O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

ABU RAYHON BERUNIY NOMIDAGI
TOSHKENT DAVLAT TEXNIKA UNIVERSITETI

# «OLIY MATEMATIKA» FANIDAN MA'RUZALAR MATNI

## 4-QISM

TOSHKENT 2007

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

ABU RAYHON BERUNIY NOMIDAGI
TOSHKENT DAVLAT TEXNIKA UNIVERSITETI

# OLIY MATEMATIKA FANIDAN MA'RUZALAR MATNI

4-QISM

TOSHKENT 2007

Oliy matematika fanidan ma'ruzalar matni. 4-qism. Qayumov E.Q., Abduraxmanov G.R., Minarova N.X. – Toshkent: ToshDTU, 2006. – 200 b.

Mazkur ma'ruzalar matni ToshDTU ning mexanika, tog'-kon, neft va gaz, elektronika va avtomatika, energetika, iqtisod fakultetlarida texnika yo'nalishi bo'yicha bakalavrlar tayyorlash uchun oliy matematika fanining namunaviy dasturiga ko'ra o'qilgan ma'ruzalar asosida qayta tuzilgan.

Abu Rayhon Beruniy nomidagi Toshkent davlat texnika universitetining ilmiy-uslubiy kengashi qaroriga asosida chop etildi.

**TAQRIZCHILAR:**

1. O'zMU professori f.-m.f.d., prof.S.Abdinazarov

2. ToshDTU «Oliy matematika» kafedrasining dotsenti f.-m.f.n. A.T.Eshov

# K I R I S H

Matematik tadqiqot usullari hozirgi zamon fan va texnikasida o'ziga xos muhim o'ringa ega. Hisoblash texnikasining rivojlanishi va uni inson faoliyatining barcha jabhalarida tatbiqining kengayishi bilan matematikaning ahamiyati yanada oshdi. Bu esa muhandis mutaxassislarning matematik tayyorgarligi yuqori bo'lishligiga talabning yanada oshishiga bo'lgan zaruriyatni vujudga keltiradi.

**Matematika – fani fundamental fanlardan biri bo'lib, bu har doim tabiiy va texnika fanlarining taraqqiy etishida muhim o'rin egallagan.**

Matematika fanining taraqqiy etishida o'rta asr olimlaridan Muso al-Xorazmiy, Ahmad al-Farg'oniy, Abu Rayhon Beruniy, Mirzo Ulug'bek va boshqalar juda katta hissa qo'shganlar.

O'zbek matematiklarining matematika fani sohasidagi xizmatlarini yuqori baholab, O'zbekiston Respublikasi Prezidenti I.A.Karimovning "O'zbekiston XXI asr bo'sag'asida" asarida shunday deyiladi: **"Matematikaning "ehtimollar nazariyasi va matematik statistika", "differensial tenglamalar nazariyasi", "matematik-fizika tenglamalari", "funksional analiz" sohalari bo'yicha erishilgan natijalar respublikadan tashqarida ham ma'lum".**

Yuqorida aytilgan natijalarga ega bo'lishda o'zbek matematiklardan V.I. Romanovskiy, T.N. Qori-Niyoziy, T.A.Sarimsoqov, S.X.Sirojiddinov, I.S.Arjanix, M.S.Saloxiddinov, Sh.A.Achilov, T.A.Azlarov, Sh.A.Alimov, D.X.Xojiyev va boshqalarning xizmatlari nihoyatda kattadir.

Mamlakatimizda ta'lim yo'nalishlari bo'yicha bakalavrlar tayyorlash tizimiga o'tilgach, barcha fanlar bo'yicha o'quv rejalari va namunaviy dasturlarni davlat standartiga moslash zarurati tug'ildi. Shu bilan birga xalqaro ta'lim standartlarini qo'llash, ajdodlarimizning boy milliy merosini shu jarayonga jalb qilish kerak bo'ldi. Har bir yo'nalish bir necha mutaxassisliklarni o'z ichiga olgani uchun, mamlakatimizdagi barcha texnika oliy o'quv yurtlarida bakalavrlar tayyorlash bo'yicha oliy matematika fanidan o'zbek tilidagi darslik tayyorlash muammosi paydo bo'ldi. Tavsiya etilayotgan ushbu ma'ruzalar matni ana shu maqsadni ko'zda tutadi.

Ushbu ma'ruzalar matni oliy matematikaning barcha jabhalarini o'z ichiga olib, **har bir bob bo'yicha oliy matematikaning injenerlik ishiga tatbiqi ko'rsatilgan**. U oliy o'quv yurtlarida dastlabki ikki bosqichda o'qitishni ko'zda tutilgan 456 soatlik auditoriya darslariga mo'ljallangan 112 ta ma'ruzadan iborat. To'plamning mazkur 4-qismiga 4-semestrda o'qiladigan 28 ta ma'ruza kiritilgan.

# OPERATSION HISOB VA UNING BA'ZI BIR TATBIQLARI

Matematikaning operatsion hisob bo'limi matematikaning eng zaruriy bo'limlaridan biri hisoblanib, fizika, mexanika, elektrotexnika kabi fanlarning masalalarini yechishda keng qo'llaniladi. Bu bo'lim zamonaviy avtomatika va telemexanikada hozirda ham juda keng qo'llanilib kelmoqda.

## Laplas almashtirishlari va uning xossalari

Haqiqiy o'zgaruvchili $f(t)$ funksiyani qaraylik, bunda $t \in [0;\infty)$ (ba'zan $f(t)$ funksiya $(-\infty;\infty)$ oraliqda aniqlangan deb hisoblaymiz, lekin bunda $t<0$ da $f(t)\equiv 0$). $f(t)$ funksiya bo'lakli-uzluksiz (ya'ni $\forall$ chekli intervalda chekli sondagi uzilishga ega va bu uzilishlar I tur uzilish bo'ladi). $f(t)$ funksiyaga quyidagi qo'shimcha shartni qo'yamiz: ya'ni shunday o'zgarmas musbat $M$ va $S_0$ soni mavjudki, $0 \le t < \infty$ intervaldan olingan $\forall t$ uchun

$$|f(t)| < Me^{S_0 t} \tag{1}$$

$f(t)$ funksiyani $e^{-pt}$ (bu yerda $p = a + bi$) kompleks funksiyaga ko'paytmasini qaraylik:

$$\begin{aligned} e^{-pt} f(t) &= e^{-(a+bi)t} f(t) = e^{-at} f(t) e^{-ibt} = \\ &= e^{-at} f(t)\cdot\cos bt - ie^{-at} f(t)\cdot\sin bt \end{aligned}; \tag{2}$$

Endi quyidagi xosmas integralni qaraylik:

$$\int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt = \int_0^\infty e^{-at} f(t)\cos bt dt - i\int_0^\infty e^{-at} f(t)\sin bt dt \tag{3}$$

(3) *dan* (1) shartga asosan

$$\left|\int_0^\infty e^{-at} f(t)\cos bt dt\right| \le \int_0^\infty \left|e^{at} f(t)\cos t\right| dt < M\int_0^\infty e^{-at} e^{S_0 t} dt < M\int_0^\infty e^{-(a-S_0)t} dt = \frac{M}{a-S_0}, \quad (4)$$

ya'ni $a > S_0$ bo'lsa, bu xosmas integral mavjud va absolyut yaqinlashuvchi integral ekanligini ko'rsatadi. (Huddi shuningdek, $\int_0^\infty e^{-at} f(t)\sin bt dt$ ham absolut yaqinlashuvchi bo'ladi).

Demak, $\int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt = F(\rho)$ deb belgilaymiz va $F(\rho)$ funksiyani Laplas tasviri, yoki $L$ tasviri, yoki oddiygina $f(t)$ funksiya tasviri deb ham atash mumkin.

Tasvir quyidagicha belgilanadi:

$$\left.\begin{array}{ll} & F(\rho) \to f(t) \\ \text{yoki} & f(t) \leftarrow F(\rho) \\ \text{yoki} & L\{f(t)\} = F(\rho) \end{array}\right| \Rightarrow f(t)$$

funksiya boshlang'ich funksiya yoki original (asli) deb ataladi.

1-teorema. (Yagonalik teoremasi) Agar $\varphi(t)$ va $\psi(t)$ uzluksiz funksiyalar bitta (ikkala funksiya uchun) $L$ tasvirga ega bo'lsa, bu funksiyalar aynan tengdir.

Bu teorema kelgusida o'rganiladigan amaliy masalalarni yechishda muhim rol o'ynaydi.

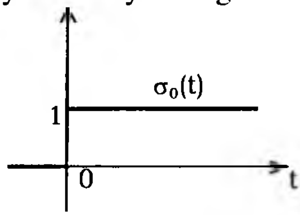
Tasvir yoki originalni topish jarayoni operatsion hisob deb yuritiladi. Bunga ingliz muhandis-elektrigi O.Xevisayd (1850-1925) asos solgan.

## $\sigma_0(t)$, $\sin t$, $\cos t$ **funksiyalar tasviri.**

1. $f(t)$ funksiya quyidagicha aniqlangan:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{agar} \quad t \ge 0 \\ 0 & \text{agar} \quad t < 0 \end{cases} \qquad (5)$$

Bu funksiyani Xevisaydning birlik funksiyasi deb ataymiz va $\sigma_0(t)$ bilan belgilaymiz. Bu funksiyaning grafigi 1-rasmda ko'rsatilgan. Xevisayd funksiyasining tasvirini topaylik




1-rasm.

$$L\{\sigma_0(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt}dt = -\frac{e^{-pt}}{p}\Bigg|_0^{\infty} = \frac{1}{\rho}$$

Demak, $\sigma_0(t) \leftarrow \dfrac{1}{\rho}$ ekan.

$$\left(1 \leftarrow \frac{1}{\rho}\right). \tag{6}$$

2. $f(t) = \cos t$ :

$$L\{(\cos t)\} = \int_0^{\infty} e^{-\rho t}\cos t dt \Rightarrow \begin{vmatrix} u = e^{-\rho t} & du = -\rho e^{-\rho t} \\ dv = \cos t dt & v = \sin t \end{vmatrix} \Rightarrow e^{-\rho t}\sin t\Big|_0^{\infty} +$$

$$+\rho\int_0^{\infty} e^{-\rho t}\sin t dt = \rho\int_0^{\infty} e^{-\rho t}\sin t dt (\text{yana bo'laklab}) \Rightarrow$$

$$\rho\left[-e^{-\rho t}\cos t\Big|_0^{\infty} - \rho\int_0^{\infty} e^{-\rho t}\cos t dt\right] = \rho - \rho^2 L(\cos t).$$

$$L(\cos t) = \rho - \rho^2 L(\cos t) \Rightarrow L(\cos t) = \frac{\rho}{1+\rho^2}$$

Demak,

$$\cos t \leftarrow \frac{\rho}{1+\rho^2} \tag{7}$$

$\cos t$ ni tasvirni aniqlash jarayonida $L\{\cos t\} = \rho L\{\sin t\}$ oldik, bundan

$$\frac{\rho}{\rho^2+1} = \rho L\{\sin t\} \Rightarrow L\{\sin t\} = \frac{1}{1+\rho^2}.$$

Demak,

$$\sin t \leftarrow \frac{1}{1+\rho^2}. \tag{8}$$

2-teorema. (O'xshashlik teoremasi)
Agar $f(t) \leftarrow F(\rho)$ bo'lsa, u holda ($\alpha > 0$ uchun) $f(\alpha t) \leftarrow \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{\rho}{\alpha}\right)$ o'rinli.

Shu teoremaga asosan

$$\cos\alpha t \leftarrow \frac{1}{\alpha}\frac{\rho/\alpha}{1+\left(\rho/\alpha\right)^2} = \frac{\rho}{\alpha^2+\rho^2}; \quad \cos\alpha t \leftarrow \frac{\rho}{\alpha^2+\rho^2} \tag{9}$$

$$\sin\alpha t \leftarrow \frac{1}{\alpha}\frac{1}{1+\left(\rho/\alpha\right)^2} = \frac{\alpha}{\alpha^2+\rho^2}; \quad \sin\alpha t \leftarrow \frac{\alpha}{\alpha^2+\rho^2} \tag{10}$$

3-teorema. (Chiziqlilik teoremasi)
Ikkita $f(t)$ va $g(t)$ funksiyalar uchun

$$L\{Af(t)+Bg(t)\} = AL\{f(t)\} + BL\{g(t)\} \tag{11}$$

tenglik o'rinlidir, bunda $A, B - const$, ya'ni yig'indining tasviri tasvirlar yig'indisiga tengdir.

Misol: $f(t) = 3\sigma_0(t) + 5\cos 2t$ ning tasvirini toping.

$$\sigma_0(t) \leftarrow \frac{1}{\rho}; \quad \cos 2t \leftarrow \frac{p}{\rho^2+4};$$

Endi chiziqlilik teoremasini tatbiq etsak:

$$L\{f(t)\} = 3L\{\sigma_0(t)\} + 5L\{\cos 2t\} = 3\cdot\frac{1}{\rho} + \frac{5\rho}{\rho^2+4} =$$

$$= \frac{3\rho^2+12+5\rho^2}{\rho(\rho^2+4)} = \frac{8\rho^2+12}{\rho(\rho^2+4)}$$

4-teorema. (Siljish (yoki so'nish) teoremasi).

Agar $F(\rho) \to f(t)$ bo'lsa $F(\rho+\alpha) \to e^{-\alpha t} f(t)$ bo'ladi.

Isbot uchun $e^{-\alpha t} f(t)$ ning tasvirini topamiz:

$$L\{e^{-\alpha t} f(t)\} = \int_0^\infty e^{-\rho t} e^{-\alpha t} f(t)dt = \int_0^\infty e^{-(\rho+\alpha)t} f(t)dt \Rightarrow F(\rho+\alpha) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $(\int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt = F(p)$ ekanligini eslasak)

Bu teoremaga asosan quyidagilarni hosil qilamiz:

$1 \leftarrow 1/p$ dan foydalanib,

$$\frac{1}{p+\alpha} \to e^{-\alpha t} \tag{12}$$

$$\frac{1}{p-\alpha} \to e^{\alpha t} \tag{13}$$

(13) dan (12) ni ayirsak

$$(e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}) \to (\frac{1}{p-\alpha} - \frac{1}{p+\alpha}) = \frac{2\alpha}{p^2-\alpha^2}$$

$$\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2} \leftarrow \frac{1}{2}(e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}) = sh\alpha t \tag{14}$$

Xuddi shu yo'l bilan

$$ch\alpha t \leftarrow \frac{p}{p^2-\alpha^2} \tag{15}$$

ni olamiz.

O'xshashlik teoremasiga asosan esa ((9) va (10) formulalardan)

$$\frac{a}{(p+\alpha)^2+a^2}\to e^{-\alpha t}\sin\alpha t \qquad (16)$$

$$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+a^2}\to e^{-\alpha t}\cos\alpha t\,. \qquad (17)$$

5-teorema. (Kechikish (yoki siljish) teoremasi).

Agar $F(p)\to f(t)$ bo'lsa, u holda $\tau>0$ bo'lganda $f(t-\tau)\leftarrow e^{-p\tau}F(p)$ bo'ladi.

Misol. $f(t)=\cos^2 3t$ funksiya tasviri topilsin.

$\cos^n t$ funksiyalar tasvirini topish uchun trigonometrik funksiyalarning daraja pasaytirish formulalaridan, yoki Eyler formulasidan foydalanish zarur, ya'ni

$$\cos t=\sqrt{\frac{1+\cos 2t}{2}} \quad \text{yoki} \quad \cos t=\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}$$

$$\cos^2 3t=\frac{1+\cos 6t}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 6t\leftarrow\frac{1}{2p}+\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+36}=$$

$$=\frac{2p^2+36}{2p(p^2+36)}=\frac{p^2+18}{p(p^2+36)};$$

$$\cos^2 3t\leftarrow\frac{p^2+18}{p(p^2+36)}.$$

87-ma'ruza

## TASVIRNING HOSILASI

6-teorema. (Tasvirni differensiallash teoremasi). Agar $F(p)\to f(t)$ bo'lsa, uning $n$-tartibli hosilasi

$$(-1)^n \frac{d^n F(p)}{dp^n} \to t^n f(t) \tag{18}$$

bo'ladi.

$L\{t^n\}$ toping.

6-teoremaga muvofiq

$$\frac{1}{p} \leftarrow \sigma_0(t) \Rightarrow (-1)\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p}\right) \to 1t \Rightarrow \frac{1}{p^2} \to t$$

Shu usulda $n$ marta differensiallab,

$$t^n \leftarrow \frac{n!}{p^{n+1}} \quad (n = 1,2,...) \tag{19}$$

hosil qilamiz.

Misol:

$$\frac{a}{p^2 + a^2} = \int_0^\infty e^{-pt} \sin at dt$$

tenglikning ikkala tomonidan $p$ bo'yicha hosila olinsa,

$$\frac{2pa}{(p^2 + a^2)^2} \to t \sin at \tag{20}$$

Misol: $f(t)=2t^3+4t^2-5t-12$

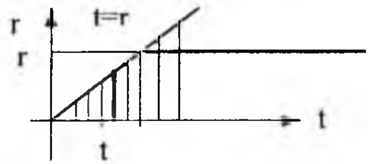
$f(t)=3t\sin 2t+4\cos^2 t-(t-2)\sin 3t\cos 3t$.

### Hosilaning tasviri

7-teorema. (Originalni differensiallash teoremasi). Agar $F(p)\to f(t)$ bo'lsa,

$$pF(p)\text{-}f(0)\to f'(t) \qquad (21)$$

bo'ladi.




Isbot:

$$L\{f^{|}(t)\}=\int_0^\infty e^{-pt}f^{|}(t)dt=e^{-pt}f(t)|_0^\infty+p\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt$$

($|f(t)|<Me^{s_0t}$ ni e'tiborga olsak),

$$\lim_{t\to\infty} e^{-pt}f(t)=0$$

$$\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt=F(p)$$

Demak, $L\{f'(t)\}=-f(0)+pF(p)$.

Shu usulda ixtiyoriy tartibli hosilaning tasvirini topish mumkin.

(21) tenglikda $F(p)$ o'rniga $pF(p)\text{-}f(0)$ ni va $f(t)$ o'rniga $f'(t)$ ni qo'ysak

$$p(pF(p)\text{-}f(0))\text{-}f'(0)\to f''(t) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow p2F(p)\text{-}pf(0)\text{-}f'(0)\to f''(t)$$

$n$-tartibli uchun

$$p^nF(p)\text{-}[p^{n-1}f(0)+p^{n-2}f'(0)+\ldots+pf^{(n-2)}(0)+f^{(n-1)}(0)]\to f^{(n)}(t). \qquad (22)$$

Misol. $f(t)=\cos^2 t$ ning tasviri topilsin

$$F(p)\to f(t)=\cos^2 t \qquad f'(t)\leftarrow pF(p)\text{-}f(0)$$

$$f(0)=\cos^2(0)=1 \quad f^{|}(t)=-2\cos t\sin t=-\sin 2t\leftarrow p/(p^2+4)$$

$$pF(p)\text{-}1=2/(p^2+4)\Rightarrow \quad F(p)=\left(1-\frac{2}{p^2+4}\right)\frac{1}{p}=\frac{p^2+2}{p(p^2+4)}$$

$\cos^2 t$ darajani pasaytirish formulasini qo'llab ham tasvirini topish mumkin.

### Tasvirlarning ko'paytmasi

8-teorema. (Tasvirlarni ko'paytirish teoremasi (O'rama)).

Agar $F_1(p)$ va $F_2(p)$ lar mos ravishda $f_1(t)$ va $f_2(t)$ funksiyalarning tasviri bo'lsa, ya'ni

$$F_1(p) \to f_1(t) \qquad\qquad F_2(p) \to f_2(t)$$

u holda

$$F_1(p)F_2(p) \to \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau \tag{23}$$

bo'ladi.

Isbot:

$$L\{\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\} = \int_0^\infty e^{-pt}[\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau]dt =$$

$$= \int_0^\infty\int_0^t \Phi(\tau,t)dtd\tau$$

oxirgi integralda integrallash tartibini almashtiramiz.

$$L\{\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\} = \int_0^\infty [f_1(\tau)\int_0^\infty e^{-pt}f_2(t-\tau)d\tau]dt \Rightarrow$$

$t-\tau=z$ desak,

$$\Rightarrow \int_\tau^\infty e^{-pt}f_2(t-\tau)dt = \int_0^\infty e^{-p(z+\tau)}f_2(z)dz = e^{-pz}\int_0^\infty e^{-pz}f_2(z)dz = e^{-pz}F_2(p)$$

$$L\{\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\} = F_2(p)\int_0^\infty e^{-pz}f_1(\tau)d\tau = F_2(p)F_1(p)$$

Demak, teorema isbot bo'ldi.

$\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$ ga $f_1(t)$ va $f_2(t)$ funksiyalar o'ramasi deyiladi. Bunda

$$\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau \qquad (24)$$

o'rinlidir.

Bu teoremaga asosan tasvir bo'yicha uning asli originalini topish ham mumkin.

Misol: $F(p)=\frac{p}{p^4-1}$ ning originali topilsin.

$$F(p)=\frac{p}{p^2-1}\frac{1}{p^2+1}\to cht\sin t$$

O'rama teoremasiga muvofiq

$$\frac{p}{p^4-1}\to\int_0^t ch(t-\tau)\sin\tau\, d\tau =$$

$$=-\frac{1}{2}\left[sh(t-\tau)\sin\tau\ \mathrm{ch(t-}\tau)\cos\tau\right]_0^t = cht-\cos t.$$

Misol: Quyidagi integral tenglama yechilsin

$$\int_0^t y(\tau)\sin(t-\tau)\mathrm{d}\tau = 1-\mathrm{cost}$$

1-cos$t$ ning tasviri

$$\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+1}=\frac{1}{p(p^2+1)}$$

$$y(\tau)\sin(t-\tau)\to\bar{y}(p)\frac{1}{p^2+1}=\frac{1}{(p^2+1)p}\Rightarrow\bar{y}(p)=\frac{1}{p} \qquad y(t)=1$$

## Tasvir bo'yicha originalni topish:

$$F(p)=\frac{1}{p(p-2)(p^2+1)}$$

Uning uchun tasvirni oddiy kasrlarga ajratamiz:

$$\frac{1}{p(p-2)(p^2+1)}=\frac{A}{p}+\frac{e}{p-2}+\frac{Cp+\square}{p^2+1}$$

Agar $p=0$ bo'lsa $1=-2A$ $A=-0,5$

$p=2$ bo'lsa $1=10B$ $B=0,1$

$p^3$: $A+B+C=0$ $C=-0,4$

$p$: $A+B+2Д=0$ $Д=-0,2$

$$F(p)=-\frac{1}{2}\frac{1}{p}+\frac{1}{10}\frac{1}{p-2}-\frac{1}{10}\frac{4p+2}{p^2+1}\leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{10}e^{2t}-\frac{4}{10}\cos t-\frac{2}{10}\sin t$$

Keltirilgan xossalardan foydalanib, tasvirlarning to'laroq jadvalini keltiramiz.

### Tasvirlar jadvali

| № | funksiya asli | funksiya tasviri |
|---|---|---|
| 1. | $1$ | $1/p$ |
| 2. | $\sin bt$ | $b/(p^2+b^2)$ |
| 3. | $\cos bt$ | $p/(p^2+b^2)$ |
| 4. | $e^{-bt}$ | $1/(p+b)$ |
| 5. | $\mathrm{sh}\ bt$ | $b/(p^2-b^2)$ |
| 6. | $\mathrm{ch}\ bt$ | $p/(p^2-b^2)$ |
| 7. | $e^{-bt}\sin at$ | $a/((p+b)^2+a^2)$ |
| 8. | $e^{-bt}\cos at$ | $(p+b)/((p+b)^2+a^2)$ |
| 9. | $t^n$ | $N!/p^{n+1}$ |
| 10. | $t\sin at$ | $2pa/(p^2+a^2)^2$ |
| 11. | $t\cos$ at | $(p^2-a^2)/\ (p^2+a^2)^2$ |
| 12. | $te^{-bt}$ | $1/(p+b)^2$ |
| 13. | $t^nf(t)$ | $(-1)^nd^nF(p)/dp^n$ |

| | | |
|---|---|---|
| 14. | $\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$ | $F_1(p)F_2(p)$ |
| 15. | $f(t-\tau)$ | $e^{pt}\,F(p)$ |
| 16. | $\int_0^t f(\tau)\ d\tau$ | $F(p)/p$ |
| 17. | $f(t)/t$ | $\int_0^\infty f(q)\ dq$ |

# DIFFERENSIAL TENGLAMALARNI VA DIFFERENSIAL TENGLAMA SISTEMALARINI OPERATSION HISOB USULLARI YORDAMIDA YECHISH

## 1. Operatsion hisob yordamida chiziqli differensial tenglamalarni yechish

Bizga chiziqli o'zgarmas $a_0$, $a_1, \ldots, a_n$ koeffitsientli $n$-tartibli differensial tenglama berilgan bo'lsin:

$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n y(t) = f(t) \tag{25}$$

$t \geq 0$ uchun (25) tenglamaning

$$y(0)=y_0, \quad y'(0)'_0, \ \ldots, \ y^{(n-1)}(0)=y^{(n-1)}{}_0 \tag{26}$$

boshlang'ich shartlarini qanoatlantiruvchi yechimini topish kerak.

$y(t)$ ning va $L$-tasvirini $\bar{y}\,(p)$ bilan belgilaymiz.

$$\bar{y}\,(p) \rightarrow y(t)$$

$\bar{y}\,(p)$ ni va uning hosilalarining tasvirini (26) tenglikka qo'yilsa

$$\bar{y}(p) = \frac{\psi_{(n-1)}(p)}{\varphi_n(p)} + \frac{F(p)}{\varphi_n(p)} \tag{27}$$

bu yerda

$$\varphi_n(p) = a_0 p^n + \ldots + a_{n-1} p + a_n$$
$$\psi_{n-1}(p) = a_{n-1} y_0 + \ldots + a_0 (p^{n-1} y_0 + p^{n-2} y_0 + y_0{}^{n-1})$$

$\varphi_n(p)$ va $\psi_{n-1}(p)$ ga (26) boshlang'ich shartlar qo'llanadi. Xususan agar $y_0 = y_o' = y_0{}^{(n-1)} = C$ bo'lsa $\bar{y}\,(p) = F(p)/\varphi_n(p)$ bo'ladi.

Misol:

$y''-2y'+2y=3\sin t$

$y(0)=0 \qquad y'(0)=1$

$\bar{y}(p)=y \quad \bar{y}'(p)=p\bar{y}-y(0) \quad \bar{y}''=p(p\bar{y}-y(0))-y'(0)=p^2\bar{y}-py(0)-y'(0)$

$p^2\bar{y}-py(0)-y'(0)-y'(0)-2[p\bar{y}-y(0)]+2\bar{y}=3/(p^2+1)$

boshlang'ich shartga asosan:

$y(0)=0 \qquad y'(0)=1$

$p^2\bar{y}-1-2p\bar{y}+2\bar{y}=3/(p^2+1)$

$\bar{y}(p^2-2p+2)=(p^2+4)/(p^2+1)$

$\bar{y}=(p^2+4)/(p^2+1)(p^2-2p+2)$

$(p^2+4)/(p^2+1)(p^2-2p+2)=(Ap+B)/(p^2+1)+(Cp+Д)/(p^2-2p+2)$

$$A=\frac{6}{5} \quad B=\frac{3}{5} \quad C=-\frac{6}{5} \quad Д=\frac{14}{5}$$

$$\bar{y}=-\frac{6}{5}\frac{p-1}{(p-1)+1}+\frac{8}{5}\frac{1}{(p-1)^2+1}+\frac{6}{5}\frac{p}{p^2+1}+\frac{3}{5}\frac{1}{p^2+1}$$

originali:

$$y=-\frac{6}{5}e^t\cos t+\frac{8}{5}e^t\sin t+\frac{6}{5}\cos t+\frac{3}{5}\sin t.$$

## 2. Differensial tenglama sistemalarini operatsion hisob yordamida yechish.

O'zgarmas koeffitsientli chiziqli differensial tenglamalarni yechishning operatsion usullarini bunday tenglamalar sistemalarini yechishga ham tatbiq qilish mumkin. Farqi shundan iboratki, bitta operator tenglama o'rniga izlanayotgan funksiyalarning tasvirlariga nisbatan chiziqli algebraik operator tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi. Bunday berilgan differensial tenglamalar sistemasini oldindan o'zgartirib olishga hojat qolmaydi, masalan, ularni normal shakliga keltirish zarur emas. Berilgan har qanday sistemani, u qanday berilgan bo'lsa, shu ko'rinishda operatsion usul yordamida yechish mumkin.

Birinchi tartibli differensial tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin;

$$\left.\begin{array}{l} y_1^1(t)+\sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k} y_k(t)=f_1(t) \\ y_2^1(t)+\sum\limits_{k=1}^{n} a_{2k} y_k(t)=f_2(t) \\ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \\ y_n^1(t)+\sum\limits_{k=1}^{n} a_{nk} y_k(t)=f_n(t) \end{array}\right| \qquad (28)$$

quyidagi

$$y_\kappa(0)=y_{\kappa 0},(\kappa=\overline{1,n}) \qquad (29)$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlanturuvchi xususiy yechimni topish talab qilinsin, bunda

$$L\{f(k)\}=F_k(P), L\{y_k(t)\}=Y_k(P)$$

operator tenglamalar sistemasi quyidagi

$$\left.\begin{array}{l} PY_1(P)+\sum\limits_{\kappa=1}^{n} a_{1\kappa} Y_\kappa(P)=F_1(P)+Y_{10} \\ PY_2(P)+\sum\limits_{\kappa=1}^{n} a_{2\kappa} Y_\kappa(P)=F_2(P)+Y_{20} \\ PY_n(P)+\sum\limits_{\kappa=1}^{n} a_{n\kappa} Y_\kappa(P)=F_n(P)+Y_{n0} \end{array}\right| \qquad (30)$$

ko'rinishda bo'ladi. (30) algebraik chiziqli tenglamalar sistemasini $Y_\kappa(P)$ tasvirlarga nisbatan yechib, so'ngra topilgan tasvirlardan $y_\kappa(t)$ originallarga o'tish kerak ular birgalikda (28) differensial tenglamalar sistemasining (29) boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimni beradi.

Misol. Ushbu

$$\begin{cases} 3x' + 2x + y' = 1 \\ x' + 4y' + 3y = 0 \end{cases}$$

chiziqli differensial tenglamalar sistemasini $x(0)=0$ $u(0)=0$

boshlang'ich shartlarda yeching.

Yechish. Quyidagicha yozamiz;

$$x(t) \leftarrow x(p), y(t) \leftarrow y(p)$$

$$x'(t) \leftarrow px(p) - x(0), y'(t) \leftarrow y(p) - y(0)$$

boshlang'ich shartlarga asosan

$$x'(t) \leftarrow x(p), y't \leftarrow y(p)$$

operatorli tenglamalar sistemasini tuzamiz;

$$\begin{cases} (3p+2)x(p) + py(p) = \dfrac{1}{p} \\ px(p) + (4p+3)y(p) = 0 \end{cases}$$

Bu sistemani $x(r)$ va $y(p)$ ga nisbatan yechib, quyidagini hosil qilamiz.

$$x(p) = \frac{4p+3}{p(p+1)(11p+6)} = \frac{1}{2p} - \frac{1}{5(p+1)} - \frac{1}{10(11p+6)}$$

$$y(p) = -\frac{1}{(p+1)(11p+6)} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{(p+1)} - \frac{1}{(11p+6)}\right).$$

Tasvirlar jadvalidan foydalanib, originallarni topsak, ushbu, ya'ni izlangan yechimini topamiz:

$$x(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{5}e^{-t} - \frac{3}{10}e^{-\frac{6}{11}t}$$

$$y(t) = \frac{1}{5}\left(e^{-t} - e^{-\frac{6}{11}t}\right)$$

yuqori tartibli chiziqli sistemalar ham shunga o'xshash yechiladi.

## Operatsion hisob tatbiqlari

**1-misol.** $f(t)=\cos^2 3t$ funksiya tasviri topilsin.

$\cos^2 t$ funksiyalar tasvirini topish uchun trigonometrik funksiyalarning daraja pasaytirish formulalaridan, yoki Eyler formulasidan foydalanish zarur, ya'ni

$$\cos t = \sqrt{\frac{1+\cos 2t}{2}} \quad \text{yoki} \quad \cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$$

$$\cos^2 3t = \frac{1+\cos 6t}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 6t \leftarrow \frac{1}{2p} + \frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+36} =$$

$$= \frac{2p^2+36}{2p(p^2+36)} = \frac{p^2+18}{p(p^2+36)};$$

$$\cos^2 3t \leftarrow \frac{p^2+18}{p(p^2+36)};$$

**2-misol.** Tasviri berilgan funksiya uchun, uning originalini (aslini) yozing:

$$F(p) = \frac{1}{p^2+2p+8}.$$

Maxrajdan to'la kvadrat ajratsak,

$$F(p) = \frac{1}{(p+1)^2+7} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}[(p+1)^2+(\sqrt{7})^2]}.$$

Siljish teoremasiga asosan:

$$\frac{\sqrt{7}}{(p+1)^2+(\sqrt{7})^2} \to e^{-t}\sin\sqrt{7}t$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{7}}e^{-t}\sin\sqrt{7}t;$$

**3-misol.** $x'' + 4x' = e^t$ tenglamaning
$x'(0) = 0$, $x(0) = 0$ qanoatlantiruvchi yechimini toping.
Yechish. Tasvir tenglamasini tuzaylik:

$$x'' \to p^2\bar{x}(p) - px(0) - x'(0)$$

$$x' \to p\bar{x}(p) - x(0)$$

$$x \to \bar{x}(p)$$

$$x''+4x' = e^t \;\to\; p^2\bar{x}(p) - px(0) - x'(0) + 4(p\bar{x}(p) - x(0)) = \frac{1}{p-1}$$

Boshlang'ich shartni e'tiborga olsak:

$$p^2\bar{x}(p) + 4p\bar{x}(p) = \frac{1}{p-1}$$

$$\bar{x}(p)(p^2+4p) = \frac{1}{p-1}$$

$$\bar{x}(p) = \frac{1}{(p-1)(p^2+4p)}$$

yoki

$$\bar{x}(p) = \frac{1}{p(p-1)(p+4)}$$

Oxirgi kasrni sodda kasrlarga ajratamiz:

$$\frac{1}{p(p-1)(p+4)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-1} + \frac{C}{p+4}$$

$1 = A(p-1)(p+4) + Bp(p+4) + Cp(p-1)$

$p=0$ da $1 = -4A$, u holda $A=-1/4$

$p=1$ da $1 = 5B$, u holda $B=1/5$

$p=-4$ da $1=20C$, u holda $C=1/20$

Demak,

$$\bar{x}(p) = -\frac{1}{4p} + \frac{1}{5(p-1)} + \frac{1}{20(p+4)}$$

bo'lsa, uning asli esa

$$x(t)=-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}e^{t}+\frac{1}{20}e^{-4t}.$$

**4-misol.** $x''+x=f(t)$ tenglamaning $x_0|_{t=0}=x'_0|_{t=0}=0$ shartni qanoatlantiruvchi yechimini toping.

**Yechish.** Tenglamaning tasvirini yozamiz.

$$\bar{x}(p)(p^2+1)=F(p)\,, \qquad f(t)\leftarrow F(p)$$

bundan

$$\bar{x}(p)=\frac{F(p)}{p^2+1}$$

bunda

$$\frac{1}{p^2+1}\to \sin t$$

Agar $\frac{1}{p^2+1}=F_2(p)$, $\quad F(p)=F_1(p)$ deb olsak,

$$x(t)=\int_0^t f(\tau)\sin(t-\tau)\,d\tau$$

bo'ladi.

**5-misol.** Integral tenglama yechilsin:

$$\int_0^t y(\tau)\sin(t-\tau)d\tau=1-\cos t\,.$$

**Yechish.** Tenglamaning chap tomonidagi ifoda $y(t)$ va $\sin t$ funksiyalarning uyurmasi.

Tasvirga o'tsak,

$$\bar{y}(p)\frac{1}{p^2+1}\coloneqq\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+1}=\frac{1}{p(p^2+1)}$$

$$\bar{y}(p)=\frac{1}{p}\qquad\to\qquad y(t)=1$$

**6-misol.** Tenglamalar sistemasining xususiy yechimlari topilsin:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 2y + 1 \end{cases}$$

$x(0)=0,\ y(0)=0$

**Yechish:** Tasvirga o'tib;

$$p\bar{x}(p) = \bar{x}(p) + 2\bar{y}(p)$$

$$p\bar{x}(p) - 5 = 2\bar{x}(p) + 2\bar{y}(p) + 1 =$$

$$= 2\bar{x}(p) + \bar{y}(p) + \frac{1}{6};$$

$$\bar{x}(p) = \frac{10p+2}{p(p+1)(p-3)} \qquad \bar{y}(p) = \frac{5p^2-4p-1}{p(p+1)(p-3)}$$

Har birini sodda kasrlarga ajratamiz:

$$\frac{10p+2}{p(p+1)(p-3)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{p-3}$$

$$\begin{array}{c|ll} p^2 & A+B+C=0 & A=-2/3 \\ p & -2A-3B+C=10 & B=-2 \\ p^0 & -3A=2 & C=8/3 \end{array}$$

$$\bar{X}(p) = -\frac{2}{3p} - \frac{2}{p+1} + \frac{8}{3(p-3)}$$

$$\frac{5p^2-4p-1}{p(p+1)(p-3)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{p-3}$$

$$\begin{array}{c|ll} p^2 & A+B+C=5 & A=-1/3 \\ p & -2A-3B+C=-4 & B=2 \\ p^0 & -3A=-1 & C=8/3 \end{array}$$

$$\bar{y}(p) = -\frac{1}{3p} + \frac{2}{p+1} + \frac{8}{3(p-3)}$$

Tasvirdan funksiya asliga o'tilsa,

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{2}{3} - 2e^{-t} + \frac{8}{3}e^{3t} \\ y(t) = \frac{1}{3} + 2e^{-t} + \frac{8}{3}e^{3t}. \end{cases}$$

## Elektr zanjirdagi tok kuchini hisoblash

Fizika kursidan ma'lumki, qarshiligi $R$, o'zinduksiyasi $L$, yig'indisi $C$ bo'lgan elektr zanjirning uchlaridagi tok kuchi $i(t)$ va kuchlanganlik $u(t)$, quyidagi munosabatlar bilan

$$u(t) = Ri(t),\ u(t) = L\frac{di(t)}{dt},\ u(t) = \frac{1}{C}\left\{\int_0^t i(t)dt + q_0\right\} \qquad (1)$$

aniqlanadi, bu yerda $q_0$ – kondensatordagi boshlang'ich zaryad.

Agar quyidagi tasvirlarni $i(t) \Rightarrow I(p)$ (operator tok), $u(t) \Rightarrow U(p)$ (operator kuchlanganlik) kiritsak, u holda (1) tengliklar quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$U = RI,\ U = L(pI - i_0),\ U = \frac{1}{Cp}(I + q_0) \qquad (2)$$

bu yerda $i_0 = i(0)$–boshlang'ich tok kuchi. Agar $i_0 = q_0 = 0$ deb olsak, u holda (2) tengliklar sodda ko'rinishga keladi:

$$U = RI,\ U = LpI,\ U = \frac{1}{Cp}I,$$

bu tengliklarni Om qonuni bo'yicha birgina

$$U = ZI \qquad (3)$$

formula ko'rinishda yozamiz. Bu yerda $Z$–operator qarshilik (impedansent) kuchli qarshilik, o'zinduksiya va sig'imi ta'siri natijasida mos ravishda

$$Z_R = R,\ \ Z_L = Lp,\ \ Z = \frac{1}{Cp} \tag{4}$$

larga teng bo'ladi.

Agar zanjirdagi elementlar ketma-ket ulangan bo'lsa,

$$U_1 = Z_1 I,\ U_2 = Z_2 I,\ U = U_1 + U_2$$

yoki

$$U = Z_1 I + Z_2 I = (Z_1 + Z_2)I = ZI,$$

demak,

$$Z = Z_1 + Z_2 \tag{5}$$

Agar zanjirdagi elementlar parallel ulangan bo'lsa, $U = Z_1 I_1 + Z_2 I_2$, $I_1 + I_2 = I$, kuchlanganlikni $U = ZI$ deb olsak, bu yerdan

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \tag{6}$$

ekanligi kelib chiqadi. Bu yerda $Z_1$ $Z_2$ lar mos elementlarning operator qarshiliklari.

Agar boshlang'ich tok $i_0 \neq 0$ va kondensatordagi boshlang'ich zaryad $q_0 \neq 0$ bo'lsa, u holda (3) formula quyidagicha ifodaga ega bo'ladi. Masalan, elementlar ketma-ket ulanganda qarshilik, o'z induksiya va sig'im ($RLC$–kontur) quyidagicha bog'langan bo'ladi.

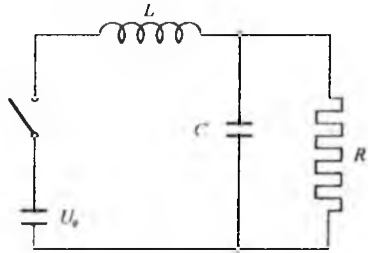
$$U = ZI - Li_0 + \frac{q_0}{Cp},\ \ Z = R + Lp + \frac{1}{Cp} \tag{7}$$

bu yerda $Z$–konturning operator qarshiligi.

**Misollar.**

1) Konturga qarshilik, o'zinduksiya va sig'im ketma-ket

ulangan bo'lib, o'zgarmas elektr kirituvchi kuch $U_0$ berilgan bo'lsin.




1-rasm.

(4), (5), (6) formulalardan operator qarshilikni topamiz

$$Z = Lp + \frac{1}{Cp + \frac{1}{R}} = \frac{LCRp^2 + Lp + R}{RCp + 1}.$$

Operator E.Yu.K. $U = \frac{U_0}{p}$ ga teng bo'lgani uchun, (3) formuladan operator tokni topamiz

$$I(p) = \frac{U_0(RCp + 1)}{P(LCRp^2 + Lp + R)}$$

$I(p)$ funksiya quyidagi nuqtalarda $p_1 = 0$ va

$$p_{2,3} = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\frac{1}{4R^2C^2} - \frac{1}{LC}}$$

birinchi tartibli qutblarga ega.

Agar $L < 4R^2C$ bo'lsa, $P_{2,3} = -\sigma \pm i\omega$ qo'shma kompleks yechimga ega, bu yerda $\sigma = \frac{1}{2RC}$, $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4R^2C^2}}$, u holda jarayon tebranuvchi xarakterga ega va tok kuchi

$$i(t) = \frac{U_0}{R}\left\{1 - e^{-\sigma t}\left[\cos\omega t + \left(\frac{\sigma}{\omega} - \frac{R}{\omega L}\right)\sin\omega t\right]\right\} \qquad (8)$$

formula bilan aniqlanadi.

Agar $L > 4R^2C$ bo'lsa, u holda $\omega$ mavhum yechim bo'ladi va $\omega = i\lambda$ ($\lambda$–haqiqiy son) deb olamiz, tok kuchi

$$i(t) = \frac{U_0}{R}\left\{1 - e^{-\sigma t}\left[ch\lambda t + \left(\frac{\sigma}{\lambda} - \frac{R}{\lambda L}\right)sh\lambda t\right]\right\}$$

formula bilan aniqlanadi va jarayon davriy bo'lmagan xarakterga ega.

2) $RLC$–konturga sinusoidal E.Yu.K. $U_0 \sin\omega t$ ta'sir etayotgan bo'lsin. Bu holda operator qarshilik va operator kuchlanganlik $Z = Lp + R + \frac{1}{Cp}$ va $U = \frac{U_0\omega}{p^2 + \omega^2}$ ga teng bo'lsa, u holda operator tok

$$I_0(p) = \frac{U_0\omega p}{(p^2 + \omega^2)(Lp^2 + Rp + \frac{1}{C})} \qquad (9)$$

ga teng.

(9) formulani sodda kasrlarga yoyamiz va operatsion hisob kurs formulalaridan foydalanib tok kuchining asl qiymatini topamiz

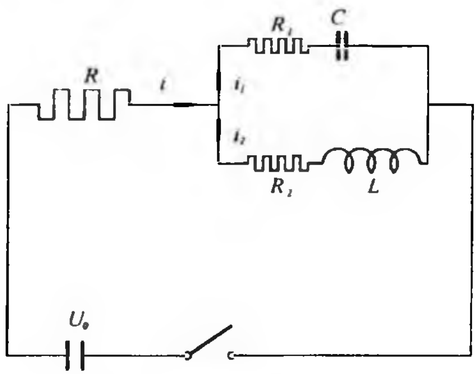
$$i_0(t) = U_0\omega\left[\mathrm{Re}\frac{e^{i\omega t}}{-L\omega^2 + Ri\omega + \frac{1}{C}} + 2\,\mathrm{Re}\frac{p_0 e^{p_0 t}}{(p_0^2 + \omega^2)(2Lp_0 + R)}\right]$$

bu yerda $p_0 = -\frac{R}{2L} + i\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = -\sigma_0 + i\omega_0$–(9) formulaning maxrajidagi kvadrat uchhadning ildizi ($\omega_0$–haqiqiy son, ya'ni, tebranishni davriy deb qaraymiz). Elektotexnikada qabul qilingan o'zgarmaslar $X = L\omega - \frac{1}{C\omega}$, $X' = L\omega + \frac{1}{C\omega}$ (reaktiv qarshiliklar), $Z^* = \sqrt{R^2 + X^2}$ (to'la qarshilik) yordamida va ba'zi oddiy shakl almashtirishlardan so'ng quyidagi natijaga kelamiz

$$i_0(t)=\frac{U_0}{Z^{*}}\sin(\omega t-S)-\frac{U_0}{\omega_0 Z^{*}\sqrt{LC}}e^{-\sigma_0 t}\sin(\omega_0 t-S_0) \qquad (10)$$

bu yerda $tgS=\frac{X}{R}$, $tgS_0=\frac{\omega_0 X}{\sigma_0 X'}$.

3) Konturning $C$ sig'imidan oqib o'tayotgan $i_1(t)$ tokni hisoblaymiz. Konturga o'zgarmas E.Yu.K. $U_0$ berilgan. Konturning qismlardan oqib o'tayotgan tok $i_1(t)$ va $i_2(t)$ larning operator qarshiliklari $Z_1=R_1+\frac{1}{Cp}$, $Z_2=R_2+Lp$ ga teng va $Z=R+\frac{Z_1Z_2}{Z_1+Z_2}$ to'liq konturdagi operator qarshilikni ifodalaydi




2-rasm.

Zanjirdagi tok parallel ulangani sababli

$$I=\frac{U_0}{pZ}=I_1+I_2,\; I_1Z_1=I_2Z_2,$$

bulardan

$$I_1 = I - \frac{I_1 Z_1}{Z_2}, \text{ yoki } I_1 = \frac{Z_2 I}{Z_1 + Z_2} = \frac{Z_0 U_0}{P(Z_1 + Z_2)Z}.$$

Yuqoridagi tenglikka $Z_2$ va $(Z_1 + Z_2)Z$ ifodalarning qiymatini qo'yib, quyidagi tenglikni hosil qilamiz.

$$I_1(p) = \frac{U_0(R_2 + Lp)}{\alpha p^2 + 2\beta p + \gamma}, \tag{11}$$

bu yerda $\alpha = (R_1 + R_2)L$, $2\beta = (R_1 + R_2)R + R_1 R_2 + \frac{L}{C}$, $\gamma = \frac{R_1 + R_2}{C}$.

Operatsion hisob kursning formulalaridan foydalanib, tasvirdan aslini ya'ni tok kuchini topamiz

$$i(t) = \frac{U_0}{2}\left(\frac{R_2 + Lp_1}{\alpha p_1 + \beta} e^{p_1 t} + \frac{R_2 + Lp_2}{\alpha p_2 + \beta} e^{p_2 t}\right) \tag{12}$$

bu yerda $p_1, p_2$ – lar (11) ifoda maxrajidagi kvadrat uchhadning ildizlari.

# MATEMATIK FIZIKA TENGLAMALARI VA ULARGA KELTIRILADIGAN MEXANIKA, FIZIKA MASALALARI

1. Ta'rif. Agar differensial tenglamada noma'lum ikki o'zgaruvchili $U(x, y)$ funksiya va uning birinchi va ikkinchi tartibli xususiy hosilalari bilan qatnashgan bo'lsa u ikki o'zgaruvchili ikkinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglama deyiladi va quyidagi ko'rinishda yoziladi

$$F_1(x, y, U(x, y), \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) = 0 \quad (1)$$

Ushbu

$$a_{11}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F_1(x, y, U(x, y), \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = 0 \quad (2)$$

tenglama ikkinchi tartibli hosilalarga nisbatan chiziqli differensial tenglama deb ataladi. Bu yerda $a_{11}$, $a_{12}$, $a_{22}$ lar $x$ va $y$ larning funksiyalari.

Agar (1) tenglama ikkinchi tartibli $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ xususiy hosilalari, $U(x,y)$ funksiya va uning birinchi tartibli xususiy hosilalariga nisbatan chiziqli bo'lsa, chiziqli differensial tenglama deb ataladi va (1) tenglama quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b_1\frac{\partial u}{\partial x} + b_2\frac{\partial u}{\partial y} + cu + f = 0 \quad (3)$$

Bu yerda $a_{11}$, $a_{12}$, $a_{22}$, $b_1$, $b_2$, $c$, $f$ - koeffitsientlar $x$, $y$ larning funksiyalari.

(2) tenglama sodda (kanonik) holga keltirilsa, u quyidagi uchta tipdan biriga ajraladi:

I. Giperbolik tipdagi tenglama

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad \text{yoki} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=0 \qquad (4)$$

II. Elliptik tipdagi tenglama

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad (5)$$

III. Parabolik tipdagi tenglama

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial y}=0 \qquad (6)$$

Fizika va mexanika masalalarini yechish natijasida (4), (5), (6) tenglamalar hosil bo'lgani uchun, ular matematik fizik tenglamalar deb ataladi.

Giperbolik tipdagi (4) tenglama to'lqin tenglamasi deb atalib, unga torni ko'ndalang tebranish, sterjnning bo'ylama tebranishi, simda elektr tebranishlari, gazning tebranishlari va shunga o'xshash masalalarni tebranish jarayonlarini o'rganishga olib keladi.

Elliptik tipdagi (5) tenglama Laplas tenglamasi deb atalib, bu tenglamaga elektr va magnit maydonlari, statsionar issiqlik holati haqidagi gidrodinamika, diffuziya va shunga o'xshash masalalarni o'rganish olib keladi.

Parabolik tipdagi (6) tenglama issiqlik tarqalish tenglamasi deb atalib, bunday tenglamani tekshirishga issiqlik tarqalish jarayoni, g'alvirik (g'ovak) muhitdagi suyuqlik va gazning suzilish masalasi va shunga o'xshash masalalarni o'rganishga olib keladi.

## 2. Ikkinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamaning klassifikatsiyasi

Bizga (2) tenglama berilgan bo'lsin. Bu tenglamada o'zgaruvchilarni $\xi = \varphi(x, y), \eta = \varphi(x, y)$ almashtirish yordamida unga ekvivalent bo'lgan tenglama hosil bo'ladi.

$$\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\xi}{\partial x}, & \frac{\partial\xi}{\partial y}\\ \frac{\partial\eta}{\partial x}, & \frac{\partial\eta}{\partial y}\end{vmatrix}\neq 0$$

$D$ sohada yakobian bo'lishi kerak.

Bizni $\xi$, $\eta$-lar qanday ko'rinishda tanlanganda hosil bo'lgan tenglama eng sodda holga kelish masalasi qiziqtiradi.

Quyida (2) tenglama uchun $\xi$ va $\eta$ larni qanday qilib tanlashini ko'rsatamiz. Agar (2) tenglamadagi xususiy hosilalarni yangi o'zgaruvchilar orqali ifodalasak:

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}\\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}\end{cases}\qquad(7)$$

Hosilalarning (7) dagi qiymatlarini (2) ga qo'ysak,

$$\bar{a}_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+2\bar{a}_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\bar{a}_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+\bar{F}(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta})=0\qquad(8)$$

Bu yerda.

$$\left.\begin{aligned}
\bar{a}_{11} &= a_{11}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + 2a_{12}\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y} + a_{22}\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2 \\
\bar{a}_{12} &= a_{11}\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x} + a_{12}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}\right) + a_{22}\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y} \\
\bar{a}_{22} &= a_{11}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + 2a_{12}\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + a_{22}\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2
\end{aligned}\right| \qquad (9)$$

$\xi$ va $\eta$ o'zgaruvchilarni shunday tanlaymizki, $\bar{a}_{11} = 0$ bo'lsin. Ushbu birinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamani qaraymiz.

$$a_{11}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + 2a_{12}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + a_{22}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 0 \qquad (10)$$

Agar $Z=\varphi(x,y)$ (10) tenglamaning biror xususiy yechimi bo'lsa, u holda $\xi = \varphi(x,y)$ deb olsak, $\bar{a}_{11} = 0$ koeffitsient nolga teng bo'ladi.

Demak, $Z=\varphi(x,y)$ funksiya (10) tenglamaning yechimi bo'lsa, $\varphi(x,y)=C$ quyidagi

$$a_{11}dy^2 + 2a_{12}dxdy + a_{11}dx^2 = 0 \qquad (11)$$

oddiy differensial tenglamaning umumiy yechimi bo'lar ekan.

(11) tenglama (2) differensial tenglamaning xarakteristik tenglamasi deb ataladi. (11) ning yechimlari esa xarakteristikalar deb ataladi. (11) tenglama quyidagi ikkita tenglamaga ajraladi.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} \qquad (12)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} \qquad (13)$$

Agar $M(x, y)$ nuqtada $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ bo'lsa, (2) tenglama giperbolik tipdagi, $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ bo'lsa, elliptik tipdagi, $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ bo'lsa, parabolik tipdagi tenglama deb ataladi.

Endi yuqoridagi tiplarning har birini alohida-alohida qaraymiz.

I. Giperbolik tipdagi tenglamalarda $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ bo'lgani uchun (12), (13) tenglamalar ikkita haqiqiy yechimga ega bo'ladi.

Agar $\bar{a}_{11} = 0$ yoki $\bar{a}_{22} = 0$ ekanligini e'tiborga olsak, unda (11) tenglama ikkita haqiqiy xarakteristikalarga ega bo'ladi. Ularni mos ravishda $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \varphi(x, y)$ deb olsak, (8) tenglama

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = \Phi(\xi, \eta, u(\xi, \eta), \frac{\partial u}{\partial\xi}, \frac{\partial u}{\partial\eta}) \tag{14}$$

ko'rinishga keladi. Bu yerda $\Phi = -F/2\bar{a}_{12}$ .(14) giperbolik tipdagi tenglamaning kanonik ko'rinishidir.

Agar (14) da $\xi = \alpha + \beta, \eta = \alpha - \beta$ almashtirishni bajarsak, unda u quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2} = \Phi_1. \quad (\Phi_1 = 4\Phi) \tag{15}$$

II. Elliptik tipdagi tenglamada $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ bo'lgani uchun (12),(13) tenglamalar kompleks ildizlarga ega bo'ladi. Bunda $\varphi(x, y) = \varphi_1(x, y) + i\varphi_2(x, y)$ funksiya (12) tenglama uchun kompleks integral (yechim) bo'ladi.

Biz (10) tenglamada $\xi = \varphi_1(x, y), \eta = \varphi_2(x, y)$ almashtirish kiritsak, quyidagi ayniyat hosil bo'ladi

$$a_{11}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + 2a_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + a_{22}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 = 0.$$

Bu ayniyatning haqiqiy va mavjud qismlarini ajratib, quyidagi tengsizliklarni hosil qilamiz.

$$a_{11}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+2a_{12}\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}+a_{22}\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2=a_{11}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+2a_{12}\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}+a_{22}\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2.$$

$$a_{11}\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+a_{12}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)+a_{22}\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y}=0$$

hosil bo'lgan tengliklardan (9) ga ko'ra $\overline{a_{11}}=\overline{a_{22}},\overline{a_{12}}=0$ ekanligi kelib chiqadi. Bu holda (8) tenglama quyidagi ko'rinishga keladi.

$$\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2u}{\partial\eta^2}=\Phi\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right). \qquad (16)$$

Bu yerda $\Phi=-\frac{\overline{F}}{\overline{a_{22}}}.$

III. Parabolik tipdagi tenglamada $a_{12}^2\text{-}a_{11}a_{22}=0$ bo'lgani uchun (12), (13) tenglamalar bitta yechimga ega bo'ladi. O'sha yechimni $\xi=\varphi(x,y)$ deb olsak, $\eta=\eta(x,y)$ ni $\varphi$ ga bog'liq bo'lmagan ixtiyoriy funksiya shaklida tanlab olamiz. Bu tanlashda Yakobian bo'lishi kerak.

$$\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}\neq0$$

Shunday tenglamada

$$\overline{a}_{11}=a_{11}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+2a_{12}\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}+a_{22}\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2=(\sqrt{a_{11}}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\sqrt{a_{22}}\frac{\partial\xi}{\partial y})^2=0$$

$$\overline{a}_{12}=a_{11}\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}+a_{12}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)+a_{22}\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}=(\sqrt{a_{11}}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\sqrt{a_{22}}\frac{\partial\xi}{\partial\eta})$$

$$(\sqrt{a_{11}}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\sqrt{a_{22}}\frac{\partial\eta}{\partial y})=0$$

bo'ladi. Bunda $a_{12}=\sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}$. Bu holda (8) tenglama quyidagi ko'rinishga ega bo'lib, parabolik tipdagi tenglamaning kanonik shaklidir.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \Phi(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}). \qquad (\Phi = -\frac{\bar{F}}{\bar{a}_{22}}).$$

Misol: Ushbu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

tenglamani kanonik ko'rinishga keltiring.

Yechish: Berilgan misolda: $a_{11}=1$, $a_{12}=-x$, $a_{22}=x^2$ bo'lib, $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = x^2 - 1 \cdot x^2 = 0$ bo'lgani uchun parabolik tipdagi tenglamadir. Berilgan tenglamalarning xarakteristik tenglamasini yechimlari (12), (13) larga ko'ra topamiz.

$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12}}{a_{11}} = \frac{-x}{1} = -x$ bo'ladi $y = -\frac{x^2}{2} + C$, yoki $y + \frac{x^2}{2} = C_1$ bo'ladi.

Agar $\xi = y + \frac{x^2}{2}$ deb olsak, $\eta = \eta(x,y)$ ni shunday tanlashimiz kerakki, Yakobian $\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)} \neq 0$ bo'lsin. Biz $\eta=x$ deb olsak,

$$\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x}, \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

unda shart bajariladi. Endi berilgan tenglamadagi hosilalardan yangi $\xi = y + \frac{x^2}{2}$, $\eta=x$ o'zgaruvchilarga o'tsak, (7) formulaga ko'ra

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot x + \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}x+\frac{\partial u}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}x+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$$

larni hosil qilamiz. Bu ifodalarni berilgan tenglamaga qo'yamiz.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}x^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}x+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{\partial u}{\partial \xi}-2x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-$$

$$-2x\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2\frac{\partial u}{\partial \xi}=0$$

Bundan $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}-\frac{\partial u}{\partial \xi}=0$ kanonik shakldagi tenglamaga ega bo'lamiz.

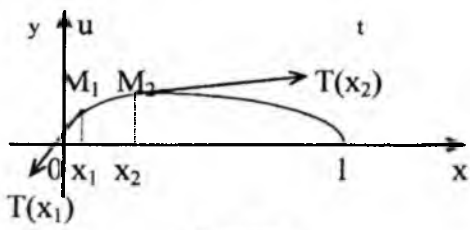
90-ma'ruza.

## TOR TEBRANISH TENGLAMASI

Matematik fizikada tor deganda egiluvchan va elastik ip tushuniladi. Torda har qanday vaqt momentida paydo bo'lgan zo'riqish uning profiliga o'tkazilgan urinma bo'yicha yo'nalgan bo'ladi. Masalan, $l$ uzunlikdagi tor boshlang'ich momentda $OX$ o'qining 0 dan $l$ gacha bo'lgan kesmasi bo'yicha yo'nalgan bo'lsin. Torning uchlari $x=0$ va $x=l$ nuqtalarga biriktirilgan deb faraz qilamiz. Agar torni uning dastlabki holatidan chetlashtirsak, so'ngra o'z holiga qo'yib bersak yoki torni chetlashtirmasdan boshlang'ich momentda uning nuqtalariga biror tezlik bersak, u holda torning nuqtalari harakatga kelib tor tebrana boshlaydi (1-rasm).

Biz har qanday vaqt momentida tor shaklini aniqlashdan hamda torning har bir nuqtasining vaqtga bog'liq holda harakat qonunining aniqlash masalasini qaraymiz.

Tor nuqtalarining harakati $OX$ o'qiga perpendikular holda va bir tekislikda vujudga keladi deb faraz qilamiz. $t$ momentdagi $x$ absissali tor nuqtasining siljishini $U(x, t)$ funksiya bilan belgilaymiz.




1-rasm.

Kichik tebranishlarni qaraganimiz uchun $U(x, t)$ siljish va $\frac{\partial u}{\partial x}$ hosilani juda kichik deb hisoblasak, ularni ko'paytirishni va kvadratlarini o'zlariga nisbatan kichik bo'lganligi uchun hisobga (e'tiborga) olmaymiz.

Torning ixtiyoriy $(x_1, x_2)$ bo'lagini qaraymiz. Biz torning

$XOU$ tekisligidagi kichik tebranishini qarayotganligimiz uchun tor elementi $M_1M_2$ uzunligi uning $OX$ o'qidagi proyeksiyasi $x_2$-$x_1$ ga teng chunki

$$\overset{\smile}{M_1M_2} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+U_x^{12}}\,dx \approx x_2 - x_1 = S.$$

Bundan torning kichik tebranishida tor qismining cho'zilmas ekanligi chiqadi.

Guk qonuniga asosan torning har bir nuqtasidagi taranglik vaqt o'tishi bilan o'zgarmaydi. Shu bilan birga torning barcha nuqtalaridagi taranglik $x$ ga ham bog'liq bo'lmaydi. Chunki ta'sir qiluvchi taranglik kuchi torning $M_1$ va $M_2$ nuqtasiga urinma bo'yicha yo'nalgan bo'lib u tashqi va inersiya kuchlaridan tashkil topadi. Hamma kuchlarning $OX$ o'qidagi proyeksiyalarining yig'indisi nolga teng bo'ladi. Biz torning ko'ndalang tebranishini qarayotganimiz uchun tashqi va inersiya kuchlari $OU$ o'qga parallel bo'ladi. Bu holda

$$T(x_1)\cos\alpha_1(x_1) - T(x_2)\cos\alpha_2(x_2) = 0$$

Bu yerda $\alpha(x)$ - torning $x$ abssissali nuqtasiga o'tkazilgan urinma bilan $OX$ o'qining musbat yo'nalishi orasidagi hosil bo'lgan burchak. Tebranishi kichik bo'lgani uchun

$$\cos\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}} = 1$$

Demak,

$$T(x_1) \approx T(x_2).$$

Shunday qilib torning barcha nuqtalaridagi taranglik $x$ va $t$ ning hamma qiymatlari uchun bir xil bo'ladi.

Endi Dalamber prinsiplaridan foydalanib, tor tebranish tenglamasini keltirib chiqaramiz.

$M_1$ va $M_2$ nuqtalardagi taranglik kuchlarining $OU$ o'qidagi proyeksiyalari yig'indisi $y=T_0[sin\alpha(x_2)-sin\alpha(x_1)]$ ga teng bo'ladi.

Farazimizga ko'ra

$$\sin\alpha(x)=\frac{tg\alpha(x)}{\sqrt{1+tg^2\alpha(x)}}=\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2}}\approx\frac{\partial u}{\partial x}$$

bundan

$$y=T_0\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_2}-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_1}\right]$$

bu yerda

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_2}-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_1}=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx$$

bo'lgani uchun

$$y=T_0\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx \tag{1}$$

hosil bo'ladi.

Torga *Ou* o'qiga parallel holda ta'sir qiluvchi kuchni *P(x,t)* desak. u holda $M_1M_2$ torga ta'sir qiluvchi tashqi kuchning *Ou* o'qidagi proeksiyasi

$$\int_{x_1}^{x_2}P(x,t)dx \tag{2}$$

bo'ladi. Agar $\rho(x)$ torning chiziqli zichligi bo'lsa u holda $M_1M_2$ tor qismidagi inersiya kuchi

$$-\int_{x_1}^{x_2}\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dx \tag{3}$$

ga teng. Torning $M_1M_2$ qismidagi ta'sir qiluvchi kuchlarning

$Ou$ o'qidagi proeksiyalari yig'indisi nolga teng bo'ladi, ya'ni

$$\int_{x_1}^{x_2}\left[T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+P(x,t)\right]dx=0$$

Bundan quyidagi tor tebranishi tenglamasi chiqadi.

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+P(x,t). \tag{4}$$

Agar $\rho=const$ bo'lsa (4) ushbu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t) \tag{5}$$

ko'rinishga keladi. Bu yerda $a=\sqrt{\frac{T_0}{\rho}}, f(x,t)=\frac{P(x,t)}{\rho}$ Agar tashqi kuch bo'lmasa, ya'ni $P(x,t)=0$ bo'lsa u holda

ko'rinishga keladi. Bu yerda $a=\sqrt{\frac{T_0}{\rho}}, f(x,t)=\frac{P(x,t)}{\rho}$ Agar tashqi kuch bo'lmasa, ya'ni $P(x,t)=0$ bo'lsa u holda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

tenglama torning erkin tebranish tenglamasi deb ataladi.

## Tor tebranish tenglamasining yechimi. Koshi masalasi. Dalamber formulasi

Bizga torning erkin tebranish tenglamasi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad a=\sqrt{\frac{T}{\rho}} \tag{1}$$

berilgan bo'lsin.

$\varsigma=x-at,\ \eta=x+at$ almashtirish kiritamiz. (Chunki $x-at=C_1$ va $x+at=C_2$ lar (1) tenglamaning xarakteristikasidir).

1) tenglamadagi hosilalari yangi o'zgaruvchilar orqali ifodalasak

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial \xi}(-a)+\frac{\partial u}{\partial \eta}a.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(-a)^2+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}(-a)(a)+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}a^2+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}(-a)\cdot a=$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}a^2-\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}a^2+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}a^2-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}$$

Bu ifodalarni (1)ga qo'ysak

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=0 \tag{2}$$

yoki

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)=0 \tag{$2^1$}$$

hosil bo'ladi. Uni $\eta$ bo'yicha integrallab, $\frac{\partial u}{\partial \xi}=w(\xi)$ ni hosil qilamiz. Oxirgi tenglikni $\xi$ bo'yicha integrallaymiz

$$u(\xi,\eta)=\int w(\xi)d\xi+Q_2(\eta)$$

$w(\xi)$ - $\xi$ ning ixtiyoriy funksiyasi, $Q_2(\eta)-\eta$ ning ixtiyoriy funksiyasidir.

Agar $\int w(\xi)d\xi=Q_1(\xi)$ deb belgilasak, unda $u(\xi,\eta)=Q_1(\xi)+Q_2(\eta)$ tenglik hosil bo'ladi.

Oxirgi tenglikda qaytadan $(x,t)$ o'zgaruvchilarga o'tsak,

$$u(x,t)=Q_1(x-at)+Q_2(x-at) \tag{3}$$

Agar (3) dagi $Q_1$ va $Q_2$ lar ikki marta differensiallashuvchi funksiyalar bo'lsa u holda $U(x, t)$ funksiya (1) tenglamaning Dalamber yechimi deb ataladi.

Koshi masalasi. (1) tenglamaning

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \varphi_1(x) \tag{4}$$

boshlang'ich shartlarini qanoatlantiruvchi yechimi topilsin.

$\varphi_0(x), \varphi_1(x)$ lar $(-\infty, +\infty)$ oraliqda berilgan funksiyalardir.

Koshi masalasini yechish. (1) tenglamaning (3) yechimidagi $Q_1$ va $Q_2$ larni shunday tanlaymizki ular (4) boshlang'ich shartlarni qanoatlantirsin. (4)ni (3)ga qo'ysak,

$$u|_{t=0} = Q_1(x) + Q_2(x) = \varphi_0(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = -a[Q_1©(x) + Q_2©(x)] = \varphi_1(x)$$

Oxirgi tenglikni integrallab,

$$Q_1(x) + Q_2(x) = -\frac{1}{a}\int_0^x \varphi_1(z)dz + C$$

Ushbu sistemani tuzamiz (5)

$$\begin{cases} Q_1(x) = \frac{1}{2}\varphi_0(x) - \frac{1}{2a}\int_0^x \varphi_1(z)dz + \frac{c}{2} \\ Q_1(x) = \frac{1}{2}\varphi_0(x) + \frac{1}{2a}\int_c^x \varphi_1(z)dz + \frac{c}{2} \end{cases} \tag{6}$$

(6) ni (3) ga qo'ysak,

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\varphi_0(x-at) - \frac{1}{2a}\int_0^{x-at}\varphi_1(z)dz + \frac{c}{2} + \frac{1}{2}\varphi_0(x-at) + \frac{1}{2a}\int_0^{x+at}\varphi_1(z)dz - \frac{c}{2} =$$

$$= \frac{\varphi_0(x-at) + \varphi_0(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi_1(z)dz$$

$$u(x,t)=\frac{\varphi_0(x-at)+\varphi_0(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi_1(z)dz \qquad (7)$$

(7) funksiya (1)-(4) Koshi masalasining yechimi bo'lib, Dalamber formulasi deyiladi.

Masala. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ tenglamaning

$$u\big|_{t=0}=x^2, \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\sin x$$

boshlang'ich shartlarini qanoatlantiruvchi yechimi topilsin.

Yechish. Bizda $u\big|_{t=0}=Q^0(x)=x^2, \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\varphi_1(x)=\sin x$ bo'lgani uchun (7) Dalamber formulasiga ko'ra Koshi masalasining yechimi

$$u(x,t)=\frac{\varphi_0(x-at)+\varphi_0(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\sin z dz=$$

$$=x^2+a^2t^2-\frac{1}{2a}(-\cos z)\Big|_{x-at}^{x+at}==x^2+a^2t^2-$$

$$-\frac{1}{2a}[\cos(x+at)-\cos(x-at)]=x^2+a^2t^2+\frac{1}{2a}\sin x\sin at$$

91-ma'ruza.

## QATTIQ JISMDAGI ISSIQLIKNING TARQALISH TENGLAMASI

Fazoda jism berilgan bo'lsa uning $t$ vaqtdagi $(x, y, z)$ nuqtasining temperaturasi $u(x, y, z)$ funksiya bilan aniqlanadi. Agar jismning har xil qismidagi temperaturasi har xil bo'lsa, u holda jismning ichida issiqlik harakati hosil bo'ladi.

Jism ichidagi biror $S$ sirtdan $\Delta S$ yuzasini ajratamiz. $\Delta S$ yuzasidan $\Delta t$ vaqt oralig'ida oqib o'tuvchi issiqlik miqdori

$$\Delta Q = -k\frac{\partial u}{\partial n}\Delta s\cdot\Delta t = -k\Delta s\,\Delta t\, grad_n u \qquad (1)$$

formula yordamida aniqlanishi tajriba yo'li bilan aniqlangan; bunda $k$-qaralayotgan muhit (jism) ning issiqlik o'tkazish koeffitsienti, $\vec{n}$-issiqlik harakati yo'nalishidagi $\Delta S$ yuzagacha normal bo'yicha yo'nalgan birlik vektor.

Jismninig issiqlik o'tkazishga nisbatan izotrop deb hisoblaymiz, ya'ni issiqlik o'tkazish koeffitsienti jismning $(x, y, z)$ nuqtasigagina bog'liq bo'lib, $S$ sirtga o'tkazilgan normalning yo'nalishiga bog'liq bo'lmaydi.

Bir birlik vaqt ichida birlik sohada oqib o'tuvchi issiqlik miqdori

$$q = -k\frac{\partial u}{\partial n} \qquad (2)$$

formula bilan aniqlanadi.

Jismdagi issiqlik tarqalish tenglamasini keltirib chiqarish uchun undan $S$ yopiq sirt bilan chegaralangan ixtiyoriy $V$ hajmli qismini ajratamiz va shu $V$ dagi $(t_1, t_2)$ vaqt oralig'idagi issiqlik miqdorining o'zgarishini qaraymiz.

(1) formulaga ko'ra $(t_1, t_2)$ vaqt oralig'ida $S$ sirtdan oqib o'tuvchi issiqlik miqdori

$$Q_1 = -\int_{t_1}^{t_2} dt \iint_S k(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial n} dS \qquad (3)$$

ga teng. Bu yerda C*r* sirt *S* ning ichki normali. Endi *V* hajmi jismning ixtiyoriy $\Delta V$ qismida $\Delta\, t$ vaqt oralig'ida temperaturasi $\Delta u$ gacha o'zgarishiga sarf qilingan issiqlik miqdori

$$Q_2 = \iiint_V [u(x,y,z,t_2) - u(x,y,z,t_1)]\gamma \cdot \rho dv \qquad Q_2 = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V \gamma\rho\frac{\partial u}{\partial t} dv \qquad (4)$$

formula yordamida aniqlanadi. Bu yerda

$$u(x,y,z,t_2) - u(x,y,z,t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u}{\partial t} dt.$$

Faraz qilaylik jism ichida issiqlik manbai mavjud bo'lsin. Issiqlik manbai zichligi $F(x, y, z, t)$ bilan belgilaymiz. Bu holda *V* hajmli jismdagi $(t_1, t_2)$ vaqt oralig'idagi issiqlik manbaining ajratadigan issiqlik miqdori

$$Q_3 = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V F(x,y,z,t) dV \qquad (5)$$

ga teng bo'ladi.

*V* jism uchun ajratilgan issiqlikning muvozanat tenglamasi

$$Q_2 = Q_1 + Q_3$$

bo'ladi. (3), (4), (5) formulalarga ko'ra

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V \gamma\rho\frac{\partial u}{\partial t} dV = -\int_{t_1}^{t_2} dt \iint_S k\frac{\partial u}{\partial n} ds + \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V F(x,y,z,t) dV.$$

Tenglikning o'ng tomonidagi birinchi (sirt) integraliga Ostrogradskiy formulasini qo'llasak, quyidagi ko'rinishga keladi.

$$\int_{t_1}^{t_2} dt + \iiint_V \left[ \gamma\rho \frac{\partial u}{\partial t} - dv(kgradU) - F(x,y,z,t) \right] dv = 0.$$

Bu tenglikdan *V*-hajm ixtiyoriy va integral ostidagi funksiya uzluksiz bo'lganligidan qaralayotgan jismning ixtiyoriy ($x$, $y$, $z$) nuqtasi uchun har qanday $t$ vaqt oralig'ida ushbu

$$\gamma\rho \frac{\partial u}{\partial t} = div(kgradu) + F(x,y,z,t)$$

yoki

$$\gamma\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(k\frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(k\frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(k\frac{\partial u}{\partial z}) + F(x,y,z,t) \qquad (6)$$

tenglama hosil bo'ladi. (6) tenglama qattiq izotrop jismdagi issiqlik tarqalish tenglamasi deb ataladi.

Agar jism bir jinsli bo'lsa, $\gamma$, $\delta$ va $k$ o'zgarmas son bo'ladi. Bu holda (6) tenglama ushbu

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(x,y,z,t) \qquad (7)$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Bu yerda $a = \sqrt{\frac{k}{\delta\gamma}}$ $\quad f(x,y,z) = \frac{F(x,y,z,t)}{\delta\gamma}$.

Agar jism ichida issiqlik manbai yo'q bo'lsa $f(x, y,z,t)=0$ bo'lib, bir jinsli jism uchun issiqlik tarqalish tenglamasi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right). \qquad (8)$$

Agar temperatura ($x$, $y$) va $t$ koordinataga bog'liq bo'lsa, bir jinsli plastinkadagi issiqlik tarqalishi tenglamasi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \qquad (9)$$

bo'ladi.

Sterjendagi issiqlik tarqalish tenglamasi

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \tag{10}$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

(7) tenglamaning yechimi to'la aniq bo'lishi uchun $U(x, y, z, t)$ funksiya masalaning fizik shartlariga mos chegaraviy shartlarini qanoatlantirishi kerak. (7) tenglamaning yechish uchun chegaraviy shartlar turlicha bo'lishi mumkin.

1. $S$ sirtning har bir nuqtasida temperatura beriladi.

$$u/_s=\psi_1(p,t) \tag{11}$$

bunda $\psi_1$-berilgan aniq funksiya.

2. $S$ sirtda issiqlik oqimi beriladi.

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_s=\psi_2(p,t) \tag{12}$$

Bu yerda $\psi_2 o(p,t)$=-$\frac{q(p,t)}{k}$ formula bilan ifodalangan aniq funksiya (10) tenglama uchun chegaraviy shartlar

$$n(o,\ t)=\psi_1(t),\ n(1,\ t)=\ \psi_2(t), \tag{13}$$

ko'rinishda bo'ladi.

Shunday qilib (7) issiqlik tarqalish tenglamasi uchun chegaraviy masala quyidagicha qo'yiladi.

Masala: Ushbu

$$u/_{t=0}=\varphi(x,y,z) \tag{14}$$

boshlang'ich shartni va (11) yoki (12) chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi qidirilsa, u birinchi chegaraviy masala, (14) va (12) shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi qidirilsa, u ikkinchi chegaraviy masala deb ataladi.

## 4. Issiqlik tarqalish tenglamasi uchun birinchi chegaraviy masalani yechish

Masala: $Q:[0 \le x \le l, 0 \le t \le T]$ to'g'ri burchakli to'rtburchakda

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \tag{1}$$

boshlang'ich shartni va

$$u|_{x=0} = 0, \; U|_{x=0} = 0 \tag{2}$$

bir jinsli chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi

$$\mathrm{L}\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{3}$$

bir jinsli tenglamaning yechimi topilsin. Bu yerda $\varphi(x)$ bo'lakli-uzluksiz birinchi tartibli hosila ega bo'lib, $\varphi(0) = \varphi(e) = 0$ dir.

(3) tenglamaning xususiy yechimini ikki funksiya ko'paytmasi shaklida topamiz

$$u(x,t) = T(t) \cdot X(x) \tag{4}$$

Bu yechimni (3) tenglamaga qo'ysak,

$$X(x)T'(t) = a^2 T(t) X''(x) \text{ ёки } \frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

hosil bo'ladi.

Bu nisbatlarning har biri $x$ ga ham $t$ ga ham bog'liq bo'lmaydi, shuning uchun ularni o'zgarmas $-\lambda$ parametrga tenglaymiz.

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \tag{5}$$

(5) tengliklardan ikkita tenglama hosil qilamiz

$$T(t)+a^2\lambda T(t)=0 \tag{6}$$

$$X''(x)+\lambda X(x)=0 \tag{7}$$

(2) chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi trivial bo'lmagan $U(x,t)$ yechimni topish uchun (7) tenglamaning

$$X(0)=0, X(l)=0 \tag{8}$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi trivial bo'lmagan $X(x)$ yechimini topish zarurdir. Bu holda ushbu masalaga kelamiz: (8) shartlarni qanoatlantiruvchi (7) tenglamaning notrivial yechimi λ parametrning qanday qiymatlarida mavjud bo'ladi?

Bu masalani yechish uchun $\lambda<0, \lambda=0, \lambda>0$, bo'lgan hollarni alohida qaraymiz.

1) $\lambda<0$ bo'lsin. (7) tenglamaning umumiy yechimi $X(x)=C_1e^{\sqrt{-\lambda}x}+C_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}$ ko'rinishda bo'ladi, $c_1$, $c_2$ - ixtiyoriy o'zgarmas miqdorlar.

(8) shartlarga asosan

$$\begin{cases} C_1+C_2=0 \\ C_1e^{\sqrt{-\lambda}e}+C_2e^{-\sqrt{-\lambda}e}=0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Bunda $C_1=0$, $C_2=0$ bo'lib $X(x)\equiv 0$ kelib chiqadi.

2) $\lambda=0$ bo'lsin. Bu holda (7) tenglamaning umumiy yechimi $X(x)=C_1+C_2x$ formula bo'yicha beriladi. (8) shartlarga ko'ra

$$C_1+C_2\cdot 0=0$$

$$C_1+C_2\cdot l=0$$

tengliklar hosil bo'lib, bunda $C_1=0$, $C_2=0$ bo'ladi. Demak, $X(x)\equiv 0$ bo'ladi.

3) $\lambda>0$ bo'lsin. (7) tenglamaning umumiy yechimi

$$X(x)=C_1\cos\sqrt{\lambda}x+C_2\sin\sqrt{\lambda}x$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

(8) chegaraviy shartga asosan

$$\begin{cases} C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0 \\ X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi. Birinchi tenglamadan $s_1$=0, ikkinchi tenglamadan $C_2 \sin\sqrt{\lambda}x = 0$ tengliklar hosil bo'ladi. $C_2 \neq 0$ bo'lishi uchun $\sin\sqrt{\lambda}x = 0$ bo'lishi kerak, aks holda $X \equiv 0$ trivial yechim bo'ladi. Demak (7) tenglama notrivial yechimga ega bo'lishi uchun $\sin\sqrt{\lambda}x = 0$ bo'lib, bundan

$$\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{e}(n = 1,2,...) \text{ yoki } \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{e}\right)^2 \tag{9}$$

bo'ladi. Shunday qilib (7)-(8) masala faqat $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{e}\right)^2$ qiymatlarda notrivial yechimga ega bo'ladi. Bu yechim

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{e} \tag{10}$$

formula bilan aniqlanadi.

$\lambda$ parametrning (9) $\lambda$ qiymatlariga mos (6) tenglamaning yechimi

$$T_n(t) = a_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{e}\right)^2 t} \tag{11}$$

bo'ladi. Bu yerda $a_n$ ixtiyoriy o'zgarmas miqdor.

Shunday qilib hamma

$$U_n(x,t) = T_n(t) \cdot X_n(x) = a_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{e}\right)^2 t} \sin\frac{n\pi x}{e} \tag{12}$$

funksiyalar (3) tenglamani va (2) boshlang'ich shartlarni qanoatlantiradi.

Ushbu

$$U_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{e}\right)^2 t} \sin\frac{n\pi x}{e} \tag{13}$$

qatorni tuzamiz. (1) boshlang'ich shartga asosan

$$U_n(x,0)=\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi x}{l} \qquad (14)$$

hosil bo'lib, qator $\varphi(x)$ funksiyaning (0, $e$) oraliqdagi sinuslar bo'yicha yoyilgan Furye qatoridir.

$a_n$ koeffitsient ushbu

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \qquad (15)$$

formula bo'yicha aniqlanadi.

Farazimizga ko'ra $\varphi(x)$ funksiya $x$=0 va $x$=$l$ da nolga teng va bo'lakli uzluksiz birinchi tartibli hosilaga ega bo'lganligi uchun (14) qator $\varphi(x)$ funksiya tekis va absolut yaqinlashadi.

Shu bilan birga $t\geq 0$ da $0<l^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)t}\leq 1$ bo'lganligi uchun (13) qator $t\geq 0$ da absolut va tekis yaqinlashadi. Shu sababli (13) qator bilan aniqlangan $U(x,y)$ funksiya $0\leq x\leq l, t\geq 0$ sohada uzluksiz bo'lib, boshlang'ich va chegaraviy shartlarni qanoatlantirib (3) tenglamaning yechimi bo'ladi.

92-ma'ruza.

# LAPLAS TENGLAMASIGA KELTIRILADIGAN MASALALAR

Quyidagi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \qquad (1)$$

Laplas tenglamasiga olib keladigan ba'zi bir masalalarni qaraymiz. (1) tenglamaning chap tomoni $\Delta u$ bilan belgilanadi ($\Delta$- Laplas operatori deb ataladi). U holda (1) tenglama

$$\Delta u=0 \qquad (2)$$

ko'rinishga keladi.

## Bir jinsli jismda temperaturaning statsionar taqsimoti

$\delta$ sirt bilan chegaralangan bir jinsli $Q$ jism berilgan bo'lsin. Jismning turli nuqtalardagi temperaturasi

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

tenglamani qondirishi yuqorida ko'rsatilgan edi.

Agar jarayon (protsess) o'rnashgan bo'lsa, unda temperatura vaqtga bog'liq bo'lmasdan faqat jism nuqtasining koordinatasiga bog'liq bo'ladi, u holda $\frac{\partial u}{\partial t}=0$, demak temperatura Laplas tenglamasini qondiradi. Demak,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

Jismning temperaturasini bu tenglamadan bir qiymatli holda aniqlash uchun $\delta$ sirtdagi temperaturani bilish kerak. Shunday qilib (1) tenglama uchun chegaraviy masala quyidagicha ifodalanadi.

$Q$ hajm ichida (1) tenglamani qanoatlantiruvchi va uning chegarasi $\delta$ sirtning har bir $M$ nuqtasida berilgan

$$U|_{\delta} = \varphi(M) \tag{3}$$

qiymatni qabul qiluvchi $U(x,y,z)$ funksiya topilsin.

Bu masala Dirixle masalasi yoki (1) tenglama uchun birinchi chegaraviy masala deb aytiladi.

Agar jism sirtidagi temperatura noma'lum bo'lib, sirtning har bir nuqtasida issiqlik oqimi ma'lum bo'lsa va $\frac{\partial u}{\partial t}$ ga proporsional bo'lsa, u holda $\delta$ sirtda (2) chegaraviy shart o'rniga ushbu shartga ega bo'lamiz.

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\delta} = \psi(M) \tag{4}$$

(1) tenglamaning (4) chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasi Neyman masalasi yoki ikkinchi chegaraviy masala deb ataladi.

Agar temperatura tarqalishi $S$ kontur bilan chegaralangan $D$ tekis sohada qaralsa, u holda $U$ funksiya ikkita $x$ va $y$ o'zgaruvchiga bog'liq bo'ladi va

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{5}$$

tenglamani qanoatlantiradi. Bu tenglama uchun (3) yoki (4) chegaraviy shartlar $C$ konturda bajarilishi shart.

**Garmonik funksiyalar. Dirixle masalasining Grin funksiyasi.**

Ta'rif: Agar $u(x,y,z)$ funksiya $D$ sohada ikkinchi tartibli uzluksiz hosilalarga ega bo'lib, sohaning har bir nuqtasida

Laplas tenglamasini qanoatlantirsa garmonik funksiya deb ataladi.

Misol. $u=\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}$ funksiya $(x_0,y_0,z_0)$ nuqtani o'z ichiga olmagan har qanday sohada garmonik funksiya bo'ladi. $U=\frac{1}{r}$ funksiya $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$ Laplas tenglamasining fundamental yechimi deb ataladi.

Shunga o'xshash

$$u=\ln\frac{1}{r}=\ln\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}$$

funksiya $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ ikki o'zgaruvchili Laplas tenglamasining fundamental yechimi deb ataladi.

Agar $u(x,y,z)$ va $u(x,y,z)$ funksiyalar $D$ sohaning $S$ chegarasigacha uzluksiz birinchi tartibli xususiy hosilalarga va sohaning ichki nuqtalarida uzluksiz ikkinchi tartibli xususiy hosilalarga ega bo'lsa, shu funksiyalar ushbu

$$\iiint_D [u\Delta v - v\Delta u]d\delta = \iint_S \left( u\frac{\partial v}{\partial n} - V\frac{\partial u}{\partial n} \right) dS \tag{6}$$

Grin formulasini qanoatlantiradi. (1) Grin formulasi Ostrogradskiy formulasi yordamida keltirilib chiqariladi.

Ushbu lemmani isbotsiz beramiz.

Lemma. Agar $u(x,y,z)$ funksiya $D$ sohada uzluksiz birinchi va ikkinchi tartibli xususiy hosilalarga ega bo'lsa, (bu yerda birinchi tartibli xususiy hosilalar $\overline{D}$ da, ikkinchi tartibli xususiy hosilalar $D$ da uzluksiz) ushbu

$$u(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{4\pi}\iint_S\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right)dS-\frac{1}{4\pi}\iiint_D\frac{\Delta u}{r}d\delta \qquad (7)$$

formula o'rinlidir. Bu yerda $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$, $n$ - $S$ sirtning tashqi normali.
Shunga o'xshash tekislik uchun ushbu formulalar o'rinlidir.

$$\iint_D(u\Delta v-v\Delta u)d\delta=\int_l\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS \qquad (8)$$

(8) formula Grin formulasi deb ataladi.

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi}\int_l\left(\ln\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right)dS-\frac{1}{2\pi}\iint_S\ln\frac{1}{r}\Delta U d\delta \qquad (9)$$

Agar $U(x,y,z)$ garmonik funksiya bo'lsa $\Delta U=0$ bo'lganligidan (7) formuladan

$$u(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{4\pi}\iint_S\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right)dS$$

hosil bo'ladi. Ya'ni garmonik funksiya D soha ichidagi har qanday nuqtadagi qiymati va uning normal hosilasi qiymati bo'yicha ifodalanadi.

Garmonik funksiyalarning xossalari

1. $u(x,y,z)$ garmonik funksiya $D$ soha ichida istalgan tartibli xususiy hosilalarga ega.
2. Garmonik funksiyaning shar markazidagi qiymati, shar sirtidagi qiymatining o'rta arifmetik qiymatiga teng.
3. Agar $u(x,y,z)$ funksiya $D$ sohaning ichki nuqtalarida

garmonik bo'lib uning chegarasida uzluksiz bo'lsa, o'zining eng katta yoki eng kichik qiymatlariga faqat $D$ sohaning chegarasida erishadi.

Aytaylik, $u(M)$ chekli $D$ soha ichida garmonik funksiya bo'lsa, ushbu

$$u(M_0)=\frac{1}{4\pi}\iint_S\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right)dS \tag{11}$$

tenglama o'rinlidir.

Faraz qilaylikki, ma'lum $g(M,M_0)$ funksiya quyidagi ikkita xossaga ega bo'lsin.

1. $M$ nuqtaning funksiyasi bo'lib, u $D$ sohaning ichida garmonik funksiya bo'lsin.

2. $D$ ning chegarasi $S$ da $g(M,M_0)$ funksiya $-\frac{1}{4\pi^2}$ qiymatga ega bo'lsin.

$u(M)$ va $g(M,M_0)$ funksiyalarga (8) Grin formulasini tatbiq qilsak,

$$\iint_S\left[u(M)\frac{\partial g(M,M_0)}{\partial n}-g(M,M_0)\frac{\partial u(M)}{\partial n}\right]dS=0$$

yoki

$$\iint_S\left[u(M)\frac{\partial g(M,M_0)}{\partial n}+\frac{1}{4\pi^2}\frac{\partial u(M)}{\partial n}\right]dS=0$$

tenglikni hosil qilamiz.

Bu tenglikni (11) tenglikdan ayirsak,

$$u(M)=-\iint_S u(M)\frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{1}{4\pi^2}+g(M,M_0)\right]dS \tag{12}$$

formulaga ega bo'lamiz.

Ushbu

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi^2} + g(M, M_0)$$

belgilashni kiritamiz.

Ta'rif: Agar $G(M, M_0)$ funksiya:

1. $G(M, M_0)$ $M$ nuqtaning funksiyasi bo'lib $D$ sohaning ichida garmonik funksiya bo'lsa ($M_0$ nuqtada cheksizlikka aylanadi).
2. $G(M, M_0)|_S = 0$ (13) chegaraviy shartni qanoatlantiradi.
3. D sohada $G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi^2} + g(M, M_0)$ ko'rinishga ega bo'lsa, $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} = |M, M_0|$, $g(M, M_0)$ - $D$ soha ichida garmonik funksiya.

Unda $g(M, M_0)$ funksiya Laplas tenglamasi uchun Dirixle masalasining Grin funksiyasi deb ataladi.

Dirixle masalasining yechimi Grin formulasi yordamida quyidagi formula bo'yicha beriladi.

$$U(M_0) = -\iint_S f(M) \frac{\partial G(M, M_0)}{\partial n} dS \tag{14}$$

Bunda $U(M_0)|_S = f(M)$.

## Grin funksiyasi yordamida Dirixle masalasini doira uchun yechish

Dirixle masalasi.

Doirada va uning chegarasida uzluksiz bo'lib, doira ichida Laplas tenglamasini

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{15}$$

qanoatlantiradigan hamda doira aylanasida

$$u|_{r=R} = \varphi(S) \tag{16}$$

qiymatni qabul qiladigan *u(x, y)* funksiyasi topilsin.

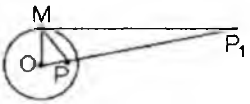
Yechish. Grin funksiyasi bo'yicha izlanayotgan yechim ushbu

$$u(P) = -\int_C \varphi(S)\frac{\partial G}{\partial n}\,dS \qquad (17)$$

formula bo'yicha beriladi.

Doira uchun Dirixle masalasining Grin funksiyasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

$$G(M,P) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{MP}} - \frac{1}{2\pi}\ln\frac{R}{\rho \cdot r_{MP}} \qquad (18)$$




Bu yerda $M$ doira aylanasidagi nuqta, $P$ esa doira ichidagi nuqtadir. $P$ Grin funksiyasining maxsus nuqtasi. $P_1$ aylanaga nisbatan $P$ ga simmetrik nuqta. $\rho=|OP|$, $\rho_1=|OP_1|$, $\rho{\cdot}\rho_1=R_2$.

Endi $\dfrac{\partial G}{\partial n}$ ni hisoblaymiz

$$-\frac{\partial G}{\partial n} = -\frac{\partial G}{\partial n}\cos(n,r) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{r_{MP}}\cos(n,r_{MP}) - \frac{1}{2\pi}\frac{1}{r_{MP}}\cos(n,r_{MP_1})$$

$OMP$ va $OMP_1$ uchburchaklardan

$$\cos(n,r_{MP}) = \frac{R^2+r_{MP}^2-\rho^2}{2Rr_{MP}},\quad \cos(n,r_{MP_1}) = \frac{R^2+r_{MP_1}^2-\rho^2}{2Rr_{MP_1}}$$

Bundan

$$-\frac{\partial G}{\partial n}\Big|_C = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{R^2+r_{MP}^2-\rho^2}{2Rr_{MP}^2} - \frac{R^2+r_{MP_1}^2-\rho^2}{2Rr_{MP_1}^2}\right)$$

Bu yerda $r_{MP_1} = \dfrac{R}{\rho}r_{MP}$ tenglikdan, $\rho_1 = \dfrac{R^2}{\rho}$.

Oxirgi tenglikdan

$$-\frac{\partial G}{\partial n}\Big|_C = \frac{1}{2\pi}\frac{R^2-\rho^2}{r_{MP}^2}$$

hosil bo'ladi.

$\Delta OPM$ dan

$$r_{MP}^2 = R^2 - \rho^2 - 2R\rho\cos(\theta - \psi)$$

bundan

$$\frac{\partial G}{\partial n}\bigg|_C = \frac{1}{2\pi}\frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos(\theta - \psi)}$$

Bu qiymatni (17) formulaga olib borib qo'ysak,

$$u(\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2 - \rho^2)\varphi(\theta)d\theta}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos(\theta - \psi)} \tag{19}$$

yechim hosil bo'ladi. (19) yechim Puasson formulasi (integrali) deb ataladi. Bu yerda $\rho$, $\psi$-lar $P$ nuqtaning qutb koordinatalari $r$, $R$, $\theta$-lar $C$ (chegaradagi) $M$ nuqtaning qutb koordinatalaridir.

93-ma'ruza.

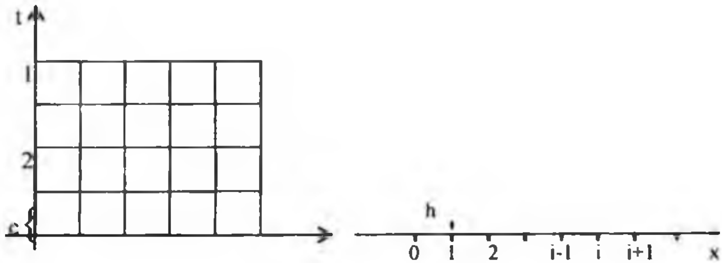
# MATEMATIK FIZIK TENGLAMALAR UCHUN CHEGARAVIY MASALANI TAQRIBIY YECHISH

## 1. Asosiy tushunchalar. To'r va to'rli funksiya tushunchasi.

Aytaylik, $x$ argumentning o'zgarish sohasi $0 \le x \le l$ kesma bo'lsin. [0, l] kesmani $X_i = ih(i = 0,1,2,...,N, h > 0)$ nuqtalar bilan uzunligi $h = \frac{l}{N}$ bo'lgan $N$ ta kesmaga bo'lamiz. $X_i = ih, i = 0,1,2,...,N$ nuqtalar to'plami [0,l] kesmadagi ayirmalar to'ri deb ataladi va $\overline{\omega}_h = \{X_i = ih, i = 0,1,2,...,N\}$ simvol bilan boshlanadi. Bu yerda $h$ soni $\overline{\omega}_h$ to'rning tugunlari orasidagi masofa bo'lib, to'r qadami deyiladi. $X_i$ diskret argumentining funksiyasi $U = U(X_i)$ $\overline{\omega}_h$ to'rda aniqlangan to'rli funksiya deb ataladi.

Endi $(x, z)$ o'zgaruvchilarining o'zgarish sohasi bo'lgan $\overline{D} = \{0 \le x \le 1, 0 \le z \le N\}$ to'rtburchak sohani qaraymiz. [0, 1] kesmada qadami $h = \frac{1}{N}$ bo'lgan $\overline{\omega}_h = \{X_i = ih, i = 0,1,2,...,N\}$ to'rni, so'ng [0, $T$] kesmada qadami $\tau = \frac{T}{N_0}$ bo'lgan $\overline{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0,1,2,...,N_0\}$ to'rni tuzamiz. Koordinatalari $X_i = ih, t_j = jh$ bo'lgan $(X_i, t_j)$ tugunlar to'plamini $\overline{D}$ sohadagi $\overline{\omega}_{h\tau} = \{(X_i = ih, t_j = j\tau), i = \overline{0,N}, j = \overline{0,N_0}\}$ to'r deb ataymiz.

$\overline{\omega}_{h\tau}$ to'rning $(X_i, t_j)$ tugunlarda aniqlangan $u_i^j = u(X_i, t_j)$ funksiya to'rli funksiya deyiladi.




Endi funksiya hosilalarni chekli ayirmalar bo'yicha ya'ni to'rli funksiya bilan belgilashni kiritamiz.

$\overline{\omega}_h = \{X_i = ih\}$ to'r berilgan bo'lsin. $U$©$-$hosilani quyidagicha almashtiramiz

$u'(x_i) = u' \sim \frac{u_i - u_{i-1}}{h}$ – chap chekli ayirma hosila.

$u(x_i) = u' \sim \frac{u_{i+1} - u_1}{h}$ – o'ng chekli ayirma hosila.

$u_{xx} = u''(x_i)$ ikkinchi tartibli hosilani chekli ayirmalar bo'yicha almashtirish uchun $X_{i-1}, X_i, X_{i+1}$ uchta tugun olamiz.

$$u_{xx} \sim \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{2}$$

$D = \{0 \le x \le 1, 0 \le t \le T\}$ sohada aniqlangan $u(x,t)$ ikki argumentli funksiya berilgan bo'lsin. Xususiy hosilalarni chekli ayirmalar bo'yicha quyidagicha almashtiramiz.

Ushbu $\overline{\omega}_{h\tau} = \{(X_i = ih, t_j = j\tau), i = \overline{0,N}, j = \overline{0,N_0}\}$ to'rni tuzamiz.

Bu yerda $h = \frac{1}{N}$, $\tau = \frac{T}{N_0}$.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^{j+1} \sim \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} \qquad (1)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^j \sim \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{h^2} \qquad (2)$$

Demak, $h_{h\tau}=\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ operator ushbu chekli ayirma operator bilan almashadi

$$h_{h\tau}u_i^{j+1}=\frac{u_i^{j+1}-u_i^j}{\tau}-\frac{u_{i-1}^j-2u_i^j+u_{i+1}^j}{h^2}. \qquad (3)$$

Bu operator $(x_i,t_{j+1}),(x_i,t_j),(x_{i-1},t_j),(x_{i+1},t_j)$ tugunlardan tuzilgan to'rda aniqlanadi, ya'ni operator $\overline{\omega}_{h\tau}$ to'rining $0<i<N$ va $j>0$ bo'lgan tugunlarida aniqlangan.

Issiqlik o'tkazish tenglamasi uchun birinchi chegaraviy masalani chekli ayirmalar (to'r usuli) usuli bilan taqribiy yechish.

Ushbu

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t)0<x<1,0<t<T \qquad (4)$$

tenglamaning

$$U(x,0)=U_0(x) \quad 0\le x\le 1 \qquad (5)$$

$$U(0,t)=\mu_1(t), \quad U(1,t)=\mu_2(t), \quad 0\le t\le T \qquad (6)$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topish talab qilinsin.

$x=0,x=1,t=0,t=T$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan sohani $x_i=ih,t_j=j\tau(i=0,1,2,...,N,j=0,1,2,...,N_0)$ to'g'ri chiziqlardan tuzilgan to'r $\overline{\omega}_{h\tau}$ bilan qoplaymiz.

(1) va (2) almashtirishlarga ko'ra (4) tenglamadan $\frac{\partial u}{\partial t}$ va $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ larni chekli ayirmalar bilan almashtiramiz.

$$\frac{u_i^{j+1}-u_i^j}{\tau}=\frac{u_{i-1}^j-2u_i^j+u_{i+1}^j}{h^2}+f(x_i,t_j)$$

bundan

$$u_i^{j+1} - u_i^j = \gamma\left(u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j\right) + \tau\varphi_i^{j+1} 0 < i < N j > 0 \quad (7)$$

$$u_i^{(0)} = u_0(x_i) \quad (8)$$

$$u_0^j = \mu_i(t_j) u_N^j = \mu_2(t_j) \quad (9)$$

Bu yerda $\gamma = \frac{\tau}{h^2} \varphi_i^{j+1} = f(x_i, t_j) u_i^{j+1}$ ni topamiz.

$$u_i^{j+1} = (1 - 2\gamma)u_i^j + \gamma\left(u_{i-1}^j + u_{i+1}^j\right) + \tau\varphi_i^{j+1} \quad (10)$$

Agar $U_i^j$ ma'lum bo'lsa (10) formuladan $i = 0,1,2,...,N-1$ hamma tugundagi $U_i^{j+1}$ ni aniqlash mumkin. $j$=0 da $U_i^0 = U(x_i)$ boshlang'ich shart berilganligi uchun (9) chegaraviy shartlarga ko'ra (10) formuladan $U_i^{j+1}$ qiymatni $\omega_{h\tau}$ to'rning hamma tugunlarida aniqlanadi.

(1) va (2) almashtirishlarga ko'ra (4) tenglamadan $\frac{\partial u}{\partial t}$ va $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ larni chekli ayirmalr bilan ifodalaymiz.

$$\frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{\tau} = \frac{U_{i-1}^j - 2U_i^j + U_{i+1}^j}{h^2} + f(x_i, t_j)$$

$$U_i^{j+1} - U_i^j = \gamma\left(U_{i-1}^j - 2U_i^j + U_{i+1}^j\right) + \tau\varphi_i^{j+1} \qquad 0 < i < N \quad j > 0$$

$$U_i^{(0)} = U_0(x_i) \quad (8)$$

$$U_0^j = \mu_i(t_j) \quad U_N^j = \mu_2(t_j) \quad (9)$$

Bu yerda $\gamma = \frac{\tau}{h^2} \varphi_i^{j+1} = f(x_i, t_j) U_i^{j+1}$ ni topamiz.

$$U_i^{j+1} = (1-2\gamma)U_i^j + \gamma\left(U_{i-1}^j + U_{i+1}^j\right) + \tau\varphi_i^{j+1} \qquad (10)$$

Agar $U_i^j$ ma'lum bo'lsa (10) formuladan $i = 0, 1, 2, ..., N-1$ hamma tugundagi $U_i^{j+1}$ ni aniqlash mumkin. $j$=0 da $U_i^0 = U(x_i)$ boshlang'ich shart berilganligi uchun (9) chegaraviy shartlarga ko'ra (10) formuladan $U_i^{j+1}$ qiymatni $\omega_{h\tau}$ to'rning hamma tugunlarida aniqlanadi.

94-ma'ruza.

# EHTIMOLLAR NAZARIYASI

## 1. Kirish

Ehtimollar nazariyasi tasodifiy voqea yoki hodisalarning qonuniyatlarini o'rgatuvchi fandir. Ehtimollar nazariyasi matematika fanining bir yo'nalishi bo'lib, u XVII asrning o'rtalaridan rivojlana boshlagan. XX asrga kelib ehtimollar nazariyasi alohida fan sifatida shakllandi hamda tabiatshunoslik va texnikaning ko'p sohalarida qo'llanila boshlandi.

Matematika fani, xususan ehtimollar nazariyasi O'zbekistonda rivojlangan bo'lib, bu sohada alohida maktab yaratilgan. Bu maktabning asoschilari V.I. Romanovskiy va uning shogirdi akad. S.X. Sirojiddinovni eslash o'rinlidir.

Ehtimollar nazariyasi ko'p sohalarda, xususan iqtisodiyot, muhandislik sohalarda ham muvaffaqiyatli qo'llanilmoqda. Shu sababdan ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fani bo'yicha o'zbek tilida o'quv qo'llanma yozish taqozo etiladi.

## 2. Elementar hodisalar fazosi

Ta'rif. Ixtiyoriy $U$ to'plamni elementar hodisalar fazosi deyiladi. Bu to'plamning elementlarini $(E \in U)$ elementar hodisalar deyiladi. Elementlar (sodda) hodisa deganda har bir o'tkazilgan tajribada ro'y berishi mumkin bo'lgan hodisalarning bitta va faqat bittasining ro'y berishini tushunish kerak. Masalalarning qo'yilishiga qarab $U$ to'plamning elementlari turlicha bo'lishi mumkin. Quyidagi misollarni ko'raylik.

1. *Tangani bir marta tashlash.* Tangani bir marta tashlaganda ikkita holat bo'lishi mumkin. Tangani gerb tomoni bilan tushishi «G» yoki raqam tomoni bilan tushishi «*R*». Bu ikki hodisa bitta tajribada ro'y berishi mumkin bo'lmagan ikkita elementlar hodisalarga misol bo'ladi.

Albatta bunday tajriba o'tkazilishda tanganing simmetrik bo'lishi (egilgan, buklangan bo'lmasligi) shart. Tanga bir xil holatda tashlanadi va tekis joyga tushishi talab qilinadi. Tanga tushganda dumalab ketishi, tik turib qolishi va boshqa holatlar hodisa sifatida qaralmaydi.

Shunday qilib, $E_1=\{G\}$, $E_2=\{R\}$ elementar hodisalarni tashkil etadi, $U=\{G,R\}$ yoki $U=\{E_1,E_2\}$ esa elementar hodisalar fazosini tashkil etadi.

2. *Kubik tashlash.* Tomonlari 1 dan 6 gacha raqamlar bilan yozilgan simmetrik kubikni tashlash natijasida har bir tajribada quyidagi raqamlardan $E_1=\{1\}$, $E_2=\{2\}$, $E_3=\{3\}$, $E_4=\{4\}$, $E_5=\{5\}$, $E_6=\{6\}$ bittasi va faqat bittasi ro'y berishi mumkin. Bular elementar hodisalarni tashkil etadi. U holda $U=\{E_1,E_2,E_3,E_4,E_5,E_6\}$- to'plam elementar hodisalar fazosi bo'ladi.
3. *Tangani ikki marta tashlash.* Tanga ikki marta tashlanganda elementar hodisalar $E_1=\{GG\}$, $E_2=\{GP\}$, $E_3=\{PG\}$, $E_4=\{RR\}$ lardan iborat bo'ladi va $U=\{E_1,E_2,E_3,E_4\}$ - elementar hodisalar fazosini tashkil etadi.
4. *Tanga tashlash.* Tajriba shundan iboratki, tanganing «G» tomoni tushishi bilan tajriba to'xtatiladi. Bu tajribada elementlar hodisalar quyidagi ko'rinishda bo'ladi; $E_1=\{\Gamma\}$, $E_2=\{RG\}$, $E_3=\{RRG\},\dots,E_n=\{R\dots RG\}$, ..., - elementlar hodisalar fazosi esa $U=\{E_1,E_2,E_3,\dots E_n,\dots\}$ ko'rnishga ega bo'ladi.
5. *Nuqta tashlash.* Tekislikda koordinatalar sistemasini qaraymiz. Tajriba tekislikning biror qismiga nuqta tashlashni nazarda tutadi. Shu tushgan nuqtaga, shu nuqtaning koordinatalarni mos qo'yamiz. U holda quyidagi to'plam

$$U=\{(x,y):\quad a\le x\le b,\quad c\le y\le d\}$$

tekislikning $[a,b]\times[c,d]$ qismdagi tartiblangan nuqtalar to'plamini ifodalaydi.

Shunday qilib, yuqorida keltirilgan misollardan ko'rinadiki, $U$ to'plamining elementlari chekli ham, cheksiz ham bo'lishi mumkin.

Bir nechta hodisaning har bir tajribada ro'y berish imkoniyatlari bir xil bo'lsa, ular teng imkoniyatli hodisalardir.

### 3. Hodisalar algebrasi

1-ta'rif. Tajriba o'tkazish natijasida ro'y berishi ham, ro'y bermasligi ham mumkin bo'lgan hodisalarni tasodifiy hodisalar deyiladi va *A*, *B*, *C* harflar bilan belgilanadi.

Masalan, tangani bir marta tashlaganda $A=\{G\}$ tomonining tushishi tasodifiy hodisa, kubik tashlanganda juft sonlari $A=\{2, 4, 6\}$ tushishi tasodifiy hodisa bo'ladi.

Idishda 15 ta shar bo'lsin. Ulardan beshtasi oq, beshtasi qizil va beshtasi ko'k bo'lsin. Sharlar bir xil o'lchamda va bir xil materialdan tayyorlangan. Idishdan ixtiyoriy olingan shar oq shar $A=\{\text{oq}\}$ bo'lishi tasodifiy hodisadir.

2-ta'rif. Tajriba o'tkazish natijasida albatta ro'y beradigan hodisani muqarrar hodisa deyiladi va $U$, $\Omega$ harflar bilan belgilanadi.

Masalan, tanga bir marta tashlanganda «*G*» yoki «R» ro'y beradi, ya'ni $U=\{G, R\}$ muqarrar hodisadir. Kubik tashlanganda 1 dan 6 gacha raqamlarning tushishi, ya'ni $U=\{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$ muqarrar hodisadir.

Idishdan shar olganda (oq, ko'k va qizil shar) yo oq, yo qizil, yo ko'k sharning chiqishi $U$=$\{$oq, ko'k, qizil$\}$ - muqarrar hodisa.

3-ta'rif. Tajriba o'tkazish natijasida ro'y bera olmaydigan hodisani mumkin bo'lmagan hodisa deyiladi va *V yoki* $\varnothing$ lar bilan belgilanadi.

Masalan, kubik tashlanganda «0» yoki «7» raqamlarning chiqishi yoki idishdan olingan sharning qora chiqishi mumkin bo'lmagan hodisaga misol bo'la oladi.

4-ta'rif. Ikkita *A* va *B* hodisalarning yig'indisi deb, shu *A* va *B* hodisalarning hech bo'lmaganda bittasiga tegishli bo'lgan barcha elementar hodisalar to'plamiga aytiladi va *A*+*B* yoki

$A \cup B$ ko'rinishda yoziladi.

Masalan. Kubik tashlanganda $A$ hodisa juft sonlar tushishi, $B$ hodisa esa 3 ga karrali sonlarning tushish hodisasi bo'lsin, ya'ni $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{3, 6\}$. U holda $A + B = \{2, 3, 4, 6\}$ bo'ladi.

5-ta'rif. Bir nechta hodisalarning yig'indisi deb, shu hodisalarning hech bo'lmaganda bittasiga tegishli bo'lgan barcha elementar hodisalar to'plamiga aytiladi.

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

Agar bir nechta hodisalar yig'indisi muqarrar hodisaga teng bo'lsa, u holda bu hodisalar hodisalarning to'liq gruppasini tashkil etadi deb hisoblanadi.

Masalan, Agar $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{3, 6\}$, $C = \{1, 3, 5\}$ bo'lsa, u holda $A + B + C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = U$ bo'ladi. $A$, $B$, $C$ lar hodisalarning to'liq gruppasini tashkil etadi.

6-ta'rif. Ikkita $A$ va $B$ hodisalarning ko'paytmasi deb, bir vaqtda ham $A$, ham $B$ hodisalarga tegishli bo'lgan elementar hodisalardan iborat bo'lgan to'plamga aytiladi va $AB$ yoki $A \cap B$ ko'rinishda yoziladi.

Masalan, $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{3, 6\}$ bo'lsa, $AB = \{6\}$ bo'ladi.

7-ta'rif. Bir nechta hodisalarning ko'paytmasi deb, bir vaqtda barcha hodisalarga tegishli bo'lgan elementar hodisalardan iborat bo'lgan to'plamga aytiladi

$$A_1 A_2 \ldots A_n = \bigcap_{k=1}^{n} A_k .$$

8-ta'rif. Agar ikkita hodisa ko'paytmasi mumkin bo'lmagan hodisa bo'lsa, ya'ni $AB = V$, u holda $A$ va $B$ hodisalarni birgalikda bo'lmagan hodisalar deyiladi.

Masalan, $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ bo'lsa, u holda $AB = V$ bo'ladi.

9-ta'rif. Agar bir nechta hodisalar yig'indisi muqarrar hodisa bo'lsa va o'zaro har qanday jufti mumkin bo'lmagan hodisalarni tashkil etsa, ya'ni

$$U=\bigcup_{k=1}^{n}A_k,\quad A_iA_j=V,\quad i,j=\overline{1,n},\quad i\neq j$$

bo'lsa, u holda bunday hodisalarni o'zaro juft-jufti bilan birgalikda bo'lmagan hodisalarning to'liq gruppasini tashkil etadi deb aytiladi.

Masalan, $A=\{1,2,\}$, $B=\{3,4\}$, $C=\{5,6\}$ bo'lsa, u holda $A+B+C=U$ va $AB=V$, $AC=V$, $BC=V$ bo'ladi, demak, $A$, $B$, $C$ hodisalarning to'liq gruppasini tashkil etadi.

10-ta'rif. Ikkita hodisa ayirmasi deb, $A$ hodisaga tegishli bo'lib, $B$ hodisaga tegishli bo'lmagan elementar hodisalardan tuzilgan to'plamga aytiladi va $A$-$B$ yoki $A\backslash B$ ko'rinishda yoziladi.

Masalan, $A=\{2,4,6\}$ va $B=\{3,6\}$ bo'lsa, u holda $A\setminus B=\{2,4\}$ iborat bo'ladi.

11-ta'rif. Agar $A$ va $\overline{A}$ hodisalar yig'indisi muqarrar hodisa bo'lib, ularning ko'paytmasi mumkin bo'lmagan hodisa bo'lsa, ya'ni

$$U=A+\overline{A},\quad A\,\overline{A}=V$$

bo'lsa, u holda $A$ va $\overline{A}$ hodisalarni qarama-qarshi hodisalar deyiladi.

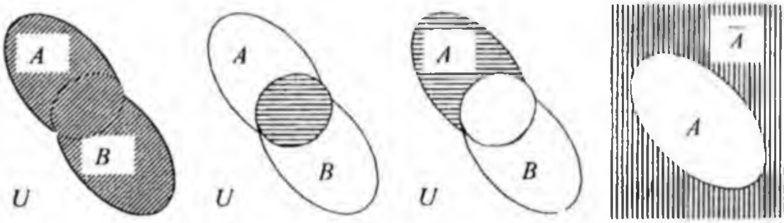
Agar $A$ hodisa $B$ hodisaning qism to'plami bo'lsa, $A\subset B$ yoki $B\supset A$ ko'rinishda yoziladi.

Masalan, $A=\{2,4\}$, $B=\{2,4,6\}$ bo'lsa, u holda $A\subset B$ bo'ladi.

Hodisalar yig'indisi va ko'paytmasini hodisalar soni cheksiz ko'p bo'lganda ham kiritish mumkin.

$$A_1+A_2+\ldots+A_n+\ldots=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$$

Hodisalar yig'indisi, ko'paytmasi, ayirmasi va qarama-qarshi hodisalarni quyidagicha geometrik shaklda ifodalash mumkin:




a) $A+B$ b) $A\ B$ d) $A \backslash B$ f) $A$ va $\bar{A}$

1-rasm.

yig'indi $A_n$ $(n=1,2\ldots)$ hodisalarning hech bo'lmaganda bittasiga tegishli bo'lgan elementar hodisalar to'plamidan iborat

$$A_1A_2\ldots A_n\ldots=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$$

ko'paytma barcha $A_n$ $(n=1,2\ldots)$ hodisalarga tegishli elementar hodisalar to'plamdan iborat.

Agar biror $E$ element $U$ ga tegishli bo'lsa, $E\in U$ ko'rinishda yoziladi.

Ixtiyoriy olingan $A,B\in F$ hodisalar uchun quyidagi shartlar:

1. $U\in F$ ;
2. $A+B\in F$, $AB\in F$, $A\setminus B\in F$

o'rinli bo'lsa, u holda $F$ ni hodisalar algebrasi deyiladi. Bu yerda $U$ hodisaning ixtiyoriy to'plam ostilari bo'lgan $A$, $B$ hodisalar $F$ sinfda element sifatida qatnashadi. Xususan $U\in F$ va $V\in F$ lar ham $F$ sinfning elementlaridir.

Qism to'plamlar sistemasidan tuzilgan eng kichik algebra $F=\{V,U\}$ dir. Agar $U$ chekli to'plamlardan iborat bo'lsa, u holda uning barcha qism to'plamlaridan tuzilgan sistema algebradir.

Misollar.

1. Tanga bir marta tashlanganda ro'y berishi mumkin bo'lgan hodisalar $A=\{G\}$, $B=\{R\}$ -tasodifiy, $U=\{G,R\}$-muqarrar va

$V$-mumkin bo'lmagan hodisalar $F$ sinfni, ya'ni $F = \{A, B, V, U\}$-hodisalar algebrasini tashkil etadi.

2. Tanga ikki marta tashlanganda $F$ sinf quyidagi elementlardan iborat bo'ladi. $A = \{GG\}$, $B = \{GR\}$, $C = \{RG\}$, $D = \{RR\}$, $E = \{GG, GR\}$, $F = \{GG, RG\}$, $K = \{GG, RR\}$, $Z = \{GR, RG\}$, $M = \{GR, RR\}$, $N = \{RG, RR\}$, $P = \{GG, GR, RG\}$, $Q = \{GG, GR, RR\}$, $T = \{GG, RG, RR\}$, $S = \{RG, RG, RR\}$, $U = \{GG, GR, RG, RR\}$, $V$. Demak, hodisalar algebrasi 16 ta elementlardan iboart ekan, ya'ni

$$F = \{A, B, C, D, E, F, K, Z, M, N, P, Q, T, S, U, V\}.$$

3. Agar tajriba kubik tashlashdan iborat bo'lsa, u holda hodisalar algebrasi 64 ta elementlardan tashkil topgan sinf bo'ladi.

Yuqorida keltirilgan misollardan shuni aytish mumkinki, tajriba chekli sondagi hodisalar ustida bo'lsa, ulardan tuzilgan $F$ sinf hodisalar algebrasini tashkil etar ekan.

Agar $A_n \in F$, $n = 1,2,...$ dan,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in F, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in F$$

ekanligi kelib chiqsa, hodisalar algebrasi $F$ $\sigma$-algebra yoki borel algebrasi deyiladi.

Agar $F$ dan tuzilgan har qanday $\sigma$-algebra $F_n$ uchun $F^*$ to'plam bo'lsa, ya'ni $F^* \subset F_n$ $n = 1,2,...$, $\sigma$-algebra $F^*$ minimal $\sigma$-algebra deyiladi.

Biz asosan hodisa algebrasi bilan ish ko'ramiz.

95-ma'ruza.

## EHTIMOLLIK

Endi hodisaning ehtimolli tushunchasini kiritish mumkin.

Ta'rif. Hodisalar sinfi $F$ da aniqlangan quyidagi $P$ sonli funksiya hodisaning ehtimoli deyiladi, Agar quyidagi shartlar o'rinli bo'lsa:

1. $F$ hodisalar algebrasi bo'lsa;
2. $0 \leq P(A) \leq 1$ har qanday $A$ uchun $A \in F$;
3. $P(U) = 1$;
4. Agar $A$ va $B$ o'zaro birgalikda bo'lmasa, u holda

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

(chekli additivlik aksioma).

Agar masala cheksiz hodisalar ketma-ketligi bilan bog'liq bo'lsa, u holda qo'shimcha uzluksizlik aksiomasi kiritiladi:

5. $F$ dan olingan har qanday kamayuvchi hodisalar ketma-ketligi

$$A_1 \supset A_2 \ldots \supset A_n \supset \ldots, \bigcap_{n-1}^{\infty} A^n = V$$

uchun quyidagi tenglik o'rinlidir

$$\lim_{n \to \infty} P(A_n) = 0$$

Yuqoridagi 2 – 5 shartlarni qanoatlanturuvchi $P$ ehtimol, $F$ hodisalar sinfi (algebra yoki $\sigma$ -algebra) hamda elementlar hodisalardan $U$ lardan tuzilgan uchlik, $(U, F, P)$ ehtimol fazosi deyiladi.

Biz asosan chekli sondagi to'plamlar bilan ish ko'ramiz, shuning uchun 5 shartni ishlatmaymiz.

### Kombinatorikaning asosiy formulalari

Kombinatorika chekli elementlarning biror shartlar asosida tuzilgan birlashmalarini, ya'ni sonli kombinatsiyalarini o'rganadi.

Elementlarning tabiatan qanday bo'lishi ahamiyatga ega emas. Kombinatorikaning asosiy formulalariga tushuncha beramiz.

1-ta'rif. $n$ ta elementlardan tuzilgan o'rin almashtirish deb, shu elementlarning faqat joylashish tartibi bilan farqlanuvchi kombinatsiyalarga aytiladi va quyidagi ko'rinishda yoziladi

$$P_n = n!$$

bu yerda $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ va har doim $0! = 1$ deb hisoblaymiz.

1-misol. Uchta $a$, $b$, $c$ elementlar yordamida nechta o'rin almashtirish tuzish mumkin?

$$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

Haqiqatan, *abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab*, *cba*. Elementlar soni 4 ta bo'lsa,

$$P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

ya'ni 24 ta o'rin almashtirish tuzish mumkin.

2-ta'rif. $n$ ta elementdan $m$ tadan tuzilgan o'rinlashtirish deb, yo elementlarning tarkibi bilan, yoki elementlarning joylashish tartibi bilan farqlanuvchi kombinatsiyalarga aytiladi va quyidagicha yoziladi

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)$$

2-misol. 4 ta elementlardan 2 tadan o'rinlashtirish tuzilsin.

$$A_4^2 = 4 \cdot (4-1) = 4 \cdot 3 = 12$$

Haqiqatan, $a$, $b$, $c$, $d$ elementlar uchun

*ab, ac, ad, bc, bd, cd,*
*ba, ca, da, cb, db, dc*

kombinatsiyalarni tuzish mumkin

4 elementdan 3 tadan o'rinlashtirishlar soni

$$A_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

bo'ladi. Xususan, 4 ta elementdan 4 tadan tuzilgan o'rinlashtirish $A_4^4$ o'rin almashtirishlar soniga teng bo`ladi, ya'ni

$$A_4^4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = P_4$$

bo'ladi.

3-ta'rif. $n$ ta elementdan $m$ tadan tuzilgan gruppalash deb, hech bo'lmaganda bitta elementi bilan farqlanuvchi kombinatsiyaga aytiladi va quyidagicha yoziladi

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

3-misol. 4 ta elementdan 3 tadan gruppalash tuzilsin.

Haqiqatan, $a,b,c,d$ elementlar uchun gruppalash *abc, abd, acd, bcd* lardan iborat bo'ladi. 4 ta elementdan 2 tadan gruppalashni 6 xil usul bilan tuzish mumkin, ya'ni

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} = 6.$$

Gruppalash quyidagi qonuniyatga bo'ysunadi;

$C_n^m = C_n^{m-n}$ bu tenglikni $n$=4, $m$=3 da tekshiramiz:

$$C_4^3 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1} = 4, \qquad C_4^{4-3} = C_4^1 = \frac{4!}{1!(4-1)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 4.$$

O'rin almashtirish, o'rinlashtirish va gruppalash quyidagi tenglik bilan o'zaro bog'langan

$$A_n^m = P_m C_n^m.$$

## Binom formulasi.

Quyidagi formulalar bizga tanish

$$(a+b)^1 = a+b$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

Ixtiyoriy natural $n$ uchun esa

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-2)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \dots + nab^{n-1} + b^n$$

formula o'rinlidir. Bu formulani Nyuton yoki binom formulasi deyiladi. Matematik induksiya usuli bilan binom formulasini o'rinli ekanligini isbotlash mumkin. Kombinatorika formulalari yordamida quyidagilarni yozish mumkin

$$(a+b)^1 = C_0^1 a + C_1^1 b$$
$$(a+b)^2 = C_2^0 a^2 + C_2^1 ab + C_2^2 b^2$$
$$(a+b)^3 = C_3^0 a^3 + C_3^1 a^2 b + C_3^2 ab^2 + C_3^3 b^3$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$
$$(a+b)^n = C_n^0 + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \dots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + C_n^n b^n$$

Agar $a=1$, $b=1$ desak, u holda

$$2^n = C_n^0 + C_4^1 + C_4^2 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n$$

tenglik to'g'ri ekanligiga ishonch hosil qilamiz. Haqiqatan, binom yoyilmasidagi barcha koeffitsientlar yig'indisi $2^n$ ga teng.

## Ehtimolning ta'rifi.

1. Ehtimolning klassik ta'rifi.

Ehtimol fazosi $(U,F,P)$ berilgan bo'lsin. Bu yerda $U=\{E_1,E_2,...,E_n\}$ elementlar hodisalar fazosi, $F$ to'plamning elementlari va elementar hodisalar fazosining qism to'plamlaridan $A=\{E_1,E_2,...,E_m\}(m\le n)$ tuzilgan hodisalar teng imkoniyatli bo'lsa, u holda $P(E_i)=\frac{1}{n}$ $(i=\overline{1,n})$ bo'ladi.

Ta'rif. Ixtiyoriy A hodisaning ehtimoli deb,

$$P(A)=\frac{m}{n} \tag{1}$$

soniga aytiladi. Bu yerda $m$ – $A$ hodisaning ro'y berishi uchun imkoniyat yaratuvchi elementar hodisalar soni, $n$ – umumiy elementar hodisalar soni $(m\le n)$. Bu ta'rif ehtimollikning klassik ta'rifi deyiladi.

Kiritilgan $P(A)$ funksiya yuqorida keltirilgan 1-5 aksiomalarni qanoatlantiradi.

Shunday qilib, $P(A)$ funksiya hodisaning ehtimoli ekan.

Ehtimolning klassik ta'rifi teng imkoniyatli hodisalarni (tanga tashlash, kubik tashlash va hokazo) nazarda tutgan holda, ularning ehtimolligini hisoblash uchun yaxshi natijalar beradi.

1-misol. Tanga bir marta tashlanganda «G» tushishi $A=\{G\}$ hodisa bo'lsa, elementar hodisalar fazosi $U=\{\Gamma,P\}$ bo'ladi. Bu holda A hodisaning ehtimoli

$$P(A)=\frac{1}{2}$$

ga teng bo'ladi.

2-misol. Kubik tashlanganda unga karrali sonlar tushishi $A$ hodisa, ya'ni $A=\{3,6\}$ bo'lsa, u holda $A$ hodisaning ehtimoli

$$P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

ga teng bo'ladi. Bu yerda elementar hodisalar fazosi $U=\{1,2,3,4,5,6\}$ dan iboratdir.

3-misol. Ikki marta tanga tashlanganda bir vaqtda gerb tomoni tushishi $A=\{GG\}$ hodisa bo'lsa, elementlar hodisalar fazosi $U=\{GG,GP,PG,PP\}$ dan iborat bo'lib, $A$-hodisaning ehtimoli

$$P=(A)=\frac{1}{4}$$

ga teng bo'ladi.

4-misol. Idishda $K$-ta shar bor. Ulardan $S$ tasi oq shar va $K$-$S$ tasi qora shar. Ixtiyoriy olingan $k$ ta shardan $s$ tasi oq shar bo'lish ehtimoli topilsin.

Idishdagi sharlar bir xil materialdan va bir xil radiusli va ular yaxshi aralashtirilgan bo'lib, faqat rangi bilangina farqlanadi. Idishdan tavakkaliga ixtiyoriy shar olinadi. Bu ehtimolning klassik ta'rifiga misol bo'la oladi.

Elementar hodisalar sifatida K-ta sharlardan k-tadan olingan sharlar to'plamidan iborat bo'ladi, bu holda $n=C_K^k$ ga teng bo'ladi. $n$ ta sharlar ichida $s$ tasi oq sharlar bo'lishi, $S$ ta oq sharlardan tuzilgan $s$ ta sharlar to'plamini tashkil etadi, xuddi shuningdek $k$-$s$ ta qora sharlar ham, $K$-$S$ ta qora sharlardan olingan to'plamni tashkil etadi.

Demak, $m$ sifatida $m=C_S^s C_{K-S}^{k-s}$ sonni olish mumkin. U holda ehtimolning klassik ta'rifiga asosan yozamiz.

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_S^s C_{K-S}^{k-s}}{C_K^k}$$

Bu ehtimolning gipergeometrik taqsimoti deyiladi.

96-ma'ruza

## NISBIY CHASTOTA. NISBIY CHASTOTANING TURG'UNLIK XUSUSIYATI

Nisbiy chastota hodisaning ehtimoli kabi ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalaridan hisoblanadi.

Ta'rif. $A$ hodisaning nisbiy chastotasi deb, tajriba o'tkazish natijasida $A$ hodisaning ro'y berishlar sonini o'tkazilgan tajribalarning umumiy soniga nisbatiga aytiladi va quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$W(A)=\frac{m}{n}$$

bu yerda $m$ – $A$ hodisaning ro'y berishlar soni, $n$ – esa barcha o'tkazilgan tajribalar soni.

Nisbiy chastota o'tkazilgan tajribalarning natijasiga qarab xulosa chiqariladi, hodisaning ehtimolligi esa tajriba o'tkazmasdan oldin aniqlanadi.

Biror $A$ hodisa ustida ko'p marta tajriba o'tkazib, uning nisbiy chastotasini kuzatsak, tajribalar soni cheksiz oshib borgan sari nisbiy chastota bir xil songa intilayotgani seziladi. Shu sonni $A$ hodisaning ehtimoli sifatida qabul qilish mumkin.

Masalan, $A$ hodisa tanga tashlanganda «$Г$» tomonining tushishi bo'lsa, ko'p marta tajribalar o'tkazish natijasida nisbiy chastota 1/2 soniga intilayotganini sezamiz, ana shu 1/2 ni $A$ hodisaning ehtimoli deb qabul qilish mumkin.

Shunday qilib, nisbiy chastota turg'unlik xususiyatiga ega ekan.

Ta'rifga asosan, nisbiy chastotaning quyidagi xossalarini yozish mumkin;

1-xossa. Muqarrar hodisaning nisbiy chastotasi birga teng, ya'ni $m=n$

$$W(U)=\frac{m}{n}=\frac{n}{n}=1$$

2-xossa. Mumkin bo'lmagan hodisaning nisbiy chastotasi nolga teng, ya'ni $m=0$

$$W(U)=\frac{m}{n}=\frac{0}{n}=0$$

3-xossa. Tasodifiy hodisaning nisbiy chastotasi nol bilan bir orasidagi ixtiyoriy sondir, ya'ni $0\le m\le n$ dan

$$0\le\frac{m}{n}\le 1, \qquad 0\le W(A)\le 1.$$

nisbiy chastotaning xossalari xuddi ehtimolning xossalari kabidir.

## Geometrik ehtimol

Tajriba cheksiz ko'p teng imkoniyatli hodisalar ustida bo'lsa, bu holda ehtimolning klassik ta'rifi yetarli emas. Bu hollarda ehtimolning geometrik ta'rifini qo'llash mumkin bo'ladi.

Bizga $L$ kesma berilgan, $l$ $(l\le L)$ esa uning qismi bo'lsin. Ixtiyoriy tashlangan nuqtaning $l$ kesmaga tushish ehtimoli topilsin. Nuqtaning $l$ kesma ichiga tushishi $A$ hodisa bo'lsa, uning ehtimoli

$$P(A)=\frac{l}{L}$$

formula bilan hisoblanadi.

Agarda $G$ soha biror shaklning yuzi bo'lib, $g$ esa uning qismi bo'lsa, ixtiyoriy tashlangan nuqtaning $g$ sohaga tushish ehtimoli

$$P(A)=\frac{g}{G}$$

formula bilan hisoblanadi.

Umuman $G$ soha (kesma, yuza, hajm) qanday bo'lishidan qat'iy nazar, tashlangan nuqtaning $g$ $(g\subset G)$ sohaga tushishi ehtimoli

$$P(A) = \frac{mes\, g}{mes\, G}$$

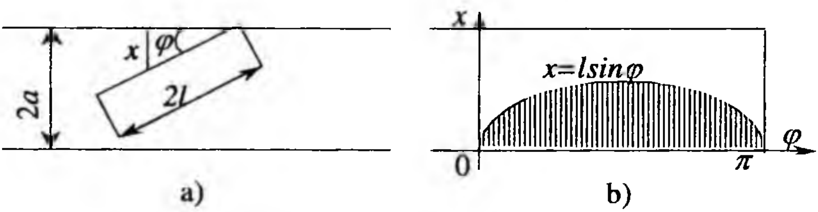
formula bilan hisoblanadi.

Yuqorida keltirilgan formulalarda nuqta $G$ soha bo'yicha bir me'yorda tashlangan deb qaraladi.

Klassik ta'rifida, $U$ elementar hodisalar fazosida tuzilgan barcha qism to'plamlari $A \in F$ uchun ehtimollik kiritilgan edi. Geometrik ta'rifda $G$ sohaning barcha to'plam ostilarini qarash to'g'ri bo'lmaydi, chunki hamma to'plam ostilar ham yuzani yoki hajmni tashkil etavermaydi.

Geometrik ehtimol uchun quyidagi masalani kiritamiz.

*Byuffon masalasi.* Tekislik, oraliq masofalari $2a$ ga teng masofadagi parallel chiziqlar bilan bo'laklarga bo'lingan. Tekislikka uzunligi $2l$ ($l<a$) ga teng bo'lgan nina tashlanadi. Tashlangan nina shu chiziqlardan birortasini kesib o'tish ehtimoli topilsin.




2-rasm.

Yechish. Ninaning o'rtasidan eng yaqin parallel to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani $x$ va shu to'g'ri chiziq bilan tashkil etgan burchagini $\varphi$ deb belgilaymiz. Ninaning har qanday holatini $x$ va $\varphi$ qiymatlar orqali aniqlashimiz mumkin. Ma'lumki, $x$ ning qiymatlari 0 dan $a$ gacha, $\varphi$ ning qabul qiladigan qiymatlari 0 dan $\pi$ gacha (2-rasm, a). Nina o'rta nuqtasi tomonlari $a$ va $\pi$ dan iborat to'g'ri to'rtburchakning ixtiyoriy nuqtasi bo'lishi mumkin (2-rasm, b). Shu to'g'ri to'rtburchakni $G$ soha sifatida qarash mumkin, uning yuzi $G = a\pi$ ga teng.

Endi $g$ sohani aniqlaymiz. 2-rasm, a ga e'tibor bersak, igna parallel to'g'ri chiziqlardan birini kesib o'tishi uchun, uning o'rta nuqtasiga nisbatan masofa quyidagi $x \le l\sin\varphi$ tengsizlikni qanoatlantirishi kerak, yoki ignaning o'rtasi 2-rasm, b da ko'rsatilgan (shtrixlangan) sohaga tushishi kerak. Shunday qilib, shtrixlangan sohani $g$ deb qarash mumkin.

$g$ sohaning yuzini hisoblaymiz:

$$g = \int_0^{\pi} l\sin\varphi\, d\varphi = -l\sin\varphi\Big|_0^{\pi} = 2l.$$

Shunday qilib, biz izlayotgan ehtimollik, ya'ni ignaning to'g'ri chiziqning kesib o'tish ehtimoli

$$P(A) = \frac{g}{G} = \frac{2l}{a\pi}.$$

## Shartli ehtimollik

Ta'rif. Tajriba o'tkazish natijasida $A$ hodisa ro'y berganda $B$ hodisaning ro'y berish ehtimoli shartli ehtimol deyiladi va $P_A(B)$ yoki $P(B/A)$ ko'rinishda yoziladi.

Misol. Bir idishda 5 ta oq va 3 ta qora shar bor. $A$ hodisa birinchi tajribada oq shar chiqishi (shar qaytib idishga solinmaydi), $B$ hodisa esa ikkinchi tajribada oq shar chiqishi bo'lsin. $A$ hodisa ro'y berganda $B$ hodisaning ro'y berishi ehtimoli topilsin.

Yechish. Ehtimolning klassik ta'rifiga asosan $A$ hodisaning ehtimoli $P(A) = \frac{5}{8}$ ga teng, $A$ hodisa ro'y berganda $B$ hodisaning ehtimoli $P_A(B) = \frac{4}{7}$ ga teng.

Xuddi shu natijaga quyidagi formula orqali ham kelish mumkin:

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)} \qquad (P(A) > 0) \tag{1}$$

Haqiqatan, $AB$ hodisalarning ro'y berishi uchun imkoniyat yaratuvchi hodisalar soni $A_5^2 = 5 \cdot 4 = 20$, umumiy hodisalar soni esa $A_8^2 = 8 \cdot 7 = 56$ ga teng, u holda (1) formulaga asosan,

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{20}{56}}{\frac{5}{8}} = \frac{4}{7}$$

Yuqoridagi (1) formulani shartli ehtimol formulasi sifatida qabul qilish mumkin.

## Hodisalar ko'paytmasining ehtimoli

Teorema. Ikkita hodisalar ko'paytmasining ehtimoli, birinchi hodisa ehtimolini birinchi hodisa ro'y berganda ikkinchi hodisaning shartli ehtimoliga ko'paytmasiga teng, ya'ni

$$P(AB) = P(A)P_A(B) \tag{2}$$

Isboti yuqoridagi (1) formuladan kelib chiqadi.

Ma'lumki, $P(AB) = P(BA)$, u holda

$$P(BA) = P(B)P_B(A).$$

Demak, (2) tenglikka asosan,

$$P(A)P_A(B) = P(B)P_B(A) \tag{3}$$

ekanligi kelib chiqadi.

Natija. Bir necha hodisalar ko'paytmasining ehtimolligi har bir avvalgi hodisalar ro'y berganda keyingi hodisaning shartli ehtimolligining ko'paytmasiga tengdir, ya'ni

$$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)P_{A_1}(A_2)\ldots P_{A_1\ldots A_{n-1}}(A_n). \qquad (4)$$

(4) formula matematik induksiya usuli bilan isbotlanadi.

Agar $B$ hodisa $A$ hodisaga bog'liq bo'lmasa, $P_A(B)=P(B)$ tenglik o'rinli bo'ladi. U holda (3) tenglikka asosan $P(A)P(B)=P(B)P_B(A)$ ekanligi kelib chiqadi, bundan $P_B(A)=P(A)$ tenglikni hosil qilamiz. Demak, $B$ hodisaning $A$ hodisaga bog'liq bo'lmasligi, $A$ hodisaning $B$ hodisaga bog'liq bo'lmasligini keltirib chiqaradi. Shunday qilib, (2) formuladan

$$P(AB)=P(A)P(B) \qquad (5)$$

ekanligi kelib chiqadi. (5) formula o'zaro bog'liq bo'lmagan hodisalar ko'paytmasining ehtimolligini ifodalaydi.

Bir necha hodisalar o'zaro bog'liq bo'lmasligi uchun, har bir hodisa qolgan hodisalarning har qanday gruppasi bilan o'zaro bog'liq bo'lmasligi kerak, ya'ni hodisalarning o'zaro juft-jufti bilan bog'liq bo'lmasligi hodisalarning o'zaro bog'liq bo'lmasligini ifodalamaydi.

Masalan, uchta $A$, $B$, $C$ hodisalarning o'zaro bog'liq bo'lmasligi uchun $A$ va $B$, $A$ va $C$, $B$ va $C$ hodisalarning bog'liq bo'lmasligi yetarli emas, yana $A$ va $BC$, $B$ va $AC$, $C$ va $AB$ hodisalar ham o'zaro bog'liq bo'lmasligi shart, ana shunday hodisalar uchun

$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$$

tenglikni yozish mumkin.

Ixtiyoriy $n$ ta o'zaro bog'liq bo'lmagan hodisalar uchun

$$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n)$$

tenglik o'rinlidir.

Misol. Ikkita tanga bir vaqtda tashlanganda ikkalasida ham gerb tushishi ehtimoli topilsin.

Yechish.

$A$ – birinchi tangada gerb tushishi hodisasi;

$B$ – ikkinchi tangada gerb tushishi hodisasi;

$AB$ – ikkala tangada bir vaqtda gerb tushishi hodisasi bo'lsin. U holda $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{1}{2}$, $P(AB)=\frac{1}{4}$. Demak,

$$P(AB)=\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=P(A)P(B).$$

$A$ va $B$ hodisalar o'zaro bog'liq bo'lmagan hodisalar ekan.

## BIRGALIKDA BO'LMAGAN HODISALAR YIG'INDISINING EHTIMOLI

Teorema. Birgalikda bo'lmagan ikkita $A$ va $B$ hodisalar yig'indisining ehtimoli, shu hodisalar ehtimollarining yig'indisiga teng, ya'ni

$$P(A+B)=P(A)+P(B) \quad (6)$$

Isbot. $A$ hodisaning ro'y berish ehtimoli $P(A)=\frac{m_1}{n}$ va $B$ hodisaning ro'y berish ehtimoli $P(B)=\frac{m_2}{n}$ bo'lsa, u holda $A+B$ hodisaning ro'y berish ehtimoli $P(A+B)=\frac{m_1+m_2}{n}$ ga teng, bundan

$$P(A+B)=\frac{m_1+m_2}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}=P(A)+P(B)$$

ekanligi kelib chiqadi.

Natija. O'zaro juft-jufti bilan birgalikda bo'lmagan bir nechta hodisalar yig'indisining ehtimoli shu hodisalar ehtimollarining yig'indisiga teng

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n).$$

Misol. Idishda 25 ta shar bo'lib, 10 tasi qizil, 5 tasi ko'k va 10 tasi oq bo'lsin. Idishdan olingan sharning rangli shar chiqish ehtimoli topilsin.

Yechish. Shar rangli bo'lishi uchun qizil yoki ko'k shar chiqishi kerak. $A$-qizil shar chiqish hodisasi, $B$-ko'k shar chiqish hodisasi bo'lsin. Bu hodisalarning ehtimolliklari $P(A)=\frac{10}{25}=\frac{2}{5}$, $P(B)=\frac{5}{25}=\frac{1}{5}$ ga teng. $A$ va $B$ birgalikda bo'lmagan hodisalar bo'lgani uchun

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$$

ko'rinishda yozish mumkin. Demak, rangli shar chiqish ehtimoli $\frac{3}{5}$ ga teng.

## Birgalikda bo'lgan hodisalar yig'indisining ehtimoli

Teorema. Ikkita hodisalardan hech bo'lmaganda bittasining ro'y berish ehtimoli shu hodisalar ehtimollari yig'indisidan ularning birgalikda ro'y berish ehtimolining ayirilganiga, ya'ni

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB) \tag{7}$$

ga tengdir.

Isboti. Hodisalar yig'indisi $A+B$ ni birgalikda bo'lmagan hodisalar yig'indisi

$$A+B=\bar{A}B+A\bar{B}+AB \tag{8}$$

ko'rinishda ifodalash mumkin, bu yerda $A\bar{B}=A-AB$, $\bar{A}B=B-AB$ ga teng. U holda

$$P(A+B)=P(A\bar{B})+P(\bar{A}B)+P(AB) \tag{10}$$

tenglik o'rinlidir. (9) ni (10) ga qo'ysak (7) tenglik kelib chiqadi.

Misol. Ikki mergan bir nishonga qarata o'q uzmoqda. Birinchi merganning nishonga tekkizish ehtimoli 0,7, ikkinchi mergan uchun esa 0,8 bo'lsa, hech bo'lmaganda bitta merganning nishonga tekkizish ehtimoli topilsin.

Yechish. $A$ – hodisa birinchi merganning nishonga tegish hodisasi, $B$–esa ikkinchi merganning nishonga tegish hodisasi, $A$ va $B$ hodisalar birgalikda bo'lmagan hodisalar bo'lgani uchun $P(A)=0{,}7$, $P(B)=0{,}8$,
$P(AB)=P(A)\cdot P(B)=0{,}7\cdot 0{,}8=0{,}56$ bo'ladi. Demak,

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0,7+0,8-0,56=0,94.$$

$B$ hodisa ro'y bergandagina $A$ hodisaning ro'y berish ehtimoliga shartli ehtimollik deyilib, u quyidagicha belgilanadi

$$P(A/B)=P_B(A).$$

## Shartli ehtimolning tatbiqi

**Misol**. Har biri 2 qatlamdan iborat 10 ta granit, sienit, diorit, ohaktosh va qumloq qatlam bor. Vulqon otilishidan hosil bo'lgan jinslarning qatlamlari qizil belgiga ega. Tavakkaliga 2 ta qatlam olinganidan keyin har bir qatlam qizil belgiga egaligi aniqlandi. Bu qatlamlarning biri granitdan, ikkinchisi sienitdan iborat ekanlik ehtimoli topilsin.

**Yechish**. $A$ – hodisa orqali qatlamlardan biri granit, boshqasi sienitdan iborat hodisani belgilaylik. Qizil belgiga ega qatlam, ya'ni vulqon otilishidan hosil bo'lgan qatlam chiqish hodisasini $B$ orqali belgilaymiz. Qatlamlarning olinish variantlari jadvalda keltirilgan:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Granit<br>Granit | Sienit<br>Granit | Diorit<br>Granit | Ohaktosh<br>Granit | Qumloq<br>Granit |
| Granit<br>Sienit | Sienit<br>Sienit | Diorit<br>Sienit | Ohaktosh<br>Sienit | Qumloq<br>Sienit |
| Granit<br>Diorit | Sienit<br>Diorit | Diorit<br>Diorit | Ohaktosh<br>Diorit | Qumloq<br>Diorit |
| Granit<br>Ohaktosh | Sienit<br>Ohaktosh | Diorit<br>Ohaktosh | Ohaktosh<br>Ohaktosh | Qumloq<br>Ohaktosh |
| Granit<br>Qumloq | Sierit<br>Qumloq | Diorit<br>Qumloq | Ohaktosh<br>Qumloq | Qumloq<br>Qumloq |

Jadvaldan ko'rinib turibdiki, $A$ hodisaga qulaylik yaratuvchi hodisalar soni 2 ga, $B$ hodisaga qulaylik yaratuvchilar soni 9 ga teng. U holda $A$ hodisaning ehtimoli

$$P(A)=\frac{2}{25}.$$

$B$ hodisa ro'y bergani uchun 9 ta hodisaning faqat bittasi ro'y beradi. Shuning uchun shartli ehtimollik quyidagiga teng

$$P_B(A)=\frac{2}{9}.$$

## Hodisalar to'liq gruppasining ehtimoli

O'zaro juft-jufti bilan birgalikda bo'lmagan va hodisalarning to'liq gruppasini tashkil etuvchi $A_1, A_2, \cdots A_n$ hodisalar berilgan bo'lsin, ya'ni

$$U=A_1+A_2+\ldots+A_n \qquad (11)$$

$$A_iA_j=V, i\neq j\ i,j=1,2,\ldots n.$$

1-teorema. O'zaro juft-jufti bilan birgalikda bo'lmagan hodisalar gruppasi ehtimollarining yig'indisi birga teng, ya'ni

$$P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=1 \qquad (12)$$

Isbot. Yuqoridagi (11) tenglikdan yozamiz

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(U)=1$$

va quyidagi

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)$$

tenglik o'rinli bo'lgani uchun teorema isbot bo'ladi.

Misol. 1) kubik tashlanganda quyidagi hodisalar ro'y bersin. Bular o'zaro juft-jufti bilan birgalikda bo'lmagan hodisalarning to'liq gruppasini tashkil etadi. Ularning ehtimolliklari mos ravishda

$$P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3},\quad P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3},\quad P(C)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

Bu yerdan

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$$

ekanligi kelib chiqadi.

2-teorema. Qarama-qarshi hodisalar ehtimollarining yig'indisi birga teng

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

isboti teorema 1 dan kelib chiqadi.

Misol. Kubik tashlanganda $A=\{1,2\}$ hodisaning ro'y bermaslik ehtimoli topilsin.

Yechish.

$$A=\{1,2\},\quad \overline{A}=\{3,4,5,6\}$$

$$P(A)+P(\overline{A})=1,\quad P(\overline{A})=1-P(A)$$

$$P(\overline{A})=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

ga teng.

## To'la ehtimol formulasi

Faraz qilaylik, $A$ hodisa hodisalarning to'liq gruppasini tashkil etuvchi $B_1, B_2, \ldots, B_n$ hodisalarning birortasi bilan birgalikda ro'y bersin. Bu hodisalarning ehtimollari $P(B_1)$, $P(B_2), \ldots P(B_n)$ va quyidagi shartli ehtimollar $P_{B_1}(A)$, $P_{B_2}(A), \ldots P_{B_n}(A)$ ma'lum bo'lsin. $A$ hodisaning ehtimoli nimaga teng?

Teorema. To'liq gruppani tashkil etuvchi $B_1, B_2, \ldots, B_n$ hodisalarning birortasi bilan ro'y beruvchi $A$ hodisaning ehtimoli, har bir hodisa ehtimollarini ularning mos shartli ehtimollari ko'paytmasining yig'indisiga teng.

$$P(A)=P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)+\ldots+P(B_n)P_{B_n}(A) \qquad (13)$$

Isboti. Bizga ma'lumki

$$U = B_1 + B_2 + \ldots + B_n,$$

$$B_i B_j = V, \quad i, j = \overline{1,n}, \quad i \neq j$$

U holda

$$A = AU = A(B_1 + B_2 + \ldots + B_n) = AB_1 + AB_2 + \ldots + AB_n$$

tenglik o'rinli ekanligi ravshan. Bundan

$$P(A) = P(AB_1) + P(AB_2) + \ldots + P(AB_n)$$

tenglik kelib chiqadi. Shartli ehtimol formulasini hisobga olsak, (13) formulaning to'g'ri ekanligiga ishonch hosil qilamiz. Teorema isbot bo'ldi.

Misol. Birinchi idishda 8 ta oq va 7 ta qora shar bor, ikkinchi idishda esa 10 ta oq va 5 ta qora shar bor. Ikkinchi idishdan birinchi idishga bitta shar olib solinadi. Birinchi idishdan olingan shar oq bo'lish ehtimoli topilsin.

Yechish.

$B_1$ – 2-idishdan 1-idishga oq shar olinish hodisasi;

$B_2$ – 2-idishdan 1-idishga qora shar olinish hodisasi bo'lsa, ularning ehtimollari mos ravishda

$$P(B_1) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}, \quad P(B_2) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

$A$ hodisa 1-idishdan oq shar chiqishi bo'lsin;

$P_{B_1}(A)$ – 2-idishdan 1-idishga oq shar solinganda, 1-idishdan oq shar chiqish ehtimoli;

$P_{B_2}(A)$ – 2-idishdan 1-idishga qora shar solinganda, 1-idishdan oq shar chiqish ehtimoli bo'lsa, bu ehtimollar mos ravishda $P_{B_1}(A) = \frac{9}{16}$, $P_{B_2}(A) = \frac{8}{16}$ ga teng bo'ladi. U holda to'la ehtimol formulasiga asosan yozamiz

$$P(A)=P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)=\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{16}+\frac{1}{3}\cdot\frac{8}{16}=\frac{26}{48}=\frac{13}{24}$$

Xuddi shuningdek, ikkinchi idishdan birinchi idishga bitta oq shar solinganda, birinchi idishdan qora shar chiqish ehtimolini hisoblash mumkin.

Agarda $\overline{A}$-1-idishdan qora shar chiqish hodisasi bo'lsa, u holda shartli ehtimollar quyidagiga teng bo'ladi.

$$P_{B_1}\left(\overline{A}\right)=\frac{7}{16},\quad P_{B_2}\left(\overline{A}\right)=\frac{8}{16}$$

yana to'la ehtimol formulasiga asosan

$$P\left(\overline{A}\right)=P(B_1)P_{B_1}\left(\overline{A}\right)+P(B_2)P_{B_2}\left(\overline{A}\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{16}+\frac{1}{3}\cdot\frac{8}{16}=\frac{22}{48}=\frac{11}{24}$$

$A$ va $\overline{A}$ qarama-qarshi hodisalar bo'lgani uchun ular ehtimollari yig'indisi birga teng. Haqiqatan

$$P(A)+P\left(\overline{A}\right)=\frac{13}{24}+\frac{11}{24}=\frac{24}{24}=1.$$

## To'la ehtimol formulasinig tatbiqi

**Misol.** 6 ta yashikda rudali kern bor. 1-quduqdan olingan ruda 5 ta bo'limli 2 yashikdan, 2-quduqdan esa olingan ruda 6 bo'limli 1 ta yashikdan, 3-quduqdan olingan ruda 4 bo'limli 3 ta yashikdan iborat. Kern yashiklarga butunligicha va maydalangan holda joylangan. 1-quduqdan olingan ruda har bir yashikning 2 ta bo'limida maydalangan holda, qolganlarida butunligicha, 2-quduqdan olingan rudaning hammasi maydalangan holda, 3-quduqdan olingan ruda yashikning yarmida maydalangan, ikkinchi yarmida butunligicha. Qorishma-element kimyoviy analizi uchun biror bir yashikning ixtiyoriy bo'limidan tavakkaliga olingan rudaning butun holda bo'lish ehtimolini aniqlash taıab qilinsin.

**Yechish**. Olingan ruda 1-quduqdan hodisasini $B_1$ orqali, 2-

quduqdan $B_2$ orqali va 3-quduqdan $B_3$ orqali belgilaylik. $A$ hodisa orqali esa olingan rudani butun holda bo'lish hodisasini belgilaylik. Yuqorida ko'rilgan hodisalarni quyidagicha ifodalash mumkin

$$A = B_1A + B_2A + B_3A;$$

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + P(B_3)P_{B_3}(A).$$

Masalaning shartiga ko'ra

$$P(B_1) = \frac{2}{6}; \quad P(B_2) = \frac{1}{6}; \quad P(B_3) = \frac{3}{6};$$

$$P_{B_1}(A) = \frac{3}{5}; \quad P_{B_2}(A) = 0; \quad P_{B_3}(A) = \frac{3}{4}.$$

Bu qiymatlarni to'la ehtimol formulasiga qo'ysak, so'ralgan ehtimol hosil bo'ladi.

$$P(A) = \frac{2}{6}\cdot\frac{3}{5} + \frac{1}{6}\cdot 0 + \frac{3}{6}\cdot\frac{3}{4} = \frac{23}{40}.$$

## Beyes formulasi

Faraz qilaylik, $A$ hodisa hodisalarning to'liq gruppasini tashkil etuvchi $B_1, B_2, \ldots, B_n$ hodisalarning birortasi bilan birgalikda ro'y bersin. Tajriba o'tkazish natijasida $B_1, B_2, \ldots, B_n$ hodisalarning qaysi biri ro'y berishi avvaldan ma'lum emas, shuning uchun biz ularni gipotezalar deb ataymiz.

Tajriba o'tkazish natijasida $A$ hodisa ro'y berdi, u holda to'la ehtimol formulasiga asosan $A$ hodisaning ehtimoli

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n)P_{B_n}(A)$$

ga teng. Bu yerda

$$U = B_1 + B_2 + \ldots + B_n, \quad B_iB_j = V, \quad i, j = \overline{1,n} \quad i \neq j.$$

$A$ hodisa ro'y berdi, endi $B_1, B_2, \ldots, B_n$ gipotezalarning ehtimollari, ya'ni quyidagi shartli ehtimollar $P_A(B_1)$, $P_A(B_2)$, ..., $P_A(B_n)$ qanday bo'ladi?

Avval quyidagi ehtimolni hisoblaymiz:

$$P(AB_1) = P(A)P_A(B_1) = P(B_1)P_{B_1}(A)$$

tenglik o'rinli ekanligi ravshandir. Bu yerdan

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(A)}$$

yoki to'la ehtimol formulasiga asosan

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n)P_{B_n}(A)}$$

Xuddi shunday usul bilan

$$P_A(B_2) = \frac{P(B_2)P_{B_2}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n)P_{B_n}(A)}$$

... ... ... ... ... ... ...

$$P_A(B_n) = \frac{P(B_n)P_{B_n}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n)P_{B_n}(A)}$$

formulalarni yozish qiyin emas.

Yuqoridagi formulalarni quyidagicha yozish mumkin.

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j)P_{B_j}(A)} \qquad i = \overline{1,n} \tag{14}$$

Bu formula Beyes formulasi deyiladi.

Misol. Birinchi idishda 8 ta oq va 7 ta qora shar, ikkinchi idishda esa 10 ta oq va 5 ta qora shar bor. Ikkinchi idishdan birinchi idishga bitta shar olib solinadi va agar birinchi idishdan oq shar chiqqan bo'lsa, ikkinchi idishdan birinchi idishga solingan sharning oq yoki qora bo'lish ehtimoli nimaga teng?

Yechish.

$B_1$ – 2-idishdan 1-idishga oq shar solish,
$B_2$ – 2-idishdan 1-idishga qora shar solish hodisalari bo'lsin
$A$ – 1-idishdan oq shar chiqish hodisasi bo'lsin.

U holda yuqorida keltirilgan misolga asosan, ularning ehtimollari

$$P(B_1)=\frac{2}{3},\ P(B_2)=\frac{1}{3},\ P(A)=\frac{13}{24}$$

ga teng. Endi yuqorida keltirilgan (14) formulaga asosan yozamiz:

$$P_A(B_1)=\frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{16}}{\frac{13}{24}}=\frac{9}{13}$$

$$P_A(B_2)=\frac{P(B_2)P_{B_2}(A)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{8}{16}}{\frac{13}{24}}=\frac{4}{13}$$

Demak, ehtimollar $P_A(B_1)=\frac{9}{13}$, $P_A(B_2)=\frac{4}{13}$ ga teng bo'lib, ularning yig'indisi birga teng.

# TAJRIBALAR KETMA-KETLIGI. BERNULLI FORMULASI. LAPLAS TEOREMASI

Har bir tajribada $A$ hodisaning ro'y berish yoki bermasligi masalasini ko'rib chiqaylik. Har bir tajribada $A$ hodisaning ro'y berishi yoki bermasligi keyingi o'tkaziladigan tajribalarning natijasiga ta'siri bo'lmasa, u holda $A$ hodisaga nisbatan o'tkaziladigan tajribalarni o'zaro bog'liq bo'lmagan tajribalar deyiladi.

Har bir o'zaro bog'liq bo'lmagan tajribalarda $A$ hodisaning ro'y berish ehtimoli o'zgarishi ham, o'zgarmasligi ham mumkin. Bu tajriba ehtimolligi o'zgarmas bo'lgandagi holni ko'ramiz.

Avval masalaning sodda ko'rinishini qarab chiqamiz, ya'ni o'zaro bog'liq bo'lmagan tajribalar ketma-ketligida $A$ hodisaning ro'y berish ehtimolligi o'zgarmas bo'lsin, tabiiyki $A$ hodisaning ro'y bermasligi ham o'zgarmas bo'ladi.

Har bir tajribada $A$ hodisaning ro'y berish ehtimolini $p$ deb olamiz va bunday hodisa oddiy hodisa deyiladi.

Bitta tajribada $A$ hodisaning ro'y berishi yoki ro'y bermasligi o'zaro qarama-qarshi hodisalar bo'lgani uchun quyidagilarni yozamiz:

$$U = A + \bar{A}, \quad A \cdot \bar{A} = V$$

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1, \quad P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - p = q.$$

Bir nechta tajribalarda $A$ hodisaning ro'y berishlar sonini murakkab hodisalar deb qarasak, u holda murakkab hodisalar oddiy hodisalar ketma-ketligidan tashkil topgan deb qarash mumkin.

Quyidagi masalani ko'rib chiqaylik. $n$ ta tajribalar o'tkazish natijasida $A$ hodisaning $k$ marta ro'y berish ehtimoli topilsin. Bu ehtimollikni $P_n(k)$ deb belgilaymiz.

Tajribalar ketma-ketligini qaraymiz:

$$\left.\begin{array}{lll} n=1, & A & \overline{A} \\ k=0,1 & P_1(1)=p & P_1(0)=1-p=q \end{array}\right\} \text{1-tajriba}$$

$$\left.\begin{array}{lllll} n=2, & AA & A\overline{A} & \overline{A}A & \overline{A}\overline{A} \\ k=0,1,2 & P_2(2)=p^2 & P_2(1)=pq & P_2(1)=qp & P_2(0)=q^2 \end{array}\right\} \text{2-tajriba}$$

$$\left.\begin{array}{ll} n=3, & k=0,1,2,3 \\ AAA & P_3(3)=p^3 \\ AA\overline{A} & P_3(2)=p^2q \\ A\overline{A}A & P_3(2)=p^2q \\ \overline{A}AA & P_3(2)=p^2q \\ \overline{A}\overline{A}A & P_3(1)=pq^2 \\ \overline{A}A\overline{A} & P_3(1)=pq^2 \\ \overline{A}\overline{A}A & P_3(1)=pq^2 \\ \overline{A}\overline{A}\overline{A} & P_3(0)=q^3 \end{array}\right| \text{3-tajriba}$$

. . . . . . . . . . . . . .

Shunday qilib, tajribalar ketma-ketligini davom ettirish mumkin va ehtimollarini quyidagi ixcham ko'rinishda ifodalash mumkin:

$$\begin{array}{lll} n=1 & P_1(k)=C_1^k p^k q^{1-k} \quad , & k=0,1 \\ n=2 & P_2(k)=C_2^k p^k q^{2-k} \quad , & k=0,1,2 \\ n=3 & P_3(k)=C_3^k p^k q^{3-k} \quad , & k=0,1,2,3 \\ \ldots & \ldots \quad \ldots \quad \ldots & \ldots \quad \ldots \\ n=n & P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k} \quad , & k=0,1,\ldots,n \end{array} \qquad (1)$$

Oxirgi formula $A$ hodisaning $n$ ta tajribada $k$ marta ro'y berish ehtimolini hisoblaydi va Bernulli formulasi deyiladi.

1-misol. Tanga 5 marta tashlanganda 3 marta «$\Gamma$» tomonini tushish ehtimoli topilsin. Har bir tajribada «$\Gamma$» tomonining tushish ehtimoli $p=\frac{1}{2}$ ga teng.

Yechish. Yuqoridagi (1) formulaga asosan, 5 ta tajribada 3 marta «$\Gamma$» tushish ehtimoli

$$P_5(3)=C_5^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3}\cdot\frac{1}{2^3}\cdot\frac{1}{2^2}=\frac{10}{32}=\frac{5}{16}$$

ga teng bo'ladi.

2-misol. $A$ hodisaning 100 marta o'tkazilgan tajribada 53 marta ro'y berish ehtimoli topilsin. Har bir tajribada $A$ hodisaning ro'y berish ehtimoli $p$=0,48 ga teng.

Yuqoridagi (1) formulaga asosan yozamiz

$$P_{100}(53)=C_{100}^{53}(0{,}48)^{53}\cdot(0{,}52)^{47}.$$

3-misol. 100 marta tajribada $A$ hodisaning 46 martadan 55 martagacha ro'y berish ehtimoli topilsin. Har bir tajribada $A$ hodisaning ro'y berish ehtimoli $p$=0,48 ga teng.

Yana yuqoridagi (1) formulaga asosan yozish mumkin, $k_1$=46, $k_2$=55 bo'lsa,

$$P_{100}(46{,}55)=\sum_{k=46}^{55}C_{100}^{k}(0{,}48)^k\cdot(0{,}52)^{100-k}$$

ehtimol shu tenglik bilan hisoblanadi.

## Bernulli sxemasining tatbiqi

**Misol.** $S$ qurilma texnik qurilma $n$ bo'limdan iborat. Bu bo'limlar ekspluatatsiyaning har bir $\tau$ vaqt davomida quyidagi holatlardan birida bo'lishi mumkin

$S_1$={to'liq sozlangan};
$S_2$={sozlanishni talab qiladi};
$S_3$={ta'mirlashni talab qiladi};
$S_4$={yaroqsiz}.

$$P(S_1)=p_1,\quad P(S_2)=p_2,\quad P(S_3)=p_3,\quad P(S_4)=p_4;$$

$$p_1+p_2+p_3+p_4=1.$$

Bu bo'limlarning holatlari bir-biriga bog'liqmas. Quyidagi hodisalarning ehtimollari topilsin:

$A$={hamma bo'limlar to'liq sozlangan};

$B$={hamma bo'limlar sozlanishni talab qiladi};

$C$={bitta bo'lim ta'mirlashni talab qiladi, qolganlari sozlanishni talab qiladi};

$D$={kamida bitta bo'lim yaroqsiz};

$E$={ikkita bo'lim sozlanishni, bittasi ta'mirlashni talab qiladi, qolganlari sozlangan}.

Yechish. $P(A)=p_1^n$, $(B)=p_2^n$. Ta'mirlashni talab qiladigan bitta bo'limni $C_n^1=n$ usul bilan tanlash mumkin:

$$P(C)=np_3p_1^{n-1}, \quad P(D)=1-(1-p_4)^n.$$

Sozlashni talab qiladigan ikkita bo'limni $n$ bo'limdan $C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$ usul bilan, ta'mirlashni talab qiladigan bitta bo'limni $C_{n-2}^1=n-2$ usul bilan tanlash mumkin:

$$P(E)=\frac{n(n-1)}{2}(n-2)p_2^2p_1^{n-3}.$$

Yuqoridagi 2- va 3-misollar shuni ko'rsatadiki, tajribalar soni oshganda Bernulli formulasi bo'yicha ehtimolni hisoblash anchagina murakkablashar ekan va hisoblash davomida ko'pgina haqiqiy ehtimoldan anchagina chetlanish yuz berishi mumkin. Tabiiy savol tug'iladi, shunday hollarda qanday yo'l tutish mumkin. Bu savolga Laplasning lokal va integral teoremalari javob beradi.

Avval Laplasning lokal teoremasini ko'rib chiqamiz.

## Laplasning lokal teoremasi

Teorema. Agar har bir tajribada $A$ hodisaning ro'y berish ehtimolligi o'zgarmas va nol bilan birdan farqli bo'lgan $p$ ga teng bo'lsa, u holda $n$ ta tajribada $A$ hodisaning $k$ marta ro'y berish ehtimoli $P_n(k)$, taqriban quyidagi funksiyaning qiymatiga teng

$$y=\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x),$$

bu yerda

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\quad x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}$$

ga teng.

Teoremaning isboti ustida to'xtalmaymiz.

Shunday qilib, teoremaning shartiga asosan

$$P_n(k)=\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x).$$

Bu yerda $\varphi(-x)=\varphi(x)$- juft funksiyadir, $x$-o'zgaruvchining barcha qiymatlari uchun $\varphi(x)$ funksiya jadval ko'rinishda berilgan.

Endi yuqoridagi 2–misolni yechish mumkin. $n$=100, $k$=53, $p$=0,48, $q$=0,52.

$$x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}=\frac{53-100\cdot 0{,}48}{\sqrt{100\cdot 0{,}48\cdot 0{,}52}}=\frac{5}{10\sqrt{0{,}48\cdot 0{,}52}}\approx\frac{1}{2\cdot 0{,}5}=1$$

$$P_{100}(53)=\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)=\frac{1}{0{,}5}\varphi(1)=\frac{1}{0{,}5}0{,}242=0{,}484.$$

$\varphi(1)=0{,}242$-jadvaldan topildi.

## Laplas lokal teoremasining tatbiqi

**Misol.** Detalning stanokda sifatli ishlov berish ehtimoli 0,4 ga teng. Tavakkaliga olingan 26 ta detalning yarmi sifatli bo'lish ehtimoli topilsin.

**Yechish.** Shartga ko'ra $n$=26; $k$=13; $p$=0,4; $q$=0,6.

Laplasning asimptotik formulasidan foydalanamiz

$$P_{26}(13) \approx \frac{1}{\sqrt{26\cdot 0,4\cdot 0,6}}\varphi(x) = 0,4\,\varphi(x).$$

$x = \frac{k = np}{\sqrt{npq}} = \frac{13 - 26\cdot 0,4}{2,497} \approx 1,04$. $\varphi(x)$ funksiyaning qiymatlar jadvalidan $\varphi(1,04)=0,2323$ ekanligini aniqlash qiyin emas. U holda

$$P_{26}(13) \approx 0,4\cdot 0,2323 = 0,09292.$$

## Laplasning integral teoremasi

Teorema. Agar har bir tajribada $A$ hodisaning ro'y berish ehtimoli o'zgarmas va nol bilan birdan farqli bo'lgan $r$ ga teng bo'lsa, u holda $n$ ta tajribada $A$ hodisaning $k_1$ martadan $k_2$ martagacha ro'y berish ehtimoli $P_n(k_1,k_2)$ taqriban quyidagi aniq integralning qiymatiga teng

$$P_n(k_1,k_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}}dx,$$

bu yerda $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Quyidagi funksiyani kiritamiz.

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dt.$$

Bu funksiya $\Phi(-x) = -\Phi(x)$-toq funksiyadir, qiymatlari jadval ko'rinishda berilgan. U holda $P_n(k_1,k_2)$ ehtimolni

$$P_n(k_1,k_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}}dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}}dt -$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{x_1} e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\Phi(x_2)-\Phi(x_1)$$

ko'rinishda $\Phi(x)$ funksiya orqali ifodalash mumkin.

Yuqorida keltirilgan 3-misolni yechamiz.

$n=100$, $k_1=46$, $k_2=55$, $p=0{,}48$, $q=0{,}52$

$$x_1=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}=\frac{46-100\cdot 0{,}48}{\sqrt{100\cdot 0{,}48\cdot 0{,}52}}\approx\frac{-2}{10\cdot 0{,}5}=-0{,}4$$

$$x_2=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}=\frac{55-100\cdot 0{,}48}{\sqrt{100\cdot 0{,}48\cdot 0{,}52}}\approx\frac{7}{10\cdot 0{,}5}=1{,}4$$

$$P_{100}(46{,}55)=\Phi(1{,}4)-\Phi(-0{,}4)=\Phi(1{,}4)+\Phi(0{,}4)=$$
$$=0{,}4192+0{,}1554=0{,}5746\,.$$

Bu yerda $\Phi(1{,}4)=0{,}4192$, $\Phi(0{,}4)=0{,}1554$ qiymatlar jadvaldan topiladi.

Yuqorida ko'rilgan masalalarda, ya'ni Laplasning lokal va integral teoremalrida *A* hodisaning har bir tajribada ro'y berish ehtimoli noldan va birdan farqli bo'lishi talab qilinadi.

Agar *A* hodisaning har bir tajribada ro'y berish ehtimoli *p* kichik son bo'lsa, ya'ni nolga yoki birga yaqin son bo'lsa, u holda Puasson formulasidan foydalanish maqsadga muvofiq bo'ladi.

## Puasson formulasi

Quyidagi masalani qaraylik. Tajribalar soni yetarlicha katta bo'lganda, *A* hodisaning har bir tajribada ro'y berish ehtimoli kichik bo'lganda, *A* hodisaning *k* marta ro'y berish ehtimoli topilsin. Tajribalar sonini hodisaning ehtimolligiga ko'paytmasini o'zgarmas son deb qaraymiz, ya'ni quyidagi parametrni kiritamiz

$$pn=\lambda.$$

Bernulli formulasidan foydalanamiz

$$P_n(k)=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))}{k!}p^k(1-p)^{n-k}.$$

Bu yerda $pn=\lambda$ bo'lgani uchun, $p=\frac{\lambda}{n}$, u holda

$$P_n(k)=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}=$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))}{n^k}\frac{\lambda^k}{k!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}=$$

$$=1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{\lambda^k}{k!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}.$$

Endi $n\to\infty$ dagi minimumini hisoblaymiz

$$P_n(k)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{\lambda^k}{k!}\cdot$$

$$\cdot\left[\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda}}\right]^{-\lambda}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda};$$

Shunday qilib, quyidagi Puasson formulasiga ega bo'lamiz

$$P(k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

Misol. Korxona omborga 5000 ta sifatli detal jo'natdi. Detalning yo'lda yaroqsiz bo'lish ehtimoli 0,0002 ga teng. Omborga 3 ta yaroqsiz detal kelish ehtimoli topilsin.

Yechish. Masala sharti bo'yicha

$$n=5000,\ p=0{,}0002,\ k=3,\ \lambda=np=5000\cdot 0{,}0002=1.$$

Puasson formulasiga asosan

$$P_{5000}(3)=\frac{e^{-1}}{3!}=\frac{1}{3e}=0{,}06.$$

101-ma'ruza

## TASODIFIY MIQDORLAR

Tasodifiy miqdor tushunchasi ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalaridan biridir. Har qanday to'plamni xoh u chekli, xoh u cheksiz bo'lsin, haqiqiy sonlar to'plamiga akslantirish mumkin.

1-ta'rif. Tasodifiy miqdor deb, har bir tajribada barcha qabul qila olishi mumkin bo'lgan qiymatlar to'plamidan bitta va faqat bitta qiymatni qabul qiluvchi funksiyaga aytiladi. Tasodifiy miqdorning barcha qabul qiladigan qiymatlar to'plamidan qaysi birini qabul qilishini aytish mumkin emas, chunki u ko'pgina avvaldan aytish mumkin bo'lmagan tasodiflar bilan bog'liqdir.

Tasodifiy miqdorni $X$, $Y$,... harflar bilan, qabul qiladigan qiymatlarini esa $x$, $y$,... harflar bilan belgilaymiz.

Tasodifiy miqdorlar uch xil ko'rinishda, diskret, uzluksiz va singulyar bo'ladi. Biz diskret va uzluksiz tasodifiy miqdorlar bilan ish ko'ramiz.

2-ta'rif. Qabul qila olishi mumkin bo'lgan qiymatlari chekli yoki sanoqli to'plamdan iborat bo'lgan tasodifiy miqdorlarni diskret tasodifiy miqdorlar deyiladi.

1-misol. Tanga 4 marta tashlanganda «$\Gamma$» tushishi tasodifiy hodisa bo'lib, «$\Gamma$» tushishiga qarab quyidagi sonlar bilan o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish mumkin: 0, 1, 2, 3, 4.

2-misol. 100 ta tug'ilgan chaqaloq ichida o'g'il bolalar soni tasodifiy miqdorlar bo'ladi va uning qabul qiladigan qiymatlari 0, 1, 2, ..., 100 lardan iborat bo'ladi.

3-misol. Tajriba o'qning birinchi marta nishonga tegishi bo'lsa, u holda tasodifiy miqdorning qabul qiladigan qiymatlari quyidagicha bo'ladi: $x_1=1$, $x_2=2$, ..., $x_n=n$, ... .

Yuqorida keltirilgan misollar diskret tasodifiy miqdorlarga tegishli bo'lib, qabul qiladigan qiymatlari chekli va sanoqli bo'lishi mumkin ekanligini ko'rsatadi. Avval diskret tasodifiy miqdorlarni ko'rib chiqamiz.

## Diskret tasodifiy miqdorlar
## Diskret tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonuni

Ta'rif. Diskret tasodifiy miqdorning qabul qiladigan qiymatlari va ularning mos ehtimolliklari orasidagi munosabatni ifodalovchi jadval taqsimot qonuni deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$X: \quad x_1, x_2, \ldots, x_n$$
$$P: \quad p_1, p_2, \ldots, p_n, \quad p_1+p_2+\ldots+p_n=1$$

agar tasodifiy miqdorning qabul qiladigan qiymatlari chekli bo'lsa,

$$X: \quad x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$
$$P: \quad p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots, \quad p_1+p_2+\ldots+p_n+\ldots=1$$

agar tasodifiy miqdorning qabul qiladigan qiymatlari sanoqli bo'lsa.

Ba'zi taqsimot qonunlarni ko'rib chiqamiz.

## Binomial taqsimot qonuni

Har bir tajribada $A$ hodisaning ro'y berish ehtimoli $p$ ga teng bo'lsa, $n$ ta tajribada $A$ hodisaning $k$ marta ro'y berishi taqsimot qonuning orqali quyidagicha ifodalash mumkin:

$$\begin{array}{lcccccc} X: & 0 & 1 & 2 & 3 & ,\ldots, & n \\ P: & P_n(0) & P_n(1) & P_n(2) & P_n(3) & ,\ldots, & P_n(n) \end{array}$$

bu yerda $P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$ - Bernulli formulasi bilan ifodalanadi va quyidagi tenglik o'rinlidir.

$$\sum_{k=0}^{n} P_n(k)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k}=(p+q)^n=1.$$

Misol. Tanga 2 marta tashlanganda «$\Gamma$» tushishlar soni $X$ tasodifiy miqdor bo'lsa, uning taqsimot qonuni tuzilsin.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $X$: | 0 | 1 | 2 |
| $P$: | $P_2(0)$ | $P_2(1)$ | $P_2(2)$ |

Bu yerda

$$P_2(0)=C_2^0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}=0{,}25$$

$$P_2(1)=C_2^1\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)=2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}=0{,}5$$

$$P_2(2)=C_2^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{4}=0{,}25$$

ga teng.

Yuqoridagi formuladan foydalandik.

Tanga tashlanganda «$\Gamma$» tushishi ehtimoli $p=\frac{1}{2}$ bo'lsa, $q=1-p=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ esa «$\Gamma$» tushmaslik ehtimoli deb oldik. U holda taqsimot qonuni quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $X$: | 0 | 1 | 2 |
| $P$: | 0,25 | 0,5 | 0,25 |

Tekshirish: 0,25+0,5+0,25=1.

## Puasson taqsimoti

Har bir tajribada $A$ hodisaning ro'y berish ehtimoli $P$ yetarlicha kichik bo'lib, tajribalar soni cheksiz oshib borsin, u holda Puasson formulasiga asosan tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi.

$$\begin{array}{lcccccc} X: & 0 & 1 & 2 & ,\ldots, & K & ,\ldots, \\ P: & P(0) & P(1) & P(2) & ,\ldots, & P(k) & ,\ldots, \end{array}$$

bu yerda $P(k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $k=0,1,2,\ldots$, $\lambda=pn$ ga teng.

Ehtimollar

$$P(0)=e^{-\lambda},\ P(1)=\lambda e^{-\lambda},\ P(2)=\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda},\ldots,\ P(k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ldots$$

ga teng bo'lib, ularning yig'indisi birga teng, ya'ni

$$\sum_{k=0}^{\infty}P(k)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}e^{\lambda}=1.$$

## Puasson taqsimotining tatbiqi

**Misol.** Radioapparat 1000 ta elektroelementdan iborat. Bitta elementning boshqa elementlarga bog'liqmas holda bir yilda ishdan chiqish ehtimoli 0,001 ga teng. Quyidagi hodisalarning ehtimoli topilsin:

Bir yilda

a) 2 ta elementning;

b) kamida 2 ta elementning ishdan chiqishi.

**Yechish.** $X$ tasodifiy miqdor sifatida ishdan chiqqan elementlar soni olingan bo'lib, u Puasson taqsimoti bo'yicha taqsimlangan, ya'ni

$$P(X=k)=P_k=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},$$

bu yerda

$$\lambda=np=1000\cdot 0{,}001=1.$$

U holda

a) 2 ta elementning ishdan chiqish ehtimoli

$$P(X=2)=\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}=\frac{1}{2e}=0{,}184\ ;$$

b) kamida 2 ta elementning ishdan chiqish ehtimoli

$$P(X\geq 2)=\sum_{k=2}^{\infty}P_k=1-P_0-P_1=1-e^{-\lambda}(1+\lambda)=$$

$$=1-\frac{2}{e}\approx 0{,}264$$

## Geometrik taqsimot

O'zaro bog'liq bo'lmagan tajribalar ketma-ketligida $A$ hodisaning ro'y berish ehtimoli $p$ $(0<p<1)$ ga teng bo'lsin. Quyidagi tajribalar ketma-ketligini qaraymiz. Agar $A$ hodisa $k$ tajribada ro'y bersa, tajriba to'xtatiladi va oldinga ($k$-1) ta tajribada $A$ hodisa ro'y bermagan deb qaraladi, u holda tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni quyidagi ko'rinishda bo'ladi

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$: | 1 | 2 | 3 | ,..., | $k$ | ,..., |
| $P$: | $p$ | $pq$ | $q^2p$ | ,..., | $q^{k-1}p$ | ,..., |

Demak, $P(X=k)=q^{k-1}p$ ga teng va

$$\sum_{k=1}^{\infty}P(X=k)=\sum_{k=1}^{\infty}q^{k-1}p=p\sum_{k=1}^{\infty}q^{k-1}=p\frac{1}{1-q}=1.$$

## Gipergeometrik taqsimot

Quyidagi masalani ko'rib chiqaylik.

Umumiy mahsulotlar soni $N$ ta bo'lib, ulardan $M$ tasi yaroqli bo'lsin. Shu $N$ ta to'plamdan $n$ ta mahsulot olingan va olingan $n$ ta mahsulotdan $m$ $(0\leq m\leq n)$ tasi yaroqli mahsulot bo'lish ehtimoli topilsin. Bu yerda har bir mahsulotni tanlab olishi ehtimoli bir xil bo'lib, tanlangan mahsulot to'plamga qaytarilmaydi. Tasodifiy miqdorning qabul qiladigan qiymatlar to'plami $1,2,\ldots,n$ lardan iborat bo'ladi.

Tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{array}{lcccccc} X: & 0 & 1 & 2 & ,\ldots, & n & ,\ldots, \\ P: & P(X=0) & P(X=1) & P(X=2) & ,\ldots, & P(X=n) & ,\ldots, \end{array}$$

bu yerda $P(X=m)=\dfrac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$ formula bilan aniqlanadi.

102-ma'ruza

# DISKRET TASODIFIY MIQDORNING MATEMATIK KUTILMASI

Ta'rif. Diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi, tasodifiy miqdorning qabul qiilish mumkin bo'lgan qiymatlarini ularning mos ehtimollari ko'paytmasining yig'indisiga tengdir.

Agar tasodifiy miqdorning qabul qiladigan qiymatlari chekli bo'lib, taqsimot qonuni quyidagicha bo'lsa,

$$X: \quad x_1, x_2, \ldots, x_n$$

$$P: \quad p_1, p_2, \ldots, p_n$$

u holda tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi

$$MX = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n \qquad (1)$$

yoki

$$MX = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \qquad (1')$$

tenglik bilan aniqlanadi.

Agar tasodifiy miqdorning qabul qiladigan qiymatlar to'plami sanoqli bo'lsa, u holda taqsimot qonuni

$$X: \quad x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,$$

$$P: \quad p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots,$$

ko'rinishda bo'ladi va matematik kutilmasi

$$MX = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n + \ldots \qquad (2)$$

yoki

$$MX = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i \qquad (2')$$

formula bilan aniqlanadi. Bu yerda matematik kutilmasi mavjud bo'lishi uchun (2) sonli qatorlik absolyut yaqinlashuvchi bo'lishi shart.

Misol. Diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni quyidagi ko'rinishda berilgan bo'lsa;

| | | | |
|---|---|---|---|
| $X$: | -2; | 0; | 4 |
| $P$: | 0,3; | 0,2; | 0,5, |

uning matematik kutilmasi topilsin;

$$MX = -2 \cdot 0{,}3 + 0 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}5 = 1{,}4 .$$

Yuqorida keltirilgan (1) formuladan foydalanildi.

Matematik kutilmaning xossalari.

1-xossa. O'zgarmas sonning matematik kutilmasi o'zgarmas sonning o'ziga teng

$$MC = C$$

2-xossa. Tasodifiy miqdor o'zgarmas ko'payituvchiga ega bo'lsa, shu o'zgarmas ko'payturuvchini matematik kutilma ishorasidan tashqariga chiqarish mumkin.

$$M(CX) = CMX, \qquad C = const.$$

3-xossa. Ikkita o'zaro bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar ko'paytmasining matematik kutilmasi, shu tasodifiy miqdorlar matematik kutilmalarining ko'paytmasiga teng.

$$M(XY) = MXMY.$$

1-natija. Bir necha o'zaro bog'liq bo'lingan tasodifiy miqdorlar ko'paytmasining matematik kutilmasi, shu tasodifiy miqdorlar matematik kutilmalarining ko'paytmasiga teng.

Biz formulani $n$=3 uchun yozamiz va ixtiyoriy $n$ uchun ham formula o'rinli ekanligini ta'kidlab o'tamiz, demak,

$$M(XYZ) = MXMYMZ.$$

1-misol. O'zaro bog'liq bo'lmagan $X$ va $Y$ tasodifiy miqdorlar quyidagi taqsimot qonuni orqali berilgan bo'lsin.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $X$ | 5 | 2 | 4 |
| $P$ | 0,6 | 0,1 | 0,3 |

| | | |
|---|---|---|
| $Y$ | 7 | 9 |
| $P$ | 0,8 | 0,2 |

Quyidagi $M(XY)=MXMY$ tenglikning o'rinli ekanligini isbotlaymiz.

Yechish. Avval tasodifiy miqdorlarning matematik kutilmalarini hisoblaymiz

$$MX = 5\cdot 0.6 + 2\cdot 0.1 + 4\cdot 0.3 = 4.4$$

$$MY = 7\cdot 0.8 + 9\cdot 0.2 = 7.4$$

ularning ko'paytmasini topamiz

$$MXMY = 4.4\cdot 7.4 = 32.56.$$

Endi tasodifiy miqdorlar ko'paytmasining taqsimot qonunini tuzamiz.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $XY$; | 35 | 45 | 14 | 18 | 28 | 36 |
| $P$; | 0.48 | 0.12 | 0.08 | 0.02 | 0.24 | 0.06 |

Matematik kutilmasini hisoblaymiz

$$M(XY) = 35\cdot 0.48 + 45\cdot 0.12 + 14\cdot 0.08 +$$

$$+ 18\cdot 0.02 + 28\cdot 0.24 + 36\cdot 0.06 = 32.56$$

demak, 3-xossa o'rinli ekan.

4-xossa. Ikkita tasodifiy miqdorlar yig'indisining matematik kutilmasi shu tasodifiy miqdorlar matematik kutilmalarining yig'indisiga teng.

$$M(X+Y)=MX+MY.$$

2-natija. Bir necha tasodifiy miqdorlar yig'indisining matematik kutilmasi, shu tasodifiy miqdorlar matematik kutilmalarining yig'indisiga teng. Bu yerda ham formulani $n=3$ uchun yozamiz. Ixtiyoriy $n$ uchun formula o'rinlidir

$$M(X+Y+Z)=MX+MY+MZ$$

2-misol. Tasodifiy miqdorlar bir misoldagi taqsimot qonuniga ega bo'lsin.

4-xossani, ya'ni $M(X+Y)=MX+MY$ tenglik to'g'ri ekanligini isbotlaymiz.

Yechish. Bizga ma'lumki, $MX$=4,4 $MY$=7,4 ga teng, u holda $MX+MY=4{,}4+7{,}4=11{,}8$ bo'ladi.

Endi $X+Y$ tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini tuzamiz;

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $X+Y$ | 12 | 14 | 9 | 11 | 11 | 13 |
| $P$ | 0.48 | 0.12 | 0.08 | 0.02 | 0.24 | 0.06 |

Matematik kutilmasini hisoblaymiz

$$M(X+Y)=12\cdot 0.48+14\cdot 0.12+9\cdot 0.08+$$
$$+11\cdot 0.02+11\cdot 0.24+13\cdot 0.06=11.8$$

Shunday qilib, 4-xossa ham to'g'ri ekanligi misol orqali isbotlandi.

## Bog'liq bo'lmagan tajribalar ketma-ketligida hodisa ro'y berishlar sonining matematik kutilmasi

Har bir o'zaro bog'liq bo'lmagan tajribalar ketma-ketligida $A$ hodisaning ro'y berish ehtimoli $p$ ga teng bo'lsa, $n$ ta tajribada $A$ hodisaning ro'y berishlar soni nimaga teng bo'ladi? Bu savolga quyidagi teorema javob beradi.

Teorema. O'zaro bog'liq bo'lmagan $n$ ta tajribalar ketma-ketligida $A$ hodisa ro'y berishlar sonining matematik ayirmasi, tajribalar sonini har bir tajribada ro'y berish ehtimoliga ko'paytmasiga tengdir, ya'ni

$$MX=np. \tag{1}$$

Isbot. $n$ chi tajribada A hodisaning ro'y berishini $X_n$ deb belgilaymiz. Demak, birinchi tajribada $X_1$, ikkinchi tajribada $X_2$ va hokazo. $n$-tajribada $X_n$ deb tasodifiy miqdorni belgilasak, u holda $n$ ta tajribada $A$ hodisaning ro'y berishlar sonini $X$ tasodifiy miqdor bilan belgilaymiz va tasodifiy miqdorlar yig'indisi orqali quyidagi tenglamani yozish mumkin:

$$X = X_1+ X_2+\ldots+ X_n$$

Matematik kutilmaning uchinchi xossasiga asosan

$$MX=MX_1+MX_2+\ldots+MX_n \tag{2}$$

munosabat o'rinlidir. Bu yerda

$$MX_1 = MX_2 = \ldots = MX_n$$

bo'ladi, chunki har bir tajribada $X_c$ tasodifiy matematik kutilmasi $MX_i$

$$\begin{cases} X_i : 0, \ 1 \\ P \ : q, \ p \end{cases} \quad i = \overline{1,n}, \quad MX_i = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p, \ i = \overline{1,n},$$

ga teng.

Demak, (2) tenglikdan (1) formula o'rinli ekanligi kelib chiqadi, ya'ni

$$MX = np.$$

Misol. Zambarakdan otilgan o'qning nishonga tegish ehtimoli $p$=0,75 bo'lsin. Yuz marta otilganda nishonga tegishlar sonining matematik kutilmasi topilsin.

Yechish. Har bir tajribada ro'y berish ehtimoli $r$=0,75 tajribalar soni $n$=100 bo'lgani uchun

$$MX=np=100 \quad 0{,}75=75.$$

Demak, 100 marta otilganda o'rtacha 75 marta nishonga tegadi.

## Diskret tasodifiy miqdorning dispersiyasi

Yuqorida biz tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi degan tushuncha kiritdik. Matematik kutilma tasodifiy miqdorning o'rta qiymatini yoki shu o'rta qiymatiga yaqin bo'lgan qiymatlarni qabul qiladi. Tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini bilish bilan tasodifiy miqdorning holati to'g'risida to'liq ma'lumotga ega bo'la olmaymiz. Masalan, ikkita tasodifiy miqdorlar taqsimot qonunlari bilan berilgan bo'lsin

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$: | -1 | 1 | | $Y$ | -1000 | 1000 |
| $P$: | 0,5 | 0,5 | | $P$: | 0,5 | 0,5 |

Ularning matematik kutilmasini hisoblaymiz.

$$MX = -1\ 0{,}5 + 1\ 0{,}5 = 0,$$
$$MY = 1000\ 0{,}5 + 1000\ 0{,}5 + 0{,}5 = 0$$

Bu yerda ikkita tasodifiy miqdorlarning kutilmalari teng, lekin ularning qabul qiladigan qiymatlari birinchisiniki o'rta qiymatlarga yaqin bo'lsa, ikkinchisiniki esa o'rta qiymatidan yetarlicha uzoqdir.

Shunday qilib, tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini bilish bilan uning holati aniqlash uchun yetarli emas ekan.

Shu maqsadda quyidagi tushunchani kiritish zarur bo'ladi, ya'ni tasodifiy miqdorning qabul qiladigan qiymatlari, tasodifiy miqdorning matematik kutilmasiga nisbatan qanday joylashgan, ya'ni qiymatlar matematik kutilmaga nisbatan yaqin nuqtada yoki uzoqdami? Demak, tasodifiy miqdor uchun yangi sonli xarakteristikalarni, xususan, dispersiya tushunchasini kiritamiz.

Avval, quyidagi tasodifiy miqdorni kiritamiz, ya'ni tasodifiy miqdor bilan uning matematik kutilmasi orasidagi ayirmasidan iborat bo'lgan tasodifiy miqdorni qaraymiz. Bu tasodifiy miqdorni o'rta qiymatidan chetlashish deyiladi va uning taqsimot qonuni quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

$$\begin{array}{lllll} \overline{X} = X - MX & X_1 - MX & X_2 - MX & \ldots\ldots & X_4 - MX \\ \quad\ P & \quad P_1 & \quad P_2 & \ldots\ldots & \quad P_n \end{array}$$

Yangi tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi nolga teng, haqiqatan,

$$M\overline{X} = M(\overline{X} - MX) = MX - MX = 0$$

Ta'rif. Diskret tasodifiy miqdorning dispersiyasi deb $\overline{X}$ tasodifiy miqdor kvadratining matematik kutilmasiga, ya'ni chetlanish kvadratining matematik kutilmasiga aytiladi:

$$DX = M\,[\overset{\circ}{X}]^2 = M\,[X-MX]^2$$

Agar tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot qonuniga ega bo'lsa,

$$\begin{array}{llll} X & x_1 & x_2, & \ldots\ldots X_n \\ P: & p_1 & p_2, & \ldots\ldots P_n \end{array}$$

U holda chetlanish kvadratining taqsimot qonuni quyidagi ko'rinishda bo'ladi

$$\begin{array}{cccc} [X-MX]^2 & [X_1-MX]^2 & [X_2-MX]^2 \ \ldots & [X_n-MX]^2 \\ P & P_1 & P_2 & P_n \end{array}$$

Dispersiya quyidagi formula bilan hisoblanadi

$$DX=M[X-MX]^2=(X_1-MX)^2p_1+(X_2-MX)^2p_2+\ldots+(X_4-MX)^2p_n \quad (2)$$

Misol. Taqsimot qonuni quyidagicha bo'lgan tasodifiy miqdor berilgan bo'lsa,

$$\begin{array}{llll} X: & -1 & 0 & 2 \\ P: & 0,3 & 0,2 & 0,5 \end{array}$$

tasodifiy miqdor dispersiyasi hisoblansin,

Yechish. Tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini topamiz

$$MX=-1\ 0,3 + 0\ 0,2 + 2\ 0,5 = 0,7$$

Endi chetlashish kvadratini hisoblaymiz

$$(X_1-MX)^2 = (-1-0,7)^2 = 2,89,$$
$$(X_2-MX)^2 = (0-0,7)^2 = 0,49$$
$$(X_3-MX)^2 = (2-0,7)^2 = 1,69$$

(2) formulaga asosan

$$DX=2,89\cdot0,3+0,49\cdot0,2+1,69\cdot0,5=0,867+0,098+0,845=1,81$$

Tasodifiy miqdor dispersiyasini hisoblash uchun quyidagi qulay formulani keltirib chiqaramiz

$$DX=M[X-MX]^2=M[X^2-2XMX+(MX)^2]=M(X^2)-$$
$$-2(MX)^2+(MX)^2=MX^2-(MX)^2$$

Shunday qilib, quyidagi formulani hosil qildik

$$DX = MX^{\,2} - (MX)^2 \qquad (3)$$

Yuqorida keltirilgan misolni (3) formula yordamida hisoblaymiz, buning uchun $X^{\,2}$ tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini yozamiz.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $X^2$ | *1* | *0* | *4* |
| *P* | *0,3* | *0,2* | *0,5* |

bu yerdan

$$MX^2 = 1\ 0{,}3+0\ 0{,}2+4\ 0{,}5 = 2{,}3$$

endi (3) formulaga asosan

$$DX = MX^2 - (MX)^2 = 2{,}3 - (0{,}7)^2 = 2{,}3\text{-}0{,}49 = 1{,}81$$

Bu misol hisoblash formulasi to'g'ri ekanligini isbotlaydi.

*Dispersiya xossalari*

1-xossa. O'zgarmas sonning dispresiyasi nolga teng:

$$DC = 0.$$

Haqiqatan,

$$D(C)= M(C-MC)^2\ M(C-C)^2 = MO = 0. \qquad (1)$$

2-xossa. O'zgarmas ko'paytiruvchini dispersiya ishorasidan tashqariga, o'zgarmas sonning kvadrati sifatida chiqarish mumkin:

$$D(CX) = C^3DX.$$

Haqiqatan,

$$D(CX)=M(CX-M(CX))^2=MC^2(X-MX)^2=C^2DX \qquad (2)$$

3-xossa. Ikkita o'zaro bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar yig'indisining dispersiyasi, shu tasodifiy miqdorlar dispersiyalarining yig'indisiga teng:

$$D(X+Y)=DX+DY.$$

Misol. Ikkita tasodifiy miqdorlar $X$ va $Y$ quyidagi taqsimot qonuniga ega bo'lsin.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $X$: | -1 | 2 | $Y$ | 1 | 3 |
| $P$ | 0,6 | 0,4 | $P$: | 0,5 | 0,5 |

3-xossa to'g'ri ekanligi isbotlansin.

Yechish. Ularning matematik kutilmasini hisoblaymiz

$MX$ = -1 0,6+2 0,4 = -0,6+0,8 = 0,2

$MY$ = 1 0,5+3 0,5 = 0,5+1,5 = 2

Endi $X^2$ va $Y^2$ tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonunini tuzamiz

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $X^2$: | 1 | 4 | $Y^2$: | 1 | 9 |
| $P$: | 0,6 | 0,4 | $P$: | 0,5 | 0,5 |

va ularning matematik kutilmasini hisoblaymiz

$MX^2$ = 1 0,6+4 0,4 = 6+1,6 = 2,2

$MY^2$ = 1 0,5+9 0,5 = 0,5+4,5 = 5

Tasodifiy miqdorlarning dispersiyalari mos ravishda

$DX = MX^2 - (MX)^2 = 2{,}2-(0{,}2)^2 = 2{,}2-0{,}04 = 2{,}16$

$DY = MY^2 - (MY)^2 = 5-2^2 = 5-4 = 1$

ga tengdir. U holda

$DX + DY = 2{,}16+1 = 3{,}16.$

Endi $X+Y$ tasodifiy miqdor uchun taqsimot qonuni yozamiz

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $X+Y$: | 0 | 2 | 3 | 5 |
| $P$: | 0,3 | 0,3 | 0,2 | 0,2 |

va $(X+Y)^2$ uchun esa taqsimot qonuni

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $(X+Y)^2$ | 0 | 4 | 9 | 25 |
| $P$ | 0,3 | 0,3 | 0,2 | 0,2 |

ko'rinishga ega bo'ladi. Ularning mos ravishda matematik kutilmalari

$$M(X+Y) = 0\ 0{,}3+2\ 0{,}3+3\ 0{,}2+5\ 0{,}2 = 0{,}6+0{,}6+1= 2{,}2$$
$$M(X+Y)^2 = 0\ 0{,}3+4\ 0{,}3+9\ 0{,}3+25\ 0{,}2 = 1{,}2+1{,}8+5 = 8$$

ga teng bo'ladi. Bularga asosan dispersiya

$$D(X+Y)=M(X+Y)^2-[M(X+Y)]^2 = 8-(2.2)^2 = 8-4{,}84 = 3{,}16$$

Shunday qilib, 3-xossa to'g'ri ekanligi isbotlandi.

1-natija. Bir nechta o'zaro bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar yig'indisining dispersiyasi shu tasodifiy miqdorlar dispersiyalarining yig'indisiga tengdir.

Masalan. Uchta tasodifiy miqdorlar uchun

$$\mathrm{D}(X+Y+Z)=DX+DY+DZ$$

tenglik o'rinlidir.

2-natija. Tasodifiy miqdor bilan o'zgarmas son yig'indisining dispersiyasi, tasodifiy miqdor dispersiyasiga teng, ya'ni

$$D(C+X) = DX$$

Bu tenglikning to'g'ri ekanligini misolda ko'rsatamiz.

$X$ tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot qonuniga ega bo'lsin

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $X$: | -2 | 3 | $X+5$ | 3 | 8 |
| $P$: | 0,6 | 0,4 | $P$ | 0,6 | 0,4 |

bularning matematik kutilmasi

$MX=-2\ 0{,}6+3\ 0{,}4=0$  $M(X+5) = 3\ 0{,}6+8\ 0{,}4 = 1{,}8+3{,}2 = 5$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $X^2$ | 4 | 9 | $(X+5)^2$ | 9 | 64 |
| $P$ | 0,6 | 0,4 | $P$ | 0,6 | 0,4 |

Xuddi shuningdek, $X^2$ va $(X+5)^2$ larning mos ravishda matematik kutilmalari

$$MX^2 = 4\ 0{,}6+9\ 0{,}4=2{,}4+3{,}6=6,\quad M(X+5)^2 = 9\ 0{,}6+64\ 0{,}4=5{,}4+25{,}6=31$$

ga teng.

Endi dispersiyalarini hisoblaymiz

$DX = MX^2 - (MX)^2 = 6\text{-}0 = 6$
$D(X+5) = M(X+5)^2 - (M(X+5))^2 = 31\text{-}5^2 = 31\text{-}25 = 6$

Demak, $D(X+5) = DX$.

4-xossa. Ikkita o'zaro bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar ayirmasining dispersiyasi, shu tasodifiy miqdorlar dispersiyalarining yig'indisiga teng, ya'ni

$$D(X-Y)=DX+DY$$

Yuqorida keltirilgan misoldan foydalanib, 4-xossasining to'g'ri ekanligini ko'rsataylik. $X$ va $Y$ tasodifiy miqdorlar

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | -1 | 2 | | $Y$ | 1 | 3 |
| $P$ | 0,6 | 0,4 | | $P$ | 0,5 | 0,5 |

ko'rinishdagi taqsimot qonuniga ega bo'lsin. Bundan $X$-$Y$ ning taqsimot qonunini yozamiz.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $X$-$Y$ | -2 | -4 | 1 | -1 |
| $P$ | 0,3 | 0,3 | 0,2 | 0,2 |

va bu tasodifiy miqdor dispersiyasini hisoblaymiz.

$M(X\text{-}Y) = \text{-}2\ 0{,}3\text{-}4\ 0{,}3\text{+}1\ 0{,}2\text{-}1\ 0{,}2 = \text{-}1{,}8$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $(X\text{-}Y)^2$ | 4 | 16 | 1 | 1 |
| $P$ | 0,3 | 0,3 | 0,2 | 0,2 |

$M(X\text{-}Y)^2 = 4\ 0{,}3\text{+}16\ 0{,}3\text{+}1\ 0{,}2\text{+}1\ 0{,}2 = 1{,}2\text{+}4{,}8\text{+}0{,}2\text{+}0{,}2 = 6{,}4.$
$D(X\text{-}Y)^2 = M(X\text{-}Y)^2 - (M(X\text{-}Y))^2 = 6{,}4\text{-}(\text{-}1{,}8)^2 = 6{,}4\text{-}3{,}24 = 3{,}16.$

Yuqorida keltirilgan misolda dispersiyalar yig'indisi

$$DX + DY = 3{,}16$$

ga teng edi. 4-xossasining to'g'ri ekanligi misolda isbotlandi.

## Bog'liq bo'lmagan tajribalar ketma-ketligida hodisa ro'y berishlar sonining dispersiyasi

Har bir tajribada $A$ hodisaning ro'y berish ehtimoli o'zgarmas son $p$ ga teng bo'lsin va $n$ marta o'zaro bog'liq bo'lmagan tajribalar ketma-ketligini o'tkazaylik. $n$ ta tajribada $A$ hodisa ro'y berishlar sonining dispersiyasi nimaga teng?

Teorema. O'zaro bog'liq bo'lmagan $n$ ta tajribalar ketma-ketligida $A$ hodisa ro'y berishlar sonining dispersiyasi, har bir tajribada $A$ hodisaning ro'y berish va ro'y bermaslik ehtimollari tajribalarining umumiy soniga ko'paytirilganiga teng, ya'ni

$$DX = npq$$

Isbot. $n$ ta tajribada $A$ hodisaning ro'y berishlar sonini $X$ tasodifiy miqdor deb belgilaymiz, har bir tajribada ro'y berishni esa $X_i\ \left(i=\overline{1,n}\right)$ deb olamiz. U holda

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

ko'rinishda yozish mumkin. $X_i$ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi $MX_i=p$ ga teng, $X_i^2\ \left(i=\overline{1,n}\right)$ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi ham $MX_i^2=r$ ga teng. $X_i$ ning dispersiyasi

$$DX_i=MX^2-(MX)^2=p-p^2=p(1-p)=pq \qquad (i=1,n)$$

ga teng.

Demak, $X_i$ tasodifiy miqdorlar o'zaro bog'liq bo'lmaganligi uchun,

$$DX=DX_1+DX_2+\ldots+DX_n$$

dan

$DX = npq$ ekanligi kelib chiqadi.

Tasodifiy miqdorning dispersiyasidan olingan kvadratik ildiz tasodifiy miqdorning o'rta kvadratik chetlanishi deyiladi:

$$\sigma(X)=\sqrt{DX}.$$

Bir nechta o'zaro bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar yig'indisining o'rta kvadratik chetlanishi quyidagi formula bilan hisoblanadi.

Agar $X=X_1+X_2+\ldots+X_n$ bo'lsa,

$$\sigma(X)=\sqrt{\sigma^2(X_1)+\sigma^2(X_2)+.......+\sigma^2(X_n)}.$$

ga teng.

## Yuqori tartibli momentlar

1-ta'rif. Tasodifiy miqdor $X$ ning $k$-tartibli momenti deb, $X_k$ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasiga aytiladi:

$$\nu_k = MX^k$$

xususan,

$$\nu_1 = MX,\ \nu_2 = MX^2$$

y holda

$$DX = MX^2 - (MX)^2 = \nu_2 - \nu^2.$$

2-ta'rif. Tasodifiy miqdorlar $X$ ning $k$ tartibli markaziy momenti deb, chetlanishdan ($X$-$MX$) olingan $k$ tartibli matematik kutilmasiga aytiladi;

$$M_\kappa = M(X - MX)^\kappa$$

Xususan,

$$\mu_1 = M\{X - MX\} = 0, \quad \mu_2 = M\{X - MX\}^2 = D(X) = \nu_2 - \nu_1^2$$

xuddi shuningdek, quydagi formulalarning

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_2\nu_1 + 2\nu_1^3, \quad \mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1^2 - 3\nu_1^4$$

o'rinli ekanligini keltirib chiqarish qiyin emas.

103-ma'ruza

# UZLUKSIZ TASODIFIY MIQDORLAR

**1. Taqsimot funksiya.**

Tasodifiy miqdorlar $X$ biror chekli yoki cheksiz oraliqdagi birga qiymatlarni qabul qilsin va $x$-haqiqiy son bo'lsin. Tasodifiy miqdorlar $X$ ning $x$ dan kichik qiymat qabul qilish ehtimoli, ya'ni

$$X \le x$$

hodisaning ehtimoli nimaga teng?

1-ta'rif. Tasodifiy miqdor $X$ ning $x$ dan kichik qiymat qabul qilish hodisasining ehtimolini, tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi deyiladi va quyidagicha yoziladi

$$F(x) = P(X < x)$$

o'zgaruvchi miqdor $x$ ning o'zgarishi bilan $F(x)$ funksiya ham o'zgaradi, ya'ni u $x$ ning funksiyasidir.

2-ta'rif. Tasodifiy miqdor $X$ uzluksiz deyiladi, agar uning taqsimot funksiyasi uzluksiz va uzluksiz bo'lakli differensiallanuvchi funksiya bo'lsa.

Taqsimot funksiyaning xossalari.

1-xossa. Taqsimot funksiyaning qiymati 0 bilan 1 orasidagi sondir;

$$0 \le F(x) \le 1$$

Bu xossa ehtimolning ta'rifidan kelib chiqadi.

2-xossa. Agar $x_1 \le x_2$ bo'lsa $F(x_1) \le F(x_2)$ tengsizlik o'rinlidir.

Isbot. Agar $x_1 \le x_2$ bo'lsa, $\{X \le x_2\}$ hodisani birgalikda bo'lmagan ikkita hodisalar $\{X \le x_1\}$ va $\{x_1 \le x \le x_2\}$ yig'indisi ko'rinishida ifodalash mumkin, u holda quyidagi tenglik o'rinli bo'lib, yechish mumkin.

$$P(x < x_2) = P(x < x_1) + P \quad \{x_1 \le x \le x_2\}$$

bu yerdan

$$P(x < x_2) - P(x < x_1) = P\{x_1 \le x \le x_2\}$$

$$F(x_2) - F(x_1) = P\{x_1 \le x \le x_2\} \ge 0 . \qquad (1)$$

So'nggi (1) tenglikdan $F(x_2) - F(x_1) \ge 0$ yoki $F(x_2) \ge F(x_1)$ ekanligi kelib chiqadi. Demak taqsimot funksiya kamayuvchi bo'lmagan funksiyadir.

1-natija. Tasodifiy miqdor $X$ ning $(a, b)$ oraliqdagi qiymatlarni qabul qilish ehtimoli ikki chetki nuqtalardagi taqsimot funksiyalar qiymatlarining ayirmasiga tengdir.

Haqiqatan, agar $x_2 = b$, $x_1 = a$ desak, yuqoridagi formula (1) ifodaga asosan

$$P(a \le X \le b) = F(b) - F(a)$$

bo'ladi.

2-natija. Uzluksiz tasodifiy miqdor $X$ ning nuqtadagi qiymatni qabul qilish ehtimoli nolga teng.

Haqiqatan, agar $x_2 = x + \Delta x$, $x_1 = x$ desak, u holda (1) formulaga asosan,

$$P(x \le X \le x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x)$$

va $\Delta x \to 0$ limitini hisoblasak, $P(X = x) = 0$ ekanligi kelib chiqadi.

3-xossa. Agar uzluksiz tasodifiy miqdorning qabul qiladigan qiymatlar to'plami $(a,b)$ oraliqqa tegishli bo'lsa, u holda
1) $F(x) = 0$ agar $x \le a$; 2) $F(x) = 1$ agar $x \ge b$.

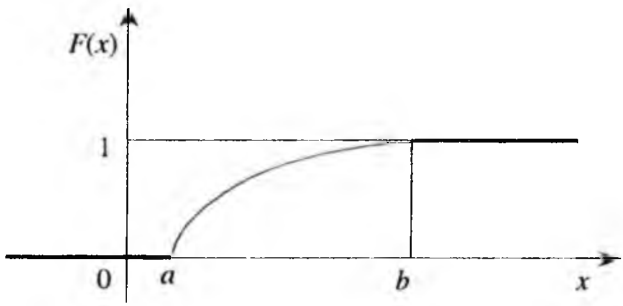
Agar $X$ uzluksiz tasodifiy miqdorning qabul qiladigan qiymatlar to'plami barcha sonlar o'qida joylashgan bo'lsa, u holda

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$$

tengliklar o'rinli bo'ladi.

### Taqsimot funksiyasining grafigi

Tasodifiy miqdorning qiymatlari ($a$, $b$) oraliqda bo'lsa, taqsimot funksiyaning yuqorida keltirilgan xossalariga asoslanib, ya'ni $F(x)=0$, agar $x \leq a$, $y=F(x)$ agar $a<x<b$ va $F(x)=1$ agar $x \geq b$ ekanligini hisobga olib quyidagi grafikni chizish mumkin




Misol. X diskret tasofiy miqdor quyidagi taqsimot qonuni

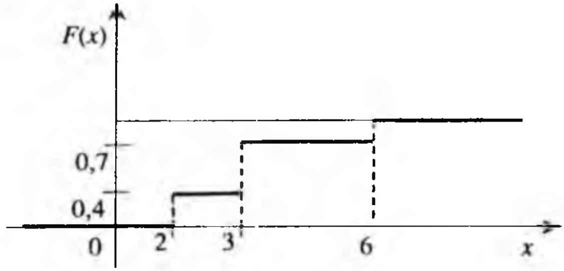
| | | | |
|---|---|---|---|
| $X$: | 2 | 3 | 6 |
| $R$: | 0,4 | 0,3 | 0,3 |

bilan berilgan bo'lsin. Taqsimot funksiyasi topilsin va grafigi chizilsin.

Yechish. O'zgaruvchi $x<2$ bo'lganda $F(x)=0$ ga, $2 \leq x \leq 3$ da $F(x)=0,4$ ga, $3 \leq x \leq 6$ da $F(x)=0,7$ ga teng bo'ladi. Demak, taqsimot funksiyani

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{agar} \quad x \leq 2 \\ 0{,}4 & \text{agar} \quad 2 \leq x \leq 3 \\ 0{,}7 & \text{agar} \quad 3 \leq x \leq 6 \\ 1 & \text{agar} \quad x \geq 6 \end{cases}$$

ko'rinishda yozish mumkin. Quyida bu funksiyaning grafigi chızilgan.




## Uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

Ta'rif. Uzluksiz tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasidan olingan birinchi tartibli hosila, ya'ni

$$f(x) = F'(x)$$

tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi deyiladi.

Demak, taqsimot funksiya $F(x)$ zichlik funksiya uchun bolang'ich funksiya ekan, bundan

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

ekanligi kelib chiqadi.

Tasodifiy miqdor $X$ ning qiymatlari $(a, b)$ oraliqqa tushish ehtimolligini zichlik funksiyasi yordamida quyidagi tenglik orqali aniqlash mumkin.

$$P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx.$$

Bu tenglikni keltirib chiqarish qiyin emas, haqiqatan

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} F'(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx.$$

Lekin $P(a \le X < b) = P(a < X < b)$ ekanligidan yuqoridagi tenglik kelib chiqadi.

Demak, zichlik funksiya berilsa, taqsimot funksiyasini aniqlash mumkin.

Misol sifatida tekis taqsimot qonunini ko'rib chiqaylik.

Uzluksiz tasodifiy miqdor tekis taqsimlangan deyiladi, agar zichlik funksiyasi

$$f(x)=\begin{cases}0 \quad \text{agar} \quad x\le a\\ \dfrac{1}{b-a} \quad \text{agar} \quad a<x\le b\\ 0 \quad \text{agar} \quad x>b\end{cases}$$

ko'rinishda berilgan bo'lsa. Xususan, $a$=0, $b$=1 bo'lganda

$$f(x)=\begin{cases}0 \quad \text{agar} \quad x\le 0\\ 1 \quad \text{agar} \quad 0<x\le 1\\ 0 \quad \text{agar} \quad x>1\end{cases}$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Misol. Tekis taqsimlangan tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi topilsin va grafigi chizilsin.

Yechish. Quyidagi

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

formuladan foydalanamiz. Agar $x\le a$ bo'lsa,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_{-\infty}^{x} 0dx=0$$

bo'ladi. Agar $a<x\le b$ bo'lsa, u holda

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_{-\infty}^{a} f(x)dx+\int_{a}^{x} f(x)dx=$$

$$=\frac{1}{b-a}\int_{a}^{x} dx=\frac{1}{b-a}x\Big|_{a}^{x}=\frac{x-a}{b-a}$$

ga teng bo'ladi va $x\ge b$ bo'lsa,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_{-\infty}^{a} f(x)dx+\int_{a}^{b} f(x)dx+\int_{b}^{x} f(x)dx=\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} dx=$$
$$=\frac{1}{b-a}x\Big|_{a}^{b}=\frac{b-a}{b-a}=1$$

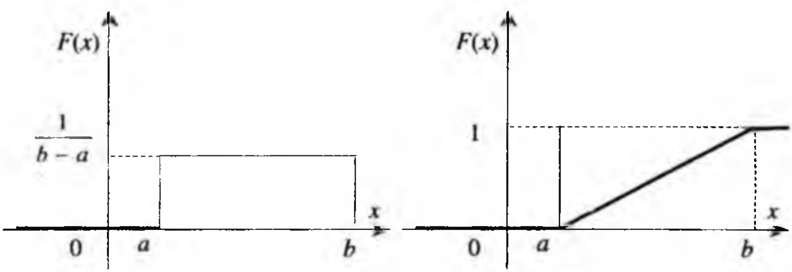
yig'indidagi birinchi va uchinchi integrallar nolga teng.

Shunday qilib, taqsimot qonunini

$$F(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{agar} \quad x\le a \\ \dfrac{x-a}{b-a} \quad \text{agar} \quad a<x<b \\ 1 \quad \text{agar} \quad x>b \end{cases}$$

ga teng ekanligini yuqoridagi usul bilan keltirib chiqarish mumkin.

Tekis taqsimot qonunining zichlik funksiyasi va taqsimot funksiyasining grafigini chizamiz.




*Zichlik funksiyaning xossalari.*

1-xossa. Zichlik funksiya manfiy bo'lmagan funksiyadir:

$$f(x)\ge 0.$$

2-xossa. Zichlik funksiyadan $-\infty$ dan $+\infty$ gacha olingan xosmas integral birga teng:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

**Uzluksiz tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi va dispersiyasi**

Ta'rif. Uzluksiz tasodifiy miqdorning qabul qiladigan qiymatlari (*a*, *b*) oraliqqa tegishli bo'lsa, uning matematik kutilmasi quyidagi aniq integral bilan

$$MX = \int_a^b x dx F(x) = \int_a^b x f(x) dx \qquad (1)$$

aniqlanadi.

Tasodifiy miqdor qabul qiladigan qiymatlar to'plami butun sonlar o'qidan iborat bo'lsa, u holda matematik kutilma quyidagi

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x dx F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \qquad (2)$$

xosmas integral orqali aniqlanadi.

(2) formula uchun xosmas integral absolyut yaqinlashuvchi bo'lsin.

Diskret tasodifiy miqdorlar uchun keltirilgan matematik kutilmaning xossalari uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun ham o'rinlidir.

Misol. Uzluksiz tasodifiy miqdor tekis taqsimot qonuni bilan berilgan bo'lsin. Uning matematik kutilmasi topilsin.

Yechish. Uzluksiz tasodifiy miqdor tekis taqsimot qonuniga ega bo'lsa, uning zichlik funksiyasi $x \in (a,b)$ da $f(x) = \frac{1}{b-a}$ ga va $x \notin (a,b)$ da $f(x) = 0$ ga teng.

U holda

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{a} xf(x)dx + \int_{a}^{b} xf(x)dx + \int_{b}^{+\infty} xf(x)dx =$$

$$= \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} xdx = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_{a}^{b} = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{b^2-a^2}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

Yig'indidagi ikki chetki integrallar nolga teng.

Demak, matematik kutilma tekis taqsimot qonunida $(a,b)$ oraliqning o'rta arifmetik qiymatiga teng ekan.

Xususan, $a$=0, $b$=1 bo'lganda $MX = \frac{1}{2}$ ga teng bo'ladi.

## Uzluksiz tasodifiy miqdorning dispersiyasi

Ta'rif. Agar uzluksiz tasodifiy miqdorning qabul qiladigan qiymatlari ($a$,$b$) oraliqqa tegishli bo'lsa, uning dispersiyasi quyidagi aniq integral

$$DX = \int_{a}^{b} (x-MX)^2 dxF(x) = \int_{a}^{b} (x-MX)^2 f(x)dx \qquad (3)$$

yordamida hisoblanadi, agar tasodifiy miqdorning qabul qiladigan qiymatlar to'plami barcha sonlar o'qidan iborat bo'lsa, u holda dispersiya quyidagi

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-MX)^2 dxF(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-MX)^2 f(x)dx \qquad (4)$$

integral bilan aniqlanadi.

Ko'pincha, hisoblashga quyidagi formula qulaydir:

$$DX = \int_{a}^{b} x^2 f(x)dx - (MX)^2. \qquad (5)$$

Diskret tasodifiy miqdorlar uchun keltirilgan dispersiya xossalari uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun ham o'rinlidir.

Misol. Uzluksiz tasodifiy miqdor tekis taqsimot qonuni bilan berilgan bo'lsin. Uning dispersiyasi topilsin.

Yechish. Yuqoridagi (5) formulaga asosan va $MX = \frac{a+b}{2}$ ekanligini bilgan holda birinchi integralni hisoblaymiz:

$$\int_a^b x^2 f(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2 dx = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_a^b = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{a^3-b^3}{3} =$$
$$= \frac{a^2+ab+b^2}{3}.$$

U holda

$$DX = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} -$$
$$-\frac{a^2+2ab+b^2}{4} = \left(\frac{b-a}{12}\right)^2$$

ga teng bo'ladi.

Dispersiyadan olingan kvadrat ildiz o'rta kvadratik chetlanish deyiladi va

$$\sigma(x) = \sqrt{DX}$$

tenglik bilan aniqlanadi.

Tekis taqsimot qonuni uchun o'rta kvadratik chetlanish

$$\sigma = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

ga teng.

Xususan, $a$=0, $b$=1 bo'lganda, dispersiya $DX = \frac{1}{12}$ ga, o'rta kvadratik chetlanishi esa $\sigma = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ ga teng.

104-ma'ruza

## NORMAL TAQSIMOT QONUNI

Ta'rif. Agar zichlik funksiya

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

ko'rinishda berilgan bo'lsa, u holda uzluksiz tasodifiy miqdor normal taqsimlangan deyiladi, bu yerda $a,\sigma>0$ lar haqiqiy sonlar.

Normal taqsimot qonuni ikkita parametr $a,\sigma>0$ larga bog'liq bo'lib, ularning qanday ma'noga ega ekanligini quyida ko'rib chiqamiz.

Agar $a$=0, $\sigma=1$ bo'lsa, berilgan taqsimot standart normal taqsimot qonuni deyiladi va uning zichlik funksiyasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi ma'lum bo'lsa, uning taqsimot funksiyasini topish formulasiga ko'ra

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx.$$

Normal taqsimot qonuni uchun

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx$$

formulaga, standart normal taqsimot qonuni uchun esa

$$F_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

formulaga egamiz.

## Normal taqsimot qonunining matematik kutilmasi va dispersiyasi

Uzluksiz tasodifiy miqdor matematik kutilmasi formulasiga asosan normal taqsimot qonuni

$$MX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx$$

ifodani yozamiz. Bu yerda $z=\frac{x-a}{\sigma}$ almashtirish kiiritamiz. U holda $x=z\sigma+a$, $dx=zd\sigma$, $-\infty<x<+\infty$, $-\infty<z<+\infty$ larni e'tiborga olib, quyidagi ifodaga kelamiz

$$MX=\frac{\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\sigma z+a)e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}ze^{-\frac{z^2}{2}}dz+\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=$$

$$=-\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}+\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi}=a;$$

Birinchi integral nolga teng, ikikinchi integral esa Puasson integrali bo'lib, u $\sqrt{2\pi}$ ga teng.

Shunday qilib, normal taqsimotning matematik kutilmasi $a$ ga teng ekan, ya'ni $MX=a$.

Dispersiya formulasida $MX=a$ ekanligini e'tiborga olib,

$$DX=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx$$

tenglikni yozamiz va $z=\dfrac{x-a}{\sigma}$, $x-a=\sigma z$, $dx=\sigma dz$, $-\infty<x<+\infty$, $-\infty<z<+\infty$ larga asoslanib quyidagi ifodaga kelamiz

$$DX=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}dz.$$

Oxirgi integralni, bo'laklab integrallab $u=z$, $dv=ze^{-\frac{z^2}{2}}dz$, $du=dz$, $v=-e^{-\frac{z^2}{2}}dz$

$$DX=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left(-ze^{-\frac{z^2}{2}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz\right)=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi}=\sigma^2.$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu yerdan

$$\sigma(x)=\sqrt{DX}=\sqrt{\sigma^2}=\sigma$$

ekanligi kelib chiqadi.

Shunday qilib, ikkinchi parametr $\sigma$ normal taqsimotning o'rta kvadratik chetlanishiga teng ekan.

Standart normal taqsimot qonuni uchun $MX=0$, $\sigma(x)=1$ ekanligi ravshan.

Standart normal taqsimotning zichlik funksiyasi

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

ko'rinishga ega bo'lib, u juft funksiyadir.

Taqsimot funksiyasi

$$F_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}e^{-\frac{z^2}{2}}dz+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu yerda

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0{,}5 \quad \text{va} \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0{,}5$$

larni e'tiborga olsak,

$$F_0(x) = 0{,}5 + \Phi(x)$$

tenglikka ega bo'lamiz. $\Phi(x)$ funksiyaning qiymatlari jadval ko'rinishda 2-ilovada berilgan, bu yerda

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

$\varphi(x)$ funksiyaning simmetrikligi va $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = 1$

tenglikdan $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0{,}5$ ga tengligi kelib chiqadi.

## Normal funksiyaning grafigi

Zichlik funksiyaning

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

grafigi normal egri chiziq (Gauss egri chizig'i) deyiladi.

1. Funksiya barcha sonlar o'qida aniqlangan $D(y): (-\infty; +\infty)$;
2. O'zgaruvchi $x$ ning barcha qiymatlarida funksiya musbat, ya'ni funksiya grafigi $Ox$ o'qidan yuqorida joylashgan;
3. $Ox$ o'qi funksiya uchun gorizontal asimptota bo'ladi. Haqiqatan, $\lim_{x\to+\infty} y = 0$, $\lim_{x\to-\infty} y = 0$.
4. Funksiya ekstrimumini tekshiramiz:

$$y' = -\frac{(x-a)}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

bu yerdan $x=a$ da $y'=0$ ga teng, $x<a$ da $y'>0$ va $x>a$ da $y'<0$. Demak, $x=a$ da funksiya maksimumga ega bo'ladi. $x=a$ da funksiya qiymati $y=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ ga teng.

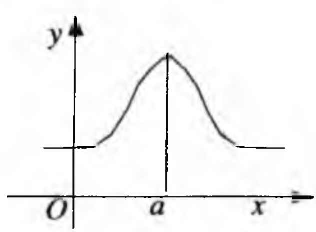
$x=a$ to'g'ri chiziq funksiya uchun simmetriya o'qi hisoblanadi.

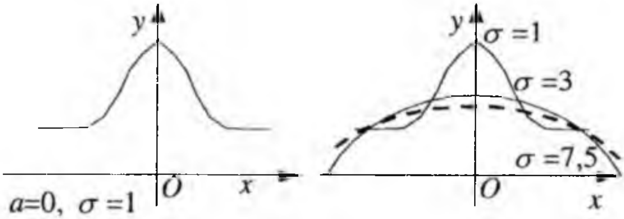
5. Ikkinchi tartibli hosilani topamiz:

$$y'' = -\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \left[1 - \frac{(x-a)^2}{\sigma^2}\right]$$

Bu yerdan ko'rinadiki, $x_1 = a+\sigma$ va $x_2 = a-\sigma$ qiymatlarda $y''=0$ ga teng bo'ladi va shu $x_1$ va $x_2$ nuqtalar atrofida ikkinchi tartibli hosila o'z ishorasini o'zgartiradi. Demak, $x_1$ va $x_2$ nuqtalar funksiyaning burilish nuqtalari bo'ladi. Bu nuqtalarda funksiyaning qiymati $y=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}$ ga teng.

Funksiya grafigini chizamiz.






**Normal taqsimotning berilgan oraliqqa tushish ehtimoli**

Bizga ma'lumki, uzluksiz tasodifiy miqdor $X$ $f(x)$ zichlik funksiya bilan berilgan bo'lsa, tasodifiy miqdor $X$ ning qiymatlari $(\alpha,\beta)$ oraliqqa tushish ehtimoli quyidagi integral yordamida

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

hisoblanadi.

Agar tasodifiy miqdor X normal taqsimlangan bo'lsa, u holda uning qiymatlarining $(\alpha,\beta)$ oraliqqa tushish ehtimoli quyidagiga teng:

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

So'nggi tenglikda quyidagi almashtirishni bajaramiz: $z = \frac{x-a}{\sigma}$, $x = \sigma z + a$, $x = z\sigma + a$. Integral chegaralari quyidagicha o'zgaradi. $x=\alpha$ da $z = \frac{\alpha - a}{\sigma}$, $x = \beta$ da $z = \frac{\beta - a}{\sigma}$, bularni e'tiborga olib integralni quyidagicha yozishimiz mumkin

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} (\sigma\, dz) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\frac{\alpha-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

tenglikka ega bo'lamiz. Shunday qilib, hisoblash uchun qulay bo'lgan quyidagi formulani hosil qildik

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right). \qquad (1)$$

Bu funksiyaning qiymatlari ilovada jadval ko'rinishda berilgan.

Misol. Tasodifiy miqdor $X$ normal taqsimlangan bo'lib, uning matematik kutilmasi $MX$=30 ga va o'rta kvadratik chetlanishi $\sigma(x) = 10$ ga teng bo'lsin. X tasodifiy miqdorning qiymatlari (10,50) oraliqqa tushish ehtimoli topilsin.

Yechish. Masalaning shartiga ko'ra $a$=30, $\sigma(x) = 10$, $\alpha = 10$, $\beta = 50$ ga teng. U holda (1) formulaga asosan

$$P(10 < X < 50) = \Phi\left(\frac{50-30}{10}\right) - \Phi\left(\frac{10-30}{10}\right) = \Phi(2) - \Phi(-2).$$

Bu yerdan tasodifiy miqdor (10; 50) oraliqqa tushish ehtimoli

$$P(10 < X < 50) = 2\Phi(2) = 2 \cdot 0{,}4772 = 0{,}9544.$$

ga teng. Jadvalga asosan $\Phi(2) = 0{,}4772$ bo'ladi.

Yuqorida keltirilgan (1) formuladan foydalanib, normal taqsimlangan tasodifiy miqdor va uning matematik kutilmasi orasidagi ayirmaning absolyut qiymat bo'yicha berilgan $\delta > 0$

dan kichik bo'lish ehtimolini, ya'ni $|x-a|<\delta$ hodisaning ehtimolini hisoblash mumkin.

Haqiqatan, $|x-a|<\delta$ tengsizlikdan $-\delta<|x-a|<\delta$ yoki $a-\delta<x<\delta+a$ ko'rinishda yozish mumkin. Endi (1) formulaga asosan

$$P(|x-a|<\delta)=P(a-\delta<x<a+\delta)=$$

$$\Phi\left(\frac{a+\delta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\delta-a}{\sigma}\right)==\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)-\Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

tenglikni hosil qilamiz.

Shunday qilib, hisoblashga qulay bo'lgan

$$P(|x-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) \tag{2}$$

formula kelib chiqadi. Xususan, $a$=0 bo'lganda

$$P(|x|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) \tag{3}$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Hosil bo'lgan (2) formuladan shuni aytish mumkinki, normal taqsimlangan ikkita tasodifiy miqdorning matematik kutilmalari teng bo'lganda, bu tasodifiy miqdorlarning qiymatlari $(a-\delta,\delta+a)$ oraliqqa tushish ehtimoli katta bo'ladi, qaysi birining o'rta kvadratik chetlanishi kichik bo'lsa.

Misol. Korxona kichik shar shaklidagi mahsulot ishlab chiqaradi. U yaroqli deb hisoblab, sharning diametri loyihada ko'rsatilgan o'lchovdan 0,7 mm kichik bo'lsa, normal taqsimlangan va o'rta kvadratik qiymati $\sigma=0{,}4$ mm bo'lsin. Yuz dona tayyorlangan mahsulotdan nechtasi yaroqli bo'lishi mumkinligi topilsin.

Yechish. Chiqarilayotgan mahsulotning diametrini loyihada ko'rsatilgan o'lchovidan chetlanishi $X$ tasodifiy miqdor deb olinsa, u holda $MX$=$a$=0 ga teng bo'ladi.

Yuqorida keltirilgan (3) formuladan, $\sigma = 0{,}4, \quad \delta = 0{,}7$

$$P(|X| \leq 07) = 2\Phi\left(\frac{0{,}7}{0{,}4}\right) = 2\Phi(1{,}75) = 2 \cdot 0{,}4599 = 0{,}92$$

Shunday qilib, sharning diametri loyihada ko'rsatilgan 0,7 mm o'lchovdan kichik bo'lish ehtimoli 0,92 ga teng ekan.

Endi (2) formulada quyidagi almashtirishni bajaramiz $\delta = \sigma \cdot t$, u holda

$$P(|X - a| \leq \sigma \cdot t) = 2\Phi(t)$$

formulani hosil qilamiz. Bunda $t$=3 desak,

$$P(|x - a| \leq 3\sigma) = 2\Phi(3) = 2 \cdot 0{,}4965 = 0{,}9973$$

bu formulaga «uch sigma» qoidasi deyiladi.

Demak, tasodifiy miqdorning chetlanishi absolyut qiymat bo'yicha o'rta kvadratik chetlanish kichik bo'lish ehtimoli 0,9973 ga teng ekan.

## Ko'rsatkichli taqsimot

Ta'rif. Agar $X$ uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{agar } x \leq 0 \\ \lambda \ell^{-\lambda x} & \text{agar } x \geq 0 \end{cases}$$

ko'rinishda berilgan bo'lsa, u ko'rsatkichli (eksponensial) taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi, bu yerda $\lambda$>0- ixtiyoriy son.

Ko'rsatkichli taqsimot bitta $\lambda$ parametr orqali aniqlanadi.

Ko'rsatkichli taqsimotning taqsimot funksiyasini topamiz.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} odx + x\int_{0}^{x} \ell^{-\lambda x}dx = 1 - \ell^{-\lambda x}$$

Demak, taqsimot funksiya

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{agar } x\le 0\\ 1-\ell^{-\lambda x} & \text{agar } x\ge 0\end{cases}$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

**Ko'rsatkichli taqsimotining matematik kutilmasi va dispersiyasi. Ko'rsatkichli taqsimotning zichlik funksiyasi**

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{agar } x\le 0\\ \lambda\ell^{-\lambda x} & \text{agar } x\ge 0\end{cases}$$

berilgan bo'lsin. Uning matematik kutilmasini topamiz

$$MX=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\lambda\int_{0}^{+\infty} x\ell^{-\lambda x}dx=-x\frac{\lambda}{\lambda}\ell^{-\lambda x}\int_{0}^{+\infty}+\int_{0}^{+\infty}\ell^{-\lambda x}dx=u=x,dv=\ell^{\lambda x}dx$$

$$dx=du,v=-\frac{1}{\lambda}\ell^{-\lambda x}=-\frac{1}{\lambda}\ell^{-\lambda x}\int_{0}^{+\infty}=\frac{1}{\lambda}\qquad MX=\frac{1}{\lambda}$$

Shunday qilib, ko'rsatkichli taqsimotning matematik kutilmasi $\lambda$-parametrining teskari qiymatiga teng ekan.

Dispersiyasi esa

$$DX=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx-(MX)^2=\lambda\int_{0}^{\infty}x^2\ell^{-\lambda x}dx-\frac{1}{\lambda^2}$$

ga teng bo'ladi.

Bu xosmas integralni ham ikki marta bo'laklab integrallash natijasida

$$\lambda\int_{0}^{+\infty}x^2\ell^{-\lambda x}dx=\frac{2}{x^2}$$

tenglik o'rinli ekanligini keltirib chiqarish qiyin emas. U holda dispersiya

$$DX = \frac{1}{\lambda^2}$$

ga teng bo'ladi.

Taqsimotning o'rta kvadratik chetlanishi uning matematik kutilmasiga teng, ya'ni

$$\sigma(x) = \sqrt{DX} = \frac{1}{x} = MX.$$

Ko'rsatkichli taqsimotning qiymatlarini $(a, b)$ oraliqqa tushish ehtimolini hisoblash mumkin.

Haqiqatan, taqsimot funksiya

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad (x \geq 0)$$

ko'rinishda berilgan bo'lsa, u holda

$$P(a < X < b) = F(a) - F(b)$$

formulaga asosan, quyidagi

$$P(a < X < b) = 1 - e^{-b\lambda} - \left(1 - e^{-a\lambda}\right) = e^{-a\lambda} - e^{-b\lambda}$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bu yerda $e^{-x}$ funksiyaning qiymatlari jadvalda keltirilgan.

Misol. ko'rsatkichli taqsimlangan tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & \text{agar} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{agar} \quad x < 0 \end{cases}$$

ko'rinishda berilgan. $X$ tasodifiy miqdorning qiymatlari (0,3; 1) oraliqqa tushish ehtimoli topilsin.

Yechish. Yuqoridagi formulaga asosan va $\lambda = 2$ ekanligini hisobga olib

$$P(0{,}3 < X < 1) = e^{-2 \cdot 0{,}3} - e^{-2 \cdot 1} = e^{-0{,}6} - e^{-2} =$$

$$= 0{,}54881 - 0{,}13534 = 0{,}41$$

ehtimoli 0,41 ga teng ekanligini aniqlaymiz.

## Normal taqsimotning tatbiqi

**Misol.** $X$ tasodifiy miqdor – asbobning xatoligi normal taqsimlangan bo'lib, u sistematik xatoliklarga ega emas, 0,8 ehtimol bilan $\pm 20$ *m* li chegaradan chiqmaydi. Shu asbobning o'rtacha xatoligini aniqlang.

**Yechish.** Masala shartiga ko'ra

$$P(|X| \le 20) = 0{,}8 .$$

Tasodifiy xatoliklar zichligi normal taqsimlangan va $\bar{x} = 0$ (sistematik xatoliklar yo'q) bo'lgani uchun

$$P(|X| \le 20) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{20}{E}\right) - \Phi\left(-\frac{20}{E}\right)\right] = \Phi\left(\frac{20}{E}\right)$$

U holda

$$\Phi\left(\frac{20}{E}\right) = 0{,}8$$

transsendent tenglamani yechib, ya'ni Laplas funksiyasining qiymatlar jadvalidan foydalanib

$$\frac{20}{E} = 1{,}90 ,$$

bu yerdan

$$E = \frac{20}{1{,}90} = 10{,}5m .$$

105-ma'ruza

# IKKI TASODIFIY MIQDORLAR SISTEMASI

Yuqorida kiritilgan tasodifiy miqdorlar xoh ular diskret bo'lsin, xoh uzluksiz bo'lsin, birgina qiymatlar bilan aniqlanar edi, ularni bir o'lchovli tasodifiy miqdorlar deb qarash mumkin.

Ko'pgina masalalarda bir o'lchovli tasodifiy miqdorlargina emas, balki ikki, uch va hokazo o'lchovli tasodifiy miqdorlarni, ya'ni qabul qiladigan qiymatlari $x=(x_1,x_2)$ yoki $x=(x_1,x_2,x_3)$ va hokazo nuqtalardan iborat bo'lgan tasodifiy miqdorlar taqsimoti va qonuniyatlarini o'rganishga to'g'ri keladi. Biz asosan ikki tasodifiy miqdorlar sistemasini ko'rib chiqamiz.

## Ikki o'lchovli diskret tasodifiy miqdorlar

Ta'rif. Ikki o'lchovli diskret tasodifiy miqdorlar sistemasining barcha qabul qila olishi mumkin bo'lgan $(x_i, y_j)$ $(i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m})$ juft qiymatlari bilan ularning mos ehtimolliklari orasidagi munosabatni diskret tasodifiy miqdorlar sistemasining taqsimot qonuni deyiladi.

Diskret tasodifiy miqdor sistemasining taqsimot qonuni odatda jadval ko'rinishda beriladi. Jadvalning birinchi yo'l elementlari $X$ tasodifiy miqdorning qabul qila olishi mumkin bo'lgan barcha qiymatlari, birinchi ustun elementlari bo'yicha esa $Y$ tasodifiy miqdorning qabul qila olishi mumkin bo'lgan qiymatlari va barcha holatlarga ularning mos ehtimolliklari yoziladi. Tabiiyki, barcha ehtimollar yig'indisi birga teng, chunki ular hodisalarning to'liq guruhini tashkil etadi.

| X \ Y | $x_1$ | ... | $x_i$ | ... | $x_n$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | $P(x_1, y_1)$ | ... | $P(x_i, y_1)$ | ... | $P(x_n, y_1)$ | $P(y_1) = \sum_{i=1}^{n} P(x_i, y_1)$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $y_j$ | $P(x_1, y_j)$ | ... | $P(x_i, y_j)$ | ... | $P(x_n, y_j)$ | $P(y_j) = \sum_{i=1}^{n} P(x_i, y_j)$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $y_m$ | $P(x_1, y_m)$ | ... | $P(x_i, y_m)$ | ... | $P(x_n, y_m)$ | $P(y_m) = \sum_{i=1}^{n} P(x_i, y_m)$ |
| ... | $P(x_1)$ | ... | $P(x_i)$ | ... | $P(x_n)$ | $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} P(x_i, y_j) = 1$ |

Diskret tasodifiy miqdorlar sistemasining taqsimot qonuni ma'lum bo'lsa, ularning tashkil etuvchilarining, ya'ni $X$ va $Y$ tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonunini topish uchun qiyin emasligi keltirilgan jadvaldan ko'rinib turibdi. Haqiqatan, masalan, quyidagi $(X = x_1; Y = y_1)$, $(X = x_1; Y = y_2)$, ..., $(X = x_1; Y = y_m)$ hodisalar birgalikda bo'lmagan hodisalar bo'lsa, $P(x_1)$ ehtimol barcha hodisalar ehtimollarining yig'indisidan iborat bo'ladi, ya'ni

$$P(x_1) = p(x_1; y_1) + p(x_1; y_2) + \ldots + p(x_1; y_m)$$

ga teng bo'ladi.

Shunday qilib, $X$ tasodifiy miqdor $x_1$ qiymatni qabul qilish ehtimoli shu ustundagi barcha ehtimollar yig'indisiga teng ekan.

Huddi shuningdek, $Y$ tasodifiy miqdorning $y_1$ qiymatni qabul qilish ehtimoli

$$P(y_1) = p(x_1; y_1) + p(x_2; y_1) + \ldots + p(x_m; y_1)$$

ga teng bo'lib, $y_1$ qatorda turgan barcha ehtimollar yig'indisidan iborat ekan. $X$ va $Y$ tashkil etuvchilarning mos qiymatlarni qabul qilish ehtimollari yuqoridagi kabi aniqlanadi.

Misol. Diskret tasodifiy miqdor sistemasining taqsimot qonuni jadval ko'rinishda berilgan, ularning tashkil etuvchilarining taqsimot qonuni topilsin.

| $Y \backslash X$ | $x_1$ | $x_i$ | $x_3$ | $\sum_{j=1}^{3} P(y_j)$ |
|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | 0,12 | 0,06 | 0,14 | 0,32 |
| $y_2$ | 0,15 | 0,13 | 0,08 | 0,36 |
| $y_3$ | 0,03 | 0,19 | 0,10 | 0,32 |
| $\sum_{i=1}^{3} P(x_i)$ | 0,3 | 0,38 | 0,32 | 1 |

Keltirilgan jadvaldan ko'rinadiki, $X$ va $Y$ tashkil etuvchi tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonuni, mos ravishda quyidagilarga

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$: | $x_1$ | $x_1$ | $x_3$ | va | $Y$: | $y_1$ | $y_1$ | $y_3$ |
| $P$: | 0,3 | 0,38 | 0,32 | | $P$: | 0,32 | 0,36 | 0,32 |

teng ekan.

Barcha ehtimollar yig'indisi birga teng ekanligi jadvaldan ko'rinib turibdi.

## Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi

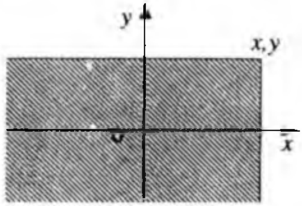
Ta'rif. Har qanday ikkita $x$ va $y$ sonlar $X$ tasodifiy miqdorning $x$ dan kichik, va $Y$ tasodifiy miqdorning $y$ dan kichik qiymatlar qabul qilish hodisasining ehtimoli, ya'ni

$$F(x,y)=P(X<x,Y<y)$$

funksiyani ikki o'lchovli $(X, Y)$ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi deyiladi.

Bu yerda tashkil etuvchi tasodifiy miqdorlar, ya'ni $X$ va $Y$

lar uzuluksiz ham, diskret ham bo'lishi mumkin.




1-rasm.

## Taqsimot funksiyasining xossalari

1-xossa. Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi uchun quyidagi

$$0 \le F(x,y) \le 1$$

tengsizliklar o'rinli.

2-xossa. Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi uchun har bir argumentiga nisbatan kamayuvchi bo'lmagan funksiyadir, ya'ni

$$F(x_2,y) \ge F(x_1,y) \quad \text{agar} \quad x_2 > x_1$$

$$F(x,y_2) \ge F(x,y_1) \quad \text{agar} \quad y_2 > y_1$$

tengsizliklar o'rinli.

3-xossa. Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi uchun quyidagi munosabatlar o'rinli:

1) $F(-\infty,0)=0$, 2) $F(0,-\infty)=0$,

3) $F(-\infty,-\infty)=0$, 4) $F(+\infty,+\infty)=1$.

4-xossa. a) Agar $y=+\infty$ bo'lsa, u holda ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi $X$ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini aniqlaydi, ya'ni

$$F(x,+\infty)=F_1(x)$$

b) Agar $x=+\infty$ bo'lsa, u holda ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi $Y$ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini aniqlaydi, ya'ni

$$F(+\infty, y) = F_2(y).$$

Yuqorida keltirilgan xossalarning isboti ustida to'xtalmaymiz.

Ixtiyoriy tashlangan nuqtaning $x_1 \le X < x_2$ va $Y < y$ yarim tekislikka tushish ehtimoli

$$P(x_1 \le X < x_2, Y < y) = F(x_2, y) - F(x_1, y) \qquad (*)$$

tenglik bilan, $X < x$ va $y_1 \le Y < y_2$ yarim tekislikka tushish ehtimoli esa

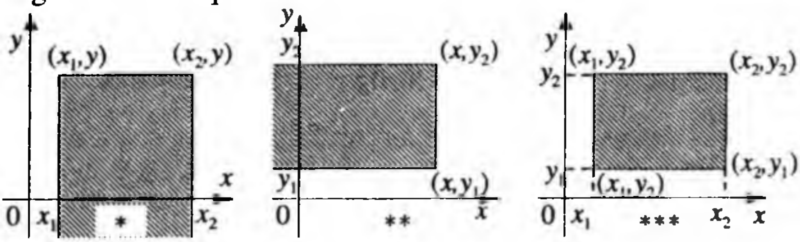
$$P(X < x, y_1 \le Y < y_2) = F(x, y_2) - F(x, y_1) \qquad (**)$$

tenglik bilan aniqlanadi.

Umuman nuqtaning to'g'ri to'rtburchakka, ya'ni $y_1 \le Y < y_2$, $x_1 \le X < x_2$ oraliqqa tushish ehtimoli

$$P(x_1 \le X < x_2, y_1 \le Y < y_2) = [F(x_2, y_2) - F(x, y_2)] - -[F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1)] \qquad (**)$$

tenglik bilan aniqlanadi.




## Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi berilgan bo'lsin. Taqs'mot funksiyasi ($x$, $y$) o'zgaruvchilarga nisbat uzluksiz va uzluksiz xususiy hosilalar ega bo'lsin.

Ta'rif. Ikki o'lchovli taqsimot funksiyasidan olingan ikkinchi tartibli aralash xususiy hosilaga, ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi deyiladi va

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}$$

ko'rinishda belgilanadi.

Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi berilgan bo'lsa, uning taqsimot funksiyasini

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy \qquad (1)$$

formula yordamida topish mumkin.

1-misol. Agar ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}\sin(x+y) & \text{agar} \quad 0\le x\le\frac{\pi}{2},\ 0\le y\le\frac{\pi}{2}\\ 0 \quad \text{agar} & \begin{matrix}-\infty<x<0, & \frac{\pi}{2}<x<+\infty\\ -\infty<y<0, & \frac{\pi}{2}<y<+\infty\end{matrix}\end{cases}$$

ko'rinishda berilgan bo'lsa. Uning taqsimot funksiyasini toping.

Yechish. Yuqorida keltirilgan (1) formulaga asosan yozamiz

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy=\int_{0}^{x}\int_{0}^{y}\frac{1}{2}\sin(x+y)dxdy=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_{0}^{x}\cos(x+y)\Big|_0^y dy=-\frac{1}{2}\int_{0}^{x}(\cos(x+y)-\cos x)dx=$$

$$=-\frac{1}{2}(\sin(x+y))\Big|_0^x+(\sin x)\Big|_0^x=-\frac{1}{2}(\sin(x+y)+\sin x-\sin y)=$$

$$=\frac{1}{2}(-\sin x+\sin y-\sin(x+y)).$$

## Zichlik funksiyasining xossalari

1-xossa. Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi o'zgaruvchi $x$ va $y$ larning har qanday qiymatida manfiy bo'lmagan funksiyadir, ya'ni

$$f(x,y)\geq 0$$

2-xossa. Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasidan $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$ oraliq bo'yicha olingan xosmas integral qiymati birga teng, ya'ni

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1.$$

Keltirilgan xossalarning isbotlari ustida to'xtalmaymiz, lekin xossaning tatbiqi sifatida quyidagi misolni keltiramiz.

2-misol. Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi $f(x,y)=\dfrac{c}{(9+x^2)(16+y^2)}$ ko'rinishda berilgan bo'lsa, o'zgarmas $c$ ning qiymatini topamiz.

Yechish. 2-xossaga asosan yozamiz

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = c\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dxdy}{(9+x^2)(16+y^2)} =$$

$$= c\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{y}{4}\bigg|_{-\infty}^{+\infty}\right)\frac{dx}{9+x^2} = \frac{c}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}(\operatorname{arctg}\infty + \operatorname{arctg}\infty)\frac{dx}{9+x^2} =$$

$$= \frac{c\pi}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{9+x^2} = \frac{c\pi}{4}\cdot\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\bigg|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{c\pi^2}{12} = 1; \quad c = \frac{12}{\pi^2}.$$

## Ikki tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi yordamida bir o'lchovli zichlik funksiyalarni aniqlash

Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasidan foydalanib, tashkil etuvchilardan biri $X$ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasini aniqlaymiz. Bizga ma'lumki, agar $X$ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini $F_1(x)$ deb olsak, u holda zichlik funksiya

$$f_1(x)=\frac{dF_1(x)}{dx}$$

tenglik bilan aniqlanadi. Bu yerda

$$F_1(x)=F(x;+\infty)$$

ekanligini hisobga olsak,

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy$$

dan

$$F_1(x)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy$$

tenglikni yozish mumkin. Bundan

$$\frac{dF_1(x)}{dx}=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$$

yoki

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$$

ekanligi kelib chiqadi.

Xuddi shuningdek, $Y$ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$f_2(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$$

formula bilan aniqlanadi.

Misol. Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{6\pi}, & \text{agar } \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}\le 1\\ 0, & \text{agar } \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}\ge 1\end{cases}$$

ko'rinishda berilgan bo'lsin. $X$ va $Y$ tasodifiy miqdorlarning zichlik funksiyalari topilsin.

Yechish. Avval $X$ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasini topamiz:

$$f_1(x)=\frac{1}{6\pi}\int\limits_{-2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}}^{2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}}dy=\frac{2}{6\pi}\int\limits_{0}^{2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}}dy=\frac{2}{9\pi}\sqrt{9-x^2}.$$

Shunday qilib,

$$f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{9\pi}\sqrt{9-x^2}, & \text{agar } |x|<3\\ 0, & \text{agar } |x|\ge 3.\end{cases}$$

Xuddi shuningdek, $Y$ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasini topamiz:

$$f_2(y)=\frac{1}{6\pi}\int\limits_{-3\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}}^{3\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}}dx=\frac{2}{6\pi}\int\limits_{0}^{3\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}}dx=\frac{1}{2\pi}\sqrt{4-y^2}.$$

Shunday qilib,

$$f_2(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{4-y^2}, & \text{agar } |y|<2\\ 0, & \text{agar } |y|\ge 2.\end{cases}$$

Bu yerdan

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)dx = 1 \quad \text{va} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(y)dy = 1$$

ekanligi ravshan.

Haqiqatan,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)dx = \int_{-\infty}^{-3} f_1(x)dx + \int_{-3}^{3} f_1(x)dx + \int_{3}^{+\infty} f_1(x)dx =$$

$$= \frac{2\cdot 2}{9\pi}\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx = \frac{4}{3\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\cos^2 t} - 3\cos t dt = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt =$$

$$x = 3\sin t; \quad dx = 3\cos t dt; \quad x = 0; \quad t = 0; \quad x = 3; \quad t = \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt + \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t dt =$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sin 2t}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

Xuddi shuningdek, $\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(y)dy = 1$ ekanligini isbotlash mumkin.

106-ma'ruza

## IKKI O'LCHOVLI TASODIFIY MIQDORLAR SISTEMASI TASHKIL ETUVCHILARINING TAQSIMOT QONUNLARI

I. Tashkil etuvchi $X$ va $Y$ lar diskret tasodifiy miqdorlar bo'lib, ularning qabul qiladigan qiymatlari mos ravishda $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$, va $y_1$, $y_2$, ... $y_n$, bo'lsin.

Tajriba o'tkazish natijasida $Y=y_1$ qiymatni qabul qilgan bo'lsin. U holda $X$ yoki $x_1$, yoki $x_2$, ..., yoki $x_n$ lardan bittasini qabul qilishi mumkin. Ularning ehtimolliklarini mos ravishda quyidagi shartli ehtimolliklar bilan $p(x_1/y_1), p(x_2/y_1),..., p(x_n/y_1)$ belgilaymiz.

Umuman, $Y = y_j$ qiymatni qabul qilsa, mos shartli ehtimollarini

$$p(x_1/y_j), p(x_2/y_j),..., p(x_n/y_j) \quad p(Xn / y_j)$$

lar bilan belgilaymiz.

Shartli ehtimollik umumiy holda quyidagi

$$p(x_i/y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)} \quad (i = 1,...,n, \quad j = 1,...,m)$$

formula bilan hisoblanadi.

Xuddi shuningdek, $p(y_j/x_i)$ ehtimollik esa

$$p(y_j \ /x_i) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)} \quad (i = 1,...,n, \quad j = 1,...,m)$$

ehtimollik bilan hisoblanadi.

Tabiiyki, shartli ehtimolliklarning yig'indisi birga teng, ya'ni

$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i/y_j) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i, y_j)/p(y_j) = \frac{p(y_j)}{p(y_j)} = 1$$

$$\sum_{j=1}^{m} p(y_j/x_i) = \sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j)/p(x_i) = \frac{p(x_i)}{p(x_i)} = 1 .$$

Misol. Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorlar sistemasi quyidagi taqsimot qonuniga ega bo'lsin:

| $Y \backslash X$ | $x_1$ | $x_i$ | $x_3$ | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | 0,15 | 0,25 | 0,05 | 0,45 |
| $y_2$ | 0,10 | 0,16 | 0,29 | 0,55 |
| $\sum$ | 0,25 | 0,41 | 0,34 | $\sum\sum = 1$ |

Yuqorida keltirilgan formuladan foydalanib yozamiz

$$p(x_1/y_1) = \frac{p(x_1, y_1)}{p(y_1)} = \frac{0,15}{0,45} = \frac{1}{3}$$

$$p(x_2/y_1) = \frac{p(x_2, y_1)}{p(y_1)} = \frac{0,25}{0,45} = \frac{5}{9}$$

$$p(x_3/y_1) = \frac{p(x_3, y_1)}{p(y_1)} = \frac{0,05}{0,45} = \frac{1}{9}$$

$$\sum_{i=1}^{3} p(x_i/y_j) = \frac{1}{3} + \frac{5}{9} + \frac{1}{9} = \frac{9}{9} = 1 .$$

Xuddi shuningdek, ikkinchi formulaga asosan

$$p(y_1/x_1) = \frac{p(x_1, y_1)}{p(x_1)} = \frac{0,15}{0,25} = \frac{3}{5}$$

$$p(y_2/x_1) = \frac{p(x_1, y_2)}{p(x_1)} = \frac{0,10}{0,25} = \frac{2}{5}$$

$$\sum_{j=1}^{2} p(y_j/x_i) = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} = \frac{5}{5} = 1 .$$

Shunday usul bilan barcha shartli ehtimolliklarni hisoblash mumkin.

**II.** Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorlar sistemasining tashkil etuvchilari uzluksiz tasodifiy miqdorlardan iborat bo'lsin.

Tashkil etuvchilarning, $Y=y$ qiymatni qabul qilgandagi shartli zichlik funksiyasi

$$\varphi(x/y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}$$

formula bilan aniqlanadi.

Bu tengliklarni quyidagicha yozish mumkin

$$\varphi(x/y)=\frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx};$$

$$\varphi(y/x)=\frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy}.$$

Misol. Ikki o'lchovli tasodifiy miqdorlar sistemasining zichlik funksiyasi

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi r^2} & \text{agar} \quad x^2+y^2<r^2\\ 0 & \text{agar} \quad x^2+y^2\geq r^2\end{cases}$$

shartli zichlik funksiyalari topilsin.

Yechish. Avval $X$ tashkil etuvchining shartli zichlik funktsyasini topamiz.

Ma'lumki, yuqorida keltirilgan formulaga asosan yozamiz

$$\varphi(x/y)=\frac{\dfrac{1}{\pi r^2}}{\dfrac{1}{\pi r^2}\int\limits_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}}dx}=\frac{\dfrac{1}{\pi r^2}}{2\sqrt{r^2-y^2}}$$

Xuddi shuningdek,

$$\psi\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{2\sqrt{r^2-y^2}}$$

ekanligi kelib chiqadi.

## Shartli matematik kutilma

### I. $X$ va $Y$ tasodifiy miqdorlar diskret bo'lsin

Tasodifiy miqdor $X=x$ qiymatni qabul qilganda $Y$ tasodifiy miqdorning shartli matematik kutilmasi, $Y$ tasodifiy miqdor qabul qiladigan qiymatlarini, ularning mos shartli ehtimolliklari ko'paytmalarining yig'indisiga teng, ya'ni

$$M\left(\frac{Y}{X=x}\right)=\sum_{j=1}^{m} y_j p\left(\frac{y_j}{x}\right)$$

Tasodifiy miqdor $Y=y$ qiymatni qabul qilganda $X$ tasodifiy miqdorning shartli matematik kutilmasi, $X$ tasodifiy miqdor qabul qiladigan qiymatlari ularning mos shartli ehtimolliklari ko'paytmalarining yig'indisiga teng, ya'ni

$$M\left(\frac{X}{Y=y}\right)=\sum_{i=1}^{n} x_i p\left(\frac{x_i}{y}\right)$$

### II. $X$ va $Y$ tasodifiy miqdorlar uzluksiz bo'lsin

Uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun shartli matematik kutilma

$$M\left(\frac{Y}{X=x}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} y\psi\left(\frac{y}{x}\right)dy$$

yoki

$$M\left(X/_{Y=y}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\chi\left(x/_{y}\right)dx$$

ko'rinishda belgılanadi.

Yuqorida keltirilgan $M\left(Y/_{X=x}\right)$ shartli matematik kutilma $x$ ning funksiyasidir, shuning uchun

$$M\left(Y/_{X=x}\right)=f(x)$$

funksiyani $Y$ ni $X$ dagi regressiya funksiyasi deyiladi.

Xuddi shuningdek,

$$M\left(X/_{Y=y}\right)=\varphi(y)$$

funksiyani $X$ ni $Y$ dagi regressiya funksiyasi deyiladi.

## Bog'liq va bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar

Teorema. Ikki $X$ va $Y$ tasodifiy miqdorlar bog'liq bo'lmagani uchun, tasodifiy miqdorlar sistemasining taqsimot funksiyasi, tashkil etuvchi $X$ va $Y$ tasodifiy miqdorlar taqsimot funksiyalarining ko'paytmasiga teng bo'lishi zarur va yetarlidir, ya'ni

$$F(x,y)=F_1(x)F_2(y) \tag{1}$$

tenglik o'rinli bo'lishi kerak.

Bu teoremaning isboti $X<x$ va $Y<y$ hodisalarning bog'liq emasligidan,

$$P(X<x,Y<y)=P(X<x)P(Y<y) \tag{2}$$

tenglik o'rinli ekanligi kelib chiqadi. Bu esa (1) tenglikni keltirib chiqaradi va aksincha, (1) tenglikdan (2) tenglik to'g'ri ekanligi kelib chiqadi.

Agar $X$ va $Y$ tasodifiy miqdorlar uzluksiz bo'lsa, u holda quyidagi natija o'rinlidir.

Natija. Ikkita uzluksiz $X$ va $Y$ tasodifiy miqdorlar bog'liq bo'lmagani uchun, tasodifiy miqdorlar sistemasining zichlik funksiyasi, tashkil etuvchilar zichlik funksiyalarining ko'paytmasiga teng bo'lishi zarur va yetarlidir, ya'ni

$$f(x, y) = f_1(x) f_2(y). \qquad (3)$$

# MATEMATIK STATISTIKA ELEMENTLARI

Matematik statistika vazifalari. Emperik taqsimot va uning xossalari. Tanlanma xarakteristikalar va ularning taqsimoti. Taqsimot parametrlarining statistik baholari. Nuqtaviy va intervalli baholar.

Ommaviy tasodifiy hodisalar bo'ysunadigan qonuniyatlarni aniqlash statistik ma'lumotlarni kuzatish natijalarini o'rganishga asoslanadi. Matematik statistikaning birinchi vazifasi - statistik ma'lumotlarni to'plash va (agar ma'lumotlar juda ko'p bo'lsa) gruppalash usullarini ko'rsatishdir.

Matematik statistikaning ikkinchi vazifasi - statistik ma'lumotlarni tahlil qilish metodlarini tadqiqot masalalariga muvofiq ishlab chiqishdir.

## 1. Bosh va tanlanma to'plam

Bir jinsli ob'yektlar to'plamini bu ob'yektlarni xarakterlovchi biror sifat yoki son belgiga nisbatan o'rganish talab qilinsin. Masalan, agar biror xil detallar partiyasi bo'lsa, u holda detalning sifat belgisi bo'lib, uning standartligi, son belgisi bo'lib esa detalning o'lchami xizmat qilishi mumkin. Ba'zan yalpi, ya'ni to'plamdagi ob'yektlarning har birini o'rganilayotgan belgiga nisbatan tekshiriladi. Lekin yalpi tekshirish amalda ham qo'llaniladi. To'plam juda ko'p ob'yektlarni o'z ichiga olgan bo'lsa, u holda yalpi tekshirish jismonan mumkin emas. Bunday hollarda to'plamdan chekli sondagi ob'yektlar tasodifiy ravishda olinadi va ular o'rganiladi.

Tanlanma to'plam deb, tasodifiy ravishda tanlab olingan ob'yektlar to'plamiga aytiladi.

Bosh to'plam deb, tanlanma ajratiladigan ob'yektlar to'plamiga aytiladi.

To'plam hajmi deb, bu to'plamdagi ob'yektlar soniga aytiladi. N-bosh to'plam hajmi, n-esa tanlanma to'plam hajmi

## 2. Tanlanmaning statistik taqsimoti

Bosh to'plamdan tanlanma olingan. Bunda $x_1$ qiymat $n_1$ marta, $x_2$ qiymat $n_2$ marta va hokazo $x_k$ qiymat, $n_k$ marta kuzatilgan, bunda $\sum$ ni = n bo'lib, n-tanlanma to'plam hajmi, $n_i$- chastotalari $\sum n_i = n$ bo'lsin. Kuzatilgan $x_i$ qiymatlar variantalar. variantlarning ortib borishi tartibida yozilgan ketma-ketligi esa variatsion qator deyiladi. Chastotalarni. tanlanma to'plamning hajmiga nisbati $n_i /n=w_i$ yani nisbiy chastotalar deyiladi.

Tanlanmaning statistik taqsimoti deb, variantalar va ularga mos chastotalar yoki nisbiy chastotalar ketma-ketligiga aytiladi. Statistik taqsimotni yana intervallar va ularga tegishli chastotalar ketma-ketligi ko'rinishida ham berish mumkin.

Taqsimot deyilganda ehtimollar nazariyasida tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari va ularning ehtimollari orasidagi moslik, matematik statistikada esa kuzatilgan variantalar va ularning chastotalari va nisbiy chastotalari orasidagi moslik tushuniladi.

Misol: Hajmi 20 bo'lgan tanlanmaning chastotalar taqsimoti berilgan:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x_i$ | 2 | 6 | 12 |
| $n_i$ | 3 | 10 | 7 |

Nisbiy chastotalar taqsimoti ko'rinishida yozing.

Yechish: $w_1=n_1/n=3/20=0,15$. $w_2=10/20=0,5$. $w_3=0,35$.

U holda:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x_i$ | 2 | 4 | 12 |
| $n_i$ | 0,15 | 0,5 | 0,35 |

Tekshirish: $w_1+w_2+w_3=0,15+0,5+0,35=1$.

## 3. Taqsimotning empirik funksiyasi

Aytaylik, $X$ son belgi chastotalarning statistik taqsimoti ma'lum bo'lsin. $N_x$-belgining $x$ dan kichik qiymati kuzatilgan kuzatishlar soni; $n$-tanlanma hajmi. Ravshanki, $X<x$ hodisaning nisbiy chastotasi $n_x/n$ ga teng. Agar $x$ o'zgaradigan bo'lsa, u holda umuman aytganda, nisbiy chastotasi ham o'zgaradi, ya'ni $n_x/n$ nisbiy chastota $x$ ning funksiyasidir. Bu funksiya empirik yo'l bilan topiladiganligi uchun u empirik funksiya deyiladi.

Taqsimotning empirik funksiyasi deb, har bir x qiymati uchun $X<x$ hodisaning ehtimolini aniqlaydigan $F^*(x)$ funksiyaga aytiladi. Shunday qilib ta'rifga ko'ra $F^*(x)=n_x/n$.

Bosh to'plam taqsimotining $F(x)$ integral funksiyasini, tanlanma taqsimotining empirik funksiyasidan farq qilib taqsimotning nazariy funksiyasi deyiladi. E mpirik va nazariy funksiyalar orasidagi farq shundaki, $F(x)$ nazariy funksiya $X<x$ hodisa ehtimolini, $F^*(x)$ empirik funksiya esa shu hodisaning o'zining nisbiy chastotasini aniqlaydi. Bernulli teoremasidan kelib chiqadiki, $X<x$ hodisaning nisbiy chastotasi, ya'ni $A^*(x)$ shu hodisaning $F(x)$ ehtimoliga ehtimol bo'yicha yaqinlashadi. Boshqacha so'z bilan aytganda $F^*(x)$ va $F(x)$ sonlar bir-biridan kam farq qiladi. Shu yerning o'zidanoq, bosh to'plam taqsimotining nazariy funksiyasini taqribiy tasvirlashda tanlanma taqsimotining empirik funksiyasidan foydalanishi maqsadga muvofiq bo'lishi kelib chiqadi.

Bunday xulosa shu bilan ham tasdiqlanadiki, $F^*(x)$ funksiya F(x) ning barcha xossalariga ega. Darhaqiqat, $F^*(x)$ funksiyaning ta'rifidan uning quyidagi xossalari kelib chiqadi.

1). Empirik funksiya qiymatlari [0,1] kesmaga tegishli;

2). $F^*(x)$ - kamaymaydigan funksiya;

3). $x_1$ - eng kichik varianta bo'lsa, u holda $X \le x_1$ da $F^*(x)=0$;

$x_k$ – eng katta varianta bo'lsa, u holda $X>x_k$ da $F^*(x)=1$;

Shunday qilib, tanlanma taqsimotning empirik funksiyasi bosh to'plam taqsimotning nazariy funksiyasini baholash uchun xizmat qiladi.

Misol: Tanlanmaning quyida berilgan taqsimoti bo'yicha uning empirik funksiyasini tuzing.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Variantalar: | $x_i$ | 2 | 6 | 10 |
| Chastotalar: | $n_i$ | 12 | 18 | 30 |

***Yechish:*** Tanlanma hajmini topamiz: 12+18+30=60.

Eng kichik varianta 2 ga teng, demak:
$x$ $X \le 2$ da $F^*(x)=0$

$X<6$ qiymat, xususan, $x_1=2$ qiymat 12 marta kuzatilgan, demak: $2<X\le 6$ da $F^*(X)=12/60=0,2$.

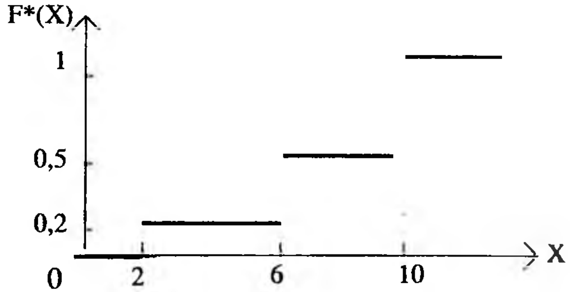
$X<10$ qiymatlar, jumladan $X_1=2$ va $X_2=6$ qiymatlar $12+18=30$ marta kuzatilgan, demak:

$6<X\le 10$ da $F^*(X)=30/60=0,5$.

$X=10$ eng katta varianta bo'lgani uchun $X>10$ da $F^*(X)=1$.

$$F'(x)=\begin{cases} x\le 2 & \text{da } 0. \\ 2<x\le 6 & \text{da } 0,2. \\ 6<x\le 10 & \text{da } 0,5. \\ x>10 & \text{da } 1. \end{cases}$$

Bu funksiyaning grafigi quyidagicha:




## 4. Taqsimot parametrlarining statistik baholari

Aytaylik, bosh to'plamning son belgisini o'rganish talab qilinayotgan bo'lsin. Faraz qilaylik, shu belgi qaysi taqsimotga ega ekanligi nazariy mulohazalardan aniqlangan bo'lsin. Bu taqsimotni aniqlaydigan parametrlarni baholash masalasi yuzaga kelishi tabiiydir.

Odatda tadqiqotchi ixtiyorida tanlanmadagi ma'lumotlargina, masalan, son belgining $n$ ta kuzatish natijasida olingan $x_1$, $x_2$, $x_3$, ..., $x_n$ qiymatlari bo'ladi.

Baholanayotgan belgi xuddi shu ma'lumotlar orqali ifodalanadi.

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ ni erkli $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ deb qarab, nazariy taqsimot ma'lum parametrining statistik bahosini topish, bu demak, kuzatilayotgan tasodifiy miqdorlar orqali shunday funksiyani topishdirki, u baholanayotgan parametrning taqribiy qiymatini beradi.

Shunday qilib, nazariy taqsimot noma'lum parametrning statistik bahosi deb, kuzatilgan tasodifiy miqdorlardan tuzilgan funksiyaga aytiladi.

Nuqtaviy baho deb, bitta son bilan aniqlanadigan statistik bahoga aytiladi.

Aytaylik, $\theta^*$ nazariy taqsimot $\theta$ noma'lum parametrlarning statistik bahosi bo'lsin.

Siljimagan baho deb, tanlanmaning hajmi istalgancha bo'lganda ham matematik kutilish baholanayotgan θ parametrga teng, ya'ni

$$M(\theta^*)=\theta$$

bo'lgan $\theta^*$ nuqtaviy bahoga aytiladi.

Siljigan baho deb, matematik kutilishi baholanayotgan parametrga teng bo'lmagan nuqtaviy bahoga aytiladi.

Ammo siljimagan baho har doim ham baholanayotgan parametrning yaxshi yaqinlashishini beradi deb hisoblash xato. $\theta^*$ ning mumkin bo'lgan qiymatlari uning o'rtacha qiymati atrofida ancha tarqoq, ya'ni $D(\theta^*)$ dispersiya anchagina katta bo'lishi mumkin. Agar $\theta^*$ ning dispersiyasi kichik bo'lishini talab qiladigan bo'lsak, u holda katta xatoga yo'l qo'yishning oldini olgan bo'lamiz. Shu sababli statistik bahoga effektivlik talabi qo'yiladi.

Effektiv baho deb mumkin bo'lgan eng kichik dispersiyaga ega bo'lgan statistik bahoga aytiladi.

## Bosh to'plamning o'rtacha qiymat. O'rtacha tanlanma to'plamning qiymati

Bosh to'plamning o'rtacha qiymat $\bar{x}_B$ deb bosh to'plam belgisi qiymatlarining arifmetik o'rtacha qiymatiga aytiladi.

Agar $N$ hajmli bosh to'plam belgisining barcha $x_1$, $x_2$, ..., $x_N$ qiymatlari turlicha bo'lsa, u holda

$$\bar{x}_B=(x_1+x_2+...+x_N)/N.$$

Agar belgining $x_1$, $x_2$, ..., $x_k$ qiymatlari mos $N_1$, $N_2$, ..., $N_k$ chastotalarga ega va, $N+N_2+...+N_k=N$ bo'lsa,

$$\bar{x}_B=(x_1N_1+x_2N_2+...+x_kN_k)/N.$$

Agar $n$ hajmli tanlanma belgisining barcha $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ qiymatlari turlicha bo'lsa, u holda

$$\bar{x}_T=(x_1+x_2+...+x_n)/n$$

Agar belgining $x_1$, $x_2$, ..., $x_k$ qiymatlari mos ravishda $n_1$, $n_2$, ..., $n_k$ chastotalarga ega bo'lsa va $n_1+n_2+...+n_k=n$ bo'lsa, u holda

$$\bar{x}_T=(n_1x_1+n_2x_2+...+n_kx_k)/n \quad \text{yoki} \quad \bar{x}_T=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}x_in_i$$

Ta'rif. Chetlanish deb belgining qiymati bilan umumiy o'rtacha qiymat orasidagi $x_i-\bar{x}$ ayirmaga aytiladi.

Ta'rif. Bosh to'plamning dispersiya $D_B$ deb bosh to'plam belgisi qiymatlarini o'rtacha qiymati $\bar{x}_B$ dan chetlanishlari kvadratlarining o'rtacha arifmetik qiymatiga aytiladi.

Agar $N$ hajmli bosh to'plam belgisining $x_1$, $x_2$, ..., $x_N$ qiymatlari turlicha bo'lsa, u holda

$$D_B=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x}_B)^2.$$

Agar belgining $x_1$, $x_2$, ..., $x_k$ qiymatlari mos ravishda $N_1$, $N_2$, ..., $N_k$ chastotalarga ega, shu bilan birga $N_1+N_2+...+N_k=N$ bo'lsa, u holda

$$D_B=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}N_i(x_i-\bar{x}_B)^2$$

Tanlanma to'plamning dispersiya $D_T=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}_T)^2$.

Agar $x_1$, $x_2$, ..., $x_k$ qiymatlar mos ravishda $n_1$, $n_2$, ..., $n_k$ chastotalarga ega va $n_1+n_2+...+n_k=n$ bo'lsa,

$$D_T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i (x_i - \bar{x}_T)^2$$

Tanlanma to'plamning o'rtacha kvadratik chetlanish deb tanlanma dispersiyasidan olingan kvadrat ildizga aytiladi:

$$\sigma_T = \sqrt{D_T}\ .$$

## 5. Ishonchli ehtimol. Ishonchli interval

Interval baho deb ikkita son - intervalning uchlari bilan aniqlanadigan bahoga aytiladi.

$\theta$ bahoning $\theta^*$ bo'yicha ishonchliligi (ishonchli ehtimol) deb $|\theta-\theta^*|<\delta$ tengsizlikni amalga oshishi ehtimoli $\gamma$ ga aytiladi, bu yerda $\delta>0$ son bahoning aniqligini xarakterlaydi.

Odatda bahoning ishonchliligi oldindan berilgan bo'ladi, bunda $\gamma$ sifatida 0,95; 0,99; 0,999 qilib beriladi.

Aytaylik, $|\theta-\theta^*|<\delta$ bo'lish ehtimoli $\gamma$ ga teng bo'lsin, ya'ni $P\{|\theta-\theta^*|<\delta\}=\gamma$ yoki $P\{\theta^*-\delta<\theta<\theta^*+\delta\}=\gamma$.

Bu munosabatni bunday tushunish lozim $(\theta^*-\delta,\ \theta^*+\delta)$ intervalning noma'lum $\theta$ parametrni o'z ichiga olish ehtimoli $\gamma$ ga teng.

Ishonchli interval deb noma'lum parametrni berilgan $\gamma$ ishonchlilik bilan qoplaydigan $(\theta^*-\delta,\ \theta^*+\delta)$ intervalga aytiladi.

Faraz qilaylik $X$ son belgi normal taqsimlangan, $\delta$ ma'lum, $a$-noma'lum bo'lsin. $a$-parametrni $\gamma$ ishonchlilik bilan qoplaydigan ishonchli intervallarni topishni ko'raylik.

$$M(\bar{X}) = a,\quad \sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\quad P(|\bar{X} - a| < \delta) = \gamma$$

Buning uchun

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

formuladan foydalanamiz.

x ni $\bar{x}$ ga $\sigma$ ni $\sigma(\bar{x})$ ga almashtiramiz.

$$P(|\bar{x}-a|<\delta)=2\Phi(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma})=2\Phi(t), t=\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}$$

$$P(\bar{x}-t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<a<\bar{x}+t\frac{\sigma}{\sqrt{n}})=2\Phi(t)=\gamma$$

Demak, γ ishonch bilan aytish mumkinki, $(\bar{x}-t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x}+t\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ ishonchli interval noma'lum a-parametrni qoplaydi: bahoning aniqligi $\delta=t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $t$ son $\Phi(t)=\gamma/2$ tenglikdan topiladi. $\Phi(t)$ – Laplas funksiyasi.

Misol. X tasodifiy miqdor o'rtacha kvadratik chetlanishi $\sigma$=3 ma'lum bo'lgan noreal taqsimotga ega.

$n$=36, $\gamma$=0,95 Noma'lum $a$-matematik kutilma $\bar{x}$ tanlanma o'rtacha qiymati bo'yicha baholash uchun ishonchli intervallarni toping.

Yechish. $t$ ni topamiz 2$F(t)$=0,95, $F(t)$=0,475.
Jadvaldan t=1,96 ni topamiz.

$\delta=t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$=0,98

Ishonchli intervallar

($\bar{x}$-0.98: $\bar{x}$+0,98)

agar $\bar{x}$=4,1 bo'lsa, u holda

$\bar{x}$-0,98=4,1-0,98=3,12.

$\bar{x}$+0,98=4,1+0,98=5,08

U holda 3,12<$a$<5,08

## KORRELYATSION MUNOSABATLAR TO'G'RISIDA UMUMIY TUSHUNCHA

Ko'pincha iqtisodda, texnikada va boshqa sohalarda turli son va sifat belgilari orasidagi munosabatlarni o'rganishga to'g'ri keladi. Belgilar orasida ikki turdagi bog'lanish - funksional va korrelyatsion (yoki statistik) bog'lanishlar mavjuddir.

Funksional bog'lanishlarda bir o'zgaruvchi miqdorning ixtiyoriy qiymatiga boshqa bir o'zgaruvchi miqdorning aniq bitta qiymati mos keladi. Bunday bog'lanishlar aniq fanlar - matematika, fizika va kimyoda ayniqsa, yaqqol kuzatiladi.

Agar ikki $x$ va $y$ tasodifiy miqdor orasida shunday munosabat (korrelyatsiya) mavjud bo'lsaki, $x$ miqdorning har bir o'rtacha qiymatiga $x$ o'zgarishi bilan qonuniy ravishda o'zgaradigan $y$ miqdorning o'rtacha qiymati mos kelsa, $x$ va $y$ orasidagi bunday munosabat statistik yoki korrelyatsion munosabat deb ataladi. Korrelyatsion modellar iqtisodiy- statistik modellar guruhidagi juda ahamiyatli modellardir.

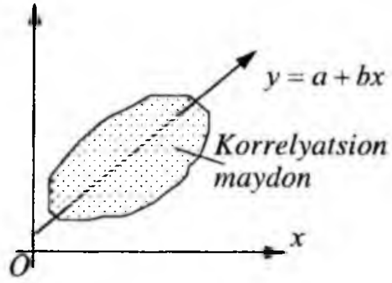
Eng oddiy holda ikkita ko'rsatkich yoki belgi orasidagi bog'lanish tekshiriladi. Bu holda korrelyatsiya juft korrelyatsiya deb ataladi. Agar ikkita va undan ortiq ko'rsatkichlar orasidagi bog'lanish qaralsa, y holda ko'p o'lchovli korrelyatsiya deb ataladi.

Agar ko'rsatkich boshqa ko'rsatkichlarga bog'liq bo'lsa, natijaviy ko'rsatkich deyiladi va u bilan belgilanadi, shuningdek, natijaviy ko'rsatkich bog'liq bo'lgan o'zgaruvchilar argument yoki faktorli belgi yoki oddiy faktor deb atalib $x$ bilan belgilanadi.

Bu holda korrelyatsion model shunday yoziladi:

$$\tilde{y}_i = a + bx_i \qquad (1)$$

va (1) ni kelgusida regressiya tenglamasi deb ataladi. Bu yerda $\tilde{y}_i$–tekshirish orqali topiladigan natijaviy ko'rsatkich, $x_i$– tajribadan beriladigan faktor ko'rsatkich, $a$ va $b$– doimiy noma'lum koeffitsientlar bo'lib, ularning iqtisodiy ma'nosi quyidagicha, $a$ hisobga olinmagan faktorlarning hissasini bildiradi, $b$ esa $x$ bir birlikka oshsa $y$ ni qanchaga oshishini bildirib turadi. Korrelyatsion bog'lanish grafik holda quyidagicha bo'ladi.




Korrelyatsion modellarni qurish bir necha bosqichlardan iborat bo'ladi:

1) masalaning qo'yilishi;
2) statistik ma'lumotlarni yig'ish;
3) regressiya tenglamasining ko'rinishini aniqlash;
4) bog'lanishning jipsligini topish;
5) regressiya tenglamasidagi parametrlarning sonli qiymatini topish;
6) olingan natijani iqtisodga tatbiq qilish.

## 1. Bitta faktorga bog'liq bo'lgan chiziqli regressiya tenglamasini yechish

1) Berilgan bo'lsin (1) regressiya tenglamasi $\tilde{y}_i = a + bx_i$, bunda tanlamaning hajmi N bo'lsin. Bu tenglamadan $a$ va $b$ koeffitsientlarni topish uchun, eng kichik kvadrat chetlanishlar usulidan foydalanamiz:

$$S = \sum_{i=1}^{N} \left(y_i - \tilde{y}_i\right)^2 = \min \tag{2}$$

bu yerda $y_i$ - tajribadan beriladigan natijaviy ko'rsatkich (1) va (2) olib kelib qo'yamiz,

$$S=\sum_{i=1}^{N}\left(y_i-a-bx_i\right)^2=\min$$

$a$ va $b$ noma'lumlar bo'yicha xususiy hosila olamiz, ya'ni

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial a}&=-2\sum_{i=1}^{N}\left(y_i-a-bx_i\right)=0\\\frac{\partial S}{\partial b}&=-2x_i\sum_{i=1}^{N}\left(y_i-a-bx_i\right)=0\end{aligned}\right| \qquad (3)$$

(3) da hosila belgisini tashlab yuboramiz va sistemani har ikkala tomonini (-2) ga bo'lamiz:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{N}\left(y_i-a-bx_i\right)=0\\&x_i\sum_{i=1}^{N}\left(y_i-a-bx_i\right)=0\end{aligned}\right| \qquad (4)$$

(4) da qavslarni ochib chiqamiz va soddalashtiramiz.

$$\left.\begin{aligned}&Na+b\sum_{i=1}^{N}x_i=\sum_{i=1}^{N}y_i\\&a\sum_{i=1}^{N}x_i+b\sum_{i=1}^{N}x_i^2=\sum_{i=1}^{N}x_iy_i\end{aligned}\right| \qquad (5)$$

(5) Kramer usuli bilan yechamiz

$$a=\frac{\begin{vmatrix}\sum_{i=1}^{N}y_i & \sum_{i=1}^{N}x_i\\ \sum_{i=1}^{N}x_iy_i & \sum_{i=1}^{N}x_i^2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}N & \sum_{i=1}^{N}x_i\\ \sum_{i=1}^{N}x_i & \sum_{i=1}^{N}x_i^2\end{vmatrix}} \qquad b=\frac{\begin{vmatrix}N & \sum_{i=1}^{N}y_i\\ \sum_{i=1}^{N}x_i & \sum_{i=1}^{N}x_iy_i\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}N & \sum_{i=1}^{N}x_i\\ \sum_{i=1}^{N}x_i & \sum_{i=1}^{N}x_i^2\end{vmatrix}}$$

Bog'lanish kuchini aniqlash uchun korrelyatsiya koeffitsienti deb ataluvchi ushbu formula ishlatiladi:

$$r_{yx} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{(N-1)\ \delta_x\ \delta_y}$$

bu yerda

$$\delta_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}{(N-1)}}, \quad \delta_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i - \bar{y})^2}{(N-1)}}.$$

Agar $r_{yx}$ 1 ga yaqin bo'lsa, bog'lanish kuchli, aksincha bog'lanish kuchsiz deb ataladi va $0 < r_{yx} \le 1$ oraliqda o'zgaradi.

## Korrelyatsion analizning iqtisod masalalariga tatbiqi

*1-misol.* Angliya hukumatining 1987 yildan 1997 yilgacha avtomobil yo'l qurilishiga qilgan xarajati $y$ (mln. f. st.) bilan vaqt orasida korrelyatsion munosabatini analiz qiling. Ushbu jadvalda berilayotgan iqtisodiy ma'lumotlar asosida regressiya tenglamasining koeffitsientlarini topish uchun kerak bo'lgan natijalar keltirilgan.

| Yil | $t$ | $t^2$ | $y_i$ | $y_i^2$ | $t\ y_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1987 | 1 | 1 | 560 | 313600 | 560 |
| 8 | 2 | 4 | 608 | 369664 | 1216 |
| 9 | 3 | 9 | 685 | 469225 | 2055 |
| 1990 | 4 | 16 | 807 | 651249 | 3228 |
| 1 | 5 | 25 | 839 | 703921 | 4195 |
| 2 | 6 | 36 | 914 | 935396 | 5484 |
| 3 | 7 | 49 | 1100 | 1210000 | 7700 |
| 4 | 8 | 64 | 1196 | 1430416 | 9568 |
| 5 | 9 | 81 | 1490 | 2247001 | 13491 |
| 6 | 10 | 100 | 1544 | 2477476 | 15740 |
| 7 | 11 | 121 | 1513 | 2289169 | 16643 |
| $\Sigma$ | 66 | 506 | 11295 | 12997117 | 79880 |

$$b=\frac{11\cdot 79880}{11\cdot 506-66^2}=\frac{878680-745470}{5566-4356}=\frac{133210}{1210}=110{,}09$$

$$a=\frac{11295}{11}-\frac{110{,}09\cdot 66}{11}=1026{,}81-660{,}54=366{,}27.$$

Natijada regressiya tenglamasi

$$\tilde{y}_t=366{,}27+110{,}09\cdot t$$

ko'rinishda bo'ladi.

Bu topilgan regressiya tenglamasi kelgusi yilga bashorat qilish imkonini beradi, ya'ni $t=12$ bo'lganda

$$\tilde{y}_{12}=366{,}27+110{,}09\cdot 12=1687{,}35.$$

Bunda korrelyatsiya koeffitsienti $r=0{,}95$ ekanligi korrelyatsion munosabatning barqaror ekanligini bildiradi.

Koeffitsientlarning barqarorligini aniqlash uchun Styudent kriteriyasi ishlatiladi:

$$t_j=\frac{|b_j|}{S_{b_j}}$$

bu yerda $b_j$ - regressiya tenglamasining $j$ - koeffitsienti; $S_{b_j}$ $j$ - koeffitsientning o'rta kvadratik chetlanishidir.

$$S_{b_j}=\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial b_j}{\partial y_j}\right)^2\cdot S_i^2};$$

$$S_i^2=\frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i-\bar{y}_i)^2}{N-1}.$$

Regressiya tenglamasining barqarorligini aniqlash uchun Fisher mezonidan foydalanamiz

$$F = \frac{S_y^2}{\overline{S}^2}$$

bu yerda

$$S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i - \overline{y})^2}{N-1} \qquad \overline{S}_{\tilde{y}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(\tilde{y}_i - \overline{\tilde{y}})^2}{N-1}.$$

Bu kriteriyalar hisoblanganda chiqqan natija jadvaldagi natijadan qancha katta chiqsa, shuncha regressiya tenglamasi shuncha barqaror bo'ladi.

## Korrelyatsion analizning neft va gaz masalalariga tatbiqi

**1-misol.** Jadvalda $x_i$-majmuaning umumiy quvvati km, $y_i$-unumli quvvatning yig'indisi. Bu holda regressiya tenglamasi quyidagicha bo'ladi

$$y_i = a + bx_i \tag{1}$$

Bu yerda *b*-qumliklik koeffitsienti; *a*-ozod had bo'lib, hisobga olinmagan faktorlarning hissasini bildiradi.

Jadvaldagi ma'lumotlardan foydalanib, va ya'ni eng kichik kvadrat chetlanish usuli yordamida *a* va *b* noma'lum koeffitsientlarni topamiz.

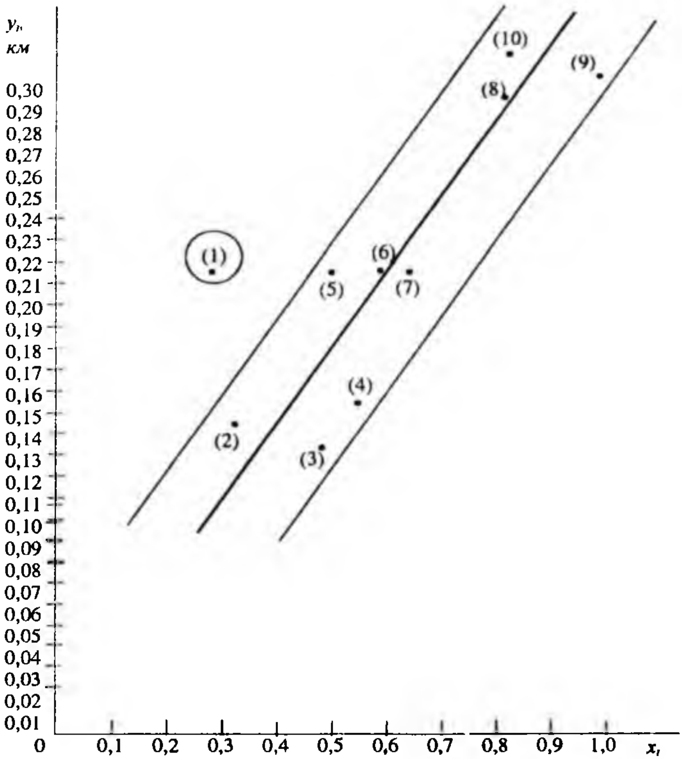
| | $y_i$ | $x_i$ | $x^2$ | $x_i y_i$ | $(x_i - \overline{x})^2$ | $(y_i - \overline{y})^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Kazan | 0,20 | 0,27 | 0,073 | 0,054 | 0,1082 | 0,00003 |
| Ko'kbaxt | 0,13 | 0,32 | 0,1024 | 0,0416 | 0,0778 | 0,0057 |
| Sarga | 0,12 | 0,48 | 0,2304 | 0,0576 | 0,0141 | 0,0073 |
| Qumtire | 0,14 | 0,55 | 0,3025 | 0,077 | 0,0024 | 0,0043 |
| Boyterak | 0,20 | 0,51 | 0,2601 | 0,102 | 0,0079 | 0,00003 |
| Chag'irli | 0,20 | 0,58 | 0,3364 | 0,116 | 0,0003 | 0,00003 |
| Teriquduq | 0,20 | 0,64 | 0,4096 | 0,128 | 0,0016 | 0,00003 |
| Bo'ronko'l | 0,28 | 0,83 | 0,6889 | 0,2324 | 0,0533 | 0,0054 |
| Prorva | 0,29 | 0,99 | 0,9801 | 0,2871 | 0,1528 | 0,0070 |
| Shoxpaxta | 0,30 | 0,82 | 0,6724 | 0,246 | 0,0488 | 0,0088 |
| **Jami:** | **2,06** | **5,99** | **4,0558** | **1,3417** | **0,4672** | **0,386** |

$$\Delta = \begin{vmatrix} 10 & 5,99 \\ 5,99 & 4,0558 \end{vmatrix} = 4,6779; \quad a = \frac{1}{4,6779} \begin{vmatrix} 2,06 & 5,99 \\ 1,3417 & 4,0558 \end{vmatrix} = 0,06801;$$

$$b = \frac{1}{4,6779} \begin{vmatrix} 10 & 2,06 \\ 5,99 & 1,3417 \end{vmatrix} = 0,2303.$$

$r_{xy}$=0,9231 bo'lib, $y$ ning $x$ ga bog'liqligini mustahkam ekanligini bildiradi, chunki $r_{xy}$ $0<r_{xy}=0,9231\leq 1$ bo'lib, 1 ga yaqindir. Yuqoridagi natijalarga ko'ra regressiya tenglamasini quyidagicha yozamiz:

$$y_i = 0,06801 + 0,2303x_i. \qquad (2)$$




*1-rasm. $x_i$-majmuaning umumiy quvvati bilan $y_i$-unumli quvvatning yig'indisining korrelyatsion bog'lanishi grafigi.*

(2) tenglama yordamida $x_i$ (majmuaning umumiy quvvati)ning ixtiyoriy qiymatini olib, $y_i$ (unumli quvvatning yig'indisi)ning yangi qiymatini bashorat qilish mumkin.

**2-misol**. $y$ neft mahsulotini ishlab chiqarish uchun 3 ta faktor ta'sir qilayotgan bo'lsin: 100-200$^0$S oraliqda o'zgarayotgan harorat $T$, $P$=20-60 *at* bosim, τ=10-30 *min* vaqt. Bu yerda faktorlarning hammasi bo'lib faqat 2 ta ko'rsatkichi berilgan, ya'ni faktorlarning yuqori va quyi ko'rsatkichlari berilgan. Shu sababli quyidagi formulalar orqali faktorlarning markaziy nuqtalarini topamiz

$$z_j^0 = \frac{z_j^{\max} + z_j^{\min}}{2}, \qquad j = 1,2,3,...,k \qquad (1)$$

$$\Delta z_j = \frac{z_j^{\max} - z_j^{\min}}{2}. \qquad (2)$$

Faktorlarning o'lchovlari har xil bo'lgani uchun

$$x_j = \frac{z_j - z_j^0}{\Delta z_j}, \qquad j = 1,2,...,k. \qquad (3)$$

formula orqali o'lchovli miqyosdan o'lchovsiz miqyosga o'tamiz.

| Faktorlarning tabiiy miqyosdagi qiymati | | | | Faktorlarning o'lchovsiz miqyosdagi qiymati | | | Natija |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tajriba № | $z_1$ | $z_2$ | $z_3$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $y$ |
| 1 | 100 | 20 | 10 | –1 | –1 | –1 | 2 |
| 2 | 200 | 20 | 10 | +1 | –1 | –1 | 6 |
| 3 | 100 | 60 | 10 | –1 | +1 | –1 | 4 |
| 4 | 200 | 60 | 10 | +1 | +1 | –1 | 8 |
| 5 | 100 | 20 | 30 | –1 | –1 | +1 | 10 |
| 6 | 200 | 20 | 30 | +1 | –1 | +1 | 18 |
| 7 | 100 | 60 | 30 | +1 | +1 | +1 | 8 |
| 8 | 200 | 60 | 30 | +1 | +1 | +1 | 12 |

Bu holda regressiya tenglamasi quyidagicha bo'ladi

$$\bar{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 \tag{4}$$

Noma'lum koeffitsientlar $b_0$, $b_1$, $b_2$, $b_3$ larni topish uchun quyidagi formuladan foydalanamiz

$$b_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_{ji} y_i \,. \tag{5}$$

Misol uchun $b_1$ koeffitsientni topish shunday bo'ladi.

$$\begin{array}{c} x_1 \\ \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \\ -1 \\ +1 \\ -1 \\ +1 \\ -1 \\ +1 \end{bmatrix} \end{array} \times \begin{array}{c} y \\ \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \\ 8 \\ 10 \\ 18 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} -2 \\ +6 \\ -4 \\ +8 \\ -10 \\ +18 \\ -8 \\ +12 \end{bmatrix} \qquad b_1 = \frac{\sum_{i=1}^{8} x_{ji} y_i}{N} = \frac{20}{8} = +2{,}5 \,.$$

$$\sum_{i=1}^{8} x_{1i} y_i = 20$$

Xuddi shunday $b_0$,, $b_2$, $b_3$ lar topiladi.

$$b_0 = +18{,}5 \qquad b_2 = -0{,}5 \qquad b_3 = +3{,}5 \,.$$

Natijada (4) quyidagi ko'rinishni oladi

$$\bar{y} = 18{,}5 + 20x_1 - 0{,}5x_2 + 3{,}5x_3 \tag{6}$$

(6) regressiya tenglamasi yordamida $x_1$, $x_2$, $x_3$ faktorlarning ixtiyoriy qiymatida $y$ ning istalgan natijasini bashorat qilish mumkin.

110-ma'ruza

## PARABOLIK KO'RINISHDAGI KORRELYATSION MUNOSABAT

Bunda regressiya tenglamasi

$$\tilde{y}_i = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 \qquad (1)$$

ko'rinishda bo'ladi, $a_0, a_1, a_2$ koeffitsientlarni topish uchun, eng kichik kvadratlar chetlanishi usulidan foydalanamiz, ya'ni

$$S = \sum_{i=1}^{N} (y_i - \tilde{y}_i)^2 = \min \qquad (2)$$

(1) ni (2) ga olib kelib qo'ysak

$$S = \sum_{i=1}^{N} \left(y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2\right)^2 = \min$$

bo'ladi.

$a_0, a_1, a_2$ koeffitsientlar bo'yicha xususiy hosila olamiz,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial a_0} &= -2\sum_{i=1}^{N}\left(y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2\right) = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial a_1} &= -2x_i\sum_{i=1}^{N}\left(y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2\right) = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial a_2} &= -2x_i^2\sum_{i=1}^{N}\left(y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2\right) = 0 \end{aligned}\right| . \qquad (3)$$

(3) ni soddalashtirsak

$$\left.\begin{aligned}
&Na_0 + a_1\sum_{i=1}^{N}x_i + a_2\sum_{i=1}^{N}x_i^2 = \sum_{i=1}^{N}y_i\\
&a_0\sum_{i=1}^{N}x_i + a_1\sum_{i=1}^{N}x_i^2 + a_2\sum_{i=1}^{N}x_i^3 = \sum_{i=1}^{N}x_iy_i\\
&a_0\sum_{i=1}^{N}x_i^2 + a_1\sum_{i=1}^{N}x_i^3 + a_2\sum_{i=1}^{N}x_i^4 = \sum_{i=1}^{N}x_i^2y_i
\end{aligned}\right| . \tag{4}$$

(4) ni ixtiyoriy usul bilan yechib $a_0, a_1, a_2$ lar topiladi. Amaldagi berilgan $y_i$ ning topilgan regressiya tenglamasidagi $\tilde{y}_i$ bilan o'rta kvadratik chetlanishi ushbu formula orqali topiladi

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i - \tilde{y}_i)^2}{N-1}} . \tag{5}$$

(1) regressiya tenglamasining barqarorligini aniqlash uchun

$$\eta = \sqrt{\frac{S_{\tilde{y}}^2}{S_y^2}}, \qquad 0 < \eta \leq 1 \tag{6}$$

formula ishlatiladi, bu yerda

$$S_{\tilde{y}_i}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(\tilde{y}_i - \bar{\tilde{y}}_i)^2}{N}, \tag{7}$$

$$S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i - \bar{y}_i)^2}{N} . \tag{8}$$

(7) va (8) larni (6) ga olib borib qo'ysak

$$\eta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} \left(\tilde{y}_i - \bar{\tilde{y}}_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{N} \left(y_i - \bar{y}_i\right)^2}} \tag{9}$$

Misol sifatida ishchilarning ish staji $x_i$ bilan ishlab chiqarish samaradorligi $y_i$ ning korrelyatsion munosabatini qaraymiz, regressiya tenglamasining koeffitsientlarini topish uchun, avvalo ushbu jadvalni tuzib olamiz:

| № | Staj (yil) $x$ | Ishlab chiqarish samaradorligi $y$ (%) | $x_i^2$ | $y_i x_i$ | $x_i^3$ | $y_i x_i^2$ | $x_i^4$ | $\tilde{y}_i$ | $(y_i - \tilde{y}_i)^2$ | $(y_i - \bar{y}_i)^2$ | $(\tilde{y}_i - \bar{\tilde{y}}_i)^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 117 | 1 | 117 | 1 | 117 | 1 | 121,7 | 22,09 | 1849,0 | 1482,2 |
| 2 | 3 | 131 | 9 | 393 | 27 | 1179 | 81 | 131,9 | 0,81 | 841,0 | 789.6 |
| 3 | 5 | 150 | 25 | 750 | 125 | 3750 | 645 | 141,0 | 81,00 | 100,0 | 361,0 |
| 4 | 7 | 152 | 49 | 1064 | 343 | 7448 | 2401 | 149,1 | 8,41 | 64,0 | 118,8 |
| 5 | 9 | 148 | 81 | 1332 | 729 | 11988 | 6561 | 156,0 | 64,00 | 144.0 | 16,0 |
| 6 | 11 | 171 | 121 | 1881 | 1331 | 21691 | 14641 | 161,9 | 82,81 | 121,0 | 3,6 |
| 7 | 13 | 171 | 169 | 2223 | 2197 | 28899 | 28561 | 166,6 | 19,36 | 121.0 | 43,6 |
| 8 | 15 | 151 | 225 | 2265 | 3375 | 33975 | 50625 | 170,3 | 368,64 | 81,0 | 106,1 |
| 9 | 17 | 178 | 289 | 3026 | 4913 | 51442 | 83521 | 172,8 | 27,04 | 324,0 | 163,8 |
| 10 | 19 | 176 | 361 | 3344 | 6859 | 63536 | 130321 | 174,3 | 2,89 | 256,0 | 204,5 |
| 11 | 21 | 181 | 441 | 3801 | 9261 | 79821 | 194481 | 174,6 | 29,16 | 441,0 | 213,2 |
| 12 | 23 | 149 | 529 | 3427 | 12167 | 78821 | 279841 | 173,9 | 620,01 | 121,0 | 193.2 |
| 13 | 25 | 185 | 625 | 4625 | 15625 | 115625 | 390625 | 172,0 | 169,00 | 625,0 | 144,0 |
| 14 | 27 | 181 | 729 | 4887 | 19683 | 131949 | 531441 | 169,1 | 141,61 | 441,0 | 82,8 |
| 15 | 29 | 167 | 841 | 4843 | 24389 | 140447 | 707281 | 165,0 | 4,00 | 49,00 | 25,0 |
| 16 | 31 | 152 | 961 | 4712 | 29721 | 146072 | 923521 | 159,9 | 62,41 | 64,0 | 0,0 |
| Σ | 256 | 2560 | 5456 | 42690 | 130816 | 915760 | 3344528 | 2560,1 | 1703,24 | 5642,0 | 3947,4 |
| o'rt | | $\bar{y}=160$ | - | - | - | - | - | $\bar{\tilde{y}}_i=160{,}0$ | - | - | - |

Jadvaldagi natijalarni (4) ga qo'ysak

$$\left.\begin{aligned} 16a_0 + 256a_1 + 5456a_2 &= 2560 \\ 256a_0 + 5450a_1 + 13016a_2 &= 42690 \\ 5456a_0 + 130816a_1 + 3344528a_2 &= 95716 \end{aligned}\right| \tag{10}$$

Sistemani yechib $a_0 = 116{,}14$, $a_1 = 5{,}670$, $a_2 = -0{,}1374$ topamiz va bu qiymatlarni (1) ga qo'ysak

$$\tilde{y}_i = 116{,}14 + 5{,}670x_i - 0{,}1374x_i^2 \tag{11}$$

bu yerda ozod had $a$=116,14 hisobga olinmagan faktorlar hissasini bildiradi, $b$=5,670 staj 1 yilga oshsa u ni 5,670% ga oshishini ko'rsatadi, s=-0,1374 stajning kvadrati bir birlikka oshsa u ni 0,1374% ga kamayishini bildiradi.

(5) dan $S_y$ ni topsak $S_y$=11,4%.

(9) dan $\eta = 0{,}836$ kelib chiqadi va bu natija $y$ bilan $x$ ning bog'langanligini ancha mustahkam ekanligini ko'rsatadi.

(11) modeldagi –0,1374 koeffitsientning ishorasi manfiyligining ma'nosi parabolik ko'rinishdagi munosabatda to'g'ri chiziqning ma'lum bir masshtabda egilishini bildiradi. Shuningdek, topilgan model ishlab chiqarish samaradorligini kelgusida bashorat qilish imkonini beradi.

## KO'P FAKTORLI KORRELYATSION MUNOSABAT

Amaliy masalalarni tekshirganda odatda korrelyatsion munosabat ko'p ta'sir etuvchi faktorlarga bog'liq bo'ladi va bu holda regressiya tenglamasi quyidagi ko'rnishda bo'ladi:

$$\tilde{y}_i = b_0 + b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i} + \ldots + b_k x_{ki} \qquad (1)$$

berilgan statistik ma'lumotlarni 1-jadval ko'rinishida yozib olamiz:

1-jadval

| № | $x_{1i}$ | $x_{2i}$ | $x_{3i}$ | ... | $x_{ki}$ | $y_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $x_{11}$ | $x_{21}$ | $x_{31}$ | ... | $x_{k1}$ | $y$ |
| 2 | $x_{12}$ | $x_{22}$ | $x_{32}$ | ... | $x_{k2}$ | $y_2$ |
| 3 | $x_{13}$ | $x_{23}$ | $x_{33}$ | ... | $x_{k3}$ | $y_3$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| $N$ | $x_{1N}$ | $x_{2N}$ | $x_{3N}$ | ... | $x_{kN}$ | $y_N$ |

Avvalo odatdagi o'lchovdan yangi normallashgan o'lchovga quyidagi formulalar orqali

$$y_i^0 = \frac{y_i - \bar{y}}{Sy}, \quad x_{ji}^0 = \frac{x_{ji} - \bar{x}_j}{Sx_j} \quad \begin{matrix} i = 1,2,\ldots,N \\ j = 1,2,\ldots,k \end{matrix}$$

o'tamiz.

Bu yerda $y_i^0$, $x_{ji}^0$-mos faktorlarning normallashgan qiymatlari; $\bar{y}$, $\bar{x}_j$-faktorlarning o'rtacha qiymatlari; $S_y$, $S_{x_j}$-faktorlarni o'rta kvadratik chetlanishlaridir;

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i - \bar{y}_i)^2}{N-1}}, \quad S_{x_j} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_{ji} - \bar{x}_j)^2}{N-1}}$$

2-jadvalda yangi o'lchovdagi statistik ma'lumotlarni keltiramiz:

2-jadval

| № | $x_1^0$ | $x_1^0$ | $x_1^0$ | ... | $y_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $x_{11}^0$ | $x_{21}^0$ | $x_{31}^0$ | ... | $y_i^0$ |
| 2 | $x_{12}^0$ | $x_{22}^0$ | $x_{32}^0$ | ... | $y_2^0$ |
| 3 | $x_{13}^0$ | $x_{23}^0$ | $x_{33}^0$ | ... | $y_3^0$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $N$ | $x_{1N}^0$ | $x_{2N}^0$ | $x_{3N}^0$ | ... | $y_N^0$ |

Yangi masshtabda

$$\begin{aligned} \bar{x}_j^0 &= 0, \quad \bar{y}_0 = 0 \\ S_{x_j^0} &= 1, \quad S_{y^0} = 1 \end{aligned} \qquad (3)$$

bo'ladi.

Korrelyatsiyaning tanlama koeffitsienti ushbu ko'rinishda bo'ladi:

$$\left.\begin{aligned} r^*_{y^0 x_l^0} &= \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N} y_i^0 x_{ji}^0 \\ r^*_{x_l^0 x_m^0} &= \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N} x_{ji}^0 x_{mi}^0 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

$$l > m \quad l, m = 1,2,\dots,k$$

Normallashgan o'zgaruvchilarning regressiya tenglamasida ozod had qatnashmaydi va quyidagicha bo'ladi:

$$\tilde{y}^0 = a_1 x_1^0 + a_2 x_2^0 + \dots + a_k x_k^0. \qquad (5)$$

(5) ning koeffitsientlari ushbu shartdan topiladi:

$$S = \sum_{i=1}^{N}\left(y_i^0 - \tilde{y}_i^0\right)^2 = \min .$$

Funksiyaning minimumlik sharti xuddi bitta o'zgaruvchinikiday topiladi:

$$\frac{\partial S}{\partial a_1}=0 \qquad \frac{\partial S}{\partial a_2}=0 \ldots \frac{\partial S}{\partial a_k}=0 \tag{6}$$

$$\left.\begin{array}{l}
a_1\sum_{i=1}^{N}\left(x_{1i}^0\right)^2+a_2\sum_{i=1}^{N}x_{1i}^0x_{2i}^0+\ldots+a_k\sum_{i=1}^{N}x_{1i}^0x_{ki}^0=\sum_{i=1}^{N}x_{1i}^0y_i^0 \\
a_1\sum_{i=1}^{N}x_{2i}^0x_{1i}^0+a_2\sum_{i=1}^{N}\left(x_{2i}^0\right)0{,}2+\ldots+a_k\sum_{i=1}^{N}x_{2i}^0x_{ki}^0=\sum_{i=1}^{N}x_{2i}^0y_i^0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_1\sum_{i=1}^{N}x_{ki}^0x_{1i}^0+a_2\sum_{i=1}^{N}x_{ki}^0x_{2i}^0+\ldots+a_k\sum_{i=1}^{N}\left(x_{ki}^0\right)^2=\sum_{i=1}^{N}x_{ki}^0y_i^0
\end{array}\right| \tag{7}$$

Sistemaning chap va o'ng tomonini $\frac{1}{N-1}$ ga ko'paytiramiz. Natijada (7) ga asosan $a_j$ koeffitsientlarning oldida korrelyatsiyaning tanlama koeffitsienti $r^*$ hosil bo'ladi.

$$\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_{ji}^0\right)^2=S_{x_j^0}^2=1$$

ekanligini hisobga olsak, normal tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\left.\begin{array}{l}
a_1+a_2r^*_{x_1x_2}+a_3r^*_{x_1x_3}+\ldots+a_kr^*_{x_1x_k}=r^*_{yx_1} \\
a_1r^*_{x_2x_1}+a_2+a_3r^*_{x_2x_3}+\ldots+a_kr^*_{x_2x_k}=r^*_{yx_2} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_1r^*_{x_kx_1}+a_2r^*_{x_kx_2}+a_3r^*_{x_kx_3}\ldots+a_k=r^*_{yx_k}
\end{array}\right| \tag{8}$$

$r^*_{x_lx_m}=r^*_{x_mx_l}$ ni hisobga olsak, korrelyatsiyaning koeffitsientlari osongina topiladi.

(8) ni yechib ko'p faktorli korrelyatsiya koeffitsienti $R$ ni hisoblash mumkin:

$$R=\sqrt{a_1r^*_{yx_1}+a_2r^*_{yx_2}+\ldots+a_kr^*_{yx_k}} \tag{9}$$

Korrelyatsiya koeffitsienti $R$ quyidagi oraliqda o'zgaradi:

$$0 \leq R \leq 1.$$

Agar $R$ 1 ga yaqin bo'lsa, korrelyatsion munosabat mustahkam yoki barqaror deyiladi.

(5) ni amalda qo'llash uchun natural masshtabga ushbu formulalar orqali o'tishimiz kerak:

$$b_j = a_j \frac{S_y}{S_{x_j}} \qquad j = 1,2,...,k \quad j \neq 0$$

$$b_0 = \bar{y} - \sum_{j=1}^{R} b_j \bar{x}_j .$$

Mazkur algoritmga "Paskal" tilida dastur yozilgan bo'lib, amaliy masalalarni yechish ko'zda tutilgan.

Misol. Mehnat unumdorligi $y$ bilan, qurollanish fondi $x_1$, ixtisoslashishi darajasi $x_2$ va ish hajmi $x_3$ omillar orasidagi korrelyatsion munosabatni toping (3-jadval).

3-jadval

| Yillar | Ko'rsatkichlar | | | |
|---|---|---|---|---|
| | mehnat unumdorligi, $y$ | qurollanish fondi $x_1$ | ixtisoslashish darajasi $x_2$ | ish hajmi $x_3$ |
| 1 | 100 | 100 | 100 | 100 |
| 2 | 109 | 108 | 140 | 109 |
| 3 | 119 | 130 | 104 | 123 |
| 4 | 132 | 135 | 99 | 139 |
| 5 | 139 | 212 | 97 | 153 |
| 6 | 148 | 152 | 102 | 157 |
| 7 | 156 | 158 | 120 | 164 |
| 8 | 165 | 265 | 147 | 171 |
| 9 | 173 | 288 | 151 | 179 |
| 10 | 188 | 305 | 155 | 195 |
| 11 | 192 | 325 | 171 | 204 |
| 12 | 197 | 350 | 199 | 215 |
| 13 | 202 | 360 | 226 | 228 |
| 14 | 206 | 400 | 226 | 236 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 15 | 211 | 392 | 238 | 256 |

Bu masalaning regressiya tenglamasi

$$\tilde{y} = b_0 + b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i} + b_3 x_{3i} \qquad (1)$$

bo'ladi.

(1) dan $b_j$ larni topish kerak,

$$j = 0,1,2,3.$$

Noma'lum $b_j$, $j = \overline{0,4}$ koeffitsientlarni topish uchun korrelyatsiya usulining dasturidan foydalanamiz: kompyuterdan olingan natijaga ko'ra $b_0 = 43,9$, $b_1 = 0,157$, $b_2 = -0,026$, $b_3 = 0,467$ bo'ladi.

Topilgan natijalarni (1) ga qo'ysak

$$\tilde{y}_i = 43,9 + 0,157x_{1i} - 0,026x_{2i} + 0,467x_{3i} \qquad (2)$$

kelib chiqadi.

(2) bog'lanishning barqarorligi topilgan korrelyatsiya koeffitsienti $R = 0,985$ ekanligini ko'rsatib turibdi. Fisher kriteriyasi $F_{his}$=182,3, $F_{jad}$=6,54 ($F_{his}$>$F_{jad}$) bo'lib, (2) tenglamaning barqaror ekanligini ko'rsatadi.

## OLIY MATEMATIKADAN YAKUNIY YOZMA ISH SAVOLLARI (2-KURS, 4-SEMESTR)

### Operatsion hisob

1) Laplas almashtirishlari ta'rifi. Asl va tasvir.
2) Xevisaydning birlik funksiyasi. $\sigma_0(t)$, sint va cost funksiyalarning tasviri. sin*at* va cos*at* funksiyalarning tasviri.
3) Tasvirning chiziqlilik xossasi. $e^{-at}$, $e^{-at}\sin at$, $e^{-at}\cos at$, sh*at* va chat funksiyalarning tasviri.
4) Tasvirni differensiallash. Hosilalar tasviri.
5) Tasvirlar jadvali.
6) Differensial tenglamani operatsion hisob usullari yordamida yechish. Misollar.
7) Integralning tasviri. Kechikish haqidagi teorema.
8) Integral tenglamalarni va chiziqli tenglamalar sistemasini operatsion hisob yordamida yechish.

### Matematik fizika tenglamalari

1.Matematik fizika tenglamalarining asosiy turlari.
2. Chegaraviy masala va chetki masala.
3. Matematik fizika tenglamalari uchun Koshi masalasi.
4. To'lqin tenglamasi va uning fizik ma'nosi.
5. Parabolik tenglama va uning fizik ma'nosi.
6. Laplas tenglamasi va uning fizik ma'nosi.
7. To'lqin tenglamasi uchun Dirixle masalasi.
8. Tor tebranma harakat tenglamasi uchun Neyman masalasi.
9. Puasson tenglamasi uchun chegaraviy masala.
10. Tor tenglamasini Dalamber usulida yechish.
11. Parabolik tipdagi tenglamani Furye usulida yechish.
12. Doira uchun Laplas tenglamasi.
13. Parabolik tenglama uchun ichki va tashqi masalalar.
14. Elliptik tipdagi tenglamalar uchun Dirixle masalasi.
15. Giperbolik tipdagi tenglama uchun Neyman masalasi.
16. Elliptik tipdagi tenglamani Dalamber usulida yechish.

## Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika

1.Tasodifiy hodisa. Tasodifiy hodisaning nisbiy chastotasi.
2.Ehtimolning klassik ta'rifi va ehtimollarni bevosita hisoblash.
3. Ehtimollarni qo'shish. Qarama-qarshi tasodifiy hodisalar. Ehtimollarni ko'paytirish.
4. Bog'liq hodisalar. Shartli ehtimol. To'liq ehtimol. Beyes formulasi.
5. Diskret tasodifiy miqdorlar. Uning o'rta qiymati. Diskret tasodifiy miqdorning dispersiyasi va o'rtacha kvadratik chetlanishi.
7. Tasodifiy miqdorlarning funksiyalari. Uzluksiz tasodifiy miqdorlar.
8. Uzluksiz tasodifiy miqdorlarning taqsimot zichligi. Tasodifiy miqdorning berilgan intervalda yotishi ehtimoli.
9. Bernulli va Puasson formulalari.
10. Zichlik funksiya va taqsimot funksiyasi. Taqsimot funksiyaning xossalari.
11. Taqsimotning integral qonuni. Ehtimollarning tekis taqsimot qonuni.
12. Taqsimotning normal qonuni. Normal taqsimotning o'rta qiymati.
13. Taqsimotning normal qonuniga bo'ysinuvchi tasodifiy miqdorning dispersiyasi va o'rtacha kvadratik chetlanishi.
14. Tasodifiy miqlor qiymatining berilgan intervalda yotish ehtimoli. Laplas formulasi.
15. Normal qonun uchun taqsimotning integral funksiyasi.
16. Normal taqsimot qonunining o'rtacha chetlanish orqali ifodasi.
17. Uch sigma qoidasi. Xatolar taqsimotining ehtimollarining shkalasi.
18. Ikki o'lchovli tasodifiy miqdor. Tekislikdagi normal taqsimot qonuni.
19. Korrelyatsion moment (kovariatsiya). Korrelyatsiya koeffitsienti.
20. Statistik material. Statistik taqsimot qonuni. Gistogramma.
21. Katta sonlaı qonuni. Bernulli, Lyapunov, Chebishev va Laplas teoremalari.

## Operatsion hisob

1. Funksiyaning tasvirini toping: $f(t)=\cos^3 t$
2. Funksiyaning tasvirini toping $f(t)=\text{sh}bt$
3. Funksiyaning tasvirini toping: $f(t)=\text{sh}at\sin bt$
4. Funksiyaning tasvirini toping: $f(t)=e^t\cos^2 t$
5. Funksiyaning aslini toping $\bar{f}(p)=\dfrac{p}{p^2-2p+5}$.
6. Funksiyaning aslini toping $\bar{f}(p)=\dfrac{1}{p^3-8}$.
7. Funksiyaning aslini toping: $\bar{f}(p)=\dfrac{p}{(p-1)(p^2-4)}$.
8. Funksiya tasvirini toping: $\bar{f}(p)=\dfrac{p}{p^4-1}$.
9. Tasvirni toping: y''(t)-y'(t)-y(t), bu yerda y(0)=y'(0)=0 va $\bar{y}(p)\to y(t)$.
10. Tasvirni toping $y'(t)+y(t)+\int_0^t y(\tau)d\tau$, bu yerda y(0)=1 va $\bar{y}(p)\to y(t)$.
11. Differensial tenglamani yeching: $y''-2y'-3y=e^{3t}$, bu yerda y(0)=0, y'(0)=0.
12. Differensial tenglamani yeching: $y''+y'-2y=e^{-t}$, bu yerda y(0)=0, y'(0)=1.
13. Integral tenglamani yeching: $y=\int_0^t y\,dt+1$.
14. Integral tenglamani yeching $\int_0^t y(\tau)\sin(t-\tau)d\tau=1-\cos t$.
15. Differensial tenglamalar sistemasini yeching $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x+2y\\ \dfrac{dy}{dt}=2x+y+1\end{cases}$, bu yerda x(0)=0, y(0)=5.
16. Differensial tenglamani yeching: $y'-2y=0$; y(0)=1.
17. Differensial tenglamani yeching $y'+y=e^t$; y(0)=0.
18. Differensial tenglamani yeching: $y''-9y=0$; y(0)=y'(0)=0.
19. Differensial tenglamani yeching: $y''+y'-2y=e^t$; y(0)=-1, y'(0)=0.
20. Differensial tenglamalar sistemasini yeching: $\dfrac{dx}{dt}=2y$,

$\frac{dy}{dt}=2x,$ x(0)=2, y(0)=2.

21. Differensial tenglamalar sistemasini yeching: $\frac{dx}{dt}=3x+4y,$

$\frac{dy}{dt}=4x-3y,$ x(0)=y(0)=1

22. Integral tenglamani yeching: $\int_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)d\tau=1-\cos t$.

## Matematik fizika tenglamalari

1.Quyidagi tenglamaning turi aniqlansin va xarakteristik tenglamasi tuzilsin: $u''_{xx}-3u''_{yy}+3x-4y-6=0$.

2. Quyidagi tenglamaning turi aniqlansin va xarakteristik tenglamasi tuzilsin: $u''_{xx}+6u''_{xy}-12u''_{yy}+3u'_x-4y=0$.

3. Quyidagi tenglamaning turi aniqlansin va xarakteristik tenglamasi tuzilsin: $u''_{xx}+4u''_{xy}-3x+u'_y=0$.

4. Quyidagi tenglamaning turi aniqlansin va xarakteristik tenglamasi tuzilsin: $\sin^2 xu''_{xx}-2y\sin u''_{xy}+y^2u''_{yy}=0$.

5. Quyidagi tenglamaning turi aniqlansin va xarakteristik tenglamasi tuzilsin: $x^2u''_{xx}-xyu''_{xy}+y^2u''_{yy}=0$.

6. Quyidagi tenglamaning turi aniqlansin va xarakteristik tenglamasi tuzilsin: $u''_{xx}-4u''_{xy}+4u''_{yv}-3x+y=0$.

7. Quyidagi tenglamaning turi aniqlansin va xarakteristik tenglamasi tuzilsin: $\frac{1}{x^2}u''_{xx}+\frac{1}{y^2}u''_{yy}-u'_x+2u'_y-2=0$.

8. Quyidagi tenglamaning turi aniqlansin va xarakteristik tenglamasi tuzilsin: $u''_{xx}+6u''_{xy}-12u''_{yy}+3u'_x-2y=0$.

9. Quyidagi tenglamaning turi aniqlansin va xarakteristik tenglamasi tuzilsin: $x^2u''_{xx}+4u''_{xy}-y^2u''_{yy}+3u'_x=0$.

10. Quyidagi tenglamaning turi aniqlansin va xarakteristik tenglamasi tuzilsin: $u''_{xx}+4u''_{xy}-3u''_{yy}+4x+y=0$.

11. Quyidagi tenglamaning turi aniqlansin va xarakteristik tenglamasi tuzilsin: $u''_{xx}-2xu''_{xy}+x^2u''_{yy}-2u'_y=0$.

12. Quyidagi tenglamaning turi aniqlansin va xarakteristik tenglamasi tuzilsin: $u''_{xx} + 3u''_{xy} + u''_{yy} + 2u'_x - 3 = 0$.

13. Quyidagi tenglamaning turi aniqlansin va xarakteristik tenglamasi tuzilsin: $2u''_{xx} + 8u''_{xy} + 3u''_{yy} - 4x + 3y = 0$.

14. Quyidagi tenglamaning turi aniqlansin va xarakteristik tenglamasi tuzilsin: $u''_{xx} - 2u''_{xy} + 2u''_{yy} - 4x + 3y - 5 = 0$.

15. Quyidagi tenglamaning turi aniqlansin va xarakteristik tenglamasi tuzilsin: $2u''_{xx} - 2xu''_{xy} + x^2u''_{yy} + 2u'_x = 0$.

16. Quyidagi tenglamaning turi aniqlansin va xarakteristik tenglamasi tuzilsin: $\frac{1}{3x^2}u''_{xx} + \frac{1}{4y^2}x^2u''_{yy} = 0$.

17. Quyidagi tenglamaning turi aniqlansin va xarakteristik tenglamasi tuzilsin: $u''_{xx} - 4u''_{xy} - 3u''_{yy} - 12u'_x + 16u'_y = 0$.

18. Quyidagi tenglamaning turi aniqlansin va xarakteristik tenglamasi tuzilsin: $x^2u''_{xx} + 2xyu''_{xy} + y^2u''_{yy} - 3x + 4y - 6 = 0$.

19. Quyidagi tenglamaning turi aniqlansin va xarakteristik tenglamasi tuzilsin: $2u''_{xx} - 4u''_{xy} - 5u'_x + 2u'_y - 6 = 0$.

20. Quyidagi tenglamaning turi aniqlansin va xarakteristik tenglamasi tuzilsin: $2x^2u''_{xx} - 3y^2u''_{yy} = 0$.

1. Chegaralanmagan tor tenglamasining boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi Dalamber formulasi yordamida topilsin.
$u''_{tt} = u''_{xx}; \quad u|_{t=0} = \sin x; \quad u'_t|_{t=0} = \cos x.$

2. Chegaralanmagan tor tenglamasining boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi Dalamber formulasi yordamida topilsin. $u''_{tt} = u''_{xx}; \quad u|_{t=0} = \sin x; \quad u'_t|_{t=0} = x^2.$

3. Chegaralanmagan tor tenglamasining boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi Dalamber formulasi yordamida topilsin: $u''_{tt} = 16u''_{xx}; \quad u|_{t=0} = \cos x; \quad u'_t|_{t=0} = 4.$

4. Chegaralanmagan tor tenglamasining boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi Dalamber formulasi yordamida topilsin: $u''_{tt} = 4u''_{xx}; \quad u|_{t=0} = 3x; \quad u'_t|_{t=0} = 4.$

5. Chegaralanmagan tor tenglamasining boshlang'ich shartlarni

qanoatlantiruvchi yechimi Dalamber formulasi yordamida topilsin: $u_{tt} = 9u_{xx}$; $u|_{t=0} = x^2$; $u_t|_{t=0} = x$.

6. Chegaralanmagan tor tenglamasining boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi Dalamber formulasi yordamida topilsin: $u_{tt} = 4u_{xx}$; $u|_{t=0} = 3x$; $u_t|_{t=0} = \sin x$.

7. Chegaralanmagan tor tenglamasining boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi Dalamber formulasi yordamida topilsin: $u_{tt} = 9u_{xx}$; $u|_{t=0} = x$; $u_t|_{t=0} = 2$.

8. Chegaralanmagan tor tenglamasining boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi Dalamber formulasi yordamida topilsin: $u_{tt} = u_{xx}$; $u|_{t=0} = x^2$; $u_t|_{t=0} = 2$.

9. Chegaralanmagan tor tenglamasining boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi Dalamber formulasi yordamida topilsin: $u_{tt} = 16u_{xx}$; $u|_{t=0} = x$; $u_t|_{t=0} = -x$.

10. Chegaralanmagan tor tenglamasining boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi Dalamber formulasi yordamida topilsin: $u_{tt} = 4u_{xx}$; $u|_{t=0} = e^x$; $u_t|_{t=0} = 16$.

11. Chegaralanmagan tor tenglamasining boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi Dalamber formulasi yordamida topilsin: $u_{tt} = 9u_{xx}$; $u|_{t=0} = x$; $u_t|_{t=0} = e^x$.

12. Chegaralanmagan tor tenglamasining boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi Dalamber formulasi yordamida topilsin: $u_{tt} = 9u_{xx}$; $u|_{t=0} = \sin 2x$; $u_t|_{t=0} = 3$.

13. Chegaralanmagan tor tenglamasining boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi Dalamber formulasi yordamida topilsin: $u_{tt} = u_{xx}$; $u|_{t=0} = \sin x$; $u_t|_{t=0} = 2e^x$.

14. Chegaralanmagan tor tenglamasining boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi Dalamber formulasi yordamida topilsin: $u_{tt} = 9u_{xx}$; $u|_{t=0} = 3x^2$; $u_t|_{t=0} = e^x$.

15. Chegaralanmagan tor tenglamasining boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi Dalamber formulasi yordamida topilsin: $u_{tt} = 4u_{xx}$; $u|_{t=0} = x^2$; $u_t|_{t=0} = 2x$.

16. Chegaralanmagan tor tenglamasining boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi Dalamber formulasi

yordamida topilsin: $u_{tt} = 4u_{xx}$; $u\big|_{t=0} = x^3$; $u_t\big|_{t=0} = x$.

17. Chegaralanmagan tor tenglamasining boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi Dalamber formulasi yordamida topilsin: $u_{tt} = 4u_{xx}$; $u\big|_{t=0} = 4x$; $u_t\big|_{t=0} = x$.

18. Chegaralanmagan tor tenglamasining boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi Dalamber formulasi yordamida topilsin: $u_{tt} = u_{xx}$; $u\big|_{t=0} = e^x$; $u_t\big|_{t=0} = 4$.

19. Chegaralanmagan tor tenglamasining boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi Dalamber formulasi yordamida topilsin: $u_{tt} = u_{xx}$; $u\big|_{t=0} = \cos x$; $u_t\big|_{t=0} = x$.

20. Chegaralanmagan tor tenglamasining boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi Dalamber formulasi yordamida topilsin: $u_{tt} = u_{xx}$; $u\big|_{t=0} = 2x^2$; $u_t\big|_{t=0} = x^2$.

## Ehtimollar nazariyasi

1) 50 ta shardan 3 tasi qora shar. Tavakkaliga olingan 2 ta sharning qora bo'lishi ehtimolini toping.

2. Lotereya biletining 15 tasidan 5 tasi yutuqli. Ixtiyoriy olingan 3 ta biletning hech bo'lmaganda 2 tasi yutuqli bo'lishi ehtimolini toping.

3. Uchta zambarakdan nishonga qarata o'q uzildi. Birinchi, ikkinchi va uchinchi zambaraklardan bir marta otishda nishonga tegish ehtimoli mos ravishda 0,78; 0,82 va 0,85 ga teng bo'lsa, faqat ikkita o'qning nishonga tegish ehtimolini toping.

4. Doiraga tashlangan nuqtaning shu doiraga ichki chizilgan muntazam uchburchakka tushishi ehtimolini toping.

5. Doiraga tashlangan nuqtaning shu doira ichiga chizilgan muntazam oltiburchak ichiga tushish ehtimolini toping.

6. Biror idishda 6 ta oq va 4 ta qora sharlar bor. Ixtiyoriy olingan 3 ta sharning hech bo'lmaganda bittasi oq shar bo'lishi ehtimolini toping.

7. Birinchi idishda 8 ta oq va 6 ta qora, ikkinchi idishda 7 ta oq va 8 ta qora sharlar bor. Birinchi idishdan ikkinchi idishga

bitta shar olib solindi. Ikkinchi idishdan oq shar chiqish ehtimolini toping.

8. Talaba 50 ta savoldan 40 tasini o'zlashtirdi. Imtihon bileti 3 ta savoldan iborat bo'lsa, talabaning hech bo'lmaganda bitta savolga javob berishi ehtimolini toping.

9. Uchta mergan nishonga qarata o'q uzdi. Birinchi, ikkinchi va uchinchi merganlarning nishonga tekkizish ehtimollari mos ravishda 0,75; 0,84 va 0,92 bo'lsa, uchala merganning nishonga tekkizish ehtimolini toping.

10. Idishda 1-zavod tayyorlagan 12 ta, ikkinchi zavod tayyorlagan 8 ta detal bor. Ixtiyoriy olingan 2 ta detalning hech bo'lmaganda bittasi 1-zavodda tayyorlangan bo'lishi ehtimolini toping.

11. X diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni berilgan. Agar Y=2X+3 bo'lsa, MY ni toping.

| | | | |
|---|---|---|---|
| X | 1 | 3 | 5 |
| p | 0,4 | 0,3 | 0,3 |

12. X va Y diskret tasodifiy miqdorlar berilgan. M(X+Y)=MX+MY tenglikni isbotlang.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| X | 2 | 4 | | Y | 3 | 5 |
| p | 0,7 | 0,3 | | p | 0,6 | 0,4 |

13. X va Y diskret tasodifiy miqdorlar berilgan. $M(X-Y)=MX-MY$ tenglikni isbotlang.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| X | 1 | 5 | | Y | 4 | 6 |
| p | 0,5 | 0,5 | | p | 0,4 | 0,6 |

14. X va Y diskret tasodifiy miqdorlar berilgan. M(X*Y)=MX*MY tenglikni isbotlang.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| X | 2 | 5 | | Y | 1 | 4 |
| p | 0,6 | 0,4 | | p | 0,4 | 0,6 |

15. X diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni berilgan. Agar $Y=X^2-3$ bo'lsa, MY ni toping.

| | | | |
|---|---|---|---|
| X | 1 | 3 | 5 |
| p | 0,4 | 0,3 | 0,3 |

Diskret tasodifiy miqdor faqat ikkita: $x_1$ va $x_2$ qiymatlarni qabul qiladi ($x_1<x_2$). Agar tasodifiy miqdorning $x_1$qiymatni qabul qilish ehtimoli $r_1$, matematik kutilmasi MX va dispersiyasi DX berilgan bo'lsa, tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni topilsin.

16. $p_1=0,4$;  $MX=4,6$;  $DX=0,24$.
17. $p_1=0,8$;  $MX=2,2$;  $DX=0,16$.
18. $p_1=0,3$;  $MX=6,7$;  $DX=0,21$.
19. $p_1=0,7$;  $MX=4,3$;  $DX=0,21$.
20. $p_1=0,2$;  $MX=3,8$;  $DX=0,16$.
21. $p_1=0,6$;  $MX=1,8$;  $DX=0,96$.

Uzluksiz tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi berilgan. Tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi, matematik kutilmasi va dispersiyasi topilsin.

22. $$F(X)=\begin{cases} 0 & \text{agar} \quad x\le 1 \\ \dfrac{3x^2+x-4}{10} & \text{agar} \quad 1<x\le 2 \\ 1 & \text{agar} \quad x>2 \end{cases}$$

23. $$F(X)=\begin{cases} 0 & \text{agar} \quad x\le \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{3x-1}{5} & \text{agar} \quad \dfrac{1}{3}<x\le 2 \\ 1 & \text{agar} \quad x>2 \end{cases}$$

24. $$F(X)=\begin{cases} 0 & \text{agar} \quad x\le 0 \\ \dfrac{2x^2+x}{3} & \text{agar} \quad 0<x\le 1 \\ 1 & \text{agar} \quad x>1 \end{cases}$$

25. $$F(X)=\begin{cases} 0 & \text{agar} \quad x\le 2 \\ \dfrac{x^2-3x+2}{2} & \text{agar} \quad 2<x\le 3 \\ 1 & \text{agar} \quad x>3 \end{cases}$$

26. $$F(X)=\begin{cases} 0 & \text{agar} \quad x\le 1 \\ \dfrac{x^2-x}{2} & \text{agar} \quad 1<x\le 2 \\ 1 & \text{agar} \quad x>2 \end{cases}$$

27. $$F(X)=\begin{cases} 0 & \text{agar} \quad x\le 1 \\ \dfrac{x^2-1}{3} & \text{agar} \quad 1<x\le 2 \\ 1 & \text{agar} \quad x>2 \end{cases}$$

Tanlanma to'plamning statistik taqsimoti berilgan. $n=\sum_{i=1}^{k} n_i$ - tanlanma hajmi, $w_i=\frac{n_i}{n}$ $(i=1, 2, ..., k)$ - nisbiy chastotalar. Tanlanma to'plamning nisbiy chastotalar taqsimoti yozilsin.

1.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 2 | 4 | 8 | 11 |
| $n_i$ | 8 | 5 | 6 | 6 |

2.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 1 | 5 | 9 | 13 |
| $n_i$ | 8 | 7 | 13 | 22 |

3.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x_i$ | 20 | 25 | 30 |
| $n_i$ | 28 | 36 | 16 |

4.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 40 | 44 | 48 | 52 |
| $n_i$ | 18 | 12 | 6 | 24 |

5.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 21 | 23 | 25 | 27 |
| $n_i$ | 42 | 18 | 24 | 36 |

Tanlanma to'plamning statistik taqsimoti berilgan. Tanlanma to'plamning empirik taqsimot funksiyasi *F(x)* ni toping.

1.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 1 | 3 | 5 | 7 |
| $n_i$ | 7 | 5 | 4 | 4 |

2.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 2 | 4 | 7 | 10 |
| $n_i$ | 12 | 11 | 16 | 11 |

3.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x_i$ | 5 | 10 | 13 |
| $n_i$ | 6 | 12 | 12 |

4.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x_i$ | 4 | 9 | 11 |
| $n_i$ | 6 | 10 | 9 |

5.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 14 | 17 | 20 | 23 |
| $n_i$ | 14 | 8 | 10 | 8 |

Tanlanma to'plamning statistik taqsimot funksiyasi berilgan.

Tanlanma to'plamning o'rta qiymati $\bar{x}$ ni toping. $\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$.

1.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 2 | 4 | 8 | 11 |
| $n_i$ | 8 | 7 | 13 | 22 |

2.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 1 | 5 | 9 | 13 |
| $n_i$ | 8 | 5 | 6 | 6 |

3.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 1 | 3 | 5 | 7 |
| $n_i$ | 12 | 11 | 16 | 11 |

4.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 2 | 4 | 7 | 10 |
| $n_i$ | 7 | 5 | 4 | 4 |

5.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x_i$ | 5 | 10 | 13 |
| $n_i$ | 6 | 12 | 12 |

Tanlanma to'plamning statistik taqsimoti berilgan. Tanlanma to'plamning tuzatilgan dispersiyasi $s^2$ ni toping. $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$

1.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 2 | 4 | 8 | 11 |
| $n_i$ | 8 | 5 | 6 | 6 |

2.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 1 | 3 | 5 | 7 |
| $n_i$ | 12 | 6 | 14 | 8 |

3.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 1 | 5 | 9 | 13 |
| $n_i$ | 4 | 7 | 5 | 4 |

4.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 4 | 6 | 8 | 10 |
| $n_i$ | 6 | 7 | 7 | 5 |

5.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 3 | 5 | 9 | 12 |
| $n_i$ | 8 | 12 | 5 | 5 |

## ADABIYOTLAR


1. Боровков А.А. Теория вероятностей. - М.: Наука, 1976.
2. Мышкин А.Д. Математика для технических вузов: специальные курсы. / Мышкин А.Д. 2-е изд. – С-Пб: Лань, 2002. – 632 С.
3. Лунц Г.Л. Функции комплексного переменного с элементами операционного исчисления: Учеб. для вузов / Лунц Г.Л., Эльсгольц Л.Э. 2-е изд. – С-Пб: Лань, 2002 – 298 С. (Учеб. для вузов).
4. Соатов Ё.У. Олий математика. -Т.: Ўқитувчи, 1993. 2-қисм.
5. Данко П.С., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Высшая школа, 1985, ч. 2.
6. Сирожиддинов С.Ҳ., Маматов, Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика. – Т.: Ўқитувчи, 1985.
7. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций., под ред. Свешникова А.А. - М.: Наука, 1965.
8. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. – М.: Мир, 1964-1967, ч. 1, 2.
9. Вентцель Е.С., Теория вероятностей. – М.: Наука, 1964.
10. Абдалимов Б.А. Олий математика. – Т.: Ўқитувчи, 1994.
11. Колемаев В.А., Староверов О.В., Турдадаевский В.Б. Теория вероятностей и математическая статистика. -М.: Инфра – М, 1997.
12. Ветцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей (задачи и упражнения) М.: Высшая школа, 2000.

Internet: www.reshebnik.ru
www.muna.ru
www.ziyo.uz

# MUNDARIJA

Muharrir M.M. Botirbekova.

Bosishga ruhsat etildi 20.10.2006 y. Bichimi 60x84 1/16.
Shartli bosma tabog'i 12,5. Nushasi 500 dona. Buyurtma № 30.
TDTU bosmaxonasida chop etildi. Toshkent sh. Talabalar ko'chasi 54.