

1870

Б.Н.Неклепаев И.П.Крючков

Б.Н.Неклепаев
И.П.Крючков

ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ ЭЛЕКТРОСТАНЦИЙ И ПОДСТАНЦИЙ

Справочные материалы
для курсового и дипломного
проектирования

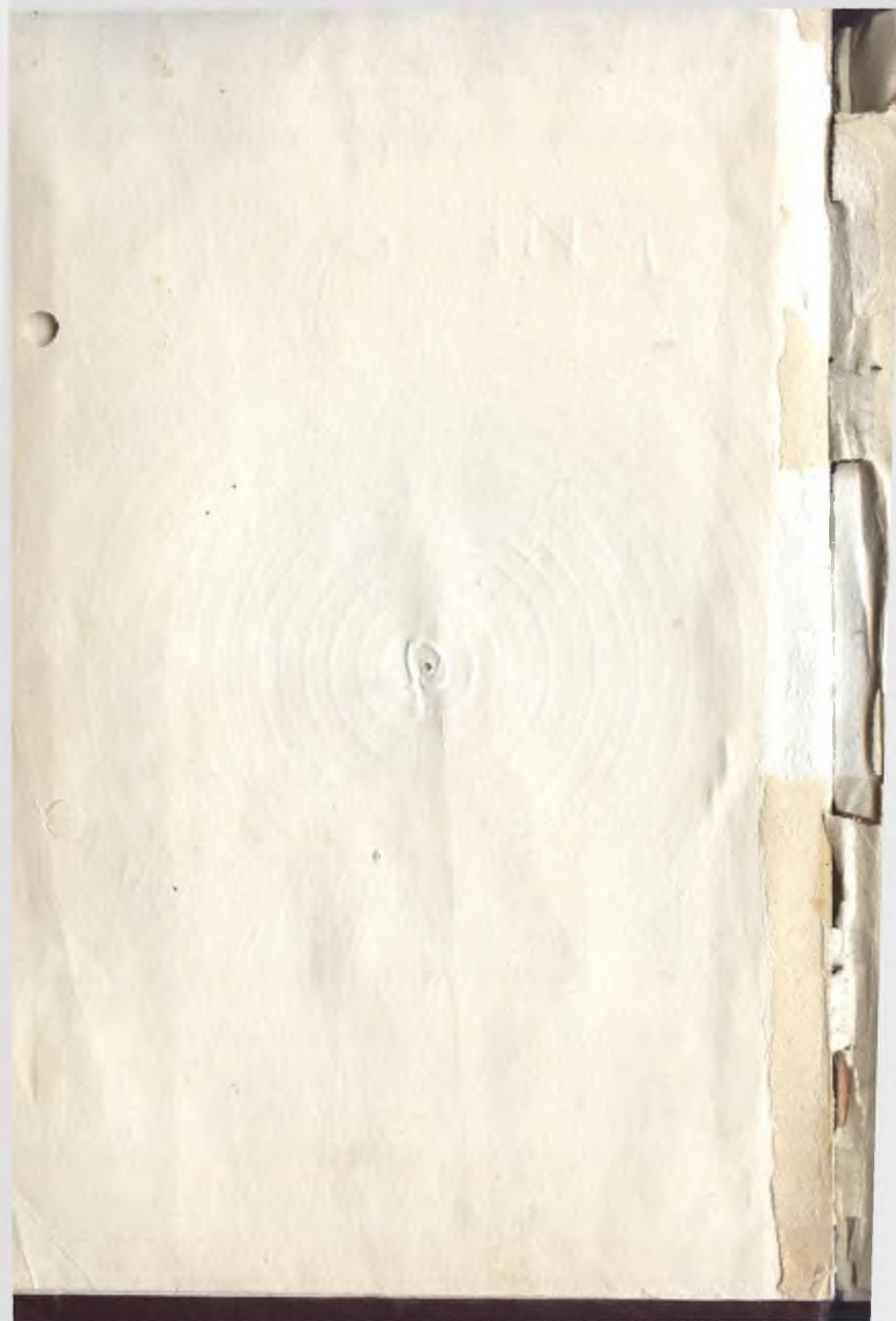
Для студентов вузов



Ғ.Ж.ЖАББОРОВ, Т.У.ОТАМЕТОВ, А.Х.ҲАМИДОВ

ЧИГИТЛИ
ПАХТАНИ
ИШЛАШ
ТЕХНОЛОГИЯСИ





Ғ. Ж. ЖАББОРОВ, Т. У. ОТАМЕТОВ,
А. ҲАМИДОВ

ЧИГИТЛИ ПАХТАНИ ДАСТЛАБКИ ИШЛАШ ТЕХНОЛОГИЯСИ

*ЎЗБЕКИСТОН ССР олий ва махсус ўрта таълим
министрлиги олий техника ўқув юртларининг пахтани
дастлабки ишлаш ихтисослиги учун дарслик сифатида
таъсия этган*



ТОШКЕНТ «ЎҚИТУВЧИ» 1987

Рецензентлар:

*Тошкент тўқимачилик ва енгил саноат институтининг профессори
Ш. Р. Марасулов,
пахта тозалаш Марказий илмий-текиштириш институтининг катта илмий
ҳодими т. ф. к. Э. Ҳ. Қосимов.*

Дарсликда чигитли пахтанинг турлари ва сортлари, уни тайёрлаш, ташини сақлаш ва тозалаш, чигитли пахта ва ундан олинадиган маҳсулотларнинг сифат кўрсаткичларига оид масалалар ёритилган. Чигитли пахтага дастлабки ишлаб бериш технологик процесслари ва пахта тайёрлаш пунктлари ҳамда пахта тозалаш заводларида ишлаб турган технологик машиналарнинг конструкциялари, транспорт воситалари, сермеҳнат операцияларни механизациялаш батафсил ҳақида қўйиб чиқилган. Чигитли пахтани қўриштиш-тозалаш, жинлаш, чигитни линтерлаш, делинтерлаш, тола ва линтни тозалаш, тола, линт ва толали чиқиндиларни провлашнинг иазарий асослари баён қилинган.

Китоб олий ўқув юртларининг чигитли пахтани дастлабки ишлаш ихтисослиги студентлари учун мулжалланган бўлиб, ундан пахта тозалаш саноатида ишловчи инженер-техник ходимлар ҳам фойдаланишлари мумкин.

Шу сабабли функцияни $x \geq 0$ да текшириш ва унинг графигини ясаш етарли, кейин эса ясалган графикни ординаталар ўқига нисбатан акслантириш қолади.

2) f функция графигининг координаталар ўқлари билан кесишиш нуқталарини топамиз. f нинг графиги ординаталар ўқини $(0; f(0))$ нуқтада кесиб ўтади. $f(0)$ нинг қиймати 1 га тенг. Шу сабабли афсуски $(0; 1)$ нуқтадан ўтади.

3) f функция графигининг абсциссалар ўқи билан кесишиш нуқтасини тапиш учун $f(x) = 0$ тенгламани ечиш керак. Мазкур ҳолда $\frac{1}{x^2 + 1} = 0$ тенглама илдизларга эга эмас, демак, f нинг графиги абсциссалар ўқини кесмайди.

4) f қандай оралиқларда мусбат, қандай оралиқларда манфий қийматларни қабул қилишини аниқлаймиз. Бу оралиқларда (уларни функциянинг *дэгармас ишоралилик оралиқлари* дейилади) функциянинг графиги абсциссалар ўқидан юқорида (мос равишда пастда) ётади. Мазкур ҳолда, ҳар қандай x да $x^2 + 1$ нинг қиймати мусбат бўлганидан, сонлар тўғри чизигининг ҳамма ерида $f(x) > 0$.

5) f функция қандай оралиқларда ўсувчи ёки қандай оралиқларда камаювчи эканлиги ҳақидаги маълумотлар (бу оралиқлар функциянинг *ўсиш ёки камайиш оралиқлари* дейилади) f нинг графигини ясашнинг ёрдамчи воситаси бўлади. Қаралаётган функция учун ўсиш $(-\infty; 0]$ дан, камайиш оралиғи эса $[0; \infty)$ дан иборат эканини исботлаймиз.

x_1 ва $x_2 \in [0; \infty)$ оралиққа тегншли иккита қиймат, шу билан бирга $x_1 > x_2$ бўлсин. x_1 ва x_2 мусбат бўлгани учун $x_1 > x_2$ шартдан ушбулар келиб чиқади: $x_1^2 > x_2^2$, $x_1^2 + 1 > x_2^2 + 1$ ва, ниҳоят

$$\frac{1}{x_1^2 + 1} < \frac{1}{x_2^2 + 1}.$$

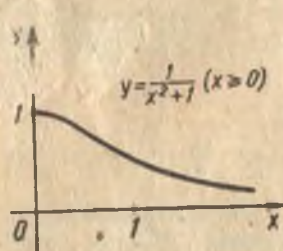
Шундай қилиб, $f(x_1) < f(x_2)$, яъни f функция $[0; \infty)$ оралиқда камаювчи.

$(-\infty; 0]$ оралиқда f функция ўсувчи. Искоти юқоридагига ўхшаш бажарилади (шунингдек, f функциянинг жуфтлигидан ҳам фойдаланиш мумкин).

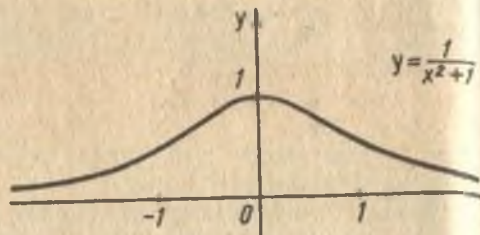
6) Функциянинг ўсишдан камайишга ўтиш ёки камайишдан ўсишга ўтиш нуқталаридаги қийматларини топамиз. Қаралаётган ҳолда ҳам ўсиш оралиғига, ҳам камайиш оралиғига тегншли битта нуқта мавжуд — бу абсциссаси 0 га тенг, ординатаси эса $f(0) = 1$ бўлган нуқтадир.

7) Ниҳоят x нинг қиймати чексиз катталашиб борганда $x^2 + 1$ нинг қиймати чексиз ортиб боради, шунинг учун ҳам $\frac{1}{x^2 + 1}$ нинг қиймати, аксинча, 0 га яқинлаша боради.

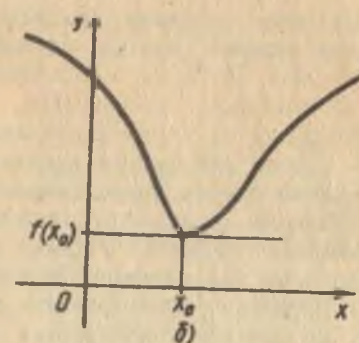
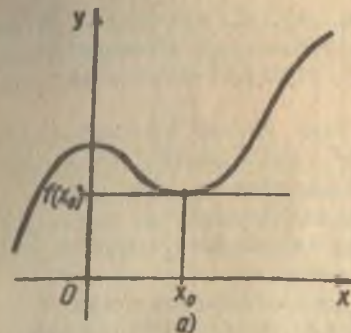
Текширишнинг боришида $\frac{1}{x^2 + 1}$ функция ҳақида олинган маълумотлар унинг графигини ясаш учун етарлидир.



34- расм.



35- расм.



37- расм

Графикнинг (0; 1) нуқтасини ясаймиз. Биз $[0; \infty)$ оралиқ f функциянинг камайиш оралиғи эканини аниқладик. Шу сабабли абсциссаси 0 га тенг нуқтадан ўнгроқда f функция графикни «пастда кетадиган» эгри чизик шаклида чизамиз (34-расм). Ҳар қандай x $f(x) > 0$ бўлгани учун бу эгри чизик абсциссалар ўқидан пастда тушиб кета олмайди, шу билан бирга (текширишнинг 7-пункти қаранг) ўнгга давом эттирилганда график абсциссалар ўқига чексиз яқинлашиб боради. f функциянинг жуфтлигидан фойдаланиш қолди: $x \geq 0$ учун ясалган эгри чизикни ординаталар ўқига нисбатан симметрик акслантириб, f функция графикни ҳосил қиламиз (35-расм).

ди. $(-\infty; -\sqrt{3})$ ва $(0; \sqrt{3})$ оралиқларда $f(x)$ манфий — бунда график абсциссалар ўқидан пастда ётади.

5) $[1; \infty)$ ва $(-\infty; -1]$ оралиқлар f функциянинг ўсиш оралиқлари. Камайиш оралиғи эса $[-1; 1]$ кесмадан иборат.

6) Функциянинг ўсиши камайиши билан алмашинувчи (ёки аксинча) нуқталар — 1 ва 1 абсциссали нуқталардан иборат: $f(1) = 2$, $f(-1) = 2$.

7) $|x|$ чексиз катталашиб борганда $|f|$ нинг қиймати чексиз ўсиб боради (қ. 36-расм).

2. 36-расмда $f(x) = x^3 - 3x$ функция графиги тасвирланган, унда функциянинг ўсиши камайиши билан алмашинадиган ёки аксинча бўладиган нуқталарни топиш муҳимдир ($f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ функция учун шундай нуқта 0 бўлди; $f(x) = x^3 - 3x$ функция учун биз иккита — 1 ва 1 нуқта топдик). Бундай нуқталар максимум ва минимум нуқталар дейилади.

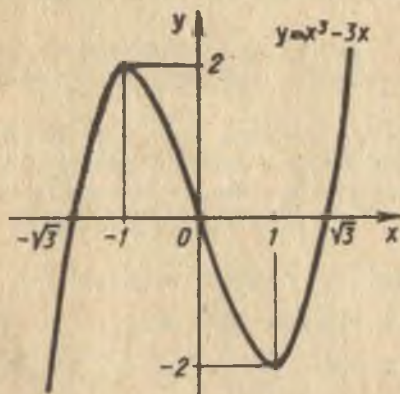
Қараб чиқилган мисоллардан кўриниб турибдики, графикларни тасвирлашда функциянинг ўсиши камайиши билан алмашинадиган ёки аксинча бўладиган нуқталарни топиш муҳимдир ($f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ функция учун шундай нуқта 0 бўлди; $f(x) = x^3 - 3x$ функция учун биз иккита — 1 ва 1 нуқта топдик). Бундай нуқталар максимум ва минимум нуқталар дейилади.

1) $f(x) = x^3 - 3x$ функция сонлар тўғри чизигининг ҳаммаси биз иккита — 1 ва 1 нуқта топдик). Бундай нуқталар максимум ва минимум нуқталар дейилади.

Таъриф. Агар x_0 нуқтанинг бирор атрофидан олинган барча лар учун $f(x) \geq f(x_0)$ тенгсизлик бажарилса, x_0 нуқта f функциянинг **минимум нуқтаси** дейилади (37-расм).

2) $f(x) = x^3 - 3x$ — тоқ функция шу сабабли $x \geq 0$ да унинг графикни яшаш, сўнгра координаталар бошига нисбатан акслантиришнинг ўзи етарли.

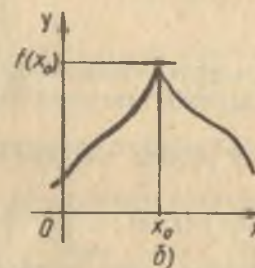
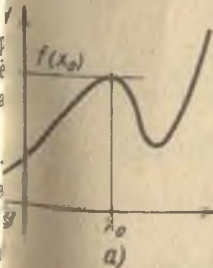
Таъриф. Агар x_0 нуқтасининг бирор атрофидан олинган барча лар учун $f(x) \leq f(x_0)$ тенгсизлик бажарилса, x_0 нуқта f функциянинг **максимум нуқтаси** дейилади (38-расм).



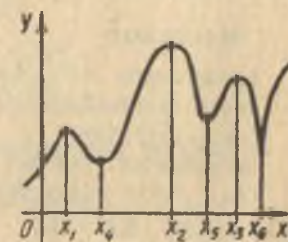
36- расм.

3) f функция графикни ординаталар ўқи билан кесиши нуқтаси — бу (0; 0) нуқтадир. Ҳар қандай x $f(x) \geq f(0)$ тенгсизлик бажарилса, 0 нуқта f функциянинг **минимум нуқтаси** дейилади (37-расм).

4) Агар $x > \sqrt{3}$ ёки $-\sqrt{3} < x < 0$ бўлса, f нинг қийматлари мусбат, $(\sqrt{3}; \infty)$ ва $(-\sqrt{3}; 0)$ оралиқларда f нинг график абсциссалар ўқидан юқорида ётади.



38- расм



39- расм

Максимум нуқталар атрофида (x_1, x_2, x_3 нуқталар — 39-расм) функция графиги, одатда, «тепалик» кўринишида, минимум нуқталари (39-расм, x_4, x_5 ва x_6 — нуқталар) атрофида эса график «чуқурлик» кўринишида тасвирланади.

Максимум ва минимум нуқталари учун умумий ном қабул қилинган — уларни **экстремум нуқталари***, функциянинг бу нуқталардаги қийматларини **функциянинг экстремумлари** дейилади.

3. Бундан кейин функцияларни текширишда биз тавсифланган схемага амал қиламиз. Умумий ҳолда текшириш схемаси қуйидаги масалаларни ҳал қилишни ўз ичига олади.

1) Берилган f функциянинг аниқланиш соҳасини топиш.

2) Функцияни текширишни осонлаштирувчи хусусиятларга эга ёки эга эмаслигини аниқлаш (f функция: а) тоқ ёки жуфт функция экани; б) даврий функция** эканлиги аниқланади).

3) f графигининг координаталар ўқлари билан кесишиш нуқталарини ҳисоблаш.

4) f функциянинг ўзгармас ишоралилик оралиқларини топиш.

5) f функция қандай оралиқларда ўсувчи, қандай оралиқларда камаювчи эканлигини аниқлаш.

6) Функциянинг экстремум нуқталарини топиш ва f нинг шу нуқталардаги қийматларини ҳисоблаш.

7) f функция аргументнинг (модули бўйича) каттта қийматларида ўзини қандай тутишини текшириш.

Шуни таъкидлаш керакки, текширишнинг бу плани тахминий характерга эга. Масалан, $f(x) = \frac{1}{x}$ функция 0 нуқтада аниқланмаган, аммо унинг графигини ясашда x нинг нолга яқин қийматларида f ўзини қандай тутишини текшириш керак. Кўпинча текширишнинг у ёки бу босқичини тушириб қолдиришга тўғри келади. Аммо имконият борида функцияларни текширишнинг боришида бу схемага амал қилган маъқул.

Функцияларни текширишнинг энг қийин босқичи, одатда, ўсиш (камайиш) оралиқларини ва шунингдек экстремум нуқталарини излашдан иборат. Навбатдаги бобда сиз бу масалаларни ҳал қилишнинг математик анализ тушунчаларига асосланган умумий методлари билан танишасиз.

Машқлар

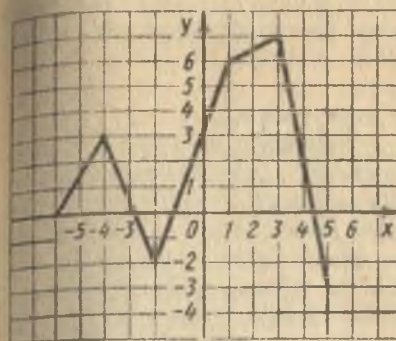
81. Графиклари 40 — 43-расмларда тасвирланган функцияларнинг ўсиш ва камайиш оралиқларини, максимум ва минимум нуқталарини кўрсатинг.

Функцияни умумий схема бўйича текширинг ва унинг графигини ясанг (82 — 84).

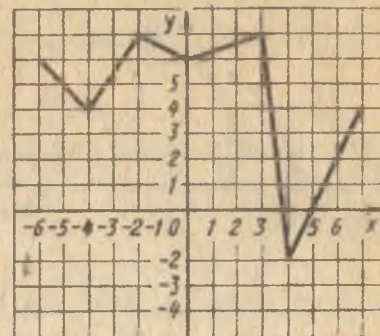
82. а) $f(x) = 2x + 3$; б) $f(x) = -3x + 2$;

* extremum латинча сўз бўлиб ўзбек тилига таржимаси «чекка» деган маънони билдиради.

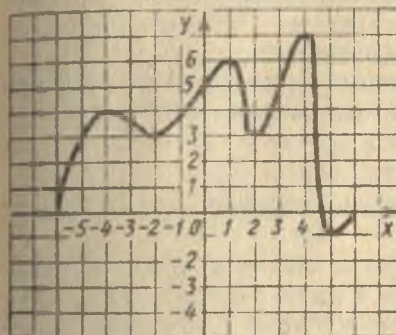
** Даврий функциянинг таърифини 5-п. дан қаранг.



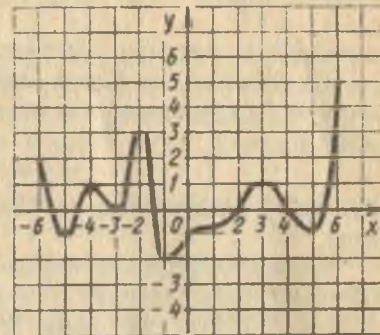
40- расм



41- расм



42- расм



43- расм

в) $f(x) = x^2 - 3x + 2$; г) $f(x) = 3 - x - 2x^2$.

83. а) $f(x) = \frac{1}{x} + 1$; б) $f(x) = \frac{1}{x-3}$;

в) $f(x) = \frac{1}{x^2}$; г) $f(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$;

д) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$; е) $f(x) = \frac{2x-1}{2x+1}$.

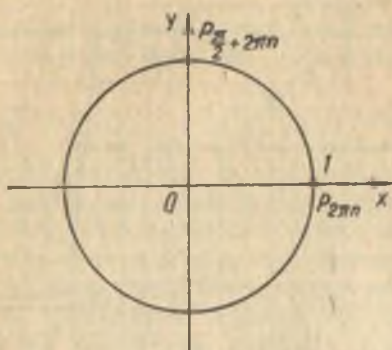
84. а) $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$; б) $f(x) = x^4 - 2x^2$;

в) $f(x) = x^3 + 3x$; г) $f(x) = x^3 - 3x$.

3-§. ТРИГОНОМЕТРИК ФУНКЦИЯЛАРНИНГ АСОСИЙ ХОССАЛАРИ

5. Тригонометрик функцияларнинг даврийлиги

Ҳар қандай x сон учун $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ тенглик бажарилишини сиз энди биласиз. Бундан, синуснинг қийматлари 2π га фарқ қилувчи нуқталарнинг ҳаммасида бир хил эканлиги келиб чи-



44- расм

қади, бунда n — ихтиёрий бутун сон. Синус функциянинг бу хос-саси даврийлик хоссаси деб ата-лади. 2π сон эса синуснинг даври дейилади.

Умуман, T даври f функ-циянинг даврийлиги ҳақида га-пирилганда $T \neq 0$ деб, f нинг аниқланиш соҳаси эса ҳар бир x нуқта билан биргаликда x ни Ox ўқ бўйича (ўнгга, чапга) nT (n — ихтиёрий натурал сон) ма-софага параллел кўчиришдан ҳо-сил бўлган ҳамма нуқталарни ҳам ўз ичига олади деб фараз қилинади. Бу фаразда даврий

функциянинг хоссаси қуйидагича ифодаланади.

Таъриф. Агар f нинг аниқланиш соҳасига тегишли ҳар қандай x учун бу функциянинг x ва $x + T$ нуқталардаги қийматлари тенг, яъни

$$f(x + T) = f(x)$$

Бўлса, f функция даври $T \neq 0$ бўлган даврий функция дейи-лади.

Даврий функциялар мисоллари билан сиз анча олдиндан таниш-сиз. Ҳар қандай ҳақиқий x учун $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ ва $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ бўлгани учун синус ва косинус даври 2π га тенг даврий функциялардир. Тангенс ва котангенс даври π га тенг даврий функ-циялар, чунки $\tan(x + \pi) = \tan x$ ва $\cot(x + \pi) = \cot x$.

Агар f даври T га тенг даврий функция бўлса, у ҳолда ҳар қан-дай бутун $n \neq 0$ да nT сон ҳам шу функциянинг даври бўлиши равшан. Масалан, $n = 3$ да даврий функциянинг таърифини бир неча марта ишлатиб, топамиз:

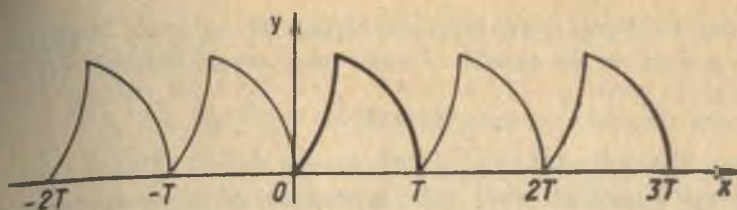
$$\begin{aligned} f(x + 3T) &= f((x + 2T) + T) = f(x + 2T) = f((x + T) + T) = \\ &= f(x + T) = f(x). \end{aligned}$$

$\sin x$ ва $\cos x$ функцияларнинг энг кичик мусбат даври 2π га тенг эканини исботлаймиз.

Айтиб ўтилганидек, 2π бу функцияларнинг даври. Шу сабабли 2π дан кичик мусбат сон уларнинг даври бўла олмаслигини ис-ботлашимиз қолади.

а) Агар T косинуснинг ихтиёрий даври бўлса, у ҳолда ҳар қан-дай α да $\cos(\alpha + T) = \cos \alpha$ $\alpha = 0$ деб олиб, $\cos T = \cos 0 = 1$ эка-нини топамиз. $\cos T = 1$ бўладиган энг кичик мусбат T бу 2π (44- расм).

б) T — синуснинг ихтиёрий мусбат даври бўлсин. У ҳолда ҳар қандай α да $\sin(\alpha + T) = \sin \alpha$ бўлади, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ деб олиб,



45- расм

$\sin\left(T + \frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$ ни топамиз. Аммо $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$) даги-на $\sin x = 1$. Шу сабабли $T = 2\pi$. 2π кўринишидаги энг кичик мусбат сон 2π .

$\operatorname{tg} x$ ва $\operatorname{ctg} x$ функциялар учун π сони энг кичик мусбат даврдир.

Агар T тангенсининг мусбат даври бўлса, у ҳолда $\operatorname{tg} T = \operatorname{tg}(0 + T) = \operatorname{tg} 0 = 0$. $(0; \pi)$ интервалда тангенс нолларга эга эмаслигидан $T > \pi$. Олдин π сони тангенс функциянинг даври эканлиги исботланган эди, демак, у тангенсининг энг кичик мусбат давридир. $\operatorname{ctg} x$ функция учун исбот шунга ўхшаш бўлади.

Асосий тригонометрик функцияларнинг даврийлигидан аслида биз уларнинг графикларини ясашда фойдаланган эдик. Ушбу умумий тасдиқ ўринли: *даври T га тенг бўлган даврий функциянинг графигини яшаш учун уни $[0; T]$ кесмада яшаш ва шундан кейин ҳосил бўлган яри чизиқни Ox ўқ бўйлаб ўнга ва чапга nT масофа қадар параллел кўчириш етарли* (45-расм), бунда n — ихтиёрий натурал сон.

Ҳақиқатан $(x_0; y_0)$ — даврий функция графигининг нуқтаси бўлсин. У ҳолда $x_0 + nT$ нуқта ҳар қандай бутун n ва f нинг аниқланиш соҳасига тегишли бўлади (пункт бошида берилган эслатмага қаранг) ва f даврий бўлгани учун $f(x_0 + nT) = f(x_0) = y_0$ тенглик ўринли. Демак, $(x_0; y_0)$ нуқтани Ox ўқ бўйлаб nT масофа қадар параллел кўчиришдан ҳосил бўлган $(x_0 + nT; y_0)$ нуқта ҳам f нинг графигига тегишли бўлади.

▼ Куйидаги тасдиқ ўринли.

Агар f нинг энг кичик мусбат даври T_0 бўлса, у ҳолда, бу функциянинг ҳамма даврлари T_0 га каррали бўлади, яъни агар T сон f нинг ихтиёрий даври бўлса, у ҳолда

$$T = nT_0,$$

бунда n — нолга тенг бўлмаган бутун сон.

Шундай эканини тескарасини фараз қилиш методи билан исботлаймиз. f функциянинг $\frac{T_1}{T_0}$ бутун сон бўлмайдиган T_1 даври мавжуд деб фараз қиламиз. У ҳолда

$$T_1 = nT_0 + l,$$

бунда $0 < l < T_0$, n эса бутун сон. Аммо T_0 ва T_1 — f функциянинг даврлари ва шу сабабли f нинг аниқланиш соҳасига тегишли ҳар қандай x учун $x + T_1$ ва $x + l = (x + T_1) - nT_0$ сонлар f нинг аниқланиш соҳасига тегишли бўлади ва

$$f(x + l) = f(x + T_1 - nT_0) = f(x + T_1) = f(x).$$

Биз T_0 дан кичик мусбат l сон f функциянинг даври эканини топдик. Бу T_0 функциянинг энг кичик мусбат даври деб қилган фаразимизга зид. Бинобарин, фаразимиз нотўғри ва $\frac{T_1}{T_0}$ — бутун сон ∇ .

Машқлар.

85. Функция даврийми:

а) $f(x) = 1$; б) $f(x) = x^2$; в) $f(x) = \frac{1}{x}$; г) $f(x) = \{x\}$?

86. Тригонометрик функцияларнинг даврийлиги, жуфтлиги ва тоқлиги ҳамда бошқа хоссаларидан фойдаланиб, тригонометрик функцияларнинг қийматларини аргументнинг мумкин бўлган энг кичик мусбат градуслар ёки радианларнинг қийматлари тариқасида ифодаланг:

а) $\sin 405^\circ$; б) $\cos \frac{17\pi}{5}$; в) $\operatorname{tg} 3333^\circ$; г) $\operatorname{ctg}(-\frac{122}{7}\pi)$;

д) $\cos(-1985^\circ)$; е) $\sin(-\frac{35\pi}{9})$; ж) $\operatorname{tg} \frac{2021}{8}\pi$; з) $\cos \frac{20\pi}{7}$.

87. Ушбу

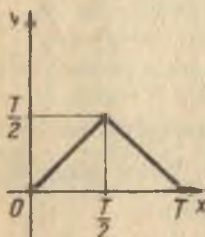
а) $y = \sin 2x$; б) $y = x \cos x$; в) $y = \operatorname{tg} 2x$; г) $y = \cos \frac{x}{5}$; д) $y = 4$

функциялар берилган. Улар орасидан даврийларини кўрсатинг ва уларнинг ҳар бирининг энг кичик мусбат даврини топинг. Функциянинг энг кичик мусбат даврини топинг (88 — 89).

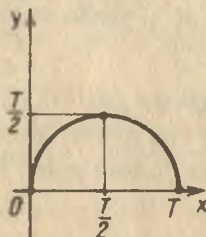
88. а) $\cos 2x$; б) $\sin \frac{x}{3}$; в) $\operatorname{tg} 4x$; г) $\cos x + \sin x$.

89. а) $\cos(3x - 2)$; б) $\sin(\frac{x}{2} + 1)$; в)* $\operatorname{ctg} \frac{x}{2}$; г)* $\operatorname{ctg}(3x - 2)$.

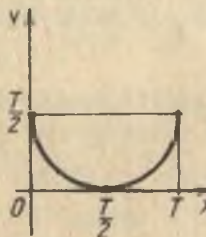
90. 46 — 49-расмларнинг ҳар бирида T даврли бирор функция графигининг бир қисми келтирилган. Графикни $[-2T; 3T]$ кесма қадар давом эттиринг.



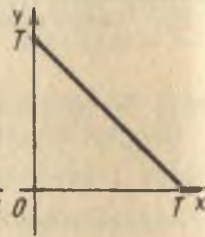
46- расм



47- расм



48- расм



49- раси

91. Даврий функция сонлар тўғри чизигининг ҳамма ерида ўсувчи бўла оладими?

6. $y = \sin x$ функцияни текшириш

Синусни (шунингдек, бошқа асосий тригонометрик функцияларни) текширишни ҳам 4-п. да тавсифланган схема бўйича ўтказамиз.

1. **Синуснинг аниқланиш соҳаси** сонлар тўғри чизигининг ҳаммасидан, қийматлари соҳаси эса $[-1; 1]$ кесмадан иборат:

$$D(\sin) = R, E(\sin) = [-1; 1].$$

2. а) Синус *тоқ* функция:

барча $x \in R$ лар учун $\sin(-x) = -\sin x$.

б) Синус даври 2π га тенг даврий функция:

барча $x \in R$ лар учун $\sin(x + 2\pi) = \sin x$

(5-п.да кўрсатилганидек, 2π — синуснинг энг кичик мусбат даври).

3. $x = \pi n$ нуқталар, бунда $n \in Z$, синуснинг *ноллари*.

4. Синуснинг *ўзгармас ишора оралиқларини* кўрсатамиз; бу $(2\pi n; \pi + 2\pi n)$ интерваллардан иборат бўлиб, уларда синуснинг қийматлари мусбат ҳамда $(\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n)$ интерваллардан иборат бўлиб, бунда синус манфий қийматларни қабул қилади.

5. Синуснинг *ўсиш оралиқлари*

$$\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$$

кесмалардан иборат бўлиб, бунда $n \in Z$; *камайиш оралиқлари*

$$\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right].$$

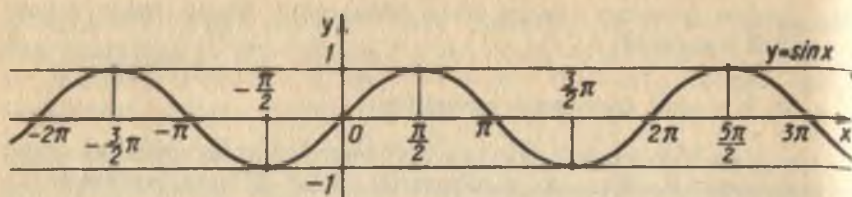
кесмалардан иборат бўлиб, бунда $n \in Z$.

6. Синус $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ нуқталарда 1 га тенг *максимумларга* эга, бунда $n \in Z$, $\frac{3\pi}{2} + 2\pi n$ нуқталарда — 1 га тенг *минимумларга* эга бунда $n \in Z$.

Биринчи тўртта хоссанинг исботи олдинги пунктларда берилган (уларни такрорланг). Шу сабабли 5 ва 6-хоссани исботлашгина қолади.

$\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$ оралиқларда синус ўсувчи эканини исботлаймиз. Синус даврий бўлгани учун исботни $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ кесмада ўтказиш етарли. Бу оралиқнинг $x_1 < x_2$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ҳар қандай иккита x_1 ва x_2 сони учун, синуслар айирмаси формуласини татбиқ этиб, топамиз:

$$\sin x_2 - \sin x_1 = 2\cos \frac{x_1 + x_2}{2} \sin \frac{x_2 - x_1}{2}. \quad (1)$$



50- расм

$$-\frac{\pi}{2} \leq x_1 < x_2 \leq \frac{\pi}{2} \text{ тенгсизликдан}$$

$$0 < \frac{x_2 - x_1}{2} \leq \frac{\pi}{2} \text{ ва } -\frac{\pi}{2} < \frac{x_1 + x_2}{2} < \frac{\pi}{2}$$

экани келиб чиқади. Шу сабабли $\cos \frac{x_1 + x_2}{2} > 0$, $\sin \frac{x_2 - x_1}{2} > 0$ ва, демак, (1) тенгликнинг ўнг қисми мусбат, яъни $\sin x_1 < \sin x_2$. Шу билан синуснинг берилган оралиқларда ўсиши исботланди. $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n \right]$ оралиқлар синуснинг камайиш оралиқлари эканлиги ҳам шунга ўхшаш исботланади (бу мулоҳазани мустақил ўтказинг).

6- хосса 5- хоссанинг яққол натижаси. Масалан, $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ нуқталар синуснинг ўсиш ва камайиш оралиқларининг умумий охирилари, шу билан бирга бу нуқталарда ўсиш камайиш билан алмашинади. Синуснинг бу нуқталардаги қиймати 1 га тенг.

$y = \sin x$ функция билан ўтказилган текшириш бу функциянинг графигини ясаш имконини беради (50- расм), уни биз илгари нуқталар бўйича ясаган эдик.

Машқлар.

92. Функциянинг аниқлаш соҳасини топинг:

а) $\frac{1}{\sin x - 1}$; б) $\frac{1}{\sin x}$; в) $\sin x^2$; г) $\sin \frac{1}{x}$.

93. Функциянинг қийматлари соҳасини топинг:

а) $\sin 2x$; б) $2 \sin x$; в) $\sin^2 3x$; г) $\frac{1}{2} \sin^2 x$.

94. Функциянинг ўзгармас ишора оралиқларини ва нолларини топинг.

а) $\sin 2x$; б) $-\sin \frac{x}{2}$; в) $\frac{1}{\sin x}$; г) $\sin^2 x$.

95. Сонларни ўсиб бориш тартибида жойлаштиринг:

а) $\sin 20^\circ$, $\sin 100^\circ$, $\sin(-30^\circ)$, $\sin(-250^\circ)$, $\sin 170^\circ$;

б) $\sin 1,8$; $\sin 2,3$; $\sin \frac{7\pi}{3}$; $\sin(-1)$; $\sin(-\frac{13}{4}\pi)$.

96. Функциянинг ўсиш ва камайиш оралиқларини топинг:

а) $\sin 3x$; б) $\sin(-x + \frac{\pi}{4})$; в) $\sin(-2x)$; г) $\sin(2x - \frac{\pi}{3})$.

97. Сонларнинг берилган тенглама ёки тенгсизликни қаноатлантирувчи тўпламини топинг. Бирлик айланада шундай P_i нуқталарни белгилангки, улар учун тегишли қийматлар берилган муносабатларни қаноатлантирсин:

а) $\sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\sin t < \frac{1}{2}$;

г) $\sin t \geq -\frac{1}{2}$.

98. Сонларнинг берилган тенглама ёки тенгсизликни қаноатлантирувчи тўпламини топинг. Синус графигини ясанг ва абсциссалар ўқида мос тенглама ёки тенгсизликнинг ечимлари бўлган x нуқталар тўпламини кўрсатинг:

а) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$;

г) $\sin x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

99. Функцияни текширинг ва унинг графигини ясанг:

а) $\sin 2x$; б) $\sin(x - \frac{\pi}{4})$; в) $\sin(x + \frac{\pi}{6})$; г) $\sin \frac{x}{3}$.

7. $y = \cos x$ функцияни текшириш

Косинуснинг асосий хоссаларини ифодалаймиз.

1. $y = \cos x$ функциянинг аниқланиш соҳаси сонлар тўғри чизиғининг ҳаммасидан, қийматлари соҳаси эса $[-1; 1]$ кесмадан иборат:

$$D(\cos) = R, E(\cos) = [-1; 1].$$

2. а) Косинус *жуфт* функция:

барча $x \in R$ лар учун $\cos(-x) = \cos x$.

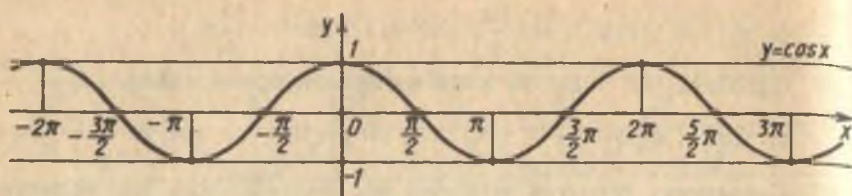
б) Косинус даври 2π га тенг *даврий* функция:

барча $x \in R$ лар учун $\cos(x + 2\pi) = \cos x$

(2π — косинуснинг энг кичик мусбат даври).

3. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ нуқталар косинуснинг *ноллари*, бунда $n \in Z$.

4. $(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n)$ интерваллар косинуснинг ўзгар-



51- расм

мас ишора оралиқларидир, бунда косинуснинг қийматлари мусбат ва $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$ интерваллардир, бунда косинус ман-фий қийматларни қабул қилади, $n \in \mathbb{Z}$.

5. Косинуснинг ўсиш оралиқлари

$$[-\pi + 2\pi n; 2\pi n]$$

кесмалардан, камайиш оралиқлари

$$[2\pi n; \pi + 2\pi n]$$

кесмалардан иборат, бунда $n \in \mathbb{Z}$.

6. Косинус $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ нуқталарда 1 га тенг максимумлар-га эга, $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ нуқталар косинуснинг минимум нуқта-лари ва бу нуқталарда унинг қийматлари -1 га тенг.

5 ва 6-хоссаларнинг исботини олдинги пунктдагидек ўтказиш мумкин (косинуслар айирмаси формуласидан фойдаланиш керак). $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ келтириш формуласидан фойдаланиш қулайроқ.

Бундан масалан, косинуснинг ўсиш оралиқлари синуснинг ўсиш оралиқларини чапга $\frac{\pi}{2}$ қадар суриш билан ҳосил қилиниши дарҳол кўринади. 1-п. да таъкидланганидек, бу формуладан, косинуснинг графиги (51-расм) чапга $\frac{\pi}{2}$ қадар сурилган синусоида экани келиб чиқади.

Машқлар

100. Функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:

а) $\frac{1}{\cos x}$; б) $\frac{1}{\cos x + 1}$; в) $\cos x^2$; г) $\cos \frac{1}{x}$.

101. Функциянинг қийматлари соҳасини топинг:

а) $-\cos 2x$; б) $2\cos x$; в) $\cos^2 x + 1$; г) $\frac{1}{2}\cos^2 x + 1$.

102. Функциянинг ўзгармас ишора оралиқлари ва нолларини топинг:

а) $\cos 3x$; б) $\cos \frac{x}{2}$; в) $\frac{1}{\cos x}$; г) $\cos^2 x$.

103. Сонларни ўсиб бориш тартибида жойлаштиринг:

- а) $\cos 20^\circ$, $\cos (-30^\circ)$, $\cos 70^\circ$, $\cos 170^\circ$, $\cos 135^\circ$, $\cos (-100^\circ)$;
 б) $\cos 1,2$, $\cos (-0,1)$, $\cos \frac{8\pi}{3}$, $\cos (-1)$, $\cos \frac{5\pi}{4}$, $\cos 3$.

104. Функциянинг ўсиш ва камайиш оралиқларини топинг:

- а) $-\cos 3x$; б) $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; в) $\cos\left(-\frac{x}{3}\right)$; г) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$.

105. Сонларнинг берилган тенглама ёки тенгсизликларни қаноатлантирувчи тўпламини топинг. Бирлик айланада P_i нуқталарни белгиланг, бу нуқталар учун t нинг тегишли қийматлари мос тенглама ёки тенгсизликларни қаноатлантирсин:

- а) $\cos t = \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\cos t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\cos t < \frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\cos t \geq -\frac{1}{2}$.

106. Берилган тенглама ёки тенгсизликларни қаноатлантирувчи сонлар тўпламини топинг. Косинуснинг графигини ясанг ва абсциссалар ўқида мос тенглама ёки тенгсизликнинг ечимлари бўлган x нуқталар тўпламини кўрсатинг:

- а) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$;

- г) $\cos x < -\frac{1}{2}$.

107. Функцияни текширинг ва унинг графигини ясанг:

- а) $\cos 2x + 2$; б) $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; в) $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; г) $\cos \frac{x}{3}$.

8. $y = \operatorname{tg} x$ функцияни текшириш

Тангенснинг асосий хоссаларини ифодалаймиз.

1. Тангенснинг аниқланиш соҳаси $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ кўринишидаги сонлардан бошқа ҳақиқий сонлар тўпамидан, қийматлари соҳаси эса сонлар тўғри чизиғининг ҳаммасидан иборат.

2. а) Тангенс тоқ функция:

барча $x \in D(\operatorname{tg})$ лар учун $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$.

б) $\operatorname{tg} x$ даврий функция, унинг даври π га тенг:

барча $x \in D(\operatorname{tg})$ лар учун $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$

(π — тангенснинг энг кичик мусбат даври).

3. Тангенснинг ноллари $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, нуқталардан иборат.

4. Тангенснинг ўзгармас ишора оралиқлари $(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n)$ интерваллардан, бунда тангенс мусбат ва $(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n)$ интервалдан иборат, бунда тангенс манфий қийматларни қабул қилади, $n \in \mathbb{Z}$.

5. Тангенс $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$ оралиқларда ўсади.

6. $y = \operatorname{tg} x$ функциянинг экстремумлари мавжуд эмас.

5-хоссагина янги. Шунини исботлаймиз. Тангенс даврий бўлганидан исботлашни $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ интервал учун ўтказиш етарли.

x_1 ва x_2 сонлар $x_2 > x_1$ кўринишдаги берилган интервалга тегишли ихтиёрий сонлар бўлсин. $\operatorname{tg} x_2 > \operatorname{tg} x_1$ эканини исботлаш керак.

$$\operatorname{tg} x_2 - \operatorname{tg} x_1 = \frac{\sin x_2}{\cos x_2} - \frac{\sin x_1}{\cos x_1} = \frac{\sin x_2 \cos x_1 - \sin x_1 \cos x_2}{\cos x_1 \cos x_2} = \frac{\sin(x_2 - x_1)}{\cos x_1 \cos x_2}.$$

Фаразга кўра $-\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$. Шунинг учун $\cos x_1 > 0$, $\cos x_2 > 0$. $0 < x_2 - x_1 < \pi$ бўлгани учун $\sin(x_2 - x_1) > 0$. Демак, $\operatorname{tg} x_2 - \operatorname{tg} x_1 > 0$, яъни $\operatorname{tg} x_2 > \operatorname{tg} x_1$, шунини исботлаш талаб қилинган эди.

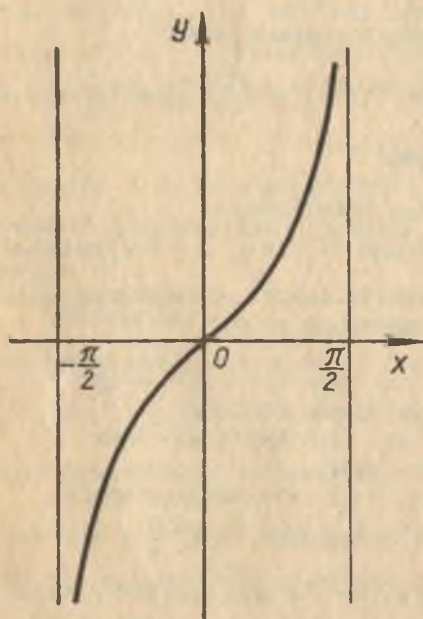
Тангенснинг графиги 52-расмда $\left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$ ва 53-расмда тасвирланган.

$\operatorname{tg} x$ функция $\frac{\pi}{2}$ нуқта атрофида ўзини қандай тутишини батафсил қараймиз. Агар $x < \frac{\pi}{2}$ бўлса ва $y = \frac{\pi}{2}$ га яқинлашса, бу

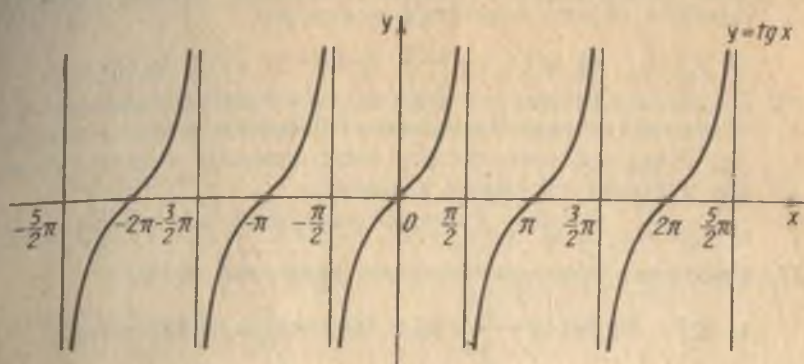
ҳолда $\operatorname{tg} x$ нинг мос қийматлари мусбат ва чексиз ўсади («чексизликка интилади» ҳам дейилади). Ҳақиқатан, бунда $\sin x$ 1 га, $\cos x$ эса 0 га яқинлашади, шу сабабли тангенс $\left(\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}\right)$ мусбат чексиз ўсувчи қийматларни қабул қилади.

Шунга ўхшаш мулоҳазалар x нинг $\frac{\pi}{2}$ га ўнгдан яқинлашишида (яъни $x > \frac{\pi}{2}$ да) тангенснинг қийматлари модули бўйича чексиз ўсади, аммо улар манфий (бу ҳолда «тангенс минус чексизликка интилади» дейишади).

Бу эслатмага биноан $\frac{\pi}{2} + \pi n$ га интилувчи x ларда тангенс функциянинг графиги $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ тўғри чизикқа яқинлашади,



52- расм



53- расм

бунда $x < \frac{\pi}{2} + \pi n$ да график «юқорига чексиз кўтарилади», $x > \frac{\pi}{2} + \pi n$ да эса «пастга чексиз тушади». Тангенсининг бу хусусиятини унинг графигини қараш билан тушуниб олиш мумкин (53-расмга қаранг).

Машқлар

108. Функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:

а) $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; б) $2 \operatorname{tg}(-2x)$; в) $\frac{1}{\operatorname{tg} 3x}$; г) $\frac{1}{\operatorname{tg} x + 1}$.

109. Функциянинг қийматлари соҳасини топинг:

а) $\operatorname{tg} 2x$; б) $4 \operatorname{tg} \frac{x}{2}$; в) $-\operatorname{tg}^2 x$; г) $\frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + 1$.

110. Функциянинг ўзгармас ишора оралиқлари ва нолларини топинг:

а) $\operatorname{tg} 3x$; б) $-\operatorname{tg} \frac{x}{2}$; в) $\operatorname{tg}^2 x$; г) $-\operatorname{tg}^2 x + 1$.

111. Сонларни ўсиб бориш тартибда жойлаштиринг:

а) $\operatorname{tg} 10^\circ$, $\operatorname{tg} 100^\circ$, $\operatorname{tg}(-20^\circ)$, $\operatorname{tg}(-110^\circ)$, $\operatorname{tg} 200^\circ$;

б) $\operatorname{tg} 2$, $\operatorname{tg} 4$, $\operatorname{tg} 6$, $\operatorname{tg}(-8)$, $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$, $\operatorname{tg} \frac{13}{4} \pi$.

112. Функциянинг ўсиш ва камайиш оралиқларини топинг:

а) $\operatorname{tg} 2x$; б) $\operatorname{tg}\left(-x + \frac{\pi}{4}\right)$; в) $-\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; г) $\operatorname{tg} \frac{x}{3}$.

113. Берилган тенглама ёки тенгсизликни қаноатлантирувчи нуқталар тўпламини топинг. Бирлик айланада шундай P_i нуқталар-

ни белгилангки, бу нуқталар учун t нинг тегишли қийматлари берилган муносабатни қаноатлантирсин:

а) $\operatorname{tg} t = 1$; б) $\operatorname{tg} t = -\sqrt{3}$; в) $\operatorname{tg} t < \sqrt{3}$; г) $\operatorname{tg} t \geq -1$.

114. Берилган тенглама ёки тенгсизликни қаноатлантирувчи сонлар тўпламини топинг. Тангенснинг графигини ясанг ва абсциссалар ўқида мос тенглама ёки тенгсизликнинг ечимлари бўладиган нуқталар тўпламини кўрсатинг:

а) $\operatorname{tg} x = -1$; б) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$; в) $\operatorname{tg} x < -\sqrt{3}$; г) $\operatorname{tg} x \geq 1$.

115. Функцияни текширинг ва унинг графигини ясанг:

а) $\operatorname{tg} 2x$; б) $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; в) $-\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$; г) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} + \pi\right)$.

9. ▼ $y = \operatorname{ctg} x$ функцияни текшириш

Котангенснинг асосий хоссалари бундай.

1. Котангенснинг аниқланиш соҳаси πn нуқталардан ташқари барча ҳақиқий сонлар тўплами, бунда $n \in \mathbb{Z}$; котангенснинг қийматлари соҳаси — сонлар тўғри чизигининг ҳаммаси.

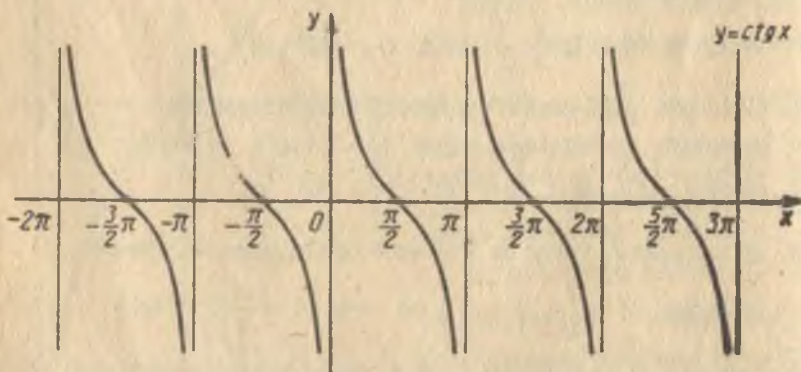
2. а) Котангенс тоқ функция:
барча $x \in D(\operatorname{ctg})$ лар учун

$$\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x.$$

б) $y = \operatorname{ctg} x$ функция даврий, унинг даври π га тенг:
барча $x \in D(\operatorname{ctg})$ лар учун $\operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x$
(π — котангенснинг энг кичик мусбат давридир).

3. $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ нуқталар котангенснинг нолларидир.

4. Котангенснинг ўзгармас ишора оралиқлари — $\left(\pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$ интерваллар, бу интервалларда котангенс мусбат ва $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \pi n\right)$ интервалларда котангенс манфий.



54- расм

πn) интервалларда котангенс манфий қийматларни қабул қилади,

$n \in \mathbb{Z}$.

5. Котангенс (πn , $\pi + \pi n$), $n \in \mathbb{Z}$ оралиқларда *камаяди*.

6. $y = \operatorname{ctg} x$ функциянинг *экстремумлари мавжуд эмас*.
Котангенснинг графиги 54-расмда тасвирланган.

Машқлар

116*. Функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:

а) $\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; б) $\operatorname{ctg}(-2x)$; в) $\frac{1}{\operatorname{ctg} x}$; г) $\frac{1}{\operatorname{ctg} x - 1}$.

117*. Функциянинг қийматлари соҳасини топинг:

а) $\operatorname{ctg} 2x$; б) $3 \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$; в) $\operatorname{ctg}^2 x$; г) $\frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 x + 1$.

118*. Функциянинг ўзгармас ишора оралиқларини ва нолларини топинг:

а) $\operatorname{ctg} 2x$; б) $-\operatorname{ctg} \frac{x}{3}$; в) $\operatorname{ctg}^2 x$; г) $\frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 x + 1$.

119*. Сонларни ўсиб бориш тартибда жойлаштиринг:

а) $\operatorname{ctg} 10^\circ$, $\operatorname{ctg} 100^\circ$, $\operatorname{ctg}(-20^\circ)$, $\operatorname{ctg}(-110^\circ)$, $\operatorname{ctg} 315^\circ$;

б) $\operatorname{ctg} 2$, $\operatorname{ctg} 4$, $\operatorname{ctg} 6$, $\operatorname{ctg} 8$, $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{3}$, $\operatorname{ctg}\left(-\frac{13}{4}\pi\right)$.

120*. Функциянинг ўсиш ва камайиш оралиқларини топинг:

а) $\operatorname{ctg} 2x$; б) $\operatorname{ctg}\left(-x + \frac{\pi}{4}\right)$; в) $-\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$; г) $\operatorname{ctg}^2 x$.

121*. Берилган тенглама ёки тенгсизликни қаноатлантирувчи нуқталар тўпламини топинг. Бирлик айланада шундай P_i нуқталарни белгилангки, улар учун t нинг тегишли қийматлари берилган муносабатни қаноатлантирсин:

а) $\operatorname{ctg} t = -1$; б) $\operatorname{ctg} t = \frac{1}{\sqrt{3}}$; в) $\operatorname{ctg} t < \sqrt{3}$; г) $\operatorname{ctg} t \geq 1$.

122*. Берилган тенглама ёки тенгсизликни қаноатлантирувчи сонлар тўпламини топинг. Котангенснинг графигини ясанг ва абсциссалар ўқида тегишли тенглама ёки тенгсизликнинг ечимлари бўладиган нуқталар тўпламини кўрсатинг:

а) $\operatorname{ctg} x = 1$; б) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$; в) $\operatorname{ctg} x < -\sqrt{3}$;

г) $\operatorname{ctg} x \geq 1$.

123*. Функцияни текширинг ва унинг графигини ясанг:

а) $\operatorname{ctg} 2x$; б) $\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; в) $-\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$; г) $\operatorname{ctg}^2 x$.

4-§. ТРИГОНОМЕТРИК ТЕНГЛАМАЛАР ВА ТЕНГСИЗЛИКЛАРНИ ЕЧИШ

10. Арксинус, аркосинус ва арктангенс

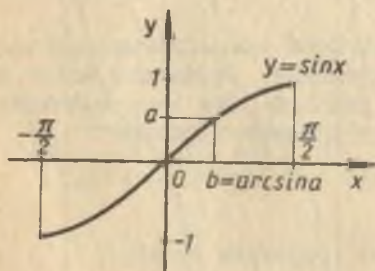
1. Тенгламаларни ечишда фойдаланиш қулай бўлган битта муҳим тасдиқни (бу тасдиқни *илдиз ҳақидаги теорема* деб аташади) қарашдан бошлаймиз.

Теорема. f функция I оралиқда ўсувчи (ёки камаювчи) бўлсин, a сони эса f функциянинг шу оралиқда қабул қиладиган қийматларидан ихтиёрий бири бўлсин. У ҳолда $f(x) = a$ тенглама I оралиқда биттагина илдизга эга бўлади.

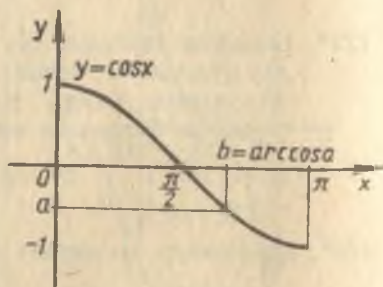
Исботни ўсувчи функция учун ўтказамиз (функция камаювчи бўлганда ҳам мулоҳазалар шунга ўхшаш юритилади). Теореманинг шартига кўра a сони f функциянинг I оралиқда оладиган қиймати, яъни I оралиқда шундай b сони мавжудки, $f(b) = a$ бўлади. b сони $f(x) = a$ тенгламанинг ягона илдизи эканини кўрсатамиз. I оралиқда $f(c) = a = f(b)$ тенгликни қаноатлантирувчи яна битта $c \neq b$ сони мавжуд деб фараз қиламиз. У ҳолда ё $c < b$ ёки $c > b$.

Аммо f функция I оралиқда ўсувчи, шу сабабли ё $f(c) < f(b)$, ёки $f(c) > f(b)$. Бу $f(c) = f(b)$ тенгликка зидлик қилади. Бинобарин, қилинган фараз нотўғри ва I оралиқда $f(x) = a$ тенгламанинг b сонидан бошқа илдизлари йўқ.

2. Сиз биласизки, синус функция $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ кесмада ўсувчи ва -1 дан 1 гача бўлган барча қийматларни қабул қилади. Демак, илдиз ҳақидаги теоремага биноан $|a| \leq 1$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ҳар қандай a сон учун $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ оралиқда $\sin x = a$ тенгламанинг биттагина b илдизи мавжуд. Бу b сон a сонининг арксинуси дейилади ва $\arcsin a$ деб белгиланади (55-расм). Шундай қилиб, a сонининг арксинуси деб $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ кесмага тегишли шундай сонни айтиладики, унинг синуси a га тенг бўлади.



55- расм



56- расм

1-мисол. $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$ ни топамиз.

$$\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}, \text{ чунки } \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ва } \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

2-мисол. $\arcsin \left(-\frac{1}{2}\right)$ ни топамиз.

Синуси $-\frac{1}{2}$ га тенг бурчак $\left(\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]\right)$ оралиққа тегишли $-\frac{\pi}{6}$ га тенг. Шу сабабли $\arcsin \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$.

Арксинуснинг қийматларини жадваллардан (ёки калькулятордан фойдаланиб) топиш мумкин. $\arcsin a$ ни ҳисоблаш учун жадвал ёрдамида α° ли бурчак синуснинг $-90^\circ \leq \alpha^\circ \leq 90^\circ$ ичида ётувчи ва $\sin \alpha = a$ бўлган қийматлари топилади. Сўнгра α° радианларда ифодаланади (бунда бурчакларнинг градус ўлчовларини радиан ўлчовларига ўтказувчи жадваллардан фойдаланилади).

3-мисол. $\arcsin 0,9063$ ни топамиз. Жадвалларга биноан:

$$0,9063 \approx \sin 65^\circ,$$

$$65^\circ \approx 1,1345 \text{ (рад)},$$

$$\arcsin 0,9063 \approx 1,1345.$$

3. Косинус функция $[0; \pi]$ кесмада камаювчи ва -1 дан 1 гача бўлган ҳамма қийматларни қабул қилади. Шунинг учун $|a| \leq 1$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ҳар қандай a сон учун $[0; \pi]$ кесмада $\cos x = a$ тенгламанинг ягона b илдизи мавжуд. Бу b сон a сонининг арккосинуси дейилади ва $\arccos a$ деб белгиланади (56-расм).

a сонининг арккосинуси деб $[0; \pi]$ оралиққа тегишли шундай сонни айтиладики, унинг косинуси a га тенг бўлади.

4-мисол. $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$, чунки

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ва } \frac{\pi}{6} \in [0; \pi].$$

5-мисол. $\arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$, чунки

$$\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ва } \frac{3\pi}{4} \in [0; \pi].$$

4. $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ интервалда тангенс

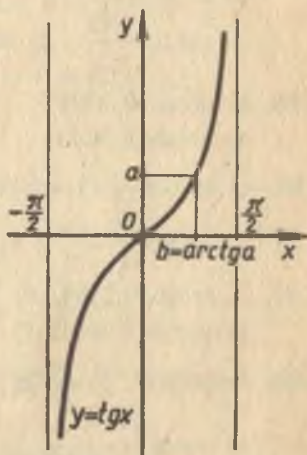
функция ўсувчи ва $\mathbb{R}$ дан барча қийматларни қабул қилади. Шу сабабли ихтиёр

рий a сон учун $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ интервалда

$\operatorname{tg} x = a$ тенгламанинг ягона b илдизи мавжуд. Бу b сон a сонининг арктан-

генси дейилади, $\operatorname{arctg} a$ деб белгилашади

(57-расм). Шундай қилиб,



57-расм

a сонининг арктангенси деб $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ интервалга тегишли шундай сонни айтиладики, унинг тангенси a га тенг бўлади.

6-мисол. $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, чунки $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$ ва $\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

7-мисол. $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$, чунки $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$ ва $-\frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

▼ 5. Котангенс функция $(0; \pi)$ интервалда камаювчи ва R дан барча қийматларни қабул қилади. Шу сабабли ҳар қандай a сон учун $(0; \pi)$ интервалда $\operatorname{ctg} x = a$ тенгламанинг ягона b илдизи мавжуд. Бу b сон a сонининг арккотангенси дейилади ва $\operatorname{arccotg} a$ деб белгилашади:

a сонининг арккотангенси деб $(0; \pi)$ интервалга тегишли шундай сонни айтиладики, унинг котангенси a га тенг бўлади.

8-мисол. $\operatorname{arccotg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}$, чунки $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ва $\frac{\pi}{3} \in (0; \pi)$.

9-мисол. $\operatorname{arccotg}(-\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{6}$, чунки $\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{6} = -\sqrt{3}$ ва $\frac{5\pi}{6} \in (0; \pi)$.

Машқлар

Ҳисобланг (124 — 131).

124. а) $\arcsin 0$; б) $\arcsin 1$; в) $\arcsin(-1)$; г) $\arcsin \frac{1}{2}$;
д) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$; е) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; ж) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

125. а) $\arcsin 0,3024$; б) $\arcsin 0,4305$;
в) $\arcsin 0,3033$; г) $\arcsin 0,7801$.

126. а) $\arccos 0$; б) $\arccos 1$; в) $\arccos(-1)$; г) $\arccos \frac{1}{2}$;
д) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$; е) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$; ж) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

127. а) $\arccos 0,2164$; б) $\arccos 0,8771$;
в) $\arccos 0,6081$; г) $\arccos 0,5666$.

128. а) $\operatorname{arctg} 0$; б) $\operatorname{arctg}(-1)$; в) $\operatorname{arctg} \sqrt{3}$; г) $\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}}$;
д) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

129. а) $\operatorname{arctg} 0,3541$; б) $\operatorname{arctg} 2,300$; в) $\operatorname{arctg}(-5)$; г) $\operatorname{arctg} 10$.

130*. а) $\operatorname{arccotg} 0$; б) $\operatorname{arccotg} 1$; в) $\operatorname{arccotg}(-1)$; г) $\operatorname{arccotg} \sqrt{3}$;
 д) $\operatorname{arccotg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

131*. а) $\operatorname{arccotg} 0,7080$; б) $\operatorname{arccotg} 6,386$;
 в) $\operatorname{arccotg} 5$; г) $\operatorname{arccotg}(-10)$.

132. Тўғри муносабат ҳосил бўлиши учун юлдузча ўрнига тенглик ёки тенгсизлик белгисини қўйинг:

а) $\arcsin \frac{1}{2} * \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) * \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$;
 в) $\arctg 1 * \arccos \frac{1}{2}$; г) $\arctg(-\sqrt{3}) * \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Ҳисобланг (133 — 135).

133. а) $\arcsin \frac{1}{2} + \arccos \frac{1}{2}$;
 б) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;
 в) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;
 г) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$.

134. а) $\arctg \sqrt{3} + \arctg(-1)$; б) $\arctg \frac{1}{\sqrt{3}} + \arctg 1$;
 в) $\arctg(-1) + \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\arctg \sqrt{3} + \arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$;
 д) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arctg \frac{1}{\sqrt{3}}$.

135*. а) $\operatorname{arccotg} \sqrt{3} + \operatorname{arccotg} \sqrt{3}$;
 б) $\operatorname{arccotg}(-\sqrt{3}) + \operatorname{arccotg}(-\sqrt{3})$;
 в) $\operatorname{arccotg} \sqrt{3} + \operatorname{arccotg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$;
 г) $\operatorname{arccotg}(-\sqrt{3}) + \operatorname{arccotg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

136. $[-1; 1]$ кесмага тегишли ҳар қандай x_1 ва x_2 сонлари учун $x_1 < x_2$ тенгсизликдан

а) $\arcsin x_1 < \arcsin x_2$; б) $\arccos x_1 > \arccos x_2$

тенгсизлик келиб чиқишини исботланг.

137. Ҳар қандай x_1 ва x_2 сонлар учун $x_1 < x_2$ тенгсизликдан

а) $\arctg x_1 < \arctg x_2$; б) $\operatorname{arccctg} x_1 > \operatorname{arccctg} x_2$

тенгсизлик келиб чиқишини исботланг.

Сонларни ўсиб бориш тартибида жойлаштиринг (138 — 139).

138. а) $\arcsin 0,8$; $\arcsin (-0,3)$; $\arcsin 0,9$;

б) $\arcsin (-0,5)$; $\arcsin (-0,7)$; $\arcsin 0,2$;

в) $\arccos 0,4$; $\arccos (-0,2)$; $\arccos (-0,8)$;

г) $\arccos 0,9$; $\arccos (-0,7)$; $\arccos 0,6$.

139. а) $\arctg 100$; $\arctg 1$; $\arctg 0,3$;

б) $\arctg (-100)$; $\arctg (-2)$; $\arctg (-1)$;

в)* $\operatorname{arccctg} 12$; $\operatorname{arccctg} 1$; $\operatorname{arccctg} 0,2$;

г)* $\operatorname{arccctg} (-20)$; $\operatorname{arccctg} (-10)$; $\operatorname{arccctg} (-1)$.

140*. Тенгликни исботланг:

а) ҳар қандай $x \in [-1; 1]$ учун

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2};$$

б) ҳар қандай x учун $\arctg x + \operatorname{arccctg} x = \frac{\pi}{2}$.

141*. Қуйидагиларнинг қийматини топинг:

а) $\arcsin (\sin 10)$; б) $\arccos (\cos 12)$;

в) $\arctg (\tg 2)$; г) $\operatorname{arccctg} (\ctg (-3))$.

11. Энг содда тригонометрик тенгламаларни ечиш

1. Ушбу

$$\cos t = a \quad (1)$$

тенгламадан бошлаймиз, бунда a — ихтиёрий ҳақиқий сон. Бу тенглама a нинг қийматларига боғлиқ равишда нечта ечимга эгаллигини ва улар қандай эканини текшираемиз.

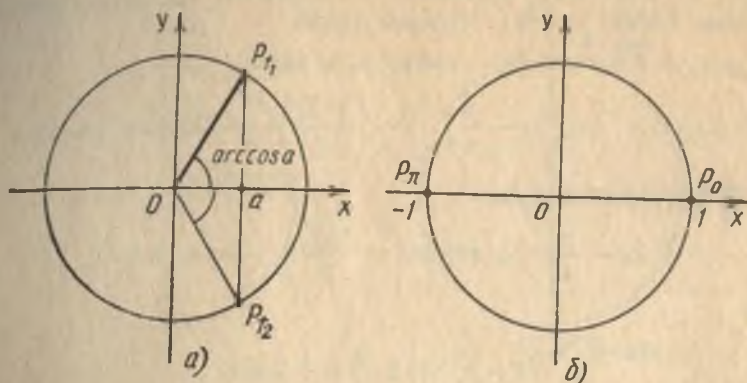
Агар $|a| > 1$ бўлса, у ҳолда (1) тенглама ечимларга эга эмаслиги равшан, чунки ҳар қандай t учун $|\cos t| \leq 1$.

$|a| \leq 1$ бўлсин. $\cos t = a$ тенглик ўринли бўладиган ҳамма t ларни топиш керак. $[0; \pi]$ кесмада (1) тенгламанинг аниқ битта ечими мавжуд, бу сон $\arccos a$.

Косинус — жуфт функция ва, демак, $[-\pi; 0]$ кесмада (1) тенглама аниқ битта ечимга эга — бу ечим — $\arccos a$ сонидан иборат. Шундай қилиб, $\cos t = a$ тенглама узунлиги 2π га тенг бўлган $[-\pi; \pi]$ кесмада ($a = 1$ да бир хил бўлган) иккита ечимга эга: $t = \pm \arccos a$.

$y = \cos t$ функция даврийлиги сабабли қолган ечимларнинг ҳаммаси бу ечимлардан $2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$) га фарқ қилади, яъни (1) тенглама ечимларининг формуласи бундай:

$$t = \pm \arccos a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$



58- расм

(Эътибор беринг: бу формуладан $|a| \leq 1$ бўлгандагина фойдаланиш мумкин).

(1) тенглама ечимларини бирлик айланада намойиш қилиш мумкин. Таърифга кўра $\cos t$ — бирлик айлананинг P_t нуқтасининг абсциссаси. Агар $|a| < 1$ бўлса, бундай нуқталар иккита бўлади (58-а расм); агар $|a| = 1$ ёки $a = -1$ бўлса, битта бўлади (58-б расм).

$a = 1$ да $\arccos a$ ва $-\arccos a$ сонлар бир хил бўлади (улар нолга тенг), шу сабабли

$$\cos t = 1$$

тенгламанинг ечимларини

$$t = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

кўринишда ёзиш қабул қилинган.

$a = -1$ ва $a = 0$ бўлган ҳоллар учун (1) тенглама ечимларини ёзишнинг «алоҳида» формаси қабул қилинган:

$$t = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \text{ да } \cos t = -1;$$

$$t = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \text{ да } \cos t = 0.$$

1-мисол. $\cos x = \frac{1}{2}$ тенгламани ечамиз. (2) формулага кўра

$$x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ бўлгани учун ушбу жавобга келамиз:

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

2-мисол. $\cos x = -0,2756$ тенгламани ечамиз.

(2) формулага биноан $x = \pm \arccos(-0,2756) + 2\pi n$.

$\arccos(-0,2756)$ нинг қийматини калькулятор ёрдамида топамиз: у тақрибан 1,8500 га тенг. Шундай қилиб,

$x = \pm x_0 + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$), бунда $x_0 \approx 1,8500$.

3-мисол. $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ тенгламани ечамиз.

(2) формулага биноан

$$2x - \frac{\pi}{4} = \pm \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

яъни

$$2x - \frac{\pi}{4} = \pm \frac{5}{6}\pi + 2\pi n,$$

бундан

$$x = \frac{\pi}{8} \pm \frac{5\pi}{12} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

2. Ушбу

$$\sin t = a \tag{3}$$

тенглама $|a| > 1$ да ечимларга эга эмас, чунки ҳар қандай t учун $\sin t \leq 1$. $|a| \leq 1$ да $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ кесмада (3) тенглама аниқ битта ечимга эга: $t_1 = \arcsin a \cdot \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ оралиқда $\sin x$ функция камаювчи ва -1 дан 1 гача ҳамма қийматларни қабул қилади, шу сабабли (3) тенглама бу оралиқда ҳам аниқ битта ечимга эга. 59-а расмдан бу илдиз t_2 сони экани кўриниб турибди, $t_2 = \pi - \arcsin a$. Ҳақиқатан,

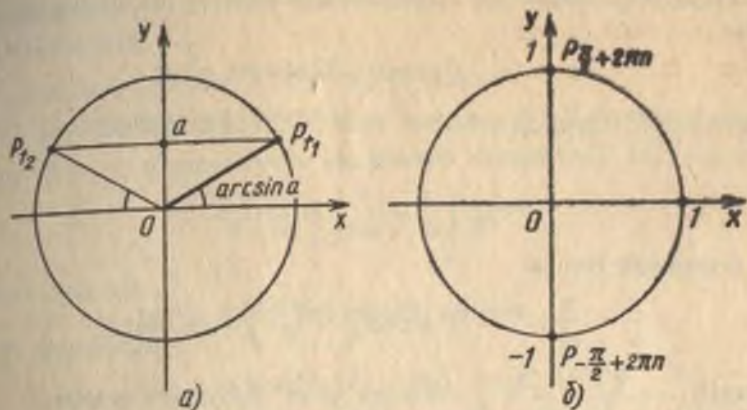
$$\sin t_2 = \sin(\pi - t_1) = \sin t_1 = a.$$

Бундан ташқари, $-\frac{\pi}{2} \leq t_1 \leq \frac{\pi}{2}$ бўлгани учун, $-\frac{\pi}{2} \leq -t_1 \leq \frac{\pi}{2}$ ва $\pi - \frac{\pi}{2} \leq \pi - t_1 \leq \pi + \frac{\pi}{2}$ га эгамиз, яъни t_2 сони $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ кесмага тегишли.

Шундай қилиб, (3) тенглама $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ оралиқда иккита ечимга эга: $t_1 = \arcsin a$ ва $t_2 = \pi - \arcsin a$ ($a = 1$ да бу ечимлар бир хил). Синуснинг даврийлигини (даври 2π) ҳисобга олиб тенгламанинг ҳамма ечимларини ёзиш учун бундай формула ҳосил қиламиз.

$$t = \arcsin a + 2\pi n, \tag{4}$$

$$t = \pi - \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{5}$$



59- расм

(3) тенглама ечимларини иккита эмас, балки битта формула билан ёзиш қулай:

$$t = (-1)^k \arcsin a + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (6)$$

Жуфт $k = 2n$ ларда (6) формуладан (4) формула билан ёзилган ҳамма ечимларни топишимизга, тоқ $k = 2n + 1$ ларда (5) формула билан ёзилган ечимларнинг ҳаммасини топишимизга осон ишонч ҳосил қилиш мумкин.

(3) тенглама ечимларини бирлик айланада намойиш қилиш қулай (59-расм). Таърифга кўра $\sin t$ бирлик айлана P_t нуқталарининг ординатасидир. Агар $|a| < 1$ бўлса, у ҳолда бундай нуқталар иккита (59-а расм); $a = \pm 1$ да битта (59-б расм).

Агар $a = 1$ бўлса, у ҳолда $\arcsin a$ ва $\pi - \arcsin a$ сонлар бир хил бўлади (улар $\frac{\pi}{2}$ -га тенг), шу сабабли

$$\sin t = 1$$

тенгламанинг ечимларини бундай ёзиш қабул қилинган:

$$t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$a = -1$ ва $a = 0$ да ечимларини бундай ёзиш қабул қилинган:

$$\text{агар } t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad \text{бўлса,} \quad \sin t = -1,$$

$$\text{агар } t = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad \text{бўлса,} \quad \sin t = 0.$$

4-мисол. $\sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ тенгламани ечамиз. (6) формулага биноан:

$$x = (-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \text{яъни } x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

5-мисол. $\sin x = 0,3714$ тенгламани ечамиз. (6) формулага биноан

$$x = (-1)^n \arcsin 0,3714 + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Калькулятор ёрдамида топамиз: $\arcsin 0,3714 \approx 0,3805$.

6-мисол. Тенгламани ечамиз:

$$\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{10}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(6) формулага биноан

$$\frac{x}{2} - \frac{\pi}{10} = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$ бўлгани учун ушбуларга эгамиз:

$$\frac{x}{2} - \frac{\pi}{10} = (-1)^k \left(-\frac{\pi}{4}\right) + \pi k,$$

$$x = \frac{\pi}{5} - (-1)^k \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

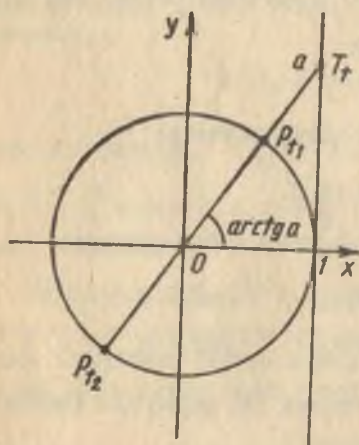
3. Ҳар қандай t да $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ интервалда аниқ битта шундай t мавжудки, $\operatorname{tg} t = a$ бўлади, бу $\operatorname{arctg} a$ дир.

Шу сабабли

$$\operatorname{tg} t = a \quad (7)$$

тенглама узунлиги π га тенг $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ интервалда аниқ битта илдизга эга. Тангенс даври π га тенг даврий функция бўлгани учун (7) тенгламанинг қолган илдизлари топилган илдиздан πn га фарқ қилади ($n \in \mathbb{Z}$), яъни

$$t = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \quad (8)$$



60-расм

$\operatorname{tg} t = a$ тенглама илдизларини тангенслар чизигини қараш билан намойиш қилиш қулай (60-расм). $\operatorname{tg} t$ — бу OP_1 тўғри чизиқ билан тангенслар чизигининг кесишиш нуқтаси T_1 нинг ординатаси эканини эслатиб ўтамиз (1-п. га қ.) Ҳар қандай a сон учун тангенслар чизигида ординатаси a га тенг биттагина $T(1; a)$ нуқта мавжуд. OT тўғри чизиқ бирлик айлана билан иккита нуқтада кесишади; бунда $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ интервалга ўнг ярим

текисликнинг P_i нуқтаси мос келади, бу нуқта $t_1 = \operatorname{arctg} a$ ни қаноатлантиради.

7- мисол. $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ тенгламани ечамиз.

(8) формулага кўра $x = \operatorname{arctg} \sqrt{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ ечимни топамиз,
 $\operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$ бўлгани учун охири

$$x = \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

жавобга келамиз.

8- мисол. $\operatorname{tg} x = 5,177$ тенгламани ечамиз.

(8) формуладан

$$x = \operatorname{arctg} 5,177 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

эгани келиб чиқади. Калькулятор ёрдамида топамиз: $\operatorname{arctg} 5,177 \approx 1,3800$.

9- мисол. $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$ тенгламани ечамиз. Бу тенглама $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ тенгламага тенг кучли, буни (8) формула ёрдамида ечамиз:

$$x = \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \pi n = -\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

М а ш қ л а р

Тенгламаларни ечинг (142 — 150).

142. а) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\cos x = -\frac{1}{2}$; г) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

143. а) $\sin x = \frac{1}{2}$; б) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\sin x = -\frac{1}{2}$; г) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

144. а) $\operatorname{tg} x = 1$; б) $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$; в) $\operatorname{tg} x = -1$; г) $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

145. а) $\operatorname{ctg} x = 1$; б) $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$; в) $\operatorname{ctg} x = -1$; г) $\operatorname{ctg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

146. а) $\sin x = -0,6$; б) $\cos x = 0,3$; в) $\operatorname{tg} x = -3,5$; г) $\operatorname{ctg} x = 2,5$.

147. а) $\cos 2x = \frac{1}{2}$; б) $\sin 4x = 0$; в) $\operatorname{tg} 3x = 1$; г) $\operatorname{tg} 4x = 3$.

148. а) $\sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $\operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$; г) $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{7} = 1$.

149. а) $\sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\cos (1 - x) = 0$;

в) $\operatorname{tg} \left(-x + \frac{\pi}{3} \right) = \sqrt{3}$; г) $\operatorname{ctg} \left(x + \frac{\pi}{8} \right) = -\sqrt{3}$.

$$150. \text{ а) } \sin\left(-4x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}; \text{ б) } \cos\left(-\frac{\pi}{3} - 5x\right) = \frac{1}{2};$$

$$\text{ в) } \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}; \text{ в) } \sin\left(\frac{x}{2} - 1\right) = 0.$$

151*. $\operatorname{ctg} t = a$ тенгламанинг ҳамма ечимлари $t = \operatorname{arccotg} a + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ формула ёрдамида топилишини исботланг.

12. Энг содда тригонометрик тенгсизликларни ечиш

Тригонометрик функцияларни ўз ичига олган тенгсизликларни ечиш одатда

$$\sin x < a, \cos x \geq a, \operatorname{tg} x > a$$

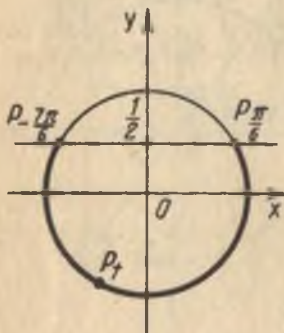
ва ҳоказо кўринишдаги энг содда тенгсизликларни ечишга келтирилади.

Уларни ечиш усулларини мисолларда қараймиз.

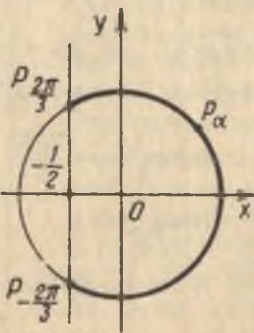
1-мисол. Ушбу

$$\sin t < \frac{1}{2} \quad (1)$$

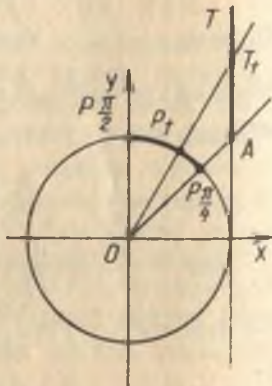
тенгсизликни ечамиз. Бу тенгсизлик бирлик айлананинг барча P_t нуқталари t нинг берилган тенгсизликни қаноатлантирувчи қийматларида $\frac{1}{2}$ дан кичик ординаталарга эга эканини билдиради. Барча шундай нуқталар тўплами l ёйдан иборат бўлиб, бу ёй 61- расмда ажратиб кўрсатилган (l ёйнинг $\frac{1}{2}$ ординаталарга эга бўлган охиrlари қаралаётган тўплагма кирмайди, чунки уларнинг ординаталари $\frac{1}{2}$ дан кичик эмас, балки $\frac{1}{2}$ га тенг). P_t нуқтанинг ажратиб кўрсатилган ёйга тегишлилик шартини ёзамиз. l ёйнинг охиrlари $P_{\frac{\pi}{6}}$ ва $P_{\frac{5\pi}{6}}$ нуқталардан иборат. $P_{\frac{5\pi}{6}} = P_{-\frac{7\pi}{6}}$ эканини пайқаб, (1) тенгсизликнинг



61- расм



62- расм



63- расм

узунлиги 2π га тенг $\left[-\frac{3}{2}\pi; \frac{\pi}{2}\right]$ оралиққа тегишли ечимлари

$$-\frac{7\pi}{6} < t < \frac{\pi}{6}$$

эжанини топамиз. (Эътибор беринг: бошланғич тенгсизлик қатъий бўлганидан, тенгсизликлар қатъийдир.) Синус даврий бўлгани учун қолган ечимлар топилганларига $2\pi n$ кўринишидаги сонларни қўшиб билан ҳосил қилинади, бунда $n \in \mathbb{Z}$, яъни узил-кесил жавоб бундай:

$$-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n < t < \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

2- мисол. Ушбу тенгсизликни ечамиз:

$$\cos 2t > -\frac{1}{2}. \quad (2)$$

$2t$ ни α орқали белгилаб берилган тенгсизликни бирмунча соддалаштирамиз:

$$\cos \alpha \geq -\frac{1}{2}. \quad (3)$$

Бу тенгсизлик бирлик айлананинг барча P_α нуқталари α нинг (3) шартни қаноатлантирувчи қийматларида $-\frac{1}{2}$ дан катта ёки унга тенг абсциссаларга эга бўлишини билдиради (62- расм). Бу нуқталарнинг ҳаммаси $x = -\frac{1}{2}$ тўғри чизиқдан ўнгга ёки шу тўғри чизиқнинг ўзида ётади. Демак, барча шундай нуқталар тўплами 62- расмда ажратиб кўрсатилган ёйдан иборат. Олдинги мисолдан фарқи шундаки, бу ёйнинг охирлари изланаётган тўпламга киради: бу охирларнинг абсциссалари $-\frac{1}{2}$ га тенг ва, демак, (3) тенгсизликни қаноатлантиради.

l ёйнинг охирлари $P_{\frac{2\pi}{3}}$ ва $R_{\frac{2\pi}{3}}$ нуқталардан иборат эжанини кўрамыз. — π дан π гача оралиқда ётувчи α бурчакларни қараш билан чекланиб, P_α нинг l ёйга тегишлилик шартини бундай ёзиш мумкин:

$$-\frac{2\pi}{3} \leq \alpha \leq \frac{2\pi}{3}. \quad (4)$$

Косинус даврий бўлгани учун (3) тенгсизликнинг исталган бошқа ечими (4) тенгсизликни қаноатлантирувчи қийматлардан $2\pi n$ га фарқ қилади, яъни (3) тенгсизликнинг ечимлари тўплами

$$-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \leq \alpha \leq \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

ни қаноатлантирувчи α сонлардан иборат.

Яна t ўзгарувчига ўтиб, қуйидаги жавобни ҳосил қиламиз:

$$-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \leq 2t \leq \frac{2\pi}{3} + 2\pi n,$$

$$-\frac{\pi}{3} + \pi n \leq t \leq \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

3- мисол. Ушбу тенгсизликни ечамиз:

$$\operatorname{tg} t > 1. \quad (5)$$

Тангенс даврий бўлгани учун (5) тенгсизликни $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ да ечиш етарли. Агар t (5) тенгсизликнинг ечими бўлса, у ҳолда тангенслар чизигининг T_t нуқтасининг ординатаси $\operatorname{tg} t$ га тенг бўлиб, 1 дан катта ёки 1 га тенг бўлиши керак. Бундай нуқталарнинг ҳаммаси AT нурда ётади (63-расм). Бирлик айлананинг бу нурнинг T_t нуқталарига мос келувчи P_t нуқталари 63- расмда ажратиб кўрсатилган ёйни тўлдиради. Бу ёйнинг P_t нуқталари учун

$$\frac{\pi}{4} \leq t < \frac{\pi}{2}$$

тенгсизлик бажарилади.

Жавобни ёзиб олиш учун тангенснинг даврийлигини ҳисобга олиш қолади:

$$\frac{\pi}{4} + \pi n \leq t < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Машқлар

Тенгсизликни ечинг (152 — 158).

152. а) $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\sin x > 0,055$.

153. а) $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\cos x < \frac{1}{2}$; в) $\cos x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\cos x > 0,7900$.

154. а) $\operatorname{tg} x < \sqrt{3}$; б) $\operatorname{tg} x > \frac{1}{\sqrt{3}}$; в) $\operatorname{tg} x < -\sqrt{3}$; г) $\operatorname{tg} x > 10$.

155. а) $\operatorname{ctg} x > -\frac{1}{\sqrt{3}}$; б) $\operatorname{ctg} x > 1$; в) $\operatorname{ctg} x \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$; г) $\operatorname{ctg} x < -5$.

156. а) $\sin 2x > \frac{1}{2}$; б) $\cos \frac{3x}{4} < \frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\operatorname{tg}\left(-\frac{x}{2}\right) < 1$;

г)* $\operatorname{ctg} \frac{2x}{3} > -100$.

157. а) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) < \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $2\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) < \sqrt{3}$;

$$b) \sqrt{3} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) > 1; \quad r) \operatorname{ctg}\left(-2x + \frac{\pi}{3}\right) < 1.$$

$$158. a) \sin x \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3} \cos x < \frac{1}{2}; \quad б) 2 \sin x \cos x > \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$в) \sin \frac{\pi}{6} \cos x + \cos \frac{\pi}{6} \sin x < 1; \quad r) \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x} > 1.$$

13. Тригонометрик тенгламалар ва тенгламалар системаларини ечиш мисоллари

11-пунктда энг содда тригонометрик тенгламаларни қандай ечиш кўрсатилган эди. Мураккаброқ тригонометрик тенгламаларни ечиш тригонометрик функцияларнинг хоссаларини ифодаловчи формулаларни билишни талаб қилади. Баъзи бир мисолларни қараймиз.

1-мисол. Ушбу тенгламани ечамиз:

$$6 \sin^2 x - 5 \sin x + 1 = 0. \quad (1)$$

$y = \sin x$ янги ўзгарувчини киритамиз. У ҳолда (1) тенгламани бундай ёзиш мумкин бўлади:

$$6y^2 - 5y + 1 = 0.$$

Биз квадрат тенгламага эга бўлдик. $y = \frac{1}{2}$ ва $y = \frac{1}{3}$ унинг илдиэлариدير. Демак, $\sin x = \frac{1}{2}$ ёки $\sin x = \frac{1}{3}$. Биринчи ҳолда ушбу ечимга эга бўламиз:

$$x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{2} + \pi k, \text{ яъни } x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Иккинчи ҳолда ушбуга эгамиз:

$$x = (-1)^m \arcsin \frac{1}{3} + \pi m, \text{ яъни } x = (-1)^m x_0 + \pi m, m \in \mathbb{Z},$$

$$\text{бунда } x_0 = \arcsin \frac{1}{3} \approx 0,34.$$

2-мисол. Ушбу тенгламани ечамиз;

$$6 \cos^2 x - 5 \sin x + 5 = 0.$$

$\cos^2 x$ ни $1 - \sin^2 x$ билан алмаштириб, $\sin x$ га нисбатан квадрат тенгламага келамиз:

$$6(1 - \sin^2 x) - 5 \sin x + 5 = 0,$$

бундан

$$-6 \sin^2 x - 5 \sin x + 11 = 0,$$

яъни

$$6 \sin^2 x + 5 \sin x - 11 = 0.$$

1- мисолдагидек, $\sin x = y$ янги ўзгарувчи киритамиз. У ҳолда $6y^2 + 5y - 11 = 0$, бундан $y = 1$ ёки $y = -\frac{11}{6}$, $\sin x = -\frac{11}{6}$ тенглама ечимларга эга эмас, чунки $\left| -\frac{11}{6} \right| > 1$. $\sin x = 1$ тенгламани ечиб, топамиз:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}.$$

3- мисол. Ушбу $\cos 2x + \sin x = 0$ тенглама ҳам квадрат тенгламага келтирилади, бунинг учун $\cos 2x$ ни $1 - 2\sin^2 x$ ифода билан алмаштириб, $\sin x$ ни y билан белгилаш керак (ечимни охирига етказинг).

4- мисол. $\operatorname{tg} x + 2\operatorname{ctg} x = 3$ тенгламани ечамиз.

$\operatorname{tg} x$ ни y билан белгилаймиз. $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ бўлгани учун $y + \frac{2}{y} = 3$ тенгламага эга бўламиз. Бу ($y \neq 0$ шартда) $y^2 - 3y + 2 = 0$ квадрат тенгламага келади. Бунинг илдизлари: $y = 2$, $y = 1$.

1) $\operatorname{tg} x = 2$; $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k$, яъни $x = x_0 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, бунда $x_0 = \operatorname{arctg} 2 \approx 1,11$.

2) $\operatorname{tg} x = 1$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

5- мисол. Ушбу тенгламани ечамиз: (2)

$$3\sin^2 x - 4\sin x \cos x + \cos^2 x = 0.$$

Аргументнинг $\cos x = 0$ бўладиган қийматлари бу тенгламанинг ечимлари бўла олмайди, чунки $\cos x = 0$ бўлса, у ҳолда $3\sin^2 x = 0$ тенглик бажарилгани керак, аммо косинус ва синус бир вақтда нолга тенг бўла олмайди. Шу сабабли тенгламанинг иккала қисмини $\cos^2 x$ (ёки $\sin^2 x$) га бўлиш ва бунда (2) тенгламага тенг кучли тенглама ҳосил қилиш мумкин.

$$3\operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x + 1 = 0,$$

бундан

$$\operatorname{tg} x = 1 \text{ ёки } \operatorname{tg} x = \frac{1}{3}.$$

Бинобарин,

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \text{ ёки } x = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

6- мисол. $\sin^2 x - \sin 2x = 0$ тенгламани $\sin 2x$ ни $2\sin x \cos x$ билан алмаштирилгандан кейин

$$\sin^2 x - 2\sin x \cos x = 0$$

тенгламага келтирилади.

Чап қисмини кўпайтувчиларга ажратамиз:

$$\sin x (\sin x - 2\cos x) = 0,$$

бундан $\sin x = 0$, яъни $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ ёки

$$\sin x - 2 \cos x = 0, \quad \operatorname{tg} x = 2, \quad \text{яъни } x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$
$$x = x_0 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \text{бунда } x_0 = \operatorname{arctg} 2 \approx 1,11.$$

5- мисолдагидек, тенгламанинг иккала қисмини $\cos^2 x$ га бўлиб,

$$\operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x = 0$$

тенгламани ҳосил қилиш мумкин эди.

Агар $\sin^2 x$ га бўлинса, у ҳолда $\sin x = 0$ бўладиган x ларни ҳисобга олишга тўғри келади, улар берилган тенгламанинг ечимларидир. Шу сабабли $\sin^2 x$ га бўлишдан кейин ҳосил бўлган

$$\operatorname{ctg} x - \frac{1}{2} = 0$$

тенглама ечимларига $\sin x = 0$ тенглама ечимларини ҳам қўшиш керак.

Қўпгина бошқа тенгламалар, масалан, $\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x = 0$ ёки $\sin^3 x + 2 \sin^2 x \cos x - 3 \sin x \cos^2 x + 2 \cos^3 x = 0$ каби тенгламалар ва бошқа тенгламалар ҳам чап ва ўнг қисмларини косинус (ёки синус) нинг тенглама даражасига тенг даражасига бўлиш билан ечилади. x нинг $\cos x = 0$ ($\sin^2 x$ га бўлганда $\sin x = 0$) бўладиган қийматлари берилган тенгламанинг ечимлари бўлишини олдиндан текшириб кўриш керак. Масалан, иккинчи даражали тенгламани $\cos^2 x$ га (ёки $\sin^2 x$ га), учинчи даражали тенгламани эса $\cos^3 x$ (ёки $\sin^3 x$ га) бўлинади. Кейин $\operatorname{tg} x$ ни (ёки $\operatorname{ctg} x$ ни) y билан алмаштириб алгебраик тенглама ҳосил қилинади.

7-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} x - y = \frac{5\pi}{3}, \\ \sin x = 2 \sin y \end{cases}$$

тенгламалар системасини ечамиз. Биринчи тенгламадан $y = x - \frac{5\pi}{3}$ ни топамиз. У ҳолда

$$\begin{aligned} 2 \sin y &= 2 \sin \left(x - \frac{5\pi}{3} \right) = 2 \left(\sin x \cos x \frac{5\pi}{3} - \cos x \sin x \frac{5\pi}{3} \right) = \\ &= 2 \left(\sin x \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \right) = \sin x + \sqrt{3} \cos x, \end{aligned}$$

системанинг иккинчи тенгламаси $\sin x = \sin x + \sqrt{3} \cos x$ кўриниш-ни олади, бундан $\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, бунда $n \in \mathbb{Z}$.

Шундан кейин, топамиз:

$$y = x - \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi n - \frac{5\pi}{3} = \pi n - \frac{7\pi}{6}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Жавоб: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $y = \pi n - \frac{7\pi}{6}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Мащқлар

Тенгламаларни ечинг (159 — 166).

159. а) $1 + \cos x + \cos 2x = 0$; б) $3 - \cos^2 x - 3 \sin x = 0$;

в) $4 \sin x = 4 - \cos^2 x$; г) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2 \frac{1}{2}$.

160. а) $\cos \frac{x}{2} = 1 + \cos x$; б) $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} \left(\frac{7\pi}{2} - x \right) = 1$;

в) $5 \cos x + 12 \sin x = 13$; г) $3 \cos x - 2 \sin 2x = 0$.

161. а) $1 - \cos x = 2 \sin \frac{x}{2}$; б) $1 + \cos x = 2 \cos \frac{x}{2}$;

в) $\cos 2x = 2 \frac{1}{3} \sin x$; г) $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 0$.

162. а) $\cos x + \sin x = 0$; б) $\cos^2 x - 3 \sin x \cos x = -1$;

в) $3 \cos^2 x = 4 \sin x \cos x - \sin^2 x$; г) $4 \cos^2 x - 7 \sin 2x = 2$.

163. а) $\frac{5}{3 \cos x + 4} = 2$; б) $\frac{5}{3 \sin x + 4} = 2$;

в) $\frac{2}{3 \sqrt{2} \sin x - 1} = 1$; г) $\frac{2}{3 \sqrt{2} \cos x - 1} = 1$.

164. а) $\frac{3}{5 \operatorname{tg} x + 8} = 1$; б) $\frac{3}{5 \operatorname{ctg} x + 8} = 1$;

в) $\frac{4}{\sqrt{3} \operatorname{tg} x + 5} = \frac{1}{2}$; г) $\frac{2}{\sqrt{3} \operatorname{ctg} x + 5} = \frac{1}{4}$.

165. а) $\frac{2 \sin x + 7}{1,5 \sin x + 3} = 2$; б) $\frac{2 \cos x + 7}{1,5 \cos x + 7} = 2$;

в) $\frac{6}{\operatorname{tg} x + 2} = 3 - \operatorname{tg} x$; г) $\frac{6}{\operatorname{ctg} x + 3} = 3 - \operatorname{ctg} x$.

166. а) $\frac{15}{\sin x + 1} = 11 - 2 \sin x$; б) $\frac{15}{\cos x + 1} = 11 - 2 \cos x$;

в) $\frac{1}{\operatorname{tg} x + 1} = 2 \operatorname{ctg} x - 1$; г) $\frac{10}{\operatorname{tg} x + 2} = 3 - \operatorname{ctg} x$.

167. Тенгламалар системасини ечинг:

а) $\begin{cases} \sin x + \cos y = 0; \\ \sin^3 x + \cos^3 y = \frac{1}{2}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sin x \cos y = 0,25; \\ \sin y \cos x = 0,75; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4}; \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{1}{6}. \end{cases}$

Тарихдан маълумотлар

Ҳозирги вақтда тригонометрик функциялар ёрдамида ечиладиган масалалар қадим замонларда пайдо бўлган. Қадимдан бундай масалаларни еча билишга жиддий талабларни астрономия қўйган. Астрономларни сферада ётган катта доираларнинг ёйларидан тузилган сферик учбурчакларнинг томонлари билан бурчаклари орасидаги муносабатлар қизиқтирган. Улар, сиз VIII синфда шуғулланган текис учбурчакларни «ечиш» га доир масалаларга қараганда мураккаброқ масалаларни ечишни яхшигина уддалаганлар.

Бизнинг тригонометрик жадвалларимиз ўрнида қадимги математиклар берилган узунликдаги ёйларни тортиб турувчи ватарлар жадвалини тузишган. Эраминдан илгари III — II асрларда грек математиклари томонидан тузилган бундай қадимий жадваллар бизгача етиб келмаган. Ватар узунликлари ҳақидаги бизгача сақланиб қолган энг қадимий жадвал Александриялик астроном Птолемей (эрамининг II асри) томонидан тузилган. Бу жадвалларда айлана ватарларининг узунликлари 30' дан оралатиб берилган. Ватар узунликлари уч хонали олтишлик касрлар шаклида, яъни

$$\frac{a}{60} + \frac{b}{60^2} + \frac{c}{60^3},$$

кўринишда ёзилган, бунда a , b , c сонлари 0 дан 59 гача бўлган бутун сонлардир.

$\sin$, $\cos$, tg , ctg , $\sec$, cosec тригонометрик функциялар айланада ўтказилган кесмалар узунликларининг нисбатлари сифатида V — X аср ҳинд ва араб математикларида учрайди. Ҳинд математиги Ариабхата (V асрнинг охири) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ формулани ва ҳатто ярим бурчак синуси, косинуси ва тангенс формулаларини билар эди. Бу формулалар унга шу функцияларнинг жадвалларини тузиш учун хизмат қилган.

Гарбий Европада тригонометрия XV — XVI асрларда актив ривожланди. Бунда бир қатор натижалар француз математиги Ф. Виетга (1540 — 1603) тегишлидир. Дифференциал ҳисоб пайдо бўлиши билан тригонометрик функцияларнинг ҳосилалари учун формулалар топилди. Бу формулалар асосан И. Ньютонга маълум эди. Бу формулаларнинг геометрик усул билан чиқарилишини Котеснинг (1682 — 1716) ишларидан топиш мумкин. Аргумент — ∞ дан $+\infty$ гача ўзгарганда тригонометрик функцияларнинг қандай ўзгариши ҳақидаги очиқ тасаввурлар Д. Валлис (1616 — 1703) нинг асарларида учрайди. Аммо, умуман айтганда, Л. Эйлер (1707 — 1783) гача бўлган математиклар бу хусусда унча катта изчиллик кўрсатмадилар ва баъзи масалаларга боғлиқ равишда тригонометрик функцияларнинг аниқланиш соҳаларини турли усуллар билан чеклаб қўйдилар. Сон аргументнинг сонли функциялари ёки кесма узунликларининг бурчак катталигига ёки ёй узунлигига боғлиқлиги дейилганда нима назарда тутилиши очиқ эмас эди.

Тригонометрик функциялар назарияси ҳозирги кўринишни Л. Эйлер асарлари, жумладан унинг «Чексиз кичиклар анализига кириш». («Введение в анализ бесконечно малых») (1748) китобида олди.

Такрорлашга доир саволлар ва масалалар

1. 1) 1 радианга тенг бурчак нима? Градус ва радиан ўлчовларини боғловчи формулаларни ёзинг.
2) Бурчакни радиан ўлчовга ўтказинг: а) 360° ; б) 180° ; в) 18° ; г) 1° .
3) Бурчакни градус ўлчовга ўтказинг: а) π рад; б) $\frac{\pi}{2}$ рад; в) $-\frac{\pi}{3}$ рад; г) 1 рад.
2. 1) Бирлик айлана нима? α бурчакнинг синуси ва косинуси таърифини беринг.
2) Агар α :

а) $\frac{\pi}{3}$; б) $\frac{9}{4}\pi$; в) $-\frac{2}{3}\pi$; г) 30° ; д) 570° ; е) 240°

ларга тенг бўлса, $\sin\alpha$ ва $\cos\alpha$ қийматларини (калькулятор ва жадваллардан фойдаланмай) топинг. (Олдин бирлик айланада P , нуқтани ясанг.)

3) Агар α :

а) $23^\circ 24'$; б) $102^\circ 8'$; в) 1,2; г) $-0,7$

га тенг бўлса, $\sin\alpha$ ва $\cos\alpha$ қийматини жадваллар ва калькулятор ёрдамида топинг.

3. 1) α бурчакнинг тангенс ва котангенс таърифларини беринг. α нинг қандай қийматларида $\operatorname{tg}\alpha$ ва $\operatorname{ctg}\alpha$ аниқланган? Тангенслар чизиги нима?
2) Агар α :

а) 30° ; б) 45° ; в) $\frac{3}{4}\pi$; г) $\frac{7}{3}\pi$; д) $-\frac{11}{4}\pi$

га тенг бўлса, $\operatorname{tg}\alpha$ ва $\operatorname{ctg}\alpha$ қийматларини (жадваллардан ва калькулятордан фойдаланмай) топинг.

3) Агар α :

а) $39^\circ 12'$; б) $146^\circ 7'$; в) 1,7; г) $-0,4$

га тенг бўлса, $\operatorname{tg}\alpha$ ва $\operatorname{ctg}\alpha$ қийматларини калькулятор ёки жадваллардан фойдаланиб топинг.

4. 1) Бир аргументнинг тригонометрик функциялари қийматларини боғловчи формулаларни ёзинг.
2) Ифодани соддалаштиринг:

а) $1 + \operatorname{tg}^2\alpha$; б) $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha$; в) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2$; г) $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2$.

3) Айниятни исботланг:

$$а) \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} = \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad б) \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

5. 1) α нинг қайси координата чоракда ётишига қараб, $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ ва $\operatorname{ctg} \alpha$ нинг ишорасини кўрсатинг.
2) Ишорасини аниқланг:

$$а) \sin 11^\circ; \quad б) \sin \frac{3}{4} \pi; \quad в) \cos 112^\circ; \quad г) \cos \left(-\frac{\pi}{10} \right);$$

$$д) \operatorname{tg} 100^\circ; \quad е) \operatorname{tg} \left(-\frac{7}{10} \pi \right); \quad ж) \operatorname{ctg} (-100^\circ); \quad з) \operatorname{ctg} 8.$$

- 3) Тригонометрик функциялардан бирининг берилган қиймати ва α ётган интервал бўйича қолган асосий учта тригонометрик функция қийматларини топинг:

$$а) \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi; \quad б) \cos \alpha = \frac{1}{7}, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2};$$

$$в) \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}, \quad \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}; \quad г) \operatorname{ctg} \alpha = -3, \quad \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi.$$

6. 1) Келтириш формулаларини эслаб қолиш учун мнемоник қондани ифодаланг. Бир нечта келтириш формуласини ёзинг.

- 2) Ўткир бурчак тригонометрик функцияси қийматига келтиринг:

$$а) \sin 231^\circ; \quad б) \cos (-500^\circ); \quad в) \operatorname{tg} \left(-\frac{33}{5} \pi \right); \quad г) \cos \frac{172}{7} \pi.$$

- 3) Ифодани соддалаштиринг:

$$а) \sin \frac{7\pi}{8} + \cos \frac{5\pi}{8} + \operatorname{tg} \frac{7\pi}{4};$$

$$б) \frac{\sin (180^\circ - \alpha) \cos (180^\circ + \alpha) \operatorname{tg} (-\alpha)}{\sin (\alpha - 270^\circ) \operatorname{ctg} \left(\alpha + \frac{3\pi}{2} \right) \cos \left(-\alpha - \frac{\pi}{2} \right)}$$

7. 1) Йиғинди (ва айирма) нинг косинуси, синуси ва тангенс формуласини ёзинг.

- 2) Синус, косинус ва тангенс қийматларини (жадваллардан фойдаланмай) ҳисобланг:

$$а) \frac{\pi}{12}; \quad б) 75^\circ \left(\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}, \quad 75^\circ = 45^\circ + 30^\circ \text{ эканидан фойдаланини} \right).$$

- 3) Айниятни исботланг:

$$а) \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{6} \right) + \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3} \sin \alpha;$$

$$б) \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} (60^\circ - \alpha)}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} (60^\circ - \alpha)} = \sqrt{3}; \quad в) \frac{\sin (\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} =$$

$$г) \cos 2\alpha \cos 3\alpha - \sin 2\alpha \sin 3\alpha = \cos 5\alpha. \quad \text{қандай масалалар ҳал}$$

8. 1) Иккиланган аргумент формуласини ёзинг.

2) Агар

а) $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ ва $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; б) $\sin \alpha = \frac{12}{13}$ ва $\cos \alpha < 0$

эрани маълум бўлса, $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$ ва $\operatorname{ctg} 2\alpha$ ни ҳи-
собланг.

3) Ифодани соддалаштиринг:

а) $\frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} (2\cos^2 \alpha - 1)$; б) $1 - (\cos \alpha - \sin \alpha)^2$.

9. 1) Косинуслар (синуслар) йиғиндиси ва айирмаси формулала-
рини ёзинг.

2) Жадваллардан фойдаланмай ҳисобланг:

а) $\cos 117^\circ + \cos 63^\circ$; б) $\sin 225^\circ - \sin 75^\circ$;

в) $\sin \frac{\pi}{12} + \sin \frac{5\pi}{12}$; г) $\cos \frac{19\pi}{12} - \cos \frac{\pi}{12}$.

3) Ифодани соддалаштиринг:

а) $\frac{\sin 70^\circ - \sin 10^\circ}{\cos 40^\circ}$; б) $\sin \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right) + \sin \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right)$.

Айниятни исботланг:

в) $\frac{\cos \alpha + \cos 3\alpha}{\sin \alpha + \sin 3\alpha} = \operatorname{ctg} 2\alpha$;

г) $\sin 2\alpha + \sin 4\alpha + \sin 6\alpha = 4 \sin 3\alpha \cos 2\alpha \cos \alpha$.

10*. 1) Ярим аргумент формуласини ёзинг.

2) Агар:

а) $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ ва $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$; б) $\sin \alpha = -\frac{2}{3}$ ва $\pi < \alpha <$

$< \frac{3}{2}\pi$ экани маълум бўлса, $\sin \frac{\alpha}{2}$, $\cos \frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$

ва $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ ни топинг.

3) Ифодани соддалаштиринг:

а) $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \alpha$; б) $\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \alpha$.

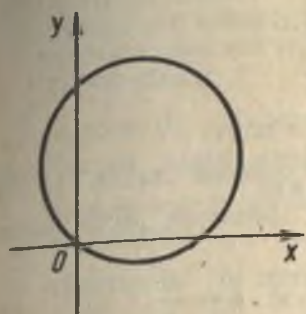
11. 1) Функция нима, унинг аниқланиш ва қийматлари соҳалари
нима?

2) Функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:

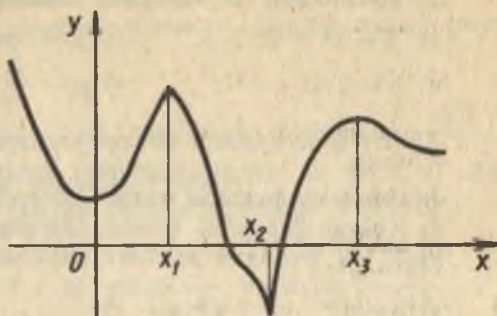
а) $y = \sqrt{3 - x}$; б) $y = \frac{1}{2x - 3}$; в) $y = \frac{1}{\cos x}$;

д) $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$; б) $y = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}$.

3) Айниятни исботланг.



64- расм



65- расм

3) Функциянинг қийматлари соҳасини топинг:

а) $y = \frac{1}{x}$; б) $y = \frac{1}{x^2} + 1$; в) $y = x^2 - 1$;

г) $y = 2 \sin x + 1$; д) $y = \operatorname{tg}^2 x$; е) $y = \cos^2 x$.

12. 1) Функциянинг графиги нима?

2) 64- расмда тасвирланган нуқталар тўплами бирор функциянинг графигими?

3) Функциянинг графигини ясанг:

а) $y = -2x + 3$; б) $y = \frac{2}{x+1}$;

в) $y = x^2 - 2x$; г) $y = \sqrt{x+1}$.

13. 1) Қамаювчи ва ўсувчи функциянинг таърифини айтинг.

2) Графиги 65-расмда тасвирланган функциянинг ўсиш ва камайиш оралиқларини топинг.

3) Функциянинг ўсиш ва камайиш оралиқларини топинг:

а) $y = -3x + 1$; б) $y = -\frac{1}{x+2}$; в) $y = 2x^2 + 4x$; г) $y = x^4$.

14. 1) Функциянинг экстремум нуқталари (максимуми нуқталари ва минимуми нуқталари) таърифини айтинг. Функциянинг экстремуми нима?

2) Графиги 65-расмда тасвирланган функциянинг максимуми ва минимуми нуқталарини кўрсатинг.

3) Функциянинг максимуми ва минимуми нуқталарини топинг:

а) $y = (x-3)^2 + 2$; б) $y = 1 - (x-2)^2$;

в) $y = \sin x$; г) $y = \operatorname{tg} x$.

15. 1) Функцияни текиширишнинг боришида қандай масалалар ҳал қилинади?

2) Функцияни текширишни ўтказинг:

а) $y = x^2 - 4x + 3$; б) $y = \cos x - 2$;

в) $y = 2 \sin x + 1$; г) $y = -\frac{12}{x}$.

3) Шу функцияларнинг графикларини ясанг.

16. 1) Жуфт ва тоқ функциянинг таърифини беринг. Тоқ ва жуфт функция графиклари қандай хоссага эга?

2) Қуйида берилган функцияларнинг қайсилари жуфт, қайсилари тоқ функция эканини аниқланг:

а) $y = x^2$; б) $y = x^5$; в) $y = \frac{3}{x}$;

г) $y = x + x^3$; д) $y = \frac{5}{x^4 + 2}$; е) $y = |x|$.

3) Функциялардан қайсилари жуфт, қайсилари тоқ ва қайсилари жуфт ҳам эмас, тоқ ҳам эмас функциялар:

а) $f(x) = \sin 3x$; б) $g(x) = x \sin x$;

в) $h(x) = \frac{\cos x}{x}$; г) $u(x) = x + \cos x$?

17. 1) Даврий функция таърифини беринг. Функциянинг даври нима? Даврий функциянинг графиги қандай хоссага эга?

2) Функция қандай энг кичик мусбат даврга эга:

а) $y = \sin x$; б) $y = \cos x$; в) $y = \operatorname{tg} x$; г) $y = \operatorname{ctg} x$?

3) Функциянинг энг кичик мусбат даврини топинг:

а) $f(x) = \sin 2x$; б) $g(x) = \cos \frac{x}{3}$;

в) $h(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1$; г) $u(x) = \cos (4x + 1)$.

18. 1) Синус, косинус ва тангенсинг асосий хоссаларини айтиб чиқинг.

2) Тенгсизликларни мос функцияларнинг хоссаларидан фойдаланиб исботланг:

а) $\sin 290^\circ < \sin 310^\circ < \sin 370^\circ < \sin 400^\circ < \sin 430^\circ$;

б) $\cos (-317^\circ) > \cos (-280^\circ) > \cos (-213^\circ) > \cos (-193^\circ)$;

в) $\operatorname{tg} (-253^\circ) < \operatorname{tg} (-200^\circ) < \operatorname{tg} (-175^\circ) < \operatorname{tg} (-147^\circ) < \operatorname{tg} (-112^\circ)$;

г) $\sin 4,7 < \sin 5,1 < \sin 5,6 < \sin 6,2 < \sin 7 < \sin 7,8$.

3) Функция графигини (синусоидани абсциссалар ўқи бўйлаб параллел кўчириш билан) ясанг:

а) $y = \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right)$; б) $y = \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right)$.

19. 1) Илдиз ҳақидаги теоремани ифодаланг.
 2) Соннинг арксинуси таърифини беринг. Қандай сонлар учун арксинус аниқланган?
 3) Ҳисобланг:
 а) $\arcsin 0$; б) $\arcsin 1$; в) $\arcsin \frac{1}{2}$; г) $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
20. 1) Соннинг арккосинуси таърифини беринг.
 2) Арккосинус қандай сонлар учун аниқланган?
 3) Ҳисобланг:
 а) $\arccos 0$; б) $\arccos 1$; в) $\arccos \frac{1}{2}$; г) $\arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
21. 1) Соннинг арктангенс таърифини беринг.
 2) Арктангенс қандай сонлар учун аниқланган?
 3) Ҳисобланг:
 а) $\arctg 0$; б) $\arctg 1$; в) $\arctg (-1)$; г) $\arctg \sqrt{3}$.
22. 1) Энг содда тригонометрик тенгламалар: $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$ ни ечиш формулаларини ёзинг.
 2) a нинг қандай қийматларида энг содда тригонометрик тенгламалар ечимга эга?
 3) Бирлик айлана ёрдамида
 а) $\sin \alpha = 0,7$; б) $\cos \alpha = -0,3$;
 в) $\operatorname{tg} \alpha = -2$; г) $\sin \alpha = -0,4$

тенгламаларнинг ечимлари бўлган α бурчакни кўрсатинг.

23. Тенгламани ечинг:
 а) $\cos^2 x - \sin^2 x = 1$; б) $4 \sin x \cos x = \sqrt{2}$;
 в) $2 \sin^2 x + 3 \sin x = 2$; г) $2 \cos^2 x - 5 \cos x = 3$;
 д) $\operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x + 3 = 0$; е) $6 \sin^2 x - 4 \sin x \cos x = 1$.
24. Бирлик айлана ёрдамида
 а) $\sin \alpha > -\frac{1}{2}$; б) $\cos \alpha \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$;
 в) $\operatorname{tg} \alpha < 3$; г) $\sin \alpha \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

тенгсизликларнинг ечими бўлган α бурчакни кўрсатинг.

1 бобга доир қўшимча машқлар

168. Синус (косинус)

а) $\frac{\sqrt{10}}{\pi}$; б) $a + \frac{1}{a}$; в) $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$; г) $\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}$ ($a > 0$, $b > 0$)

га тенг бўлиши мумкинми?

Ифодаларни соддалаштиринг (169 — 172).

$$169. \text{ а) } \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \cdot \frac{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}{\operatorname{ctg}^2 \alpha}; \quad \text{б) } \frac{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta};$$

$$\text{в) } \frac{\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \alpha}; \quad \text{г) } \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} \operatorname{ctg} \alpha.$$

$$170. \text{ а) } 1 + \operatorname{tg}^2 \varphi - \operatorname{tg}^2 \varphi (\cos^2 \varphi + 1);$$

$$\text{б) } (1 + \sin^2 \varphi) \operatorname{ctg}^2 \varphi - 1 - \operatorname{ctg}^2 \varphi;$$

$$\text{в) } \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta} - \operatorname{ctg}^2 \alpha \operatorname{ctg}^2 \beta;$$

$$\text{г) } \frac{\cos \beta \operatorname{tg} \beta}{\sin^2 \beta} - \operatorname{ctg} \beta \cos \beta.$$

$$171. \text{ а) } (3 \sin x + 2 \cos x)^2 + (2 \sin x - 3 \cos x)^2;$$

$$\text{б) } \operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x \sin^2 x;$$

$$\text{в) } (\operatorname{tg} \varphi + 1)^2 + (\operatorname{tg} \varphi - 1)^2 + (\operatorname{ctg} \varphi + 1)^2 + (\operatorname{ctg} \varphi - 1)^2;$$

$$\text{г) } \sqrt{\sin^2 \beta (1 + \operatorname{ctg} \beta) + \cos^2 \beta (1 + \operatorname{tg} \beta)}.$$

$$172. \text{ а) } \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}; \quad \text{б) } \frac{\sin \beta - \cos \beta}{\sin \beta + \cos \beta}.$$

173. Агар

$$\text{а) } \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}; \quad \text{б) } \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{3};$$

$$\text{в) } \operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{3}; \quad \text{г) } \operatorname{tg} \alpha = -2$$

булса, $\frac{3 \cos \alpha + 2 \sin \alpha}{2 \cos \alpha - 3 \sin \alpha}$ ифоданинг қийматини ҳисобланг.

174. $\sin t + \cos t = m$ экани берилган. m орқали ифодаланг:

$$\text{а) } \sin t \cos t; \quad \text{б) } \sin^3 t + \cos^3 t.$$

175. $\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{ctg} \varphi = m$ экани берилган. m орқали ифодаланг:

$$\text{а) } \operatorname{tg}^2 \varphi + \operatorname{ctg}^2 \varphi; \quad \text{б) } \operatorname{tg}^3 \varphi + \operatorname{ctg}^3 \varphi.$$

176. а) $\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta = 0,5$ экани берилган. $\sin^2 \alpha - \cos^2 \beta$ ни топинг.

б) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \beta > 1$ экани берилган. $\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta < 1$ эканини исботланг.

Айниятларни исботланг (177 — 184).

$$177. \sin^2 \alpha \sin^2 \beta + \sin^2 \alpha \cos^2 \beta + \cos^2 \alpha = 1.$$

$$178. (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)^2 - (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha)^2 = 4.$$

$$179. \text{ а) } \frac{\sin^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{2 \cos^2 \alpha}{\operatorname{ctg}^2 \alpha} - \sin^2 \alpha = 1;$$

$$\text{б) } \frac{1 - 4 \sin^2 t \cos^2 t}{(\sin t + \cos t)^2} = 1 - 2 \sin t \cos t.$$

$$180. \text{ а) } \frac{\cos^2 t - \sin^2 t}{1 + \sin t \cos t} = \cos t - \sin t; \quad \text{б) } \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{1 - \sin t \cos t} = \cos t + \sin t.$$

$$181. \text{ а) } \sqrt{\frac{1 - \cos t}{1 + \cos t}} = \frac{|\sin t|}{1 + \cos t}; \quad \text{б) } \sqrt{\frac{1 - \sin t}{1 + \sin t}} = \frac{|\cos t|}{1 + \sin t}.$$

$$182. (\sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha)(\cos \alpha + \operatorname{ctg} \alpha) = (1 + \sin \alpha)(1 + \cos \alpha).$$

$$183. \sin^3 \alpha (1 + \operatorname{ctg} \alpha) + \cos^3 \alpha (1 + \operatorname{tg} \alpha) = \sin \alpha + \cos \alpha.$$

$$184. \text{ Agar } \sin t > \cos t \text{ бўлса, } \frac{\sqrt{1 - 2 \sin t \cos t}}{\sin^2 t - \cos^2 t} + \frac{2 \sin t \cos t}{\sin t + \cos t} = \\ = \sin t + \cos t \text{ ни исботланг.}$$

185. Келтириш формулалари ёрдамида ўткир бурчак тригонометрик функциялари қийматлари билан алмаштиринг:

а) $\cos 108^\circ$; б) $\sin 250^\circ$; в) $\operatorname{tg} 165^\circ$; г) $\cos 317^\circ$;
 д) $\sin(-157^\circ)$; е) $\operatorname{tg}(-144^\circ)$.

186. Биринчи чорак бурчаги тригонометрик функцияси қийматига келтиринг:

а) $\sin \frac{3\pi}{4}$; б) $\cos \frac{9\pi}{10}$; в) $\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{9}$; г) $\sin \frac{2\pi}{3}$.

187. 45° дан кичик мусбат бурчак тригонометрик функцияси қийматига келтиринг:

а) $\cos 89^\circ$; б) $\operatorname{tg} 68^\circ$; в) $\sin 71^\circ$; г) $\operatorname{ctg} 47^\circ$.

188. Энг кичик мусбат аргумент тригонометрик функцияси қийматига келтиринг:

а) $\sin \frac{29\pi}{12}$; б) $\cos 2\frac{1}{7}\pi$; в) $\operatorname{tg}\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$; г) $\cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$.

189. Жадваллардан ва калькулятордан фойдаланмасдан ҳисобланг:

а) $\sin 75^\circ \cos 75^\circ$;
 б) $10 \operatorname{ctg} 135^\circ \sin 210^\circ \cos 225^\circ$;
 в) $2 \sin^2 225^\circ - \operatorname{ctg} 330^\circ \operatorname{tg} 405^\circ$;
 г) $\sin 167^\circ \sin 107^\circ + \sin 257^\circ \sin 197^\circ$.

190. Ифодани соддалаштиринг:

а) $\cos(\pi - \alpha) \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$; б) $\frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos(\pi - \beta) \operatorname{tg}(-\alpha)}$;
 в) $\frac{1 - \sin^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)}{1 - \sin^2(\pi + x)}$; г) $\frac{\cos^2(\pi - \alpha)}{1 - \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}$.

191. Айниятни исботланг:

а) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = 2 \operatorname{tg} x$;

$$\text{б) } \frac{\sin \alpha - \sin 3\alpha}{\cos \alpha - \cos 3\alpha} = -\operatorname{ctg} 2\alpha; \quad \text{в) } \frac{\sin(x-\pi) \operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right) \operatorname{ctg}(\pi-x)} = -1;$$

$$\text{г) } \frac{\sin^2(\alpha - 630^\circ)}{1 + \sin(-\alpha)} = 1 + \cos(\alpha - 90^\circ).$$

192. Қуйидаги функциялар жуфт функция эканини исботланг:

$$\text{а) } \operatorname{tg}^2 x; \quad \text{б) } |x| + \cos x; \quad \text{в) } \frac{x - \operatorname{tg} x}{x - \sin x}; \quad \text{г) } \frac{\sin x \cos x}{2 \operatorname{tg} x + x}.$$

193. Қуйидаги функциялар тоқ функция эканини исботланг:

$$\text{а) } \sin \frac{x}{3}; \quad \text{б) } \operatorname{tg}^5 x; \quad \text{в) } x^3 + \sin x; \quad \text{г) } \frac{\sin x + x}{2 + \cos x}.$$

194. Қуйидаги функциялар нима сабабдан на жуфт, на тоқ функция эмаслигини тушунтиринг. Улар даврийми?

$$\text{а) } \sqrt{x}; \quad \text{б) } \frac{1}{x-1}; \quad \text{в) } x+1; \quad \text{г) } x^2+x+1; \quad \text{д) } \sin x + \cos x.$$

195. а) Агар $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ ва $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ бўлса, $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)$ ни ҳисобланг.

б) Агар $\operatorname{tg} \alpha = 2$ ва $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ бўлса, $\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$ ни ҳисобланг.

196. Агар

$$\text{а) } \cos \alpha = -\frac{9}{41}, \quad \sin \beta = \frac{40}{41}, \quad \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2} < \beta < \pi;$$

$$\text{б) } \cos \alpha = \frac{3}{5}, \quad \sin \beta = \frac{5}{13}, \quad \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi, \quad \frac{\pi}{2} < \beta < \pi$$

бўлса, $\cos(\alpha + \beta)$ ни ҳисобланг.

197. Агар

$$\text{а) } \sin \alpha = -\frac{3}{4}, \quad \cos \beta = -\frac{1}{4}, \quad \frac{3\pi}{4} < \alpha < 2\pi, \quad \pi < \beta < \frac{3\pi}{2};$$

$$\text{б) } \cos \alpha = \sin \beta = \frac{1}{3}, \quad \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi, \quad \frac{\pi}{2} < \beta < \pi$$

бўлса, $\sin(\alpha - \beta)$ ни ҳисобланг.

198. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{4}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{9}{5}$ экани берилган. Қуйидагиларни топинг:

$$\text{а) } \operatorname{tg}(\alpha + \beta); \quad \text{б) } \operatorname{tg}(\alpha - \beta); \quad \text{в) } \operatorname{ctg}(\alpha + \beta); \quad \text{г) } \operatorname{ctg}(\alpha - \beta).$$

199. Тенгликни исботланг:

$$\sin 32^\circ \cos 15^\circ + \cos 32^\circ \sin 15^\circ = \sin 26^\circ \cos 21^\circ + \cos 26^\circ \sin 21^\circ.$$

200. Ифодани содалаштиринг:

а) $\frac{\sin 35^\circ \cos 20^\circ - \cos 35^\circ \sin 20^\circ}{\cos 44^\circ \cos 29^\circ + \sin 44^\circ \sin 29^\circ};$

б) $\frac{\sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} - \cos \frac{\pi}{7} \sin \frac{2\pi}{7}}{\cos \frac{3\pi}{14} \cos \frac{\pi}{14} + \sin \frac{3\pi}{14} \sin \frac{\pi}{14}};$

в) $\frac{\cos \alpha \cos \beta - \cos (\alpha + \beta)}{\cos (\alpha - \beta) - \sin \alpha \sin \beta};$

г) $\frac{\sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta)}{\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta)}.$

Айниятларни исботланг (201—207).

201. а) $\sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin x + \cos x);$

б) $\cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos x - \sin x).$

202. а) $\sin (\alpha - \beta) \sin (\alpha + \beta) = \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha;$

б) $\cos (\alpha + \beta) \cos (\alpha - \beta) = \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha;$

в) $\frac{\cos (\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta} = \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1;$ г) $\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)} = 1.$

203. а) $\frac{\sin \left(\frac{\pi}{4} + x \right) - \cos \left(\frac{\pi}{4} + x \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{4} + x \right) + \cos \left(\frac{\pi}{4} + x \right)} = \operatorname{tg} x;$

б) $\frac{\operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) - 1}{\operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) + 1} = \sin 2\alpha.$

204. а) $\frac{\operatorname{tg} 4\alpha - \operatorname{tg} 3\alpha}{1 + \operatorname{tg} 4\alpha \operatorname{tg} 3\alpha} = \operatorname{tg} \alpha;$ б) $\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos 2\alpha}.$

205. а) $\frac{\cos 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha};$ б) $\frac{1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg} \alpha.$

206. а) $(\sin x \cos y + \cos x \sin y)^2 + (\cos x \cos y - \sin x \sin y)^2 = 1;$

б) $\sin^3 x (1 - \operatorname{ctg} x) + \cos^3 x (\operatorname{tg} x - 1) = \sin x - \cos x.$

207. а) $\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) - \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) = 2 \operatorname{tg} x;$

б) $\frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right).$

208*. Агар

а) $\sin \alpha = 0,8$ ва $0 < \alpha < \frac{\pi}{2},$ б) $\operatorname{tg} \alpha = 3\frac{3}{7}$ ва $180^\circ < \alpha < 270^\circ$

булса, $\sin \frac{\alpha}{2}, \cos \frac{\alpha}{2}, \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ ва $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ ни топинг.

Кўпайтма кўринишида тасвирланг (209 — 210).

209. а) $\sin^2 x - \sin^2 y$; б) $\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta$.

210. а) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x$;

б) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x$.

211. Қуйидаги ифодаларни ёрдамчи аргумент киритиш (масалан, $1 = \sin \frac{\pi}{2}$) йўли билан кўпайтмага алмаштиринг:

а) $1 + \sin \alpha$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin \alpha$; в) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \sin \alpha$;

г) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin 35^\circ$; д) $\frac{3}{4} - \sin^2 \alpha$; е) $\frac{3}{4} - \cos^2 \alpha$.

212*. $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$ ларни $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ оркали ифодаловчи формулалардан фойдаланиб (240-топшириққа қаранг),

а) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 3$ да $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ ва $\operatorname{ctg} \alpha$ ни,

б) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{7}$ да $\sin 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ ва $\operatorname{ctg} 2\alpha$ ни топинг.

Тенгламани ечинг (213 — 217).

213. а) $3 \cos 2x = 7 \sin x$; б) $2 \cos 2x = 7 \cos x$.

214. а) $\sin^4 \frac{x}{4} - \cos^4 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$; б) $\cos^4 x - \sin^4 x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

215. а) $\cos^2 x + 4 \sin^2 x = 2 \sin 2x$;

б) $\sin^2 x - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin 2x = \cos^2 x$.

216. а) $4(1 + \cos x) = 3 \sin^2 \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$;

б) $4(1 - \cos x) = 3 \sin \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}$.

217. а) $\sin x + \sin 3x = 0$; б) $\sin 5x - \sin x = 0$;

в) $\cos 2x - \cos 6x = 0$; г) $\cos 4x + \cos 2x = 0$.

Тенгсизликни ечинг (218 — 223).

218. а) $\frac{5}{4} \sin^2 x + \frac{1}{4} \sin^2 2x < \cos 2x$;

б) $\sin x (\cos x - \sin x) < 2$.

219. а) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x \geq 2$;

б) $\cos 2x \leq \cos 3x - \cos 4x$.

220. а) $\sqrt{3} \operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x + \sqrt{3} > 0$;

б) $\sqrt{3} \operatorname{ctg}^2 x - 4 \operatorname{ctg} x + \sqrt{3} > 0$;

в) $4 \sin^2 x - 2(1 - \sqrt{2} - 1) \sin x - \sqrt{2} < 0$;

$$\begin{aligned} & \text{г) } 4 \cos^2 x + 2(\sqrt{2} - 1) \cos x - \sqrt{2} < 0. \\ 221. \text{ а) } & \frac{4 \sin x + 3}{3 \cos x + 1} < 2; \quad \text{б) } \frac{4 \cos x + 3}{3 \cos x + 1} > 2. \\ 222. \text{ а) } & \frac{15}{\sin x + 1} < 11 - 2 \sin x; \quad \text{б) } \frac{15}{\cos x + 1} < 11 - 2 \cos x. \\ 223. \text{ а) } & \frac{2}{\operatorname{tg} x + 1} < 2 - \operatorname{tg} x; \quad \text{б) } \frac{2}{\operatorname{ctg} x + 1} > 2 - \operatorname{ctg} x. \\ 224. & \text{Тенгликни текширинг:} \end{aligned}$$

$$\text{а) } \arccos 0 + \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\pi}{4}; \quad \text{б) } \arccos(-1) + \arccos 1 = \pi;$$

$$\text{в) } \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = 0; \quad \text{г) } \arcsin \frac{1}{2} + \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

225. Жадваллардан ва калькулятордан фойдаланмасдан ҳисобланг:

$$\text{а) } \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \arcsin \frac{1}{2}; \quad \text{б) } \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + \arccos \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\text{в) } \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right); \quad \text{г) } \operatorname{arctg}(-1) + \operatorname{arctg} \sqrt{3}.$$

Айниятни исботланг (226 — 227).

$$226. \text{ а) } \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}; \quad \text{б) } \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2};$$

$$\text{в) } \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}; \quad \text{г) } \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}.$$

$$227. \text{ а) } \cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}; \quad \text{б) } \sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$\text{в) } \cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}; \quad \text{г) } \sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

228. Барча йўл қўйилиши мумкин бўлган қийматларда

$$\frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{\cos x + \operatorname{ctg} x} > 0$$

тенгсизлик бажарилишини исботланг.

Айниятни исботланг (229 — 234).

$$229. \text{ а) } \cos^6 \beta + \sin^6 \beta = 1 - 3 \sin^2 \beta \cos^2 \beta.$$

$$\text{б) } 3(\sin^4 \beta + \cos^4 \beta) - 2(\sin^6 \beta + \cos^6 \beta) = 1.$$

$$230. \text{ а) } \frac{1}{1 + \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha};$$

$$\text{б) } \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\cos^3 \alpha} = 1 + \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^3 \alpha.$$

$$231. \text{ а) } \frac{\sin^2 \varphi \cos \varphi - \sin \varphi \cos \varphi + \sin \varphi}{\cos \varphi (1 - \cos \varphi)} = 1 + \cos \varphi + \operatorname{tg} \varphi;$$

$$\text{б) } \frac{1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi + \sin^2 \varphi + \sin^2 \varphi \operatorname{ctg}^2 \varphi}{2 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi - 1} = \frac{1}{\cos^2 \varphi} + \frac{1}{\cos^2 \varphi \sin^2 \varphi}.$$

$$232. \frac{\sin(\beta - \gamma)}{\cos \beta \cos \gamma} + \frac{\sin(\gamma - \alpha)}{\cos \gamma \cos \alpha} + \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} = 0.$$

$$233. \text{ а) } \frac{\operatorname{tg}(45^\circ + x) - \operatorname{tg}(45^\circ - x)}{\operatorname{tg}(45^\circ + x) + \operatorname{tg}(45^\circ - x)} = \sin 2x; \quad \text{ б) } \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 2 \operatorname{ctg} \alpha.$$

$$234. \frac{\sin \alpha - \sin 3\alpha}{\cos \alpha - \cos 3\alpha} = -\operatorname{ctg} 2\alpha.$$

Ифодаларни соддалаштиринг (235 — 237).

$$235. \text{ а) } \frac{1 + \sin 2x}{(\sin x + \cos x)^2}; \quad \text{ б) } \frac{1 - \sin 2x}{(\sin x - \cos x)^2}.$$

$$236. \text{ а) } 1 - 8 \sin^2 t \cos^2 t; \quad \text{ б) } 2 \cos^2 \frac{t}{2} - 1.$$

$$237. \text{ а) } \frac{1 + \cos 4x + \sin 4x}{1 - \cos 4x + \sin 4x}; \quad \text{ б) } \sqrt{\frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi}} + \sqrt{\frac{1 + \cos \varphi}{1 - \cos \varphi}}.$$

238. Агар $\operatorname{tg} 2\alpha = 8$ бўлса, $\sin 4\alpha$ ва $\cos 4\alpha$ қийматларини ҳисобланг.

239. Агар $\operatorname{tg} \alpha = 3$ бўлса, $\sin 4\alpha$ нинг қийматини топинг.

240. Формулаларни исботланг:

$$\text{ а) } \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta));$$

$$\text{ б) } \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta));$$

$$\text{ в) } \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta));$$

$$\text{ г) } \sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}; \quad \text{ д) } \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}};$$

$$\text{ е) } \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}; \quad \text{ ж) } \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}.$$

241 — 249- машқларни бажаришда 240- машқдаги формулалардан фойдаланинг.

Ифодаларни алмаштиринг (241 — 243).

$$241. \text{ а) } \cos 40^\circ \cos 50^\circ; \quad \text{ б) } \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12};$$

$$\text{ в) } \sin \frac{5\pi}{24} \sin \frac{\pi}{24} + \frac{\sqrt{2}}{4}; \quad \text{ г) } \sin 105^\circ \sin 15^\circ - \frac{1}{4}.$$

$$242. \text{ а) } \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right); \quad \text{ б) } \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right);$$

$$\text{ в) } \cos(x + \beta) \cos(x - \beta); \quad \text{ г) } \sin(x + \alpha) \sin(x - \alpha).$$

$$243. \text{ а) } 4 \sin 30^\circ \sin 20^\circ \sin 10^\circ; \quad \text{ б) } 4 \cos 60^\circ \cos 20^\circ \cos 10^\circ;$$

$$\text{ в) } 4 \sin 25^\circ \cos 15^\circ \sin 5^\circ; \quad \text{ г) } 8 \cos 1^\circ \cos 2^\circ \cos 4^\circ \cos 8^\circ.$$

Жадваллардан фойдаланмай ҳисоблашга қулай шаклга келти-
ринг ва ҳисобланг (244 — 246).

244. а) $2\sin 22^\circ 30' \cos 7^\circ 30'$; б) $\cos 45^\circ \cos 15^\circ$.

245. а) $\sin 52^\circ 30' \sin 7^\circ 30'$; б) $\sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{12}$.

246. а) $\cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{4}$; б) $8 \cos 10^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ$.

247. Қуйидаги ифодаларда тригонометрик функциялар даражасини пасайтиринг:

а) $2 \cos^2 x$; б) $2 \sin^2 x$; в) $2 \cos^2 x \cos 2x$; г) $\cos^2 x \sin^2 x$;

д) $\sin^2 6x$; е) $\cos^2 4x$.

248. Айниятни исботланг:

а) $2 \sin 4x \sin 2x + \cos 6x = \cos 2x$;

б) $\sin^3 x \cos^2 x = \frac{1}{8} \sin x - \frac{1}{16} \sin 5x + \frac{1}{16} \sin 3x$;

в) $\sin 5x \cos 3x \cos 6x = \frac{1}{4} (\sin 14x + \sin 2x + \sin 8x - \sin 4x)$.

249. Тенглик тўғрими: $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ = \frac{3}{16}$?

Тенгламани ечинг (250 — 251).

250. а) $\sin \left(\frac{\pi}{6} + x \right) - \sin \left(\frac{\pi}{6} - x \right) = 1$;

б) $\cos \left(\frac{\pi}{4} + x \right) + \cos \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = 1$.

251. а) $3 \sin x + 4 \cos x = 2$; б) $5 \sin x + 12 \cos x = 13$;

в) $\sin x - 2 \cos x = 1$; г) $2 \sin x + \cos x = 2$.

252. Тенгсизликни ечинг:

а) $|\sin x| + |\cos x| \geq 1$; б) $\lg x + \operatorname{ctg} x \geq 1 + \sqrt[3]{3}$.

253. Формулаларни исботланг:

а) ҳар қандай $a \in [-1; 1]$ да $\arcsin(-a) = -\arcsin a$;

б) ҳар қандай a да $\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$;

в) ҳар қандай $a \in [-1; 1]$ да $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$;

г) ҳар қандай $a \in [-1; 1]$ да $\arccos a = \frac{\pi}{2} - \arcsin a$.

ҲОСИЛА ВА УНИНГ ТАТБИҚЛАРИ

5-§. ҲОСИЛА

14. Функцияларнинг қийматларини тақрибий ҳисоблаш

Олдин алгебра курсидан маълум бўлган таърифларни эслатиб ўтамыз.

a сонининг тақрибий қиймати x нинг *абсолют хатоси* деб сон билан унинг тақрибий қиймати орасидаги айирманинг модулига айтилади. Шундай қилиб, $x \approx a$ тақрибий тенгликнинг абсолют хатоси $|x - a|$ сонга тенг.

Агар a сонининг тақрибий қиймати x нинг абсолют хатоси h дан катта бўлмаса, яъни $|x - a| \leq h$ бўлса, у ҳолда x ни a сонининг h гача аниқликдаги тақрибий қиймати дейилади.

1-мисол. $\frac{1}{3} \approx 0,33$ 0,01 гача аниқликда;

$\sqrt{2} \approx 1,4142$ 0,0001 гача аниқликда;

$\pi \approx 3,14159265$ 0,00000001 гача аниқликда.

Умуман, x ҳақиқий соннинг 10^{-n} гача аниқликдаги ўнли яқинлашишлари x сонининг 10^{-n} гача аниқликдаги тақрибий қийматлари дейилади, яъни

$$x_n \approx x \text{ ва } x'_n \approx x \quad 10^{-n} \text{ гача аниқликда.}$$

Кўпинча f функциянинг a нуқтадаги қийматини ҳисоблашда f функциянинг a нуқтанинг ўзидаги эмас, балки унга яқин x нуқтадаги қийматини топишга тўғри келади. Масалан, агар $a = \pi$ бўлса, у ҳолда ҳисоблаш учун $x \approx 3,14$ ёки $x \approx 3,1416$ ни оламыз ва ҳоказо. Бунга ўхшаш масалаларни ечишда бажарилаётган ҳисоблашларнинг аниқлигини баҳолай олиш зарур. Иккита мисол келтирамыз.

2-мисол. Бундай масалани қараймиз: берилган квадрат томони узунлигини ўлчаш ва ҳисоблаш натижаларидан фойдаланиб унинг юзини ҳисобланг.

Квадрат томони узунлигининг аниқ қиймати a га тенг бўлсин. У ҳолда S юзнинг аниқ қиймати a^2 га тенг бўлади. Ўлчаш натижасида томон узунлигининг бирор x тақрибий қийматини топамиз: $x = a + \Delta x$, бунда $|\Delta x|$ — ўлчашнинг абсолют хатоси. Шу сабабли юз

* Δx символ «дельта икс» деб ўқилади; Δ — айирмаларни ва хатоларни белгилаш учун ишлатиладиган грек ҳарфи. Мазкур ҳолда $\Delta x = x - a$.

$$|\Delta S| = |x^2 - a^2| = |(a + \Delta x)^2 - a^2| = |2a\Delta x + (\Delta x)^2|$$

абсолют хато билан ҳисобланади.

Бу тенгликдан ўлчаш аниқлиги оширилганда, яъни барча кичик $|\Delta x|$ ларда $2a\Delta x$ ва $(\Delta x)^2$ қўшилувчилар кичик бўлиши ва шу сабабдан юзнинг мос қиймати a^2 дан кам фарқ қилиши кўринади. Масалан, $a = \sqrt{8}$ бўлса, у ҳолда ўлчашларни 1 м гача, 1 дм гача, 1 см гача, 1 мм гача ва ҳоказо аниқликда бажариб биз томон узунлигининг ва томон узунлигини ўлчаш аниқлигининг (метрлардаги), юзни ва уни ҳисоблашларнинг абсолют хатосининг (квадрат метрлардаги) қуйидаги қийматларини топамиз:

Томон узунлиги	Томон узунлигини ўлчаш аниқлиги	Юз*	Юзни ҳисоблашдаги абсолют хато
3	1	9	1
2,8	0,1	7,84	0,16
2,83	0,01	8,009	0,009
2,828	0,001	7,9976	0,0024
2,8284	0,0001	7,99985	0,00015
2,82843	0,00001	8,000016	0,000016

Квадратнинг S юзини ҳисоблашда олдиндан берилган h аниқликка эришиш учун квадратнинг томони қандай аниқликда ўлчаниши кераклигини аниқлашга ҳаракат қиламиз.

Ўлчашлар камида 1 м гача аниқликда бажарилган, яъни $|\Delta x| \leq 1$ деб келишиб оламиз. У ҳолда.

$$|\Delta S| = |(2a + \Delta x)\Delta x| = |2a + \Delta x| |\Delta x| \leq (2a + 1) |\Delta x|.$$

Квадрат юзини ҳисоблашда h гача аниқликка эришишимиз керак деб фараз қилайлик. Бунинг учун ўлчашларни $(2a + 1) |\Delta x| \leq h$, яъни $|\Delta x| \leq \frac{h}{2a + 1}$ (албатта, $|\Delta x| \leq 1$) бўладиган қилиб бажариш етарли. Масалан, қаралаётган мисолда $a = \sqrt{8}$ ва $|\Delta x| \leq \frac{1}{7000}$ деб олинса, $h = 0,001$ гача аниқликка олдиндан эришиб бўлади, чунки бу ҳолда

$$|\Delta x| \leq \frac{1}{7000} = \frac{0,001}{2 \cdot 3 + 1} < \frac{0,001}{2\sqrt{8} + 1}.$$

3-мисол. Тўғри чизик бўйича ҳаракатланаётган моддий нуқтанинг координатаси вақтнинг t momentiда $s(t) = 2t^2$ бўлсин. Нуқтанинг $t = 1$ секунд бўлгандаги оний тезлигини топамиз.

Нуқтанинг ($\Delta t > 0$ да) $[1; 1 + \Delta t]$ вақт ораллигида Δt вақт давомлигида силжиши қуйидагига тенг

$$s(1 + \Delta t) - s(1) = 2(1 + \Delta t)^2 - 2 = 4\Delta t + 2(\Delta t)^2,$$

* Юзнинг тақрибий қиймати битта запас рақам билан келтирилган.

унинг бу вақт оралиғидаги ўртача тезлиги эса

$$v_{\text{ср}}(\Delta t) = \frac{4\Delta t + 2(\Delta t)^2}{\Delta t} = 4 + 2\Delta t. \quad (1)$$

(1) формула манфий Δt ларда ҳам ўринли; нуқтанинг $[1 + \Delta t; 1]$ оралиқ давомида силжиши $s(1) - s(1 + \Delta t) = -4\Delta t - 2(\Delta t)^2$ га тенг, бу оралиқнинг давомлиги $-\Delta t$ га тенг.

Оний тезлик қиймати сифатида $v_{\text{ср}}(0)$ ни олишни истардик, аммо бу қиймат аниқланмаган (0 га бўлиш мумкин эмас!). Аммо, ҳамма кичик $|\Delta t|$ $v_{\text{ср}}(\Delta t)$ нинг олдиндан берилган аниқликдаги қийматларида 4 га яқинлашиши равшан, чунки у ҳолда $2\Delta t$ қушилувчи ҳам кичик. Ҳақиқатан, тақрибий $v_{\text{ср}}(\Delta t) \approx 4$ тенгликда (олдиндан берилган) h аниқликни таъминлаш учун $|2\Delta t| < h$ деб олиш етарлидир, яъни вақт оралиғи давомлигини $\frac{h}{2}$ дан ортиб кетмайдиган қилиб танлаш етарли.

Агар аргумент қийматида $|x - a|$ хатони камайтириш ҳисобида $f(x) \approx L$ тақрибий тенгликнинг олдиндан берилган ҳар қандай h аниқлигини таъминлаш мумкин бўлса, у ҳолда a^* га интилувчи x ларда $f(x)$ функция L лимитга интилади, деб айтиш қабул қилинган. Қисқача: $x \approx a$ да $f(x) \approx L$ тақрибий тенглик турлича аниқликда бажарилиши мумкин. «Интилади» сўзи ўрнига ёзувда стрелка қўйилади:

$$x \rightarrow a \text{ да } f(x) \rightarrow L.$$

Бунинг ўзини яна бошқача ҳам ёзишади:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

$\lim$ белги латинча limes сўзининг қисқа ёзилишидир, бу сўз таржимада «чек» деган маънони билдиради. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ёзув бундай ўқилади: « a га интилувчи x ларда лимит $f(x)$ тенг L ».

Юқорида қаралган 2 ва 3-мисолларда

$$x \rightarrow \sqrt[3]{8} \text{ да } S(x) \rightarrow 8 \text{ (яъни } \lim_{x \rightarrow \sqrt[3]{8}} S(x) = 8);$$

$$\Delta t \rightarrow 0 \text{ да } v_{\text{ср}}(\Delta t) \rightarrow 4 \text{ (яъни } \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{\text{ср}}(\Delta t) = 4)$$

экани кўрсатилган эди.

4-мисол. $f(x) = kx + b$ (k ва b — ўзгармаслар) бўлсин.

$$x \rightarrow a \text{ да } f(x) \rightarrow ka + b$$

эканини исботлаймиз.

$f(x) \approx ka + b$ тақрибий тенгликнинг абсолют хатосини топамиз. У ушбуга тенг:

$$|f(x) - ka - b| = |k \cdot (a + \Delta x) + b - ka - b| = |k| |\Delta x|.$$

* $x = a$ қиймат қаралмайди ва мос равишда $\Delta x \neq 0$.

$k = 0$ да ҳатто аниқ тенгликка эга бўламиз. Агар $k \neq 0$ бўлса, у ҳолда $f(x) \approx ka + b$ тенглик ҳар қандай олдиндан берилган h аниқликда бажарилади. Бунда $|\Delta x| < \frac{h}{|k|}$ деб олиш керак.

$f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $x \rightarrow a$ да мос равишда A ва B лимитларга эга бўлсин. Бу $f(x) \approx A$ ва $g(x) \approx B$ тақрибий тенгликлар a га етарлича яқин x ларда исталган аниқликда бажарилишини билдиради. Аммо, агар биз A ва B сонларнинг тақрибий қийматларини исталган аниқликда топишни билсак, у ҳолда $A + B$, AB ва $\frac{A}{B}$ ($B \neq 0$ да) қийматларни исталган аниқликда ҳисоблаш мумкин. Масалан, $A + B$ йиғиндини h гача аниқликда ҳисоблаш учун ҳар қайси қўшилувчини $\frac{h}{2}$ гача аниқликда ҳисоблаш ва уларни қўшиш керак. Шу сабабли *лимитларни ҳисоблашнинг қуйидаги қоидалари* ўринли (бу қоидаларнинг исботи ўрта мактаб курсига тааллуқли эмас).

$x \rightarrow a$ да $f(x) \rightarrow A$ ва $g(x) \rightarrow B$ бўлсин. У ҳолда $x \rightarrow a$ да:

1) $f(x) + g(x) \rightarrow A + B$;

2) $f(x) g(x) \rightarrow AB$;

3) $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \frac{A}{B}$ ($B \neq 0$ да).

Машқлар

254. Қуйидаги сонларнинг ортиғи билан ва ками билан ўнли яқинлашишларини 0,1 гача; 0,01 гача ва 0,001 гача аниқликда топинг:

а) 0,2664; б) $-1,27$; в) $\frac{5}{6}$; г) $-\frac{2}{7}$.

255. а) 2,6 ва 2,7 сонлари $\sqrt{7}$ сонининг мос равишда 0,1 гача аниқликда ками билан ва ортиғи билан олинган ўнли яқинлашишлари эканини текширинг.

б) 2,23 ва 2,24 сонлари $\sqrt{5}$ сонининг мос равишда 0,01 гача аниқликда ками билан ва ортиғи билан олинган ўнли яқинлашишлари эканини текширинг.

256. а) $x = 0,5638413 \dots$, $y = 1,3411825 \dots$ экани маълум, $x + y$ йиғиндининг дастлабки бешта ўнли ишораси (хонаси) ни топинг.

б) $x = 2,545781 \dots$, $y = 1,3292160 \dots$ экани маълум. $x - y$ айирманинг дастлабки бешта ўнли ишорасини топинг.

257. 0,001 гача аниқликда топинг:

а) $\frac{1}{3} + \frac{4}{7}$; б) $\frac{2}{5} + \sqrt{7}$; в) $\sqrt{3} + \sqrt{5}$; г) $10 - \sqrt{2}$.

258. Эркин тушувчи жисм t вақт давомида $S = \frac{gt^2}{2}$ масофани ўтади (t секунд билан, S метр билан ўлчанади). Жисмнинг: а) $t = 2$ с даги; б) t пайтдаги; в) жисм 1 м масофа ўтгандаги;

- г) S ($g = 9,8 \text{ м/с}^2$) масофа ўтган пайтдаги оний тезлигини топинг.
259. Ер участкасининг шакли томонлари 15 ва a га тенг тўғри тўртбурчак. Унинг: а) периметрини; б) юзини 10^{-2} гача аниқликда ҳисоблаш учун a томонини қандай аниқликда ўлчаш керак?
260. Шундай энг катта δ ни кўрсатингки, унга тегишли, яъни (-2) атрофига тегишли барча $x \neq -2$ нуқталар учун $f(x) \approx -4$ тақрибий тенглик $h = 0,1; 0,01; 0,001$ лар учун h гача аниқликда бажарилсин: а) $f(x) = 3x + 2$; б) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$.
261. Ҳаракат бошлангандан кейинги t пайтда юқорига v_0 бошлангич тезлик билан отилган жисм $h(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$ баландликда бўлади. (v_0 секундига метрларда, t эса секундларда ўлчанади). Вақтнинг: а) $t = 1$ секунддаги; б) t даги; в) жисм энг катта баландликка эришган пайтдаги; г) жисмнинг ерга тушиш пайтидаги оний тезлигини топинг.
262. $x \rightarrow 2$ да $f(x) \rightarrow 1$, $g(x) \rightarrow -3$ экани маълум. Қуйидаги функциялар $x \rightarrow 2$ да интиладиган лимитни топинг:
а) $f(x) + g(x)$; б) $f(x) \cdot g(x)$; в) $-f(x)$; г) $2f(x) - 3g(x)$.
263. $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 3$; $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = -2$ экани маълум. $x \rightarrow -1$ да функция интиладиган лимитни топинг:
а) $\frac{f(x)}{g(x)}$; б) $f^2(x)$; в) $\frac{2f(x) + 3g(x)}{3f(x) - g(x)}$; г) $\frac{2f^2(x) - 5g(x)}{f(x) + 2g(x)}$.
264. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ бўлсин. Лимитларни ҳисоблаш қоидаларидан фойдаланиб исботланг:
а) $\lim_{x \rightarrow a} Cf(x) = CA$, бунда C — ўзгармас;
б) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = A - B$.
265. $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 2x + 7}$ функция берилган. $x \rightarrow 2$ да қуйидаги тасдиқлар тўғри эканини исботланг:
а) $x^3 \rightarrow 2^3$; $3x^2 \rightarrow 3 \cdot 2^2$; б) $x^3 - 3x^2 \rightarrow 2^3 - 3 \cdot 2^2$;
в) $x^2 - 2x + 7 \rightarrow 2^2 - 2 \cdot 2 + 7$; г) $f(x) \rightarrow f(2)$.
- 266*. $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ каср рационал функция берилган, бунда $p(x)$ ва $q(x)$ — кўпхадлар, шу билан бирга $p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$; $q(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_{m-1} x + b_m$.
 $x \rightarrow a$ да қуйидаги тасдиқлар ўринли эканини исботланг: а) ҳар қандай натурал t учун: а) $x^t \rightarrow a^t$; б) $Cx^t \rightarrow Ca^t$, бунда C — ўзгармас; $t \in \mathbb{N}$; в) $p(x) \rightarrow p(a)$; г) агар $q(a) \neq 0$ бўлса, $f(x) \rightarrow f(a)$.

15. Функция орттирмаси

Қўпинча бизни бирор миқдорнинг қиймати эмас, балки унинг ўзгариши қизиқтиради. Масалан, Гук қонунига биноан пружинанинг эластиклик кучи пружинанинг *узайишига* пропорционал; иш энергиянинг *ўзгаришидир*. ўртача тезлик — бу *силжиишнинг* шу силжиш содир бўлган *вақт оралиғига нисбатидир* ва ҳоказо.

Функциянинг бирор тайинланган x_0 нуқтадаги қийматини шу функциянинг x_0 нуқта атрофида ётувчи ҳар хил x нуқталаридаги қийматлари билан таққослашда $f(x) - f(x_0)$ айирмани «аргумент орттирмаси» ва «функция орттирмаси» тушунчаларидан фойдаланиб, $x - x_0$ айирма билан ифодалаш қулай. Уларнинг маъносини тушунтирамиз.

x нуқта тайинланган x_0 нуқтанинг бирор атрофида ётувчи ихтиёрий нуқта бўлсин. $x - x_0$ айирма *эркли ўзгарувчининг* (ёки *аргументнинг*) x_0 нуқтадаги орттирмаси дейилади ва Δx билан белгиланади. Шундай қилиб,

$$\Delta x = x - x_0.$$

бундан $x = x_0 + \Delta x$ экани келиб чиқади.

Шунингдек, эркли ўзгарувчининг бошланғич қиймати x_0 « Δx орттирма олди» дейилади. Бунинг натижасида функциянинг қиймати

$$f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \quad |$$

катталikka ўзгаради.

Бу айирма *f функциянинг x_0 нуқтадаги Δx орттирмага мос орттирмаси* дейилади ва Δf симболи билан белгиланади (у «дельта эф» деб ўқилади), яъни таърифга кўра

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

бундан

$$f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) + \Delta f.$$

Тайинланган x_0 да Δf орттирма Δx нинг функцияси эканига эътибор беринг.

Δf ни шунингдек эрксиз ўзгарувчининг орттирмаси дейилади ва $y = f(x)$ функция учун Δy символ билан белгиланади.

1-мисол. Агар $f(x) = x^2$, $x_0 = 2$ ва а) $x = 1,9$; б) $x = 2,1$ бўлса, x_0 нуқтадаги Δx ва Δf орттирмаларни топамиз:

а) $\Delta x = x - x_0 = 1,9 - 2 = -0,1.$

$\Delta f = f(1,9) - f(2) = 1,9^2 - 2^2 = -0,39.$

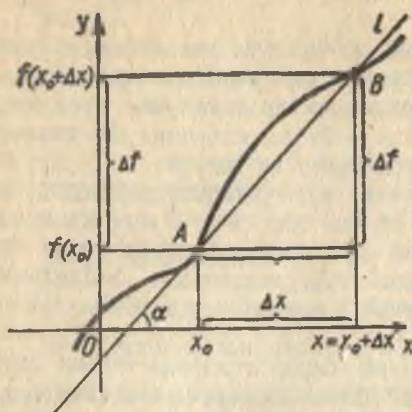
б) $\Delta x = x - x_0 = 2,1 - 2 = 0,1.$

$\Delta f = f(2,1) - f(2) = 2,1^2 - 2^2 = 0,41.$

2-мисол. Қирраси a га тенг бўлган куб берилган. Агар қирра узунлигини ҳисоблашда Δx хатога йўл қўйилган бўлса, шу кубнинг ҳажминини ҳисоблашдаги ΔV хатони топамиз.

Орттирманинг таърифига кўра $x = a + \Delta x$, у ҳолда

$$\Delta V = V(x) - V(a) = (a + \Delta x)^3 - a^3 = 3a^2 \Delta x + 3a(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3.$$



66- расм

Δx ва Δy орттирмаларнинг геометрик мазмунини 66-расмни кўздан кечириб тушуниш мумкин.

f функция графигининг истаган иккита нуқтасидан ўтувчи l тўғри чизиқ f функция графигига ўтказилган кесувчи дейилади. (x_0, y_0) ва (x, y) нуқталардан ўтувчи кесувчининг бурчак коэффициентини $k = \frac{y - y_0}{x - x_0}$. Уни Δx ва Δy орттирмалар орқали ифодалаш қулай (66-расмга қ.)

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

$y = kx + b$ тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти бу тўғри чизиқнинг абсциссалар ўқи билан ҳосил қиладиган бурчаги тангенсинга тенг бўлишини эслатиб ўтамиз.

Машқлар

267. $y = 2x + 5$ функция учун: а) агар $x_0 = 3$ ва $\Delta x = 0,2$ бўлса, x ва Δy ни; б) агар $x_0 = 4$ ва $\Delta x = 0,06$ бўлса, x ва Δy ни; в) агар $x_0 = 4$ ва $\Delta x = 0,1$ бўлса, Δy ни; г) $x_0 = 7$ ва $\Delta x = 0,01$ бўлса, Δy ни топинг.

268. Агар

а) $x = 2,5$ ва $x_0 = 2$; б) $x = 3,9$ ва $x_0 = 3,75$;
в) $x = -1,2$ ва $x_0 = -1$; г) $x = -2,7$ ва $x_0 = -2,5$
бўлса, $y = x^2$ функция учун Δx ва Δy орттирмаларни топинг.

269. Агар

а) $x_0 = 9$, $\Delta x = 0,06$; б) $x_0 = 4,02$, $\Delta x = 0,02$;
в) $x_0 = 5,06$, $\Delta x = -0,3$; г) $x_0 = 6$, $\Delta x = -0,02$

бўлса, $y = \frac{1}{x}$ функция учун Δy ни топинг.

270. Функциянинг x_0 нуқтадаги орттирмасини x_0 ва Δx билан ифодаланг:

а) $y = 5 - 3x$; б) $y = 2\sqrt{x}$; в) $f(x) = 3x^2$; г) $f(x) = 2x - x^2$.

271. Агар

а) $f(x) = x^2$; б) $f(x) = ax + b$; в) $f(x) = ax^2 + bx + c$;

г) $f(x) = x^3$ бўлса, $f(x_0 + \Delta x)$, $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

ни топинг.

272. $y = x^3$ функция графигига ўтказилган кесувчининг бурчак коэффициентини топинг, бу кесувчи (x_0, y_0) ва $(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$ нуқталардан ўтади. Бунда:

- а) $x_0 = 1; \Delta x = 0,1$; б) $x_0 = 1, \Delta x = -0,1$;
в) $x_0 = 1, \Delta x = 0,001$; г) $x_0 = 1, \Delta x = -0,0001$.

273. Агар

- а) $x_0 = 2, \Delta x = 0,1$; б) $x_0 = 2, \Delta x = 0,01$;
в) $x_0 = 2, \Delta x = 0,001$; г) $x_0 = 2, \Delta x = 0,0001$

бўлса, $y = x^3$ функция графигига ўтказилган кесувчининг бурчак коэффициентини топинг, бу кесувчи (x_0, y_0) ва $(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$ нуқталардан ўтади.

274. а) f функция I ораликда ўсиши учун шу ораликқа тегишли исталган иккита x ва $x + \Delta x$ ($\Delta x \neq 0$) қийматлар учун $\frac{\Delta f}{\Delta x} > 0$ шарт бажарилиши зарур ва етарли эканини исботланг.

б) функция I ораликда камайишининг шунга ўхшаш аломатини ифодаланг ва исботланг.

275. Функциянинг ўсиш (камайиш) аломатларидан фойдаланиб (олдинги машққа қ.), функциянинг ўсиш (камайиш) оралиқларини топинг:

- а) $f(x) = 2x + 3$; б) $g(x) = 7 - 5x$;
в) $p(x) = x^2$; г) $g(x) = 3 - x^2$.

16. Ҳосила ҳақида тушунча.

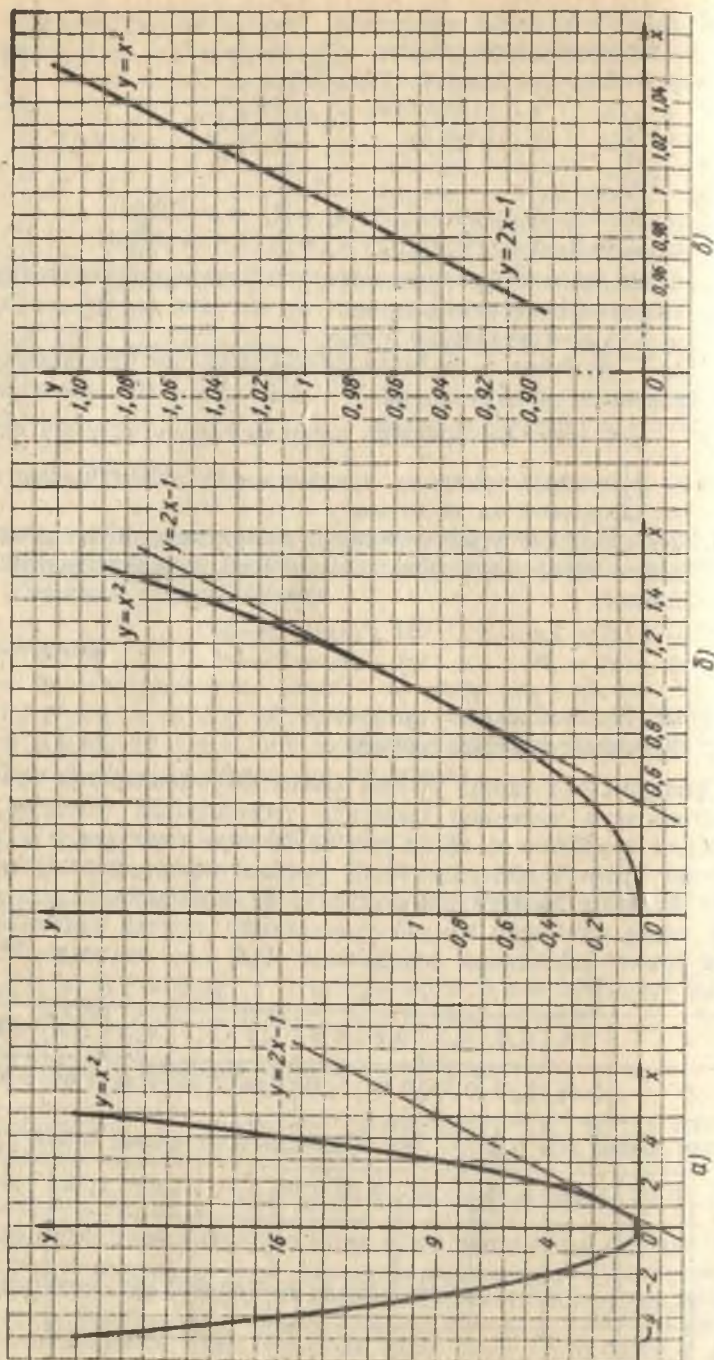
Функция графигига уринма

Амалда сизга таниш бўлган ҳамма функцияларнинг графиклари «силлиқ» эгри чизиқлар сифатида тасвирланади (масалан, $y = x^2$ функция графигига қ., 67-а расм). Иккинчи томондан, $y = |x|$ функциянинг графиги (68- расм) (0; 0) нуқта атрофида «силлиқ» эмас, $y = x^2$ функция графиги намунасида 1 га яқин қийматларда «силлиқ» эгри чизиқ геометрик қандай тузилганини анализ қиламиз. Бунинг учун унинг қийматлари жадвалини [0,5; 1,5] ораликда 0,1 қадам билан тузамиз:

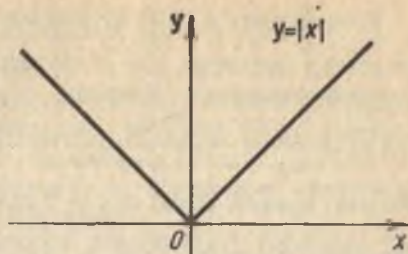
x	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
x^2	0,25	0,36	0,49	0,64	0,81	1,00	1,21	1,44	1,69	1,96	2,25

бундан кейин эса [0,95; 1,05] ораликда 0,01 қадам билан тузамиз:

x	0,95	0,96	0,97	0,98	0,99	1,00	1,01	1,02	1,03	1,04	1,05
x^2	0,9025	0,9216	0,9409	0,9604	0,9801	1,00	1,0201	1,0404	1,0609	1,0816	1,1025
$2x-1$	0,9000	0,9200	0,9400	0,9600	0,9800	1,00	1,0200	1,0400	1,0600	1,0800	1,1000
Δ	0,0025	0,0016	0,0009	0,0004	0,0001	0,00	0,0001	0,0004	0,0009	0,0016	0,0025



$y = x^2$ функция графигини (қ. 67-а расм) ясада қабул қилинган масштабни олдин 10 марта, ундан кейин 100 марта катта-лаштирамиз ва жадваллардан фойдаланиб, шу функция графигини $[0,5; 1,5]$ (67-б расм) ва $[0,95; 1,05]$ (67-в расм) кесмаларда миллиметрли қоғозда ясаймиз. Аргументнинг 1 га яқин қийматларида, график $y = 2x - 1$ тўғри чизиқ кесмасидан фарқ қилмайди (иккинчи жадвалнинг



68- расм

иккита пастки сатрини қаранг, бунда Δ — тақрибий тенглик $x^2 \approx 2x - 1$ нинг абсолют хатоси). Чунончи $[0,95; 1,05]$ кесмада $x^2 \approx 2x - 1$ тақрибий тенгликнинг абсолют хатоси 0,0025 дан $[0,995; 1,005]$ кесмада эса 0,000025 дан ортмайди, яъни графикнинг нуқталари $y = 2x - 1$ тўғри чизиқ бўйлаб «сафланган»дек бўлади. Ҳақиқатан, $\Delta = |x^2 - (2x - 1)| = (x - 1)^2$, бунда $[0,95; 1,05]$ кесмадан олинган барча x лар учун $|x - 1| \leq 0,05$ ва $[0,995; 1,005]$ кесмадан олинган барча x лар учун $|x - 1| \leq 0,005$.

$y = x^2$ параболаининг бошқа нуқталарини қараб ҳам шунга ўхшаш хулосага келиш мумкин. Масалан, бу функциянинг графиги координаталар боши атрофида катта қоғоз варағида тасвирланган деб тасаввур қилайлик, бунда $[-0,001; 0,001]$ кесма узунлиги 2 м бўлган кесма билан тасвирланади. y нинг $-0,001$ ва $0,001$ нуқтадаги қийматлари 0,000001 га тенг. Қабул қилинган масштабда $[0; 0,000001]$ кесманинг узунлиги 1 мм га тенг. Шу сабабли бу оралиқда қаралган $y = x^2$ функциянинг графиги асоси 2 м ва баландлиги 1 мм бўлган жуда чузилган тўғри тўртбурчакда ётади, яъни амалда у абсциссалар ўқи кесмасидан фарқ қилмайди.

$y = |x|$ функциянинг 0 нуқта атрофидаги графиги борасида иш бошқача; $y = |x|$ функциянинг графигини 0 нуқта атрофига (ўнган ҳам, чапдан ҳам) яқинлаштирувчи тўғри чизиқ мавжуд эмас.

Табиий масала пайдо бўлади. $f(x)$ функциянинг графиги x_0 нуқтада силлиқ эгри чизиқ, яъни x_0 нуқтанинг график қаралаётган атрофи кичрайганда бирор l тўғри чизиқнинг кесмасига чексиз яқинлашсин. l нинг аниқ ҳолатини аниқлаймиз.

l тўғри чизиқ битта нуқтасининг координаталари аниқ, бу $(x_0; f(x_0))$ нуқта. Шу сабабли l тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентини топиш қолади. Уни ҳисоблаш усули қуйидаги мулоҳазаларга асосланган.

Мисол тариқасида $y = x^2$ функцияни қараймиз. Унинг x_0 нуқтанинг кичик атрофидаги графиги бирор l тўғри чизиқнинг кесмасига яқин. Шу сабабли агар x нуқта x_0 дан кам фарқ қилса, $(x_0; x_0^2)$ ва $(x; x^2)$ нуқталардан ўтувчи кесувчиларнинг бурчак коэффициентлари l нинг бурчак коэффициентига яқин.

Кесувчининг $k(\Delta x)$ бурчак коэффициенти (15-п. га қ.) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ га тенг, бунда Δy орттирма $y = x^3$ функциянинг x_0 нуқтадаги Δx га мос келувчи орттирмаси. Масалан, $x_0 = 1$ да

$$k(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(1 + \Delta x)^3 - 1}{\Delta x} = \frac{2\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2 + \Delta x (\Delta x \neq 0)$$

тенглик ўринли. Аммо $\Delta x \rightarrow 0$ да $2 + \Delta x \rightarrow 2$ (ҳақиқатан, $2 + \Delta x \approx 2$ тақрибий тенгликнинг абсолют хатоси $|\Delta x|$ га тенг ва тақрибий тенглик $|\Delta x| < h$ бўлган Δx лар учун олдиндан берилган ҳар қандай h аниқликда бажарилади).

Демак, $\Delta x \rightarrow 0$ да $\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow 2$ сонига интилади, яъни

$$\Delta x \rightarrow 0 \text{ да } \frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow 2.$$

Шундай қилиб, (1; 1) нуқтадан ўтувчи l тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти 2 га тенг. Бу тўғри чизиқнинг тенгламаси юқорида фараз қилинганидек, бундай: $y = 2x - 1$.

f функциянинг графиги x_0 нуқтанинг бирор атрофида устма-уст тушадиган тўғри чизиқни f функция графигига (x_0 ; $f(x_0)$) нуқтада уринма дейилади. Бу уринманинг бурчак коэффициентини f функциянинг x_0 нуқтадаги ҳосиласи дейилади.

Шундай қилиб, биз $f(x) = x^2$ функциянинг 1 нуқтадаги ҳосиласи 2 га тенг эканини кўрсатдик, бу нуқтада f функция графигига уринманинг тенгламаси эса $y = 2x - 1$ дан иборат.

Энди $y = x^2$ функциянинг ихтиёрий x_0 нуқтадаги ҳосиласини топамиз:

$$k(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \frac{2x_0 \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x.$$

Аммо $\Delta x \rightarrow 0$ да $2x_0 + \Delta x \rightarrow 2x_0$. Шу сабабли $\Delta x \rightarrow 0$ да $\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow 2x_0$, яъни $y = x^2$ функциянинг ихтиёрий x нуқтадаги ҳосиласи $2x_0$ га тенг. Буни қисқача

$$(x^2)' = 2x$$

каби ёзилади.

Машқлар

276. $y = x^2 - x$ функциянинг $[0,5; 1,5]$ кесмадаги қийматлари жадвалини 0,1 қадам билан, сўнгра $[0,95; 1,05]$ кесмадаги қийматлари жадвалини 0,01 қадам билан тузинг. Шу жадваллардан фойдаланиб, $y = x^2 - x$ функциянинг графигини миллиметрли қоғозда ясанг. Шу чизманинг ўзида $y = 2x - 1$ функция графигини ясанг.
277. $y = 2x - 3$ функция ҳосиласининг а) 1; б) 3; в) а; г) x_0 нуқталардаги қийматини топинг.

278. $y = x^2 - x$ функция ҳосиласининг а) $\frac{1}{2}$; б) 1; в) $-\frac{1}{2}$; г) x_0 нуқталардаги қийматини топинг.
279. $y = kx + b$ чизикли функция ҳосиласининг истаган x нуқтадаги қиймати шу функциянинг графиги бўлган тўғри чизикнинг бурчак коэффициентига тенг эканини исботланг. $y = kx + b$ функция графигига шу графикнинг x_0 абсциссали нуқтасидан ўтувчи уринманинг тенгламаси қандай?
280. $y = \frac{1}{2} x^2$ функция учун $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ нинг $x_0 = \frac{1}{2}$ нуқтадаги қийматларини $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$ га тенг Δx ларда ҳисобланг.
281. $y = \frac{1}{x}$ функция учун а) $x_0 = 1$; б) $x_0 = \frac{1}{2}$; в) $x_0 = -\frac{1}{2}$; г) $x_0 = x$ нуқталарда $\Delta x \rightarrow 0$ да $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ нисбат қандай сонга интилади?

17. Ҳосиланинг таърифи. Ҳосилани ҳисоблаш мисоллари

Олдинги пунктда сиз ҳосила тушунчаси билан танишдингиз ва $y = x^2$ функциянинг ҳосиласини топдингиз. Умумий таърифни берамиз.

Таъриф. f функциянинг x_0 нуқтадаги ҳосиласи деб Δx нолга интилганда

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

нисбат интиладиган сонни айтади.

f функциянинг x_0 нуқтадаги ҳосиласи $f'(x_0)$ билан белгиланади («икс ноль нуқтада эф штрих» деб ўқилади), яъни таърифга кўра

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

x_0 нуқтада ҳосилага эга бўлган функцияни шу нуқтада дифференциалланувчи функция дейилади. D_1 — функция f нинг дифференциалланувчи нуқталари тўплами бўлсин. Ҳар бир $x \in D_1$ сонга $f'(x)$ сонни таққослаб, аниқланиш соҳаси D_1 бўлган функция ҳосил қиламиз. Бу функция $y = f(x)$ функциянинг ҳосиласи дейилади ва $f'(x)$ ёки тўғридан-тўғри f', y' кўринишда белгиланади.

Берилган f функциянинг ҳосиласини топиш дифференциаллаш дейилади.

Олдинги пунктнинг асосий натижасини энди бундай ифодалаш мумкин:

x^2 функция ҳар қандай x нуқтада дифференциалланувчи ва унинг ҳосиласи $2x$ га тенг, яъни

$$(x^2)' = 2x.$$

Баъзи функцияларнинг ҳосилаларини ҳисоблаш мисолларини келтираемиз.

1- мисол. $y = kx + C$ функция ҳосиласини топамиз (k ва C — ўзгармаслар).

x_0 — ихтиёрий нуқта бўлсин. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ нисбатни топамиз:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(k(x_0 + \Delta x) + C) - (kx_0 + C)}{\Delta x} = \frac{k\Delta x}{\Delta x} = k.$$

Демак, $\Delta x \rightarrow 0$ да $\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow k$ (14- п. даги 4- мисолга қ) ва шу сабабли ихтиёрий x_0 нуқта учун $y' = k$. Шундай қилиб,

$$(kx + C)' = k.$$

Бу формуладан, $k = 0$ деб, сўнгра эса $k = 1$ ва $C = 0$ деб олиб, қуйидаги натижаларга эга бўламиз:

1. Ўзгармас функциянинг ҳосиласи нолга тенг:

$$C' = 0.$$

2. $y = x$ функциянинг ҳосиласи 1 га тенг:

$$x' = 1.$$

2- мисол. $(x^3)' = 3x^2$ эканини исботлаймиз.

x^3 функциянинг ихтиёрий x_0 нуқтадаги орттирмасини мос Δx орттирмага нисбатини ифодаalayмиз:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x} = \frac{3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2.$$

$\Delta x \rightarrow 0$ да $(\Delta x)^2$ ва $3x_0\Delta x$ қўшилувчилар ҳам нолга интилади. Шу сабабли $\Delta x \rightarrow 0$ да $3x_0\Delta x + (\Delta x)^2$ йиғинди нолга интилади. Шундай қилиб,

$$\Delta x \rightarrow 0 \text{ да } \frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow 3x_0^2, \text{ яъни } (x^3)' = 3x^2.$$

3- мисол. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ ($x \neq 0$) эканини исботлаймиз.

Ҳар қандай $x_0 \neq 0$ да

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \left(\frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0} \right) \cdot \frac{1}{\Delta x} = \frac{x_0 - x_0 - \Delta x}{\Delta x \cdot x_0(x_0 + \Delta x)} = -\frac{1}{x_0(x_0 + \Delta x)}.$$

Агар $\Delta x \rightarrow 0$ бўлса, у ҳолда $x_0 + \Delta x \rightarrow x_0$, $\frac{1}{x_0 + \Delta x} \rightarrow \frac{1}{x_0}$. Шу сабабли $\Delta x \rightarrow 0$ да $-\frac{1}{x_0(x_0 + \Delta x)} \rightarrow -\frac{1}{x_0 \cdot x_0} = -\frac{1}{x_0^2}$.

Шундай қилиб, $\Delta x \rightarrow 0$ да $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ нисбат $-\frac{1}{x_0^2}$ лимитга интилади. Бу

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \text{ эканини билдиради.}$$

Келтирилган мисолларнинг ҳаммасида функциялар аниқланиш соҳасининг ҳар бир нуқтасида ҳосилага эга эди. Бундан кейин, ҳар қандай рационал функциялар каби кўпхадлар, шунингдек, тригонометрик функциялар ҳам ўзининг аниқланиш соҳасининг ҳамма нуқталарида дифференциалланувчи эканини кўрамиз. Аммо, умуман ҳар қандай функция ўз аниқланиш соҳасининг ҳар бир ички нуқтасида ҳосилага эга бўлади, деб ўйламаслик керак. Мисол келтирамиз.

4-мисол. $f(x) = |x|$ функциянинг ҳосиласини топамиз:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} \text{агар } x \geq 0 \text{ бўлса, } x, \\ \text{агар } x < 0 \text{ бўлса, } -x. \end{cases}$$

Шу функциянинг графигини қараймиз (қ. 68-расм). $x_0 > 0$ нуқтанинг бирор атрофида ҳар қандай $x > 0$ учун $|x|$ функция x га тенг, шу сабабли $|x|$ нинг ҳосиласи бундай нуқталарда x' га тенг, яъни x нинг мусбат қийматларида $|x|' = 1$. $x < 0$ да $|x| = -x$ бўлгани учун манфий x ларда $|x|' = -1$. Олдинги пунктда таъкидлаб ўтилганидек, бу функция 0 нуқтада ҳосилага эга эмас. Шундай қилиб,

$$|x|' = \begin{cases} x > 0 \text{ да } 1, \\ x = 0 \text{ да мавжуд эмас,} \\ x < 0 \text{ да } -1 \end{cases}$$

▼ $|x|$ функция нолда ҳосилага эга эмаслигини (тескарисини фараз қилиш усулидан фойдаланиб) исботлаймиз.

Бу функция 0 нуқтада ҳосилага эга деб фараз қилайлик, яъни $\Delta x \rightarrow 0$ да $\frac{\Delta f(0)}{\Delta x}$ нисбат бирор A лимитга интилсин. У ҳолда 0 га етарлича яқин барча Δx ларда $\frac{\Delta f(0)}{\Delta x} \approx A$ тақрибий тенглик олдиндан берилган исталган h аниқликда тўғри бўлади. $h < 1$ ни танлаб олиб, бундай h лар учун

$$\left| \frac{\Delta f(0)}{\Delta x} - A \right| < 1$$

тенгсизлик ўринли эканини топамиз.

Хусусан, $\Delta x > 0$ да $|1 - A| < 1$, яъни $-1 < 1 - A < 1$ ёки

$$0 < A < 2. \quad (1)$$

$\Delta x \rightarrow 0$ учун $|-1 - A| < 1$, яъни $-1 < -1 - A < 1$ ёки

$$-2 < A < 0. \quad (2)$$

(1) ва (2) тенгсизликлар бир-бирига зид. Демак, $|x|$ функциянинг нолда ҳосиласи мавжуд деб қилган фаразимиз нотўғри. ▼

Машқлар

282. Ҳосиланинг таърифидан фойдаланиб,

а) $h(x) = ax + b$ функция ҳосиласининг 2 ва 4 нуқталардаги;

б) $f(x) = \frac{1}{x}$ функция ҳосиласининг 1 ва 4 нуқталардаги қийматини топинг.

283. $f(x) = \sqrt{x}$ функция учун қуйидагиларни топинг:

а) $f'(1)$; б) $f'(4)$; в) $f'(25)$; г) $f'(x)$.

284*. $g(x) = \frac{1}{x^2}$ функция учун қуйидагиларни топинг:

а) $g'(1)$; б) $g'(-1)$; в) $g'(2)$; г) $g'(x)$.

Таърифдан фойдаланиб, функция ҳосиласини топинг (285—286).

285. а) $3 - 2x$; б) $\frac{1}{3}x - 7$; в) $x^2 + 2x$; г) $3 - 2x - x^2$.

286. а) $ax^2 + bx + c$; б) x^3 ; в) $x^3 - x$; г) $\frac{1}{x^4}$.

287.* Исботланг:

а) $(x^4)' = 4x^3$; б) $\left(-\frac{1}{2}x^4\right)' = -2x^3$;

в) $(\sqrt{x^3})' = \frac{3}{2}\sqrt{x}$; г) $\left(\frac{1}{\sqrt{x^3}}\right)' = -\frac{3}{2\sqrt{x^5}}$.

18. Ҳосилаларни ҳисоблаш қоидалари

Ҳосилаларни ҳисоблашнинг бир нечта қоидалари мавжуд.

1) *Агар u ва v функциялар x_0 нуқтада дифференциалланувчи бўлса, уларнинг йиғиндиси ҳам шу нуқтада дифференциалланувчи ва*

$$(u + v)' = u' + v'.$$

Қисқача бундай дейилади: *йиғиндининг ҳосиласи ҳосилалар йиғиндисига тенг.*

Исботлаш учун аввал қаралаётган x_0 нуқтада функциялар йиғиндисининг орттирмасини ҳисоблаймиз:

$$\Delta(u + v) = (u(x_0 + \Delta x) + v(x_0 + \Delta x)) - (u(x_0) + v(x_0)) = (u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)) + (v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)) = \Delta u + \Delta v.$$

$$\text{Бинобарин, } \frac{\Delta(u + v)}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

u ва v функциялар x_0 нуқтада дифференциалланувчи, яъни $\Delta x \rightarrow 0$ да

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} \rightarrow u', \quad \frac{\Delta v}{\Delta x} \rightarrow v'.$$

У вақтда $\Delta x \rightarrow 0$ да $\frac{\Delta(u + v)}{\Delta x} \rightarrow u' + v'$ (14-п., лимитларни ҳисоблаш қоидаларига қаранг), яъни $(u + v)' = u' + v'$.

* Бу пунктда u ва v функцияларнинг x_0 нуқтадаги ҳосилаларининг қийматлари қисқалик учун мое равишда u' ва v' билан белгиланади.

x^2 функция ҳосиласининг формуласи маълум:

$$(x^2)' = 2x.$$

Қўпайтмани дифференциаллаш формуласидан фойдаланиб топамиз:

$$(x^3)' = (x^2 \cdot x)' = (x^2)' \cdot x + x^2 (x)' = 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 3x^2,$$

$$(x^4)' = (x^3 \cdot x)' = (x^3)' \cdot x + x^3 (x)' = 3x^2 \cdot x + x^3 \cdot 1 = 4x^3.$$

Бунда

$$(x^2)' = 2x^{2-1}; (x^3)' = 3x^{3-1}; (x^4)' = 4x^{4-1}$$

эканини кўрамиз, яъни $n = 2, 3$ ва 4 учун (1) формула исботланди. Шундай ҳисоблашларни давом эттириб, (1) формуланинг $n = 5, 6$ ва ҳоказо учун тўғрилигига ишонч ҳосил қиламиз.

▼ (1) формула ҳар қандай $n > 4$ натурал сон учун тўғри эканлигини исботлаймиз.

(1) формула $n = k$ да тўғри, яъни

$$(x^k)' = kx^{k-1}$$

деб фараз қилайлик. У ҳолда формула $n = k + 1$ да тўғри эканини кўрсатамиз. Ҳақиқатан,

$$(x^{k+1})' = (x^k \cdot x)' = (x^k)' \cdot x + x^k (x)' = kx^{k-1} \cdot x + x^k = kx^k + x^k = (k+1)x^k.$$

Шу сабабли, (1) формула $n = 4$ да тўғрилигидан, унинг $n = 5$ да тўғрилиги келиб чиқади, аммо у $n = 6$ учун ҳам тўғри бўлади, демак, $n = 7$ да ҳам тўғри бўлади ва ҳоказо исталган натурал n да тўғри бўлади (унинг қатъий исботи математик индукция методига асосланган, 678-машққа қаранг). ▼

Агар $n = 1$ ёки $n = 0$ бўлса, $x \neq 0$ да ҳам бу формула тўғри. Ҳақиқатан, (1) формула бўйича $x \neq 0$ да

$$(x^1)' = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1$$

$$(x^0)' = 0 \cdot x^{0-1} = 0.$$

Бу олдинги пунктдан маълум бўлган x ва 1 функциялар ҳосилаларининг қийматлари билан бир хил бўлади.

Ниҳоят, n — бутун манфий сон бўлсин, у ҳолда $n = -m$, бунда m — натурал сон. Бўлинманинг дифференциаллаш қоидасини татбиқ этиб ва натурал m лар учун исботланган (1) формуладан фойдаланиб, $x \neq 0$ да қуйидагини топамиз:

$$(x^n)' = (x^{-m})' = \left(\frac{1}{x^m}\right)' = \frac{-(x^m)'}{(x^m)^2} = \frac{-mx^{m-1}}{x^{2m}} = -m \cdot \frac{1}{x^{m+1}} = -mx^{-m-1} = nx^{n-1}.$$

Шундай қилиб, **ихтиёрий бутун n ва ҳар қандай x учун ($n \leq 1$ да $x \neq 0$)**

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

2- мисол. а) x^{-5} ; б) $3x^7 - \frac{5}{x^3}$ функциянинг ҳосиласини топамиз. Ечилиши.

а) $(x^{-5})' = -5x^{-5-1} = -5x^{-6}$;

б) $\left(3x^7 - \frac{5}{x^3}\right)' = 3(x^7)' - 5(x^{-3})' = 3 \cdot 7 \cdot x^6 - 5(-3)x^{-4} = 21x^6 + \frac{15}{x^4}$.

Машқлар

Функциянинг ҳосиласини топинг (288—295).

288. а) x^{10} ; б) $2x^7$; в) x^{-5} ; г) $3x^{-3}$.

289. а) $\frac{1}{x^4}$; б) $\frac{5}{x^{11}}$; в) $\frac{1}{3x^{-3}}$; г) $\frac{6}{x^7}$.

290. а) $8\sqrt{x}$; б) $3\sqrt{x^{-3}}$; в) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$; г) $\frac{3}{\sqrt{x}}$.

291. а) $x^7 - 3x^3 - x + 5$; б) $2x^{10} - x^8 + 3x^3$;

в) $2x^6 - \frac{1}{x}$; г) $\frac{1}{x^2} - 3x^4$.

292. а) $7x^5 + 2\sqrt{x}$; б) $\frac{x}{3} - \frac{7}{2x^3} - x\sqrt{x}$;

в)* $\frac{1}{x\sqrt{x}} + \sqrt{x^3}$; г)* $x\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{3}{x^3}$.

293. а) $\frac{1+2x}{3-5x}$; б) $\frac{3x-2}{5x+8}$; в) $\frac{3x-2}{4-6x}$; г) $\frac{1-7x}{2-9x}$.

294. а) $(x+1)\sqrt{x}$; б) $(2x-1)\sqrt{x}$; в) $\frac{x-1}{\sqrt{x}}$; г) $\frac{\sqrt{x}}{2x+1}$.

295. а) $\frac{2x}{1+x^2}$; б) $\frac{\sqrt{x}}{4+x}$; в)* $(3+x^3)(2-\sqrt{x})$;

г)* $\left(2 - \frac{x}{3} + \sqrt{x^3}\right)(7-x^3)$.

f функциянинг кўрсатилган нуқталардаги ҳосилаларини ҳисобланг (296—297).

296. $f(x) = x^3 - 3x$ функциянинг а) 0; б) -1 ; в) x ; г) $x+1$ нуқталардаги.

297. $f(x) = \frac{3-x}{2+x}$ нинг а) 0; б) -3 ; в) x ; г) $2t$ нуқталардаги.

298. $f(x) = x - 4\sqrt{x}$ функция учун қуйидагиларни топинг:

а) $f'(4)$; б) $f'(0,01)$; в) $f'(x)$; г) $f'(2-x)$.

19. Мураккаб функциянинг ҳосиласи

1. Мисолдан бошлаймиз.

1-мисол. x нинг берилган қиймати бўйича

$$z = h(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

формула билан берилган h функциянинг мос z қийматини ҳисоблаш талаб қилинсин.

Бунинг учун аввал x нинг берилган қиймати бўйича

$$y = f(x) = 1 - x^2$$

нинг қийматини, сўнгра y нинг бу қиймати бўйича

$$z = g(y) = \sqrt{y}$$

ни ҳисоблаш керак.

Шундай қилиб, f функция x ни y га ўтказади, g функция эса y ни z га ўтказади. h функция g ва f функциялардан тузилган мураккаб функция дейилади ва бундай ёзилади:

$$h(x) = g(f(x)).$$

$h(x) = g(f(x))$ мураккаб функциянинг ихтиёрий x нуқтадаги қийматини ҳисоблаш учун, олдин y нинг — «ички» f функциянинг бу нуқтадаги қиймати ҳисобланади, сўнгра $g(y)$ ҳисобланади.

$g(f(x))$ мураккаб функциянинг аниқланиш соҳаси қандай? Бу — f функциянинг аниқланиш соҳасига тегишли шундай барча x лар тўпламики, бу қийматларда $f(x)$ функция g нинг аниқланиш соҳасига тегишли бўлади.

Қаралаётган мисолда f функциянинг аниқланиш соҳаси сонлар тўғри чизиғининг ҳаммасидан иборат. Агар $f(x)$ нинг қиймати $g(y) = \sqrt{y}$ функциянинг аниқланиш соҳасига тегишли бўлса, $h(x)$ нинг қиймати аниқланган бўлади. Шу сабабли $y \geq 0$, яъни $1 - x^2 \geq 0$ тенгсизлик бажарилиши талаб қилинади, демак, $g(f(x))$ нинг аниқланиш соҳаси $[-1; 1]$ кесмадан иборат.

2. Олдинги пунктларда сиз рационал функцияларнинг, хусусан кўпхадларнинг ҳосилаларини топишни ўрганиб олдингиз. Аммо $f(x) = (2x + 3)^{100}$ функциянинг ҳосиласини ҳисоблаш масаласи кўпхаднинг ҳосиласини топишга келтирилишига қарамай, жуда катта ҳажмда иш бажаришни талаб қилади: $(2x + 3)^{100}$ ни кўпхад кўринишида тасвирлаш ва ҳосил бўлган йиғиндининг 101 та қўшилувчисини дифференциаллаш керак. Мураккаб функция ҳосиласини ҳисоблаш қондасини исботлаб, бу ва бунга ўхшаш масалаларнинг ечилишини анча соддалаштириш мумкин.

Агар f функция ихтиёрий x_0 нуқтада ҳосилага эга бўлса, g функция эса $y_0 = f(x_0)$ нуқтада ҳосилага эга бўлса, y ҳолда $h(x) = g(f(x))$ мураккаб функция ҳам x_0 нуқтада ҳосилага эга бўлади, бунда

$$h'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0). \quad (1)$$

▼ (1) формулани исботлаш учун (илгаригидек) $\Delta x \neq 0$ да $\frac{\Delta h}{\Delta x}$ каср

ни қараш ва $\Delta x \rightarrow 0$ да $\frac{\Delta h}{\Delta x} \rightarrow g'(y_0) f'(x_0)$ эканини ўрнатиш керак.
 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f$ белгилашни киритамиз. У ҳолда $\Delta h = h(x_0 + \Delta x) - h(x_0) = g(f(x_0 + \Delta x)) - g(f(x_0)) = g(y_0 + \Delta y) - g(y_0) = \Delta g$ ва $\Delta x \rightarrow 0$ да $\Delta y \rightarrow 0$, чунки f функция x_0 нуқтада дифференциалланувчи. Шундан кейин исботлашни x_0 нуқтанинг бирор атрофида $\Delta f \neq 0$ бўлган f функциялар учунгина бажарамиз. У ҳолда $\Delta x \rightarrow 0$ да $\frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{\Delta h}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta g}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta f}{\Delta x} \rightarrow g'(y_0) \cdot f'(x_0)$, чунки $\Delta x \rightarrow 0$ да $\frac{\Delta f}{\Delta x} \rightarrow f'(x_0)$, $\Delta y \rightarrow 0$ да эса $\frac{\Delta g}{\Delta y} \rightarrow g'(y_0)$, бу $\Delta x \rightarrow 0$ да бажарилган эди (у юқорида қайд қилинган эди). ▼

2-мисол. Юқорида қўйилган масалага қайтамиз ва $h(x) = (2x + 3)^{100}$ функция ҳосиласини топамиз.

h функцияни $h(x) = g(f(x))$ мураккаб функция кўринишида тасвирлаш мумкин, бунда, $g(y) = y^{100}$, $y = f(x) = 2x + 3$. $f'(x) = 2$, $g'(y) = 100 y^{99}$ бўлгани учун

$$h'(x) = 2 \cdot 100 y^{99} = 200 (2x + 3)^{99}.$$

3-мисол. $h(x) = \sqrt{3x^2 + 1}$ функциянинг ҳосиласини топамиз. $h(x) = g(f(x))$ бўлгани учун (бунда $y = f(x) = 3x^2 + 1$) $g(y) = \sqrt{y}$. $g'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ ва $y' = f'(x) = 6x$, бундан:

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot y' = \frac{6x}{2\sqrt{3x^2 + 1}} = \frac{3x}{\sqrt{3x^2 + 1}}.$$

Машқлар

Функцияларнинг аниқланиш соҳасини топинг (299 — 300).

299. а) $y = \sqrt{9 - x^2}$; б) $y = \sqrt{x^2 - 0,25}$;

в) $y = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$; г) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 7}}$.

300. а) $y = \sqrt{2 - \sqrt{x}}$; б) $y = \sqrt{\frac{1}{x} + 1}$;

в) $y = \frac{1}{\sqrt{3 - x - 1}}$; г) $y = \frac{1}{\sqrt{1 - \sqrt{1 - x}}}$.

301. $f(x) = 2 - x - x^2$; $g(x) = \sqrt{x}$; $p(x) = \frac{x}{x-3}$ функциялар берилган, қуйидаги функцияларни формулалар ёрдамида беринг:

а) $f(g(x))$; б) $g(f(x))$; в) $f(p(x))$;

г) $p(f(x))$; д) $g(p(x))$; е) $p(g(x))$.

302. 299, 300-машқларда берилган функцияларни соддароқ функциялардан тузилган мураккаб функциялар шаклида тасвирланг.

303. Агар

а) $g(x) = x^2$, $x \geq 0$; б) $g(x) = \sqrt{x}$; в) $g(x) = \frac{1}{x}$;

г) $g(x) = 2x$; д) $g(x) = 3x + 2$; е) $g(x) = x^2 + 1$, $x \leq 0$

бўлса, $f(g(x)) = x$ тенгликни қаноатлантирувчи f функцияни топинг.

Функциянинг ҳосиласини топинг (304—307).

304. а) $(2x - 7)^{14}$; б) $(3 + 5x)^{10}$; в) $(7x - 1)^{-3}$;

г) $\left(\frac{1}{3}x + 2\right)^{-5}$.

305. а) $\sqrt{2x + 3}$; б) $\sqrt{3 - \frac{1}{4}x}$; в) $\sqrt{5x - 8}$; г) $\sqrt{7 - 4x}$.

306. а) $\sqrt{4x^2 - 1}$; б) $\sqrt{\frac{1}{3}x^2 + 7}$; в) $\sqrt{9x^2 - 16}$; г) $\sqrt{7 - 3x^3}$.

307. а) $(5x - 2)^{13} - (3x + 7)^{20}$; б) $(3x - 1)^{16} + (2x + 3)^4$;

в) $\sqrt{6x - 8} - \sqrt{4x^2 - 3}$; г) $\sqrt{9 + 2x} - \sqrt{0,5x^2 - 2}$.

20. Тригонометрик функцияларнинг ҳосилалари

1. Синус функция ҳар қандай нуқтада ҳосилага эга ва

$$(\sin x)' = \cos x \quad (1)$$

эканини исботлаймиз.

$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$ формулани татбиқ қилиб топамиз:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \sin x}{\Delta x} &= \frac{\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0}{\Delta x} = \frac{2 \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \\ &= \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right). \end{aligned}$$

(1) формулани келтириб чиқариш учун

а) $\Delta x \rightarrow 0$ да $\frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \rightarrow 1$;

б) $\Delta x \rightarrow 0$ да $\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) \rightarrow \cos x_0$

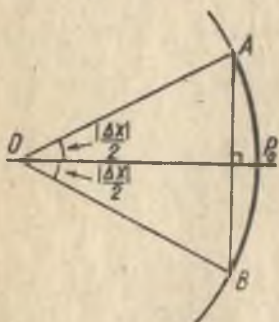
эканини кўрсатиш етарли.

Бу тасдиқларга таяниб, (1) формулага эга бўламиз. Ҳақиқатан,
 $x \rightarrow 0$ да

$$\frac{\Delta \sin x}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right) \rightarrow 1 \cdot \cos x_0 = \cos x_0.$$

▼ Юқорида биз суянган а) ва б) тасдиқлар аёний геометрик маънога эга.

а) Бирлик айланада P_0 нуқтадан бошлаб иккала томонга узунлиги $\frac{|\Delta x|}{2}$ га тенг P_0A ва P_0B ёйларни қўямиз (69- расм). У вақтда



69- расм

да AB ёйнинг узунлиги $|\Delta x|$ га тенг, AB ватарнинг узунлиги эса $2 \left| \sin \frac{\Delta x}{2} \right|$ га тенг бўлади. Кичик Δx ларда AB ватарнинг узунлиги амалда ўзи тортиб турган AB ёйнинг узунлигидан кам фарқ қилади. (Бу фактдан сиз геометрия курсида айлана узунлигининг формуласини чиқаришда фойдалангансиз. Ҳақиқатан, n катта сонларда, маълумки, $P_n \approx C$ тақрибий тенглик ўринли, бунда P_n — ички чизилган мунтазам n - бурчакнинг периметри, C — айлана узунлиги. Демак,

бундай кўпбурчак томонининг узунлиги тақрибан шу томон тортиб турган ёй узунлигига тенг бўлади.) Демак,

$$\Delta x \rightarrow 0 \text{ да } \frac{AB}{\Delta x} = \frac{2 \left| \sin \frac{\Delta x}{2} \right|}{\left| \frac{\Delta x}{2} \right|} = \left| \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \right| \rightarrow 1.$$

б) 69- расмни кўздан кечириб AB ватар узунлиги AB ёй узунлигидан кичик, яъни

$$2 \sin \frac{|\Delta x|}{2} < 2 \cdot \frac{|\Delta x|}{2}$$

эканини кўрамыз. Қосинуслар айирмаси формуласидан ва бу тенгсизликдан фойдаланиб, топамиз:

$$\begin{aligned} \left| \cos \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right) - \cos x_0 \right| &= \left| -2 \sin \frac{\Delta x}{4} \sin \left(x_0 + \frac{\Delta x}{4} \right) \right| \leq \\ &\leq 2 \sin \frac{|\Delta x|}{4} \leq \frac{|\Delta x|}{2}. \end{aligned}$$

Бундан $\cos \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right) \approx \cos x_0$ тақрибий тенглик барча $|\Delta x| < 2h$

ларда берилган h аниқлик билан бажарилиши келиб чиқади. бу эса $\Delta x \rightarrow 0$ да $\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) \rightarrow \cos x_0$ эканини билдиради. ▽

Мисол. Мураккаб функцияни дифференциаллаш формуласига кўра:

$$(\sin(ax + b))' = a \cos(ax + b).$$

2. Косинус, тангенс ва котангенснн дифференциаллаш формулаларини келтириб чиқарамиз:

$$(\cos x)' = -\sin x, \quad (2)$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (3)$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}. \quad (4)$$

(Бу формулаларнинг ҳар бири мос функция аниқланиш соҳасининг исталган нуқтасида ўринли.)

(2) формуланинг келтириб чиқарилиши $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ тенгликларга ва мураккаб функцияни дифференциаллаш қондасига асосланган:

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x.$$

(3) ва (4) формулаларни исботлаш учун бўлинманинг ҳосиласини топиш формуласидан ва синус ҳамда косинуснинг ҳосилалари учун келтириб чиқарилган формулалардан фойдаланамиз:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\sin' x \cos x - \cos' x \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$\begin{aligned} (\operatorname{ctg} x)' &= \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{\cos' x \sin x - \sin' x \cos x}{\sin^2 x} = \\ &= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}. \end{aligned}$$

Машқлар

Функциянинг ҳосиласини топинг (308—314)

308. а) $\frac{1}{3} \sin x$; б) $4 \cos x$; в) $\sin x + \cos x$; г) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$.

309. а) $\sin 3x$; б) $\sin(-2x)$; в) $5 \sin 2x$; г) $-\frac{1}{3} \sin 3x$.

310. а) $\cos 2x$; б) $\cos(-3x)$; в) $-\frac{1}{2} \cos 4x$; г) $3 \cos\left(-\frac{1}{3}x\right)$.

311. а) $\operatorname{tg} 2x$; б) $\operatorname{tg}(-3x)$; в) $3 \operatorname{tg} \frac{x}{3}$; г) $-\frac{1}{2} \operatorname{tg} 2x$.
312. а) $\operatorname{ctg} 5x$; б) $-\operatorname{ctg}(-2x)$; в) $4 \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$; г) $-7 \operatorname{ctg} \frac{x}{5}$.
313. а) $\sin\left(\frac{1}{2}x + \pi\right)$; б) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$;
в) $\cos\left(\frac{1}{2}x - \pi\right)$; г) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.
314. а) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$; б) $\cos\left(\frac{1}{2}x - 1\right)$;
в) $\operatorname{tg}(3x - 7)$; г) $\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6}\right)$.
315. Функциянинг ҳосиласи қайси нуқталарда нолга тенг бўлишини топинг:
- а) $f(x) = 2 \sin x - x$; б) $g(x) = \cos x + \frac{1}{2}x$;
в) $f(x) = \sin x + \cos x$; г) $g(x) = \operatorname{tg} x - 2x$.
- Функциянинг ҳосиласини топинг (316 — 317).
316. а) $x \sin x$; б) $x^2 \cos x$; в) $\sin^2 x$;
г) $\operatorname{tg}^2 x$; д) $\sin^2 x + \cos^2 x$; е) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$.
317. а) $\cos 2x \sin x + \sin 2x \cos x$; б) $\sin 2t \cos t - \sin t \cos 2t$;
в) $\cos 3t \cos 2t + \sin 3t \sin 2t$; г) $\cos t \cos 2t - \sin t \sin 2t$.
- 6-§. ҲОСИЛАНИНГ ТАҚРИБИЙ ҲИСОБЛАШЛАРГА, ГЕОМЕТРИЯ ВА ФИЗИКАГА ТАТБИҚИ**

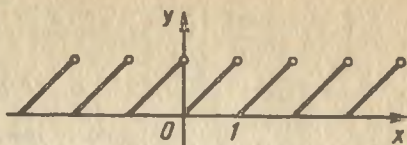
21. Интерваллар методи

1. 14-пунктда f функциянинг a нуқтадаги қийматини ҳисоблашда кўпинча f нинг қийматини a нуқтада эмас, балки унга яқин x нуқтада ҳисоблашга тўғри келиши айtilган эди. Одатда, биз шундай ҳолатга тақрибий ҳисоблашларни бажаришда дуч келамиз.

Аммо шундай функциялар мавжудки, биз уларнинг x_0 нуқтага яқин x нуқталардаги қийматларини ҳисоблаганимизда $f(x_0)$ дан анчагина фарқ қиладиган қийматларга эга бўламиз. Масалан, $f(x) = \{x\}$ ($\{x\}$ белги x соннинг каср қисми; $\{x\}$ нинг графиги 70-расмда тасвирланган) функциянинг $x_0 = n$ нуқтага яқин нуқталардаги қийматларини қараймиз, бунда n — натурал сон. Масалан, $x_0 = 2$ нуқта учун $f(2) = \{2\} = 0$ тенглик ўринли.

f нинг қийматларини $x_0 = 2$ нуқтага яқин нуқталарда ҳисоблаганимизда биз унинг қийматини масалан, 0,5 гача аниқликда ҳисоблай олмаймиз: Δx нинг нолга яқин манфий қийматларида $\{x\}$ нинг қиймати 1 га яқин ва $|\{x\} - \{2\}|$ абсолют хато 0,5 дан катта бўлади.

Бу мисол, агар x аргумент a га яқин қилиб танланса, ҳар доим ҳам $f(x) \approx f(a)$ тақрибий тенглик катта аниқликда бажарилавермаслигини кўрсатади.



70- расм

$f(x) \approx f(a)$ тақрибий тенглик a га етарлича яқин x лар учун олдиндан берилган ҳар қандай аниқлик билан бажариладиган

f функцияни a нуқтада узлуксиз функция дейилади. Бошқача қилиб айтганда, агар бу нуқтада аргументнинг кичик ўзгаришларига функциянинг ҳам кичик ўзгаришлари мос келса, f функция a нуқтада узлуксиз дейилади. Бунинча бошқача ифодалаш ҳам мумкин: агар $\Delta x \rightarrow 0$ да $\Delta f \rightarrow 0$ бўлса, ёки

$$x \rightarrow a \text{ да } f(x) \rightarrow f(a) \quad (1)$$

бўлса, f функция a нуқтада узлуксиздир.

Бирор f оралиқнинг ҳар бир нуқтасида узлуксиз бўлган функция шу оралиқда узлуксиз функция дейилади (f оралиқ f функциянинг узлуксизлик оралиғи дейилади). Бу оралиқнинг бирор нуқтасидан унга яқин нуқтага ўтишда функциянинг қиймати кам ўзгаради, шу сабабли f функциянинг бу оралиқдаги графиги узлуксиз чизиқ бўлади, бу чизиқни «қаламни қоғоздан кўтармай тасвирлаш» мумкин*.

18-пунктда a нуқтада дифференциалланувчи функция шу нуқтада узлуксиз бўлиши кўрсатилган эди. Барча рационал ва тригонометрик функциялар ўз аниқланиш соҳаларининг ҳамма нуқталарида дифференциалланувчидир. Бинобарин, бу функциялар шу нуқталарнинг ҳар бирида узлуксиз, шу сабабли $f(x) \approx f(a)$ тақрибий тенглик a га етарлича яқин барча x лар учун исталган аниқликда бажарилади.

Масалан, $f(x) = x^2$ функциянинг бутун тўғри чизиқда дифференциалланувчанлигидан, $f(x) = \frac{1}{x}$ функциянинг эса $(-\infty; 0)$ ва $(0; \infty)$

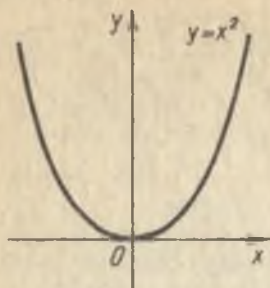
оралиқларда дифференциалланувчанлигидан уларнинг мос оралиқларда узлуксизлиги келиб чиқади (71, 72-расмлар).

Э с л а т м а. Аммо тескари тасдиқ нотўғри. Ноль нуқтада узлуксиз-у, аммо бу нуқтада дифференциалланмайдиган функцияга $|x|$ функция мисол бўлади. Бу функциянинг 0 нуқтада узлуксизлиги равшан: агар $|x| < h$ бўлса, ҳар қандай $h > 0$ учун $\Delta |x| < h$. 17-пунктда $|x|$ функция 0 нуқтада дифференциалланмаслиги кўрсатилган эди.

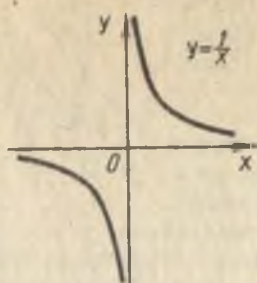
2. Кўп ҳолларда узлуксиз функциянинг ушбу хоссасидан фойдаланиш қулай.

Агар $(a; b)$ интервалда f функция узлуксиз ва нолга айланмаса, у ҳолда функция шу интервалда ишорасини ўзгартирмай сақлайди.

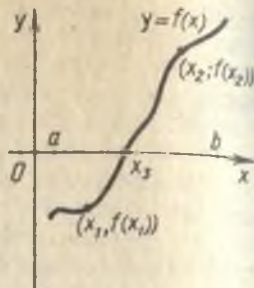
* Ҳар ҳолда мактаб курсида ўрганиладиган узлуксиз функциялар учун иш шундай бўлади.



71- расм



72- расм



73- расм

Ҳақиқатан, $(a; b)$ интервалда шундай x_1 ва x_2 нуқталар топилдики, улар учун

$$f(x_1) < 0, f(x_2) > 0$$

тенгсизликлар ўринли бўлади, деб фараз қилайлик.

У ҳолда $y = 0$ тўғри чизиқ билан ажралган $A(x; f(x_1))$ ва $B(x_2; f(x_2))$ нуқталарни туташтирувчи, узлуксиз эгри чизиқ бу тўғри чизиқни берилган интервалнинг бирор x_3 нуқтасида кесиб ўтади (73- расм)*, яъни $f(x_3) = 0$. Бу f функция $(a; b)$ интервалда нолга айланмайди, деган шартга зидлик қилади.

Бир ўзгарувчи тенгсизликларни ечишнинг *интерваллар методи* деб аталувчи методи шу фактга асосланган (бу фактнинг тўла исботи математик анализ курсларида келтирилади). Уни тавсифлаймиз.

f функция I интервалда узлуксиз ва бу интервалнинг чекли сондаги нуқталарида нолга айланади дейлик. I бу нуқталар билан интервалларга бўлинади ва бу интервалларнинг ҳар бирида f функция ўз ишорасини сақлайди. Бу ишорани аниқлаш учун ҳар бир интервалнинг қандайдир бирор нуқтаси учун функциянинг қийматини ҳисоблаш етарли. Бу ишорани координата тўғри чизигида белгилаш қулай.

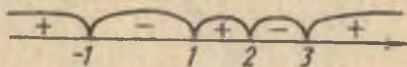
Мисол. Ушбу тенгсизликни ечамиз:

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 - 5x + 6} \geq 0. \quad (2)$$

$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 5x + 6}$ функция ўз аниқланиш соҳасининг ҳар бир нуқтасида узлуксиз (бу каср-чизиқли функция) ва -1 ҳамда 1 нуқталарда нолга айланади. Бу функциянинг аниқланиш соҳаси мах-

*Ҳақиқатан, A ва B нуқталар $(a; b)$ интервал билан тасвирланадиган дарёнинг турли қирғоқларида бўлсин деб фараз қилайлик. Турист A дан B га бориш учун дарёни қаердадир кесиб ўтиши керак экани равшан.

рақининг нолларидан ташқари, яъни сонлар тўғри чизиғининг 2 ва 3 нуқталардан бошқа ҳамма нуқталаридан иборат. 2, 3 ва -1 ва 1 нуқталар f нинг аниқланиш соҳасини 5 та оралиққа бўлади (74-расм). Расмда f нинг ҳар бир интервалга тегишли ишораси белгиланган. (2) тенгсизлик қатъий тенгсизлик эмас, шу сабабли -1 ва 1 нуқталар (f нинг ноллари) мос оралиқларга киради. 74-расмни қараб, жавобни ёзиш мумкин: тенгсизликнинг ечими $(-\infty; -1]$; $[1; 2)$ ва $(3; \infty)$ оралиқларнинг бирлашмасидан иборат.



74- расм

Машқлар

318. Функциянинг узлуксизлик оралиқларини кўрсатинг:

а) $x^3 - 2x$; б) $\frac{x^4 - 2x + 5}{x^2 + 1}$; в) $\frac{x^3 - 5x + 6}{x^2 - 8}$; г) $\frac{x^3 + 8}{x^2 + 2x}$.

Тенгсизликни интерваллар методи билан ечинг (319 — 321).

319. а) $(x-1)(x-2)(x-3) < 0$; б) $(x+1)(x-4)(x+8) \leq 0$;

в) $\frac{(x-2)(x-4)}{(x+3)(x-1)} > 0$; г) $\frac{(x-3)(x+1)}{(x+3)(x-4)} \leq 0$.

320. а) $x^2 - 5x + 4 \geq 0$; б) $x^2 - 3x - 4 < 0$;

в) $x^4 - 10x^2 + 9 \leq 0$; г) $x^4 - 5x^2 - 6 > 0$.

321*. а) $(x^2 - 1)(x^3 - 1)(x^4 - 1) \geq 0$; б) $\frac{(x-3)^3(x+4)^4(x-7)}{(x-2)^2(x+1)} \leq 0$;

в) $\frac{1}{x-1} \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$; г) $\sqrt{x^2 - 4}(x-3) < 0$.

22. Функция графигига уринма

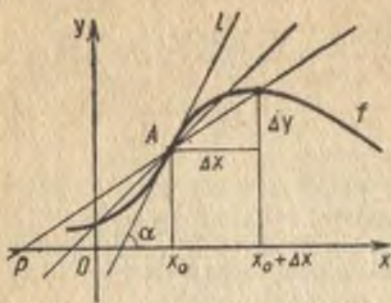
1. Функция графигига уринма тушунчаси билан сиз танишсиз (16-п.). Бу тушунчанинг аниқ таърифини берамиз.

x_0 нуқтада дифференциалланувчи f функция графигига уринма деб $(x_0; f(x_0))$ нуқтадан ўтувчи ва бурчак коэффициенти $f'(x_0)$ га тенг бўлган тўғри чизиқни айтилади.

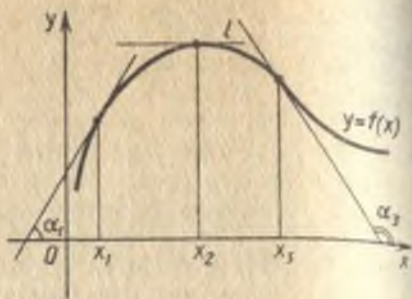
Парабола ҳолидагидек, x_0 нуқтада дифференциалланувчи f функциянинг графиги x_0 нуқтанинг кичик атрофида амалда уринма кесмасидан фарқ қилмайди. Ҳақиқатан, $f'(x_0)$ ҳосиланинг мавжудлиги кичик Δx лар учун

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \approx f'(x_0)$$

эканини билдиради, яъни $(x_0; f(x_0))$ ва $(x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x))$ нуқталардан ўтувчи кесувчининг $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ бурчак коэффициенти амалда урин-



75- расм



76- расм

манинг бурчак коэффициентига тенг (75- расм). Ана шунинг ўзи $(x; f(x))$ нуқталар кичик Δx ларда уринмага жуда яқин эканини билдиради.

$\Delta x \rightarrow 0$ да $\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow f'(x_0)$ шарт уринмани геометрик таърифлаш имконини беради. l уринма ҳам, ихтиёрый кесувчи ҳам графикнинг $A(x_0; f(x_0))$ нуқтасидан ўтади. Берилган A нуқтадан ўтувчи тўғри чизикни бир қийматли бериш учун унинг бурчак коэффициентини кўрсатишнинг ўзи етарли. Кесувчининг $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ бурчак коэффициенти $\Delta x \rightarrow 0$ да уринманинг $f'(x_0)$ бурчак коэффициентига интилади. Шу сабабли уринма кесувчининг $\Delta x \rightarrow 0$ даги лимит ҳолатидир дейишади.

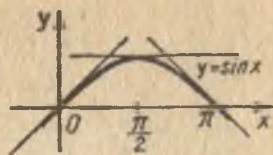
Уринманинг геометрик таърифини назарда тутиб, мана бундай хулоса чиқарамиз: f функциянинг x_0 нуқтада ҳосиласининг мавжуд бўлиши графикка $(x_0; f(x_0))$ нуқтада нўвертикал уринманинг мавжудлиги билан эквивалент, бунда уринманинг бурчак коэффициенти $f'(x_0)$ га тенг. Ҳосиланинг геометрик маъноси ана шундан иборат.

Бизга дифференциалланувчи функция графиги берилган бўлсин. f функция графигига $A(x_0; f(x_0))$ нуқтада уринмани яшаш учун чизгични A нуқта атрофида айлантириб, унинг шундай ҳолатини топиш керакки, бу ҳолатда график чизгич четига имкони борича зичроқ келсин. Чизгични шу ҳолатда қолдириб, уринмани ўтказамиз.

f функция графигига тахминан x_1 , x_2 ва x_3 нуқталарда уринмалар ясаймиз (76- расм) ва бу уринмаларнинг абсциссалар ўқи билан ҳосил қилган бурчакларини белгилаймиз. Уринманинг таърифига кўра f функциянинг x_0 нуқтадаги ҳосиласи уринманинг абсциссалар ўқига оғишиш бурчагининг тангенсига тенг. α_1 бурчак ўткир, α_2 бурчак эса ўтмас, l тўғри чизик эса Ox ўққа параллел, яъни l билан абсциссалар ўқи орасидаги бурчак нолга тенглигини кўраемиз. Ўткир бурчакнинг тангенси мусбат, ўтмас бурчакнинг тангенси эса манфий, шу сабабли:

$$f'(x_1) > 0, f'(x_2) = 0; f'(x_3) < 0.$$

Айрим нуқталарда уринмаларни ясаш функция графиклари эскизини аниқроқ чизиш имконини беради. Масалан, синус функция графиклини ясаш учун олдин синуснинг $0, \frac{\pi}{2}$ ва π нуқталардаги ҳосиласи



77-расм

мос равишда $1, 0$ ва -1 га тенг эканини топамиз. Бурчак коэффициентлари мос равишда $1, 0$ ва -1 га тенг бўлган ҳамда $(0; 0), (\frac{\pi}{2}; 1)$ ва $(\pi; 0)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқларни ясаймиз (77-расм). Бу тўғри чизиқлар ва Ox ўқдан ҳосил бўлган трапеция ичига x аргумент $0, \frac{\pi}{2}$ ва π га тенг бўлганда синуснинг графиклини тегишли тўғри чизиқларга уринадиган қилиб чизишгина қолади.

Нолнинг етарлича катта атрофида амалда синуснинг графикли $y = \sin x$ тўғри чизиқдан фарқ қилмаслигини қайд қиламиз. Масалан, ўқлар бўйича масштаблар бирликка 1 см кесма тўғри келадиган қилиб танлаб олинган бўлсин. У ҳолда

$$\sin 0,5 \approx 0,479425, \text{ яъни } |\sin 0,5 - 0,5| \approx 0,02$$

ва танлаб олинган масштабда бу узунлиги $0,2$ мм бўлган кесмага тўғри келади. Шу сабабли $y = \sin x$ функция графикли $(-0,5; 0,5)$ интервалда $y = x$ тўғри чизиқдан (вертикал йўналишда) $0,2$ мм ча четлашади, бу тахминан ўтказиладиган чизиқ қалинлигига тўғри келади.

2. Энди f функция графиклига $A(x_0; f(x_0))$ нуқтадаги уринма тенгламасини келтириб чиқарамиз.

Бурчак коэффициенти $f'(x_0)$ га тенг бўлган тўғри чизиқ тенгламаси

$$y = f'(x_0) \cdot x + b$$

куринишга эга. b ни ҳисоблаш учун уринманинг A нуқтадан ўтишидан фойдаланамиз:

$$f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b, \text{ бундан } b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$$

ва демак, уринманинг тенгламаси бундай:

$$y = f'(x_0) x - f'(x_0) \cdot x_0 + f(x_0)$$

ёки

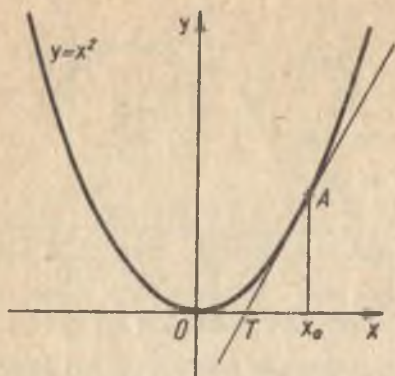
$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \quad (1)$$

1-мисол. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ функция графиклига абсциссаси 2 га тенг нуқтадаги уринма тенгламасини топамиз.

Бу мисолда $x_0 = 2, f(x_0) = f(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 1 = 1, f'(x) = 3x^2 - 4x, f'(x_0) = f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 = 4$. Бу сонларни (1) тенгламага қўйиб уринма тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$y = 1 + 4(x - 2), \text{ яъни } y = 4x - 7.$$

2-мисол. $y = x^2$ параболага x_0 абсциссали нуқтадаги уринма тенгламасини келтириб чиқарамиз.



78- расм

Ечилиши.

$$y(x_0) = x_0^2,$$

$$y'(x_0) = 2x_0.$$

Бу қийматларни уринманинг (1) тенгламасига қўйсак:

$$y = x_0^2 + 2x_0(x - x_0)$$

$$\text{яъни } y = 2x_0x - x_0^2.$$

Масалан, $x_0 = 1$ да тенгламаси $y = 2x - 1$ бўлган уринма ҳосил қиламиз.

$A(x_0; x_0^2)$ нуқтада параболага уринманинг Ox ўқ билан кесишиш нуқтаси T нинг координаталарини топамиз (78-расм). Агар

$(x_1; 0)$ шу T нуқтанинг координаталари бўлса, y ҳолда T нуқта уринмага тегишли бўлгани учун (ва демак, унинг координаталари уринма тенгламасини қаноатлантиради) ушбуга эга бўламиз:

$$0 = 2x_0x_1 - x_0^2.$$

Агар $x_0 \neq 0$ бўлса, y ҳолда $x_1 = \frac{x_0}{2}$.

Олинган натижа параболага унинг (учидан ташқари) исталган A нуқтасида уринма яшашнинг энг содда усулини беради: A нуқтани Ox ўқнинг учлари O ва x_0 бўлган кесмасини тенг иккига бўлувчи T нуқта билан туташтириш етарли: AT тўғри чизик изланаётган уринма бўлади.

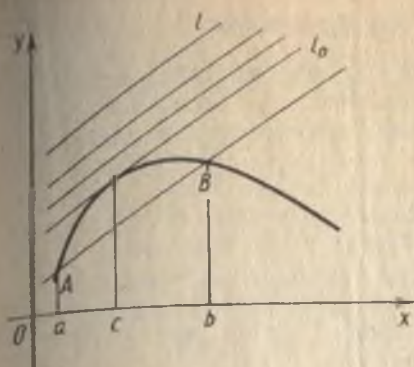
3. Ҳосиланинг геометрик маъноси математик анализнинг кўпгина фактларини аёний намоиш этиш имконини беради. Мисол келтирамиз.

Бирор оралиқнинг ҳар бир нуқтасида дифференциалланувчи f функцияни қараймиз: a ва b — шу оралиққа тегишли ихтиёрий нуқталар. $A(a; f(a))$ ва $B(b; f(b))$ нуқталар орқали AB тўғри чизик ўтказамиз ва f нинг графиги билан умумий нуқтага эга бўлмаган ҳамда AB га параллел бўлган l тўғри чизикни қараймиз. Шу l тўғри чизикни f нинг графиги йўналишида AB га параллеллигича қоладиган қилиб силжитамиз. Бу тўғри чизикнинг f нинг графиги билан умумий нуқтага эга бўладиган пайтдаги ҳолати l_0 ни белгилаймиз. 79-расмдан бундай «дастлабки» умумий нуқталардан исталгани l_0 нинг f функция графигига уриниш нуқтаси эканини кўрамиз. Бу нуқтанинг абсциссасини c билан белгилаймиз. У ҳолда

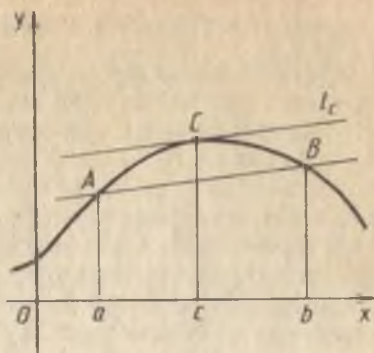
$$f'(c) = \operatorname{tg} \alpha,$$

бунда α бурчак l_0 тўғри чизик билан абсциссалар ўқи орасидаги бурчак. Аммо $l \parallel AB$, шу сабабли α бурчак AB кесувчининг сғмалик бурчагига тенг, яъни

$$f'(c) = \operatorname{tg} \alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



79- расм



80- расм

Биз $(a; b)$ интервалда

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

тенгликни қаноатлантирадиган шундай c нуқта топилишини кўрсатдик (80- расм).

Бу формула *Лагранж** формуласи дейилади.

Машқлар

322. f функция графигига кўрсатилган нуқтада ўтказилган уринманинг оғмалик бурчаги тангенсини топинг:

а) $f(x) = x^2$, $M(-3; 9)$;

б) $f(x) = x^3$, $M(-2; -8)$;

в) $f(x) = \frac{4x - x^2}{4}$, $M(0; 0)$;

г) $f(x) = -\frac{2}{x}$, $M(1; -2)$.

323. Қуйидаги эгри чизиқлар Ox ўқ билан кесишиш нуқталарининг ҳар бирида y билан қандай бурчак ҳосил қилади (шу бурчак тангенсини кўрсатинг)**:

а) $f(x) = x^2 - 3x + 2$;

б) $f(x) = x^3 - 3x$;

324. Эгри чизиқ Oy тўғри чизиқ билан қандай бурчак остида кесишади:

а) $y = \frac{1}{2}(x-1)^2$;

б) $y = \frac{1}{x-1}$;

325. f функция графигига кўрсатилган абсциссали нуқталарда ўтказилган уринманинг тенгламасини ёзинг:

а) $f(x) = x^2$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$;

б) $y = x^3$, $x = 2$;

в) $y = \frac{3}{x}$, $x = -1$, $x = 1$;

г) $y = \sqrt{x}$, $x = 4$.

*Лагранж Жозеф Луи (1736—1813) — француз математиги ва физиги.

** L_1 ва L_2 чизиқлар орасидаги улар кесишадиган P нуқтадаги бурчак деб P нуқтада шу чизиқларга ўтказилган уринмалар орасидаги бурчакка айтилади.

23. Тақрибий ҳисоблашлар учун формулалар

Қуйидаги масалани қараймиз: $\sin 1^\circ$ нинг тақрибий қийматини жадваллар ёки калькулятордан фойдаланмасдан ҳисобланг.

Геометрия курсида тўғри бурчакли учбурчакларнинг хоссаларидан фойдаланиб 30° ли, 45° ли, 60° ли ва ҳоказо бурчаклар синуслари қийматлари ҳисобланган эди. Аммо биз бурчаклар синусларини ҳисоблашнинг мазкур ҳолда фойдаланиш мумкин бўлган умумий усули билан ҳали таниш эмасмиз. Тўғри, 1° ли бурчакнинг нолга яқин эканини билганимиз ҳолда ва, синуснинг узлуксизлигидан фойдаланиб (бу эса 20-п. да исботланган синуснинг исталган нуқтада дифференциалланувчанлигидан келиб чиқади) $\sin 1^\circ$ учун синуснинг нолдаги тақрибий қийматини қабул қилсак бўлади:

$$\sin 1^\circ \approx \sin 0^\circ = 0.$$

Энди $\sin 1^\circ$ нинг қийматини топиб, ушбу тақрибий тенгликка эга бўламиз:

$$\sin 1^\circ \approx 0,0174524.$$

Бинобарин, синуснинг узлуксизлигига асосланиб топилган тақрибий қиймат анча қўпол — у ҳақиқий қийматдан деярли 0,02 га фарқ қилади.

Бу ҳолда x_0 нуқтада дифференциалланувчи f функция қийматини тақрибий ҳисоблашнинг умумий формуласидан фойдаланиш анча катта аниқлик беради. Бундай формулани чиқариш учун нолдан жуда кам фарқ қилувчи Δx ларда $f(x)$ нинг $[x_0 - h; x_0 + h]$ кичик кесмадаги графиги ($x_0; f(x_0)$) нуқтадан ўтиб функция графигига уринмага яқинлашишини пайқаймиз. Шу сабабли $f(x)$ нинг бу кесмадаги қийматлари графиги шу уринма хизматини ўтайдиган чизикли функция қийматларидан кам фарқ қилади. Уринманинг тенгламаси маълум:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Бинобарин, кичик Δx ларда $f(x)$ нинг қийматлари тақрибан

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \quad (1)$$

формула билан топилиши мумкин.

Агар x_0 нуқта шундай бўлсаки, $f(x_0)$ ва $f'(x_0)$ қийматларни ҳисоблаш қийин бўлмаса, у ҳолда (1) формула $f(x)$ нинг қийматларини x_0 га яқин x ларда топиш имконини беради. Масалан, юқорида қаралаётган масалада x_0 нуқта сифатида 0 қийматни олиш мумкин, чунки 0° ва 1° ли бурчаклар бир-биридан кам фарқ қилади. $f(x_0)$ ва $f'(x_0)$ қийматлар маълум: $f(0) = 0$ ва $f'(x) = \cos x$, шунинг учун ҳам $f'(0) = 1$. Энди 1° ни радиан ўлчовига ўтказиб, $1^\circ = \frac{\pi}{180} = 0,0174533$ эканини топамиз. (1) формула бўйича ушбуга эга бўламиз:

$$\sin 1^\circ \approx 0 + 1 \cdot \frac{\pi}{180} \approx 0,0174533.$$

Бу қиймат топилган қийматдан 0,000001 дан камроқ фарқ қилади. яъни $\sin 1^\circ \approx 0,0174533$ яқинлашишнинг абсолют хатаси 0,000001 дан кичик. Ушбу тақрибий формулаларни чиқарамиз:

$$\sqrt{1+\Delta x} \approx 1 + \frac{1}{2}\Delta x \quad (2)$$

ва

$$(1 + \Delta x)^n \approx 1 + n\Delta x, \quad n — \text{бутун сон.} \quad (3)$$

(2) формулани келтириб чиқариш учун $f(x) = \sqrt{x}$ функция. нн оламиз ва $x_0 = 1$ ҳамда $x = x_0 + \Delta x = 1 + \Delta x$ бўлганда тақрибий (1) формуладан фойдаланамиз, яъни: $f(x_0) = \sqrt{1} = 1$ ва

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \text{бундан } f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}. \quad (1) \text{ формулага}$$

биноан:

$$f(x) = \sqrt{1 + \Delta x} \approx 1 + \frac{1}{2}\Delta x.$$

1-мисол. а) $\sqrt{1,06}$; б) $\sqrt{4,08}$ нинг тақрибий қийматларини ҳисоблаймиз. (2) формуладан фойдаланамиз:

$$\text{а) } \sqrt{1,06} = \sqrt{1+0,06} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot 0,06 = 1,03;$$

$$\text{б) } \sqrt{4,08} = 2\sqrt{1,02} \approx 2 \left(1 + \frac{1}{2} \cdot 0,02 \right) = 2,02.$$

(3) формулани келтириб чиқариш учун $f(x) \approx x^n$ функцияни қараймиз ва $x_0 = 1$ ва $x = x_0 + \Delta x = 1 + \Delta x$ да (1) формуладан фойдаланамиз, яъни: $f(x_0) = 1^n = 1$ ва $f'(x) = nx^{n-1}$, бундан $f'(x_0) = f'(1) = n \cdot 1^{n-1} = n$. (1) формулага биноан:

$$f(x) = (1 + \Delta x)^n \approx 1 + n\Delta x.$$

2-мисол. $(1,001)^{100}$ нинг тақрибий қийматини ҳисоблаймиз:

1,001 сонни бевосита 100 даражага кўтариш жуда катта ҳисоблашларни талаб қилиши тушунарли. (3) формуладан фойдаланиш ишни анча соддалаштиради. Бу формулада $\Delta x = 0,001$ ва $n = 100$ деб олиб, топамиз:

$$1,001^{100} = (1 + 0,001)^{100} \approx 1 + 100 \cdot 0,001 = 1,10.$$

$1,001^{100}$ нинг калькулятор билан ҳисобланган қиймати 1,10512 га тенг.

3-мисол. $\frac{1}{(0,997)^{30}}$ нинг тақрибий қийматини ҳисоблаймиз. $n = -30$ да (3) формуладан фойдаланамиз:

$$\frac{1}{(0,997)^{30}} = (1 - 0,003)^{-30} \approx 1 + (-30)(-0,003) = 1 + 0,09 = 1,09.$$

Машқлар

326. а) $\sin 0,02$; б) $\lg 0,02$; в) $\sin\left(\frac{\pi}{4} - 0,04\right)$; г) $\cos\left(\frac{\pi}{6} + 0,02\right)$ нинг тақрибий қийматларини (1) формуладан фойдаланиб ҳисобланг.
327. а) $\sqrt{1,004}$; б) $\sqrt{0,994}$; в) $\sqrt{26}$; г) $\sqrt{15,84}$ нинг тақрибий қийматларини (2) формуладан фойдаланиб ҳисобланг.
328. а) $1,002^{100}$; б) $0,998^{20}$; в) $1,0003^{200}$; г) $2,997^{50}$ нинг тақрибий қийматларини (3) формуладан фойдаланиб ҳисобланг. Тақрибий қийматларини топинг (329 — 331):
329. а) $\frac{1}{(1,003)^{20}}$; б) $\frac{1}{(0,998)^{40}}$; в) $\frac{1}{0,9994}$; г) $\frac{1}{\sqrt{1,04}}$.
330. а) $\sin 31^\circ$; б) $\sin 29^\circ$; в) $\cos 61^\circ$; г) $\cos 59^\circ$.
331. а) $\lg 31^\circ$; б) $\lg 29^\circ$; в) $\lg 44^\circ$; г) $\lg 46^\circ$.

24. Физика ва техникада ҳосила

Физика курсида ҳаракат тезлиги қандай аниқланганлигини эсла-тиб ўтамиз. Энг содда ҳолни қараймиз: моддий нуқта координата тўғри чизиги бўйлаб ҳаракат қилмоқда, бунда ҳаракат қонуни берил-ган, яъни бу нуқтанинг x координатаси t вақтнинг маълум функция-си $x(t)$ дан иборат. t_0 дан $t_0 + \Delta t$ гача вақт оралиғида нуқтанинг силжиши $x(t_0 + \Delta t) - x(t_0) = \Delta x$ га, унинг ўртача тезлиги эса

$$v_{\text{ор.}}(\Delta t) = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (1)$$

га тенг.

$\Delta t < 0$ да ҳам (1) формула ўринли: силжиш $x(t_0) - x(t_0 + \Delta t) = -\Delta x$, вақт оралиғининг давомлилиги эса $-\Delta t$ га тенг.

Одатда, ҳаракат характери шундайки, кичик Δt ларда ўртача тезлик амалда ўзгармайди, яъни катта аниқликдаги ҳаракатни текис ҳаракат деб ҳисоблаш мумкин (14-пунктдаги 3-мисолга қ.). Бош-қача қилиб айтганда, $\Delta t \rightarrow 0$ ўртача тезликининг қиймати бирор тўла аниқланган қийматга интилади, уни ўша нуқтанинг вақтнинг t_0 моментидаги $v(t_0)$ *оний тезлиги* дейилади. Шундай қилиб,

$$\Delta t \rightarrow 0 \text{ да } v_{\text{ор.}}(\Delta t) = \frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow v(t_0).$$

Аммо ҳосиланинг таърифига кўра:

$$\Delta t \rightarrow 0 \text{ да } \frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow x'(t_0).$$

Шу сабабли $v(t)$ оний тезлик (фақат) ҳар қандай дифференци-алланувчи $x(t)$ функция учун аниқланган деб ҳисоблашади, бунда

$$v(t) = x'(t). \quad (2)$$

Қисқача бундай дейишади: *координатадан вақт бўйича олинган ҳосила тезликдир*. Ҳосиланинг механик мазмунини шундан иборат.

Олий тезлик мусбат қийматларни ҳам, манфий қийматларни ҳам, албатта, 0 қийматни ҳам қабул қила олади. Агар тезлик вақтнинг бирор $(t_1; t_2)$ ораллиғида мусбат бўлса, у ҳолда нуқта мусбат йўналишда ҳаракат қилади, яъни вақт ўтиши билан $x(t)$ координата ўсади, агар $v(t)$ манфий бўлса, у ҳолда $x(t)$ координата камаяди.

▼ Аниқ мураккаброқ ҳолларда нуқта текисликда ёки фазода ҳаракат қилади. У ҳолда тезлик вектор катталик бўлади ва (2) формула ёрдамида $v(t)$ векторнинг ҳар бир координатаси аниқланади. ▼

Ҳаракат тезланиши билан ҳам шундай бўлади. Нуқта ҳаракатининг v тезлиги t вақтнинг функциясидир, яъни $v = v(t)$. Бу функциянинг ҳосиласи ҳаракат тезланиши дейилади:

$$a = v'(t).$$

Қисқача бундай дейилади: *тезликдан вақт бўйича олинган ҳосила тезланишидир*.

1-мисол. Моддий нуқтанинг тушишини қараймиз. Агар координата тўғри чизигини пастга вертикал йўналтирсак, моддий нуқтанинг бошланғич ҳолати эса 0 билан устма-уст тушса, у ҳолда, физикадан маълумки,

$$x(t) = \frac{gt^2}{2}.$$

У ҳолда t вақт моментида нуқтанинг тушиш тезлиги

$$v = \left(\frac{gt^2}{2}\right)' = gt,$$

тезланиши эса

$$a = (gt)' = g$$

бўлиб, ўзгармас миқдордир.

Умумийроқ ҳолни қараймиз.

2-мисол. Тўғри чизик бўйлаб ҳаракат қилаётган нуқта координаталарининг вақтга боғлиқлиги

$$x(t) = \frac{a}{2} t^2 + v_0 t + x_0$$

формула билан ифодалансин. бунда $a \neq 0$, v_0 ва x_0 — ўзгармаслар. Ҳаракат тезлиги ва тезланишини топамиз.

Ечилиши. Бу ҳаракатнинг тезлигини топамиз:

$$v = x'(t) = \left(\frac{a}{2} t^2 + v_0 t + x_0\right)' = 2 \cdot \frac{a}{2} t + v_0 = at + v_0$$

Бизга ҳаракат тезлиги вақтнинг функцияси эканлиги маълум бўлганидан биз бу ҳаракатнинг тезланишини топишимиз мумкин:

$$v'(t) = (at + v_0)' = a.$$

Квадратик қонун бўйича ҳаракатда тезланиш ўзгармас ва a га тенг эканини кўрамиз. Агар $a > 0$ бўлса, бу текис тезланувчан ҳаракат, агар $a < 0$ бўлса, текис секинланувчан ҳаракат бўлади. Шунингдек, $v_0 = v(0)$, $x_0 = x(0)$ эканини ҳам қайд қиламиз.

III бобда биз, агар тўғри чизиқ бўйлаб ҳаракатда a тезланиш ўзгармас бўлса, у ҳолда ҳаракат

$$x(t) = \frac{a}{2} t^2 + v_0 t + x_0$$

квадратик қонун бўйича юз беришини исботлаймиз, бунда v_0 — нуқтанинг бошланғич тезлиги, x_0 эса бошланғич координата.

2. $y = f(x)$ — ихтиёрий дифференциалланувчи функция бўлсин. У ҳолда биз моддий нуқтанинг координаталар тўғри чизиғи бўйича $x = f(t)$ қонун бўйича содир бўладиган ҳаракатини қарай оламиз. Ҳосиланинг механик маъноси дифференциал ҳисоб теоремаларини кўрсатмали интерпретациялашга имкон беради.

3-мисол. f ва g — иккита дифференциалланувчи функция бўлсин. Қуйидаги тўғри чизиқ бўйлаб (нисбий) ҳаракатни қараймиз. Поезд билан боғлиқ бўлган ҳаракатнинг қўзғалувчан координаталар системаси берилган, бу системанинг боши (машинист кабинаси) қўзғалмас координаталар боши (станция) га нисбатан $x_1 = f(t)$ қонун бўйича ҳаракат қилади. Қўзғалувчан координаталар системаси (поезд) да моддий нуқта $x_2(t) = g(t)$ қонун бўйича ҳаракат қилади. У ҳолда бу нуқтанинг x координатаси қўзғалмас координаталар системасига нисбатан $x = x_1 + x_2$, унинг тезлиги эса $v(t) = x'(t)$ бўлади. Иккинчи томондан, тезликларни қўшиш қонунига биноан

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) = x'_1(t) + x'_2(t).$$

Шундай қилиб, биз ҳосиланинг механик маъноси ёрдамида маълум

$$(f + g)' = f' + g'$$

формулани ҳосил қилдик.

4-мисол. Моддий нуқта координата тўғри чизиғи бўйлаб

$$x = f(t)$$

қонунга мувофиқ ҳаракат қилсин. У ҳолда унинг $a \leq t \leq b$ оралиқдаги ўртача тезлиги

$$v_{\text{орт.}} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

га тенг.

$[a; b]$ оралиқ нуқталарида $v(t)$ оний тезлик ҳамма вақт ҳам ўртача тезликдан кичик (катта) бўлавермайди. Демак, бирор $t_0 \in [a; b]$ моментда оний тезлик ўртача тезликка тенг, яъни шундай $t_0 \in (a; b)$ топиладики,

$$v(t_0) = f'(t_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (3)$$

тегслик ўринли бўлади.

Шундай қилиб, биз Лагранж формуласининг механик интерпретациясини ҳосил қилдик.

Физик ҳодисаларни характерловчи функцияларнинг ҳосилалари ёрдамида бошқа физик катталиклар ҳам берилади. Масалан, қувват (таърифи бўйича) ишдан вақт бўйича олинган ҳосиладир. Яна битта мисол қараймиз.

5-мисол. Бир жинсли бўлмаган стержень берилган, бунда унинг исталган l узунликдаги бўлагининг массаси $m(l)$ маълум бўлсин (l стерженнинг белгиланган учидан бошлаб ҳисобланади). Стержень бир жинсли бўлмаса-да, унинг унчалик катта бўлмаган (l дан $l + \Delta l$ гача бўлган) қисмининг зичлиги тахминан бир хил деб ҳисоблаш табиий, бунда Δl қанча кичик бўлса, бу оралиқда зичлиқнинг ўзгариш оралиқлари ҳам шунча кам бўлади. Шу сабабли стерженда зичлик тақсимотини l га боғлиқ характеристикаси учун $a(l) = m'(l)$ чизиқли зичлик қабул қилинади.

Ҳосиланинг физика ва механикада қўлланишига доир бошқа мисоллар билан сиз масалалар ечиш давомида танишасиз.

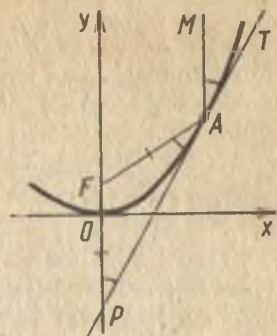
▼ 6-мисол. Параболанинг оптика ва техникада қўлланиладиган ҳосасини келтириб чиқарамиз.

$y = ax^2$ параболани Oy ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўладиган сирт айланиш *параболоиди* дейилади. Параболоиднинг ички сирти кўзгу сирт ва бу парабolik кўзгу Oy ўққа параллел ёруғлик нури дастаси билан ёритилади деб тасаввур қилайлик.

Бу кўзгунинг Oy ўқ орқали ўтувчи α текислик билан кесишишдан ҳосил бўлган кесимини қараймиз. Бу кесим ҳам худди $y = x^2$ каби параболани тасвирлайди (Ox ўқни кесишиш текислигида танлаймиз ва $a = 1$ деб оламиз). Оптика қонунларига биноан ёруғликнинг аксланган нури α текисликда ётади, бунда у нур параболога ўтказилган уринма билан тушувчи MA нур ташкил қилган бурчакка тенг бурчак ташкил қилади (81-расм).

Биз Oy ўққа параллел бўлган ҳамма нурлар акслантирилганидан кейин Oy ўқнинг битта нуқтасида кесишишини исботлаймиз.

Ихтиёрый қайтган нурнинг Oy ўқ билан кесишиш нуқтасини F билан белгиланамиз. AT тўғри чизиқ параболога A нуқтада ўтказилган уринма. Нурнинг қайтиш қонунларидан (81-расмга қ.) $\angle TAM = \angle FAP$ экани дарҳол келиб чиқади. Аммо MA нур Oy ўққа параллел, шу сабабли $\angle FPA = \angle TAM$ (мас томонлари параллел бурчаклар бўлганидан). Бинобарин, $\angle FPA = \angle FAP$, яъни FPA учбурчак тенг ёнли ва $FA = FP$. $A(x_0; y_0)$ нуқта параболода ётади, шу сабабли $y_0 = x_0^2$. AT уринманинг тенгламаси бундай кўринишда бўлади:



81- расм

$y = 2x_0 x - x_0^2$, бундан P нуқтанинг y_p ординатасини топамиз: $y_p = 2x_0 \cdot 0 - x_0^2$, яъни $y_p = -y_0$. Агар F нуқтанинг ординатасини y билан белгиласак, у ҳолда $FP = y + y_0$ ва FA нинг узунлиги $FA = \sqrt{x_0^2 + (y_0 - y)^2}$ га тенг, шунинг учун ҳам ($FA = FP$ эканини эсга олайлик) $(y + y_0)^2 = x_0^2 + (y_0 - y)^2$ тенглик ўринли, яъни $y^2 + 2yy_0 + y_0^2 = y_0^2 + y_0^2 - 2yy_0 + y^2$, бундан $4yy_0 = y_0^2$ ва ($y_0 \neq 0$ бўлгани учун) $y = \frac{y_0}{4}$.

Бу парабolik кўзгуниг ўқиға параллел ҳамма нурлар қайтгандан кейин битта нуқтада учрашишини билдиради, бу нуқтани парабolik кўзгуниг фокуси дейилади. (Шунингдек, F нуқтани $y = x^2$ параболаниг ҳам фокуси дейилади.)

Параболтик телескопларниг қурилиши шу хоссаға асосланилган. Узоқ юлдузларниг нурлари бизға параллел нурлар дастаси каби келади. Параболтик телескоп қуриб ва унинг фокусига фотопластинка жойлаштирилса, биз юлдузлардан келаётган ёруғлик сигналларини кучайтириш имконига эға бўламиз. Радиосигналларни парабolik антенналар қуриш билан кучайтириш имкони ҳам худди шу принципға асосланган.

Агар парабolik кўзгуниг фокусига ёруғлик манбаи жойлаштирилса, у ҳолда бу манбадан чиқиб, кўзгу сиртидан қайтган нурлар тарқалмайди, балки кўзгу ўқиға параллел бўлган ингичка дастаға тўпланади. Проекторлар ва фонарлар ҳар хил проекторлар тайёрлашда мана шу факт татбиқ этилади ва юқоридаги асбобларниг кўзгулари параболоидлар шаклида тайёрланади. ▼

Машқлар

332. Бир киши баландлиги 60 м бўлган минора тагидан 8 км/соат тезлик билан узоқлашмоқда. Шу киши минора асосидан 80 м нарида бўлганда минора учидан узоқлашиш тезлиги қандай бўлади?

333. Жисм ўқ атрофида

$$\varphi(t) = 3t^2 - 4t + 2$$

қонун бўйича айланади. Вақтнинг ихтиёрий t пайтидаги ва $t = 4$ бўлгандаги $\omega(t)$ бурчак тезлигини топинг. (φ — айланиш бурчаги, радианларда, ω радиан секунддаги тезлик, t вақт секундларда).

334. Тормозланаётган маховик t вақтда $\varphi(t) = 4t - 0.3t^3$ бурчакка бурилади. 1) Маховик айланишининг $t = 2$ с пайтдаги тезлиги $\omega(t)$ ни топинг; 2) қайси пайтда маховик тўхтади. ($\varphi(t)$ — бурчак радианларда, t — вақт, секундларда).

335. Нуқта

$$x(t) = 2t^3 + t - 1$$

қонун бўйича тўғри қизиқли ҳаракат қилсин. t вақт пайтдаги тезланишни топинг. Вақтнинг қайси пайтида тезланиш

- а) 1 см/с^2 ; б) 2 см/с^2 бўлади? ($x(t)$ — силжиш, сантиметрларда, t — вақт, секундларда)
336. Массаси 2 кг бўлган жисм $x(t) = t^2 + t + 1$ қонун бўйича тўғри чизиқли ҳаракат қилади. x координата сантиметрлар билан, t вақт секунд билан ўлчанади. 1) Таъсир қилувчи кучни топинг; 2) жисм ҳаракат бошлагандан 2 секунд кейинги кинетик энергияси E ни топинг.
337. 20 см узунликдаги AB стерженнинг A нуқтадан $l \text{ см}$ масофада ётувчи истаган C нуқтаси учун стержен AC бўлагининг массаси грамм ҳисобида $m(l) = 3l^2 + 5l$ формула билан ҳисобланиши маълум бўлсин. а) Стержен AB кесмасининг ўртасидаги чизиқли зичлигини; б) стерженнинг B учидаги чизиқли зичлигини топинг.
338. $x(t) = 2t^3 - t^2$ қонун бўйича тўғри чизиқли ҳаракат қилаётган m массали моддий нуқтага $t = 2$ пайтда таъсир қилувчи F кучни топинг.
339. Нуқта $x(t) = 1$ қонун бўйича тўғри чизиқли ҳаракат қилади. Унинг тезланиши тезлигининг кубига пропорционал эканини кўрсатинг.
340. Нуқта $x(t) = -\frac{t^3}{6} + 3t^2 - 5$ қонун бўйича тўғри чизиқли ҳаракат қилаётган бўлсин (вақт секунд билан, координата метр билан ўлчанади). 1) Нуқтанинг тезланиши нолга тенг бўлгандаги t пайтни топинг; 2) нуқта шу пайтда қандай тезлик билан ҳаракат қилади?
341. Иккита моддий нуқта тўғри чизиқ бўйлаб $x_1(t) = 4t^2 - 3$ ва $x_2(t) = t^3$ қонун билан ҳаракат қилмоқда. Қандай вақт оралиғида биринчи нуқтанинг тезлиги иккинчи нуқтанинг тезлигидан ортиқ бўлади?

7-§. ФУНКЦИЯЛАРНИ ТЕКШИРИШГА ҲОСИЛАНИНГ ТАТБИҚИ

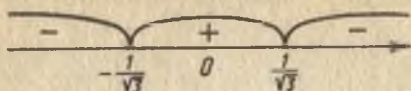
25. Функциянинг ўсиш (камайиш) аломати

4-пунктда сиз функцияларни текширишнинг асосий вазифаларидан бири унинг ўсиш ва камайиш оралиқларини топишдан иборат эканини кўрган эдингиз. Бундай текширишни ҳосила ёрдамида ўтказиш осон. Тегишли тасдиқларни ифодалаймиз.

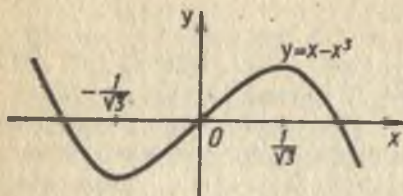
Функция ўсишининг етарли аломати. *Агар I интервалнинг ҳар бир нуқтасида $f'(x) > 0$ бўлса, у ҳолда f функция I да ўсади.*

Функция камайишининг етарли аломати. *Агар I интервалнинг ҳар бир нуқтасида $f'(x) < 0$ бўлса, у ҳолда f функция I да камаяди.*

Бу аломатларнинг исботи Лагранж формуласи асосида ўтказилди (22-пунктга қ.) I интервалдан иккита ихтиёрий x_1 ва x_2 сонни оламиз. $x_1 < x_2$ бўлсин. Лагранж формуласига кўра шундай $\xi \in (x_1, x_2)$ сон мавжудки,



82- расм



83- расм

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) \quad (1)$$

бўлади. x_1 ва x_2 нуқталар I га тегишли бўлганидан c сон I интервалга тегишли. Агар I да $f' > 0$ бўлса, у ҳолда $f'(c) > 0$ ва шунинг учун $f(x_1) < f(x_2)$ — бу (1) формуладан келиб чиқади, чунки $x_2 - x_1 > 0$. Бу билан f нинг I да ўсиши исботланди. Агар I да $f' < 0$ бўлса, у ҳолда $f'(c) < 0$ ва шунинг учун $f(x_1) > f(x_2)$ — бу (1) формуладан келиб чиқади, чунки $x_2 - x_1 > 0$. Бу билан f функциянинг I да камайиши исботланди.

▼ Бу аломатларнинг аёний мазмуни қуйидаги физик мулоҳазалардан равшан (аниқлик учун ўсиш аломатини қараймиз). Ординаталар ўқи бўйича ҳаракатланаётган нуқта вақтнинг t пайтида $y = f(t)$ координатага эга бўлсин. У ҳолда бу нуқтанинг вақтнинг t пайтидаги тезлиги $f'(t)$ га тенг бўлади (24-пунктга қ.) Агар I оралиқнинг ҳар бир t моментида $f'(t) > 0$ бўлса, у ҳолда нуқта ординаталар ўқи бўйлаб мусбат йўналишда ҳаракат қилади, яъни агар $t_1 < t_2$ бўлса, у ҳолда $f(t_1) < f(t_2)$. Бу эса f функция I оралиқда ўсувчи эканини билдиради. ▼

1-мисол. $f(x) = x - x^3$ функциянинг ўсиш (камайиш) оралиқларини топамиз ва унинг графигини ясаймиз.

Ечилиши. Бу функция барча ҳақиқий сонлар тўпламида аниқланган.

$$f'(x) = 1 - 3x^2$$

тенгликдан, агар $1 - 3x^2 > 0$ бўлса, $f'(x) > 0$ экани келиб чиқади. Бу тенгсизликни интерваллар методи ёрдамида ечиб (82-расм), $(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}})$ интервалда $f'(x) > 0$ эканини топамиз, ва, демак, шу интервалда f функция ўсади.

Шунга ўхшаш $(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}})$ ва $(\frac{1}{\sqrt{3}}; \infty)$ интервалларда $f'(x) < 0$, шу сабабли бу интервалларда f функция камаяди.

Сўнгра f нинг $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ ва $\frac{1}{\sqrt{3}}$ нуқталардаги қийматларини ҳисоблаймиз:

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}} - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 = -\frac{2}{3\sqrt{3}};$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Координаталар текислигида $M\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$ ва $M\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$ нуқталарни белгилаймиз, сўнгра $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ оралиқда ўсувчи ҳамда $\left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ва $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \infty\right)$ оралиқларда камаювчи функция графигини ясаймиз (83-расм).

1-мисолдаги f функция $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ ва $\frac{1}{\sqrt{3}}$ нуқталарда узлуксиз, $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ оралиқда ўсувчи, $\left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ва $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}; \infty\right)$ оралиқларда камаювчи экани 83-расмдан кўриниб турибди.

1-эслатма. Агар f функция ўсиш (камаиш) оралиғининг охирларидан бирортасида узлуксиз бўлса, уни (1-мисолдаги $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ ва $\frac{1}{\sqrt{3}}$ каби) шу оралиққа бирлаштириш мумкин. Биз бу фактни исботсиз қабул қиламиз.

2-эслатма. $f' > 0$ ва $f' < 0$ тенгсизликларни ечиш учун қуйидаги усулдан фойдаланиш қулай: ҳосила 0 га тенг ёки мавжуд бўлмаган нуқталар f функциянинг аниқланиш соҳасини шундай оралиқларга бўладики, бу оралиқларнинг ҳар бирида f' ишорасини ўзгаришсиз сақлайди. Бунини оралиқнинг бирор нуқтасида f' нинг қийматини ҳисоблаш билан аниқлаш мумкин. f' бу оралиқларда узлуксиз бўлган ҳолда бундай усулни татбиқ этишнинг қонунийлиги 21-пунктдан келиб чиқади.

2-мисол. $f(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$ функциянинг ўсиш (камаиш) оралиқларини топамиз ва унинг графигини ясаймиз.

Ечилиши. Бу функциянинг аниқланиш соҳаси $(-\infty; 0)$ ва $(0; \infty)$ оралиқларнинг бирлашмасидан иборат;

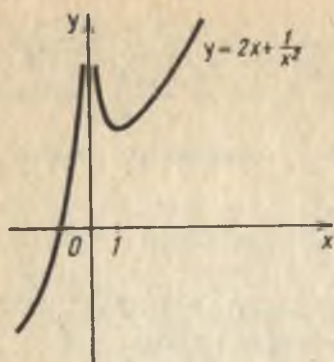
$$f'(x) = 2 - \frac{2}{x^3}$$

бўлгани учун $x = 1$ да $f'(x) = 0$. 0 ва 1 нуқталар f функциянинг аниқланиш соҳасини учта оралиққа бўлади: $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$ ва $(1; \infty)$. 2-эслатмага мувофиқ бу оралиқларнинг ҳар бирида f' ишорасини ўзгаришсиз сақлайди. Бу оралиқларнинг ҳар биридаги ҳосиланинг ишораси 84-расмда белгиланган.

Демак, берилган функция $(-\infty; 0)$ ва $(1; \infty)$ интервалларда ўсади. f функция 1 нуқтада узлуксиз бўлгани учун, бу нуқтани (1-эслатмага асосан) f функция ўсувчи бўлган оралиққа бирлаштириш мумкин. Хулоса қилиб, f функция $(-\infty; 0)$ ва $[1; \infty)$ оралиқларда ўсишини топамиз. Сўнгра $(0; 1)$ интервалда $f'(x) < 0$ ва шунинг учун (1-эслатмани ҳи-



84-расм



85- расм

собга олган ҳолда) f функция $(0;1]$ ораллиқда камаяди.

0 нуқта $D(f)$ га қирмайди, аммо x нолга интилганда $\frac{1}{x^2}$ қўшилувчи чексиз ўсади. Шунинг учун f функциянинг қийматлари ҳам чексиз ўсади. 1 нуқтада функция 3 қийматни олади.

Энди координата текислигида $M(1; 3)$ нуқтани белгилаймиз, ҳамда $(-\infty; 0)$ ва $[1; \infty)$ ораллиқларда ўсувчи, $(0, 1)$ ораллиқда камаювчи функция графигини ясаймиз (85- расм).

Машқлар

Функциянинг ўсиш ва камайиш ораллиқларини аниқланг (342—345):

342. а) $f(x) = 3x + 1$; б) $g(x) = -4x + 2$;

в) $f(x) = \frac{1}{3}x - 1$; г) $g(x) = -\frac{1}{4}x - 2$.

343. а) $f(x) = \frac{2}{x}$; б) $g(x) = -\frac{1}{3x}$; в) $f(x) = \frac{2}{3-x}$;

г) $q(x) = 2 - \frac{4}{0,5x - 1}$.

344. а) $v(x) = x^2$;

б) $f(x) = (x - 1)^2$;

в) $y(x) = 5x^2 - 3x + 1$;

г) $f(x) = x^2 - 2x + 5$.

345. а) $h(x) = x^3 - 27x$;

б) $u(x) = x^2(x - 3)$;

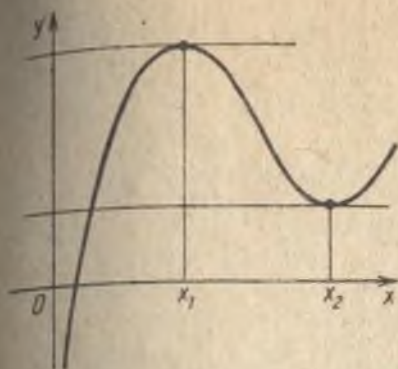
в) $h(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$; г) $g(x) = 2 - 9x + 3x^2 - x^3$.

26. Функциянинг критик нуқталари, унинг максимум ва минимумлари

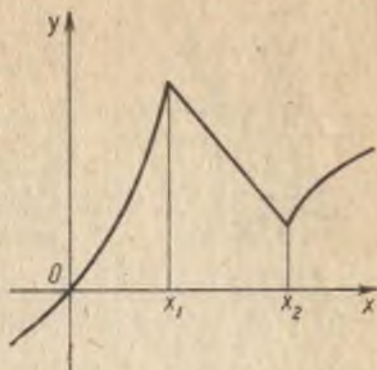
Функция аниқланиш соҳасининг ҳосила нолга тенг бўладиган ёки мавжуд бўлмайдиган ички нуқталари бу функциянинг *критик нуқталари* дейилади. Бу нуқталар функция графигини яшашда муҳим роль ўйнайди, чунки шу нуқталаргина унинг экстремум нуқталари бўла олади (86 ва 87-расмлар). Тегишли тасдиқни ифода-лаймиз — уни *Ферма** теоремаси дейилади.

Экстремумнинг зарурий шарти. *Агар x_0 нуқта f функциянинг экстремум нуқтаси бўлса ва бу нуқтада f' ҳосила мавжуд бўлса, у нолга тенг: $f'(x_0) = 0$.*

* Бу теорема француз математиги Пьер Ферма (1601—1665) томонидан кашф қилинган.



86- расм



87- расм

Агар $f'(x_0) \neq 0$ бўлса, у ҳолда x_0 нуқта экстремум нуқтаси бўла олмаслигини исботлаш етарли. Ҳосиланинг таърифига кўра x_0 га яқин барча x лар учун олдиндан берилган ҳар қандай h аниқликда

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \approx f'(x_0).$$

Агар $f'(x_0) > 0$ бўлса, $h < f'(x_0)$ деб олиб, x_0 га яқин барча x ларда

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$$

ни ҳосил қиламиз. Энди, агар $x > x_0$ бўлса $f(x) > f(x_0)$ эканини кўраемиз ва, демак, x нуқта f учун максимум нуқтаси бўла олмайди. x нуқтани $x < x_0$ тенгсизлик ўринли бўладиган қилиб олиб, $f(x) < f(x_0)$ га эга бўламиз, демак x нуқта f нинг минимум нуқтаси ҳам бўла олмайди. $f'(x_0) < 0$ ҳол ҳам шунга ўхшаш таҳлил қилинади.

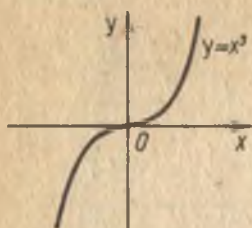
Ферма теоремаси экстремумнинг фақат зарурий шарти эканини таъкидлаш муҳим: ҳосиланинг x_0 нуқтада нолга айланишидан функция шу нуқтада албатта экстремумга эгаллиги келиб чиқмайди. Масалан, x^3 функциянинг ҳосиласи 0 нуқтада нолга айланади, аммо функция бу нуқтада экстремумга эга эмас (88-расм).

Ҳозиргача биз ҳосила нолга тенг бўлган критик нуқталарни қарадик. Энди ҳосила мавжуд бўлмайдиган критик нуқталарни қараймиз. Бу нуқталарда ҳам функция экстремумга эга бўлиши ёки эга бўлмаслиги мумкин.

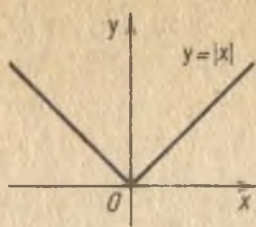
1-мисол. $f(x) = |x|$ функцияни қараймиз (89-расм). Бу функция 0 нуқтада ҳосилага эга эмас. Демак, бу критик нуқта. Равшанки, 0 нуқтада функция минимумга эга.

2-мисол. $f(x) = 2x + |x|$ функцияни қараймиз (90-расм). Графикдан бу функция 0 нуқтада экстремумга эга эмаслиги кўриниб турибди. Бу нуқтада функция ҳосилага ҳам эга эмас.

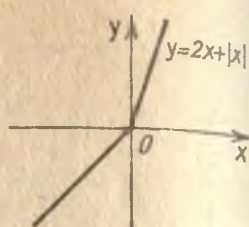
Ҳақиқатан ҳам, агар f функция 0 нуқтада ҳосилага эга деб фарз қилинса, у ҳолда $f(x) = 2x$ ҳам 0 нуқтада ҳосилага эга бўлади.



88- расм



89- расм



90- расм

Аммо $f(x) = 2x = |x|$. $|x|$ функция эса 0 нуқтада дифференциалланувчи эмас (17-пунктга қаранг), яъни биз зидликка келдик. Демак, f функция 0 нуқтада ҳосилага эга эмас.

Ферма теоремасидан функциянинг экстремум нуқталарини топишда биринчи навбатда унинг критик нуқталарини топиш талаб қилиниши келиб чиқади. Аммо, қаралган мисоллардан кўриниб турибдики, берилган критик нуқта ҳақиқатан ҳам экстремум нуқта бўладими, деган савол қўшимча текширишни талаб қилади. Бунда кўпинча нуқтада экстремум мавжудлигининг қуйидаги етарли шартлари ёрдам беради.

Функция максимуми аломати. *Агар f функция x_0 нуқтада узлуксиз бўлиб, $(a; x_0)$ интервалда $f'(x) > 0$ ва $(x_0; b)$ интервалда $f'(x) < 0$ бўлса, у ҳолда x_0 нуқта f функциянинг максимум нуқтаси бўлади.*

Бу аломатнинг соддалаштирилган ифодасидан фойдаланиш қулай: *агар x_0 нуқтада ҳосила ишорасини плюстан минусга ўзгартирса, у ҳолда x_0 максимум нуқтаси бўлади.*

Исботи. $(a; x_0)$ интервалда ҳосила $f' > 0$, функция эса x_0 нуқтада узлуксиз, демак, (25-пунктга қ.) функция $(a; x_0)$ оралиқда ўсади ва шу сабабли $(a; x_0)$ интервалга тегишли барча x лар учун $f(x) < f(x_0)$.

$(x_0; b)$ оралиқда f функция камаяди (исботи олдингига ўхшаш) ва шу сабабли $(x_0; b)$ интервалга тегишли барча x лар учун $f(x) < f(x_0)$.

Шундай қилиб, $(a; b)$ интервалга тегишли барча $x \neq x_0$ лар учун $f(x) < f(x_0)$, яъни x_0 нуқта f функциянинг максимум нуқтасидир.

▼ Максимум аломати оддий механик маънога эга. Биз $f(x)$ ни *Оу* ўқ бўйлаб ҳаракат қилаётган нуқтанинг вақтнинг x пайтидаги координатаси, $f'(x)$ нуқтанинг шу пайтдаги тезлиги деб ҳисоблашимиз мумкин. Шартга кўра нуқтанинг тезлиги x_0 дан олдин келувчи вақт оралигида мусбат. Шу сабабли, бу вақт давомида нуқта мусбат йўналишда ҳаракат қилади, у *Оу* ўқ бўйлаб $f(x_0)$ нуқтагача кўтарилади, яъни $x < x_0$ да $f(x) < f(x_0)$. x_0 моментда нуқта бир он тўхтади (бу пайтда унинг тезлиги нолга тенг ёки аниқланмаган бўлади), сўнгра эса ўқ бўйлаб пастга тушади (шартга кўра

$f'(x)$ тезлик $x < x_0$ да нолдан кичик), яъни $f'(x) < f'(x_0)$. Шундай қилиб, x_0 нуқта атрофида $f(x) < f(x_0)$ тенгсизликка эгамиз. x_0 нуқта максимум нуқтасидир. ▼

Ф у н к ц и я минимуми аломати.

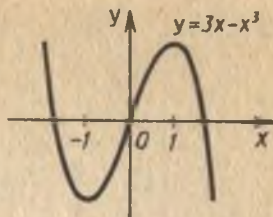
Агар f функция x_0 нуқтада узлуксиз бўлиб, $(a; x_0)$ интервалда $f'(x) < 0$, $(x_0; b)$ интервалда $f'(x) > 0$ бўлса, у ҳолда x_0 нуқта f функциянинг минимум нуқтаси бўлади.

Бу аломатнинг соддалаштирилган ифодасидан фойдаланиш қулай: агар x_0 нуқтада ҳосила ишорасини минусдан плюсга ўзгартирса, у ҳолда x_0 минимум нуқтаси бўлади.

Бу аломатнинг исботи максимум аломатининг исботига ўхшаш (уни мустақил бажариш фойдалидир).

3-мисол. $f(x) = 3x - x^3$ функциянинг экстремум нуқталарини топамиз.

Бу функциянинг ҳосиласи $3 - 3x^2$ га тенг бўлиб, ҳамма нуқталарда аниқланган ҳамда -1 ва $+1$ нуқталарда нолга айланади. -1 нуқтада ҳосила ишорасини минусдан плюсга ўзгартиради ($x < -1$ да $f' < 0$) ва $-1 < x < 1$ да $f' > 0$). $+1$ нуқтада ҳосила ишорасини плюсдан минусга ўзгартиради. Максимум ва минимум аломатларидан фойдаланиб, -1 нуқта функциянинг минимум нуқтаси, $+1$ нуқта функциянинг максимум нуқтаси эканини топамиз. Функциянинг графиги 91-расмда тасвирланган.



91- расм

Машқлар

Қуйида берилган функцияларнинг критик нуқталарини топинг, уларнинг қайсилари максимум ва қайсилари минимум нуқталари эканини аниқланг (346—348).

346. а) $f(x) = 2x - 7$; б) $f(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}x$;

в) $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x$; г) $g(x) = 4 - 2x + 7x^2$.

347. а) $f(x) = \frac{x}{3} + \frac{3}{x}$; б) $f(x) = \frac{x}{8} + \frac{2}{x}$;

в) $g(x) = x^2 - \frac{1}{2}x^4$; г) $g(x) = 2x^3 + 6x^2 - 18x + 120$.

348. а) $v(x) = \sqrt{x}$; б) $v(x) = \sqrt{x^2 + 1}$;

в)* $f(x) = \begin{cases} x \leq -1 & \text{да } -1, \\ -1 < x < 1 & \text{да } x, \\ x \geq 1 & \text{да } 1. \end{cases}$

г)* $f(x) = \begin{cases} x \leq -2 & \text{да } -2x, \\ -2 < x < 2 & \text{да } x^2, \\ x \geq 2 & \text{да } 6 - x. \end{cases}$

Функциянинг ўсиш (камаиш) ини ва экстремумини текширинг (349—350).

$$349. \text{ а) } f(x) = 4x^2 - 6x; \quad \text{б) } g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x;$$

$$\text{в) } f(x) = x^3 + 3x^2; \quad \text{г) } g(x) = 1 + x - x^3.$$

$$350. \text{ а) } u(x) = \frac{3x-1}{1-4x}; \quad \text{б) } v(x) = \frac{x-3}{2x+4};$$

$$\text{в) } u(x) = \frac{(x-2)(8-x)}{x^2}; \quad \text{г) } v(x) = \frac{16}{x(4-x^2)}.$$

351. Функциянинг ўсиш (камайиш)и ва экстремумини текширинг ва унинг графигини ясанг:

$$\text{а) } f(x) = 6x^5 + 15x^4 + 10x^3; \quad \text{б) } g(x) = x^4(x-12)^2;$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{x^2}{x^2+3}; \quad \text{г) } g(x) = \frac{x^2-2x+2}{x-1}.$$

27. Ҳосиланинг функцияларни текширишга татбиқ қилиш мисоллари

Сиз энди функция графигини ясашни уни текширишдан бошлаш маъқул эканини биласиз (4- пункт), бу текшириш берилган функция учун: 1) функциянинг аниқланиш соҳасини топиш; 2) функциянинг жуфт ёки тоқлиги, даврийлигини аниқлашдан иборат. Сўнгра 3) f функция графигининг координаталар ўқлари билан кесишиш нуқталари топилади; 4) ўзгармас ишора ораллиқлари топилади; 5) ўсиш ва камайиш ораллиқлари топилади; 6) экстремум нуқталари ва f нинг бу нуқталардаги қийматлари топилади. Мана шу текшириш асосида функциянинг графиги ясалади.

Функцияларнинг ўсиш (камайиш)га ва экстремумга доир текширишни ҳосила ёрдамида ўтказиш қулай. Бунинг учун олдин f функциянинг ҳосиласи ва критик нуқталари топилади, ундан кейин эса уларнинг қайсылари экстремум нуқталар эканлиги аниқланади.

1- мисол. $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2$ функцияни текширамыз ва унинг графигини ясаймиз.

Текширишни кўрсатилган схема бўйича ўтказамиз.

1) $D(f) = \mathbb{R}$, чунки f — кўпҳад.

2) f функция жуфт функция ҳам эмас, тоқ функция ҳам эмас (буни мустақил исботланг).

3). 4) f функция графиги ординаталар ўқи билан $(0; f(0))$ нуқтада, яъни $(0; 2)$ нуқтада кесишади. f графигининг абсциссалар ўқи билан кесишиш нуқтасини топиш учун $3x^5 - 5x^3 + 2 = 0$ тенгламани ечиш керак, унинг илдизларидан бири $(x = 1)$ осон топилади. Бошқа илдизлари (агар улар мавжуд бўлса) фақат тақрибий топилиши мумкин. Шу сабабли берилган функция учун графикнинг абсциссалар ўқи билан кесишадиган бошқа нуқталарни ва ўзгармас ишора ораллиқларни биз топиб ўтирмаймиз (4- пунктда айтилганидек, келтирилган схема тахминийдир).

5). 6) f функциянинг ҳосиласини топамиз:

$$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x^2 - 1).$$

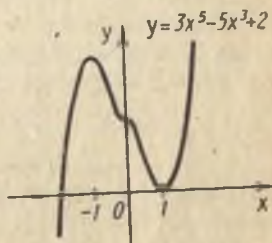
Агар $x^3(x^3 - 1) = 0$ бўлса, $f'(x) = 0$ бўлади, яъни аргументнинг 0, -1 ва 1 га тенг қийматларида $f'(x) = 0$ эканини кўрамиз. Қаралаётган функция учта критик нуқтага эга. Ушбу жадвални тузамиз:

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; \infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	-	0	+
$f(x)$	↗	4	↘	2	↘	0	↗
		max				min	

Бу жадвалнинг биринчи сатрида функциянинг критик нуқталари ва бу нуқталар билан чегараланган оралиқлар ўсиб бориш тартибида берилган. Иккинчи сатрда ҳосилаларнинг бу оралиқлардаги ишоралари белгиланган (бундай интервалнинг ҳар бирида ҳосиланинг ишораси ўзгармагани учун уни қаралаётган интервалнинг бирор нуқтасида ҳосиланинг ишорасини аниқлаш билан топиш мумкин). Учинчи сатрда берилган функциянинг қандай ўзгариши ҳақидаги хулосалар ёзилган: «↗» — ўсади, «↘» — камаёди, тўртинчи сатрда эса критик нуқталарнинг (юқорида кўрсатилган схеманинг 5 ва 6-пунктлари) турлари ёзилган. f функциянинг 0 критик нуқтаси экстремум нуқтаси эмас, шунинг учун у жадвалнинг тўртинчи сатрида белгиланмаган. Функциянинг критик нуқталар орасидаги оралиқда ўзгариши ҳақидаги хулосани кўпинча (ҳосиланинг ишорасини аниқлаш ўрнига) функциянинг шу оралиқнинг учларидаги қийматларини таққослаш билан чиқариш мумкин эканини қайд қиламиз. Масалан, $f(0) < f(-1)$ ($2 < 4$) бўлгани учун, функция $(-1; 0)$ оралиқда камаёди (демак, шу оралиқда $f' \leq 0$).

Функциянинг графигини ясаймиз (92-расм). Бу ясашни жадвалда кўрсатилган оралиқлар бўйича бажариш қулай. Масалан, жадвалда функция $(0; 1)$ интервалда камайиши кўрсатилган. f функция 0 ва 1 нуқталарда узлуксиз (чунки функция ҳамма ерда узлуксиз) демак, у $[0; 1]$ кесмада камаёди. Шу сабабли графикни $[0; 1]$ кесмада $f(0) = 2$ қийматдан $f(1) = 0$ қийматгача камаювчи қилиб ясаймиз. Бунда графикка 0, ± 1 нуқталарда уринмалар горизонтал тўғри чизиқлар бўлиши керак — жадвалнинг иккинчи сатрида бу нуқталарда ҳосила 0 га тенг эканлиги айtilган. График қолган оралиқларда ҳам шунга ўхшаш ясалади.

2-мисол. Синус функцияни текшира-
миз ва унинг графигини ясаймиз. Бу функ-
ция бутун сон тўғри чизиғида аниқланган
ва узлуксиз. Аммо у даври 2π га тенг дав-
рий ва тоқ функция бўлгани учун, уни тек-
ширишни $[0; \pi]$ кесмада аниқ ўтказиш етарли.



92- расм

$$349. \text{ а) } f(x) = 4x^2 - 6x; \quad \text{ б) } g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x;$$

$$\text{ в) } f(x) = x^3 + 3x^2; \quad \text{ г) } g(x) = 1 + x - x^3.$$

$$350. \text{ а) } u(x) = \frac{3x-1}{1-4x}; \quad \text{ б) } v(x) = \frac{x-3}{2x+4};$$

$$\text{ в) } u(x) = \frac{(x-2)(8-x)}{x^2}; \quad \text{ г) } v(x) = \frac{16}{x(4-x^2)}.$$

351. Функциянинг ўсиш (камайиш)и ва экстремумини текширинг ва унинг графигини ясанг:

$$\text{ а) } f(x) = 6x^5 + 15x^4 + 10x^3; \quad \text{ б) } g(x) = x^4(x-12)^2;$$

$$\text{ в) } f(x) = \frac{x^2}{x^2+3}; \quad \text{ г) } g(x) = \frac{x^2-2x+2}{x-1}.$$

27. Ҳосиланинг функцияларни текширишга татбиқ қилиш мисоллари

Сиз энди функция графигини ясашни уни текширишдан бошлаш маъқул эканини биласиз (4-пункт), бу текшириш берилган функция учун: 1) функциянинг аниқланиш соҳасини топиш; 2) функциянинг жуфт ёки тоқлиги, даврийлигини аниқлашдан иборат. Сўнгра 3) f функция графигининг координаталар ўқлари билан кесишиш нуқталари топилади; 4) ўзгармас ишора оралиқлари топилади, 5) ўсиш ва камайиш оралиқлари топилади; 6) экстремум нуқталари ва f нинг бу нуқталардаги қийматлари топилади. Мана шу текшириш асосида функциянинг графиги ясалади.

Функцияларнинг ўсиш (камайиш)га ва экстремумга доир текширишни ҳосила ёрдамида ўтказиш қулай. Бунинг учун олдин f функциянинг ҳосиласи ва критик нуқталари топилади, ундан кейин эса уларнинг қайсилари экстремум нуқталар эканлиги аниқланади.

1-мисол. $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2$ функцияни текширамыз ва унинг графигини ясаймиз.

Текширишни кўрсатилган схема бўйича ўтказамиз.

1) $D(f) = \mathbb{R}$, чунки f — кўпхад.

2) f функция жуфт функция ҳам эмас, тоқ функция ҳам эмас (буни мустакил исботланг).

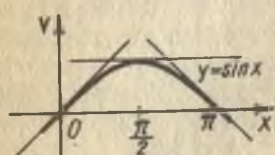
3), 4) f функция графиги ординаталар ўқи билан $(0; f(0))$ нуқтада, яъни $(0; 2)$ нуқтада кесишади. f графигининг абсциссалар ўқи билан кесишиш нуқтасини топиш учун $3x^5 - 5x^3 + 2 = 0$ тенгламани ечиш керак, унинг илдизларидан бири $(x = 1)$ осон топилади. Бошқа илдизлари (агар улар мавжуд бўлса) фақат тақрибий топилиши мумкин. Шу сабабли берилган функция учун графикнинг абсциссалар ўқи билан кесишадиган бошқа нуқталарни ва ўзгармас ишора оралиқларни биз топиб ўтирмаймиз (4-пунктда айтилганидек, келтирилган схема тахминийдир).

5), 6) f функциянинг ҳосиласини топамиз:

$$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x^2 - 1).$$

Бу функциянинг ҳосиласи ($\sin'x = \cos x$) ҳамма ерда аниқланган ва $[0; \pi]$ кесманинг $\frac{\pi}{2}$ нуқтасида нолга айланади. Бу критик нуқтадир Ушбу жадвални тўлдирамиз:

x	0	$(0; \frac{\pi}{2})$	$\frac{\pi}{2}$	$(\frac{\pi}{2}; \pi)$	π
$\sin'x$	1	+	0	—	—1
$\sin x$	0	↗	1	↘	0
			max		



93- расм

Ўтказилган текширишдан фойдаланиб, $y = \sin x$ функция графигини $[0; \pi]$ кесмада ясаймиз. 93-расмда графикни янада аниқроқ ясаш учун абсциссалари 0, $\frac{\pi}{2}$ ва π нуқталарда бурчак коэффициентлари мос равишда 1, 0 ва —1 бўлган уринмалар ўтказилган (жадвалга қаранг). Синус тоқ

функция ва даври 2π га тенг бўлгани учун унинг графиги 0 нуқтага нисбатан симметрик ва Ox ўқ бўйлаб 2π масофага параллел кўчиришда ўз-ўзига ўтади. $y = \sin x$ функциянинг бутун аниқланиш соҳаси R даги графиги 50-расмда келтирилган.

3-мисол. $2x^3 - 3x^2 - 12x - 11 = 0$ тенгламанинг илдизлари сонини топамиз.

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 11$ функцияни қараймиз. Унинг аниқланиш соҳаси: $D(f) = (-\infty; \infty)$. f функциянинг критик нуқталарини топиш учун унинг ҳосиласини топамиз: $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$. Бу ҳосила $x = -1$ ва $x = 2$ нуқталарда нолга айланади.

Ушбу жадвални тўлдирамиз:

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 2)$	2	$(2; \infty)$
$f'(x)$	+	0	—	0	+
$f(x)$	↗	—4	↘	—31	↗
		max		min	

$(-\infty; -1)$ оралиқда функция $-\infty$ дан -4 гача ўсади, шу сабабли бу оралиқда $f(x) = 0$ тенглама илдизларга эга эмас; $[-1; 2]$ оралиқда ҳам тенглама илдизларга эга эмас, чунки бу оралиқда f функция -4 дан -31 гача камаяди; ниҳоят, $[2; \infty)$ оралиқда f функция -31 дан чексизликкача ўсади, шу сабабли бу оралиқда

$f(x) = 0$ тенглама аниқ битта илдизга эга бўлади. Шундай қилиб,

$$2x^3 - 3x^2 - 12x - 11 = 0$$

тенглама битта илдизга эга (ва бу илдиз $(2; \infty)$ интервалга тегишли).

Машқлар

Квадрат функцияни текширинг ва унинг графигини ясанг (352—353).

352. а) $f(x) = x^2 - 2x + 8$;

б) $f(x) = -x^2 + 5x - 4$;

в) $g(x) = x^2 + x + 1$;

г) $g(x) = x^2 - 6x + 9$.

353. а) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 4,5$;

б) $f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + x + \frac{2}{3}$;

в) $g(x) = -\frac{x^2}{3} - \frac{x}{6} - \frac{1}{2}$;

г) $g(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{16} + \frac{1}{4}$.

Функцияни текширинг ва унинг графигини ясанг (354—356).

354. а) $f(x) = -x^3 + 3x - 2$;

б) $f(x) = 3x^3 - x^3$;

в) $g(x) = x^3 + 3x + 2$;

г) $g(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x$.

355. а) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 3$;

б) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$;

в) $g(x) = 3x^5 - 5x^3$;

г) $g(x) = 9x^5 + 3x^3$.

356. а) $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$;

б) $f(x) = \frac{6(x-1)}{x^2+3}$;

в) $g(x) = x\sqrt{2-x}$;

г) $g(x) = x^2\sqrt{1+x}$.

Квадрат тенгсизлиқни ечинг (357—358).

357. а) $2 + x - x^2 > 0$;

б) $x^2 - 2x + 3 \geq 0$;

в) $x^2 + 8x + 16 < 0$;

г) $-x^2 + 6x - 9 \geq 0$.

358. а) $2x^2 + 6x + 5 \geq 0$;

б) $6x^2 + x - 2 < 0$;

в) $0,3x^2 + x + 0,3 \leq 0$;

г) $-\frac{1}{4}x^2 + \frac{2}{3}x - 1 > 0$.

359. Функциянинг ўсиш ва камайиш оралиқларини топинг:

а) $f(x) = 1 - 1,5x - 3x^2 - 2,5x^3$;

б) $g(x) = x^3 - 6x^2 + 15x - 2$;

в) $h(x) = x^4 - \frac{4}{3}x^3 - x - 2$;

г) $g(x) = \frac{x^3}{5} - \frac{x^2}{3} - 6x + 1$.

Тригонометрик функцияни текширинг ва унинг графигини ясанг (360—361).

360. а) $f(x) = \frac{1}{3} \sin 3x$;

б) $g(x) = 2 \cos \frac{x}{2}$;

в) $h(x) = -\operatorname{tg}(4x + \pi)$;

г) $z(x) = \frac{1}{3} \sin(2x - \frac{\pi}{2})$.

361. а) $f(x) = \sin x + \cos x$;

б) $g(x) = \sin x - \operatorname{tg} x$;

в) $f(x) = \sin^2 x + \sin x$;

г) $g(x) = \cos^2 x - \cos x$.

362. а) $f(x) = 3\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 4x$ функция сон ўқининг ҳамма ерида ўсувчи эканини исботланг.

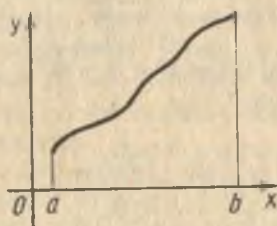
б) $f(x) = \sin x - 2x + \frac{1}{3}$ функция сон ўқининг ҳамма ерида камаювчи эканини исботланг.

28. Функциянинг энг катта ва энг кичик қийматлари

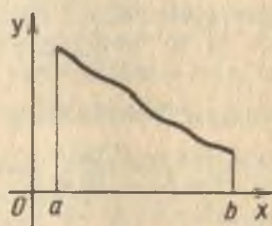
Кўпгина амалий масалаларни ечиш кўп ҳолларда кесмада узлуксиз бўлган функциянинг энг катта ва энг кичик қийматларини топишга келтирилади. Анализ курсларида, $[a; b]$ кесмада узлуксиз бўлган f функция *шу кесмада энг катта ва энг кичик қийматга эга бўлишини* тасдиқловчи Вейерштрасс теорема-си, яъни $[a; b]$ кесманинг f функция шу $[a; b]$ кесмада энг катта ва энг кичик қийматларни қабул қиладиган нуқталари мавжудлигини тасдиқловчи теорема исботланади.

f функция $[a; b]$ кесмада узлуксиз бўлибгина қолмай, балки шу кесмада чекли сонда критик нуқталарга эга бўлган ҳол учун f функциянинг энг катта ва энг кичик қийматларини топиш қондасини кўрсатамиз.

Дастлаб f функция $[a; b]$ кесмада критик нуқталарга эга эмас деб фараз қиламиз. У ҳолда (25-пунктга қаранг) функция шу оралиқ-



94- расм

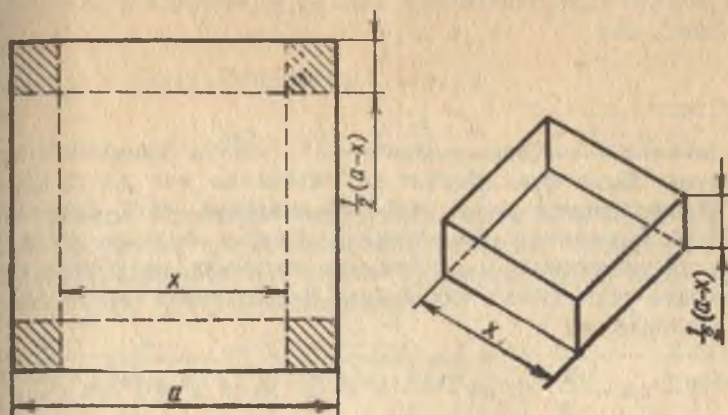


95- расм

да ўсада ёки камаяди (94, 95-расмлар), ва, демак, f функциянинг $[a; b]$ кесмадаги энг катта ва энг кичик қийматларн шу f функциянинг кесманинг a ва b охириларидаги қийматларига тенг.

Энди f функция $[a; b]$ кесмада чекли сонда критик нуқталарга эга бўлсин. Шу нуқталар $[a; b]$ кесмани ичларида критик нуқталар бўлмаган чекли сондаги кесмаларга ажратади. Шунинг учун (оқ-динги абзацга қаранг), f функциянинг энг катта ва энг кичик қийматлари бундай кесмаларда уларнинг ҳар икки учига, яъни f функциянинг критик нуқталарида ёки a ва b нуқталарида олинади.

Шундай қилиб, *кесмада чекли сонда критик нуқталарга эга бўлган функциянинг энг катта ва энг кичик қийматларини топиш учун, функциянинг барча критик нуқталаридаги ва кесма-*



96- расм

нинг охириларидаги қийматларини ҳисоблаш ҳамда ҳосил бўлган сонлардан энг каттасини ва энг кичигини олиш керак.

1-мисол. $y(x) = x^3 - 1,5x^2 - 6x + 1$ функциянинг $[-2; 0]$ кесмадаги энг катта ва энг кичик қийматларини топамиз.

Ечилиши. Олдин критик нуқталарни топамиз. $y' = 3x^2 - 3x - 6$ ҳосила ҳар қандай x учун аниқланганлиги сабабли, $y' = 0$ тенгламани ечиш қолади. Уни ечиб, $x = -1$ ва $x = 2$ да $y' = 0$ эканини топамиз.

Энди $y(-2) = -1$, $y(-1) = 4,5$ ва $y(0) = 1$ сонлардан энг каттасини ва энг кичигини танлаб олиш керак ($x = 2$ критик нуқта қаралаётган оралиққа тегишли эмас). Равшанки, энг кичик қийматга -2 нуқтада эришилади ва $y = -1$ га тенг. Энг катта қийматга эса -1 нуқтада эришилади ва $y = 4,5$ га тенг. Бу қисқача бундай ёзилади:

$$\max_{[-2; 0]} y(x) = y(-1) = 4,5; \quad \min_{[-2; 0]} y(x) = y(-2) = -1.$$

2-мисол. Томони a га тенг квадрат шаклидаги тунуканинг бурчакларидан (96-расм) квадратчалар кесиб олиб ва ҳосил бўлган ҳошияларни букиш йўли билан, усти очик қути яшаш керак. Қути-нинг ҳажми энг катта бўлиши учун қути асосининг томони қандай бўлиши керак?

Ечилиши. Қути асоси томонининг узунлигини x билан белгилаймиз. У ҳолда қирқиб олинган квадратчалар томонининг узунлиги $\frac{1}{2}(a-x)$ га, қутининг ҳажми

$$\frac{1}{2}(a-x)x^2$$

га тенг бўлади. Масаланинг мазмунига кўра x сони $0 < x < a$

тенгсизлиكنи қаноатлантиради, яъни $(0; a)$ интервалга тегишли. Шундай қилиб, биз

$$V(x) = \frac{1}{2} (a - x) x^2$$

функциянинг $(0; a)$ интервалдаги энг катта қийматини топишимиз керак. Аммо функциянинг энг кичик ва энг катта қийматларини топиш қондаси кесма учун ифодаланган. $V(x)$ функция сонлар тўғри чизигининг ҳамма ерида узлуксиз бўлгани учун, унинг энг катта қийматини $[0; a]$ кесмада излаймиз ва сўнгра ечилаётгани масала учун хулоса чиқарамиз. Функциянинг критик нуқталарини топамиз:

$$V'(x) = ax - \frac{3}{2} x^2; \quad ax - \frac{3}{2} x^2 = 0, \quad \text{яъни } x = 0 \text{ ёки } x = \frac{2}{3} a;$$

$$V\left(\frac{2}{3} a\right) = \frac{1}{2} \left(a - \frac{2}{3} a\right) \left(\frac{2}{3} a\right)^2 = \frac{2}{27} a^3.$$

$V(0) = 0$ ва $V(a) = 0$ бўлгани учун V функция кесмадаги энг катта қийматига $x = \frac{2}{3} a$ нуқтада эришади, яъни

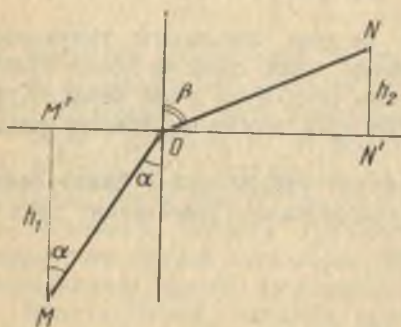
$$\max_{[0; a]} V(x) = V\left(\frac{2}{3} a\right) = \frac{2}{27} a^3.$$

Функция энг катта қийматга $[0; a]$ кесманинг, демак, $(0; a)$ интервалнинг ичида ҳам эришади. Шундай қилиб, қути асосининг томони $\frac{2a}{3}$ га тенг бўлиши керак.

▼ 3-мисол. Моддий нуқта остки ярим текисликдаги M нуқтадан устки ярим текисликдаги N нуқтага қараб ҳаракат қилсин (97-расм). Нуқтанинг остки ярим текисликдаги тезлиги ўзгармас ва v_1 га тенг, устки ярим текисликдаги тезлиги v_2 га тенг бўлсин.

Бутун йўлга энг қисқа вақт кетиши учун нуқта қайси йўлдан ҳаракатланиши керак?

Ечилиши. Агар $v_1 = v_2$ бўлса, у ҳолда изланган йўл MN кесмадан иборат бўлади. Агарда $v_1 \neq v_2$ бўлса, нуқта MON синиқ чизик бўйича ҳаракат қилади, бунда O нуқтанинг ўрнини MON йўлга энг қисқа вақт кетадиган қилиб танлаш керак. MO кесмани нуқта t_1 вақтда, ON ни эса t_2 вақтда ўтсин. $MM' \perp M'N'$; $NN' \perp M'N$ кесмаларни ўтказамиз ва



97. расм

$$\begin{aligned}x &= M'O, & h_1 &= MM', \\h_2 &= NN', & l &= M'N'\end{aligned}$$

деб олаимиз. У ҳолда MON йўл

$$t(x) = t_1 + t_2 = \frac{MO}{v_1} + \frac{NO}{v_2} = \frac{\sqrt{h_1^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{h_2^2 + (l-x)^2}}{v_2}$$

вақтда ўтилади. Масаланинг мазмунига кўра x сони $0 \leq x \leq l$ тенгсизликни қаноатлантиради, яъни $[0; l]$ кесмага тегишли. Шу кесмада $t(x)$ функциянинг энг кичик қийматини топиш керак. Функциянинг критик нуқталарини излаймиз:

$$t'(x) = \frac{1}{v_1} \cdot \frac{x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}} - \frac{1}{v_2} \cdot \frac{l-x}{\sqrt{h_2^2 + (l-x)^2}} = \frac{x}{v_1 \cdot MO} - \frac{l-x}{v_2 \cdot ON};$$

агар $\frac{x}{MO} - \frac{l-x}{ON} = \frac{v_1}{v_2}$ бўлса, $t'(x) = 0$, яъни нуқтанинг йўли 97-расмдагидек бўлиши керак:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2}. \quad (1)$$

Критик нуқта фақат битта эканини кўрсатамиз. Бунинг учун функциянинг $t'(x)$ ҳосиласини ҳисоблаймиз:

$$(t'(x))' = \frac{h_1^2}{v_1 \cdot (\sqrt{h_1^2 + x^2})^3} + \frac{h_2^2}{v_2 \cdot (\sqrt{h_2^2 + (l-x)^2})^3}$$

Бу ҳосила мусбат, демак $t'(x)$ функция ўсувчи ва x_0 нуқтада биргина нолга эга бўлиши мумкин.

$$t'(0) = \frac{-l}{v_2 \cdot \sqrt{h_2^2 + l^2}} < 0, \quad t'(l) = \frac{l}{v_1 \cdot \sqrt{h_1^2 + l^2}} > 0.$$

шунинг учун $(0; x_0)$ да $t' < 0$ ва $(x_0; l)$ да $t' > 0$, яъни ҳосила x_0 нуқтада ўз ишорасини минусдан плюсга ўзгартиради — бу минимум нуқтаси.

x_0 нуқтани амалда фақат тақрибан топиш мумкин.

Физика курсида сиз ёруғлик нурлари бир муҳитдан иккинчи муҳитга ўтишда (1) қонун бўйича синишини билиб оласиз (α тушиш бурчаги, β синиш бурчаги дейилади). Шундай қилиб, ёруғлик нури ҳаракат вақти энг қисқа бўладиган йўл бўйича тарқалади. Физикадан маълум бўлган Ферма принципи шундан иборат. ▼

Машқлар

363. $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$ функциянинг: а) $[-1, 1]$; б) $[0, 3]$ оралиқлардаги энг катта ва энг кичик қийматларини топинг.

364. Моддий нуқта $s(t) = 5t + 2t^2 - \frac{2}{3}t^3$ қонун бўйича тўғри чи-
зиқли ҳаракат қилади, бунда $s(t)$ — йўл (метр билан), t —
вақт (секунд билан). Вақтнинг қайси пайтида нуқта ҳаракати-
нинг тезлиги энг катта бўлади ва бу энг катта тезликнинг
миқдори қандай?
365. Берилган доирага ички чизилган тенг ёнли учбурчаклар ичида
тенг томонли учбурчак энг катта юзга эга эканини кўрсатинг.
366. Гипотенузаси берилган барча тўғри бурчакли учбурчаклар ичи-
да тенг ёнли учбурчак энг катта юзга эга эканини исботланг.
367. Берилган мусбат сонни икки қўшилувчига шундай ажратингки
бу қўшилувчиларнинг кўпайтмаси энг катта бўлсин.
368. Асоси квадратдан иборат тўғри бурчакли параллелепипед шак-
лидаги очиқ бакка 13,5 литр суюқлик кетиши керак. Шу бак
қандай ўлчовларда ясалганда энг кам материал кетади?
369. Бурғулаш минорасидан асфальт йўлнинг энг яқин нуқтасига-
ча бўлган масофа 9 км. Бурғулаш жойидан асфальт йўл бўйи-
ча айтилган нуқтадан 15 км наридаги қишлоққа курьер юбо-
риш керак (асфальт йўлни тўғри чизиқли деб ҳисоблаймиз).
Агар курьер велосипедда тупроқ йўлда соатига 8 км, асфальт
йўлда соатига 10 км тезлик билан юрса, у қишлоққа энг қис-
қа вақтда етиб бориши учун асфальт йўлнинг қайси нуқтаси-
га қараб бориши керак?

29. Гармоник тебранишлар

f функциянинг f' ҳосиласидан олинган ҳосила функциянинг
иккинчи ҳосиласи дейилади ва f'' билан белгиланади (бундай ўқи-
лади: «эф икки штрих»). Масалан,

$$\begin{aligned}\sin'x &= \cos x; & \sin''x &= \cos'x = -\sin x, \\ \cos'x &= -\sin x; & \cos''x &= -\sin'x = -\cos x.\end{aligned}\quad (1)$$

Иккинчи ҳосила функция характерини анчагина мукамалроқ
текширишга ёрдам беради. Биринчи ҳосила функция ўзгаришининг
тезлиги, иккинчи ҳосила эса шу тезлик ўзгаришининг тезлигидир.

(1) формулаларни анализ қилиб, $\sin$ ва $\cos$ функцияларнинг ик-
кинчи ҳосилалари шу функцияларнинг ўзларидан ишоралари билан-
гина фарқ қилишини кўриш мумкин. Бошқача айтганда, бу иккала
функция t аргументнинг барча қийматларида

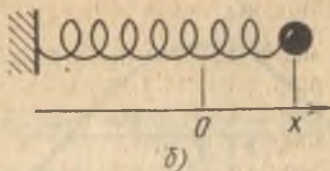
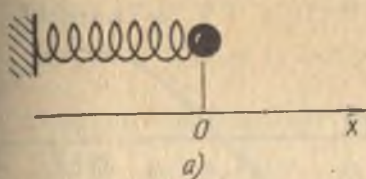
$$f''(t) = -f(t)$$

тенгламани қаноатлантиради.

Физикада, жумладан механикада,

$$f''(t) = -\omega^2 f(t) \quad (2)$$

тенгламани қаноатлантирувчи f функциялар катта роль ўйнайди,
бунда ω — мусбат ўзгармас.



98- расм

Механикадан шу хилдаги тенгламага олиб келадиган бир масалани қараб чиқамиз, m массали шарчага горизонтал жойлашган пружина маҳкамланган бўлиб, пружинанинг иккинчи учи ҳам маҳкамланган (98-а расм) ва мувозанат ҳолатида шарча марказининг координатаси x нолга тенг бўлсин. Марказни координатаси $x \neq 0$ нуқтага силжитганда шарчани мувозанат ҳолатига қайтаришга интилувчи куч пайдо бўлади. Гук қонунига мувофиқ бу куч x силжитишга пропорционал бўлади, яъни

$$F = -kx,$$

бунда k — мусбат константа (98-б расм). Ньютоннинг иккинчи қонунига кўра $F = ma$ бўлгани учун, тўғри чизиқ бўйлаб ҳаракатда тезланиш координатадан олинган иккинчи ҳосила эканини ҳисобга олиб, мана бунга эга бўламиз:

$$ma(t) = mx''(t) = F = -kx(t), \text{ яъни}$$

$$x''(t) = -\frac{k}{m}x(t).$$

Бошқача айтганда, шарча марказининг эластиклик кучлари таъсирида ҳаракатланиши $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ да (2) тенгламага бўйсунди.

Вақт ичида (2) тенгламага мос равишда ўзгарувчи физик катталик *гармоник тебранади* дейилади. (2) тенгламанинг ўзини *гармоник тебранишларнинг дифференциал тенгламаси* дейилади.

Ҳар қандай A , ω ва φ ўзгармасларда

$$f(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (3)$$

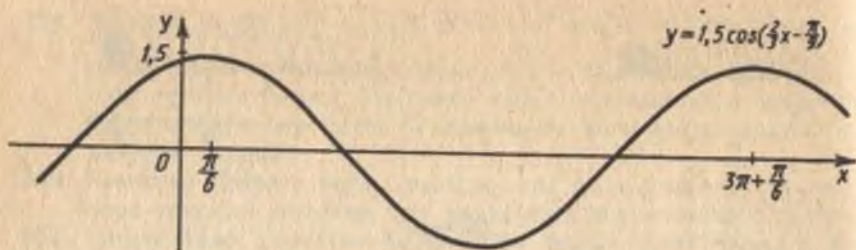
функция (2) тенгламанинг ечими эканини текширамиз. Ҳақиқатан ҳам, мураккаб функциянинг ҳосиласи формуласидан фойдаланиб, шуларни ҳосил қиламиз:

$$f'(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi).$$

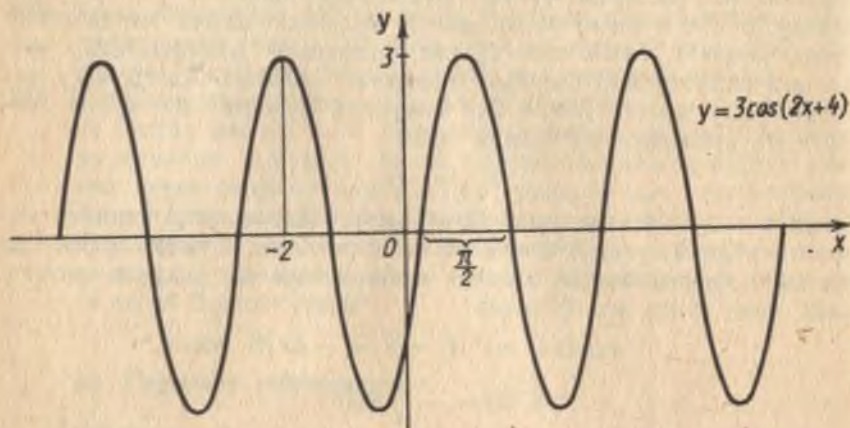
$$f''(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 f(t).$$

Бунинг тескараси ҳам ўринли: (2) тенгламанинг ҳар қандай ечими (3) кўринишидаги функциядир, одатда $A \geq 0$, $\varphi \in [0; 2\pi]$ қилиб танланади. Бунинг исботи мактаб курсига кирмайди.

(3) формула билан берилган f функция модулининг максимал қиймати A га тенг экани равшан. A константа тебранишнинг



99- расм



100- расм

амплитудаси дейилади, ω константа тебраниш частотаси, φ константа эса тебранишнинг бошланғич фазаси дейилади.

Гармоник тебранишларнинг графиклари синусоидалардан иборат. Масалан, 99 ва 100-расмларда $y = 1.5 \cos\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{3}\right)$ ва $y = 3 \cos(2x + 4)$ гармоник тебранишларнинг графиклари тасвирланган.

Гармоник тебранишлар билан X синф физика курсида тулароқ танишасиз.

Машқлар

370. $y(t)$ функция берилган дифференциал тенгламанинг ечими эканини текшириб кўринг:

а) $y(t) = 3 \cos(2t + \pi)$; $y'' = -4y$;

б) $y(t) = 4 \sin\left(\frac{1}{2}t - \frac{\pi}{3}\right)$; $y'' = -\frac{1}{4}y$;

$$в) y(t) = 2 \cos 4t; y'' + 16y = 0;$$

$$г) y(t) = \frac{1}{3} \sin(0.1t + 1); y'' = 0,01 y = 0.$$

371. Гармоник тебранишнинг дифференциал тенгламасини ёзинг:

$$а) x = 2 \cos(2t - 1); \quad б) x = 6,4 \cos\left(0,1t + \frac{\pi}{7}\right);$$

$$в) x = 4 \sin\left(3t - \frac{\pi}{4}\right); \quad г) x = 0,71 \sin(0,3t - 0,7).$$

372. Ўнг томонни $A \cos(\omega t + \varphi)$ кўринишга келтириб, тебранишнинг амплитудаси, бошланғич фазаси ва бурчак частотасини кўрсатинг:

$$а) y(t) = 0,8 \sin\left(\frac{1}{3}t + \pi\right);$$

$$б) y(t) = -4 \cos\left(2t - \frac{\pi}{6}\right);$$

$$в) y(t) = 2 \sin \frac{\pi}{6} \cos t + 2 \sin t \cos \frac{\pi}{6};$$

$$г) y(t) = 3 \cdot \frac{1}{2} \cos 2t + 3 \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2t.$$

373. Дифференциал тенгламанинг нолдан фарқли бирор ечимини топинг:

$$а) y'' = -25y; \quad б) y'' = -\frac{1}{4}y; \quad в) 4y'' + y = 0;$$

$$г) \frac{1}{9}y'' + 4y = 0.$$

Тарихдан маълумотлар

XVII аср математика тарихида бурилиш асри бўлди. Декарт те-
кисликда жойлашган эгри чизиқларни ўрганиш учун координаталар
методини ишлатишни жорий қилди. Табиатшуносликнинг ривожла-
ниши функцияларнинг ўзгаришини, айниқса ҳаракатланувчи жисм-
ларнинг координаталарини ва бошқа физик миқдорларнинг вақтга боғ-
ланишларини ифодаловчи функцияларнинг ўзгаришларини текшириш
заруратига олиб келди. Ҳосила функцияларнинг экстремумларини
топишга, ҳар хил чизиқларга уринмаларни топишга татбиқ этилди
ва ҳоказо. Декарт, Паскаль ва Ферманинг биринчи ишларидаёқ ўз
моҳиятига кўра ҳар қандай кўпхаддан ҳосилалар топиш қоида-
си бор эди.

Ҳозирги вақтда математиканинг дифференциал ва интеграл ҳи-
собини ўрганадиган қисми математик анализ деб аталади (интеграл
ҳисоб элементлари билан X синфда танишасиз). Ҳосилалар ҳақида-
ги, дифференциал ҳисоб ҳақидаги систематик таълимот немис мате-
матики ва философи Г. Лейбниц (1646 — 1716) ва инглиз мате-

матиғи ва ҳозирги замон математик табиатшунослигининг асосчиси И. Ньютон (1643 — 1727) томонидан ривожлантирилди.

Сонли функциянинг ҳозирги замон таърифи бир-бирдан мустақил равишда рус математиги Н. И. Лобачевский томонидан 1834 йилда ва немис математиги Л. Дирихле томонидан 1837 йилда берилган. Бу таърифларнинг асосий ғояси шундан иборатки, функция тушунчасида ҳар бир x га $f(x)$ нинг маълум қиймати қандай усул билан мос келтирилиши муҳим эмас, балки муҳими бу мосликнинг ўрнатилганлигидир.

Аниқланиш ва қийматлари соҳалари ихтиёрий бўлган функция (сонли функция бўлиши шарт эмас) тушунчасининг ҳозирги таърифи, шунингдек ҳозирги терминология ва белгилашлар асосан яқиндагина — асримизнинг биринчи ярмида шаклланди.

Функция лимити тушунчасининг аёний маъноси XVII аср математикларига равшан эди. Улар функция лимитини амалда тўғри топа олар эдилар. Аммо кетма-кетлик лимитининг ва функция лимитининг шу кунгача сақланиб келган мукаммал таърифларини француз математиги О. Коши (1789 — 1857) берган ва бу таърифларни ҳамма бирданига тушуниб етмаган.

Функция лимитининг Коши бўйича таърифи бундай ифодаланади: «Агар ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ сонни танлаш мумкин бўлсаки, $0 < |x - a| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча x лар учун $|f(x) - A| < \varepsilon$ бўлса, A сони $f(x)$ функциянинг x аргумент a га интилгандаги лимити дейилади.»

Бу ифода 14-пунктда берилган ушбу фикрнинг аниқ мазмунидир: $x \approx a$ да $f(x) \approx A$ тақрибий тенглик олдиндан берилган исталган аниқликда бажарилиши мумкин. Ҳақиқатан, $f(x) \approx A$ тақрибий тенгликнинг абсолют хатоси $|f(x) - A|$ ифодадан иборат $x \rightarrow a$ да $f(x) \approx A$ тақрибий тенглик олдиндан берилган исталган аниқликда бажарилиши мумкин дегани ушбуни билдиради: биз ҳар қандай ҳисоблаш аниқлигини бермайлик (бу мусбат сон ε билан берилади, бунда ε — грек ҳарфи «эпсилон», уни қўлланиш анъана бўйича қабул қилинган), $x \approx a$ тақрибий тенгликларнинг абсолют хатолари учун шундай чегара танлаш мумкинки (бу чегарани мусбат сон δ билан белгилашади, δ — грек ҳарфи «дельта»), $0 < |x - a| < \delta$ да $f(x) \approx A$ тақрибий тенглик хатоси берилган ҳисоблаш аниқлиги чегарасидан чиқмайди, яъни $|f(x) - A| < \varepsilon$ бўлади.

Масалан, ушбу қоиданинг исботини келтирамиз (14-п. га қ.): агар $x \rightarrow a$ да $f(x) \rightarrow A$ ва $g(x) \rightarrow B$ бўлса, у ҳолда $x \rightarrow a$ да $f(x) + g(x) \rightarrow A + B$ бўлади.

Ихтиёрий ε мусбат сонни оламиз. У ҳолда $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ ва шунга кўра (Коши таърифи бўйича):

1) $x \rightarrow a$ да $f(x) \rightarrow A$ шартидан шундай $\delta_1 > 0$ ни танлаш мумкинки, $0 < |x - a| < \delta_1$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча x лар учун

$$|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (1)$$

тенгсизлик ўринли бўлиши келиб чиқади;

2) $x \rightarrow a$ да $g(x) \rightarrow B$ шартидан шундай $\delta_2 > 0$ ни топиш мумкин-
ки, $0 < |x - a| < \delta_2$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча x лар
учун

$$|g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (2)$$

тенгсизлик ўринли бўлиши келиб чиқади.

δ_1 ва δ_2 сонларнинг энг кичигини δ билан белгилаймиз. У ҳол-
да $0 < |x - a| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ҳар қандай x
лар учун (1) ва (2) тенгсизликлар бажарилади; мана шу x лар учун
қуйидагига эга бўламиз:

$$\begin{aligned} |(f(x) + g(x)) - (A + B)| &= |(f(x) - A) + (g(x) - B)| \leq \\ &\leq |f(x) - A| + |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Шу билан $x \rightarrow a$ да $f(x) + g(x) \rightarrow A + B$ экани исботланди.

Қолган (кўпайтма ва бўлинма учун) қондалар ҳам шунга ўхшаш
исботланади.

XVII асрда математикада юз берган инқилоб теранлигининг ой-
дин характеристикасини К. Маркс ва Ф. Энгельс беришди. Энгельс
бундай ёзади: «Декартнинг ўзгарувчи миқдори математикада бури-
лиш нуқтаси бўлди. Шу туфайли математикага ҳаракат ва диалек-
тика кирди». Аммо математиканинг функциялар, чексиз кичик миқ-
дорлар, лимитлар ва ҳосилалар тушунчалари билан боғлиқ бўлган
янги тармоғи ривожланишининг бошланғич даври Маркс томонидан
«мистик» деб характерланган эди.

XVII аср математикларидан кўпчилигининг шиори бундай эди:
«Олға юраверинг, натижаларнинг тўғрилигига ишонч сизга ўзи ке-
лади».

Кошининг ишларидан кейингина XIX аср давомида математик
анализ асослари мантиқий жиҳатдан мустаҳкамланди. Бунинг учун,
жумладан, ҳақиқий сонларнинг мукаммал назарияси зарур эди. Бу
назария эса XIX асрнинг иккинчи ярмидагина Вейерштрасс, Деде-
кинд ва Кантор томонидан ривожлантирилди.

Такрорлаш учун саволлар ва масалалар

- 1) $x \approx a$ тақрибий тенглик h абсолют хато билан бажарилган.
Бу нимани билдиради?
- 2) 0,001 гача аниқликда топинг: а) $\frac{5}{11} - \frac{2}{3}$; б) $\sqrt{3} + 2$;
в) $\sqrt{7} - \sqrt{5}$; г) $\sqrt{\frac{7}{3}}$.

3) 4,2537481... сонининг ортиғи билан олинган ва ками билан олинган ўнли яқинлашишларини: а) 1; б) 0,1; в) 0,01; г) 0,00001 гача аниқликда ёзинг:

2. 1) $x \rightarrow a$ да $f(x) \rightarrow L$ ёзуви нимани билдиради?

2) Лимитларни ҳисоблаш қоидаларини ифодаланг.

3) Агар

а) $f(\Delta x) = (2 + \Delta x)^2 - 4$; б) $f(\Delta x) = \frac{1}{1 + \Delta x} - 1$;

в) $f(\Delta x) = \frac{3 + \Delta x}{4 - \Delta x}$; г) $f(x) = \frac{1}{\Delta x} - \left(\frac{1}{2 + \Delta x} - \frac{1}{2} \right)$

бўлса, $\Delta x \rightarrow 0$ да $f(\Delta x)$ функция қандай сонга интилади?

3. 1) Аргумент орттирмаси нима ва функция орттирмаси нима?

2) Δx ва Δf орттирмаларнинг геометрик маъноси нимадан иборат?

$\frac{\Delta f}{\Delta x}$ нисбатнинг геометрик маъноси нимадан иборат?

3) Агар

а) $f(x) = \frac{2}{x}$; б) $f(x) = x^2 - x$; в) $f(x) = x^3 + x$

бўлса, $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ ни (x_0 нуқтада) топинг.

4. 1) Функциянинг нуқтадаги ҳосиласи таърифини беринг.

2) Агар

а) $f(x) = 2x - 1$, $x_0 = -4$; б) $f(x) = x^2$, $x_0 = -3$;

в) $f(x) = \frac{2}{x}$, $x_0 = 3$; г) $f(x) = \frac{2}{x+1}$, $x_0 = 2$

бўлса, таърифдан фойдаланиб, f функциянинг x_0 нуқтадаги ҳосиласини топинг.

3) Функциянинг ҳосиласини топинг:

а) $f(x) = x^3$; б) $f(x) = 3x + x^2$; в) $f(x) = \frac{1}{x} + 1$.

5. 1) Ҳосилаларни ҳисоблаш қоидаларини ифодаланг.

2) x^n функциянинг ҳосиласи нимага тенг (n — бутун сон)?

3) Функциянинг ҳосиласини топинг:

а) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$; б) $f(x) = (x + 2) \sin x$;

в) $f(x) = \frac{x^2}{x+3}$; г) $f(x) = x\sqrt{x} + \cos x$;

д) $f(x) = (8 - 5x)^{20}$; е) $f(x) = \frac{1}{(9 + 7x)^5}$;

ж) $f(x) = \sin 3x$; з) $f(x) = 4 \operatorname{tg} 5x$.

6. 1) Нуқтада, ораликда узлуксиз бўлган функция таърифни беринг.
 2) Интерваллар методини тавсифлаб беринг.
 3) Тенгсизликни ечинг:

а) $(x-1)(x+2)(x+3) \geq 0$; б) $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}$;

в) $\frac{\sqrt{16-x}(4-x)(x+2)}{x^2+7x+10} \geq 0$; г) $(2\sin x - 1)(2\cos^2 x - 1) < 0$.

7. 1) Қандай тўғри чизиқни f функция графигига $(x_0; f(x_0))$ нуқтада ўтказилган уринма дейилади? Ҳосиланинг геометрик маъноси нимадан иборат?
 2) f функция графигига $(x_0; f(x_0))$ нуқтадан ўтувчи уринманинг тенгламасини ёзинг.
 3) Агар

а) $f(x) = x^2$, $x_0 = -\frac{1}{2}$; б) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 2$;

в) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \pi$; г) $f(x) = \cos x$, $x_0 = \frac{2\pi}{3}$

бўлса, $x = x_0$ да f функция графигига уринма тенгламасини ёзинг.

8. 1) x_0 нуқтада дифференциалланувчи функциянинг тақрибий қийматини ҳисоблаш учун умумий формулани ёзинг.
 2) Функциянинг тақрибий қийматини ҳисоблаш формуласини ёзинг:

а) $f(x) = x^n$; б) $f(x) = \cos x$; в) $f(x) = \sqrt{1+x}$.

3) Тақрибий қийматларини ҳисобланг:

а) $\sqrt[10]{9,009}$; б) $\frac{1}{(1,0001)^{10}}$; в) $(0,999)^{16}$; г) $\cos 29^\circ$.

9. 1) Ҳосиланинг механик маъноси нимадан иборат?

2) Жисм тўғри чизиқ бўйлаб $x(t)$ қонун бўйича ҳаракат қилмоқда. Вақтнинг t пайтидаги оний тезлиги ва тезланиши қандай?

3) Агар а) $x(t) = 5t - t^2$; б) $x(t) = \cos \omega t$ (ω — ўзгармас) бўлса, нуқтанинг тезлиги ва тезланишини топинг.

10. 1) Лагранж формуласини ёзинг.

2) Функциянинг ўсиш (камайиш) аломатини ифодаланг.

3) Функциянинг ўсиш (камайиш) ини текширинг:

а) $y = x^4 - 4x$; б) $\frac{x}{x^2 + 9}$;

в) $y = x^3 + \frac{16}{x}$; г) $y = 2 \sin x + \cos 2x$.

11. 1) Функциянинг критик нуқтаси деб нимани айтилади?
 2) Функциянинг максимум (минимум)и аломатларини ифодаланг.
 3) Функциянинг максимум ва минимумини текширинг:
- а) $y = x^4 - 2x^2$; б) $y = \frac{x}{x^2 + 9}$;
 в) $y = x^2 + \frac{16}{x}$; г) $y = 2 \sin x + \cos 2x$.
12. 1) Функцияни текшириш схемасини тавсифланг.
 2) Функцияни ҳосила ёрдамида текширинг:
 а) $f(x) = 2x - x^2 - 8$; б) $f(x) = 2x^3 + 3x - 1$.
 3) f функцияни умумий схема бўйича текширинг ва унинг графигини ясанг:
- а) $f(x) = x^2 - \frac{2}{x}$; б) $f(x) = \sin^2 x - \sin x$.
13. 1) Функциянинг кесмада энг катта ва энг кичик қийматини топиш қондасини ифодаланг.
 2) Функциянинг кесмадаги энг катта ва энг кичик қийматини топинг:
 а) $f(x) = 3x^2 - x^3$ нинг $[-1; 4]$ даги; б) $f(x) = x - \sin 2x$ нинг $[0; \frac{\pi}{2}]$ даги.
14. 1) Функциянинг иккинчи ҳосиласи таърифини беринг. Гармоник тебранишнинг дифференциал тенгламаси нима?
 2) $y(t)$ функция берилган дифференциал тенгламанинг ечими эканини текширинг:
 а) $y(t) = 2 \cos(t - \frac{\pi}{2})$, $y'' = -y$;
 б) $y(t) = 3 \sin(0,3t + 1)$, $y'' + 0,09y = 0$.
 3) Гармоник тебранишнинг дифференциал тенгламасини ёзинг:
 а) $x = 2 \cos(t - 1)$; б) $x = 2 \sin(0,4t - 7)$.

II бобга доир қўшимча машқлар

374. $f(y) = 2y^3 + 3y^2 - 2y + 1$. а) $f'(x)$; б) $f'(0)$; в) $f'(-1)$;
 г) $f'(2x - 1)$ ни топинг.
375. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x$. а) $f'(x)$; б) $f'(0)$; в) $f'(1)$;
 г) $f'(t^3)$ ни топинг.
- 376.* Чекли сондаги функциялар йиғиндисини ҳосиласини топиш қондасини исботланг.

377. Учта u , v , w функция кўпайтмасининг ҳосиласини топиш қон-
даси $(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'$ ни исботланг.

378. $u(z) = \frac{z-5}{1-3z}$. а) $u'(z)$; б) $u'(x-3)$; в) $u'(0)$; г) $u'(z^2)$ ни
топинг.

379. $f(t) = \frac{5-\sqrt{t}}{2t+2}$. а) $f'(t)$; б) $f'(4)$; в) $f'(1)$; г) $f'(t^2)$ ни топинг.

380. $g(x) = \frac{5x+3}{\sqrt{x+2}}$. а) $g'(x)$; б) $g'(4)$; в) $g'(1)$; г) $g'(x^2)$ ни то-
пинг.

381. а) $h(u) = \frac{u^3 - 2u^2 + 3u - 4}{u^5}$ $h'(u)$ ни топинг.

б) $v(x) = \frac{3}{x^3} - \frac{4}{x^4} + \frac{5}{x^5}$ $v'(x)$ ни топинг.

в) Агар $u(\alpha) = \frac{2}{\alpha^4} + \frac{3}{\alpha^5}$ бўлса, $u'(\alpha)$ ни топинг.

г) Агар $\Phi(v) = \frac{5}{v^4} + 3v^5$ бўлса, $\Phi'(v)$ ни топинг.

382. $y = \sqrt{|x|}$ ($x-3$) функция графигини ясанг.

Функциянинг ҳосиласини топинг (383—384).

383. а) $v(x) = (x^2 - 2x + 3)(3x^2 + 2x + 1)$;

б) $f(x) = (ax + b)(cx^2 + dx + e)$;

в) $f(y) = 3y + 1$ ($y-3$). $f'(x)$; $f'(0)$; $f'(2)$ ни топинг;

г) $g(u) = 6u^2(5u^3 + 1)$. $g'(u)$, $g'(0)$, $g'(-1)$ ни топинг.

384. а) $y = \frac{x}{\sqrt{2+x^2}}$;

б) $y = \sqrt{3-2x}$;

в) $f(t) = \sqrt{t^4 - t^3 + t^2 - 1}$. $f'(t)$, $f'(2)$ ни топинг;

г) $g(y) = \sqrt{\frac{y^2-1}{y^2+1}}$. $g'(y)$, $g'(2)$ ни топинг.

385. $y = \sqrt{x}$ функция графигининг қайси нуктасида уринма абс-
циссалар ўқиға: а) 45° ли бурчак остида; б) 60° ли бурчак
остида оғишган бўлади?

386. Берилган x_0 нуктада

а) $f(x_0) = 0$ ва $f'(x_0) = 0$;

б) $f(x_0) = 0$ ва $f'(x_0) < 0$;

в) $f(x_0) = 0$ ва $f'(x_0) > 0$

бўлга; бирор функция графигини ясанг.

Функциянинг ўсиш (камайиш) оралиқларини топинг (387—392).

387. $u(x) = \frac{x}{x+1}$.

388. $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$.

389. $g(x) = 3x^2 + 2x + 1$.

- нуқта координаталар бошидан 3 м масофада бўлганда B учининг силжиш тезлигининг модули қандай бўлади?
422. Тик турган нарвоннинг узунлиги 5 м. Нарвоннинг пастки учи ўзгармас 2 м/с тезлик билан сирпана бошлайди. t пайтда нарвоннинг юқори учи қандай тезлик билан ва қандай тезланиш билан тушади?
423. Бир жинсли бўлмаган AB стерженнинг узунлиги 12 см. Унинг AN қисмининг массаси N нуқтадан A учигача бўлган масофанинг квадратига пропорционал равишда ортади ва $AN = 2$ см да 10 г. га тенг. 1) Бутун AB стержень массасини ва унинг истаган N нуқтасидаги чизиқли зичлигини топинг; 2) стерженнинг A ва B нуқталардаги чизиқли зичликлари нимага тенг?
424. m массали жисм $s(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$ қонун бўйича тўғри чизиқли ҳаракат қилади (α , β , γ — ўзгармаслар). Нуқтага таъсир қилувчи куч ўзгармас эканини исботланг.
425. Ғилдирак шундай айланадики, бурилиш бурчаги вақтнинг квадратига пропорционал бўлади. Ғилдиракнинг биринчи айланиши 8 секундда бўлди. Ғилдирак айлана бошлагандан 48 секунд кейин бурчак тезлиги қандай бўлишини аниқланг.
426. Жисм 10 м баландликдан юқорига вертикал ҳолда 40 м/с бошланғич тезлик билан отилди. Қуйидагиларни топинг:
а) Жисм 1 секунддан кейин ер сиртидан қандай баландликда бўлади? б) Жисм неча секунддан кейин энг юқори нуқтага чиқади ва ердан қандай масофада бўлади? ($g = 10$ м/с² деб олинг).
427. Доиравий металл диск қиздирилганда шундай кенгайдики, унинг радиуси бир текисда 0,01 см/с катталашади. Унинг радиуси 2 см га тенг бўлган пайтда дискнинг юзи қандай тезлик билан катталашади?
428. Лампа тўғри горизонтал йўлка тепасида 12 м баландликка осилган. Шу йўлкадан бўйи 1,8 м бўлган одам келяпти. Агар шу одам 50 м/мин тезлик билан узоқлашадиган бўлса, унинг сояси қандай тезлик билан узаяди?
429. Айланага ички чизилган барча тўғри тўртбурчаклардан юзи энг катта бўлган тўғри тўртбурчакни топинг.

БОШЛАНҒИЧ ФУНКЦИЯ ВА ИНТЕГРАЛ

8- §. БОШЛАНҒИЧ ФУНКЦИЯ

30. Бошланғич функциянинг таърифи

Дифференциаллашнинг механикада қўлланишига доир мисолни эсга олайлик. Агар вақтнинг бошланғич $t = 0$ momentiда жисмнинг тезлиги 0, яъни $v(0) = 0$ бўлса, у ҳолда жисм эркин тушишда вақтнинг t пайтида

$$s(t) = \frac{g}{2} t^2 \quad (1)$$

йўлни ўтади. Дифференциаллаш билан тезликини топамиз:

$$s'(t) = v(t) = gt. \quad (2)$$

Иккинчи марта дифференциаллаш тезланишни беради:

$$v'(t) = a(t) = g, \quad (3)$$

яъни тезланиш ўзгармасдир.

(1) формулани Галилей тажриба йўли билан топган. Аммо механика учун бошқа қонда характерлироқдир: $a(t)$ тезланиш (биз қараётган ҳолда тезланиш ўзгармас) бўйсунадиган қонун берилган; $v(t)$ тезликнинг ўзгариш қонунини ва $s(t)$ координатани топиш талаб қилинади. Бошқача айтганда, $v(t)$ функциянинг берилган ҳосиласи ($v'(t) = a(t)$) бўйича $v(t)$ ни топиш, сўнгра эса $v(t)$ га тенг бўлган $s'(t)$ ҳосила бўйича $s(t)$ ни топиш керак.

Бундай масалаларни ечиш учун дифференциаллаш амалига тескари бўлган *интеграллаш амали* хизмат қилади. Интеграллаш билан шу бобда танишамиз.

Таъриф. Агар берилган ораликдан олинган барча x лар учун

$$F'(x) = f(x) \quad (4)$$

тенглик бажарилса, у ҳолда F функция шу ораликда f функциянинг *бошланғич функцияси* дейилади.

1- мисол. $F(x) = \frac{x^3}{3}$ функция $(-\infty; +\infty)$ интервалда $f(x) = x^2$ функциянинг бошланғич функциясидир, чунки барча $x \in (-\infty; +\infty)$ лар учун:

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{1}{3} (x^3)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2 = f(x).$$

$\frac{x^3}{3} + 7$ ҳам худди шу x^2 ҳосилага эга эканини кўриш осон. Шунинг учун $\frac{x^3}{3} + 7$ функция ҳам x^2 нинг R да бошланғич функциясидир. Равшанки, 7 ўрнига истаган ўзгармасни қўйиш мумкин. Шундай қилиб, кўриб турибмизки, бошланғич функцияни топиш масаласи чексиз кўп ечимга эга экан. Кейинги пунктда бу ечимларнинг ҳаммаси қандай топилишини кўрасиз.

2-мисол. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ функция учун $F(x) = 2\sqrt{x}$ функция $(0; \infty)$ интервалда бошланғич функция бўлади, чунки шу интервалдан олинган барча x лар учун:

$$F'(x) = (2\sqrt{x})' = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} = f(x).$$

1-мисолдаги каби $2\sqrt{x} + C$ функция истаган ўзгармас C да шу $(0; \infty)$ интервалда $\frac{1}{\sqrt{x}}$ функция учун бошланғич функциядир.

▼ 3-мисол $F(x) = -\frac{1}{x}$ функция $(-\infty; \infty)$ оралиқда $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ функция учун бошланғич функция бўлмайди, чунки $F'(x) = -\frac{1}{x^2}$ тенглик 0 нуқтада бажарилмайди.

Аммо $(-\infty; 0)$ ва $(0; \infty)$ интервалларнинг ҳар бирида F функция f функция учун бошланғич функциядир.

Кўпгина масалаларни ечишда бирмунча умумийроқ ҳол билан иш кўришга тўғри келади. Масалан, $f(x) = 3\sqrt{x}$ функция учун $(0; \infty)$ интервалда $F(x) = 2x\sqrt{x}$ бошланғич функция бўлади. Бу F функция $x < 0$ да аниқланмаган, шу сабабли ҳам F функциянинг нолдаги ҳосиласи ҳақида гапириш мумкин эмас. Аммо $\Delta x > 0$ да $\Delta F(0) = 2\Delta x\sqrt{\Delta x}$ ҳамда $\Delta x \rightarrow 0$ ва $\Delta x > 0$ да $\Delta F(0) \rightarrow 0$. Шу сабабли F функция f функция учун $[0; \infty)$ оралиқда бошланғич функция бўлади дейилади, энди бу оралиққа $x = 0$ нуқта тегишли бўлади. Умумий ҳолда аҳвол шунга ўхшаш: агар $[a; b)$ оралиқда $F' = f$ бўлса ва $\Delta x \rightarrow 0$ ҳамда $\Delta x > 0$ да $\Delta F(a) \rightarrow 0$ бўлса, F функцияни $[a; b)$ оралиқда f функция учун бошланғич функция дейилади, агар $(a; b)$ интервалда $F' = f$ бўлса ва $\Delta x \rightarrow 0$ ҳамда $\Delta x < 0$ да $\Delta F(b) \rightarrow 0$ бўлса, F функцияни $(a; b]$ оралиқда f функция учун бошланғич функция дейилади. Умумий ҳолда бошқа оралиқлар учун ҳам бошланғич функция шунга ўхшаш аниқланади. ▼

Машқлар

F функция кўрсатилган оралиқда f функция учун бошланғич функция эканини исботланг (430 — 433):

430. а) $F(x) = x^5$; $f(x) = 5x^4$; $x \in (-\infty; \infty)$;
 б) $F(x) = \sin x + 3$; $f(x) = \cos x$; $x \in (-\infty; \infty)$;

- в) $F(x) = \frac{1}{3}x^{-3}; \quad f(x) = -x^{-4}; \quad x \in (0; +\infty);$
 г) $F(x) = 4 - \cos x; \quad f(x) = \sin x; \quad x \in (-\infty; \infty).$
431. а) $F(x) = 4x\sqrt{x}; \quad f(x) = 6\sqrt{x}; \quad x \in (0; \infty);$
 б) $F(x) = \operatorname{tg} x - \sqrt{2}; \quad f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right);$
 в) $F(x) = 0,4\sqrt{x^5} - 5; \quad f(x) = \sqrt{x^3}; \quad x \in (0; \infty);$
 г) $F(x) = 3 - \operatorname{ctg} x; \quad f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}; \quad x \in (0; \pi).$
432. а) $F(x) = -\frac{2}{\sqrt{x}}; \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3}}; \quad x \in (0; \infty);$
 б) $F(x) = \frac{2}{\sqrt{-x}}; \quad f(x) = -\frac{1}{\sqrt{|x|^3}}; \quad x \in (-\infty; 0);$
 в) $F(x) = 14 - \frac{1}{x}; \quad f(x) = \frac{1}{x^2}; \quad x \in (0; \infty);$
 г) $F(x) = 9 - \frac{1}{x}; \quad f(x) = \frac{1}{x^2}; \quad x \in (-\infty; 0).$
433. а) $F(x) = \frac{1}{2}x^2; \quad f(x) = x; \quad x \in \mathbb{R};$
 б) $F(x) = \frac{1}{7}x^7; \quad f(x) = x^6; \quad x \in \mathbb{R};$
 в) $F(x) = \sin^2 x; \quad f(x) = \sin 2x; \quad x \in \mathbb{R};$
 г) $F(x) = \sin 3x; \quad f(x) = 3 \cos 3x; \quad x \in \mathbb{R}.$
ф учун $\mathbb{R}$ даги бошланғич функцияни топинг (434 — 435).
434. а) $f(x) = 2\frac{1}{2};$ а) $f(x) = x;$ в) $f(x) = x^3;$ г) $f(x) = x^4.$
435. а) $f(x) = \sin(x);$ б) $f(x) = \cos x;$ в) $f(x) = \sin 5x;$
 г) $f(x) = \cos 7x.$

31. Бошланғич функциянинг асосий хоссаси

Интеграллаш масаласи берилган функция учун унинг барча бошланғич функцияларини топишдан иборат. Бу масалани ечишда функциянинг ўзгармаслик аломати муҳим роль ўйнайди.

Агар бирор I оралиқда $F'(x) = 0$ бўлса, у ҳолда F функция шу оралиқда ўзгармасдир.

Исбот. I оралиқдан бирор x_0 ни тайинлаймиз. У вақтда шу оралиққа тегишли ҳар қандай x сон учун, Лагранж формуласига кўра x ва x_0 орасида ётган шундай c сонни кўрсатиш мумкинки,

$$F(x) - F(x_0) = F'(c)(x - x_0)$$

булади. $c \in I$ бўлгани учун (c шу ораликқа тегишли x ва x_0 сонлар орасида ётади) $F'(c) = 0$ (шартга кўра), демак,

$$F(x) - F(x_0) = 0.$$

Шундай қилиб, I ораликқа тегишли барча x лар учун

$$F(x) = F(x_0),$$

яъни F функция ўз қийматини ўзгартирмай сақлайди.

Энди бошланғич функцияларнинг асосий хоссасини исботлаймиз:
 $f(x)$ функция учун I ораликдаги бошланғич функцияларнинг умумий кўриниши

$$F(x) + C \quad (1)$$

дан иборат, бунда C — ихтиёрий ўзгармас, $F(x)$ эса $f(x)$ функция учун I ораликдаги бошланғич функциялардан бири.

Бошланғич функциянинг қисқа ифодаданг икки хоссасини ўз ичига олган бу тасдиқни тушунтирамиз: 1) (1) ифодада C ўрнига ҳар қандай сон қўйилганда ҳам $f(x)$ функция учун I ораликқа тегишли бошланғич функция ҳосил бўлади; 2) $f(x)$ учун I ораликда ҳар қандай $\Phi(x)$ бошланғич функцияни олинганда ҳам шундай C сонини танлаш мумкинки, I ораликқа тегишли ҳамма x лар учун

$$\Phi(x) = F(x) + C$$

тенглик бажарилади.

Исбот. 1) Шартга кўра F функция f функция учун I ораликдаги бошланғич функция. Демак, исталган $x \in I$ учун

$$F'(x) = f(x),$$

шу сабабли

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x),$$

яъни $F(x) + C$ функция $f(x)$ учун бошланғич функция.

2) $\Phi(x)$ функция f учун ўша I ораликдан олинган яна битта бошланғич функция бўлсин. Яъни барча $x \in I$ лар учун

$$\Phi'(x) = f(x)$$

бўлсин. У ҳолда

$$(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Бундан функциянинг ўзгармаслик аломатига кўра, $\Phi(x) - F(x)$ айирма I ораликда ўзгармас функция экани келиб чиқади.

Шундай қилиб, I ораликдаги барча x лар учун

$$\Phi(x) - F(x) = C, \quad \text{яъни } \Phi(x) = F(x) + C,$$

шунини исботлаш талаб қилинган эди.

Бошлангич функцияларнинг асосий хоссасига геометрик маъно бериш мумкин: $\int$ функциянинг истаган иккита бошлангич функциясининг графиклари бир-биридан Oy ўқ бўйлаб параллел қўчириш натижасида ҳосил бўлади (102-расм).

1-мисол. Нуқта тўғри чизик бўйлаб ўзгармас a тезланиш билан ҳаракат қилмоқда. Бошлангич $t_0 = 0$ моментда нуқта x_0 бошлангич координатага ва v_0 бошлангич тезликка эга. Нуқтанинг $x(t)$ координатасини вақтнинг функцияси сифатида топамиз.

$x'(t) = v(t)$ ва $v'(t) = a(t)$ бўлгани учун $a(t) = a$ шартдан:

$$v'(t) = a.$$

Бундан

$$v(t) = at + C_1 \quad (2)$$

келиб чиқади. $t_0 = 0$ ни (2) га қўйиб $C_1 = v_0$ ни топамиз ва, демак,

$$x'(t) = v(t) = at + v_0.$$

Демак,

$$x(t) = \frac{at^2}{2} + v_0 t + C_2. \quad (3)$$

C_2 ни топиш учун (3) тенгликка $t_0 = 0$ қийматини қўямиз. Ушбуга эга бўламиз: $C_2 = x_0$.

Шундай қилиб,

$$x(t) = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0.$$

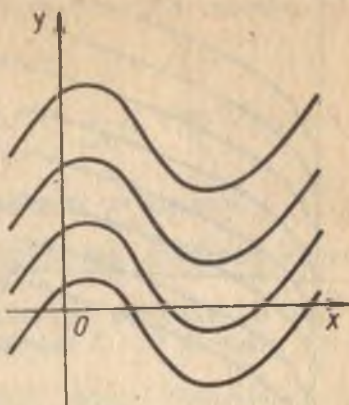
2-мисол. $\frac{1}{\sqrt{x}}$ функция учун графиги $M(9; -2)$ нуқтадан ўтadиган бошлангич функцияни* топамиз.

$\frac{1}{\sqrt{x}}$ нинг истаган бошлангич функцияси

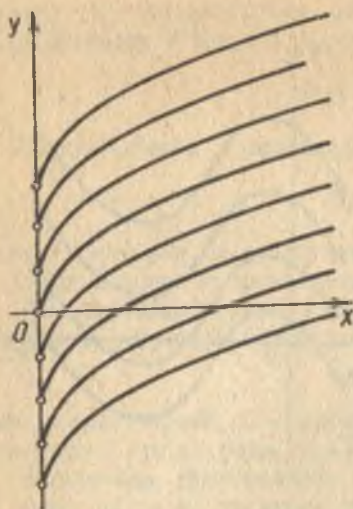
$$2\sqrt{x} + C$$

кўринишида ёзилади.

* f функциянинг бошлангич функцияларини топишда одатда қисқалик учун f функция берилган оралиқ кўрсатилмайди. Мумкин бўлган катта узунликдаги оралиқлар назарда тутилади. Масалан, қаралаётган ҳолда $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ функция $(0; \infty)$ оралиқда берилган деб ҳисоблаш табиийдир.



102-расм



103-расм

103-расмда бу бошланғич функцияларнинг графиклари тасвирланган.

Изланаётган бошланғич функция графиги $M(9; -2)$ нуқтасининг координатлари $2\sqrt{9} + C = -2$ тенгламани қаноатлантириши керак.

Бундан $C = -8$ эканини топамиз. Демак, изланаётган бошланғич функция бундай: $F(x) = 2\sqrt{x} - 8$.

Қуйида баъзи функциялар учун бошланғич функциялар жадваллари келтирилган:

Функция	k (Эзгармас	x^n ($n \in \mathbb{Z}$ $n \neq -1$)	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\sin x$	$\cos x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\sin^2 x}$
Бошланғич функциянинг умумий қўриниши	$kx + C$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$2\sqrt{x} + C$	$-\cos x + C$	$\sin x + C$	$\tan x + C$	$-\cot x + C$

Бошланғич функциялар жадвалининг тўғри тўлдирилган-тўлдирилмаганини мустақил текширинг.

Машқлар

436. F функция f функция учун бошланғич функция эканлигини текширинг:

а) $F(x) = \sin x - x \cos x$; $f(x) = x \sin x$;

б) $F(x) = \cos x + x \sin x$; $f(x) = x \cos x$;

в) $F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

f функция учун графиги берилган M нуқтадан ўтувчи бошланғич функцияни толинг (437 — 438).

437. а) $f(x) = x^3$; $M(2; 1)$; б) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$; $M(\frac{\pi}{4}; 0)$;

в) $f(x) = \sin x$; $M(0; 3)$; г) $f(x) = -2$; $M(3; 5)$.

438. а) $f(x) = \frac{1}{x^3}$; $M(-\frac{1}{2}; 3)$; б) $f(x) = \cos x$; $M(\frac{\pi}{2}; 0)$;

в) $f(x) = \sqrt{x}$; $M(9; 10)$; г) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$; $M(4; 4)$.

439. f функция учун шундай F бошланғич функцияни топишги, у кўрсатилган нуқтада берилган қийматни қабул қилсин:

а) $f(x) = x^2$; $F(3) = 0$; б) $f(x) = -\frac{1}{x^2}$; $F(1) = -1$;

в) $f(x) = \sin x$; $F(\pi) = 7$; г) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$; $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$.

32. Бошланғич функцияларни топишнинг уч қондаси

Бошланғич функцияларни излаш қондалари дифференциаллашнинг тегишли қондаларига ўхшайди.

1. **Агар F функция f учун бошланғич функция, G эса g учун бошланғич функция бўлса, у ҳолда $F + G$ йиғинди $f + g$ учун бошланғич функция бўлади.**

Ҳақиқатан, $F' = f$ ва $G' = g$ бўлгани сабабли йиғиндининг ҳосиласини ҳисоблаш қондасига биноан ушбуга эга бўламыз:

$$(F + G)' = F' + G' = f + g.$$

2. **Агар F функция f учун бошланғич функция, k эса ўзгармас бўлса, kF функция kf учун бошланғич функция бўлади.**

Ҳақиқатан, ўзгармас кўпайтувчини ҳосила белгисидан ташқарига чиқариш мумкин, шу сабабли

$$(kF)' = kF' = kf.$$

3. **Агар $F(x)$ функция $f(x)$ учун бошланғич функция, k ва b ўзгармаслар (бунда $k \neq 0$) бўлса, $\frac{1}{k}F(kx + b)$ функция $f(kx + b)$ учун бошланғич функция бўлади.**

Ҳақиқатан, мураккаб функциянинг ҳосиласини ҳисоблаш қондасига кўра ушбуга эгамиз:

$$\left(\frac{1}{k}F(kx + b)\right)' = \frac{1}{k}F'(kx + b) \cdot k = f(kx + b).$$

Бу қондаларнинг қўлланилишига мисоллар келтирамыз.

1-мисол. $x^3 + \frac{1}{x^2}$ функция учун бошланғич функцияларнинг умумий кўринишини топамиз.

x^3 функция учун бошланғич функциялардан бири $\frac{x^4}{4}$ дан иборат, $\frac{1}{x^2}$ — функция учун бошланғич функциялардан бири эса $-\frac{1}{x}$ дан иборат, шунинг учун 1-қондага кўра $x^3 + \frac{1}{x^2}$ функция учун бошланғич функциялардан бири $\frac{x^4}{4} - \frac{1}{x}$ бўлади. Жавоб. $\frac{x^4}{4} - \frac{1}{x} + C$.

2-мисол. $f(x) = 5 \cos x$ учун бошланғич функциялардан бири-ни топамиз.

$\cos x$ функция учун бошланғич функциялардан бири $\sin x$ бўлгани учун 2-қондани қўлланиб, жавобни топамиз: $5 \sin x$.

3-мисол. $\sin(3x - 2)$ функция учун бошланғич функциялардан бирини топамиз.

$\sin x$ функция учун бошланғич функцияларидан бири — $\cos x$ дан иборат, шунинг учун 3-қондага кўра изланаётган бошланғич функция

$$-\frac{1}{3} \cos(3x - 2)$$

га тенг.

4-мисол. $\frac{1}{(7-3x)^4}$ функция учун бошланғич функциялардан бирини топамиз.

$\frac{1}{x^5}$ функция учун бошланғич функция $-\frac{1}{4x^4}$ бўлгани учун 3-қондага кўра изланаётган бошланғич функция

$$\frac{1}{-3} \cdot \frac{-1}{4(7-3x)^4} = \frac{1}{12(7-3x)^4}$$

га тенг бўлади.

5-мисол. Массаси 2 кг бўлган моддий нуқта Ox ўқ бўйлаб йўналган куч таъсирида шу ўқ бўйлаб ҳаракатланмоқда. Вақтнинг t пайтида бу куч $F(t) = 3t - 2$ га тенг. Агар $t = 2$ секундда нуқта тезлиги 3 м/с. координатаси эса $x = 1$ экани маълум бўлса, нуқтанинг ҳаракат қонуни $x(t)$ ни топинг (F —куч, ньютонларда, t —вақт, секундларда, x —йўл, метрларда).

Ечилиши. Ньютоннинг иккинчи қонунига биноан

$$F = ma.$$

Шу сабабли тезланиш $a = \frac{F}{m}$ ва

$$a(t) = \frac{F}{m} = \frac{3}{2}t - 1.$$

Нуқтанинг тезлиги $v(t)$ унинг тезланиши $a(t)$ учун бошланғич функциядир, шу сабабли

$$v(t) = \frac{3}{4}t^2 - t + C_1.$$

$v(2) = 3$ шартдан C_1 ўзгармасни топамиз:

$$\frac{3}{4} \cdot 4 - 2 + C_1 = 3, \text{ яъни } C_1 = 2 \text{ ва } v(t) = \frac{3}{4}t^2 - t + 2.$$

$x(t)$ координата $v(t)$ тезлик учун бошланғич функциядир, шу сабабли

$$x(t) = \frac{1}{4}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 2t + C_2.$$

$x(2) = 1$ шартдан C_2 ўзгармасни топамиз:

$$\frac{1}{4} \cdot 8 - \frac{1}{2} \cdot 4 + 4 + C_2 = 1, \quad C_2 = -3.$$

Шундай қилиб, нуқтанинг ҳаракат қонуни

$$x(t) = \frac{1}{4} t^3 - \frac{1}{2} t^2 + 2t - 3.$$

Машқлар

Функциянинг бошланғич функцияларининг умумий кўринишини топинг (440 — 442).

440. а) $5x^2 - 1$; б) $\frac{1}{x^2} - 4 \sin x$; в) $kx + b$; г) $ax^2 + bx + c$.

441. а) $1 - \cos 3x$; б) $\frac{2}{\sin^2 3x}$; в) $\frac{3}{\cos^2 5x}$; г) $7 \sin \frac{x}{3} + \frac{2}{\cos^2 4x}$.

442. а) $\frac{1}{\sqrt{3x-2}}$; б) $\frac{5}{\sqrt{2x+7}}$; в) $\frac{6}{(5x-7)^3}$; г) $8(11-3x)^5$.

443. Ер сиртидан юқорига қаратиб тош отилган. Ҳавонинг қаршилигини ҳисобга олмай ва оғирлик кучининг тезланиши $g \approx 9,8 \text{ м/с}^2$ га тенг деб ҳисоблаб: 1) тошнинг бошланғич тезлиги v_0 га боғлиқ ҳолда энг юқори кўтарилиш баландлигини топинг; 2) тошнинг энг юқори ҳолатдаги тезлигини топинг; 3) қанча вақтдан кейин тош ерга тушишини топинг. Тезлик метр секундларда ўлчанади.

444*. Агар нуқтанинг тезлиги $v = 9,8t - 0,003t^2$ қонун бўйича ўзгарадиган бўлса, $t = 0$ дан $t = 5$ с гача бўлган вақт оралиғида нуқта ўтган йўлни топинг. Бу нуқтанинг йўлнинг охиридаги тезланишини топинг (тезлик метр секундларда ўлчанади).

445*. Ҳаракатланаётган нуқтанинг тезлиги $v = Rt + a\sqrt{t}$ қонун бўйича ўзгаради. Шу нуқтанинг $t = 0$ дан $t = 4$ гача бўлган вақт оралиғида ўтган йўлини ва йўлнинг охиридаги тезланишини топинг.

446. Массаси m га тенг бўлган моддий нуқта Ox ўқ бўйича шу ўққа нисбатан параллел йўналган куч таъсирида ҳаракатланмоқда. Вақтнинг t пайтида бу куч $F(t)$ га тенг. Агар $t = t_0$ да нуқтанинг тезлиги v_0 , унинг координатаси x_0 га тенг экани маълум бўлса, нуқтанинг ҳаракат қонуни $x(t)$ ни топинг ($F(t)$ ньютонларда, t —секундларда, v —секундига метрларда, m килограммларда ўлчанади). Ечишни қуйидаги сон маълумотларда бажаринг:

а) $F(t) = 6 - 9t$, $t_0 = 1$, $v_0 = 4$, $x_0 = -5$, $m = 3$;

б) $F(t) = \frac{10}{t^3}$, $t_0 = \frac{1}{2}$, $v_0 = 1$, $x_0 = 2,5$, $m = 5$;

в) $F(t) = 14 \sin t$, $t_0 = \pi$, $v_0 = 2$, $x_0 = 3$, $m = 7$;

г) $F(t) = 18 \cos t$, $t_0 = 0$, $v_0 = -5$, $x_0 = 9$, $m = 6$.

33. Эгри чизиқли трапециянинг юзи

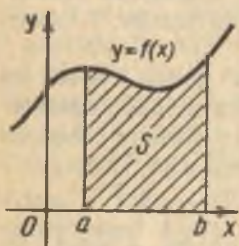
Ох ўқнинг $[a; b]$ кесмасида ишорасини ўзгартирмайдиган f узлуксиз функция берилган бўлсин. Шу функциянинг графиги, $[a; b]$ кесма ва $x = a$ ҳамда $x = b$ тўғри чизиқлар билан чегараланган фигура (104-расм) эгри чизиқли трапеция дейилади. Эгри чизиқли трапецияга ҳар хил мисоллар 105—108-расмларда келтирилган.

Эгри чизиқли трапецияларнинг юзларини ҳисоблашда қуйидаги теоремадан фойдаланилади.

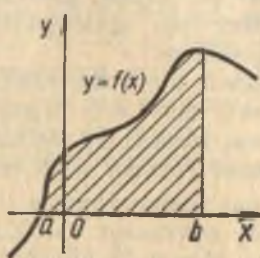
Теорема. f функция $[a; b]$ кесмада узлуксиз ва номанфий бўлсин, S —тегишли эгри чизиқли трапециянинг юзи бўлсин (104-расмга қаранг). Агар F функция $[a; b]$ кесмада f учун бошланғич функция бўлса, у ҳолда,

$$S = F(b) - F(a). \quad (1)$$

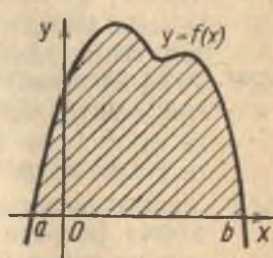
Исбот. $[a; b]$ кесмада аниқланган $S(x)$ функцияни қараймиз. Агар $x = a$ бўлса, у ҳолда $S(a) = 0$ бўлади. Агар $a < x \leq b$ бўлса, у ҳолда $S(x)$ функция эгри чизиқли трапециянинг $M(x; 0)$ нуқтадан ўтувчи вертикал тўғри чизиқдан чапда жойлашган қисмининг юзи бўлади. (109-расм). Шунинг қайд этамизки, $S(b) = S$ (S —эгри чизиқли трапециянинг юзи).



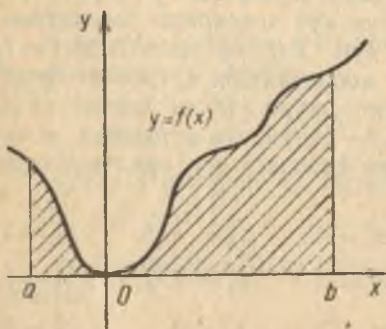
104- расм



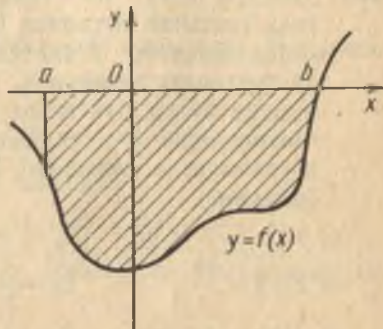
105- расм



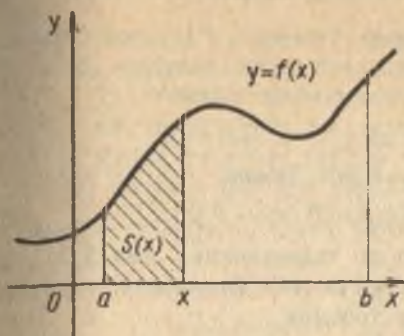
106- расм



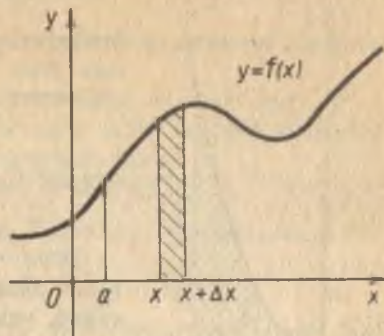
107- расм



108- расм



109- расм



110- расм

$$S'(x) = f(x) \quad (2)$$

эканини исботлаймиз.

Ҳақиқатан, ҳосиланинг таърифига кўра ушбун исботлаш керак:

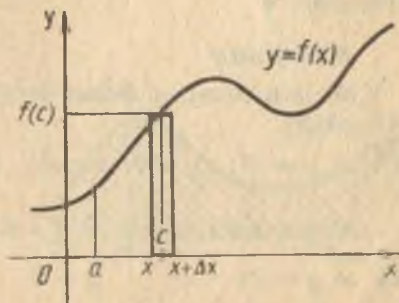
$$\Delta x \rightarrow 0 \text{ да } \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} \rightarrow f(x). \quad (3)$$

Сурат $\Delta S(x)$ нинг геометрик маъносини ойдинлаштирамиз. Соддалик учун $\Delta x > 0$ ҳолни қараймиз. $\Delta S(x) = S(x + \Delta x) - S(x)$ бўлгани учун $\Delta S(x)$ 110- расмда штрихланган фигуранинг юзи бўлади. Энди юзи $\Delta S(x)$ га тенг бўлган $[x; x + \Delta x]$ кесмага таянувчи тўғри тўртбурчакни оламиз (111-расм). Бу тўғри тўртбурчакнинг юқори томони функция графигини унинг узлуксизлиги туфайли абсциссаси $c \in [x; x + \Delta x]$ бўлган бирор нуқтада кесиб ўтади (бошқача айтганда, унинг юзи $\Delta S(x)$ дан ё катта, ёки кичик бўлади). Демак, тўғри тўртбурчакнинг баландлиги $f(c)$ га тенг бўлади. Тўғри тўртбурчак юзининг формуласига кўра: $\Delta S(x) = f(c) \cdot \Delta x$. Бундан $\frac{\Delta S(x)}{\Delta x} = f(c)$. Бу формула $\Delta x < 0$ да ҳам ўринли. c нуқта x ва

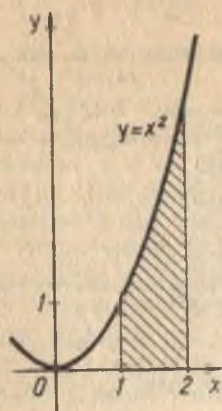
$x + \Delta x$ орасида ётгани учун у $\Delta x \rightarrow 0$ да x га интилади. f функция узлуксиз бўлгани сабабли $\Delta x \rightarrow 0$ да $f(c) \rightarrow f(x)$. Шундай қилиб, $\Delta x \rightarrow 0$ да $\frac{\Delta S(x)}{\Delta x} \rightarrow f(x)$.

(2) формула исботланди.

Биз $S(x)$ функция $f(x)$ функция учун бошланғич функция эканини топдик. Шу сабабли бошланғич функцияларнинг асосий хоссасига кўра барча $x \in [a; b]$ лар учун:



111- расм



112- расм

$$S(x) = F(x) + C,$$

бунда C —бирор ўзгармас, $F(x)$ эса f функция учун бошланғич функциялардан бири. C ни топиш учун $x = a$ деб оламиз:

$$F(a) + C = S(a) = 0,$$

бундан $C = -F(a)$. Демак,

$$S(x) = F(x) - F(a). \quad (4)$$

Эгри чизиқли трапециянинг юзи $S(b)$ га тенг бўлгани учун (4) формулага $x = b$ ни қўйиб, ушбуни топамиз:

$$S = S(b) = F(b) - F(a).$$

Мисол. $f(x) = x^2$ функция графиги билан чегараланган ва $[1; 2]$ кесмага таянган эгри чизиқли трапециянинг юзини ҳисоблаймиз (112-расм).

Ечилиши. $f(x) = x^2$ функция учун $F(x) = \frac{x^3}{3}$ функция бошланғич функциядир.

Демак,

$$S = F(2) - F(1) = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}.$$

▼ Функциянинг ҳосиласини ҳисоблаш кўпчилик ҳолларда ҳисоблаш характеридаги қийинчиликлар билангина боғлиқ эканини кўрдик. Бошланғич функцияларни топиш иши анча мураккабдир. Масалан, берилган функция бошланғич функцияга эга ёки эга эмаслигини бирданига билиб бўлмайди. Шу муносабат билан I оралиқда узлуксиз бўлган ҳар қандай функция шу оралиқда бошланғич функцияга эга эканини таъкидлаймиз. Бунни юқорида келтирилган (2) формуланинг исботи қисман изоҳлайди. Аммо баъзи функцияларнинг бошланғич функцияларини мактабда ўрганилаётган функциялар ёрдамида ёзиш мумкин эмас. Масалан, $\sqrt{x^3 + 1}$ шу хил функциялардандир. ▼

Машқлар

Қуйидаги чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини топинг (447—448).

447. а) $y = x^2$; $y = 0$; $x = 3$; б) $y = \cos x$; $y = 0$; $x = 0$; $x = \frac{\pi}{2}$;

в) $y = \sin x$; $y = 0$; $0 \leq x \leq \pi$; г) $y = \frac{1}{x^2}$; $y = 0$; $x = 1$; $x = 2$.

448. а) $y = 2x - x^2$; $y = 0$; б) $y = (x + 2)^2$; $y = 0$; $x = 0$;

в) $y = \frac{1}{x^2}$; $y = 4$; $x = 8$; г) $y = x^3$; $y = 0$; $x = 1$.

Интеграл. Ньютон—Лейбниц формуласи

Эгри чизиқли трапеция юзини ҳисоблаш масаласининг бошқача йўли ҳам мавжуд.

Соддалик учун f функцияни $[a; b]$ кесмада монфий эмас ва узлуксиз деб ҳисоблаймиз; у ҳолда тегишли эгри чизиқли трапециянинг S юзини тақрибан бундай ҳисоблаш мумкин.

$[a; b]$ кесмани бир хил узунликдаги n та кесмага $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ нуқталар ёрдамида бўламиз ва $\Delta x =$

$$= \frac{b-a}{n} = x_k - x_{k-1} \text{ бўлсин, бунда } k = 1, \dots, n-1, n.$$

$[x_{k-1}; x_k]$ кесмаларнинг ҳар бирида, шу кесмани асос қилиб олиб, баландлиги $f(x_{k-1}; x_k)$ га тенг бўлган тўғри тўртбурчак ясаймиз. Бу тўғри тўртбурчакнинг юзи

$$f(x_{k-1}) \cdot \Delta x = \frac{b-a}{n} f(x_{k-1})$$

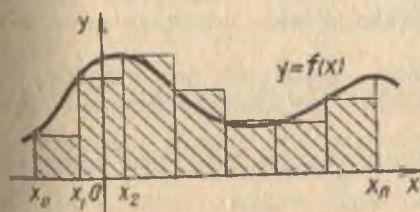
га тенг, бундай тўғри тўртбурчаклар юзларининг йиғиндиси эса ушбуга тенг (113-расм):

$$S_n = \frac{b-a}{n} (f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})).$$

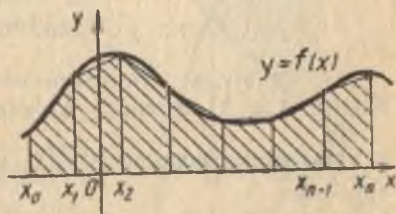
f функциянинг узлуксизлиги сабабли ясалган тўғри тўртбурчаклар бирлашмаси катта n ларда, яъни кичик Δx ларда бизни қизиқтираётган эгри чизиқли трапеция билан «деярли устма-уст тушади». Шу сабабли катта n ларда $S_n \approx S$ ва бу тақрибий тенглик инсталган аниқликда бажарилади, деган фараз келиб чиқади. Қисқача «чексизликка интилганда S_n йиғинди S га интилади» дейилади ва $n \rightarrow \infty$ да $S_n \rightarrow S$ деб ёзилади.

Бу фараз тўғри. Бунинг устига $[a; b]$ кесмада узлуксиз ҳар қандай функция (номонфий бўлиши шарт эмас) учун S_n ($n \rightarrow \infty$ да) бирор сонга интилиши исботланган. Шу сонни (гаърифга кўра)

f функциянинг a дан b гача *интеграл*и дейилади ва $\int_a^b f(x) dx$ билан белгиланади, яъни



113- расм



114- расм

$$n \rightarrow \infty \text{ да } S_n \rightarrow \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

(бундай ўқилади: « a дан b гача интеграл эф икс дэ икс»), a ва b сонлари *интеграллаш чегаралари* дейилади: a — қуйи чегара, b — юқори чегара.

$\int$ белги *интеграл белгиси* дейилади. f функция *интеграл остидаги функция*, x ўзгарувчи эса *интеграллаш ўзгарувчиси* дейилади.

Шундай қилиб, агар $[a; b]$ кесмада $f(x) \geq 0$ бўлса, у ҳолда тегишли эгри чизиқли трапециянинг юзи

$$S = \int_a^b f(x) dx \quad (2)$$

формула билан ифодаланади.

▼ Интегрални тақрибий ҳисоблаш учун S_n йиғиндиларини қараш мумкин. Энг яхшиси қуйидаги йиғиндилардан фойдаланиш керак:

$$S_n = \frac{b-a}{n} \left(\frac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2} f(x_n) \right),$$

бу йиғиндининг қўшилувчилари f функция мусбат бўлганда эгри чизиқли трапецияга «ички қизилган» ва 114-расмда кўрсатилган синиқ чизиқлар билан чегараланган трапециялар юзларига тенг.

Ҳақиқатан, трапеция юзи формуласини қўлланиб, тонамиз:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} \cdot \frac{(b-a)}{n} + \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \cdot \frac{b-a}{n} + \dots = \\ &= \frac{b-a}{n} \left(\frac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \dots + \frac{1}{2} f(x_n) \right). \end{aligned}$$

Эгри чизиқли трапеция юзининг илгари топилган

$$S = F(b) - F(a) \text{ ва } S = \int_a^b f(x) dx$$

формулаларини таққослаб, бундай натижа чиқарамиз: агар F функция $[a; b]$ да f учун бошланғич функция бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (3)$$

(3) формула *Ньютон—Лейбниц* формуласи деб аталади. Бу формула $[a; b]$ кесмада узлуксиз бўлган ҳар қандай f функция учун тўғри.

Ньютон—Лейбниц формуласининг қўлланишига доир мисоллар қараймиз.

1-мисол. $\int_{-1}^2 x^2 dx$ ни ҳисоблаймиз.

x^3 функция учун бошланғич функция $\frac{x^3}{3}$ бўлгани сабабли:

$$\int_{-1}^2 x^3 dx = \frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = 3.$$

Езувни қулайлаштириш учун F функциянинг орттирмасини қис-
қача $F(x) \Big|_a^b$ шаклида белгилаш қабул қилинган, яъни

$$F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b.$$

Бу белгилашдан фойдаланиб, одатда Ньютон—Лейбниц фор-
муласи

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b \quad (4)$$

кўринишда ёзилади.

2-мисол. Киритилган белгилашлардан фойдаланиб, ушбуни ҳо-
сил қиламиз:

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -\cos \pi - (-\cos 0) = 2.$$

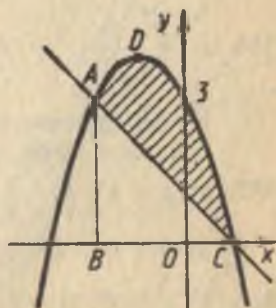
Эслатма. Интегралга берган таърифимиз $\frac{1}{x^2}$ функциядан—1
дан 2 гача чегарада олинган интеграл ҳақида гапириш имконини
бермайди, чунки бу функция $[-1; 2]$ кесмада узлуксиз эмас. Шу-
ни ҳам қайд қиламиз. $-\frac{1}{x}$ функция $\frac{1}{x^2}$ функция учун шу кес-
мада бошланғич функция эмас, чунки кесмага тегишли бўлган 0
нуқта $\frac{1}{x^2}$ функциянинг аниқланиш соҳасига қирмайди.

3-мисол. $y = 1 - x$ ва $y = 3 - 2x - x^2$
чиқиқлар билан чегараланган фигуранинг
юзини ҳисоблаймиз.

Шу чиқиқларни ясаймиз (115-расм) ва
уларнинг кесишиш нуқталари абсциссала-
рини

$$1 - x = 3 - 2x - x^2$$

тенгламадан топамиз. Бу тенгламани ечиб,
 $x = 1$ ва $x = -2$ ни топамиз. Изланаётган
юз $BADC$ эгри чиқиқли трапеция ва BAC
учбурчак юзларининг айирмаси сифатида
топилиши мумкин. (2) формулага кўра:



115-расм

$$S_{BADC} = \int_{-2}^1 (3 - 2x - x^2) dx = \left(3x - x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-2}^1 =$$

$$= 3 - 1 - \frac{1}{3} - 3 \cdot (-2) + (-2)^2 + \frac{(-2)^3}{3} = 9;$$

$$S_{\Delta BAC} = \frac{1}{2} |AB| \cdot |BC| = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = \frac{9}{2}.$$

Демак, штрихланган фигуранинг юзи $\frac{9}{2}$ га тенг:

$$S = S_{BADC} - S_{\Delta BAC} = \frac{9}{2}.$$

Эслатма. Интеграл тушунчасининг таърифига кўра $a \geq b$ деб олиб мана бундай кенгайтириш қулай:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

Бундай келишишда Ньютон—Лейбниц формуласи ихтиёрий a ва b ларда тўғри (хусусан, $\int_a^a f(x) dx = 0$ бўлади).

Машқлар

Интегрални ҳисобланг (449 — 451).

449. а) $\int_{-1}^1 x^4 dx$; б) $\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$; в) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$; г) $\int_{-2}^2 x^3 dx$.

450. а) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^3 x}$; б) $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{x^2}$; в) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x^3}$; г) $\int_{-\pi}^0 \sin x dx$.

451. а) $\int_1^{10} \frac{dx}{x^3}$; б) $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$; в) $\int_1^6 \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$; г) $\int_{-1}^2 \frac{dx}{(2x+1)^2}$.

Қуйидаги қизиқлар билан чегараланган фигура юзини (олдиндан расм ясаб) ҳисобланг (452 — 453).

452. а) $y = x^3$, $x = 1$, $x = 3$, $y = 0$; б) $y = x^4$, $y = 0$, $x = 1$;
в) $y = 2 + x - x^2$, $y = 0$; г) $y = \cos x$, $y = 0$, $|x| \leq \frac{\pi}{2}$.
453. а) $y = x^2$, $y = 2x$; б) $y = x^2$, $y = x^3$;
в) $y = \frac{1}{x^2}$, $y = x$, $x = 2$; г) $y = \sqrt{x}$, $y = x$.

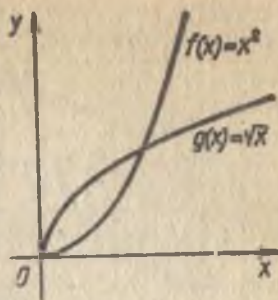
Худди шуни исботлаш талаб қилинаётган эди. ▼

2-мисол. Юқорида таъкидланганидек, $f(x) = x^2$ функция тескариланувчи эмас. Аммо $[0; \infty)$ оралиқда $f^*(x) = x^2$ формула билан аниқланган f^* функция шу оралиқда ўсувчи ва, демак, тескари функцияга эга.

f^* функцияга тескари функция $\sqrt{x}$ дан иборат. Бу функцияларнинг графиклари 137-расмда тасвирланган.

Умуман x^n функция ҳар қандай натурал n да $[0; \infty)$ оралиқда ўсувчи ва шунинг учун тескари функцияга эга. x^n функцияга тескари функция $\sqrt[n]{x}$ дан иборат. x^n функцияларнинг n нинг баъзи қийматларидаги ва уларга тескари $\sqrt[n]{x}$ функцияларнинг графиклари 138, 139-расмларда тасвирланган.

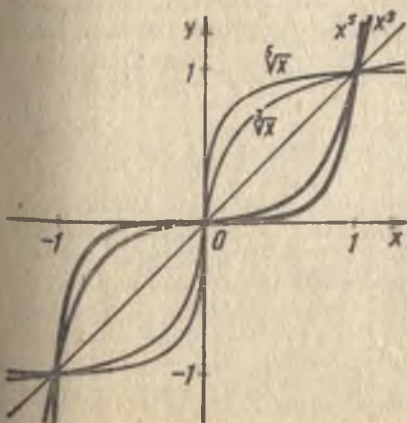
137- расм



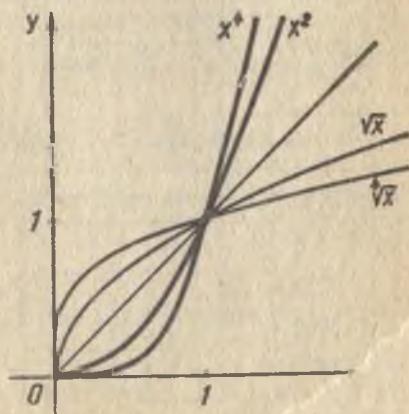
Машқлар

540. Берилган f функцияга тескари g функцияни берувчи формулани келтириб чиқаринг. g функциянинг аниқланиш соҳасини ва қийматлари соҳасини кўрсатинг:

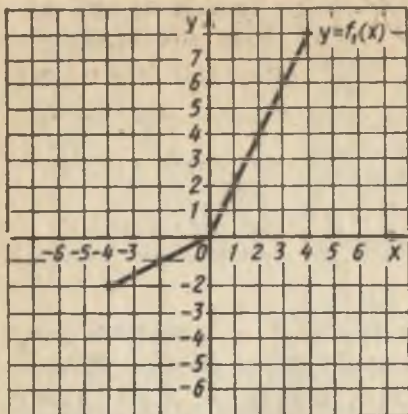
- а) $f(x) = 2x + 1$; б) $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$;
 в) $f(x) = -2x + 1$; г) $f(x) = -\frac{1}{2}x - 1$;
 д) $f(x) = -\frac{1}{x}$; е) $f(x) = \frac{x}{x+2}$;
 ж) $f(x) = 2x^2 (x \geq 0)$; з) $f(x) = \sqrt{x+1}$.



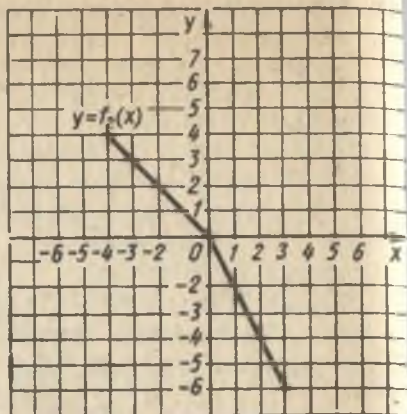
138- расм



139- расм



140- расм



141- расм

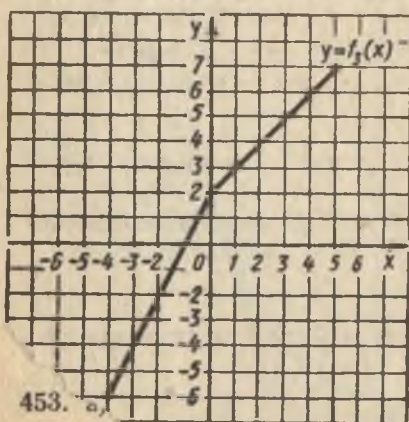
541. $f(x)$ функциянинг $[-1; 1]$ кесмадаги қийматлари жадвалини 0,1 қадам билан тузинг ва шундан кейин миллиметрли қоғозга бу функциянинг $[-1; 1]$ кесмадаги графигини ясанг. $f(x)$ функцияга тескари функция графигини ясанг:

а) $f(x) = 2x^3 + 1$; б) $f(x) = -2x^3 + 1$.

542. f функциянинг берилган графиги бўйича f га тескари g функциянинг $-2, 1$ ва 3 нуқтадаги қийматларини топинг. g функция графигини ясанг, унинг аниқланиш соҳаси ва қийматлари соҳасини кўрсатинг:

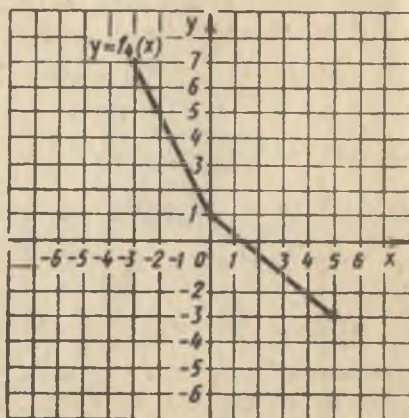
а) $f(x) = f_1(x)$ (140- расм); б) $f(x) = f_2(x)$ (141- расм);

в) $f(x) = f_3(x)$ (142-расм) г) $f(x) = f_4(x)$ (143- расм).



453. а)

в) $y =$ 142- расм



143- расм

543. f функция кўрсатилган оралиқда тескари функцияга эга эканлини исботланг. f га тескари функция графигини ясанг:

а) $f(x) = x^2 + 1, x \geq 0$; б) $f(x) = x, x \in (-\infty; \infty)$;

в) $f(x) = \sqrt[n]{x}, x \geq 0$; г) $f(x) = x^2 + 1, x \in (-\infty; \infty)$;

д) $f(x) = \sin x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; е) $f(x) = \cos x, x \in [0; \pi]$;

ж) $f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$; з) $f(x) = \operatorname{ctg} x \in (0; \pi)$.

42. Логарифмик функция

$f(x) = a^x$ кўрсаткичли функция $a > 1$ да R да ўсади, $0 < a < 1$ да эса R да камайди; унинг қийматлари соҳаси R_+ тўпламдан иборат. Демак, бу функция тескариланувчи (41-п.) ва унинг учун $g(x)$ тескари функция аниқланган бўлиб, бу тескари функциянинг аниқланиш соҳаси мусбат сонлар R_+ тўпламидан, қийматлари соҳаси эса R тўпламдан иборат. Бу функцияни a асосли логарифмик функция дейилади ва бундай белгиланади: $g(x) = \log_a x$. 10 асосли логарифмик функция $\lg$ деб белгиланади.

f га тескари g функциянинг таърифига кўра унинг $g(x)$ қиймати $f(y) = x$ бўладиган y сондир. Бу ҳолда $y = \log_a x, f(y) = a^y = a^{\log_a x}$. Шундай қилиб, ҳар қандай $x > 0$ учун

$$a^{\log_a x} = x. \quad (1)$$

Бошқача айтганда, x сонининг a асос бўйича логарифми x сонини ҳосил қилиш учун a сонини кўтариш керак бўлган даража кўрсаткичидир.

$a^{\log_a x} = x$ (бунда $x > 0, a > 0$ ва $a \neq 1$) айният асосий логарифмик айният дейилади.

1-мисол. Ушбу қийматларни топамиз: а) $\log_2 32$; б) $\log_5 0,04$.

а) $32 = 2^5$ эканини қайд қиламиз, яъни 32 сонини ҳосил қилиш учун 2 ни бешинчи даражага кўтариш керак. Демак, $\log_2 32 = 5$.

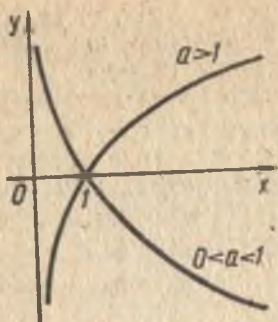
б) $0,04 = \frac{1}{25} = 5^{-2}$ эканини қайд қиламиз, шу сабабли $\log_5 0,04 = -2$.

2-мисол. $\frac{1}{9}$ сонининг $\sqrt{3}$ асосга кўра логарифмини топамиз. $(\sqrt{3})^{-4} = \frac{1}{9}$ эканини қайд қиламиз. Шу сабабли логарифмининг таърифига кўра $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{9} = -4$.

3-мисол. а) $\log_8 x = \frac{1}{3}$; б) $\log_x 8 = -\frac{3}{4}$ тенгликларни қаноатлантирадиган x сонини топамиз.

Асосий логарифмик айниятдан фойдаланамиз:

а) $x = 8^{\log_8 x} = 8^{\frac{1}{3}} = 2$;



144- расм

б) $x^{\log_x 8} = 8$, яъни $x^{-\frac{3}{4}} = 8$, бундан
 $x = 8^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{16}$.

$g(x) = \log_a x$ функция $f(x) = a^x$ ($a > 1$ да ўсувчи ва $0 < a < 1$ да камаювчи) функцияга тескари функция сифатида $a > 1$ да аниқланиш соҳасининг ҳамма ерида ўсади ва $0 < a < 1$ да камаяди. $y = \log_a x$ функциянинг графиги $y = a^x$ функция графигига $y = x$ тўғри чизиққа нисбатан симметрик, чунки бу функциялар ўзаро тескари функциялардир. 144-расм-

да логарифмик функциянинг ҳар хил асосдаги графиклари келтирилган.

Логарифмик функциянинг асосий хоссалари кўрсаткичли функциянинг асосий хоссаларидан ва тескари функция ҳақидаги теоремадан келиб чиқади. Уларни санаб ўтамиз.

1. Логарифмик функциянинг аниқланиш соҳаси — барча мусбат сонлар тўплами: $D(\log_a) = R_+$.

2. Логарифмик функциянинг қийматлари соҳаси — барча ҳақиқий сонлар тўплами: $E(\log_a) = R$.

3. Логарифмик функция R_+ аниқланиш соҳасининг ҳамма ерида $a > 1$ да ўсади ва $0 < a < 1$ да камаяди.

4. Ҳар қандай $a > 0$ ($a \neq 0$) да қуйидаги тенгликлар бажарилади:

а) $\log_a 1 = 0$;

б) $\log_a a = 1$;

в) $x > 0, y > 0$ да $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$;

г) $x > 0, y > 0$ да $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.

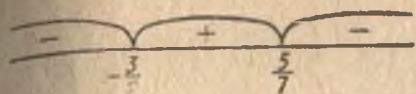
д) ҳар қандай $x > 0$ сон учун ва ҳар қандай $p \in R$ учун

$$\log_a x^p = p \log_a x.$$

1 — 3-хоссалар юқорида исботланган. 4 (а — д)-хоссалар (бу хоссаларни логарифмларнинг асосий хоссалари дейилади) нинг исботи кейинги пунктда келтирилади.

4-мисол. $f(x) = \log_8(4 - 5x)$ функциянинг аниқланиш соҳасини топамиз.

$f(t) = \log_8 t$ логарифмик функциянинг аниқланиш соҳаси R_+ дан иборат. Шу сабабли берилган функция $4 - 5x > 0$ тенгсизликни қаноатлантирадиган x лар учунгина, яъни $x < 0.8$ да аниқланган. Шундай қилиб, берилган функциянинг аниқланиш соҳаси $(-\infty; 0.8)$ интервалдан иборат.



145- расм

5-мисол. $f(x) = \log_2(x^2 - 3x - 4)$ функциянинг аниқланиш соҳасини топамиз.

Олдинги мисолдаги каби f функция x нинг $x^2 - 3x - 4 > 0$ тенгсизликни қаноатлантирувчи қийматлари учунгина аниқланган. Бу квадрат тенгсизликни ечиб, $D(f)$ $(-\infty; -1)$ ва $(4; \infty)$ интервалларнинг бирлашмасидан иборат эканини кўрамиз.

6-мисол. $f(x) = \log_7 \frac{2x+3}{5-7x}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топамиз.

Ушбу

$$\frac{2x+3}{5-7x} > 0$$

тенгсизликни интерваллар методи билан ечиб, $D(f) = \left(-\frac{3}{2}; \frac{5}{7}\right)$ эканини топамиз (145- расм).

Машқлар

a асосли даража кўринишида берилган соннинг a асос бўйича логарифмининг топинг (544 — 545).

544. а) $3^3 = 9$; б) $3^3 = 27$; в) $3^4 = 81$;
 г) $3^{-1} = \frac{1}{3}$; д) $2^{-3} = \frac{1}{8}$; е) $5^{-2} = 0,04$;
 ж) $5^0 = 1$; з) $9^{\frac{1}{2}} = 3$.

545. а) $\sqrt[4]{16} = 2$; б) $\sqrt[3]{125} = 5$; в) $\sqrt{49} = 7$;
 г) $\sqrt[4]{81} = 3$; д) $27^{\frac{2}{3}} = 9$; е) $32^{\frac{3}{5}} = 8$;
 ж) $81^{\frac{3}{4}} = 27$; з) $125^{\frac{2}{3}} = 25$.

Тенгликнинг тўғрилигини текширинг (546 — 547).

546. а) $\log_2 16 = 4$; б) $\log_5 125 = 3$; в) $\log_5 \frac{1}{81} = -4$;
 г) $\log_3 \frac{1}{243} = -5$; д) $\log_7 343 = 3$; е) $\log_5 0,04 = -2$;
 ж) $\log_{10} 1 = 0$; з) $\lg 0,01 = -2$.
 547. а) $\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$; б) $\log_{0,5} 4 = -2$; в) $\log_{\sqrt{2}} 8 = 6$;
 г) $\log_{2\sqrt{2}} 128 = \frac{14}{3}$; д) $\log_{0,2} 0,008 = 3$; е) $\log_{0,2} 125 = -3$.

ж) $\log_{\sqrt{\frac{1}{3}}} 27 = -6$; з) $\log_{\sqrt{5}} 0,2 = -2$.

548. Асосий логарифмик айниятдан фойдаланиб ифодани содда-лаштиринг:

а) $2^{\log_2 7}$; б) $1,7^{\log_{1,7} 2}$; в) $3,8^{\log_{3,8} 11}$; г) $\pi^{\log_{\pi} 5,2}$.

x сонни топинг (549 — 552).

549. а) $\log_3 x = 2$; б) $\log_3 x = -1$; в) $\log_7 x = -2$;
г) $\log_4 x = -3$; д) $\log_{\frac{1}{2}} x = -3$; е) $\log_{\sqrt{5}} x = 0$;

ж) $\log_{\frac{1}{6}} x = -3$; з) $\log_{\frac{1}{7}} x = 2$.

550. а) $\log_x 81 = 4$; б) $\log_x 27 = 3$;
в) $\log_x 0,25 = -2$; д) $\log_{\sqrt{8}} x = \frac{2}{3}$.

551. а) $\log_x \sqrt{2} = -4$; б) $\log_x 16 = -0,8$;
в) $\log_x \frac{1}{9} = -1$; г) $\log_x 0,64 = -2$.

552. а) $\log_x \sqrt{2} = \frac{1}{4}$; б) $\log_x 16 = 0,8$;
в) $\log_x \frac{1}{9} = -\frac{1}{3}$; г) $\log_x = \frac{4}{3}$.

Функциянинг аниқланиш соҳасини топинг (553 — 555).

553. а) $\log_3(x-5)$; б) $\log_{0,3}(7-3x)$; в) $\log_7(2x+3)$;
г) $\log_{\pi}(10-5x)$; д) $\log_5(9-x^2)$; е) $\log_{0,1}(x^2-4)$;
ж) $\log_{\sqrt{10}}(6+x-x^2)$; з) $\log^3_{\sqrt{2}}(x^2-2x-3)$.

554. а) $\log_8 \frac{2-x}{x+1}$; б) $\log_7 \frac{2x+5}{x-1}$;
в) $\log_{0,9} \frac{2+3x}{5-2x}$; г) $\log_{3,1} \frac{7-2x}{2-3x}$.

555. Функция графигини схематик тасвирланг:

а) $y = \log_2 x$; б) $y = \log_{\sqrt{5}} x$;

в) $y = \log_{0,3} x$; г) $y = \log_{\sqrt{0,7}} x$.

43. Логарифмларнинг асосий хоссалари

Логарифмик функциянинг олдинги пунктда ифодаланган 4 (а — д) хоссаларини исботлаймиз ($a > 0$, $a \neq 1$ эканини қайд қилиб ўтаемиз):

а) $\log_a 1 = 0$, чунки ҳар қандай a учун $a^0 = 1$.

б) $\log_a a = 1$, чунки $a^1 = a$.

в) Ҳар қандай x ва y мусбат сонлар учун

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

эканини исботлаймиз.

Қисқача бундай дейилади: «кўпайтманинг логарифми логарифмлар йиғиндисига тенг».

Исботлаш учун асосий логарифмик айниятдан фойдаланамиз:

$$x \parallel a^{\log_a x}, y = a^{\log_a y}. \quad (1)$$

Бу тенгликларни ҳадлаб кўпайтириб, топамиз:

$$xy = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y}.$$

яъни $xy = a^{\log_a x + \log_a y}$. Шундай қилиб, логарифмнинг таърифига кўра:

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y.$$

г) Ҳар қандай мусбат x ва y сонлар учун

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

эканини исботлаймиз.

Қисқача бундай дейилади: «бўлинманинг логарифми логарифмлар айирмасига тенг».

Исботлаш учун (1) тенгликлардан фойдаланамиз:

$$\frac{x}{y} = \frac{a^{\log_a x}}{a^{\log_a y}} = a^{\log_a x - \log_a y}.$$

Шундай қилиб, логарифмнинг таърифига кўра

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y.$$

д) Ҳар қандай $x > 0$ сон учун ва ҳар қандай ҳақиқий p сон учун $\log_a x^p = p \log_a x$, яъни даражанинг логарифми шу даражанинг кўрсаткичи билан даража асосининг логарифми кўпайтмасига тенг.

Асосий логарифмик айниятдан фойдаланамиз:

$$x = a^{\log_a x}, \text{ шунинг учун } x^p = (a^{\log_a x})^p = a^{p \log_a x}.$$

Шундай қилиб, логарифмнинг таърифига кўра $\log_a x^p = p \log_a x$. Логарифмларнинг асосий хоссаларидан логарифмларни ўз ичига олган ифодаларни алмаштиришларда кенг фойдаланилади. Масалан, логарифмнинг бир асосидан бошқа асосига ўтиш формуласини исботлаймиз:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}. \quad (2)$$

Агар бу формуланинг иккала қисми маънога эга бўлса, яъни $x > 0$, $a > 0$ ва $a \neq 1$, $b > 0$ ва $b \neq 1$ бўлса, у тўғри бўлади.

Даражани логарифмлаш қондаси ва асосий логарифмик айният бўйича ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\log_b x = \log_b (a^{\log_a x}) = \log_a x \cdot \log_b a,$$

яъни

$$\log_b x = \log_a x \cdot \log_b a.$$

Бу тенгликнинг иккала қисмини $\log_b a$ га бўлиб, (2) формулага келамиз.

Ўтиш формуласи ёрдамида, қандайдир бирор b асос бўйича тузилган логарифмлар жадвалига эга бўлингани ҳолда, ихтиёрий a асосли логарифм қийматини топиш мумкин. Ўнли ва натурал логарифмлар жадваллари энг кўп ишлатилади (асоси 10 дан иборат логарифмларни ўнли логарифмлар дейилади, натурал логарифмлар билан сиз 45-п. да танишасиз).

1-мисол. $\log_{0,3} 7$ ни топамиз.

Калькулятор (ёки жадваллардан) фойдаланиб, топамиз:

$$\lg 7 \approx 0,8451 \text{ ва } \lg 0,3 \approx 0,4771 - 1 = -0,5229.$$

Бинобарин, (2) формула бўйича

$$\lg_{0,3} 7 \approx \frac{0,8451}{-0,5229} \approx -1,6162.$$

2-мисол. $\log_2 5 = a$ ва $\log_2 3 = b$ экани маълум. $\log_2 300$ ни a ва b орқали ифодалаймиз.

Логарифмларнинг асосий хоссаларидан фойдаланиб, топамиз:

$$\begin{aligned} \log_2 300 &= \log_2 (3 \cdot 5^2 \cdot 2^2) = \log_2 3 + 2 \log_2 5 + 2 \log_2 2 = \\ &= b + 2a + 2. \end{aligned}$$

3-мисол. $8a^2\sqrt[4]{b^4}$ ифоданинг 2 асос бўйича логарифмини a ва b сонларнинг 2 асос бўйича логарифми билан ифодалаймиз. (Қисқача бундай дейилади: берилган ифодани 2 асос бўйича логарифмлаймиз.)

Логарифмларнинг асосий хоссаларидан фойдаланиб, топамиз:

$$\begin{aligned} \log_2 (8a^2\sqrt[4]{b^4}) &= \log_2 (2^3 \cdot a^2 \cdot b^{\frac{4}{4}}) = 3 \log_2 2 + 2 \log_2 a + \frac{4}{4} \log_2 b = \\ &= 3 + 2 \log_2 a + \log_2 b. \end{aligned}$$

4-мисол. Агар

$$\log_2 x = \log_2 7 + 2 \log_2 3 - 3 \log_2 2$$

бўлса, x ни топамиз. Олдин логарифмларнинг асосий хоссаларидан фойдаланиб берилган ифоданинг ўнг қисмини алмаштирамиз:

$$\log_5 x = \log_5 7 + \log_5 3^3 - \log_5 2^3 = \log_5 \frac{7 \cdot 9}{8} = \log_5 \frac{63}{8},$$

яъни $\log_5 x = \log_5 \frac{63}{8}$ ва шу сабабли $x = \frac{63}{8}$.

5-мисол. $\frac{\lg 72 - \lg 9}{\lg 28 - \lg 7}$ ифоданинг қийматини топамиз.

Логарифмларнинг асосий хоссаларидан фойдаланиб, бу касрнинг сурат ва махражини алмаштирамиз:

$$\lg 72 - \lg 9 = \lg \frac{72}{9} = \lg 8 = 3 \lg 2;$$

$$\lg 28 - \lg 7 = \lg \frac{28}{7} = \lg 4 = 2 \lg 2.$$

Бинобарин,

$$\frac{\lg 72 - \lg 9}{\lg 28 - \lg 7} = \frac{3 \lg 2}{2 \lg 2} = \frac{3}{2}.$$

6-мисол. Қайси бири катта:

$$\log_3 3 + \log_3 7 \text{ ёки } \log_2 (3 + 7)?$$

Логарифмларнинг асосий хоссасига кўра

$$\log_3 3 + \log_3 7 = \log_3 21.$$

Сўнгра

$$\log_2 (3 + 7) = \log_2 10 \text{ ва } 10 < 21,$$

логарифм асоси эса 2 ($2 > 1$) бўлгани учун бинобарин, $\log_2 10 < \log_3 21$,

$$\log_2 3 + \log_2 7 > \log_2 (3 + 7).$$

Машқлар

556. $\log_5 2 = a$ ва $\log_5 3 = b$ экани маълум. a ва b орқали ифодаланг:

а) $\log_5 12$; б) $\log_5 1.5$; в) $\log_5 72$; г) $\log_5 30$.

557. 3 асос бўйича логарифмланг:

а) $9a^4 \sqrt[5]{b}$; б) $\frac{b^2}{27a^3}$; в) $(\sqrt[5]{a^3 b})^{\frac{2}{3}}$; г) $\left(\frac{a^{10}}{\sqrt[5]{b^3}}\right)^{-0.2}$.

558. 10 асос бўйича логарифмланг:

$$\text{а) } (100 c^{\frac{1}{3}} d^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{б) } \frac{0,1 a}{\sqrt[3]{a} \sqrt[3]{ab}}$$

$$\text{в) } \frac{10 p^{\frac{1}{3}} q^{\frac{1}{5}}}{p^{\frac{1}{6}} q^{\frac{4}{5}}}$$

$$\text{г) } \frac{r^{25} t^{-1,7}}{r^{\frac{1}{3}} t^{0,3}}$$

559. Жадвалларсиз ва ҳисоблаш асбобларисиз ҳисобланг:

$$\text{а) } \log_{12} 4 + \log_{12} 3;$$

$$\text{б) } \log_3 2 + \log_3 4,5;$$

$$\text{в) } \log_2 7 - \log_2 \frac{7}{16};$$

$$\text{г) } \lg 8 + \lg 125;$$

$$\text{д) } \lg 13 - \lg 130;$$

$$\text{е) } \log_8 3 + \log_8 12;$$

$$\text{ж) } \log_{\sqrt{5}} 2 + \log_5 6,25; \quad \text{з) } \log_{\sqrt{3}} 25 - \log_3 7 \frac{58}{81}.$$

560. Исботланг:

$$\text{а) } \log_3 7 + \log_7 3 > 2; \quad \text{б) } \log_{\frac{1}{2}} 3 + \log_3 \frac{1}{2} < -2;$$

$$\text{в) } 4^{\log_5 7} = 7^{\log_5 4};$$

$$\text{г) } 3^{\log_5 5} = 5^{\log_3 3}.$$

561. Агар

$$\text{а) } \log_3 x = \log_3 1,5 + \log_3 8;$$

$$\text{б) } \log_7 x = \log_7 12 - \log_7 4;$$

$$\text{в) } \log_{0,3} x = 2 \log_{0,3} 6 - \log_{0,3} 12;$$

$$\text{г) } \log_{\pi} x = 3 \log_{\pi} 4 - 2 \log_{\pi} 6$$

бўлса, x ни топинг.

562. Ифоданинг қийматини топинг:

$$\text{а) } \frac{\log_3 16}{\log_3 4}; \quad \text{б) } \log_2 11 - \log_2 44; \quad \text{в) } \log_{0,3} 9 - 2 \log_{0,3} 10;$$

$$\text{г) } \frac{\lg 8 + \lg 18}{2 \lg 2 + \lg 3}.$$

563. Қайси бири катта:

$$\text{а) } \log_3 4 + \log_3 7 \text{ ёки } \log_3 (4 + 7);$$

$$\text{б) } \log_5 2 + \log_5 1,5 \text{ ёки } \log_5 (2 + 1,5);$$

$$\text{в) } \log_{0,7} 3 + \log_{0,7} 4 \text{ ёки } \log_{0,7} (3 + 4);$$

$$\text{г) } \log_{0,6} 1,3 + \log_{0,6} 1,2 \text{ ёки } \log_{0,6} (1,3 + 1,2)?$$

44. Логарифмик тенгламалар ва тенгсизликларни ечиш

Энг содда

$$\log_a x = b$$

логарифмик тенгламани қараймиз.

$\log_a x$ функция $(0; \infty)$ оралиқда ўсади (ёки камаяди) ва шу оралиқда барча ҳақиқий қийматларни қабул қилади (146-расм). Илдиз ҳақидаги теорема (10-п.) га кўра бундан ҳар қандай b учун берилган тенглама илдизга эгаллиги ва бу илдиз ягона эканлиги келиб чиқади. Сон логарифмининг таърифига кўра a^b ана шундай ечим эканини дарҳол кўрамиз.

1-мисол. $\log_2(x^2 + 4x + 3) = 3$ тенгламани ечамиз.

Берилган тенгламани x нинг

$$x^2 + 4x + 3 = 2^3$$

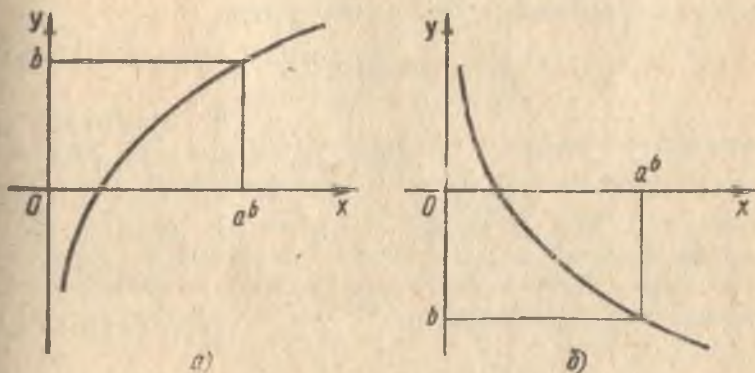
тенглик бажариладиган қийматларигина қаноатлантиради. Биз $x^2 + 4x - 5 = 0$ квадрат тенгламага эга бўлдик. 1 ва -5 сонлари унинг илдизлари. Бинобарин, иккита 1, ва -5 сони берилган тенгламанинг илдизлари бўлади.

2-мисол. $\log_5(2x + 3) = \log_5(x + 1)$ тенгламани ечамиз.

Бу тенглама x нинг $2x + 3 > 0$ ва $x + 1 > 0$ тенгсизликлар бажариладиган қийматларидагина аниқланган. Бу x лар учун берилган тенглама $2x + 3 = x + 1$ тенгламага тенг кучли. Бундан $x = -2$ эканини топамиз. Аммо $x = -2$ сони $x + 1 > 0$ тенгсизликни қаноатлантирмайди. Бинобарин, берилган тенгламанинг илдизлари мавжуд эмас.

3-мисол. $\log_x(x^2 - 2x + 2) = 1$ тенгламани ечамиз.

Бу тенгламани x нинг $x > 0$ ва $x \neq 1$ (x — логарифмик функциянинг асоси) тенгсизликлар ва битта $x^2 - 2x + 2 = x$, яъни $x^2 - 3x + 2 = 0$ тенглик бажариладиган қийматларигина қаноатлантиради.



146- расм

Ҳосил бўлган квадрат тенгламанинг илдиэлари 1 ва 2. Аммо $x = 1$ берилган тенгламанинг илдиэи бўла олмайди. Бинобарин, 2 сонигина берилган тенгламанинг илдиэи бўла олади.

4-мисол. Ушбу

$$\log_{\frac{1}{3}}(5 - 2x) > -2 \quad (1)$$

тенгсизлиكنи ечамиз.

— 2 сони $\log_{\frac{1}{3}} 9$ га тенг. Шу сабабли берилган тенгсизлиكنи

$$\log_{\frac{1}{3}}(5 - 2x) > \log_{\frac{1}{3}} 9 \quad (2)$$

кўринишда ёзиш мумкин. $\log_{\frac{1}{3}} t$ функция $t > 0$ да аниқланган ва R_+

да камаёди, чунки $\frac{1}{3} < 1$. Бинобарин, (2) тенгсизлиكنи шундай x сонлар қаноатлантирадики, улар учун $0 < 5 - 2x < 9$ шарт бажарилади, бундан $-2 < x < 2,5$.

Шундай қилиб, берилган тенгсизлиكنинг ечими $(-2; 2,5)$ интервалдан иборат.

5-мисол. $\log_5^2 x - \log_{\sqrt{5}} x - 3 = 0$ тенгламани ечинг.

Иккинчи қўшилиувчида 5 асосга ўтамиз ва $t = \log_5 x$ ўзгарувчини алмаштиришни бажарамиз, у ҳолда

$$\log_{\sqrt{5}} x = \frac{\log_5 x}{\log_5 \sqrt{5}} = \frac{t}{\frac{1}{2}} = 2t.$$

Энди берилган тенглама $t^2 - 2t - 3 = 0$ кўринишда ёзилади. Бу квадрат тенгламанинг илдиэлари 3 ва -1 . $\log_5 x = 3$ ва $\log_5 x = -1$ алмаштириш тенгламаларини ечиб, $x = 5^3 = 125$ ва $x = 5^{-1} = 0,2$ ни топамиз.

6-мисол. Тенгламалар системасини ечамиз:

$$\begin{cases} \lg(x^3 + y^3) = 2, \\ \log_2 x - 4 = \log_2 3 - \log_2 y. \end{cases}$$

Системанинг биринчи тенгламаси $x^3 + y^3 = 100$ тенгламага тенг кучли, иккинчиси эса $\frac{x}{16} = \frac{3}{y}$ тенгламага тенг кучли, бунда $x > 0$ ва $y > 0$. Шундай қилиб, $x^3 + y^3 = 100$, $xy = 48$ иккита тенгламадан ва $x > 0$ ва $y > 0$ иккита тенгсизликдан иборат системага келамиз. Биринчи тенгламадан иккиланган иккинчи тенгламани ҳадлаб айириб, топамиз:

$$x^3 + y^3 - 2xy = 4,$$

яъни

$$(x - y)^2 = 4,$$

бундан

$$x - y = 2$$

ёки

$$x - y = -2.$$

Демак, $y = x - 2$ ёки $y = x + 2$. y нинг бу ифодаларини система-
нинг иккинчи тенгламасига қўйиб, топамиз:

а) агар $y = x - 2$ бўлса, у ҳолда

$$\begin{aligned}x(x - 2) &= 48, \\x^2 - 2x - 48 &= 0, \\x &= 8 \text{ ёки } x = -6.\end{aligned}$$

$x > 0$ бўлгани учун $x = 8$ илдизни қолдирамыз ва у ҳолда $y = 6$;

б) агар $y = x + 2$ бўлса, у ҳолда

$$\begin{aligned}x(x + 2) &= 48, \\x^2 + 2x - 48 &= 0, \\x &= -8 \text{ ёки } x = 6.\end{aligned}$$

Аммо $x > 0$, $x = 6$ ва у ҳолда $y = 8$.

Шундай қилиб, тенгламаларнинг берилган системаси иккита ечим-
га эга: а) $x = 8$, $y = 6$; б) $x = 6$, $y = 8$.

Шуни таъкидлаймизки, $a^x = b$ кўринишдаги ҳар қандай кўрсат-
кичли тенглама илдизини логарифмлар ёрдамида ёзиш мумкин, бун-
да $b > 0$ (40-п. да мисоллар ечганда ҳали биз бундай қила олмаган
эдик). Бу илдиз ушбу кўринишга эга: $x = \log_a b$.

7-мисол. $5^{1-3x} = 7$ тенгламани ечамиз.

Асосий логарифмик айниятга кўра $7 = 5^{\log_5 7}$ ва тенглама ушбу
кўринишда ёзилади:

$$5^{1-3x} = 5^{\log_5 7}.$$

бундан $1 - 3x = \log_5 7$ ва $x = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \log_5 7$.

Машқлар

Тенгламани ечинг (564 — 566).

- | | |
|--|--|
| 564. а) $2^x = 10$; | б) $(0,3)^x = 7$; |
| в) $9^x = 0,7$; | г) $10^x = \pi$; |
| д) $\log_3 x = 2$; | е) $\log_{0,4} x = -1$; |
| ж) $\lg x = -2$; | з) $\log_8 x = -\frac{1}{2}$. |
| 565. а) $\log_3(3 - x) = 0$; | б) $\log_{0,3}(5 + 2x) = 1$; |
| в) $\log_{\frac{1}{3}}(2x - 4) = -2$; | г) $\log_\pi(x^2 + 2x + 3) = \log_\pi 6$. |

$$566. \text{ а) } 3^{2-5x} = 7; \quad \text{б) } 0,2^{4-x} = 3;$$

$$\text{в) } 5^{x^2} = 7; \quad \text{г) } 3^{x^2+4x} = 9.$$

Тенгсизликни ечинг (567 — 570).

$$567. \text{ а) } \log_3 x > 2; \quad \text{б) } \log_7 x < 0,1;$$

$$\text{в) } \log_{0,7} x > 5; \quad \text{г) } \log_{0,2} x < -2.$$

$$568. \text{ а) } 3^x < 5; \quad \text{б) } 0,8^x < 11;$$

$$\text{в) } 1,7^{2x-1} \geq 7; \quad \text{г) } 0,3^{2-x} > 12.$$

$$569. \text{ а) } \log_2(x^2 - x - 4) < 3; \quad \text{б) } \log_3(12 - 2x - x^2) > 2;$$

$$\text{в) } \lg(x^2 - x + 8) \geq 1; \quad \text{г) } \log_{\pi}(x+1) + \log_{\pi} x < \log_{\pi} 2.$$

$$570. \text{ а) } \lg^2 x + 2 \lg x > 3; \quad \text{б) } \log_2^2 x - \log_2 x \leq 6;$$

$$\text{в) } 4^x - 2^x \leq 2; \quad \text{г) } \left(\frac{1}{9}\right)^x - 2\left(\frac{1}{3}\right)^x > 3.$$

571. Қайси бири катта:

$$\text{а) } \log_3 5 \text{ ёки } \log_7 4; \quad \text{б) } \log_{0,3} 2 \text{ ёки } \log_5 3;$$

$$\text{в) } \log_2 10 \text{ ёки } \log_5 30; \quad \text{г) } \log_3 10 \text{ ёки } \log_5 57?$$

572. $\lg x$ ни $\lg a$ ва $\lg b$ орқали ифodalанг, бунда $a > 0, b > 0, x > 0$:

$$\text{а) } x = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b^2}}; \quad \text{б) } x^2 = a^{2,5} \sqrt[4]{b^3};$$

$$\text{в) } \sqrt[3]{x} = a^{\sqrt[5]{2}} \sqrt[5]{b^2}; \quad \text{г) } \sqrt[7]{x^3 a} = (\sqrt[4]{a})^{\sqrt[10]{10}} b^{\frac{1}{3} \lg a}.$$

Тенгламани ечинг (573 — 575).

$$573. \text{ а) } \log_a x = \log_a 3 + \log_a 5; \quad \text{б) } \log_a x = \log_a 12 - 2 \log_a 2;$$

$$\text{в) } \log_a x = \log_{\sqrt{a}} 2 + \log_{\frac{1}{a}} 3; \quad \text{г) } \log_a x + \frac{1}{3} \log_a 2 = \log_a 3;$$

$$\text{д) } \lg^2 x = 1; \quad \text{е) } \log_3^2 x - \log_3 x - 2 = 0;$$

$$\text{ж) } \log_5^2 x + \log_{0,2} x = 2; \quad \text{з) } \log_2^2(x+1) - \log_{\frac{1}{4}}(x+1) = 5.$$

$$574. \text{ а) } x^{\lg x} = 10\,000; \quad \text{б) } x^{\log_3 x} = 125x^2;$$

$$\text{в) } x^{\log_3 x - 2} = 8; \quad \text{г) } x^{\log_4 x - 3} = \frac{1}{9}.$$

$$575. \text{ а) } \frac{1}{\lg x - 6} + \frac{5}{\lg x + 2} = 1; \quad \text{б) } \frac{1}{\lg x + 1} + \frac{6}{\lg x + 5} = 1;$$

$$\text{в) } \log_2 x + \frac{4}{\log_x 2} = 5; \quad \text{г) } 2 \log_{\sqrt{3}} x + \log_x \frac{1}{3} = 3.$$

Тенгламалар системасини ечинг (576 — 579).

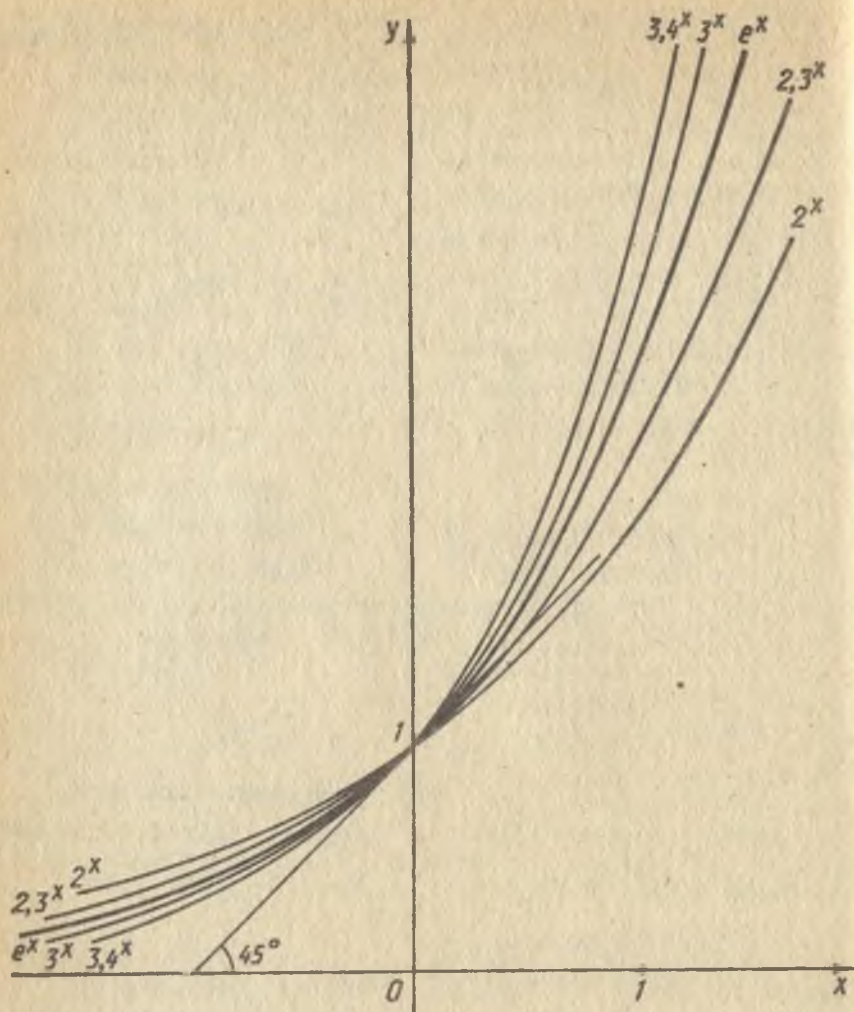
$$576. \text{ а) } \begin{cases} x + y = 7, \\ \lg x + \lg y = 1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \log_4 x + \log_4 y = 1 + \log_4 9, \\ x + y - 20 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{в)} \begin{cases} \lg(x^3 + y^2) = 2, \\ \log_{48}^x + \log_{48} y = 1; \end{cases} & \text{г)} \begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}(x + y) = 2, \\ \log_5(x - y) = 2. \end{cases} \\
 577. \text{ а)} \begin{cases} 3^x + 3^y = 12, \\ 3^{x+y} = 27; \end{cases} & \text{б)} \begin{cases} \log_{\frac{1}{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} y = 2, \\ \log_{\frac{1}{3}} x - \log_{\frac{1}{3}} y = 4; \end{cases} \\
 \text{в)} \begin{cases} 10^{1+\lg(x+y)} = 50, \\ \lg(x-y) + \lg(x+y) = \\ = 2 - \lg 5; \end{cases} & \text{г)} \begin{cases} 3^{2x} - 2^y = 725, \\ 3^x - 2^{\frac{y}{2}} = 25. \end{cases} \\
 578. \text{ а)} \begin{cases} y - \log_3 x = 1, \\ x^y = 3^{12}; \end{cases} & \\
 \text{б)} \begin{cases} 3^y \cdot 9^x = 81, \\ \lg(x+y)^2 - \lg x = 2 \lg 3; \end{cases} & \\
 \text{в)} \begin{cases} 3^{1+2 \log_3(y-x)} = 48, \\ 2 \log_5(2y-x-12) = \log_5(y-x) + \log_5(y+x); \end{cases} & \\
 \text{г)} \begin{cases} \frac{1}{\lg y - 1} + \frac{1}{\lg y + 1} = 2^{-x}, \\ \lg^2 y - 2^x = 5. \end{cases} & \\
 579. \text{ а)} \begin{cases} 2^{\cos x} + 2^{\frac{1}{\cos y}} = 5, \\ 2^{\cos x + \frac{1}{\cos y}} = 4; \end{cases} & \text{б)} \begin{cases} 9^{2 \lg x + \cos y} = 3, \\ 9^{\cos y} - 81^{\lg x} = 2; \end{cases} \\
 \text{в)} \begin{cases} \log_2 \sin x + \log_2 \sin y = -2, \\ \log_3 \cos x + \log_3 \cos y = 1 - \log_3 4; \end{cases} & \\
 \text{г)} \begin{cases} 3^{\cos x} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\cos y}, \\ \log_2(\sin x - \cos y) + \log_2(\sin x + \cos y) = -1. \end{cases} &
 \end{array}$$

12-§. КЎРСАТКИЧЛИ ВА ЛОГАРИФМИК ФУНКЦИЯЛАРНИНГ ҲОСИЛАЛАРИ

45. Кўрсаткичли функциянинг ҳосиласи ва бошланғич функцияси

Олдинги пунктларда кўрсаткичли функциянинг графиклари ҳеч бир синиқсиз ҳар бир нуқтасида уринма ўтказиш мумкин бўлган силлиқ чизиқ шаклида тасвирланган эди. Аммо функция графигига



147- расм

нуқтада уринманинг мавжудлиги функциянинг шу нуқтада дифференциалланувчанлигига тенг кучли. Шу сабабли кўрсаткичли функция барча нуқталарда дифференциалланувчи деб фараз қилиш табиийдир.

a^x функциянинг $a = 2; 2.3; 3; 3.4$ ҳоллар учун бир нечта графигини ясаймиз (147-расм) ва бу графикларга абсциссаси 0 га тенг бўлган нуқтада уринмалар (хаёлан) ўтказамиз. Бу уринмаларнинг абсциссалар ўқига қиялик бурчаклари тахминан мос равишда 35° , 40° , 48° ва 51° га тенг, яъни a катталашиши билан a^x функция графигига $M(0; 1)$ нуқтада уринманинг бурчак коэффиценти аста-секин $\text{tg } 35^\circ$ дан $\text{tg } 51^\circ$ гача ортиб боради, a ни 2 дан 3 гача катта-

лаштириб, a нинг шундай қийматини топамизки, бу қийматда тегишли уринманинг бурчак коэффициенти 1 га тенг (яъни унинг оғиш бурчаги 45° га тенг) бўлиши равшан бўлиб қолади. Бу фарзининг аниқ ифодаси қуйидагича (биз уни исботсиз қабул қиламиз).

2 дан катта, 3 дан кичик шундайсон мавжудки (бу сон e ҳарфи билан белгиланади), $y = e^x$ кўрсаткичли функциянинг 0 нуқтадаги ҳосиласи 1 га тенг бўлади, яъни

$$\Delta x \rightarrow 0 \text{ да } \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \rightarrow 1. \quad (1)$$

1-теорема. e^x кўрсаткичли функция ҳар бир нуқтада дифференциалланувчи ва

$$(e^x)' = e^x$$

Исбот. Олдин $y = e^x$ функциянинг x нуқтадаги орттирмасини топамиз:

$$\Delta y = e^{x+\Delta x} - e^x = e^x e^{\Delta x} - e^x = e^x (e^{\Delta x} - 1).$$

(1) тенгликдан фойдаланиб, ушбунни топамиз:

$$\Delta x \rightarrow 0 \text{ да } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{e^x (e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = e^x \cdot \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \rightarrow e^x.$$

Ҳосиланинг таърифига кўра, бундан ҳар қандай x да $y' = e^x$ яъни $(e^x)' = e^x$ экани келиб чиқади.

1-мисол. e^{5x} функциянинг ҳосиласини топамиз:

$$(e^{5x})' = e^{5x} (5x)' = 5e^{5x}.$$

Эслатма. e сони иррационал эканлиги исботланган, шу сабабли у чексиз унли давриймас каср кўринишида ёзилади. Электрон ҳисоблаш машиналари ёрдамида e сонининг икки мингдан ортиқ ўнли каср рақамлари топилган. Бу касрнинг дастлабки рақамлари бундай:

$$e = 2,71828 \dots$$

e^x функция кўпинча *экспонента* деб аталади ва $\exp x$ деб белгиланади («экспонента нкс» деб ўқилади)

e сони мусбат ва 1 дан фарқли бўлгани учун e асос бўйича логарифмни қараш мумкин.

Таъриф. e асосга кўра логарифм *натурал логарифм* дейилади ($\ln$ каби белгиланади):

$$\ln x = \log_e x. \quad (2)$$

Ҳар қандай мусбат a сон учун асосий логарифмик айниятга кўра

$$e^{\ln a} = a.$$

Шу сабабли ҳар қандай a^x кўрсаткичли функция

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a} \quad (3)$$

кўринишда ёзилиши мумкин.

a нинг ихтиёрий қийматида кўрсаткичли функциянинг ҳосиласи формуласини чиқарамиз.

2-теорема. Ҳар қандай мусбат a да a^x функция ҳар бир x нуқтада дифференциалланувчи ва

$$(a^x)' = a^x \ln a. \quad (4)$$

Исботи. (3) формуладан мураккаб функциянинг ҳосиласи ҳақидаги теоремага кўра a^x ($a > 0$) функция ҳар қандай x да дифференциалланувчи ва

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a \quad (5)$$

эканини ҳосил қиламиз.

Натижа. a^x кўрсаткичли функция ўз аниқланиш соҳасининг ҳар бир нуқтасида аниқланган, яъни ҳар қандай $a > 0$ ва ихтиёрий x_0 да

$$x \rightarrow x_0 \text{ бўлса, } a^x \rightarrow a^{x_0}$$

бўлади.

Бу эса кўрсаткичли функциянинг дифференциалланувчанлиги ва дифференциалланувчи функциянинг узлуксизлигидан (қ. 18-п.) келиб чиқади.

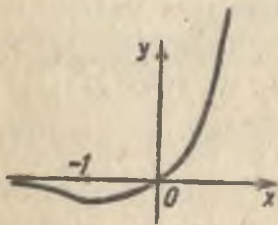
2-мисол. 2^x ва 5^{-3x} функцияларнинг ҳосилаларини топамиз, (4) формулага кўра

$$(2^x)' = 2^x \ln 2, \quad (5^{-3x})' = (-3) \cdot 5^{-3x} \ln 5.$$

3-мисол. $y = xe^x$ функциянинг ўсишини (камаишини) ва экстремумини текширамиз.

Шу функциянинг ҳосиласини топамиз:

$$y' = (xe^x)' = x'e^x + x(e^x)' = e^x + xe^x = e^x(1+x).$$



148- расм.

Ҳар қандай x учун $e^x > 0$ бўлгани сабабли y' нинг ишораси $(1+x)$ нинг ишораси билан бир хил бўлади. Демак, $(-1; \infty)$ ораликда $y' > 0$, шу сабабли y $[-1; \infty)$ ораликда ўсади. $(-\infty; -1]$ ораликда $y' < 0$, шу сабабли y $(-\infty; -1]$ ораликда камаяди, $x_0 = -1$ нуқтада ҳосила ишорасини минусдан плюсга ўзгартиради ва, демак, $x_0 = -1$ минимум нуқта.

Функция графигининг эскизи 148-расмда келтирилган. 1 ва 2-теоремалардан 3-теорема келиб чиқади.

3-теорема. e^x функция R да e^x функция учун бошланғич функция. $\frac{a^x}{\ln a}$ функция a^x функция учун R да бошланғич функция.

Ҳақиқатан, $\ln a$ — ўзгармас ва шу сабабли ҳар қандай x да:

$$\left(\frac{a^x}{\ln a} \right)' = \frac{1}{\ln a} (a^x)' = \frac{1}{\ln a} a^x \ln a = a^x.$$

Шу билан $\frac{a^x}{\ln a}$ функция a^x функция учун R да бошланғич функция экани исботланди. $(e^x)' = e^x$ тенгликдан эса барча x лар учун e^x функция e^x функция учун R да бошланғич функция эканлиги келиб чиқади.

4-мисол. а) 5^x ; б) $4 \cdot 2^x$; в) $4e^{3x} - 10 \cdot 0,6^x$ функциялар учун бошланғич функциялар топамиз.

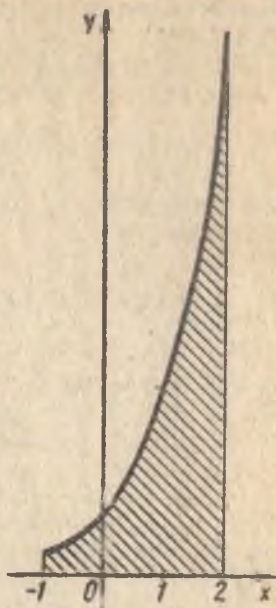
3-теорема ва бошланғич функцияларни топиш қондаларидан фойдаланиб, жавобларни ёзамиз:

а) $\frac{5^x}{\ln 5}$; б) $\frac{4 \cdot 2^x}{\ln 2}$;

в) $\frac{4}{3} e^{3x} - 10 \cdot \frac{0,6^x}{\ln 0,6}$.

5-мисол. Ушбу $y = 3^x$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$ чизиклар билан чегараланган фигуранинг юзини топамиз.

Кўрсатилган фигура эгри чизикли трапециядир (149-расм). Шу сабабли унинг юзи S ни эгри чизикли трапеция юзининг формуласи бўйича топамиз:



149- расм

$$S = \int_{-1}^2 3^x dx = \left. \frac{3^x}{\ln 3} \right|_{-1}^2 = \frac{9}{\ln 3} - \frac{3^{-1}}{\ln 3} = \frac{26}{3 \ln 3}.$$

Машқлар

580. Натурал логарифмлар жадвали бўйича (ёки калькуляторлар ёрдамида) топинг: а) $\ln 3$; б) $\ln 56$; в) $\ln 47$; г) $\ln 1,7$.
Функциянинг ҳосиласини топинг (581 — 582).

581. а) e^{3x} ; б) e^{-2x} ; в) e^{x^2} ; г) e^{3-6x} ;

д) $e^{\frac{x}{2}} - 3e^{21x}$; е) $e^{6x} + 4e^{\frac{x}{3}}$; ж) $1,7^{\frac{x}{4}} + 1$; з) $3^{6x} - 7 \cdot 2^{5-7x}$.

582. а) $2^x \cos x$; б) $7^{\frac{x}{2}} \lg 3x$; в) $x^3 e^{-x}$; г) $\sqrt{x} \operatorname{ctg} 5x$;

д) $\frac{e^x}{x^2 + 1}$; е) $\frac{3^x}{2^x + 5^x}$; ж) $\frac{x^4}{4x + 5}$; з) $\frac{0,3^{-x}}{\sqrt{x} + 0,5}$.

583. Функциянинг ўсиш (камайиш) ини ва экстремумини текширинг:

а) xe^{-x} ; б) xe^{6x} ; в) $x^3 2^{-x}$; г) $x^4 0,7^x$.

584. f функция графигига x_0 абсциссали нуқтадаги уринма тенгласини ёзинг. Бунда а) $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$; б) $f(x) = 3^x$, $x_0 = 1$.

585. Функциялар учун бошланғич функция топинг:

- а) 4^x ; б) $7 \cdot e^x$; в) $5 \cdot 3^x$; г) $2 \cdot 0,9^x - 5,6^x$;
 д) e^{2x} ; е) 2^{-10x} ; ж) 12^{5-7x} ; з) $2,3^{4+5x}$.

586. Интегрални ҳисобланг:

- а) $\int_{-2}^1 2^x dx$; б) $\int_0^1 0,5^x dx$; в) $\int_{-1}^1 4^x dx$; г) $\int_{-\frac{1}{2}}^2 9^x dx$.

587. Қуйидаги чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини топинг:

- а) $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$;
 б) $y = 2^x$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$;
 в) $y = e^x$, $y = e^{2x}$, $x = 1$;
 г) $y = 3^x$, $y = 9^x$, $x = 1$.

46. Логарифмик функциянинг ҳосиласи

Ҳар қандай $x > 0$ да

$$\ln' x = \frac{1}{x} \quad (1)$$

тенглик бажарилишини исботлаймиз. Асосий логарифмик аиниятга кўра барча мусбат x ларда $x = e^{\ln x}$, яъни бу тенгликнинг иккала томонида (R_+ да аниқланган) битта функциянинг ўзи турибди. Шу сабабли x ва $e^{\ln x}$ функцияларнинг ҳосилалари тенг, яъни

$$x' = (e^{\ln x})'. \quad (2)$$

Ўнг томоннинг ҳосиласини мураккаб функциянинг ҳосиласини топиш қондаси ва 1-теорема (45-п.) бўйича ҳисоблаймиз:

$$(e^{\ln x})' = e^{\ln x} \cdot \ln' x = x \ln' x,$$

$x' = 1$. Топилган ҳосилаларни (2) тенгликка қўямиз:

$$1 = x \ln' x, \text{ бундан } \ln' x = \frac{1}{x}.$$

▼ Мураккаб функциянинг ҳосиласини топиш қондасидан фойдаланиш нега мумкинлигини тушунтиришгина қолади. Бунинг учун логарифмик функция ҳар бир нуқтада дифференциалланувчи эканини кўрсатиш керак. $y = \log_a x$ ва $y = a^x$ функцияларнинг графиклари $y = x$ тўғри чизиққа нисбатан симметрик. Кўрсаткичли функция ҳар бир нуқтада дифференциалланувчи, унинг ҳосиласи эса нолга айланмайди, кўрсаткичли функциянинг графиги ҳар бир нуқтасида ногоризонтал уринмага эга. Шу сабабли логарифмик функциянинг графиги ҳам ҳар қандай нуқтасида новертикал уринмага

эга. Бу эса логарифмик функциянинг ўз аниқланиш соҳасида дифференциалланувчи эканлигига тенг кучлидир. ▼

1-мисол. Функцияларнинг ҳосилаларини топамиз: а) $\ln(5+2x)$; б) $\log_3 x$; в) $\log_7(2x)$.

$$\text{а) } (\ln(5+2x))' = \frac{1}{5+2x} \cdot 2 = \frac{2}{5+2x};$$

$$\text{б) } (\log_3 x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln 3} \right)' = \frac{1}{x \ln 3};$$

$$\text{в) } (\log_7 2x)' = \left(\frac{\ln 2x}{\ln 7} \right)' = \frac{2}{2x \ln 7} = \frac{1}{x \ln 7}.$$

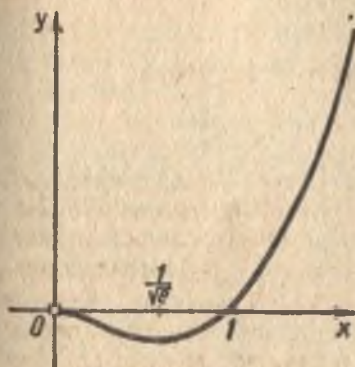
2-мисол. $y = x^2 \ln x$ функцияни ўсиши, камайишини, экстремумини текширамыз ва унинг графигини ясаймыз.

Функция $x > 0$ да аниқланган. Бу функциянинг ҳосиласини топамиз:

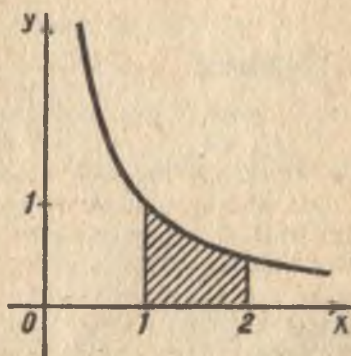
$$y' = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \ln x + x = 2x \left(\ln x + \frac{1}{2} \right).$$

$x > 0$ бўлгани учун y' нинг ишораси $\left(\ln x + \frac{1}{2} \right)$ нинг ишораси билан бир хил бўлади. Бундан, $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}; \infty \right)$ ораликда $y' > 0$ экани келиб чиқади, шу сабабли $\left[\frac{1}{\sqrt{e}}; \infty \right)$ ораликда функция ўсади; $\left(0; \frac{1}{\sqrt{e}} \right)$ ораликда y' манфий, шунинг учун $y \left(0; \frac{1}{\sqrt{e}} \right]$ ораликда камаяди. $\frac{1}{\sqrt{e}}$ нуқтада ҳосила ишорасини минусдан плюсга ўзгартиради, демак, бу минимум нуқтаси.

Функция графигининг эскизи 150-расмда келтирилган.



150- расм



151- расм

(1) формула $\frac{1}{x}$ функциянинг $(0; \infty)$ оралиқдаги исталган бошланғич функциясини

$$\ln x + C \quad (3)$$

кўринишда ёзиш мумкинлигини кўрсатади.

$\frac{1}{x}$ функция $(-\infty; 0)$ оралиқда ҳам бошланғич функцияга эга, бу $\ln(-x)$ функциядир. Ҳақиқатан,

$$(\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x} \quad (4)$$

$x > 0$ да $|x| = x$ ва $x < 0$ да $|x| = -x$, шу тугайли биз 0 нуқтани ўз ичига олмайдиган ҳар қандай оралиқда $\frac{1}{x}$ функциянинг бошланғич функцияси $\ln|x|$ дан иборат эканини исботладик.

3-мисол. $\frac{1}{x+3}$ функция учун бошланғич функциялар $(-3$ нуқтани ўз ичига олмайдиган ҳар қандай оралиқда) $\ln|x+3| + C$ га тенг.

$\frac{1}{5x+7}$ функция учун бошланғич функцияларнинг умумий кўриниши $(-\frac{7}{5}$ нуқтани ўз ичига олмайдиган ҳар қандай оралиқда) $\frac{1}{5} \ln|5x+7| + C$ дан иборат.

4-мисол. $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$ чизиқлар билан чегараланган фигура юзини топамиз (151-расм).

$x > 0$ да $\ln x$ функция $\frac{1}{x}$ функция учун бошланғич функция бўлгани учун бизни қизиқтираётган эгри чизиқли трапециянинг юзи бундай:

$$S = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

Машқлар

Функциянинг ҳосиласини топинг (588 — 589).

588. а) $\ln 2x$; б) $\log_{0.3} x$; в) $\log_7 (2 + 3x)$; г) $\log_{0.2} (9 + 5x)$; д) $\log_2 7x$; е) $\ln (1 + 3x)$; ж) $\ln 6x$; з) $x^3 \ln x$.

589. а) $\frac{\ln x}{x}$; б) $\frac{\ln (5+3x)}{x^2+1}$; в) $\lg 3x$; г) $\sqrt{x} \lg x$.

590*. Агар

а) $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$; б) $f(x) = \ln x$, $x_0 = 3$;
в) $f(x) = \lg x$, $x_0 = 1$; г) $f(x) = \log_3 x$, $x_0 = 9$.

бўлса, f функция графигига x_0 абсциссали нуқтадаги уринма тенгламасини ёзинг.

591. Функцияни ўсиш (камайиш) ва экстремумга текширинг:

а) $x \ln x$; б) $x \ln^2 x$; в) $\frac{\ln x}{x}$; г) $\frac{x}{\ln x}$

592. Функциянинг бошланғич функцияларидан бирини топинг:

а) $\frac{1}{x+5}$; б) $\frac{1}{3+2x}$; в) $\frac{3}{7x+1}$; г) $\frac{2}{x} - \frac{3}{x+5}$.

593. Интегрални ҳисобланг:

а) $\int_1^7 \frac{dx}{x}$; б) $\int_1^a \frac{dx}{x} (a > 1)$; в) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{3-2x}$; г) $\int_{-4}^0 \frac{dx}{0,5x+3}$.

594. Қуйидаги чизиқлар билан чегараланган фигура юзини ҳисобланг:

а) $y=0$, $y=\frac{1}{x}$, $x=1$, $x=3$;

б) $y=0$, $y=\frac{1}{x}$, $x=2$, $x=5$;

в) $y=0$, $y=\frac{1}{x}$, $x=4$, $x=10$;

г) $y=0$, $y=\frac{1}{x}$, $x=0,3$, $x=1$.

47. Даражали функция ва унинг ҳосиласи

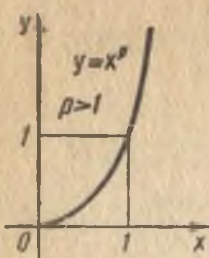
Сиз исталган p ҳақиқий сон учун ва ҳар бир мусбат x сон учун x^p сон аниқланганини биласиз. Шу билан бирга $(0; \infty)$ оралиқда тайинланган p да

$$f(x) = x^p$$

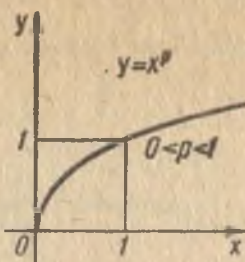
формула билан берилган f функция аниқланган. Бу функция *даражали* функция (p даража кўрсаткичи) дейилади. Агар $p > 0$ бўлса, у ҳолда даражали функция $x=0$ да ҳам аниқланган бўлади, чунки $0^p = 0$. Бутун p ларда даражали функция $x < 0$ учун ҳам аниқланган. Жуфт p ларда бу функция жуфт, тоқ p ларда эса тоқ функциядир. Шу сабабли даражали функцияни текширишни $(0; \infty)$ оралиқдагина ўтказиш етарли.

Курснинг олдинги бўлимларида x^p нинг ҳосиласи учун бутун даража кўрсаткичлари ва шунингдек, $p = \frac{1}{2}$ учун формула чиқарилган эди. Энди даража кўрсаткичи p ихтиёрий ҳақиқий сон бўлган даражали функциянинг ҳосиласи учун формула чиқариш қолди:

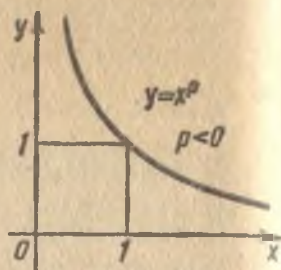
$$(x^p)' = px^{p-1}. \quad (1)$$



152- расм



153- расм



154- расм

Ҳақиқатан, $x = e^{\ln x}$ бўлгани учун $x^p = e^{p \ln x}$, бундан мураккаб функция ҳосиласини ҳисоблаш формуласига кўра ушбуни ҳосил қиламиз:

$$(x^p)' = (e^{p \ln x})' = e^{p \ln x} (p \ln x)' = x^p \cdot p \cdot \frac{1}{x} = p x^{p-1}.$$

(1) формула исботланди.

$p < 0$ да даражали функция $(0; \infty)$ оралиқда камаяди, чунки $x > 0$ да $(x^p)' = p x^{p-1} < 0$. Бундан ташқари, $x = 0$ да даражали функция 0 га тенг ва $x > 0$ ҳамда $x \rightarrow 0$ да $x^p \rightarrow 0$. Шу сабабли, 0 нуқта ўсиш оралиғига қўшилади, яъни $p > 0$ да даражали функция $[0; \infty)$ оралиқда ўсади. Даражали функция графикларининг мисоллари ҳар хил p лар учун 152 — 154-расмларда келтирилган.

2. Ушбу

$$(1 + \Delta x)^\alpha \approx 1 + \alpha \Delta x \quad (2)$$

тақрибий формулани чиқарамиз (Δx қанча кичик бўлса, яқинлашиш шунча аниқ бўлади).

$f(x) = x^\alpha$ функцияни қараймиз ва $x_0 = 1$ ва $x = 1 + \Delta x$ да 23-п. дан маълум бўлган

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \Delta x \quad (3)$$

тақрибий формуладан фойдаланамиз. $f(x_0) = f(1) = 1$ ва $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ га эгамиз, бундан $f'(x_0) = f'(1) = \alpha \cdot 1^{\alpha-1} = \alpha$. (3) формула бўйича

$$f(x) = (1 + \Delta x)^\alpha \approx 1 + \alpha \Delta x.$$

Кўпинча бу формула илдиэларни ҳисоблашда қўлланилади. $\alpha = \frac{1}{n}$ деб олиб, топамиз:

$$\sqrt[n]{1 + \Delta x} = (1 + \Delta x)^{\frac{1}{n}} \approx 1 + \frac{\Delta x}{n}. \quad (4)$$

Мисол. Тақрибий қийматларни ҳисоблаймиз: а) $\sqrt[4]{1,08}$; б) $\sqrt[3]{27,03}$;
в) $\sqrt[10]{1000}$.

(4) формуладан фойдаланамиз:

$$\text{а) } \sqrt[4]{1,08} = (1 + 0,08)^{\frac{1}{4}} \approx 1 + \frac{1}{4} \cdot 0,08 = 1,02;$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \sqrt[3]{27,03} &= \sqrt[3]{27\left(1 + \frac{0,03}{27}\right)} = 3 \cdot \sqrt[3]{1 + \frac{0,03}{27}} \approx \\ &\approx 3\left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{0,03}{27}\right) \approx 3,0011. \end{aligned}$$

$\sqrt[3]{27,03}$ нинг вергулдан кейинги саккизта ишорали қиймати бундай: $\sqrt[3]{27,03} \approx 3,0011107$.

в) $2^{10} = 1024$ эканини қайд қиламиз. Ушбуга эгамиз:

$$\sqrt[10]{1000} = \sqrt[10]{2^{10} - 24} = 2 \cdot \sqrt[10]{1 - \frac{24}{2^{10}}} \approx 2\left(1 - \frac{24}{10 \cdot 2^{10}}\right) \approx 1,995.$$

(1) формуладан $f(x) = x^p$ даражали функциянинг ҳосиласи даражали функция экани келиб чиқади ($f'(x) = px^{p-1}$). Даражали функциянинг бошланғич функциясига нисбатан гап бошқача. $p \neq 1$ да $f(x) = x^p$ даражали функция учун бошланғич функциянинг умумий кўриниши $F(x) = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C$ эканини текшириш осон. $p = -1$ да, маълумки, функциянинг бошланғич функцияси $\ln|x| + C$ кўринишда бўлади.

Машқлар

595. Функция графигини схематик тасвирланг ва унинг ҳосиласини топинг:

а) $f(x) = x^{\sqrt{3}}$; б) $g(x) = x^{\frac{1}{\pi}}$; в) $u(x) = x^{-e}$, г) $v(x) = x^{0,1}$.

596. 155-расмда $y = \sqrt{x}$; $y = \sqrt[3]{x}$; $y = \sqrt[4]{x}$ ($x \geq 0$) функцияларнинг графиклари ясалган.

а) График бўйича $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{3}$ нинг қийматини топинг.

б) Жадваллардан ёки калькулятордан фойдаланиб, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$ ва $\sqrt[4]{3}$ қийматини ҳисобланг.

в) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$ ва $\sqrt[4]{3}$ нинг қийматларини (4) формуладан фойдаланиб тақрибан ҳисобланг.

Кўрсатма. $2 = 1,4^2 + 0,04$; $3 = 1,4^3 + 0,256$; $3 = 1,3^4 + 0,1439$.

г) Олинган натижаларни таққосланг.

597. Тақрибий қийматларини (4) формуладан фойдаланиб ҳисобланг:

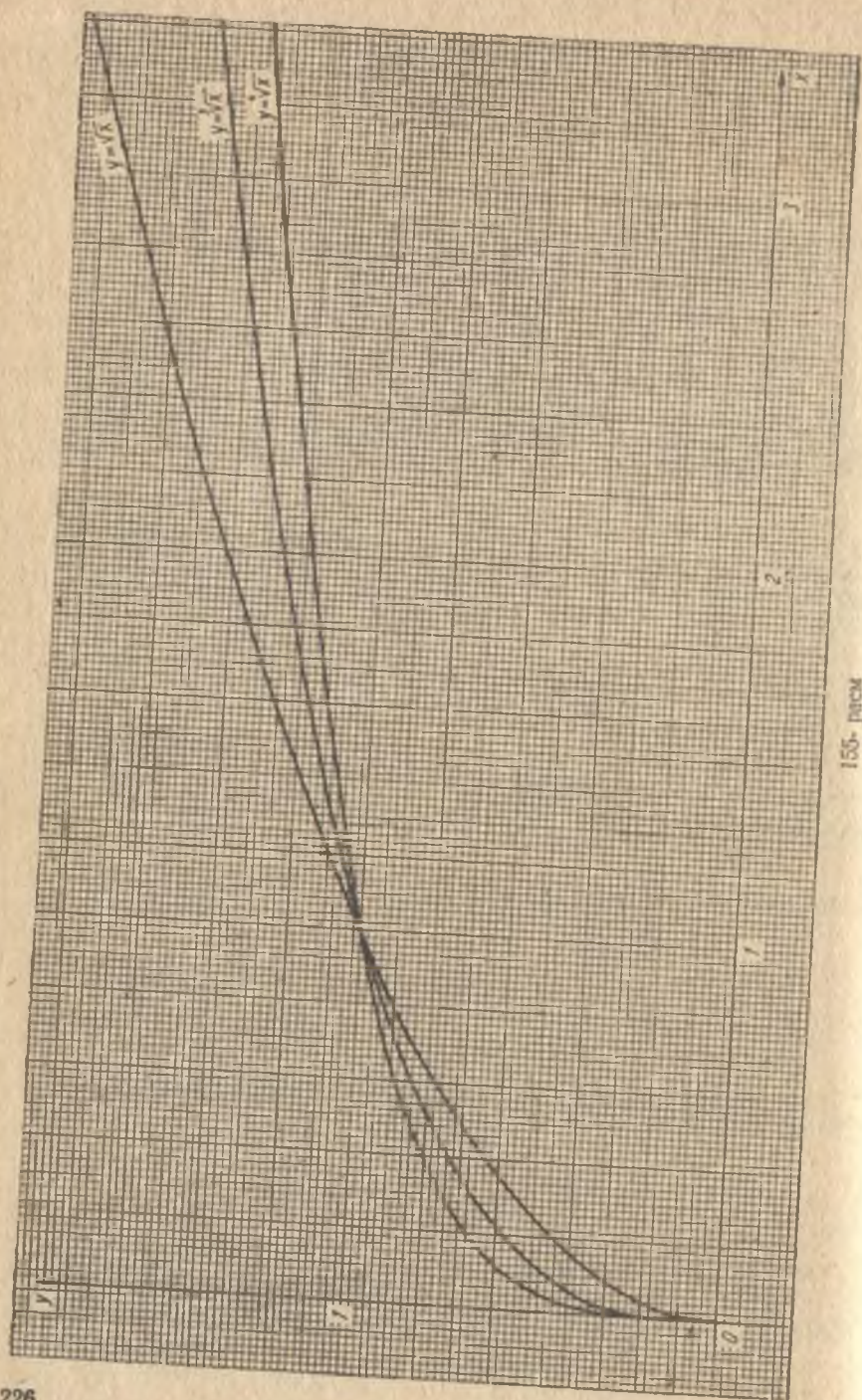
а) $(8 \cdot 3)^{\frac{1}{3}}$; б) $\sqrt[3]{81}$; в) $\sqrt[4]{625 \cdot 3}$; г) $48^{\frac{1}{4}}$.

598. Тақрибий қийматларини топинг:

а) $\sqrt{9,02}$; б) $\sqrt[3]{30}$; в) $\sqrt[4]{90}$; г) $\sqrt[5]{33}$.

599. Функция учун бошланғич функцияларнинг умумий кўринишини топинг:

а) $y = x^{2,7}$; б) $y = x^{\sqrt{3}}$; в) $y = -\frac{1}{2} x^{-\sqrt{2}}$; г) $3x^{-1}$.



600. Қуйидаги чизиклар билан чегараланган фигура юзини ҳисобланг:

а) $y = 0$, $y = x^{\sqrt{2}}$ $x = 0$, $x = 1$;

б) $y = 0$, $y = \frac{1}{x}$, $x = 3$, $x = 5$;

в) $y = 0$, $y = x^{-0.8}$, $x = 1$, $x = 32$;

г) $y = x^{\sqrt{3}}$, $y = \frac{1}{x}$, $x = \frac{1}{2}$.

48. Кўрсаткичли ўсиш ва кўрсаткичли камайишнинг дифференциал тенгламаси

Физика, техника, биология ва ижтимоий фанларнинг кўпгина масалаларини ечиш

$$f'(x) = kf(x) \quad (1)$$

дифференциал тенгламани қаноатлантирувчи f функцияни топишга доир математик масалага келтирилади, бунда k — бирор константа.

Кўрсаткичли функция ҳосиласининг формуласини билган ҳолда

$$f(x) = Ce^{kx} \quad (2)$$

кўринишдаги ҳар қандай функция (1) тенгламанинг ечими бўлишини пайқаш осон, бунда C — ўзгармас. C ихтиёрий бўлгани сабабли (1) дифференциал тенгламанинг ечими чексиз кўп.

(1) тенгламанинг (2) кўринишдаги функциялардан бошқа ечими йўқлигини исботлаймиз. Бунинг учун (1) тенгламани қаноатлантирувчи ихтиёрий f функцияни ва F ёрдамчи функцияни қараймиз:

$$F(x) = f(x) e^{-kx}. \quad (3)$$

F функциянинг ҳосиласини топамиз:

$$F'(x) = f'(x) e^{-kx} + f(x) (e^{-kx})' = f'(x) e^{-kx} - kf(x) e^{-kx}.$$

$f'(x)$ ўрнига унинг (1) тенгламадаги $kf(x)$ қийматини қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$F'(x) = kf(x) e^{-kx} - kf(x) e^{-kx} = 0.$$

F функциянинг ҳосиласи нолга тенг бўлгани учун бу функция барча x ларда константа бўлади: $F(x) = C$. (3) тенгликдан

$$f(x) e^{-kx} = C, \text{ бундан } f(x) = Ce^{kx},$$

шуни исботлаш талаб қилинган эди.

Эслатма. Биз юқорида келтирилган муҳокамаларда f функция сонлар ўқининг ҳамма ерида аниқланган ва (1) тенгламани қаноатлантиради деб фараз қилдик. Конкрет масалаларда кўпинча (1) тенгламани бирор оралиқдагина қаноатлантирадиган функцияларни қарашга тўғри келади. Бундай ҳолда (2) формула (1) тенглама бажариладиган оралиқдагина масаланинг умумий ечимини бериши табиий.

(1) дифференциал тенгламанинг мазмуни шундан иборатки, функциянинг x нуқтадаги ўзгариш тезлиги функциянинг шу нуқтадаги қийматига пропорционалдир. Бу тенглама кўпинча амалий масалаларни ечишда учрайди.

1-мисол. (Радиоактив емирилиш.) Вақтнинг бошланғич пайтида радиоактив модданинг массаси

$$m(0) = m_0 \quad (4)$$

га тенг бўлсин.

Модда массаси $m(t)$ нинг t вақтга нисбатан камайиш тезлиги унинг миқдорига пропорционал экани маълум, яъни

$$m'(t) = -k m(t)$$

тенглама бажарилади, бунда $k > 0$. Юқорида аниқланганига кўра:

$$m(t) = C e^{-kt}.$$

C константа (4) шартдан топилади. Чунончи, $t = 0$ да

$$m_0 = m(0) = C e^{-k \cdot 0} = C, \text{ яъни } C = m_0.$$

Охирида

$$m(t) = m_0 e^{-kt} \quad (5)$$

ни ҳосил қиламиз.

Қаралган мисол типикдир: дифференциал тенгламанинг чексиз кўп ечимлари орасидан биттасини ажратиб олиш учун одатда яна «бошланғич шартларни» (бизнинг мисолда бу (4) шарт) киритиш талаб қилинади.

Радиоактив модданинг массаси икки марта камаядиган вақт оралиғи T радиоактив модданинг «ярим емирилиш даври» дейилади. T ни билган ҳолда k ни топиш мумкин.

$$m(T) = \frac{1}{2} m_0, \text{ яъни } m_0 e^{-kT} = \frac{1}{2} m_0$$

бўлгани учун ушбуга эгамиз:

$$e^{-kT} = \frac{1}{2}$$

Демак, $e^{kT} = 2$, $kT = \ln 2$,

$$k = \frac{\ln 2}{T}.$$

Масалан, радий учун $T \approx 1550$ йил. Шу сабабли

$$k = \frac{\ln 2}{1550} \approx 0,000447.$$

Бир миллион йилдан кейин радийнинг m_0 бошланғич массасидан фақат

$$m(10^6) \approx m_0 e^{-447} \approx 0,6 \cdot 10^{-104} m_0$$

қолади.

▼ 2-мисол. Мамлакат аҳолиси йилига 2% ортсин дейлик. Мамлакат аҳолиси сонининг вақтга боғлиқлиги $S = S(t)$ ни (йил ҳисобида) $S'(t) = 0,02 S(t)$ тенгламага бўйсунганини аниқроқ яқинлаштириш билан ҳисоблаш мумкин ва у

$$S(t) = S_0 e^{0,02t}$$

формула билан берилади, бунда $S_0 = S(0)$ — ҳисоблаш бошланган вақтга бўлган аҳоли сони.

3-мисол. Вақтнинг бошланғич моментида T_0 температурага эга бўлган жисм T_1 температурали муҳитга жойлаштирилган бўлсин. Табиийки, $T_0 < T_1$ да жисм секин-аста қизийди, $T_0 > T_1$ да эса совийди.

Жисм температураси $T(t)$ нинг ўзгариш тезлиги температуралар айирмасига пропорционал деб фараз қиламиз (бу фараз ҳақиқатга унча яқин бўлмаса ҳам). Бу

$$T'(t) = -k(T - T_1) \quad (6)$$

эканини билдиради*. (1) тенгламанинг ечимини топиш учун

$$f(t) = T(t) - T_1$$

функцияни қараб чиқамиз. (6) дан:

$$f'(t) = -k f(t).$$

Бу тенгламанинг умумий ечими

$$f(t) = C e^{-kt}$$

кўринишга эга. Демак

$$T(t) = C e^{-kt} + T_1. \quad (7)$$

$t = 0$ да:

$$T_0 = T(0) = C e^{-k \cdot 0} + T_1 = C + T_1,$$

бундан

$$C = T_0 - T_1$$

(6) тенгламанинг

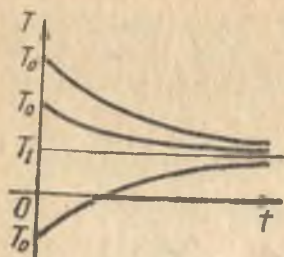
$$T(0) = T_0 \quad (8)$$

бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечими ушбу

$$T(t) = T_1 + (T_0 - T_1) e^{-kt} \quad (9)$$

кўринишга эга эканини узил-кесил ҳосил қиламиз.

* (6) тенгламанинг ўнг қисми олдига минус ишорасини қўйиб, k коэффициентни T температуранинг $T > T_1$ ва $T < T_1$ да ўзгаришининг йўналиши ҳақида айтилганига мувофиқ мусбат деб ҳисоблаймиз.



156- расм

156-расмда $T = T(t)$ функциянинг турлича T_0 бошланғич қийматларга мос келувчи ҳолларининг графиклари схематик тасвирланган. Буларнинг ҳаммаси t чексизликка интилганда

$$T(t) = T_1 \quad (10)$$

стационар ечимга яқинлашади, бу ечим $T_0 = T_1$ да, яъни жисмнинг температураси муҳит температураси билан бир хил бўлганда ҳосил бўлади. ▼

Сиз дифференциал тенгламалар билан учинчи марта учрашмоқдасиз. Олдинги икки ҳолни эслатиб ўтамиз.

1. z нуқта оғирлик кучи таъсирида вертикал ҳаракат қилганда унинг координатаси

$$z''(t) = g \quad (11)$$

дифференциал тенгламани қаноатлантиради. Бу тенгламанинг умумий ечими

$$z(t) = z_0 + v_0 t + \frac{g}{2} t^2 \quad (12)$$

кўринишга эга, бунда

$$z_0 = z(0), \quad v_0 = z'(0). \quad (13)$$

z_0 ва v_0 нинг қийматларини ўрнига қўйиб, ягона ечимни топамиз.

2. Гармоник тебранишларда

$$y''(t) = -\omega^2 y(t) \quad (14)$$

дифференциал тенгламага мувофиқ умумий ечим

$$y(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (15)$$

кўринишга эга бўлади, бунда A ва φ — ихтиёрий константалар. Агар

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = v_0$$

бошланғич шартлар берилган бўлса, у константаларни аниқлаш мумкин.

Бу мисоллар дифференциал тенгламалар текширишнинг қанчалик кучли аппарати эканини тушуниш имконини беради. Кўпинча бирор процессни бошқарувчи элементар қонунлар дифференциал тенгламалар кўринишида ёзилади, процесс вақтга нисбатан қандай ривожланишини билиш учун бу дифференциал тенгламаларни ечишга тўғри келади.

Машқлар

601. $y = 5e^{3x}$ функция $y' = 3y$ тенгламани қаноатлантиришини исботланг.
602. $y = 7e^{-2x}$ функция $y' = -2y$ тенгламани қаноатлантиришини исботланг.
603. $y = 3e^{-7x}$ функция $y' = -7y$ тенгламани қаноатлантиришини исботланг.
- 604*. m мг массали C радийдан t минут радиоактив емирилишдан кейин n мг қолди. C радийнинг ярим емирилиш даврини топинг.
- 605*. Радиоактив емирилиш бошланишида 1 А радий бор эди. Агар A радийнинг ярим емирилиш даври 3 минутга тенг бўлса, неча минутдан кейин $0,125$ грамм радий қолади?
- 606*. Радиоактив модданинг ярим емирилиш даври 1 соатга тенг. Неча соатдан кейин унинг миқдори 10 марта камаяди?
- 607*. Агар радийнинг ярим емирилиш даври 1550 йил бўлса, 1000 йилдан кейин радийнинг қандай қисми қолишини ҳисобланг.
- 608*. Агар f функция R да ҳосилага эга бўлса ва иккита ихтиёрий x_1 ва x_2 қиймат учун $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ бўлса, у ҳолда барча $x \in R$ лар учун $f(x) = e^{ax}$ ёки $f(x) = 0$ бўлишини исботланг.
- 609*. Бир жисмнинг температураси 200° , бошчасиники эса 100° . Бу жисмларни 0° ли ҳавода 10 минут совитилгандан кейин биринчи жисм 100° гача, иккинчи жисм эса 80° гача совилади. Қанча вақтдан кейин жисмларнинг температураси тенглашади?
- 610*. Икки жисм бир хил 100° температураларга эга. Улар 0° температурали ҳавога чиқарилди. 10 минутдан кейин бир жисмнинг температураси 80° , иккинчи жисмнинг температураси 64° бўлди. Совиш бошланганидан қанча вақтда кейин температураларнинг фарқи 25° га тенг бўлади?
- 611*. Моторли қайиқ соатига 30 км тезлик билан сузади. Мотор ўчирилгандан 3 минут кейин қайиқ қандай тезлик билан сузади? (Қайиқнинг $v(t)$ ($\frac{м}{мин}$ ҳисобида) тезлиги $v'(t) = -kv(t)$ дифференциал тенгламани қаноатлантиришидан фойдаланинг, бунда $k = \frac{5}{3}$.)

Тарихдан маълумотлар

Даражанинг каср кўрсаткичлари ва каср кўрсаткичли даражалар устида энг содда амаллар бажариш қондалари XIV асрда яшаган француз математиги Н. Оресм ($1323 - 1382$) ишларида учрайди. Франц Н. Шюке (XV аср) манфий ва нол кўрсаткичли даражаларни ўрганган.

Немис математиги Н. Штифель ($1486 - 1567$) «кўрсаткичлар» (exponenten) номини киритган ва $a \neq 0$ ва $a^1 = 1$ нинг таърифини

берган. У бир хил асосли натурал даражали натурал сонларни таққослаб, бу хусусий ҳол учун ушбу муносабатларга келган: $\log(ab) = \log a + \log b$, $\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$.

Логарифмлар инглиз математиги Ж. Непер (1550 — 1617) ва швейцариялик математик И. Бюрги (1552 — 1632) томонидан (бир-биридан хабарсиз) киритилган. Логарифмлар назариясини Непер ривожлантирган. У арифметик ифодаларни логарифмлар ёрдамида ҳисоблаш усулларини ишлаб чиққан ва логарифмларнинг муфассал жадвалларини тузган. Непер жадваллари натурал логарифмларнинг ҳозирги жадвалларидан оз фарқ қилган. Ўнли логарифмлар инглиз математиги Г. Бриггс (1556 — 1630) томонидан киритилган. Лейбниц XVII аср охирларидаёқ логарифмлаш қоидалари ёрдамида кўрсаткичли тенгламаларни ечган. Логарифмлар жадвалларидан фойдаланиш, кейинчалик логарифмик линейкадан фойдаланиш ҳисоблашни анча соддалаштирди ва улар узок вақт ҳисоблашнинг асосий воситаларидан бири бўлиб келди. Француз математиги Лаплас логарифмларнинг ижод қилиниши ҳисобчиларнинг умрини узайтирди, деган.

Такрорлашга доир саволлар ва масалалар

- 1) Соннинг n -даражали илдиизи таърифини беринг. n -даражали арифметик илдииз нима?
- 2) Қийматларини топинг:

а) $\sqrt[3]{-27}$; б) $\sqrt[4]{625}$; в) $\sqrt[7]{-128}$; г) $\sqrt[6]{\frac{1}{64}}$; д) $(\sqrt[n]{x})^n$.

3) Тенгламани ечинг:

а) $x^3 = 125$; б) $x^4 = 64$; в) $x^5 = -\frac{1}{243}$; г) $x^4 = -16$.

- 2) 1) Арифметик илдиизларнинг асосий хоссаларини ифодаланг.
- 2) Ифодани алмаштиринг:

а) $\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[8]{4}$; б) $\sqrt[5]{125}$; в) $\left(\sqrt[6]{\frac{27}{8}}\right)^2$; $\sqrt{\frac{a^4 b^3}{c^6}}$.

3) Сонларнинг қайси бири катта:

а) $\sqrt[5]{6}$ ёки $\sqrt[3]{5}$; б) $\sqrt[5]{5}$ ёки $\sqrt[3]{3}$;
в) $\sqrt[7]{128}$ ёки $\sqrt[5]{4}$; г) 2^{100} ёки 100^{20} ?

- 3) 1) Рационал кўрсаткичли даража таърифини беринг ва бундан даражаларнинг асосий хоссаларини ифодаланг.
- 2) Қийматларини топинг:

а) $16^{-\frac{1}{4}}$; б) $\left(\frac{81}{625}\right)^{\frac{1}{4}}$; в) $\left(\left(\frac{125}{8}\right)^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{6}}$; г) $\sqrt[5]{64} : 2^{-\frac{1}{5}} \left(2^{\frac{1}{10}}\right)^6$.

3) Сонларнинг қайси бири катта:

а) $\sqrt[3]{16}$ ёки $2^{\frac{5}{4}}$; б) $3^{-\frac{2}{3}}$ ёки $9^{-\frac{3}{4}}$;

в) $0,3^{\frac{4}{7}}$ ёки $0,3^{-\frac{4}{7}}$; г) $5^{-\frac{2}{3}}$ ёки $5^{-0,6}$?

4. 1) Кўрсаткичли функцияларнинг асосий хоссаларини ифодаланг.
2) Функция графигини ясанг:

а) $y = 4^x$; б) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$; в) $y = 6^x$; г) $y = \left(\frac{1}{6}\right)^x$.

3) Сонларнинг қайси бири катта:

а) $2^{0,4}$ ёки $2^{\frac{\sqrt{2}}{3}}$; б) $1,2^{-\sqrt{3}}$ ёки $1,2^{\sqrt{5}}$;

в) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{5}}$ ёки $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}$; г) $0,3^{\pi}$ ёки $0,3^{-3}$?

5. 1) а) $a^x = a^c$ ($a > 0$, $a \neq 1$) тенглама илдизини топинг.

б) $a^x > a^c$ тенгсизликни ечинг (иккита ҳолни қаранг: $0 < a < 1$ ва $a > 1$).

2) Тенгламани ечинг:

а) $27^x = 9^{\frac{1}{5}}$; б) $3^{x+2} - 3^x = 72$;

в) $0,5^{x^2+x-2,5} = \sqrt{2}$; г) $9^{x+3} + 3^{x+2} = 18$.

3) Тенгсизликни ечинг:

а) $3^x < \frac{1}{9}$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} > 4$; в) $5^{x^2+1} > \frac{1}{5}$; г) $0,2^{x^2+1} > 5$.

6. 1) Тескари функция нима? Функцияга ва унга тескари функцияга мисоллар келтиринг. Тескари функция ҳақидаги теоремани ифодаланг.

2) Тескари функция графиги хоссасини ифодаланг. Агар

а) $f(x) = 2x + 3$; б) $f(x) = x^3$;

в) $f(x) = x^2$, $x \geq 0$; г) $f(x) = x^2$, $x \leq 0$

бўлса, f функциянинг ва унга тескари функциянинг графигини ясанг.

3) Агар

а) $f(x) = -3x + 2$; б) $f(x) = x^3 + 1$;

в) $f(x) = \frac{1}{x+3}$; г) $f(x) = x^2$, $x \leq 0$

бўлса, f га тескари функцияни формула билан беринг.

7. 1) Логарифмик функция таърифни беринг ва унинг асосий хоссalarини ифодаланг.

2) Функция графигини ясанг:

а) $y = \log_4 x$; б) $y = \log_5 x$; в) $y = \log_{\frac{1}{5}} x$; г) $y = \log_{\frac{1}{4}} x$

3) Сонларнинг қайси бири катта:

а) $\log_3 5$ ёки $\log_3 6$; б) $\log_{\frac{1}{3}} 5$ ёки $\log_{\frac{1}{3}} 6$.

в) $\lg 7$ ёки $3 \lg 2$; г) $\log_3 3$ ёки $\log_3 2$?

8. 1) Логарифмларнинг асосий хоссalarини ифодаланг.

2) Ифодани a асос бўйича логарифмланг:

а) $16 b^2 \sqrt[5]{c^2}$, $a = 2$; б) $\frac{c^4}{\sqrt[3]{100 b^{\pi}}}$, $a = 10$.

в) $27 \frac{\sqrt{b^2}}{c^4}$, $a = 3$; г) $\frac{0,49 b^3}{c \sqrt[5]{c}}$, $a = 0,7$.

3) Агар

а) $\log_5 x = \log_5 1,5 + \frac{1}{3} \log_5 8$;

б) $\lg x = 1 + 2 \lg 3 - \frac{2}{3} \lg 125$;

в) $\log_2 x = 2 \log_2 5 - \frac{1}{3} \log_2 8 + \log_2 0,2$;

г) $\log_3 x = 5 \log_3 7 + \frac{2}{3} \log_3 27 - \frac{3}{2} \log_3 16$

бўлса, x ни топинг.

9. 1) а) $\log_a x = b$ ($a > 0$, $a \neq 1$) тенгламанинг ҳамма илдиэларини кўрсатинг.

б) Тенгсизлиكنи ечинг:

$$\log_a x > \log_a c$$

(иккита ҳолни қаранг: $0 < a < 1$ ва $a > 1$).

2) Тенгламани ечинг:

а) $\log_2 (x - 15) = 4$; б) $\lg (x^2 - 2x - 4) = \lg 11$;

в) $\ln^2 (x - 2) = 4$; г) $\lg^2 x + 2 \lg x = 8$.

3) Тенгсизлиكنи ечинг:

а) $\log_{0,6} x > 2$; б) $\log_7 x < 1$;

в) $\ln x \geq -3$; г) $\lg x \leq -2$.

10. 1) e сони нима? $y = e^x$ функция қандай ҳосиллага эга? $y = a^x$ функция-чи?

2) Функциянинг ҳосиласини топинг:

а) $f(x) = e^{2x}$; б) $g(x) = e^{-8x}$; в) $u(x) = 3e^{7x-1}$;

г) $v(x) = 5 - 2e^{4-3x}$.

а) $16^{\frac{1}{4}}$; б) $6^{\frac{1}{3}}$.

3) Функция учун бошланғич функцияларнинг умумий кўринишини топинг:

а) $f(x) = e^{2x}$; б) $g(x) = e^{-3x}$; в) $u(x) = 5e^{0.7x}$;

г) $v(x) = e^{5x} - 7e^{-4x}$.

11. 1) $\ln x$ функция қандай ҳосиллага эга? $\frac{1}{x}$ функция учун бошланғич функцияларнинг умумий кўринишини топинг.

2) Функция ҳосиласини топинг:

а) $\ln 3x$; б) $\ln(7 - 2x)$.

3) Функция учун бошланғич функцияларнинг умумий кўринишини топинг:

а) $f(x) = \frac{1}{5x}$; б) $g(x) = \frac{1}{x-3}$.

12. 1) x^p функция қандай ҳосиллага эга?

2) Функциянинг графигини ясанг:

а) $y = x^7$; б) $y = x^{-4}$; в) $y = x^{0.3}$; г) $y = x^{\sqrt{2}}$.

(Берилган функциянинг ҳосиласини топинг.)

3) Тақрибий қийматини топинг: а) $\sqrt[3]{32.02}$; б) $\sqrt[7]{127.9}$.

IV бобга доир қўшимча машқлар

Функцияларнинг графикларини схематик тасвирланг (612 — 613).

612. а) $y = 0.7^x$; б) $y = \left(\frac{1}{\pi}\right)^x$; в) $y = \log_{0.6} x$; г) $y = \log_{\pi} x$.

613. а) $y = \lg(-x)$; б) $y = \lg(x - 3)$;

в) $y = \lg(x + 3)$; г) $y = \lg x + 3$.

Тенгламани ечинг (614 — 620).

614. а) $3^x = 7$; б) $2^x \cdot 7^x = 10$;

в) $5^{3-2x} = 4$; г) $0.3^{1-\frac{x}{2}} = 5^{3x}$.

615. а) $\ln(4 + 2x - x^2) = 0$; б) $\ln(2x + 3e) = 1$;

в) $\ln(x^2 - x + 2) = \ln 4$; г) $\ln(x^2 + 3x + 1) = \ln 11$.

616. а) $e^{1-x} = e^x$; б) $e^x - 1 = \frac{6}{e^x}$; в) $2^{1-x} = 5$; г) $2^{5-3x} = 7^4$.

617. а) $\log_3 x = -1$; б) $\log_5 x = \log_5 7$;

в) $\log_5 x = -\log_5 7$; $\log_2 x = 3 - \log_2 7$.

618. а) $\log_{\frac{1}{2}} x = 3$; б) $\log_{0.3} x = 2$;

в) $\log_2(\log_5 x) = 0$; г) $\log_4(\log_2 x) = -\frac{1}{2}$.

619. а) $\log_2 \sin x + 1 = 0$; б) $\log_3 (2^x + 1) = 2$;
 в) $\ln(0,5 + x) = \ln 0,5 - \ln x$; г) $\log_x 2 + \log_2 x = \frac{5}{2}$.

620. а) $2^{\sin x} = 1$; б) $4^{\cos x} = 2$; в) $8^x + 18^x = 2 \cdot 27^x$;
 г) $25^x - 10^x = 2 \cdot 4^x$.

621. Ҳисобланг:

а) $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \dots \cdot \log_{11} 10$; б) $\log_6 16$, бунда $\log_{12} 27 = a$.
 Тенгсизлиқни ечинг (622 — 625).

622. а) $\lg x + \lg(x - 1) < \lg 6$; б) $\log_{0,5} x > \log_2(3 - 2x)$;
 в) $\log_x 2 > 0$; г) $\log_{2-x} 3 < 0$.

623. а) $\ln x > 2$; б) $\ln x < 5$; в) $\ln x < -3$; г) $\log_3 x \leq -2$.

624. а) $\left(\frac{2}{5}\right)^x > 1$; б) $0,7^x < 0,49$;

в) $0,2^x > \frac{1}{25}$; г) $\frac{1}{3^x} < 27$.

625. а) $1,7^{2-3x} < 7$; б) $2^x < \frac{1}{3}$;

в) $3^{x+x} < 10^{\lg 9}$; г) $e^x + 2 > \frac{3}{e^x}$.

626. Формулаи исботланг:

а) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$; б) $\log_a b = \log_{a'} b'$.

Тенгламани ечинг (627 — 630).

627. а) $\log_x 3 - \log_x 5 = 2$; б) $\log_{x-2}(x^2 - 6x + 10) = 1$;

в) $2 \log_7 \sqrt{x} = \log_7(9 - 2x)$; г) $\lg(4,5 - x) = \lg 4,5 - \lg x$.

628. а) $\frac{1}{2} \lg(2x - 1) = 1 - \lg \sqrt{x - 9}$;

б) $\log_3^2 x = 4 - 3 \log_3 x$;

в) $\log_3 \sqrt{x - 5} + \log_3 \sqrt{2x - 3} = 1$;

г) $\frac{1}{5 + \lg x} + \frac{2}{1 - \lg x} = 1$.

629. а) $x^{\log_3 x} = 16$;

б) $x^{\log_3 x - 2} = 27$;

в) $x^{\lg x} = 100x$;

г) $x^{\log_3 x} = 125x^2$.

630. а) $\log_4 x + \log_x 2 = 1$;

б) $\log_5 x \cdot \log_7 x = \log_5 7$;

в) $\log_5 x + \log_7 x = \log_5 35$; г) $\lg x + \log_x 10 = 2,5$.

Тенгсизлиқни ечинг (631 — 634).

631. а) $\log_{0,3}(2,3 - 2x) < 1$; б) $\log_{0,7}(3x - 2) > 1$;

в) $\log_9(2 + x) > 0,5$; г) $\log_9(2 + x) < 0,5$.

632. а) $\log_5(3-x) < -1$; б) $\log_{0.7}(1+2x) > 2$;
 в) $\log_{0.3}(2-5x) > 2$; г) $\lg(4-3x) > 2$.
 633. а) $\log_x 17 > \log_x 11$; б) $\log_x 2 > \log_x 5$;
 в) $\log_x 0.5 < \log_x 7$; г) $\log_x 0.8 > \log_x 3$.
 634. а) $\ln(3+2x-x^2+e^2) > 2$; б) $\ln^2 x - 2 < \ln x$;
 в) $\lg x - 1 < 2 \log_x 10$; г) $\log_{0.2} \log_2 \frac{x^2}{x+2} > 0$.

Функциянинг аниқланиш соҳасини топинг (635—637).

635. а) $\log_a(x-1)$; б) $\log_{0.2}(x+2)$;
 в) $\log_{\pi}(4-x)$; г) $\lg \frac{5}{3-x}$.
 636. а) $\log_2(x^2-2x-3)$; б) $\log_7(6+x-x^2)$;
 в) $\log_{\frac{1}{4}}(x^2-4x+6)$; г) $\log_{2.5}(x^2+6x+9)$.
 637. а) $\ln \frac{2-x}{3x+5}$; б) $\ln \sin x$; в) $\lg \cos x$; г) $\log_a |x|$.

Ўнли логарифмлар жадвалларидан фойдаланиб топинг (638—639).

638. а) $\log_{0.7} 5.3$; б) $\log_{3.1} 0.17$; в) $\log_{\pi} e$; г) $\log_{19} 23$.
 639. а) $\sqrt[7]{1.7}$; б) $\sqrt[7]{\pi}$; в) $2.3^{\sqrt{2}}$; г) e^{π} .
 640. Сонларнинг қайси бири катта:

- а) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$ ёки $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$; б) $\log_2 3$ ёки $\log_3 2$;
 в) $\log_7 3$ ёки $\log_9 9$; г) $\log_2 10$ ёки $\log_5 90$?
 Функция ҳосиласини ҳисобланг (641—647).

641. а) e^{2x} ; б) $3e^{-2x}$; в) $\frac{7}{e^{5x}}$; г) 3^x .
 642. а) 5^{-4x} ; б) $\frac{3}{7^{2x}}$; в) 9^{2-5x} ; г) $5^x \sin 2x$.
 643. а) $\frac{2^x}{\cos x}$; б) $\sqrt[3]{x} \lg x$; в) $\frac{\operatorname{ctg} x}{\sqrt{x}}$; г) $\frac{2^{\frac{x}{3}}}{x^4+3}$.
 644. а) $e^{\sin x}$; б) $e^{\cos x}$; в) $3^{5 \lg x}$; г) $7^{2 \operatorname{ctg} x}$.
 645. а) $\log_3 x$; б) $\lg 5x$; в) $\lg(3+4x)$; г) $\log_9(3-2x)$.
 646. а) $x^3 \ln x$; б) $3^x \ln(5x)$; в) $\frac{\sin x}{\ln(7x)}$; г) $\frac{\ln(2x)}{\sqrt{x}+3}$.
 647. а) $\ln(\sin x)$; б) $\ln(\operatorname{tg} x)$; в) $\log_{11}(x^3+4\sqrt{x}+5)$;
 г) $\lg(\sin 3x+2^x)$.

648. f функция графигига x_0 абсциссали нуқтада ўтказилган у
ма тенгламасини ёзинг:

а) $f(x) = e^{2x}$, $x_0 = 0$;

б) $f(x) = 10^x$, $x_0 = 1$;

в) $f(x) = \ln(2x)$, $x_0 = \frac{1}{2}$;

г) $f(x) = \lg(3x)$, $x_0 = \frac{1}{3}$.

Функция графигини ясанг (649—651).

649.* а) $f(x) = \ln^2 x$;

б) $g(x) = e^x \sin x$;

в) $f(x) = x^2 e^x$;

г) $p(x) = x \log^2 x$.

650.* а) $u(x) = \frac{\ln x^2}{1 + \ln^2 x}$;

б) $v(x) = \operatorname{tg}^3 x - 3 \operatorname{tg} x$;

в) $h(x) = \frac{\ln^3 x}{x}$;

г) $w(x) = \ln^3 x - 3 \ln x$.

651.* а) $p(x) = 3 \log^2 x - \log^3 x$;

б) $g(x) = \frac{x}{\ln x - 1}$;

в) $f(x) = \frac{x^3}{e^x}$;

г) $f(x) = \frac{x^2}{e^{x^2}}$.

Функция учун бошланғич функцияларни топинг (652—653).

652. а) $\frac{1}{x+7}$;

б) $\frac{3}{5x+1}$;

в) $\frac{5}{3-2x}$;

г) $\frac{4}{7-5x}$.

653. а) $\frac{1}{8x}$;

б) $\sqrt[7]{x^3}$;

в) $\frac{2}{\sqrt[5]{x^4}}$;

г) x^π .

654. Интегрални ҳисобланг:

а) $\int_1^2 \frac{dx}{x}$;

б) $\int_{-2}^0 \frac{dx}{3x+7}$;

в) $\int_{-3}^{-2} \frac{dx}{x}$;

г) $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{2x+3}$.

655. Қуйидаги чизиклар билан чегараланган фигура юзини ҳисоб-
ланг:

а) $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 10$;

б) $y = \frac{3}{x}$, $y = 3$, $x = 2$;

в) $y = \frac{2}{x}$, $y = x + 1$, $x = 3$;

г) $y = \frac{3}{x}$, $x + y = 4$.

656. Истаган рационал сонни даврий чексиз ўнли каср кўринишида тасвирлаш мумкинлигини исботланг.
657. Рационал сонни (бўлиш ёрдамида) чексиз ўнли касрга айлантиришда (9) давр чиқмаслигини исботланг.
658. Ҳар қандай чексиз даврий ўнли каср бирор рационал соннинг ёзилиши эканини исботланг.

659. $3.27277277727772\dots$ соннинг иррационал сон эканини исботланг (биринчи иккидаң кейин битта етти, иккинчи иккидан кейин иккита етти, учинчи иккидан кейин учта етти ва ҳоказо n -иккидан кейин n та етти ва ҳоказо).

Сонларнинг иррационал эканини исботланг (660—661).

660. а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{\frac{2}{3}}$; в) $\sqrt[3]{3}$; г) $\lg 5$; д) $\lg 43$.

661. а) $\sqrt{3} + \sqrt{5}$; б) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$; в) $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$.

662. Агар натурал сон a тўла квадрат бўлмаса, у ҳолда $\sqrt{a}$ иррационал сон бўлишини исботланг.

663. Кўпайтувчиларга ажратинг:

а) $x^4 + 4$; б) $(x^2 + y^2)^3 + (z^2 - x^2)^3 - (y^2 + z^2)^3$;

в) $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$; г) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

664. Махраждаги иррационалликни йўқотинг:

а) $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}}$; б) $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}$; в) $\frac{1}{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{7}}$.

665. Ҳеч қандай рационал сон r ни

$$r = k\sqrt{2} + p\sqrt{3}$$

кўринишда тасвирлаш мумкин эмаслигини исботланг. бунда k ва p нолдан фарқли бутун сонлар.

666. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ва $\sqrt{5}$ сонлари битта арифметик ёки геометрик прогрессиянинг ҳадлари (қўшни ҳадлар бўлиши шарт эмас) бўла олмаслигини исботланг.

667. Формулаларни исботланг:

а) $\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} + \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}$;

б) $\sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} - \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}$.

668. Ифодани соддалаштиринг:

$$a) \sqrt{67 - 42\sqrt{2}} + \sqrt{19 - 6\sqrt{2}};$$

$$б) \sqrt{51 - 4\sqrt{77}} - \sqrt{47 - 4\sqrt{33}};$$

$$в) \sqrt{94 - 42\sqrt{5}} + \sqrt{129 - 56\sqrt{5}}.$$

669—670- масалаларни ечишда кетма-кетлик лимитининг таърифидан фойдаланинг: агар ҳар қандай сон $\varepsilon > 0$ учун шундай N номер тайлаш мумкин бўлсаки, барча $n > N$ ларда

$$|a_n - A| < \varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A.$$

669. Теоремани исботланг: агар ҳар қандай n учун

$$a_n \leq b_n \leq c_n \text{ ва } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = A$$

бўлса, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ мавжуд ва бу лимит ҳам A га тенг.

670. Агар кетма-кетликнинг лимити нолга тенг бўлса, бу кетма-кетлик чексиз кичик (кетма-кетлик) дейилади. Лимитнинг таърифидан фойдаланиб: а) иккита чексиз кичик кетма-кетликнинг йиғиндиси чексиз кичик бўлади; б) чегараланган кетма-кетлик (яъни ҳар қандай n учун $|a_n| < M$ тенгсизлик ўринли бўладиган кетма-кетлик, бунда M —бирор сон) билан чексиз кичик кетма-кетликнинг кўпайтмаси чексиз кичик кетма-кетлик бўлади; в) ушбу $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$

тенглик бажарилиши учун $b_n = a_n - A$ кетма-кетлик чексиз кичик бўлиши зарур ва етарли эканини исботланг.

671. 670- масаланинг натижасидан фойдаланиб йиғиндининг, кўпайтманинг ва бўлинманинг лимити ҳақидаги теоремаларни исботланг.

672. Агар $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ бўлса, f функция a нуқтада чексиз кичик функция дейилади. Чексиз кичик функциялар учун 670- масалада келтирилган теоремаларга ўхшаш теоремаларни ифодаланг ва исботланг.

673. 672- масаланинг натижасидан фойдаланиб, икки функция йиғиндисининг, кўпайтмасининг ва бўлинмасининг лимити ҳақидаги теоремаларни исботланг.

674. Кетма-кетликнинг лимитини ҳисобланг:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} \right);$$

$$б) \lim_{n \rightarrow \infty} (2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdot \dots \cdot \sqrt[2^n]{2}).$$

675. Лимитнинг таърифига кўра тенгликни исботланг:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ ($a > 0$); в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

676. Функция лимитини ҳисобланг:

а) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{3x+85}-10}$; б) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+9}-4}$.

677. Агар $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ мавжуд бўлса, у ҳолда $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ га тенг

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ ҳам мавжуд эканини исботланг.

678 — 682-масалаларнинг ечилиши математик индукция принципида асосланган, бу принципни кўпинча арифметика аксиомаларидан бири деб қабул қилишади. Бу принцип бундай ифодаланади: агар n натурал сонга боғлиқ фикр: а) бирор бошланғич $n = n_0$ учун тўғри ва б) агар унинг $k \geq n_0$ да $n = k$ — ихтиёрий натурал сон учун тўғри деб фараз қилинишдан $n = k + 1$ учун ҳам тўғри эканлиги келиб чиқса, у ҳолда бу фикр ҳар қандай $n \geq n_0$ учун тўғри.

678. Математик индукция методи билан исботланг:

а) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

б) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$;

в) $1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$;

г) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$,

бунда $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$;

д) $\frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(n+3)(n+4)} = \frac{n}{4(n+4)}$;

е) $2^3 + 6^3 + \dots + (4n-2)^3 = \frac{4n(2n-1)(2n+1)}{3}$;

ж) $\frac{7}{1 \cdot 8} + \frac{7}{8 \cdot 15} + \frac{7}{15 \cdot 22} + \dots + \frac{7}{(7n-6)(7n+1)} + \frac{1}{7n+1} = 1$;

з) $\frac{1}{4 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 12} + \frac{1}{12 \cdot 16} + \dots + \frac{1}{4n(4n+4)} + \frac{1}{16(n+1)} = \frac{1}{16}$.

679. Тенгсизликни исботланг (математик индукция методи билан):

а) $|\sin nx| \leq n |\sin x|$; б) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n+1} > 1$;

в) ҳар қандай натурал $n \geq 2$ учун $(1+h)^n > 1 + nh$ тенгсизликини исботланг, бунда $h > -1$, $h \neq 0$ (Бернулли тенгсизлиги); г) ҳар қандай натурал $n \geq 3$ ва $h > 0$ учун

$(1+h)^n > 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2} h^2$ тенгсизликни исботланг.

680. Ҳар қандай натурал n да математик индукция методи билан исботланг:

а) $6^{2x-1} + 1$ ифода 7 га қаррали; б) $3^{3n+2} + 2^{4n+1}$ ифода 11 га қаррали; в) $4^n + 15n - 1$ ифода 9 га қаррали; г) $7^{2n} - 1$ ифода 48 га қаррали.

681. Текисликдаги n та тўғри чизик уни $1 + \frac{n(n+1)}{2}$ дан ортиқ бўлмаган қисмга бўлишини математик индукция методи билан исботланг.

682. n та текислик фазони $\frac{(n+1)(n^2-n+6)}{n}$ тадан ортиқ бўлмаган қисмларга бўлишини математик индукция методи билан исботланг.

683. Ҳар қандай M сон учун шундай натурал n топиладики,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

йиғинди M дан катта бўлади. Исботланг.

684. $f(x) = x \cdot |x|$ функция учун $f'(0)$ ни топинг.

685. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ функция 0 нуқтада ҳоҳилага эга эмаслигини исботланг.

686. $y = x^3$ функция графигига урийма ясаш усулини 22-пунктдаги 2-мисолдагига ўхшаш топинг.

687. $y = ax^2 + bx + c$ квадратик функция графигининг эскизи бўйича a , b ва c коэффициентларнинг ҳамда D дискриминантнинг ишорасини аниқланг (157-расм), a , b , c ва D ларнинг ишораларини топиш усулини умумий ҳолда айтиб беринг.

688. $\frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ функциянинг n -ҳосиласини топинг.

689. $f(x) = ax + b$ кўринишидаги функциялар орасидан шундайларни топингки, а) ҳар қандай x учун $f(f(x)) = f(x)$; б) ҳар қандай x учун $f(f(x)) = x$ бўлсин.

690. Агар а) $f(x) = 3 - x$; б) $f(x) = \frac{1}{x}$,

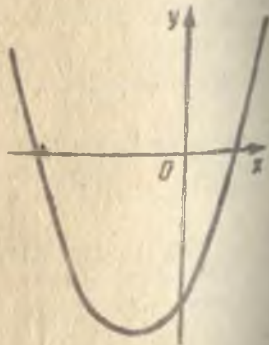
в) $f(x) = \frac{1}{1-x}$ бўлса, $f_2(x) = f(f(x))$,

$f_3(x) = f(f(f(x)))$ ва ҳ. к. $f_n(x) = \underbrace{f(f(f(\dots(f(x))))}_{n \text{ марта}})$ функцияларни

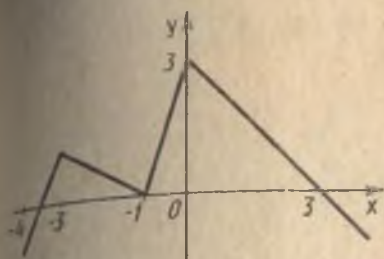
топинг ва $f_n(x)$ нинг аниқланиш соҳасини кўрсатинг.

691. $x - 2\{x\}$ функция тескариланмами?

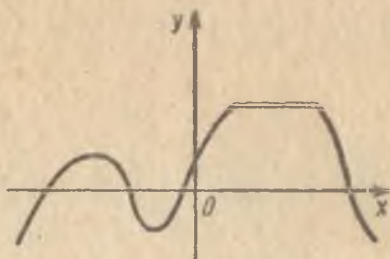
692. а) $y = \frac{1}{ax+b}$; б) $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ кўринишидаги функциялар ичидан ўз ўзига



157-расм



158- расм



159- расм

тескарилари билан бир хилдаги ҳамма функцияларни топинг.

693. Ҳар қандай $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0$ ва $ad-bc \neq 0$ да) каср-чизиқ-

ли функциянинг графиги бирор k да $y = \frac{k}{x}$ функциянинг графигини параллел кўчириш билан ҳосил қилинишини исботланг. k коэффициентни кўрсатинг.

694. f функциянинг графиги берилган (158—159-расмлар). Қуйидаги функциялар графикларининг эскизларини ясанг!

а) $y = f(-2x)$; б) $y = f(|x|)$; в) $x = |f(x)|$;

г) $y = f(1-x)$; д) $y = -f(-|x|)$; е) $y = \frac{1}{f(x)}$.

(159-расмда берилган функция учун $f(0) = 1$).

695. $[0, 1]$ кесмада аниқланган ва иккита экстремум нуқтасига эга бўлган тескариланувчи функцияга мисол келтиринг.

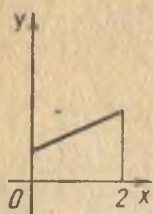
696. Ҳар қандай $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ куб тенглама ақалли битта ҳақиқий илдизга эга эканини исботланг.

697. $y = ax^2 + bx + c$ параболанинг берилган M нуқтасидан ўтувчи ва парабола билан бундан бошқа умумий нуқтаси бўлмаган аниқ битта новертикал l тўғри чизиқ мавжуд эканини исботланг. Бу тўғри чизиқ параболлага шу нуқтада уринма эканини исботланг.

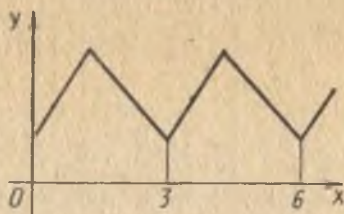
698. $xy = a^2$ гиперболлага уринма координаталар ўқи билан юзи ўзгармас $2a^2$ га тенг учбурчак ҳосил қилишини, уриниш нуқтаси шу учбурчакка ташқи чизилган айлана маркази эканини исботланг.

699. Координата текислигида шундай M_k нуқталар тўпламини тасвирлангки (бунда M_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) $M(x, y)$ нуқталар тўплами). $M(x, y)$ нуқтадан $y = x^2$ параболлага аниқ k та уринма ўтказиш мумкин бўлсин.

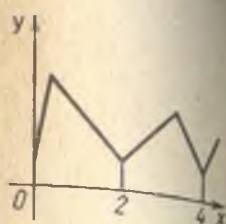
700. Агар f функция сонлар тўғри чизигининг ҳар бир нуқтасида дифференциалланувчи ва ихтиёрий x_1 ва x_2 қийматлари учун



160- расм



161- расм



162- расм

$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ бўлса, у ҳолда $f(x)$ ўзгармас эканлиги исботланг.

701. n - даражали кўпхад n дан ортиқ бўлмаган илдиэларга эга ва $(n - 1)$ дан ортиқ бўлмаган экстремум нуқталарига эга эканлиги исботланг.

702. n - даражали кўпхад ўзининг ҳар бир қийматини қабул қилиши n мартадан ортиқ бўлмаслигини исботланг.

703. $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ — каср-рационал функция бўлсин ($p(x)$ нинг даражаси n , $q(x)$ нинг даражаси m).

а) $R(x)$ ўзининг ҳар бир қийматини x нинг $k = \max(m, n)$ даги қийматларидан ортиқ бўлмаган қийматлар қабул қилишини исботланг.

б) агар $m \neq n$ бўлса, $R(x)$ нинг экстремум нуқталари $(m + n - 1)$ дан ортиқ эмаслигини, агар $m = n$ бўлса, экстремум нуқталари $(m + n - 2)$ дан ортиқ эмаслигини исботланг.

704. Тескари тригонометрик функциялар ҳосилаларининг формулаларини чиқаринг:

а) $\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $\arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

в) $\arctg' x = \frac{1}{1+x^2}$; г) $\text{arcctg}' x = -\frac{1}{1+x^2}$.

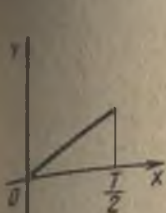
705. Айниятни исботланг:

а) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$; б) $\arctg x + \text{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$.

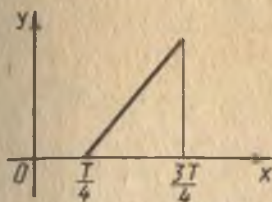
706. Аниқланиш соҳаси 0 нуқтага нисбатан симметрик бўлган ҳар қандай функция жуфт ва тоқ функцияларнинг йиғиндисиде шаклида тасвирланишини, бундай тасвир ягона эканлиги исботланг.

707. 160—162-расмларда сонлар тўғри чизигининг ҳамма ерида аниқланган даврий функция графигининг бир бўлаги тасвирланган. f функциянинг даври қандай бўлиши мумкин? (Даврининг мумкин бўлган барча қийматларини кўрсатинг.)

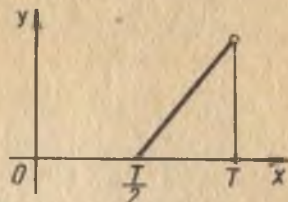
708. 163—165-расмларда тасвирланган функциялар графикларини



163- расм



164- расм



165- расм

(агар мумкин бўлса), энг кичик мусбат даври T бўлган, шу билан бирга: а) тоқ, б) жуфт функциялар графикларига тулдилинг.

709. а) Барча рационал сонлар даври бўлган, барча иррационал сонлар даври бўлмаган даврий функциялар мавжудми;
б) барча иррационал сонлар даври бўлган, барча рационал сонлар даври бўлмаган даврий функциялар мавжудми?
710. Қандай n ларда: а) жуфт функция; б) тоқ функция; в) даврий функция роппа-роса n та экстремум нуқтасига эга бўлиши мумкин?
711. f функция даврий эмаслигини исботланг:

а) $f(x) = \cos x \cdot \cos(x\sqrt{2})$; б) $f(x) = \cos x + \cos(x\sqrt{2})$;
в) $f(x) = \sin x^2$, г) $f(x) = \sin \sqrt{x}$.

712. Умумий даврга эга бўлмаган иккита узлуксиз даврий функциянинг йиғиндиси даврий функция эмаслигини исботланг (иккала функция ҳам сонлар тўғри чизигининг ҳамма ерида аниқланган деб ҳисобланг).

713. $\sin 47^\circ + \sin 61^\circ - \sin 11^\circ - \sin 25^\circ = \cos 7^\circ$ эканини исботланг.

714. Соддалаштиринг:

а) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin nx$;
б) $\cos x + \cos 5x + \cos 9x + \dots + \cos(4n-3)x$.

715. $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$, $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$ экани маълум.
 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$ эканини исботланг ($\angle A$, $\angle B$ ва $\angle C$ ларнинг мусбат бўлиши шарт эмас).

716. Ушбу $a \sin x + b \cos x$
ифодани

$$A \cos(x + \varphi)$$

куринишда тасвирлаш мумкинлигини исботланг, бунда $A = \sqrt{a^2 + b^2}$.

717. Агар учбурчакнинг a , b , c томонлари арифметик прогрессия

ҳосил қилса, у ҳолда $\operatorname{ctg} \frac{A}{2}$, $\operatorname{ctg} \frac{B}{2}$ ва $\operatorname{ctg} \frac{C}{2}$ ҳам арифметик прогрессия ҳосил қилишини исботланг.

718. $\sin x$ ва $\cos x$ бир вақтда рационал бўлиши учун $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ нинг рационал бўлиши зарур ва етарли эканини исботланг.

719. Исботланг:

а) $16 \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ = 1$;

б) $\cos^2 3 + \cos^2 1 - \cos 4 \cos 2 = 1$.

720. m массали жисмнинг тўғри чизиқли ҳаракати вақтида x координатали нуқтада потенциал энергияси $u(x)$ бўлсин:

а) Жисмнинг тўғри чизиқ бўйича ҳаракатида $x(t)$ координатаси $mx''(t) = -u'(x)$ дифференциал тенгламани қаноатлантиришини исботланг; б) $x'' = -\omega^2 x$ гармоник тебраниш бажараётган m массали моддий нуқтанинг потенциал энергияси $\frac{kx^2}{2}$ га тенг эканини исботланг, бунда $k = m\omega^2$ ($u(0) = 0$ деб олинг).

721. Ньютоннинг иккинчи қонуни бўйича тўғри чизиқли ҳаракат қилувчи m массали моддий нуқтанинг

$$E = \frac{mv^2}{2} + u(x)$$

тула энергияси сақланишини исботланг ($u(x)$ — потенциал энергия).

722. $x_1(t)$ ва $x_2(t)$ ушбу

$$x''(t) = -\omega^2 x(t)$$

тенгламанинг иккита ечими бўлсин. $x_1(t)$ — $x_2(t)$ ва $kx_1(t)$ функциялар ҳам шу тенгламанинг ечимлари бўлишини исботланг, бунда k — ихтиёрий сон.

723. Ушбу

$$x''(t) = -\omega^2 x(t)$$

тенгламанинг $x(0) = x_0$, $x'(0) = v_0$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи $x = A \cos(\omega t + \varphi)$ кўринишга эга бўлган ечим мавжудлигини исботланг.

723- масалаларнинг натижа-

чаланиб $x''(t) = -\omega^2 x(t)$

тенгламанинг ҳар

$x = A \cos(\omega t + \varphi)$ кў-

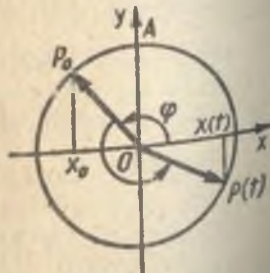
мумкинлигини

текислигида ра-

сази, координата-

ган айлана бўйи-

я йўналишига тес-



166 -расм

кари текис ҳаракат қилиб, бунда вақт бирлигида ω радиан ўтсин. $\overline{OP}$ вектор $\overline{OP}_0$ бошланғич ҳолатида Ox ўқнинг мусбат йўналиши билан ϕ бурчак ҳосил қилсин (166-расм). $P(t)$ нуқтанинг Ox ўқдаги проекциясининг координатаси гармоник тебранишини кўрсатинг ва тегишли A , ω ва ϕ константаларни аниқланг.

726. Умумий частотали иккита гармоник тебранишнинг йиғиндиси шу частотали гармоник тебраниш эканини исботлаш учун 725-масаланинг натижасидан фойдаланинг.
727. Умумий частотали иккита гармоник тебранишнинг йиғиндиси шу частотали гармоник тебраниш эканини исботланг, бунинг учун 726-масаланинг натижасидан фойдаланинг.
728. Иккита $x_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1)$ ва $x_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$ гармоник тебранишнинг йиғиндиси частоталарнинг нисбати r , яъни $\frac{\omega_1}{\omega_2} = r$ рационал сон бўлгандагина ва фақат шу ҳолдагина даврий функция бўлишини исботланг.
729. $f(x)$ — даражаси 3 дан юқори бўлмаган кўпхад бўлсин.

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6} (y_1 + 4y_2 + y_3)$$

эканини исботланг, бунда $y_1 = f(a)$, $y_2 = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, $y_3 = f(b)$.

730. Бошланғич массаси M бўлган сув томчиси оғирлик кучи таъсири остида тушади ва бир текисда буғланиб, ҳар секундда m массасини йўқотади. Томчи туша бошлагандан то буғланиб тамом бўлганча оғирлик кучи қандай иш бажаради?
731. Тўкилган қумни баландлиги H ва асосининг радиуси R бўлган конус формасига келтиришга оғирлик кучини енгилш учун энг камида қанча иш бажариш керак? Қумнинг зичлиги ρ га тенг ва уни конус асосининг текислигидан кўтарилади.
732. Асоси $a = 40$ см ва баландлиги $h = 30$ см бўлган бир жинсли учбурчак шаклидаги пластинка асоси атрофида ўзгармас $\omega = 5\pi \text{ c}^{-1}$ бурчак тезлик билан айланади. Агар пластинканинг қалинлиги $d = 0,2$ см, пластинка тайёрланган модданинг зичлиги $\rho = 2,2 \text{ г/см}^3$ бўлса (пластинканинг қалинлиги эътиборга олинмайди), пластинканинг кинетик энергиясини топинг.
733. R радиусли бир жинсли ярим доира массасининг марказини топинг.
734. R радиусли бир жинсли ярим шар массасининг марказини топинг.
735. Бир жинсли жисмни сувга ботирганда сувнинг итариш кучига қарши бажариладиган иш $\rho g V h$ га тенг эканини исботланг, бунда ρ — сувнинг зичлиги, g — эркин тушиш тезланиши, V — ҳажм, h — сувдаги жисмнинг сувга ботирилган қисми массаси марказининг ботиш чуқурлиги.

736. Интегрални ҳисобланг:

$$\text{a) } \int_0^{28} \frac{5-x}{\sqrt[3]{1+\frac{x}{4}}} dx; \quad \text{б) } \int_2^0 x \sqrt[3]{1-\frac{x}{2}} dx;$$

$$\text{в) } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x + \cos^4 x) \sin x dx.$$

737. $f(x) = x^x$ функциянинг ҳосиласини топинг.

738. Функцияни текширинг ва графигини ясанг:

$$\text{a) } y = \frac{e^x}{x}; \quad \text{б) } y = x^2 e^{-x}; \quad \text{в) } y = \sqrt{x} \ln x; \quad \text{г) } y = \left| \{x\} - \frac{1}{2} \right|.$$

739. Функциянинг қийматлари соҳасини топинг:

$$\text{a) } \cos^2 x - \cos x; \quad \text{б) } 3 \cos x - 4 \sin x - 2;$$

$$\text{в) } 4^x + 2^x; \quad \text{г) } x^x (x > 0).$$

740. Координатлари қуйидаги шартни қаноатлантирувчи нуқталар тўпламини координата текислигида тасвирланг:

$$\text{a) } \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2 - 1} \leq 0; \quad \text{б) } |x + y| + |x - y| = 4; \quad \text{в) } \sqrt{x + y} \geq |x|;$$

$$\text{г) } \frac{xy + 1}{xy - 1} \geq \frac{y + 1}{y - 1}; \quad \text{д) } [x] \leq [y]; \quad \text{е) } \{x\} \geq \{y\}.$$

741. Лимитни интеграллар ёрдамида топинг:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right);$$

$$\text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right);$$

$$\text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}} \quad (p > 0);$$

$$\text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^{p-1}}{(n+1)^p} + \frac{n^{p-1}}{(n+2)^p} + \dots + \frac{n^{p-1}}{(n+n)^p} \right), \quad (p > 1).$$

742. Тенглама нечта ҳақиқий илдиэга эга:

$$\text{a) } x^3 - 4x^2 - 3x + 5 = 0; \quad \text{б) } x^3 - 9x = a \quad (a - \text{параметр})?$$

743. Ушбу сон

$$\sqrt[3]{6 + \sqrt{\frac{847}{27}}} + \sqrt[3]{6 - \sqrt{\frac{847}{27}}} \quad \text{рационал сон эканини}$$

исботланг.

744. a асос қандай бўлганда ўз логарифмига тенг бўлган x сонлар мавжуд; яъни $x = \log_a x$ шарт бажарилади?

745. Интеграл, a , b ва c параметрларнинг қандай қийматларида аниқланган:

$$\text{a) } \int_a^b \frac{dx}{x-2}; \quad \text{б) } \int_0^3 \frac{dx}{x-c}; \quad \text{в) } \int_a^b \frac{dx}{x+c}$$

ТАКРОРЛАШ УЧУН МАТЕРИАЛ

1. Ҳақиқий сонлар

1°. 1, 2, 3, ... натурал сонлар ва бутун ($0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$) сонлар билан сиз бошланғич мактаб курсидан танишсиз. $r = \frac{m}{n}$ кўринишда тасвирлаш мумкин бўлган сонлар, бунда n — натурал сон, m эса бутун сон, *рационал сонлар* дейилади. Рационал сонлар устида (жумладан бутун сонлар устида ҳам) арифметик амаллар маълум қоидалар бўйича амалга оширилади.

Ҳар қандай $r = \frac{m}{n}$ рационал сонни чексиз ўнли каср кўринишида тасвирлаш мумкин:

$$r = \pm a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots,$$

бунда a_0 — бутун номанфий сон; $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ — рақамлар. Бунинг учун касрнинг суратини махражига бўлиш керак. Масалан, $\frac{110}{101}$ сонни ўнли касрга айлантирсак, у бундай бўлади:

$$\begin{array}{r} 110 \overline{) 101} \\ - 101 \overline{) 1,089108} \\ \hline 900 \\ - 808 \\ \hline 920 \\ - 909 \\ \hline 110 \\ - 101 \\ \hline 900 \\ - 808 \\ \hline 92 \end{array}$$

Ҳосил бўлган 1,08910891 ... каср даврий касрдир, чунки бўлишдан чиқадиган қолдиқлар (9, 90, 92, 11, 9 ...) ва бўлинманинг рақамлари (1, 0, 8, 9) даврий равишда такрорланади. Такрорланувчи рақамлар группасини *касрнинг даври* дейилади; ёзувда даврийлиқ қавслар ичига олиб кўрсатилади. Мазкур ҳолда $\frac{110}{101} = 1,08910891 \dots$ каср $\frac{110}{101} = 1,(0891)$ кўринишида ёзилади. Умумий ҳолда бўлишда ҳам ўнли даврий каср ҳосил бўлади. (Ҳақиқатан ҳам, бутун сонни натурал сон n га бўлишда ҳосил бўладиган қолдиқлар 0, 1, ..., $n-1$ га тенг бўлиши мумкин, яъни n га бўлиш натижасида қолдиқда аниқ $n-1$ та ҳар хил нолга тенг бўлмаган

қолдиқ мавжуд. Бинобарин, n га «устун» қилиб бўлиш процессида қачондир илгари учраган қолдиқ учрайди. Шундан кейин қолдиқлар, демак, бўлинмадаги рақамлар ҳам даврий равишда такрорланади. бунда давр узунлиги $n - 1$ дан катта бўлмайди.) Агар бўлишда 0 қолдиқ учраса, у ҳолда чекли ўнли каср ҳосил бўлади, бунини ҳам ўнг томондан нолларнинг чексиз кетма-кетлигини ёзиш билан чексиз даврий ўнли каср кўринишида ёзиш мумкин. Масалан,

$$\frac{5}{16} = 0,3125 = 0,3125000 \dots = 0,3125 (0).$$

Бўлиш процессида даври 9 га тенг бўлган чексиз ўнли касрлар ҳосил бўла олмайди. Бундай касрлар қаралмайди, яъни улар ҳақиқий соннинг ёзилиши деб ҳисобланмайди.

Шундай қилиб, ҳар қандай рационал сонни даври (9) бўлмаган чексиз даврий ўнли каср кўринишида тасвирлаш мумкин. Тескарисини ҳам тўғри: ҳар қандай даврий чексиз ўнли каср бирор рационал соннинг тасвиридир. Чексиз даврий касрларни оддий касрга айлантириш усулларида бири қуйида тавсифланган.

2°. Геометрия курсидан маълумки, томони 1 га тенг бўлган квадрат диагонаlining узунлиги квадрати 2 га тенг бўлган мусбат сон (бу сонни $\sqrt{2}$ билан белгилашади) билан ифодалангани керак. Бундай рационал соннинг мавжуд эмаслигини тескарисини фараз қилиш методи билан исботлаймиз.

$r = \frac{m}{n}$ бўлсин, бунда $\frac{m}{n}$ — қисқармас каср ва $\frac{m^2}{n^2} = r^2 = 2$ ($r > 0$, шу сабабли m ва n — натурал сонлар). $m^2 = 2n^2$ тенгликдан m жуфт сон, яъни $m = 2k$ эканини топамиз, $m^2 = 2n^2$ тенгликда m ўрнига $2k$ сонини қўйиб, $4k^2 = 2n^2$ ни топамиз, яъни $n^2 = 2k^2$. Бундан n ҳам жуфт сон эканлиги келиб чиқади. Зидликка келдик: $\frac{m}{n}$ каср (2 га) қисқарадиган касрдир.

Рационал бўлмаган ҳақиқий сонларни *иррационал сонлар* дейлади. Ҳар қандай α иррационал сонни чексиз ўнли каср кўринишида тасвирлаш мумкин. Бу каср даврий бўла олмайди (акс ҳолда α — рационал сон бўлади). Тескарисини ҳам тўғри: ҳар қандай чексиз ўнли давриймас каср бирор иррационал соннинг тасвиридир.

Рационал ва иррационал сонлар ҳақиқий сонлар тўпламини ташкил қилади. Ҳақиқий сонлар билан арифметик амаллар бажариш билан сиз танишсиз (251-бетга ҳам қаранг). Амалда учрайдиган ҳисоблашларни бажаришда ҳақиқий сонларни талаб қилинган аниқликда яхлитланади ва чекли ўнли касрлар устида амаллар бажарилади.

3°. Сонли тўпламларни белгилаш учун қуйидаги символлар қабул қилинган:

- N — натурал сонлар тўлами;
- Z — бутун сонлар тўлами;
- Z_0 — бутун номанфий сонлар тўлами;
- Q — рационал сонлар тўлами;
- Q_0 — номанфий рационал сонлар тўлами;

R — ҳақиқий сонлар тўплами;

R_+ — мусбат ҳақиқий сонлар тўплами.

Бу сонли тўпламлар қуйидаги муносабатларни қаноатлантириши текшириб кўриш осон*:

$$N \subset Z \subset Q \subset R.$$

2. Арифметик амалларнинг асосий қонунлари ва тенгсизликларнинг хоссалари. Қисқа кўпайтириш формулалари

1°. Ҳар қандай a, b ва c ҳақиқий сонлар учун қуйидаги тенгсизликлар тўғри:

- а) $a + b = b + a$ (қўшишнинг ўрин алмаштириш қонуни);
- б) $(a + b) + c = a + (b + c)$ (қўшишнинг группалаш қонуни);
- в) $a \cdot b = b \cdot a$ (кўпайтиришнинг ўрин алмаштириш қонуни);
- г) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (кўпайтиришнинг группалаш қонуни);
- д) $(a + b) \cdot c = ac + bc$ (тақсимот қонуни).

Бу қонунлардан айириш ва бўлиш учун шуларга ўхшаш баъзи хоссаларни чиқариш мумкин, масалан,

$$(a - b) \cdot c = ac - bc, \quad (a + b) : c = a : c + b : c.$$

Иккита ҳар хил ихтиёрий ҳақиқий сондан бири иккинчисидан катта (309-бет, 2-пунктда келтирилган таққослаш қоидалари). Агар a сон b сондан катта бўлса ($a > b$ билан белгиланади), у ҳолда b кичик a дан ҳам дейилади ($b < a$).

2°. Тенгсизликларнинг асосий хоссаларини санаб ўтамиз:

а) агар $a > b$ ва $b > c$, бўлса, у ҳолда $a > c$, бунда a, b, c — ҳар қандай ҳақиқий сонлар.

Агар $a > b$ (a ва b — ихтиёрий ҳақиқий сонлар) бўлса, у ҳолда:

- б) $a + c > b + c$, бунда c — ихтиёрий ҳақиқий сон;
- в) $ac > bc$, бунда c — ихтиёрий мусбат ҳақиқий сон;
- г) $ac < bc$, бунда c — ихтиёрий манфий ҳақиқий сон.

Юқорида келтирилган сонли тенгсизликларнинг хоссаларидан бундай натижалар чиқариш мумкин:

д) агар $a > b$ ва $c > d$ бўлса, у ҳолда $a + c > b + d$ ва $a - d > b - c$ (сонли тенгсизликларни ҳадма-ҳад қўшиш ва айириш ҳақидаги теоремалар);

е) a, b, c ва d — ихтиёрий мусбат сонлар, $a > b, c > d$ бўлсин, у ҳолда $ac > bd$ ва $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$ бўлади (мусбат ҳадли тўғри тенгсизликларни ҳадма-ҳад кўпайтириш ва бўлиш ҳақидаги теоремалар).

3°. Арифметик амалларнинг хоссалари ёрдамида қуйидаги маълум «қисқа кўпайтириш формулалари» осон исботланади. Бу формулалардан кўпинча айний алмаштиришларни бажаришда фойдаланилади.

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b),$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2),$$

* Агар A тўпламининг ҳар бир элементи B тўпламининг ҳам элементи бўлса, у ҳолда A тўплам B тўпланда мавжуд дейишади (бундай ёзишади: $A \subset B$).

$$\begin{aligned}
 a^3 + b^3 &= (a + b)(a^2 - ab + b^2), \\
 (a + b)^3 &= a^3 + 2ab + b^3, \\
 (a - b)^3 &= a^3 - 2ab + b^3, \\
 (a + b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \\
 (a - b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.
 \end{aligned}$$

3. Сонлар тўғри чизиги ва сонлар текислиги

Алгебра курсидан сиз ҳақиқий сонларни координата тўғри чизиги нуқталари билан тасвирлаш қулай эканини биласиз. VII синфда геометрия дарсларида сиз текисликда координаталар қандай кiritилишини ва тўғри чизикнинг (текисликнинг) икки нуқтаси координаталари бўйича бу нуқталар орасидаги масофа қандай топилишини ўргангансиз. Тегишли формулаларни эслатиб ўтамиз.

1-теорема. Координата тўғри чизигининг ҳар қандай $A(x_A)$ ва $B(x_B)$ иккита нуқтаси учун AB масофа ушбуга тенг:

$$AB = |x_B - x_A|.$$

1-мисол. $A(-7,1)$ ва $B(4,3)$ нуқталар орасидаги масофани топамиз.

1-теоремага кўра:

$$AB = |x_B - x_A|.$$

Шартга кўра

$$x_A = -7,1, \quad x_B = 4,3,$$

демак,

$$\begin{aligned}
 AB &= |4,3 - (-7,1)| \\
 AB &= 11,4.
 \end{aligned}$$

Жавоб: 11,4.

2-теорема. Координата текислигининг ҳар қандай $A(x_1, y_1)$ ва $B(x_2, y_2)$ иккита нуқтаси учун AB масофа ушбуга тенг:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

2-мисол. $A(-0,2; 2,6)$ ва $B(0,3; 1,4)$ нуқталар орасидаги масофани топамиз.

2-теоремага кўра масофа:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Шартга кўра

$$x_1 = -0,2, \quad x_2 = 0,3, \quad y_1 = 2,6, \quad y_2 = 1,4,$$

бинобарин

$$AB = \sqrt{(0,3 - (-0,2))^2 + (1,4 - 2,6)^2}.$$

$$AB = \sqrt{0,5^2 + (-1,2)^2},$$

$$AB = \sqrt{1,69};$$

$$AB = 1,3.$$

Жавоб: 1,3.

Ҳақиқий сонлар билан координаталар тўғри чизиг'нинг улари тасвирловчи $M(x)$ нуқталари орасида ўрнатилган бир қийматли мослик, сонлар ҳақида гапирилганда, геометрик терминологиядан фойдаланиш имконини беради.

$|y - x|$

Ҳамма ҳақиқий сонлар тўплами R нинг ўзини сонлар тўғри қизиги * дейилади, унинг элементларини (яъни сонларни) сонлар тўғри қизигининг нуқталари дейилади.

Охирлари a ва b бўлган кесма ($[a; b]$ каби белгиланади) $a \leq x \leq b$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча x лар тўпламидир.

Охирлари a ва b дан иборат ярим очиқ оралиқлар: $[a; b)$ — $a \leq x < b$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи барча x лар тўплами; $[a; b]$ — $a \leq x \leq b$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча x лар тўплами.

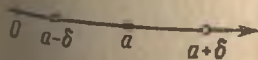
Чексиз интерваллар:

$(-\infty; b)$ интервал $x < b$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча x сонлар тўплами.

Чексиз оралиқлар (ёпиқ):

$(-\infty; b]$ оралық $x \leq b$ тенгсізліктің қанаотландыруы барша x лар тұплыми.

($a - \delta$; $a + \delta$) кўринишидаги интервал, бунда $\delta > 0$ ни ҳамма a нуқтанинг δ -атрофи дейилади (167-расм). Масалан, $\sqrt{2}$ со-



• Координаталар тўғри чизиқлари кўп, сонлар тўғри чизиғи эса битта ҳақиқий сонлар тўпламидан иборат эканини билиб қўйинг.

нига ортиғи билан ва ками билан яқинлашишларнинг ҳаммаси, учинчисидан бошлаб (яъни $n \geq 3$ да $\sqrt{2}$ нинг 10^{-n} гача аниқлик-даги яқинлашишлари) $\delta = 0,001$ да $\sqrt{2}$ нуқтанинг δ -атрофига тушади.

Агар a нуқтанинг бутунлай $D(f)$ га кирувчи δ -атрофини танлаш мумкин бўлса, a нуқта функциянинг аниқланиш соҳаси $D(f)$ нинг ички нуқтаси дейилади.

3-мисол. $I = [3; \infty)$ оралиқ бирор функциянинг аниқланиш соҳаси бўлсин. У ҳолда 7 нуқта I оралиқнинг ички нуқтаси бўлади, чунки $(5; 9)$ интервал 7 нуқтанинг 2-атрофидир ва бутунича I га киради.

Сонлар тўғри чизигидагига ўхшаш ҳақиқий сонлар тартибланган жуфтлари тўплами сонлар текислиги дейилади, ҳақиқий сонларнинг ҳар қандай тартибланган жуфтини эса сонлар текислигининг нуқтаси дейилади. Сонлар текислигини R^2 билан белгилаш қабул қилинган (бундай ўқилади: «эр икки»). Сонлар текислиги нуқтасини айни бир текисликда бир неча хил усул билан тасвирлаш мумкин, бунда текислик ўз-ўзидан ўзгармайди — у ҳақиқий сонлар жуфтининг тўплами бўлиб қолаверади.

Сонлар текислиги нуқталарига нисбатан ҳам геометрик терминологияни қўлланиш мумкин. Масалан, координаталари

$$ax + by + c = 0$$

тенгламани қаноатлантирадиган $(x; y) \in R^2$ нуқталар тўплами (a ва b сонлардан ақалли биттаси нолдан фарқли) ни тўғри чизиқ деб аташ табиий, чунки бу тўпламнинг координаталар текислигидаги тасвири тўғри чизиқдир.

Координаталари

$$x^2 + y^2 \leq r^2 \quad (r > 0)$$

тенгсизлиكنи қаноатлантирувчи $(x; y) \in R^2$ нуқталар тўплами координаталар текислигида радиуси r , маркази эса координаталар бошида бўлган доира билан тасвирланади. Шу сабабли сонлар текислигининг бундай қисм тўпламини ҳам радиуси r га тенг, маркази $O(0; 0)$ нуқтада бўлган доира дейилади.

4. Тақрибий ҳисоблашлар

1° a сони тақрибий қиймати x нинг абсолют хатоси деб a билан унинг тақрибий қиймати орасидаги айирманинг модулига айтилади, яъни

$$|x - a|$$

Агар a сони тақрибий қиймати x нинг абсолют хатоси h дан катта бўлмаслиги маълум бўлса, у ҳолда a сони x га h қадар аниқликда тенг дейилади. Уни қисқача мана бундай ёзилади:

$$a = x \pm h.$$

1-мисол. 1 г, 2 г, 5 г, 10 г, 20 г ва ҳоказо (энг кичик тошлар кўрсатилган) оғирликдаги тошлар мавжуд бўлганда шайинли тарозда буюмларнинг массасини 0,001 гача аниқлик билан топамиз (массани килограммларда ўлчаймиз).

a сонни тақрибий қиймати x нинг нисбий хатоси деб абсолют хатонинг тақрибий қийматининг модулига нисбатига айтилади, яъни

$$\frac{|x - a|}{|x|}$$

2-мисол $\frac{1}{3}$ соннинг тақрибий қиймати 0,3 нинг абсолют хатоси

$$\left| \frac{1}{3} - 0,3 \right| = \frac{1}{30}$$

га тенг, нисбий хатоси эса

$$\frac{1}{30} : 0,3 = \frac{1}{9}$$

га тенг.

Одатда абсолют хатонинг аниқ қиймати маълум бўлмайди, унинг яқинлашиш аниқлиги h маълум бўлади. Бу ҳолда биз нисбий хатони (юқоридан) баҳолай оламиз: $y \frac{h}{|x|}$ дан катта бўлмайди. Нисбий хатони баҳолашда топилган натижа битта қийматли рақам қолдирилиб катта томонга яхлитланади (яъни ортиғи билан олинган тақрибий қиймат билан алмаштирилади).

3-мисол. Ердан Ойгача бўлган масофа:

$$l = 384000 \pm 500 \text{ км.}$$

Бу ўлчашнинг нисбий хатосини баҳолаймиз. Нисбий хато

$$\frac{500}{384000} = 0,00130208 \dots \approx 0,002 = 0,2\%$$

дан ортмайди.

Нисбий хато, одатда, етарлича кичик миқдор, у 3-мисолдагидек процентлар билан ифодаланади.

2. Соннинг унинг олдинда турган ноллардан ташқари ҳамма рақамлари қийматли рақамлари деб аталади.

4-мисол. 0,00634 сонининг учта қийматли рақами бор: 6, 3 4; 40,10 сонининг эса тўртта қийматли рақами бор: 4, 0, 1, 0.

a соннинг стандарт кўриниши деб унинг $b \cdot 10^n$ кўпайтма кўринишидаги ёзилишига айтилади, бунда $1 \leq b < 10$ ва n — бутун сон

5-мисол. 23 100 000; 0,07635; 0,03 10^{-4} сонларини стандар кўринишида ёзамиз. Ушбуларга эгамиз: $23\,100\,000 = 2,31 \cdot 10^7$ $0,07635 = 7,635 \cdot 10^{-2}$; $0,03 \cdot 10^{-4} = 3 \cdot 10^{-6}$.

Агар яқинлашишнинг абсолют хатоси тақрибий қийматнинг ёзувидаги m рақами турган хона бирлигидан катта бўлмаса, m рақами ишончли рақам дейилади.

6-мисол. $a = 2,35 \pm 0,25$ экани маълум. 2,35 тақрибий қийматнинг ёзилишида фақат 2 рақами ишончли.

Одатда сонларнинг тақрибий қийматларининг ёзилишида, ишончли рақамларнинггина қолдиришга ҳаракат қилинади. Шу билан бирга математик жадвалларда ва справочникларда абсолют хато чегаралари кўрсатилмайди.

7-мисол. В. М. Брадиснинг тўрт хонали математик жадвалларидан

$$\sin 23^\circ = 0,3907$$

эканини топамиз. Синуснинг ёзиб олинган қиймати абсолют хатоси 0,0001 дан ошмаслиги назарда тутилади.

8-мисол. Справочниклардан бирининг маълумотига биноан Қуёшнинг массаси $1,990 \cdot 10^{30}$ кг. Келтирилган қиймат $0,001 \cdot 10^{30} = 10^{27}$ аниқликка эгаллиги назарда тутилади.

3°. Йиғинди ва айирманинг абсолют хатоси бошланғич маълумотларнинг абсолют хатосидан катта бўлмайди. Қўпайтма ва бўлинманинг нисбий хатоси бошланғич маълумотларнинг нисбий хатолари йиғиндисидан катта бўлмайди.

Масалан, агар $a = 2,35 \pm 0,01$ ва $b = 5,61 \pm 0,01$ бўлса, у ҳолда $a + b = 7,96 \pm 0,02$, $b - a = 3,26 \pm 0,02$,

$$\frac{|ab - 2,35 \cdot 5,61|}{2,35 \cdot 5,61} \leq \frac{0,01}{2,35} + \frac{0,01}{5,61}$$

бундан $|ab - 2,35 \cdot 5,61| \leq 0,01 \cdot 5,61 + 0,01 \cdot 2,35 < 0,08$, яъни

$$ab = 13,2 \pm 0,1.$$

5. Процентлар

Бутуннинг (бирлик учун қабул қилинган) юздан бир қисми *процент* деб аталади. M сонининг $p\%$ ини ташкил қилувчи A сонини топиш учун

$$A = \frac{Mp}{100} \quad (1)$$

«процентлар формуласи» дан фойдаланилади. Бу формуладан яна иккита масалани ечиш учун фойдаланилади: а) A ва M сонлари берилган, A сони M сонининг неча процентини ташкил қилишини топиш (яъни p ни топиш) талаб қилинади; б) A сони M сонининг $p\%$ ига тенглиги маълум, M сонини топиш талаб қилинади (A ва p берилган).

1-мисол. Ишчи бир сменада план бўйича 80 та деталь тайёрлаши керак эди. Аммо у 96 та деталь тайёрлади. У планни неча процент ошириб бажарган?

96 — 80 = 16 сони 80 сонининг неча процентини ташкил қилишини топиш талаб қилинади. (1) формула бўйича изланаётган сон p

$$p = \frac{100 \cdot 16}{80} = 20$$

га тенг эканини топамиз.

2-мисол. Адабиётдан факультатив машғулотга қатнашаётган ўқувчилар сони математикадан факультатив машғулотга қатнашаётган ўқувчилар сонининг 80 % ига тенг экани маълум. Математикадан факультатив машғулотга қатнашаётган ўқувчилар сони адабиётдан факультатив машғулотга қатнашаётган ўқувчилар сонининг неча процентини ташкил қилади?

Математикадан факультатив машғулотга қатнашаётган ўқувчилар сони m га, адабиётдан факультатив машғулотга қатнашаётган ўқувчилар сони эса l га тенг бўлсин. Шартга кўра ((1) формулага қ.)

$$l = \frac{m \cdot 80}{100} = 0,8 m.$$

m сони $l = 0,8 m$ сонининг неча процентини ташкил қилишини топиш талаб қилинади. (1) формулага биноан:

$$p \% = \frac{m \cdot 100 \%}{l} = \frac{m \cdot 100 \%}{0,8 m} = 125 \%$$

6. Пропорциялар.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ кўринишидаги тенглик *пропорция* дейилади, бунда a, b, c, d — баъзи сонлар, шу билан бирга $b \neq 0, d \neq 0$.

a ва d сонлари пропорциянинг *четки ҳадлари*, b ва c сонлари эса пропорциянинг *ўрта ҳадлари* дейилади.

Пропорциянинг (тўғри пропорциянинг) асосий хоссаси: *пропорция ўрта ҳадларининг кўпайтмаси четки ҳадларининг кўпайтмасига тенг*.

Мисол. Томонлари $AB = 10, BC = 14$ бўлган ABC учбурчакда ABC бурчакнинг биссектрисаси AC томонни бири иккинчиси-дан 2 (бирлик)ка катта бўлган икки қисмга бўлади. Учбурчакнинг AC томонини топамиз.

Икки қисмдан кичигини x билан белгилаймиз. Учбурчакнинг икки бурчагининг биссектрисаси қаршисидаги томонни ёндош бўлган томонларга нисбатан пропорционал қисмларга бўлишидан фойдаланиб, x ни

$$\frac{x+2}{x} = \frac{14}{10}$$

пропорциядан топамиз. Пропорциянинг асосий хоссасига кўра

$$10(x+2) = 14x.$$

бундан

$$x = 5 \text{ ва } AC = x + (x+2) = 12.$$

7. Кетма-кетликлар.

Аниқланиш соҳаси натурал сонлар тўпламидан иборат бўлган f сонли функцияни *чексиз сонли кетма-кетлик* (ёки тўғридан-тўғри *кетма-кетлик*) деб аталади. Бу функциянинг n нуқтадаги қиймати f_n билан белгиланади, кетма-кетликнинг ўзи эса (f_n) билан белгиланади. (Кетма-кетликларни белгилаш учун кўпинча латин алфавитининг дастлабки ҳарфлари танланади: (a_n) , (b_n) , (c_n) ва ҳоказо.

Сонли кетма-кетликларни беришнинг иккита асосий усули мавжуд: 1) n -ҳади формуласи ёрдамида; 2) рекуррент ҳолда бериш, бунда кетма-кетликнинг дастлабки k та ҳади ва (барча $n \geq 1$ ларда) a_{n+k} ни олдинги k та ҳад орқали ифодаловчи формула берилади (кўпинча $k = 1$ ёки $k = 2$).

1-мисол. $a_n = 2n$ формула жуфт сонлар кетма-кетлигини беради.

2-мисол. $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ ва $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ рекуррент формула $n \geq 1$ да

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 3, a_5 = 5, a_6 = 8, a_7 = 13, \dots$$

чексиз сонли кетма-кетликни беради. Бу кетма-кетликни Фибоначчи кетма-кетлиги дейилади.

Баъзан чекли сонли кетма-кетликлар — дастлабки n та натурал сонлар тўпламида берилган сонли функциялар қаралади.

Иккинчи ҳадидан бошлаб ҳар бир ҳади олдинги ҳадга бир хил сонни қўшилганига тенг бўлган сонли кетма-кетлик *арифметик прогрессия* дейилади. Бу d сонни арифметик прогрессиянинг *айирмаси* дейилади.

Биринчи ҳади a_1 ва айирмаси d га тенг арифметик прогрессияни рекуррент бериш мумкин: a_1 берилган ва $n \geq 1$ да $a_{n+1} = a_n + d$.

Ҳар қандай $n \geq 1$ учун

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

тенглик тўғри бўлгандагина, (a_n) кетма-кетлик арифметик прогрессия бўлади.

(a_n) арифметик прогрессия учун:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d, \quad (1)$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n, \quad (2) \quad S_n = \frac{2a_1 + (n - 1)d}{2} \cdot n, \quad (2')$$

бунда d — прогрессия айирмаси, S_n эса унинг дастлабки n та ҳадининг йиғиндис.

3-мисол. Биринчи ҳади $a_1 = 3$ ва айирмаси $d = -1$ бўлган арифметик прогрессиянинг n -ҳади формуласини ва дастлабки 100 та ҳади йиғиндисини топамиз.

(1) формулага биноан:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d = 3 + (n - 1) \cdot (-1) = 4 - n.$$

Шундай қилиб, $a_n = 4 - n$.

(2) формулага биноан:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{3 + 4 - n}{2} \cdot n,$$

бундан

$$S_{100} = \frac{7 - 100}{2} \cdot 100 = -93 \cdot 50 = -4650.$$

4-мисол. Биринчи ҳади 24 ва айирмаси —2 бўлган арифметик прогрессиянинг дастлабки n та ҳади йиғиндиси 100 га тенг экани маълум. n ни топамиз.

(2') формулага биноан, топамиз:

$$100 = \frac{2 \cdot 24 + (-2) \cdot (n - 1)}{2} n,$$

яъни

$$n^2 - 25n + 100 = 0,$$

бундан $n = 5$ ёки $n = 20$.

Биринчи ҳади нолдан фарқли, иккинчи ҳадидан бошлаб ҳар бир ҳади ўзидан олдинги ҳадни нолдан фарқли бир хил q сонга кўпайтиришдан ҳосил бўлган сонли кетма-кетлик *геометрик прогрессия* дейилади. q сони геометрик прогрессиянинг *махражи* дейилади.

Биринчи ҳади b_1 ва махражи q бўлган геометрик прогрессияни рекуррент бериш мумкин: $b_1 \neq 0$ берилган ва $n \geq 1$ да $b_{n+1} = b_n q$.

Ҳар қандай $n > 1$ учун

$$b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1}$$

тенглик бажарилгандагина ва фақат шу ҳолдагина (b_n) кетма-кетлик геометрик прогрессия бўлади.

(b_n) геометрик прогрессия учун

$$b_n = b_1 q^{n-1}. \quad (3)$$

$q \neq 1$ да

$$S_n = \frac{b_1 (q^n - 1)}{q - 1}. \quad (4)$$

$q = 1$ да

$$S_n = nb_1, \quad (4')$$

бунда q — прогрессия махражи, S_n эса унинг дастлабки n та ҳадининг йиғиндиси.

5-мисол. Геометрик прогрессияда $b_3 = 8$, $b_5 = 2$. Унинг дастлабки 7 та ҳадининг йиғиндисини топиш талаб қилинади.

(3) формулага биноан:

$$\begin{cases} b_1 q^2 = 8, \\ b_1 q^4 = 2. \end{cases}$$

Топилган тенгламаларнинг иккинчисини биринчисига ҳадма-ҳад бўлиб, $q^3 = 0,25$ ни топамиз, бундан $q = 0,5$ ёки $q = -0,5$, $b_1 = 8 : q^3 = 32$. (4) формула бўйича $q = 0,5$ да топамиз:

$$S_7 = \frac{32 \left(\left(\frac{1}{2} \right)^7 - 1 \right)}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{32 \cdot \left(-\frac{127}{128} \right)}{-\frac{1}{2}} = \frac{127}{2}$$

$q = -0,5$ да эса:

$$S_7 = \frac{32 \left(\left(-\frac{1}{2} \right)^7 - 1 \right)}{-\frac{1}{2} - 1} = \frac{32 \cdot \left(-\frac{129}{128} \right)}{-\frac{3}{2}} = \frac{43}{2}$$

$|q| < 1$ да чексиз геометрик прогрессиянинг йиғиндисини деб $n \rightarrow \infty$ да S_n интиладиган S сонни айтилади, бунда

$$S = \frac{b_1}{1 - q} \quad (5)$$

6-мисол. $a = 0,31212121212 \dots = 0,3$ (12) чексиз даврий ўн-ли касрни оддий касрга айлантираемиз, a ни бундай кўринишда ёзамиз:

$$a = \frac{3}{10} + \frac{12}{1000} + \frac{12}{100000} + \dots$$

(5) формулага кўра $b_1 = \frac{12}{1000}$, $q = \frac{1}{100}$ да ушбуга эга бўламиз:

$$\frac{12}{1000} + \frac{12}{100000} + \dots = \frac{\frac{12}{1000}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{12}{990} = \frac{2}{165}$$

$$\text{Шундай қилиб, } a = \frac{3}{10} + \frac{2}{165} + \frac{99 + 4}{230} = \frac{103}{330}$$

8. Даражалар ва илдизлар

Натурал кўрсаткичи $n > 1$ бўлган a сонининг даражаси деб ҳар бири a га тенг бўлган n та кўпайтувчининг кўпайтмасига айтилади:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_{n \text{ та кўпайтувчи}}$$

Кўрсаткичи 1 га тенг a сонининг даражаси деб шу a соннинг ўзини айтилади:

$$a^1 = a$$

Кўрсаткичи 0 га тенг бўлган $a \neq 0$ соннинг даражаси деб 1 сонини айтилади:

$$a^0 = 1$$

Кўрсаткичи бутун манфий n га тенг бўлган $a \neq 0$ соннинг даражаси деб $\frac{1}{a^{-n}}$ сонни айтилади: $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$.

Бутун кўрсаткичли даражаларнинг асосий хоссалари ($a \neq 0$, $b \neq 0$, $m \in \mathbb{Z}$; $n \in \mathbb{Z}$):

$$\begin{aligned} \text{а) } a^m \cdot a^n &= a^{m+n}; & \text{б) } a^m : a^n &= a^{m-n}; & \text{в) } (a^m)^n &= a^{mn}; \\ \text{г) } (ab)^n &= a^n b^n; & \text{д) } (a:b) &= a^n : b^n. \end{aligned}$$

$a = 0$ (ва $b = 0$) да бу хоссаларнинг ҳаммаси ёзилган тенгликларнинг иккала қисмлари аниқланган ҳолларда ҳам ўринли.

1-мисол. Ушбу

$$(27x^{-2}y^6)^8 \cdot (32x^3)^5 : (6y^2)^{24}$$

ифодани соддалаштириш ва унинг қийматини $x = 2$, $y = \sqrt{3}$ да ҳисоблаш талаб қилинади.

Бутун кўрсаткичли даражаларнинг хоссаларидан фойдаланиб, топамиз:

$$\begin{aligned} (27x^{-2}y^6)^8 \cdot (32x^3)^5 : (6y^2)^{24} &= (3^3)^8 \cdot (x^{-2})^8 \cdot (y^6)^8 \cdot (2^5)^5 \cdot (x^3)^5 : \\ &: (2 \cdot 3)^{24} : (y^2)^{24} = 3^{24} \cdot x^{-16} \cdot y^{48} \cdot 2^{25} \cdot x^{15} : 2^{24} : 3^{24} : y^{48} = \\ &= 3^{24-24} \cdot x^{-16+15} \cdot y^{48-48} \cdot 2^{25-24} = 2^1 x^{-1} = \frac{2}{x} \end{aligned}$$

Шундай қилиб, берилган ифода y га боғлиқ эмас (фақат $y \neq 0$ бўлиши муҳимдир), $x = 2$ да унинг қиймати 1 га тенг.

a сонининг арифметик квадрат илдизи деб шундай номанфий b сонига айтиладики, унинг квадрати a га тенг бўлади. a сонининг арифметик квадрат илдизи учун $\sqrt{a}$ белгилаш қабул қилинган. Шундай қилиб, агар $b^2 = a$, $b \geq 0$ бўлса, $b = \sqrt{a}$. $\sqrt{a}$ нинг номанфий a лар учун мавжуд эканини кўриш қийин эмас.

Арифметик квадрат илдизнинг хоссалари:

$$\begin{aligned} \text{а) } \sqrt{a^2} &= |a|; & \text{б) } \sqrt{ab} &= \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, \text{ бунда } a \geq 0, b \geq 0; \\ \text{в) } \sqrt{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \text{ бунда } a \geq 0, b > 0. \end{aligned}$$

2-мисол. a ва b ни илдиз белгиси остидан чиқарамиз: $\sqrt{2a^6b^3}$. Агар $a = 0$ бўлса, у ҳолда кўрсатилган ифода 0 га тенг. Агар $a \neq 0$ бўлса, у ҳолда $b \geq 0$ (чунки илдиз остидаги ифода манфий бўлмаслиги керак). Ушбуларга эгамиз:

$$\sqrt{a^6} = \sqrt{(a^3)^2} = |a^3|; \quad \sqrt{b^3} = \sqrt{b^2 \cdot b} = \sqrt{b^2} \cdot \sqrt{b} = b\sqrt{b}$$

($b \geq 0$ бўлгани сабабли) бундан

$$\sqrt{2a^3b^3} = \begin{cases} a = 0 \text{ да } 0, \\ a \neq 0 \text{ да } |a^3|b\sqrt{2b}. \end{cases}$$

3-мисол. a ни илдиз ишораси остига киритамиз: $a\sqrt{3b}$.

Агар $a \geq 0$ бўлса, у ҳолда $a = |a| = \sqrt{a^2}$; агар $a < 0$ бўлса, у ҳолда $a = -|a| = -\sqrt{a^2}$. Шундай қилиб,

$$a\sqrt{3b} = \begin{cases} a \geq 0 \text{ (} a = 0 \text{ бўлса, у ҳолда } b \geq 0 \text{)} \text{ да } \sqrt{3a^2b}, \\ a < 0 \text{ да } -\sqrt{3a^2b}. \end{cases}$$

4-мисол. $\sqrt{ab}$ ни кўпайтма кўринишида тасвирлаймиз.

Илдиз остида номанфий сон туриши керак, шу сабабли $ab \geq 0$. Иккита ҳолни қараймиз: 1) $a \geq 0$ ва $b \geq 0$; 2) $a \leq 0$; $b \leq 0$.

Биринчи ҳолда б) хоссага кўра $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ га эгамиз.

Иккинчи ҳолда олдин ab ни номанфий сонларнинг кўпайтмаси кўринишида тасвирлаймиз: $ab = (-a) \cdot (-b)$, ана шундан кейингина б) хоссадан фойдаланамиз:

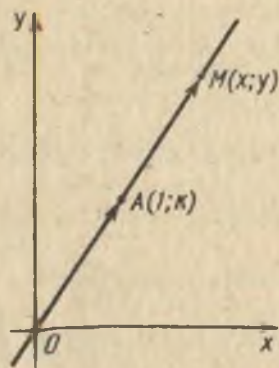
$$\sqrt{ab} = \sqrt{(-a) \cdot (-b)} = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}.$$

Шундай қилиб,

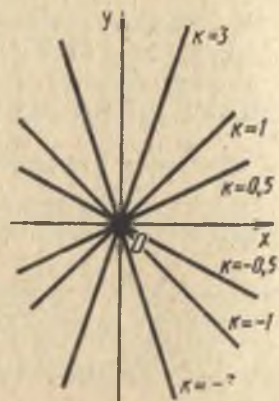
$$\sqrt{ab} = \begin{cases} a \geq 0, & b \geq 0 \text{ да } \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, \\ a \leq 0, & b \leq 0 \text{ да } \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}. \end{cases}$$

9. Тўғри пропорционаллик

$y = kx$ кўринишидаги функция *тўғри пропорционаллик* дейилади, бунда k —нолдан фарқли ҳақиқий сон (k пропорционаллик коэффициентини дейилади).



168-рasm



169-рasm

Ўзгарувчилар мос қийматларининг ҳар қандай икки жуфти, яъни $(x_1; y_1)$ ва $(x_2; y_2)$ учун

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = k$$

тенглик тўғри, бунда x_1, x_2, y_1, y_2 нолдан фарқли.

1-мисол. Жисмнинг тўғри чизиқ бўйлаб ҳаракатида ўзгармас тезлик билан босган йўли ҳаракат вақтига тўғри пропорционал.

2-мисол. y ўзгарувчи x ўзгарувчига k_1 коэффициентли пропорционал, z ўзгарувчи эса y ўзгарувчига k_2 коэффициентли пропорционал бўлсин. У ҳолда z ўзгарувчи x ўзгарувчига $k_1 k_2$ коэффициентли пропорционал бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, $z = k_2 y = k_2 k_1 x$.

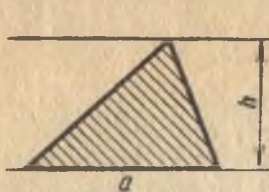
$y = kx$ функциянинг графиги координаталар бошидан ўтувчи k бурчак коэффициентли тўғри чизиқдан иборат (тўғри чизиқнинг Ox ўққа оғмалик тангенс k га тенг).

Буни исботлаймиз. O ва $A(1; k)$ нуқталардан тўғри чизиқ ўтказамиз. OA тўғри чизиққа тегишли ҳар қандай $M(x; y)$ нуқта учун (168-расм) $\overline{OA}$ ва $\overline{OM}$ векторлар параллел. Шу сабабли $\overline{OM}$ вектор $\overline{OA}$ вектордан уни x сонига кўпайтириш билан ҳосил қилинади, яъни $\overline{OM} = x\overline{OA}$. $\overline{OM}$ векторнинг координаталари x ва y дан иборат. $\overline{OA}$ векторнинг координаталари эса 1 ва k дан иборат, шу сабабли $x\overline{OA}$ векторнинг координаталари x ва kx дан иборат. $\overline{OM}$ ва $x\overline{OA}$ векторларнинг координаталарини таққослаб, $y = kx$ ни топамиз. Шундай қилиб, OA тўғри чизиқнинг ҳар қандай нуқтасининг x ва y координаталари $y = kx$ тенгламани қаноатлантириши исботланди. Энди $y = kx$ функция графигининг ҳар қандай нуқтаси OA тўғри чизиққа ётишини исботлаш керак. Бунинг учун $(x; 0)$ нуқта орқали Oy ўққа параллел тўғри чизиқ ўтказамиз. Бу тўғри чизиқ OA тўғри чизиқни $M(x; y)$ нуқтада кесиб ўтади. Аммо юқорида OA тўғри чизиқнинг нуқталари учун $y = kx$ тенглик бажарилиши исботланган эди. Демак, M нуқта $y = kx$ функция графигига тегишли. A нуқта тангенслар чизигида ётади, шу сабабли $k = \operatorname{tg} \alpha$, бунда α — OA тўғри чизиқ билан абсциссалар ўқи орасидаги бурчакнинг катталиги.

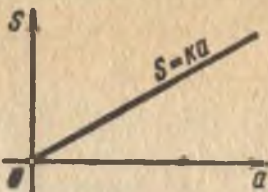
3-мисол. 169-расмда $y = kx$ функциянинг ҳар хил k лар ($k = \pm 0,5; \pm 3; \pm 1$) учун графиклари тасвирланган.

4-мисол. Учбурчакнинг юзи $0,5 ah$ га тенг бўлгани учун, икки учи параллел тўғри чизиқлардан бирида, учинчиси бу тўғри чизиқларнинг иккинчисида ётувчи учбурчаклар учун (170-расм) юз асоснинг узунлигига $k = 0,5 h$ коэффициентли тўғри пропорционалдир (h — бу тўғри чизиқлар орасидаги масофа). Бу юқорида келтирилган $S = 0,5 ah$ формуладан келиб чиқади. Учбурчак асосининг узунлиги мусбат миқдор, шунинг учун бу боғланишнинг графиги очиқ нурдан иборат (171-расм).

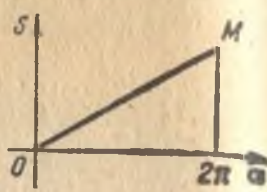
5-мисол. R радиусли доира секторининг юзи $(S = \frac{1}{2} R^2 \alpha)$ сектор ёйининг радиан ўлчовига $k = \frac{1}{2} R^2$ пропорционаллик коэф-



170- расм



171- расм



172- расм

фициентли тўғри пропорционалдир (бунда R — секторнинг радиуси). Бу боғланишнинг графиги учлари $O(0; 0)$ ва $M(2\pi; \pi R^2)$ нуқталардан иборат кесмадир (172- расм).

6-мисол. m массали моддий нуқтанинг $\frac{mv^2}{2}$ кинетик энергияси v^2 га (нуқта тезлигининг квадрати) $k = \frac{1}{2} m$ коэффициентли тўғри пропорционал.

Агар y ўзгарувчи x ўзгарувчига k пропорционаллик коэффициентли пропорционал бўлса, y ҳолда x ўзгарувчи ($k \neq 0$ да) y ўзгарувчига $\frac{1}{k}$ коэффициентли пропорционалдир.

10. Тескари пропорционаллик

Тескари пропорционаллик деб, $y = \frac{k}{x}$ кўринишдаги функцияга айтилади, бунда k — нолдан фарқли бирор ҳақиқий сон. k сони тескари пропорционаллик коэффициентини дейилади.

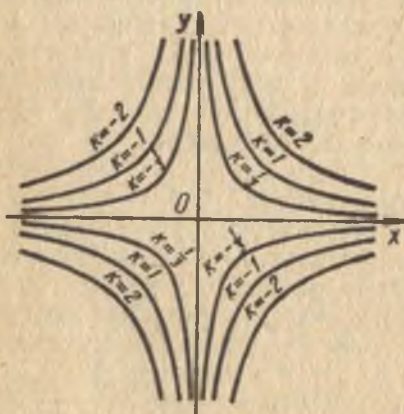
x ва y ўзгарувчилардан биронтаси ҳам 0 қийматни қабул қила олмаслигини қайд этамиз. x ва y нинг иккитадан мос қийматлари $(x_1; y_1)$ ва $(x_2; y_2)$ учун

$$\frac{y_1}{x_2} = \frac{y_2}{x_1}$$

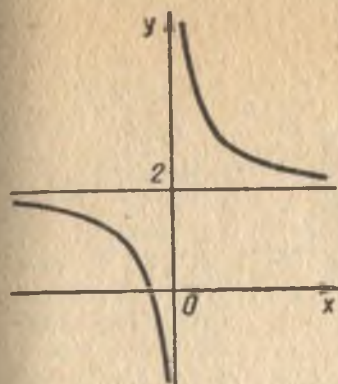
тенглик тўғри, чунки $y_1 x_1 = y_2 x_2 = k$.

1-мисол. Тўғри чизиқ бўйича текис ҳаракатда жисмнинг берилган йўлни ўтишга кетган вақти ҳаракат тезлигига тескари пропорционалдир.

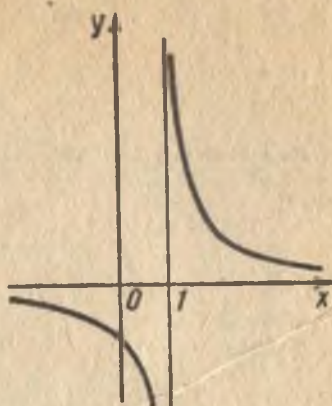
Агар y ўзгарувчи x ўзгарувчига k пропорционаллик коэффициентли тескари пропорционал



173- расм



174- расм



175- расм

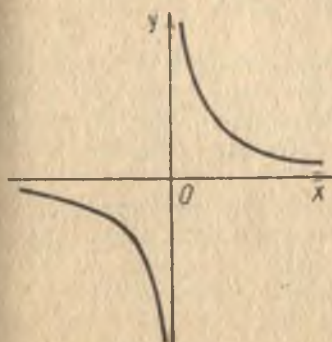
булса, y ҳолда x ўзгарувчи y ўзгарувчига шу тескари пропорционаллик коэффициентли тескари пропорционалдир.

$y = \frac{k}{x}$ функциянинг графиги икки тармоқдан иборат эгри чизиқ. $y = \frac{k}{x}$ функциянинг графиги *гипербола* дейилади.

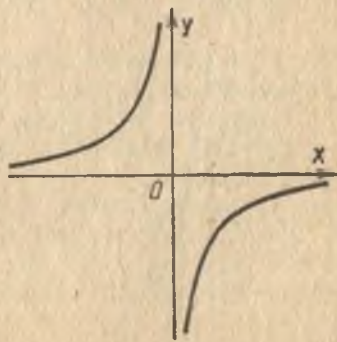
2-мисол. 173-расмда $y = \frac{k}{x}$ функциянинг k нинг турли ($k = \pm 1; \pm 2; \pm \frac{1}{3}$) қийматларидаги графиклари тасвирланган.

Шуни қайд этамизки, $y = \frac{k}{x}$ функция графигидан ҳаракатлар ёрдамида ҳосил қилинган ҳар қандай эгри чизиқ гипербола дейилади.

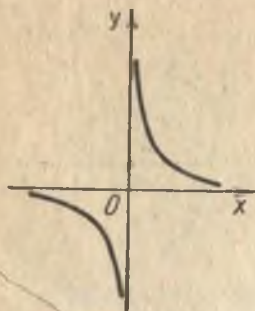
3-мисол. $y = \frac{1}{x} + 2$ ва $y = \frac{1}{x-1}$ функцияларнинг графиклари (174—175-расмлар) гиперболалардан иборат, чунки улар



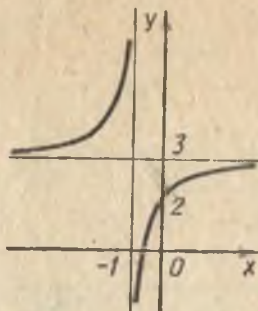
176- расм



177- расм



178- расм.



179- расм.

$y = \frac{1}{x}$ функция гра-
фигини параллел кў-
чириш натижасида ҳо-
сил қилинади.

$y = \frac{k}{x}$ функция.
нинг графиги $k > 0$ да
I ва III координата
бурчакларида (176- ра-
см), $k < 0$ ларда эса
II ва IV координата
бурчакларида жойлаш-
ган (177- расм).

$y = \frac{k}{x}$ тоқ функция бўлганлиги учун унинг графиги коорди-
наталар бошига нисбатан симметрикдир.

$y = \frac{k}{x}$ функция $(-\infty; 0)$ ва $(0; \infty)$ ярим тўғри чизиқларда
узлуксиз. $x = 0$ нуқтада бу функция аниқланмаган.

4-мисол. $y = \frac{2}{x}$ функция $(-\infty; 0)$ ва $(0; +\infty)$ оралиқлар-
да камаяди (178- расм), $y = 3 - \frac{1}{x+1}$ функция $(-\infty; -1)$ ва
 $(-1; \infty)$ оралиқларда ўсади (179- расм).

11. Чизиқли функция

$y = kx + b$ кўринишдаги функция *чизиқли функция* дейилади,
бунда k ва b — сонлар.

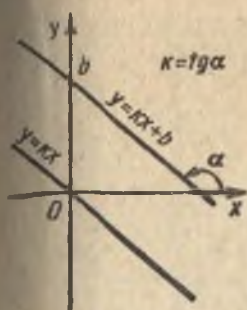
Чизиқли функциянинг аниқланиш соҳаси R сонлар тўғри чизи-
ғидан иборат. $k \neq 0$ да қийматлари соҳаси ҳам R сонлар тўғри чи-
зиғидан иборат. $k = 0$ да қийматлари соҳаси битта b нуқтадан
иборат.

$f(x) = kx + b$ чизиқли функция сонлар тўғри чизиғининг ҳамма
ерида дифференциалланувчи. Унинг ҳар бир нуқтадаги ҳосиласи
 k га тенг, шунинг учун $k > 0$ да функция $(-\infty; \infty)$ оралиқда
ўсади, $k < 0$ да f функция $(-\infty; \infty)$ оралиқда камаяди, $k = 0$ да
функция ўзгармас.

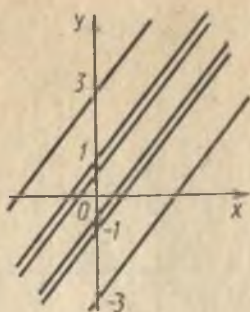
$k = 0$ да ҳар бир нуқта функциянинг критик нуқтаси, чунки
ҳар бир нуқтада ҳосила нолга тенг, $k \neq 0$ да критик нуқталар йўқ.

Чизиқли функция $k \neq 0$ да экстремумга эга эмас.

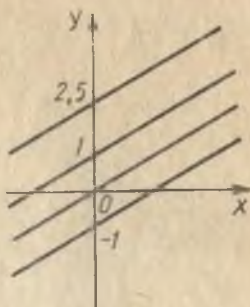
Чизиқли функциянинг графиги бурчак коэффициентини k га тенг
бўлган тўғри чизиқ. $k \neq 0$ да бу тўғри чизиқ $y = kx$ тўғри пропор-
ционалик графигининг параллел кўчиришдаги образи бўлади (180-
расм).



180- расм



181- расм



182- расм

Агар $y = kx + b$ бўлса, y ҳолда y ўзгарувчи x ўзгарувчига чизиқли боғлиқ дейилади. Бунда агар $k \neq 0$ бўлса, y ҳолда $x = \frac{1}{k}y - \frac{b}{k}$ бўлгани учун x ҳам y га чизиқли боғлиқ бўлади.

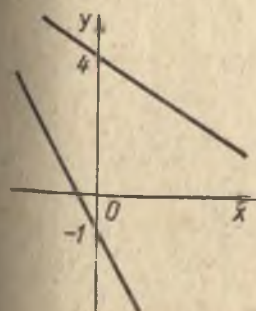
181 — 183-расмларда чизиқли функцияларнинг k ва b нинг турли қийматларидаги графиклари тасвирланган (181-расм $k = 1$ ва $b = \pm 1; \pm 0.6; \pm 3$ бўлган ҳол учун; 182-расм $k = 0.6$ ва $b = -1; 0; 1; 2.5$ бўлган ҳол учун; 183-расм $k = -2$ ва $b = -1; k = -0.5$ ва $b = 4$ бўлган ҳол учун).

$y = k_1x + b_1$ ва $y = k_2x + b_2$ тўғри чизиқлар $k_1 = k_2$ бўлгандагина параллел бўлади (184-расм).

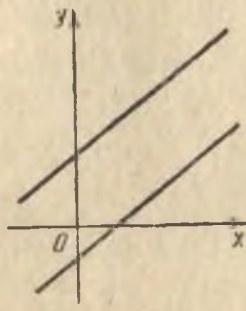
Бу тўғри чизиқлар $k_1 \cdot k_2 = -1$ бўлгандагина ва фақат шу ҳолдагина перпендикулярдир (нега шундайлигини ўзингиз тушунтиринг, 185-расм).

Бир хил b коэффициентли тўғри чизиқлар битта $M(0; b)$ нуқтадан ўтади (186-расм).

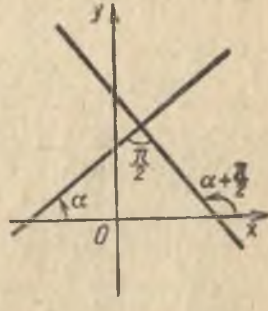
Ординаталар ўқиға параллел бўлмаган ҳар қандай тўғри чизиқ бирор чизиқли функциянинг графиги хизматини қилади (180-расмга қаранг). b коэффициент бу тўғри чизиқнинг ординаталар ўқи билан кесишиш нуқтасининг ординатасига тенг, k коэффициент



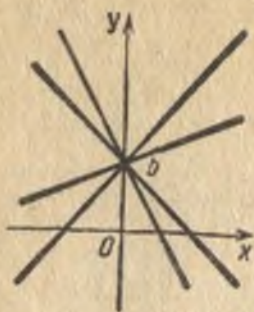
183- расм



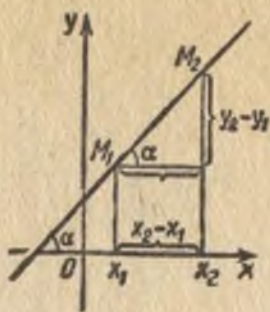
184- расм



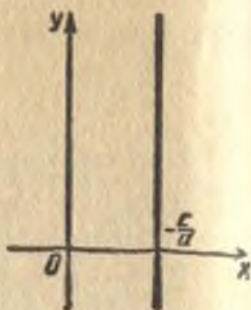
185- расм



186- расм



187- расм



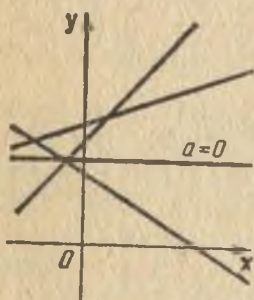
188- расм

тўғри чизиқ билан Ox ўқ орасидаги бурчакнинг тангенсига тенг. Агар $M_1(x_1; y_1)$ ва $M_2(x_2; y_2)$ — тўғри чизиқнинг иккита нуқта-си бўлса, у ҳолда

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

бўлади (187- расм). $ax + by + c = 0$ кўринишдаги тенглама иккита x ва y ўзгарувчили чизиқли тенглама дейилади, бунда a , b ва c — ҳақиқий сонлар. Агар a ва b бир вақтда нолга тенг бўлмаса, у ҳолда бу тенгламанинг графиги тўғри чизиқ: $b = 0$ да $x = -\frac{c}{a}$

«вертикал» тўғри чизиқ (188- расм) ва $b \neq 0$ да $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ чизиқли функциянинг графигидир ($k = -\frac{a}{b}$



189- расм

бурчак коэффициент.)

Текисликдаги ҳар қандай тўғри чизиқ бирор чизиқли тенгламанинг графигидир.

189- расмда чизиқли функцияларнинг турли a , b , c лардаги графиклари тасвирланган.

12. Квадрат учҳад

1°. Квадрат учҳадни кўпайтувчиларга ажратиш. $y = ax^2 + bx + c$ функция (бунда a , b , c — ҳақиқий сонлар, $a \neq 0$) **квадрат функция** дейилади, $ax^2 + bx + c$ ифода эса **квадрат учҳад** дейилади.

Квадрат учҳадни алмаштирамиз:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right) = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right) = \\ &= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

$b^2 - 4ac$ ифода квадрат учҳаднинг дискриминанти дейилади ва D ҳарфи билан белгиланади:

$$D = b^2 - 4ac.$$

Агар $D \geq 0$ бўлса, у ҳолда (1) ни кўпайтувчиларга ажратиш мумкин:

$$a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) = a \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) = a(x - x_1)(x - x_2),$$

$$\text{бунда } x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Нихоят, ушбуга эга бўламиз:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2). \quad (2)$$

Агар $D < 0$ бўлса, у ҳолда x нинг барча қийматларида

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} > 0.$$

Шунинг учун x нинг ҳеч бир қийматида $ax^2 + bx + c \neq 0$. Бундан $ax^2 + bx + c$ ифодани чизикли кўпайтувчиларга ажратиб бўлмаслиги, яъни

$$(px + q)(ex + f)$$

кўринишда ифодалаб бўлмаслиги келиб чиқади, чунки $x = -\frac{q}{p}$ ёки

$x = -\frac{f}{e}$ да бу кўпайтма нолга айланади.

2°. Квадрат тенгламанинг илдизлари. Квадрат тенглама деб

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (3)$$

кўринишдаги тенгламага айтилади, бунда $a \neq 0$.

$b^2 - 4ac \geq 0$ да (3) тенглама

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0 \quad (4)$$

тенгламага тенг кучли, бунда x_1 ва x_2 1° пунктда топилган ифодалар. Кўпайтувчилардан ақалли биттаси нолга айлангандагина кўпайтма нолга тенг бўлгани учун ҳосил қилинган тенглама $x = x_1$ ва $x = x_2$ илдизларга эга. $b^2 - 4ac = 0$ бўлганда бу илдизлар тенг бўлади. $b^2 - 4ac < 0$ да (3) тенглама ҳақиқий илдизларга эга бўлмайди, чунки бу ҳолда $ax^2 + bx + c$ ифода нолга айланмайди (1° пунктга қаранг).

Шундай қилиб, $D < 0$ да $ax^2 + bx + c = 0$ тенглама ҳақиқий илдизларга эга эмас, $D = 0$ да битта $x = -\frac{b}{2a}$ илдизга эга, $D > 0$

да иккита ҳақиқий илдизга эга, бу илдизларни битта

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (5)$$

формула билан ёзиш қабул қилинган. Шундай қилиб, квадрат тенгламанинг ҳақиқий илдизлари сони D нинг ишорасига боғлиқ.

1-мисол. $6x^2 - x - 1 = 0$ квадрат тенгламанинг дискриминанти $1^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-1) = 25 > 0$, шунинг учун бу тенглама иккита илдизга эга:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm 5}{2 \cdot 6},$$

яъни

$$x_1 = -\frac{1}{3}; \quad x_2 = \frac{1}{2}.$$

Бундан ташқари: $6x^2 - x - 1$ квадрат учҳадни кўпайтувчиларга ажратиш мумкин:

$$6x^2 - x - 1 = 6\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) = (3x + 1)(2x - 1).$$

2-мисол. $2x^2 - 3x + 2 = 0$ квадрат тенгламанинг дискриминанти манфий: $D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = -7 < 0$. Шунинг учун бу тенгламанинг илдизлари йўқ ва $2x^2 - 3x + 2$ учҳадни чизиқли кўпайтувчиларга ажратиб бўлмайди.

3-мисол. $9x^2 + 12x + 4 = 0$ тенглама битта $\left(x = -\frac{2}{3}\right)$ илдизга эга, чунки унинг дискриминанти нолга тенг: $D = 12^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4 = 0$. $9x^2 + 12x + 4$ учҳаднинг кўпайтувчиларига ёйилмаси ушбу кўринишга эга:

$$9x^2 + 12x + 4 = (3x + 2)^2.$$

Келтирилган квадрат тенгламанинг иккинчи коэффициенти «жуфт» — $b = 2k$ бўлса, унинг илдизини ушбу кўринишда ёзиш қулай:

$$x = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a} \quad (5')$$

жумладан, $a = 1$ да келтирилган квадрат тенглама учун ушбу формулани ҳосил қиламиз:

$$x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}. \quad (6)$$

4-мисол. $3x^2 - 2x - 1 = 0$ тенгламани ечиш учун (5') формуладан фойдаланиш қулай:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 3 \cdot (-1)}}{3} = \frac{1 \pm 2}{3},$$

яъни $x_1 = 1$; $x_2 = -\frac{1}{3}$.

3°. Виет теоремаси. $ax^2 + bx + c = 0$ тенглама илдизларининг йиғиндисини ва кўпайтмасини топамиз:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b - b}{2a} = -\frac{b}{a}, \\ x_1 x_2 &= \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = \\ &= \frac{(-b)^2 - (\sqrt{b^2 - 4ac})^2}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}. \end{aligned}$$

Шундай қилиб, ушбу теорема тўғри: $ax^2 + bx + c = 0$ квадрат тенглама илдизларининг йиғиндисини $-\frac{b}{a}$ га, кўпайтмасини $\frac{c}{a}$ га тенг.

5-мисол. $5x^2 - 11x + 4 = 0$ тенглама иккита илдизга эга, чунки унинг дискриминанти мусбат ($D = 41 > 0$). Бу илдизларнинг йиғиндисини $-\frac{-11}{5} = \frac{11}{5}$ га тенг, кўпайтмасини $\frac{4}{5}$ га тенг.

Илдизлари бўйича квадрат тенглама тузиш учун ва баъзан тенгламаларни ечиш учун Виет теоремасига тескари теоремадан фойдаланилади:

Ихтиёрий x_1 ва x_2 сонлар

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0$$

квадрат тенгламанинг илдизлари бўлади.

Исботлаш учун $x = x_1$ ва $x = x_2$ қийматларни шу тенгламага қўйиш етарли.

6-мисол. 0,2 ва 4,5 сонлари

$$x^2 - (0,2 + 4,5)x + 0,2 \cdot 4,5 = 0$$

тенгламанинг, яъни $x^2 - 4,7x + 0,9 = 0$ тенгламанинг илдизлари бўлади.

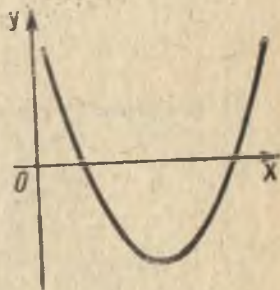
Шуни қайд қиламизки, $x^2 - 4,7x + 0,9 = 0$ тенглама $a(x^2 - 4,7x + 0,9) = 0$ тенгламага тенг кучли, бунда a — нолдан фарқли ҳар қандай ҳақиқий сон; масалан, $a = 10$ да ушбу тенгламага эга бўламиз:

$$10x^2 - 47x + 9 = 0.$$

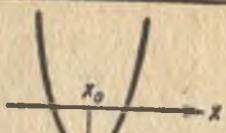
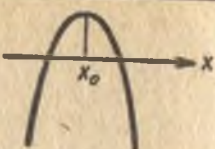
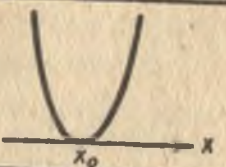
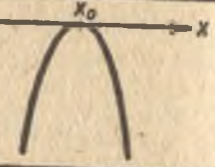
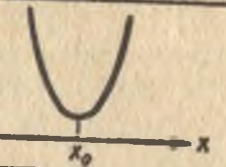
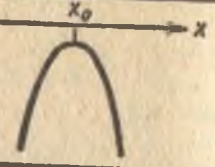
4°. Квадрат функциянинг графиги. Квадрат функциянинг графиги 190-расмда тасвирланган кўринишга эга ва парабол деб аталади.

Квадрат функциянинг $y' = 2ax + b$ ҳосиласини нолга тенглаб, бу функция битта $x_0 = -\frac{b}{2a}$ критик нуқтага эга эканини кўра-миз. Графикнинг шу абсциссали нуқтаси параболанинг учи дейила-ди. Бу нуқтанинг ординатаси мана бунга тенг:

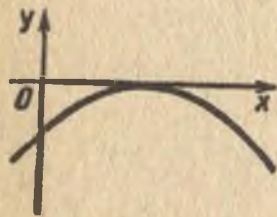
$$y_0 = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}.$$



190-расм

	$a > 0$	$a < 0$
$D > 0$	 I_1	 II_1
$D = 0$	 I_2	 II_2
$D < 0$	 I_3	 II_3

191- расм



192- расм

$a > 0$ да парабола тармоқлари юқорига йўналган, $a < 0$ да эса пастга йўналган бўлади. Тенглама илдизларининг сонига қараб, бу икки ҳолнинг ҳар бири уч қисм ҳолга бўлинади.

Олти ҳолнинг ҳаммасида графикнинг абсиссалар ўқига нисбатан жойланиши 191-расмда тасвирланган.

7-мисол. Квадрат учҳад графикнинг кўринишига қараб a , b , c коэффициентларнинг ва D дискриминантнинг ишораларини аниқлаймиз (192-расм).

Параболанинг тармоқлари пастга йўналган, шунинг учун $a < 0$. Парабола учининг абсиссаси x_0 мусбат, чунки параболанинг учинг ярим текисликда. $x_0 = -\frac{b}{2a}$ формуладан a ва b сонларнинг ишоралари ҳар хил эканини топамиз, яъни $b > 0$. Графикни Oy ўқ билан кесишиш нуқтасининг ординатаси $c = f(0)$ га тенг; y манфий, шунинг учун $c < 0$. Ниҳоят, график абсиссалар ўқи билан битта умумий нуқтага эга (ўша ўққа уринади), яъни $ax^2 + bx + c = 0$ тенглама битта илдизга эга, ва демак, $D = 0$. Шундай қилиб,

$$a < 0, \quad b > 0, \quad c < 0, \quad D = 0.$$

5°. Квадрат тенгсизликларнинг ечилиши. Квадрат тенгсизликларни интерваллар методи билан ечиш ҳаммадан кўра осон (21-пунктга қаранг).

Аммо шунинг эса сақлаш фойдалики, квадрат учҳаднинг ишораси сонлар тўғри чизигининг ҳамма ерида, илдизлар (агар илдизлар мавжуд бўлса) орасидаги оралиқдан ташқари, x^2 олдидаги коэффициент ишораси билан бир хил бўлади.

8-мисол. $2x^2 - 3x - 5$ квадрат учҳаднинг илдизлари — 1 ва 2,5 сонларидан иборат. x^2 олдидаги коэффициент мусбат (y 2 га тенг) бўлгани учун $(-\infty; -1)$ ва $(2,5; \infty)$ оралиқларда $2x^2 - 3x - 5 > 0$ ва $(-1; 2,5)$ оралиқда $2x^2 - 3x - 5 < 0$.

9-мисол. $-x^2 + 3x - 11$ учҳад ҳақиқий илдизларга эга эмаслиги (унинг дискриминанти манфий: $D = -35$) ва x^2 олдидаги коэффициент манфий бўлганлиги учун

$$-x^2 + 3x - 11 > 0$$

тенгсизликнинг ечимлари йўқ.

10-мисол. $-x^2 + 3x - 11 < 0$ тенгсизликнинг ечимлари тўплами сон тўғри чизигидан иборат.

11-мисол. $16x^2 - 24x + 9 \leq 0$ тенгсизликнинг ечимлари тўплами битта $x = \frac{3}{4}$ нуқтадан иборат (чунки $D = 24^2 - 16 \cdot 9 \cdot 4 = 0$ ва $16x^2 - 24x + 9 = 0$ тенгламанинг илдизлари тенг: $x_1 = x_2 = \frac{3}{4}$).

13. Ўзгарувчи ифодалар

1°. Ўзгарувчиларни ўз ичига олган ифодалар ўзгарувчиларнинг қийматларига қараб турли қийматлар олиши мумкин. Ўзгарувчи икки ифоданинг ўзгарувчининг бир хил қийматларидаги қийматлари ифодаларнинг мос қийматлари дейилади; масалан, $\cos x$ ва $2x$ ифодаларнинг $x = 0$ даги мос қийматлари 1 ва 0 га тенг.

Ўзгарувчиларнинг ифода маънога эга бўладиган қийматлари ўзгарувчиларнинг йўл қўйиладиган қийматлари дейилади.

Ўз таркибига кирган ўзгарувчиларнинг йўл қўйиладиган ҳамма қийматларида тўғри бўлган тенглик айният дейилади.

Ўзгарувчиларнинг барча йўл қўйиладиган қийматларида тенг мос қийматлар қабул қилувчи иккита ифода айнан тенг ифода дейилади, бир ифодани унга айнан тенг бошқа ифода билан алмаштириш ифодани айнан алмаштириш дейилади.

Масалан, $\ln|x| = \frac{1}{2} \ln(x^2)$ тенглик нолдан фарқли барча ҳақиқий сонлар тўпламида айниятдир.

1-мисол. $\frac{xy}{x^2}$ ва $\frac{y}{x}$ ифодалар ихтиёрий y да айнан тенг.

2°. Кўпҳадлар. Сон кўпайтувчилар ва ўзгарувчилар натурал даражаларининг кўпайтмаси бирҳад дейилади.

Бирҳадни стандарт кўринишга келтириш учун бирҳадга кирган сон кўпайтувчилар ўзаро кўпайтирилади, бир хил ўзгарувчиларнинг (ёки улар даражаларининг) кўпайтмасини бу ўзгарувчининг кўрсаткичи билан алмаштирилади. Сон кўпайтувчи бирҳаднинг *коэффициенти* дейилади. Ўзгарувчилар даража кўрсаткичларининг йиғиндисини бирҳаднинг *даражаси* дейилади.

2-мисол. $7xy^2x^3y \cdot 21 \cdot (-a)$ ифода x, y, a ўзгарувчили — 147 коэффициентли 8-даражали $(1 + 2 + 3 + 1 + 1 = 8)$ бирҳаддир.

Унинг стандарт кўриниши: $-147x^4y^3a$.

Бирҳадларнинг йиғиндисини *кўпхад* дейилади.

Кўпхадни стандарт кўринишга келтириш учун ундаги ҳар қайси бирҳадни стандарт кўринишдаги бирҳадга алмаштирилади ва ўхшаш ҳадлар ихчамланади. Кўпхаднинг *даражаси* деб шу кўпхадни стандарт кўринишга келтиргандан кейин унн ташкил этувчи бирҳадларнинг энг катта даражасига айтилади.

3-мисол. Ушбу

$$xy^2xy^3 + 3xy^2x - 4yx^2y^4 + 3x^2y^5 - 2x^2y$$

кўпхаднинг стандарт кўриниши $3x^2y^2 - 2x^2y$ дан иборат, унинг даражаси эса 4 га тенг.

Бирҳаднинг кўпхадга кўпайтмаси бирҳад билан кўпхаднинг ҳар бир ҳади кўпайтмаларининг йиғиндисига тенг.

4-мисол. $2by(x^3 + 2xy + b^2y) = 2bux^3 + 4xy^2b + 2b^3y^2$.

Икки кўпхаднинг кўпайтмаси биринчи кўпхаднинг ҳар бир ҳади билан иккинчи кўпхаднинг ҳар бир ҳади кўпайтмаларининг йиғиндисига тенг.

5-мисол. $(x^2 - 3x + 1)(x - 2) = x^2 \cdot x + x^2 \cdot (-2) + (-3x) \cdot x + (-3x) \cdot (-2) + 1 \cdot x + 1 \cdot (-2) = x^3 - 2x^2 - 3x^2 + 6x + x - 2 = x^3 - 5x^2 + 7x - 2$.

Кўпхадларни бутун алгебраик ифодаalar ҳам деб аташади.

Кўпхадни кўпайтувчиларга ажратиш шу кўпхадни кўпхадларнинг кўпайтмаси ёки бирҳад билан кўпхаднинг кўпайтмаси кўринишида тасвирлашни билдиради. Бунда қуйидаги усуллардан фойдаланилади.

а) *Умумий кўпайтувчини қавсдан ташқарига чиқариш.*

6-мисол. $9ax^2 - 6a^2x = (3ax)(3x) - (3ax) \cdot (2a) = 3ax(3x - 2a)$.

б) *Группалаш.*

7-мисол. $x^3 - 3x^2 + x + 1 = x^3 - x^2 - 2x^2 + 2x - x + 1 = x^2(x - 1) - 2x(x - 1) - (x - 1) = (x^2 - 2x - 1)(x - 1)$.

в) *Квадрат учхадни кўпайтувчиларга ажратиш* (12-п. га қаранг).

г) *Қисқа кўпайтириш айниятлари.*

Бир ўзгарувчи кўпхаднинг илдизи деб ўзгарувчининг кўпхад нолга айланадиган қийматига айтилади.

3°. Касрлар. $\frac{a}{b}$ кўринишидаги ифода каср дейилади. бунда a ва

b — (сонли ёки ўзгарувчи) ифодалар. Касрнинг аниқланиш соҳаси ўзгарувчиларнинг a ва b ифодаларнинг (бунда $b \neq 0$) ҳар бири аниқланган қийматлари тўпламидир.

Касрнинг асосий хоссаси. $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$ тенглик ўзгарувчиларнинг шу тенгликнинг иккала қисми аниқланган қийматлари тўпламида айниятдир.

8-мисол. $\frac{2x(x+1)}{x^2-1} = \frac{2x}{x-1}$ тенглик барча $x \neq \pm 1$ ларда айният.

Рационал ифодаларни алмаштириш. Ўзгарувчиларнинг қуйида ёзилган тенгликларнинг чап ва ўнг қисмлари аниқланган қийматлари тўпламида шу тенгликлар айниятдир:

$$а) \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd};$$

$$б) \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc};$$

$$в) \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n};$$

$$г) \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

14. Тенгламалар, тенгсизликлар, системалар

1°. Бир ўзгарувчи тенгламалар ва тенгсизликлар. Бир ўзгарувчи тенглама (тенгсизлик) деб шу ўзгарувчини ўз ичига олган тенгликка (тенгсизликка) айтилади. Тенгламадаги (тенгсизликдаги) ўзгарувчини кўпинча номаълум деб аташади.

Бир ўзгарувчи тенгламанинг илдизи (ёки ечими) деб ўзгарувчининг тенгламага қўйганда тўғри тенглик ҳосил қиладиган қийматига айтилади.

1-мисол. 5 сони $x^2 = 25$ тенгламанинг илдизи, 1 сони эса бу тенгламанинг илдизи эмас.

Бир ўзгарувчи тенгсизликнинг ечими деб ўзгарувчининг бу тенгсизликни тўғри сонли тенгсизликка айлантирадиган қийматига айтилади.

2-мисол. 4 сони $x^2 < 25$ тенгсизлиكنинг ечими, 8 сони эса бу тенгсизлиكنинг ечими эмас.

Тенгламани (тенгсизликни) ечиш унинг ҳамма ечимларини топиш (ёки уларнинг йўқлигини исботлаш) демакдир.

Агар бир ўзгарувчи иккита тенглама (тенгсизлик) нинг ечимлари бир хил бўлса (бошқача айтганда, улар бир хил ечимларга эга бўлса), бу тенгламалар (тенгсизликлар) *тенг кучли тенгламалар (тенгсизликлар)* дейилади. Ечимни қисқа ёзишда «тенг кучли» сўзи ўрнига кўпинча $\Leftrightarrow$ белги қўйилади.

3-мисол. $3x - 6 = 0$ ва $(x - 2)^2 = 0$ тенгламалар тенг кучли, чунки уларнинг ҳар бири битта $x = 2$ илдизга эга; бундай ёзиш мумкин: $3x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0$. $x = 0$ тенглама $x^2 \leq 0$ тенгсизликка тенг кучли, яъни $x = 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 0$.

Бир ўзгарувчи тенгламалар ва тенгсизликларни ечишда қуйида ифодаланган асосий қоида ва усуллардан фойдаланилади. $S(x)$ ифода сонлар тўғри чизиғининг ҳамма ерида аниқланган бўлсин. U ҳолда қуйидаги тасдиқлар тўғри.

1) Агар тенгламанинг (тенгсизликнинг) иккала қисмига аynи бир $C(x)$ ифода қўшилса, у ҳолда берилган тенгламага (тенгсизликка) тенг кучли тенглама (тенгсизлик) ҳосил бўлади.

1а) Натижа. Ҳар қандай қўшилувчини тенгламанинг (тенгсизликнинг) бир қисмидан иккинчи қисмига қарама-қарши ишора билан ўтказиш мумкин, натижада берилган тенгламага (тенгсизликка) тенг кучли тенглама (тенгсизлик) ҳосил бўлади.

4- мисол. $x - 1 > 0$ ва $x - 1 + 1 > 0 + 1$ тенгсизликлар тенг кучли. $x + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$ ва $x = \frac{1}{x} - \frac{1}{x}$ тенгламалар тенг кучли. Аммо охирги тенгламанинг ўнг қисмида айиришни бажарилса, $x = 0$ тенгламага эга бўламиз, бу берилган тенгламаларга тенг кучли эмас ($x = 0$ тенглама 0 илдизга эга. $x + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$ ва $x = \frac{1}{x} - \frac{1}{x}$ тенгламалар эса илдизларга эга эмас). Гап шундаки, айиришда биз тенгламанинг аниқланиш соҳасини кенгайтирдик.

2а) Агар тенгламанинг иккала қисмини ҳеч қандай x да нолга айланмайдиган аynи бир $C(x)$ ифодага кўпайтирилса (бўлинса), у ҳолда берилган тенгламага тенг кучли тенглама ҳосил бўлади.

2б) Агар тенгсизликнинг иккала қисмини барча x ларда мусбат бўладиган аynи бир $C(x)$ ифодага кўпайтирилса (ёки бўлинса), берилган тенгсизликка тенг кучли тенгсизлик ҳосил бўлади.

2в) Агар тенгсизликнинг иккала қисмини барча x ларда манфий бўладиган аynи бир $C(x)$ ифодага кўпайтирилса (ёки бўлинса) ва тенгсизлик ишорасини қарама-қарши ишора билан алмаштирилса, берилган тенгсизликка тенг кучли тенгсизлик ҳосил бўлади.

5- мисол. $9 - 5x > 0$ тенгсизликни ечамиз. Ушбуга эгамиз: $9 - 5x > 0 \Leftrightarrow -5x > -9 \Leftrightarrow x < 1,8$. Жавоб: $(-\infty; 1,8)$.

6- мисол. $(x - 2)(x + 2) = 2(x - 2)$ тенгламанинг иккала қисмини $(x - 2)$ ифодага бўлиб бўлмайди, чунки бу ифода $x = 2$ да н олга айланади. Бўлишда $x = 2$ илдиз йўқолади. Бошланғич тенглама 0 ва 2 иккита илдизга эга, $(x - 2)$ га бўлишдан кейин ҳосил бўлган $x + 2 = 2$ тенглама эса битта 0 илдизга эга.

Агар $C(x)$ ифода ҳамма жойда аниқланмаган бўлса ёки 1 ва 2-қоидаларда $C(x)$ га юклатилган шартлар бажарилмаса, у ҳолда бу қоидаларга ўхшаш қоидалар мураккаброқ ифодаланади. Масалан,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

тенглама

$$\begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$$

системага тенг кучли.

7-мисол. $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} = \frac{3x^2-1}{x^2-1}$ тенгламани ечамиз.

Ушбуларга эгамиз:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} &= \frac{3x^2-1}{x^2-1} \Leftrightarrow \frac{x-1+x+1-3x^2+1}{x^2-1} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{-3x^2+2x+1}{x^2-1} = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-2x-1=0, \\ x^2-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm 1, \\ x=1 \text{ ёки} \end{cases} \\ x = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}. &\quad \text{Жавоб: } x = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

2°. Бир неча ўзгарувчи тенгламалар ва тенгсизликлар. Ўзгарувчилари сони иккита ёки ундан ортиқ бўлган тенгламалар ва тенгсизликлар ана шундай аталади. Иккита ёки учта ўзгарувчи тенгламалар ва тенгсизликлар кўпроқ учрайди. Икки ўзгарувчи тенгламанинг (тенгсизлиكنинг) *ечими* деб ўзгарувчиларнинг тенгламани (тенгсизликини) тўғри сонли тенглик (тенгсизлик) ка айлантирувчи тартибланган жуфти* қийматларига айтилади. Агар тенглама (тенгсизлик) да x ва y ўзгарувчилар қатнашса, у ҳолда биринчи ўринга x ўзгарувчининг, иккинчи ўринга y ўзгарувчининг қийматини ёзишга келишиб олинган.

8-мисол. (2; 1) жуфт $x^2 + y = 5$ тенгламанинг ечимидир, (1; 2) жуфт эса унинг ечими эмас.

Умумий ҳолда ўзгарувчилардан қайси бирининг қиймати биринчи ўринда, қайси бирининг қиймати иккинчи ўринда туришини кўрсатиш зарур.

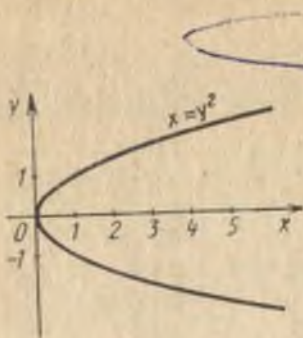
9-мисол. $(u+2)^2 + (t-3)^2 = 0$ тенглама бирдан бир $(t; u) = (3; -2)$ ечимга эга. Ёки бундай ёзиш мумкин: $u = -2, t = 3$.

Учта ва ундан ортиқ ўзгарувчи тенглама (тенгсизлик) нинг ечими ҳам шунга ўхшаш аниқланади. Масалан, уч ўзгарувчи тенгламанинг ечими деб сонларнинг тартибланган шундай учлигини айтиладики, уларни тегишли ўзгарувчилар ўрнига қўйилганда тенглама тўғри тенгликка айланади. Агар бу ўзгарувчилар x, y ва z бўлса, у ҳолда биринчи ўринга x ўзгарувчининг, иккинчи ўринга y ўзгарувчининг, учинчи ўринга z ўзгарувчининг қийматини ёзишга келишилган. Қолган ҳолларда, олатда, ўзгарувчилар қийматларининг ёзилиш тартибини кўрсатиш керак бўлади.

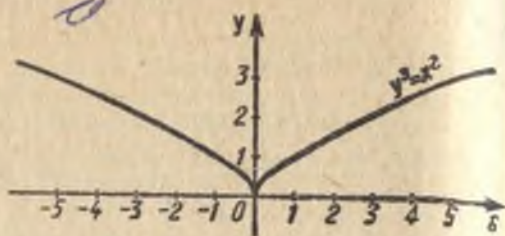
Агар айни бир хил ўзгарувчиларни ўзи ичига олган бир неча ўзгарувчи иккита тенглама (тенгсизлик) айни бир хил ечимларга эга бўлса (яъни тегишли жуфтлар, учликлар ва ҳ. к. лар тўплами бир хил бўлса) бу тенглама (тенгсизлик) лар *тенг кучли* тенгламалар (тенгсизликлар) дейилади.

Бир неча ўзгарувчи тенгламалар (тенгсизликлар) ни алмаштириш қондалари бир ўзгарувчи тенглама (тенгсизлик) ларни алмаштиришининг 1 ва 2-қондалари билан айнан бир хил.

*«Тартибланган» сўзи кўпинча тушуриб қолдирилади.



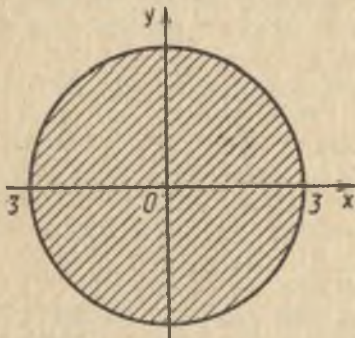
193- расм



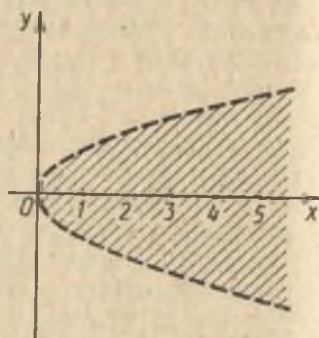
194- расм

10- мисол. $x^2 - y = 1$ ва $x^2 = y + 1$ тенгламалар тенг кучли тенгламалардир (1а қоидага ўхшаш қоида бўйича), $\frac{x-y}{y^2+1} < 3$ ва $x-y < 3(y^2+1)$ тенгсизликлар тенг кучли (2б қоидага қаранг).

Икки ва ундан ортиқ ўзгарувчили тенгламалар (тенгсизликлар) одатда, чексиз кўп ечимларга эга, (9- мисолнинг тенгламаси атиги битта ечимга эга, бешта ўзгарувчили $x^2 + y^2 + w^2 + t^2 + a^2 < 0$ тенгсизлик умуман битта ҳам ечимга эга эмас). Шу сабабли икки x ва y ўзгарувчили тенглама (тенгсизлик) нинг ҳар бир $(x_0; y_0)$ ечимини координаталар текислигида $(x_0; y_0)$ координатали нуқта билан тасвирлаш қабул қилинган. Ҳамма шундай нуқталар тўпла-



195- расм



196- расм

мини *тенгламанинг графиги* (мас равишда тенгсизликнинг ечимлари тўплами) дейилади.

11- мисол. 193 ва 194- расмларда $x = y^2$ ва $x^2 = y^3$ тенгламаларнинг графиклари, 195 ва 196- расмларда $x^2 + y^2 \leq 9$ ва $x > y^2$ тенгсизликлар ечимларининг тўплами тасвирланган.

12- мисол. $2x + 3y = -5$ чизиқли тенгламанинг графиги (197- расм) тўғри чизиқдан иборат. Уни иккита нуқта бўйича ясаш энг қулай: $x = 0$ да $y = -\frac{5}{3}$, яъни биринчи нуқта $(0; -\frac{5}{3})$,

$y = 0$ да эса $x = -\frac{5}{2}$, яъни

иккинчи нуқта $(-\frac{5}{2}; 0)$. Ўзга-

рувчиларнинг бошқа қийматлари-
ни олиш ҳам мумкин: $y = 1$ да
 $x = -4$, яъни биринчи нуқта
 $(-4; 1)$, $y = -1$ да $x = -1$,
яъни иккинчи нуқта $(-1; -1)$.

3°. Тенгламалар ва тенгсиз-
ликлар системалари. Бир хил
ўзгарувчилик бир нечта тенглама
(ёки тенгсизлик, ёки тенглама-
лар ва тенгсизликлар) берилган
бўлсин ва бунда ҳамма тенгла-
малар (тенгсизликлар) учун умумий бўлган ечимларни топиш талаб
қилинсин.

Бу ҳолда *тенгламалар* (мас равишда тенгсизликлар, тенгламалар
ва тенгсизликлар) *системаси* берилган дейишади. Системанинг, ма-
салан, икки ўзгарувчилик *системанинг ечили* деб, ўзгарувчиларнинг
системага кирувчи тенглама (тенгсизлик) нинг ҳар бирини тўғри
тенглик (тенгсизликка) айлантирувчи тартибланган қийматлари жуф-
тини айтилади. *Системани ечиш* унинг ҳамма ечимларини топиш ёки
ечимлар мавжуд эмаслигини исботлашдан иборат. Бир ўзгарувчилик,
уч ўзгарувчилик ва ундан ортиқ ўзгарувчилик системалар шунга ўх-
шаш аниқланади.

13-мисол. Бир ўзгарувчилик тенгсизликлар системасини ечамиз:

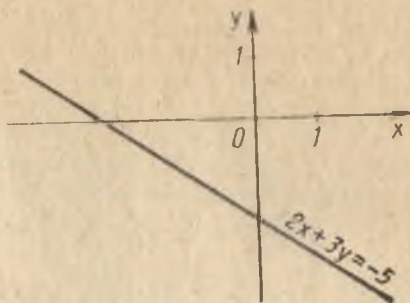
$$\begin{cases} \frac{x-3}{2} > 2x, \\ 0 > \frac{4x-1}{3} \end{cases} \text{ Ушбуга эгамиз: } \begin{cases} \frac{x-3}{2} > 2x, \\ 0 > \frac{4x-1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 > 4x, \\ 4x-1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x > 3, \\ x < \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1, \\ x < \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x < -1.$$

Жавоб: $(-\infty; -1)$.

Тенгламалар системаларини ечишда системаларни тенг кучли
системаларга алмаштиришнинг қуйидаги қоидаларидан фойдаланила-
ди (аниқлик учун ўзгарувчилар иккита деб ҳисоблаймиз, уч ва
ундан ортиқ ўзгарувчилик системалар учун қоидалар шунга ўхшаш
бўлади).

1) Ўрнига қўйиш қоидаси: агар системанинг ўзгарувчи-
ларидан бири қолганлари орқали ифодаланган бўлса (яъни систе-
манинг тенгламаларидан бири $y = f(x)$ кўринишда бўлса), у ҳолда
 $f(x)$ ифодани системанинг бошқа тенгламаларидаги y лар ўр-
нига қўйиш натижасида берилган системага тенг кучли систе-
ма ҳосил бўлади.



197- расм

2) Алмаштириш қондаси: агар системанинг тенгламаларидан бирини тенг кучли тенглама билан алмаштирилса, у ҳолда берилган системага тенг кучли система ҳосил бўлади.

3) Қўшиш қондаси: агар системанинг тенгламаларидан бирига бирор сонга кўпайтирилган бошқаси ҳадлаб қўшилса, у ҳолда бошланғич системага тенг кучли система ҳосил бўлади.

14-мисол.
$$\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{13}{6} \\ x + y = 5 \end{cases}$$
 системани ечамиз.

Алмаштириш қондасидан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{13}{6} \\ x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{13}{6} \\ y = 5 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{5-x} + \frac{5-x}{x} = \frac{13}{6} \\ y = 5 - x \end{cases}$$

Биринчи тенгламани ечамиз:

$$\frac{x^2 + (5-x)^2}{x(5-x)} = \frac{13}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} 6(x^2 + (5-x)^2) = 13x(5-x), \\ x(5-x) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 6 = 0, \\ x(5-x) \neq 0 \end{cases}$$

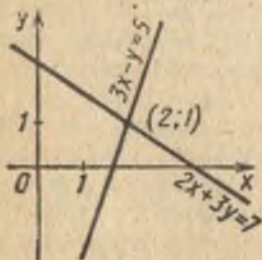
$y = 5 - x$ эканидан фойдаланиб топамиз: $y = 5 - 3 = 2$ ва $y = 5 - 2 = 3$.

Жавоби: (2; 3), (3; 2).

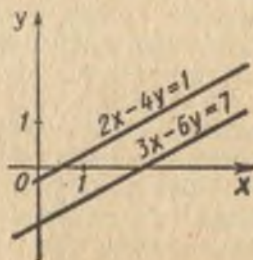
4°. Чизиқли тенгламалар системалари. Икки ўзгарувчи

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad (1)$$

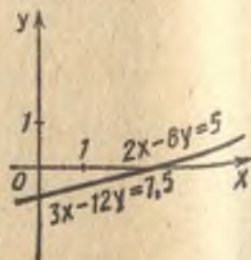
тенгламалар системасининг ҳар бир тенгламасида ўзгарувчилар олдидаги коэффициентлардан ақалли биттаси нолдан фарқли деб ҳисоблаймиз. Бундай тенгламаларнинг графиклари текисликдаги иккита тўғри чизиқдан иборат бўлади. Текисликда икки тўғри чизиқ ўзаро уч хил ҳолатда жойлашиши мумкин: 1) тўғри чизиқлар кесишади (система битта ечимга эга, 198-расм); 2) тўғри чизиқлар параллел ва умумий нуқталарга эга эмас (системанинг ечимлари мавжуд эмас, 199-расм); 3) тўғри чизиқлар устма-уст тушади (система чексиз кўп ечимга эга, 200-расм).



198- расм



199- расм



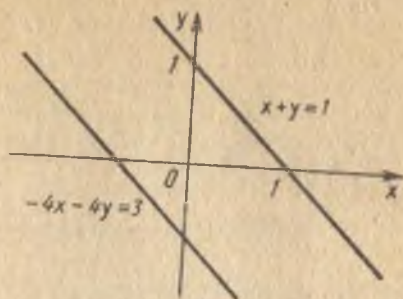
200- расм

15-мисол. a параметрининг қандай қийматида

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ ax - 4y = 3 \end{cases}$$

система ечимга эга?

Бу масалани ечишда чизиқли тенгламалар системасининг геометрик маъносидан фойдаланамиз. Биринчи тенглама билан бериладиган тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентини -1 га тенг, системанинг иккинчи тенгламаси



201-расм

билан бериладиган тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентини эса $\frac{a}{4}$ га тенг. Шу сабабли $\frac{a}{4} \neq -1$ да, яъни $a \neq -4$ да бу тўғри чизиқ-

лар кесишади ва, бинобарин, система битта ечимга эга. $a = -4$ да тўғри чизиқлар параллел (чунки улар тенг бурчак коэффициентларга эга) ва устма-уст тушмайди (201-расм) ва бинобарин, система ечимларга эга эмас. Жавоб: $a \neq -4$ да.

Икки ўзгарувчили иккита чизиқли тенглама системасини ечиш учун кўпинча қўшиш қондасидан, ёки ўрнига қўйиш қондасидан фойдаланилади.

16-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} 2x + 3y = 3, \\ 3x - y = 10 \end{cases}$$

системани ечамиз.

Системанинг иккинчи тенгламасини 3 га кўпайтириб биринчи тенгламасига қўшиб, берилган системага тенг кучли система ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} 11x = 33, \\ 3x - y = 10. \end{cases}$$

Биринчи тенгламадан $x = 3$ эканини топамиз, сўнгра иккинчи тенгламадан $y = 3x - 10$ ни топамиз, бундан $y = -1$. Жавоб: $(3; -1)$.

Ечишнинг бошқа усули ўрнига қўйиш қондасига асосланган. Системанинг иккинчи тенгламасидан $y = 3x - 10$ эканини топамиз. Системанинг биринчи тенгламасидаги y ўрнига $3x - 10$ ни қўйиб, берилган системага тенг кучли система ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} 2x + 3(3x - 10) = 3, \\ y = 3x - 10. \end{cases}$$

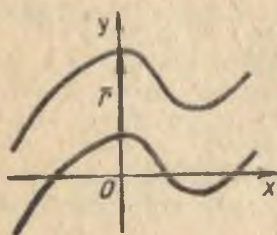
Биринчи тенгламадан $x = 3$ эканини топамиз, сўнгра иккинчи тенгламадан $y = 3 \cdot 3 - 10 = -1$ эканини топамиз.

▼ Баъзан уч ўзгарувчилар учта чизиқли тенгламалар системасининг кўргазмали геометрик тасвирини қарашади. (Тенгламаларнинг бирида ўзгарувчилар олдидаги коэффициентлардан ақалли биттаси нолдан фарқли деб ҳисобланади — бу ҳолда тенглама фазода текисликни аниқлайди). Ўз тенгламалари билан берилган учта текисликнинг фазода ўзаро жойлашувини текшириш қийин бўлганлиги учун, бу кўргазмали тасвир катта амалий аҳамиятга эга эмас. ▼

15. Функциялар графикларини алмаштириш

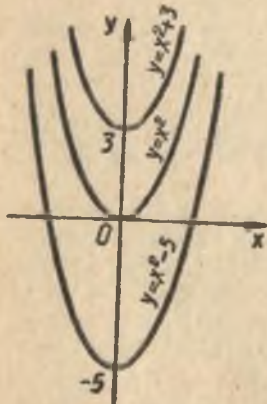
Кўпинча бир функциянинг графигини бошқа функциянинг графигидан геометрик алмаштиришлар ёрдамида ҳосил қилиш мумкин.

Бундай геометрик алмаштиришлар координата ўқларига параллел кўчириш, ўққа қисиш ва чўзишлардан иборат. Ҳар қайси алмаштиришни алоҳида қараймиз.



202- расм

1-мисол. $y = x^2 + 3$ квадрат учҳаднинг графиги $y = x^2$ функциянинг графигидан ординаталар ўқи бўйича 3 бирлик юқорига параллел кўчиришдан (203-расм), $y = x^2 - 5$ функциянинг графиги эса $y = x^2$ функциянинг графигини 5 бирлик пастга кўчиришдан ҳосил қилинади.

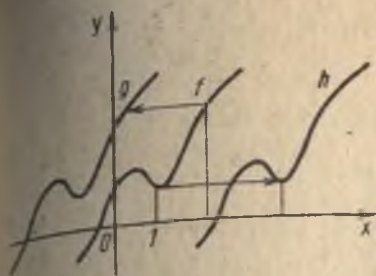


203- расм

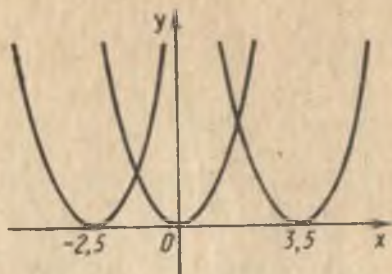
1°. Графикни ординаталар ўқи бўйича параллел кўчириш. g функциянинг графиги (бу нда $g(x) = f(x) + a$) f функциянинг графигини $r(0; a)$ вектор қадар параллел кўчириш ёрдамида ҳосил қилинади (202-расм). Агар a сони мусбат бўлса, график ординаталар ўқи бўйича параллел равишда юқорига, агар a манфий сон бўлса, пастга параллел кўчирилади.

2°. Графикни абсциссалар ўқи бўйича параллел кўчириш. 204-расмда учта график — f , g ва h функцияларнинг графиклари тасвирланган. Бунда $g(x) = f(x + a)$ ва $h(x) = f(x + b)$. g функциянинг графиги f функциянинг графигидан $r(-a; 0)$ вектор қадар параллел кўчириш билан ҳосил қилинади. 204-расмда $g(x)$ функция учун a сони 2 га, $h(x)$ функция учун b сони —3 га тенг.

2-мисол. $y = (x + a)^2$ квадрат учҳаднинг графиги $y = x^2$ нинг графигидан $r(-a; 0)$ вектор қадар параллел кўчириш билан ҳосил қилинади (205-расм, $a = 2,5$ ва $a = -3,5$).



204- расм



205- расм

f функциянинг графигида истаган $(x; y)$ нуқтани оламиз. Бу нуқтанинг координаталари $y = f(x)$ тенгликни қаноатлантиради.

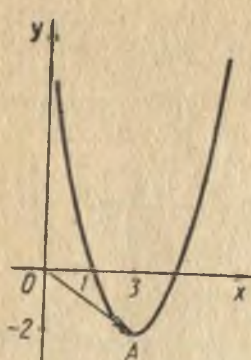
$\vec{r}(-a; 0)$ вектор қадар параллел кўчиришда $(x; y)$ нуқта $(x-a; y)$ нуқтага ўтади. Ҳосил бўлган нуқтанинг координаталари $y = f(x-a+a)$ тенгликни, яъни $y = g(x-a)$ тенгликни қаноатлантиради. Демак, параллел кўчиришдан кейин $(x; y)$ нуқта g функциянинг графигига ўтиб қолади.

g функциянинг ҳар бир нуқтаси кўчиришдан кейин f функция графигининг бирор нуқтасидан ҳосил бўлишини шунга ўхшаш текшириб кўрилади.

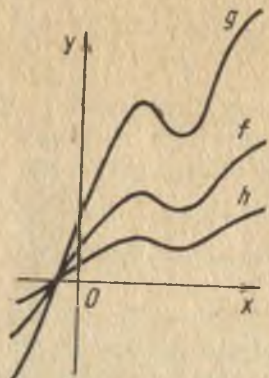
3-мисол. 206-расмда $g(x) = (x-3)^2 - 2$ квадрат учҳаднинг графиги $f(x) = x^2$ нинг графигига нисбатан ординаталар ўқига параллел 2 бирлик пастга ва абсциссалар ўқига параллел 3 бирлик ўнгга кўчирилган. Шундай қилиб, g функциянинг графиги f функциянинг графигидан $\vec{r}(3; -2)$ вектор қадар параллел кўчириш билан ҳосил қилинган.

4-мисол. Квадрат учҳадни $y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$ кўринишда ёзиб, $y = ax^2 + bx + c$ функциянинг графиги $y = ax^2$ функция графигидан $\vec{r}\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$ вектор қадар параллел кўчириш ёрдамида ҳосил бўлишини кўралик. $y = ax^2$ функциянинг графиги ординаталар ўқига нисбатан симметрик (чунки бу жуфт функция). Демак, $y = ax^2 + bx + c$ функциянинг графиги бу алмаштиришда ординаталар ўқининг образи, яъни $x = -\frac{b}{2a}$ тўғри чизиққа нисбатан симметрикдир.

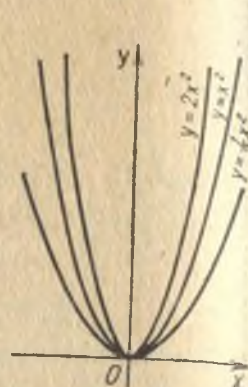
▲ 3°. Графикни абсциссалар ўқига чўзиш ва қиспиш. 207-расмда учта f , g ва h функцияларнинг графиклари тасвирланган. Бунда $a > 1$ да $g(x) = af(x)$ ва $0 < b < 1$ да $h(x) = bf(x)$. f функциянинг барча қийматларини $a > 1$ сонга кўпайтиришдан график барча нуқталарининг ординаталари a марта ортади ва графикни абсциссалар ўқидан a марта чўзиш юз беради. f функциянинг барча қийматларини $b (0 < b < 1)$ сонга кўпайти-



206- расм



207- расм



208- расм

ришдан f функция графиги барча нуқталарининг ординаталари $\frac{1}{b}$ марта кичраяди ва графикни абсциссалар ўқига $\frac{1}{b}$ марта қисий содир бўлади.

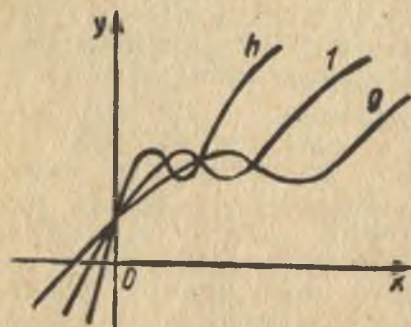
5-мисол. $y = 2x^2$ функциянинг графиги (208-расм) $y = x^2$ функция графигидан графикни абсциссалар ўқидан 2 марта чўзиш билан, $y = 0,5x^2$ графиги эса абсциссалар ўқига 2 марта қисий билан ҳосил қилинади.

4°. Графикни ординаталар ўқига чўзиш ва қисий. $y = f\left(\frac{x}{a}\right)$ функциянинг графиги f функция графигидан ординаталар ўқига a марта ($a > 1$ да) чўзиш билан ва $0 < a < 1$ да ординаталар ўқига $\frac{1}{a}$ марта қисий билан ҳосил қилинади (209-расм).

Ҳақиқатан, кўрсатилган чўзиш (қисий) дан кейин $(x; y)$ координатли нуқта $(ax; y)$ координатли нуқтага ўтади. Агар $(x; y)$ нуқта f функциянинг графигига тегишли бўлса, у ҳолда $y = f(x)$, яъни $y = f\left(\frac{ax}{a}\right) = g(ax)$ бўлади, бу эса $(ax; y)$ нуқта g функция графигида ётишини билдиради.

g функция графигининг ҳар бир нуқтаси f функция графигининг бирор нуқтасидан чўзиш (қисий) билан ҳосил бўлиши шунга ўхшаш текширилади.

6-мисол. $y = [0,5x]$ функциянинг графиги (210-расм) $y = [x]$ функциянинг графигидан (211-расм) ординаталар ўқидан 2 марта чўзиш билан, $y = [2x]$ функциянинг графиги эса (212-расм) ординаталар ўқига 2 марта қисий билан ҳосил қилинади.



209- расм

7-мисол. $y = 2x^2 + 2x + 1,5$ квадрат учҳаднинг графиги (213-расм), яъни $y = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 1$

нинг графиги $y = x^2$ функциянинг графигидан қуйдаги алмаштиришлар кетма-кетлиги билан ҳосил қилинади: а) абсциссалар ўқидан 2 марта чўзиш билан; б) $\vec{r}(0; 1)$ вектор қадар параллел кўчириш билан; в) $\vec{r}\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ вектор қадар параллел кўчириш билан (б) ва в) ўрнига бир йўла $\vec{r}\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$ вектор қадар параллел кўчиришни ба-жариш мумкин).

8-мисол. $y = 3 \cos(2x + 4)$, яъни $y = 3 \cos(2(x + 2))$ гармоник тебраниш графиги косинуснинг графигидан қуйдаги алмаштиришлар кетма-кетлиги билан ҳосил қилинади:

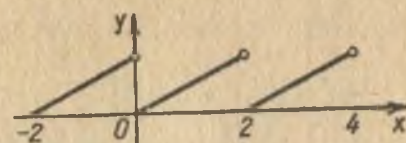
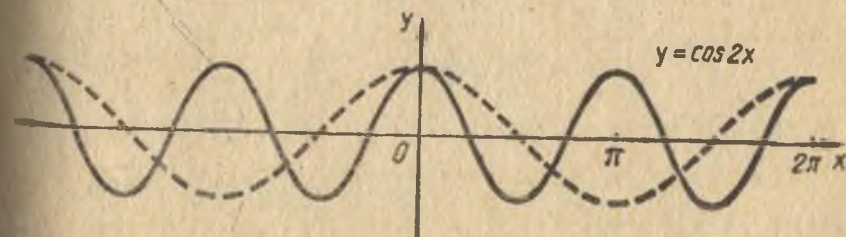
1) ординаталар ўқига 2 марта қисий (214-расм);

2) $\vec{r}(-2; 0)$ вектор қадар параллел кўчириш (215-расм);

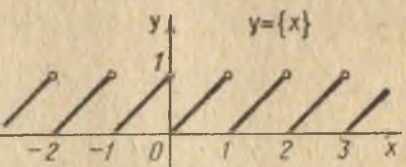
3) абсциссалар ўқидан 3 марта чўзиш (216-расм).

Умуман $y = A \cos(\omega x + \varphi)$ гармоник тебранишнинг графиклари косинуснинг графигидан бундай алмаштиришлар кетма-кетлиги билан ҳосил қилинади: 1) Oy ўққа ω марта қисий билан; 2) $\vec{r}\left(-\frac{\varphi}{\omega}; 0\right)$ вектор қадар параллел кўчириш билан; 3) Ox ўқдан A марта чўзиш билан. ▼

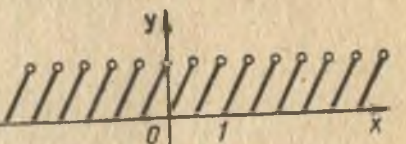
214- расм



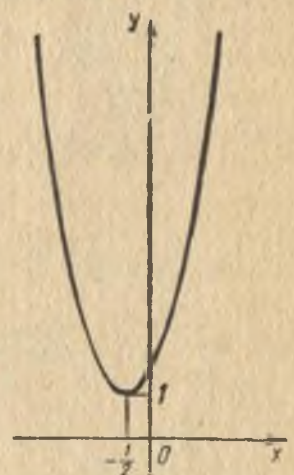
210- расм



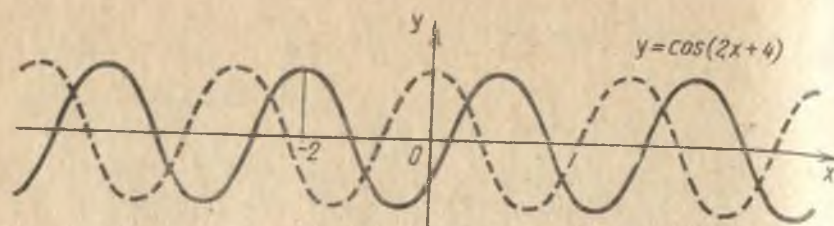
211- расм



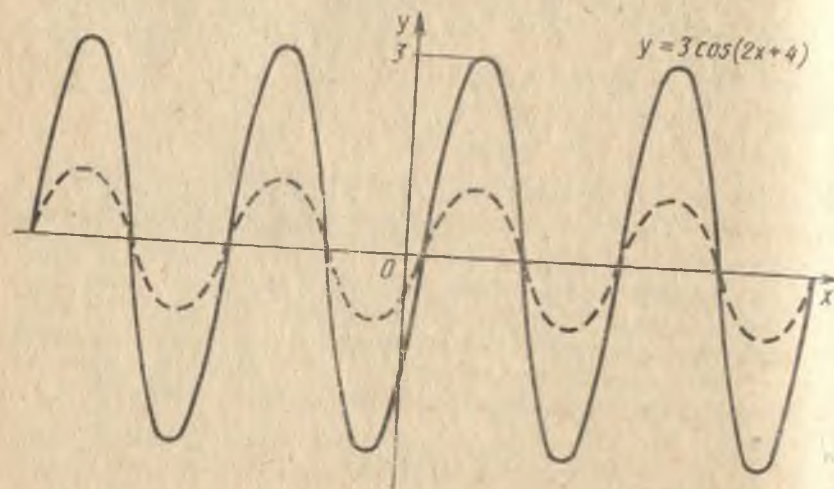
212- расм



213- расм



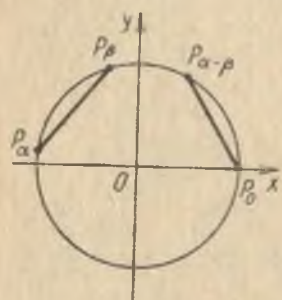
215- расм



216- расм

16. Тригонометрик функциялар учун қўшиш формуллари

Бирлик айланада P_α , P_β , $P_{\alpha-\beta}$ ва P_0 нуқталарни оламиз (217-расм). Бу нуқталарнинг координаталарини ёзамиз (унинг учун синус ва косинуснинг таърифларидан фойдаланамиз):



217- расм

$$\begin{aligned} P_\alpha &(\cos \alpha; \sin \alpha), P_\beta (\cos \beta; \sin \beta), \\ P_{\alpha-\beta} &(\cos (\alpha-\beta); \sin (\alpha-\beta)), \\ P_0 &(1; 0). \end{aligned} \quad (1)$$

P_α , P_β ва $P_{\alpha-\beta}$, P_0 ёйлар тенг бўлгани учун P_α , P_β ва $P_{\alpha-\beta}$, P_0 кесмаларнинг узунликлари ҳам тенг бўлади. Бунини, ўз координаталари билан берилган нуқталар орасидаги масофа формуласидан фойдаланиб ёзамиз (қ. (1));

$$\begin{aligned} &\sqrt{(\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2} = \\ &= \sqrt{(\cos (\alpha-\beta) - 1)^2 + \sin^2 (\alpha-\beta)}. \end{aligned}$$

Бу тенгликнинг иккала қисмини квадратга кўтарамиз ҳамда $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ айниниятни ҳисобга олиб, алмаштиришларни бажарамиз:

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \sin \beta + \sin^2 \beta = \\ = \cos^2 (\alpha-\beta) - 2 \cos (\alpha-\beta) + 1 + \sin^2 (\alpha-\beta); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) - 2 (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) = \\ = (\cos^2 (\alpha-\beta) + \sin^2 (\alpha-\beta)) - 2 \cos (\alpha-\beta) + 1; \end{aligned}$$

$$2 - 2 (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) = 2 - 2 \cos (\alpha-\beta),$$

бунда айирма косинуси формуласига эга бўламиз:

$$\cos (\alpha-\beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta. \quad (2)$$

$$\cos (-\beta) = \cos \beta \text{ ва } \sin (-\beta) = -\sin \beta$$

ҳамда (2) формуладан:

$$\begin{aligned} \cos (\alpha+\beta) &= \cos (\alpha-(-\beta)) = \cos \alpha \cos (-\beta) + \sin \alpha \sin (-\beta) = \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta. \end{aligned}$$

Шундай қилиб, *айгинди косинусининг формуласи* ушбу кўринишга эга:

$$\cos (\alpha+\beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta. \quad (3)$$

(2) ва (3) формулалардан келиб чиқадиган

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \sin \alpha, \quad \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \cos \alpha$$

формулалардан фойдаланиб, топамиз:

$$\begin{aligned} \sin (\alpha+\beta) &= \cos \left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) - \beta \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \cos \beta + \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \times \\ &\times \sin \beta = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta. \end{aligned}$$

Бинобарин,

$$\sin (\alpha+\beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta. \quad (4)$$

(4) формуладан:

$$\begin{aligned} \sin (\alpha-\beta) &= \sin (\alpha+(-\beta)) = \sin \alpha \cos (-\beta) + \cos \alpha \sin (-\beta) = \\ &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta. \end{aligned}$$

Бинобарин,

$$\sin (\alpha-\beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta. \quad (5)$$

(3) ва (4) формулалардан:

$$\operatorname{tg} (\alpha+\beta) = \frac{\sin (\alpha+\beta)}{\cos (\alpha+\beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}.$$

Бу тенгликнинг ўнг қисми сурати ва махражини $\cos \alpha \cos \beta$ га бўлиб топамиз:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}. \quad (6)$$

Ниҳоят,

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \operatorname{tg}(\alpha + (-\beta)) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}(-\beta)}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}(-\beta)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

Шундай қилиб,

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}. \quad (7)$$

МАЪЛУМОТ МАТЕРИАЛЛАРИ

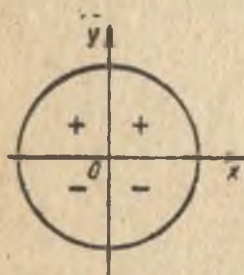
1°. Ёйнинг узунлиги ва секторнинг юзи. R радиусли айлананинг узунлиги $C = 2\pi R$. α радианли ёйнинг узунлиги αR га тенг, бунда R — мос айлана радиуси.

R радиусли доиранинг юзи $S = \pi R^2$. Ёйи α радианга тенг бўлган секторнинг юзи $\frac{\alpha R^2}{2}$ га тенг (R — ёйнинг радиуси).

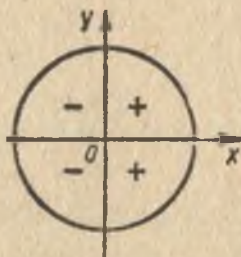
2°. Тригонометрик функциялар қийматларининг ишоралари (218-расм).

3°. Бир аргументнинг тригонометрик функцияларини боғловчи формулалар,

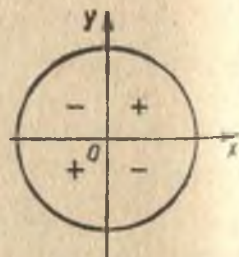
$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha};$$



синуснинг ишоралари



косинуснинг ишоралари



тангенс ва котангенснинг ишоралари

218-расм

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = 1; \quad \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; \quad \operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

4°. Иккиланган аргументнинг тригонометрик функциялари

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

5°. Ярим аргументнинг тригонометрик функциялари.

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}; \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}};$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}; \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

6°. Косинуслар ва синуслар йигиндисининг ва айирмасининг формулалари.

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2};$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

7°. Келтириш формулалари.

u	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\pi - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$
$\sin u$	$\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\cos \alpha$
$\cos u$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$
$\operatorname{tg} u$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
$\operatorname{ctg} u$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$

8°. Ҳақиқий кўрсаткичли даражаларнинг асосий хоссалари. Ҳар қандай мусбат a ва b ҳамда x ва y ҳақиқий сонлар учун қуйидаги тенгликлар ўринли:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } a^0 = 1; & \text{б) } a^x \cdot a^y = a^{x+y}; \\ \text{в) } a^x : a^y = a^{x-y}; & \text{г) } (a^x)^y = a^{xy}; \\ \text{д) } (ab)^x = a^x b^x; & \text{е) } \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}. \end{array}$$

9°. Логарифмларнинг асосий хоссалари. Ҳар қандай $a > 0$, $a \neq 1$ учун қуйидаги тенгликлар ўринли:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \log_a 1 = 0; & \\ \text{б) } \log_a a = 1; & \\ \text{в) } x > 0, y > 0 \text{ да } \log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y; & \\ \text{г) } x > 0, y > 0 \text{ да } \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y; & \\ \text{д) } x > 0, p \in R \text{ да } \log_a x^p = p \log_a x; & \\ \text{е) } x > 0, b > 0, b \neq 1 \text{ да } \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}; & \end{array}$$

ж) $x > 0$ да $a^{\log_a x} = x$ (асосий логарифмик айният).

10°. Дифференциаллаш формулалари.

$$\begin{array}{l} C' = 0; (x)' = 1; \alpha \neq 1 \text{ да } (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}; \sin' x = \cos x; \\ \cos' x = -\sin x; \operatorname{tg}' x = \frac{1}{\cos^2 x}; \operatorname{ctg}' x = -\frac{1}{\sin^2 x}; \end{array}$$

$$(e^x)' = e^x; (a^x)' = a^x \ln a; \ln' x = \frac{1}{x}; (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a};$$

$$(f + g)' = f' + g'; (f \cdot g)' = f'g + fg'; (cf)' = cf'; \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2};$$

$$(f(kx + b))' = kf'(kx + b); (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

11°. Бошланғич функциялар.

$f(x)$	$\frac{x^a}{(a+1)}$	$\sin x$	$\cos x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$\frac{1}{x}$	e^x	a^x
$F(x) + C$	$\frac{x^{a+1}}{a+1} + C$	$-\cos x + C$	$\sin x + C$	$\operatorname{tg} x + C$	$-\operatorname{ctg} x + C$	$\ln x + C$	$e^x + C$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$

БҮТҮН КУРСНИ ТАҚРОРЛАШГА ДОИР МАСАЛАЛАР

746. Соддалаштиринг:

$$a) \frac{x-1}{x+x^{\frac{1}{2}}+1} : \frac{x^{0.5}+1}{x^{1.5}-1} + \frac{2}{x^{-0.5}}; \quad б) \frac{1+\frac{2}{\sqrt{t+4}}}{2-\sqrt{t+4}} \cdot t +$$

$$+ \sqrt{t+4} + \frac{4}{\sqrt{t+4}};$$

$$в) \frac{1-a^{-2}}{\frac{1}{a^2}-a^{-\frac{1}{2}}} - \frac{2}{a^{\frac{3}{2}}} + \frac{a^{-2}-a}{\frac{1}{a^2}-a^{-\frac{1}{2}}};$$

$$г) \left(\frac{\sqrt{a}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{a}} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} - \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} \right).$$

747. $n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n$ ифода $n \in \mathbb{N}$ да 24 га бўлинишини исботланг.

748. Икки бўлак жезнинг массаси 30 кг. Биринчи бўлакда 5 кг, иккинчи бўлакда 4 кг соф мис бор. Агар иккинчи бўлак жезда миснинг миқдори биринчи бўлакдаги мис миқдоридан 15% ортиқ бўлса, биринчи бўлакда неча процент мис бор?

749. Автобуснинг 325 км масофани ўтиши учун кетадиган вақти автобуслар ҳаракатининг янги жадвалига кўра 40 минутга қисқартирилган. Агар автобуснинг янги жадвал бўйича ўртача ҳаракат тезлиги эски жадвал бўйича ўртача ҳаракат тезлигидан 10 км/соат ортиқ бўлса, автобуснинг янги жадвал бўйича ўртача ҳаракат тезлигини топинг.

750. Турғун сувдаги тезлиги 15 км/соат бўлган моторли қайиқ оқим бўйлаб $139\frac{1}{3}$ км юриб, орқасига қайтиб келди. Агар бутун йўлга 20 соат кетган бўлса, дарё оқимининг тезлигини топинг.

751. Поезд маълум вақтда 220 км йўл босиши керак эди. Ҳаракат бошланганидан 2 соат кейин у 10 минут тўхтаб қолди. Шундан кейин белгиланган жойга вақтида етиб келиш учун тезлигини 5 км/соат оширди. Поезднинг дастлабки тезлигини топинг.

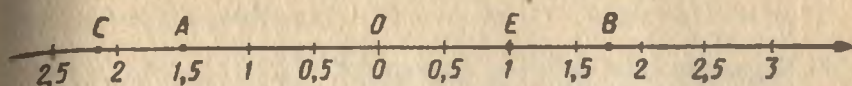
752. Комсомолларнинг икки бригадаси бирга ишлаб, ўқув тажриба участкасига дарахт ўтқазишни 4 кунда тамомлашди. Агар бригадаларнинг бири шу ишни иккинчисига қараганда 6 кун тез тамомлай олса, ҳар қайси бригадага шу ишни бажариш учун неча кун керак бўлар эди?

753. Томорқа учун ажратилган тўғри туртбурчак шаклидаги участ-

канинг бир томони иккинчисидан 10 м ортиқ бўлиб, уни ихота девор билан ўраш керак. Участканинг юзи 1200 м² бўлса, ихота деворининг узунлигини топинг.

754. Ичида 40 г туз бўлган эритмага 200 г сув қўшилди, шундан кейин унинг концентрацияси 10% камайди. Эритмада қанча сув бўлган ва унинг концентрацияси қандай бўлган?
755. Водопровод баки иккита труба билан 2 соат-у 55 минут да тўлади. Биринчи труба бакни иккинчисига қараганда 2 соат тез тўлдиролди. Ҳар қайси труба алоҳида ишласа, бакни неча соатда тўлдиролди?
756. Узунлиги 60 м бўлган айлана бўйлаб бир текисда ва бир хил йўналишда 2 нуқта ҳаракат қилади. Нуқталарнинг бири айланидан иккинчисидан 5 с тезроқ тўла айланиб чиқади ва иккинчи нуқтани ҳар минутда қувиб ўтади. Нуқталарнинг тезликларини топинг.
757. Байкал-Амур магистрали (БАМ) қурилишида қурувчилар бригадаси план бўйича бир неча кунда 2160 м³ тупроқни суриб ташлаши керак эди. Дастлабки уч кунда бригада ҳар кунни планда белгиланган нормани бажаради, ундан кейин ҳар кунни нормани 80 м³ ошириб бажаради; шунинг учун бригада белгиланган муддатдан бир кун олдин 2320 м³ тупроқ сурди. План бўйича бригаданинг кунлик нормаси қанча бўлган?
758. Икки хонали соннинг бирликлар рақами ўнликлар рақамидан 2 та ортиқ. Соннинг ўзи 30 дан катта, аммо 40 дан кичик. Шу сонни топинг.
759. Зичликлари 1,2 г/см³ ва 1,6 см³ бўлган икки хил суюқликдан массаси 60 г бўлган аралашма тайёрланади. Агар 8 см³ аралашманинг массаси аралаштирилган енгил суюқликнинг массасига тенг бўлса, ҳар қайси суюқликдан неча грамм олинган ва аралашманинг зичлиги қандай?
760. Соннинг тақрибий қиймати ёзувидаги ишончли рақамларини кўрсатинг:
 а) $3,38 \pm 0,01$; в) $7,441 \pm 0,1$;
 б) $1,380 \cdot 10^4 \pm 0,001 \cdot 10^4$; г) $2,3 \cdot 10^{-5} \pm 0,2 \cdot 10^{-5}$.
761. Агар $a \approx 3,71$; $b \approx 0,017$, $c \approx 2,3199$ бўлса, $a + b \cdot c$ ни ҳисобланг.
762. $(1 + x)^n \approx 1 + nx$ формуладан фойдаланиб, ҳисобланг:
 а) $1,002^5$, б) $2,006^3$, в) $3,001^4$.
763. $\sqrt{7}$ рационал сон эмаслигини исботланг.
764. $\sqrt{2}$ ва $\frac{19}{17}$ сонлар йиғиндисини 0,01 гача аниқликда ҳисобланг.
765. $\lg 3$ рационал сон эмаслигини исботланг.
766. $\lg 5 \cdot \lg 20 + (\lg 2)^2$ ни жадваллардан фойдаланмай ҳисобланг.
767. Қайси бири катта:
 а) $\frac{4}{\lg \frac{1}{2}}$ ёки $\frac{7}{\lg \frac{1}{2}}$; б) $15^{\lg_5 10}$ ёки $10^{\lg_5 15}$?

768. A, B, C нуқталарнинг координаталарини топинг (219-расм).
 769. Координата тўғри чизиғининг нуқталари орасидаги масофани топинг:



219- расм

- а) $A (1,5)$ ва $B (-2)$; б) $A (-10,3)$ ва $B (6,2)$;
 в) $A (-3,6)$ ва $B (0)$; г) $A (-5,7)$ ва $B (-7,1)$.
770. Агар қуйидагилар маълум бўлса, координата тўғри чизиғининг $A(x)$ нуқтаси координатаси қаноатлантирадиган шартни тенглама кўринишида (ёки тенгсизлик кўринишида) ёзинг ва уни ечинг.
- а) $|AB| = 5$, бунда $B (5)$; б) $|AB| < 3,5$, бунда $B (-1)$;
 в) $|AB| \leq 0,2$, бунда $B (-4,5)$; г) $|AB| < \frac{1}{48}$, бунда $B (-12)$.
771. Координата текислигининг нуқталари орасидаги масофани топинг:
- а) $A (2; 5)$ ва $B (-1; 1)$;
 б) $A (-1; 0)$ ва $B (1; 0)$;
 в) $C (7; 9)$ ва $D (-5; 4)$;
 г) $C (0,44; 2,54)$ ва $D (-0,56; 1,54)$.
772. Координата текислигининг $A(x; y)$ нуқтаси координаталари қаноатлантирадиган шартни тенглама (тенгсизлик) кўринишида ёзинг:
- а) $|AB| = 5$, бунда $B (0; 0)$; б) $|AB| \leq 5$, бунда $B (0; 0)$;
 в) $|AB| = 1$, бунда $B (2; 3)$; г) $|AB| > 1$, бунда $B (2; 3)$.
- Ечимлар тўпламини топинг (773 — 775).
773. а) $|x| = 5$; б) $|x| < 5$; в) $|x| \geq 5$; г) $|x - 10| = 4$.
 774. а) $|x - 10| \leq 4$; б) $|x - 10| > 4$; в) $x^2 > 4$.
 775. а) $x^2 \leq 5$; б) $(x - 1)^2 < 9$; в) $(x + 2)^2 \leq 1$.

Координаталари қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи нуқталар тўпламини координата текислигида тасвирланг (776—779).

776. а) $x(y - 1) = 0$; б) $(x - 2)(y + 3) = 0$;
 в) $xy \geq 0$; г) $xy < 0$.
777. а) $(x - 2)y > 0$; б) $x > 0, y \geq -1$;
 в) $\frac{y - x}{x - 1} = 0$; г) $(2x + 3y)(x - 4y) = 0$.

778. а) $|x-3| < 1$; б) $|x| < 1, |y| < 1$;
 в) $|x| > 1, |y| > 1$; г) $|x-2| \leq 1, |y+3| \leq 1$.
779. а) $x^2 + y^2 = 4$; б) $x^2 + y^2 < 4$;
 в) $x^2 + y^2 > 4$; г) $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 9$.
780. Берилган: $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$. Топинг: $f\left(\frac{\sqrt{a^2-1}}{a-1}\right)$.
781. Чексиз геометрик прогрессиянинг ҳадлари йиғиндисини топинг:
 а) $b_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2}$; б) $b_n = \left(\frac{1}{2}\sin x\right)^n$;
 в) $b_n = \left(\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\right)^n, a \neq b$; г) $b_n = \operatorname{tg}^n x, 0 < x < \frac{\pi}{4}$.
782. Оддий каср кўринишида ёзинг:
 а) 1,2 (27); б) 2, (41); в) 0, (428571); г) 0,3 (148).
783. Бурчак қайси чоракка тегишли:
 а) 1200° ; б) -1000° ; в) $3,5\pi$; г) $\alpha + \frac{2}{3}\pi$, бунда $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;
 д) агар α — III чоракка тегишли бўлса, $\alpha - \pi$;
 е) агар $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ бўлса, $\alpha - 3\pi$?
784. Агар:
 а) $\sin x = 4 \cos x$; б) $\sin x - \cos x = 1,2$
 бўлса, x сони қайси чоракка тегишли?
785. Ҳисобланг: $\frac{\sin 110^\circ \sin 250^\circ + \cos 540^\circ \cos 290^\circ \cos 430^\circ}{\cos^2 1260^\circ}$.
786. Агар $\cos x = \frac{1-m}{1+m}$ ва $m > 0$ бўлса, $\sin x$ ни топинг.
787. Агар $\sin x = -\frac{3}{\sqrt{10}}$ ва $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ бўлса, $\cos x$ ни ҳисобланг.
788. Агар $\sin x \operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$ бўлса, $\cos x$ ни ҳисобланг.
789. Агар $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ бўлса, $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ ни ҳисобланг.
790. Агар $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{2}$ бўлса, $\operatorname{tg} \alpha$ ни ҳисобланг.
791. Агар $\cos 32^\circ \approx 0,848$ бўлса, $\sin 46^\circ$ ни жадваллардан фойдаланмай 0,001 гача аниқликда ҳисобланг.
 Кўрсатма. $\sin 46^\circ = \sin(30^\circ + 16^\circ)$.
792. $\sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \cos x > 0$ экани берилган. $\operatorname{tg} \alpha$ ни топинг.
793. Қўйидаги келтириш формулатарини исботланг:
 а) $\sin(2\pi - \alpha) = -\sin \alpha$; б) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha$;
 в) $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$; г) $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$;

д) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha$; е) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$.

794. $\sin(\alpha + \pi k) = (-1)^k \sin \alpha, k \in \mathbb{Z}$ эканини исботланг.

795. Айниятни исботланг:

$$\sqrt{\frac{1-\cos \alpha}{1+\cos \alpha}} - \sqrt{\frac{1+\cos \alpha}{1-\cos \alpha}} = 2 \operatorname{ctg} \alpha, \text{ бунда } \pi < \alpha < 2\pi.$$

796. Тенгсизлиқни ечинг:

а) $x^2 - 14x + 15 > 0$; в) $3x^2 - 5x - 2 \leq 0$;

б) $x^2 - 3x + 5 \geq 0$; г) $2x^2 - 9x - 3 < 0$.

797. Функциянинг аниқланиш соҳасини топинг:

а) $y = \lg(3x^2 - 4x + 5)$; б) $y = \lg(5x^2 - 8x - 4)$;

в) $f(x) = \sqrt{3x^2 - 4x + 5}$; г) $f(x) = \sqrt{6 + 7x - 3x^2}$.

798. Квадрат тенгламанинг $x_1 = 1 - \sqrt{3}$ ва $x_2 = 1 + \sqrt{3}$ илди-
 лари берилган. Шу квадрат тенгламани ёзинг.

799. $x^2 + 2x - 2 = 0$ тенглама илдиэлари кубларининг йиғиндисини
 топинг.

800. Қандай вектор $y = 2x^3$ параболани $y = 2(x-3)^3$ параболага
 ўтказад?

801. Парабола учининг координаталарини ҳосила ёрдамида топинг:

а) $y = 3x^2 + 6x + 20$; б) $y = 2x^2 - 8x + 5$.

802. $y = -2x^2$ параболадан қуйидаги икки алмаштириш ёрдамида
 ҳосил бўладиган парабола тенгламасини ёзинг: а) Оу ўқдан
 2 марта чўзиш; б) $r(0; 2)$ параллел кўчириш.

803. $y = \frac{1}{2}x^2$ параболадан $r(-2; 3)$ параллел кўчириш ёрдамида
 ҳосил бўладиган парабола тенгламасини ёзинг.

804. Функцияларнинг 220—223-расмларда тасвирланган графиклари
 бўйича қуйидаги саволларга жавоб беринг.

1. Функциянинг ўсиш оралиғи қандай?

2. Функциянинг камайиш оралиғи қандай?

3. Функция максимум ёки минимумга эга бўладиган нуқталарни
 кўрсатинг. Бу нуқталарда функция қандай қийматларни қабул
 қилади?

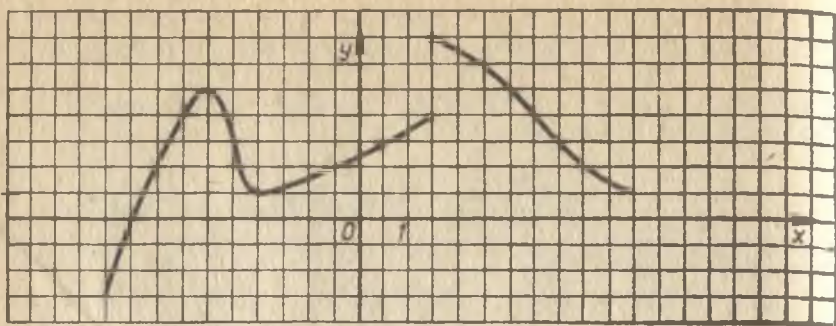
4. Бу функцияларнинг $[-2; 2]$ оралиқдаги энг катта ва энг
 кичик қийматлари қандай?

5. Қандай нуқталарда функция узлуксиз эмас ва функциялар-
 нинг бу нуқталардаги қийматлари қандай?

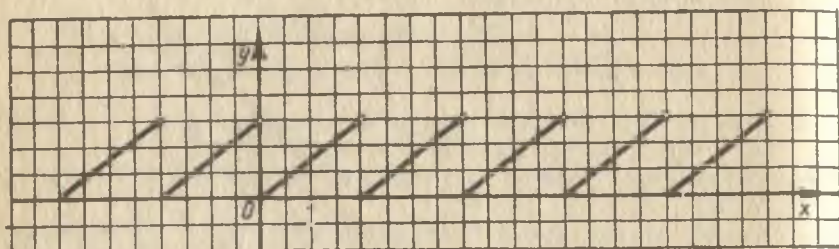
6. Функция қандай оралиқларда узлуксиз?

7. Ҳосила нолга тенг бўладиган нуқталарни кўрсатинг.

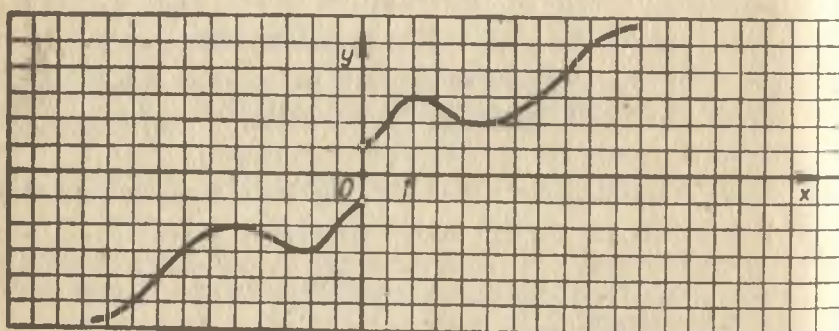
8. Функциялардан қайсилари даври 3 дан кичик даврий функ-
 ция бўла олади, уларнинг энг кичик мусбат даври нимага
 тенг?



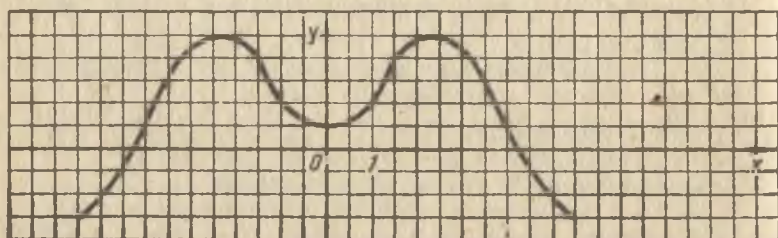
220- расм.



221- расм.



222- расм.



223- расм.

9. Бу функцияларнинг қайси бири жуфт ва қайси бири тоқ функция?

805. Функцияни текширинг ва графигини ясанг:

а) $y = (x-1)^3 - 3(x-1)$; б) $y = \frac{8}{x} + \frac{x}{2}$.

Функцияларнинг графикларини ясанг (806—807):

806. а) $y = 2 \lg(x-2)$; б) $y = 3 \ln\left(x + \frac{1}{2}\right) + 1$;

в) $x = \frac{3}{2} \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$; г) $y = \frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{\sin x \cdot \cos x}$;

д) $y = 2 \frac{5-x}{x-3}$.

807. а) $y = \{1,5x - 1\}$; б) $y = \{1,5(x-1)\}$;

в) $y = |\sin x \cdot \operatorname{ctg} x|$; г) $y = \left| \frac{\operatorname{ctg} x}{1} \right| \cdot \left| \frac{1}{\sin x} \right|$.

808. Функциянинг энг кичик мусбат даврини топинг:

а) $f(x) = 3\{x + 0,25\} + 1$; б) $p(x) = \sin 1,5x + 5 \cos 0,75x$;

в) $q(x) = \{1 - 2x\}$.

Функциянинг жуфтлигини (тоқлигини) текширинг (808—810).

809. а) $y = \cos \frac{x^2-x}{x^2-1}$; б) $y = \sin \frac{x^3-x}{x^2-1}$; в) $y = x^3 \sin x$;

г) $y = x^3 - x^2$.

810. а) $y = \sin \frac{x^3-x^2}{x-1}$; б) $y = \operatorname{tg} \frac{3x^3-x^2}{3x-1}$;

в) $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$; г) $y = \lg \left| \frac{3+x}{3-x} \right|$.

811*. Лимитни ҳисобланг:

а) $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}$; б) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{8}} \frac{\cos 4x}{\sin 2x - \cos 2x}$.

812*. $y = \sin x$ функция ҳар қандай нуқтада узлуксизлигини исботланг.

813. Функциянинг ҳосиласини топинг:

а) $y = 2x^6 - 3,8x^5 + x - \sqrt{2}$; б) $y = \frac{3-2x}{x+1}$;

в) $y = (x+1) \sin x - x \cos^2 x$; г) $y = 2 \operatorname{tg} x \cdot \lg x$; д) $y = \frac{45x^4 - 30x^3}{(8x^2 - 3)^2}$.

814. M нуқтанинг ўтган йўли (s метр, t минут) вақтга боғлиқ ҳолда $s = 2t^3 + 6t - 1$ формула билан ифодаланади. M нуқта-
нинг $t = 3$ пайтдаги тезлиги ва тезланишини топинг.

815. Функциянинг R да ўсишини (ёки камайишини) исботланг:

а) $y = -0,2x^5 + 0,5x^4 - x^3 + x^2 - x$;

- б) $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 21$;
 в) $y = 0,8x^5 - x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 4x$.
816. $y = x^2 + 2x$ функциянинг графигига шу графикнинг абциссалар ўқи билан кесишиш нуқталарида ва $x = 1,5$ абсциссали нуқтада уринма тенгламасини ёзинг.
817. $f(x)$ функцияга тескари функцияни формула билан беринг. Тескари функциянинг аниқланиши соҳасини ва қийматлари соҳасини кўрсатинг. Тескари функциянинг ўсиши ёки камайишини аниқланг:
- а) $f(x) = \frac{2x-3}{3}$; б) $f(x) = \frac{1}{x-1}$; в) $f(x) = \frac{2x+1}{3-x}$;
 г) $f(x) = 2^x + 1$; д) $f(x) = \log_3(x+2)$; е) $f(x) = \lg \frac{1+x}{1-x}$.
- Ўсиш (камайиш) оралиқларини ҳамда максимум ва минимум нуқталарини топинг (818 — 820).
818. а) $y = \frac{2x+1}{1-3x}$; б) $y = \frac{2x-1}{2-4x}$; в) $y = xe^x$;
 г) $y = 2^{x^2-4x}$.
819. а) $y = \frac{6 \ln x}{x}$; б) $y = x - \ln x$; в) $y = \frac{e^x}{x+1}$;
 г) $y = 2 \sin x + 3 \cos x$.
820. а) $y = x \ln x$; б) $y = \cos 2x - 2 \cos x$.
821. Функциянинг R даги энг катта қийматини топинг:
 а) $y = 18x^2 + 8x^3 - 3x^4$; б) $y = -2x^2 + 3x^2 - 6$.
822. Қандай мусбат сон ўзига тескари сонга қўшилганда энг кичик йиғиндини беради?
823. Ҳажми 72 см^3 , асосининг томонлари $1:2$ нисбатда бўлган қопқоқли яшик тайёрлаш керак. Яшикнинг тўла сирти энг кичик бўлиши учун барча томонларининг ўлчовлари қандай бўлиши керак?
824. Айланада A нуқта берилган. BC ватарни A нуқтада уринмага параллел қилиб шундай ўтказиш керакки, ABC учбурчакнинг юзи энг катта бўлсин.
825. Юзи берилган тенг ёнли учбурчакка ички чизилган доиранинг радиуси энг катта бўлиши учун учбурчакнинг учдаги бурчак қандай бўлиши керак?
826. Мунтазам уч бурчакли призманинг ҳажми V га тенг. Призманинг тўла сирти энг кичик бўлиши учун асосининг томонини қандай бўлиши керак?
827. Ясовчиси $l = 20 \text{ см}$ бўлган конус шаклида воронка яшаш керак. Воронканинг ҳажми энг катта бўлиши учун унинг баландлиги қандай бўлиши керак?
828. R радиусли шарга ички чизиш мумкин бўлган энг катта ҳажмли цилиндрнинг баландлигини топинг.

829. Асоснинг радиуси R га ва баландлиги H га тенг бўлган конус ичига тўлиқ сирти энг катта бўлган цилиндр чизиш керак. Цилиндрнинг r радиусини топинг.
830. Берилган цилиндрга энг кичик ҳажмли ташқи конус чизинг. (Цилиндр ва конуснинг асослари устма-уст тушади.)
831. Радиуси R га тенг бўлган шарга ташқи чизилган энг кичик ҳажмли конуснинг H баландлигини топинг.
832. R радиусли ярим шарга ташқи чизилган энг кичик ҳажмли конуснинг H баландлигини топинг, бунда конус асосининг маркази шар маркази билан устма-уст тушсин.
833. Диаметри 40 см бўлган ёўладан кесими асоси b га ва баландлиги h га тенг бўлган тўғри тўртбурчак шаклидаги тўсин тайёрлаш керак. Тўсиннинг мустаҳкамлиги bh^2 га пропорционал. b ва h нинг қандай қийматларида тўсиннинг мустаҳкамлиги энг катта бўлади?
834. Дераза ярим доира билан тугалланган тўғри тўртбурчак шаклида. Берилган периметрда деразанинг энг катта юзга эга бўладиган ўлчовларини топинг.
835. Икки кўчадан чорраҳа томон ўзгармас 40 км/соат ва 50 км/соат тезлик билан икки машина келмоқда. Кўчалар тўғри бурчак остида кесишади деб ва вақтнинг бирор momentiда машиналар чорраҳадан мос равишда 2 км ва 3 км узоқликда бўлганини билган ҳолда, қанча вақтдан кейин машиналар орасидаги масофа энг қисқа бўлишини аниқланг.
836. Баландлиги $1,4 \text{ м}$ бўлган картина (расм) деворга шундай осилганки, унинг остки қирраси кузатувининг кўзидан $1,8 \text{ м}$ юқорида туради. Кузатувчи расмни томоша қилиши учун, яъни кузатувчининг вертикал бўйича кўриш бурчаги энг катта бўлиши учун у девордан қанча узоқликда туриши керак?
837. Баландлиги 4 м бўлган ҳайкал баландлиги $5,6 \text{ м}$ колонна устида турибди. Бўйи $1,6 \text{ м}$ (яъни кўз сатҳигача баландлиги) бўлган одам ҳайкални энг катта бурчак остида кўриши учун қандай масофада туриши керак?
838. Учта A, B, C пункт бир тўғри чизикда ётмайди: $\angle ABC = 60^\circ$. Бир вақтда A нуқтадан автомобиль, B нуқтадан поезд йўлга чиқди. Автомобиль B га қараб соатига 80 км тезлик билан, поезд эса C га қараб соатига 50 км тезлик билан ҳаракат қилади. Агар $AB = 200 \text{ км}$ бўлса, вақтнинг қандай momentiда (ҳаракат бошланишидан) автомобиль билан поезд орасидаги масофа энг кичик бўлади?
839. Саҳифада текст 384 см^2 юзни эгаллаши керак. Устки ва пастки ҳошиялар 3 см дан, ўнг ва чап ҳошиялар 2 см дан бўлиши керак. Агар фақат қоғозни тежаш эътиборга олинса, у ҳолда саҳифанинг энг қўл келадиган ўлчовлари қандай бўлиши керак?
840. Пароход учун ёқилғига сарфланадиган харажат икки қисмга бўлинади. Уларнинг биринчиси тезликка боғлиқ бўлмай, соа-

тига 480 сўмга тенг. Иккинчи қисм эса тезликнинг кубига пропорционал, бунда 10 км/соат тезликда харажатнинг бу қисми соатига 30 сўмга тенг. Қандай тезликда 1 километр йўлга қилинадиган умумий харажат миқдори энг кам бўлишини топиш талаб қилинади.

841. Тенгсизлиқни ечинг.

$$\text{а) } \frac{(x-1)(x-2)}{x-3} > 0; \quad \text{б) } \frac{(x-3)(x-5)}{x-2} < 0;$$

$$\text{в) } \frac{x^2-2x-3}{x^2-2x+8} \geq 0; \quad \text{г) } \frac{x^2+5x+4}{x^2-5x-6} < 0;$$

$$\text{д) } (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) < 0;$$

$$\text{е) } x^4 - 3x^2 + 2 \leq 0.$$

Бошланғич функцияни топинг (842 — 944).

$$842. \text{ а) } f(x) = x + \frac{1}{x}; \quad \text{б) } f(x) = \sqrt{2x};$$

$$\text{в) } f(x) = 2 \sin x + \cos 3x; \quad \text{г) } f(x) = x^{-5} + x^{-2}.$$

$$843. \text{ а) } f(x) = \frac{3}{x+4}; \quad \text{б) } f(x) = \frac{2}{3 \sin^2 2x};$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{3}{\cos^2 2x}; \quad \text{г) } f(x) = 2x + 3x^3.$$

$$844. \text{ а) } f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x-1}; \quad \text{б) } f(x) = x^3 + \sqrt{2}.$$

845. Ҳосиласи $2x-3$ га ва 2 нуқтада қиймати 2 га тенг бўлган функцияни топинг.

846. Моддий нуқта координата тўғри чизиғи бўйича $v(t) = \sin t \cos t$ тезлик билан ҳаракат қилмоқда. Агар $t = \frac{\pi}{4}$ да нуқтанинг координатаси 3 га тенг бўлса, нуқта ҳаракатининг тенгламасини топинг.

847. Агар эгри чизиққа x нуқтада уринманинг бурчак коэффициенти $3x^2$ га тенг бўлса, (2; 3) нуқтадан ўтувчи эгри чизиқ тенгламасини топинг.

848. Ҳисобланг:

$$\text{а) } \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos x \, dx; \quad \text{б) } \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{12}} (\cos 3x - \sin 3x) \, dx.$$

849. Қуйидаги функциялар графиклари билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг:

а) $y = 0,5x^2 - 3x + 2$ ва $y = x - 4$;

б) $y = x^2 - 5x + 4$ ва $y = 2x - 2$;

в) $y = 8 - \frac{1}{2}x^2$ ва $y = 3,5$;

г) $y = x^2 - 3x + 4$ ва $y = x + 1$;

д) $y = \frac{5}{x}$ ва $y = 6 - x$.

850. Тенгсизликларни исботланг:

а) $m + \frac{4}{m} \geq 4, m > 0$; в) $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2, a > 0, b > 0$;

б) $\frac{2m}{1+m^2} \leq 1$; г) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x \geq 2, 0 < x < \frac{\pi}{2}$.

д) $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\alpha}{4}\right) \sin\left(\frac{5\pi}{12} - \frac{\alpha}{4}\right)} + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \leq 2\sqrt{3}$;

е) $(1 + \sin \varphi + \cos \varphi)(1 - \sin \varphi + \cos \varphi)(1 + \sin \varphi - \cos \varphi) \times$
 $\times (\sin \varphi + \cos \varphi - 1) \leq 1$.

Тенгламани ечинг (851—854).

851. а) $\frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} - \frac{1-x}{1-\sqrt{x}} = 3$; б) $\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{2+x}} + \sqrt{2+x} = 0$

852. а) $\operatorname{tg} 5x \cdot \cos x = 0$; б) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} \cos x = 0$;

в) $\sin 2x + \sin 3x = 0$; г) $\sin x + \cos 2x = 0$.

853. а) $3 \sin 3x + 4 \cos 3x = -5$; б) $5 \sin 2x - 12 \cos 2x = 13$;

в) $4 \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 12 \sin^2\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 11$;

г) $4 \sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) + 7 \cos^2\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 7 \frac{1}{4}$.

854. а) $|2x - 5| = |7 - 2x|$; б) $|x - 2| = 2|3 - x|$;

в) $x^2 + |x| - 2 = 0$; г) $x^2 - 3|x| + 2 = 0$.

Тенгсизликни ечинг (855—856).

855. а) $|3x - 2,5| \geq 2$; б) $|5 - 2x| < 1$;

в) $x^2 - 4|x| + 3 > 0$; г) $2x^2 - 5|x| + 3 \geq 0$.

856. а) $\frac{x+2}{x+3} > 3$; б) $\frac{1-3x}{1-2x} < 1$; в) $\frac{3x}{2+x} > 2$;

г) $\frac{3-x}{-} = \frac{2}{3}$.

Тенгламалар системасини ечинг (857 — 859).

$$857. \text{ а) } \begin{cases} x - 3y = 1, \\ 2x + y = 4\frac{1}{3}; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x + 3y = -1, \\ 5x + 4y = 1; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} 7x - 2y = -1, \\ 3x - 5y = 12. \end{cases}$$

$$858. \text{ а) } \begin{cases} 3x - 9y = 12, \\ 4x - 12y = 16; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x + 6y = 5, \\ x + 3y = 2,5; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} 4x - 6y = 8, \\ x - 1,5y = 2. \end{cases}$$

$$859. \text{ а) } \begin{cases} x + 2y = 7, \\ 2x + 4y = 9; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 5x - 8y = 0, \\ x - 1,6y = 1; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} x + y = 7, \\ 2x + 2y = 11. \end{cases}$$

860. а параметрнинг қандай қийматида

$$\text{а) } \begin{cases} ax - 3y = 4, \\ x - y = \frac{4}{3}; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x + ay = 2, \\ 3x - 2y = 6; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} x + 1,5y = 4, \\ 4x + 6y = a \end{cases}$$

система чексиз кўп ечимга эга?

861. а параметрнинг қандай қийматида

$$\text{а) } \begin{cases} 2x + ay = 8, \\ 3x - 5y = 6; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x - y = 3, \\ ax + 2y = -6; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} x - y = 2, \\ 2x - 2y = a \end{cases}$$

система ечимга эга эмас?

862. а параметрнинг система ечимга эга бўладиган қийматини кўрсатиш мумкинми:

$$\text{а) } \begin{cases} x - 5y = 7 \\ ay + y = -3; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x + 2y = a, \\ 2x + 4y = 5; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} 3x - 2y = 6, \\ ax + y = -3? \end{cases}$$

Тенгламалар системасини ечинг (863 — 867).

$$863. \text{ а) } \begin{cases} x + y + z = -2, \\ x - y + 2z = -7, \\ 2x + 3y - z = 2; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x + 2y - z = 7, \\ 2x - y + z = 2, \\ 3x - 5y + 2z = -7; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x - y - z = 5, \\ 2x + y + 3z = 3, \\ x - 4y - 6z = 7; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} x - 3y + z = 7, \\ 3x + y - 2z = 3, \\ x + 7y - 4z = 0. \end{cases}$$

$$864. \text{ а) } \begin{cases} \frac{x}{y} = 2, \\ (x - 1)^2 + y^2 = 1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{13}{6}, \\ x + y = 5. \end{cases}$$

$$865. \text{ а) } \begin{cases} (x + 0,2)^2 + (y + 0,3)^2 = 1, \\ x + y = 0,9; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x - y = 1, \\ x^2 - y^2 = 7; \end{cases}$$

$$\text{в)} \begin{cases} \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1} = \frac{1}{x}, \\ y^2 - x - 5 = 0; \end{cases}$$

$$\text{г)} \begin{cases} x^3 + y^3 = 35, \\ x + y = 5. \end{cases}$$

$$866. \text{ а)} \begin{cases} (x-y)(x^2-y^2) = 45, \\ x + y = 5; \end{cases}$$

$$\text{б)} \begin{cases} x^2 y^3 = 16, \\ x^3 y^3 = 2; \end{cases}$$

$$\text{в)} \begin{cases} x^2 y^3 + x^3 y^3 = 12, \\ x^2 y^3 - x^3 y^3 = 4; \end{cases}$$

$$\text{г)} \begin{cases} x^{-1} + y^{-1} = 5, \\ x^{-2} + y^{-2} = 13. \end{cases}$$

$$867. \text{ а)} \begin{cases} x^3 + y^3 = 7, \\ x^3 y^3 = -8; \end{cases}$$

$$\text{б)} \begin{cases} x^3 + y^3 = 9, \\ xy = 2; \end{cases}$$

$$\text{в)} \begin{cases} x^3 + y^4 = 5, \\ xy^2 = 2; \end{cases}$$

$$\text{г)} \begin{cases} x^2 - xy = 28, \\ y^2 - xy = -12. \end{cases}$$

868. Тенгсизликлар системасини ечинг:

$$\text{а)} \begin{cases} 2(3x-1) < 3(4x+1) + 16, \\ 4(2+x) < 3x+8; \end{cases}$$

$$\text{б)} \begin{cases} 2x > 3 - \frac{13x-2}{11}; \\ \frac{x}{6} + \frac{2}{3}(x-7) < \frac{3x-20}{9}; \end{cases}$$

$$\text{в)} \begin{cases} \frac{x+1}{2} + \frac{x}{3} \geq \frac{x-1}{4} - x - 2, \\ 0,5x < 2 - x; \end{cases}$$

$$\text{г)} \begin{cases} x - \frac{x+1}{2} - \frac{x+4}{3} \leq \frac{x-1}{4} - 2, \\ 1,5x - 2,5 < x. \end{cases}$$

869. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\text{а)} \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 14, \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 4; \end{cases}$$

$$\text{б)} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = -6, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 2, \\ 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$$

870. Истаган икки парабола ўхшаш эканини исботланг.

ҲАҚИҚИЙ СОНЛАР

Математик анализ XVII асрда юзага келди. Аммо ўн тўққизинчи асрнинг охирида О. Коши (қ. 137-бет) лимитлар назариясини яратганидан кейин ва немис математиклари Р. Дедекинд (1831 — 1916), К. Вейерштрасс (1815 — 1897) ва Г. Кантор (1845 — 1918) лар ҳақиқий сонлар назариясининг бир неча формасини берганидан кейин асосланди.

Сонлар ҳақидаги дастлабки тасаввурлар секин-аста амалиёт таъсирида вужудга кела бошлади. Сонлардан қадим замонлардаёқ санашда ва миқдорларни ўлчашда фойдаланишар эди.

«Берилган чекли тўплам неча элементдан иборат?» деган саволга жавоб ҳар доим ё натурал сон, ёки ноль билан ифодаланади. Бинобарин барча номанфий бутун сонлар тўплами

$$\{0; 1; 2; 3; \dots\}$$

санашнинг ҳамма талабларига жавоб беради.

Миқдорларни ўлчашда иш бошқачароқ. Икки нуқта орасидаги масофа 3,5 километрга тенг бўлиши, хонанинг юзи 16,45 квадрат метрга тенг бўлиши мумкин ва ҳ. к.

Миқдорлар турли хил бўлади. Иккита мисол келтирамыз.

1. Нуқталар орасидаги масофалар, кесмаларнинг, синиқ ва эгри чизиқларнинг узунликлари бир хил миқдорлар. Уларни сантиметрларда, метрларда, километрларда ва ҳ. к. ларда ифодалашади.

2. Вақт оралиқларининг давомлилиги ҳам бир хил миқдорлар. Уларни секундларда, минутларда, соатлар ва ҳ. к. ларда ифодалашади.

Бир хил миқдорларни ўзаро таққослаш ва қўйиш мумкин:

$$1 \text{ м} > 90 \text{ см}; \quad 350 \text{ м} + 650 \text{ м} = 1 \text{ км};$$

$$3000 \text{ с} < 1 \text{ соат}; \quad 2 \text{ соат} + 3 \text{ соат} = 5 \text{ соат},$$

$$1 \text{ кг} > 720 \text{ г}; \quad 500 \text{ г} + 500 \text{ г} = 1 \text{ кг}.$$

Аммо қайси бири катта: 1 метрми ёки 1 соатми, деб сўраш маъносиз ва 1 метр билан 30 секундни қўшиб бўлмайди. Вақт оралиқлари давомлилиги ва масофалар ҳар хил миқдорлар. Ҳар хил миқдорларни қўйиш ва таққослаш мумкин эмас.

Миқдорларни мусбат сонга ва нолга кўпайтириш мумкин. а миқдорни x номанфий сонга кўпайтириш натижасида шу хилдаги $b = xa$ миқдор ҳосил бўлади. Бир нечта мисол келтирамиз:

$$5 \cdot 20 \text{ см} = 100 \text{ см} = 1 \text{ м};$$

$$0,01 \cdot 20 \text{ см} = 0,2 \text{ см} = 2 \text{ мм};$$

$$0 \cdot 20 \text{ см} = 0 \text{ см}.$$

Бирор e миқдорни ўлчов бирлиги деб олиб, унинг ёрдамида шу турдаги ихтиёрий a миқдорни ўлчаш мумкин. Ўлчаш натижасида

$$a = xe$$

тенгликни ҳосил қиламиз, бунда x — сон.

Бу x сон a миқдорнинг e ўлчов бирлигидаги сон қиймати дейилади. Миқдорнинг сон қиймати ўлчов бирлигини танлашга боғлиқ. Агар, масалан, хонанинг бўйи 1 м ўлчов бирлигида ($e = 1$ м) 5,6 сон қийматга эга бўлса, худди шу узунлик 1 см ўлчов бирлигида ($e = 1$ см) 560 сон қийматга эга бўлади.

a ва b миқдорларнинг сон қийматлари бир хил e ўлчов бирлигида x ва y га тенг, яъни

$$a = xe, \quad b = ye$$

бўлсин. Агар $b \neq 0$ бўлса, y ҳолда $\frac{x}{y}$ нисбатни a миқдорнинг b миқдорга нисбати деб аташади.

Миқдорлар ҳақидаги энг содда маълумотлар шундай. Миқдор тушунчасининг келтирилган тавсифи сон тушунчасига асосланди. Аммо тарихий йўл бошқача бўлган: мусбат ҳақиқий сонлар миқдорларнинг (аниқроғи кесмалар узунликларининг) нисбати сифатида пайдо бўлган.

Бирлик квадрат диагонаlining унинг томони билан умумий ўлчовга эга эмаслиги кашф этилгандан кейин кесмаларнинг нисбати ҳар доим ҳам фақат натурал сон билан эмас, балки рационал сон билан ҳам ифодаланавермаслиги равшан бўлиб қолди. Ҳар бир кесманинг сон қиймати белгиланган ўлчов бирлигида аниқланган бўлиши учун янги сонларни — иррационал сонларни киритиш талаб қилинди.

Миқдорларни амалий ўлчашларнинг ҳаммаси тақрибийлик харақтерига эга. Уларнинг натижаларини талаб қилинган аниқликда рационал касрлар ёрдамида ёки анча махсус тарзда чекли ўнли касрлар ёрдамида ифодалаш мумкин. Масалан, томони 1 м га тенг квадрат диагонаlinи бир сантиметргача аниқликда ўлчаб, биз унинг узунлиги тақрибан 1,41 м эканини кўрамиз. Бир миллиметргача аниқликда ўлчашда бу узунлик тақрибан 1,414 м га тенг.

Аммо математикада кўпинча амалий ўлчашларнинг тақрибий харақтеридан четга чиқилади. Кесмалар узунликларини ўлчашга кетма-кет назарий ёндошиш чексиз ўнли касрларни ўрганиш заруратини туғдирди. Қуйидаги сонлар худди ана шундай касрлар билан тасвирланади:

$$\frac{2}{3} = 0,666 \dots; 2 = 1,41421356 \dots; = 3,14159265358 \dots$$

Ҳар қандай кесма узунлигининг ўлчов бирлиги учун қабул қилинган кесма узунлигига нисбати ҳар доим чексиз ўнли каср кўринишида тасвирланадиган сон билан ифодаланиши мумкин.

Ҳақиқий сонларнинг тўла назарияси мураккаб ва ўрта мактаб программасига кирмайди. Аммо уни тузишнинг усулларида бири билан биз умумий тарзда танишамиз.

1. Қуйидагилар қабул қилинади:

а) ҳар бир ҳақиқий сонга (унинг ёзилиши сифатида) чексиз ўнли каср мос келади:

$$x = \pm a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots;$$

б) ҳар бир чексиз ўнли каср ҳақиқий соннинг ёзилишидир.

Аммо бунда тўққизларнинг чексиз кетма-кетлиги билан тугайдиган ўнли касрни нолларнинг чексиз кетма-кетлиги билан тугайдиган ўнли каср билан ифодаланувчи соннинг иккинчи хил ёзувига деб ҳисоблаш табиийдир:

$$0,9999 \dots = 1,0000 \dots; 12,76599999 \dots = 12,76600000 \dots$$

Бундай келишувни мисол билан тушунтирамиз:

$$0, (9) = 3 \cdot 0, (3) = 3 \cdot 1/3 = 1.$$

Даврида тўққиз қатнашган ўнли касрларни қарашдан чиқариш билангина ҳақиқий сонлар тўплами билан чексиз ўнли касрлар тўплами орасида бир қийматли мосликка эга бўламиз.

a_0 сони — бу мусбат x соннинг бутун қисми,

$$x - a_0 = 0, a_1 a_2 \dots a_n \dots -$$

x соннинг каср қисми.

$$x_n = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n$$

сонни $x = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n$ сон учун x нинг 10^{-n} гача аниқликда ками билан,

$$x'_n = x_n + 10^{-n}$$

сонни эса x нинг 10^{-n} гача аниқликда ортиғи билан ўнли яқинлашиши дейилади.

Агар x сони манфий, яъни

$$x = -a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots$$

бўлса, у ҳолда

$$x'_n = -a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \text{ ва } x_n = x'_n - 10^{-n}$$

деб олинади.

2. Иккита ҳақиқий сонни таққослаш қондасини киритишади. Агар ақалли битта n да

$$x_n < y_n$$

тенгсизлик бажарилса, таърифга кўра x y дан *кичик* бўлади, бунда x_n ва y_n лар x ва y сонлар учун 10^{-n} гача аниқликда ками билан олинган ўнли яқинлашишлар. (Биз чекли ўнли касрларни таққослаш қондаси аввалдан таниш эканлигидан фойдаландик.)

3. Ҳақиқий сонлар устида арифметик амалларни аниқлашади. (Бунда ҳам амаллар чекли ўнли касрлар учун аниқланганлигидан фойдаланилади.)

Икки x ва y ҳақиқий соннинг *йиғиндиси* ($x + y$ кўринишда белгиланади) деб шундай ҳақиқий z сонни айтиладики, ҳар қандай n да

$$x_n + y_n \leq x + y < x'_n + y'_n$$

тенгсизликлар бажарилади. Математик анализ курсларида бундай соннинг мавжудлиги ва ягона усулда аниқланиши исботланади.

Шунга ўхшаш, иккита номанфий x ва y соннинг *кўпайтмаси* деб (xy кўринишида белгиланади) шундай z сонни айтиладики, ҳар қандай n да

$$x_n y_n \leq xy < x'_n y'_n$$

тенгсизликлар бажарилади.

Бундай сон мавжуд ва бир қийматли аниқланади. Ҳар хил ишорали ҳақиқий сонлар учун, номанфий $|x|$ ва $|y|$ сонларнинг кўпайтмаси аниқланганлигидан фойдаланиб, $xy = -|x| |y|$ деб олишади; бошқа ҳолларда $xy = |x| |y|$. (Одатдагидек, $a_0, a_1 a_2 \dots a_n$ ва $-a_0, a_1 a_2 \dots a_n$ сонлардан ҳар бирининг модули деб $a_0, a_1 a_2 \dots a_n$ сонни аташади.)

Айириш қўшишга тескари амал сифатида аниқланади: x ва y сонларнинг $x - y$ *айирмаси* деб шундай z сонни айтиладики, бу z сон $y + z = x$ тенгликни қаноатлантиради, бўлиш эса кўпайтиришга тескари амал сифатида аниқланади: $x : y$ *бўлинма* деб $yz = x$ тенгликни қаноатлантирувчи z сонни айтилади.

4. 3-п. да кўрсатилган усул билан аниқланган тенгсизлик ва арифметик амаллар рационал сонлар тўпламида уларга тегишли бўлган асосий хоссаларни сақлашлари кўрсатилади. Бу хоссалар рўйхати «Такрорлаш учун материаллар» да келтирилган.

дан
 $\frac{\pi}{2} +$
 π
 $2x > 0;$
 $2x = 0;$
 функция-

1606.

1. а) $\frac{3\pi}{4}$; в) $\frac{25\pi}{18}$. 2. а) 120° ; в) $\frac{180^\circ}{\pi}$. 3. 0,2967; в) 2,4260. 4. а) 32° ; в) 180° .
 6. а) $-\frac{\pi}{5}$; б) $-23,8\pi$. 7. а) 2; в) $\frac{8\pi}{3}$. 8. а) 1; в) $\frac{16\pi}{3}$. 9. б) $\frac{\pi}{360}$ рад/мин;
 $\frac{\pi}{30}$ рад/мин. 2 π рад/мин. 11. а) Мумкин; в) йўқ. 12. а) Йўқ; в) мумкин. 13. а) πn ,
 $n \in \mathbb{Z}$; в) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; д) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. 14. а) πn , $n \in \mathbb{Z}$; в) д) $\frac{\pi}{4} + \pi n$,
 $n \in \mathbb{Z}$. 16. а) 0; 1; 0; аниқланмаган; в) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 1; 1. 17. а) 0,1889; 0,9820;
 0,1923; 5,2000; в) 0,9800; 0,1994; 4,9131; 0,2035. 18. а) 0,3256; 0,9455; 0,3443; 2,9044;
 в) 0,2147; 0,9767; 0,2199; 4,5483. 19. а) Ҳаммаси плюс; в) минус, плюс, минус, ми-
 нус. 20. а) Минус; в) минус. 21. а) 0,5; в) $-0,5$. 22. а) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$; в) $\sqrt{3}$. 26. а), в)
 Бўла олади. 27. а) $\cos \alpha = \frac{4}{5}$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$; $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{4}{3}$; 4) $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$; $\cos \alpha =$
 $= -\frac{5}{13}$; $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{5}{12}$; д) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$; $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$; $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$. 28. а)
 $-\frac{5}{12}$. 30. а) 0; в) 1. 31. а) $\sin \beta - \cos \beta$; в) -1 . 32. а) $\cos^2 t$; в) 0. 33. а)
 $-\cos \frac{\pi}{6}$; в) $-\operatorname{ctg} \frac{\pi}{6}$; д) $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{18}$; ж) $-\sin \frac{\pi}{6}$. 35. а) $2 \operatorname{tg} y$; в) 1. 36. а) 5. 37.
 лан а) 0,5. 38. а) $\sqrt{3}$; в) 1. 39. а) $-0,28$; б) -1 . 41. а) $11\frac{7}{8}$; $\frac{25}{92}$. 42. а)
 2α ; в) $\sqrt{3} \cos \alpha$. 44. а) 0,96; б) 0,28; в) $\frac{24}{7}$; г) $\frac{7}{24}$. 47. а) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; в) 1. 48.
 бўлса $\sqrt{3} \cos 10^\circ$; в) $\sqrt{2} \sin \frac{5\pi}{36}$. 49. а) 0; в) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 50. а) $\cos \varphi$; в) $\sqrt{3}$. 52. а)
 деб оли $\frac{5}{\sqrt{26}}$; -5 . 53. а) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$; в) $\sqrt{2}-1$; д) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} =$
 Агар ақа $\sqrt{2}$. 55. а) $\sin^2 \gamma$; б) $\cos^2 \varphi$; в) 0, г) $\frac{1}{1+\sin \alpha}$. 56. а)

2) $\sqrt{2} \cos \frac{\Phi}{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2} \right)$; в) $2 \sqrt{2} \sin \frac{\Phi}{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2} \right)$. 60. а) 2; -2; 10, 1;

$2t + \frac{1}{2t}$; в) 0; 0; $2 \sin 4$; $-2 \sin 4x$. 61. а) 0; 3; 2; t^2 . 62. а) R; в) R; д) R;

ж) $\frac{\pi}{2} + \pi n$ кўринишдаги сонлардан бошқа барча ҳақиқий сонлар тўплами, бунда $n \in \mathbb{Z}$. 63. а) 1; в) $[0; \infty)$; д) $[0; 1]$; ж) $\mathbb{Z}_0$ (барча номанфий бутун сонлар)

тўплами. 65. б) $D(S) = [0; a\sqrt{2}]$, $S(x) = \begin{cases} 0 < x \leq \frac{a\sqrt{2}}{2} \text{ да } a^2 - x^2, \\ \frac{a\sqrt{2}}{2} < x < a\sqrt{2} \text{ да } (a\sqrt{2} - x)^2. \end{cases}$

69. а) $(-\infty; \infty)$ да камаяди; в) $(-\infty; 0]$ да ўсади; $[0; \infty)$ да камаяди. 70. а) $(-\infty; 0)$ ва $(0; \infty)$ да камаяди; в) $[0; \infty)$ да ўсади. 76. а) Тоқ; в) жуфт. 77. а) Тоқ эмас, жуфт эмас; в) жуфт. 82. а) R да ўсади; в) $(-\infty; 1,5]$ да камаяди, $[1,5; \infty)$ да ўсади; 1,5 нуқтада минимум. 83. а) $(-\infty; 0]$ ва $[0; \infty)$ да камаяди; экстремумлари мавжуд эмас; в) $(-\infty; 0)$ да ўсади, $(0; \infty)$ да камаяди, экстремумлари мавжуд эмас. 84. а) $(-\infty; 0]$ да камаяди, $[0; \infty)$ да ўсади; 0 нуқтада минимумга эга; б) $(-\infty; -1]$ да ва $[0; 1]$ да камаяди; $[-1; 0]$ да ва $[1; \infty)$ да ўсади. Кўрсатма. f функция жуфт функция бўлгани сабабли текширишни $x \geq 0$ лар учун ўтказиш етарли; шундай x ларда: $f(x_2) - f(x_1) = (x_2^2 - x_1^2)(x_2^2 + x_1^2 - 2)$ ва агар $x_2 > x_1$ бўлса, у ҳолда $x_2^2 - x_1^2 > 0$, шу сабабли $x_2^2 + x_1^2 - 2 > 0$ да $f(x_2) > f(x_1)$; бундан f функция $[1; \infty)$ оралиқда ўсади (чунки $x_2 > x_1 \geq 1$ да $x_2^2 + x_1^2 - 2 > 0$) ва $[0; 1]$ оралиқда камаяди (чунки $0 \leq x_1 < x_2 < 1$ да $x_2^2 + x_1^2 - 2 < 0$); в) $(-\infty; \infty)$ да ўсади; г) $(-\infty; -1]$ ва $[1; \infty)$ оралиқларда ўсади, $[-1; 1]$ оралиқда камаяди. Кўрсатма. f тоқ функция бўлгани сабабли текширишни $x \geq 0$ лар учун ўтказиш етарли, шундай x ларда: $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 - 3)$ ва агар $x_2 > x_1$ бўлса, у ҳолда $x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 - 3 > 0$ да $f(x_2) > f(x_1)$; бундан f $[1; \infty)$ оралиқда ўсади (чунки $x_2 > x_1 \geq 1$ да $x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 - 3 > 0$) ва $[0; 1]$ оралиқда камаяди (чунки $0 \leq x_1 < x_2 < 1$ да $x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 - 3 < 0$); f нинг тоқ эканини ҳисобга олиб, f $(-\infty; -1]$ оралиқда ўсувчи, $[-1; 0]$ оралиқда камаювчи ва демек, $[-1; 1]$ оралиқда ҳам камаювчи эканини топамиз. 85. а) Даврий; в) даврий эмас.

86. а) $\sin 45^\circ$; в) $-\operatorname{ctg} 3^\circ$; д) $-\cos 5^\circ$; ж) $-\operatorname{ctg} \frac{\pi}{8}$. 87. а) π ; в) $\frac{\pi}{2}$; д) 0 дан

фарқли ҳар қандай сон. 88. а) π ; в) $\frac{\pi}{4}$; 89. а) $\frac{2\pi}{3}$; в) 2π . 91. Йўқ. 92. $\frac{\pi}{2} +$

$+ 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ кўринишдаги сонлардан ташқари барча сонлар тўплами; в) R.

93. а) $[-1; 1]$; в) $[0; 1]$. 94. а) $(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$ оралиқларда $\sin 2x > 0$;

$(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$ оралиқларда $\sin 2x < 0$; $x = \frac{\pi n}{2}$; $n \in \mathbb{Z}$ да $\sin 2x = 0$;

в) ноллари мавжуд эмас, ишоралари ўзгармас оралиқлари $f(x) = \sin x$ функция-

ники каби. 95. а) $\sin(-30^\circ)$; $\sin 170^\circ$; $\sin 20^\circ$; $\sin(-250^\circ)$; $\sin 100^\circ$. 96. а) $\left[-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}; \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}\right]$, $n \in \mathbb{Z}$ оралиқларда ўсади; $\left[\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}; \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi n}{3}\right]$, $n \in \mathbb{Z}$ оралиқларда камаяди; в) $\left[-\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$ оралиқларда камаяди; $\left[\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{3\pi}{4} + \pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$ оралиқларда ўсади. 98. а) $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$ ва $x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; в) $\left[-\frac{4\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$. 100. а) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ кўринишидаги сонлардан ташқари барча ҳақиқий сонлар тўплами; в) R . 101. а) $[-1; 1]$; в) $[1; 2]$. 102. а) $\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}; \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}\right)$, $n \in \mathbb{Z}$ да $\cos x > 0$; $\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}; \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi n}{3}\right)$, $n \in \mathbb{Z}$ да $\cos 3x < 0$; $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$ да $\cos 3x = 0$; в) ноллар мавжуд эмас, ишора ўзгармас оралиқлари $f(x) = \cos x$ функцияники каби. 103. б) $\cos 3$; $\cos \frac{5\pi}{4}$; $\cos \frac{8\pi}{3}$; $\cos 1,2$; $\cos(-1)$; $\cos(-0,1)$. 104. а) $\left[\frac{2\pi n}{3}; \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}\right]$, $n \in \mathbb{Z}$ да ўсади; $\left[-\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}; \frac{2\pi n}{3}\right]$, $n \in \mathbb{Z}$ да камаяди; в) $[-3\pi + 6\pi n; 6\pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$ да ўсади; $[6\pi n; 3\pi + 6\pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$ да камаяди. 105. а) $t = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; в) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n < t < \frac{7\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. 106. а) $x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; в) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n < t < \frac{7\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. 108. а) $x \neq \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; в) $x \neq \frac{\pi n}{6}$, $n \in \mathbb{Z}$. 109. а) R ; в) $(-\infty; 0]$. 110. а) $\left(\frac{\pi n}{3}; \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}\right)$, $n \in \mathbb{Z}$ да $\operatorname{tg} 3x > 0$; $\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}; \frac{\pi n}{3}\right)$, $n \in \mathbb{Z}$ да $\operatorname{tg} 3x < 0$; $x = \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$ да $\operatorname{tg} 3x = 0$; в) $\left(\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{2}(n+1)\right)$, $n \in \mathbb{Z}$ да $\operatorname{tg}^2 x > 0$; $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ да $\operatorname{tg}^2 x = 0$. 111. а) $\operatorname{tg} 100^\circ$; $\operatorname{tg}(-20^\circ)$; $\operatorname{tg} 10^\circ$; $\operatorname{tg} 200^\circ$; $\operatorname{tg}(-110^\circ)$. 112. а) $\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in \mathbb{Z}$ да ўсади; в) $\left(-\frac{3\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$ да камаяди. 113. а) $t = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; в) $-\frac{\pi}{2} + \pi n < t < \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. 114. а) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; в) $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < -\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. 116. а) $x \neq \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; в) $x \neq \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. 117. а) R ; в) $[0; \infty)$. 118. а) $\left(\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in \mathbb{Z}$ да $\operatorname{ctg} 2x > 0$; $\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{2} + \frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in \mathbb{Z}$ да $\operatorname{ctg} 2x < 0$; $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$ да $\operatorname{ctg} 2x = 0$;

- а) $\left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$ ва $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi + \pi n\right)$, $n \in Z$ да $\operatorname{ctg}^2 x > 0$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$ да $\operatorname{ctg}^2 x = 0$. 119. б) $\operatorname{ctg} 6$; $\operatorname{ctg} \left(-\frac{13\pi}{4}\right)$; $\operatorname{ctg} 2$; $\operatorname{ctg} 8$; $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{3}$; $\operatorname{ctg} 4$. 120. а) $\left(\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{2} + \frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in Z$ да камаяди; в) $\left(\frac{3\pi}{4} + 3\pi n; \frac{15\pi}{4} + 3\pi n\right)$, $n \in Z$ да ўсади. 121. а) $t = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$; в) $\frac{\pi}{6} + \pi n < t < \pi + \pi n$, $n \in Z$. 122. а) $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$ в) $\frac{5\pi}{6} + \pi n < x < \pi + \pi n$, $n \in Z$. 124. а) 0; б) $\frac{\pi}{2}$; в) $-\frac{\pi}{2}$; г) $\frac{\pi}{6}$; д) $\frac{\pi}{3}$; ж) $-\frac{\pi}{4}$. 125. а) 0,3072; б) 0,4451; в) 0,3081; г) 0,8949. 126. а) $\frac{\pi}{2}$; б) 0; в) π ; г) $\frac{\pi}{3}$; д) $\frac{2\pi}{3}$; е) $\frac{\pi}{4}$; ж) $\frac{5\pi}{6}$. 127. а) 1,3526; б) 0,05009; в) 0,6554; г) 0,9685. 128. а) 0; б) $-\frac{\pi}{4}$; в) $\frac{\pi}{3}$; г) $\frac{\pi}{6}$; д) $-\frac{\pi}{6}$. 129. а) 0,3403; б) 1,1606; в) $-1,3734$; г) 1,4713. 130. а) $\frac{\pi}{2}$; б) $\frac{\pi}{4}$; в) $\frac{3\pi}{4}$; г) $\frac{\pi}{6}$; д) $\frac{2\pi}{3}$. 131. а) 0,9547; б) 0,1728; в) 0,2147; г) 3,0247. 132. а) Тенг; б) кичик; в) кичик; г) кичик. 133. а) $\frac{\pi}{2}$; б) $\frac{\pi}{2}$; в) $\frac{11\pi}{12}$; г) $-\frac{\pi}{6}$. 134. а) $\frac{\pi}{12}$; б) $\frac{5\pi}{12}$; в) $\frac{\pi}{12}$; г) $\frac{7\pi}{12}$. 135. а) $\frac{\pi}{2}$; б) $\frac{\pi}{2}$; в) 0; г) $\frac{2\pi}{3}$. 141. а) $3\pi - 10$; б) $4\pi - 12$; в) $2 - \pi$; г) $\pi - 3$. 142. а) $\pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$; в) $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$. 143. а) $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$; в) $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$. 144. а) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$; в) $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$. 145. а) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$; в) $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$. 146. а) $(-1)^n x_0 + \pi n$, $n \in Z$, $x_0 = \arcsin(-0,6) \approx -0,6435$; в) $-x_0 + \pi n$, $n \in Z$, $x_0 = \operatorname{arctg} 3,5 \approx 1,2925$. 147. а) $\pm \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$; в) $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$. 148. а) $(-1)^n \pi + 4\pi n$, $n \in Z$; в) $-\frac{\pi}{2} + 3\pi n$, $n \in Z$. 149. а) $\frac{\pi}{4} + (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$; в) πn , $n \in Z$. 150. а) $\frac{\pi}{24} + (-1)^n \frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in Z$; в) $\frac{7\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$. 152. а) $-\frac{4\pi}{3} + 2\pi k < x < -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$; в) $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k < x < -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$. 153. а)

$$-\frac{\pi}{4} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \text{ в) } -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$$

$$154. \text{ а) } -\frac{\pi}{2} + \pi k < x < -\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; \text{ в) } -\frac{\pi}{2} + \pi k < x < -\frac{\pi}{3} + \pi k,$$

$$k \in \mathbb{Z}. 155. \text{ а) } \pi k < x < \frac{2\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; \text{ в) } \frac{\pi}{3} + \pi k < x < \pi + \pi k, k \in \mathbb{Z},$$

$$156. \text{ а) } \frac{\pi}{12} + \pi k < x < \frac{5\pi}{12} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; \text{ в) } -\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$$

$$157. \text{ а) } -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \text{ в) } -\frac{\pi}{4} + \pi k < x < \frac{\pi}{12} + \pi k,$$

$$k \in \mathbb{Z}. 158. \text{ а) } -\frac{3\pi}{2} + 2\pi k < x \leq -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \text{ б) } \frac{\pi}{8} + \pi k < x <$$

$$< \frac{3\pi}{8} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; \text{ в) } (-\infty; \infty); \text{ г) } \frac{\pi}{12} + \pi k < x < \frac{\pi}{6} + \pi k, \frac{5\pi}{12} + \pi k <$$

$$< x < \frac{\pi}{2} + \pi k \text{ ва } \frac{3\pi}{4} + \pi k < x < \frac{5\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \text{ Ечилиши. } x \text{ нинг тенгсиз-}$$

$$\text{лик чап қисмининг аниқланиш соҳасидаги тегишли қийматларида } \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x} =$$

$$= \operatorname{tg} 3x. \text{ Шундай қилиб, } \operatorname{tg} 3x \geq 1 \text{ тенгсизлиكنи ечиш ва ҳосил бўлган тўплам-}$$

$$\text{дан } \frac{\pi}{2} + \pi l, \frac{\pi}{4} + \frac{\pi l}{2}, l \in \mathbb{Z} \text{ кўринишидаги нуқталарни чиқариб ташлаш керак.}$$

$$\text{Тангенслар чизиги ёрдамида } t (t = 3x) \text{ нинг } \operatorname{tg} t \geq 1 \text{ тенгсизлиكنи қаноатланти-}$$

$$\text{рувчи қийматларидан иборат оралиқлардан бирини белгилаймиз: } \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right). \text{ Тан-}$$

$$\text{генснинг даврийлигидан фойдаланиб } \frac{\pi}{4} + \pi n \leq 3x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \text{ ни ҳо-}$$

$$\text{сил қиламиз, бундан } \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3} \leq x < \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}. \text{ Юқорида кўрсатилган}$$

$$\text{нуқталарни чиқариб ташлаш учун узунлиги } \pi \text{ га тенг оралиқларни қараш (ва}$$

$$\pi k, k \in \mathbb{Z} \text{ ларни қўшиш) керак; } \frac{\pi}{12} + \pi k \leq x < \frac{\pi}{6} + \pi k, \frac{5\pi}{12} + \pi k < x <$$

$$< \frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{3\pi}{4} + \pi k < x < \frac{5\pi}{6} + \pi k \text{ да } \operatorname{tg} 3x \geq 1. \frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi}{4} + \pi k, \frac{3\pi}{4} +$$

$$+ \pi k, k \in \mathbb{Z} \text{ кўринишидаги сонларни чиқариб ташлаймиз. Мазкур қолда булар}$$

$$\frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \text{ кўринишидаги сонлардир. 159. а) } \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$\text{б) } \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \text{ в) } \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \text{ г) } \alpha_1 + \pi k, \alpha_2 + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \alpha_1 =$$

$$= \operatorname{arctg} 2 \approx 1,11, \alpha_2 = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \approx 0,46. 160. \text{ а) } \pm \frac{2\pi}{3} + 4\pi k, \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$\text{б) } \alpha_1 + \pi k, \alpha_2 + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \alpha_1 = \operatorname{arctg} \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \approx -0,55; \alpha_2 =$$

$$= \operatorname{arctg} \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,02; \text{ в) } \alpha + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \alpha = 2 \operatorname{arctg} \frac{2}{3} \approx 1,18; \text{ г) } \frac{\pi}{2} +$$

- $+\pi k, (-1)^k x_0 + \pi k, k \in \mathbb{Z}, x_0 = \arcsin 0,75 \approx 0,83$. 161. а) $2\pi k, \pi + 4\pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $\pi + 2\pi k, 4\pi k, k \in \mathbb{Z}$; в) $(-1)^k x_0 + \pi k, k \in \mathbb{Z}, x_0 = \arcsin \frac{1}{3} \approx 0,34$; г) $\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. 162. а) $-\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{4} + \pi k, \alpha + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \alpha = \arctg 2$; в) $-\frac{\pi}{4} + \pi k, \alpha + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \alpha = \arctg 3 \approx 1,11$; г) $\alpha_1 + \pi k, \alpha_2 + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \alpha_1 = \arctg \frac{-7 - \sqrt{53}}{2} \approx -1,43; \alpha_2 = \arctg \frac{-7 + \sqrt{53}}{2} \approx 0,11$. 163. а) $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. 164. а) $-\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. 165. а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $\pi k, \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. 166. а) $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $\pm \alpha + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \alpha = \arctg \sqrt{2} \approx 0,96$. 167. а) $((-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k; \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n); ((-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n), k, n \in \mathbb{Z}$; б) $(\frac{k}{2} - \frac{1}{6}; \frac{k}{2} + \frac{1}{6}), k \in \mathbb{Z}$; г) $(x_0 + \pi k; \frac{\pi}{4} - x_0 - \pi k); (x_1 + \pi k; \frac{\pi}{4} - x_1 - \pi k), k \in \mathbb{Z}; x_0 = \arctg \frac{1}{2} \approx 0,46, x_1 = \arctg \frac{1}{3} \approx 0,32$. 168. а) Бўла олмайди; б) бўла олади ($a = b = 0$ ҳолидан ташқари). 169. а) $\tg^2 \alpha$; б) $\tg \alpha \tg \beta$. 170. а) $\cos^2 \varphi$; б) -1 . 171. а) 13; б) 0; в) $\frac{8}{\sin^2 2\varphi}$; г) $|\sin \beta + \cos \beta|$. 172. а) $\ctg (\alpha - \frac{\pi}{4})$; б) $\tg (\beta - \frac{\pi}{4})$. 173. а) 8; б) $\frac{7}{9}$. 174. а) $\frac{m^2 - 1}{2}$; б) $\frac{m(3 - m^2)}{2}$. 175. а) $m^2 - 2$; б) $m(m^2 - 3)$. 176. а) $-0,5$. 185. а) $-\sin 18^\circ$; б) $-\tg 15^\circ$; в) $-\sin 23^\circ$. 186. а) $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4}$; б) $-\tg \frac{\pi}{18}$. 187. а) $\sin 1^\circ$; б) $\cos 19^\circ$. 188. а) $\cos \frac{\pi}{12}$; б) $\tg \frac{\pi}{6}$. 189. а) $\frac{1}{4}$; б) $-\frac{5\sqrt{2}}{2}$; в) $1 + \sqrt{3}$; г) 0,5. 190. а) $-\sin \alpha$; б) $\tg^2 x$. 195. $\frac{2\sqrt{2} + \sqrt{3}}{6}$; б) $\frac{2 - \sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$. 196. а) 1; б) $-\frac{16}{65}$. 197. а) $\frac{3 + \sqrt{105}}{16}$; б) $\frac{7}{9}$. 198. а) $-\frac{71}{43}$; б) $-\frac{1}{83}$; в) $-\frac{43}{71}$; г) -83 . 200. а) $\tg 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$; б) $-\tg \frac{\pi}{7}$; в) $\tg \alpha \tg \beta$; г) $\tg \alpha$. 208. а) $\sqrt{0,2}$; б) $2\sqrt{0,2}$; в) 0,5; г) $\frac{4}{5}$; д) $-\frac{3}{5}$; е) $-\frac{4}{3}$; ж) $-\frac{3}{4}$. 209. а) $\sin(x + y)\sin(x - y)$. 210. а) $4 \cos \frac{\pi}{2} \cos x \cos \frac{5x}{2}$; б) $4 \cos \frac{x}{2} \cos x \sin \frac{5x}{2}$. 211. а) $2 \sin \frac{2\alpha + \pi}{4} \times$

$$\begin{aligned} & \times \cos \frac{2\alpha - \pi}{4} = 2 \cos^2 \frac{2\alpha - \pi}{4}; \text{ б) } 2 \sin \left(30^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left(30^\circ + \frac{\alpha}{2} \right); \text{ в) } \\ & 2 \sin \frac{4\alpha + \pi}{8} \cos \frac{4\alpha - \pi}{8}; \text{ г) } 2 \sin 5^\circ \cos 40^\circ; \text{ д) } \sin(60^\circ + \alpha) \sin(60^\circ - \alpha); \\ & \text{ е) } \sin(\alpha + 30^\circ) \sin(\alpha - 30^\circ). \text{ 212. а) } \frac{3}{5}; -\frac{4}{5}; -\frac{3}{4}; -\frac{4}{3}; \text{ б) } \frac{7}{25}; \frac{24}{25}; \\ & \frac{7}{24}; 3 \frac{3}{7}; \text{ 213. а) } (-1)^k x_0 + \pi k, k \in \mathbb{Z}, x_0 = \arcsin \frac{1}{3} \approx 0,34. \text{ 214.} \\ & \text{ а) } \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \text{ б) } \pm \frac{\pi}{12} + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \text{ 215. } \alpha + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \alpha = \arctg 0,5 \approx \\ & \approx 0,46. \text{ 216. а) } \pi + 2\pi k; \pm \alpha + 4\pi k, k \in \mathbb{Z}, \alpha = 2\arccos \frac{1}{3} \approx 2,46. \text{ 217.} \\ & \text{ а) } \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}; \text{ б) } \frac{\pi k}{4}, k \in \mathbb{Z}. \text{ 218. а) } -\frac{\pi}{6} + \pi k < x < \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; \text{ б) } R. \\ & \text{ 219. а) } -\frac{\pi}{10} + \pi k < x < \frac{\pi}{10} + \pi k, \frac{\pi}{4} + \pi k \leq x < \frac{3\pi}{10} + \pi k, \frac{7\pi}{10} + \pi k < \\ & < x < \frac{3\pi}{4} + \pi k, x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \text{ 220. а) } -\frac{\pi}{2} + \pi k < x < \frac{\pi}{6} + \pi k, \\ & \frac{\pi}{3} + \pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; \text{ б) } -\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \frac{3\pi}{4} + \\ & + 2\pi k < x < \frac{7\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \text{ 221. К ўрсатма. а) } \sin x > \frac{1}{2} \text{ ёки } \sin x < \\ & < -\frac{1}{3}; \text{ б) } -\frac{1}{3} < \cos x < \frac{1}{2}. \text{ 222. К ўрсатма. а) } \sin x > \frac{1}{2}; \text{ б) } \cos x > \frac{1}{2}. \\ & \text{ 223. К ўрсатма. а) } \operatorname{tg} x < -1 \text{ ёки } 0 < \operatorname{tg} x < 1; \text{ б) } -1 < \operatorname{ctg} x < 0 \text{ ёки } \operatorname{ctg} x > 1. \\ & \text{ 225. а) } \frac{\pi}{2}; \text{ б) } \frac{2\pi}{3}. \text{ 235. а), б) } 1. \text{ 236. а) } \cos 4t; \text{ б) } \cos t. \text{ 237. а) } \operatorname{ctg} 2x; \text{ б) } \frac{2}{|\sin \varphi|}. \text{ 238.} \\ & \frac{16}{65}; -\frac{63}{65}. \text{ 239. } -\frac{24}{25}. \text{ 241. а) } \frac{1}{2} \cos 10^\circ; \text{ б) } \frac{1}{4}; \text{ в) } \frac{\sqrt{3}}{4}; \text{ г) } 0. \text{ 242. а) } \\ & -\frac{1}{2} \cos 2x; \text{ б) } -\frac{1}{2} \cos \left(2\alpha + \frac{\pi}{6} \right); \text{ в) } \frac{1}{2} (\cos 2x + \cos 2\beta); \text{ г) } \frac{1}{2} (\cos 2\alpha - \cos 2x). \\ & \text{ 243. а) } \cos 10^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2}; \text{ б) } \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos 10^\circ; \text{ в) } \cos 35^\circ + \cos 5^\circ - \cos 15^\circ - \frac{\sqrt{2}}{2}; \text{ г) } \\ & \cos 1^\circ + \cos 3^\circ + \cos 5^\circ + \cos 7^\circ + \cos 9^\circ + \cos 11^\circ + \cos 13^\circ + \cos 15^\circ. \text{ 244. а) } 0,5 + \\ & + \sqrt{0,5 - 0,25 \sqrt{3}}; \text{ б) } \frac{1 + \sqrt{3}}{4}. \text{ 245. а) } \frac{\sqrt{2} - 1}{4}; \text{ б) } \frac{\sqrt{3} - 1}{4}. \text{ 246. а) } \\ & \frac{\sqrt{3} + 1}{4}; \text{ б) } \sqrt{3}. \text{ 247. а) } 1 + \cos 2x; \text{ б) } 1 - \cos 4x; \text{ в) } 0,5 + \cos 2x + 0,5 \cos 4x; \\ & \text{ г) } \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cos 4x; \text{ д) } \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 12x; \text{ е) } 0,5 + 0,5 \cos 8x. \text{ 249. Ха. 250.} \\ & \text{ а) } (-1)^k \alpha + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \alpha = \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,62. \text{ 251. а) } \alpha_1 + 2\pi k, \alpha_2 + 2\pi k, \\ & k \in \mathbb{Z}, \alpha_1 - 2\arctg \frac{3 - \sqrt{21}}{6} \approx -0,52; \beta = 2\arctg \frac{3 + \sqrt{21}}{6} \approx 1,80; \text{ в) } \end{aligned}$$

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \alpha + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \alpha = 2\arctg(-3) \approx -2,50. 252. \text{ а) } R; \text{ б) } \pi k <$$

$$< x < \frac{\pi}{6} + \pi k, \frac{\pi}{3} + \pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

II 606

254. а) 0,2 ва 0,3; 0,26 ва 0,27; 0,0266 ва 0,267; б) $-1,3$ ва $-1,2$; $-1,27$ ва $-1,26$; в) 0,8 ва 0,9; 0,83 ва 0,84; 0,833 ва 0,834. 256. а) 1,90502; б) 1,21836. 257. а) 0,905; б) 3,046; в) 3,968; г) 1,748. 258. а) 19,6;

б) gt ; в) $\sqrt{2g} \approx 4,43$; г) $\sqrt{2Sg}$. 259. а) 0,005; б) $\frac{1}{1500} \approx 0,0007$. 260. а)

$$\frac{1}{30}; \frac{1}{300}; \frac{1}{3000}. 262. \text{ а) } -2; \text{ в) } -1. 263. \text{ а) } -\frac{3}{2}; \text{ в) } 0. 264. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow a} Cf(x) = \\ = \lim_{x \rightarrow a} C' \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = C \cdot A; \quad \text{ б) } \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + (-1) \cdot g(x)) = \\ = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} ((-1) \cdot g(x)) = A + (-1) \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A + (-1) \cdot B = A - B.$$

266. Қўрсатма. а) Қўпайтманинг лимити ҳақидаги қондани ишлатинг; б) 264-а машқнинг натижасидан фойдаланинг; в) йнгиндининг лимитини ҳисоблаш қондасидан ва б масаланинг натижасидан фойдаланинг; г) бўлимининг лимити ҳақидаги қондадан фойдаланинг. 267. а) 3,2; 0,4; в) 0,2. 268. а) 0,5; 2,25; б)

$$0,15; 1,1475; \text{ г) } -0,2; 1,04. 269. \text{ а) } -\frac{1}{1359}; \text{ б) } -\frac{1}{804}; \text{ в) } \frac{375}{30107}; \text{ г) } \frac{1}{1806}.$$

$$270. \text{ а) } -3\Delta x; \text{ б) } \frac{2\Delta x}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}}; \text{ в) } 6x_0\Delta x + 3(\Delta x)^2; \text{ г) } \Delta x(-2 - 2x_0 - \\ - \Delta x). 271. \text{ а) } x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2; 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2; 2x_0 + \Delta x; \text{ б) } ax_0 + a\Delta x + b; a\Delta x; a;$$

$$\text{ г) } x_0^3 + 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3; 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3; 3x_0^2 + 3x_0\Delta x + \\ + (\Delta x)^3. 272. \text{ а) } 2,1; \text{ б) } 1,9; \text{ в) } 2,001; \text{ г) } 1,9999. 273. \text{ а) } 12,61; \text{ б) } 12,0601; \\ \text{ в) } 12,006001; \text{ г) } 12,00060001. 275. \text{ б) } \text{Сонлар тўғри чизигининг ҳамма ерида} \\ \text{камаяди; г) } (-\infty; 0] \text{ да ўсади, } [0; \infty) \text{ да камаяди. 277. а) } 2; \text{ в) } 2. 278. \text{ б) } 1; \text{ г) }$$

$$2x_0 - 1. 282. \text{ а) } a; a; \text{ б) } -1; -\frac{1}{16}. 283. \text{ г) } \frac{1}{2\sqrt{x}}. 284. \text{ б) } 2; \text{ г) } -\frac{2}{x^3}. 285.$$

$$\text{ а) } -2; \text{ в) } 2x + 2. 286. \text{ а) } 2ax + b; \text{ в) } 3x^2 - 1; \text{ г) } -\frac{2}{x^3}. 288. \text{ а) } 10x^9; \text{ в) } \\ -\frac{5}{x^5}. 289. \text{ а) } -\frac{4}{x^5}; \text{ в) } -\frac{1}{x^4}. 290. \text{ а) } \frac{4}{\sqrt{x}}; \text{ в) } -\frac{1}{4x\sqrt{x}}. 291. \text{ а) } 7x^9 -$$

$$-6x - 1; \text{ в) } 12x^5 + \frac{1}{x^2}. 292. \text{ а) } 35x^4 + \frac{1}{\sqrt{x}}; \text{ б) } \frac{1}{3} + \frac{7}{x^2} - \frac{3}{2}\sqrt{x}; \text{ в) }$$

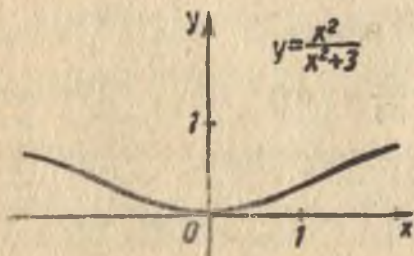
$$-\frac{3}{2x^2\sqrt{x}} + \frac{3}{2}\sqrt{x}; \text{ г) } \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{6}{x^3}. 293. \text{ а) } \frac{11}{(3-5x)^2}; \text{ в) } 0. 294.$$

$$\text{ в) } \sqrt{x} + \frac{x+1}{2\sqrt{x}} = \frac{3x+1}{2\sqrt{x}}; \text{ в) } \frac{x+1}{2x\sqrt{x}}. 295. \text{ а) } \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}; \text{ в) } -\frac{3}{2\sqrt{x}} + 4x - \frac{5x\sqrt{x}}{2}.$$

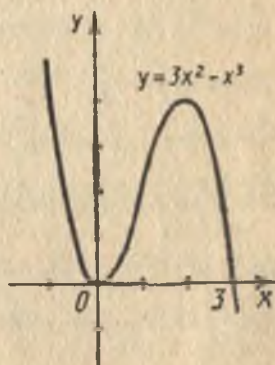
$$296. -3; \text{ в) } 2x - 3. 297. \text{ а) } -\frac{5}{4}; \text{ б) } -5; \text{ в) } -\frac{5}{(2+x)^2}; \text{ г) } -\frac{5}{4(1+t)^2}.$$

298. б) -19 ; г) $1 - \frac{2}{\sqrt{2-x}}$. 299. а) $[-3; 3]$; в) $(-2; 2)$. 300. а) $[0; 4]$; в) $(-\infty; 2) \cup (2; 3]$. 301. а) $2 - \sqrt{x} - x$; б) $\sqrt{2-x-x^2}$; в) $2 - \frac{x}{x-3} - \frac{x^2}{(x-3)^2}$; г) $\frac{2-x-x^2}{-1-x-x^2}$; д) $\sqrt{\frac{x}{x-3}}$; е) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-3}}$. 303. а) $f(x) = \sqrt{x}$; в) $f(x) = \frac{1}{x}$; д) $f(x) = \frac{x-2}{3}$. 304. а) $28(2x-7)^{13}$; в) $-21(7x-1)^{-4}$. 305. а) $\frac{1}{\sqrt{2x+3}}$; б) $\frac{5}{2\sqrt{5x-8}}$. 306. а) $\frac{4x}{\sqrt{4x^2-1}}$; в) $\frac{9x}{\sqrt{9x^2-16}}$. 307. а) $65(5x-2)^{12} - 60(3x+7)^{19}$; в) $\frac{3}{\sqrt{6x-8}} - \frac{4x}{\sqrt{4x^2-3}}$; г) $\frac{1}{\sqrt{9+2x}} - \frac{x}{2\sqrt{0.5x^2-2}}$. 308. а) $\frac{1}{3} \cos x$; б) $\cos x - \sin x$. 309. а) $3 \cos 3x$; в) $10 \cos 2x$. 310. а) $-2 \sin 2x$; в) $2 \sin 4x$. 311. а) $\frac{2}{\cos^2 2x}$; в) $\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{3}}$. 312. а) $\frac{5}{\sin^2 5x}$; в) $-\frac{2}{\sin^2 \frac{x}{2}}$. 313. а) $-\frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}$; в) $\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2}$. 314. а) $2 \cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right)$; в) $\frac{3}{\cos^2 (3x-7)}$. 315. а) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $\sin x = \frac{1}{2}$, яъни $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ ёки $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; в) $\lg x = 1$, яъни $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; г) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{4}, k \in \mathbb{Z}$. 316. а) $\sin x + x \cos x$; в) $2 \sin x \cos x = \sin 2x$; д) 0. 317. а) $3 \cos 3x$; в) $-\sin t$. 318. а) R ; в) $(-\infty; 2)$ ва $(2; \infty)$. 319. а) $(-\infty; 1) \cup (2; 3)$; в) $(-\infty; -3) \cup (1; 2) \cup (4; \infty)$. 320. а) $(-\infty; 1) \cup [4; \infty)$; в) $[-3; -1] \cup [1; 3]$. 321. а) $x = -1, x \geq 1$; б) $x < -1, 3 \leq x < 7$; в) $(-\infty; -1) \cup [1 - \sqrt{2}; 0) \cup (1; 1 + \sqrt{2}]$; г) $(-\infty; -2) \cup (2; 3)$. 322. а) -6 ; в) 1. 323. (1; 0) нуқтада $-\frac{\pi}{4}$, (2; 0) нуқтада $\frac{\pi}{4}$. 324. а) 45° . 325. в) $y = -3x - 6$ ва $y = -3x + 6$; г) $y = 0,25x + 1$. 326. а) 0,02; б) 0,02; в) $0,48\sqrt{2}$; г) $\frac{\sqrt{3}}{2} - 0,01 \approx 0,8560$. 327. а) 1,002; б) 0,997; в) 5,01; г) 3,98. 328. а) 1,2; в) 1,06; г) $3^{50} \cdot 0,95$. 329. а) 0,94; б) 1,08; в) 1,0006; г) 0,98. 330. а) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\pi}{360} \approx 0,5151$; в) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\pi}{360} \approx 0,4849$. 331. а) $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{135} \approx 0,6006$; в) $1 - \frac{\pi}{90} \approx 0,9651$. 332. 6,4 км/соат. 333. (6t-4) рад/с; 20 рад/с. 334. 1) 2,8 рад/с; 2) $6\frac{2}{3}$ с. 335. 12t см/с; а) $\frac{1}{12}$ с; б) $\frac{1}{6}$ с. 336. а) 0,04 Н. 337. а) 65 г/см; б) 125 г/см. 340. а) 6 с; б) 18 м/с. 341. $0 < t < \frac{8}{3}$. 342. а) R да ўсади; в) R да ўсади. 343. а) $(-\infty; 0)$ ва $(0; \infty)$

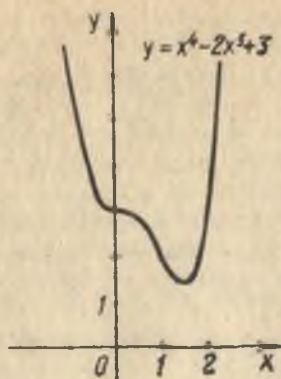
да камаяди; в) $(-\infty; 3)$ ва $(3; \infty)$ да ўсади. 344. а) $(-\infty; 0]$ да камаяди; $[0; \infty)$ ўсади; в) $(-\infty; 0,3]$ да камаяди, $[0,3; \infty)$ да ўсади. 345. а) $(-\infty; -3]$ ва $[3; \infty)$ ўсади, $[-3,3]$ да камаяди; б) $(-\infty; 0]$ ва $[2; \infty)$ да ўсади, $[0; 2]$ да камаяди; в) $(-\infty; -3]$ ва $[1; \infty)$ да ўсади, $[-3; 1]$ да камаяди; г) $(-\infty; \infty)$ да камаяди. 346. а) Критик нуқталар йўқ; в) 3 нуқтада минимум. 347. а) -3 нуқтада максимум, 3 нуқтада минимум; в) -1 ва 1 нуқталарда максимум, 0 нуқта минимум. 348. а) Критик нуқталари йўқ; в) $x = -1$ — минимум нуқтаси; $x = 1$ — максимум нуқтаси, $(-\infty; 1)$ ва $(1; \infty)$ оралиқларнинг бирлашмасига тегишли ҳар қандай критик нуқта, бир вақтнинг ўзида ҳам минимум, ҳам максимум нуқтасидир. 349. а) $(-\infty; \frac{3}{4})$ оралиқда камаяди; $[\frac{3}{4}; \infty)$ оралиқда ўсади; $\frac{3}{4}$ нуқтада минимум; в) $(-\infty; -2]$ ва $[0; \infty)$ оралиқларда ўсади, $[-2; 0]$ оралиқда камаяди; -2 нуқтада максимум, 0 нуқтада минимум. 350. а) $(-\infty; \frac{1}{4})$ ва $(\frac{1}{4}; \infty)$ оралиқларда камаяди; критик нуқталар мавжуд эмас; в) $(-\infty; 0)$ ва $[3,2; \infty)$ оралиқларда камаяди, $(0; 3,2)$ оралиқда ўсади; $3,2$ нуқтада максимум. 351. а) $(-\infty; \infty)$ да ўсади; б) $[0; 8]$ да ва $[12; \infty)$ да ўсади, $(-\infty; 0)$ ва $[8; 12]$ да камаяди, $x = 0$ ва $x = 12$ — минимум нуқталари, $x = 8$ — максимум нуқтаси; в) функциянинг графиги 224-расмда келтирилган; г) $(-\infty; 0]$ ва $[2; \infty)$ да ўсади, $[0; 1)$ ва $(1; 2]$ да камаяди; $x = 0$ — максимум нуқтаси, $x = 2$ — минимум нуқтаси. 352. б) $(-\infty; 2,5]$ да ўсади, $[2,5; \infty)$ да камаяди; $x = 2,5$ — максимум нуқтаси. 353. г) $(-\infty; -\frac{1}{8})$ да камаяди, $[-\frac{1}{8}; \infty)$ да ўсади; $x = -\frac{1}{8}$ — минимум нуқтаси. 354. а) $(-\infty; -1)$ да ва $[1; \infty)$ да камаяди, $[-1; 1]$ да ўсади; $x = -1$ — минимум нуқтаси, $x = 1$ — максимум нуқтаси; б) функциянинг графиги 225-расмда тасвирланган; в) $(-\infty; \infty)$ да ўсади. 355. а) Функциянинг графиги 226-расмда тасвирланган; г) $(-\infty; \infty)$ да ўсади. 356. а) Функциянинг графиги 227-расмда тасвирланган; б) $[-1; 3]$ да ўсади; $(-\infty; -1]$ ва $[3; \infty)$ да камаяди; $x = -1$ — минимум нуқтаси, $x = 3$ — максимум нуқ-



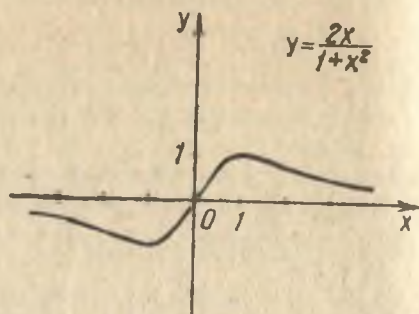
224- расм



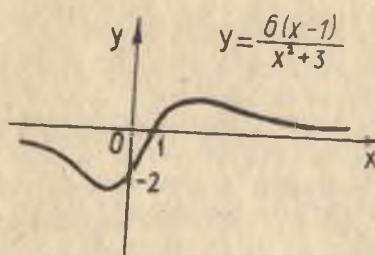
225- расм



226- расм



227- расм

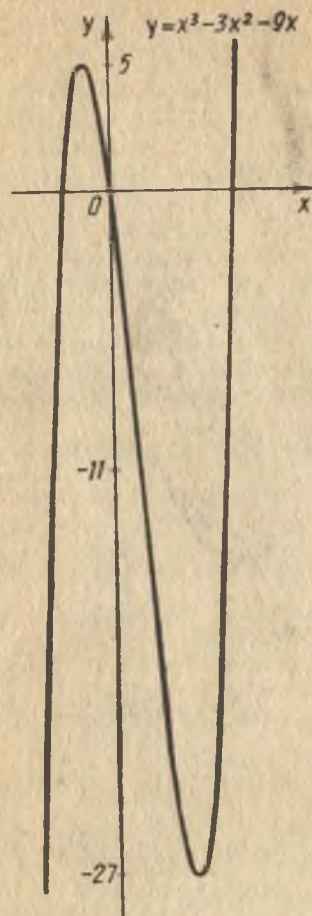


228- расм

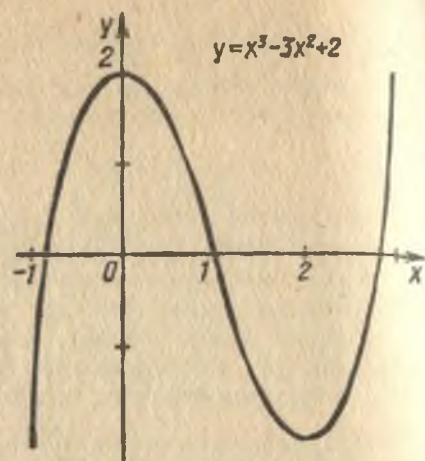
таси, функциянинг графиги 228- расмда тасвирланган; в) $\left(-\infty; \frac{4}{3}\right]$ да ўсади, $\left[\frac{4}{3}; 2\right]$ да камаяди; $x = \frac{4}{3}$ максимум нуқтаси; г) $\left[-1; -\frac{4}{5}\right]$ ва $[0; \infty)$ да ўсади; $\left[-\frac{4}{5}; 0\right]$ да камаяди; $x = -\frac{4}{5}$ — максимум нуқтаси, $x =$

$= 0$ — минимум нуқтаси. 357. а) $(-1; 2)$; в) $\emptyset$. 358. а) R ; в) $\left[-3; -\frac{1}{3}\right]$. 359. а) $(-\infty; \infty)$ да камаяди; б) $(-\infty; \infty)$ да ўсади. 360. а) $\left[-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}; \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}\right]$, $k \in Z$ оралиқларда ўсади, $\left[\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}; \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi k}{3}\right]$, $k \in Z$ оралиқларда камаяди; $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}$, $k \in Z$ максимум нуқталари, $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}$, $k \in Z$ минимум нуқталари, в) $\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{4}; \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}\right)$, $k \in Z$ оралиқларда камаяди. 361. а) $\left[-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k; \frac{\pi}{4} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$ оралиқларда ўсади, $\left[\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{5\pi}{4} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$ оралиқларда камаяди; $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$ — максимум нуқталари, $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$ — минимум нуқталари; в) $\left[-\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$; $\left[-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; -\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$ оралиқларда ўсади; $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; -\frac{\pi}{6} + 2\pi k\right]$, $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{7\pi}{6} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$ оралиқларда камаяди,

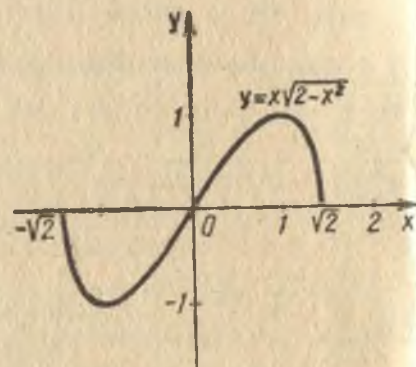
$\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ — максимум нуқталари, $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$ ва $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ — минимум нуқталари. 362. Кўрсатма. Ҳар қандай $x \in \mathbb{R}$ учун $f(x) = \cos x - 2 < 0$. 363. а) $\min_{[-1; 1]} f(x) = f(-1) = f(1) = -16$; $\max_{[-1; 1]} f(x) = f(0) = -9$; б) $\min_{[0; 3]} f(x) = f(2) = -25$; $\max_{[0; 3]} f(x) = f(3) = 0$. 364. 1с, 7м/с. 365. Кўрсатма. $S^2 = h^2(2R - h)$ эканини исботланг, бунда h — учбурчнинг баландлиги, R эса ташқи чизилган айлана радиуси. Сўнгра $S(h)$ функциянинг максимумини излаш мумкин, аммо агар юзнинг квадрати максимал бўлганда, юзнинг ўзи ҳам максимал бўлишдан фойдаланилса, ҳисоблаш содда бўлади, шундан кейин эса юзнинг квадрати максимумини излаш керак. 367. Қўшилувчилар тенг бўлиши керак. 368. 15 см — баландлик, 30 см эса бак асоси томонининг узунлиги. Кўрсатма. Бакнинг тўла сирти S ни a ва V (ҳажм) орқали ифодаланг ҳамда $S(a) = a^2 + \frac{4V}{a}$ функциянинг энг кичик қийматини топинг. 369. Аҳоли пунктидан 3 км узоқдаги ва бурғилаш миярасига яқин тош йўлдан 12 км узоқликдаги нуқтага. 371. а) $x'' = -4x$; в) $x'' = -9x$. 372. а) $A = 0,8$; $\varphi = \frac{\pi}{2}$; $\omega = \frac{1}{3}$; в) $A = 2$; $\varphi = \frac{5\pi}{3}$; $\omega = 1$. 373. Ечимларнинг умумий кўриниши: а) $y = A \cos(5t + \varphi)$; в) $y = A \cos(0,5t + \varphi)$. 374. а) $6x^2 + 6x - 2$; в) -2 . 375. б) -1 ; г) $t^6 + t^4 - t^2 - 1$. 378. а) $\frac{16}{(1-3z)^2}$; б) $\frac{16}{(10-3x)^2}$; в) 16 ; г) $\frac{16}{(1-3z)^2}$. 379. а) $\frac{t+10\sqrt{t}-1}{4\sqrt{t}(t+1)^2}$; б) $\frac{23}{200}$; в) $\frac{5}{8}$; г) $\frac{z^2+10|z|-1}{4|z|(z^2+1)}$. 380. б) $\frac{57}{64}$; г) $\frac{5x^2+20|x|-3}{2|x|(|x|+2)^2}$. 381. а) $\frac{-2u^3+6u^2-12u+30}{u^4}$; б) $-\frac{9}{x^4} + \frac{16}{x^5} - \frac{25}{x^6}$; г) $-\frac{20}{v^5} - \frac{15}{v^6}$. 383. а) $12x^3 - 12x^2 + 12x + 4$; б) $3acx^2 + 2(ad+bc)x + (ae+bd)$; в) $6x - 8$; — 8; 4; г) $150y^4 + 12y$; 0; 138. 384. а) $\frac{2}{(2+x)^2\sqrt{2+x^2}}$; б) $-\frac{1}{3-2x}$; в) $\frac{4t^3-3t^2+2t}{2\sqrt{t^4-t^3+t^2-1}}$; $\frac{12}{\sqrt{11}}$. 385. $(\frac{1}{4}; \frac{1}{2})$. 387. $(-\infty; -1)$ да ва $(-1; \infty)$ да ўсади. 388. $[-0,75; \infty)$ да ўсади. $(-\infty; -0,75)$ да камаяди. 389. $[-\frac{1}{3}; \infty)$ да ўсади, $(-\infty; -\frac{1}{3})$ да камаяди. 390. $(-\infty; -2)$ ва $[1; \infty)$ да ўсади, $[-2; 1]$ да камаяди. 391. $[\frac{1}{3}; \infty)$ да ўсади, $(-\infty; \frac{1}{3})$ да камаяди. 392. $(-\infty; -1)$ ва $[1; \infty)$ да ўсади, $[-1; 0)$ ва $(0; 1]$ да камаяди. 393. $t=0$ — максимум нуқтаси; $(-\infty; 0]$ да ўсади, $[0; \infty)$ да камаяди. 394. $[1; \infty)$ да ўсади, $(-\infty; -1]$ да камаяди; экстремумлари йўқ. 395. $x=0$ — максимум нуқтаси; $[-|r|; 0]$ да ўсади, $[0; |r|]$ да камаяди. 398. График 229-расмда тасвирланган. 403. График 230-расмда тасвирланган. 406. а) $a < 0$; $b > 0$; $c > 0$; $D < 0$; в) $a < 0$; $b < 0$; $c < 0$; $D > 0$. 407. а) $[-\frac{1}{3}; 1]$; в) 1 . 408. а)



229- расм



230- расм



231- расм

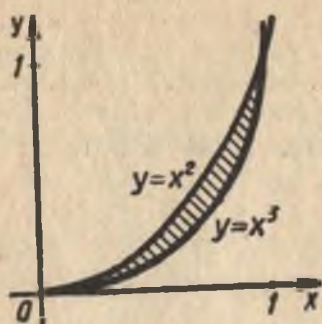
$(-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}; \infty)$; в) $[-1; -\frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{3}; 1]$. 409. а) $x=0$ — максимум нуқтаси, $x=\frac{4}{9}$ — минимум нуқтаси; $(-\infty; 0]$ ва $[\frac{4}{9}; \infty)$ да ўсади, $[0; \frac{4}{9}]$ да камаяди; б) $x=0$ — максимум нуқтаси, $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ — минимум нуқталари; $[-\frac{1}{\sqrt{2}}; 0]$ ва $[\frac{1}{\sqrt{2}}; \infty)$ да ўсади, $(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}]$ ва $[0; \frac{1}{\sqrt{2}}]$ да камаяди; в) график 231-расмда тасвирланган; г) функция R да ўсади. 410. а) $\max g(x)=g(0)=3$; $\min g(x)=g(-1)=-1$; б) $\max g(x)=g(3)=3$; $\min g(x)=g(2)=-1$. 411. а) $\min h(x)=h(-1)=-9$; $\max h(x)=h(0)=2$; $[1; 3]$ $[-1; 1]$ $[1; 3]$ $[-1; 1]$

б) $\min h(x)=h(3)=-25$; $\max h(x)=h(1)=-5$. 412. Диаметрда ётувчи то-
мон бошқа томондан 2 марта катта. 413. 1: $\sqrt{2}$. 414. Тўғри тўртбурчак квад-
рат бўлиши керак. 415. Тенг томонли. 416. а) $10=5+5$; б) $8=4+4$. 417.
4 см. 418. $-0,5$. 419. AB кесманинг B дан 1 км узоқлашган нуқтасига. 420.
Е қ н л и ш и. $S=2\pi r^2+2\pi rh$. $V=\pi r^2 h$ формуладан h н и ф о д а л а й м и з

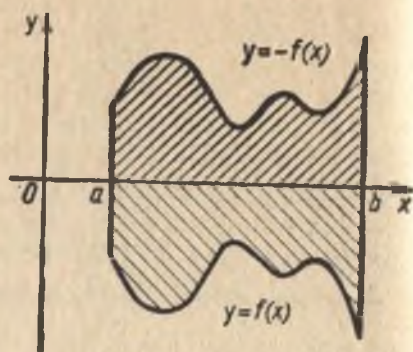
ва то-
пилган қийматни S нинг ифодасига қўямиз: $S(r)=2\pi r^2+\frac{2V}{r}$. $S'(r)=4\pi r-$
 $-\frac{2V}{r^2}$ н и н о л г а т е н г л а б, $V=2\pi r^3$ н и, яъни $r^3=8$ н и т о л а м и з. $r=2$ — нуқта
 $S(r)$ функциянинг минимум нуқтаси эканига ишонч ҳосил қиламиз. Сўнггра $V=$
 $=2\pi r^3=\pi r^2 h$, бундан $h=2r$. 421. $|V|=1,5$ м/с. 422. $\frac{4t}{\sqrt{25-4t^2}}$ м/с;
 $\frac{100}{\sqrt{(25-4t^2)^3}}$ м/с². 423. 1) 360 г; 5х г/см; 2) 0; 60 г/см. 425. 3π рад/с. 426.
а) 45 м; б) 4с; 90 м. 427. $0,04\pi$ см²/с. 428. $\frac{150}{17}$ м/мин. 429. Квадрат.

111 606

434. а) $2,5x+C$; в) $\frac{x^4}{4}+C$. 435. а) $-\cos x+C$; в) $-\frac{1}{5}\cos 5x+C$. 437. а) $\frac{x^4}{4}-$
 -3 ; б) $\lg x-1$; в) $-\cos x+4$; г) $-2x+11$. 438. а) $-\frac{1}{2x^2}+5$; б) $\sin x-1$;
в) $\frac{2}{3}x\sqrt{x}-8$; г) $2\sqrt{x}$. 439. а) $\frac{x^3}{3}-9$; б) $\frac{1}{x}-2$; в) $-\cos x+6$; г) $\lg x-2$. 440.
а) $\frac{5x^3}{3}-x+C$; б) $-\frac{1}{x}+4\cos x+C$; в) $\frac{kx^2}{2}+bx+C$; г) $\frac{ax^4}{3}+\frac{bx^3}{2}+cx+C$. 441.
а) $x-\frac{1}{3}\sin 3x+C$; б) $-\frac{2}{3}\operatorname{ctg} 3x+C$; в) $\frac{3}{5}\lg 5x+C$; г) $-2\cos \frac{x}{3}+\frac{1}{2}\lg 4x+C$.
442. а) $\frac{2}{5}\sqrt{3x-2}+C$; б) $5\sqrt{2x+7}+C$; в) $-\frac{3}{5(5x-7)^2}+C$; г) $-\frac{4}{9}(11-$
 $-3x)^6+C$. 443. 1) $\frac{v_0^2}{19,6}$; 2) 0; 3) $\frac{v_0}{4,9}$. 444. 122, 375м; 9,77м/с². 445. $8R+\frac{16a}{3}$;
 $R+\frac{a}{4}$. 446. а) $x(t)=t^3-\frac{t^2}{2}+\frac{7t}{2}+1$; б) $x(t)=5t+\frac{1}{t}-2$; в) $x(t)=3-$
 $-2\sin t$; г) $x(t)=-3\cos t-5t+12$. 447. а) 9; б) 1; в) 2; г) $\frac{1}{2}$. 448. а) $\frac{4}{3}$;
б) $2\frac{2}{3}$. К ў р с а т м а. Бошланғич функция сифатида $\frac{(x+2)^3}{3}$ функцияни олиш
қулай; в) $28\frac{1}{8}$; г) $\frac{1}{4}$. 449. а) $\frac{2}{5}$; б) 1; в) 1; г) 0. 450. а) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; б) $-2,5$; в)
1,5; г) -2 . 451. а) 0,9; б) 2; в) 2; г) 0,4. 452. а) 20; б) $\frac{1}{5}$; в) 4,5; г) 2. 453.



232- расм



233- расм

а) $1\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{12}$. Ечи ли ши. $x^2 = x^3$ тенгламадан $y = x^2$ ва $y = x^3$ функциялар графикларининг кесишиш нуқталари абсциссаларини топамиз; булар: $x = 0$ ва $x = 1$. Изланаётган юз ушбуга тенг (232- расм):

$$S = \int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 x^3 dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 - \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}; \text{ в) } 1; \text{ г) } \frac{1}{6}.$$

454. $y = -f(x)$, $y = 0$, $x = a$ ва $x = b$ (233- расм) чизиклар билан чегараланган эгри чизикли трапецияни қарай-миз. Бу эгри чизикли трапеция дастлабки трапецияга симметрик, шу сабабли унинг юзи дастлабки трапеция юзига тенг, $f(x)$ увлуксиз номанфий функция

бўлгани учун $S = \int_a^b (-f(x)) dx$, бундан $S = - \int_a^b f(x) dx$, яъни $\int_a^b f(x) dx =$

$$= -S. 455. \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \text{ ва } \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = F(c) - F(a) + F(b) -$$

$$- F(c) = F(b) - F(a). 457. \left(\int_a^x f(t) dt \right)' = (F(x) - F(a))' = F'(x) - 0 = f(x).$$

$$458. \text{ Ҳақиқатан } x'(t) = (x_0 + \int_{t_0}^t v(u) du)' = 0 + v(t) \quad (457\text{- машқққа қаранг}) \text{ ва}$$

$$x(0) = x_0 + \int_{t_0}^{t_0} v(u) du = x_0 + 0 = x_0. 460. \text{ а) } \frac{28\pi}{15}; \text{ б) } \frac{16\pi}{15}; \text{ в) } \frac{\pi}{2}; \text{ г) } \frac{15\pi}{2}. 461.$$

$$\text{ а) } \frac{50\pi}{3}; \text{ б) } 11\pi; \text{ в) } \frac{2\pi}{15}; \text{ г) } \frac{\pi}{6}. 462. \frac{\pi H^2}{3} (3R - H). 463. \frac{2\pi}{3} R^3 (1 - \cos \frac{\alpha}{2}). 464.$$

$$\frac{1}{3} \pi H (R^2 + Rr + r^2). 465. \text{ а) } 7x - 2x^2 + C; \text{ б) } \frac{x^3}{3} + 2x^2 - 7x + C;$$

$$-10\cos\frac{x}{5} + \frac{1}{2}\sin 6x + C. 466. \text{ а) } -\frac{1}{6}(3+2x)^{-3} + C; \text{ б) } -\frac{10}{3}\sqrt{7-3x} + C;$$

$$\text{ в) } 1,5x^2 - \frac{1}{4}\operatorname{tg} 8x + C; \text{ г) } -\frac{4}{x+3} - \frac{7}{3}\operatorname{ctg} 3x + C. 467. \text{ а) } 2\sqrt{x-5}; \text{ б) } -\frac{1}{x}-$$

$$-2; \text{ в) } -2\sqrt{3-x} + 9; \text{ г) } \operatorname{tg} x - 3. 468. 10; \text{ биринчиси. } 469. \text{ а) } 3. \text{ б) } \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\text{ в) } 9\sqrt{3}; \text{ г) } 2\sqrt{3}. 470. \text{ а) } \frac{7^{10}-1}{20}; \text{ б) } \frac{1}{2}; \text{ в) } 2; \text{ г) } \frac{1}{2}. \quad \text{Ечилиши.}$$

$$\int \frac{x+1}{(2x-1)^3} dx = \int \frac{x-0,5+1,5}{(2x-1)^3} dx = \int \frac{0,5 dx}{(2x-1)^2} + \int \frac{1,5 dx}{(2x-1)^3} = -\frac{1}{4}(2x-$$

$$-1)^{-1} \Big|_1^2 - 1,5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (2x-1)^{-2} \Big|_1^2 = -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} - 1 \right) - \frac{3}{8} \left(\frac{1}{9} - 1 \right) = \frac{1}{2}. \quad 471.$$

$$\text{ а) } \pi; \text{ б) } \pi. \text{ Кўрсатма. } \cos^2 nx = \frac{1+\cos 2nx}{2} \text{ формуладан фойдаланинг; в) } 0.$$

$$\text{Ечилиши. } \int_0^{2\pi} \sin 3x \cos 5x dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\sin 8x - \sin 2x) dx = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{8} \cos 8x + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \cos 2x \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{8} (\cos 16\pi - \cos 0) + \frac{1}{2} (\cos 4\pi - \cos 0) \right) = \frac{1}{2} (0 -$$

$$-0) = 0; \text{ г) } k=m \text{ да } \pi, k \neq m \text{ да } 0. \text{ Кўрсатма. } \sin kx \sin mx = \frac{1}{2} (\cos(k-$$

$$-m)x - \cos(k+m)x) \quad (k=m \text{ да бу ифода } \frac{i}{2} - \frac{i}{2} \cos 2kx \text{ га тенг). } 472. \text{ а) } 2;$$

$$\text{ б) } 0,8; \text{ в) } \frac{1}{2}. \text{ Кўрсатма. } \frac{4}{x^2} = 7 - 3x \text{ тенгламадан графиклар кесишиш нуқта-$$

$$\text{лари абсциссаларини топинг, бундан } x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -\frac{2}{3}; \text{ г) } 4,5. 473. \text{ а)}$$

$$\frac{1}{3}; \text{ б) } \frac{4n}{2n+1}; \text{ в) } 9. 474. \text{ а) } \frac{\pi}{5}; \text{ б) } 48,4\pi; \text{ в) } \frac{\pi}{7}; \text{ г) } \frac{\pi}{9}. 475. \text{ а) } F(x) \text{ функция}$$

$$f(x) \text{ учун, } G(x) \text{ эса } g(x) \text{ учун бошлангич функция бўлсин. У ҳолда } F(x) + G(x)$$

$$\text{ функция } f(x) + g(x) \text{ учун бошлангич функция бўлади. Шунинг учун } \int_a^b (f(x) +$$

$$+ g(x)) dx = (F(x) + G(x)) \Big|_a^b = F(b) + G(b) - F(a) - G(a) = F(b) - F(a) + G(b) -$$

$$- G(a) = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx; \text{ в) } \int_a^b f(kx+c) dx = \frac{1}{k} F(kx+c) \Big|_a^b = \frac{1}{k} F(kb+c) -$$

$$- \frac{1}{k} F(ka+c) = \frac{1}{k} F(t) \Big|_{ka+c}^{kb+c} = \frac{1}{k} \int_{ka+c}^{kb+c} f(t) dt. 476. \text{ Ньютон — Лейбниц фор-}$$

$$\text{муласига биноан бу интегралларнинг ҳаммаси } F(b) - F(a) \text{ га тенг, бунда } F$$

$$\text{ функция } f \text{ учун бошлангич функция. } 477. \text{ а) } \frac{\pi^2}{2}; \text{ б) } \frac{\pi^2}{4}; \text{ в) } \frac{2\pi}{15}; \text{ г) } 2\pi^2 a^2 b. 478.$$

в) $x \neq 0$ да $F'(x) = f(x)$ тенглик осон текширилади; $x = 0$ да: $F'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = |0| = f(0)$. 479. а) Лагранж формуласига бино-

ан: $\frac{F(b) - F(a)}{b - a} = F'(c) > 0$, чунки $c \in (a, b)$, шунинг учун $F(b) - F(a) > 0$, яъни

$\int_a^b f(x) dx > 0$; б) олдинги масаланинг натижасидан ва $\int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx =$

$\int_a^b (g(x) - f(x)) dx$ эканидан фойдаланинг; в) $(F(x + T) - F(x))' = f(x + T) -$

$-f(x) = 0$ бўлгани учун функциянинг ўзгармаслик аломатига кўра $F(x + T) -$

$-F(x) = C$; C ўзгармасни аниқлаш учун бу тенгликка $x = 0$ ни қўямиз; $C = F(0 + T) -$

$-F(0) = \int_0^T f(y) dy$ ҳосил бўлади, шундай қилиб, ҳар қандай x учун $F(x + T) -$

$-F(x) = \int_0^T f(y) dy$ тенглик ўринли, хусусан $x = a$ да

$$F(a + T) - F(a) = \int_a^{a+T} f(y) dy = \int_0^T f(y) dy$$

ни ҳосил қиламиз. 480. а) $(F(x) - F(-x))' = f(x) - f(-x)(-1) = f(x) -$

$-f(x) = 0$, шунинг учун $F(x) - F(-x) = C$. $x = 0$ ни қўйиб, $C = 0$ эканини

топамиз. Шундай қилиб, $F(a) - F(-a) = 0$, яъни $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$; б) кўрсат-

ма. $F(x) + F(-x) = C$ эканини функциянинг ўзгармаслик аломатидан фойда-

ланиб кўрсатинг, бунда $C = F(0) + F(-0) = 2F(0)$ ва, демак, $F(x) - F(-x) =$

$= 2(F(x) - F(0))$ тенглик ҳар қандай x , жумладан, $x = a$ учун тўғри; в) кўрсат-

ма. 479-б масала натижасидан ва $f(x) \leq |f(x)|$, $-f(x) \leq |f(x)|$ тенгсиз-

ликлардан фойдаланинг.

IV 606

482. а), в) Ҳа; б), г) Йўқ. 483. а) 3; в) 3; д) $-\frac{3}{2}$; ж) $\frac{1}{2}$. 484. а) 11; в) -729 ;

д) 21. 485. а) 10; в) 6; д) 6; ж) 10. 486. а) 3; в) 3; д) 3; ж) 2. 487. а) 2; б) 1;

в) 1,25; г) $-\frac{3}{20}$. 488. а) 8,4261; б) 3,6346; в) 2,2240; г) 2,1666; д) 1,2936;

е) 1,3780; ж) 1,4678; з) 1,3375. 489. а) Иккинчиси; в) биринчиси; д) биринчиси.

ж) иккинчиси. 490. а) Биринчиси катта; в) биринчиси катта; д) биринчиси катта.

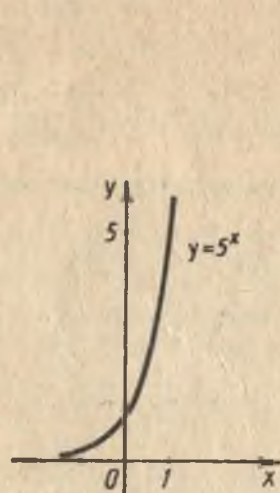
ж) биринчиси кичик. 491. а) 2,64; в) 1,70. 492. а) $2\sqrt{a}$; в) $4\sqrt[3]{c}$; д) $2b\sqrt{2b}$;

ж) $-2a\sqrt[3]{4a^2}$; з) $a^3|c|\sqrt[3]{6b^2}$. 493. а) $\sqrt{12}$; в) $\sqrt[3]{2}$; д) $\sqrt[4]{2b^6}$; ж) $\sqrt[3]{4a^3b^3}$;

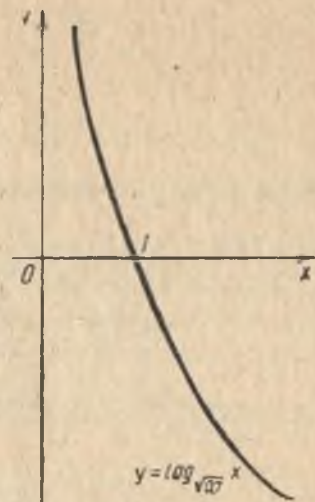
з) $\sqrt[5]{5ab^{10}}$; 494. а) $\frac{5}{3}\sqrt{3}$; в) $\sqrt[3]{7}$; д) $\frac{1}{2}\sqrt[4]{108}$; ж) $2\sqrt[4]{250}$. 495. а) $\sqrt[5]{7}$;

в) $\sqrt[20]{a^9}$; д) $\sqrt{5}$. 496. а) $\sqrt[3]{4}$; в) $\pm\sqrt[4]{10}$; д) $\sqrt[5]{3}$; ж) ± 2 . 497. а) $\pm\frac{1}{2}$; в)

± 2 . 498. а) 25; в) 0. 499. а) 1; 16; б) 1; в) 64; 729; г) 46656. 500. а) $(-\infty; \sqrt[5]{5})$; в) $[\sqrt[7]{11}; \infty)$; д) (8; ∞); ж) [0; 81]. 501. а) $a < 0$; в), г) барча a ларда; е) $a = 0$ да. 502. а) a ; б) $\sqrt{-a}$; г) $-a$; е) $|a|$; э) $2a$. 503. а) 2; в) 3; г) -4 . 504. а) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$; в) $\frac{(a - \sqrt{2})^2}{a^2 - 2}$; д) $-(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4})$; ж) $\frac{2(a^2 + a\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2})}{a^3 - b}$. 505. а) -2 ; 2; в) 8; г) 11. 506. а) 3; б) 0; 0,4; в) 10; г) 5. 507. а) 3; б) $\emptyset$; в) $\emptyset$; г) 2. 508. а) (2; -1), (-1 ; 2); б) (-2 ; 3), (2; -3); в) (4; 1), $(\frac{10}{3}; \frac{2}{3})$; г) (3; 1), (1; 3), (-3 ; -1), (-1 ; -3). 509. а) (1; 9), (9; 1); б) (1; 64), (64; 1); в) (12; 4), (34; -30); г) $(\frac{4}{\sqrt{13}}; \frac{8}{\sqrt{13}})$, $(-\frac{4}{\sqrt{13}}; -\frac{8}{\sqrt{13}})$, (2; -2), (-2 ; 2). 510. а) $11\frac{1}{2}$; в) $3\frac{17}{7}$; д) $5\frac{2}{3}$; ж) 2^{-3} ; э) $b^{-\frac{7}{13}}$. 511. а) $(32a)^{\frac{1}{2}}$; в) $(\frac{ax^8}{65536})^{\frac{1}{7}}$; д) $a^{\frac{13}{6}}$; ж) $a^{\frac{3}{4}}$; э) $a^{\frac{5}{7}}$. 512. а) $\sqrt[5]{2401}$; в) $\sqrt[3]{\frac{243}{8}}$; д) $\sqrt[6]{a^9}$; ж) $\sqrt[3]{b^2c^2}$. 513. а) 32; в) 3072; д) $\frac{9}{625}$; ж) $\sqrt{\frac{1}{10}}$; э) $\frac{1}{2}$. 514. а) $4\sqrt{3}$; в) $\frac{4}{\sqrt{5}}$; г) $\frac{7}{3}$. 515. а) Иккинчиси; в) тенг; д) биринчиси; е) иккинчиси. 516. а), б), в), д) Маънога эга; г), е) маънога эга эмас. 517. а) [0; ∞); в) [1; ∞); г) (-1 ; ∞). 518. а) $a \geq 0$; б) $a \geq 0$; в) $a = 0$; г) $a \leq 0$; е) $a \neq 0$. 519. а) 12; в) 1,9. 520. а) $\frac{3}{5}$; б) $\sqrt[12]{32}$; в) $\frac{31}{3}$; г) $2\sqrt[6]{18}$. 521. а) $a^{0,5} - b^{0,5}$; б) $\frac{1}{x^2 + 4}$; в) $a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}$; г) $z^{\frac{1}{3}} - 2$. 522. а) $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$; б) $x + y$; в) $x^{-\frac{1}{6}}y^{-\frac{1}{12}}$; г) $\sqrt{a}$. 523. а) $\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)$; в) $\sqrt{a}(\sqrt{a} - 1)$; д) $\sqrt{x}(\sqrt{3} - \sqrt{5})$; ж) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} + 1)$; э) $(x^{\frac{1}{3}} - 1)(y^{\frac{1}{2}} - 1)$. 524. а) Графики 234-расмда тасвирланган. 525. а) 1; б) 81; г) 54; е) $\sqrt[6]{3}$; э) $\frac{1}{9}$. 526. а) Иккинчи; в) биринчи. 527. а) a ; в) $a^{1,3}$; д) a^2 ; ж) $a^{\sqrt{3}} + 1$; э) $|x^n - y^n|$. 528. а) (0; ∞); в) 1; е) (0; 1); э) ($-\infty$; 2). 529. г) 53,9510 ва 53,9634; $10^{\sqrt{3}} \approx 53,96$. 530. а) 3; в) $-0,5$; д) 6; ж) $-0,5$. 531. а) 0; в) $\frac{5 \pm \sqrt{65}}{2}$; д) 4; ж) -4 . 532. а) 2; в) $\frac{17}{13}$; д) -2 ; 3; ж) $\frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$. 533. а) 3; в) 1. 534. а) 1; 2; в) 2. 535. а) (-1 ; ∞); в) ($-\infty$; 2); д) ($-\infty$; 2); ж) (0; ∞). 536. а) [0; ∞); в) ($-\infty$; -1); д) (0; ∞); ж) ($-\infty$; -1). 537. а) (-2 ; 3); в) ($-\infty$; -2) $\cup$ [3; ∞); д) ($-0,5$; ∞) ж) $(\frac{6}{13}; \infty)$. 538. а) (1; 3); в) (1; ∞). 539. а) ($-\infty$; -3) $\cup$ (1; ∞); в) ($-\infty$; $-7,5$) $\cup$ ($-0,5$; ∞). 540. а) $g(x) =$



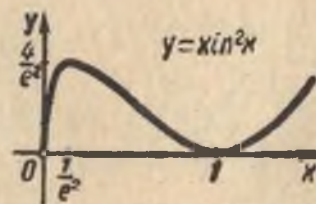
234- расм



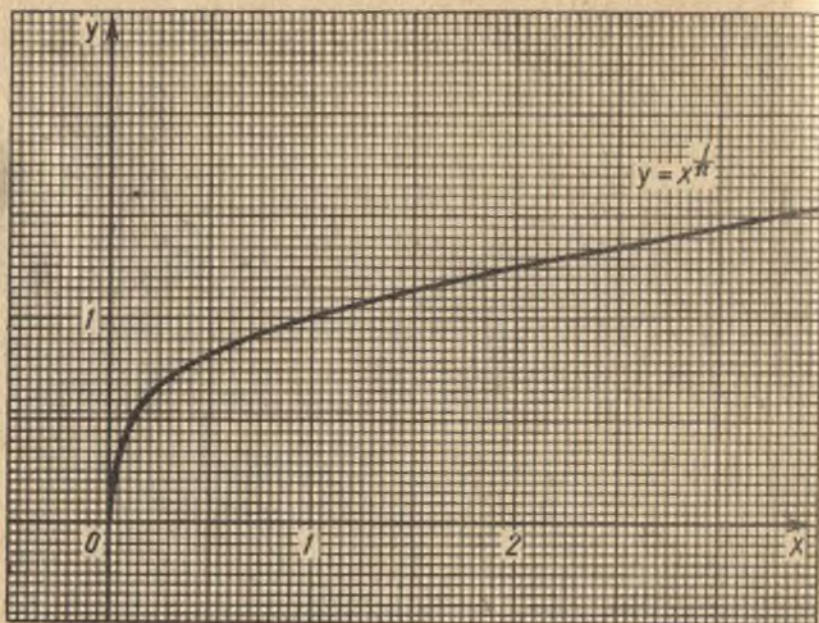
235- расм

- $= \frac{x-1}{2}$; $E(g) = D(g) = R$; д) $g(x) = -\frac{1}{x}$; $E(g) = D(g) = 1 - \infty$; 0) $\cup (0, \infty)$; ж) $g(x) = \sqrt{\frac{x}{2}}$; $E(g) = D(g) = [0; \infty)$. 544. а) 2; в) 4; д) -3; ж) 0.
545. а) $\log_{16} 2 = \frac{1}{4}$; в) $\log_{49} 7 = \frac{1}{2}$; д) $\log_{27} 9 = \frac{2}{3}$; ж) $\log_{81} 27 = \frac{3}{4}$. 548. а) 7.
- в) 11. 549. а) 25; в) $\frac{1}{49}$; д) 8; ж) 216. 550. а) 3; в) 2. 551. а) $\sqrt{\frac{1}{2}}$; в) 9.
552. а) 4; в) 729. 553. а) (5; ∞); в) (-1,5; ∞); д) (-3; 3); ж) (-2; 3). 554.
- а) (-1; 2); в) $(-\frac{2}{3}; \frac{5}{2})$. 555. г) График 235-расмда тасвирланган. 556. а)
- $2a + b$; б) $b - a$; в) $3a + 2b$; г) $1 - a + b$. 557. а) $2 + 4 \log_3 |a| + \frac{1}{5} \log_3 b$;
- в) $\frac{2}{5} \log_3 a + \frac{2}{15} \log_3 b$; г) $-2 \log_3 |a| + \frac{1}{6} \log_3 b$. 558. а) $-\frac{2}{3} - \frac{1}{9} \lg c - \frac{1}{6} \lg d$; в)
- $1 + \frac{1}{2} \lg p - \lg q$. 559. а) 1; в) 4; г) 3; д) -1; ж) 2. 561. а) 12; в) 3. 562. а)
- 2; в) 2. 563. а) Биринчиси; в) иккинчиси. 564. а) $1 + \log_5 5 \approx 3,3219$; в) $\log_9 0,7 \approx$
- $\approx -0,1623$; д) 9; ж) 0,01. 565. а) 2; в) 6,5. 566. а) $\frac{2 - \log_3 7}{5} \approx 0,046$; б) $4 -$
- $-\log_{0,2} 3 \approx 4,683$; в) $\pm \sqrt{\log_3 7}$; $\sqrt{\log_3 7} \approx 1,100$. 567. а) (9; ∞); в) (0; 0,16807);
- г) (25; ∞). 568. а) $(-\infty; x_0)$, $x_0 = \log_3 5 \approx 1,465$; б) $(x_0; \infty)$, $x_0 = \log_{0,8} 11 \approx$
- $\approx -10,746$; в) $(x_0; \infty)$, $x_0 = \frac{\log_{1,7} 7 + 1}{2} \approx 2,334$; г) $(x_0; \infty)$, $x_0 = 2 - \log_{0,4} 12 \approx$
- $\approx 4,064$. 569. б) (-3; 1); г) (0,1). 570. а) (0; 0,001) $\cup$ (10; ∞); в) $(-\infty; 1]$.

571. а) $\log_3 5$; в) $\log_2 10$. 572. а) $\frac{1}{3} \lg a - \lg b$; в) $3\sqrt{2} \lg a + \frac{6}{5} \lg b$. 573. а)
- 15; в) $\frac{4}{3}$; д) 10; 0,1; ж) 25; 0,2. 574. а) 100; 0,01; в) 8; 0,5. 575. а) 100; 10^3 ;
- в) 2. 576. а) (2; 5); (5; 2); в) (6; 8); (8; 6). 577. а) (1; 2); (2; 1); в) (4,5;
- 0,5). 578. а) (27; 4); $(\frac{1}{81}; -3)$; в) (16; 20). 579. а) $(\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi l)$;
- $(\frac{\pi}{2} + \pi k; 2\pi l - \frac{\pi}{3})$; $k, l \in \mathbb{Z}$; в) $(\frac{\pi}{6} + \pi k + \pi l; \frac{\pi}{6} - \pi k + \pi l)$; $(-\frac{\pi}{6} + \pi k +$
- $+\pi l; -\frac{\pi}{6} - \pi k + \pi l)$, $k, l \in \mathbb{Z}$. 580. а) 1,0986; в) 3,8501. 581. а) $3e^{3x}$;
- в) $2xe^{x^2}$; д) $\frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} - 273e^{91x}$; ж) $\frac{1}{4} \ln 1,7 \cdot 1,7^{\frac{x}{4}}$. 582. а) $2^x (\ln 2 \cos x - \sin x)$;
- в) $(3x^2 - x^2)e^{-x}$; д) $\frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}$; е) $\frac{6^x(\ln 3 - \ln 2) + 15^x(\ln 3 - \ln 5)}{(2^x + 5^x)^2}$;
- з) $\frac{-0,3^{-x}(2x \ln 0,3 + \sqrt{x} \ln 0,3 + 1)}{2\sqrt{x}(\sqrt{x} + 0,5)^2}$. 583. а) $(-\infty; 1]$ ораликда ўсади,
- $[1; \infty)$ ораликда камаяди, б) $(-\infty; -0,2]$ ораликда камаяди, $\{-0,2; \infty)$ ора-
- ликда ўсади; в) $(-\infty; 0]$ ва $[\frac{2}{\ln 2}; \infty)$ ораликларда камаяди, $[0; \frac{2}{\ln 2}]$ ора-
- ликда ўсади; г) $(-\infty; 0]$ ва $[-\frac{4}{\ln 0,7}; \infty)$ ораликларда камаяди, $[0; -\frac{4}{\ln 0,7}]$
- ораликда ўсади; 0 нуқтада функция минимумга эга, $-\frac{4}{\ln 0,7}$ нуқтада максимумга
- эга $(-\frac{4}{\ln 0,7} \approx 11,21)$. 584. а) $y = x + 1$; б) $y = 3 + 3 \ln 3(x - 1)$. 585. а)
- $\frac{4^x}{\ln 4} + C$; б) $7e^x + C$; г) $\frac{2 \cdot 0,9^x}{\ln 0,9} - \frac{5,6^x}{\ln 5,6} + C$; д) $\frac{e^{2x}}{2} + C$; ж) $-\frac{12^{5-7x}}{7 \ln 12} + C$.
586. а) $\frac{1,75}{\ln 2} \approx 2,525$; в) $\frac{3,75}{\ln 4} \approx 2,705$. 587. а) $e - 1 \approx 1,718$; в) $\frac{e^2}{2} - e + \frac{1}{2} \approx$
- $\approx 1,476$. 588. а) $\frac{1}{x \ln 2}$; в) $\frac{3}{(2+3x) \ln 7}$; д) $\frac{1}{x \ln 2}$; ж) $\frac{1}{x}$; з) $x^2(1 + 3 \ln x)$. 589. а)
- $\frac{1 - \ln x}{x^2}$; б) $\frac{3(x^2 + 1) - 2x(5 + 3x) \ln(5 + 3x)}{(5 + 3x)(x^2 + 1)^2}$; в) $\frac{1}{x \ln 10} = \frac{\ln e}{x}$; г) $\frac{2 \lg e + \lg x}{2\sqrt{x}}$.
590. а) $y = x - 1$; б) $y = \frac{x}{3} + \ln 3 - 1$; в)
- $y = \lg e(x - 1)$; г) $y = 2 + \frac{1}{9 \ln 3}(x - 9)$.
591. а) (0; e^{-1}) ораликда камаяди, $[e^{-1}; \infty)$
- ораликда ўсади, e^{-1} нуқтада функция минимум-
- га эга; б) функция графиги 236-расмда тасвир-
- ланган; (0; e^{-2}) ва $[1; \infty)$ ораликларда ўсади,
- $[e^{-2}; 1]$ ораликда камаяди; г) (0; 1) ва (1; e)



236- расм



237- расм

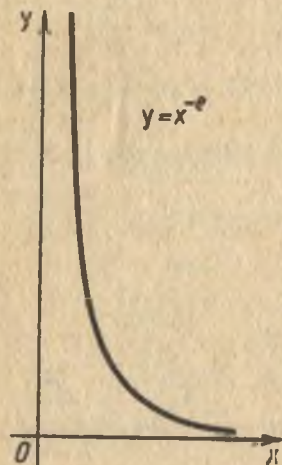
оралиқларда камаяди, $[e; \infty)$ оралиқда ўсади, e нуқтада функция минимумга эга.

592. а) $\ln|x+5|$; в) $\frac{3}{7} \ln|7x+1|$. 593. а) $\ln 7 \approx 1,946$; в) $0,5 \ln 5 \approx 0,805$.

594. а) $\ln 3 \approx 1,099$; в) $\ln 5 - \ln 2 \approx 0,916$. 595. $f'(x) = \sqrt{3}x^{\sqrt{3}-1}$; б) $g'(x) =$

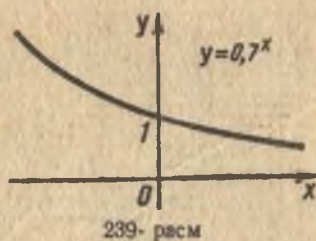
$= \frac{1}{\pi} x^{\frac{1}{\pi}-1}$, график 237-расмда тасвирланган; в) $u'(x) = -ex^{-e-1}$ график 238-расмда тасвирланган; г) $v'(x) = 0,1x^{-0,9}$. 599. а) $\frac{1}{3,7}x^{3,7} + C$; в) $\frac{\sqrt{2}+1}{2}x^{1-\sqrt{2}} + C$; г) $3 \ln|x| + C$. 600. а) $\frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1$; в) 5; г) $\ln 2 - \frac{1}{4}(\sqrt{3}-1)$. 604. $\frac{t \ln 2}{\ln x - \sqrt[n]{n}}$. 605. 9 мин. 606. $t = \frac{1}{\lg 2} \approx 3,322$ соат. 607. $\approx 0,06395$. 608. Ечилиши. $f'(0) = a$ бўлсин. У ҳолда $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x)f(\Delta x) - f(x)f(0)}{\Delta x} = f(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = f(x)f'(0) = af(x)$.

Шунинг учун $f(x) = Ce^{ax}$, бунда C —бирор ўзгармас.



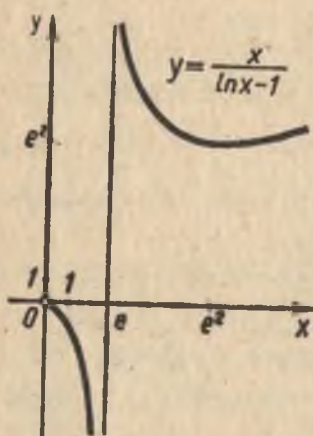
238- расм

Сўнгра $f(0) = Ce^{a \cdot 0} = C$ ва, демак, $C^2 = C \cdot C = f(0) \cdot f(0) = f(0+0) = C$, яъни $C^2 = C$, бундан $C = 0$ ёки $C = 1$. Шундай қилиб, $f(x) = e^{ax}$ ёки $f(x) = 0$. $y = e^{ax}$ ва $y = 0$ функциялар учун ҳар қандай x_1 ва x_2 да $f(x_1+x_2) = f(x_1) \times f(x_2)$ тенглик бажарилишига текшириш билан яшонч ҳосил қилишимиз мумкин. 609. $\frac{10 \lg 2}{\lg 1,6} \approx$



- $\approx 14,57$ (мин). 610. $\frac{10 \lg 2}{\lg 1,25} \approx 31,06$ (мин). 611. $500e^{-5} \approx 3,37$ (м/мин). 612. График 239-расмда тасвирланган. 614. а) $\log_3 7 \approx 1,7712$; г) $\frac{2 \lg 0,3}{6 \lg 5 + \lg 0,3} \approx -0,2849$. 615. а) -1 ; 3; б) $-e$; в) -1 ; 2; г) -5 ; 2. 616. а) $0,5$; б) $\ln 3 \approx 1,0986$; г) $\frac{5 - 4 \log_2 7}{3} \approx -2,076$. 617. б) 7 ; г) $\frac{8}{7}$. 618. б) $0,09$; в) 5 ; г) $\sqrt{2}$. 619. а) $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) 3 ; в) $0,5$; г) $\sqrt{2}$; 4. 620. а) $\pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; в) 0 ; г) $\log_{2,5} 2 \approx 0,7565$. 621. а) $\log_{11} 2 \approx 0,2891$; б) $\frac{4(3-a)}{3+a}$. 622. а) $(1; 3)$; б) $(0; 0,5) \cup (1; 1,5)$; в) $(1; \infty)$; г) $(1; 2)$. 623. а) $(e^2; \infty)$; в) $(0; e^{-3})$. 624. а) $(-\infty; 0]$; в) $(-\infty; 2)$. 625. а) $(x_0, \infty), x_0 = \frac{2 - \log_{1,7} 7}{3} \approx -0,5557$; г) $(0; \infty)$. 627. а) $\sqrt{0,6}$; б) 4 ; в) 3 ; г) $1,5$; 3. 628. а) 13 ; б) $\frac{1}{81}$; 3; в) 6 ; г) $0,01; 0,001$. 629. а) $0,25$; 4; б) $\frac{1}{3}$; 27; в) $0,1; 100$; г) $0,2; 125$. 630. а) 2 ; б) $\frac{1}{7}$; 7; в) 7 ; г) $\sqrt{10}$; 100. 631. а) $(-\infty; 1)$; в) $(1; \infty)$. 632. а) $(2,8; 3)$; б) $(-0,5; -0,255)$; в) $(0,382; 0,4)$; г) $(-\infty; -32)$. 633. а) $(1; \infty)$; б) $(0; 1)$; в) $(1, \infty)$; г) $(0,1)$. 634. а) $(-1; 3)$; б) $(e^{-1}; e^2)$; в) $(0; 0,1) \cup (1; 100)$; г) $(1 - \sqrt{5}; -1) \cup (2; 1 + \sqrt{5})$. 635. а) $(1; \infty)$; в) $(-\infty; 4)$. 636. а) $(-\infty; -1) \cup (3; \infty)$; б) $(-2; 3)$; в) $\mathbb{R}$; г) $(-\infty; -3) \cup (-3; \infty)$. 637. а) $(-\frac{5}{3}; 2)$; б) $(2\pi k; \pi + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}$ кўринишидаги барча оралиқлар бирлашмаси; в) $(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}$ кўринишидаги барча оралиқлар бирлашмаси; г) $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$. 638. а) $-4,6757$; б) $-1,5662$; в) $0,8736$; г) $1,0649$. 639. а) $1,112$; в) $3,248$; г) $23,14$. 640. а), б), г) биринчиси; в) иккинчиси. 641. а) $9e^{9x}$; в) $-35e^{-5x}$. 642. а) $-4 \ln 5 \cdot 5^{-4x}$; в) $-10 \ln 3 \cdot 9^{-5x}$. 643. а) $\frac{2^x (\ln 2 \cos x + \sin x)}{\cos^2 x}$; б) $\frac{\operatorname{tg} x}{3\sqrt{x^2}} + \frac{\sqrt{x}}{\cos^2 x}$; в) $-\frac{4x + \sin 2x}{4x\sqrt{x \sin^2 x}}$.

$\frac{x}{3}$
 г) $\frac{2 \sqrt[3]{(x^4+3) \ln 2 - 12x^3}}{3(x^4+3)^2}$. 644. а) $\cos xe^{\sin x}$; б) $-\sin xe^{\cos x}$; в) $\frac{5 \ln 3 \cdot 3^{5 \lg x}}{\cos^2 x}$; г) $\frac{-2 \ln 7 \cdot 7^2 \operatorname{ctg} x}{\sin^2 x}$. 645. а) $\frac{1}{x \ln 3}$; б) $\frac{4 \lg e}{3+4x}$. 646. а) $3x^2 \ln x + x^2$; б) $3^x (\ln 3 \ln(5x) + \frac{1}{x})$; в) $\frac{x \cos x \ln(7x) - \sin x}{x \ln 27 x}$; г) $\frac{2 \sqrt{x+6} - \sqrt{x} \ln(2x)}{2x(\sqrt{x+3})^2}$. 647. а) $\operatorname{ctg} x$; б) $\frac{2}{\sin 2x}$; в) $\frac{3x^2 \sqrt{x+2}}{\sqrt{x}(x^3+4\sqrt{x+5}) \ln 1}$; г) $\frac{\lg e(3 \cos 3x + 2^x \ln 2)}{\sin 3x + 2^x}$. 648. а) $y = 2x + 1$; б) $y = 10(\ln 10 \cdot x + 1 - \ln 10)$; в) $y = 2x - 1$; г) $y = 3x \lg e - \lg e$. 649. а) $(0; 1]$ оралиқда камаяди, $[1; \infty)$ оралиқда ўсади; б) $\left[-\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right], k \in \mathbb{Z}$ оралиқларда ўсади, $\left[\frac{3\pi}{4} + 2\pi k; \frac{7\pi}{4} + 2\pi k\right], k \in \mathbb{Z}$ оралиқларда камаяди; $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ нуқталарда функция максимумларга эга, $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ нуқталарда минимумларга эга; г) $\left(0; 4^{-\frac{1}{\ln 2}}\right]$ ва $[1; \infty)$ оралиқларда ўсади, $\left[4^{-\frac{1}{\ln 2}}; 1\right]$ оралиқда камаяди $\left(4^{-\frac{1}{\ln 2}} \approx 0,1353\right)$. 650. а) $(0; e^{-1})$ ва $[e; \infty)$ оралиқларда камаяди, $[e^{-1}; e]$ оралиқда ўсади; б) $\left[-\frac{3\pi}{4} + \pi k; -\frac{\pi}{2} + \pi k\right]$ ва $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; -\frac{\pi}{4} + \pi k\right], k \in \mathbb{Z}$ оралиқларда ўсади, $\left[-\frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{\pi}{4} + \pi k\right], k \in \mathbb{Z}$ оралиқларда камаяди, $-\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ нуқталарда функция максимумларга эга; $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ нуқ-



240-расм

таларда минимумларга эга; в) $(0; 1]$ ва $[e^2; \infty)$ оралиқларда камаяди, $[1; e^2]$ оралиқда ўсади; 1 нуқтада функция минимумга эга, e^2 нуқтада эса максимумга эга; г) $(0; e^{-1})$ ва $[e; \infty)$ оралиқларда ўсади, $[e^{-1}; e]$ оралиқда камаяди. 651. а) $(0; 1]$ ва $[4; \infty)$ оралиқларда камаяди, $[1; 4]$ оралиқда ўсади; б) функциянинг графиги 240-расмда тасвирланган; в) $(-\infty; 3]$ оралиқда ўсади, $[3; \infty)$ оралиқда камаяди; 3 нуқтада функция максимумга эга, 0 критик нуқта бўлса ҳам экстремум нуқтаси эмас; г) $(-\infty; -1]$ ва $[0; 1]$ оралиқларда ўсади, $[-1; 0]$ ва $[1; \infty)$ оралиқларда камаяди. 652. а) $\ln|x+7| + C$; б) $0,6 \ln|5x+1| + C$; в) $-2,5 \ln|3-2x| + C$; г) $-0,8 \ln|7-5x| + C$. 653. а) $\frac{1}{8} \ln|x| + C$; б)

$0.7x^{\frac{10}{7}} + C$; в) $10\sqrt[3]{x} + C$; г) $\frac{x^{\pi+1}}{\pi+1} + C$. 654. а) $\ln 2 \approx 0,6931$; б) $\frac{\ln 7}{3} \approx 0,6486$;
в) $\ln 2 - \ln 3 \approx -0,4055$; г) $0,5 \ln 5 \approx 0,8047$. 655. а) $\ln 5 \approx 1,6094$; б) $3 -$
 $- 3 \ln 2 \approx 0,9206$; в) $6 - 2 \ln 3 \approx 3,8028$; г) $4 - 3 \ln 3 \approx 0,7042$.

Қийин масалалар

656. Кўрсатма. q га бўлишда нолга тенг бўлмаган аниқ $q-1$ та қолдиқлар мавжудлигидан, $\frac{p}{q}$ рационал сонни чексиз ўнли касрга айлантиришда қолдиқлар, демак, бўлинмадаги рақамлар ҳам $q-1$ дан катта бўлмаган давр билан такрорланишидан фойдаланинг. 657. Кўрсатма. $\frac{m}{n}$ ни чексиз ўнли касрга

айлантиришда бўлинмада фақат тўққизлар пайдо бўла бошлайдиган қолдиқ p бўлсин. У ҳолда ҳар қандай натурал k сон учун $1 > \frac{p}{n} > 1 - 10^{-k}$. 658. Кўр-

сатма. Чексиз даврий ўнли каср чекли ўнли каср йигиндиси билан махражи 10^k га тенг бўлган чексиз геометрик прогрессия йигиндисига тенг, бунда k — даврдаги рақамлар сони. 659. k — бу каср даврининг узунлиги бўлсин. k иккидан кейин келадиган рақамдан бошлаб k та рақамни қараймиз. Бу рақамларнинг ҳаммаси еттиликлар, шунинг учун касрнинг даври ($77 \dots 77$) бўлиши керак.

k та рақам

бу нотўғри; бу ҳолда навбатдаги рақамларнинг ҳаммаси еттилик бўлиши керак.

660. в) $\sqrt[3]{3} = \frac{p}{q}$ деб фараз қиламиз, бунда $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $\frac{p}{q}$ — қисқармайдиган

каср. У ҳолда $3 = \frac{p^3}{q^3}$, яъни $p^3 = 3q^3$, бундан p нинг 3 га бўлиниши келиб чи-

қади. $p = 3t$ ни $p^3 = 3q^3$ тенгликка қўйиб, $27t^3 = 3q^3$ ни, яъни $9t^3 = q^3$ ни топа-

миз. Охириг тенгликдан q нинг 3 га бўлиниши кўринади. Зидлик ҳосил бўлди:

$\frac{p}{q}$ каср 3 га қисқаради; д) Тескарисини фараз қиламиз: $\lg 43 = \frac{p}{q}$, бунда

$\lg 43 > 0$ бўлгани учун p ва q ни натурал сонлар деб ҳисоблаш мумкин. $\lg 43 =$

$= \frac{p}{q}$ тенгликдан $10^{\frac{p}{q}} = 43$ ни ҳосил қиламиз, бунда $10^p = 43^q$, бу тенглик

эса сохта: унинг чап қисми 5 га бўлинади, ўнг қисми эса 5 га бўлинмайди. 661.

а) $\sqrt{3} + \sqrt{5} = r$ бўлсин, бунда r — рационал сон. У ҳолда $3 + 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} + 5 =$

$= r^2$, бундан $\sqrt{15} = \frac{r^2 - 8}{2}$, бу эса $\sqrt{15}$ нинг иррационаллигига зидлик қи-

ди; в) $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} = r$ бўлсин, бунда r — рационал. У ҳолда $\sqrt{5} =$

$-\sqrt{2} - \sqrt{3}$, бундан $5 = r^2 + 2 + 3 - 2r\sqrt{2} - 2r\sqrt{3} + 2\sqrt{6}$. Сўнггига тўғри

$- 2r\sqrt{3} = 2r\sqrt{2} - 2\sqrt{6}$, шунинг учун $r^4 + 12r^2 - 4r^3\sqrt{3} = 8r^2 + 2$

ва $r^4 + 4r^2 - 24 = (4r^3 - 16r)\sqrt{3}$, бу эса $\sqrt{3}$ нинг иррационаллигига зидлик қи-

лади (чунки $4r^3 - 16r \neq 0$). 664. Кўрсатма. а) Олдин $\sqrt[3]{3}$

б) олдин сурат ва махражни $\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}$ га кўпайтиринг; в) 663 г) масаланинг натижасидан фойдаланинг. 666. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ва $\sqrt{5}$ геометрик прогрессиянинг мос равишда $(m+1)$, $(n+1)$ ва $(p+1)$ -ҳадлари бўлсин. У ҳолда $2 = b_1^2 q^{2m}$, $3 = b_1^2 q^{2n}$, $5 = b_1^2 q^{2p}$, бунда $b_1 > 0$ ва $q > 0$ — геометрик прогрессиянинг биринчи ҳади ва махражни. Бундан қуйидагиларга эга бўламиз: $\frac{2}{3} =$

$$= q^{2(m-n)}, \frac{3}{5} = q^{2(n-p)}, \left(\frac{2}{3}\right)^{n-p} = \left(\frac{3}{5}\right)^{m-n} = q^{2(m-n)(n-p)} \text{ ва } 2^{n-p} \times \\ \times 5^{m-n} = 3^{(n-p) + (m-n)}. \text{ Агар } q < 1 \text{ бўлса, у ҳолда бу тенгликнинг}$$

иккала қисми натурал сонлар (чунки $m > n > p$), шу билан бирга чап қисми 2 га бўлинади, ўнг қисми эса бўлинмайди. Натурал сонни туб кўпайтувчиларга ёйишнинг ягоналиги ҳақидаги теоремага зидлик ҳосил бўлди. Агар $q > 1$ бўлса, у ҳолда олдин охириги тенгликни $2^{p-n} \cdot 5^{n-m} = 3^{p-m}$ кўринишда ёзиш керак. 668.

а) 6; б) $\sqrt{3} - \sqrt{7}$; в) $\sqrt{5}$. 669. Етарлича катта n ларда (берилган $\varepsilon > 0$ учун) $A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$, $A - \varepsilon < c_n < A + \varepsilon$ тенгсизликлар бажарилади; аммо у ҳолда $b_n < c_n < A + \varepsilon$ ва $c_n > a_n > A - \varepsilon$, яъни $A - \varepsilon < b_n < A + \varepsilon$, бундан $|b_n - A| < \varepsilon$. 670. б) $\varepsilon > 0$ ни танлаб оламиз, у ҳолда етарлича катта n ларда (a_n) чексиз кетма-кетлик учун $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{M}$ тенгсизлик бажарилади, шунинг

учун ўша n ларда: $|\alpha_n a_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$. 671. Кўрсатма. Олдин яқинлашув-

чи кетма-кетлик чегараланганлигини исботланг. Сўнгра, масалан кўпайтма учун ушбуга эга бўламиз: $a_n = A + \alpha_n$, $b_n = B + \beta_n$, бунда A ва B лар a_n ва b_n — кетма-кетликларнинг лимитлари, α_n ва β_n — чексиз кичик кетма-кетликлар, шунинг учун $a_n b_n = (A + \alpha_n)(B + \beta_n) = \alpha_n \beta_n + A \beta_n + B \alpha_n + AB$; $\alpha_n \beta_n + A \beta_n + B \alpha_n$ кетма-кетлик чексиз кичик (670-а) ва б) масалаларга қаранг), шунинг учун 670-в) масалага кўра: $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = AB$. 674. а) 0; б) 4. 676. а) $\frac{5}{3}$; б)

— 2. 677. Ечилиши. Ихтиёрй $\varepsilon > 0$ учун шундай N номер топилиши, барча

$n > N$ лар учун $\left| \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} - A \right| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилишини исботлаймиз, бунда $A = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Шундай N_1 номерни қараймизки, $k > N_1$ да $|x_k -$

$- A| < \frac{\varepsilon}{2}$ тенгсизлик ўринли бўлади. У ҳолда $n > N_1$ да ушбуни ҳосил қи-

ламиз:
$$\left| \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} - A \right| = \left| \frac{(x_1 - A) + (x_2 - A) + \dots + (x_n - A)}{n} \right| < \\ < \underbrace{\left| \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{N_1} - N_1 A}{n} \right|}_{= 0} + \frac{n - N_1}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{2}; \quad \frac{n - N_1}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ сўнгра}$$

$$\left| \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{N_1} - N_1 A}{n} \right| = 0, \text{ шу сабабли } n > N \text{ да, } \left| \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n - nA}{n} \right| <$$

ε бажарилади, бунда $N > N_1$ бирор сон. Бинобарин, $\left| \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} - A \right| < \varepsilon$

240- рақ.

$-A \left| < \left| \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{N_1} - N_1 A}{n} \right| + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \right.$ 679. а) Кўрсатма. $\sin((k+1)x) = \sin(kx) \cos x + \sin x \cos(kx)$ тенгликдан фойдаланинг.

680. б) Кўрсатма. $3^{3n+2} + 2^{4n+1}$ сонни B_n билан белгилаймиз. У ҳолда $B_{n+1} = 16B_n + 11 \cdot 3^{3n+2}$ сон 11 га бўлинади. 681. Олдин тўғри чизиқда ётув.

чи n нуқта уни $n+1$ та қисмга бўлишини кўрсатиш керак. Сўнгра: а) $n=1$ да тасдиқ тўғри, чунки $1 + \frac{1 \cdot 2}{2} = 2$ ва бир тўғри чизиқ текисликини икки қисмга бўлади, б) тасдиқ $n=k$ учун тўғри бўлсин, яъни k та тўғри чизиқ текис-

ликини $1 + \frac{k(k+1)}{2}$ дан ортиқ бўлмаган қисмга бўлади. Тасдиқ $n=k+1$ учун

тўғри эканини исботлаймиз. $k+1$ та тўғри чизиқдан биттасини танлаб оламиз ва уни $(k+1)$ -тўғри чизиқ деймиз. Индукцияда фараз қилинишича қолган k та

тўғри чизиқ текисликини $1 + \frac{k(k+1)}{2}$ дан ортиқ бўлмаган қисмга бўлади; $(k+$

$+1)$ -тўғри чизиқ қолган k та тўғри чизиқнинг баъзилари билан кесишади, шу сабабли бўлиниш нуқталари билан $(k+1)$ тадан кам бўлмаган қисмга бў-

линади. Тўғри чизиқнинг ҳосил бўлган ҳар бир қисми текислиқнинг мавжуд қисмлардан бирини якки қисмга бўлади, яъни текислиқнинг мавжуд $1 + \frac{k(k+1)}{2}$

тадан ортиқ бўлмаган қисмига яна $k+1$ тадан ортиқ бўлмаган қисм қўшилади.

Ҳаммаси бўлиб $1 + \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = 1 + \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ тадан ортиқ бўл-

маган қисм ҳосил бўлади. 682. $n=1$ да тасдиқ тўғри, чунки битта текислик фазони иккита қисмга бўлади ва $n=1$ да $\frac{(n+1)(n^2-n+6)}{6} = 2$. Тасдиқ $n=k$

учун тўғри деб фараз қиламиз ва унинг $n=k+1$ учун тўғрилигини исботлай-

миз. Текислиқлардан бирини танлаб оламиз ва бу текислиқнинг қолган k та те-

кислик билан кесишиш тўғри чизиқларини қараймиз. Бу тўғри чизиқлар k тадан

ортиқ эмас ва 681-масала хулосасига кўра улар танлаб олинган текисликини

$\frac{k^2+k+2}{2}$ дан ортиқмас қисмга бўлади. Индукцияда фараз қилинишига кўра

қолган k та текислик фазони $\frac{(k+1)(k^2-k+6)}{6}$ дан ортиқ бўлмаган қисм-

га бўлади. Танлаб олинган текислиқнинг ҳар бир қисми фазонинг мавжуд қисм-

ларидан бирини икки қисмга бўлиши мумкин. Ҳаммаси бўлиб $\frac{(k+1)(k^2-k+6)}{6} +$

$+\frac{k^2+k+2}{2} = \frac{(k+2)(k^2+k+6)}{6}$ тадан ортиқ бўлмаган қисм ҳосил бўла-

ди, бу эса $\frac{(n+1)(n^2-n+6)}{6}$ ифоданинг $n=k+1$ даги қийматига тўғри

келади. 683. Кўрсатма. Ҳар қандай натурал k учун ушбуга эгамиз: $\frac{1}{2^k+1} +$

$$+ \frac{1}{2^k + 2} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}} > \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}. \quad 684. 0.$$

685. Кўрсатма. $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = -\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ бу функция эса x нолга

интилганда лимитга эга эмас. 686. $(x_0; x_0)$ нуқтани абсциссалар ўқининг $\left(\frac{2x_0}{3}; 0\right)$

нуқтаси билан туташтириш керак. 687. $a > 0, b > 0, c > 0, D > 0$. Агар параболанинг шохлари юқорига йўналган бўлса, у ҳолда $a > 0$, агар пастга йўналган бўлса,

у ҳолда $a < 0$. b нинг ишораси $x_0 = -\frac{b}{2a}$ формуладан аниқланади, бунда

x_0 — парабола учининг абсциссаси. c нинг ишораси $c = y(0)$ тенгликдан аниқланади. Ниҳоят D дискриминантнинг ишораси параболанинг абсциссалар ўқи билан умумий нуқталари сонига боғлиқ: агар кесиниш нуқталари иккита бўлса, у ҳолда $D > 0$, агар умумий нуқта битта бўлса (яъни парабола ўққа уринса), у ҳолда $D = 0$, агар умумий нуқталар мавжуд бўлмаса, у ҳолда $D < 0$. 688. $(-1)^n \times \pi! \left(\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}} \right)$. Кўрсатма. $\frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$. 689.

а) $f(x) = b$ ёки $f(x) = x$; б) $f(x) = x$ ёки $f(x) = b - x$. 690. а) жуфт n ларда x , тоқ n ларда $3 - x$, аниқланиш соҳаси R ; б) жуфт n ларда x , тоқ n ларда $\frac{1}{x}$, аниқланиш соҳаси (ҳар қандай n учун) — нолдан фарқли ҳамма ҳақиқий

сонлар тўплами; в) $3k$ кўринишидаги n ларда x , $3k + 1$ кўринишидаги n ларда $\frac{1}{x-1}$ ва $3k + 2$ кўринишидаги n ларда $\frac{x-1}{x}$; $n = 1$ да $D(f) = (-\infty; 1) \cup$

$\cup (1; \infty)$ ва $n \geq 2$ да $D(f_n) = (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; \infty)$. 691. Тескариланади.

692. а) $\frac{1}{ax}$, $a \neq 0$; б) x ёки $\frac{ax+b}{cx-a}$ ($bc \neq -a^2$). 696. Кўрсатма. Бу тенг-

ламанинг чап қисми етарлича катта x ларда мусбат, манфий x ларнинг модули бўйича етарлича катта қийматларида манфий. 697. Параболанинг $(x_0; y_0)$ нуқта-сидан ўтувчи ва бурчак коэффициенти k га тенг тўғри чизиқнинг тенгламаси қуйи-

дагича: $y = y_0 + k(x - x_0)$, бунда $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$. Бу тўғри чизиқ билан параболанинг умумий нуқталари абсциссалари $ax^2 + bx + c = y_0 + k(x - x_0)$ тенгламадан топилади. Бу квадрат тенглама ва унинг дискриминанти нолга тенг бўлса, у битта илдизга эга бўлади, бундан $k = 2ax_0 + b = y'(x_0)$. 689. M_0 нуқта $y = x^2$ параболанинг «ичкариса», M_1 — параболанинг ўзи, M_2 — параболанинг

ташқи қисми, M_k нуқта $k \geq 3$ да бўш. 701. Математик индукция методидан ва Лагранж теоремасидан фойдаланинг (Лагранж теоремасидан кўпҳаднинг иккита илдизи орасида шу кўпҳад ҳосиласининг илдизи мавжудлиги келиб чиқади).

702. $P(x)$ кўпҳад A қийматни p марта қабул қилсин, $p > n$. У ҳолда $P(x) - A$ кўпҳаднинг даражаси n ва n тадан кўп илдизга эга бўлади, бу эса олдинги масаланинг натижасига зидлик қилади. 703. а) Агар $R(x) = C$ бўлса, у ҳолда C даражаси k дан юқори бўлмаган кўпҳаднинг илдизи бўлади, чунки бу ҳолда $p(x) - Cq(x) = 0$, $p(x) - Cq(x)$ — даражаси k дан юқори бўлмаган кўпҳад. 704. а) $f(x) = \sin x$ функцияни f орқали белгилаймиз. У ҳолда тескари

функция ҳосиласининг формуласига кўра $\arcsin'x = \frac{1}{f'(\arcsinx)} = \frac{1}{\cos(\arcsinx)}$.

Сўнгра $\sin(\arcsinx) = x$ ва $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ бўлгани учун $\cos(\arcsinx) = \sqrt{1-x^2}$ ($\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ оралиқда косинус номанфий). Шундай қилиб, $\arcsin'x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

б), а) масаладагига ўхшаш ушбунни ҳосил қиламиз: $\arccos'x = \frac{1}{-\sin(\arccosx)} =$

$= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (чунки $[0; \pi]$ оралиқда синус номанфий, шу сабабли $\sin(\arccosx) =$

$= \sqrt{1-x^2}$; в) а) масаладагига ўхшаш топамиз: $\arctg'x = \cos^2(\arctgx)$. Сўнгра $\tg(\arctgx) = x$ бўлгани учун $\cos^2(\arctgx) = \frac{1}{1+\tg^2(\arctgx)} = \frac{1}{1+x^2}$. Узил-ке-

сил ушбунни ҳосил қиламиз: $\arctg'x = \frac{1}{1+x^2}$. 705. а) Е ч и л и ш и. $\arcsinx + \arccosx$

ни $u(x)$ билан белгилаймиз. У ҳолда $u'(x) = \arcsin'x + \arccos'x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} -$

$= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$. Бинобарин, $u(x) = C$, бунда C — ўзгармас. Бу ўзгармасни то-

пиш учун $u(0)$ ни ҳисоблаш етарли. Ушбунни топамиз: $C = u(0) = \arcsin 0 +$

$+\arccos 0 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$. Искотни тугаллаш учун тенгликни $x = \pm 1$ нуқта-

ларда текшириш керак. 706. $f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$, биринчи,

қўшилувчи жуфт функция, иккинчи қўшилувчи тоқ функция. 707. а) $T > 2$;

б) $T = 3$, $T > T_0$, бунда $T_0 \approx 6 \frac{1}{3}$; в) $T > T_0$, бунда $T_0 \approx 4,4$. 708. Тўлдириш

мумкин эмас; б) жуфт функциягача; а) ва б) тоқ функциягача. 709. а). Мумкин

(масалан, Дирихле функцияси — агар x рационал бўлса, бу функциянинг қиймати

1 га тенг, агар x иррационал бўлса, 0 га тенг); б) мумкин эмас, чунки бу ҳолда

$\sqrt{2}$ ва $1 - \sqrt{2}$ сонлар бу функциянинг даври бўлиши керак, уларнинг йигиндиси

эса 1 — давр бўла олмайди. 710. а) Ҳар қандай n да; б) жуфт n да; в) бундай

n йўқ. 711. а) Кўрсатма. 1 қийматни функция фақат битта 0 нуқтада қабул

қилади; б) кўрсатма. 2 қийматни функция фақат битта 0 нуқтада қабул қи-

лади; г) кўрсатма. Функциянинг иккита қўшни ноллари $x_1 = \pi^2 k^2$ ва $x_2 =$

$= \pi^2(k+1)^2$ орасидаги «масофа» етарлича катта k ларда ҳар қандай мусбат T дан

катта бўлади: $k > \frac{T - \pi^2}{2\pi^2}$ да $x_2 - x_1 = \pi^2(2k+1) > T$. 712. Кўрсатма. Уз-

луксиз, даврий, сонлар тўғри чизигининг ҳамма ерида аниқланган функция ўзининг

энг катта (энг кичик) қийматига эришади. 713. Е ч и л и ш и. $(\sin 47^\circ + \sin 61^\circ) -$

$-(\sin 11^\circ + \sin 25^\circ) = 2 \sin 54^\circ \cos 7^\circ - 2 \sin 18^\circ \cos 7^\circ = 4 \cos 7^\circ \sin 18^\circ \cos 36^\circ =$

$= \cos 7^\circ \cdot \frac{4 \sin 18^\circ \cos 18^\circ \cos 36^\circ}{\cos 18^\circ} = \cos 7^\circ \cdot \frac{2 \sin 36^\circ \cos 36^\circ}{\cos 18^\circ} = \cos 7^\circ \cdot \frac{\sin 72^\circ}{\sin 72^\circ} = \cos 7^\circ$.

$$714. \text{ а) } \frac{\sin \frac{1}{2} nx \sin \frac{1}{2} (n+1)x}{\sin 0,5x}. \text{ Кўрсатма. Ҳар қайси қўшилувчинини}$$

$\sin 0,5x$ га кўпайтиринг ва бўлинг ҳамда синуслар кўпайтмасини косинуслар айирмасига алмаштирувчи формуладан фойдаланинг; б) $\frac{\sin 2nx \cos (2n-1)x}{\sin x}$. Кўр-

сатма. Ҳар бир қўшилувчинини $\sin 2x$ га кўпайтириг ва бўлинг. 715. Кўрсатма. $\sin A = \sin(\pi - B - C) = \sin B \cos C + \cos B \sin C$ бўлгани учун $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} =$

$$= \frac{\sin C}{c} \text{ муносабатдан ушбуни ҳосил қиламиз: } a = b \cos C + c \cos B. \text{ Шунга ўх-}$$

шаш $b = a \cos C + c \cos A$ ва $c = a \cos B + b \cos A$. Энди олинган муносабатлардан биринчисини a га, иккинчисини — b га, учинчисини — c га кўпайтириш ва учала тенгликни қўшиш қолади. 717. Кўрсатма. Синуслар теоремасидан фойдала-

$$\text{нинг. 718. Кўрсатма. } \sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \text{ ва } \operatorname{tg} \frac{x}{2} =$$

$$= \frac{1 - \cos x}{\sin x}. \text{ формулалардан фойдаланинг. 719. Кўрсатма. } \cos 60^\circ \text{ ни } \frac{1}{2} \text{ га}$$

алмаштиринг ва сўнгра ҳосил бўлган ифодани $\sin 20^\circ$ га кўпайтиринг ва бўлинг, шундан сўнг иккиланган аргумент синуси формуласидан уч марта фойдаланинг.

720. а) Бирор x_0 нуқтани тайинлаймиз. Жисмни x_0 координатали нуқтадан x ко-

ординатали нуқтага кўчиришда $\int_{x_0}^x f(z) dz$ га тенг иш бажарилди, бунда $f(x)$ —

жисмга таъсир қилаётган куч. Иккинчи томондан, бу иш $u(x_0) - u(x)$ га тенг

экаи физика курсидан маълум. Шундай қилиб, $u(x_0) - u(x) = \int_{x_0}^x f(z) dz$, шу

сабабли $(u(x_0) - u(x))' = \left(\int_{x_0}^x f(z) dz \right)'$, яъни $-u'(x) = f(x)$. Сўнгра, Ньютоннинг

иккинчи қонунига кўра, $f(x) = m a(x)$, яъни $m x''(t) = -u'(x)$. 721. Ечили-

ши. Мураккаб функция ҳосиласининг формуласига кўра: $E'(t) = \left(\frac{m x'^2(t)}{2} \right)' +$

$$+ (u(x(t)))' = m x'(t) x''(t) + u'(x) x'(t) = x'(t) (m x''(t) - f(x)) = x'(t) \cdot 0 = 0.$$

724. Кўрсатма. Бу тенгламанинг исталган $x(t)$ ечимини қаранг. $x(0) = x_0$,

$x'(0) = v_0$ бўлсин. $x_1(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ кўринишдаги дифференциал тенглама-

нинг шу бошланғич маълумотли $x(t)$ ечимини оламиз (723-масалага қаранг). У

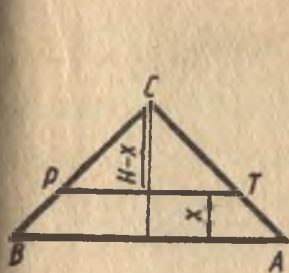
ҳолда $x_2(t) = x(t) - x_1(t)$ ҳам шу тенгламанинг $x_2(0) = 0$, $x_2'(0) = 0$ бошланғич

маълумотли ечими бўлади (722-масалага қаранг). 721-масалага кўра бу ҳаракат

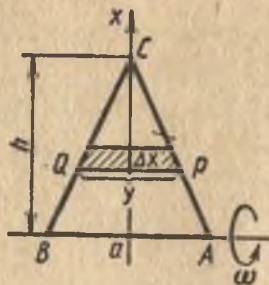
вақтида тўла энергия 0 га тенг: $\frac{m x_2'^2(t)}{2} + \frac{m \omega^2 x_2^2(t)}{2} = 0$, бундан, хусусан,

$x_2(t) = 0$ экани келиб чиқади. 727. Кўрсатма. $x_1(t) + x_2(t)$ йиғинди $x''(t) =$

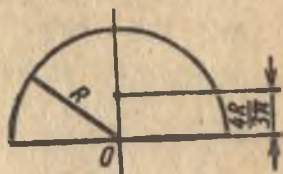
$= -\omega^2 x(t)$ дифференциал тенгламани қаноатлантиришини, яъни $(x_1(t) + x_2(t))'' =$



241- расм



242- расм



243- расм

$= -\omega^2 (x_1(t) + x_2(t))$ эканини исботлаш етарли. 729. К ўрсатма. $y = 1$, $y = x$, $y = x^2$ ва $y = x^3$ функциялар учун формулани текширинг. 730. $\frac{g^2 M^3}{6\pi^2}$,

бунда g — эркин тушиш тезланиши. 731. $\frac{\pi \rho R^2 H^2 g}{12}$ Ечилиши Оғирлик ку-

чини енгиш учун сарфланган иш қум потенциал энергиясининг орттирмасига тенг. Баландлиги Δx , асосига параллел равишда x ва $x + \Delta x$ масофаларда ўтказилган текисликлар билан чегараланган кесик конуснинг ҳажми $S(x) \Delta x$ га (Δx^2 миқдоргача аниқликда) тенг, бунда $S(x)$ — конус асосидан x масофада асосга параллел қилиб ўтказилган текислик билан конусни кесганда ҳосил бўлган кесимнинг юзи. Бу кесик конус ичидаги қумнинг потенциал энергиясининг орттирмаси (Δx^2 миқдоргача аниқликда) $\Delta E \approx \rho x S(x) g \Delta x$ га тенг. $S(x)$ ни аниқлаш учун конуснинг ўқ кесимини қараймиз (241-расм). PCT учбурчакнинг PT томонга ўтказилган баландлиги $H - x$ га тенг. PCT ва ABC учбурчакларнинг ўхшашли-

гидан: $\frac{PT}{AB} = \frac{H - x}{H}$, бундан $PT = \frac{AB(H - x)}{H}$. $S(x) = \pi (0,5 PT)^2 = \pi R^2 \frac{(H - x)^2}{H^2}$. Асоси ва асосига параллел қилиб x баландликда ўтказилган

текислик билан чегараланган кесик конус ичидаги қумнинг потенциал энергиясини $E(x)$ билан белгилаймиз. У ҳолда: $E'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta E}{\Delta x} = \frac{\pi \rho R^2 x (H - x)^2}{H} g$ ва

$$\begin{aligned} A = E(H) - E(0) &= \int_0^H E'(x) dx = \int_0^H \frac{\pi \rho R^2}{H^2} g (H^2 x - 2Hx^2 + x^3) dx = \\ &= \frac{\pi \rho R^2}{H^2} g \int_0^H (H^2 x - 2Hx^2 + x^3) dx = \frac{\pi \rho R^2}{H^2} g \left(\frac{H^2 x^2}{2} - \frac{2Hx^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^H = \\ &= \frac{\pi \rho R^2 H^4}{H^2} g \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi \rho R^2 H^4 g}{12}. \end{aligned} \quad 732. \frac{\rho a d \omega^2 h^3}{24} = 495\,000 \pi^2 (\text{эрг.})$$

Ечилиши. 242-расмда белгиланган пластинка қисмининг массаси тақрибан $\rho y d \Delta x$ га тенг; ABC ва PQC учбурчакларнинг ўхшашлигидан y ни топамиз:

$y = \frac{a(h-x)}{h}$. Биз пластинка қаллиғини эътиборга олмаганимиз сабабли бу қисм ҳар бир нуқтасининг чизиқли тезлиги (Δx миқдоргача аниқликда) ωx га тенг, кинетик энергиянинг бу қисм ҳисобига орттирмаси ΔE (Δx^2 миқдоргача аниқликда) $\frac{\rho ad \omega^2 x^2 (h-x) \Delta x}{2h}$ га тенг. *BQPA* қисмининг кинетик энергиясини

$E(x)$ билан белгилаймиз. $\forall$ ҳолда $E'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta E}{\Delta x} = \frac{\rho ad \omega^2 x^2 (h-x)}{2h}$. Ни-

$$\text{ҳоят, } E(h) = \int_0^h E'(x) dx = \int_0^h \frac{\rho ad \omega^2 x^2 (h-x)}{2h} dx = \frac{\rho ad \omega^2}{2h} \cdot \left(\frac{x^3 h}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^h = \\ = \frac{\rho ad \omega^2 h^3}{24}.$$

733. Бир жинсли ярим доиранинг масса маркази унинг симметрия

ўқида доира марказидан $\frac{4R}{3\pi}$ масофада жойлашган (243-расм). Еч и л и ш и.

Ярим доиранинг маркази координаталар боши билан, ярим доиранинг симметрия ўқи эса Ox ўқ билан устма-уст тушсин. Ox ўқнинг $[0; R]$ кесмасини $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ нуқталар билан узунлиги Δx га тенг n та бир хил қисмларга бўламиз ва $x = x_1, x = x_2, \dots, x = x_{n-1}$ тўғри чизиқларни ўтказамиз. Ярим доиранинг $x = x_i$ ва $x = x_{i+1}$ ($x_0 = 0, x_n = R$) тўғри чизиқлар билан чегараланган қисмининг массаси тақрибан $2 \Delta x \rho \sqrt{R^2 - x_i^2}$ га тенг (ρ — ярим доиранинг зичлиги). Ҳар бир шундай қисмни Ox ўқда x_i координатали нуқтага жойлашган айни ана шундай массали моддий нуқта билан алмаштирамиз. Моддий нуқталарнинг чекли системаси маркази массаларининг координаталари формуласига биноан бу марказ* Ox ўқда

$$x' = \frac{2x_0 \rho \sqrt{R^2 - x_0^2} \Delta x + 2x_1 \rho \sqrt{R^2 - x_1^2} \Delta x + \dots + 2x_{n-1} \rho \sqrt{R^2 - x_{n-1}^2} \Delta x}{2\rho \sqrt{R^2 - x_0^2} \Delta x + 2\rho \sqrt{R^2 - x_1^2} \Delta x + \dots + 2\rho \sqrt{R^2 - x_{n-1}^2} \Delta x}$$

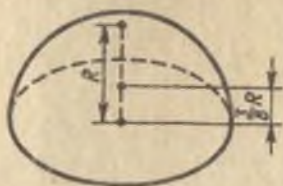
координатали нуқтада ётади. Бу касрнинг сурати $2x \rho \sqrt{R^2 - x^2}$ функция учун интеграл йиғинди, махражи эса $2\rho \sqrt{R^2 - x^2}$ функция учун интеграл йиғинди.

Сўнгра: R радиусли ярим доира юзи сифатида $2 \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = 0,5 \pi R^2$ оли-

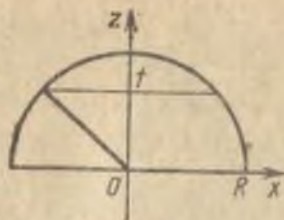
нади. $\int_0^R 2x \sqrt{R^2 - x^2} dx$ ни ҳисоблаш учун олдин $((R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}})' = \frac{3}{2} \times$

$\times (-2x) \sqrt{R^2 - x^2}$ эканини қайд қиламиз, шу сабабли $2x \sqrt{R^2 - x^2}$ функция учун

* $m_1, m_2, \dots, m_n$ массали ва Oz ўққа нисбатан $z_1, z_2, \dots, z_n$ координатали n та моддий нуқта чекли системаси массасининг маркази, шу координаталар ўқиға нисбатан ушбу $\frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots + m_n z_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$ координатага эга бўлишини эслатиб ўтамиз.



244- расм



245- расм

бошланғич функция сифатида $F(x) = -\frac{2}{3} (R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}$ функцияни олиш мум-

кин. Бинобарин $\int_0^R 2x \sqrt{R^2 - x^2} dx = F(R) - F(0) = 0 - \left(-\frac{2}{3} R^3 \right) = \frac{2}{3} R^3$.

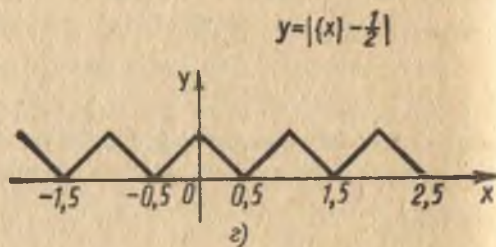
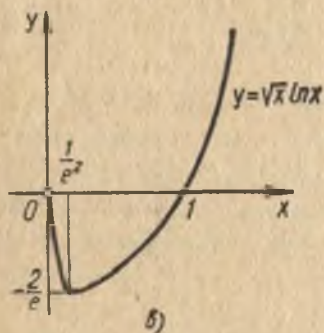
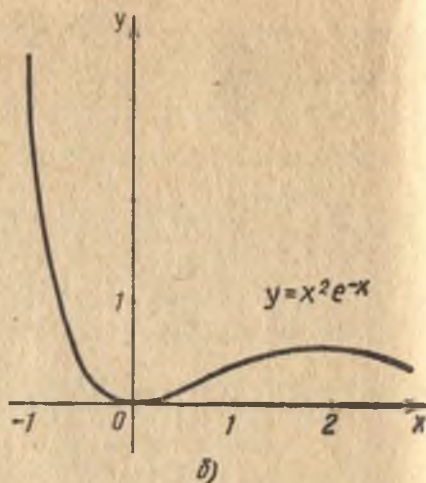
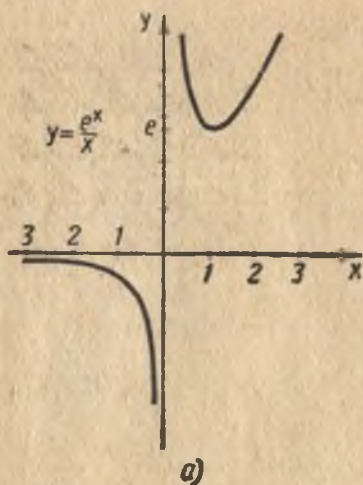
Шундай қилиб, $\Delta x \rightarrow 0$ да лимитга ўтиб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$X = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} x' = \frac{\frac{2}{3} R^3}{\frac{1}{2} \pi R^2} = \frac{4R}{3\pi}.$$

734. R радиусли бир жинсли ярим шарнинг масса маркази унинг симметрия ўқи-
да шар марказидан $\frac{3}{8} R$ масофада ётади (244- расм). Ечилиши. Координата-
лар системасини унинг боши шар марказида ётадиган, ярим шарни чегараловчи
текислик эса Oxy текислик билан устма-уст тушадиган қилиб тэнлаймиз (245-
расм). Пифагор теоремасига кўра ярим шарнинг $z = t$ текислик билан кесиш н-
тижасида ҳосил бўлган доиранинг радиуси $\sqrt{R^2 - t^2}$ га тенг. Ярим шарни эни
 Δt га тенг дисklarга бўламиз, $z = t$ ва $z = t + \Delta t$ текислик билан чегаралан-
ган дисkning маркази Oz ўқда координатаси t га тенг нуқтада ётади (Δt миқдор-
гача аниқликда) чунки бу дисkning симметрия ўқи Oz ўқ бўлади. Бундай диск-
нинг Δm массаси ρV га тенг (ρ — ярим шарнинг зичлиги, V — шарнинг ҳажми),
яъни $\Delta m \approx \rho \pi (R^2 - t^2) \Delta t$. Массалар марказини топишда ҳар қайси дискни
массаси диск массасига тенг бўлган ва бу дисkning массалари марказида жой-
лашган моддий нуқта деб ҳисоблаш мумкин. Моддий нуқталар чекли системаси
массасининг маркази координатасининг формуласига кўра ярим шарнинг масса
маркази Oz ўқда z координатаси тақрибан

$$z(\Delta t) = \frac{t_0 \rho \pi (R^2 - t_0^2) \Delta t + t_1 \rho \pi (R^2 - t_1^2) \Delta t + \dots + t_{n-1} \rho \pi (R^2 - t_{n-1}^2) \Delta t}{\rho \pi (R^2 - t_0^2) \Delta t + \rho \pi (R^2 - t_1^2) \Delta t + \dots + \rho \pi (R^2 - t_{n-1}^2) \Delta t}$$

га тенг нуқтада ётишини кўрамиз, бунда $t_k = k \Delta t$. Топилган касрнинг сурати
 $\rho \pi t (R^2 - t^2)$ функция учун интеграл йиғиндидан, махражи эса $\rho \pi (R^2 - t^2)$
функция учун интеграл йиғиндидан иборат. Δt қанча кичик бўлса, бу каср ярим
шар массалари маркази координатасини шунча аниқ ифодалайди, бошқача айтган-
да, бу координата $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} z(\Delta t)$ дан иборат. $\Delta t \rightarrow 0$ да сурат $\int_0^R \rho \pi t (R^2 - t^2) dt$ га



246- расм

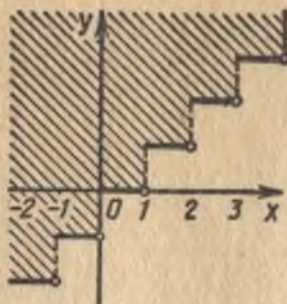
махраж $\int_0^R \rho \pi (R^2 - t^2) dt$ га нитилади. $z = \frac{\int_0^R \rho \pi (R^2 - t^2) dt}{\int_0^R \rho \pi (R^2 - t^2) dt} = \frac{\rho \pi \left(\frac{R^2 t^2}{2} - \frac{t^4}{4} \right) \Big|_0^R}{\rho \pi \left(R^2 t - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^R} =$

$$= \frac{\frac{1}{2} R^4 - \frac{1}{4} R^4}{R^3 - \frac{1}{3} R^3} = \frac{3}{8} R. \quad 736. \text{ а) } -135,6. \text{ Ечилиши. } t = 1 + \frac{x}{4} \text{ ал-}$$

маштиришни бажарьмиз. У ҳолда $x = 4t - 4$, $5 - x = 9 - 4t$. Алмаштириш формуласига кўра интеграллашнинг қуйи ва юқори чегараларини топамиз: $1 + \frac{1}{4} \cdot 0 = 1$



247- расм



248- расм



249- расм

ва $1 + \frac{1}{4} \cdot 28 = 8$. Шундай қилиб, изланаётган интеграл ушбуга тенг:

$$\frac{1}{0,25} \int_1^8 \left(\frac{9}{\sqrt[3]{t}} - 4\sqrt[3]{t^2} \right) dt = 4 \left(\frac{27}{2} \sqrt[3]{t^2} - \frac{12}{5} \sqrt[3]{t^5} \right) \Big|_1^8 = 4 \left(\frac{27}{2} (4-1) - \frac{12}{5} (32-1) \right) = 4 (40,5 - 74,4) = -135,6; 6) -1 \frac{2}{7}.$$

К ўрсатма. $y = 1 - \frac{x}{2}$

формула бўйича ўзгарувчини алмаштиринг. 737. $x^x(1 + \ln x)$. К ўрсатма. $x^x = e^{x \ln x}$.

738. Функцияларнинг графиклари 246- а-г расмларда тасвирланган. 739. а) $[-0,25;$

2] б) $[-7; 3]$; в) $(0; \infty)$; г) $[e^{-\frac{1}{e}}; \infty)$. К ўрсатма. $(x^x)' = x^x(1 + \ln x)$ бўлга-

ни учун (737- масалага қаранг) критик нуқта битта: $x = \frac{1}{e}$. Бу нуқтада функ-

ция минимумга эга. 740. Тўпламлар а. п. учун 247, д.п. учун 248 ва е.п. учун

249- расмларда тасвирланган. 741. а) $\frac{2}{\pi}$; б) $\ln 2$. К ўрсатма. $\frac{1}{\pi}$ ни қавс-

дан ташқарига чиқаринг; в) $\frac{1}{p+1}$. 742. а) 3; б) $-6\sqrt{3} < a < 6\sqrt{3}$ да учта ил-

диз, $a = \pm 6\sqrt{3}$ да иккита илдиз, қолган a ларда битта илдиз. 743. К ўр-

сатма. Кубга кўтариш билан $x = \sqrt[3]{6 + \sqrt{\frac{847}{27}}} + \sqrt[3]{6 - \sqrt{\frac{847}{27}}}$ сон

$x^3 - 5x - 12 = 0$ тенгламанинг илдизи эканини исботланг, бу тенглама эса бит-

та ҳақиқий илдизга эга. 744. $0 < a < 1$ ва $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$ да. 745. а) $\begin{cases} a < 2, \\ b < 2 \end{cases}$ ва

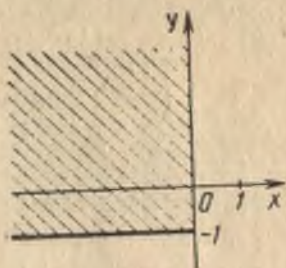
$\begin{cases} a > 2, \\ b > 2 \end{cases}$ да; б) $C \in (-\infty; 0) \cup (3; \infty)$; в) $\begin{cases} a < -C, \\ b < -C \end{cases}$ ва $\begin{cases} a > -C', \\ b > -C' \end{cases}$ да.

Бутун курсни такрорлашга доир масалалар

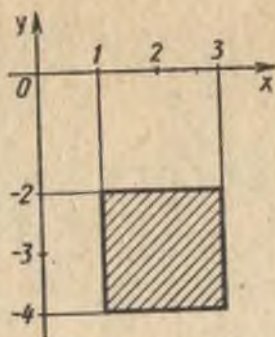
746. а) $x + 1$; б) -4 , $t \neq 0$, $t > -4$; в) $a \neq 1$ да $-a^{0,5} - 2a^{1,5}$; г) $a \neq 1$ да

$\frac{1-a}{\sqrt{a}}$. 748. 25%. 749. 75 км/соат. 750. 4 км/соат. 751. 55 км/соат. 752. 6 ва

12 кун. 753. 140 м. 754. 160 г, 20%. 755. 5 соат, 7 соат. 756. 4 м/с, 3 м/с.



250- расм



251- расм

757. 240 м³. 758. 35. 759. 12 г, 48 г, 1,5 г/см³. 760. а) 3; 8; 3; б) ҳаммаси; в) 7; 4. 761. 3. 75. 762. а) 1, 01, б) 8, 072; в) 81, 108. 764. 2, 53. 766. 1. 767. а) $\frac{4}{-}$; б) тенг. 769. а) 3, 5, г) 1, 4. 770. б) $|x + 1| < 3, 5$. 771. а) 5; г) $\sqrt{2}$.

$$\lg \frac{1}{2}$$

772. б) $x^2 - y^2 \leq 25$; г) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 > 1$. 773. б) $(-5; 5)$; г) 6; 14.

774. б) $(-\infty; 6) \cup (14; \infty)$. 775. $[-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$. 777. б) Тўплам 250-расмда тасвирланган. 778. г) Тўплам 251-расмда тасвирланган. 779. г) Радиуси 3, маркази эси (1; 1) нуқтада бўлган доира. 780. $|a| > 1$ да а. 781. а) $-2\frac{1}{4}$; б)

$$\frac{\sin x}{2 - \sin x}; \text{ в) } \frac{2\sqrt{ab}}{a - 2\sqrt{ab} + b}; \text{ г) } \frac{\lg x}{1 - \lg x}. 782. \text{ а) } 1\frac{5}{22}; \text{ б) } 2\frac{41}{99}; \text{ в) } \frac{3}{7}; \text{ г) } \frac{17}{54}.$$

$$784. \text{ а) I ёки III; б) II. 785. } -1. 786. \pm \frac{2\sqrt{m}}{1 + m}. 787. \frac{1}{\sqrt{10}}. 788. \frac{\sqrt{17} - 1}{4}.$$

$$789. \pm 2. 790. -2\sqrt{2}. 791. 0, 719. 792. \frac{a}{|b|}. 796. \text{ а) } (-\infty; 7 - \sqrt{34}) \cup$$

$$\cup (7 + \sqrt{34}; \infty); \text{ б) } (-\infty; \infty); \text{ в) } \left[-\frac{1}{3}; 2\right]; \text{ г) } \left(\frac{9 - \sqrt{105}}{4}; \frac{9 + \sqrt{105}}{4}\right).$$

$$797. \text{ а) } R; \text{ б) } (-\infty; -0, 4) \cup (2; \infty); \text{ в) } R; \text{ г) } \left(-\frac{2}{3}; 3\right). 798. x^2 - 2x - 2 = 0. 799.$$

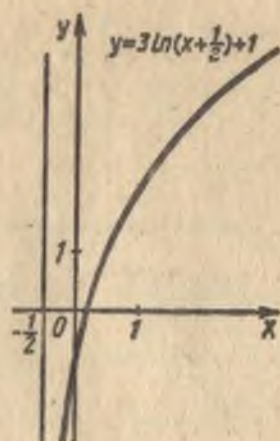
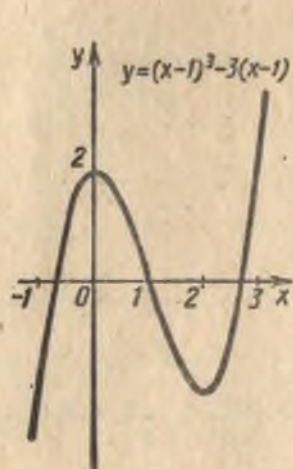
$$-20. 800. (3; 0). 801. \text{ а) } (-1, 17); \text{ б) } (2; -3). 802. y = 2 - 0,5x^2. 803. y =$$

$$= 0,5(x + 2)^2 + 3. 805. \text{ Графиклар 252-а ва б расмларда тасвирланган. 806. б) график 253-расмда тасвирланган; г) график } x \neq \frac{\pi b}{2}, k \in \mathbb{Z} \text{ да } y = 2 \text{ функция гра-}$$

$$\text{фиги билан бир хил, } x = \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z} \text{ да функция аниқланмаган. 807. Графиклар 254-}$$

$$\text{расмда тасвирланган (в) ва г) пунктларда графиклар бир хил). 808. а) 1; б) } \frac{8\pi}{3};$$

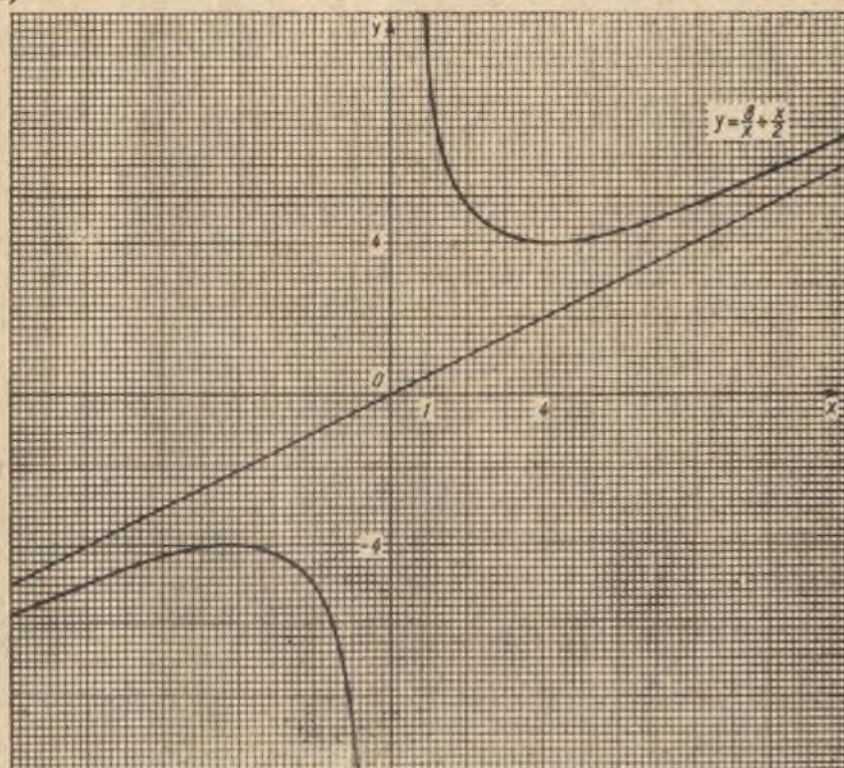
$$\text{в) } 0, 5. 809. \text{ а) Жуфт ҳам эмас, тоқ ҳам эмас; б) тоқ; в) жуфт; г) жуфт ҳам эмас, тоқ ҳам эмас; 810. а), б) Жуфт ҳам эмас, тоқ ҳам эмас; в), г) тоқ. 811.}$$



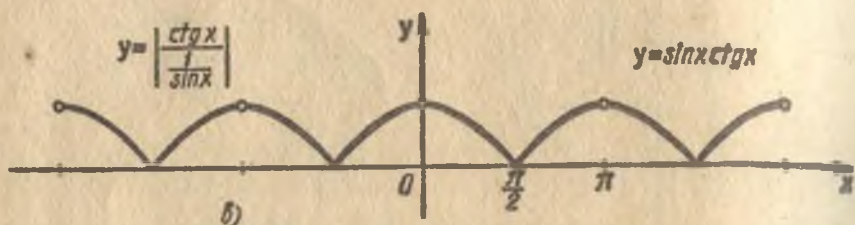
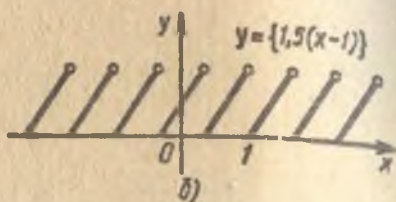
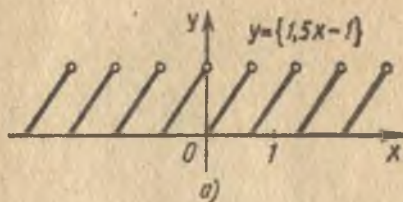
253- расм

a)

б)

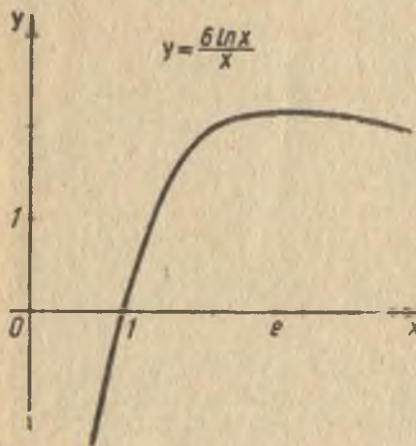


252- расм



254- расм

- а) $\sqrt{2}$; б) $-\sqrt{2}$. 813. а) $12x^5 - 19x^4 + 1$; б) $-\frac{5}{(x+1)^2}$; в) $(x+1)\cos x + \sin x - \cos^2 x + \sin 2x$; г) $\frac{2\lg x \cdot \lg e}{x} + \frac{2\lg x}{\cos^2 x}$; д) $\frac{60x(3-x^2)}{(8x^2-3)^3}$. 814. 60 м/мин; 36 м/мин². 816. $y = -2x - 4$; $y = 2x$; $y = 5x - 2, 25$. 817. а) $y = 1,5x + 1,5$; сонлар тўғри чизигининг ҳамма ерида ўсади; б) $y = 1 + \frac{1}{x}$; $(-\infty; 0)$ ва $(0; \infty)$ оралиқларда камаяди; в) $y = \frac{3x-1}{x+2}$; г) $y = \log_2(x-1)$; д) $y = 3^x - 2$; е) $y = \frac{10^x - 1}{10^x + 1}$. 818. а) функция $(-\infty; \frac{1}{3})$ ва $(\frac{1}{3}; \infty)$ оралиқ-



255- расм

ларда ўсади; б) функция аниқланмиш соҳасида ўзгармас, яъни $x \neq 0,5$ да $y = -0,5$; в) функция $(-\infty; -1]$ оралиқда камаяди, $[-1; \infty)$ оралиқда ўсади. -1 нуқтада функция минимумга эга; г) функция $(-\infty; 2)$ оралиқда камаяди, $[2; \infty)$ оралиқда ўсади. Функция 2 нуқтада минимумга эга. 819. а) Функция $(0; e]$ оралиқда ўсади, $[e; \infty)$ оралиқда камаяди. e нуқтада функция максимумга эга (255-расм); б) функция $(0, 1]$ оралиқда камаяди, $[1; \infty)$ оралиқда ўсади. 1 нуқтада функция минимумга эга; в) функция $(-\infty; -1)$ ва $(-1; 0)$ оралиқларда камаяди; $[0; \infty)$ оралиқда ўсади. 0 нуқтада функция минимумга эга. $x =$

-1 да функция аниқланмаган; $x \rightarrow -1$ да $|y|$ чексиз ўсади; г) $(x_0 - \pi + 2\pi k; x_0 + 2\pi k]$, $k \in \mathbb{Z}$ оралиқларда функция ўсади; $[x_0 + 2\pi k; x_0 + \pi + 2\pi k]$, $k \in \mathbb{Z}$ оралиқларда камаяди; $x_0 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ кўринишидаги нуқталарда функция максимумга эга; $x_0 + \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ кўринишидаги нуқталарда функция минимумларга эга; $x_0 = \arctg \frac{2}{3} \approx 0,59$ кўринишидаги нуқталарда функция минимумларга эга. 820. а) Функция $\left(0; \frac{1}{e}\right]$ оралиқда камаяди, $\left[\frac{1}{e}; \infty\right)$

оралиқда ўсади. $\frac{1}{e}$ нуқтада функция минимумга эга; б) πk , $k \in \mathbb{Z}$ нуқталарда функция максимумларга эга; $2\pi k \pm \frac{\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$ нуқталарда минимумларга эга. 821.

а) $y(3) = 135$; б) $-4 \frac{7}{8} \left(x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ да}\right)$. 822. 1. 823. 3 см, 6 см, 4 см.

824. Уриниш нуқтасидан $1,5R$ масофада. 825. $\frac{\pi}{3}$. Ечи ли ши. Учбурчак асо-

сининг узунлиги $2b$, асосидаги бурчаги эса 2α га тенг бўлсин. У ҳолда (256-расм): $r = OH = HC \cdot \tg \alpha = b \tg \alpha$. b ни учбурчакнинг берилган S юзи орқали ифодалаймиз: $S = 0,5 AC \cdot BH = b \cdot b \tg 2\alpha$, бундан $b^2 = \frac{S}{\tg^2 \alpha}$. Радиус квад-

ратининг энг катта қийматини излаймиз:

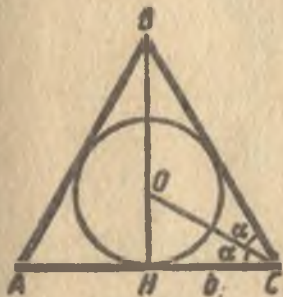
$$r^2 = b^2 \tg^2 \alpha = \frac{S \tg^2 \alpha}{1 - \tg^2 \alpha} =$$

$$= \frac{S(1 - \tg^2 \alpha) \tg^2 \alpha}{2 \tg \alpha} = \frac{S}{2} (\tg \alpha - \tg^3 \alpha). \quad \tg \alpha - \tg^3 \alpha \text{ ни } u(\alpha) \text{ билан белги-}$$

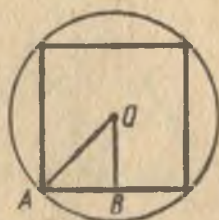
лаймиз. $u(\alpha)$ функциянинг $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ оралиқдаги энг катта қийматини топиш

керак: $u'(\alpha) = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - \frac{3 \tg^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1 - 3 \tg^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$; $\tg \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ да, яъни $\alpha =$

$= \pi k \pm \frac{\pi}{6}$, $k \in \mathbb{Z}$ да $u'(\alpha) = 0$. Бу кўринишдаги нуқталардан фақат биттаси, яъни



256- расм



257- расм

$x = \frac{\pi}{6}$ берилган кесмада ётади. Сўнгра $u(0) = u\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$, $u\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$.

Шундай қилиб, $u(\alpha)$ ўзининг $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ оралиқдаги энг катта қийматига $\alpha = \frac{\pi}{6}$

да эришади. Учидаги бурчак $\pi - 4\alpha = \frac{\pi}{3}$ га тенг. 826. $\sqrt[3]{4V}$. 827. $\frac{20}{\sqrt{3}}$ см.

828. $\frac{2R}{\sqrt{3}}$. Ечилиш и. R радиусли шар ичига чизилган цилиндрнинг ўқ кеси-

мини қараймиз (257-расм). AOB учбурчакдан Пифагор теоремасига кўра ушбулар-

ни топамиз: $AB^2 = AO^2 - BO^2$, яъни $r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4}$, бунда r — цилиндр асоси-

нинг радиуси, h — унинг баландлиги. $V = \pi r^2 h = \pi \left(R^2 h - \frac{h^3}{4}\right)$. $V(h) =$

$= \pi \left(R^2 h - \frac{h^3}{4}\right)$ функциянинг $[0; 2R]$ кесмадаги энг катта қийматини топиш

талаб қилинади $V'(h) = \pi \left(R^2 - \frac{3}{4} h^2\right)$. $3h^2 = 4R^2$ да, яъни $h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$ да

$V' = 0$. Чунки $V(0) = V(2R) = 0$, $V\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right) > 0$, шу сабабли $V(h)$ функция

$h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$ да энг катта қийматга эришади. 829. $R \geq 0,5H$ да ечимлар йўқ ва

$R < 0,5H$ да $r = 0,5HR : (H - R)$. 830. $R = 1,5r$. 831. $4R$. 832. $H =$

$= R\sqrt{3}$. Ечилиш и. R радиусли ярим шар ташқарисига тўғри доиравий ко-

нус чизилган бўлсин. Конуснинг ўқ кесимини қараймиз (258-расм). AOC ва OBC

учбурчакларнинг ўхшашлигидан $\frac{x}{\sqrt{H^2 + x^2}} = \frac{R}{H}$, бундан $x^2 = \frac{H^2 R^2}{H^2 - R^2}$

$V(H) = \frac{1}{3} \pi x^2 H = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot \frac{H^3}{H^2 - R^2}$. $V'(H) = \frac{1}{3} \pi k^2 ((H^3 - R^2) 3H^2 - H^3 \cdot 2H) =$

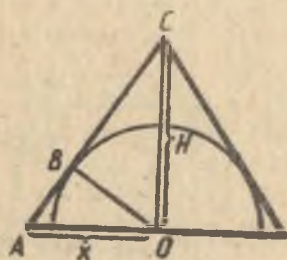
$= \frac{1}{3} \pi k^2 (3H^5 - 2H^3 R^2) = \frac{1}{3} \pi k^2 H^3 (3H^2 - 2R^2)$

$V'(H) = 0$ да $3H^2 = 2R^2$ да, яъни $H = \frac{\sqrt{2}}{3} R$ да, яъни $H = \frac{\sqrt{2}}{3} R$ да

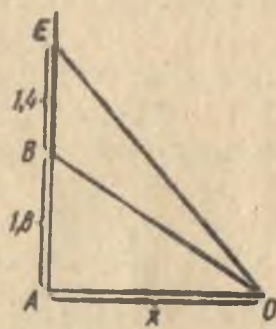
$V(H)$ функция энг катта қийматга эришади. 833. $\frac{1}{3} \pi R^2 H$. 834. $\frac{1}{3} \pi R^2 H$.

835. $\frac{1}{3} \pi R^2 H$. 836. $\frac{1}{3} \pi R^2 H$. 837. $\frac{1}{3} \pi R^2 H$. 838. $\frac{1}{3} \pi R^2 H$.

839. $\frac{1}{3} \pi R^2 H$. 840. $\frac{1}{3} \pi R^2 H$. 841. $\frac{1}{3} \pi R^2 H$. 842. $\frac{1}{3} \pi R^2 H$.



258- расм



259- расм

$$= \frac{\pi R^2 (H^4 - 3 H^2 R^2)}{3 (H^2 - R^2)^2}, \quad H = RV\sqrt{3} \text{ да } V'(H) = 0. \quad H \text{ ning шу қийматида } V(H)$$

функция $(0; \infty)$ оралиқда энг кичик қийматига эришишини текшириш қолади.

$$833. b = \frac{40}{\sqrt{3}} \text{ см. } h = 40 \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ см. } 834. R = \frac{P}{\pi - 4}; \quad H = \frac{P}{\pi - 4}. \quad 835.$$

$$\frac{23}{410} \text{ соат. } 836. 2, 4 \text{ м. Ечилиши. Кузатувчи девордан } x \text{ масофа наридаги } O \text{ нуқ-}$$

тада бўлсин (259-расм). x қандай бўлганда $\angle EOB$ энг катта бўлишини топиш талаб қилинади; $\angle EOB = \angle EOA - \angle BOA$, шунинг учун

$$\operatorname{tg} \angle EOB = \operatorname{tg} (\angle EOA - \angle BOA) = \frac{\frac{3,2}{x} - \frac{1,8}{x}}{1 + \frac{3,2}{x} \cdot \frac{1,8}{x}} = \frac{1,4x}{x^2 + 5,76}.$$

$$\frac{1,4x}{x^2 + 5,76} \text{ ни } f(x) \text{ билан белгилаймиз. } 0 \leq \angle EOB < \frac{\pi}{2} \text{ бўлгани ва } \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

оралиқда тангенс ўсувчи бўлганидан $(0; \infty)$ оралиқда $f(x)$ функция энг катта қийматга эришадиган x ларни топиш етарли. $x = 2, 4$ да

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 5,76) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 + 5,76)^2} \cdot 1,4 = \frac{1,4(5,76 - x^2)}{(x^2 + 5,76)^2}; \quad f'(x) = 0.$$

$(2, 4; \infty)$ оралиқда $f' < 0$, шу сабабли $x \in (2, 4; \infty)$ да $f(x) < f(2, 4)$. $x \in [0; 2, 4]$ учун шунга ўхшаш $f(x) < f(2, 4)$. Шундай қилиб, $x = 2, 4$ да f функция

$[0; \infty)$ оралиқда энг катта қийматига эришади. 837. $4 \sqrt{2}$ м. 838. $1 \frac{27}{43}$ соат.

839. Бетнинг узунлиги 30 см, кенлиги 20 см. Ечилиши. Бетнинг узунлиги x га тенг бўлсин. N ҳолда текст томонлари $x - 6$ ва $\frac{384}{x-6}$ бўлган тўғри тўрт-

бурчак кўринишида бўлади. Бетнинг эни $\frac{384}{x-6} + 4$ га, юзи $\frac{384x}{x-6} + 4x$ га тенг.

$f(x) = \frac{384x}{x-6} + 4x$ функциянинг $(6; \infty)$ оралиқдаги энг кичик қийматини топиш

талаб қилинади; $f'(x) = 384 \cdot \frac{x-6-x}{(x-6)^2} + 4 = \frac{-384 \cdot 6}{(x-6)^2} + 4; 4(x-6)^2 = 384 \cdot 6$ да,

яъни $x = 30$ да $f'(x) = 0$, бунда бетнинг кенлиги $\frac{384}{30-6} + 4 = 20$ га тенг. 840.

20 км/соат. Ечилиши. Сарфнинг иккинчи қисми kx^3 га тенг, бунда x билан пароходнинг тезлиги белгиланган. k — пропорционаллик коэффициенти. k ни топиш учун $x = 10$ ни қўямиз, у ҳолда $30 = 1000k$, бунидан $k = 0,03$. Пароход 1 км йўлни

$\frac{1}{x}$ соатда ўтади. Бу вақт ичда сарфлар $180 \cdot \frac{1}{x} + 0,03x^3 = \frac{1}{x}$ га тенг бўла-

ди. $f(x) = \frac{480}{x} + 0,03x^3$ функциянинг $(0; \infty)$ оралиқдаги энг кичик қийматини

топиш талаб қилинади; $f'(x) = -\frac{480}{x^2} + 0,06x$; $x^3 = \frac{480}{0,06}$ да, яъни $x = 20$ да

$f'(x) = 0$. Функция бу нуқтада энг кичик қийматини қабул қилишини текшириш осон. 841. а) $(1; 2) \cup (3; \infty)$; б) $(-\infty; 2) \cup (3; 5)$; в) $(-\infty; -3] \cup [1; \infty)$;

г) $(-4; -1) \cup (-1; 6)$; д) $(1; 2) \cup (3; 4)$; е) $[-\sqrt{2}; -1] \cup [1; \sqrt{2})$.

842. а) 0 ни ўз ичига олмайдиган ҳар қандай оралиқда $\frac{x^2}{2} + \ln|x| + C$;
 б) $\frac{2}{3}\sqrt{2x^2} + C$; в) $\frac{1}{3}\sin 3x - 2\cos x + C$; г) $-\frac{1}{4}x^{-4} - x^{-1} + C$. 843. а)
 -4 нуқтани ўз ичига олмайдиган ҳар қандай нуқтада $3\ln|x+4| + C$; б)
 $-\frac{1}{3}\operatorname{ctg} 2x + C$; в) $\frac{3}{2}\operatorname{tg} 2x + C$; г) $x^2 + x^3 + C$. 844. $x = 1$ да $\frac{(x-1)^3}{3} + C$; а)
 $\frac{1}{4 + \sqrt{2}}x^{4 + \sqrt{2}} + C$. 845. $x^3 - 3x + 4$. 846. $-\frac{1}{4}\cos 2t + 3$. 847. $y =$
 $= x^3 - 5$. 848. а) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$; б) $\frac{7-2\sqrt{2}-3\sqrt{3}}{12}$. 849. а) $5\frac{1}{3}$; б) $20\frac{5}{6}$;
 в) 18; г) $1\frac{1}{3}$; д) $12 - 5\ln 5 \approx 3,953$. 851. а) 15; б) $\frac{2}{3}$. 852. а) $\frac{\pi k}{5}$, бунда
 $k \in \mathbb{Z}$; б) $2\pi k$; $\frac{\pi}{2} + \pi k$, бунда $k \in \mathbb{Z}$; в) $\frac{2\pi k}{5}$; $\pi + 2\pi k$, бунда $k \in \mathbb{Z}$; г)
 $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k$, бунда $k \in \mathbb{Z}$. 853. а) $\frac{\pi + \alpha}{3} + \frac{2\pi k}{3}$, бунда
 $k \in \mathbb{Z}$, $\alpha = \arccos \frac{4}{5} \approx 0,64$; б) $\frac{\pi - \alpha}{2} + \pi k$, бунда $k \in \mathbb{Z}$, $\alpha =$
 $= \operatorname{arctg} \frac{5}{12} \approx 0,395$; в) $\frac{\pi}{8} + \frac{\alpha}{2} + \pi k$; $\frac{\pi}{8} - \frac{\alpha}{2} + \pi k$; $\frac{7\pi}{24} + \pi k$; $\pi k - \frac{\pi}{24}$, бун-
 да $k \in \mathbb{Z}$; г) $\frac{\alpha}{3} + \frac{2\pi k}{3}$; $\frac{2\pi k}{3} - \frac{\alpha}{3}$; $\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}$; $\frac{2\pi k}{3} - \frac{2\pi}{9}$, бунда $k \in \mathbb{Z}$,
 $\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{14}\right) \approx 1,64$. 854. а) 3; б) $2\frac{2}{3}$; 4; г) -1; 1; -2; 2. 855. а)
 $\left(-\infty; \frac{1}{6}\right] \cup [1,5; \infty)$; б) (2; 3); в) $(-\infty; -3) \cup (-1; 1) \cup (3; \infty)$; г)
 $(-\infty; -1,5] \cup [-1; 1] \cup [1,5; \infty)$. 856. а) (-3,5; -3); б) $\left(0; \frac{1}{2}\right)$; в)
 $(-\infty; -2) \cup (4; \infty)$; г) $(-\infty; 3,4) \cup (4; \infty)$. 857. а) $\left(2; \frac{1}{3}\right)$; б) (1; -1);
 в) (-1; -3). 858. а) $(3y + 4; y)$, бунда $y \in \mathbb{R}$; б) $(2,5 - 3y; y)$, бунда $y \in \mathbb{R}$; в)
 $(1,5y + 2; y)$, бунда $y \in \mathbb{R}$. 859. а), б) $\varnothing$. 860. а) 3; б) $-\frac{2}{3}$; в) 16. 861. а) $-3\frac{1}{3}$;
 б) бундай қийматлар мавжуд эмас; в) $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 4$. 862. а) $a \neq -0,2$; б) $a =$
 $= 2,5$; в) $a \in \mathbb{R}$ да бўлади. 863. а) (-3; 2; -1); б) (2; 3; 1); в), г) $\varnothing$. 864.
 а) (0,4; 0,8); б) (2; 3); (3; 2). 865. а) (0,4; 0,5); (0,6; 0,3); б) (2; 1); (-1;
 -2); в) (4; -3); (4; 3); г) (2; 3); (3; 2). 866. а) (4; 1); (1; 4); б) (0,5; 4);
 в) (1; 2); г) $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$; $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$. 867. а) (2; -1); (-1; 2); б) (1; 2); (2; 1);
 в) (1; $\sqrt{2}$); (1; $-\sqrt{2}$); (2; 1); (2; -1); г) (7; 3); (-7; -3). 868. а)
 $(-3,5; 0)$; б) $\left(1; 4\frac{8}{9}\right)$; в) $\left[-3; \frac{4}{3}\right)$; г) $\varnothing$. 869. а) (1; 0; 2; -1); б) (1;
 -2; -1; 2).

ЎҚУВ ҚЎЛЛАНМАСИДА УЧРАЙДИГАН БЕЛГИЛАР

N	барча натурал сонлар тўплами		
Z	барча бутун сонлар тўплами	$E(f)$	f функциянинг қийматлари соҳаси
Z_0	барча нолдан фарқ қиладиган бутун сонлар тўплами	Δx	x аргумент ортирмаси
Q	барча рационал сонлар тўплами	$\Delta f(x_0), \Delta f$	f функциянинг x_0 нуқтадаги ортирмаси
R	барча ҳақиқий сонлар тўплами, сонлар тўғри чи- зиги	$f'(x_0)$	f функциянинг x_0 нуқтадаги ҳо- силаси
R_+	барча ҳақиқий мусбат сонлар тўплами	$\sin$	синус функция
R^2	сонли текислик	$\cos$	косинус функция
$[a, b]$	боши a ва охири b бўлган ёпиқ оралиқ (кесма), $a < b$	tg	тангенс функция
(a, b)	боши a ва охири b бўлган очик оралиқ (интер- вал), $a < b$	ctg	котангенс функ- ция
$(a; b], [a; b)$	боши a , охири b бўлган ярим очик оралиқлар, $a < b$	e	e сонни, кўрсат- кичли функция- нинг асоси, бу- нинг учун $(e^x)' = e^x$
$(a; \infty), [a; \infty), (-\infty; b), (-\infty; b]$	чексиз оралиқлар	$\log_a$	a асосли логарифм
$(-\infty; +\infty)$	чексиз оралиқ, сонлар тўғри чи- зиги	$\lg$	унли логарифм
$\vec{a}$	a векторнинг белгиланиши	$\ln$	натурал логарифм (e асосли логарифм)
$(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$	a нуқтанинг ε атрофи	$\max f$	f функциянинг
$\{x\}$	x сонининг бутун қисми	$[a; b]$	$[a; b]$ кесмадаги энг катта қиймати
$\{x\}$	x сонининг каср қисми	$\min f$	f функциянинг
$ x $	x сонининг мо- дули (абсолют қиймати)	$[a; b]$	$[a; b]$ кесмадаги энг кичик қий- мати
$f(x)$	f функциянинг x нуқтадаги қий- мати	$\int_a^b f(x) dx$	f функциянинг a дан b гача че- гараларда олин- ган интеграл
$D(f)$	f функциянинг	$\arcsin a$	a сонининг арк- синуси
		$\arccos a$	a сонининг арк- косинуси
		$\operatorname{arctg} a$	a сонининг арк- тангенси
		$\operatorname{arcctg} a$	a сонининг арк- котангенси

МУНДАРИЖА

I боб

ТРИГОНОМЕТРИК ФУНКЦИЯЛАР

1- §. Тригонометрик функцияларни алмаштиришлар	
1. Сон аргументнинг тригонометрик функциялари	
2. Тригонометриянинг асосий формуллари	
2- §. Функцияларнинг асосий хоссалари	13
3. Функция	19
4. Функцияларни текшириш	29
3- §. Тригонометрик функцияларнинг асосий хоссалари	
5. Тригонометрик функцияларнинг даврийлиги	35
6. $y = \sin x$ функцияни текшириш	37
7. $y = \cos x$ функцияни текшириш	41
8. $y = \tan x$ функцияни текшириш	43
9. $y = \cot x$ функцияни текшириш	46
4- §. Тригонометрик тенгламалар ва тенгсизликларни ечиш	49
10. Арксинус, арккосинус ва арктангенс	48
11. Энг содда тригонометрик тенгламаларни ечиш	52
12. Энг содда тригонометрик тенгсизликларни ечиш	59
13. Тригонометрик тенгламалар ва тенгламалар системаларини ечиш мисоллари	61
Тарихдан маълумотлар	65
Такрорлашга доир саволлар ва мисаллар	66
I бобга доир қўшимча масалалар	71

II боб

ҲОСИЛА ВА УНИНГ ТАТБИҚЛАРИ

5- §. Ҳосила	80
14. Функцияларнинг қийматларини тақрибий ҳисоблаш	80
15. Функция орттирмаси	85
16. Ҳосила ҳақида тушунча. Функция графигига уринма	87
17. Ҳосиланинг таърифи. Ҳосилани ҳисоблаш мисоллари	91
18. Ҳосилаларни ҳисоблаш қоидалари	94
19. Мураккаб функциянинг ҳосиласи	99
20. Тригонометрик функцияларнинг ҳосилалари	101
6- §. Ҳосиланинг тақрибий ҳисоблашларга, геометрия ва физикага татбиқи	104
21. Интерваллар методи	104
22. Функция графигига уринма	107
23. Тақрибий ҳисоблашлар учун формуллалар	112
24. Физика ва техникада ҳосила	114
7- §. Функцияларни текширишга ҳосиланинг татбиқи	119
25. Функциянинг ўсиш (камайиш) аломати	119
26. Функциянинг критик нуқталари, унинг максимум ва минимумлари	122
27. Ҳосиланинг функцияларни текширишга татбиқ қилиш мисоллари	126

