O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA
MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

ABU RAYHON BERUNIY NOMIDAGI
TOSHKENT DAVLAT TEXNIKA UNIVERSITETI

Oliy matematikadan amaliy mashg‘ulotlar

1-qism

Oliy texnika o‘quv yurtlarining bakalavriat ta’lim yo‘nalishi talabalari uchun o‘quv - uslubiy qo‘llanma

Toshkent – 2013

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

ABU RAYHON BERUNIY NOMIDAGI TOSHKENT DAVLAT TEXNIKA UNIVERSITETI

Oliy matematikadan amaliy mashg'ulotlar

1-qism

Oliy texnika o'quv yurtlarining bakalavriat ta'lim yo'nalishi talabalari uchun o'quv - uslubiy qo'llanma

Toshkent – 2013

Oliy matematikadan amaliy mashg'ulotlar. 1-qism. Oliy texnika o'quv yurtlari talabalari uchun o'quv-uslubiy qo'llanma. R.R. Abzalimov, A.S. Xolmuhamedov, G. Abdikayimova, M.Aralova, I.T.Xaldibayeva;Toshkent, ToshDTU, 2013 .

Ushbu o'quv-uslubiy qo'ilanma oliy matematikaning tekislik-dagi analitik geometriya, chiziqli algebra, vektorlar algebrasi bo'limlariga bag'ishlangan. O'quv-uslubiy qo'llanmada qisqacha nazariy materiallar keltirilib, shu materiallar asosida misol va masalalar yetarlicha yechib ko'rsatilgan. Talabalarning mustaqil ye chishlari uchun misol va masalalar Javobilari bilan keltirilgan. O'quv-uslubiy qo'llanma oliy texnika o'quv yurtlarining talabalari uchun mo'ljallangan.

Abu Rayhon Beruniy nomidagi Toshkent davlat texnika universiteti ilmiy-uslubiy kengashining qaroriga muvofiq chop etildi.

Taqrizchilar: X.M. Shodimetov—TTYMI, f.-m.f.d. prof;
B. Mirshaxodjayev—Tosh DTU, f.m.f.n.dotsent;

Tekislikdagi analitik geometriya

1-§. Tekislikdagi nuqtalarning koordinatalari. Ikki nuqta orasidagi masofa

Dastlab, biz tekislikdagi analitik geometriyaning boshlang'ich formulalari qo'llaniladigan masalalarni yechamiz. Bular:

1) tekislik ikki nuqtasi orasidagi masofani hisoblash;

2) kesmani berilgan nisbatda bo'lish;

3) uchburchak yuzasini uning uchlari koordinatalari bo'yicha hisoblash.

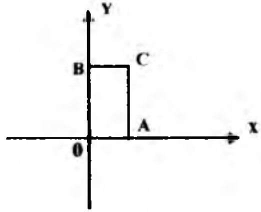
Bu mashg'ulotlarda va keyinchalik analitik geometriyani to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasi tekisligida va fazoda undan tashqari qutb koordinatalar sistemasida o'rganamiz. Masalaning shartida "nuqta berilgan" deyilgan bo'lsa, demak nuqtaning koordinatalari berilgan bo'ladi. Agar masalada "nuqta topilsin" deyilgan bo'lsa, demak nuqtaning koordinatalarini topish kerak. "To'g'ri chiziq kesmasi berilgan" degan jumla, kesma oxirlarining koordinatalari ma'lumligini bildiradi. Agar to'g'ri chiziq kesmasi oxirlarining koordinatalari ma'lum bo'lsa, kesmaning tekislikdagi o'rni to'liq aniqlangan bo'ladi. Nuqtaning koordinatalari nuqta nomidan keyin qavsda yoziladi: to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida avval nuqta absissasi, so'ngra ordinatasi yoziladi. Misol uchun x_1 – A nuqtaning absissasi, y_1 – uning ordinatasi bo'lsa, quyidagicha yoziladi: $A(x_1, y_1)$ Absissa o'qida yotuvchi nuqtalarning ordinatalari nolga teng. Ordinata o'qida yotuvchi nuqtalarning absissalari nolga teng. Koordinatalar boshining ikkala koordinatalari ham nolga teng. Tekislikning $A(x_1, y_1)$ va $B(x_2, y_2)$ nuqtalari orasidagi masofa quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (1.1)$$

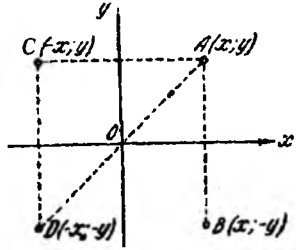
1-masala. $C(2,4)$ nuqtani dekart koordinatlar sistemasida belgilang.

Yechish. C nuqtaning absissasi 2 ga teng, ordinatasi esa 4 ga teng. Birlik masshtabini tanlaymiz va tekislikda dekart koordinatalar sistemasini quramiz. Ox o'qining koordinatalar boshi O

dan musbat yonalishda 2 masshtab birlik uzunlikda bo'lgan OA kesma ajratamiz. Oy o'qining koordinata boshi O dan musbat yonalishda 4 masshtab birlik uzunlikda bo'lgan OB kesma ajratamiz. A nuqtadan Ox o'qiga perpendikular o'tkazamiz. B nuqtadan Oy o'qiga perpendikular o'tkazamiz. Bu ikki perpendikularning kesishish nuqtasi izlanayotgan C nuqtani aniqlaydi (1-rasm).



1-rasm.



2-rasm.

2-**masala**. $A(x,y)$ nuqtaga

a) Ox o'qiga nisbatan;

b) Oy o'qiga nisbatan;

c) koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo'lgan nuqtalarni toping (2-rasm).

Yechish. Agar l to'g'ri chiziq $M_1 M_2$ kesmaga perpendikular bo'lib, uning o'rtasidan o'tsa, M_1 *va* M_2 nuqtalar l to'g'ri ciziqqa nisbatan o'zaro simmetrik nuqtalar deyiladi.

Agarda O nuqta $M_1 M_2$ – kesmaning o'rtasida joylashgan bo'lsa, M_1 va M_2 nuqtalar O nuqtaga nisbatan simmetrik deyiladi,.

a) $A(x,y)$ nuqtaga Ox o'qiga nisbatan simmetrik bo'lgan B nuqtaning absissasi, A nuqtaning absissasi bilan bir xil bo'lib, ordinatasi esa A nuqta ordinatasiga qarama-qarshi songa teng bo'ladi. Demak, B nuqta x va $-y$ koordinatalarga ega bo'ladi:$B(x;-y)$.

b) $A(x,y)$ nuqtaga Oy o'qiga nisbatan simmetrik bo'lgan C nuqtaning ordinatasi, A nuqtaning ordinatasi bilan bir xil bo'lib, absissasi esa A nuqta absissasiga qarama-qarshi songa teng bo'ladi. Demak,C nuqta $-x$ va y koordinatalarga ega bo'ladi:$C(-x;y)$.

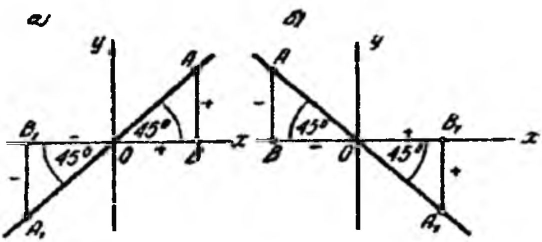
c) $A(x,y)$ nuqtaga koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo'lgan D nuqtaning absissasi va ordinatasi, A nuqtaning absissasi va ordinatasiga qarama-qarshi songa teng bo'ladi. Demak, D nuqta $-x$ va $-y$ koordinatalarga ega bo'ladi: $D(-x;-y)$.

3-masala. Agar nuqta koordinatalar sistemasining

a) birinchi va uchinchi burchak bissektrissasida;

b) ikkinchi va to'rtinchi burchak bissektrissasida yotsa, uning koordinatalari o'zaro qanday munosabatda bo'ladi?

Yechish. a) Koordinatalar sistemasining birinchi va uchinchi burchaklari bissektrissasi bu burchaklarni teng ikkiga bo'lib, Ox o'qining musbat yonalishi bilan 45° burchak tashkil etadi. Agar bu bissektrissaning ixtiyoriy $A(x,y)$ nuqtasidan Ox o'qiga perpendikular tushirsak, hosil bo'lgan OAB uchburchak teng yonli, to'g'ri burchakli bo'ladi va uning katetlari OB va AB o'zaro teng bo'ladi (3- a rasm).



3-rasm.

OB katet A nuqtaning absissasi, AB katet esa A nuqtaning ordinatasi bo'lgani uchun bissektrisaning ixtiyoriy nuqtasi absissasi va ordinatasi o'zaro teng bo'ladi. Bunda bissektrisa ustidagi nuqtalarning absissasi va ordinatasi bir xil ishoraga ega bo'lgani uchun, nuqta birinchi burchak yoki uchinchi burchak bo'lishi ahamiyatga ega emas.Shunday qilib, bissektrisa nuqtalarining koordinatalari orasidagi munosabat quyidagicha: $x=y$.

b) koordinatalar sistemasining ikkinchi va to'rtinchi burchaklari bissektrisasi nuqtalari uchun ham oldingi holga o'xshash fikr yuritib 1-jadvalga ko'ra quyidagi xulosaga kelamiz: bu bissektrisa ixtiyoriy nuqtasining absissasi va ordinatasi o'zaro qarama-qarshi sonlarga teng bo'ladi (3- b rasm).

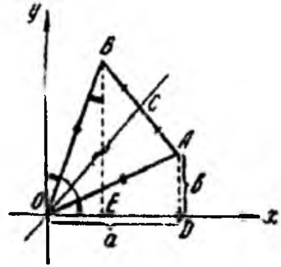
1-jadval

Choraklar	II	IV
X	-	+
Y	+	-

Shunday qilib, bu bissektrisa nuqtalarining koordinatalari orasidagi munosabat quyidagicha: $x=-y$.

4-masala. $A(a,b)$ nuqta birinchi chorakda yotadi. A nuqtaga shu chorak bissektrisasiga nisbatan simmetrik bo‘lgan B nuqta koordinatalarini toping.

Yechish. B nuqta A nuqtaga birinchi chorak bissektrisasiga nisbatan simmetrik bo‘lgani uchun u A nuqta bilan birga OC ga o‘tkazilgan perpendikularda yotadi va $AC=CB$ (4-rasm).



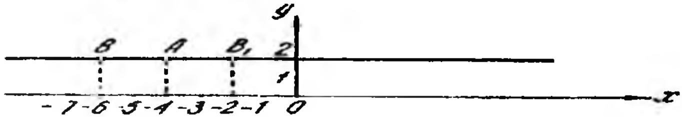
4-rasm.

OAC va OCB uchburchaklar umumiy OC tomonga ega bo‘lganligini hisobga olib, bu uchburchaklar teng degan xulosaga kelamiz.

Endi OBE va OAD uchburchaklarning to‘g‘ri burchakli ekanligini, gipotenuzalari tengligini va $\angle AOD$ va $\angle OBE$ o‘tkir burchaklari tengligini hisobga olsak, bu uchburchaklarning tengligi kelib chiqadi. OBE va OAD uchburchaklarning tengligidan $OD=BE$ va $AD=OE$. A nuqtaning absissasi OD shartga ko‘ra a ga teng, ordinatasi $AD=b$. Shuning uchun B nuqtaning absissasi $OE=AD=b$, ordinatasi $BE=OD=a$. Demak, B nuqtaning koordinatalari b va a ga teng bo‘ladi $B(b,a)$.

5-masala. $A(-4;2)$ va $B(x;y)$ nuqtalar Ox o‘qiga parallel to‘g‘ri chiziqda yotadi va ular orasidagi masofa 2 masshtab birligiga teng. B nuqtaning koordinatalarini aniqlang.

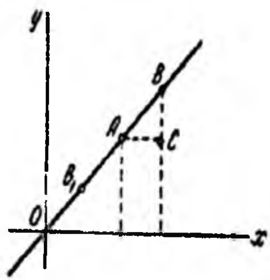
Yechish. Masala ikkita yechimga ega: B nuqta A nuqtadan chapda yoki o'ngda yotishi mumkin. Har ikki holda ham B nuqta Ox o'qiga parallel to'g'ri chiziqda yotgani uchun uning ordinatasi y ikki holda ham A nuqtaning ordinatasiga teng, ya'ni $y=2$. Absissasi esa A nuqtadan chapda yotgan holda -6 ga, o'ngda yotgan holda esa -2 ga teng. Shunday qilib, $B(-6;2)$ yoki $B_1(-2;2)$ (5-rasm).



5-rasm.

6-masala. $A(5;5)$ va $B(x;y)$ nuqtalar birinchi chorak bissektrisasida yotadi va ular orasidagi masofa 4 masshtab birligiga teng. B nuqtaning koordinatalarini toping.

Yechish. B nuqta birinchi chorak bissektrisasida yotgani uchun uning absissasi va ordinatasi o'zaro tengdir. Teng yonli to'g'ri burchakli ABC ucburchakda gipotenuza $AB=4$, $AC=BC$ (6-rasm).



6-rasm.

Pifagor teoremasidan, $AC^2+BC^2=AB^2$ va $2AC^2=16$, $AC^2=8$, $AC=BC=2\sqrt{2}$ Shunday qilib, izlanayotgan nuqtaning absissasi (demak, ordinatasi ham) A nuqtaning absissasiga avval $2\sqrt{2}$ ni qo'shishdan, so'ngra $2\sqrt{2}$ ni ayirishdan hosil bo'ladi va masala ikkita yechimga ega bo'ladi:

$$B(5+2\sqrt{2};5+2\sqrt{2}),\quad B_1(5-2\sqrt{2};5-2\sqrt{2})$$

7-masala. $A(4;-5)$ va $B(7;-1)$ nuqtalar orasidagi masofani toping.

Yechish. (1.1) formulaga asosan ular orasidagi d masofa

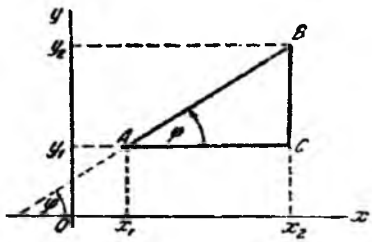
$$x_1=4,\ x_2=7,\ y_1=-5,\ y_2=-1,$$

larga ko‘ra quyidagiga teng bo‘ladi:

$D=\sqrt{(7-4)^2+(-1-(-5))^2}=\sqrt{9+16}=5$ masshtab birligiga teng.

8-masala. $A(-1;3)$ va $B(7;-3)$ nuqtalarni tutashtiruvchi kesmaning Ox o‘qining musbat yo‘nalishi bilan tashkil etgan burchagi kattaligi topilsin.

Yechish. A va B nuqtalarning ma’lum koordinatalariga ko‘ra, AB kesma bilan Ox o‘qining musbat yo‘nalishi tashkil etgan burchak tangensini topish mumkin. Agar $A(x_1, y_1)$ va $B(x_2, y_2)$ bo‘sa, u holda 7-rasmdan ko‘rinadiki, $AC=x_2-x_1$, $BC=y_2-y_1$ va



7-rasm.

$$tg\varphi=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \qquad (1.2)$$

φ – burchak Ox o‘qini soat strelkasiga teskari burishdan hosil bo‘ladi. (1.2) formula A va B nuqtalarning tekislikda tutgan o‘rniga bog‘liq emas. A va B nuqtalarning koordinatalarini (1.2) formulaga qo‘yib, quyidagini olamiz:

$$tg\varphi=\frac{-3-(+3)}{7-(-1)}=-\frac{3}{4};$$

yoki $-tg\varphi=0{,}75$. Lekin $-tg\varphi=tg(180^0-\varphi)$ bo‘lgani uchun

$tg(180^0-\varphi)=0,75$. Jadvaldan $180^0-\varphi=36^0 52'$. Bundan esa, $\varphi=143^0 08'$. Bu formuladan keyinchalik, to'g'ri chiziq bilan absissa o'qining musbat yo'nalishi orasidagi burchakni topishda foydalanamiz. Bu formuladan topilgan $tg\varphi$ esa to'g'ri chiziqning burchak koeffitsienti deb ataladi.

9-masala. Uchlari *A(2;3)*, *B(6;7)* va *C(-7;2)* nuqtalardan iborat uchburchakning o'tmas burchakli ekanligini isbotlang.

Eslatma: Elementar geometriyadan ma'lumki

a) agar uchburchakning biror tomoni kvadrati qolgan ikki tomoni kvadratlari yig'indisiga teng bolsa,bu uchburchak to'g'ri burchakli;

b) agar uchburchakning katta tomon kvadrati, qolgan ikki tomoni kvadratlari yig'indisidan kichik bo'lsa, bu uchburchak o'tkir burchakli;

c) agar uchburchakning katta tomon kvadrati, qolgan ikki tomoni kvadratlari yig'indisidan katta bo'lsa, bu uchburchak o'tmas burchakli bo'ladi.

Yechish. Uchburchak tomonlari uzunliklarini topamiz:

$|AB|=\sqrt{(6-2)^2+(7-3)^2}=\sqrt{16+16}=\sqrt{32}$ masshtab birlik.

$|AC|=\sqrt{(-7-2)^2+(2-3)^2}=\sqrt{81+1}=\sqrt{82}$ masshtab birlik.

$|BC|=\sqrt{(-7-6)^2+(2-7)^2}=\sqrt{169+25}=\sqrt{194}$ masshtab birlik.

Demak, $BC^2>AB^2+AC^2$ (194>32+82) bo'lgani uchun uchburchak haqiqatdan ham o'tmas burchakli.

Mustaqil ishlash uchun masalalar

1-masala. *A (-2;4), B (2;3), C (-1;-2), D (0;-5), E (-3;0)* nuqtalarni dekart koordinatlar sistemasida belgilang.

2-masala. *A (3;-4)* nuqtaga a) absissa o'qiga nisbatan; b) ordinata o'qiga nisbatan; c) koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo'lgan nuqtalarni toping.

Javobi: a) *B (3;4), b) C (-3;-4), c) D (-3;4).*

3-masala. *A (-12;4)* nuqtaga dekart koordinatalar sistemasining uchinchi choragi bissektrisasiga nisbatan simmetrik bo'lgan *B (x;y)* nuqtaning koordinatalari topilsin.

Javobi: *B (4;-12)*.

4-masala. *A(2;4)* nuqtaga dekart koordinatalar sistemasining ikkinchi va uchinchi burchaklari bissektrisasiga nisbatan simmetrik bo'lgan *B(x;y)* nuqtaning koordinatalari topilsin.

Javobi: *B(-4;-2)*

5-masala. *A(-5;2)* va *B(x;y)* nuqtalar *Oy* o'qiga parallel bo'lgan to'g'ri chiziqda yotadi. *B(x;y)* nuqta *A* nuqtadan 6 masshtab birligi masofada yotadi. *B* nuqtaning koordinatalari topilsin.

Javobi: $B_1(-5;8)$ va *B(-5;-4)*

6-masala. *A(-3;9)* va *B(3;1)* nuqtalar orasidagi masofa aniqlansin.

Javobi: *d=10* m.b.

7-masala. *A(-11;5)* va *B(1;0)* nuqtalarni tutashtiruvchi $|AB|$ kesma uzunligi topilsin.

Javobi: *d=13* m.b.

8-masala. *A(-4;5)* va *B(-6;7)* nuqtalarni tutashtiruvchi $|AB|$ kesma uzunligi va bu kesma bilan *Ox* o'qining musbat yo'nalishi orasidagi burchak topilsin.

Javobi: $|AB| = \sqrt{8}$ m.b ; $\varphi = 135^0$.

9-masala. Uchlari *A(1;3)*, *B(4;5)* va *C(-5;-7)* nuqtalarda bo'lgan uchburchak perimetri topilsin.

Javobi: $p \approx 30{,}3$ m.b.

10-masala. Uchlari *A(2;-5)*, *B(-7;-4)* va *C(-1;6)* nuqtalarda bo'lgan uchburchak ko'rinishini aniqlang.

Javobi: uchburchak o'tkir burchakli.

2-§. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish. Kesma o'rtasining koordinatalari. Uchburchak yuzini uning uchlarining koordinatalari ma'lum bo'lganda hisoblash

1. Agar x_1 va y_1, *A* nuqtaning, x_2 va y_2 lar esa *B* nuqtaning koordinatalari bo'lsa, u holda *AB* kesmani

$\lambda = \dfrac{AC}{CB}$ nisbatda bo'luvchi C nuqtaning koordinatalari

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} \tag{2.1}$$

formula yordamida topiladi. Agar $\lambda = 1$ bo'lsa, $C(x;y)$ nuqta AB kesmani teng ikkiga bo'ladi, va AB kesma o'rtasining koordinatalari

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \tag{2.2}$$

formula yordamida topiladi.

2. Uchlari $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$ bo'lgan uchburchak yuzi

$$S = \frac{1}{2}\left|\left[(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)\right]\right| \tag{2.3}$$

formula yordamida topiladi.

1-masala. $A(-2;4)$ va $B(-4;10)$ nuqtalarni tutashtiruvchi AB kesma o'rtasi $C(x;y)$ nuqtaning koordinatalari topilsin.

Yechish. (2.2) formuladan foydalanamiz. $x_1 = -2$, $x_2 = -4$, $y_1 = 4$, $y_2 = 10$ U holda,

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-2 + (-4)}{2} = \frac{-6}{2} = -3,$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{4+10}{2} = \frac{14}{2} = 7.$$

Shunday qilib, AB kesma o'rtasi $C(-3;7)$

2-masala. Agar kesmaning bir uchi koordinatalari $A(-5;-7)$, o'rtasining koordinatalari $C(-9;-12)$ bo'lsa, ikkinchi uchi B – ning koordinatalari topilsin.

Yechish. (2,2) formulada kesma o'rtasi koordinatalari x va y bilan belgilangan. Masalaning shartiga ko'ra $x = -9$, $y = -12$. Kesmaning B uchi koordinatalari esa noma'lum. Ular bu formulada x_2 va y_2 lardir. Bu holda (2,2) ga ko‘ra noma’lumlarni topish uchun ikkita tenglama hosil qilamiz:

$$-9=\frac{-5+x_2}{2}; \qquad -12=\frac{-7+y_2}{2}$$

Bundan esa, $-18=-5+x_2$ va $x_2=-13$,

$$-24=-7+y_2 \text{ va } y_2=-17.$$

Shunday qilib, B – ning koordinatalari $B(-13;-17)$

3-masala. Uchburchak tomonlari o‘rtalarining koordinatalari berilgan: $E(7;8)$, $F(-4;5)$, $K(1;-4)$. Uchburchak uchlarining koordinatalari topilsin.

Yechish. A, B, C uchburchak uchlari, E nuqta AB tomon o‘rtasi, F nuqta AC tomon o‘rtasi, K nuqta BC tomon o‘rtasi bo‘lsin. A, B, C nuqtalarning koordinatalarini topamiz.

x_A va y_A deb A uchi koordinatalarini,

x_B va y_B deb B uchi koordinatalarini,

x_C va y_C deb C uchi koordinatalarini belgilaymiz. (2.2) formulalardan

$$x_E=\frac{x_A+x_B}{2}; \qquad y_E=\frac{y_A+y_B}{2}, \qquad (*)$$

$$x_F=\frac{x_A+x_C}{2}; \qquad y_F=\frac{y_A+y_C}{2}, \qquad (**)$$

$$x_K=\frac{x_B+x_C}{2}; \qquad y_K=\frac{y_B+y_C}{2}. \qquad (***)$$

Bu tengliklarga E, F va K nuqtaning koordinatalarini qo‘yamiz:

a) $(*)$ tenglama, E ning koordinatalarini qo‘ygandan so‘ng quyidagicha yoziladi:

$$7=\frac{x_A+x_B}{2}, \qquad 8=\frac{y_A+y_B}{2}$$

yoki

$$x_A + x_B = 14, \qquad y_A + y_B = 16$$

b) (**) tenglama, F ning koordinatalarini qo'ygandan so'ng quyidagicha yoziladi:

$$-4 = \frac{x_A + x_C}{2}, \qquad 5 = \frac{y_A + y_C}{2}$$

yoki

$$x_A + x_C = -8, \qquad y_A + y_C = 10$$

c) (***) tenglama esa, K ning koordinatalarini qo'ygandan so'ng quyidagicha yoziladi:

$$1 = \frac{x_B + x_C}{2}, \qquad -4 = \frac{y_B + y_C}{2}$$

yoki

$$x_B + x_C = 2, \qquad y_B + y_C = -8$$

Shunday qilib, 6 ta noma'lumlarni topish uchun ikkita tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Birinchi tenglamalar sistemasi:

$$\begin{cases} x_A + x_B = 14, \\ x_A + x_C = -8, \\ x_B + x_C = 2. \end{cases}$$

Ikkinchi tenglamalar sistemasi:

$$\begin{cases} y_A + y_B = 16, \\ y_A + y_C = 10, \\ y_B + y_C = -8. \end{cases}$$

Birinchi sistema tenglamalarini hadma-had qo'lshib,

$$x_A + x_B + x_A + x_C + x_B + x_C = 8$$

ni hosil qilamiz, yoki

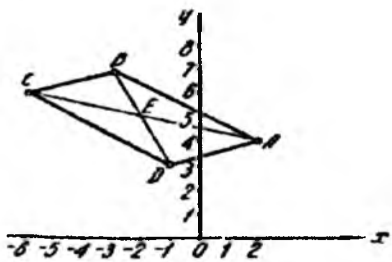
$$x_A + x_B + x_C = 4. \qquad (2.4)$$

Birinchi sistemaning uchunchi tenglamasiga ko'ra $x_B + x_C = 2$ bo'lgani uchun (2.4) dan $x_A + 2 = 4$ va $x_A = 2$ ni hosil qilamiz; birinchi sistemaning ikkinchi tenglamasiga ko'ra $x_A + x_C = -8$

bo'lgani uchun (2.4) dan $x_B - 8 = 4$ va $x_B = 12$ ni hosil qilamiz; birinchi sistemaning birinchi tenglamasiga ko'ra $x_A + x_B = 14$ bo'lgani uchun (2.4) dan $x_C + 14 = 4$ va $x_C = -10$ ni hosil qilamiz; Shunday qilib, $x_A = 2;$ $x_B = 12;$ $x_C = -10.$

Xuddi shunday, ikkinchi tenglamalar sistemasidan $y_A = 17;$ $y_B = -1;$ $y_C = -7$ larni topamiz. Shunday qilib, uchburchak uchlari koordinatalari quyidagilar: $A(2;17);$ $B(12;-1);$ $C(-10;-7).$

4-masala. $A(2;4),$ $B(-3;7)$ va $C(-6;6)$ lar parallelogrammning uchta uchlari bo'lib, A va C lar qarama-qarshi uchlaridir. Parallelogrammning to'rtinchi uchi topilsin (8-rasm).



8-rasm.

Yechish. Masala yechilishi uchun chizma chiziladi. Ma'lumki, parallelogramm diagonallari kesishish nuqtasida teng ikkiga bo'linadi. Shuning uchun diagonallari kesishish nuqtasi E ning koordinatalarini AC kesma o'rtasi koordinatalari sifatida topiladi. Ularni x_E va y_E deb belgilab,

$$x_E = \frac{2+(-6)}{2}; \quad x_E = -2. \qquad y_E = \frac{4+6}{2}; \quad y_E = 5$$

larni topamiz. Demak, $E(-2;5)$. Endi BD diagonal o'rtasi E va bir uchi B ning koordinatalarini bilgan holda, (2,2) formulalardan D uchi koordinatalarini oson topamiz. Buning uchun (2,2) formulalarda $x = -2;$ $y = 5;$ $x_1 = -3;$ $y_1 = 7$ deb olamiz. $x_2 = x_D;$

$y_2 = y_D$ lar esa izlanayotgan D nuqtaning koordinatalari. Natijada quyidagilarni topamiz:

$$-2 = \frac{-3 + x_D}{2}; \qquad -4 = -3 + x_D; \qquad x_D = -1;$$

$$5 = \frac{7 + y_D}{2}; \qquad 10 = 7 + y_D; \quad y_D = 3.$$

Shunday qilib, $D(-1;3)$.

Endi AB kesmani berilgan nisbatda bo‘lishga oid masalalar yechamiz. Agar C nuqta AB kesmani λ nisbatda bo‘ladi deyilsa, buni quyidagicha tushuntirish kerak: $\lambda = \dfrac{AC}{CB}$; Bu kasrning surati kesma boshi A nuqtadan, kesmani bo‘luvchi C nuqtagacha bo‘lgan yo‘naltirilgan masofa, maxraj esa C nuqtadan kesmaning oxiri B nuqtagacha bo‘lgan yo‘naltirilgan masofa[1].

5-masala. $A(2;5)$ va $B(4;9)$ nuqtalarni tutashtiruvchi AB kesmani $1:3$ nisbatda bo‘ling.

Yechish. Masalaning shartida AB kesmani $\lambda = \dfrac{1}{3}$ nisbatda bo‘luvchi C nuqtaning koordinatalarini topish talab qilingan. $A(2;5)$ kesmaning boshi, $B(4;9)$ nuqta esa kesmaning oxiri deb hisoblaymiz. (2,1) formulalarda x va y lar C nuqtaning koordinatalari, x_1 va y_1 lar A nuqtaning koordinatalari, x_2 va y_2 lar esa B nuqtaning koordinatalari deb olamiz; $\lambda = \dfrac{1}{3}$. Demak, $x_1 = 2,\ x_2 = 4,\ y_1 = 5,\ y_2 = 9$. Shunday qilib, (2,1) formulalar-

---

[1])ya'ni $\dfrac{AC}{CB}$ nisbat manfiy ishorali ham bo‘lishi mumkin (agar AC va CB kesmalar qarama-qarshi yo‘nalgan bo‘lsa, boshqacha aytganda, C nuqta AB kesmaning tashqarisida yotsa)

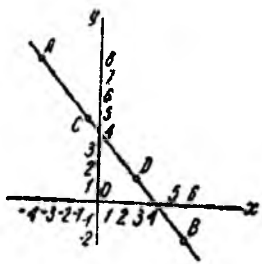
dan

$$x=\frac{2+\frac{4}{3}}{1+\frac{1}{3}};\quad x=\frac{2+\frac{4}{3}}{\frac{4}{3}};\quad x=\frac{5}{2};$$

$$y=\frac{5+\frac{9}{3}}{1+\frac{1}{3}};\quad y=\frac{5+3}{\frac{4}{3}};\quad y=6.$$

Demak, $C(\frac{5}{2};6)$

6-masala. AB kesma oxirlari koordinatalari quyidagilar: $A(-4;8)$ va $B(6;-2)$ AB kesmani uchta teng qismga bo‘luvchi C va D nuqtalarning koordinatalari topilsin (9-rasm).



9-rasm.

Yechish. AB kesma uchta teng bo‘laklarga bo‘lingan C nuqta AB kesmani $\lambda=\frac{1}{2}$ nisbatda bo‘ladi. Shuning uchun $AC=\frac{1}{2}CB$ va bundan $\lambda=\frac{AC}{CB}=\frac{1}{2}$ ni olamiz. (2,1) formulalarning birinchisida $x_1=-4,\quad x_2=6,\quad \lambda=\frac{1}{2},$ deb olamiz;

$x=x_C-C$ nuqtaning absissasi (2,1) ning ikkinchi formulasida $y_1=8$, $y_2=-2$, va $y=y_C-$ C nuqtaning ordinatasi deb olamiz. Shunday qilib,

$$x_C=\frac{-4+\frac{1}{2}6}{1+\frac{1}{2}};\qquad x_C=\frac{-4+3}{\frac{3}{2}};\qquad x_C=-\frac{2}{3};$$

$$y_C=\frac{8+\frac{1}{2}(-2)}{1+\frac{1}{2}};\qquad y_C=\frac{8-1}{\frac{3}{2}};\qquad y_C=\frac{14}{3}.$$

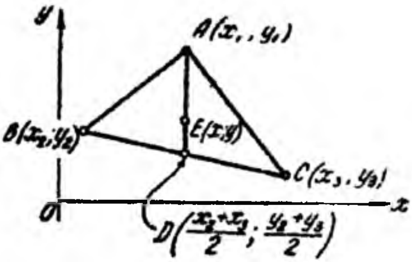
Demak, $C(-\frac{2}{3};\frac{14}{3})$ D nuqtaning koordinatalarini CB kesmaning o‘rtasi sifatida topamiz. (2,2) formulalarga ko‘ra

$$x_D=\frac{-\frac{2}{3}+6}{2};\qquad x_D=\frac{8}{3}.\qquad y_D=\frac{\frac{14}{3}-2}{2};\qquad y_D=\frac{4}{3}.$$

Demak, $D(\frac{8}{3};\frac{4}{3})$.

7-masala. Uchlari $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$ nuqtalarda bo‘lgan uchburchak shaklidagi bir jinsli plastinaning og‘irlik markazi koordinatalari topilsin (plastinaning qalinligi hisobga olinmasin).

Yechish. Masala shartida ko‘rsatilgan uchburchak og‘irlik markazi uning medianalari kesishgan nuqtada joylashgan. Elementar geometriyadan ma’lumki, uchburchakning uchta medianasi bir nuqtada kesishib, bu nuqtada uchburchak uchidan boshlab hisoblaganda $2:1$ nisbatda bo‘linadi. Bu nuqtani E deb belgilaymiz, koordinatalarini esa x_E va y_E deb belgilaymiz (10-rasm).



10- rasm.

A uchdan tushirilgan medianani qaraylik. Bu mediananing bir uchi A da bo‘lib, uning koordinatalari $(x_1;y_1)$, ikkinchi uchi esa BC kesmaning o‘rtasi D nuqtada joylashgan. Uning koordinatalarini x_D va y_D bilan belgilaymiz va (2,2) formulaga asosan

$$x_D=\frac{x_2+x_3}{2};\quad y_D=\frac{y_2+y_3}{2};\quad D\left(\frac{x_2+x_3}{2};\frac{y_2+y_3}{2}\right).$$

Endi AD mediananing boshi va oxiri koordinatalarini bilgan holda va $E(x_E;y_E)$ nuqta AD kesmani $\lambda=2$ nisbatda bo‘lganligi sababli (2,1) formulalardan quyidagilarni hosil qilamiz:

$$x_E=\frac{x_1+2\dfrac{x_2+x_3}{2}}{1+2}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3};\qquad x_E=\frac{x_1+x_2+x_3}{3},$$

$$y_E=\frac{y_1+2\dfrac{y_2+y_3}{2}}{1+2}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3};\qquad x_E=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}.$$

8-masala. Uchlari $A(2;-3), B(1;1), C(-6;5)$ nuqtalarda bo‘lgan uchburchakning yuzini toping.

Yechish. (2,3) formulalaga asosan $x_1=2,\ x_2=1,\ x_3=-6,$ $y_1=-3,\ \ y_2=1,\ \ y_3=5$. deb olib, quyidagini hosil qilamiz.

$$S=\frac{1}{2}\left|\{[2-(-6)]\cdot(1-5)-[1-(-6)]\cdot(-3-5)\}\right|=\frac{1}{2}\left|\{(2+6)(-4)-(1+6)(-8)\}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|[-32-(-56)]\right|=\frac{1}{2}\left|(-32+56)\right|=\frac{1}{2}\cdot 24=12.$$

$S=12$ kv.birlik.

9-masala. Berilgan $A(1;8), B(-2;-7), C(-4;-17)$ nuqtalar bir to‘g‘ri chiziqda yotishini isbotlang.

Yechish. Agar A, B va C nuqtalar bir to‘g‘ri chiziqda yotsa, ABC uchburchakning yuzi nolga teng bo‘ladi. Shuning uchun, (2,3) formulalarda $S=0$ deb olib, uch nuqtani bir to‘g‘ri chiziqda yotishligining shartini hosil qilamiz:

$$(x_1-x_3)(y_2-y_3)-(x_2-x_3)(y_1-y_3)=0$$

yoki

$$(x_1-x_3)(y_2-y_3)=(x_2-x_3)(y_1-y_3)$$

Bu tenglikni quyidagi qulay formaga(ko‘rinishga) keltirish mumkin:

$$\frac{x_1-x_3}{x_2-x_3}=\frac{y_1-y_3}{y_2-y_3} \qquad (2.5)$$

Bu tenglikka berilgan nuqtalarning koordinatalarini qo‘yib, $\frac{5}{2}=\frac{5}{2}$ to‘g‘ri sonli tenglikni hosil qilamiz. Demak, berilgan uch nuqta bir to‘g‘ri chiziqda yotadi.

Mustaqil ishlash uchun masalalar

1-masala. AB kesmaning oxirlari koordinatalari $A(-7;5)$, $B(11;-9)$ berilgan bo‘lsa, uning o‘rtasi $-C$ nuqtaning koordinatalari topilsin.

Javobi: $x=2,\ y=-2$. $C(2;-2)$

2-masala. AB kesmaning bir uchi koordinatalari $A(-4;2)$, o‘rtasining koordinatalari $C(-6;5)$. B uchining koordinatalari topilsin.

Javobi: $x_2=-8,\ y_2=8$. $B(-8;8)$

3-masala. Uchburchak uchlarining koordinatalari berilgan $A(-7;4)$, $B(-5;2), C(6;-3)$. Uning tomonlari o'rtalarining koordinatalari topilsin.

Javobi: Agar AB tomon o'rtasini E, AC tomon o'rtasini F, BC tomon o'rtasini K bilan belgilasak, $E(-6;3), F(-\frac{1}{2};\frac{1}{2})$, $K(\frac{1}{2};-\frac{1}{2})$.

4-masala. Uchburchak tomonlari o'rtalarining koordinatalari $E(-4;6), F(2;-6), K(0;-4)$. Uchburchak uchlarining koordinatalari topilsin.

Javobi: $x_A+x_B+x_C=-2,\ x_A=-2,\ x_B=-6,\ x_C=6.$

$$y_A+y_B+y_C=-4,\ y_A=4,\ y_B=8,\ y_C=-16$$

5-masala. Parallelogrammning uchta uchining koordinatalari $A(-6;-4)$, $B(-4;8)$, $C(-1;5)$ berilgan. A va C uchlari qarama-qarshi. To'rtinchi uchining koordinatalari topilsin.

Javobi: $E(-\frac{7}{2};\frac{1}{2})$, diagonallari kesishish nuqtasi. To'rtinchi tomon $D(-3;-7)$

6-masala. AB kesmaning boshi $A(-6;10)$, oxiri $B(-2;-6)$ bo'lsa, bu kesmani λ nisbatda bo'luvchi C nuqtaning koordinatalari topilsin. 1. $\lambda=\frac{1}{2}$; 2. $\lambda=2$; 3. $\lambda=\frac{1}{3}$; 4. $\lambda=\frac{2}{3}$.

Javobi: 1.$(-\frac{14}{3};\frac{14}{3})$; 2.$(-\frac{10}{3};-\frac{2}{3})$; 3.$(-5;6)$; 4.$(-\frac{22}{5};\frac{18}{5})$

7-masala. Uchlari $A(2;-3), B(-3;6), C(-7;0)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchak shaklidagi bir jinsli plastinaning og'irlik markazi koordinatalari topilsin, (plastinaning qalinligi hisobga olinmasin).

Javobi: $x = -\dfrac{8}{3}$; $y = 1$.

8-masala. Uchlari $A(-2;4), B(-6;8), C(5;-6)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchakning yuzini toping.

Javobi: $S = 6$ kv. birlik.

9-masala. Berilgan $A(1;5), B(-5;-1)$ va $C(-8;-4)$ nuqtalar bir to'g'ri chiziqda yotishini isbotlang.

3-§. To'g'ri chiziq tenglamasinig turli ko'rinishlari. To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasini tekshirish. To'g'ri chiziqni uning tenglamasiga ko'ra yasash

Tekislikdagi to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida to'g'ri chiziq quidagi tenglamalarning biri bilan beriladi:

1.To'g'ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi.

$$y = kx + b \qquad (3.1)$$

Bunda: k – to'g'ri chiziqning burchak koeffitsienti, ya'ni to'g'ri chiziq OX o'qining musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan burchagi α ning tangensiga teng bo'lib, bunda α burchak OX o'qining to'g'ri chiziqqa burilishi soat miliga teskari yo'nalishidan hosil bo'ladi. b – esa to'g'ri chiziqning ordinata o'qidan kesib oladigan kesma kattaligi. $b=0$ bo'lsa, (3.1) quidagicha bo'ladi: $y = kx$ va uning grafigi koordinata boshidan o'tadi. (3.1) tenglama bilan Ox o'qiga perpendikular bo'lmagan ixtiyoriy to'g'ri chiziqni aniqlash mumkin.

2. To'g'ri ehiziqning umumiy tenglamasi.

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0, \qquad A^2 + B^2 \neq 0. \qquad (3.2)$$

Bu tenglamaning xususiy hollari:

a)agar $C=0$ bo'lsa, (3.2) tenglama quidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$Ax + By = 0.$$

Bu tenglama bilan ifodalangan t o'g'ri chiziq koordinata boshidan o'tadi;

b) agar $B=0$ bo'lsa, (3.2) tenglama quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$Ax+C=0,\ \text{yoki}\ x=-\frac{C}{A}.$$

Tenglamada y – o'zgaruvchi bo'lmaganligi sababli, bu tenglama bilan aniqlanadigan to'g'ri chiziq Oy o'qiga parallel bo'ladi;

c) agar A=0 bo'lsa (3.2) tenglama quidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$By+C=0,\quad \text{yoki}\quad y=-\frac{C}{B}.$$

Tenglama x – o'zgaruvchini olmaganligi uchun, bu tenglama bilan aniqlanadigan to'g'ri chiziq Ox o'qiga parallel bo'ladi. Shuni ta'kidlash joizki, agar to'g'ri chiziq biror koordinata o'qiga parallel bo'lsa, uning tenglamasida shu o'qga mos keluvchi had bo'lmaydi;

d) agar $C=0$ va $A=0$ bo'lsa, (3.2) tenglama quidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$By=0,\quad \text{yoki}\quad y=0;$$

Bu esa Ox o'qidan iborat;

e)agar $C=0$ va $B=0$ bo'lsa, (3.2) tenglama quidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$Ax=0,\quad \text{yoki}\quad x=0;$$

bu esa Oy o'qidan iborat.

3. To'g'ri chiziqning koordinata o'qlaridan ajratgan kesmalariga nisbatan tenglamasi.

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \qquad (3.3)$$

Bunda:

a – to'g'ri chiziqning Ox o'qidan kesib olgan kesmasi kattaligi.

b – to'g'ri chiziqning Oy o'qidan kesib olgan kesmasi kattaligi.

Bu kesmalarning har biri koordinata boshiga qo'yilgan. Bu tenglamaning xususiyati shundaki, o'ng tomonda kasrlar o'rtasida (+) belgisi bo'lib, a va b lar musbat yoki manfiy qiymatlar qabul qilishi mumkin, o'ng tomonda esa 1 qiymati turadi.

4.To‘g‘ri chiziqning normal tenglamasi.

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \qquad (3.4)$$

Bunda: p – koordinata boshidan to‘g‘ri chiziqqa tushirilgan perpendikular uzunligiga teng bo‘lib, α -OX o‘qining musbat yo‘nalishini soat miliga teskari yo‘nalishda perpendikular yo‘nalishi bilan ustma-ust tushguncha burishdan hosil bo‘lgan burchakka teng. To‘g‘ri chiziqning (3.2) umumiy tenglamasini normal ko‘rinishga keltirish uchun uning ikkala tomonini quidagi normallashtiruvchi ko‘paytuvchiga kopaytirish kerak:

$$N = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}\cdot \qquad (3.5)$$

Kasr oldidagi ishora (3.2) umumiy tenglamadagi C–ozod hadning ishorasiga qarama-qarshi olinadi. To‘g‘ri chiziqning normal tenglamasi xususiyati shundaki, x va y oldidagi koeffitsientlar kvadratlari yig‘indisi 1 ga teng, ozod had manfiy va o‘ng tomoni 0 ga teng.

Ma’lumki, to‘g‘ri chiziq o‘zining ikki nuqtasi bilan to‘la aniqlanadi. Shuning uchun to‘g‘ri chiziqning grafigini chizish uchun, to‘g‘ri chiziq tenglamasidan foydalanib, unga tegishli ikki nuqta koordinatalarini topish yetarlidir. Shuni esda tutish lozimki, agar nuqta to‘g‘ri chiziqqa tegishli bo‘lsa, uning koordinatalari to‘g‘ri chiziqning tenglamasini qanoatlantiradi.

1.Agar to‘g‘ri chiziq umumiy tenglamasi bilan berilgan, ya’ni $Ax+By+C=0$, $C \neq 0$ bo‘lsa, u holda uning grafigini yasash uchun uning koordinata o‘qlari bilan kesishish nuqtalari koordinatalarini topish qulay. Ox o‘qida yotgan nuqtalar ordinatalari 0 ga teng bo‘ladi. Shu usulda topilgan x – ning qiymati, to‘g‘ri chiziqning Ox o‘qi bilan kesishish nuqtasining absissasi bo‘ladi. Agar $x=a$ bo‘lsa, u holda kesishish nuqtasi $(a;0)$ bo‘ladi. Endi Oy o‘qi bilan to‘g‘ri chiziq kesishish nuqtasini topish uchun quyidagi mulohazalar yuritiladi; Oy o‘qidagi nuqtalarning absissalari 0 ga teng bo‘lgani uchun to‘g‘ri chiziq tenglamasida $x=0$ deb, y – ning mos qiymati topiladi. Topilgan y – ning qiymati Oy o‘qi bilan to‘g‘ri chiziqning kesishish nuqtasi ordinatasi bo‘ladi. Agar $y=b$ bo‘lsa, u holda kesishish nuqtasi (0;b) bo'ladi. Natijada bu topilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq berilgan tenglama bilan aniqlanadigan to'g'ri chiziqning grafigi bo'ladi. Agar to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasida $C=0$ bo'lsa, u holda to'g'ri chiziq grafigi koordinata boshidan o'tadi. Shunday qilib, to'g'ri chiziq grafigining bir nuqtasi ma'lum bo'lib, bu grafikni chizish uchun yana bir nuqtani topish qoladi. x – absissaning ixtiyoriy qiymatini olib, tenglamadan bu qiymatga mos ordinata qiymati topiladi.

2. Agar to'g'ri chiziq (3.1) burchak koeffitsientli tenglama orqali berilgan bo'lsa,bu tenglamadan Oy o'qidan kesib olinadigan kesma kattaligi b ma'lum bo'ladi. Endi grafikni qurish uchun yana bir nuqtasini aniqlash qoladi. Agar $x \neq 0$, $b \neq 0$ bo'lsa, eng osoni (3.1) da $y = 0$ deb Ox o'qi bilan kesishish nuqtasini topishdir. Agarda $b=0$ bo'lsa, to'g'ri chiziq grafigi koordinata boshidan o'tadi. Yuqorida biz bu holni ko'rdik.

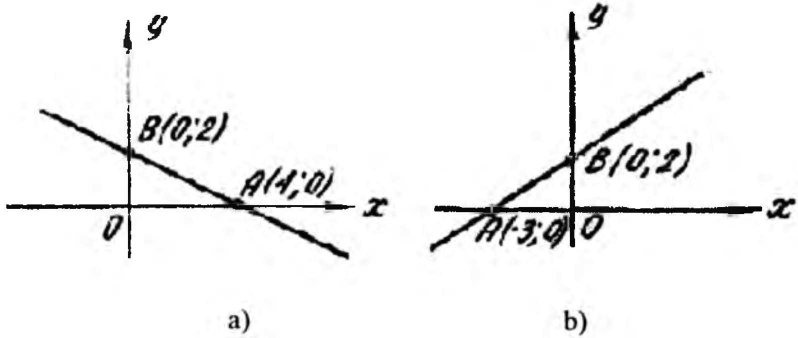
1-masala. Quidagi to'g'ri chiziqlarning grafigini yasang:

1) $x+2y-4=0$; 2) $2x-3y+6=0$; 3) $y=3x+2$;

4) $y=-2x$; 5) $2x+3y=0$; 6) $\frac{x}{4}+\frac{y}{5}=1$; 7) $\frac{x}{2}-\frac{y}{4}=1$;

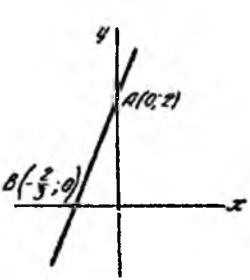
8) $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-4=0$; 9) $y=2$; 10) $x+3=10$.

Yechish. 1) $x+2y-4=0$ tenglama bilan aniqlangan to'g'ri chiziq grafigining koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalarini topamiz. $y=0$ deb tenglamadan $x=4$ ni topamiz. $A(4;0)$ birinchi nuqta. Endi tenglamada $x=0$ deb Oy o'qi bilan kesishish nuqtasi $B(0;2)$ ni topamiz. Bu nuqtalarni koordinatalar sistemasida quramiz va ularni tutashtirib, berilgan to'g'ri chiziqning grafigini hosil qilamiz (11- a rasm) . 2) $2x-3y+6=0$ tenglama bilan aniqlangan to'g'ri chiziq grafigining koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalarini topamiz. $y=0$ desak, $x=-3$ bo'ladi. A(-3;0) nuqta Ox o'qi bilan kesishish nuqtasidir. $x=0$ desak, $y=-2$ hosil bo'ladi. B(0;2) Oy o'qi bilan kesishish nuqtasidir. Bu nuqtalarni koordinatalar sistemasida aniqlab, ularni tutashtirsak, berilgan to‘g‘ri chiziq grafigi hosil bo‘ladi (11- b rasm).



11-rasm.

3) $y = 3x + 2$ -to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasidir. Tenglamadan ko‘rinib turibdiki , to‘g‘ri chiziq *Oy* o‘qidan $b=2$ (12-rasm) qiymatli kesma ajratadi. Demak, $A(0;2)$ nuqta to‘g‘ri chiziqqa tegishli. Yana bir nuqta topamiz. Agar $y=0$ desak, to‘g‘ri chiziqning *Ox* o‘qi bilan kesishish nuqtasini topamiz. Bunda $0 = 3x + 2$, ya’ni $x = -\frac{2}{3}$ bo‘lib $B(-\frac{2}{3};0)$ nuqta to‘g‘ri chiziqqa tegishlidir. Bu nuqtalarni tutashtirib, berilgan to‘g‘ri chiziq grafigini hosil qilamiz.

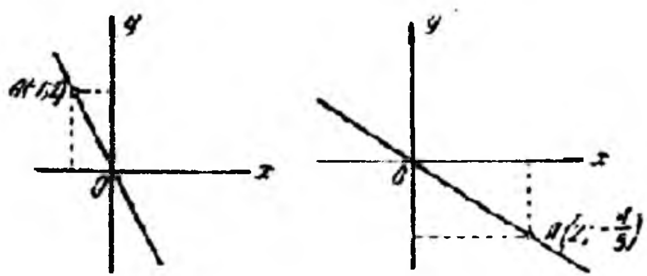


12-rasm.

4) $y=-2x$ tenglama bilan berilgan to‘g‘ri chiziq grafigi koordi-

natalar boshidan o'tadi. Shuning uchun uning grafigini chizish uchun uning yana bir nuqtasini topish yetarlidir. $x=-1$ deb olib, $y=-2(-1)=2$ ni topamiz, demak $A(-1;2)$ nuqta to'g'ri chiziqqa tegishli. Koordinatalar boshi va $A(-1;2)$ orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq berilgan tenglamaning grafigi bo'ladi. (13- a rasm)

5) $2x+3y=0$ tenglama bilan berilgan to'g'ri chiziq grafigi koordinatalar boshidan o'tadi. Chunki bu tenglamaning ozod hadi nolga teng. Bu to'g'ri chiziqning grafigini chizish uchun unga tegishli yana bir nuqtani topish kerak. Masalan, agar $x=2$ deb olsak, uning ordinatasini topish uchun tenglamaga $x=2$ ni qo'yib quidagini hosil qilamiz: $2\cdot 2+3y=0$, ya'ni $y=-\frac{4}{3}$; Shunday qilib, $A(2;-\frac{4}{3})$ nuqta berilgan to'g'ri chiziqqa tegishlidir. Koordinatalar boshi va $A(2;-\frac{4}{3})$ nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq berilgan tenglamaning grafigi bo'ladi (13- b rasm).



a) b)

13-rasm.

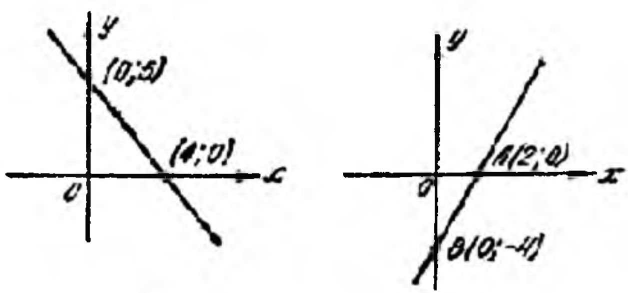
6) $\frac{x}{4}+\frac{y}{5}=1$, bu to'g'ri chiziqning kesmalaridagi tenglamasidir. Bundan ko'rinadiki, to'g'ri chiziq koordinatalar o'qi Ox va

Oy lardan kattaligi $a=4$ va $b=5$ ga teng kesmalar kesadi (14-a rasm).

7) $\frac{x}{2}-\frac{y}{4}=1$, tenglamani (3.3) ko'rinishga keltiramiz. Shuni eslatamizki, to'g'ri chiziqning kesmalardagi tenglamasining chap qismida ikki kasr orasida (+) ishorasi bo'lishi kerak. Shunga ko'ra berilgan tenglamani quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$\frac{x}{2}+\frac{y}{-4}=1$, bunda, $a=2$ va $b=-4$ (14- b rasm).

8) $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-4=0$ to'g'ri chiziqning grafigini yasash uchun uning koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalarini topamiz. Bu tenglamada y=o deb olib, $\frac{3}{5}x-4=0$ ni hosil qilamiz, bundan esa $x=\frac{20}{3}$ ni topamiz. Demak, $A(\frac{20}{3};0)$ nuqta berilgan to'g'ri chiziqning absissalar

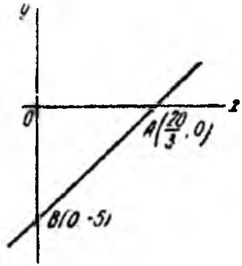


a) b)

14-rasm.

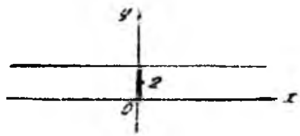
o'qi bilan kesishish nuqtasidir. Endi tenglamada $x=0$ deb, $y=-5$ ni topamiz. Shunday qilib, $B(0;-5)$ nuqta berilgan to'g'ri chiziqning ordinatalar o'qi bilan kesishish nuqtasi bo'ladi. Bu nuqtalardan to'g'ri chiziq o'tkazib berilgan tenglamaning grafigini topamiz

(15-rasm).



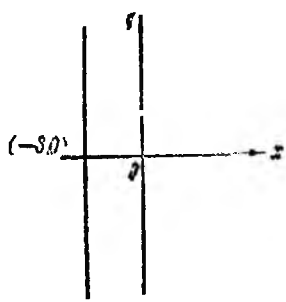
15 rasm.

9) $y=2$ tenglama, barcha nuqtalari 2 ga teng ordinatali to‘g‘ri chiziqni ifodalaydi. Bu to‘g‘ri chiziq Ox o‘qiga parallel bo‘lib, (0;2) nuqtadan o‘tadi (16-rasm).



16-rasm.

10) $x+3=0$ tenglamani $x=-3$ ko‘rinishda yozib olamiz. Bu tenglama barcha nuqtalari -3 ga teng absissali to‘g‘ri chiziqni ifodalaydi. Bu to‘g‘ri chiziq Oy o‘qiga parallel bo‘lib, $(-3;0)$ nuqtadan o‘tadi (17-rasm).



17-rasm.

2-masala. $4x-3y+12=0$ to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasini:

1) burchak koeffitsienti,

2) kesmalaridagi,

3) normal ko‘rinishlarda yozing va uning grafigini chizing.

Yechish. 1.To‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi (3.1) ko‘rinishda bo‘ladi, ya’ni $y=kx+b$. Berilgan tenglamani y ga nisbatan yechib, $y=\frac{4}{3}x+4$ ni hosil qilamiz. Buni (3.1) tenglama bilan solishtirib, bu to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyenti $k=\frac{4}{3}$, ordinatalar o‘qidan ajratgan kesmasi b=4 ga teng ekanini ko‘ramiz.

2. To‘g‘ri chiziqning kesmalardagi tenglamasi (3.3) ko‘rinishga ega:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 .$$

Berilgan tenglamani bu ko‘rinishga keltirish uchun quyidagicha ish yuritamiz: Berilgan tenglamada $y=0$ deb olib, $x=-3$ ni hosil qilamiz. Demak, berilgan to‘g‘ri chiziq Ox o‘qini (-3;0) nuqtada kesib o‘tadi va (3.3) tenglamada $a=-3$ bo‘ladi. Endi tenglamada $x=0$ deb olib, Oy o‘qi bilan kesishish nuqtasini topamiz, $-3y+12=0$, bundan esa $y=4$. To‘g‘ri chiziqning Oy o‘qi bilan kesishish nuqtasi (0;4) bo‘lib, (3.3) tenglamada $b=4$ bo‘ladi. Shunday qilib, berilgan to‘g‘ri chiziqning tenglamasi quyidagi ko‘rinishiga yoziladi:

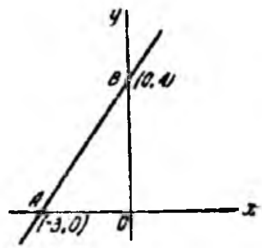
$$\frac{x}{-3}+\frac{y}{4}=1 .$$

3. Berilgan tenglamani normal ko‘rinishga keltirish uchun, uning ikkala tomonini (3.5) normallashtiruvchi ko‘paytuvchiga ko‘paytirish kerak. Bunda ildiz oldidagi ishorani berilgan tenglamadagi ozod had ishorasiga qarama-qarshi qilib tanlaymiz. Bizning misolimizdagi tenglamada ozod had +12 bo‘lgani uchun, normallashtiruvchi ko‘paytuvchidagi ildiz oldidagi ishora (-) bo‘ladi. $A=4$, $B=-3$ bo‘lgani uchun:

$$N=\frac{1}{-\sqrt{4^2+(-3)^2}}=-\frac{1}{5}; \qquad N=-\frac{1}{5}.$$

Berilgan tenglamaning ikkala tomoni $-\frac{1}{5}$ ga ko'paytirib,uni normal ko'rinishga keltiramiz: $-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-\frac{12}{5}=0$.

Eslatma: to'g'ri chiziqning normal tenglamasida x va y o'zgaruvchilar oldidagi koeffitsientlar kvadratlarining yig'indisi 1 ga teng bo'lishi kerak va ozod had oldidagi ishora (–) bo'lishi kerak. Berilgan to'g'ri chiziqning kesmalardagi tenglamasiga ko'ra $a=-3$, $b=4$ larni Ox va Oy o'qlarida belgilab, ular orqali to'g'ri chiziq o'tkazsak, bu to'g'ri chiziq berilgan tenglamaning grafigi bo'ladi (18-rasm).



18-rasm.

3-masala. $y=x+2$ tenglama bilan berilgan to'g'ri chiziq Ox o'qini qanday burchak ostida kesadi?

Yechish. To'g'ri chiziq $y=kx+b$ burchak koeffitsientli tenglama bilan berilgan. Ko'rinib turibdiki, $k=1$. Ya'ni to'g'ri chiziqning Ox o'qining musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan α - burchakning tangensi 1ga teng. Demak, $tg\alpha=1$. Bundan $\alpha=45^\circ$.

4-masala. Koordinatalar sistemasining birinchi va uchinchi burchaklari bissektrisasining tenglamasini tuzing.

Yechish. Bu to'g'ri chiziq koordinatalar boshidan o'tganligi sababli, $b=0$ bo'ladi. Birinchi va uchinchi koordinatalar burchagi bissektrisasi Ox o'qining musbat yo'nalishi bilan 45° burchak tashkil etadi. Bundan $k = tg45^o = 1$. k va b ning topilgan qiymatlarini (3.1) ga qo'yib $y=x$ ni hosil qilamiz. Bu tenglama– birinchi va uchinchi koordinatalar burchaklari bissektrisalarining tenglamasi bo'lib, uni esda saqlash kerak. Bu tenglamani $y-x=0$ ko'rinishda ham yozish mumkin.

5-masala. To'g'ri chiziq $(2,-3)$ nuqtadan o'tib, ordinata o'qidan kattaligi $b=3$ ga teng kesma ajratadi. Bu to'g'ri chiziqning tenglamasini yozing.

Yechish. Bu to'g'ri chiziqning tenglamasini $y=kx+b$ (3.1) ko'rinishda izlash maqsadga muvofiqdir, chunki to'g'ri chiziqning bu tenglamasidagi b - ma'lumdir. b - ning qiymatini (3.1) ga qo'yib,

$$y=kx+3 \qquad (A)$$

ni hosil qilamiz.Endi bizga burchak koeffitsiyenti k ni topish qoladi. Shartga ko'ra to'g'ri chiziq (2,–3) nuqtadan o'tadi. Agar to'g'ri chiziq nuqtadan o'tsa, uning koordinatalari bu to'g'ri chiziq tenglamasini qanoatlantirishi kerak. (A) tenglamada $x=2$ va $y=-3$ deb, $-3=2k+3$ ni hosil qilamiz. Bundan $k=-3$. So'ngra k ning bu qiymatini (A) tenglamaga qo'yib, izlanayotgan to'g'ri chiziq tenglamasini hosil qilamiz: $y=-3x+3$.

6-masala. Koordinata o'qlari Ox va Oy laridan mos ravishda $a=3$ va $b=4$ kattaliklardagi kesmalar ajratuvchi to'g'ri chiziqning tenglamasini yozing.

Yechish. To'g'ri chiziqning kesmalardagi tenglamasi $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ga, $a=3$ va $b=4$ qiymatlarini qo'yib, izlanayotgan $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$ tenglamani hosil qilamiz.

7-masala. Umumiy tenglamalari bilan berilgan 1) $2x-5y=0$, 2) $3x-2=0$, 3) $7y+12=0$, 4) $5x=0$, 5) $3y=0$ to'g'ri chiziqlarning koordinatlar sistemasida qanday joylanashini tekshiring.

Yechish. 1) $2x-5y=0$ to'g'ri chiziq ozod hadi bo'lmaganligi sababli koordinatalar boshidan o'tadi.

2) $3x-2=0$ to‘g‘ri chiziq y- koordinataga ega bo‘lmaganligi sababli Oy o‘qiga parallel bo‘ladi.

3) $7y+12=0$ to‘g‘ri chiziq x- koordinataga ega bo‘lmaganligi sababli Ox o‘qiga parallel bo‘ladi.

4) $5x=0$ to‘g‘ri chiziq tenglamasini $x=0$ korinishda yozib olish mumkin bo‘lgani sababli Oy o‘qi bilan ustma-ust tushadi.

5)$3y=0$ to‘g‘ri chiziq tenglamasini $y=0$ korinishda yozib olish mumkin bo‘gani sababli Ox o‘qi bilan ustma-ust tushadi.

8-masala. To‘g‘ri chiziqning $x+3y-4=0$ tenglamasini normal ko‘rinishga keltiring.

Yechish. Bu tenglamada x va y koordinatalari oldidagi koeffitsientlar kvadratlarining yig‘indisi $1^2+3^2=10$ birga teng bo‘lmaganligi sababli u normal korinishda emas. Shuning uchun normallovchi ko‘paytiruvchini $N=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$ formuladan topamiz, u $N=\frac{1}{\sqrt{10}}$ ga teng bo‘ladi va tenglama

$$\frac{1}{\sqrt{10}}x+\frac{3}{\sqrt{10}}y-\frac{4}{\sqrt{10}}=0$$

normal ko‘ rinishga keladi.

9-masala. Koordinatalar boshidan $3x-6y+5=0$ tenglama bilan berilgan to‘g‘ri chiziqqa tushirilgan perpendikular uzunligi va bu perpendikular asosining koordinatalarini toping.

Yechish. Berilgan tenglamani normal ko‘rinishga keltiramiz. Buning uchun uning ikkala tomonini quyidagi normallashtiruvchi ko‘paytiruvchiga ko‘paytiramiz.

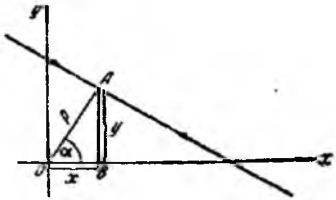
$$N=-\frac{1}{\sqrt{3^2+6^2}}=-\frac{1}{\sqrt{45}}=\frac{1}{3\sqrt{5}}.$$

Natijada $-\frac{1}{\sqrt{5}}x+\frac{2}{\sqrt{5}}y-\frac{\sqrt{5}}{3}=0$ ko‘rinishda berilgan to‘g‘ri chiziqning normal tenglamasi hosil bo‘ladi, (3.4) bilan solishtirib

$p=\frac{\sqrt{5}}{3}$ ni topamiz. Bu perpendikular asosining koordinatalari 19-rasmga ko‘ra

$$x=p\cos\alpha$$
$$y=p\sin\alpha$$

bo‘ladi. (Bu formulalar to‘g‘ri chiziq koordinatalar o‘qiga nisbstan ixtiyoriy joylashganda to‘gri bo‘ladi). (3.4) tenglamaga ko‘ra



19-rasm.

$$\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}},\ \sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

bo‘lganligi sababli

$$x=\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=-\frac{1}{3};\quad x=-\frac{1}{3};\qquad y=\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2}{3};\qquad y=\frac{2}{3}$$

bo‘ladi.

Mustaqil ishlash uchun masalalar

1-masala. $6x-8y-15=0$ to‘g‘ri chiziqning

1) burchak koeffitsientli.
2) kesmalardagi tenglamalarini yozing va chizmasini chizing.

Javobi: $1.\ y=-\frac{3}{4}x+\frac{15}{8};\qquad 2.\ \frac{x}{2{,}5}+\frac{y}{1{,}875}=1.$

2-masala. $12x-5y-26=0$ to‘g‘ri chiziqning

1) burchak koeffitsientli.
2) kesmalardagi tenglamalarini yozing va chizmasini chizing.

Javobi: $1.\ y=\frac{12}{5}x+\frac{26}{5}$; $2.\ \frac{x}{-\frac{13}{6}}+\frac{y}{\frac{26}{5}}=1$.

3-masala. $y=2x+3$ tenglama bilan berilgan to‘g‘ri chiziq Ox o‘qining musbat yonalishi bilan hosil qilgan burchagini toping.

Ko‘rsatma: Yechishda trigonometrik funksiyalar jadvalidan foydalaning.

Javobi: $tg\varphi=2, \varphi=63^{0}26'$.

4-masala. Ikkinchi va to‘rtinchi koordinata burchaklari bissektrisalarining tenglamasini yozing.

Javobi: $y=-x$, yoki $x+y=0$.

5-masala. $(-1;-3)$ nuqtadan o‘tib va ordinata o‘qidan $b=4$ kesma kesuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozing.

Ko‘rsatma: Bu masala 3.5 masalaga o‘xshash yechiladi.

Javobi: $y=7x+4$.

6-masala. 1) $x+2y-6=0$; 2) $x-3y+9=0$; 3) $3x+y=0$; 4) $x+2y=0$; 5) $x-4=0$; 6) $2x-3=0$ tenglamalar bilan berilgan to‘g‘ri chiziqni quring.

7-masala. 1. $5x+3y=0$; 2. $4y+8=0$; 3. $3x-16=0$; 4. $5y=0$; 5. $x-4=0$; 6. $7x=0$ to‘g‘ri chiziqlarning koordinata o‘qlariga nisbatan joylashishini tekshiring:

Javobi: 1. koordinata bo‘shidan o‘tadi 2. Ox o‘qiga parallel; 3. Oy o‘qiga parallel; 4. Ox o‘qi bilan ustma-ust tushadi; 5. Oy o‘qi bilan ustma-ust tushadi.

8-masala. $5x-12y+26=0$ to‘g‘ri chiziq tenglamasini normal ko‘rinishga keltiring.

Javobi: $-\frac{5}{13}x+\frac{12}{13}y-2=0$ (3.4) tenglama bilan solishtirib $p=2$;

$cos\alpha=-\frac{5}{13}$; $sin\alpha=\frac{12}{13}$ ekani topiladi.

4 -§. Berilgan nuqtadan berilgan yo‘nalish bo‘ylab o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi. Berilgan ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi. Ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak. Ikki to‘g‘ri chiziqning parallellik va perpendikularlik shartlari. Ikki to‘g‘ri chiziqning kesishish nuqtalarining koordinatalarini toppish

1. Berilgan $A(x_1, y_1)$ nuqtadan k burchak koeffitsient bilan aniqlangan yo‘nalishda o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi:

$$y - y_1 = k(x - x_1). \tag{4.1}$$

Bu tenglama $A(x_1, y_1)$ nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar dastasini aniqlaydi. $A(x_1, y_1)$ nuqta esa dastaning markazi deyiladi.

2. $A(x_1, y_1)$ va $B(x_2, y_2)$, nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \tag{4.2}$$

Berilgan ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsienti quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{4.3}$$

3. a va b to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak deb a to‘g‘ri chiziqni b to‘g‘ri chiziq bilan kesishish nuqtasi atrofida soat miliga teskari yo‘nalishda b to‘g‘ri chiziq bilan ustma-ust tushgunga qadar burish kerak bo‘ladigan burchak kattaligiga aytiladi. Agar ikki to‘g‘ri chiziq burchak koeffitsientli tenlamasi bilan berilgan bo‘lsa:

$$y = k_1 x + b_1,$$
$$y = k_2 x + b_2, \tag{4.4}$$

ular orasidagi burchak θ quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$tg\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \tag{4.5}$$

Agar to‘g‘ri chiziq tenglamalari umumiy ko‘rinishda berilgan bo‘lsa:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2 = 0, \qquad (4.6)$$

ular orasidagi burchak quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$tg\theta = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}. \qquad (4.7)$$

4. Ikki to‘g‘ri chiziqning parallellik sharti.

a) Agar to‘g‘ri chiziqlar (4.4) tenglamalar bilan berilgan bo‘lsa, ularning parallelligining zaruriy va yetarli sharti burchak koeffitsiyenlarining tengligidir:

$$k_1 = k_2. \qquad (4.8)$$

b) Agar to‘gri chiziqlar (4.6), tengliklar bilan berilgan bo‘lsa, ularning parallelligining zaruriy va yetarli sharti quyidagi tenglik bilan beriladi:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}. \qquad (4.9)$$

5. Ikki to‘g‘ri chiziqning perpendikularlik sharti.

a) agar to‘g‘ri chiziqlar (4.4) burchak koeffitsientli tenglamalari bilan berilgan bo‘lsa, u holda ularning perpendikularligining zaruriy va yetarli sharti quyidagicha bo‘ladi:

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}. \qquad (4.10)$$

Bu shartni yana quyidagi ko‘rinishda ham yozish mumkin:

$$k_1k_2 = -1. \qquad (4.11)$$

b) agar to‘g‘ri chiziqlarning tenglamalari (4.6) umumiy ko‘rinishda berilgan bo‘lsa, u holda ularning perpendikularligining zaruriy va yetarli sharti quyidagicha bo‘ladi:

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0. \qquad (4.12)$$

6. Ikki to‘g‘ri chiziqning kesishish nuqtalarining koordinatalari (4.6) tenglamalar sistemasini yechib topiladi. (4.6) ko‘rinishdagi

to‘g‘ri ciziqlar

$$A_1A_2 - B_1B_2 \neq 0.$$

bo‘lgandagina kesishadi.

1-masala. Berilgan (-1,2) va (2,1) nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri ciziq tenglamasi tuzilsin.

Yechish. (4.2) tenglamaga ko‘ra va bu tenglamada $x_1 = -1$, $y_1 = 2$, $x_2 = 2$, $y_2 = 1$, deb olib $\dfrac{y-2}{1-2} = \dfrac{x+1}{2+1}$ yoki $\dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{x+1}{3}$ ni hosil qilamiz. Elementar almashtirish yordamida tenglama quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$x + 3y - 5 = 0.$$

2-masala. Berilgan $A(2,1)$ va $B(-5,1)$ nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri ciziq tenglamasi tuzilsin.

Yechish. Bu masala oldingisidan farq qilmaydi. A va B nuqtalarning koordinatalarini (4.2) tenglamaga qo‘yib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\frac{x-2}{-5-2} = \frac{y-1}{1-1}, \text{ yoki } \frac{x-2}{-7} = \frac{y-1}{0}$$

bundan esa $y - 1 = 0$, yoki $y = 1$ ni hosil qilamiz.

3-masala. Uchburchak tomonlari quyidagi tenglamalar bilan berilgan:

$$(AB) \quad 2x + 4y + 1 = 0,$$
$$(AC) \quad x - y + 2 = 0,$$
$$(BC) \quad 3x + 4y - 12 = 0.$$

Uchburchak uchlarining koordinatalarini toping.

Yechish. A uchining kordinatalarini AB va AC tomonlari tenglamalaridan tuzilgan sistemani yechib topamiz:

$$\left.\begin{aligned} 2x + 4y + 1 = 0, \\ x - y + 2 = 0. \end{aligned}\right\}$$

Bu sistemani yechib,

$$x=-\frac{3}{2},\qquad y=\frac{1}{2}$$

larni hosil qilamiz. Demak, A uchi quyidagi koordinatalarga ega:

$$A\left(-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right).$$

B uchining koordinatalarini AB va BC tomonlarining tenglamalaridan tuzilgan sistemani yechib topamiz:

$$\left.\begin{aligned}2x+4y+1=0\\3x+4y-12=0\end{aligned}\right\}$$

Bu sistemaning yechimi $x=13;\ y=-\frac{27}{4}$ bo'lgani uchun $B(13,-\frac{27}{4})$. C uchining koordinatalarini esa BC va AC tomonlarining tenglamalaridan tuzilgan sistemani yechib topamiz:

$$\left.\begin{aligned}3x+4y-12=0,\\x-y+2=0.\end{aligned}\right\}$$

C uchining koordinatalari quyidagicha: $C(\frac{4}{7},\frac{18}{7})$.

4-masala. $A(2,5)$ nuqtadan o'tuvchi va $3x-4y+15=0.$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini yozing.

Yechish. Avvalo shuni isbot qilamizki, agar ikki to'g'ri chiziq o'zaro parallel bo'lsa, ularning tenglamalarini shunday ko'rinishda yozish mumkinki, ular faqatgina ozod hadlari bilan farqlanadi. Haqiqatan ham, (4.9) shartga ko'ra ikki to'g'ri chiziqning parallelligidan

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$$

tenglikka ega bo'lamiz. t orqali bu ikki nisbatning umumiy qiymatini belgilaymiz. U holda

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=t.$$

Bundan esa

$$A_1=A_2t,\ B_1=B_2t \tag{4.13}$$

ni hosil qilamiz. Agar $A_1x+B_1y+C_1=0$ va $A_2x+B_2y+C_2=0$ to'g'ri chiziqlar parallel bo'lsa (4.13) shart bajariladi va bu tenglamalarning birinchisida A_1 va B_1 larni (4.13) formulalar yordamida almashtirib,

$$A_2tx+B_2ty+C_1=0,$$

tenglamaga kelamiz yoki uning ikkala tomonini $t\neq 0$, ga bo'lib, quyidagini hosil qilamiz:

$$A_2x+B_2y+\frac{C_1}{t}=0. \tag{4.14}$$

Hosil bo'lgan tenglamani $A_2x+B_2y+C_2=0$, tenglama bilan solishtirib, shuni aniqlaymizki, ular faqatgina ozod hadi bilan farqlanadi, demak, biz qilgan tasdiq to'g'riligi ko'rsatildi.

Endi masalani yechishga o'tamiz. Izlanayotgan to'g'ri chiziqning tenglamasini shunday yozamizki, u berilgan tenglamadan faqatgina ozod hadi bilan farq qilsin: birinchi ikki hadini berilgan tenglamadan olamiz, ozod hadini esa C orqali belgilaymiz. U holda izlanayotgan tenglamaning ko'rinishi quyidagicha bo'lib:

$$3x-4y+C=0, \tag{4,15}$$

faqatgina C ni aniqlash qoladi. (4.15) tenglamada C ga ixtiyoriy haqiqiy qiymatlarni berib, berilgan to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziqlarning oilasini hosil qilamiz. Shunday qilib, (4.15) tenglama birgina to'g'ri chiziqni ifodalab qolmay, berilgan $3x-4y+15=0.$ to'g'ri chiziqqa parallel to'g'ri chiziqlar oilasini ifodalaydi. Endi bu to'g'ri chiziqlar oilasidan $A(2,5)$ nuqtadan o'tadigan to'g'ri chiziqni ajratib olamiz. Agar to'g'ri chiziq nuqtadan o'tsa, bu nuqtaning koordinatalari to'g'ri chiziq tenglamasini qanoatlantirishi kerak. Shuning uchun ham C

nuqtaning koordinatalarini (4.15) tenglamadagi x va y larning o'rniga A, nuqta koordinatalarini qo'yib topamiz, ya'ni $x=2$, $y=5$. Natijada $3\cdot 2-4\cdot 5+C=0$ va $C=14$. ni hosil qilamiz. Topilgan C ning qiymatini (4.15) ga qo'yib, quyidagi tenglamani olamiz:

$$3x-4y+14=0.$$

Bu masalani boshqacha yo'l bilan ham yechish mumkin. Parallel to'g'ri chiziqlarning burchak koeffitsientlari o'zaro teng bo'lganligi uchun va $3x-4y+15=0$ to'g'ri chiziqning burchak koeffitsienti $k=\frac{3}{4}$, $\left(k=-\frac{A}{B}\right)$ bo'lganligi sababli izlanayotgan to'g'ri chiziqning burchak koeffitsienti $\frac{3}{4}$ ga teng bo'ladi. Endi (4.1) to'g'ri chiziqlar dastasi tenglamasini qo'llaymiz. To'g'ri chiziq o'tadigan $A(2,5)$ nuqta bizga ma'lum, shuning uchun $y-y_1=k(x-x_1)$ tenglamaga $k=\frac{3}{4}$; $x_1=2$; $y_1=5$ qiymatlarni qo'yib, quyidagini hosil qilamiz:

$$y-5=\frac{3}{4}(x-2);\quad 4y-20=3x-6$$

yoki almashtirishdan so'ng

$$3x-4y+14=0$$

tenglamani hosil qilamiz.

5-masala. $A(5,-1)$ nuqtadan o'tib, $3x-7y+14=0$ to'g'ri chiziqqa perpendikular bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini toping.

Yechish. Ma'lumki, agar

$$A_1x+B_1y+C_1=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2=0$$

to'g'ri chiziqlar perpendikular bo'lsa, u holda (4.12) tenglik bajariladi:

$$A_1A_2+B_1B_2=0,$$

yoki

$$A_1A_2=-B_1B_2.$$

Bundan esa

$$\frac{A_2}{B_1}=-\frac{B_2}{A_1}$$

kelib chiqadi.

Bu ikki nisbatlarni t ga tenglab, quyidagini olamiz:

$$\frac{A_2}{B_1}=-\frac{B_2}{A_1}=t.$$

Bundan esa

$$A_2=B_1t,\quad B_2=-A_1t.$$

A_2 va B_2 larning bu qiymatlarini ikkinchi to'g'ri chiziq tenglamasiga qo'yib, quyidagini hosil qilamiz

$$B_1tx-A_1ty+C_2=0.$$

Yoki tenglikning ikkala tomonini t ga bo'lib,

$$B_1x-A_1y+\frac{C_2}{t}=0$$

ni hosil qilamiz. Hosil bo'lgan tenglama bilan

$$A_1x+B_1y+C_1=0$$

birinchi to'g'ri chiziq tenglamasini solishtirib ko'ramizki, ularda x va y lar oldidagi koeffitsienlar almashgan, hamda birinchi va ikkinchi hadlar orasidagi ishora qarama-qarshisiga o'zgargan bo'lib,
ozod hadlari esa turlichadir.

Endi masalani yechishga o'tamiz. $3x-7y+14=0,$ to'g'ri chiziqqa perpendikular to'g'ri chiziq tenglamasini yozish uchun yuqorida qilgan xulosaga ko'ra quyidagicha ish qilamiz: x y, lar oldidagi koeffitsientlarni almashtirib yozamiz va ular orasidagi manfiy ishorani musbat ishoraga almashtiramiz, ozod hadni esa C bilan belgilaymiz. Natijada quyidagi tenlamaga kelamiz:

$$7x+3y+C=0.$$

Bu tenglama $3x-7y+14=0.$ to‘g‘ri chiziqqa perpendikular to‘g‘ri chiziqlar oilasining tenglamasidir. Undagi C o‘zgarmasni izlanayotgan to‘g‘ri chiziq $A(5,-1)$ nuqtadan o‘tadi degan shartdan topamiz. Agar to‘g‘ri chiziq biror nuqtadan o‘tsa, bu nuqtaning koordinatalari to‘g‘ri chiziq tenglamasini qanoatlantirishi kerak. Oxirgi tenglikka x o‘rniga 5, y, o‘rniga esa -1 larni qo‘yib, $7\cdot 5+3\cdot(-1)+C=0;\quad C=-32$ ni hosil qilamiz. C ning bu qiymatini oxirgi tenglamaga qo‘yib,

$$7x+3y-32=0$$

tenglamani olamiz.

Bu masalani boshqacha yo‘l bilan yechamiz. Buning uchun (4,1) to‘g‘ri chiziqlar dastasi tenglamasi

$$y-y_1=k(x-x_1)$$

dan foydalanamiz.

Izlamnayotgan to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsientini (4.10) shartdan topamiz. Ya’ni u berilgan to‘g‘ri chiziq burchak koeffitsientiga moduli bo‘yicha teskari va qarama-qarshi ishorali bo‘lishi kerak. Berilgan

$$3x-7y+14=0$$

to‘g‘ri chiziq burchak koeffitsienti

$$k_1=\frac{3}{7}.$$

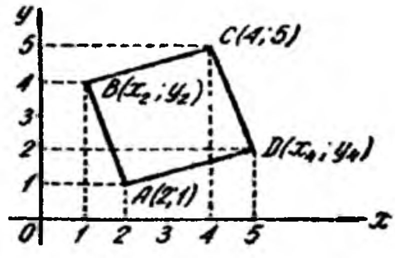
U holda unga perpendikular to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsienti quyidagiga teng bo‘ladi: $k_2=-\frac{7}{3}.$ Uni to‘g‘ri chiziqlar dastasi tenglamasiga qo‘yib va x_1 va y_1 o‘rniga $A(5,-1)$ nuqtaning koordinatalarini qo‘yib, quyidagini hosil qilamiz:

$$y-(-1)=-\frac{7}{3}(x-5),$$

yoki

$$7x + 3y - 32 = 0.$$

6-masala. Kvadratning ikki qarama-qarsi uchining koordinatalari berilgan: $A(2,1)$ va $C(4,5)$. Qolgan ikki uchining koordinatalarini toping (20-rasm).



20-rasm.

Yechish. $B(x_2, y_2)$ va $D(x_4, y_4)$ bilan izlanayotgan uchlarini belgilaymiz. x_2, y_2 va x_4, y_4 koordinatalarni topish uchun ularni bog'lovchi ikki tenglama tuzish kerak.. Ularning birinchisini tuzish uchun AB masofani aniqlaymiz va uni BC masofaga tenglaymiz. ($AB = BC$, chunki kvadratning tomonlari o'zaro teng) :

$$AB = \sqrt{(x_2 - 2)^2 + (y_2 - 1)^2}, \quad BC = \sqrt{(x_2 - 4)^2 + (y_2 - 5)^2}.$$

Bundan esa

$$\sqrt{(x_2 - 2)^2 + (y_2 - 1)^2} = \sqrt{(x_2 - 4)^2 + (y_2 - 5)^2}.$$

Ikkala tomonini kvadratga oshirib , so'ngra soddalashtirib, x_2 va y_2 larni bog'lovchi birinchi tenglamani hosil qilamiz:

$$x_2 + 2y_2 = 9.$$

x_2 va y_2 larni bog'lovchi ikkinchi tenglamani xosil qilish uchun AB va BC to'g'ri chiziqlarning burchak kooeffitsientlarini topamiz. Bu to'g'ri chiziqlar perpendikular bo'lganlari uchun ularning burchak koeffitsientlarining ko'paytmasi -1 ga teng. ((4.11) formulaga qarang). Berilgan (x_1, y_1) va (x_2, y_2), nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqning burchak koeffitsienti quyidagicha aniqlanadi:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Biz qarayotgan hol uchun $x_1 = 2,\ \ y_1 = 1$. AB to'g'ri chiziqning burchak koeffitsienti

$$k = \frac{y_2 - 1}{x_2 - 2}.$$

BC to'g'ri chiziqning burchak koeffitsienti, C nuqtaning koordinatalarini hisobga olganda quyidagiga teng bo'ladi:

$$k = \frac{y_2 - 5}{x_2 - 4}.$$

Ikki to'g'ri chiziqning perpendikularlik sharti (4.11)dan

$$\frac{y_2 - 1}{x_2 - 2} \cdot \frac{y_2 - 5}{x_2 - 4} = -1$$

Bu tenglikning ikkala tomonini $(x_2 - 2) \cdot (x_2 - 4)$ ga ko'paytirib hosil qilamiz:

$$(y_2 - 1)(y_2 - 5) = -(x_2 - 2)(x_2 - 4),$$

yoki

$$(y_2 - 1)(y_2 - 5) + (x_2 - 2)(x_2 - 4) = 0.$$

Qavslarni ochamiz:

$$x_2^2 + y_2^2 - 6x_2 - 6y_2 + 13 = 0.$$

Bu esa x_2 va y_2 larni bog'lovchi ikkinchi tenglamadir.

Uni yana soddaroq yol bilan ham topish mumkin 1) kvadrat diagonallarining kesishish nuqtasi E ning koordinatalarini AC diagonalining o'rtasi sifatida topish mumkin: $E(3,3)$ va $BE = AE$ shartlardan

$$x_2^2 + y_2^2 - 6x_2 - 6y_2 + 13 = 0.$$

Shunday qilib, x_2 va y_2 larni topish uchun quyidagi tengla -

malar sistemasini hosil qilamiz:

$$\left.\begin{aligned} x_2+2y_2&=9, \\ x_2^2+y_2^2-6x_2-6y_2+13&=0. \end{aligned}\right\}$$

Ularning birinchisidan $x_2=9-2y_2$. Buni ikkinchisiga qo'yib va y_2 ga nisbatan kvadrat tenglamani yechib,

$$(y_2)_1=4, \qquad (y_2)_2=2,$$
$$(x_2)_1=1, \qquad (x_2)_2=5$$

larni topamiz. Demak, B uchi sifatida koordinatalari $(1;4)$ yoki $(5;2)$ bo'lgan nuqtalarni olish mumkin. Xuddi shu ishlarni ikkinchi izlanayotgan nuqta uchun bajarib,

$$(x_4)_1=5, \qquad (y_4)_1=2;$$
$$(x_4)_2=1, \qquad (y_4)_2=4$$

larni olamiz. Demak, D uchi sifatida koordinatalari $(5:2)$ yoki $(1;4)$ bo'lgan nuqtalarni olish mumkin.

7-masala. Quyidagi ikki to'gri chiziq orasidagi burchakni toping:

$$y=2x+4,$$
$$y=3x-1.$$

Yechish. Bu ikki to'g'ri chiziqlar orasidagi o'tkir burchakni topish masalasini ko'raylik. To'g'ri chiziqlar burchak koeffitsientli ko'rinishida berilgani uchun (4.5) formuladan foydalanamiz. Bizni o'tkir burchak qiziqtirayotgani uchun (4.5) formulaning o'ng tomonining modulini qaraymiz:

$$tg\theta=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|.$$

Berilgan to'gri chiziqlarning burchak koeffitsientlari

$$k_1=2; \qquad k_2=3$$

bo'lganligi uchun

$$tg\theta=\left|\frac{3-2}{1+3\cdot 2}\right|; \qquad tg\theta=\frac{1}{7}.$$

Trigonometrik funksiyalar jadvalidan $\theta = 8^\circ 8'$.

8-masala. Quyidagi ikki to'gri chiziq orasidagi burchakni toping:

$$3x + 4y - 7 = 0,$$
$$4x - 3y + 8 = 0.$$

Yechish. To'g'ri chiziqlarning tenglamalari umumiy ko'rinishda berilgani uchun (4.7), formuladan foydalanamiz:

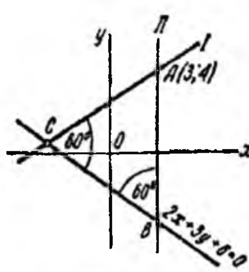
$A_1 = 3; B_1 = 4; A_2 = 4; B_2 = -3;$ bo'lganligi uchun

$$tg\theta = \frac{-9-16}{12-12}, \quad tg\theta = \frac{-25}{0};$$

bu yerda $tg\theta$ mavjud emas, chunki 0 ga bo'lish mumkin emas. Bundan esa $\theta = 90^\circ$, ekanini ko'rish mumkin, ya'ni to'g'ri chiziqlar o'zaro perpendikulardirlar. Ularning perpendikularligini $A_1A_2 + B_1B_2$ ifodaning 0 ga tengligidan ham bilish mumkin edi.

9-masala. $A(3,4)$ nuqta orqali $2x + 3y + 6 = 0$ to'g'ri chiziq bilan 60° burchak hosil qilib o'tuvchi to'g'ri chiziqlar tenglamasini yozing.

Yechish. Masalaning yechimini topish uchun I va II to'g'ri chiziqlarning burchak koeffitsientlarini topish kerak (21-rasm). Ularning burchak koeffitsientlarini mos ravishda k_1 va k_2 lar bilan,



21-rasm.

berilgan to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsientini esa k bilan belgilaymiz. Berilgan tenglamadan $k=-\frac{2}{3}$ ni topamiz. Ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchakni aniqlash formulasi (4,5) ga ko‘ra berilgan to‘g‘ri chiziq bilan I to‘g‘ri chiziq orasidagi burchakni topish uchun (4,5) formuladagi kasr suratida I to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsientidan berilgan to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsientini ayirish kerak, chunki berilgan to‘g‘ri chiziqni soat miliga qarama-qarshi C nuqta atrofida I to‘gri chiziq bilan ustma - ust tushgunga qadar burish lozim. $tg60^\circ=\sqrt{3}$ ekanligini hisobga olgan holda, quyidagini hosil qilamiz:

$$tg60^\circ=\frac{k_1-(-\frac{2}{3})}{1+(-\frac{2}{3})k_1};\qquad \sqrt{3}=\frac{k_1+\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}k_1};\qquad k_1=\frac{24-13\sqrt{3}}{3}.$$

Berilgan to‘g‘ri chiziq bilan II to‘g‘ri chiziq orasidagi burchakni topish uchun (4,5) formuladagi kasr suratida berilgan to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsientidan II to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsientiniu ayirish kerak, chunki II to‘g‘ri chiziqni soat strelkasiga qarama-qarshi B nuqta atrofida berilgan to‘gri chiziq bilan ustma - ust tushguniga qadar burish lozim:

$$tg60^\circ=\frac{-\frac{2}{3}-k_2}{1+(-\frac{2}{3})k_2};\qquad \sqrt{3}=\frac{-\frac{2}{3}-k_2}{1-\frac{2}{3}k_2};\qquad k_2=\frac{24+13\sqrt{3}}{3}.$$

Sunday qilib,

$$I: y-4=\frac{24-13\sqrt{3}}{3}(x-3),$$

$$II: y-4=\frac{24+13\sqrt{3}}{3}(x-3).$$

10-masala. Uchlari $A(2,3)$, $B(-1,4)$, $C(5,5)$ nuqtalarda bo‘lgan uchburchakning og‘irlik markazi orqali AC tomonga parallel va AB tomonga perpendikular to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazing.

Yechish. Avvalo og‘irlik markazi M nuqtaning koordinatalarini aniqlaymiz. Ma’lumki og‘irlik markazining har bir koordinatasi uchburchak uchlarining mos koordinatalari o‘rta arifmetigiga tengdir. Demak, agar uchburchak uchlari (x_1, y_1), (x_2, y_2) va (x_3, y_3) koordinatalarga ega bo‘lsa, uning og‘irlik markazi x_M va y_M quyidagicha topiladi:

$$x_M = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y_M = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

Bizning masalamiz uchun

$$x_M = \frac{2 + (-1) + 5}{3} = 2,$$

$$y_M = \frac{3 + 4 + 5}{3} = 4.$$

Uchburchakning og‘irlik markazi M ning koordinatalari $(2,4)$. Ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasidan foydalanib, AB tomon tenglamasi $x + 3y - 11 = 0$; AC tomon tenglamasi $2x - 3y + 5 = 0$ ekanligini topamiz. Endi 4–5 masalalarning yechimlaridan foydalanib, M nuqtadan o‘tuvchi AC tomonga parallel va AB tomonga perpendikular to‘g‘ri chiziqlarning tenglamalarini aniqlaymiz:

$$2x - 3y + 8 = 0 \text{ va } 3x - y - 2 = 0.$$

Mustaqil yechish uchun masalalar

1-masala. Uchlari $A(1,-1); B(3,5)$, $C(-7,11)$ nuqtalarda bo‘lgan uchburchak tomonlarining tenglamalarini yozing.

Ko‘rsatma: (4.2) formula yordamida uchburchak tomonlarining tenglamalarini yozamiz:

$$(AB) \quad 3x - y - 4 = 0,$$

$$(BC) \quad 3x + 5y - 34 = 0,$$

$$(AC) \quad 3x + 2y - 1 = 0.$$

2-masala. Tomonlari

$$(AB) \quad x + y - 5 = 0,$$
$$(BC) \quad 2x - y + 4 = 0,$$
$$(AC) \quad 5x - 3y + 14 = 0$$

tenglamalar bilan berilgan uchburchak uchlarining koordinatalari topilsin.

Javobi. $A\left(\frac{1}{8}, \frac{39}{8}\right)$; $B\left(\frac{1}{3}, \frac{14}{3}\right)$; $C(2,8)$.

3-masala. Tomonlari

$$(AB) \quad 2x + y - 5 = 0,$$
$$(BC) \quad 2x - y + 4 = 0,$$
$$(AC) \quad 5x - 8y + 14 = 0$$

tenglamalar bilan berilgan uchburchak uchlarining koordinatalari topilsin.

Javobi. $A\left(\frac{26}{21}, \frac{53}{21}\right)$; $B\left(\frac{1}{4}, \frac{9}{2}\right)$; $C\left(-\frac{18}{11}, \frac{8}{11}\right)$.

4-masala. (3,–4) nuqtadan o‘tib, $2x + 5y - 7 = 0$ to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozing.

Javobi: $2x + 5y + 14 = 0$.

5-masala. $A(-3,2)$ nuqtadan o‘tadigan va $7x + 4y - 11 = 0$ to‘g‘ri chiziqqa perpendikular bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozing.

Javobi: $4x - 7y + 26 = 0$.

6-masala. $x + y - 1 = 0$ va $2x + 3y + 4 = 0$ to‘g‘ri chiziqlar kesishish nuqtasidan o‘tuvchi va: $3x - y + 7 = 0$ to‘g‘ri chiziqqa 1) perpendikular, 2) parallel to‘g‘ri chiziqlar tenglamalarini yozing.

Javobi: 1) $x + 3y + 11 = 0$; 2) $3x - y - 27 = 0$.

5-§. Berilgan nuqtadan berilgan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa

$A(x_1, y_1)$ nuqtadan $Ax + By + C = 0$ to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa bu nuqtadan to‘g‘ri chiziqqa tushirilgan perpendikular uzunligiga teng va

$$d = \left|\frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right| \tag{5.1}$$

formula yordamida hisoblanadi.

Qoida. $A(x_1, y_1)$ nuqtadan $Ax + By + C = 0$ to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofani aniqlash uchun to‘g‘ri chiziqning tenglamasini normal ko‘rinishga keltirish kerak va uning chap tomonini olib, undagi noma’lumlar o‘rniga berilgan nuqtaning koordinatalarini qo‘yib hisoblash kerak. Hosil bo‘lgan qiymatning moduli izlanayotgan masofani beradi.

Nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa har doim musbat. Nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofadan tashqari nuqtaning to‘g‘ri chiziqdan chetlanishi ham qaraladi. Nuqtaning to‘g‘ri chiziqdan chetlanishi deb, nuqtaning to‘g‘ri chiziqdan shu to‘g‘ri chiziqqa o‘tkazilgan normal yo‘nalishdagi chetlanishiga yo‘naltirilgan masofaga aytiladi. Normal koordinata boshidan to‘g‘ri chiziq tomon yo‘nalgani uchun nuqta va koordinata boshi to‘g‘ri chiziqning turli tomonlarida yotsa, chetlanish musbat, bir tomonida yotsa, chetlanish manfiy bo‘ladi. Nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa nuqtaning to‘g‘ri chiziqdan chetlanishining absolut qiymatiga teng.

1-masala. Koordinata boshidan $x + y - 2 = 0$ to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofani toping.

Yechish. To‘g‘ri ciziq tenglamasini normal ko‘rinishga keltiramiz. Normallashtiruvchi ko‘paytma:

$$N = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2}}, \qquad N = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

To‘g‘ri chiziqning normal ko‘rinishdagi tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{y}{\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{2}}=0.$$

Bu tenglamadagi ozod hadning moduli izlanayotgan masofani beradi: $p=\sqrt{2}$ birlik masofa.

2-masala. $(2,5)$ nuqtadan $6x+8y-5=0$ to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofani toping.

Yechish. To‘g‘ri ciziq tenglamasini normal ko‘rinishga keltiramiz. Normallashtiruvchi ko‘paytma:

$$N=\frac{1}{\sqrt{6^2+8^2}}=\frac{1}{10}.$$

To‘g‘ri chiziqning normal ko‘rinishdagi tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$\frac{6x+8y-5}{10}=0.$$

Yuqorida keltirilgan qoidaga ko‘ra, bu tenglamaning chap tomoni $\frac{6x+8y-5}{10}$ ni olamiz va unga berilgan nuqtaning koordinatalarini qo‘yamiz. Hosil bo‘lgan qiymatning moduli izlanayotgan masofaga teng:

$$d=\left|\frac{6\cdot 2+8\cdot 5-5}{10}\right|=4{,}7$$

masshtab birligi. Shunday qilib $d=4{,}7$ masshtab birligi.

3-masala. Berilgan ikki parallel to‘g‘ri chiziqlar orasidagi masofani toping.

$$3x+4y-12=0,$$

$$6x+8y+26=0.$$

Yechish. Izlanayotgan masofani birinchi to‘g‘ri chiziqning ixtiyoriy nuqtasidan ikkinchi to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa sifatida topamiz. Birinchi to‘g‘ri chiziqdan ixtiyoriy nuqta olamiz, masalan $x=0$ absissali nuqtani, u holda bu nuqtaning ordinatasi

$y=3$ bo'ladi. Shunday qilib, birinchi to'g'ri chiziqdan $A(0,3)$ nuqta tanlandi. Bundan oldingi masalalardagi kabi $A(0,3)$ nuqtadan $6x+8y+26=0$ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani topamiz: $d=5$ masshtab birligi.

4-masala. $(-4,3)$ nuqtadan o'tib, koordinata boshidan 5 masshtab birligi masofada yotadigan to'g'ri chiziq tenglamasini yozing.

Yechish. Izlanayotgan to'g'ri chiziq tenglamasi $(-4,3)$ nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq bo'lgani uchun quyidagicha yoziladi:

$$y-3=k(x+4).$$

Uni soddalashtirib quyidagini olamiz:

$$kx-y+(4k+3)=0.$$

Endi bu tenglamani normal ko'rinishga keltiramiz. Normallashtiruvchi ko'paytma quyidagiga teng:

$$N=\pm\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}.$$

Tenglamani normal ko'rinishda qyozamiz:

$$\frac{k}{\pm\sqrt{1+k^2}}x+\frac{1}{\pm\sqrt{1+k^2}}y+\frac{4k+3}{\pm\sqrt{1+k^2}}=0.$$

Bu tenglamani to'g'ri chiziqning normal ko'rinishdagi tenglamasi bilan solishtirib, to'g'ri chiziq koordinata boshidan $p=\dfrac{|4k+3|}{\sqrt{1+k^2}}$ kattalikka chetlanganligini ko'ramiz. Masala shartiga ko'ra bu kattalik 5 ga teng. Demak, k ning qiymatini aniqlash uchun quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$\frac{|4k+3|}{\sqrt{1+k^2}}=5.$$

Bu tenglamaning ikkala tomonini kvadratga ko'tarib, quyidagi kvadrat tenglamaga kelamiz:

$$9k^2-24k+16=0,$$

uni yechib k ning qiymatini topamiz:

$$k_1 = k_2 = \frac{4}{3}.$$

Demak, izlanayotgan to‘g‘ri chiziq tenglamasi quyidagicha yoziladi

$$y - 3 = \frac{4}{3}(x + 4)$$

uni soddalashtirib, quyidagi tenglamaga kelamiz:

$$4x - 3y + 25 = 0.$$

5-**masala.** (3,−1) nuqtadan 2 masshtab birligi masofada bo‘lgan va (−1,2) nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozing.

Yechish. Izlanayotgan to‘g‘ri chiziq tenglamasi $(-1,2)$ nuqtadan o‘tganligi uchun quyidagicha yoziladi:

$$y - 2 = k(x + 1), \text{ yoki } kx - y + (k + 2) = 0. \qquad (A)$$

Endi bu tenglamani normal ko‘rinishga keltiramiz: normallashtiruvchi ko‘paytma quyidagiga teng:

$$N = \pm\frac{1}{\sqrt{1 + k^2}}.$$

Tenglamaning normal ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi:

$$\frac{kx - y + (k + 2)}{\pm\sqrt{1 + k^2}} = 0.$$

Berilgan nuqtadan berilgan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa formulasi quyidagicha edi:

$$d = \left|\frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|.$$

Biz qarayotgan holatda (3,−1) nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha masofa aniqlanishi kerak: ya’ni $x_1 = 3;$ $y_1 = -1;$ $d = 2.$ Bu qiymatlarni yuqoridagi formulaga qo‘yib, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$2=\left|\frac{3k+1+k+2}{\sqrt{1+k^2}}\right|;\qquad 2=\frac{|4k+3|}{\sqrt{1+k^2}}$$

yoki

$$2\sqrt{1+k^2}=|4k+3|,\qquad 4(1+k^2)=16k^2+24k+9$$

va k ni aniqlash uchun quyidagi kvadrat tenglama hosil bo'ladi

$$12k^2+24k+5=0.$$

Uni yechib

$$k_1=\frac{-6+\sqrt{21}}{6},\qquad k_2=\frac{-6-\sqrt{21}}{6}$$

ildizlarni topamiz.

Bu qiymatlarni (A)ga qo'yib, masala shartlarini qanoatlantiruvchi ikki to'g'ri chiziq mavjudligini aniqlaymiz:

$$1)\quad y-2=\frac{-6+\sqrt{21}}{6}(x+1);$$

$$2)\quad y-2=\frac{-6-\sqrt{21}}{6}(x+1).$$

6-masala. $M_1(1,2)$ nuqtadan o'tib, $M_2(2,3)$ va $M_3(4,-5)$ nuqtalardan bir xil masofada joylashgan to'g'ri chiziq tenglamasini yozing.

Yechish. Izlanayotgan to'g'ri chiziq $M_1(1,2)$ nuqtadan o'tganligi sababli uning tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$y-2=k(x-1),\qquad (B)$$

yoki

$$kx-y-k+2=0$$

va uni normal ko'rinishga keltirilgandan so'ng quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\frac{kx-y-k+2}{\pm\sqrt{1+k^2}}=0.$$

Nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa formulasidan foydalanib, undagi noma’lumlar o‘rniga avval $M_2 : x_2 = 2; y_2 = 3$ larni qo‘yib, so‘ngra $M_3 : x_3 = 4; y_3 = -5$ larni qo‘yib quyidagilarni topamiz:

$$d_1 = \left|\frac{k-1}{\sqrt{1+k^2}}\right|, \qquad d_2 = \left|\frac{3k+7}{\sqrt{1+k^2}}\right|.$$

Masalaning shartiga ko‘ra $d_1 = d_2$, bundan esa quyidagi ikki tenglikni olamiz:

$$\frac{k-1}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{3k+7}{\sqrt{1+k^2}} \text{ va } \frac{k-1}{\sqrt{1+k^2}} = -\frac{3k+7}{\sqrt{1+k^2}}.$$

Birinchi tenglikdan $k = -4$, ikkinchi tenglikdan esa $k = -\frac{3}{2}$ larni topamiz. Shunday qilib, izlanayotgan to‘g‘ri chiziq ikkita, ularning tenglamalarini (B) tenglikka avval $k = -4$, so‘ngra $k = -\frac{2}{3}$ qiymatlarni qo‘yib topamiz.Izlanayotgan to‘g‘ri chiziq tenglamalari quyidagilar: $4x + y - 6 = 0$ va $3x + 2y - 7 = 0$.

7-masala. $4x + 3y + 1 = 0$ to‘g‘ri ciziq berilgan. Bu to‘g‘ri chiziqqa parallel va undan 3 birlik masofadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozing.

Yechish. Ma’lumki, izlanayotgan to‘g‘ri chiziqlar ikkita. Ularning berilgan to‘g‘ri chiziqdan chetlanishi biri uchun +3, ikkinchisi uchun esa -3 bo‘ladi, ya’ni $\delta = \pm 3$. Berilgan to‘g‘ri chiziqqa parallel to‘g‘ri chiziqlar oilasining tenglamasi quyidagicha bo‘ladi:

$$4x + 3y + C = 0.$$

Bu to‘g‘ri chiziqlar oilasining tenglamasidan izlanayotgan ikki to‘g‘ri chiziqni tanlab olish lozim. Uni normal ko‘rinishga keltirib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\frac{4x+3y+C}{\pm 5}=0.$$

(Cning ishorasi bizga noma'lum bo'lganligi sababli mahrajda ikkala ishorani hozircha saqlab turamiz). Berilgan to'g'ri chiziqqa tegishli ixtiyoriy biror nuqtani, masalan $A\left(0,-\frac{1}{3}\right)$ ni olamiz.

Uning koordinatalarini oxirgi tenglikning chap tomoniga qo'yib va berilgan to'g'ri chiziqning izlanayotgan to'g'ri chiziqlardan chetlanishi ± 3ni hisobga olgan holda Cning qiymatlarini aniqlash uchun quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$\pm 3=\frac{4\cdot 0+3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+C}{\pm 5} \quad \text{yoki} \quad \pm 3=\frac{C-1}{\pm 5}.$$

Bunga ko'ra, $C_1=16$, $C_2=-14$. Cning bu qiymatlarini $4x+3y+C=0$ tenglikka qo'yib izlanayotgan to'g'ri chiziqlar tenglamasini hosil qilamiz:

$$4x+3y+16=0 \quad \text{va} \quad 4x+3y-14=0.$$

Mustaqil yechish uchun masalalar

1-masala. $(3,-1)$ nuqtadan $3x+5y+8=0$ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa topilsin.

Javobi: $d=\frac{6}{17}\sqrt{34}$ masshtab birligi.

2-masala. ABC uchburchak tomonlarining tenglamalari quyidagilar:

$$(AB)\ \ x+y-1=0,$$
$$(AC)\ \ 2x-y-5=0,$$
$$(BC)\ \ 3x+y=0.$$

Bu uchburchak balandliklarining uzunliklarini va ularning tenglamalarini toping.

Ko'rsatma. Uchburchak uchlarining koordinatalarini toping va nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa formulasidan foy -

dalaning.

Javobi: h_{BC} balandligi tenglamasi $x-3y-5=0$;

h_{AC} balandligi tenglamasi $2x+4y-5=0$;

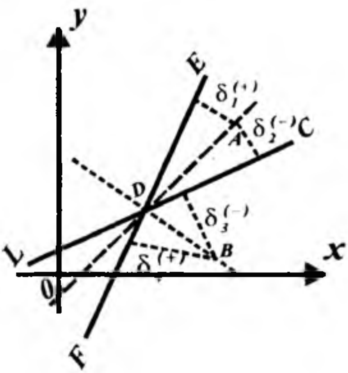
h_{AB} balandligi tenglamasi $x-3y-5=0$;

$$h_{BC}=\frac{\sqrt{10}}{2};\qquad h_{AC}=\frac{3\sqrt{5}}{2};\qquad h_{AB}=\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

6-§. Ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak bissektrisasining tenglamasi

1-masala. $12x+9y-17=0$ va $3x+4y+11=0$ to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak bissektrisasining tenglamasini yozing.

Yechish. Bu masalaning yechilishini batafsil keltiramiz. Elementar geometriyadan ma’lumki, ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak bissektrisasi deb burchak tomonlaridan bir xil masofada joylashgan nuqtalarning geometrik o‘rniga aytiladi. 22-rasmga murojaat qilamiz.



22-rasm.

Bissektrisaning A nuqtasining CDE burchak tomonlaridan chetlanishlari δ_1 va δ_2 lar musbat qiymatlarga ega bo‘ladi, chunki A nuqta va koordinata boshi berilgan to‘g‘ri chiziqlarning har birining ikkala tomonida, demak, $\delta_1 = \delta_2$ CDF qo‘shni burchak bissektrisasining biror B nuqtasini olamiz. B nuqta va koordinata boshi EF to‘g‘ri chiziqning turli tomonlarida joylashganligi uchun δ_4 chetlanish musbat ishoraga ega ($\delta_4 > 0$). B nuqtaning CL to‘g‘ri chiziqdan chetlanishi δ_3 manfiy ishoraga ega, chunki, B nuqta va koordinata boshi CL to‘g‘ri chiziqdan bir tomonda joylashgan, ($\delta_3 < 0$). Demak, δ_3 va δ_4 lar bu holda modullari teng bo‘lib, lekin ishoralari qarama-qarshidir, ya’ni

$$\delta_3 = -\delta_4 .$$

x va y lar orqali bissektrisa ixtiyoriy nuqtasining koordinatalarini belgilaymiz va bu nuqtaning burchak tomonlaridan chetlanishini qaraymiz. Bir burchakning bissektrisasi uchun bu chetlanishlar o‘zaro teng bo‘lib, qo‘shni burchak uchun esa ularning modullari teng, lekin ishoralari qarama-qarshidir. Burchak tomonlarining tenglamalari quyidagicha bo‘lsin:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{va} \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0 .$$

Bu tenglamalarni normal ko‘rinishga keltiramiz, $\delta_1 = \delta_2$ bo‘lgan hol uchun bissektrisa tenglamasi quyidagicha bo‘ladi:

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\pm\sqrt{A_1^2+B_1^2}} = \frac{A_2x+B_2y+C_2}{\pm\sqrt{A_2^2+B_2^2}} . \qquad (A)$$

$\delta_3 = -\delta_4$ bo‘lgan hol uchun esa bissektrisa tenglamasi quyidagicha bo‘ladi:

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\pm\sqrt{A_1^2+B_1^2}} = -\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\pm\sqrt{A_2^2+B_2^2}} . \qquad (B)$$

(A) va (B) tenglamalarni birlashtirib, ikkita bissektrisa tenglamasining quyidagi ko‘rininshini hosil qilamiz:

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\pm\sqrt{A_1^2+B_1^2}} = \pm\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\pm\sqrt{A_2^2+B_2^2}} .$$

Endi masalaning yechimi qiyinchilik tug'dirmaydi. Bizning masalamizda bissektrisa tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$\frac{12x+9y-17}{\sqrt{12^2+9^2}} = \pm\frac{3x+4y+11}{\sqrt{3^2+4^2}}$$

yoki

$$\frac{12x+9y-17}{15} = \pm\frac{3x+4y+11}{5}$$

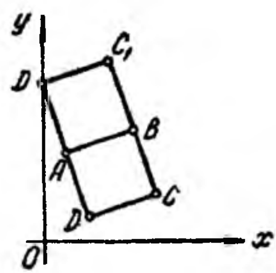
va

$$\frac{12x+9y-17}{15} = \pm\frac{3x+4y+11}{5}.$$

Bundan esa bissektrisa tenglamasining quyidagi ko'rinishini hosil qilamiz:

$$21x+21y+16=0$$
$$3x-3y-50=0 \quad ,$$

2- masala. Kvadratning ikki qo'shni uchlari berilgan: $A(1,4)$ va $B(4,5)$. Qolgan ikki uchlarining koordinatalari topilsin. (23-rasm).



23-rasm.

Yechish. Ma'lumki, masala ikki yechimga ega, chunki izlanayotgan uchlar AB kesmaning ikki tomonida bo'lishi mumkin. Kvadratning AB tomonining tenglamasi $x-3y+11=0$ bo'lib, uning uzunligi $\sqrt{10}$ ga teng. Endi $A(1,4)$, $B(4,5)$ nuqtalar orqali AB ga perpendikular to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz va ularning har birida ikkitadan shunday nuqtalar topamizki, ulardan AB kesmagacha bo'lgan masofa $\sqrt{10}$ ga teng bo'lsin (kvadratning barcha tomonlari tengdir). Bu nuqtalarning koordinatalari izlanayotgan kvadrat uchlarining koordinatalari bo'ladi. AB kesmaga perpendikular va AB kesma uchlaridan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar tenglamalari quyidagicha yoziladi: $(AD)\ 3x+y-7=0$, $(BC)3x+y-17=0$. Bu ikki to'g'ri chiziqlarning har birida shunday ikkitadan nuqtalarni olamizki, ulardan AB kesmagacha bo'lgan masofa $\sqrt{10}$ ga teng bo'lsin va ularning ikkitasining AB kesmadan chetlanishi musbat, qolgan ikkitasining AB kesmadan chetlanishi manfiy bo'lsin. D nuqtaning koordinatalarini x_1 va y_1 lar bilan belgilaymiz. Bu nuqta AD to'g'ri chiziqda yotganligi sababli uning koordinatalari AD to'g'ri chiziqning tenglamasini qanoatlantirishi kerak, ya'ni quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:

$$3x_1+y_1-7=0. \qquad (A)$$

x_1 va y_1 larni bog'lovchi ikkinchi tenglamani bu nuqtaning AB to'g'ri chiziqdan chetlanishini aniqlab topamiz. AB to'g'ri chiziqning tenglamasini normal ko'rinishga keltirib va uning nuqtadan chetlanishini $\pm\sqrt{10}$ ga tenglab quyidagi tenglikka ega bo'lamiz:

$$\pm\sqrt{10}=\frac{x_1-3y_1+11}{-\sqrt{10}}.$$

Bundan esa quyidagi ikki tenglamaga ega bo'lamiz:

$$x_1-3y_1+1=0 \text{ va } x_1-3y_1+21=0.$$

Bu tenglamalarning har birini (A) tenglama bilan birlashtirib quyidagi ikkita tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases}3x_1+y_1-7=0,\\ x_1-3y_1+1=0.\end{cases} \qquad \begin{cases}3x_1+y_1-7=0,\\ x_1-3y_1+21=0.\end{cases}$$

Birinchi tenglamalar sistemasidan $x_1=2; y_1=1$ larni topamiz, ikkinchisidan esa $x_1 = 0;\ y_1 = 7$ larni topamiz. Shuday qilib, kvadratning D uchining koordinatalari $(0,7)$ yoki $(2,1)$ bo‘lishi mumkin. Shuningdek, kvadratning to‘rtinchi C uchining koordinatalari $(5,2)$ yoki $(3,8)$ bo‘lishi mumkin.

Bu masalani boshqa yo‘l bilan ham yechish mumkin. Quyidagi ko‘rsatma asosida masalani mustaqil boshqa yo‘l bilan yeching:

1. AB tomon uzunligini toping.

2. Kvadratning diagonali BD ning uzunligi $d\sqrt{2}$ ga teng bo‘ladi.

3. D nuqtadan A nuqtagacha va D nuqtadan B nuqtagacha bo‘lgan masofalarni aniqlovchi formulalarni yozing. Natijada D nuqtaning koordinatalarini aniqlab beruvchi ikki tenglamaga ega bo‘lasiz.

4. BD diagonal o‘rtasining koordinatalarini toping.

5. Bu nuqta bilan A nuqtaning koordinatalarini bilgan holda va kesmani teng ikkiga bo‘luvchi nuqtaning koordinatalarini topish formulasidan foydalanib C nuqtaning koordinatalarini toping.

3- masala. Berilgan $2x+3y+6=0$ to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lib, koordinata burchagidan yuzasi 3 kv. birlikka teng uchburchak ajratuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozing.

Yechish. $0x$ va $0y$ koordinata o‘qlaridan izlanayotgan to‘g‘ri chiziq ajratgan kesmalarni mos ravishda a, b lar orqali belgilaymiz. U holda quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$3 = \frac{1}{2}ab \quad \text{yoki} \quad ab = 6. \qquad (A)$$

Berilgan to‘g‘ri chiziqqa parallel to‘g‘ri chiziqlar oilasi $2x+3y+C=0$ ko‘rinishda yoziladi. Bu to‘g‘ri chiziq koordinata o‘qlaridan ajratgan kesmalar uzunliklari quyidagilarga teng:

$$a = -\frac{C}{2}, \quad b = -\frac{C}{3}.$$

a, b larni (A) ga qo‘yib quyidagini olamiz:

$$\left(-\frac{c}{2}\right)\left(-\frac{c}{3}\right)=6.$$

Bundan esa: $\frac{C^2}{6}=6,\quad C^2=36,\quad C_1=6,\quad C_2=-6.$

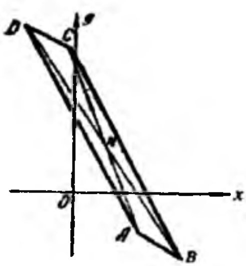
Izlanayotgan to‘g‘ri chiziqlar tenglamasi quyidagilar bo‘ladi: $2x+3y+6=0$, $2x+3y-6=0$. Topilgan to‘g‘ri chiziqlar orasida berilgan to‘g‘ri chiziq tenglamasi ham bor: $2x+3y+6=0$. Shunday qilib, berilgan tenglama masala shartini qanoatlantiradi. Masala shartini topilgan to‘g‘ri chiziq $2x+3y-6=0$ ham qanoatlantiradi.

4- masala. Parallelogrammning ikki tomoni tenglamasi berilgan:

$$x+2y+1=0 \qquad (AB)$$

$$2x+y-3=0 \qquad (AD)$$

va uning diagonallarining kesishish nuqtasining koordinatalari berilgan: $N(1,2)$. Parallelogrammning qolgan ikki tomoni tenglamasini yozing (24-rasm).



24-rasm.

Yechish. Yechimda parallelogrammning berilgan ikki tomoni parallel emasligini ko‘zda tutib, quyidagi reja asosida ish olib boramiz:

1) berilgan tomonlarning kesishish nuqtasi A ning koordinatalarini topamiz;

2) A va N nuqtalarning koordinatalarini bilgan holda va kesma

o'rtasining koordinatalarini topish formulasi yordamida, C nuqtaning koordinatalarini osongina topamiz.

3) topilgan C nuqta orqali avval AD ga parallel, so'ngra AB ga parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz.

1. A nuqtaning koordinatalarini, AB va AD to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi sifatida topamiz:

$$x_A = \frac{7}{3},\ y_A = -\frac{5}{3}.\ \text{Demak, } A\left(\frac{7}{3};-\frac{5}{3}\right).$$

2. kesma o'rtasining koordinatalarini topish formulasi bizning masalamizda quyidagicha bo'ladi:

$$x_N = \frac{x_A + x_C}{2},\quad y_N = \frac{y_A + y_C}{2},$$

Bu formulalardan quyidagilarni olamiz: $x_c = -\frac{1}{3},\quad y_C = \frac{17}{3}$

Shunday qilib, $C(-\frac{1}{3},\frac{17}{3})$.

3. C nuqta orqali AD ga parallel to'g'ri chiziq o'tkazamiz va BC tomon tenglamasini hosil qilamiz: $2x + y - 5 = 0$. CD tomon tenglamasi: $x + 2y - 11 = 0$.

5- masala. P, $M_1(4,-3)$ va $M_2(2,-1)$ nuqtalardan bir xil masofada joylashgan va $2x + y - 1 = 0$ to'g'ri chiziqdan 2 birlik masofada joylashgan. P nuqtaning koordinatalarini toping.

Yechish. Izlanayotgan P nuqtaning koordinatalarini x_1 va y_1 lar orqali belgilaymiz, $M_1P = M_2P$ shartdan esa $x_1 - y_1 = 5$ ni olamiz.

Bu tenglik x_1 va y_1 lar orasidagi birinchi bog'liqlikdir. Ikkinchi bog'liklikni esa izlanayotgan nuqta $2x + y - 1 = 0$ to'g'ri chiziqdan 2 birlik masshtab uzoqlikda joylashgan degan shartdan topamiz:

$$\frac{2x_1+y_1-1}{\pm\sqrt{5}}=2.$$

Shunday qilib, x_1 va y_1 larni o'zaro bog'lovchi ikki tenglama quyidagilar:

$$2x_1+y_1-1-2\sqrt{5}=0,$$

yoki

$$2x_1+y_1-1+2\sqrt{5}=0.$$

Bu tenglamalarning har birini oldin olingan $x_1-y_1=5$ tenglama bilan birgalikda yechish kerak. Masala ikkita yechimga ega:

$$x_1=2+\frac{2}{3}\sqrt{5} \qquad y_1=-3+\frac{2}{3}\sqrt{5}$$

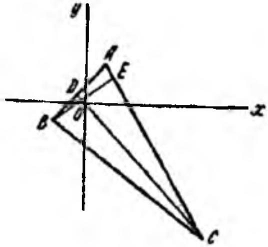
yoki

$$x_1=2-\frac{2}{3}\sqrt{5}; \qquad y_1=-3-\frac{2}{3}\sqrt{5}.$$

6- masala. Berilgan uchburchak balandliklarining tenglamalari $2x-3y+1=0$ va $x+y=0$ va uning bir uchuning koordinatalari quyidagichadir: $A(1,2)$. Uchburchak tomonlarining tenglamalarini yozing.

Yechish. $A(1,2)$ nuqta masala shartida berilgan balandliklarga tegishli emas, chunki uning koordinatalari balanlik tenglamalarini qanoatlantirmaydi: $2\cdot1-3\cdot2+1\neq0$ va $1+2\neq0$. Bundan shu narsa kelib chiqadiki, masala shartida keltirilgan balandliklar uchburchakning qolgan ikki uchlari B va C nuqtalardan o'tadi. (25-rasm).

Bu ikki balandliklarni CD va BE lar orqali belgilaymiz. Yuqorida aytilganlarga ko'ra $CD\perp AB, BE\perp AC$. CD balandlik $x+y=0$ tenglamaga ega bo'lsin, BE balandlik esa $2x-3y+1=0$ tenglamaga ega bo'lsin. $AC\perp BE$ bo'lganligi uchun, AC tomon tenglamasini BE balandlikka perpendikular



25-rasm.

to‘g‘ri chiziqlar oilasi tenglamasidan, izlanayotgan to‘g‘ri chiziqning berilgan $A(1,2)$ nuqtadan o‘tganligini ko‘zda tutgan holda topamiz. AC tomon $3x+2y-7=0$ tenglamaga ega. AB to‘g‘ri chiziqning tenglamasini $A(1,2)$ nuqtadan CD balandlikka perpendikular bo‘lib o‘tgan to‘g‘ri chiziq sifatida topamiz.Uning tenglamasi quyidagicha bo‘ladi: $x-y+1=0$. Endi B va C nuqtalarning koordinatalarini topish kerak:

$$x_B=-2;\ y_B=-1,$$

$$x_C=7;\ y_C=-7.$$

BC tomon tenglamasi: $2x+3y+7=0$.

Shunday qilib, uchburchakning uchta tomonining tenglamalari topildi.

7- **masala.** $x-y-1=0$ va $x+2y-2=0$ to‘g‘ri chiziqlar kesishish nuqtasidan va $M(-1,1)$ nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasinini berilgan to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasini topmay turib aniqlang.

Yechish. Berilgan $Ax+By+C=0$ va $A_1x+B_1y+C_1=0$ to‘g‘ri chiziqlar kesishish nuqtasidan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar dastasi tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$Ax+By+C+\lambda(A_1x+B_1y+C_1)=0$$

Biz qarayotgan holatda u quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$x-y-1+\lambda(x+2y-2)=0 \qquad \text{(A)}$$

Bu to‘g‘ri chiziqlar dastasidan $M(-1,1)$ nuqtadan o‘tgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini ajratib olish kerak. $M(-1,1)$ nuqtaning koordinatalarini (A) tenglamaga qo‘yib, $\lambda=-3$ ekanligini topamiz. λ ning bu qiymatini (A) tenglamaga qo‘yib, quyidagi tenglamanı hosil qilamiz:

$$x-y-1-3(x+2y-2)=0.$$

Bundan esa izlanayotgan tenglamani hosil qilamiz:

$$2x+7y-5=0.$$

8- masala. $x+y-1=0$ va $x+2y+1=0$ to‘g‘ri chiziqlar kesishish nuqtasidan o‘tib Oy o‘qining manfiy qismidan 2 birlik masshtabiga teng kesma ajratuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini toping.

Yechish. Berilgan to‘g‘ri chiziqlar kesishish nuqtasidan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar dastasi quyidagi ko‘rinishga ega:

$$Ax+By+C+\lambda(A_1x+B_1y+C_1)=0.$$

Bizning masalamizda u quyidagicha yoziladi:

$$x+y-1+\lambda(x+2y+1)=0. \qquad (B)$$

To‘g‘ri chiziq Oy o‘qining manfiy qismidan uzunligi 2 birlık masshtabiga teng kesma ajratganligi uchun u $(0,-2)$ nuqtadan o‘tadi. Bu nuqtaning koordinatalarini (B) tenglamaga qo‘yib , $\lambda=-1$ ekanligini topamiz, shunda izlanayotgan to‘g‘ri chiziqning tenglamasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$y+2=0$$

9- masala. $x+2y-11=0$ va $2x-y-2=0$ to‘g‘ri chiziqlar kesishish nuqtasidan o‘tib, koordinata boshidan 5 birlik masshtabi masofadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozing.

Yechish. Dasta markazi berilgan to‘g‘ri chiziqlar kesishish nuqtasida joylashgan to‘g‘ri chiziqlar dastasining tenglamasi quyidagi ko‘rinishga ega:

$$x+2y-11+\lambda\cdot(2x-y-2)=0$$

yoki

$$(1+2\lambda)x+(2-\lambda)y-(11+2\lambda)=0 \qquad (A)$$

Uning normallashtiruvchi ko'paytmasi:

$$N=\frac{1}{\pm\sqrt{(1+2\lambda)^2+(2-\lambda)^2}}.$$

(A) tenglamani normallashtiruvchi ko'paytiruvchiga ko'paytirib va to'g'ri chiziqning normal ko'rinishidagi ozod hadning moduli koordinata boshidan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofaga tengligini hisobga olib, λ ning qiymatini aniqlash uchun quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$\frac{|11+2\lambda|}{\sqrt{(1+2\lambda)^2+(2-\lambda)^2}}=5.$$

Bundan esa

$$\lambda=\frac{2}{11}.$$

Izlanayotgan tenglama: $3x+4y-25=0.$

Mustaqil yechish uchun masalalar

1-masala. $4x+2y+7=0$ va $2x-4y+15=0$ to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak bissektrisasining tenglamasini yozing.

Javobi: Bissektrisa tenglamalari quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\frac{4x+2y+7}{\sqrt{20}}=\pm\frac{2x-4y+15}{\sqrt{20}}.$$

Ularni soddalashtirib quyidagi ko'rinishga keltiramiz:

$$x+3y-4=0,$$

$$3x-y+11=0.$$

2-masala. Uchlari $A(0,0); B(3,-1); C(4,7)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchak ichki burchaklari bissektrisalarining tenglamalarini yozing.

Ko'rsatma. Avvalo uchburchak tomonlarining tenglamalarini yozing. Quyidagi tenglamalar hosil bo'ladi:

$$(AB) \qquad x+3y=0, \qquad (AC) \qquad 7x-4y=0,$$

$$(BC) \qquad 8x - y - 25 = 0$$

Javobi: A burcak bissektrisasining tenlamasi:

$$(7\sqrt{10} - \sqrt{65})x - (4\sqrt{10} + 3\sqrt{65})y = 0$$

B burcak bissektrisasining tenlamasi:

$$(8\sqrt{10} + \sqrt{65})x + (3\sqrt{65} - \sqrt{10})y - 25\sqrt{10} = 0.$$

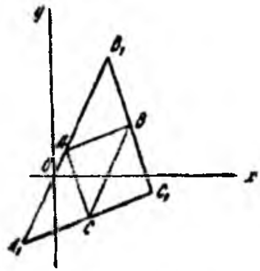
C burcak bissektrisasining tenlamasi: $3x - y - 5 = 0$.

3-masala. Uchburchakning ikki uchi $A(1,2), B(4,9)$ lar va balandliklarining kesishish nuqtasi $N(3,4)$ berilgan. Uchburchakning tomonlari tenglamalarini yozing.

Javobi:

$$(AB) \quad 4x - y - 7 = 0,$$
$$(BC) \quad x + 3y - 31 = 0,$$
$$(AC) \quad x + 5y - 7 = 0.$$

4-masala. Uchburchak tomonlari o'rtalarining koordinatalari $A(1,2)$, $B(7,4)$, $C(3,-4)$ lar berilgan.Uchburchak tomonlarining tenglamalari topilsin (26-rasm).



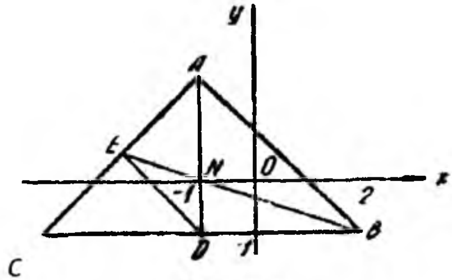
26-rasm.

Javobi:

$$1)\ 2x - y = 0;$$
$$2)\ 3x + y - 25 = 0$$
$$3)\ x - 3y - 15 = 0.$$

5-masala. Uchburchakning ikki tomonlarining tenglamalari $x + y - 1 = 0\ (AB)$; $y + 1 = 0\ (BC)$ va medianalari kesishish nuqtasi $N(-1,0)$ berilgan. Uning uchinchi AC tomonining tenglamasini toping (27-rasm).

Javobi: $x - y + 3 = 0$.

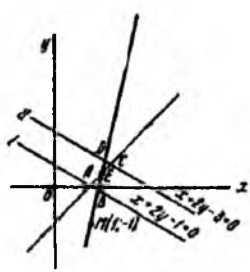


27-rasm.

6-masala. $2x+5y+8=0$ va $3x-4y-7=0$ to‘g‘ri chiziqlar kesishish nuqtasidan, $y = 4x + 3$ to‘g‘ri chiziq bilan $45°$ burchak hosil qilib o‘tuvchi to‘gri chiziq tenglamasini yozing.

Javobi: $69x - 115y - 199 = 0$ va $115x + 69y + 99 = 0$.

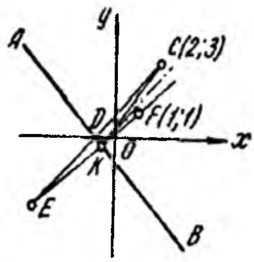
7-masala. $M(1,1)$ nuqta orqali to‘g‘ri chiziqni shunday o‘tkazish lozimki, uning $x + 2y - 1 = 0$ (I) va $x + 2y - 3 = 0$ (II) parallel to‘g‘ri chiziqlar orasidagi kesmasining o‘rtasi $x - y - 1 = 0$ to‘g‘ri chiziqda yotsin (28-rasm).



28-rasm.

Javobi: $4x - y - 5 = 0$.

8-masala. $C(2,3)$ nuqtadan o'tuvchi nur (AB) $x+y+1=0$ to'g'ri chiziqdan akslangandan so'ng $(1,1)$ nuqtadan o'tadi. (AB) to'g'ri chiziqqa tushuvchi va akslangan nur to'g'ri chizig'ining tenglamasini yozing (29-rasm).



29-rasm

Javobi: Tushuvchi nur tenglamasi: $5x-4y+2=0$.
Akslangan nur tenglamasi: $4x-5y+1=0$.

7 -§. Qutb koordinatalar sistemasi. Qutb koordinatalar sistemasidan dekart koordinatalar sistemasiga o'tish va aksincha. Qutb koordinatalarida berilgan egri chiziqlarni qurish

Qutb koordinatalar sistemasida nuqtaning tekislikdagi o'rnini aniqlab beradigan asosiy o'zgarmas elementlar OP qutb o'qi va qutb boshi 0 nuqtadir. Agar M tekislikning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsa (qutb boshidan farqli), u holda uning tekislikdagi holati undan qutb boshigacha bo'lgan r masofa va qutb o'qini OM nuri bilan ustma-ust tushgunga qadar burish kerak bo'lgan φ burchak bilan to'la aniqlanadi. r va φ sonlar M nuqtaning qutb koordinatalari deb ataladi. Ulardan birinchi koordinata deb r hisoblanadi, φ esa ikkinch koordinata deb hisoblanadi. r koordinata M nuqtaning qutb radiusi (ba'zan M nuqtaning radius vektori) deb ataladi, φ koordinatasi esa qutb burchagi deb ataladi (qutb burchagi radianlarda o'lchanadi). Qutb koordinatalari, uning belgisidan so'ng o'ng tomonida qavs ichida yoziladi: avval r koordinata, so'ngra φ koordinata, masalan $M(r,\varphi)$. Agar φ qutb burchagi qutb o'qidan soat strelkasiga teskari yo'nalishda sanalsa, manfiy qiymatli hisoblanadi, agar u qutb o'qidan soat strelkasi bo'yicha sanalsa, musbat qiymatli hisoblanadi. Shunday aniqlangan qutb koordinatalar sistemasida qutb radiusi r har doim musbat kattalik yoki nolga teng bo'ladi ($r \geq 0$) (chunki r qutb boshidan nuqtagacha bo'lgan masofa manfiy bo'la olmaydi). Lekin amalda qutb radiusi r ixtiyoriy (musbat, manfiy, nol) qiymatlarni qobul qiladigan qutb koordinatalar sistemasidan foydalanish qulay. Bunday qutb koordinatalar sistemasini umumlashgan qutb koordinatalar sistemasi deb ataladi. Biz shunday qutb koordinatalar sistemasidan foydalanamiz. Agar M nuqta $+r$ va φ koordinatalarga ega bo'lsa: $M(+r,\varphi)$, bunday holda u $-r$ va $\varphi+\pi$ koordinatalarga ham ega bo'ladi: $M(-r,\varphi+\pi)$, chunki $\varphi+\pi$ burchak qutb radiusining φ burchakka mos yo'nalishini xarakterlaydi. Shuni alohida ta'kidlaymizki, qaysi qutb koordinatalar sistemasidan foydalanmaylik, har doim r va φ sonlar juftligi tekislikda yagona nuqtaga mos keladi. Agar qutb boshi dekart koordinatalar sistemasining boshida joylashib, qutb o'qi OX o'qining musbat yo'nalishi bilan ustma-ust tushsa, OY o'qi OX o'qiga perpendikular bo'lib, unga $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ga teng qutb burchagi mos kelsa, u holda nuqtaning berilgan qutb koordinatalariga ko'ra, dekart koordinatalari quyidagi formulalar orqali topiladi:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi \tag{7.1}$$

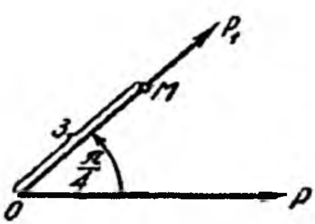
Agar dekart koordinatalari berilagan bo'lsa, u holda qutb koordinatalari quyidagi formulalar orqali topiladi:

$$r = \pm\sqrt{x^2+y^2}; \ \sin\varphi = \frac{y}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}; \ \cos\varphi = \frac{x}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}; \tag{7.2}$$

$$tg\varphi = \frac{y}{x} \tag{7.3}$$

(7,2) formuladan ko'rinib turibdiki, formuladagi ildiz oldida ikki xil ishora turibdi, bu narsa umumlashgan qutb koordinatalar sistemasiga mos keladi. r ni aniqlash formulasidagi ikki ishora $r^2 = x^2 + y^2$ tenglikning ikkala tomonidan ildiz olganda hosil bo'ladi. Endi (7.2) formula yordamida hisoblashlar qanday usulda olib borilishini ko'rsatamiz. Avvalo r ning qiymatini ildiz oldidagi ishorani ixtiyoriy tanlab topiladi. So'ngra $\sin\varphi$ va $\cos\varphi$ lar hisoblanadi, bunda (7.2) formulalardagi ildiz oldidagi ishora r ning ishorasiga mos qo'yiladi. $\sin\varphi$ va $\cos\varphi$ larning ishoralariga qarab φ qutb burchagi joylashgan chorak topiladi. φ burchakning kattaligini trigonometrik funksiyalar jadvalidan (7.3) formulaga asosan topiladi. Endi M nuqtani qutb koordinatalar sistemasida uning r va φ koordinatalariga ko'ra qanday qurilishini ko'rsataylik. Berilgan φ qutb burchagiga ko'ra qutb o'qini dastlabki holatidan φ burchakka soat strelkasiga qarshi yo'nalishda buramiz. Hosil bo'lgan o'qda qutb boshidan, agar $r > 0$ bo'lsa, musbat yo'nalishda, agar $r < 0$ bo'lsa manfiy yo'nalishda, uzunligi $|r|$ ga teng kesma ajratamiz.

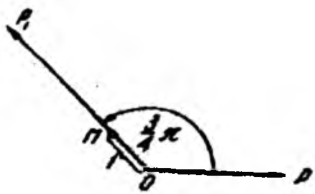
1-masala. Qutb koordinatalar sistemasida $M(3, \frac{\pi}{4})$ nuqtani quring (30-rasm).



30-rasm.

Yechish. Qutb boshi orqali qutb o'qiga $\frac{\pi}{4}$ ga teng burchak ostida OP_1 o'qini o'tkazamiz (musbat yo'nalish strelka bilan ko'rsatilgan) va qutb boshidan OP_1 o'qning musbat yo'nalishida uzunligi 3 *masshtab birligiga* teng OM kesmani ajratamiz. Bu kesmaning oxiri M nuqta izlanayotgan nuqtadir.

2-masala. Qutb koordinatalar sistemasida $M\left(1,\dfrac{3\pi}{4}\right)$ nuqtani quring (31-rasm).

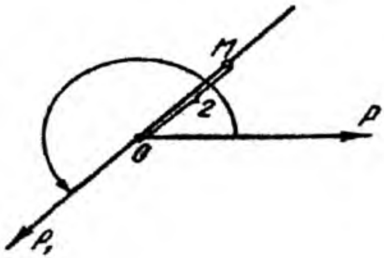


31-rasm.

Yechish. Qutb boshi orqali qutb o'qiga $\dfrac{3\pi}{4}$ ga teng burchak ostida OP_1 o'qini o'tkazamiz (musbat yo'nalish strelka bilan ko'rsatilgan) va qutb boshidan OP_1 o'qning musbat yo'nalishida uzunligi 1 birlik masshtabiga teng OM kesmani ajratamiz. Bu kesmaning oxiri izlanayotgan M nuqtadir.

3-masala. Qutb koordinatalar sistemasida $M(-2,\dfrac{5\pi}{4})$ nuqtani quring (32-rasm).

Yechish. Qutb boshi orqali qutb o'qiga $\dfrac{5\pi}{4}$ ga teng burchak ostida OP_1 o'qini o'tkazamiz (musbat yo'nalish strelka bilan ko'rsatilgan,) va qutb boshidan OP_1 o'qning manfiy yo'nalishida uzunligi 2 masshtab birligiga teng OM kesmani ajratamiz. Bu kesmaning oxiri izlanayotgan M nuqtadir.



32-rasm.

4-masala. Nuqta dekart koordinatalar sistemasida berilgan: $A(2,3)$. Uning qutb koordinatalarini toping.

Yechish. (7.2) formulaga ko‘ra $r=\pm\sqrt{13}$ ni hosil qilamiz. Ildiz oldidagi ishorani musbat qilib olamiz. U holda $r=+\sqrt{13}$, $\sin\varphi=\frac{3}{\sqrt{13}}$, $\cos\varphi=\frac{2}{\sqrt{13}}$. $\sin\varphi>0$ va $\cos\varphi>0$ bo‘lganligi uchun φ burchak birinchi chorakda joylashgan bo‘ladi. (7,3) formulaga asosan $tg\varphi=\frac{3}{2}$. $\varphi=arctg\frac{3}{2}$. Jadvaldan $\varphi\approx 0{,}98$ ni topamiz. A nuqtaning qutb koordinatalari topildi: $r=\sqrt{13}$. $\varphi=0{,}98$ yoki $A\left(\sqrt{13};0{,}98\right)$.

Agar ildiz oldidagi ishorani manfiy qilib tanlasak, u xolda $r=-\sqrt{13}$. $\sin\varphi=-\frac{3}{\sqrt{13}}$; $\cos\varphi=-\frac{2}{\sqrt{13}}$ va $\sin\varphi<0$ va $\cos\varphi<0$ bo‘lganliklari uchun φ burchak uchinchi chorakda joylashgan bo‘ladi. $tg\varphi=\frac{3}{2}$ ekanligini bilgan holda, $\varphi\approx 4{,}12$ ni hosil qilamiz, A nuqta esa $r=-\sqrt{13}$, $\varphi=4{,}12$, $A\left(-\sqrt{13};4{,}12\right)$ qutb koordinatalariga ega bo‘ladi.

5-masala. Qutb koordinatalari $(2;\frac{1}{4}\pi)$ bo‘lgan A nuqtaning to‘g‘ri burchakli dekart koordinaalarini toping.

Yechsh: (7.1) o‘tish formulasiga ko‘ra:

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi.$$

Bundan:

$$x = 2\cos\frac{\pi}{4} = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}, \quad x = \sqrt{2},$$

$$y = 2\sin\frac{\pi}{4} = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}, \quad y = \sqrt{2}.$$

6-masala. Qutb koordinatalari $(-3;\frac{5}{4}\pi)$ bo‘lgan A nuqtaning to‘g‘ri burchakli dekart koordinaalarini toping.

Yechish.

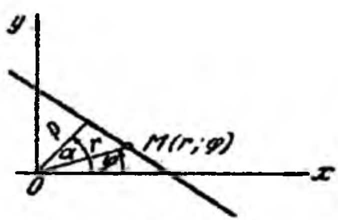
$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$$

$$x = -3\cos\frac{5}{4}\pi, \quad y = -3\sin\frac{5}{4}\pi,$$

ya’ni

$$A\left(\frac{3\sqrt{2}}{2};\frac{3\sqrt{2}}{2}\right).$$

7-masala. To‘g‘ri chiziqning tenglamasini qutb koordinatalarida yozing.



33-rasm.

Yechish. koordinatalar sistemasining qutb nuqtasini to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasining boshiga qo'yamiz. Qutb o'qini esa absissa o'qining musbat yo'nalishi bo'yicha joylashtiramiz (33-rasm). To'g'ri chiziq tenlamasining normal ko'rinishini olamiz: $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$. (7,1) o'tish formulasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi: $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$. To'g'ri chiziqning normal tenglamasiga bularni qo'yib quyidagini hosil qilamiz:

$$r\cos\varphi\cos\alpha + r\sin\varphi\sin\alpha - p = 0$$

yoki

$$r\cos(\varphi - \alpha) = p.$$

Shunday qilib to'g'ri chiziq qutb koordinatalar sistemasida quyidagi ikki tenglamadan biri orqali beriladi:

a)

$$r = \frac{p}{\cos(\varphi - \alpha)}$$

($p \neq 0$, ya'ni to'g'ri chiziq qutbdan o'tmaganda).

b) $\cos(\varphi - \alpha) = 0, \qquad -\infty < r < \infty$

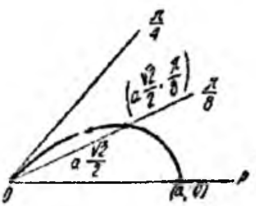
(p=0 bo'lganda, ya'ni to'g'ri chiziq qutbdan o'tganda). Oxirgi tenglamani $\varphi = \alpha \pm \frac{\pi}{2}, 0 \le r \le \infty$ ko'rinishda yozish mumkin.

Bu tenglamada p va α miqdarlar o'zgarmaslar, r va φ lar esa o'zgaruvchilar bo'lib, ular to'g'ri chiziqdagi nuqtalarning qutb koordinatalaridir.

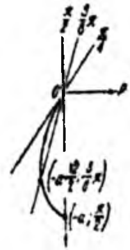
8-masala. $r = a\cos 2\varphi$ egri chiziqning grafigini yasang va uning tenglamasini dekart koordinatalar sistemasida yozing.

Yechish. φ qutb burchagiga $\varphi = 0$ dan $\varphi = 2\pi$ gacha $\alpha = \frac{\pi}{8}$ qadam bilan qiymat beramiz va r ning ularga mos qiymatlarini hisoblaymiz. r va φ larning topilgan qiymatlari bo'yicha nuqtalar quramiz va ularni silliq egri chiziq bilan tutashtiramiz. Egri chiziqning qurilishi 34 – 41- rasmlarda ko'rsatilgan.

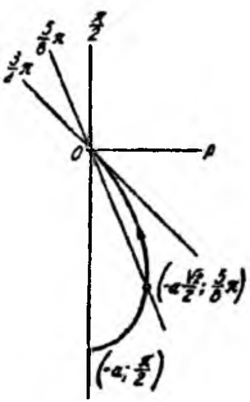
42-rasmda turli etaplarda qurilgan egri chiziqlar birlashtirilgan. Hosil bo‘lgan egri chiziq to‘rt yaproqli atirgul deb nomlanadi



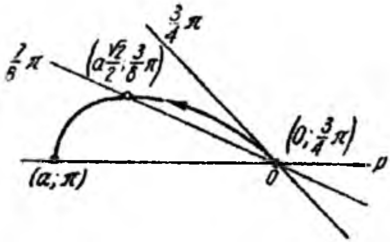
34-rasm.



35-rasm.

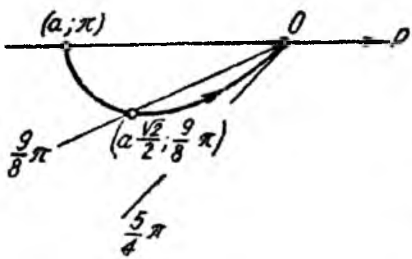


36-rasm.

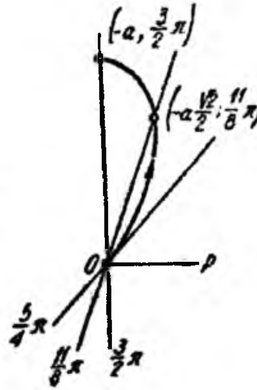


37-rasm.

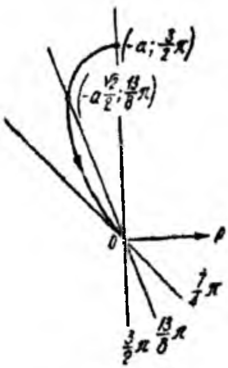
Endi to‘rt yaproqli atirgulning to‘g‘ri burchakli dekart koordinatalar sistemasidagi tenglamasini yozamiz. Shuni esda tutamizki, qutb koordinatalar sistemasining qutb nuqtasini to‘g‘ri burchakli dekart koordinatalar sistemasining boshiga qo‘yamiz, qutb o‘qini esa absissa o‘qining musbat yo‘nalishi bo‘yicha joylashtiramiz. $\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$ ekanligini hisobga olgan holda, to‘rt yaproqli atirgulning $r = \alpha\cos 2\varphi$ tenglamasini $r = \alpha(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$ ko‘rinishda yozib olamiz. Bunga esa (7.2) o‘tish formulasini qo‘yib, quyidagini hosil qilamiz:



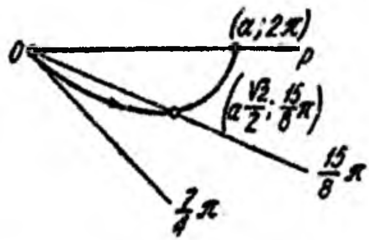
38-rasm.



39-rasm.



40-rasm.

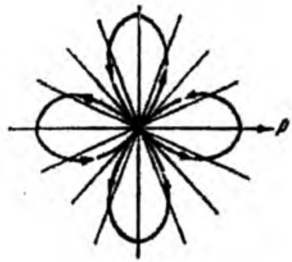


41-rasm.

$$\pm\sqrt{x^2+y^2}=\alpha\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}-\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)$$

yoki

$$\pm\sqrt{x^2+y^2}=\alpha\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$



42-rasm.

Bundan

$$\pm\sqrt{x^2+y^2}. \qquad (x^2+y^2)=\alpha(x^2-y^2).$$

Oxirgi tenglikning har ikkala tomonini kvadratga ko‘tarib, quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$(x^2+y^2)^3=\alpha^2(x^2-y^2)^2.$$

Mustaqil yechish uchun masalalar

1-masala. Qutb koordinatalar sistemasida $(-4,\frac{7}{4}\pi)$ nuqtani quring.

2-masala. To‘g‘ri burchakli dekart koordinatalari $(-1;1)$ bo‘lgan A nuqtaning qutb koordinatalarini toping.

Javobi: $A(\sqrt{2},\frac{5}{4}\pi)$ yoki $A(-\sqrt{2},\frac{1}{4}\pi)$

3-masala. A nuqtaning to‘g‘ri burchakli dekart koordinatalari $(2;-2)$. Uning qutb koordinatalarini toping.

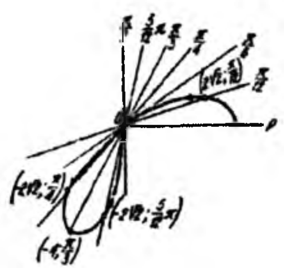
Javobi: $A(2\sqrt{2},\frac{7}{4}\pi)$ yoki $(-2\sqrt{2},\frac{3}{2}\pi)$. $x=\frac{3\sqrt{2}}{2}$, $y=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

4-masala. Qutb koordinatalari $(2;\frac{3}{2}\pi)$ bo‘lgan A nuqtaning to‘g‘ri burchakli dekart koordinatalarini toping.

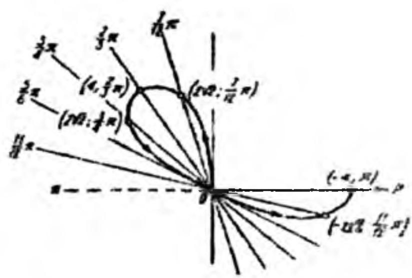
Javobi: $x=0;\ y=-2.$

5-masala. $r = 4\cos 3\varphi$ egri chiziqning grafigini quring va uning tenglamasini to'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasida yozing.

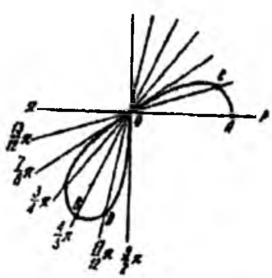
Ko'rsatma. φ - qutb burchagiga $\varphi = 0$ dan $\varphi = 2\pi$ gacha $\alpha = \frac{\pi}{12}$, qadam bilan qiymat bering, ya'ni $0, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \ldots$ qiymatlarni. So'ngra (r, φ) koordinatalar bo'yicha nuqtalarni quring va ularni silliq chiziq bilan tutashtiring. $r = 4\cos 3\varphi$ egri chiziq uch yaproqli atirgul deb nomlanadi (43 – 47 rasmlar).



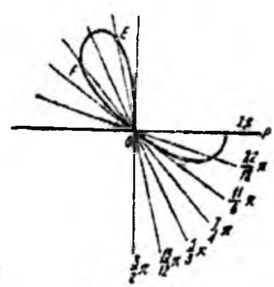
43-rasm.



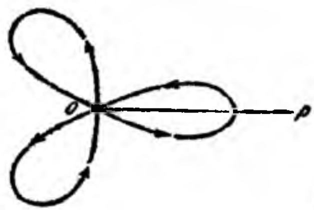
44-rasm.



45-rasm.



46-rasm.



47-rasm

Bu egri chiziq tenglamasini to'g'ri burchakli koordinatalarda yozish uchun $\cos 3\varphi$ ni $\cos\varphi$ orqali ifodalash lozim:

$$\cos 3\varphi = \cos(2\varphi + \varphi) = \cos 2\varphi \cos\varphi - \sin 2\varphi \sin\varphi,$$

so'ngra $\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$, $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$ ekanligidan foydalanib va $\sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi$ ni hisobga olgan holda quyidagini hosil qilamiz:

$$\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi.$$

$r = 4\cos 3\varphi$ egri chiziqning tenglamasini endi quyidagicha yozishimiz mumkin:

$$r = 4\left(4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi\right)$$

yoki

$$r = 16\cos^3\varphi - 12\cos\varphi$$

Endi bunga (7,2) formulani ishlating.

Javobi: $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 4x\left(x^2 - 3y^2\right)$.

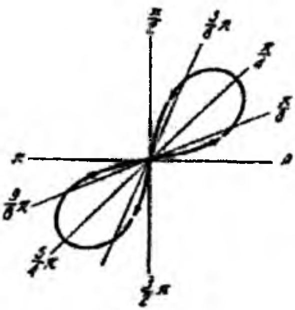
6-masala. $r = 5\sin 3\varphi$ egri chiziqni quring va uning tenglamasini to'g'ri burchakli koordinatalarda yozing.

7-masala. $r^2 = 6\sin 2\varphi$ Bernulli lemniskatasini quring va uning tenglamasini to'g'ri burchakli koordinatalarda yozing.

Javobi. Egri chiziq 48 -rasmda berilgan.

8-masala. $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2\alpha x^3$ $\alpha > 0$ egri chiziqni quring.

Ko'rsatma. Egri chiziqning qutb koordinatalar sistemasidagi teng lamasini toping. (7.1) formuladan foydalaning. Berilgan



48-rasm.

egri chiziqning qutb koordinatalar sistemasidagi tenglamasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$r = 2\alpha \cos^3 \varphi$$

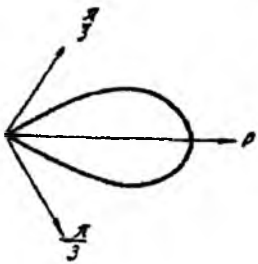
Berilgan tenglamadan shuni xulosa qilamizki, x va y ning ihtiyoriy qiymatlarida, uning chap qismi $2\alpha x^3$ $(\alpha > 0)$ manfiy emas, ya’ni x manfiy qiymatlarni qabul qila olmaydi.

Berilgan tenglamada y ni $-y$ ga almashtirish tenglamani o‘zgartirmaganligi uchun egri chiziq absissa o‘qiga nisbatan simmetrik joylashganligi kelib chiqadi. Demak, egri chiziqni birinchi chorakda qurish yetarlidir, so‘ngra uning to‘rtinchi chorakdagi simmetrik qismini quramiz. Bundan shu narsa kelib chiqadiki, φ qutb burchakka $r = 2\alpha\cos^3\varphi$ tenglamada $\varphi = 0$ dan $\varphi = \frac{\pi}{2}$ gacha qiymatlar berish kerak (Egri chiziq 49-rasmda ifodalangan).

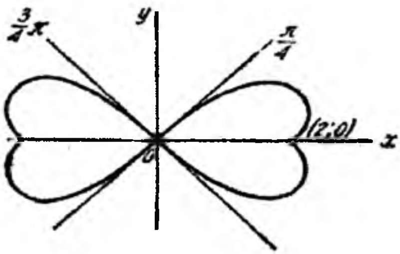
9-masala. $x^6 = 4(x^4 - y^4)$ egri chiziqni quring.

Ko‘rsatma. Eng avval shuni qayd qilamizki, x ni $-x$ ga va y ni $-y$ ga almashtirish egri chiziq tenglamasini o‘zgartirmaydi. Bu narsa egri chiziq koordinatalar sistemasi boshiga nisbatan simmetrik joylashganligini ko‘rsatadi. Shuning uchun egri chiziqning grafigini birinchi chorakda qurish yetarlidir.

So‘ngra simmetriyani hisobga olib, uning grafigini qolgan choraklarda quriladi. (7.1) formulani ishlatib, egri chiziq tenglamasini



49-rasm.



50-rasm.

qutb koordinatalar sistemasidagi ko‘rinishini hosil qilamiz:

$$r = \frac{2\sqrt{\cos 2\varphi}}{\cos^3 \varphi},$$

r - qutb radius faqat haqiqiy qiymatlarni qabul qilishi mumkin bo‘lgani uchun $\cos 2\varphi$ ning qiymatlari manfiy bo‘la olmaydi, ya’ni $\cos 2\varphi > 0$. Bu shuni ko‘rsatadiki, 2φ burchak birinchi yoki ikkinchi choraklarga tegishli bo‘lishi kerak. Lekin simmetriyaga asosan egri chiziqni birinchi chorakda qurish yetarli bo‘lganligi uchun 2φ ning $0 \le 2\varphi \le \frac{\pi}{2}$ shartni qanoatlantiruvchi qiymatlarini qaraymiz. Bundan esa o‘z navbatida egri chiziqni birinchi chorakda qurish uchun φ burchakka $\varphi = 0$ dan $\varphi = \frac{\pi}{4}$ gacha qiymat berish yetarlidir (50-rasm).

10-masala. $r = \alpha\varphi \; (\alpha > 0)$ Arhimed spiralini quring.

11-masala. $r = 2\alpha(1 + \cos\varphi)(\alpha > 0)$ kardioidani quring.

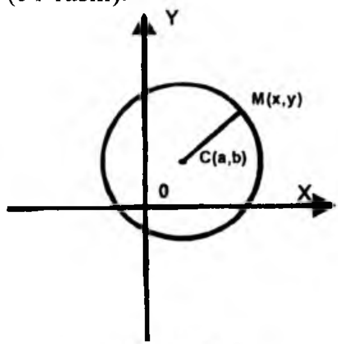
12-masala. $r = \frac{k}{\varphi}(k > 0)$ giperbolik spiralni quring.

8-§. Ikkinchi tartibli egri chiziqlar.

I. Aylana. Aylana deb tekislikdagi shunday nuqtalarning to'plamiga aytiladiki, bu nuqtalarning har biridan shu tekislikning markaz deb ataluvchi nuqtasigacha bo'lgan masofa o'zgarmas miqdordir. Bu o'zgarmas miqdor r – aylananing radiusi deyiladi. Agar $C(a;\ b)$ – uning markazi bo'lsa, aylananing tenglamasi

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \qquad (8.1)$$

ko'rinishda bo'ladi (51-rasm).



51-rasm

Aylana markazi koordinata boshi bilan ustma-ust tushsa, aylana tenglamasi $x^2+y^2=r^2$ ko'rinishda bo'ladi. Agar (8.1) tenglamada qavslarni ochsak

$$x^2+y^2+\ell x+my+n=0 \qquad (8.2)$$

bunda: $\ell=-2a,\ m=-2b,\ n=a^2+b^2-r^2$. Agar $\ell^2+m^2-4n>0$ bo'lsa, (8.2) tenglama aylanani ifodalaydi.

Agar $\ell^2+m^2-4n=0$ bo'lsa, tenglama $(-\ell/2;-m/2)$ nuqtani aniqlaydi, agar $\ell^2+m^2-4n<0$ bo'lsa, u geometrik ma'noga ega emas. Bu holda tenglama mavhum aylanani aniqlaydi. Aylana tenglamasida x^2, y^2 oldidagi koeffisientlar teng bo'lib, xy li had qatnashmaydi. Agar $x_1^2+y_1^2=r^2$ bo'lsa, $M(x_1;\ y_1)$ nuqta aylanada yotadi, $x_1^2 + y_1^2 > r^2$ bo‘lsa, M nuqta aylanadan tashqarida, $x_1^2 + y_1^2 < r^2$ bo‘lsa, nuqta aylana ichida yotadi.

1 masala. $2x^2+2y^2-8x+5y-4=0$ aylananing radiusi va markazining koordinatalarini toping.

Yechish. Tenglamani 2 ga qisqartirib va xadlarini guruhlab

$$x^2-4x+y^2+(5/2)y=2$$

ni yozamiz. x^2-4x va $y^2+(5/2)$ larni to‘la kvadratga to‘ldirib, birinchisiga 4 ni, ikkinchisiga $(5/4)^2$ ni, o‘ng tomoniga 4 va $(5/4)^2$ larni qo‘shamiz:

$$(x^2-4x+4)+(y^2+\frac{5}{2}y+\frac{25}{16})=2+4+\frac{25}{16},$$

yoki

$$(x-2)^2+(y+5/4)^2=\frac{121}{16}.$$

Shunday qilib, aylana markazining koordinatalari $a=2$, $b=-5/4$, radiusi $r=11/4$.

2-masala. Tomonlari $9x-2y-41=0$, $7x+4y+7=0$, $x-3y+1=0$ tenglamalar bilan berilgan uchburchakka tashqi chizilgan aylana tenglamasini tuzing.

Yechish. Uchburchak uchlarining koordinatalarini topamiz:

$$\begin{cases} 9x-2y-41=0 \\ 7x+4y+7=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 9x-2y-41=0 \\ x-3y+1=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 7x+4y+7=0. \\ x-3y+1=0. \end{cases}$$

Natijada $A(3; -7)$, $B(5; 2)$, $C(-1; 0)$ nuqtalarga ega bo‘lamiz. Izlangan aylana tenglamasi $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ bo‘lsin. a, b, r noma’lumlarni topish uchun A, B, C nuqtalarning koordinatalarini izlangan aylana tenglamasiga qo‘yamiz, natijada

$$(3-a)^2+(-7-b)^2=r^2;\ (5-a)^2+(2-b)^2=r^2;\ (-1-a)^2+b^2=r^2$$

ga ega bo‘lamiz. r^2 ni yo‘qotib, quyidagi tenglamalar sistemasiga kelamiz:

$$\begin{cases} (3-a)^2+(-7-b)^2=(5-a)^2+(2-b)^2 \\ (3-a)^2+(-7-b)^2=(-1-a)^2+b^2 \end{cases}$$

yoki

$$\begin{cases} 4a+18b=-29, \\ 8a-14b=57. \end{cases}$$

Bundan $a=3,1$; $b=-2,3$. r^2 ni $(-1-a)^2+b^2=r^2$ tenglamadan topamiz, ya'ni $r^2=22,1$. Shunday qilib, izlangan tenglama

$$(x-3,1)^2+(y+2,3)^2=22,1$$

bo'ladi.

3-masala. $A(5;\ 0)$ va $B(1;\ 4)$ nuqtalardan o'tuvchi, markazi $l: x+y-3=0$ to'g'ri chiziqda yotuvchi aylananing tenglamasini tuzing.

Yechish. AB rtsmaning o'rtasi bo'lgan M nuqtani topamiz: $x_M=(5+1)/2=3$, $y_M=(4+0)/2=2$, ya'ni $M(3;\ 2)$. Aylananing markazi AB ning o'rtasiga o'tkazilgan perpendikularda yotadi. AB to'g'ri chiziqning tenglamasi $(y-0)/(4-0)=(x-5)/(1-5)$ ya'ni $x+y-5=0$ bo'ladi. Bu to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyenti -1 bo'lgani uchun perpendikularning burchak koeffitsiyenti 1 ga teng, perpendikularning tenglamasi $y-2=x-3$, ya'ni $x-y-1=0$. C aylananing markazi l to'g'ri chiziq bilan ko'rsatilgan perpendikular kesishgan nuqtadir, uni $x+y-3=0$, $x-y-1=0$ tenglamalarni birga yechib topiladi. Demak, $x=2$, $y=1$, ya'ni $C(2;1)$. Aylananing radiusi CA kesmaning uzunligiga tengdir, ya'ni

$$r=\sqrt{(5-2)^2+(1-0)^2}=\sqrt{10}.$$

Demak, izlangan tenglama $(x-2)^2+(y-1)^2=10$.

4-masala. $x^2+y^2=49$ aylananing $A(1;\ 2)$ nuqtada o'rtasidan bo'linadigan vatarning tenglamasi tuzilsin.

Yechish. Aylananing $A(1;\ 2)$ nuqtadan o'tgan diametr tenglamasini tuzamiz. Uning tenglamasi $y=2x$. Izlangan vatar diametriga perpendikular va A nuqtadan o'tadi, ya'ni uning tenglamasi

$$y-2=(-1/2)(x-1) \text{ yoki } x+2y-5=0.$$

5-masala. $x-y-3=0$ to'g'ri chiziqqa nisbatan $x^2+y^2=2x+4y-4$ aylanaga simmetrik bo'lgan aylana tenglamasini toping.

Yechish. Berilgan aylana tenglamasini $(x-1)^2+(y-2)^2=1$ kanonik holatga keltiramiz; aylananing markazi $C(1;\ 2)$ va radiusi 1 ga teng. Simmetrik aylananing markazi $C_1(x_1;\ y_1)$ ni topamiz, buning uchun C nuqtadan $x-y-3=0$ to'g'ri chiziqqa perpendikular to'g'ri chiziq o'tkazamiz; uning tenglamasi $y-2=k(x-1)$, bu yerda: $k=-1/1=-1$, bundan $y-2=-x+1$ yoki $x+y-3=0$. $x-y-3=0$ va $x+y-3=0$ tenglamalarni birga yechib, $x=3$, $y=0$ topamiz, ya'ni $C(1; 2)$ nuqtaning berilgan to'g'ri chiziqqa proyeksiyasi $P(3; 0)$. Simmetrik nuqtaning koordinatalarini kesmaning o'rtasini topish formulalaridan izlaymiz: $3=(1+x_1)/2$, $0=(2+y_1)2$; shunday qilib, $x_1=5$, $y_1=-2$. Demak, $C_1(5; -2)$ simmetrik aylananing markazi, u aylana $(x-5)^2+(y+2)^2=1$ tenglamaga ega bo'ladi.

6-masala. $x^2+y^2=4(y+1)$ aylananing koordinata boshidan o'tuvchi vatarlar o'rtalari to'plamini toping.

Yechish. Vatarlar to'plamining tenglamasi $y=kx$ ko'rinishga ega. Vatarlarning aylana bilan kesishgan nuqtalarining koordinatalarini k orqali ifodalaymiz, buning uchun $y=kx$ va $x^2+y^2-4y-4=0$ tenglamalarni birga yechamiz. $x^2(k^2+1)-4kx-4=0$ kvadrat tenglamani hosil qilamiz. Bu yerda $x_1+x_2=4k/(1+k^2)$. Absissalar yig'indisining yarmi vatar o'rtasining absissasini beradi, ya'ni $x=2k/(1+k^2)$, vatar o'rtasining ordinatasi $y=2k^2/(1+k^2)$ ga teng. Oxirgi ikkita tenglik izlangan nuqtalar to'plamining parametrik tenglamalaridir. Bu tengliklardan k ni yo'qotib (buning uchun $x=2k/(1+k^2)$ munosabatda $k=y/x$ deyish yetarli), $x^2+y^2-2y=0$ ni hosil qilamiz. Shunday qilib, izlangan to'plam aylanadir.

Mustaqil yechish uchun masalalar

1-masala. 1) $x^2+y^2-8x+6y=0$; 2) $x^2+y^2+10x-4y+29=0$; 3) $x^2+y^2-4x+14y+52=0$ aylanalarning radiusi va markazi koordinatalarini toping.

2-masala. $x^2+y^2+4x-6y=0$ aylananing OY o'qi bilan kesishgan nuqtasidan o'tuvchi radiuslar orasidagi burchakni toping.

3-masala. $A(1; 2)$, $B(0; -1)$ va $C(-3; 0)$ nuqtalardan o'tuvchi aylana tenglamasini tuzing.

4-masala. Markazi $2x-y-2=0$ to'g'ri chiziqda yotgan, $A(7; 7)$ va $B(-2; 4)$ nuqtalardan o'tuvchi aylana tenglamasini tuzing.

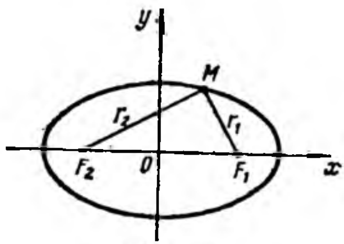
5-masala. $x^2+y^2=16$ va $(x-5)^2+y^2=9$ aylanalar umumiy vatarining tenglamasini tuzing.

2. Ellips

Ellips deb tekislikdagi shunday nuqtalarning to'plamiga aytiladiki, bu nuqtalarning har biridan shu tekislikning fokuslar deb ataluvchi ikki nuqtasigacha bo'lgan masofalar yig'indisi o'zgarmas miqdordir. Uni $2a$ bilan belgilanadi. Bu o'zgarmas miqdor fokuslar orasidagi masofadan katta bo'ladi. Agar koordinata o'qlari ellipsga nisbatan 52-rasmda ko'rsatilganidek joylashib, ellipsning fokuslari esa OX o'qida koordinatlar boshidan bir xil masofada $(F_1(c;\ 0),\ F_2(-c;\ 0))$ yotsa, ellipsning oddiy (kanonik) tenglamasi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (8.3)$$

ko'rinishda bo'ladi. a- ellipsning katta, b – kichik yarim o'qi, a, b, c (c – fokuslar orasidagi masofaning yarmi) lar o'rtasida $a^2=b^2+c^2$ munosabat bor.



52-rasm.

Ellipsning shakli uning ekssentrisiteti (siqilish o'lchovi) $\ell=c/a$ ($c<a$ bo'lgani uchun $\ell<1$) bilan xarakterlanadi. Ellipsning biror M nuqtasidan fokuslargacha bo'lgan masofalar nuqtaning fokal radius-vektorlari deb ataladi. Ular r_1, r_2 bilan belgilanadi (ellipsning ta'rifiga ko'ra uning ixtiyoriy nuqtasi uchun $r_1+r_2=2a$ bo'ladi). Xususiy holda $a=b$ ($c=0$, $\ell=0$, fokuslar markaz bilan ustma-ust tushsa) bo'lsa, ellips aylanaga aylanib qoladi: $x^2+y^2=a^2$. $M(x_1;\ y_1)$ nuqta va $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ ellipsning o'zaro joylanishi quyidagi shartlar bilan aniqlanadi: agar $x_1^2/a^2+y_1^2/b^2=1$ bo'lsa, M nuqta ellipsda yotadi; agar $x_1^2/a^2+y_1^2/b^2>1$ bo'lsa, M nuqta ellipsdan tashqarida; $x_1^2/a^2+y_1^2/b^2<1$ bo'lsa, M nuqta ellips ichida yotadi. Fokal radius-vektorlar ellips nuqtalarining absissasi orqali

$r_1=a-ex$ (o'ng fokal radius-vektor), $r_2=a+ex$ (chap fokal radius vektor) ifodalanadi.

1-masala. $M(5/2;\sqrt{6}/4)$ va $N(-2;\sqrt{15}/5)$ nuqtalardan o'tuvchi hamda simmetriya markazi roordinata boshida, fokuslari absissalar o'qida joylashgan ellipsning kanonik tenglamasini tuzing.

Yechish. $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ izlangan ellips tenglamasi bo'lsin. Bu tenglamani M, N nuqtalarning koordinatalari qanoatlantirishi kerak. Demak,

$$\frac{25}{4a^2}+\frac{3}{8b^2}=1,\ \frac{4}{a^2}+\frac{3}{5b^2}=1$$

Bundan $a^2=10$, $b=1$. Demak, ellips tenglamasi $x^2/10+y^2=1$ bo'ladi.

Mustaqil yechish uchun masalalar

1-masala. $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ ellipsning fokusidan katta yarim o'qqa tushirilgan perpendikularning ellips bilan kesishgan nuqtasigacha uzunligini toping.

2-masala. $x^2/25+y^2/16=1$ ellipsning chap fokusidan va quyi uchidan o'tgan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

3-masala. Uchlari koordinata o'qlariga joylashtirilgan ellips $M(1;\ 1)$ nuqtadan o'tadi va ekssentrisiteti $\ell=3/5$ ga teng. Ellips tenglamasini tuzing.

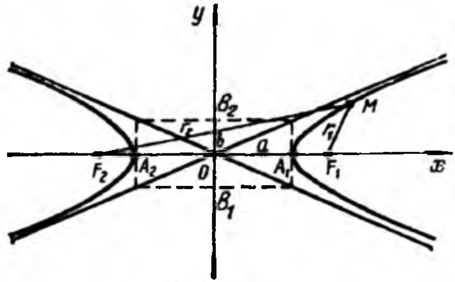
4-masala. $M(7;\ 1)$, $N(-5;\ -4)$, $P(4;\ 5)$ nuqtalar $x^2/50+y^2/32=1$ ellipsga nisbatan qanday joylashgan?

3. Giperbola.

Giperbola deb tekislikdagi shunday nuqtalarning to'plamiga aytiladiki, bu nuqtalarning har biridan shu tekislikning fokuslar deb ataluvchi ikki nuqtasigacha bo'lgan masofalar ayirmalarining absolyut qiymatlari o'zgarmas miqdordir, bu o'zgarmas miqdor $2a$ bilan belgilanadi, u fokuslar orasidagi masofadan kichik. Agar giperbolaning fokuslarini $F_1(c;\ 0)$, $F_2(-c;\ 0)$ nuqtalarga joylashtirsak, u holda giperbolaning

$$x^2/a^2-y^2/b^2=1 \qquad (8.4)$$

kanonik tenglamasiga ega bo'lamiz, bu yerda: $b^2=c^2-a^2$ Giperbola ikki tarmoqdan iborat va koordinata o'qlariga simmetrik joylashgan. $A_1(a;\ 0)$, $A_2(-a,\ 0)$ lar giperbolaning uchlari deb ataladi. $|A_1A_2|=2a$ giperbolaning haqiqiy, $|B_1B_2|=2b$ giperbolaning mavhum o'qi deyiladi (53-rasm).



53-rasm.

Agar giperbolaning $M(x, y)$ nuqtasidan biror to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa $x\to+\infty$ yoki $x\to-\infty$ *da* nolga intilsa u to'g'ri chiziq giperbolaning asimptotasi deyiladi. Giperbola ikkita asimptotaga ega, ular $y=\pm(b/a)x$. Giperbolaning asimptotalarini yasash uchun tomonlari $x=a$, $x=-a$, $y=b$, $y=-b$ bo'lgan to'g'ri to'rtburchak chizamiz. Bu to'g'ri to'rtburchakning qarama-qarshi uchlaridan o'tkazilgan to'g'ri chiziq giperbolaning asimptotalari bo'ladi.

53-rasmda giperbola va uning asimptotalarining o'zaro joylanishi ko'rsatilgan. $\ell=c/a>1$ nisbat giperbolaning ekssentrisiteti deyiladi. $r_1=\ell x-a$ (o'ng fokal radius-vektor) $r_2=\ell x+a$ (chap fokal radius-vektori) giperbola o'ng tarmog'ining fokal radius-vektorlari deyiladi. Xuddi shunday chap tarmog'ining fokal radius-vektorlari $r_1=-\ell x+a$, $r_2=(-\ell x-a)$ bo'ladi. Agar $a=b$ bo'lsa, giperbolaning tenglamasi $x^2-y^2=a^2$ bo'ladi. Bunday giperbola teng tomonli deb ataladi. Uning asimptotalari to'g'ri burchak hosil qiladi. Agar koordinatalar o'qlarini asimptotalar deb qarasak (teng tomonli giperbolada), uning tenglamasi $xy=m$ $(m=\pm a^2/2;$ $m>0$ bo'lsa, giperbola *I* va *III* chorakda, $m<0$ bo'lsa, *II* va *IV* chorakda yotadi. $xy=m$ teng- lamani $y=m/x$ ko'rinishda yozish mumkin bo'lgani uchun, teng tomonli giperbola x,y miqdorlar orasidagi teskari proporsional bog'lanishni ifodalaydi.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1 \qquad \left(\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1\right)$$

tenglama ham giperbolani ifodalaydi, lekin haqiqiy o'q OY bo'ladi. $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ va $x^2/a^2-y^2/b^2=-1$ giperbolalar bir xil yarim o'qqa va bir xil asimptotaga ega, lekin haqiqiy va mavhum o'qlari almashinib keladi. Bunday giperbolalar qo'shma deb ataladi.

1-masala. $x^2/16-y^2/9=1$ giperbolaning o'ng tarmog'ida shunday nuqtalarni topingki, undan o'ng fokusgacha masofa chap fokusgacha bo'lgan masofadan 2 marta kichik bo'lsin.

Yechish. Giperbolaning o'ng tarmog'i uchun fokal radius-vektorlar $r_1=\ell x-a$ va $r_2=\ell x+a$ formulalar bilan aniqlanadi. Demak, $\ell x+a=2(\ell x-a)$ tenglamaga ega bo'lamiz, bundan $x=3a/\ell$; bunda: $a=4$, $\ell=c/a=\sqrt{a^2+b^2}/a=5/4$, ya'ni $x=9,6$. Giperbola tenglamasidan ordinatani topamiz:

$$y=\pm\frac{3}{4}\sqrt{x^2-16}=\pm\frac{3}{4}\sqrt{\left(\frac{48}{5}\right)^2-16}=\pm\frac{3}{5}\sqrt{119}.$$

Shunday qilib, masalaning shartini ikki nuqta qanoatlantiradi:

$$M_1(9{,}6;0{,}6\sqrt{119}).\quad M_2(9{,}6;-0{,}6\sqrt{119}).$$

2-masala. $A(-1,\ 0)$ va $B(2,\ 0)$ nuqtalar berilgan. M nuqta shunday harakatlanadiki, AMB uchburchakda B burchak A burchakdan 2 marta kattaligicha qoladi. M nuqta chizadigan egri chiziq tenglamasini toping.

Yechish. M nuqtaning koordinatalarini x,y bilan belgilab $tg\,\hat{B}$ va $tg\,\hat{A}$ larni A, B va M nuqtalarning koordinatalari bilan ifodalaymiz:

$$tg\,\hat{B}=-\frac{y}{x-2}=\frac{y}{2-x},\quad tg\,\hat{A}=\frac{y}{x+1}.$$

Shart bo'yicha, $tg\hat{B} = tg2\hat{A}$, ya'ni $tg\hat{B} = 2tg\hat{A}/(1-tg^2\hat{A})$ tenglamaga ega bo'lamiz. Bu tenglamaga $tg\hat{B}$, $tg\hat{A}$ larning yuqoridagi ifodalarini qo'yib,

$$\frac{y}{2-x} = \frac{2y/(x+1)}{1-y^2/(1+x)^2}$$

ga ega bo'lamiz, y $(y \neq 0)$ ga qisqartirib va soddalashtirib $x^2 - y^2/3 = 1$ ega bo'lamiz. Izlangan egri chiziq giperboladir.

3-masala. $M(\sqrt{3}, \sqrt{2})$ nuqtadan o'tadigan, ekssentrisiteti $\sqrt{2}$ ga teng bo'lgan giperbolaning tenglamasini tuzing.

Yechish. Ekssentrisitetning aniqlanishiga ko'ra $c/a = \sqrt{2}$ yoki $c^2 = 2a^2$. Lekin $c^2 = a^2 + b^2$ bo'lgani uchun $a^2 + b^2 = 2a^2$, yoki $a^2 = b^2$ ya'ni giperbola teng tomonli. Ikkinchi tenglikni M nuqtaning giperbolada yotishidan keltirib chiqaramiz, ya'ni $(\sqrt{3})^2/a^2 - (\sqrt{2})^2/b^2 = 1$, yoki $3/a^2 - 2/b^2 = 1$. $a^2 = b^2$ bo'lgani uchun $3/a^2 - 2/a^2 = 1$, ya'ni $a^2 = 1$. Shunday qilib, izlangan giperbola tenglamasi $x^2 - y^2 = 1$ bo'ladi.

Mustaqil yechish uchun masalalar

1-masala. Asimptotalari $y = \pm(2\sqrt{2}/3)x$ bo'lib, $M(9;8)$ nuqtadan o'tgan giperbola tenglamasini tuzing.

2-masala. Fokus va uchlari tenglamasi $x^2/8 + y^2/5 = 1$ bo'lgan ellipsning mos fokus va uchlarida yotgan giperbola tenglamasini tuzing.

3-masala. $M(0;-1)$ nuqtadan va $3x^2 - 4y^2 = 12$ ning o'ng uchidan to'g'ri chiziq o'tkazilgan. To'g'ri chiziqning giperbola bilan kesishgan ikkinchi nuqtasi topilsin.

4-masala. $x^2 - y^2 = 8$ giperbola berilgan. $M(4;6)$ nuqtadan o'tuvchi va giperbola bilan bir xil fokusga ega bo'lgan ellips tenglamasini yozing.

5-masala. $9x^2 + 25y^2 = 1$ ellips berilgan. Ellips bilan bir xil fokusga ega bo'lgan teng tomonli giperbola tenglamasini tuzing.

6-masala. Giperbolaning asimptotalari orasidagi burchak 60^0. Giperbolaning ekssentrisiteti topilsin.

7-masala. $x^2/64-y^2/36=1$ giperbolaning chap tarmog‘ida shunday nuqtani topingki, uning o‘ng fokal radius-vektori 18 ga teng bo‘lsin.

8-masala. Ekssentrisiteti 2 va fokuslari $x^2/25+y^2/9=1$ ellipsning fokuslari bilan ustma-ust tushadigan giperbola tenglamasini tuzing.

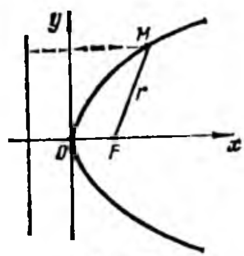
9-masala. $x^2/16-y/9=1$ giperbolaning $x^2+y^2=91$ aylana bilan kesishgan nuqtalardagi fokal radius-vektorlari topilsin.

4. Parabola

Tekislikdagi berilgan nuqta va berilgan to‘g‘ri chiziqdan barobar uzoqlikda turgan nuqtalarning to‘plami parabola deb ataladi. Nuqta fokus, to‘g‘ri chiziq direktrisa deb ataladi. Agar parabolaning direktrisasi $x=-p/2$, fokusi $F(p/2;0)$ nuqta bo‘lsa, uning tenglamasi

$$y^2=2px \tag{8.5}$$

Bu parabola absissa o‘qiga nisbatan simmetrik joylashgan (54-rasm) $(p>0)$



54-rasm.

$$x^2=2py \tag{8.6}$$

tenglama ordinata o‘qiga nisbatan simmetrik bo‘lgan parabola bo‘ladi. $p>0$ da (8.5) va (8.6) parabola mos o‘qlarining musbat tomoniga, $p<0$ bo‘lsa, manfiy tomoniga qaragan bo‘ladi. $y^2=2px$ parabolaning fokal radius – vektorining uzunligi $r=x+p/2$ $(p>0)$ formula bilan aniqlanadi.

1-masala. Parabolaning, uchi koordinata boshida yotadigan simmetriya o‘qi OX o‘qiga parallel. Parabolaning OX o‘qiga perpendikular bo‘lgan vatarning uzunligi *16* ga, bu vatarning parabola uchidan masofasi *6* ga teng. Shu parabola tenglamasini tuzing.

Yechish. Vatarning uzunligi va uning parabola uchidan masofasi ma'lum bo‘lgani uchun, bu vatar oxirlarining koordinatalari ma’lum bo‘ladi. Parabola tenglamasi $y^2=2px$; bunda $x=6$, $y=8$ deb $8^2=2p\cdot 6$ topamiz, bundan $2p=32/3$. Shunday qilib, izlangan parabola tenglamasi $y^2=32x/3$ bo‘ladi.

2-masala. *OY* o‘qiga nisbatan simmetrik va *I, III* koordinat burchak bissektrisasida uzunligi $8\sqrt{2}$ bo‘lgan vatar ajratuvchi, uchi koordinata boshida yotgan parabola tenglamasini tuzing.

Yechish. Izlangan parabola tenglamasi $x^2=2py$, bissektrisasining tenglamasi $y=x$. Shunday qilib, parabola bilan bissektrisaning kesishgan nuqtalarini hosil qilamiz: $O(0;0)$ va $M(2p;2p)$. Vatarning uzunligi ikki nuqta orasidagi masofa kabi topiladi: $8\sqrt{2}=\sqrt{4p^2+4p^2}$, bundan $2p=8$. Demak, izlangan tenglama $x^2=8y$ bo‘ladi.

Mustaqil yechish uchun masalalar

1-masala. Agar parabolaning fokusi $4x-3y-4=0$ to‘g‘ri chiziq bilan OX o‘qining kesishgan nuqtasida yotsa, parabolaning tenglamasini tuzing.

2-masala. $y^2=8x$ parabolada direktrisadan *4* ga teng masofada turuvchi nuqtani toping.

3-masala. *OX* o‘qiga nisbatan simmetrik, $y=x$ to‘g‘ri chiziqdan uzunligi $4\sqrt{2}$ ga teng vatar ajratuvchi, uchi koordinata boshida yotuvchi parabola tenglamasini tuzing.

4-masala. $y^2=2x$ parabola koordinat boshidan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqdan uzunligi *3/4* ga teng vatar ajratadi. Bu to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing.

9-§. Koordinatalarni almashtirish va ikkinchi tartibli egri chiziq tenglamalarini soddalashtirish

1. Koordinatalarni almashtirish

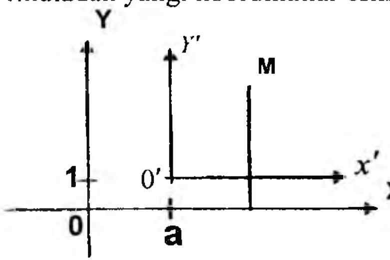
XOY koordinatalar sistemasidan yangi $X'O_1Y'$ koordinatalar sistemasiga o'tishda (bunda koordinata o'qlarining yo'nalishi o'zgarmaydi, ya'ngi koordinat boshi deb $O_1(a, b)$ nuqta olinadi (55-rasm)) ihtiyoriy M nuqtaning eski va yangi koordinatalari orasidagi bog'lanishi

$$x = x' + a\ , \qquad y = y' + b \tag{9.1}$$

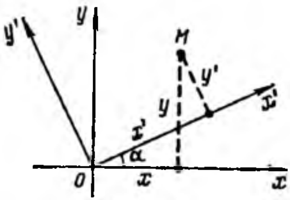
$$x = x' - a, \qquad y = y' - b \tag{9.2}$$

formulalar bilan aniqlanadi.

(9.1) formula orqali eski koordinatalar yangilari orqali, (9.2) formuladan yangi koordinatlar eskilari orqali aniqlanadi. Koordinat



55-rasm.



56-rasm.

o'qlarini α burchakka burashda (koordinat boshi o'zgarmaydi) α soat miliga teskari yo'nalishda hisoblanadi (56-rasm), va eski x, y yangi x', y' koordinatalar bilan

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha,\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \tag{9.3}$$

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha,\ y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha \tag{9.4}$$

formulalar orqali aniqlanadi.

1-masala. Koordinat o'qlari parallel ko'chirilgan, yangi koordinatalar boshi $O_1(3;-4)$ nuqtada joylashgan. Nuqtaning eski koordinatalari $M(7;8)$ ma'lum. Bu nuqtaning yangi koordinatalarini toping.

Yechish. Bu yerda: $a=3$, $b=-4$, $x=7$, $y=8$ teng. (9.2) formuladan $x'=7-3=4$, $y'=8-(-4)=12$ larni topamiz.

2-masala. XOY tekisligida $M(4;3)$ nuqta berilgan. Koordinatlar sistemasi shunday burilganki, yangi absissalar o'qi M nuqtadan o'tsin. Agar A nuqtaning yangi koordinatalari $x'=5$, $y'=5$ bo'lsa, A nuqtaning eski koordinatalarini toping.

Yechish. $|OM|=\sqrt{4^2+3^2}=5$ bo'lgani uchun $\sin\alpha=3/5$, $\cos\alpha=4/5$ teng, u holda (9.3) formulalar $x=(4/5)x'-(3/5)y'$, $y=(3/5)x'+(4/5)y'$ ko'rinishni oladi. $x'=y'=5$ deb olib, $x=1$, $y=7$ ni topamiz.

3-masala. Koordinat sistemasi $\alpha=\pi/6$ burchakka burilgan. $M(\sqrt{3},3)$ nuqtaning yangi koordinatalarini toping.

Yechish. (9.4) formuladan foydalanib, topamiz:

$$x'=\sqrt{3}\cos(\pi/6)+3\sin(\pi/6)=3/2+3/2=3,$$

$$y'=-\sqrt{3}\sin(\pi/6)+3\cos(\pi/6)=-\sqrt{3}/2+3\sqrt{3}/2=\sqrt{3}$$

Mustaqil yechish uchun masalalar

1-masala. $M(9/2,\ 11/2)$ nuqta berilgan. Yangi koordinata o'qlari sifatida $2x-1=0$ (O_1y' o'q), $2y-5=0$ (O_1x' o'q) chiziqlar olingan. M nuqtaning yangi sistemadagi koordinatalari topilsin.

2-masala. $M(4\sqrt{5},2\sqrt{5})$ nuqta berilgan. Yangi absissa o'qi sifatida $y=2x$, ordinata o'qi sifatida $y=-0,5x$ to'g'ri chiziqlar olingan. Yangi o'qlar eskilari bilan o'tkir burchak tashkil etadi. M nuqtaning yangi sistemadagi koordinatalarini toping.

2. $y=Ax^2+Bx+C$ ko'rinishdagi parabola va $y=(kx+l)/(px+q)$ ko'rinishdagi giperbola

$y=Ax^2+Bx+C$ ko'rinishdagi tenglama, koordinat o'qlarini parallel ko'chirganda, ya'ni $x=x'+a$, $y=y'+b$ (a, b yangi koordinatalar boshi, x', y' yangi koordinatalar) formulalar yordamida, parabolaning kanonik tenglamasiga keladi. $y=Ax^2+Bx+C$ bilan aniqlanadigan parabola OY o'qiga parallel bo'lgan simmetriya o'qiga ega bo'ladi. ($x=Ay^2+By+C$ esa OX o'qiga parallel bo'lgan simmetriya o'qiga ega). $y=(kx+l)/(px+q)$ kasr chiziqli funksiya, agar $kq-pl\neq 0$, $p\neq 0$ bo'lsa, teng tomonli giperbolani aniqlaydi. Koordinat o'qlarini parallel ko'chirganda bu tenglama teng tomonli giperbolaning $xy=m$ kanonik tenglamasiga keladi, bu giperbolaning asimptotalari koordinat o'qlarida bo'ladi. $m>0$ bo'lganda giperbola tarmoqlari I va III chorakda, $m<0$ bo'lganda II va IV chorakda yotadi.

1-masala. $y=9x^2-6x+2$ parabola tenglamasini kanonik ko'rinishga keltiring.

Yechish. x,y o'rniga mos ravishda $x'+a$, $y'+b$ ni qo'yamiz:

$$y'+b=9(x'+a)^2-6(x'+a)+2$$

yoki

$$y'=9x'^2+6x'(3a-1)+(9a^2-6a+2-b)$$

a, b larni shunday tanlaymizki, x' oldidagi koeffitsiyent va ozod had nolga aylansin.

$$\begin{cases} 3a-1=0, \\ 9a^2-6a+2-b=0 \end{cases}$$

ya'ni $a=1/3$, $b=1$. Demak, $x'^2=(1/9)\ y'$ parabolaning kanonik tenglamasi. Parabola uchi $Q_1(1/3,\ 1)$ da va p=1/18.

Bunday masalani boshqacha usul bilan ham yechish mumkin. Berilgan $y=Ax^2+Bx+C$ (yoki $x=Ay^2+By+C$) tenglama $(x-a)^2=2p(y-b)\,[(y-b)^2=2p(x-a)]$ ko'rinishga keltiriladi. U holda $O_1(a,\ b)$ nuqta parabolaning uchi, p parametrning ishorasi parabolaning qaysi tomonga yo'nalganini ko'rsatadi. $y=9x^2-6x-2$ ni quyidagicha o'zgartiramiz:

$$y=9(x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{9})-1+2,$$

$$y-1=9(x-\frac{1}{3})^2;\quad (x-\frac{1}{3})^2=\frac{1}{9}(y-1).$$

Bundan yana parabola uchi $O_1(1/3,\ 1)$ nuqtada bo'lib, parametr $p=1/18$ ga tengligini topamiz, parabola OY o'qining musbat tomoniga qarab yo'nalgan.

2-masala. $y=(4x+5)/(2x-1)$ giperbola tenglamasini $x'\ y'=k$

ko'rinishga keltiring. Giperbola asimptotalarining tenglamasini boshlang'ich koordinatalar sistemasiga nisbatan yozing.

Yechish. Koordinat o'qlarini parallel ko'chirish yordamida berilgan tenglama

$$(y'+b)(2x'+2a-1)=4x'+4a+5$$

yoki

$$2x'y'+(2b-4)x'+(2a-1)y'=4a+b-2ab+5$$

ko'rinishga keladi. $2b-4=0$, $2a-1=0$ dan $a=0,5$, $b=2$ larni topamiz. U holda yangi koordinatalar sistemasida giperbola tenglamasi $x'y'=3,5$ ko'rinishga keladi. Giperbolaning asimptotalari sifatida yangi koordinatalar olingani uchun, $x'=0,5$, $y'=2$ lar asimptota bo'ladi.

Bunday masalaning boshqacha yechilishi: $y=(kx+l)/(px+q)$ tenglama $(x-a)(y-b)=m$ ko'rinishga keltiriladi, giperbolaning markazi $O_1(a,b)$ nuqtada yotadi; uning asimptotalari sifatida $x=a$ va $y=b$ lar olinadi, m ning ishorasi giperbolaning qaysi choraklarda yotishini ko'rsatadi. $y=(4x+5)/(2x-1)$ ni

$$(2x-1)y-(4x+5)=0;$$

$$2(x-0,5)y-4(x-0,5)-7=0;$$

$$2(x-0,5)(y-2)=7$$

ko'rinishga keltiramiz. Shunday qilib, giperbola tenglamasi $(x-0,5)(y-2)=3,5$ ko'rinishga keltirildi. Giperbola markazi $O_1(0,5,\ 2)$ nuqtada, giperbola tarmoqlari I va III chorakda $x-0,5=0$, $y-2=0$ asimptotalar orasida yotadi.

Mustaqil yechish uchun masalalar

1-masala. 1) $y=4x-2x^2$; 2) $y=-x^2+2x+2$; 3) $x=-4y^2+y$; 4) $x=y^2+4y+5$ parabolalar tenglamasini kanonik ko'rinishga keltiring.

2-masala. 1) $y=2x/(4x-1)$ 2) $y=(2x+3)/(3x-2)$ 3) $y=(10x+2)/(5x+4)$ giperbola tenglamalarini $x'y'=m$ ko'rinishga keltiring.

3. Ikkinchi tartibli egri chiziqning besh hadli tenglamasi

$Ax^2+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$ tenglama ikkinchi tartibli egri chiziqning besh hadli tenglamasi deyiladi. (xy had qatnashmaydi). Bu tenglama tekislikda ellips, giperbola yoki parabolani aniqlaydi (A, C koeffitsiyentlar ko'paytmasining ishorasiga qarab koordinat o'qlariga parallel bo'lgan simmetriya o'qlariga ega bo'ladi).

1. $AC>0$ bo'lsa, ellips, $A=C$ bo'lsa, ellips aylanaga aylanadi.

2. $AC<0$ bo'lsa, giperbola, agar tenglamaning chap tomoni ikkita chiziqli ko'paytuvchiga ajralsa, giperbola ikkita kesishuvchi to'gri chiziqqa aylanadi:

$$Ax^2+Cy^2+2Dx+2Ey+F=(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)$$

3. $AC=0$ ($A=0$, $C\neq 0$ yoki $A\neq 0$, $C=0$) bo'lsa, tenglama parabolani aniqlaydi, bu holda, agar chap tomon yoki x, yoki y ni o'z ichiga olmasa; (agar tenglama $Ax^2+2Dx+F=0$ yoki $Cy^2+2Ey+F=0$ ko'rinishga ega bo'lsa) parabola ikkita parallel to'g'ri chiziqqa ajralishi mumkin. (haqiqiy har xil, haqiqiy ustma-ust tushadigan yoki mavhum). Egri chiziqning turi va uning tekislikdagi joylanishi uni $A(x-x_0)^2+C(y-y_0)^2=f$ ($AC>0$ yoki $AC<0$) ko'rinishga keltirib osongina topiladi; hosil bo'lgan tenglama ko'rinishiga qarab ellips va giperbolalarning ajralishi yoki birlashishini ham aniqlash mumkin. Birlashmagan egri chiziq holida, koordinat boshini $O_1(x_0, y_0)$ ga ko'chirib ellips yoki giperbola tenglamasini kanonik holga keltirish mumkin. $AC=0$ bo'lgan hol oldingi paragrafda to'la qaralgan, chunki bu holda parabola tenglamasini $y=a_1x^2+b_1x+c$ yoki $x=a_1y^2+b_1y+c_1$ ko'rinishda yozish mumkin.

1-masala. $4x^2+9y^2-8x-36y+4=0$ tenglama qanday egri chiziqni ifodalaydi?

Yechish. Berilgan tenglamani quyidagicha o'zgartiramiz:

$$4(x^2-2x)+9(y^2-4y)=-4; \quad 4(x^2-2x+1-1)+9(y^2-4y+4-4)=-4;$$
$$4(x-1)^2+9(y-2)^2=-4+4+36; \quad 4(x-1)^2+9(y-2)^2=36.$$

Yangi koordinata boshi deb $O'(1,2)$ nuqtani olib, o'qlarni parallel ko'chiramiz. Koordinatalarni almashtirish formulalaridan foydalanamiz: $x=x'+1$, $y=y'+2$. Yangi o'qlarga nisbatan $4x'^2+9y'^2=36$, yoki $x'^2/9+y'^2/4=1$ tenglamaga ega bo'lamiz. Shunday qilib, berilgan tenglama ellips ekan.

2-masala. $x^2-9y^2+2x+36y-44=0$ tenglama qanday egri chiziqni ifodalaydi?

Yechish. Berilgan tenglamani o‘zgartiramiz:

$$(x^2+2x+1-1)-9(y^2-4y+4-4)=44,$$

$$(x+1)^2-9(y-2)^2=44+1-36, \quad (x+1)^2-9(y-2)^2=9.$$

Yangi koordinat boshi deb, $O_1(-1,2)$ ni olib, o‘qlarni parallel ko‘chiramiz. Koordinatalarni almashtirish formulalari $x=x'-1$, $y=y'+2$ bo‘ladi. Koordinatalarni almashtirishlardan so‘ng $x'^2-9y'^2=9$ yoki $x'^2/9-y'^2=1$ ga ega bo‘lamiz. Bu egri chiziq giperboladir. Bu giperbolaning asimptotalari $y'=\pm(1/3)x'$ to‘g‘ri chiziqlardir.

Mustaqil yechish uchun

Quyidagi tenglamalar qanday egri chiziqni aniqlaydi? Ularni chizing.

1-masala. $36x^2+3y^2-36-24y-23=0.$

2-masala. $16x^2+25y^2-32x+50y-359=0.$

3-masala. $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{9}y^2-x+\frac{2}{3}y-1=0.$

4- masala. $x^2+4y^2-4x-8y+8=0.$

5-masala. $x^2+4y^2+8y+5=0.$

4. Ikkinchi tartibli egri chiziqning umumiy tenglamasini kanonik holga keltirish

Agar ikkinchi tartibli egri chiziq

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

tenglama bilan berilgan bo‘lsa, koordinata o‘qlarini burab, $x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha$, $y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha$ formuladan foydalanib, koordinatalar ko‘paytmasi qatnashgan haddan ozod bo‘lamiz. Qolgan almashtirishlar bundan oldingi paragrafda bajarilgan.

Egri chiziqning ikkita chiziqqa ajralishi berilgan tenglamaga qarab quyidagicha bajarilishi mumkin. Tenglamani y ga nisbatan kvadrat tenglama deb qaraymiz (y^2 oldidagi koeffitsiyent noldan farqli); agar bu yerda kvadrat ildiz ostida qandaydir $ax+b$ ikki hadning to‘la kvadrati tursa, ildizdan chiqib, y uchun ikkita qiymat: $y_1=k_1x+b_1$, $y_2=k_2x+b_2$ topiladi. Bu egri chiziq ikkita to'g'ri chiziqqa ajraladi. Berilgan tenglamani x ga nisbatan ham yechish mumkin. Agar egri chiziqning tenglamasida $A=C=0$ $(B\neq 0)$ bo'lsa, $B/D=2E/F$ bo'lgan holdagina ikkita to'g'ri chiziqni aniqlaydi.

1-masala. $9x^2+24xy+16y^2-25=0$ tenglama ikkita to'g'ri chiziq to'plamini aniqlashini ko'rsating.

Yechish. Tenglamani $(3x+4y)^2-25=0$ ko'rinishda yozib olamiz; chap tomonni ko'paytuvchilarga ajratamiz: $(3x+4y-5)(3x+4y+5)=0$. Shunday qilib, berilgan tenglama $3x+4y-5=0$, $3x+4y+5=0$ ko'rinishdagi to'g'ri chiziqlarni aniqlaydi.

2-masala. $3x^2+8xy-3y^2-14x-2y+8=0$ tenglama ikkita to'g'ri chiziq tenglamasini aniqlashini ko'rsating.

Yechish. Berilgan tenglamani $3y^2-2(4x-1)y-(3x^2-14x+8)=0$ ko'rinishda yozib olamiz, uni y ga nisbatan yechamiz:

$$y=\frac{4x-1\pm\sqrt{(4x-1)^2+(9x^2-42x+24)}}{3}$$

yoki

$$y=\frac{4x-1\pm(5x-5)}{3}.$$

Bundan esa $y=3x-2$ va $y=(-x+4)/3$ to'g'ri chiziq tenglamalariga ega bo'lamiz, ularni $3x-y-2=0$, $x+3y-4=0$ ko'rinishda yozish mumkin.

3-masala. $xy+2x-4y-8=0$ tenglama bilan qanday chiziq aniqlanadi?

Yechish. Tenglamani $x(y+2)-4(y+2)=0$ yoki $(x-4)(y+2)=0$ ko'rinishda yozib olamiz. Shunday qilib, tenglama $x-4=0$, $y+2=0$ to'g'ri chiziqlarni aniqlaydi, chiziqlarning biri OX, ikkinchisi OY o'qiga parallel.

4-masala. $5x^2+4xy+8y^2+8x+14y+5=0$ tenglamani kanonik ko'rinishga keltiring.

Yechish. Birinchi banddagi (9.3) formuladan foydalanib, tenglamani o'zgartiramiz:

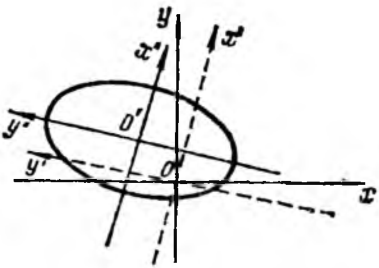
$$5(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)^2+4(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)+$$

$$+8(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)^2+8(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)+$$
$$+14(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)+5=0$$

yoki

$$(5\cos^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha+8\sin^2\alpha)x'^2+(5\sin^2\alpha-4\sin\alpha\cos\alpha+$$
$$8\cos^2\alpha)y'^2+(6\sin\alpha\cos\alpha+4(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha))x'y'+$$
$$+(8\cos\alpha+14\sin\alpha)x'+(14\cos\alpha-8\sin\alpha)y'+5=0,$$

$4(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+6\sin\alpha\cos\alpha=0$ shartidan (ya'ni $x'\,y'$ oldidagi koeffitsiyentni nolga tenglaymiz) α ni topamiz, $2tg^2\alpha-3tg\alpha-2=0$ ga ega bo'lamiz, bundan $tg\alpha_1=2,\ tg\alpha_2=-1/2.$ $tg\alpha$ ning bu qiymati ikkita o'zaro perpendikular yo'nalishga to'g'ri keladi. $tg\alpha=-1/2$ o'rniga $tg\alpha=2$ olishimiz mumkin (x', y' lar o'rnini almashtiramiz) (57-rasm).



57-rasm.

$tg\alpha=2$ dan $\sin\alpha=\pm 2/\sqrt{5},\ \cos\alpha=\pm 1/\sqrt{5};\ \sin\alpha,\ \cos\alpha$ larning musbat qiymatini olamiz. U holda tenglama ushbu ko'rinishni oladi:

$$9x'^2+4y'^2+\frac{36}{\sqrt{5}}x'-\frac{2}{\sqrt{5}}y'=0$$

yoki

$$9(x'^2+\frac{4}{\sqrt{5}}x')+4(y'^2-\frac{1}{2\sqrt{5}}y')=-5.$$

Qavs ichidagi ifodalarni to‘la kvadratga to‘ldiramiz:

$$9(x'+\frac{2}{\sqrt{5}})^2+4(y'-\frac{1}{4\sqrt{5}})^2=\frac{36}{5}+\frac{1}{20}-5$$

yoki

$$9(x'+\frac{2}{\sqrt{5}})^2+4(y'-\frac{1}{4\sqrt{5}})^2=\frac{9}{4}.$$

Koordinata boshi uchun $O'(-2/\sqrt{5},1/4\sqrt{5})$ nuqtani olib, $x'=x''-2/\sqrt{5}$, $y'=y''+1/(4\sqrt{5})$ koordinat almashtirish formulalarini qo‘llab, $9x''^2+4y''^2=9/4$ yoki $\frac{x''^2}{1/4}+\frac{y''^2}{9/16}=1$ ega bo‘lamiz (bu ellips tenglamasi).

5-masala $6xy+8y^2-12x-26y+11=0$ tenglamani kanonik ko‘rinishga keltiring.

Yechish. 1. Birinchi banddagi 3 formuladan foydalanib, tenglamani o‘zgartiramiz:

$$6(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)+8(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)^2-$$
$$-12(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)-26(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)+11=0,$$
$$(6\sin\alpha\cos\alpha+8\sin^2\alpha)x'^2+(8\cos^2\alpha-6\sin\alpha\cos\alpha)y'^2+$$
$$+[16\sin\alpha\cos\alpha+6(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)]x'y'-(12\cos\alpha+26\sin\alpha)x'-$$
$$-(26\cos\alpha-12\sin\alpha)y'+11=0.$$

$x'y'$ had oldidagi koeffitsientni nolga tenglab topamiz.

$16\sin\alpha\cos\alpha+6(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=0$, yoki $3tg^2\alpha-8tg\alpha-3=0$

Bundan $tg\alpha_1=3$, $tg\alpha_2=-1/3;$ $tg\alpha=3$ desak, u holda $\sin\alpha=\pm 3/\sqrt{10}$, $\cos\alpha=\pm 1/\sqrt{10};$ $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ning musbat qiymatlarini olamiz. U holda tenglama quyidagi

$$9x'^2-y'^2-9\sqrt{10}x'+\sqrt{10}y'+11=0$$

yoki

$$9(x'^2-\sqrt{10}x')-(y'^2-\sqrt{10}y')=-11$$

ko'rinishga keladi.

2. Qavs ichidagi ifodalarni to'la kvadratgacha to'ldiramiz:

$$9\left(x'-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2-\left(y'-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2=\frac{45}{2}-\frac{5}{2}-11,$$

yoki

$$9\left(x'-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2-\left(y'-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2=9.$$

Yangi koordinat boshi uchun $O'(\sqrt{10}/2, \sqrt{10}/2)$ ni olib, $x'=x''+\sqrt{10}/2,\ y'=y''+\sqrt{10}/2$ ni qo'llab, $9x''^2-y''^2=9$ yoki $x''^2-y''^2/9=1$ ni hosil qilamiz (bu giperbola tenglamasidir).

6-masala x^2-$2xy+y^2$-$10x$-$6y+25=0$ ni kanonik holga keltiring.

Yechish. 1.O'qlarni burash formulasidan foydalanib, tenglamani o'zgartiramiz:

$$(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)^2-2(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)+$$
$$+(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)^2-10(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)-$$
$$-6(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)+25=0.$$

yoki

$$(\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+\sin^2\alpha)x'^2+(\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+$$
$$+\cos^2\alpha)y'^2+2(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)x'y'-(10\cos\alpha+6\sin\alpha)x'+$$
$$+(10\sin\alpha-6\cos\alpha)y'+25=0$$

$x'y'$ oldidagi koeffitsientni nolga tenglab quyidagini topamiz

$$\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=0,$$

bundan

$$\mathrm{tg}^2\alpha=1, \text{ ya'ni } tg\alpha_1=1,\ tg\alpha_2=-1.\quad tg\alpha=1$$

ni olsak,

$$\alpha_1=\pi/4 \text{ yoki } \sin\alpha=1/\sqrt{2},\quad \cos\alpha=1/\sqrt{2}.$$

U holda tenglama $2y'^2-8\sqrt{2}x'+2\sqrt{2}y'+25=0$, yoki $2(y'^2+\sqrt{2}y')-8\sqrt{2}x'+25=0$ ko'rinishga keladi.

2. Qavs ichidagi ifodani to'la kvadratga to'ldiramiz:

$$2\left(y'+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=8\sqrt{2}x'-24 \quad \text{yoki} \quad \left(y'+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=4\sqrt{2}\left(x'-\frac{3}{\sqrt{2}}\right).$$

Yangi koordinat boshini $O'(3/\sqrt{2},\ -\sqrt{2}/2)$ ga ko'chiramiz. $x'=x''-3/\sqrt{2}$, $y'=y''+\sqrt{2}/2$ dan foydalanib, $y''^2=4\sqrt{2}x''$ ni topamiz (bu parabola tenglamasi).

Mustaqil yechish uchun

Quyidagi tenglamalar ikkita to'g'ri chiziqqa ajraluvchi egri chiziqni aniqlashini ko'rsating va bu to'g'ri chiziqlar tenglamasini toping:

1-masala. $25x^2+10xy+y^2-1=0.$

2- masala. $x^2+2xy+y^2+2x+2y+1=0.$

3-masala. $8x^2-18xy+9y^2+2x-1=0.$

Quyidagi egri chiziq tenglamalarini kanonik holga keltiring:

4- masala. $14x^2+24xy+21y^2-4x+18y-139=0.$

5- masala. $4xy+3x^2+16y+12x-36=0.$

10-§. Determinant va matritsalar. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini Kramer va matritsalar usulida yechish

Determinantlarni hisoblash ularning oldindan bizga ma'lum bo'lgan xossalariga asoslanib bajariladi. Bu xossalar quyidagilar:

1.Agar determinantda ikki satr o'rinlari almashtirilsa (yoki ikki ustun o'rinlari), u holda determinantning ishorasi o'zgaradi.

2.Agar ikki satrning (yoki ikki ustunning) mos elementlari o'zaro teng yoki proporsional bo'lsa, u holda bu determinantning qiymati nolga teng.

3.Agar determinantda satrlar bilan ustunlar o'rinlarini, ularning tartiblarini saqlagan holda almashtirsak, determinantning qiymati o'zgarmaydi.

4.Agar biror satrning (yoki ustunning) elementlari umumiy ko'paytuvchiga ega bo'lsa, uni determinant belgisi tashqarisiga chiqarish mumkin.

5.Agar biror satrning (yoki biror ustunning) elementlariga boshqa satrning (ustunning) mos elementlarini ma'lum bir songa ko'paytirib qo'shsak, determinantning qiymati o'zgarmaydi Uchinchi tartibli determinantlar uchun bu xossa quyidagicha yoziladi:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + ka_2 & b_1 + kb_2 & c_1 + kc_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

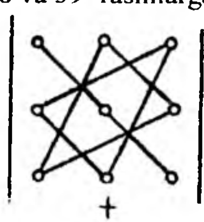
6. Ikkinchi tartibli determinant quyidagi formula bo'yicha hisoblanadi:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 \qquad (10.1)$$

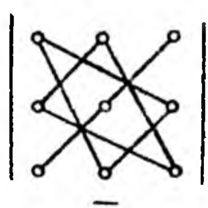
7. Uchinchi tartibli determinant quyidagi formula bo'yicha hisoblanadi:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_2 \qquad (10.2)$$

Uchinchi tartibli determinantni hisoblashning qulay sxemasi mavjud (58 va 59- rasmlarga qarang)



58- rasm.



59- rasm.

Bu sxemaga asosan 58-rasmda ulangan elementlar ko'paytmasi o'z ishorasi bilan olinadi, 59-rasmda ulangan elementlar ko'paytmasi teskari ishora bilan olinadi va natijada determinantning qiymati shu olti ko'paytmaning yig'indisidan iborat bo'ladi. n- tartibli determinantda, k- ustun va ℓ-satr kesishgan joyda turgan elementning algebraik to‘ldiruvchisi deb k- ustun va ℓ -satrlarni o‘chirishdan hosil bo‘lgan n-1 tartibli determinantning $(-1)^{k+l}$ ga ko‘paytirilganiga aytiladi, bu yerda: $k+l$, o‘chirilgan satr va ustunlarnig nomerlarining yig‘indisi. Element algebraic to‘ldiruvchisini $(-1)^{k+l}$ ko‘paytiruvchisiz qarasak, o‘sha element minorini hosil qilamiz.

Misol. 5- tartibli determinantda

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & e_4 \\ a_5 & b_5 & c_5 & d_5 & e_5 \end{vmatrix} \qquad (10.3)$$

d_3 elementga mos keluvchi algebraik to‘ldiruvchi 4- tartibli determinant bo‘ladi:

$$(-1)^{3+4} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & e_2 \\ a_4 & b_4 & c_4 & e_4 \\ a_5 & b_5 & c_5 & e_5 \end{vmatrix}$$

Bu yerda: (-1) sonning darajasidagi 3 soni d_3 element turgan qator nomeri, 4 soni esa d_3 element turgan ustun nomeri.

8. Determinant qiymati biror qatorda (ustunda) turgan elementlar bilan unga mos keluvchi algebraik to‘ldiruvchilar ko‘paytmalarining yig‘indisiga teng. Determinant elementlarini kichik harflar bilan, ularga mos keluvchi mos algebraik to‘ldiruvchilarni mos indekslar bilan mos katta harflar bilan belgilashga kelishib olamiz. Ya'ni a_3 elementga mos keluvchi algebraik to‘ldiruvchini A_3, d_4 elementga mos keluvchi algebraik to‘ldiruvchini esa D_4 bilan belgilaymiz. 8- xossaga ko‘ra (10.3) determinantni misol tariqasida quyidagicha ifodalash mumkin:

$$D = a_3A_3 + b_3B_3 + c_3C_3 + d_3D_3 + e_3E_3$$

Bu tenglik determinantning uchinchi qatori bo'yicha yoyilmasini ifodalaydi. Determinantni hisoblashning 8- xassasiga ko'ra n-tartibli determinantni hisoblash $(n-1)$ – tartibli determinantni hisoblashga keltiriladi.

9. Agar determinantning biror satri elemntlari bittasidan tashqari barchasi nolga teng bo'lsa, u holda determinantning qiymati shu nolga teng bo'lmagan elementni, unga mos keluvchi algebraic to'ldiruvchiga ko'paytmasiga teng. Bu keltirilgan xossalar yordamida ixtiyoriy tartibdagi determinantlarni hisoblash mumkin.

1- masala. Determinantni hisoblang.

$$1)\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}; \qquad 2)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; \qquad 3)\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}.$$

Yechish . (10.1) formulaga ko'ra

$$1)\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2*1-4*7=-26 \quad 2)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1*1-0*2=1$$

$$3)\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 4*6+1*5=29$$

2- masala. Determinantni hisoblang.

$$1)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}; \quad 2)\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 7 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}; \quad 3)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

Yechish : (10.2) formulaga ko'ra

1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1*2*2+0*1*5+4*3*1-4*2*5-$$

$$-0*3*2--1*1*1=4+0+12-40-0-1=-25$$

2)

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 7 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2*3*(-2)+4*2*3+7*1*(-1)—1*3*3-$$

$$-2*2*1-4*7*(-2)=-12+24-7+9-4+56=66$$

3) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 2*2(-3)+1*1*1+3*4*1-1*2*1-$

$-2*4*1-1*3*(-3) = -12+1+12-2-8+9=0$

Mustaqil yechish uchun

1- masala.

Determinantni hisoblang.

1) $\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ -4 & -2 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$

Javobi: 1) -32; 2) 3; 3) 5.

2- masala.

Determinantni hisoblang.

1) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 8 & 1 & 3 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$.

Bu determinantlarning har birida biror satr elementlarining bu satrga parallel boshqa satrning mos elementlariga mos keluvchi algebraik to‘ldiruvchilariga ko‘paytmalarning yig‘indisi 0 ga tengligini tekshiring.

Javobi: 1) 120; 2) -236; 3) 15

Ikki noma’lumli ikki chiziqli tenglamalar sistemasi

Ikki noma’lumli ikki chiziqli tenglamalar sistemasi quyidagi ko‘rinishga ega:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases} \qquad (10,4)$$

Bu sistemaning determinanti deb noma’lumlar oldidagi koeffitsientlardan tuzilgan determinantga aytiladi.

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \qquad (10.5)$$

1.Agar $D \neq 0$ bo‘lsa u holda (10.4) sistema yagona yechimga ega bo‘lib, bu yechim quyidagi formulalar yordamida topiladi:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad (10.6).$$

Bu holda (10.4) sistema birgalikda deyiladi. (10.6) formuladagi kasrning suratidagi determinantlarni mos ravishda D_x va D_y deb belgilaymiz. Shunday qilib, (10.4) sistemaning yechimi maxraji sistemaning determinantiga teng, surati esa sistema determinantidan aniqlanayotgan noma'lum oldidagi koeffitsientlardan tuzilgan ustunni ozod hadlardan tuzilgan ustun bilan almashtirishdan hosil bo'lgan kasrlarning qiymatlariga teng.

2. Agar sistemaning determinanti $D=0$ bo'lsa, lekin D_x va D_y lardan kamida bittasi noldan farqli bo'lsa, u holda sistema yechimga ega bo'lmaydi. Bu holda sistema birgalikda emas deyiladi.

3. Agar $D = 0$, $D_x = 0$, $D_y = 0$ bir vaqtda bajarilsa, u holda sistemaning bir tenglamasi ikkinchi tenglamaga teng bo'lib, sistema bitta tenglamaga kelib qoladi va bu tenglamaning barcha yechimlari, bir vaqtda ikkinchi tenglamaning ham yechimi bo'ladi. Bu holda sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi va u aniqlanmagan sistema deyiladi.

Uch noma'lumli uchta tenglamalar sistemasi

Uch noma'lumli uchta tenglamalar sistemasi quyidagi ko'rinishga ega:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3. \end{cases} \qquad (10.7)$$

Sistemaning determinanti

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad (10.8)$$

noma'lumlar oldidagi koeffitsientlardan tuzilgan determinantga teng.

1.Agar $D\neq 0$ bo'lsa , u holda (10.7) sistema yagona yechimga ega va ular quyidagi formulalardan topiladi:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1\\ d_2 & b_2 & c_2\\ d_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}},\quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1\\ a_2 & d_2 & c_2\\ a_3 & d_3 & c_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}},\quad z=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1\\ a_2 & b_2 & d_2\\ a_3 & b_3 & d_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}}. \quad (10.9)$$

Bundan shunday xulosa qilamiz: (10.7) sistema noma'lumlari qiymatlari maxrajlari sistemaning determinantiga teng bo'lgan, suratlari sistema determinantidan aniqlanayotgan noma'lum oldidagi koeffitsientlardan tuzilgan ustunni ozod hadlardan tuzilgan ustun bilan almashtirishdan hosil bo'lgan determinant bo'lgan kasrlarning qiymatlariga teng. (10.9) tengliklardagi kasrlarning suratida turgan determinantlarni mos ravishda D_x, D_y, D_z lar bilan belgilaymiz.

2. Agar $D=0$ bo'lsa, lekin hech bo'lmaganda uning biror minori va D_x, D_y, D_z lardan hech bo'lmaganda birortasi nolga teng bo'lmasa,u holda (10.7) sistema yechimga ega bo'lmaydi. Bu holda sistema birgalikda emas deyiladi.

3. Agar $D=D_x=D_y=D_z=0$ bo'lsa va hech bo'lmaganda D ning biror ikkinchi tartibli minori noldan farqli bo'lsa, u holda (10.7) sistemaning bir tenglamasi qolgan ikki tenglamasiga teng kuchli bo'ladi va (10.7) sistema ikki tenglamalar sistemasiga kelib qoladi. Bu ikki tenglamalar sistemasining ixtiyoriy yechimlari uchinchi tenglamaning ham yechimi bo'ladi. Bu holda (10.7) tenglamalar sistemasi cheksiz ko'p yechimga ega bo'lib, sistema aniqlanmagan deyiladi.

4. Agar D ning barcha ikkinchi tartibli minorlari nolga teng bo'lib, lekin D_x, D_y, D_z determinantlardan birortasining hech bo'lmaganda bitta ikkinchi tartibli minori noldan farqli bo'lsa, sistema birgalikda emas deyiladi va yechimga ega bo'lmaydi.

5. Agar D, D_x, D_y, D_z determinantlardagi barcha ikkinchi tartibli minorlari nolga teng bo'lib, lekin noma'lumlar oldidagi koeffitsiyentlardan hech bo'lmaganda bittasi koeffitsienti noldan farqli bo'lsa, u holda sistemaning ikki tenglamasi uchinchi tenglamaga teng kuchli bo'ladi va sistema bitta tenglamaga kelib qoladi. Bunday sistema aniqlanmagan deyiladi va cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi.

1-masala. Tenglamalar sistemasini yeching:

$$\begin{cases} x + 2y = 8, \\ 3x - y = 3. \end{cases}$$

Yechish. Avvalo (1.6) dagi determinantlardan D ni hisoblaymiz.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -7$$

$-7 \neq 0$ bo'lgani uchun, berilgan sistema birgalikda va yagona yechimga ega. x va y larni (10.6) formulaga asosan quyidagicha topamiz:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}. \quad D_x = \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -14;$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 2.$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-14}{-7} = 2; \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-21}{-7} = 3.$$

Javobi: x=2 , y=3 .

2 – masala. Tenglamalar sistemasini yeching:

$$\begin{cases} x - y = 3, \\ 3x - 2y = 1. \end{cases}$$

Yechish. Sistemaning determinantini hisoblaymiz:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1$$

$D \neq 0$ bo'lgani uchun sistema birlikda va yagona yechimga ega. Noma'lum x va y lar (10.6) formulaga asosan quyidagicha topiladi:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}}; \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}};$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5; \qquad D_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -8.$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-5}{1} = -5; \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-8}{1} = -8$$

Javobi: $= -5$, $y = -8$.

3– **masala.** Tenglamalar sistemasini yeching:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x + 6y = 7 \end{cases}$$

Yechish. Sistemaning determinantini hisoblaymiz:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$D = 0$ bo‘lgani uchun sistema yoki birgalikda emas yoki aniqlanmagan(cheksiz ko‘p yechimga ega). (10.6) formuladan kasr suratida turgan determinantni hisoblaymiz:

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$$

$D = 0$, va $D_x \neq 0$ bo‘lgani uchun sistema birgalikda emas.

Buning geometrik ma'nosi shundan iboratki, sistemaga kiruvchi tenglamalar ikki parallel to‘g‘ri chiziqlarning tenglamalaridir. Parallel to‘g‘ri chiziqlar kesishmaganliklariga ko‘ra ular umumiy nuqtaga ega emas va bu tenglamalardan tashkil topgan sistema yechimga ega emas. (2x+3y-5=0 va 4x+6y-7=0 to‘g‘ri chiziqlar, mos koordinatalar oldidagi koeffitsiyentlari proporsional bo‘lganligiga ko‘ra o‘zaro paralleldir: 2/4=3/6).

4 – **masala.** Tenglamalar sistemasini yeching:

$$\begin{cases} 3x - 4y = 5, \\ 6x - 8y = 10. \end{cases}$$

Yechish. Sistemaning determinantini hisoblaymiz:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 6 & -8 \end{vmatrix} = 0$$

$D=0$ bo'lgani uchun sistema yoki yechimga ega emas, ya'ni birgalikda emas, yoki aniqlanmagan , ya' ni cheksiz ko'p yechimga ega. D_x va D_y larni hisoblaymiz:

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 10 & -8 \end{vmatrix} = -40 + 40 = 0; \quad D_x = 0 .$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} = 30 - 30 = 0; \quad D_y = 0.$$

Shunday qilib, $D = D_x = D_y = 0$. Bu esa sistemaning aniqlanmaganligini bildiradi. Haqiqatan ham, ikkinchi tenglamaning ikkala tomonini 2 ga bo'lsak birinchi tenglama hosil bo'ladi va ikki tenglamadan tashkil topgan sistema ikki noma'lumli bitta tenglamaga kelib qoladi, ya'ni $3x - 4y = 5$.

Bu tenglama

$$y = \frac{3x-5}{4}$$

formula bilan aniqlanuvchi cheksiz ko'p yechimga ega.

Chunki x ga ixtiyoriy qiymat berib y ning mos qiymatlarini hosil qilamiz.

5 – masala. Tenglamalar sistemasini yeching:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -3, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$$

Yechish. Sistemaning determinantini hisoblaymiz.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 9 ; \quad D \neq 0 .$$

Demak, sistema birgalikda va yagona yechimga ega. (10.9) formulaga ko'ra noma'lumlar quyidagicha topiladi:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}}$$

$$x_3=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 3 & -1\\ 1 & -1 & 3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{vmatrix}} \qquad D_x=\begin{vmatrix}-3 & 2 & -1\\ -1 & 3 & -1\\ 3 & -1 & -1\end{vmatrix}=18$$

$$D_y=\begin{vmatrix}1 & -3 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 3 & -1\end{vmatrix}=-18 \qquad D_z=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & -1\\ 1 & -1 & 3\end{vmatrix}=9$$

Bundan esa: $x_1=\frac{18}{9}=2$; $x_2=\frac{-18}{9}=-2$;

$x_3=\frac{9}{9}=1$.

6 – **masala**. Tenglamalar sistemasini yeching.

$$\begin{cases}3x+y+z=-2,\\ 5x-y-z=10,\\ x-y+5z=-12.\end{cases}$$

Yechish. Avvalo sistemaning determinantini hisoblaymiz:

$$D=\begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\ 5 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 5\end{vmatrix}=-48$$

$D\neq 0$ demak, sistema birgalikda va yagona yechimga ega.

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-2 & 1 & 1\\ 10 & -1 & -1\\ -12 & -1 & 5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\ 5 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 5\end{vmatrix}};\ y=\frac{\begin{vmatrix}3 & -2 & 1\\ 5 & 10 & -1\\ 1 & -12 & 5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\ 5 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 5\end{vmatrix}};$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}3 & 1 & -2\\ 5 & -1 & 10\\ 1 & -1 & -12\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\ 5 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 5\end{vmatrix}}$$

formulalardan noma'lumlarni topamiz:

$$D_x = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 10 & -1 & -1 \\ -12 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -48; \quad D_x = -48.$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 10 & -1 \\ 1 & -12 & 5 \end{vmatrix} = 96; \quad D_y = 96.$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 5 & -1 & 10 \\ 1 & -1 & -12 \end{vmatrix} = 144; \quad D_z = 144.$$

$$x = \frac{-48}{-48} = 1; \ x = 1 \quad y = \frac{96}{-48} = -2; \ y = -2$$

$$z = \frac{144}{-48} = -3; \ z = -3$$

7 – **masala**. Tenglamalar sistemasini yeching:

$$\begin{cases} x + 3y - 4z = 5, \\ 2x - 3y + 6z = 11, \\ 8x - 3y + 10z = 21. \end{cases}$$

Yechish. Sistemaning determinantini hisoblaymiz:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & -3 & 6 \\ 8 & -3 & 10 \end{vmatrix} = 0.$$

Demak, sistemaning determinanti nolga teng. Chapdan yuqori burchakda turgan minor

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 6 = -9 \neq 0.$$

Bu narsa determinantning uchinchi satri dastlabki ikki satrining chiziqli kombinatsiyasi ekanligini ko‘rsatadi. Haqiqatan ham, birinchi qatorni 2 ga, ikkinchi qatorni 3 ga ko‘paytirib, so‘ng ularni qo‘shsak, uchinchi satr kelib chiqadi. Endi D_x, D_y, D_z larni hisoblaymiz. Agar ulardan hech bo‘lmaganda bittasi noldan farqli bo‘lsa, u holda sistema birgalikda emas va u yechumga ega emas.

$$D_X = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -4 \\ 11 & -3 & 6 \\ 21 & -3 & 10 \end{vmatrix} = -132.$$

Shunday qilib, sistema yechimga ega emas. Agar birinchi tenglamaning chap qismini 2ga ko'paytirsak, ikkinchi tenglamaning chap qismini 3ga ko'paytirsak va ularni qo'shsak, u holda uchinchi tenglamaning o'ng qismi kelib chiqadi:

$$2(x+3y-4z)+3(2x-3y+6z)=8x-3y+10z\,.$$

Bundan esa uchinchi tenglamaning chap qismi birinchi va ikkinchi tenglamalarning chap qismlarining chiziqli kombinatsiyasidan iboratligini ko'rsatadi. Lekin birinchi tenglamaning o'ng qismini 2 ga, ikkinchi tenglamaning o'ng qismini 3 ga ko'paytirib, ularni qo'shsak $2*5+3*11=43$ hosil bo'ladi. Uchinchi tenglamaning o'ng qismi esa 43ga emas, 21 ga teng bo'lib, bu qarama-qarshilik sistema birgalikda emasligini bildiradi.

Javobi: sistema birgalikda emas.

8 – masala. Tenglamalar sistemasini yeching:

$$\begin{cases} x_1+3x_2-x_3=0, \\ 2x_1-x_2+3x_3=1, \\ 7x_1+7x_2+3x_3=2. \end{cases}$$

Yechish. Avvalo sistemaning determinantini hisoblaymiz.

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 7 & 7 & 3 \end{vmatrix}=0$$

Bu determinantning quyidagi minori $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-7\neq 0$.

Bundan esa D determinantning bir satri, qolgan ikki satrining chiziqli kombinatsiyasidan iboratligini bildiradi (agar birinchi satrni 3ga ko'paytirib, ikkinchi satrni 2ga ko'paytirib, ularni qo'shsak, uchinchi satr hosil bo'ladi). Endi D_x, D_y, D_z larni hisoblaymiz va $D_x=D_y=D_z=0$ ligini aniqlaymiz. Shunday qilib $D=D_x=D_y=D_z=0$. Barcha determinantlar nolga teng bo'lib, Δ minorning noldan farqliligiga ko'ra, sistemaning bir tenglamasi qolgan ikkitasining chiziqli kombinatsiyasiga tengligi va sistema aniqlanmaganligi,ya'ni cheksiz ko'p yechimga ega ekanligi kelib chiqadi. Haqiqatan ham, birinchi tenglamani 3ga ikkinchisini 2 ga ko'paytirib qo'shsak uchinchi tenglama kelib chiqadi. Bundan shunday xulosa qilamizki, birinchi va ikkinchi tenglamalardan tuzilgan sistemaning yechimi uchinchi tenglamaning ham yechimi bo'ladi. Demak, berilgan sistema quyidagi uch noma'lumni ikki tenglamalar sistemasiga kelib qoladi.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases} \qquad (*)$$

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ ligidan, bu sistema x_1 va x_2 noma'lumlarga nisbatan yechimga ega. (*) sistemani quyidagicha yozib olamiz:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = x_3, \\ 2x_1 - x_2 = 1 - 3x_3. \end{cases}$$

Endi bizga ma'lum formulalarga ko'ra

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} x_3 & 3 \\ 1 - 3x_3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} \; ; \; x_1 = \frac{3 - 8x_3}{7} \; ;$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_3 \\ 2 & 1 - 3x_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} \; ; \; x_2 = \frac{5x_3 - 1}{7}$$

larni hosil qilamiz. x_3 ga qiymatlar berib, unga mos keluvchi x_1 va x_2 larning qiymatlarini hosil qilamiz. Demak, berilgan sistema cheksiz ko'p yechimlarga ega.

9 – masala. Tenglamalar sistemasini yeching.

$$\begin{cases} x - 2y + z = 3, \\ 2x - 4y + 2z = 5, \\ 3x - 6y + 3z = 9. \end{cases}$$

Yechish. Sistemaning determinantini hisoblaymiz:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & -6 & 3 \end{vmatrix} = 0 \,.$$

Bu determinantning birinchi ustuni elementlari, uchinchi ustun elementlariga mos ravishda teng bo'lgani uchun bu determinantni hisoblamasdan, uning nolga tengligini, determinantlar xossalariga ko'ra topamiz. D determinantning minorlarini tekshiramiz:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 0\,; \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0\,; \qquad \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Bulardan esa birinchi va ikkinchi tenglamalardagi noma'ylumlar oldidagi koeffitsientlar mos ravishda proporsionaldir.Undan tashqari

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 0\,, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0\,, \qquad \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Bunda esa birinchi va uchinchi tenglamalardagi noma'lumlar oldidagi mos koeffitsiyentlar ham mos ravishda proporsionaldir:

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & -4 & 2 \\ 9 & -6 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

D_x determenantning $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ minori noldan farqli. Shunday qilib, sistemaning determinant D va uning barcha minorlari nolga teng, noma'lumlar oldidagi koeffitsientlardan biri nolga teng emas, undan tashqari shuni ko'rdikki $D_x = 0$, lekin uning minori Δ noldan farqli. Bundan esa sistema birgalikda emasligi (qarama-qarshiligi) kelib chiqadi, demak, sistema yechimga ega emas. Agar biz ikkinchi tenglama noma'lumlari oldidagi koeffitsientlar birinchi tenglama noma'lumlari oldidagi koeffitsiyentlarini 2 ga ko'paytirishdan hosil bo'lishini, lekin ikkinchi tenglama ozod hadi, birinchi tenglama ozod hadini 2 ga ko'paytirishdan hosil bo'lmasligini ko'rganimizda, bu hisoblashlarni bajarmasak ham bo'lar edi. Bu qarama-qarshilik sistemaning birgalikda emasligini ko'rsatadi.

10 – masala. Tenglamalar sistemasini yeching:

$$\begin{cases} x - 4y + 3z = 5, \\ 2x - 8y + 6z = 10, \\ 3x - 12y + 9z = 15. \end{cases}$$

Yechish. Sistemaning determinantini hisoblaymiz:

$$D=\begin{vmatrix}1 & -4 & 3\\ 2 & -8 & 6\\ 3 & -12 & 9\end{vmatrix}=0$$

Chunki birinchi va ikkinchi ustunlar mos elementlari proporsionaldir:

$$D_x=\begin{vmatrix}5 & -4 & 3\\ 10 & -8 & 6\\ 15 & -12 & 9\end{vmatrix}=0$$

Chunki birinchi va ikkinchi satrlarning mos elementlari proporsionaldir:

$$D_y=\begin{vmatrix}1 & 5 & 3\\ 2 & 10 & 6\\ 3 & 15 & 9\end{vmatrix}=0$$

Chunki birinchi ustunning elementlari mos ravishda ikkinchi va uchinchi ustun elementlariga proporsionaldir. Xuddi shunday ko'rsatamizki,

$$D_z=\begin{vmatrix}1 & -4 & 5\\ 2 & -8 & 10\\ 3 & -12 & 15\end{vmatrix}=0\,.$$

Osongina ko'rsatish mumkinki, $D, D_x, D_y D_z$ determinantlarning barcha minorlari nolga teng, va noma'lumlar oldidagi koeffitsientlardan biri noldan farqli bo'lganligi uchun, sistema aniqlangan emas va cheksiz ko'p yechimga ega. Osongina ko'rish mumkinki. ikkinchi va uchinchi tenglamalar birinchi tenglamani mos ravishda 2ga va 3ga ko'paytirishdan hosil bo'ladi, ya'ni ikkinchi va uchinchi tenglamalar birinchi tenglamaga teng kuchlidir, shuning uchun birinchi tenglama yechimlari ikkinchi va uchinchi tenglamalarni ham qanoatlantiradi. Demak, berilgan sistema bitta birinchi tenglamaga teng kuchli:

$$x-4y+3z=5.$$

Buning yechimi: $x=5+4y-3z$. y va z larga ixtiyoriy qiymatlar berib, ularga mos keluvchi x ning qiymatlarini hosil qilamiz:

$$y = c_1 \ , \ z = c_2 \ , \ x = 5 + 4c_1 - 3c_2.$$

Demak, berilgan sistema cheksiz ko‘p yechimlarga ega.

Mustaqil yechish uchun

1 – **masala**. Tenglamalar sistemasini yeching.

$$\begin{cases} x + 3y = -2, \\ 3x - y = 7. \end{cases}$$

Javobi: $x = 1{,}9$; $y = -1{,}3$.

2 – **masala**. Tenglamalar sistemalarini yeching:

$1)\begin{cases} x + 4y = 12, \\ 3x - 2y = -6. \end{cases}$; $2)\begin{cases} 13x - 12y = -9, \\ 2x + 3y = 18. \end{cases}$; $3)\begin{cases} 3x + 5y = 12, \\ 2x + 7y = 19. \end{cases}$

Javobi: *1)* $x = 0, y = 3$. *2)* $x = 3, y = 4$. *3)* $x = -1, y = 3$.

3 – **masala.** Tenglamalar sistemalarini yeching:

$1)\begin{cases} 15x - y = 14, \\ 12x + 13y = 25. \end{cases}$; $2)\begin{cases} 3x - 5y = 1, \\ 6x - 10y = 5. \end{cases}$; $3)\begin{cases} 2x + 3y = 17, \\ 4x + 6y = 34. \end{cases}$

Javobi: 1) $x=y=1$. 2) sistemalar birgalikda emas. 3) sistema aniqlanmagan.

4 – **masala.** Tenglamalar sistemasini yeching.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_x = 0, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 13, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -15. \end{cases}$$

Javobi: $x_1 = -1$. $x_2 = -2$. $x_3 = -4$.

5 – **masala**. Tenglamalar sistemasini yeching:

$1)\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 13, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -10, \\ x_x \qquad\qquad + x_3 = 0. \end{cases}$ $2)\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -4, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = -1, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -7. \end{cases}$

$3)\begin{cases} 2x_1 + x_3 = 6, \\ 2x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 - 4x_2 = -2. \end{cases}$

Javobi: *1)* $x_1 = 1$; $x_2 = 3$; $x_3 = -1$.

2) $x_1 = -1$; $x_2 = 3$; $x_3 = 1$.

3) $x_1 = x_2 = x_3 = 2$.

6 – **masala.** Tenglamalar sistemasini yeching:

$$\begin{cases} x + y - 3z = 7, \\ 3x - y + 2z = 4, \\ 7x - y + z = 17. \end{cases}$$

Javobi: sistema birgalikda emas va yechimga ega emas.

7 – **masala**. Tenglamalar sistemalarini yeching.

$$1)\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 13x_1 + 2x_2 + x_3 = 13. \end{cases} ; \quad 2)\begin{cases} x + 3y - 4z = 3, \\ 7y - 7z = 1, \\ 2x - y - z = 5. \end{cases}$$

Javobi: 1) sistema aniqlanmagan

$$x_1 = \frac{5-x_3}{5}; \quad x_2 = \frac{4}{5}x_3$$

2) sistema aniqlanmagan

$$x_1 = \frac{18+7z}{7}; \quad x_2 = \frac{1+7z}{7}.$$

8– **masala**. Tenglamalar sistemalarini yeching.

$$1)\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -7, \\ x_1 + x_2 + x_3 = -4, \\ 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 11. \end{cases} ; \quad 2)\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 11, \\ 7x_1 - 3x_2 - x_3 = 17. \\ 16x_1 - 11x_2 + 2x_3 = 20. \end{cases}$$

$$3)\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -4, \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 22, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2. \end{cases} ; \quad 4)\begin{cases} 2x + y - z = 11, \\ 3x + 2y - 4z = 15, \\ 4x + 3y - 7z = 19. \end{cases} ;$$

$$5)\begin{cases} 2x + 3y - 5z = 4, \\ 4x + 6y - 10z = 8, \\ 8x + 12y - 20z = 18. \end{cases}.$$

Javobi: 1) $x_1 = 1$; $x_2 = -2$; $x_3 = -3$. 2) sistema birgalikda emas. 3) $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$.

4) sistema aniqlanmagan: $x = 7 - 2z$; $y = -3 + 5z$.

5) sistema aniqlanmagan: $x = 2 - \frac{3}{2}y + \frac{5}{2}z$.

Matritsalar haqida tushuncha va ular ustida amallar. Teskari matritsa va chiziqli tenglamalar sistemasini matritsa usulida yechish

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

jadval matritsa deyiladi.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

lar mos ravishda 2- va 3- tartibli kvadrat matritsa deyiladi. Ko‘p ta’riflarni umumlashtirish uchun ularni 3- tartibli matritsa uchun beriladi. Ularni 2- tartibli matritsa uchun qo‘llash qiyinchilik tug‘dirmaydi. Agar kvadrat matritsaning elementlari $a_{mn}=a_{nm}$ shartni qanoatlantirsa, matritsa simmetrik deyiladi.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

matritsalar teng bo‘lishi uchun $a_{mn}=b_{mn}$ shartning bajarilishi zarur va yetarlidir. A, B matritsalar yig‘indisi quyidagicha aniqlanadi:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix}.$$

A matritsani m soniga ko'paytirish uchun uning har bir elementini m ga ko'paytiramiz:

$$m\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ma_{11} & ma_{12} & ma_{13} \\ ma_{21} & ma_{22} & ma_{23} \\ ma_{31} & ma_{32} & ma_{33} \end{pmatrix}.$$

A, B matritsalar ko'paytmasi quyidagicha aniqlanadi:

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{3} a_{1j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{3} a_{1j}b_{j2} & \sum_{j=1}^{3} a_{1j}b_{j3} \\ \sum_{j=1}^{3} a_{2j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{3} a_{2j}b_{j2} & \sum_{j=1}^{3} a_{2j}b_{j3} \\ \sum_{j=1}^{3} a_{3j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{3} a_{3j}b_{j2} & \sum_{j=1}^{3} a_{3j}b_{j3} \end{pmatrix}$$

Ko'paytma matritsaning i-nchi satr va k-nchi ustunda turuvchi elementi, A matritsa i-nchi satridagi elementlarini B matritsa k-nchi ustunining mos elementlariga ko'paytmalari yig'indisiga teng.

Ikki matritsaning ko'paytmasi umuman o'rin almashtirish xossasiga bo'ysinmaydi. Ikki matritsa ko'paytmasiining determinanti bu matritsalar determinantlari ko'paytmalariga teng. Hamma elementlari nollardan iborat bo'lgan matritsa nol- matritsa deyiladi:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=0$$

Bu matritsa uchun: $A+0=A$.

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ birlik matritsa deyiladi.

Bu matritsani A ga chapdan va o‘ngdan ko‘paytmasi A ga teng: $EA=EA=A$. Agar $AB=BA=E$ bo‘lsa, B matritsa A-ga teskari matritsa deyiladi. A ga teskari matritsan A^{-1} bilan belgilanadi: $B=A^{-1}$. Agar

$$D_A = det|A| = D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

bo‘lsa, A matritsa teskari matritsaga ega. Teskari matritsa quyidagicha topiladi:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{D_A} & \frac{A_{21}}{D_A} & \frac{A_{31}}{D_A} \\ \frac{A_{12}}{D_A} & \frac{A_{22}}{D_A} & \frac{A_{32}}{D_A} \\ \frac{A_{13}}{D_A} & \frac{A_{23}}{D_A} & \frac{A_{33}}{D_A} \end{pmatrix}$$

A matritsa determinantidagi m – satr va n- ustunni o‘chirishdan hosil bo‘lgan ikkinchi tartibli determinant (minor) bilan $(-1)^{m+n}$ ifoda ko‘paytmasi A matritsadagi a_{mn} elementning algebraik to‘ldiruvchisi deyiladi va A_{mn} .orqali belgilanadi.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

- ustun matritsa deyiladi.

AX ko‘paytma quyidagicha aniqlanadi:

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 & a_{12}x_2 & a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 & a_{22}x_2 & a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 & a_{32}x_2 & a_{33}x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

sistemani $AX=B$ ko'rinishda yozish mumkin, bu yerda

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Bu sistemaning yechimi $X = A^{-1} \cdot B \quad (D_A \neq 0)$ bo'ladi.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

matritsaning xarakterisitik tenglamasi

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Bu tenglamaning ildizlari $\lambda_1, \ \lambda_2, \ \lambda_3$ lar matritsaning xos sonlari deyiladi. Agar boshlang'ich matritsa simmetrik bo'lsa, $\lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3$ lar haqiqiy bo'ladi:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\xi_1 + a_{12}\xi_2 + a_{13}\xi_3 = 0 \\ a_{21}\xi_1 + (a_{22} - \lambda)\xi_2 + a_{23}\xi_3 = 0 \\ a_{31}\xi_1 + a_{32}\xi_2 + (a_{33} - \lambda)\xi_3 = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi, (undagi λ xos son λ_1 , λ_2 , λ_3 lardan birini qabul qiladi va shuning uchun sistemaning determinanti nolga teng bo'ladi), λ xos songa mos uchta (ξ_1, ξ_2, ξ_3) sonni aniqlaydi. Bu uchta sonlar to'plami (ξ_1, ξ_2, ξ_3) o'zgarmas ko‘paytuvchi aniqligida noldan farqli $\bar{r} = \xi_1\bar{i} + \xi_2\bar{j} + \xi_3\bar{k}$ vektorni aniqlaydi va matritsaning λ xos songa mos xos vektori deb ataladi.

1-masala. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matritsalar berilgan. $A+B$ ni toping.

Yechish.

$$A + B = \begin{pmatrix} 3+1 & 5+2 & 7+4 \\ 2+2 & -1+3 & 0-2 \\ 4-1 & 3+0 & 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 11 \\ 4 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

2-masala.. Agar $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ bo‘lsa, $2A+5B$ matritsani toping.

Yechish.

$$2A = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}, \quad 5B = \begin{pmatrix} 10 & 15 \\ 5 & -10 \end{pmatrix}, \quad 2A+5B = \begin{pmatrix} 16 & 25 \\ 13 & -8 \end{pmatrix}.$$

3-masala. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ bo‘lsa, AB va BA matritsalar ko‘paytmasini toping.

Yechish.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 3\cdot 1 + 1\cdot 3 & 1\cdot 1 + 3\cdot(-1) + 1\cdot 2 & 1\cdot 0 + 3\cdot 2 + 1\cdot 1 \\ 2\cdot 2 + 0\cdot 1 + 4\cdot 3 & 2\cdot 1 + 0\cdot(-1) + 4\cdot 2 & 2\cdot 0 + 0\cdot 2 + 4\cdot 1 \\ 1\cdot 2 + 2\cdot 1 + 3\cdot 3 & 1\cdot 1 + 2\cdot(-1) + 3\cdot 2 & 1\cdot 0 + 2\cdot 2 + 3\cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 0 & 7 \\ 16 & 10 & 4 \\ 13 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}2\cdot 1+1\cdot 2+0\cdot 1 & 2\cdot 3+1\cdot 0+0\cdot 2 & 2\cdot 1+1\cdot 4+0\cdot 3\\ 1\cdot 1-1\cdot 2+2\cdot 1 & 1\cdot 3-1\cdot 0+2\cdot 2 & 1\cdot 1-1\cdot 4+2\cdot 3\\ 3\cdot 1+2\cdot 2+1\cdot 1 & 3\cdot 3+2\cdot 0+1\cdot 2 & 3\cdot 1+2\cdot 4+1\cdot 3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}4 & 6 & 6\\ 1 & 7 & 3\\ 8 & 11 & 14\end{pmatrix}.$$

4-masala. Agar $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$ bo'lsa, A^3 ni toping.

Yechish.

$$A^2=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9+2 & 6+8\\ 3+4 & 2+16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & 14\\ 7 & 18\end{pmatrix}.$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}11 & 14\\ 7 & 18\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}33+14 & 22+56\\ 21+18 & 14+72\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}47 & 48\\ 39 & 86\end{pmatrix}$$

5-masala. Agar E - uchinchi tartibli birlik matritsa bo'lib,

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 1\\ 4 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

bo'lsa $2A^2+3A+5E$ matritsani toping.

Yechish.

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 4 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 1\\ 4 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 6 & 5\\ 8 & 11 & 6\\ 9 & 8 & 10\end{pmatrix},$$

$$2A^2=\begin{pmatrix}20 & 12 & 10\\ 15 & 22 & 12\\ 18 & 16 & 20\end{pmatrix},\qquad 3A=\begin{pmatrix}3 & 3 & 6\\ 3 & 9 & 3\\ 12 & 3 & 3\end{pmatrix}$$

$$5\cdot E=5\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{pmatrix};\quad 2\cdot A^2+3\cdot A+5\cdot E=\begin{pmatrix}28&15&16\\19&36&15\\30&19&28\end{pmatrix}$$

6-masala.

$A=\begin{pmatrix}3&2&2\\1&3&1\\5&3&4\end{pmatrix}$ matritsa berilgan, uning teskarisini toping.

Yechish. A matritsaning determinantini hisoblaymiz:

$$D_A=\begin{vmatrix}3&2&2\\1&3&1\\5&3&4\end{vmatrix}=27+2-24=5.$$

Bu determinant elementlarining algebraik to'ldiruvchilarini topamiz.

$$A_{11}=\begin{vmatrix}3&1\\3&4\end{vmatrix}=9;\quad A_{21}=\begin{vmatrix}2&2\\3&4\end{vmatrix}=-2;\quad A_{31}=\begin{vmatrix}2&2\\3&1\end{vmatrix}=-4;$$

$$A_{12}=\begin{vmatrix}1&1\\5&4\end{vmatrix}=1;\quad A_{22}=\begin{vmatrix}3&2\\5&4\end{vmatrix}=2;\quad A_{32}=\begin{vmatrix}3&2\\1&1\end{vmatrix}=-1;$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}1&3\\5&3\end{vmatrix}=-12;\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}3&2\\5&3\end{vmatrix}=1;\quad A_{33}=\begin{vmatrix}3&2\\1&3\end{vmatrix}=7;$$

Demak,
$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{9}{5}&-\frac{2}{5},&-\frac{4}{5}\\ \frac{1}{5}&\frac{2}{5}&-\frac{1}{5}\\ -\frac{12}{5}&\frac{1}{5}&\frac{7}{5}\end{pmatrix}.$$

7-masala. Ushbu

$$\begin{cases}2x+3y+2z=9,\\ x+2y-3z=14,\\ 3x+4y+z=16\end{cases}$$

tenglamalar sistemasini matritsa ko'rinishidagi tenglamaga keltirib yeching.

Yechish. Sistemani $AX=B$ ko'rinishda yozib olamiz, bu yerda

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Matritsa ko'rinishidagi tenglamaning yechimi $X=A^{-1}B$ bo'ladi. A ni topamiz, buning uchun Aning determinantini hisoblaymiz:

$$D_A=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}=28+30-4=-6.$$

Bu determinant elementlarining algebraik tuldiruvchilarini topamiz:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=14; \qquad A_{21}=-\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=5; \qquad A_{31}=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=-13;$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-10; \qquad A_{22}=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-4; \qquad A_{32}=-\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=8;$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=-2; \qquad A_{23}=-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=1; \qquad A_{33}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1;$$

Shunday qilib,

$$A^{-1}=-\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix} 14 & 5, & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2, & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bundan

$$X=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 14 & 5, & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2, & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 126+ & 70 & -208 \\ -90 & -56 & +128 \\ 18 & +14 & +16 \end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -12 \\ -18 \\ 12 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

8-masala. $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ matritsa berilgan. Uning xos sonlari va xos vektorlari topilsin.

Yechish. Xarakteristik tenglamani tuzamiz:

$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$ yoki $(5-\lambda)(3-\lambda)-8=0$ ya'ni $\lambda^2 - 8\lambda + 7 = 0$,

demak, xos sonlar $\lambda_1 = 1$ va $\lambda_2 = 7$ larga teng.

Birinchi xarakteristik songa mos xos vektorni

$$(5-\lambda_1)\cdot\xi_1' + 2\cdot\xi_2' = 0,$$
$$4\cdot\xi_1' + (3-\lambda_1)\cdot\xi_2' = 0$$

tenglamalar sistemasidan topamiz. $\lambda_1 = 1$ bo'lgani uchun ξ_1' va ξ_2' larni $2\xi_1' + \xi_2' = 0$ bog'lanishdan topamiz. $\xi_1' = \alpha$ ($\alpha \neq 0$ - ixtiyoriy son) deb olib, $\xi_2' = -2\alpha$ ni hosil qilamiz. $\lambda_1 = 1$ ga mos vektor $\vec{r}_1 = \alpha\cdot\vec{i} - 2\alpha\cdot\vec{j}$ bo'ladi. Ikkinchi xos vektorni topamiz:

$$\begin{cases} (5-\lambda_2)\xi_1'' + 2\xi_2'' = 0, \\ 4\xi_1'' + (3-\lambda_2)\xi_2'' = 0 \end{cases}$$

sistemada $\lambda_2 = 7$ ni qo'yib $\xi_1'' - \xi_2'' = 0$ tenglikka kelamiz, ya'ni $\xi_1'' = \xi_2'' = \beta \neq 0$. Ikkinchi xos xarakteristik songa mos xos vektor $\vec{r}_2 = \beta\cdot\vec{i} + \beta\cdot\vec{j}$ bo'ladi.

9-masala.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

matritsaning xos sonlari va xos vektorlarni toping.

Yechish. Xarakteristik tenglamani tuzamiz:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

yoki

$$(3-\lambda)[(5-\lambda)(3-\lambda)-1]+(-3+\lambda+1)+(1-5+\lambda)=0$$

Elementar almashtirishlardan so'ng

$$(3-\lambda)\cdot\left(\lambda^2-8\lambda+12\right)=0$$

ga ega bo'lamiz, bundan $\lambda_1=2$, $\lambda_2=3$, $\lambda_3=6$.
$\lambda_1=2$ xos songa mos xos vektorni topamiz:

$$\begin{cases} \xi_1' - \xi_2' + \xi_3' = 0, \\ -\xi_1' + 3\xi_2' - \xi_3' = 0, \\ \xi_1' - \xi_2' + \xi_3' = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasidan $\xi_2'=0$, $\xi_3'=-\xi_1'$ larni topamiz. (birinchi va uchinchi tenglamalar bir xil bo'lgani uchun ulardan birini tashlab yuboramiz). $\xi_1'=\alpha$ desak, $\xi_2'=0$, $\xi_3'=-\alpha$ va $\vec{r}_1=\alpha\cdot\vec{i}-\alpha\cdot\vec{k}$. Endi $\lambda_2=3$ qiymatga mos xos vektorni topamiz:

$$\begin{cases} -\zeta_2'' + \zeta_3'' = 0, \\ \zeta_1'' + 2\zeta_2'' - \zeta_3'' = 0, \\ \zeta_1'' - \zeta_2'' = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini hosil qilamiz (bitta tenglama qolgan ikkisining natijasi). Bundan $\zeta_1''=\zeta_2''=\zeta_3''=\beta$ va $\vec{r}_2=\beta\cdot\vec{i}+\beta\cdot\vec{j}+\beta\cdot\vec{k}$.

$\lambda_3=6$ qiymatga mos xos vektorni topamiz:

$$\begin{cases} -3\xi_1''' - \xi_2''' + \xi_3''' = 0, \\ -\xi_1''' - \xi_2''' - \xi_3''' = 0, \\ \xi_1''' - \xi_2''' - 3\xi_3''' = 0 \end{cases}$$

(bitta tenglama qolgan ikkitasining natijasi). Bu sistemani echib, quyidagilarni topamiz: $\xi_1''' = \gamma,$ $\xi_2''' = -2\gamma$ $\xi_3''' = \gamma$ va

$$\vec{r}_3 = \gamma \cdot \vec{i} - 2\gamma \cdot \vec{j} + \gamma \cdot \vec{k}.$$

Shunday qilib, berilgan matritsaning xos vektorlari

$$\vec{r}_1 = \alpha \cdot \left(\vec{i} - \vec{k}\right) \quad , \quad \vec{r}_2 = \beta \cdot \left(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right) \quad , \quad \vec{r}_3 = \gamma \cdot \left(\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}\right)$$

Bu yerda α, β, γ lar ixtiyoriy noldan farqli sonlar.

Mustaqil yechish uchun

1-masala.

$A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 7 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ matritsa berilgan. Birlik matritsani hosil qilish uchun A ga qanday B matritsani qo‘shish kerak.

2-masala.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ matritsa berilgan. $A^2 + A + E$ matritsalar yig‘indisini toping.

3-masala.

$A = \begin{pmatrix} 10 & 20 & -30 \\ 0 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ matritsa berilgan. Teskari matritsani toping.

4-masala.

$$\begin{cases} 3x + 4y = 11 \\ 5y + 6z = 28 \\ x + 2z = 7 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi berilgan, uning matritsa ko‘rinishdagi tenglamasini yozib yeching.

11-§. Vektorlar algebrasi

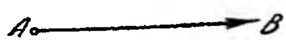
Asosiy ma'lumotlar.

Vektorlar algebrasi mexanika, elektrotexnika va boshqa texnik fanlarda muhim rol o'ynaydi. Ikki xil kattalik bor: skalar va vektor kattalik.

1. Agar biror kattalik o'zining sonli qiymati orqali to'liq aniqlangan bo'lsa, bunday kattalik *skalar kattalik* deyiladi. Bularga massa, zichlik, bajarilgan ish va issiqlik darajalari misol bo'ladi. Skalarlar algebraik kattalik bo'lib, ular ustida ixtiyoriy algebraik amallarni bajarish mumkin : qo'shish, ayirish, ko'paytirish, bo'lish, darajaga ko'tarish va hokazolar.

2. Agar biror kattalikni aniqlash uchun, ya'ni to'liq xarakterlash uchun, uning sonli qiymatidan tashqari, yo'nalishini ham bilish kerak bo'lsa, bunday kattaliklar *vektor kattaliklar* deb ataladi, yoki oddiygina vektorlar deyiladi. Bularga tezlik, tezlanish, kuchlar misol bo'la oladi. Vektorning uzunligi uning sonli qiymati bo'lib, u vektorning moduli yoki absolyut qiymati deb ataladi.

3. Vektorlar chizmada kesma bilan belgilanib, unga yo'nalishini ko'rsatuvchi strelka qo'yiladi (60-rasm) .



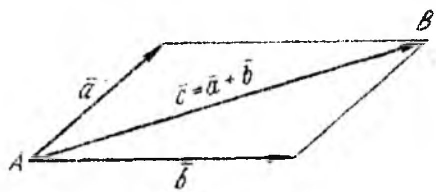
60-rasm.

Biz vektorlarni $\vec{a}$ ko'rinishda (ustida strelka bilan), ularning modullarini a ko'rinishda belgilaymiz. Ko'p hollarda $\vec{a}$ vektorining moduli $|\vec{a}|$ orqali belgilanadi.Xuddi shuningdek, vektorlarni $\overrightarrow{AB}$ ko'rinishida ham belgilaymiz, bunda A –vektorining boshlangich nuqtasi, B – esa vektorning oxirgi nuqtasini belgilaydi. Modul esa AB orqali, yoki $|\overrightarrow{AB}|$ orqali belgilanadi.

4. Agar vektorning moduli nolga teng bo'lsa, u nol vektor deb ataladi.

5. Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar parallel, yo'nalishlari bir xil, modullari teng bo'lsa, ular teng vektorlar deyiladi.Modullari teng bo'lgan va parallel to'g'ri chiziqlarda yotgan ikki vektor qarama-qarshi tomonlarga yo'nalgan bo'lsa, ular qarama-qarshi vektorlar deb ataladi. $\vec{a}$ vektorga qarama-qarshi vektor $-\vec{a}$ orqali belgilanadi.

6. Ikki vektorning yig'indisi parallelogramm qoidasi bilan aniqlanadi: boshlang'ich nuqtalari bir nuqtaga keltirilgan ikki vektor, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ larni yg'indisi, shunday $\vec{c}$ vektorga tengki, bu vektor $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga qurilgan parallelogrammning diagonali bilan bir xil uzunlikda va bir xil yo'nalgan bo'ladi (61-rasm).



61-rasm.

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$$

$\vec{c}$ vektorning moduli quyidagi formuladan topiladi:

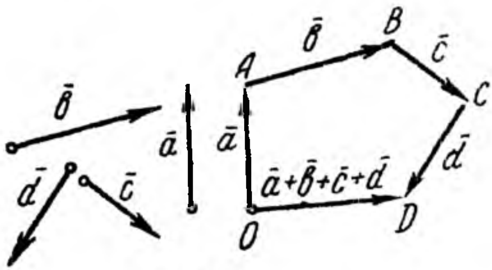
$$C=\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos(\vec{a}\wedge\vec{b})} \qquad (11.1)$$

7. Bir nechta vektorlar yig'indisi, misol uchun $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ va $\vec{d}$ vektorlar yig'indisi quyidagicha quriladi: biror O nuqta olinadi va O nuqtada $\vec{a}$ vektorga teng bo'lgan $\overrightarrow{OA}$ vektor quriladi, A nuqtadan $\vec{b}$ vektorga teng bo'lgan $\overrightarrow{AB}$ vektor quriladi. B nuqtada esa $\vec{c}$ vektorga teng bo'lgan $\overrightarrow{BC}$ vektor quriladi, va nihoyat C nuqtada $\vec{d}$ vektorga teng bo'lgan $\overrightarrow{CD}$ vektor quriladi. Hosil bo'lgan siniq chiziqlarni boshi va oxirini tutashtiruvchi $\overrightarrow{OD}$ vektor $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ va $\vec{d}$ vektorlarning yig'indisiga teng bo'ladi (62-rasm).

$$\overrightarrow{OD} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$$

Shuningdek, ixtiyoriy sondagi vektorlar yig'indisi quriladi.

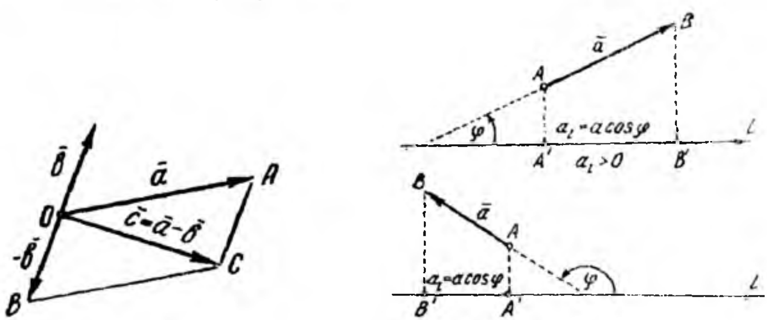
8. Boshlari bir nuqtaga keltirilgan $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning ayirmasi deb shunday $\vec{c}$ vektorga aytiladiki,



62-rasm.

bu vektor boshi $\vec{b}$ vektorning oxirida bo'lib, oxiri $\vec{a}$ vektorning oxirida bo'ladi, yoki $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right) = \vec{c}$ bo'lib, $-\vec{b}$ vektor $\vec{b}$ vektorga parallel, moduli $\vec{b}$ vektorning moduliga teng, lekin yo'nalishi $\vec{b}$ vektorga qarama-qarshidir:

$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right) = \overrightarrow{OC}$ (63-a rasm).



a) b)

63-rasm.

9. $\vec{a}$ vektorni k skalar kattalikka ko'paytirish natijasida shunday

$\vec{b}$ vektor hosil bo'ladiki,moduli $\vec{a}$ vektorning modulini $|k|$ soniga ko'paytmasiga teng, ya'ni $|\vec{b}| = |k||\vec{a}|$. Yo'nalishi esa $k > 0$ bo'lganida $\vec{a}$ vektorning yo'nalishi bilan ustma-ust tushadi, $k < 0$ bo'lganda esa $\vec{a}$ vektorning yo'nalishiga qarama-qarshi bo'ladi.

$$k\vec{a} = \vec{b}, \text{ yoki } \vec{a} = \frac{1}{k}\vec{b}, \ (k \neq 0).$$

10. Parallel to'g'ri chiziqlarda yotuvchi ikki vektor, o'zaro kollinear deb ataladi.

11. Berilgan vektorning birlik yoki ort vektori deb, shu vektor yo'nalishi bilan bir xil yo'nalgan va moduli 1 ga teng bo'lgan vektorga aytiladi.

12. $\vec{a}$ vektorning l o'qiga proyeksiyasi deb shu vektor boshi va oxiri proyeksiyalari A' va B' lar orasidagi yo'naltirilgan $A'B'$ kesmaga aytiladi. Bu uzunlik musbat ishoraga ega bo'ladi, agar $A'B'$ kesmaning yo'nalishi l o'qining yo'nalishi bilan bir xil bo'lsa, manfiy ishoraga ega bo'ladi, agar $A'B'$ning yo'nalishi l o'qining yo'nalishiga qarama-qarshi bo'lsa. Vektorning o'qqa proyeksiyasi skalar kattalik bo'lib, uning uzunligi proyeksiyalanuvchi vektor uzunligi, o'qning musbat yo'nalishi bilan vektor orasidagi burchak kosinusiga ko'paytmasiga teng (63-b rasm). $\vec{a}$ vektorning l o'qiga proyeksiyasini $\text{пр}_l\vec{a}$ bilan l o'qi bilan $\vec{a}$ vektor orasidagi burchakni $(l\,\hat{}\,\vec{a})$ bilan belgilaymiz. Shunday qilib,

$$a_l = \text{пр}_l\vec{a} = |\vec{a}| * cos(l\,\hat{}\,\vec{a}). \qquad (11.2)$$

Agar α, β, va γ lar $\vec{a}$ vektorning OX, OY va OZ koordinata o'qlari bilan mos ravishda tashkil etgan burchaklari bo'lsa, $\vec{a}$ vektorining koordinata o'qlari proyeksiyalari quyidagilarga teng bo'ladi:

$$a_x = |a|cos\alpha,$$
$$a_y = |a|cos\beta, \qquad (11.3)$$
$$a_z = |a|cos\gamma.$$

Bundan keyin koordinatalar sistemasi deganda hamma vaqt to'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasi ko'zda tutiladi. Vektor-ning moduli, uning koordinata o'qlariga proyeksiyalari orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \qquad (11.4)$$

Ya'ni vektorning moduli, uning koordinata o'qlariga proyeksiyalari kvadratlari yig'indisidan olingan arifmetik ildizga teng. Vektor nolga teng deyiladi, agar uning uchta proyeksiyasi nolga teng bo'lsa (bu narsa mexanikada bir nuqtadan chiquvchi kuchlar sistemasining ta'siridagi jism tinchlik holatidaligining yetarli va zaruriy shartini keltirib chiqarishda ishlatiladi). Agar $\vec{a_1}$ va $\vec{a_2}$ vektorlar teng bo'lsa, u holda uning proyeksiyalari ham teng bo'ladi:

$$a_{1x} = a_{2x},\, a_{1y} = a_{2y},\, a_{1z} = a_{2z}. \qquad (11.5)$$

Agar $\vec{a}$ vektorning boshining koordinatalari $A(x_1, y_1, z_1)$ va oxirining koorditalari $B(x_2, y_2, z_2)$ ma'lum bo'lsa, u holda $\vec{a}$ vectorning koordinata o'qlariga bo'lgan proyeksiyalari quyidagi formulalardan aniqlanadi:

$$a_x = x_2 - x_1;\; a_y = y_2 - y_1;\; a_z = z_2 - z_1. \qquad (11.6)$$

Uning moduli esa bu holda quyidagicha aniqlanadi:

$$a = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, \qquad (11.7)$$

Shu narsa ayonki, (11.7) formula bilan $A(x_1, y_1, z_1)$ va $B(x_2, y_2, z_2)$ nuqtalar orasidagi masofani ham hisoblash mumkin.

13. Vektorlar yig'indisining biror o'qqa proyeksiyasi, shu vektorning o'sha o'qqa bo'lgan proyeksiyalarining yg'indisiga teng

$$\vec{a} = \vec{a_1} + \vec{a_2} + \dots + \vec{a_n}. \qquad (11.8)$$

vektor tenglikdan quyidagi uchta skalar tenglik kelib chiqadi:

$$\begin{cases} a_x = a_{1x} + a_{2x} + \dots + a_{nx}, \\ a_y = a_{1y} + a_{2y} + \dots + a_{ny}, \\ a_z = a_{1z} + a_{2z} + \dots + a_{nz}. \end{cases} \qquad (11.9)$$

14. Agar $\vec{i}$, $\vec{j}$ va $\vec{k}$ vektorlar moduli 1 ga teng bo'lib, yo'nalishlari mos ravishda OX, OY va OZ koordinata o'qlari

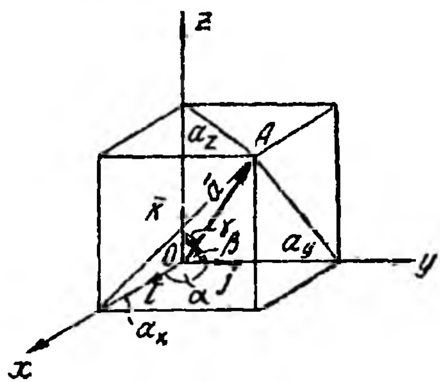
yo'nalishlari bilan ustma-ust tushsa, u holda $\vec{a}$ vektorning uchta koordinata o'qlari bo'yicha yoyilmasi quyidagi formula orqali ifodalanadi :

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \ ,$$

bu yerda: a_x , a_y va a_z lar $\vec{a}$ vektorning mos ravishda OX, OY va OZ o'q-lariga proyeksiyalaridir.$\vec{a}$ vektorning koordinata o'qlariga proyeksiyalari a_x , a_y va a_z kattaliklar, vektorning koor-dinatalari deyiladi va quyidagicha yoziladi: $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$. Agar $\vec{a}$ vektorning boshi koordinatalar boshida bo'lib va uning oxiri A ning koordinatalari x, y va z bo'lsa, u holda uning koordinata o'qlariga proyeksiyalari uning oxirining koordinatalariga teng:

$$a_x = x \, , a_y = y \, , a_z = z \, .$$

Bu holda vektor $\vec{a}$ A nuqtaning radius vektori deb ataladi. Nuqtaning radius vektori $\vec{r}$ bilan belgilanadi (64-rasm).



64-rasm.

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ va $A(x, y, z)$ nuqtaning radius vektori uzunligi quyidagicha hisoblanadi:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \qquad (11.12)$$

15. $\vec{a}$ vektorning OX, OY va OZ koordinatalar o'qlari bilan hosil qilgan burchaklari (11.3) va (11.4) formulalaridan quyidagicha topiladi:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}};$$

$$\cos\beta = \frac{a_y}{a} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}; \qquad (11.13)$$

$$\cos\gamma = \frac{a_z}{a} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.$$

Bu formulalar orqali topiladigan kosinuslar $\vec{a}$ vektorning yo'naltiruvchi kosinuslari deb ataladi. Ular uchun quyidagi formula o'rinli:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \qquad (11.14)$$

Ya'ni, uchta o'zaro perpendikular o'qlar bilan $\vec{a}$ vektor tashkil etgan burchaklarning kosinuslari kvadratlari yig'indisi 1 ga teng. Agar $|\vec{a}| = 1$ bo'lsa, ya'ni $\vec{a}$ vektor odatda $\vec{a}^0$ deb belgilanadigan birlik vektori bo'lsa, u holda uning koordinata o'qlariga bo'lgan proyeksiyalari quyidagi formulalar orqali hisoblanadi:

$$a_x^0 = \cos\alpha;$$

$$a_y^0 = \cos\beta; \qquad (11.15)$$

$$a_z^0 = \cos\gamma.$$

Ya'ni, $\vec{a}^0$ birlik vektorning OX, OY va OZ koordinata o'qlariga bo'lgan proyeksiyalari mos ravishda uning yo'naltiruvchi kosinuslariga teng va quyidagi formula o'rinlidir:

$$\vec{a}^0 = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma. \qquad (11.16)$$

16. Agar $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ va $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ vektorlar berilgan bo'lsa, u holda

$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x)\vec{i} + (a_y \pm b_y)\vec{j} + (a_z \pm b_z)\vec{k}$,

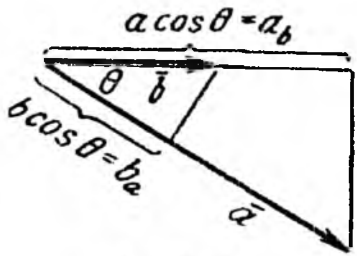
ya'ni

$(\vec{a} \pm \vec{b})_x = a_x \pm b_x$; $(\vec{a} \pm \vec{b})_y = a_y \pm b_y$;$(\vec{a} \pm \vec{b})_z = a_z \pm b_z$.(11.17)

17. Ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning skalar ko'paytmalari deb ularning modullari ko'paytmasini , ular orasidagi burchak kosinusiga ko'paytmasiga aytiladi. Ikki $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar skalar ko'paytmasini $\vec{a} \circ \vec{b}$ orqali belgilaymiz. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchakni θ orqali belgilab, skalar ko'paytma uchun quyidagini olamiz:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = |a|\,|b| \cos\theta \quad (11.18)$$

(11.18) formuladan kelib chiqadiki, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning skalar ko'paytmasi, birining modulini ikkinchisining birinchi vektor yo'nalishiga proyeksiyasiga ko'paytmasiga teng (65-rasm).



65 – rasm.

$$\vec{a} \circ \vec{b} = |a|\, b_a = |b|\, a_b \,. \quad (11.19)$$

Bundan esa:

$$\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a}\circ\vec{b}}{|a|}, \qquad \text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\circ\vec{b}}{|b|}.$$

Ikki o'zaro perpendikular vektorlar skalar ko'paytmasi 0 ga teng, chunki bu holda $\cos(\vec{a}\wedge\vec{b}) = \cos{}^{\pi}/_{2} = 0$. Skalar ko‘paytma, ikki son ko‘paytmasining hossalariga mos hossalarga ega:

$\vec{a}\circ\vec{b} = \vec{a}\circ\vec{b}$ (komutativlik hossasi).

$(\vec{a}+\vec{b}) * \vec{c} = \vec{a}\circ\vec{c} + \vec{b}\circ\vec{c}$ (distrubutivlik hossasi).

Agar ikki $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar koordinatalar o‘qiga bo‘lgan proyeksiyalari orqali berilsa, ya'ni $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ va $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ bo‘lsa, u holda ularning skalar ko‘paytmasi quyidagi formulalardan topiladi:

$$\vec{a}\circ\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \qquad (11.20)$$

ular orasidagi θ burchak esa quyidagi formuladan topiladi:

$$\cos\theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|a| * |b|}. \qquad (11.21)$$

Agar $\vec{a}$ vektorining koordinata o‘qlari bilan tashkil etgan burchaklarini mos ravishda α, β, γ lar orqali belgilasak, $\vec{b}$ vektorning koordinatalar o‘qlari bilan tashkil etgan burchaklarni mos ravishda $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ lar bilan belgilasak, u holda $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi θ burchak quyidagi formula orqali topiladi:

$$\cos 0 = \cos\alpha\cdot\cos\alpha_1 + \cos\beta\cdot\cos\beta_1 + \cos\gamma\cdot\cos\gamma_1. \qquad (11.22)$$

Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar o‘zaro perpendikular bo‘lsa, u holda

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0 \qquad (16.23)$$

yoki

$$\cos\alpha\cdot\cos\alpha_1 + \cos\beta\cdot\cos\beta_1 + \cos\gamma\cdot\cos\gamma_1 = 0. \qquad (11.24)$$

18. Ikki $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning vektor ko‘paytmasi deb shunday $\vec{c}$ vektorga aytiladiki, u quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

1) uning moduli $|\vec{c}| = |a||b|\sin\varphi$ ga teng;

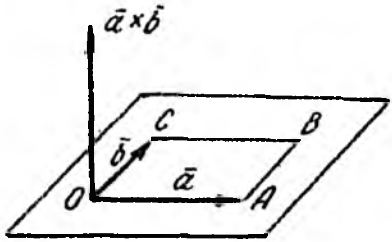
2) $\vec{c}$ vektor ko‘paytirilayotgan $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar yotgan tekislikka perpendikulardir;

3) $\vec{c}$ vektor shunday yo‘nalganki, agar uning oxiridan $\vec{a}$ va $\vec{b}$

vektorlarga qaralsa, birinchisidan ikkinchisiga eng qisqa burilishi soat strelkasiga teskari yo‘nalishda bo‘ladi (66- rasm).

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning vektor ko‘paytmasi $\vec{a} * \vec{b}$ bilan belgilanadi.

$$|\vec{c}| = |\vec{a} * \vec{b}| = absin(\vec{a}\wedge\vec{b}) \qquad (11.25)$$



66 – rasm.

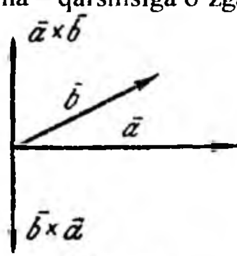
Ya’ni vector ko‘paytmaning moduli bu vektorlarga qurilgan parallelogrammning yuzasiga teng:

$$|\vec{a} * \vec{b}| = S_{OABC} \qquad (11.26).$$

Vektor ko‘paytmaning assosiy hossalari:

1) agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear bo‘lsa, yoki ulardan birortasi nolga teng bo‘lsa, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning vektor ko‘paytmasi nolga teng, ya’ni $\vec{a} * \vec{b} = 0$ bo‘ladi.

2) ko‘paytuvchilarning o‘rni almashtirilganda vektor ko‘paytmaning ishorasi qarama – qarshisiga o‘zgaradi (67 - rasm),



67- rasm.

$$\vec{a} * \vec{b} = -\vec{b} * \vec{a}$$

ya'ni vektor ko'paytma komutativlik hossasiga ega emasdir.

3) $(\vec{a}+\vec{b})*\vec{c}=\vec{a}*\vec{c}+\vec{b}*\vec{c}$ - distributivlik hossasi.

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning vektor ko'paytmasini ularning koordinatalar o'qlariga bo'lgan proyeksiyalari orqali quyidagicha ifodalash mumkin:

$$\vec{a}*\vec{b}=(a_y b_z-a_z b_y)\vec{i}+(a_z b_x-a_x b_z)\vec{j}+(a_x b_y-a_y b_x)\vec{k}. \quad (11.27)$$

yoki determinant ko'rinishida:

$$\vec{a}*\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix} \quad (11.28)$$

Vektor ko'paytmaning koordinatalar o'qlariga proyeksiyalari quyidagi formulalardan topiladi:

$$(\vec{a}*\vec{b})_x=a_y b_z-a_z b_y;$$
$$(\vec{a}*\vec{b})_y=a_z b_x-a_x b_z; \quad (11.29)$$
$$(\vec{a}*\vec{b})_z=a_x b_y-a_y b_x.$$

U holda (11.4) ga asosan :

$$|\vec{a}*\vec{b}|=\sqrt{(a_y b_z-a_z b_y)^2+(a_z b_x-a_x b_z)^2+(a_x b_y-a_y b_x)^2} \quad (11.30)$$

Vektor ko'paytmaning mexanik ma'nosi quyidagicha: agar $\vec{F}$ - kuch, $\vec{r}$ - boshi O nuqtada, ohiri $\vec{F}$ kuch qo'yilgan A nuqtada bo'lgan $\overline{OA}$ vector bo'lsa, u holda $\vec{F}$ kuchning O nuqtaga nisbatan moment $m_0(\vec{F})$ shunday vektorki, u kuch qo'yilgan A nuqtaning radius vektori $\vec{r}$ bilan $\vec{F}$ kuchning vektor ko'paytmasiga teng bo'ladi, ya'ni

$$m_0(\vec{F})=\vec{r}*\vec{F}.$$

19. $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarning vektor – skalar , ya'ni aralash ko'paytmasi quyidagi formulalardan topiladi:

$$\vec{a} \circ (\vec{b} * \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_x & c_z \end{vmatrix} \qquad (11.31)$$

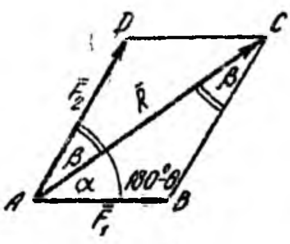
Aralash ko'paytmaning absolut qiymati $\vec{a}, \vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarga qurilgan parallelepipedning hajmiga teng. Ularga qurilgan piramidaning hajmi esa quyidagicha topiladi:

$$V_{pir} = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \qquad (11.31)$$

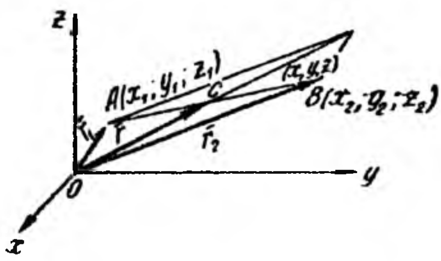
bunda determinant oldidagi ishora shunday olinishi kerakki, natijada V - hajm musbat bo'lishi kerak, ya'ni $\vec{a}, \vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar o'ng uchlik tashkil etganda "+", chap uchlik tashkil etganda esa "-" ishora olinadi.

20. Uchta $\vec{a}, \vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar komplanar deyiladi, agar ular bir tekislikda yotsalar. Uchta vektor komplanar bo'lishining yetarli va zaruriy sharti ularning aralash ko'paytmasi nolga teng bo'lishidir.

1 – masala. Modullari $|\vec{F_1}| = 5$, $|\vec{F_2}| = 7$ bo'lgan va oralaridagi burchak $\theta = 60^0$ bo'lgan ikki vektorning teng ta'sir etuvchisini toping. Teng ta'sir etuvchi bilan $\vec{F_1}$ va $\vec{F_2}$ kuchlar tashkil etgan burchak α va β larni toping (68-a rasm).



a)



b)

68-rasm.

Yechish. $\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$ bo'lsin. (11.1) formulaga asosan

$$R = \sqrt{5^2 + 7^2 + 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot cos60^0}$$

yoki

$$R = \sqrt{25 + 49 + 35} \approx 10.44.$$

Sinuslar teoremasidan foydalanib, α va β burchaklarni ABC uchburchakdan topamiz: $(\alpha + \beta = \theta)$.

$$\frac{|\vec{F_1}|}{sin\beta} = \frac{|\vec{F_2}|}{sin\alpha} = \frac{R}{\sin(180 - \theta)}$$

Lekin $\sin(180 - \theta) = sin\theta$ bo'lgani uchun

$$sin\alpha = \frac{F_2 sin\theta}{R} = \frac{7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{10.44} = 0.581 \; ; \; \alpha = 35^\circ 30' \, ;$$

$$sin\beta = \frac{|\vec{F_1}| sin\alpha}{|\vec{F_2}|} = \frac{5 \cdot 0.581}{7} = 0.415 \; ; \; \beta = 24^\circ 30' \, ;$$

Tekshirish: $\alpha + \beta = 35^0 30' + 24^\circ 30' = 60^\circ$.

Javobi: $\alpha = 35^\circ 30'$; $\beta = 24^\circ 30'$.

2 – masala. A va B nuqtalarning radius vektorlari ma'lum, $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ vektorlarning o'rtasi C nuqtaning koordinatalarini toping. (68-b rasm).

Yechish. A va B nuqtalarning radius vektorlari mos ravishda $\vec{r_1}$ va $\vec{r_2}$ bo'lsin. AB kesmaning o'rtasi $\vec{r_1}$ va $\vec{r_2}$ vektorlardan tuzilgan parallelogramm diagonallari kesishishi nuqtasida joylashgan, va C nuqta $\vec{r_1}$ va $\vec{r_2}$ vektorlarning yarim yg'indisidan tashkil topgan $\vec{r}$ radius vektor bilan aniqlanadi, ya'ni

$$\vec{r} = \frac{\vec{r_1} + \vec{r_2}}{2} \qquad (11.33)$$

A nuqtaning koordinatalarini x_1, y_1 va z_1 bilan, B nuqtaning koordinatalarini x_2, y_2 va z_2 bilan, C nuqtaning koordinatalarini x, y

va z lar bilan belgilaymiz. (11.33) vektor tenglikni (11.9) formulalar yordamida koordinatalar o'qlariga proyeksiyalaymiz. $\vec{r}, \vec{r_1}$ va $\vec{r_2}$ vektorlar C, A va B nuqtalarning mos radius vektorlari bo'lgani uchun ularning koordinata o'qlariga proyeksiyalari mos ravishda quyidagicha bo'ladi:

$$r_x = x \ , \ r_y = y \ , \ r_z = z,$$

$$r_{1x} = x_1 \ , \ r_{1y} = y_1 \ , \ r_{1z} = z_1,$$

$$r_{2x} = x_2 \ , \ r_{2y} = y_2 \ , \ r_{2z} = z_2.$$

Bu holda (11.33) vektor tenglik quyidagi uchta skalar tengliklar bilan almashinadi:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \ ; \ y = \frac{y_1 + y_2}{2} \ ; \ z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Javobi: AB kesmaning o'rtasi C nuqtaning koordinatalari:

$$x = \frac{x_1+x_2}{2} \ ; \ y = \frac{y_1+y_2}{2} \ ; \ z = \frac{z_1+z_2}{2}$$

3 – masala. $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$ va $\vec{b} = -3\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$ vektorlar berilgan. Ularning yig'indisi va ayirmalarining koordinata o'qlariga bo'lgan proyeksiyalarini toping.

Yechish. Bu vektorlarning yig'indisi va ayirmasini topamiz:

$$\vec{a} + \vec{b} = (2-3)\vec{i} + (3+2)\vec{j} + (-4+5)\vec{k} = -\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$$

$$(\vec{a} + \vec{b})_x = -1 \ ; \ (\vec{a} + \vec{b})_y = 5 \ ; \ (\vec{a} + \vec{b})_z = 1 \ .$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (2+3)\vec{i} + (3-2)\vec{j} + (-4-5)\vec{k} = 5\vec{i} + \vec{j} - 9\vec{k}$$

$$(\vec{a} - \vec{b})_x = 5 \ ; \ (\vec{a} - \vec{b})_y = 1 \ ; \ (\vec{a} - \vec{b})_z = -9 \ .$$

Javobi: $\vec{a} + \vec{b} = -\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$; $\vec{a} - \vec{b} = 5\vec{i} + \vec{j} - 9\vec{k}$

$$(\vec{a} + \vec{b})_x = -1 \ ; \ (\vec{a} + \vec{b})_y = 5 \ ; \ (\vec{a} + \vec{b})_z = 1 \ .$$

$$(\vec{a} - \vec{b})_x = 5 \ ; \ (\vec{a} - \vec{b})_y = 1 \ ; \ (\vec{a} - \vec{b})_z = -9 \ .$$

4 – masala. Boshi $A(2;1;-4)$ nuqtada, oxiri esa $B(1;3;2)$ nuqtada bo'lgan $\vec{a} = \overline{AB}$ vektorning koordinata o'qlariga proyeksiyalari va yo'naltiruvchi kosinuslari topilsin.

Yechish. $\vec{a}$ vektorning koordinata o'qlariga proyeksiyalarini (11.6) formulalaridan topamiz.

$$a_x = 1 - 2 = -1\,,\ a_y = 3 - 1 = 2\ ,\ a_z = 2 - (-4) = 6\ .$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 6^2} = \sqrt{41}.$$

Yo'naltiruvchi kosinuslarini esa (11.13) formulalar yordamida topamiz:

$$\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{41}} \qquad \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{41}} \qquad \cos\gamma = \frac{6}{\sqrt{41}}$$

Javobi: $\quad a_x = -1\ \ a_y = 2\,,\ a_z = 6\,.$

$$\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{41}}\ ,\qquad \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{41}}\ ,\qquad \cos\gamma = \frac{6}{\sqrt{41}}$$

5 – **masala**. $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ vektorning koordinata o'qlari bilan $\lambda, \mu,$ va ν burchaklar tashkil etuvchi L o'qiga proyeksiyasini toping.

Yechish. $\vec{a}$ vektor va uning L o'qiga proyeksiyasi musbat yo'nalishlari orasidagi burchakni φ bilan, $\vec{a}$ vektorning koordinata o'qlari bilan tashkil etgan burchaklarni $\alpha, \beta,$ va γ lar bilan belgilaymiz. U holda (11.22) formulaga asosan va L o'qining koordinata o'qlari bilan tashkil etgan burchaklari $\lambda, \mu,$ va ν ekanligini hisobga olib, quyidagini yozish mumkin:

$$\cos\varphi = \cos\alpha\cdot\cos\lambda + \cos\beta\cdot\cos\mu + \cos\gamma\cdot\cos\nu \quad (11.35).$$

(11.2) formulaga ko'ra proyeksiya: $a_L = a\cdot\cos\varphi$. Bu tenglikda $\cos\varphi$ o'rniga uning (11.35) dagi qiymatni qo'yib, quyidagini hosil qilamiz:

$$a_L = a(\cos\alpha\cdot\cos\lambda + \cos\beta\cdot\cos\mu + \cos\gamma\cdot\cos\nu).$$

Bu tenglikning o'ng tomonidagi qavsni ochib va

$$a\cdot\cos\alpha = a_x\ ,\quad a\cdot\cos\beta = a_y\ ,\quad a\cdot\cos\gamma = a_z$$

ekanligini inobatga olib $\vec{a}$ vektor ning L o'qiga proyeksiyasini topamiz:

$$a_L = a_x\cos\lambda + a_y\cos\mu + a_z\cos\nu. \qquad (11.36)$$

2-usul. (11.19) formuladan $\vec{a}$ vektorning uzunligi 1 ga teng bo'lgan $\vec{\ell}$ vector yo'nalishidagi proeksiyasi $np_{\ell}\vec{a} = (\vec{a}, \vec{\ell})$ tenglik orqali hisoblanishi kelib chiqadi, ya'ni

$$np_{\ell}\vec{a} = a_x \cos\lambda + a_y \cos\mu + a_z \cos\nu.$$

6 – masala. $\vec{a} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$ vektori berilgan. Uning L o'qdagi koordinata o'qlari bilan bir xil o'tkir burchaklar tashkil etuvchi a_L proyeksiyasini toping.

Yechish. Shartga ko'ra $\vec{a}$ vektor proyeksiyalanadigan o'qning yo'naltiruvchi kosinuslari o'zaro teng: $\cos\lambda = \cos\mu = \cos\nu$. Ixtiyoriy yo'naltiruvchi kosinuslar kvadratlarining yg'indisi 1ga teng $\cos^2\lambda = \cos^2\mu = \cos^2\nu = 1$, va bu yg'indida barcha qo'shiluvchilar o'zaro teng bo'lganligi uchun

$$3\cos^2\lambda = 1 \ , \ \cos^2\lambda = \frac{1}{3} \ , \ \cos^2\lambda = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Shuning uchun $\cos\lambda = \cos\mu = \cos\nu = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (shartga ko'ra $\lambda, \mu,$ va ν burchaklar o'tkir, shuning uchun uning yo'naltiruvchi kosinuslari musbat va ildiz oldidagi ishora musbat olindi).

Shartga ko'ra $a_x = 2$, $a_y = 5$, $a_z = 1$, shuning uchun (11.36) formulaga asosan $a_L = 2\frac{1}{\sqrt{3}} + 5\frac{1}{\sqrt{3}} + 1\frac{1}{\sqrt{3}}$; $a_L = \frac{8}{\sqrt{3}}$.

7 – masala. Nuqtaga uchta kuch ta'sir etmoqda $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$, $\vec{F_3}$. Ularning to'g'ri burchakli o'qlarga proyeksiyalari quyidagicha:

	$\vec{F_1}$	$\vec{F_2}$	$\vec{F_3}$
x	2	4	-5
y	1	-3	4
z	5	1	2

Ularning teng ta'sir etuvchisining yo'nalishi va kattaligini toping.

Yechish. berilgan vektorlarning teng ta'sir etuvchi

$$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3}.$$

Teng ta'sir etuvchi proyeksiyalarini x, y, z bilan, $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$, $\vec{F_3}$ - kuchlarning proyeksiyalarini esa mos ravishda x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 va x_3, y_3, z_3 lar bilan belgilaymiz. (11.9) formulaga ko'ra:

$$x = x_1 + x_2 + x_3, \quad x = 1,$$
$$y = y_1 + y_2 + y_3, \quad y = 2,$$
$$z = z_1 + z_2 + z_3, \quad z = 8.$$

(11.4) formulaga ko'ra esa teng tasir etuvchi R ning kattaligining koordinata o'qlariga proyeksiyalari kvadratlari yig'indisidan olingan ildizga teng.

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 8^2}\ ;\ R = \sqrt{69}\,.$$

(11.3) formulalarga ko'ra teng ta'sir etuvchining yo'naltiruvchi kosinuslarini topamiz:

$$\cos(R^\wedge x) = \frac{1}{\sqrt{69}};$$
$$\cos(R^\wedge y) = \frac{2}{\sqrt{69}};$$
$$\cos(R^\wedge z) = \frac{8}{\sqrt{69}}.$$

8 – masala. Ikki $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar o'zlarining proyeksiyalari bilan berilgan: $\vec{a} = \{7; 2; -1\}$ va $\vec{b} = \{1; 2; -3\}$. Bu vektorlarning skalar ko'paytmalarini va ular orasidagi burchaklarni toping.

Yechish. (11.20) formulaga asosan $\vec{a} \circ \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$. Bu tenglikka berilgan vektorlarning proyeksiyalarini qo'yib $\vec{a} \circ \vec{b} = 14$ni hosil qilamiz; (11.18) formulaga ko'ra $\vec{a} \circ \vec{b} = |a| \cdot |b| \cdot \cos\theta$. Bundan esa $\cos\theta = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|a| \cdot |b|}$; Shunday qilib, $\cos\theta$ aniqlash uchun bizga $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning modullarini aniqlash qoldi.(11.4) formulaga ko'ra

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ ,$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}$$

bundan esa $|a| = \sqrt{54}$, $|a| = 7.348$, $|b| = \sqrt{14}$, $|b| = 3.742$ larni hosil qilamiz. Demak, $\cos\theta = \frac{14}{27.469}$. $\cos\theta = 0.509$, $\theta = 59^0 24'$.

9 – masala. $\vec{a} = \{2; 1; -2\}$ va $\vec{b} = \{1; -4; 2\}$ vektorlar orasidagi burchak topilsin.

Yechish. (11.21) formulaga asosan

$$\cos\theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|a| \cdot |b|}$$

bu tenglamaning o'ng tomonidagi barcha kattaliklar shartga ko'ra ma'lum. Noma'lumlar faqatgina $|\vec{a}|$ va $|\vec{b}|$. Ularni topamiz.

$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$; $a = \sqrt{9}$; $a = 3$.

$b = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}$; $b = \sqrt{21}$; $b = 4.582$.

Bularni (11.21) qo'yib, $\cos\theta = \frac{-6}{13.746}$ ni hosil qilamiz. $\cos\theta = -0.436$, $\theta = 115^0 51'$

10 – masala. $\vec{a} = 5\vec{i} - 4\vec{j} + 7\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ vektorlarga qurilgan parallelogrammning yuzini toping.

Yechish. Vektor ko'paytmaning ta'rifiga ko'ra bu ikki vektorlar vektor ko'paytmasining moduli ularga qurilgan parallelogrammning yuziga teng. Shuning uchun avvalo bu ikki vektorning vektor ko'paytmasini topamiz, so'ngra vektor ko'paytmaning modulini topamiz. (11.28) formulaga ko'ra

$$\vec{a} * \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -4 & 7 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i} + 17\vec{j} + 9\vec{k}$$

Moduli esa $|\vec{a} * \vec{b}| = \sqrt{1^2 + 17^2 + 9^2} = \sqrt{371}$, $|\vec{a} * \vec{b}| = 19.26$

Demak, parallelogrammning yuzi 19.26 kv. birlikka teng.

Eslatma: $\vec{a} * \vec{b}$ vektor ko'paytmani (11.27) formulaga asosan ham topish mumkin edi, buning uchun bu formulaga

$$a_x = 5\,,\ a_y = -4\,,\ a_z = 7\,;$$

$$b_x = 1\,,\ b_y = 1\,,\ b_z = -2$$

larni qo'yish yetarli edi.

11 – masala. $\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{CD}$ vektorlar o'zlarining boshlari va oxirlari koordinatalari bilan berilgan $A = (2;4;5)$; $B = (-1;-3;-2)$; $C = (4;1;7)$; $D = (-2;3;10)$. Ularning

1) $\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{CD}$ vektor ko'paytmasini,
2) vektor ko'paytmaning modulini,
3) vektor ko'paytmaning yo'naltiruvchi kosinuslarini toping.

Yechish. 1) avvalo $\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{CD}$ vektorlarlarning koordinata o'qlariga bo'lgan proyeksiyalarini (11.6) formulaga ko'ra topamiz

$$(\overrightarrow{AB})_x = -3\,,\qquad (\overrightarrow{CD})_x = -6\,,\qquad (\overrightarrow{AB})_y = -7,$$

$$(\overrightarrow{CD})_y = 2,\qquad (\overrightarrow{AB})_z = -7,\qquad (\overrightarrow{CD})_z = 3,$$

Shunday qilib,

$$\overrightarrow{AB} = \{-3;-7;-7\},\qquad \overrightarrow{CD} = \{-6;2;3\}.$$

Demak (11.27) formuladan:

$$\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{CD} = [-7\cdot 3 - (-7)\cdot 2]\cdot\vec{i} + [-7\cdot(-6) - (-3)\cdot 3]\cdot\vec{j} +$$
$$+[-3\cdot 2 - (-7)\cdot(-6)]\cdot\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{CD} = -7\vec{i} + 51\vec{j} - 48\vec{k}$$

2) vektor ko'paytmaning ma'lum proyeksiyalariga ko'ra uning moduli (11.4) formuladan topiladi:

$$|\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{CD}| = \sqrt{(-7)^2 + 51^2 + (-48)^2},$$

$$|\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{CD}| = \sqrt{4954} = 70.3847.$$

3) vektor ko'paytmaning yo'naltiruvchi kosinuslarini (11.13) formuladan topamiz:

$$\cos\alpha = \frac{-7}{70.3847}\,;\quad \cos\beta = \frac{51}{70.3847}\,;\quad \cos\gamma = \frac{-48}{70.3847}\,.$$

$$\cos\alpha = -0.099\,,\ \cos\beta = 0.724\,,\ \cos\gamma = -0.682\,.$$

12 – masala. Uchlarining koordinatalari
$A(-2;1;2)$, $B(3;-3;4)$, $C(1;0;9)$ bo'lgan uchburchakning yuzini toping.

Yechish. $\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{AC}$ vektorlarni ko'ramiz . ABC uchburchakning yuzi $\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{AC}$ vektorlariga qurilgan parallelogramm yuzining yarmiga teng $\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{AC}$ vektorlarga qurilgan parallelogrammning yuzi $\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{AC}$ vektorlarning vektor ko'paytmasining moduliga teng bo'lgani uchun , ABC uchburchakning yuzi quyidagicha topiladi:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{AC}\right|.$$

Avvalo $\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{AC}$ vektor ko'paytmani topib, so'ngra uning modulini yarmini topamiz. $\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{AC}$ vektorlarning koordinata o'qlariga bo'lgan proyeksiyalarini (11.6) formuladan topamiz:

$$(\overrightarrow{AB})_x = 5 \qquad (\overrightarrow{AC})_x = 3 \qquad (\overrightarrow{AB})_y = -4$$

$$(\overrightarrow{AC})_y = -1 \qquad (\overrightarrow{AB})_z = 2 \qquad (\overrightarrow{AC})_z = 7$$

(11.27) formulaga asosan $\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{AC} = -26\vec{i} - 29\vec{j} + 7\vec{k}$

$\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{AC}$ vektor ko'paytmaning modulini (11.4) formuladan topamiz:

$$\left|\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{1566} = 39.573,$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2} * 39.573, \quad S_{ABC} = 19.787 \text{ kv. birligi.}$$

13 – masala. $\vec{F} = \{3;4;-2\}$ kuch va bu kuch qo'yilgan nuqta $A = (2;-1;3)$ berilgan. Koordinata boshiga nisbatan bu kuchning momentini va momentning koordinata o'qlari bilan tashkil etgan burchaklarni toping.

Yechish. Koordinata boshiga nisbatan bu kuchning momenti A nuqtaning radius vektorini $\vec{F}$ kuchga vektor ko'paytmasiga teng, ya'ni $m_0(\vec{F}) = \vec{r} * \vec{F}$. A nuqta radius vektorning koordinata o'qlariga bo'lgan proyeksiyalari A nuqtaning koordinatalariga mos ravishda teng:

$$r_x = x = 2\ ;\ r_y = y = -1\ ;\ r_z = z = 3\ .$$

$$\vec{r} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}\ .$$

$\vec{F}$ kuchning koordinata o‘qlariga bo‘lgan proyeksiyalari $x = 3$; $y = 4$; $z = -2$ masalaning shartiga ko‘ra ma’lum. Bu holda (11.27) formulaga asosan:

$$m_0(\vec{F}) = \vec{r} * \vec{F} = [-1 \cdot (-2) - 3 \cdot 4] \cdot \vec{i} + [3 \cdot 3 - 2 \cdot (-2)] \cdot \vec{j} + +[2 \cdot 4 - (-1) \cdot 3] \cdot \vec{k}$$

Bundan $m_x = -10$, $m_y = 13$, $m_z = 11$.

Moment moduli

$$m = \sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2} = \sqrt{(-10)^2 + 13^2 + 11^2}\ ;\ m = 19.784\ .$$

$m_0(\vec{F})$ vektorning yo‘naltiruvchi kosinuslari:

$$\cos\alpha = \frac{-10}{19.784} = -0.506;\ \cos\beta = \frac{13}{19.784} = 0.658\ ;$$

$$\cos\gamma = \frac{11}{19.784} = 0.557\ .$$

Kuch momentning koordinata o‘qlari bilan tashkil etgan burchaklari quyidagicha:

$$\alpha - 120^0 24' \quad \beta - 48^0 51' \quad \gamma - 56^0 9'$$

14 – masala. Uchlari $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$ $A_4(x_4, y_4, z_4)$ bo‘lgan piramidaning hajmini toping.

Yechish. Piramida qurilgan $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$ va $\overline{A_1A_4}$ vektorlarni qaraymiz. Bu vektorlarning har birining boshi va oxirlari koordinatalarini bilgan holda, ularning koordinata o‘qlariga bo‘lgan proyeksiyalarni topamiz:

$$\overline{A_1A_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1);$$

$$\overrightarrow{A_1A_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1);$$

$$\overrightarrow{A_1A_4} = (x_4 - x_1, y_4 - y_1, z_4 - z_1)\ .$$

Piramida hajmi bu holda (11.32) formuladan topiladi.

$$V = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix};$$

15 – masala. Piramidaning uchlari berilgan: $A_1(5,1,-4)$, $A_2(1,2,-1)$, $A_3(3,3,-4)$ va $A_4(2,2,2)$. Uning hajmini toping.

Yechish. $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$ va $\overrightarrow{A_1A_4}$ vektorlarni qaraymiz. 14 – masala yechimidagi yo‘lni qo‘llab, (11.32) formulaga asosan bu vektorlarga qurilgan piramida hajmini topamiz. (11.32) formulani qo‘llash uchun bu vektorlarning koordinata o‘qlariga proyeksiyalarini topishimiz kerak.

$$\overrightarrow{A_1A_2}(-4,1,3)\ ,\ \overrightarrow{A_1A_3}(-2,2,0)\ ,\ \overrightarrow{A_1A_4}(-3,1,6)$$

va

$$V = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} -4 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{6} * (-24)\ ;$$

$V = 4$ kub birlik.

O‘ng tomonda minus ishora, determinant manfiy bo‘lgani uchun olindi.

Mustaqil yechish uchun

16-masala. $\overrightarrow{F_1}$ va $\overrightarrow{F_2}$ kuchlarning teng ta’sir etuvchisini, shuningdek, $\overrightarrow{F_1}$ va $\overrightarrow{F_2}$ kuchlar bilan ularning teng ta'sir etuvchisi orasidagi burchaklarni toping.

$|\overrightarrow{F_1}| = 15$, $|\overrightarrow{F_2}| = 10$, $\overrightarrow{F_1}$ va $\overrightarrow{F_2}$ kuchlar orasidagi burchak $\theta = 45^0$.

Javobi: $R = 23.173$, $\alpha = 17^0 46'$, $\beta = 27^0 14'$.

17- masala. $\vec{a}$ vektor o‘zining uchlari A(2;4;-3) va B(-4;4;-5) lar orqali berilgan. *AB* kesmaning o‘rtasining koordinatalarini toping.

Javobi: $x = -1$; $y = 4$; $z = -4$.

18- masala. Uchta $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar bitta tekislikda joylashgan. Ularning uzunliklari $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 2$ berilgan. $\vec{b}$

va $\vec{c}$ vektorlar $\vec{a}$ bilan 60^0 burchak hosil qiladi. $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar orasidagi burchak α va $\vec{S} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ vektorlarning uzunligi topilsin.

Javobi: $\alpha = 0$ yoki $\alpha = 120^0$. Birinchi holda $\vec{S} = \sqrt{37}$, ikkinchi holda $\vec{S} = 5$.

19- masala. $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar o‘zaro perpendikulardir va ularning uzunliklari : $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{c}| = 6$. Ularning yig‘indisi $\vec{S}$ vektorining uzunligi va yo‘naltiruvchi kosinuslarini toping.

Javobi: $\vec{S} = 7$; $\cos(\vec{S}\hat{\ }\vec{a}) = 2/7$, $\cos(\vec{S}\hat{\ }\vec{b}) = 3/7$, $\cos(\vec{S}\hat{\ }\vec{c}) = 6/7$.

20- masala $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$ va $\vec{b} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 6\vec{k}$ vektorlarning yig‘indisi $\vec{a} + \vec{b}$ va ayirmasi $\vec{a} - \vec{b}$ larni, $\vec{a} + \vec{b}$ va $\vec{a} - \vec{b}$ larning koordinata o‘qlariga proyeksiyalarini toping.

Javobi: $\vec{a} + \vec{b} = 5\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{a} - \vec{b} = -\vec{i} + 7\vec{j} - 10\vec{k}$,

$(\vec{a} + \vec{b})_x = 5$, $(\vec{a} + \vec{b})_y = -1$, $(\vec{a} + \vec{b})_z = 2$.

$(\vec{a} - \vec{b})_x = -1$, $(\vec{a} - \vec{b})_y = 7$, $(\vec{a} - \vec{b})_z = -10$.

21- masala. $\vec{a}$ vektorning koordinatalari o‘qlariga proyeksiyalari quyidagilar: $a_x = 2$, $a_y = 3$, $a_z = -4$. $\vec{a}$ vektorning yo‘nal-tiruvchi kosinuslarini toping.

Javobi: $\cos\alpha = 2/\sqrt{29}$, $\cos\beta = 3/\sqrt{29}$, $\cos\gamma = -4/\sqrt{29}$.

22- masala. Nuqtaga to‘rtta kuch F_1, F_2, F_3, F_4 kuchlar ta’sir etmoqda. Ularning koordinata o‘qlaridagi proyeksiyalari jadvalda berilgan.

	F_1	F_2	F_3	F_4
x	1	-5	4	-1
y	2	3	4	5
z	1	-2	-3	4

Teng ta'sir etuvchining kattaligi va yo'nalishini toping.

Javobi: F= $\sqrt{197}$, $\cos\alpha = -1/\sqrt{197}$, $\cos\beta = 14/\sqrt{197}$, $\cos\gamma = 0$.

23- masala. ($\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{CD}$ vektorlar o'zlarining boshlari va oxirlari koordinatalari bilan berilgan: $A = (1;-3;-4)$; $B = (-1;0;2)$; $C = (2;-4;-6)$; $D = (1;1;1)$. Bu vektorlar orasidagi burchaklarni toping.

Javobi: $cos\theta = 0.973$, $\theta = 13^0 21'$.

24- masala. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar o'zlarining proyeksiyalari bilan berilgan: $\vec{a}\{2;4;-3\}$; $\vec{b}\{6;-4;2\}$.

1) ularning skalar ko'paytmasini,
2) ular orasidagi burchakni,
3) $\vec{a}$ vektorning $\vec{b}$ vektor yo'nalishiga proyeksiyasini toping.

Javobi: 1) $\vec{a} \circ \vec{b} = -10$ 2) $cos\theta = -0.248$, $\theta = 104^0 21^1$
3) $a_b = -1.336$

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Я. С. Бугров, С.М. Николский. Задачник. Москва. «Наука» 1987.
2. Д.В. Клетеник. Сборник задач по аналитической геометрии. Москва. «Наука». 1986.
3.В.Д. Черненко. Высшая математика в примерах и задачах.В трех томах. Учебное пособие для ВУЗов. Санкт-Петербург.: Изд. «Политехника» 2003.
4.Е.Ю. Риппель. Курс высшей математики. Учебное пособие. часть 2. Омск. Изд. «СибАДИ»2001.
5.Р.М. Мадрахимов, С.А. Имомкулов, Б.И. Абдуллаев, Ж.Р. Ярметов. Комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси. Маърузалар матни. txt.uz. Урген. – 2004.

Mundarija

Muharrir: X. Po'lathodjayev

Bosishga ruhsat etildi 12.06.2013 y. Bichimi 60x84 1/16.
Shartli bosma tabog'i 9,3. Nusxasi 50 dona. Buyurtma № 210.

TDTU bosmaxonasida chop etildi. Toshkent sh,
Talabalar ko'chasi 54. tel: 246-63-84.