный алгоритм

$$u_{nm}^{(k+1)}=(u_{n+1,\,m}^{(k)}+u_{n-1,\,m}^{(k)}+u_{n,\,m+1}^{(k)}+u_{n,\,m-1}^{(k)})/4+h^2\omega_{nm}/4. \qquad (14.25)$$

Известно [88], что для схемы (14.25)

$$\rho(B)=(\cos\pi/N+\cos\pi/M)/2<1,$$

поэтому процесс итераций (14.25) всегда сходится. Однако при малом шаге h (больших N и M) $\rho(B)\sim 1$ и сходимость итерации поэтому очень медленная. Предложены итерационные алгоритмы с более высокой скоростью сходимости. Так, в *методе Зейделя* это достигается за счет того, что на каждой итерации новые значения $u_{nm}^{(k+1)}$ используются сразу по мере их вычисления:

$$u_{nm}^{(k+1)}=(u_{n+1,\,m}^{(k)}+u_{n-1,\,m}^{(k+1)}+u_{n,\,m+1}^{(k)}+u_{n,\,m-1}^{(k+1)})/4+h^2\omega_{nm}/4. \qquad (14.26)$$

Итерационная схема Зейделя (14.26) выгодна еще тем, что для своей реализации требует всего $N+1$ и $M+1$ ячеек памяти для хранения значений u_{nm}, так как новые значения $u_{nm}^{(k+1)}$ сразу заносятся на место старых $u_{nm}^{(k)}$.

Теплопроводность квадратной пластины. Найдем распределение температуры в квадратной пластине, на одной стороне которой поддерживается температура 100 °С, а на остальных трех — температура 0 °С (рис. 14.2). При отсутствии внутренних источников теплоты ($q_v = 0$) разностный аналог уравнения теплопроводности имеет вид

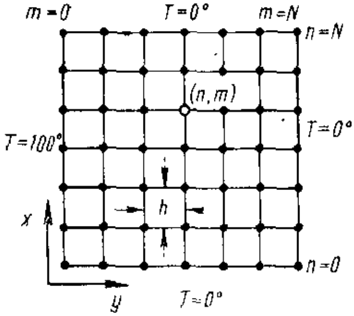


Рис. 14.2. К постановке краевой задачи теплопроводности квадратной пластины

$$u_{nm} = (u_{n+1,\,m} + u_{n-1,\,m} + u_{n,\,m+1} + u_{n,\,m-1}) \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1;\ m = 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1).$$

Решение системы алгебраических уравнений получим с помощью итерационной схемы Зейделя (14.26) при $\omega = 0$. В нулевом приближении по всему объему зададим температуру 0°. Процесс итераций во всех узлах сетки повторяется до тех пор, пока разность в значениях температуры последующих итераций не будет достаточно мала. А именно расчет прекращается, когда сумма ε абсолютных значений разностей температур в двух последующих итерациях во всех точках станет меньше заданной величины ε_{max}. Вычисления

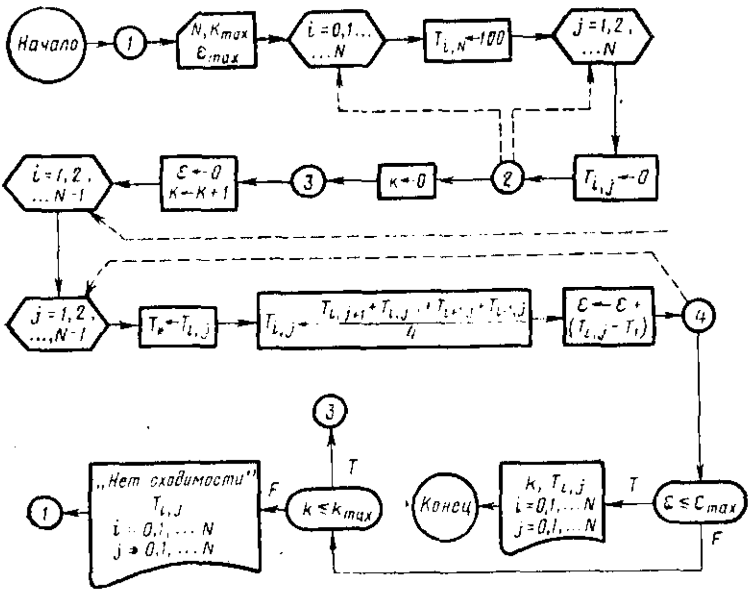


Рис. 14.3. Блок-схема программы к итерационной схеме Зейделя

будем также прекращать, если число полных итераций k станет больше предельно заданного значения k_{max}.

Составим программу на алгоритмическом языке ФОРТРАН для ЭВМ ЕС-1022.

С п и с о к и д е н т и ф и к а т о р о в. EPS — сумма ε абсолютных величин отклонений температуры в последующих приближениях; EPSMAX — наибольшее допустимое значение ε_{max} из ε; HOLDT — массив для хранения вычисленного решения на каждой итерации; I, J — индексы узлов сетки; ITER — счетчик итераций k; ITMAX — максимально возможное число итераций; N — число интервалов по одной из сторон квадрата; T — массив температур.

Текст программы представим ниже. Блок-схема программы показана на рис. 14.3.

```
C       СТАЦИОНАРНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ КВАДРАТНОЙ
C       ПЛАСТИНЫ
C
C       ..... ВВОД И ПЕЧАТЬ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ .....
        DIMENSION T(11, 11)
      1 READ(1, 1ØØ) N, ITMAX, EPSMAX
        WRITE(3, 2ØØ) N, ITMAX, EPSMAX
C       ..... ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ НАЧАЛЬНОЙ
C       ТЕМПЕРАТУРЫ .....
        NP1=N+1
        DO 2 I=1, NP1
        T(I, 1)=1ØØ. Ø
        DO 2 J=2, NP1
      2 T(I, J)=Ø. Ø
C       ..... ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ
C       ПРИБЛИЖЕНИЙ ДЛЯ ЗНАЧЕНИЙ ТЕМПЕРАТУРЫ
C       В УЗЛАХ СЕТКИ, ИТЕРАЦИИ ПРОВОДЯТСЯ ДО
C       ВЫПОЛНЕНИЯ УСЛОВИЙ СХОДИМОСТИ .....
        ITER=Ø
      3 EPS=Ø. Ø
        ITER=ITER+1
        DO 4I=2, N
        DO 4J=2, N
        HOLDT=T(I, J)
        T(I, J)=(T(I, J+1)+T(I, J-1)+T(I+1, J)+
       +T(I-1, J))/4.Ø.
      4 EPS=EPS+ABS(T(I, J)-HOLDT)
C       ..... УСЛОВИЕ ПРЕКРАЩЕНИЯ ИТЕРАЦИЙ
        IF(EPS. LE. EPSMAX) GO TO 6
        IF(ITER-ITMAX) 3, 3, 8
C       ..... ПЕЧАТЬ ПАРАМЕТРА ITER И
C       РЕЗУЛЬТИРУЮЩЕГО ПОЛЯ ТЕМПЕРАТУР .....
      6 WRITE(3, 2Ø1) ITER
        DO 7 I=1, NP1
      7 WRITE(3, 2Ø2) (T(I, J), J=1, NP1)
        GO TO 1
C       ..... КОММЕНТАРИЙ ДЛЯ СЛУЧАЯ, КОГДА ЧИСЛО
C       ИТЕРАЦИЙ ПРЕВЫШАЕТ ITMAX .....
      8 WRITE(3, 2Ø3)
```

```
      DO 9 I=1, NP1
    9 WRITE (3, 2∅2) (T(I, J), J=1, NP1)
      GO TO 1
C     ..... ФОРМАТЫ ДЛЯ ВВОДА И ПЕЧАТИ ДАННЫХ .....
  1∅∅ FORMAT(11X, I4, 11X, I4, 12X, E8.1)
  2∅∅ FORMAT (62H1 _____ СТАЦИОНАРНАЯ _
     * ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ _
      1 КВАДРАТНОЙ _ ОБЛАСТИ _ ПРИ _ ДАННЫХ/1∅
     * HON _________=2 _, I5/1H _ ITMAX ___=_,
     * I5/1∅H _ EPSMAX _=_, E12.2 )
  2∅1 FORMAT (31HO УСЛОВИЯ _ СХОДИМОСТИ _
     * ВЫПОЛНЕНЫ _ ПОСЛЕ,
      1 I3, _ 9H _ ИТЕРАЦИЙ/18HO ТЕМПЕРАТУРНОЕ _
     * ПОЛЕ)
  2∅2 FORMAT (1HO, 11F9.4)
  2∅3 FORMAT (33HO _ УСЛОВИЯ _ СХОДИМОСТИ _ НЕ _
     * ВЫПОЛНЯЮТСЯ)
      END
```

Исходные данные для расчета:

I вариант: N=8, ITMAX=100, EPSMAX=1.OE — 4;

II вариант: N=4, ITMAX=50, EPSMAX=1.OF — 5.

Результаты счета I варианта данных: N=8, ITMAX=100, EPSMAX=0.10F — 03.

Условия сходимости выполнены после 88 итераций

Температурное поле

100,0000	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
100,0000	48,2587	26,9301	16,3567	10,2941	6,4373	3,7683	1,7413	0,0
100,0000	66,1045	43,1052	28,2027	18,3822	11,6868	6,8946	3,1969	0,0
100,0000	73,0542	51,1835	34,9567	23,3455	15,0330	8,9266	4,1515	0,0
100,0000	74,9290	53,6078	37,1353	24,9999	16,1733	9,6273	4,4826	0,0
100,0000	73,0542	51,1835	34,9667	23,3455	15,0330	8,9266	4,1515	0,0
100,0000	66,1045	43,1052	28,2027	18,3822	11,6868	6,8946	3,1969	0,0
100,0000	48,2587	26,9301	16,3567	10,2941	6,4373	3,7683	1,7413	0,0
100,0000	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

Результаты для II варианта данных: N=4, ITMAX=50, EPSMAX=0.10E — 04.

Условия сходимости выполнены после 22 итераций

Температурное поле

100,0000	0,0	0,0	0,0	0,0
100,0000	42,8571	18,7500	7,1428	0,0
100,0000	52,6785	25,0000	9,8214	0,0
100,0000	42,8571	18,7500	7,1428	0,0
100,0000	0,0	0,0	0,0	0,0

Распределение температур в квадрате приведено на сетках с узлами 8×8 и 4×4. Даже при таком количестве узлов получено удовлетворительное согласование между результатами. Ускорить сходимость итерационных схем типа (14.25) и (14.26) можно применением релаксационных параметров.

Очевидно, что равенство

$$u_{nm}^{(k+1)}=u_{nm}^{(k)}+\gamma\left(u_{nm}^{(k+1)}-u_{nm}^{(k)}\right) \tag{14.27}$$

представляет собой тождество при $\gamma=1$. Меняя значение γ, можно управлять итерационным процессом, который с учетом (14.26) и (14.27) примет вид

$$u_{nm}^{(k+1)}=(1-\gamma)\,u_{nm}^{(k)}+\gamma\left(u_{n-1,\,m}^{(k+1)}+u_{n+1,\,m}^{(k)}+u_{n,\,m-1}^{(k+1)}+u_{n,\,m+1}^{(k)}+\right.$$
$$\left.+h^2\omega_{nm}\right)/4 \tag{14.28}$$

Анализ собственных значений матрицы B схемы (14.28) показывает [88], что итерационный процесс сходится при $0<\gamma<2$. При этом существует оптимальное значение $1<\gamma_0<2$. Так, для разностного аналога уравнения Пуассона на равномерной сетке в прямоугольной области

$$\gamma_0=2\Big/\left(1+\sqrt{1-\rho^2(B)}\right).$$

Если наибольшая скорость сходимости итерационного процесса достигается при $\gamma_0>1$, то процесс называется *методом верхней релаксации*, при $\gamma_0<1$ — *методом нижней релаксации*.

При решении сложных задач, где определение $\rho(B)$ матрицы затруднительно, оптимальное значение γ_0 параметра γ определяют с помощью численного эксперимента. Вначале задача просчитывается с параметром $\gamma=1$. Затем постепенно увеличивают γ, контролируя скорость сходимости итераций. Как только скорость сходимости итерационного процесса замедляется, дальнейшее увеличение γ прекращается. Полученное значение γ_0 считается оптимальным.

Сравним методы Зейделя и верхней релаксации на примере решения следующей задачи.

Теплопроводность прямоугольной пластины. Пусть процесс стационарной теплопроводности в брусе прямоугольного сечения (переносом теплоты вдоль бруса пренебрегаем) описывается уравнением стационарной теплопроводности

$$\frac{\partial^2T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2T}{\partial y^2}+\frac{q_v(x,\,y)}{\lambda}=0,\ 0<x<d,\ 0<y<b,$$

с граничными условиями

$$T\,|_{x=0}=\mu_1(y),\quad T\,|_{y=0}=\mu_3(x),$$
$$T\,|_{x=d}=\mu_2(y),\quad T\,|_{y=b}=\mu_4(x).$$

Решение сформулированной краевой задачи получим для следующих исходных данных: $\frac{1}{\lambda}q_v(x,\,y)=-1$; $\mu_1(y)=\mu_2(y)=1-\sin^2\pi y/b$;

$\mu_3(x)=\mu_4(x)=1$; $b=1$, $d=2$. Вначале на алгоритмическом языке АЛГОЛ (транслятор ТА-1М) составим программу решения методом Зейделя.

Список идентификаторов. H1 — шаг по координате x; H2 — шаг по координате y; D, B — размеры прямоугольника; EPS — погрешность счета; I, J — текущие координаты узлов; IN, JN — число узлов по оси x и y; KMAX — число итераций; K — текущий номер итерации; U — массив значений искомой функции.

```
МЕТОД ЗЕЙДЕЛЯ
BEGIN REAL D, B, PI, L1, L2, T, H1, H2, Z, R, RMAX, RP,
EPS, S;
INTEGER I, J, IN, JN, JNM, K, KMAX, INM;
P0042 (IN, JN, D, B, PI, KMAX, EPS, RP);
P1041 (IN, JN, D, B, PI, KMAX, EPS, RP);
BEGIN ARRAY U[1:IN, 1:JN];
INM:=IN − 1; JNM:=JN − 1; H1:=D/INM; H2:=B/JNM;
P1041 (H1, H2);
L1:=1/H1↑2; L2:=1/H2↑2; T:=2×(L1+L2); Z:=0;
FOR J:=2 STEP 1 UNTIL JNM DO
BEGIN FOR I:=2 STEP 1 UNTIL INM DO
U [I, J]:=0;
U [1, J]:=U [IN, J]:=1 − SIN(PI×(J − 1)/JNM)↑2;
END;
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL IN DO
U [I, 1]:=U [I, JN]:=1;
FOR K:=1 STEP 1 UNTIL KMAX DO
BEGIN
RMAX:=0;
FOR I:=2 STEP 1 UNTIL INM DO
FOR J:=2 STEP 1 UNTIL JNM DO
BEGIN S:=U [I, J];
U [I, J]:=(L1×(U[I+1, J]+U[I − 1, J])+L2×(U[I, J+1]+U×
×[I, J − 1]) − 1)/T;
R:=ABS (S − U[I, J]);
IF RMAX − R<0 THEN RMAX:=R;
END;
P1041 (K, RMAX);
IF RMAX<EPS THEN GO TO M;
END;
M:FOR I:=1 STEP 2 UNTIL IN DO
P0740 (U[I, 1], Z, 0, IN, 03, 04, 03, 04, 03, 04, 03, 04, 03, 04,
03, 04, 0,3, 04, 03, 04, 03, 04, 03, 04);
END;
END;
```

Для решения тестовой задачи по методу верхней релаксации на алгоритмическом языке АЛГОЛ составлена программа для транслятора ТА-1М, которая записывается в виде (список идентификаторов тот же, что и в предыдущей программе):

МЕТОД ВЕРХНЕЙ РЕЛАКСАЦИИ

```
BEGIN REAL D, B, PI, L1, L2, T, H1, H2, Z, R, RMAX, RP,
EPS, S;
REAL Y;
INTEGER I, J, IN, JN, JNM, K, KMAX, INM;
P0042 (IN, N, D, B, PI, KMAX, EPS, RP);
P1041 (IN, N, D, B, PI, KMAX, EPS, RP);
BEGIN ARRAY U[1:IN, 1:JN];
INM:=IN - 1; JNM:=JN - 1; H1:=D/INM; H2:=B/JNM;
P1041 (H1, H2);
L1:=1/H1↑2; L2:=1/H2↑2; T:=2×(L1+L2); Z:=0;
FOR J:=2 STFP 1 UNTIL JNM DO
BEGIN FOR I:=2 STEP 1 UNTIL INM DO
U[I, J]:=0;
U[1, J]:=U[IN, J]:=1 - SIN(PI * (J - 1)/JNM)↑2;
END;
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL IN DO
U[I, 1]:=U[I, JN]:=1;
Y:=1;
FOR K:=1 STEP 1 UNTIL KMAX DO
BEGIN
RMAX:=0
FOR I:=2 STEP 1 UNTIL INM DO
FOR J:=2 STEP 1 UNITL JNM DO
BEGIN S:=U[I, J];
U[I, J]:=(L1×U[I+1, J]+U[I - 1, J])+L2×(U[I, J+1)+U[I,
J - 1]) - 1)/T;
R:=U[I, J] - S; U[I, J]:=S+RP×R;
IF ABS(R)>RMAX THEN RMAX:=ABS(R),
END;
P1041 (K, RMAX);
IF RMAX<EPS THEN GO TO M;
Y:=RMAX;
END;
M:FOR I:=1 STEP 1 UNTIL IN DO
P0740 (U[I, 1], Z, O, IN, 03, 04, 03, 04, 03, 04, 03, 04, 03, 04, 03,
04, 03, 04, 03, 04, 03, 04);
END;
END;
```

При решении тестовой задачи по обоим методам были введены одинаковые исходные данные: IN=11, JN=1, KMAX=350, EPS==0,1·10⁻³, RP=1,3.

В результате расчета температур по методу Зейделя было сделано 73 итерации. Результаты решения приведены в табл. 14.1. При расчете температур по методу верхней релаксации счет прекратился после выполнения 40 итераций, результаты счета показаны в табл. 14.2. Если сравнить результаты расчетов поля температур по методу Зейделя и методу верхней релаксации с «точным» решением задачи (табл. 14.3), полученным по методу Зейделя после 238 итераций (отличие значений температуры в последовательных при-

Таблица 14.1

Значения координаты y

x	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,0	1,0000	0,9042	0,6548	0,3450	0,0959	0,0000	0,0949	0,3444	0,6533	0,9037	1,0000
0,2	1,0000	0,8647	0,7221	0,5860	0,4881	0,4517	0,4879	0,5865	0,7217	0,8644	1,0000
0,4	1,0000	0,8941	0,7997	0,7225	0,6712	0,6531	0,6711	0,7225	0,7996	0,8941	1,0000
0,6	1,0000	0,9178	0,8485	0,7953	0,7616	0,7501	0,7616	0,7954	0,8486	0,9179	1,0000
0,8	1,0000	0,9305	0,8738	0,8304	0,8038	0,7949	0,8039	0,8305	0,8734	0,9306	1,0000
0,10	1,0000	0,9343	0,8803	0,8409	0,8162	0,8080	0,8163	0,8409	0,8808	0,9344	1,0000
1,2	1,0000	0,9305	0,8733	0,8305	0,8039	0,7949	0,8040	0,8308	0,8734	0,9306	1,0000
1,4	1,0000	0,9178	0,8486	0,7954	0,7617	0,7502	0,7618	0,7955	0,8487	0,9179	1,0000
1,6	1,0000	0,7942	0,7998	0,7228	0,6713	0,6532	0,6713	0,7226	0,7997	0,8941	1,0000
1,8	1,0000	0,8647	0,7221	0,5870	0,4882	0,4518	0,4880	0,5860	0,7217	0,8645	1,0000
2,0	1,0000	0,9042	0,6548	0,3459	0,0959	0,0000	0,0949	0,3444	0,6533	0,9037	1,0000

Таблица 14.2

Значения координаты y

x	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,0	1,0000	0,9046	0,6548	0,3459	0,0959	0,0000	0,0949	0,3444	0,6533	0,9037	1,0000
0,2	1,0000	0,8647	0,7221	0,5870	0,4882	0,4518	0,4879	0,5866	0,7217	0,8645	1,0000
0,4	1,0000	0,8941	0,7998	0,7227	0,6713	0,6533	0,6713	0,7226	0,7998	0,8942	1,0000
0,6	1,0000	0,9179	0,8486	0,7955	0,7618	0,7503	0,7619	0,7956	0,8488	0,9180	1,0000
0,8	1,0000	0,9306	0,8734	0,8306	0,8041	0,7952	0,8042	0,8308	0,8736	0,9307	1,0000
1,0	1,0000	0,9344	0,8809	0,8412	0,8166	0,8083	0,8167	0,8412	0,8810	0,9346	1,0000
1,2	1,0000	0,9306	0,8735	0,8307	0,8042	0,7953	0,8043	0,8309	0,8736	0,9307	1,0000
1,4	1,0000	0,9180	0,8488	0,7952	0,7620	0,7505	0,7620	0,7957	0,8488	0,9180	1,0000
1,6	1,0000	0,8942	0,7999	0,7228	0,6715	0,6534	0,6715	0,7228	0,7998	0,8942	1,0000
1,8	1,0000	0,8648	0,7222	0,5871	0,4883	0,4519	0,4881	0,5867	0,7218	0,8645	1,0000
2,0	1,0000	0,9046	0,6548	0,3459	0,0959	0,0000	0,0949	0,3444	0,6533	0,9037	1,0000

Таблица 14.3

Значения координаты y

x	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,0	1,0000	0,9046	0,6548	0,3459	0,0959	0,0000	0,0949	0,3444	0,6533	0,9037	1,0000
0,2	1,0000	0,8648	0,7223	0,5872	0,4884	0,4520	0,4882	0,5867	0,7218	0,8645	1,0000
0,4	1,0000	0,8943	0,8000	0,7231	0,6718	0,6537	0,6717	0,7230	0,7999	0,8942	1,0000
0,6	1,0000	0,9181	0,8490	0,7960	0,7624	0,7508	0,7623	0,7959	0,8490	0,9181	1,0000
0,8	1,0000	0,9208	0,8738	0,8312	0,8047	0,7957	0,8047	0,8311	0,8738	0,9308	1,0000
1,0	1,0000	0,9347	0,8813	0,8416	0,8171	0,8088	0,8171	0,8416	0,8812	0,9347	1,0000
1,2	1,0000	0,9308	0,8738	0,8312	0,8047	0,7957	0,8047	0,8311	0,8738	0,9308	1,0000
1,4	1,0000	0,9181	0,8490	0,7960	0,7624	0,7508	0,7623	0,7959	0,8490	0,9181	1,0000
1,6	1,0000	0,8943	0,8001	0,7231	0,6718	0,6537	0,6717	0,7230	0,7999	0,8942	1,0000
1,8	1,0000	0,8648	0,7223	0,5872	0,4884	0,4520	0,4882	0,5867	0,7218	0,8645	1,0000
2.0	1,0000	0,9046	0,6548	0,3459	0,0959	0,0000	0,0949	0,3444	0,6533	0,9037	1,0000

ближениях было порядка 10^{-18}), то окажется, что расчет по методу верхней релаксации точнее.

Затем в приведенных выше программах заменим критерий точности на $|\hat{u} - u| < \varepsilon[1 - (\hat{u} - u)/(\check{u} - u)]$ и просчитаем тестовую задачу при тех же данных. В результате при счете по методу Зейделя было сделано 96 итераций. Результаты расчета приведены в табл. 14.4. При счете по методу верхней релаксации счет прекратился после выполнения 49 итераций. Результаты расчета поля температур совпадают с результатами счета по методу Зейделя (табл. 14.4).

Таблица 14.4

	Значения координаты y										
x	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,0	1,0000	0,9046	0,6548	0,3459	0,0959	0,0000	0,0949	0,3444	0,6533	0,9037	1,0000
0,2	1,0000	0,8648	0,7223	0,5872	0,4884	0,4520	0,4881	0,5867	0,7218	0,8645	1,0000
0,4	1,0000	0,8943	0,8000	0,7239	0,6717	0,6536	0,6716	0,7229	0,7999	0,8942	1,0000
0,6	1,0000	0,9181	0,8490	0,7959	0,7623	0,7507	0,7623	0,7959	0,8490	0,9181	1,0000
0,8	1,0000	0,9308	0,8737	0,8311	0,8046	0,7956	0,8046	0,8311	0,8738	0,9308	1,0000
1,0	1,0000	0,9346	0,8812	0,8415	0,8170	0,8087	0,8170	0,8415	0,8812	0,9346	1,0000
1,2	1,0000	0,9308	0,8738	0,8311	0,8046	0,7956	0,8046	0,8311	0,8738	0,9308	1,0000
1,4	1,0000	0,9181	0,8490	0,7959	0,7623	0,7508	0,7623	0,7959	0,8490	0,9181	1,0000
1,6	1,0000	0,8943	0,8001	0,7230	0,6717	0,6536	0,6717	0,7229	0,7999	0,8942	1,0000
1,8	1,0000	0,8648	0,7223	0,5872	0,4884	0,4520	0,4881	0,5867	0,7218	0,8645	1,0000
2,0	1,0000	0,9046	0,6548	0,3459	0,0959	0,0000	0,0949	0,3444	0,6533	0,9037	1,0000

Сравнение результатов расчета по критерию $|\hat{u} - u| < \varepsilon$ и по критерию $|\hat{u} - u| < \varepsilon\left(1 - \frac{|\hat{u} - u|}{|u - \check{u}|}\right)$ подтверждает более высокую надежность второго из них.

Важно отметить, что рассмотренные итерационные процессы можно интерпретировать как разностную схему решения некоторых нестационарных задач. Так, схему простой итерации (14.25) можно формально записать в виде

$$E(\hat{u} - u)/\eta - \sum_{i=1}^{2} \Lambda_i u = \omega,$$

где $\Lambda_1 u_{nm} = (u_{n+1,\,m} - 2u_{nm} + u_{n-1,\,m})/h^2$; $\Lambda_2 u_{nm} = (u_{n,\,m+1} - 2u_{nm} + u_{n,\,m-1})/h^2$; $1/\eta = 4/h^2$, или в более общей форме большинство итерационных схем можно представить так:

$$B_{k+1}(\hat{u} - u)/\eta_{k+1} + Au = \omega. \qquad (14.29)$$

Если в итерационной схеме (14.29) оператор B и шаг η не зависят от номера итерации k, то итерационный процесс называется *стационарным*. Представление итерационных схем стационарной теплопроводности в виде (14.29) позволяет использовать для решения многомерных стационарных задач экономичные схемы переменных направлений, расщепления и др., разработанные для решения разностных аналогов задач нестационарной теплопроводности. Кроме того, для решения задач типа (14.29) разработаны и алгоритмы, которые невыгодно применять для решения нестационарных задач теплопроводности. Рассмотрим одну из таких схем, называемую *попеременно-треугольной* [88].

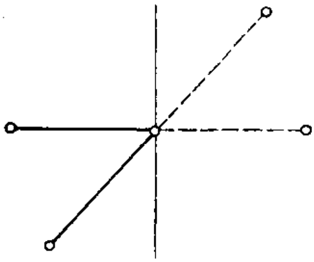


Рис. 14.4. Шаблоны к попеременно-треугольной схеме:
——— — для оператора R_1;
- - - - — для оператора R_2

Пусть в прямоугольной области Ω процесс теплопроводности описывается уравнением Пуассона

$$\lambda_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + q_v(x_1, x_2) = 0. \qquad (14.30)$$

В области Ω выберем шаблон типа «крест» и, переходя к нестационарному уравнению, отвечающему стационарному (14.30), составим чисто неявную разностную схему:

$$(\hat{u} - u)/\eta = (\Lambda_1 + \Lambda_2)\hat{u} + \bar{\omega}. \qquad (14.31)$$

Схему (14.31) перепишем в канонической форме типа (14.29):

$$(E - \eta\Lambda_1 - \eta\Lambda_2)(\hat{u} - u)/\eta - (\Lambda_1 + \Lambda_2)u = \omega. \qquad (14.32)$$

Схемы (14.31), (14.32) неэкономичны, так как требуют большого числа операций для получения разностного решения в каждом узле сетки.

На треугольных шаблонах (рис. 14.4) введем треугольные операторы:

$$R_1 u_{nm} = \lambda_1 (u_{nm} - u_{n-1,\,m})/h_1^2 + \lambda_2 (u_{nm} - u_{n,\,m-1})/h_2^2; \qquad (14.33)$$
$$R_2 u_{nm} = \lambda_1 (u_{nm} - u_{n+1,\,m})/h_1^2 + \lambda_2 (u_{nm} - u_{n,\,m+1})/h_2^2.$$

Так как $\Lambda_1 + \Lambda_2 = -(R_1 + R_2)$, то схему (14.32) можно записать в таком виде:

$$(E + \eta R_1 + \eta R_2)(\hat{u} - u)/\eta - (\Lambda_1 + \Lambda_2)u = \omega. \qquad (14.34)$$

Схема (14.34) имеет первый порядок точности по временно́й переменной, поэтому если в левую часть схемы прибавить член

$$\eta^2 R_1 R_2 (\hat{u} - u)/\eta,$$

имеющий порядок малости $O(\eta^2)$, то это не повлияет на порядок ее точности. Зато оператор $E + \eta R_1 + \eta R_2 + \eta^2 R_1 R_2$ допускает факторизацию, т. е. представим в виде произведения двух операторов $(E+\eta R_1)$ и $(E+\eta R_2)$:

$$(E+\eta R_1)(E+\eta R_2)(\hat{u}-u)/\eta-(\Lambda_1+\Lambda_2)\,u=\omega. \qquad (14.35)$$

Решение системы (14.35) может быть получено методом бегущего счета. Сначала на каждом слое обращают оператор $E+\eta R_1$, решая систему

$$(E+\eta R_1)\,\bar{u}=F(u),$$

где $F(u)=\eta\omega+\eta(\Lambda_1+\Lambda_2)\,u+(E+\eta R_1)(E+\eta R_2)\,u$.

Вычисления при этом ведут слева направо по направлениям x_1, начиная с узла (x_{10}, x_{20}) (рис. 14.5) и кончая узлом (x_{1N}, x_{2M}). Затем, обращая оператор $(E+\eta R_2)$, проводят вычисления в обратном порядке, начиная с узла (x_{1N}, x_{2M}). Разностная схема обратного хода имеет вид

$$(E+\eta R_2)\,\hat{u}=\bar{u}.$$

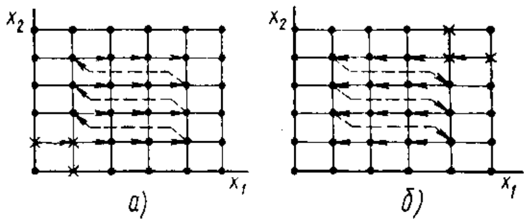


Рис. 14.5. Схема порядка вычислений к попеременно-треугольной схеме:
а — прямой ход; б — обратный ход

Попеременно-треугольная схема может применяться в многомерном случае, а также при решении дифференциальных уравнений теплопроводности с разрывными или переменными коэффициентами [91].

Задача 14.1. Применяя метод разделения переменных, доказать, что шаг по времени, определяемый формулой (14.10), будет оптимальным для продольно-поперечной схемы, соответствующей краевой задаче (14.9) (параметр схемы $\sigma=1/2$).

Задача 14.2. Записать локально-одномерную схему, соответствующую краевой задаче (14.9), и доказать для нее, что оптимальный шаг по времени выбирается по формуле (14.10) (параметр схемы $\sigma=1/2$).

Задача 14.3. Для уравнения Пуассона в прямоугольнике $(0\leqslant x\leqslant d,\ 0\leqslant y\leqslant b)$ на сетке с $h_1\neq h_2$ получить формулы вычисления решения краевой задачи с граничными условиями I рода по методу Зейделя

Задача 14.4. Получить формулы вычислений по методу верхней релаксации на неравномерной сетке $(h_1\neq h_2)$ для задачи стационарной теплопроводности с граничными условиями I рода при действии внутренних источников теплоты в прямоугольнике $(0\leqslant x\leqslant d,\ 0\leqslant y\leqslant b)$.

Глава XI. Основные понятия метода конечных разностей

11.1 На равномерной сетке $x_k=kh$, $k=0, 1, \ldots, K$, запишем разностное уравнение для внутренних узлов в виде

$$\frac{u_{k-1}-2u_k+u_{k+1}}{h^2}-\frac{\alpha}{\lambda l}u_k+\frac{1}{\lambda}\omega_k=0,$$

где $\omega_k=q_v(x_k)$, если $q_v(x)$ — непрерывная функция.

Граничное условие при $x=1$ примет вид $u_k=T_S$. Граничное условие на границе $x=0$ аппроксимируем разностным уравнением

$$(u_1-u_0)/h=(\alpha_1/\lambda)(u_0-T_c).$$

Невязка этого разностного уравнения равна

$$\psi_0=(T_x)_0-\frac{\alpha_1}{\lambda}T_0+\frac{\alpha_1 T_c}{\lambda}-\frac{T_1-T_0}{h}+\frac{\alpha_1}{\lambda}(T_0-T_c)\quad 0{,}5h(T_{xx})_0+$$
$$+0(h^2)=0(h),$$

т. е. имеет меньший порядок малости, чем невязка основного дифференциального уравнения в регулярных узлах.

Изменим разностное уравнение в узлах на левой границе так, чтобы порядок аппроксимации составлял $0(h^2)$. С этой целью разложим $T(x)$ по формуле Тейлора в окрестности узла $x=0$:

$$T_1=T_0+h(T_x)_0+0{,}5h^2(T_{xx})_0+0(h^3),$$

откуда получим

$$(T_1-T_0)/h=(T_x)_0+0{,}5h(T_{xx})_0+0(h^2).$$

Найдем выражение для второй производной в точке $x=0$ из основного дифференциального уравнения

$$(T_{xx})_0=\frac{\alpha}{\lambda l}T_0-\frac{1}{\lambda}q_v(0)$$

и подставим его в предыдущее равенство:

$$\frac{T_1-T_0}{h}-0{,}5h\left[\frac{\alpha}{\lambda l}T_0-\frac{1}{\lambda}q_v(0)\right]=(T_x)_0+0(h^2).$$

Таким образом, выражение в левой части последнего равенства аппроксимирует производную dT/dx в точке $x=0$ на решении дифференциального уравнения со вторым порядком. Учитывая это, получаем, что разностное уравнение на левой границе стержня

$$(u_1-u_0)/h=\beta_1 u_0-\beta_2\quad\left(\beta_1=\alpha_1/\lambda+0{,}5h\alpha/\lambda l;\ \beta_2=\alpha_1 T_c+0{,}5\frac{h}{\lambda}q_v(0)\right)$$

имеет второй порядок аппроксимации на решении поставленной краевой задачи.

11.2. Интегрируя дифференциальное уравнение на отрезке $x_{k-1/2} \leqslant x \leqslant x_{k+1/2}$, получим уравнение баланса теплоты

$$q_{k-1/2} - q_{k+1/2} + \int\limits_{x_{k-1/2}}^{x_{k+1/2}} q_v(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{l} \int\limits_{x_{k-1/2}}^{x_{k+1/2}} \alpha(x)\, T(x)\,\mathrm{d}x;$$

$$q = -\lambda\, \mathrm{d}T/\mathrm{d}x.$$

Проинтегрируем второе уравнение по интервалу сетки:

$$T_{k-1} - T_k = \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} q(x)/\lambda(x)\,\mathrm{d}x.$$

Затем аппроксимируем интегралы, входящие в уравнения, пользуясь простейшими интерполяциями в окрестности узла x_k:

$$\int\limits_{x_{k-1/2}}^{x_{k+1/2}} \alpha(x)\, T(x)\,\mathrm{d}x \approx h\beta_k T_k; \quad \beta_k = \frac{1}{h} \int\limits_{x_{k-1/2}}^{x_{k+1/2}} \alpha(x)\,\mathrm{d}x;$$

$$T_{k-1} - T_k \approx q_{k-1/2} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} 1/\lambda(x)\,\mathrm{d}x.$$

Отсюда определим приближенное значение $q_{k-1/2}$ плотности теплового потока:

$$q_{k-1/2} = -a_k \frac{T_k - T_{k-1}}{h}; \quad a_k = \left(\frac{1}{h} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} 1/\lambda(x)\,\mathrm{d}x \right)^{-1}.$$

С учетом полученных соотношений из уравнения баланса теплоты получим консервативную разностную схему

$$\frac{1}{h}\left[a_{k+1} \frac{u_{k+1} - u_k}{h} - a_k \frac{u_k - u_{k-1}}{h}\right] - \beta_k u_k = -\omega_k,$$

где $\omega_k = \int\limits_{x_{k-1/2}}^{x_{k+1/2}} q_v(x)\,\mathrm{d}x.$

11.3. Составим невязку данной схемы для уравнения теплопроводности:

$$\psi_k = (T_\tau - aT_{xx})_k - A\hat{T}_{k-1} - B\hat{T}_k - C\hat{T}_{k+1} - DT_k.$$

Разложим решение в ряд Тейлора около узла (x_k, τ_l), ограничиваясь членами $0(\eta)$ и $0(h^2)$:

$$\hat{T}_k = T_k + \eta T_\tau(x_k, \tau_i) + 0(\eta^2);$$

$$\hat{T}_{k\pm 1} = T_k \pm hT_x(x_k, \tau_i) + 0{,}5h^2 T_{xx}(x_k, \tau_l) \pm 0(h^3).$$

Подставляя полученные значения в невязку, получим

$$\psi_k = (T_\tau)_k - a(T_{xx})_k - (A+B+C+D)T_k + \eta D(T_\tau)_k + (A-C)h \times$$
$$\times (T_x)_k - 1/2(A+C)h^2(T_{xx})_k + D\cdot 0(\eta^2) + (A-C)\cdot 0(h^3).$$

Приравняем нулю коэффициенты при подобных членах в правой части:

$$A+B+C+D=0,\ \eta D+1=0,\ A-C=0,\ 0{,}5(A+C)h^2+a=0.$$

Отсюда определим

$$A=C=-a/h^2;\ B=2a/h^2+1/\eta;\ D=-1/\eta.$$

Подставим значения коэффициентов в исходное разностное уравнение и получим неявную разностную схему

$$(\hat{u}_k - u_k)/\eta = (a/h^2)(\hat{u}_{k+1} - 2\hat{u}_k + \hat{u}_{k-1}).$$

11.4. Известно (см. гл. VI), что поставленная краевая задача эквивалентна задаче отыскания функции $T(x)$, реализующей минимум функционала:

$$\Phi(T) = \frac{1}{2}[T, T] - \int_0^1 q_v(x)T(x)\,dx - \alpha_1 T_c T(0) - \alpha_2 T_S T(1), \qquad (1)$$

где

$$[u, v] = \int_0^1 [\lambda(x)u'(x)v'(x) + \alpha(x)u(x)v(x)/l]\,dx + \alpha_1 u(0)v(0) +$$
$$+ \alpha_2 u(1)v(1) \qquad (2)$$

на множестве элементов пространства $W_2^1[0, 1]$, которое состоит из функций пространства $L_2[0, 1]$, имеющих на $[0, 1]$ интегрируемые с квадратом обобщенные производные.

Согласно методу Ритца (см. гл. VI), приближенное решение задачи ищем в виде

$$T_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \psi_k^{(n)}, \qquad (3)$$

где координатные функции ψ_k — базис подпространства $V_n \in W_2^1[0, 1]$.

Подставляя T_n в функционал (1), получим

$$\Phi(T_n)=\frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{n-1} a_k\psi_k^{(n)},\ \sum_{k=0}^{n-1} a_k\psi_k^{(n)}\right]-\int_0^1 q_v \sum_{k=0}^{n-1} a_k\psi_k^{(n)}\mathrm{d}x -$$
$$-\alpha_1 T_c \sum_{k=0}^{n-1} a_k\psi_k^{(n)}(0)-\alpha_2 T_S \sum_{k=0}^{n-1} a_k\psi_k^{(n)}(1)=\frac{1}{2}\sum_{k,\,j=0}^{n-1}\beta_{kj}a_k a_j -$$
$$-\sum_{k=0}^{n-1}\gamma_k a_k, \tag{4}$$

где $\beta_{kj}=\beta_{jk}=[\psi_k^{(n)},\ \psi_j^{(n)}]$; (5)

$$\gamma_k=\int_0^1 q_v\psi_k^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x+\alpha_1 T_c\psi_k^{(n)}(0)+\alpha_2 T_S\psi_k^{(n)}(1). \tag{6}$$

Из необходимого условия минимума функции n переменных получаем систему алгебраических уравнений для определения коэффициентов a_k

$$\sum_{j=0}^{n-1}\beta_{kj}a_j-\gamma_k=0,\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1. \tag{7}$$

Для того чтобы построить разностную схему для исходной задачи, введем на отрезке [0, 1] равномерную сетку [с шагом $h=1/(n-1)$ и узлами $x_k=kh$, $k=0, 1, 2, \ldots, N$, где $N=n-1$] и определим на ней координатные функции $\psi_k^{(N)}(x)$, которые построим таким образом, чтобы матрица системы (7) стала трехдиагональной, а в качестве параметров a_k в решении (3) выберем значение искомой функции в узлах сетки.

В качестве функций $\psi_k^{(N)}(x)\in W_2^1$ возьмем функции

$$\psi_k^{(N+1)}(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } 0\leqslant x_{k-1},\ x_{k+1}\leqslant x<1;\\ (x-x_{k-1})/h & \text{при } x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k;\\ (x_{k+1}-x)/h & \text{при } x_k\leqslant x\leqslant x_{k+1}\end{cases} \tag{8}$$

для $k=1, 2, \ldots, N-1$

$$\psi_0^{(N+1)}(x)=\begin{cases}(h-x)/h, & 0\leqslant x\leqslant h;\\ 0, & h\leqslant x\leqslant 1;\end{cases}$$
$$\psi_N^{(N+1)}(x)=\begin{cases}(x-1+h)/h, & 1-h\leqslant x\leqslant 1;\\ 0, & 0\leqslant x\leqslant 1-h,\end{cases} \tag{9}$$

которые отличны от нуля только при $|x-x_j|\leqslant h$, $x\in[0, 1]$, и ортогональны в смысле (2) при $|k-j|\geqslant 2$.

Тогда система (7) примет вид

$$\left.\begin{aligned}&\beta_{k,\,k-1}u_{k-1}+\beta_{k,\,k}u_k+\beta_{k,\,k+1}u_{k+1}=\gamma_k\ \ (k=1,\ 2,\ \ldots,\ N-1);\\&\beta_{0,\,0}u_0+\beta_{0,\,1}u_1=\gamma_0;\\&\beta_{N,\,N-1}u_{N-1}+\beta_{N,\,N}u_N=\gamma_N,\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

где коэффициенты β определяются по следующим формулам:

$$\beta_{k,\,k}=h^{-2}\left|\int\limits_{x_{k-1}}^{x_{k+1}}\lambda(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}\alpha(x)l/[(x-x_{k-1})^2]\,\mathrm{d}x\right|+\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\alpha(x)/l\times$$

$$\times(x-x_{k+1})^2\,\mathrm{d}x;$$

$$\beta_{k,\,k+1}=\beta_{k+1,\,k}=h^{-2}\left[-\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\lambda(x)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{l}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\alpha(x)(x_{k+1}-x)\times\right.$$

$$\left.\times(x-x_k)\,\mathrm{d}x\right];$$

$$\beta_{0,\,0}=h^{-2}\left[\int\limits_0^h\lambda(x)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{l}\int\limits_0^h\alpha(x)(x-h)^2\,\mathrm{d}x\right]+\alpha_1;$$

$$\beta_{N,\,N}=h^{-2}\left[\int\limits_{1-h}^{1}\lambda(x)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{l}\int\limits_{1-h}^{1}\alpha(x)(x-1+h)^2\,\mathrm{d}x\right]+\alpha_2;$$

$$\gamma_k=h^{-1}\left[\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}q_v(x)(x-x_{k-1})\,\mathrm{d}x+\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}q_v(x)(x_{k+1}-x)\,\mathrm{d}x\right];$$

$$\gamma_0=h^{-1}\int\limits_0^h q_v(x)(h-x)\,\mathrm{d}x+\alpha_1T_\mathrm{c};$$

$$\gamma_N=h^{-1}\int\limits_{1-h}^{1}q_v(x)(x-1+h)\,\mathrm{d}x+\alpha_2T_S.$$

11.5. Построим равномерную сетку с шагом h так, что точка разрыва $x=0$ совпадает с узлом сетки x_k. Из первого граничного условия следует, что функция $T(x)$ непрерывна при $x=0$, поэтому значения сеточной функции при $x=0$ будут аппроксимировать это условие. Простейшая аппроксимация второго граничного условия имеет вид

$$a(h)(u_{k+1}-u_k)/h=a(0)(u_k-u_{k-1})/h,$$

где $a(x)$ определяется, например, формулой

$$a(x)=\lambda(x-0{,}5h).$$

Погрешность аппроксимации ψ_k равна

$$\psi_k = a(h)(T_{k+1} - T_k)/h - a(0)(T_k - T_{k-1})/h = \lambda(+0)\frac{dT(+0)}{dx} -$$

$$-\lambda(-0)\frac{dT(-0)}{dx} + \frac{h}{2}\frac{d}{dx}\left(\lambda\frac{dT}{dx}\right)\Big|_{x=+0} + \frac{h}{2}\frac{d}{dx}\left(\lambda\frac{dT}{dx}\right)\Big|_{x=-0} + 0(h^2).$$

Из дифференциального уравнения процесса получим

$$\frac{d}{dx}\left(\lambda\frac{dT}{dx}\right) = -q_v(x)$$

и подставим это выражение в невязку

$$\psi_k = -hq_v(x) + 0(h^2),$$

т. е. погрешность аппроксимации есть величина $0(h)$. Отсюда видно также, что если второе условие сопряжения заменить разностным уравнением

$$a(h)(u_{k+1} - u_k)/h - a(0)(u_k - u_{k-1})/h + hq_x = 0,$$

то погрешность нового уравнения будет $0(h^2)$.

11.6. Необходимым условием устойчивости по начальным данным для сформулированной задачи является условие Неймана (11.69). Для определения множителя роста n-й гармоники μ_n получаем уравнение

$$(\mu_n - 1)e^{inx_k} = \frac{a\eta}{h^2}\left[e^{in(x_k+h)} - 2e^{inx_k} + e^{in(x_k-h)}\right],$$

откуда $\mu_n = 1 - \frac{4a\eta}{h^2}\sin^2\frac{nh}{2}$.

Из неравенства Неймана при $A=0$ имеем, что оно выполняется для любого n, только если $2a\eta/h^2 \leqslant 1$ или $a\eta/h^2 \leqslant 1/2$, т. е. исследуемая схема условно устойчива.

Глава XII. Нестационарные одномерные краевые задачи теплопроводности

12.1. Математическая модель сформулированной задачи имеет вид

$$\partial T/\partial\tau = a\partial^2 T/\partial x^2,\quad 0<x<l,\quad 0<\tau<\tau_к;\quad T(x,\ 0) = f(x),$$

$$-\frac{\partial T(l,\ \tau)}{\partial x} + \frac{\alpha}{\lambda}[T_в(\tau) - T(l,\ \tau)] = 0;\quad \partial T(0,\ \tau)/\partial x = 0.$$

В расчетной области введем равномерную сетку $\tau_i = i\eta$ $(i=0, 1, \ldots, N)$, $x_k = (k+1/2)h$ $(k=-1, 0, \ldots, K)$, где $\eta = \tau_k/N$, $h = l/K$. Фиктивная сетка x_k на полшага перекрывает расчетную область и вводится с целью лучшей аппроксимации граничных условий. Разностная схема, имеющая первый порядок аппроксимации по времени и второй — по пространству, запишется в такой форме:

$$\frac{\hat{u}_k - u_k}{\eta} = \frac{a}{h^2}(\hat{u}_{k-1} - 2\hat{u}_k + \hat{u}_{k+1}) \quad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ K-1;\ i=0,\ 1,\ \ldots,\ N-1);$$

$$u_k^{(0)} = f(x_k) \quad (k=-1,\ 0,\ \ldots,\ K);\quad -\frac{\hat{u}_k - \hat{u}_{k-1}}{h} = \frac{\alpha}{\lambda}\left(\hat{u}_c - \frac{\hat{u}_k + \hat{u}_{k-1}}{2}\right)$$

$$(i=0,\ 1,\ \ldots,\ N-1);\ (\hat{u}_c = T_c[(i+1)\eta]);\ \hat{u}_{-1} = \hat{u}_0.$$

12.2. Соответствующая краевая задача состоит из уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right),\quad 0<\tau<\tau_к,\quad 0<r<R,$$

начального $T(r,\ 0)=f(r)$ и граничных условий

$$-\frac{\partial T(R,\ \tau)}{\partial r} + \frac{q_c(\tau)}{\lambda} = 0;\quad \frac{\partial T(0,\ \tau)}{\partial r} = 0.$$

В области $[0,\ \tau_k] \cup [0,\ R]$ введем равномерную сетку $\tau_i = i\eta$ $(i=0,\ 1,\ \ldots,\ N)$; $r_k = kh$ $(k=0,\ \ldots,\ K)$, где $\eta = \tau_k/N$, $h = l/K$. Разностная схема с порядком аппроксимации $O(\eta^2 + h^2)$ запишется в виде (применяли интегро-интерполяционный метод)

$$\frac{1}{\eta}(\hat{u}_k - u_k) = \frac{3a}{2}(r^3_{k+1/2} - r^3_{k-1/2})^{-1}\left[r^2_{k-1/2}(\hat{q}_{k-1/2} + q_{k+1/2}) - \right.$$

$$\left. - r^2_{k+1/2}(\hat{q}_{k+1/2} + q_{k+1/2})\right] \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ K-1);$$

$$u_k^{(0)} = f(r_k) \quad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ K);\quad \frac{3\hat{u}_K - 4\hat{u}_{K-1} + \hat{u}_{K-2}}{2h} = q_c[(i+1)\eta]$$

$$(i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1);$$

$$\frac{\hat{u}_0 - u_0}{\eta} = \frac{3a}{h^2}[(\hat{u}_1 - \hat{u}_0) - (u_1 - u_0)] \quad (i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1).$$

12.3. Применяя интегро-интерполяционный метод, получим разностную схему

$$\frac{1}{\eta}\left(\hat{u}_k - u_k\right) = a\left(r^2_{k+1/2} - r^2_{k-1/2}\right)^{-1}\left[r_{k-1/2}\left(\hat{q}_{k-1/2} + q_{k-1/2}\right) - \right.$$

$$\left. - r_{k+1/2}\left(\hat{q}_{k+1/2} + q_{k+1/2}\right)\right].$$

$$(k=1,\ 2,\ \ldots,\ K-1);\quad u_k^0 = f(r_k) \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ K);$$

$$\hat{u}_K = T_c;\quad -\frac{\hat{u}_2 + 4\hat{u}_1 - 3\hat{u}_0}{2h} = 0.$$

12.4. Составим разностную схему:

$$\frac{1}{2\eta}\left(\hat{u}_k - \check{u}_k\right) = \frac{a}{h^2}\left(u_{k-1} - \hat{u}_k - \check{u}_k + u_{k+1}\right) + f_k$$

$(k=2,\ 3,\ \ldots,\ K-1)$;

$$u_k^{(0)} = 1\ \ (k=1,\ 2,\ \ldots,\ K);\quad f_k = \frac{q_v(x_k,\ ih)}{c\rho\,(T_0 - T_c)};$$

$$\hat{u}_1 = u_2\frac{2a\eta}{h^2} + \left(1 - 2\frac{a\eta}{h^2}\right)u_1\ \ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ N);$$

$$\hat{u}_N = 0\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ N).$$

Вычисление значений температуры на втором временном слое $(i=1)$ проводим по формулам

$$u_1^{(1)} = u_2^{(0)} + \frac{2a\eta}{h^2} + (1 - 2a\eta/h^2)\,u_1^{(0)};$$

$$u_k^{(1)} = u_k^{(0)} + a\eta/h^2\left(u_{k-1}^{(0)} - 2u_k^{(0)} + u_{k+1}^{(0)}\right);\quad u_k^{(1)} = 0.$$

Точное решение поставленной задачи при $q_v=0$ запишется в виде

$$\Theta(x,\ \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} 2/(n\pi)(-1)^{n+1}\cos(xn\pi/l)\exp(-n^2\pi^2 a\tau/l^2).$$

12.5. Воспользуемся схемой (12.4) при $\sigma=0$ и получим, что

$$\hat{u}_k = \sum_{r=-1}^{1} c_r u_{k+r} - g\left(u_k^4 - \Theta_c^4\right)\ \ (2 \leqslant k \leqslant N-1);$$

$$u_k^1 = F(x_k)\quad (1 \leqslant k \leqslant N);\ \ u_1 = u_N = 0\ \ (j=2,\ \ldots,\ K),$$

где $c_{-1} = c_1 = \eta/h,\ c_0 = 1 - 2\eta/h - H\eta$.

Введем основные идентификаторы. N, K — число узлов сетки по осям x и τ соответственно; L — координата границы термоэлемента l; T — максимальное значение времени τ, до которого проводится расчет; H, G — комплексы H, g в дифференциальном уравнении; Q — температура теплового источника Θ_0; DT, DX — шаги η и h; C1, C2, C3 — коэффициенты c_{-1}, c_0, c_1 разностной схемы.

Если в программу (алгоритмический язык ФОРТРАН-IV), приведенную ниже, ввести данные $l=1$; $\tau_{max}=0{,}2$; $H=0{,}5$; $g=0{,}1$;

$\Theta_c=1$; $F(x)=1$; $N=10$; $K=10$, то результаты расчета запишутся в следующем виде:

0,0	0,9889	0,9889	0,9889	0,9889	0,9889	0,9889	0,9889	0,9889	0,0
0,0	0,5373	0,9823	0,9823	0,9823	0,9823	0,9823	0,9823	0,5373	0,0
0,0	0,5814	0,7780	0,9783	0,9783	0,9783	0,9783	0,7780	0,5814	0,0
0,0	0,4904	0,8344	0,8857	0,9758	0,9758	0,8857	0,8344	0,4904	0,0
0,0	0,5133	0,7449	0,9318	0,9337	0,9337	0,9318	0,7449	0,5133	0,0
0,0	0,4739	0,7857	0,8628	0,9465	0,9465	0,8628	0,7857	0,4739	0,0
0,0	0,4906	0,7333	0,9007	0,9181	0,9181	0,9007	0,7333	0,4906	0,0
0,0	0,4678	0,7624	0,8573	0,9290	0,9290	0,8573	0,7624	0,4678	0,0
0,0	0,4799	0,7303	0,8833	0,9120	0,9120	0,8833	0,7303	0,4799	0,0

```
C     ЯВНАЯ СХЕМА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С НЕЛИНЕЙНЫМ
C     ИСТОЧНИКОМ ТЕПЛОТЫ
      DIMENSION U(11,11)
      REAL L
      DATA L, T, H, G, Q/1.Ø, Ø.2, Ø.5, Ø.1, 1.Ø/
      N=1Ø
      K=1Ø
      DX=2 * L/(N — 1)
      DT=T/(K — 1)
C     ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОСТОЯННЫХ
      AL=DT/(DX * DX)
      C1=AL
      C2=1 — 2 * AL — H * DT
      C3=AL
      DO 3I=1,N
      X=DX+(I — 1) * L
C     НАЧАЛЬНОЕ УСЛОВИЕ
    3 U(I, 1)=F1(X)
      N1=N — 1
      DO 4 J=2, K
      DO 5 I=2, N1
C     РАЗНОСТНАЯ СХЕМА
    5 U(I, J)=C1 * U(I — 1, J — 1)+C2 * U(I, J — 1)+C3 *
     * U(I+1, J — 1) — G * (U(I, J — 1) ** 4 — Q ** 4)
C     УСЛОВИЯ НА ГРАНИЦАХ И ПЕЧАТЬ РЕЗУЛЬТАТОВ
      U(1, J)=Ø
      U(N, J)=Ø
    4 WRITE (3, 6) (U(I, J), I=1, N)
    6 FORMAT (11E11.4)
      STOP
      END
      FUNCTION F1(X)
      F1=1.Ø
      RETURN
      END
```

12.6. Для каждого i-го слоя толщиной Δ_i введем $m_i - 1$ узловых точек с равным шагом $h_i = \Delta_i / m_i$. На интервале времени $\eta_{k+1} = \tau_{k+1} - \tau_k$ аппроксимируем i-е дифференциальное уравнение в j-м узле i-го слоя соотношением

$$\left(\hat{c}_j\right)_i \frac{\hat{u}_j - u_j}{\eta_{k+1}} = \left(\hat{\lambda}_{j+0,5}\right)_i \frac{\hat{u}_{j+1} - \hat{u}_j}{h_{k+1}^2} + \left(\hat{\lambda}_{j-0,5}\right)_i \frac{\hat{u}_{j-1} - \hat{u}_j}{h_{k+1}^2}$$

$$\left(M_{i-1} < j \leqslant M_i,\ M_i = \sum_{p=1}^{i} m_p,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n\right).$$

Условия идеального теплового контакта в узле $M_i + 1$ на поверхности соприкосновения i-го и $(i+1)$-го слоев имеют вид

$$\left[\left(\hat{c}_{M_i+1}\right)_i h_i + \left(\hat{c}_{M_i+1}\right)_{i+1} h_{i+1}\right] \frac{\hat{u}_{M_i+1} - u_{M_i+1}}{2\eta_{k+1}} =$$

$$= \left(\hat{\lambda}_{M_i+0,5}\right)_i \frac{\hat{u}_{M_i} - \hat{u}_{M_i+1}}{h_i} + \left(\hat{\lambda}_{M_i-0,5}\right)_{i+1} \frac{\hat{u}_{M_i+2} - \hat{u}_{M_i+1}}{h_{i+1}}.$$

В граничных узлах сетки с номерами 1 и $N = M_n + 1$, соответствующих $x = x_1$ и $x = x_2$, запишем разностные соотношения:

$$\left(\hat{c}_1\right)_1 h_1 \frac{\hat{u} - u_1}{2\eta_{k+1}} = \left(\hat{\lambda}_{3/2}\right)_1 \frac{\hat{u}_2 - \hat{u}_1}{h_1} + \hat{\alpha}_1 \left(\hat{\Theta}_1 - \hat{u}_1\right) - \left(\hat{\varepsilon}_1\right)_1 \sigma_0 \hat{u}_1^4;$$

$$(c_N)_n h_n \frac{\hat{u}_N - u_N}{2\eta_{k+1}} = \left(\hat{\lambda}_{N-1/2}\right)_n \frac{\hat{u}_{N-1} - \hat{u}_N}{h_n} +$$

$$+ \hat{\alpha}_2 \left(\hat{\Theta} - \hat{u}_N\right) - \left(\hat{\varepsilon}_N\right)_n \sigma_0 \hat{u}_N^4.$$

Начальные условия определяются соотношениями

$$u_j^1 = f_i(x_j), \quad 1 \leqslant j \leqslant N, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Для решения полученной системы N разностных уравнений на каждом интервале времени можно применить метод последовательных приближений, используя на каждом шаге метод прогонки. Процедура, реализующая описанный выше алгоритм решения системы разностных уравнений на алгоритмическом языке АЛГОЛ-60, дана в работе [51].

Глава XIII. Решение многомерных нестационарных задач теплопроводности

13.1. Запишем краевую задачу, используя безразмерные переменные и линейные размеры

$$\Theta=(T-T_0)/T_0;\quad X=x/d,\quad Y=y/d,\quad B=b/d,\quad B_1=b_1/d,\quad D=d_1/d$$

и полагая $T_c=T_0$;

$$d^2c\rho\frac{\partial\Theta}{\partial\tau}=\frac{\partial}{\partial X}\left(\lambda\frac{\partial\Theta}{\partial X}\right)+\frac{\partial}{\partial Y}\left(\lambda\frac{\partial\Theta}{\partial Y}\right); \tag{1}$$

$$\Theta(0,\ X,\ Y)=\begin{cases}\Theta_1 & \text{при } X,\ Y\in\Omega_1((0<X<D)\wedge(0<Y<B_1)),\\ 0 & \text{при } X,\ Y\in\Omega_2((D<X<1)\wedge(B_1<Y<B));\end{cases} \tag{2}$$

$$\partial\Theta/\partial X=0 \quad \text{при } X=0; \tag{3}$$

$$\partial\Theta/\partial Y=0 \quad \text{при } Y=0; \tag{4}$$

$$-\lambda\partial\Theta/\partial X=\alpha d\Theta \quad \text{при } X=1; \tag{5}$$

$$-\lambda\partial\Theta/\partial Y=\alpha d\Theta \quad \text{при } Y=B. \tag{6}$$

Для перехода к разностной схеме введем равномерную сетку $X_k=(k+1/2)h_1$, $Y_j=(j+1/2)h_2$, $\tau_i=i\eta$, где $k=-1,\ 0,\ \ldots,\ N_1$; $j=-1,\ 0,\ \ldots,\ N_2$; $i=0,\ 1,\ \ldots,\ N_3$; $h_1=1/N_1$; $h_2=B/N_2$; $\eta=t/N_3$.

Применяя интегро-интерполяционный метод, получим разностный аналог дифференциального уравнения на шеститочечном шаблоне:

$$d^2c_{k,j}\rho_{k,j}\frac{\hat u_{k,j}-u_{k,j}}{\eta}=\frac{1}{h_1}\left(\lambda_{k+1/2,j}\frac{\hat u_{k+1,j}-\hat u_{k,j}}{h_1}-\right.$$
$$\left.-\lambda_{k-1/2,j}\frac{\hat u_{k,j}-\hat u_{k-1,j}}{h_1}\right)+\frac{1}{h_2}\left(\lambda_{k,j+1/2}\frac{\hat u_{k,j+1}-\hat u_{k,j}}{h_2}-\right.$$
$$\left.-\lambda_{k,j-1/2}\frac{\hat u_{k,j}-\hat u_{k,j-1}}{h_2}\right), \tag{7}$$

где $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N_1-1$; $j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N_2-1$; $i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N_3-1$.

Граничные условия на сетке аппроксимируются уравнениями

$$\hat u_{-1,j}=\hat u_{0,j}; \tag{8}$$

$$-\lambda_{N_1-1/2,j}\left(\hat u_{N_1,j}-\hat u_{N_1-1,j}\right)/h_1=\alpha_j d\left(\hat u_{N_1,j}+\hat u_{N_1-1,j}\right)/2$$
$$(j=-1,\ 0,\ 1,\ \ldots,\ N_2); \tag{9}$$

$$\hat u_{k,-1}=\hat u_{k,0}; \tag{10}$$

$$-\lambda_{k,N_2-1/2}\left(\hat u_{k,N_2}-\hat u_{k,N_2-1}\right)/h_2=$$
$$=\alpha_k d\left(\hat u_{k,N_2}+\hat u_{k,N_2-1}\right)/2\quad (k=-1,\ 0,\ 1,\ \ldots,\ N_1). \tag{11}$$

Применяя метод переменных направлений, вводим промежуточный $(i+1/2)$-й слой и значения сеточной функции $\bar{u}_{k,j}$ и переход от слоя i к слою $(i+1)$ выполним в два этапа. На каждом этапе уравнение (7) заменяется одномерными уравнениями такого вида:

$$c_{k,j}\rho_{k,j}d^2\,\frac{\bar{u}_{k,j}-u_{k,j}}{0{,}5\eta}=\frac{1}{h_1}\left(\lambda_{k+1/2,j}\,\frac{\bar{u}_{k+1,j}-\bar{u}_{k,j}}{h_1}-\right.$$
$$\left.-\lambda_{k-1/2,j}\,\frac{\bar{u}_{k,j}-\bar{u}_{k-1,j}}{h_1}\right)+\frac{1}{h_2}\left(\lambda_{k,j+1/2}\,\frac{u_{k,j+1}-u_{k,j}}{h_2}-\right.$$
$$\left.-\lambda_{k,j-1/2}\,\frac{u_{k,j}-u_{k,j-1}}{h_2}\right);\qquad(12)$$

$$c_{k,j}\rho_{k,j}d^2\,\frac{\hat{u}_{k,j}-\bar{u}_{k,j}}{0{,}5\eta}=\frac{1}{h_1}\left(\lambda_{k+1/2,j}\,\frac{\bar{u}_{k+1,j}-\bar{u}_{k,j}}{h_1}-\right.$$
$$\left.-\lambda_{k-1/2,j}\,\frac{\bar{u}_{k,j}-\bar{u}_{k-1,j}}{h_1}\right)+\frac{1}{h_2}\left(\lambda_{k,j+1/2}\,\frac{\hat{u}_{k,j+1}-\hat{u}_{k,j}}{h_2}-\right.$$
$$\left.-\lambda_{k,j-1/2}\,\frac{\hat{u}_{k,j}-\hat{u}_{k,j-1}}{h_2}\right).\qquad(13)$$

При решении к системе уравнений (12) присоединяются граничные условия (8)—(11), в которых значения $\hat{u}$ заменяются на $\bar{u}$. Систему алгебраических уравнений (12) и (13) представим в виде, удобном для применения метода прогонки:

$$\frac{\lambda_{k+1/2,j}}{h_1^2}\,\bar{u}_{k+1,j}-\left(\frac{\lambda_{k+1/2,j}}{h_1^2}+\frac{\lambda_{k-1/2,j}}{h_1^2}+\frac{2c_{k,j}\rho_{k,j}d^2}{\eta}\right)\times$$
$$\times\bar{u}_{k,j}+\frac{\lambda_{k-1/2,j}}{h_1^2}\,\bar{u}_{k-1,j}=-G_{k,j};\qquad(14)$$

$$\frac{\lambda_{k,j+1/2}}{h_2^2}\,\hat{u}_{k,j+1}-\left(\frac{\lambda_{k,j+1/2}}{h_2^2}+\frac{\lambda_{k,j-1/2}}{h_2^2}+\frac{2c_{k,j}\rho_{k,j}d^2}{\eta}\right)\times$$
$$\times\hat{u}_{k,j}+\frac{\lambda_{k,j-1/2}}{h_2^2}\,\hat{u}_{k,j-1}=-F_{k,j},\qquad(15)$$

где $G_{k,j}=\frac{\lambda_{k,j+1/2}}{h_2^2}\,u_{k,j+1}-\left(\frac{\lambda_{k,j+1/2}}{h_2^2}+\frac{\lambda_{k,j-1/2}}{h_2^2}-\frac{2c_{k,j}\rho_{k,j}d^2}{\eta}\right)u_{k,j}+$ $+\frac{\lambda_{k,j-1/2}}{h_2^2}\,u_{k,j-1};\qquad F_{k,j}=\frac{\lambda_{k+1/2,j}}{h_1^2}\,\bar{u}_{k+1,j}-\left(\frac{\lambda_{k+1/2,j}}{h_1^2}+\frac{\lambda_{k-1/2,j}}{h_1^2}-\right.$ $\left.-\frac{2c_{k,j}\rho_{k,j}d^2}{\eta}\right)\bar{u}_{k,j}+\frac{\lambda_{k-1/2,j}}{h_1^2}\,\bar{u}_{k-1,j}.$

Используя далее метод прогонки по каждому направлению, получим прогоночные соотношения на $(i+1/2)$-м временно́м слое:

$$\gamma_{0,j}=1; \tag{16}$$

$$\beta_{0,j}=0; \tag{17}$$

$$\gamma_{k+1,j}=\lambda_{k+1/2,j}/[\lambda_{k+1/2,j}+\lambda_{k-1/2,j}+2c_{k,j}\rho_{k,j}d^2h_1^2-$$
$$-\lambda_{k-1/2,j}\gamma_{k,j}]; \tag{18}$$

$$\beta_{k+1,j}=\left(\lambda_{k+1/2,j}\beta_{k,j}+G_{k,j}h_1^2\right)/(\lambda_{k-1/2,j}\gamma_{k+1,j})$$
$$(k=0,\ 1,\ \ldots,\ N_1-1); \tag{19}$$

$$\bar{u}_{N_1,j}=\beta_{N_1,j}/\left[\left(\lambda_{N_1-1/2,j}+\alpha h_1 d\right)/\left(\lambda_{N_1-1/2,j}-\alpha h_1 d\right)-\gamma_{N_1,j}\right]; \tag{20}$$

$$\bar{u}_{k-1,j}=\bar{u}_{k,j}\gamma_{k,j}+\beta_{k,j}\quad (k=N_1,\ N_1-1,\ \ldots,\ 0). \tag{21}$$

Сеточные соотношения для перехода от $(i+1/2)$-го слоя к $(i+1)$-му слою имеют такой вид:

$$\gamma_0=1; \tag{22}$$

$$\beta_0=0; \tag{23}$$

$$\gamma_{k,j+1}=\lambda_{k,j+1/2}/\left[\left(\lambda_{k,j+1/2}+\lambda_{k,j-1/2}+2c_{k,j}\rho_{k,j}d^2h_2^2\right)-\right.$$
$$\left.-\lambda_{k,j-1/2}\gamma_{k,j}\right]; \tag{24}$$

$$\beta_{k,j+1}=\left(\lambda_{k,j+1/2}\beta_{k,j}+F_{k,j}h_2^2\right)/(\lambda_{k,j-1/2}\gamma_{k,j+1})$$
$$(j=0,\ 1,\ \ldots,\ N_2-1); \tag{25}$$

$$u_{k,N_2}=\left(\frac{\lambda_{k,N_2-1/2}+\alpha h_2 d}{\lambda_{k,N_2-1/2}-\alpha h_2 d}-\gamma_{k,N_2}\right)^{-1}\beta_{k,N_2}; \tag{26}$$

$$u_{k,j-1}=u_{k,j}\gamma_{k,j}+\beta_{k,N_2}\quad (j=N_2,\ N_2-1,\ \ldots,\ 0). \tag{27}$$

В соотношениях (22) — (27) индекс k принимает значения $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N_1-1$.

Описанный алгоритм (16) — (27) полностью решает сформулированную задачу.

13.2. В рассматриваемой области введем равномерную сетку: $r_k=(k+1/2)\,h_r$; $z_j=(j+1/2)\,h_z$; $\tau_i=i\eta$, где $k=-1,\ 0,\ \ldots,\ N_1$; $j=-1,\ 0,\ \ldots,\ N_2$; $N_1=(R_2-R_1)/h_r$; $N_2=l/h_z$; $N_3=t/\eta$. Фиктивная сетка вводится с целью аппроксимации граничных условий со вторым порядком по пространственным координатам.

Запишем разностный аналог сформулированной краевой задачи:

$$\frac{1}{\eta}\left(\hat{u}-u\right)=\frac{1}{2}\left[\Lambda_r\left(\hat{u}+u\right)+\Lambda_z\left(\hat{u}+u\right)\right], \tag{1}$$

где $$\Lambda_r u=\frac{2\lambda_r\,(c\rho)^{-1}}{\left(r_{k+1/2}^2-r_{k-1/2}^2\right)}\left(r_{k-1/2}\frac{u_{k-1}-u_k}{h_r}-r_{k+1/2}\frac{u_k-u_{k+1}}{h_r}\right);$$

$$\Lambda_z u=\frac{\lambda_z}{c\rho h_z^2}\left(u_{k-1}-2u_k+u_{k+1}\right);$$

$$u_{k,j}=\Theta_0(kh_r,\ jh_z)\ (k=-1,\ 0,\ 1,\ \ldots,\ N_1;\ j=-1,\ 0,\ 1,\ \ldots,\ N_2); \quad (2)$$

$$\lambda_r\frac{\hat{u}_{0,j}-\hat{u}_{-1,j}}{h_r}-\alpha_2\left(\frac{\hat{u}_{0,j}+\hat{u}_{-1,j}}{2}-\hat{\Theta}_{2,j}\right)=0; \quad (3)$$

$$\lambda_r\frac{\hat{u}_{N_1,j}-\hat{u}_{N_1-1,j}}{h_r}+\alpha_1\left(\frac{\hat{u}_{N_1,j}+\hat{u}_{N_1-1,j}}{2}-\hat{\Theta}_{1,j}\right)=0; \quad (4)$$

$$\lambda_z\frac{\hat{u}_{k,0}-\hat{u}_{k,-1}}{h_z}-\alpha_4\left(\frac{\hat{u}_{k,0}+\hat{u}_{k,-1}}{2}-\hat{\Theta}_{4,k}\right)=0; \quad (5)$$

$$\lambda_z\frac{\hat{u}_{k,N_2}-\hat{u}_{k,N_2-1}}{h_z}+\alpha_3\frac{\hat{u}_{k,N_2}+\hat{u}_{k,N_2-1}}{2}-\hat{\Theta}_{3,k}\Bigg)=0. \quad (6)$$

В соотношениях (3), (4) индекс j принимает значения $j=-1,$ $0,\ 1,\ \ldots,\ N_2$, а в (5), (6) $k=-1,\ 0,\ 1,\ \ldots,\ N_1$.

Построим локально-одномерную схему. Решение на промежуточных слоях обозначим через v_n $(n=1,\ 2)$.

Система разностных уравнений для определения v_n запишется в таком виде:

$n=1$

$$\frac{1}{\eta}\left(\hat{v}_1-v_1\right)=\frac{1}{2}\Lambda_r\left(\hat{v}_1+v_1\right); \quad (7)$$

$$v_{1\,(k,\,j)}=u_{k,j},\quad \lambda_r\frac{\hat{v}_{1\,(0,\,j)}-\hat{v}_{1\,(-1,\,j)}}{h_r}=\alpha_2\left(\frac{\hat{v}_{1\,(0,\,j)}+\hat{v}_{1\,(-1,\,j)}}{2}-\hat{\Theta}_{2,j}\right),$$

$$\lambda_r\frac{\hat{v}_{1\,(N_1,\,j)}-\hat{v}_{1\,(N_1-1,\,j)}}{h_r}+\alpha_1\left(\frac{\hat{v}_{1\,(N_1,\,j)}+\hat{v}_{1\,(N_1-1,\,j)}}{2}-\Theta^n_{1,j}\right)=0;$$

$n=2$

$$\frac{1}{\eta}\left(\hat{v}_2-v_2\right)=\frac{1}{2}\Lambda_z\left(\hat{v}_2+v_2\right), \quad (8)$$

$$\lambda_z\frac{\hat{v}_{2\,(k,\,0)}-\hat{v}_{2\,(k,\,-1)}}{h_z}=\alpha_4\left(\frac{\hat{v}_{2\,(k,\,0)}+\hat{v}_{2\,(k,\,-1)}}{2}-\hat{\Theta}_{4,k}\right),$$

$$\lambda_z\frac{\hat{v}_{2\,(k,\,N_2)}-\hat{v}_{2\,(k,\,N_2-1)}}{h_z}+\alpha_3\left(\frac{\hat{v}_{2\,(k,\,N_2)}+\hat{v}_{2\,(k,\,N_2-1)}}{2}-\hat{\Theta}_{3,k}\right)=0.$$

В уравнениях (7), (8) индексы k, j опущены. Теперь по известным значениям $\hat{v}_2(k,\ j)$ вычисляем $\hat{u}_{k,j}$

$$\hat{u}_{k,j}=\hat{v}_{2\,(k,\,j)}.$$

14.1. Продольно-поперечная схема, соответствующая дифференциальному уравнению краевой задачи (14.9), запишется в форме

$$\frac{1}{\eta}\left(\hat{u}-u\right)=\frac{1}{2}\left(\Lambda_1+\Lambda_2\right)\left(\hat{u}+u\right)-\frac{\eta}{4}\Lambda_1\Lambda_2\left(\hat{u}-u\right)+\omega, \tag{1}$$

где $\omega=q_v(x_n,\ y_m)/\lambda$; $\Lambda_1 u_{nm}=\frac{1}{h_1^2}(u_{n+1,\,m}-2u_{nm}+u_{n-1,\,m}$; $\Lambda_2 u_{nm}=$ $=\frac{1}{h_2^2}(u_{n,\,m+1}-2u_{nm}+u_{n,\,m-1})$.

Преобразуем схему (1) к канонической форме:

$$B\left(\hat{u}-u\right)/\eta+Au=\omega, \tag{2}$$

где

$$A=-\left(\Lambda_1+\Lambda_2\right),\quad B=\left(E-\frac{\eta}{2}\Lambda_1\right)\left(E-\frac{\eta}{2}\Lambda_2\right).$$

Чтобы получить решение соответствующей стационарной задачи, численный расчет по схеме (2) ведут до тех пор, пока $\hat{u}\approx u$. Тогда схема (2) в пределе переходит в разностную схему, аппроксимирующую стационарную задачу (14.8):

$$Au=\omega,\quad A=-\left(\Lambda_1+\Lambda_2\right). \tag{3}$$

Оптимальный шаг для расчета η_0 выбирается из условия минимума числа итераций (шагов по τ). Необходимое условие этого — начальные данные за один шаг должны затухать как можно сильнее. Применим метод разделения переменных для исследования поведения разностного решения.

Положим

$$\hat{v}_{pr}=\mu_{pr}v_{pr}, \tag{4}$$

где μ_{pr} — множитель роста pr-й гармоники;

$$v_{pr}=\sin\frac{\pi p x_1}{d}\sin\frac{\pi r x_2}{b}\quad (1\leqslant p\leqslant N-1,\ 1\leqslant r\leqslant M-1) \tag{5}$$

— собственные функции оператора A в прямоугольнике на равномерной сетке. Подставим выражения (4), (5) в разностную схему (2) и определим множители роста гармоник:

$$\left.\begin{aligned}\mu_{pr}&=\frac{(1-\gamma_p)(1-\beta_r)}{(1+\gamma_p)(1+\beta_r)};\\ \gamma_p&=\frac{2\eta}{h_1^2}\sin^2\frac{\pi p h_1}{2d};\\ \beta_r&=\frac{2\eta}{h_2^2}\sin^2\frac{\pi r h_2}{2b}.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Из выражения (6) видно, что все $|\mu_{pr}| < 1$, т. е. все гармоники v_{pr} затухают при переходе со слоя на слой. Представим множитель μ_{pr} в виде произведения:

$$\mu_{pr} = \nu_p \varphi_r,$$

где $\nu_p = (1-\gamma_p)/(1+\gamma_p)$; $\varphi_r = (1-\beta_r)/(1+\beta_r)$.

Сомножители ν_p и φ_r монотонно убывают при увеличении номеров p и r. При этом максимальными по модулю будут сомножители ν_1, φ_1 или ν_{N-1}, φ_{M-1}. Поэтому и μ_{pr} принимает максимальные по модулю значения либо при $p=r=1$, либо при $p=N-1$, $r=M-1$. Эти гармоники и будут сильнее всего препятствовать выходу на стационарный режим.

Считая N и M достаточно большими числами, можно положить:

$$\sin\frac{\pi h_1}{2d} = \sin\frac{\pi}{2N} \approx \frac{\pi}{2N}; \quad \sin\frac{\pi(N-1)h_1}{2d} = \sin\frac{\pi(N-1)}{2N} \approx 1;$$

$$\sin\frac{\pi h_2}{2b} \approx \frac{\pi}{2M}; \quad \sin\frac{\pi(M-1)h}{2b} \approx 1.$$

Тогда получим, что

$$\mu_{11} \approx 1 - \pi^2\eta\left(\frac{1}{d^2}+\frac{1}{b^2}\right), \quad \mu_{N-1,\, M-1} \approx 1 - \frac{d^2}{\eta N^2} - \frac{b^2}{\eta M^2}. \tag{7}$$

Анализ выражений (7) показывает, что с увеличением шага η уменьшается μ_{11}, а $\mu_{N-1,\, M-1}$, возрастая, приближается к единице, и, наоборот, с уменьшением шага η $\mu_{11} \to 1$, а $\mu_{N-1,\, M-1}$ убывает. Поэтому выберем шаг η_0 так, чтобы $\mu_{11}(\eta_0) = \mu_{N-1,\, M-1}(\eta_0)$, т. е.

$$1 - \pi^2\eta_0(1/d^2 + 1/b^2) = 1 = d^2/(\eta_0 N^2) - b^2/(\eta_0 M^2),$$

откуда

$$\eta_0 \approx \frac{1}{\pi}\left(\frac{d^2}{N^2}+\frac{b^2}{M^2}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{d^2}+\frac{1}{b^2}\right)^{-1/2}. \tag{8}$$

Выражение (8) определяет оптимальный шаг, так как при отклонении шага от η_0 одна из гармоник (μ_{11}, $\mu_{N-1,\, M-1}$) будет затухать медленнее, чем при оптимальном шаге.

14.2. Локально-одномерная схема, соответствующая дифференциальному уравнению задачи (14.9), имеет вид

$$\left(E - \frac{\eta}{2}\Lambda_1\right)\bar{u} = \left(E + \frac{\eta}{2}\Lambda_1\right)u + \eta\omega_1; \tag{1}$$

$$\left(E - \frac{\eta}{2}\Lambda_2\right)\hat{u} = \left(E + \frac{\eta}{2}\Lambda_2\right)\bar{u} + \eta\omega_2, \tag{2}$$

где разностные операторы Λ_1 и Λ_2 определены выше в задаче 14.2, а функции ω_1 и ω_2 выбирают так, чтобы $\omega_1+\omega_2=\omega$.

Запишем схемы (1) и (2) в двухслойном виде, умножая уравнение (1) слева на $\left(E+\frac{\eta}{2}\Lambda_2\right)$, уравнение (2) на $\left(E-\frac{1}{2}\eta\Lambda_1\right)$ и исключая $\bar{u}$:

$$\left(E-\frac{\eta}{2}\Lambda_1\right)\left(E-\frac{\eta}{2}\Lambda_2\right)\hat{u}=\left(E+\frac{\eta}{2}\Lambda_1\right)\left(E+\frac{\eta}{2}\Lambda_2\right)u+$$
$$+\eta(\omega_1+\omega_2)+\frac{\eta^2}{2}(\Lambda_2\omega_1-\Lambda_1\omega_2).$$

Полученную схему преобразуем к канонической форме типа (2) в примере 14.1:

$$\left(E-\frac{\eta}{2}\Lambda_1\right)\left(E-\frac{\eta}{2}\Lambda_2\right)\frac{\hat{u}-u}{\eta}-(\Lambda_1+\Lambda_2)u=$$
$$=\omega_1+\omega_2+\frac{\eta}{2}(\Lambda_2\omega_1-\Lambda_1\omega_2). \tag{3}$$

Если положить $A=-(\Lambda_1+\Lambda_2)$, $B=\left(E-\frac{\eta}{2}\Lambda_1\right)\left(E-\frac{\eta}{2}\Lambda_2\right)$, то левая часть схемы (3) совпадет с левой частью продольно-поперечной схемы [схема (2) в примере 14.1]. А так как затухание гармоник в этих схемах определяется одинаковыми множителями, то и оптимальный шаг по τ для локально-одномерной и продольно-поперечной схем будет одинаковым и равным η_0.

14.3. На прямоугольной сетке ($x_k=kh_1$, $y_j=jh_2$, $k=0, 1, \ldots, N$, $j=0, 1, \ldots, M$, $h_1=d/N$, $h_2=b/M$) запишем соответствующую разностную схему:

$$(\Lambda_1+\Lambda_2)u=-\omega; \tag{1}$$

$$u_{0,j}=\varphi_1(y_j),\ u_{N,j}=\varphi_2(y_j);\ u_{k,0}=\varphi_3(x_k),\ u_{k,M}=\varphi_4(x_k). \tag{2}$$

Требуется найти неизвестные значения $u_{k,j}$ для внутренних узлов сетки. Расположим неизвестные естественным образом по строкам сетки, начиная с нижней строки:

$$-\frac{1}{h_1^2}u_{k-1,j}-\frac{1}{h_2^2}u_{k,j-1}+\left(\frac{2}{h_1^2}+\frac{2}{h_2^2}\right)u_{k,j}-$$
$$-\frac{1}{h_1^2}u_{k+1,j}-\frac{1}{h_2^2}u_{k,j+1}=\omega_{k,j}. \tag{3}$$

В схеме (3) неизвестные $u_{k-1,j}$ и $u_{k,j-1}$ предшествуют $u_{k,j}$, а $u_{k+1,j}$ и $u_{k,j+1}$ следуют за $u_{k,j}$.

Алгоритм Зейделя для схемы (3) запишется в виде

$$u_{k,j}^{(l+1)}=\left(\frac{2}{h_1^2}+\frac{2}{h_2^2}\right)^{-1}\left[\frac{1}{h_1^2}u_{k-1,j}^{(l+1)}+\frac{1}{h_2^2}u_{k,j-1}^{(l+1)}+\frac{1}{h_1^2}u_{k+1,j}^{(l)}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{h_2^2}u_{k,j+1}^{(l)}+\omega_{k,j}\right]\ (1\leqslant k\leqslant N-1,\ 1\leqslant j\leqslant M-1).$$

Вычисления начинаются с узла сетки $k=1$, $j=1$ и продолжаются либо по строкам, либо по столбцам внутренних узлов сетки. Найденные $(u^{(i+1)})$ присваивают массиву $u^{(i)}$.

14.4. Для рассматриваемой задачи расчетные формулы метода верхней релаксации имеют вид

$$u_{k,j}^{(i+1)}=\left(\frac{2}{h_1^2}+\frac{2}{h_2^2}\right)^{-1}\left\{(1-\gamma)\left(\frac{2}{h_1^2}+\frac{2}{h_2^2}\right)u_{k,j}^{(i)}+\gamma\left[\frac{1}{h_1^2}u_{k-1,j}^{(i+1)}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{h_1^2}u_{k+1,j}^{(i)}+\frac{1}{h_2^2}u_{k,j-1}^{(i+1)}+\frac{1}{h_2^2}u_{k,j+1}^{(i)}+\omega_{k,j}\right]\right\}$$

для $k=1,\ 2,\ \ldots,\ N-1$; $j=1,\ 2,\ \ldots,\ M-1$;

$u_{0j}=\varphi_1(y_j)$; $u_{Nj}=\varphi_2(y_j)$; $j=0,\ \ldots,\ M$;

$u_{k,0}=\varphi_3(x_k)$; $u_{k,M}=\varphi_4(x_k)$; $k=0,\ \ldots,\ N$.

Ход вычислений такой же, как и в методе Зейделя (см. пример 14.3).

ПРИЛОЖЕНИЕ II. Некоторые сведения из функционального анализа [75]

Нормированные пространства. Множество E абстрактных элементов называется *вещественным* (комплексным) *линейным нормированным пространством*, если:

1) E — линейная система с умножением на вещественные (соответственно комплексные) числа;

2) каждому элементу u системы E ставится в соответствие вещественное число (которое называется нормой этого элемента и обозначается $\|u\|$), удовлетворяющее следующим аксиомам: а) $\|u\|\geqslant 0$, причем $\|u\|=0$ только для нулевого элемента; б) $\|u+v\|\leqslant\|u\|+$ $+\|v\|$ — неравенство треугольника; в) $\|\lambda u\|=|\lambda|\,\|u\|$.

В таком пространстве вводится естественная метрика: расстояние $\rho(u,\ v)$ между элементами u и v определяется равенством $\rho(u,\ v)=$ $=\|u-v\|$. Сходимость последовательности $\{u_n\}$ элементов E к $u\in E$ в норме E (иначе говоря, сильная сходимость в E) определяется тем, что $\|u_n-u\|\to 0$ при $n\to\infty$.

Говорят, что совокупность элементов $E'\subset E$ всюду плотна в E, если любой элемент E может быть получен как предел в норме E элементов из E'.

Если в E имеется счетное *, всюду плотное множество элементов, то пространство E называется *сепарабельным*. Если для любой последовательности u_n, сходящейся в себе, т. е. такой, что $\|u_p-u_q\|\to 0$ при $p,\ q\to\infty$, существует в E предельный элемент, то пространство E называется *полным*. Полное линейное нормированное пространство принято называть *пространством типа* B или *банаховым пространством*. Все рассматриваемые ниже пространства будут полными и сепарабельными.

* Счетное множество — это такое множество, элементы которого можно занумеровать в бесконечную последовательность: $u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots$.

Частным случаем банаховых пространств являются пространства Гильберта. В вещественном гильбертовом пространстве H для любой пары элементов u и v определено скалярное произведение (u, v) — вещественное число, удовлетворяющее следующим аксиомам: а) $(u, v)=(v, u)$; б) $(u_1+u_2, v)=(u_1, v)+(u_2, v)$; в) $(\lambda u, v)=\lambda(u, v)$; г) $(u, u)\geqslant 0$, причем $(u, u)=0$ только для нулевого элемента.

В комплексном гильбертовом пространстве скалярное произведение (u, v) есть комплексное число, удовлетворяющее аксиомам б) — г) и аксиоме $(u, v)=\overline{(v, u)}$ вместо аксиомы а).

В качестве нормы элемента u берется число $\|u\|=\sqrt{(u, u)}$. В определение гильбертова пространства включаем требование его полноты и сепарабельности.

Для любых двух элементов u и v из H имеет место неравенство Коши — Буняковского — Шварца $|(u, v)|\leqslant\|u\|\cdot\|v\|$, которое именуется короче неравенством Коши. В пространстве H кроме сходимости по норме (сильной сходимости), когда $\|u_n-u\|\to 0$, можно рассматривать и слабую сходимость. Последовательность $\{u_n\}$ называется слабо сходящейся в H к элементу u, если $(u_n-u, v)\to 0$ при $n\to\infty$ для всех $v\in H$. Нетрудно понять, что если нормы u_n равномерно ограничены ($\|u_n\|\leqslant M_1$), то для доказательства слабой сходимости $\{u_n\}$ к u достаточно убедиться, что $(u_n-u, v)\to 0$ при $n\to\infty$ только для какого-либо всюду плотного в H множества v. Последовательность $\{u_n\}$ не может слабо (и тем более сильно) сходиться к двум разным элементам H. Если $\{u_n\}$ сходится к u в норме H, то она сходится к u и слабо. Обратное утверждение неверно. Однако если кроме слабой сходимости $\{u_n\}$ к u известно еще, что $\|u_n\|\to\|u\|$, то $\{u_n\}$ сходится к u сильно.

Гильбертово пространство (по определению считаемое полным), а также любое его замкнутое подпространство полно и в отношении слабой сходимости. Множество M называется *компактным* в B, если всякая бесконечная последовательность элементов из M содержит сходящуюся в себе подпоследовательность. Если пределы всех таких подпоследовательностей принадлежат M, то M называется *компактным в себе*. В гильбертовом пространстве H аналогично вводятся понятия слабой компактности и слабой компактности в себе. Имеет место следующий признак слабой компактности в H.

Теорема 1. Замкнутое ограниченное множество в H слабо компактно в себе.

Приведем два примера вещественных пространств B и H. Совокупность всех принимающих вещественные значения измеримых функций $u(x)$, определенных на области Ω евклидова пространства R_n и имеющих конечный интеграл

$$\|u\|_{p,\Omega}=\left(\int\limits_{\Omega}|u(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \tag{1}$$

с каким-либо фиксированным $p\geqslant 1$, образует (полное) сепарабельное пространство Банаха, если норму в ней определить равенством (1). Для этого пространства принято обозначение $L_p(\Omega)$. В качестве плотного в $L_p(\Omega)$ множества могут быть взяты, например: а) все бесконечно дифференцируемые функции, или все полиномы, или даже только полиномы с рациональными коэффициентами; б) все бесконечно дифференцируемые функции, равные нулю вблизи границы Ω (равные нулю в пограничной полосе Ω ширины $\delta > 0$).

Пространство $L_2(\Omega)$ есть вещественное пространство Гильберта, если в нем ввести скалярное произведение с помощью равенства

$$(u, v) = \int\limits_{\Omega} u(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x.$$

Приведем ряд алгебраических и функциональных неравенств: неравенство Коши

$$\left|\sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\eta_j\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j}\,\sqrt{a_{ij}\eta_i\eta_j}\,, \tag{2}$$

справедливое для любой неотрицательной квадратичной формы $a_{ij}\varepsilon_i\varepsilon_j$ с $a_{ij}=a_{ji}$ и произвольных вещественных $\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n$; неравенство Коши с ε

$$|ab| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}|a|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}|b|^2, \tag{3}$$

справедливое при всех $\varepsilon > 0$ и произвольных a и b. Из функциональных неравенств приведем неравенства, являющиеся конкретизацией неравенства треугольника и неравенства Коши.

Для пространства $L_2(\Omega)$ они имеют вид

$$\left(\int\limits_{\Omega}(u+v)^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} \leqslant \left(\int\limits_{\Omega} u_2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} + \left(\int\limits_{\Omega} v^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2};$$

$$\left|\int\limits_{\Omega} uv\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \left(\int\limits_{\Omega} u^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} + \left(\int\limits_{\Omega} v^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}. \tag{4}$$

Общие сведения о линейных функционалах и линейных ограниченных операторах в гильбертовых пространствах. Линейным функционалом l на H (комплексном или вещественном) называется линейная непрерывная числовая функция $l(u)$, определенная для всех $u \in H$. Линейность l (или дистрибутивность) означает, что для любых элементов u_1 и u_2 из H и любых чисел λ и μ

$$l(\lambda u_1 + \mu u_2) = \lambda l(u_1) + \mu l(u_2). \tag{5}$$

Непрерывность же $l(u)$ означает, что $l(u_n) \to l(u)$, если $u_n \to u$. Доказано, что для $l(u)$, удовлетворяющих свойству (5), непрерывность эквивалентна ограниченности $l(u)$ на поверхности единичной сферы S_1 $S_1 \equiv \{u : \|u\| = 1\}$, или, что то же, неравенству

$$|l(u)| \leqslant c\|u\| \text{ для всех } u \in H. \tag{6}$$

Теорема Ф. Рисса утверждает, что линейный функционал l на H может быть представлен в виде скалярного произведения

$$l(u)=(u, v),$$

причем элемент v определяется по $l(u)$ единственным образом. Величину $\|v\|$ называют нормой $\|l\|$ линейного функционала l. Очевидно, что $\|l\|=\sup\frac{|l(u)|}{\|u\|}$ и является наименьшей из всех возможных постоянных c, для которых верно (6).

Перейдем теперь к линейным операторам в H. Оператор A, определенный на некотором множестве $D(A)$ пространства H, сопоставляет каждому элементу u из H некоторый элемент v из H, и это принято записывать так: $v=Au$ или $v=A(u)$. Если на $D(A)$ справедливо равенство

$$A(\lambda u_1+\mu u_2)=\lambda A(u_1)+\mu A(u_2),$$

то говорят, что A линеен (при этом предполагается, что $D(A)$ — линейное множество). Если при этом существует постоянная c такая, что для всех u из $D(A)$

$$\|Au\|\leqslant c\|u\|, \tag{7}$$

то A называется ограниченным оператором на $D(A)$. Такой оператор может быть непрерывным способом распространен на замыкание $\overline{D(A)}$ в H (которое, очевидно, будет замкнутым подпространством в H, причем (7) будет верно для всех u из $\overline{D(A)}$). Такой оператор можно распространить (разными способами, если $\overline{D(A)}\subset H$) на все H с сохранением неравенства (7). Наименьшая c, для которой неравенство (7) имеет место для всех u из $D(A)$, называется нормой $\|A\|$ оператора A, так что

$$\|A\|=\sup_{u\in H}\frac{\|Au\|}{\|u\|}.$$

Выделим два класса ограниченных линейных операторов. Один — это класс самосопряженных операторов: оператор A называется самосопряженным, если

$$(Au, v)=(u, Av) \text{ для всех } u, v\in H. \tag{8}$$

Спектр такого оператора веществен и располагается на отрезке $[-\|A\|, \|A\|]$. Другой класс — это класс вполне непрерывных операторов. Оператор A называется *вполне непрерывным*, если он любое ограниченное множество переводит в компактное. Спектр такого оператора A состоит из точки нуль и не более чем счетного набора собственных значений, который может иметь точку накопления лишь в нуле. Каждое из этих собственных значений, кроме точки нуль, имеет конечную кратность. Ввиду этого собственные значения могут быть пронумерованы в порядке убывания их модуля: $|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \ldots$, причем на каждой окружности вида $|\lambda| = |\lambda_k|$ *может лежать лишь конечное число* λ_m.

Если оператор A самосопряжен и вполне непрерывен, то его спектр веществен и дискретен с единственной точкой накопления в нуле. Все собственные значения, кроме нуля, имеют конечную кратность. Их можно расположить в порядке убывания их модулей: $|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant |\lambda_3| \geqslant \ldots$, причем $\lambda_k \to 0$ при $k \to \infty$. Соответствующие им собственные элементы $\{u_k\}$ (т. е. решения уравнений $Au_k = \lambda_k u_k$) можно выбрать взаимно ортогональными и нормированными. Натянутое на них замкнутое подпространство H_1 совпадает с H, если $\lambda = 0$ не есть точка дискретного спектра (т. е. если уравнение $Au = 0$ имеет только тривиальное решение: $u = 0$).

Особо важными оказываются те гильбертовы пространства, которые имеют плотное счетное множество. Как уже упоминалось, такие пространства называются сепарабельными. Важное для приложений пространство $L_2(\Omega)$ сепарабельно.

Теорема 2. Для того чтобы в гильбертовом пространстве существовала полная счетная или конечная ортонормированная система, необходимо и достаточно, чтобы это пространство было сепарабельным. По определению, подпространство гильбертова пространства H есть линейное замкнутое множество элементов из H. *Каждое подпространство* само есть некоторое полное гильбертово пространство. Приведем несколько примеров подпространств пространства $L_2(\Omega)$.

Примеры. 1. Множество функций, удовлетворяющих равенству

$$(u,\ 1) = \int_{\Omega} u\, dx = 0,\quad x \in \Omega,$$

очевидно линейно и представляет собой подпространство функций, средние значения которых по области Ω равны нулю.

2. Подпространства образуют также функции, тождественно равные постоянной (своей для каждой функции).

3. Пусть Ω совпадает с $[0,\ 2\pi]$ оси x. Множество функций, ряды Фурье которых содержат только синусы, образуют подпространство; очевидно, функции этого подпространства ортогональны функциям $\cos nx$ $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, т. е.

$$(\sin mx,\ \cos nx) = \int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx\, dx = 0.$$

4. В пространстве $L_2(\Omega)$ векторных функций, определенных в трехмерной области Ω, *рассмотрим три линейных множества векторов:* α — множество векторов, дивергенции которых равны нулю; β — множество градиентов скалярных функций; γ — множество градиентов таких скалярных функций, которые обращаются в нуль на границе области Ω.

Присоединив к каждому из этих множеств его предельные точки, получим подпространства $H_i \in H = L_2(\Omega)$.

Само гильбертово пространство H можно рассматривать как подпространство. Множество, содержащее только нулевой элемент, также является подпространством. Эти два подпространства называются *тривиальными*. Подпространства примеров 1—4 нетривиальны.

Пусть даны гильбертово пространство H и его подпространство H_1. Пусть φ — произвольный элемент из H. Доказывается, что в H_1 существует единственный элемент φ_1, обладающий тем свойством, что

$$\|\varphi-\varphi_1\|=\min_{\psi\in H_1}\|\varphi-\varphi\|.$$

При этом элемент $\varphi_2=\varphi-\varphi_1$ ортогонален любому элементу подпространства H_1 или, как говорят короче, ортогонален H_1. Элемент φ_1 называется *ортогональной проекцией* элемента φ на подпространство H_1; слово «ортогональная» часто опускают и говорят просто «проекция». Таким образом, любой элемент $\varphi\in H$ разлагается в сумму: $\varphi=\varphi_1+\varphi_2$, где $\varphi_1\in H_1$ есть проекция φ на H_1, а φ_2 ортогонально H_1. Если $\varphi\in H_1$, то $\varphi_1=\varphi$, $\varphi_2=0$; элементы подпространства совпадают со своими проекциями на это же подпространство.

Если пространство H сепарабельно, то его подпространства также сепарабельны и проекцию можно строить так: если $\{\psi_k\}$ — ортонормированная система, полная в H_1, то

$$\varphi_1=\sum_{k=1}^{\infty}(\varphi,\ \psi_k)\,\psi_k. \tag{9}$$

Нетрудно видеть, что подпространства примеров 1 и 2 ортогональны, а их ортогональная сумма (по аналогии с тем, что ортогональная сумма осей Ox и Oy дает плоскость xOy) дает пространство $L_2(\Omega)$. Подпространства α и γ примера 4 также ортогональны; их ортогональная сумма дает все векторные пространства $L_2(\Omega)$.

Теорема 3. Заданный на плотном множестве линейный ограниченный функционал можно, и притом единственным образом, расширить на все пространство с сохранением нормы.

Важную роль в приложениях играют билинейные и квадратичные функционалы.

Пусть в гильбертовом пространстве H задано плотное линейное множество M и пусть каждой паре его элементов φ и ψ приведено в соответствие одно и только одно число $\Phi(\varphi,\ \psi)$. Будем называть $\Phi(\varphi,\ \psi)$ билинейным функционалом, если: 1) при фиксированном ψ функция Φ линейна; 2) справедливо тождество

$$\Phi(\varphi,\ \psi)=\overline{\Phi(\psi,\ \varphi)}. \tag{10}$$

Если $\Phi(\varphi,\ \psi)$ — билинейный функционал, то функционал $\Phi(\varphi,\ \varphi)=\Phi(\varphi)$ называется *однородным квадратичным функционалом* или *квадратичной формой*. Квадратичная форма удовлетворяет тождеству

$$\Phi(\varphi+\psi)=\Phi(\varphi)+\Phi(\varphi,\ \psi)+\overline{\Phi(\psi,\ \varphi)}+\Phi(\psi)$$

Если $\Phi(\varphi)$ — квадратичная форма, а l — линейный функционал, то выражение

$$F(\varphi)=\Phi(\varphi)-l\varphi-\overline{l\varphi}+\text{const} \tag{11}$$

называется *квадратичным функционалом*. В случае вещественного гильбертова пространства имеем следующие равенства:

$$\left.\begin{aligned}&\Phi(\varphi, \psi)=\Phi(\psi, \varphi);\\&\Phi(\varphi+\psi)=\Phi(\varphi)+2\Phi(\varphi, \psi)+\Phi(\psi);\\&F(\varphi)=\Phi(\varphi)-2l\varphi+\mathrm{const}.\end{aligned}\right\}\qquad(12)$$

На некотором множестве $D(A)$ элементов гильбертова пространства H определен оператор A, если каждому элементу $\varphi\in D(A)$ приведен в соответствие по некоторому закону один и только один элемент ψ гильбертова пространства H. Это записывается так: $A\varphi=\psi$. Множество $D(A)$ называется *областью определения* оператора A, а множество $R(A)$ всевозможных элементов ψ — областью значений того же оператора. Можно сказать, что $A\varphi$ есть функция, которая переводит элемент $\varphi\in D(A)$ в элемент $\psi\in R(A)$.

Необходимо отметить, что в определение оператора существенно входит его область определения.

Два оператора A и B считаются равными, если совпадают их области определения и если для каждого элемента φ, входящего в область их определения, $A\varphi=B\varphi$. Если $D(A)$ есть часть $D(B)$ и для каждого элемента $\varphi\in D(A)$ имеет место равенство $A\varphi=B\varphi$, то оператор B называется *расширением* оператора A.

О неограниченных операторах. В отличие от ограниченных операторов для неограниченного оператора A не существует постоянной c, при которой выполняется неравенство (7) для всех u из $D(A)$. Будем рассматривать лишь такие случаи, когда $D(A)$ плотно в H. Множество значений A будем обозначать через $R(A)$, так что $A[D(A)]=R(A)$.

Рассмотрим неограниченные операторы, порождаемые дифференциальными выражениями. Каждому такому выражению сопоставляются различные операторы, определяемые указанием их области определения В качестве примера рассмотрим дифференциальное выражение $Lu(x)$ $\mathrm{d}^2u/\mathrm{d}x^2$ на отрезке $x\in[0, 1]$, взяв за H вещественное функциональное пространство $L_2(0, 1)$. Ему можно сопоставить оператор A, определенный на всех бесконечно дифференцируемых функциях $u(x)$ с носителем в $(0, 1)$. На $u(x)$ из $D(A)$ оператор A вычисляется так: $Au=Lu=\mathrm{d}^2u(x)/\mathrm{d}x^2$. Легко видеть, что A на $D(A)$ неограничен. Этому же выражению Lu можно сопоставить другой неограниченный оператор $\hat{A}$, областью определения которого являются все бесконечно дифференцируемые на $(0, 1)$ функции. На них $\hat{A}$ *вычисляется так же, как* A *на* $D(A)$, *а именно:* $\hat{A}u=\mathrm{d}^2u(x)/\mathrm{d}x^2$. Между A и $\hat{A}$ есть естественная упорядоченность: $D(A)\subset D(\hat{A})$ и $Au=\hat{A}u$. В этом случае оператор $\hat{A}$ есть расширение оператора A. Область определения для L можно выбрать бесчисленным множеством способов, и каждый раз придем к другому неограниченному оператору, вообще говоря, с другими свойствами.

Операторы A и $\tilde{A}$, описанные выше, имеют существенно различные свойства. Например, для оператора A справедливо соотношение

$$(Au,\ v) \equiv \int_0^1 \frac{d^2u}{dx^2} v\,dx = (u,\ Av) = \int_0^1 u \frac{d^2v}{dx^2} dx; \tag{13}$$

здесь u, v — произвольные элементы из $D(A)$.

Для оператора же $\tilde{A}$ это свойство не имеет места, так как

$$(Au,\ v) = (u,\ Av) + \frac{du}{dx} v \Big|_{x=0}^{x=1} - u\frac{dv}{dx}\Big|_{x=0}^{x=1} \tag{14}$$

и сумма двух последних членов правой части не равна нулю для всех u, $v \in D(\tilde{A})$. Свойство (13) гарантирует симметричность оператора A, оператор же $\tilde{A}$ несимметричен. Теория симметричных операторов хорошо разработана и может быть использована для изучения определенных классов дифференциальных операторов. Одним из важнейших понятий в ней является понятие самосопряженного оператора.

Оператор A называется *самосопряженным*, если он симметричен, т. е. если

$$(Au,\ v) = (u,\ Av) \text{ для всех } u,\ v \in D(A) \tag{15}$$

и если из тождества

$$(Au,\ v) = (u,\ w), \tag{16}$$

в котором v и w фиксированы, а u — любой элемент из $D(A)$, следует, что $v \in D(A)$ и $w = Av$.

Иначе говоря, A самосопряжен, если сопряженный ему оператор A^* имеет ту же область определения $D(A)$ и $A = A^*$ на $D(A)$.

Определение 1. Симметричный оператор A называется положительным, если квадратичная форма $(Au,\ u) \geqslant 0$ и $(Au,\ u) = 0$ тогда и только тогда, когда $u = 0$. Например, оператор, действующий в пространстве $H = L_2(0,\ 1)$

$$Au = -\frac{d^2u}{dx^2} \tag{17}$$

с областью определения $D(A)$, состоящей из функций u, удовлетворяющих требованиям $u \in C^2(0,\ 1)$ и дважды непрерывно дифференцируемых на $(0,\ 1)$ и $u(0) = u(1) = 0$, симметричен.

Для доказательства положительности составим квадратичную форму:

$$(Au,\ u) = -\int_0^1 \frac{d^2u}{dx^2} u\,dx = \int_0^1 \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx > 0,$$

Допустим, что $(Au, u)=0$ и, следовательно $\int\limits_0^1 (u')^2\,dx=0$. Тогда $u'(x)\equiv 0$ и $u(x)\equiv \text{const}$. Теперь из условий $u(0)=u(1)=0$ вытекает, что $u(x)\equiv 0$. Значит, оператор (17) положителен.

Определение 2. Симметричный оператор A называется положительно определенным, если существует такая постоянная $\gamma>0$, что

$$(Au, u)\geqslant \gamma^2\|u\|^2. \tag{18}$$

Последнее неравенство называется неравенством *положительной определенности*. Очевидно, что всякий положительно определенный оператор положителен. Обратное, вообще говоря, неверно. Покажем это на примере.

Пусть оператор B определяется формулой

$$Bu=-\,d^2u/dx^2,\ 0<x<\infty; \tag{19}$$

$$u\in C^2(0, \infty),\ u(0)=0,\ u(x)\equiv 0 \text{ при } x>a>\infty.$$

Имеем

$$(Bu, u)=-\int\limits_0^\infty \frac{d^2u}{dx^2}\,dx=\int\limits_0^a (u')^2\,dx=\int\limits_0^\infty (u')^2\,dx.$$

При этом если $(Bu, u)=0$, то $\int\limits_0^\infty (u')^2\,dx=0$.

Так как подынтегральная функция неотрицательна, то $u'(x)\equiv 0$ и $u(x)\equiv \text{const}$, но $u(0)=0$ и, значит, $u(x)\equiv 0$.

Оператор B не положительно определен. Чтобы убедиться в этом, докажем, что нижняя грань отношения $\dfrac{(Bu, u)}{\|u\|^2}$ равна нулю, а не некоторой положительной константе.

Возьмем последовательность функций

$$u_n(x)=\begin{cases} x(n-x)^3, & \text{если } 0\leqslant x\leqslant n;\\ 0, & \text{если } x>n=a.\end{cases}$$

Легко видеть, что $u_n\in D(A)$. Найдем норму u_n. Имеем

$$\|u_n\|^2=\int\limits_0^{n=a} x^2(n-x)^6\,dx, \text{ где } a=\text{const}.$$

Сделаем замену $x=n\xi$. Очевидно, $\xi\in[0, 1]$,

$$\|u_n\|^2=n^9\int\limits_0^1 \xi^2(1-\xi)^6\,d\xi=c_1n^9,\ c_1=\text{const}.$$

Далее, $(Bu_n, u_n)=\int\limits_0^\infty (u_n')^2\,dx=\int\limits_0^n (n-4x)^2(n-x)^4\,dx.$

Замена $x=n\xi$ дает

$$(Bu_n, u_n)=n^7\int_0^1(1-\xi)^4(1-4\xi)^2\,d\xi=c_2n^7,\quad c_2=\text{const}.$$

Теперь

$$\frac{Bu_n, u_n}{\|u\|^2}=\frac{c_2}{c_1n^2}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$$

и, следовательно, нижняя грань $\frac{(Bu_n, u_n)}{\|u_n\|^2}=0$, что и доказывает утверждение.

Оператор уравнения стационарной теплопроводности. Пусть

$$A\Theta=-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\lambda_{jk}\frac{\partial\Theta}{\partial x_k}\right)+c(x)\Theta \tag{20}$$

— дифференциальное выражение, коэффициенты которого определены в некоторой конечной области Ω трехмерного пространства E_3. Границу Γ области Ω будем считать кусочно-гладкой. Примем еще, что $\lambda_{jk}\in C^1(\overline{\Omega})$ — пространству функций, непрерывных в $\overline{\Omega}$ вместе со своими первыми производными.

Дифференциальное выражение (20) будем считать эллиптическим в замкнутой области $\overline{\Omega}$. В этом случае все собственные числа $\mu_1(x)$, $\mu_2(x)$, $\mu_3(x)$ — матрицы старших коэффициентов $\lambda_{jk}(x)$ — имеют в $\overline{\Omega}$ один и тот же знак. *Изменив, если это нужно, знак выражения* $A\Theta$, можно всегда считать, что $\mu_k(x)>0$, $x\in\overline{\Omega}$.

Уравнение относительно $\mu(x)$

$$\begin{vmatrix}\lambda_{11}-\mu, & \lambda_{12}, & \lambda_{13}\\ \lambda_{21}, & \lambda_{22}-\mu, & \lambda_{23}\\ \lambda_{31}, & \lambda_{32}, & \lambda_{33}-\mu\end{vmatrix}=0$$

имеет старший коэффициент $(-1)^3=-1$, прочие коэффициенты этого уравнения непрерывны в $\overline{\Omega}$. Отсюда следует, что корни $\mu_k(x)$ этого уравнения — *непрерывные в* $\overline{\Omega}$ *функции от* x. *Будучи положительными* в компактной замкнутой области $\overline{\Omega}$, они в этой области ограничены снизу некоторой положительной постоянной, которую обозначим через γ_0:

$$\mu_k(x)\geqslant\gamma_0 \text{ при всех } x\in\overline{\Omega}. \tag{21}$$

Эллиптическое дифференциальное выражение, удовлетворяющее неравенству (21), называется невырождающимся в Ω. Пусть t_1, t_2, t_3 — произвольные числа Если $\mu_1(x)$ — наименьшее из собственных чисел матрицы λ_{jk} (j, $k=1, 2, 3$), то, как известно,

$$\lambda_{jk}(x)\,t_jt_k\geqslant\mu_1(x)\sum_{k=1}^{3}t_k^2.$$

Воспользовавшись неравенством (21), получим

$$\lambda_{jh}(x)\, t_j t_h \geqslant \gamma_0 \sum_{k=1}^{3} t_k^2. \tag{22}$$

Потребуем для (20) дополнительно, чтобы

$$c(x) \geqslant 0 \text{ при всех } x \in \overline{\Omega}. \tag{23}$$

Рассмотрим теперь задачу с однородным краевым условием

$$A\Theta = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\lambda_{jk}\frac{\partial\Theta}{\partial x_k}\right) + c(x)\,\Theta = f(x), \quad \Theta|_\Gamma = 0. \tag{24}$$

Будем считать, что $f(x) \in L_2(\Omega)$, и будем искать решение задачи (24) для $\Theta(x) \in L_2(\Omega)$. Задача (24) порождает оператор, который обозначим через Z. (и действует по формуле

$$Z\Theta = A\Theta = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\lambda_{jk}\frac{\partial\Theta}{\partial x_k}\right) + c(x)\,\Theta.$$

За его область определения $D(Z)$ можно принять множество тех функций из $C^2(\overline{\Omega},)$ которые удовлетворяют однородному краевому условию $\Theta|_\Gamma = 0$.

Докажем, что оператор Z в $L_2(\Omega)$ — положительно определенный. Достаточно установить три факта: 1) множество $D(Z)$ плотно в $L_2(\Omega)$; 2) оператор Z симметричен, т. е. $(Z\Theta,\ v) = (\Theta,\ Z\,v)$; 3) оператор Z удовлетворяет неравенству положительной определенности $(Z\Theta,\ \Theta) \geqslant \gamma^2 \|\Theta\|^2$, $\gamma = \text{const} > 0$.

Очевидно, что множество функций из $C^2(\overline{\Omega})$ и обращающихся в нуль на Γ плотно в $L_2(\Omega)$. Докажем симметричность оператора Z. Пусть $\Theta,\ v \in D(Z)$. Это значит, что $\Theta,\ v \in C^2(\overline{\Omega})$ и $\Theta|_\Gamma = v|_\Gamma = 0$.

Составим разность:

$$(Z\Theta,\ v) - (\Theta,\ Zv) = (A\Theta,\ v) - (\Theta,\ Av) = \int_\Omega (vA\Theta - \Theta Av)\, d\Omega.$$

Применив к последнему интегралу формулу Грина, получим

$$(Z\Theta,\ v) - (\Theta,\ Zv) = \int_\Gamma \lambda_{jk}\left(v\frac{\partial\Theta}{\partial x_k} - \Theta\frac{\partial v}{\partial x_k}\right)\cos(n,\ x_j)\, d\Gamma.$$

В силу равенства (24) интеграл справа равен нулю. Симметричность оператора Z доказана.

Остается доказать неравенство положительной определенности. Имеем

$$(Z\Theta,\ \Theta) = (A\Theta,\ \Theta) = -\int_\Omega \Theta\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\lambda_{jk}\frac{\partial\Theta}{\partial x_k}\right) d\Omega + \int_\Omega c\,\Theta^2\, d\Omega.$$

Применим к первому интегралу формулу Грина. В силу однородного краевого условия $\Theta|_\Gamma=0$ интеграл на поверхности исчезает и мы получим

$$(Z\Theta,\ \Theta)=\int\limits_\Omega\left(\lambda_{jk}\frac{\partial\Theta}{\partial x_j}\frac{\partial\Theta}{\partial x_k}+c\Theta^2\right)d\Omega. \tag{25}$$

Интеграл (25) оценим снизу. Прежде всего отбросим неотрицательное слагаемое $c\Theta^2$. Далее воспользуемся неравенством (22), положив в нем $t_k=\partial\Theta/\partial x_k$:

$$\lambda_{jk}\frac{\partial\Theta}{\partial x_j}\frac{\partial\Theta}{\partial x_k}\geqslant\gamma_0\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x_k}\right)^2.$$

Пусть точка x^1 лежит вне области $\overline{\Omega}$. Доопределим функцию $\Theta(x)$, положив ее равной тождественно нулю вне $\overline{\Omega}$. Функция $\Theta(x)$ при этом остается непрерывной ввиду условия $\Theta|_\Gamma=0$. Имеем по формуле Ньютона—Лейбница

$$\Theta(x)-\Theta(0,\ x')=\int^{x'}\frac{\partial\Theta}{\partial\xi}(\xi,\ x^1)\,d\xi,\quad x,\ \xi\in\Omega.$$

Пусть точка $(0,\ x^1)$ лежит вне $\overline{\Omega}$ (этого можно добиться, поместив $\overline{\Omega}$ в трехмерный параллелепипед), поэтому

$$\Theta(0,\ x^1)\equiv0\quad\text{и}\quad\Theta(x)=\int\limits_0^{x'}\frac{\partial\Theta}{\partial\xi}(\xi,\ x^1)\,d\xi.$$

По неравенству Коши—Буняковского,

$$\Theta^2(x)\leqslant\int\limits_0^{x'}d\xi\int\limits_0^{x'}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\xi}\right)^2d\xi\leqslant a_1\int\limits_0^{a_1}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\xi}\right)^2d\xi,$$

где a_1 — сторона параллелепипеда, содержащего $\overline{\Omega}$.

Проинтегрируем последнее неравенство по всему трехмерному параллелепипеду $\Pi\{0\leqslant x_k\leqslant a_k,\ k=1,\ 2,\ 3\}$:

$$\int\limits_\Pi\Theta^2(x)\,dx\leqslant a_1^2\int\limits_0^{a_1}d\xi\int\limits_0^{a_2}dx_2\int\limits_0^{a_3}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\xi}\right)^2dx_3=a_1^2\int\limits_0^{a_1}dx_1\int\limits_0^{a_2}dx_2\int\limits_0^{a_3}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x_1}\right)^2dx_3=$$

$$=a_1^2\int\limits_\Pi\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x_1}\right)^2dx.$$

Отбросим интегралы по области $\Omega_1 = \Pi - \overline{\Omega}$, как равные нулю, и прибавим справа неотрицательную сумму $\sum_{k=2}^{3}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x_k}\right)^2$. Это приведет нас к неравенству

$$\int_\Omega \Theta^2 d\Omega < a_1^2 \int_\Omega \sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x_k}\right)^2 d\Omega. \tag{26}$$

Неравенство (26) известно как неравенство Фридрихса. Для функции $\Theta(x) \in D(Z)$ это неравенство справедливо; окончательно получаем

$$(Z\Theta,\ \Theta) > \gamma_0 \int_\Omega \sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x_k}\right)^2 d\Omega > \frac{\gamma_0}{a_1^2}\ \|\Theta\|^2, \tag{27}$$

что и доказывает его положительную определенность.

Оператор (24) часто встречается в приложениях, с которыми приходится сталкиваться при решении задач стационарной теплопроводности в изотропных и анизотропных средах. Приведем без доказательства следующую теорему, связанную с энергетическим пространством оператора (24).

Теорема. Энергетическое пространство H_Z состоит из тех и только тех функций, которые: 1) квадратично суммируемы в Ω и имеют квадратично суммируемые обобщенные первые производные, 2) удовлетворяют краевому условию $\Theta|_\Gamma = 0$ в следующем смысле: если $\Theta \in H_Z$, то существует последовательность функций $\Theta_n \in D(Z)$ таких, что

$$\int_\Omega (\Theta_n - \Theta)^2 d\Omega \underset{n\to\infty}{\to} 0,\quad \int_\Omega \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial\Theta_n}{\partial x_k} - \frac{\partial\Theta}{\partial x_k}\right)^2 d\Omega \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

$$(m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \tag{28}$$

В пространстве H_Z энергетические произведения и норма определяются формулами

$$[\Theta,\ v] = \int_\Omega \left(\lambda_{jk}\frac{\partial\Theta}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_k} + c\Theta v\right) d\Omega; \tag{29}$$

$$\|\Theta\|_Z^2 = \int_\Omega \left(\lambda_{jk}\frac{\partial\Theta}{\partial x_j}\frac{\partial\Theta}{\partial x_k} + c\Theta^2\right) d\Omega. \tag{30}$$

Заметим, что при $\lambda_{jk} \equiv 1$, $c \equiv 0$ формулы (29), (30) дают энергетическое произведение и норму оператора Лапласа задачи Дирихле, т. е. $-\Delta\Theta = f(x)$, $\Theta|_\Gamma = 0$.

Задача Дирихле для оператора (24), т. е. задача $Z\Theta = A\Theta = f(x)$, $\Theta|_\Gamma = 0$, имеет единственное решение в силу его положительной определенности при любой $f(x) \in L_2(\Omega)$. Это решение $\Theta_0(x) \in H_Z$. Функция Θ_0 суммируема с квадратом, имеет суммируемые с квадратом обобщенные первые производные и обращается в нуль на границе области в смысле первого из соотношений (28). Обобщенное решение $\Theta_0(x)$ есть решение задачи о минимуме функционала

$$F(\Theta) = \|\Theta\|^2 - 2(\Theta, f) = \int_\Omega \left(\lambda_{jk} \frac{\partial\Theta}{\partial x_j} \frac{\partial\Theta}{\partial x_k} - 2f\Theta\right) d\Omega$$

при краевом условии $\Theta|_\Gamma = 0$. Это решение можно представить в виде ряда

$$\Theta_0^N(x) = \sum_{k=1}^{N} (f, \omega_k)\, \omega_k(x), \quad x \in \Omega, \quad f \in L_2(\Omega),$$

где $\omega_k(x)$ — последовательность функций, удовлетворяющая условию $\omega_k|_\Gamma = 0$ и ортонормированная в энергетическом пространстве H_Z.

Рассмотренный нами оператор (24) интересен тем, что сформулированная для него задача Дирихле может быть решена не только с помощью представления решения в виде ряда по собственным функциям оператора $A\Theta$, но и по собственным функциям оператора Лапласа $\Delta\Theta$, т. е. функциям $\Theta_k = A_k \prod_{k=1}^{3} \sin \frac{\pi_k m_k x_k}{a_k}$, если область параллелепипеда $0 \leqslant x_k < a_k$. Взятые в качестве координатных при решении задачи Дирихле, эти функции дают решение со свойствами: 1) вторые производные $\Theta_0^N(x)$ сходятся в метрике $L_2(\Omega)$ к вторым производным точного решения; 2) первые производные сходятся в $L_2(\Omega)$, а приближенные решения Θ_0^N равномерно сходятся в Ω к точному решению [62].

Положительно определенный симметричный линейный оператор Z и задача нахождения его собственных функций и собственных чисел, т. е. нетривиальных решений уравнения

$$Z\Theta - \mu\Theta = 0, \quad \Theta|_\Gamma = 0,$$

могут оказаться полезными во многих прикладных задачах теории стационарной и нестационарной теплопроводности и тепло- и массообмена.

Примем без доказательства некоторые свойства, касающиеся собственных чисел и функций оператора Z: 1) собственные числа симметричного оператора вещественны; 2) в сепарабельном гильбертовом пространстве симметричный оператор имеет не более чем счетное множество собственных чисел; 3) собственные функции симметричного оператора образуют ортонормированную систему; 4) собственные элементы положительно определенного оператора ортогональны в энергетическом пространстве, если они ортогональны в исходном пространстве; 5) любое собственное число положительно определенного оператора не меньше нижней грани этого оператора.

Последнее определение иллюстрируется следующим примером. Пусть $\Theta \in D(\mathrm{Z})$ — области определения оператора Z, заданного соотношением (24), тогда для любого собственного числа μ этого оператора имеет место неравенство

$$\mu = \frac{(\mathrm{Z}\Theta,\ \Theta)}{\|\Theta\|} \geqslant \gamma^2,$$

где γ^2 — постоянная в неравенстве $(\mathrm{Z}\Theta,\ \Theta) \geqslant \gamma^2 \|\Theta\|^2$.

ПРИЛОЖЕНИЕ III. Таблицы корней характеристических уравнений

Таблица III.1

Корни уравнения $\operatorname{ctg} \mu = \mu/\mathrm{Bi}$

Bi	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6
0	0	3,1416	6,2832	9,4248	12,5664	15,7080
0,001	0,0316	3,1419	6,2833	9,4249	12,5665	15,7080
0,002	0,0447	3,1422	6,2835	9,4250	12,5665	15,7081
0,004	0,0632	3,1429	6,2838	9,4252	12,5667	15,7082
0,006	0,0774	3,1435	6,2841	9,4254	12,5668	15,7083
0,008	0,0893	3,1441	6,2845	9,4256	12,5670	15,7085
0,01	0,0998	3,1448	6,2848	9,4258	12,5672	15,7086
0,02	0,1410	3,1479	6,2864	9,4269	12,5680	15,7092
0,04	0,1987	3,1543	6,2895	9,4290	12,5696	15,7105
0,06	0,2425	3,1606	6,2927	9,4311	12,5711	15,7118
0,08	0,2791	3,1668	6,2959	9,4333	12,5727	15,7131
0,1	0,3111	3,1731	6,2991	9,4354	12,5743	15,7143
0,2	0,4328	3,2039	6,3148	9,4459	11,5823	15,7207
0,3	0,5218	3,2341	6,3305	9,4565	12,5902	15,7270
0,4	0,5932	3,2636	6,3461	9,4670	12,5981	15,7334
0,5	0,6533	3,2923	6,3616	9,4775	12,6060	15,7397
0,6	0,7051	3,3204	6,3770	9,4879	12,6139	15,7460
0,7	0,7506	3,3477	6,3923	9,4983	12,6218	15,7524
0,8	0,7910	3,3744	6,4074	9,5087	12,6296	15,7587
0,9	0,8274	3,4003	6,4224	9,5190	12,6375	15,7650
1,0	0,8603	3,4256	6,4373	9,5293	12,6453	15,7713
1,5	0,9882	3,5422	6,5097	9,5801	12,6841	15,8026
2,0	1,0769	3,6436	6,5783	9,6296	12,7223	15,8336
3,0	1,1925	3,8088	6,7040	9,7240	12,7966	15,8945
4,0	1,2646	3,9352	6,8140	9,8119	12,8678	15,9536
5,0	1,3138	4,0336	6,9096	9,8928	12,9352	16,0107
6,0	1,3496	4,1116	6,9924	9,9667	12,9988	16,0654
7,0	1,3766	4,1746	7,0640	10,0339	13,0584	16,1177
8,0	1,3978	4,2264	7,1263	10,0949	13,1141	16,1675
9,0	1,4149	4,2694	7,1806	10,1502	13,1660	16,2147
10,0	1,4289	4,3058	7,2281	10,2003	13,2142	16,2594
15,0	1,4729	4,4255	7,3959	10,3898	13,4078	16,4474
20,0	1,4961	4,4915	7,4954	10,5117	13,5420	16,5864
30,0	1,5202	4,5615	7,6057	10,6543	13,7085	16,7691
40,0	1,5325	4,5979	7,6647	10,7334	13,8048	16,8794
60,0	1,5451	4,6353	7,7259	10,8172	13,9094	17,0026
80,0	1,5514	4,6543	7,6573	10,8606	13,9644	17,0686
100,0	1,5552	4,6658	7,7764	10,8871	13,9981	17,1093
∞	1,5708	4,7124	7,8540	10,9956	14,1372	17,2788

Таблица III.2

Корни уравнения $\operatorname{tg}\mu = -\mu/Bi$

Bi	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6
0	1,5708	4,7124	7,8540	10,9956	14,1372	17,2788
0,1	1,6320	4,7335	7,8667	11,0047	14,1443	17,2845
0,2	1,6887	4,7544	7,8794	11,0137	14,1513	17,2903
0,3	1,7414	4,7751	7,8920	11,0228	14,1584	17,2961
0,4	1,7906	4,7956	7,9046	11,0318	14,1654	17,3019
0,5	1,8366	4,8158	7,9171	11,0409	14,1724	17,3076
0,6	1,8798	4,8358	7,9295	11,0498	14,1795	17,3134
0,7	1,9203	4,8556	7,9419	11,0588	14,1865	17,3192
0,8	1,9586	4,8751	7,9542	11,0677	14,1935	17,3249
0,9	1,9947	4,8943	7,9665	11,0767	14,2005	17,3306
1,0	2,0288	4,9132	7,9787	11,0856	14,2075	17,3364
1,5	2,1746	5,0037	8,0385	11,1296	14,2421	17,3649
2,0	2,2889	5,0870	8,0962	11,1727	14,2764	17,3932
3,0	2,4557	5,2329	8,2045	11,2560	14,3434	17,4490
4,0	2,5704	5,3540	8,3029	11,3349	14,4080	17,5034
5,0	2,6537	5,4544	8,3914	11,4086	14,4699	17,5562
6,0	2,7165	5,5378	8,4703	11,4773	14,5288	17,6072
7,0	2,7654	5,6078	8,5406	11,5408	14,5847	17,6562
8,0	2,8044	5,6669	8,6031	11,5994	14,6374	17,7032
9,0	2,8363	5,7172	8,6587	11,6532	14,6870	17,7481
10,0	2,8628	5,7606	8,7083	11,7027	14,7335	17,7908
15,0	2,9476	5,9080	8,8898	11,8959	14,9251	17,9742
20,0	2,9930	5,9921	9,0019	12,0250	15,0625	18,1136
30,0	3,0406	6,0831	9,1294	12,1807	15,2380	18,3018
40,0	3,0651	6,1311	9,1987	12,2688	15,3417	18,4180
50,0	3,0801	6,1606	9,2420	12,3247	15,4090	18,4953
60,0	3,0901	6,1805	9,2715	12,3632	15,4559	18,5497
80,0	3,1028	6,2058	9,3089	12,4124	15,5164	18,6209
100,0	3,1105	6,2211	9,3317	12,4426	15,5537	18,6650
∞	3,1416	6,2832	9,4248	12,5664	15,7080	18,8496

Таблица III.3

Корни уравнения $\operatorname{tg}\mu = 2\mu Bi/(\mu^2 - Bi^2)$

Bi	μ_1	μ_2	μ_3	μ	μ_5	μ_6
0						
0,02	0,1997	3,1543	6,2895	9,4290	12,5696	15,7105
0,04	0,2819	3,1669	6,2959	9,4333	12,5727	15,7731
0,06	0,3447	3,1793	6,3004	9,4375	12,5759	15,7156
0,08	0,3974	3,1917	6,3085	9,4417	12,5791	15,7181
0,1	0,4435	3,2039	6,3149	9,4460	12,5823	15,7207
0,2	0,6221	3,2640	6,3462	9,4670	12,5981	15,7334
0,3	0,7558	3,3217	6,3772	9,4880	12,6139	15,7461
0,4	0,8656	3,3774	6,4079	9,5089	12,6297	15,7587
0,5	0,9601	3,4310	6,4382	9,5296	12,6454	15,7713
0,6	1,0436	3,4828	6,4682	9,5503	12,6611	15,7840

Bi	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6
0,7	1,1184	3,5328	6,4978	9,5708	12,6767	15,7965
0,8	1,1864	3,5811	6,5271	9,5912	12,6923	15,8091
0,9	1,2489	3,6279	6,5560	9,6116	12,7078	15,8216
1,0	1,3066	3,6732	6,5846	9,6317	12,7232	15,8341
2,0	1,7205	4,0575	6,8513	9,8263	12,8746	15,9573
3,0	1,9765	4,1492	7,0844	10,0073	13,0193	16,0769
4,0	2,1538	4,5778	7,2871	10,1740	13,1566	16,1923
5,0	2,2844	4,7612	7,4036	10,3264	13,2862	16,3031
6,0	2,3849	4,9112	7,6175	10,4659	13,4079	16,4090
7,0	2,4645	5,0350	7,7521	10,5927	13,5218	16,5100
8,0	2,5292	5,1408	7,8703	10,7080	13,6280	16,6058
9,0	2,5827	5,2303	7,9747	10,8130	13,7201	16,6968
10,0	2,6277	5,3073	8,0572	10,9087	13,8193	16,7827
∞	3,1416	6,2832	9,4248	12,5664	15,7080	18,8496

Таблица III.4

Корни уравнения $\operatorname{tg}\mu = -\mu/(Bi - 1)$

Bi	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6
0	0,0000	4,4934	7,7253	10,9041	14,0662	17,2208
0,005	0,1224	4,4945	7,7259	10,9046	14,0666	17,2210
0,01	0,1730	4,4956	7,7265	10,9050	14,0669	17,2213
0,02	0,2445	4,4979	7,7278	10,9060	14,0676	17,2219
0,03	0,2991	4,5001	7,7291	10,9069	14,0683	17,2225
0,04	0,3450	4,5023	7,7304	10,9078	14,0690	17,2231
0,05	0,3854	4,5045	7,7317	10,9087	14,0697	17,2237
0,06	0,4217	4,5068	7,7330	10,9096	14,0705	17,2242
0,08	0,4860	4,5112	7,7356	10,9115	14,0719	17,2254
0,10	0,5423	4,5157	7,7382	10,9133	14,0733	17,2266
0,15	0,6609	4,5268	7,7447	10,9179	14,0769	17,2295
0,2	0,7593	4,5379	7,7511	10,9225	14,0804	17,2324
0,3	0,9208	4,5601	7,7641	10,9316	14,0875	17,2382
0,4	1,0528	4,5822	7,7770	10,9408	14,0946	17,2440
0,6	1,2644	4,6261	7,8028	10,9591	14,1088	17,2556
0,8	1,4320	4,6696	7,8284	10,9774	14,1230	17,2672
1,0	1,5708	4,7124	7,8540	10,9956	14,1372	17,2788
1,2	1,6887	4,7544	7,8794	11,0137	14,1513	17,2903
1,4	1,7906	4,7956	8,9046	11,0318	14,1654	17,3019
1,6	1,8798	4,8358	7,9295	11,0498	14,1795	17,3134
1,8	1,9586	4,8751	7,9542	11,0677	14,1935	17,3249
2,0	2,0288	4,9132	7,9787	11,0856	14,2075	17,3364
2,5	2,1746	5,0037	8,0385	11,1296	14,2421	17,3649
3,0	2,2889	5,0870	8,0962	11,1727	14,2764	17,3932
4,0	2,4557	5,2329	8,2045	11,2560	14,3434	17,4490
6,0	2,6537	5,4544	8,3914	11,4086	14,4699	17,5562
8,0	2,7654	5,6078	8,5406	11,5408	14,5847	17,6567
10,0	2,8363	5,7172	8,6587	11,6532	14,6870	17,7481
16,0	2,9476	5,9080	8,8898	11,8959	14,9251	17,9742

Bi	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6
21,0	2,9930	5,9921	9,0019	12,0250	15,0625	18,1136
31,0	3,0406	6,0831	9,1294	12,1807	15,2380	18,3018
41,0	3,0651	6,1311	9,1987	12,2688	15,3417	18,4180
51,0	3,0801	6,1606	9,2420	12,3247	15,4090	18,4953
61,0	3,0901	6,1805	9,2715	12,3632	15,4559	18,5497
81,0	3,1028	6,2058	9,3089	12,4124	15,5164	18,6209
101,0	3,1105	6,2211	9,3317	12,4426	15,5537	18,6650
∞	3,1416	6,2832	9,4248	12,5664	15,7080	18,8496

Таблица III.5

Корни уравнения $\dfrac{\mu(Bi_1 + Bi_2)}{\mu^2 - Bi_1 Bi_2} = \operatorname{tg}\mu$

Bi_2	Bi_1				
	0,01	0,1	1	10	100
0,01	0,141	0,327	0,100	0,316	1,000
	3,147	3,176	0,868	1,435	1,562
	6,286	6,300	3,428	4,308	4,667
	9,427	9,436	6,439	7,229	7,777
	12,57	12,57	9,530	10,201	10,89
	15,71	15,71	12,64	13,21	14,00
0,1	0,327	3,204	0,316	1,000	1,616
	3,176	6,315	0,929	1,490	3,162
	6,300	9,446	3,452	4,327	4,686
	9,436	12,58	6,452	7,241	7,789
	12,57	15,72	9,540	10,21	10,89
	15,71	18,86	12,65	13,22	14,00
1,0	0,100	0,316	1,000	1,875	2,012
	0,868	0,929	1,306	3,162	4,866
	3,428	3,452	3,673	4,507	7,901
	6,439	6,452	6,584	7,355	10,00
	9,530	9,540	9,632	10,29	10,97
	12,64	12,65	12,72	13,27	14,07
10	0,316	1,000	1,875	2,628	2,836
	1,435	1,490	3,162	5,307	5,707
	4,308	4,327	4,507	8,068	8,627
	7,229	7,241	7,355	10,00	11,59
	10,201	10,21	10,29	10,91	14,59
	13,21	13,22	13,27	13,82	17,62
100	1,000	1,616	2,012	2,836	3,080
	1,562	3,162	4,866	5,707	6,160
	4,667	4,686	7,901	8,627	9,240
	7,777	7,789	10,00	11,59	12,32
	10,89	10,89	10,97	14,59	15,40
	14,00	14,00	14,07	17,62	18,48

Таблица III.6

Корни уравнений $J_0(\mu)=0$ и $J_1(\mu)=0$

n	$\nu=0$	$\nu=1$	n	$\nu=0$	$\nu=1$
1	2,4048	3,8717	6	18,0711	19,6159
2	5,5201	7,0156	7	21,2116	22,7601
3	8,6537	10,1735	8	24,3525	25,9037
4	11,7915	13,3237	9	27,4935	29,0468
5	14,9309	16,4706	10	30,6346	32,1897

Таблица III.7

Корни уравнения $J_0(\mu)/J_1(\mu)=\mu/\mathrm{Bi}$

Bi	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6
0	0,0000	3,8317	7,0156	10,1735	13,3237	16,4706
0,01	0,1412	3,8343	7,0170	10,1745	13,3244	16,4712
0,02	0,1995	3,8369	7,0184	10,1754	13,3252	16,4718
0,04	0,2814	3,8421	7,0213	10,1774	13,3267	16,4731
0,06	0,3438	3,8473	7,0241	10,1794	13,3282	16,4743
0,08	0,3960	3,8525	7,0270	10,1813	13,3297	16,4755
0,10	0,4417	3,8577	7,0298	10,1833	13,3312	16,4767
0,15	0,5376	3,8706	7,0369	10,1882	13,3349	13,4797
0,20	0,6170	3,8835	7,0440	10,1931	13,3387	16,4828
0,30	0,7465	3,9091	7,0582	10,2029	13,3462	16,4888
0,40	0,8516	3,9344	7,0723	10,2127	13,3537	16,4949
0,50	0,9408	3,9594	7,0864	10,2225	13,3611	16,5010
0,60	1,0184	3,9841	7,1004	10,2322	13,3686	16,5070
0,70	1,0873	4,0085	7,1143	10,2419	13,3761	16,5131
0,80	1,1490	4,0325	7,1282	10,2519	13,3835	16,5191
0,90	1,2048	4,0562	7,1421	10,2613	13,3910	16,5251
1,0	1,2558	4,0795	7,1558	10,2710	13,3984	16,5312
1,5	1,4569	4,1902	7,2233	10,3188	13,4353	16,5612
2,0	1,5994	4,2910	7,2884	10,3658	13,4719	16,5910
3,0	1,7887	4,4634	7,4103	10,4566	13,5434	16,6499
4,0	1,9081	4,6018	7,5201	10,5423	13,6125	16,7073
5,0	1,9898	4,7131	7,6177	10,6223	13,6786	16,7630
6,0	2,0490	4,8033	7,7039	10,6964	13,7411	16,8168
7,0	2,0937	4,8772	7,7797	10,7646	13,8008	16,8684
8,0	2,1286	4,9384	7,8464	10,8271	13,8566	16,9179
9,0	2,1566	4,9897	7,9051	10,8842	13,9090	16,9650
10,0	2,1795	5,0332	7,9569	10,9363	13,9580	17,0099
15,0	2,2509	5,1773	8,1422	11,1367	14,1576	17,2008
20,0	2,2880	5,2568	8,2534	11,2677	14,2983	17,3442
30,0	2,3261	5,3410	8,3771	11,4221	14,4748	17,5348
40,0	2,3455	5,3846	8,4432	11,5081	14,5774	17,6508
50,0	2,3572	5,4112	8,4840	11,5621	14,6433	17,7272
60,0	2,3561	5,4291	8,5116	11,5990	14,6889	17,7807
80,0	2,3750	5,4516	8,5466	11,6461	14,7475	17,8502
100,0	2,3809	5,4652	8,5678	11,6747	14,7834	17,8931
∞	2,4048	5,5201	8,6537	11,7915	14,9309	18,0711

Корни уравнения $Y_0(k\mu)(\mathrm{Bi}J_0(\mu)+\mu J_1(\mu)) - J_0(k\mu)(\mathrm{Bi}Y_0(\mu)+\mu Y_1(\mu))=0$

k	Bi				
	100	10	5	1	0,2
1,2	14,9617 29,9633 45,0159 60,1340 75,3225	11,5348 25,5099 40,5345 55,9043 71,4143	10,2945 24,6549 39,9513 55,4701 71,0706	8,6942 23,8712 39,4573 55,1121 70,7903	8,2624 23,7051 39,3562 55,0395 70,7339
1,5	6,1474 12,3156 18,4812 24,6482 30,8180	5,3256 10,9454 16,8188 22,8488 28,9668	4,8212 10,3895 16,3515 22,4675 28,6507	3,8550 9,7218 15,8908 22,1227 28,3770	3,5056 9,5618 15,7912 22,0508 28,3208
2,0	3,0918 6,2114 9,3255 12,4381 15,5504	2,8526 5,7686 8,7236 11,7203 14,7512	2,6626 5,4857 8,4241 11,4379 14,4953	2,1406 4,9901 8,0304 11,1239 14,2377	1,8801 4,8418 7,9338 11,0530 14,1820
2,5	2,05914 4,1495 6,2339 8,3165 10,3984	1,9466 3,9358 5,9311 7,9391 9,9605	1,8485 3,7725 5,7356 7,7353 9,7613	1,5202 3,4008 5,4062 7,4556 9,5235	1,3166 3,2648 5,3133 7,3864 9,4686
3,0	1,5404 3,1134 4,6804 6,2455 7,8098	1,4749 2,9882 4,4998 6,0155 7,5367	1,4151 2,8836 4,8659 5,8664 7,3825	1,1887 2,5979 4,0911 5,620 7,1656	1,0243 2,4738 4,0022 5,5526 7,1116
3,5	1,2286 2,4900 3,7458 4,9996 6,2553	1,1856 2,4078 3,6263 4,8456 6,0672	1,1452 2,3356 3,5301 4,7338 5,9467	0,9790 2,1104 3,2995 4,5177 5,7502	0,8429 1,9974 3,2148 4,4520 5,6972
4,0	1,0207 2,0739 3,1217 4,1676 5,2128	0,9901 2,0157 3,0369 4,0576 5,0791	0,9609 1,9629 2,9649 3,9714 4,9836	0,8333 1,7813 2,7698 3,7817 4,8061	0,7183 1,6784 2,6894 3,7180 4,7541

Таблица III.9

Корни уравнения $J_1(\mu)\,(\mu Y_1(\mu k) - \mathrm{Bi}\,Y_0(\mu k)) + Y_1(\mu)\,(\mathrm{Bi}\,J_0(\mu k) - \mu J_1(\mu k)) = 0$

k	Bi				
	100	10	5	1	0,2
1,1	14,7168	8,6298	5,6080	2,3105	2,1380
	15,5341	9,3312	6,3308	3,5137	3,6232
	16,9120	11,386	8,3948	5,2540	5,1877
	43,1776	12,555	9,5309	6,6212	6,6695
	43,6860	14,248	11,288	8,2285	8,1950
1,2	7,99617	5,5113	5,2060	2,2091	2,0415
	23,5806	6,0117	6,2323	3,3639	3,4601
	39,2749	7,8499	7,8330	4,9923	4,9471
	52,6078	9,3712	9,3064	6,3510	6,3722
	53,2130	10,473	10,576	7,8181	7,8150
1,5	3,45635	3,9893	2,4549	1,9174	1,7901
	9,62143	8,4117	2,8326	3,0361	3,0575
	15,9701	9,3645	4,1475	4,2987	4,3328
	22,4487	10,474	5,9922	5,6766	5,6238
	27,7813	12,289	6,5262	6,8175	6,8639
2,0	1,78095	1,6958	1,6418	1,5233	1,4713
	4,78643	4,7271	4,7072	2,6508	2,5669
	7,89405	7,8537	7,8440	3,5209	3,5968
	11,0211	10,991	9,0560	4,6815	4,6746
	14,1548	12,325	9,7582	5,7757	5,7366
2,5	1,2426	1,2421	1,2418	1,2409	1,2404
	3,2365	3,4389	3,6907	2,3077	2,2052
	5,2562	5,0876	5,0220	3,0724	3,0906
	7,4012	7,5215	7,5566	3,9371	3,9891
	9,4673	8,8355	8,6705	4,9362	4,9129
3,0	0,96141	0,97612	0,98911	1,0359	1,0676
	2,4266	2,3232	2,2244	2,0043	1,9253
	3,9963	4,1124	4,1716	2,7615	2,7144
	5,5078	5,3153	5,2281	3,4331	3,4873
	7,1314	7,3007	7,3579	4,2592	4,2842
3,5	0,78736	0,80271	0,81757	0,8821	0,9343
	1,9553	1,9023	1,8613	1,7545	1,7036
	3,1961	3,2835	3,4931	2,4916	2,4181
	4,4403	4,4698	4,4836	3,0896	3,1050
	5,6629	5,4741	5,3741	3,7526	3,8004
4,0	0,66849	0,68173	0,69525	0,7636	0,8286
	1,6419	1,6195	1,6023	1,5526	1,5248
	2,6610	2,5945	2,4955	2,2474	2,1767
	3,7129	3,8210	3,8989	2,8292	2,8008
	4,7370	4,7195	4,7113	3,3793	3,4202

Таблица III.10

Корни уравнения $J_1(\mu) Y_1(\mu k) - Y_1(\mu) J_1(\mu k) = 0$

k	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5
1,1	31,4219	62,8438	94,2500	125,6562	157,0625
1,2	15,7266	31,4258	47,1328	62,8359	78,5469
1,5	6,3218	12,5859	18,8633	25,1426	31,4238
2,0	3,1965	6,3122	9,4443	12,5810	15,7197
2,5	2,1565	4,2231	6,3066	8,3952	10,4863
3,0	1,6357	3,1788	4,7380	6,3027	7,8696
3,5	1,3220	2,5522	3,7971	5,0474	6,2999
4,0	1,1119	2,1342	3,1697	4,2104	5,2535

Таблица III.11

Корни уравнения $J_1(\mu) Y_0(\mu k) - Y_1(\mu) J_0(\mu k) = 0$

k	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5
1,1	16,0117	47,2344	78,3938	110,0156	141,4062
1,15	10,7695	31,5156	52,4219	73,3438	94,2812
1,2	8,1465	23,6641	39,3281	55,0234	70,7188
1,5	3,4028	9,5205	15,7656	22,0332	28,3066
2,0	1,7940	4,8020	7,9089	11,0352	14,1680
2,5	1,2427	3,2266	5,2888	7,3686	9,4546
3,0	0,9596	2,4372	3,9781	5,5349	7,0976
3,5	0,7855	1,9624	3,1913	4,4346	5,6835
4,0	0,6670	1,6450	2,6664	3,7008	4,7405

Таблица III.12

Корни уравнения $J_0(\mu) [\mathrm{Bi} Y_0(\mu k) - \mu Y_1(\mu k)] - Y_0(\mu) [\mathrm{Bi} J_0(\mu k) - \mu J_1(\mu k)] = 0$

k	Bi				
	100	10	5	1	0,2
1,2	14,9554 29,9515 44,9994 60,1145 75,3013	11,3495 25,3639 40,4309 55,8261 71,3519	9,9925 24,4829 39,8399 55,3888 71,0066	8,1969 23,6807 39,3414 55,0289 70,7256	7,7011 23,5115 39,2396 54,9563 70,6690
1,5	6,1466 12,3137 18,4784 24,6445 30,8135	5,2684 10,8704 16,7497 22,7897 28,9166	4,6886 10,2695 16,2618 22,3982 28,5949	3,4962 9,5555 15,7871 22,0478 28,3185	3,0315 9,3877 15,6857 21,9752 28,2620

k	Bi				
	100	10	5	1	0,2
2,0	3,0918	2,8373	2,6151	1,9153	1,5086
	6,2111	5,7401	5,4203	4,8532	4,6890
	9,3249	8,6895	8,3630	7,9404	7,8398
	12,4373	11,6855	11,3857	11,0577	10,9854
	15,5493	14,7179	14,4504	14,1856	14,1292
2,5	2,0593	1,9411	1,8274	1,3693	1,0160
	4,1495	3,9225	3,7348	3,2863	3,1268
	6,2337	5,9128	5,6942	5,3262	5,2267
	8,3162	7,9182	7,6957	7,3955	7,3237
	10,3980	9,9979	9,7253	9,4757	9,4195
3,0	1,5406	1,4729	1,4046	1,0831	0,7753
	3,1134	2,9811	2,8605	2,5016	2,3474
	4,6803	4,4892	4,3373	4,0192	3,9211
	6,2454	6,0023	5,8365	5,5648	5,4934
	7,8097	7,5219	7,3537	7,1211	7,0651
3,5	1,2288	1,1851	1,1398	0,9028	0,6331
	2,4901	2,4039	2,3207	2,0289	1,8806
	3,7458	3,6196	3,5098	3,2347	3,1382
	4,9996	4,8368	4,7110	4,4663	4,3956
	6,2526	6,0569	5,9236	5,7083	5,6527
4,0	1,0209	0,9904	0,9583	0,7769	0,5392
	2,0740	2,0134	1,9530	1,7123	1,5699
	3,1217	3,0325	2,9501	2,7112	2,6165
	4,1676	4,0515	3,9539	3,7338	3,6638
	5,2127	5,0718	4,9650	4,7665	4,7112

Таблица III.13

Корни уравнения $J_0(\mu)\, Y_1(\mu k) - Y_0(\mu)\, J_1(\mu k) = 0$

	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5
1,1	15,4062	47,0312	78,4688	109,9062	141,3438
1,2	7,5664	23,4688	39,2110	54,9375	70,6562
1,5	2,8900	9,3447	15,6602	21,9570	28,2480
2,0	1,3608	4,4660	7,8142	10,9673	14,1152
2,5	0,8660	3,08350	5,2010	7,3054	9,4053
3,0	0,6256	2,3040	3,8954	5,4751	7,0510
3,5	0,4850	1,8372	3,1125	4,3773	5,6385
4,0	0,3934	1,5266	2,5908	3,6456	4,6970

Таблица III.14

Корни уравнения $[\mu J_1(\mu) + \mathrm{Bi}_1 J_0(\mu)][\mathrm{Bi}_2 Y_0(\mu k) - \mu Y_1(\mu k)] - [\mathrm{Bi}_1 Y_0(\mu) + \mu Y_1(\mu)][\mathrm{Bi}_2 J_0(\mu k) - \mu J_1(\mu k)]$ при $k = 1,2$

Bi_1	Bi_2				
	100	10	1	5	0,2
100	14,2819	10,9064	9,5937	7,8239	7,3286
	28,6250	24,2545	23,3819	22,5811	22,4116
	43,0569	38,6467	38,0563	37,5565	37,4543
	57,6053	53,4205	52,9814	52,6195	52,5463
	72,2814	68,3926	68,0446	67,7611	67,7040
10	11,0801	8,6005	7,4835	5,8046	5,2903
	24,3888	20,2948	19,3503	18,4468	18,2523
	38,7356	34,2631	33,6046	33,0394	32,9233
	53,4809	49,1373	48,6540	48,2534	48,1722
	68,4350	64,3774	64,0007	63,6929	63,6308
5	9,8842	7,6068	6,5313	4,8222	4,2659
	23,5437	19,3804	18,3775	17,3996	17,1868
	38,1534	33,6123	32,9314	32,3449	32,2242
	53,0451	48,6568	48,1645	47,7560	47,6732
	68,0886	64,0019	63,6209	63,3095	63,2467
1	8,3145	6,1631	5,0739	3,1103	2,3234
	22,7625	18,4964	17,4175	16,3375	16,0985
	37,6583	33,0505	32,3480	31,7406	31,6153
	52,6850	48,2572	47,7570	47,3416	47,2574
	67,8059	63,6946	63,3099	62,9955	62,9321
0,2	7,8860	5,7364	4,6200	2,4638	1,4095
	22,5963	18,3043	17,2064	16,0996	15,8536
	37,5570	32,9347	32,2276	31,6155	31,4893
	52,6121	48,1761	47,6743	47,2574	47,1729
	67,7489	63,6326	63,2472	62,9321	62,8686

$k = 1,5$

Bi_1	100	10	1	5	0,2
100	6,0285	5,1789	4,6124	3,4336	2,9696
	12,0788	10,6763	10,0829	9,3718	9,2041
	18,1280	16,4413	15,9566	15,4827	15,3814
	24,1809	22,3652	21,9751	21,6249	21,5523
	30,2394	28,3775	28,0564	27,7779	27,7233
10	5,2340	4,5588	4,0785	2,9922	2,5307
	10,7483	9,5259	8,9608	8,2431	8,06926
	16,5072	14,9345	14,4422	13,9460	13,8386
	22,4206	20,6608	20,2545	19,8838	19,8065
	28,4233	26,5795	26,2459	25,9497	25,8896

Bi_1	Bi_2				
	100	10	5	1	0,2
5	4,7420 10,2004 16,6437 22,0410 28,1080	4,1505 9,0092 14,4649 20,2658 26,2483	3,7165 8,4369 13,9560 19,8476 25,9043	2,6805 7,6855 13,4359 19,4643 25,6046	2,2137 7,5000 13,3226 19,3843 25,5431
1	3,7897 9,5366 15,5841 21,6966 27,8343	3,2989 8,3446 13,9834 19,9000 25,9579	2,9235 7,7388 13,4499 19,4694 25,6070	1,9193 6,8911 12,8946 19,0720 25,3005	1,3751 6,6717 12,7726 18,9887 25,2376
0,2	3,4425 9,3768 15,4845 21,6246 27,7780	2,9680 8,1795 13,7761 19,8223 25,8980	2,5996 7,5612 13,3378 19,3897 25,5456	1,5550 6,6776 12,7735 18,9890 25,2377	0,8869 6,4444 12,6491 18,9050 25,1744
			$k=2$		
100	3,0611 6,1503 9,2339 12,3164 15,3986	2,8115 5,6872 8,6085 11,5753 14,5781	2,5923 5,3711 8,2845 11,2768 14,3116	1,8986 4,8065 7,8629 10,9496 14,0471	1,4926 4,6424 7,7623 10,8773 13,9907
10	2,8262 5,7151 8,6416 11,6091 14,6102	2,6097 5,3035 8,0693 10,9136 13,8252	2,4157 5,0111 7,7578 10,6186 13,5573	1,7688 4,4613 7,3364 10,2865 13,2864	1,3685 4,2962 7,2341 10,2124 13,2284
5	2,6395 5,4356 8,3448 11,3285 14,3555	2,4458 5,0477 7,7858 10,6373 13,5695	2,2696 4,7658 7,4748 10,3377 13,2966	1,6592 4,2164 7,0421 9,9958 13,0185	1,2618 4,0472 6,9361 9,9191 12,9587
1	2,1227 4,9430 7,9524 11,0150 14,0982	1,9737 4,5742 7,3958 10,3197 13,3061	1,8349 4,2953 7,0737 10,0099 13,0257	1,3027 3,7055 6,6090 9,6497 12,7373	0,8932 3,5095 6,4921 9,5682 12,6751

Bi_1	Bi_2: 100	10	5	1	0,2
0,2	1,8636 4,7950 7,8559 10,9443 14,0426	1,7263 4,4268 7,2978 10,2471 13,2487	1,5976 4,1445 6,9717 9,9346 12,8665	1,0797 3,5263 6,4953 9,5693 12,6756	0,6217 3,3129 6,3744 9,4864 12,6128
			$k=3,0$		
100	1,5326 3,0978 4,6571 6,2145 7,7711	1,4655 2,9668 4,4676 5,9735 7,4858	1,3978 2,8471 4,3167 5,8086 7,3183	1,0783 2,4896 3,9996 5,5374 7,0860	0,7711 2,3355 3,9015 5,4661 7,0301
10	1,4677 2,9738 4,4785 5,9865 7,5002	1,4057 2,8521 4,3011 5,7594 7,2291	1,3429 2,7397 4,1576 5,6005 7,0658	1,0393 2,3935 3,8463 5,3318 6,8341	0,7367 2,2397 3,7480 5,2600 6,7777
5	1,4084 2,8700 4,3455 5,8383 7,3469	1,3508 2,7555 4,1753 5,6178 7,0802	1,2921 2,6482 4,0359 5,4604 6,9172	1,0028 2,3099 3,7262 5,1900 6,6826	0,7045 2,1558 3,6268 5,1171 6,6251
1	1,1835 2,5858 4,0714 5,5927 7,1304	1,1390 2,4828 3,9086 5,3751 6,8640	1,0930 2,3850 3,7719 5,2171 6,6991	0,8511 2,0522 3,4507 4,9342 6,4546	0,5651 1,8864 3,3427 4,8561 6,3940
0,2	1,0198 2,4619 3,9826 5,5252 7,0764	0,9810 2,3607 3,8201 5,3075 6,8105	0,9409 2,2639 3,6826 5,1482 6,6436	0,7222 1,9217 3,3522 4,8596 6,3957	0,4315 1,7402 3,2386 4,7793 6,3340
			$k=3,5$		
100	1,2236 2,4800 3,7308 4,9797 6,2277	1,1802 2,3944 3,6056 4,8181 6,0335	1,1353 2,3119 3,4964 4,6930 5,9008	0,8995 2,0212 3,2220 4,4487 5,6858	0,6303 1,8729 3,1255 4,3780 5,6302

Bi_1	Bi_2 = 100	10	5	1	0,2
10	1,1809	1,1402	1,0979	0,8726	0,6076
	2,3985	2,3180	2,2398	1,9579	1,8101
	3,6122	3,4941	3,3898	3,1210	3,0245
	4,8268	4,6735	4,5530	4,3118	4,2409
	6,0436	5,8584	5,7294	5,5159	5,4601
5	1,1408	1,1025	1,0627	0,8469	0,5858
	2,3267	2,2503	2,1757	1,9007	1,7550
	3,5166	3,4031	3,3022	3,0363	2,9392
	4,7155	4,5668	4,4486	4,2076	4,1380
	5,9237	5,7424	5,6146	5,3 99	5,3432
1	0,9755	0,9455	0,9138	0,7332	0,4861
	2,1025	2,0347	1,9676	1,7038	1,5487
	3,2868	3,1796	3,0825	2,8121	2,7079
	4,5001	4,3552	4,2377	3,9882	3,9118
	5,7276	5,5484	5,4196	5,1968	5,1370
0,2	0,8399	0,8141	0,7869	0,6268	0,3822
	1,9897	1,9237	1,8580	1,5899	1,4216
	3,2022	3,0956	2,9983	2,7207	2,6108
	4,4344	4,2897	4,1715	3,9168	3,8378
	5,6746	5,4952	5,3656	5,1394	5,0784
			$k=4$		
100	1,0173	0,9869	0,9550	0,7745	0,5372
	2,0669	2,0068	1,9467	1,7068	1,5646
	3,1113	3,0226	2,9407	2,7024	2,6077
	4,1538	4,0384	3,9413	3,7216	3,6516
	5,1955	5,0554	4,9490	4,7509	4,6956
10	0,9868	0,9581	0,9279	0,7546	0,5209
	2,0092	1,9521	1,8948	1,6618	1,5202
	3,0270	2,9427	2,8642	2,6308	2,5362
	4,0444	3,9343	3,8407	3,6241	3,5540
	5,0627	4,9285	4,8252	4,6289	4,5735
5	0,9578	0,9306	0,9018	0,7352	0,5051
	1,9566	1,9022	1,8473	1,6200	1,4788
	2,9554	2,8743	2,7983	2,5681	2,4732
	3,9587	3,8519	3,7604	3,5450	3,4744
	4,9675	4,8364	4,7346	4,5381	4,4822
1	0,8309	0,8091	0,7859	0,6458	0,4296
	1,7758	1,7278	1,6788	1,4642	1,3186
	2,7610	2,6851	2,6130	2,3826	2,2821
	3,7694	3,6663	3,5764	3,3558	3,2810
	4,7904	4,6617	4,5600	4,3574	4,2984
0,2	0,7162	0,6977	0,6780	0,5553	0,34555
	1,6730	1,6266	1,5791	1,3638	1,2072
	2,6806	2,6054	2,5334	2,2978	2,1916
	3,7058	3,6029	3,5127	3,2876	3,2100
	4,7385	4,6098	4,5075	4,3016	4,2413

ПРИЛОЖЕНИЕ IV. Таблица изображений некоторых функций

№ п/п	Изображение функции $\hat{f}(s)=L[f(\tau)]$	Оригинал функции $f(\tau)$
1	$\frac{1}{s}$	1
2	$n!\, s^{-n-1}$	τ^n
3	$s^{-(n+1/2)}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$	$\frac{2^n \tau^{n-1/2}}{[1\cdot 3\cdot 5\ \ldots\ (2n-1)]\sqrt{\pi}}$
4	$\frac{\Gamma(m)}{s^m}$ $(m>0)$	τ^{m-1}
5	$\frac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}}=\frac{\Pi(m)}{s^{m+1}}$ $(m>-1)$	τ^m
6	$\frac{1}{s+a}$	$e^{-a\tau}$
7	$\frac{1}{(s-a)^2}$	$\tau e^{a\tau}$
8	$\frac{1}{(s-a)^n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$	$\frac{1}{(n-1)!}\tau^{n-1}e^{a\tau}$
9	$\frac{\Gamma(m)}{(s-a)^m}$ $(m>0)$	$\tau^{m-1}e^{a\tau}$
10	$\ln(s+a)-\ln(s+b)$, $\operatorname{Re} s>-\operatorname{Re} a,\ -\operatorname{Re} b$	$\tau^{-1}(e^{-b\tau}-e^{-a\tau})$
11	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$	$\frac{1}{a-b}(e^{a\tau}-e^{b\tau})$
12	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}$	$\frac{1}{a-b}(ae^{a\tau}-be^{b\tau})$
13	$(s+2a)\ln(s+2a)+s\ln s-$ $-2(s+a)\ln(s+b)$, $\operatorname{Re} s\geqslant 0,\ \ -\operatorname{Re} 2a$	$\tau^{-2}(1-e^{-a\tau})^2$
14	$2^{-1}\psi\left(\frac{s}{2}+\frac{1}{2}\right)-2^{-1}\psi\left(\frac{s}{2}\right)$, $\operatorname{Re} s>0$	$(1+e^{-\tau})^{-1}$
15	$(-a)^{n+1}\psi^{(n)}(as)$, $\operatorname{Re} s>0$ $\psi^{(n)}(z)=\frac{d^n}{dz^n}\psi(z)$	$\tau^n(1-e^{-\tau/a})^{-1}$, $\operatorname{Re} a>0$
16	$\frac{1}{(s-a)(s-b)(s-c)}$	$\frac{(b-c)e^{a\tau}+(c-a)e^{b\tau}+(a-b)e^{c\tau}}{(a-b)(b-c)(c-a)}$
17	$\frac{k}{s^2+k^2}$	$\sin k\tau$
18	$\frac{s}{s^2+k^2}$	$\cos k\tau$

№ п/п	Изображение функции $\widehat{f}(s)=L[f(\tau)]$	Оригинал функции $f(\tau)$
19	$\dfrac{s}{s^2-k^2}$	$\operatorname{ch} k\tau$
20	$\dfrac{k}{s^2-k^2}$	$\operatorname{sh} k\tau$
21	$\dfrac{1}{s(s^2+k^2)}$	$\dfrac{1}{k^2}(1-\cos k\tau)$
22	$\dfrac{1}{s^2(s^2+k^2)}$	$\dfrac{1}{k^3}(k\tau-\sin k\tau)$
23	$\dfrac{1}{(s^2+k^2)^2}$	$\dfrac{1}{2k^3}(\sin k\tau-k\tau\cos k\tau)$
24	$\dfrac{s}{(s^2+k^2)^2}$	$\dfrac{\tau}{2k}\sin k\tau$
25	$\dfrac{s^2}{(s^2+k^2)^2}$	$\dfrac{1}{2k}(\sin k\tau+k\tau\cdot\cos k\tau)$
26	$\dfrac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2}$	$\tau\cos k\tau$
27	$\dfrac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}\quad(a^2\neq b^2)$	$\dfrac{\cos a\tau-\cos b\tau}{b^2-a^2}$
28	$\dfrac{(2n)!\,a^{2n}}{s[s^2+(2a)^2][s^2+(4a)^2]\ \ldots\ [s^2+(2na)^2]}$, $\operatorname{Re} s>2n\,\lvert\operatorname{Im} a\rvert$	$\sin^{2n}(a\tau)$
29	$\dfrac{(2n+1)!\,a^{2n+1}}{(s^2+a^2)[s^2+(3a)^2]\ \ldots\ \{s^2+[(2n+1)a]^2\}}$ $\operatorname{Re} s>(2n+1)\,\lvert\operatorname{Im} a\rvert$	$\sin^{2n+1}(a\tau)$
30	$n!\,\dfrac{s^{n+1}}{(s^2+a^2)^{n+1}}\times\sum\limits_{0<2m<n}(-1)^m\dbinom{n+1}{2m+1}\left(\dfrac{a}{s}\right)^{2m+1}$, $\operatorname{Re} s>\lvert\operatorname{Im} a\rvert$	$\tau^n\sin a\tau$
31	$\dfrac{(2n)!\,a^{2n}}{s[s^2+(2a)^2]\ \ldots\ [s^2+(2na)^2]}\times\left\{1+\dfrac{s^2}{2!\,a^2}+\dfrac{s^2[s^2+(2a)^2]}{4!\,a^4}+\ \ldots\ +\dfrac{s^2(s^2+4a^2)\ \ldots\ [s^2+4(na-a)^2]}{(2n)!\,a^{2n}}\right\}$, $\operatorname{Re} s>2n\,\lvert\operatorname{Im} a\rvert$	$\cos^{2n}(a\tau)$

№ п/п	Изображение функции $\widehat{f}(s)=L[f(\tau)]$	Оригинал функции $f(\tau)$
32	$\dfrac{(2n+1)!\,a^{2n}s}{(s^2+a^2)[s^2+(3a)^2]\ \ldots\ [s^2+(2na)^2]}\times$ $\times\left\{1+\dfrac{s^2+a^2}{3!\,a^2}+\dfrac{(s^2+a^2)(s^2+9a^2)}{5!\,a^4}+\ldots+\right.$ $\left.+\dfrac{[s^2+a^2]\ \ldots\ [s^2+(2na-a)^2]}{(2n+1)!\,a^{2n}}\right\}$, $\operatorname{Re} s>(2n+1)\,\lvert\operatorname{Im} a\rvert$	$\cos^{2n+1}(a\tau)$
33	$\dfrac{n!\,s^{n+1}}{(s^2+a^2)^{n+1}}\times$ $\times\sum\limits_{1<2m<n+1}(-1)^m\left(\dfrac{n+1}{2m}\right)\left(\dfrac{a}{s}\right)^{2m}$. $\operatorname{Re} s>\lvert\operatorname{Im} a\rvert$	$\tau^n\cos(a\tau)$
34	$\dfrac{2abs}{[s^2+(a+b)^2][s^2+(a-b)^2]}$, $\operatorname{Re} s>\lvert\operatorname{Im}(\pm a\pm b)\rvert$	$\sin(a\tau)\sin(b\tau)$
35	$\dfrac{b(s^2-a^2+b^2)}{[s^2+(a+b)^2][s^2+(a-b)^2]}$, $\operatorname{Re} s>\lvert\operatorname{Im}(\pm a\pm b)\rvert$	$\cos(a\tau)\sin(b\tau)$
36	$\dfrac{b(s^2+a^2+b^2)}{[s^2+(a+b)^2][s^2+(a-b)^2]}$, $\operatorname{Re} s>\lvert\operatorname{Im}(\pm a\pm b)\rvert$	$\cos(a\tau)\cos(b\tau)$
37	$\dfrac{4k^3}{s^4+4k^4}$	$\sin k\tau\operatorname{ch}k\tau-\cos k\tau\operatorname{sh}k\tau$
38	$\dfrac{s}{s^4+4k^4}$	$\dfrac{1}{2k^2}\sin k\tau\operatorname{sh}k\tau$
39	$\dfrac{1}{s^4-k^4}$	$\dfrac{1}{2k^3}(\operatorname{sh}k\tau-\sin k\tau)$
40	$\dfrac{s}{s^4-k^4}$	$\dfrac{1}{2k^2}(\operatorname{ch}k\tau-\cos k\tau)$
41	$\dfrac{1}{(s-a)^2+k^2}$	$\dfrac{1}{k}e^{a\tau}\sin k\tau$
42	$\dfrac{3k^2}{s^3+k^3}$	$e^{-k\tau}-e^{\frac{k\tau}{2}}\left(\cos\dfrac{k\tau\sqrt{3}}{2}-\right.$ $\left.-\sqrt{3}\sin\dfrac{k\tau\sqrt{3}}{2}\right)$

№ п/п	Изображение функции $\bar{f}(s)=L[f(\tau)]$	Оригинал функции $f(\tau)$
43	$\frac{1}{s}\left(\frac{s-1}{s}\right)^n$	$l_n(\tau)=\frac{1}{n!}\,e^{\tau}\,\frac{d^n}{d\tau^n}\left(\tau^n e^{-\tau}\right)$
44	$\frac{s}{(s-k)^{3/2}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}\,e^{k\tau}(1+2k\tau)$
45	$\sqrt{s-a}-\sqrt{s-b}$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau^3}}\left(e^{b\tau}-e^{a\tau}\right)$
46	$\frac{1}{\sqrt{s}+k}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}-k\,e^{k^2\tau}\operatorname{erfc} k\sqrt{\tau}$
47	$\frac{\sqrt{s}}{s-k^2}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}+k\,e^{k^2\tau}\operatorname{erf} k\sqrt{\tau}$
48	$\frac{\sqrt{s}}{s+k^2}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}-\frac{2k}{\sqrt{\pi}}\,e^{-k^2\tau}\int\limits_0^{k\sqrt{\tau}} e^{x^2}\,dx$
49	$\frac{1}{\sqrt{s}\,(s-k^2)}$	$\frac{1}{k}\,e^{-k^2\tau}\operatorname{erf} k\sqrt{\tau}$
50	$\frac{1}{\sqrt{s}\,(s^2+k^2)}$	$\frac{2}{k\sqrt{\pi}}\,e^{-k^2\tau}\int\limits_0^{k\sqrt{\tau}} e^{x^2}\,dx$
51	$\frac{1}{\sqrt{s}\left(\sqrt{s}+k\right)}$	$e^{k^2\tau}\operatorname{erfc} k\sqrt{\tau}$
52	$\frac{1}{(s+k)\left(\sqrt{s+b}\right)}$	$\frac{1}{\sqrt{b-k}}\,e^{-k\tau}\operatorname{erf}\sqrt{(b-k)\tau}$
53	$e^{-k\sqrt{s}}\quad(k>0)$	$\frac{k}{2\sqrt{\pi\tau^3}}\,e^{-\frac{k^2}{4\tau}}$
54	$\frac{1}{s}\,e^{-k\sqrt{s}}\quad(k>0)$	$\left[1-\operatorname{erf}\frac{k}{2\sqrt{\tau}}\right]=\operatorname{erfc}\frac{k}{2\sqrt{\tau}}$
55	$\frac{1}{s^2}\,e^{-k\sqrt{s}}$	$4\tau\, i^2\operatorname{erfc}\frac{k}{2\sqrt{\tau}}=\left(\tau+\frac{k^2}{2}\right)\times$ $\times\operatorname{erfc}\frac{k}{2\sqrt{\tau}}-k\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}\,e^{-\frac{k^2}{4\tau}}$

№ п/п	Изображение функции $\hat{f}(s)=L[f(\tau)]$	Оригинал функции $f(\tau)$
56	$\frac{1}{\sqrt{s}}\,e^{-k\sqrt{s}}\quad (k\geqslant 0)$	$\frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}\,e^{-k^2/(4\tau)}$
57	$\frac{1}{s\sqrt{s^n}}\,e^{-k\sqrt{s}}\quad (k\geqslant 0)$	$(4\tau)^{n/2}\,i^n\operatorname{erfc}\frac{k}{2\sqrt{\tau}}$
58	$\frac{1}{s^n\sqrt{s}}\,e^{-2k\sqrt{s}}\quad (k>0)$	$\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^{\tau}(\tau-z)^{n-1}e^{-k/z}\frac{dz}{\sqrt{\pi z}}$
59	$\frac{1}{\left(1+\sqrt{s/b}\right)}\,e^{-k\sqrt{s}}$	$\sqrt{\frac{b}{\pi\tau}}\,e^{-k^2/(4\tau)}-b\,e^{k\sqrt{b}+b\tau}\times$ $\times\operatorname{erfc}\left(\frac{k}{2\sqrt{\tau}}+\sqrt{b\tau}\right)$
60	$\frac{be^{-k\sqrt{s}}}{s\left(b+\sqrt{s}\right)}\quad (k>0)$	$\operatorname{erfc}\frac{k}{2\sqrt{\tau}}-e^{bk+b^2\tau}\times$ $\times\operatorname{erfc}\left(b\sqrt{\tau}+\frac{k}{2\sqrt{\tau}}\right)$
61	$\frac{1}{\left(\sqrt{s}+b\right)^2}\,e^{-k\sqrt{s}}$	$-2b\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}\,e^{-k^2/(4\tau)}+$ $+(1+bk+2b^2\tau)\,e^{bk+b^2\tau}\times$ $\times\operatorname{erfc}\left(\frac{k}{2\sqrt{\tau}}+b\sqrt{\tau}\right)$
62	$\frac{1}{\sqrt{s^2+k^2}}$	$J_0(k\tau)$
63	$\frac{1}{\sqrt{s^2-k^2}}$	$I_0(k\tau)$
64	$\frac{\sqrt{s+2k}}{\sqrt{s}}-1$	$k\,e^{-k\tau}\left[I_0(k\tau)+I_1(k\tau)\right]$
65	$\frac{1}{\left(\sqrt{s+k}\right)\left(\sqrt{s+b}\right)}$	$e^{-(k+b)\tau/2}\,I_0\left(\frac{k-b}{2}\,\tau\right)$
66	$\frac{\Gamma(m)}{(s+k)^m\,(s+b)^m}\quad (m>0)$	$\sqrt{\pi}\left(\frac{\tau}{k-b}\right)^{m-1/2}e^{-(k+b)\tau/2}\times$ $\times I_{m-1/2}\left(\frac{k-b}{2}\,\tau\right)$

№ п/п	Изображение функции $f(s)=L[f(\tau)]$	Оригинал функции $f(\tau)$
67	$\dfrac{1}{(s+k)^{1/2}(s+b)^{3/2}}$	$\tau e^{-(k+b)\tau/2}\left[I_0\left(\dfrac{k-b}{2}\tau\right)+I_1\left(\dfrac{k-b}{2}\tau\right)\right]$
68	$\dfrac{\sqrt{s+2k}-\sqrt{s}}{\sqrt{s+2k}+\sqrt{s}}$	$\dfrac{1}{\tau}e^{-k\tau}I_1(k\tau)$
69	$\dfrac{(1-s)^n}{s^{n+1/2}}$	$\dfrac{n!}{(2n)!\sqrt{\pi\tau}}H_{2n}\left(\sqrt{\tau}\right)$
70	$\dfrac{(1-s)^n}{s^{n+3/2}}$	$-\dfrac{n!}{\sqrt{\pi}\,(2n+1)!}H_{2n+1}\left(\sqrt{\tau}\right)$
71	$\dfrac{\left(\sqrt{s^2+k^2}-s\right)^{\nu}}{\sqrt{s^2+k^2}}\quad(\nu>-1)$	$k^{\nu}J_{\nu}(k\tau)$
72	$\dfrac{1}{(s^2+k^2)^m}\quad(m>0)$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(m)}\left(\dfrac{\tau}{2k}\right)^{m-1/2}J_{(m-1/2)}(k\tau)$
73	$\dfrac{1}{(s^2-k^2)^m}\quad(m>0)$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(m)}\left(\dfrac{\tau}{2k}\right)^{m-1/2}I_{(m-1/2)}(k\tau)$
74	$\dfrac{1}{s}e^{-k/s}$	$J_0\left(2\sqrt{k\tau}\right)$
75	$\dfrac{1}{\sqrt{s}}e^{-k/s}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi\tau}}\cos 2\sqrt{k\tau}$
76	$\dfrac{1}{\sqrt{s}}e^{k/s}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi\tau}}\operatorname{ch} 2\sqrt{k\tau}$
77	$\dfrac{1}{s\sqrt{s}}e^{-k/s}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi k}}\sin 2\sqrt{k\tau}$
78	$\dfrac{1}{s\sqrt{s}}e^{k/s}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi k}}\operatorname{sh} 2\sqrt{k\tau}$
79	$\dfrac{1}{s^m}e^{-k/s}\quad(m>0)$	$\left(\dfrac{\tau}{k}\right)^{\frac{m-1}{2}}J_{(m-1)}\left(2\sqrt{k\tau}\right)$
80	$\dfrac{1}{s^m}e^{k/s}\quad(m>0)$	$\left(\dfrac{\tau}{k}\right)^{\frac{m-1}{2}}I_{(m-1)}\left(2\sqrt{k\tau}\right)$

№ п/п	Изображение функции $\bar{f}(s)=L[f(\tau)]$	Оригинал функции $f(\tau)$
81	$\frac{1}{s}e^{-ks}\quad (k>0)$	$\begin{cases} 0, & 0<\tau<k; \\ 1, & \tau>k \end{cases}$
82	$\frac{1}{s}(1-e^{-ks})\quad (k>0)$	$\begin{cases} 1, & 0<\tau<k; \\ 0, & \tau>k \end{cases}$
83	$\frac{1}{s}(e^{-as}-e^{-bs}),\quad 0<a<b$	$\begin{cases} 0, & 0<\tau<a; \\ 1, & a<\tau<b; \\ 0, & \tau>b \end{cases}$
84	$\frac{1}{s^2}(e^{-as}-e^{-bs})^2,\quad 0<a<b$	$\begin{cases} 0, & \tau<2a; \\ \tau-2a, & 2a<\tau<a+b; \\ 2b-\tau, & a+b<\tau<2b; \\ 0, & \tau>2b \end{cases}$
85	$\frac{1}{s+b}e^{-as}\quad (a>0)$	$\begin{cases} 0, & 0<\tau<a; \\ e^{-b(\tau-a)}, & \tau>a \end{cases}$
86	$\frac{1}{s(s^2+a^2)}(1-e^{-2m\pi s/a}),\quad a>0,$ $m=1,\ 2,\ \ldots$	$\begin{cases} \cos(a\tau), & 0<\tau<2m\pi/a; \\ 0, & \tau>2m\pi/a \end{cases}$
87	$\frac{e^{-k\sqrt{s(s+b)}}}{\sqrt{s(s+b)}}$	$\begin{cases} 0, & 0<\tau<k; \\ e^{-b\tau/2}I_0\left(\frac{b\sqrt{\tau^2-k^2}}{2}\right) & \tau>k \end{cases}$
88	$\frac{e^{-k\sqrt{s^2+b^2}}}{\sqrt{s^2+b^2}}$	$\begin{cases} 0, & 0<\tau<k; \\ J_0\left(b\sqrt{\tau^2-k^2}\right), & \tau>k \end{cases}$
89	$\frac{e^{-k\sqrt{s^2-b^2}}}{\sqrt{s^2-b^2}}$	$\begin{cases} 0, & 0<\tau<k; \\ I_0\left(b\sqrt{\tau^2-k^2}\right), & \tau>k \end{cases}$
90	$\frac{e^{-k\left(\sqrt{s^2+b^2}-s\right)}}{\sqrt{s^2+b^2}}\quad (k>0)$	$J_0\left(b\sqrt{\tau^2+2k\tau}\right)$
91	$\frac{1}{s}\lg(1+ks)\quad (k>0)$	$-\mathrm{Ei}(-\tau/k)$
92	$\lg\frac{s-k}{s-b}$	$(e^{b\tau}-e^{k\tau})/\tau$
93	$\lg\frac{s^2+k^2}{s^2}$	$2(1-\cos k\tau)/\tau$
94	$\lg\frac{s^2-k^2}{s^2}$	$2(1-\mathrm{ch}\,k\tau)/\tau$
95	$\frac{1}{s}\ln s$	$-\ln(\gamma\tau)\quad [\text{где } \gamma=\exp(0{,}5772)]$

№ п/п	Изображение функции $\bar{f}(s)=L[f(\tau)]$	Оригинал функции $f(\tau)$
96	$\frac{1}{s^{n+1}}\ln s$	$\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}-\ln(\gamma\tau)\right]\frac{\tau^n}{n!}$
97	$\ln\frac{s+b}{s+a}$	$(e^{-a\tau}-e^{-b\tau})/\tau$
98	$\ln\frac{s^2+b^2}{s^2+a^2}$	$2[\cos(a\tau)-\cos(b\tau)]/\tau$
99	$\ln\frac{(s+a)^2+k^2}{(s+b)^2+k^2}$	$2\cos(k\tau)(e^{-b\tau}-e^{-a\tau})/\tau$
100	$\operatorname{arctg}\frac{k}{s}$	$\frac{1}{\tau}\sin(k\tau)$
101	$e^{k^2s^2}\operatorname{erfc} ks \quad (k>0)$	$\frac{1}{k\sqrt{\pi}}e^{-\tau^2/(4k)}$
102	$\frac{1}{s}e^{k^2s^2}\operatorname{erfc} ks \quad (k>0)$	$\operatorname{erf}\left(\frac{\tau}{2k}\right)$
103	$e^{ks}\operatorname{erfc}\sqrt{ks} \quad (k>0)$	$\frac{\sqrt{k}}{\pi\sqrt{\tau}(\tau+k)}$
104	$\frac{1}{\sqrt{s}}\operatorname{erfc}\sqrt{ks}$	$\begin{cases}0, & 0<\tau<k;\\ (\pi\tau)^{-1/2}, & \tau>k\end{cases}$
105	$\frac{1}{\sqrt{s}}e^{ks}\operatorname{erfc}\sqrt{ks} \quad (k>0)$	$\frac{1}{\sqrt{\pi(\tau+k)}}$
106	$\operatorname{erfc}\frac{k}{\sqrt{s}}$	$\frac{1}{\pi\tau}\sin\left(2k\sqrt{\tau}\right)$
107	$\frac{1}{\sqrt{s}}e^{k^2/s}\operatorname{erfc}\frac{k}{\sqrt{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}e^{-2k\sqrt{\tau}}$
108	$e^{-bs}I_0(bs), \quad b>0$	$\begin{cases}\frac{1}{\pi}(2b\tau-\tau^2)^{1/2}, & 0<\tau<2b;\\ 0, & \tau>2b\end{cases}$
109	$\pi b\, e^{-bs}I_1(bs), \quad b>0$	$\begin{cases}(b-\tau)(2b\tau-\tau^2)^{-1/2}, & 0<\tau<2b;\\ 0, & \tau>2b\end{cases}$
110	$K_0(ks)$	$\begin{cases}0, & 0<\tau<k;\\ (\tau^2-k^2)^{-1/2}, & \tau>k\end{cases}$
111	$K_0\left(k\sqrt{s}\right)$	$\frac{1}{2\tau}e^{-k^2/(4\tau)}$
112	$\frac{1}{s}e^{ks}K_1\left(\sqrt{ks}\right)$	$\frac{1}{k}\sqrt{\tau(\tau+2k)}$

ПРИЛОЖЕНИЕ V. Некоторые алгоритмы

При применении аналитических методов решения краевых задач нестационарной теплопроводности часто возникает необходимость использовать численные методы для получения окончательных результатов. Ниже приведены некоторые алгоритмы численных методов записанные на языке АЛГОЛ-60.

Приведем примеры применения этих алгоритмов. Алгоритм 1 может быть использован при вычислении коэффициентов систем Ритца, Бубнова—Галеркина и др. Алгоритм 2 применяется для вычисления корней характеристических уравнений. Метод Гаусса (алгоритм 3) может применяться для решения систем Ритца, Треффтца и т. д. При использовании метода Канторовича можно применять метод Рунге—Кутта (алгоритм 4). Очень часто решение в изображениях по Лапласу получается в таком виде, что аналитически переход в область оригиналов невозможен. В этих случаях можно применять численное обращение преобразования Лапласа (алгоритмы 5 и 6).

Алгоритм 1 вычисления определенного интеграла (см. с. 297).

Процедура — функция ROMBINT вычисляет значение интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Обратиться к данной процедуре можно, например, оператором

Y := ROMBINT (F, A, B, K);

F — идентификатор процедуры — функции типа **real**, вычисляющей подынтегральную функцию $f(x)$;

A, B — арифметические выражения типа **real**, нижний и верхний пределы интегрирований соответственно;

K — арифметическое выражение типа **integer**, задаваемое число узлов интегрирования, $K>0$.

Выходов из тела процедуры нет, стандартные процедуры и подпрограммы не используются.

При увеличении числа узлов K точность вычисления интегралов увеличивается.

Однако если производные нечетных порядков функции $f(x)$ на концах интервала интегрирования равны нулю или равны между собой, то интегрирование по Ромбергу дает худший результат, чем интегрирование по методу трапеций. Процедура ROMBINT взята из книги: Агеев М. И., Марков Ю. И., Шваковa Г. М. Алгоритмы (201—250). М., Ин-т проблем управления. ВЦ АН СССР, 1971.

Алгоритм 2 нахождения вещественных корней произвольной функции (см. с. 297).

В алгоритме реализован метод Мюллера нахождения вещественных корней C_i произвольной функции $y=f(x)$.

Обращение к процедуре осуществляется оператором ZEROS (FUNC, N, MAX, EPS1, EPS2, EPS3, ETA) RESULT: (C); FUNC (R, F) — процедура, вычисляющая значение функции F по данному аргументу, R;

N, MAX — арифметические выражения типа **integer**;

N — ожидаемое число корней;

MAX — максимально допустимое число итераций;

EPS1, EPS2, EPS3, ETA — арифметические выражения типа **real**;

EPS1 — относительный критерий сходимости итераций;

EPS2 — абсолютный критерий сходимости итераций по значениям функции;

EPS3 — точность вычисления корней;

ETA используется в случае кратных корней.

Если $|r-C_i|<\text{eps }3$, то r заменяется на $r+\text{eta}$;

C — идентификатор массива.

Массив $C[1:N]$ перед обращением к процедуре должен содержать приближенные значения корней, после работы процедуры он содержит вычисленные корни. Процедура ZEROS взята из книги: Агеев М. И., Алик В. П., Галис Р. М., Марков И. И. Библиотека алгоритмов (1—50). М., Советское радио, 1967.

Алгоритм 3 решения системы линейных уравнений методом Гаусса (см. с. 298).

Метод Гаусса, реализованный в алгоритме, состоит в преобразовании исходной системы n уравнений вида

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = a_{in+1} \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

к эквивалентной ей системе с треугольной матрицей

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}x_2 + \ \ldots\ + b_{1n}x_n = g_1; \\ \qquad x_2 + \ \ldots\ + b_{2n}x_n = g_2; \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad x_n = g_n. \end{cases}$$

Решение эквивалентной системы начиная с x_n отыскивается по формуле

$$x_m = g_m - b_{mm+1}x_{m+1} - \ \ldots\ - b_{mn}x_n.$$

Обращение к процедуре осуществляется оператором

GAUSS (U, A, Y);

U — арифметическое выражение типа **integer** соответствует числу неизвестных системы; A, Y — идентификаторы массивов.

Массив A [1: U, 1: U+1] — расширенная матрица, состоящая из квадратной матрицы U×U (коэффициенты при неизвестных) и столбца свободных членов.

Массив Y [1: U] содержит значения неизвестных после работы процедуры. Ограничений на входные параметры при обращении к процедуре нет, стандартные подпрограммы и другие процедуры не используются.

Если система уравнений несовместна или имеет бесконечное множество решений, то предусмотрен выход из тела процедуры к глобальной метке signal 107. Процедура взята из книги: Агеев М. И., Кривонос Л. С., Марков Ю. И. Алгоритмы (101—150). М., ВЦ АН СССР, 1967.

Алгоритм 4 интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений методом Рунге — Кутта IV порядка с автоматическим выбором шага

Алгоритм позволяет решать задачу Коши для системы дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(t,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n),\ i=1,\ 2,\ \ldots\ n$$

на любом заданном отрезке $[t_0,\ t_{\text{кон}}]$ с автоматическим выбором шага интегрирования h. Он особенно эффективен при интегрировании сложных систем, имеющих нелинейности типа разрывов или изломов в правых частях, которые происходят в неизвестные заранее моменты времени, а также в тех случаях, когда степень гладкости решения сильно меняется в ходе интегрирования.

Обращение к процедуре осуществляется оператором

URKVH (T, Y, H, F, N, M, EPS, TK);

здесь T — арифметическое выражение типа **real** — аргумент системы. Перед обращением к процедуре T должно быть присвоено начальное значение t_0. После работы процедура T принимает значение конечного времени. Это может быть либо заданное конечное время $t_{\text{кон}}$, либо момент, на котором произошло обнуление шага h из-за малого значения параметра точности EPS.

Y — идентификатор массива искомых функций системы. Массив Y [1: N] перед обращением к процедуре должен содержать начальные значения $y_i(t_0)$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$. После работы процедуры этот массив содержит результаты интегрирования.

H — арифметическое выражение типа **real** — шаг интегрирования. Перед обращением к процедуре H должно быть присвоено ориентировочное начальное значение шага h. H изменяется в процессе работы процедуры и после ее окончания принимает значение конечного шага интегрирования.

F — идентификатор процедуры вычисления правых частей системы. В основной программе описание F должно иметь вид:

```
PROCEDURE (T, Y, Z);
VALUE T; REAL T;
ARRAY Y, Z;
.
.
.
.
END.
```

T — переменная интегрирования;

Y — массив аргументов y_i правых частей, $i=1, 2, \ldots, n$;

Z — массив результатов вычисления функций f_i, $i=1, 2, \ldots, n$.

N — арифметическое выражение типа integer — порядок системы.

EPS — арифметическое выражение типа real — требуемая относительная точность интегрирования ε. На одном шаге практически следует брать $10^{-7}<\varepsilon<10^{-1}$. При уменьшении ε автоматически будет выбираться меньший шаг интегрирования в среднем. При $\varepsilon=0$ вычисления будут проходить с постоянным шагом, равным начальному.

TK — арифметическое выражение типа real — заданное конечное значение $t_{кон}$.

M — арифметическое выражение типа integer — номер функции y_m $(1<m<n)$, по которой ведется контроль точности интегрирования для выбора шага.

Если перед обращением к процедуре положить $M=0$, то контроль будет вестись по той функции, для которой получилась максимальная относительная ошибка на данном шаге.

Выходов из тела процедуры URKVH нет, стандартные подпрограммы и другие процедуры не используются.

Текст программы см. в книге: Любимов Ю. К., Газнева Л. Л. Алгоритмы метода Монте — Карло и численного интегрирования дифференциальных уравнений с автоматическим выбором шага. М., 1970 и [11].

Алгоритм 5 численного обращения преобразования Лапласа

Процедура предназначена для вычисления в заданных значениях аргумента τ соответствующих значений функции $f(\tau)$ по известному L-изображению $\bar{f}(s)$. Для вычислений используется следующая интерполяционная формула:

$$f(\tau)=2\exp(a\tau)/T\left(\frac{1}{2}\operatorname{Re}\{\bar{f}(a)\}+\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{Re}\{\bar{f}(a+ik\pi/T)\}\cos(k\pi\tau/T)\right) \quad (1)$$

где постоянная a положительна и больше, чем действительные части особенностей функции $f(\tau)$.

Обращение к процедуре осуществляется оператором

LAPLACEINVERSE (RFIF, TF, NTF, AF, NAF, ITERF, RESULTATF, ECRI).

Определение параметров:

RFIF — процедура-функция типа real с двумя параметрами соответственно: действительная часть s и мнимая часть s. Процедура RFIF вычисляет действительную часть функции $\bar{f}(s)$.

NTF — число значений τ, в которых вычисляется значение $f(\tau)$.

TF — идентификатор одномерного массива типа real границы которого 1 и NTF. Он содержит значения τ.

NAF — арифметическое выражение типа integer — число значений, принимаемых параметром a. При решении тестовых примеров NAF равнялось 5.

AF — идентификатор одномерного массива типа real, границы которого 0 и NAF — 1. В момент обращения этот массив должен содержать значения a. В тестовых примерах эти значения были следующими: 1.15, 1.20, 1.25, 1.30, 1.35. Эти величины выбраны путем подбора как наилучшие для множества функций (около 30 самых различных), которые вычислялись. Однако эти значения не наилучшие для каждой конкретной функции.

ITERF — арифметическое выражение типа integer, равное 1/8 от числа членов, учитываемых в бесконечной сумме в уравнении (1). Например, ITERF может быть взято равным 8.

RESULTATF — идентификатор одновременного массива, границы которого 1 и NTF. В конце работы процедуры массив содержит NTF искомых значений функции $f(\tau)$.

ECRI — процедура с одним действительным параметром (время). Она должна печатать то значение параметра, при котором получается деле́ние на нуль. Дело в том, что в процедуре EPSALGOR из-за равенства двух членов в знаменателе может произойти деление на нуль. Тогда программа вызывает процедуру ECRI и переходит к следующему значению величины τ. Значение функции $f(\tau)$, которое не вычислилось по этой причине, будет равным нулю.

Процедура LAPLACEINVERSE может быть применена только для тех изображений, для которых ожидается достаточно гладкое поведение оригинала. Текст программы см. в журнале «Communications of the ACM», v. 17, 1974, № 10, alg. 486.

Алгоритм 6 численного обращения преобразования Лапласа

Процедура LINV выполняет численное обращение преобразования Лапласа, т. е. вычисление оригинала функции по его изображению. Обращение к процедуре осуществляется оператором LINV (PS, NS, Z, FS, VS, MS), где PS — идентификатор процедуры, которая вычисляет значения изображения. В основной программе описание процедуры PS должно иметь вид

REAL PROCEDURE PS (S); VALUE S; REAL S;

NS — целое число разбиений области определения функции $F(t)$. NS должно быть четным;

Z — переменная типа real — аргумент функции, для которой вычисляется значение оригинала;

FS — приближенное значение оригинала $F(t)$, полученное в результате работы процедуры;

VS — вещественный одномерный массив, используется один раз при вычислении оригинала в точках Z;

MS — целое, отличное от NS.

Процедура LINV дает приближенное значение FS величины оригинала $F(T)$. Значение FS вычисляется по формуле

$$FS = \frac{\ln 2}{T} \sum_{i=1}^{N} V_i P\left(\frac{\ln 2}{T}\, i\right),$$

$$V_i = (-1)^{N/2+i} \sum_{k=[(i+1)/2]}^{\min(i,\, N/2)} \frac{k^{N/2}\,(2k)!}{(N/2-k)!\,k!\,(k-1)!\,(i-k)!\,(2k-i)!}.$$

Точность вычислений зависит от числа NS. Наилучшая точность значений оригинала достигается при $NS \approx 10$. Алгоритм проверен для случая $NS = 8$, 9, 10; $M = 5$ для функций $P(s) = \frac{1}{\sqrt{s}}$, $P(s) = \frac{1}{s+1}$.

Ограничение метода — $F(t)$ должна быть непрерывна в окрестности точки T. Алгоритм см. в журнале «Communications of the ACM», alg. № 368, Ganuary, 1970, № 1, p. 47—49 и [11].

Алгоритм 7 решения интегрального уравнения Вольтерра второго рода

Метод последовательных приближений, реализованный в процедуре, позволяет получить решение интегрального уравнения Вольтерра второго рода

$$u(\tau) - \int_a^\tau K(\tau, t)\, u(t)\, dt = f(\tau), \quad (\tau, t \in [a, b]).$$

посредством рекуррентного соотношения

$$u_k(\tau)=f(\tau)+\int_a^{\tau} K(\tau,\ t)\,u_{k-1}(t)\,\mathrm{d}t\quad (k=1,\ 2,\ \ldots).$$

Обращение к процедуре осуществляется оператором PROCEDURE V (F, A, H, B, K, E, Y). Здесь F [1 : N] — массив правой части; N присваивается значение $n=(b-a)/h+1$; A — начальное значение переменной; H — присваивается значение шага $h=\text{const}$; B — верхний предел изменения τ, t; K — ядро, которое нужно оформить в виде REAL PROCEDURE K (X, S); E — относительная точность ε — процесс итераций прекращается, когда $\|u_k-u_{k-1}\|_C/\|u_k\|_C<\varepsilon$; Y [1 : N] — массив, которому присваивается решение после процесса итераций; A, H, B, E — арифметические выражения типа REAL; в качестве начального приближения $u_0(\tau)$ в процедуре используется функция $f(\tau)$. В процедуре используется стандартная программа P1024 (K, A, B, C, . . .) (транслятор TA-1M — оператор вывода A, B, C, . . . по k-му ключу).

Процедура V взята из книги: Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Методы решения интегральных уравнений с программами для ЭВМ. К., Наукова думка, 1978.

```
PROCEDURE V (F, A, H, B, K, E, Y);
VALUE A, H, B, E; ARRAY F, Y;
REAL A, H, B, E; REAL PROCEDURE K;
BEGIN INTEGER N;
N:=(B-A)/H+1;
BEGIN ARRAY YK, YK1 [1:N];
REAL X, NORM, NORM1, G, G1; INTEGER I, J, K;
K:=O;
FORI:=1 STEP 1 UNTIL N DO
YK [I]:=YK1 [I]:=F [I];
P1024 (1, K, YK);
Q·K. = K+1;
FORI:=1 STEP 1 UNTIL I DO
BEGIN X: = A+(I-1)×H;
YK[I]:=F[I]; IF I=1 THEN GO TO P;
FORI:=1 STEP 1 UNTIL I DO
YK[I]:=YK[I]+H×(IF J=1 ORJ=I THEN. 5 ELSE 1)
×K (×, A+(J-1)×H)×YK1[J];
P: ENDI;
NORM:=ABS (YK[1]); NORM1=ABS (YK[1]-YK1);
FORI:=2 STEP 1 UNTIL N DO
BEGING:=ABS (YK[I]); IFG>NORM THEN NORM:=G;
G1:=ABS (YK[I]-YK1[I]; IFG1>NORM 1 THEN NORM1:=G1;
ENDI;
P1024 (1, K, YK); IFNORM 1/NORM>E THEN
BEGIN FORI:=1 STEP 1 UNTILN DO YK1[I]:=YK[I]; GOTO Q
END;
FORI:=1 STEP 1 UNTIL N DO Y[I]:=YK[I]
END;
ENDV;
```

ПРОГРАММА 1 (к с. 292)

```
REAL PROCEDURE ROMBINT (F, A, B, K);
VALUE A, B, K;
INTGER K;
REAL A, B;
RAEL PROCEDURE F;
BEGIN REAL D, S, H; INTEGER M, I, J, N;
ARRAY T[1 : K+1];
D := B − A; T [J] := (F (A) − F (B))/2; N := 1;
FOR I := 1 STEP 1 UNTIL K DO
BEGIN
S := 0; N := N×2; H := D/N;
FOR J := 1 STEP 2 UNTIL N DO
S := S+F (A+J×H);
T [I+1] := (2×S/G+T[I])/2; M := 1;
FOR J := 1 STEP − 1 UNTIL 1 DO
BEGIN
M := M×4; T[J] := T[J+1]+(T[J+1] − T[J])/(M − 1)
END;
END;
ROMBINT := T[1]×D
END;
```

ПРОГРАММА 2 (к с. 292)

```
PROCEDURE ZEROS (FUNC, N, MAX, EPS1, EPS2, EPS3, ETA)
RESULT : (C);
VALUE N, MAX, EPS1, EPS2, EPS3, ETA;
ARRAY C;
INTEGER N, MAX;
REAL EPS1, EPS2, EPS3, ETA;
PROCEDURE FUNC;
BEGIN INTEGER I, J, K;
REAL P, P1, P2, X0, X1, X2, R, F, F1, D, E, H, U, V, W, T;
SWITCH S := S1, S2, S3, S4;
FOR K := 1 STEP 1 UNTIL N DO
BEGIN
J := 0; P := 0.9×C[K]; P1 := 1.1×C[K]; P2 := C[K];
IF C[K] = 0 THEN
BEGIN P := −1; P1 := 1; P2 := 0
END;
R := P;
GO TO REG;
S1 : R := P1; X0 := F1;
GO TO REG;
S2 : R := P2; X1 := F1;
GO TO REG;
S3 : X2 := F1;  D := −0.5;  H := IF  C[K] = 0  THEN − 1  ELSE − 0.1×C[K];
ITER : E := 1+D;
T := X0×D↑2 − X1×E↑2+X2×(D+E);
U := T↑2 − 4×X2×D×E×(X0×D − X1×E+X2);
U := IF U≤0 THEN 0 ELSE SQRT (U);
V := T+U, W := T − U;
U := IF ABS(V)≤ABS(W) THEW W ELSE V;
IF U=0 THEN U := 1;
T := −2×X2×F/U; H := T×H; R := N+H;
GO TO IF ABS (H/R)<EPS1 THEN CALC ELSE REG;
S4 : IF ABS(F1)<ABS(X2×10) THEN
BEGIN X0 := X1; X1 := X2; X2 := F1; D := T;
GO TO ITER
```

```
END;
T := 0.5×T; H := 0.5×H; R := R − H;
REG : J := J+1;
CALC : FUNC (R, F); F1 := F;
IF J≥MAX THEN GO TO FIN;
FOR I := 2 STEP 1 UNTIL K DO
BEGIN E := R − C[I − 1];
IF ABS (E)>EPS3 THEN F1 := F1/F ELSE
BEGIN R := R+ETA;
GO TO CALC
END; END;
GO TO IF ABS (F)<EPS 2 V ABS (F1)<EPS2 THEN FIN ELSE
S [IF J<4 THEN J ELSE 4];
FIN : C[K] := R
END;
END;
```

ПРОГРАММА 3 (к с. 293)

```
PROCEDURE GAUSS (U, A) RESULT : (Y);
VALUE U; INTEGER U; ARRAY A, Y;
BEGIN JNTEGER I, J, K, M, N; REAL TEMP;
N:=0;
M10 : N := N+1;
FOR K := N STEP 1 UNTIL U DO
IF A [K, N]≠0 THEN GO TO M11;
GO TO SIGNAL 107;
M11 : IF K=N THEN GO TO M12;
FOR M := N STEP 1 UNTIL U+1 DO
BEGIN
TEMP := A [N, M]; A [N, M] := A [K, M]; A [K, M] := TEMP×(−1)
END;
M12 : FOR J := U+1 STEP −1 UNTIL N DO
A [N, J] := A [N, J]/A [N, N];
FOR I := K+1 STEP 1 UNTIL U DO
FOR J := N+1 STEP 1 UNTIL U+1 DO
A [I, J] := A [I, J] − A [I, N]×A [N, J];
IF N≠U THEN GO TO M10;
FOR I := U STEP − 1 UNTIL 1 DO
BEGIN Y[I] := A [I, U+1]/A [I, I];
FOR K := I − 1 STEP − 1 UNTIL 1 DO
A [K, U+1] := A [K, U+1] − A [K, I]×Y [I]
END;
END;
```

Список литературы

1. *Айнола Л. Я.* Вариационные принципы для нестационарных задач теплопроводности.— Инж.-физ. журн., 1967, т. XII, № 4.

2. *Алифанов О. М.* Идентификация процессов теплообмена летательных аппаратов. Введение в теорию обратных задач теплообмена. М., 1979.

3. *Бабич А. П., Беляев Н. М., Рядно А. А.* Исследование теплового взрыва гетерогенной системы двух полуограниченных тел.— В кн: Горение и взрыв. М., 1972.

4. *Бахарева И. Ф.* Нелинейная неравновесная термодинамика. Саратов, 1976.

5. *Безуглый В. Ю., Беляев Н. М.* Исследование горения конденсированного топлива с плоскими теплопроводящими элементами.— Archiwum termodynamiki i spalania (Poland), 1977, т. 8, № 1.

6. *Бейтмен Н Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований в двух томах. Справочная математическая библиотека. Т. 1. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. М., 1969; т. 2. Преобразования Бесселя. Интегралы от специальных функций. М., 1970.

7. *Белик Н. П., Беляев Н. М.* Расчет нестационарного температурного поля в многослойной пластине при граничных условиях третьего рода.— В кн.: Гидроаэромеханика. Вып. 4. Харьков, 1966.

8. *Беляев Н. М., Рядно А. А.* Нестационарная теплопроводность. Днепропетровск, 1973.

9. *Беляев Н. М., Рядно А. А.* Две нелинейные краевые задачи нестационарной теплопроводности.— В кн.: Гидроаэромеханика и теория упругости. Вып. 13 Днепропетровск, 1971.

10. *Беляев Н. М., Рядно А. А.* Теоретическое решение сопряженной задачи воспламенения топлива посредством гетерогенной реакции.— Archiwum termodynamiki i spalania (Poland), 1977, № 8, № 1.

11. *Беляев Н. М., Рядно А А* Методы нестационарной теплопроводности. М., 1978.

12. *Березовский А. А.* Лекции по нелинейным краевым задачам математической физики, ч. II. Киев, 1976.

13. *Березовский А. А.* Нелинейные краевые задачи теплоизлучающего тела. Киев, 1968.

14. *Био М.* Вариационные принципы в теории теплообмена. М., 1975.

15. *Боли Б., Уэйнер Дж.* Теория температурных напряжений (пер. с англ. под ред. Э. И. Григолюка). М., 1964.

16. *Бровкин Л. А., Девочкина С. И.* Температурное поле шара с переменными физическими свойствами при граничных условиях третьего рода.— Изв. вузов, сер. Энергетика, 1971, № 11.

17. *Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н.* Сборник задач по математической физике. М., 1972.

18. *Ван-дер-Поль Б., Бреммер Г.* Операционное исчисление на основе двустороннего преобразования Лапласа. М., 1952.

19. *Ваничев Н. П.* Приближенный метод решения задач теплопроводности в твердых телах.— Изв. АН СССР, ОТН, 1946, № 12.

20. *Вейник А. И.* Теория затвердевания отливки. М., 1960.

21. *Видин Ю. В.* Расчет конвективно-радиационного нагрева массивных тел.— Инж.-физ. журн., 1969. т. XVI, № 6.

22. *Видин Ю. В., Иванов В. В.* Температурное поле в неограниченной пластине, нагреваемой радиацией и конвекцией одновременно.— Изв. вузов, сер. Авиационная техника, 1965, № 4.

23. *Вильямс Ф. А.* Теория воспламенения топлива посредством гетерогенной реакции.— Ракетная техника и космонавтика (пер. с англ.), 1966, т. 4, № 8.

24. *Галицын А. С., Жуковский А. Н.* Интегральные преобразования и специальные функции в задачах теплопроводности. Киев, 1976.

25. *Гландсдорф П., Пригожин И.* Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. М., 1973.

26. *Годунов С. К., Рябенький В. С.* Разностные схемы. М., 1977.

27. *Гринберг Г. А.* Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. М.— Л., 1948.

28. *Гришин А. М.* Зажигание и самовоспламенение реагирующих веществ в условиях идеального теплового контакта.— Инж.-физ. журн., 1967, т. XIII, № 3.
29. *Гроот С., де Мазур П.* Неравновесная термодинамика. М., 1964.
30. *Гудмен Т.* Применение интегральных методов в нелинейных задачах нестационарного теплообмена.— В кн.: Проблемы теплообмена. М., 1967.
31. *Гуров К. П.* Феноменологическая термодинамика необратимых процессов. М., 1978.
32. *Гухман А. А.* Введение в теорию подобия. М., 1973.
33. *Девочкина С. И., Бровкин Л. А.* Температурное поле неограниченной пластины с переменными теплофизическими характеристиками.— Инж.-физ. журн., 1970, т. XVIII, № 1.
34. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Справочник по операционному исчислению. М., 1965.
35. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Операционное исчисление. М., 1975.
36. *Дьярмати И.* Неравновесная термодинамика (теория поля и вариационные принципы). М., 1974.
37. *Журавлев В. А.* Термодинамика необратимых процессов в задачах и решениях. М., 1979.
38. *Зарубин В. С.* Температурные поля в конструкции летательных аппаратов. М., 1978.
39. *Зино И. Е., Тропп Э. А.* Асимптотические методы в задачах теории теплопроводности и термоупругости. Л., 1978.
40. *Иванов В. В.* Исследование нестационарной теплопроводности в условиях аэродинамического нагрева.— В кн.: Вопросы теории тепло- и массообмена. Минск, 1970.
41. *Исаченко В. П., Осипова В. А., Сукомел А. С.* Теплопередача. М., 1981.
42. *Калиткин Н. Н.* Численные методы. М., 1978.
43. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. М.— Л., 1962.
44. *Каримов И. К., Рядно А. А.* Влияние теплопроводности стенок на теплообмен в МГД-течении Куэтта.— Изв. вузов, сер. Энергетика, 1979, № 8.
45. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. М., 1964.
46. *Карташов Э. М.* Аналитические методы в теплопроводности твердых тел. М., 1979.
47. *Каширников В. В., Рядно А. А.* Расчет нестационарных температурных полей в телах с произвольной формой поперечного сечения.— Изв. вузов, сер. Энергетика, 1972, № 3.
48. *Коган М. Г.* Решение нелинейных задач теории теплопроводности методом Канторовича.— Инж.-физ. журн., 1967, т. XII, № 1.
49. *Коздоба Л. А.* Электрическое моделирование явлений тепло- и массопереноса. М., 1972.
50. *Коздоба Л. А.* Методы решения нелинейных задач теплопроводности. М., 1975.
51. *Коздоба Л. А.* Решения нелинейных задач теплопроводности. Киев, 1976.
52. *Колесников П. М.* Методы решения нелинейных уравнений теории переноса.— В кн.: Аналитические и численные методы в теории переноса. Минск, 1977.
53. *Колесников П. М., Гришанова Л. В.* Изучение распространения тепловых полей в нелинейных средах.— В кн.: Аналитические и численные методы в теории переноса. Минск, 1977.
54. *Коренев Б. Г.* Задачи теории теплопроводности и термоупругости. Решения в бесселевых функциях. М., 1980.
55. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике (пер. с англ.), М., 1968.
56. *Кочубей А. А., Рядно А. А.* Об одном методе расчета нестационарного конвективного теплообмена в каналах некруглого сечения.— В кн.: Теплофизика и теплотехника. Киев. Вып. 33, 1977.
57. *Кросби А., Висканта Р.* Упрощенный метод решения задачи о теплопроводности с нелинейными граничными условиями. Теплопередача (пер. с англ.), М., 1968, № 3.
58. *Крылов В. И., Скобля Н. С.* Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа. М., 1974.

59. *Кудряшов Л. И., Меньших Н. Л.* Приближенные решения нелинейных задач теплопроводности. М., 1979.
60. *Кутателадзе С. С.* Основы теории теплообмена. М., 1979.
61. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М., 1965.
62. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М., 1973.
63. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967.
64. *Лейбензон Л. С.* О динамическо-температурном образовании складчатости на поверхности земного шара при его охлаждении.— Изв. АН СССР, сер. География и геофизика, 1939, № 6.
65. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. М., 1967.
66. *Лыков А. В.* Некоторые аналитические методы решения задач нестационарной теплопроводности.— Изв. АН СССР, сер. Энергетика и транспорт, 1969, № 2.
67. *Лыков А. В.* Методы решения нелинейных уравнений нестационарной теплопроводности.— Изв. АН СССР, сер. Энергетика и транспорт, 1970, № 5.
68. *Лыков А. В.* Тепломассообмен. М., 1971.
69. *Лыков А. В., Михайлов Ю. А.* Теория тепло- и массопереноса. М.—Л., 1963.
70. *Ляшко И. И., Макаров В. Л., Скоробогатько А. А.* Методы вычислений. Киев, 1977.
71. *Макаров А. М. и др.* Осесимметричная задача Стефана с граничным условием второго рода.— Теплофизика высоких температур, 1971, т. 9, № 6.
72. *Марчук Г. И.* Методы вычислительной математики. М., 1977.
73. *Митропольский Ю. А., Мосеенков Б. И.* Лекции по применению асимптотических методов к решению уравнений в частных производных. Киев, 1969.
74. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М., 1970
75. *Михлин С. Г.* Численная реализация вариационных методов. М., 1966.
76. *Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М., 1966.
77. *Мучник Г. Ф., Рубашов И. Б.* Методы теории теплообмена, ч. I. Теплопроводность. М., 1970.
78. *Нестационарный теплообмен в трубах*/Беляев Н. М., Кочубей А. А., Рядно А. А., Фалий В. Ф. Киев, 1980.
79. *Никитенко Н. И.* Исследование процессов тепло- и массообмена методом сеток. Киев, 1978.
80. *Новиков И. И., Боришанский В. М.* Теория подобия в термодинамике и теплопередаче. М., 1979.
81. *Положий Г. Н.* Уравнения математической физики. М., 1964.
82. *Полубаринова-Кочина П. Я.* Об одном нелинейном уравнении в частных производных, встречающемся в теории фильтрации.— Докл. АН СССР, нов. серия, 1948, т. 63, № 6.
83. *Постольник Ю. С.* Метод осреднения функциональных поправок в задачах теплопроводности.— В кн.: Тепло- и массоперенос. Минск, 1972, т. 8.
84. *Постольник Ю. С.* Одномерный конвективный нагрев при зависящем от времени коэффициенте теплообмена.— Инж.-физ. журн., 1970, т. XVIII, № 2.
85. *Рвачев В. Л., Слесаренко А. П.* Алгебра логики и интегральные преобразования в краевых задачах. Киев, 1976.
86. *Рвачев В. Л., Слесаренко А. П.* Алгебро-логические и проекционные методы в задачах теплообмена. Киев, 1978.
87. *Рубинштейн Л. И.* Проблема Стефана. Рига, 1967.
88. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М., 1977.
89. *Самарский А. А., Андреев В. Б.* Разностные методы для эллиптических уравнений. М., 1976.
90. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Устойчивость разностных схем. М., 1973.
91. *Самарский А. А., Николаев Е. С.* Методы решения сеточных уравнений. М., 1978.
92. *Саломатов В. В.* Методы расчета нелинейных процессов теплового переноса. Томск, ч. 1, 1976; ч. 2, 1978.
93. *Самойлович Ю. А.* О приближенных способах расчета затвердевания отливок.— Инж.-физ. журн. 1966, т. XI, № 5.

94. *Саульев В. К.* Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток. М., 1960.
95. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике. М., 1977.
96. *Теория тепломассообмена*/Под ред. А. И. Леонтьева.— М., 1979.
97. *Темкин А. Г.* Обратные методы теплопроводности. М., 1973.
98. *Тирский Г. А.* Два точных решения нелинейной задачи Стефана.— Докл. АН СССР, 1959, т. 125, № 2.
99. *Тихонов А. Н.* Об остывании тел при лучеиспускании, следующем закону Стефана — Больцмана.— Изв. АН СССР, сер. География и геофизика, 1973, № 3.
100. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М., 1966.
101. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М., 1974.
102. *Толубинский Е. В.* Теория процессов переноса. Киев, 1969.
103. *Трантер К. Дж.* Интегральные преобразования в математической физике. М., 1956.
104. *Уздалов А. И., Брюханова Е. Н.* Задача теплопроводности для двухсвязной пластинки.— Инж.-физ. журн., 1970, т. XIX, № 1.
105. *Федоткин И. М., Айзен А. М.* Асимптотические методы в задачах тепломассопереноса.— Киев, 1975.
106. *Циглер Г.* Экстремальные принципы термодинамики необратимых процессов и механики сплошной среды. М., 1966.
107. *Цой П. В.* Методы расчета отдельных задач тепломассопереноса. М., 1971.
108. *Чарный И. А.* О методах линеаризации нелинейных уравнений типа уравнений теплопроводности.— Изв. АН СССР, ОТН, 1951, № 6.
109. *Черпаков П. В.* Теория регулярного теплообмена. М., 1975.
110. *Швец М. Е.* О приближенном решении некоторых задач гидродинамики пограничного слоя.— Прикл. матем. и мех., М., 1949, т. 13, № 3.
111. *Шехтер Р.* Вариационный метод в инженерных расчетах. М., 1971.
112. *Шостак Р. Я.* Операционное исчисление. М., 1968.
113. *Яненко Н. Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск, 1967.
114. *Anderssen R. S.* Variational methods and parabolic differential equations. Mathematics Department University of Adelaide, 1967.
115. *Grosbie A. U., Viskanta R.* Transient heating or cooling of a plate by combined convection and radiation. Int. J. Heat and Mass Transfer, 1969, v. 11, N 2.
116. *Kirchhoff.* Vorlesungen über die Theorie der Warme, 1949.
117. *Kirchhoff.* Grundlagen der Physik, Bd. 5, Theorie der Wärme, 1894.
118. *Lardner T. J.* Biot's Variational Principle in Heat Conduction, AIAA Journal, v. 1, N 1, 1963.
119. *Lock G. S. H., Gunderson J. R., Quon D., Donnelly J. K.* A study of onedimensional ice formation with particular referense to periodic growth and decay. Int J. Heat Mass Tr., 1969, v. 12, N 11.
120. *Olcer N. Y.* Unsteady Temperature Distribution in a Sphere Subjected to Time — Dependent Surface Heat Flux and Internal Heat Source. Trans. of the ASME, S. C. 1969, N 1.
121. *Rafalski P., Zyszkowski W.* Langrangien approach to the nonlinear boundary heat transfer problem, AIAA Journal, 1968, v. 6, N 8.
122. *Sfeir A. A.* The Heat Balance Integral in Steady — State Conduction.— Trans. of the ASME, s. C. 1970, N 1.
123. *Siegel R., Savino S. M.* An analysis of the transient solidification of a flowing liquid on a convectively cooled wall.— Proc. 3-rd Intern. Heat Tr. Conf., Chicago, 1966, v. 4.
124. *Vernotte P.* Le depouillement des mesures sans hypothese prealable.— Comptes Rendus Hebdomadaires des seances de l'Acadeimie des seiences. Paris, 1958, 246, N 3; p. 339—401.
125. *Vujanovic B., Djukic Dj.* On the variational principle of Hamilton's type for non-linear heat transfer problem. I. J. Heat Mass tr., 1972, v. 15, N 5.

Оглавление

Часть 2. Аналитические методы решения нелинейных задач. Метод конечных разностей

Глава VIII. Методы решения задач теплопроводности при нелинейных граничных условиях . . . 4

§ 8.1. Метод сведения краевой задачи к эквивалентному интегральному уравнению . . . 4
§ 8.2. Метод линеаризующих подстановок . . . 16
§ 8.3. Метод последовательных приближений (метод итераций) 18
§ 8.4. Метод малого параметра . . . 20
§ 8.5. Метод Био . . . 23
§ 8.6. Построение асимптотических решений задач с нелинейными граничными условиями . . . 26

Глава IX. Методы решения краевых задач при наличии фазовых переходов 48

§ 9.1. Метод сведения краевых задач к интегральным уравнениям типа Вольтерра . . . 48
§ 9.2. Метод последовательных приближений . . . 55
§ 9.3. Вариационный метод . . . 58
§ 9.4. Интегральный метод . . . 62
§ 9.5. Метод малого параметра . . . 70

Глава X. Методы решений краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений теплопроводности . . . 74

§ 10.1. Преобразования зависимых переменных . . . 74
§ 10.2. Преобразования независимых переменных (метод подобия) . . . 84
§ 10.3. О способах линеаризации нелинейного уравнения теплопроводности . . . 90
§ 10.4. Вариационный метод Био . . . 97
§ 10.5. Сведение краевой задачи в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям . . . 100
§ 10.6. Метод последовательных приближений (метод итераций) 103
§ 10.7. Метод возмущений (метод малого параметра) . . . 105
§ 10.8. Интегральный метод Лейбензона . . . 112
§ 10.9. Сведение краевой задачи к интегральному уравнению типа Фредгольма . . . 114

Глава XI. Основные понятия метода конечных разностей . . . 118

§ 11.1. Построение сетки. Сеточные функции и сеточные аналоги норм . . . 118
§ 11.2. Построение разностных схем. Порядок аппроксимации . 122
§ 11.3. Устойчивость и сходимость разностных схем . . . 134

Глава XII. Нестационарные одномерные краевые задачи теплопроводности 151

§ 12.1. Однопараметрическое семейство схем . . . 151
§ 12.2. Свойство монотонности . . . 168
§ 12.3. Явные схемы . . . 169
§ 12.4. Решение задач с переменными коэффициентами . . . 173
§ 12.5. Особенности решения задач в криволинейных координатах . . . 176
§ 12.6. Нелинейное уравнение теплопроводности . . . 178

Глава XIII. Решение многомерных нестационарных задач теплопроводности 198

§ 13.1. Экономичные схемы . . . 198

§ 13.2. Метод переменных направлений (продольно-поперечная схема) 200
§ 13.3. Методы расщепления (локально-одномерная схема) . . 210

Глава XIV. Краевые задачи стационарной теплопроводности 223

§ 14.1. Метод счета на установление 223
§ 14.2. Стационарные разностные схемы и прямые методы вычисления разностного решения 227
§ 14.3. Применение итерационных методов 228

Приложение I. Ответы и указания к задачам 240

Приложение II. Некоторые сведения из функционального анализа . . . 257

Приложение III. Таблицы корней характеристических уравнений . . . 271

Приложение IV. Таблица изображений некоторых функций 284

Приложение V. Некоторые алгоритмы 292

Список литературы 299

Николай Михайлович Беляев, Александр Андреевич Рядно

МЕТОДЫ ТЕОРИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Зав. редакцией К. И. Апошина. Редактор издательства М. Т. Самсонова. Мл. редактор Т. А. Дорофеева. Художественный редактор Н. К. Гуторов. Художник В. З. Казакевич. Технический редактор Э. М. Чижевский. Корректор Г. И. Кострикова.

ИБ № 3377

Изд. № ОТ — 342. Сдано в набор 24.11.81. Подп. к печати 26.08.82. Т — 13616. Формат 60×90/16. Бум. тип. № 3. Гарнитура литературная. Печать высокая. Объем 19 усл. п. л. Усл. кр.-отт. 19. Уч.-изд. л. 18,53. Тираж 10 000 экз. Зак. № 559. Цена 85 коп.

Издательство «Высшая школа», Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14.

Типография изд-ва «Уральский рабочий», Свердловск, просп. Ленина, 49.