E.Xolmurodov, A.I.Yusupov

OLIY MATEMATIKA

1

$$I = \lim_{\max(x_{2-1}) \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_{2-1}) = \int_a^b f(x)da$$

E.XOLMURODOV, A.I.YUSUPOV

OLIY MATEMATIKA

I QISM

O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi tomonidan o'quv qo'llanma sifatida tavsiya etilgan

«NOSHIR»
TOSHKENT - 2013

UO'K 519.6(075)
KBK 22.193

Taqrizchilar:

K.A. Kurganov – O'zbekiston Milliy universiteti mexanika-matematika fakulteti «Algebra va funksional analiz» kafedrasi dotsenti;

E. Eshdavlatov – Qarshi Davlat universiteti «Matematik analiz» kafedrasi dotsenti;

Z. Uzoqov – Qarshi muhandislik-iqtisodiyot instituti «Axborot texnologiyalari va matematik modellashtirish» kafedrasi mudiri, dotsent.

Mazkur o'quv qo'llanma "300000 – ishlab chiqarish texnik sohasi" bilim sohasi ta'lim yo'nalishlari uchun tasdiqlangan. Oliy matematika dasturi asosida yozilgan bo'lib, unda oliy matematikaning chiziqli algebra, analitik geometriya hamda bir o'zgaruvchili funksiyaning differensial hisobi bo'limlari bayon etilgan.

ISBN 978-9943-4115-2-4

SO'ZBOSHI

Mamlakatimiz mustaqillikka erishgandan so'ng dastlabki yillardanoq ta'lim sohasiga alohida e'tibor qaratib kelinmoqla. «Kadrlar tayyorlash milliy dasturi» talablaridan kelib chiqilib, ta'lim tizimi tubdan isloh qilinmoqda. Ma'lumki, uzluksiz ta'lim tizimida oliy ta'lim ikki bosqich, ya'ni bakalavr va magistratura bosqichlaridan iboratdir.

Shu sababli barcha bakalavr ta'lim yo'nalishlari va magistratura mutaxassisliklari bo'yicha davlat ta'lim standartlari, namunaviy o'quv rejalar, fanlar bo'yicha namunaviy dasturlar ishlab chiqildi va tasdiqlandi.

Bakalavr ta'lim yo'nalishlari uchun yangidan tasdiqlangan davlat ta'lim standartlari asosida o'quv adabiyotlarining yangi avlodini yaratish dolzarb vazifalardan biridir. Ushbu o'quv qo'llanma «Ishlab chiqarish texnik sohasi» bilim sohasi ta'lim yo'nalishlari uchun tasdiqlangan «Oliy matematika» namunaviy fan dasturi asosida tayyorlangan uch qismdan iborat o'quv qo'llanmaning birinchi qismidir. O'quv qo'llanmani qismlarga ajratishda «Ishlab chiqarish texnik sohasi» bilim sohasiga tegishli «Elektr energetika», «Neft va gaz konlarini ishga tushirish va ulardan foydalanish», «Texnologik mashinalar va jihozlar» kabi ta'lim yo'nalishlarining namunaviy o'quv rejalarida «Oliy matematika» faniga ajratilgan soatlarni taqsimlanishi asos qilib olindi. Ushbu o'quv qo'llanmadan boshqa bilim sohalariga tegishli bakalavr ta'lim yo'nalishlari talabalari ham foydalanish mumkin.

Ushbu birinchi qism o'quv qo'llanmaga oliy matematikaning analitik geometriya va chiziqli algebra elementlari hamda bir o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasining differensial hisobi bo'limlari kiritilgan. Barcha materiallar 27 ta yirik mavzuga ajratilib, ular ham o'z navbatida kichik mavzularga bo'linib bayon etilgan. Kichik mavzularning ba'zi birlari mustaqil ta'limga mo'ljallangan.

O'quv qo'llanma mavzuni o'zlashtirish oson bo'lishi uchun o'quv qo'llanmada sodda amallarning bajarilishigacha batafsil ko'rsatilgan.

O'quvchilarning mavzularni chuqur o'zlashtirishlariga ko'maklashish maqsadida har bir mavzuning oxirida o'z-o'zini tekshirish savollari, mustaqil ishlash uchun misol va masalalar hamda test savollari berilgan.

O'quv qo'llanma matnini kompyuterda tayyorlashda yordamini ayamagan «Oliy matematika» kafedrasi o'qituvchisi M. G'ulomovaga mualliflar chuqur minnatdorchiliklarini bildiradilar. Ushbu o'quv qo'llanma oliy matematika fanidan «Ishlab chiqarish texnik sohasi» bilim sohasiga tegishli ta'lim yo'nalishlari bo'yicha tahsil olayotgan talabalar uchun lotin yozuviga asoslangan o'zbek alifbosi va imlosida tayyorlangan dastlabki adabiyotlardan bo'lganligi uchun kamchiliklardan holi bo'lmasligi mumkin. O'quv qo'llanma haqidagi fikr-mulohazalaringizni Qarshi muhandislik-iqtisodiyot instituti «Oliy matematika» kafedrasiga yubolishingizni so'raymiz.

1. HAQIQIY SONLAR. KOORDINATALAR USULI

1.1. Haqiqiy sonlar

Narsalarni, buyumlarni sanash zaruryati tufayli **natural** sonlar to'plami $N=\{1,2,3...\}$ paydo bo'ldi. Bu to'plamga natural sonlarga qarama-qarshi sonlarni hamda nolni qo'shish (birlashtirish) natijasida **butun** sonlar to'plami $Z=\{...,-n,...,-3,-2,-1,0,1,2,...,n,...\}$ yuzaga keldi. Keyinchalik ikkita butun sonlarning nisbati ko'rinishida tasvirlanadigan **ratsional** sonlar to'plami $Q=\{p/q\}$ (bunda $p,q\in Z, q\neq 0$) kiritildi. Har qanday p butun sonni $\frac{p}{1}$ ko'rinishda tasvirlash mumkin bo'lganligi uchun butun sonlar ham ratsional sonlar tarkibiga kiradi. Istalgan sonni ikkita butun sonning nisbati ko'rinishda tasvirlash mumkinmi, degan savolga yo'q degan javob olindi. Masalan, tomonlari bir birlikka teng kvadratning diagonali uzunligi ($d=\sqrt{2}$), shuningdek aylana uzunligining uning diametriga nisbati (π) kabi sonlarni ikkita butun sonning nisbati ko'rinishida tasvirlab bo'lmasligi isbotlandi.

Ratsional bo'lmagan sonlar **irratsional** sonlar deyiladi.

Har qanday ratsional sonning chekli yoki cheksiz davriy o'nli kasr shaklida tasvirlanishini, irratsional sonning esa cheksiz davriy bo'lmagan o'nli kasr shaklida tasvirlanishini eslatib o'tamiz. Masalan, $\frac{1}{4}=0,25$ chekli o'nli kasr, $\frac{7}{9}=0,777...=0,(7)$ cheksiz davriy kasr, $\sqrt{2}=1,414...$, $\pi=3,14159...$, $e=2,7182818284...$ cheksiz davriy bo'lmagan o'nli kasrlardir.

Ratsional va irratsional sonlar to'plamlarining birlashmasi **haqiqiy** sonlar to'plamini tashkil etadi va u R orqali belgilanadi.

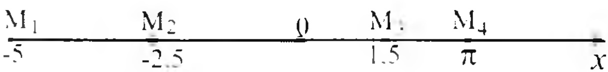
1.2. Haqiqiy sonlarning geometrik tasviri. To‘g‘ri chiziq nuqtalarining koordinatalari

Sonlar o‘qi yoki o‘q deb sanoq boshi – koordinatalar boshi, musbat yo‘nalish hamda uzunligi bir birlikka teng sanaluvchi kesma-o‘lchov birligi tanlangan to‘g‘ri chiziqqa aytiladi.

Yo‘nalish chizmada strelka orqali belgilanadi. Agarda sonlar o‘qi 1-chizmada ko‘rsatilganidek tanlansa, musbat x haqiqiy songa sonlar o‘qining sanoq boshi

1-chizma.

0 dan o‘ngdagi undan x masofada bo‘lgan nuqtasi, manfiy x songa 0 sanoq boshidan chapdagi undan x masofada bo‘lgan nuqtasi mos keladi; 0 songa sonlar o‘qining sanoq boshi mos keladi. x haqiqiy son sonlar o‘qida uni tasvirlovchi M nuqtaning **koordinatasi** deb aytiladi va $M(x)$ ko‘rinishda yoziladi.



2-chizma.

2-chizmada -5, -2.5, 1.5, π haqiqiy sonlarni sonlar o‘qida mos ravishda tasvirlovchi $M_1(-5)$, $M_2(-2,5)$, $M_3(1,5)$ va $M_4(\pi)$ nuqtalar ko‘rsatilgan.

Shunday qilib, istalgan x haqiqiy songa sonlar o‘qining aniq bitta M nuqtasi va aksincha sonlar o‘qining istalgan M nuqtasiga bitta haqiqiy son shu nuqtaning koordinatasi x mos kelar ekan. Boshqacha aytganda haqiqiy sonlar to‘plami bilan sonlar o‘qining nuqtalari orasida o‘zaro bir qiymatli moslik mavjud ekan.

Haqiqiy sonlar to'plamining muhim xossalaridan biri uning tartiblanganligi, ya'ni istalgan ikkita o'zaro teng bo'lmagan x_1 va x_2 haqiqiy sonlar uchun $x_1>x_2$ va $x_1<x_2$ munosabatlardan faqatgina biri bajariladi xolos.

Agar sonlar o'qi 1-chizmada ko'rsatilganidek ya'ni gorizontal joylashtirilgan bo'lib yo'nalish chapdan o'ngga tayinlangan bo'lsa, katta haqiqiy sonni tasvirlovchi nuqta kichik haqiqiy sonni tasvirlovchi nuqtadan o'ngda yotadi.

1.3. Haqiqiy sonning absolut (mutloq) qiymati

$x \geq 0$ haqiqiy sonning absolut qiymati (moduli) deb shu sonning o'ziga, $x<0$ sonning absolut qiymati deb $-x$ songa aytiladi. x haqiqiy sonning absolut qiymati $|x|$ kabi yoziladi.

Shunday qilib:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{agar } x \geq 0 \text{ bo'lsa,} \\ -x, & \text{agar } x < 0 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

Masalan, $|8|=8$, $|5|=5$, $|-5|=5$.

Noldan farqli istalgan haqiqiy sonning moduli musbat son bo'lar ekan.

Istalgan $\varepsilon>0$ uchun $|x|<\varepsilon$ va $-\varepsilon<x<\varepsilon$ tengsizliklar teng kuchliligini eslatib o'tamiz.

Haqiqiy sonning absolut qiymati quyidagi xossalarga ega:

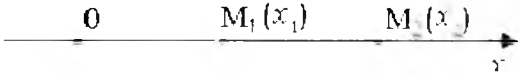
1. $|x_1+x_2| \leq |x_1|+|x_2|$.
2. $|x_1-x_2| \geq |x_1|-|x_2|$.
3. $|x_1 \cdot x_2 \cdots x_n| = |x_1| \cdot |x_2| \cdots |x_n|$.
4. $\left|\dfrac{x_1}{x_2}\right| = \dfrac{|x_1|}{|x_2|}$.

Izoh. Kelgusida faqatgina haqiqiy sonlar bilan ish ko'rganimiz uchun haqiqiy son o'rniga oddiy son iborasini ishlatamiz.

1.4. To'g'ri chiziqning ikki nuqtasi orasidagi masofa

Sonlar o'qining $M_1(x_1)$ va $M_2(x_2)$ nuqtalari orasidagi masofa d ni topish uchun formula chiqaramiz.

Faraz qilaylik $0 < x_1 < x_2$ bo'lsin (3^a -chizma).



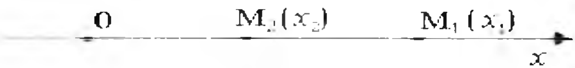
3^a -chizma.

U holda $OM_1=x_1$, $OM_2=x_2$ bo'lib, $d=OM_2-OM_1=x_2-x_1$ bo'ladi. Shuningdek $x_2<x_1$ bo'lganda (3^b-chizma) $d=x_1-x_2$ bo'ladi.

Shunday qilib har ikkala hol uchun ham

$$d=|x_2-x_1| \tag{1.1}$$

formulaga ega bo'lamiz.



3^b -chizma.

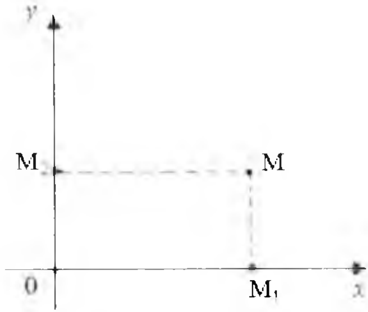
To'g'ri chiziqning ikkita nuqtasi orasidagi masofani topish uchun chiqarilgan (1.1) formula istalgan x_1, x_2 lar uchun ham o'rinli ekanligiga ishonch hosil qilish qiyin emas.

1-misol. $M_1(5)$ va $M_2(-4)$ nuqtalar orasidagi masofani toping.

Yechish. $x_1=5$, $x_2=-4$. (1.1) formulaga binoan $d=|-4-5|=|-9|=9$ bo'ladi.

1.5. Dekartning tekislikdagi koordinatalar sistemasi

Yuqorida ko'rdikki, to'g'ri chiziq nuqtalarining o'rni bitta son yani uning koordinatasi bilan to'la aniqlanadi. Tekislik nuqtalarining o'rni bir juft sonlar bilan aniqlanishini ko'rsatamiz. Faraz qilaylik tekislikda O nuqtada kesishuvchi, bir xil o'lchov birligiga ega va o'zaro perpendikular Ox, Oy o'qlar berilgan bo'lsin (ular tekislikda dekart sistemasini tashkil etadi). Ox va Oy o'qlar joylashgan tekislik *koordinatalar tekisligi* deb aytiladi va Oxy kabi belgilanadi (4-chizma).



4-chizma.

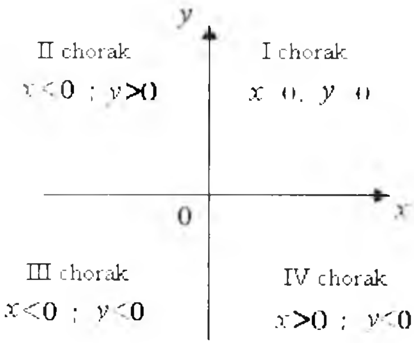
M nuqta shu Oxy tekislikning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin.

M nuqtadan Ox va Oy o'qlarga perpendikulyarlar o'tkazib, ularning asoslarini M_1 va M_2 lar orqali belgilaymiz. M_1 nuqtaning Ox o'qdagi x koordinatasi M nuqtaning **abssissasi**, M_2 nuqtaning Oy o'qdagi y koordinatasi M nuqtaning **ordinatasi** deb aytiladi. x, y lar M nuqtaning koordinatalari (dekart koordinatalari) deb aytiladi.

Shunday qilib, Oxy koordinata tekisligining istalgan M nuqtasiga yagona tartiblangan sonlar juftligi (x,y) uning koordinatalari mos keladi.

Aksincha, har qanday (x,y) juftlik Oxy tekislikdagi yagona M nuqtani aniqlaydi. Demak, tartiblangan (x,y) sonlar juftligi bilan Oxy koordinata tekisligining nuqtalari orasida o'zaro bir qiymatli moslik mavjud ekan.

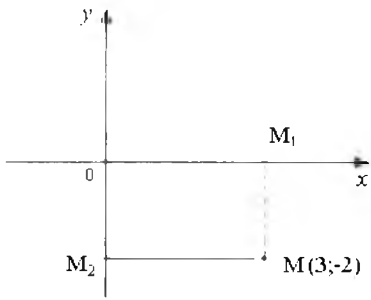
Ox o'q **abssissalar** o'qi, Oy o'q esa **ordinatalar** o'qi, ular birgalikda **koordinata o'qlari** deyiladi. O'qlarning kesishish nuqtasi *O* **koordinatalar boshi** deyiladi. Koordinata o'qlari koordinata tekisligini **choraklar** deb ataluvchi to'rtta qismlarga ajratadi (5-chizma). x abssissaga va y ordinataga ega bo'lgan M nuqtani $M(x;y)$ ko'rinishda yozish qabul qilingan.



5-chizma.

2-misol. Tekislikda M (3; -2) nuqtani yasang (6-chizma).

Yechish. Abssissalar o‘qi *Ox* da koordinatasi 3 ga teng M_1 nuqtani hamda ordinatalar o‘qi *Oy* da koordinatasi – 2 ga teng bo‘lgan M_2 nuqtalarni olamiz. M_1 nuqtadan *Ox* o‘qqa perpendikulyar, M_2 nuqtadan *Oy* o‘qqa perpendikulyar to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazamiz.



6-chizma.

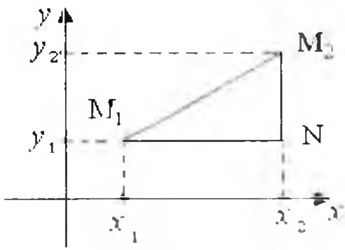
To‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasi *M* izlanayotgan nuqta bo‘ladi.

3-misol. Berilgan *M* nuqtaga ko‘ra uning koordinatalarini toping.

Yechish. *M* nuqtadan *Ox* va *Oy* o‘qlarga perpendikularlyar o‘tkazib, ularning asoslarini mos ravishda M_1 va M_2 lar orqali belgilaymiz. M_1 nuqtaning *Ox* dagi *x* koordinatasi *M* nuqtaning abssissasi, M_2 nuqtaning Oy o'qdagi koordinatasi M nuqtaning ordinatasi bo'ladi.

1.6. Tekislikning ikki nuqtasi orasidagi masofa

Oxy tekisligining berilgan $M_1(x_1;y_1)$ va $M_2(x_2;y_2)$ nuqtalari orasidagi masofani topish uchun formula chiqaramiz. M_1M_2 kesma koordinata o'qlarining hech biriga parallel bo'lmasin (7-chizma).



7-chizma.

M_1 nuqtadan Ox ga parallel, M_2 nuqtadan Oy ga parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazib, ularning kesishish nuqtasini N orqali belgilaymiz. M_1M_2N uchburchak to'g'ri burchakli bo'lganligi sababli Pifagor teoremasiga binoan, $M_1M_2^2=M_1N^2+NM_2^2$ bo'ladi.

$M_1N=|x_2-x_1|$, $NM_2=|y_2-y_1|$ ekanini hisobga olsak, $M_1M_2^2=|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$ bo'ladi.

Izlanayotgan masofani d orqali belgilasak, tekislikdagi ikki nuqta orasidagi masofani topish uchun

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \qquad (1.2)$$

formulaga ega bo'lamiz.

Xususiy holda koordinatalar boshidan $M(x;y)$ nuqtagacha bo'lgan d masofa

$$d=\sqrt{x^2+y^2} \qquad (1.3)$$

formula yordamida topiladi.

(1.2) formula M_1M_2 kesma koordinata o'qlarining birortasiga parallel bo'lganda ham o'z kuchini saqlaydi.

4-misol. M_1 (3; 4) va M_2(-1; 1) nuqtalar orasidagi masofani toping.

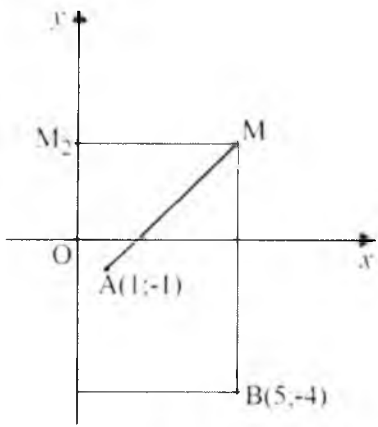
Yechish. $x_1=3$, $y_1=4$, $x_2=-1$, $y_2=1$. (1.2) formulaga binoan $d=\sqrt{(-1-3)^2+(1-4)^2}=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}=\sqrt{16+9}=5$ bo'ladi.

5-misol. *Oxy* tekislikda A(1;-1) nuqtadan hamda Oy o'qdan 5 birlik uzoqlikda joylashgan nuqtani toping (8-chizma).

Yechish. M(x; y) (x>0) izlanayotgan nuqta bo'lsin. U holda $M_2(O,y)$ M nuqtaning Oy o'qidagi proeksiyasi bo'ladi.

Shartga ko'ra $M_2M=AM=5$. (1.2) formulaga asosan $M_2M=\sqrt{(x-0)^2+(y-y)^2}=5$ yoki bundan $x=5$ kelib chiqadi.

Shuningdek $AM=\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}=5$ yoki bunga $x=5$ ni qo'ysak, $\sqrt{(5-1)^2+(y+1)^2}=5$; $4^2+(y+1)^2=25$; $(y+1)^2=9$;



8-chizma.

$y+1=\pm3$; $y_1=2$, $y_2=-4$ ga ega bo'lamiz. Demak masalaning shartini ikkita $M(5;2)$ va $B(5;-4)$ nuqtalar qanoantlantirar ekan.

6-misol. Koordinatalar boshidan $M(6;\ 8)$ nuqtagacha masofa topilsin.

Yechish. $x=6$, $y=8$ (1.3) formulaga ko'ra $d=\sqrt{6^2+8^2}=\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=10$ bo'ladi.

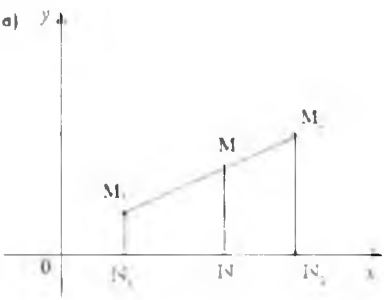
1.7. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish

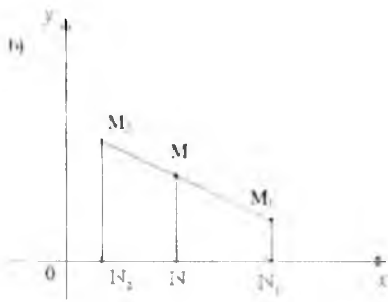
M_1M_2 kesmani berilgan $\lambda>0$ nisbatda bo'lish deganda shu kesmada $\frac{M_1M}{MM_2}=\lambda$ munosabatni qanoatlantiruvchi M nuqtani topish tushuniladi.

Oxy tekislikda $M_1(x_1,\ y_1)$, $M_2(x_2,\ y_2)$ nuqtalar berilganda M_1M_2 kesmani $\lambda>0$ nisbatda bo'luvchi $M(x;y)$ nuqtaning koordinatalarini topish uchun formula chiqaramiz. M_1, M va M_2 nuqtalarning Ox o'qlardagi proeksiyalarini N_1, N va N_2 lar orqali belgilaymiz (9-chizma).

U holda ular Ox o'qda $N_1(x_1)$, $N(x)$, $N_2(x_2)$ koordinatalarga ega bo'ladi.

Parallel to'gri chiziqlar orasidagi kesmalar proporsional bo'lishi elementar geometriyadan ma'lum.





9-chizma.

Shunga binoan, $\dfrac{M_1M}{MM_2}=\dfrac{N_1N}{NN_2}=\lambda$. Ammo $N_1N=|x-x_1|$, $NN_2=|x_2-x|$ bo'lgani uchun $\dfrac{|x-x_1|}{|x_2-x|}=\lambda$. $x-x_1$ va x_2-x ayirma bir xil ishorali ekanligini hisobga olib $|x-x_1|$ va $|x_2-x|$ modullarni $x-x_1$ va x_2-x ayirmalarga almashtirib, $\dfrac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda$ tenglikka ega bo'lamiz. Oxirgi tenglikni yechib x ni aniqlaymiz: $x-x_1=\lambda x_2-\lambda x$; $x+\lambda x=x_1+\lambda x_2$; $(1+\lambda)x=x_1+\lambda x_2$; $x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$.

Shunga o'xshash formulani y uchun ham hosil qilish mumkin.

Shunday qilib, izlanayotgan M nuqtaning x va y koordinatalarini topish uchun

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \qquad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, \tag{1.4}$$

formulalarni hosil qilamiz.

Xususiy holda M_1M_2 kesmaning o'rtasini koordinatalarini topish talab etilganda $\lambda=1$ bo'lib (1.4) dan

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \qquad y=\frac{y_1+y_2}{2} \tag{1.5}$$

formulalarga ega bo'lamiz.

7-misol. Agar $M_1(3;\ -2)$, $M_2(1;\ 4)$ bo'lsa M_1M_2 kesmani $\lambda=\dfrac{1}{4}$ nisbatda bo'luvchi nuqtaning koordinatalarini toping.

Yechish. $x_1=3,\ y_1=-2,\ x_2=1,\ y_2=4$. (1.4) ga ko'ra

$$x=\frac{3+\frac{1}{4}\cdot 1}{1+\frac{1}{4}}=\frac{13}{5}=2{,}6, \qquad y=\frac{-2+\frac{1}{4}\cdot 4}{1+\frac{1}{4}}=-\frac{4}{5}=-0{,}8 \text{ bo'ladi.}$$

Demak, izlanayotgan nuqta $M(2,6; -0,8)$ bo'ladi.

8-misol. Agar $M_1(4; 5)$, $M_2(-2; 3)$ bo'lsa M_1M_2 kesmaning o'rtasini toping.

Yechish. $x_1 = 4$, $y_1 = 5$, $x_2 = -2$, $y_2 = 3$. (1.5) formulaga binoan $x = \frac{4-2}{2} = 1$, $y = \frac{5+3}{2} = 4$ bo'ladi.

Demak $M(1,4)$ nuqta berilgan M_1M_2 kesmaning o'rtasidir.

1.8. Fazodagi nuqtaning koordinatalari. Koordinatalar usuli

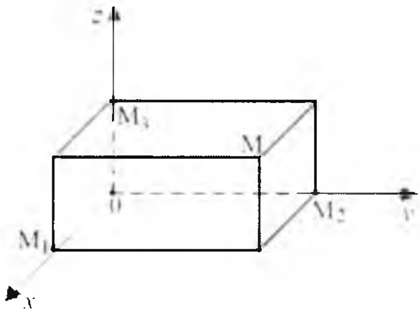
Fazodagi nuqtaning holati uchta son yordamida aniqlanishini ko'rsatamiz.

Fazoda bir xil o'lchov (masshtab) birligiga ega 0 nuqtada kesishuvchi o'zaro perpendikulyar uchta $0x$, $0y$, $0z$ o'qlarni olamiz. Bu o'qlarni **koordinata o'qlari** deb atab ularni kesishish nuqtasini **koordinatalar boshi** deb ataymiz. Bu o'qlar joylashgan fazoni $0xyz$ orqali belgilaymiz.

Koordinata o'qlari Ox, Oy, Oz fazoda Dekartning to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasini tashkil etadi. M nuqta $Oxyz$ fazoning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. Undan koordinata o'qlariga perpendikulyar uchta tekislik o'tkazamiz.

Tekisliklarning Ox, Oy va Oz o'qlar bilan kesishish nuqtalari M_1, M_2 va M_3 lar M nuqtaning mos o'qlardagi **proeksiyalari** deyiladi (10-chizma). M_1 nuqta Ox o'qda x koordinataga, M_2 nuqta Oy o'qda y koordinataga va M_3 nuqta $0z$ o'qda z koordinataga ega bo'lsin. x, y va z sonlar M nuqtaning fazodagi **to'g'ri burchakli (yoki dekart) koordinatalari** deyiladi va $M(x,y,z)$ ko'rinishda yoziladi. Bunda x M nuqtaning **abssissasi**, y **ordinatasi**, z esa **applikatasi** deyiladi.

Shunday qilib fazoning ixtiyoriy nuqtasi yagona tartiblangan sonlar uchligi shu nuqtaning koordinatalari x, y va z larni aniqlaydi.



10-chizma.

Aksincha $Oxyz$ fazodagi M nuqtaning holati uning uchta dekart koordinatalari yordamida to'liq aniqlanadi. Shunday qilib tartib-langan sonlar uchligi (x,y,z) bilan $0xyz$ fazoning nuqtalari orasida o'zaro bir qiymatli moslik mavjud ekan.

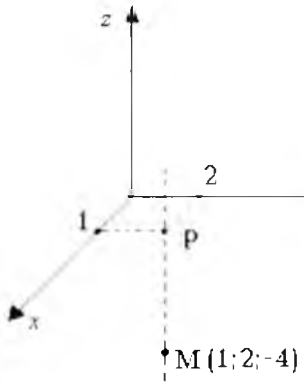
Agar har ikkita koordinata o'qlari orqali tekisliklar o'tkazsak o'zaro perpendikulyar bo'lgan **koordinata tekisliklari** deb ataluvchi uchta Oxy, Oyz, va Oxz tekisliklar hosil bo'ladi. Bu tekisliklar butun $0xyz$ fazoni **oktantlar** deb ataluvchi 8 ta qismga ajratadi.

Shunday qilib, sonlar o'qining nuqtasi bitta haqiqiy son x yordamida, tekislik nuqtasining tanlangan koordinatalar sistemasiga nisbatan o'rni ikkita tartiblangan sonlar juftligi (x,y) yordamida, fazo nuqtasining tanlangan koordinatalar sistemasiga nisbatan holati uchta tartiblangan sonlar uchligi (x,y,z) yordamida to'liq aniqlanar ekan. Nuqtaning holatini sonlar yordamida aniqlash usuli **koordinatalar usuli** deb ataladi.

Bu usulning asoschisi fransuz matematigi va filosofi Rene Dekartdir (1596-1650). U geometrik masalalarni algebra usullaridan foydalanib yechishni taklif etish bilan birga Oliy matematikaning maxsus bo'limi, **analitik geometriyaning** yuzaga kelishiga sababchi bo'ldi.

9-misol. $M(1;2;-4)$ nuqtani yasang.

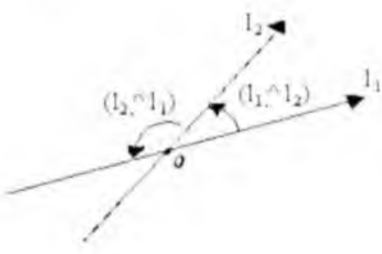
Yechish. Ox o'qda koordinatasi 1 ga teng nuqtani olib undan Oy o'qqa parallel to'g'ri chiziq o'tkazamiz. Shuningdek Oy o'qda koordinatasi 2 ga teng nuqtani olib undan Ox ga parallel to'g'ri chiziq o'tkazamiz. To'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasini P orqali belgilaymiz. P orqali Oz o'qqa paralel to'g'ri chiziq o'tkazib undan pastga tomon 4 birlikka teng kesma ajratamiz. Ana shu kesmaning oxiri $M(1; 2; -4)$ nuqtani aniqlaydi (11-chizma).



11-chizma.

1.9. Ikki o'q orasidagi burchak

O nuqtada kesishuvchi l_1 va l_2 o'qlarni qaraymiz. l_1 bilan l_2 o'qlar orasidagi burchak deganda l_1 o'qning l_2 bilan ustma-ust tushishi uchun l_1 ni O nuqta atrofida soat mili yo'nalishiga teskari yo'nalishda burilishi lozim bo'lgan burchak tushuniladi. l_1 bilan l_2 orasidagi burchakni $(l_1\hat{\ }l_2)$ kabi yoziladi. Ta'rifga ko'ra $(l_1\hat{\ }l_2) \neq (l_2\hat{\ }l_1)$.



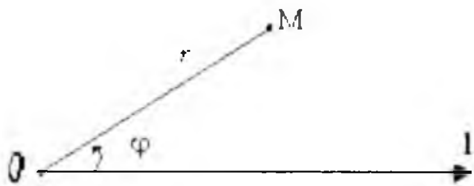
12-chizma.

$0 \le (l_1,\wedge l_2) \le \pi$ desak ikki o'q orasidagi burchak bir qiymatli aniqlanadi (12-chizma).

1.10. Qutb koordinatalar sistemasi

Tekislikda Dekartning to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasidan keyin ko'p qo'llaniladigan koordinatalar sistemalaridan biri **qutb koordinatalar sistemasi** bilan tanishamiz.

Tekislikning O nuqtasini va undan chiquvchi l nurni qaraymiz (13-chizma).

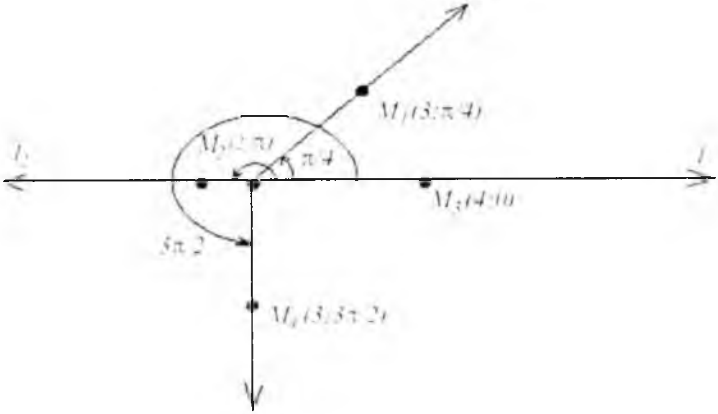


13-chizma.

Bu nurni **qutb o'qi** uning boshi O nuqtani **qutb** deb ataymiz. M nuqta tekislikning qutbdan farqli ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. $OM = r>0$ masofani **qutb radiusi,** $\angle MOl=\varphi$ burchakni **qutb burchagi** deb ataymiz hamda $0\le\varphi<2\pi$ deb faraz qilamiz. r va φ lar M nuqtaning **qutb koordinatalari** deb ataladi va $M(r;\varphi)$ kabi yoziladi, qutb uchun $r = 0$.

10-misol. $M_1(3; \pi/4)$, $M_2(2; \pi)$, $M_3(4; 0)$ va $M_4(3;\frac{3\pi}{2})$ $M_5(5;\frac{3\pi}{4})$ nuqtalarni yasang.

Yechish. Birinchi nuqtani yasash uchun qutbdan chiqib, qutb o'qi bilan $\pi/4$ burchak tashkil etuvchi l_1 nurni o'tkazib, undagi koordinatasi 3 ga teng M_1 nuqta olinadi. Qolgan nuqtalar ham shunga o'xshash yasaladi (14-chizma).



14-chizma.

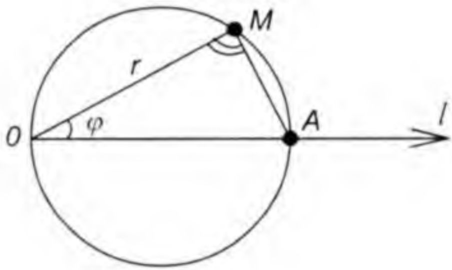
Qutb koordinatalari ishtirok etgan tenglama berilgan bo'lib, uni faqatgina biror chiziq nuqtalarining qutb koordinatalari qanoatlantirsa, berilgan tenglama ana shu chiziqning qutb tenglamasi deyiladi.

Endi ba'zi-bir egri chiziqlarni qutb tenglamalariga ko'ra chizamiz.

11-misol. $r = a\cos\varphi$ tenglama aniqlaydigan chiziqni chizing, bunda a ma'lum musbat son, φ, r qutb koordinatalari.

Yechish. Chiziqning ixtiyoriy nuqtasini $M(r;\varphi)$, (O,a) koordnatalarga ega nuqtasini A orqali belgilab OMA burchakni kuzatamiz.

Agar OMA burchak to'g'ri bo'lsa $cos\varphi$ ni ta'rifidan $\dfrac{r}{a} = \cos\varphi$ yoki $r = a\cos\varphi$ bo'ladi. Aksincha $r = a\cos\varphi$ bo'lganda OMA to'g'ri burchak bo'ladi. Demak egri chiziqning istalgan M nuqtasi uchun $LOMA = 90^0$ bo'lar ekan. Bunday xossaga faqatgina deametri a ga teng aylana ega, chunki aylananing deametriga mos barcha ichki burchaklari 90^0 ga teng (15-chizma).



15-chizma.

Shunday qilib qutb koordinatalari $r = \alpha\cos\varphi$ tenglamani qanoatlantiruvchi tekislik nuqtalarining geometrik o'rni markazi $\left(\frac{a}{2};0\right)$ nuqtada bo'lib radiusi $\frac{a}{2}$ ga teng aylana ekan.

Shuningdek $r = a$ tenglama, bunda a ma'lum musbat son qutbdan teng uzoqlikda joylashgan nuqtalarning geometrik o'rni-ni, ya'ni markazi qutbda bo'lib radiusi a ga teng aylanani aniqlaydi.

12-misol. $r = a\varphi$ tenglama aniqlaydigan chiziq chizilsin, bunda a ma'lum musbat son, φ, r qutb koordinatalari.

Yechish. $r = a\varphi$ tenglama aniqlaydigan chiziqni tasavvur qilish uchun qutb burchagi φ,0 dan boshlab o'sadi deb faraz qilib chiziqning M($r;\varphi$) o'zgaruvchi nuqtasining harakatini kuzatamiz. $\varphi = 0$ bo'lganda $r = 0$; φ,0 dan boshlab o'sganda r ham φ ga proportsional ravishda o'sadi. Natijada M ($r;\varphi$) o'zgaruvchi nuqta qutbdan chiqib uning atrofida musbat yo'nalish bo'ylab harakatlanib qutbdan uzoqlasha boradi.

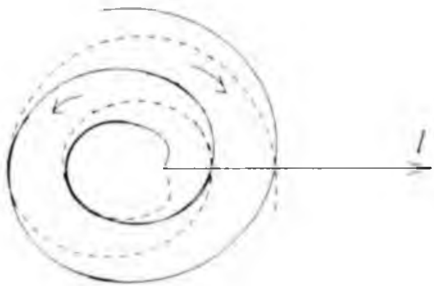
Demak M nuqta qandaydir spiralni chizadi; $r = a\varphi$ tenglama aniqlaydigan spiral **Arximed spirali** deyiladi.

M($r;\varphi$) nuqta Arximed spirali bo'ylab musbat yo'nalishda harakatlanib qutb atrofida to'liq bir marta aylanib chizish uchun qutb burchagi φ 2π ga o'zgaradi, qutb radiusi r esa $2a\pi$ ga o'zgaradi. Demak Arximed spirali istalgan qutbdan chiquvchi nurni uzunligi $2a\pi$ ga teng kesmalarga ajratadi (qutbga tutashgan kesma bundan istisno) (17-chizma)

a manfiy son bo‘lganda φ ham manfiy qiymatlar qabul qilib $r = a\varphi$ tenglama Arximedning "teskari" spiralini aniqlaydi. Bu holda M($r;\varphi$) o‘zgaruvchi nuqta manfiy yo‘nalish bo‘ylab harakatlanadi.

16-chizmada a ning musbat qiymatiga mos Arximed spirali uzluksiz (yaxlit) chiziq bilan, a ning manfiy qiymatiga mos Arximedning "teskari" spirali nuqtali chiziq bilan tasvirlangan.

φ	r
0	0
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}a$
π	$\frac{3\pi}{2}a$
$\frac{3\pi}{2}a$	$\frac{3\pi}{2}a$
2π	$2\pi a$



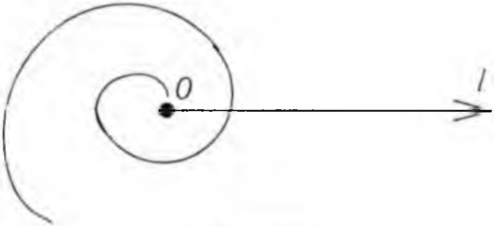
16-chizma.

13-misol. Qutb koordinatalarida $r = ae^{k\varphi}$ tenglamaga ega egri chizi chizilsin, bunda a, k musbat o‘zgarmas sonlar. Bu chiziq logarifmik spiral deb ataladi.

Yechish. Chiziqni chizish uchun φ ga har xil qiymatlar berib, unga mos r ni aniqlaymiz.

φ	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
r	$ae^{-k\pi}$	$ae^{-\frac{k\pi}{2}}$	a	$ae^{\frac{k\pi}{2}}$	$ae^{k\pi}$

Berilgangan tenglamani qanoatlantiruvchi φ va r ning bu qiymatlari jadvali shuni ko'rsatadiki qutb burchagi φ ayirmasi $\frac{\pi}{2}$ ga teng arifmetik progressiya bo'yicha o'sganda qutb radiusi r maxraji $e^{\frac{\pi}{2}}$ bo'lgan geometrik progressiya bo'yicha o'sadi. Qutb burchagi φ manfiy qiymatlarni qabul qilib nihoyatda kamayganda r ham kamayib nolga yaqinlashadi. Egri chiziq esa 0 qutbga yaqinlashib uning atrofida uralaboradi. (17-chizma)



17-chizma.

Kelgusida qutb koordinatalar sistemasida berilgan xilma-xil egri chiziqlar bilan tanishamiz.

1.11. Dekart va qutb koordinatalari orasidagi bog'lanish

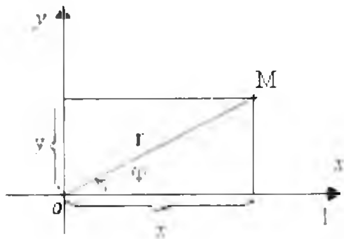
Ba'zan dekart va qutb koordinatalaridan bir vaqtning o'zida foydalanishga to'g'ri keladi. M nuqtaning x, y dekart koordinatalari bilan uning φ, r qutb koordinatalari orasida bog'lanish o'rnatamiz. Bu masalani hal etish qutb o'qi hamda dekart sistemasi o'qlarining joylashishiga bog'liq. Biz qutb o'qi dekart sistemasining abssissalar o'qi bilan qutb, dekart sistemasining koordinatalar boshi bilan ustma-ust tushgan xususiy hol bilan cheklanamiz. Qutb o'qi va Ox , Oy o'qlar bir xil o'lchov (masshtab) birligiga ega deb faraz qilamiz.

$\cos\varphi$ va $\sin\varphi$ funksiyalarinng ta'rifiga binoan (18-chizma)

$\cos\varphi = x/r$, $\sin\varphi = y/r$ va bundan

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi, \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (1.6)$$

formulaga ega bo‘lamiz. Bu formulalardan foydalanib, nuqtaning qutb koordinatalari φ, r lar ma’lum bo‘lganda uning x, y dekart koordinatalarini topish mumkin. Nuqtaning qutb koordinatalarini uning dekart koordinatalari orqali ifodalash uchun (1.6) dagi har ikkala tenglikni kvadratga ko‘tarib qo‘shamiz. U holda $x^2+y^2=r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)$ yoki $x^2+y^2=r^2$ bo‘ladi.



18-chizma.

Bundan

$$r=\sqrt{x^2+y^2}\,. \qquad (1.7)$$

(1.6) dagi ikkinchi tenglikni birinchisiga hadlab bo‘lsak,

$$\frac{y}{x}=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \quad \text{yoki} \quad tg\varphi=\frac{y}{x} \qquad (1.8)$$

hosil bo‘ladi. (1.7) va (1.8) lardan foydalanib, nuqtaning dekart koordinatalariga ko‘ra uning qutb koordinatalarini aniqlash mumkin. Odatda (1.8) tenglik (φ ning ikkita ($0\le\varphi<2\pi$) qiymatlarida o‘rinli bo‘ladi. Ulardan φ ning (1.6) ni qanoatlantiradiganini olish lozim.

Izoh. φ ning topilgan ikkita qiymatlaridan keraklisini nuqta dekart sistemasining qaysi choragida yotishiga qarab olish ham mumkin.

14-misol. M nuqtaning dekart koordinatalari $x=\sqrt{3}$, $y=1$ ga ko'ra uning qutb koordinatalari topilsin.

Yechish. (1.7) formulaga asosan $r=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{3+1}=2$.

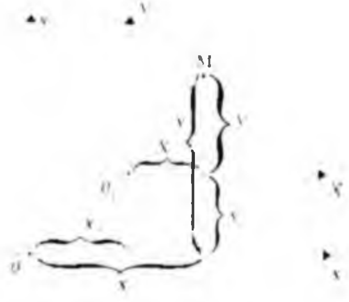
(1.8) formulaga binoan $tg\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ushbu tenglik φ ning ikkita qiymatlarida, ya'ni $\varphi_1=\frac{\pi}{6}$ va $\varphi_2=\frac{7\pi}{6}$ qiymatlarda bajariladi. $M(\sqrt{3};1)$ nuqta dekart sistemasining birinchi choragiga tegishli bo'lganligi sababli $\varphi=\frac{\pi}{6}$ bo'ladi. Shunday qilib, M nuqta $\varphi=\frac{\pi}{6}$, $r=2$ qutb koordinatalariga ega bo'lar ekan.

1.12. Koordinatalarni almashtirish

Koordinatalarni almashtirishning ikkita usuli bilan alohida-alohida tanishamiz.

1.Koordinata o'qlarini parallel ko'chirish. Bir vaqtda ikkita dekart koordinatalar sistemalari Oxy va 0_1XY ni qaraymiz. 0_1XY sistema Oxy sistemani koordinata o'qlarini yo'nalishini o'zgartirmasdan koordinatalar boshini 0_1 nuqtaga ko'chirish natijasida hosil bo'lsin(19-chizma).



19-chizma

Nuqtaning Oxy sistemaga nisbatan koordinatalarini **"eski"** koordinatalar, 0_1XY sistemaga nisbatan koordinatalarini **"yangi"** koordinatalar deb ataymiz. Faraz qilaylik, 0_1 nuqta "eski" Oxy sistemaga nisbatan x_0, y_0 koordinatalarga ega bo'lsin. Tekislikning istalgan M nuqtasini x, y "eski" koordinatalari bilan X, Y "yangi" koordinatalari orasida bog'lanish o'rnatamiz 19-chizmadan.

$$\begin{cases} x - x_0 = X, \\ y - y_0 = Y. \end{cases} \quad \text{yoki} \quad \begin{cases} x = X + x_0, \\ y = Y + y_0 \end{cases} \tag{1.9}$$

ekani ravshan. (1.9) ga binoan nuqtaning «yangi» koordinatalariga ko'ra uning «eski» koordinatalarini topish mumkin (1.9) formuladan .

$$\begin{cases} X = x - x_0, \\ Y = y - y_0 \end{cases} \tag{1.10}$$

nuqtaning «eski» koordinatalariga ko'ra uning «yangi» koordinatlarini topish formulasi kelib chiqadi. (1.9) ni **parallel ko'chirish formulasi** deb ataladi.

15-misol. Oxy «eski» sistemada $M(3;\ 4)$ nuqta berilgan. Koordinata o'qlarini parallel ko'chirganda «yangi» sistemaning koordinatalar boshi «eski» sistemaga nisbatan 5 va –2 koordinatalarga ega bo'lsa, M nuqtaning X, Y «yangi» koordinatalarini toping.

Yechish. (1.10) ga $x=3$, $y=4$, $x_0=5$, $y_0=-2$ qiymatlarini qo'ysak $X=3-5=-2$, $Y=4-(-2)=6$ kelib chiqadi.

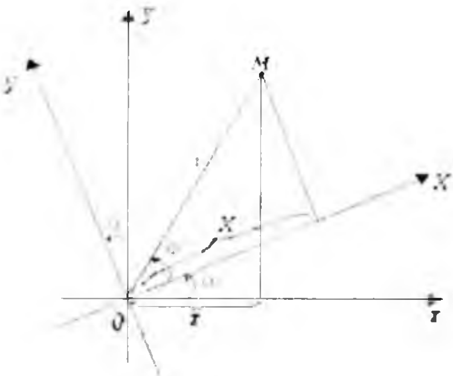
Dekart koordinatalar sistemasi $Oxyz$ ning koordinatalar boshini $0_1(x_0; y; z_0)$ nuqtaga parallel ko'chirilganda parallel ko'chirish formulasi

$$\begin{cases} x = X + x_0, \\ y = Y + y_0, \\ z = Z + z_0 \end{cases} \tag{1.9'}$$

ko'rinishga ega bo'lishini ta'kidlab o'tamiz.

2. Koordinata o'qlarini burish. Tekislikda umumiy O koordinitalar boshiga ega ikkita dekart koordinatalar siistemalari Oxy (eski) va OXY (yangi) ni qaraymiz. Bu yerdagi "yangi" sistema "eski" sistemani o'qlarini α burchakka burish oqibatida hosil bo'ladi (20-chizma).

Tekislikni ixtiyoriy M nuqtasini x,y "eksi" koordinatalari bilan uning X,Y "yangi" koordinatalari orasida bog'lanish o'rnatamiz. Ikkita qutb koordinatalar sistemalarini kiritamiz. Qutb o'qi Ox bilan ustma-ust tushgan "eski" va qutb o'qi $0X$ bilan ustma-ust tushgan "yangi" qutb sistemalarini qaraymiz.



20- chizma.

Har ikkala sistemaning qutbi koordinatalar boshi bilan ustma-ust tushadi deb qaraymiz. Faraz qilaylik M nuqtaning yangi qutb sistemasiga nisbatan qutb radiusi r, qutb burchagi φ bo'lsin.

U holda M nuqta eski qutb sistemasiga nisbatan r qutb radiusiga va $\alpha+\varphi$ qutb burchagiga ega ekanligi 20-chizmadan ko'rinib turibdi.

Shuning uchun (1.6) ga asosan

$$\begin{cases} x = r\cos(\alpha+\beta) \\ y = r\sin(\alpha+\beta) \end{cases}$$

bo'ladi. Elementar matematikadagi ikki burchak yig'indisining kosinusi va sinusi uchun chiqarilgan formulalardan foydalanib quyidagiga ega bo'lamiz:

$x=r(\cos\alpha\cos\varphi-\sin\alpha\sin\varphi)=(r\cos\varphi)\cos\alpha-(r\sin\varphi)\sin\alpha;$

$y=r(\sin\alpha\cos\varphi+\sin\varphi\cos\alpha)=(r\cos\varphi)\sin\alpha+(r\sin\varphi)\cos\alpha;$

Ammo $r\cos\varphi=X$, $r\sin\varphi=Y$ bo'lgani uchun

$$\begin{cases} x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha, \\ y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha \end{cases} \qquad (1.11)$$

bo'ladi. (1.11) formula **koordinata o'qlarini burish** formulasi deyiladi.

(1.11) ga ko'ra nuqtaning eski koordinatalarini uning yangi koordinatalariga asosan topish mumkin. Nuqtaning yangi koordinatlarini uning eski koordinatalariga asosan topish formulasini (1.11) sistemani X, Y ga nisbatan yechib hosil qilish mumkin.

16-misol. Yangi sistema eski sistemani o'qlarini 45^0 ga burish natijasida hosil bo'lsa, nuqtaning x, y eski koordinatalarini uning X, Y yangi koordinatalari orqali ifodalang.

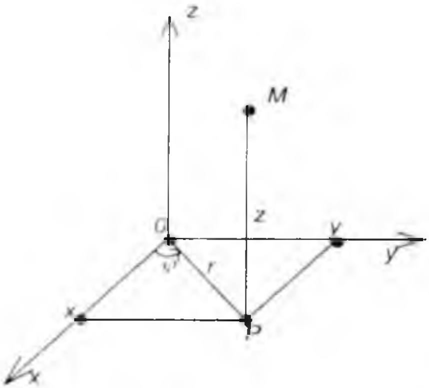
Yechish. $\cos 45^0=\frac{\sqrt2}{2}$, $\sin 45^0=\frac{\sqrt2}{2}$ bo'lgani uchun (1.11) formulaga binoan:

$$\begin{cases} x = X\dfrac{\sqrt2}{2} - Y\dfrac{\sqrt2}{2}, \\ y = X\dfrac{\sqrt2}{2} + Y\dfrac{\sqrt2}{2} \end{cases} \quad \text{yoki} \quad \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt2}{2}(X-Y), \\ y = \dfrac{\sqrt2}{2}(X+Y) \end{cases}$$

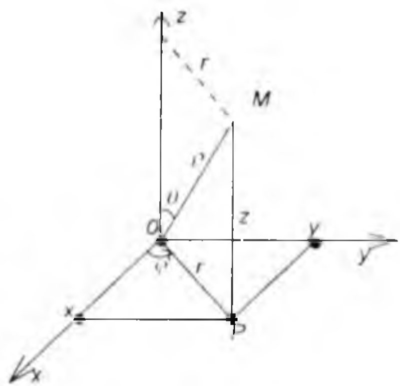
Fazodagi nuqtaning dekart koordinatalari bilan bir qatorda uning boshqa koordinatalarini ham qarash mumkin.

1.13. Silindrik koordinatalar. $Oxyz$ koordinatalar sistemasida M nuqtani quyamiz. Bu nuqtaning fazodagi holati uning dekart koordinatalari x, y, z uchlik bilan aniqlanishini ko'rdik. M nuqtaning holatini x, y, z uchlikdan farqli boshqa uchlik bilan aniqlash ham mumkinligini ko'rsatamiz. P nuqta M ning Oxy tekislikdagi proeksiyasi bo'lsin. OP nurni o'tkazib tekislikda qutb koordinatalar sistemasini kiritamiz. P Oxy nuqta r,φ qutb koordinatalarga ega bo'lsin. r,φ hamda M nuqtani z applikatasiga asoslanib M nuqtaning fazodagi holatini aniqlash mumkin. r,φ,z sonlar M nuqtaning silindrik koordinatalari deb ataladi va $M(r,\varphi,z)$ kabi yoziladi 21-chizmadan M nuqtaning r,φ,z silindrik koordinatalari bilan uning x,y,z dekart koordinatalari $x = z\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$ munosabat bilan bog'langanligi ko'rinib turibdi, bunda $r > 0$, $0 \le \varphi < 2\pi$, z ixtiyoriy haqiqiy son.

r,φ,z ni silindrik koordinatalar deb atalishi $r = const$ chiziq fazoda silindrni ifodalashiga asoslangan.



21-chizma.



22-chizma

1.14. Sferik koordinatalar. $Oxyz$ koordinatalar sistemasida M nuqtani qaraymiz. M nuqtaning fazodagi holatini undan koordinatalar boshgacha ρ masofa (M nuqta radius-vektorining uzunligi), radius-vektor bilan oz o'q orasidagi θ burchak hamda nuqta radius vektorining Oxy tekislikka proeksiyasi r bilan Ox o'q orasidagi φ burchak orqali aniqlash ham mumkin. Bu ρ,φ,θ uchta son M nuqtaning **sferik koordinatalari** deb ataladi va $M(\rho,\varphi,\theta)$ kabi yoziladi.

M nuqtaning ρ,φ,θ sferik koordinatalari bilan uning x,y,z dekard koordinatalari orasida boғlanish o'rnatamiz. Trigonometrik funktsiyalarni ta'rifiga asosan 22-chizmadan $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = \rho\cos\theta$ ga ega bo'lamiz. $r = \rho\sin\theta$ ekanini hisobga olib

$$\begin{cases} x = \rho\sin\theta\cos\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\theta \end{cases}$$

munosabatni hosil qilamiz, bunda $\rho \geq 0, 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi$. ρ,φ,θ ni sferik koordinatalar deb atalishiga sabab $\rho = const$ (koordinatalar boshidan bir xil uzoqlikda joylashgan fazoning nuqtalari to'plami) sferani ifodalashiga asoslangan.

Shunday qilib fazodagi nuqtaning holatini uning uch xil-dekart, silindrik va sferik koordinatalari yordamida aniqlash mumkin ekan.

Mustaqil yechish uchun mashqlar va test savollari

1. 0 son N, Z, Q, R to'plamlarining qaysi biriga tegishli emas.
2. $\sqrt{n}$ $(n \in N)$ qachon ratsional son bo'ladi.
3. Sonlar o'qida 4; 2,5; -5 va $\sqrt{3}$ haqiqiy sonlarga mos nuqtalar yasalsin.
4. Koordinatalari quydagi tenglamalarni qanoatlantiruvchi nuqtalar yasalsin:

1) $\frac{5x-2}{3} - \frac{2x-1}{7} = \frac{3x+4}{2} - 3$; 2) $x^2-16=0$; 3) $x^2-5x+6=0$;

4) $x^2-4x+2=0$; 5) $3^x - \frac{1}{81}=0$; 6) $log_2(2x-4)=3$.

5. Koordinatalar boshiga nisbatan A(+4), B(-3) va C($\sqrt{5}$) nuqtalarga simmetirik nuqtalar topilsin.

6. Koordinatalar boshi $0_1(+2)$ nuqtaga ko'chirilganda $A(-2)$, $B(+5)$, $C(-3)$ va $D(-7)$ nuqtalarning koordinatalari qanday bo'ladi.

7. $|x| < 3$ va $|x| \geq 2$ tengsizliklar sonlar o'qida tasvirlansin.

8. $A(-3)$ va $B(7)$; $C(+4)$ va $D(-7)$; $E(-1)$ va $F(-5)$; $0(0)$ va $Q(-7)$; $K(-4)$ va $0(0)$ nuqtalar orasidagi masofa topilsin.

9. Tekislikda $(7;2)$, $(4;0)$, $(-2;2)$, $(0;4)$, $(-3;-2)$ va $(\sqrt{2}; -\sqrt{3})$ sonlar juftligiga mos nuqtalar yasalsin.

10. Koordinatalari 1) $\begin{cases} 2y - 3x = 6, \\ y - 3x = 9, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x + y = 7, \end{cases}$

tenglamalar sistemasining yechimidan iborat nuqtalar yasalsin.

11. Abssissalari –4, -3, -2, 1, 2, nuqtalardan iborat va ordinatalari $y = 2x + 1$ tenglama yordamida aniqlanuvchi nuqtalar yasalsin.

12. Koordinatalar boshi, abssissalar va ordinatalar o'qlariga nisbatan $A(3;4)$, $B(3;0)$, $C(0;-2)$ va $D(-2;3)$ nuqtalarga simmetrik nuqtalar yasalsin. Ularning koordinatadari topilsin.

13. Kvadratning tomonlari 3 ga teng. Koordinata o'qlari: 1. Kvadratning noparallel tomonlari bo'yicha; 2. Kvadratning diagonallari bo'yicha; 3. Kvadratning tomonlariga parallel bo'lib uning markazida kesishuvchi to'g'ri chiziqlar bo'yicha yo'nalganda kvadrat uchlarining koordinatalari topilsin.

14. $A(-4;2)$ va $B(0;-1)$ nuqtalar orasidagi masofa topilsin.

15. Uchlari $A(-1;-1)$, $B(-1;2)$, $C(2;2)$ va $D(2;-1)$ nuqtalarda bo'lgan to'rtburchakning kvadrat ekanligi isbotlansin.

16. Uchlari $A(-5;3)$, $B(-1;0)$ va $C(2;4)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchak yasalsin. Uning perimetri va burchaklari topilsin.

17. M_1 va M_2 nuqtalarni tutashtiruvchi kesma o'rtasining koordinatalarini toping:

1) $M_1(5;3)$ va $M_2(7;5)$. 2) $M_1(-12;0)$ va $M_2(0;8)$.

18. $M_1(3;-2)$ va $M_2(4;-3)$ nuqtalarni tutashtiruvchi M_1M_2 kesmadagi N nuqta uni $M_1N:NM_2 = \frac{2}{3}$ nisbatda bo'ladi. N nuqtaning koordinatalarini toping.

19. M_1M_2 kesmaning boshi $M_1(2;5)$ va uning o'rtasi $N(3;-4)$ berilgan. Kesmaning oxiri M_2 topilsin.

20. Uchlari $A(1;2)$, $B(0;5)$ va $C(-2;3)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchak medianalarining kesishish nuqtasi topilsin.

21. Uchlari $M_1(x;6)$ va $M_2(-3;y)$ nuqtalarda bo'lgan kesma $N(2;-2)$ nuqtada teng ikkiga bo'linadi. M_1 va M_2 nuqtalarni toping.

22. $(2;3;5)$, $(-2;2;3)$, $(3;-2;-4)$ va $(-2;-3;-4)$ haqiqiy sonlarning uchligiga mos $Oxyz$ fazoning nuqtalari yasalsin.

23. $A(2;\frac{\pi}{4})$, $B(4;\frac{\pi}{3})$, $C(3;\frac{3\pi}{4})$, $D(4;\frac{5\pi}{6})$ va $E(3;\frac{2\pi}{3})$ nuqtalarning qutb koordinatalar sistemasiga nisbatan o'rni topilsin.

24. Qutb koordinatalari $A(\sqrt{2};\frac{\pi}{4})$, $B(4;\frac{\pi}{3})$, $C(4\sqrt{2};\frac{3\pi}{4})$, $D(2;\frac{5\pi}{6})$, $E(3;\frac{2\pi}{3})$ nuqtalarning dekart koordinatalari topilsin.

25. Dekart koordinatalari $A(3;-2)$, $B(-1;-1)$, $C(3;0)$, $D(0;-4)$ nuqtalarning qutb koordinatalari topilsin.

26. $2,302(112)$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, π, e sonlardan ratsional sonni toring.

A) π B) e D) $\sqrt{5}$ E) $2,302(112)$ F) $\sqrt{3}$.

27. Ikki to'g'ri chiziqning kesishishidan hosil bo'lgan burchaklarning kattaliklari nisbati 6:4 da teng. Shu burchaklardan kattasini toping.

A) 108^0 B) 114^0 D) 120^0 E) 126^0 F) 132^0.

28. Oxy sistemani koordinatalar boshini $0_1(-3;2)$ nuqtaga parallel ko'chirish natijasida nuqta $(-8,7)$ koordinatalarga ega bo'lgan bo'lsa o'sha nuqtaning Oxy sistemaga nisbatan koordinatalari topilsin.

A) $(7;3)$ B) $(2;9)$ D) $(6;6)$ E) $(-10,9)$ F) $(-11,9)$.

29. Agar «yangi» sistema «eski» sistemani 60^0 da burish natijasida hosil bo'lgan bo'lsa, u holda «eski» sistemadagi $(3;2)$ nuqta «yangi» sistemada qanday koordinatalarga ega bo'ladi.

A) $\left(\frac{3}{2}+\sqrt{3};1-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ B) $\left(1-\frac{3\sqrt{3}}{2};\frac{3}{2}+\sqrt{3}\right)$

D) $\left(\sqrt{3};\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ E) $(-2;1)$ F) $\left(\frac{3}{2}+\sqrt{3};1-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$.

30. Qutb sistemasidagi $\left(\sqrt{29};arctg\frac{5}{2}\right)$ nuqtaning dekart koordinatalari topilsin.

A) (2;5) B) (–2;5) D) (2;5) va (–2;–5) E) (2;5) va (–2;5) F) (2;5) va (2;–5).

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Natural son nima?
2. Butun son nima?
3. Ratsional son nima?
4. Irratsional son nima?
5. Haqiqiy son nima?
6. Haqiqiy sonning geometrik tasviri nima?
7. Haqiqiy sonning absolyut qiymatini ta'riflang.
8. To'g'ri chiziqning ikkita nuqtalari orasidagi masofa qanday topiladi.
9. Tekislikda dekart sistemasi qanday aniqlanadi.
10. Tekislikda nuqtaning dekart koordinatalarini ta'riflang.
11. Tekislikning ikki nuqtasi orasidagi masofani topish formulasini yozing.
12. Kesmani berilgan nisbatda bo'luvchi nuqtaning koordinatalarini topish formulasini keltirib chiqaring.
13. Fazodagi nuqtaning dekart koordinatalarini ta'riflang.
14. O'qlar orasidagi burchakni ta'riflang.
15. Qutb koordinatalar sistemasini ta'riflang.
16. Nuqtaning dekart va qutb koordinatalari orasidagi bog'lanishni ifodalovchi formulalarni yozing.
17. Parallel ko'chirish formulasini yozing.
18. Koordinata o'qlarini burish formulasini yozing.
19. Silindrik va sferik koordinatalar sistemalarini ta'riflang.

2. DETERMINANTLAR VA ULARNING XOSSALARI

2.1.Ikkinchi tartibli determinantlar

$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ sonlar berilgan bo'lsin.

Bu sonlardan tuzilgan $a_{11}a_{22}-a_{12}\,a_{21}$ ifoda(son) **ikkinchi tartibli determinant** deb ataladi va

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

ko'rinishida yoziladi.

Demak ta'rifga binoan

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}\,a_{21} \qquad (2.1)$$

$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ sonlar determinantning **elementlari** deb ataladi.

Ikkinchi tartibli determinantlar ikkita gorizantal va ikkita vertikal qatorlarga ega. Gorizantal qatorlarni **satrlar**, vertikal qatorlarni **ustunlar** deb ataymiz. Satrlar yuqoridan pastga qarab,ustunlar esa chapdan o'ngga qarab sanaladi. Ikkinchi tartibli determinantda a_{11} a_{12} birinchi satrni, a_{21}, a_{22} ikkinchi satrni $\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \end{matrix}$ birinchi ustunni, $\begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \end{matrix}$ esa ikkinchi ustunni tashkil etadi. Shuningdek $a_{11}\,a_{22}$ ikkinchi tartibli detirminantning **bosh diagonalini** $a_{12}\,a_{21}$ uning **yon (yordamchi) diagonalini** tashkil etadi. Shunday qilib ikkinchi tartibli determinantni hisoblash uchun bosh diagonal elementlari ko'paytmasidan yon diagonal elementlari ko'paytmasini ayirish lozim ekan.

1-misol. $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 2\cdot(-4) - 3\cdot 1 = -8 - 3 = -11$.

2-misol. $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot 5 - (-3)\cdot 4 = 10 + 12 = 22$.

3-misol. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{vmatrix} = -\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = -1$.

2.2. Uchinchi tartibli determinantlar

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

ifoda yordamida aniqlanadigan son **uchinchi tartibli determinant** deyiladi va

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

kabi belgilanadi. Bu yerdagi a_{11}, a_{12},..., a_{33} sonlar ma'lum sonlar bo'lib ular determinantning elementlari deyiladi.

Uchinchi tartibli determinant uchta satr(gorizontal qator), uchta ustun (vertikal qator) va to'qqizta elementlarga ega. Ta'rifga binoan:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \quad (2.2)$$

4-misol. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix}$ hisoblansin.

Yechish. (2.2) formulaga binoan

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 6-20-2(-2-8)+3(-5-6)=-14+20-33=20-47=-27.$$

Determinantning har bir elementi ikki xonali indeksga ega bo'lib ulardan birinchisi shu element turgan satrning nomerini, ikkinchisi shu element turgan ustunning nomerini bildiradi. Masalan a_{32} element uchinchi satr va ikkinchi ustunda turadi. $a_{11}\ a_{22}\ a_{33}$ uchinchi tartibli determinantning bosh diagonalini, $a_{13}a_{22}a_{31}$ uning **yon diagonalini** tashkil etadi.

2.3. Minor va algabraik to'ldiruvchi

Determinantni biror elementining **minori** deb, determinantdan bu element turgan satr va ustunni o'chirishdan hosil bo'lgan determinantga aytiladi. a_{ik} (i,k=1,2,3) elementning minori M_{ik} kabi belgilanadi. Uchinchi tartibli determinant elementlarining minorlari ikkinchi tartibli determinant bo'ladi. Masalan:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

determinant a_{12} elementining minori $M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$ son. a_{23} elementining minori $M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$ son bo'ladi. Chunki M_{12} ni topish uchun Δ determinantning birinchi satri va ikkinchi ustuni M_{23} ni topish uchun esa shu a_{23} element turgan determinantning ikkinchi satri va uchinchi ustuni o'chiriladi.

$A_{ik}=(-1)^{i+k}M_{ik}$ (i,k=1,2,3) son a_{ik} elementning **algebraik to'ldiruvchisi** deb ataladi. Masalan Δ determinantning a_{32} elementining algebraic to'ldiruvchisi $A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}=a_{13}a_{21}-a_{11}a_{23}$ bo'ladi.

2.4. Determenantning asosiy xossalari

1. *Determinantning satrlarini unga mos ustunlar bilan almashtirish natijasida determinantning qiymati o'zgarmaydi, ya'ni*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

2. *Determinantning ikkita satr(yoki utsun)larini o'rinlarini almashtirish natijasida determinantning ishorasi o'zgaradi xolos,* ya'ni

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Bu yerda berilgan determinantning ikkinchi va uchinchi ustunlarini o'rinlari almashgan.

3. *Ikkita bir xil satr (yoki ustun)ga ega bo'lgan determinant 0 ga tengdir.*

4. *Determinantning biror satr (yoki ustun) elementlarini biror λ songa ko'paytirish determenantni shu songa ko'paytirishga teng kuchlidir:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \lambda a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \lambda a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \lambda a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Determinantning bu xossasiga asoslanib 3-xossani biroz kuchaytirish mumkin. Ya'ni ikkita proporsional satr(yoki ustun)larga ega bo'lgan determinant nolga tengdir.

5. *Biror satr (yoki ustun)elementlari nollardan iborat determenant nolga tengdir.*

6. *Determinantning biror satr (yoki ustun) elementlarini biror songa ko'paytirib boshqa bir satr (yoki ustun) ning mos elementlariga qo'shish natijasida determinantning qiymati o'zgarmaydi, ya'ni*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + m\,a_{13} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + m\,a_{23} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} + m\,a_{33} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Bu yerda berilgan determinantning uchinchi ustun elementlari m songa ko'paytirilib ikkinchi ustinning mos elementlariga qo'shildi.

7. *Determinantning biror satr(yoki ustun) elementlarini ularning algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytirib qo'shsak yig'indi determinantning o'ziga teng bo'ladi, ya'ni:*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

determenant uchun

$$\Delta=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}, \qquad \Delta=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23},$$

$$\Delta=a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33}, \qquad \Delta=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31},$$

$$\Delta=a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32}, \qquad \Delta=a_{13}A_{13}+a_{23}A_{23}+a_{33}A_{33}$$

tengliklar o'rinlidir.

Determinantning bunday yozilishi uning satr yoki ustun elementlari bo'yicha **yoyilmasi** deyiladi. Masalan, keltirilgan tengliklardan birinchisi Δ determinantning birinchi satr elementlari bo'yicha yoyilmasini ifodalasa, oxirgisi uni uchinchi ustun elementlari bo'yicha yoyilmasini ifodalaydi.

Biz yuqorida keltirgan uchinchi tartibli determinantning ta'rifi uning birinchi satr elementlari bo'yicha yoyilmasi ekan.

Izoh. Determinantning qaysi qatorida nol ko'p bo'lsa, uni o'sha qator elementlari bo'yicha yoyish ma'quldir.

5-misol. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & 6 \end{vmatrix}$ determinant hisoblansin.

Yechish. Determinantning birinchi ustun elementlarini –2 ga ko'paytirib ikkinchi ustunning mos elementlariga qo'shamiz, keyin hosil bo'lgan determinantning birinchi ustun elementlarini –5 ga ko'paytirib, uchinchi ustunning mos elementlariga qo'shamiz. U holda

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -4+3 & -10+4 \\ 1 & -2+2 & -5+5 \\ 4 & -8+7 & -20+6 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -1 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & -14 \end{vmatrix}$$

hosil bo‘ladi. Oxirgi determinantni ikkinchi satrida nollar ko‘p bo‘lganligi sababli uni o‘sha satr elementlari bo‘yicha yoyib hisoblaymiz:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & -14 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -6 \\ -1 & -14 \end{vmatrix} = -(14-6) = -8.$$

8. *Determinantning biror satr (yoki ustun) elementlarini unga parallel boshqa bir satr (yoki ustun)ning mos elementlarining algebraik to‘ldiruvchilariga ko‘paytirib qo‘shsak yig‘indi nolga teng bo‘ladi.*

Bu holda ikkita bir xil satr (yoki ustun)ga ega bo‘lgan determinant hosil bo‘ladi.

Masalan, $a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}=0$.

Bu yerda Δ determinantning birinchi satr elementlari ikkinchi satrning mos elementlarining algebraik to‘ldiruvchilariga ko‘paytirib qo‘shildi.

Keltirilgan barcha xossalarning ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar uchun to‘g‘riligiga bevosita determinantlarni hisoblash yo‘li bilan ishonch hosil qilish mumkin.

Xossalarni o‘rinli ekanligini tekshirib ko‘rishni o‘quvchiga qoldiramiz.

2.5. n-tartibli determinant haqida tushincha

n-tartibli determinant deb n ta satr, n ta ustun va n^2 ta elementlarga ega bo‘lgan

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

kabi belgilanuvchi songa aytiladi

Yuqorida keltirilgan determinantning barcha xossalari istalgan tartibli determinantlar uchun ham o'rinlidir. Tartibi to'rt va undan yuqori bo'lgan determinantlarni determinantning 7-xossasidan foydalanib tartibini pasaytirish orqali hisoblanadi.

Masalan, to'rtinchi tartibli determinantni (2.2)formulaga o'xshash

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}-$$

$$-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}-a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} \quad (2.3)$$

formula yordamida hisoblash mumkin.

Bu yerdagi uchinchi tartibli determinantlar mos ravishda a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14} elementlarning minori deyiladi. a_{ik}(i,k=1,2,3,4) elementning algebraik to'ldiruvchisini A_{ik} orqali belgilasak (2.3) tenglikni $\Delta=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}+a_{14}A_{14}$ ko'rinishida yozish mumkin.

Bu formula to'rtinchi tartibli determinantni uning birinchi satr elementlari bo'yicha yoyilmasidir. Bunaqa yoyilmani har bir satr va ustun elementlari uchun yozib to'rtinchi tartibli determinantni hisoblash uchun 8 ta formulalarni hosil qilishimiz mumkin.

6-misol. $A=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & -2 \end{vmatrix}$ determinant hisoblansin.

Yechish. Determinantning xossalaridan foydalanib A determinantning biror satri (yoki ustuni) ni ba'zi elementlarini 0 ga aylantiramiz Determinantning birinchi satrini –3 va 2 ga ko'paytirib uning uchinchi va to'rtinchi satrlarning mos elementlariga qo'shamiz. U holda

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 4 & 0 \\ -6 & -7 & -2 & 0 \\ 8 & 8 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

hosil bo'ladi. Buning oxirgi ustunida nollar ko'p bo'lganligi uchun uni o'sha ustun elementlari bo'yicha yoyib hisoblaymiz:

$$\Delta=1(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ -6 & -7 & -2 \\ 8 & 8 & -3 \end{vmatrix}= -(-2)\begin{vmatrix} -7 & -2 \\ 8 & -3 \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} -6 & -2 \\ 8 & -3 \end{vmatrix}-4\begin{vmatrix} -6 & -7 \\ 8 & 8 \end{vmatrix}$$

$$=2(21+16)+(18+16)-4(-48+56)=76.$$

7-misol. Ushbu

$$\Delta=\begin{vmatrix} 4 & 90 & 83 & 1 \\ 0 & 8 & 16 & 0 \\ 60 & 17 & 134 & 20 \\ 15 & 43 & 106 & 5 \end{vmatrix}$$

determenent hisoblansin.

Yechish. Determinantni uning xossalaridan foydalanib tartibini pasaytirish yo'li bilan hisobaymiz. Determinantning oxirgi ustunini -3 ga ko'paytirib birinchi ustuniga qo'shib

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 90 & 83 & 1 \\ 0 & 8 & 16 & 0 \\ 0 & 17 & 134 & 20 \\ 0 & 43 & 106 & 5 \end{vmatrix}$$

determinantga ega bo'lamiz. Bu determinantni birinchi ustun elementlari bo'yicha yoyib

$$\Delta = \begin{vmatrix} 8 & 16 & 0 \\ 17 & 134 & 20 \\ 43 & 106 & 5 \end{vmatrix}$$

uchinchi tartibli ditermenantni hosil qilamiz. Bu ditermenantni birinchi ustunini -2 ga ko'paytirib ikkinchi ustuniga qo'shsak

$$\Delta = \begin{vmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 17 & 100 & 20 \\ 43 & 20 & 5 \end{vmatrix}$$

hosil bo'ladi. Buni birinchi satr elementlari bo'yicha yoyib

$$\Delta = 8 \cdot \begin{vmatrix} 100 & 20 \\ 20 & 5 \end{vmatrix} = 8 \cdot (500 - 400) = 800$$

ni topaming.

8-misol. Bosh diagonalidan yuqorida joylashgan barcha elementlari nolga teng uchburchakli determinant deb ataluvchi

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & 0 & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

determinant hisoblansin.

Yechish. Δ_n determinantni oxirgi ustun elementlari bo'yicha yoysak u a_{nn} bilan

$$\Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} \end{vmatrix}$$

(n-1)-tartibli uchburchakli determinantning ko'paytmasiga teng bo'ladi. Δ_{n-1} determinantni ham oxirgi ustun elementlari bo'yicha yoysak u $a_{(n-1)(n-1)}$ element bilan (n-2)-tartibli uchburchakli Δ_{n-2} determinantni ko'paytmasiga teng bo'ladi. Shu jarayonni davom ettirib

$$\Delta_n = a_{11}a_{12}...a_{nn}$$

ga ega bo'lamiz.

Demak, uchburchakli Δ_n determinant bosh diagonal elementlarining ko'paytmasiga teng ekan.

Shuningdek diagonalgan pastda joylashgan barcha elementlari nolga teng uchburchakli dereminant ham bosh diagonal elementlarining ko'paytmasiga teng bo'ladi, chunki bu holda determinantning satrlarini mos ustunlarga almashtirilsa u Δ_n determinantga aylanadi.

Yon diagonaldan yuqorida (yoki pastda) joylashgan barcha elementlari nolga teng determinant $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ sonni yon dioganal elementlari ko'paytmasiga ko'paytirilganiga tengligini ta'kidlab o'tamiz.

Mustaqil yechish uchun mashqlar va test savollari

1. Determinantlar hisoblansin:

a) $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 2 & 12 & 10 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+y \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} a & b & a+b \\ b & a+b & a \\ a+b & a & b \end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$;

g) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 & -1 \\ -2 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -3 & 3 \end{vmatrix}$

Javob: a) 28; b) -2; d) xy; e) $-2(a^3+b^3)$; f) $(a-b)(b-c)(c-a)$; g) -50.

2. Determinantlar soddalashtirilsin:

a) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\beta & 1 \\ \sin\alpha & \cos\beta & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \sin\beta & 1 \\ -\cos\alpha & \cos\beta & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$;

d) $\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 1 & \cos(\alpha+\beta) \\ \cos\beta & \cos(\alpha+\beta) & 1 \end{vmatrix}$;

Javob: a) $\cos(\alpha+\beta)$; b) $\sin(\alpha+\beta)$; d) 0;

3.

a) $\begin{vmatrix} x^2 & 9 & 4 \\ x & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$; b) $\begin{vmatrix} x & -4 & 6 \\ -1 & x & -3 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 0$; d) $\begin{vmatrix} 9 & x & 2x \\ 10 & 3 & 5 \\ 8 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$;

tenglamalardan x toping.

Javob. a) $x_1=3$, $x_2=2$; b) $x_1=2$, $x_2=-\frac{11}{7}$; d) $x=2$.

4. $\begin{vmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 2 & -1 & 5 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ determinantning a_{32} elementini minori topilsin.

A) 11 B) 19 D) -11 E) 22 F) -11

5. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 5 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$ determinantning a_{21} elementini algebraik to'ldiruvchisi topilsin.

A) 5 B) -7 D) 2 E) -12 F) 12

6. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 6 & 19 & 13 & 20 \\ 1 & 16 & 30 & 40 \\ 9 & 6 & 3 & -6 \end{vmatrix}$ hisoblansin.

A) 12 B) 51 D) 14 E) 16 F) 0.

7. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 3 & 2 \\ 7 & 8 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & -6 & 5 & -2 & -2 \end{vmatrix}$ hisoblansin.

A) 3 B) 4 D) 2 E) 0 F) -2.

8. Determinantlarni hisoblamasdan quyidagi amallardan qaysi birini bajarish mumkin.

A) qo'shish B) ayirish D) ko'paytirish E) bo'lish F) hech birini bajarish mumkin emas.

9. To'g'ri javob topilsin.

A) determinantni songa ko'paytirish uchun uning biror satr (yoki ustun)ining barcha elementlari shu songa ko'paytiriladi.

B) determinantni biror songa ko'paytirish uchun uning barcha elementlari shu songa ko'paytiriladi.

D) determinantni songa ko'paytirish mumkin emas.

E) determinantni songa ko'paytirish uchun uning biror satr elementlarini o'sha songa ko'paytirib shu satrga mos ustunning elementlariga qo'shiladi

F) bir xil tartibli determinantlarni qo'shish mumkin.

10. To‘g‘ri javob topilsin.

A) Bir xil tartibli determinantlarni hisoblamasdan taqqoslash mumkin

B) istalgan determinantlarni hisoblamasdan taqqoslash mumkin

D) determinantlarni hisoblamasdan taqqoslab bo‘lmaydi

E) bir determinantning barcha elementlari ikkinchi determinantning mos elementlaridan katta bo‘lgandagi o‘sha determinantdan katta bo‘ladi

F) tartibi yuqori determinant katta bo‘ladi.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Ikkinchi tartibli determinant deb nimaga aytiladi?
2. Uchinchi tartibli determinant deb nimaga aytiladi?
3. Determinantning elementlari nima?
4. Determinantning satr va ustunlari, hamda bosh va yon diagonallari nima?
5. Determinantni songa ko‘paytirish nimani anglatadi?
6. Bir xil tartibli determinantlarni mos elementlarini qo‘shish yoki ayirish mumkinmi?
7. Istalgan tartibli determinant qanday hisoblanadi?
8. Minor va algebraik to‘ldiruvchi nima?
9. Determinantni biror satr yoki ustun elementlari bo‘yicha yoyish deganda nimani tushunasiz?
10. Determinantni qaysi qator elementlari bo‘yicha yoygan ma’qul?

3.CHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMASINI DETERMINANTLAR YORDAMIDA YECHISH. KRAMER QOIDASI

3.1.Ikki noma'lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasi

Ikki noma'lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \qquad (3.1)$$

ni qaraymiz. Bu yerdagi x va y noma'lum sonlar, qolgan barcha sonlar esa ma'lum. a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} lar sistema **koeffitsientlari**, b_1 va b_2 sonlar esa **ozod had** (son)lar deb ataladi.

Chiziqli tenglamalar sistemasini yechish degan so'z, noma'lum sonlarning shunday qiymatlari to'plamini topish demakki, ularni sistema tenglamalarining har biriga mos noma'lumlarning o'rniga qo'yilganda ular ayniyatlarga aylanadi. Bunday sonlar to'plami sistemaning yechimi deyiladi. Kamida bitta yechimga ega bo'lgan sistema **birgalikdagi sistema** deb ataladi. Birgina yechimga ega bo'lgan birgalikdagi sistema **aniq sistema** deb ataladi. Cheksiz ko'p yechimlarga ega bo'lgan birgalikdagi sistema **aniqmas sistema** deb ataladi. Birorta ham yechimga ega bo'lmagan sistema **birgalikda bo'lmagan sistema** deyiladi.

Izoh. Keltirilgan ta'riflar istalgan sistema uchun o'rinlidir.

(3.1) sistema bizga o'rta maktab kursidan ma'lum . Uni yechishning o'riniga qo'yish, qo'shish va grafik usullari bilan tanishmiz.

Bu yerda (3.1) sistemani yechishning yana bir usuli ya'ni uni determinantlardan foydalanib yechish usuli bilan tanishamiz. Sistemaning birinchi tenglamasini a_{22} ga, ikkinchisini $-a_{12}$ ga ko'paytirib hadlab qo'shamiz:

$$(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})x=b_1a_{22}-b_2a_{12}. \qquad (3.2)$$

Shuningdek sistemaning birinchi tenglamasini $-a_{21}$ ga, ikkinchisini a_{11} ga ko'paytirib hadlab qo'shsak

$$(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})y=b_2a_{22}-b_1a_{12} \tag{3.3}$$

hosil bo'ladi.

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_x=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_y=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \tag{3.4}$$

belgilashlarni kiritamiz.

Sistemaning koeffitsientlaridan tuzilgan Δ determinant sistemaning *asosiy* determinanti deb ataladi. Δ_x determinant Δ dagi birinchi ustun elementlarini ozod sonlar bilan almashtirish natijasida, Δ_y esa Δ dagi ikkinchi ustun elementlarini ozod sonlar bilan almashtirish natijasida hosil bo'ladi.

(3.4) dan foydalanib (3.2) va (3.3) formulalarni

$$\left.\begin{aligned} \Delta\cdot x &= \Delta_x, \\ \Delta\cdot y &= \Delta_y \end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

ko'rinishida yozish mumkin.

Mumkin bo'lgan quyidagi hollarni qaraymiz.

I. Sistemaning asosiy determinanti $\Delta\neq0$ bo'lsin. U holda (3.5) ning har bir tenglamasini Δ ga bo'lib

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta} \tag{3.6}$$

berilgan sistemaning yechimini topish formulasiga ega bo'lamiz. (3.6) formulalar uning ixtirochisi Shvetsariyalik matematik Kramer (1701-1752)ning sharafiga Kramer formulalari deb ataladi.

II. Sistemaning asosiy determinanti $\Delta=0$ bo'lsin.

Bu holda quyidagilardan biri bo'ladi.

1) $\Delta_x=\Delta_y=0$ bo'lsin. U holda (3.5) $0\cdot x=0$, $0\cdot y=0$ ko'rinishini olib berilgan sistema cheksiz ko'p yechimlarga ega, chunki istalgan son bu tenglamalarni qanoatlantiradi.

2) Δ_x, Δ_y lardan kamida bittasi masalan $\Delta_x\neq0$ bo'lsin. U holda (3.5) ni birinchi tenglamasi $0\cdot x=\Delta_x\neq0$ ko'rinishiga ega bo'lib, u yechimga ega emas. Demak, bu holda berilgan sistema yechimga ega bo'lmaydi.

Xulosa. a) (3.1) sistemaning asosiy determinanti $\Delta\neq0$, ya'ni $a_{11}a_{22}\neq a_{12}a_{21}$ yoki $\dfrac{a_{11}}{a_{21}}\neq\dfrac{a_{12}}{a_{22}}$ bo'lganda bu sistema yagona yechimga ega bo'lib, uning yechimi Kramer formulalari (3.6) yordamida topiladi.

b) $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$ ya'ni $\dfrac{a_{11}}{a_{21}}=\dfrac{a_{12}}{a_{22}}=\dfrac{b_1}{b_2}$ bo'lganda

(3.1) sistema cheksiz ko'p yechimlarga ega (aniqmas);

d) $\Delta=0$ bo'lib Δ_x, Δ_y lardan kamida bittasi noldan farqli ya'ni

$$\frac{a_{11}}{a_{21}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}\neq\frac{b_1}{b_2}$$

bo'lganda sistema yechimga ega bo'lmaydi (birgalikda emas).

(3.1) sitemaning yechimiga quyidagicha geometrik izoh berish mumkin. (3.1) sistemaning har bir tenglamasi to'g'ri chiziq tenglamasini ifodalashi ayon.

$\dfrac{a_{11}}{a_{21}}\neq\dfrac{a_{12}}{a_{22}}$ bo'lganda to'g'ri chiziqlar parallel bo'lmaydi. Demak har ikkala to'g'ri chiziq bitta nuqtada kesishadi. Ana shu kesishish nuqtasining koordinatalari (3.1) sistemasining yechimi bo'ladi.

$$\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0 \quad \text{ya'ni} \quad \frac{a_{11}}{a_{21}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}=\frac{b_1}{b_2}$$

bo'lganda to'g'ri chiziqlar ustma-ust tushadi (sistema cheksiz ko'p echimlarga ega). $\Delta=0$ bo'lib Δ_x, Δ_y lardan kamida bittasi noldan farqli bo'lganda to'g'ri chiziqlar parallel bo'lganligi sababli ular kesishmaydi (sistema yechimga ega bo'lmaydi) ya'ni birgalikda emas.

1-misol. Asror uchta daftar va ikkita ruchka uchun 205 so'm. Umida esa xuddi shunday 4 daftar va bitta ruchka uchun 190 so'm sarfladi. Daftar va ruchkaning narxi aniqlansin.

Yechish. Daftar narxini x, ruchka narxini y orqali belgilaymiz. U holda

$$\begin{cases} 3x + 2y = 205, \\ 4x + y = 190 \end{cases}$$

sitemaga ega bo'lamiz. Bu sistemani Kramer formulalaridan foydalanib yechamiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3\text{-}8 = -5 \neq 0, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 205 & 2 \\ 190 & 1 \end{vmatrix} = 205\text{-}380 = -175,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 205 \\ 4 & 190 \end{vmatrix} = 570\text{-}820 = -250.$$

(3.6) formulalarga asosan:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-175}{-5} = 35, \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-250}{-5} = 50.$$

Demak daftar 35 so'm, ruchka 50 so'm turar ekan.

2-misol. $\begin{cases} 2x + 5y = 3, \\ 4x + 10y = 6 \end{cases}$ sistema yechilsin.

Yechish. $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = 20\text{-}20 = 0, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} = 30\text{-}30 = 0,$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 12\text{-}12 = 0.$$

Sitemaning birinchi tenglamasini 2 ga ko'paytirsak uning ikkinchi tenglamasi kelib chiqadi. Demak sistema bitta $2x+5y=3$

tenglamaga teng kuchli va cheksiz ko'p yechimlarga ega. y ga ixtiyoriy qiymatlar berib x ni $x=\frac{3-5y}{2}$ tenglamadan aniqlash yo'li bilan yechimlar topiladi.

Masalan, $y=0$ da $x=\frac{3}{2}$, $y=1$ da $x=-1$ va hokazo.

Bu geometrik nuqtai nazardan $2x+5y=3$ va $4x+10y=6$ to'g'ri chiziqlar bitta to'g'ri chiziq ekanini bildiradi.

3-misol. $\begin{cases} 5x+3y=7, \\ 10x+6y=2 \end{cases}$ sistema yechilsin.

Yechish. $\Delta=\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 10 & 6 \end{vmatrix}=30-30=0$, $\Delta_x=\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}=42-6=36\neq 0$,

$\Delta_y=\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 10 & 2 \end{vmatrix}=10-70=-60\neq 0$.

Sistemaning asosiy determinanti $\Delta=0$ bo'lib $\Delta_x\neq 0$, $\Delta_y\neq 0$ bo'lgani uchun sistema yechimga ega emas(birgalikda emas).

3.2. Uch noma'lumli ikkita bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=0, \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=0 \end{cases} \qquad (3.7)$$

sistemani qaraymiz. Bu yerdagi x, y va z noma'lumlar, qolgan barcha sonlar ma'lum sonlar. Ozod sonlari nolga teng bu sistema bir jinsli sistema deyiladi. (3.7) sistemani yechish bilan shug'ullanamiz.

Faraz qilaylik $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$ bo'lsin. U holda sistemani

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y=-a_{13}z, \\ a_{21}x+a_{22}y=-a_{23}z \end{cases}$$

ko'rinishida yozamiz. Bu sistema z ning har bir aniq qiymatida yagona yechimga ega bo'lib yechim Kramer formulalariga ko'ra

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-a_{13} & a_{12}\\ -a_{23} & a_{22}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}}, \qquad y=\frac{\begin{vmatrix}a_{11} & -a_{13}\\ a_{21} & -a_{23}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}}$$

kabi topiladi. Determinantning xossalari (umumiy ko'paytuvchini determinant belgisidan chiqarish mumkinligi hamda ikkita ustunlarini o'rin almashtirganda determinantning faqatgina ishorasi o'zgarishi) dan foydalanib yechimni

$$x=\frac{\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}}\cdot z, \qquad y=\frac{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{21} & a_{23}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}}\cdot(-z) \tag{3.8}$$

ko'rinishda yozamiz.

$$\frac{z}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}}=K$$

deb belgilasak $z=K\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$ bo'lib uni (3.8) ga qo'ysak

$$x=K\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}, \quad y=-K\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{21} & a_{23}\end{vmatrix}, \quad z=K\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix} \tag{3.9}$$

qaralayotgan sistemaning yechimlari kelib chiqadi. (3.7) sistemaning yechimiga quyidagicha geometrik izoh berish mumkin. Sistemaning har bir tenglamasi koordinatalar boshidan o'tuvchi tekislik tenglamasini ifodalaydi. Tekisliklarning har ikkitasi koordinatalar boshidan o'tganligi sababli ular kesishadi. Ikkita kesishuvchi tekisliklar to'g'ri chiziq bo'ylab kesishadi. Ana shu to'g'ri chiziq nuqtalarning koordinatalari sistemaning yechimi bo'ladi.

Xulosa. Bir jinsli (3.7) sistema yagona yechimga ega bo'lishi yoki yechimga ega bo'lmasligi mumkin emas. U har doim cheksiz ko'p yechimlarga ega (aniqmas).

4–misol. $\begin{cases} x+3y-2z=0, \\ 2x-y+3z=0 \end{cases}$ sistema yechilsin.

Yechish. (3.9) ga asoslanib

$$x=K\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=7K, \quad y=-K\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=-7K, \quad z=K\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-7K$$

larni hosil qilamiz. Shunday qilib berilgan sistemaning yechimlari $x=7K$, $y=-7K$, $z=-7K$ tengliklar yordamida aniqlanadi. K ga aniq son qiymatlarini qo'yib sistemaning har xil yechimlarini topiladi.

3.3. Uch noma'lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasi

Uch noma'lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1, \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2, \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3 \end{cases} \qquad (3.10)$$

ni qaraymiz. Bu yerdagi x,y va z noma'lum sonlar, qolgan barcha sonlar ma'lum sonlar. a_{11}, $a_{12},\dots,a_{33}$ sistemaning koeffitsientlari, b_1,b_2, va b_3 ozod sonlar. Barcha ozod sonlar nolga teng bo'lganda (3.10) sistema **bir jinsli** deyiladi.

(3.10) sistemani yechish bilan shug'ullanamiz. Noma'lumlar oldidagi koeffitsientlardan tuzilgan uchinchi tartibli

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

determinant (3.10) sistemaning **asosiy** determinanti deb ataladi. Berilgan sistemani yechish uchun sistemaning birinchi tenglamasini a_{11} elementning algebraik to'ldiruvchisi A_{11} ga, ikkinchi tenglamasini a_{21} elementning algebraik to'ldiruvchisi A_{21} ga va uchinchi tenglamasini a_{31} elementining algebraik to'ldiruvchisi A_{31} ga ko'paytirib tenglamalarni hadma-had qo'shamiz.

$$(a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31})x+(a_{12}A_{11}+a_{22}A_{21}+a_{32}A_{31})y+$$
$$+(a_{13}A_{11}+a_{23}A_{21}+a_{33}A_{31})z=b_1A_{11}+b_2A_{21}+b_3A_{31}. \qquad (3.11)$$

Birinchi qavs ichidagi ifoda Δ determinantning birinchi ustun elementlari bo'yicha yoyilmasi bo'lganligi uchun determinantning 7-xossasiga ko'ra $a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31}=\Delta$ bo'ladi. (3.11) dagi ikkinchi va uchinchi qavs ichidagi ifodalar Δ determinantni ikkinchi va uchinchi ustun elementlarini boshqa bir ustunning mos elementlarining algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytirib qo'shilganligi uchun determinantning 8-xossasiga ko'ra ular nolga teng bo'ladi. Shunday qilib (3.11) tenglik

$$\Delta_x=b_1A_{11}+b_2A_{21}+b_3A_{31} \qquad (3.12)$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

determinantni qaraymiz. E'tibor bersak bu determinant asosiy determinantdagi birinchi ustun elementlarini ozod sonlarga almashtirish natijasida hosil bo'lganligiga iqror bo'lamiz. Bu determinantning b_1, b_2, b_3, elementlarining algebraik to'ldiruvchilari mos ravishda Δ determinantning a_{11}, a_{21}, a_{31} elementlarining algebraik to'ldiruvchilariga tengligini hisobga olsak $b_1A_{11}+b_2A_{21}+b_3A_{13}=\Delta_x$ bo'lib (3.12) tenglik

$$\Delta \cdot x = \Delta_x \tag{3.13}$$

ko'rinishini oladi.

Shunga o'xshash $\Delta \cdot y = \Delta_y$, $\Delta \cdot z = \Delta_z$ (3.14) tengliklarni hosil qilamiz, bunda

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Δ_y determinant sistemaning asosiy determinanti Δ dagi ikkinchi ustun elementlarini ozod sonlarga, Δ_z esa Δ dagi uchinchi ustun elementlarini ozod sonlarga almashtirish natijasida hosil bo'ladi.

Mumkin bo'lgan qo'yidagi hollarni qaraymiz:

I. (3.10) sistemaning asosiy determinanti $\Delta \neq 0$ bo'lsin. U holda (3.13) va (3.14) tenglamalarni har birini Δ ga bo'lib

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} \tag{3.15}$$

formulalarga ega bo'lamiz. (3.15) **Kramer formulalari** deb ataladi. Shunday qilib (3.10) sistemaning asosiy determinanti $\Delta \neq 0$ bo'lganda sistema yagona yechimga ega bo'lib yechim Kramer formulalari (3.15) yordamida topilar ekan.

II. (3.10) sistemaning asosiy determinanti $\Delta = 0$ bo'lsin. U holda quyidagilardan biri sodir bo'ladi.

a) Δ_x, Δ_y, Δ_z determinantlardan aqalli bittasi noldan farqli. Bu holda (3.10) sistema yechimga ega bo'lmaydi. Haqiqatan, aniqlik uchun $\Delta_x \neq 0$ deb faraz qilsak bu holda $\Delta \cdot x = \Delta_x$ (3.13) tenglik $0x = \Delta_x \neq 0$ ko'rinishiga ega bo'lib. u x ning hech bir qiymatida bajarilmaydi.

b) $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$ bo'lsin. Bu holda (3.10) sistema yo yechimga ega bo'lmaydi yoki cheksiz ko'p yechimlarga ega bo'ladi.

5-misol. Javohir oltita daftar, ikkita ruchka va bitta chizg'ich uchun 380 so'm sarfladi. Jasur xuddi shunday to'rtta daftar, bitta ruchka va ikkita chizg'ich uchun 370 so'm. Behruz ham o'sha narxda 8 ta daftar. ikkita ruchka va uchta chizg'ich uchun 640 so'm sarfladi. Daftar, ruchka hamda chizg'ichning narxlari aniqlansin.

Yechish. Daftar, ruchka hamda chizg'ichlarning narxlarini mos ravishda x,y,z lar orqali belgilaymiz. U holda masalani yechish

$$\begin{cases} 6x+2y+z=380, \\ 4x+y+2z=370, \\ 8x+2y+3z=640 \end{cases}$$

sistemani yechishga keladi. Bu sistemaning yechimini Kramer formulalaridan foydalanib topamiz

$$\Delta=\begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 8 & 2 & 3 \end{vmatrix}=6\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 3 \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}=6(-1)-2(-4)+1\cdot 0=2\neq 0$$

Sistemaning asosiy determinantidagi birinchi ustun elementlarini ozod sonlarga almashtirsak

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 380 & 2 & 1 \\ 370 & 1 & 2 \\ 640 & 2 & 3 \end{vmatrix}=10\begin{vmatrix} 38 & 2 & 1 \\ 37 & 1 & 2 \\ 64 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

hosil bo'ladi. Bu yerda birinchi ustundan umumiy ko'paytuvchi 10 determinant belgisidan chiqarildi. So'nggi determinantni birinchi ustun elementlari bo'yicha yoyib Δ_x ni hisoblaymiz.

$$\Delta_x=10\left(38\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}-37\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}+64\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}\right)=$$

$$=10\cdot(38\cdot(-1)-37\cdot4+64\cdot3)=60$$

Sistemaning asosiy determinanti Δ dagi ikkinchi ustun element-larini ozod sonlarga almashtirsak

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}6 & 380 & 1\\ 4 & 370 & 2\\ 8 & 640 & 3\end{vmatrix}=2\cdot10\begin{vmatrix}3 & 38 & 1\\ 2 & 37 & 2\\ 4 & 64 & 3\end{vmatrix}$$

determinant hosil bo'ladi. Bu yerda determinantning birinchi ustunidan umumiy ko'paytuvchi 2, ikkinchisidan 10 determinant belgisidan chiqarildi. Oxirgi determinantni ikkinchi ustun elementlari bo'yicha yoyib Δ_y ni hisoblaymiz.

$$\Delta_y=20\left(-38\begin{vmatrix}2 & 2\\ 4 & 3\end{vmatrix}+37\begin{vmatrix}3 & 1\\ 4 & 3\end{vmatrix}-64\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}\right)=$$

$$=20(-38\cdot(-2)+37\cdot5-64\cdot4)=100.$$

Shuningdek

$$\Delta_z=\begin{vmatrix}6 & 2 & 380\\ 4 & 1 & 370\\ 8 & 2 & 640\end{vmatrix}=2\cdot10\begin{vmatrix}3 & 2 & 38\\ 2 & 1 & 37\\ 4 & 2 & 64\end{vmatrix}=2\cdot10\cdot2\begin{vmatrix}3 & 2 & 38\\ 2 & 1 & 37\\ 2 & 1 & 32\end{vmatrix}=$$

$$=40\left(38\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}-37\cdot\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}+32\cdot\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}\right)=200$$

ga ega bo'lamiz.

Kramer formulalari (3.15) dan foydalanib

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{60}{2}=30,\qquad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{100}{2}=50,\qquad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{200}{2}=100$$

yechimni hosil qilamiz.

Shunday qilib daftar 30 so'm, ruchka 50 so'm va chizg'ich 100 sum turar ekan.

6–misol. $\begin{cases} 2x+3y+z=2, \\ x-4y+2z=4, \\ 4x+6y+2z=0 \end{cases}$ sistema yechilsin.

Yechish. Bu yerda

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 4 & 6 & 2 \end{vmatrix}=0,$$

chunki determinantning birinchi va uchinchi satr elementlari proporsional.

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & 2 \\ 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}=4\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Bu determinantning birinchi satrini –1 ga ko'paytirib ikkinchi satrning mos elementlariga qo'shsak

$$\Delta_x=4\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

hosil bo'ladi. Bu determinantni uning birinchi ustun elementlari bo'yicha yoyib hisoblaymiz. $\Delta_x=4\cdot2\cdot\begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=8\cdot(-5)=-40\neq 0.$

Demak berilgan sistema $\Delta=0$, $\Delta_x\neq 0$ bo'lganligi sababli yechimga ega emas.

7-misol. $\begin{cases} x+y-2z=-2, \\ 2x+2y-4z=-4, \\ 3x+3y-6z=0 \end{cases}$ sistema yechilsin.

Yechish. Bevosita hisoblash yo'li bilan $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$ ekanligiga ishonch hosil qilish mumkin. Qaralayotgan sistema yechimga ega emas. chunki sistemaning birinchi va uchinchi tenglamalari bir-biriga zid. Haqiqatan, sistemaning birinchi tenglamasini -3 ga ko'paytirib uchinchisiga qo'shsak 0=6 qarama-qarshilikka kelamiz.

8-misol. $\begin{cases} 3x+2y-z=5, \\ 6x+4y-2z=10, \\ x-3y+z=-2 \end{cases}$ sistema yechilsin.

Yechish. Bevosita hisoblab $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$ ekanligini topamiz. Sistemaning birinchi tenglamasini 2 ga ko'paytirsak uning ikkinchi tenglamasi kelib chiqadi. Shuning uchun berilgan sistema

$$\begin{cases} 3x+2y-z=5, \\ x-3y+z=-2 \end{cases}$$

uch noma'lumli ikkita tenglamalar sistemasiga teng kuchli. Bu sistema cheksiz ko'p yechimlarga ega. Yechimlar noma'lumlardan biri masalan x ga aniq qiymatlar berib sistemadan y va z ni topish orqali aniqlanadi.

Izoh. $\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1, \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2, \end{cases}$ sistema $\dfrac{a_{11}}{a_{21}}=\dfrac{a_{12}}{a_{22}}=\dfrac{a_{13}}{a_{23}}\neq\dfrac{b_1}{b_2}$ shartda aniqmas bo'ladi.

Xulosa. a) Uch noma'lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasi (3.10) sistemaning asosiy determinanti $\Delta\neq0$ bo'lganda yagona yechimga ega bo'lib yechim Kramer formulalari (3.15) yordamida topiladi.

b) $\Delta=0$ bo'lib Δ_x, Δ_y, Δ_z determinantlardan aqalli birortasi noldan farqli bo'lganda (3.10) sistema yechimga ega emas.

d) $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$ bo'lganda (3.10) sistema yo yechimga ega emas yoki cheksiz ko'p yechimlarga ega.

3.4. Uch noma'lumli uchta bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=0, \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=0, \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=0, \end{cases} \qquad (3.16)$$

sistemani qaraymiz. $x=0$, $y=0$, $z=0$ sistemaning yechimi bo'lishi ko'rinib turibdi. Bu holda kamida bitta ustuni elementlari nolga teng bo'lganligi uchun $\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$ bo'lib (3.13) va (3.14) tengliklar $\Delta\cdot x=0$, $\Delta\cdot y=0$, $\Delta\cdot z=0$ (3.17) ko'rinishga ega bo'ladi. Agar (3.16) sistemaning asosiy determinanti $\Delta\neq 0$ bo'lsa u yagona $x=0$, $y=0$, $z=0$ yechimga ega bo'ladi. Qaralayotgan bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi noldan farqli yechimlarga ham ega bo'la oladimi degan savolga quyidagi teorema javob beradi.

3.1-teorema. (3.16) sistema noldan farqli yechimlarga ega bo'lishi uchun uning asosiy determinanti $\Delta=0$ bo'lishi zarur va yetarlidir.

Haqiqatan. Sistema noldan farqli yechimlarga ega, masalan $x\neq 0$ bo'lsin. U holda (3.17) ning birinchi tenglamasi $\Delta\cdot x=0$ dan $\Delta=0$ kelib chiqadi.

Teskarisi, ya'ni sistemaning asosiy determinanti $\Delta=0$ bo'lganda sistema noldan farqli yechimga ega bo'lishini ko'rsatish ham mumkin.

3.5. n noma'lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasi

Umumiy holda n noma'lumli n ta chiziqli tenlamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n, \end{cases} \qquad (3.18)$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Bu yerdagi $x_1, x_2, \dots, x_n$ lar noma'lumlar. $b_1, b_2, \dots, b_n$ ozod had (son) lar hamda $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn}$ koeffitsientlar ma'lum sonlar.

Yuqorida keltirilgan Kramer qoidasi noma'lumlar soni tenglamalar soniga teng bo'lgan istalgan (3.18) ko'rinishdagi sistama uchun o'rinli ekanligini ta'kidlab o'tamiz. Sistemaning asosiy determinanti $\Delta \neq 0$ bo'lganda u yagona yechimga ega bo'lib, yechim Kramer formulalari

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta x_n}{\Delta}, \tag{3.19}$$

yordamida topiladi. Bu yerdagi Δ determinant (3.18) sistemaning noma'lumlari oldidagi koeffitsientlaridan tuzilgan bo'lib, $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \dots, \Delta_{x_n}$ determinantlar undagi birinchi, ikkinchi va hokazo n-ustun elementlarini ozod sonlar bilan almashtirish natijasida hosil bo'ladi.

Shuni aytish joizki, sistemadagi noma'lum (tenglama)lar soni orta borgan sari uni Kramer usuli bilan yechish qiyinlasha boradi.

Mustaqil yechish uchun mashqlar va test savollari

1. Tenglamalar sistemasi yechilsin.

a) $\begin{cases} 3x + 2y = -4, \\ 2x - 5y = 29. \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 3, \\ 2x - 2y = 6. \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x + 3y = 6, \\ 4x + 6y = 0. \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0, \\ x + y - z = 0. \end{cases}$ f) $\begin{cases} x + y - z = 6, \\ 2x - y + z = 3. \end{cases}$ g) $\begin{cases} 2x - y + 5z = 1, \\ x + y - z = 2, \\ 5x + y - 7z = 6. \end{cases}$

k) $\begin{cases} x - 3y + 2z = 1, \\ 2x + y - 3z = 5, \\ 2x - 6y + 4z = 2. \end{cases}$ i) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 6, \\ 2x + y - z = 3, \\ 4x + 2y - 2z = 0. \end{cases}$

Javob: a) (2;-5); b) Cheksiz ko`p; d) yechimga ega emas;

e) $x=5K$, $y=-4K$, $z=K$; f) $x=3$, $y=K+3$, $z=K$; g) (1; 1; 0); k) sistema cheksiz ko`p yechimga ega; i) sistema yechimga ega emas.

2. Ikki noma`lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasining yagona yechimga ega bo`lishi nimani anglatadi.

A)sistemaning tenglamalari ifodalovchi to`g`ri chiziqlarning parallelligini.

B) to`g`ri chiziqlarning perpendikulyarligini.

D) to`g`ri chiziqlarning ustma-ust tushishini.

E) to`g`ri chiziqlarning kesishishini.

F) to`g`ri chiziqlardan kamida bittasining koordinata o`qlarining biriga parallelligini.

3. Kramer qoidasidan qanaqa tenglamalar sistemasini yechishda foydalaniladi.

A) har qanday ikki noma`lumli ikkita tenglamalar sistemasini yechishda

B) uch noma'lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasini yeching

D) har qanday uch noma`lumli uchta tenglamalar sistemasini yechishda

E) noma`lumlari soni tenglamalari soniga teng istalgan chiziqli tenglamalar sistemasini yechishda

F) faqatgina noma`lumlari va tenglamalari soni beshdan oshmaydigan chiziqli tenglamalar sistemasini yechishda.

4. Uch noma`lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasining yagona yechimga ega bo`lmasligiga sistemaning tenglamalari ifodalovchi tekisliklarning quyidagi xossalaridan qaysi biri asosiy sabab bo`ladi?

A) yagona umumiy nuqtada ega bo`laolmasligi

B) parallelligi D) perpendikulyarligi

E) to`g`ri chiziq bo`ylab kesishishi F) ustma-ust tushishi.

5. Maktab kursida ikki noma`lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning necha xil usuli bilan tanishiladi.

A) 1 B)2 D) 3 E) 4 F) 5

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Chiziqli tenglama nima?

2. Sistema qachon birgalikda, qachon aniq, qachon birgalikda emas va qachon aniqmas deyiladi?

3. Kramer formulalarini keltirib chiqaring.

4. Sistema qachon yagona yechimga ega?

5. Sistema qay vaqtda aniqmas bo'ladi?

6. Uch noma'lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega bo'laoladimi?

7. Bir jinsli chiziqli tenlamalar sistemasi birgalikda bo'lmasligi mumkinmi?

8. Noma'lumlari soni chiziqli tenglamalari soniga teng sistemaning yechimi qanday topiladi?

9. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasini noldan farqli yechimga ega bo'lish shartini ayting.

10. Kramer formulalari qanaqa sistemalar uchun o'rinli?

4.MATRITSALAR VA ULAR USTIDA AMALLAR

4.1.Matritsa haqida tushincha

Ma'lum sonlardan tuzilgan

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad (4.1)$$

kabi jadvallar **matritsa** deb ataladi. a_{11}, a_{12}, ... sonlar esa matritsaning **elementlari** deyiladi. Jadvalning gorizantal qatorlari matritsaning **satrlari**, vertikal qatorlari esa uning **ustunlari** deyiladi. Satrlari soni ustunlari soniga teng matritsa **kvadrat matritsa** deyiladi va satrlari yoki ustunlarining soni shu matritsaning tartibi deyiladi. Masalan (4.1) dagi birinchi matritsa ikkinchi tartibli, uchinchi matritsa esa uchinchi tartibli kvadrat matritsadir. Satrlari soni ustunlari soniga teng bo'lmagan matritsa **to'g'ri burchakli matritsa** deyiladi. m ta satrli va n ta ustunli to'g'ri burchakli matritsa **mxn o'lchamli matritsa** deyiladi. Masalan (4.1) dagi ikkinchi matritsa 2x4 o'lchamli to'g'ri burchakli matritsa. Yagona satrga ega bo'lgan matritsa **satr-matritsa,** yagona ustunga ega bo'lgan matritsa **ustun-matritsa** deb ataladi. Masalan $(a_{11}\ a_{12}\ a_{13})$ satr-matritsa, $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ esa ustun-matritsadir.

Kvadrat matritsaning elementlaridan matritsa belgisini determinant belgisi bilan almashtirish natijasida hosil bo'lgan determinant shu **matritsaning determinanti** deyiladi. Matritsani qisqacha bitta A harf bilan belgilasak uning determinanti det A yoki $|A|$ kabi belgilanadi. Masalan A=$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ matritsaning determinanti

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$ bo'ladi.

Determinanti noldan farqli kvadrat matritsa **xosmas**, determinanti nolga teng kvadrat matritsa **xos** matritsa deyiladi.

Masalan:

$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ matritsa xos matritsa, chunki $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 24-24=0$,

$B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ esa xosmas matritsa, chunki $|B| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 15-2=13 \neq 0$.

4.2. Matritsalarning tengligi

Bir xil o'lchamli A va B matritsalarning barcha mos elementlari o'zaro teng bo'lganda ular **teng** (A=B) deb ataladi.

Masalan: A=$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ va B=$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$ matritsalar

$a_{11}=b_{11}$, $a_{12}=b_{12}$, $a_{13}=b_{13}$, $a_{21}=b_{21}$, $a_{22}=b_{22}$, $a_{23}=b_{23}$ bo'lganda teng bo'ladi (A=B).

4.3. Matritsalarni qo'shish

Ikkita bir xil o'lchamli matritsaning **yig'indisi** deb ularning mos elementlarini qo'shish natijasida hosil bo'lgan matritsaga aytiladi, ya'ni

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ va $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$ matritsaning yig'indisi deb $C=A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{pmatrix}$ matritsaga aytiladi.

1-misol. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ va $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ matritsalarning yig'indisi topilsin.

Yechish. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+3 & 3-1 \\ 1-1 & 0+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Matritsalarning yig'indisi uchun $A+B=B+A$, $(A+B)+C=A+(B+C)$ tengliklar o'rinli.

Barcha elementlari nollardan iborat matritsa **nol matritsa** deb ataladi va (0) yoki 0 kabi belgilanadi. Istalgan A matritsa uchun A+0=A bo'ladi, bu yerdagi 0 matritsa A bilan bir xil o'lchamli nol matritsa.

4.4. Matritsani songa ko'paytirish

Matritsani **songa ko'paytmasi** deb matritsaning barcha elementlarini shu songa ko'paytirish natijasida hosil bo'lgan matritsaga aytiladi.

Masalan,

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ bo'lsa $mA=Am=\begin{pmatrix} ma_{11} & ma_{12} & ma_{13} \\ ma_{21} & ma_{22} & ma_{23} \end{pmatrix}$

bo'ladi. Matritsani nolga ko'paytirish natijasida nol-matritsa hosil bo'ladi.

2-misol. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ matritsa 3 ga ko'paytirilsin.

Yechish. $3\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot 3 & 3\cdot(-1) \\ 3\cdot 3 & 3\cdot 4 & 3\cdot 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 9 & -3 \\ 9 & 12 & 6 \end{pmatrix}$.

4.5. Matritsalarni ko'paytirish

A= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ matritsaning B= $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ matritsaga **ko'paytmasi** deb elementlari quyidagicha aniqlanuvchi C=AB matritsaga aytiladi

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}+a_{33}b_{33} \end{pmatrix}$$

Matritsalarni bu xilda ko'paytirish **satrlarni ustunga** deb yuritiladi. Matritsalarni ko'paytirish qoidasi birinchi ko'payuvchining ustunlari soni ikkinchi ko'payuvchining satrlari soniga teng bo'lgan har qanday to'g'ri burchakli matritsalar uchun o'rinlidir.

3-misol. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ va $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ matritsalarning ko'paytmasi topilsin.

Yechish. AB ko'paytma mavjud, chunki A matritsaning ustunlari 2 ga teng, B matritsaning satrlari soni ham 2 ga teng.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot 2+1\cdot 1 & 1\cdot(-1)+1\cdot 2 \\ 2\cdot 2+1\cdot 1 & 2\cdot(-1)+1\cdot 2 \\ -1\cdot 2+1\cdot 1 & (-1)\cdot(-1)+1\cdot 2 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

B A ko'paytma mavjud emas, chunki B matritsaning ustunlari soni 2 ga, A matritsaning satrlari soni esa 3 ga teng. Bu misol umumiy holda matritsalarni ko'paytirish o'rni almashtirish xossasiga ega emasligini ko'rsatadi, ya'ni umumiy holda $AB \neq BA$.

Matritsalarni ko'paytirish quyidagi xossalarga ega.

1) $(AB)C=A(BC)$; 2) $(A+B)C=AC+BC$; 3) $(mA)B=m(AB)$;

4) $\det(AB)=\det A\cdot\det B$.

Bu yerdagi A,B,C lar matritsalar bo'lib ular uchun yuqoridagi ko'paytirish va qo'shish amallari o'rinli, m biror son.

4.6. Birlik matritsa

Bosh diagonalida turgan barcha elementlari 1 ga teng bo'lib qolgan elementlari 0 dan iborat kvadrat matritsa **birlik matritsa** deb ataladi va E orqali belgilanadi.

Masalan $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ikkinchi tartibli birlik matritsa.

$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ esa uchinchi tartibli birlik matritsadir.

Birlik matritsaning determinanti 1ga teng, ya'ni $|E|=1$.

Istalgan A kvadrat matritsani uning tartibiga mos birlik matritsaga ko'paytirish natijasida o'sha matritsaning o'zi hosil bo'ladi, ya'ni $A\cdot E=E\cdot A=A$.

Ikkita sonlardan kamida bittasi nol bo'lgandagina ularning ko'paytmasi nol bo'lishi ma'lum. Matritsalarni ko'paytmasi bunaqa xossaga ega emas, ya'ni ikkita noldan farqli matritsalarning ko'paytmasi nol matritsa bo'lishi ham mumkin.

Masalan

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot1-1\cdot1 & 1\cdot1-1\cdot1 \\ 1\cdot1-1\cdot1 & 1\cdot1-1\cdot1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4.7. Teskari matritsa

A kvadrat matritsaga **teskari matritsa** deb $A\cdot B=B\cdot A=E$ shartni qanoatlantiruvchi B matritsaga aytiladi. A matritsaga teskari matritsa odatda A^{-1} kabi belgilanadi. A, B va E matritsalarning bir xil tartibli bo'lishi ravshan. Boshqacha aytganda ko'paytmasi E birlik matritsaga teng A va B kvadrat matritsalar o'zaro teskari matritsalar deyiladi. Har qanday kvadrat matritsaga teskari matritsa mavjudmi degan savolga quyidagi teorema javob beradi.

4.1-teorema. A kvadrat matritsaga teskari A matritsa mavjud bo'lishi uchun A matritsaning xosmas matritsa bo'lishi zarur va yetarlidir.

Isboti. Zarurligi. Faraz qilaylik A ga teskari A^{-1} matritsa mavjud bo'lsin. U holda $A\cdot A^{-1}=E, |A|\cdot|A^{-1}|=|E|=1$ bo'ladi. Bundan $|A|\neq 0$, ya'ni A matritsaning xosmasligi kelib chiqadi.

Yetarliligi. Osonlik uchun uchinchi tartibli

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

xosmas matritsani qaraymiz. Bu holda

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \qquad (4.2)$$

matritsa A matritsaga teskari matritsa ekanligiga bevosita ularni ko'paytirish yo'li bilan ishonch hosil qilish mumkin. Ko'paytirish jarayonida determinantning 7- va 8- xossalaridan foydalaniladi. Bu yerda $A_{ik}(i,k=1,2,3)$ orqali a_{ik} elementning algebraik to'ldiruvchisi belgilangan.

4-misol.

$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ matritsaga teskari matritsa topilsin.

Yechish.

$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ determinantni birinchi satr elementlarini uchinchi satrining mos elementlariga qo'shsak $|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$ bo'ladi.

Buni uchinchi ustun elementlari bo'yicha yoyib hisoblaymiz.

$$|A|=(-1)\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=-13\neq 0.$$

Demak berilgan matritsa xosmas matritsa va unga teskari A^{-1} matritsa mavjud.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2 & 0\\ 4 & 1\end{vmatrix}=2, \qquad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix}=-3,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3 & 2\\ -1 & 4\end{vmatrix}=14, \qquad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 4 & 1\end{vmatrix}=-5,$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=1, \qquad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 4\end{vmatrix}=-9,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{vmatrix}=2, \qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 0\end{vmatrix}=-3,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=1.$$

Topilgan qiymatlarni (4.2) ga qo'yib teskari matritsani aniqlaymiz.

$$A^{-1}=-\frac{1}{13}\begin{pmatrix}2 & -5 & 2\\ -3 & 1 & -3\\ 14 & -9 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{13} & \frac{5}{13} & -\frac{2}{13}\\ \frac{3}{13} & -\frac{1}{13} & \frac{3}{13}\\ -\frac{14}{13} & \frac{9}{13} & -\frac{1}{13}\end{pmatrix}.$$

$A\cdot A^{-1}=E$ tenglik o'rinli ekanini tekshirib ko'rishni o'quvchiga tavsiya etamiz.

A matritsa va unga teskari A^{-1} matritsaning determinantlari uchun $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$ ekanini ta'kidlab o'tamiz.

4.8. Matritsaning rangi va uni hisoblash

To'g'ri burchakli yoki kvadrat A matritsa berilgan bo'lsin. Matritsaning k ta satr va o'shancha ustunlarini tanlab ularni kesishish joyida turgan elementlardan joylashish tartibini o'zgartirmagan holda k-tartibli deteminant tuzamiz. Ana shu determinant A matritsaning k-tartibli **minori** deb ataladi. Matritsaning elementlarini uning birinchi tartibli minori deb hisoblash mumkin.

Masalan $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$ matritsa 4 ta uchinchi tartibli, 18 ta ikkinchi tartibli va 12 ta birinchi tartibli minorlarga ega.

Ushbu $\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$ determinant qaralayotgan matritsaning ikkinchi tartibli minorlardan biri bo'lib u matritsaning birinchi va uchinchi satrlarini hamda uchinchi va to'rtinchi ustunlarini tanlash natijasida hosil bo'lgan.

Agar A matritsaning r-tartibli minorlari orasida kamida bitta noldan farqiisi mavjud bo'lib, undan yuqori tartibli qolgan barcha minorlari nolga teng bo'lsa, u holda butun r son A matritsaning rangi deyiladi va $rangA = r$ yoki $r_A = r$ kabi yoziladi.

Boshqacha aytganda A matritsaning noldan farqli minorining eng yuqori tartibiga shu matritsaning rangi deb atalar ekan.

Nol matritsadan farqli istalgan matritsaning rangi natural son bo'ladi.

5-misol. A= $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ matritsaning rangi topilsin.

Yechish. Matritsa yagona uchinchi tartibli $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ minorga ega bo lib u 0 ga teng (hisoblansin). Ikkinchi tartibli minorlari orasida 0 dan farqlilari mavjud. masalan $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$.

Demak matritsaning rangi 2 ga teng ekan.

Matritsaning rangini topishda ko'p sonli determinantlarni hisoblashga to'g'ri keladi. Shuning uchun matritsani rangini hisoblashda uni elementar almashtirish deb ataluvchi almashtirishdan foydalanish maqsadga muvofiq. Matritsani **elementar almashtirish** deb quyidagi almashtirishlarga aytiladi.

a) faqat nollardan iborat satr (ustun)larni o'chirish;

b) ikkita satr (ikkita ustun)larni o'rinlarini almashtirish;

d) bir satr(ustun)ning barcha elementlarini biror songa ko'paytirib, boshqa satr(ustun)ning mos elementlariga qo'shish;

e) satr(ustun)ning barcha elementlarini noldan farqli bir xil songa ko'paytirish.

Agar B matritsa A matritsadan elementar almashtirishlar yordamida hosil qilingan bo'lsa A va B **ekvivalent** matritsalar deyiladi hamda $A \sim B$ kabi yoziladi.

4.2-teorema. Elementar almashtirishlar natijasida matritsaning rangi o'zgarmaydi.

Teoremaning isboti determinantlarning xossalaridan kelib chiqadi.

6-misol. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 0 & -6 & 1 \\ 0 & 5 & 7 & 13 \end{pmatrix}$ matritsaning rangi topilsin.

Yechish. Birinchi satrini (-2) ga ko'paytirib uchinchi satrining mos elementlariga hamda birinchi satrini (-1) ga ko'paytirib to'rtinchi satrining mos elementlariga qo'shamiz:

$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & -4 & -5 \\ -2 & 4 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

Ikkinchi satrni uchinchi satrga hamda ikkinchi satrni (-2) ga ko'paytirib to'rtinchi satrga qo'shsak

$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

kelib chiqadi. Oxirgi matritsaning rangi 2 ga teng, chunki $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$.

E'tibor bilan kuzatsak bu misoldan shunga iqror bo'lamizki rangi 2 ga teng A matritsaning birinchi va ikkinchi satr elementlari o'zaro chiziqli bog'lanmagan. Boshqacha aytganda ulardan biri ikkinchisi orqali chiziqli ifodalanmaydi, ya'ni $\alpha = k\beta$ tenglikni qanoatlantiruvchi $k = const$ son mavjud emas, bunda α-birinchi satrning elementi β esa ikkinchi satrning α ga mos elementi.

A matritsaning uchinchi va to'rtinchi satr elementlari uning birinchi va ikkinchi satr elementlari bilan mos ravishda $2\alpha - \beta$ va $2\alpha + \beta$ tengliklar orqali chiziqli ifodalanadi.

Endi shu fikrni umumlashtiruvchi teoremani keltiramiz.

4.3-teorema. Agar matritsaning rangi r ga teng bo'lsa u holda unda r ta chiziqli bog'lanmagan satrlar mavjud bo'lib qolgan barcha satrlar shu r ta satrlar orqali chizikli ifodalanadi, ya'ni ularning chiziqli kombinatsiyasi bo'ladi.

Mustaqil yechish uchun mashqlar va test savollari

1. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ matritsaning xos yoki xosmas matritsa ekanligi aniqlansin. *Javob:* xosmas.

2. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ va $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ matritsalarning yig'indisi topilsin. *Javob:* $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ matritsa 5 ga ko'paytirilsin.

Javob: $\begin{pmatrix} 20 & 15 & 10 \\ -5 & 25 & 15 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ va $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 5 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ ko'paytmalar topilsin.

Javob: $\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$ va $\begin{pmatrix} 9 & -11 & 18 \\ 6 & 2 & 0 \\ -7 & -6 & 9 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ ko'paytma mavjudmi? *Javob:* yo'q.

6. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ matritsaga teskari matritsa topilsin.

Javob: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{36} & -\frac{5}{36} & \frac{11}{36} \\ -\frac{13}{36} & \frac{1}{36} & \frac{5}{36} \\ \frac{11}{36} & \frac{13}{36} & -\frac{7}{36} \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ matritsaga teskari matritsa mavjudmi? *Javob:* ha.

8. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ haqida keltirilganlardan noto'g'risini toping.

A) kvadrat matritsa. B) ikkinchi tartibli matritsa. D) xosmas matritsa. E) birlik matritsa. F) matritsaga teskari matritsa mavjud.

9. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ haqida keltirilganlardan noto'g'risi topilsin.

A) A ga teskari A^{-1} matritsa mavjud B) $A \cdot A^{-1} = E$ o'rinli, bunda E uchinchi tartibli birlik matritsa D) $A \cdot E = A$ E) A va E matritsalarni qo'shish va ayirish mumkin.

F) $2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

10. A, B, C matritsalar uchun ko'paytirish va qo'shish amallari o'rinli bo'lganda quyidagi xossalardan qaysi biri har doim ham bajarilavermaydi?

A) $(AB)C=A(BC)$. B) $(A+B)C=AC+BC$. D) $(mA)B=m(AB)$, bunda m-aniq son. E) $\det(AB)=\det A\,\det B$. F) $A\cdot B=B\cdot A$.

11. Noto'g'ri javob topilsin.

A) A matritsaning ustunlari soni B matritsaning satrlari soniga teng bo'lganda $A\cdot B$ mavjud.

B) 0 matritsa A bilan bir xil o'lchamli nol matritsa bo'lganda $A+0=A$ o'rinli.

D) bir xil tartibli A va B kvadrat matritsalar uchun $A\cdot B$ mavjud.

E) bir xil o'lchamli matritsalarni ko'paytirish mumkin.

F) istalgan E birlik matritsa uchun $\det E=|E|=1$.

12. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ matritsaning son qiymati topilsin.

A) 4 B) 2 D) 6 E) 3 F) matritsa son qiymatga ega emas.

13. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ko'paytma topilsin.

A) ko'paytma mavjud emas B) 2 D) 9 E) 3 F) 7.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Matritsa deb nimaga aytiladi?
2. Kvadrat matritsa nima? Uning determinantichi?
3. Xos va xosmas matritsalar deb qanday matritsalarga aytiladi?
4. Birlik matritsa nima?
5. Satr-matritsa nima?
6. Ustun-matritsa nima?
7. Matritsalar qachon teng bo'ladi?

8. Matritsani songa ko'paytmasi qanday aniqlanadi?

9. Matritsalarni qo'shish va ayrish mumkinmi?

10. Matritsalarni ko'paytmasi qanday aniqlanadi?

11.Qachon matritsalarni ko'paytirish mumkin?

12.Berilgan matritsaga teskari matritsa qanday aniqlanadi?

13.Har qanday matritsaga teskari matritsa mavjudmi?

14.Teskari matritsa qanday topiladi?

15.Teskari matritsaning determinantlari o'zaro qanday munosabatda bo'ladi?

5. CHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMASINI YECHISHNING MATRITSA VA GAUSS USULLARI

5.1. Chiziqli tenglamalar sitstemasining matritsali yozilishi va yechilishi

Oson bo'lishi uchun uch noma'lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \tag{5.1}$$

ni qaraymiz.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

belgilashni kiritamiz. U holda matritsalarni ko'paytirish qoidasiga binoan

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{pmatrix}$$

bo'ladi. Shuning uchun (5.1) sistemani matritsalarning tengligidan foydalanib,

$$\begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

ko'rinishida yoki qisqacha

$$A \cdot X = B \tag{5.2}$$

matritsali tenglama ko'rinishda yozish mumkin. (5.1) sistema (5.2) yordamida berilgan bo'lib A xosmas matritsa bo'lsa uni quyidagicha yechiladi. (5.2) tenglamaning har ikkala tomonini chapdan A matritsaga teskari A^{-1} ga matritsaga ko'paytirsak, $A^{-1}\cdot(A\cdot X)=A^{-1}\cdot B$; $(A^{-1}\cdot A)\cdot X=A^{-1}\cdot B$, $E\cdot X=A^{-1}B$; $X=A^{-1}\cdot B$ bo'ladi.

$$X=A^{-1}\cdot B \tag{5.3}$$

matritsali tenglama (5.2) ning yechimidir.

1-misol. $\begin{cases} 2x - y + z = 3, \\ x + 2y - 2z = -1, \\ 3x + 2y - 3z = -2 \end{cases}$ sistemani matritsa usulida yeching.

Yechish.

Bu misolda $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

bo'lgani uchun berilgan sistemani $A\cdot X=B$ matritsali ko'rinishda va uning yechimini $X=A^{-1}B$ ko'rinishda yozish mumkin. A matritsa determinantining 1-satr elementlarini 2 ga ko'paytirib 2-satrning mos elementlariga qo'shamiz va hosil bo'lgan determinantni ikkinchi satr elemenlari bo'yicha yoyib hisoblaymiz.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 5\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$$

bo'lgani uchun A xosmas matritsa va unga teskari A^{-1} matritsa mavjud. A matritsaning barcha elementlarining algebraik to'ldiruvchilarini topamiz:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=-2, \qquad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}=-3,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-4, \qquad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}=-9, \qquad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-7,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}=0, \qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=5,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=5.$$

Algebraik to'ldiruvchilarning qiymatlarini (4.2) formulaga qo'yib A^{-1} teskari matritsani topamiz:

$$A^{-1}=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -3 & -9 & 5 \\ -4 & -7 & 5 \end{pmatrix}.$$

X, A^{-1} va B matritsalarni $X=A^{-1}\cdot B$ tenglikga qo'yamiz. U holda

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -3 & -9 & 5 \\ -4 & -7 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -6+1+0 \\ -9+9-10 \\ -12+7-10 \end{pmatrix}=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -5 \\ -10 \\ -15 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

hosil bo'ladi. Bundan $x=1, y=2, z=3$ echimni hosil qilamiz.

5.2. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Gauss usuli

Biz noma'lumlar soni tenglamalar soniga teng chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Kramer va matritsa usullari bilan tanishdik. Bu usullarning zaif tomonlari shundaki, noma'lumlar soni biroz katta bo'lganda juda ko'p hisoblashlarni bajarishga to'g'ri keladi. Masalan to'rt noma'lumli to'rtta chiziqli teglamalar sistemasini Kramer usuli bilan yechish uchun beshta to'rtinchi tartibli determinantni hisoblashga to'g'ri keladi. To'rtinchi tartibli determinant biror satr yoki ustun elementlari bo'yicha yoyilganda yoyilmada to'rtta uchinchi tartibli determinant qatnashadi. Demak, jami $5\cdot 4=20$ ta uchunchi tartibli determinantlarni hisoblashga to'g'ri keladi. Besh va undan ortiq noma'lumlar qatnashgan sistema haqida gapirmasak ham bo'ladi.

Bunday hollarda chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss taklif etgan quyidagi usul bilan yechgan ma'qul.

Gauss usuli tenglamalardan noma'lumlarni ketma-ket yo'qotishga asoslangan bo'lib oxirgi tenglamada bitta noma'lum qoladi xolos. Undan noma'lumni topib oxirgidan oldingi tenglamaga qo'yib ikkinchi noma'lum topiladi va hokazo shu jarayon davom ettirilib topilgan noma'lumlarning qiymatlarini birinchi tenglamaga qo'yib undan birinchi noma'lum aniqlanadi.

Gauss usuli bilan misolda tanishib chiqamiz.

2-misol. Ushbu

$$\begin{cases} 2x+3y-z+t=-2, \\ 3x-y+2z-3t=-3, \\ 2x+y-z+2t=2, \\ x-2y+z-t=1 \end{cases} \qquad (5.4)$$

sistema yechilsin.

Yechish. Sistemani Gauss usuli bilan yechamiz.

1-qadam x noma'lumni sistemaning ikkinchi tenglamasidan boshlab barchasidan yo'qotamiz. Birinchi tenglamani x oldidagi koeffitsiyent 2 ga bo'lib, sistemani

$$\begin{cases} x + \dfrac{3}{2}y - \dfrac{1}{2}z + \dfrac{1}{2}t = -1, \\ 3x - y + 2z - 3t = -3, \\ 2x + y - z + 2t = 2, \\ x - 2y + z - t = 1 \end{cases} \tag{5.5}$$

ko'rinishida yozamiz.

a) (5.5) sistemaning birinchi tenglamasini -3 ga ko'paytirib, ikkinchi tenglamasiga qo'shsak

$$-3x - \frac{9}{2}y + \frac{3}{2}z - \frac{3}{2}t = 3,$$

$$+$$

$$3x - y + 2z - 3t = -3.$$

$$\overline{\phantom{-3x - \frac{9}{2}y + \frac{3}{2}z - \frac{3}{2}t = 3}}$$

$$-\frac{11}{2}y + \frac{7}{2}z - \frac{9}{2}t = 0$$

hosil bo'ladi.

b) (5.5) sistemaning birinchi tenglamasini -2 ga ko'paytirib uchinchi tenglamasiga qo'shsak

$$-2x - 3y + z - t = 2$$

$$+$$

$$2x + y - z + 2t = 2.$$

$$\overline{}$$

$$-2y + t = 4$$

kelib chiqadi.

d) (5.5) sistemaning to‘rtinchi tenglamasidan birinchisini ayirsak:

$$x-2y+z-t=1,$$

$$-$$

$$x+\frac{3}{2}y-\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}t=-1.$$

$$-\frac{7}{2}y+\frac{3}{2}z-\frac{3}{2}t=2$$

bo‘ladi. Shunday qilib berilgan (5.4) sistema

$$\begin{cases} x+\frac{3}{2}y-\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}t=-1, \\ -\frac{11}{2}y+\frac{7}{2}z-\frac{9}{2}t=0, \\ -2y+0\cdot z+t=4, \\ -\frac{7}{2}y+\frac{3}{2}z-\frac{3}{2}t=2 \end{cases} \tag{5.6}$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi.

2-qadam. (5.6) sistemaning ikkinchi tenglamasidan boshlab barchasidan y noma’lumni yo‘qotamiz. Ikkinchi tenglamani y oldidagi koeffitsiyent $-\frac{11}{2}$ ga bo‘lib sistemani

$$\begin{cases} x+\frac{3}{2}y-\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}t=-1, \\ y-\frac{7}{11}z+\frac{9}{11}t=0, \\ -2y+0\cdot z+t=4, \\ -\frac{7}{2}y+\frac{3}{2}z-\frac{3}{2}t=2 \end{cases} \tag{5.7}$$

ko‘rinishda yozamiz.

a) (5.7) sistemaning ikkinchi tenglamasini +2 ga ko'paytirib uchinchi tenglamaga qo'shamiz:

$$
\begin{array}{c}
+2y-\dfrac{14}{11}z+\dfrac{18}{11}t=0, \\
+ \\
-2y+0\cdot z+t=4, \\
\hline
-\dfrac{14}{11}z+\dfrac{29}{11}t=4
\end{array}
$$

b) (5.7) sistemaning ikkinchi tenglamasini $\frac{7}{2}$ ga ko'paytirib, to'rtinchi tenglamaga qo'shamiz:

$$
\begin{array}{c}
\dfrac{7}{2}y-\dfrac{49}{22}z+\dfrac{63}{22}t=0, \\
+ \\
-\dfrac{7}{2}y+\dfrac{3}{2}z-\dfrac{3}{2}t=2, \\
\hline
-\dfrac{16}{22}z+\dfrac{30}{22}t=2
\end{array}
$$

yoki $-\dfrac{8}{11}z+\dfrac{15}{11}t=2$.

Shunday qilib, (5.7) sistema

$$
\left|
\begin{array}{l}
x+\dfrac{3}{2}y-\dfrac{1}{2}z+\dfrac{1}{2}t=-1, \\
y-\dfrac{7}{11}z+\dfrac{9}{11}t=0, \\
-\dfrac{14}{11}z+\dfrac{29}{11}t=4, \\
-\dfrac{8}{11}z+\dfrac{15}{11}t=2
\end{array}
\right. \qquad (5.8)
$$

ko'rinishni oladi.

3-qadam. (5.8) sistemaning to'rtinchi tenglamasidan z noma'lumni yo'qotamiz. Buning uchun sistemaning uchinchi tenglamasini $\frac{14}{11}$ ga bo'lib uni

$$\begin{cases} x + \frac{3}{2}y - \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}t = -1, \\ y - \frac{7}{11}z + \frac{9}{11}t = 0, \\ z - \frac{29}{14}t = -\frac{22}{7}, \\ -\frac{8}{11}z + \frac{15}{11}t = 2 \end{cases}$$

ko'rinishda yozamiz. Bu sistemaning uchinchi tenglamasini $\frac{8}{11}$ ga ko'paytirib to'rtinchi tenglamaga qo'shamiz:

$$\begin{array}{c} \frac{8}{11}z - \frac{116}{77}t = -\frac{16}{7} \\ + \\ -\frac{8}{11}z + \frac{15}{11}t = 2 \\ \hline -\frac{1}{7}t = -\frac{2}{7} \end{array}$$

Shunday qilib

$$\begin{cases} x + \frac{3}{2}y - \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}t = -1, \\ y - \frac{7}{11}z + \frac{9}{11}t = 0, \\ z - \frac{29}{14}t = -\frac{22}{7}, \\ -\frac{1}{7}t = -\frac{2}{7} \end{cases} \tag{5.9}$$

sistemaga ega bo'lamiz. Bu sistemaning oxirgi tenglamasida bitta t noma'lum, undan oldingisida ikkita z va t noma'lum, ikkinchi tenglamasida uchta y, z, t noma'lum va birinchi tenglamasida barcha noma'lumlar - x, y, z, t lar qatnashadi.

Endi noma'lumlarni topish unchalik qiyin emas.

4-qadam. (5.9) sistemaning to'rtinchi tenglamasi $-\frac{1}{7}t=-\frac{2}{7}$ dan t ni topamiz. $t=\left(-\frac{2}{7}\right):\left(-\frac{1}{7}\right)=2$.

5-qadam. t ning topilgan qiymati 2 ni (5.9) sistemaning uchinchi tenglamasiga qo'yib, z noma'lumni topamiz: $z-\frac{29}{14}\cdot 2=-\frac{22}{7}$; $z=\frac{29}{7}-\frac{22}{7}=\frac{7}{7}=1$.

6-qadam. $t=2$, $z=1$ qiymatlarni (5.9) sistemaning ikkinchi tenglamasi $y-\frac{7}{11}z+\frac{9}{11}t=0$ ga qo'yib y noma'lumni topamiz:

$y-\frac{7}{11}\cdot 1+\frac{9}{11}\cdot 2=0$; $y+1=0$, $y=-1$.

7-qadam. Topilgan y=-1, z=1, t=2 qiymatlarni (5.9) sistemaning birinchi tenglamasi $x+\frac{3}{2}y-\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}t=-1$ ga qo'yib x noma'lumni topamiz: $x+\frac{3}{2}(-1)-\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 2=-1$; $x=0$

Shunday qilib $x=0$, $y=-1$, $z=1$, $t=2$ ya'ni (0; -1; 1; 2) sonlar to'plami berilgan sistemaning yechimi bo'lar ekan.

Gauss usulining muhim tomoni shundan iboratki sistemani yechishdan oldin uni birgalikda yoki birgalikda emasligini aniqlashning hojati yo'q.

Agar sistema birgalikda va aniq bo'lsa, bu usul xuddi yuqoridagi misoldagi singari yagona yechimga olib keladi.

Agar sistema birgalikda bo'lmasa bu usulning qaysidir qadamida yo'qotilishi lozim bo'lgan noma'lum bilan birgalikda barcha noma'lumlar ham yo'qolib ketadi va tenglikning o'ng tomonida esa noldan farqli ozod son qoladi.

3-misol. Ushbu
$$\begin{cases} 3x - y + 4z = 6, \\ x + 2y - z = 3, \\ 5x + 3y + 2z = 8 \end{cases} \qquad (5.10)$$
sistemani Gauss usuli bilan yechilsin.

Yechish. 1-qadam. Birinchi va ikkinchi tenglamalarni o'rin almashtirib birinchi tenglamadagi x oldidagi koeffitsiyentni 1 ga keltiramiz:
$$\begin{cases} x + 2y - z = 3, \\ 3x - y + 4z = 6, \\ 5x + 3y + 2z = 8 \end{cases} \qquad (5.11)$$

a) bu sistemaning birinchi tenglamasini –3 ga ko'paytirib ikkinchi tenglamasiga qo'shamiz:
$$\begin{array}{r} -3x - 6y + 3z = -9, \\ + \\ 3x - y + 4z = 6. \\ \hline -7y + 7z = -3 \end{array}$$

b) (5.11) sistemaning birinchi tenglamasini –5 ga ko'paytirib uchinchi tenglamasiga qo'shsak
$$\begin{array}{r} -5x - 10y + 5z = -15, \\ + \\ 5x + 3y + 2z = 8. \\ \hline -7y + 7z = -7 \end{array}$$
hosil bo'ladi. Shunday qilib (5.10) sistema

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3, \\ -7y + 7z = -3, \\ -7y + 7z = -7. \end{cases} \qquad (5.12)$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi.

2-qadam. (5.12) sistemaning ikkinchi tenglamasini −1 ga ko‘paytirib uchinchisiga qo‘shsak uchinchi tenglamasidagi yo‘qotilishi lozim bo‘lgan y bilan bir qatorda z noma’lum ham yo‘qolib ketadi, ya’ni.

$$\begin{array}{r} 7y - 7z = 3, \\ + \qquad\qquad \\ -7y + 7z = -7 \\ \hline 0 = -4 \end{array}$$

hosil bo‘ladi.

Shunday qilib Gauss usuliga binoan sistema birgalikda emas, ya’ni yechimga ega emas ekan.

Agar sistema birgalikda, ammo aniqmas bo‘lsa, Gauss usulining qandaydir qadamida ikkita bir xil tenglamalarga ega bo‘lamiz.

Ya’ni bu holda tenglamalar soni noma’lumlar sonidan bittaga kam bo‘ladi.

4-misol. $\begin{cases} 3x - y + 4z = 6, \\ x + 2y - z = 3, \\ 5x + 3y + 2z = 12 \end{cases}$ sistemani Gauss usuli bilan yeching.

Yechish. Birinchi tenglamadagi x oldidagi koeffitsiyentni 1 ga keltirish maqsadida sistemadagi birinchi va ikkinchi tenglamalarni o‘rinlarini almashtirib uni

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3, \\ 3x - y + 4z = 6, \\ 5x + 3y + 2z = 12 \end{cases} \qquad (5.13)$$

ko'rinishda yozamiz.

a) (5.13) sistemaning birinchi tenglamasini –3 ga ko'paytirib sistemaning ikkinchi tenglamasiga qo'shamiz:

$$\begin{array}{l} -3x - 6y + 3z = -9, \\ + \\ \quad 3x - y + 4z = 6. \\ \hline -7y + 7z = -3 \end{array}$$

b) (5.13) sistemaning birinchi tenglamasini –5 ga ko'paytirib uchinchi tenglamaga qo'shamiz:

$$\begin{array}{l} -5x - 10y + 5z = -15, \\ + \\ \quad 5x + 3y + 2z = 12. \\ \hline -7y + 7z = -3 \end{array}$$

Shunday qilib

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3, \\ -7y + 7z = -3, \\ -7y + 7z = -3 \end{cases}$$

sistemaga ega bo'lamiz. Bu sistema uch noma'lumli ikkita tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3, \\ -7y + 7z = -3 \end{cases}$$

ga teng kuchli. Oxirgi sistema esa cheksiz ko'p yechimlarga ega.

5.3. Chiziqli tenglamalar sistemasini tekshirish. Kroneker–Kapelli teoremasi

Tenglamalari soni noma'lumlari soniga teng chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer hamda Gauss usullari va matritsalari yordamida tekshirish (yechish)ni ko'rdik.

Endi tenglamalari soni noma'lumlari sonidan farqli, ya'ni n ta noma'lumli m ta chiziqli tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{5.14}$$

ni qaraymiz. Bunda a_{ij} -sistemaning koeffitsiyentlari, x_j - noma'lumlar, b_i -ozod hadlar deyiladi. i 1dan m $\left(i=\overline{1,m}\right)$ gacha, j 1 dan n $\left(j=\overline{1,n}\right)$ gacha barcha natural qiymatlarni qabul qiladi. a_{ij}, b_i - ma'lum sonlar.

Shu sistema qachon birgalikda (kamida bitta yechimga ega) bo'ladi degan savolga javob izlaymiz. Javob matritsa rangi tushunchasiga asoslanib beriladi.

Sistemaning koeffitsiyentlaridan tuzilgan

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

matritsani hamda A matritsaga sistemaning ozod hadlari ustunini birlashtirish natijasida hosil bo'ladigan

$$B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

matritsani qaraymiz. A matritsa **sistemaning matritsasi**, B esa **kengaytirilgan matritsa** deb ataladi. $r_A \le r_B$ ekanligi ravshan.

5.1-teorema(Kronecker-Kapelli). (5.14) chiziqli tenglamalar sistemasi birgalikda bo'lishi uchun sistemaning matritsasi A bilan kengaytirilgan B matritsaning ranglari teng bo'lishi zarur va yetarli.

Isboti. **Zarurligi** (5.14) sistema birgalikda va $x_1=\alpha_1, x_2=\alpha_2,\dots,x_n=\alpha_n$ yechimga ega bo'lsin. U holda

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1+a_{12}\alpha_2+\dots+a_{1n}\alpha_n=b_1, \\ a_{21}\alpha_1+a_{22}\alpha_2+\dots+a_{2n}\alpha_n=b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}\alpha_1+a_{m2}\alpha_2+\dots+a_{mn}\alpha_n=b_m \end{cases}$$ yoki

$$\begin{cases} b_1-a_{11}\alpha_1-a_{12}\alpha_2-\dots-a_{1n}\alpha_n=0, \\ b_2-a_{21}\alpha_1-a_{22}\alpha_2-\dots-a_{2n}\alpha_n=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_m-a_{m1}\alpha_1-a_{m2}\alpha_2-\dots-a_{mn}\alpha_n=0 \end{cases} \qquad (5.15)$$

o'rinli bo'ladi.

B matritsaning oxirgi ustunidan α_1 ga ko'paytirilgan birinchi ustunni, keyin α_2 ga ko'paytirilgan ikkinchi ustunni va hokazo nihoyat α_n ga ko'paytirilgan n-ustunni ayiramiz. U holda (5.15) ga binoan B ga ekvivalent

$$B_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 0 \end{pmatrix}$$

matritsa hosil bo'lib B_1 ~A bo'ladi. Demak $r_B = r_{B_1} = r_1$.

Demak, (5.14) sistema birgalikda bo'lganda $r_1 = r_B$ bo'lar ekan.

Yetarliligi. $r_1 = r_B = r$ bo'lsin. (5.14) sistemaning birgalikda ekanini ko'rsatamiz. A matritsaning noldan farqli r-tartibli Δ minori uning yuqori chap burchagida joylashgan deb faraz qilamiz. Aks holda noma'lumlar va tenglamalarning o'rinlarini almashtirish yo'li bilan bunga erishish mumkin.

Δ matritsa B matritsaga ham kiradi. 4.3-teoremaga binoan A va B matritsaning ranglari r ga teng bo'lganligi sababli ularning $r+1$-satridan m-satrigacha barcha satrlari birinchi r ta satrlarining chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'ladi. Bu (5.14) sistemaning $r+1$-tenglamasidan boshlab qolgan barcha tenglamalari uning birinchi r ta tenglamalarining natijasi ekanligini bildiradi. Ya'ni noma'lumlarning biror $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_n = \alpha_n$ qiymatlari (5.14) sistemaning dastlabki r ta tenglamalarini qanoatlantirsa, u holda bu qiymatlar shu sistemaning qolgan barcha tenglamalarini ham qanoatlantiradi. Shuning uchun (5.14) sistemaning $r+1$-tenglamasidan boshlab qolgan barcha $m-r$ ta tenglamalarini tashlab yuborib berilgan tenglamalar sistemasiga teng kuchli

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rn}x_n = b_r \end{cases} \tag{5.16}$$

sistemani hosil qilamiz.

(5.14) sistemani yechishda quyidagi ikki hol bo'lishi mumkin: $r = n$ va $r < n$. Agar $r = n$ bo'lsa, u holda (5.16) sistemaning tenglamalari soni uning noma'lumlari soniga teng, shu bilan birga sistemaning asosiy determinanti Δ bo'lib shartga binoan u noldan farqli. Shuning uchun bu holda (5.16) sistema va u bilan birga unga teng kuchli (5.14) sistema ham yagona yechimga ega, ya'ni (5.14) sistema birgalikda. Agar $r < n$ bo'lsa (5.16) sistemaning tenglamalari soni uning noma'lumlari sonidan kam. U holda (5.16) sistemani bunday yozamiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n. \end{cases} \quad (5.17)$$

$x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ «ozod noma'lum»larga ixtiyoriy qiymatlar beramiz va sistemaning asosiy determinanti $\Delta \neq 0$ bo'lganligi sababli (5.17) sistemani yechib $x_1, x_2, \ldots, x_r$ noma'lumlarning qiymatlarini topamiz. Shunday qildib bu holda (5.17) sistema va u bilan birga unga teng kuchli (5.14) sistema ham cheksiz ko'p yechimlarga ega bo'lar ekan.

Xulosa. (5.14) sistemaning matritsasi A va B kengaytirilgan matritsalarning ranglari noma'lumlar soniga teng, ya'ni $r_A = r_B = n$ bo'lsa, u holda (5.14) sistema yagona yechimga, agar bu matritsalarning ranglari o'zaro teng bo'lib, lekin noma'lumlar sonidan kichik, ya'ni $r_A = r_B < n$ bo'lsa, u holda (5.14) sistema cheksiz ko'p yechimgalarga ega bo'lar ekan.

$b_1 = 0, b_2 = 0, \ldots, b_n = 0$ bo'lganda (5.14) sistema *bir jinsli* sistema deb ataladi. Bir jinsli sistema uchun $A \sim B$ bo'lgani uchun $r_A = r_B$ bo'ladi va u doimo birgalikda. Xulosaga binoan $r_A = n$ bo'lganda bir jinsli sistema yagona $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$ ya'ni nol yechimga ega.

5.1-teoremaga asoslanib bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi uchun quyidagi teoremaga ega bo'lamiz.

5.2-teorema. *Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi nolmas yechimlarga ega bo'lishi uchun sistema matritsasi A ning rangi r_1 noma'lumlar soni n dan kichik bo'lishi zarur va yetarlidir.*

Natija. Agar bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasining tenglamalari soni m noma'lumlari soni n dan kam bo'lsa, u holda sistema nolmas yechimlarga ega bo'ladi. Haqiqatan ham, $r_1 \le m < n$.

Olingan natijalar tenglamalari soni noma'lumlari soniga teng chiziqli tenglamalar sistemasi uchun ham o'rinli ekanligini ta'kidlab o'tamiz.

Endi chiziqli tenglamalar sistemasini tekshirishga doir misollar qaraymiz.

5-misol. Ushbu

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

sistema birgalikda bo'lsa, uni yeching.

Yechish. Sistemaning matritsasi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ning rangini topamiz. Matritsaning birinchi va ikkinchi satrlarini qo'shib to'rtinchi satridan ayiramiz. U holda

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

yoki oxirgi matritsaning birinchi satrini (-3) ga ko'paytirib, ikkinchi va uchinchi satrlarning mos elementlariga qo'shsak,

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & 4 \\ 0 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

bo'ladi. Hosil bo'lgan ekvivalent matritsaning rangi $r = 3$ chunki

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & 4 \\ 0 & -5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & 4 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = -28 + 20 = -8 \neq 0$$

Demak, A matritsaning rangi ham 3 ga teng; $r_1 = 3$. Kengaytirilgan

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 8 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

matritsaning rangini hisoblaymiz. A matritsadagi singari elementar alamashtirishlarni bajaramiz:

$$B \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 8 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & +1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & +1 & 1 & 8 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 4 & -2 \\ 0 & -5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Oxirgi ekvivalent matritsaning rangi $r = 3$ bo'lishi ravshan. Demak, kengaytirilgan B matritsaning rangi ham 3 ga teng: $r_B = 3$.

Matritsalar bir xil ranglarga ega bo'lganligi uchun sistema birgalikda. Bundan tashqari matritsalarning rangi noma'lumlarning soniga teng, shu sababli sistema birgina yechimga ega. $\Delta \neq 0$ minor birinchi uchta tenglama koeffitsiyentlaridan tuzilgan, shu sababli to'rtinchi tenglama dastlabki uchta tenglamalarning natijasidan iborat va uni tashlab yuborish mumkin.

Berilgan sistemaning birinchi uchta tenglamalaridan tuzilgan uch noma'lumli uchta tenglamalar sistemasini Kramer formulalaridan foydalanib yechib $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$ ni topamiz. Bu yechim berilgan sistemaning ham yechimi bo'ladi.

6-misol.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 3, \\ 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

sistema birgalikdami?

Yechish. Sistemaning matritsasi A ning rangini hisoblaymiz.

$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & 13 & -3 \\ 0 & 26 & -6 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & 13 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & 13 & -3 \end{pmatrix}.$$

$r_A = 2$, chunki $\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 13 \end{vmatrix} = 13 \neq 0$. Kengaytirilgan B matritsaning rangini hisoblaymiz:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 13 & -3 & -4 \\ 1 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 26 & -6 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 13 & -3 & -4 \\ 1 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$r_B = 3$, chunki $\begin{vmatrix} 13 & -3 & -4 \\ -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -4\cdot\begin{vmatrix} 13 & -3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -4\cdot(26-15) = -44 \neq 0$.

$r_A \neq r_B$ bo'lgani uchun berilgan sistema birgalikda emas.

7-misol. Ushbu

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, \\ 4x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

sistema birgalikdami?

Yechish. A matritsaning rangini hisoblaymiz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$r_A = 2$, chunki $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -11 \neq 0$.

Kengaytirilgan B matritsaning rangini hisoblaymiz:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 4 & 6 & -2 & 6 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Demak $r_B = 2$.

$r_A = r_B = 2$ bo'lgani uchun berilgan sistema birgalikda. Rang noma'lumlar sonidan kichik bo'lgani uchun sistema cheksiz ko'p yechimga ega. Endi berilgan sistemani yechishga harakat qilamiz. Sistemaning ikkinchi tenglamasi uning birinchi tenglamasining natijasi bo'lganligi sababli uni tashlab yuborish mumkin. U holda berilgan sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = -1 \end{cases}$$

sistemaga teng kuchli bo'ladi. Bu sistemaning x_1 va x_2 noma'lumlari oldidagi koeffitsiyentlardan tuzilgan minor $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -11 \neq 0$ bo'lgani uchun bu noma'lumlar qatnashgan ifodalarni tenglikni chap qismida qoldirib x_3 qatnashgan qo'shiluvchilarni tenglikning o'ng qismiga ko'chiramiz:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 3 - x_3, \\ 3x_1 - x_2 = -1 - 2x_3 \end{cases}$$

Bu sistemaning «Ozod noma'lumi» x_3 ga aniq qiymat bersak, ikki noma'lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasi hosil bo'lib uning asosiy determinanti $\Delta = -11 \neq 0$ bo'lgani uchun u aniq yechimga ega. Sistemani yechib, x_3 ning tayin qiymatiga mos x_1, x_2 noma'lumlarning qiymatlari topiladi. Shu jarayonni davom ettirib berilgan sistemaning boshqa yechimlarini ham topish mumkin.

Masalan, so'ngi sistemaga $x_3 = 0$ qiymatni bersak u

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 3, \\ 3x_1 - x_2 = -1 \end{cases}$$

ko'rinishni oladi. Uni yechib $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ ni topamiz. Demak berilgan sistemaning cheksiz ko'p yechimlaridan biri $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$ hosil qilindi.

Mustaqil yechish uchun mashqlar va test savollari

1\. a) $\begin{cases} 3x - 2y + 5z = 11, \\ x + y - 2z = 2, \\ 2x - 3y = 3; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y - 4z = 0, \\ 3x - y - 3z = -1, \\ 2x - y + 5z = 7. \end{cases}$

$$\text{d)}\quad \begin{cases} x + 3y - z = 19, \\ 2x + 7y + 4z = 30, \\ 3x - y + 6z = -1 \end{cases}$$

chiziqli tenglamalar sistemasi Gauss usuli bilan yechilsin.

Javob: a) $x=3, y=-1, z=0$; b) $x=0, y=2, z=1$; d) $x=5, y=4, z=-2$.

2. a) $\begin{cases} 3x - 4y + z = 8, \\ x + y + z = -2, \\ 5x - 2y + 3z = 4. \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 5, \\ 2x - 4y - z = 8, \\ 4x - 8y - 5z = 0 \end{cases}$

sistemalarning birgalikdaligi yoki aniqmasligi Gauss usuli yordamida tekshirilsin. Javob: a) sistema aniqmas; b) sisitema birgalikda emas.

3.a) $\begin{cases} 2x + 2y - z = 5, \\ 3x - y - 3z = 9, \\ x + 3y - 2z = 4. \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y - z = 0, \\ 2x - 3y + 2z = 11, \\ 3x + y + z = 9. \end{cases}$

sistemalar matritsa usuli yordamida yechilsin.

Javob: a) $x=2, y=0, z=-1$ b) $x=3, y=-1, z=1$.

4. Har qanday chiziqli tenglamalar sistemasini matritsali yozish va yechish mumkinmi?

A) noma'lumlari soni tenglamalari soniga teng har qanday sistemani

B) noma'lumlari tenglamalaridan ko'p sistemani

D) noma'lumlari tenglamalaridan kam sistemani

E) asosiy determinanti noldan farqli istalgan noma'lumlari soni tenglamalari soniga teng chiziqli tenglamalar sistemasini

F) hech bir sistemani.

5. To'g'ri javob topilsin.

A) chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yechish noma'lumlarni ketma-ket yo'qotishga asoslangan

B) sistemani Gauss usuli bilan yechganda ma'lum odimdan keyin noma'lumlari soni tenglamalari sonidan ortiq sistemaning hosil bo'lishi berilgan sistema cheksiz ko'p yechimga ega ekanligini anglatadi

D) sistemani Gauss usuli bilan yechganda ma'lum odimdan so'ng tenglamalar orasida ziddiyatli tenglamaning paydo bo'lishi berilgan sistemaning yechimga ega emasligini anglatadi

E) barcha javoblar to'g'ri

F) chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yechishdan oldin uni yechimga ega yoki ega emasligini tekshirib ko'rishning hojati yo'q.

6. $\begin{cases} 2x - 3y = 5, \\ x + 4y = 7 \end{cases}$ sistema nechta yechimga ega?

A) yechimga ega emas B) cheksiz ko'p yechimlarga ega D) 1 E) 2 F) 3.

7. $\begin{cases} x + 3y = 3, \\ 2x + 6y = 4 \end{cases}$ sistema nechta yechimga ega?

A) yechimga ega emas B) cheksiz ko'p yechimga ega D) 1 E) 2 F) 3.

8. $\begin{cases} x - 2y = 5, \\ 3x - 6y = 15 \end{cases}$ sistema nechta yechimga ega?

A) echimga ega emas B) cheksiz ko'p yechimlarga ega D) 1 E) 2 F) 3.

9. $\begin{cases} x + y - 3z = 4, \\ 2x - 3y + z = 7, \\ 3x + 3y - 9z = 12 \end{cases}$ sistemani qaysi usul bilan yechgan ma'qul?

A) Gauss usuli bilan B) Kramer usuli bilan D) matritsa usuli bilan.

10. $\begin{cases} x - y + 2z = 5, \\ x + y - z = 7, \\ 2x + 2y - 2z = 6 \end{cases}$ sistemani qaysi usul bilan yechgan ma'qul?

A) Gauss usuli bilan B) Kramer usuli bilan D) matritsa usuli bilan.

11. Agar Shohruh 2 kg olma, 1 kg anor va 3 kg uzum uchun 2200 so'm, Shahrizoda o'sha narx bilan 1kg olma, 2 kg anor va 2 kg uzum uchun 1800 so'm, Zilola ham o'sha narx bilan 3kg olma, 3 kg anor va 1 kg uzum uchun 2000 so'm sarflagan bo'lsa, olma, anor va uzumning narxini toping.

A) 200; 300; 500 B) 300; 200; 500 D) 500; 200; 300 E) 100; 200; 300 F) 200; 400; 600.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Chiziqli tenglamalar sistemasining matritsali yozilishi qanday?
2. Matritsali tenglama qanday yechiladi?
3. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Gauss usuli nima?
4. Aniqmas chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yechganda nima sodir bo'ladi?
5. Birgalikda bo'lmagan chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yechganda nima sodir bo'ladi?
6. Gauss usulining Kramer usulidan afzalligi nimada?
7. Sistemani Gauss usuli bilan yechishdan oldin uni yechimi bor yoki yo'qligini tekshirish shartmi?
8. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning necha xil usulini bilasiz?
9. Maktab kursida ikki noma'lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning qanaqa usullari bilan tanishgansiz?
10. Ikki noma'lumli ikkita va uch noma'lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasining yagona yechimga egaligi, yechimga ega emasligi hamda cheksiz ko'p yechimlarga ega ekanligiga qanaqa geometrik izoh berish mumkin?

6. VEKTORLAR VA ULAR USTIDA AMALLAR

6.1. Skalar va vektor miqdor kattaliklar

Kundalik hayotimizda: "Institutning eng keksa o'qituvchisining yoshi nechada"?; ma'lum quduqdan bir kecha-kunduzda qancha neft olinadi?; "Fakultet talabalari bir kunda qancha paxta teradi?; Bobomurod traktorchi bir kunda qancha yer haydaydi?"; "Korxona bir kunda necha metr mato ishlab chiqardi?"; "Xonadagi havoning harorati qanday?"; "Bir dona to'la ochilgan paxta ko'saginining massasi qancha?"; "Ishchi bir kunda qancha g'isht terdi?"; "Zavod bir kecha-kunduzda qancha neftni qayta ishlaydi?" kabi savollarga duch kelamiz. Bu savollarning barchasiga bitta aniq son yordamida to'liq javob olish mumkin. Boshqacha aytganda bu yerda miqdor o'zining faqatgina son qiymati bilan to'la aniqlanadi.

O'zining son qiymati bilan to'liq aniqlanadigan miqdorlar **skalyar** miqdorlar deyiladi.

Uzunlik, yuza, hajm va harorat skalyar miqdorga misol bo'la oladi. Shunday miqdorlar ham uchraydiki, ularni faqatgina son qiymati orqali to'liq aniqlab bo'lmaydi. Masalan: Qarshi shahridan 70km/soat tezlik bilan chiqqan avtomobil bir soatdan keyin qaerda bo'ladi? degan savolga birgina 70 km/soat yordamida javob berib bo'lmaydi. Agarda masalaning shartiga yo'nalish tayinlansa, uni hal etish mumkin. Ya'ni Qarshi shahridan 70 km/soat tezlik bilan Qarshi-Samarqand yo'nalishi bo'yicha harakatlanayotgan avtomobil bir soatdan keyin qaerda bo'ladi? deyilsa, bu savolga to'liq javob berish mumkin.

Son qiymatidan tashqari ma'lum yo'nalishga ega bo'lgan miqdorlar **vektor miqdorlar** deyiladi.

Harakat tezligi, tezlanish, kuch, magnit va elektr maydonining kuchlanganligi kabi kattaliklar vektor miqdorga misol bo'ladi.

6.2. Vektor tushunchasi

Vektor kattalik (miqdor) lar vektor ko'rinishida tasvirlanadi.

1-ta'rif. Yo'nalgan kesma *vektor* deyiladi.

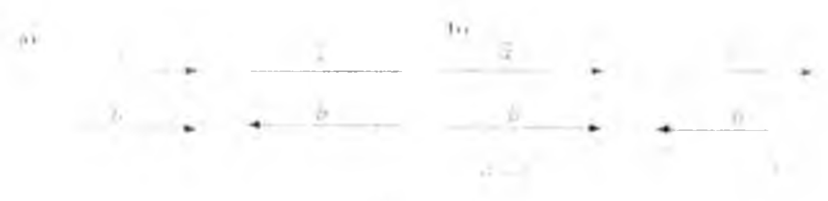
Boshlanish (bosh) nuqtasi A va oxirgi nuqtasi B bo'lgan vektorni $\overrightarrow{AB}$ (yoki $\overline{AB}$) kabi yozish qabul qilingan. Ba'zan vektorni bitta harf bilan $\overrightarrow{a}$ (yoki $\overline{a}$) kabi belgilanadi. A va B nuqtalar orasidagi masofa $\overrightarrow{AB}$ vektorning uzunligi deyiladi.

$\overrightarrow{AB}$ vektorning uzunligi uning *moduli* ham deb yuritiladi va $|\overrightarrow{AB}|$ ko'rinishda belgilanadi.

Boshi oxiri bilan ustma-ust tushgan vektor **nol vektor** deb ataladi va $\overrightarrow{0}$ (yoki $\overline{0}$) bilan belgilanadi. Demak, $\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{0}$ – nol vektor. Nol vektorning moduli 0 ga teng bo'lib, uning yo'nalishi aniq emas.

$\overrightarrow{BA}$ vektor $\overrightarrow{AB}$ vektorga qarama-qarshi vektor deyiladi. $\overrightarrow{a}$ vektorga *qarama-qarshi vektor* $-\overrightarrow{a}$ kabi belgilanadi. Uzunligi 1 ga teng vektor birlik vektor deyiladi va $\overrightarrow{a}$ vektorga mos (u bilan bir o'qda yotgan hamda bir xil yo'nalishga ega) birlik vektor $\overrightarrow{a}^0$ kabi belgilanadi.

2-ta'rif. Bitta to'g'ri chiziqda yoki parallel to'g'ri chiziqlarda yotuvchi $\overrightarrow{a}$ va $\overrightarrow{b}$ vektorlar *kollinear* vektorlar deyiladi (23 *a*-chizma).



23-chizma

3-ta'rif. Bitta tekislikda yoki parallel tekisliklarda yotuvchi vektorlar *komplanar vektorlar* deb aytiladi.

4-ta'rif. Kollinear $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar bir xil yo'nalgan hamda bir xil uzunlikka ega bo'lsa, teng deyiladi ($\vec{a}=\vec{b}$ kabi yoziladi) (23 - chizma).

Ta'rifga binoan berilgan vektorni o'zo'ziga parallel ko'chirish natijasida unga teng vektor hosil bo'ladi. Boshqacha aytganda vektorning uzunligi va yo'nalishini o'zgartirmagan holda uni fazoning bir nuqtasidan boshqa bir nuqtasiga ko'chirish mumkin ekan. Bunday vektorlar *erkin* vektorlar deyiladi. Biz faqatgina erkin vektorlar bilan ish ko'ramiz.

6.3. Vektorlar ustida chiziqli amallar

Matematikada vektor tushunchasi son tushunchasiga nisbatan murakkab tushuncha. Sonlar ustida bajariladigan barcha amallarni vektorlar ustida bajarib bo'lmaydi. Masalan ko'paytirish, bo'lish, darajaga ko'tarish, ildiz chiqarish kabi amallarni vektorlar ustida bajarish mumkin emas.

Vektorlar ustida **chiziqli amallar** deb, vektorlarni qo'shish, ayirish hamda vektorlarni songa ko'paytirish amallariga aytiladi.

1. **Vektorlarni qo'shish.** Noldan farqli ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarni olamiz. Ixtiyoriy 0 nuqtani olib $\overline{OA}=\vec{a}$ vektorni yasaymiz, so'ngra A nuqtaga $\overline{AB}=\vec{b}$ vektorni qo'yamiz. Ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning yig'indisi $\vec{a}+\vec{b}$ deb birinchi qo'shiluvchi $\vec{a}$ vektorning boshini ikkinchi qo'shiluvchi $\vec{b}$ vektorning oxiri bilan tutashtiruvchi $\overline{OA}$ vektorga aytiladi. (24 *a*-chizma). Vektorlarni bunday qo'shish usuli *uchburchak usuli* deyiladi.

24-chizma.

Uchta $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorning yig'indisi $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ deb birinchi qo'shiluvchi $\vec{a}$ vektorni oxiriga ikkinchi qo'shiluvchi $\vec{b}$ vektorning boshini qo'yib, so'ngra ikkinchi qo'shiluvchi vektorning oxiriga uchinchi $\vec{c}$ qo'shiluvchi vektorning boshini qo'yib birinchi $\vec{a}$ vektorning boshi bilan uchinchi $\vec{c}$ vektorning oxirini tutashtirish natijasida hosil bo'lgan vektorga aytiladi (24 *b*-chizma).

Vektorlarni bu xilda qo'shish qo'shiluvchilar soni har qanday bo'lganda ham yaroqlidir.

Endi vektorlarni qo'shishning boshqa bir usuli bilan tanishamiz. $\overline{OA}=\vec{a}$ va $\overline{OC}=\vec{b}$ vektorlarni yig'indisini topish uchun bu vektorlarni tomon hisoblab OABC parallelogramm yasaymiz. Parallelogrammning O uchidan o'tkazilgan diagonali $\overline{OB}$ vektor, $\vec{a}$

va $\vec{b}$ vektorlarning yig'indisini ifodalaydi. Vektorlarning qo'shishning bunday usuli *parallelogramm* qoidasi deb ataladi (24-d chizma).

2. Vektorlarni ayirish. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning ayirmasi $\vec{a}-\vec{b}$ deb $\vec{b}$ vektor bilan yig'indisi $\vec{a}$ vektorni beradigan $\vec{c}$ vektorga aytiladi. Demak $\vec{a}-\vec{b}$ ayirmani topish uchun $\vec{a}$ vektor bilan $\vec{b}$ vektorga qarama-qarshi $-\vec{b}$ vektorni yig'indisini topish lozim ekan. $\overline{OA}=\vec{a}$ va $\overline{OC}=\vec{b}$ vektorlarni ayirmasini topish uchun bu vektorlarni tomon hisoblab, yasalgan $OABC$ parallelogrammning C uchidan o'tkazilgan diagonali $\overline{CA}$ vektorni topish lozim. Ayirma vektorda yo'nalish «ayriluvchi» dan «kamayuvchi»ga qarab yo'naladi(24 e- chizma).

3 Vektorni songa ko'paytirish. Noldan farqli $\vec{a}$ vektorning $m\neq 0$ songa ko'paytmasi deb, $\vec{a}$ vektorga kollinear, uzunligi $|m|\cdot|\vec{a}|$ ga teng bo'lgan, m>0, bo'lganda $\vec{a}$ vektor bilan bir xil yo'nalgan, m<0 bo'lganda esa unga qarama-qarshi yo'nalgan hamda $m\vec{a}$ bilan belgilanadigan vektorga aytiladi(25-chizma).

25-chizma.

Izoh. 1. Istalgan $\vec{a}$ vektorni uning uzunligi $|\vec{a}|$ bilan unga mos $\vec{a}^0$ birlik vektorni ko'paytmasi shaklida tasvirlash mumkin, ya'ni $\vec{a}=a_0\cdot\vec{a}^0$.

2. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ ($\vec{b}\neq 0$) kollinear vektorlar uchun shunday yagona λ son mavjud bo'lib, $\vec{a}=\lambda\vec{b}$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Haqiqatan, $\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\vec{a}^{0}$, $\vec{b}=|\vec{b}|\cdot\vec{b}^{0}$ vektorlarni kollinearligidan $\vec{a}^{0}=\pm\vec{b}^{0}$ ekanligi kelib chiqadi. U holda $\vec{a}=\pm|\vec{a}|\,\vec{b}^{0}=\pm\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}\vec{b}$ yoki $\pm\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}=\lambda$ belgilashni kiritsak $\vec{a}=\lambda\vec{b}$ hosil bo'ladi.

Shunday qilib vektorlarni qo'shish, ayirish hamda vektorning songa ko'paytirish natijasida vektor hosil bo'lar ekan.

Vektorlar ustida chiziqli amallar quyidagi xossalarga ega:

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (21 *a*- chizma);
2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (21 *b*- chizma);
3. $m(\vec{a}+\vec{b})=m\vec{a}+m\vec{b}$.
4. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.
5. $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.
6. $\vec{a}\cdot 1=\vec{a}$.
7. $(m+n)\cdot\vec{a}=m\vec{a}+n\vec{a}$, m va n haqiqiy sonlar.
8. $(m\cdot n)\cdot\vec{a}=m\cdot(n\vec{a})=n\cdot(m\vec{a})$.

26-chizma.

6.4. Ikki vektor orasidagi burchak tushunchasi

Fazoda $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar berilgan bo'lsin. Fazoda ixtiyoriy O nuqtani olib, $\overline{OA}=\vec{a}$ va $\overline{OB}=\vec{b}$ vektorlarni yasaymiz.

5-tarif. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak deb OA va OB vektorlardan birini ikkinchisi bilan ustma-ust tushishi uchun burilishi lozim bo'lgan φ $(0\leq\varphi\leq\pi)$ burchakka aytiladi.

$\vec{a}$ vektor bilan l o'q orasidagi burchak deganda $\vec{a}$ vektor bilan l o'qda joylashgan va u bilan bir xil yo'nalgan $\vec{l}^0$ birlik vektor orasidagi burchak tushiniladi. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak $(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b})$ kabi belgilanadi.

6.5. Vektorning o'qqa proeksiyasi va uning xossalari

Fazoda l o'q va $\overline{AB}$ vektor berilgan bo'lsin. A va B nuqtalardan bu o'qqa perpendikulyar tushirib perpendikulyarning asoslarini mos ravishda A_1 va B_1 orqali belgilaymiz. $\overline{A_1B_1}$ vektor $\overline{AB}$ vektorning l o'qdagi *tashkil etuvchisi* yoki *komponenti* deb ataladi (27-chizma). l_1 va l_2 sonlar A_1 va B_1 nuqtalarning l o'qdagi koordinatalari bo'lsin.

6-ta'rif. l_2-l_1 ayirma $\overline{AB}$ vektorning l o'qqa *proeksiyasi* deb ataladi.

$\overline{AB}$ vektorning l o'qqa proeksiyasi $pr_l\,\overline{AB}$ kabi belgilanadi. Shunday qilib $\overline{AB}$ vektorning l o'qqa proeksiyasi deb vektorning boshi A va oxiri B nuqtalarning l o'qdagi proeksiyalari A_1 va B_1 nuqtalar orasidagi masofaga aytilar ekan. Bu masofa vektor bilan o'qning yo'nalishi mos tushganda «+» ishora bilan aks holda «–» ishora bilan olinadi. Proeksiyaning ta'rifidan $\overrightarrow{AB}$ vektor o'qqa perpendikulyar bo'lganda uning o'qqa proeksiyasi nolga teng bo'lishi kelib chiqadi (27- chizma).

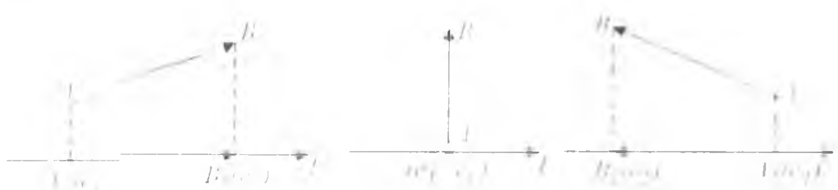
Proeksiyaning asosiy xossalarini keltiramiz:

1. $\vec{a}$ vektorning l o'qqa proeksiyasi $\vec{a}$ vektor uzunligini bu vektor bilan o'q orasidagi φ burchak kosinusiga ko'paytmasiga teng, ya'ni $pr_l\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi$. Bu 28 a- chizmadan ko'rinib turibdi.

2. Ikki vektor yig'indisining o'qqa proeksiyasi qo'shiluvchi vektorlarning shu o'qqa proeksiyalari yig'indisiga teng, yani $pr_l\,(\vec{a}+\vec{b}) = pr_l\,\vec{a} + pr_l\,\vec{b}$. Bu 28 b- chizmadan ko'rinib turibdi.

3. $\vec{a}$ vektorni λ songa ko'paytirganda uning o'qqa proeksiyasi ham shu songa ko'payadi, ya'ni $pr_l\,(\lambda\,\vec{a}) = \lambda\,.\,pr_l\,\vec{a}$ (28 d- chizma).

Boshqacha aytganda skalyar ko'paytuvchini proeksiya belgisidan chiqarish mumkin ekan.



a) $pr_l\,\overrightarrow{AB} > 0$, b) $pr_l\,\overrightarrow{AB} = 0$, c) $pr_l\,\overrightarrow{AB} < 0$

27- chizma.

29-chizma.

Endi $\overrightarrow{AB}$ vektorning l o'qdagi tashkil etuvchi $\overrightarrow{A_1B_1}$ vektorni proeksiya orqali ifodalaymiz. $\overrightarrow{l^0}$ vektor l o'qqa mos birlik vektor bo'lsin. U holda

$$\overrightarrow{A_1B_1} = pr_l \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{l^0} \qquad (6.1)$$

bo'lishi ravshan.

Izoh. Vektorning boshqa vektor yo'nalishiga proeksiyasi ham xuddi vektorning o'qqa proeksiyasi kabi aniqlanadi.

6.6. Vektorni koordinata o'qlaridagi tashkil etuvchilari bo'yicha yoyish

$Oxyz$ fazoda to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasini olaylik. O'qlarning har birida boshi koordinatalar boshida bo'lib yo'nalishi o'qning musbat yo'nalishi bilan ustma-ust tushadigan birlik vektorlarni olamiz va ularni $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ lar orqali belgilaymiz. Bu yerda $\vec{i}$ Ox o'qqa mos, $\vec{j}$ Oy o'qqa mos va $\vec{k}$ Oz o'qqa mos birlik vektorlar. Demak $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ birlik vektorlar o'zaro perpendikular va nokomplanar.

7-ta'rif. Uchta $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ vektorlar sistemasi *dekartning to'g'ri burchakli* bazisi yoki ortlar deb ataladi.

$\vec{a}$ fazodagi ixtiyoriy vektor bo'lsin. Shu vektorni $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ ortlar orqali ifodalash mumkinmi? Agar mumkin bo'lsa u ifodani qanday topish mumkin? degan savollarga javob topishga harakat qilamiz.

$\vec{a}$ vektorni o'z-o'ziga parallel ko'chirib uning boshini koordinatalar boshiga joylashtiramiz. $\vec{a}=\overline{OM}$ vektorning oxiri M nuqtadan koordinata tekisliklariga parallel tekisliklar o'tkazamiz. Natijada diagonallaridan biri $\overline{OM}$ vektordan iborat parallelepipedga ega bo'lamiz. 29-chizmadan vektorlarni qo'shish qoidasiga binoan $\vec{a}=\overline{OM_1}+\overline{M_1P}+\overline{PM}$ ga ega bo'lamiz. $\overline{M_1P}=\overline{OM_2}$, $\overline{PM}=\overline{OM_3}$ bo'lgani uchun

$$\vec{a}=\overline{OM_1}+\overline{OM_2}+\overline{OM_3} \tag{6.2}$$

bo'ladi. $\overline{OM_1}$, $\overline{OM_2}$ va $\overline{OM_3}$ vektorlar mos ravishda $\vec{a}=\overline{OM}$ vektorni $0x$, $0y$ va Oz o'qlardagi tashkil etuvchilari bo'lganligi uchun ular (6.1) formulaga ko'ra

$$\overline{OM_1}=pr_{0x}\overline{OM}\cdot\vec{i},\quad \overline{OM_2}=pr_{0y}\overline{OM}\cdot\vec{j},\quad \overline{OM_3}=pr_{0z}\overline{OM}\cdot\vec{k} \tag{6.3}$$

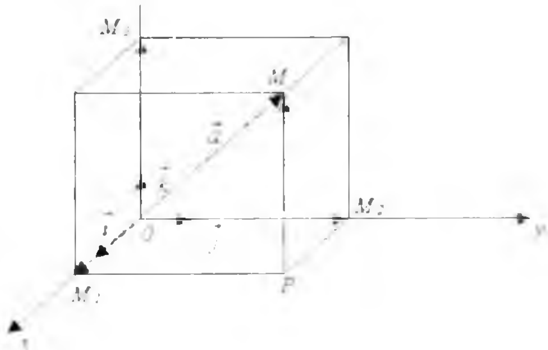
bo'ladi.

$\vec{a}=\overline{OM}$ vektorning $0x$, $0y$, Oz o'qlardagi proeksiyalarini mos ravishda a_x, a_y, a_z lar orqali belgilasak (6.2) va (6.3) formulalarga asoslanib

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k} \tag{6.4}$$

formulaga ega bo'lamiz.

Shunday qilib fazodagi istalgan $\vec{a}$ vektorni yagona usul bilan dekart bazisi $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ orqali (6.4) ko'rinishda ifodalash mumkin ekan. (6.4) $\vec{a}$ vektorni uning koordinatalar o'qlaridagi tashkil etuvchilari orqali yoyilmasidir. Bu yoyilma har xil qo'llanmalarda har xil nomlar bilan yuritiladi.



29-chizma.

Masalan, u vektorning ortlar, dekart bazisi, vektorning proeksiyalari va koordinatalari orqali yoyilmasi deb ham yuritiladi.

Faraz qilaylik vektorning oxiri M nuqta x,y,z koordinatalarga ega bo'lsin. U holda $\vec{a}=\overline{OM}$ vektorning koordinata o'qlaridagi proeksiyalari $a_x=x, a_y=y, a_z=z$ bo'lib (6.4) yoyilma

$$\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k} \qquad (6.5)$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Vektorning koordinata o'qlaridagi proeksiyalarini uning koordinatalari deb ham ataladi. O'qlardagi proeksiyalari a_x, a_y, a_z ga teng $\vec{a}$ vektorni $\vec{a}\{a_x; a_y; a_z\}$ yoki $\vec{a}=\{a_x; a_y; a_z\}$ ko'rinishda yozamiz.

a_x - $\vec{a}$ vektorning abssissasi, a_y - ordinatasi, a_z – applikatasi deb ataladi.

Shunday qilib boshi koordinatalar boshida bo'lgan $\vec{a}=\overline{OM}$ vektor bilan uni oxiri M nuqta bir xil koordinatalarga ega bo'lar ekan.

$\overline{OM}$ vektor M nuqtaning *radius-vektori* deyiladi.

Izoh: Bundan buyon vektor berilgan yoki vektor topilsin deyilganda vektorning koordinatalari berilganligini yoki vektorning koordinatalarini topish lozimligini tushuniladi.

6.7. Koordinatalari orqali berilgan vektorlar ustida chiziqli amallar

Agar vektorlarning koordinata o'qlaridagi proeksiyalari (vektorning koordinatalari) malum bo'lsa, u holda bu vektorlar ustida qo'shish, ayirish va vektorni songa ko'paytirish amallarini ularning proeksiyalari ustidagi arifmetik amallar bilan almashtirish mumkin.

Vektorlar $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$ yoyilmalari yordamida berilgan bo'lsin. U holda $\vec{a}\pm\vec{b}=(a_x\pm b_x)\vec{i}++(a_y\pm b_y)\vec{j}+(a_z\pm b_z)\vec{k}$, $\lambda\vec{a}=\lambda a_x\vec{i}+\lambda a_y\vec{j}+\lambda a_z\vec{k}$, ya'ni vektorlarni qo'shganda (ayirganda) ularning mos koordinatalari qo'shiladi (ayiriladi), vektorni songa ko'paytirganda uning barcha koordinatalari shu songa ko'paytiriladi.

1-misol. $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k}$ vektorlar berilgan. Ularning yig'indisi va ayirmasi topilsin.

Yechish. Vektorlarning mos koordinatalarini qo'shib

$$\vec{a}+\vec{b}=(2+3)\vec{i}+(3-1)\vec{j}+(-2+4)\vec{k}=5\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$$

vektorga va mos koordinatalarini ayirib $\vec{a}-\vec{b}=(2-3)\vec{i}+(3-(-1))\vec{j}+(-2-4)\vec{k}=-\vec{i}+4\vec{j}-6\vec{k}$ vektorga ega bo'lamiz.

2- misol. $\vec{a}=2\vec{i}+5\vec{j}-3\vec{k}$ vektorni 4 ga ko'paytiring.

Yechish. Vektorning har bir koordinatalarini 4 ga ko'paytirib $4\vec{a}=8\vec{i}+20\vec{j}-12\vec{k}$ vektorni hosil qilamiz.

6.8. Vektorning uzunligi

Fazoda vektor $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ yoyilmasi yordamida berilgan bo'lib uning uzunligi $|\vec{a}|$ ni topish talab etilsin. Qaralayotgan holda (29-chizma) $\vec{a}=\overrightarrow{OM}$ vektor qirralari shu vektorning koordinata o'qlaridagi tashkil etuvchilari $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$ va $\overrightarrow{OM_3}$ dan iborat parallelepipedning diagonallaridan biri ekanligi aytilgan edi. To'g'ri burchakli parallelepiped diagonalining kvadrati uning qirralari kvadratlarining yig'indisiga teng bo'lishi ma'lum. Shunga ko'ra

$|\vec{a}|^2=|\overrightarrow{OM}|^2=|\overrightarrow{OM_1}|^2+|\overrightarrow{OM_2}|^2+|\overrightarrow{OM_3}|^2$, yoki $|\overrightarrow{OM_1}|=|a_x|$,

$|\overrightarrow{OM_2}|=|a_y|$ va $|\overrightarrow{OM_3}|=|a_z|$ bo'lgani uchun $|\vec{a}|^2=a_x^2+a_y^2+a_z^2$, bundan vektorning uzunligini topish formulasi

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2} \tag{6.6}$$

ni hosil qilamiz.

3-misol. $\vec{a}=6\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$ vektorning uzunligini toping.

Yechish. Misolda $a_x=6$, $a_y=3$, $a_z=-2$ bo'lgani uchun, (6.6) formulaga binoan $|\vec{a}|=\sqrt{6^2+3^2+(-2)^2}=\sqrt{36+9+4}=7$ bo'ladi.

Izoh. $\vec{a}$ vektor Oxy tekislikda qaralsa bu holda vektorning applikatasi nolga teng bo'lganligi sababli vektor $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}$ yoyilmaga ega hamda uning uzunligi $|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2}$ kabi topiladi. $\vec{i}$, $\vec{j}$ birlik vektorlari tekislikda dekart bazisini tashkil etadi. a_x – abssissaga va a_y – ordinataga ega bo'lgan $\vec{a}$ vektor $\vec{a}\{a_x, a_y\}$ yoki $\vec{a}=\{a_x; a_y\}$ kabi yoziladi.

Endi vektorlar nazariyasidan foydalanib analitik geometriyaning ba'zi masalalarini yechamiz.

6.9. Fazodagi ikki nuqta orasidagi masofa

Boshi $A\,(x_1; y_1; z_1)$, oxiri $B\,(x_2; y_2; z_2)$ nuqtalarda bo'lgan $\overrightarrow{AB}$ vektorni qaraymiz. Vektorning o'qqa proeksiyasining ta'rifiga ko'ra $pr_{ox}\overrightarrow{AB} = x_2 - x_1$, $pr_{oy}\overrightarrow{AB} = y_2 - y_1$, $pr_{oz}\overrightarrow{AB} = z_2 - z_1$ bo'lganligi sababli (6.4) ga binoan

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k} \qquad (6.7)$$

formulaga ega bo'lamiz. Demak boshi $A\,(x_1; y_1; z_1)$ nuqtada, oxiri $B(x_2; y_2; z_2)$ nuqtada bo'lgan $\overrightarrow{AB}$ vektorning koordinatalarini topish uchun uning oxirining koordinatalaridan boshining mos koordinatalarini ayirish lozim ekan. (6.6) formulaga binoan vektorning uzunligi

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad (6.8)$$

formula yordamida topiladi. Ana shu formula A va B nuqtalar orasidagi masofani aniqlaydi.

4-misol. A (4; 3; 2) va B (1; -1;2) nuqtalar orasidagi masofani toping.

Yechish. Misolda $x_1=4$, $y_1=3$, $z_1=2$ $x_2=1$, $y_2=-1$, $z_2=2$ (6.8) formulaga ko'ra $d=AB=\sqrt{(1-4)^2+(-1-3)^2+(2-2)^2}=\sqrt{9+16}=5$ bo'ladi.

6.10. Fazodagi kesmani berilgan nisbatda bo'lish

Fazoda $A\,(x_1; y_1; z_1)$ va $B\,(x_2; y_2; z_2)$ nuqtalar berilgan bo'lsin. AB kesmani $\lambda>0$ nisbatda bo'luvchi $M(x,y,z)$ nuqtani topish talab etilsin, ya'ni AB kesmada $AM{:}MB=\lambda$ munosabatni qanoatlantiruvchi

M nuqtani topish talab etilsin. Bu holda $\overrightarrow{AM}$ va $\overline{MB}$ vektorlar kollinear bo'lib $AM:MB=\lambda$ yoki $AM=\lambda MB$ bo'lgani uchun $\overrightarrow{AM}=\lambda\,\overline{MB}$ bo'ladi. (6.7) formulaga binoan $\overrightarrow{AM}=(x-x_1)\vec{i}+(y-y_1)\vec{j}+(z-z_1)\vec{k}$, $\overline{MB}=(x_2-x)\vec{i}+(y_2-y)\vec{j}+(z_2-z)\vec{k}$, bo'lgani uchun, hamda vektorni songa ko'paytirganda uning barcha koordinatalari shu songa ko'payishini hisobga olib $\overrightarrow{AM}=\lambda\,\overrightarrow{MB}$ tenglikni

$$(x-x_1)\vec{i}+(y-y_1)\vec{j}+(z-z_1)\vec{k}=\lambda(x_2-x)\vec{i}+\lambda(y_2-y)\vec{j}+\lambda(z_2-z)\vec{k}$$

ko'rinishda yozamiz. Bundan teng vektorlarning mos koordinatalari ham teng bo'lishni hisobga olib, $x-x_1=\lambda(x_2-x)$, $y-y_1=\lambda(y_2-y)$, $z-z_1=\lambda(z_2-z)$ tengliklarni hosil qilamiz.

$x-x_1=\lambda(x_2-x)$ chiziqli tenglamani yechib x ni topamiz: $x-x_1=\lambda x_2-\lambda x$, $x+\lambda x=x_1+\lambda x_2$, $(1+\lambda)x=x_1+\lambda x_2$, $x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$.

Shuningdek $y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$, $z=\dfrac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$ formulalarga ega bo'lamiz.

Shunday qilib AB kesmani $\lambda>0$ nisbatda bo'luvchi M nuqtaning koordinatalari

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda} \qquad (6.9)$$

formulalar yordamida topilar ekan.

Xususiy holda AB kesmaning o'rtasini topish talab etilganda $\lambda=1$ bo'lib (6.9) dan AB kesmani teng ikkiga bo'luvchi nuqtaning koordinatalarini topish uchun

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2} \qquad (6.10)$$

formulalarni hosil qilamiz.

5-misol. A (5;7;8) va B (8;4;5) nuqtalar berilgan. AB kesmani 2:1 nisbatda bo'luvchi ya'ni B nuqtaga qaraganda A nuqtadan 2 barobar uzoqlikda joylashgan M nuqta topilsin.

Yechish. Misolda $x_1=5$, $y_1=7$, $z_1=8$, $x_2=8$, $y_2=4$, $z_2=5$, $\lambda=2$ bo'lgani uchun (6.9) ga binoan

$$x=\frac{5+2\cdot 8}{1+2}=\frac{21}{3}=7,\quad y=\frac{7+2\cdot 4}{3}=\frac{15}{3}=5,\quad z=\frac{8+2\cdot 5}{3}=\frac{18}{3}=6$$

bo'ladi. Izlanayotgan nuqta M(7; 5; 6;) nuqta bo'lar ekan.

6-misol. AB kesma C nuqta yordamida 2,5 nisbatda bo'linadi.

A (3;7;4) va C (8;2;3) nuqtalar ma'lum bo'lsa B nuqtani toping.

Yechish. Misolda $x_1=3$, $y_1=7$, $z_1=4$, $x=8$, $y=2$, $z=3$ bo'lib x_2, y_2 va z_2 larni topish talab etiladi. (6.9) ga tegishli qiymatlarni quyib noma'lumlarni aniqlaymiz:

$$8=\frac{3+2{,}5\cdot x_2}{1+2{,}5},\quad 8\cdot 3{,}5=3+2{,}5x_2,\quad x_2=\frac{8\cdot 3{,}5-3}{2{,}5}=10,\quad 2=\frac{7+2{,}5\cdot y_2}{3{,}5},$$

$$7=7+2{,}5\cdot y_2,\quad y_2=0,\quad 3=\frac{4+2{,}5\cdot z_2}{3{,}5},\quad z_2=\frac{3\cdot 3{,}5-4}{2{,}5}=2{,}6.$$

Shunday qilib kesmaning uchi B(10; 0; 2,6) nuqta bo'lar ekan.

7-misol. A(3;9;-7) va B(-5; 3; -1) nuqtalar berilgan. AB kesmaning o'rtasi C nuqtani toping.

Yechish. C nuqtaning koordinatalarini x, y, z orqali belgilasak ular (6.10) formulalar yordamida aniqlanadi. $x=\frac{3-5}{2}=-1$,

$$y=\frac{9+3}{2}=6,\quad z=\frac{-7-1}{2}=-4.$$

Demak C(-1;6;4) nuqta AB kesmaning o'rtasi ekan.

Mustaqil yechish uchun mashqlar va test savollari

1. Boshi $A(3;2;-1)$ oxiri $B(2;-4;3)$ nuqtada bo'lgan $\overrightarrow{AB}$ vektorning koordinata o'qlariga proeksiyalari hamda tashkil etuvchilari topilsin.

Javob: $pr_{0x}\overrightarrow{AB}=-1$, $pr_{0y}\overrightarrow{AB}=-6$, $pr_{0z}\overrightarrow{AB}=4$, $-\vec{i}$, $-6\vec{j}$, $4\vec{k}$ - tashkil etuvchilar.

2. $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{b}=-\vec{j}+\vec{k}$ bo'lsa $\vec{a}\pm\vec{b}$ topilsin.

Javob: $\vec{a}+\vec{b}=\{2,-2,4\}, \vec{a}-\vec{b}=\{2,0,2\}$.

3. $\vec{a}=\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$ bo'lsa $5\vec{a}$ topilsin. *Javob:* $5\vec{a}=\{5;-10;15\}$.

4. $\vec{a}=-2\vec{i}+3\vec{j}-6\vec{k}$ vektorning uzunligi topilsin. Javob: $|\vec{a}|=7$.

5. Boshi $A(5;7;9)$ oxiri $B(2;4;3)$ nuqtalarda bo'lgan vektorning uzunligi topilsin?

Javob: $|\overrightarrow{AB}|=3\sqrt{6}$.

6. $A(5;-3;2)$ va $B(2;1;2)$ nuqtalar orasidagi masofa topilsin. *Javob:* $AB=5$ uz birl.

7. $A(3;-2;1)$ va $B(4;5;-3)$ nuqtalar berilgan. AB kesmani 2:3 nisbatda bo'luvchi nuqta topilsin. Javob: $C\,(3{,}4;\ 0{,}8;-0{,}2)$.

8. Uchlari $A(2;1)$, $B(-2;3)$ va $C(0;3)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchak medianalarining uzunligi topilsin.

Javob: $\sqrt{13}$; $\sqrt{10}$; 1.

9. AB kesma C nuqta yordamida 3:2 nisbatda bo'linadi $A(-3;5;7)$ va $C(2;3;4)$ nuqtalar ma'lum bo'lsa, B nuqta topilsin.

Javob: $B\left(5\frac{1}{3};1\frac{2}{3};1\right)$.

10. $A(-3;2;0)$ va $B(5;4;-2)$ nuqtalar berilgan. AB kesmani o'rtasi C nuqta topilsin.

Javob: $C(1;3;-1)$.

11. $\bar{a}=\{-3;2;1\}$ va $\bar{b}=\{5;-4;2\}$ vektorlar berilgan. $\bar{c}=2\bar{a}+3\bar{b}$ vektorning koordinatalari topilsin.

A) $\{9;-8;8\}$ B) $\{9;-9;7\}$ D) $\{-8;6;9\}$ E) $\{-6;4;9\}$ F) $\{3;-3;5\}$.

12. Agar $|\bar{a}|=\sqrt{166}$, $|\bar{a}+\bar{b}|=20$ va $|\bar{a}-\bar{b}|=18$ bo'lsa, $|\bar{b}|$ topilsin.

A) $7\sqrt{3}$ B) $7\sqrt{2}$ D) 14 E) 15 F) 16.

13. $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar o'zaro 60^0 li burchak tashkil etadi. Agar $|\bar{a}|=1$, $|\bar{b}|=3$ bo'lsa, $|2\bar{a}-\bar{b}|$ ni hisoblang. A) $2\sqrt{7}$ B) $\sqrt{7}$ D) 7 E) $7\sqrt{7}$ F) 6.

14. $\bar{a}=\{3;-4;12\}$ vektorga qarama-qarshi yo'nalgan birlik vektorni ko'rsating.

A) $\left\{-\frac{3}{13};\frac{4}{13};-\frac{12}{13}\right\}$ B) $\left\{\frac{3}{13};\frac{4}{13};\frac{12}{13}\right\}$ D) $\left\{\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right\}$ E) $\left\{-\frac{1}{3};\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right\}$ F) $\{0;0;-1\}$.

15. Agar $A(-5;2;8)$, $\overrightarrow{AB}=\{-3;4;1\}$ va $\overline{BD}=\{-2;4;1\}$ bo'lsa $ABCD$ parallelogrammning C uchini koordinatalarining yig'indisi topilsin.

A) 12 B) 7 D) 13 E) 16 F) 9.

16. x ning qanday qiymatlariga $\bar{a}=\{x;9;2\}$ vektorning uzunligi 11 ga teng bo'ladi.

A) $x=5$ B) $x=6$ D) $x=\pm 6$ E) $x=-6$ F) $x=8$.

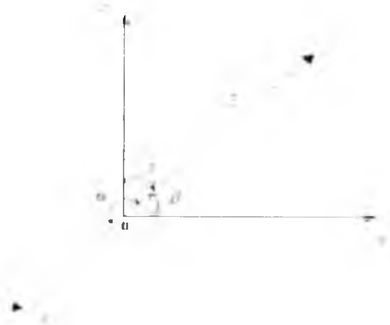
O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Skalar va vektor kattaliklar nima?
2. Vektor nima?
3. Qanday vektorlar kollinear, komplanar, teng va qarama-qarshi deb ataladi?
4. Vektorning moduli nima?
5. Vektorlar ustidagi qaysi amallar chiziqli amallar deb ataladi va ular qanday amalga oshiriladi?
6. Vektorning o‘qqa proeksiyasi nima va u qanday xossalarga ega?
7. Vektorning o‘qdagi tashkil etuvchisi nima?
8. Dekart bazisi (ort) nima?
9. Nuqtaning radius-vektori nima?
10. Vektorning koordinatalari nima?
11. Vektor ortlar orqali qanday ifodalanadi?
12. Koordinatalari yordamida berilgan vektorlar ustida chiziqli amallar qanday bajariladi?
13. Vektorning uzunligi qanday topiladi?
14. Fazodagi ikki nuqta orasidagi masofa qanday topiladi?
15. Fazoda kesmani berilgan nisbatda bo‘luvchi nuqta qanday topiladi?

7. VEKTORNING YO'NALISHI. SKALYAR KO'PAYTMA

7.1. Vektorning yo'naltiruvchi kosinuslari

Fazoda vektorning holati uni koordinata o'qlari bilan tashkil qilgan α, β, γ burchaklar orqali aniqlanadi.



30-chizma.

Bu burchaklarning kosinuslari vektorning *yo'naltiruvchi kosinuslari* deb ataladi. Vektorning o'qqa proeksiyasi uning uzunligi bilan vektor va o'q orasidagi burchak kosinusining ko'paytmasiga tengligiga asoslanib berilgan $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ vektorning yo'naltiruvchi kosinuslarini topish uchun formulalar chiqarish qiyin emas.

$a_x=|\vec{a}|\cos\alpha$, $a_y=|\vec{a}|\cos\beta$, $a_z=|\vec{a}|\cos\gamma$ munosabatlardan

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\vec{a}|},\quad \cos\beta=\frac{a_y}{|\vec{a}|},\quad \cos\gamma=\frac{a_z}{|\vec{a}|}$$

tengliklarga ega bo'lamiz. $|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$ ekanini hisobga olsak bu tengliklar

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \cos\beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \quad (7.1)$$

ko'rinishni oladi.

Vektorning yo'naltiruvchi kosinuslari orasida bog'lanish o'rnatish uchun (7.1) ning barcha tengliklarini kvadratga ko'tarib hadmahad qo'shamiz. U holda

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{a_x^2}{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} + \frac{a_y^2}{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} +$$

$$\frac{a_z^2}{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \frac{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = 1,$$

bo'ladi. Demak istalgan vektorni yo'naltiruvchi kosinuslari kvadratlarining yig'indisi birga teng ekan, ya'ni

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \qquad (7.1') .$$

1-izoh. Har qanday $\vec{a}^{\,0}$ birlik vektorni koordinata o'qlariga proeksiyalari uning yo'naltiruvchi kosinuslariga teng bo'lganligi uchun uni

$$\vec{a} = \cos\alpha \cdot \vec{i} + \cos\beta \cdot \vec{j} + \cos\gamma \cdot \vec{k}$$

ko'rinishida tasvirlash mumkin.

2-izoh. Oxy tekislikdagi vektor uchun $\gamma = 90^0$, $\alpha + \beta = 90^0$ yoki $\beta = 90^0 - \alpha$ bo'lganligi uchun (7.1') tenglik $\cos^2\alpha + \sin^2\beta = 1$ ma'lum ayniyatga aylanadi.

1-misol. $A(-2;1;3)$ va $B(0;-1;2)$ nuqtalar berilgan $\overrightarrow{AB}$ vektorning koordinata o'qlari bilan tashkil etgan burchaklarni kosinuslari topilsin?

Yechish. $\overrightarrow{AB}$ vektorning $0x$, $0y$, Oz o'qlarga proeksiyalarini topamiz:

$$pr_{0x}\,\overrightarrow{AB}=0-(-2)=2,\quad pr_{0y}\,\overrightarrow{AB}=-1-1=-2,\quad pr_{0z}\,\overrightarrow{AB}=2-3=-1.$$

(6.8) formuladan foydalanib vektorning uzunligini aniqlaymiz. $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}=3$; (7.1) formuladan foydalanib vektorning yo'naltiruvchi kosinuslarini aniqlaymiz: $\cos\alpha=\frac{2}{3}$, $\cos\beta=-\frac{2}{3}$, $\cos\gamma=-\frac{1}{3}$.

2-misol. A (2;-1;5) nuqtaga $F=11$ kuch qo'yilgan. Bu kuchning tashkil etuvchilari $x=7$, $y=6$ ekanini bilgan holda kuchning yo'nalishi hamda shu kuchni tasvirlovchi vektorning oxiri topilsin.

Yechish. Kuchning tasvirlovchi vektorning oxirini $B(x;y;z)$ orqali belgilasak shartga ko'ra $\left|\vec{a}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|=11$, $a_x=pr_{0x}\,\overrightarrow{AB}=x-2=7$, $a_y=pr_{0y}\,\overrightarrow{AB}=y+1=6$ bo'ladi. $a_x^2+a_y^2+a_z^2=\left|\vec{a}\right|^2$ munosabatdan a_z ni aniqlaymiz $7^2+6^2+a_z^2=11^2$; $a_z^2=121-85=36$; $a_z=\pm 6$. (7.1) ga ko'ra $\cos\alpha=\frac{7}{11}$, $\cos\beta=\frac{6}{11}$, $\cos\gamma=\pm\frac{6}{11}$ bo'ladi. Endi B nuqtaning koordinatalari x, y, z larni aniqlaymiz. B nuqtaning koordinatalaridan A nuqtaning mos koordinatalarini ayirsak $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ vektorning koordinatalari kelib chiqadi, ya'ni $x-2=7$, $y+1=6$, $z-5=\pm 6$.

Bundan $x=9$, $y=5$, $z_1=11$, $z_2=-1$ kelib chiqadi.

Shunday qilib berilgan kuchni tasvirlovchi vektorning oxiri B_1(9; 5;11) yoki B_2(9; 5;-1) nuqtada bo'lar ekan.

7.2. Ikki vektorning kollinearlik sharti

$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ va $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$ vektorlar kollinear bo'lsin. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ kollinear vektorlar uchun shunday λ son mavjud bo'lib $\vec{a}=\lambda\vec{b}$ munosabatning bajarilishi aytilgan edi. Bunga vektorlarni yoyilmalari orqali qiymatlarini qo'ysak

$$a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}=\lambda b_x\vec{i}+\lambda b_y\vec{j}+\lambda b_z\vec{k}$$

yoki bundan teng vektorlarning mos proeksiyalari ham teng bo'lishini hisobga olib

$$a_x=\lambda b_x,\ a_y=\lambda b_y,\ a_z=\lambda b_z \tag{7.2}$$

tengliklarga ega bo'lamiz. Demak, ikkita kollinear vektorlarning koordinatalari proporsianal bo'lar ekan.

Aksincha (7.2) shartlar bajarilganda $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear bo'ladi.

Haqiqatan, $\vec{a}$ vektor $\vec{b}$ vektorning barcha koordinatalarini λ ga ko'paytirish natijasida hosil bo'lganligi uchun uning o'zi ham $\vec{b}$ векторни шу λ songa ko'paytirish natijasida hosil bo'ladi. Demak, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear. Shunday qilib $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning kollinear bo'lishi uchun ularning koordinatalari (proeksiyalari) proporsional bo'lishi zarur va yetarli.

(7.2) tengliklar ko'pincha

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z} \tag{7.3}$$

ko'rinishda yoziladi. (7.3) ikki vektorning kollinearlik (parallellik) shartidir.

Agar vektorlardan birining koordinatalari orasida nolga teng bo'lganlari bo'lsa, vektorlarning kollinearlik shartini (7.3) ko'rinishida yozib bo'lmaydi. Bu holda kollinearlik shartini

$$a_x b_y=a_y b_x,\ a_y b_z=b_y a_z$$

ko'rinishda yozish mumkin.

3-misol. $\vec{a} = \{3;4;5\}$ va $\vec{b} = \{6;8;10\}$ vektorlar kollinearmi?

Yechish. $\vec{b} = 2\vec{a}$, ya'ni vektorlarning koordinatalari proporsional bo'lganligi uchun vektorlar kollinear.

4-misol. $\vec{a} = \{2;3;m\}$ va $\vec{b} = \{4;n;3\}$ vektorlar n,m ning qanday qiymatida kollinear bo'ladi?

Yechish. Misolda $a_x=2$, $a_y=3$, $a_z=m$, $b_x=4$, $b_y=n$, $b_z=3$.

Kollinearlik sharti (7.3) ga binoan $\frac{2}{4}=\frac{3}{n}=\frac{m}{3}$ ga ega bo'lamiz.

Bundan $\frac{3}{n}=\frac{1}{2}$, $\frac{m}{3}=\frac{1}{2}$ yoki n=6, m=$\frac{3}{2}$ kelib chiqadi. Demak berilgan vektorlar n=6, m=$\frac{3}{2}$ bo'lganda kollinear bo'lar ekan.

7.3. Skalyar ko'paytma tushinchasiga olib keluvchi ish haqidagi masala

Mexanikada $\vec{F}$ kuch ta'sirida to'g'ri chiziqli harakatlanayotgan jismni $\vec{S}$ masofaga siljitishda kuchning bajargan ishi A ni hisoblashga to'g'ri keladi.

Kuchning yo'nalishi $\vec{S}$ bilan bir xil, ya'ni ($\vec{F} \wedge \vec{S}$)=0 bo'lganda kuchning bajargan ishi shu kuchning moduli bilan o'tilgan yo'lning ko'paytmasiga teng, ya'ni A=$|\vec{F}|\cdot|\vec{S}|$ bo'ladi.

Agar jism $\vec{F}$ kuch bilan φ burchak tashkil etuvchi $\vec{S}$ yo'nalish bo'yicha harakat qilsa unga faqat $\vec{F}$ kuchning $\vec{S}$ vektor yo'nalishidagi tashkil etuvchisi F_s ta'sir etadi. Chunki bu holda $\vec{F}$ kuchning $\vec{S}$ ga perpendikulyar tashkil etuvchisi bilan qarshilik kuchi muvozanatlashadi. Vektorning vektorga proeksiyasiga binoan

$$F_x = pr_x \vec{F} = |\vec{F}| \cdot \cos\varphi$$

bo'ladi. Demak $A = |\vec{F}| \cos\varphi \cdot |\vec{S}| = |\vec{F}| \cdot |\vec{S}| \cdot \cos\varphi$.

Shunday qilib kuchning bajargan ishi A son ikkita vektorlarni uzunliklari bilan shu vektorlar orasidagi burchakni kosinusini ko'paytmasiga teng bo'ladi.

7.4. Skalyar ko'paytma

1-ta'rif. Ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorning *skalar ko'paytmasi* deb, bu vektorlar uzunliklarini ular orasidagi φ burchak kosinusiga ko'paytmasiga teng bo'lgan songa (skalyarga) aytiladi.

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi $\vec{a} \cdot \vec{b}$ kabi belgilanadi.

Demak, ta'rifga binoan

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi . \qquad (7.4)$$

$|\vec{a}| \cdot \cos\varphi = pr_{\vec{b}}\, \vec{a}$, $|\vec{b}| \cdot \cos\varphi = pr_{\vec{a}}\, |\vec{b}|$ bo'lgani uchun (7.4) formulani

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{b}| \cdot pr_{\vec{b}}\, \vec{a} \quad \text{yoki} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot pr_{\vec{a}}\, |\vec{b}| . \qquad (7.5)$$

ko'rinishida yozish mumkin. Bu formulalardan foydalanib vektorning boshqa vektor yo'nalishiga proeksiyasini ham aniqlash mumkin. Masalan

$$pr_{\vec{b}}\, \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \qquad (7.6)$$

formula orqali $\vec{a}$ vektorning $\vec{b}$ vektor yo'nalishiga proeksiyasi topiladi. Agarda $\vec{b}$ vektor birlik vektor bo'lsa $|\vec{b}| = 1$ bo'lib $pr_{\vec{b}}\, \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{b}$ bo'ladi, ya'ni vektorning birlik vektori yo'nalishiga proeksiyasi ularning skalar ko'paytmasiga teng bo'lar ekan.

Skalar ko'paytma tushinchasidan foydalanib to'g'ri chiziqli harakatda $\vec{F}$ kuchni jismni $\vec{S}$ masofaga siljitishda bajargan ishi A ni $A=\vec{F}\cdot\vec{S}$ ko'rinishida yozish mumkin.

7.5. Skalyar ko'paytmaning xossalari

1. Skalar ko'paytma o'rin almashtirish xossasiga ega ya'ni $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.

Bu xossaning to'g'riligi skalyar ko'paytma ta'rifidan bevosita kelib chiqadi.

2. Skalar ko'paytuvchini skalyar ko'paytma belgisidan chiqarish mumkin, ya'ni $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$. Bu xossaning to'g'riligi (7.5) formuladan hamda proeksiyaning xossasidan kelib chiqadi:

$$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\left|\vec{b}\right|\cdot pr_{\vec{b}}(\lambda\vec{a})=\left|\vec{b}\right|\cdot\lambda\cdot pr_{\vec{b}}=\lambda(\left|\vec{b}\right|\cdot pr_{\vec{b}})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

3. Skalyar ko'paytma vektorlarni qo'shishiga nisbatan taqsimot xossasiga ega, yani $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$.

Bu (7.5) formuladan hamda proeksiyaning xossasidan kelib chiqadi:

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot pr_{\vec{a}}(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}(pr_{\vec{a}}\vec{b}+pr_{\vec{a}}\vec{c})=$$

$$=\vec{a}\cdot pr_{\vec{a}}\vec{b}+\vec{a}\cdot pr_{\vec{a}}\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}.$$

4. Ikkita noldan farqli vektorning skalyar ko'paytmasi nol bo'lishi uchun vektorlarning perpendukulyar bo'lishi zarur va yetarli.

Isboti. $(\vec{a}\wedge\vec{b})=\dfrac{\pi}{2}$ bo'lsin. U holda $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\dfrac{\pi}{2}=$ $=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot 0=0$ kelib chiqadi. $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ bo'lsa, $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a}\wedge\vec{b})=0$

bo'lib undan $|\vec{a}| \neq 0$, $|\vec{b}| \neq 0$ bo'lganligi sababli cos($\vec{a} \wedge \vec{b}$)=0 va ($\vec{a} \wedge \vec{b}$)=$\frac{\pi}{2}$, ya'ni vektorlaning perpendikularligi kelib chiqadi.

Bu xossaga ko'ra $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{i} \cdot \vec{k} = 0$ (7.7) bo'ladi.

Endi vektorni o'zini-o'ziga skalyar ko'paytmasini topamiz:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot 1 = |\vec{a}|^2.$$

Vektorni o'zini-o'ziga skalyar ko'paytmasi vektorning *skalyar kvadrati* deyiladi va $\vec{a}^2$ kabi yoziladi. Shunday qilib vektorning skalyar kvadrati uning modulini kvadratiga teng ekan.

Bunga asosan $\vec{i} \cdot \vec{i} = |\vec{i}|^2 = 1$, $\vec{j} \cdot \vec{j} = |\vec{j}|^2 = 1$, $\vec{k} \cdot \vec{k} = |\vec{k}|^2 = 1$ bo'ladi.

5-misol $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ va $\vec{d} = \vec{a} - 2\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko'-paytmasi topilsin.

Yechish. $\vec{c} \cdot \vec{d} = (2\vec{a} + 3\vec{b})(\vec{a} - 2\vec{b}) = 2\vec{a} \cdot \vec{a} - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 3\vec{b} \cdot \vec{a} - 6\vec{b} \cdot \vec{b} =$ $= 2|\vec{a}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} - 6|\vec{b}|^2$.

6-misol. $\vec{c} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$ vektor berilgan. $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 4$ bo'lib, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak 60^0 bo'lsa, $\vec{c}$ vektorning uzunligini toping.

Yechish. $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ formuladan $\sqrt{\vec{a}^2} = |\vec{a}|$ kelib chiqadi.

Bunga asosan:

$$|\vec{c}| = \sqrt{\vec{c}^2} = \sqrt{(3\vec{a} - 2\vec{b})^2} = \sqrt{9\vec{a}^2 - 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{b}^2} =$$

$$= \sqrt{9 \cdot |\vec{a}|^2 - 12 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) + 4|\vec{b}|^2} = \sqrt{9 \cdot 5^2 - 12 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cos 60^0 + 4 \cdot 4^2} =$$

$$= \sqrt{9 \cdot 25 - 12 \cdot 20 \cdot \frac{1}{2} + 64} = \sqrt{169} = 13.$$

7.6. Skalar ko‘paytmani vektorlarning koordinalari orqali ifodalash

$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ va $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$ vektorlar berilgan bo‘lsin. Skalar ko‘paytmaning xossalari hamda (7.7) va (7.8) formulalarga asosan quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})=$$

$$=a_xb_x\vec{i}\cdot\vec{i}+a_xb_y\vec{i}\cdot\vec{j}+a_xb_z\vec{i}\cdot\vec{k}+a_yb_x\vec{j}\cdot\vec{i}+a_yb_y\vec{j}\cdot\vec{j}+a_yb_z\vec{j}\cdot\vec{k}+$$

$$+a_zb_x\vec{k}\cdot\vec{i}+a_zb_y\vec{k}\cdot\vec{j}+a_zb_z\vec{k}\cdot\vec{k}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

Shunday qilib, koordinatalari yordamida berilgan ikki vektorning skalyar ko‘paytmasi nomdosh koordinatalar ko‘paytmalari yig‘indisiga teng, ya’ni

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \qquad (7.9)$$

7-misol. $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$ va $\vec{b}=-3\vec{i}+4\vec{j}+2\vec{k}$ vektorlarning skalar ko‘paytmasi toping.

Yechish. Misolda $a_x=2$, $a_y=3$, $a_z=-1$, $b_x=-3$, $b_y=4$, $b_z=2$ bo‘lganligi sababli (7.9) formulaga binoan $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot(-3)+3\cdot4+(-1)\cdot2=4$ bo‘ladi.

8-misol. $\vec{F}=\{3;2;4\}$ kuch ta’sirida moddiy nuqta to‘g‘ri chiziq bo‘ylab harakat qilayotgan bo‘lsin. $\vec{F}$ kuchning shu moddiy nuqtani $M_1(2;-5;4)$ holatdan $M_2(7;-1;3)$ holatga ko‘chirishda bajargan ishini toping.

Yechish. $\vec{S}=\overline{M_1M_2}=\{7-2;-1+5;3-4\}=\{5;4;-1\}$ ekani ayon.

(7.9) formulaga binoan A$=\vec{F}\cdot\vec{S}=3\cdot5+2\cdot4+4\cdot(-1)=19$ ga ega bo‘lamiz.

7.7. Ikki vektor orasidagi burchak

Ikki vektorning skalyar ko'paytmasi $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a}\wedge\vec{b})$

dan $\cos(\vec{a}\wedge\vec{b})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$ ni topamiz.

Agar vektorlar $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$ yoyilmari yordamida berilgan bo'lsa, u holda (7.9) dan hamda vektorni uzunligini topish formulasi (6.6) dan foydalanib vektorlar orasidagi burchakning kosinusini topish uchun

$$\cos(\vec{a}\wedge\vec{b})=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}} \qquad (7.10)$$

formulani hosil qilamiz.

8-misol. $\vec{a}=\vec{i}-\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$ vektorlar orasidagi burchak topilsin.

Yechish. (7.10) formulaga asosan

$$\cos(\vec{a}\wedge\vec{b})=\frac{1\cdot1+0\cdot2+(-1)\cdot(-2)}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=\frac{3}{3\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$(\vec{a}\wedge\vec{b})=45^0$ bo'ladi.

9-misol. Uchlari A(2;-1;3), B(1;1;1) va C(0; 0; 5) nuqtalarda bo'lgan uchburchakning burchaklarini toping.

Yechish. Boshi va oxiri berilgan vektorning koordinatalarini topish formulasi (6.7) ga ko'ra quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$\overrightarrow{AB}=\{1-2;1+1;1-3\}=\{-1;2;-2\},$$

$$\overrightarrow{AC}=\{0-2;0+1;5-3\}=\{-2;1;2\},\ \overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}=\{1;-2;2\},$$

$$\overrightarrow{BC}=\{0-1;0-1;5-1\}=\{-1;-1;4\}.$$

Ikki vektor orasidagi burchakni topish formulasi (7.10) ga asosan:

$$\cos\angle A=\cos(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})=\frac{1\cdot(-1)+(-2)\cdot(-1)+2\cdot 4}{\sqrt{(-1)^2+2^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+1^2+2^2}}=0,$$

bundan $\angle A=90^0$,

$$\cos\angle B=\cos(\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{BC})=$$

$$=\frac{1\cdot(-1)+(-2)\cdot(-1)+2\cdot 4}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+4^2}}=\frac{9}{3\cdot\sqrt{18}}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

bundan $\angle B=45^0$.

$\angle A+\angle B+\angle C=180^0$ dan $\angle C=45^0$ kelib chiqadi.

Demak qaralayotgan uchburchak teng yonli to'g'ri burchakli uchburchak ekan.

7.8. Ikki vektorning perpendikulyarlik sharti

Skalyar ko'paytmani 4-xossasiga ko'ra $\vec{a}$ va $\vec{b}$ (nolmas) vector-lar perpendikulyar bo'lishi uchun $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ shartning bajarilishi zarur va yetarli edi. Bundan (7.9) formulaga asosan

$$a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z=0 \qquad (7.11)$$

ikki vektorning perpendikulyarlik shartini hosil qilamiz. Shunday qilib ikkita noldan farqli vektorlar o'zaro perpendikulyar bo'lishi uchun ularni nomdosh koordinatalari ko'paytmalarining yig'indisi nolga teng bo'lishi zarur va yetarli ekan.

10-misol. $\vec{a}=\{2;-3;-1\}$ va $\vec{b}=\{4;2;m\}$ vektorlar m ning qanday qiymatlarida perpendikulyar bo'ladi.

Yechish. Perpendikulyarlik sharti (7.11) ga asosan 2·4+(-3) ·2+(-1) · m=0.

Bundan 2-m=0, m=2. Demak vektorlar m=2 da perpendikular bo'lar ekan.

11-misol. $\vec{a}=\vec{i}+6\vec{j}-4\vec{k}$ va $\vec{b}=-2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ vektorlar perpendikulyarmi?

Yechish. $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot(-2)+6\cdot1+(-4)\cdot1=6-6=0$. Demak $\vec{a}\perp\vec{b}$.

1-izoh. Ikki vektorning skalyar ko'paytmasi son bo'lganligi sababli uch va undan ortiq vektorlarning skalyar ko'paytmalari haqida so'z bo'lishi mumkin emas.

2-izoh. Oxy tekislikdagi vektor uchun $\vec{a}=\{a_x, a_y\}$ vektor $Oxyz$ fazoda $\vec{a}=\{a_x, a_y, 0\}$ kabi tasvirlanganligi sababli chiqarilgan formulalarda vektorning applikatasi nolga teng $(a_z=0, b_z=0)$ deb olinsa, o'sha formulaning tekislikdagi vektorlar uchun xususiy ko'rinishi hosil bo'ladi.

Mustaqil yechish uchun masqlar va test savollari

1. $\vec{a}=2\vec{i}-6\vec{j}+3\vec{k}$ vektorning yo'naltiruvchi kosinuslari topilsin.

Javob: $\cos\alpha=\frac{2}{7}$, $\cos\beta=-\frac{6}{7}$, $\cos\gamma=\frac{3}{7}$.

2. Ox va Oy o'qlar bilan 30^0 va 60^0 burchak tashkil etuvchi vektor oz o'q bilan qancha burchak tashkil etadi?
Javob: $\gamma=90^0$.

3. Nuqtaga koordinata o'qlaridagi proeksiyalari $x_1=1$, $y_1=2$, $z_1=3$; $x_2=-2$, $y_2=3$, $z_2=-4$; $x_3=3$, $y_3=-4$, $z_3=5$ bo'lgan kuchlar ta'sir etadi. Shu kuchlarni teng ta'sir etuvchisi topilsin (moduli va yo'nalishi).

Javob: $|\vec{a}|=\sqrt{21}$, $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{21}}$, $\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{21}}$, $\cos\gamma=\frac{4}{\sqrt{21}}$.

4. $\vec{a}=3\vec{i}+m\vec{j}-2\vec{k}$ va $\vec{b}=6\vec{i}+4\vec{j}+n\vec{k}$ vektorlar m va n ning qanday qiymatlarda kollinear (parallel) bo'ladi. Javob: $m=2$, $n=-4$.

5. $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k}$ va $\vec{b}=-\vec{j}+2\vec{k}$ vektorlarning skalar ko'paytmasi topilsin. *Javob:* -11.

6. $\vec{a}\{3;2;1\}$ va $\vec{b}\{2;-3;0\}$ vektorlar perpendikulyarmi? *Javob:* ha.

7. Moddiy nuqta $\vec{F}=\{5;2;1\}$ kuch ta'sirida to'gri chiziqli harakat qiladi. Shu kuchning moddiy nuqtani koordinatalar boshidan $M(2;1;4)$ nuqtaga ko'chirishda bajargan ishi topilsin. Javob: $A=16$.

8. Parallelogrammning uchlari $A(1;-2;2)$, $B(1;4;0)$, $C=(-4;1;1)$ va $D(-5;-5;3)$ nuqtalar berilgan. Uning AC va BD diagonallari perpendikulyar ekanligi isbotlansin.

9. $\vec{a}=\vec{i}+\vec{k}$ va $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$ vektorlar orasidagi burchak topilsin. *Javob:* $(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b})=45^0$.

10. $\vec{c}=\vec{a}-2\vec{b}$, $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$ hamda $(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b})=60^0$ bo'lsa $\vec{c}$ vektorning uzunligi topilsin. *Javob:* $|\vec{c}|=7$.

11. Uchlari $A(2;-1;3)$, $B(1;1;1)$ va $C(0;0;5)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchakning burchaklari hamda perimetri topilsin.

Javob $\angle A=90^0$, $\angle B=\angle C=45^0$, $p=3(2+\sqrt{2})$.

12. $\vec{a}=\{1;2;-1;\}$ va $\vec{b}=\{2;2;0;\}$ vektorlar berilgan. $\vec{c}=\{x;y;-6;\}$ vektor $2\vec{b}-3\vec{a}$ vektorga kollinear bo'lsa $|\vec{c}|$ ni toping.

A) $2\sqrt{14}$ B) $3\sqrt{14}$ D) 11 E) 9 F) 14.

13. $\vec{a}=\{3;x\}$, $\vec{b}=\{-6;4\}$ bo'lsa, x ning qanday qiymatida $\vec{a}+\vec{b}$ vektor $\vec{b}$ vektorga perpendikulyar bo'ladi?

A) $-8{,}5$ B) 8,5 D) 9 E) 10 F) -9.

14. Agar $\vec{a}=\{2;m\}$ va $\vec{b}=\{3;n\}$ bo'lsa, m va n ning qanday natural qiymatlarida $\vec{a}+\vec{b}$ va $\vec{a}-\vec{b}$ vektorlar o'zaro perpendikulyar bo'ladi ?

A) 3;2 B) 1;6 D) 2;3 E) 6;1 F) 3;3.

15. x ning qanday qiymatlarida $\vec{a}=\{8;4;5x\}$ va $\vec{b}=\{2x;-25;1\}$ vektorlar o'zaro perpendikulyar bo'ladi.

A) 3 B) 4 D) 5 E) -4 F) 6.

16. $\vec{a}\{3;2;1\}$ va $\vec{b}\{-2;5;3\}$ vektorlar berilgan.

$\bar{c} = 3\bar{a} - 4\bar{b}$ vektorning koordinatalarini toping.

A) $\{-14;6;9\}$ B) $\{17;14;-9\}$ D) $\{17;-14;9\}$ E) $\{17;-14;-9\}$ F) $\{14;-6;-9\}$.

17. x ning qanday qiymatlarida $\vec{a} = \{3,3,5\}$ va $\vec{b} = \{-2;4;x\}$ vektorlar parallel bo'ladi?

A) barcha qiymatlarida B) hech bir qiymatida D) 6 E) 8 F) 12.

18. x ning qanday qiymatlarida $\bar{a} = \{x;x;2\}$ va $\bar{b} = \{x;1;-3\}$ vektorlar o'zaro perpendikulyar bo'ladi?

A) 2 va -3 B) 2 va 3 D) -2 va 3 E) -2 va -3 F) 3 va 4.

19. $\bar{a} = \{7;3\}$ va $\bar{b} = \{-4;-10\}$ vektorlar orasidagi burchakni toping.

A) 135^0 B) 45^0 D) 60^0 E) 30^0 F) 150^0.

20. Agar $2\bar{c} - 4\bar{b}$ va $4\bar{b} + 5\bar{c}$ vektorlar o'zaro perpendikular bo'lsa, $\bar{b}$ va $\bar{c}$ birlik vektorlar orasidagi burchakni toping.

A) 90^0 B) 120^0 D) 60^0 E) 30^0 F) 45^0.

21. Agar $\bar{a}$ va $\bar{b}$ 120^0 li burchak tashkil etuvchi birlik vektorlar bo'lsa, $\bar{a} + 2\bar{b}$ va $\bar{a} - \bar{b}$ vektorlar orasidagi burchakni toping.

A) 135^0 B) 90^0 D) 150^0 E) 30^0 F) 120^0.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Vektorning yo'naltiruvchi kosinuslari nima va ular qanday topiladi ?
2. Vektorlarning kollinearlik shartini yozing.
3. Ikki vektorning skalyar ko'paytmasi deb nimaga aytiladi ?
4. Skalyar ko'paytma qanday xossalarga ega ?
5. Skalyar ko'paytma qanday topiladi ?
6. Vektorlar orasidagi burchak qanday topiladi ?
7. Ikki vektorning perpendikularlik sharti nimadan iborat?
8. Skalyar ko'paytmaning fizik ma'nosi nima ?
9. Kollinear vektorlarning skalyar ko'paytmasi nimaga teng?
10. Vektorning skalyar kvadrati nima?

8. VEKTORLARNING VEKTOR VA ARALASH KO‘PAYTMASI

8.1. Ikki vektorning vektor ko‘paytmasi

1-ta’rif. $\vec{a}$ vektorning $\vec{b}$ vektorga **vektor ko‘paytmasi** deb quyidagi shartlarni qanoatlantiradigan $\vec{c}$ vektorga aytiladi:

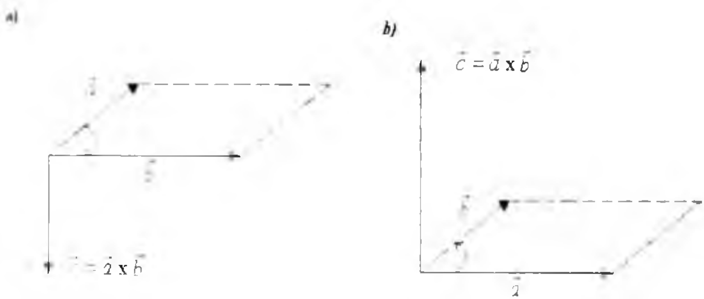
a) $\vec{c}$ vektor $\vec{a}$ va $\vec{b}$ ko‘paytuvchi vektorlarning har ikkalasiga perpendikulyar;

b) $\vec{c}$ vektorning uchidan qaraganda $\vec{a}$ vektordan $\vec{b}$ vektorga eng qisqa burilish masofasi soat mili aylanishiga teskari yo‘nalishda ko‘rinadi;

d) $\vec{c}$ vektorning uzunligi $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlardan yasalgan parallelogrammning yuziga teng, ya’ni

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right). \qquad (8.1)$$

$\vec{a}$ vektorning $\vec{b}$ vektorga vektor ko‘paytmasi $\vec{a} \times \vec{b}$ kabi belgilanadi (31-chizma).



31-chizma.

8.2. Vektor ko'paytmaning xossalari

1.Ko'paytuvchilarning o'rinlarini almashtirish natijasida vektor ko'paytmaning ishorasi o'zgaradi, ya'ni $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$. Bu xossaning to'g'riligi vektor ko'paytmaning ta'rifidan bevosita kelib chiqadi.

2. Sonli ko'paytuvchini vektor ko'paytma belgidan chiqarish mumkin, ya'ni $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})=\lambda\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$, ($\lambda$ = const).

3. Vektor ko'paytma qo'shishga nisbatan taqsimot xossasiga ega, ya'ni

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c},\quad (\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}.$$

4. Vektor ko'paytma ko'paytuvchi vektorlardan biri nol vektor bo'lganda yoki vektorlar kollinear bo'lgandagina nolga teng bo'ladi.

Bu xossadan istalgan vektorning o'zini-o'ziga vektor ko'paytmasi nol vektorga tengligi, ya'ni $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$ ekani kelib chiqadi. Jumladan dekart bazisi $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ uchun $\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}$ ga ega bo'lamiz.

1-misol. $(3\vec{a}-2\vec{b})\times(4\vec{a}+3\vec{b})$ni toping.

Yechish. $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$, $\vec{b}\times\vec{b}=\vec{0}$, $\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}$ ekanini hisobga olib quyidagiga ega bo'lamiz.

$(3\vec{a}-2\vec{b})\times(4\vec{a}+3\vec{b})=12(\vec{a}\times\vec{a})+9(\vec{a}\times\vec{b})-8(\vec{b}\times\vec{a})-6(\vec{b}\times\vec{b})=$
$=12\cdot0+9(\vec{a}\times\vec{b})+8(\vec{a}\times\vec{b})-6\cdot0=17(\vec{a}\times\vec{b})$.

2-misol. $(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})=2(\vec{a}\times\vec{b})$ tenglikni isbotlanib, uning geometrik ma'nosini izohlang.

Yechish. $(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}\times\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b}-\vec{b}\times\vec{a}-\vec{b}\times\vec{b}=0+\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{b}-0=2(\vec{a}\times\vec{b})$.

$\vec{a}-\vec{b}$ va $\vec{a}+\vec{b}$ tomonlari $\vec{a}$ va $\vec{b}$ bo'lgan parallelogrammning diagonallarini ifodalaydi. $|(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})|$ ifoda tomonlari berilgan parallelogrammning diagonallaridan iborat parallelogrammning yuzini, $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$ esa tomonlari $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlardan iborat parallelogrammning yuzini ifodalaydi.

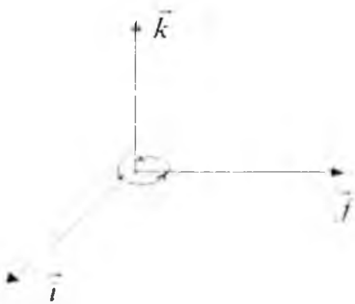
Shunday qilib isbotlangan tenglik, tomonlari $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vector-lardan iborat parallelogramm yuzining ikkilangani tomonlari shu parallelogrammning diagonallaridan iborat parallelogrammning yuziga tengligini bildiradi.

8.3. Vektor ko'paytmani topish

$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ va $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$ vektorlar berilgan bo'lsin. Shu vektorlarning vektor ko'paytmasini ularning koordi-natalaridan foydalanib topiladigan formula chiqaramiz.

$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ vektorni vektor ko'paytmalarini hisoblaymiz. $\vec{i}\times\vec{j}$ vektor ko'paytmani qaraymiz. Bu ko'paytmaning moduli $\left|\vec{i}\times\vec{j}\right|=\left|\vec{i}\right|\cdot\left|\vec{j}\right|\cdot\sin\frac{\pi}{2}=1\cdot1\cdot1=1.$

$\vec{i}\times\vec{j}$ vektor $\vec{i}$ va $\vec{j}$ vektorning har biriga perpendikular bo'lgani uchun u Oz o'qda joylashgan va u bilan bir xil yo'nalgan.



32-chizma.

Chunki uning uchidan qaragandan $\vec{i}$ dan $\vec{j}$ ga qisqa burilish masofasi soat mili aylanishi yo'nalishiga teskari ko'rinadi.

Demak, $\vec{i}\times\vec{j}$ vektor $\vec{k}$ vektorning o'ziga teng ekan, ya'ni $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$. Shuningdek $\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$, $\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$, $\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}$, $\vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}$, $\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}$ tengliklarga ega bo'lamiz. Ushbu tengliklardan hamda $\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0$ dan va vector ko'paytmaning xossalaridan foydalanib quyidagiga ega bo'lamiz.

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})=a_xb_x(\vec{i}\times\vec{i})+$$
$$+a_xb_y(\vec{i}\times\vec{j})+a_xb_z(\vec{i}\times\vec{k})+a_yb_x(\vec{j}\times\vec{i})+a_yb_y(\vec{j}\times\vec{j})+$$
$$a_yb_z(\vec{j}\times\vec{k})+a_zb_x(\vec{k}\times\vec{i})++a_zb_y(\vec{k}\times\vec{j})+a_zb_z(\vec{k}\times\vec{k})=a_xb_x\cdot 0+$$
$$a_xb_y\vec{k}-a_xb_z\vec{j}-a_yb_x\vec{k}+a_yb_y\cdot 0+a_yb_z\vec{i}+a_zb_x\vec{j}-a_zb_y\vec{i}+a_zb_z\cdot 0=$$
$$=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}-(a_xb_z-a_zb_x)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}=$$

$$=\vec{i}\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

Demak $\vec{a}$ vektorning $\vec{b}$ vektorga vektor ko'paytmasi

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix} \qquad (8.2)$$

formula yordamida topilar ekan. Jumladan tomonlari $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vectorlardan iborat parallelogrammning yuzi

$$S_p=|\vec{a}\times\vec{b}|=\left|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}\right| \qquad (8.3)$$

formula yordamida va shu vektorlardan yasalgan uchburchakning yuzi esa

$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\frac{1}{2}\cdot\left|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}\right| \qquad (8.4)$$

formula yordamida topiladi.

3-misol. $\vec{a}=-4\vec{i}+3\vec{k}$ va $\vec{b}=3\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$ vektorlarning vektor ko'paytmasini toping.

Yechish. (8.2) formulaga asosan:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -4 & 0 & 3\\ 3 & 1 & -2\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}0 & 3\\ 1 & -2\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}-4 & 3\\ 3 & -2\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}-4 & 0\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-3\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}.$$

4-misol. Tomonlari $\vec{a}=\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$ vektorlardan iborat parallelogrammning yuzini toping.

Yechish. (8.2) formulaga binoan:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -3 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-3 & 1\\ -1 & 3\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}1 & -3\\ 2 & -1\end{vmatrix}=$$

$$=(-9+1)\vec{i}-(3-2)\vec{j}+(-1+6)\vec{k}=-8\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k}.$$

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{(-8)^2+(-1)^2+5^2}=\sqrt{90}=3\cdot\sqrt{10}$$

(8.3) ga asosan $S_p=3\cdot\sqrt{10}$ kv. birlik bo'ladi.

5-misol. Uchlari $A(3;\ 4;-1)$, $B(2;\ 0;\ 3)$ va $C(-3;\ 5;\ 4)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchakning yuzini toping.

Yechish. $\overrightarrow{AB}=\{2-3;\ 0-4;\ 3+1\}=\{-1;\ -4;\ 4\}$, $\overrightarrow{AC}=\{-3-3;\ 5-4;\ 4+1\}=\{-6;\ 1;\ 5\}$.

(8.2) formulaga ko'ra:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -4 & 4 \\ -6 & 1 & 5 \end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -6 & 5 \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} -1 & -4 \\ -6 & 1 \end{vmatrix}$$

$=\vec{i}\,(-20-4)-\vec{j}\,(-5+24)+\vec{k}\,(-1-24)==-24\vec{i}+19\vec{j}-25\vec{k}$.

$S_\Delta=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\dfrac{1}{2}\sqrt{(-24)^2+19^2+25^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{1562}$. Demak,

$S_\Delta=\dfrac{1}{2}\sqrt{1562}$ kv. birlik.

6-misol. Uchlari $A(1;\ 2;\ 3)$, $B(3;\ 4;\ 5)$ va $C(2;\ 4;\ 7)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchak A burchagining sinusini toping.

Yechish. $S_\Delta=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\sin A$ tenglikdan

$$\sin A=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|} \qquad (8.5)$$

formulaga ega bo'lamiz.

$\overrightarrow{AB}=\{3-1;\ 4-2;\ 5-3\}=\{2;\ 2;\ 2\}$, $\overrightarrow{AC}=\{2-1;\ 4-2;\ 7-3\}=\{1;\ 2;\ 4\}$,

$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{2^2+2^2+2^2}=2\sqrt{3}$, $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{1^2+2^2+4^2}=\sqrt{21}$.

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=4\vec{i}-$$

$$6\vec{j}+2\vec{k},\ \left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{4^2+(-6)^2+2^2}=\sqrt{56}$$

tengliklarga egamiz. (8.5) formulaga ko'ra

$$\sin A=\frac{\sqrt{56}}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{21}}=\frac{\sqrt{4\cdot 2\cdot 7}}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3\cdot 7}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$ bo'ladi.

$BC^2<AB^2+AC^2$ bo'lganda A burchak o'tkir, $BC^2>AB^2+AC^2$ bo'lganda u o'tmas burchak bo'ladi.

8.4. Uch vektorning aralash ko'paytmasi

$\vec{a}, \vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar berilgan bo'lsin.

2-ta'rif. $\vec{a}$ vektorning $\vec{b}$ vektorga vektor ko'paytmasi $\vec{a}\times\vec{b}$ ni uchinchi $\vec{c}$ vektorga skalyar ko'paytirish natijasida hosil bo'lgan son $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlarning aralash ko'paytmasi deyiladi. Vektorlar $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$, $\vec{c}=c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k}$ yoyilmalari yordamida berilganda ularning aralash ko'paytmasi $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ ni topish uchun formula chiqaramiz.

$$(\vec{a}\times\vec{b})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\vec{k}$$

vektorni skalyar ko'paytmani topish formulasi (7.9) ga asoslanib, $\vec{c}=c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k}$ vektorga skalyar ko'paytiramiz. U holda

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\cdot c_x-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\cdot c_y+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\cdot c_z$$

kelib chiqadi. Bu tenglikning o'ng tomonidagi ifoda

$$\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$$

determinantning uchinchi satr elementlari bo'yicha yoyilmasi ekanini ko'rish qiyin emas. Demak

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \qquad (8.6)$$

Shunday qilib, uch vektorning aralash ko'paytmasi uchinchi tartibli determinantga teng bo'lib uning birinchi satrini birinchi ko'paytuvchi vektorning koordinatalari, ikkinchi va uchinchi satrlarini ikkinchi va uchinchi ko'paytuvchi vektorlarning koordinatalari tashkil etadi.

7-misol. $\vec{a}=3\vec{i}+4\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{i}+5\vec{j}-\vec{k}$ va $\vec{c}=2\vec{i}+3\vec{j}+5\vec{k}$ vektorlarning aralash ko'paytmasi topilsin .

Yechish. (8.6) formulaga asosan:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}-4\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=$$

$$=3(25+3)-4(15+2)+2(9-10)=14.$$

8.5. Aralash ko'paytmaning geometrik ma'nosi

Boshlari bitta nuqtada bo'lgan $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ nokomplanar vektorlarni qaraymiz. Bu vektorlarni qirra deb parallelepiped yasaymiz. Uzinligi $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga yasalgan parallelogrammning yuzi Q ga teng bo'lgan $\vec{d}=\vec{a}\times\vec{b}$ vektorni yasaymiz. Skalyar ko'paytmaning ta'rifiga binoan:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\cdot|\vec{c}|\cdot\cos\left(\vec{d}\wedge\vec{c}\right)=Q\left|\vec{c}\right|\cdot\cos\left(\vec{d}\wedge\vec{c}\right).$$

$\left(\vec{d}\wedge\vec{c}\right)<\dfrac{\pi}{2}$ deb faraz qilamiz. U holda parallelepipedning balandligini h orqali belgilasak $h=|\vec{c}|\cdot\cos\left(\vec{d}\wedge\vec{c}\right)$ kelib chiqadi. Shunday qilib aralash ko'paytma $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=Q\cdot h$ bo'ladi.

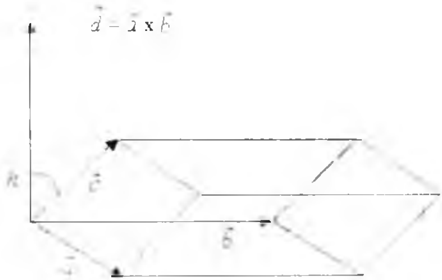
Parallelepipedning hajmini V deb belgilasak u asosining yuzi Q bilan balandligi h ning ko'paytmasiga teng, ya'ni $V=Q\cdot h$ bo'ladi.

Shunday qilib bu holda uch vektorning aralash ko'paytmasi qirralari shu vektorlardan iborat parallelepipedning hajmiga teng, ya'ni $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=V$ bo'lar ekan.

Agar $(\vec{d}\wedge\vec{c})>\frac{\pi}{2}$ bo'lsa, $\cos(\vec{d}\wedge\vec{c})<0$, $|\vec{c}|\cos(\vec{d}\wedge\vec{c})=-h$ bo'lib $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=-V$ bo'ladi. Har ikkala holni birlashtirib $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\pm V$ yoki $V=\left|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\right|$ formulaga ega bo'lamiz.

Shunday qilib, uch vektorni aralash ko'paytmasini absolyut qiymati shu vektorlarni qirra deb ulardan yasalgan parallelepipedning hajmiga teng ekan.

Bu aralash ko'paytmaning geometrik ma'nosidir.



33-chizma.

Demak qirralari $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlardan iborat parallelepipedning hajmi

$$V_{par}=\left|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\right| \qquad (8.7)$$

formula yordamida topiladi.

Endi qirralari $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlardan iborat uchburchakli piramidaning hajmini topamiz.

Bu holda piramidaning hajmi qirralari, xuddi shunday parallelepipedning hajmining oltidan biriga teng ekani elemintar geometriyadan malum.

Shunday qilib,

$$V_{pir}=\frac{1}{6}\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right| \tag{8.8}$$

piramidani hajmini topish formulasini hosil qilamiz.

8-misol. Uchlari $A(0;\ 0;\ 0)$, $B(3;4;-1)$, $C(2;3;5)$, $D(6;0;-3)$ nuqtalarida bo'lgan uchburchakli piramidaning hajmini toping.

Yechish: Qaralayotgan hol uchun (8.8) formula $V_{pir}=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}\right|$ ko'rinishiga ega. $\overrightarrow{AB}=\{3;4;-1\}$, $\overrightarrow{AC}=\{2;3;5\}$, $\overrightarrow{AD}=\{6;0;-3\}$ bo'lgani uchun

$$\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}\right)\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}3 & 4 & -1\\ 2 & 3 & 5\\ 6 & 0 & -3\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}3 & 5\\ 0 & -3\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}2 & 5\\ 6 & -3\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}2 & 3\\ 6 & 0\end{vmatrix}$$

$=3\cdot(-9)-4(-6-30)+18=135$ va $V=\frac{1}{6}\left|135\right|=22{,}5$ kelib chiqadi.

8.6. Uch vektorning komplanarlik sharti

Uchta komplanar noldan farqli $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlarni qaraymiz. Soddalik uchun bu vektorlar bir tekistlikda yotadi deb faraz qilamiz. Bu vektorlarning aralash ko'paytmasi $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ ni tuzamiz. $\vec{a}\times\vec{b}$ vektor ko'paytma $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning har biriga perpendikulyar bo'lgani uchun u ular yotgan tekistlikka ham, jumladan $\vec{c}$ vektorga ham perpendikulyar bo'ladi. Perpendikulyar vektorlarning skalyar ko'paytmasi nolga tengligidan $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0$ kelib chiqadi. Demak, komplanar vektorlarning aralash ko'paytmasi nolga teng ekan. Tesqarisi ham o'rinli, yani aralash ko'paytmasi nolga teng vektorlar komplanar bo'ladi.

Haqiqatan, vektorlar nokomplanar bo'lsa vektorlarni qirra deb parallelepiped yasash mumkin bo'lib uning hajmi $V \neq 0$ bo'ladi. Ammo $V=\left|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\right|$ bo'lgani uchun $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\neq 0$ bo'ladi. Bu shartga zid.

Shunday qilib uchta $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ (noldan farqli) vektorlarning komplanar bo'lishi uchun ularning aralash ko'paytmasi nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0 \quad \text{yoki} \quad \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0 \qquad (8.9)$$

uch vektorning komplanarlik shartidir .

9-misol. $\vec{a}=\{3;4;5\}$, $\vec{b}=\{1;2;2\}$, $\vec{c}=\{9;14;16\}$ vektorning komplanarligini ko'rsating.

Yechish.

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 9 & 14 & 16 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 14 & 16 \end{vmatrix}-4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 16 \end{vmatrix}+5\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 14 \end{vmatrix}=3\cdot 4-4\cdot(-2)+5\cdot(-4)=0.$$

Komplanarlik sharti (8.9) bajarilganligi uchun vektorlar komplanar.

10-misol. $A(1;0;1)$, $B(4;4;6)$, $C(2;2;3)$ va $D(10;14;17)$ nuqtalar bitta tekislikda yotadimi?

Yechish. $\overrightarrow{AB}=\{4-1;\ 4-0;\ 6-1\}=\{3;4;5\}$, $\overrightarrow{AC}=\{2-1;\ 2-0;\ 3-1\}=$ $=\{1;2;2\}$, $\overrightarrow{AD}=\{10-1;\ 14-0;\ 17-1\}=\{9;\ 14;\ 16\}$ vektorlarni qaraymiz. Ularning aralash ko'paytmasini hisoblaymiz:

$$\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}3&4&5\\1&2&2\\9&14&16\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}2&2\\14&16\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}1&2\\9&16\end{vmatrix}+5\begin{vmatrix}1&2\\9&14\end{vmatrix}=3\cdot4-$$

$-4(-2)-5\cdot4=0.$

Vektorlarning aralash ko'paytmasi nolga teng, ular komplanar va A, B, C, D nuqtalar bir tekistlikta yotadi.

Izoh. 1. Biz kerakli formulalarni faqatgina fazodagi vektorlar uchun chiqardik. Ammo keltirilgan formulalar tekistlikdagi vektorlar uchun ham yaroqli. Formulalardagi vektorlarning uchinchi koordinata (applikata)lari nol deb olinsa formulalar tekistlikdagi vektorlar uchun o'rinli bo'ladi. Masalan tekistlikda vektorlar $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}$, $\vec{b}_x=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}$ ($\vec{i}, \vec{j}$ -dekart bazisi) kabi yoyilmaga ega bo'lsa ularning vektor ko'paytmasi $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_x&a_y&0\\b_x&b_y&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_x&a_y\\b_x&b_y\end{vmatrix}\cdot\vec{k}$ bo'ladi.

2. Biz erkin vektorlar bilan ish ko'rganimiz uchun ko'p hollarda qaralayotgan vektorlarning boshi bir nuqtada deb faraz qildik.

Mustaqil yechish uchun mashqlar va test savollari

1. $(2\vec{a}+3\vec{b})\times(\vec{a}-5\vec{b})$ topilsin.

Javob: $-13(\vec{a}\times\vec{b})$.

2. $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}+5\vec{j}$ vektorlarning vektor ko'paytmasi topilsin.

Javob: $\vec{a}\times\vec{b}=-5\vec{i}+2\vec{j}+17\vec{k}$.

3.Uchlari $A(3;4;5)$, $B(2;1;1)$ va $C(0;2;3)$ nuqtalarda bo‘lgan uchburchakning yuzi topilsin.

Javob: $\frac{1}{2}\sqrt{153}$ kv. b.

4. $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+\vec{k}$ va $\vec{c}=\vec{j}+\vec{k}$ vektorlarning aralash ko‘paytmasi topilsin.

Javob: $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=-6$.

5. Uchlari $O(0;0;0)$, $A(5;2;0)$, $B(2;5;0)$ va $C(1;2;4)$ nuqtalarda bo‘lgan piramidaning hajmi, ABC yoyining yuzi hamda shu yoqqa o‘tkazilgan balandlik topilsin.

Javob: V=14 kub. bir. $H=\frac{7\sqrt{3}}{3}$, $S_{\Delta ABC}=6\sqrt{3}$.

6. Tomonlari $\vec{a}=\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$ vektorlardan iborat parallelogrammning balandliklari topilsin.

Javob: $h_a=\frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{11}}$, $h_b=\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$.

7. $\bar{a}=\{2;3\}$ va $\bar{b}=\{3;-6\}$ vektorlardan yasalgan uchburchakning yuzi topilsin.

A) 11,5 B) 10,5 D) 60 E) 7 F) 5.

8. $\bar{a}=\{3;2-1\}$ va $\bar{b}=\{2;4;3\}$ vektorlardan yasalgan parallelogrammning yuzi topilsin.

A) $\sqrt{287}$ B) $\sqrt{189}$ D) $\sqrt{285}$ E) $\sqrt{286}$ F) 17.

9. Qirralari $\bar{a}=\{2;3-2\}$, $\bar{b}=\{5;4;-1\}$ va $\bar{c}=\{6;3;2\}$ vektorlardan iborat piramedaning hajmi topilsin.

A) $1\frac{1}{3}$ B) $1\frac{2}{3}$ D) 2 E) 3 F) 1,2.

10. $\bar{a}=\{1;5;x\}$ $\bar{b}=\{x;4;2\}$ va $\bar{c}=\{-2;9;-1\}$ vektorlar x ning qanday qiymatlarida komplanar bo‘ladi?

A) 3 B) 4 D) 2 E) -3 F) -2.

11. $A(2;-3;1)$, $B)(3;2;-2)$, $C(-1;1;3)$ va $D(0;6;0)$ nuqtalar berilgan. To'g'ri javobni toping.

A) nuqtalar bir tekislikda yotadi.

B) nuqtalar bir tekislikda yotmaydi.

D) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ vektorlardan parallelepiped yasash mumkin.

E) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ vektorlarni qirra hisoblab ulardan yasalgan piramedaning hajmi 4 kub. birlikka teng.

F) nuqtalar parallel tekisliklarga yotadi.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Ikki vektorning vektor ko'paytmasi nima?
2. Vektor ko'paytma qanday xossaga ega?
3. Vektor ko'paytmaning geometrik ma'nosi nima?
4. Vektor ko'paytma qanday topiladi?
5. Parallelogramm va uchburchakning yuzini topish formulasini yozing.
6. Uch vektorning aralash ko'paytmasi deb nimaga aytiladi?
7. Aralash ko'paytmaning geometrik ma'nosi nima?
8. Aralash ko'paytma qanday topiladi?
9. Aralash ko'paytma yordamida parallelepiped va piramidaning hajmini topish formulasini yoziing.
10. Uch vektorning komplanarlik sharti nimadan iborat?
11. To'rtta nuqtaning bir tekislikda yotish yoki yotmasligi qanday tekshiriladi?

9. TEKISLIKDAGI TO'G'RI CHIZIQ TENGLAMALARI

9.1. Analitik geometriya fani haqida qisqacha ma'lumot

Analitik geometriya fanining asoschisi fransuz matematigi va filosofi R. Dekart ekanligi aytib o'tilgan edi. Analitik geometriya– oliy matematikaning geometrik shakllarni algebraik ifoda etuvchi va algebraik ifodalarga geometrik ma'no beruvchi tarmog'i. Analitik geometriya fani geometriyaning algebra va matematik analiz fanlari bilan uzviy bog'lovchi bo'g'in hisoblanadi.

Elementar geometriya planometriya va stereometriyaga bo'linganligi kabi analitik geometriya ham ikki qismga: 1) tekislikdagi analitik geometriya; 2) fazodagi analitik geometriyaga bo'linadi.

Analitik geometriyani o'rganishni uning birinchi qismi-tekislikdagi analitik geometriyani o'rganishdan boshlaymiz.

9.2. Ikki to'gri chizq orasidagi burchak tushinchasi

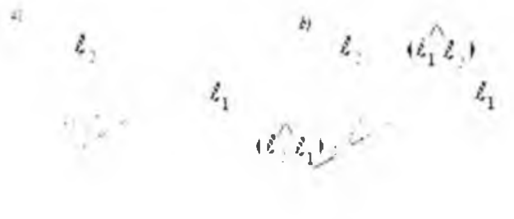
Oxy tekislikda yotgan va M nuqtada kesishuvchi l_1 va l_2 to'g'ri chiziqlarni qaraymiz.

1-ta'rif. l_1 va l_2 to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak deb l_1 ning l_2 bilan ustma-ust tushishi uchun uning M nuqta atrofida soat mili aylanishiga teskari yo'nalishida burilishi lozim bo'lgan eng kichik burchakka aytiladi. (34 *a*- chizma).

l_1 va l_2 to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak $l_1 l_2$ kabi belgilanadi.

Keltirilgan ta'rifga ko'ra l_1 va l_2 to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak l_2 va l_1 to'g'ri chiziqlar orqasidagi burchakka teng emas. Ta'rifga binoan

$\widehat{(l_1, l_2)} = \pi - \widehat{(l_2, l_1)}$ bo'ladi (34 *b*- chizma).



34- chizma.

To'g'ri chiziqlar parallel bo'lganda yoki ustma–ust tushganda ular orasidagi burchak nolga teng hisoblanadi.

Keltirilgan ta'rif to'g'rii chiziqlardan biri o'q, masalan Ox o'q bo'lganda ham o'z kuchini saqlaydi.

Demak Ox o'q bilan biror to'g'ri chiziq orasidagi burchak deganda Ox o'qni to'g'ri chiziq bilan ustma-ust tushishi uchun uni soat mili aylanishiga teskari yo'nalishda burilishi lozim bo'lgan burchak tushiniladi.

9.3. To'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi

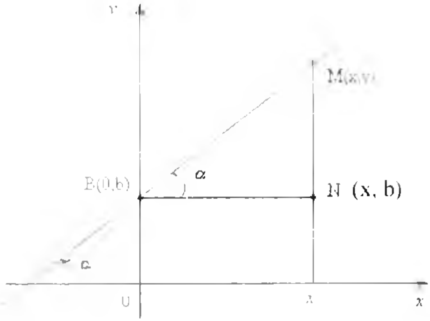
Oxy tekislikni hamda unda yotgan to'g'ri chiziqni qaraymiz. To'g'ri chiziq koordinata o'qlarining hech biriga parallel bo'lmasdan Oy o'q bilan $B(0;b)$ nuqtada kesishsin va Ox o'qning musbat yo'nalishi bilan α burchak tashkil etsin (35-chizma.) Shu to'g'ri chiziqning dekartning to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasiga nisbatan tenglamasini topamiz, ya'ni x va y dekart koordinatalarini bog'lovchi shunday tenglamani topamizki to'g'ri chiziqning barcha nuqtalarini koordinatalari shu tenglamani qanoatlantiradi, to'g'ri chiziqda yotmaydigan hech bir nuqtaning koordinatalari bu tenglamani qanoatlantirmaydi.

Faraz qilaylik $M(x;y)$ nuqta to'g'ri chiziqning B(0;b) nuqtasidan farqli istalgan nuqtasi bo'lsin. 35-chizmadagi ΔBNM dan

$\frac{MN}{BN} = tg\alpha$ yoki $MN = tg\alpha \cdot BN$ tenglikka ega bo'lamiz. $MN = y - b$, $BN = x$ ekanligini hisobga olsak $y - b = tg\alpha \cdot x$ yoki $y = tg\alpha \cdot x + b$ kelib chiqadi. $k = tg\alpha$ deb belgilasak

$$y = kx + b \qquad (9.1)$$

tenglama hosil bo'ladi.



35-chizma.

Bu tenglama berilgan to'g'ri chiziqni tenglamasi. Chunki uni to'g'ri chiziqning istalgan $B(0;b)$ nuqtadan farqli $M(x;y)$ nuqtasining koordinatalari qanoatlantirishini ko'rdik. $B(0;b)$ nuqtaning koordinatalari ham uni qanoatlantirishi ko'rinib turibdi.

To'g'ri chiziqda yotmaydigan hech bir nuqtaning koordinatalari bu tenglamani qanoatlantirmasligiga ishonch hosil qilish qiyin emas.

$k = tg\alpha$ son to'g'ri chiziqning *burchak koeffitsiyenti* deb ataladi, b esa to'g'ri chiziqning *boshlang'ich ordinatasi* deyiladi.

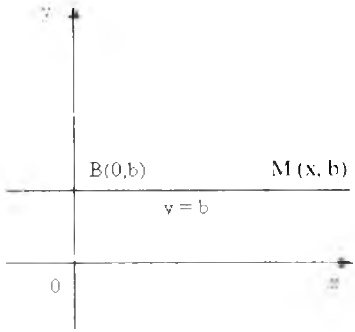
To'g'ri chiziqning (9.1) tenglamasi uning *burchak koeffitsiyentli* tenglamasi deyiladi.

Faraz qilaylik to'g'ri chiziq $0x$ o'qqa parallel bo'lsin (36-chizma).

Bu holda $\alpha = 0$, $k = tg0 = 0$ bo'lgani uchun to'g'ri chiziq tenglamasi

$$y = b \qquad (9.2)$$

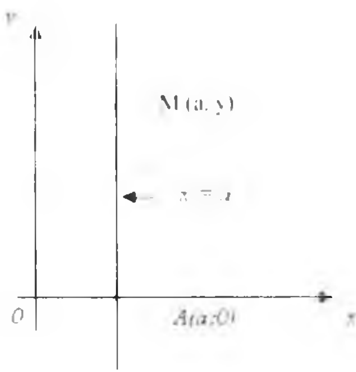
ko'rinishiga ega bo'ladi. (9.2) Ox o'qqa parallel to'g'ri chiziq tenglamasi. Xususiy holda $y=0$ Ox o'qning tenglamasi.



36-chizma.

To'g'ri chiziq koordinatalar boshidan o'tsin. U holda b=0 bo'lib koordinatalar boshidan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi $y=kx$ (9.3) hosil bo'ladi.

Faraz qilaylik to'g'ri chiziq A(a;0) nuqtadan o'tib Oy o'qqa parallel bo'lsin (37-chizma).



37-chizma.

Bu holda to'g'ri chiziq Ox o'q bilan 90^0 burchak tashkil etib $k=tg90^0$ mavjud bo'lmaganligi uchun uning tenglamasini (9.1) ko'rinishda yozib bo'lmaydi. To'g'ri chiziqning barcha nuqtalari a abssissaga ega bo'lganligi uchun uning tenglamasi

$$x = a \tag{9.4}$$

ko'rinishga ega bo'ladi, xususiy holda $x=0$ Oy o'qning tenglamasi bo'ladi.

1-misol. Oy o'qdan 3 ga teng kesma ajratib Ox o'q bilan 45^0 burchak hosil qiluvchi to'g'ri chiziq tenglamasi yozilsin.

Yechish. Burchak koeffitsiyentni topamiz: $k = tg45^0 = 1$. Shartga ko'ra $b=3$ (9.1) formulaga binoan to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi $y = 1 \cdot x + 3$ yoki $y = x + 3$ bo'ladi.

2-misol. Koordinatalar boshi hamda $A(3;2)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini yozing.

Yechish. To'g'ri chiziq koordinatalar boshidan o'tganligi uchun uning tenglamasi $y = kx$ ko'rinishga ega bo'ladi. Ikkinchi tomondan $A(3;2)$ nuqta to'g'ri chiziqda yotganligi uchun nuqtaning koordinatalari to'g'ri chiziq tenglamasi $y = kx$ ni qanoatlantiradi, ya'ni $2=k\cdot 3$, bundan $k = \frac{2}{3}$ kelib chiqadi. Demak to'g'ri chiziqning izlanayotgan tenglamasi $y = \frac{2}{3}x$ bo'ladi.

Izoh. Bundan buyon to'g'ri chiziq berilgan yoki to'g'ri chiziq topilsin deyilganda to'g'ri chiziqning tenglamasi berilganini yoki to'g'ri chiziqning tenglamasini topish kerakligi tushuniladi.

9.4. To'g'ri chiziqning umumiy ko'rinishdagi tenglamasi

Yuqorida to'g'ri chiziq tenglamasi dekart koordinatalari x va y ga nisbatan birinchi darajali tenglama bo'lishini ko'rdik. Endi teskarisini isbotlaymiz.

9.1-teorema. *Dekart koordinatalari x va y ga nisbatan birinchi darajali har qanday tenglama to'g'ri chiziq tenglamasidir.*

Isboti. Dekart koordinatalariga nisbatan birinchi darajali

$$Ax + By + C = 0 \qquad (9.5)$$

tenglama berilgan bo'lsin. Bunda A, B, C ma'lum sonlar bo'lib $A^2 + B^2 \neq 0$, ya'ni A bilan B bir vaqtga nolga teng emas.

a) $B \neq 0$ bo'lsin. U holda (9.5) tenglamani y ga nisbatan yechsak

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

tenglamaga ega bo'lamiz. Buni (9.1) tenglama bilan taqqoslab u Oy o'qdan $-\frac{C}{A}$ ga teng kesma ajratib 0x o'q bilan tangensi $-\frac{A}{B}$ ga teng bo'lgan α burchak tashkil etuvchi to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi ekaniga iqror bo'lamiz.

Demak (9.5) tenglama ham to'g'ri chiziq tenglamasi ekan.

b) B=0 bo'lsin. U holda (9.5) tenglama

$$Ax + C = 0$$

ko'rinishiga ega bo'lib undan $x = -\frac{C}{A}$ tenglamaga ega bo'lamiz. Bu tenglama $M\left(-\frac{C}{A};0\right)$ nuqtadan o'tib 0y o'qqa parallel to'g'ri chiziq tenglamasi.

2-ta'rif. Ushbu

$$Ax + By + C = 0 \ (A^2 + B^2 \neq 0) \qquad (9.5)$$

tenglama to'g'ri chiziqning umumiy ko'rinishidagi tenglamasi deb ataladi.

Endi umumiy ko'rinishdagi tenglama bilan yanada batafsilroq tanishamiz.

1) B=0 bo'lsin. U holda tenglama

$$x=-\frac{C}{A}$$

ko'rinishga keltirilishini ko'rdik. Agar $C\neq 0$ bo'lsa to'g'ri chiziq $0y$ o'qqa parallel bo'ladi. $C=0$ bo'lsa tenglama $x=0$ ko'rinishga ega bo'lib bu holda to'g'ri chiziq $0y$ o'qda yotadi.

2)A=0 bo'lsin. U holda $B\neq 0$ va to'g'ri chiziq tenglamasi $y=-\frac{C}{B}$ ko'rinishga ega bo'ladi. Bu tenglama 0x o'qqa parallel to'g'ri chiziq tenglamasidir. C=0 bo'lganda bundan y=0 0x o'qning tenglamasi hosil bo'ladi.

3) C=0 bo'lsin. U holda (9.5) tenglama $Ax+By=0$ yoki $y=-\frac{A}{B}x$ ko'rinishiga ega bo'ladi. Oxirgi tenglama koordinatalar boshidan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi ekanini bilamiz. Demak $C=0$ bo'lganda to'g'ri chiziq koordinatalar boshidan o'tar ekan.

Izoh. To'g'ri chiziq tenglamasi umumiy ko'rinishda berilganda tenglamadan y topilsa to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi hosil bo'ladi.

Shuning uchun vaziyatga qarab to'g'ri chiziqning u yoki bu tenglamalaridan foydalanamiz.

9.5. To'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi

$Ax+By+C=0$ va $A_1x+B_1y+C_1=0$ kesishuvchi to'g'ri chiziqlar berilgan bo'lib ularning kesishish nuqtasini topish talab etilsin. To'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi har ikkala to'g'ri chiziqqa tegishli bo'lganligi sababli uning koordinatalari har ikkala to'g'ri chiziq tenglamasini ham qanoatlantiradi, ya'ni

$$\begin{cases} Ax+By+C=0, \\ A_1x+B_1y+C_1=0 \end{cases} \tag{9.6}$$

sistemaning yechimi bo'ladi.

3-misol. $3x-2y-4=0$ va $2x+y-5=0$ to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi toping.

Yechish. Kesishish nuqtasining koordinatalarini

$$\begin{cases} 3x-2y-4=0, \\ 2x+y-5=0 \end{cases}$$

sistemani yechib topamiz. Sistemaning ikkinchi tenglamasini 2 ga ko'paytirib uning birinchi tenglamaga hadlab qo'shsak $7x-14=0$, bundan $x=2$ kelib chiqadi. $x=2$ qiymatni sistemaning ikkinchi tenglamasiga qo'yib y ni topamiz: $2\cdot 2+y-5=0$, $y=1$. Demak, to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi $x=2$, $y=1$ koordinatalarga ega ekan.

9.6. To'g'ri chiziqni tenglamasiga ko'ra yasash

To'g'ri chiziqni uning tenglamasiga ko'ra qanday yasash lozimligini ko'rsatamiz. To'g'ri chiziqni yasash uchun uning ikkita nuqtasini bilish kifoya. Bu nuqtalarni to'g'ri chiziq tenglamasidagi x va y larning birortasiga aniq qiymat berib ikkinchisini aniqlash orqali topish mumkin.

Masalan, $2x+y-4=0$ to'g'ri chiziqqa tegishli nuqtalarni aniqlash uchun $y=0$ desak $x=2$, $x=0$ desak $y=4$ kelib chiqadi. Demak $M_1(2;0)$ va $M_2(0;4)$ nuqtalar qaralayotgan to'g'ri chiziqqa tegishli nuqtalar.

4-misol. $3x-4y-12=0$ to'g'ri chiziq chizilsin.

Yechish. To'g'ri chiziq bilan Ox o'qning tenglamasi $y=0$ ni birgalikda yechib, to'g'ri chiziq bilan Ox o'qning kesishish nuqtasi M ni topamiz:

$$\begin{cases} 3x-4y-12=0, \\ y=0. \end{cases} \Rightarrow 3x-12=0, \quad x=4.$$

Demak $M(4;0)$ nuqta to'g'ri chiziq bilan Ox o'qning kesishish nuqtasi (38-chizma).

38-chizma

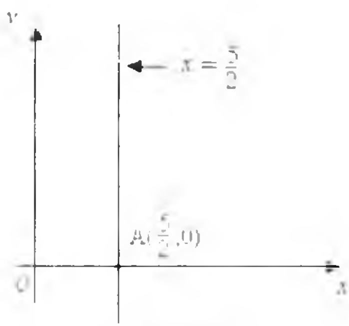
Shuningdek,

$$\begin{cases} 3x - 4y - 12 = 0, \\ x = 0. \end{cases}$$

sistemani yechsak to‘g‘ri chiziq bilan Oy o‘qning kesishish nuqtasi kelib chiqadi. $x = 0$ da $-4y$-12=0, y=-3. Demak $N(0;-3)$ to‘g‘ri chiziqning Oy o‘q bilan kesishish nuqtasi. $M(4;0)$ ва $N(0;-3)$ nuqtalar orqali to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz.

5-misol. $2x$-5=0 to‘g‘ri chiziqni chizing.

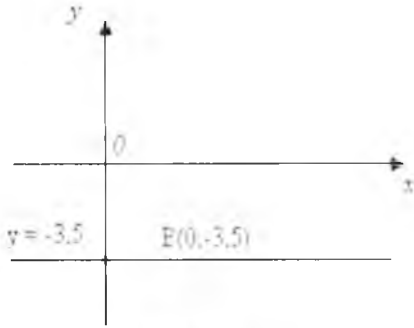
Yechish. Bu holda to‘g‘ri chiziqni chizish uchun unga tegishli ikkita nuqtani topishga hojat yo‘q. Chunki berilgan tenglamani $x = \frac{5}{2}$ ko‘rinishda yozib, u $A\left(\frac{5}{2};0\right)$ nuqtadan Oy o‘qqa parallel o‘tkazilgan to‘g‘ri chiziq tenglamasi ekanligini ko‘ramiz (39-chizma).



39-chizma

6-misol. $2y+7=0$ to'g'ri chiziq chizilsin.

Yechish. Berilgan tenglamani $y=-3,5$ ko'rinishda yozsak u $B(0;-3,5)$ nuqtadan Ox o'qqa parallel o'tadigan to'g'ri chiziq tenglamasi ekanligi ayon bo'ladi (40-chizma). Bu holda ham to'g'ri chiziqni chizish uchun unga tegishli ikkita nuqtani topishga hojat yo'q ekan.

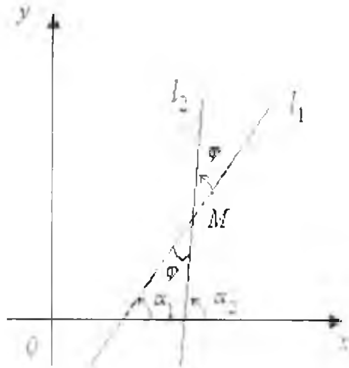


40-chizma.

9.7. Ikkita to'g'ri chiziq orasidagi burchak

M nuqtada kesishuvchi l_1 va l_2 to'g'ri chiziqlar mos ravishda $y=k_1x+b_1$ va $y=k_2x+b_2$ tenglamalar yordamida berilgan bo'lsin. Shu to'g'ri chiziqlar oasidagi φ burchakning tangensini topamiz (41-chizma).

$tg90^0$ mavjud bo'lmaganligi uchun l_1 va l_2 to'g'ri chiziqlar o'zaro perpendikulyar emas deb faraz qilamiz. Ma'lumki uchburchakning tashqi burchagi (α_2) o'ziga qo'shni bo'lmagan ichki burchaklar (α_1, φ) ning yig'indisiga teng. Shunga ko'ra 41-chizmadan $\alpha_2=\alpha_1+\varphi$ yoki $\varphi=\alpha_2-\alpha_1$ tenglikka ega bo'lamiz.



41-chizma.

Bundan:

$$tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 tg\alpha_2}.$$

α_1 va α_2 - Ox o'q bilan ℓ_1 ва ℓ_2 to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak bo'lgani uchun $tg\alpha_1 = k_1$, $tg\alpha_2 = k_2$ bo'ladi.

Shuning uchun:

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \qquad (9.7)$$

Demak, o'zaro perpendikulyar bo'lmagan ℓ_1 va ℓ_2 to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakning tangensi (9.7) formula yordamida topilar ekan.

7-misol. y=-2x+3 va y=3x+5 to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak topilsin.

Yechish. Misolda $k_1 = -2$, $k_2 = 3$ bo'lgani uchun $tg\varphi = \frac{3-(-2)}{1+(-2)\cdot 3} = \frac{5}{-5} = -1$, $\varphi = 135^0$ kelib chiqadi.

Izoh. ℓ_1 va ℓ_2 to'g'ri chiziqlar orasidagi o'tkir burchak

$$tg\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|$$

formula yordamida topiladi.

Faraz qilaylik perpendikulyar bo'lmagan l_1 va l_2 to'g'ri chiziqlar umumiy ko'rinishdagi $A_1x+B_1y+C_1=0$ va $A_2x+B_2y+C_2=0$ tenglamalari yordamida berilgan bo'lib ular orasidagi φ burchakning tangensini topish talab etilsin. U holda to'g'ri chiziq tenglamalarini y ga nisbatan yechib

$$y=-\frac{A_1}{B_1}x-\frac{C_1}{B_1} \quad \text{va} \quad y=-\frac{A_2}{B_2}x-\frac{C_2}{B_2}$$

to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamalariga ega bo'lamiz. (9.7) ga

$$k_1=-\frac{A_1}{B_1} \quad \text{va} \quad k_2=-\frac{A_2}{B_2}$$

qiymatlarni qo'yib soddalashtirsak

$$tg\varphi=\frac{-\frac{A_2}{B_2}+\frac{A_1}{B_1}}{1+\frac{A_1}{B_1}\cdot\frac{A_2}{B_2}}=\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}$$

hosil bo'ladi. Shunday qilib umumiy tenglamalari yordamida berilgan to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak

$$tg\varphi=\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2} \qquad (9.8)$$

formula yordamida topilar ekan.

8-мисол. $2x-3y+5=0$ va $5x-y+9=0$ to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak topilsin.

Yechish. Misolda $A_1=2,\ B_1=-3,\ A_2=5,\ B_2=-1$. (9.8) ga binoan:

$$tg\varphi = \frac{2\cdot(-1)-5\cdot(-3)}{2\cdot 5+(-3)\cdot(-1)} = \frac{13}{13} = 1, \quad \varphi = 45^0.$$

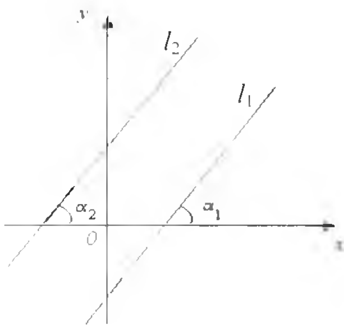
9.8. Ikki to'g'ri chiziqning parallellik sharti

Faraz qilaylik to'g'ri chiziqlar parallel bo'lsin. U holda to'g'ri chiziqlar Ox o'q bilan bir xil burchak tashkil etadi, ya'ni $\alpha_1 = \alpha_2$ bo'ladi. Demak,

$$tg\alpha_1 = tg\alpha_2 \text{ va } k_1 = k_2 \tag{9.9}$$

bo'ladi. Aksincha, agar $k_1 = k_2$ bo'lsa $\alpha_1 = \alpha_2$ bo'lib l_1 va l_2 to'g'ri chiziqlar parallel bo'ladi yoki ustma-ust tushadi. Ustma-ust tushuvchi to'g'ri chiziqlarni parallel sanab, quyidagiga ega bo'lamiz.

Ikki to'g'ri chiziqning palallel bo'lishi uchun ularning burchak koeffitsiyentlari teng bo'lishi zarur va yetarlidir (42-chizma).



42-chizma.

9-мисол. $2x+3y-1=0$ va $4x+6y-3=0$ to'g'ri chiziqlar parallelmi?

Yechish. To'g'ri chiziqlarning tenglamalari umumiy ko'rinishda berilgan. Ularni y ga nisbatan yechib to'g'ri chiziq tenglamalarini burchak koeffitsiyentli tenglamalar ko'rinishiga keltiramiz:

$y=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$, $y=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}$, $k_1=k_2=-\frac{2}{3}$ bo'lgani uchun to'g'ri chiziq parallel .

9.9. Ikki to'g'ri chiziqning perpendikularlik sharti

l_1 va l_2 to'g'ri chiziqlar perpendikulyar bo'lganda (9.7) va (9.8) formulalar ma'noga ega bo'lmaydi. Shuning uchun bu holda ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchakning kotangensini topamiz:

$$ctg\varphi = ctg(\alpha_2-\alpha_1)=\frac{1+tg\alpha_1\cdot tg\alpha_2}{tg\alpha_2-tg\alpha_1}=\frac{1+k_1\cdot k_2}{k_2-k_1}.$$

Perpendikulyar to'g'ri chiziqlar uchun $ctg\varphi=ctg\frac{\pi}{2}=0$ bo'lgani sababli

$\frac{1+k_1 k_2}{k_2-k_1}=0$, bundan $1+k_1\cdot k_2=0$ yoki $k_1 k_2=-1$.. Aksincha, $k_1\cdot k_2=-1$ bo'lsa to'g'ri chiziqlar perpendikulyar ekanini ko'rsatish mumkin.

Shunday qilib ikki to'g'ri chiziqning perpendikulyar bo'lishi uchun

$$k_1\cdot k_2=-1 \qquad (9.10)$$

shartning bajarilishi zarur va yetarlidir.

Agar to'g'ri chiziqlar umumiy ko'rinishdagi $A_1x+B_1y+C_1=0$ va $A_2x+B_2y+C_2=0$ tenglamalari yordamida berilgan bo'lsa, to'g'ri chiziqlarning perpendikulyarlik sharti

$$k_1\cdot k_2=-1,, \frac{A_1}{B_1}\cdot\frac{A_2}{B_2}=-1 \text{ yoki } A_1A_2+B_1B_2=0 \qquad (9.11)$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

10-misol. $3x-2y+13=0$ va $2x+3y-4=0$ to‘g‘ri chiziqlarlar perpendikulyarmi?

Yechish. $A_1=3,\ B_1=-2,\ A_2=2,\ B_2=3$ bo‘lgani uchun $A_1A_2+B_1B_2=3\cdot 2-2\cdot 3=0$ bo‘ladi. (9.11) perpendikulyarlik sharti bajarilgani uchun to‘g‘ri chiziqlar perpendikulyar.

Mustaqil yechish uchun mashqlar va test savollari

1. $y=x+16$ to‘g‘ri chiziq $0x$ o‘qni qanday burchak ostida kesib o‘tadi?

Javob: $\varphi=45^0$.

2. To‘g‘ri chiziq M(3;-2) nuqtadan o‘tib Oy o‘qdan b=4 kesma ajratadi. Shu to‘g‘ri chiziqning tenglamasi yozilsin.

Javob: $y=-2x+4$.

3. To‘g‘ri chiziqlar chizilsin: 1) $2x+y-6=0$; 2) $x-3y+6=0$; 3) $2x-y=0$; 4) $x+3y=0$; 5) $x-3=0$; 6) $2x+5=0$; 7) $2y-5=0$; 8) $y+3=0$.

4. To‘g‘ri chiziqning:

1) $x-y-3=0$; 2) $2x-3y+1=0$; 3) $2x-3y+4=0$; 4) $3x+2y=0$; 5) $2y+7=0$ tenglamalarini burchak koeffitsiyentli tenglama shaklida yozing.

Javob: 1) $y=x-3$; 2) $y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$; 3) $y=\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}$; 4) $y=-\frac{3}{2}x$;. 5) $y=-\frac{7}{2}$.

5. To‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak topilsin:

1) $y=\frac{1}{2}x+3$; $y=3x-2$; 2) $y=3x+1$; $y=3x-7$;. 3) $y=3x-2$; $y=-\frac{1}{3}x+5$; 4) $2x+3y-3=0$, $4x+6y+7=0$; 5) $\sqrt{3}x-y-4=0$, $\sqrt{3}x-3y+2=0$;. 6) $\frac{y}{12}-\frac{x}{3}=1$, , $\frac{x}{25}-\frac{y}{15}=1$; 7) $x+4y+2=0$, $2y+3=0$.

Javob: 1) 45^0; 2) 0; 3) 90^0; 4) 0; 5) 150^0; 6) 135^0; 7) $\mathrm{tg}\varphi = \frac{1}{4}$.

6. $y = 2x + 9$ va $y = 3x + 4$ to‘g‘ri chiziqlar orasidagi o‘tkir burchak topilsin.

7. *Javob:* $\varphi = \mathrm{arctg}\frac{1}{7}$.

8. Koordinata o‘qlari hamda $2x$-$5y$-$20=0$ to‘g‘ri chiziq bilan chegaralangan uchburchakning yuzi topilsin.

Javob: 20 kv. birl.

9. Koordanatalar boshidan $2x$-y-$2=0$ va x+$4y$-$19=0$ to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasigacha masofa topilsin.

Javob: 5 uz. birl.

9. $y = x - 2$ to‘g‘ri chiziq Ox o‘q bilan necha gradus burchak tashkil etadi?

A) 0^0 B) 30^0 D) 45^0 E) 60^0 F) 90^0.

10. $4x + 5y + 8 = 0$ va $4x - 2y - 6 = 0$ to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasi topilsin.

A) $(1;-2)$ B) $\left(\frac{1}{2};-2\right)$ D) $(-2;-2)$ E) $(4;2)$ F) $(0;-3)$.

11. Koordinatalar boshi hamda $A(2;1)$ nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi topilsin.

A) $y = 2x$ B) $y + 2x = 0$ D) $y = \frac{1}{2}x$ E) $y = -3x$ F) $y = \frac{1}{2}x + 2$.

12. $2x + 3y + c = 0$ to‘g‘ri chiziq $(2;3)$ nuqtadan o‘tsa, uning tenglamasidagi c koeffitsient nimaga teng?

A) 13 B) 12 D) -12 E) 14 F) -13.

13. $x - y + 6 = 0$ va $x - \sqrt{3}\,y + 9 = 0$ to‘g‘ri chiziqlar orasidagi kichik burchakni toping.

A) 15^0 B) 30^0 D) 45^0 E) 60^0 F) 90^0.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. To‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak nima?
2. O‘q bilan to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak nima?
3. To‘g‘ri chiziq tenglamasi nima?
4. To‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi qanaqa?
5. To‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi qanaqa?
6. To‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasi qanday topiladi?
7. Tenglamasiga ko‘ra to‘g‘ri chiziq qanday yasaladi?
8. Ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak qanday topiladi?
9. To‘g‘ri chiziqlarning parallellik va perpendikulyarlik shartlarini yozing.
10. Analitik geometriyaning asoschisi kim?

10. TO‘G‘RI CHIZIQ TENGLAMALARI

10.1. Berilgan nuqtadan o‘tib ma’lum yo‘nalishga ega to‘g‘ri chiziq tenglamasi

To‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyenti k ma’lum va to‘g‘ri chiziqni $M_1(x_1;y_1)$ nuqtadan o‘tishi aniq bo‘lganda shu to‘g‘ri chiziq tenglamasini topamiz.

To‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi

$$y=kx+b \qquad (9.1)$$

ni yozamiz. Bu yerda k ma’lum son b esa noma’lum. b ni to‘g‘ri chiziqning $M_1(x_1;y_1)$ nuqtadan o‘tish shartidan foydalanib topamiz. $M_1(x_1;y_1)$ nuqta to‘g‘ri chiziqda yotganligi uchun uning koordinatalari to‘g‘ri chiziq tenglamasi (9.1) ni qanoatlantiradi, ya’ni

$$y_1=kx_1+b.$$

Bundan

$$b=y_1-kx_1$$

b ning topilgan qiymatini to‘g‘ri chiziq tenglamasi (9.1) ga qo‘ysak

$$y=kx+y_1-kx_1$$

yoki

$$y-y_1=k(x-x_1) \qquad (10.1)$$

hosil bo‘ladi. Bu berilgan nuqtadan o‘tuvchi *to‘g‘ri chiziq tenglamasi* deb aytiladi.

1-misol. Berilgan $A(3;-1)$ nuqtadan o‘tib $0x$ o‘q bilan 135^0 burchak tashkil etuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozing.

Yechish. $\alpha=135^0$, $k=tg135^0=tg(90^0+45^0)=-ctg45^0=-1$, $x_1=3$, $y=-1$ bo‘lgani uchun (10.1) ga binoan $y+1=-(x-3)$ yoki $y=-x+2$ kelib chiqadi.

10.2. Berilgan nuqtadan berilgan to‘g‘ri chiziqqa parallel o‘tkazilgan to‘g‘ri chiziq tenglamasi

$M_1(x_1;y_1)$ nuqta hamda $y=kx+b$ to‘g‘ri chiziq berilgan. Shu nuqtadan to‘g‘ri chiziqqa parallel o‘tkazilgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini topish talab etiladi. (10.1) formulaga binoan izlanayotgan tenglama

$$y-y_1=k_1(x-x_1)$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi. Bu yerda noma’lum k_1 ni to‘g‘ri chiziqlarning parallellik shartidan aniqlaymiz. Parallellik sharti (9.9) ga binoan $k_1=k$ bo‘ladi. Demak

$$y-y_1=k(x-x_1). \qquad (10.2)$$

Bu berilgan nuqtadan berilgan to‘g‘ri chiziqqa parallel o‘tkazilgan to‘g‘ri chiziq tenglamasi.

2-misol. $M(-2;3)$ nuqtadan $2x-y+5=0$ to‘g‘ri chiziqqa parallel o‘tkazilgan to‘g‘ri chiziqning tenglamasini yozing.

Yechish. To‘g‘ri chiziq tenglamasidan $y=2x+5$ va $k=2$ ekani kelib chiqadi. $x_1=-2$, $y_1=3$ bo‘lgani uchun (10.2) ga ko‘ra

$$y-3=2(x+2) \quad \text{yoki} \quad y=2x+7$$

kelib chiqadi.

10.3. Berilgan nuqtadan berilgan to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar o‘tkazilgan to‘g‘ri chiziq tenglamasi

Berilgan $M_1(x_1;y_1)$ nuqtadan berilgan $y=kx+b$ to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar o‘tkazilgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini topish talab etilsin (10.2) ga binoan izlanayotgan tenglama

$$y-y_1=k_1(x-x_1)$$

bo'ladi. Ikkinchi tomondan bu to'g'ri chiziq berilgan to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgani uchun (9.10) ga asosan $k \cdot k_1 = -1$ yoki $k_1 = -\frac{1}{k}$ bo'ladi.

Demak,

$$y - y_1 = -\frac{1}{k}(x - x_1). \tag{10.3}$$

Bu tenglama berilgan nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqqa perpendikulyar o'tkazilgan to'g'ri chiziq tenglamasi.

3-misol. $M(-1;1)$ nuqtadan $3x-y+2=0$ to'g'ri chiziqqa perpendikular o'tkazilgan to'g'ri chiziq tenglamasini toping.

Yechish. Izlanayotgan burchak koeffitsiyentni k_1, berilgan burchak koeffitsiyentni k_2 desak, $y=3x+2$ tenglamadan $k_2=3$ kelib chiqadi. $k_2 \cdot k_1 = -1$ perpendikulyarlik shartidan $3k_1=-1$. bundan $k_1 = -\frac{1}{3}$ hosil bo'ladi. (10.3) ga binoan izlanayotgan tenglama

$$y-1=-\frac{1}{3}(x+1) \text{ yoki } 3y-3=-x-1; \quad x+3y-2=0$$

bo'ladi.

4-misol (2; -1) nuqtadan o'tib $5x-2y+10=0$ to'g'ri chiziq bilan 45^0 burchak tashkil etuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini toping.

Yechish. Izlanayotgan to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentini (9.7) formulaga binoan axtaramiz.

Berilgan to'g'ri chiziq tenglamasini $y = \frac{5}{2}x + 5$ ko'rinishda yozsak, uning burchak koeffitsiyenti $k_1 = \frac{5}{2}$ ekani kelib chiqadi. Shartga binoan to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak $\varphi = 45^0$. Izlanayotgan burchak koeffitsiyentni k_2 deb belgilasak (9.7) formula

$$tg45^0 = \frac{k_2 - \frac{5}{2}}{1 + \frac{5}{2}k_2}$$

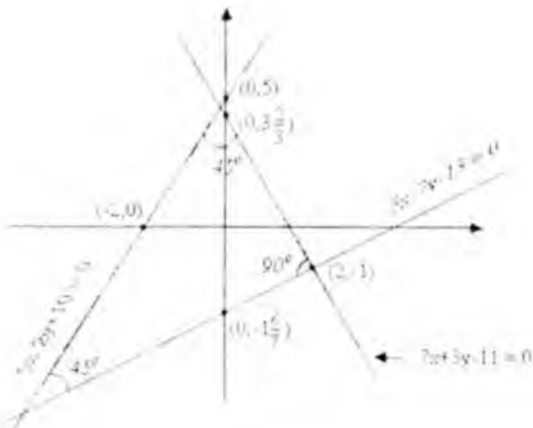
ko'rinishga ega bo'ladi. Bundan

$$1=\frac{k_2-\frac{5}{2}}{1+\frac{5}{2}k_2} \quad \text{yoki} \quad 1+\frac{5}{2}k_2=k_2-\frac{5}{2}; \quad \frac{5}{2}k_2-k_2=-\frac{5}{2}-1;$$

$\frac{3}{2}k_2=-\frac{7}{2}$; $k_2=-\frac{7}{3}$ bo'ladi. Shunday qilib (10.1) ga binoan izlanayotgan tenglama $y+1=-\frac{7}{3}(x-2)$ yoki $3y+3=-7x+14$, bundan $7x+3y-11=0$ bo'ladi.

Agarda $k_2=\frac{5}{2}$, $\varphi=45^0$ deb olib (9.7) dan k_1 ni topsak $k_1=\frac{3}{7}$ bo'ladi. Bu holda izlanayotgan tenglama (10.1) ga binoan $y+1=\frac{3}{7}(x-2)$ yoki $3x$-$7y$-13=0 bo'ladi. Demak, masala ikkita yechimga ega ekan.

To'g'ri chiziqlarning har biri berilgan to'g'ri chiziq bilan 45^0 burchak tashkil etganligi sababli ular o'zaro perpendikulyardir (43-chizma).



43-chizma.

10.4. To‘g‘ri chiziqlar dastasi

1-ta’rif. Tekislikning M nuqtasidan o‘tuvchi va shu tekislikda yotgan barcha to‘g‘ri chiziqlar to‘plami *to‘g‘ri chiziqlar dastasi* deb ataladi.

Bunda M nuqta *dastaning markazi* deyiladi.

Berilgan $M_1(x_1; y_1)$ nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi

$$y-y_1=k(x-x_1) \qquad (10.4)$$

ni qaraymiz. Bu yerda burchak koeffitsiyent k o‘zgarsin. U holda k ning har bir aniq qiymatiga $M_1(x_1; y_1)$ nuqtadan o‘tuvchi aniq to‘g‘ri chiziq mos keladi. Aksincha abssissalar o‘qiga perpendikulyar $x=x_1$ to‘g‘ri chiziqdan farqli barcha to‘g‘ri chiziqlar aniq k burchak koeffitsiyentiga ega bo‘lib u (10.4) tenglama yordamida aniqlanadi.

Shunday qilib k burchak koeffitsiyent istalgan sonli qiymatni qabul qilganda (10.4) tenglama $x=x_1$ to‘g‘ri chiziqdan farqli markazi $M_1(x_1; y_1)$ nuqtada bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlar dastasining tenglamasini ifodalaydi.

5-misol. Markazi $A(2; -3)$ nuqtada bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlar dastasining tenglamasini yozing. Dastadan Ox o‘q bilan 60^0 burchak tashkil etuvchi to‘g‘ri chiziqni ajrating.

Yechish. $x_1=2$; $y_1=-3$. (10.4) ga ko‘ra dastaning tenglamasi $y+3=k(x-2)$ bo‘ladi.

Shu dastadagi to‘g‘ri chiziqlardan Ox o‘q bilan 60^0 burchak tashkil etuvchi to‘g‘ri chiziqning tenglamasini tuzamiz. $\alpha=60^0$, $k=tg60^0=\sqrt{3}$ bo‘lgani uchun dasta tenglamasidan $y+3=\sqrt{3}(x-2)$ yoki $y=\sqrt{3}x-(2\sqrt{3}+3)$ tenglamaga ega bo‘lamiz.

10.5. Berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi

$M_1(x_1;y_1)$ va $M_2(x_2;y_2)$ nuqtalar berilgan bo'lib, shu nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzish talab etilsin. Shartga ko'ra to'g'ri chiziq $M_1(x_1;y_1)$ nuqtadan o'tganligi uchun uning tenglamasi (10.4) ga ko'ra

$$y-y_1=k(x-x_1)$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Bu yerdagi k noma'lum. Uni topish uchun to'g'ri chiziqning M_2 nuqtadan o'tishi shartidan foydalanamiz. $M_2(x_2;y_2)$ nuqta to'g'ri chiziqda yotganligi uchun uning koordinatalari shu to'g'ri chiziq tenglamasini qanoatlantiradi, ya'ni

$$y_2-y_1=k(x_2-x_1).$$

Bundan

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

k ning ushbu topilgan qiymatini to'g'ri chiziq tenglamasi $y-y_1=k(x-x_1)$ ga qo'ysak

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

yoki buni y_2-y_1 ga bo'lsak

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \qquad (10.5)$$

tenglamaga ega bo'lamiz.

Demak (10.5) berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasidir.

(10.5) da $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$ deb faraz qilinadi, aks holda u ma'noga ega emas. Boshqacha aytganda to'g'ri chiziq koordinata o'qlarining hech biriga parallel bo'lmagan holni qaradik. Agar $x_1=x_2$ bo'lsa to'g'ri chiziq Oy o'qqa parallel bo'lib, uning tenglamasi $x = x_1$ bo'ladi. Agar $y_1 = y_2$ bo'lsa, to'g'ri chiziq Ox o'qqa parallel bo'lib uning tenglamasi $y = y_1$ bo'ladi.

Izoh. (10.5) tenglama to'g'ri chiziq koordinata o'qlarining birortasiga parallel bo'lganda ham yaroqli. U holda (10.5) dagi qaysi kasrning maxraji nolga teng bo'lsa uning suratini ham nolga tenglashtirish kerak xolos.

6-misol. Uchlari $A(2;3)$, $B(-1;4)$, $C(5;5)$ nuqtada bo'lgan uchburchakning og'irlik markazidan uning AC tomoniga parallel o'tkazilgan to'g'ri chiziq va undan AB tomoniga perpendikular o'tkazilgan to'g'ri chiziqlar topilsin.

Yechish. Uchburchakning og'irlik markazi M ni topamiz. Ma'lumki uchburchak og'irlik markazining koordinatalari uning uchlarining nomdosh koordinatalarining o'rta arifmetigiga teng, ya'ni uchlari $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchakning og'irlik markazi $M(x_c;y_c)$ nuqtaning koordinatalari

$$x_c = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y_c = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

formulalar yordamida topiladi.

Biz qarayotgan holda

$$x_c = \frac{2+(-1)+5}{3} = 2, \quad y_c = \frac{3+4+5}{3} = 4 \quad \text{va} \quad M(2;4).$$

Berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi (10.5) ga asoslanib, uchburchakning AC va AB tomonlari tenglamalari topiladi. (10.5) ga A va B nuqtalarning koordinatalarini qo'ysak,

$$\frac{x-2}{-1-2} = \frac{y-3}{4-3} \quad \text{yoki} \quad y-3 = -\frac{(x-2)}{3}$$

bo'ladi. Bundan AB to'g'ri chiziq tenglamasi $y = -\frac{x}{3} + \frac{2}{3} + 3$ yoki $y = -\frac{1}{3}x + 3\frac{2}{3}$ ga ega bo'lamiz.

Shuningdek (10.5) ga A va C nuqtalarni koordinatalarini qo'yib AC tomon tenglamasini topamiz:

$$\frac{x-2}{5-2}=\frac{y-3}{5-3} \text{ yoki } \frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{2}.$$

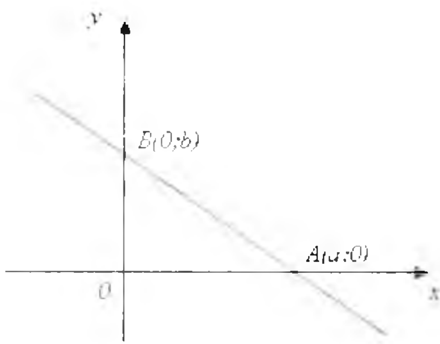
Bundan $y-3=\frac{2}{3}(x-2)$ yoki $y=\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$ ga ega bo'lamiz.

(10.2) ga asosan $M(2;4)$ nuqtadan $y=\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$ to'g'ri chiziqqa (AC tomonga) parallel o'tkazilgan to'g'ri chiziq tenglamasini topamiz: $x_1=2$, $y_1=4$, $k=\frac{2}{3}$ bo'lgani uchun $y-4=\frac{2}{3}(x-2)$ yoki $3y-12=2x-4$ va bundan $2x-3y+8=0$ AC tomonga parallel to'g'ri chiziq tenglamasi kelib chiqadi.

Endi (10.3) dan foydalanib $M(2;4)$ nuqtadan uchburchakning AB tomoniga o'tkazilgan perpendikulyar to'g'ri chiziq tenglamasini topamiz: $x_1=2$, $y_1=4$, $k=-\frac{1}{3}$ ekanini hisobga olsak $y-4=3(x-2)$ yoki $y=3x-6+4$, bundan $y=3x-2$ bo'ladi.

10.6. To'g'ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasi

Faraz qilaylik to'g'ri chiziq koordinata o'qlarining hech biriga parallel bo'lmasdan u $0x$ o'qdan $OA=a$, $0y$ o'qdan $OB=b$ kesmalar ajratsin (44-chizma).



44-chizma

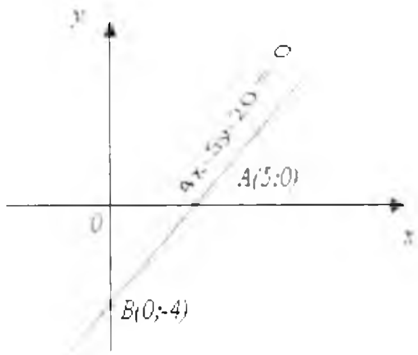
U holda to‘g‘ri chiziqning A(a;o) va B(o;b) nuqtalardan o‘tishi ravshan. Shuning uchun ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi (10.5) dan foydalanamiz: $x_1 = a$, $y_1 = 0$, $x_2 = 0$, $y_2 = b$ bo‘lgani uchun $\frac{x-a}{0-a} = \frac{y-0}{b-0}$ yoki $\frac{x}{-a} + 1 = \frac{y}{b}$, bundan

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (10.6)$$

kelib chiqadi. Bu tenglama *to‘g‘ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasi* deb ataladi.

7-Misol. $4x$-$5y$-20=0 to‘g‘ri chiziq chizilsin.

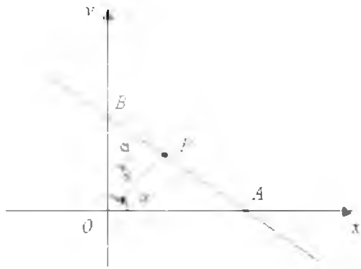
Yechish. To‘g‘ri chiziq tenglamasini kesmalarga nisbatan yozamiz: $4x$-$5y$=20 yoki 20 ga bo‘lsak $\frac{4x}{20} - \frac{5y}{20} = 1$ va bundan $\frac{x}{5} + \frac{y}{-4} = 1$ kelib chiqadi. Demak a=5, b=-4 (45-chizma).



45-chizma

10.7. To‘g‘ri chiziqning normal tenglamasi

Faraz qilaylik to‘g‘ri chiziq $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ tenglama orqali berilgan bo‘lib u koordinatalar boshidan o‘tmasin (46-chizma). To‘g‘ri chiziqqa OP perpendikulyar o'tkazib uning uzunligini p, OP perpendikulyar bilan Ox o'q orasidagi burchakni α orqali belgilaymiz. p to'g'ri chiziqning *normali* deb ataladi.



46-chizma.

Chizmadagi ΔAOP dan $\frac{OP}{OA} = \cos\alpha$; $OA = \frac{OP}{\cos\alpha} = \frac{p}{\cos\alpha}$;

$a = \frac{p}{\cos\alpha}$, chunki $OA = a$, $OP = p$.

ΔOBP dan $\frac{OP}{OB} = \cos(90 - \alpha) = \sin\alpha$;

$OB = \frac{p}{\sin\alpha}$; $b = \frac{p}{\sin\alpha}$ chunki $OB = b$, $OP = p$.

a va b ning ushbu qiymatlarini to'g'ri chiziqning tenglamasiga qo'ysak

$$\frac{x}{\frac{p}{\cos\alpha}} + \frac{y}{\frac{p}{\sin\alpha}} = 1 \quad \text{yoki} \quad x\cos\alpha + y\sin\alpha = p;$$

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \qquad (10.7)$$

kelib chiqadi. (10.7) *to'g'ri chiziqning normal tenglamasi* deb ataladi.

To'g'ri chiziq normal tenglamasining o'ziga xos xususiyatlaridan biri undagi $p > 0$ va $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

10.8. To‘gri chiziq tenglamasini normal ko‘rinishiga keltirish

To‘g‘ri chiziq umumiy ko‘rinishdagi tenglamasi $Ax+By+C=0$ (9.5) yordamida berilgan bo‘lsin. Shu tenglamani (10.7) ko‘rinishdagi normal tenglamaga keltirish mumkinligini ko‘rsatamiz. Shu maqsadda (9.5) tenglamani shunday o‘zgarmas son M ga ko‘paytiramizki natijada

$$MAx+MBy+MC=0 \tag{10.8}$$

to‘g‘ri chiziqning normal tenglamasi bo‘lsin. Buni normal tenglama (10.7) bilan taqqoslab $M\cdot A=\cos\alpha$, $M\cdot B=\sin\alpha$, $M\cdot C=-p$ (β) ekaniga iqror bo‘lamiz. Oxirgi tenglamadan M, α, p noma’lumlarni aniqlash qiyin emas. U yerdagi birinchi ikkita tenglamani kvadratga ko‘tarib hadlab qo‘shsak

$$M^2A^2+M^2B^2=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1;\quad M^2(A^2+B^2)=1;$$

$$M^2=\frac{1}{A^2+B^2}$$

bo‘lib, bundan
$$M=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} \tag{10.9}$$

kelib chiqadi. M ni *normallovchi ko‘paytuvchi* deb ataladi. (10.9) da ishora ozod had C ning ishorasiga qarama-qarshi olinadi. M ning topilgan qiymatini (β) ga qo‘yib $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ va p larni aniqlash mumkin:

$$\cos\alpha=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}},\quad \sin\alpha=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}},\qquad p=-\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Shunday qilib, koordinatalar boshidan $Ax+By+C=0$ to‘g‘ri chiziqqacha masofa

$$p=\frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \tag{10.10}$$

formula yordamida topilar ekan.

8-misol. $6x+8y-5=0$ to'g'ri chiziq tenglamasi normal ko'rinishda yozilsin.

Yechish. $A=6$, $B=8$, $C=-5$. Normallovchi ko'paytuvchi:

$$M=\frac{1}{\sqrt{6^2+8^2}}=\frac{1}{10}\quad (C<0).$$

Berilgan tenglamani bunga ko'paytirsak $\frac{6}{10}x+\frac{8}{10}y-\frac{5}{10}=0$ yoki $\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y-\frac{1}{2}=0$ normal tenglama hosil bo'ladi. Bu to'g'ri chiziq uchun $p=\frac{1}{2}$, $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, $\sin\alpha=\frac{4}{5}$.

10.9. Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha masofa

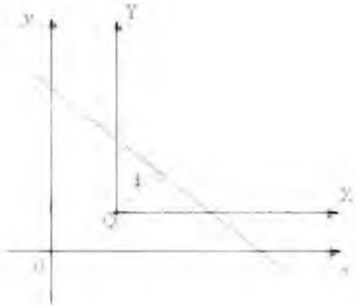
Aytaylik, $Q(x_0;y_0)$ nuqta hamda $Ax+By+C=0$ to'g'ri chiziq berilgan bo'lib, Q nuqtadan to'g'ri chiziqqacha d masofani topish talab etilsin. Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha masofa deyilganda undan to'g'ri chiziqqa o'tkazilgan perpendikulyarning uzunligi nazarda tutiladi. Oxy sistemani parallel ko'chirib koordinatalar boshini Q nuqtaga joylashtiramiz.

U holda

$$\begin{cases} x=X+x_0,\\ y=Y+y_0. \end{cases}$$

bo'lib to'g'ri chiziq tenglamasi yangi QXY sistemaga nisbatan quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$A(X+x_0)+B(Y+y_0)+C=0$ yoki $AX+BY+(Ax_0+By_0+C)=0$. $Ax_0+By_0+C=C_0$ deb belgilasak to'g'ri chiziq $AX+BY+C_0=0$ tenglamaga ega bo'ladi.



47-chizma.

Q($x_0;y_0$) nuqta yangi sistemaning koordinatalar boshi bo'lganligi uchun undan to'g'ri chiziqqacha masofa (10.10) formula yordamida topiladi:

$$d=\frac{|C_0|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Bundan $C_0=Ax_0+By_0+C$ ekanligini hisobga olib

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad (10.11)$$

formulaga ega bo'lamiz. Bu formula *nuqtadan to'g'ri chiziqqacha masofani topish* formulasi.

9-misol. M(-5; 2) nuqtadan $4x-3y+14=0$ to'g'ri chiziqqacha masofa topilsin.

Yechish. $x_0=-5$, $y_0=2$, A=4, B=-3, C=14 bo'lgani uchun (10.11) ga binoan

$$d=\frac{|4\cdot(-5)+(-3)\cdot 2+14|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{|-18|}{5}=\frac{18}{5}=3,6.$$

Demak d=3,6 uz.birl.

10-misol. $3x+4y-12=0$ va $3x+4y+13=0$ parallel to‘g‘ri chiziqlar orasidagi masofa topilsin.

Yechish. Izlanayotgan masofani topish uchun birinchi to‘g‘ri chiziqning istalgan nuqtasidan ikkinchi to‘g‘ri chiziqqacha masofani topamiz. Birinchi tenglamada x=0 desak y=3 kelib chiqadi. Demak Q(0;3) nuqta birinchi to‘g‘ri chiziqning nuqtasi. (10.11) formuladan foydalanib undan ikkinchi to‘g‘ri chiziqqacha d masofani topamiz.

$$d=\frac{|3\cdot 0+3\cdot 4+13|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{25}{5}=5.$$

Demak d=5 uz.birl.

11-misol. Uchlari $A(4;3)$, $B(16;-6)$, va $C(20;16)$ nuqtalarda bo‘lgan uchburchakning CD balanligi topilsin.

Yechish. Ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi (10.5) ga asoslanib AB tomon tenglamasini topamiz. (10.5) ga A va B nuqtaning koordinatalarini qo‘ysak $\frac{x-4}{16-4}=\frac{y-3}{-6-3}$; $\frac{x-4}{12}=\frac{y-3}{-9}$; $\frac{x-4}{4}=\frac{y-3}{-3}$; $-3x+12=4y-12$ yoki $3x+4y-24=0$ - AB tomon tenglamasi hosil bo‘ladi. CD balandlikni nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha masofani topish formulasidan foydalanib topamiz. (10.11)ga $x_0=20$, $y_0=16$, A=3, B=4, C=-24 qiymatlarni qo‘ysak

$$d=\frac{|3\cdot 20+4\cdot 16-24|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{100}{5}=20$$

bo‘ladi. Demak d=20 uz.birl.

Mustaqil yechish uchun mashqlar va test savollari

1. $A(2;5)$ nuqtadan $3x-4y+16=0$ to‘g‘ri chiziqqa parallel o‘tkazilgan to‘g‘ri chiziq tenglamasi topilsin.

Javob: $3x-4y+14=0$.

2. $A(5;-1)$ nuqtadan $3x-7y+14=0$ to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar o‘tkazilgan to‘g‘ri chiziq tenglamasi topilsin.

Javob: $7x+3y-32=0$.

3. $A(3;4)$ nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar dastasidan Ox o‘q bilan 135^0 burchak tashkil etuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi topilsin.

Javob: $x+y-7=0$.

4. $x+y-1=0$ va $2x+3y+4=0$ to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasidan: 1) $3x-y+7=0$ to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar o‘tkazilgan to‘g‘ri chiziq tenglamasi; 2) shu to‘g‘ri chiziqqa parallel o‘tkazilgan to‘g‘ri chiziq tenglamasi topilsin.

Javob: 1) $x+3y+11=0$; 2) $3x-y-27=0$.

5. (2;-3) nuqtadan (1;2) va (-1;-5) nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqqa parallel o‘tkazilgan to‘g‘ri chiziq tenglamasi topilsin.

Javob: $7x-2y-20=0$.

6. (1;2) nuqtadan (4;3) va (-2;1) nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar o‘tkazilgan to‘g‘ri chiziq tenglamasi topilsin.

Javob: $3x+y-5=0$.

7. (3;3) nuqtadan o‘tuvchi va $5x-4y-1=0$ to‘g‘ri chiziq bilan 45^0 burchak tashkil qiluvchi to‘g‘ri chiziqlarning tenglamalari topilsin.

Javob: $9x+y-30=0$, $x-9y+24=0$.

8. Uchlari $A(2;1)$, $B(3;1)$ va $C(1;2)$ nuqtalarda bo‘lgan uchburchakning tomonlarini uzunliklari hamda ichki burchaklari topilsin.

Javob: $1;\ \sqrt{5};\sqrt{3};135^0;arctg\frac{1}{2},\ arctg\frac{2}{3}$.

9. Tomonlari $x+3y-2=0$, $2x+y+5=0$ va $3x-4=0$ tenglamalarga ega bo‘lgan uchburchakni balandliklarining tenglamalari topilsin.

Javob: $5y-9=0$; $9x-18y-8=0$; $9x-3y-35=0$.

10. Uchlari (0;1). (1;0) va (1;1) nuqtalarda bo‘lgan uchburchakning medianalarini tenglamalari topilsin.

Javob: $y+2x-2=0$, $x+2y-2=0$; $y=x$.

11. a) $3x+4y+15=0$; b) $6x-8y-9=0$; d) $2x+2\sqrt{3}\,y-7=0$; e) $x+y+5=0$ to‘g‘ri chiziq tenglamalari normal ko‘rinishda yozilsin.

Javob: a) $-\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-3=0$; b) $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-\frac{9}{10}=0$

d) $\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y-\frac{7}{4}=0$; e) $-\frac{1}{\sqrt{2}}x-\frac{1}{\sqrt{2}}y-\frac{5}{\sqrt{2}}=0$;

12. a) $4x-6y+7=0$ b) $\frac{3}{4}x-\frac{2}{5}y-5=0$; d) $\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-4=0$;

e) $\frac{1}{2}x+2y-6=0$; f) $\frac{5}{13}x-\frac{12}{13}y+6=0$; tenglamalardan qaysi biri to'g'ri chiziqning normal tenglamasi.

Javob: d).

13. Trapetsiyaning asoslari $2x+y-5=0$ va $4x+2y-7=0$ tenglamalarga ega. Uning balandligi topilsin.

Javob: $0{,}3\sqrt{5}$.

Ko'rsatma. Balandlik ikki parallel to'g'ri chiziqlar orasidagi masofandan iborat.

14. $A(2;3)$, $B(4;2)$, $C(-1;0)$ nuqtalardan bir xil uzoqlikda joylashgan D nuqta topilsin.

Javob: $D(\frac{11}{6};\frac{1}{6})$.

Ko'rsatma. $\begin{cases} AD=BD, \\ BD=CD \end{cases}$ sistema yechib topiladi.

15. 1) $y-9=2(x-2)$ 2) $2x+3y-6=0$ 3) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$,

4) $y=2x-3$ 5) $y=3$ tenglamalardan qaysi biri berilgan nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini ifodalaydi?

A) 1 B) 2 D) 3 E) 4 F) 5.

16. Oldingi mashqda keltirilgan tenglamalardan qaysi biri to'g'ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasini ifodalaydi?

A) 1 B) 2 D) 3 E) 4 F) 5.

17. $M(-3;2)$ nuqtadan $3x-y+7=0$ to'g'ri chiziqqa parallel o'tkazilgan to'g'ri chiziq tenglamasini toping.

A) $3x-y+11=0$ B) $y=-3x+11$

D) $y=3x+13$ E) $y=2x-3$ F) $x+y=4$.

18. Koordinatalar boshidan $3x+4y-5=0$ to‘g‘ri chiziqqacha masofa topilsin.

A) 2 B) 3 D) 4 E) 5 F) 1.

19. Quyidagi tenglamalardan qaysi biri $5x-12y+6=0$ to‘g‘ri chiziqning normal ko‘rinishdagi tenglamasini ifodalaydi?

A) $-\frac{5}{13}x+\frac{12}{13}y-\frac{6}{13}=0$ B) $\frac{5}{13}x-\frac{12}{13}y-\frac{6}{13}=0$

D) $\frac{5}{13}x-\frac{12}{13}y+\frac{6}{13}=0$ E) $\frac{5}{9}x-\frac{4}{3}y+2=0$

F) to‘g‘ri javob keltirilmagan.

20. $y-2=k(x-3)$ to‘g‘ri chiziqlar dastasidan Oy o‘qqa parallel to‘g‘ri chiziq ajratilsin.

A) $x=3$ B) $x=2$ D) $x=4$ E) $x=-3$ F) ajratib bo‘lmaydi.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Berilgan nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozing.
2. Nuqtadan to‘g‘ri chiziqqa parallel o‘tkazilgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozing.
3. Nuqtadan to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar o‘tkazilgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozing.
4. To‘g‘ri chiziqlar dastasi, dastaning markazi nima?
5. Dastaning tenglamasini yozing.
6. Ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozing.
7. To‘g‘ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasini yozing.
8. To‘g‘ri chiziqning normal tenglamasini yozing.
9. To‘g‘ri chiziqning tenglamasi qanday qilib normal ko‘rinishga keltiriladi.
10. Normallovchi ko‘paytuvchi nima?
11. Koordinatalar boshidan to‘g‘ri chiziqqacha masofa qanday topiladi?
12. Nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha masofa qanday topiladi?

11. IKKINCHI TARTIBLI EGRI CHIZIQLAR

11.1. Ikkinchi tartibli egri chiziqlar haqida tushuncha

1-ta'rif. $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ (11.1) ko'rinishdagi tenglama *ikkinchi darajali algebraik tenglama* deb ataladi.

Bu yerdagi A, B, C, D, E, F ma'lum sonlar bo'lib ulardan A, B, C bir vaqtda nolga teng emas. Aks holda, ya'ni $A=B=C=0$ bo'lganda (11.1) tenglama

$$Dx+Ey+F=0$$

ko'rinishdagi chiziqli (birinchi darajali) tenglamaga aylanadi va bu to'g'ri chiziq tenglamasi ekanligini bilamiz.

2-ta'rif. Dekart koordinatalari x va y ga nisbatan ikkinchi darajali algebraik tenglama yordamida aniqlanadigan egri *chiziqlar ikkinchi tartibli egri chiziqlar* deb ataladi. (11.1) ikkinchi tartibli egri chiziqning *umumiy tenglamasi* deyiladi.

Ikkinchi tartibli egri chiziqlarga **aylana,ellips, giperbola** va **parabolalar** kiradi.

11.2. Aylana va uning kanonik tenglamasi

3-ta'rif. Tekislikning berilgan nuqtasidan bir xil masofada joylashgan shu tekislik nuqtalarining geometrik o'rniga *aylana* deb ataladi.

Tekislikning berilgan nuqtasini aylananing **markazi**, undan aylanagacha masofani **aylananing radiusi** deb ataymiz.

Markazi O_1 $(a;b)$ nuqtada bo'lib radiusi R ga teng aylananing tenglamasini tuzamiz (48 *a*-chizma). Aylananing ixtiyoriy nuqtasini $M(x;y)$ desak aylananing ta'rifiga binoan:

$$MO_1=R.$$

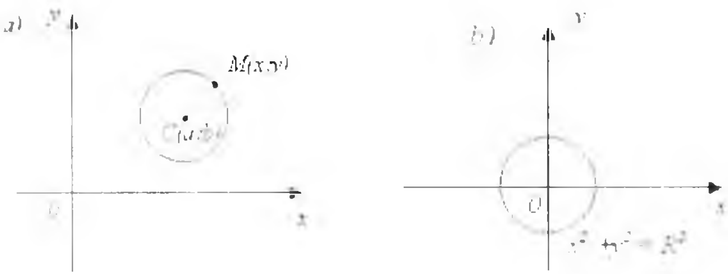
Ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasi (1.2)dan foydalansak

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=R$$

yoki bu tenglikni har ikkala tomonini kvadratga koʻtarsak

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \qquad (11.2)$$

kelib chiqadi. Shunday qilib aylananing istalgan $M(x,y)$ nuqtasining koordinatalari (11.2) tenglamani qanoatlantirar ekan. Shuningdek aylanaga tegishli boʻlmagan hech bir nuqtaning koordinatalari (11.2) tenglamani qanoatlantirmaydi. Demak (11.2) aylana tenglamasi.



48-chizma.

U aylananing **kanonik** (eng sodda) tenglamasi deb ataladi.

Xususiy holda aylananing markazi $C_1(a,b)$ koordinatalar boshida boʻlsa $a=b=0$ boʻlib uning tenglamasi

$$x^2+y^2=R^2 \qquad (11.3)$$

koʻrinishga ega boʻladi (48 b- chizma).

Endi aylananing kanonik tenglamasini ikkinchi tartibli egri chiziqning umumiy tenglamasi (11.1) bilan taqqoslaymiz. (11.2) da qavslarni ochib maʼlum almashtirishlarni bajarsak u

$$x^2+y^2-2ax-2ay+a^2+b^2-R^2=0 \qquad (11.4)$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Buni (11.1) bilan taqqoslab unda x^2 bilan y^2 oldidagi koeffitsiyentlarni tengligini va koordinatalarni ko'paytmasi xy ni yo'qligini ko'ramiz, ya'ni

$$A=C \text{ va } B=0.$$

(11.1) tenglamada $A=C$ va $B=0$ bo'lsa, u aylanani tenglamasi bo'ladimi degan savolga javob izlaymiz.
Soddalik uchun $A=C=1$ deb olamiz. Aks holda tenglamani A ga bo'lib shuncha erishish mumkin.

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0 \qquad (11.5)$$

tenglamaga ega bo'laylik. Bu tenglamaning hadlarini o'zimizga qulay shaklda o'rinlarini almashtirib to'la kvadrat uchun zarur bo'lgan $\frac{D^2}{4}$ va $\frac{E^2}{4}$ ni ham qo'shamiz ham ayirimiz. U holda

$$x^2+Dx+\frac{D^2}{4}+y^2+Ey+\frac{E^2}{4}-\frac{D^2}{4}-\frac{E^2}{4}+F=0$$

yoki

$$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{D^2}{4}+\frac{E^2}{4}-F \qquad (11.6)$$

hosil bo'ladi. Mumkin bo'lgan uch holni qaraymiz:

1) $\frac{D^2}{4}+\frac{E^2}{4}-F>0$ (yoki $D^2+E^2>4F$). Bu holda (11.6) tenglamani (11.2) bilan taqqoslab u va unga teng kuchli (11.5) tenglama ham markazi $O_1\left(-\frac{D}{2};-\frac{E}{2}\right)$ nuqtada, radiusi $R=\sqrt{\frac{D^2}{4}+\frac{E^2}{4}-F}$ bo'lgan aylanani ifodalashiga ishonch hosil qilamiz.

2) $\frac{D^2}{4}+\frac{E^2}{4}-F=0$. Bu holda (11.6) tenglama

$$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=0$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Bu tenglamani yagona $O\left(-\frac{D}{2};-\frac{E}{2}\right)$ nuqtaning koordinatalari qanoatlantiradi xolos.

3) $\frac{D^2}{4}+\frac{E^2}{4}-F<0$. Bu holda (11.6) tenglama hech qanday egri chiziqni aniqlamaydi. Chunki tenglamaning o'ng tomoni manfiy, chap tomoni esa manfiy emas.

Xulosa. (11.1) tenglama $A=C$, B=0, $\frac{D^2}{4}+\frac{E^2}{4}-F>0$ bo'lgandagina aylanani tenglamasini ifodalar ekan.

1-misol. $x^2+y^2+2x-4y-4=0$ tenglama aylananing tenglamasi ekanligini ko'rsating va aylananing markazi hamda radiusini toping.

Yechish. $A=C=1$, B=0, $\left(\frac{D}{2}\right)^2+\left(\frac{E}{2}\right)^2-F=1^2+2^2-(-4)=9>0$, demak berilgan tenglama aylananing umumiy tenglamasi ekan. Tenglamani

$$(x^2+2x+1)+(y^2-4y+4)-1-4-4=0$$

ko'rinishda yozib undan

$$(x+1)^2+(y-2)^2=3^2$$

aylananing kanonik tenglamasiga ega bo'lamiz.

Shunday qilib aylananing markazi $O_1(-1;2)$ nuqta va radiusi $R=3$ ekan.

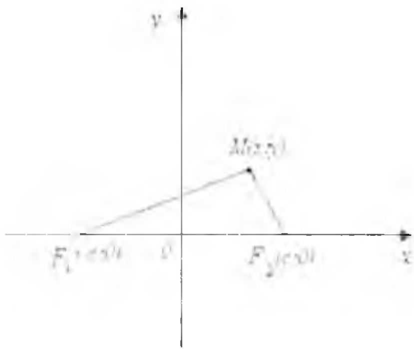
2-misol. $x^2-2x+y^2+2y+4=0$ tenglama hech qanday egri chiziqni aniqlamasligini ko'rsating.

Yechish. Tenglamani $(x^2-2x+1)+(y^2+2y+1)-1-1+4=0$ ko'rinishda yozsak undan $(x-1)^2+(y+1)^2=-2$ tenglikka ega bo'lamiz. Koordinatalari bu tenglamani qanoatlantiruvchi nuqta mavjud emas. Demak berilgan tenglama hech qanday egri chiziqni tenglamasi emas.

11.3. Ellips va uning kanonik tenglamasi

4-ta'rif. Har bir nuqtasidan tekislikning berilgan ikkita nuqtasigacha masofalarning yig'indisi o'zgarmas bo'lgan shu tekislik nuqtalarining geometrik o'rni *ellips* deb ataladi.

Tekislikning berilgan nuqtalarini F_1 va F_2 orqali belgilab ularni ellipsning *fokuslari* deb ataymiz. Fokuslar orasidagi masofani $2c$ va ellipsning har bir nuqtasidan uning fokuslarigacha bo'lgan masofalarning yig'indisini $2a$ orqali belgilaymiz. Oxy dekart koordinatalar sistemasining $0x$ o'qini ellipsning fokuslari F_1 va F_2 orqali o'tkazib, F_1 dan F_2 tomonga yo'naltiramiz, koordinatalar boshini esa F_1F_2 kesmaning o'rtasiga joylashtiramiz. U holda fokuslar $F_1(-c;0)$, $F_2(c,0)$ koordinatalarga ega bo'ladi (49-chizma).



49-chizma.

Endi shu ellipsning tenglamasini keltirib chiqaramiz. $M(x,y)$ ellipsning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. Ta'rifga ko'ra M nuqtadan ellipsning fokuslari F_1 va F_2 gacha masofalarning yig'indisi o'zgarmas son $2a$ ga teng, ya'ni

$$MF_1+MF_2=2a.$$

Ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasi (1.2) ga ko'ra

$$MF_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2},\quad MF_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

bo'lgani uchun

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a \text{ yoki}$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

kelib chiqadi. Oxirgi tenglikning ikkala tomonini kvadratga ko'tarib ixchamlaymiz:

$$(x+c)^2+y^2=(2a)^2-2\cdot 2a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2;$$

$$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2;$$

$$4cx=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2};cx=a^2-a\sqrt{(x-c)^2+y^2};$$

$$a^2-cx=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Buning yana ikkala tomonini kvadratga ko'tarib ixchamlasak

$$a^4-2a^2cx+c^2x^2=a^2\left[(x-c)^2+y^2\right];\quad a^4-2a^2cx+c^2x^2=a^2\left[x^2-2cx+c^2+y^2\right];$$

$$a^4-2a^2cx+c^2x^2=a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2;\quad a^2x^2-c^2x^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2;$$

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2) \qquad (11.7)$$

hosil bo'ladi.

Uchburchak ikki tomonining yig'indisi uchinchi tomonidan katta ekanini nazarda tutsak, ΔF_1MF_2 dan (49-chizma) $MF_1+MF_2>F_1F_2$; $2a>2c$; $a>c$; $a^2-c^2>0$ ($a>0$, $c>0$) bo'ladi.

$a^2-c^2=b^2$ deb belgilab uni (11.7) ga qo'yamiz. U holda

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

yoki buni a^2b^2 ga bo'lsak,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (11.8)$$

kelib chiqadi. Shunday qilib ellips ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtasini koordinatalari (11.8) tenglamani qanoatlantiradi. Aksincha ellipsga tegishli bo'lmagan hech bir nuqtani koordinatalari bu tenglamani qanoatlantirmaydi. Demak (11.8) ellipsning tenglamasi. U ellipsning *kanonik tenglamasi* deb ataladi. Koordinatalar boshi *ellipsning markazi* deyiladi. Koordinata o'qlari esa ellipsning *simmetriya o'qlari* bo'lib xizmat qiladi. Ellipsning fokuslari joylashgan o'q uning *fokal o'qi* deyiladi. Ellipsning simmetriya o'qlari bilan kesishish nuqtalari uni *uchlari* deyiladi. $A_1(-a;0)$, $A(a;0)$, $B_1(0;-b)$, $B(0,b)$ nuqtalar ellipsning uchlari.

a va b sonlar mos ravishda ellipsning *katta* va *kichik yarim o'qlari* deyiladi. $\frac{c}{a}$ nisbat ellipsning *ekssentrisiteti* deyiladi va ε orqali belgilanadi. Ellips uchun $0<\varepsilon<1$ bo'ladi, chunki $c<a$. Ekssentrisitet ellipsning shaklini izohlaydi.

Haqiqatan, $a^2-c^2=b^2$ tenglikni a^2 ga bo'lsak $1-\left(\frac{c}{a}\right)^2=\left(\frac{b}{a}\right)^2$ yoki $\left(\frac{b}{a}\right)^2=1-\varepsilon^2$ bo'ladi. Bundan ekssentrisitet qanchalik kichik bo'lsa ellipsning kichik yarim o'qi uning katta yarim o'qidan shunchalik kam farq qilishini ko'ramiz.

$b=a$ bo'lganda ellips tenglamasi $x^2+y^2=a^2$ ko'rinishiga ega bo'lib ellips aylanaga aylanadi. Bu holda $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{a^2-a^2}=0$, bo'lgani uchun $\varepsilon=\frac{0}{a}=0$ bo'ladi.

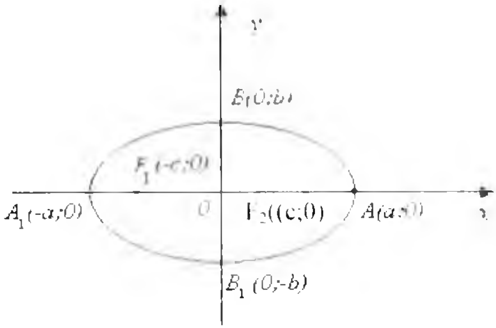
Demak aylana ekssentrisiteti nolga teng va fokuslari uning markaziga joylashgan ellips ekan.

Endi ellipsning shaklini aniqlaymiz. Uning shaklini avval I chorakda aniqlaymiz. Ellipsning kanonik tenglamasi (11.8) ni y ga nisbatan yechsak,

$$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2};\quad y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right);\quad y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2);\quad y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

bo'ladi, bunda $0<x<a$, chunki $x>a$ bo'lganda ildiz ostidagi ifoda manfiy bo'lib u ma'noga ega bo'lmaydi. x 0 dan a gacha o'sganda y b dan 0 gacha kamayadi.

Ellipsning I chorakdagi bo'lagi koordinatalar o'qlarida joylashgan $B(0,b)$ va $A(a;0)$ nuqtalar bilan chegaralangan yoydan iborat bo'ladi (50–chizma).



50-chizma.

Ellipsning kanonik tenglamasida x ni $-x$ ga va y ni $-y$ ga o'zgartirilsa tenglama o'zgarmaydi.

Bu ellips koordinata o'qlariga nisbatan simmetrikligidan dalolat beradi. Ellipsning ana shu xususiyatiga asoslanib uning shakli 50-chizmada ko'rsatilgandek ekanligiga iqror bo'lamiz.

3-misol. Kichik yarim o'qi b=4 va ekssentrisiteti ε=0,6 bo'lgan ellipsning kanonik tenglamasini yezing.

Yechish. Shartga ko'ra $\varepsilon = \frac{c}{a} = 0{,}6;\quad c = 0{,}6a,\quad a^2 - c^2 = b^2$ tenglikka c va b ning qiymatlarini qo'yib a ni aniqlaymiz.

$$a^2 - (0{,}6a)^2 = 4^2; a^2(1-0{,}36) = 16;\quad 0{,}64a^2 = 16; a^2 = \frac{16}{0{,}64} = 25.$$

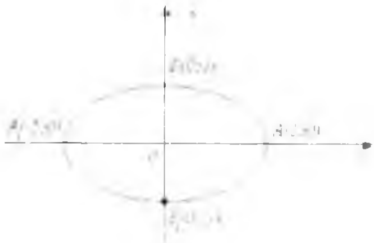
Shunday qilib ellipsning kanonik tenglamasi $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ ko'rinishda bo'lar ekan.

4-misol. $9x^2+25y^2-225=0$ tenglamaga ko'ra ikkinchi tartibli egri chiziqning turi aniqlansin va egri chiziq chizilsin.

Yechish. Berilgan tenglamani $9x^2+25y^2=225$ ko'rinishda yozib buni 225 ga bo'lsak

$$\frac{9x^2}{225}+\frac{25y^2}{225}=1 \quad \text{yoki} \quad \frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$$

kelib chiqadi. Demak berilgan tenglama



51-chizma.

yarim o'qlari $a=5$, $b=3$ bo'lgan ellipsni tenglamasi ekan (51-chizma).

5-misol. $4x^2-16x+9y^2-54y+61=0$ egri chiziqni chizing.

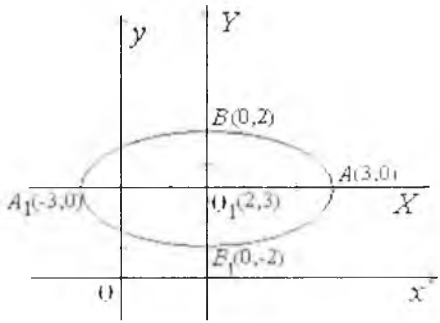
Yechish. Tenglamani $4(x^2-4x)+9(y^2-6y)+61=0$;

$4(x^2-4x+4)+9(y^2-6y+9)-16-81+61=0$ $\qquad 4(x-2)^2+9(y-3)^2=36$

ko'rinishda yozib, buni 36 ga bo'lsak $\dfrac{(x-2)^2}{9}+\dfrac{(y-3)^2}{4}=1$ yoki

$\dfrac{(x-2)^2}{3^2}+\dfrac{(y-3)^2}{2^2}=1$ tenglama hosil bo'ladi. x-2=X; y-3=Y almashtirish olsak, $\dfrac{X^2}{3^2}+\dfrac{Y^2}{2^2}=1$ kelib chiqadi.

Bu ellipsning O_1XY sistemaga nisbatan kanonik tenglamasi. Shunday qilib berilgan tenglama ellipsning umumiy tenglamasi ekan. Agar $0xy$ "eski" sistemani $O_1(2,3)$ nuqtaga parallel kuchirilsa ya'ni O_1XY sistemaga nisbatan ellipsning tenglamasi kanonik ko'rinishga ega bo'lar ekan (52-chizma).



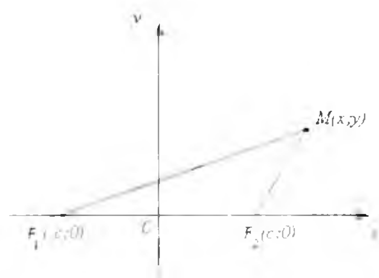
52-chizma.

11.4. Giperbola va uning kanonik tenglamasi

5-ta'rif. Har bir nuqtasidan tekislikning berilgan ikkita nuqtasigacha masofalarning ayirmasi o'zgarmas bo'lgan shu tekislik nuqtalarining geometrik o'rni *giperbola* deb ataladi.

Tekislikning berilgan nuqtalarini F_1 va F_2 orqali belgilab ularni gepirbolaning *fokuslari* deb ataymiz. Fokuslar orasidagi masofani $2c$ va giperbolaning har bir nuqtasidan uning fokuslarigacha bo'lgan masofalarning ayirmasini $\pm 2a$ orqali belgilaymiz. Oxy dekart koordinatalar sistemasini xuddi ellipsdagidek, ya'ni $0x$ o'qni F_1, F_2 fokuslaridan o'tadigan qilib tanlaymiz va koordinatalar boshini F_1F_2 kesmaning o'rtasiga joylashtiramiz.

U holda fokuslar $F_1(-c,0)$,$F_2(c,0)$ koordinatalarga ega bo'ladi (53-chizma).



53-chizma.

Endi giperbolaning tenglamasini keltirib chiqaramiz. $M(x,y)$ giperbolaning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin.

Ta'rifga binoan giperbolaning M nuqtasidan uning fokuslari F_1 va F_2 gacha masofalarning ayirmasi o'zgarmas son $\pm 2a$ ga teng, ya'ni

$$MF_1 - MF_2 = \pm 2a .$$

Ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasiga binoan $MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ va $MF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ bo'lgani uchun

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a \qquad (11.9)$$

kelib chiqadi.

Ellips tenglamasini chiqarishda bajarilgan amallarga o'xshash amallarni bajarib

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2) \qquad (11.10)$$

tenglamaga ega bo'lamiz. Ma'lumki uchburchak ikki tomonini ayirmasi uchinchi tomonidan kichik. Shunga ko'ra, ΔF_1MF_2 дан

$F_1M-F_2M<F_1F_2$; $2a<2c$; $a<c$; $a^2-c^2<0$ $(a>0, c>0)$ hosil bo'ladi. Shuning uchun $a^2-c^2=-b^2$ yoки $c^2-a^2=b^2$ deb belgilab olamiz. U holda (11.10) formula

$$-b^2x^2+a^2y^2=-a^2b^2 \quad \text{yoki} \quad b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Buni a^2b^2 ga bo'lib

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (11.11)$$

tenglamani hosil qilamiz. Shunday qilib giperbola ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtasini koordinatalari (11.11) tenglamani qanoatlatirar ekan. Shuningdek giperbolaga tegishli bo'lmagan hech bir nuqtaning koordinatalari bu tenglamani qanoatlantirmasligini ko'rsatish mumkin. Demak u giperbolaning tenglamasi.

(11.11) giperbolaning *kanonik* tenglamasi deb ataladi. Giperbolaning tenglamasida x va y juftlik darajalari bilan ishtirok etadi. Bu giperbola koordinata o'qlariga nisbatan simmetrikligidan dalolat beradi. Ya'ni qaralayotgan holda koordinata o'qlari giperbolaning simmetriya o'qlari ham bo'ladi.

Giperbolaning simmetriya o'qlarini kesishish nuqtasi *giperbolaning markazi* deb ataladi. Giperbolaning fokuslari joylashgan simmetriya o'qi uning *fokal o'qi* deb ataladi.

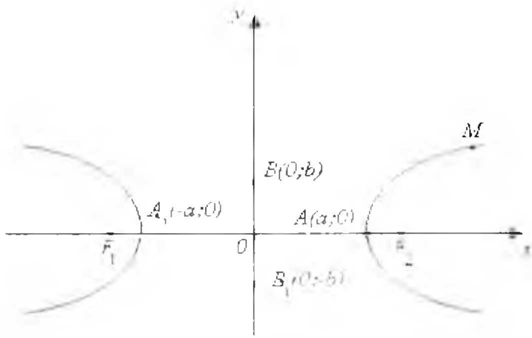
Endi giperbolaning shaklini chizishga harakat qilamiz. Oldin uning shaklini I chorakda chizamiz.

Giperbolaning kanonik tenglamasi (11.11) dan

$$\frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}-1;\quad \frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2-a^2}{a^2};\quad y^2=\frac{b^2(x^2-a^2)}{a^2};\quad y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

kelib chiqadi, chunki I chorakda $y\geq 0$. Bunda $x\geq a$, aks holda u ma'noga ega bo'lmaydi (ildiz ostida manfiy son bo'ladi). x a dan $+\infty$ гача o'zgarganda y 0 dan $+\infty$ gacha o'zgaradi. Demak, giperbolaning I chorakdagi qismi 54-chizmada tasvirlangan AM yoydan iborat bo'ladi.

Giperbola koordinata o'qlariga nisbatan simmetrikligini hisobga olsak uning shakli 54-chizmada tasvirlangan egri chiziqdan iborat bo'ladi.



54-chizma.

Giperbolaning fokal o'q bilan kesishish nuqtalari uning *uchlari* deb ataladi. Giperbolaning tenglamasiga $y=0$ ni qo'ysak $x=\pm a$ kelib chiqadi. Demak $A_1(-a;0)$ va $A(a;0)$ nuqtalar giperbolaning uchlari bo'ladi.

Giperbolaning tenglamasi (11.11) ga $x=0$ ni qo'ysak $-\frac{y^2}{b^2}=1;\ y=\pm\sqrt{-b^2}$ bo'ladi.

Bu esa haqiqiy son emas (manfiy sondan kvadrat ildiz chiqmaydi). Demak, giperbola Oy o'q bilan kesishmas ekan.

Shuning uchun giperbolaning fokal o'qi *haqiqiy o'qi* unga perpendikulyar simmetriya o'qi *mavhum o'qi* deb ataladi.

a va b sonlar mos ravishda giperbolaning *haqiqiy* va *mavhum yarim o'qlari* deyiladi.

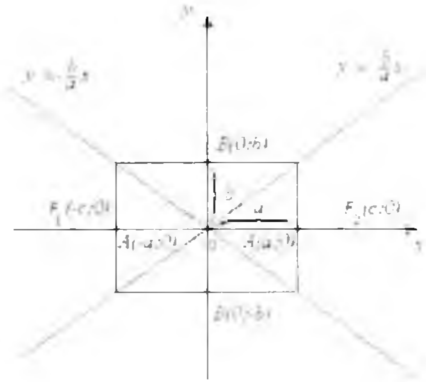
Giperbolaning M nuqtasi y bo'ylab cheksiz uzoqlashganda shu nuqtadan $y=-\frac{b}{a}x$ va $y=\frac{b}{a}x$ to'g'ri chiziqlarning birortasigacha masofa nolga intilishini ko'rsatish mumkin. Ya'ni giperbolaning koordinatalar boshidan yetarlicha katta masofada joylashgan nuqtalari $y=-\frac{b}{a}x$ va $y=\frac{b}{a}x$ to'g'ri chiziqlardan biriga yetarlicha yaqin joylashadi. Koordinatalar boshidan o'tuvchi bu to'g'ri chiziqlar *giperbolaning asimptotalari* deb ataladi.

Giperbolani chizishdan oldin uning asimptotalarini chizish tavsiya etiladi.

Markazi koordinatalar boshida bo'lib tomonlari Ox va Oy o'qlarga parallel va mos ravishda $2a$ va $2b$ ga teng bo'lgan to'g'ri burchakli to'rtburchak yasaymiz. Bu to'rtburchakni giperbolaning **asosiy to'rtburchagi** deb ataymiz.

To'rtburchakning diagonallarini har tarafga cheksiz davom ettirsak giperbolaning asimptotalari hosil bo'ladi (55-chizma).

$\frac{c}{a}$ nisbat giperbolaning *ekssentrisiteti* deb ataladi va ε orqali belgilanadi. Giperbola uchun $c>a$ bo'lganligi sababli $\varepsilon>1$ bo'ladi.



55-chizma.

Ekssentrisitet giperbolaning shaklini xarakterlaydi. Haqiqatdan, c^2-a^2=b^2 tenglamani har ikkala tomonini a^2 ga bo'lsak $\left(\frac{c}{a}\right)^2 - 1 = \left(\frac{b}{a}\right)^2$ yoki $\varepsilon^2 - 1 = \left(\frac{b}{a}\right)^2$ kelib chiqadi. ε kichrayganda $\frac{b}{a}$ nisbat ham kichrayadi. Ammo $\frac{b}{a}$ nisbat giperbolaning asosiy to'rtburchagini shaklini belgilaganligi uchun u giperbolaning ham shaklini belgilaydi. ε qanchalik kichik bo'lsa $\frac{b}{a}$ nisbat ham ya'ni giperbolaning asimptotalarini burchak koeffitsiyentlari ham shunchalik kichik bo'ladi va giperbola Ox o'qqa yaqinroq joylashadi.

Bu holda giperbolani asosiy to'rtburchagi Ox o'q bo'ylab cho'zilgan bo'ladi.

Haqiqiy va mavhum yarim o'qlari teng giperbola *teng tomonli* yoki *teng yonli* deb ataladi. Teng tomonli giperbolaning kanonik tenglamasi

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \text{yoki} \quad x^2 - y^2 = a^2$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

$y=x$ va $y=-x$ to'g'ri chiziqlar teng tomonli giperbolaning asimptotalari bo'lib uning ekssentrisiteti $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+a^2}}{a}=\sqrt{2}$ bo'ladi.

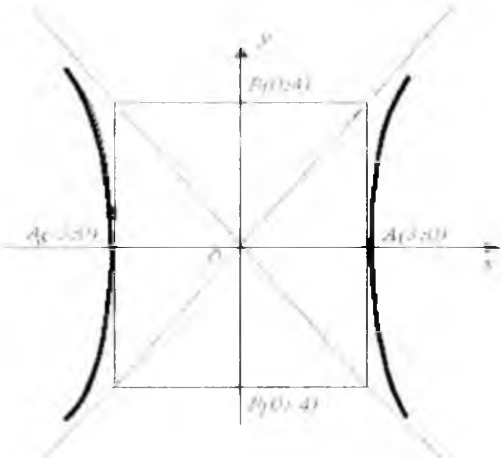
6-misol. $16x^2-9y^2=144$ egri chiziqni chizing.

Yechish. Uning har ikkala tomonini 144 ga bo'lsak,

$$\frac{16x^2}{144}-\frac{9y^2}{144}=1 \quad \text{yoki} \quad \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1;\ \frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{4^2}=1$$

kelib chiqadi. Demak qaralayotgan egri chiziq yarim o'qlari $a=3$ va $b=4$ bo'lgan giperbola ekan. Markazi koordinatalar boshida bo'lib tomonlari koordinata o'qlariga parallel hamda asosi 6 balandligi 8 bo'lgan to'g'ri to'rtburchak yasaymiz.

Uning diagonallarini cheksiz davom ettirib giperbolaning asimptotalarini hosil qilamiz.



56-chizma.

Giperbolaning uchlari $A_1(-3;0)$ va $A(3;0)$ nuqtalar orqali asimptotalarga nihoyatda yaqinlashib boruvchi silliq chiziqni o'tkazamiz. Hosil bo'lgan egri chiziq giperbolaning grafigi bo'ladi (56-chizma).

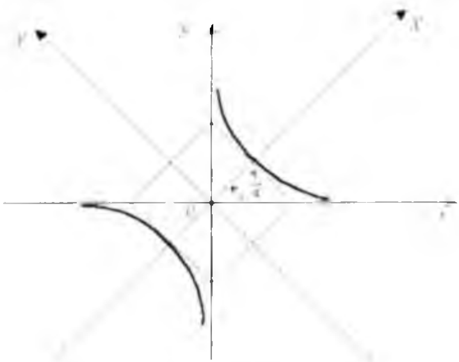
7-misol. $y=\frac{k}{x}$ funksiyaning grafigi giperbola ekanligi ko'rsatilsin.

Yechish. Koordinata o'qlarini $\alpha=\frac{\pi}{4}$ burchakka burib "yangi" $0XY$ sistemani hosil qilamiz. Bu holda «yangi» koordinatalardan «eski» koordinatalarga o'tish formulasi $x=\frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y)$, $y=\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y)$ ko'rinishga ega bo'lishi ko'rsatilgan edi (1.12-mavzu). x va y ning ushbu qiymatlarini $y=\frac{k}{x}$ tenglamaga qo'ysak

$\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y)=\frac{k}{\frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y)}$; $\quad \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y)(X-Y)=k$ yoki

$X^2-Y^2=2k$ hosil bo'ladi. Bu tenglama tengtomonli giperbolaning tenglamasi. $k>0$ bo'lganda giperbolaning haqiqiy o'qi $0X$ bilan, $k<0$ bo'lganda OY o'q bilan ustma-ust tushadi.

$k>0$ bo'lgan hol uchun giperbola 57-chizmada tasvirlangan.



57-chizma.

Ox, Oy "eski" o'qlar OXY "yangi" sistema koordinata burchaklarini bissektrisalari bo'lgani uchun ular teng tomonli giperbolaning asimptotalari bo'ladi. Shunday qilib $y = \frac{k}{x}$ funksiyaning grafigi asimtotalari Ox va Oy o'qlardan iborat tengtomonli giperbola bo'lar ekan, ya'ni_koordinatalari ko'paytmasi o'zgarmas ($xy=k$) tekislik nuqtalarining geometrik o'rni assimptotalari koordinata o'qlaridan iborat teng tomonli giperbola bo'lar ekan.

Endi $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ kasr-rasional funksiyaning grafigi assimptotalari koordinatalar o'qlariga parallel tengtomonli giperbola bo'lishini ko'rsatamiz.

$y = \frac{ax+b}{cx+d}$ tenglamada $c \neq 0$ (aks holda tenglama $y = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$ ko'rinishga ega bo'lib, u to'g'ri chiziqni ifodalaydi), $ad-bc \neq 0$ ($ad-bc=0$ bo'lganda $ad=bc$, $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = l$ desak $a=cl$, $b=dl$, $ax+b=l(cx+d)$ bo'lib, tenglama $y=l$ ko'rinishni oladi va, u $0x$ o'qqa parallel to'g'ri chiziqni ifodalaydi) bo'lsin.

Berilgan tenglamani o'ng tomonini surat va maxrajini c ga bo'lsak,

$$y = \frac{\frac{a}{c}x + \frac{b}{c}}{x + \frac{d}{c}}$$

bo'ladi. $\alpha = \frac{a}{c}$, $\beta = \frac{b}{c}$, $\delta = \frac{d}{c}$ begilashlarni kiritsak,

$$y = \frac{\alpha x + \beta}{x + \delta} \quad (x + \delta \neq 0)$$

tenglamaga ega bo'lamiz.

$x = X + x_0$, $y = Y + y_0$ formulalar yordamida yangi O_1XY koordinatalar sistemasiga o'tamiz, bunda x_0, y_0 hozircha noma'lum sonlar. Boshqacha aytilganda eski Oxy koordinatalar sistemasini koordinatalar boshini $O_1(x_0, y_0)$ nuqtaga parallel ko'chiramiz.

U holda x va y ning qiymatlarini oxirgi tenglamaga qo'yib quyidagiga ega bo'lamiz.

$$Y + y_0 = \frac{\alpha(X + x_0) + \beta}{X + x_0 + \delta}, \quad (X + x_0 + \delta)(Y + y_0) = \alpha(X + x_0) + \beta,$$

$$XY + (y_0 - \alpha)X + (x_0 + \delta)Y = \beta + \alpha x_0 - (x_0 + \delta)y_0. \quad (1)$$

Hozircha noma'lum x_0, y_0 larni (1) tenglamadagi X va Y oldidagi koeffitsiyentlarni nolga aylanish shartidan aniqlaymiz, ya'ni $y_0 - \alpha = 0,\ x_0 + \delta = 0.$

Bunda $x_0 = -\delta,\ y_0 = \alpha$. Bu holda $\beta + \alpha x_0 - (x_0 + \delta)y_0 = \beta - \alpha\delta$ ekanini hisobga olsak (1)

$$XY = C$$

ko'rinishni oladi, bunda $C = \beta - \alpha\delta \neq 0.$

$XY = C$ tenglama O_1XY koordinatalar sistemasida $X = 0,\ Y = 0$ asimptotalarga ega teng tomonli giperbolani ifodalaydi.

Shunday qilib berilgan tenglama Oxy koordinatalar sistemasida $x = -\dfrac{d}{c},\ y = \dfrac{a}{c}$ asimptotalarga ega teng tomonli giperbolani ifodalar ekan.

11.5. Parabola va uning kanonik tenglamasi

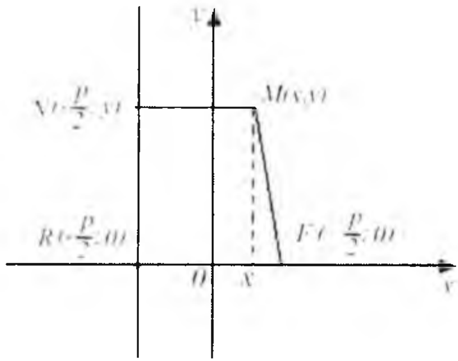
6-ta'rif. Berilgan nuqtadan hamda berilgan to'g'ri chiziqdan teng uzoqlikda joylashgan tekislik nuqtalarining geometrik o'rni *parabola* deb ataladi.

Berilgan nuqtani F orqali belgilab uni parabolaning *fokusi* deb ataymiz. Berilgan to'g'ri chiziq parabolaning *direktrisasi* deb ataladi. (Fokus direktrisada yotmaydi deb faraz qilinadi).

Fokusdan direktrisagacha masofani p orqali belgilaymiz va uni parabolaning *parametri* deb ataymiz.

Endi parabolaning tenglamasini keltirib chiqaramiz. Abssissalar o'qini fokusdan direktrisaga perpendikulyar qilib o'tkazib yo'nalishini direktrisadan fokusga tomon yo'naltiramiz.

Koordinatalar boshini fokusdan direktrisagacha masofa FR ning qoq o'rtasiga joylashtiramiz (58-chizma).



58-chizma

Tanlangan koordinatalar sistemasiga nisbatan fokus $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ koordinatalarga, direktrisa $x=-\frac{p}{2}$ tenglamaga ega bo'ladi. Faraz qilaylik $M(x;y)$ parabolaning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. Parabolaning ta'rifiga binoan M nuqtadan direktrisagacha MN masofa undan fokusgacha MF masofaga teng: $MN=MF$.

58-chizmadan $MN=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+(y-y)^2}=x+\frac{p}{2}$ va $MF=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+(y-0)^2}$ ekani ravshan.

Demak, $x+\frac{p}{2}=\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2}$.

Bu tenglamaning har ikkala tomonini kvadratga ko'tarib ixchamlasak

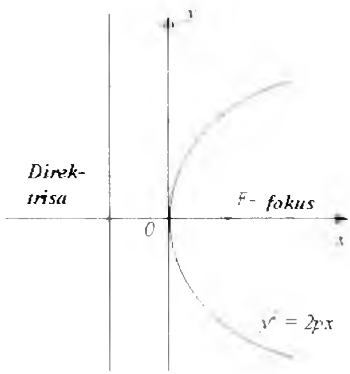
$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 \quad \text{yoki} \quad y^2 = 2px \qquad (11.12)$$

hosil bo'ladi.

Shunday qilib, parabolaning istalgan $M(x,y)$ nuqtasining koordinatalari (11.12) tenglamani qanoatlantiradi. Parabolada yotmagan hech bir nuqtaning koordinatalari bu tenglamani qanoatlantirmasligini ko'rsatish mumkin. Demak, (11.12) parabolaning tenglamasi ekan. U parabolaning *kanonik tenglamasi* deb ataladi. p parabolaning parametri deb yuritiladi.

Endi kanonik tenglamasiga ko'ra parabolaning shaklini chizamiz (11.12) tenglamada y ni $-y$ ga almashtirilsa tenglama o'zgarmaydi. Bu abssissalar o'qi parabolaning simmetriya o'qidan iborat ekanligini bildiradi. (11.12) tenglamaning chap tomoni manfiy bo'lmaganligi uchun uning o'ng tomoni ya'ni x ning ham manfiy bo'lmasligi kelib chiqadi. Demak parabola Oy o'qning o'ng tomonida joylashadi. $x=0$ da $y=0$. Demak parabola koordinatalar boshidan o'tadi.

x cheksiz o'sganda y ning absolyut qiymati ham cheksiz o'sadi. (11.12) tenglama yordamida aniqlanadigan parabola 59-chizmada tasvirlangan.



59-chizma.

Parabolaning simmetriya o'qi uning *fokal o'qi* deb ataladi.

Parabolaning simmetriya o'qi bilan kesishish nuqtasi uning *uchi* deyiladi. Qaralayotgan hol uchun koordinatalar boshi parabolaning uchi bo'ladi.

8-misol. $y^2=8x$ parabola berilgan. Uning direktrisasining tenglamasi yozilsin va fokusi topilsin.

Yechish. Berilgan tenglamani parabolaning kanonik tenglamasi (11.12) bilan taqqoslab $2p=8$, $p=4$ ekanini ko'ramiz. Direktrisa $x=-\frac{p}{2}$ tenglamaga, fokus $(-\frac{p}{2}, \ 0)$ koordinatalarga ega bo'lishini hisobga olsak direktrisaning tenglamasi $x=-2$ va focus $F(2;0)$ bo'ladi.

Izoh. Fokal o'qi $0y$ o'qdan iborat parabolaning tenglamasi

$$x^2=2py \tag{11.13}$$

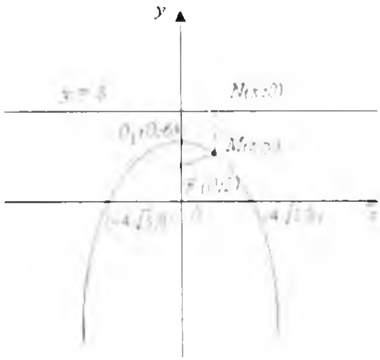
ko'rinishga ega bo'ladi

9-misol. $y=3x^2-12x+16$ parabolaning tenglamasi kanonik holga keltirilsin va uning uchi topilsin.

Yechish. Tenglamani $y=3(x^2-4x)+16$, $y=3(x^2-4x+4-4)+16$; $y=3(x-2)^2+4$; $y-4=3(x-2)^2$ ko'rinishga keltirib $x-2=X$, $y-4=Y$ deb belgilasak parabolaning tenglamasi

$$Y=3X^2$$

kanonik ko'rinishga keladi. $x-2=X$, $y-4=Y$ alamashtirish bilan "eski" $0xy$ sistemani $0_1(2;4)$ nuqtaga parallel ko'chirdik. "Yangi" 0_1XY sistemaga nisbatan parabolaning tenglamasi kanonik ko'rinishga ega bo'ladi. "Yangi" sistemani koordinatalar boshini koordinatalari parabola uchining koordinatalari bo'ladi, ya'ni $x_0=2$, $y_0=4$.



60-chizma.

10-misol. $F(0,4)$ nuqtadan hamda $y=8$ to'g'ri chiziqdan bir xil uzoqlikda joylashgan tekislik nuqtalarining geometrik o'rni, egri chiziqning koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalari topilsin va egri chiziq chizilsin.

Yechish. $M(x,y)$ egri chiziqning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. Shartga binoan undan $y=8$ to'g'ri chiziqqacha $MN=\sqrt{(x-x)^2+(8-y)^2}$ masofa va undan $F(0,2)$ nuqtagacha $MF=\sqrt{(x-0)^2+(y-4)^2}$ masofa o'zaro teng ya'ni, $\sqrt{(x-x)^2+(8-y)^2}=\sqrt{(x-0)^2+(y-4)^2}$ (60-chizma).

Bu tenglamaning har ikkala tomonini kvadratga ko'tarsak $(8-y)^2=x^2+(y-4)^2$ yoki qavslarni ochsak.

$$64-16y+y^2=x^2+y^2-8y+16 \text{ yoki } 64-16y=x^2-8y+16$$

hosil bo'ladi. Tenglamani soddalashtisak

$$-16y+8y=x^2+16-64,\ -8y=x^2-48$$

yoki -8 ga bo'lsak

$$y=-\frac{1}{8}x^2+6$$

tenglamaga ega bo'lamiz. U $0y$ o'qqa simmetrik parabolaning tenglamasi.

Endi parabolaning koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalarini topamiz. Parabola tenglamasiga $x=0$ qiymatni qo'ysak $y=6$ kelib chiqadi. Demak parabola $0y$ o'q bilan $0_1(0,6)$ nuqtada kesishar ekan. Shuningdek paraborla tenglamasiga $y=0$ qiymatini qo'ysak

$$-\frac{1}{8}x^2+6=0; -x^2+48=0; x^2=48; x=\pm\sqrt{48}=\pm 4\sqrt{3}$$

hosil bo'ladi. Demak parabola $0x$ o'q bilan $(-4\sqrt{3},0)$ ва $(4\sqrt{3},0)$ nuqtalarda kesishar ekan.

Agar parabola tenglamasini $y-6=-\frac{1}{8}x^2$ yoki $x^2=-8(y-6)$ ko'rinishda yozib $x=X$, $y-6=Y$ almashtirish olsak uning tenglamasi $X^2=-8Y$ kanonik shaklni oladi.

Izoh. Aylana, ellips, giperbola va parabola umumiy tenglamalari yordamida berilganda koordinatalar sistemasini parallel ko'chirish yoki koordinata o'qlarini burish yordamida umumiy tenglamani "yangi" sistemaga nisbatan kanonik ko'rinishga keltirish mumkin.

11.6. Ikkinchi darajali algebraik tenglamalar yordamida aniqlanadigan chiziqlar haqida

Biz to'rt xil ikkinchi tartibli egri chiziqlar: aylana, ellips, giperbola va parabolalarni ko'rdik. Ularning barchasini tenglamasi ikkinchi darajali algebraik tenglama

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

yordamida aniqlanadi. Shu tenglamani soddalashtirish bilan shug'ullanamiz.

1. Koordinatalar ko'paytmasi qatnashmagan ikkinchi darajali algebraik tenglamalarni soddalashtirish. Ushbu

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (11.14)$$

tenglama berilgan bo'lsin, bunda A, C, D, E, F ma'lum sonlar bo'lib $A^2 + C^2 \neq 0$ bo'lsin. Aks holda (11.14) egri chiziqni emas balki to'g'ri chiziqni ifodalaydi.

$A \neq 0$, $C \neq 0$ bo'lsin. U holda berilgan tenglamani chap tomonidan to'la kvadratga ajratib

$$A(x^2 + 2\cdot\frac{D}{2A}x + \frac{D^2}{4A^2} - \frac{D^2}{4A^2}) + C(y^2 + 2\cdot\frac{E}{2C} + \frac{E^2}{4C^2} - \frac{E^2}{4C^2}) + F = 0,$$

$$A(x + \frac{D}{2A})^2 - \frac{D^2}{4A} + C(y + \frac{E}{2C})^2 - \frac{E^2}{4C} + F = 0$$

yoki

$$A(x + \frac{D}{2A})^2 + C(y + \frac{E}{2C})^2 = \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F \qquad (11.15)$$

tenglikka ega bo'lamiz.

$$X = x + \frac{D}{2A}, \quad Y = y + \frac{E}{2C} \qquad (11.16)$$

formulalardan foydalanib yangi koordinatalarga o'tamiz. U holda (11.15)

$$AX^2 + CY^2 = l \qquad (11.17)$$

yoki $l \neq 0$ bo'lganda

$$\frac{AX^2}{l} + \frac{CY^2}{l} = 1 \qquad (11.18)$$

ko'rinishni oladi, bunda $l = \dfrac{D^2}{4A} + \dfrac{E^2}{4C} - F$.

1) $AC > 0$, ya'ni A va C bir xil ishorali bo'lsin. U holda $Al > 0$ bo'lganda (11.18) tenglik

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1 \qquad (11.19)$$

2) ko'rinishni va $AI<0$ bo'lganda u

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=-1 \qquad (11.20)$$

ko'rinishni oladi, bunda $a^2=\frac{I}{A}$, $b^2=\frac{I}{C}$.

$I=0$ bo'lganda (11.19) dan

$$AX^2+CY^2=0 \qquad (11.21)$$

tenglikka ega bo'lamiz.

(11.19) tenglama yarim o'qlari a va b bo'lgan ellipsni ($a=b$ bo'lganda aylanani) ifodalaydi.

(11.20) tenglik hech narsani (na chiziqni, na nuqtani) ifodalamaydi, ya'ni u bo'sh to'plam.

(11.21) tenglama yangi koordinatalar sistemasi O_1XY dagi $O_1(0;0)$ nuqtani ifodalaydi. Nuqtaning eski koordinatalari x, y (11.16) dan aniqlanadi.

2) $AC<0$, ya'ni A va C har xil ishorali bo'lsin.

Bu holda (11.17) I ga bog'liq ravishda

$$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1 \qquad (11.22)$$

$$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=-1, \quad -\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1 \qquad (11.23)$$

$$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=0 \qquad (11.24)$$

ko'rinishdagi tenglamalardan biriga keladi.

(11.22) tenglama haqiqiy o'qi O_1X dan iborat giperbolani, (11.23) tenglamalar haqiqiy o'qi O_1Y dan iborat giperbolani va (11.24) kesishuvchi $Y=-\frac{b}{a}X$, $Y=\frac{b}{a}X$ to'g'ri chiziqlarni ifodalaydi.

3) $A=0$, $C\neq0$ bo'lsin. Bu holda (11.14) tenglama

$$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Bu tenglamani

$$C(y^2 + 2\cdot\frac{E}{2C}y + \frac{E^2}{4C^2}) + Dx - \frac{E^2}{4C} + F = 0, \qquad (11.25),$$

$$C(y + \frac{E}{2C})^2 = -Dx - F + \frac{E^2}{4C}$$

va $D \neq 0$ bo'lganda buni

$$C(y + \frac{E}{2C})^2 = -D(x + \frac{F}{D} - \frac{E^2}{4CD}), \quad (y + \frac{E}{2C})^2 = -\frac{D}{C}(x + \frac{4CF - E^2}{4CD})$$

ko'rinishda yozamiz.

$$x + \frac{4CF - E^2}{4CD} = X, \quad y + \frac{E}{2C} = Y$$

Almashtirish olib $\frac{-D}{C} = 2p$ belgilashni kiritsak so'ngi tenglik

$$Y^2 = 2pX \qquad (11.26)$$

ko'rinishni oladi.

$D=0$ bo'lganda (11.25)

$C(y + \frac{E}{2C})^2 = \frac{E^2}{4C} - F$ yoki $(y + \frac{E}{2C})^2 = \frac{E^2}{4C^2} - \frac{F}{C}$ (11.27) tenglikka ega bo'lamiz. $y + \frac{E}{2C} = Y$ almashtirish olib $\frac{E^2}{4C^2} - \frac{F}{C} = l$ belgilashni kiritsak (11.27) tenglik $Y^2 = l$ ko'rinishni oladi. Bu tenglama l ning ishorasiga bog'liq ravishda $Y^2 = b^2$, $Y^2 = -b^2$, $Y^2 = 0$ ko'rinishdagi tenglamalardan biriga keladi. $Y^2 = 2pX$ tenglama OX simmetriya o'qiga ega parabolani, $Y^2 = b^2$ tenglama

$Y = b$, $Y = -b$ parallel to‘g‘ru chiziqlarni, $Y^2 = 0$ tenglama ustma-ust tushuvchi bir juft to‘g‘ri chiziqlarni ifodalaydi. $Y^2 = -b^2$ tenglama hech narsa (na chiziq, na nuqta)ni ifodalamaydi.

Shuningdek $C=0$, $A\neq 0$ bo‘lganda (11.14) tenglama $E\neq 0$ da $X^2 = 2qY$ ko‘rinishdagi tenglamaga, $E=0$ da u $X^2 = a^2$, $X^2 = -a^2$, $X^2 = 0$ ko‘rinishdagi tenglamalardan biriga keltiriladi.

11-misol. $25x^2 - 16y^2 - 100x - 32y + 484 = 0$ tenglama aniqlaydigan chiziq chizilsin.

Yechish. Tenglamani $25(x^2 - 4x) - 16(y^2 + 2y) + 484 = 0$,

$$25(x^2 - 4x + 4 - 4) - 16(y^2 + 2y + 1 - 1) + 484 = 0,$$

$$25[(x-2)^2 - 4] - 16[(y+1)^2 - 1] + 484 = 0,$$

$$25(x-2)^2 - 100 - 16(y+1)^2 + 16 + 484 = 0,$$

$$25(x-2)^2 - 16(y+1)^2 + 400 = 0, 25(x-2)^2 - 16(y+1)^2 = -400$$

ko‘rinishida yozib oxirgi tenglikni -400 ga bo‘lsak

$$-\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+1)^2}{25} = 1$$

tenglama hosil bo‘ladi. $X=x-2$, $Y=y+1$ almashtirish yordamida eski Oxy sistemaning o‘qlarini parallel ko‘chirib uning koordinatalar boshini $O_1(2;-1)$ nuqtaga qo‘ysak tenglama

$$-\frac{X^2}{16} + \frac{Y^2}{25} = 1$$

ko‘rinishni oladi. Bu tenglama yangi O_1XY sistemada O_1Y haqiqiy o‘qqa, O_1X mavhum o‘qqa hamda $a=4$, $b=5$ yarim o‘qlarga ega giperbolaning tenglamasidir (61-chizma)

61-chizma.

2. Ikkinchi darajali algebraik tenglamalarni soddalashtirish. Ikkinchi darajali

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \qquad (11.28)$$

tenglamani qaraymiz, bunda A,B,C,D,E,F ma'lum sonlar bo'lib ulardan A,B,C bir vaqtda nolga teng emas, ya'ni $A^2+B^2+C^2\neq 0$, $B=0$ bo'lgan hol yuqorida qaralganligi uchun $B\neq 0$ bo'lgan holni qaraymiz.

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (11.29)$$

formulalar yordamida x', y' yangi koordinatalarga o'tamiz. (11.28) ga x,y o'rniga ularning (11.29) dagi qiymatlarini qo'yib quyidagiga ega bo'lamiz.

$$\begin{aligned} &A(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)^2+2B(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)+ \\ &+C(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)^2+D(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)+E(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)+F=0, \\ &A(x'^2\cos^2\alpha-2x'y'\cos\alpha\sin\alpha+y'^2\sin^2\alpha)+2B(x'^2\cos\alpha\sin\alpha+x'y'\cos^2\alpha- \\ &-x'y'\sin^2\alpha-y'^2\cos\alpha\sin\alpha)+C(x'^2\sin^2\alpha+2x'y'\cos\alpha\sin\alpha+y'^2\cos^2\alpha)+ \qquad (11.30) \\ &+D(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)+E(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)+F=0, \\ &(A\cos^2\alpha+2B\cos\alpha\sin\alpha+C\sin^2\alpha)x'^2+2[(C-A)\cos\alpha\sin\alpha+ \\ &+B(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)]x'y'+(A\sin^2\alpha-2B\cos\alpha\sin\alpha+C\cos^2\alpha)y'^2+ \\ &+(D\cos\alpha+E\sin\alpha)x'+(E\cos\alpha-D\sin\alpha)y'+F=0. \end{aligned}$$

Burilish burchagi α ni

$$(C-A)\cos\alpha\sin\alpha+B(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=0$$

yoki $\frac{(C-A)}{2}\sin 2\alpha+B\cos 2\alpha=0$

shartdan aniqlaymiz. Bundan $B\cos 2\alpha=\frac{A-C}{2}\sin 2\alpha$,

$$\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{A-C}{2B}. \tag{11.31}$$

(11.30) dagi x'^2, y'^2 oldidagi koeffitsiyentlar bir vaqtda nolga teng bo'laolmasligini ko'rsatamiz.

Teskarisini faraz qilamiz, ya'ni

$$A\cos^2\alpha+2B\cos\alpha\sin\alpha+C\sin^2\alpha=0,$$
$$A\sin^2\alpha-2B\cos\alpha\sin\alpha+C\cos^2\alpha=0$$

bo'lsin. Birinchi tenglamadan ikkinchisini hadlab ayirsak

$$A(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+4B\cos\alpha\sin\alpha+C(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)=0$$

yoki

$$A\cos 2\alpha+2B\sin 2\alpha-C\cos 2\alpha=0,\ (A-C)\cos 2\alpha=-2B\sin 2\alpha$$

kelib chiqadi. Bundan $ctg2\alpha=-\frac{2B}{A-C}$. Buni $ctg2\alpha$ ni oldin topilgan (11.31)dagi qiymati bilan tenglashtirib $-\frac{2B}{A-C}=\frac{A-C}{2B}$ tenglikka, bundan $-4B^2=(A-C)^2$ ga ega bo'lamiz. Bu tenglik faqatgina $B=0$, $A=C$ bo'lgandagina o'rinli. Bu $B\neq 0$ deb qilingan farazga zid.

Shunday qilib (11.29) formulalar yordamida yangi $Ox'y'$ koordinatalar sistemasiga o'tilganda (11.28) tenglamaning darajasi pasaymas ekan.

Demak berilgan chiziq dekartning biror koordinatalar sistemasida ikkinchi darajali algebraik tenglama bilan aniqlansa, u dekartning istalgan boshqa bir koordinatalar sistemasida ham ikkinchi darajali algebraik tenglama bilan aniqlanar ekan.

Izoh. Koordinatalarni almashtirish formulasi (11.29) da $\sin\alpha, \cos\alpha$ ishtirok etadi. Ular ma'lum

$$\cos 2\alpha = \frac{ctg 2\alpha}{\pm\sqrt{1+ctg^2 2\alpha}}, \sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}, \quad \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$$

trigonometrik formulalar yordamioda topilishi mumkin. Formulalardagi $\pm$ ishoralardan istalgan birini olish mumkin.

$\cos\alpha$, $\sin\alpha$ larning qiymatlarini (11.30) ga qo'ysak u

$$A_1x'^2 + C_1y'^2 + D_1x' + E_1y' + F = 0$$

ko'rinishida yuqorida keltirilgan tenglamaga keltiriladi.

Xulosa. Dekartning to'g'ri burchakli koordinatalariga nisbatan ikkinchi darajali

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

algebraik tenglama yo bo'sh to'plamni (hech narsani ifodalamaydi), yo bir juft (kesishuvchi, parallel, ustma-ust tushuvchi) to'g'ri, chiziqni yoki ellips (aylana), giperbola, parabolalardan birining tenglamasini ifodalar ekan.

Masalan: 1. Ikkinchi darjali $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=0$ tenglamani faqat bitta (x_0, y_0) nuqtaning koordinatalari qanoatlantiradi xolos. Demak, bu tenglama nuqtani aniqlaydi.

2. Ikkinchi darajali $x^2-y^2=0$ tenglamani $(x-y)(x+y)=0$ ko'rinishda yozsak uni $x-y=0, x+y=0$ to'g'ri chiziq nuqtalarining koordinatalari qanoatlantiradi xolos x-y=0 (yoki $y=x$) va $x+y=0$ ($y=-x$) to'g'ri chiziqlar koordinatalar boshida kesishuvchi koordinata burchaklarining bessektrisalaridir. $x^2-y^2=0$ tenglama ikkita kesishuvchi to'g'ri chiziqlarning tenglamasi.

3. Ikkinch darajali $y^2=9$ tenglamani $y^2-9=0$ yoki (y-3)(y+3)=0 ko'rinishda yozsak uni y=3 va y=-3 parallel to'g'ri

chiziqlarni nuqtalarining koordinatalari qanoatlantiradi xolos. Demak $y^2 = 9$ tenglama ikkita parallel to‘g‘ri chiziqlarning tenglamasi.

4. Ikkinchi darajali $x^2 - 2xy + y^2 = 0$ tenglamani $(x - y)^2 = 0$ ko‘rinishda yozsak u $x-y=0$ (I va III koordinata burchaklari bissektrisasi) to‘g‘ri chiziq tenglamasiga teng kuchli bo‘ladi.

Bu holda shartli ravishda $x^2 - 2xy + y^2 = 0$ tenglama ustma-ust tushgan ikkita to‘g‘ri chiziqning tenglamasi deyiladi.

5. Ikkinchi darajali $x^2 + y^2 + 3 = 0$ tenglama hech narsani aniqlamaydi, chunki koordinatalari bu tenglamani qanoatlantiruvchi nuqta mavjud emas.

Shunday qilib egri chiziq umumiy tenglamasi (11.15) bilan berilganda tenglama koordinatalar sistemasi o‘qlarni burish hamda o‘qlarni parallel ko‘chirish natijasida hosil qilingan yangi sistemaga nisbatan kanonik ko‘rinishga keltirilib ikkinchi tartibli egri chiziqning turi aniqlanadi va egri chiziq chiziladi.

Koordinatalar sistemasi o‘qlarini burish natijasida yangi sistemaning koordinata o‘qlari egri chiziqning simmetriya o‘qlariga parallel holga keltiriladi.

Yangi sistemaning o‘qlarini parallel ko‘chirilib uning koordinatalar boshi ikkinchi tartibli egri chiziqning markaziga qo‘yiladi. Natijada egri chiziq tenglamasi so‘ngi koordinatalar sistemasiga nisbatan kanonik ko‘rinishga ega bo‘ladi.

12-misol. $5x^2 - 6xy + 5y^2 + 16x - 16y = 0$ tenglamaga ega chiziqning turi aniqlansin va u chizilsin.

Yechish. Misolda $A=5, B=-3, C=5$ bo‘lgani uchun

$$ctg2\alpha = \frac{A-C}{2B} = \frac{5-5}{-6} = 0,\ \text{bundan}\ 2\alpha = 90^0,\ \alpha = 45^0.$$

$\cos 45^0 = \sin 45^0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ekanini hisobga olib (11.29) ni

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \\ y &= \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') \end{aligned}\right| \qquad (11.32)$$

ko‘rinishda yozamiz.

x va y ning ushbu qiymarlarini berilgan tenglamaga qo‘yib uni soddalashtiramiz.

$$5\cdot\frac{1}{2}(x'-y')^2 - 6\cdot\frac{1}{2}(x'-y')(x'+y') + 5\cdot\frac{1}{2}(x'+y')^2 + 16\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y') - 16\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y') = 0$$

$$\frac{5}{2}(x'^2 - 2x'y' + y'^2) - 3(x'^2 - y'^2) + \frac{5}{2}(x'^2 + 2x'y' + y'^2) + 8\sqrt{2}(x' - y') - 8\sqrt{2}(x' + y') = 0,$$

$$2x'^2 + 8y'^2 - 16\sqrt{2}y' = 0,\ x'^2 + 4(y'^2 - 2\sqrt{2}y') = 0,\ x'^2 + 4(y'^2 - 2\sqrt{2}y' + 2) - 8 = 0,$$

$$x'^2 + 4(y' - \sqrt{2})^2 = 8.$$

$X = x'$, $Y = y' - \sqrt{2}$ formulalar yordamida yangi koordinatalarga o‘tsak oxirgi tenglama $X^2 + 4Y^2 = 8$ yoki buni 8 ga bo‘lsak $\dfrac{X^2}{8} + \dfrac{Y^2}{2} = 1$ ko‘rinishga ega bo‘ladi. Bu tenglama markazi $X = 0$, $Y = 0$ koordinatalarga ega O_1 nuqtada bo‘lgan ellipsni tenglamasi.

$X = x'$, $Y = y' - \sqrt{2}$ tengliklarga $X = 0$, $Y = 0$ qiymatlarni qo‘yib $x' = 0$, $y' = \sqrt{2}$ qiymatlarni topamiz. Bularni (11.19)ga qo‘yib

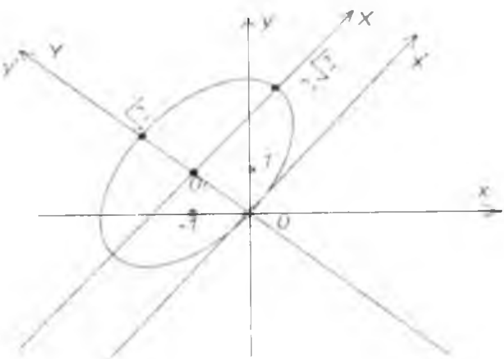
$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(0 - \sqrt{2}) = -1,\quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}(0 + \sqrt{2}) = 1 \text{ ni topamiz.}$$

Demak, ellipsning markazi $O_1(-1;1)$ nuqtada ekan.

Shunday qilib eski Oxy koordinatalar sistemasining o‘qlarni soat mili yo‘nalishiga teskari yo‘nalishida 45^0 ga burib, keyin yangi $Ox'y'$ koordinatalar sistemasini koordinatalar boshini $O_1(-1;1)$ nuqtaga parallel ko‘chirilsa hosil bo‘lgan O_1XY koordinatalar sistemasida berilgan tenglama yarim o'qlari $a=2\sqrt{2}$, $b=\sqrt{2}$ bo'lgan ellipsni aniqlar ekan.

Ellipsni $O'XY$ sistemada chizamiz.

Ellips eski Oxy koordinatalar sistemasining koordinatalar boshidan o'tadi, chunki $x=0$, $y=0$ ellips tenglamasini qanoatlantiradi (62-chizma).



62-chizma.

11.7. Ikkinchi tartibli egri chiziqlarning qo'llanilishi

Endi ikkinchi tartibli egri chiziqlarning fan va texnikaning turli sohalarida qo'llanilishiga misollar keltiramiz.

1. Quyosh sistemasining planetalari uning atrofida fokuslarining birida quyosh joylashgan ellips bo'ylab harakat qiladi.

2. Havoning qarshiligini hisobga olinmasa gorizontga ma'lum burchak ostida otilgan snaryad parabolani chizadi.

3. Agar parabolaning fokusiga yorug'lik manbayi joylashtirilsa paraboladan qaytgan nur parabolaning o'qiga parallel yo'naladi. Projektorning qurilmasi parabolaning ana shu xossasiga asoslangan.

4. Yerning sirtidan gorizontga ma'lum burchak ostida $v_0=11,2$ km/sek (ikkinchi kosmik tezlik) boshlang'ich tezlik bilan uchirilgan raketa parabola bo'yicha harakatlanib yerdan cheksiz uzoqlashishi

mexanikada isbotlangan. v_0>11,2 km/sek boshlang'ich tezlik bilan uchirilgan raketa giperbola bo'yicha harakatlanib yer sathidan cheksiz uzoqlashadi. Yerdan v_0<11,2 km/sek boshlang'ich tezlik bilan uchirilgan raketa yerning atrofida ellips bo'ylab harakatlanib u yo yerga qulab tushadi yoki yerning sun'iy yo'ldoshiga aylanadi.

Endi ikkinchi tartibli egri chiziqlarning qishloq xo'jaligi masalalarini yechishda uchrashiga doir misollar keltiramiz.

5. Makkajuxori donining hosildorligi y va namlikning unumdorlik zahirasi x orasidagi bog'lanish

$$y=-0{,}006x^2+1{,}100x-4{,}200$$

formula yordamida aniqlanishi tajriba yo'li bilan isbotlangan. Oxirgi tenglama pastga yo'nalgan parabola tenglamasi. Ana shu parabolani chizib hosildorlik qachon yuqori bo'ladi va hosildorlik qachon nolga teng bo'ladi degan savollarga javob topish mumkin.

6. Bir sutkada sigirdan sog'ilgan sut y (litrda) va sigirning yoshi x (yil) orasidagi bog'lanish

$$y=-9{,}53+6{,}86x-0{,}49x^2$$

formula yordamida aniqlanishi isbotlangan.

Bu tenglama parabolani ifodalaydi. Shu parabolani biror oraliqda, masalan [2,12] oraliqda chizish orqali sigir necha yoshida eng ko'p sut beradi degan savolga javob topish mumkin. Chunki parabola uchining abssissasi sigirning o'sha yoshiga to'g'ri keladi. Qaralayotgan holda sigir eng ko'p sutni 7 yoshida berishini isbotlashni o'quvchiga havola etamiz.

7. Oq so'xta o'simligining o'sish balandligi y dastlabki namlikdan sug'orilganga qadar 25-60% oralig'ida va tuproqning eng kam namligi x orasidagi bog'lanish

$$y=-215+\frac{12940}{x}$$

formula yordamida ifodalanishi isbotlangan, bunda x % da y esa mm da olinadi.

Bu tenglama tengtomonli giperbolaning tenglamasidir.

8. 1 kg yog' olish uchun lozim bo'lgan sut (litr) miqdori $y=\frac{88}{x}$ formula yordamida aniqlanadi, bunda x sutdagi yog'ning foizi $(2<x<6)$.

Bu tenglama asimptotalari koordinata o'qlaridan iborat tengtomonli giperbolaning tenglamasi.

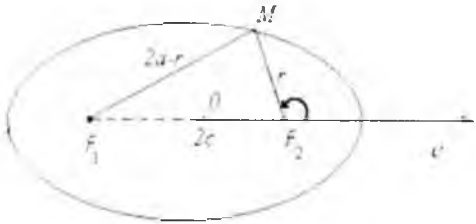
Endi shu formuladan foydalanib 6 kg yog' olish uchun yog'liligi $x=4{,}2$ bo'lgan sutdan necha litr kerak bo'lishini aniqlaymiz.

$$y=\frac{88}{4.2}=20.92$$

Demak 1 kg yog' olish uchun 20,92 litr sutni olish kerak ekan. 6 kg yog' olish uchun esa $6\cdot 20{,}92=125{,}7$ litr sut kerak bo'ladi.

11.8. Ikkinchi tartibli egri chiziqlarning qutb tenglamalari

Qutb koordinatalar sistemasida ellips tenglamasini keltirib chiqaramiz. Buning uchun qutbni ellipsning o'ng fokusi F_2 ga joylashtirib qutb o'qini F_1F_2 dan o'tuvchi to'g'ri chiziq bo'yicha yo'naltiramiz (63-chizma).



63-chizma

Faraz qilaylik M (r, φ) ellipsning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. U holda $F_2M=r$ ekanini hisobga olsak ellipsning ta'rifiga binoan

$F_1M=2a-r$ bo'ladi, chunki ta'rifga ko'ra

$$F_1M+F_2M=2a.$$

Kosinuslar teoremasiga binoan ΔF_1MF_2 dan

$$(2a-r)^2=r^2+(2c)^2-2\cdot r\cdot 2c\cdot\cos(180^0-\varphi);$$

$$4a^2-4ar+r^2=r^2+4c^2+4rc\cos\varphi; a^2-ar=c^2+cr\cos\varphi;$$

$$a^2-c^2=ar+cr\cos\varphi;\quad b^2=ar(1+\frac{c}{a}\cos\varphi);\quad \frac{b^2}{a}=r(1+\varepsilon\cos\varphi)$$

kelib chiqadi. $p=\frac{b^2}{a}$ deb belgilasak.

$$p=r(1+\varepsilon\cos\varphi) \text{ yoki } r=\frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi} \qquad (11.33)$$

hosil bo'ladi.

p-ellipsning **parametri** deb ataladi. (11.33) ellipsning qutb tenglamasi. Bu yerda $0<\varepsilon<1$.

Agarda qutbni ellipsning chap fokusi F_1 ga joylashtirsak uning tenglamasi

$$r=\frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi} \quad (11.34)\ (0<\varepsilon<1)$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Osonlik bilan tekshirib ko'rish mumkinki $\varepsilon>1$ bo'lganda (11.33) yoki (11.34) tenglamalar giperbolaning tenglamasini $\varepsilon=1$ bo'lganda esa ular parabolaning tenglamasini ifodalaydi.

Shunday qilib ε ning qiymatiga bog'liq ravishda bitta (11.33) yoki (11.34) tenglama uchta chiziq ellips, giperbola va paraboladan birini ifodalashi mumkin ekan.

13-misol. Ikkinchi tartibli egri chiziqlarning tenglamalari kanonik ko'rinishda yozing.

$$\text{a) } r=\frac{9}{5-4\cos\varphi};\quad \text{b) } r=\frac{9}{4-5\cos\varphi};\quad \text{d) } r=\frac{3}{1-\cos\varphi}.$$

Yechish. a) Tenglamani $r = \dfrac{9}{5(1-\frac{4}{5}\cos\varphi)}$ yoki $r = \dfrac{\frac{9}{5}}{1-\frac{4}{5}\cos\varphi}$

ko'rinishda yozib uni (11.34) bilan taqqoslasak $\dfrac{b^2}{a} = \dfrac{9}{5}, \varepsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{4}{5}$

kelib chiqadi. $\varepsilon = \dfrac{4}{5} < 1$ bo'lgani uchun berilgan tenglama ellipsning qutb tenglamasi.

$a=5$, $b=3$ va $c=4$ sonlar $\dfrac{b^2}{a} = \dfrac{9}{5}$ va $\dfrac{c}{a} = \dfrac{4}{5}$ tenglamalarni qanoatlantiradi. Demak yarim o'qlari $a=5$, $b=3$ bo'lgan ellipsning kanonik tenglamasi $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ bo'ladi.

b) Shuningdek tenglamani $r = \dfrac{9}{4(1-\frac{5}{4}\cos\varphi)} = \dfrac{\frac{9}{4}}{1-\frac{5}{4}\cos\varphi}$

ko'rinishda yozib uni (11.34) bilan taqqoslasak $\dfrac{b^2}{a} = \dfrac{9}{4}, \varepsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{5}{4}$

kelib chiqadi. Bundan $b=3$, $a=4$, $c=5$ hosil bo'ladi. $\varepsilon = \dfrac{5}{4} > 1$ bo'lgani uchun berilgan tenglama giperbolaning qutb tenglamasini ifodalaydi va giperbolaning kanonik tenglamasi $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$ bo'ladi.

d) Tenglamani $r - r\cos\varphi = 3$ ko'rinishda yozib olib qutb va dekart koordinatalarni bog'lovchi $r = \sqrt{x^2+y^2}, r\cos\varphi = x$ formulalardan foydalanamiz. U holda $\sqrt{x^2+y^2} - x = 3$ yoki $\sqrt{x^2+y^2} = 3 + x$.

Tenglamani har ikkala tomonini kvadratga ko'tarib ixchamlasak, $x^2+y^2=(3+x)^2$; $x^2+y^2=9+6x+x^2$; $y^2=6x+9$ yoki $y^2=6(x+3/2)$ bo'ladi. Bu chiziq simmetriya o'qi $0x$ o'qdan iborat parabola ekan. Parabolani tenglamasini kanonik holga keltirish uchun "eski" sistemaning koordinatalar boshini $0_1(0;-\frac{3}{2})$ nuqtaga parallel ko'chiramiz, ya'ni $x+\frac{3}{2}=X$, $y=Y$ deb olamiz. U holda parabola tenglamasi 0_1XY sistemaga nisbatan

$$Y^2=6X$$

kanonik ko'rinishga ega bo'ladi.

Mustaqil yechish uchun mashqlar va test savollari

1. a) markazi (2;-3) nuqtada va radiusi 4 ga teng. b) markazi (-2;3) nuqtada va (1,-1) nuqtadan o'tuvchi; d) diametri AB kesmadan iborat, bunda $A(3;9)$ va $B(7;3)$ aylananing kanonik tenglamasi yozilsin va aylana chizilsin.

Javob: a) $(x-2)^2+(y+3)^2=4^2$; b) $(x+2)^2+(y-3)^2=5^2$; d) $(x-5)^2+(y-6)^2=13$.

2. $A(9;3)$, $B(-3;3)$ va $C(11;1)$ nuqtalardan o'tuvchi aylananing kanonik tenglamasi yozilsin.

Ko'rsatma. Aylananing kanonik tenglamasiga x va y o'rniga berilgan nuqtalarni koordinatalarini qo'yib a, b va R ni aniqlash uchun uchta tenglamalar sistemasi hosil qilinadi.

3. Ikkinchi darajali $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ algebraik tenglama markazi $0(4;3)$ nuqtada, radiusi 6 ga teng aylanani ifodalashi uchun uning koeffitsiyentlari qanaqa qiymatlarni qabul qilishi kerak? Javob: $A=C=1$, $B=0$, $D=-8$, $E=6$, $F=-11$

4. a) $x^2+y^2-4x+6y-3=0$; b) $x^2+y^2-6x+5=0$; d) $x^2+y^2-4y=0$ umumiy tenglamalari yordamida berilgan aylananing markazi va radiusi topilsin.

Javob: a) $0_1(2,-3)$, $R=4$; b) $0_1(3,0)$, $R=2$, d) $0_1(0;2)$, $R=2$.

5. Ox o'qqa urinib Oy o'q bilan $B(0;6)$ nuqtada kesishuvchi aylananing tenglamasi yozilsin. Javob: $x^2+(y-3)^2=9$.

6. Koordinatalar boshidan a birlik uzoqlikda koordinata o'qlariga urinadigan aylananing tenglamasi yozilsin.

Javob: $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$; $(x+a)^2+(y-a)^2=a^2$; $(x-a)^2+(y+a)^2=a^2$; $(x+a)^2+(y+a)^2=a^2$.

7. Ellipsning kanonik tenglamasi yozilsin va ellips chizilsin.

a) yarim o'qlari mos ravishda 6 va 4 ga teng;

b) fokuslari orasidagi masofa 8 va katta yarim o'qi 5 ga teng;

d) katta yarim o'qi 10 ga va ekssentrisiteti 0,6 ga teng;

e) kichik yarim o'qi 6 ga va ekssentrisiteti 0,8 ga teng;

f) ekssentrisiteti 0,8 ga va fokuslari orasidagi masofa 8 ga teng.

Javob: a) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$; b) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$;

d) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$; e) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$; f) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

8. Ellipsning tenglamasi $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{12}=1$ va $M(3;y)$ nuqtasi berylgan. Shu nuqtasining ordinatasi y topilsin. *Javob:* $y=\pm 3$.

9. $M(4;0)$ va N $(2;3)$ nuqtalardan o'tuvchi ellipsning kanonik tenglamasi yozilsin. *Javob:* $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.

10. $x^2+y^2=25$ aylananing barcha nuqtalarini ordinatalarini 5 barobar kichraytirish natijasida hosil bo'lgan egri chiziq tenglamasi yozilsin, turi aniqlansin va egri chiziq chizilsin.

Javob: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{1}=1$ -ellips.

11. Giperbolaning kanonik tenglamasi tuzilsin va giperbola chizilsin.

a) yarim o'qlari mos ravishda 5 va 4 ga teng;

b) fokuslari orasidagi masofa 14 ga, uchlari orasidagi masofa 12 ga teng;

d) haqiqiy yarim o'qi 5 ga va ekssentrisiteti 1,4 ga teng;

e) fokuslari orasidagi masofa 16 ga va ekssentrisiteti 4/3 ga teng;

f) haqiqiy yarim o'qi $\sqrt{15}$ ga teng va $A(5;-2)$ nuqtadan o'tuvchi;

g) $M_1(2\sqrt{7};-3)$ va $M_2(-7,-6\sqrt{2})$ nuqtalardan o'tuvchi.

Javob: a) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$; b) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{13}=1$;

d) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{24}=1$; e) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{28}=1$;

f) $\frac{x^2}{15}-\frac{y^2}{6}=1$; g) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{75}=1$.

12. a) $25x^2$-$144y^2$=3600, b) $16y^2$-$9x^2$=144, d) $4x^2$-y^2-16=0 tenglamalari yordamida berilgan giperbolalarning a,b–yarim o'qlari, ε-ekssentrisiteti va F_1, F_2 fokuslari topilsin.

Javob: a) a=12, b=5, $\varepsilon=\frac{13}{12}$, $F_1(-13;0)$, $F_2(13;0)$ b)a=3, b=4, $\varepsilon=\frac{5}{4}$, $F_1(0;-5)$, $F_2(0;5)$ d) a=2, b=4, $c=2\sqrt{5}$, $F_1(-2\sqrt{5};0)$, $F_2(2\sqrt{5};0)$

13. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}=1$ giperbolaning asimptotalarini tenglamalari yozilsin.

Javob: $y=\frac{5}{3}x$ va $y=-\frac{5}{3}x$.

14. 1 kg yog' olish uchun kerakli sut miqdori $y=\frac{88}{x}$ formula yordamida aniqlanishi ma'lum bo'lsa (x-sutdagi yog' foizi) 20 litr sutdan 1 kg yog' olinishi uchun sutdagi yog' foizi qanday bo'lishi kerak? *Javob:* x=4,4%.

15. Fokuslari orasidagi masofa 5 va asimptotalari $y=\frac{1}{2}x$ va $y=-\frac{1}{2}x$ tenglamalarga ega giperbolaning kanonik tenglamasi yozilsin.

Javob: $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$.

16. Ekssentrisiteti 2 ga teng giperbolaning asimptotalari orasidagi burchak topilsin.

Javob: 60^0.

17. $x^2-y^2=8$ tengtomonli giperbola berilgan. Fokuslari shu giperbolaning fokuslarida bo'lib $A(4;6)$ nuqtadan o'tuvchi ellipsning kanonik tenglamasi topilsin. *Javob:* $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1$.

18. Parabolaning kanonik tenglamasi yozilsin.

a) simmetriya o'qi $0x$ o'qdan iborat, uchi koordinatalar boshida joylashgan va fokusi uchidan 6 birlik uzoqlikda yotgan;

b) uchi koordinatalar boshida joylashgan, (2,-4) nuqtadan o'tuvchi va $0x$ o'qqa nisbatan simmetrik;

d) uchi koordinatalar boshida yotgan, fokusi F(0,3) nuqtada bo'lgan $0y$ o'qqa nisbatan simmetrik;

e) fokusi F(3,0) nuqtada, direktrisasi $0y$ o'qdan, simmetriya o'qi $0x$ o'qdan iborat.

Javob: a) $y^2=24x$ va $y^2=-24x$, b) $y^2=8x$, d) $x^2=12y$, e) $y^2=6x-9$.

19. $y^2=2px$ parabola $A(2,4)$ nuqtadan o'tsa uning parametrini toping. *Javob:* p=4.

20. Yo'ng'ichqaning o'rtacha hosildorligi y (sentner) bilan uning sug'orish chuqurligi x(sm) orasidagi bog'lanish $y=0,0028x^2+0,253x+3,520$ formula yordamida ifodalanishi ma'lum bo'lsa, $x\in[0;30]$ oraliqda o'zgaradi deb x ning qanday qiymatida hosildorlik eng ko'p bo'lishini aniqlang?

Javob: $x=30$.

21. Egri chiziqlar chizilsin:

a) $x^2+4x+4y^2=0$, b) $2x^2-8x+y^2-6x+1=0$, d) $x^2-8x-4y^2=0$, e) $y^2-6y-x^2+2x=0$.

22. Koordinata o'qlarini 45^0 ga burish natijasida tengtomonli $x^2-y^2=a^2$ giperbolaning tenglamasi OXY "yangi" sistemaga nisbatan qanaqa ko'rinishga ega bo'ladi.

Javob: $XY = -\frac{a^2}{2}$.

23. $y=4x^2-8x+5$ tenglama koordinatalarni almashtirib kanonik ko'rinishga keltirilsin. Javob: $Y=4x^2$.

24. a) $4x^2+9y^2+32x-54y+109=0$, в) $4x^2-25y^2-24x+50y-89=0$. tenglama soddalashtirilib egri chiziqning turi aniqlansin.

Javob: a) markazi $0_1(-4;3)$ nuqtada, yarim o'qlari 3 va 2 bo'lgan ellips; b) markazi $0_1(3,1)$ nuqtada, haqiqiy yarim o'qi 5 ga va mavhum yarim o'qi 2 ga teng bo'lgan giperbola.

25. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ ellipsning eng sodda qutb tenglamasi topilsin.

Javob: $r = \frac{4}{3-\sqrt{5}\cos\varphi}$.

26. $x^2-4x+y^2+6y+13=0$ tenglama nimani ifodalaydi?

A) aylanani B) ellipsni D) giperbolani E) parabolani F) nuqtani.

27. $x^2+y^2+2(x+y)+4=0$ tenglama nimani ifodalaydi?

A) nuqtani B) aylanani D) ellipsni E) parabolani F) hechnimani.

28. $x^2+y^2+4x-6y+12=0$ tenglama nimani ifodalaydi?

A) aylanani B) ellipsni D) giperbolani E) parabolani F) nuqtani.

29. $4x^2+9y^2-16x+54y+61=0$ tenglama nimani ifodalaydi?

A) aylanani B) ellipsni D) giperbolani E) parabolani F) nuqtani.

30. $x^2+2y-4x=24$ tenglama nimani ifodalaydi?

A) aylanani B) ellipsni D) giperbolani E) parabolani F) hechnimani.

31. $r=\frac{3}{5+\cos\varphi}$ tenglama nimani ifodalaydi?

A) aylanani B) ellipsni D) giperbolani E) parabolani F) nuqtani.

32. $r=\frac{2}{5-8\cos\varphi}$ tenglama nimani ifodalaydi?

A) aylanani B) ellipsni D) giperbolani E) parabolani F) nuqtani.

33. $r=\dfrac{4}{9+9\cos\varphi}$ tenglama nimani ifodalaydi?

A) aylanani B) ellipsni D) giperbolani E) parabolani F) nuqtani.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Ikkinchi darajali algebrik tenglama deb qanaqa tenglamaga aytiladi?
2. Ikkinchi tartibli egri chiziq deb qanday chiziqqa aytiladi?
3. Qanday chiziq aylana deb aytiladi? Uning kanonik tenglamasini yozing.
4. Aylananing radiusi nima?
5. Qanday chiziq ellips deb aytiladi? Uning kanonik tenglamasini yozing.
6. Ellipsning markazi deb qaysi nuqtaga aytiladi?
7. Qanday nuqtalar ellipsning uchlari deb ataladi?
8. Qanday o‘q ellipsning fokal o‘qi deb ataladi?
9. Ellipsning ekssentrisiteti deb nimaga aytiladi va u doimo qanday shartni qanoatlantiradi?
10. Yarim o‘qlari teng ellips nimani ifodalaydi?
11. Qanday chiziq giperbola deb ataladi? Uning kanonik tenglamasini yozing.
12. Qanday nuqta giperbolaning markazi deb ataladi?
13. Qanday nuqtalar giperbolaning uchlari deb ataladi?
14. Giperbolaning ekssentrisiteti deb nimaga aytiladi va u doimo qanday shartni qanoatlantiradi?
15. Qaysi o‘q giperbolaning fokal o‘qi deyiladi?
16. Giperbolaning asimptotalari nima?
17. Qanday chiziq parabola deb ataladi? Uning kanonik tenglamasi qanday?
18. Parabolaning fokusi va direktrisasi nima? Ular qanday xossa bilan bog‘langan.
19. Qanday nuqta parabolaning uchi deb ataladi?
20. Parabolaning fokal o‘qi nima? Unga nisbatan parabola qanday joylashadi?
21. Ikkinchi darajali algebraik tenglamalar aylana, ellips,giperbola va paraboladan tashqari yana nimalarni ifodalashi mumkin?
22. Ikkinchi tartibli egri chiziqlar qaerlarda ishlatiladi?
23. Ikkinchi tartibli egri chiziqlarning qutb tenglamalarini yozing.

12. TEKISLIK TENGLAMALARI

12.1. Egri chiziq va sirt tenglamasi haqida tushuncha

Biz to'g'ri chiziq hamda ikkinchi tartibli egri chiziqlar bilan tanishdik. Ko'rdikki to'g'ri chiziq tenglamasi dekart koordinatalari x va y ga nisbatan birinchi darajali tenglama yordamida, ikkinchi tartibli egri chiziqlar esa ularga nisbatan ikkinchi darajali algebrik tenglamalar yordamida aniqlanadi. Boshqacha aytganda x va y ga nisbatan birinchi darajali tenglama Oxy tekisligidagi to'g'ri chiziqni aniqlaydi, ularga nisbatan ikkinchi darajali algebrik tenglama esa shu tekislikdagi ikkinchi tartibli egri chiziqlarni aniqlashi mumkin. Endi Oxy tekislikdagi istalgan egri chiziq tenglamasi tushunchasini kiritamiz.

Faraz qilaylik x va y ni bog'lovchi $F(x; y)=0$ tenglama berilgan bo'lsin.

1–ta'rif. Oxy tekislikning koordinatalari $F(x,y)=0$ tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalarining geometrik o'rni shu tenglama yordamida aniqlanadigan **egri chiziq** deb ataladi.

$F(x, y)=0$ tenglama ana shu **egri chiziqning tenglamasi** deb ataladi.

Demak, egri chiziq tenglamasi deb dekart koordinatalari x va y ni bog'lovchi shunday $F(x,y)=0$ tenglamaga aytiladiki, egri chiziqning istalgan nuqtasining koordinatalari bu tenglamani qanoatlantiradi va egri chiziqda yotmagan hech bir nuqtaning koordinatalari bu tenglamani qanoatlantirmaydi.

Boshqacha aytganda Oxy tekislikdagi istalgan egri chiziq uning tenglamasi deb ataluvchi $F(x, y)=0$ tenglama yordamida aniqlanar ekan, ya'ni $F(x, y)=0$ tenglama Oxy tekislikdagi egri chiziqni aniqlaydi.

Shunga o'xshash

$$F(x, y, z)=0 \tag{12.1}$$

tenglama ham $Oxyz$ fazodagi koordinatalari shu tenglamani qanoatlantiruvchi sirtni aniqlaydi. (12.1) tenglama ana shu sirtning tenglamasi deb aytiladi, x,y,z lar esa dekart koordinatalari deyiladi.

Izoh. Istalgan $F(x,y)=0$ tenglama har doim egri chiziqni va $F(x,y,z)=0$ tenglama har doim sirtni aniqlaydi deb o'ylash noto'g'ri.

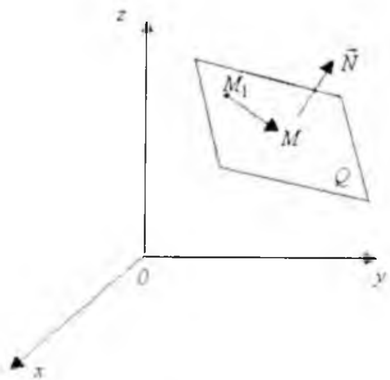
Endi fazodagi analitik geometriya bilan tanishishga kirishamiz.

12.2. Berilgan nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi

$Oxyz$ fazoni hamda unda berilgan Q tekislikni qaraymiz.

2–ta'rif. Tekislikka perpendikulyar vektor tekislikning **normal** vektori deb ataladi.

Tekislikning bitta $M_1(x_1;y_1;z_1)$ nuqtasi hamda normal vektori $\vec{N}=\{A;B;C\}$ berilganda uning tenglamasini keltirib chiqaramiz (64–chizma). Faraz qilaylik, $M(x;y;z)$ nuqta Q tekislikning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. $\overline{M_1M}=(x-x_1)\vec{i}+(y-y_1)\vec{j}+(z-z_1)\vec{k}$ vektorni qaraymiz. Bu vektor Q tekislikda yotadi. $\vec{N}$ vektor Q tekislikka perpendikulyar bo'lganligi uchun u shu tekislikda yotgan $\overline{M_1M}$ vectorga ham perpendikulyar bo'ladi. Ikki vektorning perpendikulyar bo'lishi



64–chizma

uchun ularni skalyar ko‘paytmasi $\overline{M_1M}\cdot\vec{N}=0$ bo‘lishi muqqarrar edi. Koordinatalari yordamida berilgan ikki vektorni skalyar ko‘paytmasini topish formulasiga ko‘ra

$$\overline{M_1M}\cdot\vec{N}=A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$$

yoki
$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0 \qquad (12.2)$$

tenglikka ega bo‘lamiz. Shunday qilib Q tekislik ixtiyoriy $M(x;y;z)$ nuqtasining koordinatalari (12.2) tenglamani qanoatlantirar ekan. Q tekislikda yotmagan hech bir nuqtaning koordinatalari bu tenglamani qanoatlantirmaydi, chunki bu holda $\overline{M_1M}$ va $\vec{N}$ vektorlar o‘zaro perpendikulyar bo‘lmaganligi uchun ularning skalyar ko‘paytmasi noldan farqli, ya’ni $\overline{M_1M}\cdot\vec{N}\neq 0$ bo‘ladi.

Demak (12.2) tenglama Q tekislikning tenglamasi. (12.2) tenglama berilgan nuqtadan o‘tuvchi **tekislik tenglamasi** deb ataladi.

Shunday qilib, har qanday tekislikka dekart koordinatalari x, y, z larga nisbatan birinchi darajali tenglama mos kelishini ko‘rsatdik.

3-ta’rif. Fazoning M nuqtasidan o‘tuvchi tekisliklar to‘plami **tekisliklar bog‘lami** deb ataladi. M nuqta **bog‘lamning markazi** deyiladi.

A, B, C koeffitsiyentlar har xil qiymatlarni qabul qilganda (12.2) tenglama markazi $M_1(x_1;y_1;z_1)$ nuqtada bo‘lgan tekisliklar bog‘lamining tenglamasini ifodalaydi.

1–misol. $M_1(3;-2;1)$ nuqtadan $\vec{N}=\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$ vektorga perpendikulyar o‘tkazilgan tekislik tenglamasini yozing.

Yechish. Bu yerda $A=1$, $B=1$, $C=-2$; $x_1=3$, $y_1=-2$, $z_1=1$. (12.2) formulaga binoan $1\cdot(x-3)+1\cdot(y+2)+(-2)\cdot(z-1)=0$ yoki $x+y-2z+1=0$ tekislik tenglamasiga ega bo‘lamiz.

12.3. Tekislikning umumiy ko'rinishdagi tenglamasi

Biz yuqorida tekislik tenglamasi dekart koordinatalari x, y va z ga nisbatan birinchi darajali (chiziqli) tenglama ekanini ko'rdik. Endi aksini ya'ni x, y va z ga nisbatan birinchi darajali har qanday tenglama tekislik tenglamasi ekanini ko'rsatamiz.

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (12.3)$$

tenglamaga ega bo'laylik. Bu yerda A, B, C, D ma'lum sonlar bo'lib ulardan A, B, C koeffitsiyentlar bir vaqtda nolga teng emas. Aks holda biz tenglama emas balki D=0 ayniyatga ega bo'lamiz.

C≠0 deb faraz qilib (12.3) tenglamani

$$A(x-0) + B(y-0) + C\left(z + \frac{D}{C}\right) = 0 \qquad (12.4)$$

ko'rinishda yozamiz. Bu tenglamani (12.2) tenglama bilan taqqoslab u $M\left(0;0;-\frac{D}{C}\right)$ nuqtadan o'tib $\vec{N} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ normal vektorga ega tekislik tenglamasi ekanini ko'ramiz.

(12.3) tenglama **tekislikning umumiy tenglamasi** deb ataladi.

Endi tekislikning umumiy tenglamasining xususiy hollari bilan tanishib chiqamiz.

1.Ozod had D=0 bo'lsin. Bu holda tekislik tenglamasi $Ax + By + Cz = 0$ ko'rinishga ega bo'ladi. $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ bu tenglamani qanoatlantirgani uchun tekislik koordinatalar boshi $O(0;0;0)$ nuqtadan o'tadi. Demak tekislik tenglamasining ozod hadi nolga teng bo'lganda tekislik koordinatalar boshidan o'tar ekan.

2. Tenglamada dekart koordinatalari oldidagi koeffitsientlardan biri, masalan C=0 bo'lsin. Bu holda tenglama $Ax + By + D = 0$ ko'rinishga ega bo'ladi. $C = pr_{Oz}\vec{N} = 0$ dan $\vec{N}$ normal vektorning Oz o'qqa perpendikulyarligi va tekislikning Oz o'qqa parallelligi kelib chiqadi. Agar $Ax + By + D = 0$ tenglamani Oxy tekislikda qarasak u to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasini ifoda etadi. Biz qaraydigan holda Oz o'qqa parallel tekislik Oxy tekislikni ana shu to'g'ri chiziq bo'ylab kesib o'tadi.

Shunga o'xshash $Ax+Cz+D=0$ tekislik Oy o'qqa parallel, $By+Cz+D=0$ tekislik esa Ox o'qqa parallel ekanligini ko'rsatish mumkin: agar tekislik tenglamasida dekart koordinatalari x, y, z lardan qaysi biri qatnashmasa tekislik o'sha koordinataga mos o'qqa parallel bo'ladi.

3. Tenglamada dekart koordinatalari oldidagi koeffitsiyentlardan biri va ozod had nolga teng, masalan $C=D=0$ bo'lsin. Bu holda $Ax+By=0$ tenglama 1–bandga asosan koordinatalar boshidan o'tadi va 2-bandga ko'ra u Oz o'qqa parallel bo'lishi lozim. Demak $Ax+By=0$ tekislik Oz o'q orqali o'tadi.

Shuningdek $By+Cz=0$ va $Ax+Cz=0$ tenglamalarga Ox va Oy o'qlar orqali o'tuvchi tekisliklar mos keladi.

4.Tenglamada dekart koordinatalari koeffitsiyentlaridan ikkitasi nolga teng bo'lsin. Masalan, $A=B=0$. Bu holda $Cz+D=0$ tekislik 3–banddagi mulohazaga ko'ra ham $0x$ o'qqa, ham $0y$ o'qqa parallel bo'ladi. Demak u Oxy tekislikka parallel bo'ladi. Shuningdek $Ax+D=0$ va $By+D=0$ tekisliklar $0yz$ va $0xz$ koordinata tekisliklariga parallel tekisliklarning tenglamalaridir.

5. Tenglamada ikkita dekart koordinatalarining koeffitsiyentlari hamda ozod had nolga teng bo'lsin. Masalan, $A=B=D=0$. U holda tenglama $Cz=0$ yoki $z=0$ ko'rinishga ega bo'ladi. 4-banddagi mulohazalarga ko'ra u Oxy tekislikka parallel. 1–bandga asosan u koordinatalar boshidan o'tadi. Demak z=0 tenglama Oxy tekislikning tenglamasi. Shuningdek, $y=0$ tenglama $0xz$ tekislikning tenglamasi, $x=0$ tenglama Oyz tekislikning tenglamasidir.

2-misol. Fazoning berilgan ikkita $M_1(x_1;y_1;z_1)$ nuqtalari va $M_2(x_2;y_2;z_2)$ dan teng uzoqlikda joylashgan nuqtalarning geometrik o'rnini toping.

Yechish. $M(x;y;z)$ izlanayotgan nuqtalar to'plamining ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. Shartga ko'ra $M_1M = M_2M$. Fazodagi ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasi (6.8) ga asoslanib

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}=\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2}$$

tenglikka yoki, bu tenglikning har ikkala tomonini kvadratga ko'tarib,

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2$$

ga ega bo'lamiz. Kvadratlarni ochib ixchamlasak

$$x^2-2x_1x+x_1^2+y^2-2y_1y+y_1^2+z^2-2z_1z+z_1^2=$$

$$=x^2-2x_2x+x_2^2=y^2+2y_2y+y_2^2+z^2-2z_2z+z_2^2,$$

$$2(x_2-x_1)x+2(y_2-y_1)y+2(z_2-z_1)z+x_1^2+y_1^2+z_1^2-x_2^2-y_2^2-z_2^2=0$$

bo'ladi.

$$2(x_2-x_1)=A,\quad 2(y_2-y_1)=B,\quad 2(z_2-z_1)=C,$$

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2-x_2^2-y_2^2-z_2^2=D$$

belgilashni kiritsak oxiri tenglama

$$Ax+By+Cz+D=0$$

ko'rinishni oladi.

Demak izlanayotgan nuqtalarning geometrik o'rni tekislikni ifodalar ekan.

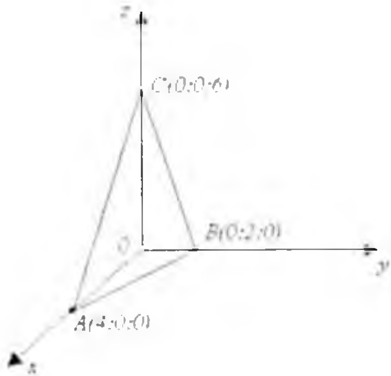
12.4. Tekislikni uning tenglamasiga ko'ra yasash

Tekislikning ma'lum tenglamasiga ko'ra uni yasash qiyin emas. Buning uchun tekislikning bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan uchta ixtiyoriy nuqtasini bilish kifoya. Tekislikning nuqtasini uning $Ax+By+Cz+D=0$ tenglamasidagi koordinatalardan ixtiyoriy ikkitasiga ma'lum qiymatlar tayinlab uchinchi koordinatani shu tenglamadan aniqlash orqali topiladi.

Agar tekislik koordinata o'qlariga parallel bo'lmasa, tekislikning koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalarini topgan ma'qul.

3-misol. $3x+6y+2z-12=0$ tekislikni yasang.

Yechish. Tekislikni koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalarini aniqlaymiz. Ox o'qning nuqtalari uchun $y=0$, $z=0$ bo'ladi. Bularni berilgan tenglamaga qo'ysak $3x-12=0$, $x=4$ bo'ladi. Demak tekislik Ox o'q bilan $A(4;0;0)$ nuqtasida kesishar ekan (65-chizma).



65-chizma.

Tenglamaga $x=0$, $y=0$ qiymatlarni qo'ysak $2z-12=0$, $z=6$ kelib chiqadi. Demak, tekislik Oz o'q bilan $C(0;0;6)$ nuqtada kesishar ekan. Agar tenglamaga $x=0$, $z=0$ qiymatlarni qo'ysak $6y-12=0$, $y=2$ kelib chiqadi. Demak tekislik $0y$ o'q bilan $B(0;2;0)$ nuqtada kesishar ekan. Shunday qilib berilgan tekislik $A(4;0;0)$, $B(0;2;0)$ va $C(0;0;6)$ nuqtalardan o'tar ekan (65-chizma).

4–misol. Oz o'qqa parallel hamda $A_1(2;3;-1)$ va $B_1(-1;2;4)$ nuqtalardan o'tuvchi tekislik tenglamasi yozilsin va tekislik yasalsin.

Yechish. Oz o'qqa parallel tekislik tenglamasi

$$Ax+By+D=0 \qquad (a)$$

ko'rinishga ega ekanligini ko'rdik (Oz o'qqa parallel tekislik tenlamasida z koordinita ishtirok etmaydi).

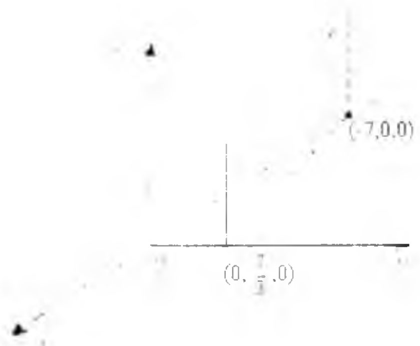
Agar tekislik biror nuqtadan o'tsa bu nuqtaning koordinatalari o'sha tekislik tenglamasini qanoatlantiradi. Tekislik tenglamasi (a) ga A_1 va B_1 nuqtalarning koordinatalarini qo'yib,

$$\begin{cases} 2A+3B+D=0, \\ -A+2B+D=0 \end{cases}$$

sistemaga ega bo'lamiz. Bu sistemani uch noma'lumli ikkita bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasining yechimini topish formulasidan foydalanib yechamiz.

$$A=\begin{vmatrix}3&1\\2&1\end{vmatrix}\cdot k;\ B=\begin{vmatrix}1&2\\1&-1\end{vmatrix}\cdot k;\ D=\begin{vmatrix}2&3\\-1&2\end{vmatrix}\cdot k;\ A=k;\ B=-3k,\ D=7k.$$

A, B va C ning topilgan qiymatlarini (a) ga qo'ysak, $kx-3ky+7k=0$ yoki k ga qisqartirilsa $x-3y+7=0$ tekislik tenglamasi kelib chiqadi. Tekislik Oxy tekislikni $x-3y+7=0$ to'g'ri chiziq bo'ylab kesib o'tadi (66-chizma). Shuning uchun tekislikni chizishdan oldin to'g'ri chiziqni chizamiz. Tenglamaga $x=0$ qiymatni qo'ysak $-3y+7=0$, $y=\frac{7}{3}$ va $y=0$ qiymatni qo'ysak $x=-7$ kelib chiqadi. Demak to'g'ri

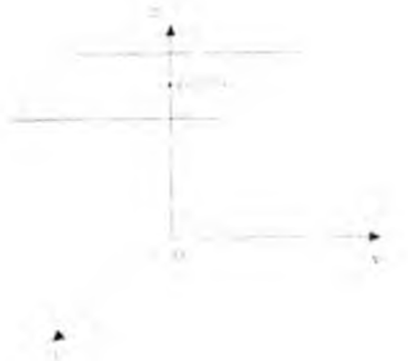


66-chizma.

chiziq Oxy tekislikning $\left(0;\frac{7}{3}\right)$ ва (-7;0) nuqtalaridan o'tar ekan.

5-misol. $A(1;2;4)$ nuqtadan o'tib Oxy tekislikka parallel tekislik tenglamasi yozilsin va tekislik yasalsin.

Yechish. Oxy ga parellel tekislik tenglamasi $Cz+D=0$ ko'rinishiga ega ekanligini bilamiz. Bunga A nuqtaning koordinatalarini qo'yib $4C+D=0$, $D=-4C$ ga ega bo'lamiz.



67-chizma.

D ning ushbu qiymatini tekislik tenglamasiga qo'ysak $Cz-4C=0$ yoki C ga qisqartirsak $z-4=0$; $z=4$ hosil bo'ladi(67-chizma).

Bu tenglama $A(1;2;4)$ nuqtadan o'tib Oxy tekislikka parellel tekislik tenglamasi.

12.5. Tekislikning kesmalarga nisbatan tenglamasi

Tekislik tenglamasi $Ax+By+Cz+D=0$ da A,B,C,D koeffitsiyentlaridan hech biri nolga teng bo'lmasin.

Ozod had D ni tenglamaning o'ng tomoniga o'tkazsak

$$Ax+By+Cz=-D$$

bo'ladi. Bu tenglamaning har ikkala tomonini $-D$ ga bo'lsak,

$$\frac{Ax}{-D}+\frac{By}{-D}+\frac{Cz}{-D}=1 \quad \text{yoki} \quad \frac{x}{-\frac{D}{A}}+\frac{y}{-\frac{D}{B}}+\frac{z}{-\frac{D}{C}}=1$$

hosil bo'ladi.

$$-\frac{D}{A}=a, \quad -\frac{D}{B}=b, \quad -\frac{D}{C}=c$$

belgilashni kiritsak, tekislik tenglamasi

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \qquad (12.5)$$

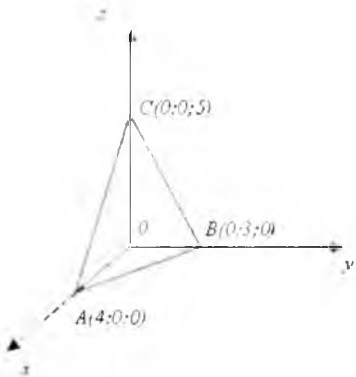
ko'rinishiga ega bo'ladi. Bu tenglama **tekislikning kesmalarga nisbatan tenglamasi** deb ataladi. Bu yerda a,b,c lar tekislikning Ox, Oy, Oz o'qlardan ajratgan kesmalari.

6–misol. $15x+20y+12z-60=0$ tekislikni yasang (68–chizma).

Yechish. Tekislik tenglamasini kesmalarga nisbatan yozamiz: $15x+20y+12z=60$; $\frac{15x}{60}+\frac{20y}{60}+\frac{12z}{60}=1$; $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}+\frac{z}{5}=1$;

$a=4, \quad b=3, \quad c=5$

Demak tekislik $A(4;0;0)$, $B(0;3;0)$ va $C(0;0;5)$ nuqtalardan o'tar ekan.



68–chizma.

12.6. Uch nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi

Bir to'g'ri chiziqda yotmagan $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ va $M_3(x_3,y_3,z_3)$ nuqtalar berilgan bo'lib ular orqali o'tuvchi tekislik tenglamasini topish talab etilsin. $M(x,y,z)$ tekislikning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. U holda:

$$\overline{M_1M}=(x-x_1)\bar{i}+(y-y_1)\bar{j}+(z-z_1)\bar{k},\ \overline{M_1M_2}=$$
$$=(x_2-x_1)\bar{i}+(y_2-y_1)\bar{j}+(z_2-z_1)\bar{k}$$
$$\overline{M_1M_3}=(x_3-x_1)\bar{i}+(y_3-y_1)\bar{j}+(z_3-z_1)\bar{k}$$

vektorlar shu tekislikda yotadi, ya'ni ular komplanar bo'ladi. Uch vektorning komplanarlik sharti $(\overline{MM_1}\times\overline{M_1M_2})\cdot\overline{M_1M_3}=0$ ga binoan

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0 \qquad (12.6)$$

tenglamaga ega bo'lamiz. Bu tenglama **uch nuqtadan o'tuvchi** tekislik tenglamasi.

7–misol. $M_1(1;2;-1)$; $M_2(-1;0;4)$; $M_3(-2;-1;1)$ nuqtalardan o'tuvchi tekislik tenglamasini toping.

Yechish. (12.6) formulaga binoan izlanaetgan tekislik tenglamasini

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ -2 & -2 & 5 \\ -3 & -3 & 2 \end{vmatrix}=0$$

ko'rinishda yozamiz. Determinantni birinchi satr elementlari bo'yicha yoysak:

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}(x-1)-\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}(y-2)+\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -3 & -3 \end{vmatrix}(z+1)=0$$

yoki ikkinchi tartibli determinantlarni hisoblasak, $11(x-1)-11(y-2)+0\cdot(z+1)=0$ va tenglikni 11 ga qisqartirib ixchamlasak, $x-1-y+2=0$; $x-y+1=0$ kelib chiqadi. Bu tenglama Oz o'qqa parallel tekislikni aniqlaydi.

12.7. Tekislikning normal tenglamasi

$Oxyz$ fazoda koordinatalar boshidan o'tmovchi Q tekislik berilgan bo'lsin. Koordinatalar boshidan tekislikka OP perpendikular o'tkazib uning uzunligini p orqali va perpendikulyarning Ox, Oy, Oz o'qlar bilan tashkil etgan burchaklarini mos ravishda α, β, γ lar orqali belgilaymiz. U holda tekislik tenglamasini

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 \tag{12.7}$$

ko'rinishda tasvirlash mumkin bo'ladi. (12.7) tekislikning **normal** tenglamasi deb ataladi. Bu tenglamaning o'ziga xos xususiyatlaridan biri $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ va $p > 0$.

Agar tekislik

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

umumiy ko'rinshidagi tenglamasi yordamida berilsa bu tenglikni normallovchi ko'paytuvchi deb ataluvchi

$$N = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

ga ko'paytirish natijasida tekislikning normal tenglamasiga keltiriladi. Normallovchi ko'paytuvchining ishorasi ozod hadning ishorasiga qarama – qarshisi olinadi. Demak:

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}z - \frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$$

tekislikning normal tenglasini va

$$p = \frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{12.8}$$

koordinatalar boshidan $Ax+By+Cz+D=0$ tekislikgacha masofani ifodalaydi.

8–misol. $5x+7y-34z+5=0$ tekislik tenglamasi normal ko'rinishga keltirilsin.

Yechish. Ozod had 5>0 bo'lgani uchun normallovchi ko'paytuvchi N oldida minus ishora olinadi. Misolda A=5, B=7, C=-34 bo'lgani sababli $N=-\frac{1}{\sqrt{5^2+7^2+(-34)^2}}$; $N=-\frac{1}{\sqrt{1230}}$. Berilgan tenglamani bunga ko'paytirsak

$$-\frac{5}{\sqrt{1230}}x-\frac{7}{\sqrt{1230}}y+\frac{34}{\sqrt{1230}}z-\frac{5}{\sqrt{1230}}=0$$

tekislikning normal tenglamasi kelib chiqadi.

9–misol. Koordinatalar boshidan $10x+15y-6z-380=0$ tekislikkacha masofani toping va shu perpendikulyarning koordinata o'qlari bilan tashkil etgan burchaklarning kosinuslarini toping.

Yechish. Ozod son-380<0 bo'lganligi uchun normallovchi ko'paytuvchi oldida plyus ishora olinadi:

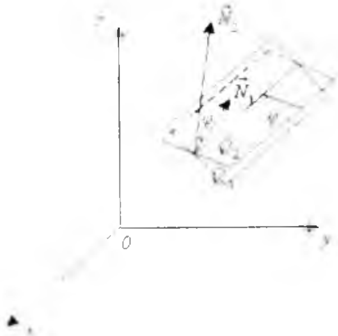
$$N=\frac{1}{\sqrt{10^2+15^2+(-6)^2}}=\frac{1}{\sqrt{361}}=\frac{1}{19}$$

(12.8) formulaga binoan koordinatalar boshidan tekislikgacha masofa $P=\frac{|-380|}{19}=\frac{380}{19}=20$ bo'ladi. Endi burchak kosinuslarini topamiz:

$$\cos\alpha=\frac{A}{N}=\frac{10}{19},\quad \cos\beta=\frac{B}{N}=\frac{15}{19},\quad \cos\gamma=\frac{C}{N}=-\frac{6}{19}.$$

12.8. Ikki tekislik orasidagi burchak. Tekisliklarning parallellik va perpendikulyarlik shartlari

Kesishuvchi Q_1 va Q_2 tekisliklar, mos ravishda, $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ (Q_1 tekislik) va $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ (Q_2 tekislik) tenglamalari yordamida berilgan bo'lsin. Ikki tekislik orasidagi burchak deganda tekisliklar tashkil etgan ikki yoqli burchaklardan biri tushuniladi. Q_1 va Q_2 tekisliklarning normal vektorlari $\overline{N_1}$ va $\overline{N_2}$ orasidagi burchak ana shu burchaklardan birini ifodalaganligi uchun tekisliklar orasidagi burchakni topish ularning normal vektorlari orasidagi burchakni topishga keladi (69-chizma).



69- chizma.

$$\overline{N_1} = A_1\bar{i} + B_1\bar{j} + C_1\bar{k} \text{ va } \overline{N_2} = A_2\bar{i} + B_2\bar{j} + C_2\bar{k}$$

vektorlar orasidagi burchak

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \qquad (12.9)$$

formula yordamida topilishini bilamiz. Ana sha formula Q_1 va Q_2 tekisliklar orasidagi burchakni topish formulasi bo'lib xizmat qiladi.

10–misol. $5x$-$3y$+$4z$-4=0 va $3x$-$4y$-$2z$+5=0 tekisliklar orasidagi o'tkir burchakni toping.

Yechish Bu yerda A_1=5, B_1=-3; C_1=4; A_2=3, B_2=-4, C_2=-2 bo'lgani uchun (12.9) formulaga binoan:

$$\cos\varphi = \left|\frac{5\cdot3+(-3)\cdot(-4)+4\cdot(-2)}{\sqrt{5^2+(-3)^2+4^2}\cdot\sqrt{3^2+(-4)^2+(-2)^2}}\right| = \left|\frac{15+12-8}{\sqrt{50}\sqrt{29}}\right|;$$

$$\cos\varphi = \frac{19}{5\sqrt{58}};\ \cos\varphi = 0,4990;\ \varphi = 60^0 04'..$$

Tekisliklar orasidagi o'tkir burchakni topish talab etilganligi sababli (12.9) formulaning o'ng tomonidagi ifodaning absolyut qiymatini oldik.

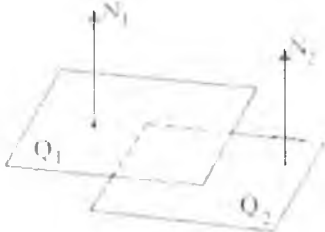
1. Tekisliklarning parallellik sharti. Q_1 va Q_2 tekisliklar faqat-gina ularning normal vektorlari $N_1 = A_1 i + B_1 j + C_1 k$ va $N_2 = A_2 i + B_2 j + C_2 k$ parallel (kollinear) bo'lganligida parallel bo'ladi (70-chizma).

Shuning uchun ikki vektorning parallellik shartidan

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \qquad (12.10)$$

ga ega bo'lamiz. Bu tekisliklarning ham parallellik shartidir. Demak, ikki tekisliklarning mavjud koordinatalari oldidagi koeffitsiyentlari proporsional bo'lganda va faqat shu holdagina ular **parallel** bo'lar ekan.

Endi berilgan $M_1(x_1;y_1;z_1)$ nuqtadan



70-chizma.

$$A_1x+B_1y+C_1z+D=0 \qquad (\alpha)$$

tekislikka parallel o'tkazilgan tekislik tenglamasini topamiz. Buning uchun $M_1(x_1;y_1;z_1)$ nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasini yozamiz. Uning

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0 \qquad (\beta)$$

ko'rinishga ega ekanligi ma'lum. Bu tekislik berilgan (α) tekislikka parallel bo'lishi uchun

$$\frac{A}{A_1}=\frac{B}{B_1}=\frac{C}{C_1}$$

shart bajarilishi kerak. Demak,

$$A=A_1, B=B_1, C=C_1$$

deb olishimiz mumkin. Ushbu qiymatlarni tekislik tenglamasi (β)ga qo'yib

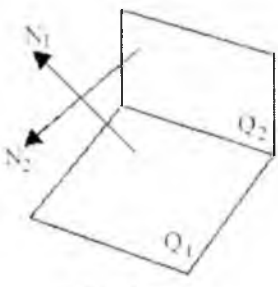
$$A_1(x-x_1)+B_1(y-y_1)+C_1(z-z_1)=0 \qquad (12.11)$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglama berilgan **tekislikka parallel o'tkazilgan tekislik tenglamasi**.

11-misol. Koordinatalar boshidan $x+y+z=1$ tekislikka parallel o'tkazilgan tekislik tenglamasi tuzilsin.

Yechish. Bu yerda $x_1=y_1=z_1=0$ va $A_1=B_1=C_1=1$ bo'lgani uchun (12.11) ga binoan $x+y+z=0$ tenglamaga ega bo'lamiz.

2. Tekisliklarning perpendikulyarlik sharti. Ikki tekislik ularning normal vektorlari $\overline{N_1}$ va $\overline{N_2}$ o'zaro perpendikulyar bo'lgandagina perpendikulyar bo'ladi (71-chizma).



71-chizma

Ikki vektorning perpendikulyarlik shartiga asosan

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0 \qquad (12.12)$$

formulaga ega bo'lamiz. Bu ikki tekislikning perpendikulyarlik shartidir.

Endi berilgan ikkita $M_1(x_1;y_1;z_1)$ va $M_2(x_2;y_2;z_2)$ nuqtalar orqali o'tuvchi va $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ tekislikka perpendikular tekislik tengmasini topamiz. $M_1(x_1;y_1;z_1)$ nuqtadan o'tuvchi istalgan tekislik tenglamasini yozamiz. U

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0 \qquad (12.13)$$

ko'rinishiga ega bo'ladi. Shartga binoan $M_2(x_2;y_2;z_2)$ nuqta ham shu tekislikda yotganligi uchun uning koordinatalari tekislik tenglamasini qanoatlantiradi, ya'ni

$$A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)+C(z_2-z_1)=0. \qquad (12.14)$$

Ikkinchi tomondan (12.13) tekislik berilgan tekislikka perpendikulyar bo'lganligi uchun

$$AA_1+BB_1+CC_1=0 \qquad (12.15)$$

perpendikulyarlik sharti bajariladi. (12.14) va (12.15) ni birlashtirib

$$\begin{cases} A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)+C(z_2-z_1)=0, \\ AA_1+BB_1+CC_1=0 \end{cases} \qquad (12.16)$$

sistemaga ega bo'lamiz. (12.16) dan A, B va C koeffitsiyentlardan istalgan ikkitasini uchinchisi orqali ifodalab ularning topilgan qiymatlarini (12.13) tenglamaga qo'yib tenglamani uchinchi koeffitsiyentga qisqartirilsa, izlanayotgan tenglama kelib chiqadi.

12–misol. $M_1(1;1;1)$ va $M_2(0;1;-1)$ nuqtalar orqali o'tuvchi va $x+y+z=0$ tekislikka perpendikulyar tekislik tenglamasi topilsin.

Yechish. $M_1(1;1;1)$ nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi

$$A(x-1)+B(y-1)+C(z-1)=0 \qquad (\gamma)$$

bo'ladi. Tekislik $M_2(0;1;-1)$ nuqtadan o'tishi va berilgan $x+y+z=0$ tekislikka perpendikulyarlik sharti (12.16) ga binoan

$$\begin{cases} A(0-1)+B(1-1)+C(-1-1)=0, \\ A\cdot 1+B\cdot 1+C\cdot 1=0 \end{cases} \quad \text{yoki} \quad \begin{cases} -A-2C=0, \\ A+B+C=0 \end{cases};$$

$\begin{cases} A + 2C = 0, \\ A + B + C = 0 \end{cases}$ ga ega bo'lamiz. Sistemaning birinchi tenglamasini

$A = -2C$ ko'rinishda yozib uni C ga bo'lsak $\frac{A}{C} = -2$ bo'ladi. Sistemaning ikkinchi tenglamasini C ga bo'lsak

$$\frac{A}{C} + \frac{B}{C} + 1 = 0; \quad \frac{B}{C} = -\frac{A}{C} - 1 = -(-2) - 1 = 1$$

hosil bo'ladi. Tekislik tenglamasi (γ) ni C ga bo'lib $\frac{A}{C}$ va $\frac{B}{C}$ o'rniga ularning topilgan qiymatlarini qo'ysak izlanayotgan tenglama hosil bo'ladi:

$$\frac{A}{C}(x-1) + \frac{B}{C}(y-1) + z - 1 = 0; \; -2(x-1) + 1\cdot(y-1) + z - 1 = 0;$$
$$-2x + 2 + y - 1 + z - 1 = 0; \; 2x - y - z = 0..$$

12.9. Uch tekislikning kesishish nuqtasi

Berilgan uchta $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ va $A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0$ tekisliklarning kesishish nuqtasi.

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0. \end{cases}$$

sistemani yechib topiladi. Sistemaning asosiy determinanti

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

bo'lganda sistema yagona yechimga ega bo'ladi va berilgan uchta tekislik bir nuqtada kesishadi. $\Delta=0$ bo'lganda tekisliklar bir nuqtada kesishmaydi.

13–misol. $2x-y+3z+2=0$, $x+2y-z-9=0$ va $3x+y-2z-11=0$ tekisliklarning kesishishi nuqtasi topilsin.

Yechish.

$$\begin{cases} 2x-y+3z=-2, \\ x+2y-z=9, \\ 3x+y-2z=11 \end{cases}$$

sistemani yechib tekisliklyarning kesishish nuqtasining koordinatalari $x=2$, $y=3$, $z=-1$ larni topamiz. Demak tekisliklar $M(2;3;-1)$ nuqtada kesishar ekan.

12.10. Nuqtadan tekislikgacha masofa

Nuqtadan tekislikgacha masofa deganda shu nuqtadan tekislikka tushirilgan perpendikularning uzunligi nazarda tutiladi.

Berilgan $M_1(x_1;y_1;z_1)$ nuqtadan $Ax+By+Cz+D=0$ tenglamasi yordamida berilgan Q tekislikgacha d masofa

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad (12.17)$$

formula yordamida topiladi. Bu formulani keltirib chiqarish tekislikda nuqtadan to‘g‘ri chiziqgacha masofani topish formulasini keltirib chiqarishga o‘xshaganligi uchun uni isbotlashni o‘quvchiga qoldiramiz.

14–misol. $A(2;3;-1)$ nuqtadan $7x-6y-6z+42=0$ tekislikgacha masofa topilsin.

Yechish. (12.17) formulaga $A=7$, $B=-6$, $C=-6$, $D=42$, $x_1=2$, $y_1=3$, $z_1=-1$ qiymatlarni qo‘ysak izlanaetgan masofa

$$d=\left|\frac{7\cdot2+(-6)\cdot3+(-6)\cdot(-1)+42}{\sqrt{7^2+(-6)^2+(-6)^2}}\right|=\left|\frac{14-18+6+42}{\sqrt{121}}\right|=\frac{44}{11}=4$$

kelib chiqadi.

Mustaqil yechish uchun mashqlar va test savollari

1. $M_1(3;2;-1)$ nuqtadan o'tib $\bar{N}=\{-1;0;2\}$ normal vektorga ega tekislik tnglamasi yozilsin. *Javob:* $x-2z-5=0$.

2. $A(2;-3;2)$ va $B(7;1;0)$ nuqtalar orqali o'tuvchi va Ox o'qqa parallel tekislik tenglamasi topilsin. *Javob:* $y+2z-1=0$.

3. $A(-3;2;4)$ nuqtadan Oxy tekislikka parallel o'tkazilgan tekislik tenglamasi yozilsin. *Javob:* $z-4=0$.

4. $A(2;1;3)$ nuqta hamda Ox o'q orqali o'tuvchi tekislik tenglamasi yozilsin. *Javob:* $3y-z=0$.

5. $2x+3y-6z+30=0$ tekislik koordinata o'qlardan qanday kesmalar ajratadi. *Javob:* $a=-15$, $b=-10$, $c=6$.

6. $3x-4y+5z-24=0$ tekislik tenglamasi kesmalarga nisbatan yozilsin. *Javob:* $\frac{x}{8}+\frac{y}{-6}+\frac{z}{4}=1$..

7. $M_1(1;-3;4)$, $M_2(0;-2;-1)$ va $M_3(1;1;-1)$ nuqtalardan o'tuvchi tekislik tenglamasi topilsin. *Javob*: $15x-5y-4z-14=0$.

8. a) $4x+3y+6z-12=0$; b) $2x+3y-6=0$; d) $2z-5=0$ tekisliklar yasalsin.

9. $2x+9y-6z+33=0$ tekislik tenglamasi normal ko'rinishga keltirilsin. *Javob:* $-\frac{2}{11}x-\frac{9}{11}y+\frac{6}{11}z-3=0$..

10. Koordinatalar boshidan $5x-y+3z+12=0$ tekislikka perpendikulyar o'tkazilgan. Uning uzunligi, koordinata o'qlari bilan tashkil etgan burchaklari kosinuslari va perpendikulyarning asosini toping.

Javob: $p=\frac{12}{\sqrt{35}}$; $\cos\alpha=-\frac{5}{\sqrt{35}}$; $\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{35}}$; $\cos\gamma=-\frac{3}{\sqrt{35}}$,,

perpendikulyarning asosi $P\left(-\frac{12}{7},\frac{12}{35},-\frac{16}{35}\right)$..

Ko'rsatma. Perpendikulyarning asosi $x_1=p\cos\alpha$, $y_1=p\cos\beta$, $z_1=p\cos\gamma$ formulalardan foydalanib topiladi.

11. $A(2;-4;2)$ nuqtadan $2x+11y+10z-10=0$ tekislikgacha masofa topilsin. *Javob:* $d=2$.

12. $2x-3y+6z-14=0$ va $2x-3y+6z+28=0$ parallel tekisliklar orasidagi masofa topilsin. *Javob*: $d=6$.

13. $M(-4;-1;2)$ nuqtadan $3x+4y-z-8=0$ tekislikka parallel o'tkazilgan tekislik tenglamasi topilsin. *Javob*: $3x+4y-z+18=0$.

14. $M_1(-1;2;-3)$ va $M_2(1;4;-5)$ nuqtalar orqali o'tuvchi va $3x+5y-6z+1=0$ tekislikka perpendikulyar tekislik tenglamasi topilsin. *Javob*: $x-3y-2z+1=0$.

15. $5x-3y+5z+5=0$ va $x-2y+3z-5=0$ tekisliklar orasidagi o'tkir burchak topilsin. *Javob*: $\cos\varphi=0{,}9046$; $\varphi=25^0 14'$.

16. Tekislikning normal vektori nima?

A) Tekislikka parallel vektor

B) Tekislikda yotuvchi vektor

D) Tekislikka perpendikulyar vektor

E) Tekislik bilan 45^0 burchak tashkil etuvchi vektor

F) Istalgan vektor.

17. Tekislikning normal tenglamasini ko'rsating.

A) $2x-3y+5z+2=0$ B) $\frac{6}{7}x-\frac{3}{7}y+\frac{2}{7}z+3=0$

D) $\frac{3}{7}x-\frac{6}{7}y+\frac{2}{7}z-3=0$ E) $-\frac{3}{7}x+\frac{6}{7}y-\frac{2}{7}z+3=0$

F) $\frac{2}{7}x+\frac{6}{7}y-\frac{3}{7}z+4=0$.

18. $mx+3y+2z-9=0$ va $2x+ny+3z-6=0$ tekisliklar m va n ning qanday qiymatlarida o'zaro parallel bo'ladi.

A) $\frac{4}{3}$; $\frac{9}{2}$ B) $\frac{4}{3}$; $\frac{5}{2}$ D) $\frac{5}{2}$; $\frac{4}{3}$ E) 3; 2 F) 2; -1.

19. $mx+5y+3z-8=0$ va $mx+2my+3z-16=0$ tekisliklar m ning qanday qiymatlarida o'zaro perpendikulyar bo'ladi.

A) 9 va 1 B) -1 va -9 D) 3 va -1 E) -1 va 4 F) -9 va 5.

20. $M(6;0;-2)$ nuqtadan $6x-3y-2z-5=0$ tekislikgacha masofa topilsin.

A) 3 B) 4 D) 5 E) 4,2 F) 4,5.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Tekislikda egri chiziq tenglamasi nima?
2. Sirt tenglamasi nima?
3. Qanday vektor tekislikning normal vektori deb ataladi?
4. Berilgan nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasini yozing.
5. Tekislikning umumiy tenglamasini yozing.
6. Umumiy tenglamaning xususiy ko'rinishlariga izohlar bering.
7. Tenglamasiga ko'ra tekislik qanday yasaladi?
8. Tekislikning kesmalarga nisbatan tenglamsini yozing.
9. Uch nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasini yozing.
10. Tekislikning normal tenglasini yozing va uning asosiy xususiyatini ayting.
11. Tekislikning umumiy tenglasini qanday qilib normal ko'rinishiga keltiriladi? Normallovchi ko'paytuvchi nima va u qanday topiladi?
12. Koordinatalar boshidan tekislikkacha masofa qanday topiladi?
13. Koordinatalar boshidan tekislikka o'tkazilgan perpendikulyarning koordinata o'qlari bilan tashkil etgan burchaklari hamda perpendikulyarning asosi qanday topiladi?
14. Ikki tekislik orasidagi burchak qanday topiladi?
15. Ikki tekislikning parallellik sharti nima?
16. Berilgan nuqtadan berilgan tekislikka parallel o'tkazilgan tekislik tenglamasini yozing.
17. Ikki tekislikning perpendikulyarlik shartini yozing.
18. Berilgan ikki nuqtalar orqali o'tuvchi va berilgan tekislikka perpendikulyar tekislik tenglamasi qanday topiladi?
19. Uchta tekislik qachon bir nuqtada kesishadi va bu nuqta qanday topiladi?
20. Nuqtadan tekislikgacha masofa qanday topiladi?

13. FAZODAGI TO'G'RI CHIZIQ. TO'G'RI CHIZIQ BILAN TEKISLIK ORASIDAGI MUNOSABAT

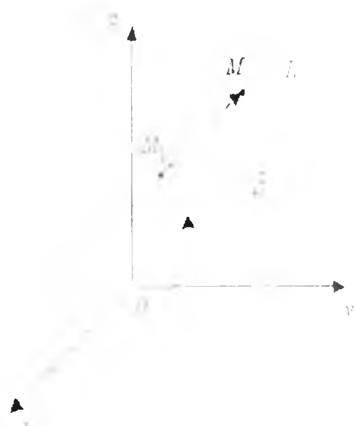
13.1. To'g'ri chiziqning kanonik tenglamalari

$Oxyz$ fazoni va unda berilgan L to'g'ri chiziqni qaraymiz.

1-ta'rif. To'g'ri chiziqqa parallel vektor shu to'g'ri chiziqning **yo'naltiruvchi** vektori deb ataladi. Yo'naltiruvchi vektorning koordinata o'qlaridagi proeksiyalari to'g'ri chiziqning **yo'naltiruvchi koeffitsiyentlari** deyiladi. To'g'ri chiziqning bitta $M_1(x_1;y_1;z_1)$ nuqtasi hamda yo'naltiruvchi $\vec{S} = m\vec{i} + n\vec{j} + p\vec{k}$ vektori ma'lum bo'lganda uning tenglamasini keltirib chiqaramiz. $M(x;y;z)$ to'g'ri chiziqning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. U holda

$$\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1)\vec{i} + (y - y_1)\vec{j} + (z - z_1)\vec{k}$$

va $\vec{S}$ vektorlar parallel bo'ladi (72-chizma).



72-chizma.

Parallel vektorlarni mos koordinatlari proporsional bo'lganligi sababli

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p} \qquad (13.1)$$

tenglamaga ega bo'lamiz. Demak, berilgan L to'g'ri chiziqning istalgan M nuqtasining koordinatlari (13.1) tenglamani qanoatlantiradi. L to'g'ri chiziqda yotmagan hech bir nuqtaning koordinatlari (13.1) tenglamani qanoatlantirmaydi, chunki bu holda $\overline{M_1M}$ va $\vec{S}$ vektorlar parallel bo'lmagani uchun ularning mos koordinatlari proporsional bo'lmaydi.

Shunday qilib (13.1) tenglama L to'g'ri chiziqning tenglamasi ekan.

U **berilgan nuqtadan o'tuvchi** to'g'ri chiziq tenglamasi yoki to'g'ri chiziqning **kanonik tenglamalari** deb ataladi.

13.2. To'g'ri chiziqning parametrik tenglamalari

(13.1) dagi nisbatlarni t orqali belgilaymiz. U holda $\frac{x-x_1}{m}=t$ munosabatdan $x-x_1=mt$, $x=x_1+mt$ kelib chiqadi. Shuningdek $\frac{y-y_1}{n}=t$ dan $y=y_1+nt$, $\frac{z-z_1}{p}=t$ dan $z=z_1+pt$ tengliklarni hosil qilamiz.

Shunday qilib

$$\begin{cases} x=x_1+mt, \\ y=y_1+nt, \\ z=z_1+pt \end{cases} \qquad (13.2)$$

tengliklarga ega bo'ldik. (13.2) to'g'ri chiziqning **parametrik tenglamalari** deb ataladi. Bu yerda t **parametr** deb ataladi va istalgan qiymatlarni qabul qiladi. Parametr t o'zgarganda $M(x,y,z)$ nuqtaning koordinatalari ham o'zgaradi va u to'g'ri chiziq bo'ylab siljiydi.

Agar to'g'ri chiziq parametrik tenglamalari yordamida berilsa ulardan t parametrni yo'qotib to'g'ri chiziqning kanonik tenglamalarini hosil qilish mumkin.

Izoh. $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}$ va $\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt \end{cases}$ tenglamalar mos ravishda Oxy tekislikdagi $M_0(x_0;y_0)$ nuqtadan o'tuvchi va $\vec{s}=\{m;n\}$ yo'naltiruvchi vektorga ega to'g'ri chiziqning kanonik va parametrik tenglamalaridir.

13.3. To'g'ri chiziqning umumiy tenglamalari

Ikkita chiziqli tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \tag{13.3}$$

ni qaraymiz. Sistemaning har bir tenglamasi tekislikni ifodalaydi. Agar bu tekisliklar parallel bo'lmasa ular qandaydir L to'g'ri chiziq bo'ylab kesishadi. Shuning uchun (13.3) tenglamalar sistemasi to'g'ri chiziqning **umumiy tenglamalari** deb ataladi.

Endi to'g'ri chiziqning kanonik tenglamalariga ko'ra uning umumiy tenglamalarini topish usuli bilan tanishamiz. (13.1) tenglama

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{y-y_1}{n}, \\ \dfrac{y-y_1}{n}=\dfrac{z-z_1}{p} \end{cases} \tag{13.1'}$$

yoki

$$\begin{cases} n(x-x_1)=m(y-y_1), \\ p(y-y_1)=n(z-z_1) \end{cases} \tag{13.1''}$$

ko'rinishdagi ikkita chiziqli tenglamalar sistemasiga teng kuchli, chunki (13.1) dagi uchinchi $\dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{p}$ tenglik (13.1') dan kelib chiqadi.

Shuningdek (13.1) tenglama

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{y-y_1}{n}, \\ \dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{p} \end{cases} \quad \text{va} \quad \begin{cases} \dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{p}, \\ \dfrac{y-y_1}{n}=\dfrac{z-z_1}{p} \end{cases}$$

sistemalarning har biriga teng kuchli bo'ladi. (13.1') sistemaning birinchi tenglamasi $\dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{y-y_1}{n}$ da z ishtirok etmaydi. Demak u Oz o'qqa parallel tekislik tenglamasi. Shuningdek (13.1') sistemaning ikkinchi tenglamasi $\dfrac{y-y_1}{n}=\dfrac{z-z_1}{p}$ da x ishtirok etmaganligi uchun u Ox o'qqa parallel tekislik tenglamasini ifodalaydi. Bu tekisliklar kesishishi natijasida kesimda to'g'ri chiziq hosil bo'ladi. (13.1') yoki (13.1") tenglamalar sistemasi ana shu to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasini ifodalaydi. Ya'ni (13.1') yoki (13") tenglamalar sistemasi to'g'ri chiziqni ikkita tekisliklarning kesishish chizig'i sifatida aniqlaydi.

Endi to'g'ri chiziq koordinata o'qlaridan biriga perpendikulyar bo'lgan holni qaraymiz. Faraz qilaylik to'g'ri chiziq Ox o'qqa perpendikulyar bo'lsin. U holda shu to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori $\vec{S}=\{m,n,p\}$ ham Ox o'qqa perpendikulyar bo'lib $m=0$ bo'ladi. Bu holda (13.1") tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} x-x_1=0 \\ py-py_1=nz-nz_1 \end{cases} \quad \text{yoki} \quad \begin{cases} x=x_1, \\ py-nz-py_1+nz_1=0 \end{cases}$$

sistemasiga aylanadi. Bular Ox o'qqa perpendikulyar to'g'ri chiziqning umumiy tenglamalari. Bu holda ham umumiylikni buzmaslik uchun to'g'ri chiziq tenglamasini kanonik ko'rinishda

$$\frac{x-x_1}{0}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}$$

kabi yozish mumkin. Shunday qilib to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasidagi kasrlardan qaysi birining maxraji nol bo‘lsa uning suratini ham nolga tenglashtirib chiziqli tenglamalar sistemasi hosil qilinar ekan.

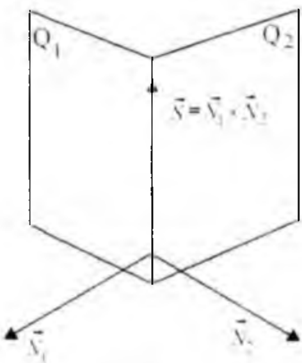
Masalan, $\dfrac{x-x_1}{0}=\dfrac{y-y_1}{n}=\dfrac{z-z_1}{p}$ tenglama $M_1(x_1;y_1;z_1)$ nuqtadan o‘tuvchi va $0x$ o‘qqa perpendikulyar to‘g‘ri chiziq tenglamasi, $\dfrac{x-x_1}{0}=\dfrac{y-y_1}{0}=\dfrac{z-z_1}{p}$ esa $M_1(x_1;y_1;z_1)$ nuqtadan o‘tuvchi va Oz o‘qqa parallel to‘g‘ri chiziq tenglamasi.

Endi to‘g‘ri chiziqni chizish usuli bilan tanishamiz.

Faraz qilaylik to‘g‘ri chiziq umumiy tenglamalari yordamida berilgan bo‘lib, uni chizish talab etilsin. Ma’lumki to‘g‘ri chiziqni chizish uchun unga tegishli ikkita nuqtalarini bilish kifoya. Bu nuqtalarni koordinatlarini (13.3) sistemani yechish orqali topish mumkin. ((13.3) sistemani yechish usuli bilan tanishmiz.).

Endi to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamalari (13.3) dan kanonik tenglamalariga o‘tish usuli bilan tanishamiz.

To‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamalarini yozish uchun uning bitta $M_1(x_1;y_1;z_1)$ nuqtasini hamda yo‘naltiruvchi vektorini bilishimiz lozim. M_1 nuqtaning koordinatalarini (13.3) sistemadagi koordina



73-chizma.

talaridan biriga ixtiyoriy qiymat berib sistemani yechish orqali topish mumkin.

To'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori sifatida tekisliklarning normal vektorlari

$\overrightarrow{N_1} = \{A_1;B_1;C_1\}$ va $\overrightarrow{N_2} = \{A_2;B_2;C_2\}$ vektorlarning vektor ko'paytmasi $\vec{S} = \overrightarrow{N_1} \times \overrightarrow{N_2}$ ni olishimiz mumkin (73-chizma).

1-misol. To'g'ri chiziqning

$$\begin{cases} 2x + 3y + 2z + 8 = 0, \\ x - y - z - 9 = 0 \end{cases}$$

umumiy tenglamasi kanonik ko'rinishga keltirilsin.

Yechish. To'g'ri chiziqning aniq $M_1(x_1;y_1;z_1)$ nuqtasini topish uchun uning umumiy tenglamasiga z=1 qiymatni qo'ysak

$$\begin{cases} 2x + 3y + 10 = 0, \\ x - y - 10 = 0. \end{cases}$$

sistema hosil bo'ladi. Sistemaning ikkinchi tenglamasini 3 ga ko'paytirib birinchi tenglamasiga hadlab qo'shamiz. U holda $5x$-20=0; $5x$=20 bo'lib bundan x=4 kelib chiqadi. Oxirgi sistemaning ikkinchi tenglamasidan y=x-10 ga ega bo'lamiz. Bunga x=4 qiymatni qo'ysak y = 4-10 = -6 hosil bo'ladi.

Demak M_1(4; -6; 1) to'g'ri chiziqqa tegishli nuqta ekan. Endi to'g'ri chiziqning $\vec{S} = \overrightarrow{N_1} \times \overrightarrow{N_2}$ yo'naltiruvchi vektorini aniqlaymiz.

Misolda $\overrightarrow{N_1} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\overrightarrow{N_2} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$, bo'lgani uchun

$$\vec{S} = \overrightarrow{N_1} \times \overrightarrow{N_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

bo'ladi. Bu determinatni birinchi satr elementlari bo'yicha yoyib hisoblaymiz.

$$\vec{S}=\begin{vmatrix}3 & 2\\ -1 & -1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix}\vec{k}$$

yoki ikkinchi tartibli determinantlarni hisoblasak

$$\vec{S}=-\vec{i}+4\vec{j}-5\vec{k}$$

kelib chiqadi. Demak $m=-1$, $n=4$, $p=-5$, $x_1=4$, $y_1=-6$, $z_1=1$.

Topilgan qiymatlarni to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamalari (13.1) ga qo‘ysak

$$\frac{x-4}{-1}=\frac{y+6}{4}=\frac{z-1}{-5}$$

tenglamalarga ega bo‘lamiz. Bu berilgan to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamalaridir.

13.4. Ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi

$M_1(x_1;y_1;z_1)$ va $M_2(x_2;y_2;z_2)$ nuqtalar berilgan bo‘lib ulardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamalarni topish talab etilsin. Bu holda to‘g‘ri chiziqda yotuvchi $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}+(z_2-z_1)\vec{k}$ vektorni uning yo‘naltiruvchi vektori deb olishimiz mumkin.

Demak $m=x_2-x_1, n=y_2-y_1, p=z_2-z_1$ bo‘lib (13.1) tenglama.

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \qquad (13.4)$$

ko‘rinishni oladi. (13.4) tenglama **ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi** deb ataladi.

2–misol. $M_1(3;\ 4;\ 2)$ va $M_2(3;\ -2;\ 1)$ nuqtalarlan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi yozilsin.

Yechish. (13.4) formulaga asosan

$$\frac{x-3}{3-3}=\frac{y-4}{2-4}=\frac{z-2}{1-2} \text{ yoki } \frac{x-3}{0}=\frac{y-4}{6}=\frac{z-2}{-1}$$

kelib chiqadi $m=0$ bo'lgani uchun to'g'ri chiziq Ox o'qqa perpendikulyar va uning tenglamasini $x=3$, $\frac{y-4}{6}=\frac{z-2}{-1}$ yoki $\begin{cases} x-3=0, \\ y-6z+8=0 \end{cases}$ ko'rinishda yozish mumkin.

13.5. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak To'g'ri chiziqlarning parallellik va perpendikulyarlik shartlari

Fazodagi ikkita to'g'ri chiziq orasidagi burchak deganda fazoning istalgan nuqtasidan shu to'g'ri chiziqlarga parallel o'tkazilgan to'g'ri chiziqlar tashkil etgan burchaklardan biri nazarda tutiladi.

Faraz qilaylik fazodagi L_1 va L_2 to'g'ri chiziqlar mos ravishda

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \quad \text{va} \quad \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$

kanonik tenglamalari yordamida berilgan bo'lsin.

Bu to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni topamiz L_1 bilan L_2 to'g'ri chiziqlar orasidagi burchaklardan biri ularning yo'naltiruvchi vektorlari $\vec{S}_1=m_1\vec{i}+n_1\vec{j}+p_1\vec{k}$ bilan $\vec{S}_2=m_2\vec{i}+n_2\vec{j}+p_2\vec{k}$ orasidagi burchak φ ga teng bo'ladi. Shuning uchun ikki vektor orasidagi burchakni topish formulasiga binoan

$$\cos\varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\,\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}} \tag{13.5}$$

formulaga ega bo'lamiz. Bu ikki **to'g'ri chiziq orasidagi burchakni topish formulasi**. Agar ikki to'g'ri chiziq orasidagi o'tkir burchakni topish talab etilsa (13.5) tenglikning o'ng tomonidagi ifodani absolyut qiymatini olish kerak.

3-misol. $\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{2}$ va $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{4}=\frac{z+1}{-2}$ to'g'ri chiziqlar orasidagi o'tkir burchak topilsin.

Yechish. (13.5) formulaga $m_1=3$, $n_1=-1$, $p_1=2$; $m_2=2$, $n_2=4$, $p_2=-2$ qiymatlarni qo'ysak:

$$\cos\varphi=\frac{3\cdot 2+(-1)\cdot 4+2\cdot(-2)}{\sqrt{3^2+(-1)^2+2^2}\sqrt{2^2+4^2+(-2)^2}}=\frac{-2}{\sqrt{14}\sqrt{24}}=\frac{-2}{\sqrt{2\cdot 7\cdot 3\cdot 8}};$$

$$\cos\varphi=-\frac{1}{2\sqrt{21}}$$

kelib chiqadi. Shartga binoan ikki to'g'ri chiziq orasidagi o'tkir burchak bizni qiziqtirganligi uchun oxirgi tenglikning o'ng tomonidagi ifodani absolyut qiymatini olamiz: $\cos\varphi=\frac{1}{2\sqrt{21}}=0{,}1091$.

Trigonometrik funksiyalarning qiymatlari jadvalidan $\varphi=88^{\circ}44'$ ekanini topamiz.

1. Parallellik sharti. Ikki to'g'ri chiziq faqatgina ularning yo'naltiruvchi vektorlari parallel (kollinear) bo'lgandagina parallel bo'lgani uchun vektorlarning parallellik shartidan

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2} \qquad (13.6)$$

formulaga ega bo'lamiz. Bu to'g'ri chiziqlarning **parallellik** shartidir.

4–misol. $A(1;\ -1;\ 2)$ nuqtadan $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+1}{2}$ to'g'ri chiziqqa parallel o'tkazilgan to'g'ri chiziq tenglamasi topilsin.

Yechish. A nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini yozamiz:

$$\frac{x-1}{m}=\frac{y+1}{n}=\frac{z-2}{p}.$$

Shartga ko‘ra bu to‘g‘ri chiziq berilgan to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lganligi uchun m, n, p sonlar 1, 3, 2 sonlarga proporsional bo‘ladi. m, n, p sonlarni ularga proporsional sonlar bilan almashtirib

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-2}{2}$$

tenglamani hosil qilamiz.

5–misol. $A(1; 2; 3)$ nuqtadan

$$\begin{cases} 2x+3y+5z-9=0, \\ 3x-4y+z-12=0 \end{cases}$$

to‘g‘ri chiziqqa parallel o‘tkazilgan to‘g‘ri chiziq tenglamasi topilsin.

Yechish. Izlanayotgan tenglamani kanonik ko‘rinishda yozamiz:

$$\frac{x-1}{m}=\frac{y-2}{n}=\frac{z-3}{p}. \qquad (a)$$

To‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchi vektori sifatida $\overrightarrow{N_1}=2\vec{i}+3\vec{j}+5\vec{k}$ va $\overrightarrow{N_2}=3\vec{i}-4\vec{j}+\vec{k}$ normal vektorlarning vektor ko‘paytmasi $\overrightarrow{N_1}\times\overrightarrow{N_2}$ ni olamiz. U holda

$$\vec{S}=\overrightarrow{N_1}\times\overrightarrow{N_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix}$$

yoki determinatni birinchi satr elementlari bo‘yicha yoysak

$$\vec{S}=\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}\vec{k}=$$

$$(3+20)\vec{i}-(2-15)\vec{j}+(-8-9)\vec{k}=23\vec{i}+13\vec{j}-17\vec{k}$$

kelib chiqadi. Demak $m=23$, $n=13$, $p=-17$. Ushbu qiymatlarni to'g'ri chiziq tenglamasi (a) ga qo'ysak.

$$\frac{x-1}{23}=\frac{y-2}{13}=\frac{z-3}{-17}$$

hosil bo'ladi.

2. Perpendikulyarlik sharti. Ikki to'g'ri chiziq faqatgina ularning yo'naltiruvchi vektorlari o'zaro perpendikulyar bo'lgandagina perpendikulyar bo'ladi. Shuning uchun ikki vektorning perpendikulyarlik shartiga binoan

$$m_1 m_2+n_1 n_2+p_1 p_2=0 \tag{13.7}$$

formulaga ega bo'lami. Bu ikki to'g'ri chiziqning perpendikulyarlik sharti.

6–misol. $\frac{x-1}{3}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-2}{-4}$ va $\frac{x-3}{2}=\frac{y+4}{-5}=\frac{z-6}{4}$ to'g'ri chiziqlar perpendikulyarmi?

Yechish. (13.7) tenglamaga $m_1=3$, $n_1=-2$, $p_1=-4$; $m_2=2$, $n_2=-5$, $p_2=4$ qiymatlarni qo'ysak $3\cdot2+(-2)\cdot(-5)+(-4)\cdot4=6+10-16=0$ kelib chiqadi. To'g'ri chiziqlarning perpendikulyarlik sharti bajarilganligi uchun ular o'zaro perpendikular.

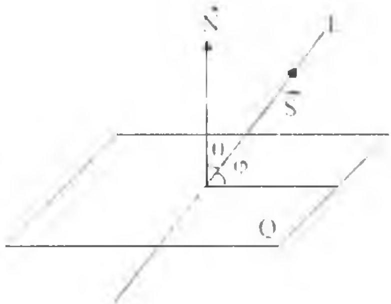
13.6. To'g'ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchak. To'g'ri chiziq bilan tekislikning parallellik va perpendikyularlik shartlari

To'g'ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchak deganda to'g'ri chiziq bilan uning shu tekislikdagi proeksiyasi orasidagi burchaklardan biri tushuniladi.

To'g'ri chiziqning tekislikdagi proeksiyasi shu to'g'ri chiziq orqali berilgan tekislikka perpendikyular qilib o'tkazilgan tekislikni berilgan tekislik bilan kesishish chizig'idir. l to'g'ri chiziq kanonik

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}$$

tenglamalari, Q tekislik $Ax+By+Cz+D=0$ umumiy tenglamasi bilan berilganda ular orasidagi φ burchakni topamiz. To'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori $\vec{S}=m\vec{i}+n\vec{j}+p\vec{k}$ va tekislikning normal vektori $\vec{N}=A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}$ 74-chizmada ko'rsatilgandek



74-chizma.

joylashgan deb ular orasidagi burchakni θ orqali belgilaymiz. U holda ikki vektor orasidagi burchakni topish formulasiga ko'ra $\cos\theta=\dfrac{\vec{S}\cdot\vec{N}}{|\vec{S}|\cdot|\vec{N}|}$ bo'ladi.

Ammo $\theta+\varphi=\dfrac{\pi}{2}$, $\theta=\dfrac{\pi}{2}-\varphi$ va $\cos\theta=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right)=\sin\varphi$ ekanligini hisobga olsak $\sin\varphi=\dfrac{\vec{S}\cdot\vec{N}}{|\vec{S}||\vec{N}|}$ kelib chiqadi. Bu yerdagi $\vec{S}\cdot\vec{N}$ skalyar ko'paytmani va vektorlarning uzunliklari $|\vec{S}|$, $|\vec{N}|$ ni ularning koordinatalari orqali ifodalasak

$$\sin\varphi=\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}} \qquad (13.8)$$

hosil bo'ladi. $0 \le \varphi \le \pi$ ekanligini e'tiborga olib (13.8) tenglikning o'ng tomonidagi ifodaning absolyut qiymatini olamiz. Shunday qilib

$$\sin\varphi = \frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}} \qquad (13.9)$$

to'g'ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchakni topish formulasini hosil qilamiz.

7–misol. $\begin{cases} 3x - y - 1 = 0, \\ 3x + 2z - 4 = 0 \end{cases}$ to'g'ri chiziq bilan $2x + y + z - 6 = 0$ tekislik orasidagi φ burchakning sinusi topilsin.

Yechish. (13.9) formuladan foydalanish uchun to'g'ri chiziq tenglamasini kanonik ko'rinishga keltiramiz. Buning uchun sistemaning har bir tenglamasidan x ni topamiz. Birinchi tenglamadan $3x = y + 1$; $x = \frac{y+1}{3}$, ikkinchi tenglamadan $-2(z-2)$; $x = \frac{2(z-2)}{-3} = \frac{z-2}{-\frac{3}{2}}$ kelib chiqadi. Bularni tenglashtirsak

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{-\frac{3}{2}}$$

to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi hosil bo'ladi. (13.9) formulaga $m = 1, n = 3, p = \frac{-3}{2}$; $A = 2, B = 1, C = 1$ qiymatlarni qo'ysak

$$\sin\varphi = \frac{\left|2\cdot 1 + 1\cdot 3 + 1\left(\frac{-3}{2}\right)\right|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+3^2+\left(\frac{-3}{2}\right)^2}} = \frac{\frac{7}{2}}{\sqrt{6}\,\frac{7}{2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

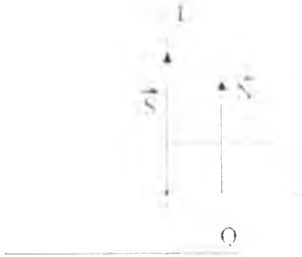
hosil bo'ladi.

1. To'g'ri chiziq bilan tekislikning perpendikulyarlik sharti. To'g'ri chiziq tekislikka faqatgina uning yo'naltiruvchi

$\vec{S}=\{m,n,p\}$ vektori tekislikning $\vec{N}=\{A,B,C\}$ normal vektoriga parallel bo'lgandagina perpendikulyar bo'ladi (75–chizma). Ikki vektorning parallellik shartidan

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p} \qquad (13.10)$$

tenglikka ega bo'lamiz. (13.10) to'g'ri

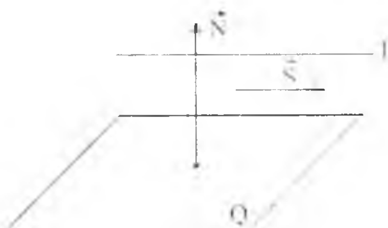


75–chizma.

chiziq bilan tekislikning **perpendikulyarlik** sharti.

2.To'g'ri chiziq bilan tekislikning parallellik sharti. L to'g'ri chiziq bilan tekislik $\vec{S}=\{m,n,p\}$ va $\vec{N}=\{A,B,C\}$ vektorlar perpendikulyar bo'lgandagina parallel bo'ladi(76-chizma). Shuning uchun ikki vektorning perpendikulyarlik shartiga asosan

$$Am+Bn+Cp=0 \qquad (13.11)$$



76–chizma

tenglikka ega bo'lamiz (13.11) to'g'ri chiziq bilan tekislikning **parallellik** sharti.

8–misol. $A(2;1;6;)$ nuqtadan o'tuvchi va $x-4y+5z=0$ tekislikka perpendikulyar to'g'ri chiziqning tenglamasi yozilsin.

Yechish. Berilgan nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasiga asosan izlanayotgan tenglama

$$\frac{x-2}{m}=\frac{y-1}{n}=\frac{z-6}{p}$$

ko'rinishga ega bo'ladi (13.10) ga ko'ra m, n, p sonlar tekislik tenglamasidagi $A=1$, $B=-4$, $C=5$ sonlarga proporsional. To'g'ri chiziq tenglamasiga m, n, p o'rniga mos ravishda 1, -4, 5 qiymatlarni qo'yib to'g'ri chiziq tenglamasi

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z-6}{5}$$

ni hosil qilamiz.

13.7. To'g'ri chiziq bilan tekislikning kesishish nuqtasi

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p} \qquad (13.12)$$

to'g'ri chiziq bilan

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (13.13)$$

tekislikning kesishish nuqtasini topish talab etilsin.

To'g'ri chiziq tenglamasini parametrik ko'rinishda yozamiz:

$$\begin{cases} x=x_1+mt, \\ y=y_1+nt, \\ z=z_1+pt. \end{cases} \qquad (13.14)$$

t parametrning har bir qiymatiga to'g'ri chiziqning aniq nuqtasi mos keladi. t ning shunday qiymatini tanlashimiz kerakki uning bu qiymatiga mos to'g'ri chiziq nuqtasi tekislikda yotsin. (13.14) tengliklardagi x, y, z larning qiymatlarini (13.13) tekislik tenglamasiga qo'yib t ning qiymatini aniqlaymiz:

$$A(x_1+mt)+B(y_1+nt)+C(z_1+pt)+D$$

yoki

$$(Am+Bn+Cp)t+(Ax_1+By_1+Cz_1+D)=0. \qquad (13.15)$$

Agar to'g'ri chiziq tekislikka parallel bo'lmasa $Am+Bn+Cp\neq 0$ bo'ladi va (13.15) dan t ni topsak

$$t=-\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{Am+Bn+Cp} \qquad (13.16)$$

hosil bo'ladi. t ning ushbu topilgan qiymatini to'g'ri chiziqning parametrik tenglamalari (13.14) ga qo'ysak to'g'ri chiziq bilan tekislikning kesishish nuqtasining koordinatalari hosil bo'ladi.

Endi $Am+Bn+Cp=0$ bo'lgan holni o'rganamiz. a) $Ax_1+By_1+Cz_1+D\neq 0$ bo'lsin. Bu to'g'ri chiziqning $M(x_1;y_1;z_1)$ nuqtasi $Ax+By+Cz+D=0$ tekislikda yotmasligini anglatadi (chunki M nuqtaning koordinatlari tekislik tenglamasini qanoatlantirmaydi). $Am+Bn+Cp=0$ shart to'g'ri chiziq bilan tekislikning parallellik sharti ekanini hisobga olsak qaralayotgan holda to'g'ri chiziq tekislikka parallel bo'ladi.

b) $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$ bo'lsin. Bu holda to'g'ri chiziqning $M_1(x_1;y_1;z_1)$ nuqtasining koordinatalari $Ax+By+Cz+D=0$ tekislik tenglamasini qanoatlantirgani uchun M_1 nuqta shu tekislikda yotadi. Ikkinchi tomonidan shartga ko'ra $Am+Bn+Cp=0$ bo'lgani uchun (13.15) tenglama $0\cdot t=0$ ko'rinishga ega bo'ladi. Bu tenglik t ning istalgan qiymatida bajariladi, ya'ni to'g'ri chiziqning barcha nuqtalari, jumladan to'g'ri chiziqning o'zi ham tekislikda yotadi.

Shunday qilib bir vaqtda

$$\begin{cases} Am+Bn+Cp=0, \\ Ax_1+By_1+Cz_1+D=0 \end{cases} \qquad (13.17)$$

tengliklarning bajarilishi $\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}$ to'g'ri chiziqning $Ax+By+Cz+D=0$ tekislikda yotish sharti bo'lib xizmat qiladi.

9–misol. $\frac{x-1}{5}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-1}{1}$ to'g'ri chiziq bilan $3x-4y-z+5=0$ tekislikning kesishish nuqtasi topilsin.

Yechish. To'g'ri chiziq tenglamasini parametrik ko'rinishda yozamiz:

$$\frac{x-1}{5}=t;\ \frac{y+2}{4}=t;\ \frac{z-1}{-1}=t.$$

Bundan $x-1=5t,\ y+2=4t,\ z-1=-t$ yoki $\begin{cases} x=5t+1, \\ y=4t-2, \\ z=-t+1 \end{cases}$

to'g'ri chiziqning parametrik tenglamalari kelib chiqadi. x, y va z ning qiymatlarini tekislik tenglamasiga qo'ysak $3\cdot(5t+1)-4(4t-2)-(-t+1)+5=0$ yoki $15t+3-16t+8+t-1+5=0$; $0\cdot t+15=0$ ra ega bo'lamiz. $0\cdot t+15=0$ tenglamani qanoatlantiruvchi t ning qiymati mavjud emas. Boshqacha aytganda to'g'ri chiziq bilan tekislik kesishmaydi, ya'ni ular parallel.

10–misol. $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-5}{2}$ to'g'ri chiziq bilan $2x+3y-2z+2=0$ tekislikning kesishish nuqtasi topilsin.

Yechish. To'g'ri chiziq tenglamasini parametrik ko'rinishda yozamiz:

$$\frac{x-1}{2}=t,\ \frac{y+1}{3}=t,\ \frac{z-5}{2}=t;\ x-1=2t,\quad y+1=3t,\ z-5=2t;$$

$$\begin{cases} x=2t+1, \\ y=3t-1, \\ z=2t+5. \end{cases}$$

x, y, z ning ushbu qiymatlarini tekislik tenglamasiga qo'yib t ni aniqlaymiz:

$$2(2t+1)+3(3t-1)-2(2t+5)+2=0;$$

$$4t+2+9t-3-4t-10+2=0;\ 9t-9=0;\ t=1.$$

To'g'ri chiziqning parametrik tenglamalariga $t=1$ qiymatni qo'ysak $x=2\cdot1+1=3$, $y=3\cdot1-1=2$, $z=2\cdot1+5=7$ kelib chiqadi. Demak berilgan tekislik bilan to'g'ri chiziq $M(3;\ 2;\ 7)$ nuqtada kesishar ekan.

13.8. Tekisliklar dastasi

Berilgan L to'g'ri chiziq orqali o'tuvchi tekisliklar to'plami **tekisliklar dastasi** deb ataladi. L to'g'ri chiziq esa **dastaning o'qi** deyiladi.

Faraz qilaylik dastaning o'qi umumiy tenglamalari

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \qquad (13.18)$$

yordamida berilgan bo'lsin.

Bu sistemaning ikkinchi tenglamasini o'zgarmas λ songa ko'paytirib birinchi tenglamasiga hadma-had qo'shsak

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \quad (13.19)$$

tenglik hosil bo'ladi. (13.19) tenglama x, y va z ga nisbatan birinchi darajali bo'lganligi uchun u λ ning har qanday sonli qiymatida tekislik tenglamasini ifodalaydi. (13.19) tenglama (13.18) tenglamaning natijasi ekanligini e'tiborga olsak (13.18) tenglamani koordinatalari qanoatlantiruvchi barcha nuqtalarning koordinatalari (13.19) tenglamani ham qanoatlantiradi. Demak λ ning istalgan qiymatida (13.19) tenglama (13.18) to'g'ri chiziqdan o'tuvchi tekislik tenglamasini ifodalaydi.

Endi teskarisini, ya'ni o'qi (13.18) to'g'ri chiziqdan iborat tekisliklar dastaning $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ tekisligidan boshqa har qanday tekisligi tenglamasini (13.19) tenglamadan hosil qilish mumkinligini ko'rsatamiz. Haqiqatan, dastaning istalgan tekisligi uning o'qda yotmagan bitta $M_1(x_1; y_1; z_1)$ nuqtasi bilan to'liq aniqlanadi, chunki to'g'ri chiziq va unda yotmagan nuqta orqali faqat birgina tekislik o'tkazish mumkin. Bu tekislik tenglamasini topish uchun (13.19) tenglamaga M_1 nuqtaning koordinatalarini qo'yamiz

$$A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1 + \lambda(A_2x_1 + B_2y_1 + C_2z_1 + D_2) = 0. \quad (13.20)$$

Bu tenglamadan $A_2x_1 + B_2y_1 + C_2z_1 + D_2 \neq 0$, ya'ni M_1 nuqta (13.18) sistemaning ikkinchi tenglamasini qanoatlantirmaydi, ya'ni u $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ tekislikda yotmaydi deb faraz qilib λ ni topamiz. λ ning topilgan qiymatini (13.19) ga qo'yib dastaning $M_1(x_1; y_1; z_1)$ nuqtadan o'tuvchi tekisligi tenglamasini aniqlaymiz. Agar $M_1(x_1; y_1; z_1)$ nuqta (13.18) dagi ikkinchi tekislikda yotsa $A_2x_1 + B_2y_1 + C_2z_1 + D_2 = 0$ bo'lib (13.20) tenglamadan λ ni topishning iloji bo'lmaydi (tenglamada λ ishtirok etmaydi). Demak (13.19) dastaning $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ tekisligidan boshqa barcha tekisligi tenglamasini (13.19) tenglikdan hosil qilish mumkin ekan. (13.19) tenglama **tekisliklar dastasining tenglamasi** deb ataladi. Shunday qilib (13.18) to'g'ri chiziqdan o'tuvchi tekisliklar dastasi tenglamasi (13.19) kabi topilar ekan.

11-misol. $\begin{cases} 3x + y - 4z + 5 = 0, \\ x - y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$ to'g'ri chiziqdan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar dastasidan $M(1; -1; 2)$ nuqtadan o'tuvchi tekislik ajratilsin.

Yechish. Berilgan to'g'ri chiziqdan o'tuvchi tekisliklar dastasining tenglamasi (13.19) ga binoan $3x + y - 4z + 5 + \lambda(x - y + 2z - 1) = 0$ (b) ko'rinishga ega bo'ladi. (b) tenglamaga M nuqtaning koordinatlarini qo'yib λ ni aniqlaymiz

$$3 \cdot 1 + (-1) - 4 \cdot 2 + 5 + \lambda(1 - (-1) + 2 \cdot 2 - 1) = 0;$$

$$-1 + 5\lambda = 0; \quad 5\lambda = 1; \quad \lambda = \frac{1}{5}.$$

λ ning ushbu topilgan qiymatini (b) ga qo'ysak

$$3x + y - 4z + 5 + \frac{1}{5}(x - y + 2z - 1) = 0;$$

$$15x+5y-20z+25+x-y+2z-1=0;$$

$16x+4y-18z+24=0$ yoki buni 2 ga qisqartirsak $8x+2y-9z+12=0$ tekislik tenglamasiga ega bo‘lamiz.

12–misol. $\begin{cases} 3x-y+z-5=0, \\ x+2y-z+2=0 \end{cases}$ (d) to‘g‘ri chiziq orqali o‘tuvchi va $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{2}$ (e) to‘g‘ri chiziqqa parallel tekislik tenglamasi topilsin.

Yechish. (13.19) ga binoan (d) to‘g‘ri chiziq orqali o‘tuvchi tekisliklar dastasining tenglamasi $3x-y+z-5+\lambda(x+2y-z+2)=0$ yoki o‘xshash hadlarni ixchamsalak $(3+\lambda)x+(2\lambda-1)y+(1-\lambda)z-5+2\lambda=0$ (f) ko‘rinishga ega bo‘ladi. Shu tekisliklar dastasidan (e) to‘g‘ri chiziqqa parallelini tanlashimiz kerak. Shuning uchun to‘g‘ri chiziq bilan tekislikning parallelgi sharti

$$Am+Bn+Cp=0 \tag{13.11}$$

bajarilishi lozim. (f) tenglamadan $A=3+\lambda$; $B=2\lambda-1$; $C=1-\lambda$ va (e) tenglamadan $m=-1$, $n=2$, $p=2$ ga ega bo‘lamiz. U holda (13.11) quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi. $(3+\lambda)(-1)+(2\lambda-1)\cdot 2+(1-\lambda)\cdot 2=0$ yoki $-3-\lambda+4\lambda-2+2-2\lambda=0$; $\lambda-3=0$; $\lambda=3$.

λ ning bu qiymatini (f) tenglamaga qo‘ysak $6x+5y-2z+1=0$ tekislik tenglamasi hosil bo‘ladi.

13–misol. $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{2}$ (g) to‘g‘ri chiziq orqali o‘tuvchi va $3x-y+2z-2=0$ (h) tekislikka perpendiklyar tekislik tenglamasi topilsin.

Yechish. To‘g‘ri chiziq tenglamasini $\begin{cases} \frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}, \\ \frac{x-1}{2}=\frac{z}{2} \end{cases}$ yoki buni soddlashtirib $\begin{cases} x-2y-5=0, \\ x-z-1=0 \end{cases}$ ko‘rinishda yozamiz. Bu to‘g‘ri chiziq orqali o'tuvchi tekisliklar dastasining tenglamasi (13.19) ga ko'ra $x - 2y - 5 + \lambda(x - z - 1) = 0$ yoki o'xshash hadlarni ixchamlasak $(1+\lambda)x - 2y - \lambda z - 5 - \lambda = 0$ (i) ko'rinishga ega bo'ladi. Bu dastadan (h) tekislikka perpendikulyarini ajratamiz. Ikki tekislikning perpendikulyarlik sharti $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$ (12.12) dan foydalanamiz. Biz qarayotgan hol uchun

$A_1 = 3,\ B_1 = -1, C_1 = 2;\ A_2 = 1+\lambda,\ B_2 = -2;\ C_2 = -\lambda$ bo'lgani uchun (12.12) shartdan $3(1+\lambda) + (-1)(-2) + 2\cdot(-\lambda) = 0$ yoki $3 + 3\lambda + 2 - 2\lambda = 0;\ \lambda = -5$ ga ega bo'lamiz. λ ning bu qiymatini (i) ga qo'ysak $-4x - 2y + 5z - 5 + 5 = 0$ yoki tenglikni -1 ga ko'paytirsak. $4x + 2y - 5z = 0$ tekislik tenglamasiga ega bo'lamiz.

14-misol. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{4};\ \frac{x+2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{4}$ parallel to'g'ri chiziqlar orqali o'tuvchi tekislik tenglamasi topilsin.

Yechish. Birinchi to'g'ri chiziq tenglamasini

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{3}, \\ \frac{x-1}{2} = \frac{z}{4} \end{cases}$$ shaklda yoki buni soddalashtirib $$\begin{cases} 3x - 2y + 3 = 0, \\ 2x - z - 2 = 0 \end{cases}$$

kabi yozamiz.

Bu to'g'ri chiziq orqali o'tuvchi tekisliklar dastasining tenglamasi (13.19) ga ko'ra $3x - 2y + 3 + \lambda(2x - z - 2) = 0$ yoki o'xshash hadlarni ixchamlasak

$(3+2\lambda)x - 2y - \lambda z + 3 - 2\lambda = 0$ (j) ko'rinishga ega bo'ladi. Shu dastadan ikkinchi to'g'ri chiziq orqali o'tuvchisini ajratamiz. Ikkinchi to'g'ri chiziq tenglamasidan uning $M(-2;-1;1)$ nuqtadan o'tishi ko'rinib turibdi. Demak ikkinchi to'g'ri chiziq orqali o'tuvchi tekislik ham shu nuqta orqali o'tadi va M nuqtaning koordinatalari tekislik tenglamasi (j) ni qanoatlantiradi. (j) ga M nuqtaning koordinatalarini qo'yib λ ni aniqlaymiz:

$$(3-2\lambda)\cdot(-2)-2\cdot(-1)-\lambda\cdot 1-3-2\lambda=0;$$

$$-6+4\lambda+2-\lambda+3-2\lambda=0;\quad -7\lambda-1=0;\ \lambda=-\frac{1}{7}$$

λ ning topilgpn qiymatini (j) tenglamaga qo'yamiz:

$$\left(3-\frac{2}{7}\right)x-2y+\left(-\frac{1}{7}\right)z+3-2\left(-\frac{1}{7}\right)=0;$$

$$\frac{19}{7}x-2y-\frac{1}{7}z+3+\frac{2}{7}=0.$$

Bu tenglamani 7 ga ko'paytirsak $19x-14y+z+23=0$ izlanayotgan tenglama hosil bo'ladi.

15-misol. $\begin{cases}3x-2y-z+4=0,\\ x-4y-3z-2=0\end{cases}$ to'g'ri chiziqning $5x+2y+2z-7=0$ tekislikdagi proeksiyasi topilsin.

Yechish. Biz berilgan to'g'ri chiziq orqali o'tuvchi va berilgan tekislikka perpendikulyar tekislik tenglamasini topishimiz kerak. U holda proeksiya topilgan tekislik bilan berilgan tekislikning kesishish chizigidan iborat bo'ladi. Berilgan to'g'ri chiziqdan o'tuvchi tekisliklar dastasi tenglamasi (13.19) ga ko'ra

$$3x-2y-z+4+\lambda(x-4y-3z-2)=0 \qquad (k)$$

kabi aniqlanadi. Izlanayotgan tenglama (k) tenglamadan λ ning qandaydir aniq qiymatida kelib chiqadi. (k) tenglamani o'xshash hadlarini ixchamlab uni $(3+\lambda)x+(-2-4\lambda)y+(-1-3\lambda)z+(4-2\lambda)=0\ (l)$ ko'rinishida yozamiz. Izlayotgan tekislik berilgan tekislikka perpendikulyar. Ikki tekislikning perpendikulyarlik sharti $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$ ga $A_1=5$, $B_1=2$, $C_1=2$; $A_2=3+\lambda$, $B_2=-2-4\lambda$, $C_2=-1-3\lambda$ qiymatlarni qo'ysak

$$5(3+\lambda)+2(-2-4\lambda)+2(-1-3\lambda)=0;$$

$$15+5\lambda-4-8\lambda-2-6\lambda=0;\quad -9\lambda+9=0;\ \lambda=1$$

kelib chiqadi. λ ning topilgan qiymatini (l) ga qo'ysak berilgan to'g'ri chiziq orqali o'tuvchi va berilgan tekislikka perpendikular tekislik tenglamasi hosil bo'ladi. $4x-6y-4z+2=0$ yoki 2 ga qisqartirsak: $2x-3y-2z+1=0$.

Shunday qilib berilgan to'g'ri chiziqning berilgan tekislikka proeksiyasini ifodolovchi to'g'ri chiziq tenglamasi

$$\begin{cases} 2x-3y-2z+1=0, \\ 5x+2y+2z-7=0. \end{cases}$$

ko'rinishga ega bo'lar ekan.

16-misol. $M_0(1;1;1)$ nuqtadan $\frac{x-11}{2}=\frac{y-18}{5}=\frac{z-4}{-2}$ (L_1) to'g'ri chiziqqacha masofa topilsin.

Yechish. M_0 nuqtdan berilgan to'g'ri chiziqqa perpendikular Q tekislik o'tkazamiz. Tekislik M_0 nuqtadan o'tganligi va berilgan to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lganligi uchun uning tenglamasi (12.2) ga asosan $2(x-1)+5(y-1)-2(z-1)=0$ yoki $2x+5y-2z-5=0$ (Q) ko'rinishga ega bo'ladi. Endi L_1 to'g'ri chiziq va Q tekislik tenglamalarini birgalikda yechib ularni kesishish nuqtasini topamiz. Buning uchun to'g'ri chiziq tenglamasini parametrik ko'rinishda yozamiz. $\frac{x-11}{2}=\frac{y-18}{5}=\frac{z-4}{-2}=t$ desak $x-11=2t$, $y-18=5t$, $z-4=-2t$ bo'lib bundan $x=2t+11$, $y=5t+18$, $z=-2t+4$ (l) ga ega bo'lamiz. x,y,z larni ushbu qiymatlarini tekislik tenglamasiga qo'yib t parametrni aniqlaymiz.

$2(2t+11)+5(5t+18)-2(-2t+4)-5=0$, $33t+99=0$, bundan $t=-3$. Ushbu qiymatni (l) ga qo'yib $x=2\cdot(-3)+11=5$, $y=5\cdot(-3)+18=3$, $z=-2\cdot(-3)+4=10$ qiymatlarni topamiz. Demak, berilgan to'g'ri chiziq bilan Q tekislik $M_1(5;3;10)$ nuqtada kesishar ekan.

M_0 nuqtadan L to'g'ri chiziqqacha masofa u bilan M_1 nuqta orasidagi masofaga tegishligini hisobga olib fazodagi ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasi (6.8)ga binoan

$d = M_0M_1 = \sqrt{(5-1)^2 + (3-1)^2 + (10-1)^2} = \sqrt{101} \approx 10$ ga ega bo'lamiz.

17-misol. $\frac{x-3}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{2}$ (L_1) va $\frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+4}{2}$ (L_2) ayqash to'g'ri chiziqlar orasidagi eng qisqa masaofa topilsin.

Yechish. L_1 to'g'ri chiziq tenglamasini

$$\frac{x-3}{4} = \frac{z-1}{2}, \quad \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{2} \quad \text{yoki } 2x-6 = 4z-4,\ 2y-2 = 3z-3$$

$$\text{yoki} \quad \begin{cases} 2x - 4z - 2 = 0, \\ 2y - 3z + 1 = 0 \end{cases}$$

ko'rinishda yozamiz. L_1 to'g'ri chiziqdan o'tuvchi tekisliklar dastasining tenglamasini (13.19) ga asoslanib $2x-4z-2+\lambda(2y-3z+1)=0$ yoki $2x+2\lambda y-(4+3\lambda)z-2+\lambda=0$ (α) ko'rinishida yozib undan L_2 to'g'ri chiziqqa parallel Q tekislik tenglamasini ajratamiz. To'g'ri chiziq bilan tekislikning parallellik sharti(13.11)ga asoslanib $3\cdot 2 - 2\cdot\lambda - (4+3\lambda)\cdot 2 = 0$ tenglikni hosil qilamiz. Bundan $\lambda = -\frac{1}{4}$ qiymatni tekisliklar dastasining tenglamasi (α)ga qo'yib L_2 ga parallel $2x + 2\cdot(-\frac{1}{4})y - (4-\frac{3}{4})z - 2 - \frac{1}{4} = 0$ yoki $8x - 2y - 13z - 9 = 0$ (Q) tekislik tenglamasini hosil qilamiz. L_2 to'g'ri chiziqning istalgan nuqtasidan Q tekislikkacha d masofa ayqash L_1 va L_2 to'g'ri chiziqlar orasidagi eng qisqa masofa bo'ladi. L_2 to'g'ri chiziqning berilgan $M_1(2;-2;-4)$ nuqtasidan $8x-2y-13z-9=0$ tekislikkacha masofani berilgan nuqtadan berilgan tekislikkacha masofani topish formulasi(12.17)ga asoslanib topamiz.

$$d = \frac{|8\cdot 2 - 2\cdot(-2) - -13\cdot(-4) - 9|}{\sqrt{8^2+2^2+13^2}} = \frac{63}{\sqrt{237}} = \frac{9}{\sqrt{5}}$$

berilgan ayqash to'g'ri chiziqlar orasidagi eng qisqa masofa bo'ladi.

18-misol. $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-3}{-1}$ (L_1) va $\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z+8}{-1}$ (L_2) parallel to'g'ri chiziqlar orasidagi masofa topilsin.

Yechish. L_1 to'g'ri chiziqning berilgan $M_0(1;-2;3)$ nuqtasidan unga perpendikulyar Q tekislik o'tkazamiz. Q tekislik M_0 nuqtdan o'tganligi va L_1 ga perpendikulyar bo'lganligi uchun (13.10) ga binoan uning tenglamasi

$$3(x-1)+4(y+2)-(z-3)=0 \quad \text{yoki} \quad 3x+4y-z+8=0 \quad (Q)$$

bo'ladi. Shu tekislikni L_2 to'g'ri chiziq bilan kesishish nuqtasini aniqlaymiz. Buning uchun L_2 to'g'ri chiziq tenglamasini parametrik ko'rinishda yozamiz.

$$\frac{x-2}{3}=t,\ \frac{y-1}{4}=t,\ \frac{z+8}{-1}=t,\ x=3t+2,\ y=4t+1,\ z=-t-8 (m).$$

x,y,z larning ushbu qiymatlarini Q tekislikning tenglamasiga qo'yib t parametrni aniqlaymiz.

$3(3t+2)+4(4t+1)-(-t-4)+8=0$ yoki $26t+26=0$ bundan $t=-1$. (m) ga $t=-1$ qiymatni qo'ysak $x=-1$, $y=-3$, $z=-7$ hosil bo'ladi. Demak $M_1(-1;-3;-7)$ nuqta L_2 to'g'ri chiziq bilan Q tekislikni kesishish quntasi. M_0 va M_1 nuqtalar orasidagi masofa (6.8)ga asosan

$$M_0M_1=\sqrt{(-1-1)^2+(-3+2)^2+(-7-3)^2}=\sqrt{105}\approx 10{,}25$$

berilgan L_1 va L_2 parallel to'g'ri chiziqlar orasidagi masofa bo'ladi.

19-misol. $2x+3y-4z-2=0$ (Q_1) va $2x+3y-4z-31=0$ (Q_2) parallel tekisliklar orasidagi masofa topilsin.

Yechish. Q_1 tekislikni tenglamasiga $y=z=0$ qiymatni qo'ysak $x=1$ kelib chiqadi. Demak $M_1(1;0;0)$ nuqta Q_1 tekislikning nuqtasi. (13.10)ga asoslanib M_1 nuqtasidan Q_1 tekislikka perpendikular

$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{-4}$ to‘g‘ri chiziqni o‘tkazib u bilan Q_2 tekislikni kesishish nuqtasini topamiz. $\frac{x-1}{2}=t$, $\frac{y}{3}=t$, $\frac{z}{-4}=t$ desak $x=2t+1$, $y=3t$, $z=-4t$ (n) bo‘ladi. Bularni Q_2 tekislik tenglamasiga qo‘ysak $2(2t+1)+3\cdot 3t-4\cdot(-4t)-31=0$, $29t-29=0$, $t=1$ kelib chiqadi. Buni (n)ga qo‘yib $x=3$, $y=3$, $z=-4$ ga ega bo‘lamiz. Demak Q_2 tekislik bilan to‘g‘ri chiziq $M_2(3;3;-4)$ nuqtada kesishar ekan. (6.8)ga ko‘ra M_1 va M_2 nuqtalar orasidagi masofa $M_1M_2=\sqrt{(3-1)^2+(3-0)^2+(-4-0)^2}=\sqrt{29}$ Q_1 va Q_2 parallel tekisliklar orasidagi masofa bo‘ladi.

Keltirilgan misollarga asoslanib shunday xulosaga kelamiz.

1. Berilgan M_0 nuqtadan va berilgan L to‘g‘ri chiziqdan o‘tuvchi tekislik tenglamasi L o‘qqa ega tekisliklar dastasinig tenglamsidan M_0 nuqtadan o‘tuvchi tekislikni tenglamasini ajratish yo‘li bilan topiladi (11-misol).

2. Berilgan L_1 to‘g‘ri chiziq orqali o‘qib berilgan L_2 to‘g‘ri chiziqqa parallel tekislik tenglamasi L_1 o‘qqa ega tekisliklar dastasining tenglamsidan L_2 to‘g‘ri chiziqqa parallel tekislik tenglamsini ajratish yo‘li bilan topiladi (12-misol).

3. Berilgan L to‘g‘ri chiziq orqali o‘tib berilgan Q tekislikka perpendikulyar tekislik tenglamasi L o‘qqa ega tekisliklar dastasining tenglamsidan Q tekislikka perpendikulyar tekislik tenglamasini ajratish yo‘li bilan topiladi (13-misol).

4. Berilgan parallel L_1 va L_2 to‘g‘ri chiziqlar orqali o‘tuvchi Q tekislik tenglamasi L_1 o‘qqa ega tekisliklar dastasining tenglamsidan L_2 to‘g‘ri chiziqdan o‘tuvchi tekislik tenglamasini ajratish natijasida topiladi (14-misol).

5. Berilgan L to‘g‘ri chiziqdan o‘tib berilgan Q tekislikka perpendikulyar tekislik tenglamasi L o‘qqa ega tekisliklar dastasining tenglamasidan Q tekislikka perpendikulyar tekislik tenglamasini ajratish yo‘li bilan topiladi (15-misol).

6. Berilgan M_0 nuqtadan berilgan L to'g'ri chiziqqacha masofani topish talab etilsa, u M_0 nuqtadan L to'g'ri chiziqqa perpendikulyar Q tekislik o'tkazilib L to'g'ri chiziq bilan Q tekislikning kesishish nuqtasi M_1 topiladi. $d = M_0M_1$ izlanayotgan masofa bo'ladi (16-misol).

7. Berilgan L_1 va L_2 ayqash to'g'ri chiziqlar orasidagi eng qisqa masofa L_1 o'qqa ega tekisliklar dastasining tenglamsidan L_2 to'g'ri chiziqqa parallel Q tekislik tenglamasini ajratish va L_2 to'g'ri chiziqning istalgan nuqtasidan Q tekislikkacha masofani aniqlash orqali topiladi (17-misol).

8. Berilgan L_1 va L_2 parallel to'g'ri chiziqlar orasidagi masofa L_1 to'g'ri chiziqning istalgan M_0 nuqtasidan unga perpendikulyar Q tekislikni o'tkazish va Q tekislik bilan L_2 to'g'ri chiziqning kesishish nuqtasi M_1 ni topish hamda $d = M_0M_1$ masofani aniqlash bilan amalga oshiriladi (18-misol).

9. Berilgan Q_1 va Q_2 parallel tekisliklar orasidagi d masofa Q_1 tekislikning ixtiyoriy M_1 nuqtasidan unga perpendikular L to'g'ri chiziqni o'tkazish, L to'g'ri chiziq bilan Q_2 tekislikning kesishish nuqtasi M_2 ni topish hamda $d = M_1M_2$ masofani aniqlash orqali amalga oshiriladi (19-misol).

Mustaqil yechish uchun mashqlar va test savollari

1. M (2; 3; -1) nuqtadan o'tuvchi va $S = \{3;-2;4\}$ yo'naltiruvchi vektorga ega to'g'ri chiziqning kanonik tenglamalari yozilsin. Javob:
$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{4}.$$

2. M (2; -2 ; 1) nuqtadan o'tuvchi va $S = \{5;4;-2\}$ yo'naltiruvchi vektorga ega to'g'ri chiziqning parametrik tenglamalari yozilsin.

Javob: $x = 5t + 2,\ y = 4t - 2,\ z = -2t + 1.$

3. $\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-4}{6}$ to'g'ri chiziqning koordinata o'qlari bilan tashkil etgan o'tkir burchaklari topilsin.

Javob: $\cos\alpha=\dfrac{2}{7}, \cos\beta=\dfrac{3}{7}, \cos\gamma=\dfrac{6}{7}, \alpha=73\,24'; \beta=64\,37'; \cos\gamma=31\,1'$.

4. To'g'ri chiziqning umumiy tenglamalari $\begin{cases} x-4y+5z-1=0, \\ 2x+3y+z+9=0 \end{cases}$ kanonik ko'rinishga keltirilsin.

Javob: $\dfrac{x+3}{-19}=\dfrac{y+1}{9}=\dfrac{z-0}{11}$.

5. $\begin{cases} 3x-4y+5z+7=0, \\ x+2y+3z+11=0 \end{cases}$ to'g'ri chiziqni Oxy tekislikka proeksiyalovchi tekislik tenglamasi topilsin.

Javob: $2x-11y-17=0$.

Ko'rsatma. Sistemadan z ni yo'qotish lozim.

6. $\begin{cases} 5x+3y-4z+8=0, \\ x-y+z+5=0 \end{cases}$ to'g'ri chiziqning Oxy koordinata tekisligidagi izi (to'g'ri chiziq bilan tekislikning kesishish nuqtasi) topilsin.

Javob: $\left(-\dfrac{23}{8};\dfrac{17}{8};0\right)$.

Ko'rsatma. Sistemaga $z=0$ qiymatni qo'yib uni yechish kerak.

7. $\begin{cases} 2x+3y-4z+5=0, \\ x-y+z=0 \end{cases}$ va $\begin{cases} x-y+2z-4=0, \\ 2x+y-z-5=0 \end{cases}$ to'g'ri chiziqlar orasidagi o'tkir burchak topilsin.

Javob: $\cos\varphi=0{,}9445; \quad \varphi=19^0 11'$.

8. $A(2;\ -1;\ 3)$ nuqtadan $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-4}{3}$ to'g'ri chiziqqa parallel o'tkazilgan to'g'ri chiziq tenglamasi topilsin.

Javob: $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{3}$.

9. $A(3;\ 0;\ 4)$ va $B(-1;\ -2;\ 3)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi yozilsin.

Javob: $\frac{x-3}{4}=\frac{y-0}{2}=\frac{z-4}{1}$.

10. $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{2}$ to'g'ri chiziq bilan $2x+y-z+4=0$ tekislik orasidagi o'tkir burchak topilsin.

Javob: $\varphi=24^{\circ}5'$.

11. P (1; 2; -1) nuqtadan o'tuvchi va $\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+1}{4}$ to'g'ri chiziqqa perpendikulyar tekislik tenglamasi topilsin.

Javob: $x-3y+4z+9=0$.

Ko'rsatma. Nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi yozilib to'g'ri chiziq bilan tekislikning perpendikulyarlik shartidan foydalanilsin.

12. A (1; -1; 2) nuqtadan $3x-y-5z-8=0$ tekislikka perpendikulyar o'tkazilgan to'g'ri chiziq tenglamasi topilsin.

Javob: $\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{-5}$.

13. $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{1}$ to'g'ri chiziq bilan $x+y-z+5=0$ tekislikning kesishish nuqtasi topilsin.

Javob: To'g'ri chiziq tekislikka parallel.

14. $M(2;\ -1;\ 0)$ nuqtadan va $\begin{cases}x-y+3z-1=0,\\2x+y-z+2=0\end{cases}$ to'g'ri chiziqdan o'tuvchi tekislik tenglamasi topilsin.

Javob: $x-7y+17z-9=0$.

15. $\begin{cases}3x+2y+3z-5=0,\\x+y+z-4=0\end{cases}$ to'g'ri chiziqdan o'tuvchi va

$\begin{cases} x - y + 2z + 1 = 0, \\ 2x + y - 3z - 2 = 0. \end{cases}$ to‘g‘ri chiziqqa parallel tekislik tenglamasi topilsin. *Javob:* $7x - 4y + 7z + 49 = 0$.

16. $\begin{cases} x - 2y + 3z - 1 = 0, \\ x - y + z + 5 = 0 \end{cases}$ to‘g‘ri chiziqdan o‘tuvchi va $2x + 2y - z + 5 = 0$ tekislikka perpendikulyar tekislik tenglamasi topilsin. Javob: $4x - 3y + 2z + 26 = 0$.

17. $\frac{x+2}{4} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{3}$ va $\frac{x-1}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{3}$ parallel to‘g‘ri chiziqlar orqali o‘tuvchi tekislik tenglamasi topilsin.

Javob: $4x + 13y - z - 5 = 0$.

18. To‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchi vektori nima?

A) To‘g‘ri chiziqqa parallel istalgan vektor

B) Fazodagi istalgan vektor

D) To‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar vektor

E) To‘g‘ri chiziq bilan 45^0 burchak tashkil etuvchi vektor

F) To‘g‘ri chiziqda yotuvchi birlik vektor.

19. $P(1;1;1)$ nuqtadan $\frac{x-11}{2} = \frac{y-18}{5} = \frac{z-4}{-2}$ to‘g‘ri chiziqqacha masofa topilsin.

A) $\sqrt{101}$ B) $\sqrt{102}$ D) 10 E) 11 F) 20.

Ko‘rsatma. P nuqtadan berilgan to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar α tekislik o‘tkazilib uning to‘g‘ri chiziq bilan kesishish nuqtasi Q topiladi. P bilan Q orasidagi masofa izlanayotgan masofa bo‘ladi.

20. Agar $M_0(x_0;y_0;z_0)$ nuqtadan chiqib $\vec{a} = \{m,n,p\}$ vektor yo‘nalishida $v = \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}$ tezlik bilan to‘g‘ri chiziqli tekis harakatlanayotgan $M(x;y;z)$ nuqtaning harakati tenglamasi

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

ekani ma'lum bo'lsa, $M_0(1;1;1)$ nuqtadan chiqib $\vec{s}=\{2,3,6\}$ vektor yo'nalishida $v=28$ tezlik bilan to'g'ri chiziqli tekis harakatlanayotgan $M(x;y;z)$ nuqtaning harakati tenglamasi topilsin.

A) $x=1+2t, y=1+3t, z=1+6t$

B) $x=1+4t, y=1+6t, z=1+12t$

D) $x=1+6t, y=1+9t, z=1+18t$

E) $x=1+8t, y=1+12t, z=1+24t$

F) $x=1+10t, y=1+15t, z=1+30t$.

21. $\frac{x-1}{m}=\frac{y-3}{5}=\frac{z+1}{6}$ to'g'ri chiziq $3x-ny+2z-5=0$ tekislikga m va n ning qanday qiymatida parallel bo'ladi.

A) 3; 4 B) 2; 1 D) 8; $\frac{5}{3}$ E) 7; -2 F) 9; $\frac{5}{3}$.

22. $\frac{x-4}{m}=\frac{y-3}{5}=\frac{z+2}{4}$ to'g'ri chiziq hamda $mx+7y+8z-2=0$ tekislik m ning qanday qiymatida parallel bo'ladi.

A) 1 B) 2 D) 3 E) -2 F) hech bir qiymatida.

23. $3x+y-z+11=0$ va $2x+2y+z-3=0$ tekisliklar orasidagi burchakning kosinusi topilsin.

A) $\frac{3}{7}$ B) $\frac{7}{3\sqrt{11}}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ F) $\frac{7}{4\sqrt{11}}$.

O'z – o'zini tekshirish uchun savollar

1. To'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori nima?
2. To'g'ri chiziqning kanonik, parametrik va umumiy tenglamalarini yozing.
3. To'g'ri chiziqning parametrik va umumiy tenglamalari qanday qilib uning kanonik tenglamalariga keltiriladi?
4. To'g'ri chiziqning kanonik tenglamalari qanday qilib uning umumiy tenglamalariga keltiriladi?
5. Ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini yozing.

6. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchakni topish formulasini yozing.

7. To'g'ri chiziqlarning parallellik va perpendikulyarlik shartlarini ayting.

8. To'g'ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchakni topish formulasini yozing.

9. To'g'ri chiziq bilan tekislikning parallellik va perpendikulyarlik shartlarini yozing.

10. To'g'ri chiziq bilan tekislikning kesishish nuqtasi qanday topiladi?

11. To'g'ri chiziqning tekislikda yotish shartini yozing.

12. Tekisliklar dastasi nima? Uning tenglamasi qanaqa?

14. IKKINCHI TARTIBLI SIRTLAR

14.1.Ikkinchi tartibli sirt va uning umumiy tenglamasi

Dekart koordinatalari x, y va z ra nisbatan ikkinchi darajali algebraik tenglama

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+ax+by+cz+d=0 \quad (14.1)$$

bilan aniqlanadigan sirt **ikkinchi tartibli sirt** deb ataladi.

Bu yerda $A,B,C,D,E,F,\ a,\ b,\ c,\ d$ koeffitsiyentlar ma'lum sonlar bo'lib A,B,C,D,E,F sonlardan kamida bittasi noldan farqli. Aks holda (14.1) tenglama $ax+by+cz+d=0$ ko'rinishdagi tekislik tenglamasiga aylanadi.

(14.1) tenglama ikkinchi tartibli **sirtning umumiy tenglamasi** deb ataladi va u koeffitsiyentlarning qiymatlariga bog'liq ravishda turli sirtlarni aniqlaydi.

Izoh. (14.1) ko'rinishdagi har qanday tenglama ham qandaydir sirtni ifodalaydi deb o'ylash noto'g'ri.

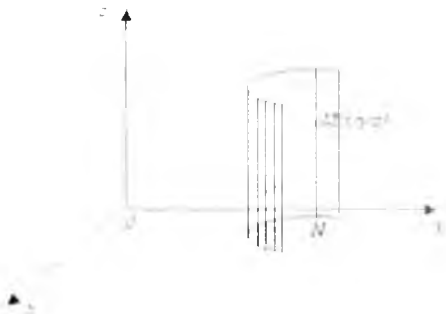
14.2. Silindrik sirtlar

Berilgan egri chiziqni kesuvchi to'g'ri chiziqning bu egri chiziq bo'ylab va berilgan yo'nalish(o'zi)ga parallel harakatidan hosil bo'lgan sirt **silindrik (silindrsimon) sirt** deb ataladi. Bunda egri siziq bilan uni kesuvchi to'g'ri chiziq bir tekislikda yotmaydi deb faraz qilinadi.

Harakatlanuvchi to'g'ri chiziq silindrik sirtning **yasovchisi**, berilgan egri chiziq uning **yo'naltiruvchisi** deb ataladi (77 - chizma).

Biz kelgusida yo'naltiruvchisi koordinata tekisliklaridan birida yotgan va yasovchisi shu tekislikka perpendikular o'qqa parallel silindrik sirtlarni qaraymiz.

Oxy koordinata tekisligida yotgan $F(x,y)=0$ tenglamaga ega L egri chiziqni qaraymiz. Yasovchisi Oz o‘qqa parallel va yo‘naltiruvchisi shu L egri chiziqdan iborat silindrik sirtni yasaymiz (77-chizma).



77-chizma.

Egri chiziqning Oxy tekislikdagi tenglamasi $F(x,y)=0$ $Oxyz$ fazoda shu sirtning ham tenglamasi ekanligini ko‘rsatamiz. $M(x;y;z)$ yasalgan silindrik sirtning aniq nuqtasi bo‘lsin.

$M(x;y;z)$ nuqtadan o‘tuvchi va yasovchi bilan L yo‘naltiruvchining kesishish nuqtasini N orqali belgilasak, u $N(x;y;0)$ koordinatalarga ega bo‘ladi. N nuqta L egri chiziqda yetganligi uchun uning x,y koordinatalari egri chiziq tenglamasi $F(x;y)=0$ ni qanoatlantiradi. Demak bu tenglamani $M(x;y;z)$ nuqtaning koordinatalari ham qanoatlantiradi, chunki tenglamada z qatnashmaydi.

Shunday qilib yasalgan silindrik sirtning istalgan M nuqtasining koordinatalari $F(x,y)=0$ tenglamani qanoatlantiradi. Sirtda yotmagan birorta ham nuqtaning koordinatalari bu tenglamani qanoatlantirmaydi, chunki bunday nuqtalarning Oxy tekisligidagi proeksiyalari L egri chiziqda yotmaydi.

Demak $F(x,y)=0$ tenglamaga ega yo‘naltiruvchiga va Oz o‘qqa parallel yasovchiga ega silindrik sirtning ham tenglamasi $F(x,y)=0$ bo‘lar ekan. Shunga o‘xshash y qatnashmagan $F(x,z)=0$ va x qatnashmagan $F(y,z)=0$ tenglamalar $Oxyz$ fazoda yasovchisi Oy va Ox o‘qlarga parallel silindrik sirtlarini tenglamalarini ifodalaydi.

78-chizma.

$Ax+By+C=0$ tenglama Oxy tekislikda qaralsa u to'g'ri chiziq tenglamasi ekanini bilamiz. Ana shu tenglama $Oxyz$ fazoda qaralsa u Oxy tekislikni $Ax+By+C=0$ to'g'ri chiziq bo'ylab kesib o'tuvchi va Oz o'qqa parallel tekislik tenglamasini ifodalaydi.

Shunga o'xshash Oxy tekisligidagi $x^2+y^2=a^2$ aylana, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellips, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ giperbola va $y^2=2px$ parabola tenglamalarini $Oxyz$ fazoda qarasak ular Oxy tekislikni shu chiziqlar bo'ylab kesib o'tuvchi va yasovchisi Oz o'qqa parallel doiraviy, elliptik, giperbolik va parabolik silindr deb ataluvchi sirtlarni ifodalaydi (78-chizma).

14.3. Aylanish sirtlari

Fazoda to'g'ri chiziq, shu to'g'ri chiziq bo'ylab kesishuvchi ikkita tekisliklarni tenglamalari bilan berilishini ko'rdik. Shuningdek fazodagi egri chiziqni ham shu egri chiziq bo'ylab kesishadigan ikkita sirtlarning tenglamalari yordamida aniqlash mumkin. Masalan

$z = 3$ tekislik bilan $x^2+y^2+z^2=5^2$ sferani kesishishi natijasida hosil bo'luvchi aylanani tenglamasi

$$\begin{cases} z = 3, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 25 \end{cases}$$

sistema yordamida berilishi mumkin.

Ikkinchi tomondan shu aylaning tenglamasini $z = 3$ tekislik bilan $x^2+y^2=16$ doiraviy silindrning kesishish chizig'i deb

$$\begin{cases} z = 3, \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases}$$

ko'rinishida yozish ham mumkin. Aylananing bu ikki tenglamasi teng kuchli. Bu holda aylananing markazi $0_1(0;0;3)$ nuqtada bo'lib radiusi 4 ga teng bo'ladi va aylana z=3 tekislikda yotadi.

Endi aylanish sirti deb ataluvchi sirtlarni o'rganishga kirishamiz.

Oyz tekislikda yotuvchi L egri chiziq

$$\begin{cases} X = 0, \\ F(Y,Z) = 0 \end{cases} \tag{14.2}$$

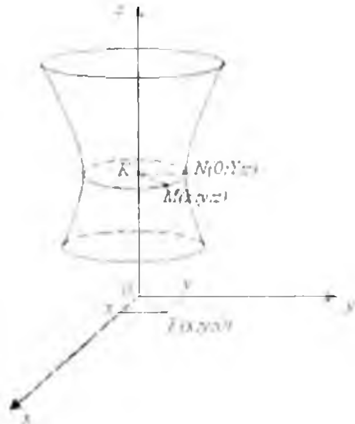
tenglama yordamida berilgan bo'lsin.

Shu egri chiziqni Oz o'q atrofida aylanishi natijasida hosil bo'lgan sirtni qaraymiz*.

Bu sirt **aylanish** sirti deb ataladi. Uning tenglamasini topamiz. $M(x,y,z)$ nuqta shu aylanish sirtining ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. M nuqtadan Oz o'qqa perpendikulyar tekislik o'tkazib uning Oz o'q bilan kesishish nuqtasini K, L chiziq bilan kesishish nuqtasini N orqali belgilaymiz. KM va KN kesmalar bitta aylananing radiuslari bo'lganligi uchun ular teng, ya'ni $KM = KN$ (79–chizma).

Ammo KN kesmaning uzunligi $N(0;Y;Z)$ nuqtaning ordinatasi Y ning absolyut qiymatiga teng, ya'ni $KM=|Y|$ va $KM = 0P = \sqrt{x^2+y^2}$. Shunday qilib $|Y| = \sqrt{x^2+y^2}$ yoki $Y = \pm\sqrt{x^2+y^2}$. Bundan tashqari N nuqtaning applikatasi Z, M

nuqtaning appilikatasi z ga teng, chunki ular Oxy tekislikka parallel tekislikda yotadi.



79-chizma.

$N(O;Y;Z)$ nuqta L egri chiziqda yotganligi uchun uning Y, Z koordinatalari egri chiziq tenglamasi $F(Y;Z)=0$ ni qanoatlantiradi. Bu tenglamaga $Y=\pm\sqrt{x^2+y^2}$, $Z=z$ qiymatlarni qo'yib

$$F\left(\pm\sqrt{x^2+y^2},\, z\right)=0 \qquad (14.3)$$

tenglamani hosil qilamiz. Shunday qilib aylanish sirtining ixtiyoriy M nuqtasini koordinatalari (14.3) tenglamani qanoatlantiradi. Sirtda yotmagan birorta ham nuqtaning koordinatalari bu tenglamani qanoatlantirmasligini ko'rsatish ham mumkin. Demak (14.3) tenglama (14.2) tenglama bilan berilgan L egri chiziqni Oz o'q atrofida aylantirish natijasida hosil bo'lgan aylanish sirtining tenglamasi. Boshqacha aytganda Oyz tekislikdagi $F(y,z)=0$ tenglama bilan berilgan L egri chiziqni Oz o'q atrofida aylanishi natijasida hosil bo'lgan aylanish sirtining tenglamasini topish uchun egri chiziq tenglamasidagi y ni $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ ga almashtirib undagi aylanishi o'qiga mos z ni o'zgarishsiz qoldirish kerak ekan.

1–misol. $\begin{cases} \dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ x=0 \end{cases}$ ellipsning Oz va Oy o'qlar atrofida aylanishi natijasida hosil bo'lgan aylanish sirtlarining tenglamalari topilsin.

Yechish. Ellipsning Oz o'q atrofida aylanishidan hosil bo'lgan sirtning tenglamasini ellips tenglamasidagi y ni $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ ga almashtirib, z koordinatani esa o'zgarishsiz qoldirib hosil qilamiz, ya'ni

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{yoki} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Agar berilgan ellips tenglamasida y ni o'zgarishsiz qoldirib z ni $\pm\sqrt{x^2+z^2}$ ga almashtirsak ellipsni Oy o'q atrofida aylanish sirtining tenglamasi kelib chiqadi, ya'ni

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2+z^2}{c^2}=1 \quad \text{yoki} \quad \frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Hosil bo'lgan sirtlar **aylanish ellipsoidlari** deyiladi.

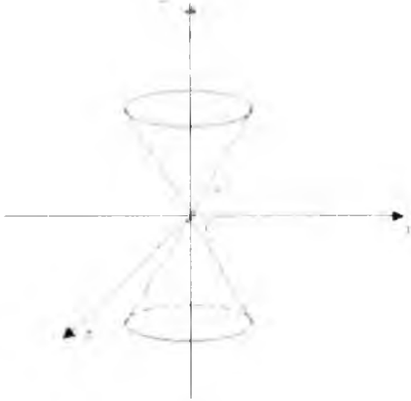
14.4. Konussimon sirtlar

Konussimon sirt deb, konusning uchi deb ataladigan berilgan nuqtadan o'tuvchi va konusning **yo'naltiruvchisi** deb ataladigan berilgan egri chiziqni kesuvchi barcha to'g'ri chiziqlardan tashkil topgan sirtga aytiladi. Bunda berilgan nuqta, berilgan egri chiziqda yotmaydi.

Konussimon sirtni tashkil etuvchi to'g'ri chiziqlar uning **yasovchilari** deyiladi.

L egri chiziq nuqtalarining koordinatalarini sirtning nuqtalarini koordinatalari x,y,z lardan farqlash maqsadida X,Y,Z lar orqali belgiladik.

Masalan, $x^2+y^2-z^2=0$ tenglama yordamida aniqlanadigan sirt uchi koordinatalar boshida bo'lgan ikkinchi tartibli doiraviy konusdir (80–chizma).



80–chizma.

Endi ikkinchi tartibli sirtlarning ba'zi-birlari bilan tanishib chiqamiz.

14.5. Sfera

Fazoning berilgan nuqtasidan barobar uzoqlikda joylashgan nuqtalarining geometrik o'rniga sfera deb ataladi. Berilgan nuqta **sferaning markazi,** undan sferagacha masofa **sferaning radiusi** deb ataladi.

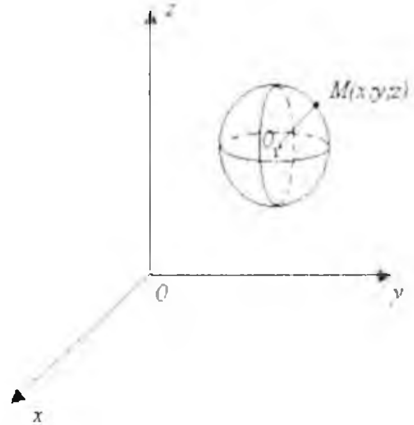
Endi markazi $O_1(a;b;c)$ nuqtada bo'lib R radiusga ega sferaning tenglamasini keltirib chiqaramiz. $M(x,y,z)$ nuqta sferaning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. U holda ta'rifga binoan $O_1M = R$.

Ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasi(6.8)ga ko'ra $O_1M = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$ ekanini hisobga olsak $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2} = R$ yoki kvadratga ko'tarsak

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2 \qquad (14.4)$$

hosil bo'ladi. Shunday qilib sferaning ixtiyoriy M nuqtasining koordinatalari (14.4) tenglamani qanoatlantiradi. Sferada yotmagan hech bir nuqtaning koordinatalari bu tenglamani qanoatlantirmasligini ko'rsatish qiyin emas. Demak (14.4) tenglama sferaning tenglamasi. U **sferaning kanonik tenglamasi** deb ataladi.

Sferaning markazi koordinatalar boshida bo'lganda $a=b=c=0$ bo'lib uning tenglamasi



81–chizma.

$$x^2+y^2+z^2=R^2 \qquad (14.5)$$

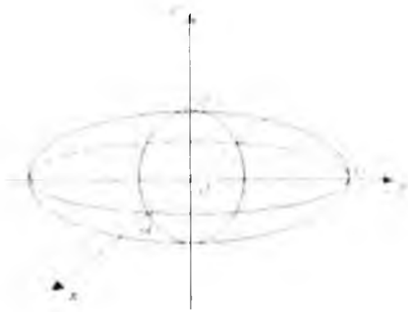
ko'rinishiga ega bo'ladi.

14.6. Ellipsoid

Kanonik tenglamasi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (14.6)$$

ko'rinishda bo'lgan ikkinchi tartibli sirt ellipsoid deb ataladi. a,b,c musbat sonlar ellipsoidning **yarim o'qlari** deb ataladi. Ellipsoidning koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalari uning **uchlari** deb ataladi. Ellipsoid oltita uchga ega.



82-chizma.

Ellipsoid tenglamasida x,y,z koordinatalar juft darajalari bilan qatnashadilar. Demak ellipsoid koordinata tekisliklari Oxy, Oxz, Oyz ga nisbatan simmetrik.

Ellipsoidni shaklini aniqlash maqsadida uni koordinata tekisliklariga parallel tekisliklar bilan kesamiz.

Ellipsoid Oxy tekislikka parallel $z=h$ ($|h|<c$) tekislik bilan kesilsa kesimda ellips hosil bo'lishini ko'rsatamiz. Buning uchun tekislik bilan ellipsoid tenglamalarini birgalikda, ya'ni

$$\begin{cases} z=h, \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \end{cases}$$

sistemani yechamiz. Bundan z ni yo'qotsak Oxy tekisligidagi proeksiyasi ellipsdan iborat silindrik sirt tenglamasi hosil bo'ladi.

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{h^2}{c^2}$ yoki $1-\dfrac{h^2}{c^2}$ ga bo'lsak $\dfrac{x^2}{a^2\left(1-\dfrac{h^2}{c^2}\right)}+\dfrac{y^2}{b^2\left(1-\dfrac{h^2}{c^2}\right)}=1$

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2}=1$$ kelib chiqadi.

$a_1=a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$, $b_1=b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$ (14.7) belgilashlarni kiritsak oxirgi tenglamadan

$$\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1$$

kelib chiqadi. Bu Oxy tekislikka parallel $z=h$ tekislikdagi markazi $0_1(0;0;h)$ nuqtada va yarim o'qlari a_1 va b_1 bo'lgan ellips tenglamasi. (14.7) formulalardan ko'rinib turibdiki $|h|$ ortaborsa a_1 bilan b_1 kichraya boradi. $|h|=c$ bo'lganda $a_1=b_1=0$ bo'lib kesim nuqtaga aylanadi. $|h|>c$ bo'lganda $z=h$ tekislik ellipsoid bilan kesishmaydi. $h=0$ bo'lganda Oxy tekislikda yotgan eng katta a va b yarim o'qlarga ega ellips hosil bo'ladi.

Shunga o'xshash ellipsoidni $0yz$ tekislikka parallel $x=h$ ($|h|<a$) Oxz tekislikka parallel $y=h$ ($|h|<b$) tekisliklar bilan kesilganda ham kesimda ellips hosil bo'lishiga ishonish mumkin.

O'tkazilgan mulohazalarga asoslanib ellipsoidning shaklini 82–chizmada tasvirlangan sirt kabi tasavvur etamiz. Ichi bo'sh qovun ellipsoidga misol bo'ladi.

14.7. Bir pallali giperboloid

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

ko'rinishdagi kanonik tenglamaga ega bo'lgan ikkinchi tartibli sirt **bir pallali (kavakli) giperboloid** deb ataladi. Musbat a,b,c sonlar bir pallali giperboloidning **yarim o'qlari** deyiladi.

Ellipsoiddagi singari koordinata tekisliklari bir pallali giperboloidning ham simmetriya tekisliklari bo'ladi. Bir pallali giperboloidning shaklini aniqlaymiz.

Bir pallali giperboloid Oxy tekislik ($y=0$ tekislik) bilan kesilsa kesimda

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0 \end{cases}$$

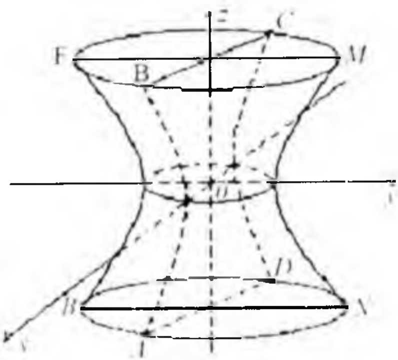
$ABCD$ giperbola hosil bo'ladi (83-chizma).

Shunga o'xshash uni $x=0$ tekislik bilan kesilsa kesimda Oyz tekislikda yotgan

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0 \end{cases}$$

$EFMN$ giperbola hosil bo'ladi (83-chizma). Xuddi shuningdek bir pallali giperboloidni Oyz va Oxz tekisliklariga parallel tekisliklar bilan kesilganda ham kesimda giperbola hosil bo'lishini ko'rish mumkin.

Endi bir pallali giperboloidni Oxy tekislikka parallel tekislik bilan kesib kesimni kuzatamiz.



83-chizma

Bir pallali giperboloidni Oxy tekislikka parallel $z=h$ tekislik bilan kesilsa kesimda $\begin{cases} z = h, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{c^2} = 1 + \dfrac{h^2}{c^2} \end{cases}$ yoki $\begin{cases} z = h, \\ \dfrac{x^2}{a^2\left(1+\dfrac{h^2}{c^2}\right)} + \dfrac{y^2}{в^2\left(1+\dfrac{h^2}{c^2}\right)} = 1 \end{cases}$

ellips hosil bo'ladi. Bu ellipsning yarim o'qlari

$a = a\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}$ va $b = b\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}$, $|h|$ ortganda ortadi. $h=0$ bo'lganda Oxy tekisligida yotgan va eng kichik a,b yarim o'qlarga ega ellips hosil bo'ladi.

Shunday qilib o'tkazilgan mulohazalar bir pallali giperboloidni Oxy tekislikdan (ikkala tomonga) cheksiz uzoqlashgan sari kengayib boradigan cheksiz quvr sifatida tasvirlash imkonini beradi. Giperboloid 83-chizmada tasvirlangan.

14.8. Ikki pallali giperboloid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \qquad (14.8)$$

ko'rinishdagi kanonik tenglamaga ega bo'lgan sirt **ikki pallali (kavakli) giperboloid** deb ataladi. Tenglamada x,y,z koordinatalar juft darajalari bilan ishtirok etganligi sababli koordinata tekisliklari ikki pallali giperboloidning simmetriya tekisliklari bo'ladi.

Ikki pallali giperboloidni Oxz va $0yz$ tekisliklar bilan kesilsa kesimda

$$\begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1, \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{va} \quad \begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ x = 0 \end{cases}$$

giperbolalar hosil bo'ladi. Agar ikki pallali giperboloidni Oxy tekislikka parallel $z=h$ ($|h|>c$) tekislik bilan kesilsa kesimda

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{h^2}{c^2}-1, \\ z=h \end{cases} \qquad (14.9)$$

yoki

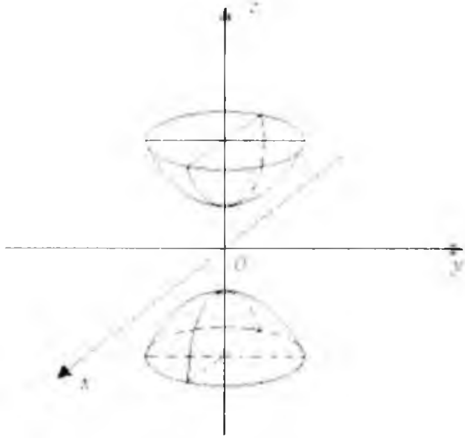
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2\left(\dfrac{h^2}{c^2}-1\right)}+\dfrac{y^2}{b^2\left(\dfrac{h^2}{c^2}-1\right)}=1 \\ z=h \end{cases}$$

ellips hosil bo'ladi. Bu ellipsning yarim o'qlari $a=a\sqrt{\dfrac{h^2}{c^2}-1}$ va $b=b\sqrt{\dfrac{h^2}{c^2}-1}$, $|h|$ ortganda ortadi $h=\pm c$ bo'lganda (14.9) kesim tenglamasi $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=0$ ko'rinishga ega bo'lib bu tenglamani faqatgina x=0, y=0 qiymatlar qanoatlantiradi xolos. Demak bu holda tekislik bilan ikki pallali giperboloidning kesishish chizig'i ellips $c_1(0;0,c)$ va $c_2(0,0;-c)$ nuqtalarga aylanar ekan. $|h|$ <c bo'lganda (14.9) dan

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<0$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. Bu tengsizlikning chap tomonidagi ifoda nomanfiy ekanini hisobga olsak tengsizlik hech qachon bajarilmasligini ko'ramiz. Demak, bu holda $z=h$ tekislik bilan (14.8) ikki pallali giperboloid kesishmas ekan.

O'tkazilgan mulohazalarga asoslanib ikki pallali giperboloidni 84-chizmada ko'rsatilgan sirt kabi tasvirlaymiz.



84-chizma

14.9. Elliptik paraboloid

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z \qquad (14.10)$$

ko'rinishdagi kanonik tenglamaga ega ikkinchi tartibli sirt **elliptik paraboloid** deb ataladi.

Bu yerdagi p va q bir xil ishorali ma'lum sonlar. Kelgusida aniqlik uchun $p>0$, $q>0$ deb olamiz.

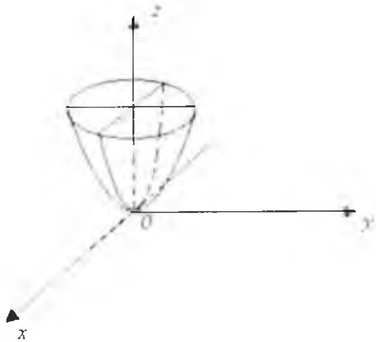
Elliptik paraboloidning shaklini aniqlaymiz. Elliptik paraboloidni Oxz va Oyz tekisliklar bilan kesilsa kesimda shu tekisliklarda yotgan

$$z=\frac{x^2}{2p} \quad \text{va} \quad z=\frac{y^2}{2p}$$

parabolalar hosil bo'ladi. Uni Oxy tekislikka parallel $z=h$ ($h>0$) tekislik bilan kesilsa kesimda $z=h$ tekislikda yotgan $\frac{x^2}{2ph}+\frac{y^2}{2qh}=1$ ellips hosil bo'ladi.

Bu ellipsning yarim o'qlari $a=\sqrt{2ph}$ va $b=\sqrt{2qh}$, h ortsa ortadi.

Shunday qilib o'tkazilgan mulohazalar elliptik paraboloidni Oxy tekislikdan Oz o'q yo'nalishda cheksiz uzoqlashgan sari kengayib boradigan «qozon» sifatida tasvirlash imkononi beradi. 0(0,0;0) nuqta elliptik paraboloidning uchi, p va q sonlar uning **parametrlari** deyiladi. $p=q$ bo'lganda aylanma paraboloid hosil bo'ladi. Elliptik paraboloid 85-chizmada tasvirlangan.



85-chizma.

14.10. Giperbolik paraboloid

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z \tag{14.11}$$

ko'rinishdagi kanonik tenglamaga ega ikkinchi tartibli sirt **giperbolik paraboloid** deb ataladi. Bu yerdagi p va q bir xil ishorali ma'lum sonlar. Aniqlik uchun kelgusida $p>0$, $q>0$ deb olamiz.

Giperbolik paraboloidni Oxz tekislik bilan kesilsa kesimda shu tekislikda yotgan $2pz=x^2$ parabola hosil bo'ladi. Bu sirtni Oxz tekislikka parallel $y=h$ tekislik bilan kesilsa kesimda shu tekislikda yotgan

$$y^2 = 2p\left(z + \frac{h^2}{2q}\right)$$

parabola hosil bo'ladi. Bu parabolaning uchi $\left(0,0,-\frac{h^2}{2q}\right)$ nuqtada bo'lib uning simmetriya o'qi Oz bo'ylab yo'nalgan.

Berilgan paraboloidni Oyz ($x=0$) koordinata tekisligi bilan kesilsa kesimda shu tekislikda yotgan va uchi koordinatalar boshida bo'lib Oz simmetriya o'qiga ega, pastga yo'nalgan $z=-\frac{y^2}{2q}$ parabola hosil bo'ladi.

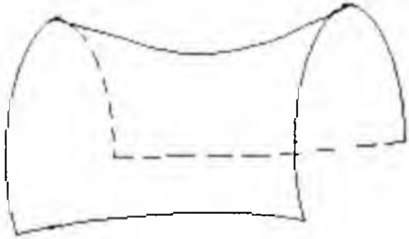
Agar paraboloidni Oyz tekislikka parallel $x=h$ tekislik bilan kesilsa kesim ham parabola bo'lishini ko'rish qiyin emas.

Paraboloid Oxy tekislikka parallel $z=h$ tekislik bilan kesilsa kesimda

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2h \quad \text{yoki} \quad \frac{x^2}{2ph} - \frac{y^2}{2qh} = 1$$

giperbola hosil bo'ladi.

O'tkazilgan mulohazalar giperbolik paraboloidni egarsimon sirt ko'rinishida tasvirlash imkonini beradi. Koordinatalar boshi giperbolik paraboloidni **uchi**, p va q sonlar esa uning **parametrlari** deb ataladi. Giperbolik paraboloid 86-chizmada tasvirlangan.



86-chizma.

2-misol. Markazi koordinatalar boshida bo'lib radiusi 4 ga teng sferaning kanonik tenglamasi yozilsin.

Yechish.Sferaning kanonik tenglamasi (14.5) ga R=4 qiymatni qo'ysak

$$x^2+y^2+z^2=16$$

tenglama hosil bo'ladi.

3-мисол. Markaziy $0_1(-2;3;1)$ nuqtada bo'lib radiusi R=6 bo'lgan sferaning kanonik tenglamasi yozilsin.

Yechish. Sferani tenglamasi (14.4) ga a=-2, b=3, c=1, R=6 qiymatlarni qo'ysak uning kanonik tenglamasi

$$(x+2)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=36$$

kelib chiqadi.

4-misol. Markazi $0_1(3;-2;-1)$ nuqtada bo'lib radiusi R=5 bo'lgan sferaning umumiy tenglamasi topilsin.

Yechish. Sferaning kanonik tenglamasi (14.4) ga a=3; b=-2, c=-1; R=5 qiymatlarni qo'ysak

$$(x-3)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=5^2$$

yoki qavslarni ochib ixchamlasak sferaning umumiy tenglamasi $x^2+y^2+z^2-6x+4y+2z-11=0$ hosil bo'ladi.

5-misol. $x^2+y^2+z^2-6x+8y+10z+25=0$ sferaning markazini koordinatalari va radiusi topilsin.

Yechish. Berilgan tenglamani (14.4) ko'rinishda yozamiz. Buning uchun avvalo bir xil koordinatalar qatnashgan hadlarni guruhlaymiz, ya'ni tenglamani

$(x^2-6x)+(y^2+8y)+(z^2+10z)+25=0$ ko'rinishda yozamiz. Qavs ichidagi ifodalarni to'la kvadrat shaklida yozish maqsadida ularga to'la kvadrat bo'lish uchun kerakli bir xil sonlarni ham qo'shamiz ham ayiramiz.

$(x^2-6x+9-9)+(y^2+8y+16-16)+(z^2+10z+25-25)+25=0;$

$(x-3)^2-9+(y+4)^2-16+(z+5)^2-25+25=0,\ \ (x-3)^2+(y+4)^2+(z+5)^2=25.$

Hosil bo'lgan tenglamani sferaning kanonik tenglamasi (14.4) bilan taqqoslasak, a=3, b=-4, c=-5, R^2=25 ekaniga iqror bo'lamiz. Shunday qilib 0_1(3,-4,-5) nuqta sferaning markazi bo'lib uning radiusi R=5 ekan.

6-misol. $x^2+y^2-4y=0$ tenglama qanaqa sirtni ifodalaydi.

Yechish. Tenglamani $x^2+y^2-4y+4-4=0$, $(x-0)^2+(y-2)^2=2^2$ ko'rinishda yozsak u Oxy tekisligidagi aylanani ifodalashi kelib chiqadi. Fazoda bu tenglama yo'naltiruvchisi shu aylanadan iborat yasovchisi Oz o'qqa parallel doiraviy silindrni ifodalaydi.

7-misol. $\begin{cases} x^2+y^2+(z-7)^2=16, \\ z=6 \end{cases}$ tenglamalar sistemasi qanaqa egri chiziqni ifodalaydi?

Yechish. Sistemani birinchi tenglamasi markazi 0_1(0,0,7) nuqtada va radiusi R=4 bo'lgan sferani tenglamasi, ikkinchisi esa Oxy tekislikka parallel va (0,0,6) nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi. Ular albatta z=6 tekislikda yotuvchi aylana bo'ylab kesishadi.

Shunday qilib berilgan tenglamalar sistemasi ana shu aylananing tenglamasi ekan.

Endi shu aylananing tenglamasini boshqacha shaklda yozamiz. Berilgan sistemaning birinchi tenglamasiga $z=6$ qiymatini qo'yib sistemadan z ni yo'qotamiz.

$$\begin{cases} x^2+y^2+(6-7)^2=16, \\ z=6 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+y^2+1=16, \\ z=6 \end{cases} \quad \text{yoki} \quad \begin{cases} x^2+y^2=15, \\ z=6. \end{cases}$$

Oxirgi sistemani birinchi tenglamasi Oz o'qqa ega doiraviy silindrni ifodalaydi, ikkinchisi esa Oxy tekislikka parallel tekislik. Bu yerdagi sistemaning birinchi tenglamasi $x^2+y^2=15$ Oxy tekislikdagi aylanani ifodalaydi. Bu aylana doiraviy silindr bilan z=6 tekislikning kesishishi oqibatida hosil bo'lgan aylananing Oxy tekislikdagi proeksiyasidir.

8-misol. $x^2+y^2=R^2$ aylanani Ox o'q atrofida aylanishi natijasida hosil bo'lgan aylanish sirti-sferaning tenglamasini yozing.

Yechish. Berilgan aylanani Ox o‘q atrofida aylanishi natijasi hosil bo‘lgan sirt tenglamasini topish uchun aylananing tenglamasida aylanish o‘qiga mos x koordinatani o‘zgarishsiz qoldirib ikkinchi o‘zgaruvchi y o‘rniga $\pm\sqrt{y^2+z^2}$ ifoda qo‘yiladi. U holda aylanish sirti tenglamasi

$$x^2 + (\pm\sqrt{y^2+z^2})^2 = R^2 \quad \text{yoki} \quad x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi. Bu tenglama sferaning tenglamasi ekanligi ma‘lum

9-misol. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} = 1$ ellipsoidni koordinata tekisliklari bilan kesishish chiziqlari, ularning uchlari hamda yarim o‘qlari topilsin.

Yechish. Oxy tekislik $z = 0$ tenglamaga ega. Ellipsoid tenglamasiga $z = 0$ qiymatni qo‘ysak ellipsoid bilan Oxy tekislikning kesishish chizig‘i

$$\begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1, \\ y = 0 \end{cases}$$

ellipsning tenglamasiga ega bo‘lamiz. Ellipsoidning uchlari ellips uchlarini ham aniqlaydi. Ellipsoidning Oxy tekislikda yotuvchi uchlari $A_1(-5{,}0{,}0)$, $A(5;0;0)$, $B_1(0,-4{,}0)$ $B(0;4;0)$ koordinatalarga ega.

Shuningdek berilgan ellipsoidni $0xz$ ($y=0$) tekislik bilan kesganda kesimda

$$\begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{z^2}{4} = 1, \\ y = 0 \end{cases}$$

ellips hosil bo‘lib uning uchlari $A_1(-5;0;0)$; $A(5;0;0)$, $C_1(0;0;-2)$ va $C(0;0;2)$ nuqtalarda joylashgan.

Ellipsoidni Oyz (x=0) tekislik bilan kesilsa kesimda

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{16}+\dfrac{z^2}{4}=1, \\ x=0 \end{cases}$$

ellips hosil bo'lib uning uchlari $B_1(0;-4;0)$ $B(0;4;0)$ $C_1(0;0;-2)$ va $C(0;0;2)$ nuqtalardan iborat bo'ladi.

Ellipsoidning berilgan tenglamasini uning kanonik tenglamasi (14.6) bilan taqqoslasak $a^2=25$; $a=5$, $b^2=16$, $b=4$, $c^2=4$, $c=2$ ellipsoidning yarim o'qlari hosil bo'ladi.

10-misol. $16x^2+25y^2+100z^2-32x+50y-359=0$ sirt tenglamasi kanonik ko'rinishda yozilsin va sirtning turi aniqlansin.

Yechish. Avvalo bir xil koordinatalar ishtirok etgan hadlarni guruhlab berilgan tenglamani

$(16x^2-32x)+(25y^2+50y)+100z^2-359=0$ yoki $16(x^2-2x)+25(y^2+2y)+$ $+100z^2-359=0$ ko'rinishda yozamiz. Qavs ichidagi ifodani to'la kvadrat shaklida yozish maqsadida qavs ichidagi ifodalarga 1 ni ham qo'shamiz ham ayiramiz. U holda

$16(x^2-2x+1-1)+25(y^2+2y+1-1)+100z^2-359=0;$

$16[(x-1)^2-1)]+25[(y+1)^2-1)]+100z^2-359=0;$

$16(x-1)^2-16+25(y+1)^2-25+100(z-0)^2-359=0;$

$16(x-1)^2+25(y+1)^2+100(z-0)^2=400;$

yoki tenglamani 400 ga bo'lsak

$$\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y+1)^2}{16}+\frac{(z-0)^2}{4}=1$$

tenglamaga ega bo'lamiz. $x-1=X$, $y+1=Y$, $z=Z$ almashtirish olsak

$$\frac{X^2}{25}+\frac{Y^2}{16}+\frac{Z^2}{4}=1$$

ellipsoidning kanonik tenglamasi kelib chiqadi.

Shunday qilib berilgan tenglama ellipsoidni ifodalab "eski" sistemani $0_1(1,-1;0)$ nuqtaga parallel ko'chirilsa uning tenglamasi “yangi” 0_1XY sistemaga nisbatan kanonik ko‘rinishga ega bo‘lar ekan.

Mustaqil yechish uchun mashqlar va test savollari

1. Markazi $C(1;4;-1)$ nuqtada bo‘lib radiusi $R=8$ bo‘lgan sferaning kanonik tenglamasi yozilsin.

Javob: $(x-1)^2+(y-4)^2+(z+1)^2=64$.

2. Markazi $C(-1;-2;-4)$ nuqtada bo‘lib radiusi R=6 bo‘lgan sferaning umumiy tenglamasi yozilsin.

Javob: $x^2+y^2+z^2+2x+4y+8z-15=0$.

3. $x^2+y^2+z^2+x-y+z=0$ sferaning markazi va radiusi topilsin.

Javob: $0_1(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$; $R=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. Markazi $0_1(5;7;-1)$ nuqtada bo‘lgan va koordinatalar boshidan o‘tuvchi sfera tenglamasi yozilsin. Javob: $(x-5)^2+(y-7)^2+(z+1)^2=75$.

5. $y^2+z^2-2az=0$ tenglama qanaqa sirtni ifodalaydi?

Javob: Yasovchisi $0x$ o‘qqa parallel doiraviy silindrni.

6. $\begin{cases} z=x^2+y^2, \\ z=9 \end{cases}$ tenglamalar sistemasi qanaqa egri chiziq tenglamasini ifodalaydi?

Javob: Markazi $0_1(0;0;9)$ nuqtada bo‘lib radiusi 3 ga teng va Oxy tekisligiga parallel $z=9$ tekislikda yotgan aylanani.

7. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ellipsni 1) $0x$ o‘q; 2) Oy o‘q atrofida aylanishi natijasida hosil bo‘lgan aylanish sirtlarini tenglamalarini yozing.

Javob: 1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{c^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$-aylanish ellipsoidi;

2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$-aylanish ellipsoidi.

8. $y^2=x$ parabolani 0x o'q atrofida aylanishi natijasida hosil bo'lgan sirtni tenglamasi yozilsin va sirt yasalsin. Javob: $x=y^2+z^2$ – aylanish paraboloidi.

9. $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{49}+\frac{z^2}{25}=1$ ellipsoidni koordinata tekisliklari bilan kesishish chizig'ining tenglamalari yozilsin va ularning uchlari hamda yarim o'qlari topilsin.

Javob: 1)kesim tenglamalari

a) $\begin{cases} \frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{49}=1, \\ z=0; \end{cases}$, b) $\begin{cases} \frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{25}=1, \\ y=0; \end{cases}$. d) $\begin{cases} \frac{y^2}{49}+\frac{z^2}{25}=1, \\ x=0. \end{cases}$

2) ellipsoidning yarim o'qlari: $a=8$; $b=7$; $c=5$;

3) ellipsoidning uchlari: $A_1(-8;0;0)$, $A(8;0;0)$, $B_1(0;-7;0)$, $B(0;7;0)$, $C_1(0;0-5)$ va $C(0;0;5)$.

10. 1) $x^2+y^2-z^2=0$; 2) $z=x^2+y^2$; 3) $y^2+z^2-\frac{x^2}{8}=0$;

4) $\frac{x^2+z^2}{4}-\frac{y^2}{17}=-1$; 5) $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{2}-1=0$;

6) $-x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{6}=0$; 7) $z=-(x^2+y^2)$; 8) $z=1-x^2-y^2$

tenglamalar bilan qanaqa sirtlar aniqlanadi.

Javob:

1. O'qi Oz o'qdan iborat doiraviy konus.
2. O'qi Oz o'qdan iborat aylanish paraboloidi.
3. O'qi $0x$ o'qdan iborat doiraviy konus.
4. Aylanish o'qi $0y$ o'qdan iborat ikki pallali giperboloid.
5. Bir pallali giperboloid.
6. O'qi $0x$ o'qdan iborat konus.
7. Uchi koordinata boshida bo'lib o'qi Oz o'qdan iborat aylanish paraboloidi.
8. Uchi $0_1(0;0;1)$ nuqtada bo'lib o'qi Oz o'qdan iborat va pastga yo'nalgan aylanish paraboloidi.

11. $x^2+y^2+z^2-2(x+y-z)-6=0$ tenglama qanaqa sirt tenglamasini ifodalaydi?

A) sfera B) ellipsoid D) bir pallali giperboloid E) ikki pallali giperboloid.

F) hech qanaqa sirtni ifodalamaydi.

12. $x^2+y^2+z^2+6x-2y+4z+14=0$ tenglama nimani ifodalaydi?

A) sfera B) ellipsoid D) bir pallali giperboloid E) ikki pallali giperboloid.

F) paraboloid.

13. $x^2+y^2+z^2-4x+4y-6z+17=0$ tenglama qanaqa sirt tenglamasini ifodalaydi?

A) sfera B) ellipsoid D) bir pallali giperboloid E) ikki pallali giperboloid

F) paraboloid.

14. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ tenglama $0xyz$ fazoda nimani ifodalaydi.

A) ellipsni B) giperbolani D) parabolani E) konusni F) elliptik silindrni.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Ikkinchi tartibli sirt deb nimaga aytiladi?
2. Silindrik sirt deb nimaga aytiladi?
3. Silindrik sirtning yo‘naltiruvchisi va yasovchisi nima?
4. Aylanish sirti nima?
5. Konussimon sirt nima?
6. Sferaning ta‘rifini ayting va tenglamasini yozing?
7. Ellipsoid deb nimaga aytiladi? Uning yarim o‘qlari va uchi nima?
8. Bir pallali giperboloid nima?
9. Ikki pallali giperboloid nima?
10. Elliptik paraboloid nima?
11. Giperbolik paraboloid nima?
12. Ikkinchi tartibli konus nima?
13. (14.1) tenglama har doim ham sirtni ifodalaydimi?

15. BIR O‘ZGARUVCHINING FUNKSIYASI

15.1. O‘zgaruvchi va o‘zgarmas miqdorlar

Inson o‘z faoliyati davomida hajm, yuza, uzunlik, vaqt, bosim, harakat, tezlik, og‘irlik kuchi, elektr tokining kuchi va hokazo kabi miqdorlarga duch keladi. Bu miqdorlar mazmun jihatidan turlicha bo‘lsada ularning o‘zlariga xos umumiylik tomoni ham bor bo‘lib ularni o‘lchash mumkinligidadir. Ularni o‘lchash natijasida bu miqdorlarning son qiymatlari deb ataluvchi sonlar hosil bo‘ladi. Bir xil miqdorlarni turli vaqtda va turli sharoitda o‘lchansa uni sonli qiymati turlicha bo‘lishi mumkin. Masalan avtomobil tezligi yo‘lning har xil qismida yoki har xil vaqtda turlicha sonli qiymatlarga ega bo‘ladi. Shuningdek yopiq idishdagi gazning bosimi ham har xil haroratda har xil bo‘ladi. Istalgan qavariq ko‘pburchakning tashqi burchaklari yig‘indisi har qanday ko‘pbuchak uchun o‘zgarmas va 360^0 ga teng. Bu misollardan ko‘rinib turibdiki miqdorlar har xil son qiymatlarni qabul qilishi yoki faqat birgina sonli qiymatni qabul qilishi ham mumkin ekan. Har xil sonli qiymatlarni qabul qiladigan miqdorning o‘zini **o‘zgaruvchi miqdor** deb ataladi.

Qaralayotgan sharoitda o‘zini sonli qiymatlarini o‘zgartmaydigan miqdor **o‘zgarmas miqdor** deb ataladi. Matematikada miqdorni uning fizik ma‘nosidan qat‘iy nazar qabul qilishi mumkin bo‘lgan sonli qiymatlari to‘plami berilganda o‘zgaruvchi miqdor berilgan deb hisoblanadi. O‘zgarmas miqdorni sonli qiymatlari to‘plami birgina sondan iborat o‘zgaruvchi miqdorning xususiy ko‘rinishi deb qarash mumkin.

O‘zgarmas miqdorlarga ko‘plab misollar keltirish mumkin: aylana uzunligining uning diametriga nisbati (π), uchburchakning ichki burchaklari yig‘indisi (180^0), yorug‘likning bo‘shliqdagi tezligi (299,800 km/sek), erkin tushayotgan jismning tezlanishi (9,81 m/sek^2), kvadrat diagonalining uning tomoniga nisbati ($\sqrt{2}$) o'zgarmas miqdorlardir.

Bir miqdorning o'zi vaziyatga qarab o'zgaruvchi yoki o'zgarmas bo'lishi ham mumkin. Masalan tekis harakat qilayotgan jismning tezligi o'zgarmas, erkin tushayotgan jismning tezligi esa o'zgaruvchidir.

O'zgarmas miqdorlarni $a,b,c,...$ harflar bilan belgilanadi. O'zgaruvchi miqdorlarni esa $x, y, z,...$ harflar bilan belgilanadi. O'zgaruvchi miqdorlarning barcha son qiymatlari to'plami shu o'zgaruvchining **o'zgarish sohasi** deyiladi. O'zgaruvchi miqdorlarning sonli qiymatlari haqiqiy sonlarning qandaydir to'plamini tashkil etadi. Bunga sonlar o'qining ma'lum nuqtalari to'plami mos keladi. Kelgusida kesma (segment) va interval deb ataluvchi sonlar to'plamlari bilan ko'proq ish ko'ramiz. O'zgaruvchi miqdor x ning ma'lum p xossaga ega qiymatlari to'plamini $\{x: p\}$ kabi belgilaymiz.

a va b sonlar (yoki ikkita nuqta) berilgan bo'lib $a < b$ bo'lsin. $a \le x \le b$ tengsizliklarni qanoatlantiradigan x sonlar to'plami $\{x: a \le x \le b\}$ **kesma** yoki **segment** deb ataladi va $[a,b]$ orqali belgilanadi. a va b kesmaning **uchlari** (yoki **oxirlari**) deb ataladi, hamda (qaralayotgan holda a va b sonlar ham to'plamga tegishli bo'ladi). $a < x < b$ tengsizliklarni qanoatlantiradigan x sonlar to'plami $\{x: a < x < b\}$ **intenrval** deb ataladi va (a,b) kabi belgilanadi. Bu holda intenrvalning a va b oxirlari sonlar to'plamiga tegishli bo'lmaydi. $a < x \le b$ yoki $a \le x < b$ tengsizliklarni qanoatlantiradigan x sonlar to'plami $\{x: a < x \le b\}$ yoki $\{x: a \le x < b\}$ **yarim ochiq kesma** yoki **yarim yopiq interval** deb ataladi hamda $(a,b]$ yoki $[a,b)$ kabi belgilanadi.

Kiritilgan kesma yoki interval tushunchalari nafaqat sonlar to'plamiga tegishli, balki unga mos sonlar o'qining nuqtalari to'plamiga ham tegishlidir. Masalan, $[a,b]$ kesmaga sonlar o'qining oxirlari a va b nuqtadan iborat kesmasi mos kelib bu holda kesmaning oxirlari a va b nuqta ham kesmaga tegishli bo'ladi.

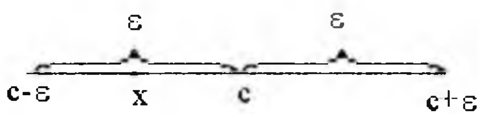
(a, b) intervalga ham sonlar o'qining oxirlari a va b nuqtalardan iborat kesmasi mos kelib bu holda kesmaning oxirlari kesmaga tegishli bo'lmaydi. x biror X to'plamga tegishli bo'lganda $x \in X$ va u shu to'plamga tegishli bo'lmaganda $x \notin X$ kabi yoziladi. Masalan N natural sonlar to'plami bo'lganda $3 \in N$, $0 \notin N$, $\frac{1}{2} \notin N$. Shuningdek: $3 \in [2, 4]$, $5 \notin [0, 3]$, $2 \notin (0, 2)$.

Ba'zi hollarda cheksiz intervallar va cheksiz yarim intervallar bilan ish ko'rishga to'g'ri keladi. Ular quyidagicha ta'riflanadi va belgilanadi:

$$\{x : x > a\} = (a; +\infty), \quad \{x : x \geq a\} = [a; +\infty),$$
$$\{x : x < b\} = (-\infty; b), \quad \{x : x \leq b\} = (-\infty; b].$$

Butun sonlar o'qini (barcha haqiqiy sonlar to'plamini) cheksiz interval $(-\infty; +\infty)$ ko'rinishida tasvirlash mumkin. Ba'zan kesma, interval, yarim ochiq yoki yarim yopiq intervallarni **oraliqlar** deb ham ataymiz.

Endi muhim tushunchalardan biri nuqtaning atrofii tushunchasini kiritamiz. c nuqtaning **atrofi** deb shu nuqtani ichiga olgan har qanday $(a.b)$, $(a<c<b)$ intervalga aytiladi. Markazi c nuqtada va uzunligi 2ε $(\varepsilon>0)$ bo'lgan $(c-\varepsilon; \ c+\varepsilon)$ interval c nuqtaning ε-atrofi deb ataladi (87-chizma). $|x-c| < \varepsilon$ tengsizlik $-\varepsilon<x-c<\varepsilon$ yoki $c-\varepsilon<x<c+\varepsilon$ tengsizliklarga teng kuchli ekani maktab kursidan ma'lum. Demak $|x-c| < \varepsilon$ tengsizlik ham c nuqtaning ε-atrofini anglatar ekan, ya'ni $x \in (c-\varepsilon, \ c+\varepsilon)$.



87-chizma.

15.2. Funksiya tushunchasi

Har xil tabiat hodisalarini o'rganishda ko'ramizki unda bir-biriga bog'liq bir nechta o'zgaruvchi miqdorlar ishtirok etadi. Masalan o'zgarmas haroratda yopiq idishdagi gazning bosimi idishning hajmiga teskari proporsional. Hajm o'zgarganda gazning bosimi ham unga bog'liq ravishda ma'lum qonuniyat asosida o'zgaradi, Shuningdek ishbay asosida haq oladigan ishchining ish haqi u ishlab chiqaradigan mahsulotining miqdoriga bog'liq, ya'ni ishchi qancha ko'p mahsulot ishlab chiqsa u shuncha ko'p maosh oladi. Doiraning radiusi o'zgarganda uning yuzi ham ma'lum qonun assosida unga bog'liq ravishda o'zgaradi. Agar doiraning yuzini S va radiusini R orqali belgilasak, uning yuzi

$$S = \pi R^2$$

kabi topilar edi. Bu yerdagi π o'zgarmas son, R esa doiraning radiusi bo'lganligi uchun u faqat musbat qiymatlarni qabul qiladi va biz istagan doirani qaraganimiz uchun u ixtiyoriy musbat qiymatni qabul qilishi mumkin, ya'ni $R \in (0; +\infty)$..

Doiraning radiusi R ning o'zgarishi uning yuzi S ni ham ma'lum qonuniyat asosida o'zgarishga majbur etadi. R ning har bir aniq qiymatiga S ning bitta aniq qiymati mos keladi. Bunday holda doiraning yuzi uning radiusining funksiyasi deb ataladi. Bunga o'xshagan ko'plab misollarni keltirish mumkin. Ularda bir o'zgaruvchining o'zgarishi ikkinchi o'zgaruvchining ma'lum qonuniyat asosida o'zgarishga majbur etadi. Masalan yopiq idishda ma'lum miqdordagi gaz qaralsa harorat o'zgarmagan holda idishning kichrayishi gaz bosimini oshishga majbur etadi. O'zgaruvchi miqdorlarni biri ikkinchisiga bog'liq ravishda o'zgarishi funksiya tushunchasiga olib keladi.

Ikkita x va y o'zgaruvchi miqdorni qaraymiz.

1-ta'rif. Agar x miqdorning D sohadagi har bir qiymatiga biror qonun yoki qoida bo'yicha y ning biror E sohadagi aniq bir qiymati mos qo'yilsa, y o'zgaruvchi miqdor x o'zgaruvchi miqdorning **funksiyasi** deb ataladi.

Bu holda y miqdor x ning bir qiymatli funksiyasi deb yuritiladi.

O'zgaruvchi x miqdor **erkli o'zgaruvchi** yoki **argument**, y miqdor esa **erksiz o'zgaruvchi** yoki **funksiya** deb ataladi.

y ning x o'zgaruvchining funksiyasi ekanligi ramziy tarzda

$$y = f(x)$$

ko'rinishda yoziladi (o'qilishi: y teng ef x). $y = f(x)$ funksiyaning argument x ni aniq x_0 qiymatidagi xususiy qiymati $f(x_0)$ yoki $y|_{x=x_0}$ kabi belgilanadi. Masalan, agar $f(x) = 2x + 3$ bo'lsa $f(1) = 2 \cdot 1 + 3 = 5$, $f(0) = 2 \cdot 0 + 3 = 3$, $f(2) = 2 \cdot 2 + 3 = 7$.

Bu yerdagi f, funksiyaning qiymatiga ega bo'lish uchun uning argumenti ustida qanaqa matematik amallarni bajarish lozimligini ko'rsatadi.

Funksiyani $y = \varphi(x)$, $y = y(x)$, $y = \phi(x), \ldots$ ko'rinishda ham belgilash mumkin.

Ba'zan argumentning har bir qiymatiga funksiyaning bir emas birnechta qiymatlari mos keladi. Bunday holda funksiya **ko'p qiymatli** funksiya deb ataladi. Masalan, $x^2 + y^2 = R^2$ aylananing har bir nuqtasining x abssissasiga aylananing ordinatalari $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$ bo'lgan ikkita nuqtasi mos keladi, ya'ni bu yerda biz ikki qiymatli funksiyaga duch keldik.

Bundan buyon biz faqatgina bir qiymatli funksiyalar bilan ish ko'ramiz.

2-ta'rif. Argument x ning $f(x)$ funksiya ma'noga ega bo'ladigan qiymatlari to'plami funksiyaning **aniqlanish sohasi** deb ataladi va $D(f)$ orqali belgilanadi.

Masalan $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ funksiya $x=2$ nuqtadan boshqa x ning barcha qiymatlarida aniqlangan. $x=2$ da kasrning maxraji nolga aylanib, funksiya ma'nosini yo'qotadi, chunki hech bir sonni nolga bo'lib bo'lmaydi. Demak $D\left(\dfrac{1}{x-2}\right)=(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$.

Funksiya biror nuqtada aniqlangan bo'lishi uchun u shu nuqtada $\dfrac{a}{0}$, ∞, $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, 1^{∞}, ∞^0 ko'rinishga ega bo'lmasligi lozim, bunda $a=const.$. Shuningdek $y=\sqrt[2n]{\varphi(x)}$ ko'rinishdagi funksiya faqat x ning $\varphi(x)\geq 0$ tengsizlikni qanoatlantiradigan qiymatlaridagina aniqlangan.

3-ta'rif. $f(x)$ funksiyaning qabul qiladigan qiymatlari to'plami uning **o'zgarish sohasi** yoki **qiymatlar sohasi** deb ataladi va $E(f)$ orqali belgilanadi. Masalan. $E(sinx)=[-1;1]$, $E(tgx)=(-\infty;\infty)$.

4-ta'rif. Oxy tekislikning koordinatalari $y=f(x)$ munosabat bilan bog'langan $P(x,y)$ nuqtalarning geometrik o'rni $y=f(x)$ funksiyaning **grafigi** deb ataladi.

Funksiyaning grafigi uning asosiy xossalarini shu grafikka qarab aytish imkonini beradi. Har qanday funksiya ham grafikka ega deb o'ylash noto'g'ri.Masalan Dirixle funksiyasi deb ataladigan

$$D(x)=\begin{cases}1, & x-\text{ratsional son bo'lsa,}\\ 0, & x-\text{irratsional son bo'lsa}\end{cases}$$

funksiya grafikka ega emas. Butun sonlar o'qi bu funksiyaning aniqlanish sohasini tashkil etadi, funksiyaning qiymatlari to'plami faqat ikkita son, ya'ni 0 va 1 dan iborat. Demak $D(D(x))=(-\infty;\infty)$, $E(D(x))=\{0;1\}$.

Endi funksiyaning berilish usullarini qaraymiz.

Funksiya turli usullar bilan berilishi mumkin. Ulardan ko'p uchraydigani analitik, jadval va grafik usullaridir.

x va y o'zgaruvchi orasidagi moslik formula orqali ifodalanganda funksiya **analitik usulda** berilgan deb ataladi. Masalan: $y = x^2$, $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$, $y = \dfrac{2^x}{x+1}$.

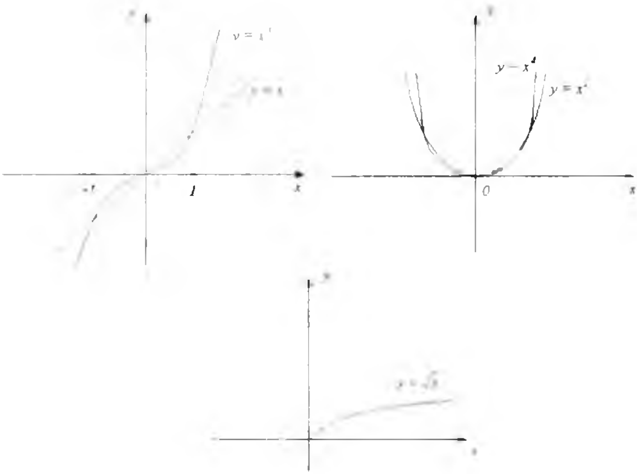
Funksiya aniqlanish sohasining turli qismlarida turlicha formulalar orqali berilishi ham mumkin. Masalan,

$$\text{sign}x = \begin{cases} 1, \text{ agar } & x > 0 \text{ bo'lsa,} \\ 0, \text{ agar } & x = 0 \text{ bo'lsa,} \\ -1, \text{ agar } & x < 0 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

x va y o'zgaruvchi orasidagi bog'lanish jadval ko'rinishida ifodalanganda funksiya **jadval usulda** berilgan deb ataladi. Masalan, logarifmik, trigonometrik funksiyalarning qiymatlari jadvallari funksiyaning jadval usulda berilishiga misol bo'la oladi.

Funksiya grafik usulda berilganda uning grafigi ma'lum bo'lib, argumentning turli qiymatlariga mos keluvchi funksiyaning qiymatlarini bevosita ana shu grafikdan topiladi.

15.3. Asosiy elementar funksiyalar, ularning aniqlanish va o'zgarish sohalari, grafigi



88-chizma.

1. $y = C$ - o'zgarmas(konstanta) funksiya, bunda C -o'zgarmas son.

2. $y = x^n$ - darajali funksiya, bunda n noldan farqli son.

3. $y = a^x$ - ko'rsatkichli funksiya ($(a > 0, \quad a \neq 1)$.).

4. $y = \log_a x$ - logarifmik funksiya $(a > 0, \quad a \neq 1)$.

5. $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=tgx$, $y=ctgx$ - trigonometrik funksiyalar.

6. $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=arctgx$, $y=arcctgx$ - teskari trigonometrik funksiyalar.

Bu funksiyalar **asosiy elementar funksiyalar** deb ataladi. Shu funksiyalarning aniqlanish va o'zgarish sohalarini hamda grafiklari bilan tanishamiz.

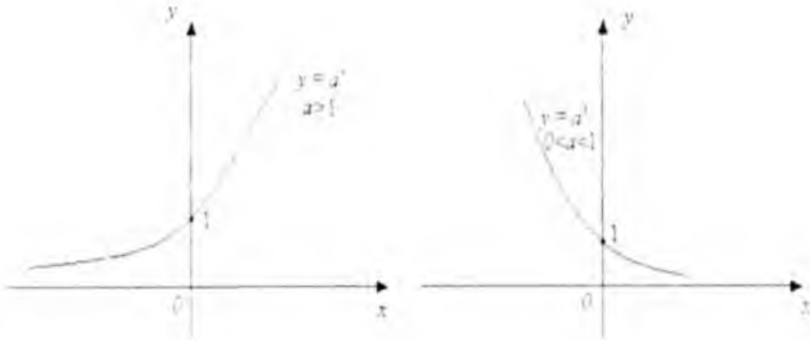
1. $y = C$ – o'zgarmas funksiya butun sonlar o'qida aniqlangan bo'lib uning qiymatlari sohasi birgina C sondan iborat, ya'ni $D(C) = (-\infty; +\infty)$, $E(C) = C$. Bu funksiyaning grafigi Ox o'qqa parallel to'g'ri chiziqdan iborat ekanligi aytib o'tilgan edi (36-chizma).

2. $y = x^n$ – darajali funksiyaning aniqlanish va o'zgarish sohalari hamda grafigi n ko'rsatkichga bog'liq.

Masalan, $D(x) = D(x^2) = D(x^3) = (-\infty; +\infty)$, $E(x) = (-\infty; +\infty)$, $E(x^2) = [0; +\infty)$, $D(\sqrt{x}) = [0; +\infty)$, $E(\sqrt{x}) = [0; +\infty)$.

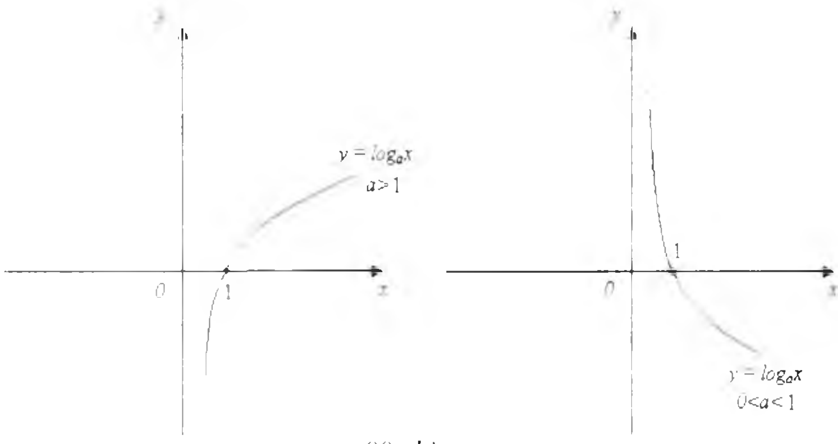
Ba'zi bir darajali funksiyalarning grafiklari 88-chizmada keltirilgan.

3. $y = a^x$ ko'rsatkichli funksiya $(a > 0, \quad a \neq 1)$ uchun: $D(a^x) = (-\infty; +\infty)$, $E(a^x) = (0; +\infty)$. Ko'rsatkichli funksiyaning grafigi 89-chizmada tasvirlangan.



89-chizma.

4. $y = \log_a x$ logarifmik funksiya $(a > 0,\ a \neq 1)$ uchun: $D(\log_a x) = (0; +\infty)$. $E(\log_a x) = (-\infty; +\infty)$. Logarifmik funksiyaning grafigi 90-chizmada tasvirlangan.

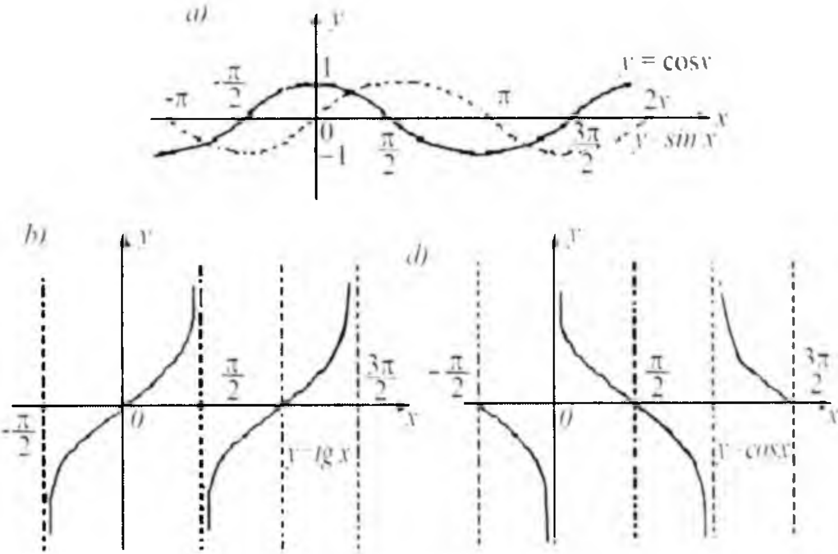


90-chizma.

5. $y = sinx$, $y = cosx$, $y = tgx$, $y = ctgx$ -trigonometrik funksiyalar uchun: $D(\sin x) = D(\cos x) = (-\infty; +\infty)$, $E(\sin x) = E(\cos x) = [-1; 1]$.

$y = \text{tg}x$ funksiya son o'qining $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ ko'rinishdagi nuqtalaridan farqli, $y = \text{ctg}x$ funksiya esa son o'qining $x = k\pi$ (k-butun son) ko'rinishdagi nuqtalaridan farqli barcha nuqtalarida aniqlangan. $E(\text{tg}x) = E(\text{ctg}x) = (-\infty; +\infty)$. Trigonometrik funksiyalarning grafiklari 91-chizmada tasvirlangan.

6. $y=arcsinx$, $y=arccosx$, $y=arctgx$, $y=arcctgx$ -teskari trigonometrik funksiyalarning aniqlanish, o'zgarish sohalari hamda ularning grafiklari bilan keyinroq tanishamiz.



91-chizma.

15.4. Murakkab funksiya. Elementar funksiya

Har doim ham funksiyaning argumenti erkli o'zgaruvchi bo'lavermaydi. Ko'p hollarda shunday funksiyalar ham uchraydiki, ularning argumentlari boshqa bir o'zgaruvchining funksiyasi bo'ladi. Argumenti x o'zgaruvchining funksiyasi, ya'ni $u = \varphi(x)$ bo'lgan $y = f(u)$ funksiyani qaraymiz. Bu holda y o'zgaruvchi ham x

o'zgaruvchining funksiyasi bo'ladi va u bu holda **murakkab funksiya** yoki funksiyaning funksiyasi deb ataladi hamda $y = f[\varphi(x)]$ kabi belgilanadi.

u argument murakkab funksiyaning **oraliq argumenti** deb ataladi. Masalan, agar $y = tgu$, $u = \log_a x$ bo'lsa, y x ning murakkab funksiyasi bo'ladi: $y = \operatorname{tg}(\log_a x)$.

Asosiy elementar funksiyalar va murakkab funksiya tushunchalaridan foydalanib **elementar funksiya** tushunchasiga ta'rif beramiz.

5-ta'rif. **Elementar funksiya** deb asosiy elementar funksiyalardan chekli sondagi arifmetik amallar va ulardan olingan murakkab funksiyalardan tuzilgan funksiyaga aytiladi. Asosiy elementar funksiyalarning o'zlari ham elementar funksiyalar sinfiga tegishli. Masalan,

$$y = \lg(1+\sin^2 x), \quad y = 3^{\operatorname{tg}(\sin x)}, \quad y = \frac{x^3+x^2+x+1}{x^2-2x+3}, \quad y = \sin^2 3^x$$

funksiyalarning barchasi elementar funksiyalardir.

Izoh. Elementar bo'lmagan, ya'ni noelementar funksiyaga $y = n!$ $(y = f(x))$ funksiya misol bo'ladi. Bunda $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ (o'qilishi: en faktorial). Chunki y ni topish uchun kerak bo'lgan amallar soni n ning o'sishi bilan ortadi, ya'ni u chekli emas. Bundan buyon biz ayrim hollarni hisobga olmaganda faqatgina elementar funksiyalar bilan ish ko'ramiz.

15.5. Butun va kasr-ratsional funksiyalar

6-ta'rif. $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ ko'rinishdagi funksiya butun ratsional funksiya yoki ko'phad deb ataladi, bu yerdagi n natural son ko'phadning darajasi, $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ ma'lum sonlar **ko'phadning koeffitsientlari** deb ataladi.

Masalan, $y = 2x+1$, $y = 2x^2+3x+4$, $y = 6x^3+4x-7$ funksiyalar mos ravishda birinchi, ikkinchi va uchinchi darajali ko'phadlardir.

Birinchi darajali $y = a_0x + a_1$ ko‘phad **chiziqli funksiya** deb ataladi.

Umumiylikni buzmaslik maqsadida $y=C$ o‘zgarmas funksiyani nolinchi darajali ko‘phad deb qarash mumkin: $y = Cx^0$.

Odatda n-darajali ko‘phadni $P_n(x)$ kabi yoziladi.

7-ta‘rif. Ikki ko‘phadning nisbati **kasr-ratsional funksiya** yoki **ratsional kasr** deyiladi.

$$R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \ldots + b_{m-1}x + b_m}{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}$$

Kasrning suratini darajasi maxrajining darajasidan kichik ($m<n$) bo‘lganda kasr *to‘g‘ri* va aks holda ($m \geq n$) kasr **noto‘g‘ri** kasr deb ataladi. Masalan, $y = \frac{x^4 - 7x - 3}{4x^3 + 6x - 1}$, $y = \frac{x^5 + 1}{1 - x^3}$, $y = \frac{x^2 + 3}{x^3 + 7x + 8}$ funksiyalar kasr-ratsional funksiya bo‘lib, ulardan birinchi ikkitasi noto‘g‘ri kasr, uchinchisi esa to‘g‘ri kasrdir.

15.6. Funksiyaning juft va toqligi, davriyligi

8-ta‘rif. Agar $y = f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli barcha x lar uchun $f(-x) = f(x)$ tenglik bajarilsa $f(x)$ funksiya **juft funksiya** deb ataladi. Agar har bir $x \in D(f)$ uchun $f(-x) = -f(x)$ tenglik bajarilsa $f(x)$ funksiya **toq funksiya** deb ataladi. Juft funksiyaning grafigi Oy o‘qqa nisbatan, toq funksiyaning grafigi koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo‘ladi.

Masalan, $y=x$, $y = x^3$, $y=sinx$ funksiyalar toq $y = x^2$, $y = x^4$, $y=cosx$ funksiyalar juft (88 va 91-chizmalar) funksiyalardir. $y = a^x$, $y = log_a x$ funksiyalar juft ham emas toq ham emas.

Ko‘rinib turibdiki juft funksiyaning ham, toq funksiyaning ham aniqlanish sohasi koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo‘ladi.

9-ta'rif. Agar o'zgarmas $T \neq 0$ son mavjud bo'lib $y = f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli barcha x lar uchun $f(x \pm T) = f(x)$ tenglik bajarilsa $f(x)$ funksiya **davriy funksiya** deb ataladi. $f(x \pm T) = f(x)$ tenglikni qanoatlantiruvchi musbat T sonlarning eng kichigi T_0 $f(x)$ funksiyaning **davri** deb ataladi. Masalan, $y=sinx$, $y=cosx$ funksiyalar davri 2π ga teng davriy funksiyalar, tgx, $ctgx$ funksiyalar esa davri π ga teng davriy funksiyalardir.

15.7. Monoton funksiyalar

$f(x)$ funksiya biror $[a; b]$ kesmada (interval, yarim interval bo'lishi ham mumkin) aniqlangan bo'lsin.

10-ta'rif. Agar x ning shu kesmaga tegishli ixtiyoriy ikkita x_1 va x_2 qiymatlari uchun $x_1 < x_2$ bo'lganda $f(x_1) < f(x_2)$ (yoki $f(x_1) > f(x_2)$) tengsizlik o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada **o'suvchi** (yoki **kamayuvchi**) deyiladi.

Boshqacha aytganda argumentning katta qiymatiga funksiyaning katta qiymati mos kelsa funksiya o'suvchi deyilar ekan.

Masalan, $y = \sqrt{x}$ (88-chizma) funksiya $[0; +\infty)$ da, $y=a^x$ $(a>1)$ (89-chizma) funksiya $(-\infty; +\infty)$da, $y = log_a x$ $(a > 1)$ (90(a)-chizma) funksiya $(0; +\infty)$da, $y=sinx$ (91-chizma) funksiya $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ kesmada, $y=cosx$ (91-chizma) funksiya $[-\pi; 0]$ kesmada o'suvchi.

Argumentning katta qiymatiga funksiyaning kichik qiymati mos kelganda funksiya kamayuvchi deyilar ekan.

Masalan, $y = x^2$, $y = x^4$ funksiyalar (88-chizma) $(-\infty; 0)$ oraliqda, $y = a^x$ $(0 < a < 1)$ (89-chizma) funksiya $(-\infty; +\infty)$

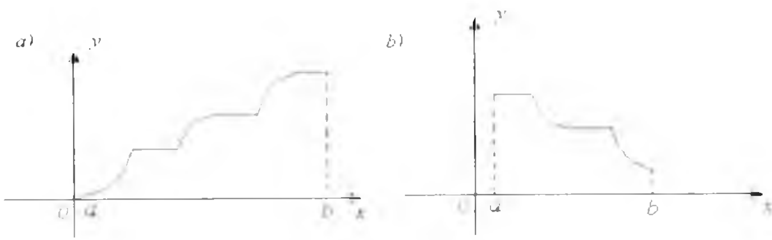
oraliqda, $y=\log_a x$ $(0<a<1)$ (90-chizma) funksiya $(0;+\infty)$ oraliqda, $y=\cos x$ (91-chizma) funksiya $[0;\pi]$ kesmada kamayuvchi.

$[a;b]$ kesma $f(x)$ funksiyaning mos ravishda **o'sish** yoki **kamayish oralig'i** deyiladi. O'suvchi va kamayuvchi funksiyalar **monoton** funksiyalar deb ataladi. Monoton funksiyaning o'sish, kamayish oraliqlari uning **monotonlik oralig'i** deyiladi.

Funksiyaning o'sish yoki kamayishi haqida gapirganda o'sish yoki kamayish oraliqlari ko'rsatilishi shart. Chunki bir funksiyaning o'zi bir oraliqda o'ssa u boshqa bir oraliqda kamayishi ham mumkin. Masalan, $y=\cos x$ funksiya $[-\pi;0]$ orliqda o'sadi, $[0;\pi]$ oraliqda esa kamayadi (91-chizma). Shuningdek $y=x^2$ va $y=x^4$ funksiyalar ham $(-\infty;0)$ oraliqda kamayadi, $(0;+\infty)$ oraliqda esa o'sadi.

11-ta'rif. Agar $x_1<x_2$ bo'lganda $f(x_1)\le f(x_2)$ (yoki $f(x_1)\ge f(x_2)$) tengsizlik o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada **kamaymaydigan** (yoki **o'smaydigan) funksiya** deyiladi.

Masalan, 92 *a*-chizmada kamaymaydigan, 92 *b*-chizmada o'smaydigan funksiyalarning grafiklari tasvirlangan.



92-chizma.

15.8. Funksiyaning chegaralanganligi

12-ta'rif. $(a;b)$ intervalda aniqlangan $y=f(x)$ funksiya uchun shunday $M>0$ son mavjud bo'lib, $(a;b)$ dagi barcha x lar uchun

$|f(x)| \le M$ tengsizlik bajarilsa, $y = f(x)$ funksiya $(a;\, b)$ intervalda **chegaralangan** deyiladi.

Agar bunday M son mavjud bo‘lmasa, u holda $y = f(x)$ funksiya $(a;\, b)$ intervalda **chegaralanmagan** deb ataladi.

Masalan, $y = \cos x$ funksiya $(-\infty;\, +\infty)$ intervalda chegaralangan, chunki bu intervaldagi barcha x lar uchun $|\cos x| \le 1$, ya‘ni $M=1$.

$y = \dfrac{1}{x}$ funksiya $(0;1)$ intervalda chegaralanmagan, chunki $\left|\dfrac{1}{x}\right| \le M$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi musbat M sonni topish mumkin emas, chunki $\dfrac{1}{x}$ kasrning maxraji kichraygan sari u kattalasha boradi. Shu funksiyaning o‘zi 0 nuqtani o‘z ichiga olmagan istalgan intervalda chegaralangan bo‘ladi.

Mustaqil yechish uchun mashqlar va test savollari

1. $f(x) = x^2 - 3x + 4$ funksiya berilgan. $F(1), f(0), f(-1)$, toping.
Javob: 0;4;8.

2. $f(x) = x^2 + 4$ funksiya berilgan. Quyidagi qiymatlar toping: a) $f(5)$ b) $f(\sqrt{3})$ d) $f(a+1)$ e) $f(a^2)$ f) $f(2a)$.
Javob: a) 29 b) 13 d) $a^2 + 2a + 5$ e) $a^4 + 1$ f) $4a^2 + 4$.

3. $f(x) = \dfrac{x+1}{2+3x}$ bo‘lsa $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ va $\dfrac{1}{f(x)}$ topilsin.

Javob: $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1+x}{2+3x}$, $\dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{2x+3}{x+1}$.

4. $\varphi(x) = \lg\dfrac{1+x}{1-x}$ bo‘lsa $\varphi(a) + \varphi(b) = \varphi\left(\dfrac{1+ab}{a+b}\right)$ ekani isbotlansin.

5. Quyidagi funksiyalarning aniqlanish sohasi topilsin.

a) $\sqrt{9-x^2}$, b) $\sqrt{3x-2}+\sqrt[4]{9-2x}$, d) $\sqrt[3]{x+a}-\sqrt[5]{b-x}$,

e) $\dfrac{x^2+3x+1}{x+1}$, f) $\lg(x^2+5x+6)$, g) $y=4^x$

Javob: a) $[-3;3]$, b) $\left[\dfrac{2}{3};\dfrac{9}{2}\right]$, d) $(-\infty;+\infty)$, e) $(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$,

f) $(-\infty;-3)\cup(-2;+\infty)$, g) $(-\infty;+\infty)$.

6. Quyidagi funksiyalarning grafiklari yasalsin.

a) $y=2x-3$, b) $y=\dfrac{1}{4}x^2-1$, d) $y=x-x^2$, e) $y=x^2+2x-3$,

f) $y=\dfrac{1}{x-1}$, g) $y=3^{-x}$, h) $y=\log_2\dfrac{1}{x}$, i) $y=x^3+1$,

j) $y=\log_2(1-x)$.

7. a) $y=8$, b) $y=x^2$, d) $y=\sin x$, e) $y=\cos 5x^2$, f) $y=7^x$,
g). $y=\lg x$ funksiyalardan qaysi biri murakkab funksiya.

Javob: $y=\cos 5x^2$.

8. Quyidagi funksiyalardan qaysi birlari juft funksiya.

a) $y=x^2-2x+1$, b) $y=x^3-1$, d) $y=\sin^2 x+\cos x$,

e) $y=\sqrt{x}$, f) $y=\dfrac{x^2-1}{1+x^4}$, g) $y=2^x+2^{-x}$, h) $y=\sqrt[3]{x^3+1}$

Javob: d), f), g).

9. Quyidagi funksiyalardan qaysi biri toq funksiya. a) $y=\sin^3 x$,

b) $y=tgx-x$, d) $y=x^3-x+1$, e) $y=\sqrt{x^3+1}$, f) $y=\dfrac{x^3-1}{1+x^6}$,

g) $y=3^x-3^{-x}$, h) $y=\dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}$. *Javob:* a), b), g).

10. Quyidagi funksiyalardan davriy bo'lmaganini toping.

a) $y=\sin x\cdot\cos x$, b) $y=|\cos x|$, d) $y=tg^3 x$, e) $y=\sin x+4$,

f) $y=\cos(2x+3)$, g) $y=\lg x$ *Javob:* g).

11. Quyidagi funksiyalardan qaysi birlari $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ oraliqda o'sadi.

a) $y = tgx$, b) $y = ctgx$, d) $y = \sin x$, e) $y = \cos x$, f) $y = x^2$,

g) $y = \frac{1}{x}$. *Javob*: a), d), f).

12. Quyidagi funksiyalardan qaysi birlari $(-3; 0)$ oraliqda kamayadi.

a) $y = x^2$, b) $y = \frac{1}{x^2}$, d) $y = 3^{-x}$, e) $y = tg\frac{1}{x}$. *Javob*: a), d).

13. Quyidagi funksiyalardan qaysi birlari $(0; 1)$ intervalda chegaralangan.

a) $y = x^3$, b) $y = \sin x$, d) $y = tgx$, $y = 3^{-x}$, e) $y = ctgx$,

f) $y = \frac{1}{1-x}$, g) $y = \frac{1}{\sin x}$, h) $y = lg(1-x)$. *Javob*: a), b), d).

14. 1) $3 \in N$ 2) $-5 \in Z$ 3) $2 \in [3,5]$ 4) $\sqrt{8} \in (3;4)$ 5) $\sqrt{2} \in Q$ yozuvlardan noto'g'risini ko'rsating.

A) 3;5;2 B) 2;3;4 D) 1;4;5 E) 3;4;5 F) 2;4;5.

15. 1) $y = 2^x$ 2) $y = \log_2 x$ 3) $y = x^2 + 4x + 2$ 4) $y = x^5$

5) $y = \sin x$ funksiyalardan qaysi birlari o'zlarining aniqlanish sohasida monoton o'sadi?

A) 1;2;3 B) 2;3;4 D) 3;4;5 E) 1;2;5 F) 1;2;4.

16. 1) $y = 3^x$ 2) $y = \log_2 x$ 3) $y = tgx$ 4) $y = \frac{x+1}{x-2}$

5) $y = \sin 2xcco3x$ funksiyalardan $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ intervalda chegaralanganlarini ko'rsating.

A) 1;2;3;4 B) 2;3;4;5 D) 1;2;4;5 E) 2;3;4;5 F) 1;3;4;5.

17. 1) $y = cos^2 x + tgx + 3$ 2) $y = \sin^2 x + ctgx - 1$ 3) $y = |\sin x|$

4) $y = |\cos x|$ 5) $y = cos^2 x - \sin^2 x$ funksiyalardan davri π ga teng davriy funksiyani ko'rsating.

A) 1; 2; 3; 4; B) barchasi; D) 2; 3; 4; 5; E) 1; 2; 3; 5; F) 1; 2; 4; 5.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. O‘zgaruvchi miqdor nima? O‘zgarmas miqdorchi?
2. O‘zgaruvchi miqdorning o‘zgarish sohasi nima?
3. Nuqtaning atrofi, ε -atrofi, kesma, interval nima?
4. Bir o‘zgaruvchili funksiyaning ta‘rifini ayting. Aniqlanish va o‘zgarish sohalari nima?
5. Funksiyaning grafigi nima?
6. Funksiya ko‘pincha qanaqa usullar bilan beriladi?
7. Qanaqa funksiyalar asosiy elementar funksiyalar deyiladi? Ularning aniqlanish va o‘zgarish sohalarini ayting.
8. Murakkab funksiyaning ta‘rifini ayting.
9. Elementar funksiyani ta‘rifini ayting.
10. Butun va kasr-ratsional funksiyalarni ta‘rifini ayting. Ratsional kasr qachon to‘g‘ri va qachon noto‘g‘ri kasr deyiladi.
11. Funksiya qachon juft va qachon toq deb ataladi.

16. O'ZGARUVCHI MIQDORNING LIMITI

16.1.Sonli ketma-ketliklar

1-ta'rif. Natural sonlar to'plamida aniqlangan $x_n = f(n)$, $n \in N$ funksiyaning qiymatlari to'plami **sonli ketma-ketliklar** deb ataladi.

Agar n ga 1, 2, 3, ... qiymatlar bersak, bu funksiyaning

$$x_1 = f(1), x_2 = f(2), ..., x_n = f(n), ...$$

xususiy qiymatlariga ega bo'lamiz, ular ketma-ketlikning **hadlari** yoki **elementlari** deb ataladi.

Bunda x_1 ketma-ketlikning birinchi hadi, x_2 uning ikkinchi hadi va hokazo x_n ketma-ketlikning n-hadi deyiladi. Demak

$$x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n ...\ \text{yoki}\ \ f(1), f(2), ..., f(n) ...$$

sonli ketma-ketlikni tashkil etadi. Sonli ketma-ketlik $\{x_n\}$ yoki $\{f(n)\}$ orqali belgilanadi. Ketma-ketlikning n-hadi $x_n = f(n)$ uning **umumiy hadi** deb ataladi.

Ketma-ketlikning umumiy hadi ma'lum bo'lsa u berilgan hisoblanadi.

1-misol. $x_n = \dfrac{1}{2^n}$ funksiya $\{x_n\} = \left\{\dfrac{1}{2^n}\right\} = \left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, ..., \dfrac{1}{2^n}, ...\right\}$ ketma-ketlikni beradi.

2-misol. $x_n = 2n$ funksiya $\{x_n\} = \{2n\} = \{2, 4, 6, ..., 2n, ...\}$ketma-ketlikni beradi.

3-misol. $x_n = 1 + (-1)^n$ funksiya

$$\{x_n\} = \{1 + (-1)^n\} = \{0,\ 2,\ 0,\ 2, ..., 1 + (-1)^n, ...\}$$

ketma-ketlikni beradi.

4-мисол. $x_n = \frac{1}{n}$ funksiya $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$ ketma-ketlikni beradi.

Barcha misollarda n natural son, ya'ni $n \in N$.

Shunday M son mavjud bo'lsaki, barcha $n \in N$ uchun $x_n < M$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik **yuqoridan chegaralangan ketma-ketlik** deb ataladi.

Shunday M son mavjud bo'lsaki, istalgan $n \in N$ uchun $x_n > M$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik **quyidan chegaralangan ketma-ketlik** deb ataladi.

Ham yuqoridan ham quyidan chegaralangan ketma-ketlik chegaralangan deb ataladi. Chegaralangan ketma-ketlik uchun shunday $M>0$ son mavjud bo'lib barcha $n \in N$ uchun $|x_n| \leq M$ tengsizlik bajariladi.

Agar istalgan n natural son uchun $x_n < x_{n+1}$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ **monoton o'suvchi ketma-ketlik** deb ataladi.

Agar istalgan n natural son uchun $x_n > x_{n+1}$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ **monoton kamayuvchi ketma-ketlik** deb ataladi.

Agar istalgan n natural son uchun $x_n \geq x_{n+1}$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ **o'smaydigan ketma-ketlik** deb ataladi.

Agar istalgan n natural son uchun $x_n \leq x_{n+1}$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ **kamaymaydigan ketma-ketlik** deb ataladi.

5-misol. $\{x_n\} = \{n^2\} = \{1, 4, 9, 16, \ldots, n^2, \ldots\}$ – o'suvchi, quyidan chegaralangan ketma-ketlik.

6-misol. $\{x_n\} = \{1 - 2n\} = \{-1, -3, -5, \ldots\}$ – kamayuvchi, yuqoridan chegaralangan ketma-ketlik.

7-misol. $\{x_n\} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, ..., \frac{n}{n+1}, ...\right\}$ – o‘suvchi, chegaralangan ketma-ketlik.

16.2.Ketma-ketlikning limiti

a o‘zgarmas son va $\{x_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo‘lsin.

2-ta‘rif. Agar istalgancha kichik $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $N = N(\varepsilon)$ natural son mavjud bo‘lsaki, undan katta barcha n lar uchun $|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, a o‘zgarmas son $\{x_n\}$ ketma-ketlikning **limiti** deb ataladi va $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ yoki $x_n \to a$ kabi belgilanadi.

Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti a chekli son bo‘lsa **ketma-ketlik yaqinlashuvchi,** aks holda ya‘ni a mavjud bo‘lmasa yoki ∞ bo‘lsa u **uzoqlashuvchi ketma-ketlik** deb ataladi.

$|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlik $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ tengsizliklarga teng kuchli ekanini ko‘rdik. Buni e‘tiborga olsak, limit tushunchasini geometrik nuqtai nazardan bunday tushuntirish mumkin: agar istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $N = N(\varepsilon)$ natural son topilsaki, $\{x_n\} = \{x_1, x_2, ..., x_N, x_{N+1}, ...\}$ ketma-ketlikning N+1- hadidan boshlab barcha hadlari a nuqtaning ε - atrofiga tushsa, ya‘ni a nuqtaning ε -atrofiga $\{x_n\}$ ketma-ketlikning birinchi N ta chekli sondagi hadlaridan tashqari barcha hadlari tushsa, a o‘zgarmas son $\{x_n\}$ ketma-ketlikning **limiti** deb ataladi.

Shunday qilib a o‘zgarmas son $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti bo‘lganda bu nuqtaning istalgan ε -atrofi $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ da ketma-ketlikning cheksiz ko‘p hadlari yotadi, ε -atrofdan tashqarida ketma-ketlikning chekli sondagi hadlari qoladi xolos.

8-misol. $\{x_n\}=\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ ketma-ketlikning limiti 1 ga teng ekanligi ko'rsatilsin.

Yechish. Ixtiyoriy $\varepsilon>0$ sonni olib $|x_n-a|=\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon$ yoki $\left|-\frac{1}{n}\right|<\varepsilon$ tengsizlikni tuzamiz. Biroq n>0, shuning uchun $\frac{1}{n}<\varepsilon$ yoki $n>\frac{1}{\varepsilon}$.

Bundan ko'rinadiki, $N=N(\varepsilon)$ sifatida $\frac{1}{\varepsilon}$ natural bo'lganda shu sonni o'zini, u natural son bo'lmaganda $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$ sonni ($[x]$- x ning butun qismi) olinsa, u holda n ning $n>N(\varepsilon)$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha qiymatlari uchun $\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Bu esa $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$ ekanini bildiradi.

Masalan, ε=0,01 bo'lsa $N=\frac{1}{\varepsilon}=\frac{1}{0{,}01}$=100 va ketma-ketlikning 101-hadidan boshlab barcha hadlari a=1 nuqtaning 0,01- atrofi (0,99, 1,01) ga tushadi, atrofdan tashqarida ketma-ketlikning chekli, ya'ni 100 ta hadi qoladi. Shuningdek ε=0,001 bo'lganda $N=\frac{1}{0{,}001}$=1000 va n ning 1001-qiymatidan boshlab barcha hadlari uchun $\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<0{,}001$ tengsizlik bajariladi. Boshqacha aytganda bu holda $\{x_n\}=\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ ketma-ketlikning 1001-hadidan boshlab barcha hadlari a=1 nuqtaning ε=0,001 atrofi (0,999, 1,001) ga tushadi, bu atrofidan tashqarida esa ketma-ketlikning chekli, ya'ni 1000 ta hadi qoladi xolos.

1-izoh. O'zgarmas sonning limiti shu sonning o'ziga teng.

Haqiqatan, o'zgarmas c sonni barcha hadlari shu songa teng bo'lgan ketma-ketlik deb qarash mumkin, ya'ni $x_n = c$. Shuning uchun istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun

$$|x_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$$

tengsizlik doimo bajariladi.

2-izoh. Yaqinlashuvchi ketma-ketlik faqat birgina limitga ega bo'ladi.

Haqiqatan, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$ bo'lib $a \neq b$ bo'lsin. U holda ketma-ketlik limitining ta'rifiga binoan istalgancha kichik $\varepsilon > 0$ son uchun shunday N_1 va N_2 natural sonlar topilib n ning N_1 dan katta barcha qiymatlari uchun $|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlik va n ning N_2 dan katta barcha qiymatlari uchun $|x_n - b| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. N_1 va N_2 dan kattasini N deb belgilasak n ning N dan katta barcha qiymatlari uchun $|x_n - a| < \varepsilon$ va $|x_n - b| < \varepsilon$ tengsizliklar bir vaqtda bajariladi. Demak $\{x_n\}$ ketma-ketlikning x_{N+1}- hadidan boshlab barcha hadlari ham $x = a$ nuqtaning ham $x = b$ nuqtaning ε-atrofida yotadi. Bu esa $a \neq b$ bo'lganda $\frac{b-a}{2}$ dan kichik ε lar uchun bajarilmaydi. Bundan $a = b$ ekani kelib chiqadi.

3-izoh. Har qanday ketma-ketlik ham limitga ega bo'lavermaydi.

Masalan, $\{x_n\} = \{1 + (-1)^n\} = \{0,\ 2,\ 0,\ 2, \ldots, 1 + (-1)^n, \ldots\}$ ketma-ketlik hech qanday limitga ega emas, chunki uning toq raqamli hadlari 0 ga, juft raqamli hadlari 2 ga teng bo'lib, $|x_{n+1} - x_n| = 2$ va $\varepsilon < 1$ bo'lganda n ning barcha qiymatlarida $|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi a son mavjud emas.

Yaqinlashuvchi ketma-ketlikning chegaralanganligini eslatib o'tamiz.

16.3. Monoton chegaralangan ketma-ketlik limitining mavjudligi

16.1-teorema. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik monoton o'suvchi va yuqoridan chegaralangan bo'lsa, u chekli limitga ega.

16.2-teorema. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik monoton kamayuvchi va quyidan chegaralangan bo'lsa, u chekli limitga ega.

Bu teoremalarning isbotini keltirmaymiz.

16.4. Funksiyaning nuqtadagi limiti

$f(x)$ funksiya $x=a$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lsin ($x=a$ nuqtaning o'zida aniqlanmagan bo'lishi ham mumkin). $D(f)$ - funksiyaning aniqlanish sohasidan limitga ega bo'lgan ixtiyoriy $\{x_n\}=\{x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots\}$ ketma-ketlikni olamiz. $f(x)$ funksiyaning $\{x_n\}$ ketma-ketlikning nuqtalaridagi qiymatlari $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlikni tashkil etadi.

3-ta'rif. Argument x ning a dan farqli va unga yaqinlashuvchi barcha $\{x_n\}$ ketma-ketliklar uchun $y=f(x)$ funksiyaning shu ketma-ketlik nuqtalaridagi qiymatlaridan tuzilgan $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik b songa yaqinlashsa, b son $y=f(x)$ funksiyaning $x=a$ nuqtadagi (yoki $x\to a$ dagi) limiti deb ataladi va $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ yoki $x\to a$ da $f(x)\to b$ ko'rinishda yoziladi.

$f(x)$ funksiya $x=a$ nuqtada faqat birgina limitga ega bo'ladi. Bu yaqinlashuvchi $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlikning yagona limitga ega ekanligidan kelib chiqadi.

9-misol. $D(x)=\begin{cases} 1, \textit{agar } x \textit{ ratsional son bo'lsa}, \\ 0, \textit{agar } x \textit{ irratsional son bo'lsa}. \end{cases}$

Dirixle funksiyasi sonlar o'qining hech bir nuqtasida limitga ega emasligi ko'rsatilsin.

Yechish. Son o'qining istalgan x_0 nuqtasini olamiz. x_0 ga yaqinlashuvchi argumentning $\{x_n\}$ ratsional sonlar ketma-ketligiga funksiyaning $\{D(x_n)\}=\{1\}$ qiymatlari ketma-ketligi mos bo'lib uning limiti 1 ga teng bo'lishi ravshan. x_0 ga yaqinlashuvchi argumentning $\{\overline{x_n}\}$ irratsional sonlar ketma-ketligiga funksiyaning $\{D(\overline{x_n})\}=\{0\}$ qiymatlari ketma-ketligi mos kelib uning limiti 0 ga teng bo'ladi. Shunday qilib, x_0 ga yaqinlashuvchi argumentning $\{x_n\}$ va $\{\overline{x_n}\}$ ketma-ketliklariga funksiyaning shu ketma-ketliklarni nuqtalaridagi qiymatlaridan tuzilgan $\{D(x_n)\}$ va $\{D(\overline{x_n})\}$ ketma-ketliklar har xil limitlarga ega. Bu funksiyaning limitga ega bo'lish ta'rifiga xilof. Demak $D(x)$ funksiya x_0 nuqtada limitga ega emas. x_0 nuqta sonlar o'qining istalgan nuqtasi bo'lganligi uchun u sonlar o'qining hech bir nuqtasida limitga ega emas. Shunday qilib Dirixle funksiyasi aniqlanish sohasining hech bir nuqtasida limitga ega emas ekan.

4-ta'rif. Istalgan $\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta>0$ son mavjud bo'lsaki, $|x-a|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha a dan farqli x nuqtalar uchun $|f(x)-b|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, b chekli son $f(x)$ funksiyaning $x=a$ nuqtadagi (yoki $x\to a$ dagi) **limiti** deb ataladi.

Bu ta'rifga quyidagicha geometrik izoh berish mumkin. b son $f(x)$ funksiyaning $x=a$ nuqtadagi limiti bo'lganda $(a-\delta, a+\delta)$ intervaldagi barcha x lar uchun $f(x)$ funksiyaning qiymatlari $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ intervalda yotadi.

Keltirilgan uchinchi va to'rtinchi ta'riflarni teng kuchliligini ko'rsatish mumkin.

10-misol. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x^2-5x}=2$ ekanini tarifdan foydalanib isbotlang.

Yechish. $f(x)=\dfrac{x^2-25}{x^2-5x}$ funksiyani $x=5$ nuqtaning biror atrofida, masalan (4,6) intervalda qaraylik. Ixtiyoriy $\varepsilon>0$ sonni olib $|f(x)-b|<\varepsilon$ ni $x\neq 5$ deb quyidagicha o'zgartiramiz:

$$\left|\frac{x^2-25}{x^2-5x}-2\right|=\left|\frac{(x-5)(x+5)}{x(x-5)}-2\right|=\left|\frac{x+5}{x}-2\right|=\left|\frac{5-x}{x}\right|=\frac{|5-x|}{|x|}.$$

$x>4$ ekanini hisobga olsak $|x|=x>4$ bo'lib $\left|\dfrac{x^2-25}{x^2-5x}-2\right|<\dfrac{|5-x|}{4}$ kelib chiqadi. Bundan ko'rinib turibdiki, $\delta=4\varepsilon$ deb olsak, u holda $0<|x-5|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha $x\in(4;6)$ uchun

$$\left|\frac{x^2-25}{x^2-5x}-2\right|<\frac{\delta}{4}=\varepsilon$$

tengsizlik bajariladi. Bundan 2 soni $f(x)=\dfrac{x^2-25}{x^2-5x}$ funksiyaning $x=5$ nuqtadagi limiti bo'lishi kelib chiqadi.

5-ta'rif. Istalgancha katta $M>0$ son uchun shunday $\delta=\delta(M)>0$ son mavjud bo'lib, $|x-a|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha a dan farqli x lar uchun $|f(x)|>M$ tengsizlik bajarilsa, $x\to a$ da $f(x)$ funksiya cheksizlikka intiladi deb aytiladi va bu $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$ kabi yoziladi.

11-misol. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x-2}=\infty$ ekani isbotlansin.

Yechish. $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ funksiyani qaraylik. Ixtiyoriy $M>0$ sonni olsak, $|f(x)|=\left|\dfrac{1}{x-2}\right|>M$ tengsizlik $|x-2|<\dfrac{1}{M}$ bo'lganda bajarilishi ko'rinib turibdi. Agar $\delta = \frac{1}{M}$ deb olinsa, $|x-2| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha x lar uchun $\left|\frac{1}{x-2}\right| > \frac{1}{\delta} = M$ yoki $\left|\frac{1}{x-2}\right| > M$ tengsizlik bajariladi. Bu esa $x \to 2$ da $f(x) = \frac{1}{x-2}$ funksiya cheksizlikka intilishini bildiradi, ya'ni $\lim\limits_{x \to 2} \frac{1}{x-2} = \infty$.

16.5. Funksiyaning cheksizlikdagi limiti

6-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya x ning yetarlicha katta qiymatlarida aniqlangan bo'lib, istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $N>0$ son mavjud bo'lib, $|x|>N$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha x lar uchun $|f(x) - b| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, o'zgarmas b son $y = f(x)$ funksiyaning $x \to \infty$ dagi **limiti** deb ataladi va bu $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$ kabi yoziladi.

12-misol. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x+1}{x} = 1$ ekani isbotlansin.

Yechish. $f(x) = \frac{x+1}{x}$ funksiyani qaraylik. Istalgan $\varepsilon > 0$ sonni olsak $|f(x) - b| = \left|\frac{x+1}{x} - 1\right| = \left|\frac{x+1-x}{x}\right| = \frac{1}{|x|}$ bo'lib $N = \frac{1}{\varepsilon}$ desak, barcha $|x|>N$ uchun $\left|\frac{x+1}{x} - 1\right| < \frac{1}{N} = \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bundan 1 soni $f(x) = \frac{x+1}{x}$ funksiyaning $x \to \infty$ dagi limiti bo'lishi ayon bo'ladi.

7-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya x ning yetarlicha katta qiymatlarida aniqlangan bo'lib, istalgan yetarlicha katta $M>0$ son uchun shunday

$N>0$ son topilsaki, $|x|>N$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha x lar uchun $|f(x)|>M$ tengsizlik bajarilsa, $y=f(x)$ funksiya $x\to\infty$ da cheksizlikka intiladi deyiladi va $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ kabi yoziladi.

13-misol. $\lim\limits_{x\to\infty} x^2=\infty$ ekani isbotlansin.

Yechish. $f(x)=x^2$ funksiyani qaraylik. Istalgan $M>0$ sonni olib $|f(x)|>M$ tengsizlikni tuzamiz. $x^2>M$, bundan $|x|>\sqrt{M}$ kelib chiqadi. $N=\sqrt{M}$ deb olinsa, $|x|>N$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha x lar uchun $x^2>N^2=M$ tengsizlik bajariladi. Bu $\lim\limits_{x\to\infty} x^2=\infty$ ekanini bildiradi.

16.6. Limitga ega funksiyaning chegaralanganligi

16.3-teorema. Agar $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi limiti b chekli son bo'lsa, u holda $y=f(x)$ funksiya a nuqtaning biror atrofida chegaralangandir.

Isboti. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ chekli son bo'lsin. U holda limitni ta'rifiga binoan istalgan $\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta>0$ son topilib $(a-\delta,\ a+\delta)$ intervaldagi barcha x lar uchun $|f(x)-b|<\varepsilon$ yoki $|f(x)|-|b|\le|f(x)-b|<\varepsilon$, bundan $|f(x)|<|b|+\varepsilon$ bo'lishi kelib chiqadi. Agar $M=|b|+\varepsilon$ deb olinsa a nuqtaning δ-atrofidagi barcha x lar uchun $|f(x)|\le M$ tengsizlik bajariladi. Bu $f(x)$ funksiya $(a-\delta,\ a+\delta)$ intervalda chegaralanganligini ko'rsatadi.

Agar $f(x)$ funksiya biror intervalda chegaralangan va nolga teng bo'lmasa, u holda $\dfrac{1}{f(x)}$ funksiya ham shu intervalda chegaralangan bo'lishini ta'kidlab o'tamiz.

16.7. Bir tomonlama limitlar

8-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiyaning $x=a$ nuqtadagi limitining ta'rifida x o'zgaruvchi a dan kichik bo'lganicha qolsa, u holda funksiyaning shu nuqtadagi b_1 limiti uning $x=a$ nuqtadagi (yoki $x \to a$ -0 dagi) **chap tomonlama limiti** deb ataladi va $b_1 = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x)$, yoki

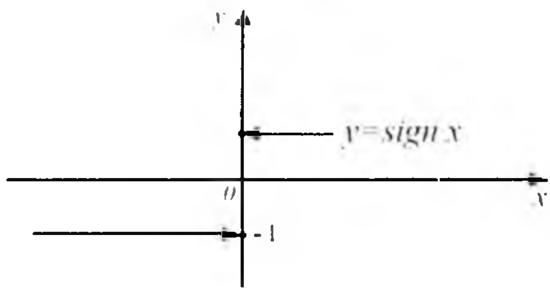
$b_1 = \lim\limits_{x \to a-0} f(x)$, yoki $b_1 = f(a-0)$ kabi yoziladi.

Agar a=0 bo'lsa, u holda $b_1 = \lim\limits_{x \to -0} f(x) = f(-0)$ kabi yoziladi.

9-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiyaning $x=a$ nuqtadagi limiti ta'rifida x o'zgaruvchi a dan katta bo'lganicha qolsa, u holda funksiyaning shu nuqtadagi b_2 limiti uning $x=a$ nuqtadagi (yoki $x \to a$ +0 dagi) **o'ng tomonlama limiti** deb ataladi va $b_2 = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x)$ yoki

$b_2 = \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$, yoki $b_2 = f(a+0)$ kabi yoziladi.

Agar a=0 bo'lsa, u holda $b_2 = \lim\limits_{x \to +0} f(x) = f(+0)$ kabi yoziladi.



93-chizma.

$f(x)$ funksiyaning $x=a$ nuqtadagi chap va o'ng tomonlama limitlari **bir tomonlama limitlar** deb ataladi. $b_1 = b_2$ bo'lsa, u holda

$f(x)$ funksiya $x=a$ nuqtada limitga ega. Aksincha, $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi bir tomonlama limitlari mavjud va ular teng, ya'ni $f(a-0)=f(a+0)$ bo'lganda va faqat shundagina bu funksiya a nuqtada limitga ega bo'ladi.

Masalan,

$$f(x)=signx=\begin{cases} 1, & agar \quad x>0 \quad bo'lsa, \\ 0, & agar \quad x=0 \quad bo'lsa, \\ -1, & agar \quad x<0 \quad bo'lsa \end{cases}$$

funksiya $x=a$ nuqtada limitga ega emas, chunki $f(-0)$=-1, $f(+0)$=1 va $f(-0) \neq f(+0)$ (93-chizma). Bu funksiya 0 dan farqli istalgan nuqtada limitga ega.

16.8. Cheksiz kichik va cheksiz katta funksiyalar

10-ta'rif. Agar $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ (yoki $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=0$) bo'lsa, $f(x)$ funksiya $x\to a$ da (yoki $x\to\infty$ da) **cheksiz kichik funksiya** deyiladi.

Cheksiz kichik funksiya $x=a$ nuqtada chekli 0 limitga ega bo'lgani uchun u shu nuqtaning qandaydir atrofida doimo chegaralangan bo'ladi.

11-ta'rif. Agar $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ (yoki $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=\infty$) bo'lsa, $f(x)$ funksiya $x\to a$ da (yoki $x\to\infty$ da) **cheksiz katta funksiya** deyiladi.

Cheksiz katta funksiya qaralayotgan $x=a$ nuqtaning atrofida chegaralanmagan bo'ladi.

Endi cheksiz kichik va cheksiz katta funksiyalar orasidagi bog'lanishni ifodalovchi teorema bilan tanishamiz.

16.4-teorema. 1. Agar $f(x)$ funksiya $x\to a$ da (yoki $x\to\infty$ da) cheksiz kichik funksiya bo'lsa, u holda $\dfrac{1}{f(x)}$ funksiya $x\to a$ da (yoki $x\to\infty$ da) cheksiz katta funksiya bo'ladi.

2. Agar $\varphi(x)$ funksiya $x \to a$ da (yoki $x \to \infty$ da) cheksiz katta funksiya bo'lsa, u holda $\frac{1}{\varphi(x)}$ funksiya $x \to a$ da (yoki $x \to \infty$ da) cheksiz kichik funksiya bo'ladi.

Isboti. 1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ bo'lsin. U holda cheksiz kichik funksiyaning ta'rifiga ko'ra istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topilib, $0 < |x - a| < \delta$ shartni qanoatlantiradigan barcha x lar uchun $|f(x)| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Bundan $\left|\frac{1}{f(x)}\right| > \frac{1}{\varepsilon}$ bo'lishi kelib chiqadi, $\frac{1}{\varepsilon} = M$ deb belgilasak $\left|\frac{1}{f(x)}\right| > M$ bo'ladi. Bu esa $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \infty$ ekanini, ya'ni $f(x)$ funksiya $x \to a$ da cheksiz katta funksiya ekanini bildiradi. $x \to \infty$ bo'lgan hol ham shunga o'xshash isbotlanadi.

2. $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \infty$ bo'lsin. U holda cheksiz katta funksiyaning ta'rifiga binoan istalgan $M>0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topilib, $0 < |x - a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha x lar uchun $|\varphi(x)| > M$ tengsizlik bajariladi. Bundan $\left|\frac{1}{\varphi(x)}\right| < \frac{1}{M}$ kelib chiqadi, $\frac{1}{M} = \varepsilon$ deb belgilasak $\left|\frac{1}{\varphi(x)}\right| < \varepsilon$ bo'ladi. Bu esa $x \to a$ da $\frac{1}{\varphi(x)} \to 0$ ni, ya'ni $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{\varphi(x)} = 0$ ekanini bildiradi. $x \to \infty$ bo'lgan hol ham shunga o'xshash isbotlanadi. Bu teoremaga binoan $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$ bo'lgani uchun $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$ ekanligi kelib chiqadi.

16.9. Cheksiz kichik funksiyalarning asosiy xossalari

1-xossa. Chekli sondagi cheksiz kichik funksiyalarning algebraik yig'indisi ham cheksiz kichik funksiya bo'ladi.

Isboti. Ikkita qo'shiluvchi bo'lgan holni qaraymiz. $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ $x \to a$ da cheksiz kichik funksiyalar bo'lganda, ularning yig'indisi $u(x)=\alpha(x)+\beta(x)$ ham cheksiz kichik funksiya bo'lishini ko'rsatamiz. $\alpha(x)$ $x \to a$ da cheksiz kichik funksiya bo'lgani uchun $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta_1 > 0$ son topilib, $0 < |x-a| < \delta_1$ shartni qanoatlantiruvchi barcha x lar uchun $|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ tengsizlik bajariladi.

$\beta(x)$ ham cheksiz kichik funksiya bo'lganligi sababli yana o'sha $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta_2 > 0$ son topilib, $0 < |x-a| < \delta_2$ shartni qanoatlantiruvchi barcha x lar uchun $|\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ tengsizlik bajariladi.

δ_1 va δ_2 sonlarning kichigini δ deb belgilasak, u holda $0 < |x-a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha x lar uchun $|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ va $|\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ tengsizliklar bajariladi.

Demak, a nuqtaning biror δ-atrofi uchun

$$|u(x)|=|\alpha(x)+\beta(x)| \le |\alpha(x)|+|\beta(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

tengsizlik to'g'ri bo'ladi. Bundan $x \to a$ da $u(x)$ cheksiz kichik funksiya bo'lishi kelib chiqadi, ya'ni $\lim_{x \to a} u(x) = 0$. Xossa isbot bo'ldi.

2-xossa. Cheksiz kichik funksiyaning chegaralangan funksiyaga ko'paytmasi ham cheksiz kichik funksiya bo'ladi.

Isboti. $x \to a$ da $\alpha(x)$ cheksiz kichik funksiya $z(x)$ chegaralangan funksiya bo'lganda, $u(x)=\alpha(x)\,z(x)$ funksiya ham cheksiz kichik funksiya bo'lishini isbotlaymiz. $x \to a$ da $z(x)$ chegaralangan funksiya bo'lgani sababli shunday $\delta_1 > 0$ son topiladiki, $0 < |x-a| < \delta_1$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha x lar uchun $|z(x)| < M$ tengsizlik bajariladi.

$x \to a$ da $\alpha(x)$ cheksiz kichik funksiya bo'lganligi sababli istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta_2 > 0$ son topilib, $0 < |x-a| < \delta_2$ shartni qanoatlantiradigan barcha x lar uchun $|\alpha(x)| < \dfrac{\varepsilon}{M}$ tengsizlik bajariladi.

δ_1 va δ_2 sonlarning kichigini δ deb belgilasak, u holda $0 < |x-a| < \delta$ shartni qanoatlantiradigan barcha x lar uchun $|z(x)| < M$ va $|\alpha(x)| < \dfrac{\varepsilon}{M}$ tengsizliklar bajariladi. Demak, a nuqtaning biror δ -atrofidagi barcha x lar uchun

$$|u(x)|=|\alpha(x)\ z(x)|=|\alpha(x)|\ |z(x)|<\frac{\varepsilon}{M}\cdot M=\varepsilon$$

tengsizlik to'g'ri bo'ladi. Bundan $x \to a$ da $u(x)$ cheksiz kichik funksiya bo'lishi kelib chiqadi, ya'ni $\lim\limits_{x\to a} u(x) = \lim\limits_{x\to a} \alpha(x)\cdot z(x) = 0$.

3-xossa. Chekli sondagi cheksiz kichik funksiyalarning ko'paytmasi ham cheksiz kichik funksiya bo'ladi.

Isboti. Ikkita ko'paytuvchi bo'lgan holni qaraymiz. $x \to a$ da $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ cheksiz kichik funksiyalar bo'lsin, Cheksiz kichik funksiya chegaralanganligi sababli $u(x)=\alpha(x)\,\beta(x)$ ko'paytmada funksiyalardan biri chegaralangan funksiya, ikkinchisi esa cheksiz kichik funksiya bo'lib ikkinchi xossaga binoan ularning ko'paytmasi ham cheksiz kichik funksiya bo'ladi, ya'ni $\lim\limits_{x\to a} u(x) = \lim\limits_{x\to a} \alpha(x)\cdot z(x) = 0$ bo'ladi.

4-xossa. Cheksiz kichik funksiyani noldan farqli limitga ega bo'lgan funksiyaga bo'linmasi ham cheksiz kichik funksiya bo'ladi.

Isboti. $x \to a$ da $\alpha(x)$ cheksiz kichik funksiya, $z(x)$ esa 0 dan farqli limitga ega bo'lgan funksiya bo'lsin. Biroq limitga ega bo'lgan $z(x)$ funksiya chegaralangan. Shu sababli $\frac{1}{z(x)}$ funksiya ham chegaralangan. $\frac{\alpha(x)}{z(x)} = \alpha(x)\frac{1}{z(x)}$ bo'linmani cheksiz kichik funksiyani chegaralangan funksiyaga ko'paytmasi sifatida qarash mumkin. U holda 2-xossaga binoan $\frac{\alpha(x)}{z(x)}$ bo'linma ham $x \to a$ da cheksiz kichik funksiya bo'ladi, ya'ni $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{z(x)} = 0$.

16.5-teorema. 1. Agar $y = f(x)$ funksiya $x \to a$ da chekli b limitga ega bo'lsa, u holda uni b son va $x \to a$ da cheksiz kichik funksiyaning yig'indisi ko'rinishida ifodalash mumkin.

2. Agar $y = f(x)$ funksiyani o'zgarmas b son bilan $x \to a$ da cheksiz kichik funksiyaning yig'indisi ko'rinishida ifodalash mumkin bo'lsa, u holda b son bu funksiyaning $x \to a$ dagi limiti bo'ladi.

Isboti. 1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ bo'lsin, u holda limitni ta'rifiga binoan istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son mavjud bo'lib, $0 < |x - a| < \delta$ shartni qanoatlantiradigan barcha x lar uchun $|f(x) - b| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Bu tengsizlik $f(x) - b$ funksiya $x \to a$ da cheksiz kichik funksiya ekanligini bildiradi. Uni $\alpha(x)$ orqali belgilasak $f(x) - b = \alpha(x)$ yoki $f(x) = b + \alpha(x)$ kelib chiqadi, bu yerda $\alpha(x)$ $x \to a$ da cheksiz kichik funksiya.

2. $f(x) = b + \alpha(x)$ bo'lsin, bu yerda b-o'zgarmas son, $\alpha(x)$ esa $x \to a$ da cheksiz kichik funksiya. U holda cheksiz kichik funksiyani ta'rifiga binoan istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$

son mavjud bo'lib, $0<|x-a|<\delta$ shartni qanoatlantiradigan barcha x lar uchun $|\alpha(x)|<\varepsilon$ yoki $|f(x)-b|<\varepsilon$ tengsizlik bajariladi, chunki $\alpha(x)=f(x)-b$. Bu $x\to a$ da $f(x)$ funksiya b limitga ega ekanligini bildiradi, ya'ni $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$.

Izoh. Keltirilgan barcha xossalar hamda 16.5-teorema $x\to\infty$ da ham o'rinli.

Mustaqil yechish uchun mashqlar va test savollari

1. a) $\{x_n\}=\left\{\frac{1}{3^n}\right\}$ b) $\{x_n\}=\{n\}$ d) $\{x_n\}=\left\{1+(-1)^n\frac{1}{2^n}\right\}$ ketma-ketliklarning monotonligi va chegaralanganligi haqida nima deyish mumkin? *Javob.* a) Monoton kamayuvchi va chegaralangan. b) Monoton o'suvchi va quyidan chegaralangan. d) Monoton emas, chegaralangan.

2. Limitning ta'rifidan foydalanib quyidagidar isbotlansin:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{2n+1}\right)=1$; d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+4}=1$.

3. $\{x_n\}=\{(-1)^n\}$ ketma-ketlikning limitga ega emasligini ko'rsating.

4. a) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$ b) $\lim\limits_{x\to2}(3x-2)=4$ ekanligini isbotlang.

5. $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ funksiya $x=0$ nuqtada limitga ega emasligini ko'rsating.

Ko‘rsatma. Argument x ning 0 ga yaqinlashadigan ikkita $\{x_n\}=\left\{\dfrac{1}{n\pi}\right\}$ va $\{x'_n\}=\left\{\dfrac{2}{(4n-3)\pi}\right\}$ ketma-ketliklarga mos funksiya-ning qiymatlari ketma-ketliklari $\{f(x_n)\}$ va $\{f(x'_n)\}$ har xil limitlarga ega ekanligini isbotlang.

6. $f(x)=(x-3)^2$ funksiya $x\to 3$ da cheksiz kichik funksiya ekanligini ko‘rsating.

7. $f(x)=\dfrac{1}{4-x}$ funksiya $x\to 4$ da cheksiz katta funksiya ekanligini ko‘rsating.

8. $f(x)=\dfrac{1}{(x+2)}$ funksiya $x\to -2$ da cheksiz katta funksiya ekanligini ko‘rsating.

9. $f(x)=3x+2$ funksiya $x\to\infty$ da cheksiz katta funksiya ekanligini ko‘rsating.

10. $f(x)=\begin{cases} 0, & agar\ \ x\le 0\ \ bo‘lsa, \\ x^2+1, & agar\ \ 0<x<1\ \ bo‘lsa, \\ 3, & agar\ \ x>1\ \ bo‘lsa. \end{cases}$

funksiyaning $x=0$ va $x=1$ nuqtalardagi bir tomonlama limitlari topilsin.

Javob: $f(-0)=0,\ \ f(+0)=1,\ \ f(1-0)=2,\ \ f(1+0)=3.$

11. 1) $\left\{\dfrac{n}{3n+1}\right\}$ 2) $\left\{\dfrac{n-1}{n+1}\right\}$ 3) $\{2n-1\}$ 4) $\{(-1)^n+1\}$ ketma-ketliklardan monoton o‘suvchi va chegaralanganlarini ko‘rsating.

A) 1;2 B) 2;3 D) 3;4 E) 1;3 F) 2;4.

12. 1) $\left\{\dfrac{4n-1}{3n-1}\right\}$ 2) $\left\{\dfrac{1}{3^n}\right\}$ 3) $\left\{\dfrac{n+1}{n}\right\}$ 4) $\left\{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}$ ketma-ketliklardan monoton kamayuvchi va chegaralanganlarini ko‘rsating.

A) 1;2;3 B) 1;2;4 D) 1;3;4 E) 2;3;4 F) barchasi.

13. $\lim \dfrac{x + \sin x}{x}$ topilsin.

A) 2 B) 3 D) 1 E) 4 F) mavjud emas.

14. $\lim \, cosx$ topilsin.

A) 2 B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ D) 0 E) $\dfrac{1}{2}$ F) mavjud emas.

15. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3}{(2 - x)^2}$ topilsin.

A) $\dfrac{3}{2}$ B) ∞ D) 0 E) $\dfrac{3}{4}$ F) mavjud emas.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Sonli ketma-ketlik nima? Qachon u chegaralangan va qachon monoton deyiladi?
2. Ketma-ketlikning limiti nima? Ta'rifni tengsizlik yordamida bering va uni geometrik ma'nosini tushuntiring.
3. Monoton chegaralangan ketma-ketlik limitining mavjudligi haqidagi teoremalarni ayting.
4. Funksiyaning nuqtadagi limiti nima?
5. Funksiyaning cheksizlikdagi limiti nima?
6. Limitga ega bo'lgan funksiyaning chegaralanganligi haqidagi teoremani ayting.
7. Bir tomonlama limitlar nima? Funksiyaning nuqtadagi limiti va bir tomonlama limitlari orasida qanday bog'lanish bor?
8. Cheksiz kichik va cheksiz katta funksiyalarni ta'riflang? $x \to a$ va $x \to \infty$ da cheksiz kichik va cheksiz katta funksiyalarga misollar keltiring.
9. Cheksiz kichik va cheksiz katta funksiyalar orasida qanday bog'lanish bor?
10. Cheksiz katta funksiya chegaralangan bo'lishi mumkinmi?
11. Cheksiz kichik funksiya chegaralanmagan bo'lishi mumkinmi?
12. Cheksiz kichik funksiyalarning asosiy xossalarini ayting.
13. Aniqlanish sohasining hech bir nuqtasida limitga ega bo'lmagan funksiyaga misol keltiring.

17. LIMITLAR HAQIDA ASOSIY TEOREMALAR. AJOYIB LIMITLAR. CHEKSIZ KICHIK FUNKSIYALARNI TAQQOSLASH

17.1. Limitlar haqida asosiy teoremalar

Funksiyalarning limitlarini topishga yordam beradigan limitga o'tishning eng sodda qoidalari bilan tanishamiz.

Bunda isbot faqatgina $x \to a$ hol uchun o'tkaziladi ($x \to \infty$ da shunga o'xshash isbotlanadi). Ba'zan qisqalik uchun, $x \to a$ ni ham, $x \to \infty$ ni ham yozmaymiz.

17.1-teorema. Chekli sondagi limitga ega funksiyalar algebraik yig'indisining limiti qo'shiluvchi funksiyalar limitlarining algebraik yig'indisiga teng, ya'ni

$$\lim(u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)) = \lim u_1(x) + \lim u_2(x) + ... + \lim u_n(x)$$

Isboti. Mulohazani ikkita qo'shiluvchi bo'lgan hol uchun yuritamiz. $\lim u_1(x) = a$, $\lim u_2(x) = b$ bo'lsin. U holda $\lim(u_1(x)+u_2(x)) = a+b$ tenglik to'g'ri bo'lishini ko'rsatamiz. Cheksiz kichik funksiyalarning xossalaridagi 16.5-teoremaning birinchi qismiga asosan $u_1 = a+\alpha$, $u_2 = b+\beta$ deb yozishimiz mumkin, bu yerdagi α, β- cheksiz kichik funksiyalar.

Demak, $u_1+u_2 = (a+\alpha)+(b+\beta) = (a+b)+(\alpha+\beta)$. Bu tenglikda $a+b$-o'zgarmas son, $\alpha+\beta$-cheksiz kichik funksiya. Yana o'sha 16.5-teoremaning ikkinchi qismini qo'llasak $\lim(u_1+u_2) = a+b = \lim u_1 + \lim u_2$ ekanligi kelib chiqadi.

1-misol.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = \lim_{x\to 2}x + \lim_{x\to 2}2 = 2+2 = 4$$

2-misol.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-5x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x^2}-\frac{5x}{x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{5}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}1-\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x}=1-0=1$$

17.2-teorema. Chekli sondagi limitga ega funksiyalar ko‘paytmasining limiti shu funksiyalar limitlarining ko‘paytmasiga teng, ya’ni

$$\lim(u_1(x)\cdot u_2(x)\cdot\ldots\cdot u_n(x))=\lim u_1(x)\cdot\lim u_2(x)\cdot\ldots\cdot\lim u_n(x)$$

Isboti. Ko‘paytmada ikkita funksiya bo‘lgan holni qaraymiz. $\lim u_1=a$, $\lim u_2=b$ bo‘lsin. U holda yuqorida eslatilgan 16.5-teoremaga binoan $u_1=a+\alpha$, $u_2=b+\beta$ bo‘ladi, α, β-cheksiz kichik funksiyalar. Demak, $u_1\cdot u_2=(a+\alpha)\cdot(b+\beta)=ab+(\alpha b+a\beta+\alpha\beta)$. Bu tenglikdagi ab-o‘zgarmas son, $(\alpha b+a\beta+\alpha\beta)$- cheksiz kichik funksiya. Yana o‘sha 16.5-teoremani ikkinchi qismini qo‘llasak $\lim u_1\cdot u_2=ab=\lim u_1\cdot\lim u_2$ ekanligi kelib chiqadi.

3-misol.

$$\lim_{x\to2}(x+3)(x-4)=\lim_{x\to2}(x+3)\lim_{x\to2}(x-4)=$$

$$[\lim_{x\to2}x+\lim_{x\to2}3]\cdot[\lim_{x\to2}x-\lim_{x\to2}4]=(2+3)(2-4)=5\cdot(-2)=-10.$$

4-misol.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(2-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x^2}\right)=(1-0)(2-0)=2.$$

Natija. O‘zgarmas C ko‘paytuvchini limit belgisidan chiqarish mumkin, ya’ni $\lim C\cdot u(x)=C\lim u(x)$, chunki $\lim C=C$.

5-misol. $\lim\limits_{x\to-1}7x^2=7\lim\limits_{x\to-1}x^2=7\cdot(-1)^2=7$.

17.3- teorema. Ikkita limitga ega funksiya bo'linmasining limiti maxrajning limiti noldan farqli bo'lganda, shu funksiyalar limitlarining bo'linmasiga teng, ya'ni agar $\lim v \neq 0$ bo'lsa, $\lim \frac{u}{v} = \frac{\lim u}{\lim v}$

bo'ladi.

Isboti. $\lim u(x)=a$, $\lim v(x)=b\neq 0$ bo'lsin. U holda $u = a + \alpha$, $v = b + \beta$ bo'lishini hisobga olsak

$$\frac{u}{v} = \frac{a+\alpha}{b+\beta} = \frac{a}{b} + \left(\frac{a+\alpha}{b+\beta} - \frac{a}{b}\right) = \frac{a}{b} + \frac{ab+\alpha b - ab - a\beta}{b(b+\beta)} = \frac{a}{b} + \frac{\alpha b - a\beta}{b(b+\beta)}$$

tenglikka ega bo'lamiz, bunda $\frac{a}{b}$ -o'zgarmas son, $\frac{\alpha b - a\beta}{b(b+\beta)}$ - cheksiz kichik funksiya, chunki $\alpha b - a\beta$ cheksiz kichik funksiya va $b(b+\beta)\neq 0$.

So'nggi tenglikka 16.5-teoremani 2-qismini qo'llasak $\lim \frac{u}{v} = \frac{a}{b} = \frac{\lim u}{\lim v}$ tenglik hosil bo'ladi.

6-misol. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{2x+3}{3x+1}$ ni toping.

Yechish. $\lim\limits_{x\to 2}(3x+1) = 3\cdot 2+1 = 7 \neq 0$. Shuning uchun:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x+3}{3x+1} = \frac{\lim\limits_{x\to 2}(2x+3)}{\lim\limits_{x\to 2}(3x+1)} = \frac{2\cdot 2+3}{3\cdot 2+1} = \frac{7}{7} = 1.$$

7-misol. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x+1}{x-3}$ ni toping.

Yechish. $\lim\limits_{x\to 3}(x-3) = 3-3 = 0$ bo'lgani uchun 17.3-teoremani qo'llab bo'lmaydi. Suratning limiti $\lim\limits_{x\to 3}(x+1) = 3+1 = 4 \neq 0$

bo'lgani uchun berilgan ifodaning teskarisining limitini topamiz:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 3}(x-3)}{\lim\limits_{x\to 3}(x+1)}=\frac{3-3}{3+1}=\frac{0}{4}=0.$$

Bundan $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x+1}{x-3}=\infty$ kelib chiqadi, chunki cheksiz kichik funksiyaga teskari funksiya cheksiz katta funksiya bo'ladi.

17.4-teorema. Agar a nuqtaning biror atrofiga tegishli barcha x lar uchun $y=f(x)\geq 0$ va $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ (b-chekli son) bo'lsa, u holda $b\geq 0$ bo'ladi.

Isboti. Teskarisini faraz qilamiz, ya'ni $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ bo'lib b<0 bo'lsin. U holda $|f(x)-b|\geq|b|>0$ bo'lishi ravshan. Oxirgi tengsizlik $f(x)-b$ ayirmaning nolga intilmasligini, ya'ni b son $f(x)$ funksiyaning $x\to a$ dagi limiti emasligini ko'rsatadi. Bu teoremaning shartiga zid, binobarin $b<0$ degan faraz shu ziddiyatga olib keldi. Demak, $f(x)\geq 0$ bo'lsa $\lim\limits_{x\to a} f(x)\geq 0$ bo'lar ekan.

Shunga o'xshash limitga ega $f(x)\leq 0$ funksiya uchun $\lim\limits_{x\to a} f(x)\leq 0$ bo'lishini isbotlash mumkin.

Boshqacha aytganda nomanfiy funksiya limitga ega bo'lsa uning limiti manfiy son bo'laolmas ekan va nomusbat funksiya limitga ega bo'lsa uning limiti musbat son bo'laolmas ekan.

17.5- teorema. Agar $x\to a$ da limitga ega $f_1(x)$ va $f_2(x)$ funksiyaning mos qiymatlari uchun $f_1(x)\geq f_2(x)$ tengsizlik bajarilsa, u holda $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)\geq\lim\limits_{x\to a} f_2(x)$ bo'ladi.

Isboti. Shartga ko'ra $f_1(x)\geq f_2(x)$, bundan $f_1(x)-f_2(x)\geq 0$. Oldingi teoremaga binoan $\lim\limits_{x\to a}[f_1(x)-f_2(x)]\geq 0$ yoki $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)-\lim\limits_{x\to a} f_2(x)\geq 0$. Bundan $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)\geq\lim\limits_{x\to a} f_2(x)$ tengsizlik kelib chiqadi. Teorema isbot bo'ldi. Bu teoremaga ko'ra tengsizlikda limitga utish mumkin ekan.

17.6-teorema (oraliq funksiyaning limiti haqida). Agar $u(x)$, $v(x)$ va $z(x)$ funksiyalarning mos qiymatlari uchun $u(x)\leq v(x)\leq z(x)$ tengsizliklar bajarilsa va $\lim\limits_{x\to a} u(x)=\lim\limits_{x\to a} z(x)=b$ bo'lsa, u holda $\lim\limits_{x\to a} v(x)=b$ bo'ladi.

Isboti. Shartga ko'ra $\lim\limits_{x\to a} u(x)=b$ va $\lim\limits_{x\to a} z(x)=b$, demak istalgan $\varepsilon>0$ son uchun a nuqtaning δ_1-atrofi mavjudki, undagi barcha x lar uchun $|u(x)-b|<\varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Shunga o'xshash shu $\varepsilon>0$ son uchun a ning δ_2-atrofi mavjud bo'lib undagi barcha x lar uchun $|z(x)-b|<\varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Agar δ orqali δ_1 va δ_2 sonlarning kichigini belgilasak a nuqtaning δ-atrofidagi barcha x lar uchun $|u(x)-b|<\varepsilon$ va $|z(x)-b|<\varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Bular

$$-\varepsilon<u(x)-b<\varepsilon \quad \text{va} \quad -\varepsilon<z(x)-b<\varepsilon \qquad (17.1)$$

tengsizliklarga teng kuchli.

Endi teorema shartidagi $u(x)\leq v(x)\leq z(x)$ tengsizliklarni unga teng kuchli $u(x)-b\leq v(x)-b\leq z(x)-b$ tengsizliklar bilan almashtiramiz (barchasidan bir xil b son ayirildi).

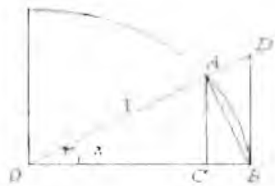
Bunga (17.1) tengsizliklarni qo'llasak $-\varepsilon<u(x)-b<\leq v(x)-b\leq z(x)-b<\varepsilon$

yoki bundan $-\varepsilon<v(x)-b<\varepsilon$ tengsizlikka ega bo'lamiz. Shunday qilib a nuqtaning δ- atrofidagi barcha x lar uchun $-\varepsilon<v(x)-b<\varepsilon$ tengsizlik o'rinli ekan.

Bu $\lim\limits_{x\to a} v(x)=b$ ekanini bildiradi.

Bu teoremani hazillashib «Ikki militsioner haqidagi teorema» deb atashadi. Nima uchun shunday deb atalishini o'ylab ko'rishni o'quvchiga havola etamiz.

8-misol. $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$ isbotlansin.



94-chizma.

Yechish. Radiusi 1 ga teng aylanani qaraymiz. 94-chizmadan: $x>0$ bo'lsa $\frac{AC}{OA}=\sin x$; $AC=\sin x$, $AB=x$ (markaziy burchak o'zi tiralgan yoy bilan o'lchanadi), $AC<AB$ yoki $\sin x<x$ ekani ayon bo'ladi. $x<0$ bo'lganda $|\sin x|<|x|$ bo'lishi ravshan.

Shunday qilib $x>0$ uchun $0<\sin x<x$ va $x<0$ uchun $0<|\sin x|<|x|$ tengsizliklarga ega bo'ldik. $\lim\limits_{x\to 0} 0=\lim\limits_{x\to 0} x=0$ ekanligini hisobga olsak 17.6-teoremaga binoan $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$ ekanligi kelib chiqadi.

9-misol. $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{x}{2}=0$ isbotlansin.

Yechish. $0<\left|\sin\frac{x}{2}\right|<|\sin x|$ ekani ravshan.

$\lim\limits_{x\to 0} 0=\lim\limits_{x\to 0}|\sin x|=0$ bo'lgani uchun 17.6-teoremaga binoan

$\lim\limits_{x\to 0}\left|\sin\frac{x}{2}\right|=0$ yoki $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{x}{2}=0$ kelib chiqadi.

10-misol. $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$ ekanligi isbotlansin.

Yechish. $2\sin^2\frac{x}{2}=1-\cos x$ yoki $\cos x=1-2\sin^2\frac{x}{2}$ ekanligini e'tiborga olsak

$$\lim_{x\to 0}\cos x=\lim_{x\to 0}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)=1-2\lim_{x\to 0}\sin^2\frac{x}{2}=1-2\cdot 0^2=1$$

hosil bo'ladi.

17.2. Birinchi ajoyib limit

$\frac{\sin x}{x}$ funksiya faqat $x=0$ nuqtada aniqlanmagan, chunki bu nuqtada kasrning surati ham, mahraji ham 0 ga aylanib uni o'zi $\frac{0}{0}$ ko'rinishga ega bo'ladi. Shu funksiyaning $x \to 0$ dagi limitini topamiz. Bu limit **birinchi ajoyib limit** deb ataladi.

17.7-teorema. $\frac{\sin x}{x}$ funksiya $x \to 0$ da 1 ga teng limitga ega.

Isboti. Radiusi 1 ga teng aylana olib AOB markaziy burchakni x bilan belgilaymiz va u $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ intervalda yotadi deb faraz qilamiz (94-chizma).

Chizmadan ko'rinib turibdiki,

$$\Delta AOB \text{ yuzi} < AOB \text{ sektor yuzi} < \Delta DOB \text{ yuzi} \qquad (17.2).$$

Biroq, ΔAOB yuzi $=\frac{1}{2}OA \cdot OB \sin x = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \sin x = \frac{1}{2}\sin x$ (uchburchakning yuzi ikki tomoni va ular orasidagi burchak sinusi ko'paytmasining yarmiga teng).

AOB sektor yuzi $=\frac{1}{2}OB^2 \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot x = \frac{1}{2}x$,

ΔDOB yuzi $=\frac{1}{2}OB \cdot BD = \frac{1}{2}OB \cdot \frac{BD}{1} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \text{tg}x = \frac{1}{2}\text{tg}x.$.

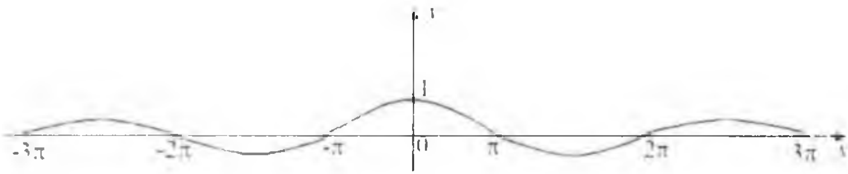
Shu sababli (17.2) tengsizliklar $\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\text{tg}x$ ko'rinishni yoki $\frac{1}{2}$ ga qisqartirilgandan so'ng $\sin x < x < \text{tg}x$ ko'rinishni oladi. Buning barcha hadlarini $\sin x>0$ ga bo'lamiz $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$. U holda $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ yoki $1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$ tengsizliklarga ega bo'lamiz. Bu tengsizliklar $x>0$ deb faraz qilinib chiqarildi.

$\frac{\sin(-x)}{(-x)}=\frac{\sin x}{x}$, $\cos(-x)=\cos x$ ekanligini e'tiborga olib, bu tengsizliklar $x<0$ bo'lganda ham to'g'ri degan xulosaga kelamiz. Ammo $\lim_{x\to 0} 1=1$ va $\lim_{x\to 0}\cos x=1$.

Demak, $\frac{\sin x}{x}$ funksiya shunday ikki funksiya orasidaki, ularning ikkalasi ham bir xil 1 ga teng limitga intiladi. Shuning uchun oraliq funksiyaning limiti haqidagi 17.6-teoremaga binoan oraliqdagi $\frac{\sin x}{x}$ funksiya ham ana shu 1 limitga intiladi, ya'ni

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

$y=\frac{\sin x}{x}$ funksiyaning grafigi 95-chizmada tasvirlangan.



95-chizma.

11-misol.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot\frac{1}{1}=1.$$

12-misol.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{x}=\lim_{x\to 0} m\cdot\frac{\sin mx}{mx}=m\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{mx}=m\cdot 1=m$$

(m-o'zgarmas son).

13-misol. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin\alpha x}{x}}{\dfrac{\sin\beta x}{x}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\beta x}{x}}=\dfrac{\alpha}{\beta}$.

17.3. Ikkinchi ajoyib limit

Ushbu $\{x_n\}=\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ sonli ketma-ketlikni qaraymiz, bunda n-natural son.

17.8-teorema. Umumiy hadi $x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ bo'lgan ketma-ketlik $n\to\infty$ da 2 bilan 3 orasida yotadigan limitga ega.

Isboti. Nyuton binomi formulasi

$$(a+b)^n=a^n+\frac{n}{1}a^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3+\ldots+$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}b^n$$

dan foydalanib ketma-ketlikni x_n va x_{n+1} hadlarini quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\ldots+$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}\left(\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+$$

$$+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right),$$

$$x_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=1+1+\frac{1}{1\cdot2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{1\cdot2\cdot3}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\ldots+\frac{1}{1\cdot2\cdot3\ldots n}\cdot$$

$$\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)+\frac{1}{1\cdot2\cdot3\ldots(n+1)}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$

x_n bilan x_{n+1} ni taqqoslasak, x_{n+1} had x_n haddan bitta musbat qo'shiluvchiga ortiqligini ko'ramiz.

$1-\frac{k}{n+1}>1-\frac{k}{n}(k=1,2,3...,n-1)$ bo'lgani uchun uchinchi haddan boshlab x_{n+1} dagi har bir qo'shiluvchi x_n dagi unga mos qo'shiluvchidan katta. Demak, istalgan n uchun $x_{n+1}>x_n$ va umumiy hadi $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ bo'lgan ketma-ketlik monoton o'suvchi.

Endi berilgan ketma-ketlikni chegaralanganligini ko'rsatamiz. Istalgan k=1,2,3,... uchun $1-\frac{k}{n}<1$ ekanini hisobga olib (17.4) formuladan

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+1+\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot2\cdot3\ldots n}$$

tengsizlikni hosil qilamiz.

So'ngra $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}<\frac{1}{2^2}$, $\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}<\frac{1}{2^3}$, ..., $\frac{1}{1\cdot2\cdot3\ldots n}<\frac{1}{2^{n-1}}$ ekanligini ta'kidlab tengsizlikni

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots\right)$$

ko'rinishda yozamiz. Qavsga olingan yig'indi birinchi hadi $a=1$ va maxraji $q=\frac{1}{2}$ bo'lgan geometrik progressiyaning hadlari yig'indisini ifodalaganligi uchun cheksiz kamayuvchi geometrik progressiyaning hadlari yig'indisini topish formulasi $S=\frac{a}{1-q}$ ga asosan $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1+2 = 3$ tengsizlikka ega bo'lamiz.

Ketma-ketlik monoton o'suvchi bo'lganligi sababli uning birinchi hadi $x_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2$ uning qolgan barcha hadlaridan kichik bo'ladi.

Demak, barcha n uchun $2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$ o'rinli, ya'ni umumiy hadi $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ bo'lgan ketma-ketlik monoton o'suvchi va chegaralangan. Shu sababli u monoton chegaralangan ketma-ketlikning limiti mavjudligi haqidagi 16.1-teoremaga ko'ra chekli limitga ega. Bu limitni e harfi bilan belgilaymiz, ya'ni

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

e – irratsional son. Keyinroq uni istalgan darajada aniqlik bilan hisoblash usuli ko'rsatiladi. $e = 2{,}7182818284...$

17.9-teorema. $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ funksiya $x \to \infty$ da e songa teng limitga ega:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \qquad (17.5).$$

Isboti. 1) $x \to \infty$ deylik. U holda $n \le x < n+1$; ; $\frac{1}{n} \ge \frac{1}{x} > \frac{1}{n+1}$,

$$1+\frac{1}{n} \ge 1+\frac{1}{x} > 1+\frac{1}{n+1}, \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \ge \left(1+\frac{1}{x}\right)^x > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n$$

bo'ladi. Agar $x \to +\infty$, u holda $n \to \infty$ va

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \ge \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \ge \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n$$

yoki

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right) > \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \ge \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1},$$

$e\cdot 1 > \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \ge e\cdot 1$ bundan $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$ kelib chiqadi.

2) $x\to-\infty$ deylik. Yangi $t=-(x+1)$ yoki $x=-(t+1)$ o'zgaruvchini kiritamiz. $t\to+\infty$ da $x\to-\infty$ va

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t+1}\right)^{-(t+1)} = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t+1}\right)^{-(t+1)} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1} = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+1} = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\left(1+\frac{1}{t}\right) = e\cdot 1 = e..$$

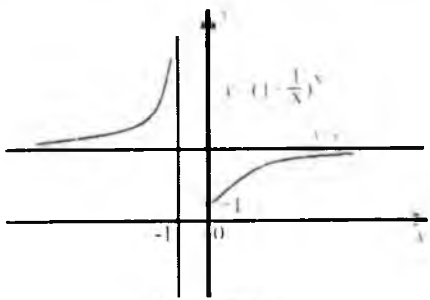
Shunday qilib, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$ ekanini isbotladik. Bu limit **ikkinchi ajoyib limit** deb yuritiladi.

Agar bu tenglikda $\frac{1}{x}=\alpha$ deb faraz qilinsa, u holda $x\to\infty$ da $\alpha\to 0$ $(\alpha\neq 0)$ va

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu ikkinchi ajoyib limitning yana bir ko'rinishi.

$y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ funksiyaning grafigi 96-chizmada tasvirlangan.



96-chizma.

Chizmadan ko'inib turibdiki bu funksiya (-1,0) intervalda aniqlanmagan, ya'ni $1+\frac{1}{x}<0$, chunki $1+\frac{1}{x}=\frac{x+1}{x}$ va $x+1>0$, $x<0$.

Izoh. Asosi e bo'lgan $y=e^x$ ko'rsatkichli funksiya eksponental funksiya deb ataladi. Bu funksiya mexanikada(tebranishlar nazariyasida), elektrotexnikada va radiotexnikada, radioximiyada va hokazolarda turli hodisalarni o'rganishda katta rol o'ynaydi.

Izoh. Asosi $e=2{,}7182818284...$ sondan iborat logarifmlar natural logarifmlar yoki Neper logarifmlari deb ataladi va $\log_e x$ o'rniga $\ln x$ deb yoziladi. Bir asosdan ikkinchi asosga o'tish formulasi $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$ dan foydalanib o'nli va natural logarifmlar orasida bog'lanish o'rnatish mumkin:

$$\lg x=\frac{\ln x}{\ln 10}=\frac{1}{\ln 10}\ln x=0{,}434294\ln x$$

yoki

$$\ln x=\ln 10\,\lg x=2{,}302585\,\lg x..$$

14-misol.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+8}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{8}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{8}=e(1+0)^8=e.$$

15-misol. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x$ topilsin.

Yechish. $x=3t$ desak, $x\to\infty$ da $t\to\infty$ va

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{3t}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=e\cdot e\cdot e=e^3 \text{ bo'ladi.}$$

16-misol.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x+1}\right)^{x+2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1+3}{x+1}\right)^{x+1+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x+1}\right)^{(x+1)+1}=$$

$$=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{3}{y}\right)^{y+1}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{3}{y}\right)^{y}\cdot\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{3}{y}\right)^{1}=e^3\cdot 1=e^3.$$

Ikkinchi ajoyib limit 1^{∞} ko'rinishdagi aniqmaslik ekanini ta'kidlab o'tamiz.

17.4. Cheksiz kichik fynksiyalarni taqqoslash

$\alpha=\alpha(x)$ va $\beta=\beta(x)$ funksiya $x\to a$ (yoki $x\to\infty$) da cheksiz kichik funksiyalar bo'lsin. Bu funksiyalarning yig'indisi, ayirmasi va ko'paytmasi ham cheksiz kichik funksiya bo'lishini ko'rdik. Ularning nisbati, ya'ni bo'linmasi haqida gapirilmagan edi. Ikkita cheksiz kichik funksiyalarni ularning nisbatlarini limitiga qarab taqqoslanadi.

1-ta'rif. Agar $\lim\frac{\alpha}{\beta}=0$ (yoki $\lim\frac{\beta}{\alpha}=\infty$) bo'lsa, α funksiya β funksiyaga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik funksiya deyiladi.

Masalan $x\to 0$ da $\alpha=\sin^2 x$ funksiya $\beta=x$ funksiyaga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik funksiya, chunki $\lim\limits_{x\to 0}\sin^2 x=0$,

$\lim\limits_{x\to 0}x=0$ va $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim\limits_{x\to 0}\sin x=1\cdot 0=0.$

2-ta'rif. Agar $\lim\frac{\alpha}{\beta}=A\neq 0$ bo'lsa, α va β funksiyalar bir xil tartibli **cheksiz kichik funksiyalar** deyiladi.

Masalan $x\to 0$ da $\alpha=\sin 3x$ va $\beta=x$ funksiyalar bir xil tartibli cheksiz kichik funksiyalardir, chunki $\lim\limits_{x\to 0}\sin 3x=0$, $\lim\limits_{x\to 0}x=0$

va $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=3\neq 0.$

3-ta'rif. Agar $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = 1$ bo'lsa, α va β cheksiz kichik funksiyalar ekvivalent deb ataladi va $\alpha \sim \beta$ yoki $\alpha \approx \beta$ kabi yoziladi.

Masalan, $x \to 0$ da $\sin x \sim x$, chunki $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ va $x \to 0$ da $tgx \sim x$, chunki $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg\, x}{x} = 1$.

Amaliyotda qo'yidagi teoremadan ko'p foydalaniladi.

17.10-teorema. Agar $\alpha \sim \alpha_1$, $\beta \sim \beta_1$ bo'lsa, $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = \lim \dfrac{\alpha_1}{\beta_1}$ tenglik to'g'ridir.

Haqiqatan

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha}{\alpha_1} \frac{\alpha_1}{\beta_1} \frac{\beta_1}{\beta} = \lim \frac{\alpha}{\alpha_1} \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} \lim \frac{\beta_1}{\beta} = 1 \cdot \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} \cdot 1 = \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1}.$$

17-misol. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5x}{x} = 5.$

18-misol. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg\, 5x}{\sin 7x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5x}{7x} = \dfrac{5}{7}.$

Mustaqil yechish uchun mashqlar va test savollari

Ko'rsatilgan limitlar hisoblansin.

1. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 2x + 5}{x + 1}$. *Javob:* 4.
2. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (3\sin x - 6\cos x + 4ctgx)$. *Javob:* 3.
3. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$. *Javob:* 2.
4. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x - 3}{\sqrt{x + 3}}$. *Javob:* 0.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\frac{1}{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{5}{x^3}\right)$. *Javob:* 3.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-6}{x}$. *Javob:* 1.

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3+2x^2+x-3}{2x^3+x-2}$. *Javob:* 2.

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\ldots+n}{n^2}$. *Javob:* $\frac{1}{2}$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n^2}$. *Javob:* 1.

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+x-3}{2x+3}$. *Javob:* ∞.

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+3}{2x^2+5}$. *Javob:* 0.

12. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}$. *Javob*: 12.

13. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-7x+12}{x^2-5x+6}$. *Javob:* -1.

14. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1}$. *Javob*: n.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$. *Javob*: $\frac{1}{3}$.

16. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right]$. *Javob:* -1.

17. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$. *Javob:* $\frac{2}{3}$.

18. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$. *Javob:* 0.

19. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{tg2x}$. *Javob:* $\frac{3}{2}$.

20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 10x}{x}$. *Javob:* 10.

21. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{x}$. *Javob:* $\dfrac{2}{\pi}$.

22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{x}$. *Javob:* $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

23. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)tg\dfrac{\pi x}{2}$. *Javob:* $\dfrac{2}{\pi}$.

24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$. *Javob:* 1.

25. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x}$. *Javob:* e^{2}.

26. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x}$. *Javob:* $\dfrac{1}{e}$.

27. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{x}$. *Javob:* $\dfrac{1}{e}$.

28. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+9}$. *Javob:* e.

29. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{n(n+1)}-\sqrt{n}\,n\right]$. *Javob:* 1.

30. $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ topilsin.

A) 0 B) 1 D) $\dfrac{1}{2}$ E) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ F) mavjud emas.

31. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+10x-39}{x^3-27}$ topilsin.

A) $\dfrac{16}{27}$ B) $\dfrac{15}{27}$ D) $\dfrac{14}{27}$ E) 2 F) 9.

32. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{x}$ topilsin.

A) $\sqrt{a}$ B) $2\sqrt{a}$ D) $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$ E) $\dfrac{2}{\sqrt{a}}$ F) $3\sqrt{a}$.

33. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3+3x-5}{2-4x^3}$ topilsin.

A) $-\dfrac{1}{4}$ B) $\dfrac{15}{27}$ D) $\dfrac{14}{27}$ E) 2 F) $\dfrac{1}{4}$.

34. $\lim\limits_{n \to \infty} a\left(1+\dfrac{1}{m}\right)^{\frac{mpt}{100}}$ topilsin.

A) $ae^{\frac{pt}{100}}$ B) ae^{100pt} D) ae^{10pt} E) $ae^{\frac{pt}{10}}$ F) ae^{1000pt}.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Yig‘indining limiti haqidagi teoremani ayting.
2. Ko‘paytmaning limiti haqidagi teoremani ayting.
3. Bo‘linmaning limiti haqidagi teoremani ayting.
4. Tengsizlikda limitga o‘tish mumkinligi haqidagi teoremani ayting.
5. Oraliq funksiyaning limiti haqidagi teoremani ayting.
6. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ formulani isbotlang.
7. Chegaralangan monoton ketma-ketlik limitining mavjudligi haqidagi teoremani ayting.
8. $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$ formulani isbotlang.
9. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$ formulani isbotlang.
10. e qanday son?

11. Eksponental funksiya nima?

12. Natural logarifm nima? Natural va o'nli logarfmlar sistemasi orasida qanday bog'lanish bor?

13. Cheksiz kichik funksiyalarni taqqoslash nimadan iborat?

14. Qaysi holda bir cheksiz kichik funksiya ikkinchisiga nisbatan yuqori tartibli deyiladi?

15. Qaysi holda ikkita cheksiz kichik funksiyalar bir xil tartibli deyiladi?

16. Qaysi holda ikkita cheksiz kichik funksiyalar ekvivalent deyiladi?

17. Ekvivalent cheksiz kichik funksiyalarga misollar keltiring.

18. Limitlarni hisoblashda ekvivalent cheksiz kichik funksiyalardan qanday foydalaniladi?

18. FUNKSIYANING UZLUKSIZLIGI

18.1. Argument va funksiyaning orttirmalari

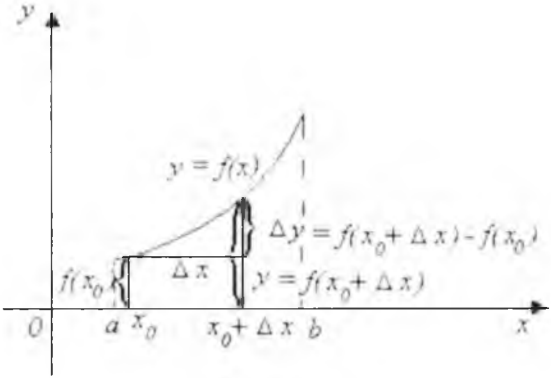
$y = f(x)$ funksiya $(a;\, b)$ intervalda aniqlangan bo'lsin. Bu intervaldan ixtiyoriy x_0 nuqtani olamiz, unga funksiyaning $y_0 = f(x_0)$ qiymati mos keladi (97-chizma).

$(a;\, b)$ intervaldan olingan argumentning boshqa x qiymatiga funksiyaning $y = f(x)$ qiymati mos keladi. $x - x_0$ ayirma x argumentning x_0 nuqtadagi orttirmasi deyiladi va Δx orqali belgilanadi.

$f(x) - f(x_0)$ ayirma $f(x)$ funksiyaning argument orttirmasi Δx ga mos orttirmasi deyiladi va Δy orqali belgilanadi. Shunday qilib, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x) - f(x_0)$. Bundan $x = x_0 + \Delta x$, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

97-chizmada $(a;\, b)$ intervalning hech bir nuqtasida grafigi uzilmaydigan funksiya tasvirlangan. Undan ko'rinib turibdiki argumentning kichik Δx orttirmasiga funksiyaning ham kichik Δy orttirmasi mos keladi. Boshqacha aytganda argument x ning bir-biriga yaqin qiymatlariga funksiyaning ham bir-biriga yaqin qiymatlari mos keladi. Bu qoida har qanday funksiya uchun ham to'g'ri kelavermaydi. Masalan, $y = \dfrac{1}{x}$ funksiyani qaraylik. x ning bir-biriga ancha yaqin $x_1 = -10^{-6}$ va $x_2 = 10^{-6}$ qiymatlariga funksiyani bir-biridan katta farq qiladigan $y_1 = -10^6$ va $y_2 = 10^6$ qiymatlari mos keladi. Boshqacha aytganda argumentning juda kichik $\Delta x = x_2 - x_1 = 2 \cdot 10^{-6}$ orttirmasiga funksiyaning ancha katta

$\Delta y = y_2 - y_1 = 2 \cdot 10^6$ orttirmasi mos keladi. Agar biz $y = \frac{1}{x}$ funksiyani grafigini (98-chizma) kuzatsak grafikning uzilishga ega (u ikki bo'lakdan iborat) ekanligini va uzilish x ning $x=0$ qiymatida sodir bo'lishini ko'ramiz.



97-chizma.

Shuning uchun ham argumentning $x_0=0$ nuqtaga yaqin nuqtalardagi kichik orttirmasiga funksiyaning kichik orttirmasi mos kelmaydi.

Bu kabi hollar barcha funksiyalar sinfini ikkiga, ya'ni grafigi uzilmaydigan va grafigi bir nechta qismlardan iborat funksiyalar sinfiga bo'lib o'rganishni taqozo etadi.

18.2. Funksiyaning nuqtada va intervalda uzluksizligi

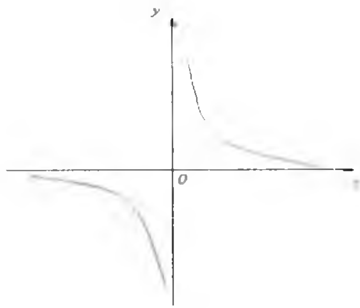
$y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada va uning biror atrofida aniqlangan bo'lsin.

1-ta'rif.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0), \qquad (18.1)$$

ya'ni funksiyaning x_0 nuqtadagi limiti uning shu nuqtadagi qiymatiga teng bo'lsa, $y = f(x)$ funksiya x_0 **nuqtada uzluksiz** deb ataladi.

Bu ta'rifga teng kuchli yana bir ta'rifni keltiramiz.



98-chizma.

2-ta'rif. Istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ son mavjud bo'lsaki, $|x - x_0| < \delta$ shartni qanoatlantiradigan istalgan x uchun $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, $y = f(x)$ funksiya x_0 **nuqtada uzluksiz** deb ataladi.

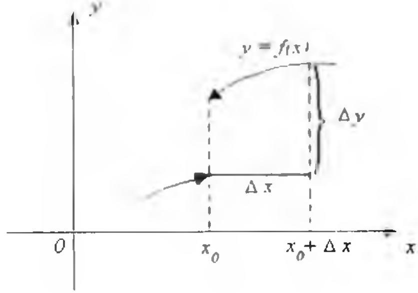
3-ta'rif.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 \tag{18.2}$$

bo'lsa, $y = f(x)$ funksiya x_0 **nuqtada uzluksiz** deb ataladi.

97-chizmada tasvirlangan $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz, chunki (18.2) shart bajariladi.

99-chizmada tasvirlangan $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz emas, chunki $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y \neq 0$



99-chizma.

1-misol. $y = x^2$ funksiyani ixtiyoriy x_0 nuqtada uzluksizligini ko'rsating.

Yechish. Bu funksiya butun sonlar o'qida aniqlangan. Δy ni tuzamiz: $f(x) = x^2$; $f(x_0) = x_0^2$; $f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^2$;

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = x_0^2 +$$
$$+ 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2$$

Demak, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x_0\Delta x + \Delta x^2) = 0$ va $y = x^2$ funksiyani ixtiyoriy x_0 nuqtada uzluksiz.

Shunday qilib, $y = x^2$ funksiya aniqlanish sohasining har bir nuqtasida uzluksiz ekan.

2-misol. $y = \sin x$ funksiyani ixtiyoriy x_0 nuqtada uzluksizligini ko'rsating.

Yechish. $f(x) = \sin x$

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 =$$

$$= 2\sin\frac{x_0 + \Delta x - x_0}{2}\cos\frac{x_0 + \Delta x + x_0}{2} = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right),$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)=2\lim_{\Delta x\to 0}\sin\frac{\Delta x}{2}\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)=0$$

chunki $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sin\frac{\Delta x}{2}=0$.

Har bir elementar funksiya uchun shu tariqa mulohaza yuritib quyidagi teoremaning to‘g‘riligiga iqror bo‘lamiz.

18.1-teorema. Asosiy elementar funksiyalar o‘zlari aniqlangan barcha nuqtalarda uzluksizdir.

Bir tomonlama limit tushunchasidan foydalanib uzluksizlikni quyidagicha ta‘riflash mumkin.

4-ta‘rif. x_0 nuqtada aniqlangan funksiyaning shu nuqtadagi chap va o‘ng tomonlama limitlari mavjud va o‘zaro teng hamda ular $f(x_0)$ ga teng bo‘lsa, $y=f(x)$ funksiya x_0 **nuqtada uzluksiz** deb ataladi.

Shunday qilib $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo‘lishi uchun u shu nuqtada aniqlangan va $f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$ shart bajarilishi lozim ekan.

Yana 1-ta‘rifga qaytib uni $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(\lim\limits_{x\to x_0}x)$ ko‘rinishda yozamiz. Bundan ko‘rinib turibdiki x_0 nuqtada funksiya uzluksiz bo‘lsa funksiyaning shu nuqtadagi limitini topishda limit ishorasini funksiya belgidan ichkariga kiritish mumkin ekan.

3-misol.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ell n(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ell n(1+x)=\lim_{x\to 0}\ell n(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ell n\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\ell ne=1$$

Bu yerda ℓnx funksiyani $x=e$ nuqtada uzluksizligidan foydalanib limitni funksiya ishorasi ℓn ning ichkarisiga kiritdik.

5-ta‘rif. $(a;b)$ intervalning barcha nuqtalarida uzluksiz $f(x)$ funksiya shu intervalda uzluksiz deb ataladi.

Agar funksiya x_0 nuqtada aniqlangan bo‘lib $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0)$ bo‘lsa $y=f(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtada **o‘ngdan uzluksiz** deyiladi.

Agar funksiya $x = x_0$ nuqtada aniqlangan bo'lib $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$ bo'lsa $y = f(x)$ funksiya $x = x_0$ nuqtada **chapdan uzluksiz** deyiladi.

6-ta'rif. $y = f(x)$ funksiya $(a; b)$ intervalda uzluksiz bo'lib $x = a$ nuqtada o'ngdan va $x = b$ nuqtada chapdan uzluksiz bo'lsa, u $[a; b]$ kesmada uzluksiz deb ataladi.

5- va 6- ta'riflarga hamda 18.1 teoremaga asoslanib $y = a^x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$ funksiyalar butun sonlar o'qida, $y = \log_a x$ funksiya $(0; +\infty)$ intervalda, $y = \sqrt{x}$ funksiya $[0; +\infty)$ intervalda, $y = \frac{1}{x}$ funksiya $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ intervalda uzluksiz ekanligini ta'kidlab o'tamiz.

Shuningdek ko'phad butun sonlar o'qida, kasr-ratsional funksiya x ning kasr maxrajini nolga aylantirmaydigan barcha qiymatlarida uzluksiz ekanini eslatib o'tamiz.

18.2- teorema. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funktsiyalar x_0 nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda ularning algebraik yig'indisi, ko'paytmasi va $g(x_0) \neq 0$ bo'lganda $\frac{f(x)}{g(x)}$ bo'linmasi ham shu x_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Bu teoremaning isboti funksiya limitining xossalariga asoslangan.

Endi murakkab funksiyaning uzluksizligiga oid teorema bilan tanishamiz.

Nuqtada uzluksiz funksiya xossalarini ifodalovchi teorema bilan tanishamiz.

18.3-teorema. Agar $u = \varphi(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz, $y = f(u)$ funksiya $u_0 = \varphi(x_0)$ nuqtada uzluksiz funksiya bo'lsa, u holda $y = f[\varphi(x)]$ murakkab funksiya ham x_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Isboti. $\lim\limits_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = f[\varphi(x_0)]$ ekanligini ko'rsatamiz. $u = \varphi(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada uzluksizligidan $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0) = u_0$ ga ega bo'lamiz, ya'ni $x \to x_0$ да $u \to u_0$. $f(u)$ funksiyaning shu nuqtada uzluksizligini hisobga olsak

$$\lim_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = \lim_{u \to u_0} f(u) = f(u_0) = f[\varphi(x_0)].$$

Shunday qilib ikkita uzluksiz $f(u)$ va $\varphi(x)$ funksiyalardan tashkil topgan $y = f[\varphi(x)]$ funksiya ham uzluksiz bo'lar ekan. Masalan, $y = \ell n(4 - x^2)$ murakkab funksiya x ning $4 - x^2 > 0$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida, ya'ni $(-2; 2)$ intervalda uzluksiz.

Asosiy elementlar va murakkab funksiyani uzluksizligi haqidagi teoremalarga tayanib elementar funksiyaning uzluksizligi haqidagi qo'yidagi teoremaga ega bo'lamiz.

18.4-teorema. Barcha elementar funksiyalar o'zlarining aniqlanish sohalarida uzluksizdirlar.

4-misol. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} 4^{\sin x}$ topilsin.

Yechish. $4^{\sin x}$ murakkab funksiya $x = \dfrac{\pi}{2}$ nuqtada uzluksiz bo'lgani uchun $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} 4^{\sin x} = 4^{\sin\frac{\pi}{2}} = 4^1 = 4$ bo'ladi.

5-misol. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x}$ topilsin.

Yechish. Bu yerda $\dfrac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmaslikka egamiz. $a^x - 1 = t$ almashtirish olamiz. U holda $a^x = 1 + t$, $x = \ell og_a(1 + t)$ bo'lib $x \to 0$ da $t \to 0$ va

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ell og_a(1+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{1}{t}\ell og_a(1+t)}=$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\ell og_a(1+t)^{\frac{1}{t}}}=\frac{1}{\ell og_a e}=\ell og_e a=\ell na$$

bo'ladi. Xususiy holda $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\ell ne=1$ kelib chiqadi, ya'ni $x\to 0$ da $e^x-1\sim x$

6-misol. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^p-1}{x}$ topilsin.

Yechish. Bu yerda $\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmaslikka egamiz. $(1+x)^p-1=y$ almashtirish olamiz. U holda $(1+x)^p=1+y$, yoki buni e asosga ko'ra logarifmlasak $p\ell n(1+x)=\ell n(1+y)$ bo'ladi. $x\to 0$ da $y\to 0$. Demak,

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^p-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{y}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{p\ell n(1+x)}{x}\cdot\frac{y}{\ell n(1+y)}=$$

$$=p\lim_{x\to 0}\frac{\ell n(1+x)}{x}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ell n(1+y)}=p\cdot 1\cdot 1=p.$$

Shunday qilib, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^p-1}{x}=p$ formulaga ega bo'ldik.

Uzluksizlik tushunchasidan foydalanilsa limitni hisoblash ancha osonlashadi, ya'ni uzluksiz funksiyaning biror nuqtadagi limitini hisoblash uning shu nuqtadagi qiymatini hisoblashga keltiriladi.

Endi asosiy elementar funksiyalarning aniqlanish sohalarining chetlaridagi limitlari hamda ajoyib limitlar jadvalini keltiramiz.

1) $x=a$ nuqtada uzluksiz $y=f(x)$ funksiya uchun $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ bo'ladi.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$.

3) $a>1$ bo'lganda $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=0$ bo'ladi.

4) $0<a<1$ bo'lganda $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=+\infty$ bo'ladi.

5) $\alpha>0$ bo'lganda $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha=+\infty$, $\alpha<0$ bo'lganda $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha=0$ bo'ladi;

6) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ell nx=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+0} \ell nx=-\infty$.

6') $a>1$ bo'lganda $\lim\limits_{x\to+\infty} \ell og_a x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+0} \ell og_a x=-\infty$.

7) $0<a<1$ bo'lganda $\lim\limits_{x\to+\infty} \ell og_a x=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+0} \ell og_a x=+\infty$.

8) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0} tgx=+\infty$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0} tgx=-\infty$.

9) $\lim\limits_{x\to+\infty} arctgx=\dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} arctgx=-\dfrac{\pi}{2}$.

10) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

11) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$.

12) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ell na$.

12') $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$.

13) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^p-1}{x}=p$.

14) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}$.

14') $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$.

18.3. Uzilish nuqtalari va ularning turlari

Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'lsa, u shu nuqtada aniqlangan, x_0 nuqtada o'zaro teng $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$ bir tomonlama limitlarga ega hamda bu bir tomonlama limitlar funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymati $f(x_0)$ ga teng bo'lishini ko'rdik. Ana shu shartlardan birortasi bajarilmasa, x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning **uzilish nuqtasi,** funksiyaning o'zi x_0 nuqta **uzlukli funksiya** deb ataladi.

Shunday qilib:

1) funksiya x_0 nuqtada aniqlanmagan;

2) funksiya nuqtada aniqlangan, lekin $f(x_0-0)$ va $f(x_0+0)$ bir tomonlama limitlardan kamida bittasi mavjud emas;

3) funksiya x_0 nuqtada aniqlangan, bir tomonlama limitlar ham mavjud, ammo ular o'zaro teng emas;

4) funksiya x_0 nuqtada aniqlangan, bir tomonlama limitlar ham mavjud va o'zaro teng , lekin ular funksiyaning bu nuqtadagi qiymatiga teng emas: $f(x_0-0)=f(x_0+0)\neq f(x_0)$ shartlardan kamida bittasi bajarilganda x_0 nuqta funksiyaning uzilish nuqtasi deyilar ekan.

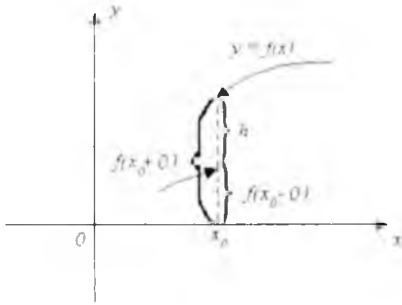
Masalan, $y=\frac{\sin x}{x}$ funksiya $x=0$ nuqtada uzilishga ega (uzlukli), chunki bu nuqtada funksiya aniqlanmagan. Shuningdek $f(x)=signx$ funksiya ham $x=0$ nuqtada uzilishga ega(uzlukli), chunki bu nuqtada funksiya limitga ega emas, ya'ni $f(-0)\neq f(+0)$.

Uzilish nuqtalari uch turga bo'linadi.

7-ta'rif. x_0 nuqtada $y = f(x)$ funksiya aniqlanmagan biroq shu nuqtadagi bir tomonlama limitlar mavjud va o'zaro teng, ya'ni $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$ bo'lsa, x_0 nuqta funksiyaning **yo'qotiladigan uzilish** nuqtasi deb ataladi.

Masalan, $x_0 = 0$ nuqta $y = \frac{\sin x}{x}$ funksiyaning yo'qotiladigan uzilish nuqtasi, chunki bu funksiya $x = 0$ nuqtada aniqlanmagan, biroq $\lim\limits_{x \to -0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to +0} \frac{\sin x}{x} = 1$, ya'ni $f(-0) = f(+0)$ bir tomonlama limitlar mavjud va o'zaro teng. Agar biz funksiyaning $x = 0$ nuqtadagi qiymati sifatida uning bir tomonlama limitlarining qiymati 1 ni olsak, $f(0) = f(-0) = f(+0) = 1$ bo'lib funksiya $x = 0$ nuqtada uzluksiz funksiyaga aylanadi va $x = 0$ uzilish nuqta yo'qoladi.

8-ta'rif. Agar $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada aniqlangan yoki aniqlanmagan, lekin bir tomonlama limitlar mavjud va o'zaro teng bo'lmasa, ya'ni $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$ bo'lsa, x_0 nuqta funksiyaning **birinchi tur uzilish** nuqtasi deb ataladi.



100-chizma

$h = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ son funksiyaning x_0 nuqtadagi **sakrashi** deb ataladi (100-chizma).

Masalan,

$$f(x) = signx = \begin{cases} 1, \ agar \quad x > 0, \quad bo\text{'}lsa, \\ 0, \ agar \quad x = 0, \quad bo\text{'}lsa, \\ -1, \ agar \quad x < 0, \quad bo\text{'}lsa \end{cases}$$

funksiya uchun $x = 0$ nuqta birinchi tur uzilish nuqtasi bo'lib bu nuqtadagi funksiyaning sakrashi 2 ga teng.

Haqiqatan, $f(x) = signx$ funksiya $x = 0$ nuqtada aniqlangan va $f(0) = 0$, $f(+0) = \lim\limits_{x \to +0} signx = \lim\limits_{x \to +0} 1 = 1$, $f(-0) = \lim\limits_{x \to -0} signx = \lim\limits_{x \to -0}(-1) = -1$,

ya'ni $x = 0$ nuqtada bir tomonlama limitlar mavjud va o'zaro teng emas. $h = f(+0) - f(-0) = 1-(-1)=2$.

9-ta'rif. Agar x_0 nuqtada bir tomonlama limitlardan kamida biri mavjud bo'lmasa yoki cheksizlikka teng bo'lsa, x_0 nuqta funksiyaning **ikkinchi tur uzilish** nuqtasi deb ataladi.

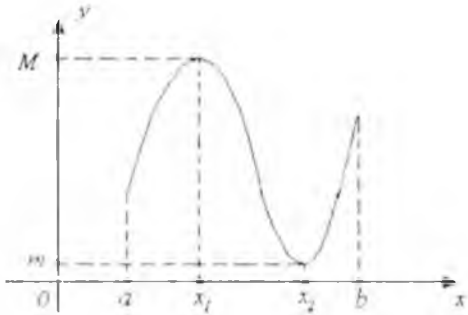
Masalan, $x = 0$ nuqta $f(x) = \frac{1}{x}$ funksiya uchun **ikkinchi tur uzilish** nuqtasi bo'ladi, chunki $x = 0$ nuqtada bir tomonlama limitlarning har ikkalasi cheksizlikka teng, ya'ni

$$\lim_{x \to -0} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{va} \quad \lim_{x \to +0} \frac{1}{x} = +\infty .$$

18.4. Kesmada uzluksiz funksiyalarning xossalari

Kesmada uzluksiz funksiyalarning ayrim xossalarini isbotsiz keltiramiz.

18.5-teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, u holda u bu kesmada o'zining eng kichik va eng katta qiymatiga erishadi, ya'ni $[a; b]$ kesmada shunday x_1, x_2 nuqtalar mavjud bo'lib $[a; b]$ kesmadagi barcha x lar uchun $f(x_1) \geq f(x)$ va $f(x_2) \leq f(x)$ tengsizliklar to'g'ri bo'ladi (101-chizma).



101-chizma.

$m = f(x_2)$ va $M = f(x_1)$ $y = f(x)$ funksiyaning $[a; b]$ kesmadagi eng kichik va eng katta qiymatlaridir.

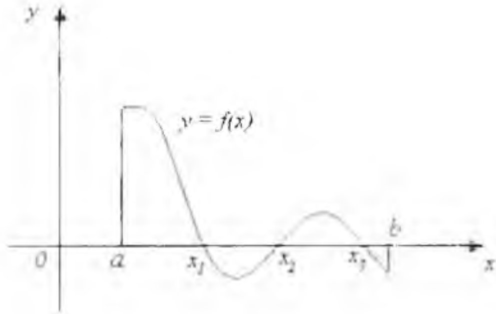
Izoh. Teoremaning shartidagi kesmani interval yoki yarim intervalga almashtirish mumkin emas.

Masalan, $(0; 1)$ intervalda uzluksiz $y = x$ funksiya bu intervalda o'zining eng kichik va eng katta qiymatlarini hech biriga erisha olmaydi.

Natija. $[a; b]$ kesmada uzluksiz $f(x)$ funksiya shu kesmada chegaralangandir.

Haqiqatan, $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini mos ravishda M va m orqali belgilasak $[a; b]$ kesmadagi barcha x lar uchun $m \le f(x) \le M$ tengsizliklar o'rinli bo'ladi. Agar C orqali $|m|$ va $|M|$ dan kattasini belgilasak $|f(x)| \le C$ tengsizlik bajariladi. Bu tengsizlik $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada chegaralanganligini ko'rsatadi.

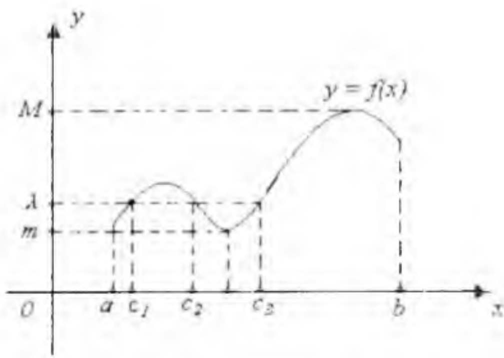
18.6-teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada uzluksiz va kesmaning oxirida turli ishorali qiymatlarni qabul qilsa, u holda $(a; b)$ intervalda kamida bitta nuqta mavjud bo'lib, bu nuqtada funksiyaning qiymati nolga teng bo'ladi.



102-chizma.

102-chizmada $f(a)>0$, $f(b)<0$ va x_1, x_2, x_3 nuqtalarda funksiyaning grafigi $0x$ o'qni kesib o'tadi, demak, $f(x_1)=0$, $f(x_2)=0$, $f(x_3)=0$.

18.7-teorema. $f(x)$ funksiya $[a;\, b]$ kesmada uzluksiz bo'lib m va M uning shu kesmadagi eng kichik va eng katta qiymati bo'lsin, u holda funksiya shu kesmada m bilan M orasidagi barcha oraliq qiymatlarini qabul qiladi, ya'ni $m<\lambda<M$ shartni qanoatlantiradigan istalgan λ son uchun $[a;\, b]$ kesmada kamida bitta $x=c$ nuqta mavjud bo'lib, $f(c)=\lambda$ tenglik to'g'ri bo'ladi (103-chizma).



103-chizma.

Izoh. Funksiya $[a;b]$ kesmaning birorta nuqtasida uzilishga ega bo'lganda 18.6- va 18.7- teoremalar bajarilmasligi mumkin. Masalan, $f(x)=\dfrac{1}{x}$ funksiya uchun

$f(-1)=-1<0$, $f(1)=1>0$ bajarilsada u $[-1;1]$ kesmaning hech bir nuqtasida nolga aylanmaydi. Buning sababi $f(x)=\dfrac{1}{x}$ funksiya $[-1;1]$ kesmadagi $x=0$ nuqtada uzilishga ega (98-chizma).

Mustaqil yechish uchun mashqlar va test savollari

Quyidagi funksiyalarning uzilish nuqtalari va ularning turlari aniqlansin.

1. $y=\dfrac{2}{x-3}$. *Javob:* $x=3$ ikkinchi tur uzilish nuqta.

2. $y=\dfrac{x+1}{x(x-1)(x^2-9)}$. *Javob:* $x=0; 1; -3; +3$ ikkinchi tur uzilish nuqta.

3. $y=\begin{cases} x^2, & agar\ x\geq 0\ bo`lsa, \\ -1, & agar\ x<0\ bo`lsa. \end{cases}$ *Javob:* $x=0$ birinchi tur uzilish nuqta.

4. $y=\dfrac{\sin 3x}{x}$. *Javob:* $x=0$ yo'qotiladigan uzilish nuqta.

5. $y=\sin\dfrac{1}{x}$. *Javob:* $x=0$ ikkinchi tur uzilish nuqta.

6. $y=\dfrac{x^3-27}{x-3}$. *Javob:* $x=3$ yo'qotiladigan uzilish nuqta.

7. $f(x)=\dfrac{2}{3+5^{\frac{1}{x-2}}}$. *Javob*: $x=2$ birinchi tur uzilish nuqta.

8. $f(x)=\dfrac{\sin x}{x^2+1}$ funksiyaning $(-\infty,+\infty)$ da uzluksizligini ko'rsating.

9. $f(x)=tg\dfrac{1}{x}$ funksiyaning uzilish nuqtalari topilsin.

Javob: $0,\ \pm\dfrac{2}{\pi},\ \pm\dfrac{2}{3\pi},\ \ldots\ \pm\dfrac{2}{(2n+1)\pi},\ldots$

10. $f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{x}$ funksiya $x=0$ nuqta uzluksiz bo'lishi uchun $f(0)$ni qanday tanlash kerak? *Javob*: $f(0)=0$.

11. $y=\sin^2\dfrac{1}{x}$ funksiya uchun $x=0$ qanaqa nuqta?

A) yo'qotiladigan uzilish nuqta
B) birinchi tur uzilish nuqta
D) ikkinchi tur uzilish nuqta
E) uzluksizlik nuqta.

12. $y=\dfrac{tgx}{x}$ funksiya uchun $x=0$ qanaqa nuqta?

A)yo'qotiladigan uzilish nuqta
B) birinchi tur uzilish nuqta
D) ikkinchi tur uzilish nuqta
E) uzluksizlik nuqta.

13. $f(x)=\begin{cases}2x+5, & agar\ \ x<0\ \ bo'lsa,\\ 4-x, & agar\ \ x>0\ \ bo'lsa\end{cases}$ funksiya uchun $x=0$ qanaqa nuqta?

A)yo'qotiladigan uzilish nuqta
B)birinchi tur uzilish nuqta
D) ikkinchi tur uzilish nuqta
E) uzluksizlik nuqta.

14. $f(x)=x^3-6x^2+9x-4$ funksiya [3; 5] kesmaning qaysi nuqtasida 0 ga aylanadi?

A) 3,5 B) 4 D) 4,5 E) 4,6 F) 4,7.

15. $f(x)=\dfrac{x+2}{(x^2-1)(x^2-3)}$ funksiyaning barcha uzilish nuqtalari ko'rsatılsin.

A) 1 B) -1 D) -1; 1 E) $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$ F) ± 1; $\pm\sqrt{3}$.

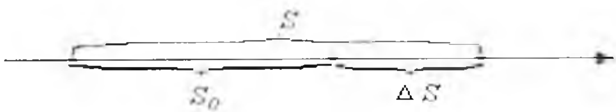
O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Argument orttirmasi nima?
2. Funksiya orttirmasi nima?
3. Funksiyaning nuqtada uzluksizligini ta'riflang.
4. Funksiyani intervalda va kesmada uzluksizligini ta'riflang.
5. Bir tomonlama uzluksizlikni ta'riflang.
6. Asosiy elementar funksiyalarning uzluksizligi haqidagi teoremani ayting.
7. Murakkab funksiyaning uzluksizligi haqidagi teoremani ayting.
8. Uzluksiz funksiyalar ustida amallar haqidagi teoremani ayting.
9. Elementar funksiyalar uzluksizligi haqidagi teoremani ayting.
10. Kesmada uzluksiz funksiyaning asosiy xossalarini ayting.
11. Funksiyaning uzilish nuqtasi nima?
12. Yo'qotiladigan uzilish nuqtasi nima?
13. Birinchi va ikkinchi tur uzilish nuqtalari nima?

19. FUNKSIYANING HOSILASI, UNING GEOMETRIK VA MEXANIK MA'NOLARI

19.1. Hosila tushunchasiga olib keluvchi masalalar

1. Tezlik haqidagi masala. Faraz qilaylik moddiy nuqta to'g'ri chiziq bo'ylab $s = f(t)$ qonun bo'yicha bir tomonlama harakatlanayotgan bo'lsin, bunda t-vaqt, s t vaqt ichida nuqtaning bosib o'tgan yo'li. Vaqtning t_0 paytini qaraymiz. Bu paytda nuqta $s_0 = f(t_0)$ yo'lni o'tadi. Moddiy nuqtaning t_0 paytdagi oniy tezligini topish masalasini qo'yamiz. Buning uchun vaqtning boshqa $t_0 + \Delta t$ paytini qaraymiz. Bunga $s = f(t_0 + \Delta t)$ o'tilgan yo'l mos keladi. U holda $\Delta t = t - t_0$ vaqt ichida moddiy nuqta $\Delta s = s - s_0 = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$ masofani o'tadi (104-chizma).



104-chizma.

$v_{o'rt} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ nisbat nuqta harakatining Δt vaqt oralig'idagi **o'rtacha tezligini** beradi.

O'rtacha tezlikning $\Delta t \to 0$ dagi limiti t_0 paytdagi **oniy tezlik** deb ataladi va u v_0 orqali belgilanadi.

Demak, $v_0 = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ yoki $v_0 = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$.

Shunday qilib moddiy nuqtaning t_0 paytdagi oniy tezligini topish

$$v_0 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} \qquad (19.1)$$

limitni hisoblashga keltirildi.

1-misol. Moddiy nuqta to'g'ri chiziq bo'ylab $s = t^3$ qonuniyat asosida harakatlanayotgan bo'lsin. Bunda s- o'tilgan yo'l santimetrda o'lchanadi, t-vaqt sekundda o'lchanadi. $t = 2$сек dan $t_1 = (2 + \Delta t)$sek gacha vaqt oralig'ida nuqtaning o'rtacha tezligi topilsin; $\Delta t = 1$; 0,01; 0,001 deb olinsin. $t=2$ paytdagi oniy tezlik topilsin.

Yechish.

$$\Delta s = (t + \Delta t)^3 - (t)^3 = t^3 + 3t^2\Delta t + 3t\Delta t^2 + \Delta t^3 - t^3 = 3t^2\Delta t + 3t\Delta t^2 + \Delta t^3.$$

O'rtacha tezlik $v_{o'rt} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = 3t^2 + 3t\Delta t + \Delta t^2$ bo'adi. Agar $\Delta t = 1$sek bo'lsa, $t = 2$ sek ekanini hisobga olib $v_{o'rt} = 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 \cdot 1 + 1^2 = 19\, sm/sek$ kelib chiqadi.

t=2sek, Δt =0,01 sek bo'lganda $v_{o'rt} = 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 \cdot 0{,}01 + (0{,}01)^2 = 12{,}0601 \dfrac{\text{SM}}{\text{sek}}$ va t=2sek, Δt = 0,001sek bo'lganda $v_{o'rt} = 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 \cdot 0{,}001 + \quad + (0{,}001)^2 = 12{,}006001\, sm/sek$ bo'ladi. Endi t=2sek paytdagi oniy tezlikni topamiz.

$$v_0 = \lim_{\Delta t \to 0} v_{o'rt} = \lim_{\Delta t \to 0} (3t^2 + 3t\Delta t + \Delta t^2) = 3t^2.$$

t=2sek bo'lganda $v_0 = 3 \cdot 2^2 = 12\, sm/sek$ hosil bo'ladi.

Olingan natijalar shuni ko'rsatadiki $t \to t$=2sek ga ($\Delta t \to 0$ ga) qanchalik yaqin bo'lsa o'rtacha tezlik oniy tezlikdan shunchalik kam farq qilar ekan.

2-misol. $s=\frac{gt^2}{2}$ qonuniyat asosida tekis tezlanuvchan harakatlanayotgan (erkin tushayotgan) moddiy nuqtaning harakatning ixtiyoriy t paytidagi va $t=3$ sekund paytidagi oniy tezliklari topilsin.

Yechish.

$$\Delta s=s(t+\Delta t)-s(t)=\frac{g}{2}(t+\Delta t)^2-\frac{gt^2}{2}=$$

$$=\frac{g}{2}\left(t^2+2t\Delta t+\Delta t^2\right)-\frac{gt^2}{2}=gt\Delta t+\frac{g\Delta t^2}{2}.$$

$\frac{\Delta s}{\Delta t}$ nisbatni tuzamiz: $\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{gt\Delta t+\frac{g\Delta t^2}{2}}{\Delta t}=gt+\frac{g}{2}\Delta t$; ta'rifga binoan

$$v_0=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(gt+\frac{g}{2}\Delta t\right)=gt.$$

Demak, t vaqtning istalgan paytida oniy tezlik $v_0=gt$ ga teng ekan.

$t=3$ sek bo‘lsa $v_0(3)=g\cdot 3=9{,}8\,m/sek^2\cdot 3sek=29{,}4\,m/sek$, ya'ni harakat boshlangandan so‘ng uchinchi sekundda moddiy nuqtaning tezligi $29{,}4\,m/sek$ bo‘lar ekan.

2. Sterjenning zichligi haqidagi masala. Uzunligi l ga teng ingichka to‘g‘ri chiziqli bir jinsli bo‘lmagan sterjenni qaraymiz. Shu sterjenning istalgan nuqtasida zichlikni aniqlaymiz. Sterjen $0x$ o‘q bo‘ylab joylashgan va uning uchlaridan biri koordinatalar boshida yotadi deb faraz qilamiz. U holda sterjenning har bir nuqtasiga ma'lum x koordinata mos keladi.

Koordinatalari 0 va x bo‘lgan sterjen nuqtalari orasidagi qismining massasini m orqali belgilaymiz. U holda m massa x ning funksiyasi bo‘lishi ravshan: $m=f(x)$. Sterjenning aniq qo‘zg‘olmas x_0 nuqtasini hamda o‘zgaruvchi $x_0+\Delta x$ nuqtasini qaraymiz. Sterjenni qaralayotgan qismining uzunligi Δx ga, massasi

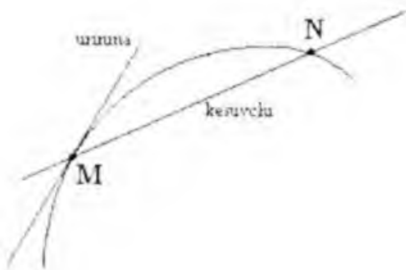
$\Delta m = f(x_0 + \Delta x) - f(x)$ ga teng bo'ladi. $\dfrac{\Delta m}{\Delta x}$ nisbat sterjenning x_0 va $x_0 + \Delta x$ oraliqdagi **o'rtacha zichligi** deb ataladi.

O'rtacha zichlikning sterjenning uzunligi Δx nolga intilgandagi limiti sterjenning x_0 nuqtadagi **zichligi** deb ataladi va u δ orqali belgilanadi. Demak,

$$\delta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (19.2)$$

3. Egri chiziqqa urinmaning burchak koeffitsienti. Oldin egri chiziqqa urinma tushunchasini kiritamiz.

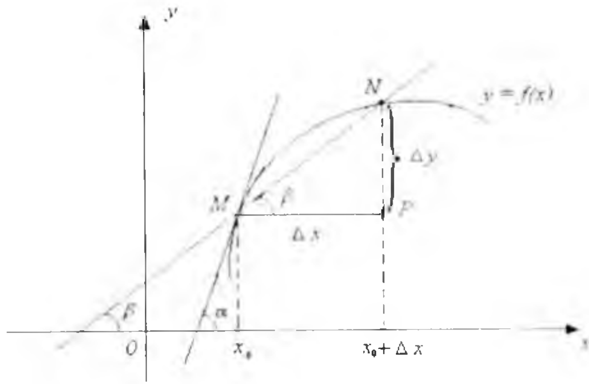
1-ta'rif. Uzluksiz egri chiziqning berilgan M va ixtiyoriy N nuqtasi orqali o'tadigan kesuvchi to'g'ri chiziqning N nuqta egri chiziq bo'ylab M nuqtaga intilgandagi limit holati shu egri chiziqqa M nuqtasida o'tkazilgan **urinma** deb ataladi (105-chizma).



105-chizma.

Uzluksiz egri chiziq $y = f(x)$ tenglama yordamida berilgan bo'lib uning $M(x_0, y_0)$ nuqtasida egri chiziqqa o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsientini topish talab etilsin.

Egri chiziqda $N(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ nuqtani olib MN kesuvchini o'tkazamiz. Bu kesuvchini Ox o'qning musbat yo'nalishi bilan tashkil etgan burchakni β orqali belgilaymiz. Urinmaning Ox o'q bilan tashkil



106-chizma.

etgan burchakni α desak 106-chizmadagi ΔMNP dan

$$tg\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

ekani ko'rinib turibdi. N nuqta egri chiziq bo'ylab M nuqtaga intilganda $\Delta x \to 0$ va $\beta \to \alpha$. Demak, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} tg\beta = tg\alpha$ va

$$tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Shunday qilib, urinmaning burchak koeffitsientini k orqali belgilasak uni topish

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (19.3)$$

ko'rinishdagi limitni topishga keltirildi.

Biz qaragan masalalarning barchasida ularning fizik mohiyatidan qat'iy nazar bir xil ya'ni funksiya orttirmasining argument orttirmasiga nisbatini argument orttirmasi nolga intilgandagi limitini topishga keltirildi. Shuning uchun bu kabi nisbatlarni o'rganish va ularning limitlarini hisoblashni bilish maqsadga muvofiq.

19.2. Hosilaning ta'rifi, uning geometrik va mexanik ma'nolari

$y=f(x)$ funksiya $(a;b)$ intervalda aniqlangan bo'lsin. $(a;b)$ intervalga tegishli x_0 va $x_0+\Delta x$ nuqtalarni olamiz.

Funksiyaning x_0 nuqtadagi orttirmasi $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ ni hisoblab $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatni tuzamiz.

2-ta'rif. Funksiya orttirmasi Δy ning argument orttirmasi Δx ga nisbatining Δx nolga intilgandagi limiti (agar u mavjud bo'lsa) $y=f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi **hosilasi** deb ataladi.

Funksiyaning hosilasi y', $f'(x_0)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df}{dx}$ belgilardan biri bilan belgilanadi.

Shunday qilib, $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

Hosilani topish jarayoni funksiyani **differensiallash** deb ataladi.

Endi yuqorida qaralgan misollarga qaytamiz. Hosila tushunchasidan foydalanib (19.1) tenglikni

$$v_0=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=s'(t)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Demak, to'g'ri chiziqli bir tomonlama harakatda oniy tezlik yo'ldan vaqt bo'yicha olingan hosilaga teng ekan. Bu hosilaning **mexanik ma'nosi**dir.

(19.2) tenglikni hosila tushunchasidan foydalanib

$$\delta=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=m'(x)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Demak to'g'ri chiziqli sterjenning x nuqtadagi zichligi m massadan x uzunlik bo'yicha hosila ekan.

Shunga o'xshash (19.3) tenglikni hosila tushunchasidan foydalanib

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

ko'rinishda yozishimiz mumkin. Demak, $f'(x_0)$ hosila geometrik nuqtai nazardan $y = f(x)$ egri chiziqqa $M(x_0, f(x_0))$ nuqtasida o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsientiga teng ekan. Bu hosilaning **geometrik** ma'nosi.

3-misol. $y = x^2$ funksiyaning istalgan nuqtadagi hosilasi topilsin.

Yechish. $f(x_0) = x_0^2$, $f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^2$,

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0\Delta x +$

$+ \Delta x^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2$, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2x_0\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$.

Hosilaning ta'rifiga binoan

$y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0 + 0 = 2x_0$, chunki x_0 aniq qiymat.

x_0 -istalgan nuqta bo'lganligi uchun $y = x^2$ funksiya $(-\infty, +\infty)$ intervalning barcha nuqtalarida hosilaga ega ekanligi va uning hosilasi $2x$ ga tengligi kelib chiqadi, ya'ni $(x^2)' = 2x$.

4-misol. $y = x^2$ parabolaga $M(3; 9)$ nuqtasida o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsienti topilsin.

Yechish. $x_0 = 3$, $f(x_0) = f(3) = 3^2 = 9$. $f'(x_0) = 2x_0$ edi.

Demak, k= $f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$.

Biz yuqorida hosilaning mexanik va geometrik ma'nolari bilan tanishdik. Endi uning biologik va iqtisodiy ma'nolari bilan tanishamiz.

19.3. Hosilaning biologik ma'nosi

Ko'paygan mikroorganizmlar soni y va ko'payish vaqti t orasidagi bog'lanish

$$y = p(t)$$

tenglama bilan berilgan bo'lsin.

Vaqtning aniq t paytiga mikroorganizmlarning aniq $p(t)$ soni va vaqtning boshqa $t+\Delta t$ paytiga mikroorganizmlarning aniq $p(t+\Delta t)$ son mos keladi. $\Delta y = p(t+\Delta t) - p(t)$ ifoda Δt vaqt oralig'ida mikroorganizmlarni o'zgarish sonini beradi.

$\dfrac{\Delta p}{\Delta t}$ nisbat ko'payishning o'rtacha tezligi yoki boshqacha aytganda ko'payishning o'rtacha samaradorligi. $y' = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta p}{\Delta t} = p'(t)$ vaqtning t paytidagi mikroorganizm ko'payishining samaradorligini anglatadi. Bu **hosilaning biologik** ma'nosi.

19.4. Hosilaning iqtisodiy ma'nosi

Sarflangan xarajatlar miqdori x va olinadigan mahsulot miqdori y orasidagi moslikni aniqlovchi $y = f(x)$ funksiyani olaylik.

U holda sarflangan xarajatni aniq x miqdoriga olingan mahsulotning $f(t)$miqdori va sarflangan xarajatning boshqa bir $x+\Delta x$ miqdoriga olingan mahsulotning $f(x+\Delta x)$ miqdori mos keladi. $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ ayirma xarajat Δx ga oshganda olingan qo'shimcha mahsulotning miqdorini beradi.

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbat sarflangan Δx xarajat miqdoriga mos olingan mahsulot miqdorining o'rtacha o'zgarish tezligidir. $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ ifoda xarajatlarning ma'lum miqdoridagi olingan mahsulot hajmining o'zgarish tezligini (xarajat birligida olingan mahsulot hajmini) anglatadi. Bu **hosilaning iqtisodiy** ma'nosidir.

19.5. Funksiyaning differensiallanuvchiligi

3-ta'rif. Agar $y = f(t)$ funksiya x_0 nuqtada chekli hosilaga ega bo'lsa, u shu **nuqtada differensiallanuvchi** deb ataladi.

4-ta'rif. Agar $y = f(t)$ funksiya $(a; b)$ intervalning har bir nuqtasida differensiallanuvchi bo'lsa, u shu **intervalda differensiallanuvchi** deb ataladi.

Funksiyaning uzluksizligi va differensiallanuvchiligi orasidagi bog'lanishni ko'rsatadigan teoremani isbotlaymiz.

19.1-teorema. Agar $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u shu nuqtada uzluksizdir.

Isboti. $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'lgani uchun

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

chekli limit mavjud. Buni limitning xossasi (16.5-teorema) dan foydalanib

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha$$

ko'rinishda yozish mumkin, bu yerda $\Delta x \to 0$ da α -cheksiz kichik funksiya. Bundan $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha \cdot \Delta x$ va $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} f'(x_0)\Delta x + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha \cdot \Delta x = f'(x_0) \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0$.

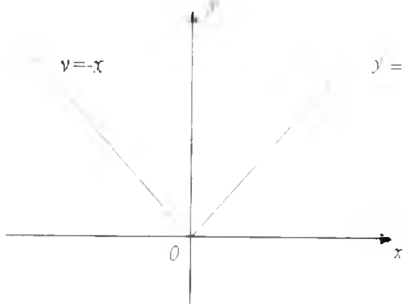
Demak, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ va $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz. Shunday qilib funksiyaning chekli hosilaga ega ekanligidan uning uzluksizligi kelib chiqar ekan.

Teskari da'vo, umuman aytganda, to'g'ri emas, chunonchi nuqtada uzluksiz, biroq bu nuqtada hosilaga ega bo'lmagan funksiyalar ham mavjud.

$$y = f(x) = |x| = \begin{cases} x, \ agar\ x > 0\ bo'lsa, \\ 0.\ agar\ x = 0\ bo'lsa, \\ -x, \ agar\ x < 0\ bo'lsa \end{cases}$$

funksiyani qaraymiz. Bu funksiya butun sonlar o'qida, jumladan $x_0=0$ nuqtada ham uzluksiz (107-chizma), chunki $f(0) = |0| = 0$; $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}|x| = 0$ va $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$.

Bu funksiyaning $x_0=0$ nuqtada hosilaga ega emasligini ko'rsatamiz.



107-chizma.

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = |0 + \Delta x| - |0| = |\Delta x|$$

va $$\lim_{\Delta x\to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to +0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to +0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Shunga o'xshash $\lim\limits_{\Delta x\to -0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to -0} \dfrac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to -0} \dfrac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$. Shunday qilib $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbat $x=0$ nuqtada har xil bir tomonlama limitlarga ega.

Bu $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbat $x_0=0$ nuqtada limitga ega emasligini, ya'ni $f'(0)$ hosilaning mavjud emasligini ko'rsatadi.

Demak, funksiyaning biror nuqtada uzluksizligidan uning shu nuqtada chekli hosilaga ega ekanligi(differensiallanuvchiligi) kelib chiqmas ekan.

19.6. Differensiallashning asosiy qoidalari

19.2-teorema. Agar $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda ularning algebraik yig'indisi, ko'paytmasi va maxraji noldan farqli bo'lganda bo'linmasi ham shu nuqtada differensiallanuvchi bo'lib, hosilalar

$$\text{a)}\ (u \pm v)' = u' \pm v', \quad \text{b)}\ (uv)' = u'v + uv', \quad \text{d)}\ \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

formulalar yordamida topiladi.

Isboti. (Bo'linma uchun). $y = f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ bo'lsin, bu yerda $v(x) \neq 0$.

Δy orttirmani tuzamiz:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{u(x_0 + \Delta x)}{v(x_0 + \Delta x)} - \frac{u(x_0)}{v(x_0)} =$$

$$\frac{u(x_0 + \Delta x)v(x_0) - u(x_0)v(x_0 + \Delta x)}{v(x_0 + \Delta x)v(x_0)} =$$

$$= \frac{u(x_0 + \Delta x)v(x_0) - u(x_0)v(x_0) - u(x_0)v(x_0 + \Delta x) + u(x_0)v(x_0)}{v(x_0 + \Delta x)v(x_0)} =$$

$$= \frac{[u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)]v(x_0) - u(x_0)[v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)]}{v(x_0 + \Delta x)v(x_0)} = \frac{\Delta u v(x_0) - u(x_0)\Delta v}{v(x_0 + \Delta x)v(x_0)}$$

Shartga ko‘ra $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}=u'(x_0)$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}=v'(x_0)$ va $\lim\limits_{\Delta x\to 0}v(x_0+\Delta x)=v(x_0)$ (differensiallanuvchi funksiya uzluksiz).

Demak,

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{\Delta u}{\Delta x}v(x_0)-u(x_0)\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x_0+\Delta x)v(x_0)}=\frac{u'(x_0)v(x_0)-u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)}.$$

Shunday qilib, $y'=\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.

a) va b) formulalar ham shunga o‘xshash isbotlanadi.

Teorema qo‘shiluvchilar va ko‘paytuvchilar soni chekli bo‘lganda ham to‘g‘ri bo‘ladi. Masalan, $(u+v-w)'=u'+v'-w'$, yoki $(uvw)'=u'vw+uv'w+uvw'$ tenglik o‘rinli.

Natija. O‘zgarmas ko‘paytuvchini hosila belgisidan chiqarish mumkin, ya‘ni $(Cu)'=Cu'$ yoki $\left(\dfrac{u}{C}\right)'=\dfrac{u'}{C}$, bunda C-o‘zgarmas son.

Haqiqatan, $y=Cu(x)$ bo‘lsa, $\Delta y=Cu(x_0+\Delta x)-Cu(x_0)$ $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{Cu(x_0+\Delta x)-Cu(x_0)}{\Delta x}$ bo‘lib $y'=(Cu)'=C\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}=Cu'(x)$ bo‘ladi.

19.7. Murakkab funksiyaning hosilasi

Murakkab funksiyani differensiallash qoidasi bilan tanishamiz. $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$ murakkab funksiyani qaraymiz.

19.3-teorema. $y=f(u)$ va $u=\varphi(x)$ differensiallanuvchi funksiyalar bo‘lsin. Murakkab $f(u)$ funksiyaning erkli o‘zgaruvchi x bo‘yicha hosilasi bu funksiyaning oraliq argumenti u bo‘yicha hosilasi y_u ning oraliq argumentning erkli o‘zgaruvchi x bo‘yicha hosilasi $u'(x)$ ga ko‘paytmasiga teng, ya‘ni

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x .$$

Isboti. $u = \varphi(x)$ funksiya $x = x_0$ nuqtada, $y = f(u)$ funksiya esa bu nuqtaga mos $u_0 = \varphi(x_0)$ nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsin. U holda $\lim\limits_{\Delta u \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u_0)$ chekli limit mavjud. Bundan $\dfrac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u_0) + \alpha$ yoki $\Delta y = f'(u_0)\Delta u + \alpha\Delta u$ kelib chiqadi, bu yerdagi α, $\Delta u \to 0$ da cheksiz kichik funksiya. So‘nggi tenglikni har ikkala tomonini Δx ga bo‘lsak $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0)\dfrac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$ hosil bo‘ladi. Bunda $\Delta x \to 0$ da limitga o‘tib $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y'_x$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} = u'_x$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha = \lim\limits_{\Delta u \to 0} \alpha = 0$ ekanini hisobga olsak isbotlanishi lozim bo‘lgan $y'(x_0) = f'(u_0) \cdot u'(x_0)$ yoki $y'_x = y'_u \cdot u'_x$ kelib chiqadi. Biz bu yerda differensiallanuvchi $u(x)$ funksiya uzluksiz va $\Delta x \to 0$ da $\Delta u \to 0$ ni hisobga oldik.

19.8. Teskari funksiya va uning hosilasi

$[a;\, b]$ kesmada aniqlangan o‘suvchi yoki kamayuvchi $y = f(x)$ funksiyani qaraymiz. $f(a) = c$, $f(b) = d$ bo‘lsin. Aniqlik uchun $y = f(x)$ funksiya $[a;\, b]$ kesmada o‘suvchi deb faraz qilamiz. $[a;\, b]$ kesmaga tegishli ikkita har xil x_1 va x_2 nuqtani olamiz. O‘suvchi funksiyaning ta‘rifidan agar $x_1 < x_2$ va $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ bo‘lsa, $y_1 < y_2$ bo‘ladi.

Demak, argumentning ikkita har xil x_1 va x_2 qiymatlariga funksiyaning ikkita har xil y_1 va y_2 qiymatlari mos keladi. Buning teskarisi ham to'g'ri, ya'ni $y_1 < y_2$ bo'lib, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ bo'lsa, o'suvchi funksiya ta'rifidan $x_1 < x_2$ bo'lishi kelib chiqadi.

Boshqacha aytganda x ning qiymatlari sohasi $[a; b]$ kesma bilan y ning qiymatlari sohasi $[c; d]$ kesma orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatiladi. y ni argument, x ni esa funksiya sifatida qarab x ni y ning funksiyasi sifatida hosil qilamiz:

$$x = \varphi(y).$$

Bu funksiya berilgan $y = f(x)$ funksiyaga **teskari funksiya** deyiladi. Kamayuvchi funksiya uchun ham shunga o'xshash mulohaza yuritish mumkin.

Shuni aytish lozimki, $y = f(x)$ funksiyaning qiymatlari sohasi $[c; d]$ unga teskari $x = \varphi(y)$ funksiyaning aniqlanish sohasi bo'ladi va aksincha. $x = \varphi(y)$ funksiya uchun $y = f(x)$ funksiya teskari funksiya bo'lgani uchun $x = \varphi(y)$ va $y = f(x)$ funksiyalar **o'zaro teskari funksiyalar** deb ataladi.

$y = f(x)$ funksiyaga teskari funksiya $y = f(x)$ tenglamani x ga nisbatan yechib topiladi. O'zaro teskari funksiyalarning grafigi Oxy tekisligidagi bitta egri chiziqni ifodalaydi.

5-misol. $y = x$ funksiyaga teskari funksiya topilsin.

Yechish. Bu funksiya butun sonlar o'qida aniqlangan va o'suvchi. Tenglikni x ga nisbatan yechsak berilgan funksiyaga teskari $x = \sqrt{y}$ funksiya hosil bo'ladi.

Har qanday funksiya ham teskari funksiyaga ega bo'lavermaydi. Masalan $y = x^2$ funksiya $(-\infty, +\infty)$ intervalda teksari funksiyaga ega emas, chunki y ning har bir musbat qiymatiga x ning ikkita $x = -\sqrt{y}$ va $x = \sqrt{y}$ qiymatlari mos keladi. Agar $y = x^2$ funksiyani

$(-\infty,0]$ intervalda qaralsa funksiya $x=-\sqrt{y}$ teskari funksiyaga ega, chunki y ning har bir musbat qiymatiga x ning yagona $y=x^2$ tenglikni qanoatlantiradigan qiymati mos keladi.

Shuningdek $y=x^2$ funksiyani $[0,+\infty)$ oraliqda qarasak unga teskari $x=\sqrt{y}$ funksiya mavjud bo'ladi.

Izoh. $y=f(x)$ funksiyaga teskari $x=\varphi(y)$ funksiyaning argumentini odatdagidek x bilan, funksiyani esa y bilan belgilasak va $y=f(x)$ hamda $y=\varphi(x)$ funksiyalarni grafigini bitta koordinatalar sistemasida chizsak grafik birinchi koordinatalar burchagining bissektrisasiga nisbatan simmetrik bo'ladi.

19.4-teorema. Agar o'suvchi (kamayuvchi) $y=f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz, shu bilan birga $f(a)=c$, $f(b)=d$ bo'lsa, u holda unga teskari $x=\varphi(y)$ funksiya $[c;d]$ ($[d;c]$) kesmada aniqlangan monoton va uzluksiz bo'ladi.

Endi $x=\varphi(y)$ teskari funksiyani hosilasini bilgan holda $y=f(x)$ funksiyaning hosilasini topish imkonini beradigan teoremani isbotlaymiz.

19.5-teorema. Agar $x=\varphi(y)$ funksiya biror intervalda monoton bo'lib shu intervalning y nuqtasida noldan farqli $\varphi'(y)$ hosilaga ega bo'lsa, bu nuqtaga mos x nuqtada teskari $y=f(x)$ funksiya ham hosilaga ega bo'lib,

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isboti. Shartga binoan $x=\varphi(y)$ funksiya monoton va differensiallanuvchi bo'lgani uchun u uzluksiz hamda unga teskari monoton va uzluksiz $y=f(x)$ funksiya mavjud. x ga $\Delta x\neq 0$ orttirma bersak $y=f(x)$ funksiya Δy orttirma oladi va uzluksizligini nazarga olsak $\Delta x\to 0$ da $\Delta y\to 0$. Natijada

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\varphi'(y)}$$

Bu formulani $y'_x = \frac{1}{x'_y}$ ko'rinishda yozish ham mumkin.

Shunday qilib, teskari funksiyaning hosilasi shu funksiya hosilasiga teskari miqdorga teng ekan.

Mustaqil yechish uchun mashqlar va test savollari

1. $y = x^3$ funksiyaning x=2 nuqtadagi hosilasi topilsin.

Javob: $y'(2) = 12$.

2. Nuqta $s = 5t^3 - 3t^2 + 4$ qonuniyat asosida to'g'ri chiziqli harakat qilmoqda, bunda s- o'tilgan yo'l santimetrda o'lchanadi, t- vaqt sekundda o'lchanadi. t=1 sek. dan $t_1 = (1 + \Delta t)$ sek vaqt oralig'idagi o'rtacha tezlik topilsin, bunda $\Delta t = 0{,}5;\ 0{,}3;\ 0{,}1$ qiymatlarni qabul qiladi. t=1 sek. paytdagi oniy tezlik topilsin. *Javob:* $\Delta t = 0{,}5$ da $v_{o'rt} = 15{,}25\,sm/sek$; $\Delta t =$ 0,1 da $v_{o'rt} = 10{,}21\,sm/sek$; $\Delta t =$ 0,3 da $v_{o'rt} = 13{,}01\,sm/sek$; $v_0 = v(1) = 9\,sm/sek$.

3. $y = x^3$ egri chiziqqa $M(2;\,8)$ nuqtasida o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsienti topilsin. *Javob*: k=12.

4. $y = \sqrt[3]{x}$ funksiyaning x =0 nuqtada hosilaga ega emasligi ko'rsatilsin.

5. $y = 3x - 2$ funksiyaga teskari funksiya topilsin.

Javob: $x = \frac{y+2}{3}$.

6. $y = x^4$ funksiyaga teskari funksiya mavjudmi?

Javob: $(-\infty;\,+\infty)$ da yo'q, $(-\infty;\,0]$ da $x = -\sqrt[4]{y}$ va $[0;\,+\infty)$ da $x = \sqrt[4]{y}$.

7. $y = a^x$ funksiyaga teskari funksiya topilsin. *Javob*: $x = \log_a y$.

8. $y = e^x$ funksiyaga teskari funksiya topilsin. *Javob*: $x = \ln y$.

9. Hosila haqida quyida bayon etilgan fikrlardan noto'risini ko'rsating.

A) to'g'ri chiziqli harakatda oniy tezlik yo'ldan vaqt bo'yicha olingan hosilani ifodalaydi.

B) $f'(x_0)$ hosila $y = f(x)$ egri chiziqning $M_0(x_0; f(x_0))$ nuqtasida unga o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsientini ifodalaydi

D) hosila sterjnning istalgan nuqtasidagi zichligini ifodalaydi

E) to'g'ri chiziqli harakatda yo'l tezlikdan vaqt bo'yicha olingan hosilani ifodalaydi

F) hosila xarajatlarning ma'lum miqdorida olingan mahsulot hajmini o'zgarish tezligini ifodalaydi.

10. Noto'g'ri javob ko'rsatilsin.

A) biror nuqtada differentsiallanuvchi funksiya shu nuqtada uzluksiz bo'ladi.

B) biror nuqtada uzluksiz funksiya shu nuqtada differentsial-lanuvchi bo'ladi.

D) hosila vaqtning istalgan paytidagi mikroorganizm ko'payi-shining samaradorligini ifodalaydi.

E) tezlanish tezlikdan vaqt bo'yicha olingan hosiladir

F) $(u(x)\cdot v(x))' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$ tenglik o'rinli.

11. Noto'g'ri javob ko'rsatilsin.

A) $y = f(x)$ va $x = \varphi(y)$ o'zaro teskari differentsiallanuvchi funksiyalar uchun $f'(x) = \dfrac{1}{\varphi'(y)}$ tenglik o'rinli, bunda $\varphi'(y) \neq 0$

B) $\left(\dfrac{u(x)}{C}\right)' = \dfrac{u'(x)}{C}$ ($C = \text{const}$)

D) $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dfrac{u'(x)v(x)-u'(x)v(x)}{v^2(x)}$

E) $(u(x)+v(x))' = u'(x)+v'(x)$

F) $y = f(u), u = \varphi(x)$ bo'lib $f(u)$ va $\varphi(x)$ differentsiallanuvchi funksiyalar bo'lganda $y'_x = y'_u \cdot u'_x$ tenglik o'rinli.

12. $y = x^2$ bo'lsa $y'(6)$ topilsin.

A) 14 B) 12 D) 15 E) 8 F) 27.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Hosila tushunchasiga olib keluvchi masalalardan bir nechtasini ayting.
2. Egri chiziqqa urinma deb nimaga aytiladi?
3. Urinmaning burchak koeffitsienti nimaga teng?
4. Funksiyaning nuqtadagi hosilasini ta'riflang.
5. Hosilaning geometrik va mexanik ma'nolarini ayting.
6. Hosilaning biologik va iqtisodiy ma'nolarini ayting.
7. Funksiya qachon differensiallanuvchi deyiladi?
8. Funksiyaning intervalda differensiallanuvchiligini ta'riflang.
9. Differensiallanuvchi funksiya uzluksiz bo'ladimi?
10. Uzluksiz funksiya differensiallanuvchi bo'ladimi?
11. Differensiallashning asosiy qoidalarini ayting.
12. Murakkab funksiyaning hosilasi qanday topiladi?
13. Berilgan funksiyaga teskari funksiya deb nimaga aytiladi?
14. Teskari funksiya qanday topiladi?
15. Qanaqa funksiyalarga teskari funksiya mavjud bo'ladi?
16. Teskari funksiyaning hosilasi qanday topiladi?

20. ASOSIY ELEMENTAR FUNKSIYALARNING HOSILALARI

20.1. O'zgarmas funksiyaning hosilasi

20.1-teorema. O'zgarmas funksiyaning hosilasi nolga teng, ya'ni $C'=0$, bunda C-o'zgarmas son.

Isboti. $y=f(x)=C$ desak x argument Δx orttirma olganda y funksiya $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=C-C=0$ orttirma oladi.

Demak, $C'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0$. Shunday qilib $C'=0$.

Masalan, $(25)'=\left(2^{18}\right)'=\left(tg20^0\right)'=(\ln 87)'=0$.

20.2. Logarifmik funksiyaning hosilasi

20.2-teorema. $\ln x$ lagorifmik funksiyaning hosilasi $\frac{1}{x}$ ga teng.

Isboti $y=lnx$ funksiyani qaraymiz. x Δx orttirma olganda funksiya $\Delta y=\ln(x+\Delta x)-\ln x=\ln\frac{x+\Delta x}{x}=\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$ orttirma oladi.

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\Delta x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$ nisbatni tuzamiz. $\frac{\Delta x}{x}=\alpha$ deb belgilasak $\Delta x\to 0$ da $\alpha\to 0$.

$$\text{Demak,}\quad y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}=\frac{1}{x}\lim_{\alpha\to 0}\ln(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\frac{1}{x}\ln e=\frac{1}{x}.$$

ya'ni $(\ln x)'=\frac{1}{x}$. Bu yerda $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$ ikkinchi ajoyib limitdan foydalanildi.

Shunga o'xshash $(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{(\ln x)'}{\ln a} = \frac{1}{x\ln a}$ kelib chiqadi (bunda $a>0$, $a\neq 1$).

Agar $y = \ln u$ bo'lib, bunda, $u = u(x)$ differensiallanuvchi funksiya bo'lsa, u holda murakkab funksiyani differensiallash qoidasiga binoan $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ tenglikka ega bo'lamiz.

Xususan, agar $y = \log_a u$, $u = u(x)$ bo'lsa, u holda $(\log_a u)' = \left(\frac{\ln u}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}\cdot(\ln u)' = \frac{u'}{\ln a \cdot u}$ bo'ladi.

20.3. Darajali funksiyaning hosilasi

20.3-teorema. x^α darajali funksiyaning hosilasi $\alpha x^{\alpha-1}$ ga teng, bunda α-o'zgarmas son.

Isboti. $y=x^\alpha$ funksiyani qaraymiz. Uni *e* asosga ko'ra logarifmlab $\ln y = \alpha\ln x$ tenglikka ega bo'lamiz. y ni x ning funksiyasi hisoblab, tenglikning ikkala qismini x bo'yicha differensiallaymiz: $\frac{y'}{y} = \alpha\cdot\frac{1}{x}$.

Bundan $y' = \alpha\cdot y\cdot\frac{1}{x} = \alpha\cdot x^\alpha\cdot\frac{1}{x} = \alpha\cdot x^{\alpha-1}$.

Shunday qilib $\left(x^\alpha\right)' = \alpha\cdot x^{\alpha-1}$. Teorema isbotlandi.

Agar $y = u^\alpha$ bo'lib, $u = u(x)$ differensiallanuvchi funksiya bo'lsa, u holda murakkab funksiyani differensiallash qoidasiga binoan $(u^\alpha)' = \alpha\cdot u^{\alpha-1}\cdot u'$ bo'ladi.

1-misol. $y = \sqrt{x}$ funksiyaning hosilasi topilsin.

Yechish. $y' = \left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Demak, $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

2-misol. $y = \frac{1}{x}$ funksiyaning hosilasi topilsin.

Yechish. $y' = \left(\frac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$.

Demak, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

Izoh. Funksiyaning hosilasi topilsin deyilganda shu funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli istalgan nuqtada uning hosilasini topishni nazarda tutiladi.

20.4. Ko'rsatkichli funksiyaning hosilasi

20.4-teorema. a^x ko'rsatkichli funksiyaning hosilasi $a^x \ln a$ ga tengdir.

Isboti. $y=a^x$ ($a>0$, $a\neq 1$) funksiyani qaraymiz. Uni e asosga ko'ra logarifmlasak $\ln y = x \cdot \ln a$ bo'ladi. y ni x ning funksiyasi hisoblab, tenglamaning ikkala qismini x bo'yicha differensiallasak, $\frac{y'}{y} = \ln a$ bo'ladi. Bundan $y' = y\ln a$ yoki $y' = a^x \ln a$ kelib chiqadi. Demak, $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$.

$y=a^u$ murakkab funksiya uchun $\left(a^u\right)' = a^u \ln a \cdot u'$ formulaga ega bo'lamiz.

Xususiy holda $a=e$ bo'lsa $\ln e=1$ bo'lib $(e^x)'=e^x$ va $(e^u)'=e^u\cdot u'$ formulalarga ega bo'lamiz.

3-misol. $y=2^x$ bo'lsa, y' topilsin.

Yechish. $(2^x)'=2^x\ln 2$.

4-misol. $y=3^{x^2}$ bo'lsa, y' topilsin.

Yechish. $y'=\left(3^{x^2}\right)'=3^{x^2}\ln 3(x^2)'=3^{x^2}\ln 3\cdot 2x$.

5-misol. $y=e^{x^3}$ bo'lsa, y' topilsin.

Yechish. $y'=\left(e^{x^3}\right)'=e^{x^3}(x^3)'=e^{x^3}3x^2$

20.5. Trigonometrik funksiyalarning hosilalari

20.5-teorema. $\sin x$ funksiyaning hosilasi $\cos x$ ga teng.

Isboti. $y=\sin x$ funksiyani qaraymiz. x ga Δx orttirma bersak funksiya $\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\cos\left(\frac{x+\Delta x+x}{2}\right)\cdot$

$\sin\left(\frac{x+\Delta x-x}{2}\right)=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$ orttirma oladi. Shuning uchun $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$ va

$$y'=(\sin x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=1\cdot\cos x=\cos x.$$

Bu yerda birinchi ajoyib limitdan hamda $\cos x$ funksiyaning uzluksizligidan foydalanildi.

Shunday qilib, $(\sin x)' = \cos x$.

$y = \sin u$ (bunda $u = u(x)$) murakkab funksiya uchun $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$ formulaga ega bo'lamiz.

6-misol. $y = \sin\sqrt{x}$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish. $y' = \cos\sqrt{x} \cdot \left(\sqrt{x}\right)' = \cos\sqrt{x} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$.

7-misol. $y = \sin^2 x$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish.

$$y' = \left(\sin^2 x\right)' = \left((\sin x)^2\right)' = 2\sin x \cdot (\sin x)' = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x.$$

8-misol. $y = \sin(\ln x)$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish. $y' = \cos(\ln x)(\ln x)' = \dfrac{\cos(\ln x)}{x}$.

20.6- teorema. $\cos x$ funksiyaning hosilasi $-\sin x$ ga teng.

Isboti. $y = \cos x$ funksiyani qaraymiz. Keltirish formulasidan foydalanib uni $y = \cos x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$ ko'rinishda yozamiz. Demak,

$$y' = (\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = \sin x \cdot (0 - 1) = -\sin x.$$

yoki $(\cos x)' = -\sin x$.

$y = \cos u$ (bunda $u = u(x)$) murakkab funksiyani hosilasini topish uchun $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$ formulaga ega bo'lamiz.

9-misol. $y = \cos x^3$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish. $y' = -\sin x^3\left(x^3\right)' = -\sin x^3 \cdot 3x^2$.

10-misol. $y = \cos\sqrt{x^2 + 1}$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish.

$$y' = -\sin\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+1}\right)' = -\sin\sqrt{x^2+1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot(x^2+1)' =$$

$$= -\sin\sqrt{x^2+1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x = -\frac{x\sin\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}.$$

20.7-teorema. tgx funksiyaning hosilasi $\frac{1}{\cos^2 x}$ ga teng.

Isboti. $tgx=\frac{\sin x}{\cos x}$ bo'lganligi sababli bo'linmani hosilasini topish qoidasiga binoan

$$\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cdot\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x\cdot\cos x - \sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Shunday qilib, $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$. $y=tgu$ (bunda, $u=u(x)$) murakkab funksiyani hosilasini topish uchun $(tgu)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$ formulaga ega bo'lamiz.

11-misol. $y=tg\frac{1}{x}$ funksiyani hosilasini toping.

Yechish. $y' = \frac{1}{\cos^2\frac{1}{x}}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2\cos^2\frac{1}{x}}$.

12-misol. $y=tg^3\sqrt{x}$ funksiyani hosilasini toping.

Yechish.

$$y' = \left((tg\sqrt{x})^3\right)' = 3tg^2\sqrt{x}\cdot(tg\sqrt{x})' = 3tg^2\sqrt{x}\cdot\frac{1}{\cos^2\sqrt{x}}\cdot(\sqrt{x})' = \frac{3tg^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\cdot\cos^2\sqrt{x}}$$

20.8-teorema. $ctgx$ funksiyaning hosilasi $-\dfrac{1}{\sin^2 x}$ ga teng.

Bu teoremani isbotlashni o'quvchiga qoldiramiz.

13-misol. $y = ctg\sqrt{2x^2+1}$ funksiyani hosilasini toping.

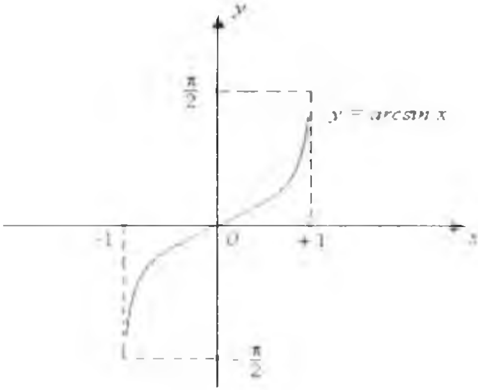
$$y' = -\frac{1}{\sin^2\sqrt{2x^2+1}}\cdot\left(\sqrt{2x^2+1}\right)' = -\frac{1}{\sin^2\sqrt{2x^2+1}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2x^2+1}}\cdot(2x^2+1)' =$$

$$= -\frac{1}{\sin^2\sqrt{2x^2+1}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2x^2+1}}\cdot 4x = -\frac{2x}{\sin^2\sqrt{2x^2+1}\cdot\sqrt{2x^2+1}}.$$

20.6. Teskari trigonometrik funksiyalar va ularning hosilalari

1) *y=arcsinx* funksiya. $x = siny$ funksiyani qaraymiz. Bu funksiya $-\dfrac{\pi}{2} \le y \le \dfrac{\pi}{2}$ kesmada monoton o'uvchi bo'lib uning qiymatlari $-1 \le x \le 1$ kesmani to'ldiradi. Shuning uchun bu funksiya aniqlanish sohasi $[-1,+1]$ dan, qiymatlari sohasi $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ kesmadan iborat teskari funksiyaga ega (19.4-teorema).

Odatda uni $y = arcsinx$ ko'rinishda yozish qabul qilingan. Demak $x = siny$ va $y = arcsinx$ funksiyalar o'zaro teskari funksiyalar. $y = arcsinx$ funksiyaning grafigi 108-chizmada tasvirlangan $D(arcsinx) = [-1,\ 1]$, $E(arcsinx) = \left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$.



108-chizma.

20.9. teorema. $arcsinx$ funksiyaning hosilasi $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ga teng..

Isboti. $y = arcsinx$ funksiyani qaraymiz. $x = siny$ funksiya bu funksiyaga teskari funksiya bo'ladi.

O'zaro teskari funksiyani hosilasini topish formulasi $y_x^{\prime} = \frac{1}{x_y^{\prime}}$ (19.5.teorema) dan foydalanamiz.

$$y' = \frac{1}{(\sin y)_y^{\prime}} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\pm\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$ chunki $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ kesmada $cosy \geq o$ bo'lgani uchun $\sqrt{1-\sin^2 y}$ oldidagi plyus ishora olindi.

Shunday qilib, $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

y = arcsinu (bunda, $u = u(x)$) murakkab funksiya uchun $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ hosilani topish formulasiga ega bo'lamiz.

14-misol. $y = \arcsin e^x$ funksiyani hosilasini toping.

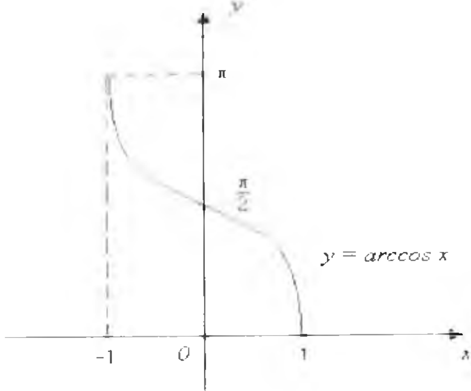
Yechish. $y' = \dfrac{(e^x)'}{\sqrt{1-(e^x)^2}} = \dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$.

15-misol. $y = 2\arcsin\sqrt{x}$ funksiyani hosilasini toping.

Yechish.

$$y' = 2(\arcsin\sqrt{x})' = 2\frac{(\sqrt{x})'}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} = 2\cdot\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{\sqrt{x\cdot(1-x)}}.$$

2) y = arccosx **funksiya.** $x = \cos y$ funksiyani qaraymiz. Bu funksiya $0 \le y \le \pi$ kesmada monoton kamayuvchiligini bilamiz. Shuning uchun bu funksiyaga teskari funksiya mavjud (19.4 teorema) bo'lib uning aniqlanish sohasi [-1,1] kesmadan, qiymatlari sohasi $[0;\pi]$ kesmadan iborat bo'ladi. $x = \cos y$ funksiyaga teskari funksiyani $y = \arccos x$ kabi yoziladi. $y = \arccos x$ funksiyaning grafigi 109-chizmada tasvirlangan. $D(\arccos x) = [-1,1]$, $E(\arccos x) = [0;\pi]$ ekani ravshan

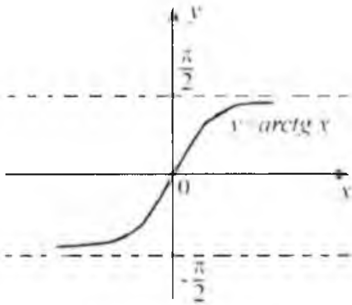


109-chizma.

20.10-teorema. *arccosx* funksiyaning hosilasi $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ga teng.

Teoremaning isboti 20.9-teoremaning isbrtini takrorlagani uchun uni isbotlashni o'quvchiga qoldiramiz.

3) $y = arctgx$ **funksiya.** $x = tgy$ funksiyani qaraymiz. Bu funksiya $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ intervalda monoton o'sadi. Shuning uchun bu funksiyaga teskari funksiya mavjud (19.4-teorema) bo'lib uning aniqlanish sohasi butun sonlar o'qidan iborat. $x = tgy$ funksiyaga teskari funksiya y = arctgx kabi yoziladi. Demak $D(arctgx)=(-\infty;\ \infty)$, $E(arctgx)=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ va $\lim\limits_{x\to-\infty} arctgx = -\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} arctgx = \frac{\pi}{2}$.



110-chizma.

y = arctgx funksiyaning grafigi 110-chizmada tasvirlangan.

20.11-teorema. arctgx funksiyaning hosilasi $\frac{1}{1+x^2}$ ga teng.

Isboti. $y = arctgx$ funksiyani qaraymiz. $x=tgy$ funksiyaga teskari funksiya bo'lganligi sababli ularning hosilalari (19.5-teorema) $y'_x = \frac{1}{x'_y}$ tenglik orqali bog'langan. Shuning uchun

$$y' = \frac{1}{(tgy)'_y} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$ Demak, $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$.

$y=arctgu$ murakkab funksiyani hosilasi $(arctgu)' = \frac{u'}{1+u^2}$ formula yordamida topiladi.

16-misol. $y=(arctgx)^3$ funksiyani hosilasini toping.

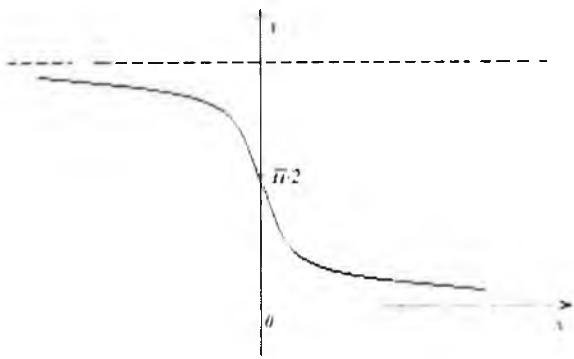
Yechish. $y' = 3(arctgx)^2 \cdot (arctgx)' = 3(arctgx)^2 \cdot \frac{1}{1+x^2}$.

17-misol. $y=arctgx^2$ funksiyani hosilasini toping.

Yechish. $y' = \frac{(x^2)'}{1+(x^2)^2} = \frac{2x}{1+x^4}$.

4) y = arcctgx **funksiya.** x = ctgy funksiyani qaraymiz. Bu funksiya $0<y<\pi$ intervalda monoton kamayuvchi. Shuning uchun bu funksiyaga teskari funksiya mavjud (19.4-teorema) va uning aniqlanish sohasi (-∞,+∞) dan iborat. x = ctgy funksiyaga teskari funksiya y = arcctgx ko'rinishda belgilanadi. Demak, D(arcctgx)=(-∞,+∞), E(arcctgx)=$(0;\pi)$ va $\lim\limits_{x\to-\infty} arcctgx = \pi$, $\lim\limits_{x\to+\infty} arcctgx = 0$.

y = arcctgx funksiyaning grafigi 111-chizmada tasvirlangan.



111-chizma.

20.12-teorema. $arcctgx$ funksiyaning hosilasi- $\frac{1}{1+x^2}$ ga teng.

Teoremani isboti 20.11-teoremani isbotiga o'xshaganligi uchun uni isbotini o'quvchiga qoldiramiz.

$y = arcctgu$ murakkab funksiyani hosilasi $(arcctgu)' = -\frac{u'}{1+u^2}$ formula yordamida topiladi.

18-misol. $y = arcctgx^4$ funksiyani hosilasini toping.

Yechish. $y' = -\frac{(x^4)'}{1+(x^4)^2} = -\frac{4x^3}{1+x^8}$.

19-misol. $y = arcctg\frac{1}{x}$ funksiyani hosilasini toping

$$y' = -\frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = -\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2+1}{x^2}} = \frac{1}{x^2+1}.$$

Izoh. Murakkab funksiyalarning $u = u(x)$ oraliq argumenti differensiyallanuvchi deb faraz qilindi.

Mustaqil yechish uchun mashqlar va test savollari

Hosilaning ta'rifidan bevosita foydalanib qo'yidagi funksiyalarning hoisilalari topilsin.

1. $y=x^4$ *Javob*: $4x^3$. 2. $y=\sqrt{x}$. *Javob*: $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

3. $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ *Javob*: $-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$. 4. $y=x^3+2x^2-3x+1$. *Javob*: $3x^2+4x-3$.

Egri chiziqlarga urinmalarning burchak koeffitsientlari topilsin.

5. $y=x^4$. a) $x=1$ da *Javob*: 4, b) $x=-\frac{1}{2}$ da *Javob*: $-\frac{1}{2}$.

6. $y=\frac{2}{x}$. a) $x=1$ da *Javob:* -2, b) $x=-\frac{1}{3}$ da *Javob:* -18.

7. $y=\sqrt{x}$. $x=4$ da *Javob:* $\frac{1}{4}$.

Funksiyalarning hosilalari topilsin.

8. $y=x^6-2x^3+3x+12$. *Javob:* $y'=6x^5-6x^2+3$.

9. $y=3x^4-x$. *Javob:* $y'=12x^3-1$.

10. $y=\frac{x^7}{a}+\frac{x^5}{b}-2x$. *Javob:* $y'=\frac{7x^6}{a}+\frac{5x^4}{b}-2$.

11. $y=\frac{2x^3-5x^2+4}{6}$. *Javob:* $y'=\frac{3x^2-5x}{3}$.

12. $y=4x^{\frac{5}{2}}-6x^{\frac{3}{2}}+x$ Javob: $y'=10x^{\frac{3}{2}}-9x^{\frac{1}{2}}+1$.

13. $y=\sqrt{5x}+2\sqrt[3]{x}-\frac{2}{x}$. Javob: $y'=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{x}}+\frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}+\frac{2}{x^2}$.

14. $y=(1+4x^3)(1+2x^2)$. Javob: $y'=4x(1+3x+10x^3)$.

15. $y=\frac{2x^4}{a^2-x^2}$. *Javob:* $y'=\frac{4x^3(2a^2-x^2)}{(a^2-x^2)^2}$.

16. $y=\frac{b-x}{b+x}$. *Javob:* $y'=-\frac{2b}{(b+x)^2}$.

17. $y=\frac{(x+4)^2}{x+3}$. *Javob:* $y'=\frac{(x+2)(x+4)}{(x+3)^2}$.

18. $y=(4x^3+2)^3$. *Javob:* $y'=36x^2(4x^3+2)^2$.

19. $y=\sqrt{a^2-x^2}$. *Javob:* $y'=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

20. $y=(a+x)\sqrt{a-x}$. *Javob:* $y'=\frac{a-3x}{2\sqrt{a-x}}$.

21. $y=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. *Javob:* $y'=\frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$.

22. $y = 3\sin x - 7\cos 5x$. *Javob*: $y' = 3\cos x + 35\sin 5x$.

23. $y = \mathrm{tg}(3x - 2)$. Javob: $y' = \dfrac{3}{\cos^2(3x-2)}$.

24. $y = \sin^5 x$. *Javob*: $y' = 5sin^4 x \cdot cosx$.

25. $y = \dfrac{\cos x}{1 - \sin x}$. *Javob*: $y' = \dfrac{1}{1 - \sin x}$.

26. $y = x\sin x + \cos x$. *Javob*: $y' = xcosx$.

27. $y = a\sqrt{\sin 2x}$. *Javob*: $y' = \dfrac{a\cos 2x}{\sqrt{\sin 2x}}$.

28. $y = 3sin^4 \dfrac{x}{3}$. *Javob*: $y' = 4\sin^3 \dfrac{x}{3} \cdot \cos \dfrac{x}{3}$.

29. $y = \ln \sin x$. *Javob*: $y' = \mathrm{ctgx}$.

30. $y = \ln \mathrm{ctg}^3 x$. *Javob*: $y' = -\dfrac{6}{\sin 2x}$.

31. $y = \ln\sqrt{\dfrac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}$. *Javob*: $y' = \dfrac{1}{\cos x}$.

Ko'rsatma. $y = \dfrac{1}{2}[\,ln(1 + sinx) - ln(1 - sinx)]$ dan foydalanilsin.

32. $y = \ln \mathrm{tg}\dfrac{x}{2}$. *Javob*: $y' = \dfrac{1}{\sin x}$.

33. $y = ln(x + \sqrt{x^2 + a})$. *Javob*: $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + a}}$.

34. $y = \sin(\cos x)$. *Javob*: $y' = -\sin x \cdot \cos(\cos x)$.

35. $y = (x\mathrm{tg}\, x)^3$. *Javob*: $y' = 3(x\mathrm{tg}\, x)^2 \left(tgx + \dfrac{x}{\cos^2 x}\right)$.

36. $y = \log_a(x^3 + 4)$. *Javob*: $y' = \dfrac{3x^2}{(x^3 + 4)\ln a}$.

37. $y = \ln\dfrac{1 + x}{1 - x}$. *Javob*: $y' = \dfrac{2}{1 - x^2}$.

38. $y = \ln(\sin^2 x + x)$. *Javob*: $y' = \dfrac{\sin 2x + 1}{\sin^2 x + x}$.

39. $y = x\ln x$. Javob: $y' = lnx + 1$.

40. $y = (\ln x)^6$. *Javob*: $y' = \dfrac{6\ln^5 x}{x}$.

41. $y = \ln(\ln x)$. *Javob*: $y' = \dfrac{1}{x\ln x}$.

42. $y = e^{-x^2}$. *Javob*: $y' = -2xe^{-x^2}$.

43. $y=3^{tg\frac{x}{2}}$. *Javob*: $y' = \dfrac{1}{2\cos^2\dfrac{x}{2}} \cdot 3^{tg\frac{x}{2}}$.

44. $y=e^{\sqrt{x}}$. *Javob*: $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$.

45. $y = ln\, \dfrac{e^x}{1+e^x}$. *Javob*: $y' = \dfrac{1}{1+e^x}$.

46. $y=\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$. *Javob*: $y' = \dfrac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$.

47. $y = arcsin\, \dfrac{x}{a}$. *Javob*: $y' = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

48. $y = (\arccos x)^3$. *Javob*: $y' = - \dfrac{3(\arccos x)^2}{\sqrt{1 - x^2}}$.

49. $y = \mathrm{arctg}\, \dfrac{x}{a}$. *Javob*: $y' = \dfrac{a}{a^2 + x^2}$.

50. $y = \mathrm{arcctg}(x^2 + 1)$. *Javob*: $y' = - \dfrac{2x}{1 + (x^2 + 1)^2}$.

51. $y = \mathrm{arctg}\, \dfrac{2x}{1 - x^2}$. *Javob*: $y' = \dfrac{2}{1 + x^2}$.

52. $y=\dfrac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a}$. *Javob*: $y' = \sqrt{a^2 - x^2}$.

53. $y = x\arcsin x$. *Javob*: $y' = \arcsin x + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

54. $y = \arcsin(\ln x)$. *Javob*: $y' = \dfrac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$.

55. $y = \operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ $(0 \le x < \pi)$. *Javob*: $y' = \dfrac{1}{2}$.

56. Noto'g'ri formulani ko'rsating.

A) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ B) $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$, bunda α =const.

D) $(\sin x)' = \cos x$ E) $(\cos x)' = -\sin x$ F) $(2^x)' = \dfrac{2^x}{\ln 2}$.

57. Noto'g'ri formulani ko'rsating.

A) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ B) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

B) D) $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ E) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

C) F) $(\operatorname{tg} x)' = -\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

58. $f(x) = \sin^3 x$ bo'lsa $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ topilsin.

A) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ B) $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$ D) $\dfrac{3\sqrt{2}}{8}$ E) $\dfrac{3}{4}$ F) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

59. $f(x) = x^3 \ln x$ bo'lsa $f'(1)$ topilsin.

A) 3 B) 2 D) 1 E) 4 F) 6.

60. $f(x) = \dfrac{\cos x}{x^2}$ bo'lsa $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ topilsin.

A) $\dfrac{4}{\pi^2}$ B) $\dfrac{8}{\pi^3}$ D) $\dfrac{27}{\pi^3}$ E) $-\dfrac{4}{\pi^2}$ F) π^2.

61. $f(x)=x^4\ln\sqrt[12]{x}$ bo'lsa $f'(1)$ topilsin.

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{1}{8}$ F) $\frac{1}{12}$.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. O'zgarmas sonning hosilasi nimaga teng?
2. Logarifmik funksiyaning hosilasi nimaga teng?
3. Darajali funksiyaning hosilasi nimaga teng?
4. Ko'rsatkichli funksiyaning hosilasi nimaga teng?
5. sinx ning hosilasi nimaga teng?
6. cosx ning hosilasi nimaga teng?
7. tgx ning hosilasi nimaga teng?
8. ctgx ning hosilasi nimaga teng?
9. arc sinx funksiyaning hosilasi nimaga teng?
10. arccosx funksiyaning hosilasi nimaga teng?
11. arc tgx funksiyaning hosilasi nimaga teng?
12. arcctgx funksiyaning hosilasi nimaga teng?

21. BA'ZI ELEMENTAR FUNKSIYALARNING HOSILALARI. HOSILALAR JADVALI

21.1. Giperbolik funksiyalar va ularning hosilalari

$$shx=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\quad chx=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\quad thx=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}},\quad cthx=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$$

tengliklar yordamida aniqlanadigan funksiyalar **giperbolik** funksiyalar deb ataladi.

Bunda shx- **giperbolik sinus,** chx-**giperbolik kosinus**, $thx=\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}$ - **giperbolik tangens,** $cthx=\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x}$ - **giperbolik kotangens** deb ataladi.

Bu funksiyalar orasida $ch^2x-sh^2x=1$, $ch^2x+sh^2x=ch2x$, $sh2x=2shx\ chx$, $ch^2x=\frac{1}{1-\operatorname{th}^2x}$ ayniyatlar o'rinli ekanligini tekshirib ko'rishni o'quvchiga tavsiya etamiz.

Endi shu funksiyalarni hosilalarini topish formulalarini hosil qilamiz.

$$(shx)'=\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)'=\frac{\left(e^x-e^{-x}\right)'}{2}=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=chx,$$

$$(chx)'=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)'=\frac{\left(e^x+e^{-x}\right)'}{2}=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=shx,$$

$$(thx)'=\left(\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}\right)'=\frac{(\operatorname{sh}x)'\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x(\operatorname{ch}x)'}{\operatorname{ch}^2x}=\frac{\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x}{\operatorname{ch}^2x}=\frac{1}{\operatorname{ch}^2x},$$

$$(\operatorname{cth}x)'=\left(\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x}\right)'=\frac{(\operatorname{ch}x)'\operatorname{sh}x-\operatorname{ch}x(\operatorname{sh}x)'}{\operatorname{sh}^2x}=\frac{\operatorname{sh}^2x-\operatorname{ch}^2x}{\operatorname{sh}^2x}=-\frac{1}{\operatorname{sh}^2x}.$$

Hisoblashda $(e^x)' = e^x, (e^{-x})' = -e^{-x}$ ekanligidan foydalandik.

Shunday qilib: $(shx)' = chx$, $(chx)' = shx$, $(thx)' = \frac{1}{ch^2 x}$, $(cthx)' = -\frac{1}{sh^2 x}$.

21.2. Oshkormas funksiya va uning hosilasi

x va y o'zgaruvchilar orasidagi funksional bog'lanish $F(x,y)=0$ tenglama bilan berilgan bo'lsin. Agar qandaydir (a, b) intervalda aniqlangan $y=f(x)$ funksiya mavjud bo'lib, u $F(x,y)=0$ tenglamani qanoatlantirsa, u holda $y=f(x)$ funksiya $F(x,y)=0$ tenglama bilan aniqlangan **oshkormas** funksiya deyiladi. Funksiya $y=f(x)$ tenglik yordamida berilganda y oshkor ko'rinishda berilgan deyiladi. Oshkor ko'rinishda berilgan funksiyani $y-f(x)=0$ ko'rinishda yozilsa y oshkormas ko'rinishda berilganga o'tiladi. Funksiya $F(x,y)=0$ tenglama yordamida oshkormas shaklda berilganda tenglamani y ga nisbatan yechilsa funksiyaning oshkor ko'rinishdagi tenglamasi hosil bo'ladi. Ammo bunday o'tish har doim ham oson bo'lavermaydi, ba'zan esa umuman o'tishning iloji bo'lmaydi.

Shuning uchun oshkormas funksiya hosilasini uni oshkor holga keltirmasdan topish usuli bilan misollarda tanishamiz.

1-misol $x^2+y^2=4$ tenglama bilan berilgan funksiyaning y' hosilasini toping.

Yechish. Berilgan tenglamani y ni x ning funksiyasi ekanligini hisobga olgan holda x bo'yicha differensiallaymiz: $(x^2)'+(y^2)' = 4'$;

$2x+2y \cdot y'=0$, $x + y \cdot y' = 0$, bundan $y' = -\frac{x}{y}$.

2-misol. $y^4-4xy+x^4=0$ tenglama bilan berilgan funksiyaning y' hosilasini toping.

Yechish. Differensiallaymiz: $4y^3 \cdot y' - 4(x'y + x \cdot y') + 4x^3 = 0$;

$y^3 \cdot y' - y - xy' = -x^3$; $(y^3 - x)y' = y - x^3$; $y' = \dfrac{y - x^3}{y^3 - x}$.

Biz kelgusida oshkormas funksiyaning hosilasini topishga yana qaytamiz. Shuning uchun bu yerda uni batafsil o'rganib o'tirmaymiz.

21.3. Funksiyaning parametrik berilishi va parametrik berilgan funksiyaning hosilasi

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases} \tag{21.1}$$

tenglamalar berilgan bo'lsin. Bu yerda t $[T_1, T_2]$ kesmadagi qiymatlarni qabul qiladi. t ning har bir qiymatiga x va y ning aniq qiymatlari to'g'ri keladi. Agar x va y ni $0xy$ koordinata tekisligidagi nuqtaning koordinatalari deb qaralsa, u holda t ning har bir qiymatiga tekislikning ma'lum bir nuqtasi to'g'ri keladi. t ning qiymatlari T_1 dan T_2 gacha o'zgarsa, bu nuqta tekislikda biror egri chiziqni chizadi. (21.1) tenglamalar ana shu egri chiziqning **parametrik tenglamalari** deyiladi, t parametr deyiladi.

Bu egri chiziq qandaydir $y=f(x)$ funksiyaning grafigi bo'lsa, u holda $y=f(x)$ funksiya (21.1) parametrik tenglamalari yordamida berilgan deyiladi. x bilan y orasidagi bog'lash (21.1) tenglamalardan t ni yo'qotish orqali o'rnatiladi.

Faraz qilaylik, $x = \varphi(t)$ funksiya $t = \Phi(x)$ teskari funksiyaga ega bo'lsin.

U holda $t = \Phi(x)$ ni (21.1) ning ikkinchi tenglamasiga qo'ysak y ni x ning funksiyasi sifatida aniqlaydigan $y=\psi[\Phi(x)]$ yoki $y=f(x)$ tenglikka ega bo'lamiz.

Shunday qilib (21.1) tenglamalar qandaydir $y=f(x)$ funksiyani aniqlar ekan.

3–misol: $M_0(x_0, y_0)$ nuqtadan o'tib $\vec{s} = m\vec{i} + n\vec{j}$ yo'naltiruvchi vektorga ega to'g'ri chiziqning parametrik tenglamalari yozilsin.

Yechish. Bu to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n}$ ko'rinishga ega ekanligi ma'lum. $\frac{x-x_0}{m} = t, \frac{y-y_0}{n} = t$ deb belgilasak $x-x_0=mt$, $y-y_0=nt$ yoki $\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt \end{cases}$ to'g'ri chiziqning **parametrik tenglamalari** hosil bo'ladi.

4-misol. $\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t \end{cases} \quad (0 \le t \le 2\pi, \ R > 0)$

tenglamalar aylananing parametrik tenglamalari ekanini ko'rsatamiz. Tenglamalarni kvadratga ko'tarib qo'shsak

$$x^2+y^2 = R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t = R^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = R^2$$

yoki $x^2+y^2=R^2$ hosil bo'ladi. Bu markazi koordinata boshida bo'lib radiusi R ga teng aylananing **kanonik tenglamasi** ekani ma'lum.

5-misol. $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \ (0 \le t \le 2\pi, a > 0, \ b > 0) \end{cases}$

tenglamalar ellipsning kanonik tenglamalari ekanini ko'rsatamiz. Tenglamalarni birinchisini a ga, ikkinchisini b ga bo'lib ularni

$$\begin{cases} \frac{x}{a} = \cos t, \\ \frac{y}{b} = \sin t \end{cases}$$

ko'rinishda yozamiz. Bu tenglamalarni kvadratga ko'tarib qo'shsak

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \quad \text{yoki} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{в^2} = 1$$

ellipsning kanonik tenglamasiga ega bo'lamiz.

6-misol. $\begin{cases} x = acht, \\ y = bsht \end{cases}$

tenglamalar giperbolaning parametrik tenglamalari ekanini ko'rsatamiz ($a>0$, $b>0$). Tenglamaning birinchisini a ga ikkinchisini b ga bo'lsak $\frac{x}{a} = cht$, $\frac{y}{b} = sht$ hosil bo'ladi. Bu tenglamalarning kvadratga ko'tarib birinchi tenglamadan ikkinchisini hadlab ayirsak $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = ch^2t - sh^2t = 1$ yoki $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ giperbolaning kanonik tenglamasiga ega bo'lamiz.

Fazodagi egri chiziq ham xuddi tekislikdagi egri chiziq kabi parametrik tenglamalari yordamida berilishi mumkin.

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \eta(t) \end{cases} \tag{21.1'}$$

tenglamalar berilgan bo'lsin, bunda $t \in [T_1, T_2]$. t ning bu kesmadan olingan har bir qiymatiga x, y va z ning aniq qiymati, ya'ni $0xyz$ fazoning aniq $M(x;y;z)$ nuqtasi mos keladi. t ning qiymatlari T_1 dan T_2 gacha o'zgarganda M nuqta fazoda biror egri chiqni chizadi. (21.1') tenglamalar fazodagi ana shu **egri chiqning parametrik tenglamalari** deyiladi. t o'zgaruvchi parametr deb yuritiladi.

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

fazodagi to'g'ri chiqning parametrik tenglamasi ekanligini ko'rgan edik.

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \\ z = bt \end{cases}$$

tenglamalar vint chizig'i deb ataluvchi egri chiziqning parametrik tenglamalarini ifodalaydi. Bu egri chiziq $x^2 + y^2 = a^2$ silindrda joylashgandir.

Endi parametrik tenglamalari $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$ bilan berilgan funksiyaning hosilasini topish uchun formula chiqaramiz. $\varphi(t)$, $\psi(t)$ funksiyalar differensiallashuvchi hamda $x = \varphi(t)$ funksiya $t = \phi(x)$ teskari funksiyaga ega deb faraz qilamiz. U holda $y = \psi(t)$, $t = \phi(x)$ bo'lgani uchun y x ning murakkab funksiyasi bo'ladi, t-oraliq argument.

Shu sababli murakkab funksiyani hosilasini topish formulasiga binoan

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x \tag{21.2}$$

bo'ladi. Teskari funksiyani differensiallash qoidasiga ko'ra $t'_x = \dfrac{1}{x'_t}$, bo'lgani uchun buni (21.2)ga qo'ysak $y'_x = y'_t \cdot \dfrac{1}{x'_t} = \dfrac{y'_t}{x'_t}$ hosil bo'ladi.

Shunday qilib,
$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \tag{21.3}$$

parametrik tenglamalari bilan berilgan funksiyaning hosilasini topish formulasini hosil qilamiz.

7-misol. $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$ $\quad y'_x$ -?

Yechish. $y'_x = \dfrac{(b\sin t)'}{(a\cos t)'} = \dfrac{b\cos t}{a\cdot(-\sin t)} = -\dfrac{b}{a}ctgt$.

8-misol $\begin{cases} x = acht, \\ y = bsht. \end{cases}$ y'_x -?

Yechish. $y'_x = \dfrac{(bsht)'}{(acht)'} = \dfrac{bcht}{asht} = \dfrac{b}{a}ctht$.

9-misol $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$ y'_x -?

Yechish.

$$y'_x = \frac{(a\sin^3 t)'}{(a\cos^3 t)'} = \frac{3a\sin^2 t(\sin t)'}{3a\cos^2 t(\cos t)'} = \frac{\sin^2 t\cos t}{-\cos^2 t\sin t} = -\frac{\sin t}{\cos t} = -tgt.$$

Izoh. $y = [u(x)]^{v(x)}$ ko'rinishdagi funksiyaning hosilasini topish talab etilsa, avval berilgan tenglikni e asosga ko'ra logarifmlab keyin tenglikni x bo'yicha differensiallash ma'qul.

10-misol. $y = x^{x^2}$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish.

$\ln y = x^2 \cdot \ln x;$ $\quad \dfrac{1}{y} \cdot y' = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \dfrac{1}{x},$ $\quad y' = y[2x\ln x + x]$

yoki $\quad y' = \left(x^{x^2}\right)' = x^{x^2} \cdot x[2\ln x + 1].$

21.4. Hosilalar jadvali

$u = u(x)$, $v = v(x)$ – differensiyallanuvchi funksiyalar deb hisoblab asosiy elementar funksiyalarning hosilalari jadvalini tuzamiz va differensiyallash qoidalarini keltiramiz:

1) $C' = 0;\ C = const.$

2) $x' = 1,\ x$ – erkli o'zgaruvchi.

3) $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u',\quad \alpha = const$.

4) Xususiy holda $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$.

5) Xususiy holda $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$.

6) $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$, $a = const$, $a > 0$, $a \neq 1$.

7) Xususiy holda $(e^u)' = e^u \cdot u'$.

8) $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$, $a = const$, $a > 0$, $a \neq 1$.

9) Xususiy holda $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$.

10) $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$.

11) $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$.

12) $(tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$.

13) $(ctgu)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$.

14) $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$.

15) $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$.

16) $(arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$.

17) $(arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$.

18) $(shu)' = chu \cdot u'$.

19) $(chu)' = shu \cdot u'$.

20) $(thu)' = \frac{1}{ch^2 u} \cdot u'$.

21) $(cthu)' = -\frac{1}{sh^2u}\cdot u'$.

22) $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

23) $(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$.

24) $(Cu)' = C\cdot u'$, $\left(\frac{u}{C}\right)' = \frac{u'}{C}$, $C = const$.

25) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}$.

26) $y = f(u)$, $u = u(x)$ murakkab funksiyani hosilasi uchun $y'_x = y'_u\cdot u'_x$ o'rinli.

27) $y = f(x)$ va $x = v(y)$ o'zaro teskari funksiyalar uchun $y'_x = \frac{1}{x'_y}$ o'rinli.

28) $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$ bo'lsa $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$.

Mustaqil yechish uchun mashqlar va test savollari

1. a) $y = sh^2x$; b) $y = th^3x^2$; d) $y = \ln shx$; e) $y = \cos(chx)$ funksiyalarning hosilalarini toping?

Javob: a) $y' = 2shxchx = sh2x$; b) $y' = 6th^2x^2\cdot\frac{x}{ch^2x^2}$;

d) $y' = cthx$; e) $y' = -\sin(chx)\cdot shx$.

2. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$. y' topilsin.

Javob: $y' = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$.

3. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$. y' topilsin. *Javob*: $y'=-\sqrt{\frac{y}{x}}$.

4. $y^{n}-\frac{x+y}{x-y}=0$. y' topilsin.

Javob: $y'=-\frac{2y^2}{n(x^2-y^2)-2xy}$.

5. $a^x-e^{x-y}=0$. y' topilsin. *Javob*: $y'=1-\ln a$.

6. $x=\frac{3at}{1+t^2}$, $y=\frac{3at^2}{1+t^2}$. y'_x topilsin. *Javob*: $y'=\frac{2t}{1-t^2}$.

7. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$. y'_x topilsin.

Javob: $y'=ctg\frac{t}{2}$.

8. $x=\frac{1-t}{1+t}$, $y=\frac{2t}{1+t}$. y'_x topilsin. *Javob*: $y'_x=1$.

9. $x=\frac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}$, $y=\frac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}$. y'_x topilsin. *Javob*: $y'_x=-tg3x$.

10. $y=x^x$. y' topilsin. *Javob*: $y'=x^x(\ln x+1)$.

11. $y=(\sin x)^x$. y' topilsin.

Javob: $y'=(\sin x)^x(\ln\sin x+xctgx)$.

12. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ bo'lsa $y'(1)$ topilsin.

A) $\pm\sqrt{3}$ B) $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ D) $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\pm\frac{\sqrt{2}}{3}$ F) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

13. $e^y+xy^2+y=1$ bo'lsa $y'(0)$ topilsin.

A) 2 B) -2 D) 3 E) 4 F) -3.

14. $\begin{cases} x=\sin^2 t, \\ y=\sin 2t \end{cases}$ bo'lsa $y'\left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)$ topilsin.

A) 2 B) -2 D) 3 E) -3 F) 4.

15. 1) $(sh20)' = ch20$ 2) $(ch20)' = sh20$ 3) $(th4)' = \dfrac{1}{ch^2 4}$

4) $(cth5)' = \dfrac{1}{sh^2 4}$ tengliklardan qaysi noto'g'ri.

A) faqat 4-si B)faqat 1 va 2 D) faqat 3 va 4
E) faqat 2;3;4 F) barchasi.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Giperbolik funksiyalarni ta'riflang.
2. Giperbolik funksiyalarni hosilalarini topish formulalarini yozing.
3. Oshkormas funksiyani ta'riflang va uni hosilasini topish usulini misollar yordamida izohlang.
4. Parametrik berilgan funksiyani ta'riflang va uni hosilasini topish formulasini yozing.
5. $y = [u(x)]^{v(x)}$ ko'rinishdagi funksiyaning hosilasini topish uchun formula chiqaring.
6. Hosilalar jadvalini yozing.
7. Differensiallash qoidalarini yozing.
8. Aylananing parametrik tenglamasini yozing.
9. Ellipsning parametrik tenglamasini yozing.
10. Giperbolaning parametrik tenglamasini yozing.

22. FUNKSIYANING DIFFERENSIALI. YUQORI TARTIBLI HOSILALAR VA DIFFERENSIALLAR. URINMA VA NORMAL TENGLAMALARI

22.1. Funksiyaning differensiali va uning geometrik ma'nosi

$(a; b)$ intervalda differensiallanuvchi $y = f(x)$ funksiyani olamiz. U holda $(a; b)$ dagi istalgan x uchun

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (22.1)$$

chekli hosila mavjud bo'ladi. Umumiy holda $f'(x) \neq 0$ deb faraz qilinsa, (22.1) tenglikdan (16.5-teorema) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$ ekani kelib chiqadi, bunda $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$.

Agar oxirgi tenglikni barcha hadlarini Δx ga ko'paytirilsa

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x \qquad (22.2)$$

tenglik hosil bo'ladi. (22.2) dagi har ikkala qo'shiluvchilar ham $\Delta x \to 0$ da nolga intiladilar. Ularni Δx bilan taqqoslaymiz:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x)\Delta x}{\Delta x} = f'(x) \text{ - chekli son,} \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0.$$

Shunday qilib (22.2) tenglikdagi birinchi qo'shiluvchi Δx bilan bir xil tartibli cheksiz kichik miqdor(funksiya), ikkinchi qo'shiluvchi $\alpha \cdot \Delta x$ esa Δx ga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik miqdor. Bundan (22.2) formulada birinchi qo'shiluvchi $f'(x)\Delta x$ asosiy ekanligi kelib chiqadi. Ana shu qo'shiluvchi **funksiyaning differensiali** deyiladi.

Funksiyaning differensiali dy yoki $df(x)$ kabi belgilanadi.

Demak, $$dy = f'(x)\Delta x. \qquad (22.3)$$

Shunday qilib funksiyaning differensiali uning hosilasini argument orttirmasiga ko'paytirilganiga teng ekan. $y=x$ bo'lganda $y'=x'=1$ bo'lib, $dy=dx=1\cdot\Delta x$ yoki $dx=\Delta x$, ya'ni erkli o'zgaruvchining differensiali uning orttirmasiga tengligi kelib chiqadi. Buni hisobga olsak (22.3) formulani

$$dy = f'(x)dx = y'dx \qquad (22.4)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bundan $y'=\dfrac{dy}{dx}$, ya'ni hosila funksiya differensialining argument differensialiga nisbati ekanligi kelib chiqadi.

(22.4) tenglikdan ko'rinib turibdiki funksiyani differensialini topish masalasi uning hosilasini topishga teng kuchli, chunki funksiyaning hosilasi erkli o'zgaruvchining orttirmasi Δx ga ko'paytirilsa funksiyaning differensiali hosil bo'ladi. Shunday qilib hosilalarga tegishli bo'lgan teoremalar va formulalarning ko'pchiligi differensiallar uchun ham to'g'ri bo'ladi.

Xususan, differensiallanuvchi u va v funksiyalar uchun differensiallash qoidalaridagi singari

$d(u\pm v)=du\pm dv$, $d(cu)=cdu$, $c=const$, $d(u\cdot v)=vdu+udv$,

$d\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{vdu-udv}{v^2}$ formulalar to'g'ri bo'ladi.

1-misol. $y=tgx$ funksiyaning differensialini toping.

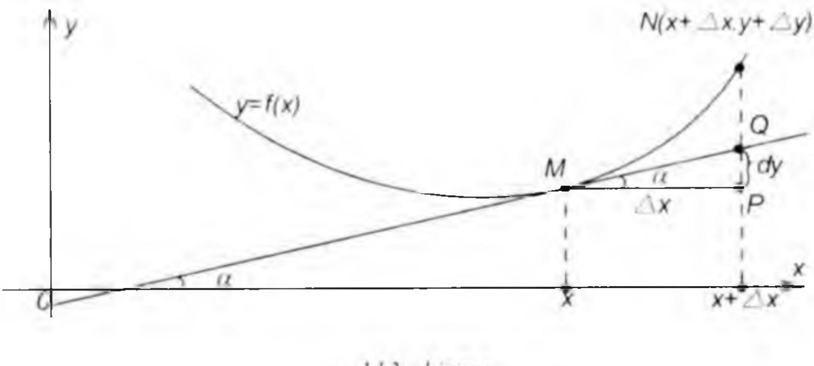
Yechish. $dy=y'dx=(tgx)'dx=\dfrac{1}{\cos^2 x}dx$.

2-misol. $y=e^x$ funksiyaning differensialini toping.

Yechish. $dy = y'dx = \left(e^{x^2}\right)'dx = e^{x^2}\left(x^2\right)'dx = e^{x^2} 2xdx$.

Endi differensialning geometrik ma'nosi bilan tanishamiz. Differensiallanuvchi $y = f(x)$ funksiyani va unga mos egri chiziqni qaraymiz(112-chizma).

Egri chiziqning $M(x, y)$ nuqtasini olib shu nuqtada egri chiziqqa urinma o'tkazamiz. Urinmaning Ox o'qning musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan burchakni α bilan belgilaymiz. Erkli o'zgaruvchi x ga Δx orttirma beramiz, u holda funksiya $PN = \Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ orttirmani oladi. Chizmadagi ΔMPQ dan $\frac{PQ}{MP} = tg\alpha$ yoki $PQ = MPtg\alpha = tg\alpha \cdot \Delta x$. Ammo hosilaning geometrik ma'nosiga binoan $tg\alpha = f'(x)$ ekanini hisobga olsak $PQ = f'(x)\Delta x$ bo'ladi. Differensialning ta'rifiga asosan $dy = f'(x)\Delta x$ edi. Shunday qilib, $PQ = dy$. Bu tenglik $f(x)$ funksiyaning x va Δx ning berilgan qiymatlariga mos keluvchi differensiali $y = f(x)$ egri chiziqqa $M(x, f(x))$ nuqtada o'tkazilgan urinmaning ordinatasi orttirmasiga teng ekanligini bildiradi. **Differensialning geometrik ma'nosi** shundan iborat.



112-chizma

22.2. Taqribiy hisoblashda differensialdan foydalanish

Yuqorida chiqarilgan (22.2) tenglikni $dy = f'(x)\Delta x$ ekanini hisobga olib $\Delta y = dy + \alpha\Delta x$ ko'rinishda yozamiz, bunda $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$.

Buni dy ga bo'lsak $\dfrac{\Delta y}{dy} = 1 + \dfrac{\alpha\Delta x}{dy}$ yoki $\Delta x \to 0$ da limitga o'tsak

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta y} = 1 + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha\Delta x}{f'(x)\Delta x} = 1 + \frac{1}{f'(x)} \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 1 + \frac{1}{f'(x)} \cdot 0 = 1$$

hosil bo'ladi. Shunday qilib $f'(x) \neq 0$ bo'lganda dy va Δy $\Delta x \to 0$ da ekvivalent cheksiz kichik miqdorlar ekan. Demak, $\Delta y \approx dy$ yoki $\Delta y \approx f'(x)\Delta x$.

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ ekanini hisobga olsak $f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$ yoki bundan

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x \qquad (22.5)$$

hosil bo'ladi.

Bu formuladan foydalanib biror x nuqtada funksiyani va uning hosilasining qiymatini bilgan holda unga yaqin boshqa $x + \Delta x$ nuqtada funksiyaning taqribiy qiymatini hisoblash mumkin. (22.5) tenglikda Δx qanchalik kichik bo'lsa tenglik shunchalik aniq bo'ladi.

3-misol. $(1 + \Delta x)^n \approx 1 + n\Delta x$ taqribiy tenglikning to'g'riligi ko'rsatilsin, bunda Δx etarlicha kichik son.

Yechish. $f(x) = x^n$ funksiyani qaraymiz. Bu holda $\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n$, $dy = n \cdot x^{n-1}\Delta x$ bo'lib (22.5) tenglikka ko'ra $(x + \Delta x)^n - x^n \approx nx^{n-1}\Delta x$ yoki $(x + \Delta x)^n \approx x^n + nx^{n-1}\Delta x$ bo'ladi. Bunga $x=1$ qiymatni qo'ysak $(1 + \Delta x)^n \approx 1 + n\Delta x$ taqribiy hisoblash formulasiga ega bo'lamiz. Bunga asoslanib quyidagilarni hosil qilamiz:

1) $(1{,}03)^5=(1+0{,}03)^5\approx 1+5\cdot 0{,}03=1{,}15$ ($\Delta x=0{,}03,\ n=5$).

2) $\sqrt{1{,}005}\approx 1+\frac{1}{2}\cdot 0{,}005=1{,}0025$ ($\Delta x=0{,}005,\ n=\frac{1}{2}$).

3) $$\sqrt[3]{0{,}998}=\sqrt[3]{1-0{,}012}\approx 1+\frac{1}{3}\cdot(-0{,}012)=$$
$$=1-0{,}004=0{,}996\ .\ \left(\Delta x=-0{,}012\ ,\quad n=\frac{1}{3}\right)$$

4) $$\sqrt[4]{267}=\sqrt[4]{256+11}=\sqrt[4]{256\left(1+\frac{11}{256}\right)}=4\sqrt[4]{1+\frac{11}{256}}\approx$$
$$\approx 4\left(1+\frac{1}{4}\cdot\frac{11}{256}\right)==4(1+0{,}0107)=4{,}0428.\left(\Delta x=\frac{11}{256},\ n=\frac{1}{4}\right)$$

4-misol. $\cos 61^0$ hisoblansin.

Yechish. $f(x)=\cos x$ funksiyani qaraymiz. Bu funksiya uchun (21.5) formula $\cos(x+\Delta x)\approx\cos x-\sin x\cdot\Delta x$ ko'rinishni oladi.

$$x=60^0=\frac{\pi}{3},\ \Delta x=1^0=\frac{\pi}{180}\approx 0{,}01745$$

desak, $$\cos 61^0\approx\cos 60^0-\sin 60^0\cdot 1^0=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0{,}01745\approx 0{,}4849$$

hosil bo'ladi.

22.3. Yuqori tartibli hosilalar

$(a;b)$ intervalda differensiallanuvchi $y=f(x)$ funksiyani olamiz. Bu funksiyani hosilasi $f'(x)$ funksiyaning hosilasi haqida gapirish mumkin.

1-ta'rif. Berilgan funksiya hosilasidan olingan hosila (agar u mavjud bo'lsa) shu funksiyaning **ikkinchi tartibli hosilasi** yoki **ikkinchi hosilasi** deyiladi va y'' yoki $f''(x)$ kabi belgilanadi: $y''=(y')'=f''(x)$.

Masalan, $y = x^7$ bo'lsa, u holda

$$y' = 7x^6, \quad y'' = (7x^6)' = 7 \cdot 6 \cdot x^5 = 42x^5.$$

2-ta'rif. Funksiyaning Ikkinchi tartibli hosilasidan olingan hosila (agar u mavjud bo'lsa) shu funksiyaning **uchinchi tartibli hosilasi yoki uchinchi hosila** deyiladi va y''' yoki $f'''(x)$ kabi belgilanadi.

Masalan, $y = x^4$ bo'lsa, u holda $y' = 4x^3$, $y'' = (4x^3)' = 12x^2$, $y''' = (12x^2)' = 24x$.

3-ta'rif. Funksiyaning $(n$-1$)$-tartibli hosilasidan olingan hosila (agar u mavjud bo'lsa) shu funksiyaning **n-tartibli hosilasi** yoki **n-hosilasi** deyiladi $y^{(n)}$ yoki $f^{(n)}(x)$ kabi belgilanadi: $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)' = f^{(n)}(x)$.

Qonuniyatni saqlab qolish maqsadida n=0 bo'lgan xususiy holda $f^{(0)}(x) = f(x)$ deb olamiz, ya'ni nolinchi hosila funksiyaning o'ziga teng.

To'rtinchi, beshinchi va undan yuqori tartibli hosilalar Rim raqamlari bilan ham belgilanadi: y^{IV}, y^{V}, y^{VI}, ...

5-misol. $y = \sin x$ bo'lsa, $y^{(n)}$ topilsin.

Yechish. $y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

$$y'' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

....

$y^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$. Shunday qilib, $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$.

Shu formulaga asoslanib sinx funksiyaning 102-hosilasini topamiz:

$$(\sin x)^{(102)} = \sin\left(x + 102 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x + 51 \cdot \pi) =$$

$$= \sin(x + \pi + 50 \cdot \pi) = \sin(x + \pi) = -\sin x$$

Demak, $(\sin x)^{(102)} = -\sin x$.

6-misol. $y = \cos x$ bo'lsa, $y^{(n)}$ topilsin.

Yuqoridagi singari $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$ ekanini ko'rsatish mumkin.

Ba'zi-bir elementar funksiyalarning istalgan tartibli hosilalari uchun ham formulalar shunga o'xshash chiqariladi.

O'quvchiga $y = e^{kx}, y = x^k, y = a^x, y = \ln x$ funksiyalarning n-tartibli hosilalari uchun formulalarni o'zi topishini maslahat beramiz. n-tartibli hosilalar uchun $(u+v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}$, $(cu)^{(n)} = cu^{(n)}$ tengliklarning to'g'riligini isbotlash qiyin emas (c=const).

Shuningdek,

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + \frac{n}{1}u^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}u^{(n-2)}v'' + \ldots + uv^{(n)} \qquad (22.6)$$

formulaning to'g'ri ekanligini ko'rsatish mumkin.

Bu yerdagi $u = u(x)$, $v = v(x)$ funksiyalar n-tartibgacha hosilaga ega bo'lgan funksiyalar. (22.6) formula **Leybnis formulasi** deb ataladi.

22.4. Oshkormas funksiyaning yuqori tartibli hosilasi

x ning funksiyasi y $F(x, y) = 0$ tenglama yordamida oshkormas shaklda berilgan bo'lsin. Bu funksiyaning y' hosilasini topish usuli bilan misolda tanishgan edik. Uning yuqori tartibli hosilalarini topish usuli bilan ham misolda tanishamiz.

7-misol. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ tenglama bilan oshkormas holda berilgan y funksiyaning ikkinchi hosilasini toping.

Yechish. Oldin y' ni topamiz. y ni x ning funksiyasi ekanligini hisobga olib berilgan tenglamani differensiallasak $\frac{2x}{a^2}+\frac{2y\cdot y'}{b^2}=0$ hosil bo'di. Bundan $\frac{y\cdot y'}{b^2}=-\frac{x}{a^2}$; $y\cdot y'=-\frac{b^2x}{a^2}$; $y'=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y}$ va

$y''=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x'y-xy'}{y^2}$. y'' ga topilgan y' ni qo'yamiz:

$$y''=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{y+x\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y}}{y^2}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{a^2y^2+b^2x^2}{a^2y^3}.$$

Ammo $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ tenglamadan $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ kelib chiqishini hisobga olsak $y''=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{a^2b^2}{a^2y^3}$ yoki $y''=-\frac{b^4}{a^2y^3}$ ga ega bo'lamiz.

y''', y^{IV}, y^{V} va hokazo hosilalarni ham shunga o'xshash topish mumkin.

22.5. Parametrik berilgan funksiyaning yuqori tartibli hosilalari

x ning differensiallanuvchi funksiyasi y $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t) \end{cases}$ tenglamalar bilan parametrik berilgan bo'lsin, bunda $x=\varphi(t)$ funksiya $t=\Phi(x)$ teskari funksiyaga ega. U holda y'_x hosila

$$y_x' = \frac{y_t'}{x_t'} \qquad (22.7)$$

formula yordamida topilishi isbotlangan edi. Ikkinchi hosila y_{xx}'' ni topish uchun (22.7) tenglikni t x ning funksiyasi ekanini hisobga olib x bo'yicha differensiallaymiz.

$$y_{xx}'' = \left(y_x'\right)_x' = \left(\frac{y_t'}{x_t'}\right)_t' \cdot t_x' = \frac{y_{tt}'' \cdot x_t' - y_t' \cdot x_{tt}''}{\left(x_t'\right)^2} \cdot \frac{1}{x_t'}.$$

Shunday qilib $$y_{xx}'' = \frac{y_{tt}'' \cdot x_t' - y_t' \cdot x_{tt}''}{\left(x_t'\right)^3}.$$

Bu yerda $\varphi(t)$, $\psi(t)$ funksiyalar ikkinchi tartibgacha hosilalarga ega deb faraz qilindi.

y''', y^{IV}, y^{V} va hokazo hosilalarni ham shunga o'xshash topish mumkin.

8-misol. $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \qquad a = const \end{cases}$

parametrik tenglamalari yordamida berilgan x ning funksiyasi y ning ikkinchi hosilasini toping.

Yechish. $y_x' = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{(a\sin t)'}{(a\cos t)'} = \frac{a\cos t}{a\sin t} = -ctgt$,

$$y_{xx}'' = (-ctgt)_t' \cdot t_x' = \frac{1}{\sin^2 t} \cdot \frac{1}{x_t'} = \frac{1}{\sin^2 t} \cdot \frac{1}{(a\cos t)_t'} = -\frac{1}{a\sin^3 t}.$$

22.6. Yuqori tartibli differensiallar

Differensiallanuvchi $y = f(x)$ funksiyani qaraymiz. Bu funksiyani differensiali $dy = f'(x)dx$ yana x ning funksiyasi bo'ladi. Shuning uchun bu funksiyaning differensiali haqida gapirish mumkin.

4-ta'rif. Funksiyaning differensialidan olingan differensial (agar u mavjud bo'lsa) shu funksiyaning **ikkinchi tartibli differensiali** yoki **ikkinchi differensiali** deyiladi va d^2y kabi belgilanadi.

Shunday qilib, $d(dy) = d^2y$.

5-ta'rif. Funksiyaning ikkinchi tartibli differensialidan olingan differensial (agar u mavjud bo'lsa) shu funksiyaning **uchinchi tartibli differensiali** yoki **uchinchi differensiali** deyiladi va d^3y kabi belgilanadi.

Shunday qilib, $d(d^2y) = d^3y$.

6-ta'rif. Funksiyaning (n-1)- tartibli differensialidan olingan differensial (agar u mavjud bo'lsa) shu funksiyaning n-**tartibli differensiali** yoki n-**differensiali** deyiladi va $d^n y$ kabi belgilanadi.

Shunday qilib, $d(d^{n-1}y) = d^n y$.

Yuqori tartibli differensiallarni hosilalar orqali ifodalaymiz. $dx = \Delta x = const$ ekanini hisobga olib ikkinchi tartibli differensial uchun $d^2y = d(dy) = d(y'dx) = (y'dx)'dx = y''dxdx = y''(dx)^2 = y''dx^2$ ga ega bo'lamiz.

Shunday qilib, $d^2y = y''dx^2$.

Bu yerda $dx^2 = (dx)^2$, ya'ni argument differensiali darajasini yozishda qavsni tashlab yozish qabul qilingan.

Shunga o'xshash uchinchi tartibli differensial uchun

$$d^3y = d(d^2y) = d(y''dx^2) = (y''dx^2)'dx = y'''dx^2dx = y'''(dx)^3 = y'''dx^3$$

tenglikka ega bo'lamiz. Demak, $d^3y = y'''dx^3$. Bu jarayonni davom ettirib, n-tartibli differensial uchun $d^n y = y^{(n)} dx^n$ formulani hosil qilamiz, bunda $dx^n = (dx)^n$.

Yuqori tartibli differensiallarni hisoblash uchun chiqarilgan formulalardan istalgan tartibli hosilani differensiallarning nisbati sifatida tasvirlovchi

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad y''' = \frac{d^3 y}{dx^3}, \quad \ldots, \quad y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$$

tengliklarga ega bo'lamiz.

Shu paytgacha $y = f(x)$ munosabatda x erkli o'zgaruvchi deb qaradik. Endi x oraliq argument bo'lgan holni qaraymiz, ya'ni $y = f(x)$ murakkab funksiyaga ega bo'laylik, bunda $x = \varphi(t)$. Murakkab funksiyaning hosilasini topish qoidasiga ko'ra $y'_t = y'_x \cdot x'_t$ bo'lgani uchun $dy = y'_t dt = y'_x \cdot x'_t dt = y'_x dx = y'dx$.

Shunday qilib $y = f(x)$ funksiyaning differensiali x erkli o'zgaruvchi bo'lganda qanday ko'rinishga ega bo'lgan bo'lsa u x oraliq argument ya'ni biror yangi o'zgaruvchining funksiyasi bo'lganda ham xuddi o'sha ko'rinishga ega bo'lar ekan. Birinchi tartibli differensialning bu xossasi **differensial shaklning invariantligi** deb ataladi.

9-misol. $y = \sin\sqrt{t}$ funksiyaning differensialini toping.

Yechish. $\sqrt{t} = x$ desak $y = \sin x$ murakab funksiyaga ega bo'lamiz. U holda $dy = y'dx = (\sin x)' dx = \cos x dx = \cos\sqrt{t}\, d\sqrt{t}$.

Murakkab funksiyaning ikkinchi tartibli differensiali invariantlik xossasiga ega emasligini, ya'ni $d^2 y \neq y'' dx^2$ ekanini ko'rsatamiz.

Qaralayotgan holda $dx = d\varphi(t) = \varphi'(t)dt \neq const$ ekanini hisobga olib, ikkinchi differensial uchun

$$d^2 y = d(dy) = d(y'dx) = dy'dx + y'd(dx) = y''dx^2 + y'd^2 x$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Buni x erkli o'zgaruvchi bo'lgan holdagi $d^2y = y''dx^2$ bilan taqqoslab ularni tashqi ko'rinishlari o'xshash emasligini ko'ramiz. Boshqacha aytganda ikkinchi tartibli differensial invariantlik xossasiga ega emas ekan. Shunga o'xshash yuqori tartibli differensiallar ham invariantlik xossasiga ega bo'lmasligini ko'rsatish mumkin.

Invariantlik xossasi faqat birinchi tartibli differensiallar uchun o'rinli.

10-misol. $y = tgx$ funksiyaning birinchi va ikkinchi tartibli differensiallarini toping, x-erkli o'zgaruvchi.

Yechish. $dy = y'dx = (tgx)'dx = \dfrac{1}{\cos^2 x}\cdot dx$,

$$d^2y = y''dx^2 = \left(\cos^{-2} x\right)'dx^2 = -2\cos^{-3} x\cdot(\cos x)'dx^2 = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}dx.$$

11-misol. $y = \sin x$, $x = e^t$ murakkab funksiyaning birinchi va ikkinchi tartibli differensiallarini toping.

Yechish. $dy = y'dx = \cos x dx$,

$$d^2y = d(y'dx) = y''dx^2 + y'd^2x = -\sin x dx^2 + \cos x d^2x.$$

22.7. Ikkinchi hosilaning mexanik ma'nosi

To'g'ri chiziq bo'ylab harakat qiluvchi jismning o'tgan s yo'li bilan t vaqt orasidagi bog'lanish $s = f(t)$ formula bilan ifodalansin.

Hosilaning mexanik ma'nosiga binoan jismning oniy tezligi yo'ldan vaqt bo'yicha olingan hosilaga teng, ya'ni $v(t) = s'(t) = \dfrac{ds}{dt}$.

Biror t paytda jismning tezligi v ga teng bo'lsin. Agar harakat tekis bo'lmasa, u holda t paytdan keyin o'tgan Δt vaqt oralig'ida tezlik Δv ga o'zgaradi.

$a_{o'rt} = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ nisbat Δt vaqtdagi **o'rtacha tezlanish** deyiladi.

O'rtacha tezlanishning vaqt orttirmasi Δt nolga intilgandagi limiti berilgan paytdagi yoki oniy tezlanish deb ataladi: $a = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$.

Demak, oniy tezlanish tezlikdan vaqt bo'yicha olingan hosilaga teng. Ammo $v = \frac{ds}{dt}$ bo'lgani uchun $a = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2 s}{dt^2}$, ya'ni **to'g'ri chiziqli harakat tezlanishi yo'ldan vaqt bo'yicha olingan ikkinchi hosilaga teng.** $s = f(t)$ ga asosan: $a = f''(t)$.

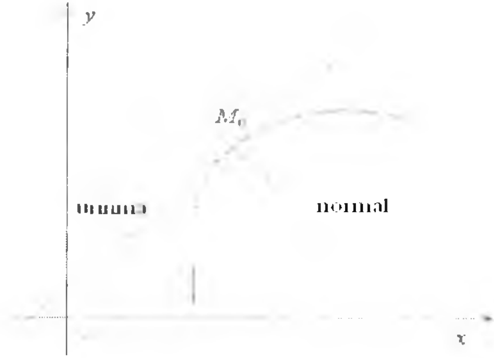
Bu ikkinchi tartibli hosilaning **mexanik ma'nosi**dir.

22.8. Urinma va normal tenglamalari

Tenglamasi $y = f(x)$ bo'lgan egri chiziqni qaraymiz, bunda $f(x)$ differensiallanuvchi funksiya. Bu egri chiziqda $M_0(x_0, y_0)$ nuqtani olamiz va bu nuqtada egri chiziqqa urinma o'tkazamiz. O'tkazilgan urinma Oy o'qqa parallel emas deb faraz qilib, uning tenglamasini yozamiz. Berilgan M_0 nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasiga ko'ra urinmaning tenglamasi $y - y_0 = k(x - x_0)$ ko'rinishga ega bo'ladi. Hosilaning geometrik ma'nosiga binoan $k = f'(x_0)$ bo'lgani uchun urinma tenglamasi $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ ko'rinishni oladi, bunda $y_0 = f(x_0)$.

7-ta'rif. Urinish nuqtasidan o'tadigan va urinmaga perpendikulyar to'g'ri chiziq egri chiziqqa berilgan nuqtada **normal** deb ataladi (113-chizma).

Ta'rifdan qaralayotgan nuqtada egri chiziq urinmaga ega bo'lmasa u normalga ham ega bo'lmasligi kelib chiqadi. $f'(x)$ hosila mavjud bo'lmaganda egri chiziqqa uning $M(x; f(x))$ nuqtasida Oy o'qqa parallel bo'lmagan urinma o'tkazib bo'lmaydi. Endi normalni tenglamasini yozamiz.



113-chizma.

Ikki to‘g‘ri chiziqning perpendikulyarlik shartiga ko‘ra normalning burchak koeffitsientini k_n urinmaning burchak koeffitsienti $k = f'(x_0)$ bilan

$$k_n = -\frac{1}{k} = -\frac{1}{f'(x_0)}$$

tenglik orqali bog‘langan.

Demak, $y = f(x)$ egri chiziqqa $M_0(x_0, y_0)$ nuqtasidagi normal tenglamasi

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

ko‘rinishga ega.

12-misol. $y = x^4$ egri chiziqqa uning $M_0(1; 1)$ nuqtasida o‘tkazilgan urinma va normalning tenglamalari yozilsin.

Yechish. $y' = 4x^3$ bo‘lgani uchun urinmaning burchak koeffitsienti $y'|_{x=1} = 4 \cdot 1^3 = 4$ ga teng. Demak, urinma tenglamasi: $y - 1 = 4(x - 1)$ yoki $y = 4x - 3$.

Normal tenglamasi: $y - 1 = -\frac{1}{4}(x - 1)$ yoki $y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$.

Mustaqil yechish uchun mashqlar va test savollari

Funksiyaning differensiallari topilsin.

1. $y=\sqrt{a^2+x^3}$. *Javob*: $dy=\dfrac{3x^2}{2\cdot\sqrt{a^2+x^3}}dx$.

2. $y=e^{arctgx}$. *Javob*: $dy=\dfrac{e^{arctgx}}{1+x^2}dx$.

3. $y=(\arcsin x^2)^3$. *Javob*: $dy=\dfrac{6x(\arcsin x^2)^2}{\sqrt{1-x^4}}dx$.

4. $y=\dfrac{1}{3}tg^3x+tgx$. *Javob*: $dy=\dfrac{1}{\cos^4 x}dx$.

5. $y=2x^3+3x^2+4x+5$. y'' topilsin. *Javob*: $6(2x+1)$.

6. $y=\sqrt[7]{x^3}$. y''' topilsin. *Javob*: $\dfrac{132}{343}x^{-\frac{19}{7}}$.

7. $y=\ln\sin x$. y'''topilsin. *Javob*: $2ctgx\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

8. $y=a^x$. $y^{(n)}$ topilsin. *Javob*: $(\ln a)^n a^x$.

9. $y=\ln(1+x)$. $y^{(n)}$ topilsin. *Javob*: $(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n-1)}{(1+x)^n}$.

10. $y^2=4ax$. $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ topilsin. *Javob*: $-\dfrac{4a^2}{y^3}$.

11. $b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0$. $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ topilsin. *Javob*: $-\dfrac{3b^6x}{a^4y^5}$.

12. $y^2-2xy=0$. $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ topilsin. *Javob*: 0.

13. $\begin{cases}x=a(1-t),\\ y=at\end{cases}$. $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ topilsin. *Javob*: 0.

14. $\begin{cases} x=\sin 2t, \\ y=\sin^2 t \end{cases}$ $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ topilsin. *Javob*: $\dfrac{1}{\cos^3 2t}$.

15. $\begin{cases} x=\dfrac{1-t}{1+t}, \\ y=\dfrac{2t}{1+t} \end{cases}$ $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ topilsin. *Javob*: 0.

16. 1) $\sqrt{4{,}012}$; 2) $\dfrac{1}{\sqrt{4{,}028}}$; 3) $\dfrac{5}{\sqrt[3]{1{,}002}}$; 4) $\sqrt[3]{0{,}9843}$ ifodalar $(1+\Delta x)^n \approx 1+n\Delta x$ formuladan foydalanib hisoblansin. *Javob*: 1)2,003;2)0,498;3)4,997;4) 0,995.

17. x ning $30^0 1'$;$30^0 2'$; $30^0 3'$ qiymatlarida $y=\sin x$ funksiyaning qiymatlari jadvali yozilsin, bunda $1'=\dfrac{\pi}{180\cdot 60}=0{,}00029$. *Javob*: 0,50025; 0,50050; 0,50075.

18. $\ln 2{,}001$ hisoblansin. *Javob*: 0,69365.

19. Leybnis formulasidan foydalanib $y=e^{4x}\sin 3x$ funksiyaning beshinchi hosilasi topilsin. Javob: $-e^{4x}(3116\sin 3x+237\cos 3x)$.

20. $y=x\cos x$. $y^{(5)}$ topilsin. *Javob*: $4\sqrt{2}\ e^x\cos\left(x+\dfrac{5}{4}\pi\right)$.

21. $s=A\sin(\omega t+\varphi)$ qonuniyat asosida garmonik tebranma harakat qilayotgan jismning oniy tezlanishi topilsin. Javob: $-\omega^2 s$.

22. Jism $x=Ae^{-kt}\sin\omega t$ qonuniyat asosida so‘nuvchi tebranma harakat qilayotgan bo‘lsa, uning oniy tezlanishi topilsin. *Javob*: $\dfrac{d^2x}{dt^2}=-(\omega^2+k^2)x-2kv$; v-tezlik.

23. $y=x^3-3x^2-x+5$ egri chiziqqa uning $M(3;\ 2)$ nuqtasida o‘tkazilgan urinma va normal tenglamalari yozilsin. *Javob*: urinma: $8x-y-22=0$; normal: $x+8y-19=0$.

24. $x^2+y^2=52$ aylanaga $2x+3y-6=0$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan urinmalar tenglamalari yozilsin. *Javob*: $2x+3y\pm 26=0$.

25. $y^2=20x$ parabolaning qaysi nuqtasida o'tkazilgan urinma Ox o'q bilan 45^0 burchak tashkil etadi. *Javob*: $(5;10)$.

26. $y=\ln\sqrt{\dfrac{x}{x+5}}$ bo'lsa dy topilsin.

A) $\dfrac{dx}{x(x+5)}$ B) $\dfrac{dx}{x+5}$ D) $\dfrac{dx}{x^2+6x}$ E) $\dfrac{dx}{x^2+5x}$ F) $\dfrac{dx}{2x+5}$.

27. $\ln 75=4{,}3175$ ekanini bilgan holda $\ln 73$ jadvalsiz taqriban hisoblansin.

A) 4,2908 B) 4,2712 D) 4,2613 E) 4,2819 F) 4,2514.

28. $y=\cos ax$ bo'lsa $y^{(12)}$ topilsin.

A) $a^{12}\sin ax$ B) $a^{12}\cos ax$ D) $-a^{12}\sin ax$

E) $-a^{12}\cos ax$ F) $a^{12}\sin x$.

29. $x=a\cos 2t,\ y=b\sin^2 t$ bo'lsa $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ topilsin.

A) $-\dfrac{b}{2a}tg2t$ B) 0 D) $abctg2t$ E) $\dfrac{a}{b}tg2t$ F) $\dfrac{b}{2a}ctg2t$.

30. $4x^2-9y^2=36$ giperbolaning qaysi nuqtasida o'tkazilgan urunma $2y+5x=10$ to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'ladi?

A) $(3\sqrt{2};\ 2)$ B) $(-3\sqrt{2};\ 2)$ D) $(3\sqrt{2};\ -2)$

E) $(-3\sqrt{2};\ -2)$ F) bunday nuqta yo'q.

31. $y=|\sin x|$ funksiyaning grafigiga uning $(k\pi;0)$ nuqtasida nechta urunma o'tkazish mumkin, bunda $k\in Z$.

A) 2 B) 3 D) 1 E) 4 F) urinma o'tkazib bo'lmaydi.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Funksiyaning differensiali deb nimaga aytiladi?
2. Funksiyaning differensiali va hosilasi orasida qanday bog‘lanish bor?
3. Funksiya differensialining geometrik ma’nosi nimadan iborat?
4. Differensialdan foydalanib taqribiy hisoblash formulasini yozing.
5. Funksiyaning n-tartibli hosilasi deb nimaga aytiladi?
6. Leybnis formulasini yozing.
7. Oshkormas funksiyaning yuqori tartibli hosilalari qanday topiladi?
8. Parametrik berilgan funksiyalarning yuqori tartibli hosilalari qanday topiladi?
9. Funksiyaning n-tartibli differensiali deb nimaga aytiladi?
10. Yuqori tartibli differensiallar va hosilalar orasida qanday bog‘lanish bor?
11. Differensial shaklining invariantlik xossasi nima? U nechanchi tartibli differensiallar uchun saqlanadi?
12. Ikkinchi tartibli hosilaning mexanik ma’nosini ayting.
13. Egri chiziqqa urinma va normal tenglamalarini yozing.

23. DIFFERENSIALLANUVCHI FUNKSIYALAR HAQIDA BA'ZI TEOREMALAR

23.1. Ferma teoremasi. $(a; b)$ intervalda aniqlangan $y = f(x)$ funksiya shu intervalning biror nuqtasida eng katta va eng kichik qiymatlaridan birini qabul qilsin. U holda funksiya shu nuqtada hosilaga ega bo'lsa funksiyaning hosilasi nolga teng bo'ladi.

Isboti. Aniqlik uchun funksiya $(a; b)$ intervalning $x=c$ nuqtasida o'zining eng katta qiymatiga erishadi va $f(c) = M$ deb olib $f'(c) = 0$ ekanini ko'rsatamiz.

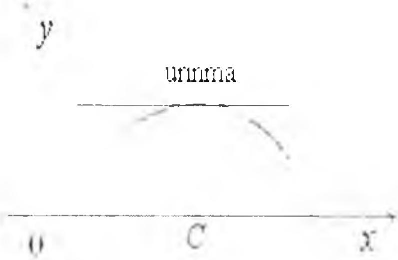
Hosilaning ta'rifiga ko'ra $f'(c) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$.

c nuqtada funksiya eng katta qiymatiga ega bo'lganligi sababli istalgan musbat yoki manfiy Δx uchun $f(c) \geq f(c + \Delta x)$ yoki $f(c + \Delta x) - f(c) \leq 0$ bo'ladi.

Bundan, $\Delta x > 0$ bo'lganda $\dfrac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq 0$ bo'lib, $f'(c) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq 0$ kelib chiqadi. Agar $\Delta x < 0$ bo'lsa $\dfrac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geq 0$ va $f'(c) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geq 0$ kelib chiqadi. Shunday qilib $f'(c)$ hosila musbat ham bo'laolmaydi va manfiy ham bo'laolmaydi. Demak, $f'(c) = 0$.

Ferma teoremasiga quyidagicha geometrik izoh berish mumkin. $f'(c) = 0$ tenglikdan hosilaning geometrik ma'nosini hisobga olsak $tg\alpha = 0$ yoki $\alpha = 0$ kelib chiqadi, bunda α $y = f(x)$ egri chiziqqa

$M(c;\ f(c))$ nuqtasida o'tkazilgan urinmaning $0x$ o'qning musbat yo'nalishi bilan tashkil etgan burchagi.



114-chizma.

Demak, egri chiziqning $M(c;\ f(c))$ nuqtasida o'tkazilgan urinma Ox o'qqa parallel bo'lar ekan (114-chizma).

23.2. Roll teoremasi. Agar $y = f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz, $(a;b)$ intervalda differensiallanuvchi, bo'lib kesmaning oxirlarida nolga teng ($f(a) = f(b) = 0$) qiymatlarni qabul qilsa, u holda $(a;b)$ intervalda kamida bitta $x=c$ nuqta mavjud bo'lib unda hosila nolga teng, ya'ni $f'(c) = 0$ bo'ladi.

Isboti. Shartga binoan $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz bo'lgani uchun u shu kesmada o'zining eng katta M va eng kichik m qiymatlarini qabul qiladi(18.5-teorema).

Agar $M=m$ bo'lsa $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada o'zgarmas bo'lib uning hosilasi $f'(x)$ kesmaning barcha nuqtalarida nolga teng bo'ladi. $M \neq m$ bo'lsin.

U holda $f(a) = f(b) = 0$ bo'lgani uchun m va M dan kamida bittasi, masalan $M \neq 0$ bo'ladi. Funksiya $x=c$ nuqtada o'zining eng katta M qiymatiga erishsa bu nuqta $[a;b]$ kesmaning ichki nuqtasi bo'ladi, chunki kesmaning oxirlarida $f(a)=f(b)=0$. Demak, Ferma teoremasiga binoan $f'(c)=0$ kelib chiqadi.

Bu teoremaga quyidagicha geometrik izoh berish mumkin. Teoremaning shartlari bijarilganda $(a;b)$ intervalda kamida bitta $x=c$ $(a<c<b)$ nuqta topilib $y=f(x)$ egri chiziqqa uning $M(c;\ f(c))$ nuqtasida o'tkazilgan urinma Ox o'qqa parallel bo'ladi.

1-misol. $f(x)=\cos x$ funksiya $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ kesmada Roll teoremasi unga qo'yilgan barcha shartlarni qanoatlantiradi. Bu funksiyaning $f'(x)=-\sin x$ hosilasi $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ kesmaning $x=\pi$ nuqtasida nolga teng. Demak, $f(x)=\cos x$ egri chiziqqa $M(\pi;-1)$ nuqtasida o'tkazilgan urinma Ox o'qqa parallel bo'lar ekan.

1-izoh. $f(x)$ funksiya $(a;b)$ intervalning aqalli birorta nuqtasida hosilaga ega bo'lmaganda funksiyaning hosilasi $(a;b)$ intervalning hech bir nuqtasida 0 ga aylanmasligi mumkin.

Masalan, $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$ funksiya $[-1;1]$ kesmada uzluksiz va kesmaning chetlarida $f(-1)=f(1)=0$. Ammo $y'=-\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ hosila $(-1;1)$ intervalning hech bir nuqtasida 0 ga aylanmaydi. Buning sababi funksiyani hosilasi $x=0$ nuqtada mavjud emas. Bu holda $[-1;1]$ kesmada Ox o'qqa parallel urinma mavjud bo'lmaydi (115-chizma).

2-izoh. Roll teoremasi $f(a)=f(b)$ shart bajarilganda ham o'z kuchini saqlaydi.

115-chizma.

23.3. Lagranj teoremasi. Lagranj teoremasi (chekli orttirmalar haqida). Agar $y = f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada uzluksiz, $(a; b)$ intervalda differensiallanuvchi bo'lsa, u holda $(a; b)$ intervalda kamida bitta $x=c$ $(a<c<b)$ nuqta topilib bu nuqtada

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a) \tag{23.1}$$

tenglik bajariladi.

Isboti. $F(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ $(b \neq a)$ yordamchi funksiyani qaraymiz. Bu funksiya Roll teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi, ya'ni u $[a; b]$ kesmada uzluksiz, $(a; b)$ intervalda differensiallanuvchi va

$$F(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a) = 0,$$

$$F(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) = 0$$

Shu sababli Roll teoremasiga ko'ra $(a; b)$ intervalda kamida bitta $x=c$ nuqta mavjud bo'lib, unda $F'(c) = 0$ bo'ladi. $F'(x)$ hosilani topamiz:

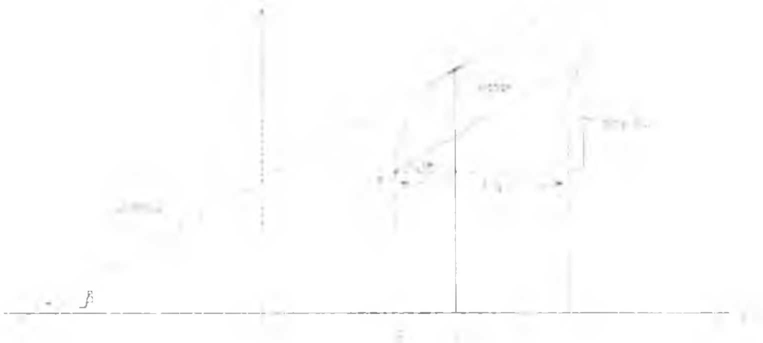
$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demak $x=c$ da

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

Bundan $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ yoki $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

(23.1) formula **Lagranj formulasi** deyiladi.



116-chizma.

Lagranj formulasining geometrik ma'nosi bilan tanishish maqsadida Lagranj formulasini $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ ko'rinishda yozamiz.

116-chizmadan $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = tg\alpha$ ekani ko'rinib turibdi, bunda α burchak AB vatarning og'ish burchagi. Ikkinchi tomondan, $f'(c) = tg\beta$, bunda β-abssissasi c ga teng nuqtada $y = f(x)$ egri chiziqqa o'tkazilgan urinmaning og'ish burchagi.

Lagranj teoremasiga ko'ra $tg\alpha = tg\beta$, bundan $\alpha = \beta$ ekani kelib chiqadi. Demak, egri chiziqda kamida bitta nuqta mavjud bo'lib, bu nuqtadagi egri chiziqqa urinma AB vatarga parallel bo'ladi. Bu Lagranj teoremasining **geometrik** ma'nosi.

Endi Lagranj formulasining boshqacha ko'rinishi bilan tanishamiz. $a = x$, $b = x + \Delta x$ deb olamiz.

U holda Lagranj formulasi

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(c)\Delta x$$

ko'rinishga ega bo'ladi, bunda c x bilan $x+\Delta x$ orasidagi qiymat. Agar c ni $c = x+\theta\Delta x$ ko'rinishida tasvirlasak, bunda $0<\theta<1$ Lagranj formulasini

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x, \quad \theta\in(0;1)$$

ko'rinishda yozish ham mumkin.

Agar $f(a)=f(b)$ bo'lsa (23.1) Lagranj formulasidan $f'(c)=0$ kelib chiqadi. Bu Roll teoremasi Lagranj teoremasining xususiy holi ekanligini ko'rsatadi.

O'zgarmas funksiyaning hosilasi nolga tengligi isbotlangan edi. Lagranj teoremasidan foydalanib teskari tasdiqning ham to'g'riligini ko'rsatish mumkin.

23.4. Teorema agar $[a;b]$ kesmada uzluksiz $f(x)$ funksiya $(a;b)$ intervalda 0 ga teng $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsa, u holda u $[a;b]$ kesmada o'zgarmas bo'ladi.

Isboti. x - $[a;b]$ kesmaning a dan farqli ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. Lagranj formulasi (23.1) ni $[a;x]$ kesmaga qo'llab $f(x)-f(a)=f'(c)(x-a)$ tenglikni hosil qilamiz, bunda c a bilan x orasidagi qiymat. c $[a;b]$ kesmaga tegishli bo'lganligi uchun shartga ko'ra $f'(c)=0$. Shuning uchun $f(x)-f(a)=0$ yoki $f(x)=f(a)$. Ya'ni $[a;b]$ kesmaga tegishli istalgan x uchun $f(x)$

bir xil $f(a) = const$ qiymatni qabul qiladi. Demak, u $[a; b]$ kesmada o'zgarmas.

Natija. Agar $\Phi(x)$ va $F(x)$ funksiyalar $[a; b]$ kesmada teng hosilalarga ega bo'lsa, u holda ularning ayirmasi shu kesmada o'zgarmas bo'ladi. Ya'ni $\Phi'(x) = F'(x)$ bo'lsa $\Phi(x) - F(x) = C$ bo'ladi, bunda $C = const$.

Isboti. $f(x) = \Phi(x) - F(x)$ bo'lsin. U holda shartga ko'ra $\Phi'(x) = F'(x)$ bo'lganligi sababli $f'(x) = \Phi'(x) - F'(x) = 0$ bo'ladi. Shuning uchun hozirgina isbotlangan teoremaga binoan $f(x) = \Phi(x) - F(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada o'zgarmas bo'ladi.

Bu teoremadan hamda uning natijasidan keyinchalik foydalaniladi (masalan, boshlang'ich funksiya tushunchasida).

2-misol. $y = x^2$ parabolaning qaysi nuqtasida o'tkazilgan urinma uning $A(-1; 1)$ va $B(3; 9)$ nuqtalarini tortib turuvchi vatariga parallel bo'ladi.

Yechish. $a = -1, b = 3$, $f(x) = x^2$ va $f(a) = (-1)^2 = 1$, $f(b) = 3^2 = 9$.

$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ Lagranj formulasiga tegishli qiymatlarni qo'yib tenglamadan c ni topamiz: $9 - 1 = 2c(3 + 1)$: $8 = 8c$; $c = 1$.

Demak, parabolaning $(1; 1)$ nuqtasida o'tkazilgan urinma AB vatarga parallel bo'lar ekan.

23.5. Koshi teoremasi. Agar ikkita $f(x)$ va $g(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada uzluksiz, $(a; b)$ intervalda differensiallanuvchi bo'lib $g'(x)$ hosila intervalning hech bir nuqtasida nolga teng bo'lmasa, u holda $(a; b)$ intervalda kamida bitta $x=c$ $(a<c<b)$ nuqta mavjud bo'lib unda

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad (23.2)$$

tenglik bajariladi, bunda $g(a) \neq g(b)$. (23.2) **Koshi formulasi** deb ataladi.

Isboti.

$$F(x) = \big(f(b) - f(a)\big)g(x) - \big(g(b) - g(a)\big)f(x)$$

yordamchi funksiya Roll teoremasining shartlarini bajarishiga asoslangan. Teoremaning isboti Lagranj teoremasining isbotini takrorlagani uchun uni tekshirib ko'rishni o'quvchiga qoldiramiz.

Lagranj teoremasi Koshi teoremasining $g(x) = x$ bo'lgandagi xususiy holidir.

3-misol. $f(x) = x^3$ va $g(x) = x^2$ funksiyalar uchun Koshi formulasi yozilsin va c topilsin.

Yechish. $f'(x) = 3x^2$, $g'(x) = 2x$, $f(b) = b^3$, $f(a) = a^3$, $g(b) = b^2$, $g(a) = a^2$, $f'(c) = 3c^2$, $g'(c) = 2c$ bo'lgani uchun

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Koshi formulasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi.

$$\frac{b^3 - a^3}{b^2 - a^2} = \frac{3c^2}{2c}; \quad \frac{(b-a)(b^2 + ba + a^2)}{(b-a)(b+a)} = \frac{3}{2}c.$$

Bundan, $c = \dfrac{2(b^2 + ba + a^2)}{3(b+a)}$.

Mustaqil yechish uchun mashqlar va test savollari

1. Nima uchun $y = |\sin x|$ egri chiziqqa abssissasi $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ kesmaga tegishli nuqtasida o'tkazilgan urinmalarning hech biri $0x$ o'qqa parallel bo'lmaydi? Bu yerda Roll teoremasining qaysi sharti bajarilmaydi?

2. $f(x)=x^2$ parabolaning qaysi nuqtasida o'tkazilgan urinma $A(a;\ a^2)$ va $B(b;\ b^2)$ nuqtalarini tortib turuvchi vatarga parallel bo'ladi? *Javob*: $\left(\dfrac{b+a}{2};\ \dfrac{(b+a)^2}{4}\right)$.

3. $f(x)=\sqrt{x}$ funksiya uchun $[4;\ 9]$ kesmada Lagranj formulasi yozilsin va c topilsin. *Javob*: $c=\dfrac{1}{4}$.

4. Nima uchun $[-2;1]$ kesmada $\dfrac{1}{x}$ funksiyaga Lagranj teoremasini qo'llab bo'lmaydi.

5. $f(x)=\arcsin x$ funksiya uchun $[0;\ 1]$ oraliqda Lagranj formulasi yozilsin va c topilsin. Javob: $c=\sqrt{1-\dfrac{4}{\pi^2}}$.

6. $sinx$ va $cosx$ funksiyalar uchun $\left[0;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ oraliqda Koshi formulasi yozilsin va c topilsin. *Javob*: $c=\dfrac{\pi}{4}$.

7. [0,1] kesmada berilgan $f(x)=x^4$ funksiyaning grafigiga abssissasi qanday nuqtasida o'tkazilgan urinma grafikni oxirlarini tortib turuvchi vatarga parallel bo'ladi.

A) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ B) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ D) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$ E) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$ F) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

8. [1,4] kesmaning qaysi nuqtasida $y=x^2-5x+4$ egri chiziqqa o'tkazilgan urinma Ox o'qqa parallel bo'ladi.

A) 1,5 B) 2 D) 2,5 E) 3 F) $0x$ o'qqa parallel urinma mavjud emas.

9. $[0,\pi]$ kesmaning qaysi nuqtasida $y=\sin^4 x$ egri chiziqqa o'tkazilgan urinma $0x$ o'qqa parallel bo'ladi.

A) $\frac{\pi}{6}$ B) $\frac{\pi}{4}$ D) $\frac{\pi}{3}$ E) $\frac{\pi}{2}$ F) $\frac{2\pi}{3}$.

10. Absssissasi qanday nuqtada $y = \ln x$ egri chiziq urinmasi $M_1(1;0)$ va $M_2(e;1)$ nuqtalarni tortib turuvchi vatarga parallel bo‘ladi.

A) $e-1$ B) $e-\frac{1}{2}$ D) $\frac{3}{2}$ E) 1,6 F) 1,7.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Ferma teoremasini ayting.
2. Ferma teoremasining geometrik ma‘nosini ayting.
3. Roll teoremasini ayting.
4. Roll teoremasining geometrik ma‘nosini ayting.
5. Lagranj teoremasini ayting.
6. Lagranj teoremasining geometrik ma‘nosini ayting.
7. Koshi teoremasini ayting.
8. Roll teoremasi qaysi teoremaning xususiy holi?
9. Lagranj teoremasi qaysi teoremaning xususiy holi?
10. Teng hosilaga ega bo‘lgan funksiyalar haqida nima deyish mumkin?

24. ANIQMASLIKLARNI OCHISH. LOPITAL QOIDASI

24.1. $\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmaslik

24. 1-teorema. Agar $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar $x=a$ nuqtaning biror atrofida uzluksiz, a nuqtaning o'zidan tashqari shu atrofda differensiallanuvchi bo'lib, shu atrofda $\varphi(x)\neq 0$ va $\varphi(a)=f(a)=0$ hamda chekli yoki cheksiz $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=A$ limit mavjud bo'lsa, u holda $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ limit ham mavjud bo'ladi va $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ tenglik o'rinli bo'ladi

Isboti. $\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)}$ nisbatni qaraymiz. $f(a)=0$, $\varphi(a)=0$ bo'lgani uchun bu tenglik to'g'ri.

Agar x a nuqtaning atrofiga tegishli bo'lsa, u holda yuqoridagi nisbatning o'ng tomoniga Koshi teoremasini qo'llasak $\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$ kelib chiqadi, bunda c a bilan x orasidagi qiymat bo'lgani uchun $x\to a$ da $c\to a$.

Shu sababli oxirgi tenglikda $x\to a$ da limitga o'tsak

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}=\lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

isbotlanishi lozim bo'lgan tenglik hosil bo'ladi.

1-eslatma. Agar $f(a)=0$, $\varphi(a)=0$ va $f(x)$ hamda $\varphi(x)$ hosilalar 24.1- teorema shartlarini qanoatlantirsa, u holda teoremani $\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ nisbatga ikkinchi marta qo'llash mumkin. Ya'ni:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{\varphi''(x)} \text{ va hokazo.}$$

1-misol. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin x)'}{x'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{1}=\cos 0=1.$

2-misol.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(3x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{6}\cdot 1=\frac{1}{6}.$$

2-eslatma. 24.1-teorema $x\to\infty$ da $f(x)\to 0$, $\varphi(x)\to 0$ bo'lganda ham to'g'riligicha qoladi, ya'ni

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Bu tenglikning to'g'riligiga $x=\dfrac{1}{z}$ almashtirish olib ishonch hosil qilish mumkin.

3-misol.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{tg\dfrac{2}{x}}{\dfrac{3}{x}}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{2}{x}}\cdot\left(\dfrac{2}{x}\right)'}{\left(\dfrac{3}{x}\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{2}{x}}\cdot\left(-\dfrac{2}{x^2}\right)}{-\dfrac{3}{x^2}}=$$

$$\frac{2}{3}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\cos^2\dfrac{2}{x}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\cos^2 0}=\frac{2}{3}.$$

4-misol.

$$\lim_{x\to a}\frac{x^m-a^m}{x^n-a^n}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to a}\frac{(x^m-a^m)'}{(x^n-a^n)'}=\lim_{x\to a}\frac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}}=\frac{ma^{m-1}}{na^{n-1}}=\frac{m}{n}a^{m-n}$$

5-misol. $$\lim_{x\to -1}\frac{x^3-5x^2+2x+8}{x^4-2x^3-16x^2+2x+15}\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{(x^3-5x^2+2x+8)'}{(x^4-2x^3-16x^2+2x+15)'}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{3x^2-10x+2}{4x^3-6x^2-32x+2}=\frac{3\cdot 1-10\cdot(-1)+2}{4\cdot(-1)-6\cdot 1-32\cdot(-1)+2}=\frac{15}{24}=\frac{5}{8}.$$

24.2. $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi aniqmaslik

Ushbu teoremani isbotsiz keltiramiz.

24.2-teorema. Agar $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar $x=a$ nuqtaning biror atrofida uzluksiz, differensiallanuvchi ($x=a$ nuqtaning o'zidan tashqari) bo'lsa hamda shu atrofda $\varphi(x)\neq 0$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$ bo'lsa va chekli yoki cheksiz $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ limit mavjud bo'lsa, u holda $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ limit ham mavjud bo'ladi va

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

tenglik to'g'ri bo'ladi.

Bu teorema $x\to\infty$ da ham o'z kuchini saqlaydi.

6-misol.

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+0}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+0}(-x)=0.$$

7-misol. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{x'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0.$

8-misol.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(2x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty.$$

3-eslatma. $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ tenglikning o‘ng tomonidagi chekli yoki cheksiz limit mavjud bo‘lsa uning chap tomonidagi limit ham mavjud bo‘ladi. O‘ng tomonidagi limitning mavjud bo‘lmasligidan uning chap tomonidagi limitning mavjud bo‘lmasligi kelib chiqmaydi.

9-misol. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x}$ limitni toping.

Yechish. Lopital qoidasini qo‘llaymiz:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+\sin x)'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}(1+\cos x).$$

$x\to+\infty$ da $1+\cos x$ ifoda 0 bilan 2 orasida tebranadi, ya’ni $x\to+\infty$ da $1+\cos x$ ifodaning limiti mavjud emas. Shu sababli Lopital qoidasini qo‘llab bo‘lmaydi.

Izlanayotgan limitni boshqa yo‘l bilan topamiz.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1+\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=1+0=1.$$

24.3. $\infty - \infty$ ko'rinishdagi aniqmaslik

Bunday aniqmaslikni ochish deyilganda $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \infty$, bir xil ishorali cheksizlik bo'lganda $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x) - \varphi(x)\right)$ limitni topish tushuniladi. Bunday aniqmasliklar $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi aniqmaslikka keltirilib keyin Lopital qoidasidan foydalaniladi. Bunda $a = \infty$ bo'lishi ham mumkin.

10-misol. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right)$ limitni toping.

Yechish. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right)(\infty - \infty) = \lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}\left(\frac{0}{0}\right) =$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1-\ln x)'}{((x-1)\ln x)'} = \lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x + (x-1)\cdot\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x\ln x + x - 1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x + x - 1}\left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)'}{(x\ln x + x - 1)'} =$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x + x\cdot\frac{1}{x} + 1} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x + 2} = \frac{1}{2}.$$

24.4. $0\cdot\infty$ ko'rinishdagi aniqmaslik

Bunday aniqmaslikni ochish deyilganda $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \infty$ bo'lganda $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\varphi(x)$ limitni topish tushuniladi. Agar $f(x)\cdot\varphi(x)=\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{\varphi(x)}}$ yoki $f(x)\cdot\varphi(x)=\dfrac{\varphi(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$ ko'rinishda yozilsa $0\cdot\infty$ ko'rinishdagi aniqmaslik $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi aniqmaslikka keltiriladi. Bunda $a=\infty$ bo'lishi ham mumkin.

11-misol. $\lim\limits_{x\to+0} x\ln x\,(0\cdot\infty)=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=0$ (6-misolga qarang).

24.5. 1^{∞} ko'rinishdagi aniqmaslik

Bunday aniqmaslikni ochish deyilganda $\lim\limits_{x\to a} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$ bo'lganda $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]^{\varphi(x)}$ limitni topish tushuniladi.

Agar $\left[f(x)\right]^{\varphi(x)}=e^{\varphi(x)\ln f(x)}$ (α) ko'rinishda tasvirlansa 1^{∞} ko'rinishdagi aniqmaslikni ochish $0\cdot\infty$ ko'rinishdagi aniqmaslikni ochishga keltiriladi. Bunda $a=\infty$ bo'lishi ham mumkin.

12-misol. $\lim\limits_{x\to+0}(1+mx)^{\frac{1}{x}}$ limitni hisoblang.

Yechish.

$$\lim_{x\to+0}(1+mx)^{\frac{1}{x}}\,(1^{\infty})=\lim_{x\to+0}e^{\frac{1}{x}\ln(1+mx)}=e^{\lim\limits_{x\to+0}\frac{1}{x}\ln(1+mx)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln(1+mx)}{x}\left(\frac{0}{0}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+0}\frac{\frac{m}{1+mx}}{1}}=e^{m}.$$

24.6. 0^0 ko‘rinishdagi aniqmaslik

Bunday aniqmaslikni ochish deyilganda $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$ bo‘lganda $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)}$ limitni topish tushuniladi. Bu holda ham yuqoridagi (α) tenglikdan foydalaniladi. Bunda $a=\infty$ bo‘lishi ham mumkin.

13-misol. $\lim\limits_{x\to+0} x^x\,(0^0)=\lim\limits_{x\to+0} e^{x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to+0} x\ln x}=e^0=1.$

24.7. ∞^0 ko‘rinishdagi aniqmaslik

Bunday aniqmaslikni ochish deyilganda $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$ bo‘lganda $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)}$ limitni topish tushuniladi. Bunda $a=\infty$ bo‘lishi ham mumkin.

14-misol.

$$\lim_{x\to+0}(-\ln x)^x\,(\infty^0)=\lim_{x\to+0} e^{\ln(-\ln x)^x}=e^{\lim\limits_{x\to+0} x\ln(-\ln x)}$$

$$\lim_{x\to+0} x\cdot\ln(-\ln x)(0\cdot\infty)=\lim_{x\to+0}\frac{\ln(-\ln x)}{\frac{1}{x}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+0}\frac{(\ln(-\ln x))'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{-\ln x}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to+0}\frac{x}{\ln x}=0.$$

Demak $\lim\limits_{x\to+0}(-\ln x)^x=e^0=1.$

4-eslatma. 1^{∞}, 0^{0} va ∞^{0} ko'rinishdagi aniqmasliklar $\left[f(x)\right]^{\varphi(x)}$ ifodani logarifmlab $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi aniqmasliklardan birortasiga keltiriladi.

Shunday qilib, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^{∞}, ∞^{0}, 0^{0} ko'rinishdagi aniqmasliklar $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishga keltirilib keyin Lopital qoidasidan foydalanilar ekan.

Isbotlangan $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x}=\ln a$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{p}-1}{x}=p$ ajoyib limitlarni Lopital qoidasidan foydalanib isbotlashni o'quvchiga tavsiya qilamiz.

Mustaqil yechish uchun mashqar va test savollari

Limitlar topilsin.

1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{2}-1}{x^{3}-2x^{2}+2x-1}$. *Javob*: 2.

2. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^{3}-x^{2}-8x+12}{x^{3}-x^{2}+x+6}$. *Javob*: 0.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^{x}-b^{x}}{x}$. *Javob*: $\ln\frac{a}{b}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x-\sin x}$. *Javob*: ∞.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^{-1}}{ctgx}$. *Javob*: 1.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln tgx}{\ln tg2x}$. *Javob*: 1.

7. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2}{x^{2}-1}-\frac{1}{x-1}\right)$. *Javob*: $-\frac{1}{2}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$. *Javob*: 0.

9. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)tg\dfrac{\pi}{2}x$. *Javob*: $\dfrac{2}{\pi}$.

10. $\lim\limits_{x\to +0} x^n \ln x (n>0)$. *Javob*: 0.

11. $\lim\limits_{x\to 1-0}(1-x)\ln(1-x)$. *Javob*: 0.

12. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-arctgx\right)^{\frac{1}{x}}$. *Javob*: 1.

13. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}arctgx\right)^{x}$. *Javob*: $e^{-\frac{2}{\pi}}$.

14. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$. *Javob*: $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

15. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(tgx)^{\sin 2x}$. *Javob*: 1.

16. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+x^4\right)^{\frac{1}{x}}$ toping.

A) 0 B) ∞ D) 1 E) n F) 2.

17. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^n}{3^x}$ $(n\in N)$ toping.

A) 0 B) ∞ D) 1 E) n F) 2.

18. $\lim\limits_{x\to 0}(tgx)^{\sin x}$ toping.

A) 0 B) ∞ D) 1 E) 2 F) 3.

19. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{4+x}-\sqrt{2x+6}}{x+2}$ toping.

A) $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ B) $-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ D) $\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{2}$ F) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

20. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$ topilsin.

A) 2 B) 1 D) 0 E) $\frac{1}{2}$ F) $-\frac{1}{2}$.

O'z- o'zini tekshirish uchun savollar

1. Aniqmaslikni ochish deganda nima tushuniladi?

2. $\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmaslikni ochish uchun Lopital qoidasini ayting.

3. $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi aniqmaslikni ochish uchun Lopital qoidasini ayting.

4. $0\cdot\infty$ ko'rinishdagi aniqmaslikka Lopital qoidasini qanday qo'llash mumkin.

5. $\infty-\infty$ ko'rinishdagi aniqmaslikni ochish uchun Lopital qoidasidan qanday foydalaniladi?

6. 1^{∞} ko'rinishdagi aniqmaslikni ochish uchun Lopital qoidasidan qanday foydalaniladi?

7. 0^{0} ko'rinishdagi aniqmaslikni ochish uchun Lopital qoidasidan qanday foydalaniladi?

8. ∞^{0} ko'rinishdagi aniqmaslik qanday ochiladi.

9. Birinchi ajoyib limitni Lopital qoidasi yordamida isbotlang.

10. Istalgan limitni Lopital qoidasi yordamida topish mumkinmi?

25. TEYLOR VA MAKLOREN FORMULALARI

25.1. Teylor formulasi

Matematik analizning muhim formulalaridan biri bilan tanishamiz. Bu formula matematik analizning o'zida ham shunga o'xshash matematikaga yaqin boshqa fanlarda ham ko'p sonli tadbiqlarga ega.

$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ ko'rinishdagi funksiyani **ko'phad** deb atadik, bundagi n–natural son ko'phadning darajasi. Ko'p had istalgan tartibli hosilalarga ega ekanligi ko'rinib turibdi. Endi teskari masalani qaraymiz, ya'ni bir qancha hosilalarga ega bo'lgan funksiyani ko'phad ko'rinishida tasvirlash mumkinmi? Bu savolga qo'yidagi Teylor (1685-1731) teoremasi javob beradi.

25.1-teorema. $f(x)$ funksiya $x=a$ nuqtada va uning biror atrofida $(n+1)$– tartibgacha uzluksiz hosilalarga ega ($(n+1)$ hosila ham kiradi) bo'lib, x shu atrofga tegishli va a dan farqli ixtiyoriy nuqta bo'lsin. U holda a bilan x orasida shunday z nuqta topilib

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-a)^{(n+1)} \qquad (25.1)$$

formula o'rinli bo'ladi. Bunda $n!$ orqali 1 dan n gacha natural sonlarning ko'paytmasi belgilangan, ya'ni $n! = 1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$ (o'qilishi: en faktorial). Masalan, $1!=1$, $2!=1\cdot2=2$, $3!=1\cdot2\cdot3=6$, $4!=1\cdot2\cdot3\cdot4=24$ va hokaza. Umumiy qonuniyatni saqlab qolish maqsadida $0!=1$ deb olinadi.

Isboti.

$$\varphi(x,a)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

belgilashni kiritamiz. Bu ko'phad $f(x)$ funksiyaning $(x\text{-}a)$ ning darajalari bo'yicha **Teylor ko'phadi** deyiladi. $f(x)-\varphi(x,a)=R_{n+1}(x)$ deb belgilaymiz. Agar

$$R_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}_{(z)}}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

ekanligini ko'rsataolsak teorema isbot bo'ladi, bunda z a bilan x orasidagi qiymat. x ning qaralayotgan atrofga tegishli ixtiyoriy qiymatini olamiz. Aniqlik uchun $x>a$ deb hisoblaymiz. $[a,x]$ kesmada o'zgaruvchi miqdorni t orqali belgilab

$$F(t)=f(x)-\varphi(x,t)-\frac{(x-t)^{n+1}R_{n+1}(x)}{(x-a)^{n+1}} \qquad (25.2)$$

yordamchi funksiyani qaraymiz. Bu funksiya $[a,x]$ kesmada Roll teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi: 1) (25.2) formuladan hamda teoremada $f(x)$ ga qo'yilgan shartlarga binoan $F(t)$ funksiya $[a,x]$ kesmada uzluksiz va differensiallanuvchi, chunki $f(t)$ funksiya $n+1$-tartibgacha uzluksiz hosilalarga ega;

2) (25.2) formulaga $t=a$ qiymatini qo'ysak

$$F(a)=f(x)-\varphi(x,a)-R_{n+1}(x)=R_{n+1}(x)-R_{n+1}(x)=0$$

va unga $t=x$ qiymatni qo'ysak

$$F(x)=f(x)-f(x)-\frac{f'(x)}{1!}(x-x)-\frac{f''(x)}{2!}(x-x)^2-$$

$$-\frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x-x)^n-\frac{(x-x)^{n+1}R_{n+1}(x)}{(x-a)^{n+1}}=0$$

kelib chiqadi. Demak $F(a)=F(x)$. Roll teoremasiga ko'ra (a,x) intervalda shunday z nuqta topilib funksiyaning bu nuqtadagi hosilasi nolga teng, ya'ni $F'(z)=0$. $F'(t)$ hosilani hisoblaymiz. (25.2) tenglikka $\varphi(x,t)$ o'rniga uning qiymatini qo'yib, keyin hosil bo'lgan tenglikni t bo'yicha differensiallasak

$$F'(t)=-f'(t)+\frac{f'(t)}{1!}-\frac{f''(t)}{1!}(x-t)+\frac{f''(t)}{2!}2\cdot(x-t)-\frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2+\ldots$$

$$+\frac{f^{(n)}(t)}{n!}n(x-t)^{n-1}-$$

$$-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n+\frac{(n+1)(x-t)^n R_{n+1}(x)}{(x-a)^{n+1}}$$

yoki o'xshash hadlar qisqartirilgandan so'ng

$$F'(t)=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n+\frac{(n+1)(x-t)^n R_{n+1}(x)}{(x-a)^{n+1}}$$

hosil bo'ladi. Bunga $t=z$ qiymatni qo'yib $F'(z)=0$ ekanligini hisobga olsak

$$F'(z)=-\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n+\frac{(n+1)(x-z)^n R_{n+1}(x)}{(x-a)^{n+1}}=0;$$

$$\frac{(n+1)R_{n+1}(x)}{(x-a)^{n+1}}=\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!};\quad R_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!(n+1)}(x-a)^{n+1}.$$

Bundan $R_{n+1}(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$. Teorema isbot bo'ldi.

(25.1) formula **Teylor formulasi** deb ataladi, $R_{n+1}(x)=f(x)-\varphi(x,a)$ esa Teylor formulasining **qoldiq hadi** deb ataladi. $R_{n+1}(x)$ qoldiq hadning turli shakllari mavjud bo'lib teoremada keltirilgan $R_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ shakli qoldiq hadning **Lagranj shakli** deb ataladi.

$R_{n+1}(x)$ qoldiq hadni boshqacharoq ko'rinishda yozish ham mumkin. $z\in(a,x)$ bo'lgani uchun $(0,1)$ intervalda shunday θ son mavjud bo'lib $z=a+\theta(x-a)$ tenglik o'rinli bo'ladi. U holda $R_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, $0<\theta<1$ ko'rinishga ega bo'ladi.

25.2. Makloren formulasi

(25.1) Teylor formulasining a=0 bo'lgandagi xususiy ko'rinishi

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_{n+1}(x) \quad (25.3)$$

Makloren (1698-1746) **formulasi** deyiladi. Bunda

$$R_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad \text{yoki} \qquad R_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

$0<\theta<1$ va z 0 bilan x orasidagi qiymat .

(25.1) va (25.3) formulalardan ko'rinib turibdiki qoldiq had $R_{n+1}(x)$ qanchalik kichik bo'lsa $f(x)$ funksiya shu funksiyaning Teylor ko'phadiga shunchalik yaqinlashar ekan.

Endi ba'zi-bir muhim elementar funksiyalarning Makloren formulalari bilan tanishamiz.

25.3. $f(x)=e^x$ funksiyani Makloren formulasi bo'yicha yoyish

$f(x)=f'(x)=f''(x)=...=f^{(n+1)}(x)=e^x$ bo'lgani uchun $f(0)=f'(0)=f''(0)=...=f^{n}(0)=1$ bo'lib (25.3) Makloren formulasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi.

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},\quad 0<\theta<1. \tag{25.4}$$

Bu formula istalgan $x\in(-\infty,+\infty)$ uchun o'rinli. Endi shu yoyilmadan foydalanib e sonni istalgan aniqiikda hisoblash mumkinligini ko'rsatamiz. Agar e^x funksiyani uning Teylor ko'phadi bilan almashtirsak

$$e^x\approx 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!} \tag{25.5}$$

taqribiy tenglikka ega bo'lamiz, bunda absolyut xato

$$|R_{n+1}(x)|=\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}|x|^{n+1},\quad 0<\theta<1.$$

Agar e^x funksiya [-1;1] kesmada qaralsa

$$|R_{n+1}(x)|\le\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!}, \tag{25.6}$$

chunki $2<e<3$. (25.5) ga $x=1$ qiymatini qo'ysak e ning qiymatini taqribiy hisoblash uchun $e^x\approx 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!}$ formulaga ega bo'lamiz, bunda absolyut xato $\frac{3}{(n+1)!}$ dan kichik. Agar e ning qiymatini 0,001 aniqlikda hisoblash talab etilsa, n $\frac{3}{(n+1)!}<0{,}001$

tengsizlikdan aniqlanadi. ya'ni $(n+1)!>\frac{3}{0{,}001}=3000$ yoki $7!=5040>3000$ bo'lgani uchun $n=6$ deb olish mumkin, ya'ni $e\approx 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}\approx 2{,}718$.

Shunday qilib, Makloren formulasidan foydalanib e sonni istalgan aniqlikda hisolash mumkin ekan. (25.5) va (25.6) formulalarga asoslangan e sonni hisoblash algoritmi EHM da osonlikcha amalga oshiriladi.

25.4. $f(x)=\sin x$ funksiyani Makloren formulasi bo'yicha yoyish

$$f(x)=\sin x, f'(x)=\cos x, f''(x)=-\sin x, f'''(x)=-\cos x,.....,$$

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right).$$

$$f(0)=\sin 0=0, f'(0)=\cos 0=1, f''(0)=-\sin 0=0,$$

$$f'''(0)=-\cos 0=-1,.....,f^{(n)}(0)=\sin n\cdot\frac{\pi}{2}=$$

$$=\begin{cases} 0, & n \text{ juft son bo'lsa,} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}, & \text{n toq son bo'lsa.} \end{cases}$$

$f^{(n+1)}(z)=\sin\left(z+(n+1)\frac{\pi}{2}\right)$, bunda z 0 bilan x orasidagi qiymat.

Topilgan qiymatlarni (25.3) Makloren formulasiga qo'yib $\sin x$ uchun ushbu yoyilmani hosil qilamiz.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \\ + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\sin\left(z + (2n+1)\frac{\pi}{2}\right) \qquad (25.7)$$

Bu formula istalgan $x \in (-\infty, +\infty)$ uchun to'g'ridir. Bu formuladan foydalanib $\sin x$ funksiyaning istalgan qiymatini istalgan aniqlikda hisoblash mumkin.

1-misol. $\sin 10^0$ ning taqribiy qiymati 0,00001 gacha aniqlikda hisoblansin.

Yechish. Burchakning radian o'lchoviga o'tilsa

$$x = 10^0 = \frac{\pi}{18}$$

bo'ladi. Agar $\sin x$ funksiyani uning Teylor ko'phadiga almashtirsak

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

hosil bo'ladi. Bunga $x = \frac{\pi}{18}$ qiymatini qo'yamiz.

$$\sin 10^0 = \sin\frac{\pi}{18} \approx \frac{\pi}{18} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^5 + \ldots + (-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{(2n-1)!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^{2n-1}$$

Bu holda xatolik:

$$|R_{2n+1}| = \left|\frac{1}{(2n+1)!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^{2n+1}\cdot\sin\left(z + (2n+1)\frac{\pi}{2}\right)\right| \le \frac{1}{(2n+1)!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^{2n+1} < 0,00001\cdot$$

Agar $n=1$ bo'lsa, u holda $|R_3| \le \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3 = 0,00089 > 0,00001$.

Agar n=2 bo'lsa, u holda $|R_5| \le \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^5 = 0{,}0000013 < 0{,}00001$.

Demak taqribiy formulaning dastlabki ikkita hadi olinsa hisoblashning talab qilingan aniqligiga erishiladi:

$$\sin 10^0 \approx \frac{\pi}{18} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3 = 0{,}17453 - 0{,}00089 = 0{,}17364.$$

25.5. $f(x)=\cos x$ funksiyani Makloren formulasi bo'yicha yoyish

$f(x)=\cos x$ funksiyaning x=0 dagi ketma–ket hosilalarini topish va Makloren formulasiga qo'yish bilan qo'yidagi yoyilmani hosil qilamiz.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ......+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos(z+(n+1)\pi). \quad (25.8)$$

Endi qoldiq hadni baholash imkonini beradigan

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ tenglik x ning har qanday aniq qiymatida to'g'ri

ekanligini ko'rsatamiz. $\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| = \left|\frac{x}{1}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{3}\cdots\frac{x}{n}\cdot\frac{x}{n+1}\right|$ ga egamiz.

Agar x aniq son bo'lsa u holda shunday N natural son topilib $|x| < N$ tengsizlik barcha N dan katta n lar uchun bajariladi.

$\frac{|x|}{N} = q$ belgilashni kiritamiz; u vaqtda

$$\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| = \left|\frac{x}{1}\right|\cdot\left|\frac{x}{2}\right|\cdots\left|\frac{x}{N-1}\right|\left|\frac{x}{N}\right|\left|\frac{x}{N+1}\right|\cdots\left|\frac{x}{n}\right|\left|\frac{x}{n+1}\right| <$$

$$< \frac{|x|}{1}\cdot\frac{|x|}{2}\cdots\frac{|x|}{N-1}\cdot q\cdot q\cdots q\cdot q = \frac{|x|^{N-1}}{(N-1)!}q^{n-N+2},$$

chunki $\left|\frac{x}{N}\right| = q, \left|\frac{x}{N+1}\right| < q, ..., \left|\frac{x}{n+1}\right| < q.$

Ammo $\frac{|x|^{N-1}}{(N-1)!}$ miqdor o'zgarmas ya'ni n ga bog'liq emas, $0<q<1$ bo'lgani uchun $n \to \infty$ da q^{n-N+2} nolga intiladi. Shuning uchun

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0 .$$

Demak, $n \to \infty$ da $e^x, \sin x, \cos x$ funksiyalarning yoyilmalaridagi qoldiq hadlarning barchasi 0 ga intiladi, chunki $e^{\theta x}$ chekli son $\left|\sin\left(z+(2n+1)\frac{\pi}{2}\right)\right| \le 1, \quad |\cos(z+(n+1)\pi)| \le 1 .$

25.6. $f(x) = (1+x)^\alpha$ funksiyani Makloren formulasi bo'yicha yoyish

$f(x) = (1+x)^\alpha$ funksiyaning x=0 nuqtadagi hosilalarini hisoblaymiz, bunda α -o'zgarmas son.

$$f(x) = (1+x)^\alpha, f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}, f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, ...,$$

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)....(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},$$

$$f^{(n+1)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2),....(\alpha-n)(1+x)^{\alpha-n-1} \quad \text{va} \quad f(0)=1,$$

$$f'(0) = \alpha, f''(0) = \alpha(\alpha-1), f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)....(\alpha-n+1),$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)......(\alpha-n)(1+z)^{\alpha-n-1}.$$

Hosilalarning topilgan qiymatlarini (25.3) Makloren formulasiga qo'yamiz:

$$(1+x)^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+.....+$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n+R_{n+1}(x) \qquad (25.8)$$

Bu formula istalgan $x\in(-1,1)$ uchun o'rinli.

Xususiy holda $\alpha=n$ natural son bo'lsa, $f^{(n+1)}(x)=0$, demak $R_{n+1}(x)=0$ bo'lib (25.8) dan **Nyuton binom formulasi**

$$(1+x)^n=1+\frac{n}{1!}x+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+...+x^n$$

kelib chiqadi.

2-misol. $\sqrt[4]{83}$ ning taqribiy qiymatini 0,000001 gacha aniqlikda hisoblang.

Yechish. Berilgan ifodani

$$\sqrt[4]{83}=\sqrt[4]{81+2}=\sqrt[4]{81\left(1+\frac{2}{81}\right)}=3\left(1+\frac{2}{81}\right)^{\frac{1}{4}}$$

ko'rinishda yozib

$$(1+x)^{\alpha}\approx 1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+.........+\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}\cdot x^{\alpha}$$

taqribiy hisoblash formulasidan foydalaniamiz.

$x=\frac{2}{81}$, $\alpha=\frac{1}{4}$ desak

$$\sqrt[4]{83}=3\cdot\left(1+\frac{2}{83}\right)^{\frac{1}{4}}\approx 3\cdot\left(1+\frac{\frac{1}{4}}{1!}\cdot\frac{2}{81}+\frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)}{2!}\left(\frac{2}{81}\right)^2+...+\frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)...\left(\frac{1}{4}-n+1\right)}{n!}\left(\frac{2}{81}\right)^n\right)$$

yoki ba'zi hisoblashlardan keyin

$$\sqrt[4]{83}\approx 3\cdot\left(1+\frac{1}{162}-\frac{1}{162\cdot108}+\frac{7}{162\cdot108\cdot486}-\frac{7}{162\cdot108\cdot486\cdot59}+\dots+\frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)\dots\left(\frac{1}{4}-n+1\right)}{n!}\left(\frac{2}{81}\right)^{n}\right)$$

hosil bo‘ladi

Xatolik:

$$3R_{n+1}=3\,\frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)\left(\frac{1}{4}-2\right)\dots\left(\frac{1}{4}-n\right)}{(n+1)!}\left(\frac{2}{81}\right)^{n+1}(1+z)^{\frac{1}{4}-n-1}.$$

Hisoblashlarning xatoliklari $3|R_n|$ ketma –ketlikni baholaymiz:

agar n=1 bo‘lsa, u holda $3|R_2|<\dfrac{3}{162}<0{,}018518>0{,}000001;$

agar n=2 bo‘lsa, u holda $3|R_3|<\dfrac{3}{162\cdot108}<0{,}0002>0{,}000001;$

agar n=3 bo‘lsa, u holda

$$3|R_4|<\frac{3\cdot7}{162\cdot108\cdot486}<0{,}000003>0{,}000001;$$

agar n=4 bo‘lsa, u holda

$$3|R_5|<\frac{3\cdot7}{162\cdot108\cdot486\cdot59}<0{,}00000006<0{,}000001\,.$$

Demak, hisoblashning talab etilgan aniqligiga erishmoq uchun R_5 dan oldin keladigan to‘rtta had yig‘indisini olish kifoya:

$$\sqrt[4]{83}\approx 3(1+0{,}006\cdot173-0{,}000057+0{,}000001)=3{,}018349\,.$$

Shunday qilib, Makloren formulasidan foydalanib funksiyaning taqribiy qiymatini talab etilgan ε aniqlikda hisoblash uchun bu funksiyani Teylor (Makloren) ko‘phadi bilan almashtirib undagi qo‘shiluvchilar soni n ni $|R_{n+1}|<\varepsilon$ tengsizlikdan aniqlash lozim ekan, bunda R_{n+1} –qoldiq had.

Endi Makloren formulasining yana bir tatbiqi, ya'ni undan foydalanib funksiyaning limitini topish usuli bilan misollarda tanishamiz .

3-misol . $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x}{x^3}$ topilsin.

Yechish. $n=2$ bo'lganda (25.7) ga binoan

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\sin\left(z + 5\frac{\pi}{2}\right) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5}\cos z$$

bo'lganligi sababli

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\cos z - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{3!} + \frac{x^2}{5!}\cos z\right) = -\frac{1}{3!} + 0 = -\frac{1}{6}$$

kelib chiqadi.

4-misol. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x}{x^3 \sin x}$ topilsin.

Yechish. (25.4) ga binoan

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!}e^{\theta x}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^3 = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{48}e^{\theta x},$$

(25.8) formulaga asosan

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x!}{4!} + \frac{x^6}{6!}\cos(z + 3\pi) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{6!}\cos z,$$

hamda (25.7) formulaga ko'ra

$$\sin z = x - \frac{x^3}{3!}\sin\left(z + \frac{3\pi}{2}\right) = x + \frac{x^3}{6}\cos z$$

bo‘lganligi sababli

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x}{x^3\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}-\frac{x^6}{48}e^{\theta x}-1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\frac{x^6}{6!}\cdot\cos z}{x^3\left(x+\frac{x^3}{6}\cos z\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{12}x^4-\frac{x^6}{48}e^{\theta x}+\frac{x^6}{6!}\cos z}{x^4\left(1+\frac{x^2}{6}\cos z\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{12}-\frac{x^2}{48}e^{\theta x}+\frac{x^2}{6!}\cos z}{1+\frac{x^2}{6}\cos z}=\frac{1}{12}.$$

Mustaqil yechish uchun mashqlar va test savollari

1. $x^4-5x^3+5x^2+x+2$ ko‘phad x-2 ning darajasi bo‘yicha yoyilsin. *Javob*: $-7(x-2)-(x-2)^2+3(x-2)^3+(x-2)^4$.

Ko‘rsatma. Berilgan ko‘phadga x o‘rniga (x-2)+2 qo‘yib ixchamlansin.

2. a=1, n=3 da $y=\sqrt{x}$ funksiya uchun Teylor formulasi yozilsin.

Javob: $$\sqrt{x}=1+\frac{x-1}{1!}\cdot\frac{1}{2}+\frac{(x-1)^2}{2!}\cdot\frac{1}{4}+\frac{(x-1)^3}{3!}\cdot\frac{3}{8}-$$
$$-\frac{(x-1)^5}{4!}\cdot\frac{15}{16}\left[1+\theta(x-1)\right]^{-\frac{7}{2}},\ 0<\theta<1$$

3. n=2 da $y=\sqrt{1+x}$ funksiya uchun Makloren formulasi yozilsin.

Javob: $$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{x^3}{16(1+\theta x)^{\frac{5}{2}}},\qquad 0<\theta<1.$$

4. $f(x)$=ln(1+x) funksiya Makloren formulasi bo‘yicha yoyilsin.

Javob: $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+R_{n+1}(x)$,

$x\in(-1,\ 1)$.

5. x ning kichikroq qiymatlarida quyidagi taqribiy tenglikning kelib chiqishini izohlang:

$$\frac{1}{1+x} \approx 1-x; \ln\cos x \approx -\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}; tgx \approx x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15!}; \arcsin x \approx x+\frac{x^3}{6};$$

$$arctgx \approx x-\frac{x^3}{3}; \frac{e^x+e^{-x}}{2} \approx 1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24};$$

$$\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{x}{2}; \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \approx 1-\frac{x}{3}.$$

Makloren formulasidan foydalanib, ifodalarning limitlarini hisoblang.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}}$. *Javob*: 1.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln^2(1+x)-\sin^2 x}{1-e^{-x^2}}$. *Javob*: 0.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(tgx-\sin x)-x^3}{x^5}$. *Javob*: $\dfrac{1}{4}$.

9. $\sqrt{e}$ sonning taqribiy qiymati 0,001 aniqlikda hisoblansin.

A) 1,649 B) 1,645 D) 1,652 E) 1,654 F) 1,64.

10. $cos10^0$ sonning taqribiy qiymati 0,001 aniqlikda hisoblansin.

A) 0,985 B) 0,97 D) 0,995 E) 0,993 F) 0,96.

11. $\sqrt[3]{30}$ sonning taqribiy qiymati 0,001 aniqlikda hisoblansin.

A) 3,107 B) 3,12 D) 3,09 E) 3,08 F) 3,06.

12. $\sqrt[10]{1027}$ sonning taqribiy qiymati 0,001 aniqlikda hisoblansin.

A) 2,001 B) 2,1 D) 2,101 E) 2,110 F) 2,12.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Teylor ko‘phadi nima?
2. Qoldiq had nima?
3. Qoldiq hadning har xil ko‘rinishlari yozilsin.
4. Lagranj shaklidagi qoldiq hadli Teylor formulasini yozing.
5. x-a ning darajalari bo‘yicha Teylor ko‘phadini yozing.
6. Qanaqa funksiyalar Teylor ko‘phadi orqali ifodalanadi?
7. Makloren formulasini yozing .
8. Muhim elementar funksiyalar e^x, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^{\alpha}$, $\ln(1+x)$ funksiyalarning Makloren ko‘phadi ko‘rinishidagi taqribiy yoyilmalarini yozing.
9. Funksiyaning talab etilgan aniqlikdagi taqribiy qiymatini hisoblash uchun Makloren formulasidan qanday foydalaniladi?
10. Makloren formulasidan foydalanib limitlarni topishga misollar keltiring.

26. FUNKSIYANING O'SISHI VA KAMAYISHI. FUNKSIYANING MAKSIMUM VA MINIMUMI

26.1. Funksiyaning o'sishi va kamayishi

O'suvchi va kamayuvchi funksiyalarga ta'rif berilgan edi. Shunday bo'lsada ularni yana bir eslaylik. $(a;\ b)$ intervalda(u kesma bo'lishi ham mumkin) aniqlangan $y=f(x)$ funksiyani qaraymiz. $(a;\ b)$ intervaldan olingan argumentning istalgan $x_1<x_2$ qiymatlariga funksiyaning $f(x_1)<f(x_2)$ qiymatlari mos kelsa $y=f(x)$ funksiya $(a;\ b)$ intervalda **o'suvchi** deyilar edi. Shuningdek, $(a;\ b)$ intervaldan olingan argumentning istalgan $x_1<x_2$ qiymatlari uchun $f(x_1)>f(x_2)$ bo'lganda, $y=f(x)$ funksiya $(a;\ b)$ intervalda kamayuvchi deyilar edi.

Bu yerda funksiyaning o'sish, kamayish oraliqlarini uning hosilasi yordamida aniqlash usuli bilan tanishamiz.

O'suvchi funksiyaning ta'rifiga binoan $x_2-x_1>0$ bo'lganda $f(x_2)-f(x_1)>0$ bo'ladi. Agar $x_2-x_1=\Delta x$, $f(x_2)-f(x_1)=\Delta y$ deb belgilasak, $\Delta x>0$ va $\Delta y>0$ ekanini, ya'ni orttirmalar bir xil ishorali ekanini ko'ramiz.

Shunday qilib o'suvchi funksiya uchun $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}>0$ bo'lar ekan. Shunga o'xshash kamayuvchi funksiya uchun $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}<0$ bo'lishiga ishonch hosil qilish qiyin emas.

26.1-teorema(funksiya o'suvchi bo'lishining zaruriy sharti). Agar $(a;\ b)$ intervalda differensiallanuvchi $y=f(x)$ funksiya shu intervalda o‘suvchi bo‘lsa, u holda bu funksiyaning hosilasi intervalning hech bir nuqtasida manfiy bo‘lmasligi zarur, ya‘ni $(a;\, b)$ intervaldagi barcha x lar uchun $f'(x) \geq 0$ bo‘ladi.

Isboti. Teoremaning shartiga ko‘ra $y = f(x)$ funksiya $(a;\, b)$ intervalda o‘suvchi, shu sababli istalgan $x \in (a,\, b)$ uchun $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} > 0$. Musbat funksiyaning limiti manfiy bo‘la olmasligi sababli $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$. Ammo teoremaning shartiga ko‘ra $f(x)$ funksiya $(a;\, b)$ intervalda differensiallanuvchi bo‘lganligi sababli $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ chekli limit mavjud va $(a;\, b)$ dagi barcha x lar uchun $f'(x) \geq 0$ bo‘ladi. Teorema isbot bo‘ldi.

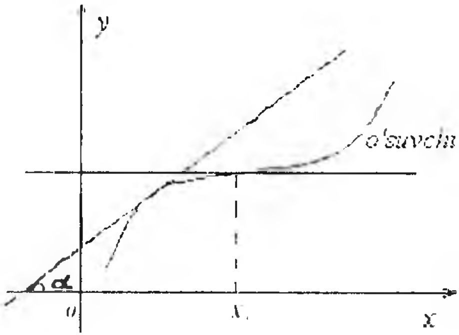
26.2-teorema (funksiya kamayuvchi bo‘lishining zaruriy sharti). Agar $(a;\, b)$ intervalda differensiallanuvchi $y = f(x)$ funksiya shu intervalda kamayuvchi bo‘lsa, u holda bu funksiyaning hosilasi intervalning hech bir nuqtasida musbat bo‘lmasligi zarur, ya‘ni $(a;\, b)$ intervaldagi barcha x lar uchun $f'(x) \leq 0$ bo‘ladi.

Teoremani isboti kamayuvchi funksiya uchun $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} < 0$ ekanini hisobga olinsa 26.1-teoremang isbotidagi mulohazalarni takrorlagani uchun uni isbotlashni o‘quvchiga hovola etamiz. Bu teoremalar quyidagicha geometrik izoh berish mumkin. O‘suvchi funksiyaning grafigi Ox o‘q bo‘ylab o‘ngga harakatlanganda yuqoriga ko‘tarila boradi.

Bu holda grafikka urinma Ox o‘qning musbat yo‘nalishi bilan o‘tkir α burchakni tashkil etadi, yoki ba‘zi-bir nuqtalarda u Ox o‘qqa parallel bo‘ladi. Masalan x_1 nuqtada $f'(x_1) = 0$(117-chizma).

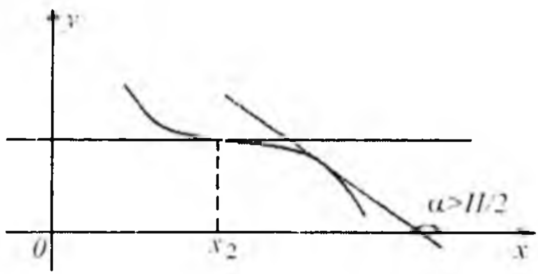
O‘tkir burchakning tangensi musbat (urinma Ox ga parallel nuqtalarda nolga teng) va hosilaning geometrik ma‘nosiga ko‘ra

$tg\alpha = f'(x)$ bo'lgani sababli o'suvchi funksiya uchun $f'(x) \geq 0$ kelib chiqadi.



117-chizma.

Kamayuvchi funksiyaning garfigiga urinma $0x$ o'qning musbat yo'nalishi bilan o'tmas burchak tashkil etadi, yoki $0x$ ga parallel bo'ladi. O'tmas burchakning tangensi manfiyligini hisobga olib kamayuvchi funksiya uchun $f'(x) \leq 0$ tengsizlikka ega bo'lamiz (118-chizma).



118-chizma.

26.3-teorema (funksiya o'suvchi bo'lishining yetarlilik sharti). Agar $[a; b]$ kesmada uzluksiz $y = f(x)$ funksiya $(a; b)$ intervalda musbat hosilaga ega bo'lsa, u holda bu funksiya $[a; b]$ kesmada o'suvchi bo'ladi.

Isboti. Barcha $a < x < b$ uchun $f'(x) > 0$ bo'lsin. $(a; b)$ intervalga tegishli ikkita ixtiyoriy $x_1 < x_2$ qiymatlarni qaraymiz. $[x_1, x_2]$ kesma uchun Lagranjning chekli ayirmalar formulasini yozamiz:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1), \quad x_1 < c < x_2 \qquad (26.1)$$

Teoremaning shartiga ko'ra $f'(c) > 0$. Bundan tashqari $x_2 - x_1 > 0$. Shuning uchun (26.1) tenglikdan $f(x_2) - f(x_1) > 0$ yoki $f(x_2) > f(x_1)$, ya'ni $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada o'suvchiligi kelib chiqadi. Teorema isbot bo'ldi.

26.4-teorema(funksiya kamayuvchi bo'lishining etarlilik sharti). Agar $[a; b]$ kesmada uzluksiz $y = f(x)$ funksiya $(a; b)$ intervalda manfiy hosilaga ega bo'lsa, u holda bu funksiya $[a; b]$ kesmada kamayuvchi bo'ladi.

$[a; b]$ kesmada faqat o'suvchi (faqat kamayuvchi) funksiya shu kesmada monoton o'suvchi (monoton kamayuvchi) funksiya deb atalar edi.

Funksiya faqat o'suvchi yoki faqat kamayuvchi bo'ladigan intervallar uning monotonlik intervallari deyilar edi.

1-misol. $y = x^2$ funksiyaning monotonlik intervallarini aniqlang.

Yechish. y' hosilani topamiz: $y' = 2x$.

$x < 0$ da $y' < 0$ va funksiya $(-\infty; 0)$ intervalda kamayadi;

$x > 0$ da $y' > 0$ va funksiya $(0; +\infty)$ intervalda o'sadi;

2-misol. $y = 4x + \sin x$ funksiyaning monotonlik intervallarini aniqlang.

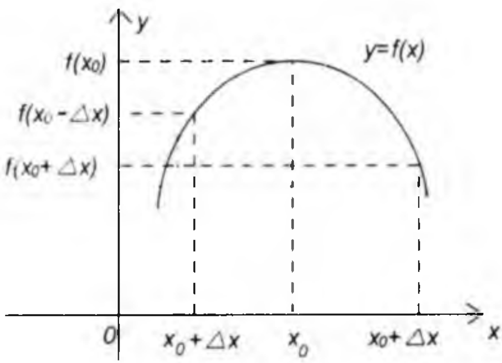
Yechish. y' hosilani topamiz: $y' = 4 + \cos x$. Barcha $x \in (-\infty; +\infty)$ uchun $y' > 0$ bo'lganligi sababli berilgan funksiya $(-\infty; +\infty)$ intervalda o'sadi.

26.2. Funksiyaning maksimum va minimumi

x_0 nuqtada va uning atrfida aniqlangan $y = f(x)$ funksiyani qaraymiz.

1-ta'rif. Agar $y = f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymati shu funksiyaning bu nuqtaning yetarlicha kichik atrofidagi qolgan qiymatlaridan katta bo'lsa, $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada **maksimum** (maximum)ga ega deyiladi.

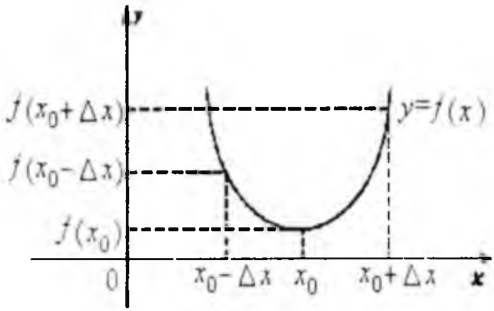
Boshqacha aytganda, agar har qanday yetarlicha kichik musbat yoki manfiy Δx larda $f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga ega deyiladi($\Delta x > 0$ da 119-chizma). Bu holda x_0 funksiyaning maksimum nuqtasi deyiladi.



119-chizma

2-ta'rif. Agar $y = f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymati shu funksiyaning bu nuqtaning yetarlicha kichik atrofidagi qolgan qiymatlaridan kichik bo'lsa, $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada **minimumga** ega deyiladi.

Boshqacha aytganda, agar har qanday yetarlicha kichik musbat yoki manfiy Δx larda $f(x_0+\Delta x)>f(x_0)$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada minimumga ega deyiladi($\Delta x>0$ da 120-chizma). Bu holda x_0 funksiyaning minimum nuqtasi deb ataladi.



120-chizma.

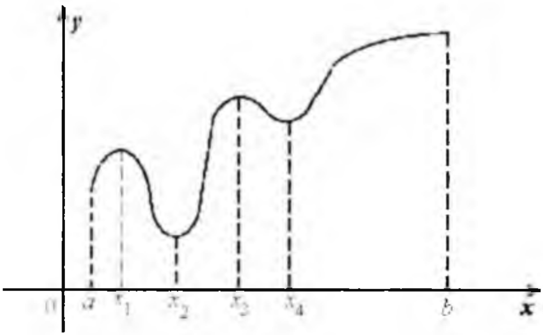
Masalan, $y=x^2$ funksiya x=0 nuqtada minimumga ega, chunki x=0 bo'lganda y=0 va x ning boshqa qiymatlarida y>0.

1-eslatma. $[a;b]$ kesmada aniqlangan funksiya o'zining maksimum va minimum qiymatlariga x ning shu kesma ichidagi qiymatlaridagina erishadi. Boshqacha aytganda $f(a)$, $f(b)$ qiymatlar funksiyaning maksimum va minimum qiymatlari bo'la olmaydi.

2-eslatma. Funksiyaning $[a;b]$ kesmadagi maksimum va minimumini uning shu kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlari deb qarash xato bo'ladi. Funksiyaning maksimum qiymati uning funksiya maksimumga ega nuqtaga yetarli darajada yaqin turgan hamma nuqtalaridagi qiymatlariga nisbatangina eng katta bo'ladi. Funksiyaning minimumi haqida ham shunga o'xshash gaplarni aytish mumkin.

Funksiyaning maksimumi uning minimumidan har doim katta bo'ladi deb o'ylash noto'g'ri. 121-chizmada $[a;b]$ kesmada aniqlangan funksiya tasvirlangan.

Bu funksiya: $x = x_1$ va $x = x_3$ nuqtalarda maksimumga ega; $x = x_2$ va $x = x_4$ nuqtalarda minimumga ega; lekin funksiyaning $x = x_4$ nuqtadagi minimumi uning $x = x_1$ nuqtadagi maksimumidan katta. Funksiyaning $x = b$ nuqtadagi qiymati uning $[a; b]$ kesmadagi eng katta qiymati bo'ladi.



121-chizma.

Funksiyaning maksimumlari va minimumlari funksiyaning **ekstremumlari** yoki **ekstremal qiymatlari** deyiladi.

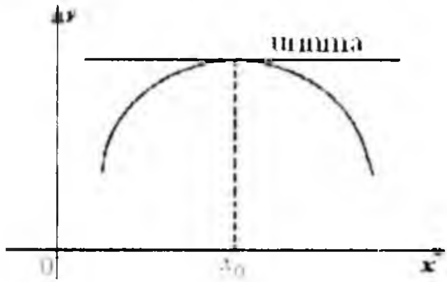
Agar x_0 nuqtada funksiya ekstremumga ega bo'lsa u holda bu nuqta funksiyaning **ekstremum** nuqtasi deyiladi.

Izoh. Biror oraliqda faqat o'suvchi(faqat kamayuvchi) funksiya shu oraliqda ekstremumga ega bo'lmaydi.

26.3. Ekstremum mavjudligining zaruriy sharti

26.5-teorema. Agar differensiallanuvchi $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumga ega bo'lsa, u holda uning shu nuqtadagi hosilasi nolga teng bo'lishi zarur, ya'ni $f'(x_0) = 0$ bo'ladi.

Isboti. Aniqlik uchun funksiya x_1 nuqtada maksimumga ega deb faraz qilamiz (122-chizma).



122-chizma.

1) U holda $x < x_0$ lar uchun funksiya o'suvchi va $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$, demak, $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$;

2) $x > x_0$ lar uchun funksiya kamayuvchi va $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$, demak, $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0$. $f'(x_0) \geq 0$ va $f'(x_0) \leq 0$ munosabatlardan $f'(x_0) = 0$ kelib chiqadi.

Teoremaning geometrik mazmuni shuni bildiradiki, differensiallanuvchi funksiya uchun ekstremum nuqtalarida urinma Ox o'qqa parallel bo'ladi.

Biz shu paytgacha funksiya ekstremumga ega bo'lgan nuqtalarda differensiallanuvchi deb faraz qildik.

Funksiya hosilaga ega bo'lmagan yoki hosilasi cheksiz bo'lgan nuqtalarda ham funksiya ekstremumga ega bo'lishi mumkin.

3-misol. $y = |x|$ funksiya butun son o'qida uzluksiz bo'lib $x = 0$ nuqtada hosilaga ega emasligi isbotlangan edi. Bu nuqtada funksiya minimumga ega (107-chizma).

4-misol. $y=1-\sqrt[3]{x^2}$ funksiyaning hosilasi $y'=-\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ $x=0$ nuqtada cheksizlikka aylanadi. Funksiya $x=0$ nuqtada maksimumga ega (115-chizma).

Shunday qilib funksiya ekstremumga ega bo‘lgan nuqtalarda funksiyaning hosilasi yo nolga teng, yoki cheksizlikka teng yoki mavjud bo‘lmas ekan. Bunday nuqtalar funksiyaning **kritik (statsionar)** nuqtalari deyiladi. Demak funksiya ekstremal qiymatlarini faqatgina o‘zining kritik nuqtalarida qabul qilishi mumkin.

Teskari tasdiq o‘rinli emas, ya‘ni nuqtaning kritik nuqta ekanligidan shu nuqtada funksiyaning ekstremumga ega ekanligi kelib chiqmaydi. Masalan, $y=x^3$ funksiyaning hosilasi $y'=3x^2$ $x=0$ nuqtada nolga aylanadi. Ammo bu nuqtada funksiya ekstremumga ega emas, chunki u o‘suvchi ($y'\geq 0$).

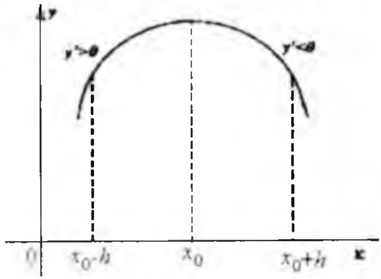
26.4 Ekstremum mavjudligining yetarlilik sharti

26.6-teorema (ekstremum mavjudligining birinchi yetarlilik sharti). $f(x)$ funksiya kritik nuqta x_0 ni o‘z ichiga olgan birorta intervalda uzluksiz va shu intervalning barcha (balki x_0 nuqtaning o‘zidan boshqa) nuqtalarida differensiallanuvchi bo‘lsin. Agar shu kritik nuqtaning chap tomonidan o‘ng tomoniga o‘tishda hosilaning ishorasi plyusdan minusga o‘zgarsa, funksiya $x=x_0$ kritik nuqtada maksimumga ega bo‘ladi. Agar $x=x_0$ kritik nuqtaning chap tomonidan o‘ng tomoniga o‘tishda hosilaning ishorasi minusdan plyusga o‘zgarsa, funksiya bu nuqtada minimumga ega bo‘ladi.

Isboti. x_0-kritik nuqta bo‘lib uning chap tomonidan o‘ng tomoniga o‘tishda $f'(x)$ hosila ishorasini plyusdan minusga o‘zgartirsin, ya‘ni x_0 nuqtaning chapida hosila musbat, uning o‘ngida hosila manfiy bo‘lsin. Demak shunday yetarlicha kichik musbat $h>0$ son mavjud bo‘lib (x_0-h, x_0) intervalda funksiyaning hosilasi $f'(x)>0$ va (x_0, x_0+h) intervalda hosila $f'(x)<0$ bo'ladi. Funksiyaning o'sishi va kamayishi haqidagi teoremaga binoan $[x_0-h, x_0]$ kesmada funksiya o'sadi, $[x_0, x_0+h]$ kesmada esa u kamayadi.

Demak, $[x_0-h, x_0+h]$ kesmaga tegishli barcha x lar uchun $f(x)<f(x_0)$ bo'ladi.

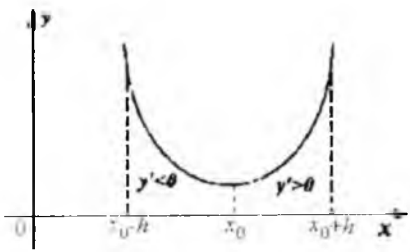
Bu $f(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtada maksimumga ega ekanligini ko'rsatadi (123-chizma).



123 chizma.

Teoremaning ikkinchi qismi ham shunga o'xshash isbotlanadi (124-chizma).

Izoh. $x=x_0$ kritik nuqtaning bir tomonidan ikkinchi tomoniga o'tishda $f'(x)$ hosila ishorasini o'zgartirmasa $x=x_0$ kritik nuqtada funksiya ekstremumga ega bo'lmaydi.



124-chizma.

5-misol. $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$ funksiyaning monotonlik intervallarini va ekstremumini toping.

Yechish. 1) Berilgan funksiya $(-\infty;+\infty)$ intervalda aniqlangan va differensiallanuvchi.

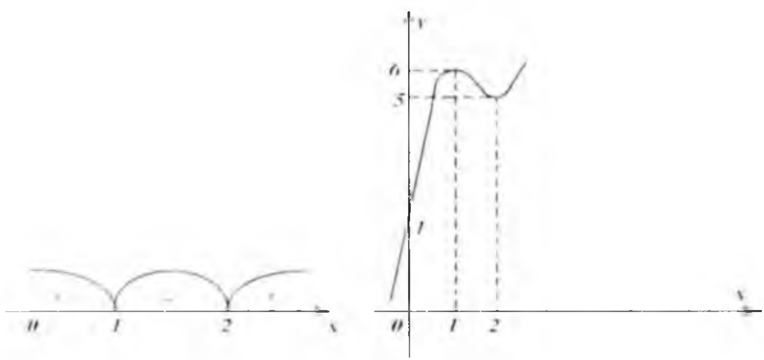
2) Funksiyaning hosilasini topamiz: $y' = 6x^2 - 18x + 12$.

3) Kritik nuqtalarini topamiz: $6x^2 - 18x + 12 = 0$; $x^2 - 3x + 2 = 0$;

$x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$; $x_1 = 1$, $x_2 = 2$-kritik nuqtalar.

$y' = 6(x-1)(x-2)$ hosilaning ishorasini intervallar usulidan foydalanib tekshiramiz.

Demak, $(-\infty;1)$ va $(2;+\infty)$ intervallarda $y' > 0$ bo'lgani uchun bu intervallarda funksiya o'sadi, $(1;2)$ intervalda $y' < 0$ bo'lgani uchun bu intervalda funksiya kamayadi. $x = 1$ kritik nuqtaning chap tomonidan o'ng tomoniga o'tishda hosila ishorasini plyusdan minusga o'zgartirganligi uchun $x=1$ kritik nuqtada funksiya maksimumga ega. $x=2$ kritik nuqtaning chap tomonidan o'ng tomoniga o'tishda hosila ishorasini minusdan plyusga o'zgartirganligi uchun bu kritik nuqtada funksiya minimumga ega (125-chizma). $y_{max} = y(1) = 6$, $y_{min} = y(2) = 5$.



125-chizma.

26.5. Funksiyaning kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlari

$[a;b]$ kesmada uzluksiz $y=f(x)$ funksiyani qaraymiz. Bu funksiya $[a;b]$ kesmada o'zining eng katta va eng kichik qiymatlarini qabul qilishi aytilgan edi (18.5-teorema). Agar funksiya o'zining eng katta (eng kichik) qiymatlarini $[a;b]$ kesmaning ichki nuqtasida qabul qilsa u funksiyaning $(a;b)$ intervaldagi maksimum (minimum) qiymatlaridan biri bo'ladi. Bundan tashqari funksiya o'zining eng katta va eng kichik qiymatlariga $[a;b]$ kesmaning oxirlarida erishishi ham mumkin.

Shunday qilib, funksiyaning $[a;b]$ kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini topish uchun quyidagi qoidaga ega bo'lamiz.

1. Funksiyaning $(a;b)$ intervaldagi barcha kritik nuqtalarini topib funksiyaning bu nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz.

2. Funksiyaning kesmaning oxirlari $x=a$, $x=b$ nuqtalardagi qiymatlari $f(a)$, $f(b)$ larni hisoblaymiz.

Topilgan qiymatlardan eng kattasi funksiyaning $[a;b]$ kesmadagi eng katta qiymati, ulardan eng kichigi funksiyaning $[a;b]$ kesmadagi eng kichik qiymati bo'ladi.

6-misol. $f(x)=2x^3-21x^2+72x+6$ funksiyaning $[2;5]$ kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini toping.

Yechish. 1. Funksiyaning $[2;5]$ kesmadagi kritik nuqtalarini topamiz. Buning uchun $f'(x)=6x^2-42x+72$ hosilani hisoblab $f'(x)=0$ tenglamani yechamiz:

$6x^2-42x+72=0$; $x^2-7x+12=0$; $x_1=3$, $x_2=4$ -kritik nuqtalar. Kritik nuqtalarning har ikkalasi berilgan kesmaga tegishli. Funksiyaning $x_1=3$ va $x_2=4$ nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$$f(3) = 2 \cdot 3^3 - 21 \cdot 3^2 + 72 \cdot 3 + 6 = 87,$$
$$f(4) = 2 \cdot 4^3 - 21 \cdot 4^2 + 72 \cdot 4 + 6 = 86.$$

2. Funksiyaning $[2; 5]$ kesmaning oxirlari $x = 2$ va $x = 5$ nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$$f(2) = 2 \cdot 2^3 - 21 \cdot 2^2 + 72 \cdot 2 + 6 = 82,$$
$$f(5) = 2 \cdot 5^3 - 21 \cdot 5^2 + 72 \cdot 5 + 6 = 91.$$

Topilgan qiymatlar 82, 87, 86, 91 dan eng kichigi 82 berilgan funksiyaning $[2; 5]$ kesmadagi eng kichik qiymati, ulardan eng kattasi 91 uning shu kesmadagi eng katta qiymati bo'ladi.

26.6. Ekstremumlarni ikkinchi hosila yordamida tekshirish

Ba'zi hollarda funksiyaning ekstremumlarini uning ikkinchi hosilasi yordamida tekshirish qulay bo'ladi.

Faraz qilaylik $y = f(x)$ funksiyaning hosilasi $x = x_0$ nuqtada nolga aylansin, ya'ni $f'(x_0) = 0$ va funksiya shu nuqtada hamda uning biror atrofida ikkinchi tartibli uzluksiz hosilaga ega bo'lib, $f''(x_0) \neq 0$ bo'lsin.

26.7-teorema (ekstremum mavjudligining ikkinchi yetarlilik sharti).

Agar $f''(x_0) < 0$ bo'lsa $f(x)$ funksiya $x = x_0$ kritik nuqtada maksimumga ega bo'ladi, $f''(x_0) > 0$ bo'lganda u $x = x_0$ kritik nuqtada minimumga ega bo'ladi.

Isboti. Aniqlik uchun $f''(x_0) < 0$ bo'lsin. $f(x)$ funksiya $x = x_0$ kritik nuqtada maksimumga ega ekanligini ko'rsatamiz. Ikkinchi hosilaning ta'rifiga binoan:

$$f''(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x}.$$

Shartga ko'ra $f'(x_0)=0$ bo'lgani uchun

$$f''(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0+\Delta x)}{\Delta x}.$$

Ammo $f''(x_0)<0$. Shuning uchun

$$f''(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0+\Delta x)}{\Delta x}<0.$$

limiti manfiy ifodaning o'zi ham kichik $|\Delta x|$ lar uchun manfiy bo'lganligi sababli

$$\frac{f'(x_0+\Delta x)}{\Delta x}<0$$

bo'ladi.

$\Delta x<0$ bo'lsin, u holda $f'(x_0+\Delta x)>0$; agarda $\Delta x>0$ bo'lsa, u holda $f'(x_0+\Delta x)<0$. Bu $x=x_0$ kritik nuqtaning chap tomonidan o'ng tomoniga o'tishda hosila ishorasini plyusdan minusga o'zgartirishini ko'rsatadi. Demak, ekstremum mavjudligining birinchi yetarlilik shartiga ko'ra $y=f(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtada maksimumga ega.

Teoremaning ikkinchi qismi ham shunga o'xshash isbotlanadi.

7-misol. $y=x+2\cos x$ funksiyaning $[0;2\pi]$ kesmadagi ekstremumini toping.

Yechish.1. Birinchi hosilani topamiz: $y'=1-2\sin x$.

2. $(0;2\pi)$ intervalga tegishli kritik nuqtalarni topamiz:

$$1-2\sin x=0;\quad \sin x=\frac{1}{2},\quad x_1=\frac{\pi}{6},\quad x_2=\frac{5\pi}{6}.$$

3. Ikkinchi hosilani topamiz: $y''=-2\cos x$.

4. Ikkinchi hosilaning $x_1=\frac{\pi}{6}$ ва $x_2=\frac{5\pi}{6}$ kritik nuqtalardagi ishoralarini aniqlaymiz.

$$f''\left(\frac{\pi}{6}\right)=-2\cos\frac{\pi}{6}=-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}<0,$$

$$f''\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-2\cos\frac{5\pi}{6}=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}>0.$$

26.7- teoremaga binoan berilgan funksiya $x_1=\frac{\pi}{6}$ nuqtada maksimumga va $x_2=\frac{5\pi}{6}$ nuqtada minimumga ega bo'ladi.

$$y_{max}=y\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}+2\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3,14}{6}+\sqrt{3}\approx 2,23,$$

$$y_{min}=y\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{5\pi}{6}+2\cos\frac{5\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 1,78.$$

8-misol. $f(x)=x^4$ funksiyaning ekstremumini toping.

Yechish. Bu funksiya butun sonlar o'qida aniqlangan va differensiallanuvchi.

1. Hosilani topamiz: $f'(x)=4x^3$.

2. Hosilani nolga tenglashtirib uning ildizlarini topamiz: $f'(x)=0$; $4x^3=0$; $x=0$ -kritik nuqta.

3. Ikkinchi hosilani topamiz: $f''(x)=12x^2$.

Kritik nuqtada ikkinchi hosila nolga teng, ya'ni $f''(0)=12\cdot 0^2=0$. Demak, qaralayotgan hol uchun ikkinchi yetarlilik sharti ishlamaydi. Birinchi yetarlilik shartiga murojaat etib topamiz: $x<0$ da $f'(x)<0$ va $x>0$ da $f'(x)>0$. Shunday qilib, $x=0$ kritik nuqtaning chap tomonidan o'ng tomoniga o'tishda hosila ishorasini minusdan plyusga o'zgartirganligi sababli $x=0$ nuqtada funksiya minimumga ega.

Demak, kritik nuqtada ikkinchi hosila mavjud bo'lib u noldan farqli bo'lgandagina ikkinchi yetarlilik shartidan foydalanish mumkin ekan. Agar kritik nuqtada ikkinchi hosila nolga teng bo'lsa yoki mavjud bo'lmasa, u holda ikkinchi yetarlilik shartidan foydalanib bo'lmaydi.

Shunday qilib differensiallanuvchi $y = f(x)$ funksiyaning ekstremumini quyidagi sxema asosida izlash maqsadga muvofiqdir.

1. Fuksiyaning hosilasi $f'(x)$ topiladi.

2. Kritik nuqtalar topiladi; buning uchun: a) $f'(x) = 0$ tenglamaning haqiqiy ildizlari topiladi.

b) x ning $f'(x)$ hosila mavjud bo'lmagan yoki cheksizlikka aylanadigan qiymatlari topiladi.

3. Yetarlilik shartlarining birortasidan foydalanib topilgan kritik nuqtalarning har birida funksiyaning maksimum yoki minimumga ega ekanligi yoki ekstremumning mavjud emasligi aniqlanadi.

4. $f(x)$ funksiyaning ekstremumi mavjud kritik nuqtalaridagi qiymatlarini hisoblab uning ekstremumini topiladi.

26.7. Teylor formulasi yordamida funksiyani ekstremumga tekshirish

Yuqorida birinchi va ikkinchi hosilalar yordamida funksiyani ekstremumga tekshirish usullari bilan tanishdik. Ikkinchi yetarlilik shartiga ko'ra $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$ bo'lganda funksiya $x = x_0$ nuqtada ekstremumga ega bo'ladi. Ammo $f''(x_0) = 0$ bo'lganda ikkinchi yetarlilik sharti $x = x_0$ kritik nuqtada nima bo'ladi degan savolga javob berishga ojiz. Bunday holda qo'yilgan savolga Teylor formulasidan foydalanib javob berish mumkin.

Ma'lum uzluksiz funksiya x_0 nuqtada qanday ishoraga ega bo'lsa, u holda x_0 nuqtdaning shunday $(x_0 - h, x_0 + h)$ atrofi mavjud bo'lib undagi barcha x larda ham o'sha ishoraga ega bo'ladi. Ana shu xossadan quyida foydalanamiz.

$f(x)$ funksiya $x = x_0$ nuqtada va uning biror atrofida n-tartibligacha uzluksiz hosilalarga ega bo'lib

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

bo'lsin. U holda buni hisobga olib

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$

$$+ \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1!)}(x - x_0)^{(n-1)} + \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(x - x_0)^n$$

Teylor formulasini

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(x - x_0)^n$$

yoki

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(x - x_0)^n \tag{26.1}$$

ko'rinishda yozish mumkin, bunda z x_0 bilan x orasidagi son.

Mumkin bo'lgan hollarni qaraymiz.

Birinchi hol. n-juft son.

a) $f^{(n)}(x_0) < 0$ bo'lsin. U holda $f^{(n)}(x)$ ning uzluksizligidan x_0 nuqtaning shunday $(x_0 - h,\ x_0 + h)$ atrofi mavjud bo'lib bu atrofdagi barcha x lar uchun $f^{(n)}(x)<0$ bo'ladi. Agar x $(x_0 - h,\ x_0 + h)$ intervalga tegishli bo'lsa, u holda z x_0 bilan x orasidagi son bo'lgani uchun u ham shu intervalga tegishli bo'ladi. Demak $f^{(n)}(z)<0$. n juft son bo'lganligi sababli $x \neq x_0$ bo'lganda $(x - x_0)^n > 0$ bo'ladi. Shunday qilib (26.1) tenglikning o'ng tomoni manfiy va musbat ifodani ko'paytmasi bo'lgani uchun manfiy bo'ladi.

Demak, $x \neq x_0$ bo'lganda $(x_0 - h,\ x_0 + h)$ intervalning hamma nuqtalarida $f(x) - f(x_0) < 0$ yoki $f(x) < f(x_0)$ bo'ladi.

f(x) funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymati uning $(x_0 - h,\ x_0 + h)$ intervaldagi qolgan barcha qiymatlaridan katta bo'lganligi sababli $x = x_0$ kritik nuqtada funksiya maksimumga ega.

b) $f^{(n)}(x_0)>0$ bo'lsin. Bu holda h ning yetarlicha kichik qiymatlarida $(x_0-h,\ x_0+h)$ intervalning barcha x nuqtalarida $f^{(n)}(z)>0$, $x\neq x_0$ da $(x-x_0)^n>0$. Demak (26.1) tenglining o'ng tomoni musbat bo'ladi, ya'ni $x\neq x_0$ da $f(x)-f(x_0)>0$ yoki $f(x)>f(x_0)$ bo'ladi, bu esa $x=x_0$ nuqtada $f(x)$ funksiya minimumga ega degan so'zdir.

Ikkinchi hol. n-toq son.

Bu holda $(x-x_0)^n$ miqdor $x<x_0$ va $x>x_0$ bo'lishiga qarab har xil ishoraga ega bo'ladi.

a) $f^{(n)}(x_0)<0$ bo'lsin, u holda x_0 nuqtaning shunday $(x_0-h,\ x_0+h)$ atrofi mavjud bo'lib unda $f^{(n)}(z)<0$ bo'ladi. $(x-x_0)^n<0$ ekanini hisobga olsak $x<x_0$ da (26.1) tenglikning o'ng tomoni musbat, $x>x_0$ da u manfiy bo'lishiga ishonch hosil qilamiz.

Demak, (26.1) tenglikdan

$x<x_0$ da $f(x)-f(x_0)>0$ yoki $f(x)>f(x_0)$,

$x>x_0$ da $f(x)-f(x_0)<0$ yoki $f(x)<f(x_0)$ ga ega bo'lamiz.

Bu funksiya $(x_0-h,\ x_0+h)$ intervalda kamayuvchi bo'lib u $x=x_0$ kritik nuqtada maksimumga ham, minimumga ham ega emasligini bildiradi.

Natijalarni tahlil qilib shunday xulosaga kelamiz.

Agar $x=x_0$ da $f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0$ va $f^{(n)}(x_0)\neq 0$ bo'lsa, u holda:

a) n juft son bo'lganda x_0 kritik nuqtada ekstremum mavjud: $f^{(n)}(x_0)<0$ bo'lganda $f(x)$ maksimumga, $f^{(n)}(x_0)>0$ bo'lganda u minimumga ega.

b) n toq son bo'lganda $x=x_0$ kritik nuqtada ekstremum mavjud emas; $f^{(n)}(x_0)<0$ bo'lganda $f(x)$ funksiya kamayuvchi, $f^{(n)}(x_0)>0$ bo'lganda u o'suvchi bo'ladi.

9-misol. Ushbu $f(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x - 12$ funksiya ekstremumga tekshirilsin.

Yechish. 1) Funksiyaning birinchi hosilasini topamiz:

$f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 48x - 32 = 4(x^3 - 6x^2 + 8x - 8) = 4(x-2)^3$.

2) $f'(x) = 4(x-2)^3 = 0$ tenglamani yechib $x = 2$ yagona kritik nuqtani topamiz.

3) Funksiyaning yuqori tartibli $f''(x) = 12(x-2)^2$, $f'''(x) = 24(x-2)$, $f^{IV}(x) = 24$ hosilani $x = 2$ kritik nuqtadagi qiymatlarini hisoblaymiz.

$$f''(2) = f'''(2) = 0, \quad f^{IV}(2) = 24 > 0.$$

$x = 2$ kritik nuqtada birinchi noldan farqli hosilaning tartibi $n = 4$ juft son bo'lib $f^{IV}(2) > 0$ bo'lgani uchun bu kritik nuqtada funksiya minimumga ega.

10-misol. Ushbu $f(x) = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 16$ funksiya ekstremumga tekshirilsin.

Yechish. 1) Funksiyaning hosilasini topamiz:

$f'(x) = 5x^4 + 20x^3 + 30x^2 + 20x + 5 = 5(x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1)$

yoki $f'(x) = 5(x+1)^4$, bu yerda Nyuton binoli formulasidan foydalandik.

2) $f'(x) = 5(x+1)^4 = 0$ tenglamani yechib yagona $x = -1$ kritik nuqtani topamiz.

3) Funksiyaning yuqori tartibli $f''(x) = 20(x+1)^3$, $f'''(x) = 60(x+1)^2$, $f^{IV}(x) = 120(x+1)$, $f^{V}(x) = 120$ hosilalarini $x = -1$ kritik nuqtadagi qiymatlarini hisoblaymiz.

$$f''(-1) = f'''(-1) = f^{IV}(-1) = 0, \quad f^{V}(-1) = 120 \neq 0.$$

$x = -1$ kritik nuqtada birinchi noldan farqli hosilaning tartibi $n = 5$ toq son bo'lgani uchun berilgan funksiya $x = -1$ kritik nuqtada ekstremumga ega emas.

26.8. Ekstremumlar nazariyasining masalalar yechishga tadbiqi

Ekstremumlar nazariyasi yordamida geometriya, mexanika va hokazolarga doir ko'pgina masalalar yechiladi. Shunday masalalarning ba'zilarini yechish usuli bilan tanishamiz.

1-masala. Uzunligi 120 metrlik panjara bilan bir tomondan uy bilan chegaralangan eng katta yuzga ega to'g'ri to'rtburchak shaklidagi maydon o'rab olinishi kerak. To'g'ri to'rtburchakli maydonning o'lchovlari (bo'yi va eni) aniqlansin.

Yechish. Maydonning uzunligini x, enini y, yuzini S orqali belgilaymiz. U holda to'g'ri to'rtburchakning yuzini topish formulasiga ko'ra maydonning yuzi $S = xy$ bo'ladi.

S yuz hozircha ikkita erkli o'zgaruvchilar x va y ga bog'liq. Ulardan birortasini ikkinchisi orqali ifodalash uchun masalaning shartidan foydalanamiz. Shartga ko'ra maydonning bir tomoni tayyor uy (devor) bilan, qolgan uch tomoni uzunligi $120m$ panjara bilan chegaralanishi lozim, ya'ni $x + 2y = 120$. Bundan $x = 120 - 2y$ kelib chiqadi. x ning ushbu qiymatini S yuzni topish formulasiga qo'yamiz. U holda $S = (120 - 2y)y = 120y - 2y^2$ bitta erkli o'zgaruvchining funksiyasi hosil bo'ladi. Endi shu $S(y)$ funksiyaning eng katta qiymatini topamiz.

$$S'(y) = 120 - 4y, \quad S''(y) = (120 - 4y)' = -4,$$

$S'(y) = 0$ yoki $120 - 4y = 0$ dan $4y = 120$; $y = 30$ yagona kritik nuqta kelib chiqadi.

$S''(30) = -4 < 0$ bo'lgani uchun ikkinchi yetarlilik shartga ko'ra $y = 30$ qiymatda funksiya maksimumga ega. Bu yagona maksimum uning eng katta qiymati ham bo'ladi. Shunday qilib bir tomoni uy bilan qolgan uch tomoni 120 m uzunlikdagi panjara bilan chegaralangan to'rtburchak shaklidagi maydonlar orasida eni $y = 30\,m$, bo'yi (uzunligi) $x = 120 - 2 \cdot 30 = 60\,m$ bo'lgan maydon eng katta $S = 60 \cdot 30m^2 = 1800m^2$ yuzga ega bo'lar ekan.

2-masala. 180 soni ko'paytmasi eng katta va ulardan ikkitasi $1:2$ nisbatda bo'lgan uchta qo'shiluvchiga ajratilsin.

Yechish. Faraz qilaylik $180 = x + y + z$ ko'rinishda tasvirlansin. Shartga ko'ra x,y,z sonlardan ikkitasi, masalan x,y $1:2$ nisbatda, ya'ni $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$, $y = 2x$ bo'lishi lozim. U holda $180 = x + 2x + z$ yoki $180 = 3x + z$, $z = 180 - 3x$ hosil bo'ladi. Demak $180 = x + 2x + (180 - 3x)$ ko'rinishdagi uchta x, $2x$, $180 - 3x$ qo'shiluvchilarga ajratildi. Shularning ko'paytmasi

$v = x \cdot 2x \cdot (180 - 3x) = 360x^2 - 6x^3$ ifodaning eng katta qiymatini topishimiz kerak. $v'(x) = 720x - 18x^2$; $v''(x) = 720 - 36x$; $v'(x) = 0$ yoki $720x - 18x^2 = 0$; dan $x \cdot (720 - 18x) = 0$; $x \neq 0$ bo'lgani uchun $720 - 18x = 0$; $x = \frac{720}{18} = 40$ kritik qiymat kelib chiqadi. $v''(40) = 720 - 36 \cdot 40 < 0$ bo'lgani uchun ikkinchi yetarlilik shartiga binoan x=40 qiymatda $v = x \cdot 2x \cdot (180 - 3x)$ funksiya eng katta qiymatga ega bo'ladi.

Demak, $y = 2x = 2 \cdot 40 = 80$, $z = 180 - 3x = 180 - 3 \cdot 40 = 60$. Shunday qilib, 180 soni 40, 80, 60 sonlarning yig'indisi ko'rinishida tasvirlanganda qo'shiluvchilardan ikkitasi $1:2$ nisbatda bo'lib, qo'shiluvchilarning ko'paytmasi eng katta bo'lar ekan, ya'ni $v_{\max} = 40 \cdot 80 \cdot 60 = 192000$.

3-masala. Marvaridni bahosi uning massasi kvadratiga proporsional. Ishlov berish vaqtida marvarid ikki bo'lakka ajralib ketdi va natijada eng ko'p qiymatini (bahosini) yo'qotdi. Bo'laklarning massalari topilsin.

Yechish. Marvaridning massasini m, bahosini z, bo'laklarning massalarini $m_1, m_2 (m_1 + m_2 = m)$ va ularning baholarini mos ravishda z_1, z_2 orqali belgilaymiz. U holda butun marvaridning bahosi $z = \alpha \cdot m^2$ bo'laklarning baholari esa $z_1 = \alpha \cdot m_1{}^2$,

$z_2 = \alpha \cdot m_2^2$ bo'ladi, bunda $\alpha > 0$-proporsionallik koeffitsienti. Shartga ko'ra, butun marvaridning bahosi $z = \alpha \cdot m^2$ bilan siniq ikki bo'lak marvaridning bahosi $\alpha \cdot m_1^2 + \alpha \cdot m_2^2$ orasidagi farq $y = \alpha \cdot m^2 - \alpha \cdot (m_1^2 + m_2^2)$ eng katta ekanligi bizga ma'lum, $m = m_1 + m_2$ yoki $m_2 = m - m_1$ ekanini hisobga olsak

$$y = \alpha \cdot m^2 - \alpha \cdot (m_1^2 + m_2^2) = \alpha \cdot m^2 - \alpha \cdot m_1^2 - \alpha \cdot (m - m_1)^2 =$$
$$= \alpha \cdot m^2 - \alpha \cdot m_1^2 - \alpha \cdot m^2 + 2\alpha \cdot m \cdot m_1 - \alpha \cdot m_1^2 = 2\alpha \cdot (m \cdot m_1 - m_1^2)$$

kelib chiqadi. Bu yerda

α, m o'zgarmas miqdorlar, m_1 esa o'zgaruvchi miqdordir. Endi $y(m_1)$ funksiyaning eng katta qiymatini topamiz. $y' = 2\alpha(m - 2m_1)$; $y'' = -4\alpha$. $y'(m_1) = 0$

yoki $m - 2m_1 = 0$ dan $m_1 = \frac{m}{2}$ kritik qiymat kelib chiqadi. $y''\left(\frac{m}{2}\right) = -4\alpha < 0$ bo'lgani uchun ikkinchi yetarlilik shartiga ko'ra $y = 2\alpha(mm_1 - 2m_1^2)$ funksiya $m_1 = \frac{m}{2}$ qiymatda maksimumga ega bo'ladi. Demak, marvarid teng $\left(m_1 = m_2 = \frac{m}{2}\right)$ ikki bo'lakka bo'linganda o'zining eng ko'p bahosini yo'qotar ekan.

4-masala. Jism $v_0 = 60\, m/sek$ tezlik bilan tik yo'nalishda yuqoriga otilgan. Jismning eng yuqori ko'tarilish balandligi topilsin.

Yechish. Fizika kursidan ma'lumki tik yo'nalishda yuqoriga v_0 boshlang'ich tezlik bilan otilgan jismning harakat tenglamasi $H = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$ bo'ladi. Bunda H-otilgan jismning yerdan balandligi. $g \approx 10\, m/sek^2$ erkin tushish tezlanishi, t esa sarflangan vaqt. Masalaning shartiga asosan $v_0 = 60\, m/sek$ va binobarin,

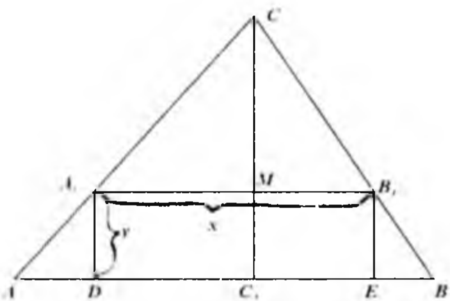
$H = 60t - 5t^2$. Endi shu $H(t)$ funksiyaning eng katta qiymatini topamiz. $H'(t) = 60 - 10t$; $H''(t) = -10$.

$H'(t) = 0$ yoki $60 - 10t = 0$ dan $10t = 60$, $t = 6$ kritik nuqta kelib chiqadi. $H''(6) = -10 < 0$ bo‘lgani uchun ikkinchi yetarlilik shartiga asosan $t = 6$ qiymatda $H = 60t - 5t^2$ funksiya maksimumga ega bo‘ladi. Demak, $H_{max} = H(6) = 60 \cdot 6 - 5 \cdot 6^2 = 180\ (m)$.

Shunday qilib $v_0 = 60\, m/сек$ tezlik bilan yuqoriga tik otilgan jism taqriban 6 sek.dan so‘ng eng yuqori H=180m balandlikka ko‘tarilar ekan.

5-masala. Asosi a va balandligi h bo‘lgan uchburchakka eng katta yuzli to‘g‘ri to‘rtburchak ichki chizilgan. To‘g‘ri to‘rtburchakning yuzi aniqlansin.

Yechish. ABC (126-chizma) uchburchakka ichki chizilgan to‘g‘ri to‘rtburchakning tomonlarini x va y orqali belgilaymiz. U holda to‘g‘ri to‘rtburchakning yuzi $S = xy$ bo‘ladi.



126-chizma.

ABC va A_1B_1C uchburchaklarning o‘xshashligidan $\dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{CM}{CC_1}$ (1) proporsiya kelib chiqadi. Masalaning shartiga ko‘ra $AB = a$, $CC_1 = h$. Belgilashimizga asosan $A_1B_1 = x$, $B_1E = MC_1 = y$,

$CM = CC_1 - CM = h - y$ bo'lgani uchun (1) munosabat quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi.

$$\frac{x}{a} = \frac{h-y}{h},$$

bundan $x = \frac{a}{h}(h-y)$ kelib chiqadi. x ning ushbu qiymatini $S = xy$ ga qo'yib $S = \frac{a}{h}(h-y)y = \frac{a}{h}(hy - y^2)$ bir o'zgaruvchining funksiyasiga ega bo'lamiz.

Endi shu $S(y)$ funksiyaning eng katta qiymatini topamiz.

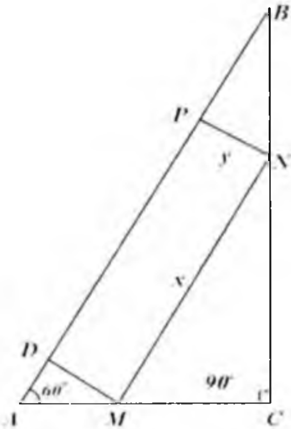
$$S'(y) = \frac{a}{h}(h-2y),\ S''(y) = -\frac{2a}{h}.$$

$S'(y) = 0$ yoki $\frac{a}{h}(h-2y) = 0$ dan $h - 2y = 0$, $y = \frac{h}{2}$ kritik qiymat kelib chiqadi.

$S''\left(\frac{h}{2}\right) = -\frac{2a}{h} < 0$ bo'lgani uchun ikkinchi yetarlilik shartiga ko'ra $S(y)$ funksiya $y = \frac{h}{2}$ da maksimumga ega bo'ladi. Bu yagona maksimum uning eng katta qiymati ham bo'ladi. Shunday qilib uchburchakka ichki chizilgan to'g'ri to'rtburchaklardan asosi $x = \frac{a}{h}(h-y) = \frac{a}{h}\left(h - \frac{h}{2}\right) = \frac{a}{2}$ va balandligi $y = \frac{h}{2}$ bo'lgan to'rtburchak eng katta yuzga ega bo'lar ekan. Bu to'rtburchakning yuzi esa $S = \frac{ah}{4}$ bo'ladi.

6-masala. Gipotenuzasi 24sm, burchagi 60^0 to'g'ri burchakli uchburchakka asosi gipotenuzada bo'lgan to'g'ri to'rtburchak ichki chizilgan. Shu to'g'ri to'rtburchak eng katta yuzga ega bo'lishi uchun uning tomonlari qanday bo'lishi kerak?

Yechish. To'g'ri to'rtburchakning tomonlarini x va y orqali belgilaymiz. U holda uning yuzi $S = xy$ bo'ladi. Endi y ni x orqali ifodalaymiz (127-chizma).



127-chizma.

Shartga ko'ra $\angle A = 60^0$, $\angle C = 90^0$. Demak $\angle B = 30^0$. Ma'lumki to'g'ri burchakli uchburchakning 30^0 li burchagi qarshisidagi tomoni gipotenuzaning yarmiga teng. Shuning uchun $AC = \frac{AB}{2} = \frac{24}{2} = 12(sm)$. To'g'ri burchakli uchburchak MNC ning 30^0 li burchagi qarshisidagi MC tomoni uning gipotenuzasi x ning yarmiga teng, ya'ni $MC = \frac{x}{2}$. Demak $AM = AC - MC = 12 - \frac{x}{2}$.

ΔADM dan $AD = \frac{AM}{2}$.

Pifagor teoremasiga ko'ra

$$y^2 = DM^2 = AM^2 - AD^2 = AM^2 - \left(\frac{AM}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}AM^2$$

yoki

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2} AM = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(12 - \frac{x}{2}\right) = \sqrt{3}\left(6 - \frac{x}{4}\right) \text{ bo‘ladi.}$$

Demak, to‘g‘ri to‘rtburchakning yuzi

$$S = xy = x\sqrt{3}\left(6 - \frac{x}{4}\right) = \sqrt{3}\left(6x - \frac{x^2}{4}\right)$$

bo‘ladi.

Endi shu $S(x)$ funksiyaning eng katta qiymatini topamiz.

$$S'(x) = \sqrt{3}\left(6 - \frac{2x}{4}\right), \quad S''(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \quad S'(x) = 0 \text{ yoki } \quad 6 - \frac{x}{2} = 0$$

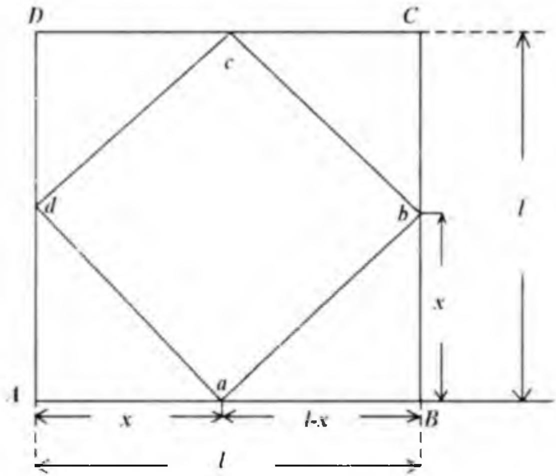
dan $x=12$ kritik qiymat kelib chiqadi. $S''(12) = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$ bo‘lgani uchun ikkinchi yetarlilik shartiga ko‘ra

$S(x) = \sqrt{3}\left(6x - \frac{x^2}{4}\right) = \sqrt{3}\left(6 - \frac{x}{4}\right)x$ funksiya $x=12$ qiymatda maksimumga ega bo‘ladi.

Shunday qilib, uchburchakka ichki chizilgan va bir tomoni uning 24 sm li gipotenuzasida bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchaklardan tomonlari $x=12$, $y = \sqrt{3}\left(6 - \frac{12}{4}\right) = 3\sqrt{3}$ ga teng bo‘lgani eng katta yuzga ega bo‘lib, $S_{max} = 12 \cdot 3\sqrt{3} = 36\sqrt{3}\ (sm^2)$ ga teng ekan.

7-masala. $ABCD$ kvadrat berilgan. Uning uchlaridan bir xil Aa, Bb, Cc, Dd kesmalar ajratilgan va a, b, c, d nuqtalarni birlashtirib kvadrat hosil qilingan. Aa ning qanday qiymatida $abcd$ kvadratning yuzi eng kichik bo‘ladi (128-chizma).

Yechish. $Aa = x$, $AB = \ell$ deb belgilasak, $aB = \ell - x$ va Pifagor teoremasiga ko‘ra $ab^2 = x^2 + (\ell - x)^2 = x^2 + \ell^2 - 2\ell x + x^2 = 2x^2 - 2\ell x + \ell^2$ bo‘ladi. Tomoni ab ga teng $abcd$ kvadratning yuzi $S = ab^2$ ga teng. Demak, $S = 2x^2 - 2\ell x + \ell^2$.



128-chizma.

Endi shu $S(x)$ funksiyaning eng kichik qiymatini topamiz. $S'(x) = 4x - 2\ell$, $S''(x) = 4$. $S'(x) = 0$ yoki $4x - 2\ell = 0$ dan $x = \frac{\ell}{2} = \frac{AB}{2}$ kritik qiymat kelib chiqadi. $S'\left(\frac{\ell}{2}\right) = 4 > 0$ bo‘lgani uchun ikkinchi yetarlilik shartiga binoan $S = 2x^2 - 2\ell x + \ell^2$ funksiya $x = \frac{\ell}{2}$ qiymatda eng kichik qiymatga ega bo‘ladi. Shunday qilib, *ABCD* kvadratga masalaning shartida ko‘rsatilgandek qilib ichki chizilgan kvadratlardan *ABCD* kvadrat tomonlarini o‘rtasini birlashtirib hosil qilingan kvadrat eng kichik yuzga ega bo‘lar ekan.

8-masala. Tagi kvadrat shaklidagi, hajmi 108 m^3 ga teng ochiq hovuzning o‘lchovlari shunday aniqlansinki, uning devorlari bilan tagini qoplash uchun mumkin qadar oz material sarf etilsin. Hovuzning o‘lchovlari deganda uning tagini tomonlari va balandligi (chuqurligi) tushuniladi.

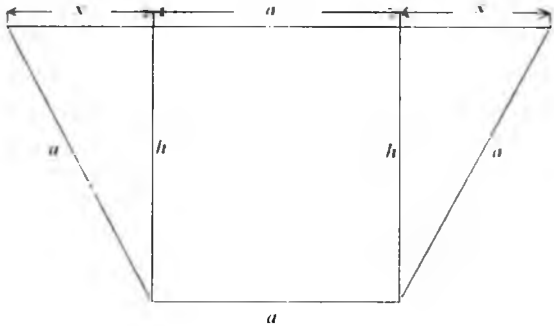
Yechish. Hovuz tagini tomoni x orqali va hovuz balandligini h orqali belgilaymiz. U holda hovuz parallelepiped shaklida bo'lgani uchun uning hajmi $v = x^2 h$ bo'ladi. Shartga ko'ra $x^2 h = 108$. Hovuz tagi x^2, devori $4xh$ yuzga ega bo'lgani uchun jami $S = x^2 + 4xh$ yuzni material bilan qoplash lozim. S yuzni birgina erkli o'zgaruvchining funksiyasi sifatida ifodalash uchun $x^2 h = 108$ tenglikdan topilgan $h = \frac{108}{x^2}$ qiymatni unga qo'yamiz. U holda $S = x^2 + 4x\frac{108}{x^2} = x^2 + \frac{432}{x}$ kelib chiqadi. Endi shu $S(x)$ funksiyaning eng kichik qiymatini topamiz.

$S'(x) = 2x - \frac{432}{x^2}$; $S''(x) = 2 + \frac{864}{x^3}$ $(x > 0)$.

$S'(x) = 2x - \frac{432}{x^2} = 0$ dan $2x^3 - 432 = 0$; $x^3 = 216$, $x = 6$ kritik nuqta kelib chiqadi. Ikkinchi hosila $S''(6) = 2 + \frac{864}{216} > 0$ bo'lgani uchun ikkinchi yetarlilik shartiga asosan $x = 6$ qiymatda $S(x) = x^2 + \frac{432}{x}$ funksiya eng kichik qiymatga ega bo'ladi.

Demak, hajmi 108 м^3 ga teng ochiq hovuzning tagi tomoni $6m$ bo'lgan kvadratdan iborat, balandligi $h = \frac{108}{36} = 3\ m$ bo'lgandagina uning devorlariga ishlov berish uchun eng kam material sarflanar ekan. Ya'ni hovuzning o'lchovlari $6m \times 6m \times 3m$ bo'lishi lozim ekan.

9-masala. Trapetsiyaning kichik asosi va yon tomonlarining har biri a ga teng. Uning katta asosi shunday aniqlansinki, trapetsiyaning yuzi eng katta bo'lsin (129-chizma).



129-chizma.

Yechish. Chizmaga binoan trapetsiyaning katta asosi $2x+a$ ga teng. Trapetsiyaning balandligini h orqali belgilaymiz. Ma'lumki trapetsiyaning yuzi asoslari yig'indisining yarmi bilan balandligi ko'paytmasiga teng,

ya'ni $\frac{2x+a+a}{2}h=(x+a)h$.

Pifagor teoremasiga ko'ra chizmadan $h=\sqrt{a^2-x^2}$ bo'lgani uchun trapetsiyaning yuzi $S=(x+a)\sqrt{a^2-x^2}$ bo'ladi. Endi shu $S(x)$ funksiyaning eng katta qiymatini topamiz.

$$S'(x)=\sqrt{a^2-x^2}+(x+a)\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{a^2-x^2-x(x+a)}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{-2x^2-ax+a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

$S'(x)=0$ yoki $-2x^2-ax+a^2=0$ dan

$$x_{1,2}=\frac{a\pm\sqrt{a^2+4\cdot2\cdot a^2}}{-4}=\frac{a\pm3a}{-4};$$

$x_1=\frac{a}{2}$; $x_2=-a$ kelib chiqadi. Masalaning shartiga ko'ra $x>0$ bo'lgani uchun $x=\frac{a}{2}$ kritik qiymatga ega bo'lamiz. Hosilani

$S'(x)=\dfrac{-2\left(x-\dfrac{a}{2}\right)(x+a)}{\sqrt{a^2-x^2}}$ ko'rinishda tasvirlasak $x<\dfrac{a}{2}$ bo'lganda

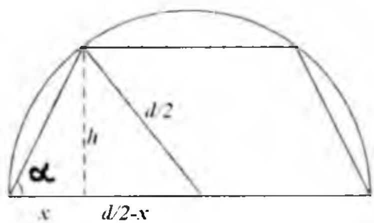
$x-\dfrac{a}{2}<0$ va $S'(x)>0$ ekani kelib chiqadi. Xuddi shuningdek

$x>\dfrac{a}{2}$ bo'lganda $S'(x)<0$ ekani kelib chiqadi. $S'(x)$ hosila $x=\dfrac{a}{2}$ kritik qiymatning chap tomonidan o'ng tomoniga o'tganda o'z ishorasini «+» dan «-» ga o'zgartiradi. Shuning uchun birinchi yetarlilik shartiga ko'ra $S=(x+a)\sqrt{a^2-x^2}$ funksiya $x=\dfrac{a}{2}$ qiymatda maksimumga ega bo'ladi. Bu yagona maksimum uning eng katta qiymati ham bo'ladi. Shunday qilib trapetsiyaning katta asosi

$2x+a=2\dfrac{a}{2}+a=2a$ bo'lganda u eng katta yuzga ega bo'lar ekan.

Izoh. Masalaning natijasidan kanal qazish ishlarida, tarnov yasash va hokazolarda foydalanish mumkin.

10-masala. Yarim doiraga asosi yarim doira diametridan iborat bo'lgan trapetsiya ichki chizilgan. Trapetsiyaning asosiga yopishgan burchagi qanday bo'lganda trapetsiyaning yuzi eng katta bo'ladi (130-chizma).



130-chizma.

Yechish. Doiraning diametrini d, trapetsiyaning balandligini h, trapetsiya yon tomonining katta asosidagi proeksiyasini x, shu tomon bilan asos orasidagi burchakni α deb olamiz. U holda trapetsiyaning kichik asosi d-$2x$, balandligi $h = x\,tg\alpha$ va yuzi $S = \frac{d + d - 2x}{2}h = (d - x)x\,tg\alpha$ bo'ladi.

Ikkinchi tomondan chizmadan Pifagor teoremasiga ko'ra

$h^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{2} - x\right)^2 = dx - x^2$ ga ega bo'lamiz. Bunga $h = x\,tg\alpha$ qiymatni qo'ysak

$$x^2 tg^2\alpha = d \cdot x - x^2;\ x^2 tg^2\alpha + x^2 = d \cdot x;\ x^2\left(1 + tg^2\alpha\right) =$$

$$= d \cdot x;\ x \cdot \frac{1}{\cos^2\alpha} = d;\ x = d\cos^2\alpha$$

kelib chiqadi. Shunday qilib,

$$S = (d - x)x\,tg\alpha = \left(d - d\cos^2\alpha\right)d\cos^2\alpha\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} =$$

$$= d\left(1 - \cos^2\alpha\right)d\cos\alpha \cdot \sin\alpha = d^2\sin^3\alpha\cos\alpha$$

bo'ladi.

Endi $S(\alpha) = d^2\sin^3\alpha\cos\alpha$ funksiyaning eng katta qiymatini topamiz.

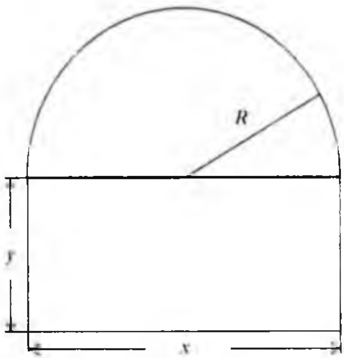
$$S'(\alpha) = d^2\left(\sin^3\alpha\cos\alpha\right)' = d^2\left(3\sin^2\alpha\cos^2\alpha - \sin^4\alpha\right) =$$

$$= d^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha\left(3 - tg^2\alpha\right).$$

$S'(\alpha) = 0$ yoki $d^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha\left(3 - tg^2\alpha\right) = 0$ dan $\sin^2\alpha\cos^2\alpha \neq 0$ bo'lgani uchun $3 - tg^2\alpha = 0;$ $tg^2\alpha = 3,\ tg\alpha = \pm\sqrt{3}$ kelib chiqadi. Shartga ko'ra $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ bo'lgani sababli $tg\alpha = \sqrt{3}$, $\alpha = 60^0$ kritik qiymatga ega bo'lamiz. $0 < \alpha < 60^0$ bo'lsa $tg\alpha < tg60^0 = \sqrt{3},\ tg^2\alpha < 3,\ 3 - tg^2\alpha > 0$ va $S'(\alpha) = d^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha\left(3 - tg^2\alpha\right) > 0$ bo'ladi.

$60^0 < \alpha < 90^0$ bo'lganda $tg60^0 < tg\alpha$; $\sqrt{3} < tg\alpha$; $3 < tg^2\alpha$; $3 - tg^2\alpha < 0$ bo'lib, $S'(\alpha) < 0$ bo'ladi, chunki $y = tgx$ funksiya o'suvchi. $S(\alpha)$ funksiyaning hosilasi $\alpha = 60^0$ kritik qiymatning chapidan o'ngiga o'tganda ishorasini «+» dan «–» ga o'zgartirganligi uchun birinchi yetarlilik shartiga binoan funksiya $\alpha = 60^0$ bo'lganda uning yuzi eng katta bo'lar ekan.

11-masala. Tunnelning ko'ndalang kesimi bir tomoni yarim doiradan iborat to'g'ri to'rtburchak shakliga ega. Kesim perimetri $25m$. Yarim doira radiusi qanday bo'lsa, kesim yuzi eng katta bo'ladi (131-chizma).



131-chizma.

Yechish. Aylana uzunligini topish formulasi ($l = 2\pi R$) ga binoan yarim doiraning uzunligi πR (R-yarim doiraning radiusi). To'g'ri to'rtburchakning asosini x, balandligini y orqali belgilasak kesimning perimetri shartga ko'ra $x + 2y + \pi R = 25$ (α) bo'ladi.

Kesimning yuzi to'g'ri to'rtburchak yuzi bilan yarim doira yuzining yig'indisidan iborat, ya'ni $S = xy + \frac{1}{2}\pi R^2$ (β) bo'ladi.

$x = 2R$ bo'lgani uchun (α) dan $2R + 2y + \pi R = 25$; $y = 12{,}5 - \frac{\pi + 2}{2}R$

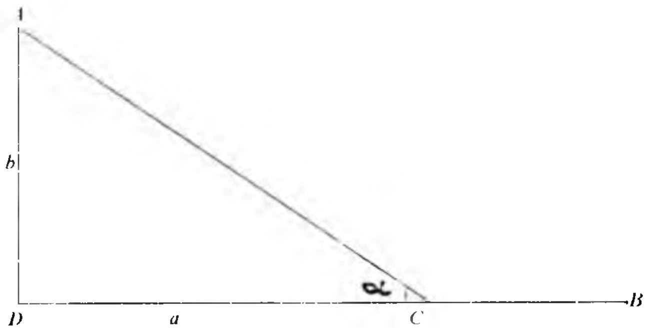
kelib chiqadi. y ning topilgan qiymatini (β) ga qo'yamiz. U holda $S = 2R\left(12{,}5 - \frac{\pi+2}{2}R\right) + \frac{1}{2}\pi R^2 = 25R - (\pi+2)R^2 + \frac{1}{2}\pi R^2$ bir o'zgaruvchi R ning funksiyasi kelib chiqadi. Endi shu $S(R)$ funksiyaning eng katta qiymatini topamiz.

$S'(R) = 25 - 2(\pi+2)R + \pi R;\ S''(R) = -2(\pi+2) + \pi = -\pi - 4 = -(\pi+4)$

$S'(R) = 0$ yoki $25 - 2(\pi+2)R + \pi R = 0$ dan $25 - \pi R - 4R = 0$; $R = \frac{25}{\pi+4} \approx 3.5$ kelib chiqadi.

$S''(R) = -(\pi+4) < 0$ bo'lgani uchun ikkinchi yetarlilik shartiga asosan funksiya $R = 3.5m$ bo'lganda tunnel kesimining yuzi eng katta bo'lar ekan.

12-masala. A zavodga yaqin bo'lgan joydan berilgan to'g'ri chiziq bo'yicha B shaharga qarab temir yo'l o'tqazilgan. Agar bir tonna yukni bir km ga tosh yo'l bo'yicha tashish temir yo'l bo'yicha tashishga qaraganda m marta qimmatroq bo'lsa, A dan B ga yuk tashish eng arzon bo'lishi uchun, A zavoddan temir yo'lgacha tosh yo'lni temir yo'lga nisbatan qanday α burchak ostida o'tkazish kerak? (132-chizma).



132-chizma

Yechish. A zavoddan temir yo'lgacha masofani b ($AD=b$), D dan B gacha masofani a, tosh yo'l bilan temir yo'l orasidagi burchakni α orqali belgilaymiz. 1 tonna yukni tosh yo'lda 1 km ga tashish uchun d so'm sarf bo'lsin.

U holda 1 tonna yukni temir yo'lda 1 km ga tashish uchun $\frac{d}{m}$ so'm sarflanadi. Yuk A dan B gacha AC km tosh yo'lda, CB km temir yo'lda tashiladi. ΔACD dan trigonometrik funksiyalarning ta'rifiga ko'ra quyidagilarga ega bo'lamiz. $\frac{AD}{AC}=\sin\alpha$,

$$AC=\frac{AD}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\alpha},\ \frac{DC}{AD}=ctg\alpha;\ DC=ADctg\alpha=bctg\alpha.$$

Demak $CB=DB-DC=a-bctg\alpha$. Shunday qilib tashilgan yuk A dan B gacha $AC=\frac{b}{\sin\alpha}$ km.ni tosh yo'lda o'tib uni tashishga $\frac{bd}{\sin\alpha}$ so'mni CB a-$bctg\alpha$ km.ni temir yo'lda o'tib uni tashishga $(a-bctg\alpha)\frac{d}{m}$ so'm sarflanadi. U holda yukni tashish uchun hammasi bo'lib $f(\alpha)=\frac{bd}{\sin\alpha}+(a-bctg\alpha)\frac{d}{m}$ so'm pul sarflanadi. Endi a, b, d, m larni o'zgarmas hisoblab $f(\alpha)$ funksiyaning eng kichik qiymatini topamiz.

$$f'(\alpha)=-\frac{bd\cos\alpha}{\sin^2\alpha}+\frac{bd}{m\sin^2\alpha}=bd\frac{1-m\cos\alpha}{\sin^2\alpha}=mbd\frac{\frac{1}{m}-\cos\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

$$f'(\alpha)=0 \text{ yoki } \frac{1}{m}-\cos\alpha=0 \text{ dan } \cos\alpha=\frac{1}{m};\ \alpha=\arccos\frac{1}{m}$$

kritik qiymat kelib chiqadi. $\cos\alpha$ funksiya $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ da kamayuvchi ekanini hisobga olsak $\alpha < \arccos\frac{1}{m}$ bo'lganda $\cos\alpha > \frac{1}{m}$;

$$\frac{1}{m} - \cos\alpha < 0, \quad f'(\alpha) = mbd\frac{\frac{1}{m} - \cos\alpha}{\sin^2\alpha} < 0 \quad \text{va} \quad \alpha > \arccos\frac{1}{m}$$

bo'lganda $\cos\alpha < \frac{1}{m}$; $\frac{1}{m} - \cos\alpha > 0$, $f'(\alpha) > 0$ kelib chiqadi. Hosila $\alpha = \arccos\frac{1}{m}$ kritik nuqtaning chapidan o'ngiga o'tganda ishorasini "-" dan "+"ga o'zgartirganligi uchun birinchi yetarlilik shartiga ko'ra funksiya shu qiymatda minimumga ega bo'ladi.

Shunday qilib yukni A zavoddan B shaharga tashish eng arzon bo'lishi uchun tosh yo'lni temir yo'lga $\alpha = \arccos\frac{1}{m}$ burchak ostida qurish lozim ekan.

Hususiy holda yukni tosh yo'lda tashish temir yo'ldagiga qaraganda 5 marta qimmat bo'lganda eng kam xarajat qilish uchun tosh yo'lni temir yo'lga $\alpha = \arccos\frac{1}{5} \approx 78^0$ burchak ostida o'tkazish kerak ekan.

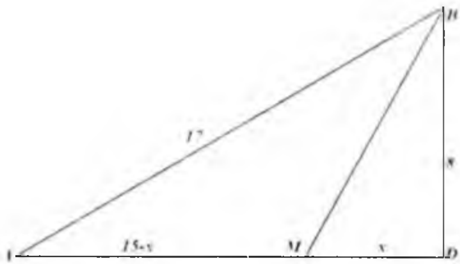
13-masala. Sayyoh A manzildan chiqib tosh yo'l bo'ylab shu yo'ldan 8 km chetda joylashgan va A dan to'g'ri chiziq bo'yicha 17 km uzoqlikda joylashgan B manzil tomon bormoqda. Sayyoh B manzilga tezroq yetishish uchun tosh yo'lning qaysi joyidan B manzilga burilishi kerak? (133-chizma). Sayyoh burilgandan so'ng B manzilgacha yo'lsiz yuradi.

Sayyohning tosh yo'ldagi tezligi 5 km/soat, yo'lsiz joydagi tezligi 3km/soat.

Yechish. Aytaylik sayyoh tosh yo'lning M nuqtasidan B manzilga burilsin. Chizmadagi D nuqta bilan M nuqta orasidagi masofani x orqali belgilaymiz.

To'g'ri burchakli ΔBAD dan Pifagor teoremasiga asosan

$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = \sqrt{289 - 64} = \sqrt{225} = 15$, ya'ni AD=15km kelib chiqadi.



133-chizma.

Demak A va M orasidagi masofa $AM = AD - MD = 15 - x$ ga teng. AMB marshrutni o'tish uchun sarflangan vaqtni t orqali belgilaymiz. Sayyoh $AM = 15 - x$ tosh yo'lni 5km/soat tezlik bilan $\dfrac{15-x}{5}$ ($t = \dfrac{s}{v}$ formulaga asosan) vaqt oralig'ida bosib o'tadi.

ΔBMD dan Pifagor teoremasiga ko'ra $MB = \sqrt{8^2 + x^2} = \sqrt{64 + x^2}$ bo'ladi.

Yo'lning MB qismida 3km/soat tezlik bilan harakat qilgan sayyoh uni $\dfrac{\sqrt{64 + x^2}}{3}$ vaqt oralig'ida bosib o'tadi. Demak AMB marshrutni o'tish uchun sayyoh jami $t = \dfrac{15-x}{5} + \dfrac{\sqrt{64 + x^2}}{3}$ vaqt sarflaydi. Ushbu $t(x)$ funksiyaning eng kichik qiymatini topamiz.

$$t'(x)=\frac{1}{5}(15-x)'+\frac{1}{3}\left(\sqrt{64+x^2}\right)'=-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{\left(64+x^2\right)'}{2\sqrt{64+x^2}}=$$

$$=-\frac{1}{5}+\frac{x}{3\sqrt{64+x^2}}=\frac{-3\sqrt{64+x^2}+5x}{15\sqrt{64+x^2}}$$

$$t'(x)=0 \text{ yoki } -3\sqrt{64+x^2}+5x=0 \text{ dan } 3\sqrt{64+x^2}=5x;$$

$$9\left(64+x^2\right)=25x^2;\quad 9\cdot 64+9x^2=25x^2;\quad 9\cdot 64=16x^2;$$

$$x^2=\frac{9\cdot 64}{16};\quad x^2=36,\ x=6$$

kritik qiymat kelib chiqadi (chunki $x>0$).

$$t''(x)=\left(-\frac{1}{5}+\frac{x}{3\sqrt{64+x^2}}\right)'=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{64+x^2}-x\cdot\dfrac{x}{\sqrt{64+x^2}}}{\left(\sqrt{64+x^2}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{64+x^2-x^2}{\left(64+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{64}{3\left(64+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

$t''(6)=\dfrac{64}{3(64+36)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{64}{3000}>0$ bo'lgani uchun ikkinchi yetarlilik shartiga asosan $x=6$ qiymatda $t(x)$ funksiya eng kichik qiymatga ega bo'ladi. Shunday qilib, sayyoh A manzildan 15-6=9 (km) yurgandan so'ng B manzilga burilsa u eng kam vaqt $t=\dfrac{15-x}{5}+\dfrac{\sqrt{64+x^2}}{3}=\dfrac{77}{15}$ soat ($t\approx 5$ soatu 8 minut) sarflar ekan.

Mustaqil yechish uchun mashqlar va test savollari

1. Berilgan S yuzga ega barcha to'g'ri to'rtburchaklardan kvadrat eng kichik perimetrga ega ekanligi isbotlansin.

Ko'rsatma To'g'ri to'rtburchakning bir tomonini x desak, ikkinchi tomonini $y=\frac{S}{x}$, perimetri $P=2\cdot\left(x+\frac{S}{x}\right)$ bo'ladi.

Javob: $x=\sqrt{S}$; $y=\sqrt{S}$

2. P perimetrli barcha to'g'ri to'rtburchaklar orasidan kvadrat eng katta yuzga ega ekanligi isbotlansin.

Ko'rsatma. To'g'ri to'rtburchakning bir tomonini x, ikkinchi tomonini $y=\frac{P}{2}-x$, yuzi $S=x\cdot\left(\frac{P}{2}-x\right)$ bo'ladi.

Javob: $x=\frac{P}{4}$; $y=\frac{P}{4}$

3. Uchburchakning asosi a ga, perimetri esa P ga teng. Uchburchakning qolgan ikki tomoni shunday aniqlansinki, uning yuzi eng katta bo'lsin.

Ko'rsatma. Uchburchakning ikkinchi tomoni $b=x$ desak, uchinchi tomoni $c=P-a-x$ bo'ladi. Geron formulasiga ko'ra uchburchakning yuzi $S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$ yoki, belgilashimizga binoan, $S=\sqrt{P(P-a)(P-x)(a+x)}$, $(0<x<P)$ bo'ladi. S yuzning eng katta qiymatini topish kerak. Buning uchun $f(x)=(P-x)(a+x)$ funksiyaning eng katta qiymatini topish yetarli.

Javob: $b=c=\frac{P-a}{2}$, ya'ni uchburchak teng yonli bo'lishi kerak.

4. Uchburchakning bir tomoni a ga va uning qarshisidagi burchagi α ga teng. Uchburchakning qolgan ikki burchagi shunday aniqlansinki, uning yuzi eng katta bo'lsin. *Javob*: $x=\frac{1}{2}(\pi-\alpha)$; $y=\frac{1}{2}(\pi-\alpha)$, uchburchak teng yonli bo'ladi.

5. v hajmga ega yopiq silindrik idish (bak) tayyorlash talab etiladi. Idishni tayyorlashga eng kam material sarflanishi uchun uning o'lchamlari qanday bo'lishi kerak? *Javob*: $R=\sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}$, $H=2R$, $H:R=2$, bunda R silindr radiusi H esa balandligi.

6. S to'la sirtga ega silindrning hajmi eng katta bo'lishi uchun uning (radiusi R va balandligi H) o'lchamlari qanday bo'lishi kerak?

Javob: $R=\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$, $H=2R$, $H:R=2$.

7. Berilgan hajmga ega to'g'ri doiraviy konusning yon sirti $r^2:h^2:\ell^2=1:2:3$ munosabat bajarilgandagina eng kichik bo'lishi isbotlansin. Bu yerda r – konus asosining radiusi, h – konusning balandligi, ℓ – konusning yasovchisi.

Javob: $r=\sqrt[3]{\frac{3v}{\sqrt{2}\pi}}$, $h=\sqrt[3]{\frac{6v}{\pi}}$, $\ell=\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{3v}{\sqrt{2}\pi}}$; $r^2:h^2:\ell^2=1:2:3$.

8. O'lchamlari 80sm$\times$50sm bo'lgan to'g'ri to'rtburchakli tunuka berilgan. Tunukaning to'rtta uchidan kattaligi bir xil kvadratlar kesib olinib, qolgan qismidan qopqoqsiz to'g'ri to'rtburchakli quti yasalgan. Qutining hajmi eng katta bo'lishi uchun kesib tashlangan kvadratning tomoni qanday bo'lishi kerak? *Javob*: 10sm.

9. Berilgan doiraga eng katta yuzga ega to'g'ri to'rtburchak ichki chizilsin.

Javob: tomoni $R\sqrt{2}$ bo'lgan kvadrat, bunda R doiraning radiusi

10. Berilgan R radiusli sharga yon sirti eng katta bo'lgan silindr ichki chizilsin.

Javob: $r=\frac{\sqrt{2}}{2}R$, $h=\sqrt{2}R$, bunda r silindrning radiusi h esa uning balandligi.

11. $(a;b)$ intervalda differentsiallanuvchi $f(x)$ funksiya uchun quyidagi mulohazalardan qaysi biri bajarilmaydi?

A) $(a;b)$ da $f'(x) > 0$ bo`lganda $f(x)$ funksiya shu intervalda o`sadi;

B) $(a;b)$ da $f'(x) < 0$ bo`lganda $f(x)$ funksiya shu intervalda kamayadi;

D) $f'(x_0) = 0$ bo`lsa $x = x_0$ $f(x)$ funksiyaning kritik nuqtasi bo`ladi;

E) $x = x_0$ kritik nuqtadan o`tganda $f'(x)$ hosila ishorasini o`zgartsa $x = x_0$ nuqta $f(x)$ funksiyaning ekstremum nuqtasi bo`ladi;

F) $f'(x_0) = 0$ bo`lganda $x = x_0$ nuqta $f(x)$ funksiyaning ekstremum nuqtasi bo`ladi.

12. $f(x) = 2x^3 + 27x^2 + 48x - 11$ funksiyaning monotonlik oralig`ini toping.

A) $(-\infty;-1)$; $(-1;8)$; $(8;+\infty)$

B) $(-\infty;1)$; $(1;8)$; $(8;+\infty)$

D) $(-\infty;0)$; $(0;+\infty)$

E) $(-\infty;-4)$; $(-4;4)$; $(4;+\infty)$

F) $(-\infty;+\infty)$.

13. $f(x) = x^3 + 15x^2 + 63x + 12$ funksiyaning ekstremumlari toping.

A) $y_{max} = y(-3) = -69$; $y_{min} = y(-7) = -37$

B) $y_{max} = y(1) = 91$; $y_{min} = y(0) = 12$

D) $y_{max} = y(2) = 206$; $y_{min} = y(-2) = -62$

E) $y_{max} = y(2) = 206$; $y_{min} = y(-7) = -37$

F) funksiya ekstremumga ega emas.

14. Yasovchisi $l = 18sm$ bo'lgan konus shaklidagi idishning balandligi qanday bo'lganda u eng katta sig'imga ega bo'ladi

A) $h = 6\sqrt{2}sm$ B) $h = 5\sqrt{2}sm$ D) $h = 7sm$

E) $h = 6\sqrt{3}sm$ F) $h = 8sm$.

15. $f(x) = x^3 - 2x + 1$ funksiyaning [-1,5; 2,5] kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlari topilsin.

A) 7,125;-1 B) 9,125; -1 D) 9,125; -2 E) 8,125; 1 F) 8; 2.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. O'suvchi va kamayuvchi funksiyalarni ta'riflang.

2. Funksiya o'suvchi bo'lishining zaruriy va yetarlilik shartlarini ayting. Bu teoremaning geometrik mazmuni nimadan iborat?

3. Funksiya kamayuvchi bo'lishining zaruriy va yetarlilik shartlarini ayting. Bu teoremaning geometrik mazmuni nimadan iborat?

4. Funksiyaning maksimumi va minimumi nima?

5. Funksiyaning maksimumi va minimumi hamda eng katta va eng kichik qiymatlari orasida qanday farq bor?

6. Ekstremum mavjudligining zaruriy shartini hamda uning geometrik mazmunini ayting. Zaruriy shartni yetarli emasligini ko'rsatuvchi misollar keltiring.

7. Kritik nuqtani ta'riflang.

8. Ekstremum mavjudligining birinchi yetarlilik shartini ayting.

9. Funksiyaning kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlari qanday topiladi?

10. Ekstremum mavjudligining ikkinchi yetarlilik shartini ayting.

11. Differensiallanuvchi funksiyaning ekstremumini izlash qaysi sxema asosida olib boriladi?

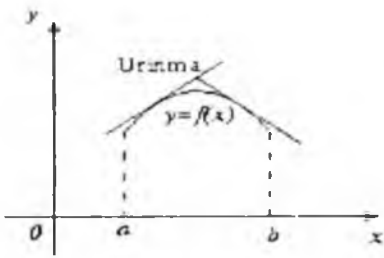
27. FUNKSIYANING GRAFIGINI CHIZISH

27.1. Funksiya grafigining qavariqligi va botiqligi. Egilish nuqta

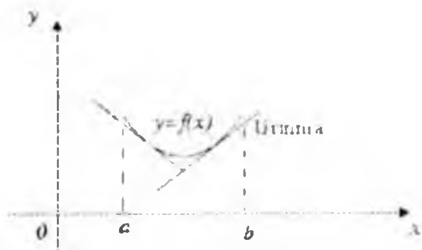
$(a;\ b)$ intervalda differensiallanuvchi $y = f(x)$ funksiyaning grafigini qaraymiz. $y = f(x)$ funksiya grafigining $(a;\ b)$ intervaldagi urinmasi deyilganda grafikning abssissasi $(a;\ b)$ intervalga tegishli istalgan nuqtalarida grafikka o'tkazilgan urinmalar tushuniladi.

1-ta'rif. Agar $(a;\ b)$ intervalda differensiallanuvchi $y = f(x)$ funksiyaning grafigi o'zining shu intervaldagi har qanday urinmasidan pastda joylashsa, u holda bu funksiyaning grafigi $(a;\ b)$ intervalda **qavariq** deyiladi(134-chizma).

2-ta'rif. Agar $(a;\ b)$ intervalda differensiallanuvchi $y = f(x)$ funksiyaning grafigi o'zining shu intervaldagi har qanday urinmasidan yuqorida joylashsa, u holda bu funksiyaning grafigi $(a;\ b)$ intervalda **botiq** deyiladi (135-chizma).

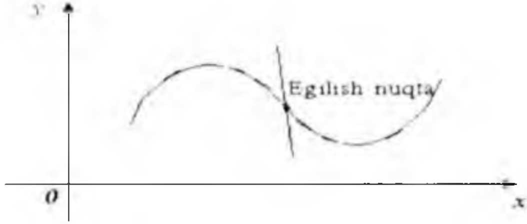


234-chizma.



135-chizma

3-ta'rif. Uzluksiz funksiya grafigining qavariq qismini botiq qismidan ajratuvchi nuqtasi grafikning **egilish nuqtasi** deyiladi. (136-chizma).



136-chizma.

Funksiya grafigining botiqlik, qavariqlik intervallari hamda grafikning egilish nuqtalarini aniqlash funksiyaning ikkinchi hosilasidan foydalanib amalga oshiriladi.

27.1-teorema. Agar $(a;\ b)$ intervalning barcha nuqtalarida $f''(x)$ mavjud va $f''(x)<0$ bo'lsa, u holda $(a;\ b)$ intervalda $y=f(x)$ funksiyaning grafigi qavariq bo'ladi.

Isboti. $(a;\ b)$ intervalda $f''(x)<0$ bo'lsin. $(a;\ b)$ dan ixtiyoriy $x=x_0$ nuqtani olib $M_0(x_0;\ f(x_0))$ nuqtada grafikka urinma o'tkazamiz (137-chizma).

Urinmaning x abssissaga mos ordinatasini Y orqali belgilaymiz. U holda urinmaning tenglamasi

$$Y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

yoki

$$Y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0) \tag{27.1}$$

bo'lishi ravshan.

x nuqtada grafik va urinma ordinatalari ayirmasi

$$y-Y=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0) \tag{27.2}$$

bo'ladi. $f(x)-f(x_0)$ ayirmaga nisbatan Lagranj formulasini qo'llasak $f(x)-f(x_0)=f'(c)(x-x_0)$ bo'ladi, bu yerdagi c x_0 bilan x orasidagi qiymat. Ushbu qiymatni (27.2) tenglikka qo'ysak

$$y-Y=f'(c)(x-x_0)-f'(x_0)(x-x_0)$$

yoki

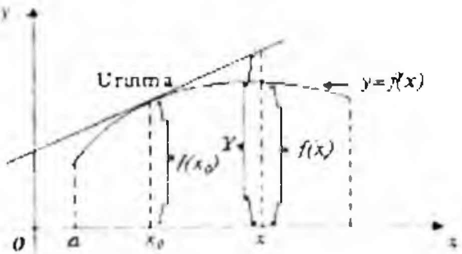
$$y-Y=\left[f'(c)-f'(x_0)\right](x-x_0) \tag{27.3}$$

kelib chiqadi.

$f'(c)-f'(x_0)$ ayirmaga nisbatan Lagranj formulasini qo'llab $f'(c)-f'(x_0)=f''(c_1)(c-x_0)$ tenglikni hosil кilamiz, bu yerda c_1 c bilan x_0 orasidagi qiymat. Oxirgi tenglikni hisobga olib (27.3) ni

$$y-Y=f''(c_1)(c-x_0)(x-x_0) \tag{27.4}$$

ko'rinishda yozamiz.



137-chizma.

$x>x_0$ bo'lsin. U holda $x_0<c<x$ bo'lib $c-x_0>0, x-x_0>0$ va $(c-x_0)(x-x_0)>0$ bo'ladi.

$x<x_0$ bo'lsin. U holda $x<c<x_0$ bo'lib $c-x_0<0$, $x-x_0<0$ va $(c-x_0)(x-x_0)>0$ bo'ladi. Ushbu tengsizlikni hamda shartga ko'ra $f''(c_1)<0$ ekanini hisobga olib (27.4) dan $y-Y<0$ yoki $y<Y$ ga ega bo'lamiz.

Shunday qilib bir xil argument x ning o'zida funksiyaning ordinatasi y urinmaning ordinatasi Y dan kichik ekan. Bu grafik urinmadan pastda yotishini ya'ni grafik qavariqligini bildiradi.

27.2-teorema. Agar $(a;\ b)$ intervalning barcha nuqtalarida $f''(x)$ mavjud va $f''(x) > 0$ bo'lsa, u holda $(a;\ b)$ intervalda $y = f(x)$ funksiyaning grafigi botiq bo'ladi.

Teoremaning isboti 27.1 teoremaning isbotiga o'xshaganligi sababli uni isbotlash o'quvchiga qoldirildi.

27.3-teorema. Agar $f''(x_0) = 0$ bo'lsa yoki $f''(x_0)$ mavjud bo'lmasa va x_0 nuqtadan o'tganda ikkinchi hosila o'z ishorasini o'zgartirsa, u holda grafikning $M_0(x_0; f(x_0))$ nuqtasi $y = f(x)$ funksiya grafigining egilish nuqtasi bo'ladi.

Isboti. Masalan, $x < x_0$ bo'lganda $f''(x_0) < 0$ va $x > x_0$ bo'lganida $f''(x_0) > 0$ bo'lsin. U vaqtda $x < x_0$ uchun grafik qavariq, $x > x_0$ uchun grafik botiq bo'ladi.

Demak, grafikning $M_0(x_0; f(x_0))$ nuqtasi uning qavariq qismini botiq qismidan ajratib turadi, ya'ni u grafikning egilish nuqtasi.

1-misol. $y = x^3 - 9x^2 + 5x + 43$ funksiya grafigining qavariqlik, botiqlik intervallarini hamda egilish nuqtalarini toping.

Yechish. Ikkinchi hosilani topamiz:

$y' = 3x^2 - 18x + 5$, $y'' = 6x - 18$. Ikkinchi hosilani nolga tenglashtirib hosil bo'lgan tenglamani yechamiz: $y'' = 0$, $6x - 18 = 0$, $x = 3$.

$x < 3$ bo'lganda $y'' = 6(x-3) < 0$ bo'lganligi sababli $(-\infty;\ 3)$ intervalda funksiyaning grafigi qavariq bo'ladi.

$x > 3$ bo'lganda $y'' = 6(x-3) > 0$ bo'lganligi sababli $(3, +\infty)$ intervalda grafik botiq bo'ladi.

$y(3) = 3^3 - 9 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 + 43 = 4$ ekanligini hisobga olsak $M_0(3;\ 4)$ nuqta grafikning egilish nuqtasi ekanligi kelib chiqadi.

2-misol. $y = \ln x$ funksiya grafigining qavariqlik, botiqlik intervallarini hamda egilish nuqtalarini toping.

Yechish. $y = \ln x$ funksiya $(0, +\infty)$ intervalda aniqlangan. Ikkinchi hosilani topamiz: $y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$, $y'' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} < 0$.

Ikkinchi hosila $(0, +\infty)$ intervalda manfiy bo'lganligi sababli $y = \ln x$ funksiyaning grafigi bu intervalda qavariq bo'ladi. Grafik egilish nuqtaga ega emas.

27.2. Egri chiziqning asimptotalari

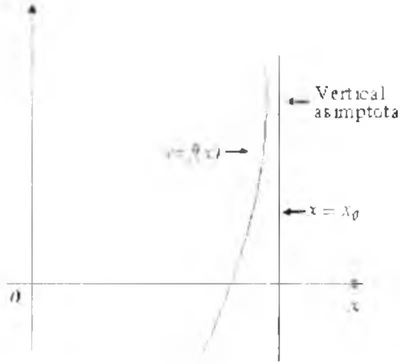
$y = f(x)$ funksiyaning grafigi $0xy$ tekislikdagi egri chiziqdan iborat bo'lganligi sababli(agar u mavjud bo'lsa) funksiya grafigi uchun aytilgan gaplar egri chiziq uchun ham o'rinli. Shuning uchun egri chiziq yoki funksiya grafigi deyilganda bir narsa tushuniladi.

4-ta'rif. Agar $y = f(x)$ funksiya grafigining o'zgaruvchi nuqtasi grafik bo'ylab cheksiz uzoqlashganda undan biror to'g'ri chiziqqacha masofa nolga intilsa, bu to'g'ri chiziq $y = f(x)$ funksiya grafigining asimptotasi deb ataladi.

Asimptotalar **vertikal** (ya'ni $0y$ o'qqa parallel) hamda og'ma (ya'ni Oy oqqa paralel bo'lmagan) asimptotalarga ajratilib o'rganiladi.

1.Vertikal asimptotalar. Vertikal asimptotaning ta'rifidan, agar $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty$ yoki $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty$ yoki $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ bo'lsa, u holda $x = x_0$ to'g'ri chiziq $y = f(x)$ egri chiziqning asimptotasi ekanligi kelib chiqadi; va aksincha, agar $x = x_0$ to'g'ri chiziq $y = f(x)$ egri chiziqning vertikal asimptotasi bo'lsa, u holda yozilgan tengliklardan biri albatta bajariladi.

Demak, $y = f(x)$ egri chiziqning vertikal asimptotalarini topish uchun argument x ning $f(x)$ funksiyani cheksizlikka aylantiradigan qiymatlarini topish kerak ekan (138-chizma).



138-chizma.

3-misol. $y = x - \frac{2}{x+3}$ funsiya grafigining vertikal asimptotasini toping.

Yechish. $\lim\limits_{x \to -3} \left(x - \frac{2}{x+3} \right) = \infty$, shu sababli $x=-3$ to'g'ri chiziq grafikning vertikal asimptotasidir.

4-misol. $y = ctgx$ funtsiya grafigining vertikal asimptotasini toping.

Yechish. $\lim\limits_{x \to n\pi} ctgx = \infty$, bo'lganligi sababli funksiyaning grafigi cheksiz ko'p vertikal asimptotalarga ega:

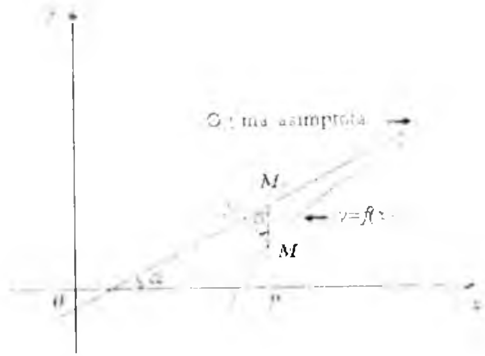
$$x = 0,\ x = \pm\pi,\ x = \pm 2\pi,\ x = \pm 3\pi,\ ....$$

2. Og'ma asimptotalar. $y = f(x)$ funksiyaning grafigi $0y$ o'qqa parallel bo'lmagan asimptotalarga ega bo'lsin. U holda bu asimptotaning tenglamasi $y = kx + b$ ko'rinishga ega bo'lishi ravshan. Xususiy holda $k = 0$ bo'lganda $0x$ o'qqa parallel gorizontal asimptota hosil bo'ladi. k va b ni aniqlashga kirishamiz. Grafikning M nuqtasidan asimtotaga MN perpendikulyar o'tkazamiz (139-chizma).

Asimptotaning ta'rifidan $\lim\limits_{x\to+\infty} MN = 0$ ekani kelib chiqadi.

ΔM_1MN dan $\dfrac{MN}{M_1M} = \cos\alpha$ yoki bundan $M_1M = \dfrac{MN}{\cos\alpha}$ hosil bo'ladi. $\alpha \left(\alpha \neq \dfrac{\pi}{2}\right)$ o'zgarmasligini hisobga olsak

$\lim\limits_{x\to+\infty} M_1M = \dfrac{1}{\cos\alpha} \lim\limits_{x\to+\infty} MN = 0$ bo'ladi.



139-chizma.

Shu sababli

$$M_1M = y_{asimptota} - y_{grafik} = (kx + b) - f(x)$$

va

$$\lim_{x\to+\infty} M_1M = \lim_{x\to+\infty} (kx + b - f(x)) = 0. \qquad (27.5)$$

Bundan $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(k + \dfrac{b}{x} - \dfrac{f(x)}{x}\right) = 0$.

Ma'lumki ikki ifodaning ko'paytmasi nolga teng bo'lishi uchun kamida ulardan biri nolga teng bo'lishi lozim. Shuning uchun oxirgi tenglikda $x \to +\infty$, shu sababli $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(k + \dfrac{b}{x} - \dfrac{f(x)}{x}\right) = 0$ bo'ladi.

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{b}{x}=0$ ekanini hisobga olsak $\lim\limits_{x\to\infty}\left(k-\frac{f(x)}{x}\right)=0$ yoki bundan

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} \tag{27.6}$$

hosil bo'ladi. (27.5) tenglikdan

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx) \tag{27.7}$$

ga ega bo'lamiz. Bunga k ning topilgan qiymatini qo'ysak b topiladi.

Shunday qilib og'ma asimptotaning k, b parametrlari mos ravishda (27.6) va (27.7) formulalar yordamida topilar ekan. (27.6) va (27.7) limitlar mavjud bo'lganda $y=kx+b$ to'g'ri chiziq $y=f(x)$ funksiyani og'ma asimptotasi bo'lishini ko'rsatish qiyin emas. Agar (27.6) va (27.7) limitlardan aqalli bittasi mavjud bo'lmasa, u holda $y=f(x)$ funksiyaning grafigi $x\to+\infty$ da og'ma asimptotaga ega bo'lmaydi.

Funksiya grafigining $x\to-\infty$ dagi og'ma asimptotasi ham shunga o'xshash topiladi. Umuman olganda funksiyaning grafigi $x\to+\infty$ da va $x\to-\infty$ da ikkita har xil og'ma aismptotalarga ega bo'lishi mumkin.

5-misol. $y=\frac{x^2+1}{x+1}$ funksiya grafigining asimptotalarini toping.

Yechish. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2+1}{x+1}=\infty$, bo'lganligi sababli $x=-1$ to'g'ri chiziq grafikning vertikal asimptotasidir. $y=kx+b$ og'ma asimptotani izlaymiz.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x(x+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{1+0}{1+0}=1.$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-1\cdot x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2-x}{x+1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1-x}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-1}{1+\frac{1}{x}}=\frac{0-1}{1+0}=-1$$

Demak, $y=x-1$ to'g'ri chiziq grafikning og'ma asimptotasidir.

6-misol. $y=e^{-x}+x$ funksiya grafigining asimptotalarini toping.

Yechish. Vertikal asimptota mavjud emas, chunki funksiya butun son o'qida aniqlangan.

Og'ma asimptotalarni izlaymiz:

1) $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}+x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e^x x}+1\right)=1$,

$b=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-k\cdot x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{-x}+x-1\cdot x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$.

Demak, $y=x$ to'g'ri chiziq grafikning $x\to+\infty$ dagi og'ma asimptotasidir.

2) $k=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{e^{-x}}{x}+1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{x}+1$.

$x\to-\infty$ da $\frac{e^{-x}}{x}$ nisbat $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi aniqmaslik. Unga Lopital qoidasini qo'llasak $k=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(e^{-x})'}{x'}+1=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-e^{-x}}{1}+1=\infty$ bo'ladi. Demak, $x\to-\infty$ da grafik og'ma asimptotaga ega emas.

Asimptotaning ta'rifidan chegaralangan egri chiziqlar asimptotalarga ega bo'lmasligi kelib chiqadi(masalan, aylana, ellips va hokazo). Chegaralanmagan egri chiziqlar orasida asimptotaga ega bo'lganlari ham bo'lmaganlari ham mavjud. Masalan, giperbolaning ikkita og'ma asimptotalarga ega ekanligi ma'lum. Parabola esa asimptotaga ega emas.

27.3. Funksiyani to'la tekshirish va grafigini chizish

Funksiyani to'la tekshirish deyilganda quyidagilar nazarda tutiladi.

1. Funksiyaning aniqlanish sohasini topish.

2. Funksiyaning uzluksizlik intervallari, uzilish nuqtalari hamda bu nuqtalardagi bir tomonlama limitlarni topish.

3. Funksiyaning o'sish va kamayish intervallarini topish.

4. Funksiyaning ekstremumlarini topish.

5. Grafikning qavariqlik, botiqlik intervallari hamda egilish nuqtasini topish.

6. Grafikning asimptotalarini topish.

Yuqoridagi bandlarga to'liq javob olingandan so'ng ularga asoslanib funksiyaning grafigi chiziladi.

1-eslatma. Grafikni yasashda uning koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalarini topish foydalidir.

2-eslatma. Grafikni yasash oldidan funksiyaning juft yoki toqligini aniqlash foydalidir.

7-misol. $y = e^{-x^2}$ funksiyaning grafigi chizilsin.

Yechish. 1. Funksiya $(-\infty; +\infty)$ intervalda aniqlangan.

2. Funksiya butun son o'qida uzluksiz.

3. $y' = \left(e^{-x^2}\right)' = e^{-x^2} \cdot \left(-x^2\right)' = -2x \cdot e^{-x^2}$.

$e^{-x^2} > 0$ bo'lganligi sababli $x < 0$ da $y' > 0$ va $x > 0$ da $y' < 0$ bo'ladi. Demak funksiya $(-\infty; 0)$ intervalda o'sadi, $(0; +\infty)$ intervalda esa kamayadi.

4. Funksiyaning hosilasini nolga tenglashtirib, hosil bo'lgan tenglamani yechib funksiyaning kritik nuqtalarini aniqlaymiz: $y' = -2x \cdot e^{-x^2} = 0$.

Demak, $x = 0$ kritik nuqta.

Bu kritik nuqtaning chapidan o'ngiga o'tganda hosila ishorasini plyusdan minusga o'zgartirganligi uchun $x=0$ nuqtada funksiya maksimumga ega. $y_{max}=y(0)=e^0=1$.

5. Ikkinchi hosilani topamiz:

$$y''=\left(-2x\cdot e^{-x^2}\right)'=-2\cdot e^{-x^2}-2x\cdot e^{-x^2}\left(-x^2\right)'=$$

$$=-2\cdot e^{-x^2}+4x^2\cdot e^{-x^2}=2\left(2x^2-1\right)\cdot e^{-x^2}$$

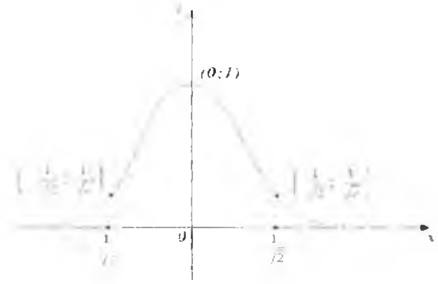
Buni nolga tenglashtirib yechsak grafikning egilish nuqtalarining abssissalari hosil bo'ladi.

$e^{-x^2}\neq 0$ bo'lganligi uchun $2\left(2x^2-1\right)\cdot e^{-x^2}=0$ tenglamadan $2x^2-1=0$, $x^2=\frac{1}{2}$, $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ ga ega bo'lamiz. Demak grafikning $x_1=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ va $x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}$ abssissali $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ va $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ nuqtalari uning egilish nuqtalaridir. $\left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ va $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};+\infty\right)$ oraliqlarda $y''>0$ bo'lgani uchun grafik bu oraliqlarda botiq. $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ oraliqda $y''<0$ bo'lgani uchun bu oraliqda grafik qavariq.

6. Funksiya x ning barcha qiymatlarida aniqlanganligi uchun uning grafigi vertikal asimptotalarga ega emas. Grafikning og'ma asimptotalarini aniqlaymiz. $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{-x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{xe^{x^2}}=0$.

$b=\lim\limits_{x\to\infty}\left(y-k\cdot x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^{-x^2}-0\cdot x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{e^{x^2}}=0$.

Demak, $y=0$, ya'ni $0x$ o'q grafikning asimptotasidir.



140-chizma.

$y = e^{-x^2}$ funksiyaning grafigi **Gauss egri chizig'i** deb ataladi. U 140-chizmada tasvirlangan.

Mustaqil yechish uchun mashqlar va test savollari

Quyidagi egri chiziqlarning egilish nuqtalari hamda botiqlik va qavariqlik intervallari aniqlansin.

1. $y = x^3$. *Javob*: $(-\infty; 0)$ intervalda grafik qavariq, $(0; +\infty)$ intervalda grafik botiq, $(0; 0)$ grafikning egilish nuqtasi.

2. $y = 4 - x^2$. *Javob*: $(-\infty; +\infty)$ intervalda grafik qavariq.

3. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 9$. *Javob*: $(-\infty; 1)$ intervalda grafik qavariq, $(1; +\infty)$ intervalda grafik botiq, $(1; -2)$ grafikning egilish nuqtasi.

4. $y = x^4$. *Javob*: Grafik hamma yerda botiq.

5. $y = tgx$. *Javob*: $(n\pi; 0)$ grafikning egilish nuqtalari.

Quyidagi egri chiziqlarning asimptotalari topilsin.

6. $y = \dfrac{3}{x-2}$. *Javob*: $x = 2$, $y = 0$.

7. $y = e^{\frac{1}{x}} - 1$. *Javob*: $x = 0$, $y = 0$.

8. $y = \ln x$. *Javob*: $x = 0$.

9. $y^3 = 6x^2 + x^3$. *Javob*: $y = x + 2$.

10. $y = c + \dfrac{a^3}{(x-b)^2}$. *Javob*: $x = b$, $y = c$.

Quyidagi funksiyalarning grafiklari chizilsin.

11. $y = x^4 - 2x + 10$. 12. $y = 2 + \dfrac{12}{x^2 - 4}$. 13. $y = x + \dfrac{4}{x+2}$

14. $y = x - \ln(x+1)$. 15. $y = \dfrac{6x}{1+x^2}$.

16. $y = (1+x^2)e^x$ funksiya grafigining botiqlik, qavariqlik oraliqlari hamda egilish nuqtalari topilsin.

A) $(-3;1)$ da qavariq, $(-\infty;-3)\cup(-1;+\infty)$da botiq, $\left(-3;\dfrac{10}{e^3}\right)$, $\left(-1;\dfrac{2}{e}\right)$ egilish nuqtalari.

B) $(-3;1)$ da botiq, $(-\infty;-3)\cup(-1;+\infty)$da qavariq, $\left(-3;\dfrac{10}{e^3}\right)$, $\left(-1;\dfrac{2}{e}\right)$ egilish nuqtalari.

D) $(-\infty;-3)$ da botiq, $(-3;+\infty)$da qavariq, $(-3;\,0.5)$ egilish nuqtasi.

E) $(-\infty;1)$ da botiq, $(1;+\infty)$da qavariq, $(1;\,0.74)$ egilish nuqtasi.

F) $(-\infty;+\infty)$ da grafik qavariq, egilish nuqta yo'q.

17. $(a;b)$ intervalda uzluksiz ikkinchi tartibli hosilaga ega $y = f(x)$ funksiya uchun quyidagi mulohazalardan qaysi biri bajarilmasligi mumkin.

A) $(a;b)$da $f''(x) > 0$ bo'lsa shu intervalda $y = f(x)$ funksiyaning grafigi botiq.

B) $(a;b)$da $f''(x)<0$ bo'lsa shu intervalda $y=f(x)$ funksiyaning grafigi qavariq.

D) $x=x_0$ $(x_0\in(a;b))$ nuqtadan o'tganda $f''(x)$ ishorasini o'zgartsa grafikning $(x_0;f(x_0))$ nuqtasi uning egilish nuqtasi bo'ladi.

E) $f''(x_0)=0$ bo'lsa $(x_0;f(x_0))$ nuqtasi grafikning egilish nuqtasi.

F) $y=f(x)$ funksiya $(a;b)$ intervalda uzluksiz.

18. $y=x-2arctgx$ funksiya grafigining asimptotalari topilsin.

A) $y=x+\frac{\pi}{2};\ y=x-\frac{\pi}{2}$ B) $y=x+2\pi;\ y=x-2\pi$ D) $y=x+\pi;\ y=x-\pi$

E) $y=x+1;\ y=x-1$ F) asimptota mavjud emas.

19. $y=x^3-6x^2+8x+2$ funksiya grafigining botiqlik, qavariqlik oraliqlari hamda egilish nuqtasini topilsin.

A) $(-\infty;-2)$; $(-2;+\infty)$, $(-2;-46)$ B) $(1;+\infty)$, $(-\infty;1)$; $(2;2)$

D) $(-\infty;-1)$; $(-1;+\infty)$, $(-1;-14)$ E) $(3;+\infty)$; $(-\infty;3)$; $(3;-1)$

F) $(-3;+\infty)$; $(-\infty;-3)$; $(-3;-103)$.

20. Noto'g'ri javobni ko'rsating.

A) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ bo'lsa $x=a$ to'g'ri chiziq $y=f(x)$ egri chiziqning asimptotasi bo'ladi.

B) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ mavjud bo'lmasa $y=f(x)$ egri chiziq og'ma asimptotaga ega emas.

D) $\lim\limits_{x\to a} f(x)\neq\infty$ bo'lganda $y=f(x)$ egri chiziq $x=a$ vertikal asimptotaga ega bo'lmaydi.

E) $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]$ mavjud bo'lmaganda $y=f(x)$ egri chiziq og'ma asimptotaga ega emas.

F) Barcha chegaralanmagan egri chiziqlar kamida bitta asimptotaga ega.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Egri chiziq(funksiyaning grafigi) qay vaqtda qavariq deyiladi?
2. Egri chiziq qay vaqtda botiq deyiladi?
3. Funksiya grafigining egilish nuqtasi nima?
4. Grafikning qavariqlik oralig‘i qanday topiladi?
5. Grafikning botiqlik oralig‘i qanday topiladi?
6. Grafikning egilish nuqtasi qanday topiladi?
7. Egri chiziq asimptotasini ta’riflang. Qanaqa asimptotalar mavjud?
8. Vertikal asimptotalar qanday topiladi?
9. Og‘ma asimptotalar qanday topiladi?
10. Funksiyani to‘la tekshirish deyilganda nimalar tushuniladi?
11. Grafikni chizish uchun qanaqa ishlar bajariladi?

ADABIYOTLAR

1. *T. Azlarov, H. Mansurov.* Matematik analiz. 1-qism. Toshkent «O'qituvchi»,1986.

2. *Г. Н. Берман.* Сборник задач по курсу математического анализа. Москва, «Наука», 1985.

3. *Я. С Бугров, С.М. Никольский.* Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. Москва, «Наука», 1980.

4. *А. А. Гусак.* Высшая математика. 1-том. Минск,2001.

5. *T. Jo'rayev, H. Mansurov* va boshq. Oliy matematika asoslari. 1-qism. Toshkent «O'qituvchi», 1999.

6. *И. А.Зайцев.* Высшая математика. Москва, «Наука», 1991.

7. *Д. В. Клетеник.* Сборник задач по аналитической геометрии. Москва, «Наука», 1986.

8. *X. R. Latipov, Sh. Tadjiyev.* Analitik geometriya va chiziqli algebra. Toshkent «O'qituvchi», 1995.

9. *В.П. Минорский.* Сборник задач по высшей математике. Москва, «Наука», 2000.

10. *Н С.Пискунов.* Дифференциал ва интеграл хисоб.1-том. Toshkent «O'qituvchi», 1972.

11. *Д.Т.Письменный.* Конспект лекций по высшей математике. Часть-1. Москва, «Наука», 2000.

12. *Yo.U.Soatov.* Olit matematika 1-jild. Toshkent «O'qituvchi», 1992.

13. *E. Xolmurodov, Z.Uzoqov.* Ekstremumlar nazariyasining amaliy masalalar yechishga tadbiqi. Qarshi, 1991.

14. *G. Xudoyberganov, A. Vorisov, X. Mansurov.* Matemetik analiz . 1-qism. Qarshi, «Nasaf», 2003.

15. *В.С.Шипачев.* Высшая математика. Москва, «Наука», 2001й.

16. *V. A. Shneyder, A. I. Slutskiy, A S. Shumov.* Oliy matematika qisqa kursi. 1-qism. Toshkent «O'qituvchi», 1983.

17. *T.N. Qori-Niyoziy.* Analitik geometriya asosiy kursi. Toshkent «O'qituvchi», 1971.

18. *Sh.I.Tojiyev.* Oliy matematikadan masalalar yechish. Toshkent. «O'zbekiston», 2002.

MUNDARIJA

ERNAZAR XOLMURODOV,
ABDULAZIZ IBRAGIMOVICH YUSUPOV

OLIY MATEMATIKA
I QISM

o'quv qo'llanma

Muharrir *S. Khashimov*
Musahhih *D. Mamadaliyeva*
Badiiy muharrir *D. Jalilov*
Texnik muharrir *A. Razzaqov*

Nashriyot litsenziyasi AI № 200, 28.08.2011-y.
Bosishga ruxsat etildi 08.07.2013-y. Bichimi 60×84 1/16
«Times TAD» garniturasi. Ofset qog'ozi. Ofset usulida chop etildi.
Hajmi 33,5 b.t. Adadi 1000 nusxa. Buyurtma №45.

«NOSHIR» nashriyoti. Toshkent sh., Langar ko'ch., 78.

«VNESHINVESTPROM» MCHJ bosmaxonasida chop etildi.
Toshkent sh., 100020, Langar ko'ch., 78.

ERNAZAR XOLMURODOV,
ABDULAZIZ IBRAGIMOVICH YUSUPOV

OLIY MATEMATIKA
I QISM

o'quv qo'llanma

Muharrir *S. Khashimov*
Musahhih *D. Mamadaliyeva*
Badiiy muharrir *D. Jalilov*
Texnik muharrir *A. Razzaqov*

Nashriyot litsenziyasi AI № 200, 28.08.2011-y.
Bosishga ruxsat etildi 08.07.2013-y. Bichimi 60×84 1/16.
«Times TAD» garniturasi. Ofset qog'ozi. Ofset usulida chop etildi.
Hajmi 33,5 b.t. Adadi 1000 nusxa. Buyurtma №45.

«NOSHIR» nashriyoti. Toshkent sh., Langar ko'ch., 78.

«VNESHINVESTPROM» MCHJ bosmaxonasida chop etildi.
Toshkent sh., 100020, Langar ko'ch., 78.