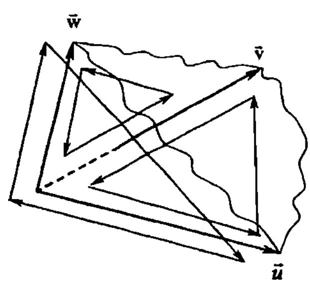
D.G'.RAHIMOV

OLIY MATEMATIKA

I

O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi texnik oliy o'quv yurtlari talabalari uchun darslik sifatida ruxsat etgan

Ikkinchi tuzatilgan va to'ldirilgan nashri



TOSHKENT
"IQTISOD-MOLIYA"
2006

Rahimov D. G'. Oliy matematika. - Darslik, Toshkent, "IQTISOD-MOLIYA", 2006, - 460 b.

Ikki jildlik "Oliy matematika, I" va "Oliy matematika, II" darsliklari oliy texnik o'quv yurtlarining bakalavrlar tayyorlash uchun oliy matematika fani bo'yicha tasdiqlangan o'quv dasturi asosida yozilgan.

Darslikning birinchi jildi «Chiziqli algebra va analitik geometriya», «Bir o'zgaruvchili funktsiyaning differentsial va integral hisob kursi», «Ko'p o'zgaruvchili funktsiyaning differentsial hisobi» va «Differentsial tenglamalar» qismlarini o'z ichiga olgan.

Kitob texnik oliy o'quv yurtlarining talabalari uchun darslik sifatida tavsiya etiladi. Kitobda matematikaning iqtisodiy masalalarga qo'llanishiga oid mavzular va masalalar kiritilgani uchun bu kitobdan iqtisodiy yo'nalishda ta'lim olayotgan talabalar ham foydalanishi mumkin.

Taqrizchilar:

1. G'afurov M. – frofessor, fizika-matematika fanlari doktori
2. Adirov T.X.– fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent

So'z boshi.

Lotin grafikasiga asoslangan o'zbek imlosi bo'yicha ta'lim olgan o'quvchilar shu yildan oliy ta'lim muassasalariga o'qishga kiradilar. Shu sababli, bu imloda darsliklar yozish yoki avval nashr etilgan darsliklarni shu imloga o'tkazish shu kunning dolzarb masalasi bo'lib qoldi.

Muallif kirill grafikasidagi o'zbek imlosida yozilgan shu nomli darsligini lotin grafikasiga asoslangan o'zbek imlosida qayta nashr ettirish taklifini bajonidil qabul qildi. Shu imkoniyatdan foydalanib, avvalgi nashr davridan to shu kungacha bo'lgan muddat ichida ko'p ustozlari, hamkasblari va mushtariylardan darslik to'g'risidagi fikr-mulohazalari, kamchiliklar va qilingan takliflar asosida ushbu nashrni tayyorlab, mushtariylar muhokamasiga taklif etayapdi. Muallif fikr-mulohaza bildirgan barcha insonlarga o'zining cheksiz minnatdorchiligini bildiradi.

Ana shu fikrlar asosida darslikning ko'p joylariga o'zgartirishlar kiritildi. Xususan, 1-bob avvalgi nashrdan farqli o'laroq determinant tushunchasini bayoni bilan boshlanmay, balki matritsalar va ularga bog'liq bo'lgan barcha tushunchalarni bayoni bilan boshlandi. Determinant va uning xossalari shu bobning 2-§ ida keltiriladi. Shu bobning 5-§ idagi barcha ma'lumotlar ayrim o'zgartirishlar bilan alohida bob qilib ajratilib, Vektorlar algebrasi deb nomlandi. Avvalgi nashrda barcha misol va masalalar asosan texnik jarayonlar taxliliga doir bo'lgan bo'lsa, bu nashrga matematikaning ayrim iqtisodiy masalalarga qo'llanishini namoyish etadigan misollar kiritildi. Shu sababli, bu darslikdan iqtisodiy yo'nalishdagi ta'lim muassasalarida ham foydalanish imkoni tug'ildi.

Muallif mushtariylardan bu nashr to'g'risidagi fikr-mulohazalarini minnatdorchilik bilan qabul qilib, bildirilgan fikrlar darslikni takomillashishiga yordam beradi deb umid qiladi.

Muallif.

1 – BOB

CHIZIQ'LI ALGEBRA ELEMENTLARI

§1. Matritsalar.

1.1. Matritsaga doir asosiy tushunchalar.

1-ta'rif: a_{ij}, $i=1,2,...,m$, $j=1,2,...,n$ sonlarning muayyan tartibda yozilgan quyidagi jadvali

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

m ta satr, n ta ustundan tuzilgan $m\times n$ o'lchamli matritsa, deb ataladi. Bunda a_{ij} sonlar matritsaning elementlari deyilsa, uning birinchi indeksi i shu element joylashgan satr raqamini, ikkinchi indeksi j esa u joylashgan ustun raqamini bildiradi. Matritsa qisqacha, $A=\|a_{ij}\|$ ko'rinishda ham yozilishi mumkin.

Agar $m=n$ bo'lsa, A kvadrat matritsa deyiladi.

Agar barcha $i=1,2,...,m$, $j=1,2,...,n$ lar uchun $a_{ij}=b_{ij}$ bo'lsa, bir xil o'lchamli $A=\|a_{ij}\|$ va $B=\|b_{ij}\|$ matritsalarni teng deymiz, ya'ni $A=B$.

Matritsalar uchun ular ustida bajariladigan arifmetik amallar: qo'shish, ayirish va ko'paytirish amallarini kiritish mumkin.

2-ta'rif: Bir xil o'lchamli $A=\|a_{ij}\|$ va $B=\|b_{ij}\|$ matritsalarni yig'indisi $A+B$ deb, shunday $C=\|c_{ij}\|$ matritsaga aytamizki, bunda $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, $i=1,2,...,m$, $j=1,2,...,n$ bo'ladi.

1-misol.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 5 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -4 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 7 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

3-ta'rif: $A=\|a_{ij}\|$ matritsani α songa ko'paytmasi deb, A matritsani barcha elementlarini α ga ko'paytirishdan hosil bo'ladigan $B=\|b_{ij}\|$, $b_{ij}=\alpha a_{ij}$, $i=1,2,...,m$, $j=1,2,...,n$, matritsaga aytamiz.

2-misol.

$$3\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & -3 \\ -3 & 12 \end{pmatrix}$$

4-ta'rif: $m\times n$ o'lchamli $A=\|a_{ij}\|$ matritsaning $n\times k$ o'lchamli $B=\|b_{ij}\|$ matritsaga ko'paytmasi deb, elementlari quyidagi

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ ...\ +a_{in}b_{nj},\ i=1,2,...,m,\ j=1,2,...,n.$$

formulalardan aniqlanadigan $m\times k$ o'lchamli $C=\|c_{ij}\|$ matritsaga aytamiz.

3-misol.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 4 & 0\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+6 & 4-2 & 0+2\\ 0-3 & 0+1 & 0-1\\ 3+3 & 12-1 & 0+1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}7 & 2 & 2\\ -3 & 1 & -1\\ 6 & 11 & 1\end{pmatrix}=C$$

Agar $m\neq k$ bo'lsa, $B\cdot A$ ko'paytmani bajarib bo'lmaydi, lekin agar $m=k$ bo'lsa, umumiy holda $A\cdot B=B\cdot A$ bo'lmaydi, chunki $A\cdot B$ $m\times m$ o'lchamli, $B\cdot A$ esa $n\times n$ o'lchamli matritsa bo'ladi. Hatto $m=n$ bo'lgan holda ham matritsalar ko'paytmasi uchun kommutativlik (o'rin almashtirish) xossasi o'rinli emas. Masalan,

$$A=\begin{pmatrix}3 & 4 & 0\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix},\qquad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}.$$

matritsalar uchun

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2 & 4 & 3\\ -3 & -2 & -4\\ 9 & 7 & 11\end{pmatrix},\qquad B\cdot A=\begin{pmatrix}7 & 7 & 2\\ -2 & -2 & -1\\ 18 & 15 & 6\end{pmatrix}$$

ya'ni $A\cdot B\neq B\cdot A$.

Bevosita tekshirish yo'li bilan quyidagi

1) $(\lambda A)\cdot B=A\cdot(\lambda B)=\lambda\cdot(A\cdot B)$, λ-son;
2) $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$;
3) $C\cdot(A+B)=C\cdot A+C\cdot B$;
4) $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$;

xossalarni o'rinli ekanligiga ishonch hosil qilish mumkin.

4-*misol.* Korxona A,B,C mahsulotlar chiqarib, ularni ishlab chiqarish jarayonida ishlatadigan S_1, S_2 xom ashyolar normasi quyidagi jadvalda berilgan bo'lsin:

Maxsulot turi	Xom ashyoning bir mahsulot birligini tayyorlash uchun sarf normasi		Mahsulotning ishlab chiqarilish rejasi
	S_1	S_2	
A	2	3	100
B	5	2	80
C	1	4	130
Xom ashyo birligining narxi	30	50	

Mahsulotning rejadagi xajmini ishlab chiqarish uchun ketadigan xom ashyolar xajmi va ularning umumiy narxi topilsin.

Yechish. S_1 xom ashyoning sarf xajmini topaylik: $S_1=2\cdot100+5\cdot80+1\cdot130=730$ birlik. S_2 xom ashyo uchun $S_2=3\cdot100+2\cdot80+4\cdot130=980$ birlik. Shu sababli, S xom ashyoning sarf xajmini quyidagi matritsa-satr ko'rinishida ifodalash mumkin:

$$S=C\cdot A=(100 \quad 80 \quad 130)\begin{pmatrix}2 & 3\\ 5 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}=(730 \quad 980).$$

U holda xom ashyoning sarf narxi $Q=730\cdot30+980\cdot50=70900$ pul birligi, matritsa ko'rinishida quyidagicha yozilishi mumkin:

$$Q=S\cdot B=(CA)B=(70900).$$

Agar barcha i,j lar uchun $a^T_{ij}=a_{ji}$ bo'lsa, $A^T=\|a^T_{ij}\|$ matritsani $A=\|a_{ij}\|$ matritsaga transponirlangan matritsa deymiz.

Agar A $m\times n$ o'lchamli matritsa bo'lsa, A^T $n\times m$ o'lchamli matritsa bo'ladi.

5-misol.

$$A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix},\qquad A^T=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Quyidagi xossalar o'rinli:

1) $(A^T)^T=A;$
2) $(A+B)^T=A^T+B^T$
3) $(A\cdot B)^T=B^T\cdot A^T$

Agar $A^T=A$ bo'lsa, kvadrat A matritsa simmetrik, $A^T=-A$ bo'lsa, kososimmetrik matritsa, deb ataladi.

Teorema. Har qanday A kvadrat matritsani simmetrik B va kososimmetrik C matritsalar yig'indisi ko'rinishida ifodalash mumkin.

1.2. Matritsaning determinanti.

Endi matritsalarning sonli belgisi bo'lmish determinant tushunchasini kiritamiz. Avval bu tushunchani kiritishda zarur bo'ladigan quyidagi o'rinlashtirish tushunchasini ko'raylik.

5-ta'rif: Dastlabki n ta $\{1,2,...,n\}$ natural sonlar to'plamining o'ziga har qanday o'zaro bir qiymatli π mos qo'yish n-tartibli o'rinlashtirish deyiladi. Har qanday n-tartibli π o'rinlashtirish quyidagicha yozilishi mumkin:

$$\pi=\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_n\\ \alpha_{i_1} & \alpha_{i_2} & \cdots & \alpha_{i_n}\end{pmatrix},$$

xususan,

$$\pi=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}$$

kanonik o'rinlashtirish deyiladi. Har qanday o'rinlashtirishni kanonik ko'rinishga keltirish mumkin. Buning uchun mos qo'yish tartibini saqlagan holda, birinchi satr elementlarining o'rinlarini o'sish tartibida yozish kifoya.

Agar berilgan π o'rinlashtirishda $i<j$ natural sonlarga mos qo'yilgan α_i va α_j sonlar uchun $\alpha_i>\alpha_j$ munosabat o'rinli bo'lsa, π o'rinlashtirishda (i,j) juftlik inversiyani tashkil etadi, deymiz. Agar barcha invers juftliklar soni $S(\pi)$ juft bo'lsa, π o'rinlashtirish juft, agar $S(\pi)$ toq bo'lsa, π o'rinlashtirish toq deyiladi. Masalan,

$$\pi=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 1 & 4\end{pmatrix}$$

o'rinlashtirishda $(1,2)$, $(1,3)$ va $(2,3)$ juftliklar inversiyani tashkil etadi. Demak, bu o'rinlashtirish toq ekan.

6-ta'rif: Quyidagi

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

kvadrat matritsaning aniqlovchisi yoki n-tartibli determinanti, deb, quyidagi songa aytamiz:

$$\det A=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=\sum_{\pi}(-1)^{S(\pi)}a_{1,\pi(1)}\ldots a_{n,\pi(n)}$$

bu yerda yig'indi barcha n-tartibli o'rinlashtirishlar bo'yicha bajariladi.

Bu ta'rifni tushunish uchun $n=2$ va $n=3$ bo'lgan hollarni ko'raylik. Agar $n=2$ bo'lsa, o'rinlashtirishlar faqat

$$\pi_1=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix} \quad \text{va} \quad \pi_2=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

bo'ladi. Bunda $S(\pi_1)=0$ va $S(\pi_2)=1$. Shu sababli,

$$\det A=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

Barcha 3-tartibli o'rinlashtirishlar quyidagicha:

$$\pi_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\qquad \pi_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},\qquad \pi_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},$$

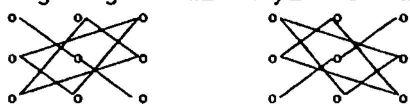
$$\pi_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix},\qquad \pi_5=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix},\qquad \pi_6=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}.$$

Har bir o'rinlashtirish uchun inversiya sonini hisoblasak: $S(\pi_1)=0$, $S(\pi_2)=2$, $S(\pi_3)=2$, $S(\pi_4)=3$, $S(\pi_5)=1$, $S(\pi_6)=1$ ekanligiga ishonch hosil qilamiz. U holda ta'rifga ko'ra :

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{12}a_{23}a_{31}-$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

3-tartibli determinantlarni hisoblash uchun «uchburchaklar usuli», deb ataluvchi quyidagi diagrammadan foydalanish mumkin:

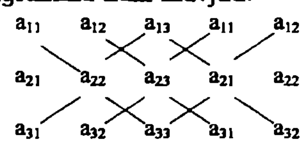


a) (+) b) (-)

1-rasm

Har bir diagrammada tutashtirilgan elementlar o'zaro ko'paytirilib, keyin natijalar qo'shiladi,
a) diagrammadagi yig'indi «+» ishorasi bilan,
b) diagrammadagi yig'indi esa «-» ishora bilan olinib, ikkala natija o'zaro qo'shiladi.

3-tartibli determinantlarni hisoblash uchun «Sarryus usuli», deb ataluvchi quyidagi diagramma ham mavjud:



2-rasm.

bu yerda tutashtirilgan elementlar o'zaro ko'paytirilib, asosiy diagonalga parallel tutashtirilganlari alohida qo'shilib «+» ishora bilan, yon diagonalga parallel tutashtirilganlari alohida qo'shilib «-» ishora bilan olinib, natijalar qo'shiladi.

Agar A va V $n\times n$ o'lchamli kvadrat matritsalar bo'lsa, u holda

1) $det(A\cdot B)=detA\cdot detB$;

2) $det(\lambda A)=\lambda^n detA$;

munosabatlar o'rinli bo'ladi.

1.3. Minor va algebraik to'ldiruvchi. Faraz qilaylik, $m\times n$ o'lchamli A matritsada ixtiyoriy ravishda uning k ta satr va k ta ustuni biror usul bilan tanlangan bo'lsin, bu yerda $k\leq min(m,n)$. Bu tanlangan satr va ustunlardan tuzilgan k-tartibli determinant A matritsaning k-tartibli minori deyiladi. Xususan, agar A $n\times n$ o'lchamli kvadrat matritsa bo'lsa, uning i-yo'li va j-ustunini o'chirish natijasida hosil bo'lgan $n-1$-tartibli determinant A matritsaning a_{ij} elementiga mos keluvchi $n-1$-tartibli minori deb atalib, M_{ij} ko'rinishda belgilanadi. Masalan, $3x3$ o'lchamli matritsa uchun a_{11} elementga mos keluvchi minor

$$M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Xuddi shuningdek, a_{12} ga mos keluvchi minor

$$M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

va hokazo.

Quyidagi $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ ifoda a_{ij} elementning algebraik to'ldiruvchisi deyiladi. a_{11} elementning algebraik to'ldiruvchisi $A_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, a_{12}-elementniki esa $A_{12}=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$ va hokazo.

1.4. Determinantlarning xossalari.

1. Agar determinantning barcha yo'l elementlarini ustun elementlariga yoki aksincha, almashtirilsa, uning qiymati o'zgarmaydi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

2. Agar determinantning ikki yonma-yon turgan yo'l (ustun) elementlarini o'rnini mos ravishda almashtirsak, determinant qiymati qarama-qarshi ishoraga o'zgaradi:

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}=a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22}=-(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

3. Agar determinantning biror yo'l (ustun) elementlari umumiy λ ko'paytuvchiga ega bo'lsa, u holda bu ko'paytuvchini determinant tashqarisiga chiqarish mumkin:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & \lambda a_{22} \end{vmatrix} = \lambda a_{11}a_{22} - \lambda a_{12}a_{21} = \lambda(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Xususan, agar $\lambda=0$ bo'lsa, determinant qiymati nolga tengdir.

4. Agar determinantning biror yo'l (ustun) elementlari mos ravishda boshqa yo'l (ustun) elementlariga proportsional bo'lsa, u holda determinant qiymati nolga teng bo'ladi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \lambda a_{11} \\ a_{21} & \lambda a_{21} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix} = \lambda(a_{11}a_{21} - a_{11}a_{21}) = 0.$$

5. Agar determinantning yo'l (ustun) elementlari ikki ifodaning yig'indisi ko'rinishida bo'lsa, u holda determinant ikki determinant yig'indisi ko'rinishida yozilishi mumkin:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}^{1} + a_{12}^{11} \\ a_{21} & a_{22}^{1} + a_{22}^{11} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}^{1} \\ a_{21} & a_{22}^{1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}^{11} \\ a_{21} & a_{22}^{11} \end{vmatrix}$$

6. Agar determinantning yo'l (ustun) elementlarini biror $\lambda \neq 0$ songa ko'paytirib, mos ravishda boshqa yo'l (ustun) elementlariga qo'shsak, determinant qiymati o'zgarmaydi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + \lambda a_{11} \\ a_{21} & a_{22} + \lambda a_{21} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \lambda a_{11} \\ a_{21} & \lambda a_{21} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Yuqorida keltirilgan xossalar determinant uchinchi va undan yuqori tartibli bo'lganda ham o'rinlidir.

7. Dememinanting biror yo'l (ustun) elementlarini mos ravishda o'zining algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytirib qo'shsak, u holda yig'indi determinant qiymatiga teng bo'ladi. Haqiqatan,

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \qquad \Delta = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$$

$$\Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \qquad \Delta = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$$

$$\Delta = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} \qquad \Delta = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}$$

Tengliklarning to'g'ri ekanligini isbotlash qiyin emas.

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) +$$

$$+ a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

8. Determinantning biror yo'l (ustun) elementlarini mos ravishda boshqa yo'l (ustun) elementlarining algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytirib qo'shsak, u holda yig'indi nolga teng bo'ladi. Masalan,

$$a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}=0 \qquad a_{11}A_{12}+a_{21}A_{22}+a_{31}A_{32}=0$$

$$a_{11}A_{31}+a_{12}A_{32}+a_{13}A_{33}=0 \qquad a_{11}A_{13}+a_{21}A_{23}+a_{23}A_{33}=0$$

va hokazo. Haqiqatan,

$$a_{11}A_{31}+a_{12}A_{32}+a_{13}A_{33}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}+$$

$$+a_{13}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{12}a_{23}-a_{11}a_{13}a_{22}-a_{11}a_{12}a_{23}+$$

$$+a_{12}a_{13}a_{21}+a_{11}a_{13}a_{22}-a_{12}a_{13}a_{21}=0$$

Yuqorida keltirilgan xossalar n-tartibli determinantlar uchun ham o'rinlidir. Xususan,

$$\det A=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} \qquad (\mathrm{i}=1,\ldots,\mathrm{n}) \tag{3}$$

$$\det A=\sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{ik} \qquad (\mathrm{k}=1,\ldots,\mathrm{n}) \tag{4}$$

bu yerda A_{ik} algebraik to'ldiruvchilar n-1 tartibli determinantlardir, shu sababli, (3), (4) formulalarni n-tartibli determinantni hisoblashning tartibini pasaytirish yoki satr va ustun elementlari bo'yicha yoyish usuli deb ham atashadi.

6-misol. Hisoblang:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

Yechish: Masalan 3-ustun elementlarini avval 2-ustunga va -2 ga ko'paytirib 1-ustunga qo'shamiz:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ -9 & 7 & 6 & 1 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} -4 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ -9 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

3-ustunni -4 ga va 3 ga ko'paytirib, mos ravishda 1- va 2-ustunlarga qushsak:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -13 & 10 & 3 \\ -13 & 10 & 1 \end{vmatrix}=-1\cdot\begin{vmatrix} -13 & 10 \\ -13 & 10 \end{vmatrix}=0.$$

§2. Teskari matritsa.

Quyidagi nxn o'lchamli matritsani ko'raylik:

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Ixtiyoriy nxn o'lchamli $A=\|a_{ij}\|$ matritsa uchun $A{\cdot}E=E{\cdot}A=A$ ekanligiga ishonch hosil qilish qiyin emas, ya'ni E matritsalar uchun birlik vazifasini bajaradi. Shuning uchun E ni birlik matritsa, deb aytiladi.

Determinanti 0 ga teng bo'lgan quyidagi har qanday nxn o'lchamli $A=\|a_{ij}\|$ matritsa maxsus matritsa deb ataladi:

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=0$$

Aks holda, ya'ni $\det A\neq 0$ bo'lsa, A matritsa maxsus bo'lmagan matritsa deyiladi.

Masalan, avvalgi paragrafda ko'rilgan misolga ko'ra

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

matritsa maxsus matritsa, chunki

$$\det\mathrm{A}=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}=0$$

Ta'rif. Agar $A{\cdot}B=B{\cdot}A=E$ munosabat o'rinli bo'lsa, nxn o'lchamli kvadrat $B=\|b_{ij}\|$ matritsani maxsus bo'lmagan nxn o'lchamli $A=\|a_{ij}\|$ matritsaga teskari matritsa deb ataladi. Teskari matritsa $B=A^{-1}$ ko'rinishda belgilanadi.

Endi teskari matritsani bevosita hisoblash usullarini ko'ramiz.

Faraz qilaylik, $A=\|a_{ij}\|$ maxsus bo'lmagan kvadrat matritsa bo'lsin. Agar A_{ij} — a_{ij} elementning $\det A$ dagi algebraik to'ldiruvchisi bo'lsa, u holda

$$A^{v}=\begin{pmatrix} A_{12} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

A ga biriktirilgan matritsa deb ataladi. Determinantning (3), (4) xossalariga asosan quyidagi kelib chiqadi:

$$A^{v}A=AA^{v}=\det A\cdot E, \quad \text{bundan} \quad A^{-1}=\frac{1}{\det A}A^{v}$$

Teskari matritsani hisoblashning bu usuli biriktirilgan matritsalar usuli deb ataladi.

7-misol. Biriktirilgan matritsalar usuli bilan

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

matritsaga teskari matiritsani toping.

Yechish: $\det A=-4$. Demak, A maxsus bo'lmagan matritsa ekan. Uning barcha algebraik to'ldiruvchilarini topamiz:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}=4, \quad A_{21}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}=-8, \quad A_{31}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=4$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=-7, \quad A_{22}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=9, \quad A_{32}=-\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-5$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}=-6, \quad A_{23}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}=10, \quad A_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}=-6.$$

Shuning uchun,

$$A^{v}=\begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -7 & 9 & -5 \\ -6 & 10 & -6 \end{pmatrix}$$

va

$$A^{-1}=-\frac{1}{4}A^{v}=\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -7/4 & 9/4 & -5/4 \\ 3/2 & -5/2 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

Quyida ko'riladigan usulimiz elementar almashtirishlar usuli, deb ataladi.

Agar A $n\times n$ o'lchamli maxsus bo'lmagan kvadrat matritsa bo'lsa, uning uchun o'lchami $n\times 2n$ bo'lgan $\Gamma_A=(A/E)$ matritsa tuzib olamiz, ya'ni A matritsaga birlik E matritsani birlashtirib tuzamiz. Hosil bo'lgan Γ_A matritsani satrlari ustida elementar almashtirishlar bajarib, uni (E/B) ko'rinishga keltiramiz. U holda $B=A^{-1}$ bo'ladi.

8-misol. Elementar almashtirishlar usuli yordamida quyidagi matritsaga teskari matritsani toping:

$$A=\begin{pmatrix}3&2&1\\4&5&2\\2&1&4\end{pmatrix}$$

Yechish: Γ_A matritsani tuzib olamiz:

$$\Gamma_A=\left(\begin{array}{ccc|ccc}3&2&1&1&0&0\\4&5&2&0&1&0\\2&1&4&0&0&1\end{array}\right).$$

Γ_A matritsaning satrlarini mos ravishda $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ deb belgilab olib, ular ustida quyidagi almashtirishlarni bajaramiz:

$$\gamma_1'=\frac{1}{3}\gamma_1,\qquad \gamma_1''=\gamma_1'-\frac{2}{7}\gamma_2',\qquad \gamma_1'''=\gamma_1''-\frac{1}{24}\gamma_3''$$

$$\gamma_2'=\gamma_2-\frac{4}{3}\gamma_1,\qquad \gamma_2''=\frac{3}{7}\gamma_2',\qquad \gamma_2'''=\gamma_2''-\frac{1}{12}\gamma_3''$$

$$\gamma_3'=\gamma_3-\frac{2}{3}\gamma_1,\qquad \gamma_3''=\gamma_3'+\frac{1}{7}\gamma_2',\qquad \gamma_3'''=\frac{7}{24}\gamma_3''.$$

Natijada ketma-ket quyidagini hosil qilamiz:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}3&2&1&1&0&0\\4&5&2&0&1&0\\2&1&4&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2/3&1/3&1/3&0&0\\0&7/3&2/3&-4/5&1&0\\0&-1/3&10/4&-2/3&0&1\end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1/7&5/7&-2/7&0\\0&1&2/7&-4/7&3/7&0\\0&0&24/7&-6/7&1/7&1\end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&3/4&-7/24&-1/24\\0&1&0&-1/2&5/12&-1/12\\0&0&1&-1/4&1/24&7/24\end{array}\right).$$

Demak,

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}3/4&-7/24&-1/24\\-1/2&5/12&-1/12\\-1/4&1/24&7/24\end{pmatrix}.$$

Teskari matritsa quyidagi xossalarga ega:

1^0. $(\alpha A)^{-1}=A^{-1}/\alpha \qquad (\alpha\neq 0)$

2^0. $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

3^0. $(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$

1^0-xossaning isboti. Agar $\alpha\neq 0$ bo'lsa, $\det(\alpha A)=\alpha^n\det A\neq 0$ bo'ladi, shuning uchun $\alpha A=\|\alpha a_{ij}\|$ matiritsa maxsus emas, demak, $(\alpha A)^{-1}$

mavjud. Agar A_{ij} deb αA matritsaning αa_{ij} elementining algebraik to'ldiruvchisi, A_{ij} deb esa A matritsaning a_{ij} elementini algebraik to'ldiruvchisini belgilasak, u holda $A_{ij}=\alpha^{n-1}A_{ij}$ ekanligiga ishonch hosil qilish qiyin emas. Shu sababli,

$$(\alpha A)^{-1}=\frac{1}{\alpha^n \det A}\left\|A_{ji}\right\|=\frac{1}{\alpha^n \det A}\left\|\alpha^{n-1}A_{ji}\right\|=$$

$$=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\det A}\left\|A_{ji}\right\|=\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\det A}A^{v}=\frac{1}{\alpha}A^{-1}.$$

2^0 xossaning isboti. Agar $B^{-1}A^{-1}$ ni $A{\cdot}B$ ga o'ng tomonidan ko'paytirilsa

$$AB{\cdot}B^{-1}A^{-1}=A(BB^{-1})A^{-1}=AEA^{-1}=AA^{-1}=E.$$

Agar chap tomonidan ko'paytirsak:

$$B^{-1}A^{-1}AB=B^{-1}(A^{-1}A)B=B^{-1}EB=B^{-1}B=E$$

bo'ladi. Demak, haqiqatdan $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ ekan.

3^0 xossani isboti. A^T ni $(A^{-1})^T$ ga chap tomonidan ko'paytiraylik, u holda 2.1§ dagi transponirlangan matritsalarning 3-xossasiga ko'ra

$$A^T(A^{-1})^T=(A^{-1}A)^T=E^T=E$$

va A^T ni $(A^{-1})^T$ ga o'ng tomondan ko'paytirsak quyidagi hosil bo'ladi:

$$(A^{-1})^T A^T=(AA^{-1})^T=E^T=E.$$

§3. Arifmetik vektorlar fazosi. Matritsaning rangi.

3.1 Arifmetik vektorlar. Ixtiyoriy n ta $x_1,x_2,\dots,x_n$ sonlarning har qanday tartiblangan to'plami arifmetik vektor deyiladi va $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ kabi belgilanadi. $x_1,x_2,\dots,x_n$ sonlar x arifmetik vektorning komponentlari deb ataladi.

Arifmetik vektor ustida quyidagi amallarni kiritamiz:

Qo'shish: agar $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ va $y=(y_1,y_2,\dots,y_n)$ bo'lsa, u holda

$$x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,\dots,x_n+y_n) \tag{3.1}$$

bo'ladi.

Songa ko'paytirish: agar λ-biror son va $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ arifmetik vektor bo'lsa, u holda

$$\lambda x=(\lambda x_1,\lambda x_2,\dots,\lambda x_n) \tag{3.2}$$

bo'ladi.

Barcha arifmetik vektorlar to'plami yuqoridagi kiritilgan amallarga ko'ra arifmetik vektorlar fazosi, deb ataladi va R^n bilan belgilanadi. Bu fazo chiziqli fazo bo'ladi. Haqiqatan, ixtiyoriy $x,u\in R^n$ lar uchun

1) $x+y=y+x$;
2) $(x+y)+z=x+(y+z)$;
3) $x+0=x$, bu yerda $0=(0,\ .\ .\ .\ ,0)$ nol vektor;

4) har qanday x,u uchun shunday z mavjudki, $x=u+z$, z ni x va u larning ayirmasi deb ataladi va $z=x-u$ deb belgilanadi;

5) $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$, λ,μ-ixtiyoriy sonlar;

6) $1\cdot x=x$;

7) $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$;

8) $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$.

Eslatma. Agar $x_1,x_2,\ldots,x_n$ sonlar haqiqiy bo'lsa, R^n xaqiqiy arifmetik vektorlar fazosi, agar $x_1,x_2,\ldots,x_n$ lar kompleks bo'lsa, R^n kompleks arifmetik fazo, deb ataladi.

Agar shunday bir vaqtda nolga teng bo'lmagan $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_S$ sonlar mavjud bo'lib, $\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\ldots+\lambda_Sx_S=0$ bo'lsa, arifmetik vektorlarning $\{x_1,x_2,\ldots,x_S\}$ sistemasi chiziqli bog'liq deyiladi. Aks holda, bu sistema chiziqli erkli, deyiladi.

Faraz qilaylik, Q-arifmetik vektorlarning ixtiyoriy to'plami bo'lsin. $B=\{e_1,e_2,\ldots,e_S\}$ sistema Q da bazis tashkil etadi deyiladi, agar

a) $e_k\in Q$, $k=1,2,\ldots,s$;

b) B sistema chiziqli erkli bo'lsa;

v) ixtiyoriy $x\in Q$ uchun shunday $\lambda_1,\ldots,\lambda_S$ topilsaki,

$$x=\sum_{k=1}^{n}\lambda e_k \qquad (3.3)$$

bo'lsa.

(3.3) formula x vektorning B bazis bo'yicha yoyilmasi, deb ataladi. $\lambda_1,\ldots,\lambda_S$ koeffitsientlar x vektorning B bazisdagi koordinatalari deyiladi.

Misol 1. Agar $a_1=(4,1,3,-2)$, $a_2=(1,2,-3,2)$, $a_3=(16,9,1,-3)$, $a_4=(0,1,2,3)$, $a_5=(1,-1,15,0)$ bo'lsa, $3a_1+5a_2-a_3-2a_4+2a_5$ ni hisoblang.

Yechish: (3.1) va (3.2) ga asosan $3a_1=(12,3,9,-6)$, $5a_2=(5,10,-15,10)$, $2a_4=(0,2,4,6)$, $2a_5=(2,-2,30,0)$,

$$3a_1+5a_2-a_3-2a_4+2a_5=(12+5-16-0+2,\ 3+10-9-2-2,\ 9-15-1-4-30,\ -6+10+3-6+0)=(3,0,-41,1).$$

Misol 2. $x_1=(-3,1,5)$ va $x_2=(6,-3,15)$ arifmetik vektorlarning chiziqli bog'liq yoki chiziqli bog'liq emasligini aniqlang.

Yechish: Ta'rifga ko'ra

$$\lambda_1x_1+\lambda_2x_2=(-3\lambda_1+6\lambda_2,\ \lambda_1-3\lambda_2,\ 5\lambda_1+15\lambda_2)=0$$

bundan,

$$-3\lambda_1+6\lambda_2=0,\ \lambda_1-3\lambda_2=0,\ 5\lambda_1+15\lambda_2=0.$$

Ko'rinib turibdiki, bu tengliklarni bir vaqtda faqat $\lambda_1=0$, $\lambda_2=0$ qiymatlar qanoatlantiradi. Demak, berilgan vektorlar chiziqli erkli ekan.

Misol 3. $e_1=(1,1,1,1,1)$, $e_2=(0,1,1,1,1)$, $e_3=(0,0,1,1,1)$, $e_4=(0,0,0,1,1)$, $e_5=(0,0,0,0,1)$ arifmetik vektorlar sistemasi R^5 da bazis tashkil etishini ko'rsating.

Yechish: Avval bu sistema chiziqli bog'liq emasligini ko'rsatamiz. Haqiqatan,

$$\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2+\lambda_3 e_3+\lambda_4 e_4+\lambda_5 e_5=(\lambda_1,\lambda_1+\lambda_2,\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3,\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4,$$
$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5)=0$$

bundan

$$\lambda_1=0,\ \lambda_1+\lambda_2=0,\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0,\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=0$$
$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5=0$$

va ketma-ket $\lambda_1=0$, $\lambda_2=0$, $\lambda_3=0$, $\lambda_4=0$, $\lambda_5=0$ hosil bo'ladi, ya'ni bu sistema chiziqli erkli ekan.

Endi $x=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$ R^5 ning ixtiyoriy elementi bo'lsin. U holda

$$x=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(x_1,x_1,x_1,x_1,x_1)+(0,\ x_2-x_1,\ x_2-x_1,\ x_2-x_1,\ x_2-x_1)+$$
$$+(0,\ 0,\ x_3-x_2,\ x_3-x_2,\ x_3-x_2)+(0,\ 0,\ 0,\ x_4-x_3,\ x_4-x_3)++(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ x_5-x_4)=$$
$$=x_1(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)+(x_2-x_1)(0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)+(x_3-x_2)(0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1)+$$
$$+(x_4-x_3)(0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1)++(x_5-x_4)(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1)=x_1e_1+(x_2-x_1)e_2+(x_3-x_2)e_3+$$
$$+(x_4-x_3)e_4+(x_5-x_4)e_5$$

Agar $x=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\neq 0$ bo'lsa, u holda x_1, x_2-x_1, x_3-x_2, x_4-x_3, x_5-x_4 bir vaqtda nolga teng bo'lmaydi. Shu sababli $\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}$ R^5 da bazis bo'lar ekan.

Masalan, $x=(1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1)$ arifmetik vektorning shu bazisdagi koordinatalari $x=(1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1)$ bo'ladi.

1-teorema. Agar a_1, a_2, a_3 arifmetik vektorlar chiziqli bog'liq va a_3 vektor a_1 va a_2 vektorlar orqali chiziqli ifodalanmasa, a_1 va a_2 lar faqat o'zgarmas ko'paytuvchigagina farq qiladi.

Isboti: a_1, a_2, a_3 lar chiziqli bog'liq bo'lgani uchun bir vaqtda nolga teng bo'lmagan shunday $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ sonlar topiladiki $\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\lambda_3 a_3=0$ bo'ladi.Agar $\lambda_3\neq 0$ bo'lsa, u holda

$$a_3=-\frac{\lambda_1}{\lambda_3}a_1-\frac{\lambda_2}{\lambda_3}a_2$$

deb yozish mumkin, lekin bu teorema shartiga zid, chunki a_3 vektor a_1 va a_2 lar orqali chiziqli ifodalanib qoladi. Shu sababli $\lambda_3=0$ bo'lishi shart. U holda

$$\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2=0,$$

bo'ladi, bundan esa, agar $\lambda_1\neq 0$ bo'lsa,

$$a_1=-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}a_2$$

kelib chiqadi. Teorema isbot bo'ldi.

2-teorema. Agar $a_1,a_2,...,a_n$ arifmetik vektorlar chiziqli bog'liq bo'lmasa-yu, $a_1,a_2,...,a_n,b$ lar chiziqli bog'liq bo'lsa, u holda b vektor $a_1,a_2,...,a_n$ vektor orqali chiziqli ifodalanadi.

Isboti: $a_1,a_2,...,a_n,b$ vektorlar teorema shartiga ko'ra chiziqli bog'liq bo'lgani uchun bir vaqtda nolga teng bo'lmagan shunday $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_{n+1}$ sonlar topiladiki,

$$\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+...+\lambda_n a_n+\lambda_{n+1}b=0 \tag{3.4}$$

bo'ladi. bu yerda $\lambda_{n+1}\neq 0$ bo'lishi shart, aks holda, ya'ni agar $\lambda_{n+1}=0$ bo'lsa,

$$\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+...+\lambda_n a_n=0$$

bo'lib, bundan va $a_1,a_2,...,a_n$ larning chiziqli bog'liq emasligidan $\lambda_1=\lambda_2=...=\lambda_n=0$ kelib chiqadi, ya'ni $a_1,a_2,...,a_n,b$ lar chiziqli bog'liq emas degan xato xulosaga kelaiz. Shu sababli $\lambda_{n+1}\neq 0$, u holda (3.4) ni

$$b=-\frac{\lambda_1}{\lambda_{n+1}}a_1-\frac{\lambda_2}{\lambda_{n+1}}a_2-...-\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}a_n$$

deb yozish mumkin. Teorema isbot bo'ldi.

3-teorema. $a_1,a_2,...,a_m$ arifmetik vektorlar orqali chiziqli ifodalanuvchi har qanday $n>m$ ta $b_1,b_2,...,b_n$ arifmetik vektorlar sistemasi chiziqli bog'liq bo'ladi.

Isbotni matematik induktsiya usuli bilan amalga oshiramiz.

$m=1$ bo'lganda teoremaning to'g'riligiga ishonch hosil qilish qiyin emas. Teorema $m=k$-1 uchun to'g'ri bo'lsin deb faraz qilib, $m=k$ uchun tekshiramiz.

Agar

$$\begin{aligned} b_1&=c_{11}a_1+...+c_{1k}a_k,\\ b_2&=c_{21}a_1+...+c_{2k}a_k,\\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ b_n&=c_{n1}a_1+...+c_{nk}a_k \end{aligned}$$

bo'lsa, quyidagi 2 hoi yuz berishi mumkin.

1. Barcha $c_{11},c_{21},...,c_{n1}$ koeffitsientlar nolga teng. Unda $b_1,b_2,...,b_n$ lar k-1 ta vektorlar orqali chiziqli ifodalanib qoladi, bu hol uchun farazimizga ko'ra teorema to'g'ri.

2. b_1 ning koeffitsientlarini kamida bittasi noldan farqli. Umumiylikni buzmagan holda $c_{11}\neq 0$, deb faraz qilish mumkin.

Agar

$$b_2^1=b_2-\frac{c_{21}}{c_{11}}b_1,\quad b_3^1=b_3-\frac{c_{31}}{c_{11}}b_1,\ .\ .\ .,b_n^1=b_n-\frac{c_{n1}}{c_{11}}b_1$$

desak, bu vektorlar $a_1,a_2,...,a_m$ orqali chiziqli ifodalanadi va ularning soni n-1 teorema shartiga ko'ra k-1 dan katta. Qilingan farazga ko'ra bu sistema chiziqli bog'liq, ya'ni shunday bir vaqtda nolga teng bo'lmagan $\gamma_2,\dots,\gamma_n$ sonlar topiladiki,

$$\gamma_2 b_2^| + \dots + \gamma_n b_n^| = 0$$

bo'ladi. Agar $b_2^|,\dots,b_n^|$ lar o'rniga ularning $b_1, b_2,\dots,b_n$ lar orqali ifodasini qo'ysak,

$$\gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \dots + \gamma_n b_n = 0$$

bu yerda

$$\gamma_1 = -\frac{c_{21}}{c_{11}}\gamma_2 - \dots - \frac{c_{n1}}{c_{11}}\gamma_n$$

hosil bo'ladi. γ_1, $\gamma_2,\dots,\gamma_n$ lar bir vaqtda nolga teng bo'lmagani uchun $b_1, b_2,\dots,b_n$ lar chiziqli bog'liq ekanligi kelib chiqadi.

Har qanday vektorlar sistemasi $Q \subset R^n$ kamida bitta bazisga ega va bu sistemaning barcha bazislari bir xil sondagi vektorlardan tuzilgan bo'ladi. Bu sonni Q sistemaning rangi deb ataladi va $rangQ$ yoki $r(Q)$ ko'rinishda belgilanadi.

R^n fazoning rangi n ga teng, uni bu fazoning o'lchami,deb ataladi. R^n da bazis tashkil etuvchi quyidagi sistema

$$e_1 = (1,\ 0,\ 0,\ \dots,\ 0),$$
$$e_2 = (0,\ 1,\ 0,\ \dots,\ 0),$$
$$.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$
$$e_n = (0,\ 0,\ 0,\ \dots,\ 1)$$

kanonik bazis deb ataladi.

R^n ning har qanday x vektoriga uning shu bazisdagi koordinatalar ustunini o'zaro bir qiymatli mos qo'yish mumkin, ya'ni

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n \Leftrightarrow X = (x_1, x_2,\dots,x_n)^T$$

Eslatma. Vektorning komponentalari bilan uning biror bazisdagi koordinatalarini farqlash zarur. Ular faqat kanonik bazis uchun bir xil bo'ladi halos. Bunga 3-misolda keltirilgan vektor misol bo'la oladi.

3.2. Matritsaning rangi.

Ta'rif. Noldan farqli minorlarning eng yuqori tartibi A matritsaning rangi deb atalib, $r(A)$ ko'rinishda belgilanadi.

Agar $r(A)=r$ bo'lsa, noldan farqli $r-$tartibli har qanday minor A matritsaning bazis minori, deb ataladi.

$m \times n$ o'lchamli A matritsaning barcha yo'llarini (yo satrlarini yo ustunlarini) R^n ning yoki mos ravishda R^m ning arifmetik vektorlari sistemasi, deb qarash mumkin.

Isbotsiz quyidagi teoremani keltiramiz.

4-teorema. Matritsaning rangi uning yo'llari sistemasining rangiga teng bo'ladi va bazis minorini o'z ichiga olgan yo'llar sistemasida bazis tashkil etadi.

Matritsa rangini hisoblashning ikkita usulini ko'ramiz.

1-usul o'rab turuvchi minorlar usuli, deb ataladi.

Agar M_2 minor M_1 minorni to'la o'z ichiga olsa, M_2 minor M_1 minorni o'rab turadi, deymiz. Masalan,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix}$$

matritsada

$$M_1 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

bo'lsa,

$$M_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

uni o'rab turuvchi minor bo'ladi.

Faraz qilaylik, A matritsada noldan farqli biror k-tartibli minor M aniqlangan bo'lsin. M ni o'rab turuvchi $(k+1)$-tartibli minorlarni ko'rib chiqamiz. Agar bu minorlarning hammasi nolga teng bo'lsa, u holda matritsaning rangi k bo'ladi. Agar bu $(k+1)$-tartibli minorlarning orasida hech bo'lmaganda bitta noldan farqlisi M_{k+1} bo'lsa, M_{k+1} ni o'rab turuvchi barcha $(k+2)$-tartibli minorlarni ko'rib chiqamiz va hokazo. Bu jarayon to o'rab turuvchi minorlar orasida kamida bitta noldan farqli topilmaguncha davom etadi.

Misol. Quyidagi matritsaning rangini toping:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Yechish: Ko'rinib turibdiki

$$M_2 = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Uni o'rab turuvchi 3-tartibli minorlar orasida masalan

$$M_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

minor noldan farqli. Lekin, M_3 ni o'rab turuvchi 4-tartibli minorlar

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

Shu sababli A matritsaning rangi $r(A)=3$, uning bazis minori M_3 bo'ladi.

2-usul elementar almashtirishlar usuli deb ataladi. Matritsalar ustida quyidagi elementar almashtirishlar, deb ataluvchi almashtirishlarni bajarish mumkin:

1) Biror yo'lni songa ko'paytirish;

2) Biror yo'lning elementlariga unga proportsional bo'lgan undan avvalgi yo'lning elementlarini qo'shish;

3) Biror yo'lning elementlariga unga proportsional bo'lgan undan keyingi yo'l elementlarini qo'shish.

Bu almashtirishlarning birinchisini satrlar ustida bajarish uchun berilgan matritsani quyidagi maxsus tuzilgan

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \alpha & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

matritsaga chapdan ko'paytirish kifoya.

2)-almashtirishni satrlar ustida bajarish uchun esa berilgan matritsani quyidagi

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & \vdots & & & \\ & \alpha & \dots & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

matritsaga chapdan ko'paytirish va nihoyat 3)-almashtirishni satrlar ustida bajarish uchun shu matritsani quyidagi

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & \alpha & \\ & & & \vdots & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

matritsaga chapdan ko'paytirish kifoya. Masalan,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha x & \alpha y & \alpha z \\ u & v & w \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u+\alpha x & v+\alpha y & w+\alpha z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ x+\alpha u & y+\alpha v & z+\alpha w \\ u & v & w \end{pmatrix}$$

Agar bu almashtirishlar ustunlar ustida bajariladigan bo'lsa, berilgan matritsani shu maxsus tuzilgan matritsalarga mos ravishda o'ngdan ko'paytirish kerak.

Agar satrlar ustida 1) va 2) almashtirishlarni bir necha marta bajarish lozim bo'lsa, berilgan matritsani

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} & 0 & & 0 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & & 0 \\ \cdot & & & \cdot \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \cdots & \gamma_{nn} \end{pmatrix} \qquad (3.5)$$

matritsaga chapdan ko'paytirish kerak bo'ladi.

Xuddi shunday, agar 1) va 3) almashtirishlarni bir necha marta satrlar ustida bajarish lozim bo'lsa, bu matritsani

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \qquad (3.6)$$

matritsaga chapdan ko'paytirish etarli.

Agar ustunlar ustida 1) va 2) almashtirishlarni bir necha marta bajarishgan bo'lsa, matritsani (3.6) ga o'ngdan, agar 1) va 3) almashtirishlar bajariladigan bo'lsa, berilgan matritsani (3.5) ga o'ngdan ko'paytirish kifoya qiladi.

Bu usul quyidagi teoremaga asoslanadi.

5-teorema. Matritsaning yo'llari ustida bajariladigan har qanday elementar almashtirishlar matritsa rangini o'zgartirmaydi.

Isboti: Faraz qilaylik, $r(A)=r$ bo'lib, bazis minor

$$M_r = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ . & . & . & . \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}$$

bo'lsin. M_r ning yo'llarini o'z ichiga olgan $\bar{a}_1=(a_{11},a_{12},\dots,a_{1r},\dots,a_{1n})$, $\dots$, $\bar{a}_r=(a_{r1},a_{r2},\dots,a_{rr},\dots,a_n)$ arifmetik vektorlarning sistemasini qaraylik. $M_r\neq 0$ bo'lgani uchun $\bar{a}_1,\dots,\bar{a}_r$ sistema barcha yo'llar sistemasida bazis tashkil etadi.

Agar M_r yo'llarini o'z ichiga olgan yo'llar ustida almashtirishlar bajarib, ularni

$$\begin{gathered} (a_1,0,\dots,0,\ a'_{1,r+1},\dots,a'_{1n}), \\ (0,a_2,\dots,0,\ a'_{2,r+1},\dots,a'_{2n}), \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ (0,0,\dots,a_r,\ a'_{r,r+1},\dots,a'_{rn}) \end{gathered}$$

ko'rinishga keltirsak, bu arifmetik vektorlardan tuzilgan sistema ham barcha yo'llar sistemasida bazis tashkil etadi. Ko'rinib turibdiki, bu sistema rangi ham r ga teng. Teorema isbot bo'ldi.

Misol. Ushbu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

matritsaning rangi topilsin.

Yechish: 1-yo'lni -2 ga ko'paytirib, 2-yo'lga qo'shamiz

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 9 & -8 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 9 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 9 & -8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

oxirgi matritsaning rangi 3 ga teng, chunki

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 81 \neq 0$$

Demak, $r(A) = 3$ ekan.

Misol. $a_1 = (1,-1,0,0)$, $a_2 = (0,1,-1,0)$, $a_3 = (1,0,-1,1)$, $a_4 = (0,0,0,1)$, $a_5 = (3,-5,2,-3)$ vektorlarni chiziqli bog'liqlikka tekshiring. Uning rangini va bazis minorini toping.

Yechish: Berilgan vektorlardan quyidagi matritsani tuzib olamiz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -5 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Bu matritsa ustida quyidagi almashtirishlarni ketma-ket bajaramiz:

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -5 & 2 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -3 & -3 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

oxirgi matritsaning rangi 3 ga teng va bazis minor

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

4-§. Chiziqli tenglamalar sistemasi.

4.1. Umumiy tushunchalar. Quyidagi n ta noma'lumli m ta tenglamalar sistemasini qaraylik

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{array} \tag{4.1}$$

Agar bu yerda

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n} \\ \ldots\ldots \\ a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

desak, (4.1) ni matritsa ko'rinishda yozish mumkin:

$$AX = B. \tag{4.2}$$

Agar $B=0$ bo'lsa, sistema bir jinsli, aks holda bir jinsli bo'lmagan sistema deyiladi. (4.1) sistemaning yechimi, deb (4.2) ni ayniyatga aylantiradigan har qanday n ta komponentali ustun vektor X ga aytiladi (X yechimga mos keluvchi $x \in R^n$ arifmetik vektorni ham (4.1) sistemaning yechimi deb ataymiz).

Agar sistema kamida bitta yechimga ega bo'lsa, uni birgalikda deyiladi, aks holda birgalikda emas deymiz.

Agar ikkita sistema yechimlari to'plami bir xil bo'lsa, ularni ekvivalent, deb ataymiz.

4.2. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning matritsalar usuli va Kramer formulalari.

Faraz qilaylik, (4.1) sistemada $n=m$ bo'lsin. Agar $\det A \neq 0$ bo'lsa, u holda ma'lumki (qarang 2.2 bo'limga), bunday matritsaga teskari A^{-1} matritsa mavjud. A^{-1} ni (4.2) ga chapdan qo'llasak:

$$X = A^{-1}B \tag{4.3}$$

tenglik hosil bo'ladi. (4.3) ning o'ng tomonidagi ko'paytirish amalini bajarib, hosil bo'lgan ustunlarning mos komponentalarini tenglab, (4.1) ning yagona yechimini hosil qilamiz. Sistemani yechishning bu usuli matritsalar usuli, deb ataladi.

Yechimni yuqorida ko'rsatilgan usul yordamida topaylik. U holda

$$x_i = \frac{A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \ldots + A_{ni}b_n}{\det A}, i = 1,2,\ldots,n. \tag{4.4}$$

hosil bo'ladi. Tengliklarni o'ng tomonidagi kasr suratidagi yig'indini determinantning biror yo'li bo'yicha yoyib hisoblash usulidan (qarang, 1.4 bo'lim, (3), (4) formulalar) foydalanib, quyidagi

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} \cdots a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} \cdots a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}, \quad i = \overline{1,n}$$

determinantlar ko'rinishida ifodalash mumkin.

Agar $\Delta = \det A$, deb belgilasak, (4.4) tengliklarni

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \qquad i = \overline{1,n} \tag{4.5}$$

ko'rinishda yozib olsa bo'ladi. Bu (4.5) formulalar Kramer formulalari, deb ataladi.

Misol. Quyidagi tenglamalar sistemasini yeching:

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 + 5x_2 &= -3 \end{aligned}\right\}$$

Yechish: Sistemaning

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

matritsasi maxsuc emas, chunki $\det A = -2 \neq 0$. Biriktirilgan matritsasi

$$A^{v} = \begin{pmatrix} -5 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 11 & -13 & -7 \end{pmatrix}$$

ko'rinishga ega. U holda teskari matritsa

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 11 & -13 & -7 \end{pmatrix}$$

bo'ladi va nihoyat,

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 11 & -13 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bundan, $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$ ekanligini hosil qilamiz.

Endi sistemani Kramer formulalari yordamida hisoblaymiz:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}5&2&1\\6&-1&1\\-3&5&0\end{vmatrix}=-4,\ \Delta_2=\begin{vmatrix}3&5&1\\2&6&1\\1&-3&0\end{vmatrix}=2,\ \Delta_3=\begin{vmatrix}3&2&5\\2&-1&6\\1&5&-3\end{vmatrix}=-2.$$

Demak, $x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=2,\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=-1,\quad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=1$ ekan.

Eslatma. Agar (4.1) sistema bir jinsli bo'lib, uning matritsasi xosmas, ya'ni $\Delta=\det\neq 0$ bo'lsa, u holda bunday sistema yagona trivial deb ataluvchi nol $x=(0,0,\dots,0)$ yechimga ega bo'ladi. Haqiqatan, bunday sistemani ozod hadlari nol bo'lgani uchun barcha Δ_i, $i=1,2,\dots,n$ determinantlar nolga teng bo'ladi, Kramer formulalariga asosan esa $x_1=0,\ x_2=0,\dots x_n=0$ ekanligi kelib chiqadi. Shu sababli, bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi noldan farqli, ya'ni kamida bitta komponentasi nolga teng bo'lmagan, $x=(x_1,\dots,x_n)$ yechimga ega bo'lishi uchun uning matritsasi xos bo'lishi shart ($\Delta=0$).

4.3. Ixtiyoriy chiziqli tenglamalar sistemasini yechish. Bunda umuman $n=m$ bo'lishi shart emas, deb hisoblaymiz. Quyidagi matritsa

$$\bar{A}=(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c}a_{11}&\cdots&a_{1n}&b_1\\a_{21}&\cdots&a_{2n}&b_2\\ \cdot&&\cdot&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}&b_n\end{array}\right)$$

kengaytirilgan matritsa, deb ataladi.

Teorema (Kroneker-Kapelli). (4.1) sistema birgalikda bo'lishi uchun $rangA=rang\ \bar{A}$ bo'lishi zarur va yetarlidir.

Zarurligi: Faraz qilaylik, (4.1) sistema birgalikda va $r(A)=k$ bo'lsin. Biz $r(\bar{A})=k$ ekanini isbotlashimiz kerak. $r(A)=k$ bo'lgani uchun A matritsaga $\bar{A}$ matritsaga ham tegishli bo'lgan k-tartibli noldan farqli minor mavjud. Shuning uchun $r(\bar{A})\geq k$ bo'ladi. Endi bu minorni qamrovchi $\bar{A}$ matritsaning har qanday $k+1$-tartibli minori nolga teng ekanligini isbotlash zarur. Bu minorning bitta ustuni ozod hadlardan iborat. Umumiylikni buzmagan holda, bu minor

$$\begin{vmatrix}a_{1,1}&\cdots&a_{1,k}&b_1\\ \cdot&&&\cdot\\a_{k+1,1}&\cdots&a_{k+1,k}&b_{k+1}\end{vmatrix};$$

deb faraz qilishimiz mumkin, chunki aks holda sistemaning tenglamalarini va no'malumlarnng joyini almashtirib shu holga olib kelsa bo'ladi. Shartga ko'ra (4.1) sistema birgalikda, shuning uchun shunday $x=(x_1,\dots,x_n)$ arifmetik vektor mavjudki, u sistemani qanoatlantiradi, xususan, u sistemaning birinchi $k+1$ ta tenglamasini ham qanoatlantiradi. U holda

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_1+\ldots+a_{1,k}x_k+\lambda_1=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k+1,1}x_1+\ldots+a_{k+1,k}x_k+\lambda_{k+1}=0 \end{array}\right\} \qquad (4.6)$$

bu yerda

$$\left.\begin{array}{r} \lambda_1=a_{1,k+1}x_{k+1}+\ldots+a_{1n}x_n-b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_{k+1}=a_{k+1,k+1}x_{k+1}+\ldots+a_{k+1,n}x_n-b_{k+1} \end{array}\right\} \qquad (4.7)$$

(4.6) asosida quyidagi

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}y_1+\ldots+a_{1,k}y_k+\lambda_1 y_{k+1}=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k+1,1}y_1+\ldots+a_{k+1,k}y_k+\lambda_{k+1}y_{k+1}=0 \end{array}\right\} \qquad (4.8)$$

sistemani tuzib olamiz. Bu sistema birgalikda, chunki uni noldan farqli $y=(x_1,\ldots,x_k,1)$ yechim qanoatlantiradi. U holda (4.2 bo'limdagi eslatmaga qarang) bir jinsli (4.8) sistemaning determinanti nolga teng, ya'ni

$$0=\begin{vmatrix} a_{11}\ldots a_{1k} & a_{1,k+1}x_{k+1}+\ldots+a_{1n}x_n-b_1 \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k+1,1}\ldots a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1}x_{k+1}+\ldots+a_{k+1,n}x_n-b_{k+1} \end{vmatrix}=$$

$$=\sum_{S=k+1}^{n}x_S\begin{vmatrix} a_{11}\ldots a_{1k} & a_{1S} \\ \ldots\ldots & \ldots \\ a_{k+1,1}\ldots a_{k+1,k} & a_{k+1,S} \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_{11}\ldots a_{1k} & b_1 \\ \ldots\ldots & \ldots \\ a_{k+1,1}\ldots a_{k+1,k} & b_{k+1} \end{vmatrix}=$$

$$=-\begin{vmatrix} a_{11}\ldots a_{1k} & b_1 \\ \ldots\ldots & \ldots \\ a_{k+1,1}\ldots a_{k+1,k} & b_{k+1} \end{vmatrix},$$

chunki $r(A)=k$ bo'lgani uchun yig'indiga kiruvchi barcha determinantlar nolga teng. Demak, $r(\overline{A})=k$ ekan.

Yetarliligi: Endi $r(A)=r(\overline{A})=k$ bo'lsin deb faraz qilaylik. Sistema birgalikda ekanligini isbot qilish kerak. Qilingan farazga ko'ra, sistemaning shunday k ta tenglamasi mavjudki, uning no'malumlari oldidagi koeffitsientlardan tuzilgan k-tartibli determinanti noldan farqlidir. Tenglamaning birinchi qismida qilinganidek, umumiylikni buzmagan holda bu aynan

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_1+\ldots+a_{1,k}x_k=b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1+\ldots+a_{kn}x_k=b_n \end{array}\right\} \qquad (4.9)$$

Tenglamalar, deb faraz qilish mumkin. Shartga ko'ra, uning uchun

$$\sigma = \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1k} \\ \dots\dots \\ a_{k1} \cdots a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0$$

(4.9) sistemani quyidagicha yozib olamiz:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1k}x_k = b_1 - a_{1,k+1}x_{k+1} - \ldots - a_{1n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kk}x_k = b_k - a_{k,k+1}x_{k+1} - \ldots - a_{kn}x_n \end{array}\right\} \quad (4.10)$$

σ≠0 bo'lgani uchun bu sistema yagona yechimga ega va uni Kramer formulalari yordamida topish mumkin:

$$\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{\sigma_1}{\sigma} = \dfrac{1}{\sigma}\sum_{S=1}^{k} A_{S1}(b_1 - a_{1,k+1}x_{k+1} - \ldots - a_{1n}x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_k = \dfrac{\sigma_k}{\sigma} = \dfrac{1}{\sigma}\sum_{S=1}^{k} A_{Sk}(b_k - a_{k,k+1}x_{k+1} - \ldots - a_{kn}x_n) \end{array} \quad (4.11)$$

bu yerda A_{si}, $i=1,2,\ldots,k$, a_{si} elementining σ determinantdagi algebraik to'ldiruvchisidir. $x_{k+1},\ldots,x_n$ larga har xil qiymatlar berish mumkin, $x_1,\ldots,x_k$ larning qiymatlari esa (4.11) formulalar orqali hisoblanadi. Demak, (4.10) sistema cheksiz ko'p yechimga ega ekan.

Endi bu yechimlar (4.1) sistemaning (4.10) ga kirmagan tenglamalarini ham qanoatlantirishini ko'rsatishimiz kerak. Buning uchun (4.11) yechimlar (4.1) ning $k+1$ tenglamasini ham yechimi ekanligini ko'rsatish kifoya.

(4.1) sistemaning avvalgi $k+1$ ta tenglamasini olib, ularni (4.6) ko'rinishida yozib olamiz. Faraz qilaylik, x arifmetik vektor (4.6) ning dastlabki k ta tenglamasini yechimi bo'lsin. Xuddi yuqoridagidek, (4.8) tenglamalar sistemasini tuzib olamiz. Bu sistemaning determinanti nolga teng. Shuning uchun bu sistema trivial bo'lmagan $y_1,\ldots,y_{k+1}$ yechimga ega. Bu yerda $y_{k+1}\neq 0$, chunki, aks holda (4.8) sistema $y_1,\ldots,y_k,0$ yechimga ega bo'ladi, bundan $y_1=0,\ldots,y_k=0$ ekanligi kelib chiqadi, chunki $\sigma\neq 0$, ya'ni (4.8) trivial $y_1=y_2=\ldots=y_{k+1}=0$ yechimga ega bo'lib qoladi. (4.6) sistema bir jinsli bo'lgani uchun

$$y_1' = \frac{y_1}{y_{k+1}}, \ldots, y_k' = \frac{y_k}{y_{k+1}}, 1$$

sonlar ham bu sistemaning yechimi bo'ladi. U holda $y_1', \ldots, y_k'$ lar (4.6) sistemaning dastlabki k ta tenglamalarining yechimi bo'ladi. Bizga ma'lumki, bu sistema yagona $x_1,\ldots,x_k$ yechimga ega edi. σ≠0 bo'lgani uchun $z_1' = x_1, \ldots, z_k' = x_k$ bo'lishi shart. Agar bu qiymatlarning va $z_{k+1}' = 1$ ni (4.8) ning $k+1$-tenglamasiga qo'ysak, tenglik bajarilishiga ishonch hosil qilamiz. Demak, $x_1,\ldots,x_k$ lar (4.6) ning $k+1$-tenglamasini qanoatlantiradi va (4.6) ga asosan $x=(x_1,\ldots,x_n)$ (4.1) ning $k+1$-tenglamasini yechimi ekan. Teorema to'liq isbot bo'ldi.

Eslatma: Agar $x_{k+1}=c_1,\ldots,x_n=c_{n-k}$ desak, barcha $x_1,\ldots,x_k$ lar $c_1,\ldots,c_{n-k}$ larga bog'liq bo'lib qoladi. $(x_1(c_1,\ldots,c_{n-k}),\ldots,x_k(c_1,\ldots,c_{n-k}),c_1,\ldots,c_{n-k})^T$ ustun (4.1) ning umumiy yechimi deb ataladi.

Misol. Quyidagi sistemani yeching:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=1,\\ x+y+2z&=1,\\ x+y+3z&=2.\end{aligned}\right\}$$

Yechish:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&2\\1&1&3\end{vmatrix}=0$$

Shuning uchun

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&2\\1&1&3\end{pmatrix}$$

matritsa uchun $r(A)=2$, chunki $\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=1\neq 0$. Kengaytirilgan

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&2&1\\1&1&3&2\end{pmatrix}$$

matritsa uchun $r(\overline{A})=3$, chunki shu matritsaning quyidagi minori

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&3&2\end{vmatrix}=1\neq 0$$

ya'ni $r(\overline{A})>r(A)$ bo'lyapti. Yuqoridagi teoremaga asosan, bu sistema yechimga ega emas, deyish mumkin.

Misol. Sistemani yeching:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=1,\\ x+y+2z&=1,\\ 2x+2y+4z&=2.\end{aligned}\right\}$$

Yechish: Uning determinanti

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 4\end{vmatrix}=0.$$

Bevosita hisoblash yo'li bilan $r(A)=r(\overline{A})=2$ ekanligiga ishonch hosil qilishimiz mumkin. Berilgan sistemani birinchi va ikkinchi tenglamalaridan

$$\left.\begin{aligned}x+y+z&=1,\\ x+y+2z&=1,\end{aligned}\right\}$$

sistemani tuzib olamiz. Uni o'z navbatida

$$\left.\begin{aligned}x+z&=1-y,\\ x+2z&=1-y.\end{aligned}\right\}$$

ko'rinishda yozib olamiz. Bu sistema uchun

$$\Delta'=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1\neq 0,$$

shu sababli, u yagona yechimga ega:

$$x=\begin{vmatrix}1-y & 1\\ 1-y & 2\end{vmatrix}=1-y,\qquad z=\begin{vmatrix}1 & 1-y\\ 1 & 1-y\end{vmatrix}=0$$

Demak, y ning har qanday qiymatida $(1-y,\ y,\ 0)$ uchlik berilgan sistemaning yechimi bo'ladi.

Agar $u=S$ desak, $(1-S,\ S,\ 0)$ ustun berilgan sistemaning umumiy yechimi bo'ladi.

4.4. Bir jinsli sistemalar. Quyidagi

$$\left.\begin{aligned}a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n&=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots&\\ a_{m1}x_1+\ldots+a_{mn}x_n&=0.\end{aligned}\right\}\tag{4.12}$$

bir jinsli sistemani qaraylik. Bu sistema har doim birgalikda, chunki uning kamida trivial $x=0$ yechimi bor. Uning trivial bo'lmagan yechimi mavjud bo'lishi uchun $r(A)=r<\min(m,n)$ bo'lishi zarur va yetarlidir.

Faraz qilaylik, $Q\subset R^n$ — bir jinsli (4.4) sistemaning barcha yechimlari to'plami bo'lsin. Bu to'plamdagi har qanday bazis $n-r$ ta $e_1, e_2, \ldots, e_{n-r}$ chiziqli bog'liq bo'lmagan vektorlardan tuzilgandir. Kanonik bazisda unga mos keluvchi $E_1, E_2, \ldots, E_{n-r}$ vektorlar sistemasi fundamental yechimlar sistemasi, deb ataladi. Uning yechimini quyidagi

$$X=C_1E_1+\ldots+C_{n-r}E_{n-r}$$

ko'rinishda yozish mumkin, bu yerda $C_1, \ldots, C_{n-r}$ ixtiyoriy o'zgarmaslar.

Misol. Quyidagi bir jinsli sistemaning fundamental yechimlar sistemasini va umumiy yechimini toping:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1-4x_2+5x_3+3x_4&=0,\\ 3x_1-6x_2+4x_3+2x_4&=0,\\ 4x_1-8x_2+17x_3+11x_4&=0.\end{aligned}\right\}$$

Yechish: Bu sistemaning matritsasini tuzib olamiz:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 & 3\\ 3 & -6 & 4 & 2\\ 4 & -8 & 17 & 11\end{pmatrix}$$

$r(A)=2$ (tekshiring!). Bazis minor sifatida, masalan,

$$M_2=\begin{vmatrix} 5 & 3\\ 4 & 2\end{vmatrix}=-2\neq 0$$

ni olishimiz mumkin. U holda sistemaning 3-tenglamasini tashlab, uni quyidagi ko'rinishga keltiramiz:

$$\begin{aligned} 5x_3+3x_4&=-2x_1+4x_2\\ 4x_3+2x_4&=-3x_1+6x_2\end{aligned}$$

Bunda, agar $x_1=C_1$, $x_2=C_2$ desak,

$$x_3=-\frac{5}{2}C_1+5C_2,\qquad x_4=\frac{7}{2}C_1-7C_2$$

topiladi. Demak, sistemaning umumiy yechimi

$$X=(C_1,C_2)=\begin{pmatrix} C_1\\ C_2\\ -\frac{5}{2}C_1+5C_2\\ \frac{7}{2}C_1-7C_2\end{pmatrix}$$

bo'ladi. Bundan mos ravishda $C_1=1,\ C_2=0$ va $C_1=0,\ C_2=1$ deb, fundamental yechimlar sistemasini topamiz:

$$E_1=X=(1,0)=\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ -\frac{5}{2}\\ \frac{7}{2}\end{pmatrix},\qquad E_2=X=(0,1)=\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 5\\ -7\end{pmatrix}$$

4.5. Jordan-Gaussning noma'lumlarni ketma-ket yo'qotish usuli. Bu usulning asosiy ma'nosi berilgan (4.1) sistemaning kengaytirilgan matritsasini yozib olib, uning yo'llari ustida elementar almashtirishlar bajarib, uni quyidagi ko'rinishga keltirishdir:

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & a'_{1,r+1} & \cdots & a'_1 & b'_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a'_{2,r+1} & \cdots & a'_2 & b'_2 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a'_{r,r+1} & \cdots & a'_m & b'_r \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & & 0 & b'_{r+1} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b'_m \end{array}\right) \tag{4.13}$$

(4.13) matritsa o'z navbatida quyidagi (4.1) ga ekvivalent bo'lgan

$$\begin{aligned} x_1 + a'_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + a'_{1n}x_n &= b'_1 \\ x_2 + a'_{2,r+1}x_{r+1} + \ldots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots& \\ x_r + a'_{r,r+1}x_{r+1} + \ldots + a'_{rn}x_n &= b'_r \\ 0 &= b'_{r+1} \\ \ldots& \\ 0 &= b'_m \end{aligned} \tag{4.14}$$

tenglamalar sistemasining kengaytirilgan matritsasidir. Agar (4.14) da $b'_{r+1},\ldots,b'_m$ sonlarning hech bo'lmaganda bittasi noldan farqli bo'lsa, (4.14) va o'z navbatida (4.1) sistemalar birgalikda bo'lmaydi.

Agar $b'_{r+1} = \ldots = b'_m = 0$ bo'lsa, u holda sistema birgalikda bo'ladi va (4.14) formulalar $x_1,\ldots,x_r$ noma'lumlarning $x_{r+1},\ldots,x_n$ noma'lumlar orqali ifodasini beradi.

Misol. Sistemani yeching:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5, \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1, \\ x_1 \qquad + 3x_3 + 4x_4 &= 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= 1. \end{aligned}\right\}$$

Yechish. Kengaytirilgan matritsani yozib olaylik:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1. & 5 & 6 & 1 \end{array}\right)$$

bu matritsaning satrlari ustida elementar almashtirishlar bajaramiz:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 6 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & -4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & -4 \end{array}\right) \to$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&3&4&2\\0&2&0&0&3\\0&0&2&3&-1/2\\0&0&2&2&-5/2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&3&4&2\\0&2&0&0&3\\0&0&2&3&-1/2\\0&0&0&-1&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&3&4&2\\0&2&0&0&3\\0&0&2&3&-1/2\\0&0&0&1&2\end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&3&0&-6\\0&2&0&0&3\\0&0&2&0&-13/2\\0&0&0&1&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&15/4\\0&2&0&0&3\\0&0&2&0&-13/2\\0&0&0&1&2\end{array}\right).$$

bundan $x_4=2$, $x_3=-13/4$, $x_2=3/2$, $x_1=15/4$ kelib chiqadi.

Misol. Korxona A,B,C mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun S_1, S_2, S_3 xom ashyolardan foydalansin. Xom ashyolarning bitta mahsulotni tayyorlash uchun bir kundagi sarf normasi quyidagi jadvalda berilgan bo'lsin:

Xomashyo turi	Bitta mahsulotni tayyorlash uchun xom ashyoning sarf normasi			Xom ashyoning bir kunlik sarf miqdori
	A	B	C	
S_1	5	3	4	2700
S_2	2	1	1	800
S_3	3	2	2	1600

Har bir tur mahsulotning birkunlik ishlab chiqarish xajmini toping.

Yechish. Agar korxona har kuni A mahsulotdan x_1 ta, B mahsulotdan x_2 ta va C mahsulotdan x_3 ta ishlab chiqarsa, u holda yuqoridagi jadvalga ko'ra:

$$\left.\begin{array}{l}5x_1+3x_2+4x_3=2700,\\2x_1+x_2+x_3=800,\\3x_1+2x_2+2x_3=1600\end{array}\right\}$$

tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi. Bu sistemani yuqoridagi biror usul bilan yechsak, (200; 300; 200) yechimni olamiz, ya'ni korxona har kuni A mahsulotdan 200 ta, B mahsulotdan 300 ta va C mahsulotdan 200 ta ishlab chiqarar ekan.

4.6. Ko'p tarmoqli iqtisodiyotda Leont'ev modeli.

Makroiqtisodiyot masalalarida ko'p tarmoqli xo'jalikni effektiv boshqarish bilan bog'liq bo'lgan balansli taxlil o'tkazish muxim rol o'ynaydi. Bunda tarmoqlarning har biri bir tomondan ishlab chiqaruvchi, ikkinchi tomondan ham o'zining ham boshqa tarmoqning mahsulotini o'zlashtiruvchi hisoblanadi. Balansli taxlil har bir tarmoqning extiyojini qondirish uchun tarmoqlar ishlab chiqarayotgan mahsulot hajmi qancha bo'lishini aniqlab beradi. Tarmoqlar orasidagi munosabatni shu nuqtai-nazardan taxlil qilishning matematik modelini 1936 yilda amerikalik iqtisodchi olim V. Leont'ev ishlab chiqqan.

Faraz qilaylik, har biri o'z navbatida mahsulot ishlab chiqaruvchi tarmoq bo'lran sanoatning n ta tarmog'i ko'rilayotgan bo'lsin. Ishlab chiqarilgan mahsulotning bir qismi shu va boshqa tarmoqlarning ichki extiyoji uchun, qolgani shaxsiy va umumta'minot extiyojlari uchun sarf bo'ladi.

Ma'lum muddat uchun (aytaylik, yil uchun) ishlab chiqarish jarayonini ko'raylik.

Faraz qilaylik, x_i - i-tarmoqning yalpi mahsulot hajmi, x_{ij} esa i-tarmoq ishlab chiqargan mahsulotning ishlab chiqarish jarayonida j-tarmoq tomonidan ta'minlanish hajmi va nihoyat, y_i - i-tarmoq ishlab chiqargan mahsulotning ishlab chiqarish uchun ishlatilmaydigan hajmi bo'lsin, bu yerda $i, j = 1,2,\ldots,n$.

Ma'lumki, ixtiyoriy i-tarmoqning yalpi mahsulot hajmi n ta tarmoqning shu mahsulotdan foydalanish hajmlari va ishlab chiqarish uchun ishlatilmaydigan hajmi yig'indisiga teng, ya'ni

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i, \quad i = 1,2,\ldots,n. \tag{1}$$

(1) tenglamalar balans munosabatlari deb ataladi. (1) ga kiruvchi barcha miqdorlar narx ko'rinishiga ega bo'lgan hol uchun tarmoqlararo narxiy balans masalasini ko'ramiz.

Bevosita sarf koeffitsientlari deb ataluvchi quyidagi

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}, \quad (i, j = 1,2,\ldots,n) \tag{2}$$

miqdorlarni kiritamiz. Ular i-tarmoqning j-tarmoq tomonidan ishlab chiqarilgan mahsulotning bir birligini ishlab chiqarish uchun qilingan sarf miqdorini bildiradi.

Qandaydir muddat ichida a_{ij} koeffitsientlarni o'zgarmas va ishlab chiqarish texnologiyasiga bog'liq deb faraz qilish mumkin. Bu o'z navbatida qilingan moddiy xarajatlar yalpi ishlab chiqarishga chiziqli bog'liq ekanligini bildiradi, ya'ni

$$x_{ij} = a_{ij} x_j, \quad (i, j = 1,2,\ldots,n). \tag{3}$$

U holda (1) tenglamalar quyidagi

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i, \quad i = 1,2,\ldots,n \tag{4}$$

ko'rinishni oladi. Bu yerda

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

belgilashlar kiritsak, (1) quyidagi matritsaviy ko'rinishni oladi:

$$X = AX + Y, \tag{5}$$

bu yerda X —yalpi ishlab chiqarish vektori, Y — yakuniy mahsulot vektori va A — bevosita xarajat yoki texnologik matritsa deb ataladi.

Demak, ko'p tarmoqli balans masalasi - bu berilgan bevosita xarajatlar matritsasi A uchun yakuniy mahsulot vektori Y ni beruvchi yalpi ishlab chiqarish vektori X ni topishdan iborat ekan.

(5) tenglamani quyidagi

$$(E-A)X=Y \tag{6}$$

ko'rinishda ifodalab olamiz. Agar $E-A$ matritsa xosmas bo'lsa, ya'ni $\det(E-A)\neq 0$ bo'lsa, u holda (4.3) formulaga ko'ra

$$X=(E-A)^{-1}Y \tag{7}$$

bo'ladi. Bu yerda $S=(E-A)^{-1}$ - to'la xarajatlar matritsasi, deb ataladi.

Masalaning iqtisodiy ma'nosiga ko'ra, agar barcha $i,j=1,2,\dots,n$ lar uchun $y_i\geq 0$ va $a_{ij}\geq 0$ bo'lsa, ularga mos keluvchi x_i lar ham manfiy bo'lmaydi.

Agar barcha $i,j=1,2,\dots,n$ lar uchun $a_{ij}\geq 0$ bo'lsa, $A\geq 0$ deb tushunamiz. Shu sababli, agar har qanday $Y\geq 0$ vektor uchun (6) ning $X\geq 0$ yechimi mavjud bo'lsa, $A\geq 0$ matritsa samarali, deymiz. Bu hol uchun Leont'ev modeli samarali, deb ataladi.

A matritsaning samarali bo'lishi uchun bir nechta mezonlar mavjud. Masalan, A matritsa samarali bo'ladi, agar ustun bo'yicha olingan yig'indilar maksimumi birdan katta bo'lmasa va kamida bitta ustun elementlari yig'indisi birdan qat'iy kichik bo'lsa.

M i s o l. Quidagi jadvalda bir xisobot davri uchun balansning bajarilish ma'lumotlari berilgan:

Tarmoq		Extiyoj		Yakuniy mahsulot	Yalpi mahsulot
		energetika	mashinasozlik		
Ishlab chiqarish	Energetika	7	21	72	100
	mashinasozlik	12	15	123	150

Agar energetika tarmog'i o'z extiyojini ikki marta oshirsa-yu, mashinasozlik tarmog'i o'zgartirmasa, har bir tarmoqning yalpi maxsulotlari qanchaga o'zgarishini aniqlang.

Yechish. Jadvalga ko'ra

$$x_1=100,\ x_2=150,\ x_{11}=7,\ x_{12}=21,\ x_{21}=12,\ x_{22}=15,\ y_1=72,\ y_2=123.$$

(2) formulalarga ko'ra bevosita xarajatlar koeffitsientlarini topamiz: $a_{11}=0{,}07,\ \ a_{12}=0{,}14,\ \ a_{21}=0{,}12,\ \ a_{22}=0{,}10.$ U holda, bevosita xarajatlar matritsasi $A=\begin{pmatrix}0{,}07 & 0{,}14\\ 0{,}12 & 0{,}10\end{pmatrix}$ manfiy bo'lmagan elementlarga ega va u samaralik mezonini qanoatlantiradi:

$$\max\{0{,}07+0{,}12;0{,}14+0.10\}=\max\{0{,}19;0{,}24\}=0{,}24<1.$$

Shu sababli, har qanday Y yakuniy mahsulotga ko'ra zaruriy miqdorda yalpi mahsulot hajmi X ni (7) formula bo'yicha topish mumkin:

$$E-A=\begin{pmatrix}0,93 & -0,24\\ -0,12 & 0,90\end{pmatrix},\quad \det(E-A)=\begin{vmatrix}0,93 & -0,24\\ -0,12 & 0,90\end{vmatrix}=0,8202.$$

U holda,

$$S=(E-A)^{-1}=\frac{1}{0,8202}\begin{pmatrix}0,93 & -0,24\\ -0,12 & 0,90\end{pmatrix}.$$

Endi masala shartiga ko'ra $Y=\begin{pmatrix}144\\ 123\end{pmatrix}$ ekanligini eslasak,

$$X=\frac{1}{0,8202}\begin{pmatrix}0,93 & -0,24\\ -0,12 & 0,90\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}144\\ 123\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}179,0\\ 160,5\end{pmatrix},$$

yani yalpi mahsulotni energetika tarmog'ida 179,0 miqdorga, mashinasozlik tarmog'ida 160,5 miqdorga oshirish kerak ekan.

2-BOB

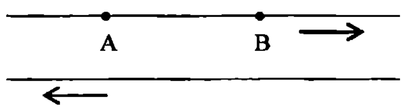
VEKTORLAR ALGEBRASI.

§1. Umumiy tushunchalar.

Elementar geometriyadan ma'lumki, kesma deb, to'g'ri chiziqning ikki nuqtasi bilan chegaralangan bo'lagiga aytiladi. Uning uzunligi deb, tanlangan masshtab birligiga nisbatan kesmaning chegaralari orasidagi masofani o'lchash natijasida olinadigan musbat son qiymatini tushunamiz.

Agar biror to'g'ri chiziqda ikki A va B nuqtalar olib, shu to'g'ri chiziq bo'ylab siljiydigan nuqtani qarasak, bu nuqta to'g'ri chiziqda ikki yo'nalish aniqlaydi: bittasi A nuqtadan B nuqta tomonga qarab, ikkinchisi teskari, ya'ni B nuqtadan A nuqta tomonga harakatlanganda. Bu yo'nalishlardan birini musbat yo'nalish deb atasak, unga teskari yo'nalishni manfiy yo'nalish, deb atash mumkin.

Musbat yo'nalishga ega bo'lgan to'g'ri chiziq o'q, deb ataladi.



1-rasm

Agar o'qlar parallelgina bo'lib qolmay, musbat yo'nalishlari ham bir xil bo'lsa, u holda bu o'qlarni bir xil yo'nalgan deymiz. Parallel bo'lib, musbat yo'nalishlari teskari bo'lgan o'qlarni qarama-qarshi yo'nalgan o'qlar deb ataladi. Agar o'qlar o'zaro perpendikulyar bo'lsa, musbat yo'nalishlari qandayligidan qat'iy nazar ularni ortogonal o'qlar, deyiladi.

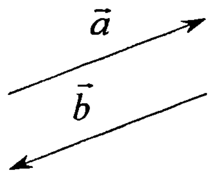
Agar to'g'ri chiziqning biror kesmasida musbat yo'nalish berilgan bo'lsa, bu kesmani vektor, deb ataladi. kesmaning chegara nuqtalaridan birini uning boshi, ikkinchisini oxiri desak, vektorning musbat yo'nalishi uning boshidan oxiriga qarab bo'ladi.

Boshi A nuqtada, oxiri B nuqtada bo'lgan vektorni $\overrightarrow{AB}$ ko'rinishda belgilanadi. Vektorni bitta harf bilan belgilash ham qabul qilingan. Masalan, $\vec{a}, \vec{b}$ yoki $\vec{c}$ va xokazo....

Vektorning uzunligi deb, shu vektorni ifodalovchi kesmaning uzunligi tushuniladi. Demak, agar AB kesmaning uzunligini $|AB|$, $\vec{AB}$ vektorning uzunligini $|\vec{AB}|$ deb belgilasak, $|\vec{AB}|=|AB|$ bo'ladi. Xuddi shunday $\vec{a}$ vektorning uzunligi uchun $|\vec{a}|$ belgi qabul qilingan.

Boshi va oxiri ustma-ust tushgan $\vec{AA}$ vektorni nol vector,deb ataladi va $\vec{0}$ ko'rinishda belgilanadi. Ma'lumki, $|\vec{AA}| = |\vec{0}| = 0$ bo'ladi.

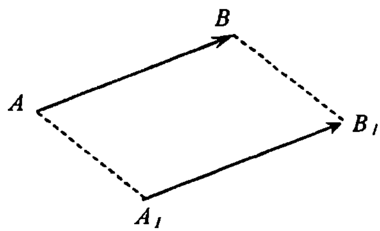
Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar parallel, uzunliklari va musbat yo'nalishlari bir xil bo'lsa, ularni teng deyiladi va $\vec{a}=\vec{b}$ deb yoziladi. Uzunliklari bir xil parallel vektorlar har doim ham teng bo'lavermaydi, masalan, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar 2-rasmdagidek bo'lsa.



2-rasm.

Uzunliklari bir xil, parallel, lekin qarama-qarshi yo'nalgan $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar qarama-qarshi vektorlar, deb ataladi. $\vec{a}$ vektorga qarama-qarshi vektorni $-\vec{a}$ deb belgilanadi. Masalan, 2- rasmdagi $\vec{b}$ vektor $\vec{a}$ ga qarama-qarshi vektor, shu sababli $\vec{b}=-\vec{a}$.

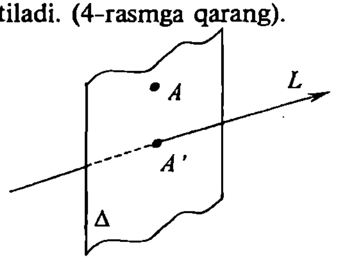
Agar $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1B_1}$ bo'lsa, u holda $\overrightarrow{AB}$ vektorni A_1 nuqtaga parallel ko'chirildi, deb tushuniladi (3-rasmga qarang).



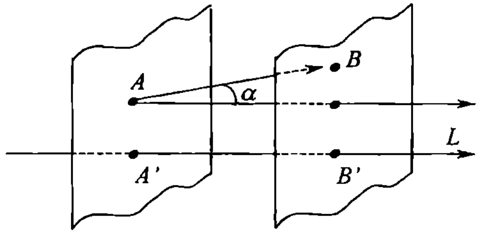
3-rasm.

Bitta to'g'ri chiziqda yoki parallel to'g'ri chiziqlarda joylashgan vektorlar kollinear vektorlar deb ataladi.

A nuqtaning *L* to'g'ri chiziqdagi proektsiyasi deb, *L* to'g'ri chiziqning unga perpendikulyar bo'lgan *A* nuqtadan o'tuvchi tekislik bilan *A'* kesishish nuqtasiga aytiladi. (4-rasmga qarang).



4-rasm.



5-rasm.

$\bar{a}=A\bar{B}$ vektorning L o'qidagi proektsiyasi deb, $\bar{a}$ vektorning uzunligini, uni L o'q bilan tashkil etgan α burchagining kosinusiga bo'lgan ko'paytmasiga aytamiz (5-rasmga qarang), ya'ni

$$\text{np}_L\bar{a}=|\bar{a}|Cos\alpha\ ,\quad (0\le\alpha\le\pi).$$

Eslatma. Proektsiyaning yuqorida keltirilgan ta'rifi Δ tekislik L o'qga perpendikulyar bo'lgani uchun, to'g'ri burchakli proektsiya deb ham ataladi. Agar Δ tekislikni L to'g'ri chiziqga og'ma o'tgan biror Δ' tekislikka parallel o'tkazsak, bu proektsiyani og'ma burchakli proektsiya, deyiladi. Bunday proektsiya

$$np_L A\bar{B} \quad (\ \Delta' \text{ ga parallel }\ )$$

ko'rinishda belgilanadi. Agar qavs ichida hech qanday ma'lumot berilmagan bo'lsa, bu proektsiyani to'g'ri burchakli (ortogonal) proektsiya deb tushunamiz.

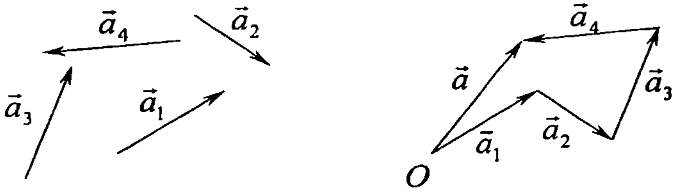
Teng vektorlarning bitta o'qdagi proektsiyalari ham teng va bir vektorning o'zaro parallel L va L' o'qlardagi proektsiyalari ham teng bo'ladi. Qarama-qarshi vektorlarning L o'qdagi proektsiyalari ishorasiga farq qiladi,chunki agar $\bar{a}$ vektor L o'qga α burchakka og'ib o'tgan bo'lsa, $-\bar{a}$ L o'q bilan $\alpha+\pi$ burchak tashkil etadi, $Cos\alpha$ va $Cos(\pi+\alpha)$ lar qiymati ma'lumki, ishorasi bilan farq qiladi.

Agar $\bar{a}$ vektor Δ tekislikka parallel bo'lsa, uning L o'qdagi proektsiyasi nol bo'ladi,chunki $Cos\frac{\pi}{2}=0$, $np_L\bar{a}=|\bar{a}|Cos\frac{\pi}{2}=0$.

Agar $\bar{a}$ vektor L o'qga parallel bo'lsa, $np_L\bar{a}=|\bar{a}|Cos0^0=|\bar{a}|$ bo'ladi.

§2. Vektorlar ustida arifmetik amallar.

Bizga $\bar{a}_1,\bar{a}_2,...,\bar{a}_n$ vektorlar berilgan bo'lsin. Ixtiyoriy O nuqta olib $\bar{a}_1$ ni boshini shu nuqtaga, $\bar{a}_2$ ni $\bar{a}_1$ ning oxiriga, $\bar{a}_3$ ni $\bar{a}_2$ ning oxiriga va x.k. tartibda barcha vektorlarni parallel ko'chiramiz. Hosil bo'lgan siniq chiziq berilgan vektorlar sistemasining ko'p burchagi, deb ataladi (6-rasmga qarang).



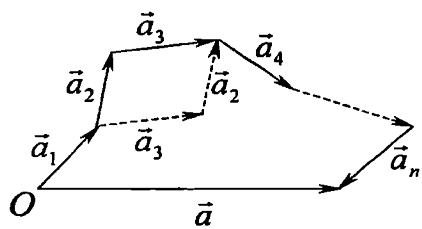
6-rasm.

Bu ko'pburchakni yopuvchi $\vec{a}$ tomoni berilgan vektorlarning yig'indisi, deb atalib, quyidagi

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n$$

ko'rinishda belgilanadi.

Vektorlarni qo'shishning bu ta'rifi yig'indi uchun kommutativlik (ya'ni qo'shiluvchilarning o'rnini almashtirish) xossasiga ega (7-rasmga qarang).

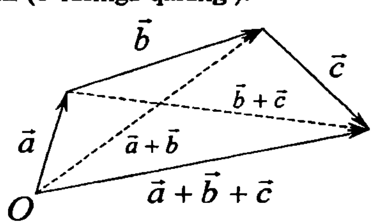


7-rasm.

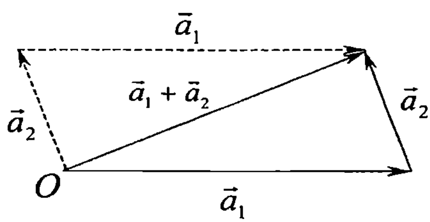
Bu qo'shish amali uchun assotsiativlik xossasi, ya'ni $\vec{a}, \vec{e}, \vec{c}$ vektorlar uchun

$$(\vec{a} + \vec{e}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{e} + \vec{c})$$

munosabat ham o'rinli (8-rasmga qarang).



8-rasm.



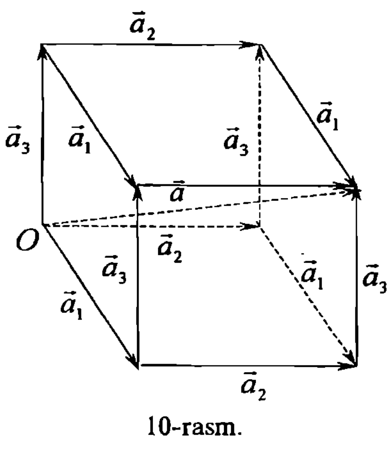
9-rasm.

Agar $\vec{a}_1$ va $\vec{a}_2$ vektorlar yig'indisini 9-rasmdagidek, ya'ni $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ vektorlar boshini O nuqtaga keltirib bajarilsa, u holda vektorlar parallelogramm qoidasi bo'yicha qo'shildi, deb ataymiz.

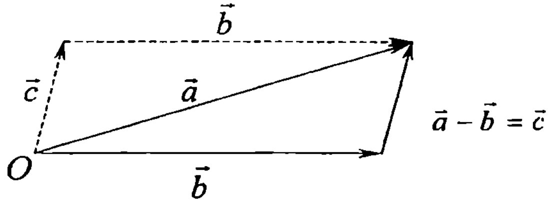
Agar $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ va $\vec{a}_3$ vektorlar berilgan bo'lsa, ularni olti xil : $(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3),(\vec{a}_1,\vec{a}_3,\vec{a}_2),(\vec{a}_2,\vec{a}_1,\vec{a}_3),(\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_1),(\vec{a}_3,\vec{a}_1,\vec{a}_2)$ va $(\vec{a}_3,\vec{a}_2,\vec{a}_1)$ ketma-ketliklar bo'yicha qo'shish mumkin (10-rasmga qarang). Chizmadan ko'rinadiki, barcha ketma-ketlik natijasi $\vec{a} = \vec{OB}$ vektorga olib keladi, ya'ni boshlari bir O nuqtaga keltirilgan vektorlar yig'indisi, shu vektorlardan qurilgan parallepipedning O uchidan chiqib unga qarama-qarshi uchiga yo'nalgan diagonaldan iborat bo'lar ekan. Xuddi shu xulosaga, qo'shishning parallelogramm usuli yordamida ham kelsa bo'ladi. Bu ishni bajarishni o'quvchining o'ziga havolo qilamiz.

Ta'rif. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning ayirmasi deb shunday $\vec{c}$ vektorga aytamizki, uning $\vec{b}$ vektor bilan yig'indisi $\vec{a}$ vektor bo'ladi, ya'ni $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$.

Buni $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ ko'rinishda belgilash qabul qilingan.



10-rasm.



11-rasm.

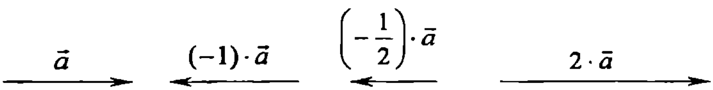
Ta'rifdan va 11-rasmdan ko'rinadiki, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning ayirmasini qurish uchun, ularning boshini bir O nuqtaga keltirib, ayiruvchi vektor oxiridan kamayuvchi vektor oxiriga yo'nalgan vektorni olish kerak ekan.

Eslatma. $\vec{a}-\vec{b}$ ayirmani $\vec{a}$ va $-\vec{b}$ larni qo'shib bajarsa ham bo'ladi, ya'ni

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

Bizga $\vec{a}$ vektor va biror m son (skalyar) berilgan bo'lsin.

Ta'rif. $m\vec{a}$ ko'paytma deb, shunday $\vec{b}$ vektorga aytamizki, 1) $|\vec{b}| = |m||\vec{a}|$ va 2) $\vec{a}$ kabi yo'nalgan, agar $m>0$ bo'lsa, $\vec{a}$ ga teskari yo'nalgan, agar $m<0$ bo'lsa.



12-rasm.

12-rasmda $m=-1, m=-\frac{1}{2}, m=2$ bo'lgan hollar ko'rsatilgan. Chizmadan ko'rinadiki, $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$.

Bu ko'paytma quyidagi taqsimot xossalariga ega:

1^0. $m(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + ... + \vec{a}_n) = m\vec{a}_1 + m\vec{a}_2 + ... + m\vec{a}_n$

2^0. $(m_1 + m_2 + ... + m_n)\vec{a} = m_1\vec{a} + m_2\vec{a} + ... + m_n\vec{a}$.

Biror L o'qda yotuvchi shu o'q bo'ylab yo'nalgan uzunligi bir o'lcham birligiga teng vektor shu o'qning orti, deb ataladi. Agar $\vec{e}$ ort va unga parallel biror $\vec{a}$ vektor berilgan bo'lsa, uni

$$\vec{a} = \pm|\vec{a}|\vec{e}$$

ko'rinishda ifodalasa bo'ladi, bu yerda "+" ishora $\vec{a}$ va $\vec{e}$ larning yo'nalishlari bir xil bo'lganda va "-" ishora $\vec{a}$ va $\vec{e}$ larning yo'nalishlari teskari bo'lganda olinadi.

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning biror L o'qdagi proektsiyalari quyidagi xossalarga ega:

$$np_L\vec{a} + np_L\vec{b} = np_L(\vec{a} + \vec{b}); \tag{2.1}$$

$$np_L(m\vec{a}) = mnp_L\vec{a}. \tag{2.2}$$

Xuddi shunday $\vec{a} = (\vec{a} - \vec{b}) + \vec{b}$ ekanligini e'tiborga olsak,

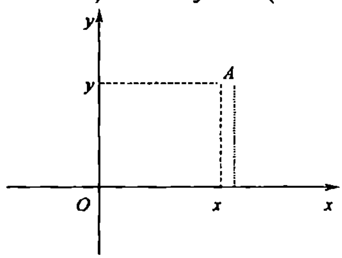
$$np_L(\vec{a} - \vec{b}) + np_L\vec{b} = np_L\vec{a}$$

yoki

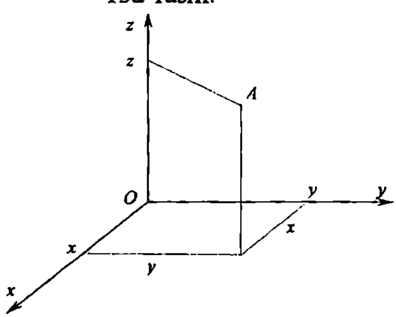
$$np_L\vec{a} - np_L\vec{b} = np_L(\vec{a} - \vec{b}) \tag{2.3}$$

§3. Dekart koordinatalar sistemasida vektorlar.

Tekislikda o'zaro perpendikulyar, O nuqtada kesishuvchi x va y o'qlar, fazoda esa o'zaro perpendikulyar, O nuqtada kesishuvchi x, y, z o'qlar berilgan bo'lsin. O nuqtani koordinatalar boshi, x, y, z o'qlarni koordinatalar o'qlari, deb ataymiz. Tekislikdagi va fazodagi har qanday nuqta o'rni uning koordinatalar o'qidagi proektsiyalarini O nuqtagacha bo'lgan masofalari orqali yagona ravishda aniqlanadi. Bu masofalarni shu nuqtaning koordinatalari, deb ataymiz (13-rasmga qarang) .



13a-rasm.



13b-rasm.

Uch o'lchamli fazoda olingan ixtiyoriy nuqtani O nuqta bilan birlashtirib turuvchi $\vec{OA}$ vektor A nuqtaning radius-vektori, deb ataladi. $\vec{OA}$ vektorning x, y va z o'qlardagi proektsiyalarini mos ravishda x, y, z deb belgilasak, ular 13-rasmdan ko'rinadiki, A nuqtaning koordinatalaridan iborat bo'ladi. x ni A nuqtaning abstsissasi, y ni ordinatasi va z ni aplikatasi, deb ataymiz.

(x, y, z) sonlar uchligi fazoning A nuqtasi bilan uning radius-vektori o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatadi. Shu sababli, (x, y, z) uchlikni ayrim hollarda A nuqta yoki $\vec{OA}$ vector, deb tushunamiz.

Har qanday vektorni o'ziga parallel ravishda ko'chirish mumkin bo'lgani uchun, agar $\vec{OA} = (x, y, z)$ bo'lib, uni o'ziga parallel ko'chirish natijasida hosil bo'lgan vektor $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ bo'lsa, u holda $x = x_1, y = y_1, z = z_1$ bo'ladi.

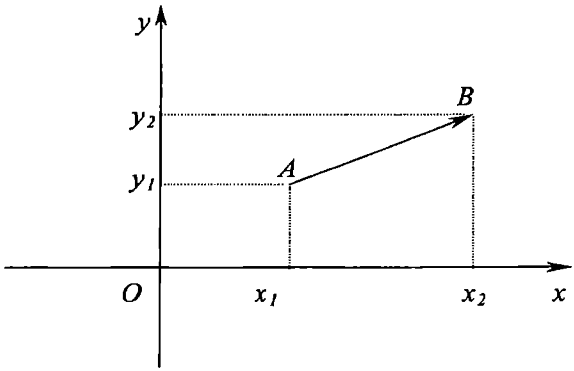
(2.1),(2.2) va (2.3) xossalarga ko'ra

$$(x, y, z) \pm (x_1, y_1, z_1) = (x \pm x_1, y \pm y_1, z \pm z_1) \tag{3.1}$$

$$\alpha(x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z), \tag{3,2}$$

deb yozish mumkin.

Tekislikda boshi $A(x_1, y_1)$ va oxiri $B(x_2, y_2)$ nuqtalarda bo'lgan $\vec{a} = \vec{AB}$ vektor berilgan bo'lsin (14-rasmga qarang). Chizmadan ko'rinadiki,



14-rasm.

$$np_x \vec{AB} = x_2 - x_1, np_y \vec{AB} = y_2 - y_1.$$

Demak,

$$\vec{a} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

ekan. Xuddi shunday, fazoda berilgan $\vec{AB}$, bu yerda $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$, vektor uchun

$$\vec{a}=\vec{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$$

x,y,z o'qlarining ortlarini mos ravishda $\vec{i},\vec{j}$ va $\vec{k}$ bilan belgilaymiz. Ixtiyoriy (x,y,z) vektorni

$$(x,y,z)=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

ko'rinishda ifodalash mumkin. Haqiqatan, agar

$$\vec{i}=(1,0,0),\vec{j}=(0,1,0),\vec{k}=(0,0,1)$$

ekanligini e'tiborga olsak,

$$x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=x(1,0,0)+y(0,1,0)+z(0,0,1)=(x,0,0)+(0,y,0)+(0,0,z)=(x,y,z)$$

kelib chiqadi.

Bizga $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$ va $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$ vektorlar berilgan bo'lsin. Bu vektorlar parallel bo'lishi uchun ularning koordinatalari qanday shartlarni qanoatlantirishi kerakligini aniqlash talab etilgan bo'lsin. Agar $\vec{a}=0$ bo'lsa, u holda uning yo'nalishi aniq emas, shu sababli uni $\vec{b}$ ga ham parallel deb qarash mumkin. Endi faraz qilaylik, $\vec{a}\neq 0$ bo'lsin. $\vec{b}$ vektor $\vec{a}$ ga parallel bo'lishi uchun $\vec{b}=\lambda\vec{a}$ bo'lishi zarur va yetarlidir. Oxirgi tenglikni

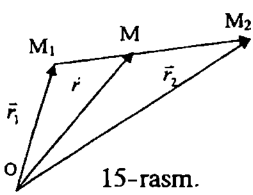
$$x_2=\lambda x_1, y_2=\lambda y_1, z_2=\lambda z_1$$

ko'rinishda yozib olish mumkin. Bundan

$$\frac{x_2}{x_1}=\frac{y_2}{y_1}=\frac{z_2}{z_1}$$

kelib chiqadi. Demak, ikki vektor kolleniar bo'lishi uchun, ularning koordinatalari mos ravishda proportsional bo'lishi zarur va yetarli ekan.

Vektorlarning bu xususiyatidan foydalanib, uchlari $M_1(x_1,y_1,z_1)$ va $M_2(x_2,y_2,z_2)$ nuqtalarda bo'lgan M_1M_2 kesmani berilgan $M_1M:MM_2=\lambda:1$ nisbatda bo'luvchi M nuqtaning koordinatalarini topish masalasini hal kilamiz.



15-rasm.

Agar $\vec{OM_1}=\vec{r}_1,\vec{OM_2}=\vec{r}_2,\vec{OM}=\vec{r}$ desak, u holda $\vec{M_1M}=\vec{r}-\vec{r}_1,\vec{MM_2}=\vec{r}_2-\vec{r}$ bo'ladi. $\vec{M_1M}$ va $\vec{MM_2}$ vektorlar kolleniar bo'lgani uchun, berilgan nisbatga ko'ra

$$\vec{r}-\vec{r}_1=\lambda(\vec{r}_2-\vec{r})$$

bo'ladi. Bundan $\lambda\neq -1$ bo'lgani uchun

$$\vec{r}=\frac{\vec{r}_1+\lambda\vec{r}_2}{1+\lambda}$$

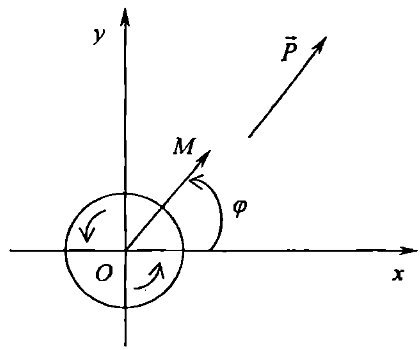
yoki $x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, z=\dfrac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$ kelib chiqadi.

§4. Tekislikda yo'nalishni aniqlash.

Ma'lumki, har bir vektorning yo'nalishini uning koordinata o'qlari bilan tashkil etgan burchaklari to'la aniqlab beradi. Masalan, tekislikdagi vektorni qarasak, u Ox va Ou o'qlari bilan mos ravishda α va β burchaklar tashkil etadiki, bu burchaklar uchun $\alpha + \beta = \pi/2$ munosabat o'rinlidir. Shu sababli, berilgan vektor yo'nalishini faqat bitta burchak yordamida ham aniqlasa bo'ladi, deyish mumkin, lekin bunda tekislikda musbat aylanma yo'nalish kiritilgan bo'lishi shart.

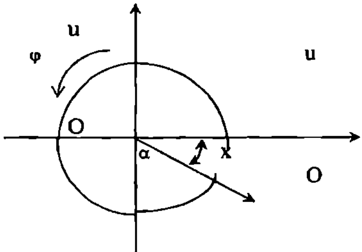
Ta'rif. O'zaro parallel bo'lmagan $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar aniqlagan tekislikdagi aylanma yo'nalish deb, $\bar{a}$ vektordan $\bar{b}$ vektorgacha bo'lgan eng qisqa (ya'ni π dan kichik) burilish burchagiga aytamiz.

Musbat yo'nalish, deb $\bar{i}$ va $\bar{j}$ ortlar aniqlagan aylanma yo'nalishni tushunamiz.

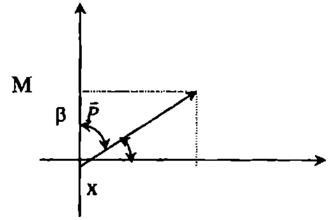


16-rasm.

Faraz qilaylik, $\bar{P}$ - tekislikning ixtiyoriy vektori bo'lsin. Uning boshini koordinata boshi O ga ko'chirib, $O\bar{M}$ radius-vektor bilan ustma-ust tushiramiz. φ - $\bar{P}$ vektorni Ox o'qi bilan tashkil etgan burchagi, ya'ni Ox ni musbat yo'nalishda burganda $O\bar{M}$ bilan ustma-ust tushish burchagi bo'lsin. Ayonki, φ burchak $\bar{P}$ vektorning yo'nalishini to'la aniqlab beradi. Bu burchak xuddi trigonometriyadagidek 2π dan oshiq qiymatlarni ham qabul qiladi deb tushunilsa, u holda bir yo'nalishga φ burchakning bir-biridan $2k\pi$ (k-butun son) miqdorga farq qiluvchi sanoqsiz ko'p qiymatlari mos keladi, chunki berilgan bu yo'nalishni necha marotaba 2π burchakka burmaylik, natijada yana avvalgi yo'nalishga qaytamiz.



17-rasm.



18-rasm.

φ burchakni manfiy yo'nalish bo'yicha ham hisoblasa bo'ladi, faqat bu yerda endi φ ning qiymati manfiy bo'ladi, deb tushunish kerak bo'ladi. Lekin, bunda φ burchak tekislikda biz kiritgan aylanma yo'nalish bo'yicha hisoblan-ganda, $\bar{P}$ vektorning Ox o'q bilan tashkil etgan burchagi bilan bir xil bo'lmaydi, chunki α musbat burchak bo'lsa, φ hisoblash yo'nalishiga qarab, yo manfiy yo musbat bo'lishi mumkin. Masalan, 17-rasmdagi holatda α π dan kichik bo'lgan musbat burchak, φ esa yo $-\alpha$, yoki $2\pi-\alpha$ ga teng. Shu sababli, agar α, β lar mos ravishda $\vec{P}$ vektorning Ox va Ou o'qlari bilan tashkil etgan burchaklari bo'lsa, u holda φ

1-chorakda bo'lsa: $\alpha=\varphi$, $\beta=\pi/2 - \varphi$

2-chorakda bo'lsa: $\alpha=\varphi$, $\beta= \varphi - \pi/2$

3-chorakda bo'lsa: $\alpha = 2\pi - \varphi$, $\beta=\varphi - \pi/2$

4-chorakda bo'lsa: $\alpha= 2\pi - \varphi$, $\beta=2\pi+ \pi/2 -\varphi$

bo'ladi.

Agar $\bar{P}=\{X,Y\}$ bo'lsa, u holda

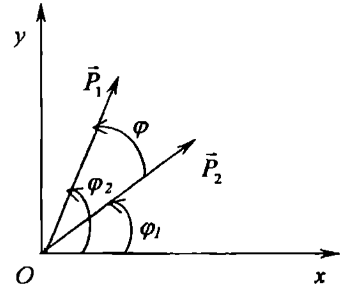
$$X=|\vec{P}|\text{Cos } \varphi \text{ , } Y= |\vec{P}|\text{Sin } \varphi, \ |\vec{P}|= \sqrt{X^2+Y^2}$$

ekanligini e'tiborga olsak,

$$\text{Cos}\varphi=\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}} \text{ , Sin } \varphi=\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}} \qquad (4.1)$$

kelib chiqadi.

(4.1) formulalar $\vec{P}$ vektorning yo'nalishini to'la aniqlab be-radi. φ ni qiymatini (4.1) ning bitta formulasidan, masalan $Sin\varphi$ orqali aniqlasa bo'ladi, lekin bu vektorning yo'nalishini aniqlash uchun etarli emas, buning uchun $Cos\varphi$ ning ishorasini ham bilish kerak bo'ladi.



19-rasm.

Faraz qilaylik, $\vec{P}_1=\{X_1,Y_1\}$ va $\vec{P}_2=\{X_2,Y_2\}$ vektorlar berilgan bo'lsin. Bu vektorlar orasidagi burchakni, agar u $\vec{P}_1$ dan $\vec{P}_2$ ga qarab o'lchansa, $(\vec{P}_1,\overset{\smile}{}\vec{P}_2)$ ko'rinishda ifodalaymiz; agar bu burchak yo'nalishi bilan bir xil bo'lsa, bu burchakni musbat qiymatlar bilan o'lchaymiz, aks holda, bu burchak kattaligini manfiy qiymatlar bilan ifodalaymiz.

$\vec{P}_1$ va $\vec{P}_2$ lar orasidagi burchakni topaylik. Agar $\vec{P}_1$ va $\vec{P}_2$ vektorlarning Ox o'q bilan tashkil etgan burchaklari mos ravishda φ_1 va φ_2 bo'lsa, u holda

$$\varphi=(\vec{P}_1,\overset{\smile}{}\vec{P}_2)=\varphi_2-\varphi_1 .$$

Bundan

$$Cos\varphi=Cos(\varphi_2-\varphi_1),\ Sin\varphi=Sin(\varphi_2-\varphi_1)$$

yoki

$$Cos(\varphi_2-\varphi_1)=Cos\ \varphi_2\ Cos\varphi_1+Sin\varphi_2\ Sin\varphi_1,$$
$$Sin(\varphi_2-\varphi_1)=Sin\varphi_2\ Cos\varphi_1-Sin\varphi_1\ Cos\ \varphi_2,$$
$$Cos\ \varphi_1=X_1/\sqrt{X_1^2+Y_1^2}\ ,\ Sin\varphi_1=Y_1/\sqrt{X_1^2+Y_1^2},$$

ekanligini e'tiborga olsak,

$$Cos\varphi=\frac{X_1X_2+Y_1Y_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2}\sqrt{X_2^2+Y_2^2}} \qquad (4.2)$$

$$Sin\varphi = \frac{X_1Y_2 - X_2Y_1}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2}\sqrt{X_2^2+Y_2^2}} \qquad (4.3)$$

munosabatlarni hosil qilamiz. (4.2) formulaning o'ng tomoni vektorlarning koordinatalariga nisbatan simmetrik bo'lsa, (4.3) formulaning o'ng tomoni, $\bar{P}_1$ bilan $\bar{P}_2$ ning o'rinlarini almashtirganda, o'z ishorasini teskarisiga almashtiradi. Shu sababli,

$$(\bar{P}_2 \overset{\cup}{,} \bar{P}_1) = -(\bar{P}_1 \overset{\cup}{,} \bar{P}_2) + 2k\pi,$$

$$Cos(\bar{P}_2 \overset{\cup}{,} \bar{P}_1) = Cos(\bar{P}_1 \overset{\cup}{,} \bar{P}_2), \quad Sin(\bar{P}_2 \overset{\cup}{,} \bar{P}_1) = -Sin(\bar{P}_1 \overset{\cup}{,} \bar{P}_2)$$

bo'ladi.

Misol. $\bar{Q}=\{3,4\}$ vektor bilan $(\bar{Q} \overset{\cup}{,} \bar{P})=60^\circ$ burchak tashkil etuvchi, uzunligi 2 bo'lgan $\bar{P}$ vektorni toping.

Yechish. Agar $\varphi=(Ox \overset{\cup}{,} \bar{Q})$ desak, u holda $\varphi+60^\circ=(Ox \overset{\cup}{,} \bar{P})$ bo'ladi. Shu sababli, $Cos\varphi = 3/5$, $Sin\varphi = 4/5$ ekanligi uchun

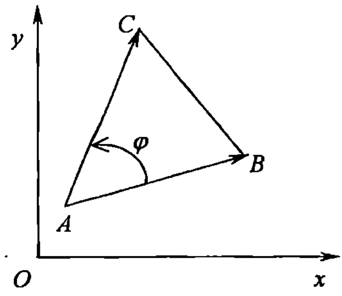
$$X=2\,Cos(\varphi+60^\circ)=2\,(Cos\varphi\, Cos60^\circ - Sin\varphi\, Sin\,60^\circ)=$$

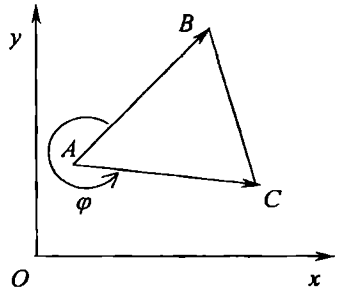
$$=2(Cos\varphi\,\frac{1}{2} - Sin\varphi\,\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}\sqrt{3} = \frac{3-4\sqrt{3}}{5},$$

$$Y= 2Sin(\varphi+60^\circ)= 2(Sin\varphi\, Cos60^\circ + Cos\varphi\, Sin\,60^\circ)=$$

$$= 2(\frac{4}{5}\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{4+3\sqrt{3}}{5}.$$

Endi boshi bir nuqtaga qo'yilgan ikki vektorga qurilgan uchburchak yuzini topish masalasini ko'raylik. Boshlari A nuqtaga keltirilgan $\bar{P}_1=A\bar{B}=\{X_1,Y_1\}$ va $\bar{P}_2=A\bar{C}=\{X_2,Y_2\}$ vektorlar berilgan bo'lsin.





20-rasm.

B va C uchlarini birlashtirib ABC uchburchakni hosil qilamiz. Shu uchburchak yuzini hisoblaylik. Agar $\varphi = (\vec{P}_1, \breve{\vec{P}_2})$ bo'lsa, ma'lumki,

$$S = \frac{1}{2}|\vec{P}_1||\vec{P}_2| \text{ Sin } \varphi . \tag{4.4}$$

Bu yerda, agar $\vec{P}_1, \vec{P}_2$ vektorlar aniqlaydigan aylanma yo'nalish Oxy tekislikning musbat aylanma yo'nalishi bilan bir xil bo'lsa (qarang, 19-rasm, a)), yuza qiymati musbat, aks holda (qarang, 4-rasm, b)) manfiy bo'ladi.

Endi (4.4) da $Sin\varphi$ o'rniga (4.3) ni qo'ysak:

$$S = \frac{1}{2}(X_1Y_2 - X_2Y_1) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} \tag{4.5}$$

formulani hosil qilamiz.

Agar $\vec{P}_1$ va $\vec{P}_2$ vektorlarga tortilgan parallelogrammni ko'rsak, uning yuzi uchun

$$S = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}$$

formulaga ega bo'lamiz.

Endi faraz qilaylik, AVS uchburchakning uchlari $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$ nuqtalarda bo'lsin. Berilgan uchburchakning yuzi $\vec{AB}$ va $\vec{AC}$ vektorlarga qurilgan uchburchak yuziga teng bo'ladi. Agar

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \quad , \quad \vec{AC} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1)$$

ekanligini e'tiborga olsak, (4.5) formulaga ko'ra

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

yoki

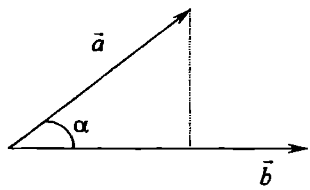
$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

formulalarga ega bo'lamiz.

§5. Vektorlarning skalyar ko'paytmasi.

Ta'rif. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi deb, ular uzunliklarining, ular orasidagi burchak kosinusiga bo'lgan ko'paytmasiga aytamiz, ya'ni

$$\vec{a}\circ\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot CoS(\vec{a},\vec{b}).$$



21-rasm.

Vektorning proyektsiyasini ta'rifiga ko'ra, $|\vec{a}|\cdot CoS\alpha$ (bu yerda $\alpha=(\vec{a},\vec{b})$) $\vec{a}$ vektorning $\vec{b}$ vektordagi proyektsiyasiga teng bo'ladi, shu sababli skalyar ko'paytmani

$$\vec{a}\circ\vec{b}=|\vec{b}|\cdot np_{\vec{b}}\vec{a}=|\vec{a}|\cdot np_{\vec{a}}\vec{b}$$

ko'rinishda ham yozsa bo'ladi (5-rasmga qarang).

Skalyar ko'paytma quyidagi xossalarga ega:

1^0. $\vec{a}\circ\vec{b}=\vec{b}\circ\vec{a}$,

2^0. $\vec{a}\circ(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\circ\vec{b}+\vec{a}\circ\vec{c}$,

3^0. $(\lambda\vec{a})\circ(\mu\vec{b})=(\lambda\mu)\cdot(\vec{a}\circ\vec{b})$ (λ,μ - ixtiyoriy sonlar)

4^0. $\vec{a}\circ\vec{a}=\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$,

5^0. $\vec{a}\circ\vec{b}=0$ bo'lishi uchun $\vec{a}$ va $\vec{b}$ lar o'zaro perpendikulyar bo'lishi zarur va yetarlidir.

1^0-xossaning isboti.

$$\vec{a}\circ\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot CoS\alpha=|\vec{b}|\cdot|\vec{a}|\cdot CoS\alpha=\vec{b}\circ\vec{a}$$

2^0-, 3^0- va 4^0-xossalarning isbotini bajarishni o'quvchining o'ziga havola qilamiz.

5^0- xossaning isboti. *Zarurligi.* $\vec{a}\circ\vec{b}=0$ bo'lsin. U holda, $0=\vec{a}\circ\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot CoS\alpha$ dan $|\vec{a}|\neq 0,|\vec{b}|\neq 0$ bo'lgani uchun $CoS\alpha=0$, o'z navbatida bundan $\alpha=\frac{\pi}{2}$, ya'ni $\vec{a}\perp\vec{b}$ ekanligi kelib chiqadi.

Yetarliligi. Agar $\alpha = (\vec{a},\vec{b}) = \frac{\pi}{2}$ bo'lsa, u holda $CoS\alpha = 0$, shu sababli $\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot CoS\frac{\pi}{2} = 0$ bo'ladi.

5^0-xossa vektorlarning perpendikulyarlik sharti, deb ataladi.

4^0- va 5^0-xossalarga asosan

$$\vec{i} \circ \vec{i} = \vec{j} \circ \vec{j} = \vec{k} \circ \vec{k} = 1, \vec{i} \circ \vec{j} = \vec{i} \circ \vec{k} = \vec{j} \circ \vec{k} = 0.$$

Endi agar $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1), \vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ bo'lsa, u holda

$$\vec{a} \circ \vec{b} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \circ (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = x_1x_2\vec{i}^2 + x_1y_2\vec{i} \circ \vec{j} +$$
$$+ x_1z_2\vec{i} \circ \vec{k} + y_1x_2\vec{j} \circ \vec{i} + y_1y_2\vec{j}^2 + y_1z_2\vec{j} \circ \vec{k} + z_1x_2\vec{k} \circ \vec{i} + z_1y_2\vec{k} \circ \vec{j} +$$
$$+ z_1z_2\vec{k}^2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Xususan, agar $\vec{a} = \vec{b}$ bo'lsa,

$$\vec{a} \circ \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$$

yoki

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

bo'ladi.

Bu formuladan foydalanib,fazoning ixtiyoriy $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ nuqtalari orasidagi masofa d_{AB} ni quyidagicha topsa bo'ladi:

$$d_{AB} = |\vec{a}| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

1-misol. $(1,1,1)$ va $(1,2,3)$ vektorlarning uzunligini toping.

Yechish.

$$|(1,1,1)| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}, |(1,2,3)| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}.$$

2-misol. $\vec{a} = (1,0,1)$ va $\vec{e} = (1,2,2)$ vektorlar orasidagi burchakni toping.

Yechish . Skalyar ko'paytmaning ta'rifidan

$$CoS\alpha = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

formulani keltirib chiqaramiz. Bundan

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}, |\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3,$$

$$\vec{a} \circ \vec{b} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 1 + 2 = 3.$$

Demak,

$$CoS\alpha = \frac{3}{3 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}, \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

Faraz qilaylik, berilgan $\vec{a}$ vektor x o'qi бilan α burchak, y o'qi bilan β burchak, z o'qi бilan γ burchak tashkil etsin. U holda

$$X = np_x\vec{a} = |\vec{a}|\cdot Cos\alpha,$$
$$Y = np_y\vec{a} = |\vec{a}|\cdot Cos\beta,$$
$$Z = np_z\vec{a} = |\vec{a}|\cdot Cos\gamma,$$

ekanligidan

$$CoS\alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},$$
$$CoS\beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}, \qquad (5.1)$$
$$CoS\gamma = \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$$

kelib chiqadi.

(5.1) ni kvadratlarga ko'tarib,o'zaro qo'shsak,

$$CoS^2\alpha + CoS^2\beta + CoS^2\gamma = \frac{X^2+Y^2+Z^2}{X^2+Y^2+Z^2} = 1$$ munosabatni

hosil qilamiz.

(5.1) dan topiladigan $CoS\alpha, CoS\beta$ va $CoS\gamma$ qiymatlar $\vec{a}$ vektorning kosinus yo'naltiruvchilari deb ataladi.

Agar $\vec{a} = \vec{e} = (l,m,n)$ ort bo'lsa, u holda

$$l = CoS\alpha, m = CoS\beta, n = CoS\gamma$$

bo'ladi.

§6. Chiziqli yevklid fazosi va chiziqli operator.

Tekislikdagi har bir nuqtaga uning $\overline{OA}$ radius-vektorini o'zaro bir qiymatli mos qo'yaylik. Natijada , radius-vektorlar uchun kiritilgan qo'shish, ayirish ((5,4) ga qarang) va vektorni songa ko'paytirish ((5,5) ga qarang) amallariga ko'ra, bu radius-vektorlar to'plami,ya'ni tekislik chiziqli fazoga aylanadi, ya'ni chiziqli fazoning barcha xossalarini qanoatlantiradi. Bu chiziqli vektor fazoni R_2 bilan belgilaymiz, Xuddi shunday mulohaza qilib, uch o'lchamli fazoni chiziqli vektor fazoga aylantirib, uni R_3 bilan belgilaymiz,

Agar 1-bobdagi 3-§ da kiritilgan R^n chiziqli fazoda uning ikki $x = (x_1, x_2,..., x_n), y = (y_1, y_2,..., y_n)$ vektorlari uchun skalyar ko'paytma

$$x \circ y = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \qquad (6.1)$$

ko'rinishda kiritilsa, R^n n o'lchamli chiziqli yevklid fazosi, deb ataladi, uni biz R_n bilan belgilaymiz.

Skalyar ko'paytma (6.1) uchun quyidagi xossalar o'rinli.

1^0. $x \circ x \geq 0, x \circ x = 0$ faqat $x = 0 = (0,0,...,0)$ bo'lsagina,

2^0. $x \circ y = y \circ x$,

3^0. $(\alpha x + \beta y) \circ z = \alpha(x \circ z) + \beta(y \circ z)$,

4^0. $|x \circ y| \leq \sqrt{x \circ x} \cdot \sqrt{y \circ y}$,

Oxirgi xossa Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi, deb yuritiladi.

1^0-3^0-xossalarning isboti sodda bo'lgani uchun ularni baja-rishni o'quvchigi havola qilib, 4^0-xossaning isbotini keltiramiz.

Haqiqatan, ixtiyoriy λ haqiqiy son uchun

$$0 \leq (x + \lambda y) \circ (x + \lambda y) = x \circ x + \lambda \cdot y \circ x + \lambda \cdot x \circ y + \lambda^2 \cdot y \circ y =$$

$$= x \circ x + 2\lambda \cdot x \circ y + \lambda^2 \cdot y \circ y = a + 2\lambda b + c\lambda^2,$$

bu yerda $a = x \circ x, b = x \circ y, c = y \circ y$ deb belgilandi. Ma'lumki, agar kvadrat uchhadni qiymatlari manfiy bo'lmasa, uning grafigi λ o'qdan yuqorida joylashgan bo'ladi, shu sababli, u λ o'qni kesib o'tmaydi. Bu hol, agar diskriminant $b^2 - ac \leq 0$ yoki $b^2 \leq ac$ bo'lgandagina ro'y beradi. Xossa to'liq isbot bo'ldi.

Agar (6.1) da $x = y$ desak,

$$x \circ x = |x|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Bundan

$$|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

xosil bo'ladi. U holda Koshi-Bunyakovskiy tengsizligini

$$|x \circ y| \leq |x| \cdot |y|$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bundan ko'rinadiki, shunday λ, $-1 \leq \lambda \leq 1$ mavjudki, uning uchun

$$x \circ y = \lambda \cdot |x| \cdot |y|$$

o'rinli bo'ladi. Agar $\lambda = Cos\omega$ desak,($[0,\pi]$ da $Cos\omega = \lambda$ yagona yechimga ega, ya'ni xar bir λ uchun faqat bitta ω burchak topiladi) , oxirgi tenglikni

$$x \circ y = |x| \cdot |y| Cos\omega \qquad (6.2)$$

ko'rinishda yozish mumkin bo'ladi. ω son x va y vektorlar orasidagi burchak, deb ataladi.

x va y vektorlar ortogonal deyiladi, agar ularning skalyar ko'paytmasi

$$x \circ y = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i = 0$$

bo'lsa.

(6.2) dan ko'rinadiki, nolga teng bo'lmagan x va y vektorlarning ortogonal bo'lishi uchun ular orasidagi burchak $\omega = \frac{\pi}{2}$ bo'lishi zarur va yetarlidir.

Quyidagi tengsizlik

$$|x + y| \leq |x| + |y| \tag{6.3}$$

Minkovskiy tengsizligi, deb ataladi. Bundan xususan,

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

tengsizlik kelib chiqadi.

(6.3) ni isbotlashni o'quvchiga havola qilamiz.

R_n chiziqli fazoning har bir x elementiga, shu fazoning y elementini mos qo'yish qoidasi, R_n ni o'ziga akslantirish, deb ataladi.

R_n ning chiziqli operatori deb, R_n ni o'ziga akslantiruvchi va quyidagi

$$A(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot Ax \quad , \quad A(x + y) = Ax + Ay$$

xossalarga ega bo'lgan har qanday A akslantirishga aytamiz. Buni $A : R_n \to R_n$ ko'rinishda yozish qabul qilingan.

Bizga R_n chiziqli fazoning A chiziqli operatori va shu fazoning biror $\mathfrak{R} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ bazisi berilgan bo'lsin. $A\vec{e}_\kappa, \kappa = 1,2,\ldots,n$, vektorlarni $\mathfrak{R}$ bazis bo'yicha yoyaylik:

$$A\vec{e}_\kappa = a_{1\kappa}\vec{e}_1 + \ldots + a_{n\kappa}\vec{e}_n \ , \qquad \kappa = 1,2,\ldots,n.$$

U holda quyidagi

$$[A] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . \ . \ . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . \ . \ . & a_{2n} \\ . & & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . \ . \ . & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matritsa A chiziqli operatorning $\mathfrak{R}$ bazisdagi matritsasi, deb ataladi. Agar matritsa chiziqli operatorning qaysi bazisdagi matritsasi ekanligini ko'rsatish zarur bo'lsa, bu matritsa uchun $[A]_\mathfrak{R}$ belgi ishlatiladi.

Chiziqli operator o'z matritsasi bilan yagona ravishda aniqlanadi, ya'ni agar x, y lar R_n ning ixtiyoriy elementlari bo'lib, X, Y lar ularning mos ravishda koordinatalar ustunlari bo'lsa, u holda $y = Ax$ dan $Y = [A]X$ kelib chiqadi.

R_n fazoning chiziqli operatorlari uchun quyidagi amallarni kiritish mumkin:

a) operatorlar yig'indisi: $(A + B)x = Ax + Bx)$, o'z navbatida $[A + B] = [A] + [B]$;

b) operatorni songa ko'paytirish: $(\lambda \cdot A)x = \lambda \cdot (Ax)$ va $[\lambda \cdot A] = \lambda \cdot [A]$;

v) operatorlar ko'paytmasi: $(AB)x = A(Bx)$, va o'z navbatida $[AB]=[A]\cdot[B]$.

Har qanday $x\in R_n$ uchun $Ex = x$ munosabatni qanoatlantiruvchi E operatorni birlik operator deymiz. A operatorga teskari operator deb, $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ munosabatni qanoatlantiruvchi A^{-1} operatorga aytamiz. A operatorga teskari operator mavjud bo'lishi uchun (bu holda A operator maxsusmas operator deb ataladi) uning har qanday bazisdagi $[A]$ matritsasi maxsus bo'lmasligi zarur va yetarlidir, bundan tashqari $[A^{-1}]=[A]^{-1}$.

1-m i s o l . R_3 ning $Ax=(x_2+x_3, 2x_1+x_3, 3x_1-x_2+x_3)$ operatorini chiziqli operator ekanligini ko'rsating va uning kanonik bazisdagi matritsasini tuzing.

Yechish . Agar $x=(x_1,x_2,x_3)$, va $y=(y_1,y_2,y_3)$ lar R_3 ning ixtiyoriy elementlari bo'lsa, u holda

$$x+y=(x_1+y_1, x_2+y_2, _3+y_3),\quad \lambda\cdot x=(\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3)$$

larga asosan,

$$A(x+y)=(x_2+y_2+x_3+y_3, 2(x_1+y_1)+x_3+y_3, 3(x_1+y_1)-(x_2+y_2)+(x_3+y_3))=$$
$$=(x_2+x_3+y_2+y_3, 2x_1+x_3+2y_1+y_3, 3x_1-x_2+x_3+3y_1-y_2+y_3)=$$
$$=(x_2+x_3, 2x_1+x_3, 3x_1-x_2+x_3)+(y_2+y_3, 2y_1+y_3, 3y_1-y_2+y_3)=Ax+Ay$$
$$A(\lambda x)=(\lambda x_2+\lambda x_3, 2\lambda x_1+\lambda x_3, 3\lambda x_1-\lambda x_2+\lambda x_3)=\lambda(x_2+x_3, 2x_1+x_3, 3x_1-x_2+x_3)=\lambda Ax.$$

$$A\vec{e}_1=(0,2,3)=0\cdot\vec{e}_1+2\cdot\vec{e}_2+3\cdot\vec{e}_3,$$
$$A\vec{e}_2=(1,0,-1)=1\cdot\vec{e}_1+0\cdot\vec{e}_2-1\cdot\vec{e}_3,$$
$$A\vec{e}_3=(1,1,1)=1\cdot\vec{e}_1+1\cdot\vec{e}_2+1\cdot\vec{e}_3.$$

Bundan

$$[A]=\begin{pmatrix}0 & 2 & 3\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

2-m i s o l . $Ax=(x_1, x_2+1, x_3+2)$ operatorni chiziqlikka tekshiring.

Yechish .

$$A(x+y)=(x_1+y_1, x_2+y_2+1, x_3+y_3+2)=(x_1,x_2+1,x_3+2)+(y_1,y_2,y_3)\neq Ax+Ay,$$

ya'ni berilgan operator chiziqli emas.

3-m i s o l . $Ax=(2x_2, -2x_1+3x_2+2x_3, 4x_1-x_2+5x_3)$, $Bx=(-3x_1+x_2, 2x_2+x_3, -x_2+3x_3)$ operatorlar berilgan. $C=AB$ operatorni va uning $[C]$ matritsasini toping.

Yechish. Avval $[A]$ va $[B]$ matritsalarni topib olamiz. $A\vec{e}_1=(0,-2,4)$, $A\vec{e}_2=(2,3,-1)$, $A\vec{e}_3=(0,2,5)$ va $B\vec{e}_1=(-3,0,0)$, $B\vec{e}_2=(0,2,-1)$, $B\vec{e}_3=(1,1,3)$ bo'lgani uchun

$$[A]=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad , \quad [B]=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

U holda

$$[C]=[A]\cdot[B]=\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 6 & 4 & 7 \\ -12 & -7 & 18 \end{pmatrix}.$$

Bundan

$$C\vec{e}_1=(0,6,-12),\quad C\vec{e}_2=(4,4,-7),\quad C\vec{e}_3=(2,7,18)$$

va

$$Cx=C(x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+x_3\vec{e}_3)=x_1\cdot(C\vec{e}_1)+x_2\cdot(C\vec{e}_2)+x_3\cdot(C\vec{e}_3)=$$
$$=(4x_2+2x_3,6x_1+4x_2+7x_3,-12x_1-7x_2+18x_3)\ .$$

Agar

$$Ax=\lambda x \tag{6.4}$$

tenglik biror $x\neq 0, x\in R_n$ uchun o'rinli bo'lsa, u holda λ son A chiziqli operatorning xos soni, x esa A operatorning λ xos soniga mos keluvchi xos vektori, deb ataladi.

R_n fazoda (6.4) tenglikni unga ekvivalent bo'lgan quyidagi matritsa tengligiga almashtirish mumkin:

$$[A-\lambda E]X=0,\qquad X\neq 0. \tag{6.5}$$

Oxirgi tenglikdan, λ son A operatorning xos soni bo'lishi uchun $\det[A-\lambda E]=0$ bo'lishi zarur va yetarli ekanligi kelib chiqadi. $p(\lambda)=\det[A-\lambda E]$ A operatorning xarakteristik ko'phadi deb ataladi. Demak, xos son xarakteristik ko'phadning yechimi bo'lar ekan.. Unga mos keluvchi xos vektorning koordinatalar ustuni (6.4) bir jinsli tenglamalar sistemasining biror noldan farqli yechimi bo'ladi.

4-m i s o l. $Ax=(2x_1-x_2+2x_3,5x_1-3x_2+3x_3,-x_1-2x_3)$ operatorning xos soni va unga mos keluvchi xos vektorlarini toping.

Yechish. Avval A operatorning matritsasini tuzib olamiz:

$$[A]=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Berilgan operatorga mos keluvchi bir jinsli tenglamalar sitemasi quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\begin{cases} (2-\lambda)x_1-x_2+2x_3=0 \\ 5x_1-(3+\lambda)x_2+3x_3=0 \\ -x_1-(2+\lambda)x_3=0. \end{cases} \tag{6.6}$$

Bundan xarakteristik ko'phadni topamiz:

$$p(\lambda)\equiv\begin{vmatrix}2-\lambda & -1 & 2\\ 5 & -3-\lambda & 3\\ -1 & 0 & -2-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+1)^3.$$

Demak, xos son $\lambda=-1$ ekan. Bu sonni (6.6) ga qo'ysak,

$$\begin{cases}3x_1-x_2+2x_3=0\\ 5x_1-2x_2+3x_3=0\\ -x_1-x_3=0.\end{cases}$$

Bundan $x_1=-x_3$, $x_1=x_2$. Agar $x_1=\alpha$ desak,

$$X=\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

bo'ladi.

Agar A operator R_n fazoda $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ xos sonlarga mos keluvchi n ta chiziqli bog'liq bo'lmagan $\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n$ xos vektorlarga ega bo'lsa, u holda A operatorning shu xos vektorlaridan tuzilgan sistema R_n da bazis tashkil etadi. A operatorning shu bazisdagi matritsasi quyidagi ko'ri-nishda bo'ladi:

$$[A]=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & & 0\\ 0 & \lambda_2 & & 0\\ . & . & & .\\ 0 & 0 & . \; . & \lambda_n\end{pmatrix}$$

5-m i s o l. A chiziqli operatorning quyidagi matritsasini diagonal ko'rinishga keltiring:

$$[A]=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ -2 & -2 & -1\end{pmatrix}.$$

Yechish.

$$p(\lambda)\equiv\det[A-\lambda E]=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & 0\\ 0 & 2-\lambda & 0\\ -2 & -2 & -1-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)(1-\lambda^2)=0$$

Bundan xos sonlarni topamiz: $\lambda_1=2,\lambda_2=1,\lambda_3=-1$.

Ularga mos keluvchi xos vektorlarni topish uchun avval (6.6) sistemaga $\lambda_1=2$ ni qo'yamiz:

$$\begin{cases}-x_1+2x\ =0\\ -2x_1-2x_2-3x_3=0\end{cases}$$

Bundan, $E_1=(2,1,-2)^T$. Xuddi shunday, agar $\lambda_2=1$ desak, (6.6) sistema quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Demak, $E_2 = (1,0,-1)^T$ ekan. Agar (6.6) da $\lambda_3 = -1$ desak,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 3x_2 = 0. \end{cases}$$

Bundan, $E_3 = (0,0,1)^T$.

Demak, E_1, E_2, E_3 bazisda A operatorning matritsasi

$$[A] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

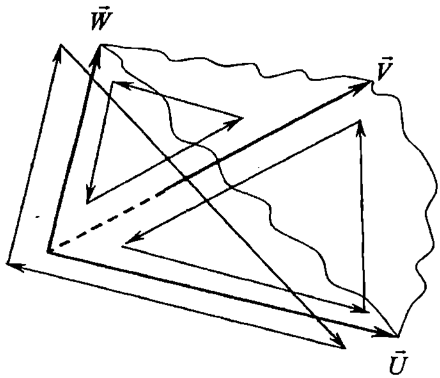
bo'ladi.

§7. Vektorlarning vektor va aralash ko'paytmalari.

7.1. Ikki vektorning vektor ko'paytmasi. Avval R_3 fazoda yo'nalish tushunchasini kiritib olamiz.

Bir tekislikda yotgan uchta vektorni komplanar vektorlar, deb ataymiz. Bir tekislikda yotmagan xar qanday vektorlar uchligini komplanar bo'lmagan vektorlar deymiz. Bizga komplanar bo'lmagan, boshlari bir nuqtaga keltirilgan $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ vektorlar berilgan bo'lsin.

Ta'rif. $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ vektorlar uchligi chap sistemani tashkil etadi deymiz, agar $(\vec{u}, \vec{v})$, $(\vec{v}, \vec{w})$, $(\vec{w}, \vec{u})$ vektorlar juftliklari aniqlaydigan aylanma yo'nalishlar o'zlari yotgan tekisliklarda musbat aylanma yo'nalish bilan bir xil bo'lsa. Loaqal bitta juftlik yo'nalishi o'zi yotgan tekislikning musbat aylanma yo'nalishidan farq qilsa, bunday uchlikni o'ng sistema, deb ataymiz.



22-rasm.

Misol. $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ ortlar uchligi chap sistemani tashkil etadi, chunki $(\vec{i},\vec{j})$, $(\vec{j},\vec{k})$ va $(\vec{k},\vec{i})$ juftliklar yo'nalishi mos ravishda *Oxu, Ouz, Ozx* tekisliklarning musbat yo'nalishi bilan bir xildir.

$\vec{i}$, $\vec{k}$, $\vec{j}$ uchlik esa o'ng sistemadir, chunki $(\vec{i},\vec{k})$ juftlik aniqlagan aylanma yo'nalish *Ozx* tekisligining musbat yo'nalishiga teskari. Xuddi shunday, $(\vec{k},\vec{j})$ va $(\vec{j},\vec{i})$ juftliklar aniqlagan aylanma yo'nalishlar mos ravishda *Oyz* va *Oxy* tekisliklarining musbat yo'nalishiga teskaridir.

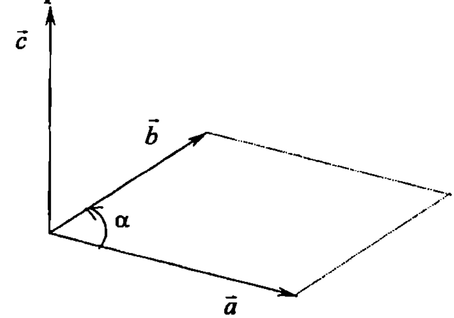
Endi geometriya va amaliy matematika masalalarida keng qo'llaniladigan vektor ko'paytma tushunchasini kiritamiz.

Ta'rif. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning vektor ko'paytmasi deb, quyidagi uchta xususiyatga ega bo'lgan $\vec{c}$ vektorga aytamiz:

1) $\vec{c}$ ning uzunligi $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar uzunliklari va ular orasidagi φ burchak sinusi ko'paytmasiga teng:

$$|\vec{c}|=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\mathrm{Sin}\varphi\ ; \tag{7.1}$$

2) $\vec{c}$ vektor $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar yotgan tekislikka perpendikulyar,jumladan, $\vec{a}$ ga ham va $\vec{b}$ ga ham perpendikulyar;
3) $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vektorlar chap sistemani tashkil etadi.



23-rasm.

Birinchi xossadan $\vec{c}$ ning uzunligi $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga tortilgan paralelogramm yuziga teng ekanligi kelib chiqadi, ya'ni

$$S=|\vec{a}\times\vec{b}|$$

yoki

$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|\ . \tag{7.2}$$

Vektor ko'paytmani $\vec{a}\times\vec{b}$ ko'rinishda ifodalaymiz.

Yuqorida kiritilgan ikki ko'paytmalarga (ya'ni skalyar va vektor ko'paytmalar) berilgan nomlar,ularning natijalariga qarab tanlanganligini eslatib o'tamiz.

Vektor ko'paytma quyidagi xossalarga ega.

1-xossa. $\vec{a}\times\vec{b}=0$ bo'lishi uchun, $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorlar kolleniar bo'lishi zarur va yetarlidir.

Bu xossa vektorlarning kolleniarlik sharti, deb yuritiladi.

Isboti (6) tenglikdan kelib chiqadi.

2-xossa. $\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}$, ya'ni ko'paytuvchilar o'rni almashsa, natija faqat o'z ishorasini o'zgartiradi.

Haqiqatan, agar ko'paytmada $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar o'rnini almashtirsak, $\vec{b},\vec{a},\vec{a}\times\vec{b}$ uchlik o'ng sistema bo'lib qoladi, $\vec{a}\times\vec{b}$ ning ishorasini teskarisiga almashtirsak, unda $\vec{b},\vec{a},-\vec{a}\times\vec{b}$ uchlik chap sistemaga aylanadi.

3-xossa. Agar m,n - ixtiyoriy sonlar bo'lsa,

$$(m\vec{a})\times(n\vec{b})=mn(\vec{a}\times\vec{b}).$$

Isboti. Agar $m=0$, $n\neq 0$ yoki $m\neq 0, n=0$ bo'lsa, tenglik bajarilishi o'z-o'zidan ko'rinib turibdi. $m\neq 0, n=1$ bo'lgan holni ko'rish yetarli,chunki $m=1, n\neq 0$ bo'lgan hol 2-xossani qo'llash hisobiga biz ko'rmoqchi bo'lgan holga keltiriladi. Avvalambor

$$|(m\vec{a})\times\vec{b}|=|m\vec{a}||\vec{b}|Sin\phi,$$

bu yerda agar $m>0$ bo'lsa, $\phi=\varphi$ va $m<0$ bo'lsa, $\phi=\pi-\varphi$, lekin ikkala holda ham $Sin\phi=Sin\varphi$ bo'lgani uchun

$$|(m\vec{a})\times\vec{b}|=|m||\vec{a}||\vec{b}|Sin\varphi=|m||\vec{a}\times\vec{b}|.$$

Ikkinchidan, $m\vec{a}$ vektor $\vec{a}$ vektorga kolleniar, shu sababli $\vec{a}\times\vec{b}$ vektor $m\vec{a}$ ga perpendikulyar. $m(\vec{a}\times\vec{b})$ vektor $\vec{a}\times\vec{b}$ ga kolleniar bo'lgani uchun $m(\vec{a}\times\vec{b})$ vektor $m\vec{a}$ ga va $\vec{b}$ ga perpendikulyardir. Va nihoyat, agar $m\succ 0$ bo'lsa, $\vec{a}$ va $m\vec{a}$ vektorlar, $\vec{a}\times\vec{b}$ va $m(\vec{a}\times\vec{b})$ vektorlar bir xil yo'nalgan bo'ladi, shu sababli $\vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{b}$ uchlik chap sistema bo'lgani uchun $m\vec{a},\vec{b},m(\vec{a}\times\vec{b})$ uchlik ham chap sistema bo'ladi. $m\prec 0$ bo'lgan hol ham xuddi shunday tekshiriladi. Xossa to'liq isbot bo'ldi.

4-xossa.

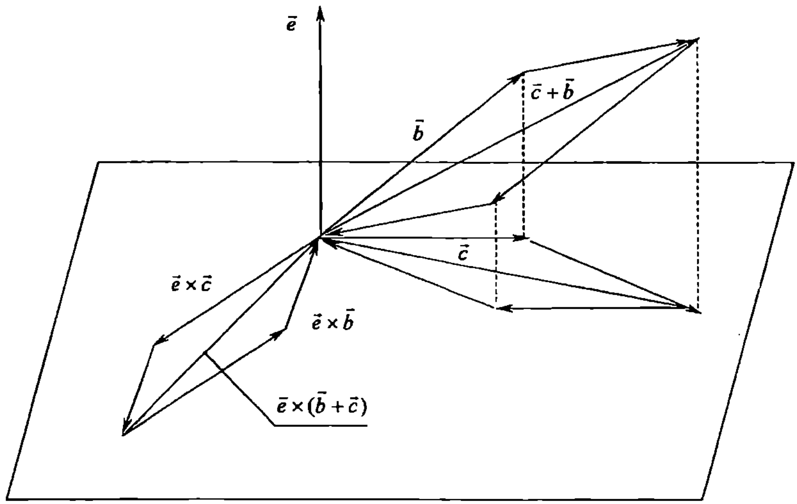
$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}.$$

Isboti. Avval $\vec{a}=\vec{e}$ ort bo'lgan holni ko'raylik. $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarni 3-rasmda ko'rsatilgandek qilib, $\vec{e}$ ga perpendikulyar bo'lgan π tekislikka proektsiyalaymiz va bu proektsiyalarni $\vec{e}$ ort atrofida soat milini xarakati bo'ylab 90^0 ga bursak, $\vec{e}\times\vec{b}$ va $\vec{e}\times\vec{c}$ vektorlar hosil bo'ladi.

$np_\pi(\vec{c}+\vec{b})=np_\pi\vec{b}+np_\pi\vec{c}$ bo'lgani uchun $\vec{e}\times\vec{b}$ va $\vec{e}\times\vec{c}$ larning yig'indisi bo'lgan va ularga tortilgan parallelogrammning dioganali $\vec{e}\times(\vec{b}+\vec{c})$ ga teng bo'ladi. Demak,

$$\vec{e}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{e}\times\vec{b}+\vec{e}\times\vec{c}$$

ekan.



24-rasm.

Endi agar $\bar{a}$ ixtiyoriy noldan farqli vektor bo'lsa, $\bar{a}=|\bar{a}|\bar{a}_0$ deb (bu yerda $\bar{a}_0$ - $\bar{a}$ vektorning orti),

$$\bar{a}\times(\bar{b}+\bar{c})=|\bar{a}|\bar{a}_0\times(\bar{b}+\bar{c})=|\bar{a}|(\bar{a}_0\times(\bar{b}+\bar{c}))=|\bar{a}|(\bar{a}_0\times\bar{b}+\bar{a}_0\times\bar{c})=$$
$$=|\bar{a}|(\bar{a}_0\times\bar{b})+|\bar{a}|(\bar{a}_0\times\bar{c})=|\bar{a}|\bar{a}_0\times\bar{b}+|\bar{a}|\bar{a}_0\times\bar{c}=\bar{a}\times\bar{b}+\bar{a}\times\bar{c}$$

tenglikni hosil qilamiz. Xossa to'liq isbot bo'ldi.

Bu xossadan xususan quyidagi munosabat kelib chiqadi:

$$(\bar{a}+\bar{b})\times(\bar{c}+\bar{d})=\bar{a}\times\bar{c}+\bar{a}\times\bar{d}+\bar{b}\times\bar{c}+\bar{b}\times\bar{d}.$$

Vektor ko'paytmaning xossalaridan ortlar uchun quyidagi munosabatlar kelib chiqadi:

$$\bar{i}\times\bar{i}=\bar{i}^2=0,\ \bar{j}^2=0,\ \bar{k}^2=0,$$
$$\bar{i}\times\bar{j}=\bar{k},\ \bar{j}\times\bar{k}=\bar{i},\ \bar{k}\times\bar{i}=\bar{j},$$
$$\bar{j}\times\bar{i}=-\bar{k},\ \bar{k}\times\bar{j}=-\bar{i},\ \bar{i}\times\bar{k}=-\bar{j}.$$

Shu sababli, agar vektorlar o'z proektsiyalari bilan berilgan bo'lsa, ya'ni $\bar{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$, $\bar{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$ bo'lsa, u holda

$$\bar{a}\times\bar{b}=(a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k})\times(b_x\bar{i}+b_y\bar{j}+b_z\bar{k})=a_xb_x\bar{i}^2+a_xb_y(\bar{i}\times\bar{j})+a_xb_z(\bar{i}\times\bar{k})+a_yb_x(\bar{j}\times\bar{i})+$$
$$+a_yb_y\bar{j}^2+a_yb_z(\bar{j}\times\bar{k})+a_zb_x(\bar{k}\times\bar{i})+a_zb_y(\bar{k}\times\bar{j})+a_zb_z(\bar{k}\times\bar{k})=$$
$$=a_xb_y\bar{k}-a_xb_z\bar{j}-a_yb_x\bar{k}+a_yb_z\bar{i}+a_zb_x\bar{j}-a_zb_y\bar{i}=$$
$$=(a_yb_z-a_zb_y)\bar{i}-(a_xb_z-a_zb_x)\bar{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\bar{k}.$$

$$=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec{k}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix}.$$

1- m i s o l. $\vec{a}=\{4,2,-3\}$ va $\vec{b}=\{2,1,4\}$ vektorlarning vektor ko'paytmasini toping.

Yechish.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix}=11\vec{i}-22\vec{j}-4\vec{k}.$$

2- m i s o l. $\vec{a}=\{x_1,y_1,z_1\},\vec{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$ vektorlarga tortilgan uchburchak yuzini toping.

Yechish. Ma'lumki (qarang, (7.2)),

$$S_\Delta=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|.$$

Shu sababli,

$$S_\Delta=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2}.$$

3- m i s o l. $A(1,-1,2),B(0,1,-1)$ va $C(-1,2,3)$ uchlari berilgan $ABCD$ parallelogrammning yuzini toping.

Yechish. $\vec{a}=\vec{AB}=\{-1,2,-3\},\vec{e}=\vec{AC}=\{-2,3,1\}$ vektorlar tuzib olib, avvalgi misol natijasini qo'llasak:

$$S=\sqrt{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}^2}=\sqrt{11^2+7^2+1}=$$

$$=\sqrt{121+49+1}=\sqrt{171}\text{kv.birlik.}$$

7.2. Uch vektorning aralash ko'paytmasi.

$\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarning aralash ko'paytmasi deb, $\vec{a}$ vektorni $\vec{b}$ vektorga vektor ko'paytmasidan hosil bo'lgan natijaning $\vec{c}$ vektorga skalyar ko'paytmasiga aytiladi va quyidagicha belgilanadi: $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ yoki $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

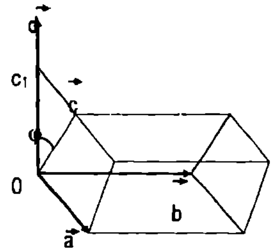
Aralash ko'paytmaning geometrik ma'nosi: $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar komplanar vektorlar bo'lmasin, ya'ni ular bir tekislikda yotmasin. U holda $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{d}$ va $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{d}\cdot\vec{c}$=dcCosφ=dc$_1$; bu yyerda d- $\vec{a},\vec{b}$ vektorlarga qurilgan parallelogramm yuzi, c$_1$ esa $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ vektorlarga qurilgan paralelepipedning balandligi bo'lgani uchun $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ aralash ko'paytma o'sha paralelepipedning hajmiga teng bo'ladi.

Aralash ko'paytmaning xossalari;

1. Istalgan ikkita vektorning o'rni almashsa aralash ko'paytma ishorasini o'zgartiradi:

$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=-(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{b}=-(\vec{c}\times\vec{b})\cdot\vec{a}$.

2. Agarda uchta vektordan ikkitasi teng bo'lsa yoki parallel bo'lsa, aralash ko'paytma nolga teng bo'ladi.
3. «∘» va «×» amallari belgisining o'rinlarini almashtirish mumkin, ya'ni $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$.
4. $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar komplanar bo'lishi uchun (bitta tekislikda yotishi uchun) $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=0$ bo'lishi zarur va yetarli.



25-rasm.

7.3. Parallelopiped va piramidaning hajmi.

$\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarga qurilgan parallelopipedning hajmi

$$V_{пар}=\pm\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}.$$

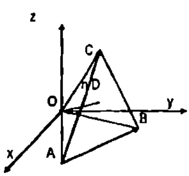
$\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarga qurilgan piramidaning hajmi

$$V_{пир}=\pm 1/6\ \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}.$$

4-m i s o l . Uchlari O(0,0,0), A(5,2,0), B(2,5,0) va C(1,2,4) nuqtalarda bo'lgan piramidaning hajmi, ABC yoqning yuzasi va shu yoqqa tushurilgan perpendikulyar hisoblansin.

Yechish: $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ va $\overline{AO}$ vektorlarning proektsiyasini topaylik

$$\overline{AB}\{-1,3,0\},\ \overline{AC}\{-4,0,4\},\ \overline{AO}\{-5,-2,0\}$$



26-rasm.

$$V_{pir}=1/6\ \overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AO}$$

$$V_{pir}=-1/6\begin{vmatrix}-3 & 3 & 0\\ -4 & 0 & 4\\ -5 & -2 & 0\end{vmatrix}=-1/6(-60-24)=$$

$$=84/6=14 \text{ kub.b.}$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\frac{1}{2}\left|12\vec{i}+12\vec{k}+12\vec{j}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{12^2+12^2+12^2}=6\sqrt{3}$$

$h=\overline{OD}=\dfrac{3V_{pir}}{S_{\Delta ABC}}$; Demak, $h=\dfrac{3\cdot 14}{6\sqrt{3}}=\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$.

3 – BOB

TEKISLIKDAGI ANALITIK GEOMETRIYA

§1. Tekislikdagi to'g'ri chiziq.

1.1. Umumiy tushunchalar. Faraz qilaylik, bizga ikki x va y o'zgaruvchi miqdorlarni bog'lovchi

$$F(x,y)=0 \qquad (1)$$

tenglama berilgan bo'lsin. Bu tenglama o'z navbatida bir o'zgaruvchini , masalan, y ni ikkinchisining, ya'ni x ning funktsiyasi sifatida aniqlaydi. Agar (1) ni y ga nisbatan yechib olsak, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$y=f(x)\ , \qquad (2)$$

bu yerda $f(x)$ bir qiymatli yoki ko'p qiymatli funktsiya bo'lishi mumkin, bu funktsiyaning qiymatlari x o'zgarganda uzluksiz o'zgaradi deb faraz qilaylik.

x va y miqdorlarni Oxy dekart koordinatalar tekisligining biror M nuqtasini koordinatalari sifatida qaraymiz. U holda (2) tenglik x o'zgaruvchining har bir qiymatiga y ning aniq bir qiymatini mos qo'yadi.

Shu sababli, x ning har bir qiymatiga tekislikning koordinatalari x va $y=f(x)$ bo'lgan aniq bir M nuqtasi mos keladi.

Endi, agar x uzluksiz qiymatlarni qabul qilsa, u holda M Oxy tekisligida uzluksiz o'zgarib, nuqtalarning geometrik o'rnini chizadi, bu geometrik o'rinni chiziq, deb ataymiz.

Demak, chiziq koordinatalari (1) yoki (2) ko'rinishdagi tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalarning geometrik o'rni ekan. (1) yoki (2) tenglama o'z navbatida chiziqning tenglamasi deb ataladi.

Endi, agar aytilgan gaplarni umumlashtirsak, berilgan chiziqning tenglamasi deb, (1) yoki (2) ko'rinishga ega bo'lgan shunday tenglamaga aytamizki, bu tenglama faqat berilgan to'g'ri chiziqda yotuvchi nuqtaning koordinatalarini x va y ning o'rniga qo'ygandagina qanoatlanadi.

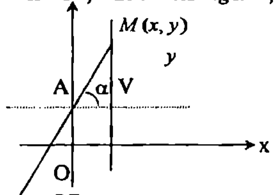
Agar $F(x,y)\equiv Ax+By+C$ bo'lsa, (1) ni 1-tartibli tenglama deymiz, u ifodalaydigan chiziqni to'g'ri chiziq, deb ataymiz.

Agar $F(x,y)\equiv Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+M$ bo'lsa, (1) ni 2-tartibli tenglama , unga mos keluvchi chiziqni esa 2-tartibli chiziq, deb ataymiz.

Misol tariqasida, to'g'ri chiziq va aylananing tenglamasini tuzamiz.

1. To'g'ri chiziq tenglamasi. Faraz qilaylik, y o'qini $A(0,b)$ nuqtada kesib o'tuvchi va x o'qiga α burchak ostida og'ib o'tgan Δ to'g'ri chiziq berilgan bo'lsin.

$M(x,y)$ Δ to'g'ri chiziqning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. Chizmaga ko'ra, $BM = AB \cdot tg\alpha$, bu yerda BM va AB lar $\overrightarrow{BM}$ va $\overrightarrow{AB}$ vektorlarning kesma kattaligi.



27-rasm.

$BM = y - b, AB = x$ bo'lgani uchun yuqoridagi formuladan

$$y - b = tg\alpha \cdot x,$$

yoki

$$y = kx + b, \qquad (3)$$

kelib chiqadi, bu yerda

$$k = tg\alpha \qquad (4)$$

deb belgilandi. (3) tenglamani berilgan to'g'ri chiziqning ixtiyoriy nuqtasini koordinatalari qanoatlantiradi, va aksincha, koordinatalari (3) ni qanoatlantiradigan har qanday nuqta Δ to'g'ri chiziqda yotadi. k koeffitsient (4) ga ko'ra, α burchakka bog'liq bo'lgani uchun burchak koeffitsient, deb ataladi, b esa boshlang'ich ordinata deyiladi.

2. Aylana tenglamasi. Radiusi r va markazi $C(a,b)$ nuqtada bo'lgan aylanani ko'raylik. Ta'rifga ko'ra, aylana $C(a,b)$ nuqtagacha bo'lgan masofalari o'zgarmas r ga teng bo'lgan nuqtalarning geometrik o'rnidir.

Agar $M(x,y)$ tekislikning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsa, u holda

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r,$$

yoki tenglikni kvadratga ko'tarib, ildizni yo'qotsak,

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Bu tenglama berilgan aylananing tenglamasidir.

Agar aylananing markazi koordinatalar boshida bo'lsa, u holda uning tenglamasi soddaroq bo'ladi:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

1.2. To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi.

Teorema. *Oxy* koordinatalar tekisligida har qanday to'g'ri chiziqning tenglamasi

$$Ax + By + C = 0 \qquad (5)$$

ko'rinishda bo'ladi, va aksincha, (5) ko'rinishdagi har qanday tenglama *Oxy* koordinatalar tekisligida to'g'ri chiziqni ifodalaydi.

Isboti. Yuqorida ko'rilganidek, x o'qiga og'ish burchagi ma'lum bo'lgan xar qanday to'g'ri chiziqning tenglamasi $y = kx + b$ ko'rinishda bo'ladi. Buni o'z navbatida $kx - y + b = 0$ ko'rinishga keltirib olsa bo'ladi. Endi, agar to'g'ri chiziqning bir nuqtasi $M_0(x_0, y_0)$ va unga perpendikulyar bo'lgan biror $\vec{s} = \{A, B\}$ vektor berilgan bo'lsa, u holda to'g'ri chiziqda yotuvchi har qanday $M(x,y)$ nuqta uchun

$\overline{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0\}$ vektor $\bar{s}$ vektorga perpendikulyar bo'ladi. Vektorlarning perpendikulyarlik shartiga ko'ra $\bar{s} \circ M_0\vec{M} = 0$ yoki

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \ . \qquad (6)$$

Qavslarni ochib va $C = -Ax_0 - By_0$ deb belgilasak, (6) ni (5) ko'rinishga keltirsa bo'ladi.

Endi teoremaning ikkinchi qismini isbot qilamiz. Agar (5) da $B \neq 0$ bo'lsa, u holda (5) tenglikni B ga bo'lib yuborib, uni

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

ko'rinishga keltirib olamiz. Agar $k = -\frac{A}{B}, b = -\frac{C}{B}$ desak, oxirgi tenglikni $y = kx + b$ deb yozsa bo'ladi. Ma'lumki, bu to'g'ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasidir.

Agar $B = 0$ bo'lsa, u holda $A \neq 0$, shuning uchun (5) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$x = -\frac{C}{A},$$

bu yerda $a = -\frac{C}{A}$ desak, $x = a$, ya'ni x o'qiga perpendikulyar to'g'ri chiziq tenglamasi hosil bo'ladi. Teorema isbot bo'ldi.

(5) tenglama to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi deyiladi, (6) esa bir nuqtadan o'tgan to'g'ri chiziq tenglamasi, deb ataladi.

To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi (5) to'liq bo'lmagan uch holni ko'ramiz:

1) $C = 0$, bunda tenglama $Ax + By = 0$ ko'rinishni oladi, bu tenglama koordinatalar boshidan o'tgan to'g'ri chiziqni ifodalaydi. Haqiqatan, $x = 0, y = 0$ koordinatalar bu tenglamani qanoatlantiradi.

2) $A = 0, B \neq 0$, bunda (5) $By + C = 0$ ko'rinishga keladi, bu tenglama x o'qiga parallel o'tadigan to'g'ri chiziqni ifodalaydi. Xususan,agar $C = 0$ bo'lsa, $y = 0$ hosil bo'ladi, bu x o'qining tenglamasidir.

3) $A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0$ bo'lsin. U holda (5) ning ozod hadi C ni tenglikning o'ng tomoniga o'tkazsak va $-C$ ga bo'lib yuborsak:

$$\frac{Ax}{-C} + \frac{By}{-C} = 1$$

yoki

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1.$$

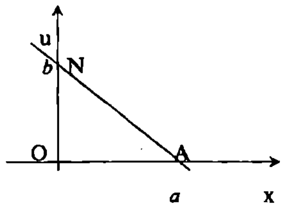
Quyidagi belgilashlarni kiritsak:

$$a=-\frac{C}{A}, b=-\frac{C}{B}$$

tenglama

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad (7)$$

ko'rinishga keladi. (7) ni to'g'ri chiziqning kesmalardagi tenglamasi, deb ataymiz, chunki bu to'g'ri chiziq x o'qini $M(a,0)$ nuqtada, y o'qini $N(0,b)$ nuqtada kesib o'tadi.



28-rasm.

Misol. $3x-5y+15=0$ to'g'ri chiziqning kesmalardagi tenglamasini tuzing.

Yechish. Ozod had 15 ni tenglikning o'ng tomoniga o'tkazib, -15 ga bo'lib yuborsak:

$$\frac{x}{-5}+\frac{y}{3}=1.$$

Demak, berilgan to'g'ri chiziq x va y o'qlaridan mos ravishda $a=-5, b=3$ kesmalar ajratar ekan.

Umumiy tenglamaning A va B koeffitsientlari geometrik ma'noga ega. (6) dan ma'lumki, A va B koeffitsientlar to'g'ri chiziqga perpendikulyar vektorning koordinatalaridir. Agar $\vec{a}=\{-B,A\}$ vektor tuzib olsak, $\vec{s}$ va $\vec{a}$ vektorlar perpendikulyar ekanligiga ishonch hosil qilish qiyin emas. Shu sababli, $\vec{a}$ vektor berilgan to'g'ri chiziqga parallel bo'ladi, uni shu hususiyatiga ko'ra, to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori, $\vec{s}$ ni esa normal vector, deb atashadi.

1.3. To'g'ri chiziqning boshqa turdagi tenglamalari.

Agar $M_0(x_0,y_0)$ to'g'ri chiziqning berilgan nuqtasi va $\vec{a}=\{m,n\}$ uning yo'naltiruvchi vektori bo'lsa, uning tenglamasini quyidagicha tuzsa xam bo'ladi.

Faraz qilaylik, $M(x,y)$ nuqta to'g'ri chiziqning siljuvchi nuqtasi bo'lsin. U holda, $\vec{a}$ va $\overline{M_0M}$ vektorlar o'zaro parallel bo'ladi. Vektorlarning kolleniarlik shartiga ko'ra

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n} \qquad (8)$$

Bu tenglama to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi, deb ataladi.

Agar (8) da kasrlarni t ga tenglasak,

$$x-x_0=mt \quad , \quad y-y_0=nt$$

yoki

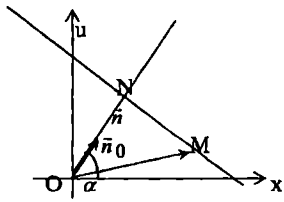
$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \end{cases}$$

parametrik tenglamalar, deb ataluvchi tenglamani hosil qilamiz.

Agar to'g'ri chiziqning ikkita $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$ nuqtalari ma'lum bo'lsa, u holda $\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$ vektorni yo'naltiruvchi vector, deb qarash mumkin, shuning uchun bu to'g'ri chiziqning tenglamasi (8) ga ko'ra

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \tag{9}$$

bo'ladi. Bu tenglama ikki nuqtadan o'tgan to'g'ri chiziqning tenglamasi, deb ataladi.



29-rasm.

Endi, faraz qilaylik, bizga Δ to'g'ri chiziq va uning normal vektori $\vec{n}$ berilgan bo'lsin. Agar α $\vec{n}$ vektorning x o'qiga og'ish burchagi bo'lsa, u holda shu vektorning orti – $\vec{n}_0 = \{CoS\alpha, Sin\alpha\}$ bo'ladi. $|\vec{n}_0| = 1$. $M(x, y)$ Δ to'g'ri chiziqning siljuvchi nuqtasi va $ON = p$ bo'lsin. U holda (29-chizmaga qarang)

$$p = np_{\vec{n}}\overrightarrow{OM} = |\vec{n}| \cdot np_{\vec{n}}\overrightarrow{OM} = \vec{n} \circ \overrightarrow{OM} = xCoS\alpha + ySin\alpha.$$

Bundan

$$xCoS\alpha + ySin\alpha - p = 0 \tag{10}$$

kelib chiqadi. (10) tenglama to'g'ri chiziqning normal tenglamasi deb ataladi.

Agar to'g'ri chiziq $Ax + By + C = 0$ tenglama bilan berilgan bo'lib, bu tenglama normal tenglamami yoki yo'q ekanligini aniqlash uchun bu to'g'ri chiziqning normal vektorini uzunligi birga tengligini tekshirish kifoya. Bu tenglama $|\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2} = 1$ bo'lsagina normal bo'ladi.Agar $|\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2} \neq 1$ bo'lsa, berilgan tenglamani $\pm\sqrt{A^2 + B^2}$ ifodaga bo'lish kerak:

$$\pm\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}x \pm \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}y \mp \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0 \tag{11}$$

(10) formuladan ma'lumki, ozod hadning ishorasi manfiy bo'lishi shart, shu sababli, oxirgi tenglikdagi ishoralardan birini ozod hadning ishorasiga teskari qihb tanlash zarur. Shunda (11) normal tenglamaga aylanadi. $\pm\sqrt{A^2 + B}$ ifoda normallovchi ko'paytuvchi, deb ataladi.

1.4. To'g'ri chiziqga doir turli masalalar.

1. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak. Faraz qilaylik, bizga $\Delta_1 : y = k_1x + b_1$ va $\Delta_2 : y = k_2x + b_2$ to'g'ri chiziqlar berilgan bo'lsin. Ma'lumki, $k_1 = tg\alpha_1, k_2 = tg\alpha_2$ bu yerda α_1, α_2 lar mos ravishda Δ_1, Δ_2 to'g'ri chiziqlarning x o'qiga og'ish burchaklaridir. Bu burchaklarni Oxy tekisligidagi musbat yo'nalish bo'ylab xisoblangan, deb tushunamiz. Agar $\alpha_2 > \alpha_1$ bo'lsa, Δ_1, Δ_2 to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak deb $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ burchakni tushunamiz. U holda

$$tg\alpha = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \tag{12}$$

(12) dan ko'rinadiki, agar $k_1 = k_2$ bo'lsa, $\alpha = 0$ yoki $\alpha = \pi$ bo'ladi, ya'ni Δ_1 va Δ_2 to'g'ri chiziqlar parallel bo'ladi, va aksincha, agar Δ_1 va Δ_2 to'g'ri chiziqlar parallel bo'lsa, $tg\alpha = 0$, bundan esa $k_1 = k_2$ kelib chiqadi. Shu sababli, $k_1 = k_2$ tenglik to'g'ri chiziqlarning parallellik sharti, deb ataladi. Agar Δ_1 va Δ_2 to'g'ri chiziqlar perpendikulyar, ya'ni $\alpha = \frac{\pi}{2}$ bo'lsa, u holda (12) dan $1 + k_1 \cdot k_2 = 0$ munosabat kelib chiqadi. Bu tenglikni to'g'ri chiziqlarning perpendikulyarlik sharti, deb ataymiz.

2. Ikki to'g'ri chiziq tenglamasini birgalikda tekshirish. Faraz qilaylik, bizga ikki Δ_1 va Δ_2 to'g'ri chiziqlarning tenglamalaridan tuzilgan

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases} \tag{13}$$

sistema berilgan bo'lsin. Ma'lumki, bu sistema yagona yechimga ega bo'lishi uchun

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

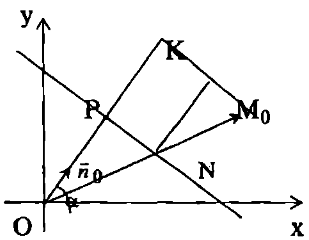
bo'lishi zarur va yetarlidir. Bu esa $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ tengsizlikka ekvivalent. Bu holda (13) ning yagona yechimi Δ_1 va Δ_2 to'g'ri chiziqlarda yotuvchi nuqtaning koordinatalarini beradi, ya'ni Δ_1 va Δ_2 to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasini aniqlaydi.

Agar

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$$

bo'lsa, $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$ bo'ladi, Bunda ikki hol yuz beradi: 1)agar (13) sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'lsa, bu $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ bo'lganda bajariladi, u holda Δ_1 va Δ_2 to'g'ri chiziqlar ustma-ust tushadi; 2) (13) sistema umuman yechimga ega emas,bu $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$ bo'lganda yuz beradi, bunda berilgan to'g'ri chiziqlar umuman kesishmaydi, ya'ni ular parallel bo'ladi.

3. Nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqgacha bo'lgan masofa.



30-rasm.

$M_0(x_0,y_0)$ nuqtadan Δ to'g'ri chiziqgacha bo'lgan $|NM_0|=d$ masofani topish talab etilgan bo'lcin. Δ to'g'ri chiziqning $\vec{n}_0$ normalini qurib olaylik. Agar M_0 nuqta Δ ga nisbatan, $\vec{n}_0$ normalning musbat yo'nalishi tomonida joylashgan bo'lsa, u holda masofa $+d$, aks holda $-d$ bo'ladi. Buni M_0 nuqtaning Δ to'g'ri chiziqdan δ chetlanishi, deb ataymiz. Chizmadan ko'rinadiki,

$$p+\delta=np_{\vec{n}_0}\overline{OM_0}=x_0 CoS\alpha+y_0 Sin\alpha\ ,$$

bundan

$$\delta=x_0 CoS\alpha+y_0 Sin\alpha-p \tag{14}$$

yoki

$$d=|x_0 CoS\alpha+y_0 Sin\alpha-p| \tag{15}$$

kelib chiqadi. Demak, nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqgacha bo'lgan masofani topish uchun, nuqtaning koordinatalarini to'g'ri chiziqning normal tenglamasini chap tomonidagi noma'lumlar o'rniga qo'yish kifoya ekan.

Agar to'g'ri chiziq tenglamasi normal bo'lmasa, u holda normallovchi ko'paytuvchi yordamida normal ko'rinishga keltirib, so'ngra (15) formula yordamida talab qilingan masofani hisoblaymiz.

1.5. To'g'ri chiziqlar dastasining tenglamasi. Tekislikning $S(x_0,y_0)$ nuqtasidan o'tgan barcha to'g'ri chiziqlari to'plami S markazli to'g'ri chiziqlar dastasi, deb ataladi.

Teorema. Agar $A_1x+B_1y+C_1=0$ va $A_2x+B_2y+C_2=0$ lar S nuqtada kesishuvchi to'g'ri chiziqlar, va α,β lar bir vaqtda nolga teng bo'lmagan ixtiyoriy sonlar bo'lsa, u holda

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2)=0 \tag{16}$$

S nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi bo'ladi.

Isboti. Avval (16) haqiqatan tenglama ekanligini ko'rsataylik, buning uchun uni quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$(\alpha A_1 + \beta A_2)x + (\alpha B_1 + \beta B_2)y + (\alpha C_1 + \beta C_2) = 0 \qquad (17)$$

Bu yerda $\alpha A_1 + \beta A_2$ va $\alpha B_1 + \beta B_2$ lar bir vaqtda nolga teng bo'la olmaydi, chunki aks holda, $\alpha A_1 + \beta A_2 = 0$ va $\alpha B_1 + \beta B_2 = 0$ dan $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = -\frac{\beta}{\alpha}$ kelib chiqadi, buni esa bo'lishi mumkin emas, chunki bu to'g'ri chiziqlar shartga ko'ra kesishadi. Bu esa (17) tenglama ekanligini ko'rsatadi. Demak, u tekislikda biror to'g'ri chiziqni ifodalaydi. Endi bu to'g'ri chiziq S nuqtadan o'tishini ko'rsatsak kifoya. Haqiqatan, (17) dagi noma'lumlar o'rniga x_0, y_0 larni qo'ysak, $A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 = 0$ va $A_2x_0 + B_2y_0 + C_2 = 0$ ekanligidan,

$$\alpha(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1) + \beta(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2) = 0$$

bo'lishi kelib chiqadi. Teorema isbot bo'ldi.

Agar masalan, $\alpha \neq 0$ bo'lsa, (17) ni quyidagi ko'rinishda yozsa bo'ladi:

$$(A_1x + B_1y + C_1) + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0,$$

bu yerda $\lambda = \frac{\beta}{\alpha}$ deb belgilandi.

Misol . S nuqtada kesishuvchi $2x + 3y - 5 = 0, 7x + 15y + 1 = 0$ to'g'ri chiziqlar berilgan bo'lsin. S nuqtadan $12x - 5y - 1 = 0$ to'g'ri chiziqga perpendikulyar o'tgan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

Yechish . Avval berilgan to'g'ri chiziqlar kesishishini tekshiramiz: $\frac{2}{7} \neq \frac{7}{15}$. Demak, ular kesishmaydi. Dasta tenglamasi

$$2x + 3y - 5 + \lambda(7x + 15y + 1) = 0.$$

Buni quyidagicha yozib olamiz:

$$(2 + 7\lambda)x + (3 + 15\lambda)y + (-5 + \lambda) = 0. \qquad (18)$$

Bu to'g'ri chiziqning burchak koeffitsientini topaylik:

$$k = -\frac{2 + 7\lambda}{3 + 15\lambda}.$$

Berilgan to'g'ri chiziqning burchak koeffitsienti $k_1 = \frac{12}{5}$ bo'lgani uchun , ularning perpendikulyarlik shartiga ko'ra

$$-\frac{2 + 7\lambda}{3 + 15\lambda} = -\frac{5}{12}.$$

Bundan $\lambda = -1$. Bu qiymatni (18) ga qo'ysak:

$$5x + 12y + 6 = 0.$$

§2. Ikkinchi tartibli chiziqlar.

Biz avvalgi paragrafda birinchi tartibli chiziqlar turkumiga kiruvchi to'g'ri chiziqlarni o'rgandik. Bu paragrafni ikkinchi tartibli chiziqlarga, ya'ni x va y ga nisbatan 2-tartibli

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \qquad (1)$$

tenglamalar bilan ifodalanuvchi chiziqlarga bag'ishlaymiz. Biz asosan bunday chiziqlar turkumiga kiruvchi eng sodda egri chiziqlar bo'lmish: aylana, ellips, giperbola va parabolalarni ko'rib chiqamiz. Quyida bu chiziqlarga ta'riflar berib, ularning tenglamalarini shu ta'riflar asosida keltirib chiqarib, ular yordamida bu egri chiziqlarning shaklini va xususiyatlarini o'rganamiz.

2.1. Aylananing umumiy tenglamasi.

§1.1 da markazi $C(a,b)$ nuqtada, radiusi r bo'lgan aylana ta'rifidan foydalanib, uning tenglamasi

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

ko'rinishda bo'lishi isbotlangan edi. Agar qavslarni ochib, ifodani soddalashtirsak, u (1) ko'rinishni oladi.

Endi, aksincha, mulohaza qilamiz, ya'ni qanday hollarda (1) tenglama aylanani ifodalaydi? Buning uchun avvalambor ayonki, x^2 va y^2 larning koeffitsientlari $A=C\neq 0$ bo'lishi va xy ning koeffitsienti nol bo'lishi shart, masalan, (1)

$$Ax^2+Ay^2+2Dx+2Ey+F=0 \qquad (2)$$

ko'rinishda bo'lishi kerak. Agar (2)da qo'shiluvchilarni o'rin almashtirib, to'la kvadratga keltirib, ifodani ixchamlasak, (2) quyidagi

$$(x-a)^2+(y-b)^2=\frac{D^2+E^2-AF}{A^2} \qquad (3)$$

ko'rinishga keladi. Bu yerda uch hol bo'lishi mumkin.

1-hol: $D^2+E^2-AF<0$. Bunda (3) tenglikning ma'nosi bo'lmaydi, chunki har qanday x,y lar uchun tenglikning chap tomoni hamisha musbat bo'ladi. Demak,(3) hech qanday chiziqni ifodalamaydi.

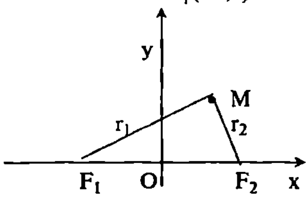
2-hol: $D^2+E^2-AF=0$. Bu holda (3) ni faqat $x=a$ va $y=b$ qiymatlargina qanoatlantiradi, ya'ni (3) faqat bitta $C(a,b)$ nuqtani ifodalaydi.

3-hol: $D^2+E^2-AF>0$. Bunda tenglikning o'ng tomoni ham musbat bo'ladi, shuning uchun agar o'ng tomonni r^2desak, u (2) ko'rinishni oladi, ya'ni (3) aylanani ifodalaydi.

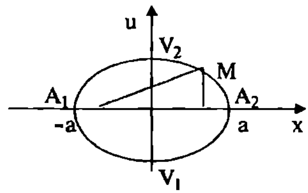
2.2. Ellips.

Ta'rif. Fokuslar deb ataluvchi F_1 va F_2 nuqtalargacha bo'lgan masofalari yig'indisi o'zgarmas $2a$ bo'lgan nuqtalarning geometrik o'rni ellips, deb ataladi.

F_1 va F_2 nuqtalar x o'qida yotib, koordinatalar boshiga simmetrik va ular orasidagi masofa $2c$ bo'lsin, deb faraz qilaylik. U holda ularning koordinatalari $F_1(-c,0)$ va $F_2(c,0)$ bo'ladi.



31-rasm.



32-rasm.

Ta'rifga ko'ra, $r_1+r_2=2a$, bu yerda $r_1=|F_1M|, r_2=|F_2M|$, va $2c<2a$ (31-rasmga qarang), ya'ni $c<a$. Agar s=0 bo'lsa, F_1va F_2 nuqtalar ustma-ust tushib, $r_1=r_2=a$ bo'ladi, ya'ni ellips aylanadan iborat bo'ladi.

Ikki nuqta orasidagi masofa formulasiga ko'ra

$$r_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2}\ ,\ r_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}\ .$$

U holda

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

bo'ladi. Bu tenglikni soddalashtirish maqsadida ildizlardan birini tenglikning o'ng tarafiga o'tkazib, uni ikkala tarafini kvadratga ko'taramiz:

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2.$$

Ildiz qatnashgan hadni chap tomonga, qolgan hadlami o'ng tomonga o'tkazib ixchamlasak:

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx$$

hosil bo'ladi. Buni yana kvadratga ko'tarib ixchamlasak:

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

tenglikka kelamiz. $a^2-c^2>0$ ekanligini e'tiborga olib va $b^2=a^2-c^2$ belgilash kiritib, oxirgi tenglikni a^2b^2 ga bo'lib yuborsak:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (4)$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglama ellipsning kanonik tenglamasi, deb ataladi.

Bu tenglamadan ko'rinib turibdiki, ellips koordinata o'qlariga nisbatan simmetrik bo'ladi,ya'ni agar $M(x,y)$ ellipsda yotuvchi nuqta bo'lsa, u holda $M(x,-y), M(-x,y)$ va $M(-x,-y)$ nuqtalar ham ellipsga tegishli bo'ladi (buni tekshirishni o'quvchini o'ziga havola qilamiz). Shu sababli, ellipsning shaklini 1-chorakda o'rganish bilan kifoyalansa bo'ladi.

(4) tenglamadan ko'rinib turibdiki, $\frac{x^2}{a^2} \le 1$, $\frac{y^2}{b^2} \le 1$, ya'ni $-a \le x \le a$, $-b \le y \le b$ bo'ladi. (4) tenglamani y ga nisbatan yechib olamiz:

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,. \tag{5}$$

Agar biz shaklni 1-chorakda tekshirmoqchi bo'lsak, (5) da ildiz oldida "+" ishorani olsak yetarli, ya'ni

$$y = +\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

deymiz. Agar $x = 0$ bo'lsa, $y = b$ bo'ladi. x qiymati ortsa, y ni qiymati kamayadi va $x = a$ bo'lganda $y = 0$ bo'ladi. Natijada ellipsning V_2A_2 yoyi hosil bo'ladi (32-rasmga qarang). Ellipsning qolgan qismlarini uning simmetriklik xususiyatidan foydalanib chizib olamiz. Demak, ellips 32-rasmda ko'rsatilgandek yopiq chiziq ekan. A_1, A_2, V_1 va V_2 nuqtalar ellipsning uchlari, deb ataladi.

$2a$ ellipsning katta o'qi, $2b$ esa kichik o'qi; shu jum- ladan a va b lar mos ravishda katta yarim o'q va kichik yarim o'q deyiladi.

Agar $a = b$ bo'lsa, u holda (4) tenglama

$$x^2 + y^2 = a^2$$

ko'rinishni oladi, ya'ni ellips aylanadan iborat bo'ladi, bunda $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ miqdor nolga teng bo'ladi.

Agar $a \ne b$ bo'lsa, s miqdor nolga teng bo'lmaydi, shu sababli, uni ellipsning aylanadan chetlanish o'lchami sifatida qarasa bo'ladi. Uni ellipsning chiziqli ekstsentriteti, deb ataymiz. Uning katta yarim o'q a ga nisbati

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \tag{6}$$

ellipsning sonli ekstsentriteti yoki sodda qilib. ekstsentritet, deb ataladi. $c < a$ bo'lgani uchun ellipsning ekstsentriiteti hamisha birdan kichik bo'ladi: $e < 1$.

Ellipsning ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtasidan fokuslarigacha bo'lgan masofa bu nuqtaning fokal radiuslari, deb ataladi. 31-rasmda bular $r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ va $r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$. Agar ulami kvadratga ko'tarib, ikkinchisidan birinchisini ayirsak:

$$r_2^2 - r_1^2 = 4cx$$

yoki

$$(r_2 - r_1)(r_1 + r_2) = 4cx$$

tenglikni olamiz. Agar bu tenglikka ellipsning ta'rifini qo'llasak:

$$(r_2 - r_1)\cdot 2a = 4cx$$

yoki

$$r_2 - r_1 = 2ex$$

hosil bo'ladi. Natijada, quyidagi

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = 2a \\ r_2 - r_1 = 2ex \end{cases}$$

sistemaga kelamiz. Agar ularni mos ravishda hadma-had ayirib va qo'shsak:

$$r_2 = a - ex, \quad r_1 = a + ex \tag{7}$$

formulalarni olamiz.

Misol. $2x^2+4y^2=8$ ellipsning fokuslarini koordinatalari, ekstsentriteti va abtsissasi 1 ga teng bo'lgan nuqtalarning fokal radiuslari topilsin.

Yechish. Ellips tenglamasini 8 ga bo'lamiz: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$,

bu tenglikdan $a^2=4$, $a=2$, $b^2=2, b=\sqrt{2}$

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{4-2}=\sqrt{2}$$

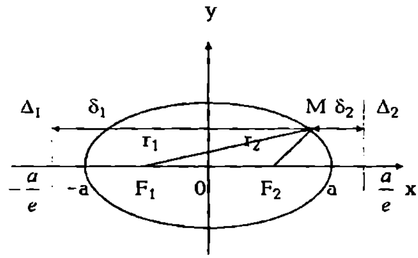
demak, $F_1(\sqrt{2}, 0)$ $F_2(-\sqrt{2}, 0)$ nuqtalar ellipsning fokuslaridir. Ellipsning ekstsentriteti $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. $x=1$ bo'lgani uchun

$$r_1 = a - ex = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1 = \frac{4-\sqrt{2}}{2}, r_2 = \frac{4+\sqrt{2}}{2}.$$

(7) formulalarni quyidagicha yozib olamiz:

$$r_1 = e\left(\frac{a}{e} - x\right), \quad r_2 = e\left(\frac{a}{e} + x\right). \tag{8}$$

$\delta_1 = \frac{a}{e} - x$ va $\delta_2 = \frac{a}{e} + x$ miqdorlar ellipsning $M(x,y)$ nuqtasidan Ox o'qiga perpendikulyar o'tgan Δ_2 va Δ_1 to'g'ri chiziqlargacha bo'lgan masofalarni bildiradi. Bu to'g'ri chiziqlar Ox o'qini mos ravishda $\frac{a}{e}$ va $-\frac{a}{e}$ nuqtalarda kesib o'tadi. $e<1$ bo'lgani uchun $-\frac{a}{e}<-a$ va $\frac{a}{e}>a$ bo'ladi, ya'ni Δ_1 va Δ_2 to'g'ri chiziqlar ellipsdan tashqarida joylashgan (33-rasmga qarang).



33-rasm.

Endi (8) ni belgilashlarga binoan

$$\frac{r_1}{\delta_1}=e \;,\; \frac{r_2}{\delta_2}=e$$

ko'rinishda yozib olamiz. Bundan ko'rinadiki, ellipsning har qanday nuqtasi uchun

$$\frac{r_1}{\delta_1}=\frac{r_2}{\delta_2} \tag{9}$$

bo'lar ekan.

Bunday xususiyatga ega bo'lgan Δ_1 va Δ_2 to'g'ri chiziqlar ellipsning direktrisalari, deb ataladi.

Bu bilan biz direktrisalarning quyidagi xossasini isbot qildik:

Ellipsning ixtiyoriy nuqtasidan fokuslarigacha bo'lgan masofalarini mos direktrisalarigacha bo'lgan masofalariga bo'lgan nisbati birdan kichik o'zgarmas sondir.

2.3. Giperbola.

Ta'rif. Fokuslar, deb ataluvchi F_1va F_2 nuqtalargacha bo'lgan masofalari ayirmasining absolyut qiymati o'zgarmas $2a$ bo'lgan nuqtalarning geometrik o'rni giperbola, deb ataladi.

Ta'rifga ko'ra, $r_1-r_2=\pm 2a$, bu yerda $r_1=|F_1M|, r_2=|F_2M|$, M giperbolaning ixtiyoriy nuqtasi. Agar fokuslar orasidagi masofani $2c$ desak, u holda ellipsdan farqli o'laroq, giperbola uchun $c>a$ bo'ladi, chunki agar fokuslarni 31-rasmdagidek Ox o'qida O nuqtaga nisbatan simmetrik joylashtirsak, $2c$ ΔF_1MF_2 ning uchinchi tomoni bo'lib, u qolgan ikki tomonlari ayirmasidan katta bo'ladi.

Xuddi yuqoridagidek,

$$r_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2} \;,\; r_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

larni

$$r_1-r_2=\pm 2a$$

tenglikka qo'yib, ifodani ixchamlasak, natijada

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

tenglamaga kelamiz. Lekin bu yerda $a^2-c^2<0$. Shu sababli, agar $a^2-c^2=-b^2$ deb, oxirgi tenglikni $a^2(a^2-c^2)=-a^2b^2$ ga bo'lib yuborsak:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (10)$$

tenglama hosil bo'ladi. Bu tenglama giperbolaning kanonik tenglamasi, deb ataladi.

Xuddi yuqoridagidek, bu erda ham giperbola Ox va Oy o'qlariga nisbatan simmetrik ekanligiga ishonch hosil qilamiz. Bundan tashqari giperbola O nuqtaga nisbatan ham simmetrik bo'ladi, shu sababli, O nuqtani uning markazi, deb ham atashadi.

Ta'rifdan ko'rinadiki, giperbola ikki tarmoqdan iboratdir: bir tarmog'i $r_1>r_2$ tengsizlikni qanoatlantiradigan nuqtalar o'rni, ikkinchi tarmog'i esa $r_1<r_2$ tengsizlikni qanoatlantiradigan nuqtalar o'rni.

Giperbolaning (10) tenglamasini y ga nisbatan yechib olaylik:

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\,.$$

Bundan $x^2\geq a^2$, ya'ni $x\geq a$ yoki $x\leq -a$ bo'lishi kerakligi kelib chiqadi. Demak, giperbola to'liq $x=a$ va $x=-a$ parallellar orasidagi sohadan tashqarida yotar ekan.

Giperbolaning 1-chorakdagi tarmog'ini tekshiraylik. U holda

$$y=+\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

bo'ladi. Bu yerda, agar $x=a$ bo'lsa, $y=0$ bo'ladi. Agar x o'sib borsa, y ham o'sadi. Demak, tarmoq cheksizgacha cho'ziladi. Agar x ning qiymatlari a dan to ∞ gacha ortib borsa, u holda x^2 bilan a^2 orasidagi tafovut kattalasha boradi, x yetarlicha katta bo'lganda x^2 bilan x^2-a^2 orasidagi farq yetarlicha kichik bo'lib, x o'sib borgan sayin bu farq nolgacha kamayib boradi, ya'ni $y=+\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ qiymat bilan $Y=+\frac{b}{a}\sqrt{x^2}$ qiymat orasidagi farq kamayib boradi. Geometrik nuqtai-nazardan bu tenglamalari $y=+\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ va $y=+\frac{b}{a}\sqrt{x^2}$ bo'lgan chiziqlar o'zaro yaqinlasha borishini bildiradi. Lekin x ning hech bir qiymatida $y=Y$ bo'lmagani uchun bu chiziqlar kesishmaydi.Bunday xususiyatga ega bo'lgan

$$y=+\frac{b}{a}x \qquad (11)$$

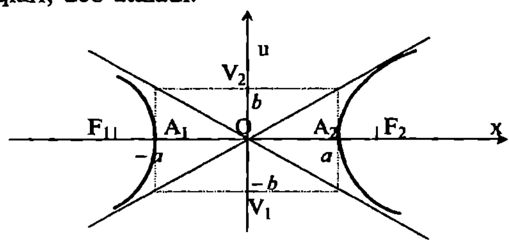
to'g'ri chiziqni giperbolaning asimptotasi deb ataymiz. Giperbolaning simmetriklik xususiyatidan $x \to -\infty$ da 3-chorakdagi tarmog'i ham shu to'g'ri chiziqga yaqinlashishi kelib chiqadi.

Aynan shunday mulohazalar bilan giperbolaning 2- va 3-choraklardagi tarmoqlari

$$y = -\frac{b}{a}x \qquad (12)$$

to'g'ri chiziqga yaqinlashadi, degan fikrga kelamiz. Demak, giperbola tenglamalari (11) va (12) bo'lgan ikkita asimp-totaga ega ekan.

Giperbolaning Ox o'qini kesib o'tgan A_1 va A_2 nuqtalarini uning uchlari deb, $A_1A_2=2a$ ni bo'ylama o'qi, deb va $V_1V_2=2b$ ni ko'ndalang o'qi, deb ataymiz. a va b lar mos ravishda bo'ylama va ko'ndalang yarim o'qlari, deb ataladi.



34-rasm.

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$ miqdorni giperbolaning chiziqli ekstsentriteti deb, $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ ni esa, sonli ekstsentriteti, deb ataymiz. $c > a$ bo'lgani uchun giperbolning ekstsentriteti birdan katta, ya'ni $e > 1$ bo'ladi.

Giperbolaning fokal radiuslari

$$r_1 = \pm(ex + a), \quad r_2 = \pm(ex - a)$$

bo'ladi, bu yerda giperbolaning o'ng tarmoq nuqtalari uchun "+" ishora va chap tarmoq nuqtalari uchun "-" ishora olinadi.

Bu yerda ham giperbolaning $M(x, y)$ nuqtasidan Ox o'qiga perpendikulyar o'tgan $\Delta_1: x = \frac{a}{e}$ va $\Delta_2: x = -\frac{a}{e}$ to'g'ri chiziqlarni giperbolaning direktrisalari, deb ataymiz.

Aynan yuqoridagidek mulohazalar bilan direktrisalarning quyidagi xossasini isbotlash mumkin:

Giperbolaning ixtiyoriy nuqtasidan fokuslarigacha bo'lgan masofalarini mos direktrisalarigacha bo'lgan masofalariga nisbati birdan katta o'zgarmas sondir.

Ellips va giperbolaning bu xossasini umumlashtirib, berilgan o' nuqta va berilgan Δ to'g'ri chiziqlargacha bo'lgan masofalari nisbati o'zgarmas

$e \neq 1$ son bo'lgan nuqtalarning geometrik o'rni ellips yoki giperbola bo'ladi deyish mumkin.

Haqiqatan, Oy o'qni Δ to'g'ri chiziqga parallel, Ox o'qni o' nuqtadan o'tkazamiz. Koordinatalar boshini shunday tanlaymizki, natijada o' va Δ to'g'ri chiziqning Ox o'q bilan kesishish nuqtasi K larning abtsissalari mos ravishda ae va $\frac{a}{e}$ bo'lsin. Bu yerda a quyidagicha tanlanadi: agar l F nuqtadan Δ to'g'ri chiziqgacha bo'lgan masofa bo'lsa, u holda

$$l = |FK| = \left|\frac{a}{e} - ae\right| = \frac{a\left|1-e^2\right|}{e}$$

tenglikdan

$$a = \frac{el}{\left|1-e^2\right|}. \qquad (13)$$

Agar $M(x,y)$ berilgan geometrik o'rinlarning biri bo'lsa, u holda qo'yilgan shartga ko'ra $r = e\delta$ bo'lishi kerak, bu yerda

$$r = \sqrt{(x-ae)^2 + y^2} \quad \text{va} \quad \delta = \left|\frac{a}{e} - x\right|.$$

Demak,

$$\sqrt{(x-ae)^2 + y^2} = e\left|\frac{a}{e} - x\right|$$

ekan. Bu tenglikning ikkala tarafini kvadratga ko'tarib, hosil bo'lgan ifodani ixchamlasak:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1$$

hosil bo'ladi. Agar $e<1$ bo'lsa, $a^2(1-e^2)=b^2$ belgilash kiritib ellipsni tenglamasini, agar $e>1$ bo'lsa, $a^2(1-e^2)=-b^2$ deb giperbolaning tenglamasini hosil qilamiz.

M i s o l . $x^2/_{16} - y^2/_{9} = 1$ giperbolaning o'ng tarmog'ida shunday nuqta topilsinki, bu nuqtadan o'ng fokusgacha bo'lgan masofa chap fokusigacha bo'lgan masofasidan ikki marta kichik bo'lsin.

Yechish . Giperbolaning o'ng tarmog'i uchun fokal radiuslar $r_1 = ex - a$ va $r_2 = ex + a$ bo'ladi. U holda masala shartiga ko'ra, $ex + a = 2(ex - a)$ bo'lishi kerak. Bundan $x = 3a/e$ ke lib chiqadi. Bu yerda $a = 4, e = c/a = \sqrt{16+9}/4 = 5/4$. Demak, $x = 9{,}6$ ekan.

Ordinatasini topish uchun giperbolaning tenglamasidan foydalanamiz:

$$y = \pm\frac{3}{4}\sqrt{x^2 - 16} = \pm\frac{3}{4}\sqrt{\left(\frac{48}{5}\right)^2 - 16} = \pm\frac{3}{5}\sqrt{119}.$$

Demak, masala shartini ikkita $M_1(0,6;0,6\sqrt{119})$ va $M_2(0,6;-0,6\sqrt{119})$ nuqtalar qanoatlantirar ekan.

2.4. Parabola.

Ta'rif. Fokus deb ataluvchi F nuqtadan direktrisa, deb ataluvchi to'g'ri chiziqgacha bo'lgan masofalari teng bo'lgan nuqtalarning geometrik o'rni parabola deb ataladi.

Agar $M(x,y)$ parabolaning ixtiyoriy nuqtasi, r-bu nuqtadan F nuqtagacha bo'lgan masofa va δ - direktrisagacha bo'lgan masofa bo'lsa, u holda ta'rifga ko'ra $r=\delta$ bo'ladi.

Fokusdan direktrisagacha bo'lgan masofa p bo'lsin. Ox o'qini fokusdan direktrisaga perpendikulyar qilib o'tkazaylik. Koordinatalar boshini fokus bilan direktrisa o'rtasida olaylik. *U* holda fokusning koordinatalari $F\left(+\frac{p}{2},0\right)$ va direktrisaning Ox o'q bilan kesishgan nuqtasi $K\left(-p/2,0\right)$ bo'ladi.

Ikki nuqta orasidagi masofa formulalariga ko'ra

$$r=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}\ ,\quad \delta=x+\frac{p}{2}.$$

U holda parabola tenglamasi

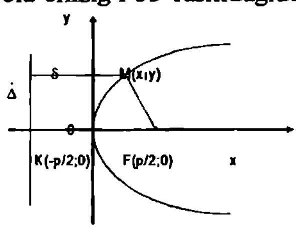
$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=x+\frac{p}{2}$$

bo'ladi. Agar buni kvadratga ko'tarib ixchamlasak:

$$y^2=2px \qquad (14)$$

tenglikka kelamiz. Buni parabolaning kanonik tenglamasi, deb ataymiz.

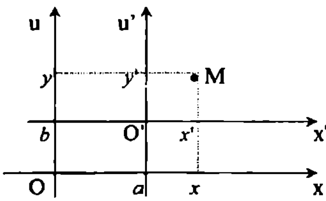
Parabolaning (14) tenglamasi x ning faqat manfiy bo'lmagan qiymatlari uchun ma'noga ega. Shu sababli, parabola Oy o'qning o'ng tarafida joylashgandir. Agar $x=0$ bo'lsa, $y=0$ bo'ladi, ya'ni parabola koordinatalar boshidan o'tar ekan. O nuqtani parabolaning uchi, deb ataymiz. Demak, parabola chizig'i 35-rasmdagidek bo'lar ekan.



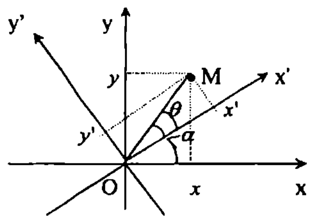
35-расм.

§3. Dekart koordinatalar sistemasini almashtirish va qutb koordinatalar sistemasi.

3.1. Koordinatalarni parallel ko'chirish. Faraz qilaylik, Oxy koordinatalar sistemasi berilgan bo'lsin. Tekislikni ixtiyoriy M nuqtasining shu sistemadagi koordinatalari $M(x,y)$ bo'lsin.



36-rasm.



37-rasm.

Boshi O'(a,b) nuqtada bo'lgan $O'x'y'$ koordinatalar sistemasida berilgan M nuqtaning koordinatalarini topaylik (36-rasmga qarang). Bu yerda yangi $O'x'y'$ sistema eski Oxy sistemaning boshini O'(a,b) nuqtaga parallel ko'chirish natijasida hosil bo'lgan bo'lsin.

Chizmadan ko'rinadiki, Ox kesma uzunligi Oa va ax kesmalar uzunliklari yig'indisiga teng. Xuddi shunday, Oy kesma uzunligi Ob va by kesmalar uzunliklari yig'indisiga teng. Demak,

$$x = x'+a, \quad y = y'+b \tag{1}$$

yoki

$$x' = x-a, \quad y' = y-b \tag{1'}$$

ekan.

Eslatma. Agar fazoda $Oxyz$ koordinatalar sistemasini O'(a,b,c) nuqtaga parallel ko'chirish natijasida yangi $O'x'y'z'$ koordinatalar sistemasi hosil qilingan bo'lsa, u holda $M(x,y,z)$ nuqtaning yangi koordinatalari

$$x' = x-a, \quad y' = y-b, \quad z' = z-c$$

formulalar orqali aniqlanadi.

3.2. Koordinatalar sistemasini burish. Faraz qilaylik, yangi $O'x'y'$ sistema eski Oxy koordinatalar sistemasini biror α burchakka burish natijasida hosil bo'lsin. M nuqtaning eski sistemadagi koordinatalari $M(x,y)$ bo'lsin. Uning yangi koordinatalarini topaylik.

Faraz qilaylik, Ox' o'q bilan OM kesma orasidagi burchak θ bo'lsin. U holda to'g'ri burchakli $\Delta OMx'$ dan

$$x'=|OM|\cos\theta,\quad y'=|OM|\sin\theta.$$

$\angle MOx=\alpha+\theta$ bo'lgani uchun ΔOMx dan

$$x=|OM|\cos(\alpha+\theta)=|OM|(\cos\alpha\cos\theta-\sin\alpha\sin\theta)=$$
$$=|OM|\cos\alpha\cos\theta-|OM|\sin\alpha\sin\theta=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha,$$
$$y=|OM|\sin(\alpha+\theta)=|OM|(\sin\alpha\cos\theta+\cos\alpha\sin\theta)=$$
$$=|OM|\sin\alpha\cos\theta+|OM|\cos\alpha\sin\theta=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha.$$

Demak,

$$\left.\begin{aligned} x&=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha\\ y&=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

ekan. Bu almashtirishning matritsasi

$$A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$$

xosmas, chunki $\det A=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1\neq 0$. Shuning uchun unga teskari matritsa mavjud:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}.$$

U holda yangi koordinatalarni eskilari orqali ifodasi quyidagicha bo'ladi:

$$\left.\begin{aligned} x'&=x\cos\alpha+y\sin\alpha\\ y'&=-x\sin\alpha+y\cos\alpha\end{aligned}\right\}\qquad(2')$$

1-eslatma. Yangi koordinatalar sistemasi eski koordinatalar sistemasini α burchakka burish natijasida hosil bo'lgani uchun, yangi koordinatalar sistemasini -α burchakka burib eski koordinatalar sistemasini qaytamiz. Shu sababli,(2) formulalarda eski va yangi koordinatalarni mos ravishda o'rinlarini va α ni -α ga almashtirib (2') for-mulalarga kelish mumkin.

2-eslatma. Agar yangi koordinatalar sistemasi eski koordinatalar sistemasini ham parallel ham α burchakka burish natijasida hosil bo'lsa, u holda yangi koordinatalardan eski koordinatalarga o'tish formulasi

$$\left.\begin{aligned} x&=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha+a\\ y&=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha+b,\end{aligned}\right\}$$

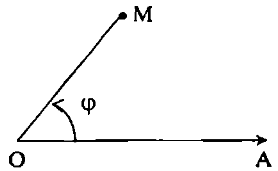
va aksincha, eski koordinatalardan yangi koordinatalarga o'tish formulalari

$$\left.\begin{aligned} x'&=(x-a)\cos\alpha+(y-b)\sin\alpha\\ y'&=-(x-a)\sin\alpha+(y-b)\cos\alpha\end{aligned}\right\}$$

bo'ladi. Buni isbotlashni o'quvchiga havola qilamiz.

3.3. Qutb koordinatalar sistemasi. Biz bu yerda qulay va kelajakda ko'p qo'llaniladigan qutb koordinatalar sistemasini kiritamiz.

1. Tekislikda qutb koordinatalar sistemasi qutb, deb ataluvchi O nuqta va O nuqtadan chiqqan qutb o'qi deb ataluvchi OA nur nuqtalari orqali aniqlanadi.

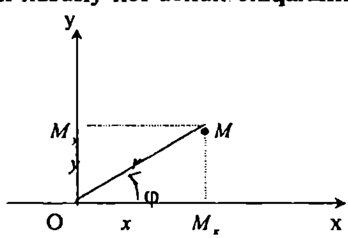


38-rasm.

M tekislikning ixtiyoriy nuqtasi va qutbdan bu nuqtagacha bo'lgan masofa r bo'lsin. Qutb o'qi OM kesma bilan ustma-ust tushishi uchun uni φ burchakka buish kerak bo'lsin. Agar burish yo'nalishi tekislik yo'nalishiga teskari bo'lsa, bu burchakni " - " ishora bilan, agar yo'nalishlar bir xil bo'lsa, "+" ishora bilan olamiz. Atamaning umumiyligini saqlagan holda, bu burchakni qutb burchagi deb ataymiz.

r va φ larni M nuqtaning qutb koordinatalari, deb ataymiz.

Ko'p hollarda, bir vaqtda ham dekart va ham qutb koordinatalar sistemalaridan foydalanishga to'g'ri keladi. Shuning uchun nuqtaning bir sistemadagi koordinatalarini bilgan holda, ikkinchi sistemadagi koordinatalarini ham bilish muhim rol o'ynaydi. Biz bu yerda bir koordinatalardan ikkinchi koordinatalarga o'tish formulalarini qutb boshi dekart koordinatalar sistemasining boshi bilan, qutb o'qi Ox o'qi bilan ustma-ust tushgan xususiy hol uchun chiqaramiz.



39-rasm.

Faraz qilaylik, M tekislikning ixtiyoriy nuqtasi (x,y)- uning dekart koordinatalari, (r,φ)- qutb koordinatalari bo'lsin. M_x va M_y bilan M nuqtadan Ox va Ou o'qlariga tushirilgan perpendikulyarlaming asosini belgilaylik (2 - rasmga qarang). ΔOMM_x dan $OM_x = |OM|\cos\varphi$, $OM_y = |OM|\sin\varphi$. Demak,

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi \qquad (3)$$

ekan. Bu formulalarni dekart koordinatalarning qutb koordinatalar orqali ifodasi deb ataymiz. Endi teskari ifodani topish uchun (3) dagi tengliklarni kvadratga ko'tarib qo'shsak:

$$x^2+y^2=r^2$$

tenglik hosil bo'ladi. Bundan va ΔOMM_x dan

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\quad tg\varphi=\frac{y}{x} \tag{4}$$

kelib chiqadi. Bular dekart koordinatalardan qutb koordinatalarga o'tish formulalari, deb ataladi.

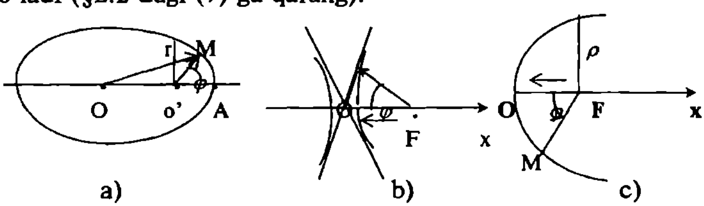
1-m i s o l . Markazi koordinatalar boshida, radiusi ρ bo'lgan aylananing qutb koordinatalar sistemasidagi tenglamasi $r=\rho$ bo'ladi.

2 - m i s o l . $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipsning qutb koordinatalar sistemasidagi tenglamasini tuzing.

Yechish . Qutb sifatida o'ng fokusni olaylik. U holda ellipsning ixtiyoriy nuqtasidan qutbgacha bo'lgan masofa

$$r=a-ex \tag{5}$$

bo'ladi (§2.2 dagi (7) ga qarang).



40-rasm.

40,a)-rasmdan ko'rinadiki,

$$x=np_x\overrightarrow{OM}=np_x(\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{FM})=c+r\cos\varphi=ae+r\cos\varphi .$$

Buni (5) ga qo'yib ixchamlagandan so'ng

$$r=\frac{p}{1+e\cos\varphi}, \tag{6}$$

tenglikka kelamiz, bu yerda $p=a(1-e^2)=\frac{b^2}{a}$, chunki $e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}=1-\frac{b^2}{a^2}$. (6) tenglama ellipsning qutb tenglamasidir.

3-m i s o l . $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ giperbolaning qutb koordinatalar sistemasidagi tenglamasini tuzing.

Yechish. Bu yerda ham qutb sifatida o'ng fokusni olaylik. U holda qutb o'qi *Ox* o'qga teskari yo'nalgan bo'ladi (40,b-rasmga qarang). §2.3

ga asosan giperbolaning ixtiyoriy nuqtasidan biz tanlagan qutbgacha bo'lgan masofa

$$r = \pm(ex - a) \tag{7}$$

bo'ladi, bu yerda "+" ishora o'ng tarmoq uchun va "-" ishora chap tarmoq uchun olinar edi.

Xuddi yuqoridagidek, 40,b-rasmdan

$$x = np_x\overline{OM} = np_x(\overline{OF} + \overline{FM}) = c + np_x\overline{FM} = ae + np_x\overline{FM}$$

kelib chiqadi, lekin bu yerda $np_x\overline{FM} = r\cos(\pi - \varphi) = -r\cos\varphi$. Demak, bularni (7) ga qo'yib ixchamlasak:

$$r = \pm\frac{p}{1 \pm e\cos\varphi}, \tag{8}$$

hosil bo'ladi, bu yerda

$$p = a(e^2 - 1) = \frac{b^2}{a},$$

bu giperbolaning qutb tenglamasidir.

4-m i s o l . $y^2 = 2px$ parabolaning qutb tenglamasini tuzing.

Yechish. 40,c-rasmga asosan

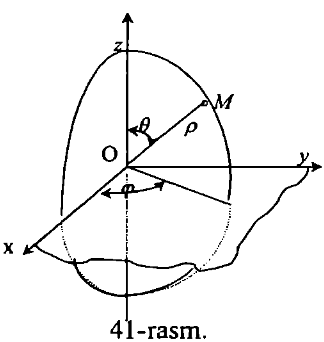
$$x = np_x\overline{OM} = np_x\overline{OF} + np_x\overline{FM} = \frac{p}{2} - r\cos\varphi .$$

Buni $r = \frac{p}{2} + x$ ga qo'ysak:

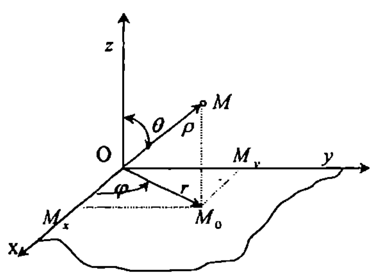
$$r = \frac{p}{1 + \cos\varphi} \tag{9}$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu parabolaning qutb tenglamasidir.

2. Fazoda qutb koordinatalar sistemasining asosiy elementlari bu: qutb, deb ataluvchi O nuqta, qutb o'qi, deb ataluvchi Oz o'q va bu o'qga tiralgan qutb yarimtekisligi, deb ataluvchi Ozx yarimtekisligidir.



41-rasm.



42-rasm.

Faraz qilaylik, (41-rasmga qarang) M fazoning biror nuqtasi, $\rho=|\overrightarrow{OM}|$, θ- $\overrightarrow{OM}$ vektorning z o'q bilan tashkil etgan burchagi, φ- M nuqtadan o'tib z o'qga tiralgan yarimtekislik bilan Ozx qutb yarimtekislik orasidagi burchak bo'lsin.

ρ, θ va φ miqdorlar M ning qutb koordinatalari, deb ataladi. Bunday aniqlangan koordinatalarga ega bo'lgan nuqtalar ρ radiusli sferada joylashgani uchun ularni M nuqtaning sferik koordinatalari, deb ham atashadi.

Endi qutb koordinatalar bilan dekart koordinatalar orasidagi munosabatlarni topaylik. Buning uchun biz Oz o'q qutb o'qi bilan ustma-ust tushsin, Ox o'q qutb yarimtekisligida yotsin va Oy o'q qutb yarimtekisligiga perpendikulyar bo'lsin, deb faraz qilamiz (42-rasmga qarang). U holda

$$z=np_z\overrightarrow{OM}=\rho\cos\theta.$$

M nuqtani Oxy tekislikka proektsiyalaylik. Faraz qilaylik, M_0 nuqta uning Oxy tekislikdagi proektsiyasi bo'lsin. Bu nuqtaning Oxy tekislikdagi qutb koordinatalari r va φ bo'lsin.

ΔOMM_0 dan

$$r=|OM_0|=\rho\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\rho\sin\theta.$$

U holda (3) ga asosan

$$x=r\cos\varphi=\rho\sin\theta\cos\varphi$$
$$y=r\sin\varphi=\rho\sin\theta\sin\varphi$$

tengliklarni hosil qilamiz. Demak,

$$x=r\cos\varphi=\rho\sin\theta\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi=\rho\sin\theta\sin\varphi,\quad z=\rho\cos\theta \qquad (10)$$

ekan.

Endi teskari munosabatni aniqlaylik. Buning uchun (10) dagi tengliklarni kvadratlarga ko'tarib, qo'shamiz:

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

(10) ning uchinchi tengligidan θ ni

$$\cos\theta=\frac{z}{\rho},$$

va birinchi va ikkinchi tengliklaridan

$$\cos\varphi=\frac{x}{\rho\sin\theta},\quad \sin\varphi=\frac{y}{\rho\sin\theta}$$

φ burchakni topamiz yoki ularni quyidagicha ifodalash mumkin:

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\quad \cos\theta=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}. \qquad (11)$$

3. M nuqtaning holatini uning Oxy tekislikdagi proektsiyasining qutb koordinatalari r,φ va $z=|M_0M|$ koordinatasi orqali aniqlasa ham bo'ladi. Bunday aniqlangan r,φ,z koordinatalar tsilindrik koordinatalar, deb ataladi. Bu koordinatalarning dekart koordinatalar bilan bog'lovchi munosabati

$$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ z=z. \qquad (12)$$

§4. Ikkinchi tartibli tenglamalarni kanonik ko'rinishga keltirish.

2-§ da biz 2-tartibli

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \qquad (1)$$

tenglamani $A=C\neq 0$ bo'lgan xususiy holda tekshirgan edik. Endi faraz qilaylik, $A\neq C$ bo'lsin. U holda (1) ni quyidagi

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=(Ax+By+D)x+$$
$$+(Bx+Cy+E)y+(Dx+Ey+F)=0 \qquad (2)$$

ko'rinishda yozib olsa bo'ladi. Buni tekshirishni o'quvchining o'ziga havola qilamiz.

Koordinatalar sistemasini almashtirish hisobiga (1) ni ixcham, ya'ni kanonik ko'rinishga keltirish masalasini ko'raylik. Buning uchun almashtirishni shunday tanlaymizki, natijada noma'lumlar ko'paytmasi qatnashgan had yo'qolib, chiziqli ifodasidagi hadlar soni yo yetarlicha kamaysin yoki butunlay yo'qolsin.

Avval

$$x=x'+a,\ y=y'+b \qquad (3)$$

almashtirish bajaramiz. Bunda koordinatalar boshi $O'(a,b)$ nuqtaga ko'chadi. (3) ni (1) ga olib borib qo'yamiz:

$$A(x'+a)^2+2B(x'+a)(y'+b)+C(y'+b)^2+2D(x'+a)+2E(y'+b)+F=$$
$$=Ax'^2+2Bx'y'+Cy'^2+2(Aa+Bb+D)x'+2(Ba+Cb+E)y'+$$
$$+(Aa^2+2Bab+Cb^2+2Da+2Eb+F)=0.$$

a va b larni shunday tanlaymizki, natijada x' va y' lar oldidagi koeffitsientlar nolga aylansin, ya'ni

$$\begin{cases} Aa+Bb+D=0 \\ Ba+Cb+E=0 \end{cases} \qquad (4)$$

bo'lsin. Agar $AC-B^2\neq 0$ bo'lsa, (4) yagona yechimga ega. Sistemani yechib, topilgan a va b larni oxirgi tenglamaga qo'ysak, tenglama quyidagi

$$Ax'^2+2Bx'y'+Cy'^2+F_0=0 \qquad (5)$$

ko'rinishga keladi, bu yerda (2) ga asosan

$$F_0=(Aa+Bb+D)a+(Ba+Cb+E)b+(Da+Eb+F)=Da+Eb+F.$$

Agar (5) tenglamani $M(x',y')$ nuqta qanoatlantirsa, u holda bu tenglamani $N(-x',-y')$ nuqta ham qanoatlantiradi. Demak, (5) tenglama bilan ifodalangan chiziq (5) ni qanoatlantiradigan $O'(a,b)$ nuqtaga nisbatan simmetrik bo'lgan nuqtalar juftliklarining geometrik o'rnidan iborat ekan. Shu sababli, $O'(a,b)$ nuqtani bu egri chiziqning markazi deb atashadi. Bitta markazga ega bo'lgan egri chiziqni markaziy chiziq deb ataymiz. Markaziy chiziqga masalan, ellips va giperbola misol bo'lishi mumkin. Demak, biz bajargan almashtirish geometrik nuqtai-nazardan koordinatalar boshini egri chiziq markaziga ko'chirishni bildirar ekan.

Endi $O'x'y'$ koordinatalar sistemasini shunday α burchakka buramizki, natijada $x'y'$ oldidagi koeffitsient nolga aylansin. Avvalgi paragrafdan ma'lumki, burish quyidagi almashtirish yordamida bajariladi:

$$\begin{cases} x'=\tilde{x}\cos\alpha-\tilde{y}\sin\alpha \\ y'=\tilde{x}\sin\alpha+\tilde{y}\cos\alpha. \end{cases}$$

Bularni (5) ga qo'yib ixchamlasak:

$$\tilde{x}^2(A\cos^2\alpha+B\sin 2\alpha+C\sin^2\alpha)+\tilde{x}\tilde{y}(2B\cos 2\alpha-(A-C)\sin 2\alpha)+$$
$$+\tilde{y}^2(A\sin^2\alpha-B\sin 2\alpha+C\cos^2\alpha)+F_0=0 \qquad (6)$$

bo'ladi. Agar

$$2B\cos 2\alpha-(A-C)\sin 2\alpha=0$$

yoki

$$Btg^2\alpha+(A-C)tg\alpha-B=0 \qquad (7)$$

desak, (6) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\tilde{A}\tilde{x}^2+\tilde{C}\tilde{y}^2+F_0=0, \qquad (8)$$

bu yerda

$$\tilde{A}=A\cos^2\alpha+B\sin 2\alpha+C\sin^2\alpha,\quad \tilde{C}=A\sin^2\alpha-B\sin 2\alpha+C\cos^2\alpha.$$

(7) ni echib, $tg\alpha$ ni topgandan so'ng,

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}},\qquad \sin\alpha=\frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$$

lar topiladi. Bu qiymatlardan foydalanib, $\tilde{A}$ va $\tilde{B}$ koeffitsientlarni aniqlaymiz. Shu bilan (8) tenglama tuzib bo'linadi.

Agar $\tilde{A}$ va $\tilde{C}$ larning ishoralari birxil, F_0 ning ishorasi ularnikiga teskari bo'lsa, (8) ellipsni, agar $\tilde{A}$ va $\tilde{C}$ larning ishorasi har xil bo'lsa, F_0 ning ishorasi qanday bo'lishidan qat'iy nazar, (8) giperbolani beradi. Agar $\tilde{A}$, $\tilde{C}, F_0$ larning ishoralari bir xil bo'lsa,(8) mavhum ellipsni beradi:

$$\frac{\tilde{x}^2}{m^2}+\frac{\tilde{y}^2}{n^2}=-1.$$

Agar $F_0=0$ bo'lsa, u holda $\tilde{A}$ va $\tilde{C}$ larning ishoralari birxil bo'lganda, (8) bitta nuqtani, $\tilde{A}$ va $\tilde{C}$ larning ishoralari har xil bo'lsa, (8) giperbolaning kanonik tenglamasiga o'xshash

$$\frac{\tilde{x}^2}{m^2}-\frac{\tilde{y}^2}{n^2}=0$$

tenglamaga kelsa ham, lekin u o'zaro kesishuvchi ikkita

$$\frac{\tilde{x}}{m}-\frac{\tilde{y}}{n}=0, \quad \frac{\tilde{x}}{m}+\frac{\tilde{y}}{n}=0$$

to'g'ri chiziqni beradi.

1-m i s o l. $17x^2+12xy+8y^2-46x-28y+17=0$ tenglamani kanonik ko'rinishga keltiring.

Yechish . Avval (3) almashtirishni bajaramiz. Bunda a va b larni topish uchun vujudga keladigan (4) sistema quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{cases} 17a+6b-23=0, \\ 6a+8b-14=0. \end{cases}$$

Bu sistemani yechimi $a=1$ va $b=1$. U holda

$$F_0=-23a-14b+17=-20.$$

Demak, (3) almashtirish natijasida berilgan tenglama

$$17x'^2+12x'y'+8y'^2-20=0$$

ko'rinishga keltirilar ekan.

Endi ko'chirilgan koordinatalar o'qlarini α burchakka buramiz, ya'ni (5) almashtirishni bajaramiz. Bunda α ni topish uchun hosil bo'ladigan tenglama quyidagicha bo'ladi:

$$6tg^2\alpha+9tg\alpha-6=0.$$

Bundan $tg\alpha=\frac{1}{2}$ va $tg\alpha=-2$. Biz o'tkir burchakka mos keladigan birinchi yechimni olamiz. U holda

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}=\frac{2}{\sqrt{5}}, \qquad \sin\alpha=\frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Bu qiymatlardan foydalanib, $\tilde{A}$ va $\tilde{C}$ koeffitsientlarni aniqlaymiz:

$$\tilde{A}=A\cos^2\alpha+B\sin 2\alpha+C\sin^2\alpha=17\cdot\frac{4}{5}+12\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}+8\cdot\frac{1}{5}=20,$$

$$\tilde{C}=A\sin^2\alpha-B\sin 2\alpha+C\cos^2\alpha=17\cdot\frac{1}{5}-12\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}+8\cdot\frac{4}{5}=5.$$

Demak, egri chiziqning $O'\tilde{x}\tilde{y}$ koordinatalar sistemasidagi tenglamasi

$$20\tilde{x}^2+5\tilde{y}^2-20=0$$

yoki

$$\frac{\tilde{x}^2}{1}+\frac{\tilde{y}^2}{4}=1$$

ekan. Bu yarimo'qlari 2 va 1 bo'lgan ellipsdir.

Agar (4) sistema yechimga ega bo'lmasa, ya'ni (4) ning asosiy determinanti

$$\delta=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=AC-B^2=0$$

bo'lsa, u holda chiziqning yo markazi bo'lmaydi yoki markazi cheksiz ko'p bo'ladi, shu sababli, biz bunday hollarda avval burish almashtirishini bajaramiz:

$$\begin{cases} x=\tilde{x}\cos\alpha-\tilde{y}\sin\alpha \\ y=\tilde{x}\sin\alpha+\tilde{y}\cos\alpha. \end{cases} \tag{9}$$

Buni (1) ga qo'ysak, u quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\begin{gathered} \tilde{x}^2(A\cos^2\alpha+B\sin 2\alpha+C\sin^2\alpha)+\tilde{x}\tilde{y}(2B\cos 2\alpha-(A-C)\sin 2\alpha)+ \\ +\tilde{y}^2(A\sin^2\alpha-B\sin 2\alpha+C\cos^2\alpha)+2\tilde{x}(D\cos\alpha+E\sin\alpha)+ \\ +2\tilde{y}(E\cos\alpha-D\sin\alpha)+F=0. \end{gathered} \tag{10}$$

α burchakni shunday tanlaymizki, natijada

$$2B\cos 2\alpha-(A-C)\sin 2\alpha=0$$

bo'lsin. Buning uchun (7) ni yechish kifoya.

Topilgan α ga ko'ra, (10) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\tilde{A}\tilde{x}^2+\tilde{C}\tilde{y}^2+2\tilde{D}\tilde{x}+2\tilde{E}\tilde{y}+F=0. \tag{11}$$

Endi (11) ni kanonik ko'rinishga keltirish uchun parallel ko'chirish almashtirishini bajarish kifoya. Bayon qilingan usul yanada tushunarli bo'lishi uchun uni quyidagi misolda ko'rib chiqaylik.

2-m i s o l. $4x^2-4xy+y^2-2x-14y+7=0$ tenglamani kanonik ko'rinishga keltiring.

Yechish. Bu yerda $\delta=4\cdot 1-2^2=0$. Shu sababli, berilgan tenglama bilan aniqlangan egri chiziq markaziy emas. (10) almashtirishni bajaramiz. U holda (7) tenglama quyidagicha bo'ladi:

$$2tg^2\alpha-3tg\alpha-2=0.$$

Bundan $tg\alpha=-\frac{1}{2}$ va $tg\alpha=2$. Biz o'tkir burchakka mos keladigan birinchi yechimni olamiz. U holda

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}=\frac{2}{\sqrt{5}}, \qquad \sin\alpha=\frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Bu qiymatlardan foydalanib, $\tilde{A},\tilde{C},\tilde{D}$ va $\tilde{E}$ koeffitsientlarni aniqlaymiz:

$$\tilde{A}=A\cos^2\alpha+B\sin 2\alpha+C\sin^2\alpha=4\cdot\frac{1}{5}-4\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{4}{5}=0,$$

$$\widetilde{C} = A\sin^2\alpha - B\sin 2\alpha + C\cos^2\alpha = 4\cdot\frac{4}{5} + 4\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{5} = 5,$$

$$\widetilde{D} = D\cos\alpha + E\sin\alpha = -1\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} - 7\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = -3\sqrt{5},$$

$$\widetilde{E} = E\cos\alpha - D\sin\alpha = -7\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} + 1\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = -\sqrt{5}.$$

Demak, egri chiziqning $O\widetilde{x}\widetilde{y}$ koordinatalar sistemasidagi tenglamasi

$$5\widetilde{y}^2 - 6\sqrt{5}\widetilde{x} - 2\sqrt{5}\widetilde{y} + 7 = 0 \qquad (12)$$

ko'rinishda bo'lar ekan. Bu yerda birinchi va uchinchi hadlarni birlashtirib, ularni to'la kvadratga keltirsak:

$$\left(\widetilde{y} - \frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 - \frac{6\sqrt{5}}{5}\left(\widetilde{x} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) = 0$$

tenglamaga kelamiz. Endi bu yerda

$$x' = \widetilde{x} - \frac{\sqrt{5}}{5}, \quad y' = \widetilde{y} - \frac{\sqrt{5}}{5}$$

parallel ko'chirish almashtirishini bajarsak, (12) tenglama

$$y'^2 = \frac{6\sqrt{5}}{5}x'$$

kanonik ko'rinishga keladi. Ma'lumki, bu parabolaning tenglamasi.

3-m i s o l. $4x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 2y - 3 = 0$ tenglamani kanonik ko'rinishga keltiring.

Yechish. Bu yerda $\delta = 4\cdot 1 - 2^2 = 0$, lekin (4) sistema bitta $2a - b + 1 = 0$ tenglamaga tengkuchli. Demak, berilgan chiziq $2x - y + 1 = 0$ to'g'ri chiziqda yotuvchi cheksiz ko'p markazga ega ekan. Berilgan tenglamani quyidagi ko'paytuvchilarga ajratish mumkin:

$$4x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 2y - 3 = (2x - y + 3)(2x - y - 1).$$

U holda berilgan tenglama quyidagi ikki tenglamaga tengkuchli bo'ladi:

$$2x - y - 1 = 0 \text{ va } \quad 2x - y + 3 = 0, \qquad (13)$$

ya'ni berilgan chiziq tenglamalari (13) bo'lgan ikkita to'g'ri chiziqni ifodalaydi. Markazlarning geometrik o'rni bo'lmish $2x - y + 1 = 0$ to'g'ri chiziq (13) to'g'ri chiziqlarning o'rtasidan o'tgan to'g'ri chiziq ekan.

4 – BOB

FAZODAGI ANALITIK GEOMETRIYA

§1. Fazodagi tekislik tenglamalari

1.1. Umumiy tushunchalar. Faraz qilaylik, x, y, z - ixtiyoriy o'zgaruvchi miqdorlar bo'lsin. Agar

$$F(x,y,z)=0 \tag{1}$$

tenglik x,y,z larning faqat ayrim qiymatlaridagina o'rinli bo'lsa, u holda (1) ni x,y,z larga nisbatan tenglama, deb ataymiz. Agar (1) dagi noma'lumlar o'rniga $x=x_0, y=y_0, z=z_0$ sonlarni qo'yganda tenglik ayniyatga aylansa, u holda bu sonlar (1) tenglamani qanoatlantiradi, deymiz.

(1) tenglamani qanoatlantiradigan har bir x_0, y_0, z_0 sonlar uchligiga fazoning $M(x_0, y_0, z_0)$ nuqtasini mos qo'yamiz. Bunday nuqtalarning geometrik o'rnini sirt, deb ataymiz, (1) ni esa shu sirtning tenglamasi deymiz.

Agar sirt tenglamasi berilgan bo'lib, biror nuqtaning shu sirtda yotish yoki yotmasligini tekshirish talab qilingan bo'lsa, u holda berilgan nuqtaning koordinatalarini tenglamaning noma'lumlari o'rniga qo'yish kifoya. Analitik geometriyaning vazifasi qaralayotgan sirtni uning tenglamasi yordamida o'rganishdir.

Sirtning ixtiyoriy $M(x,y,z)$ nuqtasi uning siljuvchi nuqtasi, deb ataladi.

Misol sifatida sferaning tenglamasini tuzaylik. Sferaning ta'rifiga ko'ra, sferaning markazi, deb ataluvchi $C(a,b,c)$ nuqtadan sferaning siljuvchi nuqtasi orasidagi masofa r o'zgarmasdir. Demak,

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=r,$$

yoki

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2.$$

Agar sferaning markazi koordinatalar boshida bo'lsa, u holda

$$x^2+y^2+z^2=r^2.$$

Fazodagi analitik geometriyada asosan algebraik tenglamalar bilan ifodalangan sirtlar o'rganiladi. Masalan, tenglamasi

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{2}$$

ko'rinishda bo'lgan sirt 1-tartibli sirt, deb ataladi. Tenglamasi

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz+2Gx+2Hy+2Kz+L=0 \tag{3}$$

bo'lgan sirtlarni 2-tartibli sirtlar, deb ataymiz. Yuqorida ko'rilgan misoldan sfera 2-tartibli sirt ekanligi kelib chiqadi.

1.2. Tekislikning umumiy tenglamasi.

1-teorema. Dekart koordinatalar sistemasida tekislik 1-tartibli sirtdir.

Isboti. Biror dekart koordinatalar sistemasida berilgan α tekisligida uning biror nuqtasi $M_0(x_0, y_0, z_0)$ va unga perpendikulyar o'tgan qandaydir $\vec{n} = \{A, B, C\}$ vektor berilgan bo'lsin.

Faraz qilaylik, $M(x, y, z)$ tekislikning siljuvchi nuqtasi bo'lsin. Bu nuqta α tekisligida yotishi uchun $\overline{M_0M}$ vektor $\vec{n}$ ga perpendikulyar bo'lishi shart, ya'ni $\vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M}$. Vektorlarning perpendikulyarlik shartidan $\overline{M_0M} \circ \vec{n} = 0$ yoki

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \tag{4}$$

kelib chiqadi. Agar $M(x, y, z)$ nuqta α tekisligida yotmasa, (4) o'rinli bo'lmaydi, shu sababli (4) tenglik $M(x, y, z)$ nuqtaning o'rnini to'la aniqlaydi. Agar (4) dagi qavslarni ochib va $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$ deb belgilasak,

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

hosil bo'ladi. Teorema isbot bo'ldi.

Tekislikka perpendikulyar bo'lgan noldan farqli har qanday vektor tekislikka normal vektor deb, va shu sababli, (4) tenglama normal vektori $\vec{n}$ bo'lib, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtadan o'tgan tekislik tenglamasi deb ataladi.

2-teorema. Dekart koordinatalar sistemasida har qanday 1-tartibli tenglama tekislikni aniqlaydi.

Isboti. Biror dekart koordinatalar sistemasida (3) tenglama berilgan bo'lsin. Faraz qilaylik, x_0, y_0, z_0 lar shu tenglamaning biror echimi bo'lsin, ya'ni (3) ni qanoatlantiruvchi sonlar bo'lsin. U holda

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \tag{5}$$

bo'ladi. (3) dan (5) ni ayirsak

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

hosil bo'ladi. Ma'lumki, bu tenglama normal vektori $\vec{n}$ bo'lib, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtadan o'tgan tekislik tenglamasidir. (4) tenglama (3) ga ekvivalent bo'lgani uchun (3) ham α tekislikning tenglamasi bo'ladi. Teorema isbot bo'ldi.

Tekislikning (3) tenglamasini uning umumiy tenglamasi, deb ataymiz.

Misol. $\vec{n} = \{2, 2, 3\}$ vektorga perpendikulyar bo'lib, $M_0(1, 1, 1)$ nuqtadan o'tgan tekislik tenglamasi tuzilsin.

Yechish. (4) ga asosan

$$2(x - 1) + 2(y - 1) + 3(z - 1) = 0$$

yoki

$$2x + 2y + 3z - 7 = 0.$$

3-teorema. Agar ikki $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ va $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ tenglamalar bir tekislikni ifodalasa, u holda bu tenglamalarning mos koeffitsientlari o'zaro proportsional bo'ladi.

Isboti. Haqiqatan, agar teorema sharti o'rinli bo'lsa, u holda $\bar{n}_1=\{A_1,B_1,C_1\}$ va $\bar{n}_2=\{A_2,B_2,C_2\}$ vektorlar berilgan tekislikka perpendikulyar bo'ladi, demak, ular o'zaro kolleniar. Vektorlarning kolleniarlik shartiga ko'ra, A_2,B_2,C_2 sonlar A_1,B_1,C_1 sonlarga proportsional bo'ladi. Agar proportsionallik koeffitsientini μ desak, $A_2=A_1\mu, B_2=B_1\mu, C_2=C_1\mu$. Agar $M_0(x_0,y_0,z_0)$ tekislikning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsa, u holda uning koordinatalari har bir tenglamani qanoatlantiradi, ya'ni $A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1=0$ va $A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2=0$ bo'ladi. Agar ularning birini μ ga ko'paytirib, ikkinchisidan ayirsak
$D_2-D_1\mu=0$ hosil bo'ladi. Bundan esa,

$$\frac{A_2}{A_1}=\frac{B_2}{B_1}=\frac{C_2}{C_1}=\frac{D_2}{D_1}=\mu$$

kelib chiqadi.

1.3. Tekislikning kesmalardagi tenglamasi. Ma'lumki, A,B,C,D koeffitsientlar bir vaqtda nolga teng bo'lmaydi. (3) tenglamada bu koeffitsientlarning ayrimlari nolga teng bo'lgan bir necha hususiy hollarni ko'rib chiqaylik.

1) $D=0$; tenglama $Ax+By+Cz=0$ ko'rinishga keladi. Bu tenglamani $x=0, y=0, z=0$ sonlar qanoatlantiradi,ya'ni tekislik koordinatalar boshidan o'tadi.
2) S=0 ; tenglama $Ax+By+D=0$ ko'rinishda bo'ladi. Bu tekislikning normal vektori $\bar{n}=\{A,B,0\}$ z o'qiga perpendikulyar , demak, tekislikni o'zi shu o'qqa parallel o'tadi.
3) $B=0, C=0$; bunda $Ax+D=0$ ga ega bo'lamiz. Uning normal vektori $\bar{n}=\{A,0,0\}$ y va z o'qlariga perpendikulyar , u holda tekislik Oyz tekisligiga parallel o'tadi. Hususan, agar $D=0$ bo'lsa, $x=0$ hosil bo'lib, bu tekislik Oyz koordinatalar tekisligi bilan ustma-ust tushushiga ishonch hosil qilamiz.

Yuqoridagidek fikr yuritib, $Ax+Cz+D=0$ tenglama y o'qiga parallel tekislikni, $By+Cz+D=0$ tenglama x o'qiga parallel tekislikni aniqlashiga ishonch hosil qilamiz. Bularning hususiy holi sifatida, $y=0$ tenglama Oxz koordinatalar tekisligining, $z=0$ esa Oxy tekisligining tenglamasi ekanligini ko'ramiz.

4) A, B, C, D koeffitsientlarning birortasi ham nolga teng bo'lmasin. U holda ozod hadni tenglikning o'ng tomoniga o'tkazib, tenglamani $-D$ ga bo'lib yuboramiz:

$$\frac{Ax}{-D}+\frac{By}{-D}+\frac{Cz}{-D}=1$$

yoki

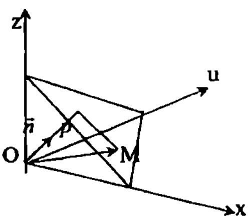
$$\frac{x}{-\frac{D}{A}}+\frac{y}{-\frac{D}{B}}+\frac{z}{-\frac{D}{C}}=1$$

Agar $a=-\frac{D}{A}, b=-\frac{D}{B}, c=-\frac{D}{C}$ belgilashlar kiritsak,

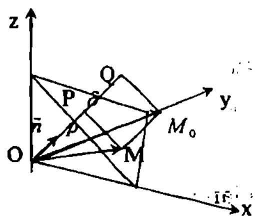
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \qquad (6)$$

hosil bo'ladi. (6) tenglamani tekislikning kesmalardagi tenglamasi, deb atashadi.

1.4. Tekislikning normal tenglamasi. Faraz qilaylik, bizga π tekislik, uning normali $\vec{n}$ va koordinatalar boshidan tekislikkacha bo'lgan masofa p berilgan bo'lsin.



43-rasm.



44-rasm.

$\vec{n}$ vektorning koordinata o'qlari bilan tashkil etgan burchaklari α, β, γ bo'lsin. Agar $\vec{n}_0$ $\vec{n}$ vektorning orti bo'lsa, u holda $\vec{n}_0=\{Cos\alpha, Cos\beta, Cos\gamma\}$ bo'ladi. Tekislikning siljuvchi nuqtasini $M(x,y,z)$ desak, uning radius-vektori $\overline{OM}=\{x,y,z\}$ bo'ladi.

43-rasmdan ko'rinadiki, $np_{\vec{n}_0}\overline{OM}=p$. Ma'lumki,

$$np_{\vec{n}_0}\overline{OM}=|\vec{n}_0|\cdot np_{\vec{n}_0}\overline{OM}=\vec{n}_0\circ\overline{OM}=xCos\alpha+yCos\beta+zCos\gamma\ .$$

Bundan,

$$xCos\alpha+yCos\beta+zCos\gamma-p=0\,. \qquad (7)$$

(7) tenglama tekislikning normal tenglamasi, deyiladi.

Agar tekislikning tenglamasi (3) ko'rinishda berilgan bo'lsa, uni normal tenglamami yoki yo'qligini

$$\mu=\sqrt{A^2+B^2+C^2} \qquad (8)$$

ifodaning qiymatiga qarab aniqlaymiz: agar $\mu=1$ bo'lsa,(3) normal tenglama bo'ladi, aks holda (3) ni $\pm\mu$ ga bo'lib

$$\pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}x\pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}y\pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}z\mp\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0 \qquad (9)$$

hosil qilamiz. Bu tenglama normal bo'lishi uchun endi (9) dagi ishoralardan birini ozod had D ning ishorasiga teskari qilib olinsa kifoya. (3) tenglama μ ifoda yordamida normal ko'rinishga keltirilgani uchun $1/\mu$ ni normallovchi ko'paytuvchi, deb atashadi.

1.5. Tekislikka doir ayrim masalalar.

1.Nuqtadan berilgan tekislikkacha bo'lgan masofa. Faraz qilaylik, π tekislik va unda yotmagan biror $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqta berilgan bo'lsin. M_0 nuqtadan π tekislikkacha bo'lgan d masofani topish talab qilingan bo'lsin.

Berilgan tekislikning normali $\vec{n}_0$ ni qurib olamiz. Agar M_0 nuqta va koordinatalar boshi π tekislikning har xil tomonlarida joylashgan bo'lsa, u holda M_0 nuqtaning π tekislikdan chetlanishi, deb $\delta=+d$ ga, aks holda $\delta=-d$ ga aytamiz.

M_0 nuqtani normalga proektsiyalaylik. U holda 44-rasmdan ko'rinadiki,

$$\delta=PQ=OQ-OP, \qquad OP=p, OQ=np_{\vec{n}_0}\overrightarrow{OM_0}$$

ekanligini e'tiborga olsak,

$$\delta=np_{\vec{n}_0}\overrightarrow{OM_0}-p, \quad np_{\vec{n}_0}\overrightarrow{OM_0}=x_0CoS\alpha+y_0CoS\beta+z_0CoS\gamma$$

bo'lgani uchun

$$\delta=x_0CoS\alpha+y_0CoS\beta+z_0CoS\gamma-p \qquad (10)$$

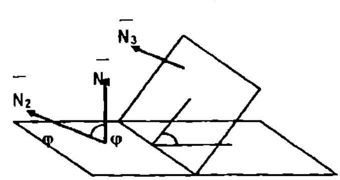
formulaga ega bo'lamiz. U holda

$$d=|x_0CoS\alpha+y_0CoS\beta+z_0CoS\gamma-p|.$$

2. Ikki tekislik orasidagi burchak. Faraz qilaylik, bizga $\Delta_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ va $\Delta_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ tekisliklar berilgan bo'lsin. $\vec{N}_1=\{A_1,B_1,C_1\}$ va $\vec{N}_2=\{A_2,B_2,C_2\}$ berilgan tekisliklarning normal vektorlari. 45-rasmdan ko'rinadiki, tekisliklar orasidagi burchak ularning normallari orasidagi burchakka teng. Shuning uchun normal vektorlar orasidagi burchakni qidiramiz. Ma'lumki,

$$CoS\varphi=\frac{\vec{N}_1\circ\vec{N}_2}{|\vec{N}_1|\cdot|\vec{N}_2|}$$

yoki



45-rasm.

$$CoS\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \qquad (11)$$

Agar $\Delta_1 \perp \Delta_2$ bo'lsa, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ bo'ladi. U holda $CoS\varphi = 0$ va (11) ga asosan $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$. Bu tenglikni tekisliklarning perpendikulyarlik sharti deb atashadi. Agar Δ_1 tekislik Δ_2 tekislikka parallel bo'lsa, u holda $\bar{N}_1$ vektor $\bar{N}_2$ vektorga kolleniar bo'ladi. Vektorlarning kolleniarlik shartiga ko'ra

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

bo'ladi. Bu munosabat tekisliklarning parallellik sharti, deb ataladi.

3. Uch nuqtadan o'tgan tekislik tenglamasi. Bizga Δ tekislikning uchta $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$ nuqtasi berilgan bo'lsin. Agar $M(x, y, z)$ shu tekislikning siljuvchi nuqtasi bo'lsa, u holda $\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}$ vektorlar Δ tekislikda yotadi, ya'ni ular komplanar bo'ladi.

$$\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\},$$
$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\},$$
$$\overrightarrow{M_1M_3} = \{x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1\}$$

ekanligidan va vektorlarning komplanarlik shartidan

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

kelib chiqadi.

§2. Fazodagi to'g'ri chiziq.

2.1. Fazodagi to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi.

Agar berilgan $\Delta_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ va $\Delta_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ tekisliklar parallel bo'lmasa, u holda ular to'g'ri chiziq bo'ylab kesishadi. Shu sababli, fazodagi to'g'ri chiziqni ikki tekislikning kesishish chizig'i sifatida qaraymiz. Demak, fazoda to'g'ri chiziq quyidagi tenglamalar sistemasi bilan aniqlanadi:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \qquad (12)$$

(12) to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi deyiladi. Agar Δ_1 va Δ_2 tekisliklar parallel bo'lsa, (12) to'g'ri chiziqni ifodalamaydi. Demak, berilgan tenglamalar sitemasi to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi ekanligini aniqlash uchun noma'lumlar oldidagi mos koeffitsientlarni proportsional emasligini tekshirish kerak ekan.

Bir to'g'ri chiziq bo'ylab cheksiz ko'p tekisliklar kesishadi. Bunday tekisliklarni tekisliklar dastasi, deymiz. Agar shu dastaga tegishli ikkita tekislikning tenglamasi ma'lum bo'lsa, shu dastaning boshqa tekisligi tenglamasi

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \tag{13}$$

bo'ladi.

Bunga ishonch hosil qilish uchun, avval (13) tenglama ekanligini tekshiraylik. Buning uchun, (13) ni quyidagi ko'rinishda yozib olamiz :

$$(\alpha A_1+A_2\beta)x+(\alpha B_1+\beta B_2)y+(\alpha C_1+\beta C_2)z+(\alpha D_1+\beta D_2)=0.$$

Agar bir vaqtda $\alpha A_1+\beta A_2=0, \alpha B_1+\beta B_2=0, \alpha C_1+\beta C_2=0$ bo'lsa, u holda

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=-\frac{\beta}{\alpha}$$

bo'ladi. Bu esa dastlabki farazga zid, chunki bu holda Δ_1 va Δ_2 tekisliklar parallel bo'ladi va ular to'g'ri chiziqni ifodalamaydi. Bu ziddiyat (13) tenglama ekanligini ko'rsatadi. Bu tenglama 1-darajali tenglama bo'lgani uchun u tekislikni ifodalaydi.

Agar α, β larning biri, masalan $\alpha \neq 0$ bo'lsa, u holda (13) ni quyidagi ko'rinishga keltirish mumkin:

$$(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0.$$

2.2. To'g'ri chiziqning kanonik va parametrik tenglamalari. Bizga fazoda to'g'ri chiziqning biror $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqtasi va unga parallel bo'lgan $\bar{a}=\{l,m,n\}$ vektor berilgan bo'lsin. Faraz qilaylik, $M(x,y,z)$ to'g'ri chiziqning siljuvchi nuqtasi bo'lsin. U holda $\bar{a}$ va $\overline{M_0M}$ vektorlar parallel bo'ladi. Vektorlarning kolleniarlik shartiga ko'ra

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n} \tag{14}$$

kelib chiqadi . $\bar{a}$ vektor M nuqtaning to'g'ri chiziqda bo'lishini ta'minlagani uchun uni to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori, deb atashadi. (14) ni to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi, deb ataymiz.

Agar to'g'ri chiziq umumiy tenglamasi bilan berilgan bo'lsa, uning bu tenglamasini kanonik ko'rinishga keltirsa bo'ladi. Haqiqatan, bizga (13) berilgan bo'lsin. Bu sistemani aniqlaydigan tekisliklarni mos ravishda Δ_1 va Δ_2, deb belgilaylik. Ularning normal vektorlari $\bar{n}_1=\{A_1,B_1,C_1\}$ va $\bar{n}_2=\{A_2,B_2,C_2\}$ bo'ladi. To'g'ri chiziqning kanonik tenglamasini tuzish uchun: 1) uning biror $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqtasini bilish kerak; bu nuqtani topish uchun (13) dagi noma'lumlardan biriga qiymat berib, masalan $z=z_0$ deb, (13) sistemani x va y larga nisbatan yechib, $x=x_0, y=y_0$ larni topamiz; 2) to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi $\bar{a}=\{l,m,n\}$ vektorini topish kerak; qaralayotgan to'g'ri chiziq ikki tekislikning kesishish chizig'i bo'lgani uchun, u $\bar{n}_1$ va $\bar{n}_2$ vektorlarga perpendikulyar bo'ladi. Shuning uchun, $\vec{a}$ vektor sifatida $\vec{n}_1$ va $\vec{n}_2$ vektorlarga perpendikulyar bo'lgan ixtiyoriy vektorni, shu jumladan, ularning vektor ko'paytmasini olish mumkin, ya'ni $\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$.

Misol . Berilgan to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasini tuzing:

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z - 11 = 0, \\ 2x + y - 3z - 1 = 0. \end{cases}$$

Yechish . Agar $x_0 = 1$ desak, sistemadan $y_0 = 2, z_0 = 1$ kelib chiqadi ,demak, $M_0(1,2,1)$ ekan. Endi yo'naltiruvchi vektorni topamiz. Sistemadan $\vec{n}_1 = \{3,2,4\}, \vec{n}_2 = \{2,1,-3\}$ larni aniqlaymiz. U holda $\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \{-10,17,-1\}$ bo'ladi, bundan $l = -10, m = 17, n = -1$ lar topiladi. Bularni (14) ga olib borib qo'ysak:

$$\frac{x-1}{-10} = \frac{y-2}{17} = \frac{z-1}{-1} .$$

Agar (14) dagi nisbatlarni t ga tenglasak:

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} = t ,$$

bundan

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt \end{cases} \tag{15}$$

kelib chiqadi. (15) ni to'g'ri chiziqning parametrik tenglamasi deb atashadi, t bu yerda parametr rolini o'ynaydi. To'g'ri chiziqning parametrik tenglamasi odatda to'g'ri chiziq bilan tekislikning kesishish nuqtasini topish masalasida ishlatiladi.

Misol . $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{2}$ to'g'ri chiziq bilan $2x + y + z - 6 = 0$ tekislikning kesishish nuqtasini toping.

Yechish . Avval to'g'ri chiziqning parametrik tenglamasini tuzib olamiz:

$$x = 2 + t, y = 3 + t, z = 4 + 2t.$$

Endi bularni tekislik tenglamasiga olib borib qo'yamiz:

$$2(2 + t) + (3 + t) + (4 + 2t) - 6 = 0.$$

Bundan $t=-1$ topiladi, bu qiymatni parametrik tenglamasiga qo'yib $x=1, y=2, z=2$ larni topamiz.

2.3. To'g'ri chiziqga doir ayrim masalalar. Faraz qilaylik, to'g'ri chiziqning ikki $M_1(x_1,y_1,z_1), M_2(x_2,y_2,z_2)$ nuqtasi berilgan bo'lsin. Bu to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori sifatida $\vec{a}=\overline{M_1M_2}$ vektorni olish mumkin. Agar $M(x,y,z)$ nuqta to'g'ri chiziqning siljuvchi nuqtasi bo'lsa, u holda, $\overline{M_1M}$ va $\vec{a}$ vektorlar parallel bo'ladi. Berilgan koordinatalarga ko'ra,

$$\overline{M_1M}=\{x-x_1, y-y_1, z-z_1\}$$

$$\vec{a}=\{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\}$$

Vektorlarning kolleniarlik shartiga ko'ra:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Oxirgi tenglik ikki nuqtadan o'tgan to'g'ri chiziq tenglamasi deb ataladi.

Endi faraz qilaylik , bizga

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \quad \text{va} \quad \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$$

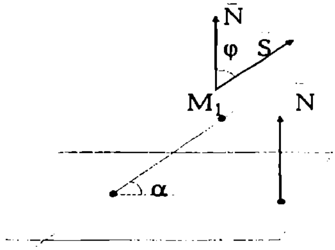
to'g'ri chiziqlar berilgan bo'lsin. Ular orasidagi burchak ularning yo'naltiruvchi vektorlari $\vec{a}_1=\{l_1,m_1,n_1\}, \vec{a}=\{l_2,m_2,n_2\}$orasidagi burchakga teng. Shu sababli,

$$CoS\varphi=\frac{\vec{a}_1\circ\vec{a}_2}{|\vec{a}_1|\cdot|\vec{a}_2|}=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$$

bo'ladi. Agar to'g'ri chiziqlar perpendikulyar bo'lsa, u holda $\varphi=\frac{\pi}{2}, CoS\varphi=0$, shu sababli, $l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$ bo'ladi. Bu tenglikni to'g'ri chiziqlarning perpendikulyarlik sharti, deb ataymiz. Agar to'g'ri chiziqlar parallel bo'lsa, $\vec{a}_1,\vec{a}_2$ larning kolleniarlik shartidan $\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$ kelib chiqadi . Bu tenglik to'g'ri chiziqlarning parallellik sharti, deb ataladi.

Bizga $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ to'g'ri chiziq va $Ax+By+Cz+D=0$

tekislik berilgan bo'lsin.



46-rasm.

46-rasmdan ko'rinadiki, to'g'ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchak α va yo'naltiruvchi vektor bilan tekislikning normal vektori orasidagi burchak φ lar yig'indisi $\alpha+\varphi=\frac{\pi}{2}$, bundan $\alpha=\frac{\pi}{2}-\varphi$ yoki $\varphi=\frac{\pi}{2}-\alpha$. Shu sababli , φ ni topsak kifoya. Demak,

$$CoS\varphi = Sin\alpha = \frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

Agar to'g'ri chiziq tekislikka parallel bo'lsa, u holda yo'naltiruvchi vektor normalga perpendikulyar bo'ladi, shuning uchun

$$Al+Bm+Cn=0$$

bo'ladi. Bu tenglik to'g'ri chiziq bilan tekislikning parallellik sharti deyiladi. Agar to'g'ri chiziq bilan tekislik perpendikulyar bo'lsa, u holda yo'naltiruvchi vektor bilan normal vektor parallel bo'ladi. U holda to'g'ri chiziq bilan tekislikning perpendikulyarlik sharti

$$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}$$

bo'ladi.

§3. Ikkinchi tartibli sirtlar.

3.1. Umumiy tushunchalar. Fazodagi biror Dekart koordinatalar sistemasida x, y, z larga nisbatan

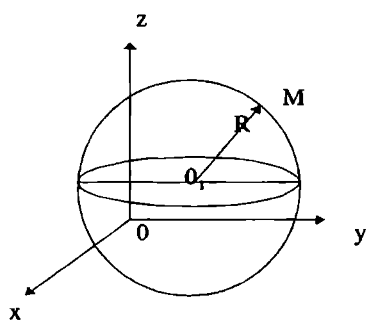
$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}xz+2a_{23}yz+a_{33}z^2+$$
$$+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0 \qquad (1)$$

tenglamani qanoatlantiradigan nuqtalar to'plami ikkinchi tartibli sirt deyiladi. 2-tartibli sirtlarga masalan: sfera, ellipsoid, giperboloid,, tsilindrlar, konuslar yoki bir qancha aylanma sirtlarni misol qilib keltirish mumkin. Biz bu paragrafda aynan ana shu sirtlar bilan tanishamiz.

3.2. Sfera. Sferaning ta'rifi va uning kanonik tenglamasi 1-§ da berilgan edi: markazi $O_1(x_0, y_0, z_0)$ nuqtada, radiusi r bo'lgan sferaning kanonik tenglamasi

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$$

edi.



47-rasm.

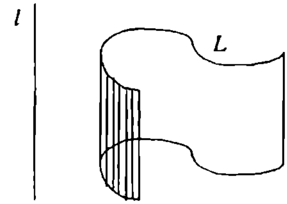
Misol. $x^2+y^2+z^2+2x+4y-20=0$ tenglama bilan berilgan sferaning markazi va radiusi R topilsin.

Yechish. $x^2+y^2+z^2+2x+4y-20=0$ dan to'la kvadrat ajratamiz: $x^2+2x+1+y^2+4y+4+z^2=25$ yoki $(x+1)^2+(y+2)^2+z^2=5^2$.

Demak: $O_1(-1; -2; 0)$ sfera markazi va R=5 sfera radiusi ekan.

3.3. Tsilindrik sirtlar.

Ta'rif. Fazoda yo'naltiruvchi, deb atalgan L-chiziqni kesib o'tuvchi va biror l to'g'ri chiziqqa paralel bo'lgan barcha to'g'ri chiziqlardan hosil bo'lgan sirt tsilindrik sirt, deb ataladi.



48-rasm.

Yasovchisi OZ o'qqa parallel bo'lgan tsilindrik sirtning tenglamasi $F(x,y)=0$ bo'ladi. Shuningdek, $F(x,z)=0$ yasovchisi OY o'qga parallel bo'lgan, $F(y,z)=0$ esa yasovchisi OX o'qqa parallel bo'lgan sirtni aniqlaydi. $F(x,y)=0$, $F(x,z)=0$, $F(y,z)=0$ tenglamalar mos ravishda XOY, XOZ, YOZ tekisliklardagi egri chiziqlarni ifodalaydi va ular tsilindrik sirtlarning yo'naltiruvchilari, deyiladi.

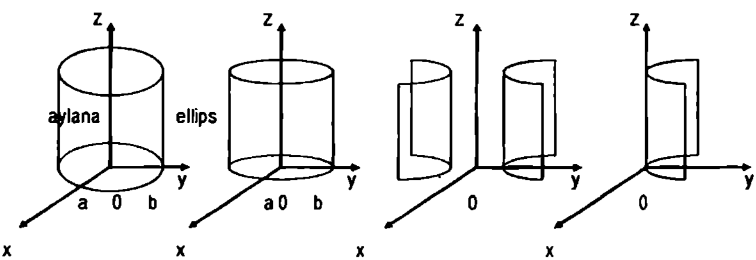
Quyidagi yasovchilari OZ o'qqa parallel bo'lgan eng muhim tsilindrik sirtlarni ko'ramiz. Ularning yo'naltiruvchilari mos ravishda aylana, ellips, giperbola, paraboladan iborat

a) $x^2+y^2=a^2$ - to'g'ri doiraviy tsilindr

b) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ - elliptik tsilindr

v) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ - giperbolik tsilindr

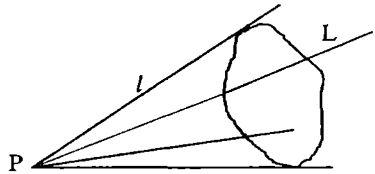
g) $y^2=2px$ - parabolik tsilindr



49-rasm.

3.4. Konus sirt.

Ta'rif. Fazoda yo'naltiruvchi, deb atalgan L chiziqni kesib o'tuvchi va berilgan R nuqtadan o'tuvchi barcha l to'g'ri chiziqlardan hosil bo'lgan sirt konus sirt (yoki ikkinchi tartibli konus), deb ataladi.



50-rasm.

R nuqta - konusning uchi, L —yo'naltiruvchisi va l yasovchisi, deb ataladi.

Misol. Uchi koordinatalar markazida yotgan va yo'naltiruvchisi L ellips bo'lgan:

$$L:\begin{cases} z = c \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$ konus tenglamasi tuzilsin.

Yechish. Faraz qilaylik, $M(x',y',c)$ L ning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin, u holda konusning yasovchi $O(0;0;0)$ va $M(x',y',c)$ nuqtalardan o'tgan to'g'ri chiziq bo'ladi. Uning fazodagi kanonik tenglamasini topamiz:

$$\frac{x-0}{x'-0} = \frac{y-0}{y'-0} = \frac{z-0}{c-0} \qquad \text{yoki} \qquad \frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{c}.$$

Bundan:

$$x' = \frac{cx}{z}; \qquad y' = \frac{cy}{z}$$

larni topib olib, yo'naltiruvchi L ning tenglamasiga qo'ysak, quyidagi tenglama hosil bo'ladi:

$$\frac{c^2x^2}{a^2z^2} + \frac{c^2y^2}{b^2z^2} = 1 \quad \text{yoki} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Bu ikkinchi tartibli konusning tenglamasi, deyiladi. Agar bunda $a=b$ deb olsak, yo'naltiruvchisi $\left.\begin{matrix} z = c \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{matrix}\right\}$ a- radiusli aylana bo'lgan to'g'ri aylanma konus hosil bo'ladi, uning simmetriya o'qi OZ dan iborat bo'ladi:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

Shuningdek, o'qlari OY va OX koordinata o'qlaridan iborat va uchi koordinatalar markazida yotuvchi ikkinchi tartibli konuslarning tenglamalari mos ravishda

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0 \quad \text{va} \quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$$

bo'ladi.

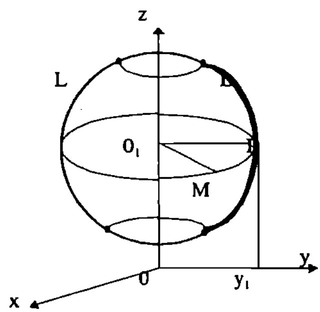
3.5. Aylanma sirtlar.

Ta'rif. Biror L chiziqning l o'q atrofida aylanishidan hosil bo'lgan nuqtalar to'plami aylanma sirt, deyiladi. L- chiziq aylanma sirtning medianasi, l- (chiziq) o'q esa uning aylanma o'qi, deyiladi. Biz aylanish o'qlari *OZ, OY, OX*- o'qlaridan iborat bo'lgan hollar bilan chegaralanamiz.

1) Aylanish o'qi OZ o'qidan, L- medianasi esa OYZ tekisligida yotgan

$$\left.\begin{array}{l} F(y,z)=0 \\ x=0 \end{array}\right\}$$

tenglamali tekis chiziq bo'lgan sirt tenglamasini tuzaylik.



51-rasm.

M(x,y,z)- aylanma sirtning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin, M nuqta orqali OZ o'qiga perpendikulyar qilib Q tekislik o'tkazaylik, Q tekislikda aylanma sirtning markazi $O_1(0,0,z)$ bo'ladi. L chiziqda $P(0,y_1,z)$ nuqta olaylik. U holda $|O_1M|=|O_1P|=|y_1|$ bo'lgani uchun

$$|O_1M_1|=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-z)^2}=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$|y_1| = \sqrt{x^2 + y^2}; \qquad y_1 = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$$

$P(0, y_1, z)$ nuqta *L*- medianada yotgani uchun, uning tenglamasini qanoatlantiradi, ya'ni $F(y_1, z) = 0$ o'rinli bo'ladi.

Bundan ushbu tenglama hosil bo'ladi:

$$F(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0.$$

2) Agar *F(y,z)=0, x=0* *L*- medianani *OY* o'qi atrofida aylantirilsa, u aylanma jismning tenglamasi quyidagicha ko'rinishda bo'ladi.

$$F(y, \pm\sqrt{x^2 + z^2}) = 0 \qquad (2)$$

3) Agar *F(x,y)=0, z=0* *L*- mediana *OX* o'qi atrofida aylantirilsa va bundan hosil bo'lgan aylanma jismning tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$F(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}) = 0. \qquad (3)$$

3.6. Ellipsoidlar.

1. Aylanma ellipsoidlar.

a) Agar *XOZ* tekisligida berilgan $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ellipsni *OZ* o'qi atrofida aylantirsak, tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'lgan aylanma ellipsoid hosil bo'ladi:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{c^2} = 1 \text{ yoki } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{c^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (4)$$

b) Agar shu ellipsni OX o'qi atrofida aylantirsak ushbu aylanma ellipsoid hosil bo'ladi va h.k.

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ yoki } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (5)$$

s) Agar (4) yoki (5) da a=s deb olsak:

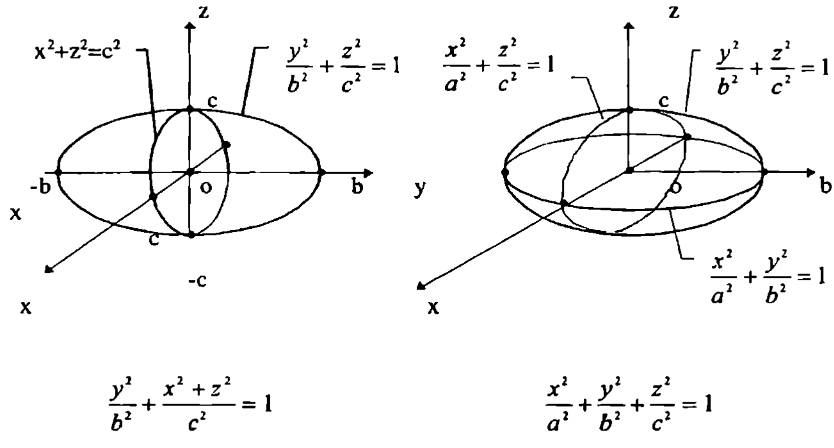
$$x^2+y^2+z^2=a^2 \qquad (6)$$

sfera hosil bo'ladi.

2. Elliptik ellipsoid. Tenglamasi:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (7)$$

ko'rinishida berilgan sirt fazoda elliptik ellipsoid, deyiladi.



52-rasm.

3.7. Giperboloidlar.

1. Bir pallali aylanma giperboloidlar.

a) UOZ tekislikda berilgan $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ giperbola OZ o'qi atrofida aylantirilsa, tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'lgan bir pallali aylanma giperbolik sirt hosil bo'ladi:

$$\frac{x^2+y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{yoki} \quad \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

b) Agar XOY tekislikda berilgan $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ giperbola OY- o'qi atrofida aylantirilsa, tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'lgan bir pallali aylanma giperbolik sirt hosil bo'ladi:

$$\frac{x^2+z^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ yoki } \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

s) Agar XOZ tekisligida berilgan $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ giperbola OZ o'qi atrofida aylantirilsa, tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'lgan bir pallali aylanma giperbolik sirt hosil bo'ladi.

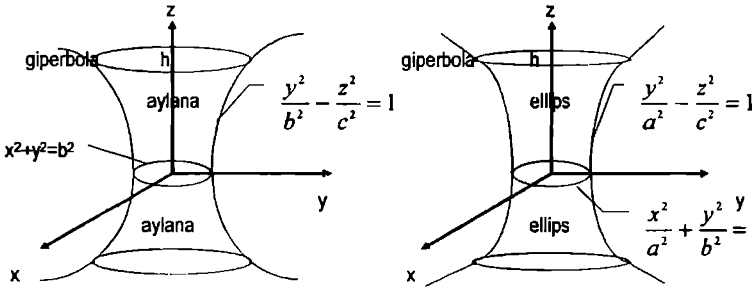
$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ yoki } \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

2. Bir pallali elliptik giperboloidlar.

Tenglamalari quyidagi ko'rinishda berilgan sirtlar bir pallali elliptik giperboloidlar, deyiladi:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \\ -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \end{cases}$$

Bu sirtlar mos ravishda $z=h$, $y=k$, $x=t$ tekisliklar bilan kesilsa, kesimda ellipslar hosil bo'ladi.



53-rasm.

3. Ikki pallali aylanma giperboloidlar. a) Agar YOZ tekisligida berilgan $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ giperbola OY o'qi atofida aylantirilsa, tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'lgan ikki pallali aylanma giperboloid hosil bo'ladi:

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2+z^2}{c^2}=1 \text{ yoki } \frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{c^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

b) Shuningdek XOY tekisligida berilgan $\frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{c^2}=1$; va XOZ tekisligida berilgan $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ giperbolalar mos ravishda OX va OZ o'qi atrofida aylantirilsa, quyidagi ko'rinishdagi ikki pallali giperboloidlar hosil bo'ladi:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$$

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

4. Ikki pallali elliptik giperboloidlar.

Tenglamalari quyidagicha ko'rinishda berilgan sirtlar fazoda ikki pallali eliptik giperboloidlar, deyiladi:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ yoki } -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$$

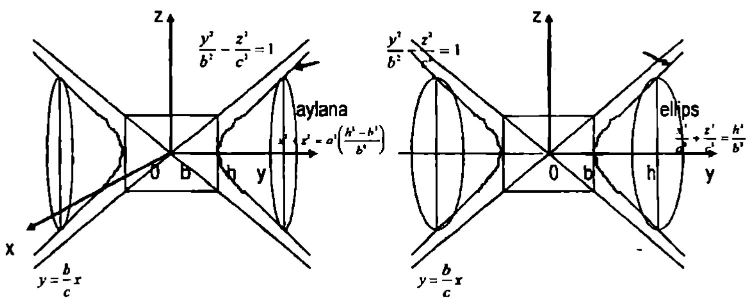
$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ yoki } \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ yoki } \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$$

Quyida OY o'qi atrofida aylantirilishdan hosil bo'lgan

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ ikki pallali aylanma giperboloid va

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ ikki pallali elliptik giperboloidlar shaklini keltiramiz:



54-rasm.

3.8. Paraboloidlar.

1. Aylanma paraboloidlar.

a) Agar XOY tekisligida berilgan $y^2=2px$ parabola OX o'qi atrofida aylantirilsa, tenglamasi quyidagicha ko'rinishda bo'lgan aylanma paraboloid (sirt) hosil bo'ladi:

$$y^2+z^2=2px$$

Agar bu sirtni $x=h$ tekislik bilan kessak, kesimda $y^2+z^2=2ph$ aylana hosil bo'ladi.

b) Shuningdek XOZ tekisligida berilgan $x^2 = 2pz$ parabola va YOZ tekisligida berilgan $z^2 = 2py$ parabolani mos ravishda OZ va OY o'qlari atrofida aylantirsak, quyidagi aylanma paraboloidlar, deb ataluvchi sirtlar hosil bo'ladi:

$$y^2 + x^2 = 2pz \quad ; \quad x^2 + z^2 = 2py .$$

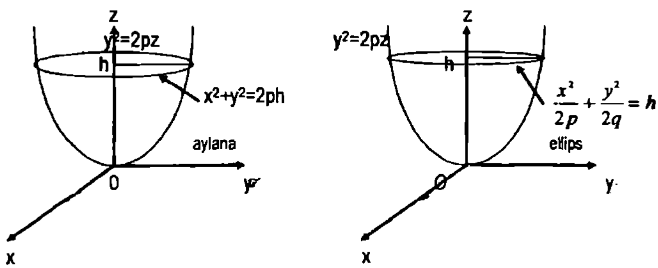
2. Elliptik paraboloidlar. Tenglamasi umumiy holda quyidagicha ko'rinishda berilgan sirtlar elliptik paraboloidlar, deyiladi.

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$$

$$\frac{x^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2y$$

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2x .$$

Quyida OZ o'qi atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan $y^2 + x^2 = 2pz$ va $\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z$ elliptik paraboloidlarning shaklini keltiramiz:



55-rasm.

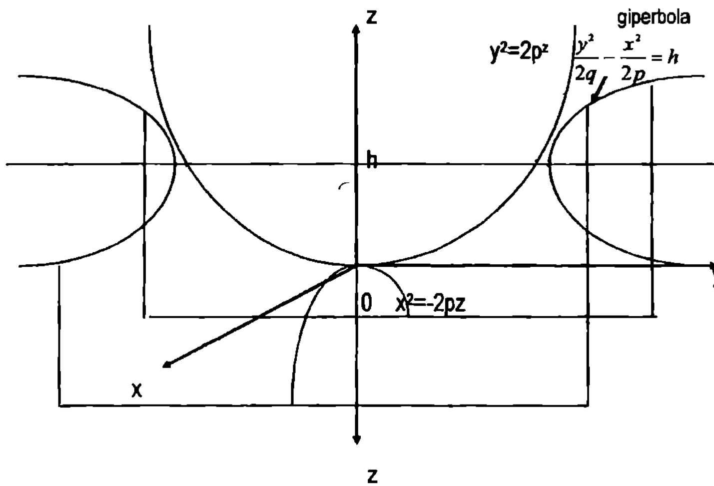
3. Giperbolik paraboloidlar. Tenglamasi umumiy holda quyidagi ko'rinishda berilgan sirtlar giperbolik paraboloidlar, deyiladi.

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \qquad \frac{x^2}{p} - \frac{z^2}{q} = 2y \qquad \frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} = 2x$$

yoki bu tengliklar odatda quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q}=z \qquad \frac{x^2}{2p}-\frac{z^2}{2q}=y \qquad \frac{y^2}{2p}-\frac{z^2}{2q}=x.$$

Quyida $\frac{y^2}{2q}-\frac{x^2}{2p}=z$ giperbolik paraboloid shaklini keltiramiz. Agar sirtni $z=h$ tekislik bilan kessak, kesimda $\frac{y^2}{2qh}-\frac{x^2}{2ph}=1$ giperbola; $x=0$ tekislikda $y^2=2qz$ parabola; $y=0$ tekislikda $x^2=2pz$ parabola va nihoyat $z=0$ tekislikda $\frac{y^2}{2q}-\frac{x^2}{2p}=0$ yoki $\frac{y}{q}-\frac{x^2}{p}=0$ yoki $\left(\frac{y}{\sqrt{q}}-\frac{x}{\sqrt{p}}\right)\left(\frac{y}{\sqrt{q}}+\frac{x}{\sqrt{p}}\right)=0$ tenglamaga kelamiz. Bundan $\frac{y}{\sqrt{q}}-\frac{x}{\sqrt{p}}=0$ va $\frac{y}{\sqrt{q}}+\frac{x}{\sqrt{p}}=0$ tengliklar kelib chiqadi. Bular $y=\pm\sqrt{\frac{q}{p}}x$ koordinatalar boshidan o'tuvchi to'g'ri chiziqlarni beradi. Bu degan so'z sirt *XOU* tekisligini shu ikki to'g'ri chiziqlar bo'ylab kesib o'tadi.



56-rasm.

Giperbolik paraboloidlarni umuman to'g'ri chiziqlardan tashkil topgan sirt ekanligini isbotlash mumkin.

§4. Ikkinchi tartibli sirt tenglamalarini kanonik ko'rinishga keltirish.

Ikkinchi tartibli sirtlarning umumiy

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 +$$

$$+ 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \qquad (1)$$

tenglamasini kanonik ko'rinishga keltirish masalasi ancha murakkab. U invariantlar, deb ataluvchi sonli parametrlar yordamida murakkab mulohazalar asosida amalga oshiriladi. Biz bu yerda nisbatan sodda, ishlatishda qulay ikki usulni ko'rib chiqamiz. Bu ikkala usulni xususan ikkinchi tartibli chiziqlarga ham qo'llash mumkin ekanligini e'tiborga olib, umumiy mulohazalarni ikkinchi tartibli n-ta o'zgaruvchili tenglamalar uchun bajaramiz.

1. Agar (1) da

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, \quad z = \frac{x_3}{x_4}$$

munosabatlar bilan berilgan birjinsli x_1, x_2, x_3, x_4 dekart koordinatalarga o'tsak, bu tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \qquad (2)$$

bu yerda

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 +$$

$$+ a_{33}x_3^2 + 2a_{14}x_1x_4 + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4 + a_{44}x_4^2 \qquad (3)$$

o'zgaruvchilariga nisbatan birjinsli ko'phad, biz uni kvadratik forma deb ataymiz. Ayonki, agar $x_4 = 1$ desak:

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, 1) = F(x, y, z)$$

bo'ladi, bu yerda $F(x, y, z)$ - (1) ning chap tomonidagi ifoda. Shuning uchun (2) uchun chiqarilgan har qanday xulosa (1) uchun ham o'rinli bo'ladi.

Faraz qilaylik, bizga

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j \qquad (4)$$

kvadratik ifoda berilgan bo'lsin. Maqsad, shunday

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} x'_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (5)$$

chiziqli almashtirish bajarish kerakki, natijada (4) quyidagi kanonik ko'rinishga kelsin:

$$\Phi' = \lambda_1 x'^2_1 + \lambda_2 x'^2_2 + \ldots + \lambda_r x'^2_r, \qquad (6)$$

bu yerda $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ noldan farqli o'zgarmaslar.

Qilinadigan mulohazalar yanada tushunarli bo'lishi uchun avval ikki o'zgaruvchili kvadratik ifodani ko'raylik:

$$\Phi = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2.$$

Faraz qilaylik, bu ifodaga kamida bitta kvadrat qatnashgan had kirsin, ya'ni a_{11} va a_{22} koeffitsientlarning kamida biri noldan farqli bo'lsin. Umumiylikni buzmagan holda, $a_{11} \neq 0$ deyish mumkin, chunki aks holda, o'zgaruvchilar tartibini almashtirib, shu natijaga kelsa bo'ladi. U holda

$$\Phi = a_{11}\left(x_1^2 + \frac{2a_{12}}{a_{11}}x_1x_2\right) + a_{22}x_2^2 = a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}x_2}{a_{11}}\right)^2 - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}x_2^2 + a_{22}x_2^2$$

yoki

$$\Phi = a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2\right)^2 + \left(a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}\right)x_2^2$$

deb yozish mumkin.

Agar

$$x_1' = x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 \ , \quad x_2' = x_2$$

deb chiziqli almashtirish bajarsak, berilgan ifoda quyidagi kanonik ko'rinishga keladi:

$$\Phi' = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2,$$

bu yerda $\lambda_1 = a_{11}$, $\lambda_2 = \dfrac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}}$.

Yuqorida biz $a_{11} = a_{22} = 0$ bo'lmasin, deb faraz qilgan edik. Agar berilgan ifodada $a_{11} = a_{22} = 0$ bo'lsa, ya'ni ifoda

$$\Phi = 2a_{12}x_1x_2$$

ko'rinishda bo'lsa (bu yerda $a_{12} \neq 0$ bo'lishi shart, aks holda ifoda aynan nolga teng bo'lib qoladi), u holda

$$x_1' = \frac{x_1 + x_2}{2} \ , \quad x_2' = \frac{x_1 - x_2}{2} \ , \quad \text{ya'ni} \quad x_1 = x_1' + x_2' \ , \quad x_2 = x_1' - x_2'$$

desak:

$$\Phi' = 2a_{12}(x_1'^2 - x_2'^2) = 2a_{12}x_1'^2 - 2a_{12}x_2'^2 = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2,$$

bo'ladi, bu yerda $\lambda_1 = 2a_{12}$, $\lambda_2 = -2a_{12}$.

Endi umumiy holga qaytaylik. Agar (4) da kvadratli hadlar qatnashmagan bo'lsa, ya'ni barcha $a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{nn} = 0$ bo'lib, masalan $a_{ij} \neq 0$ bo'lsa (bunday koeffitsient albatta mavjud, chunki aks holda ifoda aynan nolga teng bo'lib qoladi), u holda

$$\left.\begin{array}{l} x_i' = \dfrac{x_i + x_j}{2} \ , \quad x_j' = \dfrac{x_i - x_j}{2} \ , \\ x_k' = x_k, k \neq i, k \neq j, , \end{array}\right\} \tag{7}$$

almashtirish bajarib, kvadratik ifodadagi $2a_{ij}x_ix_j$ had o'rniga $2a_{ij}x_i'^2 - 2a_{ij}x_j'^2$ hadni, ya'ni kvadratli hadlarni hosil qilamiz. Shu sababli, (4) ifoda kamida bitta kvadratli hadni o'z ichiga oladi, deb faraz qilish mumkin. Xuddi yuqoridagidek, umumiylikni buzmagan holda, $a_{11} \neq 0$ deyish mumkin.

Φ ifodaning ichidan x_1 qatnashgan barcha hadlarni ajratib olaylik:

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n. \qquad (*)$$

Bu yig'indini quyidagi ko'rinishga keltirib olamiz:

$$a_{11}\left(x_1^2 + \frac{2a_{12}}{a_{11}}x_1x_2 + \ldots + \frac{2a_{1n}}{a_{11}}x_1x_n\right) =$$

$$= a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 + (x_1 \text{ } \textit{qatnashmagan barcha hadlar}) \qquad (**)$$

(**) ni kvadratik ifodaga (*) o'rniga olib borib qo'yaylik, u holda

$$\Phi = a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 + \Phi_1(x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

ifodaga kelamiz, bu yerda Φ_1- $x_2, x_3, \ldots, x_n$ larga nisbatan kvadratik ifoda.

Agar

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + \dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \ldots + \dfrac{a_{1n}}{a_{11}}x_n, \\ x_2' = x_2, x_3' = x_3, \ldots, x_n' = x_n \end{cases} \qquad (8)$$

almashtirish bajarsak, Φ kvadratik ifodamiz

$$\Phi' = a_{11}x_1'^2 + \Phi_1(x_2', \ldots, x_n')$$

ko'rinishga keladi.

Agar Φ_1 aynan nolga teng bo'lsa, u holda keltirish jarayoni to'xtaydi, aks holda yuqoridagi usulni endi Φ_1 uchun qo'llab, undan bitta kvadrat qatnashgan had va $n-2$ ta o'zgaruvchining kvadratik ifodasini ajratib olamiz. Bu jarayonni to kvadratik ifodada faqat o'zgaruvchilarning kvadratlari qatnashgan hadlar qolguncha davom ettiramiz. Bu, albatta, (7) yoki (8) kabi qator almashtirishlar yordamida bajariladi.

2. Ortogonal almashtirishlar usuli. (4) ko'rinishda berilgan kvadratik ifodani quyidagicha yozib olaylik:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = \sum_{i=1}^{n} x_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right). \qquad (9)$$

Agar bu yerda

$$x_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \quad i = 1,2,\ldots,n, \qquad (10)$$

chiziqli almashtirish bajarsak, (9) quyidagi

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} x_ix_i' = x \circ x' = x \circ Ax \qquad (11)$$

ko'rinishga keladi, bu yerda $x \circ x'$ - R_n chiziqli fazoning $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ va $x'=(x'_1,x'_2,\ldots,x'_n)$ elementlarini skalyar ko'paytmasi, va A (10) almashtirishning matritsasi:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Faraz qilaylik, $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ lar (12) matritsaning xos sonlari, $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n$ lar esa (11) ning shu xos sonlarga mos keluvchi ortonormal xos vektorlari bo'lsin, ya'ni

$$A\varphi_i=\lambda_i\varphi_i,\quad \varphi_i\circ\varphi_i=1,\quad \varphi_i\circ\varphi_j=0,\ i\neq j,\ i,j=1,2,\ldots,n. \tag{13}$$

$\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n$ lar R_n da bazis tashkil etadi (2-bob, §6 ga qarang). Ixtiyoriy $x\in R_n$ ni shu bazis bo'yicha yoyilmasi

$$x=\sum_{i=1}^{n} y_i\varphi_i \tag{14}$$

bo'lsin. U holda

$$Ax=\sum_{i=1}^{n} y_i A\varphi_i=\sum_{i=1}^{n} y_i\lambda_i\varphi_i \tag{15}$$

bo'ladi. (14) va (15) larni (11) ga qo'ysak, (13) ga asosan:

$$\Phi=x\circ Ax=\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\varphi_i\right)\circ\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\lambda_i\varphi_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i^2$$

tenglikni hosil qilamiz.

Endi 2-tartibli sirtning umumiy (1) tenglamasini ko'raylik. Uning bosh hadlaridan tuzilgan

$$\Phi=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}xz+2a_{23}yz+a_{33}z^2 \tag{16}$$

ifoda x,y,z ga nisbatan kvadratik ifodadir.

Bu ifodaning matritsasini tuzib olaylik:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Bu matritsaning

$$D\equiv\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

xarakteristik tenglamasini yechib, matritsaning xos sonlarini topamiz: $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$. Ularga mos keluvchi xos vektorlarni topish uchun

$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda_i)\xi_1+a_{12}\xi_2+a_{13}\xi_3=0,\\ a_{21}\xi_1+(a_{22}-\lambda_i)\xi_2+a_{23}\xi_3=0, & i=1,2,3,\\ a_{31}\xi_1+a_{32}\xi_2+(a_{33}-\lambda_i)\xi_3=0,\end{cases}$$

birjinsli tenglamalar sistemalarini tuzib olamiz. Bu sistemalarning har birini yechimini topib, ularni normallashtiramiz. Faraz qilaylik, bu

$$\vec{e}_1=(e_{11},e_{12},e_{13}),\ \vec{e}_2=(e_{21},e_{22},e_{23})\ ,\ \vec{e}_3=(e_{31},e_{32},e_{33})$$

vektorlar bo'lsin. U holda (16) formani kanonik ko'rinishga keltiruvchi almashtirish matritsasi

$$S=\begin{pmatrix}e_{11} & e_{21} & e_{31}\\ e_{12} & e_{22} & e_{32}\\ e_{13} & e_{23} & e_{33}\end{pmatrix}$$

bo'ladi.Bu almashtirishni bajargandan so'ng (16) ushbu

$$\Phi'=\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+\lambda_3z'^2$$

ko'rinishga, (1) esa quyidagi

$$F'(x',y',z')=\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+\lambda_3z'^2+2a_{14}'x'+2a_{24}'y'+2a_{34}'z'+a_{44}=0$$

ko'rinishga keladi. Va nihoyat, koordinatalarni parallel ko'chirib, (1) ni ushbu

$$F''(x'',y'',z'')=\lambda_1x''^2+\lambda_2y''^2+\lambda_3z''^2+a_{44}'=0$$

kanonik ko'rinishga olib kelamiz.

1-m i s o l . $5x^2+6xy+5y^2-16x-16y-16=0$ egri chiziqning tenglamasini kanonik ko'rinishga keltiring.

Yechish . Bosh hadlarining matritsasi

$$A=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 3 & 5\end{pmatrix}.$$

U holda xos sonlarni quyidagi

$$\begin{vmatrix}5-\lambda & 3\\ 3 & 5-\lambda\end{vmatrix}=0 \quad \text{yoki} \quad \lambda^2-10\lambda+16=0$$

xarakteristik tenglamadan topamiz: $\lambda_1=2,\lambda_2=8$.

Ularga mos keluvchi xos vektorlarni topaylik. Avval $\lambda_1=2$ deylik. U holda

$$\begin{cases}3\xi_1+3\xi_2=0,\\ 3\xi_1+3\xi_2=0\end{cases}$$

sistemani hosil qilamiz. Uning yechimi $(\alpha,-\alpha)$. Buni normallashtirsak, xos vektor kelib chiqadi: $\vec{e}_1=(1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})$.

Endi $\lambda_2=8$ desak,

$$\begin{cases}-3\xi_1+3\xi_2=0,\\ 3\xi_1-3\xi_2=0\end{cases}$$

sistema hosil bo'ladi. Buning yechimi (α,α). Uni normallashtirib ikkinchi xos vektorni topamiz: $\vec{e}_2=(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$.

$\vec{e}_1$ va $\vec{e}_2$ vektorlar ortogonal, chunki $\vec{e}_1\circ\vec{e}_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$. Bu ikki vektordan foydalanib, almashtirish matritsasini tuzaylik:

$$S=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}.$$

Demak, berilgan tenglamada

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}x'+\dfrac{1}{\sqrt{2}}y' \\ y=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}x'+\dfrac{1}{\sqrt{2}}y' \end{cases}$$

chiziqli almashtirish bajarish kerak ekan. Natijada berilgan tenglama quyidagi

$$2x'^2+8y'^2-16\sqrt{2}y'-16=0$$

ko'rinishga keladi. Bu tenglikning ikkinchi va uchinchi hadlarini to'la kvadratgacha to'ldirsak

$$2x'^2+8(y'-\sqrt{2})^2=32$$

bo'ladi. Koordinatalarni $x''=x', y''=y'-\sqrt{2}$ formulalar bo'yicha parallel ko'chirsak:

$$2x''^2+8y''^2=32 \quad \text{yoki} \quad \frac{x''^2}{16}+\frac{y''^2}{4}=1$$

tenglamaga ega bo'lamiz. Demak, berilgan chiziq ellips ekan.

2-m i s o l . $x^2+5y^2+z^2+2xy+6xz+2yz-6=0$ sirt tenglamasini kanonik ko'rinishga keltiring.

Yechish. Bosh hadlarining matritsasi

$$A=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&5&1\\3&1&1\end{pmatrix}.$$

Xarakteristik tenglamasi

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 3\\ 1 & 5-\lambda & 1\\ 3 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0$$

quyidagi ko'rinishga keladi:

$$(\lambda-6)(\lambda^2-\lambda-6)=0.$$

Bundan $\lambda_1=6, \lambda_2=3, \lambda_3=-2$. $\lambda_1=6$ uchun xos vektor

$$\begin{cases}-5u_1+u_2+3u_3=0,\\ u_1-u_2+u_3=0,\\ 3u_1+u_2-5u_3=0\end{cases}$$

sistemadan topiladi: $\vec{u} = \alpha(1,2,1)$. Uni normallaylik:

$$\vec{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{2}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

Agar $\lambda_2 = 3$ desak,

$$\begin{cases} -2\vartheta_1 + \vartheta_2 + 3\vartheta_3 = 0, \\ \vartheta_1 + 2\vartheta_2 + \vartheta_3 = 0, \\ 3\vartheta_1 + \vartheta_2 - 2\vartheta_3 = 0 \end{cases}$$

sistema hosil bo'ladi. Uning yechimi: $\vec{\vartheta} = \beta(1;-1;1)$. U holda ikkinchi xos vektor

$$\vec{e}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}};-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

bo'ladi.

Uchinchi xos son $\lambda_3 = -2$ uchun

$$\begin{cases} 3\omega_1 + \omega_2 + 3\omega_3 = 0, \\ \omega_1 + 7\omega_2 + \omega_3 = 0, \\ 3\omega_1 + \omega_2 + 3\omega_3 = 0 \end{cases}$$

sistemani yechamiz: $\vec{\omega} = \gamma(1;0;-1)$. U holda uchinchi xos vektor

$$\vec{e}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}};0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

bo'ladi.

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vektorlar o'zaro ortogonal (buni tekshirishni o'quvchiga havola qilamiz).

Demak, berilgan tenglamani kanonik ko'rinishga olib keluvchi chiziqli almashtirish

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{3}}y' + \frac{1}{\sqrt{6}}z', \\ y = -\frac{1}{\sqrt{3}}y' + \frac{2}{\sqrt{6}}z', \\ z = -\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{3}}y' + \frac{1}{\sqrt{6}}z' \end{cases}$$

bo'lar ekan. Bu almashtirishdan so'ng berilgan tenglama

$$6x'^2 + 3y'^2 - 2z'^2 - 6 = 0 \quad \text{yoki} \quad \frac{x'^2}{1} + \frac{y'^2}{2} - \frac{z'^2}{3} = 1$$

ko'rinishga keladi. Demak, berilgan sirt bir pallali giperboloid ekan.

5 – BOB

O'ZGARUVCHI VA O'ZGARMAS MIQDORLAR

1-§. Umumiy tushunchalar.

1.1.O'zgaruvchi va o'zgarmas miqdorlar, to'plamlar. Tabiat, fan va texnika masalalarida bir miqdorning ikkinchi miqdorga bog'liq ravishda o'zgarishini ko'p kuzatamiz. Shu sababli o'zgaruvchi miqdor tushunchasi matematikada asosiy tushunchalardan hisoblanadi.

O'zgaruvchi miqdor deb, tekshirilayotgan masaladagi kamida ikkita qiymat qabul qiluvchi miqdorga aytamiz . Ko'rilayotgan masaladagi miqdor faqat bitta qiymat qabul qilsa, u holda bu miqdorni o'zgarmas miqdor deb ataymiz.

Agar o'zgaruvchi miqdorning barcha qiymatlarini jamlaşak, o'zgaruvchi miqdorning qiymatlari to'plamini hosil qilamiz. Bu to'plamga kiruvchi qiymatlarni to'plamning elementlari, deb ataymiz.

To'plamlar bosh harflar $A,B,C,...,$ $X,Y,...,$ bilan, ularning elementlari esa kichik harflar $a,b,c,...,$ $x,y,...,$ bilan belgilanadi.

Agar x element A to'plamga tegishli bo'lsa, uni $x \in A$ ko'rinishda belgilaymiz, agar tegishli bo'lmasa, u holda $x \notin A$, deb belgilaymiz.

Agar A to'plamning barcha elementlari B to'plamga ham tegishli bo'lsa, uni $A \subset B$ deb yozamiz, va A to'plam B to'plamning qism to'plami, deb ataymiz.

$A \subset B$ belgi bilan bir qatorda unga tengkuchli bo'lgan $B \supset A$ belgilashni ham ishlatamiz.

Agar to'plam birorta ham elementga ega bo'lmasa, u holda bu to'plamni bo'sh to'plam, deb ataymiz va $A = \varnothing$ ko'rinishda belgilaymiz.

A va B to'plamlar teng, ya'ni $A=B$ deymiz, agar $A \subset B$ va $B \subset A$ bo'lsa.

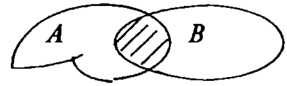
Kelgusida biz faqat sonli to'plamlar, ya'ni elementlari sonlar bo'lgan to'plamlar bilan ishlaymiz.

To'plamlar uchun, sonlar uchun bajariladigan qo'shish, ayirish va ko'paytirish amallarining barcha xossalariga ega bo'lgan arifmetik amallarni kiritish mumkin.

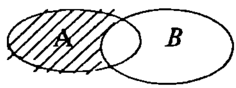
Ixtiyoriy A va B to'plamlarning yig'indisi deb , A va B to'plamlarning elementlaridan tuzilgan C to'plamga aytamiz (qarang 57-rasm). Bu yig'indini $C=A+B$ yoki $C=A \cup B$ ko'rinishda yozish qabul qilingan; xususan $A+A=A$.

A va B to'plamlarning ko'paytmasi yoki kesishmasi deb bir vaqtda ham A ga ham B to'plamga tegishli bo'lgan elementlar to'plamiga aytamiz va AB yoki $A \cap B$ ko'rinishda belgilaymiz (58-rasmga qarang). Xususan, $A \cap A = A$.

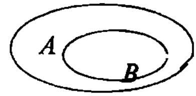
57-rasm.



58-rasm.



59-rasm.



60 -rasm.

Agar $AB=\varnothing$ bo'lsa, A va B to'plamlar kesishmaydi, deymiz. Yuqorida kiritilgan amallar uchun quyidagi xossalar o'rinli: 1) $A+B=B+A$, 2) $(A+B)C=AC+BC$, 3) $(AB)C=A(BC)$, 4) $(A+B)+C=A+(B+C)$. Bu xossalarning 2) sini isbotlaymiz , qolganlari shu tariqa isbot qilinadi. Agar $x\in(A+B)C$ bo'lsa, ko'paytmaning ta'rifiga ko'ra, $x\in A+B$ va $x\in C$ bo'ladi. Yig'indining ta'rifiga ko'ra , $x\in A$ yoki $x\in B$ bo'ladi, masalan $x\in A$ bo'lsin. U holda $x\in AC$ va demak, $x\in AC+BC$. Bundan $(A+B)C\subset AC+BC$. Endi agar $x\in AC+BC$ bo'lsa, u holda yo $x\in AC$ yoki $x\in BC$ bo'ladi, masalan $x\in AC$ bo'lsin. Bundan $x\in A$ va $x\in C$, bulardan esa, $x\in A+B$ va $x\in C$ yoki $x\in$ $(A+B)C$ kelib chiqadi. Demak, $AC+BC\subset(A+B)C$. To'plamlarning tenglik ta'rifidan $(A+B)C=AC+BC$ ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

A va B to'plamlarning ayirmasi deb, A to'plamning B to'plamga kirmagan elementlari to'plamiga aytamiz , bu to'plamni $A\backslash B$ ko'rinishda belgilaymiz (59-rasmga qarang). Umuman, $(A\backslash B)+B\neq A,$ lekin , agar $B\subset A$ bo'lsa, $(A\backslash B)+B=A$ bo'ladi.

1.2. Kesma, interval, chegaralangan to'plam. Faraz qilaylik, a va b sonlar uchun $a<b$ munosabat o'rinli bo'lsin.

Kesma yoki segment deb, $a\le x\le b$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi barcha x lar to'plamiga aytamiz. Bu to'plam $[a,b]$ ko'rinishda belgilanadi.

$a<x<b$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi x lar to'plamini interval, deb atab, $]a,b[$ ko'rinishda belgilaymiz.

$a\le x<b$ va $a<x\le b$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi x lar to'plamini esa, mos ravishda $[a,b),(a,b]$ ko'rinishda belgilab, yarimochiq kesmalar yoki yarimintervallar, deb ataymiz.

Ko'pincha cheksiz va yarimcheksiz intervallar deb ataluvchi $(-\infty,\infty),(-\infty,a],(-\infty,a),(a,\infty),[a,\infty)$ to'plamlar ham ishlatiladi.

Agar a va $b, a<b$ lar chekli bo'lsa, $b-a$ ni $[a,b]$, $(a,b),(a,b],[a,b)$ kesmalarning uzunligi, deb ataymiz.

c ($a< c< b$) nuqtani o'z ichiga olgan har qanday (a,b) interval c nuqtaning atrofi, deyiladi. Xususan, $(c-\varepsilon,c+\varepsilon)$ interval c nuqtaning ε-atrofi, deb ataladi.

Faraz qilaylik, $X=\{x\}$ haqiqiy sonlarning ixtiyoriy to'plami bo'lsin. Agar shunday haqiqiy M son mavjud bo'lsaki, X to'plamning barcha x elementlari uchun $x\le M$ munosabat o'rinli bo'lsa, X to'plam yuqoridan chegaralangan, agar m son mavjud bo'lib, barcha x lar uchun $x\ge m$ munosabat o'rinli bo'lsa, u holda X to'plam quyidan chegaralangan, va nihoyat, agar X to'plam ham yuqoridan, ham quyidan chegaralangan bo'lsa, uni chegaralangan, deb atash qabul qilingan.

Agar to'plam chegaralangan bo'lmasa, u holda uni chegaralanmagan to'plam deymiz. Buni yana quyidagicha ta'riflash mumkin: agar har qanday $M>0$ son uchun X to'plamning shunday x_0 elementi mavjud bo'lsaki, uning uchun $|x_0|>M$ munosabat o'rinli bo'lsa, X to'plamni chegaralanmagan to'plam, deb ataymiz.

1.3. Sanoqli to'plam. Agar har qanday $n\in N$ uchun X to'plamda n tadan oshiq element mavjud bo'lsa, X to'plam cheksiz to'plam, deyiladi. Agar A ning har qanday a elementiga B to'plamning biror b elementini mos qo'yuvchi o'zaro bir qiymatli moslik mavjud bo'lsa, A va B to'plamlar ekvivalent deyiladi, ya'ni ikkita har xil $a_1,a_2\in A$ elementlarga ikkita har xil $b_1,b_2\in B$ elementlar mos keladi va har bir $b\in B$ elementga biror $a\in A$ element mos keladi. Buni $A\sim B$ ko'rinishda belgilaymiz.

Masalan, agar A r radiusli aylananing nuqtalari to'plami, B $R>r$ radiusli kontsentrik aylananing nuqtalari to'plami bo'lsa, u holda $A\sim B$ bo'ladi.

Agar $X=\{x\}\sim N=\{n\}$ bo'lsa, X to'plam sanoqli, deyiladi. Masalan, barcha juft natural sonlar to'plami sanoqli, chunki buning uchun har bir juft natural sonni $2n$ ko'rinishda yozib $2n\leftrightarrow n$ moslik o'rnatish kifoya.

Ta'rifdan ko'rinadiki, sanoqli X to'plamning elementlarini tartiblash mumkin, ya'ni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin

$$X=\{x_1,x_2,\dots,x_n,\dots\}.$$

1-teorema. Sanoqli yoki chekli E^k to'plamlarning sanoqli yig'indisi sanoqli to'plamdir.

Isboti. E^k to'plamning elementlari $x^k{}_j,\ j=1,2,\dots,$ bo'lsa, ularni quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$E^1 = \{x^1{}_1, x^1{}_2, x^1{}_3, \ldots\}$$
$$E^2 = \{x^2{}_1, x^2{}_2, x^2{}_3, \ldots\}$$
$$E^3 = \{x^3{}_1, x^3{}_2, x^3{}_3, \ldots\}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Bularni quyidagi tartibda yozib chiqamiz:

$$x^1{}_1, x^1{}_2, x^2{}_1, x^1{}_3, x^2{}_2. x^3{}_1, x^1{}_4, \ldots\ldots,$$

natijada $\{y_1, y_2, y_3, \ldots\}$ to'plamni hosil qilamiz.

Natija. Sanoqli yoki chekli E^k to'plamlarning chekli yig'indisi, agar ularning orasida kamida bittasi sanoqli bo'lsa, sanoqlidir.

2-teorema. Ratsional sonlar to'plami sanoqlidir.

Isboti. Avval musbat ratsional sonlarni ko'rib chiqamiz $Q_+ = \left\{\frac{p}{q}\right\}$. $p+q$ natural sonni p/q sonning ko'rsatkichi, deb ataymiz. Faraz qilaylik, A_n ko'rsatkichi n bo'lgan ratsional sonlar to'plami bo'lsin. A_n to'plamlar chekli sondagi elementlardan tuzilgan, masalan

$$A_1 = 0, A_2 = \left\{\frac{1}{1}\right\}, A_3 = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{1}\right\}, A_4 = \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}\right\}, \ldots\ldots$$

Ko'rinib turibdiki, $Q_+ = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Agar qavs ichidagi elementlarni 1-teoremada bajarilgan tartibda belgilab chiqsak,

$$r_1 = 1, r_2 = \frac{1}{2}, r_3 = 2, r_4 = \frac{1}{3}, r_5 = 3, \ldots\ldots$$

ketma-ketlikni hosil qilamiz, bu yerda qayta takrorlangan sonlar, masalan 2 tashlab yuborildi. Demak, Q_+ sanoqli ekan. $Q_- = \left\{-\frac{p}{q}\right\}$ to'plamning sanoqli ekanligi xuddi shu kabi isbot qilinadi. Shu sababli, barcha ratsional sonlar to'plami $Q = Q_+ \cup Q_- \cup \{0\}$ ham sanoqlidir.

3-teorema. Barcha haqiqiy sonlar to'plami sanoqli emas.

Bu teoremani isbotsiz keltiramiz.

2-§. Ketma-ketlikning limiti.

2.1. Ketma-ketlikning limiti tushunchasi.

Sanoqli $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots\}$ to'plamni ketma-ketlik, deb ataymiz. Ketma-ketlik $\{x_n\}$ ko'rinishda ham yoziladi, bu yerda x_n ketma-ketlikning n- hadi, deb ataladi.

Misollar:

1) $\left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$,

2) $\{2^{(-1)^n}\}=\left\{\frac{1}{2},2,\frac{1}{2},2,\ldots\right\}$,

3) $\{n^{(-1)^n}\}=\left\{1,2,\frac{1}{3},4,\frac{1}{5},\ldots\right\}$,

4) $\left\{\frac{n-1}{n}\right\}=\left\{0,\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\ldots\right\}$,

5) $\{n^2+1\}=\{2,5,10,\ldots\}$,

6) $\{(-1)^n n\}=\{-1,2,-3,4,\ldots\}$

1-, 2- va 4-misollardagi ketma-ketliklar chegaralangan, 3-,5- va 6-misollardagi ketma-ketliklar esa chegaralanmagandir. Shunday bo'lsa ham, 3-misoldagi ketma-ketlik quyidan 0 soni bilan , 5-misoldagi ketma-ketlik esa quyidan 2 soni bilan chegaralangan.

2-misoldagi ketma-ketlikda juft hadlari takrorlangan, ya'ni $x_2=x_4=x_6=\ldots.=2$. To'plamlarda bunday elementlar bir marta olinar edi, ketma-ketliklarda esa bu elementlar har xil, deb tushuniladi.

Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning barcha hadlari bitta songa teng bo'lsa, bu ketma-ketlikni o'zgarmas deymiz.

Ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun shunday $n_0=n_0(\varepsilon)$ son topilsaki, barcha natural $n>n_0$ sonlar uchun

$$|x_n-a|<\varepsilon \qquad (1)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, a son $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti deb ataladi.

Buni

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim x_n=a \quad \text{yoki} \quad x_n\to a$$

ko'rinishda belgilab, $\{x_n\}$ ketma-ketlik a limitga intiladi yoki yaqinlashadi, deymiz.

O'zgarmasni limiti o'ziga teng. Haqiqatan, agar $\lim x_n=a$ bo'lsa, u holda $\lim x_{n+1}=a$ bo'ladi, chunki agar $n>n_0$ lar uchun $|x_n-a|<\varepsilon$ bo'lsa, $n>n_0-1$ lar uchun $|x_{n+1}-a|<\varepsilon$ bo'ladi.

1-misoldagi ketma-ketlikning limiti 0 ga teng. Haqiqatan, ta'rifga ko'ra, ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun $\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$ bo'lishi kerak, bu tengsizlikni echaylik. Bundan, $\frac{1}{\varepsilon}<n$. Agar $n_0=n_0(\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}$ desak, u holda barcha $n>n_0$ lar uchun $\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$ bo'ladi.

4-misoldagi ketma-ketlikning limiti 1 ga teng. Bunga ishonch hosil qilish uchun

$$\left|1-\frac{n-1}{n}\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon$$

tengsizlikni echish kifoya. Yuqorida bu tengsizlik har qanday $\varepsilon>0$ uchun $n>n_0=n_0(\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}$ bo'lganda bajarilishini ko'rsatgan edik. Bu

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}=1$$

ekanligini bildiradi.

Misol. Agar $|q|<1$ bo'lsa, u holda

$$\lim_{n\to\infty}q^n=0. \tag{2}$$

Haqiqatan, agar $q\neq 0$ bo'lsa, u holda

$$|q^n-0|=|q^n|<\varepsilon$$

tengsizlik

$$n\lg|q|<\lg\varepsilon,$$

bo'lganda, ya'ni

$$n>\frac{\lg\varepsilon}{\lg|q|}=n_0(\varepsilon)$$

bo'lganda o'rinli bo'ladi. Endi, agar $q=0$ bo'lsa, q^n larning barchasi nollardan iborat bo'ladi , uning limiti esa 0 ga teng.

Ixtiyoriy haqiqiy a sonni qaraylik. Ma'lumki, har qanday haqiqiy sonni cheksiz o'nli kasrga yoyish mumkin:

$$a=a_0,a_1a_2a_3...a_n....$$

Agar

$$a^{(n)}=a_0,a_1a_2a_3....a_n$$

desak, u holda

$$\lim_{n\to\infty}a^{(n)}=a \tag{3}$$

bo'ladi.

Haqiqatan,

$$\left|a-a^{(n)}\right|=0,\underbrace{0...0}_{n}a_{n+1}a_{n+2}...\leq 10^{-n}$$

bo'lgani uchun, yuqorida ko'rilgan misolga ko'ra, agar $q=10^{-1}$ desak, har qanday $\varepsilon>0$ uchun shunday n_0 topiladiki, $n>n_0$ lar uchun

$$\left|a-a^{(n)}\right|<\varepsilon$$

o'rinli bo'ladi.

Bundan, har qanday haqiqiy son biror ratsional sonlar ketma-ketligining limiti bo'ladi degan xulosa kelib chiqadi. Xususan, har qanday irratsional sonni etarlicha aniqlikda ratsional son bilan yaqinlashtirish mumkin. Shu sababli, ratsional sonlar to'plami Q barcha haqiqiy sonlar to'plami R da zich joylashgan, deyiladi.

Limitni ta'rifidagi (1) tengsizlik quyidagi ikki tengsizlikka

$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \quad \text{yoki} \quad a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon$$

teng kuchli. Bundan, $n > n_0$ lar uchun $x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ bo'lishligi, ya'ni a ning ε - atrofiga tegishli bo'lishligi kelib chiqadi.

U holda limitni quyidagicha ta'riflasa ham bo'ladi:

a son x_n ketma-ketlikning limiti bo'ladi, agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday n_0 son topilsaki, $n > n_0$ indekslar uchun x_n hadlar a ning ε - atrofiga tegishli bo'lsa. Demak, xulosa qilib aytganda, a son x_n ketma-ketlikning limiti bo'lishi uchun, a ning biror ε - atrofida ketma-ketlikning cheksiz ko'p elementi yotib, tashqarisida chekli sondagi elementi qolishi kerak ekan.

Misol . Quyidagi

$$\{(-1)^{n+1}\} = \{1,-1,1,-1,\ldots\} \tag{4}$$

ketma-ketlik limitga ega emas.

Haqiqatan, teskarisini faraz qilaylik, ya'ni ketma-ketlik a limitga ega bo'lsin. Bu nuqtaning $\frac{1}{3}$ - atrofini ko'raylik. Bu oraliq bir vaqtda ham 1 ni ham -1 ni o'z ichiga olmaydi, chunki oraliq uzunligi $\frac{2}{3}$, -1 va 1 sonlar orasidagi masofa esa 2 ga teng, ya'ni atrof tashqarisida (4) ning cheksiz ko'p elementi qolyapti, bu esa yuqoridagi limit haqidagi xulosamizga zid. Bu ziddiyat a (4) ning limiti bo'laolmasligini bildiradi, a ixtiyoriy son bo'lgani uchun bundan (4) birorta ham limitga ega emasligi kelib chiqadi.

Ketma-ketlik limiti quyidagi xossalarga ega.

1-xossa. Agar ketma-ketlikning limiti mavjud bo'lsa, u yagona bo'ladi.

Isboti. Teskarisini faraz qilaylik, ya'ni x_n ketma-ketlik a va $в$ har xil limitlarga ega bo'lsin. U holda limitning ta'rifiga ko'ra, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $n_1(\varepsilon)$ va $n_2(\varepsilon)$ sonlar topiladiki, $n > n_1(\varepsilon)$ va $n > n_2(\varepsilon)$ bo'lganda mos ravishda $|x_n - a| < \varepsilon$ va $|x_n - в| < \varepsilon$ bo'ladi. Agar $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ desak, $n > n_0$ lar uchun

$$|a - в| = |x_n - в + a - x_n| \le |x_n - a| + |x_n - в| < 2\varepsilon$$

bo'ladi, ε ixtiyoriy kichik son bo'lgani uchun bu tengsizlik $a = в$ bo'lgandagina o'rinli bo'lishi mumkin.

2-xossa. Chekli limitga ega bo'lgan ketma-ketlik chegaralangan bo'ladi.

Isboti. Agar x_n ketma-ketlik a chekli limitga ega bo'lsa, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $n_0(\varepsilon)$ son topiladiki, $n>n_0$ lar uchun $|x_n - a|<\varepsilon$ va o'z navbatida $|x_n|-|a| \le |x_n - a|<\varepsilon$ yoki $|x_n| \le |a|+\varepsilon$ bo'ladi. Agar

$$M = max\{|x_1|,|x_2|,...,|x_n|,|a| + \varepsilon\}$$

desak, barcha natural n lar uchun $|x_n| \le M$ munosabat o'rinli bo'ladi. Bu $\{x_n\}$ ketma-ketlik chegaralanganligini ko'rsatadi.

3-xossa. Noldan farqli a' limitga ega bo'lgan $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun shunday n_0 topiladiki, $n>n_0$ lar uchun $|x_n|>|a|/2$ munosabat o'rinlidir. Agar $a>0$ bo'lsa, ko'rsatilgan n lar uchun $x_n>a/2$, va agar $a<0$ bo'lsa, $x_n<a/2$ bo'ladi,ya'ni x_n ketma-ketlik hadlari biror nomerdan boshlab, a ning ishorasini takrorlaydi.

Isboti. Agar $x_n \to a \neq 0$ bo'lsa, u holda $\varepsilon=|a|/2$ uchun shunday n_0 topiladiki, $n>n_0$ lar uchun

$$|a|/2 > |a - x_n| \ge |a| - |x_n|$$

yoki $|x_n|>|a|-|a|/2 = \dfrac{|a|}{2}$ bo'ladi. Endi yuqoridagi tengsizlikni quyidagicha yozib olamiz

$$a-|a|/2 < x_n < a+|a|/2 .$$

Agar $a>0$ bo'lsa, u holda bundan $x_n>a-|a|/2=\dfrac{a}{2}$, va agar $a<0$ bo'lsa, $x_n<a+|a|/2= a- \dfrac{a}{2}=\dfrac{a}{2}$ kelib chiqadi.

4-xossa. Agar $x_n \to a$, $y_n \to b$ va barcha natural n lar uchun $x_n \le y_n$ bo'lsa, u holda $a \le b$ bo'ladi.

Isboti. Teskarisini faraz qilaylik , ya'ni $b<a$ bo'lsin. Berilgan $0< \varepsilon < (a-в)/2$ uchun shchunday n_1 va n_2 larni tanlash mumkinki, $n>n_1$ lar uchun $a-\varepsilon < x_n$, va $n>n_2$ lar uchun $y_n< b+ \varepsilon$ bo'ladi. Endi agar $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ desak, u holda $n >n_0$ lar uchun $y_n< b+ \varepsilon < < a-\varepsilon < x_n$ bo'ladi. Ziddiyatga keldik, bu qilgan farazimiz xato ekanligini bildiradi.

5-xossa. Agar c ga yaqinlashuvchi $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun shunday n_0 mavjud bo'lsaki, $n >n_0$ lar uchun $x_n \in [a,b]$ bo'lsa, u holda c $\in [a,b]$ bo'ladi.

Isboti. Shartga ko'ra, $a \le x_n \le b$. Bu tengsizliklardan c ni ayiramiz: $a-c \le x_n - c \le b-c$. Bu yerda $c<a$ bo'lmaydi, chunki aks holda c ning shunday ε-atrofi mavjudki, u berilgan ketma-ketlikning cheksiz ko'p x_n elementlarini o'z ichiga olib, ular uchun $x_n \le c+\varepsilon < a$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bunday bo'lishi mumkin emas, chunki shartga ko'ra tanlangan n lar uchun $a \le x_n$.

$b <$ c ham bo'laolmaydi, chunki aks holda shunday $\varepsilon>0$ son mavjudki, $b <$ c-ε bo'ladi. Shu ε son uchun shunday n_0 mavjudki, $n > n_0$ lar uchun $b < c-\varepsilon \le x_n$ bo'ladi. Buni bo'lishi mumkin emas, chunki shartga ko'ra $x_n \le b$. Demak, $a \le c \le b$.

Eslatma. Agar xossaning biror sharti buzilsa, u holda xossa o'rinli bo'lmasligi mumkin, masalan, $x_n = \frac{1}{n+1} \in (0,1)$, lekin $c=0 \in [0,1]$.

6-xossa. Agar barcha natural n lar uchun $x_n \le y_n \le z_n$ bo'lib, x_n va z_n ketma-ketliklar bir xil a limitga intilsa, u holda y_n ketma-ketlik ham shu limitga intiladi.

Isboti. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday n_1 va n_2 sonlar topiladiki, $n > n_1$ lar uchun $a-\varepsilon < x_n$ va $n > n_2$ lar uchun $z_n < a+\varepsilon$ bo'ladi. Agar $n_0 = max\{n_1, n_2\}$ desak, $n > n_0$ bo'lganda, $a-\varepsilon < x_n \le y_n \le z_n < a+\varepsilon$, bundan esa $|y_n - a| < \varepsilon$ ekanligi kelib chiqadi.

7-xossa. Agar $x_n \to a$ bo'lsa, u holda $|x_n| \to |a|$ bo'ladi.

Buni isboti $\big||x_n| - |a|\big| \le |x_n - a|$ tengsizlikdan kelib chiqadi.

2.2. Limitga ega bo'lgan o'zgaruvchilar ustida arifmetik amallar. Berilgan $\{x_n\}, \{y_n\}$ ketma-ketliklar mos ravishda chekli a va b limitlarga ega bo'lsin, deb faraz qilaylik.

1^0. $\lim(x_n \pm y_n) = \lim x_n \pm \lim y_n$

2^0. $\lim(x_n y_n) = \lim x_n \cdot \lim y_n$

3^0. agar $\lim y_n \ne 0$ bo'lsa, $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim x_n}{\lim y_n}$.

Isbotlari. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun n_0 sonni shunday tanlaymizki, $n > n_0$ lar uchun

$$|x_n - a| < \varepsilon/2 \ , \ |y_n - b| < \varepsilon/2$$

bo'lsin. U holda $n > n_0$ lar uchun

$$|(x_n \pm y_n) - (a \pm b)| \le |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

bo'ladi. Bu 1^0 ni o'rinli ekanligini ko'rsatadi. Endi 2^0 ni isbotlash uchun quyidagi munosabatni ko'raylik:

$$|x_n y_n - ab| = |x_n y_n - ay_n + ay_n - ab| \le |x_n y_n - ay_n| + |ay_n - ab| =$$
$$= |y_n||x_n - a| + |a||y_n - b|. \qquad (5)$$

2-xossaga ko'ra, y_n ketma-ketlik limitga ega bo'lgani uchun chegaralgan, ya'ni shunday $M > 0$ son mavjudki,

$$|y_n| \le M, \quad n = 1,2,..., \qquad (6)$$

$$|a| \le M \qquad (7)$$

Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun n_0 sonni shunday tanlaymizki, $n > n_0$ lar uchun

$$|x_n - a| < \varepsilon / 2M, \quad |y_n - b| < \varepsilon / 2M$$

bo'lsin. U holda $n > n_0$ lar uchun

$$|x_n y_n - ab| < \frac{M\varepsilon}{2M} + \frac{M\varepsilon}{2M} = \varepsilon.$$

Faraz qilaylik, $b \neq 0$ bo'lsin. U holda

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{x_n b - y_n a}{y_n b}\right| = \frac{|(x_n - a)b + (b - y_n)a|}{|y_n||b|} \le$$

$$\le \frac{|x_n - a|}{|y_n|} + \frac{|b - y_n||a|}{|y_n||b|}. \qquad (8)$$

Endi 3-xossaga ko'ra, yetarlicha katta n_1 uchun $n > n_1$ bo'lganda

$$|y_n| > |b|/2 \qquad (9)$$

bo'ladi. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun n_2 va n_3 sonlarni shunday tanlaymizki, $n > n_2$ bo'lganda

$$|x_n - a| < \varepsilon |b|/4 \qquad (10)$$

va $n > n_3$ bo'lganda

$$|a||y_n - b| < \varepsilon b^2/4 \qquad (11)$$

bo'lsin. U holda, agar $n_0 = max\{n_1, n_2, n_3\}$ desak, $n > n_0$ bo'lganda, (8)-(11) tengsizliklarga ko'ra

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| < \frac{\varepsilon \cdot |b|}{4} \cdot \frac{2}{|b|} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

bo'ladi.

2.3. Cheksiz kichik va cheksiz katta miqdorlar.

1-ta'rif. Limiti nolga teng bo'lgan har qanday ketma-ketlik cheksiz kichik miqdor, deyiladi.

Demak, agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday n_0 topilsaki, $n > n_0$ lar uchun $|\alpha_n| < \varepsilon$ bo'lsa, α_n ketma-ketlik cheksiz miqdor bo'lar ekan.

Bundan, x_n ketma-ketlik a limitga ega bo'lishi uchun u $x_n = a + \alpha_n$, bu yerda α_n cheksiz kichik miqdor, bo'lishi zarur va yetarli ekanligi kelib chiqadi.

2-ta'rif. Agar har qanday $M>0$ uchun shunday n_0 topilsaki, $n>n_0$ lar uchun $|\beta_n|>M$ bo'lsa, β_n ketma-ketlikni cheksiz katta miqdor, deymiz. Buni

$$\lim \beta_n = \infty \quad \text{yoki} \quad \beta_n \to \infty \tag{12}$$

ko'rinishda yozib, β_n cheksizlikka intilyapti, deb atash qabul qilingan.

Ayrim hollarda β_n ning ishorasiga qarab, uni

$$\lim \beta_n = +\infty \quad , \quad \beta_n \to +\infty \tag{13}$$

yoki

$$\lim \beta_n = -\infty \quad , \quad \beta_n \to \infty \tag{14}$$

ko'rinishda yozish mumkin. Lekin, $\{(-1)^n n\}$ ketma-ketlik misolida (12) ko'rinishda ifodalanishi mumkin bo'lgan ketma-ketlikni na (13) ko'rinishda, na (14) ko'rinishda ifodalab bo'lmasligini ko'rish mumkin.

1-xossa. Agar α_n chegaralangan va β_n cheksiz katta miqdorlar bo'lsa, u holda $\alpha_n/\beta_n \to 0$ bo'ladi.

Isboti. Shartga ko'ra, α_n chegaralangan miqdor bo'lgani uchun , shunday $M_1>0$ son mavjudki, $|\alpha_n|<M_1$, va

β_n cheksiz katta miqdor bo'lgani uchun, ixtiyoriy $M_2>0$ son uchun shunday n_0 topiladiki, $n>n_0$ lar uchun $|\beta_n|>M_2$ bo'ladi. U holda $n>n_0$ lar uchun

$$\left|\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right| = \frac{|\alpha_n|}{|\beta_n|} < \frac{M_1}{M_2} = \varepsilon$$

bo'ladi. M_2 ixtiyoriy katta son bo'lib, n_0 unga bog'liq holda topilgani uchun, ε ixtiyoriy kichik bo'lib, n_0 ε ga bog'liq bo'ladi.

Natija. Agar α_n cheksiz katta miqdor bo'lsa, u holda $\beta_n = 1/\alpha_n$ cheksiz kichik miqdor bo'ladi.

2-xossa. Agar x_n quyidan musbat a son bilan chegaralangan va α_n noldan farqli cheksiz kichik miqdor bo'lsa, u holda $x_n/\alpha_n \to \infty$ bo'ladi.

Isboti. Shartga ko'ra, barcha natural n lar uchun $|x_n| = x_n > a > 0$ va ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun shunday n_0 topiladiki, $n>n_0$ lar uchun $|\alpha_n|<\varepsilon$ bo'ladi. U holda

$$\left|\frac{x_n}{y_n}\right| > \frac{a}{\varepsilon} = M$$

tengsizlik barcha $n>n_0$ lar uchun bajariladi.

Natija. Agar α_n cheksiz kichik miqdor bo'lsa, u holda $\beta_n = 1/\alpha_n$ cheksiz katta miqdor bo'ladi.

3-xossa. Cheksiz kichik miqdor α_n bilan chegaralangan x_n miqdor ko'paytmasi cheksiz kichik miqdordir.

Isboti. Haqiqatan, ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun shunday n_0 topiladiki, $n>n_0$ lar uchun $|\alpha_n| < \varepsilon/M$ bo'ladi, bu yerda barcha natural n lar uchun $|x_n| \le M$. U holda $n>n_0$ lar uchun

$$|\alpha_n x_n - 0| = |\alpha_n|\cdot|x_n| \le \frac{\varepsilon}{M}M = \varepsilon$$

bo'ladi.

2.4. Aniqmasliklar. Yuqorida keltirilgan xossalarning shartlari qanoatlanmaydigan barcha boshqa hollarda natijasi aniq xulosaga olib kelmaydigan quyidagi holatlar yuz beradi. Masalan,

agar $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1}{n}$, bo'lsa, $n\to\infty$ da $\frac{x_n}{y_n} = 1 \to 1$,

agar $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1}{n^2}$ bo'lsa, $n\to\infty$ da $\frac{x_n}{y_n} = n \to \infty$,

agar $x_n = \frac{1}{n^2}$, $y_n = \frac{1}{n}$ bo'lsa, $n\to\infty$ da $\frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{n} \to 0$,

agar $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $y_n = \frac{1}{n}$ bo'lsa, $\frac{x_n}{y_n} = (-1)^n$ bu ketma-ketlikning limiti mavjud emas. Demak, $x_n \to 0$, $y_n \to 0$ ekanligi x_n/y_n ifodaning natijasi to'g'risida aniq bir xulosa chiqarishga yetarli emas ekan. Shuning uchun x_n/y_n ifodani $x_n \to 0$, $y_n \to 0$ bo'lganda $\left(\frac{0}{0}\right)$ ko'rinishdagi aniqmaslik, deb atashadi.

Xuddi shunday, $x_n \to \infty$, $y_n \to \infty$ bo'lganda, x_n/y_n ifodani $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ ko'rinishdagi aniqmaslik, deb ataymiz.

Agar $x_n \to 0$, $y_n \to \infty$ bo'lsa, u holda $x_n y_n$ ifoda $(0\cdot\infty)$ ko'rinishdagi aniqmaslik, deyiladi.

Va nihoyat, agar $x_n \to +\infty, y_n \to -\infty$ bo'lsa, $x_n + y_n$ ifoda $(\infty-\infty)$ ko'rinishdagi aniqmaslik, deb ataladi.

Ayrim hollarda berilgan ifodalarni soddalashtirish hisobiga aniq bir natijaga kelish mumkin. Buni aniqmasliklarni ochish, deb ataymiz.

Aniqmasliklarni ochishga doir misollar ko'raylik.

1-misol. Agar

$$x_n = a_m n^m + ... + a_1 n + a_0,$$
$$y_n = b_\kappa n^\kappa + b_{\kappa-1} n^{k-1} + ... + b_1 n + b_0, \quad (a_m \neq 0, b_\kappa \neq 0),$$

bo'lsa, u holda ${x_n}/{y_n}$ ifoda $n \to \infty$ da $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ ko'rinishdagi aniqmasliklik bo'ladi.

1) Agar $\kappa = m$ bo'lsa, surat va mahrajni n^m ga bo'lamiz:

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{a_m + \frac{a_{m-1}}{n} + ... + \frac{a_0}{n^m}}{b_m + \frac{b_{m-1}}{n} + ... + \frac{b_0}{n^m}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{a_m}{b_m},$$

ya'ni $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a_m}{b_m}$.

2) Agar $m > \kappa$ bo'lsa, $\lim\limits_{n\to\infty}\left({x_n}/{y_n}\right) = \infty$, agar $m < \kappa$ bo'lsa, $\lim\limits_{n\to\infty}\left({x_n}/{y_n}\right) = 0$ bo'ladi.

2-misol. Agar $x_n = \sqrt{n+1}, y_n = \sqrt{n}$ bo'lsa, u holda $x_n - y_n$ ifoda $n \to \infty$ da $(\infty - \infty)$ ko'rinishdagi aniqmaslik bo'ladi. Bu aniqmaslik quyidagi tartibda ochiladi:

$$x_n - y_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} =$$
$$= \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \cdot (\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \to 0.$$

Demak, $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$.

2.5. Monoton ketma-ketliklar.

Ta'rif. $\{x_n\}$ kamaymaydigan (o'smaydigan) ketma-ketlik deyiladi, agar barcha $n \in N$ lar uchun

$$x_n \leq x_{n+1} \quad (x_n \geq x_{n+1})$$

tengsizliklar o'rinli bo'lsa.

Agar $x_n < x_{n+1}$ $(x_n > x_{n+1})$ qat'iy tengsizliklar o'rinli bo'lsa, u holda $\{x_n\}$ qat'iy o'suvchi (qat'iy kamayuvchi) yoki qisqacha o'suvchi (kamayuvchi) ketma-ketlik, deyiladi. O'suvchi va kamayuvchi, kamaymaydigan va o'smaydigan ketma-ketliklar monoton ketma-ketliklar, deb ataladi.

Monoton ketma-ketliklarning elementlarini quyidagi tartibga solish mumkin:

$$x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n \le x_{n+1} \le \ldots \quad \text{yoki} \quad x_1 \ge x_2 \ge \ldots \ge x_n \ge x_{n+1} \ge \ldots .$$

Bu tengsizliklardan ko'rinadiki, kamaymaydigan ketma-ketlik quyidan va o'smaydigan ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan bo'lar ekan.

Har qanday monoton ketma-ketlik ham chekli limitga ega bo'lavermaydi. Masalan, $\{n^2+1\}$ ketma-ketlik cheksiz monoton o'sadi, shu sababli uning limiti chekli bo'lmaydi.

Quyidagi Boltsano-Veyershtrass teoremasi bu savolga to'liq javob beradi.

Teorema. Kamaymaydigan (o'smaydigan) va yuqoridan M (quyidan m) soni bilan chegaralangan

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots \tag{15}$$

haqiqiy sonlar ketma-ketligi M dan katta (m dan kichik) bo'lmagan a limitga ega:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \le M \quad (\lim_{n\to\infty} x_n = a \ge m). \tag{16}$$

Isboti. (15) ketma-ketlikning barcha elementlarini chekli yoki cheksiz o'nli kasrlar bilan ifodalaymiz :

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{10}, x_{11}x_{12}\ldots x_{1\kappa}\ldots \\ x_2 &= x_{20}, x_{21}x_{22}\ldots x_{1\kappa}\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= x_{n0}, x_{n1}x_{n2}\ldots x_{n\kappa}\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . \end{aligned} \tag{17}$$

Ikki hol bo'lishi mumkin: $x_1 > 0$ yoki $x_1 \le 0$.

Faraz qilaylik, $x_1 > 0$ va (15) ketma-ketlik kamaymaydigan bo'lsin. U holda, barcha n lar uchun $x_n > 0$ bo'ladi.

Ketma-ketlik kamaymaydigan bo'lgani uchun (17) dagi kasrlarning butun qismlari uchun $x_{n0} \le x_{n+1,0} \le M$ munosabat o'rinli bo'ladi. M chekli son bo'lgani uchun x_{n0} sonlar orasida M dan oshib ketmaydigani bor. Faraz qilaylik, u $x_{n_1 0}$ bo'lsin, uni shartli ravishda a_0 bilan belgilaylik. Ma'lumki, $a_0 \le M$. (17) dagi kasrlarning verguldan keyingi birinchi raqamlari $n \ge n_1$ lar uchun $x_{n1} \le x_{n+1,1}$ munosabatda bo'ladilar. Tabiiyki, ularning orasida ham kattasi bor, faraz qilaylik, u $x_{n_2 1}$ bo'lsin, uni shartli ravishda a_1 bilan belgilaylik. Agar $n \ge n_2 > n_1$ bo'lsa, $a_0, a_1 \le x_n \le M$ bo'ladi. Endi matematik induktsiya usulini qo'llaymiz, ya'ni biror n_κ uchun $n \ge n_\kappa$ bo'lganda $a_0, a_1 a_2 \ldots a_{n_\kappa} \le x_n \le M$ bo'lsin, deb faraz qilaylik. $n \ge n_\kappa$ lar uchun $x_n = a_0, a_1 a_2 \ldots a_{n_\kappa} x_{n, n_\kappa+1} \ldots$ bo'lgani uchun, ularning verguldan keyingi $n_{\kappa+1}$-xonasidagi $x_{n, n_\kappa+1}$ raqamlarini solishtirib chiqamiz. $n \geq n_\kappa$ lar uchun $x_{n,n_{\kappa+1}} \leq x_{n+1,n_{\kappa+1}}$ munosabat o'rinli, ularning orasida eng kattasi mavjud, faraz qilaylik, u $x_{n_m,n_{\kappa+1}}$ bo'lsin, uni $a_{n_\kappa+1}$ bilan belgilaylik. Demak, $n \geq n_m$ lar uchun $a_0,a_1a_2...a_{n_\kappa}a_{n_\kappa+1} \leq x_n \leq M$. $a = a_0,a_1a_2...a_n...$, deb belgilaylik. U holda, $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ bo'lishini isbotlash qoldi.

Haqiqatan, yetarlicha katta n_0 uchun $x_n = a_0,a_1a_2...a_{n_0}x_{n,n_{0+1}}...$

U holda,

$$|a - x_n| = 0,\underbrace{00...0}_{n_0}\beta_{n_0+1}\beta_{n_0+2}... \leq 10^{-n_0}$$

Ma'lumki, ixtiyoriy $0 < \varepsilon$ uchun shunday n_1 topiladiki, $n > n_1$ lar uchun $10^{-n} < \varepsilon$ bo'ladi. Agar $n_2 = max\{n_0, n_1\}$ desak, $n > n_2$ lar uchun $|x_n - a| < \varepsilon$ bo'ladi.

Endi, agar $x_1 \leq 0$ bo'lsa, u holda unga shunday s sonni qo'shamizki, natijada $x_1 + c > 0$ bo'lsin. U holda $y_n = x_n + c$ ketma-ketlik uchun yuqorida isbotlanganiga ko'ra, b limit mavjud. Shu sababli, $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}(y_n - c) = b - c \leq M$.

Endi, agar berilgan ketma-ketlik o'smaydigan bo'lib, quyidan m son bilan chegaralangan bo'lsa, u holda $\{-x_n\}$ ketma-ketlik kamaymaydigan va yuqoridan m bilan chegaralangan ketma-ketlik bo'ladi. Isbotlanganiga ko'ra, bu ketma-ketlik uchun limit mavjud $\lim_{n\to\infty}(-x_n) = -a \leq -m$. Demak, $\lim_{n\to\infty} x_n = -\lim_{n\to\infty}(-x_n) = -(-a) = a \geq m$ ekan. Teorema isbot bo'ldi.

Misol. Ixtiyoriy a son uchun

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

Haqiqatan, agar $|a| \leq 1$ bo'lsa, bu tenglikni to'g'riligi ochiq ravshandir. Agar $a > 1$ bo'lsa, $u_n = \frac{a^n}{n!}$, deb belgilaymiz. U holda $n \to \infty$ da $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a}{n+1} \to 0$ bo'ladi. Bundan, yetarlicha katta n_0 uchun $\forall\ n > n_0$ larda $u_{n+1} < u_n$ bo'lishi kelib chiqadi, ya'ni u_n ketma-ketlik kamayuvchi va quyidan 0 soni bilan chegaralangan. U holda u_n ketma-ketlikning limiti mavjud:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = A \geq 0.$$

Xuddi shunday,

$$A = \lim_{n\to\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(u_n \cdot \frac{a}{n+1}\right) = A \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{n+1}\right) = A \cdot 0 = 0 .$$

Berilgan tenglik $a<0$ bo'lganda ham to'g'ri ekanligi $n\to\infty$ da $\left|\frac{a^n}{n!}\right|=\frac{|a|^n}{n!}\to 0$ bo'lishidan kelib chiqadi.

2.6. *e* soni. Natural logarifmlar.

$\{x_n\}=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ ketma-ketlikning o'suvchi va yuqoridan chegaralanganligini ko'rsataylik.

N'yuton binomiga asosan

$$(a+b)^n=\sum_{\kappa=0}^{n}\frac{n(n-1)..(n-\kappa+1)}{\kappa!}a^{n-\kappa}b^{\kappa}$$

U holda

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+$$

$$...+\frac{n(n-1)(n-2)...[n-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot ...\cdot n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^n \tag{18}$$

(18) ifodada algebraik almashtirishlardan so'ng

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+...$$

$$...+\frac{1}{1\cdot 2\cdot ...\cdot n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \tag{19}$$

Bu tenglikdan $x_n\geq 2$ ekanligi ko'rinib turibdi. Agar (19) da *n* ni *n+1* ga almashtirsak, (19) ga asosan

$$x_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=1+1+\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+...$$

$$...+\frac{1}{1\cdot 2\cdot ...\cdot n(n+1)}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)...\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$

hosil qilamiz. Bunda barcha k lar uchun $1-\frac{\kappa}{n}<1-\frac{\kappa}{n+1}$ ekanligini e'tiborga olsak, barcha natural n lar uchun $x_n\leq x_{n+1}$ bo'lishligiga ishonch hosil qilamiz. Agar barcha $\kappa=1,2,...,n-1$ uchun $\left(1-\frac{\kappa}{n}\right)<1$ va $\frac{1}{\kappa!}\leq\frac{1}{2^{\kappa-1}}$ ekanligini hisobga olsak,

$$x_n\leq 1+1+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}\leq 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{n-1}}\leq$$

$$\leq 1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{n-1}}+...\right)=1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=3. \tag{20}$$

Demak, $\{x_n\}$ ketma-ketlik monoton va yuqoridan 3 bilan chegaralangan ekan. U holda Veyershtrass teoremasiga ko'ra, bu ketma-ketlik chekli limitga ega. Bu limitni L.Eylerning taklifiga ko'ra e deb belgilash qabul qilingan. Yuqoridagi xulosalarga asosan $2 < e < 3$ bo'ladi. (20) ga asosan, bu limitni quyidagicha yozish mumkin

$$e=\sum_{\kappa=0}^{n}\frac{1}{\kappa!}+\frac{\theta}{n!} \quad (n>2)\,, \tag{21}$$

bu yerda θ- $0<\theta<1$ bo'lgan son.

Bundan e irratsional son va uning aniqroq qiymati e=2.7182818284... ga tengligi kelib chiqadi. Haqiqatan, teskarisini faraz qilaylik , ya'ni $e=p/q$ bo'lsin, bu yerda p , q lar natural sonlar. U holda (21) da $n=q$ desak,

$$\frac{p}{q}=\sum_{\kappa=0}^{q}\frac{1}{\kappa!}+\frac{\theta}{q!}\;.$$

Bu tenglikning ikkala tarafini q! ga ko'paytirsak va $l=q!\sum_{k=0}^{q}\frac{1}{k!}$ desak,

$$p(q-1)!-\ell=\theta\,, \tag{22}$$

kelib chiqadi. (22) ning chap tomoni butun son va o'ng tomoni oddiy kasr. Bu qarama-qarshilik qilgan farazimiz xato ekanligini ko'rsatadi.

Asosi e bo'lgan logarifmlar natural logarifmlar, deb ataladi, a ning natural logarifmi uchun $\ln a$ belgi qabul qilingan.O'nli va natural logarifmlar quyidagi munosabatlar bilan bog'langan

$$\lg N=M\ln N \tag{23}$$

$$\ln N=1/M\cdot\lg N \tag{24}$$

Bu yerda M natural logarifmlardan o'nli logarifmlarga o'tish moduli.

$$M=\lg e=\lg 2.718\approx 0.4343$$

$$1/M=\ln 10\approx 2.303$$

Shularga asosan (23) va (24) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$\lg N=0.4343\ln N \quad \ln N=2.303\lg N$$

Misol. Jadvaldan foydalanmasdan hisoblang.

$$\ln 100=\ln 10^2=2\ln 10=2\cdot 2{,}303=4.606$$

$$\ln 0{,}001=\ln 10^{-3}=-3\ln 10=-3\cdot 2{,}303=-6{,}909$$

$$\ln\sqrt{10}=\frac{1}{2}\ln 10=\frac{1}{2}\cdot 2{,}303=1{,}151.$$

2.7. Boltsano-Veyershtrass teoremasi.

Ta'rif. $[a,b]$ kesma $[a',b']$ kesmani qamraydi deymiz, agar

$$a\le a'< b'\le b$$

bo'lsa. Buni $[a,b]\subset[a',b']$ ko'rinishda yozamiz.

1-teorema. Agar $\sigma_n = [a_n, b_n]$ $(n = 1,2,3,...)$ lar uzunliklari nolga intiluvchi $d_n = b_n - a_n \to 0$ $(n \to \infty)$, bir-birini ichiga qamralgan kesmalar ketma-ketligi bo'lsa, ya'ni $n = 1,2,3....$ lar uchun $\sigma_{n+1} \subset \sigma_n$ bo'lsa, u holda barcha σ_n kesmalarga tegishli bo'lgan yagona c nuqta mavjud.

Isboti. Teorema shartiga ko'ra har qanday m uchun:

$$a_1 \le a_2 \le ... \le b_m \ .$$

Bundan ko'rinadiki, $\{a_n\}$ ketma-ketlik kamaymaydigan va yuqoridan har qanday m uchun b_m son bilan chegaralangan, shu sababli Veyershtrass teoremasiga ko'ra,u yagona $c \le$ b_m limitga ega. m ixtiyoriy son bo'lgani uchun, xususan $a_n \le c \le b_n$ munosabat ham o'rinli. Demak, barcha $n = 1,2,3....$ lar uchun $c \in \sigma_n$. Endi bunday nuqta yagona ekanligini isbotlaylik. Faraz qilaylik, bunday nuqtalar ikkita $c \ne c_1$ bo'lsin. U holda, $a_n \le c, c_1 \le b_n$ bo'lgani uchun, har qanday n uchun

$$b_n - a_n \ge |c - c_1| > 0$$

bo'ladi, bu $b_n - a_n \to 0$ shartga ziddir.

Bundan tashqari,

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} [(b_n - a_n) + a_n] = c.$$

Endi faraz qilaylik, bizga (15) ketma-ketlik berilgan bo'lsin. Uning ichidan tanlab yangi tuzilgan har qanday

$$x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, ..., x_{n_k}, ... \quad (n_1 < n_2 < n_3 < \ ... \ )$$

ketma-ketlik (15) ning xususiy ketma-ketligi deyiladi.

Agar (15) ketma-ketlik chekli yoki cheksiz limitga ega bo'lsa, uning har qanday xususiy ketma-ketligi ham shu limitga ega bo'ladi. (15) ning limitga ega emasligidan uning birorta ham xususiy ketma-ketligi limitga ega emasligi kelib chiqmaydi. Masalan,

$$1,-1,1,-1,...$$

ketma-ketlik limitga ega bo'lmasa ham, uning

$$1,1,1,...,1,... \quad \text{va} \quad -1,-1,...,-1,...$$

xususiy ketma-ketliklari mos ravishda 1 va -1 limitlarga ega.

Chegaralanmagan yoki $\pm\infty$ ga intiluvchi ketma-ketlikdan chekli limitga yaqinlashuvchi xususiy ketma-ketlikni har doim ham ajratib olib bo'lavermaydi. Lekin, agar ketma-ketlik chegaralangan bo'lsa, u holda bu muammoni quyidagi teorema hal kiladi.

2-teorema. (Boltsano-Veyershtrass) Har qanday chegaralangan (15) ketma-ketlikdan chekli limitga yaqinlashuvchi xususiy ketma-ketlik ajratib olish mumkin.

Isboti. (15) ketma-ketlik chegaralangan bo'lgani uchun uni barcha elementlarini o'z ichiga olgan $[a, b]$ kesma mavjud, bu yerda masalan, a

(15) ning quyi chegarasi va b uning yuqori chegarasi bo'ladi. Bu oraliqni teng ikkiga bo'lib, (15) ning cheksiz ko'p elementlarini qamragan qismini olamiz. Bunday qism mavjud, chunki aks holda (15) ning cheksiz ko'p elementlari $[a,b]$ dan tashqarida qolgan bo'ladi, buni esa bo'lishi mumkin emas. Agar ikkala qismi ham cheksiz ko'p elementlarni o'z ichiga olsa, u holda ularning ixtiyoriy bittasini olib, uni $[a_1,b_1]$ bilan belgilaymiz. Undan (15) ning biror x_{n_1} elementini tanlaylik va $[a_1,b_1]$ ni yana teng ikkiga bo'lib, undan (15) ning cheksiz ko'p elementlarini qamragan qismini olib, uni $[a_2,b_2]$ deb belgilaylik. Bu qismdan (15) ning x_{n_1} ga teng bo'lmagan boshqa x_{n_2} elementini olaylik. Bu protsessni cheksiz davom ettirsak, bir-birining ichiga qamralgan va uzunliklari

$$b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$$

nolga intiluvchi kesmalar va ulardan tanlab olingan $x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \dots, x_{n_k}, \dots$ xususiy ketma-ketlik hosil bo'ladi. U holda, 1-teoremaga va $a_k \le x_{n_k} \le b_k$ bo'lgani uchun 2.1. bo'limdagi ketma-ketliklarning 6-xossasiga ko'ra,shunday c nuqta mavjudki, $\lim\limits_{n_k \to \infty} x_{n_k} = c$ bo'ladi.

2.8. Chekli limitning mavjudlik sharti.

Faraz qilaylik, (15) ketma-ketlik chekli a limitga ega bo'lsin:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

ya'ni har qanday $\varepsilon > 0$ uchun shunday $n_0 = n_0(\varepsilon)$ son topilsinki, barcha $n > n_0$ lar uchun

$$|x_n - a| < \varepsilon/2$$

bo'lsin. U holda barcha $n, m > n_0$ lar uchun

$$|x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m| \le |x_n - a| + |x_m - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

bo'ladi, ya'ni chekli limitga yaqinlashuvchi har qanday x_n ketma-ketlik uchun Koshi sharti: har qanday $\varepsilon > 0$ uchun shunday $n_0 = n_0(\varepsilon)$ son topiladiki, $n, m > n_0$ lar uchun

$$|x_n - x_m| < \varepsilon \qquad (25)$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Koshi shartini qanoatlantiruvchi ketma-ketlik fundamental ketma-ketlik, deb ataladi.

Demak, chekli limitga ega bo'lgan ketma-ketlik fundamental ketma-ketlik bo'lar ekan. Bunga teskari bo'lgan xulosa ham o'rinli, ya'ni har qanday fundamental ketma-ketlik chekli limitga ega bo'ladi.

Haqiqatan, agar x_n fundamental ketma-ketlik bo'lsa, u holda u Koshi shartini qanoatlantiradi. (25) ni quyidagicha yozib olamiz:

$$|x_n|-|x_m| < |x_n - x_m| < \varepsilon$$

yoki

$$|x_n| \leq |x_m| + \varepsilon.$$

Agar

$$M = \max_{n \leq n_0} \{|x_n|, 1+|x_m|\}$$

desak, barcha $n \in \mathrm{N}$ lar uchun $|x_n| \leq M$ bo'ladi. U holda, Boltsano-Veyershtrass teoremasiga ko'ra, x_n ketma-ketlikdan biror chekli a limitga yaqinlashuvchi $\{x_{n_\kappa}\}$ xususiy ketma-ketlikni ajratib olish mumkin. a limitga x_n ketma-ketlik ham yaqinlashadi. Haqiqatan, Koshi shartiga ko'ra, har qanday $\varepsilon > 0$ uchun shunday $n_0 = n_0(\varepsilon)$ son topiladiki, $n, m > n_0$ lar uchun

$$|x_n - x_m| < \varepsilon/2 \tag{26}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. $\kappa \to \infty$ da $x_{n_\kappa} \to a$ bo'lgani uchun, shunday κ_0 ni topish mumkinki, barcha $\kappa > \kappa_0$ lar uchun

$$|x_{n_\kappa} - a| < \varepsilon/2$$

bo'ladi. Endi agar $\kappa \to \infty$ da $n_\kappa \to \infty$ bo'lishini e'tiborga olsak, shunday $\kappa_1 > \kappa_0$ topiladiki, $n_{\kappa_1} > n_0$ bo'ladi. U holda, (26) ga ko'ra barcha $n > n_0$ lar uchun

$$|x_n - a| = |x_n - x_{n_\kappa} + x_{n_\kappa} - a| \leq |x_n - x_{n_\kappa}| + |x_{n_\kappa} - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon .$$

Bundan a x_n ketma-ketlikning limiti ekanligi kelib chiqadi.

Yuqoridi isbot qilingan fikrlarni quyidagi teorema ko'rinishida ifodalaymiz.

3-teorema. (Limit mavjudligining Koshi sharti) Haqiqiy sonlar ketma-ketligi $\{x_n\}$ chekli limitga ega bo'lishi uchun uning fundamental ketma-ketlik bo'lishi zarur va yetarlidir.

6 - BOB

FUNKTSIYA. FUNKTSIYANING LIMITI.

1-§. Funktsiya tushunchasi.

Faraz qilaylik, bizga E, F to'plamlar va E ning har bir x elementiga F ning biror y elementini mos qo'yuvchi quyidagi f akslantirish berilgan bo'lsin:

$$f : E \to F \tag{1}$$

Agar $E \subset R_1$ va $F \subset R_1$ bo'lsa, f bir o'zgaruvchili funktsiya , agar $E \subset R^n, F \subset R_1$ bo'lsa, f ni ko'p o'zgaruvchili funktsiya va agar $E \subset R^n, F \subset R^n$ bo'lsa, f ni vektor funktsiya, deb ataymiz.

Funktsiyani $y = f(x)$ ko'rinishda ham yozish qabul qilingan. E to'plam f funktsiyaning aniqlanish yoki berilish sohasi, F esa f funktsiyaning qiymatlar sohasi, deyiladi. Aniqlanish sohasi uchun $D(f)$ va qiymatlar sohasi uchun $R(f)$ belgilashlar ishlatiladi. Agar $x \in E$ bo'lsa, u holda y yoki $f(x)$ funktsiyaning x nuqtadagi qiymatini bildiradi.

Agar x E to'plamning o'zgaruvchisi bo'lsa, x ni erkli o'zgaruvchi yoki argument, deb atashadi.

Funktsiyani belgilash uchun yana $\Phi, \Psi, \varphi, \phi, \psi, \ldots$ harflar, argumentni belgilash uchun $\theta, \tau, \omega, \xi, \zeta, \ldots$ harflar ishlatiladi.

Biz bu va keyingi uch bobda asosan bir o'zgaruvchili funktsiyalarni o'rganamiz.

Agar $f : E_1 \to E_2$ va $\varphi : E_2 \to E_3$ bo'lsa, u holda $z = \varphi(f(x))$ funktsiya murakkab funktsiya yoki f va φ funktsiyalarning superpozitsiyasi, deb ataladi. Murakkab funktsiya k ta funktsiya superpozitsiyasidan iborat bo'lishi mumkin:

$$z = f_1(f_2(\ldots(f_k(x))\ldots)).$$

Funktsiyalarga ko'p misollar keltirish mumkin. Masalan, r radiusli doira yuzi $S = \pi r^2$ r radiusning funktsiyasidir. Radius masofa sifatida faqat musbat qiymatlar qabul qilishi mumkin bo'lgani uchun , bu funktsiyaning aniqlanish sohasi $R_+ = (0, \infty)$ bo'ladi. Agar $S = \pi r^2$ formulani geometrik ma'nosisiz qarasak, u holda bu funktsiyaning aniqlanish sohasi R_1 bo'ladi.

Misollar:

1) $y = \sqrt{1 - x^2}$, $\quad D(f) = [-1, 1]$,

2) $y = \lg(1 + x)$, $\quad D(f) = (1, \infty)$,

3) $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$, $\qquad D(f)=R\setminus\{1\}$,

4) $y=arcSinx$, $\qquad D(f)=[-1,1]$.

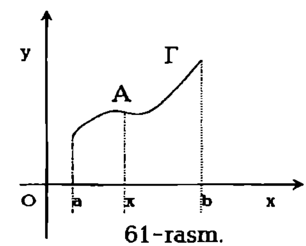
1) va 2) misollardagi funktsiyalar murakkab funktsiyalardir, chunki 1) funktsiya $y=\sqrt{u}, u=1-v, v=x^2$ funktsiyalarning, 2) funktsiya esa $y=\lg u, u=1+x$ funktsiyalarning superpozitsiyasidan iborat.

Funktsiya tushunchasi iqtisodiyotda ham keng qo'llaniladi. Masalan, talab, o'zlashtirish, taklif funktsiyalari yoki foydalilik funktsiyasi, maqsad funktsiya va h.z.

Keltirilgan misollarda funktsiya formulalar yordamida berilgan, bundan funktsiya faqat formulalar bilan berilar ekan degan xulosa kelib chiqmaydi. Masalan, x ning har bir qiymatiga uning butun qismini mos qo'yuvchi $E(x)$ funktsiyaning har bir qiymatini ko'rsataolsak ham: $E(1)=1, E(2{,}3)=2, E(\pi)=3$ va x.k., uni hech qanday formula bilan ifodalab bo'lmaydi.

$(x, f(x))$ juftlik tuzib olib, koordinatalar tekisligidan bu juftlikka koordinatalari x va $f(x)$ bo'lgan nuqtani mos qo'yamiz. Barcha $x\in D$ larga mos qo'yilgan bunday nuqtalarning geometrik o'rnini $f(x)$ funktsiyaning grafigi, deb ataymiz.

Funktsiyaning ko'p xususiyatlari: aniqlanish sohasi, o'sish va kamayish oraliqlari, uzulish nuqtalari atrofida va cheksizlikda o'zini tutishi, grafikda yaqqol ko'ringani uchun, funktsiyaning grafigini qurish va undan foydalanish amaliyotda juda muhim rol o'ynaydi.



61-rasm.

Ayrim hollarda, funktsiya grafik ko'rinishda berilishi ham mumkin. Masalan, seysmik izlanishlarda ishlatiladigan jihozlar seysmik o'zgarishlarni grafik ko'rinishda ifodalaydi yoki meditsinada ishlatiladigan kardiogramma asbobi yurak hurujini grafigini chizib beradi yoki texnikada keng qo'llaniladigan otsillograf asbobi ham bunga misol bo'ladi.

Agar $f(x)$ funktsiya biror (a,b) oraliqda berilgan bo'lib, $\alpha\neq 0$ ixtiyoriy o'zgarmas son bo'lsa, u holda α va f funktsiyalar yordamida: 1)$\alpha f(x)$, 2) $f(x)+\alpha$, 3) $f(x-\alpha)$,4) $f(\alpha x)$ funktsiyalarni tuzib olish mumkin. 1) va 2) funktsiyalar (a,b) oraliqda aniqlangan, lekin 1) funktsiyaning grafigini ordinatasi $f(x)$ ordinataga nisbatan α marotaba uzaytirilgan. 2) funktsiyaning grafigi, agar $\alpha>0$ bo'lsa, $f(x)$ funktsiyaning grafigini α miqdor tepaga, va agar $\alpha<0$ bo'lsa, $|\alpha|$ miqdor pastga surish natijasida hosil bo'ladi. 3) funktsiyaning grafigi esa, $f(x)$ funktsiyaning grafigini α miqdor o'ngga agar $\alpha>0$ bo'lsa,va agar $\alpha<0$ bo'lsa, shu grafikni $|\alpha|$ miqdor chapga surib hosil qilinadi. Va nihoyat, 4) funktsiya $a/_{\alpha}, b/_{\alpha}$ intervalda aniqlangan; uning grafigi f funktsiya grafigini α marotaba siqish natijasida hosil bo'ladi.

Agar f funktsiya nolga nisbatan simmetrik bo'lgan to'plamda aniqlangan bo'lsa, va shu to'plamning barcha nuqtalari uchun $f(-x)=f(x)$ yoki $f(-x)=-f(x)$ munosabat o'rinli bo'lsa, bu funktsiyani mos ravishda juft yoki toq funktsiya, deb ataymiz.

Ta'rifdan ko'rinib turibdiki, juft funktsiyaning grafigi y o'qiga nisbatan simmetrik, toq funktsiyaning grafigi esa, koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo'ladi. Masalan, $x^{2n}, Cosx, \sqrt{1-x^2}, f(|x|)$ - juft funktsiyalar, $x^{2k+1}, Sinx, x\sqrt{1+x^2}$ funktsiyalar esa toq funktsiyalardir.

Juft yoki toq funktsiyalar ko'paytmasi juft, juft va toq funktsiyalar ko'paytmasi esa toq funktsiya bo'ladi.

Har qanday funktsiya juft yoki toq bo'lishi shart emas. Masalan, x^2-x+1 toq ham juft ham emas.

f funktsiya E to'plamda o'suvchi (kamaymaydigan) funktsiya deyiladi, agar har qanday $x_1, x_2 \in E$, $x_1< x_2$ lar uchun $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) \le f(x_2)$) munosabat o'rinli bo'lsa.

f funktsiya E to'plamda kamayuvchi (o'smaydigan) funktsiya deyiladi, agar har qanday $x_1, x_2 \in E$, $x_1< x_2$ lar uchun $f(x_1) > f(x_2)$ ($f(x_1) \ge f(x_2)$) munosabat o'rinli bo'lsa.

Mahsulotning sotilish miqdori uning narxiga bevosita bog'liq. Ular o'rtasidagi munosabat talab funktsiyasi deb ataladi. Tabiiyki, mahsulot narxi oshsa, mahsulotga bo'lgan talabni kamaytiradi, yani talab funktsiyasi kamayuvchi funktsiyadir. Bu funktsiyani $Q_D = f(P)$ ko'rinishda belgilaymiz. Ishlab chiqarilayotgan mahsulotning hajmi bilan uning narxi o'rtasidagi munosabat taklif funktsiyasi deyiladi va $Q_S = g(P)$ ko'rinishda belgilaymiz. Bu funktsiya o'suvchi, chunki mahsulot narxining oshishi mahsulotni ko'proq ishlab chiqarishiga olib keladi.

f funktsiya E to'plamda chegaralangan deyiladi, agar har qanday $x \in E$ uchun $|f(x)| \le M$ munosabatni qanoatlantira-digan musbat M soni topilsa, aks holda f funktsiya E to'plamda chegaralanmagan deyiladi. Masalan, $y = 1/_x$ funktsiya kamayuvchi va $(0,\infty)$ oraliqda chegaralanmagan, lekin $(1,\infty)$ oraliqda chegaralangan.

Agar f funktsiya uchun shunday T son mavjud bo'lsaki, barcha $x \in D(f)$ lar uchun $x+T \in D(f)$ bo'lib , $f(x)=f(x+T)$ munosabat o'rinli bo'lsa, bu funktsiyani davriy funktsiya, T ni uning davri deb ataymiz. Masalan, $Sinx, Cosx$ davri 2π bo'lgan davriy funktsiyalardir.

Funktsiya quyidagi jadval ko'rinishida ham berilishi mumkin:

x	x_1	x_2	..	x_n
y	y_1	y_2	..	y_n

Demak,funktsiya analitik ko'rinishda, ya'ni arifmetik, algebraik va trigonometrik amallar bilan ifodalanuvchi formulalar bilan, yoki grafigi bilan, yoki jadval ko'rinishda berilishi mumkin ekan.

Berilgan funktsiya to'g'risida to'la tasavvurga ega bo'lish uchun uning, masalan analitik ifodasi yetarlik bo'lmasligi mumkin, shu sababli, uning grafigi quriladi, agar funktsiya grafik yoki jadval ko'rinishda berilgan bo'lsa, uning analitik ifodasini tuzish zaruriyati tug'ilishi mumkin, bu esa ancha murakkab masala. Bunga doir masalalarni biz keyingi boblarda batafsil ko'rib chiqamiz.

Biz shu paytgacha bir qiymatli funktsiyalarni ko'rdik, lekin f $x \in E$ ga y ning bittadan oshiq qiymatlarini ham mos qo'yishi mumkin, bunday funktsiyani ko'p qiymatli funktsiya deb ataymiz. Masalan, $arcSinx, arcCosx, arctgx$ lar shchunday funktsiyalar jumlasiga kiradi:

$$y=(-1)^k \arcsin x+k\pi,\ y=\pm\arccos x+2k\pi,\quad y=(-1)^k arctgx+k\pi,$$

$$k=0,\pm1,\pm2,\ldots\ .$$

x va y lar o'rtasidagi munosabat quyidagi ko'rinishda berilishi ham mumkin:

$$F(x,y)=0. \tag{2}$$

Bunday ko'rinishda berilgan funktsiyani oshkormas funktsiya, (2) ni esa, uning tenglamasi, deb ataymiz. Masalan,

$$x^2+y^2=r^2$$

aylananing tenglamasi oshkormas funktsiyaga misol bo'ladi. U oshkor bo'lmagan holatda bitta ikki qiymatli

$$y=\pm\sqrt{r^2-x^2}\quad,\ (-r\le x\le r);$$

funktsiyani yoki ikkita bir qiymatli $y=+\sqrt{r^2-x^2}$ va $y=-\sqrt{r^2-x^2}$ funktsiyalarni aniqlaydi. Ularning grafiklari birgalikda markazi koordinatalar boshida bo'lgan r radiusli aylanani ifodalaydi.

Oshkormas funktsiyaning grafigi koordinatalari (2) ning yechimlaridan tuzilgan nuqtalarning geometrik o'rnidan iborat bo'ladi.

Agar (2) ni yuqorida keltirilgan misoldagidek, biror o'zgaruvchiga nisbatan yechsak, $y=\varphi(x)$ yoki $x=\psi(y)$ ko'rinishdagi funktsiyani hosil qilamiz. Bunda $x=\psi(y)$ funktsiyani $y=\varphi(x)$ funktsiyaga teskari funktsiya, deb ataymiz.

2-§. Funktsiyaning limiti.

2.1. Ta'riflar. Cheksizlikka intiluvchi funktsiyalar. Chegaralangan funktsiyalar.

Faraz qilaylik, $f(x)$ funktsiya a nuqtaning o'zida bo'lmasa ham, uning biror atrofida aniqlangan bo'lsin. Agar x a ga , cheksiz ko'p elementlari a ning shu atrofiga tegishli bo'lgan har qanday $\{x_n\}$ ketma-ketlik bo'ylab intilganda ham, $f(x)$ ning ularga mos keluvchi qiymatlari ketma-ketligi

$$f(x_1),\ f(x_2),\ f(x_3),\dots,f(x_n),\dots \tag{1}$$

faqat A limitga ega bo'lsa, A ni $f(x)$ funktsiyaning $x\to a$ dagi limiti, deb ataladi va

$$\lim_{x\to a} f(x)=A \tag{2}$$

ko'rinishda yoziladi.

1-misol. $f(x)=x^2-2x+4$ funktsiyaning $x\to 2$ dagi limitini topaylik. 2 ga intiluvchi ixtiyoriy x_n ketma-ketlikni qaraylik. U holda, ketma-ketlik limitining xossalariga ko'ra

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}(x_n^2-2x_n+4)=\lim_{x\to 2}x_n^2-2\lim_{x\to 2}x_n+4=4-4+4=4.$$

Demak, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=4$.

2-misol. $f(x)=Cos\dfrac{1}{x}$ funktsiya barcha $x\neq 0$ larda aniqlangan. Bu funktsiyaning $x\to 0$ dagi limitini aniqlaylik.

0 ga intiluvchi quyidagi ketma-ketliklarni ko'raylik

$$\{x_n^{\mathsf{I}}\}=\left\{\frac{2}{(4n+1)\pi}\right\},\qquad \{x_n^{\mathsf{I}}\}=\left\{\frac{1}{2n\pi}\right\},$$

u holda,

$$f(x_n^{\mathsf{I}})=Cos\frac{(4n+1)\pi}{2}=0,$$

$$f(x_n^{\mathsf{I}})=Cos2n\pi=1\ .$$

Berilgan $f(x)$ funktsiya 0 ga intiluvchi ikki xil ketma-ketlik uchun ikkita har xil limitga ega bo'ldi. Demak, berilgan funktsiya $x\to 0$ da limitga ega emas.

Funktsiya limitiga quyidagicha ta'rif bersa ham bo'ladi.

Ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta>0$ son topilsaki,

$$|x-a| < \delta$$

bo'lganda,

$$|f(x)-A| < \varepsilon$$

munosabat o'rinli bo'lsa, u holda A son $f(x)$ funktsiyaning $x \to a$ dagi limiti deyiladi.

Funktsiya limitiga berilgan bu ikki ta'rif o'zaro ekvivalent.

Haqiqatan, faraz qilaylik, A son $f(x)$ funktsiyaning birinchi ta'rif bo'yicha $x \to a$ dagi limiti bo'lsin, va u ikkinchi ta'rif ma'nosida limit bo'lmasin. U holda shunday ε_0 mavjudki, uning uchun kerakli δ ni topib bo'lmaydi, ya'ni har qanday δ uchun $0 < |x-a| < \delta$ bo'lsa ham, kamida bitta shunday x_δ topiladiki, uning uchun

$$|f(x_\delta)-A| \geq \varepsilon_0$$

bo'ladi.

Endi agar, $\delta=\frac{1}{\kappa}$ (κ=1,2,3,....) deb, ularning har biriga mos $0 < |x_\kappa-a| < \frac{1}{\kappa}$ va $|f(x_\kappa)-A| \geq \varepsilon_0$ (κ=1,2,3,....) munosabatlarni qanoatlantiruvchi barcha $x_k=x_\delta$ larni topsak, ulardan $x_\kappa \to a$ bo'lsa ham, $f(x_k)$ larning A ga intilmasligi kelib chiqadi. Demak, qilingan faraz xato, ya'ni A son $f(x)$ funktsiyaning ikkinchi ta'rif bo'yicha ham limitidir.

Endi teskarisini isbotlaylik, ya'ni A son $f(x)$ funktsiyaning ikkinchi ta'rif bo'yicha limiti bo'lsin. U holda, x ning qiymatlaridan tuzilgan a ga intiluvchi $\{x_n\}$ ketma-ketlik mavjud. Berilgan ε uchun ikkinchi ta'rifda so'ralgan δ ni topaylik. Endi shunday natural n_0 ni tanlaymizki, $n > n_0$ bo'lganda $|x_n-a| < \delta$ bo'lsin. U holda, ikkinchi ta'rifga ko'ra, $n > n_0$ lar uchun $|f(x_n)-A| < \varepsilon$ bo'ladi. Bundan $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlikning A ga intilishi kelib chiqadi. $\{x_n\}$ ketma-ketlik ixtiyoriy bo'lgani uchun, A son $f(x)$ funktsiyaning birinchi ta'rif ma'nosida ham limiti bo'ladi.

3-*m i s o l*. $f(x)=x^2$ funktsiyaning $x \to 1$ dagi limiti 1 ekanligini ko'rsataylik.

Haqiqatan, $\varepsilon > 0$ ixtiyoriy son bo'lsin. 1 ning (1/2 , 3/2) atrofini qaraylik. Bu atrofning ixtiyoriy x nuqtasi uchun

$$|x^2-1| = |x-1||x+1| \leq \frac{5}{2}|x-1|.$$

Agar $\delta = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{5}\varepsilon\right\}$ desak, u holda $|x-1| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x lar uchun

$$|x^2-1| \leq \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{5}\varepsilon = \varepsilon.$$

Buni birinchi ta'rif bo'yicha isbot qilsa ham bo'ladi. Masalan, agar $x_n \to 1$ ixtiyoriy ketma-ketlik bo'lsa, limitlarning xossasiga ko'ra, $\lim x_n^2 = \lim x_n \cdot \lim x_n = 1 \cdot 1 = 1$.

4-m i s o l. $f(x)=(x^2-4)/(x-2)$ funktsiya $D(f) = R \setminus \{2\}$ da aniqlangan. Uning $x \to 2$ dagi limitini topaylik. $D(f)$ ning ixtiyoriy x nuqtasi uchun $\frac{x^2-4}{x-2} = x+2$. Agar $\{x_n\} \subset D(f)$ 2 ga intiluvchi ixtiyoriy ketma-ketlik bo'lsa, u holda,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2-4}{x_n-2} = \lim_{n\to\infty}(x_n+2) = 2+2 = 4.$$

$f(x)=(x^2-4)/(x-2)$ va $\varphi(x)=x+2$ har xil funktsiyalar bo'lsa ham (chunki ularning aniqlanish sohasi har xil), ularning $x \to 2$ dagi limitlari teng ekan.

Agar $f(x)$ biror $K > 0$ uchun $|x| > K$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x lar uchun aniqlangan bo'lsa, va ixtyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $M > K$ son topilsaki, $|x| > M$ bo'lgan barcha x lar uchun $|f(x) - A| < \varepsilon$ bo'lsa, u holda A son $f(x)$ funktsiyaning $x \to \infty$ dagi limiti, deb ataladi. Buni

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A$$

ko'rinishda yozamiz.

Bunday limitga ta'rifni ketma-ketlik tilida bersa ham bo'ladi.

Agar $\{x_n\}$ ∞ ga intiluvchi ixtiyoriy ketma-ketlik bo'lib,

$$\lim_{x_n\to\infty} f(x_n) = A$$

bo'lsa, u holda A son $f(x)$ funktsiyaning $x \to \infty$ dagi limiti, deb ataladi.

Bu ikki ta'rifning ekvivalentligini isboti yuqorida chekli a uchun bajarilgani kabi bo'ladi.

Umuman, $f(x)$ funktsiyaning chekli a uchun $x \to a$ dagi va $x \to \infty$ dagi limitlarining xossalari bir xil bo'lgani uchun, bu xossalarni ikkala hol uchun bitta qilib beramiz. Ayrim hollardagina zaruriyat tug'ilsa, a ning chekli, $+\infty$ yoki $-\infty$ ekanligini ko'rsatamiz.

a ning ixtiyoriy atrofini U_a bilan belgilaylik. Agar $a=\infty$ ($+\infty$ yoki $-\infty$) bo'lsa, a ning atrofi deb, yetarlicha katta $M > 0$ uchun,

$$|x| > M \ (\ x > M \ \text{yoki} \ x < -M \ )$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x lar to'plamini tushunamiz. Aytish lozimki, ikkita $U_a{}^1$ va $U_a{}^2$ atroflarning kesishmasi ham biror U_a atrof bo'ladi.

Agar $f(x)$ funktsiya a ning biror U_a atrofida chegaralanmagan bo'lsa, ya'ni har qanday $M > 0$ uchun va barcha $x \in U_a$ lar uchun $|f(x)| > M$ bo'lsa,

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$$

deb yozamiz. Bunday funktsiyalarni $x\to a$ dagi cheksiz katta miqdor, deymiz.

Eslatma. Agar $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ bo'lib, U_a da $f(x)>0$ ($f(x)<0$) bo'lsa, u holda $\lim_{x\to\infty} f(x)=+\infty$ ($\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$) deb yoziladi.

2.2. Funktsiya limitlari haqidagi asosiy teoremalar.

1-teorema. Agar $\lim_{x\to a} f(x)=A$, A - chekli son bo'lsa, u holda $f(x)$ biror U_a atrofda chegaralangan bo'ladi.

I s b o t i. Teorema shartidan , masalan, ε=1 uchun shunday U_a atrof mavjudki, uning barcha nuqtalari uchun

$$1>|f(x)-A|\geq |f(x)|-|A|$$

ekanligi kelib chiqadi. Bundan, U_a ning barcha nuqtalari uchun

$$|f(x)|\leq 1+|A|$$

ni hosil qilamiz. Teorema isbot bo'ldi.

2-teorema. Agar $\lim_{x\to a} f(x)=A$, A - chekli son bo'lsa, u holda shunday U_a atrof mavjudki, barcha $x\in U_a$ lar uchun

$$|f(x)|>{|A|}/{2} \ .$$

Agar $A>0$ bo'lsa, $f(x)>A/2$, va $A<0$ bo'lsa, $f(x)<A/2$.

Teoremaning isboti §2.1 dagi 3-xossaning isboti kabi bajariladi.

3-teorema. Agar $\lim_{x\to a} f_1(x)=A_1$, $\lim_{x\to a} f_2(x)=A_2$, va biror U_a atrofda $f_1(x)\leq f_2(x)$ bo'lsa, u holda $A_1\leq A_2$ bo'ladi.

I s b o t i. Faraz qilaylik, $x_n\to a$ biror ketma-ketlik bo'lsin. Shunday n_0 topiladiki, $n>n_0$ lar uchun $x_n\in U_a$ bo'ladi. Teorema shartiga ko'ra, bunday x_n lar uchun $f_1(x_n)\leq f_2(x_n)$ bo'ladi. U holda §2.1 dagi 4-xossaga ko'ra, $A_1\leq A_2$.

4-teorema. Agar $\lim_{x\to a} f_1(x)=A$, $\lim_{x\to a} f_2(x)=A$, va biror U_a atrofda $f_1(x)\leq \varphi(x)\leq f_2(x)$ bo'lsa, u holda

$$\lim_{x\to a}\varphi(x)=A.$$

I s b o t i. Faraz qilaylik, $x_n\to a$ biror ketma-ketlik bo'lsin. Shunday n_0 topiladiki, $n>n_0$ lar uchun $x_n\in U_a$ bo'ladi. Teorema shartiga ko'ra, bunday x_n lar uchun $f_1(x_n)\leq \varphi(x_n)\leq f_2(x_n)$ bo'ladi. U holda §2.1 dagi 6-xossaga ko'ra, $\lim_{x_n\to a}\varphi(x_n)=A$. $\{x_n\}$ ketma-ketlik ixtiyoriy bo'lgani uchun, $\lim_{x\to a}\varphi(x)=A$ bo'ladi.

5-teorema. Chekli $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ limitning mavjud bo'lishi uchun, $f(x)$ ning a nuqtaning o'zida bo'lmasa ham, uning atrofida aniqlanganligi va har qanday $\varepsilon>0$ uchun uning shunday U_a atrofi mavjud bo'lishi zarur va yetarliki, ixtiyoriy $x', x''\in U_a, x', x''\neq a$ lar uchun

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$$

bo'lsin.

Z a r u r l i g i. Faraz qilaylik, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ chekli bo'lsin. U holda, $f(x)$ funktsiya a nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'ladi. Bundan tashqari, ixtiyoriy
$\varepsilon>0$ uchun shunday U_a atrof mavjudki, agar $x\in U_a$, $x\neq a$, bo'lsa, $|f(x)-A|<\varepsilon/2$ bo'ladi. Agar $x', x''\in U_a, x', x''\neq a$ bo'lsa, u holda,

$$|f(x')-f(x'')|\leq |f(x')-A|+|A-f(x'')|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.$$

Y e t a r l i l i g i. Faraz qilaylik, $f(x)$ a nuqtaning o'zida bo'lmasa ham, uning atrofida aniqlangan va har qanday $\varepsilon>0$ uchun uning shunday U_a atrofi mavjud bo'lsinki, ixtiyoriy $x', x''\in U_a, x', x''\neq a$ lar uchun

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$$

bo'lsin. a ga intiluvchi biror $\{x_n\}$, $x_n\neq a$ ketma-ketlikni olaylik. Ketma-ketliklar uchun Koshi shartiga ko'ra (qarang 4-bob,§2.8), har qanday $\varepsilon>0$ uchun shunday $n_0=n_0(\varepsilon)$ son topiladiki, $n, m>n_0$ lar uchun

$$|x_n-x_m|<\varepsilon,$$

ya'ni $x_n, x_m\in U_a$. U holda, $n, m>n_0$ lar uchun

$$|f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon,$$

ya'ni $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik Koshi shartini qanoatlantiradi, va shu sababli limitga ega. Endi har xil $\{x_n\}$ ketma-ketliklar uchun $\{f(x_n)\}$ ketma-ketliklar bir xil limitga intilishini ko'rsatish qoldi.

Faraz qilaylik, $x_n\to a$, $x'_n\to a$; $x_n, x'_n\neq a$ $(n=1,2,\ldots)$ bo'lsin. U holda, yuqorida isbot qilinganiga asosan, shunday A va A' lar mavjudki, $f(x_n)\to A$ va $f(x'_n)\to A'$ bo'ladi. Yangi a ga intiluvchi $\{x_1, x'_1, x_2, x'_2, \ldots, x_n, x'_n, \ldots\}$ ketma-ketlikni tuzamiz. U holda yuqorida isbotlanganiga ko'ra, unga mos keluvchi $\{f(x_1), f(x'_1), f(x_2), f(x'_2), \ldots, f(x_n), f(x'_n), \ldots\}$ ketma-ketlik ham chekli limitga egadir. Bu $A=A'$ bo'lsagina mumkin. Teorema isbot bo'ldi.

6-teorema. Agar $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ va $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=B$, A, B-chekli sonlar bo'lsa, u holda

1^0. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\pm\varphi(x)]=A\pm B$;

2^0. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\varphi(x)]=AB$;

3^0. Agar $B\neq 0$ bo'lsa, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\dfrac{A}{B}$.

I s b o t i. 1^0 ni isbot qilamiz, 2^0 va 3^0 ning isbotlari shunga o'xshash bajariladi.

Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun a ning shunday U_a, V_a atroflari mavjudki, barcha $x\in U_a$ lar uchun $|f(x)-A|<\varepsilon/2$ va barcha $x\in V_a$ lar uchun $|\varphi(x)-B|<\varepsilon/2$ bo'ladi. U holda, barcha $x\in U_a\cap V_a$ lar uchun

$$|[f(x)\pm\varphi(x)]-(A\pm B)|=|[f(x)-A]\pm[\varphi(x)-B]|\leq$$
$$\leq|f(x)-A|+|\varphi(x)-B|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.$$

Bundan tashqari, quyidagi ikki munosabat ham o'rinli:

1. Agar $f(x)$ chegaralanmagan funktsiya va $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$ bo'lsa, u holda

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\infty$$

bo'ladi.

2. Agar $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ va $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$ (A - chekli son) bo'lsa, u holda

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=0$$

bo'ladi.

Ayrim hollarda $f(x)$ funktsiya a ning o'zida emas, balki uning biror $(a,b]$ ($[b,a)$) atrofida aniqlangan bo'lishi mumkin, u holda funktsiyaning $x\to a$ dagi limitini bir yoqlamali limiti deb, xususan, $x\in(a,b]$ bo'lsa, o'ng limiti va agar $x\in[b,a)$ bo'lsa, chap limiti, deb ataladi. Ular mos ravishda $f(a+0)$ va $f(a-0)$ ko'rinishda belgilanadi.

Agar $f(x)$ funktsiya (a,b) intervalda aniqlangan bo'lsa, u holda a nuqtada o'ng $f(a+0)$ limiti va b nuqtada chap $f(b-0)$ limiti ma'noga egadir.

Eslatma. $f(a+0)=f(a-0)=A$ tenglik $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ limitning mavjudligiga ekvivalent.

5-*m i s o l.* $\lim\limits_{x\to 0}Sinx=0$ ekanligini isbotlang.

Haqiqatan, har qanday x uchun $|Sinx|<|x|$ bo'lgani uchun ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun $\delta=\varepsilon$ desak, $|x-0|<\delta$ bo'lganda,

$$|Sinx-0|=|Sinx|<|x|=|x-0|<\delta=\varepsilon$$

bo'ladi.

6-m i s o l. $\lim\limits_{x\to 0}Cosx=1$ ekanligini isbotlang.

Avvalgi misoldagidek, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun $\delta = \sqrt{2\varepsilon}$ desak, $|x-0| < \delta$ bo'lganda,

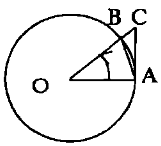
$$|Cosx-1| = |Cosx - Cos0^0| = \left|2Sin^2\frac{x}{2}\right| < 2\cdot\left|\left(\frac{x-0}{2}\right)\right|^2 = \frac{1}{2}|x-0|^2 < \frac{1}{2}\delta^2 = \varepsilon$$

bo'ladi.

2.3. 1-ajoyib limit. Kelajakda ko'p ishlatiladigan quyidagi limitni

$$\lim_{x\to 0}\frac{Sinx}{x} = 1 \qquad (1)$$

1-ajoyib limit deb atashadi. Buni isbotlashdan avval, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ lar uchun $Sinx < x < tgx$ bo'lishini ko'rsataylik.



62-rasm.

Buning uchun R radiusli doirada AOB o'tkir burchak, AB vatar va A nuqtada o'tkazilgan AC urinmani ko'raylik (qarang 62-rasm). Rasmdan ko'rinadiki

$$S_{\Delta AOB} < S_{sekAOB} < S_{\Delta AOC}.$$

Bundan

$$\frac{1}{2}R^2\cdot Sinx < \frac{1}{2}R^2\cdot x < \frac{1}{2}R^2\cdot tgx.$$

Agar bularni $\frac{1}{2}R^2$ ga bo'lib yuborsak, $Sinx < x < tgx$ ni hosil qilamiz. $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ekanligini e'tiborga olib, oxirgi tengsizlikni $Sinx$ ga bo'lib yuborsak,

$$1 > \frac{Sinx}{x} > CoSx.$$

Bundan

$$0 < 1 - \frac{Sinx}{x} < 1 - CoSx$$

kelib chiqadi. Lekin

$$1 - CoSx = 2Sin^2\frac{x}{2} < 2Sin\frac{x}{2} < x.$$

Shuning uchun,

$$0 < 1 - \frac{Sinx}{x} < x.$$

Bundan o'z navbatida,

$$0 < \left|\frac{Sinx}{x} - 1\right| < |x|$$

kelib chiqadi. Oxirgi tengsizliklar $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ qiymatlar uchun ham o'rinlidir. Endi agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun $\delta = \varepsilon$ desak, $|x - 0| = |x| < \delta$ bo'lganda, $\left|\frac{Sinx}{x} - 1\right| < \varepsilon$ bo'ladi. (1) isbot bo'ldi.

1 – m i s o l.

$$\lim_{x\to 0}\frac{Sin\alpha x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{Sin\alpha x}{\alpha x}\cdot\alpha = \alpha.$$

2 – m i s o l.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-Cosx}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2Sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = 2\lim_{x\to 0}\frac{Sin^2\frac{x}{2}}{4\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

3 – m i s o l.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{Sinx}{x}\cdot\frac{1}{Cosx} = \lim_{x\to 0}\frac{Sinx}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{Cosx} = 1\cdot 1 = 1.$$

4 – m i s o l.

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot Sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{Sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to 0}\frac{Siny}{y} = 1,$$

bu yerda $y = \frac{1}{x}$ deb belgiladik, $x \to \infty$ da $y \to 0$ bo'ladi.

2.4. 2-ajoyib limit. Biz avvalgi bobning §2.6. sida quyidagi limitni ko'rgan edik:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e. \qquad (2)$$

Lekin bu limit ∞ ga intiluvchi har qanday $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun ham o'rinli.

Haqiqatan, faraz qilaylik, $x_n \to +\infty$ ixtiyoriy ketma-ketlik va $[x_n] = \kappa_n$ x_n ning butun qismi bo'lsin.

U holda, $\kappa_n \le x_n < \kappa_n + 1 \le x_n + 1 < \kappa_n + 2$ va

$$\left(1+\frac{1}{\kappa_n+1}\right)^{\kappa_n+1} < \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n+1} < \left(1+\frac{1}{\kappa_n}\right)^{\kappa_n+2} < e\left(1+\frac{1}{\kappa_n}\right)^2.$$

$x_n \to +\infty$ da $\kappa_n \to +\infty$, shuning uchun yuqoridagi tengsizlikning birinchi va oxirgi ifodalari e ga intiladi. U holda

$$\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n+1} \to e .$$

$1+\dfrac{1}{x_n} \to 1$ ekanligini e'tiborga olsak, (2) ni $x_n \to +\infty$ bo'lgan hol uchun isbot qilgan bo'lamiz.

Endi agar $x_n \to -\infty$ bo'lsa, u holda $x_n' = -x_n \to +\infty$ va

$$\lim_{x_n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = \lim_{x'_n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x'_n}\right)^{-x'_n} = \lim_{x'_n\to+\infty}\left(\frac{x'_n}{x'_n-1}\right)^{x'_n} =$$

$$= \lim_{x'_n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x'_n-1}\right)^{x'_n-1}\cdot\left(1+\frac{1}{x'_n-1}\right)\right] = e .$$

Demak,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e \qquad (3)$$

ekan.

5- m i s o l.

$$\lim_{u\to0}(1+u)^{\frac{1}{u}} = e .$$

Bu tenglik (3) dan $1/x = u$ almashtirish natijasida hosil bo'ladi .

6- m i s o l. Har qanday α uchun

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{x} = e^{\alpha}, \quad \lim_{u\to0}(1+\alpha u)^{\frac{1}{u}} = e^{\alpha} .$$

Agar $\alpha=0$ bo'lsa, bu tenglik ixtiyoriy x uchun $1^x = 1$ ekanligidan kelib chiqadi. Endi $\alpha\neq0$ bo'lsin. Agar $x\to\infty$ bo'lsa, $\dfrac{x}{\alpha}\to\infty$ va

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{x/\alpha}\right]^{\alpha} = e^{\alpha} .$$

§3. Uzluksiz funktsiyalar.

3.1. Ta'riflar. Funktsiyaning limiti bilan bog'liq bo'lgan oliy matematikaning yana bir muhim tushunchasi — bu funktsiyaning uzluksizlik tushunchasidir. Biz bu yerda keltiradigan funktsiyaning uzluksizligiga beriladigan ta'rif XIX asrda yashab ijod qilgan chexiyalik B.Boltsano va farangistonlik O.Koshiga taqaladi.

Faraz qilaylik, bizga $f(x)$ funktsiya va biror $x_0 \in D(f)$ nuqta berilgan bo'lsin.

Funktsiyaning $x \to x_0$ dagi limiti tushunchasini kiritganimizda x x_0 qiymatni qabul qilishi shart emas deb aytgan edik. Bu qiymat hatto $D(f)$ ga tegishli bo'lmasligi ham mumkin, agar tegishli bo'lganda ham, limitni hisoblash jarayonida $f(x_0)$ qiymat e'tiborga olinmagan edi.

Biz hozir aynan

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \tag{1}$$

bo'ladigan hollarni ko'ramiz.

Agar (1) tenglik bajarilsa, $f(x)$ funktsiya $x = x_0$ nuqtada uzluksiz , aks holda funktsiya qiymati bu nuqtada uzulishga ega deymiz.

Funktsiya uzluksizligiga quyidagicha ta'rif bersa ham bo'ladi.

x_0 nuqtaga yaqin joylashgan boshqa $x_1 \in D(f)$ nuqtani $x_1 = x_0 + \Delta x$ ko'rinishda yozish mumkin, bu yerda Δx miqdor x ning orttirmasi, deb ataladi. x_1 ning joylashishiga qarab Δx musbat yoki manfiy bo'lishi mumkin. U holda

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

miqdorni f funktsiyaning x_0 nuqtadagi Δx orttirmaga mos keluvchi orttirmasi deb ataymiz.

Agar $\Delta x \to 0$ da limitga o'tsak, (1) ga asosan $\Delta f \to 0$ bo'ladi, ya'ni agar funktsiya uzluksiz bo'lsa, u holda $\Delta x \to 0$ da $\Delta f \to 0$ bo'lar ekan. Aksi ham o'rinli, ya'ni agar $\Delta x \to 0$ da $\Delta f \to 0$ bo'lsa, u holda

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = \lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0,$$

yoki

$$\lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x)] - f(x_0) = 0.$$

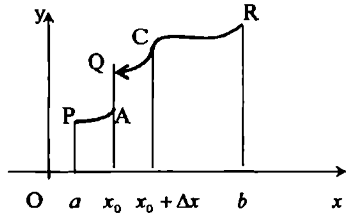
Bu yerda $x = x_0 + \Delta x$ desak, $\Delta x \to 0$ da $x \to x_0$ bo'ladi. Shuning uchun oxirgi tenglikni (1) ko'rinishda yozsa bo'ladi.

Demak, funktsiya uzluksiz bo'lishi uchun, $\Delta x \to 0$ da $\Delta f \to 0$ bo'lishi zarur va yetarli ekan.

Shu sababli funktsiyaning uzluksizligiga quyidagicha ta'rif beramiz .

$f(x)$ funktsiyani x_0 nuqtada uzluksiz deymiz,agar $f(x)$ x_0 nuqtaning o'zida va uning biror atrofida aniqlangan bo'lib, uning argumentning Δx orttirmasiga mos keluvchi Δf orttirmasi $\Delta x \to 0$ da nolga intilsa.

Har qanday funktsiya uchun ham $\Delta x \to 0$ da $\Delta f \to 0$ bo'lavermaydi (63-rasmga qarang).



63-rasm.

Funktsiya uzluksizligiga yana "ε,δ" tilida ham ta'rif bersa bo'ladi:

Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topilsaki, $|x - x_0| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x lar uchun $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $f(x)$ funktsiya $x = x_0$ nuqtada uzluksiz, deyiladi.

(1) tenglikni quyidagicha yozish ham mumkin:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(\lim_{x\to x_0} x),$$

ya'ni uzluksiz funktsiya belgisi ostida limitga o'tish mumkin.

1-m i s o l. O'zgarmas $y = C$ funktsiya x ning har qanday qiymati uchun uzluksiz. Haqiqatan, agar x ga funktsiyaning $y = C$ qiymati mos kelsa, $x + \Delta x$ ga ham $y = C$ qiymat mos keladi. Shuning uchun $\Delta f = 0$ va $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta f = \lim\limits_{\Delta x\to 0} 0 = 0$ bo'ladi.

2-m i s o l. x ning barcha qiymatlari uchun $y = x$ funktsiya ham uzluksiz, chunki $\Delta y = \Delta x$, va shu sababli, $\Delta x \to 0$ da $\Delta y \to 0$ bo'ladi.

3-m i s o l. $y = Sinx$ funktsiya ham barcha x larda uzluksiz.

Haqiqatan,

$$|\Delta y| = |Sin(x + \Delta x) - Sinx| = \left|2Sin\frac{\Delta x}{2} \cdot Cos(x + \frac{\Delta x}{2})\right| \le 2\left|Sin(\frac{\Delta x}{2})\right|. \tag{2}$$

Ma'lumki, har qanday α uchun $|Sin\alpha| < |\alpha|$ (§2.3 ga qarang). U holda (2) dan

$$|\Delta y| \le 2\left|Sin\frac{\Delta x}{2}\right| \le 2\frac{|\Delta x|}{2} = |\Delta x|,$$

va o'z navbatida, bundan $\Delta x \to 0$ da $\Delta y \to 0$ ekanligi kelib chiqadi.

3.2. Asosiy teoremalar.

1-teorema. Agar f va φ funktsiyalar $x = x_0$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda

$$f(x) \pm \varphi(x)\ ,\ f(x)\cdot\varphi(x) \text{ va agar } \varphi(x_0) \neq 0 \text{ bo'lsa, } \frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

lar ham $x = x_0$ nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Teorema isboti §2.2 dagi 6-teoremadan kelib chiqadi. Haqiqatan, f va φ funktsiyalarning $x = x_0$ nuqtadagi uzluksizligi $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ va $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0)$ tengliklarga teng kuchli bo'lgani uchun, masalan, agar $\varphi(x_0) \neq 0$ bo'lsa,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(x_0)}{\varphi(x_0)}$$

bo'ladi. Bu esa, o'z navbatida $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ ning $x = x_0$ nuqtada uzluksiz ekanligini bildiradi.

2-teorema. Agar $f(u)$ funktsiya $u = A$ nuqtada va $u = \varphi(x)$ funktsiya $x = x_0$ nuqtada uzluksiz, $\varphi(x_0) = A$ bo'lsa, u holda ularning superpozitsiyasidan tuzilgan $F(x) = f(\varphi(x))$ murakkab funktsiya ham $x = x_0$ nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Isboti. $u = \varphi(x)$ funktsiya $x = x_0$ nuqtada uzluksiz, $\varphi(x_0) = A$ bo'lgani uchun, $x \to x_0$ da $u = \varphi(x) \to \varphi(x_0) = A$ bo'ladi. U holda,

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = \lim_{x \to x_0} f(\varphi(x)) = \lim_{u \to A} f(u) = f(A) = f(\varphi(x_0)) = F(x_0)$$

bo'ladi. Demak, berilgan murakkab funktsiya uzluksiz ekan.

4-m i s o l. n-darajali

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

ko'phad $a_0, a_1, \ldots, a_n$ o'zgarmas sonlar va $y = x$ uzluksiz funktsiyalar ustida qo'shish, ayirish va ko'paytirish amallarini ketma-ket bajarish natijasida hosil bo'ladi. Shu sababli 1-teoremaga ko'ra, u barcha x lar uchun uzluksizdir.

5- misol. $y = Cosx = Sin(x + \frac{\pi}{2})$ funktsiya uzluksiz $y = Sinu, u = x + \frac{\pi}{2}$ funktsiyalarning murakkab funktsiyasi, deb qaralsa, 2-teoremaga ko'ra, o'zi ham uzluksiz bo'ladi.

6- m i s o l. $y = |x|$ barcha x larda uzluksiz,chunki

$$|\Delta y| = \big||x + \Delta x| - |x|\big| \leq |x + \Delta x - x| = |\Delta x| \to 0\,.$$

7- m i s o l. Agar $f(x)$ funktsiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'lsa, shu nuqtada $|f(x)|$ ham uzluksiz bo'ladi, chunki u uzluksiz $y=|u|, u=f(x)$ funktsiyalarning superpozitsiyasidir.

3-teorema. Agar $f(x)$ funktsiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda bu nuqtaning shunday atrofi topiladiki, bu atrof nuqtalari uchun $f(x)$ chegaralangan bo'ladi.

4-teorema. Agar $f(x)$ funktsiya x_0 nuqtada uzluksiz va $f(x_0)\neq 0$ bo'lsa, u holda bu nuqtaning shunday U_a atrofi topiladiki, bu atrof nuqtalari uchun

$$|f(x)| > |f(x_0)|/2$$

bo'ladi. Xususan, agar $f(x_0) > 0$ bo'lsa, barcha $x \in U_a$ lar uchun

$$f(x) > f(x_0)/2,$$

va agar $f(x_0) < 0$ bo'lsa, barcha $x \in U_a$ lar uchun

$$f(x) < f(x_0)/2$$

bo'ladi.

Bu teoremalarning isboti §2.2 dagi 1- va 2-teoremalardan bevosita kelib chiqadi.

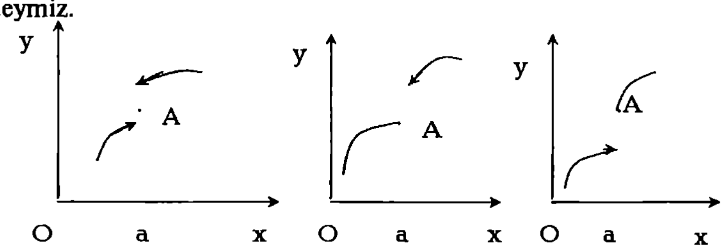
3.3. Birinchi va ikkinchi tur uzilish nuqtalari.

Ta'rif. f funktsiya $x=x_0$ nuqtada o'ngdan (chapdan) uzluksiz deyiladi, agar $f(x_0)=f(x_0+0)$ ($f(x_0)=f(x_0-0)$) bo'lsa (§2.2 ga qarang).

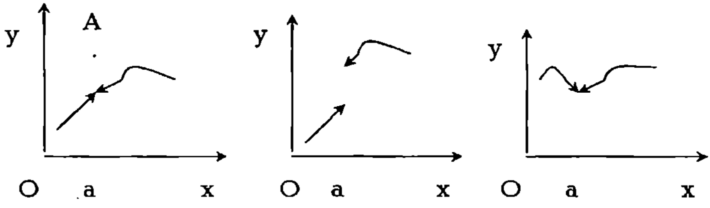
Yuqoridagi ta'rifdan foydalanib uzluksizlikka quyidagicha ta'rif bersa ham bo'ladi: agar f funktsiya x_0 nuqtaning o'zida va uning biror atrofida aniqlangan bo'lib, $f(x_0-0)$ va $f(x_0+0)$ bir yoqlamali limitlari mavjud bo'lsa va ular

$$f(x_0)=f(x_0-0)=f(x_0+0) \qquad (1)$$

munosabatda bo'lsa, u holda f funktsiyani $x=x_0$ nuqtada uzluksiz deymiz.



64-расм. 65-расм. 66-расм.



67-rasm. 68-rasm. 69-rasm.

Agar f funktsiya uchun $f(x_0$-0) va $f(x_0$+0) limitlar mavjud bo'lsa-yu (1) tenglik bajarilmasa, u holda funktsiya bu nuqtada uzluksiz bo'lmaydi. Bunday nuqtani 1-tur uzilish nuqtasi, deymiz.

64-69-rasmlarda 1-tur uzilish nuqtalarining olti holati ko'rsatilgan. Rasmlardagi $A=(a,f(a))$ funktsiya grafigining nuqtasidir. Grafik bo'lagining oxiriga qo'yilgan "strelka" oxirgi nuqta grafikka tegishli emasligini bildiradi.

64-rasmda uchchala $f(x_0), f(x_0-0), f(x_0+0)$ sonlar teng bo'lmagani uchun funktsiya bu nuqtada ham chapdan, ham o'ngdan uzilishga ega. 65-rasmda $f(x_0)=f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$, demak, funktsiya bu nuqtada chapdan uzluksiz va o'ngdan uzilishga ega. 66-rasmda esa, $f(x_0-0)\neq f(x_0)=f(x_0+0)$,shu sababli funktsiya bu nuqtada chapdan uzilishga ega va o'ngdan uzluksiz. 67-rasmda $f(x_0)\neq f(x_0-0)=f(x_0+0)$, bunda funktsiya yo'qotiladigan uzilish nuqtasiga ega deyiladi, chunki f ni uzluksiz funktsiyaga aylantirish uchun (1) tenglikni bajarilishini talab qilish yetarli. 69-rasmda $x=a$ nuqtada f aniqlanmagan bo'lsa ham, $f(x_0-0)=f(x_0+0)$ bo'lgani uchun, uni $x=a$ nuqtada aniqlash mumkin, buning uchun (1) ni bajarilishini talab qilish kifoya. 68-rasmdagi $x=a$ nuqta uzilish nuqtasi, funktsiya bu nuqtada aniqlanmagan.

Agar $f(x_0$-0) va $f(x_0$+0) limitlarning kamida bittasi cheksiz yoki mavjud bo'lmasa, bu nuqtani 2-tur uzilish nuqtasi, deb ataymiz.

1-misol.

$$Signx=\begin{cases}1, x>0,\\ 0, x=0,\\ -1, x<0,\end{cases}$$

funktsiya $x\neq 0$ barcha nuqtalarda uzluksiz, $x=0$ nuqtada 1-tur uzilishga ega, chunki $Sign(0+0)=1, Sign(0-0)=-1$.

2- m i s o l.

$$f(x)=\begin{cases} Cos\dfrac{1}{x}, x\neq 0,\\ 0, x=0, \end{cases}$$

funktsiya $x=0$ nuqtada chap va o'ng limitlarga ega emas (§2.1 dagi 2-misolni qarang), shu sababli funktsiya bu nuqtada 2- tur uzilishga ega.

3- m i s o l. $y=\begin{cases} \dfrac{1}{x}, x\neq 0,\\ 2, x=0, \end{cases}$

funktsiya $x\neq 0$ nuqtalarda uzluksiz. $x=0$ nuqtada chap va o'ng limitlari cheksizga teng, shuning uchun bu nuqta 2-tur uzilish nuqtasidir.

5-teorema. Agar f funktsiya $[a,b]$ oraliqda kamaymasa, u holda a nuqtada o'ng limit $f(a+0)$ va b nuqtada chap limiti $f(b-0)$ mavjud va $f(a+0)\geq f(a)$, $f(b-0)\leq f(b)$.

I s b o t i. Teorema shartiga ko'ra, barcha $x\in[a,b]$ lar uchun $f(x)\leq f(b)$.

$[a,b)$ oraliqdan b ga intiluvchi $\{x_n\}$ ketma-ketlik olaylik. Funktsiyaning bu ketma-ketlik elementlariga mos keluvchi qiymatlari ketma-ketligi $\{f(x_n)\}$ kamaymaydigan va yuqoridan $f(b)$ bilan chegaralangan. Veyershtrass teoremasiga ko'ra, bu ketma-ketlik $f(b)$ dan katta bo'lmagan limitga ega:

$$\lim_{\substack{x_n\to b\\ x_n<b}} f(x)\leq f(b).$$

Tengsizlikni chap tomonida turgan ifoda ta'rifga ko'ra funktsiyaning b nuqtadagi chap limiti $f(b-0)$. Demak, $f(b-0)$ mavjud va $f(b-0)\leq f(b)$.

Funktsiyaning a nuqtadagi o'ng limiti $f(a+0)$ ning mavjudligi xuddi shunday isbot qilinadi.

Natija. Agar f funktsiya $[a,b]$ oraliqda kamaymasa, u holda ixtiyoriy $x\in[a,b)$ nuqtaning o'ng limiti $f(x+0)\geq f(x)$, va ixtiyoriy $x\in(a,b]$ nuqtaning chap limiti $f(x-0)\leq f(x)$ mavjud.

Haqiqatan, $x=a,b$ bo'lgan hol uchun bu xulosalar 5-teoremadan kelib chiqadi. Faraz qilaylik, $x\in(a,b)$ bo'lsin. Teorema shartiga ko'ra, funktsiya $[a,x]$ va $[x,b]$ oraliqlarda kamaymaydi. Shu sababli, 5-teoremaga ko'ra, $f(x-0)$, $f(x+0)$ limitlar mavjud va $f(x-0)\leq f(x)\leq f(x+0)$.

Bu yerda, f funktsiya x nuqtada uzluksiz bo'lishi uchun $f(x-0)=f(x+0)$ bo'lishi zarur va yetarlidir.

Agar $f(x\ -0)< f(x\ +0)$ bo'lsa, funktsiya bu nuqtada 1-tur uzilishga ega bo'ladi.

3.4. Kesmada uzluksiz funktsiya. Veyershtrass teoremasi. f funktsiyaning biror chekli oraliqning barcha x nuqtalarida aniqlanganligidan uning shu oraliqda chegaralanganligi kelib chiqmaydi. Masalan, $x\in(0,1]$ da $f(x)=1/x$, $f(0)=0$ funktsiya $[0,1]$ oraliqda aniqlangan, lekin bu oraliqda chegaralanmagan, chunki x 0ga yaqinlashgan sayin funktsiya qiymatlari cheksiz orta boradi. Bunday hol yuz berishiga sabab, funktsiya 0 nuqtada uzilishga ega.

Oraliqning barcha nuqtalarida uzluksiz bo'lgan funktsiyalar uchun bunday holat hech qachon yuz bermaydi.

Ta'rif. Agar f funktsiya barcha $x\in(a,b)$ nuqtalarda uzluksiz, a nuqtada o'ngdan va b nuqtada chapdan uzluksiz bo'lsa, u holda f funktsiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz, deyiladi.

6-teorema. Agar f funktsiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz bo'lsa, u shu oraliqda chegaralangan bo'ladi.

Isboti. Teskarisini faraz qilaylik, ya'ni f funktsiya $[a,b]$ oraliqda chegaralanmagan bo'lsin. U holda har bir natural n son uchun shunday $x_n\in[a,b]$ nuqta topiladiki,

$$|f(x_n)|>n \qquad (n=1,2,\dots) \tag{2}$$

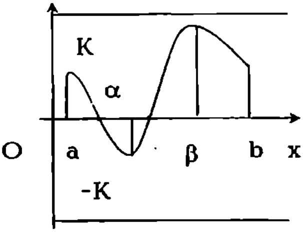
munosabatlar o'rinli bo'ladi.

$\{x_n\}$ ketma-ketlik chegaralangan bo'lgani uchun, Boltsano-Veyershtrass teoremasiga ko'ra (5 bob, §2.7 ga qarang) , undan biror $\alpha\in[a,b]$ songa yaqinlashuvchi xususiy $\{x_{n_k}\}$ ketma-ketlik ajratib olish mumkin. Teorema shartiga ko'ra f funktsiya α nuqtada uzluksiz, shu sababli

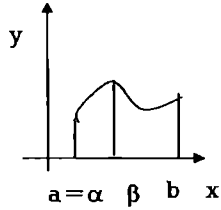
$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k})=f(\alpha). \tag{3}$$

Ziddiyatga keldik, (3) tenglik (2) munosabatga zid. Demak, qilgan farazimiz xato, ya'ni funktsiya $[a,b]$ oraliqda chegaralangan.

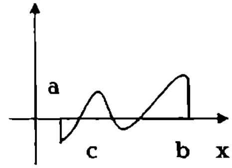
6-teoremaning xulosasini geometrik nuqtai-nazardan 70-rasmda tushunish mumkin: uzluksiz funktsiya grafigi $y=K$ va $y=-K$ to'g'ri chiziqlar oralig'ida joylashgan bo'ladi.



70-rasm.



71-rasm.



72-rasm.

Ma'lumki, cheksiz ko'p elementli chegaralangan sonli to'plam tarkibiga uning eng katta elementi (eng kichkina elementi) kirmasligi mumkin. Agar f funktsiya x ning o'zgarish sohasida aniqlangan va hatto chegaralangan bo'lsa ham, uning $\{f(x)\}$ qiymatlari to'plami ichida uning eng katta yoki eng kichkina qiymati bo'lmasligi mumkin. Bunday holatlarda $f(x)$ funktsiya shu oraliqda o'zining aniq yuqori yoki aniq quyi chegarasiga etishmasligi mumkin. Masalan, $f(x)=x-E(x)$ funktsiya uchun shunday: $[0,c]$,$s \geq 1$, oraliqda o'zgargan barcha x lar uchun funktsiyaning aniq yuqori chegarasi bir, lekin funktsiya bu qiymatiga $[0,c]$ oraliqda erishmaydi, ya'ni funktsiyaning eng katta qiymati yo'q. Buning sababi berilgan $[0,c]$ oraliq funktsiyaning uzilish nuqtasini o'z ichiga olganligidadir. Bu muammoni quyidagi teorema hal qiladi. 6-teoremani Veyershtrassning birinchi teoremasi, deb atashsa, quyidagi teoremani Veyershtrassning ikkinchi teoremasi, deb atashadi.

7-teorema. Agar f funktsiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz bo'lsa, u holda funktsiya shu oraliqda o'zining eng katta va eng kichik qiymatlariga erishadi.

Isboti. Faraz qilaylik, funktsiyaning aniq yuqori chegarasi M bo'lsin, buni quyidagicha yoziladi:

$$M = Sup\{f(x)\}.$$

6-teoremaga ko'ra, bu chekli son. Teskarisini faraz qilaylik, ya'ni berilgan oraliqning barcha nuqtalari uchun $f(x) < M$ bo'lsin. Quyidagi yordamchi funktsiyani tuzib olamiz

$$\varphi(x) = \frac{1}{M - f(x)}.$$

Qilingan farazga ko'ra, maxraj nolga aylanmaydi. Demak, funktsiya berilgan oraliqda uzluksiz va 6-teoremaga asosan u chegaralangan : $\varphi(x) \leq \mu$, $\mu > 0$. U holda

$$f(x) \le M - \frac{1}{\mu},$$

ya'ni M dan kichik bo'lgan $M - \frac{1}{\mu}$ son $f(x)$ funktsiya uchun yuqori chegara bo'lyapti, buni esa bo'lishi mumkin emas, chunki funktsiyaning aniq yuqori chegarasi M. Vujudga kelgan ziddiyat teoremani isbotlaydi, ya'ni $[a,b]$ oraliqda shunday x_0 nuqta topiladiki, $f(x_0)=M$ son $f(x)$ funktsiyaning eng katta qiymati bo'ladi.

Funktsiyaning eng kichik qiymati haqidagi xulosa aynan shunday isbot qilinadi.

70-rasmda aks ettirilgan $f(x)$ funktsiya o'zining eng kichik va eng katta qiymatlarini $[a,b]$ oraliqning ichida mos ravishda $x=\alpha$ nuqtada va $x=\beta$ nuqtada qabul qilyapti. 71-rasmda funktsiya minimum qiymatiga oraliqning chap chegarasida va maksimum qiymatiga oraliqning ichidagi qandaydir nuqtada erishyapti.

Boltsano-Koshining birinchi teoremasi. Agar f funktsiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz va oraliqning chekka nuqtalarida har xil ishorali qiymatlar qabul qilsa, u holda (a,b) da shunday s nuqta topiladiki, bu nuqtada

$$f(c)=0$$

bo'ladi.

72-rasmda aks ettirilgan funktsiya teoremaning hamma shartlarini qanoatlantiradi, ya'ni $[a,b]$ oraliqda uzluksiz va $f(a)< 0$, $f(b)> 0$. Grafik $s\in(a,b)$ nuqtada x o'qini kesib o'tyapti. Teorema shunday bo'lishini takidlayapti.

Teoremaning isboti. $[a,b]$ oraliqni σ_0 bilan belgilaylik. σ_0 ni teng ikkiga bo'lamiz. Agar σ_0 ning o'rtasida funktsiya nolga teng bo'lsa, teorema isbot bo'lgan bo'ladi, agar bunday bo'lmasa, qaysi bo'lakning chegara nuqtalarida funktsiya qiymatlari har xil ishorali bo'lsa, o'sha qismni olib uni σ_1 bilan belgilaymiz va uni teng ikkiga bo'lamiz. Agar funktsiya σ_1 ning o'rtasida nolga teng bo'lsa, teorema isbot bo'ladi, aks holda funktsiya qiymatlarining ishoralarini har bir bo'lak chegaralarida tekshiramiz. Qaysi bo'lak chegarasida ishoralar har xil bo'lsa, o'sha bo'lakni σ_2 bilan belgilab, uni yana teng ikkiga bo'lamiz va h.k. , bu jarayonni davom ettirib, biz yo funktsiya qiymati nolga teng bo'ladigan nuqtaga duch kelamiz bunda teorema isbot bo'ladi yoki bir-birining ichiga qamralgan $\sigma_0\supset\sigma_1\supset\sigma_2\supset\ldots$ oraliqlar ketma-ketligini hosil qilamiz. σ_i oraliqning chap chegarasini a_i bilan va o'ng chegarasini b_i bilan belgilaymiz. Barcha $i=1,2,3,...$ lar uchun shartga ko'ra, masalan, $f(a_i)<0$ va $f(b_i)>0$. σ_i oraliq uzunligi

$$b_i - a_i = \frac{b-a}{2^i} \quad ,$$

$i \to \infty$ da nolga intiladi. U holda qamralgan kesmalar haqidagi teoremaga ko'ra (5 bob , §2.7 dagi 1-teorema) $\{a_i\},\{b_i\}$ ketma-ketliklar bir xil limitga intiladi, ya'ni

$$\lim_{i\to\infty} a_i = \lim_{i\to\infty} b_i = c$$

bo'ladi. Funktsiya uzluksiz bo'lgani uchun

$$f(c) = \lim_{i\to\infty} f(a_i) \le 0 \quad \text{va} \quad f(c) = \lim_{i\to\infty} f(b_i) \ge 0 .$$

Bundan $f(c)=0$ ekanligi kelib chiqadi. Teorema isbot bo'ldi.

Isbot qilingan teorema tenglamalarni yechishda keng qo'llaniladi. Masalan, toq darajali

$$f(x) \equiv a_0 x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + \ldots + a_{2n} x + a_{2n+1} = 0$$

algebraik tenglamani ko'raylik. Absolyut qiymati bo'yicha yetarlicha katta bo'lgan x lar uchun ko'phadning ishorasi bosh hadning ishorasi kabi bo'ladi, , ya'ni musbat x lar uchun a_0 ning ishorasidek bo'ladi va manfiy x lar uchun unga teskari ishorada bo'ladi. Ko'phad uzluksiz bo'lgani uchun , u ishoralarini o'zgartira borib, natijada biror oraliq nuqtada nolga aylanadi. Demak, har qanday toq darajali algebraik tenglama kamida bitta yechimga ega ekan.

Boltsano-Koshining 1-teoremasidan nainki yechimning mavjudligini aniqlashda, balki hatto bu yechimni taqribiy topishda ham foydalaniladi. Masalan, $f(x)=x^4-x-1$ bo'lsin. $f(1)=-1$, $f(2)=13$ bo'lgani uchun, yechim 1 va 2 orasida bo'lishi mumkin. [1,2] oraliqni 1,1; 1,2; 1,3;... nuqtalar bilan teng 10 bo'lakka bo'lamiz va ketma-ket ravishda bu nuqtalarda funktsiyaning qiymatlarini hisoblaymiz:

$$f(1{,}1)=-0{,}63\ldots;\ f(1{,}2)=-0{,}12\ldots;\ f(1{,}3)=+0{,}55;\ \ldots$$

Bundan yechim 1,2 va 1,3 nuqtalar orasida ekanligini aniqlaymiz. [1,2; 1,3] oraliqni ham teng 10 bo'lakka bo'lamiz va hisoblaymiz:

$$f(1{,}21)=-0{,}06\ldots;\ f(1{,}22)=-0{,}04\ldots;\ f(1{,}23)=+0{,}058\ldots;\ \ldots$$

Bundan yechim 1,22 va 1,23 nuqtalar orasida ekanligini bilib olamiz va x.k. bu jarayonni davom ettirib, yechimni yetarlicha xatolik bilan topamiz, misol uchun 1,22 ni 0,01 xatolik bilan yechim, deb qabul qilish mumkin.

Boltsano-Koshining ikkinchi teoremasi. Agar f funktsiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz, $f(a)=A, f(b)=B, A\ne B$ bo'lsa, u holda A,B lar orasidagi har qanday C son uchun $[a,b]$ oraliqda kamida bitta shunday s nuqta topiladiki, $f(c)=C$ bo'ladi.

Isboti. Yordamchi $\varphi(x)=f(x)-C$ funktsiyani tuzib olamiz. f funktsiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz bo'lgani uchun, φ ham shu orliqda uzluksizdir va teorema shartiga ko'ra, C A va B lar orasidagi son bo'lgani uchun, $[a,b]$ ning chegaralarida har xil ishorali qiymatlarga ega, chunki masalan, agar $A<B$ bo'lsa, $A<C<B$ bo'ladi va

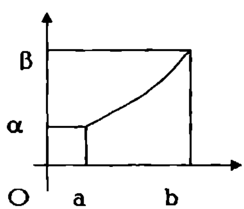
$$\varphi(a)=f(a)-C=A-C<0\ ,\quad \varphi(b)=f(b)-C=B-C>0\ .$$

U holda avvalgi teoremaga ko'ra, $[a,b]$ oraliqda shunday s nuqta topiladiki, $\varphi(c)=f(c)-C=0$ bo'ladi. Bundan $f(c)=C$ ekanligi kelib chiqadi.

Natija. $[a,b]$ oraliqda uzluksiz bo'lgan har qanday f funktsiya o'zining shu oraliqdagi eng kichik va eng katta qiymatlari orasidagi barcha qiymatlarni qabul qiladi.

Agar funktsiya eng kichik qiymatiga α nuqtada va eng katta qiymatiga β nuqtada erishsa, masalan, α < β bo'lsa, [α,β] $\subseteq[a,b]$ bo'ladi.U holda natijaning isboti Boltsano-Koshining 2-teoremasini [α,β] oraliqga qo'llashdan kelib chiqadi.

3.5. Teskari uzluksiz funktsiyalar. $[a,b]$ oraliqda uzluksiz va qat'iy o'suvchi bo'lgan $y=f(x)$ funktsiya berilgan bo'lsin. $f(a)=\alpha, f(b)=\beta$ bo'lsin deb faraz qilaylik. Bu funktsiyaning grafigi uzluksiz egri chiziqdir (73-rasmga qarang).

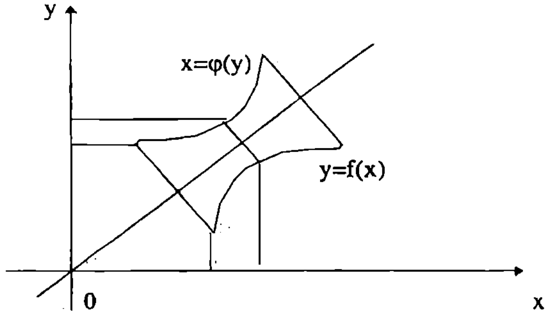


73-расм.

Agar x a dan b gacha o'sib borsa, y $[\alpha,\beta]$ oraliqning α dan to β gacha bo'lgan barcha qiymatlarini uzluksiz o'sib qabul qiladi. U holda har bir $y\in[\alpha,\beta]$ uchun $y=f(x)$ bo'ladigan yagona $x\in[a,b]$ mos keladi. Bu bilan $[\alpha,\beta]$ oraliqda berilgan $y=f(x)$ funktsiyaga teskari bo'lgan $x=\varphi(y)$ funktsiyani aniqladik. Ma'lumki, $x=\varphi(y)$ funktsiya $[\alpha,\beta]$ oraliqda qat'iy o'sib, uni $[a,b]$ oraliqqa o'zaro bir qiymatli akslantiradi: barcha $y\in[\alpha,\beta]$ lar uchun $f[\varphi(y)]=y$ va barcha $x\in[a,b]$ lar uchun $\varphi[f(x)]=x$.

$x=\varphi(y)$ funktsiyaning grafigini 1-koordinatalar choragining bissektrisasi atrofida tekislikni 180^0 burchak ostida burish natijasida hosil qilamiz. Burish jarayonida grafik uzluksizligicha qolgani uchun, $x=\varphi(y)$

funktsiya $[\alpha,\beta]$ oraliqda uzluksiz bo'ladi, deyish mumkin. Bunday geometrik muloxaza quyidagi teoremaning haqligiga asos bo'ladi.



74-rasm.

Teorema. Agar $y=f(x)$ funktsiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz, qat'iy o'suvchi va $f(a)=\alpha, f(b)=\beta$ bo'lsa, u holda f ga teskari bo'lgan $x=\varphi(y)$ funktsiya mavjud va bu funktsiya o'zaro bir qiymatli, qat'iy o'suvchi va $[\alpha,\beta]$ oraliqda uzluksizdir.

Teoremani quyidagi lemma yordamida isbot qilamiz.

Lemma. Agar qat'iy o'suvchi $y=f(x)$ funktsiya $[a,b]$ oraliqni $[\alpha,\beta]$ oraliqga akslantirsa, u holda f $[a,b]$ oraliqda uzluksiz bo'ladi.

Isboti. Ixtiyoriy $x_0\in(a,b)$ nuqta olaylik. f qat'iy o'suvchi bo'lgani uchun unga mos keluvchi $y_0=f(x_0)$ nuqta (α,β) intervalga tegishli bo'ladi. Yetarlicha kichik ε > 0 ni shunday tanlaymizki, $\alpha< y_0-\varepsilon< y_0< y_0+\varepsilon<\beta$ bo'lsin. Shartga ko'ra, shunday $x_1,x_2\in(a,b)$ lar topiladiki, $y_0-\varepsilon=f(x_1), y_0+\varepsilon=f(x_2)$ bo'ladi. f o'suvchi bo'lgani uchun $x\in(x_1,x_2)$ ekanligidan $y_0-\varepsilon=f(x_1)< f(x)< f(x_2)=y_0+\varepsilon$ kelib chiqadi. Bundan $|f(x)-y_0|<\varepsilon$ yoki $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ ni hosil qilamiz. Demak, f funktsiya $x_0\in(a,b)$ nuqtada uzluksiz ekan.

f funktsiyaning $x_0=a$ yoki $x_0=b$ nuqtalarda bir tomonli uzluksizligi xuddi shunday isbot qilinadi.

Teoremaning isboti. Faraz qilaylik, $Y=f([a,b])$ bo'lsin. $f(a)=\alpha, f(b)=\beta$ va f funktsiya o'suvchi bo'lgani uchun, har qanday $x\in[a,b]$ uchun $\alpha\le f(x)\le\beta$ bo'ladi, ya'ni $Y\subset[\alpha,\beta]$. Lekin, agar y $[\alpha,\beta]$ kesmaning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsa, §3.4. dagi Boltsano-Koshi teoremasining natijasiga ko'ra, $y\in Y$, ya'ni $Y\subset[\alpha,\beta]$. Demak, $Y=[\alpha,\beta]$ ekan. U holda qat'iy o'suvchi f funktsiya uchun $Y=[\alpha,\beta]$ da qat'iy o'suvchi $[\alpha,\beta]$ kesmani $[a,b]$ kesmaga akslantiruvchi $x=\varphi(y)$ teskari funktsiya mavjud. Lemmaga asosan esa, $x=\varphi(y)$ funktsiya uz luksizdir. Teorema to'liq isbot bo'ldi.

3.6. Tekis uzluksiz funktsiyalar. $[a,b]$ kesmada (intervalda, yarim intervalda) uzluksiz bo'lgan f funktsiya berilgan bo'lsin. U holda bu kesmaning (intervalning, yarimintervalning) ixtiyoriy x_0 nuqtasi uchun berilgan $\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta>0$ son topiladiki, $|x-x_0|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $x\in[a,b]$ $((a,b),(a,b],[a,b))$ lar uchun $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ bo'ladi.

x_0 nuqta o'zgarishi bilan o'zgarmas ε uchun δ ham o'zgarishi mumkin, ya'ni δ faqat ε ga bog'liq bo'lmay, balki x_0 ga ham bog'liq bo'ladi.

Shu sababli berilgan $\varepsilon>0$ uchun berilgan oralig'dagi barcha x larga bir xil $\delta>0$ mos keladigan funktsiyalarni ajratishga extiyoj tug'iladi.

Ta'rif. X to'plamda aniqlangan f funktsiya shu to'plamda tekis uzluksiz, deyiladi, agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta>0$ topilsaki, $|x_1-x_2|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $x_1,x_2\in X$ lar uchun

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$$

munosabat o'rinli bo'lsa.

Agar funktsiya X to'plamda tekis uzluksiz bo'lsa, u holda bu funktsiya X ning har qanday X' qismto'plamida ham tekis uzluksiz bo'ladi. Lekin aksi har doim ham o'rinli emas.

Teorema(Kantor[1]). $[a,b]$ oraliqda uzluksiz bo'lgan har qanday f funktsiya shu oraliqda tekis uzluksiz bo'ladi.

Isboti. Teskarisini faraz qilaylik, ya'ni shunday $\varepsilon>0$ mavjud bo'lsinki, har qanday $\delta>0$ uchun $|x_1-x_2|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi $x_1,x_2\in[a,b]$ lar topilib,

$$|f(x_1)-f(x_2)|\geq\varepsilon$$

munosabat o'rinli bo'lsin.

Nolga intiluvchi musbat $\{\delta_n\}$ sonlar ketma-ketligini olaylik. har bir δ_n uchun

$$|x_{1,n}-x_{2,n}|<\delta_n \quad \text{va} \quad |f(x_{1,n})-f(x_{2,n})|\geq\varepsilon \tag{1}$$

[1] Georg Kantor (1845-1918)- mashhur olmon matematigi, to'plamlar nazariyasining asoschisi.

munosabatlarni qanoatlantiruvchi $x_{1,n}, x_{2,n} \in [a,b]$ lar topiladi.

$\{x_{1,n}\}$ ketma-ketlik chegaralangan (chunki barcha $n = 1,2,3,...$ lar uchun $x_{1,n} \in [a,b]$) , shu sababli Boltsano-Veyershtrass teoremasiga ko'ra undan qandaydir $x_0 \in [a,b]$ ga intiluvchi $\{x_{1,n_k}\}$ xususiy ketma-ketlik ajratib olish mumkin. $\kappa \to \infty$ da $x_{1,n_k} - x_{2,n_k} \to 0$ bo'lgani uchun, $\{x_{2,n_k}\}$ xususiy ketma-ketlik ham $x_0 \in [a,b]$ nuqtaga intiladi. Shu sababli, f funktsiyaning x_0 nuqtada uzluksizligidan

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{1,n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(x_{2,n_k}) = f(x_0)$$

bo'ladi. Agar (1) da $\kappa \to \infty$ da limitga o'tsak,

$$\varepsilon \le \lim_{k\to\infty} \left|f(x_{1,n_k}) - f(x_{2,n_k})\right| = \left|f(x_0) - f(x_0)\right| = 0 \qquad (2)$$

kelib chiqadi. Buni esa bo'lishi mumkin emas, chunki shartga ko'ra ε > 0. Bu ziddiyat qilingan faraz xato ekanligini ko'rsatadi. Teorema isbot bo'ldi.

Bu teoremadan bevosita quyidagi natija kelib chiqadi.

Natija. Agar $y = f(x)$ funktsiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz bo'lsa, u holda har qanday berilgan ε > 0 son uchun shunday δ > 0 topiladiki, oraliqni uzunliklari δ dan kichik bo'lgan bo'laklarga qanday usulda bo'lmaylik, $y = f(x)$ funktsiyaning shu bo'laklardagi tebranishi ε dan kichik bo'ladi.

M i s o l. $y = Sin(1/x)$ funktsiya ∀ δ > 0 uchun [δ,1] oraliqda uzluksiz va yuqoridagi teoremaga ko'ra u shu oraliqda tekis uzluksiz. Lekin bu funktsiya (0,1] yarim intervalda uzluksiz bo'lsa ham, unda tekis uzluksiz emas.

Haqiqatan, $x_\kappa = \dfrac{2}{\pi(2\kappa+1)} (\kappa = 0,1,2,...)$ nuqtalar (0,1] yarimintervalga tegishli va ular uchun

$$\left|f(x_{k+1}) - f(x_k)\right| = \left|Sin\frac{\pi(2k+3)}{2} - Sin\frac{\pi(2k+1)}{2}\right| = \left|(-1)^{k+1} - (-1)^k\right| = 2$$

munosabat o'rinli. Agar ε=1 desak, har qanday δ > 0 son uchun shunday κ topiladiki,

$$\left|x_{\kappa+1} - x_\kappa\right| = \frac{4}{\pi(2\kappa+3)(2\kappa+1)} < \delta$$

bo'lsa ham, lekin

$$\left|f(x_{k+1}) - f(x_k)\right| = 2 > \varepsilon = 1$$

bo'ladi. Bundan berilgan funktsiyani [0,1] da uzluksiz bo'ladigan qilib davom ettirib bo'lmaydi degan xulosa kelib chiqadi, chunki aks holda, teoremaga ko'ra funktsiya [0,1] da tekis uzluksiz , demak (0,1] da ham tekis uzluksiz bo'lishi kerak. Buni esa bo'lishi mumkin emasligini yuqorida isbot qildik.

3.7. Elementar funktsiyalar. C (o'zgarmas), $x^n, a^x, \log_a x, Sinx, Cosx,$ $tgx, Arc\sin x, Arc\cos x, Arctgx$ funktsiyalarni eng sodda elementar funktsiyalar deb ataymiz. Ular ustida bajarilgan arifmetik amallar yoki superpozitsiyalar natijasida hosil bo'ladigan barcha murakkab funktsiyalarni elementar funktsiyalar, deymiz. Masalan, $y = \ln(e^x + Sin^2 x + 1)$ elementar funktsiyadir.

Elementar funktsiyalarni o'rganib chiqish matematik tahlil nuqtai-nazaridan foydadan holi emas.

a) O'zgarmas C funktsiya. Avval ko'rganimizdek barcha haqiqiy sonlar to'plamida aniqlangan, uning grafigi x o'qidan C masofada bu o'qga parallel o'tgan to'g'ri chiziqdan iborat. Yuqorida bu funktsiyaning haqiqiy sonlar o'qida uzluksiz ekanligini isbot qilgan edik.

b) $y = x^n$ - darajali funktsiya (n-o'zgarmas). Natural n lar uchun bu funktsiya barcha haqiqiy sonlar to'plamida aniqlangan, u yyerda uzluksiz (§ 3.2, 4-misolga qarang). Bu funktsiya $[0,\infty)$ da qat'iy o'suvchi, chunki har qanday $x_1 < x_2$ lar uchun

$$x_2^n - x_1^n = (x_2 - x_1)(x_2^{n-1} + x_2^{n-2}x_1 + \ldots + x_1^{n-1}) > 0.$$

Bundan tashqari $y = x^n$ funktsiya $X = [0,\infty)$ yarimintervalni $Y = [0,\infty)$ yarimintervalga akslantiradi, shu sababli § 3.6 dagi teoremaga ko'ra, unga teskari bo'lgan bir qiymatli , uzluksiz va qat'iy o'suvchi funktsiya mavjud. Bu funktsiyani $x = y^{1/n} = \sqrt[n]{y}$ $(y \geq 0)$ ko'rinishda belgilab, y ning n-darajali arifmetik ildizi deb ataymiz.

Agar n=2k+1 bo'lsa, $y = x^n$ funktsiya toq funktsiya bo'ladi. U $(-\infty,+\infty)$ oraliqda uzluksiz, qat'iy o'suvchi va $(-\infty,+\infty)$ oraliqni $(-\infty,+\infty)$ oraliqga akslantiradi, shu sababli $(-\infty,+\infty)$ oraliqda uzluksiz, qat'iy o'suvchi teskari funktsiyaga ega:

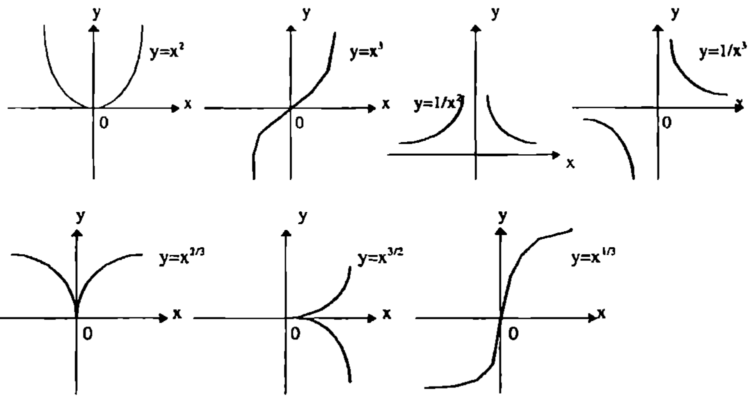
$$x = \sqrt[2k+1]{y} \quad (y \in (-\infty,+\infty)).$$

Bu yyerda $y > 0$ lar uchun $\sqrt[2k+1]{y}$ ifoda y ning 2k+1-darajali arifmetik ildizi va $y < 0$ lar uchun $\sqrt[2k+1]{y} = -\sqrt[2k+1]{|y|}$.

Agar n=2k bo'lsa, $y = x^n$ funktsiya juft funktsiya bo'ladi. U $(-\infty,+\infty)$ intervalni $[0,\infty)$ yarimintervalga akslantiradi. Lekin bu funktsiya $(-\infty,+\infty)$ intervalda monoton emas, va shu sababli unga teskari funktsiya ikki qiymatli:

$$x = \pm\sqrt[2k]{y} \quad (y \geq 0).$$

Quyida $y = x^n$ funktsiyaning n haqiqiy son bo'lgan ayrim hollardagi grafiklari berilgan:



75-расм.

v) $y = a^x$ - ko'rsatkichli funktsiya ($a \neq 1, a > 0$). Bu yerda ikki hol bo'lishi mumkin: 1) $a>1$ va 2) $0< a < 1$.

1-hol: agar $a>1$ bo'lsa, funktsiyaning aniqlanish sohasi $D(f) = (-\infty,+\infty)$, va bu funktsiya $(-\infty,+\infty)$ ni $(0,+\infty)$ ga akslantiradi, ya'ni barcha $x \in(-\infty,+\infty)$ lar uchun $a^x > 0$. Bundan tashqari, har qanday $x \in(0,+\infty)$ lar uchun $a^x > 1$.

Haqiqatan, ratsional x lar uchun $a^x >1$ bo'lishi o'rta maktabdan ma'lum. Endi agar x - irratsional bo'lsa, uning butun qismini $[x]= \kappa$ desak, $x \geq \kappa$ bo'ladi, bundan $a^x > a^\kappa >1$.

Bu funktsiya o'suvchi, ya'ni $y> x$ munosabatda bo'lgan har qanday $x, y \in(-\infty,+\infty)$ lar uchun $a^y > a^x$. Haqiqatan, $a^y - a^x = a^x(a^{y-x} -1)> 0$, chunki barcha $x \in(-\infty,+\infty)$ lar uchun $a^x> 0$ va $y - x > 0$ bo'lgani uchun $a^{y-x} -1> 0$.

1-m i s o l.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1. \qquad (1)$$

Haqiqatan, musbat λ lar uchun Nyuton binomiga ko'ra

$$(1+\lambda)^n = 1 + n\lambda + \frac{n(n-1)}{2}\lambda^2 + \ldots > 1 + \frac{n(n-1)}{2}\lambda^2 .$$

Agar bu yerda $\lambda = \sqrt[n]{n} - 1$ desak,

$$n > 1+\frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n}-1)^2$$

yoki $n \geq 2$ lar uchun

$$\frac{2}{n} > (\sqrt[n]{n}-1)^2 > 0.$$

Agar bu tengsizliklardan kvadrat ildiz olsak,

$$\sqrt{\frac{2}{n}} > \sqrt[n]{n}-1 > 0$$

yoki

$$\sqrt{\frac{2}{n}}+1 > \sqrt[n]{n} > 1. \tag{2}$$

Va nihoyat, agar $n \to \infty$ da limitga o'tsak, (1) hosil bo'ladi.

$n > a$ bo'ladigan barcha natural sonlar uchun

$$1 < a^{1/n} < n^{1/n} \underset{n\to\infty}{\to} 1$$

bo'lgani uchun

$$\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = 1 \tag{3}$$

bo'ladi. Endi agar x_n ixtiyoriy nolga intiluvchi musbat sonlar ketma-ketligi bo'lsa, $\left[1/x_n\right] = \kappa_n$ desak, $0 < x_n \leq 1/\kappa_n$ va $1 = a^0 < a^{x_n} \leq a^{1/\kappa_n}$ bo'ladi. U holda (3) ga asosan

$$\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = 1.$$

$\{x_n\}$ ketma-ketlik ixtiyoriy bo'lgani uchun, biz o'ng limitning mavjudligini isbotladik:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} a^x = 1.$$

U holda chap limit ham mavjuddir :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} a^x = \lim_{\substack{-x\to 0\\ -x>0}} \frac{1}{a^{-x}} = \frac{1}{\lim\limits_{\substack{u\to 0\\ u>0}} a^u} = \frac{1}{1} = 1.$$

Demak,

$$\lim_{x\to 0} a^x = 1 \tag{4}$$

ekan.

$y = a^x$ funktsiya har qanday $x_0 \in (-\infty,+\infty)$ nuqtada uzluksiz: agar $x - x_0 \to 0$ bo'lsa, (4) ga asosan

$$\left|a^x - a^{x_0}\right| = \left|a^{x_0}(a^{x-x_0}-1)\right| = a^{x_0}\left|a^{x-x_0}-1\right| \to 0$$

bo'ladi.

Endi bu funktsiya $x \to \infty$ da o'zini qanday tutishini ko'raylik. M > 0 yetarlicha katta son bo'lsin. Shunday α ratsional son topiladiki, $a^{\alpha} > M$ bo'ladi, shuning uchun ixtiyoriy $x > \alpha$ lar uchun

$$M < a^{\alpha} < a^{x}$$

ya'ni $x \to +\infty$ da $a^{x} \to +\infty$ ekan.

Endi, agar $x \to -\infty$ bo'lsa, u holda

$$\lim_{x \to -\infty} a^{x} = \lim_{-x \to +\infty} \frac{1}{a^{-x}} = \frac{1}{\lim\limits_{u \to +\infty} a^{u}} = 0$$

bo'ladi.

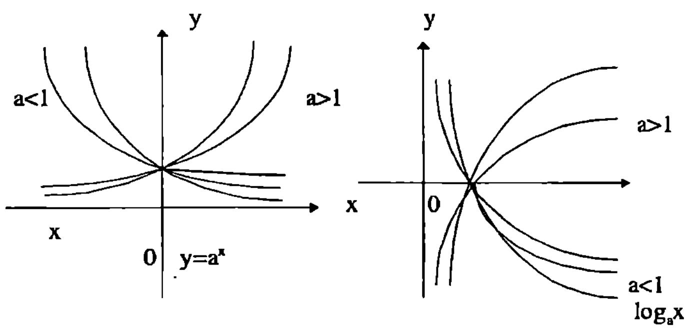
2-hol: $0 < a < 1$. Agar

$$a^{x} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{x}}$$

desak, biz ko'rmoqchi bo'lgan hol 1-holga keltiriladi, chunki $\frac{1}{a} > 1$. Bu holda ham funktsiyaning aniqlanish sohasi $D(f) = (-\infty, +\infty)$, va u $(-\infty,+\infty)$ ni $(0,+\infty)$ ga akslantiradi, ya'ni barcha $x \in (-\infty,+\infty)$ lar uchun $a^{x} > 0$. Bundan tashqari, har qanday $x \in (0,+\infty)$ lar uchun $a^{x} < 1$ va $x \in (-\infty, 0)$ lar uchun $a^{x} > 1$. Bu holda ham funktsiya o'z aniqlanish sohasida uzluksiz va qat'iy kamayuvchi.

Agar $x \to +\infty$ bo'lsa, $a^{x} \to 0$ va $x \to -\infty$ bo'lsa, u holda $a^{x} \to +\infty$ bo'ladi.

$y = a^{x}$ funktsiyaning ikkala hol uchun grafigi quyidagicha bo'ladi:



76-расм.

g) $y = \log_a x$. Bu yerda ham ikki hol bo'lishi mumkin. Avval $a > 1$ deb faraz qilaylik. $y = a^{x}$ funktsiya $(-\infty,+\infty)$ da uzluksiz, qat'iy o'suvchi va $(-\infty,+\infty)$ ni $(0,+\infty)$ ga akslantirgani uchun, unga teskari $(0,+\infty)$ da uzluksiz va qat'iy o'suvchi funktsiya mavjud. Uni y ning a asosga nisbatan logarifmi deb ataymiz va $x = \log_a y$ ko'rinishda yozamiz. Agar bu tenglikda x va y larni o'rnini almashtirsak, yuqorida bildirilgan fikrlarga asosan

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty \quad , \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \log_a x = -\infty.$$

Teskari funktsiyaning ta'rifiga ko'ra, quyidagi ayniyatlar o'rinli:

$$a^{\log_a x} = x \quad (0 < x < +\infty) \quad , \quad \log_a a^x = x \quad (-\infty < x < +\infty) \ .$$

a ning e asosga nisbatan logarifmini a ning natural logarifmi deb ataymiz va $\log_e a = \ln a$ ko'rinishda yozamiz.

Agar $0 < a < 1$ bo'lsa, $y = \log_a x$ funktsiya $(-\infty,+\infty)$ da uzluksiz va qat'iy kamayuvchi.

Bu funktsiyaning grafigi yuqoridagi rasmda ko'rsatilgan.

d) Trigonometrik funktsiyalar. $Sinx, Cosx, tgx, ctgx$ va boshqa trigonometrik funktsiyalar o'quvchiga o'rta maktabdan ma'lum.

Ma'lumki (§3.1, 3-misolga qarang), $y = Sinx$ funktsiya $[-\pi/2, \pi/2]$ oraliqda uzluksiz va qat'iy o'suvchi, bu oraliqni $[-1,+1]$ oraliqga o'zaro bir qiymatli akslantiradi. Shu sababli, unga teskari bir qiymatli, uzluksiz funktsiya mavjud:

$$x = \arcsin x, D(f) = [-1,+1].$$

Agar $y = Sinx$ funktsiyani $(-\infty,+\infty)$ oraliqda qarasak, unga teskari funktsiya ko'p qiymatli $Arc\sin y$ funktsiya bo'ladi, uning barcha qiymatlari quyidagi formula yordamida topiladi:

$$x = Arc\sin y = (-1)^k \arcsin y + k\pi \qquad (k = 0, \pm1, \pm2, \dots) \ . \tag{4}$$

Xuddi shunday

$$y = Cosx \quad (0 \le x \le \pi),$$

$$y = tgx \quad (-\pi/2 < x < \pi/2),$$

funktsiyalarga teskari funktsiyalar mos ravishda

$$x = \arccos y, (y \in [-1,+1])$$

$$x = arctgy, (y \in (-\infty,+\infty)$$

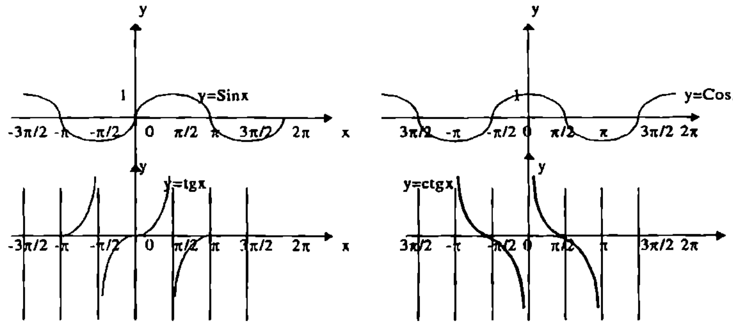
Agar berilgan funktsiyalarni $(-\infty,+\infty)$ oraliqda qarasak, ularga teskari funktsiyalar mos ravishda

$$x = Arc\cos y = \pm \arccos y + 2k\pi,$$

$$x = Arctgy = arctgy + k\pi$$

$$(k = 0, \pm1, \pm2, \dots)$$

bo'ladi.



77-расм.

e) Giperbolik funktsiyalar. Quyidagi funktsiyalar

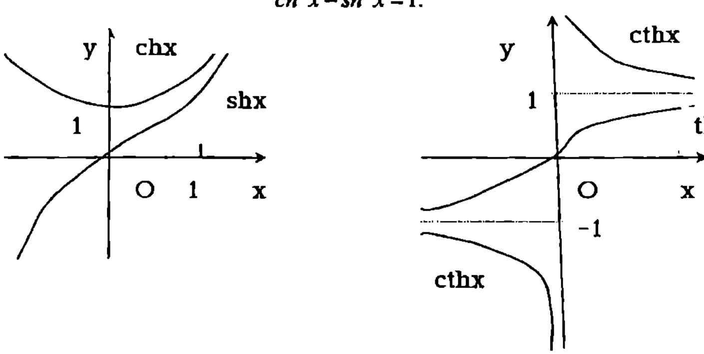
$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, thx = \frac{shx}{chx}, cthx = \frac{chx}{shx}$$

mos ravishda giperbolik sinus, kosinus, tangens va kotangens funktsiyalar, deb ataladi.

$shx, chx.thx$ funktsiyalar $(-\infty, +\infty)$ oraliqda aniqlangan, $cthx$ funktsiya esa $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ oraliqda aniqlangan.

Bu funktsiyalar uchun quyidagi formulalar o'rinli ekanligiga ishonch hosil qilish qiyin emas:

$$sh(x+y) = shxchy + shychx,$$
$$ch(x+y) = chxchy + shxshy,$$
$$ch^2x - sh^2x = 1.$$



78-расм.

Yuqorida keltirilgan elementar funktsiyalarning xossalaridan foydalanib quyidagi limitlarni hisoblaylik.

2-m i s o l. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \lim\limits_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e = \frac{1}{\ln a}$ ekanligini isbotlang.

Haqiqatan, v) ga asosan $\ln x$ funktsiya $(0,+\infty)$ oraliqda uzluksiz bo'lgani uchun va §2.3 dagi 5-misolga ko'ra

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x}=\ln\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=\ln e=1.$$

3-m i s o l.

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a\ ,\ (0<a)\ ,\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\ln e=1.$$

Haqiqatan, agar $a^x-1=u$ desak, ko'rsatkichli funktsiyaning uzluksizligiga ko'ra, $x\to 0$ da $u\to 0$ bo'ladi. Endi agar $x\ln a=\ln(1+u)$ ekanligini hisobga olsak,

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{u\to 0}\frac{u}{\ln(1+u)}\ln a=\ln a\cdot\lim_{u\to 0}\frac{u}{\ln(1+u)}=\ln a.$$

3.8. "O" va "o" miqdorlar. Miqdorlarni solishtirish. a nuqtaning o'zida bo'lmasa ham, uning biror U_a atrofida berilgan $\varphi(x)$, $f(x)$ funktsiyalarni qaraylik. a nuqta chekli son yoki cheksiz $(-\infty,+\infty)$ yoki ∞) bo'lishi mumkin. Barcha $x\in U_a$ lar uchun $\varphi(x)\neq 0$ bo'lsin.

1-ta'rif. Agar

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=0 \qquad (1)$$

bo'lsa, $x\to a$ da $f(x)$ funktsiyani $\varphi(x)$ funktsiyaga nisbatan o-kichik miqdor, deb ataymiz va

$$f(x)\underset{x\to a}{=}o(\varphi(x)) \qquad (2)$$

ko'rinishda yozamiz.

Masalan:

$$x^2\underset{x\to 0}{=}o(x),$$

agar $m<n$ bo'lsa, $x^n\underset{x\to 0}{=}o(x^m)$

agar $n<m$ bo'lsa, $x^n\underset{x\to\infty}{=}o(x^m)$

$$1-Cosx\underset{x\to 0}{=}o(x),\ \text{chunki}\ \lim_{x\to 0}\frac{1-Cosx}{x}=2\lim_{x\to 0}\frac{Sin^2 x/2}{x}=0.$$

$o(1)$, $x\to a$ da ifoda $x\to a$ dagi cheksiz kichik miqdorni bildiradi. Masalan, $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}\underset{x\to+\infty}{=}o(1)$.

(1) ni $f(x)=\varepsilon(x)\varphi(x)$ deb, yozish mumkin,bu yerda $x\to a$ da $\varepsilon(x)\to 0$. Agar (1) munosabat $x\to a$ da cheksiz kichik miqdor bo'lgan $f(x)$ va $\varphi(x)$ funktsiyalar uchun bajarilgan bo'lsa, $f(x)$ ni $\varphi(x)$ ga nisbatan $x\to a$ da yuqori tartibli cheksiz kichik miqdor deymiz. Agar (1) dagi $f(x)$ va $\varphi(x)$ funktsiyalar $x\to a$ da cheksiz katta miqdorlar bo'lsa,

u holda $f(x)$ ni $\varphi(x)$ ga nisbatan $x \to a$ da quyi tartibli cheksiz katta miqdor, deymiz.

2-ta'rif. Agar

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 1 \tag{3}$$

munosabat o'rinli bo'lsa, $f(x)$ va $\varphi(x)$ funktsiyalar $x \to a$ da ekvivalent miqdorlar, deyiladi va $f(x) \approx \varphi(x)$ ko'rinishda yoziladi.

Masalan, $x \to 0$ da

$$Sinx \approx x, 1 - Cosx \approx x^2/2, \ln(1+x) \approx x, e^x - 1 \approx x,\ a^x - 1 \approx x \ln a. \tag{4}$$

1-teorema. Agar

$$x \to a \text{ da } f(x) \approx \varphi(x) \text{ bo'lsa,} \tag{5}$$

u holda

$$x \to a \text{ da } \varphi(x) \approx f(x) \tag{6}$$

bo'ladi.

Isboti. Agar biror U_a da $\varphi(x) \neq 0$ bo'lsa, (5) ga ko'ra, ravshanki, a ning balki biror kichikroq atrofida $f(x) \neq 0$ bo'ladi. U holda

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \lim_{x \to a} \frac{1}{\frac{f(x)}{\varphi(x)}} = \frac{1}{1} = 1.$$

2-teorema. (5) munosabat bajarilishi uchun $x \to a$ da

$$f(x) = \varphi(x) + o(\varphi(x)) \tag{7}$$

bo'lishi zarur va yetarlidir.

Z a r u r l i g i. Faraz qilaylik, (5) o'rinli bo'lsin. U holda shunday $\varepsilon(x)$ funktsiya mavjudki, $x \to a$ da $\varepsilon(x) \to 0$ bo'lib, $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = 1 + \varepsilon(x)$ deyish mumkin. Bundan

$$f(x) = \varphi(x) + \varepsilon(x)\varphi(x) = \varphi(x) + o(\varphi(x))$$

kelib chiqadi.

Y e t a r l i l i g i. Agar (7) o'rinli bo'lsa, u holda

$$f(x) = \varphi(x) + o(\varphi(x)) = \varphi(x) + \varepsilon(x)\varphi(x)$$

bo'ladi, bu yerda $x \to a$ da $\varepsilon(x) \to 0$. Demak,

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = 1 + \varepsilon(x) \underset{x \to a}{\to} 1.$$

Bundan (5) kelib chiqadi. Teorema isbot bo'ldi.

3-teorema. Agar $x \to a$ da $\varphi(x) \approx \varphi_1(x)$ bo'lsa, u holda

$$\lim_{x \to a}[f(x)\varphi(x)] = \lim_{x \to a}[f(x)\varphi_1(x)] \tag{8}$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi_1(x)} \tag{9}$$

munosabatlar o'rinli bo'ladi.

(8) va (9) tengliklarda o'ng tomondagi limitlar mavjud bo'lsagina chap tomondagi limit mavjud bo'ladi, deb tushunmoq kerak, ya'ni agar o'ng tomondagi limit mavjud bo'lmasa, chap tomondagi limit ham mavjud bo'lmaydi.

Isboti. (8) ni isbot qilish bilan chegaralanamiz. Faraz qilaylik, (8) ning o'ng tomonidagi limit mavjud bo'lsin. U holda

$$\lim_{x\to a}[f(x)\varphi(x)] = \lim_{x\to a}\left[f(x)\varphi_1(x)\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)}\right] = \lim_{x\to a}[f(x)\varphi_1(x)]\cdot\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)} =$$

$$= \lim_{x\to a}[f(x)\varphi_1(x)]\cdot 1 = \lim_{x\to a}[f(x)\varphi_1(x)].$$

1-m i s o l. $x\to 0$ da $tgx \approx x$, chunki

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{Sinx}{x}\cdot Cosx\right) = 1.$$

2- m i s o l.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg^3x}{x^3+x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^3+x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+1} = 0.$$

3-ta'rif. Agar $f(x)$ funktsiya uchun shunday $A\neq 0$ va m sonlar topilsaki, $x\to a$ da $f(x)\approx A(x-a)^m$ bo'lsa, u holda $A(x-a)^m$ funktsiya $f(x)$ funktsiyaning a nuqta atrofidagi bosh darajali hadi, deb ataladi.

4-ta'rif. Agar barcha $x\in E$ lar uchun $|f(x)|\le C|\varphi(x)|$, bu yerda S x ga bog'liq bo'lgan o'zgarmas, bo'lsa, u holda f E to'plamda φ tartibga ega yoki f E to'plamda φ ga nisbatan O-katta miqdor, deb ataymiz va quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$f(x) = O(\varphi(x)). \tag{10}$$

Xususan, $f(x)=O(1)$ tenglik f funktsiyaning E to'plamda chegaralanganligini bildiradi.

Misollar:

1) $Sinx = O(1), Sinx = O(x), x\in(-\infty,+\infty)$;

2) $[1,+\infty)$ da $x = O(x^2)$;

3) $[0,1]$ da $x^2 = O(x)$.

7 - BOB

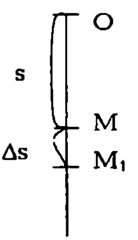
BIR O'ZGARUVCHILI FUNKTSIYA UCHUN DIFFERENTSIAL HISOB

§ 1. Hosila va uni hisoblash.

1.1. Asosiy tushunchalar. Biz bu bobdan boshlab o'quvchi e'tiboriga oliy matematikaning eng asosiy tushunchalaridan biri–differentsial va integral hisobini havola qilamiz. Differentsial va integral hisobning boshlang'ich tushunchalari XVII asrda vujudga keldi va XVIII asrga kelib ingliz olimi I.Nyuton va farang olimi G.V.Leybnitslarning buyuk xizmatlari tufayli mukammal nazariya ko'rinishiga keldi.

Avval keyingi bo'limda kiritiladigan hosila tushunchasiga asos solgan bir nechta amaliy masalalarni ko'raylik:

1. Moddiy nuqtaning oniy tezligi. Moddiy nuqtaning erkin tushish masalasini ko'raylik. Agar t vaqt tushish boshidan boshlab hisoblansa, shu vaqt ichida bosib o'tilgan yo'l



79-расм.

$$s=\frac{gt^2}{2} \qquad (1)$$

formula bilan hisoblanadi, bu yerda $g=9{,}81$. Nuqta harakatining t vaqtdagi ϑ tezligini topish talab qilingan bo'lsin.

t o'zgaruvchiga Δt orttirma beraylik va $t+\Delta t$ vaqtdan so'ng material M nuqtaning M_1 holatini ko'raylik. Yo'lning Δt vaqt oralig'ida olgan MM_1 orttirmasini Δs bilan belgilaylik. U holda t o'rniga $t+\Delta t$ ni (1) ga qo'ysak

$$s+\Delta s=\frac{g}{2}(t+\Delta t)^2$$

bo'ladi. Bundan

$$\Delta s=\frac{g}{2}(2t\cdot\Delta t+\Delta t^2).$$

Agar Δs ni Δt ga bo'lsak, moddiy nuqtaning MM_1 yo'lni bosib o'tgan o'rtacha tezligini topamiz:

$$\vartheta_{\text{ўр}}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=gt+\frac{g}{2}\cdot\Delta t.$$

Nuqtaning t vaqtdagi ϑ oniy tezligi deb, $\vartheta_{o'r}$ o'rta tezligining Δt nolga intilgandagi limitiga aytamiz:

$$\vartheta=\lim_{\Delta t\to 0}\left(gt+\frac{g}{2}\Delta t\right)=gt.$$

Umuman, nuqtaning tekis harakat tezligi ϑ ham xuddi shunday hisoblanadi. Bunda, agar harakat tenglamasi $s=f(t)$ bo'lsa, nuqtaning t vaqtdagi oniy tezligi

$$\vartheta = \lim_{\Delta t \to 0} \vartheta_{\text{rp}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

bo'ladi.

2. Tok kuchi. $Q = f(t)$ simdan t vaqt ichida o'tadigan elektr miqdorini bildirsin. U holda

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

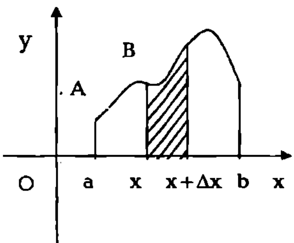
tokning [t,t+Δt] vaqt oralig'ida o'tgan tok kuchini bildiradi. Shu sababli,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = I$$

limit tokning t momentdagi kuchini beradi.

3. Massaning taqsimot zichligi. Faraz qilaylik, x o'qining $[a,b]$ kesmasida biror massa umuman notekis tarqalgan bo'lsin. U holda $[a,x]$ kesmadagi massa miqdori

$$M = F(x) \quad (a \le x \le b),$$



80-rasm.

ya'ni x ning funktsiyasi bo'ladi, chunki bu miqdor $aABx$ shakl yuzasiga proportsional. $[x, x+\Delta x]$ oraliqga to'g'ri keluvchi massa miqdori

$$\Delta F = F(x+\Delta x) - F(x)$$

bo'ladi.

U holda shu oraliqdagi o'rtacha massa zichligi $\frac{\Delta F}{\Delta x}$ bo'lsa, uning limiti

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \mu$$

massaning x nuqtasidagi zichligini beradi.

Yuqorida keltirilgan masalalarning barchasida asosiy miqdor funktsiya orttirmasining argument orttirmasiga bo'lgan nisbatining limitidir. Mana shu limitni funktsiyaning hosilasi, deymiz .Qat'iy ta'rif quyidagicha:

Ta'rif. Berilgan $y = f(x)$ funktsiyaning aniqlanish sohasiga tegishli bo'lgan biror nuqtasida olgan Δy orttirmasining argumentning mos Δx orttirmasiga nisbatining quyidagi limiti

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) \qquad (2)$$

mavjud bo'lsa, bu limit berilgan funktsiyaning hosilasi, deb ataladi.

Hosila uchun yana ko'pincha $y', \frac{df(x)}{dx}, \frac{dy}{dx}$ belgilar ham ishlatiladi.

x ning har bir o'zgarmas qiymati uchun $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ miqdor Δx ning funktsiyasi bo'ladi:

$$\psi(\Delta x)=\frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (\Delta x\neq 0).$$

f funktsiyaning x nuqtada hosilasi mavjud bo'lishi uchun f nainki x nuqtaning o'zida, balki uning biror atrofida ham aniqlangan bo'lishi zarur. Shu holdagina $\psi(\Delta x)$ funktsiya nolga yetarlicha yaqin bo'lgan Δx lar uchun aniqlangan bo'ladi.

Funktsiya hosilaga ega deganda asosan, (1) limit chekli bo'lishligi nazarda tutiladi, lekin agar (1) limit mavjud bo'lib cheksiz ($-\infty,+\infty$ yoki ∞) bo'lsa, u holda f funktsiya berilgan nuqtada cheksiz hosilaga ega, deymiz.

Agar (1) formulada $\Delta x \to 0$, $\Delta x > 0$ bo'lganda limit mavjud bo'lsa, bu limitni f funktsiyaning o'ng hosilasi, deb ataymiz. Uni $f'_r(x)$ ko'rinishda belgilaymiz.

Xuddi shunday, agar (1) limit $\Delta x \to 0$, $\Delta x < 0$ lar uchun mavjud bo'lsa, bu limitni f funktsiyaning chap hosilasi, deb atab, uni $f'_{ch}(x)$ ko'rinishda belgilaymiz.

Bunday holat, agar f funktsiya $[a,b]$ oraliqda berilgan bo'lsa, shu oraliqning chekka nuqtalarida yuz beradi. Agar f funktsiyaning barcha $x \in (a,b)$ nuqtalarda hosilasi, a nuqtada o'ng hosilasi va b nuqtada chap hosilasi mavjud bo'lsa, u holda f funktsiyaning $[a,b]$ oraliqda hosilasi mavjud yoki f funktsiya $[a,b]$ oraliqda differentsiallanuvchi deyiladi.

Funktsiyaning berilgan nuqtadagi limiti mavjud bo'lishi uchun uning shu nuqtadagi o'ng va chap limitlari mavjud va teng bo'lishi zarur ekanligidan, funktsiya x nuqtada differentsiallanuvchi bo'lishi uchun uning shu nuqtada o'ng va chap hosilalari mavjud bo'lib

$$f'_r(x)=f'_{ch}(x)=f'(x)$$

bo'lishi zarurdir.

Agar funktsiyaning x nuqtada chap va o'ng hosilalari mavjud bo'lsa-yu, lekin ular teng bo'lmasa ($f'_r(x)\neq f'_{ch}(x)$), u holda funktsiya shu nuqtada differentsiallanuvchi bo'lmaydi.

M i s o l. $y=|x|$ funktsiya uchun

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{|x+\Delta x|-|x|}{\Delta x}.$$

Agar $x>0$ bo'lsa, yetarlicha kichik Δx lar uchun $x+\Delta x>0$ va

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x}=\frac{\Delta x}{\Delta x}=1.$$

Agar $x<0$ bo'lsa, u holda yetarlicha kichik Δx lar uchun $x+\Delta x<0$ va

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-(x+\Delta x)-(-x)}{\Delta x}=-\frac{\Delta x}{\Delta x}=-1.$$

Demak, chap hosila -1 ga va o'ng hosila $+1$ ga teng, shu sababli berilgan funktsiya $x=0$ nuqtada differentsiallanuvchi emas .

Bizga ma'lumki (6-bob,§3.2 , 6-misolga qarang), $y=|x|$ funktsiya x ning barcha qiymatlarida, shu jumladan, $x=0$ nuqtada ham uzluksiz. Demak, funktsiyaning nuqtada uzluksizligidan funktsiyaning shu nuqtada hosilasi mavjudligi kelib chiqmas ekan. Lekin, aksi hamisha o'rinli, ya'ni berilgan funktsiyaning nuqtada chekli hosilasi mavjudligidan uning shu nuqtada uzluksizligi kelib chiqadi.

Haqiqatan, (1) limit biror x nuqtada mavjud va chekli bo'lsa, U holda (1) ni quyidagi ko'rinishda yozsa bo'ladi:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\varepsilon(\Delta x), \tag{2}$$

bu yerda $\Delta x\to 0$ da $\varepsilon(\Delta x)\to 0$. (2) dan

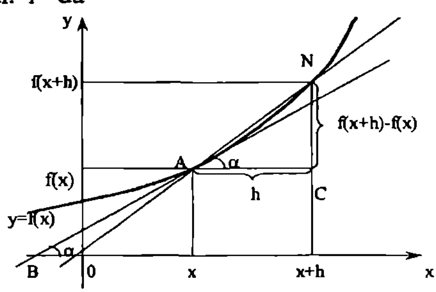
$$\Delta y=f'(x)\cdot\Delta x+\Delta x\cdot\varepsilon(\Delta x)$$

kelib chiqadi. Bunda $\Delta x\to 0$ da limitga o'tsak,

$$\lim_{x\to 0}\Delta y=0,$$

ya'ni funktsiya x nuqtada uzluksiz ekan.

1.2. Hosilaning geometrik ma'nosi. Faraz qilaylik, (a,b) intervalda uzluksiz $y=f(x)$ funktsiya berilgan bo'lsin. Uning grafigi Γ uzluksiz egri chiziq bo'ladi. Γ da



81-rasm.

$A(x,f(x))$ nuqta olib, shu nuqtada Γ ga urinib o'tgan to'g'ri chiziq , ya'ni urinmani topish masalasini ko'raylik. Buning uchun Γ da boshqa $N(x+h,f(x+h))$ nuqtani olaylik, bu yerda $h\neq 0$ (81-rasmga qarang). A

va N nuqtalardan o'tgan to'g'ri chiziqning Ox o'q bilan tashkil etgan burchagi β bo'lsin, $-\pi/2 < \beta < \pi/2$ deb faraz qilamiz. 81-rasmda β>0 , $h = AC, \Delta y = CN$ шу sababli, $\Delta y/h = tg\beta$.

Agar $h \to 0$ bo'lsa, funktsiya uzluksiz bo'lgani uchun $\Delta y \to 0$ va N nuqta Γ bo'ylab A nuqtaga intiladi. Agar bunda β burchak $-\pi/2$ va $\pi/2$ лarga teng bo'lmagan biror α limitga ega bo'lsa, u holda

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{h} = \lim_{h \to 0} tg\beta = tg\alpha \tag{3}$$

limit mavjud va u f ning x bo'yicha hosilasiga teng, ya'ni

$$f'(x) = tg\alpha \,. \tag{4}$$

Va aksincha, agar chekli $f'(x)$ hosila mavjud bo'lsa, u holda $\beta \to \alpha = arctgf'(x)$ bo'ladi. Bunda AN to'g'ri chiziq A nuqtadan o'tib, Ox o'q bilan α burchak tashkil etgan BA to'g'ri chiziq holatini egallashga intiladi.

Γ egri chiziq bilan bitta umumiy A nuqtaga ega bo'lgan BA to'g'ri chiziq Γ ga A nuqtada o'tkazilgan urinma, deb ataladi.

Biz hozir, agar $y = f(x)$ funktsiya biror x nuqtada chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsa, u holda funktsiyaning Γ grafigiga burchak koeffitsienti $tg\alpha = f'(x)$ bo'lgan urinma o'tkazish mumkinligini isbot qildik. Aksincha,

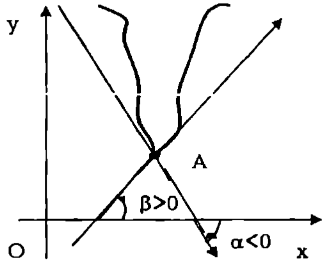
$$\lim \beta = \alpha$$

limitning mavjudligidan chekli $f'(x)$ hosilaning mavjudligi va (3) , (4) tengliklarning o'rinli ekanligi kelib chiqadi.

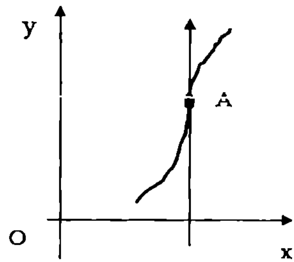
Ayrim hollarda teng bo'lmagan chap va o'ng hosilalar mavjud bo'lishi mumkin, bunda A nuqta Γ ning burchak nuqtasi, deyiladi. Bunday hollarda A nuqtadan Γ ga hech qanday urinma o'tmaydi, lekin burchak koeffitsientlari mos ravishda

$$tg\alpha_1 = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'_ч(x), \qquad tg\alpha_2 = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'_r(x)$$

bo'lgan chap va o'ng urinmalar mavjud deyish mumkin (82-rasmga qarang).



82-расм.

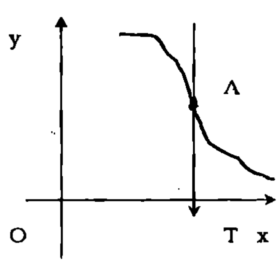


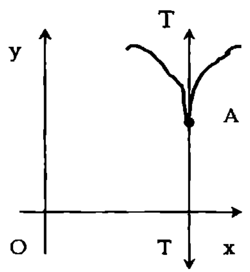
83-расм.

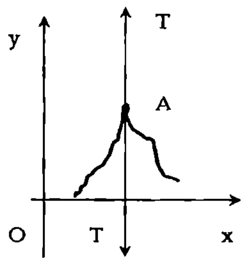
Agar funktsiyaning x nuqtadagi hosilasi cheksiz bo'lsa:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\infty,$$

u holda quyidagi to'rtta hol yuz beradi:







84-rasm. 85-rasm. 86-rasm.

1) $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=+\infty,\quad \beta\to\dfrac{\pi}{2}$ (83-rasm)

2) $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=-\infty,\quad \beta\to-\dfrac{\pi}{2}$ (84-rasm)

3) $f'_ч(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=-\infty,\ \beta\to-\dfrac{\pi}{2},\ f'_r(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=+\infty,\quad \beta\to\dfrac{\pi}{2}$ (85-rasm).

Chap urinma x o'qiga perpendikulyar bo'lib pastga yo'nalgan va o'ng urinma esa, x o'qiga perpendikulyar bo'lib, yuqoriga yo'nalgan.

4) $f'_ч(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\infty,\ \beta\to\dfrac{\pi}{2},\quad f'_r(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=-\infty,\ \beta\to-\dfrac{\pi}{2}$ (86-rasm).

Chap va o'ng urinmalar x o'qiga perpendikulyar bo'lib, birinchisi tepaga , ikkinchisi pastga yo'nalgan.

To'g'ri chiziqning analitik geometriyadan ma'lum bo'lgan burchak koeffitsientli tenglamasiga ko'ra grafik Γ ga $A(x_0,y_0)$ nuqtada o'tkazilgan urinmaning tenglamasi

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0) \tag{5}$$

bo'ladi. Shu nuqtada urinmaga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziqni Γ ga $A(x_0,y_0)$ nuqtada o'tkazilgan normal deb ataymiz. Uning tenglamasi

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0) \tag{6}$$

bo'ladi.

1.3. Elementar funktsiyalarning hosilalari.

O'zgarmas C funktsiyaning hosilasi nolga teng, chunki bu funktsiya uchun $\Delta y=0$ va

$$C'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}0=0. \tag{1}$$

Darajali funktsiya $y=x^n$ $(n=1,2,\dots)$ ning hosilasi

$$(x^n)'=nx^{n-1}. \tag{2}$$

Haqiqatan, Nyuton binomiga binoan

$$\frac{1}{\Delta x}[(x+\Delta x)^n-x^n]=\frac{1}{\Delta x}\left[x^n+nx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x^2+\ldots+\Delta x^n-x^n\right]=$$

$$=nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x+\ldots+\Delta x^{n-1}\underset{\Delta x\to 0}{\to}nx^{n-1}.$$

Differentsiallashning quyidagi to'rtta qoidasi mavjud:

$$(u\pm\vartheta)'=u'\pm\vartheta', \tag{3}$$

$$(u\vartheta)'=u\vartheta'+u'\vartheta, \tag{4}$$

$$\left(\frac{u}{\vartheta}\right)'=\frac{u'\vartheta-u\vartheta'}{\vartheta^2}\quad(\vartheta\neq 0). \tag{5}$$

Bu yerda $u=u(x),\vartheta=\vartheta(x)$ lar x ning differentsiallanuvchi funktsiyalaridir.

I s b o t i. Argumentga Δx orttirma beraylik. U holda $u=u(x),\vartheta=\vartheta(x)$ funktsiyalar ham mos ravishda $\Delta u,\Delta\vartheta$ orttirmalar olishadi. Bundan

$$\Delta(u\pm\vartheta)=[(u+\Delta u)\pm(\vartheta+\Delta\vartheta)]-(u\pm\vartheta)=\Delta u\pm\Delta\vartheta,$$

va hosilaning ta'rifiga binoan

$$(u\pm\vartheta)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(u\pm\vartheta)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\pm\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\vartheta}{\Delta x}=u'\pm\vartheta'$$

kelib chiqadi.

Xuddi shunday

$$\Delta(u\vartheta)=(u+\Delta u)(\vartheta+\Delta\vartheta)-u\vartheta=u\Delta\vartheta+\vartheta\Delta u+\Delta u\Delta\vartheta$$

va

$$(u\vartheta)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(u\vartheta)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u\Delta\vartheta + \vartheta\Delta u + \Delta u\Delta\vartheta}{\Delta x} = u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\vartheta}{\Delta x} + \vartheta\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} +$$

$$+\lim_{\Delta x\to 0}\Delta u\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\vartheta}{\Delta x} = u\vartheta' + u'\vartheta + 0\cdot\vartheta' = u\vartheta' + u'\vartheta.$$

Bu yerda differentsiallanuvchi funktsiya uzluksiz bo'lgani uchun $\Delta x \to 0$ da $\Delta u \to 0$ bo'lishidan foydalanildi.

Va nihoyat, shu xossaga binoan

$$\left(\frac{u}{\vartheta}\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{u+\Delta u}{\vartheta+\Delta\vartheta} - \frac{u}{\vartheta}\right)\cdot\frac{1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\vartheta\Delta u - u\Delta\vartheta}{(\vartheta+\Delta\vartheta)\vartheta\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\vartheta\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\dfrac{\Delta\vartheta}{\Delta x}}{(\vartheta+\Delta\vartheta)\vartheta} = \frac{u'\vartheta - u\vartheta'}{\vartheta^2}.$$

$y = Sinx$ funktsiyani qaraylik. Uning hosilasi

$$(Sinx)' = Cosx \tag{6}$$

bo'ladi, chunki

$$(Sinx)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{Sin(x+\Delta x) - Sinx}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2Sin\dfrac{\Delta x}{2}Cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{Sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}Cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = 1\cdot Cosx = Cosx.$$

Bu yerda $Cosx$ funktsiyaning uzluksizligidan foydalanildi.

Xuddi shunday quyidagi hosilani ham isbot qilsa bo'ladi:

$$(Cosx)' = -Sinx. \tag{7}$$

U holda

$$(tgx)' = \sec^2 x = \frac{1}{Cos^2 x}, \tag{8}$$

$$(ctgx)' = -\operatorname{cosec}^2 x = -\frac{1}{Sin^2 x}. \tag{9}$$

Haqiqatan, misol uchun

$$(tgx)' = \left(\frac{Sinx}{Cosx}\right)' = \frac{Cosx\cdot(Sinx)' - Sinx\cdot(Cosx)'}{Cos^2 x} =$$

$$= \frac{Cos^2 x + Sin^2 x}{Cos^2 x} = \frac{1}{Cos^2 x} = \sec^2 x$$

$y = \log_a x$ ($x > 0$) funktsiya uchun

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}=\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=\frac{1}{x}\cdot\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

Ikkinchi ajoyib limitga ko'ra,

$$\lim_{u\to 0}\frac{\log_a(1+u)}{u}=\log_a e$$

bo'lgani uchun

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\cdot\log_a e=\frac{1}{x\ln a}. \qquad (10)$$

Xususan,

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}. \qquad (10')$$

1.4. Murakkab funktsiyaning hosilasi.

1-teorema. Agar $x=\varphi(t)$ funktsiya t nuqtada, $y=f(x)$ funktsiya x nuqtada differentsiallanuvchi bo'lsa, u holda murakkab

$$y=F(t)=f[\varphi(t)] \qquad (1)$$

funktsiya ham t nuqtada differentsiallanuvchi bo'ladi va bu hosila uchun quyidagi formula o'rinli:

$$F'(x)=f'(x)\cdot\varphi'(t) \qquad (2)$$

yoki

$$y'_t=y'_x\cdot x'_t. \qquad (3)$$

Isboti. Agar t ga $\Delta t\neq 0$ orttirma bersak, $x=\varphi(t)$ funktsiya $\Delta x=\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)$ orttirma oladi. $y=f(x)$ funktsiya x nuqtada differentsiallanuvchi bo'lgani uchun §1.1 dagi (2) formulaga asosan

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+\varepsilon(\Delta x)\Delta x, \qquad (4)$$

bu yerda $\Delta x\to 0$ da $\varepsilon(\Delta x)\to 0$.

Endi (4) ni Δt ga bo'lamiz:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t}=f'(x)\frac{\Delta x}{\Delta t}+\varepsilon(\Delta x)\frac{\Delta x}{\Delta t}. \qquad (5)$$

$x=\varphi(t)$ funktsiya t nuqtada differentsiallanuvchi bo'lgani uchun u shu nuqtada uzluksiz, shu sababli, $\Delta t\to 0$ da $\Delta x\to 0$.

Yuqoridagi (5) tenglikda $\Delta t\to 0$ da limitga o'tamiz. U holda $\Delta x\to 0$ va $\varepsilon(\Delta x)\to 0$, va shuning uchun

$$y'_t=f'(x)x'(t)+0\cdot x'(t)=f'(x)x'(t)=y'_x\cdot x'_t.$$

Teorema isbot bo'ldi.

Eslatma. Agar murakkab funktsiya uchta $z=f(y), y=\varphi(x), x=\psi(t)$ funktsiyaning superpozitsiyasidan iborat bo'lsa, va uchchala funktsiya mos nuqtalarda diffe-rentsiallanuvchi bo'lsa, u holda $z'_t = z'_y \cdot y'_x \cdot x'_t$ bo'ladi.

1-misol. $y = \ln Sinx$. Agar $u = Sinx$ desak, $y = \ln u$ bo'ladi. U holda

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = \frac{1}{u} \cdot (Sinx)' = \frac{Cosx}{Sinx} = ctgx .$$

2-misol. $y = Sinax$. $y'_x = Cosax \cdot (ax)' = a \cdot Cosax$.

3-misol. $y = Sin(x^2 + 2x - 1)$. $y'_x = Cosu \cdot (x^2 + 2x - 1)' =$
$= 2(x+1) \cdot Cos(x^2 + 2x - 1)$.

1.5. Teskari funktsiyaning hosilasi.

Teorema. $y = f(x)$ funktsiya (a,b) intervalda uzluksiz, qat'iy o'suvchi va biror $x \in (a,b)$ nuqtada chekli noldan farqli $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsin. U holda f funktsiyaga teskari bo'lgan $x = f^{-1}(y) = g(y)$ funktsiya ham mos nuqtada

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} \tag{1}$$

yoki

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} \tag{1'}$$

formula bilan aniqlanuvchi hosilaga ega bo'ladi.

Isboti. Ma'lumki (§3.5 dagi teoremaga qarang), qat'iy o'suvchi va uzluksiz funktsiyaga teskari funktsiya ham qat'iy o'suvchi va uzluksiz bo'ladi. Shu sababli, agar f ning (a,b) intervaldagi eng kichik va eng katta qiymatlari mos ravishda A va B bo'lsa, $x = g(y)$ funktsiya (A,B) intervalda qat'iy o'suvchi va uzluksiz bo'ladi.

y ga $\Delta y \neq 0$ orttirma beraylik. f qat'iy monoton bo'lgani uchun unga teskari funktsiya ham noldan farqli Δx orttirma oladi. Shuning uchun

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

deyish mumkin. Agar $\Delta y \to 0$ bo'lsa, $x = g(y)$ uzluksiz bo'lgani uchun Δx ham nolga intiladi. Lekin $\Delta x \to 0$ da teorema shartiga ko'ra, $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to f'(x) \neq 0$. U holda

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x)}$$

limit ham mavjud bo'ladi.

Natija. Agar $f'(x)\neq 0$ x ning funktsiyasi sifatida (a,b) da uzluksiz bo'lsa, u holda $g'(y)$ (A,B) da uzluksiz bo'ladi.

Haqiqatan, agar (1) da $x=g(y)$ desak:

$$g'(y)=\frac{1}{f'[g(y)]},$$

ya'ni $g'(y)$ uchta $z=\frac{1}{u}, u=f'(x)$ va $x=g(y)$ uzluksiz funktsiyalarning superpozitsiyasidan iborat bo'ladi. U holda avvalgi paragrafdagi teoremaga asosan $g'(y)$ ham uzluksiz bo'ladi.

1.6. Elementar funktsiyalarning hosilasi (davomi).

1. $y=a^x$. Bundan $x=\log_a y$ - teskari funktsiyani topamiz. U holda

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{\frac{1}{y\ln a}}=y\ln a=a^x\ln a, \text{ ya'ni } (a^x)'=a^x\ln a.$$

Xususan,

$$(e^x)'=e^x, \qquad (e^{-x})'=-e^{-x}.$$

2. $y=\arcsin x$ $\left(|x|<1,\ -\pi/2<y<\pi/2\right)$. $x=Siny$ - teskari funktsiya. Shu sababli

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{Cosy}=\frac{1}{\sqrt{1-Sin^2y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

ya'ni

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ildiz oldida + ishora olinganini sababi $-\pi/2<y<\pi/2$ lar uchun $Cosy>0$.

3. $(\arccos x)'=\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin x\right)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

4. $y=arctgx$, $x=tgy$ - teskari funktsiya $\left(-\infty<x<\infty, -\pi/2<y<\pi/2\right)$.

U holda

$$(arctgx)'=\frac{1}{(tgy)'}=Cos^2y=\frac{1}{1+tgy}=\frac{1}{1+x^2},$$

ya'ni

$$(arctgx)'=\frac{1}{1+x^2}.$$

5. Xuddi shunday

$$(arcctgx)'=-\frac{1}{1+x^2}.$$

6. $y=x^\alpha$, ($x>0,\alpha$ - ixtiyoriy haqiqiy son). Ma'lumki,

$$x^\alpha=e^{\alpha\ln x}.$$

e^u va $\alpha\ln x$ differentsiallanuvchi funktsiyalar bo'lgani uchun murakkab funktsiyaning hosilasi haqidagi teoremaga ko'ra

$$(x^{\alpha})' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha \cdot \frac{x^{\alpha}}{x} = \alpha x^{\alpha-1},$$

ya'ni

$$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}.$$

7. $y = u(x)^{\vartheta(x)}$ ($u > 0$) – ko'rinishdagi funktsiyada $u(x), \vartheta(x)$ lar x ning differentsiallanuvchi funktsiyalaridir.
U holda

$$u^{\vartheta} = e^{\vartheta \ln u}$$

va

$$(u^{\vartheta})' = e^{\vartheta \ln u}(\vartheta \ln u)' = u^{\vartheta}\left(\frac{\vartheta}{u}u' + \vartheta' \ln u\right).$$

8. Giperbolik funktsiyalar:

$$(shx)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = chx,$$

$$(chx)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = shx,$$

$$(thx)' = \left(\frac{shx}{chx}\right)' = \frac{ch^2x - sh^2x}{ch^2x} = \frac{1}{ch^2x},$$

$$(cthx)' = \left(\frac{chx}{shx}\right)' = \frac{sh^2x - ch^2x}{sh^2x} = -\frac{1}{sh^2x}, (x \neq 0).$$

9. $y = Arshx$ funktsiya $x = shy$ funktsiyaga teskari funktsiyadir. Bundan

$$(Arshx)' = \frac{1}{(shy)'} = \frac{1}{chy} = \frac{1}{\sqrt{1+sh^2y}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

1.7. Hosilalar jadvali. Yuqorida keltirib chiqarilgan hosilalarni quyidagi tartibda jadval ko'rinishida yozib olamiz:

1. $y = c$	$y' = 0$
2. $y = x$	$y' = 1$
3. $y = x^{\alpha}$	$y' = \alpha x^{\alpha-1}$
$y = \frac{1}{x}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
4. $y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$
$y = e^x$	$y' = e^x$
5. $y = \log_a x$	$y' = \frac{\log_a e}{x}$

$y = \ln x \qquad y' = \frac{1}{x}$

6. $y = \sin x \qquad y' = \cos x$

7. $y = \cos x \qquad y' = -\sin x$

8. $y = tgx \qquad y' = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

9. $y = ctgx \qquad y' = -\csc^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x}$

10. $y = \arcsin x \qquad y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

11. $y = \arccos x \qquad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

12. $y = arctgx \qquad y' = \frac{1}{1+x^2}$

13. $y = arcctgx \qquad y' = -\frac{1}{1+x^2}$

14. $y = shx \qquad y' = chx$

15. $y = chx \qquad y' = shx$

16. $y = thx \qquad y' = \frac{1}{ch^2 x}$

17. $y = cthx \qquad y' = \frac{1}{sh^2 x}.$

§2. Differentsial.

2.1. Funktsiyaning differentsiali. Avvalgi paragrafda biz, agar berilgan $y = f(x)$ funktsiyaning chekli hosilasi mavjud bo'lsa, quyidagi munosabat o'rinli ekanligini ko'rgan edik:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon(\Delta x),$$

bu yerda $\Delta x \to 0$ da $\varepsilon(\Delta x) \to 0$. (2) dan

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \Delta x \cdot \varepsilon(\Delta x)$$

yoki

$$\Delta y = f'(x)\cdot\Delta x + \underset{\Delta x\to 0}{o(\Delta x)} \qquad (1)$$

kelib chiqadi.

Ta'rif. $y = f(x)$ funktsiya x nuqtada differentsiallanuvchi deymiz, agar uning Δy orttirmasi

$$\Delta y = A\cdot\Delta x + \underset{\Delta x\to 0}{o(\Delta x)} \qquad (2)$$

ko'rinishda ifodalansa, bu yerda A x ga bog'liq bo'lib, Δx ga bog'liq emas.

Avvalgi paragrafda biz hech qanday qo'shimcha tushun-tirishlarsiz x nuqtada chekli hosilasi mavjud bo'lgan funktsiyani shu nuqtada differentsiallanuvchi deymiz, deb ketgan edik. Hozir biz yuqoridagi ta'rif asosida shunga izoh beramiz va bu ikkala tushuncha bir-biriga ekvivalent ekanligini ko'rsatuvchi quyidagi teoremani isbot qilamiz.

Teorema. $y = f(x)$ funktsiya x nuqtada differentsiallanuvchi, ya'ni uning x nuqtadagi orttirmasi (2) ko'rinishda ifodalanishi uchun uning shu nuqtada chekli hosilasi mavjud bo'lishi zarur va yetarlidir. U holda $A = f'(x)$ bo'ladi.

Isboti. Shartning yetarli ekanligi yuqorida isbot qilingan, shu sababli biz faqat zaruriy qismini isbot qilamiz.

Faraz qilaylik, $y = f(x)$ funktsiya x nuqtada differentsiallanuvchi bo'lsin. Unda (2) ga asosan $\Delta x \neq 0$ lar uchun

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \underset{\Delta x\to 0}{\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}} = A + \underset{\Delta x\to 0}{o(1)}$$

bo'ladi. $\Delta x \to 0$ da o'ng tomonning limiti A ga teng:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = A,$$

ya'ni

$$f'(x) = A.$$

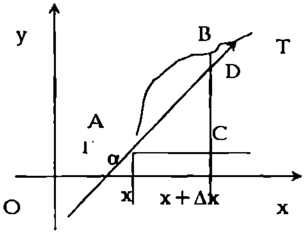
Teorema isbot bo'ldi.

(2) ifodaning o'ng tomonidagi ikkinchi qo'shiluvchi Δx ga nisbatan cheksiz kichik miqdor bo'lgani uchun, o'ng tomonning Δx ga nisbatan chiziqli qismi $A\cdot\Delta x$ yoki yuqoridagi teoremaga ko'ra $f'(x)\cdot\Delta x$, orttirmaning asosiy qismi va $y = f(x)$ funktsiyaning differentsiali deb ataladi va dy yoki $df(x)$ ko'rinishda belgilanadi. Demak,

$$dy = df = f'(x)\cdot\Delta x$$

ekan.

Differentsialni geometrik nuqtai-nazardan qanday ma'no berishini tushunish uchun $y = f(x)$ funktsiyaning grafigini ko'raylik.



87-rasm.

T – G ga abstsissasi x bo'lgan A nuqtada o'tgan urinma bo'lsin. Agar T ning x o'qiga og'ish burchagi α bo'lsa, u holda $f'(x) = tg\alpha$ bo'ladi.

$$dy = f'(x)\Delta x = tg\alpha\Delta x = CD,$$

$$DB = \Delta y - dy = \underset{\Delta x \to 0}{o(\Delta x)}.$$

Demak, funktsiyaning Δx orttirmaga mos keluvchi x nuqtadagi differentsiali urinmada yotuvchi nuqtaning ordinatasini orttirmasiga teng ekan, ya'ni $dy = CD$. $\Delta y = CB$ bo'lgani uchun umuman chiziqli funktsiyadan boshqa barcha hollarda $dy \neq \Delta y$ bo'ladi. Chiziqli $y = Ax + B$ funktsiya uchun barcha x larda $\Delta y = A \cdot \Delta x = dy$, xususan, $y = x$ funktsiya uchun $dy = dx = \Delta x$. Shu sababli, funktsiya differentsialini

$$dy = f'(x)dx$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bundan

$$f'(x) = \frac{dy}{dx},$$

ya'ni funktsiyaning x nuqtadagi hosilasi funktsiyaning shu nuqtadagi differentsialini argument differentsialiga bo'lgan nisbatiga teng ekan.

Differentsiallarni quyidagi qoidalar bo'yicha hisoblanadi:

1^0. $d(u \pm \vartheta) = du \pm d\vartheta$,

2^0. $d(u \cdot \vartheta) = ud\vartheta + \vartheta du$,

$d(cu) = cdu \quad$ (c - o'zgarmas)

3^0. $d\left(\dfrac{u}{\vartheta}\right) = \dfrac{\vartheta du - ud\vartheta}{\vartheta^2} \quad (\vartheta \neq 0)$,

bu yerda $u = u(x), \vartheta = \vartheta(x)$ lar x ning differentsiallanuvchi funktsiyalaridir.

Bularning isboti hosilalarni hisoblash qoidalaridan osongina kelib chiqadi. Masalan, 2^0- ni isbotlaylik:

$$d(u\vartheta) = (u\vartheta)'dx = (u'\vartheta + u\vartheta')dx = \vartheta u'dx + u\vartheta'dx = \vartheta du + ud\vartheta$$

Ma'lumki (§1.4 qarang), agar murakkab funktsiya differentsiallanuvchi $y = f(x)$ va $x = \varphi(t)$ funktsiyalarning superpozitsiyasidan iborat bo'lsa, u holda

$$y'_t = y'_x \cdot x'_t$$

bo'lar edi. U holda $y = F(t) = f[\varphi(t)]$ funktsiyaning differentsiali

$$dy = y'_t\, dt = y'_x \cdot x'_t\, dt = y'_x\, dx$$

bo'ladi, bu yerda $x'_t dt = dx$ ekanligidan foydalanildi. Bu tenglik murakkab funktsiyaning asosiy argument bo'yicha differentsial ko'rinishi bilan oraliq argument bo'yicha differentsial ko'rinishi bir xil ekan degan ma'noni bildiradi. Shuning uchun differentsialning bu xususiyatini differentsial ko'rinishining invariantligi, deb atashadi. Demak, murakkab funktsiyaning differen-tsialini oraliq argument bo'yicha olingan hosilani shu argument differentsialiga ko'paytmasi ko'rinishida yoki asosiy argument bo'yicha olingan hosilasini asosiy argument differentsialiga ko'paytmasi ko'rinishida ifodalasa yoki hisoblasa bo'lar ekan.

2.2. Differentsialning taqribiy hisoblarda qo'llanishi. Avvalgi bo'limdagi (1) formulaga ko'ra

$$\Delta y = dy + \underset{\Delta x \to 0}{o(\Delta x)}.$$

Bundan yetarlicha kichik Δx lar uchun

$$\Delta y \approx dy = f'(x)dx \tag{1}$$

ekan degan xulosa kelib chiqadi. Agar bu yerda $\Delta x = x - x_0$ yoki $x_0 + \Delta x = x$ desak, (1) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x$$

yoki

$$f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

yoki

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Oxirgi tenglikni x ing x_0 ga etarlicha yaqin qiymatlari uchun $f(x)$ funktsiyani taqriban chiziqli funktsiyaga almashtirish deb tushunish mumkin. Geometrik nuqtai-nazardan bu $y = f(x)$ egri chiziqning $(x_0, f(x_0))$ nuqta atrofidagi qismini shu nuqtada o'tkazilgan urinmaning kesmasi bilan almashtirilganini bildiradi.

Bundan, agar $x_0=0$ desak, x ning etarlicha kichik qiymatlari uchun

$$(1+x)^{\mu} \approx 1 + \mu x, \text{ xususan } \sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x, \quad e^x \approx 1 + x,$$

$$\ln(1+x) \approx x, \quad Sinx \approx x, \quad tgx \approx x \text{ va x.k.}$$

deyish mumkin.

Bundan tashqari differentsial tushunchasi taqribiy hisoblarda xatoliklarni baholash uchun ham ishlatiladi.

Faraz qilaylik, f funktsiyaning x uqtadagi qiymatini hisoblash kerak bo'lsin. Agar x ni uning taqribiy qiymati $x+\Delta x$ bilan almashtirish zarurati tug'ilgan bo'lsa, u holda

$$f(x) \approx f(x + \Delta x)$$

taqribiy munosabat vujudga keladi. Bu yerda yo'l qo'yilgan absolyut xatolik

$$|\Delta y| = |f(x+\Delta x) - f(x)|$$

bo'ladi. Agar f funktsiya x nuqtada differentsiallanuvchi bo'lsa, (1) ga asosan, yetarlicha kichik Δx ar uchun absolyut xatolik differentsialning absolyut qiymatiga teng bo'ladi:

$$|\Delta y| \approx |dy|$$

Nisbiy xatolik taqriban quyidagicha ifodalanadi:

$$\left|\frac{\Delta y}{y}\right| \approx \left|\frac{dy}{y}\right| \qquad (y = f(x) \neq 0) .$$

M i s o l . Agar taqriban

$$\sqrt[3]{8{,}001} \approx \sqrt[3]{8} = 2$$

desak, u holda xatolik taqriban $y = \sqrt[3]{x}$ funktsiyaning $x = 8$ nuqtada $\Delta x = 0{,}001$ orttirmaga nisbatan hisoblangan differentsialiga teng:

$$dy = \frac{1}{3} x^{-2/3} \Delta x = \frac{1}{3} 8^{-2/3} \cdot 0{,}001 = \frac{1}{12000} .$$

2.3. Yuqori tartibli hosilalar va differentsiallar.

Agar $y = f(x)$ funktsiya biror (a,b) oraliqda chekli $y' = f'(x)$ hosilaga ega bo'lsa, u holda bu hosila o'z navbatida $x$ning yangi funktsiyasi bo'ladi, shu sababli, u ham x bo'yicha differentsiallanuvchi bo'lishi mumkin. Agar bu yangi funktsiyaning (a,b) oraliqda hosilasi mavjud bo'lsa, bu hosilani $y = f(x)$ funktsiyaning ikkinchi hosilasi yoki ikkinchi tartibli hosilasi, deb ataymiz. Bu hosila uchun

$$y'' = (y')', \quad f''(x) = (f'(x))'$$

belgilashlarning birortasi ishlatiladi.

Shu bobning §1.1 da jismning oniy tezligi yo'ldan vaqt bo'yicha olingan hosilaga teng edi: $\vartheta = \frac{ds}{dt}$, tezlanish esa tezlikdan vaqt bo'yicha olingan hosilaga teng bo'ladi: $a = \frac{d\vartheta}{dt}$. Demak, tezlanish yo'lning vaqt bo'yicha ikkinchi hosilasiga teng ekan: $a = s''$.

Xuddi shunday, agar $y = f(x)$ funktsiya (a,b) oraliqda chekli $y'' = f''(x)$ hosilaga ega bo'lib, bu ikkinchi hosila o'z navbatida x bo'yicha differentsiallanuvchi bo'lsa, ikkinchi hosilaning hosilasini $y = f(x)$ funktsiyaning uchinchi hosilasi yoki uchinchi tartibli hosilasi, deb ataymiz va quyidagi belgilarning birortasi bilan ifodalaymiz:

$$y''' = (y'')', \quad f'''(x) = (f''(x))'$$

Xuddi shu tartibda, uchinchi hosiladan to'rtinchi hosilaga o'tish mumkin va hokazo. Va nihoyat, agar $(n-1)-$hosila (a,b) oraliqda chekli hosilaga ega bo'lsa, bu hosilani $y=f(x)$ funktsiyaning $n-$chi hosilasi yoki $n-$chi tartibli hosilasi deb ataymiz va quyidagi belgilarning birortasi bilan ifodalaymiz:

$$y^{(n)}=\left(y^{(n-1)}\right)',\ f^{(n)}(x),\ \frac{d^n y}{dx^n}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right),\ \frac{d^n f(x)}{dx^n}.$$

M i s o l l a r.

1^0. $\left(e^x\right)^{(n)}=e^x$,

2^0. $\left(a^x\right)'=a^x\ln a, \left(a^x\right)''=a^x\ln^2 a,\ldots,\left(a^x\right)^{(n)}=a^x\ln^n a.$

3^0. $\left(x^m\right)'=mx^{m-1},\left(x^m\right)''=m(m-1)x^{m-2},\ldots,\left(x^m\right)^{(n)}=m(m-1)\ldots(m-n+1)x^{m-n}$

Xususan, agar m natural bo'lsa,

$$\left(x^m\right)^{(m)}=m! \text{ va } n>m \text{ lar uchun } \left(x^m\right)^{(n)}=0.$$

4^0. $(\sin x)'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),(\sin x)''=\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)'=\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$

$$\ldots,(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

5^0. $(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$

6^0. $(\ln x)'=\frac{1}{x},(\ln x)^{(n)}=((\ln x)')^{(n-1)}=\left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)}=(-1)^{n-1}\cdot\frac{(n-1)!}{x^n}.$

7^0. $(arctgx)'=\frac{1}{1+x^2}=\cos^2 y=\cos y\cdot\sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right),$

$$(arctgx)''=\left[-\sin y\cdot\sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right)+\cos y\cdot\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right]\cdot y'=$$

$$=\cos^2 y\cdot\cos\left(2y+\frac{\pi}{2}\right)=\cos^2 y\cdot\sin 2\left(y+\frac{\pi}{2}\right),$$

. . . .

$$(arctgx)^{(n)}=(n-1)!\cdot\cos^n y\cdot\sin n\left(y+\frac{\pi}{2}\right).$$

$n-$chi hosilalar uchun

$$(u\pm\vartheta)^{(n)}=u^{(n)}\pm\vartheta^{(n)}.$$

Lekin x bo'yicha n marotaba differentsiallanuvchi $u=u(x),\vartheta=\vartheta(x)$ funktsiyalar ko'paytmasi uchun bu bir oz murakkabroq. Ko'paytma uchun $n-$chi hosilaning mavjudligini va uning ifodasini birinchi bo'lib Leybnits ko'rsatgan. Shu sababli u taklif etgan formulani Leybnits formulasi, deb atashadi.

Ko'paytmadan hosila olish qoidasini ketma-ket qo'llasak

$$y'=u'\vartheta+u\vartheta',\ y''=u''\vartheta+2u'\vartheta'+\vartheta'',$$

$$y'''=u'''+3u''\vartheta+3u'\vartheta''+\vartheta''',\ldots$$

Bundan matematik induktsiya usulini qo'llab

$$y^{(n)} = (u\vartheta)^{(n)} = u^{(n)} + nu^{(n-1)}\vartheta' + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{(n)}\vartheta'' + \ldots + u\vartheta^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} C^{i}_{n} u^{(n-i)}\vartheta^{(i)}$$

ekanligiga ishonch hosil qilish qiyin emas, bu yerda

$$C^{i}_{n} = \frac{n!}{i!(n-i)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot i}$$

Nyuton binomining koeffitsientlaridir. Buni isbotini o'quvchining o'ziga havola qilamiz.

Bizga ma'lumki, $y = f(x)$ funktsiyaning x nuqtadagi differentsiali uning shu nuqtadagi hosilasini erkli o'zgaruvchining differentsiali bilan bo'lgan ko'paytmasiga teng edi:

$$dy = f'(x)dx. \qquad (1)$$

Bu yerda $dx = \Delta x$, ya'ni x ga bog'liq bo'lmagan o'zgarmas son, shu sababli, uning x bo'yicha hosilasi nolga teng:

$$(dx)' = 0.$$

Agar (1) ni $y = f(x)$ funktsiyaning x nuqtadagi birinchi differentsiali desak, (1) ning shu nuqtadagi differentsiali $y = f(x)$ funktsiyaning ikkinchi differentsiali yoki ikkinchi tartibli differentsiali, deb ataladi. Bu quyidagicha belgilanadi:

$$d^2y = d(dy).$$

Bu differentsialni hisoblash uchun (1) dan x bo'yicha hosila olib, uni dx ga ko'paytirish kifoya:

$$d^2y = d[f'(x)dx] = d[f'(x)]\cdot dx = f''(x)dx\cdot dx = f''(x)dx^2.$$

Xuddi shunday, ikkinchi differentsialning differentsialini uchinchi differentsial yoki uchinchi tartibli differentsial, deb ataymiz:

$$d^3y = d(d^2y).$$

Va umuman, $(n-1)-$tartibli differentsialning differentsialini $y = f(x)$ funktsiyaning $n-$chi differentsiali yoki $n-$chi tartibli differentsiali deb ataladi va quyidagicha belgilanadi:

$$d^n y = d(d^{n-1}y).$$

Bundan

$$d^n y = f^{(n)}(x)dx^n \qquad (2)$$

munosabatni matematik induktsiya usuli bilan keltirib chiqarish qiyin emas. Shu sababli bu ishni o'quvchining o'ziga havola qilamiz.

(2) dan

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n} \qquad (3)$$

munosabat, ya'ni $y = f(x)$ funktsiyaning x bo'yicha $n-$chi hosilasi uning $n-$chi differentsialini $dx^n = (dx)^n$ ga bo'linmasiga teng ekanligi kelib chiqadi.

(2) dan foydalanib differentsiallar uchun Leybnits formulasini keltirib chiqarish mumkin,buning uchun hosilalar uchun Leybnits formulasini dx^n ga ko'paytirish kifoya. Natijada quyidagi formulani hosil qilamiz:

$$d^n(u\vartheta)=\sum_{i=0}^{n} C^i_n d^{n-i}u\cdot d^i\vartheta \ ,$$

bu yerda $d^0u=u, d^0\vartheta=\vartheta$.

Ma'lumki, birinchi differentsial ko'rinishi invariantlik xususiyatigi ega (§2.1 ga qarang). Shunday xususiyatga yuqori tartibli differentsiallar ham egami degan tabiiy savol tug'iladi. Masalan, ikkinchi differentsial shu xossaga ega emas.

Haqiqatan, agar $y=f(x)$, $x=\varphi(t)$ murakkab funktsiya berilgan bo'lsa,

$$d^2y=d(y'_x\cdot dx)=dy'_x\cdot dx+y'_x\cdot d(dx)=y''_{xx}\cdot dx^2+y'_x\cdot d^2x, \quad (4)$$

bu yerda x o'zgaruvchi t ning funktsiyasi bo'lgani uchun dx o'zgarmas emas, shu sababli, umuman $d(dx)=d^2x\neq 0$. (4) tenglik $d^2y=y''_{xx}\cdot dx^2$ ko'rinishga faqat $x=at+b$ bo'lgandagina keladi. Demak, boshqa barcha holatlarda ikkinchi differentsial (4) ko'rinishda bo'ladi, ya'ni ikiinchi differentsial invariantlik xususiyatiga ega emas.

M i s o l. $y=x^2, x=t^2$ bo'lsin. Bundan

$$dy=2x\cdot dx, d^2y=2dx^2. \quad (5)$$

Endi $x=t^2$ ekanligini eslasak, $y=t^4$ va bundan

$$dy=4t^3dt, d^2y=12t^2dt^2$$

kelib chiqadi. dy uchun shunday natijaga $x=t^2$ ni (5) ga olib borib qo'yib ham kelsa bo'ladi. Lekin d^2y uchun bunday emas, ya'ni shunday almashtirish bajarib $12t^2dt^2$ o'rniga $8t^2dt^2$ ni hosil qilamiz.

Agar (4) formulani qo'llasak,

$$d^2y=2dx^2+2xd^2x=2\cdot(2tdt)^2+2t^2\cdot 2dt^2=12t^2dt^2,$$

ya'ni to'g'ri natijaga kelamiz.

2.4. Parametrik funktsiyalarni differentsiallash.

Faraz qilaylik, y bilan x orasidagi munosabat t parametr orqali berilgan bo'lsin:

$$\left.\begin{matrix} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t)\end{matrix}\right\}, t\in(a,b). \quad (1)$$

y dan x bo'yicha hosilani x va y larning t bo'yicha hosilalari orqali topamiz. Birinchi differentsialning invariantligidan $y'_x={dy}/{dx}$, lekin $dy=y'_t\,dt, dx=x'_t\,dt$ .Shu sababli

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \qquad (x'_t \neq 0). \tag{2}$$

Ikkinchi tartibli hosila uchun

$$y''_{xx} = \frac{d}{dx} y'_x = \frac{d}{dx}\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{x'_t y''_{tt} - y'_t x''_{tt}}{(x'_t)^3}. \tag{3}$$

M i s o l.

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos t \\ y &= b\sin t \end{aligned}\right\}, \qquad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Yechish. $x'_t = -a\sin t, y'_t = b\cos t, x''_{tt} = -a\cos t, y''_{tt} = -b\sin t$. U holda (2) va (3) formulalarga asosan

$$y'_x = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a} ctgt,$$

$$y''_{xx} = -\frac{b}{a}\left(-\frac{1}{\sin^2 t}\right)\cdot\frac{1}{-a\sin t} = -\frac{b}{a^2}\cdot\frac{1}{\sin^3 t}.$$

§3. O'rta qiymat haqidagi teoremalar.

3.1. Ferma[1] teoremasi. Funktsiyaning hosilalarini bilishlik keyingi boblarda (7- va 10-boblarga qarang) ko'riladigan funktsiyani tahlil qilishda asosiy omil hisoblanadi. Biz bu paragrafni shu tahlil uchun zarur bo'lgan, ko'rinishidan sodda, lekin muhim teoremalar va formulalarga bag'ishlaymiz.

Quyida keltiriladigan teorema Fermaga taqaladi. Ferma uchun hosila tushunchasi ma'lum bo'lmagani uchun u taklif etgan teorema biz keltirgan teorema ko'rinishidan ancha farq qiladi. Lekin asosiy mag'zi bir bo'lganligi sababli bu teoremani Ferma sha'ni bilan atash qabul qilingan.

Ta'rif. $x=c$ nuqtada va uning biror $U_c = (c-\delta, c+\delta)$ atrofida aniqlangan $y=f(x)$ funktsiya $x=c$ nuqtada lokal maksimumga (minimumga) erishadi deymiz, agar barcha $x \in U_c$ lar uchun

$$f(c) \geq f(x) \tag{1}$$

$$(\text{mos ravishda } f(x) \geq f(c)) \tag{1'}$$

bo'lsa.

Lokal maksimum yoki minimumni lokal ekstremum, deb ataymiz. $x=c$ lokal ekstremum nuqta, deb ataladi.

Agar f funktsiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz va uning ichki $c \in (a,b)$ nuqtasida maksimumga (minimumga) erishsa, u holda ravshanki, c o'z navbatida lokal maksimum (minimum) nuqta ham bo'ladi. Lekin f funktsiya $[a,b]$ oraliqning chegara nuqtalaridan birida maksimumga (minimumga) erishsa, bu nuqta lokal maksimum (minimum) bo'lmaydi,

[1] P'er Ferma(1605-1655)-mashxur farang matematigi, cheksiz kichik miqdorlar tahliliga asos solganlardan biri.

chunki f funktsiya bu nuqtaning to'liq atrofida (a nuqtaning chapida va b nuqtaning o'ngida) aniqlanmagan.

Ferma teoremasi. Agar $y=f(x)$ funktsiya $x=c$ nuqtada va uning biror $U_c=(c-\delta, c+\delta)$ atrofida aniqlangan, chekli $f'(c)$ hosilasi mavjud va shu nuqtada lokal maksimumga (minimumga) erishsa, u holda $f'(c)=0$ bo'ladi.

I s b o t i. Faraz qilaylik, f funktsiya $x=c$ nuqtada lokal maksimumga erishsin, ya'ni barcha $x \in U_c$ lar uchun

$$f(c) \geq f(x) \ .$$

Hosilaning ta'rifiga ko'ra,

$$f'(c)=\lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}.$$

(1) ga asosan $x>c$ lar uchun

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0,$$

va demak, $x \to c+0$ da limitga o'tsak,

$$f'(c) \leq 0 \tag{2}$$

ga ega bo'lamiz. Agar $x<c$ bo'lsa, u holda

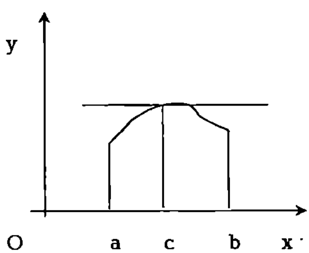
$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$$

bo'ladi, bunda $x \to c-0$ da limitga o'tsak,

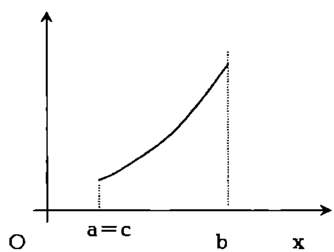
$$f'(c) \geq 0 \tag{3}$$

kelib chiqadi. U holda (2) va (3) larni solishtirsak, $f'(c)=0$ ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

Hosilaning geometrik ma'nosini eslasak, $f'(c)$ qiymat $y=f(x)$ funktsiyaning grafigiga $x=c$ nuqtada o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsientini berar edi.



88-rasm.



89-rasm.

Hosilaning nolga teng bo'lishi shu urinmaning Ox o'qiga parallel o'tishini bildiradi (88-rasmga qarang).

Teoremaning isbotida $x=c$ nuqta ichki nuqta bo'lishi talab qilingan edi, chunki bu nuqtadagi qiymat bilan uning chap va o'ng tomonlarida joylashgan nuqtalardagi qiymatlar solishtirildi. Bu talabsiz teorema o'rinli bo'lmay qolishi mumkin: agar f funktsiya yopiq oraliqda aniqlanib, uning chegarasida lokal ekstremumga erishsa, bu nuqtada hosila (agar u mavjud bo'lsa) nolga teng bo'lmay qolishi mumkin (89-rasmga qarang).

3.2. Roll[1] teoremasi. Differentsial hisobning ko'p teoremalari va formulalari asosida biz quyida keltiradigan Roll nomi bilan bog'liq bo'lgan teorema yotadi. Bu teoremani Roll faqat ko'phadlar uchun isbot qilgan.

Teorema. Agar $y = f(x)$ funktsiya 1) $[a,b]$ oraliqda uzluksiz, 2) (a,b) intervalda differentsiallanuvchi va 3) oraliqning chegaralaridagi qiymatlari teng $f(a) = f(b)$ bo'lsa, u holda shunday $c \in (a,b)$ nuqta topiladiki, $f'(c) = 0$ bo'ladi.

Isboti. Agar f funktsiya $[a,b]$ oraliqda o'zgarmas bo'lsa, u holda (a,b) intervalning barcha c nuqtalari uchun $f'(c) = 0$ bo'ladi.

Endi $y = f(x)$ funktsiya $[a,b]$ oraliqda o'zgaruvchi bo'lsin deylik. f funktsiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz bo'lgani uchun Veyershtrass teoremasiga ko'ra (5-bob, §3.4, 7-teoremaga qarang) u shu oraliqda o'zining eng kichik m va eng katta M qiymatlariga mos ravishda qandaydir $x_1, x_2 \in [a,b]$ nuqtalarda erishadi. Bu nuqtalarning ikkalavi bir vaqtda chegara nuqtalari bo'lishi mumkin emas, chunki aks holda, teoremaning 3)- talabiga ko'ra,

$$f(a) = f(b) = \min_{x \in [a,b]} f(x) = \max_{x \in [a,b]} f(x),$$

va bundan o'z navbatida $f(x) = m = M, \forall x \in [a,b]$, ya'ni f $[a,b]$ oraliqda o'zgarmas degan xulosa kelib chiqadi. Bu bizning talabimizga zid. Shu sababli, bu nuqtalarning kamida bittasi ichki nuqta bo'ladi. Uni c deb belgilaylik. Bu nuqtada lokal ekstremumga erishilyapti, bundan tashqari bu nuqtada teoremaning 2)- talabiga ko'ra, $f'(c)$ hosila mavjud. U holda Ferma teoremasiga ko'ra, $f'(c) = 0$ bo'ladi.

Teoremaning barcha shartlari muhim, chunki masalan, $y = x - E(x)$ funktsiya $x = 1$ nuqtada uzilishga ega, teoremaning boshqa barcha shartlarini $[0,1]$ oraliqda qanoatlantiradi va $(0,1)$ intervalning barcha nuqtalarida $f'(x) = 1$, yoki

$$y = \begin{cases} 1, агар\, x = 0 \\ x, агар\, 0 < x \le 1 \end{cases}$$

funktsiya $x = 0$ nuqtada uzilishga ega, teoremaning boshqa barcha shartlarini $[0,1]$ oraliqda qanoatlantiradi va $(0,1)$ intervalning barcha nuqtalarida $f'(x) = 1$, yoki masalan, $y = x$ funktsiya teoremaning 3)- shartidan boshqa barcha shartlarini qanoatlantiradi va $\forall x \in (0,1)$ lar uchun

[1] Mishel Roll (1652-1719)- farang matematigi, uzoq vaqt yangi hisobga qarshi bo'lgan, bu izlanishlarga umrini oxiridagina qo'shilgan.

$f'(x)=1$. $y=|x|$ funktsiya [-1,1] oraliqda uzluksiz, chegara nuqtalaridagi qiymatlari teng,lekin 0 nuqtada minimumga erishsa ham, shu nuqtada hosilasi mavjud emas.

3.3. Chekli orttirmalar haqidagi teoremalar. Roll teoremasidan bevosita kelib chiqadigan chekli orttirmalar haqidagi teoremalar, deb ataluvchi quyidagi teoremalarning birinchisi Lagranjga[1] tegishli.

Teorema (Lagranj). Agar $y=f(x)$ funktsiya 1) $[a,b]$ oraliqda aniqlangan, uzluksiz va 2) (a,b) intervalda differentsiallanuvchi bo'lsa, u holda shunday $c\in(a,b)$ nuqta topiladiki, bu nuqtada

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \tag{4}$$

munosabat bajariladi.

Bu teorema ko'pincha o'rta qiymat haqidagi teorema deb ham yuritiladi.

Isboti. $[a,b]$ oraliqda quyidagi yordamchi funktsiyani kiritaylik:

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Bu funktsiya Roll teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi. Haqiqatan, u $[a,b]$ oraliqda uzluksiz, chunki uzluksiz $f(x)$ va chiziqli funktsiyalar ayirmasidan iborat, (a,b) intervalda differentsiallanuvchi:

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

va nihoyat, $F(a)=F(b)=0$. U holda Roll teoremasiga ko'ra, (a,b) intervalda shunday c nuqta topiladiki, $F'(c)=0$ bo'ladi. Bundan

$$f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0 \quad \text{yoki} \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

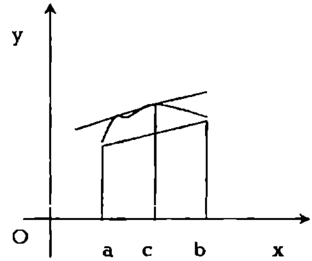
kelib chiqadi.

M i s o l. $f(x)=\sqrt[3]{x^2}+5$ funktsiya [-1,2] kesmada uzluksiz, shu kesmaning $x\neq 0$ bo'lgan barcha ichki nuqtalarida differentsiallanuvchi: $f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ va Lagranj teoremasining ikkinchi sharti buzilayapti.

$$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\frac{\sqrt[3]{4}-1}{3}=\frac{2}{3\sqrt[3]{c}}\Rightarrow\sqrt[3]{c}=\frac{2}{\sqrt[3]{4}-1}\Rightarrow c=\frac{8}{(\sqrt[3]{4}-1)^3}>8,$$

demak $c\notin(-1,2)$

[1] Jozef-Lui Lagranj (1736-1813)- mashxur farang matematigi va mexanigi.



90-rasm.

Lagranj teoremasining geometrik ma'nosi quyidagicha: (4) ning chap tomoni $(a,f(a))$ va $(b,f(b))$ nuqtalarni tortib turuvchi vatarning Ox o'qiga og'ish burchagining tangensini, o'ng tomoni esa, abtsissasi $c\in(a,b)$ bo'lgan nuqtada grafikga o'tkazilgan urinmaning Ox o'qiga og'ish burchagining tangensidir (90-rasmga qarang). Demak, Lagranj teoremasiga ko'ra, agar egri chiziq $[a,b]$ oraliqda uzluksiz va (a,b) intervalda differentsiallanuvchi bo'lgan funktsiyaning grafigi bo'lsa, u holda grafikda abtsissasi qandaydir $c\in(a,b)$ bo'lgan nuqta topi-ladiki, bu nuqtadan grafikga o'tkazilgan urinma egri chiziqning chekka $(a,f(a))$ va $(b,f(b))$ nuqtalarini tortib turuvchi vatarga parallel bo'ladi.

Oraliq c qiymatni qulaylik uchun $c=a+\theta(b-a), 0<\theta<1$ ko'rinishda yozish qabul qilingan. Unda Lagranj formulasi quyidagi ko'rinishni oladi:

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(a+\theta(b-a)) \quad (0<\theta<1). \qquad (5)$$

Teorema (Koshi). Agar $f(x)$ va $g(x)$ funktsiyalar $[a,b]$ oraliqda uzluksiz , (a,b) intervalda differentsiallanuvchi, va (a,b) ning barcha nuqtalarida $g'(x)\neq 0$ bo'lsa, u holda shunday x=c (a<c<b) nuqta topiladiki, bu nuqtada

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isboti. $g(b)-g(a)\neq 0$, chunki aks holda Roll teoremasiga ko'ra, shunday $\xi\in(a,b)$ nuqta topiladiki, $g'(\xi)=0$ bo'ladi, bu esa teorema shartiga zid. Quyidagi yordamchi funktsiyani tuzamiz:

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot[g(x)-g(a)].$$

Bundan $F(a)=0, F(b)=0$ ekanligiga ishonch hosil qilish qiyin emas. Bu funktsiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz va (a,b) intervalda differentsiallanuvchi bo'lgan funktsiyalar ayirmasidan tuzilgani uchun, $[a,b]$ oraliqda uzluksiz va (a,b) intervalda differentsiallanuvchi bo'ladi. U holda Roll teoremasiga ko'ra, shunday $c\in(a,b)$ nuqta topiladiki, bu nuqtada $F'(c)=0$ bo'ladi. Lekin

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(x)$$

bo'lgani uchun, bu tenglikda $x=c$ desak,

$$F'(c)\equiv f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(c)=0$$

yoki

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

va teorema isbotlandi.

M i s o l. $f(x)=x^3+8$, $g(x)=x^3+x+1$ funktsiyalar [-1,2] kesmada uzluksiz va uning barcha ichki nuqtalarida differentsiallanuvchi ekanligi ravshan (a=-1, b=2)

$$\frac{f(2)-f(-1)}{g(2)-g(-1)}=\frac{8+8-(-1)^3-8}{8+2+1-[(-1)^3-1+1]}=\frac{9}{11+1}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$$

$f'(x)=3x^2$, $g'(x)=3x^2+1\neq0$, $x=1$ nuqtada $\frac{f'(1)}{g'(1)}=\frac{3\cdot1}{3\cdot1+1}=\frac{3}{4}$.

Bundan $\frac{f(2)-f(-1)}{g(2)-g(-1)}=\frac{f'(1)}{g'(1)}$; $-1<1<2$.

Agar Koshi teoremasida $g(x)=x$ desak, Lagranj teoremasi kelib chiqadi, ya'ni Lagranj teoremasi Koshi teoremasining xususiy holi ekan.

3.4. Aniqmasliklarni ochish. Lopital qoidalari.

Agar $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$ bo'lsa, u holda $\frac{f(x)}{g(x)}$ nisbat $x\to a$ da "$\frac{0}{0}$" ko'rinishdagi aniqmaslik deb ataladi. Bu aniqmaslikni ochish deganda, agar u mavjud bo'lsa, $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ limitni topishni tushunamiz. Bunday limitni topishning usullari ko'p, lekin biz hozir ko'radigan usulda bu limitni hosilalar nisbatining limitiga keltiriladi. Bu usul I.Bernulliga[1] tegishli bo'lsa ham, matematikada o'zining "Cheksiz kichiklar tahlili" kitobida birinchi marotaba chop ettirgan G.F.Lopital[2] nomi bilan ma'lum.

1-teorema. Agar: 1) $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $x=a$ nuqtaning o'zida bo'lmasa ham, uning biror atrofida aniqlangan va differentsiallanuvchi, 2) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$, 3) shu atrofning barcha

---

[1] Iogann Bernulli (1667-1748)- matematika tarixida mashxur bo'lgan golland oilasining vakili, G.V.Leybnitsning safdoshlaridan bo'lgan.

[2] Gil'om Fransua de Lopital (1661-1704) – farang matematigi, u ham Leybnits maktabining vakili, teksda keltirilgan kitob differentsial hisobning dastlabki kursi hisoblanadi.

nuqtalari uchun $g(x)$ va $g'(x)\neq 0$, va nihoyat, 4) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$ limit mavjud bo'lsa, u holda $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ limit ham mavjud va

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A. \tag{1}$$

Isboti. a-chekli son bo'lsin ($a=\infty$ bo'lgan hol keyinroq ko'riladi). $f(x)$ va $g(x)$ funktsiyalarni $x=a$ nuqtada $f(a)=g(a)=0$ deb aniqlaylik[3]. U holda bu funktsiyalar $x=a$ nuqtada uzluksiz bo'ladi. Agar $x>a$ bo'lsa, $[a,x]$ oraliqni va agar $x<a$ bo'lsa, $[x,a]$ oraliqni qaraymiz. Aniqlik uchun $[a,x]$ oraliqni qaraylik (ikkinchi hol ayran shunday ko'riladi). $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a,x]$ oraliqda uzluksiz, (a,x) da differentsiallanuvchi, shu sababli Koshi teoremasiga ko'ra, shunday $c\in(a,b)$ nuqta topiladiki,

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \quad \text{yoki} \quad \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

bo'ladi.

Agar $x\to a$ desak, o'z navbatida $c\to a$ bo'ladi, shu sababli teorema shartiga ko'ra,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

munosabat o'rinli bo'ladi. Teorema isbot bo'ldi.

1- e s l a t m a. Agar (1) ning o'ng tomonidagi limit mavjud bo'lmasa, chap tomonidagi limit ham mavjud bo'lmasligi mumkin.

1- *m i s o l.* Ma'lumki (6-bob,§3.7 ga qarang), $\sin x\approx x$, shu sababli

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0 ,$$

lekin

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)'}{(\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$$

mavjud emas.

2- e s l a t m a. Agar $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ ifoda yana $\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmaslik bo'lib, $f'(x), g'(x)$ funktsiyalar 1-teoremaning hamma shartlarini qanoatlantirsa, u holda

---

[3] Avvaldan $f(x)$ va $g(x)$ funktsiyalarni $x=a$ nuqtada aniqlangan va uzluksiz, deb faraz qilish mumkin edi, lekin amaliyot aynan teoremadagidek shart qo'yish ma'qulroq ekanini ko'rsatadi.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

bo'ladi.

2 misol.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx-x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{\cos^2 x}=2.$$

yoki

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx-x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{2\cos x\cdot(-\sin x)}{\cos^4 x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2\sin x}{\cos^3 x}}{\sin x}=2.$$

2-teorema. Agar: 1) $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $x=a$ nuqtaning o'zida bo'lmasa ham, uning biror atrofida aniqlangan va differentsiallanuvchi,2) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$, 3) shu atrofning barcha nuqtalari uchun $g(x)$ va $g'(x)\neq 0$, va nihoyat, 4) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$ limit mavjud bo'lsa, u holda $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ limit ham mavjud va

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A.$$

Bu teoremada ko'rilayotgan ifodani $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi aniqmaslik deb ataymiz.

Isboti. Teoremaning 2)-shartiga binoan, x ning barcha qiymatlari uchun $f(x)>0$ va $g(x)>0$ deyish mumkin.

Avval A chekli son bo'lgan holni ko'raylik. U holda li-mitning ta'rifiga ko'ra, ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta>0$ son topiladiki, $|x-a|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x lar uchun $\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-A\right|<\frac{\varepsilon}{2}$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. $[x,a+\delta]$ oraliqga Koshi teoremasini qo'llasak, shunday $c\in(x,a+\delta)$ nuqta topiladiki,

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

bo'ladi. Demak,

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}-A\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Quyidagi ayniyatni ko'raylik:

$$\frac{f(x)}{g(x)}-A=\frac{f(a)-Ag(a)}{g(x)}+\left[1-\frac{g(a)}{g(x)}\right]\cdot\left[\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}-A\right].$$

Uning haqligiga tenglikning o'ng tomonini soddalashtirib ishonch hosil qilish qiyin emas.

Teoremaning 2)-shartiga ko'ra, $x \to a$ da $g(x) \to \infty$ bo'lga-ni uchun $(a, a+\delta)$ oraliqning barcha nuqtalari uchun

$$g(x) > g(a) \quad \text{va} \quad \left|\frac{f(a) - Ag(a)}{g(x)}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

bo'ladi. U holda yuqoridagi ayniyatga ko'ra, barcha $x \in (a, a+\delta)$ lar uchun

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

bo'ladi.

Endi, agar A=∞ bo'lsa, u holda

$$\lim_{x \to a} \frac{g'(x)}{f'(x)} = 0$$

bo'ladi. Hozir isbot qilinganiga ko'ra, bundan

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

ekanligi kelib chiqadi. U holda

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

bo'ladi. Teorema to'liq isbot bo'ldi.

3- e s l a t m a. Agar $a = \infty$ bo'lsa, $x = \frac{1}{t}$ almashtirish yordamida $a = 0$ bo'lgan holga keltiriladi:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \to 0} \frac{f(1/t)}{g(1/t)} = \lim_{t \to 0} \frac{(f(1/t))'}{(g(1/t))'} = \lim_{t \to 0} \frac{f'(1/t)(-1/t^2)}{g'(1/t)(-1/t^2)} = \lim_{t \to 0} \frac{f'(1/t)}{g'(1/t)}.$$

3- m i s o l. $a > 1$ va ixtiyoriy $\alpha > 0$ uchun $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0$.

Bu $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi aniqmaslik. Unga Lopital qoidasini $\kappa \geq \alpha$ marotaba qo'llasak,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)x^{\alpha-k}}{a^x \cdot (\ln a)^k} = 0,$$

chunki natijada natural α lar uchun kasrning suratida x yo'qoladi yoki x ning darajasi manfiy bo'lib qoladi.

4- m i s o l. Agar α ixtiyoriy musbat son bo'lsa,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0.$$

Bu ham $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi aniqmaslik va $x^\alpha, \ln x$ funktsiyalar 2-teoremaning barcha shartlarini qanoatlantiradi. Shuning uchun

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\alpha x^{\alpha}}=0.$$

Yuqorida ko'rilgan aniqmasliklardan tashqari, ularga keltiriladigan "$0\cdot\infty$", "0^0", "∞^0", "$\infty-\infty$" va "1^{∞}" ko'rinishdagi aniqmasliklar ham ko'pincha uchrab turadi.

Agar $x\to a$ da $f(x)\to 0$ va $g(x)\to\infty$ bo'lsa, $f(x)\,g(x)$ ifoda "$0\cdot\infty$" ko'rinishdagi aniqmaslik bo'ladi. Bu $f\cdot g=\frac{f}{1/g}$ almashtirish yordamida "$\frac{0}{0}$" ko'rinishdagi aniqmaslikka yoki $f\cdot g=\frac{g}{1/f}$ almashtirish yordamida "$\frac{\infty}{\infty}$" ko'rinishdagi aniqmaslikka keltiriladi.

5-m i s o l. Ixtiyoriy $\alpha>0$ lar uchun $\lim\limits_{x\to 0}x^{\alpha}\ln x=0$.

Haqiqatan,

$$\lim_{x\to 0}x^{\alpha}\ln x=0=\lim_{x\to 0}\frac{\text{in}\,x}{x^{-\alpha}}=\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-\alpha x^{-\alpha-1}}=-\frac{1}{\alpha}\lim_{x\to 0}x^{\alpha}=0.$$

Agar $f(x)-g(x)$ ifodada $x\to a$ da $f(x)\to\infty$ va $g(x)\to\infty$ bo'lsa, $f(x)-g(x)$ ifoda "$\infty-\infty$" ko'rinishdagi aniqmaslik bo'ladi. Bu "$\frac{0}{0}$" ko'rinishdagi aniqmaslikka, masalan

$$f(x)-g(x)=\frac{1}{1/f}-\frac{1}{1/g}=\frac{1/g-1/f}{\frac{1}{f}\cdot\frac{1}{g}}$$

almashtirish yordamida keltirilishi mumkin

6-m i s o l. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-tgx)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{ctgx-\cos x}{\cos x\cdot ctgx}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-1/\sin^2 x+\sin x}{-\sin x\cdot ctgx-\cos x\cdot 1/\sin^2 x}=$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^3 x}{\cos x\cdot(1+\sin^2 x)}=0.$$

"0^0", "∞^0" va "1^{∞}" ko'rinishdagi aniqmasliklar f^g ifodada vujudga keladi. Agar $f>0$ bo'lsa, u holda $f^g=e^{g\ln f}$ deyish mumkin. Bunda $g\ln f$ ifoda "$0\cdot\infty$" ko'rinishdagi aniqmaslik bo'ladi. Agar $\lim\limits_{x\to a}g\ln f=k$, bo'lsa, u holda $\lim\limits_{x\to a}f^g=e^k$ bo'ladi.

7-m i s o l. $\lim\limits_{x\to 0}x^x$. Bunda $x^x=e^{x\ln x}$ bo'lgani uchun

$$\lim_{x\to0} x\ln x = \lim_{x\to0}\frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to0}\frac{1/x}{-1/x^2} = -\lim_{x\to0} x = 0.$$

U holda

$$\lim_{x\to0} x^x = 1.$$

§4. Teylor formulasi.

4.1. Ko'phad uchun Teylor[1] formulasi. Agar bizga n-darajali

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \tag{1}$$

ko'phad berilgan bo'lsa, uni n marotaba ketma-ket differentsiallasak:

$$P_n'(x) = a_1 + 2\cdot a_2x + 3\cdot a_3x^2 + \ldots + n\cdot a_nx^{n-1},$$

$$P_n''(x) = 1\cdot2\cdot a_2 + 2\cdot3\cdot a_3x + \ldots + (n-1)n\cdot a_nx^{n-2},$$

$$P_n'''(x) = 1\cdot2\cdot3\cdot a_3 + \ldots + (n-2)(n-1)n\cdot a_nx^{n-3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$P_n^{(n)}(x) = 1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n\cdot a_n$$

va ularda $x=0$ desak, (1) ning koeffitsientlarini uning hosilalari bilan bog'lovchi quyidagi formulalarni hosil qilamiz:

$$a_0 = P_n(0), a_1 = \frac{P_n'(0)}{1!}, a_2 = \frac{P_n''(0)}{2!}, \ldots, a_n = \frac{P_n^{(n)}(0)}{n!}.$$

Agar bularni (1) ga olib borib qo'ysak, $P_n(x)$ ko'phad uchun yangi ko'rinish olamiz:

$$P_n(x) = P_n(0) + \frac{P_n'(0)}{1!}x + \frac{P_n''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{P_n^{(n)}(0)}{n!}x^n. \tag{2}$$

Endi, agar ixtiyoriy x_0 uchun (1) da $x = x_0 + (x - x_0)$ deb, qavslarni ochib, ifodani $x - x_0$ ning darajalari bo'yicha ixchamlasak:

$$P_n(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)^2 + \ldots b_n(x-x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} b_k(x-x_0)^k \tag{3}$$

hosil bo'ladi. (3) ni $P_n(x)$ ko'phadning $x - x_0$ ning darajalari bo'yicha yoyilmasi deb ataymiz. Aslida $P_n(x)$ ko'phad x_0 ga bog'liq bo'lmasa ham, uning (3) yoyilmasidagi $b_0, b_1, \ldots, b_n$ koeffitsientlar a_i va x_0 ga bog'liq. Agar (3) da $x - x_0 = \xi$ desak, $P_n(x) = P_n(x_0 + \xi) = p_n(\xi)$ va (3) ga ko'ra

$$p_n(\xi) = b_0 + b_1\xi + b_2\xi^2 + \ldots + b_n\xi^n$$

bo'lgani uchun, (2) asosan

---

[1] Bruk Teylor (1685-1731) — ingliz matematigi, Nyutonning izdoshlaridan.

$$b_k = \frac{p_n^{(n)}(0)}{n!}, \quad k = 0,1,2,\dots,n,$$

larga ega bo'lamiz.
Lekin

$$p_n(\xi) = P_n(x_0+\xi), p_n'(\xi) = P_n'(x_0+\xi), p_n''(\xi) = P_n''(x_0+\xi), \dots,$$

bo'lgani uchun

$$p_n(0) = P_n(x_0), p_n'(0) = P_n'(x_0), p_n''(0) = P_n''(x_0), \dots,$$

va

$$b_k = \frac{P_n^{(k)}(x_0)}{n!}, \quad k = 0,1,2,\dots,n, \tag{4}$$

ya'ni (3) yoyilma koeffitsientlari o'zining va hosilalarining x_0 nuqtadagi qiymatlari orqali ifodalanar ekan.

Bularni (3) ga qo'ysak:

$$P_n(x) = P_n(x_0) + \frac{P_n(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{P_n''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{5}$$

formulani hosil qilamiz. Bu formula $P_n(x)$ ko'phad uchun Teylor formulasi, deb ataladi. Buning xususiy holi bo'lgan (2) formulani Makloren formulasi deb atashadi.

1-misol. $P_n(x) = (a+x)^n$ va $x_0=0$ bo'lsin. Unda

$$P_n^{(k)}(x) = n(n-1)\dots(n-k+1)(a+x)^{n-k},$$

$$P_n^{(k)}(0) = n(n-1)\dots(n-k+1)a^{n-k},$$

va (5) ga asosan

$$(a+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} a^{n-k} x^k,$$

ya'ni Nyuton binomi deb ataluvchi formulani hosil qilamiz.

4.2. Ixtiyoriy funktsiya uchun Teylor formulasi. Faraz qilaylik, x_0 nuqtaning biror U_{x_0} atrofida $n+1$ marotaba uzluksiz differentsiallanuvchi ixtiyoriy $y = f(x)$ funktsiya berilgan bo'lsin. Bu funktsiya uchun (5) ga o'xshash $y = f(x)$ funktsiyaning n-darajali Teylor ko'phadi deb ataluvchi quyidagi

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{6}$$

ko'phadni tuzib olamiz.

Bu ko'phadning x_0 nuqtadagi qiymati $f(x)$ funktsiyaning shu nuqtadagi qiymatiga teng bo'lsa ham, x_0 nuqtaning atrofidagi boshqa nuqtalarda umuman aytganda, $P_n(x) \neq f(x)$. Bundan tashqari,

$$P_n'(x_0) = f'(x_0), P_n''(x_0) = f''(x_0), \dots, P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0). \tag{7}$$

Quyidagi belgilashni kiritaylik:

$$r_n(x) = f(x) - P_n(x). \qquad (8)$$

U holda,

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_n(x) \qquad (9)$$

formulani $f(x)$ funktsiyaning Teylor formulasi, deb ataymiz, bu yerda, $r_n(x)$ $f(x)$ funktsiyaning Teylor formulasini *n-tartibli qoldig'i*, deyiladi.

$r_n(x)$ funktsiyaning $f^{(n+1)}(x)$ hosila orqali ifodasini topaylik.

(7) va (8) larga asosan $r_n(x_0) = r_n'(x_0) = \ldots = r_n^{(n)}(x_0) = 0$. Yordamchi $\varphi(x) = (x-x_0)^{n+1}$ funktsiyani ko'raylik. Bu funktsiya uchun $\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = \ldots = \varphi^{(n)}(x_0)$. $r_n(x)$ va $\varphi(x)$ funktsiyalarga U_{x_0} atrofda Koshi teoremasini qo'llasak:

$$\frac{r_n(x)}{\varphi(x)} = \frac{r_n(x) - r_n(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = \frac{r_n'(x_1)}{\varphi'(x_1)} = \frac{r_n'(x_1) - r_n'(x_0)}{\varphi'(x_1) - \varphi'(x_0)} = \frac{r_n''(x_2)}{\varphi''(x_2)} = \ldots$$

$$\ldots = \frac{r_n^{(n)}(x_n)}{\varphi^{(n)}(x_n)} = \frac{r_n^{(n)}(x_n) - r_n^{(n)}(x_0)}{\varphi^{(n)}(x_n) - \varphi^{(n)}(x_0)} = \frac{r_n^{(n+1)}(x_{n+1})}{\varphi^{(n+1)}(x_{n+1})},$$

bu yerda $x_1 \in (x_0, x) \subset U_{x_0}$ va $x_{k+1} \in (x_0, x_k) \subset U_{x_0}, k = 1,2,\ldots,n$.

Lekin $\varphi^{(n+1)}(x) = (n+1)!, r_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - 0 = f^{(n+1)}(x)$. Demak, agar $x_{n+1} = c$ desak, u holda

$$r_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \qquad (10)$$

kelib chiqadi. Buni Teylor formulasining Lagranj ko'rinishidagi qoldiq hadi deb ataladi. Agar (10) ni (9) ga olib borib qo'ysak:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \qquad (11)$$

Agar (11) da $x_0=0$ bo'lsa, bu formulani *Makloren formulasi*, deb ataymiz.

4.3. Qoldiq hadning har xil ko'rinishlari. Ayrim hollarda qoldiq hadning Lagranj ko'rinishi yaroqsizlik qiladi. Bunday hollarda qoldiqning boshqa ko'rinishlaridan foydalaniladi.Biz hozir shulardan ikkitasini ko'rib chiqamiz.

Qoldiqning (10) ifodasidagi c nuqta (x_0, x) oraliqga tegishli bo'lgani uchun uni $c = x_0 + \theta(x - x_0), 0 < \theta < 1$, deb yozish mumkin (§3.3, (5) formulaga qarang).

Endi Koshi teoremasini U_{x_0} atrofda $r_n(x)$ va $\varphi(x) = \, = x - x_0$ funktsiyalarga qo'llasak:

$$\frac{r_n(x)}{\varphi(x)}=\frac{r_n(x)-r_n(x_0)}{\varphi(x)-\varphi(x_0)}=\frac{r_n'(c)}{1}=r_n'(c), \tag{12}$$

bu yerda $\varphi(x_0)=0, \varphi'(x)=1$ ekanligi e'tiborga olindi. (10) dan

$$r_n'(x)=\frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n+1)}(c)$$

yoki

$$r_n'(c)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^n.$$

U holda (12) ga ko'ra,

$$r_n(x)=r_n'(c)\cdot\varphi(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1} \tag{13}$$

kelib chiqadi. (13) ni qoldiq hadning Koshi ko'rinishi deb ataymiz.

Qoldiq hadning Lagranj va Koshi ko'rinishlari asosan $f(x)$ funktsiyani Teylor formulasi bo'yicha, $P_n(x)$ ko'phadga almashtirib, bunda yo'l qo'yilgan xatolikni baholash uchun ishlatiladi. Ayrim hollarda, bizga bu xatolik emas, balki qoldiq hadning $x\to x_0$ bo'lganda o'zini x_0 nuqta atrofida qanday tutishi yoki aniqroq qilib aytsak, qoldiq hadning kichiklik tartibi qiziqtiradi. Bu tartibni $f(x)$ funktsiyaga qo'yilgan talablardan engilroq shartlarda ham topsa bo'ladi. Masalan, $f(x)$ funktsiya x_0 nuqta atrofida n marotaba uzluksiz differentsiallanuvchi bo'lsin. U holda,(11) formulada n ni $n-1$ ga almashtirsak:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n,$$

bu yerda c nuqta (x_0,x) oraliqga tegishli bo'lgani uchun, $x\to x_0$ bo'lganda $c\to x_0$, shu sababli, $f^{(n)}(c)\to f^{(n)}(x_0)$ va

$$\frac{f^{(n)}(c)}{n!}=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+\alpha(x),$$

bu yerda $x\to x_0$ bo'lganda $\alpha(x)\to 0$,ya'ni$\alpha(x)\cdot(x-x_0)^n=o((x-x_0)^n)$.
U holda

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n). \tag{14}$$

Demak,

$$r_n(x)=o((x-x_0)^n) \tag{15}$$

Qoldiqning (15) ko'rinishini Peano[1] taklif etgan.

Quyidagi teorema berilgan f funktsiyani (14) formula bo'yicha yagona ravishda yoyish mumkinligini ko'rsatadi.

Teorema. Agar $f(x)$ funktsiya x_0 nuqta atrofida

---

[1] Juzeppe Peano (1858-1932)- italiyalik matematik.

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\ldots+a_n(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n) \qquad (16)$$

$$f(x)=b_0+b_1(x-x_0)+\ldots+b_n(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n) \qquad (17)$$

yoyilmalarga ega bo'lsa, u holda barcha $k=0,1,\ldots,n$ lar uchun $a_k=b_k$ bo'ladi.

Isboti. Agar (16) va (17) tengliklarning o'ng tomonlarini tenglab, $x\to x_0$ bo'lganda limitga o'tsak, $a_0=b_0$ hosil bo'ladi. Endi, bu tenglikni $x-x_0$ ga bo'lib, $x\to x_0$ bo'lganda limitga o'tsak, $a_1=b_1$ kelib chiqadi. Shu tartibda davom etib, natijada $a_n=b_n$ ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

Funktsiyaning (14) yoyilmasi "*lokal*" harakterga ega ekanligi, ya'ni bu yoyilma funktsiyaning faqat $x\to x_0$ bo'lganda qanday o'zgarishini harakterlashi (14) tenglikdan ko'rinib turibdi.

Agar (11) va (14) da $f(x_0)$ ni tenglikning chap tomoniga o'tkazib, $x-x_0=\Delta x$ desak:

$$\Delta f(x_0)\equiv f(x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+\frac{f''(x_0)}{2!}\Delta x^2+\ldots$$
$$\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\Delta x^{n+1} \qquad (11a)$$

va

$$\Delta f(x_0)\equiv f(x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+\frac{f''(x_0)}{2!}\Delta x^2+\ldots$$
$$\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n+o(\Delta x^n) \qquad (14a)$$

munosabatlarga ega bo'lamiz. Agar bu tengliklarda Δx ni dx ga almashtirib, $f'(x_0)dx=df(x_0), f''(x_0)dx^2=d^2f(x_0),\ldots,f^{(n)}(x_0)dx^n=$ $=d^nf(x_0), f^{(n+1)}(c)dx^{n+1}=d^{n+1}f(x_0)$ ekanligini eslasak:

$$\Delta f(x_0)=df(x_0)+\frac{1}{2!}d^2f(x_0)+\ldots+\frac{1}{n!}d^nf(x_0)+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(c)$$
$$(c=x_0+\theta\Delta x, 0<\theta<1) \qquad (11b)$$

yoki

$$\Delta f(x_0)=df(x_0)+\frac{1}{2!}d^2f(x_0)+\ldots+\frac{1}{n!}d^nf(x_0)+o(\Delta x^n) \qquad (14b)$$

tengliklarni hosil qilamiz. Shunday qilib, agar $\Delta x\to 0$ desak, funktsiyaning cheksiz kichik $\Delta f(x_0)$ orttirmasidan, nainki uning bosh qismi – birinchi differentsiali, balki yuqori tartibli $d^2f(x_0),\ldots,d^nf(x_0)$ differentsiallari bilan mahrajlardagi faktoriallar aniqligida ustma-ust tushuvchi yuqori tartibli kichik hadlari ham ajraldi.

4.4. Elementar funktsiyalarni Teylor formulalari bo'yicha yoyish.

1. $f(x)=e^x$. Bu funktsiya $(-\infty,\infty)$ oraliqda cheksiz marotaba differentsiallanuvchidir va

$$f^{(k)}(x)=e^x,\quad f^{(k)}(0)=1\quad (k=0,1,\ldots),\quad f^{(n+1)}(c)=e^c.$$

U holda, (11) formulaga ko'ra,

$$e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+r_n(x),\qquad r_n(x)=\frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!},\quad c\in(0,x), \tag{18}$$

bu yerda x ham musbat, ham manfiy bo'lishi mumkin.

(18) formuladan foydalanib, e sonini 0,001 aniqlik bilan hisoblash mumkin. $x=1$ uchun (18) ga ko'ra:

$$e=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+r_n(1), \tag{19}$$

bu yerda

$$r_n(1)=\frac{e^c}{(n+1)!}\qquad (0<c<1).$$

n ni shunday tanlash kerakki, natijada

$$r_n(1)=\frac{e^c}{(n+1)!}\le 0{,}001$$

bo'lsin. Buning uchun, $e^c<3$ bo'lganligidan, $3/(n+1)!\le 0{,}001$ tengsizlikni echish kifoya. Bu tengsizlik, masalan $n=6$ uchun bajariladi. Demak,

$$e\approx 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{6!}=2{,}718.$$

Eslatma. $0<c<1$ bo'lgani uchun, $1<e^c<3$. Lekin, $n>2$ lar uchun $e^c/(n+1)=\theta$, bu yerda $0<\theta<1$. U holda (19) ni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$e=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\frac{\theta}{n!}\ . \tag{20}$$

Bu formula 6-bob, §2.6 da e sonining irratsional ekanligini isbotlashda ishlatilgan edi.

2. $y=\sin x$. Bu funktsiya ham barcha hosilalarga ega va

$$(\sin x)^{(n)}|_{x=0}=\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0, агар n=2k,\\ (-1)^k, агар n=2k+1.\end{cases}$$

U holda bu funktsiya uchun Teylor formulasi quyidagicha bo'ladi:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{k+1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}+r_{2k}(x), \tag{21}$$

bu yerda

$$r_{2k}(x)=\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\sin\left(\theta x+(2k+1)\frac{\pi}{2}\right)=\underset{x\to 0}{o}(x^{2k}).$$

1-m i s o l. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}$ ni hisoblang.

(21) ko'ra,

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$$

Shuning uchun

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)-x}{x^3}=-\frac{1}{6}+\lim_{x\to 0}\frac{o(x^3)}{x^3}=-\frac{1}{6}.$$

3. $y=\cos x$. Xuddi yuqoridagidek,

$$f^{(k)}(x)=\cos\left(x+k\cdot\frac{\pi}{2}\right),\quad f(0)=1,\quad f^{(2k)}(0)=(-1)^k,$$

$$f^{(2k-1)}(0)=0\quad (k=1,2,3,\ldots).$$

Demak, agar $n=2k+1$ desak,

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+r_{2k+1}.$$

4. $f(x)=\ln(1+x)$. Bu funktsiya $x>-1$ lar uchun aniqlangan va barcha tartibli hosilalariga ega:

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n},\quad f^{(n)}(0)=(-1)^{n+1}(n-1)!,$$

va nihoyat,

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+r_n(x).$$

5. $f(x)=(1+x)^m$. Ma'lumki,

$$f^{(n)}(x)=m(m-1)\ldots(m-n+1)(1+x)^{m-n},$$

$$f^{(n)}(0)=m(m-1)\ldots(m-n+1)\quad .$$

U holda

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+r_n(x).\qquad (22)$$

2-m i s o l. Hisoblang ($m \neq n, m \neq 0, n \neq 0$):

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[m]{1+x} - \sqrt[n]{1+x}}{x}.$$

(22) formuladan foydalansak:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[m]{1+x} - \sqrt[n]{1+x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + \frac{x}{m} + o(x) - \left(1 + \frac{x}{n} + o(x)\right)}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right) + o(x)}{x} = \lim_{x \to 0}\left[\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right) + o(1)\right] = \frac{1}{m} - \frac{1}{n}.$$

6. $f(x) = arctgx$. Ma'lumki (§2.3,7⁰-misolga qarang),

$$f^{(n)}(x) = (n-1)! \cos^n y \cdot \sin n\left(y + \frac{\pi}{2}\right), \quad f^{(2k)}(0) = 0,$$

$$f^{(2k-1)}(0) = (-1)^{k-1}(2k-2)!.$$

U holda bu funktsiya uchun Teylor formulasi quyidagicha bo'ladi:

$$arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} + r_{2k}(x).$$

8-BOB.

FUNKTSIYALARNI HOSILALAR YORDAMIDA TEKSHIRISH

1-§. Funktsiyaning monotonligini tekshirish

Funktsiyaning o'zgarishini tekshirish jarayonida uning qiymatlari qaysi oraliqda o'zgarmasligi yoki qaysi oraliqda monotonligini aniqlab beruvchi shartlarga zaruriyat tug'iladi. Biz bu paragrafda shu shartlarni aniqlash bilan shug'ullanamiz.

1.1. Funktsiyaning o'zgarmaslik sharti

Teorema. *Agar* $f(x)$ *funktsiya* (a,b) *intervalda aynan nolga teng bo'lgan hosilaga ega bo'lsa, u holda* $f(x)$ *shu intervalda o'zgarmas bo'ladi.*

Isboti. (a,b) intervalning biror o'zgarmas x_0 nuqtasini va uning biror $U_{x_0} \subset (a,b)$ atrofini qaraylik. Shu atrof uchun Lagranj teoremasini (7-bob, 3.3-§ ga qarang) qo'llasak:

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0), \ \forall x \in U_{x_0},$$

bu yerda, $c \in (x_0, x)$ yoki $c \in (x, x_0)$.

Teorema shartiga ko'ra, barcha $x \in (a,b)$ larda, jumladan, $c \in U_{x_0} \subset (a,b)$ nuqtada $f'(c) = 0$. Shu sababli barcha $x \in (a,b)$ lar uchun

$$f(x) = f(x_0) = const..$$

Teorema isbot bo'ldi.

Bu teoremadan integral hisob uchun zarur bo'lgan quyidagi natija kelib chiqadi:

Natija. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funktsiyalar (a,b) intervalda aynan teng bo'lgan hosilaga ega bo'lsa, ya'ni barcha $x \in (a,b)$ larda

$$f'(x) = g'(x)$$

bo'lsa, u holda $f(x)$ va $g(x)$ funktsiyalar shu oraliqda faqat o'zgarmas miqdorga farq qiladi:

$$f(x) = g(x) + C.$$

Buni isbotlash uchun yuqoridagi teoremani $f(x) - g(x)$ ayirmaga qo'llash kifoya.

Misol. $arctgx$ va $\frac{1}{2}\text{arctg}\frac{2x}{1-x^2}$ funktsiyalarning hosilalari x ning ± 1 qiymatlaridan boshqa barcha qiymatlarida o'zaro teng. Buni tekshirishni o'quvchining o'ziga havola qilamiz. Shu sababli

$$arctgx = \frac{1}{2}arctg\frac{2x}{1-x^2} + C \tag{1}$$

tenglik faqat $(-1,1)$, $(-\infty,-1)$ va $(1,+\infty)$ oraliqlardagina bajariladi. Yana qiziq tomoni shundaki, C ning qiymati har bir oraliq uchun har xil, masalan, birinchi oraliq uchun C=0, bunga ishonch hosil qilish uchun

(1) da $x=0$ deyish kifoya, agar (1) da $x\to-\infty$ da limitga o'tsak, ikkinchi oraliqda $C=\frac{\pi}{2}$ ekanligi va nihoyat, (1) da $x\to+\infty$ da limitga o'tsak, uchinchi oraliq uchun $C=-\frac{\pi}{2}$ ekanligi kelib chiqadi.

1.2. Funktsiyaning monotonlik sharti

Endi, funktsiya hosilasi nolga teng bo'lmagan hol uchun funktsiya qanday o'zgarishini tekshiramiz.

1-teorema. *Agar $f(x)$ funktsiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz, (a,b) intervalda manfiy bo'lmagan (musbat) hosilaga ega bo'lsa, u holda $f(x)$ funktsiya $[a,b]$ oraliqda kamaymaydi (o'sadi).*

Isboti. Haqiqatan agar $a\le x_1<x_2\le b$ desak, $[x_1,x_2]$ oraliq uchun Lagranj teoremasi o'rinli bo'ladi, ya'ni (x_1,x_2) da shunday c nuqta topiladiki, uning uchun

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1) \qquad (2)$$

tenglik bajariladi. Teorema shartiga ko'ra, (a,b) intervalda $f'(x)\ge 0$ ($f'(x)>0$) bo'lgani uchun, bu tengsizlik $c\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$ nuqtada ham o'rinli bo'ladi, ya'ni $f'(c)\ge 0$ (mos ravishda $f'(c)>0$) bo'ladi.

U holda (2) dan $f(x_2)-f(x_1)\ge 0$ ($f(x_2)-f(x_1)>0$) kelib chiqadi. x_1 va x_2 lar ixtiyoriy tanlangani uchun $f(x)$ funktsiya $[a,b]$ oraliqda kamaymaydi (o'sadi).

Ta'rif. *Agar shunday $\delta>0$ topilsaki, $0<\Delta x<\delta$ lar uchun*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}>0 \quad \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}<0\right)$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funktsiya x_0 nuqtada o'suvchi (kamayuvchi) deyiladi.

2-teorema. *Agar $f'(x_0)>0$ ($f'(x_0)<0$) bo'lsa, $f(x)$ funktsiya x_0 nuqtada o'suvchi (kamayuvchi) bo'ladi.*

Isboti. $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ bo'lgani uchun, ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun shunday $\delta>0$ topiladiki, $|\Delta x|<\delta$ lar uchun

$$f'(x_0)-\varepsilon<\frac{\Delta y}{\Delta x}<f'(x_0)+\varepsilon$$

bo'ladi. Agar $f'(x_0)>0$ bo'lsa, u holda $\varepsilon<f'(x_0)$ deb tanlasak,

$|\Delta x|<\delta$ lar uchun $\frac{\Delta y}{\Delta x}>0$ bo'ladi. Teorema isbot bo'ldi.

1-eslatma. 1-teoremada funktsiyaning (a,b) intervalda $f'(x)\ge 0$ bo'lgan hosilasi mavjudligidan uning shu oraliqda kamaymasligi isbot qilingan edi. Lekin aksi ham o'rinli, ya'ni agar funktsiya (a,b) intervalda differentsiallanuvchi va kamaymaydigan bo'lsa, u holda shu intervalda

$f'(x) \geq 0$ bo'ladi, chunki agar (a,b) intervalda shunday x_0 nuqta mavjud bo'lsaki, bu nuqtada $f'(x_0) < 0$ bo'lsa, 2-teoremaga asosan funktsiya x_0 nuqtada kamayuvchi bo'lib qoladi, bu esa qilingan farazga zid.

Agar funktsiya differentsiallanuvchi va (a,b) intervalda qat'iy o'suvchi bo'lib, bu funktsiya haqida boshqa ma'lumotlarga ega bo'lmasakda, baribir (a,b) intervalda $f'(x) \geq 0$ bo'ladi deyishga to'g'ri keladi, chunki qat'iy o'suvchi funktsiya (a,b) intervalning biror nuqtasida nolga teng bo'lgan hosilaga ega bo'lishi mumkin. Masalan, x^3 funktsiya $(-\infty,+\infty)$ da qat'iy o'sadi va $x=0$ nuqtada uning hosilasi nolga teng, xuddi shunday $f(x) = x - \sin x$ funktsiya o'suvchi, chunki uning hosilasi $f'(x) = 1 - \cos x$ hech qayerda manfiy emas, lekin $x = 2k\pi, k = 0,\pm1,\pm2,\ldots$, nuqtalarda nolga teng.

2-eslatma. Funktsiyaning x_0 nuqtada o'suvchiligidan uning shu nuqta atrofida ham o'sishi kelib chiqmaydi. Masalan,

$$F(x) = \begin{cases} 0, x = 0, \\ \dfrac{x}{2} - x^2 \sin\dfrac{1}{x}, x \neq 0, \end{cases}$$

funktsiya $x=0$ nuqtada o'suvchi, chunki

$$F'(0) = \lim_{x\to0} \frac{\dfrac{x}{2} - x^2 \sin\dfrac{1}{x}}{x} = \frac{1}{2}.$$

Lekin, bu funktsiya monoton emas, chunki uning hosilasi $F'(x) = \frac{1}{2} - 2x\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}$ nolning ixtiyoriy kichik atrofida ham musbat, ham manfiy qiymatlar qabul qiladi: $x_k = 1/_{k\pi}$ $(k = 1,2,\ldots)$ nuqtalarda juft k lar uchun 3/2 ga, toq k lar uchun $-1/2$ ga teng.

3-teorema. Agar $f(x)$ funktsiya juft (toq) va $[-a,a]$ oraliqda differentsiallanuvchi bo'lsa, u holda $f'(x)$ toq (juft) funktsiya bo'ladi.

Isboti. Teorema shartiga ko'ra $\forall x \in [-a,a]$ lar uchun $f(x) = f(-x)$. Agar bu tenglikni differentsiallasak:

$$f'(x) = -f'(-x),$$

ya'ni funktsiya toq ekanligi kelib chiqadi.

2-§. Funktsiyaning lokal ekstremumlari

Lokal ekstremum nuqtalarga ta'rifni 7-bob, 3.1-§ da bergan edik. Bunday nuqtalarni quyidagicha ta'riflasa ham bo'ladi:

Agar shunday $\delta > 0$ sonni ko'rsatish mumkin bo'lsaki, funktsiyaning c nuqtadagi Δy orttirmasi c ning δ-atrofida $\Delta y = f(x) - f(c) \leq 0$ (mos ravishda

$\Delta y=f(x)-f(c)\geq 0$) tengsizlikni qanoatlantirsa. $f(x)$ funktsiya c nuqtada lokal maksimumga (minimumga) erishadi deymiz.

Ferma teoremasiga ko'ra (7-bob, 3.1-§ ga qarang), agar funktsiya x_0 nuqtada differentsiallanuvchi bo'lib, shu nuqtada local ekstremumga erishsa, u holda $f'(x_0)=0$ bo'lar edi.

Yuqorida ko'rgan misollarimizdan ma'lumki, hosilani nolga aylantiradigan har qanday nuqta ekstremum nuqta bo'lavermaydi. Shu sababli $f'(x)=0$ tenglamaning echimlarini $f(x)$ funktsiyaning statsionar nuqtalari, deb ataymiz.

Funktsiya local ekstremumlarga hosilasi mavjud bo'lmagan nuqtalarda ham erishishi mumkin, masalan, $y=|x|$ funktsiya $x=0$ nuqtada differentsiallanuvchi emas, lekin bu nuqtada minimumga erishadi.

Demak, funktsiyaning local ekstremumlarini statsionar nuqtalari, ya'ni hosilasi mavjud bo'lib, bu hosilani nolga aylantiradigan nuqtalar orasidan yoki hosilasi mavjud bo'lmagan nuqtalar orasidan qidirish kerak ekan.

Bundan xulosa shuki,

$$f'(x)=0 \tag{1}$$

shart differentsiallanuvchi f funktsiya x nuqtada lokal ekstremumga erishishi uchun zaruriy shart ekan, lekin etarli emas.

Shu sababli statsionar nuqtalar orasidan lokal ekstremumlarni ajratib olish uchun qo'shimcha shartlar zarur. Bu shartlarni lokal ekstremumning etarli shartlari, deb ataymiz.

2.1. Lokal ekstremumlarni birinchi hosila yordamida aniqlash

Faraz qilaylik, x_0 $f(x)$ funktsiyaning statsionar nuqtasi bo'lsin va funktsiya bu nuqtada va uning biror U_δ atrofida uzluksiz, shu nuqtaning o'zida bo'lmasa-da, uning U_δ atrofida chekli hosilaga ega va bu hosila U_δ da x_0 ning chap tomonida ham, o'ng tomonida ham doimiy ishoraga ega bo'lsin.

1-teorema. *1) Agar $x\in(x_0-\delta,x_0)$ lar uchun $f'(x)>0$, va $x\in(x_0,x_0+\delta)$ lar uchun $f'(x)<0$ bo'lsa, x_0 nuqta lokal maksimum bo'ladi; 2) agar $x\in(x_0-\delta,x_0)$ lar uchun $f'(x)<0$ va $x\in(x_0,x_0+\delta)$ lar uchun $f'(x)>0$ bo'lsa, x_0 nuqta lokal minimum bo'ladi; 3) agar hosila x_0 nuqtaning chap va o'ng tomonlarida bir xil ishorali bo'lsa, bu nuqta lokal ekstremum bo'lmaydi.*

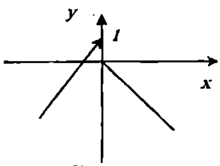
Isboti. 1) $(x_0-\delta,x_0)$ da $f'(x)>0$ bo'lsa, 1-§, 1-teoremaga ko'ra funktsiya bu oraliqda o'sadi va shu sababli barcha $x\in(x_0-\delta,x_0)$ lar uchun $f(x)<f(x_0)$ bo'ladi,$(x_0,x_0+\delta)$ da $f'(x)<0$ bo'lsa, o'sha teoremaga ko'ra funktsiya bu oraliqda kamayadi va demak, barcha $x\in(x_0,x_0+\delta)$ lar uchun $f(x_0)>f(x)$ bo'ladi. Bundan xulosa: $\forall x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ lar uchun $f(x_0)\geq f(x)$, ya'ni x_0 nuqta lokal maksimum ekan.

2) Xuddi yuqoridagidek mulohaza qilsak, $x\in(x_0-\delta,x_0)$ lar uchun $f'(x)<0$ ekanligidan, barcha $x\in(x_0-\delta,x_0)$ lar uchun $f(x_0)<f(x)$ va $(x_0,x_0+\delta)$ da $f'(x)>0$ ekanligidan, barcha $x\in(x_0,x_0+\delta)$ lar uchun $f(x_0)<f(x)$ bo'lishi kelib chiqadi. Demak, $\forall$ $x\in(x-\delta,x+\delta)$ lar uchun $f(x_0)\le f(x)$, ya'ni x_0 nuqta lokal minimum ekan.

3) Agar $x\in(x_0-\delta,x_0)$ lar uchun $f'(x)<0$ (>0) va $x\in(x_0,x_0+\delta)$ lar uchun ham $f'(x)<0$ (>0) bo'lsa, funktsiya x_0 nuqtaning chap tomonida ham, o'ng tomonida ham kamayadi (o'sadi). Shu sababli x_0 nuqta lokal ekstremum bo'lmaydi.

1-eslatma. Teoremada birinchi hosila x_0 nuqtadan o'tish jarayonida ishorasini o'zgartirsa, lokal ekstremum bo'ladi deyilyapti, lekin bunda $f'(x_0)$ ning mavjudligi shart emas, faqat $f(x)$ x_0 nuqtada uzluksiz bo'lsa etarli.

1-*misol.* $f(x)=\begin{cases}1+x, x<0,\\ -x, x\ge 0.\end{cases}$


91-рисм.

Bu funktsiyaning hosilasi $x=0$ nuqtaning chap tomonida «+» ishoraga va o'ng tomonida «—» ishoraga ega, lekin funktsiya $x=0$ nuqtada uzluksiz ham, differentsiallanuvchi ham emas (91-rasmga qarang).

2-*misol.* $y=\frac{1}{1+x^2}$; $y'=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$. Bu yerdan ko'rinadiki, $x<0$ lar uchun $y'>0$ va $x>0$ lar uchun $y'<0$; bundan tashqari funktsiya $x=0$ nuqtada uzluksiz. Shuning uchun 1-teoremaga ko'ra berilgan funktsiya $x=0$ nuqtada lokal maksimumga ega. Funktsiyaning boshqa lokal ekstremumlari yo'q.

3-*misol.* $y=2-x^2\left(1-\sin\frac{1}{x}\right)$ $(x\ne0)$, $y(0)=2$. Bu funktsiya $x=0$ nuqtada uzluksiz va lokal maksimumga erishadi: barcha x lar uchun $y(x)\le y(0)=2$. Lekin, $x=0$ ning hech qaysi atrofi uchun $x<0$ larda o'sib, $x>0$ larda kamaymaydi, chunki

$$y'=-2x\left(1-\sin\frac{1}{x}\right)-\cos\frac{1}{x}\quad(x\ne0),$$

$$y'(0)=\lim_{x\to0}\frac{2-x^2\left(1-\sin\frac{1}{x}\right)-2}{x}=-\lim_{x\to0}x\left(1-\sin\frac{1}{x}\right)=0.$$

Kichik x lar uchun $2x\left(1-\sin\frac{1}{x}\right)$ ifoda qiymati yetarlicha kichik, shuning uchun hosilaning ishorasi $\cos\frac{1}{x}$ ga bog'liq. $x\to0$ da $\cos\frac{1}{x}$ bir necha marotaba ±1 qiymatni qabul qiladi.

2.2. Lokal ekstremumlarni ikkinchi hosila yordamida tekshirish

2-teorema. *x_0 nuqta f funktsiyaning statsionar nuqtasi, ya'ni $f'(x_0)=0$ va uning atrofida f ikki marta uzluksiz differentsiallanuvchi bo'lsin. Agar $f''(x_0)<0$ bo'lsa, x_0 nuqta f funktsiyaning lokal maksimumi va agar $f''(x_0)>0$ bo'lsa, x_0 nuqta f funktsiyaning lokal minimumi bo'ladi.*

Isboti. Berilgan funktsiyani $n=1$ bo'lgan hol uchun Teylor formulasiga yoyaylik:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(c)}{2!}(x-x_0)^2 \quad (c\in(x_0,x)). \tag{2}$$

Bundan teorema shartiga ko'ra $f'(x_0)=0$ bo'lgani uchun

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f''(c)}{2!}(x-x_0)^2. \tag{2'}$$

Faraz qilaylik, $f''(x_0)<0$ bo'lsin. f'' x_0 nuqta atrofida uzluksiz bo'lgani uchun shunday $\delta>0$ topiladiki, barcha $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ lar uchun $f''(x)<0$ bo'ladi. U holda (2') dagi qoldiq had $\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ lar uchun

$$\frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(c)\le 0$$

bo'ladi. Bundan $\forall x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ lar uchun

$$\Delta y=f(x)-f(x_0)\le 0$$

ekanligi kelib chiqadi, ya'ni x_0 lokal maksimum ekan.

Xuddi shunday, agar $f''(x_0)>0$ bo'lsa, x_0 ning atrofida $f''(x)>0$, shu jumladan, $f''(c)>0$ bo'ladi. U holda (2') dagi qoldiq had shu atrofda manfiy bo'lmaydi. Shu sababli x_0 ning atrofidagi barcha x lar uchun

$$\Delta y=f(x)-f(x_0)\ge 0$$

bo'ladi, ya'ni x_0 lokal minimum ekan.

4-*misol.* $y=x^2+5, y'=2x$, $x=0$—statsionar nuqta ekan.

Barcha x lar uchun $y''=2>0$, demak, 2-teoremaga ko'ra $x=0$ — lokal minimum ekan.

2-eslatma. $f'(x_0)=0$ va $f''(x_0)=0$ bo'lishi x_0 nuqtaning ekstremum bo'lishini ta'minlamaydi. Masalan, $y=x^3$ va $y=x^4$ funktsiyalarning birinchi va ikkinchi hosilalari $x=0$ nuqtada nolga teng, lekin birinchi funktsiyamiz bu nuqtada ekstremumga ega emas, ikkinchisi esa lokal minimumga ega.

3-teorema. *$f'(x_0)=f''(x_0)=...=f^{(n)}(x_0)=0, f^{(n+1)}(x_0)\neq 0$ va $f^{(n+1)}(x)$ x_0 nuqtaning atrofida uzluksiz bo'lsin. Agar $(n+1)$-juft va $f^{(n+1)}(x_0)<0$ bo'lsa, f funktsiya x_0 nuqtada lokal maksimumga; agar $(n+1)$-juft va $f^{(n+1)}(x_0)>0$ bo'lsa, f funktsiya x_0 nuqtada lokal minimumga erishadi; va nihoyat, agar $(n+1)$-toq va $f^{(n+1)}(x_0)\neq 0$ bo'lsa, f funktsiya x_0 nuqtada hech qanday ekstremumga erishmaydi.*

Isboti. f funktsiyaning x_0 nuqta atrofidagi Teylor yoyilmasiga teorema shartini qo'llasak:

$$f(x)-f(x_0)=\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)\quad (c\in(x_0,x)). \tag{3}$$

Agar bu yerda $(n+1)$-juft bo'lsa, (2') formuladek mulohaza qilamiz. Endi $(n+1)$-toq va $f^{(n+1)}(x_0)\neq 0$ bo'lsin. $f^{(n+1)}(x)$ x_0 nuqta atrofida uzluksiz bo'lgani tufayli, uning uchun shunday $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ interval mavjudki, u yerda u $f^{(n+1)}(x_0)$ ning ishorasini saqlaydi. Agar x x_0 nuqtadan o'sib o'tsa, $(x-x_0)^{n+1}$ o'z ishorasini o'zgartiradi, $f^{(n+1)}(x_0)$ ning ishorasi esa o'zgarmaydi. Shu sababli,(3) tenglikning o'ng tarafi va o'z navbatida $\Delta y=f(x)-f(x_0)$ ham o'z ishorasini o'zgartiradi, ya'ni x_0 nuqta lokal ekstremum bo'lmaydi.

4-teorema. *Agar* $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)>0$ *(<0) bo'lsa, u holda* f *funktsiya* x_0 *nuqtada lokal minimumga (maksimumga) erishadi.*

Bu teoremaning 2-teoremadan farqi shundaki, 4-teoremada ikkinchi hosilaning uzluksizligi talab qilinmay, faqat mavjudligi talab qilinyapti. Shu ma'noda 2-teoremani 4-teoremaning xususiy holi, deb qarash mumkin.

4-teoremaning isboti.

$$f''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{x-x_0}>0,$$

bo'lgani uchun 5-bob, 2.2-§, 2-teoremaga ko'ra x_0 ning yetarlicha kichik atrofida $\frac{f'(x)}{x-x_0}>0$ bo'ladi. U holda $x<x_0$ lar uchun $f'(x)<0$ va $x>x_0$ lar uchun $f'(x)>0$ bo'ladi. Demak, 1-teoremaga ko'ra x_0 nuqta lokal minimum ekan. $f''(x_0)<0$ hol xuddi yuqoridagidek tekshiriladi.

3-§. Funktsiyaning eng katta va eng kichik qiymatlari

Faraz qilaylik, $f(x)$ funktsiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz bo'lsin. U holda Veyershtrass teoremasiga ko'ra (6-bob, 3.3-§ ga qarang) bu funktsiya $[a,b]$ da o'zining eng katta va eng kichik qiymatlariga erishadi. Funktsiya bu qiymatlarga yo (a,b) intervalda yoki chegaraviy $x=a$ va $x=b$ nuqtalarda erishishi mumkin. (a,b) intervalda eng katta va eng kichik qiymatlarga erishilayotgan nuqtalar yuqoridagi mulohazalarga asosan local ekstremum nuqtalar bo'ladi. Shu sababli, eng katta va eng kichik qiymatlarga erishilayotgan nuqtalarni yo statsionar nuqtalar orasidan, yo hosilasi mavjud bo'lmaydigan nuqtalar orasidan qidirish kerak ekan. Agar bu nuqtalar chekli $x_1, x_2, \ldots, x_m$ to'plamni tashkil etsa, u holda

$$\max_{x\in[a,b]} f(x)=\max\{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_m)\}$$

va

$$\min_{x\in[a,b]} f(x)=\min\{f(a),f(b),f(x_1),f(x_2),\dots,f(x_m)\}.$$

5-*misol.* $f(x)=\sin x+\cos x$ funktsiyaning $[0,\pi]$ oraliqdagi eng katta va eng kichik qiymatlari topilsin.

Avval hosilasini hisoblaymiz: $f'(x)=\cos x-\sin x$. Uni nolga tenglab, statsionar nuqtalarini topamiz:

$$\cos x-\sin x=0.$$

Bu tenglamaning $[0,\pi]$ oraliqqa tegishli yechimi faqat $x=\pi/4$. U holda $f(0)=1$, $f(\pi/4)=\sqrt{2}$, $f(\pi)=-1$ bo'lgani uchun

$$\max_{x\in[a,b]} f(x)=\sqrt{2},\quad \min_{x\in[a,b]} f(x)=-1.$$

6-*misol.* Yer sathiga φ burchak ostida joylashtirilgan to'pdan boshlang'ich ϑ_0 tezlikda otilgan o'qning uchish masofasi

$$R=\frac{\vartheta_0^2\sin 2\varphi}{g} \tag{4}$$

formula bilan hisoblanadi, bu yerda, g — og'irlik kuchining tezlanishi. Berilgan boshlang'ich tezlikda o'qning eng uzoq masofaga tushishi uchun to'pni qanday burchak ostida joylashtirish kerak?

Yechish. Tabiiyki, $0\le\varphi\le\pi/2$ bo'lishi kerak. (4) ni shu oraliqda maksimumga tekshiramiz:

$$\frac{dR}{d\varphi}=\frac{2\vartheta_0^2\cos 2\varphi}{g},\quad \frac{2\vartheta_0^2\cos 2\varphi}{g}=0,$$

bundan kritik nuqta $\varphi=\pi/4$ ekanligi kelib chiqadi.

$$\frac{d^2R}{d\varphi^2}=-\frac{4\vartheta_0^2\sin 2\varphi}{g},\quad \left(\frac{d^2R}{d\varphi^2}\right)_{\varphi=\pi/4}=-\frac{4\vartheta_0^2}{g}<0.$$

Demak, $\varphi=\pi/4$ da uchish masofasi R maksimumga erishar ekan:

$$(R)_{\varphi=\pi/4}=\frac{\vartheta_0^2}{g}.$$

Funktsiyaning $[0,\pi/2]$ oraliq chegaralaridagi qiymatlari

$$(R)_{\varphi=0}=0,\quad (R)_{\varphi=\pi/2}=0.$$

Demak, o'q eng uzoq masofaga tushishi uchun uni yer sathiga 45^0 burchak ostida uzish kerak ekan.

7-*misol.* Hajmi V bo'lgan tsilindrning to'la sirti S eng kichik bo'lishi uchun uning o'lchamlari qanday bo'lishi kerak?

Yechish. Tsilindr asosining radiusini r va balandligini h bilan belgilaylik. U holda

$$S=2\pi r^2+2\pi rh,\quad V=\pi r^2h$$

bo'ladi. Bundan $h=\frac{V}{\pi r^2}$ ni topib, S uchun yozilgan formulaga qo'ysak:

$$S=2\pi r^2+2\pi r\frac{V}{\pi r^2}\ \text{ yoki }\ S=2\left(\pi r^2+\frac{V}{r}\right)$$

hosil bo'ladi, bu yerda, V berilgan son. Natijada S yuza r radiusning funktsiyasi sifatida ifodalandi. Bu funktsiyaning $0<r<\infty$ oraliqdagi eng kichik qiymatini topaylik:

$$\frac{dS}{dr}=2\left(2\pi r-\frac{V}{r^2}\right)=0,$$

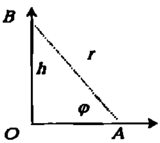
bundan

$$r_1=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}},\quad \left(\frac{d^2S}{dr^2}\right)_{r=r_1}=2\left(2\pi+\frac{2V}{r^3}\right)_{r=r_1}>0.$$

Demak, S funktsiya $r=r_1$ nuqtada minimumga ega ekan. Endi $\lim\limits_{r\to 0}S=\infty$ va $\lim\limits_{r\to\infty}S=\infty$ ekanligini e'tiborga olsak, S funktsiya $r=r_1$ nuqtada eng kichik qiymatga erishadi deyish mumkin. Bu qiymatga

$$r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}},\quad h=\frac{V}{\pi r^2}=2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}=2r$$

nuqtalarda erishiladi. Demak, berilgan hajmli tsilindrning to'liq yuzi balandligi asosining diametriga teng bo'lganda eng kichik bo'lar ekan.



92-расм.

8-*misol.* Elektr chirog'i tik OV to'g'ri chiziq bo'ylab biror blokka biriktirilgan holda harakat qila oladigan bo'lsin. Tekislikdagi A nuqtada yorug'lik eng yuqori bo'lishi A uchun elektr chiroqni tekislikdan qanday balandlikka qo'yish lozim?

Ma'lumki, A nuqtadagi I yorug'lik $I=c\frac{\sin\varphi}{r^2}$ qoida bo'yicha aniqlanadi. Agar h ni erkli o'zgaruvchi sifatida qarasak, u holda 92-rasmdan $\sin\varphi=\frac{h}{r}$, $r=\sqrt{h^2+a^2}$ larni aniqlasak,

$$I=c\cdot\frac{h}{(h^2+a^2)^{3/2}}\quad(0<h<+\infty)$$

formula hosil bo'ladi. Bu funktsiyani maksimumga tekshiramiz:

$$I_h'=c\cdot\frac{a^2-2h^2}{(h^2+a^2)^{5/2}}$$

hosila $h=\frac{a}{\sqrt{2}}$ nuqtada nolga aylanadi. Endi,

$$I\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)=\frac{2c}{3\sqrt{3}a^2}>0,\quad I(0)=I(\infty)=0$$

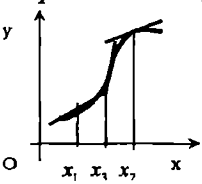
qiymatlar ichida eng kattasi $h=\frac{a}{\sqrt{2}}$ nuqtada erishilyapti.

Demak, chiroqni $h=\frac{a}{\sqrt{2}}$ balandlikka o'rnatish kerak ekan.

4-§. Egri chiziqning qavariqligi. Bukilish nuqtalari

1-ta'rif. *Agar nuqtaning shunday atrofi mavjud bo'lsaki, bu atrofdagi barcha nuqtalar uchun abtsissasi x_0 bo'lgan nuqtada egri chiziqqa o'tkazilgan har qanday urinma egri chiziqdan yuqorida (pastda) joylashgan bo'lsa, $y=f(x)$ egri chiziq x_0 nuqtada qavariqligi yuqoriga (pastga) qaragan deymiz.*

2-ta'rif. *Agar x x_0 nuqtadan ўtayotganda egri chiziqning abtsissasi x bўlgan nuqtasi urinmaning bir tomonidan ikkinchi tomoniga ўtsa, x_0 nuqta $y=f(x)$ egri chiziqning bukilish nuqtasi deyiladi.* Masalan, 93-rasmdagi x_3 nuqta bukilish nuqtasidir.



93-rasm

Ayrim hollarda "qavariqligi yuqoriga (pastga) qaragan" jumla o'rniga "botiqligi pastga (yuqoriga) qaragan" jumlasi ishlatiladi. Masalan, 93-rasmdagi x_1 nuqtada egri chiziqning qavariqligi pastga qaragan, x_2 nuqtada esa qavariqligi yuqoriga (93-rasm) qaragan.

Bu ta'riflar egri chiziqning urinish nuqtasining yetarlicha kichik atrofida urinmaga nisbatan qanday joylashgani haqida ma'lumot beradi. Lekin, bu ta'riflar barcha holatlar uchun o'rinli bo'lavermas ekan, masalan,

$$f(x)=\begin{cases}0, x=0,\\ x^2\sin\frac{1}{x^2}, x\neq 0,\end{cases}$$

funktsiya uchun x o'qi uning grafigini $x=0$ nuqtada kesib va urinib o'tadi, lekin $x=0$ nuqta bukilish nuqtasi emas.

1-teorema. *Agar f funktsiyaning x_0 nuqtadagi ikkinchi hosilasi uzluksiz va $f''(x_0)>0$ (<0) bo'lsa, u holda $y=f(x)$ egri chiziqning x_0 nuqtada qavariqligi pastga (yuqoriga) qaragan bo'ladi.*

Isboti. f funktsiyani x_0 nuqta atrofida Teylor formulasi bo'yicha yoyaylik:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+r_1(x),$$

$$r_1(x)=\frac{(x-x_0)^2}{2}f''(x_0+\theta(x-x_0)), 0<\theta<1.$$

Abtsissasi x_0 bo'lgan nuqtada bizning egri chiziqqa o'tkazilgan urinmaning tenglamasi

$$Y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

bo'ladi. U holda egri chiziq nuqtasi bilan unga x_0 nuqtada o'tkazilgan urinma nuqtasi orasidagi farq

$$f(x)-Y=r_1(x)$$

bo'ladi. f'' x_0 nuqtada uzluksiz bo'lgani uchun $f''(x_0)>0$ ekanligidan x_0 ning yetarlicha kichik atrofidagi barcha x lar uchun $f''(x_0+\theta(x-x_0))>0$ bo'lishi kelib chiqadi. Shuning tufayli ko'rsatilgan x lar uchun $r_1(x)>0$ bo'ladi. Demak, grafik o'z urinmasidan yuqorida joylashgan, ya'ni egri chiziq qavariqligi pastga qaragan ekan.

Xuddi shunday, agar $f''(x_0)< 0$ bo'lsa, u holda x_0 ning biror kichik atrofidagi barcha x lar uchun $r_1(x)<0$ bo'ladi, ya'ni grafik o'z urinmasidan pastda joylashgan bo'ladi. Demak, egri chiziq qavariqligi yuqoriga qaragan ekan.

Natija. Agar x_0 $y=f(x)$ egri chiziqning bukilish nuqtasi va bu nuqtada $f''(x_0)$ ikkinchi hosila mavjud bo'lsa, u holda $f''(x_0)=0$ bo'lishi zarurdir.

Shu sababli amalda ikki marotaba differentsiallanuvchi $y=f(x)$ egri chiziqning bukilish nuqtasini $f''(x)=0$ tenglama yechimlari orasidan qidiriladi.

$f''(x_0)=0$ shart bukilish nuqtasi uchun yetarli emas. Masalan, $y=x^4$ funktsiyaning ikkinchi hosilasi $x=0$ nuqtada nolga teng, lekin bu nuqta minimum nuqtadir.

Bukilish nuqtasi uchun yetarli shartni quyidagi teoremalar beradi:

2-teorema. *Agar f funktsiyaning uchinchi hosilasi f''' x_0 nuqtada uzluksiz, $f''(x_0)=0$ va $f'''(x_0)\neq 0$ bo'lsa, u holda x_0 nuqta $y=f(x)$ egri chiziqning bukilish nuqtasi bo'ladi.*

Isboti. Berilgan shartlarda Teylor formulasi bo'yicha yoyilma quyidagicha bo'ladi:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+r_2(x),$$

$$r_2(x)=\frac{(x-x_0)^3}{3!}f'''(x_0+\theta(x-x_0)), 0<\theta<1.$$

f''' ning x_0 nuqtada uzluksizligidan va $f'''(x_0)\neq 0$ ekanligidan x_0 nuqtaning biror atrofida $f'''(x_0+\theta(x-x_0))$ ning ishorasi bir xil bo'ladi. Lekin $(x-x_0)^3$ ko'paytuvchi x ning x_0 nuqtadan o'tish jarayonida o'z ishorasini o'zgartiradi, shu sababli $r_2(x)$ ham o'z ishorasini o'zgartiradi, ya'ni x_0 nuqtaning bir tomonida grafik urinmadan, masalan, pastda bo'lsa, ikkinchi tomonida yuqorida bo'ladi. Teorema isbot bo'ldi.

Agar $f'''(x_0)=0$ bo'lsa, yuqoridagi teorema o'rinli bo'lmaydi, bunga yuqorida keltirilgan $y=x^4$ funktsiya misol bo'la oladi. Bunday holatlar uchun yetarli shartni quyidagi teorema beradi:

3-teorema. *f funktsiya quyidagi xususiyatlarga ega bo'lsin:*

$$f''(x_0)=\ldots=f^{(n)}(x_0)=0,$$

$f^{(n+1)}(x)$ hosila x_0 nuqtada uzluksiz va $f^{(n+1)}(x_0)\neq 0$. U holda, agar n toq son bo'lsa, $y=f(x)$ egri chiziqning qavariqligi $f^{(n+1)}(x_0)>0$ bo'lganda pastga, $f^{(n+1)}(x_0)<0$ bo'lganda yuqoriga qaragan bo'ladi; va agar n — juft bo'lsa, x_0 nuqta $y=f(x)$ egri chiziqning bukilish nuqtasi bo'ladi.

Isboti xuddi yuqoridagidek bajariladi, faqat isbotlash davomida ishlatiladigan Teylor formulasi bo'yicha yoyilmasi bu gal quyidagicha bo'ladi:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0)).$$

3-ta'rif. *Agar $y=f(x)$ egri chiziqning abtsissalari x_1, x_2 $(a\le x_1<x_2\le b)$ bo'lgan nuqtalar orasidagi ixtiyoriy yoyi uni tortib turuvchi vatardan pastda (yuqorida) bo'lmasa, $y=f(x)$ egri chiziqni $[a,b]$ oraliqda qavariqligi yuqoriga (pastga) qaragan deymiz.*

Agar f funktsiya $[a,b]$ oraliqda differentsiallanuvchi bo'lsa, yuqoridagi ta'rif quyidagiga ekvivalent: agar $y=f(x)$ egri chiziqning qavariqligi (a,b) intervalning har bir nuqtasida yuqoriga (pastga) qaragan bo'lsa, $y=f(x)$ egri chiziqni $[a,b]$ oraliqda qavariqligi yuqoriga(pastga) qaragan deymiz.

4-teorema. *f funktsiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz va (a,b) intervalda ikki marotaba differentsiallanuvchi bo'lsin. U holda $y=f(x)$ egri chiziqning $[a,b]$ oraliqda qavariqligi yuqoriga (pastga) qaragan bo'lishi uchun barcha $x\in(a,b)$ lar uchun $f''(x)\le 0$ (≥ 0) bo'lishi zarur va yetarlidir.*

1-*misol.* $y=x^3+3x^2, y'=3x^2+6x,$ $x_1=0$ va $x_2=-2$ nuqtalarda $y'=0$; $y''=6x+6, y''(0)=6>0, y''(-2)=-6<0,$ va $x=-1$ nuqtada $y''=0$, $y'''=6\neq 0$, demak, $x=-1$ bukilish nuqtasi ekan. $x>-1$ lar uchun $y''(x)>0$ va $x<-1$ lar uchun $y''(x)<0$. Shu sababli funktsiya grafigining qavariqligi $(-\infty,-1)$ oraliqda yuqoriga va $(-1,\infty)$ oraliqda pastga qaragan.

2-*misol.* $y=(x-1)^{1/3}$, $y'=\frac{1}{3}(x-1)^{-2/3}, y''=-\frac{2}{9}(x-1)^{-5/3}$; ikkinchi hosila hech qayerda nolgaaylanmaydi va $x=1$ damavjud emas. $x>1$ lar uchun $y''(x)<0$ va $x<1$ lar uchun $y''(x)>0$. Demak, funktsiya grafigining qavariqligi $(-\infty,1)$ oraliqdapastga va $(1,\infty)$ oraliqda yuqoriga qaragan, shu sababli, $x=1$ nuqta bukilish nuqtasi bo'ladi.

5-§. Funktsiya grafigining asimptotalari

Agar

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) \text{ yoki } \lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$$

limitlarning kamida bittasi ∞ ga teng bo'lsa, $x=a$ to'g'ri chiziq $y=f(x)$ funktsiyaning grafigiga vertical asimptota bo'ladi, deymiz.

Agar $y=f(x)$ funktsiya $x>M$ $(x<M)$ lar uchun aniqlangan bo'lsa, u holda $y=kx+b$ to'g'ri chiziqni uzluksiz $y=f(x)$ egri chiziqning $x\to+\infty$

($x \to -\infty$) dagi og'maasimptotasi deymiz, agar $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, bu yerda, $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \alpha(x) = 0$ bo'lsa.

1-*misol.* $y = \dfrac{1}{x}$ funktsiya uchun $x=0$ o'q vertical asimptota bo'ladi, chunki

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty.$$

2-*misol.* $y = x + \dfrac{\sin x}{x}$ ($x \neq 0$). $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$ bo'lgani uchun $Y = x$ to'g'ri chiziq $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$ daham) daberilgan funktsiyauchun og'maasimptota bo'ladi.

3-*misol.* $y = \sqrt{x}$ ($x \geq 0$) funktsiya grafigining og'ma asimptotalari yo'q, chunki k va b larning hech bir qiymatida $x \to +\infty$ bo'lganda $\sqrt{x} - kx - b$ ifoda nolgaintilmaydi.

Teorema. $Y = kx + b$ *to'g'ri chiziq* $y = f(x)$ *funktsiya grafigiga* $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$) *da og'ma asimptota bo'lishi uchun*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx] = b \tag{1}$$

chekli limitlarning mavjud bo'lishi zarur va yetarlidir.

Zarurligi. Faraz qilaylik, $Y = kx + b$ to'g'ri chiziq $y = f(x)$ funktsiya grafigiga $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$) da og'ma asimptota bo'lsin. U holda ta'rifga ko'ra $f(x) - kx - b = \alpha(x)$ ifoda $x \to +\infty$ da nolga intiladi. Bundan

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left[k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x} \right] = k,$$

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to+\infty} [b + \alpha(x)] = b.$$

Yetarliligi. Faraz qilaylik, (1) limitlar mavjud bo'lsin. U holda limitning ta'rifiga ko'ra ikkinchi limitdan $f(x) - kx - b = \alpha(x)$ miqdor $x \to +\infty$ da cheksiz kichik miqdor bo'lishi, ya'ni $f(x) = kx + b + \alpha(x)$ bo'lishi kelib chiqadi. Shu mulohazani $x \to -\infty$ uchun qaytarib chiqish mumkin.

Agar $k = 0$ bo'lsa, asimptota gorizontal, deyiladi.

4-*misol.* 3-bob, 2.3-§ da $y = \pm \dfrac{b}{a} x$ to'g'ri chiziqlar

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (|x| \geq a, a \geq b > 0)$$

giperbolaning og'ma asimptotalari ekanligini ko'rgan edik. Hozir shunga boshqa yo'l bilan ishonch hosil qilamiz.

Berilgan tenglamani y ga nisbatan yechamiz:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}.$$

Bundan

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\pm\frac{b}{a}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}=\pm\frac{b}{a}.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[y-\left(\pm\frac{b}{a}x\right)\right]=\pm\frac{b}{a}\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-a^2}-x\right)=$$

$$=\pm\frac{b}{a}\lim_{x\to+\infty}\frac{a^2}{\sqrt{x^2-a^2}+x}=0.$$

Xuddi shu usulda $x\to-\infty$ hol ham tekshiriladi. Demak, haqiqatan, $y=\pm\frac{b}{a}x$ to'g'ri chiziqlar bizning giperbolamizga og'ma asimptotalar ekan.

6-§. Uzluksiz va silliq egri chiziqlar

6-bobda funktsiyaning berilish usullari ko'rilgan edi. Bu paragrafda biz vositachi vazifasini bajaruvchi parametr yordamida beriladigan funktsiyalarni ko'rib chiqamiz.

Biror (a,b) intervalda o'zgaruvchi t parametrning uzluksiz funktsiyalaridan tuzilgan quyidagi:

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t) \end{cases} \tag{1}$$

sistemani ko'raylik. xOy koordinatalar tekisligida t parametrning qiymatlari bo'yicha tartiblangan $(\varphi(t),\psi(t))$ nuqtalarning geometrik o'rni uzluksiz egri chiziqni ifodalaydi, ya'ni x va y o'zgaruvchilar o'rtasida funktsional bog'lanishni aniqlaydi. Bunday usulda aniqlangan funktsiyani tenglamasi (1) bo'lgan parametrik funktsiya, deb ataymiz. Agar φ funktsiya t ning monoton funktsiyasi bo'lsa, (1) ning birinchi tenglamasidan $t=\varphi^{-1}(x)$ ni aniqlab, ikkinchi tenglamagaqo'yilsa, funktsiyaning bizgama'lum

$$y=f(x)=\psi(\varphi^{-1}(x)) \tag{2}$$

ifodasini hosil qilamiz.

Ta'rif. *Agar* $\varphi(t)$ *va* $\psi(t)$ ***funktsiyalar*** (a,b) ***intervalda uzluksiz differentsiallanuvchi bo'lib, ularning hosilalari***

$$\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2>0\,,\quad \forall t\in(a,b), \tag{3}$$

tengsizlikni qanoatlantirsa, tenglamasi (1) bo'lgan egri chiziq silliq deyiladi.

Silliq chiziq tenglamasini har doim (2) ko'rinishga keltirish mumkin. Haqiqatan silliq chiziq uchun (3) o'rinli, bu tengsizlik esa $\varphi'(t)$ va $\psi'(t)$ larning birontasi noldan farqli bo'lganda bajariladi. Masalan, parametrning biror $t_0\in(a,b)$ qiymatida $\varphi'(t_0)\neq0$ bo'lsin. U holda $\varphi'(t)$ ning uzluksizligidan t_0 ning shunday $(t_0-\delta,t_0+\delta)$ atrofi mavjudki, u yerda $\varphi'(t)$ funktsiya $\varphi'(t_0)$ ning ishorasini saqlaydi. Demak, $\varphi(t)$ funktsiya $(t_0-\delta,t_0+\delta)$ oraliqda qat'iy monotondir. U holdabizgama'lumki, bunday funktsiyauchun teskari funktsiya mavjud.

Agar biror $t_0 \in (a,b)$ qiymatda $\psi'(t_0) \neq 0$ bo'lsa, yuqoridagidek mulohaza qilib, (1) ning quyidagi

$$x = g(y) = \varphi(\psi^{-1}(y))$$

ko'rinishgakeltirilishigaishonch hosil qilamiz.

Yuqoridagi mulohazalardan xulosa qilsak, silliq chiziqning ixtiyoriy nuqtasidaurinmao'tkazish mumkin ekan.

Misol. Barcha $-\infty < t < +\infty$ lar uchun

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t \end{cases}$$

tenglamalar koordinatalar tekisligida ellipsni aniqlaydi. Ellips ma'lumki, (2-bob, 2.2-§ gaqarang), silliq egri chiziqdir, haqiqatan

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = (a\sin t)^2 + (b\cos t)^2 = b^2(\sin^2 t + \cos^2 t) = b^2 > 0,$$

bu yerda, $0 < b \leq a$, deb faraz qilindi, agar $0 < a \leq b$ bo'lsa ham taxminan shunday xulosagakelinadi.

7-§. Funktsiya grafigini qurishning umumiy sxemasi

Yuqoridagi tekshirishlar funktsiyagrafigi to'g'risidaumumiy tasavvurgaega bo'lish uchun zarur edi. Bu paragrafda biz shuni qanday amalga oshirish bilan shug'ullanamiz. Bu quyidagi tartibda bajariladi:

1. f funktsiyaning aniqlanish sohasi $D(f)$ ni topish.

2. f funktsiyaning statsionar vakritik $x_1, x_2, x_3, \dots,$ nuqtalarini topish. Statsionar nuqtalarda: $f(x_1), f(x_2), \dots$ qiymatlarni hisoblash vaularni lokal ekstremumlikkatekshirish. Kritik nuqtalardabir yoqlama $f(x_k - 0)$ va $f(x_k + 0)$ limitlarni hisoblash kerak. Agar ma'nogaegabo'lsa,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x), \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

limitlarni ham aniqlash lozim.

3. $D(f)$ sohani x_k nuqtalar, har birida $f'(x) \neq 0$ bo'lgan bir nechta intervallargabo'ladi. Agar $f'(x)$ bu intervallardauzluksiz bo'lsa, ulardao'z ishorasini saqlaydi. Har bir oraliqdabu ishoralarni aniqlab, funktsiyaning o'sish vakamayish oraliqlarini topamiz.

4. Har bir oraliqdaikkinchi hosilani nolgaaylantiradigan $x_{k,1}, x_{k,2}, \dots,$ k=0,1,2,..., nuqtalarni aniqlab, bu nuqtalarda $f(x_{k,1}), f(x_{k,2}), \dots,$ qiymatlarni hisoblash zarur. Bu nuqtalar orasida bukilish nuqtalari bo'lishi mumkin. Bukilish nuqtalari ajratgan intervallarda $f''(x)$ ning ishoralarini aniqlab, qavariqlikvabotiqlik oraliqlarini topamiz.

5. Agar imkoni bo'lsa, $f(x) = 0$ tenglamaning yechimlarini topib, bu nuqtalar atrofida $f(x)$ ning ishoralarini aniqlash lozim.

6. Asimptotalari bor-yo'q ekanligini tekshirish, ya'ni

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=k,\quad \lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]=b$$

limitlarni hisoblash kerak.

Bu tekshirishlar asosida jadval tuzib, keyin shu jadval yordamida funktsiyagrafigi yasaladi.

Agar funktsiya juft yoki toq bo'lsa, u holda funktsiyani x ning faqat musbat qiymatlari uchun tekshirish kifoya, chunki juft funktsiyaning grafigi ordinata o'qiga nisbatan simmetrik, toq funktsiya grafigi esa koordinata boshiganisbatan simmetrikdir.

Yuqorida aytilgan amallarning bajarilishini quyidagi $y=f(x)=\frac{x}{1+x^2}$ funktsiyamisolidako'raylik.

Yechish. 1. Funktsiyaning aniqlanish sohasi: $-\infty<x<\infty$.

Berilgan funktsiya toq funktsiya dir, chunki $y(-x)=-\frac{x}{1+x^2}=-y(x)$ funktsiya uzluksizdir.

Statsionar nuqtalarni aniqlaymiz:

$$y'=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2};\ y'=0,\ \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}=0,\ 1-x^2=0\ \ x_1=-1;\ x_2=1.$$

Bu nuqtalarni lokal ekstremumlikka tekshiraylik.

Buning uchun 2- tartibli hosilani olamiz.

$$y''=\frac{-2x(1+x^2)^2-2(1+x^2)\cdot 2x\cdot(1-x^2)}{(1+x^2)^4}=\frac{-2x(1+x^2+2-2x^2)}{(1+x^2)^3}=\frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3};\quad y''|_{x=-1}=1/2>0.$$

Demak, $x=-1$ nuqtada funktsiya minimumga ega $y_{min}|_{x=-1}=-1/2$;

$$y''|_{x=1}=-1/2<0.$$

Demak, $x=1$ nuqtada funktsiya maksimumga ega: $y_{max}|_{x=1}=1/2$;

3. Funktsiyaning o'sish va kamayish intervallari: $(-\infty;\ -1)$ da $y'<0$ — funktsiya kamayadi, $(-1;\ 1)$ da $y'>0$ — funktsiya o'sadi, $(1;\ \infty)$ da $y'<0$ — funktsiya kamayadi.

4. Egri chiziqning qavariqlik va botiqlik sohalarini va bukulish nuqtalarini aniqlaymiz.

$$y''=0,\ \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}=0;\ 2x(x^2-3)=0.\ \ x_1=-\sqrt{3},\ x_2=0,\ x_3=\sqrt{3},$$

u holda $(-\infty;\ -\sqrt{3})$ da $y''<0$ - egri chiziq qavariq; $(-\sqrt{3};\ 0)$ da $y''>0$ — egri chiziq botiq; $(0;\ \sqrt{3})$ da $y''<0$ — egri chiziq qavariq; $(\sqrt{3};\ \infty)$ da $y''>0$ — egri chiziq botiq.

$$y|_{x=-\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{4};\ y|_{x=0}=0;\ y|_{x=\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

Demak, $(-\sqrt{3};\ -\frac{\sqrt{3}}{4})$, $(0;0)$, $(\sqrt{3};\frac{\sqrt{3}}{4})$ nuqtalar bukulish nuqtalaridir.

5. Berilgan funktsiya $x=0$ da nolga teng. $(-\infty,0)$ oraliqda $f(x)<0$ va $(0,+\infty)$ intervalda $f(x)>0$.

6. Egri chiziqning asimptotalarini aniqlaymiz.

a) Egri chiziqning vertikal asimptotasi yo'q.

b) Og'ma asimptotasi:

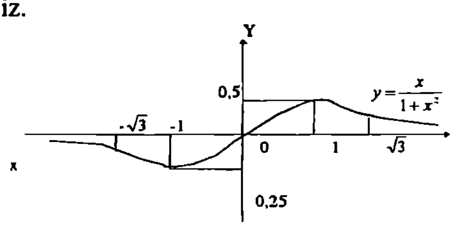
$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x(1+x^2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+x^2}=0;\quad b=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1+x^2}=0.$$

Demak, $y=0$ — gorizontal asimptota ekan.

Bu topilgan ma'lumotlar asosida quyidagi jadvalni tuzaylik:

x	$(-\infty,\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}-1)$	-1	(-1,0)	0	(0,1)	1	$(1,\sqrt{3})$	$(\sqrt{3})$	$(\sqrt{3},\infty)$
u''	<0	-	<0	0	>0	-	>0	0	<0	-	<0
u'''	<0	0	>0	-	>0	0	<0	1	>0	0	>0
u	↘	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	0	↗	$\frac{1}{2}$	↘	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	↘
	qavariq	buri-lish nuqta	botiq	min	botiq	b.n.	Qavariq	max	botiq	buku-lish nuqta	botiq

Jadvalga va yuqoridagi tekshirish natijalariga asoslanib funktsiyaning grafigini chizamiz.



94-rasm.

9-BOB.

KOMPLEKS SONLAR. KO'PHADLAR

1-§. Kompleks sonlar. Boshlang'ich tushunchalar

Ma'lumki, har qanday haqiqiy sonning kvadrati musbat bo'ladi. Kvadrati manfiy bo'lgan sonlar ham mavjud, masalan, $a-ib$, $(\sqrt{-4})^2=-4$. Bunday sonlarni mavhum sonlar, deb ataymiz. Mavhum sonlar to'plamida birlik vazifasini $\sqrt{-1}$ soni bajaradi, chunki masalan, $\sqrt{-9}=3\sqrt{-1}=3i$ yoki $\sqrt{-7}=i\sqrt{7}$ va h. k., shuning uchun uni mavhum birlik deyish qabul qilingan. Bu son $i=\sqrt{-1}$, deb belgilanadi.

Quyidagi

$$z=a+ib \tag{1}$$

ko'rinishdagi sonlarni kompleks sonlar, deb ataymiz. Bu erda, a va b sonlar haqiqiy sonlar, agar $a=0$ bo'lsa, u mavhum songa, va agar $b=0$ bo'lsa, haqiqiy songa aylanadi. Demak, haqiqiy va mavhum sonlarni kompleks sonlarning xususiy holi, deb qarash mumkin ekan.

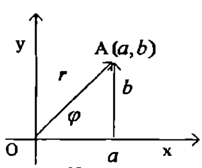
a va b sonlar z sonning mos ravishda haqiqiy va mavhum qismlari deyiladi. Ular uchun

$$a=\operatorname{Re} z,\quad b=\operatorname{Im} z$$

belgilashlar ishlatiladi.

$z=a+ib$ va $\bar{z}=a-ib$ sonlar qo'shmakompleks sonlar, deb ataladi.

Agar $a_1=a_2$ va $b_1=b_2$ bo'lsa, $z_1=a_1+ib_1$ va $z_2=a_2+ib_2$ sonlar o'zaro teng, ya'ni $z_1=z_2$ deymiz, agar $a=0$ va $b=0$ bo'lsa, $z=a+ib=0$ deymiz.



95-rasm.

Har bir $z=a+ib$ songa Oxy tekisligida koordinatalari a va b bo'lgan $A(a,b)$ nuqtani mos qo'yish mumkin. Va aksincha, tekislikning ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtasiga $z=x+iy$ sonni mos qo'yish mumkin. Kompleks sonlar tasvirlangan bunday tekislikni z kompleks o'zgaruvchining tekisligi deyiladi. Bu tekislikning Ox o'qining nuqtalariga haqiqiy sonlar va Oy o'qining nuqtalariga sof mavhum sonlar mos keladi. Shu sababli z kompleks o'zgaruvchi tekisligining Ox o'qi haqiqiy o'q va Oy o'qi mavhum o'q, deb ataladi.

$A(a,b)$ nuqtani koordinatalar boshi bilan birlashtirib $\overrightarrow{OA}$ vektorni hosil qilamiz. Ayrim hollarda kompleks sonlarni geometric tasviri sifatida $\overrightarrow{OA}$ vektorni qarash qulayroq.

Agar qutb nuqtasi koordinatalar boshi bilan, qutb o'qi esa Ox o'qning musbat yo'nalishi bilan ustma-ust tushadigan qutb koordinatalar sistemasida $A(a,b)$ nuqtaning qutb koordinatalari φ va r bo'lsa, u holda

$$a = r\cos\varphi\,,\quad b = r\sin\varphi$$

bo'ladi (95-rasmga qarang). Buni (1) ga qo'ysak:

$$z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad (2)$$

ifoda hosil bo'ladi. Buni kompleks sonning trigonometrik ifodasi deb, r ni z ning moduli, φ ni esa z ning argumenti, deb ataymiz. Ular quyidagicha belgilanadi:

$$r = |z|,\quad \varphi = \arg z\,. \qquad (3)$$

φ va r larning a va b lar orqali ifodasi

$$r = \sqrt{a^2 + b^2},\quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$$

bo'ladi.
Demak,

$$\left.\begin{aligned} |z| &= |a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}, \\ \arg z &= \arg(a+ib) = \operatorname{arctg}\frac{b}{a} \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

ekan.

φ ning Oxy tekisligining musbat yo'nalishi bo'ylab olingan qiymatlari argumentning musbat qiymatlari va teskari yo'nalishda olingan qiymatlarini argumentning manfiy qiymatlari, deb qabul qilingan. Har bir kompleks songa argumentning yagona qiymati emas, balki $2\pi k$ ga farq qiluvchi qiymatlari mos keladi.

Qo'shma $z = a+ib$ va $\bar z = a - ib$ kompleks sonlar uchun $|z| = |\bar z|, \arg z = -\arg\bar z$ munosabatlar o'rinli.

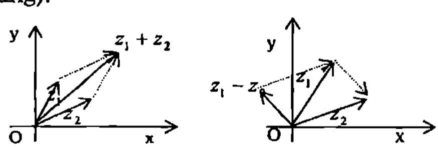
2-§. Kompleks sonlar ustida asosiy amallar

2. Kompleks sonlarni qo'shish. $z_1 = a_1 + ib_1$ va $z_2 = a_2 + ib_2$ sonlarning yig'indisi, deb quyidagi:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \quad (1)$$

tenglik orqali aniqlangan kompleks songa aytamiz.

(1) formuladan kompleks sonlarni qo'shish shu sonlarni ifodalovchi vektorlarni qo'shish qoidasi bo'yicha bajarilishi kelib chiqyapti (96-rasm, a) ga qarang).



a) b)

96-rasm.

2. Kompleks sonlarni ayirish. $z_1 = a_1 + ib_1$ va $z_2 = a_2 + ib_2$ sonlarning ayirmasi deb shunday kompleks songa aytamizki, uni z_2 ga

qo'shganda, yig'indi z_1 gateng bo'ladi:

$$z_1 - z_2 = (a_1 + ib_1) - (a_2 + ib_2) = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2). \tag{2}$$

Bundan ikki kompleks son ayirmasining moduli shu sonlarni kompleks tekislikda ifodalovchi nuqtalar orasidagi masofaga teng ekanligi kelib chiqadi (96-rasm, b)):

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}.$$

3. Kompleks sonlarni ko'paytirish. Ma'lumki, $i^2 = -1$. U holda $i^3 = -i, i^4 = (-1)^2 = 1, i^5 = i$ va h.k. ixtiyoriy butun k lar uchun $i^{4k} = 1, i^{4k+1} = i,\ i^{4k+2} = -1,\ i^{4k+3} = -i$. Shunga asosan

$$z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1a_2 + ia_1b_2 + ib_1a_2 - b_1b_2$$

yoki

$$z_1 z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(b_1a_2 + a_1b_2). \tag{3}$$

Agar kompleks sonlar trigonometrik ko'rinishdaberilgan bo'lsa:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2), \tag{4}$$

u holda

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_1r_2[\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \\ &+ i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + i^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2] = \\ &= r_1r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \\ &+ \cos\varphi_1\sin\varphi_2)] = r_1r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \end{aligned}$$

Demak,

$$z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)], \tag{3'}$$

ya'ni kompleks sonlarning ko'paytmasi shunday kompleks son ekanki, uning moduli ko'paytuvchi sonlar modullarining ko'paytmasiga, argumenti esa ko'paytuvchilarning argumentlari yig'indisiga teng ekan.

(3) tenglikdan $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$ yoki $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = |\bar{z}|^2$ kelib chiqadi.

4. Kompleks sonlarni bo'lish. $z_1 = a_1 + ib_1$ va $z_2 = a_2 + ib_2$ sonlarning bo'linmasi, deb shunday z songa aytamizki, $z_1 = z_2 z$ bo'ladi. Agar

$$\frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = x + iy$$

bo'lsa, u holda

$$a_1 + ib_1 = (a_2 + ib_2)(x + iy) = (a_2x - b_2y) + i(a_2y + b_2x).$$

Bu tenglikdan x va y larni topish uchun

$$a_1 = a_2x - b_2y, \quad b_1 = b_2x + a_2y$$

tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Sistemani yechsak,

$$x = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \quad y = \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

bo'ladi. Demak,

$$z=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+i\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2} \qquad (5)$$

ekan. Shu natijagaquyidagi usul bilan kelsa ham bo'ladi:

$$\frac{a_1+ib_1}{a_2+ib_2}=\frac{(a_1+ib_1)(a_2-ib_2)}{(a_2+ib_2)(a_2-ib_2)}=\frac{(a_1a_2+b_1b_2)+i(a_2b_1-a_1b_2)}{a_2^2+b_2^2}=$$

$$=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+i\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}.$$

Agar kompleks sonlar(4)trigonometrik ko'rinishda berilgan bo'lsa, u holda

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=$$

$$+\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}= \qquad (6)$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\cdot[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)]$$

Demak, kompleks sonlar nisbatining moduli modullar nisbatiga, argumenti esa bo'linuvchining argumentidan bo'luvchining argumentini ayirganigateng ekan.

Yuqorida kompleks sonlar uchun kiritilgan amallarni haqiqiy sonlarga (ularni kompleks sonlarning xususiy holi, deb qarab) qo'llasak, u holda bu amallarni arifmetikadan bizga ma'lum bo'lgan amallar bilan bir xil ekanligigaishonch hosil qilamiz.

Agar (1),(2),(3) va(5) ifodalardakompleks sonni ungaqo'shmabo'lgan songa almashtirsak, amallar natijalari avvalgi natijalarga qo'shma bo'ladi. Bundan xususan quyidagi teoremakelib chiqadi:

Teorema. *Agar haqiqiy koeffitsientli*

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

ko'phadga x *o'zgaruvchi o'rniga avval* $a+ib$ *ni, keyin* $a-ib$ *ni qo'ysak, u holda olingan natijalar ham qo'shma bo'ladi.*

3-§. Kompleks sonlarning darajalari va ildizlari

1. Darajaga ko'tarish. Avvalgi paragrafdagi (3') formulada $z_1=z_2$ desak,

$$z^2=[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^2=r^2(\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi)$$

bo'ladi. Agar (3') formulani ketma-ket n marotaba qo'llasak:

$$[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi) \qquad (1)$$

kelib chiqadi. Bu formula Muavr formulasi, deb ataladi.

Demak, kompleks sonni musbat butun darajaga ko'tarish uchun modulini shu darajaga ko'tarib, argumentini daraja ko'rsatkichiga ko'paytirish kerak ekan.

1-*misol.* $(1+i)^{10}$ ni hisoblang.

Yechish. Avval trigonometrik ko'rinishga keltirib olamiz. Bu yerda, $r=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$, $\varphi=\mathrm{arctg}1=\frac{\pi}{4}$. U holda

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

bo'ladi. Demak,

$$(1+i)^{10}=2^5\left(\cos\left(10\cdot\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(10\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right)=$$

$$=32\left(\cos\frac{5\pi}{2}+i\sin\frac{5\pi}{2}\right)=32\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=32i.$$

2. Ildiz chiqarish. Kompleks sonning n — darajali ildizi deb, n — darajasi ildiz ostidagi songateng bo'lgan songaaytamiz, ya'ni

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\rho(\cos\psi+i\sin\psi)$$

deymiz, agar

$$\rho^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

bo'lsa, oxirgi tenglikdan

$$\rho^n=r,\quad n\psi=\varphi+2k\pi$$

kelib chiqadi. Bundan

$$\rho=\sqrt[n]{r},\quad \psi=\frac{\varphi+2k\pi}{n}$$

ga ega bo'lamiz, bu yerda, k — ixtiyoriy butun son, $\sqrt[n]{r}$ — musbat r sonning arifmetik ildizi. Demak,

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right). \qquad (2)$$

k ga ketma-ket $0,1,2,\ldots,n-1$, qiymatlar berib, ildizning har xil n ta qiymatini topamiz. k ning boshqa barcha qiymatlarida bu ildiz qiymatlari takrorlanadi.

Noldan farqli haqiqiy A sonning n-ildizi n ta qiymatga ega, chunki bu sonni kompleks sonning xususiy holi, deb qarab, quyidagi trigonometrik ko'rinishdayozish mumkin:

$$\text{agar } A>0 \text{ bo'lsa, } A=|A|(\cos 0+i\sin 0); \qquad (3)$$

$$\text{agar } A<0 \text{ bo'lsa, } A=|A|(\cos\pi+i\sin\pi). \qquad (4)$$

2-*misol.* Bir raqamining barchakubik ildizlarini toping.

Yechish. Birni trigonometrik ko'rinishda yozib olamiz:

$$1=\cos 0+i\sin 0.$$

Bunga(2) formulani qo'llasak:

$$\sqrt[3]{1}=\cos\frac{0+2k\pi}{3}+i\sin\frac{0+2k\pi}{3}.$$

k ga ketma-ket $0,1,2$ qiymatlar berib, ildizning quyidagi uchta qiymatini topamiz:

$$x_1=\cos 0+i\sin 0=1, x_2=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3},$$

$$x_3=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$$

yoki

$$x_1=1,\ x_2=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\ x_3=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3. Ikkihadli tenglamalarni yechish. Quyidagi

$$x^n=A$$

ko'rinishdagi tenglamalarni ikkihadli tenglama deyishadi.

Shu tenglamani yechaylik. Buning uchun avval A ni trigonometrik ko'rinishga keltirib olamiz. Agar A haqiqiy musbat son bo'lsa, (3) ga asosan

$$x=\sqrt[n]{A}\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$

$$(k=0,1,2,\ldots,n-1.)$$

va agar A haqiqiy manfiy son bo'lsa, (4) ga asosan

$$x=\sqrt[n]{|A|}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{n}\right)$$

$$(k=0,1,2,\ldots,n-1.)$$

Agar A kompleks son bo'lsa, x ning barcha qiymatlari (2) formula yordamida topiladi.

3-*misol.* $x^4=1$ tenglamani yeching.

Yechish Avvalgi misoldagidek ish tutsak,

$$x=\sqrt[4]{\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi}=\cos\frac{2k\pi}{4}+i\sin\frac{2k\pi}{4}$$

bo'ladi. k ga ketma-ket 0,1,2 va 3 qiymatlarni bersak:

$$x_1=\cos 0+i\sin 0=1,$$

$$x_2=\cos\frac{2\pi}{4}+i\sin\frac{2\pi}{4}=i,$$

$$x_3=\cos\frac{4\pi}{4}+i\sin\frac{4\pi}{4}=-1,$$

$$x_4=\cos\frac{6\pi}{4}+i\sin\frac{6\pi}{4}=-i.$$

4-§. Kompleks ko'rsatkichli funktsiya va uning xossalari

Agar x va y haqiqiy o'zgaruvchilar bo'lsa, $z=x+iy$ kompleks o'zgaruvchi bo'ladi. Uning har bir qiymatiga kompleks o'zgaruvchining Oxy tekisligida biror nuqta mos keladi.

Ta'rif. Z o'zgaruvchining har bir qiymatiga boshqa w o'zgaruvchining biror qiymatini mos qo'yuvchi f qoidani Z kompleks o'zgaruvchining funktsiyasi, deb ataymiz. Bunday funktsiyani $w=f(z)$ yoki $w=w(z)$ ko'rinishda belgilaymiz.

Bu yerda kompleks o'zgaruvchining funktsiyalaridan faqat bittasini — $w=e^z=e^{x+iy}$ ko'rsatkichli funktsiyani ko'ramiz. Bu funktsiyani yana quyidagicha yozish mumkin:

$$w=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y). \qquad (1)$$

1-*misol.* $e^{2+i\frac{\pi}{3}}=e^2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=e^2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right);$

2-*misol.* $e^{0+i\frac{\pi}{2}}=e^0\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=i;$

3-*misol.* $e^{x+i0}=e^x(\cos 0+i\sin 0)=e^x.$

Ko'rsatkichli funktsiya quyidagi xossalarga ega:

1. $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}\cdot e^{z_2}$. Haqiqatan agar $z_1=x_1+iy_1$ va $z_2=x_2+iy_2$ bo'lsa, u holda

$$e^{z_1+z_2}=e^{(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)}=e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)}= \qquad (2)$$

$$=e^{x_1}e^{x_2}[\cos(y_1+y_2)+i\sin(y_1+y_2)]$$

$$e^{z_1}e^{z_2}=e^{x_1+iy_1}e^{x_2+iy_2}=e^{x_1}(\cos y_1+i\sin y_1)$$

$$e^{x_2}(\cos y_2+i\sin y_2)=e^{x_1}e^{x_2}[\cos(y_1+y_2)+i\sin(y_1+y_2)]. \qquad (3)$$

(2) va (3) tengliklarning o'ng tomonlari bir xil bo'lgani uchun chap tomonlari ham teng bo'ladi.

2. $e^{z_1-z_2}=\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$. Buni 1-xossaga o'xshash isbotlash mumkin.

Buni bajarishni o'quvchiga topshiramiz.

3. Agar m — butun son bo'lsa, $(e^z)^m=e^{mz}$ bo'ladi. Buning isboti 1- va 2-xossalardan kelib chiqadi.

4. $e^{z+2\pi i}=e^z$, ya'ni kompleks o'zgaruvchining ko'rsatkichli funktsiyasi davri $2\pi i$ bo'lgan davriy funktsiyadir.

Haqiqatan (1) formulaga va 1-xossaga ko'ra

$$e^{z+2\pi i}=e^ze^{2\pi i}=e^z(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)=e^z.$$

O'uyidagi

$$w=u(x)+i\vartheta(x) \qquad (4)$$

kompleks ifoda, haqiqiy funktsiyalari bu yerda, $u(x)$ va $\vartheta(x)$ haqiqiy x o'zgaruvchining haqiqiy o'zgaruvchining kompleks funktsiyasi, deyiladi.

Agar

$$\lim_{x\to x_0}u(x)=u(x_0),\quad \lim_{x\to x_0}\vartheta(x)=\vartheta(x_0)$$

limitlar mavjud bo'lsa, u holda $w_0=u(x_0)+i\vartheta(x_0)$ (4) funktsiyaning $x\to x_0$ bo'lgandagi limiti, deyiladi.

Agar $u'(x)$ va $\vartheta'(x)$ mavjud bo'lsa, u holda

$$w'_x=u'(x)+i\vartheta'(x) \qquad (5)$$

ifodani haqiqiy o'zgaruvchi kompleks funktsiyasining haqiqiy argument bo'yicha hosilasi, deb ataymiz.

Haqiqiy o'zgaruvchining quyidagi:

$$w = e^{\alpha x + i\beta x} = e^{(\alpha+i\beta)x},$$
ko'rsatkichli funktsiyasini ko'raylik, bu yerda, α, β o'zgarmas haqiqiy sonlar. Uni yana quyidagicha yozish mumkin:

$$w = e^{\alpha x}[\cos\beta x + i\sin\beta x]$$

yoki

$$w = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Bu funktsiyaning hosilasini topaylik. (5) ga asosan

$$w'_x = (e^{\alpha x}\cos\beta x)' + i(e^{\alpha x}\sin\beta x)' =$$
$$= e^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x) + ie^{\alpha x}(\alpha\sin\beta x + \beta\cos\beta x) =$$
$$= \alpha[e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)] + i\beta[e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)] =$$
$$= (\alpha + i\beta)[e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)] = (\alpha + i\beta)e^{(\alpha+i\beta)x}.$$

Demak, agar $k = \alpha + i\beta$ ixtiyoriy kompleks son bo'lsa, u holda

$$(e^{kx})' = ke^{kx}, \quad (e^{kx})'' = [(e^{kx})']' = k(e^{kx})' = k^2e^{kx}$$

va ixtiyoriy n uchun

$$(e^{kx})^{(n)} = k^n e^{kx}.$$

5-§. Eyler formulasi

Agar avvalgi paragrafdagi (1) tenglikda $x = 0$ desak, matematikada Eyler formulasi nomi bilan mashhur bo'lgan quyidagi:

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y \tag{1}$$

tenglikni hosil qilamiz. Agar bu yerda y ni $-y$ ga almashtirsak:

$$e^{-iy} = \cos y - i\sin y \qquad 2)$$

bo'ladi. (1) va (2) tengliklardan

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \tag{3}$$

munosabatlar kelib chiqadi.

Ixtiyoriy z kompleks son berilgan bo'lsa, uni quyidagi:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

trigonometrik ko'rinishda yozish mumkin. U holda Eyler formulasiga ko'ra

$$z = re^{i\varphi}$$

ifodaga ega bo'lamiz. Bu ifodani kompleks sonning ko'rsatkichli ko'rinishi, deymiz.

Misol. 1, i, -2, $-i$ sonlarni ko'rsatkichli ko'rinishga keltiring.

Yechish. $1 = \cos 2k\pi + i\sin 2k\pi = e^{2k\pi i}$,

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = e^{\frac{\pi}{2}i},$$
$$-2 = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = 2e^{\pi i},$$
$$-i = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right).$$

Ko'rsatkichli funktsiyaning xossalariga (4-§ ga qarang) tayangan holda, kompleks sonlar ustida bajariladigan amallarni ularning ko'rsatkichli ifodasi ustida osongina bajarish mumkin.

Haqiqatan, agar $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ va $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ bo'lsa, u holda

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)},$$

$$z^n = (re^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi},$$

$$\sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}} \quad (k = 0,1,2,\dots,n-1).$$

6-§. Ko'phadni ko'paytuvchilarga ajratish

n-darajali ko'phad, deb quyidagi:

$$P_n(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \tag{1}$$

funktsiyaga aytamiz, bu yerda, a_k — haqiqiy yoki kompleks koeffitsientlar, $a_n \neq 0$, z — umuman olganda, kompleks o'zgaruvchi z ning har bir qiymatiga mos keluvchi funktsiyaning $P_n(z)$ qiymati kompleks bo'lishi ham mumkin. z_0 ni (1) ning ildizi yoki noli deymiz, agar $P_n(z_0)=0$ bo'lsa.

Bu yerda ham haqiqiy o'zgaruvchining ko'phadi kabi (7-bob, 4.1-§ ga qarang) $P_n(z)$ ko'phadni har qanday kompleks z_0 son uchun $z- z_0$ ning darajalari bo'yicha yoyish mumkin ekanligini, ya'ni

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} b_k (z - z_0)^k \tag{2}$$

bo'lishini ko'rsatish mumkin. Bundan $P_n(z_0) = b_0$.

1-teorema *(Bezu). $P_n(z)$ ko'phad z_0 ildizga ega bo'lishi uchun, u $z- z_0$ ga qoldiqsiz bo'linishi, ya'ni uni*

$$P_n(z) = (z - z_0)P_{n-1}(z) \tag{3}$$

ko'rinishda ifodalash mumkinligi zarur va yetarlidir, bu yerda $P_{n-1}(z)$ biror $n-1$-darajali ko'phad.

Zarurligi. Agar z_0 (1) ning ildizi bo'lsa, u holda $b_0 = 0$ bo'lishi kerak, chunki $P_n(z_0) = b_0$. Agar $b_0 = 0$ bo'lsa, u holda(2) tenglik

$$P_n(z) = \sum_{k=1}^{n} b_k (z - z_0)^k = (z - z_0)\sum_{k=0}^{n-1} b_k (z - z_0)^k = (z - z_0)P_{n-1}(z)$$

ko'rinishgakeladi.

Yetarliligi. Agar (2) tenglik o'rinli bo'lsa, u holda (2) da z o'rniga z_0 ni qo'ysak, $P_n(z_0)=0$ bo'ladi. Teorema isbot bo'ldi.

Natija. Ixtiyoriy z_0 uchun $P_n(z)$ ko'phadni z- z_0 ga bo'linsa, qoldiqda $P_n(z_0)$ bo'ladi.

Misol. $P_3(z)=z^3-6z^2+11z-6$ ko'phad z=1 da nolga teng, shuning uchun bu ko'phad z-1 ga qoldiqsiz bo'linadi:

$$P_3(z)=z^3-6z^2+11z-6=(z-1)(z^2-5z+6).$$

Agar $f(z)=0$ tenglamada $f(z)=P_n(z)$ bo'lsa, bunday tenglamani algebraik tenglama, boshqa barcha hollarda noalgebraik tenglama, deymiz.

Demak, $P_n(z)=0$ algebraik tenglamaning ildizlari $P_n(z)$ ko'phadning ildizlari bilan bir xil ekan.

Noalgebraik tenglama bironta ham ildizga ega bo'lmasligi mumkin, masalan: $e^z=0$. Lekin algebraik tenglamalar uchun bunday emas.

2-teorema. *Har qanday algebraik tenglama kamida bitta haqiqiy yoki kompleks ildizga ega.*

Bu teorema algebraning asosiy teoremasi, deb ataladi. Biz uni isbotsiz keltiramiz.

Agar z_0 $P_n(z)$ ko'phadning ildizi bo'lsa, u holda bu ko'phad (3) ko'rinishda ifodalanar edi. Agar $P_{n-1}(z_0)\neq 0$ bo'lsa, u holda Bezu teoremasiga ko'ra $P_{n-1}(z)$ ko'phad $z - z_0$ ga va demak, $P_n(z)$ ko'phad $(z - z_0)^2$ ga bo'linmaydi. Bu holda z_0 $P_n(z)$ ko'phadning oddiy ildizi (noli) deyiladi. Agar $P_{n-1}(z_0)=0$ bo'lsa, u holda, Bezu teoremasidan $P_{n-1}(z)$ z- z_0 ga qoldiqsiz bo'linishi va shu sababli $P_n(z)=(z-z_0)^2P_{n-2}(z)$ bo'lishi kelib chiqadi. Bu yerda, $P_{n-2}(z)$ qandaydir n-2-darajali ko'phad. Agar $P_{n-2}(z_0)\neq 0$ bo'lsa, z_0 $P_n(z)$ ko'phadning 2 karrali ildizi (noli), deyiladi. Va nihoyat, agar biror natural $s\leq n$ uchun

$$P_n(z)=(z-z_0)^s P_{n-s}(z),\quad P_{n-s}(z_0)\neq 0$$

bo'lsa, bu yerda, $P_{n-s}(z_0)$ biror n-s-darajali ko'phad, z_0 $P_n(z)$ ko'phadning s karrali ildizi (noli), deyiladi.

3-teorema. *Har qanday n-darajali algebraik tenglama, karraligini hisobga olgan holda, n ta kompleks ildizga ega, ya'ni* $P_n(z)$ *ko'phad quyidagi ko'rinishda ko'paytuvchilarga ajraladi:*

$$P_n(z)=a_n(z-z_1)^{k_1}(z-z_2)^{k_2}\ldots(z-z_m)^{k_m}, \tag{4}$$
$$k_1+k_2+\ldots+k_m=n,$$

bu yerda, $z_1, z_2, \ldots, z_m$ lar $P_n(z)$ ko'phadning karralari mos ravishda $k_1, k_2, \ldots, k_m$ bo'lgan ildizlaridir.

Isboti. Asosiy teoremaga ko'ra $P_n(z)$ ko'phad kamida bitta ildizga ega. Bu ildizni z_1 bilan, uning karrasini k_1 bilan belgilaylik. U holda

$$P_n(z) = (z - z_1)^{k_1} P_{n-k_1}(z), \quad P_{n-k_1}(z_1) \neq 0 .$$

Agar $n - k_1 = 0$, ya'ni $k_1 = n$ bo'lsa, u holda $P_{n-k_1}(z) = a_n$ bo'ladi, bundan $P_n(z) = a_n (z - z_1)^n$ kelib chiqadi, shu bilan teorema isbot bo'ladi.

Agar $k_1 < n$ bo'lsa, u holda $P_{n-k_1}(z)$ $(z - z_1)^{k_1}$ ga bo'linmaydigan $n - k_1$-darajali ko'phad bo'ladi. Asosiy teoremaga ko'ra u ham kamida bitta z_2 ildizga ega, uning karrasi k_2 bo'lsin. Natijada quyidagi munosabatni olamiz:

$$P_n(z) = (z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2} P_{n-k_1-k_2}(z), \quad P_{n-k_1-k_2}(z_j) \neq 0, j = 1,2 .$$

Agar $n - k_1 - k_2 = 0$ bo'lsa, u holda $P_{n-k_1-k_2}(z) = a_n$ bo'ladi. Agar $n - k_1 - k_2 \neq 0$ bo'lsa, u holda bu jarayonni davom ettiramiz. Oxir-oqibat chekli qadamdan keyin bu jarayon to'xtaydi va (4) munosabatga kelamiz. Agar (4) ning o'ng tomoniga z o'rniga topilgan $z_1, z_2, \ldots, z_m$ lardan farqli qiymatlarni qo'ysak,u nolga aylanmaydi, ya'ni (4) munosabat yagonadir.

Natija. n-darajali ko'phad n tadan ortiq ildizga ega emas.

4-teorema. *Agar ikkita n-darajali $\varphi_1(z)$ va $\varphi_2(z)$ ko'phadlar qiymatlari argumentning n+1 ta har xil $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n$ qiymatlarida teng bo'lsa, u holda bu ko'phadlar aynan tengdir.*

Isboti. Quyidagi

$$f(z) = \varphi_1(z) - \varphi_2(z)$$

funktsiya darajasi n dan ortiq bo'lmagan ko'phaddir va u n ta $z_1, z_2, \ldots, z_n$ nuqtalarda nolga aylanadi. U holda uni

$$f(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n) \tag{5}$$

ko'rinishda ifodalash mumkin.

Lekin, teorema shartiga ko'ra,bu ko'phad z_0 nuqtada ham nolga teng. (5) ifodaning birorta ham chiziqli ko'paytuvchisi bu nuqtada nolga teng emas. Shuning uchun $a_n = 0$ bo'ladi, ya'ni $f(z) \equiv 0$. Demak, $\varphi_1(z) - \varphi_2(z) \equiv 0$ yoki $\varphi_1(z) \equiv \varphi_2(z)$.

5-teorema. *Agar*

$$P_n(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$$

ko'phad aynan nolga teng bo'lsa, u holda uning barcha koeffitsientlari nolga tengdir.

Isboti. Berilgan ko'phadni (5) ko'rinishdayozib olamiz:

$$P_n(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n) .$$

Agar teoremashartigako'rabu ko'phad aynan nolgateng bo'lsa, u holdau $z_1, z_2, \dots, z_n$ larga teng bo'lmagan biror z nuqtada ham nolga teng bo'ladi. Lekin $z - z_1$, $z - z_2, \dots$, $z - z_n$ larning birortasi nolga teng emas, shu sababli, faqat $a_n = 0$ bo'lishi mumkin. Aynan shunday $a_{n-1} = 0, a_{n-2} = 0, \dots, a_0 = 0$ ekanligi isbot qilinadi.

6-teorema. *Agar ikki ko'phad bir-biriga aynan teng bo'lsa, u holda ularning mos koeffitsientlari o'zaro teng bo'ladi.*

Teoremaning isboti berilgan ko'phadlarning ayirmasi aynan nolga tengligidan va 5-teoremadan kelib chiqadi.

7-teorema. *Agar z_1 $f(z)$ ko'phadning $k_1 > 1$ karrali ildizi bo'lsa, u holda z_1 $f'(z)$ hosilaning $k_1 - 1$ karrali ildizi bo'ladi.*

Isboti. Teorema shartidan

$$f(z) = (z - z_1)^{k_1} \varphi(z)$$

bo'lishi kelib chiqadi, bu yerda, $\varphi(z_1) \neq 0$. Bu tenglikni differentsiallasak:

$$f'(z) = k_1 (z - z_1)^{k_1 - 1} \varphi(z) + (z - z_1)^{k_1} \varphi'(z) =$$
$$= (z - z_1)^{k_1 - 1} [k_1 \varphi(z) + (z - z_1) \varphi'(z)]$$

bo'ladi. Agar bu yerda,

$$\psi(z) = k_1 \varphi(z) + (z - z_1) \varphi'(z)$$

desak, $\psi(z_1) = k_1 \varphi(z_1) + (z_1 - z_1)\varphi'(z_1) = k_1 \varphi(z_1) \neq 0$ ekanligidan z_1 $f'(z)$ hosilaning $k_1 - 1$ karrali ildizi ekanligi kelib chiqadi. Xususan, agar $k_1 = 1$ bo'lsa, z_1 $f'(z)$ hosilaning ildizi bo'lmaydi.

Bu teoremadan z_1 $f''(z)$ hosilaning $k_1 - 2$ karrali ildizi, $f'''(z)$ hosilaning $k_1 - 3$ karrali ildizi va h.k. $f^{(k_1 - 1)}(z)$ hosilaning oddiy ildizi va nihoyat, $f^{(k_1)}(z_1) \neq 0$ bo'lishi kelib chiqadi.

7-§. Kompleks yechimlar holida ko'phadni ko'paytuvchilarga ajratish

Faraz qilaylik, (1) ko'phad berilgan bo'lsin.

1-teorema. *Agar haqiqiy koeffitsientli*

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 \tag{1}$$

ko'phad $a + ib$ ildizga ega bo'lsa, u holda $a - ib$ ham uning ildizi bo'ladi.

Isboti. Agar $z_0 = a + ib$ son (1) ning ildizi bo'lsa, u holda 2-§ dagi teoremaga ko'ra:

$$P_n(\bar{z}_0) = \overline{P_n(z_0)} = \bar{0} = 0,$$

ya'ni $\bar{z}_0 = a - ib$ ham (1) ning ildizi ekan.

Demak, (1) ko'phad

$$(z - a - ib)(z - a + ib) = (z - a)^2 + b^2$$

ifodagabo'linar ekan, ya'ni

$$P_n(z) = [(z - a)^2 + b^2] P_{n-2}(z),$$

bu yerda, $P_{n-2}(z)$ n-2-darajali haqiqiy koeffitsientli ko'phad.

Yuqoridagi fikrlarni umumlashtirsak, quyidagi xulosagakelamiz:

2-teorema. *Haqiqiy koeffitsientli $P_n(z)$ ko'phad quyidagi ko'rinishda ko'paytuvchilarga ajraladi:*

$$P_n(z) = a_n(z-z_1)^{k_1}\dots(z-z_r)^{k_r}\left[(z-a_1)^2+b_1^2\right]^{l_1}\dots \left[(z-a_s)^2+b_s^2\right]^{l_s} = a_n\prod_{i=1}^{r}(z-z_i)^{k_i}\prod_{j=1}^{s}\left[(z-a_j)^2+b_j^2\right]^{l_j}, \qquad (2)$$

bu yerda, $b_j > 0, k_1+\dots+k_r+2(l_1+\dots+l_s)=n$, $z_1, z_2, \dots, z_r$ lar $P_n(z)$ ko'phadning karralari mos ravishda $k_1,\dots,k_r$ bo'lgan haqiqiy ildizlari, $a_1 \pm ib_1,\dots,a_s \pm ib_s$ lar esa $P_n(z)$ ko'phadning karralari mos ravishda $l_1,\dots,l_s$ bo'lgan o'zaro qo'shma kompleks ildizlaridir.

8-§. Interpolyatsiyalash. Lagranjning va nyutonning interpolyatsion formulalari

Faraz qilaylik, biror hodisani o'rganish jarayonida x va y miqdorlar o'rtasidafunktsional bog'lanish borligi va x ning $[a,b]$ oraliqqategishli x_0, $x_1,\dots$, x_n qiymatlariga y ning y_0, y_1, ..., y_n qiymatlari mos kelishi aniqlangan bo'lib, bu bog'lanishning analitik ifodasi noma'lum bo'lsin.

Masala shu noma'lum $y=\varphi(x)$ funktsiyani $[a,b]$ oraliqda aniq yoki taqriban ifodalovchi ko'phadni qurishdan, ya'ni

$$y_0=\varphi(x_0), y_1=\varphi(x_1),\dots,y_n=\varphi(x_n)$$

qiymatlari $[a,b]$ oraliqda berilgan $y=\varphi(x)$ funktsiyani taqriban ifodalovchi darajasi $\le n$ bo'lgan $P(x)$ ko'phadni qurishdan iborat.

Bunday ko'phad sifatida x_0, $x_1,\dots$, x_n nuqtalardagi qiymatlari y ning y_0, $y_1,\dots$, y_n qiymatlari bilan ustma-ust tushadigan ko'phadni olgan ma'qul. Bunday masalani funktsiyani interpolyatsiyalash, deyiladi.

Interpolyatsiyalavchi ko'phad sifatidaquyidagi:

$$P(x)=C_0(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)+C_1(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)+C_2(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_n)+\dots+C_n(x-x_0)\dots(x-x_{n-1}) \qquad (1)$$

ko'phadni olamiz. $C_0, C_1,\dots,C_n$ koeffitsientlarni

$$P(x_0)=y_0,\quad P(x_1)=y_1,\dots,\quad P(x_n)=y_n \qquad (2)$$

shartlarni qanoatlantiradigan qilib tanlash kerak.

(1) formulada $x=x_0$ deylik, u holda(2) gako'ra

$$y_0=C_0(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n),$$

bundan

$$C_0=\frac{y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)}.$$

Agar (1) da $x=x_1$ desak, u holda

$$y_1=C_1(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n),$$

bundan

$$C_1 = \frac{y_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\dots(x_1 - x_n)},$$

vah.k. (1) da $x = x_n$ deb

$$y_n = C_n(x_n - x_0)(x_n - x_1)\dots(x_n - x_{n-1}),$$

tenglikni, bundan esa

$$C_n = \frac{y_n}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)\dots(x_n - x_{n-1})}$$

hosil qilamiz.

Topilgan koeffitsientlarni (1) ga qo'ysak:

$$\begin{aligned} P(x) = {} & \frac{(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\dots(x_0 - x_n)} y_0 + \\ & + \frac{(x - x_0)(x - x_2)\dots(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\dots(x_1 - x_n)} y_1 + \\ & + \dots + \frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)\dots(x_n - x_{n-1})} y_n. \end{aligned} \qquad (3)$$

Bu formula Lagranjning interpolyatsion formulasi, deb ataladi.

Aytish lozimki, agar noma'lum $y = \varphi(x)$ funktsiya $[a, b]$ oraliqda $n+1$-tartibli hosilaga ega bo'lsa, u holda $y = \varphi(x)$ funktsiyani $P(x)$ ko'phadga almashtirilgandayo'l qo'yilgan xatolik, ya'ni $R(x) = \varphi(x) - P(x)$ miqdor

$$|R(x)| < |(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)| \frac{1}{(n+1)!} \max |\varphi^{(n+1)}(x)|$$

tengsizlikni qanoatlantiradi.

Misol. Tajriba natijasida $y = \varphi(x)$ funktsiyaning $\varphi(1) = 3, \varphi(2) = -5, \varphi(-4) = 4$ qiymatlari olingan bo'lsin. $y = \varphi(x)$ funktsiyani taqriban 2-darajali ko'phad bilan ifodalang.

Yechish. (3) formulaga ko'ra $n = 2$ bo'lgan hol uchun:

$$P(x) = \frac{(x-2)(x+4)}{(1-2)(1+4)} \cdot 3 + \frac{(x-1)(x+4)}{(2-1)(2+4)} \cdot (-5) + \frac{(x-1)(x-2)}{(-4-1)(-4-2)} \cdot 4$$

yoki

$$P(x) = -\frac{39}{30}x^2 - \frac{123}{30}x + \frac{252}{30}.$$

Bundan tashqari boshqa interpolyatsion formulalar ham mavjud, shulardan biri — Nyuton interpolyatsion formulasidir. Bu formulada yuqoridagi masaladan farqli o'laroq, $x_0, x_1, x_2, \dots x_n$ nuqtalar orasidagi masofabir xil, masalan, h bo'lsin, deb faraz qilinadi.

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0, \quad \Delta y_1 = y_2 - y_1, \quad \Delta y_2 = y_3 - y_2, \dots,$$

$$\Delta^2 y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0, \quad \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1, \dots,$$

$$\Delta^3 y_0 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0, \quad \dots,$$

....

$$\Delta^n y_0 = \Delta^{n-1} y_1 - \Delta^{n-1} y_0.$$

Bularni mos ravishda 1-,2-,..., n-tartibli ayirmalar, deb ataymiz.

x_0, x_1,..., x_n nuqtalardagi qiymatlari y_0, y_1,..., y_n bo'lgan n-darajali ko'phad quyidagicha bo'ladi:

$$P(x)=y_0+\Delta y_0\frac{x-x_0}{h}+\frac{\Delta^2 y_0}{2!}\frac{x-x_0}{h}\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)+\dots$$
$$\dots+\frac{\Delta^n y_0}{n!}\frac{x-x_0}{h}\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\dots\left[\frac{x-x_0}{h}-(n-1)\right] \tag{4}$$

Mana shu formula Nyutonning interpolyatsion formulasi, deb ataladi.

Aslida 6-§ ning 4-teoremasiga ko'ra x ning $n+1$ ta qiymatidagi $n+1$ ta qiymatlari teng bo'lgan darajasi n dan katta bo'lmagan ko'phadlar bir xil bo'ladi. Lekin bu interpolyatsion ko'phadlar bir xil bo'lsa ham yozilish tartibi bilan farq qiladi.

Interpolyatsion formulalar injenerlik izlanishlarda ko'p ishlatiladigan taqribiy hisoblarda keng qo'llaniladi. Biz hozir shulardan biri — taqribiy differentsiallashda Nyuton ko'phadini qanday qo'llanishini ko'ramiz.

Agar $y=\varphi(x)$ funktsiyaning x_0, x_1,..., x_n nuqta-lardagi qiymatlari y_0, y_1,..., y_n lar berilgan bo'lsa, (4) formulaga asosan:

$$\varphi(x)\approx P(x)=y_0+\Delta y_0\frac{x-x_0}{h}+\frac{\Delta^2 y_0}{2!}\frac{x-x_0}{h}\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)+\dots$$
$$\dots+\frac{\Delta^n y_0}{n!}\frac{x-x_0}{h}\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\dots\left[\frac{x-x_0}{h}-(n-1)\right]$$

taqribiy tenglikni yozish mumkin. Agar bu tenglikni differentsiallab, hosil bo'lgan munosabatda $x=x_0$ desak, hosilaning x_0 nuqtadagi taqribiy qiymatini hosil qilamiz:

$$\varphi'(x_0)\approx P'_n(x_0)=\frac{\Delta y_0}{h}-\frac{\Delta^2 y_0}{2h}+\frac{\Delta^3 y_0}{3h}-\frac{\Delta^4 y_0}{4h}+\dots \tag{5}$$

9-§. Chebishev nazariyasi

Interpolyatsiyalash usuli yordamida qurilgan ko'phad asl funktsiya bilan $n+1$ ta nuqtada ustma-ust tushsa ham qolgan nuqtalarda undan juda katta farq qilishi mumkin, bu esa bajarilayotgan hisoblarda katta xatolarga olib kelishi mumkin. Shuning uchun tabiiy savol tug'iladi: $[a,b]$ oraliqda uzluksiz $y=\varphi(x)$ funktsiyani taqriban ifodalovchi darajasi $\le n$ bo'lgan $P(x)$ ko'phadni oldindan berilgan ixtiyoriy aniqlik bilan qurish mumkinmi? Boshqacha qilib aytganda, $[a,b]$ oraliqning barcha nuqtalari uchun $\varphi(x)$ va $P(x)$ orasidagi farqning absolyut qiymati oldindan berilgan har qanday musbat ε sondan ham kichik bo'ladigan $P(x)$ ko'phadni qurish mumkinmi? Bu savolga quyidagi teorema javob beradi:

Veyershtrass teoremasi. Agar $\varphi(x)$ funktsiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz bo'lsa, u holda har qanday $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $P(x)$ ko'phad mavjudki, $[a,b]$ oraliqning barcha nuqtalari uchun

$$|\varphi(x) - P(x)| < \varepsilon$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Ana shunday ko'phadga Bernshteyn ko'phadi misol bo'la oladi: $\varphi(x)$ funktsiya$[0,1]$ oraliqda uzluksiz bo'lsin. O'uyidagi n-darajali ko'phadda

$$B_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \varphi\left(\frac{m}{n}\right) C_n^m x^m (1-x)^{n-m} ,$$

bu yerda, C_n^m — binomial koeffitsientlar, $\varphi\left(\frac{m}{n}\right)$ — berilgan funktsiyaning $x = \frac{m}{n}$ nuqtadagi qiymati, n ni shunday tanlash mumkinki, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun $[0,1]$ oraliqning barchanuqtalarida

$$|B_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi.

Eng yaxshi yaqinlashish nazariyasini P.L.Chebishev[1] yaratgan. Bu nazariyaning yaratilishiga uning mashinalarda keng qo'llaniladigan sharnirlar mexanizmi nazariyasi bo'yicha bajargan ishlari sabab bo'lgan. Bunday mexanizmlarni o'rganish jarayonidau berilgan darajali ko'phadlar orasidan berilgan oraliqdanoldan eng kam farq qiluvchi ko'phadni tanlash masalasigato'qnash keldi. U bunday ko'phadlarni qurdi va keyinchalik bu ko'phadlar Chebishev ko'phadlari, deb atala boshladi. Bu ko'phadlar matematika va texnikaning ko'p masalalarida keng qo'llanib kelinmoqda.

[1] P.L.Chebishev (1821-1894) — buyuk rus matematigi.

10-BOB.

ANIQMAS INTEGRAL

1-§. Boshlang'ich funktsiya va aniqmas integral

Fan va texnikaning ko'p masalalarida funktsiya hosilasini bilgan holda, o'zini tiklash zaruriyati uchraydi. Masalan, 7-bobning 1-§ ida harakatning berilgan $s = f(t)$ tenglamasini differentsiallab, nuqtaning $\vartheta = \frac{ds}{dt}$ tezligini va yana bir marotaba differentsiallab, nuqtaning tezlanishini topish mumkinligini ko'rgan edik. Aslida, teskari masalani yechishga to'g'ri keladi, ya'ni berilgan $a = a(t)$ funktsiya uchun shunday $\vartheta = \vartheta(t)$ funktsiyani tiklash kerakki, $a = a(t)$ bu funktsiya uchun hosila vazifasini o'tasin va funktsiyauchun shunday funktsiyani topish kerakki, uning hosilasi $\vartheta = \vartheta(t)$ bo'lsin. Biz bu bobni shu masalagabag'ishlaymiz.

1-ta'rif. *Agar* $[a,b]$ *oraliqning barcha nuqtalari uchun* $F'(x) = f(x)$ *munosabat o'rinli bo'lsa,* $F(x)$ $[a,b]$ *oraliqda* $y = f(x)$ *funktsiyaning boshlang'ich*[1] *funktsiyasi, deyiladi.*

1-*misol.* $f(x) = 2x$ funktsiya uchun ta'rifga ko'ra $F(x) = x^2$ boshlang'ich funktsiya bo'ladi, chunki $(x^2)' = 2x$.

2-*misol.* $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ funktsiyaga $F(x) = tgx$ boshlang'ich funktsiya bo'ladi, chunki $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Har bir funktsiyaning, agar mavjud bo'lsa, boshlang'ich funktsiyasi yagona emas (7-bob, 1-§ dagi teorema natijasiga qarang), ya'ni boshlang'ich funktsiyalar o'zgarmasga farq qiladi. Masalan, $x^2 + C$ har qanday C o'zgarmas son uchun $f(x) = 2x$ funktsiyaning boshlang'ich funktsiyasi bo'ladi, chunki $(x^2 + C)' = 2x$.

2-ta'rif. *Agar* $F(x)$ *funktsiya* $f(x)$ *ning boshlang'ichi bo'lsa,* $F(x) + C$ *ifoda* $f(x)$ *funktsiyaning aniqmas integrali deb atalib,* $\int f(x)dx$ *ko'rinishda belgilanadi.*

Demak, ta'rifga ko'ra, agar $F'(x) = f(x)$ bo'lsa,

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

bo'lar ekan. Bu yerda, $f(x)$ integral ostidagi funktsiya, $f(x)dx$ integral ostidagi ifoda va $\int$ — integral belgisi, deb ataladi.

---

[1] " boshlang'ich" atamasini birinchi marotaba Lagranj kiritgan.

$\int$ belgi birinchi marotaba Leybnitsning 1686 yilda chop ettirgan «Chuqur geometriya va bo'linmaslar tahlili hamda cheksizlik» memuarida uchraydi. Leybnits va Nyutonning o'sha davrdagi xatlaridan ma'lum bo'lishicha, integral tushunchasi Nyutonga ham ma'lum bo'lgan. Leybnits o'z memuarida $\int$ belgi ostidagi dx ifodaning zarurligi haqida ham gapirib o'tgan. Lekin «integral» atamasini birinchi marotaba aka-uka Bernullilar ishlatgan.

Geometrik nuqtai nazardan aniqmas integral egri chiziqni Oy o'q bo'ylab parallel surish natijasida hosil bo'ladigan egri chiziqlar oilasini tasvirlaydi.

Har qanday funktsiya uchun boshlang'ich funktsiya mavjudmi, degan tabiiy savol tug'iladi. Boshlang'ich funktsiyalar faqat berilgan oraliqda uzluksiz bo'lgan funktsiyalar uchungina mavjuddir. Demak, aniqmas integral uzluksiz funktsiyalar uchun mavjud ekan. Buni biz keyingi bobda isbotlaymiz.

Berilgan $f(x)$ funktsiyaning boshlang'ich funktsiyasini topish jarayoni $f(x)$ funktsiyani integrallash, deb ataladi.

Aniqmas integral ta'rifidan bevosita quyidagilar kelib chiqadi:

1. Aniqmas integralning hosilasi integral ostidagi funktsiyaga teng, ya'ni agar $F'(x) = f(x)$ bo'lsa, u holda

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x). \qquad (1)$$

2. Aniqmas integralning differentsiali integral ostidagi ifodaga teng, ya'ni

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx. \qquad (2)$$

3. Biror funktsiya differentsialining aniqmas integrali shu funktsiya bilan o'zgarmasning yig'indisiga teng:

$$\int dF(x) = F(x) + C. \qquad (3)$$

Hosilalar jadvali va aniqmas integral ta'rifidan foydalanib, integrallar jadvalini tuzib olish mumkin:

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ (C=const, $n \neq -1$)

2. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ (a>0)

4. $\int e^x dx = e^x + C$

5. $\int \sin x dx = -\cos x$

6. $\int \cos x dx = \sin x + C$

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}x + C$

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}x + C$

9. $\int \mathrm{tg}x dx = -\ln|\cos x| + C$

10. $\int \mathrm{ctg}x dx = \ln|\sin x| + C$

11. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C.\quad (a \neq 0)$

12. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \quad (a \neq 0)$

13. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C \quad (a \neq 0)$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C \quad (a \neq 0)$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0)$

Aniqmas integral quyidagi xossalarga ega:

1⁰. Agar A — o'zgarmas son, C — biror o'zgarmas bo'lsa, u holda

$$\int Af(x)dx = A\int f(x)dx + C$$

bo'ladi, ya'ni o'zgarmas ko'paytuvchini integral belgisi tashqarisiga chiqarish mumkin.

2⁰. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx + C$.

Haqiqatan, agar tenglikni o'ng tomonini differentsiallasak:

$$\left(\int f(x)dx \pm \int g(x)dx\right)' = \left(\int f(x)dx\right)' \pm \left(\int g(x)dx\right)' = f(x) \pm g(x).$$

Demak, tenglikni chap va o'ng tomonlari $f(x) \pm g(x)$ ifodaning boshlang'ich funktsiyalari ekan, shu sababli ular o'zgarmasga farq qiladi.

3⁰. Agar $F(x)$ funktsiya $f(x)$ ning boshlang'ichi bo'lsa, u holda

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

bo'ladi.

Bu xossa ham yuqoridagidek, differentsiallab isbot qilinadi.

Misol. $\int \frac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}}dx$ integralni hisoblang.

Yechish.

$$\int\frac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}}dx=\int\frac{x^4-2x^2+x^2-2}{x^{2/3}}dx=\int\frac{x^4-x^2-2}{x^{2/3}}dx=$$

$$=\int\left(\frac{x^4}{x^{2/3}}-\frac{x^2}{x^{2/3}}-\frac{2}{x^{2/3}}\right)dx=\int x^{10/3}dx-\int x^{4/3}dx-2\int x^{-2/3}dx=$$

$$=\frac{x^{10/3+1}}{10/3+1}-\frac{x^{4/3+1}}{4/3+1}-2\frac{x^{-2/3+1}}{-2/3+1}+C=\frac{3}{13}x^{13/3}-\frac{3}{7}x^{7/3}-6x^{1/3}+C$$

Endi olingan javobning to'g'riligini tekshirish uchun undan hosila olib, integral ostidagi funktsiya bilan taqqoslaymiz:

$$\left(\frac{3}{13}x^{13/3}-\frac{3}{7}x^{7/3}-6x^{1/3}+C\right)'=x^{10/3}-x^{4/3}-2x^{-2/3}=$$

$$=\frac{x^4-x^2-2}{x^{2/3}}=\frac{x^4-2x^2+x^2-2}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{x^2(x^2-2)+(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}}=$$

$$=\frac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

Demak topilgan natija to'g'ri ekan.

2-§. Integrallashning o'rniga qo'yish usuli

Faraz qilaylik, bizdan

$$\int f(x)dx$$

integralni hisoblash talab qilingan bo'lsin.

Integral ostidagi ifodada

$$x=\varphi(t), \tag{1}$$

deb o'zgaruvchini almashtiramiz, bu yerda, $\varphi(t)$— teskari funktsiyaga ega, uzluksiz differentsiallanuvchi uzluksiz funktsiya. U holda, quyidagi tenglik o'rinli:

$$\int f(x)dx=\int f[\varphi(t)]d\varphi(t)=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt. \tag{2}$$

Bu tenglikni isbotlash uchun (2) ni differentsiallaymiz. Chap tomonining hosilasi

$$\left(\int f(x)dx\right)'_x=f(x).$$

o'ng tomonini murakkab funktsiyadan hosila olish qoidasiga ko'ra differentsiallaymiz:

$$\left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\right)'_x=\left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\right)'_t\cdot\frac{dt}{dx}=$$

$$=f[\varphi(t)]\varphi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)}=f[\varphi(t)]=f(x).$$

Oxirgi tenglikda (1) ning hosilasi $x'(t)=\varphi'(t)$ va teskari funktsiyaning hosilasini hisoblash formulasiga ko'ra $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\varphi'(t)}$ bo'lishidan foydalanildi.

Demak, (2) ning chap va o'ng tomonlaridan alohida-alohida olingan hosilalari o'zaro teng ekan, ya'ni (2) tenglikning ikkala tomonida turgan ifodalar $f(x)$ ning boshlang'ichi ekan.

Integrallashning bu usulini qo'llashdan maqsad, berilgan integralni soddaroq, yengil hisoblanadigan integralga olib kelishdan iborat. Ayrim hollarda, bu maqsadga (1) almashtirish emas, balki $t=\psi(x)$ ko'rinishdagi almashtirish tezroq olib keladi. Masalan,

$$\int\frac{\psi'(x)dx}{\psi(x)}$$

ko'rinishdagi integralda $t=\psi(x)$ desak, u holda

$$dt=\psi'(x)dx,$$

$$\int\frac{\psi'(x)dx}{\psi(x)}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln|\psi(x)|+C.$$

bo'ladi.

1-*misol.* $\int\sqrt{1-x^2}dx$. $x=\sin t$ almashtirshni bajaramiz. U holda $dx=\cos tdt$ va demak,

$$\int\sqrt{1-x^2}dx=\int\sqrt{1-\sin^2 t}\cos tdt=\int\cos t\cdot\cos tdt=$$

$$\int\cos^2 tdt=\int\frac{1}{2}(1+\cos 2t)dt=\frac{1}{2}\left[\int dt+\int\cos 2tdt\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C=\frac{1}{2}(t+\sin t\cos t)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x\right)+C,$$

bu yerda, $t=\arcsin x, \cos t=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{1-x^2}$ ekanligidan va integralning xossalaridan foydalanildi.

2-*misol.* $\int\frac{xdx}{1+x^2}$. Agar $t=1+x^2$ desak, $dt=2xdx$ va

$$\int\frac{xdx}{1+x^2}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln t+C=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$$

bo'ladi.

3-*misol.* $\int e^{x^2}xdx=\frac{1}{2}\int e^{x^2}2xdx=(x^2=u, 2xdx=du)=$

$$=\frac{1}{2}\int e^u du=\frac{1}{2}e^u+C=\frac{1}{2}e^{x^2}+C.$$

4-*misol.* $\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{1+\left(x/a\right)^2}=(x=at, dx=adt)=$

$$=\frac{1}{a^2}\int\frac{adt}{1+t^2}=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{a}arctgt+C=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C.$$

5-*misol.* $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{\sqrt{1-\left(x/a\right)^2}}=(x=at, dx=adt)=$

$$=\frac{1}{a}\int\frac{adt}{\sqrt{1-t^2}}=\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\arcsin t+C=\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

3-§. Kvadrat uchhad qatnashgan integrallar

Bunday integrallar asosan quyidagi ko'rinishdabo'ladi:

$$1. J_1=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}; 2. J_2=\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx;$$

$$3. J_3=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}; 4. J_4=\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx;$$

$$5. J_5=\int\sqrt{ax^2+bx+c}dx.$$

Bunday integrallarni hisoblash uchun integral ostida qatnashgan uchhaddan to'liq kvadrat ajratilib, ikkihad kvadratining algebraik yig'indisiga keltiriladi. Natijada hosil bo'lgan ifodani integrallar jadvali yordamida integrallash mumkin bo'ladi.

Kvadrat uchhaddan to'liq kvadrat quyidagicha ajratiladi:

$$ax^2+bx+c=a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})=$$

$$a[(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}]=a[(x+\frac{b}{2a})^2\pm k^2]$$

bu yerda, $\pm k^2=\frac{4ac-b^2}{4a^2}$. Bunda plyus yoki minus ishora ax^2+bx+s kvadrat uchhadning ildizlari haqiqiy yoki kompleks bo'lishiga qarab aniqlanadi, ya'ni b^2-4ac ni ishorasiga qarab aniqlanadi.

To'liq kvadrat ajratilgandan keyin yuqorida keltirilgan integrallar quyidagi ko'rinishni oladi:

$$1. J_1=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{(x+\frac{b}{2a})^2\pm k^2}$$

Bunda $x+b/2a=t$, $dx=dt$ desak,

$$J_1=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2\pm k^2}$$

bu esa jadvaldagi integraldir.

1-*misol.* $\int\frac{dx}{2x^2+8x+20}$ hisoblansin.

Yechish. $\int\frac{dx}{2x^2+8x+20}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+4x+10}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+4x+4+10-4}=$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+2)^2+6}=J; x+2,=t dx=dt$$

$$J=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+6}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{6}}arctg\frac{t}{\sqrt{6}}+C;$$

t o'rniga x orqali ifodasini qo'yib, oxirgi natijani topamiz:

$$J=\frac{1}{2\sqrt{6}}arctg\frac{x+2}{\sqrt{6}}+C$$

$$2. J_2=\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx=\int\frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+(B-\frac{Ab}{2a})}{ax^2+bx+c}dx=$$

$$=\frac{A}{2a}\int\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx+(B-\frac{Ab}{2a})\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

$$I=\int\frac{(2ax+b)dx}{ax^2+bx+c}=\begin{bmatrix}ax^2+bx+c=t\\(2ax+b)dx=dt\end{bmatrix}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=$$

$$\ln|ax^2+bx+c|+C$$

$$J_2=\frac{A}{2a}\ln|ax^2+bx+c|+(B-\frac{Ab}{2a})J_1.$$

2-*misol.* $J=\int\frac{x+3}{x^2-2x-5}dx$ hisoblansin.

$$J=\int\frac{x+3}{x^2-2x-5}dx=\int\frac{1/2(2x-2)+(3+2\cdot 1/2)}{x^2-2x-5}dx=$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{(2x-2)dx}{x^2-2x-5}+4\int\frac{dx}{x^2-2x-5}=\frac{1}{2}\ln|x^2-2x-5|+$$

$$4\int\frac{dx}{(x-1)^2-6}=\frac{1}{2}\ln|x^2-2x-5|+2\frac{1}{\sqrt{6}}\ln|\frac{\sqrt{6}-(x-1)}{\sqrt{6}+(x-1)}+C$$

$3. J_3=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$; Bu integral yuqorida ko'rilgan almashtirishlar natijasida quyidagi ko'rinishga keltiriladi:

$a>0$ bo'lganda $J_3=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2\pm k^2}}$, $a<0$ bo'lganda $J_3=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\int\frac{dt}{\sqrt{k^2-t^2}}$

Bular esa jadvaldagi integrallardir.

3-*misol.* $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x-3}}$ hisoblansin.

Yechish. $x^2-4x-3=(x-2)^2-7$ $dx=d(x-2)$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x-3}}=\int\frac{d(x-2)}{\sqrt{(x-2)^2-7}}=\ln|x-2+\sqrt{(x-2)^2-7}+C$$

jadvaldagi integralga asosan hisoblandi.

$$4. J_4=\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx;$$

$$J_4=\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=\int\frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+(b-\frac{Ab}{2a})}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=$$

$$=\frac{A}{2a}\int\frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx+(B-\frac{Ab}{2a})\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

$$I=\int\frac{(2ax+b)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\begin{bmatrix}ax^2+bx+c=t\\(2ax+b)dx=dt\end{bmatrix}=$$

$$=\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=2\sqrt{t}+C=2\sqrt{ax^2+bx+c}+C,$$

$$J_4=\frac{A}{a}\sqrt{ax^2+bx+c}+(B-\frac{Ab}{2a})J_3$$

4-*misol.* $\int\frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx$ hisoblansin.

Yechish.

$$\int\frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}=dx\int\frac{5/2(2x+4)+(3-10)}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx=$$

$$=\frac{5}{2}\int\frac{(2x+4)dx}{\sqrt{x^2+4x+10}}-7\int\frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+6}}=5\sqrt{x^2+4x+10}-$$

$$-7\ln|x+2+\sqrt{(x+2)^2+6}|+C=5\sqrt{x^2+4x+10}-7\ln|x+$$

$$2+\sqrt{x^2+4x+10}|+C.$$

5. $J_5=\int\sqrt{ax^2+bx+c}dx$. Bunda ham integral ostidagi kvadrat uchhaddan to'la kvadrat ajratamiz:

$$J_5=\int\sqrt{ax^2+bx+c}dx=\int\sqrt{a[(x+\frac{b}{2a})^2\pm k^2]}dx=$$

$$=\left[\frac{4ac-b^2}{4a^2}=\pm k^2;x+\frac{b}{2a}=t;dx=dt\right]=\int\sqrt{a(t^2\pm k^2)}dt.$$

Bu integral esa quyidagi formula yordamida hisoblanadi:

(A). $\int\sqrt{t^2+b}dt=\frac{t}{2}\sqrt{t^2+b}+\frac{b}{2}\ln|t+\sqrt{t^2+b}|+C,$

(B). $\int\sqrt{a^2-t^2}dt=\frac{t}{2}\sqrt{a^2-t^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{t}{a}+C.$

5-*misol.* $\int\sqrt{x^2+2x+6}dx$ hisoblansin.

Buni hisoblash uchun to'la kvadrat ajratib, $t=x+1$, $b=5$ belgilashdan so'ng (A) formula qo'llaniladi:

$$x^2+2x+6=(x+1)^2+5,$$

$$\int\sqrt{x^2+2x+6}dx=\int\sqrt{(x+1)^2+5}d(x+1)=$$

$$=\frac{x+1}{2}\sqrt{(x+1)^2+5}+\frac{5}{2}\ln\left|x+1+\sqrt{(x+1)^2+5}\right|+C.$$

4-§. Bo'laklab integrallash usuli

Bizga ikkita differentsiallanuvchi $u(x)$ va $\vartheta(x)$ funktsiyalar berilgan bo'lsin. Bu funktsiyalar ko'paytmasi $u\vartheta$ ning differentsialini topaylik. Bu differentsial quyidagicha aniqlanadi:

$$d(u\vartheta)=ud\vartheta+\vartheta du.$$

Buning ikki tomonini hadma-had integrallab, quyidagini topamiz:

$$u\vartheta = \int u d\vartheta + \int \vartheta du$$

yoki

$$\int u d\vartheta = u\vartheta - \int \vartheta du\,. \qquad (1)$$

Oxirgi topilgan ifodabo'laklab integrallash formulasi, deyiladi.

Bu formulani qo'llab integral hisoblaganda $\int u d\vartheta$ ko'rinishdagi integral, ancha sodda bo'lgan $\int \vartheta du$ ko'rinishdagi integralga keltiriladi.

Agar integral ostida $u=lnx$ funktsiya yoki ikkita funktsiyaning ko'paytmasi hamda teskari trigonometrik funktsiyalar qatnashgan bo'lsa, bunda bo'laklab integrallash formulasi qo'llaniladi. Bu usul bilan integrallagandayangi o'zgaruvchigao'tishning xojati yo'q.

Umuman, aniqmas integralni hisoblaganda topilgan natija yoniga o'zgarmas ($C=const$) ni qo'shib qo'yish shart. Aks holda, integralning bitta qiymati topilib, qolganlari tashlab yuborilgan bo'ladi. Bu esaintegrallashda xatolikkayo'l qo'yilgan, deb hisoblanadi.

1-*misol.* $\int x \operatorname{arctg} x dx$ ni hisoblang.

Yechish. $u = arctgx$ $d\vartheta = xdx$, $du = \frac{dx}{1+x^2}$, $\vartheta = \int xdx = x^2/2$

(bunda $C=0$ deb olindi). (1) formulani qo'llaymiz.

$$\int x \operatorname{arctg} x dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \int \frac{x^2}{2(1+x^2)} dx \qquad (*)$$

$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$ ni alohida hisoblaymiz

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} dx = \int (1 - \frac{1}{1+x^2}) dx = x - \operatorname{arctg} x + C$$

buni (*) ga qo'yamiz.

$$\int x \operatorname{arctg} x dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C = -\frac{1}{2} + \frac{x^2+1}{2} \operatorname{arctg} x + C$$

2-*misol.* $\int x \ln x dx$ ni hisoblang.

Yechish. Agar $u = \ln x$, $xdx = d\vartheta$ desak, $du = \frac{dx}{x}$, $\vartheta = \int xdx = \frac{x^2}{2}$ bo'ladi. U holda

$$\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C\,.$$

3-*misol.* $J_1 = \int e^{ax} \sin bx dx$ va $J_2 = \int e^{ax} \cos bx dx$ integrallarni hisoblang ($a, b \neq 0$-o'zgarmas sonlar).

Yechish. J_1 integralda $u=e^{ax}, d\vartheta=\sin bx dx$ desak, $du=ae^{ax}dx$, $\vartheta=-\frac{\cos bx}{b}$ bo'ladi. Bularni integralga qo'ysak:

$$J_1=-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx+\frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx dx=-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx+\frac{a}{b}J_2. \qquad (2)$$

Endi J_2 integralda $u=e^{ax}, d\vartheta=\cos bx dx$ desak, u holda

$du=ae^{ax}dx$, $\vartheta=\frac{\sin bx}{b}$ va (1) ga ko'ra

$$J_2=\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx-\frac{a}{b}J_1. \qquad (3)$$

(3) ni (2) ga olib borib qo'yamiz:

$$J_1=-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx+\frac{a}{b}\left(\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx-\frac{a}{b}J_1\right)$$

yoki

$$J_1+\frac{a^2}{b^2}J_1=-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx+\frac{a}{b^2}e^{ax}\sin bx.$$

Bundan va(3) dan

$$J_1=\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}+C, \quad J_2=\frac{b\sin bx+a\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}+C.$$

4-*misol.* Faraz qilaylik, $k>1$-natural son va $a>0$ bo'lsin. U holda

$$I_{k-1}=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{k-1}}=\int\frac{x^2+a^2}{(x^2+a^2)^k}dx=a^2\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^k}+$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{x\cdot 2x}{(x^2+a^2)^k}dx==\left(u=x, d\vartheta=\frac{2xdx}{(x^2+a^2)^k}\right)=$$

$$a^2\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^k}+\frac{1}{2}\left[\frac{x}{(1-k)(x^2+a^2)^{k-1}}-\frac{1}{k-1}\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{k-1}}\right],$$

bundan

$$I_k=\frac{x}{2a^2(k-1)(x^2+a^2)^{k-1}}-\frac{2k-3}{2a^2(k-1)}I_{k-1}.$$

Natijada berilgan integralni hisoblash uchun rekurrent formula hosil qildik. Agar bu jarayonni $k-1$ marotabaqo'llasak, bizgama'lum bo'lgan

$$I_1=\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C$$

integralgakelamiz.

5-*misol.* Agar $P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ - n-darajali algebraik ko'phad bo'lsa, u holda $\int P_n(x)e^{bx}dx$, $\int P_n(x)\cos bx dx$, $\int P_n(x)\sin bx dx$ ko'rinishdagi integrallar bo'laklab integrallash usulini n marotaba qo'llab hisoblanadi.

Bunda har gal u funktsiya sifatida ko'phad olinadi, ya'ni avval $u = P_n(x)$, keyin $u = P_n'(x)$ va h.k., natijada integral soddalashib mos ravishda

$$\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C, \quad \int \cos bx dx = \frac{1}{b}\sin bx + C,$$

$$\int \sin bx dx = -\frac{1}{b}\cos bx + C$$

integrallarga keladi.

Bu turdagi integrallarni hisoblashning boshqa usuli ham bor, uni noaniq koeffitsientlar usuli, deb atashadi. Bu usulni qanday qo'llanishini masalan, $\int P_n(x)e^{bx}dx$ integral misolida ko'raylik. Tabiiyki, uning boshlang'ichi $Q_n(x)e^{ax}$ ko'rinishda bo'ladi, shuning uchun bu integralni $Q_n(x)e^{ax} + C = \quad b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \quad \ldots + b_1 x + b_0 + C$ ko'rinishda izlaymiz, bu yerda maqsad noma'lum $b_0, b_1, \ldots, b_n$ koeffitsientlarni topishdadir.

Boshlang'ich funktsiyaning ta'rifiga ko'ra,

$$(Q_n(x)e^{ax} + C)' = P_n(x)e^{ax} \text{ yoki } Q_n'(x) + bQ_n(x) = P_n(x). \tag{4}$$

Oxirgi tenglikning ikkala tarafida n-darajali ko'phad turibdi. Ma'lumki (8-bob, 6-§, 6-teoremaga qarang), bu ko'phadlar teng bo'lishi uchun x ning bir xil darajalari oldidagi mos koeffitsientlari teng bo'lishi kerak. Ularni o'zaro tenglab, noma'lum koeffitsientlarni topish uchun chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Yuqorida aytilganlarni quyidagi integral misolida ko'raylik:

$$\int (x^2 + 1)e^x dx = (ax^2 + bx + c)e^x + C$$

Bunda

$$P_2(x) = x^2 + 1, \quad Q_2(x) = ax^2 + bx + c.$$

(4) tenglik quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$ax^2 + (2a + b)x + b + c = x^2 + 1.$$

Bundan

$$a = 1, \quad 2a + b = 0, \quad b + c = 1.$$

Bu tenglamalardan: $a = 1, b = -2, c = 3$. Demak,

$$\int (x^2 + 1)e^x dx = (x^2 - 2x + 3)e^x + C.$$

5-§. Ratsional kasrlarni integrallash

Ikkita algebraik $P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ va $Q_m(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0$ ko'phadlarning

$$f(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \tag{1}$$

nisbati ratsional funktsiya yoki ratsional kasr, deb ataladi, bu yerda $a_n, b_m \neq 0$, $n \geq 0, m \geq 1$.

Quyidagi

$$\begin{gathered}\frac{A}{x-a}, \frac{A}{(x-a)^k} \quad (k \geq 2), \\ \frac{Ax+B}{x^2+px+q}, \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} \quad (k \geq 2),\end{gathered} \tag{2}$$

ko'rinishdagi ratsional funktsiyalar eng sodda ratsional kasrlar, deb ataladi, bu yerda, A, B, a, p, q — o'zgarmas sonlar, k — natural son, x^2+px+q kvadrat uchhad haqiqiy ildizlarga ega emas, ya'ni $\frac{p^2}{4}-q<0$.

Uchinchi va to'rtinchi ko'rinishdagi ratsional funktsiyalarni integrallashni 3-§ da ko'rgan edik. Avvalgi ikkita kasrning integrali esa quyidagicha bo'ladi:

$$A\int\frac{dx}{x-a}=A\ln|x-a|+C, \qquad A\int\frac{dx}{(x-a)^k}=-\frac{A}{k-1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}}+C.$$

Agar (1) ratsional kasrning suratidaturgan ko'phadni darajasi n maxrajda turgan ko'phadning darajasi m dan kichik bo'lsa, (1) ni to'g'ri kasr, aks holda noto'g'ri kasr, deymiz.

Agar (1) noto'g'ri kasr bo'lsa, ko'phadni ko'phadga bo'lish qoidasiga ko'rabo'lib, uni

$$f(x)=ko'phad+\frac{P_{n_1}(x)}{Q_{m_1}(x)} \quad (n_1<m_1)$$

ko'rinishga keltirish mumkin. Ko'phadni integrallashni avvalgi paragraflarda ko'rdik. Demak, har qanday ratsional funktsiyani integrallashdagi asosiy qiyinchilik to'g'ri kasrni integrallashga keltirilar ekan. Ixtiyoriy to'g'ri kasrni integrallash quyidagi teoremaga asoslanadi.

Teorema. *Agar haqiqiy to'g'ri (1) kasrning mahraji*

$$Q_m(x)=b_m(x-c_1)^{k_1}\ldots(x-c_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}$$

ko'rinishda ko'paytuvchilarga ajralsa, u holda (1) yagona ravishda quyidagi:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{A_{1,1}}{(x-c_1)^{k_1}}+\frac{A_{1,2}}{(x-c_1)^{k_1-1}}+\ldots+\frac{A_{1,k_1}}{x-c_1}+$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{A_{r,1}}{(x-c_r)^{k_r}}+\frac{A_{r,2}}{(x-c_r)^{k_r-1}}+\ldots+\frac{A_{r,k_r}}{x-c_r}+$$

$$+\frac{B_{1,1}x+C_{1,1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}}+\frac{B_{1,2}x+C_{1,2}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1-1}}+\ldots+\frac{B_{1,l_1}x+C_{1,l_1}}{x^2+p_1x+q_1}+$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{B_{s,1}x+C_{s,1}}{(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}}+\frac{B_{s,2}x+C_{s,2}}{(x^2+p_sx+q_s)^{l_s-1}}+\ldots+\frac{B_{s,l_s}x+C_{s,l_s}}{x^2+p_sx+q_s} \qquad (3)$$

ko'rinishda eng sodda kasrlar yig'indisiga yoyiladi.

Demak, bu teoremaga ko'ra har qanday haqiqiy to'g'ri ratsional kasr uchun ko'rsatilgan indekslari bo'yicha shunday A, B, C o'zgarmas sonlar topiladiki, (2) munosabat x ning $c_1, c_2, \ldots, c_r$ qiymatlaridan boshqa barcha qiymatlari uchun bajariladi.

Bu koeffitsientlarni aniqlash uchun odatda noaniq koeffitsientlar usuli qo'llaniladi. Bu usulni birinchi marotaba I. Bernulli qo'llagan.

Bu usulni quyidagi kasr misolida ko'rsatamiz:

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Tenglikning o'ng tarafini umumiy maxrajga keltirib, suratlarini tenglasak:

$$2x^2+2x+13=A(x^2+1)^2+(Bx+C)(x^2+1)(x-2)+(Dx+E)(x-2). \qquad (4)$$

Bu tenglikning o'ng tomonini ixchamlab, tenglikning ikkala tomonidagi x ning bir xil darajalari oldidagi koeffitsientlarni tenglab, quyidagi sistemani hosil qilamiz:

x^4 : $A+B=0$,
x^3 : $-2B+C=0$,
x^2 : $2A+B-2C+D=2$,
x : $-2B+C-2D+E=2$,
x^0 : $A-2C-2E=13$,

bundan

$$A=1,\quad B=-1,\quad C=-2,\quad D=-3,\quad E=-4.$$

Demak,

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}=\frac{1}{x-2}-\frac{x+2}{x^2+1}-\frac{3x+4}{(x^2+1)^2}.$$

Xuddi shu natijaga x ning o'rniga ketma-ket $-1,0,1,2$ va -2 qiymatlarni qo'yib kelsa ham bo'ladi. Bunda noma'lum koeffitsientlarni topish uchun quyidagi sistema hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} 25A=25, \\ A-2C-2E=13, \\ 4A+6(B-C)+3(D-E)=13, \\ 4A-2(B+C)-(D+E)=17, \\ 25A+20(2B-C)+4(2D-E)=17. \end{cases}$$

(2) dagi qo'shiluvchi kasrlarning integralini eslasak, quyidagi xulosaga kelamiz:

Har qanday ratsional funktsiyaning integrali ratsional funktsiya, logarifmik va arktangens funktsiyalar orqali ifodalanadi.

Ko'rgazma sifatida yuqoridagi misolga qaytamiz:

$$\int\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)}dx=\int\frac{dx}{x-2}-\int\frac{x+2}{x^2+1}dx-\int\frac{3x+4}{(x^2+1)^2}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{3-4x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln\frac{(x-2)^2}{x^2+1}-4\operatorname{arctg}x+C.$$

6-§. Irratsional funktsiyalarni integrallash

Bu paragrafda biz ratsional bo'lmagan funktsiyalarni o'zgaruvchini almashtirish usuli yordamida qanday qilib ratsional ifodaga olib kelish yo'llarini, va nihoyat noratsional funktsiyalarning integrallarini almashtirish natijasida hosil bo'lgan ratsional ifodalarga 5-§ da berilgan usullarni qo'llab hisoblashni ko'ramiz. Bu — jarayonni ratsionallashtirish usuli, deyiladi.

1. $\int R\left(x,\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$, bu yerda a,b,c,d -o'zgarmas sonlar, m -natural son, $ad-bc\neq 0$, $R(x,y)$ - o'z argumentlariganisbatan ratsional ifoda.

Berilgan integralni

$$t=\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

almashtirish ratsionallashtiradi. Haqiqatan

$$t^m=\frac{ax+b}{cx+d}.$$

Bundan

$$x=\frac{b-dt^m}{ct^m-a},\quad dx=\frac{mt^{m-1}(ad-bc)}{(ct^m-a)^2}dt.$$

U holda

$$\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx =$$

$$\int R\left(\frac{b-dt^m}{ct^m-a}, t\right)\frac{mt^{m-1}(ad-bc)}{(ct^m-a)^2}dt = \int R_1(t)dt,$$

bu yerda $R_1(t)$ — t ning ratsional funktsiyasi.

1-*misol.* $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}} = \int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\frac{dx}{x+1}$.

Yechish. Agar $t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$ desak, $x = \frac{t^3+1}{t^3-1}$, $dx = -\frac{6t^2dt}{(t^2-1)^2}$ bo'ladi. U holda

$$\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\frac{dx}{x+1} = \int \frac{-3dt}{t^3-1} = \int\left(-\frac{1}{t-1} + \frac{t+2}{t^2+t+1}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{t^2+t+1}{(t-1)^2} + \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C.$$

2-*misol.* $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \int \frac{dx}{(\sqrt[6]{x})^3 + (\sqrt[6]{x})^2} = (\sqrt[6]{x} = t) = \int \frac{6t^5dt}{t^2+t^3} =$

$$= 6\int(t^2 - t + 1)dt - \ln|1+t| = 2t^3 - 3t^2 + 6t - \ln|1+t| + C.$$

2. $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$, bu yerda a, b, c -o'zgarmas sonlar.

Integral ostidagi kvadrat uchhad tabiiy karrali ildizga ega emas, chunki aks holda integral ostidagi ifoda ratsional ifodaga aylanib qoladi. Agar u haqiqiy har xil x_1, x_2 ildizlarga ega bo'lsa, u holda

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = (x-x_1)\sqrt{a\frac{x-x_2}{x-x_1}}$$

deb, berilgan integral yuqorida ko'rilgan 1-tur integralga keltiriladi.

Endi, faraz qilaylik, kvadrat uchhad haqiqiy ildizlarga ega emas va $a > 0$ bo'lsin. U holda berilgan integralni Eylerning 1-almashtirishi, deb ataluvchi

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}\cdot x$$

almashtirish ratsionallashtiradi. Haqiqatan, agar bu tenglikni kvadratga ko'tarib ixchamlasak, $bx + c = t^2 - 2\sqrt{a}\cdot tx$ va bundan

$$x = \frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b}, \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{\sqrt{a}t^2 + bt + c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t+b},$$

$$dx = 2\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}t+b)^2}dt.$$

Bularni berilgan integralga olib borib qo'ysak, integral ostidagi funktsiya t ning ratsional funktsiyasiga aylanadi.

3-*misol.* $\int\sqrt{a^2+x^2}dx$ integralni hisoblang. Bu yerda, x^2+a^2 haqiqiy ildizlarga ega emas. Shuning uchun

$$\sqrt{a^2+x^2}=t-x,\quad x^2+a^2=t^2-2tx+x^2,\quad x=\frac{t^2-a^2}{2t}$$

va

$$\sqrt{a^2+x^2}=t-x=\frac{t^2+a^2}{2t}.$$

Bundan

$$x\sqrt{a^2+x^2}=\frac{t^4-a^4}{4t^2},\quad dx=\frac{t^2+a^2}{2t}dt.$$

Bularni integralga qo'ysak:

$$\int\sqrt{a^2+x^2}dx=\int\frac{t^2+a^2}{2t}\cdot\frac{t^2+a^2}{2t^2}dt=\frac{1}{4}\int\left[t+\frac{2a^2}{t}+\frac{a^4}{t^3}\right]dt=$$

$$=\frac{a^2}{2}\ln|t|+\frac{t^2}{8}-\frac{a^4}{8t^2}+C=\frac{a^2}{2}\ln|t|+\frac{t^4-a^4}{8t^2}+C=$$

$$=\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+C.$$

Agar kvadrat uchhadda $a<0, c>0$ bo'lsa, u holda quyidagi almashtirishni bajaramiz:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c}$$

Bu Eylerning 2-almashtirishi, deyiladi. Agar bu tenglikni kvadratga ko'tarib ixchamlasak, $ax+b=xt^2+2\sqrt{c}t$ hosil bo'ladi. Bundan

$$x=\frac{2\sqrt{c}t-b}{a-t^2},\quad \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\sqrt{c}t^2-bt+a\sqrt{c}}{a-t^2},$$

$$dx=2\frac{\sqrt{c}t^2-bt+\sqrt{c}a}{(a-t^2)^2}dt.$$

Bularni integralga qo'yib, integral ostidagi ifodani ratsionallashtiramiz. Integrallab bo'lgandan so'ng avvalgi o'zgaruvchiga qaytish maqsadida, javobda

$$t=\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{c}}{x}$$

almashtirishni bajarib qo'yamiz.

7-§. Trigonometrik funktsiyalarni o'z ichiga olgan ayrim ifodalarni integrallash

Biz shu paytgacha faqat algebraik (ratsional va irratsional) funktsiyalarni integrallashni ko'rgan bo'lsak, bu paragrafda noalgebraik funktsiyalarni, shu jumladan, trigonometrik funktsiyalar qatnashgan ifodalarni integrallashni ko'ramiz.

Bizga

$$\int R(\sin x, \cos x)dx \tag{1}$$

integral berilgan bo'lsin, bu yerda $R(x,y)$ — o'z argumentlariga nisbatan ratsional funktsiya.

Trigonometriyadan ma'lumki,

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}.$$

Shu sababli, (1) ni

$$t = tg\frac{x}{2} \tag{2}$$

almashtirish ratsionallashtiradi. Haqiqatan, (2) dan

$$x = 2\mathrm{arctg}\, t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Bularni (1) ga qo'ysak:

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2} = \int R_1(t)dt.$$

1-*misol.* $\int \frac{dx}{\sin x}$ integralni hisoblang.

Yechish.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C.$$

Yuqorida keltirilgan (2) almashtirish universal almashtirish, deb ataladi. Bu usul ayrim hollarda murakkab ratsional funktsiyalarga olib keladi, shuning uchun bu usul bilan bir qatorda maqsadga tezroq olib keluvchi almashtirishlar ham ishlatiladi. Shulardan ayrimlarini ko'rib chiqaylik. Avval izohlash jarayonida zarur bo'ladigan bir nechta tushunchalarni kiritib olaylik.

Agar $R(-x,y) = R(x,y)$ ($R(x,-y) = R(x,y)$) bo'lsa, $R(x,y)$ funktsiya x ga(y ga) nisbatan juft deyiladi, agar $R(-x,y) = -R(x,y)$ ($R(x,-y) = -R(x,y)$) bo'lsa, $R(x,y)$ funktsiya x ga(y ga) nisbatan toq, deyiladi.

Faraz qilaylik,

$$R(u,\vartheta) = \frac{P(u,\vartheta)}{Q(u,\vartheta)} \quad (u = \sin x, \vartheta = \cos x)$$

bo'lsin, bu yerda, P va Q lar u,ϑ lar bo'yicha ko'phadlar.

Agar P u ga(ϑ ga) nisbatan va Q u ga(ϑ ga) nisbatan bir vaqtda juft yoki toq bo'lsa, $R(u,\vartheta)$ u ga(ϑ ga) nisbatan juft bo'ladi.

Agar P u ga(ϑ ga) nisbatan juft (toq) va Q u ga(ϑ ga) nisbatan toq (juft) bo'lsa, $R(u,\vartheta)$ u ga(ϑ ga) nisbatan toq bo'ladi.

P va Q lar ko'phad bo'lgani uchun $R(u,\vartheta)$ biror argumentiga, masalan, u ganisbatan juft bo'lsa, uni

$$R(u,\vartheta)=R_1(u^2,\vartheta)$$

ko'rinishga, ya'ni u ning juft darajalarini o'z ichiga olgan ko'phad ko'rinishiga keltirish mumkin.

Agar $R(u,\vartheta)$ u ganisbatan toq bo'lsa, uni

$$R(u,\vartheta)=R_2(u^2,\vartheta)\cdot u$$

ko'rinishgakeltirsabo'ladi.

1. Agar $R(u,\vartheta)$ u ganisbatan toq bo'lsa, u holda

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R_2(\sin^2 x,\cos x)\sin x dx=$$

$$=-\int R_2(1-\cos^2 x,\cos x)d\cos x$$

bo'ladi va demak, $t=\cos x$ almashtirish ratsional funktsiyaning integraliga olib keladi.

2-*misol.* $\int\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx=-\int\frac{1-t^2}{t^2}dt=\int dt-\int\frac{dt}{t^2}=$

$$=t+\frac{1}{t}+C=\cos x+\frac{1}{\cos x}+C\,.$$

2. Agar $R(u,\vartheta)$ ϑ ganisbatan toq bo'lsa, u holda

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R_0(\sin x,\cos^2 x)\cos x dx=$$

$$=\int R_0(\sin x,1-\sin^2 x)d\sin x$$

bo'ladi va demak, $t=\sin x$ almashtirish bilan maqsadga yetishamiz.

3-*misol.* $\int\sin^2 x\cos^3 x dx=\int\sin^2 x(1-\sin^2 x)d\sin x=$

$$=\int t^2(1-t^2)dt=\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{5}t^5+C=\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{1}{5}\sin^5 x+C.$$

3. Agar $R(u,\vartheta)$ birvarakayiga ikkala o'zgaruvchisiga nisbatan juft bo'lsa, ya'ni

$$R(-u,-\vartheta)=R(u,\vartheta)$$

bo'lsa, u ni $\frac{u}{\vartheta}\vartheta$ ga almashtirib,

$$R(u,\vartheta)=R(\frac{u}{\vartheta}\vartheta,\vartheta)=R^*(\frac{u}{\vartheta},\vartheta)$$

munosabatga kelamiz. U holda

$$R^*(\frac{u}{\vartheta},-\vartheta)=R^*(\frac{u}{\vartheta},\vartheta)$$

tenglikka ishonch hosil qilish qiyin emas. Shu sababli

$$R^*(\frac{u}{\vartheta},\vartheta)=R^*{}_1(\frac{u}{\vartheta},\vartheta^2)\,,$$

deyish mumkin. Demak,

$$R(\sin x,\cos x)=R_1^*(\operatorname{tg}x,\cos^2 x)=R_1^*\left(\operatorname{tg}x,\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}\right)=R_1^{**}(\operatorname{tg}x)$$

ekan. Bundan berilgan integralni $t = tgx$ almashtirish ratsionallashtirishi kelib chiqadi.

Eslatma. Har qanday $R(u,\vartheta)$ ratsional ifodani quyidagi:

$$R(u,\vartheta)=\frac{R(u,\vartheta)-R(-u,\vartheta)}{2}+\frac{R(-u,\vartheta)-R(-u,-\vartheta)}{2}+\frac{R(-u,-\vartheta)+R(u,\vartheta)}{2}$$

ko'rinishda ifodalash mumkin, bu yerda birinchi kasr uchun 1-holat, ikkinchi kasr uchun 2-holat va uchinchi kasr uchun 3-holat o'rinli. Shu sababli $R(\sin x,\cos x)$ ifodani yuqoridagidek yoyib, har bir qismiga mos ravishda $t=\cos x, t=\sin x$ va $t=tgx$ almashtirishlarni qo'llab, berilgan integralni ratsionallashtirish mumkin.

4-*misol.* $\int\frac{dx}{\sin^4 x\cos^2 x}$ ni hisoblang.

Yechish. Bu integral uchun 3-holat o'rinli, shuning uchun $t=\mathrm{tg}x$ almashtirishni bajaramiz. U holda

$$\int\frac{dx}{\sin^4 x\cos^2 x}=\int\frac{(1+t^2)^2}{t^4}dt=t-\frac{2}{t}-\frac{1}{3t^3}+C=$$
$$=\mathrm{tg}x-2\mathrm{ctg}x-\frac{1}{3}ctg^3x+C.$$

4. $J_1=\int\cos mx\cos nx dx$, $J_2=\int\sin mx\cos nx dx$ va $J_3=\int\sin mx\sin nx dx$ ko'rinishdagi integrallar quyidagi formulalar yordamida hisoblanadi:

$$\cos mx\cos nx=\frac{1}{2}[\cos(m+n)x+\cos(m-n)x],$$
$$\sin mx\cos nx=\frac{1}{2}[\sin(m+n)x+\sin(m-n)x],$$
$$\sin mx\sin nx=\frac{1}{2}[-\cos(m+n)x+\cos(m-n)x].$$

Bularni berilgan integrallargamos ravishdaqo'yib hisoblaymiz:

$$J_1=\frac{1}{2}\int[\cos(m+n)x+\cos(m-n)x]dx=$$
$$=\frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)}+\frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)}+C$$

O'olgan ikkitasi ham shu kabi hisoblanadi.

5-*misol.* $\int\sin 5x\sin 3x dx$ integralni hisoblang.

Yechish.

$$\int\sin 5x\sin 3x dx=\frac{1}{2}\int[-\cos 8x+\cos 2x]dx=$$
$$=-\frac{\sin 8x}{16}+\frac{\sin 2x}{4}+C.$$

8-§. Ayrim irratsional funktsiyalarni trigonometrik almashtirishlar yordamida integrallash

Biz 6-§ da batafsil ko'rgan

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx \qquad (1)$$

integralga qaytamiz, bu yerda $a\neq 0, c-\frac{b^2}{4}\neq 0$. Bu paragrafda trigometrik almashtirishlar yordamida (1) integral 7-§ da ko'rilgan

$$\int \overline{R}(\sin z,\cos z)dz \qquad (2)$$

integral ko'rinishigaqanday qilib keltirilishi ko'riladi.

3-§ da ax^2+bx+c kvadrat uchhad koeffitsientlarning har xil qiymatida $\sqrt{m^2t^2+n^2}$, $\sqrt{m^2t^2-n^2}$ va $\sqrt{n^2-m^2t^2}$ ifodalardan biriga keltirilishini ko'rgan edik, shuning uchun umumiylikni buzmagan holda, (1) integral

$$\int R\left(t,\sqrt{m^2t^2+n^2}\right)dt, \qquad (3)$$

$$\int R\left(t,\sqrt{m^2t^2-n^2}\right)dt, \qquad (4)$$

$$\int R\left(t,\sqrt{n^2-m^2t^2}\right)dt \qquad (5)$$

integrallarning birigakeltirilgan, deb faraz qilamiz.

Agar (3) ga $t=\frac{n}{m}\text{tg}z$ almashtirishni, (4) ga $t=\frac{n}{m}\sec z$ almashtirishni va (5) ga $t=\frac{n}{m}\sin z$ almashtirishni qo'llasak, bu integrallar (2) integral ko'rinishiga keladi.

Misol. Hisoblang:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}.$$

Yechish. Bu (5) ko'rinishdagi integral, shuning uchun unga $x=a\sin z$ almashtirishni qo'llaymiz. U holda

$$dx=a\cos z dz$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}=\int\frac{a\cos z dz}{\sqrt{(a^2-a^2\sin^2 z)^3}}=\int\frac{a\cos z dz}{a^3\cos^3 z}=$$

$$=\frac{1}{a^2}\int\frac{dz}{\cos^2 z}=\frac{1}{a^2}\cdot\text{tg}z+C=\frac{1}{a^2}\frac{\sin z}{\cos z}+C=$$

$$=\frac{1}{a^2}\frac{\sin z}{\sqrt{1-\sin^2 z}}+C=\frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}+C.$$

Eslatma. Har qanday uzluksiz funktsiya uchun boshlang'ich funktsiya mavjud bo'lsa ham (1-§ ga qarang), har qanday boshlang'ich funktsiya elementar funktsiyalar orqali ifodalanavermaydi. Bunday integrallar jumlasiga

$$\int e^{-x^2}dx,\quad \int\frac{\sin x}{x}dx,\quad \int\frac{\cos x}{x}dx,\quad \int\sqrt{1-k^2\sin^2 x}dx,\quad \int\frac{dx}{\ln x}$$

va h.k. kiradi.

Bu turdagi integrallarni Laplas, Lejandr va Luivill[1] keng o'rganishgan. Lejandrning hatto bunday funktsiyalarning qiymatlari jadvali ham mavjud.

[1] Andrian Mari Lejandr (1752-1833) va Jozef Luivill (1809-1882) – buyuk farang matematiklari.

11-BOB.

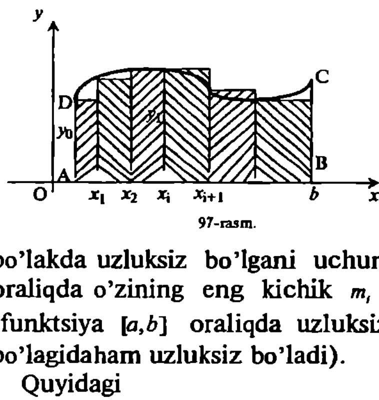
ANIQ INTEGRAL

1-§. Quyi va yuqori integral yig'indilar

Sohalarning yuzalarini hisoblash masalasi qadimdan insoniyatni qiziqtirib kelgan. Ko'pburchaklarning yuzini hisoblashni qadimgi Vavilon va Misr olimlari bajara olishgani tarixdan ma'lum. Arximed[1] parabola segmentining yuzini hisoblay olgan. Matematik tarixning oxirgi izlanishlaridan ma'lumki, doira va sektor yuzini hisoblashni O'rtaosiyolik vatandoshlarimiz Al-Xorazmiy va Beruniylar ham bilganlar.

Biz bu bobda o'rganadigan asosiy tushunchalarimiz ham yuzalarni hisoblash masalasidan kelib chiqqan. Shu sababli hozir biz chegaralaridan biri egri chiziqdan iborat bo'lgan egri chiziqli trapetsiya, deb ataluvchi soha yuzasini hisoblash masalasini ko'ramiz.

Faraz qilaylik, bizga quyidan Ox o'qining $[a,b]$ kesmasi bilan, yonboshlaridan $x=a$ va $x=b$ to'g'ri chiziqlar bilan va yuqoridan uzluksiz $y=f(x)$ funktsiyagrafigi bilan chegaralangan soha berilgan bo'lsin.



97-rasm.

$[a,b]$ kesmani ixtiyoriy ravishda
$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$$
nuqtalar bilan n ta bo'lakka bo'lamiz va
$$x_1-x_0=\Delta x_1, x_2-x_1=\Delta x_2,\ldots,x_n-x_{n-1}=\Delta x_n$$
deb belgilaymiz.

$y=f(x)$ funktsiya har bir $[x_{i-1},x_i]$ bo'lakda uzluksiz bo'lgani uchun Veyershtrass teoremasiga ko'ra u shu oraliqda o'zining eng kichik m_i va eng katta M_i qiymatlariga erishadi (funktsiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz bo'lgani uchun uning har qanday bo'lagidaham uzluksiz bo'ladi).

Quyidagi
$$\underline{s_n}=m_1\Delta x_1+m_2\Delta x_2+\ldots+m_n\Delta x_n=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i\,, \tag{1}$$
$$\overline{s_n}=M_1\Delta x_1+M_2\Delta x_2+\ldots+M_n\Delta x_n=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i \tag{2}$$
yig'indilar mos ravishda 97-rasmda aks ettirilgan ichki chizilgan $AC_0N_1C_1N_2\ldots C_{n-1}N_nB$ va tashqi chizilgan $AK_0C_1K_1\ldots C_{n-1}K_{n-1}C_nB$ pog'onasimon shakl-larning yuzalariga teng. Ular mos ravishda Darbuning[1] quyi va

---

[1] Arximed (taxminan miloddan avvalgi 287-212 yillar) – buyuk yunon olimi.
[1] Gaston Darbu (1842-1917) – farang matematigi.

yuqori yig'indilari, deb ataladi. Uzluksiz $y=f(x)$ funktsiyaning $[a,b]$ oraliqdagi eng kichik va eng katta qiymatlari mos ravishda m va M bo'lsin. U holda

$$m_1 \geq m,\ m_2 \geq m,\ \ldots,\ m_n \geq m$$

va

$$M_1 \leq M,\ M_2 \leq M,\ \ldots,\ M_n \leq M$$

bo'lgani uchun

$$\underline{s_n} = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \geq \sum_{i=1}^{n} m \Delta x_i = m\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = m(b-a), \qquad (3)$$

$$\overline{s_n} = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} M \Delta x_i = M\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = M(b-a). \qquad (4)$$

Barcha i $(i=1,2,\ldots,n)$ lar uchun $m_i \leq M_i$ ekanligidan

$$\underline{s_n} \leq \overline{s_n}\,. \qquad (5)$$

Uchta(3),(4) va (5) tengsizliklarni birlashtirsak:

$$m(b-a) \leq \underline{s_n} \leq \overline{s_n} \leq M(b-a) \qquad (6)$$

Darbu yig'indilari quyidagi xossalarga ega:

1^0. Agar bo'lish nuqtalarini oshirsak, Darbuning quyi yig'indisi faqat ortishi, yuqori yig'indisi faqat kamayishi mumkin.

Buni isbot qilish uchun tanlangan bo'lish nuqtalariga bitta x' nuqta qo'shilgan holi bilan kifoyalanamiz.

Faraz qilaylik, bu nuqta x_k va x_{k+1} nuqtalar orasidabo'lsin:

$$x_k < x' < x_{k+1}\,.$$

Agar $\overline{m_k}$ va $\overline{\overline{m_k}}$ mos ravishda $y=f(x)$ funktsiyaning $[x_k,x']$ va $[x',x_{k+1}]$ oraliqlardagi eng kichik qiymatlari bo'lsa, u holda $\underline{s_{n+1}}$ ning k-hadi

$$\overline{m_k}(x'-x_k)+\overline{\overline{m_k}}(x_{k+1}-x')$$

$\underline{s_n}$ ning k-hadidan farq qiladi. $[x_k,x']$ va $[x',x_{k+1}]$ bo'laklar $[x_k,x_{k+1}]$ ning qismlari bo'lgani uchun $\overline{m_k} \geq m_k$, $\overline{\overline{m_k}} \geq m_k$ vashu sababli

$$\overline{m_k}(x'-x_k) \geq m_k(x'-x_k),\quad \overline{\overline{m_k}}(x_{k+1}-x') \geq m_k(x_{k+1}-x')$$

bo'ladi. Agar bu tengsizliklarni birlashtirsak:

$$\overline{m_k}(x'-x_k)+\overline{\overline{m_k}}(x_{k+1}-x') \geq m_k(x_{k+1}-x_k),$$

ya'ni $\underline{s_{n+1}} \geq \underline{s_n}$ ekan. Yuqori yig'indi uchun isbot aynan shunday bajariladi.

2^0. Darbuning har bir quyi yig'indisi har qanday yuqori yig'indisidan kattaemas, hatto bu yig'indi boshqa bo'linishga taalluqli bo'lsa ham.

Isboti. $[a,b]$ oraliqni ixtiyoriy ravishda bo'laklarga bo'lib, bu bo'linishga mos keluvchi Darbu yig'indilarini $\underline{s_n}$ va $\overline{s_n}$ deb belgilaylik.

Endi, $[a,b]$ oraliqning bu bo'linmadan boshqa bo'linmasini olib, unga mos keladigan Darbu yig'indilarini $\underline{s}_n^1$ va $\overline{s}_n^1$, deb belgilaylik.

$\underline{s}_n \leq \overline{s}_n^1$ ekanligini isbot qilish kerak. Buning uchun birinchi va ikkinchi bo'linish nuqtalarini birlashtiramiz.

Natijada yangi, uchinchi bo'linish hosil bo'ladi. Unga mos keluvchi Darbu yig'indilari $\underline{s}_n^2$ va $\overline{s}_n^2$ bo'lsin.

Uchinchi bo'linishni ikkinchi bo'linish nuqtalarini birinchisiga birlashtirish natijasida hosil bo'lgani uchun 1^0-xossaga ko'ra $\underline{s}_n \leq \underline{s}_n^2$ bo'ladi. Xuddi shunday ikkinchi va uchinchi bo'linishlarni solishtirib, $\overline{s}_n^2 \leq \overline{s}_n^1$ ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

Lekin, $\underline{s}_n^2 \leq \overline{s}_n^2$, shu sababli yuqoridagi ikkita tengsizlikdan $\underline{s}_n \leq \overline{s}_n^1$ ekanligi kelib chiqadi. Shuni isbot qilish kerak edi.

Bu ikki xossadan Darbuning quyi va yuqori yig'indilari n ning natural qiymatlari uchun mos ravishda monoton kamaymaydigan va monoton o'smaydigan ketma-ketliklarni hosil qilishi kelib chiqadi. Shu sababli Boltsano-Veyershtrass teoremasiga ko'ra (4-bob, §2.7 ga qarang) bu ketma-ketliklar $n \to \infty$ da chekli $I_* \leq I^*$ limitlarga ega. Aslida bu yerda faqat tenglik o'rinli. Haqiqatan

$$\overline{s}_n - \underline{s}_n = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i ,$$

Kantor teoremasining natijasiga ko'ra (5-bob, 3.6-§ ga qarang), ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topiladiki, $\Delta x_i < \delta$ bo'lganda $M_i - m_i < \varepsilon$ bo'ladi. U holda

$$\overline{s}_{nk} - \underline{s}_{nk} < \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \varepsilon(b-a).$$

Bundan $I_* = \lim\limits_{n\to\infty} \underline{s}_n = \lim\limits_{n\to\infty} \overline{s}_n = I^*$ ekanligi kelib chiqadi.

1-rasmdan ham ko'rinadiki, n orta borgan sari $C_0N_1C_1 \ldots N_n$ va $C_0K_0C_1K_1 \ldots K_{n-1}C_n$ siniq chiziqlar C_0C_n yoyga yaqinlasha boradi. Demak, ichki chizilgan va tashqi chizilgan sohalarning yuzi berilgan egri chiziqli trapetsiyaning yuziga yaqinlasha borar ekan, ya'ni $S = I_* = I^*$ bo'lar ekan.

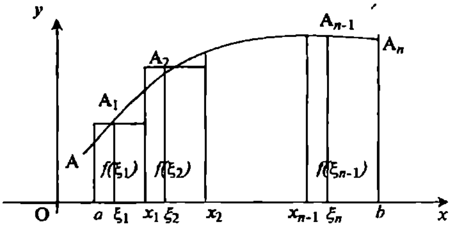
2-§. Aniq integralning ta'rifi va mavjudlik shartlari

Yana yuqorida ko'rilgan masalaga qaytamiz. Har bir $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ bo'lakda mos ravishda bittadan $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ nuqtalar olib, berilgan funktsiyaning shu nuqtalardagi $f(\xi_1), f(\xi_2), \dots, f(\xi_n)$ qiymatlarini hisoblaymiz. Quyidagi

$$s_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (1)$$

yig'indini tuzib olaylik. Bu yig'indini $y = f(x)$ funktsiyaning $[a,b]$ oraliqdagi integral yig'indisi, deb atashadi.

ξ_i nuqta $[x_{i-1}, x_i]$ bo'lakdan ixtiyoriy tanlangani uchun $m_i \le f(\xi_i) \le M_i$ bo'ladi.



98-rasm

Bundan $m_i\Delta x_i \le f(\xi_i)\Delta x_i \le M_i\Delta x_i$ yoki

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i ,$$

ya'ni

$$\underline{s_n} \le s_n \le \overline{s_n} . \qquad (2)$$

Bu tengsizlikning geometrik ma'nosi yuzi s_n bo'lgan maydon ichki va tashqi chizilgan siniq chiziqlar orasida joylashgan siniq chiziq bilan chegaralangan ekanligini bildiradi.

Yig'indi s_n $[a,b]$ oraliqni $[x_{i-1}, x_i]$ bo'laklarga bo'lish va ξ_i nuqtalarni tanlash uslubiga bog'liq. Har xil bo'linishlarni qaraylik. Har bir bo'linishda mos ξ_i nuqtalarni tanlab, (1) ko'rinishdagi mos yig'indilarni tuzamiz. Natijada integral yig'indilar ketma-ketligi hosil bo'ladi. Ularni quyidagicha tartiblaymiz. Umumiylikni buzmagan holda, birinchi bo'linishda bo'laklar soni n_1, ikkinchi bo'linishdagi bo'laklar soni $n_2 > n_1$, uchinchi bo'linishdagi bo'laklar soni $n_3 > n_2$ va h.k. U holda ularga mos keluvchi integral yig'indilar ketma-ketligi

$$s_{n_1}, s_{n_2}, s_{n_3}, \dots, s_{n_k}, \dots \qquad (3)$$

tartibda joylashadi. k-bo'linish uchun $\lambda_k = \max\limits_{i=1,n_k} |x_i - x_{i-1}|$ deymiz.

1-ta'rif. *Agar $k \to \infty$ da $\lambda_k \to 0$ bo'lib, (3) ketma-ketlik chekli s limitga intilsa, bu limit $y = f(x)$ funktsiyaning $[a,b]$ oraliqdagi aniq integrali, deb ataladi* va

$$\int_a^b f(x)dx$$

tarzda belgilanadi.

Demak, ta'rifga ko'ra

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda_k \to 0} s_{n_k} = \lim_{\lambda_k \to 0} \sum_{i=1}^{n_k} f(\xi_i^{(k)})\Delta x_i^{(k)} . \qquad (4)$$

Bu yerda, a aniq integralning quyi chegarasi, b aniq integralning yuqori chegarasi, deyiladi.

1-ta'rif quyidagi ta'rifga ekvivalent.

2-ta'rif. *Agar har qanday* $\varepsilon>0$ *uchun shunday* $\delta>0$ *topilsaki,* $\lambda_k<\delta$ *bo'lganda* $|s_{n_k}-s|<\varepsilon$ *tengsizlik* ξ_i *nuqtalarni qanday tanlanishidan qat'i nazar bajarilsa, u holda* s $y=f(x)$ *funktsiyaning* $[a,b]$ *oraliqdagi aniq integrali, deb ataladi.*

Uzluksiz funktsiyalar uchun aniq integralning bu ta'rifi farang matematigi Koshigataalluqli, umumiy hol uchun, ya'ni ixtiyoriy funktsiya uchun aniq integral ta'rifini B.F.Riman[1] kiritgan. Shu sababli uzluksiz funktsiya uchun aniq integral mavjud bo'lsa, uni Koshi ma'nosida integrallanuvchi, agar ixtiyoriy funktsiya uchun aniq integral mavjud bo'lsa, funktsiyani Riman ma'nosida integrallanuvchi, deymiz.

Quyidagi teoremaaniq integralning mavjudlik shartini beradi:

1-teorema. *Aniq integral mavjud bo'lishi uchun*

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{n_k}\varepsilon_i\Delta x_i^{(k)}=0, \tag{5}$$

bo'lishi zarur va yetarlidir, bu yerda $\varepsilon_i=M_i-m_i$, $i=1,2,\dots,n_k$.

Zarurligi. Faraz qilaylik, aniq integral mavjud bo'lsin. U holdata'rifga ko'ra, har qanday $\varepsilon>0$ uchun shunday $\delta>0$ topiladiki, $\lambda_k<\delta$ bo'lganda $|s_{n_k}-s|<\varepsilon$ tengsizlikbajariladi. Bundan

$$s-\varepsilon<s_{n_k}<s+\varepsilon \text{ yoki } s-\varepsilon<\underline{s_{n_k}}\le s_{n_k}\le\overline{s_{n_k}}<s+\varepsilon,$$

ya'ni

$$\lim_{\lambda_k\to 0}\underline{s_{n_k}}=\lim_{\lambda_k\to 0}\overline{s_{n_k}}$$

yoki

$$\lim_{\lambda_k\to 0}(\overline{s_{n_k}}-\underline{s_{n_k}})=\lim_{\lambda_k\to 0}\sum_{i=1}^{n_k}(M_i-m_i)\Delta x_i^{(k)}=\lim_{\lambda_k\to 0}\sum_{i=1}^{n_k}\varepsilon_i\Delta x_i^{(k)}=0.$$

Yetarliligi. Endi (5) shart o'rinli bo'lsin. Unda $I_*=I^*=I$ bo'ladi. Ma'lumki ((2) qarang),

$$\underline{s_{n_k}}\le s_{n_k}\le\overline{s_{n_k}},$$

bundan

$$0\le s_{nk}-\underline{s_{nk}}\le\overline{s_{nk}}-\underline{s_{nk}}=\sum_{i=1}^{nk}(M_i-m_i)\Delta x_i^{(k)}$$

U holda(5) shartga binoan

$$\lim_{\lambda_k\to 0}s_{n_k}=\lim_{\lambda_k\to 0}\underline{s_{n_k}}=I,$$

demak, aniq integral mavjud va u I ga teng ekan.

Teoremaning ikkinchi qismidan $[a,b]$ oraliqda uzluksiz bo'lgan har qanday $y=f(x)$ funktsiyaning aniq integrali mavjud bo'lishi kelib chiqadi.

---

[1] B.F.Riman (1826-1866) – olmonlyalik buyuk matematik.

2-teorema. $[a,b]$ *oraliqda chegaralangan va unda chekli uzilish nuqtalariga ega bo'lgan* $y=f(x)$ *funktsiya shu oraliqda integrallanuvchidir.*

Isboti. Eng sodda hol, ya'ni a va b orasida faqat bitta x_0 uzilish nuqtasi bo'lgan hol bilan kifoyalanamiz. Ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun x_0 ning ε-atrofini olaylik. Bu atrofdan tashqarida funktsiya uzluksiz bo'lgani uchun u yerdagi nuqtalarga Kantor teoremasining natijasini qo'llash mumkin. Berilgan ε uchun ε-atrofning chap va o'ng tomonlari uchun topilgan δ larning kichigini tanlab, uni yana δ bilan belgilaymiz. Tanlangan δ ε-atrofning tashqarisidagi ikkala oraliq uchun yaraydi. Umumiylikni buzmagan holda $\delta<\varepsilon$ deb faraz qilish mumkin. $[a,b]$ oraliqni ixtiyoriy ravishda bo'laklari uzunligi δ dan kichik bo'ladigan qilib bo'laylik. Bu yerda bo'laklar uchun 2-hol bo'lishi mumkin:

1) butunlay ε-atrofning tashqarisida joylashgan bo'laklar. Ularda funktsiyaning tebranishi $\omega_i<\varepsilon$ bo'ladi.

2) butunligicha ε-atrofning ichida yoki bir qismi shu atrofda bo'lgan bo'laklar.

Teorema shartiga ko'ra funktsiya chegaralangan bo'lgani uchun uning har qanday bo'lakdagi tebranishi $[a,b]$ oraliqdagi Ω tebranishidan katta emas.

ε-atrof va uning tashqarisi uchun mos ravishda quyidagi:

$$\sum_{i'}\omega_{i'}\Delta x_{i'} \quad \text{va} \quad \sum_{i''}\omega_{i''}\Delta x_{i''}$$

yig'indilarni tuzib olaylik.

Ikkinchi yig'indi uchun

$$\sum_{i''}\omega_{i''}\Delta x_{i''}<\varepsilon\sum_{i''}\Delta x_{i''}<\varepsilon(b-a).$$

Birinchi yig'indi tarkibiga kiruvchi butunlay ε-atrofda yotuvchi oraliqlar uzunligi 2ε dan kichik bo'lishi ayon, bir qismi ε-atrofning tashqarisida yotadigan oraliqlar soni ikkitadan oshmaydi, shu sababli ularning uzunliklari yig'indlsi 2δ dan va demak, 2ε dan kichik. U holda

$$\sum_{i'}\omega_{i'}\Delta x_{i'}<\Omega\sum_{i'}\Delta x_{i'}<\Omega\cdot 4\varepsilon.$$

Demak, $\Delta x_i<\delta$ uchun

$$\sum_{i}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon[b-a+4\Omega].$$

Bundan 1-teoremaga asosan berilgan funktsiyaning integrallanuvchiligi kelib chiqadi.

Agar funktsiyaning berilgan oraliqdagi uzilish nuqtalari soni chekli bo'lmasa, funktsiya integrallanuvchi bo'lmay qolishi mumkin.

Misol. $\psi(x)=\begin{cases}1, x-\text{рационал},\\ -1, x-\text{иррационал}\end{cases}$ funktsiya chegaralangan: $|\psi(x)|=1$, lekin u har qanday $[a,b]$ ($a<b$) oraliqda integrallanuvchi emas.

Haqiqatan, agar integral yig'indida ξ_i nuqta sifatida ratsional sonlarni olsak, u holda

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \psi(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_i = b - a,$$

agar ξ_i nuqta sifatida irratsional sonlarni olsak, u holda

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \psi(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (-1) \cdot \Delta x_i = -(b-a)$$

bo'ladi. Bu integral yig'indi ξ_i nuqtalarning tanlanishiga qarab har xil qiymatlar qabul qilishi va bitta limitga intilmasligini ko'rsatadi, shu sababli ψ funktsiya $[a,b]$ da integrallanuvchi emas.

3-teorema. $[a,b]$ *da chegaralanmagan funktsiya shu oraliqda integrallanuvchi bo'lmaydi.*

Isboti. Agar funktsiya $[a,b]$ da chegaralanmagan bo'lsa, u biror $[x_{i_0-1}, x_{i_0}]$ bo'lakda chegaralanmagan bo'ladi. Tanlanadigan ξ_i nuqtalarning shu bo'lakka mos keluvchi qiymatini ξ_{i0} bilan belgilab, uni o'zgaruvchi deb, qolgan bo'laklarga mos keluvchi ξ_i larni o'zgarmas deb faraz qilaylik. U holda integral yig'indi $[x_{i_0-1}, x_{i_0}]$ bo'lakda chegaralanmagan $f(\xi_{i_0})(x_{i_0} - x_{i_0-1})$ qo'shiluvchi hisobiga chegaralanmagan bo'ladi. Bundan funktsiyaning integrallanuvchi emasligi kelib chiqadi, chunki integrallanuvchi funktsiyaning integral yig'indisi har qanday ξ_i uchun chegaralangan bo'ladi.

4-teorema. *Chegaralangan monoton funktsiya har doim integrallanuvchidir.*

Isboti. Faraz qilaylik, $y = f(x)$ funktsiya monoton o'suvchi bo'lsin. U holdauning $[x_{i-1}, x_i]$ oraliqdagi tebranishi

$$\omega_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$$

bo'ladi.

Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun quyidagi:

$$\delta = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$$

ni tanlaymiz. Agar $\Delta x_i < \delta$ bo'lsa, u holda

$$\sum_i \omega_i \Delta x_i < \delta \sum_i [f(x_i) - f(x_{i-1})] = \delta [f(b) - f(a)] = \varepsilon$$

bo'ladi. Bundan o'z navbatida 1-teoremaga ko'ra funktsiyaning integrallanuvchiligi kelib chiqadi.

Aniq integralni bevosita (4) formula bilan hisoblash ancha murakkab, chunki ayrim funktsiyalar uchun integral yig'indini limitni hisoblash mumkin bo'ladigan darajada ixchamlab bo'lmasligi mumkin. Eslatish lozimki, Arximed o'zining masalasini shunga o'xshash usulda hal qilgan. Hisoblash uchun eng qulay usulni XVII asrga kelib, Nyuton va

Leybnitslar topganlar. Ularning usuli boshlang'ich funktsiyani topish masalasigaasoslanadi.

Faraz qilaylik, $[a,b]$ oraliqda uzluksiz bo'lgan $y=f(x)$ funktsiya shu oraliqda integrallanuvchi va uning $F(x)$ boshlang'ich funktsiyasi mavjud bo'lsin.

$[a,b]$ kesmani ixtiyoriy ravishda

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$$

nuqtalar bilan n ta bo'lakka bo'lamiz va

$$x_1-x_0=\Delta x_1, x_2-x_1=\Delta x_2,\ldots,x_n-x_{n-1}=\Delta x_n,$$

deb belgilaymiz. U holda

$$\begin{aligned} F(b)-F(a)&=F(x_n)-F(x_0)=F(x_n)-F(x_{n-1})+\\ &+F(x_{n-1})-\ldots-F(x_1)+F(x_1)-F(x_0)=\sum_{i=1}^{n}[F(x_i)-\\ &-F(x_{i-1})]=\sum_{i=1}^{n}F'(\xi_i)(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\to\int_a^b f(x)dx, \end{aligned} \tag{6}$$

bu yerda biz $F(x)$ funktsiyaga Lagranjning o'rta qiymat haqidagi teoremasini qo'lladik.

Demak,

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a) \tag{7}$$

ekan. Bu formula aniq integralni hisoblashning Nyuton-Leybnits formulasi, deb ataladi.

3-§. Aniq integralning xossalari

Biz shu paytgacha $[a,b]$ oraliqda $a<b$ deb, ya'ni x bu oraliqda Ox o'qining musbat yo'nalishi bo'ylab o'zgaradi, deb tushunib keldik. Agar shu oraliqda $a>b$ bo'lsa, x o'z qiymatlarini Ox o'qining yo'nalishiga teskari yo'nalishda, ya'ni kamayish tartibidaqabul qiladi, deb tushunamiz. Shu ma'noda $[a,b]$ va $[b,a]$ kesmalar sonli to'plam sifatida bir xil bo'lsa ham har xil yo'nalgan kesmalar ekan.

Yuqorida aniq integralga ta'rif berilganda $[a,b]$ oraliqda $a<b$ deb faraz qilingan. Teskari yo'nalgan $[b,a]$ kesma uchun ham aniq integralga o'sha tartibdata'rif bersabo'ladi, faqat bo'linish nuqtalari

$$x_0=a>x_1>x_2>\ldots>x_{n-1}>x_n=b$$

tartibdajoylashgani uchun integral yig'indida

$$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}<0$$

bo'ladi. Shuni hisobigaquyidagi xossao'rinli:

1^0. Agar $y=f(x)$ funktsiya $[a,b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'lsa, u holda u $[b,a]$ kesmada ham integrallanuvchi bo'ladi va ular

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

munosabatdabo'ladilar.

Bundan xususan

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

ekanligi kelib chiqadi.

2⁰. O'zgarmas ko'paytuvchini aniq integral belgisidan tashqariga chiqarish mumkin:

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

Isboti.

$$\int_a^b kf(x)dx = \lim_{\max \Delta x_j \to 0} \sum_{i=1}^{n} kf(\xi_i)\Delta x_i =$$

$$= k \lim_{\max \Delta x_j \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = k\int_a^b f(x)dx$$

3⁰. Bir nechta funktsiyaning algebraik yig'indilarining aniq integrali qo'shiluvchilar integralining yig'indisiga teng (ikki qo'shiluvchi bo'lgan hol bilan chegaralanamiz):

$$\int_a^b [f(x) \pm \varphi(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b \varphi(x)dx .$$

Isboti 2^0-xossaga o'xshash bajariladi.

4⁰. Agar $f(x)$ funktsiya $[a,b]$, $[a,c]$ va $[c,b]$ oraliqlarning kichiklarida integrallanuvchi bo'lsa, u kattasida ham integrallanuvchi bo'ladi va

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \qquad (1)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isboti. Umumiylikni buzmagan holda $a < c < b$, deb faraz qilamiz. U holda teorema shartiga ko'ra funktsiya $[a,c]$ va $[c,b]$ oraliqlarda integrallanuvchi bo'ladi.

$[a,b]$ ni bo'laklarga shunday bo'lamizki, s nuqta bo'luvchi nuqtalardan biri bo'lsin. U holda

$$\sum_a^b \omega\Delta x = \sum_a^c \omega\Delta x + \sum_c^b \omega\Delta x$$

bo'ladi, bu yerda $\sum_a^c \omega\Delta x$ belgi funktsiyaning $[a,c]$ oraliqdagi integral yig'indisini bildiradi. Agar bu tenglikda limitga o'tsak, o'ng tomonining limiti mavjudligidan chap tomonining ham limiti mavjudligi, ya'ni funktsiyaning $[a,b]$ da integrallanuvchi ekanligi va (1) tenglik kelib chiqadi.

5^0. Agar $f(x)$ funktsiya $[a,b]$ oraliqda integrallanuvchi va manfiy bo'lmasa, $a<b$ bo'lgan hol uchun

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

6^0. Agar $f(x), g(x)$ funktsiyalar $[a,b]$ oraliqda integrallanuvchi va barcha $x \in [a,b]$ lar uchun $f(x) \leq g(x)$ bo'lsa, u holda $a<b$ bo'lgan hol uchun

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Buni isbot qilish uchun 5^0-xossani $g(x)-f(x)$ ayirmaga qo'llash kifoya.

7^0. $[a,b](a<b)$ oraliqda integrallanuvchi har qanday $f(x)$ funktsiya uchun

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

munosabat o'rinli.

Buning isboti barcha $x \in [a,b]$ uchun $f(x) \leq |f(x)|$ ekanligidan va 6^0-xossadan kelib chiqadi.

8^0. $[a,b](a<b)$ oraliqda integrallanuvchi $f(x)$ funktsiya uchun shu oraliqda

$$m \leq f(x) \leq M \qquad (2)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Buning isboti (2) ga 6^0-xossani qo'llash natijasida kelib chiqadi.

9^0. Agar $[a,b]$ $(a<b)$ oraliqda integrallanuvchi $f(x)$ funktsiya uchun shu oraliqda (2) tengsizlik bajarilsa, u holda shunday μ, $m \leq \mu \leq M$ son topiladiki,

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$$

bo'ladi. Bu xossa o'rta qiymat xaqidagi teorema, deb yuritiladi.

Bunday deb atalishiga sabab, agar funktsiya uzluksiz bo'lsa, Veyershtrass teoremasiga ko'ra m, M funktsiyaning mos ravishda eng kichik va eng katta qiymatlari bo'ladi. U holda Boltsano-Koshi teoremasiga ko'ra funktsiya o'zining oraliq μ qiymatini $[a,b]$ oraliqning qandaydir ichki s nuqtasida qabul qiladi, ya'ni

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a).$$

4-§. Yuqori chegarasi o'zgaruvchi bo'lgan integral

Agar $y=f(x)$ funktsiya $[a,b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'lsa, u $[a,b]$ oraliqdan olingan har qanday x uchun $[a,x]$ da ham integrallanuvchi bo'ladi. Aniq integralning yuqori chegarasi b ni x ga almashtirib,

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt \tag{1}$$

ifodaga kelamiz, bu yerda anglashilmovchilikdan saqlanish maqsadida integral ostidagi o'zgaruvchini almashtirdik. Bu ifoda x ning funktsiyasi bo'lishi ayon. Bu funktsiyauchun quyidagi xossalar o'rinli.

1^0. Agar $f(x)$ funktsiya $[a,b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'lsa, $\Phi(x)$ funktsiyashu oraliqda uzluksiz bo'ladi.

Isboti. x ga $\Delta x=h$ orttirmani $x+h\in(a,b)$ bo'ladigan qilib bersak:

$$\Phi(x+h)=\int_a^{x+h} f(t)dt=\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+h} f(t)dt$$

yoki

$$\Phi(x+h)-\Phi(x)=\int_x^{x+h} f(t)dt$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Bu integralga o'rta qiymat haqidagi teoremani (9^0-xossani) qo'llasak:

$$\Phi(x+h)-\Phi(x)=\mu h \tag{2}$$

hosil bo'ladi, bu yerda, $m\le m_1\le\mu\le M_1\le M$, m,M - funktsiyaning $[a,b]$ oraliqdagi va m_1,M_1— funktsiyaning $[x,x+h]$ oraliqdagi eng kichik va eng katta qiymatlaridir.

Agar (2) da $h\to 0$ da limitga o'tsak:

$$\Delta\Phi=\Phi(x+h)-\Phi(x)\to 0$$

bo'ladi. Demak, $\Phi(x)$ funktsiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz ekan.

2^0. Agar $f(t)$ funktsiya $t=x$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda shu nuqtada $\Phi(x)$ funktsiya differentsiallanuvchi va $\Phi'(x)=f(x)$ bo'ladi.

Isboti. Aniq integralning 9^0-xossasiga berilgan izohga ko'ra $[x,x+h]$ oraliqda shunday s nuqta topiladiki,

$$\Phi(x+h)-\Phi(x)=\int_x^{x+h} f(t)dt=f(c)\cdot h \tag{3}$$

tenglikni yozish mumkin. $f(t)$ funktsiyaning $t=x$ nuqtadauzluksizligidan, agar (3) da $h\to 0$ da limitga o'tsak, $c\to x$ va

$$\Phi'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}=\lim_{c\to x}f(c)=f(x)$$

bo'ladi.

Demak, (1) integral $f(x)$ funktsiyaning boshlang'ichi ekan. Shu sababli, $x \in [a,b]$ lar uchun

$$\int f(x)dx = \int_a^x f(t)dt + C,$$

deyish mumkin.

Agar $F(x)$ $f(x)$ funktsiyaning boshqa biror boshlang'ichi bo'lsa, u holda

$$\Phi(x) = F(x) + C$$

bo'ladi. Agar bu tenglikda $x = a$ desak:

$$0 = \Phi(a) = F(a) + C.$$

Bundan $C = -F(a)$. U holda

$$\Phi(x) = F(x) - F(a).$$

Agar $x = b$ desak:

$$\Phi(b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{4}$$

Biz bu formulani §2 daintegral yig'indilar yordamida keltirib chiqarib, uni Nyuton-Leybnits formulasi, deb atagan edik.

Demak, aniq integralni hisoblash uchun avval integral ostidagi funktsiyaning boshlang'ichini 10-bobda ko'rib chiqilgan usullarning biri bilan aniqlab, keyin unga(4) formulani qo'llash kerak ekan. Shu ma'noda Nyuton-Leybnits formulasini quyidagi ko'rinishda ham ishlatishadi:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a).$$

1-*misol.*

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

2-*misol.*

$$\int_0^\pi \sin x dx = -\cos x\Big|_0^\pi = 1 + 1 = 2.$$

5-§. Aniq integralni hisoblash usullari

1. Aniq integralda o'zgaruvchini almashtirish.

Bizga $\int_a^b f(x)dx$ aniq integral berilgan bo'lsin, bunda $f(x)$ funktsiya $[a,b]$ kesmada uzluksizdir.

$X=\varphi(t)$ deb yangi o'zgaruvchi kiritamiz, bunda $\varphi(t)$ va uning hosilasi $\varphi'(t)$ $[\alpha,\beta]$ kesmada uzluksiz bo'lsin.

Faraz qilaylik, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$ bo'lsin. Bu shartlar bajarilganda quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad (1)$$

Bu tenglikni isbotlash uchun (1) formulaning o'ng va chap qismlariga Nyuton-Leybnits formulasini qo'llaymiz:

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)|_a^b=F(b)-F(a);$$

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=F(\varphi(t))\,/_\alpha^\beta=F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))=F(b)-F(a).$$

Aniq integralni (1) formula bo'yicha hisoblaganda yangi o'zgaruvchidan eski o'zgaruvchiga qaytish kerak emas, balki eski o'zgaruvchining chegaralarini keyingi boshlang'ich funktsiyaga qo'yish kerak.

Misol.

1. $\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$ integralni hisoblang.

Yechish. $x+1=t^2$ deb almashtirsak, $x=t^2-1$, $dx=2tdt$ bo'ladi. Integrallashning yangi chegaralari $x=3$ bo'lganda $t=2$, $x=8$ bo'lganda $t=3$. U holda:

$$\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}=\int_2^3 \frac{(t^2-1)2tdt}{t}=2\int_2^3 (t^2-1)dt=$$

$$=2(\frac{t^3}{3}-t)|_2^3=2(6-\frac{2}{3})=\frac{32}{3};$$

2. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ integralni hisoblang.

Yechish. $x=\sin t$ deb almashtirsak, $dx=\cos tdt$, $1-x^2=\cos^2 t$ bo'ladi. Integrallashning yangi chegaralarini aniqlaymiz: $x=0$ bo'lganda $t=0$, $x=1$ bo'lganda $t=\pi/2$.

U holda

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx=\int_0^{\pi/2}\cos^2 tdt=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt=\frac{1}{2}(t+\frac{1}{2}\sin 2t)|_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{4}$$

3. Agar f juft ($f(-u)=f(u)$) bo'lsa, u holda

$$\int_{-a}^a f(u)du=2\int_0^a f(u)du.$$

Haqiqatan

$$\int_{-a}^{0} f(u)du = (u=-x) = -\int_{a}^{0} f(-x)dx =$$

$$= \int_{0}^{a} f(-x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(u)du$$

bo'lgani uchun

$$\int_{-a}^{a} f(u)du = \int_{-a}^{0} f(u)du + \int_{0}^{a} f(u)du =$$

$$= \int_{0}^{a} f(u)du + \int_{0}^{a} f(u)du = 2\int_{0}^{a} f(u)du.$$

4. Agar f toq ($f(-u) = -f(u)$) bo'lsa, u holda

$$\int_{-a}^{a} f(u)du = 0.$$

5. Agar f davri 2π bo'lgan davriy ($f(x+2\pi) = f(x)$) funktsiya bo'lsa, u holda

$$\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x)dx = \int_{0}^{2\pi} f(u)du.$$

Haqiqatan,

$$\int_{2\pi}^{2\pi+\lambda} f(x)dx = (x = t+2\pi) = \int_{0}^{\lambda} f(t+2\pi)dt = \int_{0}^{\lambda} f(t)dt = -\int_{\lambda}^{0} f(t)dt$$

bo'lgani uchun

$$\int_{\lambda}^{2\pi+\lambda} f(x)dx = \int_{\lambda}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{2\pi} f(x)dx + \int_{2\pi}^{2\pi+\lambda} f(x)dx = \int_{0}^{2\pi} f(x)dx.$$

6. $\int_{0}^{4\pi} \sin^3 t dt = \int_{0}^{2\pi} \sin^3 t dt + \int_{2\pi}^{4\pi} \sin^3 t dt = 2\int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 t dt = 0.$

2. Aniq integralni bo'laklab integrallash.

Faraz qilaylik, $u(x)$ va $\upsilon(x)$ funktsiyalar $[a, b]$ kesmada differentsiallanuvchi funktsiyalar bo'lsin. U holda: $(u\upsilon)' = u'\upsilon + u\upsilon'$.

Bu tenglikning ikkala tomonini a dan b gacha bo'lgan oraliqda integrallaymiz.

$$\int_{a}^{b} (u\upsilon)'dx = \int_{a}^{b} u'\upsilon dx + \int_{a}^{b} u'\upsilon dx. \qquad (2)$$

Lekin $\int (u\upsilon)'dx = u\upsilon + C$ bo'lgani sababli

$$\int (u\upsilon)'dx = u\upsilon \big|_a^b.$$

Demak, (2) tenglikni quyidagi ko'rinishdayozish mumkin:

$$uv|_a^b = \int_a^b v du + \int_a^b u dv$$
$$\int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du \qquad (3)$$

Bu formula aniq integralni bo'laklab integrallash formulasi, deyiladi.

Misol.

1. $\int_0^1 \operatorname{arctg} x dx$ integral hisoblansin.

$$\int_0^1 \operatorname{arctg} x dx = \left| \begin{matrix} u = \operatorname{arctg} x & du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx & v = x \end{matrix} \right| = x \operatorname{arctg} x |_0^1 -$$
$$-\int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} 1 - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$$

2. $\int_0^1 xe^{-x}dx$ integral hisoblansin.

$$\int_0^1 xe^{-x}dx = \left| \begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = e^{-x}dx & v = -e^{-x} \end{matrix} \right| = -xe^{-x}|_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx =$$
$$= -e^{-1} - e^{-x}|_0^1 = -e^{-1} - e^{-1} + 1 = 1 - \frac{2}{e};$$

Eslatma. Ba'zi integrallarni hisoblashda bo'laklab integrallash formulasini bir necha marta qo'llash mumkin.

6-§. Xosmas integrallar

Chekli $[a,b)$ yarim intervalda berilgan f funktsiya ixtiyoriy $b'<b$ uchun $[a,b']$ oraliqda integrallanuvchi va b nuqta atrofida chegaralanmagan bo'lsin. U holda f $[a,b)$ da va demak, $[a,b]$ da ham Riman ma'nosida integrallanuvchi emas, chunki 2-§ dagi 2-teoremaga ko'ra funktsiya berilgan oraliqda integrallanuvchi bo'lishi uchun u shu oraliqda chegaralangan bo'lishi zarur edi. Lekin quyidagi:

$$\lim_{b'\to b}\int_a^{b'} f(x)dx$$

chekli limit mavjud bo'lishi mumkin. Agar shunday bo'lsa, bu limitni f funktsiyaning $[a,b]$ oraliqdagi xosmas integrali, deb atab, quyidagicha yozamiz:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{b'\to b}\int_a^{b'} f(x)dx. \qquad (1)$$

Bunday hollarda $\int_a^b f(x)dx$ xosmas integral yaqinlashadi, aks holda, u uzoqlashadi deyiladi.

6.1. Chegaralari cheksiz bo'lgan integrallar

Faraz qilaylik, f funktsiya $[a,\infty)$ yarim o'qdaberilib, har qanday $a<b'<\infty$ uchun $[a,b']$ oraliqdaintegrallanuvchi bo'lsin. Agar

$$\lim_{b'\to\infty}\int_a^{b'} f(x)dx \qquad (2)$$

chekli limit mavjud bo'lsa, uni f funktsiyaning $[a,\infty)$ yarim o'qdagi xosmas integrali deymiz:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx=\lim_{b'\to\infty}\int_a^{b'} f(x)dx.$$

Bunda xosmas integral yaqinlashadi deyiladi. Agar (2) limit chekli bo'lmasa, u holda xosmas integral uzoqlashadi, deyishadi.

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^{b} f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{c} f(x)dx+\int_c^{\infty} f(x)dx$$

ko'rinishdagi xosmas integrallar ham aynan shunday ta'riflanadi. Oxirgi tenglikda o'ng tomonda turgan integrallarning har biri yaqinlashuvchi bo'lsa, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ yaqinlashuvchi bo'ladi.

1-*misol.* $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ ni hisoblang.

Yechish.

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to+\infty}\int_0^{b}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}x\Big|_0^b=\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}b=\frac{\pi}{2}.$$

2-*misol.* $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ ni hisoblang.

Yechish. Ta'rifga ko'ra

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{x^\alpha}.$$

Agar $\alpha\neq 1$ bo'lsa,

$$\int_1^{b}\frac{dx}{x^\alpha}=\frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\Big|_1^b=\frac{1}{1-\alpha}(b^{1-\alpha}-1)$$

bo'ladi. Shuning uchun

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{1-\alpha}(b^{1-\alpha}-1).$$

Bu yerda uch xil holat yuz berishi mumkin:

1) agar $\alpha>1$ bo'lsa, u holda $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\frac{1}{1-\alpha}$, ya'ni integral yaqinlashadi.

2) agar $\alpha<1$ bo'lsa, u holda $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\infty$, ya'ni integral uzoqlashadi.

3) agar $\alpha=1$ bo'lsa, u holda $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\ln x\Big|_1^{+\infty}=\infty$, ya'ni integral uzoqlashadi.

Ko'pincha ayrim masalalarda xosmas integralning aniq qiymatini emas, balki uning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligini bilish va uni baholash yetarli bo'ladi. Quyidagi teoremalar aynan shu maqsadga xizmat qiladi:

1-teorema. *Agar barcha* $x\geq a$ *lar uchun*

$$0\leq f(x)\leq g(x) \tag{3}$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda

$$\int_a^{+\infty}g(x)dx \tag{4}$$

integralning yaqinlashuvchiligidan

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx \tag{5}$$

integralning yaqinlashuvchiligi va aksincha (5) ning uzoqlashuvchiligidan (4) ning uzoqlashuvchiligi kelib chiqadi.

Isboti. (3) ga binoan har qanday $a<b<+\infty$ uchun

$$\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx \tag{6}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Agar (4) integral yaqinlashsa, u holda (6) ning o'ng tomoni yuqoridan (4) integral qiymatiga teng bo'lgan son bilan chegaralangan bo'ladi. b ning ortishi bilan (6) ning chap tomoni monoton kamaymaydigan bo'lgani uchun uning limiti mavjud va

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^{+\infty}g(x)dx$$

bo'ladi. Teoremaning ikkinchi qismi aynan shunday isbot qilinadi.

Natija. Agar $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ integral yaqinlashsa, u holda $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ integral ham yaqinlashadi.

Bunday integrallarni absolyut yaqinlashuvchi integrallar, deb atashadi.

3-*misol.* $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^3}dx$ integralni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Barcha $x\in[1,+\infty)$ uchun $\left|\frac{\sin x}{x^3}\right|\le\left|\frac{1}{x^3}\right|$. Lekin

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3}=-\frac{1}{2x^2}\Big|_1^{+\infty}=\frac{1}{2}.$$

U holda

$$\int\limits_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x^3}\right|dx$$

integral yaqinlashadi. Demak, berilgan integral absolyut yaqinlashar ekan.

2-teorema. *Agar (4) va (5) integral ostidagi funktsiyalar musbat va*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=A>0 \qquad (7)$$

limit mavjud bo'lsa, u holda (4) va (5) integrallar bir vaqtda yaqinlashadi yoki uzoqlashadi.

Isboti. (7) ning mavjudligidan ixtiyoriy musbat $\varepsilon<A$ son uchun shunday $c\in[a,+\infty)$ topiladiki, $c<x<+\infty$ lar uchun

$$A-\varepsilon<\frac{f(x)}{g(x)}<A+\varepsilon$$

bo'lishi kelib chiqadi. $g(x)>0$ bo'lgani uchun

$$(A-\varepsilon)g(x)<f(x)<(A+\varepsilon)g(x) \quad (c<x<+\infty). \qquad (8)$$

U holda

$$\int\limits_a^{+\infty}g(x)dx$$

integralning yaqinlashuvchiligidan $\int\limits_c^{+\infty}g(x)dx$ integralning yaqinlashuvchiligi va $\int\limits_c^{+\infty}(A+\varepsilon)g(x)dx$ integralning yaqinlashuvchiligi kelib chiqadi. Bundan 1-teoremaga ko'ra $\int\limits_c^{+\infty}f(x)dx$ integral va demak, $\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx$ integral yaqinlashadi.

Teskarisi (7) gamonand

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{1}{A}>0$$

tenglikka asosan aynan yuqoridagidek isbot qilinadi.

4-*misol.* $\int\limits_1^{\infty}\frac{x-1}{x}e^{-x}dx\approx\int\limits_1^{\infty}e^{-x}dx<\infty$.

6.2. Uzlukli funktsiyaning integrali

Bizga $[a,c)$ yarim intervalda aniqlangan va uzluksiz, $x=c$ nuqtada esa yo aniqlanmagan yo uzlukli $y=f(x)$ funktsiya berilgan bo'lsin. Bunday funktsiya uchun $\int\limits_a^c f(x)dx$ integralni integral yig'indilar limiti sifatida ta'riflab bo'lmaydi, chunki bu limit mavjud bo'lmasligi mumkin.

Barcha $a<b<c$ lar uchun $\int\limits_a^b f(x)dx$ mavjud, shu sababli $\int\limits_a^c f(x)dx$ integralni xosmas integral deb, quyi-dagichatushunish mumkin:

$$\int\limits_a^c f(x)dx = \lim_{b\to c-0}\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Agar bu tenglikning o'ng tomoni mavjud vachekli bo'lsa, bu xosmas integral yaqinlashuvchi, aks holdauzoqlashuvchi, deyiladi.

Agar $y=f(x)$ funktsiya $[a,b]$ oraliqning $x=a$ nuqtasidauzlukli bo'lsa, u holda $\int\limits_a^b f(x)dx$ xosmas integralni quyidagi ma'noda tushunamiz:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{a'\to a}\int\limits_{a'}^b f(x)dx.$$

Agar $y=f(x)$ funktsiya $[a,b]$ oraliqning ichki $x=c$ nuqtasidauzlukli bo'lsa, u holda $\int\limits_a^b f(x)dx$ xosmas integralni quyidagicha tushunamiz:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx,$$

agar tenglikning o'ng tomonidagi xosmas integrallar bir vaqtda yaqinlashuvchi bo'lsa, $\int\limits_a^b f(x)dx$ xosmas integral ham yaqinlashadi va agar o'ng tomondagi integrallarning loaqal bittasi uzoqlashsa, $\int\limits_a^b f(x)dx$ xosmas integral uzoqlashadi, deymiz.

5-*misol.* $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ (α > 0 –o'zgarmas son) integral ostidagi funktsiya $x=0$ nuqtadauzlukli. Quyidagi limitni hisoblaymiz:

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\int\limits_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{1-\alpha}\left(1-\varepsilon^{1-\alpha}\right) = \begin{cases}\dfrac{1}{1-\alpha}, \alpha<1,\\ \infty, \alpha>1\end{cases}$$

Agar α=1 bo'lsa,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = -\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\varepsilon = +\infty,$$

ya'ni berilgan integral α≥1 lar uchun uzoqlashadi va α<1 bo'lsa, yaqinlashadi.

6-*misol.* $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ integralni hisoblang.

Yechish. Integral ostidagi funktsiya integrallash oralig'ining ichki $x=0$ nuqtasida uzlukli, shuning uchun uni quyidagichaifodalab olamiz:

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to-0}\int_{-1}^{b}\frac{dx}{x^2}+\lim_{a\to+0}\int_{a}^{1}\frac{dx}{x^2}.$$

Bu yerda,

$$\lim_{b\to-0}\int_{-1}^{b}\frac{dx}{x^2}=-\lim_{b\to-0}\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{b}=-\lim_{b\to-0}\left(\frac{1}{b}+1\right)=\infty,$$

ya'ni birinchi integral $[-1;0]$ oraliqda uzoqlashadi va

$$\lim_{a\to+0}\int_{a}^{1}\frac{dx}{x^2}=-\lim_{a\to+0}\left(1-\frac{1}{a}\right)=\infty,$$

ya'ni ikkinchi integral $[0;1]$ oraliqda uzoqlashadi. Demak, berilgan integral $[-1;1]$ oraliqda uzoqlashuvchi ekan.

Agar berilgan integralni integral ostidagi funktsiyaning uzilish nuqtasiga e'tibor bermay hisoblaganimizda, quyidagi xato natijaga kelgan bo'lar edik:

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1}=-(1+1)-2\cdot$$

Eslatma. Chegaralaridan biri cheksiz bo'lgan integrallar uchun keltirilgan teoremalarning barchasi uzlukli funktsiyalarning xosmas integrallari uchun ham o'rinli.

7-*misol.* $\int_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{x^{\alpha}}dx$ $(\alpha>0)$ integral ostidagi funktsiya quyi chegarada uzlukli. Shuning uchun uni quyidagichayozib olamiz:

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{x^{\alpha}}dx=\int_{0}^{1}\frac{\sin x}{x^{\alpha}}dx+\int_{1}^{\infty}\frac{\sin x}{x^{\alpha}}dx$$

Birinchi integral ostida musbat funktsiya turibdi, shu sababli u yo uzoqlashadi yoki yaqinlashsaham absolyut yaqinlashadi. Ma'lumki, $x\in(0,1]$ lar uchun

$$\frac{2}{\pi}x^{1-\alpha}\le\frac{\sin x}{x^{\alpha}}\le x^{1-\alpha}.$$

U holda

$\alpha< 2$ lar uchun $\int_{0}^{1}\frac{\sin x}{x^{\alpha}}dx\le\int_{0}^{1}x^{1-\alpha}dx<\infty$, yaqinlashadi,

$\alpha\ge 2$ lar uchun $\int_{0}^{1}\frac{\sin x}{x^{\alpha}}dx\ge\frac{2}{\pi}\int_{0}^{1}x^{1-\alpha}dx=\infty$, uzoqlashadi.

Ikkinchi integral (3-misolgaqarang) $\alpha > 0$ lar uchun yaqinlashadi va $\alpha > 1$ lar uchun faqat absolyut yaqinlashadi. Demak, berilgan integral $0 < \alpha \le 1$ lar uchun shartli yaqinlashadi, $1< \alpha < 2$ lar uchun absolyut yaqinlashadi va $\alpha \ge 2$ lar uchun uzoqlashar ekan.

12-BOB.

ANIQ INTEGRALNING TATBIQLARI. TAQRIBIY HISOBLASH USULLARI

1-§. Tekis shakllar yuzini hisoblash

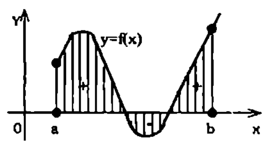
1.1. Dekart koordinatalar tekisligida yuzalarni hisoblash

Avvalgi bobdan ma'lumki, agar $[a, b]$ kesmadafunktsiya $f(x)\geq 0$ bo'lsa, u holda $y=f(x)$ egri chiziq, OX o'qi va $x=a$ hamda $x=b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuzi

$$S=\int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

ga teng edi. Agar $[a, b]$ kesmada $f(x)\leq 0$ bo'lsa, u holda aniq integral $\int_a^b f(x)dx\leq 0$ bo'ladi. Absolyut qiymatiga ko'ra bu integralning qiymati ham tegishli egri chiziqli trapetsiyaning yuziga teng:

$$S=\left|\int_a^b f(x)dx\right| \tag{1'}$$



99-rasm.

Agar $f(x)$ funktsiya $[a, b]$ kesmada ishorasini chekli son marta o'zgartirsa, u holda integralni butun $[a, b]$ kesmada qismiy kesmachalar bo'yicha integrallar yig'indisiga ajratamiz. $f(x)>0$ bo'lgan kesmalarda integral musbat, $f(x)<0$ bo'lgan kesmalardaintegral manfiy bo'ladi. Butun kesma bo'yicha olingan integral OX o'qidan yuqorida va pastda yotuvchi shakllar yuzining tegishli algebraik yig'indisini beradi (99-rasm). Yuzalar yig'indisini odatdagi ma'noda hosil qilish uchun yuqorida ko'rsatilgan kesmalar bo'yicha olingan integrallar absolyut qiymatlari yig'indisini topish yoki

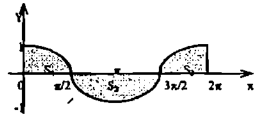
$$S=\int_a^b |f(x)|dx \tag{1''}$$

integralni hisoblash kerak.

Agar $y_1=f_1(x)$ va $y_2=f_2(x)$ egri chiziqlar hamda $x=a$ va $x=b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan shaklning yuzini hisoblash kerak bo'lsa, u holda $f_1(x)\geq f_2(x)$ shart bajarilgan shaklning yuzi quyidagiga teng:

$$S=\int_a^b (f_1(x)-f_2(x))dx. \qquad (2)$$

1-*misol.* $y=\cos x$, $y=0$ chiziqlar bilan chegaralangan shaklning yuzi hisoblansin, bunda $x\in[0,2\pi]$.



100-rasm.

Yechish. $x\in[0,\pi/2]$ va $x\in[3\pi/2,2\pi]$ da $\cos x\geq 0$ hamda $x\in[\pi/2,3\pi/2]$ da $\cos x\leq 0$ bo'lgani uchun

$$S=\int_0^{2\pi}|\cos x|\,dx=\int_0^{\pi/2}\cos x dx+\left|\int_{\pi/2}^{3\pi/2}(-\cos x)dx\right|+$$

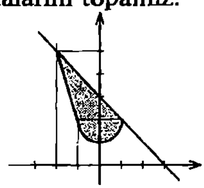
$$+\int_{3\pi/2}^{2\pi}\cos x dx=\sin x|_0^{\pi/2}+|\sin x||_{\pi/2}^{3\pi/2}+\sin x|_{3\pi/2}^{2\pi}=\sin\frac{\pi}{2}-$$

$$-\sin 0+\left|\sin\frac{3\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{2}\right|+\sin 2\pi-\sin\frac{3\pi}{2}=1+|-1-1|-(-1)=4$$

Demak, s=4(kv.birlik) ekan.

2-*misol.* $y=x^2+1$ va $y=3-x$ chiziqlar bilan chegaralangan sohaning yuzini hisoblang.

Yechish. Shaklni yasash uchun avval ushbu $\begin{cases} y=x^2+1 \\ y=3-x \end{cases}$ sistemani yechib, chiziqlarning kesishish nuqtalarini topamiz.



101-rasm.

Bu chiziqlar $A(-2;5)$ va $V(1;2)$ nuqtalarda kesishadi. U holda

$$S=\int_{-2}^{1}(3-x)dx-\int_{-2}^{1}(x^2+1)dx=\int_{-2}^{1}(2-x-x^2)dx=$$

$$=(2x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3})|_{-2}^{1}=(2-\frac{1}{2}-\frac{1}{3})-(-4-\frac{4}{2}+\frac{8}{3})=\frac{9}{2}(\text{кв.бирл.}).$$

Endi, tenglamasi $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ parametrik ko'rinishda berilgan chiziq bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuzasini hisoblaymiz. Faraz qilaylik, bu tenglamalar $[a, b]$ kesmada biror $u=f(x)$ funktsiyani aniqlasin, bunda $t\in[\alpha,\beta]$ va $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$.

U holda egri chiziqli trapetsiyaning yuzini $S=\int_a^b y dx$ formula bo'yicha hisoblanish mumkin. Bu integralda o'zgaruvchini almashtiramiz: $x=\varphi(t)$, $dx=\varphi'(t)\ dt$, $y=f(x)=f(\varphi(t))=\psi(t)$.

Demak,

$$S=\int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt \qquad (3)$$

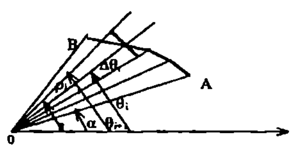
3-*misol.* $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ ellips bilan chegaralangan sohaning yuzi hisoblansin.

Yechish. Ellipsning yuqori yarim yuzini hisoblab, uni 2 ga ko'paytiramiz. $-a\le x\le +a$ uchun $-a=a\cos t$, $\cos t=-1$, $t=\pi$; $a=a\cos t$, $\cos t=1$, $t=0$

$$S=2\int_\pi^0 b\sin t(-a\sin t dt)=-2ab\int_\pi^0 \sin^2 t dt=\pi ab.$$

1.2. Tekis shakllar yuzini qutb koordinatalarda hisoblash

AB egri chiziq qutb koordinatalarida $\rho=f(\theta)$ formula bilan berilgan va $f(\theta)$ funktsiya $[\alpha,\beta]$ kesmadauzluksiz bo'lsin.



102-rasm.

Ushbu $\rho=f(\theta)$ egri chiziq va qutb o'qlari hamda α va β burchak hosil qiluvchi ikkita $\varphi=\alpha,\varphi=\beta$ nurlar bilan chegaralangan egri chiziqli sektorning yuzini aniqlaymiz. Buning uchun berilgan yuzani $\alpha=\theta_0,\theta=\theta_1,\dots,\theta=\theta_i,\dots,\theta_n=\beta$ nurlar bilan n ta ixtiyoriy qismga bo'lamiz. O'tkazilgan nurlar orasidagi burchaklarni $\Delta\theta_1,\Delta\theta_2,\dots,\Delta\theta_n$ bilan belgilaymiz. θ_{i-1} bilan θ_i orasidagi biror $\Delta\theta_i$ burchakka mos nurning uzunligini ρ_i orqali belgilaymiz. Radiusi ρ_i va markaziy burchagi $\Delta\theta_i$ bo'lgan doiraviy sektorni qaraymiz. Uning yuzi $\Delta S_i=\frac{1}{2}\overline{\rho_i^2\Delta\theta_i}$ bo'ladi.

Ushbu yig'indi

$$S_n=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \overline{\rho_i^2}\Delta\theta_i=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n [f(\overline{\theta_i})]^2\Delta\theta_i$$

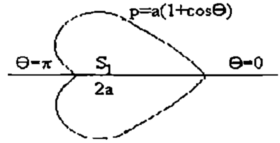
zinapoyasimon sektorning yuzini beradi.

Bu yig'indi $\alpha\le\theta\le\beta$ kesmada $\rho^2=[f(\theta)]^2$ funktsiyaning integral yig'indisi bo'lgani sababli uning limiti $\max\Delta\theta_i\to 0$ da $\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2 d\theta$ aniq integralga teng. Bu

$\Delta\theta_i$ burchak ichida qanday ρ_i nur olishimizga bog'liq emas. Demak, OAV sektorning yuzi:

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2 d\theta=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[f(\theta)]^2 d\theta \; . \qquad (4)$$

4-*misol*. $\rho=a(1+\cos\theta)$, $a>0$ kardioida bilan chegaralangan figuraning yuzini hisoblang.



103-rasm.

$$S=2S_1=2\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2 d\theta=\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2 d\theta,$$

$$S=\int_0^{\pi}a^2(1+\cos\theta)^2 d\theta=a^2\int_0^{\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta=$$

$$=a^2\int_0^{\pi}(\frac{3}{2}+2\cos\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta)d\theta=a^2(\frac{3}{2}\theta+2\sin\theta+$$

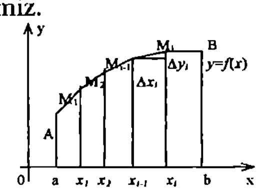
$$+\frac{1}{4}\sin 4\theta)|_0^{\pi}=\frac{3}{2}\pi a^2; S=\frac{3}{2}\pi a^2(kv.birl.)$$

2-§. Egri chiziq yoyining uzunligi

2.1. Yoy uzunligini dekart koordinatalar sistemasida hisoblash

To'g'ri burchakli dekart koordinatalar tekisligida egri chiziq $u=f(x)$ tenglamabilan berilgan bo'lsin.

Bu egri chiziqning $x=a$ va $x=b$ vertikal to'g'ri chiziqlar orasidagi AB yoyining uzunligini topamiz.



104-rasm.

AB yoyda abstsissalari $a=x_0$, x_1, $x_2,\ldots$, $x_i,\ldots$, $x_n=b$ bo'lgan A, M_1, $M_2,\ldots$, $M_i,\ldots$, B nuqtalarni olamiz va AM_1, $M_1M_2,\ldots$, $M_{n-1}B$ vatarlarni o'tkazamiz, ularning uzunliklarini mos ravishda $\Delta S_1,\Delta S_2,\ldots,\Delta S_n$ bilan belgilaymiz.

AB yoy ichiga chizilgan siniq chiziqning uzunligi $S_n=\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i$ bo'lgani uchun AB yoyning uzunligi

$$S = \lim_{\max \Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i \qquad (1)$$

Faraz qilaylik, $f(x)$ funktsiya va uning $f'(x)$ hosilasi $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lsin. U holda

$$\Delta S_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + (\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i})^2} \cdot \Delta x_i$$

yoki Lagranj teoremasiga asosan

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i),$$

bunda $x_{i-1} < \xi_i < x_i$ bo'lgani uchun

$$\Delta S_i = \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \Delta x_i$$

bo'ladi. Ichki chizilgan siniq chiziqning uzunligi esa

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \Delta x_i .$$

Shartga ko'ra, $f'(x)$ funktsiya uzluksiz, demak, $\sqrt{1+(f'(x))^2}$ funktsiya ham uzluksizdir. Shuning uchun integral yig'indining limiti mavjud va u quyidagi aniq integralga teng:

$$S = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx .$$

Demak, yoy uzunligini hisoblash formulasi:

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2} dx \qquad (2)$$

ekan.

Endi egri chiziq tenglamasi

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ \alpha \le t \le \beta \qquad (3)$$

parametrik ko'rinishda berilgan bo'lsin, bunda $\varphi(t)$ va $\psi(t)$ uzluksiz hosilali uzluksiz funktsiyalar va $\varphi^1(t)$ berilgan oraliqda nolga aylanmaydi.

Bu holda (3) tenglama biror $u=f(x)$ funktsiyani aniqlaydi. Bu funktsiya uzluksiz bo'lib, $\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ uzluksiz hosilaga ega. $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$ bo'lsin.

(2) integ-ralda $x=\varphi(t)$, $dx=\varphi'(t)\ dt$ almashtirish bajaramiz. U holda

$$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + (\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)})^2} \cdot \varphi'(t) dt \quad \text{ёки} \quad S = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt . \qquad (4)$$

Agar egri chiziq fazoda

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\chi(t) \qquad (5)$$

parametrik tenglamalar bilan berilgan va $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ funktsiyalar $[\alpha, \beta]$ kesmada uzluksiz hamda uzluksiz hosilalarga ega bo'lsa, egri chiziq aniq limitlarga ega bo'ladi va u

$$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2} dt \qquad (6)$$

formula bilan aniqlanadi.

2.2. Yoy uzunligini qutb koordinatalar sistemasida hisoblash

Qutb koordinatalar sistemasida egri chiziqning tenglamasi

$$\rho = f(\theta) \tag{7}$$

bo'lsin. Qutb koordinatalaridan Dekart koordinatalariga o'tish formulasi: $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$ yoki (7) dan foydalansak:

$$x=f(\theta)\cos\theta,\ y=f(\theta)\sin\theta.$$

Bu tenglamalarga egri chiziqning parametrik tenglamalari deb qarab, yoy uzunligini hisoblash uchun (4) formulani tatbiq qilamiz:

$$\frac{dx}{d\theta}=f'(\theta)\cos\theta-f(\theta)\sin\theta,\quad \frac{dy}{d\theta}=f'(\theta)\sin\theta+f(\theta)\cos\theta.$$

U holda

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2=(f'(\theta))^2+(f(\theta))^2=\rho'^2+\rho^2.$$

Demak,

$$S=\int_{\theta_0}^{\theta_1}\sqrt{\rho'^2+\rho^2}\,d\theta. \tag{8}$$

1-*misol.* $x^2+u^2=r^2$ aylanauzunligi hisoblansin.

Yechish. Dastlab aylananing 1-chorakda yotgan to'rtdan bir qismining uzunligini hisoblaymiz. U holda AV yoyning tenglamasi

$$y=\sqrt{r^2-x^2},\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}};$$

$$\frac{1}{4}S=\int_0^r\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}dx=\int_0^r\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}dx=r\cdot\arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^2=r\cdot\frac{\pi}{2};$$

Butun aylananing uzunligi: $S=2\pi r$,

2-*misol.* $\rho=a(1+\cos\theta)$ kardioidaning uzunligi topilsin. Kardioida qutb o'qiga nisbatan simmetrikdir. θ qutb burchagini 0 dan π gacha o'zgartirib, izlanayotgan uzunlikning yarmini topamiz (103-rasm). (8) formuladan foydalanamiz, bunda

$$\rho'=-a\sin\theta$$

$$S=2\cdot\int_0^\pi\sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta}\,d\theta=2a\int_0^\pi\sqrt{2+2\cos\theta}\,d\theta=$$

$$=4a\cdot\int_0^\pi\cos\frac{\theta}{2}d\theta=8a\cdot\sin\frac{\theta}{2}\Big|_0^\pi=8a\cdot1=8a.$$

3-*misol.* $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, $0\le t\le 2\pi$, ellipsning uzunligi hisoblansin, bunda $a>b$.

Yechish. (4) formuladan foydalanamiz. Avval yoy uzunligining 1/4 qismini hisoblaymiz.

$$\frac{S}{4}=\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt=\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2(1-\cos^2 t)+b^2\cos^2 t}\,dt=$$
$$=\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\cos^2 t}\,dt=a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a}\cos^2 t}\,dt=$$
$$=a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\cos^2 t}\,dt$$

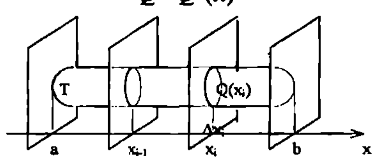
bunda $k=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}<1$. Demak, $S=4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\cos^2 t}\,dt$.

3-§. Aniq integralning jism hajmlarini hisoblashga qo'llanilishi

3.1. Jism hajmini parallel kesimlar yuzalari bo'yicha hisoblash

Biror T jism berilgan bo'lsin. Bu jismni OX o'qqa perpendikulyar tekislik bilan kesishdan hosil bo'lgan har qanday kesimning yuzi ma'lum, deb faraz qilamiz. Bu holda yuza kesuvchi tekislikning vaziyatiga bog'liq, ya'ni x ning funktsiyasi bo'ladi:

$$Q=Q(x)$$



105-rasm.

$Q(x)$ ni uzluksiz funktsiya, deb faraz qilib, berilgan jism hajmini aniqlaymiz.

$X=x_0=a$, $x=x_1$, $x=x_2,\dots$, $x=x_n=b$ tekisliklarni o'tkazamiz. Har bir $x_{i-1}\le x\le x_i$ qismiy oraliqda ixtiyoriy ξ_I nuqta tanlab olamiz va I ning har bir qiymati uchun yasovchisi x o'qiga parallel bo'lib, yo'naltiruvchisi T jismni $x=\xi_I$ tekislik bilan kesishdan hosil bo'lgan kesimning konturidan iborat bo'lgan tsilindrik jism yasaymiz. Asosining yuzi $Q(\xi_i)$ va balandligi Δx_i bo'lgan bunday elementar tsilindrning hajmi $Q(\xi_i)\Delta x_i$ ga teng. Hamma tsilindrlarning hajmi $v_n=\sum_{i=1}^{n}Q(\xi_i)\Delta x_i$ bo'ladi.

Bu yig'indining $\max\Delta x_i\to 0$ dagi limiti berilgan jismning hajmi, deyiladi: $V=\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}Q(\xi_i)\Delta x_i$.

V_n miqdor $[a, b]$ kesmada uzluksiz $Q(x)$ funktsiyaning integral yig'indisidir, shuning uchun limit mavjud va u

$$V=\int_a^b Q(x)dx \tag{1}$$

aniq integral bilan ifodalanadi.

Misol. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ellipsoidning hajmi hisoblansin.

Yechish. Ellipsoidni *OYZ* tekislikka parallel bo'lib undan *x* masofa uzoqlikdan o'tgan tekislik bilan kesganda yarim o'qlari

$b_1=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$, $c_1=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ bo'lgan $\frac{y^2}{(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}})^2}+\frac{z^2}{(c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}})^2}=1$ ellips hosil bo'ladi. Bu ellipsning yuzi: $Q(x)=\pi b_1c_1= =\pi bc\,(1-x^2/a^2)$.

Ellipsoidning hajmi:

$$v=\pi bc\int_{-a}^{a}(1-\frac{x^2}{a^2})dx=\pi bc(x-\frac{x^3}{3a^2})|_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi abc(kub.\,birl.).$$

3.2. Aylanma jismning hajmi

$y=f(x)$ egri chiziq *Ox* o'q va $x=a$, $x=b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning *OX* o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan jismni qaraylik. Bu jismni abstsissalar o'qiga perpendikulyar tekislik bilan kesishdan hosil bo'lgan ixtiyoriy kesim doira bo'ladi. Uning yuzi $Q=\pi y^2=\pi(f(x))^2$.

Hajmni hisoblashning (1) umumiy formulasini tatbiq etib, aylanma jismning hajmini hisoblash formulasini hosil qilamiz:

$$v=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_a^b(f(x))^2dx. \qquad (2)$$

Misol. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipsni *OX* va *OY* o'qlari atrofida aylantirish natijasida hosil qilingan jismlarning hajmlarini hisoblang.

Yechish. Ellips tenglamasidan:

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2);\quad x^2=\frac{a^2}{b^2}(b^2-y^2)$$

Ellipsni *OX* o'qi atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan jismning hajmi:

$$V=2V_1=2\pi\int_0^a y^2dx=2\pi\frac{b^2}{a^2}\int_0^a(a^2-x^2)dx=2\pi\frac{b^2}{a^2}(a^2x-\frac{x^3}{3})|_0^a=$$

$$=2\pi\frac{b^2}{a^2}(a^3-\frac{a^3}{3})=\frac{4}{3}\pi ab^2;\quad V=\frac{4}{3}\pi ab^2(\text{куб.бирл.}).$$

Ellipsni *OY* o'qi atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan jismning hajmi:

$$V=2V_1=2\pi\int_0^b x^2dy=2\pi\frac{a^2}{b^2}\int_0^b(b^2-y^2)dy=2\pi\frac{a^2}{b^2}(b^2y-\frac{y^3}{3})|_0^b=$$

$$=2\pi\frac{a^2}{b^2}(b^3-\frac{b^3}{3})=\frac{4}{3}\pi a^2b;\quad V=\frac{4}{3}\pi a^2b(kub.\,birl.).$$

4-§. Aniq integralning mexanika masalalariga tatbiqi

4.1. Ishni aniq integral yordamida hisoblash

Biror F kuch ta'siri ostida M moddiy nuqta OS to'g'ri chiziq bo'yicha harakat qilsin, bunda kuchning yo'nalishi harakat yo'nalishi bilan bir xil bo'lsin. M nuqta $S=a$ holatdan $S=b$ holatga ko'chganda F kuchning bajargan ishini topamiz.

1) Agar F kuch o'zgarmas bo'lsa, u holda A ish F kuch bilan o'tilgan yo'l uzunligi ko'paytmasi asosida ifodalanadi:

$$A=F\,(b-a)$$

2) F kuch moddiy nuqtaning joylashgan o'rnigaqarab uzluksiz o'zgaradi, ya'ni $[a,\ b]$ kesmada $F\ (S)$ uzluksiz funktsiyani ifodalaydi, deb faraz qilamiz.$[a,\ b]$ kesmani uzunliklari $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$ bo'lgan n ta ixtiyoriy bo'lakka bo'lamiz. Har bir $[S_{i-1},\ S_i]$ qismiy kesmada ixtiyoriy ξ_I nuqta tanlab olib, $F(S)$ kuchning ΔS_i yo'lda bajargan ishini $F(\xi_i)\Delta S_i$ ko'paytma bilan almashtiramiz. Oxirgi ifoda ΔS_i etarlicha kichik bo'lganda F kuchning ΔS_i yo'lda bajargan ishining taqribiy qiymatini beradi.

$$A \approx A_n = \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta S_i$$

yig'indi F kuchning $[a,b]$ kesmada bajargan ishining taqribiy ifodasi bo'ladi. Bu yig'indining $\max\Delta S_i \to 0$ dagi limiti $F(S)$ kuchning $S=a$ nuqtadan $S=b$ nuqtagacha bo'lgan yo'lda bajargan ishini ifodalaydi:

$$A = \int_a^b F(S)dS\,. \qquad (1)$$

Misol. Agar prujina 1 N kuch ostida 1 sm cho'zilishi ma'lum bo'lsa, uni 4 sm cho'zish uchun qancha ish bajarish kerak?

Yechish. Guk qonuniga ko'ra prujinani x m ga cho'zuvchi kuch $F=kx$; Agar $x=0{,}01$m va $F=1$N ekanligini hisobga olsak, u holda $k=F/x=1/0{,}01=100$ kelib chiqadi.

Demak, $F=100x$ ekan. Bajarilgan ish (1) formulaga asosan

$$A = \int_0^{0{,}04} 100x dx = 50x^2 \Big|_0^{0{,}04} = 0{,}08(c)$$

bo'ladi.

4.2. Inertsiya momentini aniq integral yordamida hisoblash

XOY tekisligida massalari $m_1,\ m_2,\ldots,\ m_n$ bo'lgan $P_1(x_1,y_1),\ P_1(x_2,y_2),\ldots,\ P_1(x_n,y_n)$ moddiy nuqtalar sistemasi berilgan bo'lsin. Mexanikadan ma'lumki, moddiy nuqtalar sistemasining O nuqtaga nisbatan inertsiya momenti:

$$J_0 = \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + y_i^2)m_i = \sum_{i=1}^{n} r_i^2 m_i\ , \qquad (2)$$

bu yerda, $r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$.

Faraz qilamiz, egri chiziq moddiy chiziqdan iborat bo'lib, u $y=f(x)$ tenglama bilan berilgan bo'lsin va $[a, b]$ kesmada $f(x)$ uzluksiz funktsiya bo'lsin. Egri chiziqning chiziqli zichligi γ ga teng bo'lsin. Bu chiziqni uzunliklari $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ bo'lgan n ta bo'lakka bo'lamiz, bunda $\Delta S_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}$, ularning massalari $\Delta m_1=\gamma\Delta S_1$, $\Delta m_2=\gamma\Delta S_2, \dots, \Delta m_n=\gamma\Delta S_n$ bo'lsin. Yoyning har bir qismida abstsissasi ξ_i va ordinatasi $\eta_i=f(\xi_i)$ bo'lgan nuqtalar olamiz. Yoyning 0 nuqtaga nisbatan inertsiya momenti:

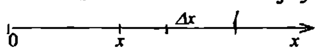
$$J_0 \approx \sum_{i=1}^{n} (\xi_i^2 + \eta_i^2)\gamma\Delta S_i \qquad (3)$$

bo'ladi. Agar $y=f(x)$ funktsiya va uning hosilasi $f'(x)$ uzluksiz bo'lsa, u holda $\Delta x_i \to 0$ da (3) yig'indi limitga ega va bu limit moddiy chiziqning inertsiya momentini ifodalaydi:

$$J_0 = \gamma\int_a^b (x^2 + f^2(x))\sqrt{1 + f'^2(x)}dx . \qquad (4)$$

1. Uzunligi l bo'lgan ingichka bir jinsli tayoqchaning (sterjenning) oxirgi uchiga nisbatan inertsiya momenti.

Tayoqchani OX o'q kesmasi bilan ustma-ust joylashtiramiz $0 \le x \le l$



106-расм.

Bu holda $\Delta S_i=\Delta x_i$, $\Delta m_i=\gamma\Delta x_i$, $r_i^2=x_i^2$ bo'ladi. (4) formula quyidagi ko'rinishni oladi:

$$J_{0c} = \gamma\int_0^l x^2 dx = \gamma\frac{l^3}{3} . \qquad (5)$$

Agar tayoqchaning massasi M berilgan bo'lsa, u holda $\gamma=M/l$ va (5) formula quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$J_{0c} = \frac{1}{3}Ml^2 . \qquad (6)$$

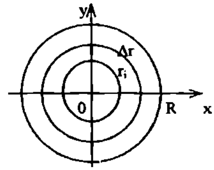
2. Radiusi r bo'lgan aylananing markazga nisbatan inertsiya momenti.

Aylananing barcha nuqtalari uning markazidan bir xil masofada bo'lgani va massasi $m=2\pi r\gamma$ bo'lgani uchun aylananing inertsiya momenti quyidagicha bo'ladi:

$$J_0=mr^2=\gamma 2\pi r r^2=2\pi r^3\gamma \qquad (7)$$

3. Radiusi R bo'lgan bir jinsli doiraning markaziga nisbatan inertsiya momenti.

Doirani n ta halqalarga ajratamiz (107-rasm). S-doira yuzi birligining massasi bo'lsin. Bitta halqani olib qaraymiz.



107-rasm.

Bu halqaning ichki radiusi r_i, tashqi radiusi $r_i+\Delta r_i$ bo'lsin. Bu halqaning massasi $\Delta m_i=\delta 2\pi r_i\Delta r_i$ ga teng bo'ladi. Bu massaning markazga nisbatan inertsiyamomenti (7)formulaga muvofiq taqriban quyidagiga teng bo'ladi:

$$(\Delta J_0)_i\approx\delta 2\pi r_i\Delta r_i r_i^2=\delta 2\pi r_i^3\Delta r_i.$$

Butun doiraning inertsiyamomenti:

$$J_0\approx\sum_{i=1}^{n}\delta 2\pi r_i^3\Delta r_i\cdot$$

$\Delta r_i\to 0$ da limitga o'tib, doira yuzining markazga nisbatan inertsiya momentini hosil qilamiz:

$$J_0=\delta 2\pi\int_0^R r^3dr=\pi\delta\frac{R^4}{2} \qquad (8)$$

Agar doiraning massasi M berilgan bo'lsa, u holda sirt zichligi δ $\delta=\frac{M}{\pi R^2}$ bo'ladi. Bu qiymatni (8) gaqo'ysak:

$$J_0=\frac{MR^2}{2}. \qquad (9)$$

Eslatma. Asos radiusi R vamassasi M bo'lgan doiraviy tsilindrning o'qqa nisbatan inertsiya momenti (9) formula bilan aniqlanadi.

4.3. Og'irlik markazining koordinatalarini hisoblash

XOY tekisligidamassalari m_1, m_2,..., m_n bo'lgan $P_1(x_1,y_1)$, $P_1(x_2,y_2)$,..., $P_1(x_n,y_n)$ moddiy nuqtalar sistemasi berilgan bo'lsin.

x_im_i va y_im_i ko'paytmalar m_i massaning Ox va Oy o'qlariga nisbatan statistic momentlari, deb ataladi.

Berilgan sistemaning og'irlik markazining koordinatalarini x_c va y_c bilan belgilaylik. U holda mexanika kursidan ma'lumki, moddiy sistemaning og'irlikmarkazi quyidagi formulalar orqali aniqlanadi:

$$x_c=\frac{x_1m_1+x_2m_2+\ldots+x_nm_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_im_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i}, \qquad (10)$$

$$y_c=\frac{y_1m_1+y_2m_2+\ldots+y_nm_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_im_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i}. \qquad (11)$$

1. Tekis chiziqning og'irlik markazi. Tenglamasi $y=f(x)$, $a\le x\le b$ bo'lgan moddiy chiziq berilgan bo'lsin.

Bu moddiy chiziqning chiziqli zichligi, ya'ni chiziqning uzunlik birligining massasi γ bo'lsin. Chiziqni uzunliklari $\Delta s_1,\Delta s_2,\ldots,\Delta s_n$ bo'lgan n ta bo'laklarga bo'lamiz. Har bir bo'lakning massasi uzunligining chiziqli zichligi ko'paytmasiga teng: $\Delta m_i=\gamma\Delta s_i$. Yoyning har bir Δs_i bo'lagida abstsissasi ξ_i bo'lgan ixtiyoriy nuqta olamiz. Agar (1) va (2) formulalarga x_i lar o'rniga ξ_i larni, m_i lar o'rniga $\gamma\Delta s_i$ larni va y_i lar o'rniga $f(\xi_i)$ larni qo'ysak, yoyning og'irlik markazi koordinatalari uchun taqribiy formulalarni hosil qilamiz:

$$x_c\approx\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i\gamma\Delta s_i}{\sum_{i=1}^{n}\gamma\Delta s_i},\quad y_c\approx\frac{\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\gamma\Delta s_i}{\sum_{i=1}^{n}\gamma\Delta s_i}.$$

Agar $y=f(x)$ uzluksiz va uzluksiz differentsiallanuvchi funktsiya bo'lsa, u holda har bir kasrning surati va mahrajidagi yig'indilar $\max\Delta s_i\to 0$ bo'lganda mos integral yig'indilarning limitiga intiladi. Shu sababli limitda yoyning og'irlik markazi koordinatalari uchun quyidagi formulalarga ega bo'lamiz:

$$x_c=\frac{\int_a^b x\,ds}{\int_a^b ds}=\frac{\int_a^b x\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx}{\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx}, \qquad (1')$$

$$y_c=\frac{\int_a^b f(x)\,ds}{\int_a^b ds}=\frac{\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx}{\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx}. \qquad (2')$$

Misol. Ox o'qidan yuqorida joylashgan $x^2+y^2=a^2$ yarim aylananing og'irlik markazini toping.

Yechish. Berilgan yarimaylana *Ou* o'qqa nisbatan simmetrik bo'lgani uchun $x_c=0$. Shuning uchun ordinatasini hisoblaymiz:

$$y=\sqrt{a^2-x^2},\ \frac{dy}{dx}=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}},\ ds=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx,$$

$$y_c=\frac{\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx}{\pi a}=\frac{a\int_{-a}^{a}dx}{\pi a}=\frac{2a^2}{\pi a}=\frac{2a}{\pi}.$$

2. Tekis shaklning og'irlik markazi. Faraz qilaylik, berilgan soha $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$, $x=a, x=b$ chiziqlar bilan chegaralangan tekis bir jinsli, ya'ni zichligi o'zgarmas δ bo'lgan, moddiy shakl bo'lsin.

Bu shaklni $x=a, x=x_1, \dots, x=x_n=b$ to'g'ri chiziqlar bilan n ta bo'lakka bo'lamiz. Har bir bo'lakning massasi uning yuzi bilan δ zichligi ko'paytmasiga teng. Agar har bir i-bo'lakni asosi Δx_i va balandligi $f_2(\xi_i)-f_1(\xi_i)$, (bu yerda $\xi_i=\frac{x_{i-1}+x_i}{2}$,) bo'lgan to'g'ri to'rtburchak bilan almashtirsak, har bir bo'lak massasi taxminan

$$\Delta m_i=\delta[f_2(\xi_i)-f_1(\xi_i)]\Delta x_i \quad (i=1,2,\dots,n)$$

bo'ladi. Bu bo'lakning og'irlik markazi taxminan to'g'rito'rtburchakning markazida bo'ladi:

$$(x_i)_c=\xi_i, \quad (y_i)_c=\frac{f_2(\xi_i)+f_1(\xi_i)}{2}.$$

U holda berilgan shaklning og'irlik markazi taxminan quyidagi nuqtada bo'ladi:

$$x_c\approx\frac{\sum\xi_i\delta[f_2(\xi_i)-f_1(\xi_i)]\Delta x_i}{\sum\delta[f_2(\xi_i)-f_1(\xi_i)]\Delta x_i},$$

$$y_c\approx\frac{\frac{1}{2}\sum[f_2(\xi_i)+f_1(\xi_i)]\delta[f_2(\xi_i)-f_1(\xi_i)]\Delta x_i}{\sum\delta[f_2(\xi_i)-f_1(\xi_i)]\Delta x_i}.$$

Agar $\Delta x_i\to 0$ da limitga o'tsak:

$$x_c=\frac{\int_a^b x[f_2(x)-f_1(x)]dx}{\int_a^b[f_2(x)-f_1(x)]dx}, \quad y_c=\frac{\frac{1}{2}\int_a^b[f_2^2(x)-f_1^2(x)]dx}{\int_a^b[f_2(x)-f_1(x)]dx}.$$

Misol. $y^2=ax$ parabolani $x=a$ to'g'ri chiziq bilan kesish natijasida hosil bo'lgan segmentning og'irlik markazi koordinatalarini toping.

Yechish. $f_2(x)=\sqrt{ax}$, $f_1(x)=-\sqrt{ax}$. U holda

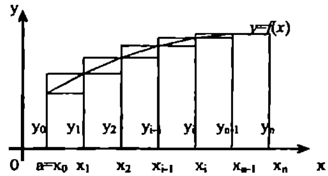
$$x_c=\frac{2\int_0^a x\sqrt{ax}dx}{2\int_0^a\sqrt{ax}dx}=\frac{2\sqrt{a}\frac{2}{5}x^{5/2}\Big|_0^a}{2\sqrt{a}\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^a}=\frac{\frac{4}{5}a^3}{\frac{4}{3}a^2}=\frac{3}{5}a, \quad y_c=0.$$

5-§. Aniq integralni taqribiy hisoblash

Har qanday uzluksiz funktsiyaning boshlang'ich funktsiyasini chekli elementar funktsiyalar yordamida ifodalab bo'lmaydi. Shu sababli bunday aniq integrallarni Nyuton-Leybnits formulasidan foydalanib hisoblab bo'lmaydi. Bunday hollarda taqribiy hisoblash usullaridan foydalaniladi. Aniq integralni integral yig'indilarning limiti sifatidagi ta'rifidan va aniq integralning geometrik ma'nosidan kelib chiqqan bir nechta usulni ko'rib o'tamiz.

5.1. To'g'ri to'rtburchaklar usuli

Faraz qilaylik, $y=f(x)$ funktsiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lsin. Ushbu $\int_a^b f(x)dx$ aniq integralni hisoblash talab qilingan bo'lsin. $[a, b]$ kesmani $a=x_0$, x_1, x_2,..., x_i,..., $x_n=b$ nuqtalar bilan n ta teng qismga bo'lamiz.



108-rasm.

Har bir bo'lakning uzunligi: $\Delta x=\frac{b-a}{n}$. $F(x)$ funktsiyaning x_0, x_1, x_2,..., x_i,..., x_n nuqtalardagi qiymatini y_0, y_1, y_2,..., y_i,..., y_n orqali belgilaymiz, ya'ni $y_0=f(x_0)$, $y_1=f(x_1)$,..., $y_i=f(x_i)$,..., $y_n=f(x_n)$ bo'lsin.

Quyidagi yig'indilarni tuzamiz:

$$y_0\Delta x+y_1\Delta x+...+y_i\Delta x+...+y_{n-1}\Delta x=\sum_{i=1}^{n-1}y_i\Delta x$$

$$y_1\Delta x+y_2\Delta x+...+y_i\Delta x+...+y_n\Delta x=\sum_{i=1}^{n}y_i\Delta x$$

Bu yig'indilardan har biri $f(x)$ funktsiya uchun integral yig'indi bo'ladi va shuning uchun ularni $\int_a^b f(x)dx$ integralning taqribiy qiymatlari sifatidaqabul qilish mumkin:

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{n}(y_0+y_1+y_2+...+y_i+...+y_{n-1})=\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}y_i \quad (1)$$

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{n}(y_1+y_2+...+y_i+...+y_n)=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i \quad (2)$$

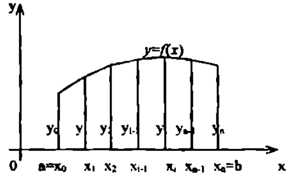
Bu formulalar orqali hisoblash usulini — to'g'ri to'rtburchaklar usuli, deb atashadi.

Agar $f(x)$ musbat va o'suvchi funktsiya bo'lsa, u holda (1) formula ichki to'rtburchaklardan tuzilgan pog'onali shaklning yuzini ifodalaydi, (2) formula esa tashqi to'rtburchaklardan tuzilgan pog'onali shaklning yuzini ifodalaydi.

Integralni to'g'ri to'rtburchaklar usuli bilan hisoblashda yo'l qo'yilgan xato n soni qancha katta bo'lsa, shuncha kichik bo'ladi. To'g'ri to'rtburchaklar formulasining absolyut xatosi $M_1\frac{(b-a)^2}{4n}$ dan katta emas, bu yerda, M_1 — $|f'(x)|$ ning $[a, b]$ kesmadagi eng kattaqiymatidir.

5.2. Trapetsiyalar usuli

$[a, b]$ kesmani avvalgi usulda bo'lib, Δx xususiy intervalga mos keluvchi $y=f(x)$ chiziqning har bir yoyini bu yoyning chetki nuqtalarini tutashtiruvchi vatar bilan almashtiramiz. Bu geometrik nuqtai nazardan berilgan egri chiziqli trapetsiyaning yuzini n tato'g'ri chiziqli trapetsiyalar yuzlarining yig'indisi bilan almashtirilganini bildiradi.



109-rasm.

Bunday shaklning yuzi egri chiziqli trapetsiyaning yuzini to'g'ri to'rtburchaklardan tuzilgan pog'onali figuraning yuziga qaraganda ancha aniq ifodalashi geometrikjihatdan ravshandir.

Bu trapetsiyalardan birinchisining yuzi $\frac{y_0+y_1}{2}\Delta x$, ikkinchisining yuzi $\frac{y_1+y_2}{2}\Delta x$ va hokazo, bo'lgani sababli

$$\int_a^b f(x)dx \approx \left(\frac{y_0+y_1}{2}\Delta x+\frac{y_1+y_2}{2}\Delta x+\ldots+\frac{y_{i-1}+y_i}{2}\Delta x+\ldots\right.$$

$$\left.+\frac{y_{n-1}+y_n}{2}\Delta x\right)=\Delta x\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}\right)$$

va $\Delta x=(b-a)/n$ ekanligini eslasak,

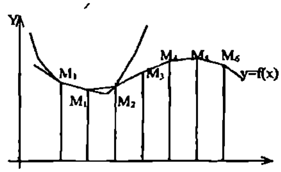
$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}\right) \qquad (3)$$

tenglikni hosil qilamiz.

Bu formula bilan hisoblashni trapetsiyalar usuli deymiz. n soni qancha katta bo'lsa va demak, $\Delta x=(b-a)/n$ qadam qancha kichik bo'lsa, (3) taqribiy tenglikning o'ng tomonida yozilgan yig'indi shuncha katta aniqlik bilan integral qiymatini beradi. Trapetsiyalar formulasining absolyut xatosi $M_2\frac{(b-a)^3}{12n^2}$ dan katta emas, bu yerda M_2 -$|f''(x)|$ ning $[a, b]$ kesmadagi eng katta qiymatidir.

5.3. Parabolalar (Simpson) usuli

$[a, b]$ kesmani $n=2m$ tajuft miqdordagi teng qismlargabo'lamiz. $[x_0, x_1]$ va $[x_1, x_2]$ kesmalarga mos va berilgan $y=f(x)$ egri chiziq bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuzini $M_0(x_0,y_0)$, $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$ uchta nuqtadan o'tuvchi va simmetriya o'qi OY o'qqa parallel bo'lgan ikkinchi darajali parabola bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuzi bilan almashtiramiz.



110-rasm.

Bunday egri chiziqli trapetsiya parabolik trapetsiya deyiladi. O'qi OY o'qqa paralel bo'lgan parabolaning tenglamasi $y = Ax^2 + Bx + C$ ko'rinishda bo'ladi. A, V, S koeffitsientlar parabolaning berilgan uch nuqta orqali o'tish shartidan bir qiymatli ravishda aniqlanadi. Shunga o'xshash parabolalarni kesmalarning boshqa juftlari uchun ham yasaymiz. Shunday yasalgan parabolik trapetsiyalar yuzalarining yig'indisi integralning taqribiy qiymatini beradi.

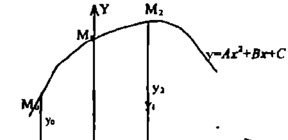
Dastlab bitta parabolik trapetsiyaning yuzini hisoblaymiz.

Lemma. Agar egri chiziqli trapetsiya $y=Ax^2+Bx+C$ parabola, OX o'q va oralig'i $2h$ ga teng bo'lgan 2ta ordinata o'qiga parallel to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan bo'lsa, u holda uning yuzi

$$S = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) \tag{4}$$

ga teng.

Isboti.



111-rasm.

A, B, C koeffitsientlar quyidagi tenglamalardan aniqlanadi:

$$\begin{matrix} agar\ x_0 = h\ bo'lsa, \text{ u holda} \\ agar\ x_1 = 0\ bo'lsa, \text{ u holda} \\ agar\ x_2 = h\ bo'lsa, \text{ u holda} \end{matrix} \begin{cases} y_0 = Ah^2 - Bh + C \\ y_1 = C \\ y_2 = Ah^2 + Bh + C \end{cases} \qquad (5)$$

(5) tenglamalar sistemasidan:

$$A = \frac{1}{2h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2),\ C = y_1,\ B = \frac{1}{2h}(y_2 - y_0)$$

bo'ladi. Endi parabolik trapetsiyaning yuzini aniq integral yordamida aniqlaylik:

$$S = \int_{-h}^{h}(Ax^2 + Bx + C)dx = (A\frac{x^3}{3} + B\frac{x^2}{2} + Cx)|_{-h}^{h} = \frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C);$$

Lekin $2Ah^2+6C=y_0+4y_1+y_2$. Demak, $S=h/3(y_0+4y_1+y_2)$ bo'ladi.

Bu lemmadan foydalanib, quyidagi taqribiy tengliklarni yoza olamiz:

$$\int_{x0}^{x2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

$$\int_{x2}^{x4} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$$

....

$$\int_{x2m-2}^{x2m} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m})$$

Parabolik trapetsiyalarning yuzalarini qo'shib, izlanayotgan integralning taqribiy qiymatini beruvchi ifodani hosil qilamiz:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 2y_{2m} + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2m-1}) + \\ + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2m-2})) \qquad (6)$$

bu yerda, $h=(b-a)/2m$.

Bu Simpson formulasidir.

Agar $f(x)$ funktsiya $[a,\ b]$ kesmada 4-tartibli uzluksiz hosilaga ega bo'lsa, u holda Simpson formulasining absolyut xatosi $M_4\frac{(b-a)^5}{2880n^4}$ dan katta bo'lmaydi, bunda M_4 — $|f^{(5)}(x)|$ ning $[a,\ b]$ kesmadagi eng kattaqiymatidir.

Misol. Ushbu $J = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ integral taqribiy hisoblansin.

Yechish. Avval berilgan integralning aniq qiymatini Nyuton-Leybnits formulasi bo'yicha hisoblab olaylik:

$$J = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln|1+x||_0^1 = \ln 2 \approx 0{,}69315.$$

[0,1] kesmani 10 tateng bo'lakka bo'lamiz: Δx=0,1.

Quyidagi jadvalni tuzamiz:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
y_i	1	0,90909	0,83333	0.76923	0.71429	0,66667
i	0	6	7	8	9	10
x_i	0	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
y_i	1	0,62500	0,58824	0,55556	0,52632	0,5

Avval to'g'ri to'rtburchaklar usulini qo'llab, (1) formula bo'yicha:

J≈0,1(1+0,90909+0,83333+0,76923+ +0,71429+0,66667+0,625+0,58824+0,55556+0,52632)=0,1· ·7,18773=0,71877 natijaga va (2) formula bo'yicha: J≈0,1(0,90909+0,83333+0,76923+0,71429+0,66667+0,625+ +0,58824+0,55556+0,52632+0,5)=0,1*6,68773=0,66877.

natijaga kelamiz.

Endi, yo'l qo'yilgan xatoni baholaymiz:

$$f(x)=\frac{1}{1+x}, \qquad f'(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}$$

[0,1] kesmada $|f'(x)|\le 1$. Shuning uchun $M_1=1$. U holdaolingan natijaning xatosi $M_1\frac{(b-a)^2}{4n}=\frac{1}{40}=0{,}025$ kattalikdan ortmaydi:

$$|0{,}69315-0{,}66877|=0{,}02438<0{,}025.$$

Agar trapetsiyalar usulini qo'llasak, quyidagi natijani olamiz:

$$J\approx 0{,}1(\frac{1+0{,}5}{2}+0{,}90909+0{,}83333+\ldots+0{,}52632)=0{,}69377.$$

U holda yo'l qo'yilgan xatolik quyidagicha baholanadi:

$$f^{\text{I}}(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}, \qquad f^{\text{II}}(x)=\frac{2}{(1+x)^3}.$$

[0,1] kesmada $|f''(x)|\le 2$. Demak, $M_2=2$.

U holdaolingan natijaning xatosi

$$M_2\frac{(b-a)^3}{12n^2}=\frac{2}{12\cdot 100}=\frac{1}{600}\approx 0{,}001667$$

kattalikdan ortiq bo'lmaydi.

$$|0,69315-0,69377|=0,00062<0,001667.$$

Endi, Simpson formulasidan foydalanamiz: $n=2m=10$, $\frac{b-a}{3n}=\frac{1}{30}$ bo'lganda(6) formulabo'yicha quyidagi natijani olamiz:

$$J\approx 1/30(1+0,5+4(0,90909+0,76923+0,66667+0,58824+$$
$$+0,52632)+2*(0,83333+0,71429+0,625+0,55556))=$$
$$=1/30*(1,5+4*3,45955+2*2,72818)=0,693146$$

Olingan natijaning xatosini baholaylik:

$$f^{II}(x)=\frac{2}{(1+x)^3},\quad f^{III}(x)=-\frac{6}{(1+x)^4},\quad f^{4}(x)=\frac{24}{(1+x)^5}$$

[0,1] kesmada $|f^{(5)}(x)|\leq 24$. Shuning uchun, $M_4=24$.

U holdayo'l qo'yilgan xatolik

$$M_4\frac{(b-a)^5}{2880\cdot 10^4}=\frac{24}{2880\cdot 10000}\approx 0,000008$$

kattalikdan ortiq bo'lmaydi.

$$|0,69315-0,693146|=0,000004<0,000008.$$

Uchala natijani aniq qiymat bilan taqqoslaganda Simpson formulasi qolgan ikkita formuladan ancha aniq ekan, degan xulosaga kelish mumkin.

13-BOB.

KO'P O'ZGARUVCHILI FUNKTSIYANING DIFFERENTSIAL HISOBI

1-§. Boshlang'ich tushunchalar

Funktsiyaga, shu jumladan, ko'p o'zgaruvchili funktsiyaga 6-bobning 1-§ ida ta'rif bergan edik.

Bu bobda biz ko'p o'zgaruvchili funktsiyaning differentsial hisobini qurish bilan shug'ullanamiz. Asosiy ma'lumotlar ikki o'zgaruvchining funktsiyasi uchun beriladi. Ularni o'zgaruvchilari soni ikkidan katta bo'lgan hol uchun bevosita ayniy ravishda o'tkazish qiyin emas.

Ko'p holatlarda biror miqdor boshqa bir nechta erkin o'zgaruvchilarga bog'liq bo'ladi. Masalan, uchburchakning yuzi S uning asosi a va balandligi h ning qiymatlariga bog'liq, ya'ni

$$S = \frac{1}{2}ah.$$

To'g'ri burchakli parallelepipedning hajmi V bir-biriga bog'liq bo'lmagan qirralarning funktsiyasidir:

$$V=abc.$$

Elektr toki ajratadigan issiqlik miqdori Q kuchlanish E, tok kuchi J va vaqt t ning funktsiyasidir:

$$Q=0,24Jet.$$

Biror jismning fizik holatini o'rgansak, uning nuqtadan nuqtaga o'tish jarayonida ayrim xususiyatlarini o'zgarishi kuzatish mumkin. Bular masalan: zichligi, harorati, elektr potentsiali va h.k. lar. Boshqacha qilib aytganda, bu miqdorlar nuqtaning, ya'ni uning x, y, z koordinatalarining funktsiyasi bo'ladi. Agar jismning fizik holati vaqt o'tishi bilan o'zgarsa, bu erkin o'zgaruvchilarga t vaqt ham qo'shiladi. Bu holda biz to'rtta erkin o'zgaruvchining funktsiyasini kuzatayotgan bo'lamiz.

Ikkita erkin x, y o'zgaruvchilarning f funktsiyasini simvolik tarzda

$$z = f(x, y)$$

ko'rinishdayozish qabul qilingan.

Ko'p o'zgaruvchining funktsiyalari xuddi bir o'zgaruvchining funktsiyalari kabi analitik usulda, ya'ni formulalar yordamida, jadval usulda va grafik usulda berilishi mumkin. Masalan:

$$z = x^2 - xy + y^3; \quad z = \frac{tg(x + y)}{x^2 + y^2}.$$

Funktsiyaning jadval ko'rinishi fizika, mexanika, tibbiyot va texnikaning tajriba o'tkazish bilan bog'liq bo'lgan barcha yo'nalishlarida keng ishlatiladi.

Funktsiyaning geometrik tasviri uning grafigi deyiladi. Masalan, ikki o'zgaruvchining funktsiyasi grafigi uch o'lchovli fazoda sirtni ifodalaydi. 4-bobning 3-§ ida ko'rilgan 2-tartibli sirtlar: sfera, ellipsoid, elliptik paraboloid va giperbolik paraboloidlar mos ravishda

$$x^2+y^2+z^2=r^2, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, z=\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}, z=\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q}$$

funktsiyalarning grafigigamisol bo'laoladi.

Erkli x, y o'zgaruvchilarning f funktsiyasi ma'nosini saqlovchi qiymatlari juftliklarining to'plami f funktsiyaning aniqlanish sohasi bo'ladi. XOU koordinatalar tekisligida bu to'plamlar biror tekis sohani ifodalaydi. Masalan, $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ funktsiyaning aniqlanish sohasi ildiz ostidagi ifodaga manfiy bo'lmagan qiymat beruvchi (x,y) juftliklar to'plami: $x^2+y^2\le 1$ doira bo'ladi yoki $z=\ln(x+y)$ funktsiyaning aniqlanish sohasi: $y>-x$, ya'ni $y=-x$ to'g'ri chiziqning tepasidagi yarimtekislik bo'ladi.

Eslatma. Erkli o'zgaruvchilari soni uchtadan oshiq bo'lgan funktsiyaning aniqlanish sohasini ham, grafigini ham fazoda ifodalab bo'lmaydi. Ularni biz abstract ma'noda tushunamiz.

Endi, R_2 tekisligiga qaytsak. Bu tekislikda biror (x_0, y_0) nuqta berilgan bo'lsin.

Quyidagi

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<a^2 \quad (a>0)$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi (x,y) nuqtalar to'plamini markazi (x_0,y_0) nuqtada bo'lgan a radiusli ochiq doira deymiz.

$$|x-x_0|<a, \quad |y-y_0|<b \quad (a,b>0), \qquad (1)$$

tengsizliklarni qanoatlantiruvchi (x,y) nuqtalar to'plamini ochiq to'rtburchak, deb ataymiz.

Agar (1) da $a=b$ bo'lsa, uning markazi (x_0,y_0) nuqtada bo'lgan ochiq kvadrat, deymiz.

Markazi (x_0,y_0) nuqtada, radiusi $\varepsilon>0$ bo'lgan har qanday ochiq doira yoki tomoni 2ε bo'lgan har qanday kvadrat $(x_0;y_0)$ nuqtaning ε-atrofi, deyiladi.

Agar

$$(x_1,y_1),\ (x_2,y_2),\ (x_3,y_3),\ \ldots$$

nuqtalar ketma-ketligi berilgan bo'lsa, o'zgaruvchi (x_k,y_k) nuqta shu ketma-ketlik bo'ylab o'zgaradi, deymiz.

Agar $k\to\infty$ da (x_k,y_k) o'zgaruvchi nuqtalar orasidagi masofa nolga intilsa, ya'ni $k\to\infty$ da

$$\sqrt{(x_k - x_0)^2 + (y_k - y_0)^2} \to 0 \qquad (2)$$

bo'lsa, $\{(x_k, y_k)\}$ ketma-ketlik yoki o'zgaruvchi (x_k, y_k) nuqta $k \to \infty$ da (x_0, y_0) nuqtaga intiladi, deymiz.

Buni

$$(x_k, y_k) \to (x_0, y_0) \ (k \to \infty)$$

ko'rinishdayozamiz.

Tabiiy (2) munosabat

$$x_k \to x_0; \ y_k \to y_0 \ (k \to \infty) \qquad (3)$$

munosabatlarning bir vaqtda bajarilishiga teng kuchli.

(2) munosabatni yana: ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday N son topiladiki, barcha $k > N$ lar uchun (x_k, y_k) nuqtamarkazi (x_0, y_0) dabo'lgan ε radiusli ochiq doira ichida bo'ladi, deb tushunish mumkin.

(3) munosabatni esa: ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday N son topiladiki, barcha $k > N$ lar uchun (x_k, y_k) nuqtamarkazi (x_0, y_0) dabo'lgan 2ε tomonli ochiq kvadratda bo'ladi, deb tushunamiz.

Bu ikkala mulohazani birlashtirib, har qanday $\varepsilon > 0$ uchun shunday N son topiladiki, barcha $k > N$ lar uchun (x_k, y_k) nuqta (x_0, y_0) nuqtaning ε-atrofida bo'ladi, deyish mumkin.

2-§. Funktsiyaning limiti

Faraz qilaylik, (x_0, y_0) nuqtaning o'zida bo'lmasa ham, uning biror atrofida aniqlangan $z = f(x, y)$ funktsiya berilgan bo'lsin.

1-ta'rif. *Agar (x_0, y_0) nuqtaga intiluvchi har qanday (x_k, y_k) ketma-ketlik uchun*

$$\lim_{\substack{x_k \to x_0 \\ y_k \to y_0}} f(x_k, y_k) = A \qquad (1)$$

bo'lsa, u holda A son $z = f(x, y)$ funktsiyaning $(x, y) \to (x_0, y_0)$ dagi limiti deyiladi.

Limitga«ε,δ» tilida ham ta'rif berish mumkin.

2-ta'rif. *Agar har qanday $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topilsaki,*

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \qquad (2)$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha (x, y) lar uchun

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon \qquad (3)$$

munosabat o'rinli bo'lsa, A son $z = f(x, y)$ funktsiyaning $(x, y) \to (x_0, y_0)$ dagi limiti, deyiladi.

O'z navbatidabu ikki ta'rif quyidagi ta'rifgaekvivalent: A son $z = f(x, y)$ funktsiyaning $(x, y) \to (x_0, y_0)$ dagi limiti deyiladi, agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun (x_0,y_0) nuqtaning shunday δ-atrofi mavjud bo'lsaki, bu atrofning (x_0,y_0) dan boshqa barcha nuqtalari uchun (3) tengsizlik o'rinli bo'lsa.

Faraz qilaylik, $\bar{\omega}=(\omega_x,\omega_y)$ uzunligi ($|\bar{\omega}|^2=\omega_x^2+\omega_y^2=1$) bir bo'lgan vektor va $t>0$ – biror skalyar bo'lsin. Quyidagi

$$(x_0+t\omega_x, y_0+t\omega_y) \quad (t>0)$$

nuqtalar (x_0,y_0) dan $\bar{\omega}$ vektor yo'nalishidachiqqan nurni hosil qiladi.

Har bir $\bar{\omega}$ uchun t o'zgaruvchining

$$f(x_0+t\omega_x, y_0+t\omega_y) \quad (0< t < \delta)$$

funktsiyasini ko'rish mumkin, bu yerda δ-yetarlicha kichik son.

Agar

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f(x_0+t\omega_x, y_0+t\omega_y)$$

limit mavjud bo'lsa, uni f funktsiyaning (x_0,y_0) nuqtadagi $\bar{\omega}$ yo'nalish bo'yicha limiti, deymiz.

1-*misol.*

$$f(x,y)=\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$$

funktsiya tekislikning (0,0) nuqtasidan boshqa barcha nuqtalarida aniqlangan. $x^3 \le (x^2+y^2)^{3/2}$ va $y^3 \le (x^2+y^2)^{3/2}$ bo'lgani uchun

$$|f(x,y)| \le \frac{2(x^2+y^2)^{3/2}}{x^2+y^2} = 2(x^2+y^2)^{1/2}$$

bo'ladi. Shu sababli agar $x\to 0, y\to 0$ bo'lsa, $f(x,y)\to 0$ bo'ladi, ya'ni

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=0.$$

2-*misol.*

$$\varphi(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

funktsiya tekislikning (0,0) nuqtasidan boshqa barcha nuqtalarida aniqlangan.

O'zgarmas k son uchun $y=kx$ to'g'ri chiziqlar bo'ylab

$$\varphi(x,kx)=\frac{1-k^2}{1+k^2}.$$

Bu yerdan ko'rinadiki, k ning har xil qiymatlari uchun funktsiyaning (0,0) nuqtadagi har xil yo'nalishlar bo'yicha limitlari har xil.

3-*misol.* $f(x,y)=\dfrac{x^3y}{x^4+y^2}$ funktsiyaning $y=kx$ to'g'ri chiziqlar bo'ylab **(0,0)** nuqtadagi limiti nolga teng:

agar $x\to 0$ bo'lsa, $f(x,kx)=\dfrac{kx^3}{x^4+k^2x^2}=\dfrac{kx}{x^2+k^2}\to 0$.

Lekin bu funktsiya(0,0) nuqtadalimitgaegaemas, chunki $y=x^2$ desak:

$$f(x,x^2)=\frac{x^4}{x^4+x^4}=\frac{1}{2} \text{ va } \lim_{x\to 0} f(x,x^2)=\frac{1}{2}.$$

Funktsiyaning $x,y\to\infty$ dagi limiti tushunchasini xam kiritsabo'ladi: har qanday ε > 0 son uchun shunday N>0 son topilsaki, $|x|>N, |y|>N$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi barcha x,y lar uchun f funktsiya aniqlangan bo'lib,

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, A son f funktsiyaning $x,y\to\infty$ dagi limiti, deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$\lim_{x\to\infty, y\to\infty} f(x,y)=A.$$

Agar f funktsiya (x_0,y_0) nuqtaning o'zida bo'lmasa ham, uning biror atrofida aniqlangan bo'lsa va har qanday N>0 son uchun shunday δ > 0 son topilsaki, (x_0,y_0) nuqtaning δ-atrofidagi barcha(x,y) lar uchun

$$|f(x,y)|>N$$

bo'lsa, u holda

$$\lim_{x\to x_0, y\to y_0} f(x,y)=\infty$$

deymiz.

Quyidagi munosabatlar o'rinli:

$$\lim_{x\to x_0, y\to y_0}[f(x,y)+g(x,y)]=\lim_{x\to x_0, y\to y_0} f(x,y)\pm\lim_{x\to x_0, y\to y_0} g(x,y), \tag{4}$$

$$\lim_{x\to x_0, y\to y_0}[f(x,y)\cdot g(x,y)]=\lim_{x\to x_0, y\to y_0} f(x,y)\cdot\lim_{x\to x_0, y\to y_0} g(x,y), \tag{5}$$

agar $\lim\limits_{x\to x_0, y\to y_0} g(x,y)\neq 0$ bo'lsa,

$$\lim_{x\to x_0, y\to y_0}\frac{f(x,y)}{g(x,y)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0, y\to y_0} f(x,y)}{\lim\limits_{x\to x_0, y\to y_0} g(x,y)}. \tag{6}$$

Bu munosabatlar $x,y\to\infty$ da ham o'rinli.

Bir o'zgaruvchili funktsiyaning limiti haqidagi barcha teoremalar (6-bob, 2.2-§ ga qarang) ko'p o'zgaruvchining funktsiyasi uchun ham o'rinli.

3-§. Uzluksiz funktsiyalar

Bizga (x_0,y_0) nuqtada va uning biror atrofida aniqlangan $z=f(x,y)$ funktsiya berilgan bo'lsin.

Agar x va y lar mos ravishda Δx va Δy orttirmalar olsa, u holda quyidagi ayirmani

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$$

$z=f(x,y)$ funktsiyaning (x_0,y_0) nuqtadagi to'la orttirmasi, deymiz.

Agar (x_0,y_0) nuqtada

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z = 0 \qquad (1)$$

bo'lsa, $z=f(x,y)$ funktsiya (x_0,y_0) nuqtada uzluksiz, deyiladi. (1) ni yana quyidagicha yozsa bo'ladi:

$$\lim_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0}[f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)] = 0$$

yoki

$$\lim_{x\to x0, y\to y0} f(x,y) = f(x_0,y_0). \qquad (1')$$

2-§ dagi (4)-(6) munosabatlardan bevosita quyidagi teorema kelib chiqadi.

1-teorema. *(x_0,y_0) nuqtada uzluksiz bo'lgan f va g funktsiyalarning yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi va agar $g(x_0,y_0)\neq 0$ bo'lsa, bo'linmasi ham shu nuqtada uzluksiz bo'ladi.*

Bu teoremadan x va u larning har qanday ko'phadi tekislikning ixtiyoriy nuqtasida uzluksiz ekanligi kelib chiqadi.

(x, u) ning ko'phadlari nisbati P/Q (x, u) ning ratsional funktsiyasi, deyiladi. P/Q ratsional funktsiya Q (x, u)q0 bo'ladigan nuqtalardan boshqa barcha nuqtalarda uzluksiz bo'ladi.

Quyidagi teorema murakkab funktsiyaning uzluksiz bo'lishlik shartini beradi:

2-teorema. *$f(x,y,z)$ funktsiya R_3 arifmetik fazoning (x_0,y_0,z_0) nuqtasida (x,y,z) nuqtalar bo'yicha*

$$x=\varphi(u,\vartheta),\quad y=\psi(u,\vartheta),\quad z=\chi(u,\vartheta)$$

funktsiyalar R_2 arifmetik fazoning (u_0,ϑ_0) nuqtasida (u,ϑ) nuqtalar bo'yicha uzluksiz bo'lsin. Agar

$$x_0=\varphi(u_0,\vartheta_0),\quad y_0=\psi(u_0,\vartheta_0),\quad z_0=\chi(u_0,\vartheta_0)$$

bo'lsa, u holda

$$F(u,\vartheta)=f[\varphi(u,\vartheta), \psi(u,\vartheta), \chi(u,\vartheta)]$$

funktsiya (u_0,ϑ_0) nuqtada (u,ϑ) lar bo'yicha uzluksiz bo'ladi.

Teoremaning isboti (1) munosabatdan kelib chiqadi:

$$\lim_{(u,\vartheta)\to(u_0,\vartheta_0)} F(u,\vartheta)=\lim_{\substack{\varphi(u,\vartheta)\to X_0\\ \psi(u,\vartheta)\to Y_0\\ \chi(u,\vartheta)\to Z_0}} f[\varphi(u,\vartheta),\psi(u,\vartheta),\chi(u,\vartheta)]=$$

$$=f(x_0,y_0,z_0)=f[\varphi(u_0,\vartheta_0),\psi(u_0,\vartheta_0),\chi(u_0,\vartheta_0)]=F(u_0,\vartheta_0).$$

3-teorema. *(x_0,y_0) nuqtada uzluksiz va shu nuqtada nolga teng bo'lmagan $z=f(x,y)$ funktsiya (x_0,y_0) nuqtaning biror atrofida f (x_0,y_0) ning ishorasini saqlaydi.*

Bu teoremaning isboti 5-bobning 2.2-§ dagi 3-teoremaning isbotidek bajariladi.

4-§. Xususiy orttirmalar va hosilalar

Erkli y o'zgaruvchini o'zgartirmay, x ga Δx orttirma bersak, berilgan $z=f(x,y)$ funktsiyaning olgan

$$\Delta_x z=f(x+\Delta x,y)-f(x,y)$$

orttirmasini uning x bo'yicha xususiy orttirmasi, deb ataymiz. Xuddi shuningdek, agar x ni o'zgartirmay y ga Δy orttirma bersak, natijada funktsiyaning olgan

$$\Delta_y z=f(x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

orttirmasi uning y bo'yicha xususiy orttirmasi, deyiladi.

Avvalgi paragrafda kiritilgan to'la orttirmani xususiy orttirmalar orqali quyidagicha ifodalasa bo'ladi:

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)+f(x,y+\Delta y)-$$
$$-f(x,y)=\Delta_x f(x,y+\Delta y)+\Delta_y f(x,y).$$

Bu tenglikdan ko'rinadiki, umuman $\Delta z=\Delta_x z+\Delta_y z$ bo'lavermaydi. Masalan, $z=x^2y$ funktsiya uchun

$$\Delta_x z=(x+\Delta x)^2y-x^2y=(2x\Delta x+\Delta x^2)y,$$

$$\Delta_y z=x^2(y+\Delta y)-x^2y=x^2\Delta y,$$

$$\Delta z=(x+\Delta x)^2(y+\Delta y)-x^2y=(2x\Delta x+\Delta x^2)y+$$
$$(x^2+2x\Delta x+\Delta x^2)\Delta y\neq\Delta_x z+\Delta_y z.$$

Agar

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

limit mavjud bo'lsa, uni $z=f(x,y)$ funktsiyaning (x,y) nuqtadagi x bo'yicha xususiy hosilasi, deb atab, $z'_x, f'_x, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}$ ko'rinishda belgilaymiz.

Aynan shundek, agar

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$$

limit mavjud bo'lsa, uni $z=f(x,y)$ funktsiyaning (x,y) nuqtadagi y bo'yicha xususiy hosilasi, deb atab, $z'_y, f'_y, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y}$ ko'rinishda belgilaymiz.

Xususiy orttirmalarning ta'rifidan z'_x xususiy hosilani $y=const$ deb qilingan farazda funktsiyadan x bo'yicha olingan oddiy hosila, z'_y xususiy hosilani $x=const$ deb qilingan farazda funktsiyadan y bo'yicha olingan oddiy hosila, deb tushunish kerakligi kelib chiqadi.

Bundan xususiy hosilalarni hisoblash qoidalari bir o'zgaruvchining funktsiyasini differentsiallash qoidalari bilan bir xil bo'lishi kelib chiqadi.

1-*misol.* $z=x^2\cos(xy)$ funktsiyaning xususiy hosilalarini hisoblang.

Yechish $z'_x=2x\cos(xy)-x^2y\sin(xy)$, $z'_y=-x^3\sin(xy)$.

2-*misol.* $z=x^y$. $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ topilsin.

Yechish $\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$.

Eslatma. Erkli o'zgaruvchilari soni ikkitadan oshiq bo'lgan funktsiyalar uchun ham xususiy hosilalar aynan shunday kiritiladi.

3-*misol.* $u=x^2+y^2-zt^3$.

Yechish

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=2y,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=-t^3,\quad \frac{\partial u}{\partial t}=-3zt^2.$$

5-§. To'la differentsial va uning taqribiy hisoblarda qo'llanishi

Bizga biror (x,y) nuqtada uzluksiz xususiy hosilalari mavjud bo'lgan $z=f(x,y)$ funktsiya berilgan bo'lsin. Bu funktsiyaning to'la orttirmasini uning xususiy hosilalari orqali ifodalaymiz. Ma'lumki,

$$\begin{aligned}\Delta z=&[f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)]+\\&+[f(x,y+\Delta y)-f(x,y)].\end{aligned}\tag{1}$$

Kvadrat qavslar ichidagi ifodalarga Lagranj teoremasini qo'llasak:

$$f(x,y+\Delta y)-f(x,y)=\Delta y\frac{\partial f(x,\bar{y})}{\partial y},\tag{2}$$

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)=\Delta x\frac{\partial f(\bar{x},y+\Delta y)}{\partial x},\tag{3}$$

bu yerda $\bar{y}\in(y,y+\Delta y)$ va $\bar{x}\in(x,x+\Delta x)$.

(2) va (3) larni (1) ga qo'ysak:

$$\Delta z=\Delta x\frac{\partial f(\bar{x},y+\Delta y)}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial f(x,\bar{y})}{\partial y}.\tag{4}$$

Shartga ko'ra xususiy hosilalar uzluksiz bo'lgani uchun

$$\lim_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0}\frac{\partial f(\bar{x},y+\Delta y)}{\partial x}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x},\tag{5}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0}\frac{\partial f(x,\bar{y})}{\partial y}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}.\tag{6}$$

Agar γ_1 va γ_2 lar Δx va Δy larga nisbatan cheksiz kichik miqdorlar bo'lsa, u holda (5), (6) larni quyidagicha yozsa bo'ladi:

$$\frac{\partial f(\bar{x},y+\Delta y)}{\partial x}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+\gamma_1,\tag{5'}$$

$$\frac{\partial f(x,\bar{y})}{\partial y}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}+\gamma_2.\tag{6'}$$

U holda (4) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\Delta z=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y+\gamma_1\Delta x+\gamma_2\Delta y.\tag{7}$$

Tenglikning o'ng tomonidagi oxirgi ikkita qo'shiluvchilar yig'indisi $\Delta r=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ ga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik miqdor, chunki $\left|\frac{\Delta x}{\Delta r}\right|\le 1$, $\left|\frac{\Delta y}{\Delta r}\right|\le 1$ va shartga ko'ra γ_1 va γ_2 lar cheksiz kichik miqdorlar bo'lgani uchun

$$\frac{\gamma_1\Delta x+\gamma_2\Delta y}{\Delta r}=\gamma_1\frac{\Delta x}{\Delta r}+\gamma_2\frac{\Delta y}{\Delta r}\xrightarrow[\Delta r\to 0]{}0.$$

Shu sababli birinchi ikkita qo'shiluvchining yig'indisi o'ng tomonning Δx va Δy larga nisbatan chiziqli qismi bo'ladi. Agar $f'_x(x,y)\neq 0, f'_y(x,y)\neq 0$ bo'lsa, bu ikki qo'shiluvchi to'la orttirmaning asosiy qismi bo'ladi.

Ta'rif. *To'la orttirmasi biror (x,y) nuqtada Δx va Δy larga nisbatan chiziqli ifoda va Δr ga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik miqdorlar yig'indisi ko'rinishida ifodalanadigan har qanday $z=f(x,y)$ funktsiya shu nuqtada differentsiallanuvchi va bu ifodaning asosiy qismi funktsiyaning to'la differentsiali, deb ataladi.* To'la differentsial dz yoki df ko'rinishda belgilanadi.

Demak, agar $z=f(x,y)$ funktsiya berilgan nuqtada uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo'lsa, u shu nuqtada differentsiallanuvchi bo'lib, uning to'la differentsiali

$$dz=f'_x(x,y)\Delta x+f'_y(x,y)\Delta y$$

bo'lar ekan.

U holda (7) ni

$$\Delta z=dz+\gamma_1\Delta x+\gamma_2\Delta y$$

ko'rinishda yoki taqriban

$$\Delta z\approx dz\tag{8}$$

deb yozish mumkin.

Bir o'zgaruvchining funktsiyasida Δx ni dx ga almashtirish mumkin ekanligi ko'rilgan edi. Xuddi shundek, bu yerda ham Δx va Δy larni mos ravishda dx va dy larga almashtiramiz:

$$dz=f'_x(x,y)dx+f'_y(x,y)dy.$$

Agar funktsiya biror (x,y) nuqtada differentsiallanuvchi bo'lsa, u holda (7) dan uning shu nuqtada uzluksiz ekanligi kelib chiqadi. Lekin aksi hamisha to'g'ri bo'lavermaydi.

1-*misol.* $z=|x|(y+1)$ funktsiya (0,0) nuqtada uzluksiz, lekin uning bu nuqtada $\frac{\partial z}{\partial x}$ xususiy hosilasi mavjud emas, ya'ni bu funktsiya (0,0) nuqtada differentsiallanuvchi emas.

Bir o'zgaruvchining funktsiyasi biror nuqtada differentsiallanuvchi bo'lishi uchun uning shu nuqtada hosilasi mavjud bo'lishi zarur va yetarli bo'lsa, ko'p o'zgaruvchilarning funktsiyasi uchun bu yetarli emas.

Teorema. *Funktsiya biror nuqtada differentsiallanuvchi bo'lishi uchun uning shu nuqtada xususiy hosilalari mavjud bo'lishi zarur va agar bu xususiy hosilalar uzluksiz bo'lsa yetarli hamdir.*

Isboti. Teoremaning birinchi qismi quyidagicha isbot qilinadi:

Agar f funktsiya biror (x,y) nuqtada differentsiallanuvchi bo'lsa, u holda ta'rifga ko'ra uning to'la orttirmasi quyidagicha ifodalanadi:

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\Delta r). \tag{9}$$

Agar bu tenglikda $\Delta y = 0$ desak:

$$\Delta_x z = A\Delta x + o(\Delta x)$$

tenglik hosil bo'ladi. Buni Δx gabo'lib limitga o'tsak:

$$A = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x}$$

munosabatga kelamiz. Aynan shundek mulohaza bilan $B=\frac{\partial z}{\partial y}$ ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

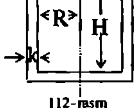
2-*misol.* Koordinatalar tekisliklarida nolga teng va R_3 ning boshqa nuqtalarida 1 ga teng bo'lgan funktsiyaning koordinatalar boshida nolga teng bo'lgan xususiy hosilalari mavjud bo'lsa ham bu funktsiya (0,0,0) nuqtada uzulishga ega va shu sababli bu nuqtada differentsiallanuvchi emas. Demak, xususiy hosilalarning mavjudligi funktsiyaning differentsiallanuvchiligi va hatto uzluksizligi uchun yetarli emas ekan.

Agar f funktsiya biror (x,y) nuqtada differentsiallanuvchi bo'lsa, u holda (8) munosabat o'rinli bo'ladi. Uni quyidagicha yozib olamiz:

$$\Delta z \approx f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy$$

yoki

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy. \tag{10}$$



112-rasm

(8) va(10) larning taqribiy hisoblarga qo'llanishini ko'raylik.

Masala. O'lchamlari: ichki tsilindr radiusi R, ichki tsilindr balandligi H va devor qalinligi k bo'lgan aylanma tsilindrni tayyorlash uchun qancha xom ashyo ketishini aniqlang.

Yechish 1) *Aniq yechimi.* So'ralgan hajm ϑ tashqi tsilindr hajmidan ichki tsilindr hajmini ayirmasiga teng. Tashqi tsilindrning radiusi $R+k$, balandligi $H+k$ bo'lgani uchun

$$\vartheta = \pi(R+k)^2(H+k) - \pi R^2 H$$

yoki

$$\vartheta = \pi(2RHk + R^2k + Hk^2 + 2Rk^2 + k^3). \qquad (11)$$

2) Taqribiy yechimi. Ichki tsilindr hajmini f desak, $f=\pi R^2 H$, ya'ni R va H o'zgaruvchilarning funktsiyasigaegabo'lamiz. Agar R va H gabir xil k orttirmabersak, funktsiyaqiymati so'ralgan hajmgateng bo'lgan orttirma oladi: $\vartheta = \Delta f$.

U holda(10) ga asosan

$$\vartheta \approx \frac{\partial f}{\partial R}\Delta R + \frac{\partial f}{\partial H}\Delta H$$

bo'ladi. Lekin

$$\frac{\partial f}{\partial R} = 2\pi RH, \quad \frac{\partial f}{\partial H} = \pi R^2, \quad \Delta R = \Delta H = k$$

bo'lgani uchun

$$\vartheta \approx \pi(2RHk + R^2k) \qquad (12)$$

bo'ladi. Agar (11) va(12) larni solishtirsak, ular $\pi(Hk^2+2Rk^2+k^3)$ miqdorga farq qilishini ko'rish mumkin.

Bu farq raqamlardaqanday aks etishini ko'rish uchun R=4 sm, H=20 sm, k=0,1 sm bo'lsin, deb faraz qilaylik.

(11) ga asosan

$$\vartheta = \pi(2\cdot 4\cdot 20\cdot 0{,}1 + 4^2\cdot 0{,}1 + 20\cdot 0{,}1^2 + 2\cdot 4\cdot 0{,}1^2 + 0{,}1^3) = 17{,}881\pi.$$

(12) ga asosan esa

$$\vartheta \approx \pi(2\cdot 4\cdot 20\cdot 0{,}1 + 4^2\cdot 0{,}1) = 17{,}6\pi.$$

Demak, taqribiy hisob uchun yozilgan (12) formula $0{,}3\pi$ dan kichik xatolik bilan natija berar ekan. Bu xatolik o'lcham miqdorining $100\cdot\frac{0{,}3\pi}{17{,}881\pi}$ % ini, ya'ni 2% idan kichik miqdorini tashkil etadi.

(8) ga ko'ra absolyut qiymatlari bo'yicha yetarlicha kichik Δx va Δu lar uchun funktsiyaning to'la orttirmasini to'la differentsialga taqriban almashtirish mumkin:

$$\Delta z \approx \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y.$$

Bundan

$$|\Delta z| \le \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right||\Delta x| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right||\Delta y|. \qquad (13)$$

Miqdorlarning maksimal absolyut xatoliklarini mos ravishda $|\Delta^* x|$, $|\Delta^* y|$ va $|\Delta^* z|$ bilan belgilasak, oxirgi tengsizlikni quyidagichayozish mumkin:

$$|\Delta^* z| = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right||\Delta^* x| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right||\Delta^* y|. \qquad (14)$$

Misollar.

1. Agar $u = x + y + z$ bo'lsa, u holda

$$|\Delta * u| = |\Delta * x| + |\Delta * y| + |\Delta * z|.$$

2. Agar $z = xy$ bo'lsa, $|\Delta * z| = |x||\Delta * y| + |y||\Delta * x|$ bo'ladi.

3. Agar $z = \frac{x}{y}$ bo'lsa, u holda

$$|\Delta * z| = \left|\frac{1}{y}\right||\Delta * x| + \left|\frac{x}{y^2}\right||\Delta * y|.$$

4. To'g'ri burchakli ABC uchburchakning kateti $b = 121{,}56м$, bir burchagi $A = 25^0 21'40''$, bundan tashqari katetni aniqlashdagi maksimal absolyut xatolik $|\Delta * b| = 0{,}05м$, A burchakni aniqlashdagi maksimal absolyut xatolik $|\Delta * A| = 12''$. Uchburchakning a katetini $a = btgA$ formula bilan hisoblashda yo'l qo'yiladigan maksimal absolyut xatolikni toping.

Yechish (14) formulaga binoan

$$|\Delta * a| = |tgA||\Delta * b| + \frac{|b|}{\cos^2 A}|\Delta * A|.$$

Agar trigonometrik funktsiyalar jadvalidan foydalanib va $|\Delta * A| = 12''$ ni radianlarda ifodalab, o'rniga qo'ysak:

$$|\Delta * a| = tg25^0 21'40''\cdot 0{,}05 + \frac{121{,}56}{\cos^2 25^0 21'40''}\frac{12}{206265} =$$
$$= 0{,}0237 + 0{,}0087 = 0{,}0324м$$

Biror miqdorning Δx xatoligini bu miqdorning taqribiy x qiymatiga bo'lgan nisbati shu miqdorning nisbiy xatoligi, deb ataladi. Agar bu xatolikni δx bilan belgilasak, $\delta x = \frac{\Delta x}{x}$ bo'ladi.

x miqdorning maksimal nisbiy xatoligi deb, maksimal absolyut xatoligini x ning absolyut qiymatiga bo'lgan nisbatiga aytamiz:

$$|\delta * x| = \frac{|\Delta * x|}{|x|}. \qquad (15)$$

Agar (14) ni $|z| = |f(x,y)|$ gabo'lsak:

$$\frac{|\Delta * z|}{|z|} = \left|\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{f}\right||\Delta * x| + \left|\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{f}\right||\Delta * y|, \qquad (16)$$

lekin bu yerda

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{f} = \frac{\partial}{\partial x}\ln|f|, \quad \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{f} = \frac{\partial}{\partial y}\ln|f|.$$

Shu sababli (16) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$|\delta * z| = \left|\frac{\partial}{\partial x}\ln|f|\right||\Delta * x| + \left|\frac{\partial}{\partial y}\ln|f|\right||\Delta * y|. \quad (17)$$

Bu tenglikning o'ng tomoniga(14) ni qo'llasak:

$$|\delta * z| = |\Delta * \ln|f||. \quad (18)$$

(18) dan taqribiy hisoblashlarda keng qo'llanadigan quyidagi qoidalar kelib chiqadi:

1. Agar $z = xy$ bo'lsa, 2-misolga ko'ra

$$|\delta * z| = \frac{|y||\Delta * x|}{|xy|} + \frac{|x||\Delta * y|}{|xy|} = \frac{|\Delta * x|}{|x|} + \frac{|\Delta * y|}{|y|} = |\delta * x| + |\delta * y|.$$

2. $z = \frac{x}{y}$ bo'lsin. U holda 3-misolga ko'ra

$$|\delta * z| = |\delta * x| + |\delta * y|.$$

4-*misol.* Agar mayatnikning uzunligi l, og'irlik kuchining tezlanishi g bo'lsa, mayatnikning tebranish davri

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

formula bo'yicha hisoblanadi.

Agar $\pi \approx 3,14$ (0,005 aniqlik bilan), $l = 1$m (0,01 m aniqlik bilan), $g = 9,8$ $м/с^2$ (0,02 $м/с^2$ aniqlik bilan desak, bu formulada hisoblangan natijada yo'l qo'yilgan nisbiy xatolikni toping.

Yechish Bu xatolikni topish uchun (18) ni qo'llaymiz.

Buning uchun

$$\ln T = \ln 2 + \ln \pi + \frac{1}{2}\ln l - \frac{1}{2}\ln g$$

ni hisoblab olamiz.

Shartga ko'ra $\Delta * \pi = 0,005, \Delta * l = 0,01м, \Delta * g = 0,02 м/с^2$. Shuning uchun

$$\Delta * \ln T = \frac{\Delta * \pi}{\pi} + \frac{\Delta * l}{2l} + \frac{\Delta * g}{2g} = \frac{0,005}{3,14} + \frac{0,01}{2} + \frac{0,02}{2 \cdot 9,8} = 0,0076.$$

Demak, yo'l qo'yilgan maksimal nisbiy xatolik

$$\delta * T = 0,0076 = 0,76\%$$

ekan.

6-§. Murakkab funktsiyaning xususiy hosilalari. To'la hosila. Murakkab funktsiyaning to'la differentsali

Agar

$$z = F(u, \vartheta) \quad (1)$$

tenglamada u va ϑ lar erkli x va y o'zgaruvchilarning funktsiyalari bo'lsa,

$$u=\varphi(x,y),\quad \vartheta=\psi(x,y),\tag{2}$$

u holda (1) va larning murakkab funktsiyasi bo'ladi. Uni va lar orqali quyidagicha ifodalasa ham bo'ladi:

$$z=F(\varphi(x,y),\psi(x,y)).\tag{3}$$

Faraz qilaylik, , $\varphi(x,y)$ va $\psi(x,y)$ funktsiyalar barcha argumentlari bo'yicha uzluksiz hosilalarga ega bo'lsin. (3) dan foydalanmasdan, (1) va (2) tenglamalar orqali $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ xususiy hosilalarni topaylik.

y ni o'zgarmas deb, x ga Δx orttirma beraylik. U holda (2) ga ko'ra, u va ϑ lar ham $\Delta_x u, \Delta_x \vartheta$ orttirmalar oladi. (1) ga asosan $z=F(u,\vartheta)$ ham 5-§, (7) formula orqali ifodalanuvchi Δz orttirma oladi:

$$\Delta z=\frac{\partial F(u,\vartheta)}{\partial u}\Delta_x u+\frac{\partial F(u,\vartheta)}{\partial \vartheta}\Delta_x \vartheta+\gamma_1\Delta_x u+\gamma_2\Delta_x\vartheta.$$

Bu tenglikning har bir hadini Δx ga bo'lamiz:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x}=\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\Delta_x u}{\Delta x}+\frac{\partial F}{\partial \vartheta}\frac{\Delta_x \vartheta}{\Delta x}+\alpha_1\frac{\Delta_x u}{\Delta x}+\alpha_2\frac{\Delta_x \vartheta}{\Delta x}.$$

Agar $\Delta x\to 0$ bo'lsa, $\Delta_x u\to 0$, $\Delta_x\vartheta\to 0$ va $\alpha_1\to 0$, $\alpha_2\to 0$. Oxirgi tenglikda $\Delta x\to 0$ bo'lganda limitga o'tamiz:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial \vartheta}\frac{\partial \vartheta}{\partial x}.\tag{4}$$

Endi, aynan shunday mulohaza yuritib (x ni o'zgarmas deb, u ga Δu orttirma bersak):

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial \vartheta}\frac{\partial \vartheta}{\partial y}\tag{5}$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Eslatma. Argumentlarning sanog'i ko'p bo'lganda ham xususiy hosilalar shunga o'xshash topiladi.

Misol: $w=u^2\vartheta-t^3$ bo'lib, $u=x-y$; $\vartheta=x\cdot y$; $t=x+y$ bo'lsin.

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial \vartheta}\frac{\partial \vartheta}{\partial x}.+\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}=2u\vartheta+u^2y-3t^2=$$

$$=2(x-y)xy-(x-y)^2y-3(x+y)^2,$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=2u\vartheta(-1)-u^2x-3t^2=$$

$$=-2(x-y)xy-(x-y)^2x-3(x+y)^2.$$

Agar $z=F(x,y,u,\vartheta)$ funktsiya berilgan bo'lib, u, u, ϑ lar o'z navbatida faqat x ning funktsiyalari bo'lsa, ya'ni $y=f(x)$, $u=\varphi(x)$, $\vartheta=\psi(x)$, u holda z faqat bitta x o'zgaruvchining funktsiyasi bo'lib qoladi va undan oddiy dz/dx hosilani topish masalasini qo'yish mumkin. U holda

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial \vartheta}\frac{\partial \vartheta}{\partial x},$$

bu yerda $\frac{dx}{dx}=1,\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{dy}{dx},\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{du}{dx},\frac{\partial \vartheta}{\partial x}=\frac{d\vartheta}{dx}$ ekanligini e'tiborga olsak,

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial F}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial F}{\partial \vartheta}\frac{d\vartheta}{dx} \tag{6}$$

hosil bo'ladi. Bu hosilani to'la hosila, deb ataymiz.

Misol. $z=\sqrt{x^3+y};y=\sin 2x$.

Yechish.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+y}};\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2\sqrt{x^3+y}};\frac{dy}{dx}=2\cos 2x$$

U holda

$$\frac{dz}{dx}=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+y}}+\frac{1}{2\sqrt{x^3+y}}\cdot 2\cos 2x=\frac{3x^2+2\cos 2x}{2\sqrt{x^3+\sin 2x}}$$

bo'ladi.

Endi, (1) va (2) tengliklar bilan aniqlanuvchi murakkab funktsiyaning to'la differentsialini topaylik. Buning uchun (4) va (5) larni to'la differentsialning

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy \tag{7}$$

formulasiga qo'ysak:

$$dz=\left(\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial \vartheta}\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial \vartheta}\frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right)dy.$$

Ifodalardao'rin almashtirishlar bajarsak:

$$dz=\frac{\partial F}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial \vartheta}{\partial x}dy\right)+\frac{\partial F}{\partial \vartheta}\left(\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial \vartheta}{\partial y}dx\right). \tag{8}$$

Agar

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=du,\quad \frac{\partial \vartheta}{\partial x}dx+\frac{\partial \vartheta}{\partial y}dy=d\vartheta$$

ekanligini eslasak, u holda(8) ni quyidagicha yozsa bo'ladi:

$$dz=\frac{\partial F}{\partial u}du+\frac{\partial F}{\partial \vartheta}d\vartheta \tag{9}$$

yoki

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial \vartheta}d\vartheta. \tag{10}$$

To'la differentsialning (7) va (10) ifodalarini solishtirsak, ularning umumiy ko'rinishi bir xil ekanligiga ishonch hosil qilamiz. To'la differenialning bu xususiyati differentsial ko'rinishining invariantligi deb ataladi.

7-§. Oshkormas funktsiyaning hosilasi

Avval bittaerkli o'zgaruvchining oshkormas funktsiyasidan hosilaolishni ko'rib chiqamiz.

Teorema. x *ning uzluksiz funktsiyasi*

$$F(x,y)=0 \tag{1}$$

oshkormas tenglama bilan berilgan bo'lsin. Agar (1) tenglamani qanoatlantiradigan (x,y) *nuqtani o'z ichiga olgan biror D sohada* $F(x,y)$, $F_x'(x,y)$, $F_y'(x,y)$ *lar uzluksiz bo'lib,* $F_y'(x,y)\neq 0$ *bo'lsa, u holda*

$$y'_x=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} \tag{2}$$

bo'ladi.

Isbot. x ning biror qiymatida $F(x,y)=0$ bo'lsin. x ga Δx orttirma bersak, y Δy orttirma oladi. U holda(1) ga asosan

$$F(x+\Delta x, y+\Delta y)=0$$

bo'ladi.

$$F(x+\Delta x, y+\Delta y)-F(x,y)=0$$

ayirmani xususiy hosilalar orqali ifodalaymiz:

$$F(x+\Delta x, y+\Delta y)-F(x+y)=$$

$$=\frac{\partial F}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial F}{\partial y}\Delta y+\alpha_1\Delta x+\alpha_2\Delta y=0\,.$$

Bundan

$$\frac{\partial F}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial F}{\partial y}\Delta y+\alpha_1\Delta x+\alpha_2\Delta y=0$$

hosil bo'ladi. Buni ikkalatomonini Δx ga bo'lib, $\Delta y/\Delta x$ ni topamiz:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}+\alpha_1}{\dfrac{\partial F}{\partial y}+\alpha_2}\,.$$

Agar $\Delta x\to 0$ bo'lganda limitga o'tsak va $\alpha_1\to 0$ va $\alpha_2\to 0$, hamda $\partial F/\partial y\neq 0$ ekanligini hisobga olsak,

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} \tag{3}$$

bo'ladi.

Misol.

$$x^2+\cos(x+y^2)=0.\ y_x'=?$$

$$y'_x=-\frac{2x-\sin(x+y^2)}{-2y\sin(x+y^2)}=\frac{2x-\sin(x+y^2)}{2y\sin(x+y^2)}\,.$$

Endi, ikki argumentli oshkormas ko'rinishda berilgan F $(x, y, z)=0$ funktsiyadan $\partial z/\partial x$ va $\partial z/\partial y$ xususiy hosilalarni topamiz. $\partial z/\partial x$ ni topish paytida y ni o'zgarmas deb va(3) formuladan foydalansak,

$$\partial z/\partial x=-F_x'/F_z'$$

bo'ladi. Aynan shunga o'xshash mulohazalar bilan

$$\partial z/\partial y=-F_y'/F_z'$$

formulani hosil qilamiz.

Misol.

$$e^z+x^2y+z+5=0. \ F(x, y, z)=e^z+x^2y+z+5$$

$$F_x'=2xy; \ F_y'=x^2; \ F_z'=e^z+1.$$

Demak,

$$z_x' = -\frac{2xy}{e^z+1}, \quad z_y' = -\frac{x^2}{e^z+1}.$$

8-§. Urinma tekislik. Differentsialning geometrik ma'nosi

Faraz qilaylik, S sirt tekislikning biror sohasida uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo'lgan

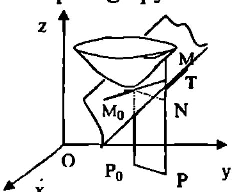
$$z=f(x,y) \tag{1}$$

funktsiyaning geometrik aksi bo'lsin.

S sirtga uning biror $M_0(x_0,y_0,z_0), z_0=f(x_0,y_0)$ nuqtasida o'tkazilgan urinma tekislik deb, tenglamasi

$$Z-z_0=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0(X-x_0)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0(Y-y_0) \tag{2}$$

ko'rinishda bo'lgan Π tekislikka aytamiz, bu yerda, X, Y, Z o'zgaruvchi koordinatalar, $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0, \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0$ — f funktsiya xususiy hosilalarining $P_0(x_0,y_0)$ nuqtadagi qiymatlari.



113-rasm.

Faraz qilaylik, $P(x,y)$ tekislikning berilgan nuqtasiga yaqin biror nuqta bo'lsin. $P(x,y)$ nuqtadan z o'qiga parallel o'tgan to'g'ri chiziq Π tekislikni T nuqtada, S sirtni M nuqtada kesadi. M nuqtaning applikatasi

$$z=f(x,y),.$$

T nuqtaning applikatasi esa

$$z=f(x_0,y_0)+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0(x-x_0)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0(y-y_0).$$

M va T nuqtalar orasidagi masofa

$$|MT|=|f(x,y)-f(x_0,y_0)-\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0(x-x_0)-\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0(y-y_0)| \tag{3}$$

bo'lsa, P va P_0 nuqtalar orasidagi masofa

$$\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}.$$

Shartga ko'ra f funktsiya (x_0, y_0) nuqtada uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo'lgani uchun u shu nuqtada differentsiallanuvchidir. Shuning uchun (3) ning o'ng tomoni nolga ρ dan ko'ra tezroq intiladi, ya'ni

$$|MT| \underset{\rho\to 0}{=} o(\rho).$$

Bu xususiyat faqat urinma tekisligiga xos, chunki agar shu xususiyatga tenglamasi

$$Z-z_0=a(x-x_0)+b(y-y_0)$$

bo'lgan boshqa Π' tekislik ham ega bo'lsa, u holda $\rho\to 0$ bo'lganda

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=a(x-x_0)+b(y-y_0)+o(\rho)$$

bo'ladi va shu sababli f funktsiya (x_0, y_0) nuqtada differentsiallanuvchi bo'lib,

$$a=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0, b=\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0$$

bo'ladi, ya'ni $\Pi'=\Pi$ bo'ladi.

Demak, S sirt o'zining $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ nuqtasida urinma tekislikka ega bo'lishi uchun, f funktsiya P_0 nuqtada differentsiallanuvchi bo'lishi zarur va yetarli ekan.

(2) ning o'ng tomoni f funktsiyaning P_0 nuqtadagi differentsiali, chap tomoni esa Π urinma tekislikning applikatasining orttirmasidir.

Demak, f funktsiyaning (x_0, y_0) nuqtadagi $(x-x_0, y-y_0)$ orttirmalarga mos keluvchi to'la differentsiali geometrik nuqtai-nazardan $z=f(x,y)$ sirtga (x_0, y_0) nuqtada o'tkazilgan urinma tekislik applikatasining orttirmasini berar ekan.

Eslatma. Agar $z=f(x,y)$ funktsiyaning (x_0, y_0) nuqtada xususiy hosilalari mavjud bo'lsa ham, lekin shu nuqtada differentsiallanuvchi bo'lmasa, u holda (2) tekislikni $z=f(x,y)$ sirtga (x_0, y_0) nuqtada o'tkazilgan urinma tekislik, deb atashdan ma'no yo'q, chunki $\rho\to 0$ da $f(x,y)-Z$ ayirma nolga ρ dan tezroq intilmaydi. Masalan, x va y o'qlarida nolga va tekislikning boshqa nuqtalarida birga teng bo'lgan $z=f(x,y)$ funktsiya uchun $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$ va shu sababli (2) tenglama $Z=0$ bo'ladi, lekin x va y o'qlaridan tashqaridagi barcha (x, y) nuqtalarda $f(x,y)-Z=f(x,y)-0=1$.

Ta'rif. *Urinma tekislikka urinish nuqtasida perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq normal to'g'ri chiziq, deyiladi. Uning tenglamasi quyidagicha bo'ladi:*

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

Agar sirtning tenglamasi $F(x, y, z)=0$ oshkormas ko'rinishda berilgan bo'lsa, ma'lumki xususiy hosilalar

$$f'_x(x_0,y_0) = -\frac{F'_x(x_0,y_0,z_0)}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}; \quad f'_y(x_0,y_0) = -\frac{F'_y(x_0,y_0,z_0)}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}$$

bo'lib, urinma tekislikning tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

$$z - z_0 = -(x - x_0)\frac{F'_x(x_0,y_0,z_0)}{F'_z(x_0,y_0,z_0)} - (y - y_0)\frac{F'_y(x_0,y_0,z_0)}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}$$

yoki

$$(z-z_0)\ F'_z(x_0,y_0,z_0)+(x-x_0)\ F'_x(x_0,y_0,z_0)+(y-y_0)\ F'_y(x_0,y_0,z_0)=0$$

yoki qisqacha

$$(x-x_0)\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{x_0} + (y-y_0)\frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{x_0} + (z-z_0)\frac{\partial F}{\partial z}\Big|_{x_0} = 0.$$

Normal to'g'ri chiziq tenglamasi quyidagichabo'ladi:

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{x_0}} = \frac{y-y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{x_0}} = \frac{z-z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}\Big|_{x_0}}.$$

Misol. $x^2+\frac{y^2}{2}+z^2=1$ aylanma ellipsoidga shunday urinma tekislik o'tkazilsinki, u $x+y-z=0$ tekislikka parallel bo'lsin.

Yechish. $\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{x_0} = 2x_0,\ \frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{x_0} = y_0,\ \frac{\partial F}{\partial z}\Big|_{x_0} = 2z_0$

bo'lgani sababli urinma tekislik $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ nuqtada

$$2x_0(x-x_0)+y_0(y-y_0)+2z_0(z-z_0)=0$$

bo'ladi. Uning $x+y-z=0$ tekislikka parallelligidan foydalanamiz:

$$\frac{2x_0}{1} = \frac{y_0}{1} = \frac{2z_0}{-1}.$$

Bunga M_0 nuqtaning ellipsoidda yotish sharti $x_0^2+y_0^2/2+z_0^2=1$ ni qo'shamiz va birgalikda yechib, $M_0^{(1)}(1/2,1,\ -1/2)$ va $M_0^{(2)}(-1/2,\ -1,1/2)$ larni topamiz. Bu nuqtalarning koordinatalarini urinma tekislik tenglamasiga qo'yib, ikkita tekislikni topamiz:

$$x+y-z=2 \text{ va } x+y-z=-2.$$

9-§. Bir jinsli funktsiyalar

Ta'rif. *Agar f funktsiyaning har bir argumentini t ga ko'paytirganda f funktsiya t^k ko'paytuvchiga ega bo'lib qolsa, ya'ni*

$$f(tx,ty,tz) = t^k f(x,y,z) \tag{1}$$

bo'lsa, biror D sohada aniqlangan $f(x,y,z)$ funktsiya k — darajali birjinsli funktsiya deyiladi.

Misollar.

1. $3x^2-2xy+5y^2$ ikkinchi darajali birjinsli ko'phaddir, chunki

$$3(tx)^2-2(tx)(ty)+5(ty)^2 = 3t^2x^2-2t^2xy+$$
$$+5t^2y^2 = t^2(3x^2-2xy+5y^2)$$

2. $x\cdot\frac{\sqrt{x^4+y^4}}{x-y}\cdot\ln\frac{x}{y}$ ikkinchi darajali birjinsli funktsiyadir. Haqiqatan

$$(tx)\cdot\frac{\sqrt{(tx)^4+(ty)^4}}{tx-ty}\cdot\ln\frac{tx}{ty}=t^2\left(x\cdot\frac{\sqrt{x^4+y^4}}{x-y}\cdot\ln\frac{x}{y}\right).$$

Birjinslilik ko'rsatkichi k butun son bo'lishi shart emas, u ixtiyoriy haqiqiy son bo'lishi mumkin.

3. $x^{\pi}\cdot\sin\frac{y}{x}+y^{\pi}\cdot\cos\frac{y}{x}$ funktsiya π-darajali birjinsli funktsiya. Buni tekshirishni o'quvchining o'ziga havola qilamiz.

Faraz qilaylik, bizga k-darajali birjinsli $f(x,y,z)$ funktsiya berilgan bo'lsin. U holda (1) tenglik o'rinli bo'ladi. Agar bu tenglikda $t=\frac{1}{x}$ desak:

$$f\left(\frac{1}{x}\cdot x,\frac{1}{x}\cdot y,\frac{1}{x}\cdot z\right)=f\left(1,\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)=$$
$$=\left(\frac{1}{x}\right)^k f(x,y,z)=\frac{1}{x^k}f(x,y,z)$$

yoki bundan

$$f(x,y,z)=x^k\cdot f\left(1,\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right) \qquad (2)$$

kelib chiqadi. (2) tenglik k-darajali birjinsli $f(x,y,z)$ funktsiyaning umumiy ko'rinishi, deb ataladi.

Birjinslilik ko'rsatkichi $k=0$, ya'ni $f(x,y,z)$ funktsiya 0-darajali birjinsli funktsiyabo'lsa, u holdauni soddaginaqilib birjinsli funktsiya, deb ataymiz.

Demak, birjinsli funktsiya uchun

$$f(tx,ty,tz)=f(x,y,z)=f\left(1,\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right) \qquad (3)$$

munosabat o'rinli bo'lar ekan.

Endi faraz qilaylik, k-darajali birjinsli $f(x,y,z)$ funktsiyaochiq D sohada barcha argumentlari bo'yicha uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo'lsin. D sohadan ixtiyoriy ravishdabiror (x_0,y_0,z_0) nuqtatanlasak, (1) gaasosan har qanday $t>0$ uchun

$$f(tx_0,ty_0,tz_0)=t^k f(x_0,y_0,z_0)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Bu tenglikni t bo'yicha differentsiallasak (tenglikning chap tomoni murakkab funktsiyani differentsiallash qoidasi bo'yicha, o'ng tomoni esa darajali funktsiyani differentsiallash formulasiga ko'ra bajariladi):

$$f_x'(tx_0,ty_0,tz_0)\cdot x_0+f_y'(tx_0,ty_0,tz_0)\cdot y_0+$$
$$+f_z'(tx_0,ty_0,tz_0)\cdot z_0=kt^{k-1}\cdot f(x_0,y_0,z_0).$$

Agar bu yerda, $t=1$ desak, quyidagi formulaga kelamiz:

$$f_x'(x_0,y_0,z_0)\cdot x_0+f_y'(x_0,y_0,z_0)\cdot y_0+$$
$$+f_z'(x_0,y_0,z_0)\cdot z_0=k\cdot f(x_0,y_0,z_0).$$

Demak, D sohaning ixtiyoriy (x,y,z) nuqtasi uchun

$$\begin{aligned} & f_x'(x,y,z)\cdot x+f_y'(x,y,z)\cdot y+ \\ & +f_z'(x,y,z)\cdot z=k\cdot f(x,y,z) \end{aligned} \tag{4}$$

tenglik o'rinli ekan. Bu tenglikni Eyler formulasi, deb atashadi.

Biz hozir bu tenglikni ixtiyoriy barcha argumentlari bo'yicha uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo'lgan k-darajali birjinsli $f(x,y,z)$ funktsiya qanoatlanti-rishini ko'rsatdik. Teskarisini, ya'ni (4) Eyler formulasini qanoatlantiruvchi xususiy hosilalari bilan uzluksiz bo'lgan har qanday funktsiya k-darajali birjinsli funktsiya bo'lishi zarurligini ko'rsatish mumkin.

10-§. Yuqori tartibli hosilalar va differentsiallar

10.1. Yuqori tartibli hosilalar

Agar $z=f(x,y)$ funktsiya[1] biror ochiq D sohada argumentlarining birortasi bo'yicha xususiy hosilaga ega bo'lsa, u hosila o'z navbatida yana o'sha o'zgaruvchilarning funktsiyasi bo'lib, shu o'zgaruvchilar bo'yicha xususiy hosilaga ega bo'lishi mumkin. Bu hosilalar $z=f(x,y)$ funktsiya uchun ikkinchi tartibli xususiy hosilalar bo'ladi.

Agar birinchi hosila, masalan, x bo'yicha olingan bo'lsa, u holda undan x,y lar bo'yicha olingan hosilalar quyidagicha belgilanadi:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

Ayrim hollarda ikkinchi hosilalar uchun

$$z_{x^2}''=(z_x')_x',\quad z_{xy}''=(z_x')_y'$$

belgilashlar ham ishlatiladi.

Agar birinchi hosila y bo'yicha olingan bo'lsa, u holda ikkinchi hosilalar quyidagicha belgilanadi:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=z_{yx}'',\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=z_{y^2}''.$$

Uchinchi, to'rtinchi va h.k. yuqori tartibli hosilalar aynan shunday kiritiladi.

Har xil o'zgaruvchilar bo'yicha olingan yuqori tartibli

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x},\ \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y},\ \frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}\ \ldots$$

xususiy hosilalar aralash hosilalar deyiladi.

1-*misol.* $z=x^4y^3$. Uchinchi tartibgacha barcha xususiy hosilalarni toping.

Yechish. $z_x'=4x^3y^3$, $z_{xx}''=12x^2y^3$, $z_{xy}''=12x^3y^2$, $z_{xxx}'''=24xy^3$,

$$z_{xxy}'''=36x^2y^2,\quad z_{xyx}'''=36x^2y^2,\quad z_{xyy}'''=24x^3y,$$

---

[1] Biz bu yerda ham tushunish oson bo'lishi uchun ikki erkli o'zgaruvchi bo'lgan hol bilan chegaralanamiz.

$$z_y'=3x^4y^2,\quad z_{yx}''=12x^3y^2,\quad z_{yy}''=6x^4y,\quad z_{yxx}'''=36x^2y^2,$$
$$z_{yxy}'''=24x^3y,\quad z_{yyx}'''=24x^2y,\quad z_{yyy}'''=6x^4.$$

2-*misol.* $z=arctg\frac{x}{y}$. Ikkinchi tartibgacha barcha xususiy hosilalarni hisoblang.

Yechish. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{x^2+y^2}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

10.2. Aralash hosilalar haqidagi teorema

Yuqoridagi ikkala misolda ham ayrim aralash hosilalar o'zaro teng ekanligini kuzatgan edik. Lekin bundan har doim shunday bo'laveradi, deyish xato bo'ladi. Bunga misol sifatida

$$x^2+y^2>0 \text{ lar uchun } f(x,y)=xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},\quad f(0,0)=0$$

funktsiyani ko'raylik.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y\cdot\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)\ (x^2+y^2>0 \text{ lar uchun}) \text{ va}$$
$$f_x'(0,0)=0.$$

Agar x ga nol qiymat bersak, y ning ixtiyoriy qiymati uchun $f_x'(0,y)=-y$ bo'ladi. Buni y bo'yicha differentsiallasak $f_{xy}''(0,y)=-1$ ga ega bo'lamiz. Xususan (0,0) nuqtada ham $f_{xy}''(0,0)=-1$ bo'ladi.

Aynan shundek mulohazalar bilan $f_{yx}''(0,0)=1$ ekanligiga ishonch hosil qilish qiyin emas.

Demak, berilgan funktsiya uchun $f_{xy}''(0,0)\neq f_{yx}''(0,0)$ ekan.

Aralash hosilalarning tengligi haqidagi fikrlarni Eyler va Kleroning[1] ishlarida ham uchratish mumkin, lekin buning qat'iy isbotini 1873 yilda Shvarts[2] bergan.

Quyidagi teorema aralash xususiy hosilalarning teng bo'lish shartlarini beradi.

---

[1] Aleksis Klod Klero (1713-1765) — buyuk farang matematigi.
[2] Karl German Armanlua Shvarts (1843-1921) — olmon matematigi.

Teorema. *Agar: 1) $f(x,y)$ funktsiya biror ochiq D sohada aniqlangan; 2) shu sohada birinchi f'_x va f'_y, ikkinchi aralash f''_{xy} va f''_{yx} xususiy hosilalarga ega va nihoyat 3) f''_{xy} va f''_{yx} xususiy hosilalar x,y larning funktsiyasi sifatida D sohaning biror (x_0,y_0) nuqtasida uzluksiz bo'lsa, u holda shu nuqtada*

$$f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0) \qquad (1)$$

bo'ladi.

Isboti. Haqiqatan ixtiyoriy $\Delta x, \Delta y$ orttirmalar uchun

$$\begin{aligned}
&\Delta_x[\Delta_y f(x_0,y_0)]=\Delta_x[f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)]= \\
&=[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0)]- \\
&[f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)]=[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)- \\
&-f(x_0,y_0+\Delta y)]-[f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)]= \\
&=\Delta_y[f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)]=\Delta_y[\Delta_x f(x_0,y_0)]
\end{aligned} \qquad (2)$$

Yordamchi

$$\varphi(x,y_0)=f(x,y_0+\Delta y)-f(x,y_0)$$

funktsiyani kiritaylik. Umumiylikni buzmagan holda $\Delta x>0$ deb, bu funktsiyaga $(x_0,x_0+\Delta x)$ oraliq uchun Lagranj teoremasini qo'llasak (teoremaning 1-shartiga ko'ra, f'_x xususiy hosila mavjud bo'lgani uchun bunga haqqimiz bor):

$$\begin{aligned}
&\Delta_x[\Delta_y f(x_0,y_0)]=\Delta_x\varphi(x_0,y_0)=\varphi(x_0+\Delta x,y_0)- \\
&-\varphi(x_0,y_0)=\varphi'(x_0+\theta\Delta x,y_0)\cdot\Delta x= \\
&\Delta x\cdot[f'_x(x_0+\theta\Delta x,y_0+\Delta y)-f'_x(x_0+\theta\Delta x,y_0)]
\end{aligned} \qquad (3)$$

bu yerda $0<\theta<1$.

Endi, teoremaning 2-shartiga ko'ra f''_{xy} xususiy hosila mavjud bo'lgani uchun oxirgi tenglikka yana Lagranj teoremasini qo'llash mumkin. U holda:

$$\Delta_x[\Delta_y f(x_0,y_0)]=\Delta x\cdot\Delta y\cdot f''_{xy}(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta_1\Delta y), \qquad (4)$$

bu yerda $0<\theta_1<1$.

Teoremaning 3-shartiga ko'ra f''_{xy} aralash hosila (x_0,y_0) nuqtada uzluksiz bo'lgani uchun (4) ni quyidagicha yozamiz:

$$\Delta_x[\Delta_y f(x_0,y_0)]=\Delta x\cdot\Delta y\cdot[f''_{xy}(x_0,y_0)+\varepsilon], \qquad (5)$$

bu yerda $\Delta x,\Delta y\to 0$ bo'lganda $\varepsilon\to 0$ bo'ladi.

(5) da $\Delta x,\Delta y\to 0$ bo'lganda limitga o'tsak:

$$\lim\frac{\Delta_x[\Delta_y f(x_0,y_0)]}{\Delta x\Delta y}=f''_{xy}(x_0,y_0). \qquad (6)$$

Aynan shundek mulohazalar bilan

$$\psi(x_0,y)=f(x_0+\Delta x,y)-f(x_0,y)$$

yordamchi funktsiyani qo'llagan holda

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta_y[\Delta_x f(x_0,y_0)]}{\Delta x\Delta y}=f''_{yx}(x_0,y_0) \qquad (7)$$

munosabatga kelamiz.

U holda(2) tenglikka asosan (6) va(7) lardan (1) kelib chiqadi.

1-eslatma. Induktsiya usuli yordamida bu teoremani faqat differentsiallash tartibi bilangina farq qiladigan istalgan tartibli aralash xususiy hosilalarga qo'llash mumkin. Masalan,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial^2 x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]\right\}=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]\right\}=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]\right\}=\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial^2 x}.$$

2-eslatma. Yuqoridagi misolda ko'rilgan funktsiya uchun teoremaning sharti bajarilmayapti, chunki funktsiyaning aralash hosilalari (0,0) nuqtada uzluksiz emas. Shu sababli bu funktsiyaning aralash xususiy hosilalari teng emas.

10.3. Yuqori tartibli differentsiallar

Biror D sohada 1-tartibli uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo'lgan $z=f(x,y)$ funktsiyaberilgan bo'lsin. U holda uning to'la differentsiali deb,

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

ifodaga aytgan edik. Bundan ko'rinadiki, dz ham x,y larning funktsiyasi bo'ladi. Agar f ikkinchi tartibli uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo'lsa, dz birinchi tartibli uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo'ladi. Shu sababli uning to'la differentsiali $d(dz)$ to'g'risida gapirish mumkin. Uni f ning ikkinchi tartibli to'ladifferentsiali deb, d^2z ko'rinishda belgilaymiz. Demak,

$$d^2z=d(dz)=d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)=d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx+$$

$$+d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dy\right)dx+$$

$$+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}dx+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy\right)dy=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

Aynan shundek, ikkinchi tartibli differentsialning differentsialini uchinchi tartibli differentsial, deb atab, d^3z ko'rinishda belgilaymiz va h. k. $(n-1)$ - tartibli differentsialning to'la differentsialini n-tartibli differentsial deb, d^nz ko'rinishda belgilaymiz.

n-tartibli differentsial mavjud bo'lishi uchun f n-tartibgacha barcha uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo'lishi zarur. Keyingi tartibli differentsiallarni yozish qadam sayin og'irlashib boradi. Bu ishni engillashtirish maqsadida quyidagicha ish tutiladi:

Birinchi differentsialda z ni shartli ravishda qavs tashqarisiga chiqaramiz

$$dz = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)\cdot z .$$

Agar ikkinchi tartibli differentsialda ham z ni shartli ravishda qavs tashqarisiga chiqarsak,

$$d^2z = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}dy^2\right)\cdot z , \qquad (8)$$

qavs ichidagi ifodaxuddi birinchi differentsialdagi qavs ichidagi ifodaning kvadratiga o'xshaydi. Agar (8) dagi qavs ichidagi ifodani shartli ravishda

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2$$

ga teng deb olsak, u holda

$$d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2\cdot z$$

ni hosil qilamiz.

Aynan shundek, induktsiya usulini qo'llab, ixtiyoriy n uchun shartli

$$d^nz = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n\cdot z \qquad (9)$$

tenglikkakelamiz.

Agar berilgan $z = f(x,y)$ funktsiya n-tartibgacha barcha uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo'lsa, u holda (9) ga binom formulasini qo'llab, quyidagi ko'rinishga kelish mumkin:

$$d^nz = \sum_{i=1}^{n} C_n^{n-i}\frac{\partial^n}{\partial x^{n-i}\partial y^i}dx^{n-i}dy^i\cdot z = \sum_{i=1}^{n} C_n^{n-i}\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-i}\partial y^i}dx^{n-i}dy^i .$$

Endi agar, $z = f(x,y)$ murakkab funktsiyabo'lsa, ya'ni bu yerda,

$$x = \varphi(t_1,t_2)\,,\quad y = \psi(t_1,t_2)$$

bo'lsa, u holdabirinchi differentsial o'z ko'rinishini saqlasa ham ikkinchi differentsial o'z ko'rinishini saqlamasligi mumkin, chunki endi dx, dy lar o'zgarmas bo'lmasligi mumkin.

Berilgan funktsiyaning ikkinchi differentsialini hisoblaylik:

$$\begin{aligned} d^2z &= d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot dx + d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\cdot dy + \frac{\partial z}{\partial x}\cdot d(dx) + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot d(dy) = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2\cdot z + \frac{\partial z}{\partial x}\cdot d^2x + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot d^2y. \end{aligned} \qquad (10)$$

(10) tenglikdan ham ko'rinadiki, umuman aytganda, tartibi birdan yuqori bo'lgan differentsiallar uchun invariantlik xususiyati o'rinli emas ekan.

Agar xususan x, y lar t_1, t_2 larning chiziqli funktsiyalari bo'lsa, ya'ni

$$x = a_1t_1 + b_1t_2\,,\quad y = a_2t_1 + b_2t_2$$

bo'lsa, u holda

$$dx = a_1 dt_1 + b_1 dt_2 = a_1\Delta t_1 + b_1\Delta t_2,\quad dy = a_2 dt_1 + b_2 dt_2 = a_2\Delta t_1 + b_2\Delta t_2,$$

ya'ni dx, dy lar t_1, t_2 larga bog'liq emas. Bundan, agar erkli x, y o'zgaruvchilarni t_1, t_2 larning chiziqli ifodalari bilan almashtirilsa, barcha yuqori tartibli differentsiallar ko'rinishi invariant bo'lishi kelib chiqadi.

10.5. Teylor formulasi

Faraz qilaylik, $z = f(x,y)$ funktsiya biror (x_0, y_0) nuqta atrofida n-tartibgacha barcha uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo'lsin. x_0 va y_0 larga shunday Δx va Δy orttirmalar beraylikki, (x_0,y_0) va $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ nuqtalarni birlashtiruvchi to'g'ri chiziq kesmasi (x_0,y_0) nuqtaning qaralayotgan atrofidan tashqariga chiqib ketmasin. Bu kesma tenglamasi quyidagicha:

$$x = x_0 + t\Delta x,\quad y = y_0 + t\Delta y\quad (0 \le t \le 1)$$

bo'ladi. U holda $z = f(x,y)$ funktsiyabu kesma bo'ylab bitta t o'zgaruvchining funktsiyasi bo'lib qoladi:

$$f(x,y) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y) = F(t). \qquad (11)$$

Bundan

$$\Delta f(x_0,y_0) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = F(1) - F(0). \qquad (12)$$

$F(t)$ ning $t_0=0$ nuqta atrofida Makloren formulasi bo'yicha yoyilmasidan foydalanamiz:

$$F(t) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!}t + \ldots + \frac{F^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}t^{n-1} + \frac{F^{(n)}(\theta)}{n!}t^n\quad (0 < \theta < t).$$

Agar bu yerda $t=1$ desak,

$$\Delta f(x_0,y_0) = F(1) - F(0) = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{F^{(k)}(0)}{k!} + \frac{F^{(n)}(\theta)}{n!},\quad 0 < \theta < t, \qquad (13)$$

tenglikka ega bo'lamiz.

(11) tenglikdan foydalanib, $F(t)$ funktsiyaning hosilalarini hisoblaylik:

$$F'(t) = \frac{\partial f(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y)}{\partial x}\cdot\Delta x + \frac{\partial f(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y)}{\partial y}\cdot\Delta y.$$

Agar bu yerda $t=0$ desak,

$$F'(0) = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\cdot\Delta x + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\cdot\Delta y = df(x_0,y_0)$$

bo'ladi. Aynan shundek,

$$F''(0) = \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}\cdot\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}\cdot\Delta x\Delta y +$$

$$+\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}\cdot\Delta y^2 = d^2 f(x_0,y_0),$$

$$F'''(0) = d^3 f(x_0,y_0),\ \ldots,\ F^{(n-1)}(0) = d^{n-1} f(x_0,y_0).$$

Bularni (13) ga qo'ysak,

$$\Delta f(x_0,y_0)=\frac{df(x_0,y_0)}{1!}+\ldots+\frac{d^{n-1}f(x_0,y_0)}{(n-1)!}+$$
$$+\frac{1}{n!}d^n f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y) \tag{14}$$

gaegabo'lamiz.

(14) formula $z=f(x,y)$ funktsiya uchun Teylor formulasi, deb ataladi. Uning xususiy hosilalar bo'yicha ifodasi ancha murakkab. Xususiy n=1 va n =2 bo'lgan hollar uchun bu formula quyidagicha ko'rinishda bo'ladi:

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f(x_0+\theta(x-x_0),y_0+\theta(y-y_0))}{\partial x}(x-x_0)+$$
$$+\frac{\partial f(x_0+\theta(x-x_0),y_0+\theta(y-y_0))}{\partial y}(y-y_0);$$
$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)+$$
$$+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(x_0+\theta(x-x_0),y_0+\theta(y-y_0))}{\partial x^2}(x-x_0)^2+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2 f(x_0+\theta(x-x_0),y_0+\theta(y-y_0))}{\partial y^2}(y-y_0)^2\right]. \tag{15}$$

11-§. Yuksaklik sirtlari

Bizga R_3 fazoning biror D sohasida aniqlangan

$$u=f(x,y,z) \tag{1}$$

funktsiya berilgan bo'lsin. Bunda D sohada skalyar maydon berilgan deyiladi. Agar masalan, u bu yerda $M(x,y,z)$ nuqtaning haroratini bildirsa, harorat-larning skalyar maydoni; agar D biror gaz yoki suyuqlik bilan to'ldirilgan bo'lib, u uning bosimini bildirsa, bosimlarning skalyar maydoni berilgan deyiladi vah.k.

Biror o'zgarmas c son uchun D sohaning

$$f(x,y,z)=c \tag{2}$$

tenglikni qanoatlantiradigan nuqtalari to'plami R_3 da biror sirtni beradi. Agar s ga boshqa qiymat bersak, boshqa sirt hosil bo'ladi. s ga har xil qiymatlar berish natijasida hosil bo'ladigan bunday sirtlarni yuksaklik sirtlari, deb atashadi.

1-*misol.* Berilgan

$$u=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}$$

skalyar maydon uchun yuksaklik sirtlari yarimo'qlari mos ravishda $2\sqrt{c}$, $3\sqrt{c}$, $4\sqrt{c}$ bo'lgan

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=c$$

ellipsoidlar bo'ladi.

Agar f x,y ning funktsiyasi bo'lsa, u holda

$$u=f(x,y)$$

skalyar maydonning yuksaklik sirtlari Oxu koordinatalar tekisligidagi

$$f(x,y)=c$$

chiziqlardan iborat bo'ladi. Shuning uchun bunday holda ularni yuksaklik chiziqlari, deb ataymiz.

2-*misol.* Berilgan

$$z=1-x^2-y^2$$

skalyar maydonning yuksaklik chiziqlari tenglamalari

$$1-x^2-y^2=c$$

bo'lgan chiziqlardan iborat bo'ladi. Bular ma'lumki, markazi koordinatalar boshida bo'lgan $\sqrt{1-c}$ radiusli kontsentrik aylanalardir. Xususan, s=0 bo'lganda $x^2+y^2=1$ aylana hosil bo'ladi.

12-§. Yo'nalish bo'yicha hosilalar

Faraz qilaylik, $\bar{\omega}=(\omega_x,\omega_y)$ ixtiyoriy birlik vector bo'lsin. U holda 2-§ da berilgan yo'nalish bo'yicha limitning ta'rifiga asosan, f funktsiyaning (x,y) nuqtadagi $\bar{\omega}$ yo'nalish bo'yicha hosilasi deb,

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x+t\omega_x,y+t\omega_y)-f(x,y)}{t}=\frac{\partial f}{\partial\bar{\omega}} \tag{3}$$

limitga (agar u mavjud bo'lsa) aytamiz. Agar t musbat qiymatlar qabul qilib, nolga intilsa, uni f funktsiyaning t bo'yicha t=0 nuqtadagi o'ng hosilasi deb, agar t manfiy qiymatlar qabul qilib, nolga intilsa, uni f funktsiyaning t bo'yicha t=0 nuqtadagi chap hosilasi deb ataymiz.

Aytish joizki, f funktsiyadan x ning musbat yo'nalishi bo'yichaolingan hosila uning x bo'yicha olingan o'ng xususiy hosilasiga, x ning manfiy yo'nalishi bo'yicha olingan hosila x bo'yicha olingan chap xususiy hosilasining teskari ishorabilan olingan qiymatigateng bo'ladi.

Teorema. *Agar f funktsiya (x,y,z) nuqtada differentsiallanuvchi bo'lsa, u holda uning ixtiyoriy birlik vektor $\bar{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ yo'nalishida hosilasi mavjud va u quyidagi formula yordamida aniqlanadi:*

$$\frac{\partial f}{\partial\bar{n}}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma, \tag{4}$$

bu yerda, xususiy hosilalar (x,y,z) nuqtada hisoblangan va α,β,γ lar $\bar{n}$ vektorning mos ravishda x,y,z o'qlar bilan hosil qilgan burchaklaridir.

Isboti. Yo'nalish bo'yicha hosilaning (3) ta'rifiga va to'la hosila formulasiga (6-§, (6) formulagaqarang) ko'ra:

$$\frac{\partial f}{\partial\bar{n}}=\lim_{t\to 0}\frac{f(x+t\cos\alpha,y+t\cos\beta,z+t\cos\gamma)-f(x,y,z)}{t}=$$

$$=\left[\frac{d}{dt}f(x+t\cos\alpha,y+t\cos\beta,z+t\cos\gamma)\right]\Big|_{t=0}=$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma .$$

Teoremaning aksi o'rinli emas, ya'ni funktsiyaning har qanday yo'nalish bo'yicha hosilalari mavjudligidan uning differentsiallanuvchiligi kelib chiqmaydi. Masalan, $y=x^2$ parabolaning nuqtalarida bir, undan tashqaridagi nuqtalarda nolga teng bo'lgan funktsiya differentsiallanuvchi emas, lekin uning ixtiyoriy yo'nalish bo'yicha hosilasi mavjud.

Agar $x=\varphi(s), y=\psi(s), z=\chi(s)$ — Γ silliq chiziqning tenglamalari bo'lsa, bu yerda, parametr s — yoy uzunligi, u holda

$$\frac{dx}{ds}=\varphi'(s),\quad \frac{dy}{ds}=\psi'(s),\quad \frac{dz}{ds}=\chi'(s)$$

miqdorlar Γ ga o'tkazilgan urinma vektorning yo'naltiruvchi kosinuslari bo'ladi. Shuning uchun

$$\frac{\partial f}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}\varphi'(s)+\frac{\partial f}{\partial y}\psi'(s)+\frac{\partial f}{\partial z}\chi'(s)=\frac{d}{ds}f(\varphi(s),\psi(s),\chi(s)),$$

bu yerda, f differentsiallanuvchi funktsiya, urinma vektor yo'nalishida olingan hosila bo'ladi. Uni yana Γ bo'ylab olingan hosila, deb ham atashadi.

13-§. Gradient

D sohaning har bir (x,y,z) nuqtasi uchun f ning (x,y,z) nuqtadagi gradienti, deb ataluvchi

$$grad f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

vektorni kiritamiz. U holda (4) formulaning o'ng tomonini $grad f$ va $\vec{n}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi ko'rinishida ifodalasa bo'ladi:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}=(grad f,\vec{n}).$$

Skalyar ko'paytmaning xossasiga ko'ra $(grad f,\vec{n})=np_{\vec{n}}(grad f)$ bo'lgani uchun

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}=np_{\vec{n}}(grad f) \tag{1}$$

bo'ladi, ya'ni f funktsiyaning (x,y,z) nuqtadagi $\vec{n}$ vektor yo'nalishi bo'yicha olingan hosilasi uning shu nuqtadagi gradientini $\vec{n}$ yo'nalishga bo'lgan proektsiyasiga teng ekan.

Bundan har qanday birlik $\vec{n}$ vektor uchun

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}=|(grad f,\vec{n})|\le|grad f| \tag{2}$$

ekanligi kelib chiqadi. Agar $grad f=0$ bo'lsa, u holda barcha $\vec{n}$ yo'nalishlar bo'yicha $\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}=0$ bo'ladi. Agar $gradf \neq 0$ bo'lsa, u holda $gradf$ bo'ylab yo'nalgan birlik $\vec{n}_0=(\cos\alpha_0, \cos\beta_0, \cos\gamma_0)$ vektor yo'nalishidan boshqa barcha yo'nalishlar uchun (2) da qat'iy tengsizlik o'rinli bo'ladi. Agar $\vec{n}=\vec{n}_0$ bo'lsa, u holda

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}_0}=|gradf|$$

bo'ladi. Demak,

$$\cos\alpha_0=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\cos\beta_0=\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}, \qquad (3)$$

$$\cos\gamma_0=\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}.$$

Bu bilan biz gradientning quyidagi xossasini isbotladik:

1-xossa. Funktsiyaning berilgan nuqtadagi hosilasi maksimum qiymatiga faqat gradient bo'ylab yo'nalgan $\vec{n}$ yo'nalish bo'yicha erishadi. Bu qiymat $|gradf|$ gatengdir.

Vektorlarning perpendikulyarlik shartidan quyidagi xossa kelib chiqadi:

2-xossa. f funktsiyaning $gradf$ ga perpendikulyar bo'lgan yo'nalish bo'yichaolingan hosilasi nolgateng.

3-xossa. f funktsiyaning biror (x_0, y_0, z_0) nuqtadagi gradienti $gradf$ $f(x,y,z)=C$ yuksaklik sirtiga shu nuqtada o'tkazilgan urinma tekislikka perpendikulyar bo'ladi.

Haqiqatan tenglamasi oshkormas $f(x,y,z)=C$ ko'rinishda berilgan sirtga o'tkazilgan urinma tenglamasi

$$(x-x_0)\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_0+(y-y_0)\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_0+(z-z_0)\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_0=0$$

edi (8-§, (4) formulaga qarang). Bu tenglamadan ko'rinadiki, uning normal vektori

$$\vec{n}=\left(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_0, \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_0, \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_0\right)=gradf$$

bo'ladi.

Misol. $u = x^2 + y^2 + z^2$ funktsiyaning $M(1,1,1)$ nuqtadagi gradienti va shu gradient yo'nalishidagi hosilasini hisoblang.

Yechish. $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial u}{\partial z} = 2z$ bo'lgani uchun $M(1,1,1)$ nuqtadagi gradient

$$grad u = (2,2,2)$$

bo'ladi. Bundan

$$|grad u| = 2\sqrt{3}.$$

Endi (3) formula yordamida gradientning yo'naltiruvchi kosinuslarini topamiz:

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{2^2+2^2+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

U holda

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + 2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + 2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3},$$

ya'ni

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = |grad u|.$$

14-§. Yopiq to'plam

Agar shunday $M > 0$ son mavjud bo'lsaki, barcha $x \in A$ lar uchun $|x| \le M$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $A \subset R_n$ to'plam chegaralangan, deyiladi.

A to'plam yopiq, deyiladi, agar A ga tegishli bo'lgan $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ ketma-ketlikning $x_0 \in R_n$ nuqtaga yaqinlashishidan $x_0 \in A$ bo'lishi kelib chiqsa.

Bundan bo'sh to'plam va R_n fazolarning yopiq ekanligi kelib chiqadi, lekin R_n to'plam sifatida chegaralanmagan.

Butun R_n fazoda uzluksiz $F(x_1,..,x_n)$ funktsiya berilgan bo'lsin. U holda ixtiyoriy o'zgarmas C son uchun

$$F(x_1,\dots,x_n) = C \qquad (1)$$

tenglikni qanoatlantiruvchi barcha $x=(x_1,..,x_n)$ nuqtalar to'plami B yopiqdir.

Haqiqatan, agar B bo'sh to'plam bo'lsa, ya'ni (1) ni qanoatlantiruvchi birorta ham nuqta bo'lmasa, u holda B yopiq bo'lishini yuqorida ko'rdik. Endi faraz qilaylik, B bo'sh bo'lmasin va $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ uning biror $x_0 \in R_n$ nuqtaga intiluvchi ketma-ketligi bo'lsin. U holda ketma-ketlik elementlari (1) ni qanoatlantiradi, ya'ni $F(x^k) = C$ bo'ladi. Agar F ning R_n fazoda, shu jumladan, $x_0 \in R_n$ nuqtada ham uzluksiz ekanligini eslasak,

$$\lim_{k\to\infty} F(x^k) = F(x_0) = C$$

kelib chiqadi, ya'ni $x_0 \in B$. Demak, B yopiq to'plam ekan.

Aynan shunday mulohazalar bilan ixtiyoriy C son va R_n fazoda uzluksiz $F(x_1,\dots,x_n)$ funktsiya uchun

$$F(x_1,\dots,x_n)\le C$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha nuqtalar to'plami yopiq to'plam bo'lishini isbotlash mumkin.

Misol. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ellipsoid va $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\le r^2$ shar yuqorida aytilgan fikrlarga asosan yopiq to'plamdirlar.

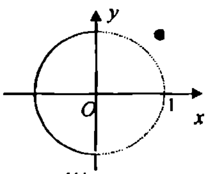
Faraz qilaylik, A va x_0 mos ravishda R_n ning ixtiyoriy to'plami va elementi bo'lsin. Bu yerda bir-birini to'ldiruvchi uchta hol bo'lishi mumkin:

1) Markazi x_0 nuqtada bo'lib, butunlay A to'plamga tegishli bo'lgan V_{x_0} shar mavjud. Bu holda x_0 nuqtani A to'plamning ichki nuqtasi, deymiz.

2) Markazi x_0 nuqtada bo'lib, birorta ham nuqtasi A to'plamga tegishli bo'lmagan V_{x_0} shar mavjud. Bu holda x_0 nuqtani A to'plamning tashqi nuqtasi, deymiz.

3) Markazi x_0 nuqtada bo'lgan har qanday V_{x_0} sharning A to'plamga tegishli bo'lgan va bo'lmagan nuqtalari mavjud. Bunday x_0 nuqtalarni chegaraviy nuqtalar, deb ataymiz.

Barcha nuqtalari ichki bo'lgan to'plam ochiq to'plam, deyiladi.



114-rasm.

A to'plamning barcha chegaraviy nuqtalari to'plamini uning chegarasi, deb atab, $\Gamma=\partial A$ ko'rinishda belgilaymiz. Har qanday to'plamning chegarasi yopiq to'plamdir.

A to'plamning barcha tashqi nuqtalaridan tuzilgan to'plam ochiq to'plamdir.

A to'plamning chegaraviy nuqtalari A ga tegishli ham, tegishli bo'lmasligi ham mumkin. Masalan:

$A\subset R_2$ to'plam 114-rasmda tasvirlangan to'plam bo'lsin, ya'ni $x\le 0$ lar uchun $x^2+y^2\le 1$, $x>0$ lar uchun $x^2+y^2<1$ va $x=y=1$. A to'plamning ichki qismi A' markazi koordinatalar boshida va radiusi bir bo'lgan doiraning ichi, Γ — $x^2+y^2=1$ aylananing nuqtalari va $(1,1)$ nuqtalardan tuzilgan to'plam, A to'plamning tashqi qismi A'' birlik aylananing tashqarisidagi $(1,1)$ nuqtadan boshqa barcha nuqtalaridan tuzilgan to'plamdir. Bu yerda aylananing o'ng yarim qismi Γ chegaraning qismi bo'lsa ham, A to'plamga tegishli emas. Shu sababli A yopiq to'plam ham, ochiq to'plam ham emas.

Demak, har qanday $A\subset R_n$ to'plam uchun R_n fazoni

$$R_n = A'+\Gamma + A''$$

yig'indi ko'rinishida tasvirlash mumkin ekan.

15-§. Yopiq chegaralangan sohada uzluksiz funktsiya

Faraz qilaylik, $A \subset R_n$ chegaralangan yopiq to'plam va unda uzluksiz bo'lgan $f(x)$ (bu yerda, $x=(x_1,\dots,x_n)$) funktsiya berilgan bo'lsin.

Lemma. Har qanday chegaralangan $x^k=(x_1^k,\dots,x_n^k)$ nuqtalar ketma-ketligidan biror $x^0=(x_1^0,\dots,x_n^0)$ nuqtaga yaqinlashuvchi qism ketma-ketlik ajratib olish mumkin.

Bu lemmani 5-bob, 2.7-§ da berilgan Boltsano-Veyershtrass teoremasining umumlashgan holi, deb qarash mumkin.

Isboti. $\{x^k\}$ ketma-ketlik chegaralangan bo'lgani uchun shunday $M>0$ son mavjudki, barcha $j=1,\dots,n;\ k=1,2,\dots$ lar uchun

$$|x_j|\le |x^k|\le M$$

bo'ladi, ya'ni x^k nuqtalarning koordinatalari ham chegaralangan bo'ladi. Birinchi koordinatalar chegaralangan $\{x_1^k\}$ ketma-ketlikni hosil qiladi. Shu sababli Boltsano-Veyershtrass teoremasiga ko'ra, undan biror x_1^0 songa yaqinlashuvchi $\{x_1^{k_{l_1}}\}$ qism ketma-ketlik ajratib olish mumkin. Ikkinchi koordinatalar orasidan tanlangan natural k_{l_1} larga mos keluvchilarini ajratib olamiz. Natijada chegaralangan $\{x_2^{k_{l_1}}\}$ ketma-ketlik hosil bo'ladi. Bu ketma-ketlikdan ham biror x_2^0 gayaqinlashuvchi $\{x_2^{k_{l_2}}\}$ qism ketma-ketlik ajratib olish mumkin. $\{k_{l_2}\}$ ketma-ketlik $\{k_{l_1}\}$ ning qism ketma-ketligi bo'lgani uchun bir vaqtda $x_1^{k_{l_1}}\to x_1^0$, $x_2^{k_{l_2}}\to x_2^0$ bo'ladi. Bu jarayonni davom ettirib, n-qadamda shunday $x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0$ sonlarni hosil qilamizki, bir vaqtning o'zida

$$x_1^{k_{l_1}}\to x_1^0,\quad x_2^{k_{l_2}}\to x_2^0,\quad \dots,\quad x_n^{k_{l_n}}\to x_n^0$$

bo'ladi. Endi lemma isbot bo'lishi uchun $x^0=(x_1^0,\dots,x_n^0)$, deyish kifoya.

1-teorema. *Chegaralangan yopiq $A\subset R_n$ to'plamda aniqlangan $f(x)$ funktsiya shu to'plamda chegaralangandir.*

Isboti. Aksini faraz qilaylik, ya'ni $f(x)$ funktsiya A to'plamda chegaralanmagan bo'lsin. U holdahar bir natural k son uchun

$$|f(x^k)|>k\quad (k=1,2,\dots) \tag{1}$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi $x^k\in A$ nuqta topiladi. A to'plam chegaralangan bo'lgani uchun $\{x^k\}$ ketma-ketlik ham chegaralangan bo'ladi, shu sababli lemmaga asosan undan biror x^0 nuqtaga yaqinlashuvchi $\{x^{k_l}\}$ qism ketma-ketlik ajratib olish mumkin. Shartgako'ra, A to'plam yopiq bo'lgani uchun $x^0\in A$ bo'ladi. f funktsiya A to'plamda, shu jumladan, x^0 nuqtadaham uzluksiz bo'lgani uchun

$$\lim_{l\to\infty} f(x^{k_l})=f(x^0) \tag{2}$$

bo'ladi. Bu (1) tengsizlikka ziddir. Shuning uchun f chegaralangan yopiq A to'plamdafaqat chegaralangan bo'lishi mumkin.

2-teorema. *Chegaralangan yopiq $A \subset R_n$ to'plamda uzluksiz $f(x)$ funktsiya shu to'plamda o'zining eng kichik va eng katta qiymatlariga erishadi.*

Isboti. Birinchi teoremaga ko'ra berilgan shartlarda $f(x)$ funktsiya A to'plamda chegaralangan va demak, u yuqoridan biror K son bilan chegaralangandir:

$$f(x) \le K \quad (x \in A).$$

U holda f ning A to'plamdaaniq yuqori chegarasi mavjud:

$$\sup_{x \in A} f(x) = M. \tag{3}$$

M son quyidagi xususiyatgaega: har qanday k son uchun A to'plamda shunday $x^k = (x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k)$ nuqta topiladiki, uning uchun

$$M - \frac{1}{k} < f(x^k) \le M \quad (k = 1,2,\ldots)$$

munosabatlar o'rinli bo'ladi.

$\{x^k\}$ ketma-ketlik chegaralangan yopiq A to'plamga tegishli bo'lgani uchun chegaralangandir:

$$|x^k| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i^k|^2} \le K_1 \quad (k = 1,2,\ldots),$$

va shu sababli undan biror x^0 nuqtaga yaqinlashuvchi $\{x^{k_l}\}$ qism ketma-ketlik ajratib olish mumkin. Shartgako'ra, A to'plam yopiq bo'lgani uchun $x^0 \in A$ bo'ladi. f funktsiya A to'plamda, shu jumladan, x^0 nuqtada ham uzluksiz bo'lgani uchun

$$\lim_{l \to \infty} f(x^{k_l}) = f(x^0)$$

bo'ladi.

Har bir $k = 1,2,\ldots$ uchun

$$M - \frac{1}{k_l} < f(x^{k_l}) \le M$$

munosabatlar o'rinli ekanligini eslasak vaularda $k \to \infty$ da limitga o'tsak,

$$M \le f(x^0) \le M$$

ga, ya'ni

$$f(x^0) = M$$

tenglikka kelamiz. Demak, (3) aniq yuqori chegaraga $x^0 \in A$ nuqtada erishilar ekan.

Teoremaning ikkinchi qismi aynan shundek isbot qilinadi.

3-teorema. *Chegaralangan yopiq $A \subset R_n$ to'plamda berilgan har qanday $f(x)$ funktsiya tekis uzluksizdir.*

Isboti. Aksini faraz qilaylik, ya'ni shunday $\varepsilon > 0$ mavjudki, har qanday $\delta > 0$ son uchun

$$|x-y|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}<\delta$$
tengsizlikni qanoatlantiradigan $x=(x_1,\ldots,x_n)\in A$, $y=(y_1,\ldots,y_n)\in A$ nuqtalar topiladiki, ular uchun
$$|f(x)-f(y)|\geq\varepsilon$$
bo'ladi.

Endi $k\to\infty$ da nolga intiluvchi δ_k sonlar ketma-ketligini ko'raylik. Har bir δ_k uchun $x^k=(x_1^k,\ldots,x_n^k)\in A$, $y^k=(y_1^k,\ldots,y_n^k)\in A$ nuqtalar topiladiki, ular uchun
$$|x^k-y^k|<\delta_k$$
bo'lsaham, lekin
$$|f(x^k)-f(y^k)|\geq\varepsilon \tag{4}$$
bo'ladi.

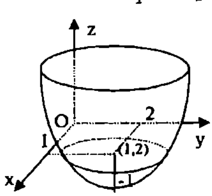
$\{x^k\}$ ketma-ketlik chegaralangan yopiq A to'plamga tegishli bo'lgani uchun chegaralangan, shu sababli undan biror x^0 nuqtagayaqinlashuvchi $\{x^{k_l}\}$ qism ketma-ketlik ajratib olish mumkin. Shartga ko'ra A yopiq to'plam bo'lgani uchun $x^0\in A$ bo'ladi.

$k\to\infty$ da $|x^{k_l}-y^{k_l}|\to 0$ bo'lgani uchun $\{y^{k_l}\}$ ketma-ketlik ham x^0 ga yaqinlashadi, chunki
$$|y^{k_l}-x^0|=|y^{k_l}-x^{k_l}+x^{k_l}-x^0|\leq|y^{k_l}-x^{k_l}|+|x^{k_l}-x^0|.$$
Shartga ko'ra f funktsiya A to'plamda uzluksiz bo'lgani uchun x^0 nuqtadaham uzluksizdir. Shu sababli
$$\lim_{l\to\infty}f(x^{k_l})=\lim_{l\to\infty}f(y^{k_l})=f(x^0).$$
Agar (4) da $k\to\infty$ da limitga o'tsak,
$$\varepsilon\leq\lim_{k\to\infty}|f(x^{k_l})-f(y^{k_l})|=|f(x^0)-f(x^0)|=0$$
kelib chiqadi, bu esa qilingan farazga zid, chunki $\varepsilon>0$ edi.

16-§. Ko'p o'zgaruvchili funktsiyalarning ekstremumlari

Ochiq birbog'lamli $D\subset R_n$ sohada $u=f(x_1,\ldots,x_n)$ funktsiya va biror $x^0=(x_1^0,\ldots,x_n^0)\in D$ nuqta berilgan bo'lsin.

1-ta'rif. *Agar $x^0=(x_1^0,\ldots,x_n^0)\in D$ nuqtaning shunday V_{x^0} atrofi mavjud bo'lsaki, barcha $x\in V_{x^0}$ nuqtalar uchun*
$$f(x)\leq f(x^0)\quad(f(x)\geq f(x^0)) \tag{1}$$
tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda x^0 nuqta $u=f(x_1,\ldots,x_n)$ funktsiyaning lokal maksimumi (minimumi) deyiladi.



115-rasm

Lokal maksimum va lokal minimum nuqtalar funktsiyaning lokal ekstremumlari deb ataladi.

1-*misol.* $z=(x-1)^2+(y-2)^2-1$ funktsiya $x^0=(1,2)$ nuqtadaminimumga erishadi (115-rasmga qarang).

Haqiqatan $f(1,2)=-1$, $(x-1)^2$ va $(y-2)^2$ ifodalar $x \neq 1$, $y \neq 2$ lar uchun hamisha musbat bo'lgani uchun

$$(x-1)^2+(y-2)^2-1>-1,$$

ya'ni $f(x,y)>f(1,2)$.

2-*misol.* $z=\frac{1}{2}-\sin(x^2+y^2)$ funktsiya (0,0) nuqtada, ya'ni koordinatalar boshida maksimumga erishadi (116-rasmga qarang).

Haqiqatan $f(0,0)=\frac{1}{2}$. $0<x^2+y^2<\frac{\pi}{6}$ doiraning barcha nuqtalari uchun

$$\sin(x^2+y^2)>0.$$

Shu sababli

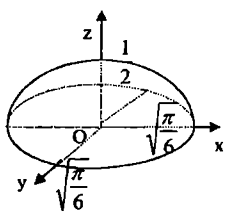
$$f(x,y)=\frac{1}{2}-\sin(x^2+y^2)<\frac{1}{2},$$

ya'ni $f(x,y)<f(0,0)$.

Agar $x_i=x_i^0+\Delta x_i^0$, $i=1,2,\ldots,n$ desak, u holda

$$f(x)-f(x^0)=f(x_1^0+\Delta x_1^0,\ldots,x_n^0+\Delta x_n^0)-f(x_1^0,\ldots,x_n^0)=\Delta f$$

bo'ladi. Shunga asosan yuqoridagi ta'rifni quyidagicha talqin qilsa ham bo'ladi:



116-rasm.

2-ta'rif. *Agar* $x^0=(x_1^0,\ldots,x_n^0)\in D$ *nuqtaning yetarlicha kichik atrofining barcha nuqtalari uchun*

$$\Delta u<0 \quad (\Delta u>0)$$

bo'lsa, u holda x^0 *nuqta* $u=f(x_1,\ldots,x_n)$ *funktsiyaning lokal maksimumi (minimumi), deyiladi.*

1-teorema *(ekstremumning zaruriy sharti). Agar* $u=f(x)$ *funktsiya* x^0 *nuqtada lokal ekstremumga erishsa va shu nuqtada* $u=f(x)$ *funktsiyaning barcha xususiy hosilalari mavjud bo'lsa, u holda bu hosilalar* x^0 *nuqtada nolga teng bo'ladi:*

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i}=0, \quad i=1,\ldots,n. \tag{2}$$

Isboti. Ixtiyoriy $k\in\{1,\ldots,n\}$ uchun $x_i=x_i^0$, $i\neq k$, desak, $u=f(x_1^0,\ldots,x_{k-1}^0,x_k,x_{k+1}^0,\ldots,x_n^0)$ funktsiya bitta x_k o'zgaruvchining funktsiyasi bo'lib qoladi. Bu funktsiya shartga ko'ra, $x_k=x_k^0$ nuqtada ekstremumga erishadi. Shu sababli bir o'zgaruvchili funktsiya ekstremumi mavjudligining zaruriy shartiga ko'ra (8-bob, 2.1-§, Ferma teoremasiga qarang) uning hosilasining $x_k=x_k^0$ nuqtadagi qiymati nolga teng bo'ladi. Bu hosila $u=f(x)$ funktsiyaning x_k o'zgaruvchi bo'yicha olingan xususiy hosilasidir. Demak,

$$\frac{\partial f(x_1^0,\dots,x_k^0,\dots,x_n^0)}{\partial x_k}=\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_k}=0.$$

Natija. Agar x^0 nuqtada differentsiallanuvchi $u=f(x)$ funktsiya shu nuqtada lokal ekstremumga erishsa, u holda $df(x^0)=0$ va $grad f(x^0)=0$ bo'ladi.

Eslatma. (1) shart x^0 nuqtaning ekstremum bo'lishi uchun yetarli emas.

Masalan, $z=xy^4$ funktsiyaning $\frac{\partial z}{\partial x}=y^4$, $\frac{\partial z}{\partial y}=4xy^3$ xususiy hosilalari (0,0) nuqtada nolga teng bo'lsa-da, bu nuqtaning ixtiyoriy atrofida $\Delta z=xy^4-0=xy^4$ orttirma qiymatlari manfiy ham, musbat ham bo'lishi mumkin, ya'ni (0,0) nuqtaekstremum nuqtaemas.

Bundan buyon, agar $u=f(x)$ funktsiya x^0 nuqtada differentsiallanuvchi bo'lsa va bu nuqtada (1) shart bajarilsa, bunday nuqtalarni statsionar nuqtalar, deb ataymiz.

Faraz qilaylik, x^0-statsionar nuqta, ya'ni $df(x^0)=0$ va $u=f(x)$ funktsiya barchao'zgaruvchilari bo'yichaikkinchi tartibgachauzluksiz xususiy hosilalarga ega bo'lsin. U holda $u=f(x)$ funktsiyaning x^0 nuqta atrofida Teylor formulasi bo'yicha yoyilmasi quyidagicha bo'ladi:

$$\Delta f(x^0)=df(x^0)+\frac{1}{2!}d^2f(x^0+\theta\Delta x)=\frac{1}{2}d^2f(x^0+\theta\Delta x)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}f''_{x_ix_j}(x^0+\theta\Delta x)\Delta x_i\Delta x_j=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(f''_{x_ix_j}(x^0)+\varepsilon_{ij})\Delta x_i\Delta x_j=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}f''_{x_ix_j}(x^0)\Delta x_i\Delta x_j+\frac{\rho^2}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_{ij}\frac{\Delta x_i}{\rho}\cdot\frac{\Delta x_j}{\rho}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}f''_{x_ix_j}(x^0)\Delta x_i\Delta x_j+\frac{\rho^2}{2}\alpha(\Delta x),$$

bu yerda, $0<\theta<1$, $\Delta x=(\Delta x_1,\dots,\Delta x_n)$, $\rho=|\Delta x|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i^2}$ va $\rho\to 0$ da $\alpha(\Delta x)\to 0$, chunki shartga ko'ra ikkinchi tartibli hosilalar uzluksiz bo'lgani uchun $\rho\to 0$ da $\max_{i,j}|\varepsilon_{ij}|=\varepsilon\to 0$ bo'ladi. Agar

$$a_{ij}=a_{ji}=f''_{x_ix_j}(x^0),\quad \xi_i=\Delta x_i,\quad \xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)$$

belgilashlar kiritsak, oxirgi tenglikni quyidagicha yozish mumkin:

$$\Delta f(x^0)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\xi_i\xi_j+\frac{\rho^2}{2}\alpha(\xi). \tag{3}$$

Demak, $\Delta f(x^0)$ orttirmaning ishorasini $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)$ ga nisbatan

$$A(\xi)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\xi_i\xi_j \tag{4}$$

kvadratik forma belgilar ekan.

2-teorema *(ekstremumning yetarli shartlari). 1) Agar barcha* $\xi \neq 0$ *lar uchun* $A(\xi) > 0$*, ya'ni qat'iy musbat aniqlangan bo'lsa, u holda* f *funktsiya* x^0 *nuqtada lokal minimumga erishadi.*

2) Agar barcha $\xi \neq 0$ *lar uchun* $A(\xi) < 0$*, ya'ni qat'iy manfiy aniqlangan bo'lsa, u holda* f *funktsiya* x^0 *nuqtada lokal maksimumga erishadi.*

3) Agar barcha ξ *lar uchun yo* $A(\xi) \leq 0$ *yoki* $A(\xi) \geq 0$ *va shunday* $\xi \neq 0$ *mavjud bo'lsaki, uning uchun* $A(\xi) = 0$ *bo'lsa, u holda* f *funktsiyaning* x^0 *nuqtada lokal ekstremumga erishish masalasi ochiq qoladi, ya'ni qo'shimcha tekshirishlarga muhtoj.*

4) Agar shunday ξ' *va* ξ'' *lar mavjud bo'lsaki, ular uchun* $A(\xi') > 0$ *va* $A(\xi'') < 0$ *bo'lsa, u holda* f *funktsiya* x^0 *nuqtada lokal ekstremumga erishmaydi.*

Isboti. 1) (3) tenglikni quyidagicha yozib olamiz:

$$\Delta f(x^0) = \frac{\rho^2}{2}[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{\xi_i}{\rho}\frac{\xi_j}{\rho} + \alpha(\xi)\ ]=$$

$$= \frac{\rho^2}{2}[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\eta_i\eta_j + \alpha(\xi)\ ] = \frac{\rho^2}{2}[A(\eta) + \alpha(\xi)], \tag{5}$$

bu yerda $\eta_i = \xi_i/\rho$, $i = 1,\ldots,n$, almashtirish bajarildi.

$$|\eta| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\eta_i^2} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2}}{\rho} = 1$$

ekanligidan, har qanday ξ uchun η nuqta n-o'lchamli birlik shar sirtida yotadi. $A(\eta)$ funktsiya chegaralangan yopiq bo'lgan bu sirtda uzluksiz va shartga ko'ra musbat bo'lgani uchun bu sirtning biror nuqtasida musbat bo'lgan o'zining eng kichik $m > 0$ qiymatiga erishadi. $\rho = |\xi| \to 0$ da $\alpha(\xi) \to 0$ bo'lganidan yetarlicha kichik δ > 0 uchun va $|\xi| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha ξ lar uchun $|\alpha(\xi)| < m$ bo'ladi. U holda barcha ξ, $|\xi| < \delta$ lar uchun

$$\Delta f(x^0) = f(x^0 + \xi) - f(x^0) =$$

$$= \frac{\rho^2}{2}[A(\eta) + \alpha(\xi)] \geq \frac{\rho^2}{2}[m + \alpha(\xi)] \geq 0$$

va demak, f funktsiya x^0 nuqtada lokal minimumga erishadi.

2) aynan shundek isbot qilinadi.

Endi, 3) ni isbotlaylik. $A(\xi)$ forma $\xi^0 \neq 0$ nuqtada nolga aylansin. U holda har qanday $\xi = \kappa\xi^0$ lar uchun ham $A(\xi)$ ning birjinsli ekanligidan $A(\xi) = A(\kappa\xi^0) = \kappa^2 A(\xi^0) = 0$ kelib chiqadi. Ko'rsatilgan ξ lar uchun

$\Delta f(x^0)=\frac{1}{2}\rho^2\alpha(\xi)$. Lekin $\alpha(\xi)$ ning ishorasi noma'lum, shu sababli f funktsiyaning x^0 nuqtada lokal ekstremumga erishishini bilib bo'lmaydi.

Endi faraz qilaylik, shunday ξ' va ξ'' lar mavjud bo'lsinki, ular uchun $A(\xi')>0$ va $A(\xi'')<0$ tengsizliklar o'rinli bo'lsin. Bu tengsizliklar $\eta'=\xi'/\rho$ va $\eta''=\xi''/\rho$ nuqtalarda ham bajariladi. Shu jumladan, yetarlicha kichik ρ uchun $A(\eta')+\alpha(\xi')>0$, $A(\eta'')+\alpha(\xi'')<0$ bo'ladi, ya'ni x^0 nuqtaning yetarlicha kichik atrofida shunday x' va x'' nuqtalar mavjudki, bu nuqtalarda $f(x')>f(x^0)$ va $f(x'')<f(x^0)$ bo'ladi. Demak, bu nuqtada ekstremum yo'q ekan.

Ikki o'zgaruvchining funktsiyasi bo'lgan hol uchun kvadratik formaga yuqoridagi teoremada qo'yilgan talablarni a_{ij} koeffitsientlar orqali ifodalovchi Silvestr[3] shartlari, deb ataluvchi mezonlar mavjud: agar $a_{11}>0$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0$ bo'lsa, $A(\xi)>0$ va agar $a_{11}<0$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0$ bo'lsa, $A(\xi)<0$ bo'ladi. Agar a_{ij} koeffitsientlar f funktsiyaning ikkinchi hosilalarini x^0 nuqtadagi qiymatlari ekanligini eslasak, u holda 2-teoremaning qismlarini quyidagicha tavsirlasa bo'ladi:

1') agar $f''_{x_1x_1}(x^0)>0$, $f''_{x_1x_1}(x^0)\cdot f''_{x_2x_2}(x^0)-[f''_{x_1x_2}(x^0)]^2>0$ bo'lsa, f funktsiya $x^0=(x_1^0,x_2^0)$ nuqtada lokal minimumga erishadi.

2') agar $f''_{x_1x_1}(x^0)<0$, $f''_{x_1x_1}(x^0)\cdot f''_{x_2x_2}(x^0)-[f''_{x_1x_2}(x^0)]^2>0$ bo'lsa, f funktsiya $x^0=(x_1^0,x_2^0)$ nuqtada lokal maksimumga erishadi.

3') agar $f''_{x_1x_1}(x^0)\cdot f''_{x_2x_2}(x^0)-[f''_{x_1x_2}(x^0)]^2<0$ bo'lsa, kvadratik formaning ishorasi bir xil bo'lmaydi, shu sababli $\Delta f(x^0)$ orttirmaning ishorasi ham bir xil bo'lmaydi. Demak, $x^0=(x_1^0,x_2^0)$ nuqtada ekstremum yo'q.

4') agar $f''_{x_1x_1}(x^0)\cdot f''_{x_2x_2}(x^0)-[f''_{x_1x_2}(x^0)]^2=0$ bo'lsa, $x^0=(x_1^0,x_2^0)$ nuqtada ekstremumning bor yoki yo'qlik masalasi ochiq qoladi.

3-*misol.* $z=x^3-3xy+y^2$ funktsiyaning lokal ekstremumlarini toping.

Yechish. Avval statsionar nuqtalarini topamiz:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2-3y,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-3x+2y,\quad \begin{cases}3x^2-3y=0\\ -3x+2y=0\end{cases}$$

Sistemani yechsak, $x^1=(0,0)$ va $x^2=(\frac{3}{2},\frac{9}{4})$ nuqtalar hosil bo'ladi. Ikkinchi hosilalarni hisoblaylik:

$$f''_{xx}(x^1)=6x\big|_{x=x^1}=0,\quad f''_{yy}(x^1)=2,\quad f''_{xy}(x^1)=-3,$$

---

[3] J.J.Silvestr (1814-1897) — ingliz matematigi.

$$a_{11}a_{22}-a_{12}^2=-9<0$$

$$f''_{xx}(x^2)=6x\Big|_{x=x^2}=9>0\,,\quad a_{11}a_{22}-a_{12}^2=9>0\,.$$

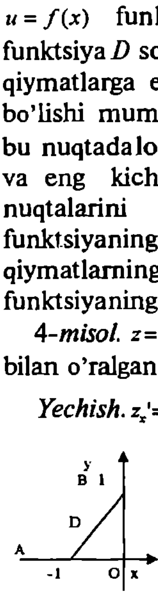
Demak, $x^1=(0,0)$ nuqtada ekstremum yo'q, $x^2=(\frac{3}{2},\frac{9}{4})$ nuqta esa lokal minimum ekan.

17-§. Funktsiyaning eng katta va eng kichik qiymatlarini topish

Biror yopiq chegaralangan $D\subset R_n$ sohada uzluksiz differentsiallanuvchi $u=f(x)$ funktsiya berilgan bo'lsin. Ma'lumki (15-§, 2-teorema), bu funktsiya D sohada o'zining eng katta va eng kichik qiymatlariga erishadi. Bu qiymatlarga erishiladigan nuqtalar soha ichida ham, chegarasida ham bo'lishi mumkin. Agar bunday nuqta soha ichida bo'lsa, $u=f(x)$ funktsiya bu nuqtada lokal ekstremumga erishadi. Shu sababli funktsiyaning eng katta va eng kichik qiymatlarini topish uchun uning hamma statsionar nuqtalarini aniqlab, funktsiyaning bu nuqtalardagi qiymatlarini funktsiyaning chegaradagi qiymatlari bilan solishtirish kerak. Bu qiymatlarning eng kattasi funktsiyaning eng katta qiymati, eng kichigi esa funktsiyaning eng kichik qiymati bo'ladi.

4-*misol.* $z=x^2+y^2-2x+y-1$ funktsiyaning $x=0, y=0,$ $y=x+1$ to'g'ri chiziqlar bilan o'ralgan yopiq sohadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini toping.

Yechish. $z_x'=2x-2,\ z_y'=2y+1,\ x_0=1, y_0=-\frac{1}{2},\ \left(1,-\frac{1}{2}\right)\notin D$



117-rasm.

y, ya'ni soha ichida ekstremal nuqtalar yo'q, ularni soha chegarasidan izlaymiz.

1) AOda: $y=0, x\in[-1,0]$ bo'lgani uchun $z=x^2-2x-1$, $z'=2x-2$, $x=1\notin[-1,0]$, demak, statsonar nuq-tasi yo'q, $z(-1)=2$, $z(0)=-1$.

2) OBda: $x=0,$ $y\in[0,1]$, $z=y^2+y-1$, $z'=2y+1$, $y=-\frac{1}{2}\notin[0,1]$, yana oraliq ichida statsionar nuqtalar yo'q, $z(0)=-1, z(1)=1$.

3) ABda: $y=x+1$, $z=2x^2+x+1$, $z'=4x+1$, $-\frac{1}{4}\in(-1,0)$-statsionar nuqta, $z\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{7}{8}$, $z(-1)=2, z(0)=1$.

Bu qiymatlarni solishtirsak: $z_{\max}(A)=2$, $z_{\min}(O)=-1$ ni hosil qilamiz.

18-§. Shartli ekstremumlar

R_2 da $u = x^2 + y^2$ funktsiyani ko'raylik. Geometrik nuqtai nazardan bu funktsiya koordinatalar boshidan $M(x,y)$ nuqtagacha bo'lgan masofani bildiradi. Shu ma'noda uning eng katta qiymati yo'q. Agar uni tenglamasi $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(b>a)$ bo'lgan ellipsning $M(x,y)$ nuqtalari uchun tekshirsak, bu masofaikki $B_1(0,b)$, $B_2(0,-b)$ nuqtalardaeng katta qiymatlarga erishadi.

Demak, berilgan funktsiya butun R_2 tekislikda eng katta qiymatga erishmasaham, $M(x,y)$ nuqtaellipsdayotibdi degan qo'shimchashartdaikki nuqtadaeng kattaqiymatini qabul qilyapti.

Bu holat funktsiyaning argumentlari qo'shimcha shartlarni qanoatlantirganda, uning ekstremumlarini topish masalasiga olib keladi. Bu masala shartli ekstremumlar masalasi, deb ataladi.

Yana bir masala ko'raylik. Maydoni $2a$ bo'lgan temir tunukadan eng kattahajmli parallelepiped shaklidagi yopiq javon tayyorlash kerak bo'lsin.

Bu javonning o'lchamlarini mos ravishda x, y, z desak, uning hajmi

$$\vartheta = xyz$$

bo'lib, to'la sirti $xy+yz+xz=2a$ bo'ladi. Bu shartli ekstremum masalasidir, bu erda, x, y, z o'zgaruvchilar qo'shimcha $xy+yz+xz=2a$ shart bilan bog'langan.

n o'zgaruvchining $u=f(x)$ funktsiyasi berilgan bo'lsin, bu yerda $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Shu funktsiyaning ekstremumlarini, uning argumentlari qo'shimcha

$$\varphi_i(x)=0\,,\quad i=1,2,\ldots,m\,,\quad (m<n) \qquad (1)$$

munosabatlar bilan bog'langan, degan farazdatopish talab etilgan bo'lsin. (1) tengliklarni bog'lovchi tenglamalar, deb ataymiz.

Ta'rif. *Agar M_0 ning shunday atrofi mavjud bo'lsaki, bu atrofning (1) bog'lovchi tenglamalarni qanoatlantiradigan M nuqtalari uchun*

$$f(M)\le f(M_0)\quad (f(M)\ge f(M_0))$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, (1) tengliklarni qanoatlantiruvchi $M_0(x_1^0,\ldots,x_n^0)$ nuqtani lokal shartli maksimum (minimum) nuqta, deb ataymiz.

Lokal shartli maksimum va minimum nuqtalarni lokal shartli ekstremumlar, deb ataymiz.

Yuqorida ko'rilgan masaladagi $B_1(0,b)$ nuqta lokal shartli maksimum nuqtadir, chunki ellipsning boshqabarcha M nuqtalari uchun

$$f(M)\le f(B_1)\,.$$

Lagranj bu masalani hal qilish uchun quyidagi usulni taklif etgan. Yordamchi

$$F(x,\lambda_1,\dots,\lambda_m)=f(x)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\varphi_i(x)$$

funktsiya tuzib olamiz. Bu funktsiyani Lagranj sha'niga Lagranj funktsiyasi va $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ larni Lagranj ko'paytuvchilari, deb atashgan.

Agar M_0 nuqta f funktsiyaning lokal shartli eks-tremumi bo'lsa, u holda u F ning lokal ekstremumi bo'ladi, shu sababli ekstremumning zaruriy shartiga ko'ra, F dan olingan barcha xususiy hosilalar bu nuqtada nolga teng bo'ladi, ya'ni

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x_1}+\lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}+\dots+\lambda_m\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_1}=0,\\
&\frac{\partial f}{\partial x_2}+\lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}+\dots+\lambda_m\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_2}=0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{\partial f}{\partial x_n}+\lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}+\dots+\lambda_m\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_n}=0.
\end{aligned}\tag{2}$$

(1) va (2) tenglamalar $m+n$ ta $x_1,\dots,x_n,\lambda_1,\dots,\lambda_m$ noma'lumlarga nisbatan $m+n$ ta tenglamalar sistemasini tashkil etadi. Bu sistemaning yechimlarini F funktsiyaning statsionar nuqtalari, deb ataymiz. Tabiiyki, statsionar nuqtalarning hammasi ham lokal shartli ekstremum bo'lavermaydi. Buni aniqlash masalasini umumiy hol uchun ochiq qoldiramiz.

1-*misol.* $z=x^2+y^2$ funktsiyaning $(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2\le 9$ doiradagi eng katta va eng kichik qiymatlarini toping.

Yechish. Avval funktsiyaning statsionar nuqtalarini topamiz: $\frac{\partial z}{\partial x}=2x$, $\frac{\partial z}{\partial y}=2y$. Bundan $x=0, y=0$. $(0,0)\in D$. Bu nuqtada funktsiya eng kichik qiymatga erishadi: $z_{\min}(0,0)=0$.

Endi funktsiyani chegarada, ya'ni $(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2=9$ aylanada tekshiramiz. Buning uchun Lagranj funktsiyasini tuzib olamiz:

$$F(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda\left[(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2-9\right].$$

Uning xususiy hosilalari $\frac{\partial F}{\partial x}=2x+2\lambda(x-\sqrt{2})$, $\frac{\partial F}{\partial y}=2x+2\lambda(y-\sqrt{2})$ bo'ladi. x,y va λ larni aniqlash uchun quyidagi sitemani tuzib olamiz:

$$\begin{cases}x+\lambda(x-\sqrt{2})=0,\\ y+\lambda(y-\sqrt{2})=0,\\ (x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2=9.\end{cases}$$

Bu sistema ikkita yechimga ega:

$$x=y=5\sqrt{2}/2,\lambda=-5/3,z=25;$$
$$x=y=-\sqrt{2}/2,\lambda=-1/3,z=1.$$

Demak, funktsiya eng katta qiymatiga $(6\sqrt{2}/2;5\sqrt{2}/2)$ nuqtada erishadi: $z_{max}=25$.

19-§. Eng kichik kvadratlar usuli

Faraz qilaylik, tajriba natijasida kuzatilgan o'zgaruvchi x va y miqdorlarning n taqiymatlari quyidagi jadval ko'rinishidaolingan bo'lsin:

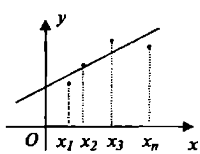
x	x_1	x_2	...	x_n
y	y_1	y_2	...	y_n

Shu jadvaldan foydalanib, x va y miqdorlar orasidagi

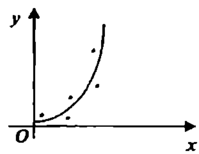
$$y=f(x) \tag{1}$$

funktsional bog'lanishni aniqlash talab qilingan bo'lsin.

(1) funktsiyaning ko'rinishini XOY tekislikda koordinatalari (x_i,y_i) bo'lgan nuqtalarning joylashishiga qarab tanlaymiz. Masalan, bu nuqtalar 118-rasmdagidek joylashgan bo'lsa, (1) ni chiziqli $y=ax+b$ funktsiya ko'rinishida, agar 119-rasmdagidek joylashgan bo'lsa, $y=ax^b$ ko'rinishda izlaymiz.



118-rasm



119-rasm

Tanlangan $y=f(x,a,b,c,...)$ funktsiyadagi noma'lum $a,b,c,...$ koeffitsientlarni shunday tanlash kerakki, natijada bu funktsiya kuzatilayotgan jarayonni to'laqonli ifodalasin.

Bu masalani hal qilish uchun eng kichik kvadratlar usuli, deb ataluvchi usul keng qo'llanib kelinadi. Bu usul tajriba natijasida olingan y_i qiymatlarga nisbatan biz tanlagan funktsiya natijasida yo'l qo'yilgan xatolikni baholovchi

$$S(a,b,c,...)=\sum_{i=1}^{n}[y_i-f(x_i,a,b,c,...)]^2 \tag{2}$$

ifodani minimallashtirishga asoslanadi.

$a,b,c,...$ parametrlarning qiymatlarini shunday tanlaymizki, bu qiymatlarda (2) yig'indi eng kichik qiymatga ega bo'lsin. Bu bilan ko'rilayotgan masala (2) funktsiyaning eng kichikqiymatini topish masalasiga keltiriladi.

(2) funktsiyaning minimum nuqtalarini uning statsionar nuqtalari orasidan qidiramiz. Statsionar nuqtalarni avvalgi paragrafning 1-teoremasiga ko'ra,

$$\frac{\partial S}{\partial a}=0,\quad \frac{\partial S}{\partial b}=0,\quad \frac{\partial S}{\partial c}=0,\dots \tag{3}$$

yoki

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}[y_i - f(x_i,a,b,c,\dots)]\frac{\partial f(x_i,a,b,c,\dots)}{\partial a}=0\\
&\sum_{i=1}^{n}[y_i - f(x_i,a,b,c,\dots)]\frac{\partial f(x_i,a,b,c,\dots)}{\partial b}=0\\
&\sum_{i=1}^{n}[y_i - f(x_i,a,b,c,\dots)]\frac{\partial f(x_i,a,b,c,\dots)}{\partial c}=0\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned} \tag{4}$$

tenglamalar sistemasining yechimi sifatida aniqlaymiz.

Bu paragrafda biz shu usulni ikki hol uchun ko'rib chiqamiz.

1. $y=ax+b$ bo'lsin. U holda (2) ifoda quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$S(a,b)=\sum_{i=1}^{n}[y_i-(ax_i+b)]^2 .$$

Bundan

$$\frac{\partial S}{\partial a}=-2\sum_{i=1}^{n}[y_i-(ax_i+b)]x_i=0,$$

$$\frac{\partial S}{\partial b}=-2\sum_{i=1}^{n}[y_i-(ax_i+b)]=0,$$

$$\left.\begin{aligned}
&a\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^2+b\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i,\\
&a\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i+b\cdot n=\sum_{i=1}^{n}y_i.
\end{aligned}\right\}. \tag{5}$$

Hosil bo'lgan (5) sistemaning asosiy determinanti

$$\Delta=n\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2=\sum_{i<j}(x_i-x_j)^2$$

bo'ladi. Demak, $x_1=x_2=\dots=x_n=c$ bo'lgan holdan boshqa barcha hollarda $\Delta\neq0$ bo'ladi, ya'ni (5) sistema aniq yechimlarga ega. Agar $x_1=x_2=\dots=x_n=c$ bo'lsa, u holda biz qidirayotgan funktsiyamiz tenglamasi $x=c$ bo'ladi.

2. Approksimatsialovchi funktsiyani $y=ax^2+bx+c$ ko'rinishda qidiraylik. Unda (4) sistema

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-\left(ax_i^2+bx_i+c\right)\right]x_i^2=0,\\
&\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-\left(ax_i^2+bx_i+c\right)\right]x_i=0,\\
&\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-\left(ax_i^2+bx_i+c\right)\right]=0,
\end{aligned}\right\},$$

yoki

$$\left.\begin{aligned}
&a\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^4+b\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^3+c\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2y_i,\\
&a\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^3+b\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^2+c\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i,\\
&a\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^2+b\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i+c\cdot n=\sum_{i=1}^{n}y_i,
\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Misol. Tajriba natijasi quyidagi jadvaldan iborat bo'lsin:

x	1	2	3	5
y	3	4	2,5	0,5

Yechish. (1) funktsiyani $y=ax+b$ ko'rinishda izlaylik. U holda a va b koeffitsientlarni topish uchun (5) sistema ishlatiladi. Bu sitemaning koeffitsientlarini topib olaylik:

$$\sum_{i=1}^{4}x_i^2=39,\quad \sum_{i=1}^{4}x_i=11,\quad \sum_{i=1}^{4}x_iy_i=21,\quad \sum_{i=1}^{4}y_i=10.$$

Demak, (5) sistema

$$\left.\begin{aligned}39a+11b=21,\\ 11a+4b=10\end{aligned}\right\}$$

ko'rinishdabo'ladi. Bu sistemani yechib, $a=-26/35$, $b=159/35$ ni topamiz.

14 – BOB

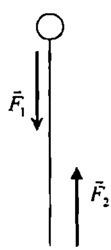
DIFFERENTSIAL TENGLAMALAR

1-§. Umumiy tushunchalar. Ta'riflar.

1.1. Differentsial tenglamalar tushunchasiga olib keluvchi ayrim masalalar. Kuzatilayotgan jarayonda bir nechta o'zgaruvchi miqdorlarning o'zaro munosabatda bo'lishligiga 6-bobda, keyinchalik 7-bobdabir nechta misollar orqali ishonch hosil qilgan edik.

Ular o'rtasidagi funktsional munosabatlarni biz shu jarayonning tenglamasi deb nomlagan edik. Bu tenglamani shu jarayonning matematik modeli, deb ham atashadi. Shu tenglamaga kiruvchi ayrim o'zgaruvchilar asosiy o'zgaruvchilar orqali ifadalanishi mumkin. Masalan, moddiy nuqta harakatini ko'raylik. U biror t vaqt ichida qandaydir s masofani bosib o'tadi. Ma'lumki, s t vaqtning funktsiyasidir, ya'ni $s = s(t)$. s masofani moddiy nuqta biror ϑ tezlik bilan bosib o'tsin. Bilamizki (6-bob, 1.1-§ ga qarang), $\vartheta = s'(t)$, moddiy nuqtaning tezlanishi esa $a = s''(t)$ edi. Jarayonni kuzatish maqsadidan kelib chiqqan holda, jarayon tenglamasi nainki t, s o'zgaruvchilarni, balki ϑ va a larni, ya'ni s ning birinchi va ikkinchi hosilalarini ham o'z ichiga olishi mumkin. Shunday holatlarga doir bir nechta misollar ko'raylik.

1-m i s o l. Massasi m bo'lgan biror jism yuqoridan tashlangan bo'lsin. Agar jismga og'irlik kuchidan tashqari uning tushish tezligi ϑ ga proportsional bo'lgan havoning qarshilik kuchi ham ta'sir etsa, shu jismning tezligi qanday qonun bilan o'zgarishini aniqlang.



120-rasm.

Yechish. Nyutonning ikkinchi qonu-niga ko'ra

$$m\frac{d\vartheta}{dt} = \bar{F},$$

bu yerda $\frac{d\vartheta}{dt}$ -harakatdagi jismning tezlanishi, $\bar{F}$ esa jismga ta'sir etuvchi kuch. Bu kuch jismning og'irlik kuchi $\bar{F}_1 = mg$ va havoning qarshilik kuchi $\bar{F}_2 = -k\vartheta$ lar yig'indisidan iborat bo'ladi.

Demak,

$$m\frac{d\vartheta}{dt} = mg - k\vartheta, \qquad (1)$$

ya'ni noma'lum ϑ funktsiya va uning hosilasi $\frac{d\vartheta}{dt}$ larga nisbatan tenglama hosil qildik.

Har qanday

$$\vartheta = Ce^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}$$

ko'rinishdagi funktsiya (1) tenglikni qanoatlantiradi (buni tekshirishni o'quvchining o'ziga havola qilamiz).

2-m i s o l. Massasi m bo'lgan moddiy nuqta vaqtning t momentida ϑ (absolyut) tezlikka ega bo'lsin. Δt vaqt ichida unga massalari yig'indisi Δm, qo'shilgunga qadar tezligi u bo'lgan zarralar qo'shilsin. U holda, $t+\Delta t$ momentda nuqta va unga qo'shilgan zarralar massasi $m+\Delta m$ va tezligi $\vartheta+\Delta\vartheta$ bo'ladi.

Bu nuqtalar sistemasining t momentdagi harakat miqdori

$$Q = m\vartheta + u\Delta m$$

bo'lsa, $t+\Delta t$ momentda esa

$$Q + \Delta Q = (m+\Delta m)(\vartheta + \Delta\vartheta)$$

bo'ladi.

Demak, sistema harakat miqdorining Δt vaqt ichida o'zgarishi

$$\Delta Q = m\Delta\vartheta + (\vartheta - u)\Delta m + \Delta m\Delta\vartheta$$

ga teng bo'ladi.

Tezlik kabi massani ham vaqtning uzluksiz va differentsiallanuvchi funktsiyasi, deb faraz qilaylik. Oxirgi tenglikni Δt ga bo'lib, $\Delta t \to 0$ da limitga o'tsak,

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta m\Delta\vartheta}{\Delta t} = 0$$

ekanligidan

$$\frac{dQ}{dt} = m\frac{d\vartheta}{dt} + (\vartheta - u)\frac{dm}{dt}$$

munosabat hosil bo'ladi. Agar o'zgaruvchan massali jismga qo'yilgan tashqi kuchlarning teng ta'sir etuvchisi F ga teng bo'lsa, harakat miqdori haqidagi teoremaga ko'ra

$$m\frac{d\vartheta}{dt} + (\vartheta - u)\frac{dm}{dt} = F \qquad (2)$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglama *Mesherskiy tenglamasi,* deb ataladi. Bu tenglama orqali xarakterlanadigan jarayon reaktiv harakat, deyiladi.

Agar zarralar qo'shilib borsa, nuqtaning massasi ortib boradi, shu sababli $\frac{dm}{dt} > 0$ bo'ladi, agar parchalanish jarayoni kuzatilayotgan bo'lsa, ya'ni nuqtadan zarralar ajralib chiqa boshlasa, $\frac{dm}{dt} < 0$ bo'ladi, va nihoyat, nuqta massasi o'zgarmasa, $\frac{dm}{dt}=0$ bo'lib, (2) tenglama Nyutonning ikkinchi qonunini ifodalaydi.

$$u-\vartheta=u_0$$

miqdor nuqtaga qo'shilayotgan zarralarning nisbiy tezligi, deb ataladi. *Mesherskiy tenglamasini* bu miqdor orqali quyidagichayozish mumkin:

$$m\frac{d\vartheta}{dt}=F+\frac{dm}{dt}u_0 \tag{3}$$

yoki

$$m\frac{d\vartheta}{dt}=F+R,$$

bu yerda $R=\frac{dm}{dt}u_0$ reaktiv kuch, deb nomlangan.

Agar o'zgaruvchan massali nuqtaga tashqi kuchlar ta'sir etmasa, $F=0$ bo'lib, oxirgi tenglamaquyidagi ko'rinishni oladi:

$$m\frac{d\vartheta}{dt}=R.$$

3 - m i s o l. Ba'zi elementlar atomlarining yadrolari alfa-, beta- va gamma- nurlar chiqarib boshqa elementlar yadrolariga o'z-o'zidan aylanishi ***radioaktiv yemirilish,*** deyiladi. Radioaktiv yemirilish statistik xarakterga ega: atomlarning yadrolari hammasi birdaniga yemirilmay, balki izotopning butun mavjud bo'lish davridayemiriladi. Bundabirlik vaqt ichida yemiriladigan atomlar soni har bir izotop uchun o'zgarmas bo'lib, uning yemirilmagan atomlari miqdorining biror qismini tashkil etishi aniqlangan. Bu kattalik ***qismiy yemirilish doimiysi,*** deyiladi va λ harfi bilan belgilanadi.

Shunday qilib, dt vaqt davomida yemirilgan dN atomlar soni λNdt gateng, ya'ni

$$dN=-\lambda Ndt, \tag{4}$$

bu yerda N son t vaqt momentida yemirilmay qolgan atomlar sonidir. Manfiy ishora yemirilmagan atomlar soni N vaqt o'tishi bilan kamayishini bildiradi.

4 – m i s o l. Kimyoviy reaktsiya mobaynida A va B moddalar C moddagao'tsin. Agar harorat o'zgarmas vareaktsiyatezligi: a) A modda C moddaga o'tganda A moddaning qolgan miqdoriga; b) A va B moddalar C moddaga o'tganda tegishli massalar ko'paytmasiga proportsional bo'lsa, C moddaning miqdorini topaylik.

C moddaning miqdori x bo'lsin. Agar a) hol yuz bersa, A moddaning boshlang'ich miqdorini a va proportsionallik koeffitsientini $k>0$ desak,

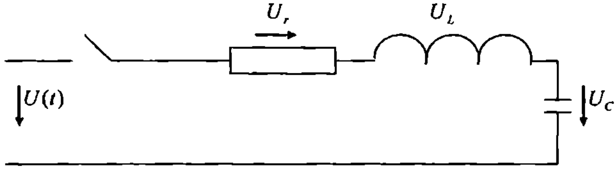
$$\frac{dx}{dt} = k(a - x) \tag{5}$$

tenglama, vaagar b) hol yuz bersa,

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x) \tag{6}$$

tenglamahosil bo'ladi.

5-m i s o l . Qarshiligi r, induktivligi L va sig'imi C bo'lgan maydonlar ketma-ket ulangan zanjirdaboshlang'ich $t = 0$ vaqt momentida konturdagi tok vakondensatordagi zaryad nolgateng bo'lsa, shu zanjirdagi o'tish jarayonlarini tekshiring.



121-rasm.

Kirkgofning 1-qonuniga ko'ra, elektr zanjirning tarmoqlarida sarf bo'layotgan toklar yig'indisi nolga teng, 2-qonuniga ko'ra esa elektr zanjirning har qanday yopiq konturining barcha tarmoqlaridagi kuchlanishlar pasayishining yig'indisi shu konturdagi elektr manbaaning EYuK lari yig'indisigateng.

Butun zanjir bo'ylab kuchlanishning pasayishi barchamaydon-lardagi kuchlanishlar pasayishining yig'indisiga teng (2-rasmga qarang): $U = U_r + U_L + U_C$. Om qonunigaasosan qarshiligi r bo'lgan maydon uchun $U_r = rI$. Sig'imi C bo'lgan kondensator uchun $U_C = \frac{q}{C}$, bu yerda q - kondensatorning zaryadi. Ma'lumki, $I = \frac{dq}{dt} = C\frac{dU_C}{dt}$. Bundan $U_C = \frac{1}{C}\int_0^t Idt$. Induktivligi L bo'lgan katushkauchun $U_L = L\frac{dI}{dt}$.

U holda $U = U_r + U_L + U_C = rI + \frac{1}{C}\int_0^t Idt + L\frac{dI}{dt}$ bo'ladi. Agar bu tenglikni t bo'yicha differentsiallab yuborsak, quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$L\frac{d^2 I}{dt^2} + r\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \frac{dU}{dt}. \tag{7}$$

1.2. Ta'riflar.

1-ta'rif. Erkli o'zgaruvchi x, uning noma'lum funktsiyasi y vauning hosilalari $y', y'', ..., y^{(n)}$ larni o'zaro bog'lovchi tenglama *differentsial tenglama,* deb ataladi.

Differentsial tenglamalar

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$$

yoki

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, ..., \frac{d^ny}{dx^n}) = 0$$

ko'rinishdayozilishi mumkin.

2-ta'rif. Tenglamaga kiruvchi hosilalarning eng yuqori tartibi shu differentsial tenglamaning tartibi, deb ataladi.

Masalan, yuqorida ko'rilgan misollardagi (1)-(6) tenglamalar 1-tartibli differentsial tenglamalardir, (7) tenglamaesa2-tartibli differentsial tenglamadir.

3-ta'rif. Differentsial tenglamani ayniyatga aylantiruvchi har qanday $y = f(x)$ funktsiya differentsial tenglamaning yechimi yoki integrali, deb ataladi.

Masalan, $\vartheta = Ce^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}$ funktsiya ixtiyoriy o'zgarmas C son uchun 1-misoldagi hosil qilingan (1) differentsial tenglamaning yechimidir.

6-m i s o l. O'zgarmas C_1 va C_2 larning har qanday qiymatlaridaham

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

ko'rinishdagi funktsiyalar ikkinchi tartibli

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2y = 0$$

differentsial tenglamaning yechimlari bo'ladi. Buni bevosita o'rniga qo'yib tekshirish mumkin (buni bajarishni o'quvchigahavolaqilamiz).

Bu misollardan ko'rinadiki, differentsial tenglama agar yechimga ega bo'lsa, yechimlari soni cheksiz ko'p bo'lar ekan.

Agar noma'lum $y = f(x)$ funktsiya bir erkli o'zgaruvchining funktsiyasi bo'lsa, biz ko'rayotgan tenglama oddiy differentsial tenglama, deyiladi. Bu bobdabiz faqat oddiy differentsial tenglamalarni ko'ramiz.

Agar noma'lum funktsiyabir nechta erkli o'zgaruvchining funktsiyasi bo'lsa, u holda bunday tenglamalarni xususiy hosilali differentsial tenglamalar, deb ataymiz.

2-§. Birinchi tartibli differentsial tenglamalar.

2.1. Umumiy tushunchalar. Birinchi tartibli differentsial tenglama quyidagi ko'rinishgaegabo'ladi:

$$F(x,y,y')=0. \qquad (1)$$

Ko'pinchauni y ganisbatan yechib olib,

$$y'=f(x,y) \qquad (2)$$

ko'rinishgakeltirib olish mumkin.

(2) ko'rinishdagi tenglamalar yechimlari uchun mavjudlik va yagonalik shartlarini beruvchi quyidagi teoremao'rinli.

Teorema. Agar (2) tenglamaning o'ng tomonidagi $f(x,y)$ funk-tsiya biror (x_0,y_0) nuqtani o'z ichigaoluvchi D sohadauzluksiz va y bo'yicha uzluksiz differentsiallanuvchi bo'lsa, u holda(2) tenglamaning $y(x_0)=y_0$ shartni qanoatlantiruvchi yagonayechimi mavjud.

Geometrik nuqtai-nazardan teoremagrafigi berilgan (x_0,y_0) nuqtadan o'tuvchi yagona $y=\varphi(x)$ funktsiyamavjudligini bildiradi.

Bu teoremadan differentsial tenglamaning yechimlari cheksiz ko'p bo'lishligi kelib chiqadi, chunki D sohada har xil (x_0,y_0) nuqtalar olsak, ulardan o'tuvchi mos yechimlar har xil bo'ladi.

$y(x_0)=y_0$ shart boshlang'ich shart, deyiladi. Uni quyidagi

$$y|_{x=x_0}=y_0$$

ko'rinishdaham yoziladi.

1-Ta'rif. 1-tartibli differentsial tenglamaning umumiy yechimi deb shunday

$$y=\varphi(x,C) \qquad (3)$$

funktsiyaga aytamizki, u: a) har qanday o'zgarmas C son uchun differentsial tenglamani qanoatlantiradi; b) boshlang'ich $y(x_0)=y_0$ shart qanday bo'lmasin, shunday $C=C_0$ qiymat topiladiki, $y=\varphi(x,C_0)$ funktsiyaboshlang'ich shartni qanoatlantiradi.

Qo'yilgan masalaning yechimi oshkormas

$$\Phi(x,y,C)=0 \qquad (4)$$

ko'rinishda aniqlanishi mumkin. Agar (4) ni y ga nisbatan yechish mumkin bo'lsa, bu ishni bajarib, umumiy yechimni topamiz. Agar buni imkoni bo'lmasa, yechim oshkormas (4) ko'rinishdaqoladi. Bu holda(4) ni differentsial tenglamaning umumiy integrali, deb ataymiz.

2-Ta'rif. Differentsial tenglamaning umumiy (3) yechimida o'zgarmas C songa biror $C=C_0$ qiymat bersak, hosil bo'lgan $y=\varphi(x,C_0)$ funktsiya differentsial tenglamaning xususiy yechimi, deb ataladi. Xuddi shunday $\Phi(x,y,C_0)=0$ funktsiya tenglamaning xususiy integrali deyiladi.

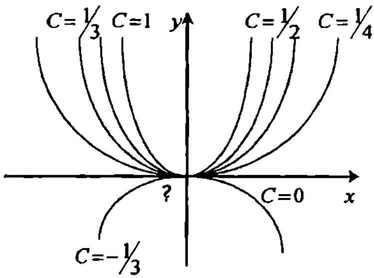
1-m i s o l. Quyidagi

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x}$$

differentsial tenglamaning umumiy yechimi $y=Cx^2$ bo'lsa, uning $y(1)=1$ boshlang'ich shartini qanoatlantiruvchi xususiy yechimini topish uchun $x_0=1, y_0=1$ qiymatlarni umumiy yechim tenglamasiga qo'ysak, $1=C1^2$, ya'ni $C=1$ bo'ladi. Demak, berilgan differentsial tenglamaning xususiy yechimi $y=x^2$ bo'ladi.

Agar umumiy integrallarning koordinatalar tekisligidagi grafiklarini ko'rsak, ular o'zgarmas C songa bog'liq bo'lgan egri chiziqlar oilasini beradi. Bu egri chiziqlar differentsial tenglamaning integral chiziqlari, deb ataladi. Xususiy yechimga bu oilaning tekislikning biror nuqtasidan o'tuvchi bitta egri chizig'i mos keladi.

Oxirgi ko'rilgan misolda umumiy $y=Cx^2$ yechim parabolalar oilasini ifodalasa, topilgan xususiy yechim $M_0(1,1)$ nuqtadan o'tuvchi parabolani ifodalaydi. 1-rasmda bu oilaning $C=1$, $C=\frac{1}{2}$, $C=\frac{1}{3}$, $C=\frac{1}{4}$ va $C=-\frac{1}{3}$ qiymatlargamos keluvchi a'zolari ko'rsatilgan.



122-rasm

Qilayotgan mulohazalarimiz geometrik nuqtai-nazardan tushunarli bo'lishi uchun tenglamaning yechimi, deb faqat $y=\varphi(x,C_0)$ funktsiyani o'zini emas, balki uning grafigi bo'lmish integral egri chiziqni ham tushunamiz.

Masalan, tenglamaning yechimi (x_0,y_0) nuqtadan o'tadi, deymiz.

Demak, differentsial tenglamani yechish yoki uni integrallash deganda:

a) uning umumiy yechimi yoki umumiy integralini (agar boshlang'ich shartlar berilmagan bo'lsa) yoki

b) uning xususiy yechimini (agar boshlang'ich shartlar berilgan bo'lsa) topishni tushunar ekanmiz.

2.2. O'zgaruvchilari ajralgan va ajraluvchi differentsial tenglamalar. Quyidagi

$$M(x)dx+N(y)dy=0 \qquad (5)$$

ko'rinishga keltirilgan differentsial tenglamalar o'zgaruvchilari ajralgan differentsial tenglamalar, deb ataladi.

Uning umumiy integrali (5) ni bevositaintegrallab topiladi:

$$\int M(x)dx+\int N(y)dy=C$$

5 - m i s o l. O'zgaruvchilari ajralgan

$$xdx+ydy=0$$

differentsial tenglamaning ikkalatomonini integrallasak:

$$\int xdx+\int ydy=C,$$

uning

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=C$$

umumiy integralini topamiz. Oxirgi tenglik ma'noga ega bo'lishi uchun $C>0$ bo'lishi shart. Shu sababli, agar uni

$$x^2+y^2=2C$$

ko'rinishda yozib olsak, tenglamaning umumiy yechimi markazi koordinatalar boshida, radiusi $\sqrt{2C}$ bo'lgan kontsentrik aylanalar ekanligi kelib chiqadi.

Eng soddao'zgaruvchilari ajralgan differentsial tenglamalar quyidagi

$$\frac{dy}{dx}=f(x) \quad \text{yoki} \quad dy=f(x)dx$$

ko'rinishdagi tenglamalardir. Uning umumiy yechimi

$$y=\int f(x)dx+C$$

bo'ladi.

$$\frac{dy}{dx}=f_1(x)f_2(y) \qquad (6)$$

ko'rinishdagi yoki

$$M_1(x)N_1(y)dx+M_2(x)N_2(y)dy=0 \qquad (7)$$

ko'rinishga keltirilgan har qanday differentsial tenglama o'zga- ruvchilari ajraluvchi differentsial tenglamalar, deb ataladi.

Agar tenglama(6) ko'rinishdaberilgan bo'lsa, uni avval

$$\frac{1}{f_2(y)}dy=f_1(x)dx$$

ko'rinishga keltirib olib, keyin yuqoridagidek bevosita integrallab, uning umumiy integrali topiladi:

$$\int \frac{1}{f_2(y)}dy = \int f_1(x)dx + C.$$

2-m i s o l. Kimyoviy reaktsiyatenglamasi (§1.1, 4-misolni qarang)

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x) \quad \text{yoki} \quad \frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x)$$

o'zgaruvchilari ajraluvchi tenglama. Masalan, chap tomondagi tenglamani quyidagichayechamiz:

$$\frac{dx}{x-a} = -kdt.$$

Endi oxirgi tenglikni integrallab yuborsak

$$\int \frac{dx}{x-a} = -k\int dt.$$

yoki

$$\ln|x-a| = -kt + \ln C.$$

Bundan

$$x = a + Ce^{-kt}$$

hosil bo'ladi.

Agar tenglama(7) ko'rinishdaberilgan bo'lsa, (7) ning ikkalatarafini $N_1(y)M_2(x)$ ifodagabo'lib yuborsak, u o'zgaruvchilari ajralgan

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0$$

tenglamako'rinishigakeladi.

3 - m i s o l. Ushbu

$$\sqrt{1-y^2}dx + \sqrt{1-x^2}dy = 0$$

tenglamaning umumiy yechimini topaylik.

Tenglikning ikkala tarafini $\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}$ ifodaga bo'lib yuborib, o'zgaruvchilari ajralgan

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$$

tenglamani hosil qilamiz. Bundan

$$\arcsin x + \arcsin y = \arcsin C$$

umumiy integralni topamiz. Agar bu tenglikdasinuslargao'tsak

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = C$$

kelib chiqadi.

2.3. Bir jinsli tenglamalar.

Ta'rif. Agar $f(x,y)$ funktsiya x va y o'zgaruvchilarga nisbatan 0-darajali bir jinsli funktsiya bo'lsa (13-bob, 9-§ ga qarang), u holda 1-tartibli

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{8}$$

differentsial tenglamabir jinsli, deyiladi.

Oxirgi tenglamaning o'ng tomonidagi $f(x,y)$ funktsiya 0-darajali bir jinsli funktsiyabo'lgani uchun har qanday λ son uchun $f(\lambda x,\lambda y)=f(x,y)$ bo'ladi, xususan $\lambda={}^{1}\!/_{x}$ uchun

$$f(x,y)=f\left(1,\frac{y}{x}\right),$$

ya'ni 0-darajali bir jinsli funktsiya erkli o'zgaruvchilar nisbatiga bog'liq bo'ladi.

Shuni e'tiborgaolib (8) ni quyidagicha

$$\frac{dy}{dx}=f\left(1,\frac{y}{x}\right) \tag{8'}$$

yozish mumkin.

Agar bu yerda $u=\frac{y}{x}$, ya'ni $y=ux$ desak, $\frac{dy}{dx}=u+\frac{du}{dx}x$ bo'ladi. Bularni (8') ga olib borib qo'ysak, u ga nisbatan differentsial tenglamahosil bo'ladi:

$$u+x\frac{du}{dx}=f(1,u).$$

Bu tenglamaning o'zgaruvchilarini quyidagi tartibdaajratamiz:

$$x\frac{du}{dx}=f(1,u)-u \qquad \text{va} \qquad \frac{du}{f(1,u)-u}=\frac{dx}{x}.$$

Oxirgi tenglamani integrallagach:

$$\int\frac{du}{f(1,u)-u}=\int\frac{dx}{x}+C,$$

natijadagi u o'rniga ${}^{y}\!/_{x}$ ni qo'yib, berilgan differentsial tenglamaning umumiy yechimini topamiz.

4 - m i s o l. Quyidagi

$$y'=\frac{y}{x}+\sin\frac{y}{x}$$

differentsial tenglamaning $y(1)=\pi/2$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi xususiy yechimi topilsin.

Yechish . Berilgan tenglama bir jinsli (buni tekshirishni o'quvchiga havola qilamiz), shu sababli unda $y=ux$, $\frac{dy}{dx}=u+\frac{du}{dx}x$ almashtirish bajaramiz. Natijada

$$xdu+udx=(u+\sin u)dx\,; \qquad xdu=\sin u dx\,; \qquad \frac{du}{\sin u}=\frac{dx}{x}$$

tenglamagaegabo'lamiz. Agar oxirgi tenglikni integrallasak:

$$\ln|tg(u/2)|=\ln|x|+\ln C$$

yoki

$$u/2=arctg(Cx)$$

kelib chiqadi. Agar bu yerda teskari almashtirish bajarsak, ya'ni u o'rniga y/x ni qo'ysak, umumiy yechim $y=2xarctg(Cx)$ hosil bo'ladi. Agar berilgan boshlang'ich shartdan foydalansak: $\pi/2=2arctgC$ bo'ladi. Bundan $C=1$ ni topamiz. Demak, so'ralgan xususiy yechim

$$y=2xarctgx$$

ekan.

Eslatma. Quyidagi

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

ko'rinishdagi tenglama bir jinsli bo'ladi, qachonki $M(x,y)$ va $N(x,y)$ funktsiyalar birjinslik darajalari bir xil bo'lgan funktsiyalar bo'lsa, chunki birjinslik darajalari bir xil bo'lgan funktsiyalar nisbati 0-darajali birjinsli funktsiyabo'ladi (13-bob, 9-§ gaqarang).

5 - m i s o l . $(x^2+2xy)dx+xydy=0$, $(x^4+6x^2y^2+y^2)dx+4xy^3dy=0$ tenglamalar bir jinsli differentsial tenglamalardir.

2.4. Bir jinslikka keltiriladigan differentsial tenglamalar. Agar

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by+c}{a_1x+by_1+c_1} \tag{9}$$

ko'rinishdagi tenglamada $c=0, c_1=0$ bo'lsa, bu tenglama bir jinsli bo'ladi, aks holda, ya'ni s va s_1 larning kamida bittasi noldan farqli bo'lsa, bu tenglamani bir jinsli tenglamaga keltirish mumkin. Buning uchun

$$x=x_1+h\ , \quad y=y_1+k$$

almashtirish bajaramiz.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy_1}{dx_1}$$

bo'lgani uchun, (9) bu almashtirish natijasida

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{ax_1+by_1+ah+bk+c}{a_1x_1+b_1y_1+a_1h+b_1k+c_1} \tag{10}$$

ko'rinishgakeladi. Agar h va k larni

$$\begin{cases} ah+bk+c=0, \\ a_1h+b_1k+c_1=0 \end{cases} \tag{11}$$

sistemaning yechimlari qilib tanlasak, (10) quyidagi bir jinsli

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{ax_1+by_1}{a_1x_1+b_1y_1}$$

tenglamagakeladi.

Agar (11) sistema yechimga ega bo'lmasa, ya'ni $ab_1=a_1b$ bo'lsa, u holda $a=\lambda a_1$ va $b=\lambda b_1$ deb, (9) ni

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(ax+by)+c}{\lambda(ax+by)+c_1} \tag{12}$$

ko'rinishgakeltirish mumkin. Bu tenglama

$$z=ax+by \tag{13}$$

almashtirish yordamida o'zgaruvchilari ajraluvchi tenglamaga keladi. Haqiqatan,

$$\frac{dz}{dx}=a+b\frac{dy}{dx} \quad \text{yoki} \quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{b}\frac{dz}{dx}-\frac{a}{b}. \tag{14}$$

(13) va (14) larni (12) gaqo'ysak, o'zgaruvchilari ajraluvchi

$$\frac{1}{b}\frac{dz}{dx}-\frac{a}{b}=\frac{z+c}{\lambda z+c_1}$$

tenglamahosil bo'ladi.

Eslatma. Ixtiyoriy uzluksiz f funktsiyauchun

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$$

ko'rinishdagi har qanday tenglama yuqoridagi usullar yordamida integrallanadi.

6 - m i s o l . $(2x+y+1)dx+(x+2y-1)dy=0$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish . Buning uchun avval

$$\begin{cases} 2x+y+1=0 \\ x+2y-1=0 \end{cases}$$

sistemani yechib olamiz: $x=h=-1; y=k=1$. Endi berilgan tenglamada $x=x_1-1; y=y_1+1$; $dx=dx_1; dy=dy_1$ almashtirish bajarsak, tenglama

$$(2x_1 + y_1)dx_1 + (x_1 + 2y_1)dy_1 = 0$$

ko'rinishga keladi. Bu tenglama $y_1 = ux_1; dy_1 = udx_1 + x_1 du$ almashtirish yordamidao'zgaruvchilari ajraluvchi

$$2(u^2 + u + 1)x_1 dx_1 + x_1^2 (1 + 2u)du = 0$$

tenglamagakeltiriladi. Bu tenglamaning umumiy integrali

$$x_1 \sqrt{u^2 + u + 1} = C.$$

Agar bu yerda $u = y_1/x_1$ deb, tenglikning ikkala tomonini kvadratga ko'tarsak:

$$y_1^2 + x_1 y_1 + x_1^2 = C^2$$

munosabat hosil bo'ladi. Eski o'zgaruvchilar x va y largaqaytish uchun oxirgi tenglikda $x_1 = x + 1; y_1 = y - 1$ deb, bir nechta elementar almashtirishlar bajarsak, berilgan tenglamaning umumiy integrali

$$x^2 + y^2 + xy + x - y + 1 = C^2$$

kelib chiqadi.

7 - m i s o l . $(x + y + 2)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish . Bu tenglamauchun (11) sistemayechimgaega emas. Shuning uchun $y + x = z; dy = dz - dx$ almashtirish bajaramiz. Natijadatenglama

$$(z + 2)dx + (2z - 1)(dz - dx) = 0 \quad \text{yoki} \quad (3 - z)dx + (2z - 1)dz = 0$$

ko'rinishgakeladi. O'zgaruvchilarni ajratib integrallasak:

$$\int \frac{2z - 1}{3 - z} dz + \int dx = C \quad \text{yoki} \quad -2z - 5\ln|z - 3| + x = -C$$

hosil bo'ladi. Endi oxirgi tenglikda $z = x + y$ deb eski o'zgaruvchilarga o'tsak, berilgan tenglamaning umumiy integrali kelib chiqadi:

$$x + 2y + 5|x + y - 3| = C.$$

3-§. Birinchi tartibli chiziqli tenglamalar.

Ta'rif. Noma'lum funktsiyaga va uning hosilasiga nisbatan chiziqli bo'lgan ushbu

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \qquad (1)$$

ko'rinishdagi tenglamabirinchi tartibli chiziqli tenglama, deb ataladi, bu erda $P(x), Q(x)$ lar berilgan o'zgarmas yoki x ning uzluksiz funktsiyalaridir.

Agar $Q(x) \equiv 0$ bo'lsa, (1) ni bir jinsli[4] tenglama, aks holdabir jinsli bo'lmagan tenglama deymiz. (1) ko'rinishdagi tenglamalarni echishning ikki usuli bor.

3.1. Bernulli usuli. (1) ning yechimini

$$y = u(x)\vartheta(x) \tag{2}$$

ko'rinishda qidiramiz. Buning uchun (2) ni differentsiallab, (1) ga olib borib qo'yamiz:

$$u\frac{d\vartheta}{dx} + \vartheta\frac{du}{dx} + P(x)u\vartheta = Q(x)$$

yoki

$$u\left(\frac{d\vartheta}{dx} + P(x)\vartheta\right) + \vartheta\frac{du}{dx} = Q(x). \tag{3}$$

Agar $\vartheta(x)$ funktsiyani

$$\frac{d\vartheta}{dx} + P(x)\vartheta = 0 \tag{4}$$

bir jinsli tenglamaning echimi sifatidatanlasak, (3) quyidagi

$$\vartheta(x)\frac{du}{dx} = Q(x) \tag{5}$$

ko'rinishga keladi. Natijada noma'lum $u(x)$ va $\vartheta(x)$ funktsiyalarni topish uchun tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\vartheta}{dx} + P(x)\vartheta = 0 \\ &\vartheta\frac{du}{dx} = Q(x). \end{aligned}\right\}$$

(4) tenglamao'zgaruvchilari ajraluvchi tenglama, shuning uchun

$$\frac{d\vartheta}{\vartheta} = -P(x)dx$$

bo'ladi. Agar uni integrallasak:

$$-\ln|C_1| + \ln|\vartheta| = -\int P(x)dx$$

bo'ladi. Bundan

$$\vartheta(x) = C_1 e^{-\int P(x)dx}$$

kelib chiqadi. Bu (4) ning umumiy yechimi, lekin bizga uning bitta xususiy yechimini bilish kifoyaedi, shu sababli $\vartheta(x)$ funktsiyasifatida

---

[4] Bu yerda " bir jinsli " atamasi $y' + P(x)y$ ifoda y va y' larga nisbatan bir jinsli funktsiya bo'lgani uchun ishlatildi, shu sababli buni x va y ga nisbatan bir jinsli bo'lgan tenglama bilan chalkashtirish kerak emas.

$$\vartheta(x) = e^{-\int P(x)dx} \quad (6)$$

ni olamiz. Ayonki, $\vartheta(x) \neq 0$. Endi (5) ni yechish mumkin, buning uchun (6) ni (5) gaqo'yib, uning o'zgaruvchilarini ajratsak:

$$du = \frac{Q(x)}{\vartheta(x)}dx$$

bo'ladi. Buni integrallasak:

$$u = \int \frac{Q(x)}{\vartheta(x)}dx + C$$

hosil bo'ladi. Va nihoyat, topilgan $u(x)$ va $\vartheta(x)$ funktsiyalarni (2) ga qo'ysak, (1) ning umumiy yechimi kelib chiqadi:

$$y = \vartheta(x)\int \frac{Q(x)}{\vartheta(x)}dx + C\vartheta(x).$$

Bu haqiqatan umumiy yechim, chunki har qanday $y(x_0) = y_0$ boshlang'ich shart uchun S ni

$$y_0 = \vartheta(x_0)\varphi(x_0) + C\vartheta(x_0)$$

tenglamadan topish mumkin, bu yerda $\varphi(x) = \int \frac{Q(x)}{\vartheta(x)}dx$.

1 - m i s o l. O'zgarmas R qarshilik va L induktivlik ketma-ket ulangan induktivlik zanjiridagi tokning o'tish jarayonini boshlang'ich tok I_0 va kuchlanish $U = f(t)$ bo'lgan hoi uchun ko'raylik.

Yechish. Ma'lumki (§1.1, 5-misolgaqarang), bunday zanjirdan tokning o'tish tenglamasi

$$L\frac{dI}{dt} + RI = U \quad (7)$$

bo'ladi. Buni qo'yidagichayozib olamiz:

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{f(t)}{L}.$$

Bu I ga nisbatan birinchi tartibli chiziqli differentsial tenglamadir. Bu yerdagi L/R kattalik masala shartiga ko'ra o'zgarmas, uni zanjirning vaqt doimiysi deyiladi.

Uning yechimini (2) ko'rinishda qidiramiz. U holda noma'lum $u(t)$ va $\vartheta(t)$ funktsiyalarga nisbatan hosil bo'ladigan sistema qo'yidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\vartheta}{dt}+\frac{R}{L}\vartheta=0 \\ \vartheta\frac{du}{dt}=\frac{f(t)}{L}. \end{aligned}\right\}$$

Bu sistemaning birinchi tenglamasini yechamiz:

$$\frac{d\vartheta}{\vartheta}=-\frac{R}{L}dt$$

yoki

$$\vartheta=e^{-\int\frac{R}{L}dt}=e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Buni sistemaning ikkinchi tenglamasigaqo'yib, $u(t)$ ni topamiz:

$$du=\frac{1}{L}f(t)e^{Rt/L}dt$$

Oxirgi tenglikni integrallab yuborsak:

$$u(t)=\frac{1}{L}\int f(t)e^{Rt/L}dt+C$$

hosil bo'ladi. U holdayechim

$$I=e^{-Rt/L}\left[C+\frac{1}{L}\int f(t)e^{Rt/L}dt\right]$$

bo'ladi. Agar boshlang'ich shartni qo'llasak:

$$I_0=C$$

ekanligi kelib chiqadi. Demak, masalaning yechimi

$$I=e^{-Rt/L}\left[I_0+\frac{1}{L}\int f(t)e^{Rt/L}dt\right]$$

ekan.

3.2. Lagranj usuli. Bu usulning mohiyati shundaki, berilgan bir jinsli bo'lmagan chiziqli (1) tenglamaning umumiy yechimi unga mos qo'yilgan

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0 \qquad (8)$$

bir jinsli chiziqli tenglamaning umumiy yechimidagi o'zgarmas S_1 koeffitsientni o'zgaruvchi deb faraz qilib topiladi, ya'ni

$$y=C_1(x)e^{-\int P(x)dx}$$

deb, uni (1) tenglamagaqo'yiladi, natijadanoma'lum $C_1(x)$ funktsiyaga nisbatan

$$C_1'(x)e^{-\int P(x)dx}=Q(x)$$

tenglamahosil bo'ladi. Bundan

$$C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C$$

kelib chiqadi, bu yerda S ixtiyoriy o'zgarmas. U holda (1) ning umumiy yechimi

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right]$$

bo'ladi.

Eslatma. Lagranj usulini "ixtiyoriy o'zgarmasni variatsiyalash usuli", deb ham atashadi.

2 - m i s o l . $y'\cos^2 x + y = tgx$ tenglamaning umumiy yechimini Lagranj usuli bilan topaylik.

Yechish . Avval

$$y'\cos^2 x + y = 0$$

bir jinsli tenglamani yechib olamiz. Buning uchun uning o'zgaruvchilarini ajratamiz:

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{\cos^2 x} = 0.$$

Tenglikning ikkala tomonini integrallab yuborsak:

$$\ln y + tgx = \ln C$$

yoki

$$y = Ce^{-tgx}$$

ni hosil qilamiz. Endi berilgan tenglamaning umumiy yechimini topish uchun

$$y = C(x)e^{-tgx} \tag{9}$$

deb olib, berilgan tenglamaga (9) ni va

$$y' = C'(x)e^{-tgx} - C(x)e^{-tgx}\sec^2 x$$

olib borib qo'yamiz:

$$\cos^2 xC'(x)e^{-tgx} - C(x)e^{-tgx}\sec^2 x\cos^2 x + C(x)e^{-tgx} = tgx$$

yoki

$$C'(x)\cos^2 xe^{-tgx} = tgx.$$

Bundan

$$C(x) = \int\frac{e^{tgx}tgx}{\cos^2 x}dx = e^{tgx}(tgx - 1) + C$$

kelib chiqadi. U holda berilgan tenglamaning umumiy yechimi

$$y = tgx - 1 + Ce^{-tgx}$$

bo'ladi.

4-§. Bernulli tenglamasi.

Quyidagi y ga nisbatan chiziqli bo'lmagan

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^{n} \tag{1}$$

ko'rinishdagi tenglama "Bernulli tenglamasi" deb ataladi, bu yerda $n\neq 0$ va $n\neq 1$ bo'lgan ixtiyoriy haqiqiy son, chunki aks holda, tenglama avvalgi paragrafda ko'rilgan chiziqli tenglamaning aynan o'zi bo'ladi. (1) ni chiziqli tenglamaga quyidagi usul bilan keltiriladi.

Tenglamaning ikkala tomonini y^{n} ga bo'lib yuboramiz:

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+P(x)y^{-n+1}=Q(x).$$

Agar oxirgi tenglamada

$$z=y^{-n+1} \tag{2}$$

deb o'zgaruvchini almashtirsak, u quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\frac{dz}{dx}+(-n+1)P(x)z=(-n+1)Q(x)$$

ya'ni z ga nisbatan chiziqli tenglama hosil bo'ladi. Bu tenglamaning umumiy yechimini avvalgi paragrafdagi ikki usulning biri bilan topib olib, undagi z ni y^{-n+1} ga almashtirsak, Bernulli tenglamasining umumiy integrali kelib chiqadi.

1 - m i s o l. $y'+\frac{2y}{x}=3x^{2}y^{4/3}$ tenglamani echaylik.

Yechish. Bu Bernulli tenglamasi, shuning uchun $z=y^{-1/3}$ deb o'zgaruvchini almashtiramiz. U holda tenglama quyidagi ko'rinishga keladi:

$$z'-\frac{2}{3x}z=-x^{2}.$$

Buni masalan Lagranj usuli bilan yechaylik:

$$\frac{dz}{dx}-\frac{2}{3x}z=0$$

yoki o'zgaruvchilarini ajratsak:

$$\frac{dz}{z}=\frac{2}{3}\frac{dx}{x}.$$

Bundan

$$z=C(x)x^{2/3}.$$

Bundan hosila olib, berilgan tenglamaga olib borib qo'yamiz:

$$C'(x)x^{2/3}+\frac{2}{3}C(x)x^{-1/3}-\frac{2}{3}C(x)x^{-1/3}=-x^2$$

yoki

$$C'(x)=-x^{4/3}.$$

Buni integrallab yuborsak:

$$C(x)=-\frac{3}{7}x^{7/3}+C$$

hosil bo'ladi. Demak,

$$z=-\frac{7}{3}x^3+Cx^{2/3}$$

yoki

$$y^{-1/3}=-\frac{7}{3}x^3+Cx^{2/3}$$

ekan. Bundan

$$y=\frac{1}{\left(-\frac{7}{3}x^3+Cx^{2/3}\right)^3}$$

kelib chiqadi.

Eslatma. Bernulli tenglamasini o'zgaruvchini (2) ko'rinishda almashtirmasdan, bevosita Lagranj usulini qo'llab yechsa ham bo'ladi.

2 - m i s o l . $y'+\frac{y}{x}=x^2y^4$ tenglamani Lagranj usulida yechaylik.

Yechish. Avval $y'+\frac{y}{x}=0$ tenglamani yechib olamiz. Uning umumiy yechimi $y=C/x$ bo'ladi. Endi $y=C(x)/x$, $y'=C'(x)/x-C(x)/x^2$ larni berilgan tenglamaga qo'ysak:

$$\frac{C'(x)}{x}=\frac{[C(x)]^4}{x^2}$$

tenglama hosil bo'ladi. Unda o'zgaruvchilarini ajratamiz:

$$\frac{dC(x)}{[C(x)]^4}=\frac{dx}{x}.$$

Bu tenglamani integrallasak:

$$-\frac{1}{3[C(x)]^3}=\ln x-\ln C \qquad \text{yoki} \qquad C(x)=\sqrt[3]{\frac{1}{3\ln(C/x)}}$$

kelib chiqadi. Demak, umumiy yechim

$$y=\frac{1}{x\sqrt[3]{3\ln(C/x)}}$$

bo'lar ekan.

5-§. To'la differentsialli tenglamalar.

5.1. Ta'rif. Quyidagi

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \qquad (1)$$

differentsial tenglama "to'la differentsialli" deyiladi, agar $M(x,y), N(x,y)$ lar

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x} \qquad (2)$$

munosabatda bo'lgan uzluksiz, differentsiallanuvchi funktsiyalar bo'lsa.

(1) tenglamaning bunday atalishiga sabab, agar (2) tenglik o'rinli bo'lsa, u holda (1) ning chap tomoni biror $u(x,y)$ funktsiyaning to'la differentsiali bo'ladi, va aksincha, agar (1) ning chap tomoni biror $u(x,y)$ funktsiyaning to'la differentsiali bo'lsa, u holda (2) munosabat bajariladi. Haqiqatan, agar

$$du=M(x,y)dx+N(x,y)dy$$

bo'lsa, u holda to'la differentsialning ta'rifiga ko'ra

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$$

ekanligidan

$$\frac{\partial u}{\partial x}=M(x,y), \quad \frac{\partial u}{\partial y}=N(x,y) \qquad (3)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bularning birinchisini y bo'yicha, ikkinchisini esa x bo'yicha differentsiallasak:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}, \quad \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$$

ga ega bo'lamiz. Agar ikkinchi hosilalar uzluksiz bo'lsa, u holda

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Demak, (2) tenglik (1) ning chap tomoni biror $u(x,y)$ funktsiyaning to'la differentsiali bo'lishi uchun zaruriy shart ekan.

Endi faraz qilaylik, (2) tenglik o'rinli bo'lsin. U holda

$$\frac{\partial u}{\partial x}=M(x,y)$$

munosabatdan

$$u=\int_{x_0}^{x}M(x,y)dx+\varphi(y)$$

kelib chiqadi, bu erda x_0 - yechimning mavjudlik sohasidagi ixtiyoriy nuqtaning abtsissasi.

x bo'yicha integrallaganda y ni o'zgarmas deb faraz qilingani uchun, integrallash jarayonida hosil bo'ladigan o'zgarmasni y ning funktsiyasi, deb hisoblash mumkin.

Endi $\varphi(y)$ ni shunday tanlaymizki, natijada (3) ning ikkinchisi ham o'rinli bo'lsin. Buning uchun oxirgi tenglikni y bo'yicha differentsiallaymiz:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M}{\partial y} dx + \varphi'(y) = N(x,y);$$

lekin (2) shartga ko'ra

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial N}{\partial x} dx + \varphi'(y) = N$$

yoki

$$N(x,y)\Big|_{x_0}^{x} + \varphi'(y) = N(x,y).$$

Demak,

$$\varphi'(y) = N(x_0, y)$$

yoki

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^{y} N(x_0, y) dy + C_1.$$

Va nihoyat,

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y) dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y) dy + C_1 \qquad (4)$$

tenglikni hosil qilamiz.

Demak, (2) shart bajarilsa, shunday $u(x,y)$ funktsiya mavjudki,

$$du = M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

bo'ladi. Shu sababli, (1) ni

$$du = 0$$

deyish mumkin. Bundan

$$u(x,y) = C$$

tenglik kelib chiqadi. U holda (4) ga asosan

$$\int_{x_0}^{x} M(x,y) dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y) dy = C, \qquad (5)$$

ya'ni (1) ning umumiy integralini hosil qilamiz.

1 - m i s o l . $(x+y-1)dx + (e^y + x)dy = 0$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Bu yerda $M(x,y)=x+y-1, N(x,y)=e^y+x$, $\dfrac{\partial M}{\partial y}=1$, $\dfrac{\partial N}{\partial x}=1$, ya'ni (2) shart bajarilyapti, demak, berilgan tenglama to'la differentsialli ekan.

Umumiy yechimni (5) formula bo'yicha topamiz:

$$\int_0^x (x+y-1)dx+\int_0^y e^y dy=C_1$$

yoki

$$\left[\frac{1}{2}x^2+xy-x\right]_0^x+e^y\,|_0^y=C_1.$$

Bundan

$$\frac{1}{2}x^2+xy-x+e^y-1=C_1 \quad \text{yoki} \quad e^y+\frac{1}{2}x^2+xy-x=C$$

ga ega bo'lamiz.

5.2. Agar (2) tenglik bajarilmasa, u holda (1) tenglama to'la differentsialli bo'lmaydi. Bunday tenglamalar uchun ayrim hollarda integrallovchi ko'paytuvchi, deb ataluvchi shunday $\mu(x,y)$ funktsiyani topish mumkinki, berilgan tenglamani shu funktsiyaga ko'paytirilganda, tenglama to'la differentsiallikka aylanadi.

Integrallovchi ko'paytuvchi $\mu(x,y)$ ni topish uchun berilgan tenglamani $\mu(x,y)$ ga ko'paytiramiz:

$$\mu M(x,y)dx+\mu N(x,y)dy=0.$$

Ma'lumki, bu tenglama to'la differentsialli bo'lishi uchun

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

bo'lishi zarur va yetarlidir. Oxirgi tenglikni quyidagicha yozib olamiz:

$$\mu\frac{\partial M}{\partial y}+M\frac{\partial \mu}{\partial y}=\mu\frac{\partial N}{\partial x}+N\frac{\partial \mu}{\partial x}$$

yoki

$$M\frac{\partial \mu}{\partial y}-N\frac{\partial \mu}{\partial x}=\mu\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right).$$

Tenglikning ikkala tomonini $\mu(x,y)$ ga bo'lib yuborsak noma'lum $\mu(x,y)$ funktsiyaga nisbatan:

$$M\frac{\partial \ln\mu}{\partial y}-N\frac{\partial \ln\mu}{\partial x}=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y} \qquad (6)$$

tenglamani hosil qilamiz. Buni umumiy holda yechish juda murakkab, shu sababli uni ayrim xususiy hollardagina hal qilamiz.

Masalan, (1) tenglama faqat y ning funktsiyasi bo'lgan integrallovchi ko'paytuvchiga ega bo'lsin. U holda

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = 0$$

bo'ladi. Shu sababli, (6) tenglama quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\frac{d \ln \mu}{dy} = \frac{\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}}{M}.$$

Agar bu yerda

$$\frac{\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}}{M}$$

ifoda faqat y ga bog'liq bo'lsa, u holda

$$\mu = e^{\int \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) / M \, dy}$$

bo'ladi.

Aynan shundek, agar

$$\frac{\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}}{N}$$

ifoda faqat x ga bog'liq bo'lsa, u holda integrallovchi ko'paytuvchi

$$\mu = e^{\int \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y}\right) / N \, dy}$$

ko'rinishda topiladi.

2 - m i s o l . $ydx - (x + y^2)dy = 0$ tenglamaning umumiy ildizini toping.

Yechish. Bu yerda $M = y, N = -(x + y^2), \dfrac{\partial M}{\partial y} = 1, \dfrac{\partial N}{\partial x} = -1$, ya'ni

$\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$, lekin $\dfrac{\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}}{M} = -\dfrac{2}{y}$. Shu sababli,

$$\mu = e^{-\int \frac{2}{y} dy} = \frac{1}{y^2}.$$

Berilgan tenglamani shu integrallovchi ko'paytuvchiga ko'paytiramiz:

$$\frac{1}{y}dx - \left(\frac{x}{y^2} + 1\right)dy = 0.$$

Natijada to'la differentsialli (buni tekshirishni o'quvchiga havola qilamiz) tenglama hosil qilamiz.

$x_0 = 1, y_0 = 1$ deb (5) formulani qo'llaymiz:

$$\int_1^x \frac{1}{y}dx - \int_1^y \left(\frac{1}{y^2} + 1\right)dy = C$$

yoki

$$\left.\frac{x}{y}\right|_1^x - \left.\left(-\frac{1}{y} + y\right)\right|_1^y = C.$$

Demak, berilgan tenglamaning umumiy yechimi

$$\frac{x}{y} - y = C$$

ekan.

6-§. Egri chiziqlar oilasining o'ramasi.

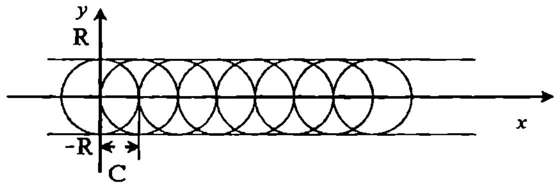
Quyidagi

$$F(x, y, C) = 0 \qquad (1)$$

tenglama Oxy dekart koordinatalar tekisligida S ning har bir qiymatida biror egri chiziqni ifodalaydi (3-bob, 1.1-§ qarang). S ning har xil qiymatlariga mos keluvchi egri chiziqlarni bir parametrli egri chiziqlar oilasi deb ataymiz. Demak, (1) tenglama bir parametrli egri chiziqlar oilasini aniqlar ekan.

Ta'rif. L chiziq bir parametrli egri chiziqlar oilasining o'ramasi deyiladi, agar u o'zining har bir nuqtasida oilaning biror chizig'iga urinib o'tsa va har xil nuqtalarida urinayotgan oilaning chiziqlari ham har xil bo'lsa.

1-m i s o l . $(x - C)^2 + y^2 = R^2$ tenglama markazlari Ox o'qida joylashgan R radiusli aylanalar oilasini beradi. Bu oilaning o'ramalari $y = R$ va $y = -R$ to'g'ri chiziqlardir (1-rasmga qarang).



123-rasm.

Endi o'ramani topish masalasini ko'raylik. Faraz qilaylik, (1) egri chiziqlar oilasi berilgan bo'lsin. Agar u tenglamasi $y=\varphi(x)$ bo'lgan o'ramaga ega bo'lsa, bu yerda $\varphi(x)$-uzluksiz va differentsiallanuvchi funktsiya, u holda bu o'ramaning har bir $M(x,y)$ nuqtasi (1) oilaning biror egri chizig'iga tegishli bo'ladi, bu egri chiziqqa S koeffitsientning M nuqtaning koordinatalari (x,y) ga bog'liq bo'lgan aniq bir qiymati mos keladi: $C=C(x,y)$. Demak, o'ramaning barcha nuqtalari uchun

$$F(x,y,C(x,y))=0 \qquad (2)$$

bo'ladi, ya'ni (2) ni o'ramaning oshkormas tenglamasi deb qarash mumkin. Faraz qilaylik, $C(x,y)$ koeffitsient x,y larning barcha qiymatlarida o'zgarmas bo'lmagan differentsiallanuvchi funktsiya bo'lsin. O'ramaning (2) tenglamasidan o'ramaga uning $M(x,y)$ nuqtasida o'tkazilgan urinmasining burchak koeffitsientini topaylik. (2) ni x bo'yicha differentsiallaylik:

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial C}\frac{\partial C}{\partial x}+\left(\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial C}\frac{\partial C}{\partial y}\right)y'=0$$

yoki

$$F_x'+F_y'y'+F_C'\left(\frac{\partial C}{\partial x}+\frac{\partial C}{\partial y}y'\right)=0 \qquad (3)$$

Ma'lumki, egri chiziqqa o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsienti uning tenglamasidan olingan hosilaning shu nuqtadagi qiymatiga teng. Agar oshkormas funktsiyadan olinadigan hosila formulasini eslasak:

$$y'=-\frac{F_x'}{F_y'},$$

u holda (1) oilaning egri chizig'iga o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsienti

$$F_x'+F_y'y'=0 \qquad (4)$$

tenglikdan aniqlanadi. O'ramaga o'tkazilgan urimaning burchak koeffitsienti egri chiziq urinmasining burchak koeffitsientiga teng bo'lgani uchun (3) va (4) larga asosan

$$F'_C\left(\frac{\partial C}{\partial x}+\frac{\partial C}{\partial y}y'\right)=0$$

tenglikka ega bo'lamiz. O'ramada $C(x,y)\neq const$ bo'lgani uchun

$$\frac{\partial C}{\partial x}+\frac{\partial C}{\partial y}y'\neq 0,$$

shu sababli, o'ramaning barcha nuqtalari uchun

$$F'_C(x,y,C)=0 \tag{5}$$

bo'ladi. Natijada o'ramani topish uchun

$$\left.\begin{aligned} F(x,y,C)=0\\ F'_C(x,y,C)=0\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

sistemani hosil qildik. Lekin bu tenglamalarni (1) ning F'_x, F'_y xususiy hosilalarini nolga aylantiradigan statsionar nuqtalar deb ataluvchi nuqtalar koordinatalari ham qanoatlantiradi.

Haqiqatan, maxsus nuqtaning koordinatalarini (1) tarkibiga kiruvchi C parametr orqali ifodalash mumkin:

$$x=\lambda(C),\quad y=\mu(C). \tag{7}$$

Agar bularni (1) ga olib borib qo'ysak:

$$F(\lambda(C),\mu(C),C)=0$$

ayniyatni hosil qilamiz. Uni C bo'yicha differentsiallaylik:

$$F'_x\frac{d\lambda}{dC}+F'_y\frac{d\mu}{dC}+F'_C=0.$$

x, y lar statsionar nuqtaning koordinatalari bo'lgani uchun $F'_x=0, F'_y=0$ bo'ladi, shu sababli yuqoridagi tenglikdan $F'_C=0$ kelib chiqadi.

Demak, (6) ni yechganda, yechim o'ramani yoki statsionar nuqtalarning geometrik o'rnini bildirishini aniqlash uchun qo'shimcha tekshirishlar o'tkazish lozim ekan.

2-m i s o l. $(x-C)^2+y^2=R^2$ aylanalar oilasining o'ramasini (6) sistema yordamida aniqlang.

Yechish. Oila tenglamasini S bo'yicha differentsiallaylik:

$$2(x-C)=0.$$

U holda (6) sistema bu misol uchun quyidagicha bo'ladi:

$$\left.\begin{aligned} (x-C)^2+y^2=R^2,\\ 2(x-C)=0.\end{aligned}\right\}$$

Bu sistemadan S ni yo'qotsak:

$$y^2-R^2=0 \quad \text{yoki} \quad y=\pm R$$

hosil bo'ladi. Shu natijaga biz boshqa usul bilan kelgan edik. Ma'lumki, bu o'rama edi. Bu yerda ham aylana statsionar nuqtalarga ega bo'lmagani uchun $y=\pm R$ - o'rama tenglamasi, degan xulosaga kelamiz.

3 - m i s o l . $y^3-(x-C)^2=0$ yarimkubik parabolalar oilasining o'ramasini toping.

Yechish. Berilgan tenglamani S parametr bo'yicha differentsiallaymiz:

$$2(x-C)=0.$$

Bundan S ni topib, oila tenglamasiga qo'ysak:

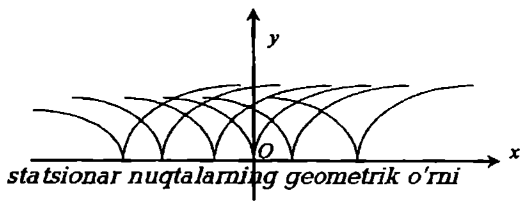
$$y=0$$

bo'ladi. Bu Ox o'qining tenglamasi. Uni o'ramami yoki statsionar nuqtalarning geometrik o'rnimi ekanligiga ishonch hosil qilish uchun berilgan oilaning statsionar nuqtalarini topaylik. Buning uchun berilgan tenglamani x va y bo'yicha differentsiallaylik:

$$F_x' = -2(x-C)=0;$$

$$F_y' = 3y^2 = 0.$$

Bundan $x=C$, $y=0$ ekanligi kelib chiqadi. S ga har xil qiymatlar bersak, statsionar nuqtalar Ox o'qini to'lg'izadi, ya'ni Ox o'qi statsionar nuqtalarning geometrik o'rni ekan (124-rasmga qarang).



124-rasm.

4 - m i s o l . $(y-C)^2-\frac{2}{3}(x-C)^3=0$ oilaning o'ramasi va statsionar nuqtalarining geometrik o'rnini toping.

Yechish. Tenglamani S bo'yicha differentsiallaylik:

$$-2(y-C)+\frac{2}{3}\cdot 3(x-C)^2=0$$

yoki

$$y-C=(x-C)^2. \tag{8}$$

Buni berilgan tenglamaga qo'ysak:

$$(x-C)^4-\frac{2}{3}(x-C)^3=0$$

yoki

$$(x-C)^3\left[(x-C)-\frac{2}{3}\right]=0$$

hosil bo'ladi. Bundan S ning ikkita qiymatini topamiz: $S_1=x$, $C_2=x-\frac{2}{3}$.

Agar (8) ga birinchi qiymatni qo'ysak:

$$y-x=(x-x)^2$$

yoki

$$y=x$$

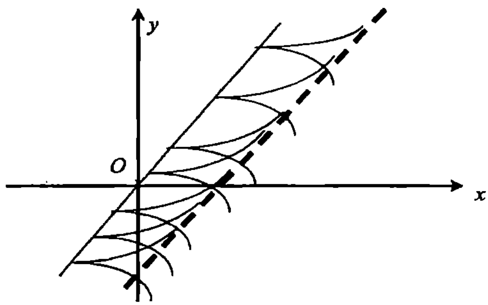
tenglamani hosil qilamiz. Agar (8) ga ikkinchi qiymatni qo'ysak:

$$y-x+\frac{2}{3}-\left(x-x+\frac{2}{3}\right)^2=0$$

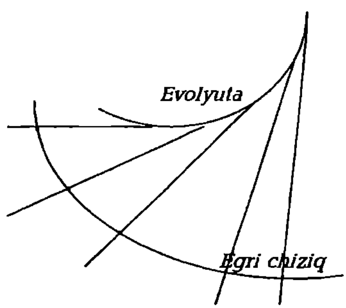
yoki

$$y=x-\frac{2}{9}$$

kelib chiqadi. Topilgan chiziqlarning birinchisi statsionar nuqtalarning gelmetrik o'mini, ikkinchisi esa o'ramani beradi (125-rasmga qarang).



125-rasm.



126-rasm.

Eslatma. 13-bobning 4-§ ida biz egri chiziqning normali evolyutaga urinma bo'lishini ko'rsatgan edik. Shu sababli, berilgan egri chiziqning normallari oilasi evolyuta uchun urinmalar oilasi bo'ladi. Demak, evolyuta berilgan egri chiziqning normallari oilasi uchun o'rama vazifasini o'tar ekan (126-rasmga qarang).

7-§. Birinchi tartibli differentsial tenglamalarning maxsus yechimlari.

Berilgan

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \tag{1}$$

differentsial tenglama

$$\Phi(x, y, C) = 0 \tag{2}$$

umumiy integralga ega bo'lsin.

Faraz qilaylik, (2) umumiy integralga mos keluvchi umumiy egri chiziqlar oilasi o'ramaga ega bo'lsin. Bu o'rama (1) differentsial tenglamaning integral egri chizig'i bo'lishini ko'rsatamiz.

Haqiqatan, o'rama o'zining har bir nuqtasida oilaning biror egri chizig'iga urinadi, ya'ni u bilan umumiy urinmaga ega bo'ladi. Demak, har bir umumiy nuqtada o'rama va egri chiziq x, y, y' miqdorlarning bir xil qiymatlariga ega bo'ladi. Lekin oilaning egri chizig'i uchun x, y, y' sonlar (1) tenglamani qanoatlantiradi. Shu sababli, o'ramaning har bir nuqtasini abtsissasi, ordinatasi va burchak koeffitsienti (1) tenglamani qanoatlantirishi shart. Bu - o'rama integral chiziq, uning tenglamasi esa differentsial tenglamaning yechimi ekanligini bildiradi.

Lekin o'z navbatida o'rama, umuman aytganda, integral yechimlar oilaning vakili emas, shu sababli, u umumiy integraldan C ning biror xususiy qiymati orqali topilmaydi.

Ta'rif. Differentsial tenglamaning umumiy yechimidan C ning birorta ham qiymati orqali topib bo'lmaydigan va grafigi umumiy yechimga kiruvchi integral egri chiziqlar oilasining o'ramasi bo'lgan yechimi differentsial tenglamaning "*maxsus yechimi*", deb ataladi.

Faraz qilaylik, (2) umumiy integral berilgan bo'lsin. Undan va $\Phi'_C(x, y, C) = 0$ tenglamadan S parametrni yo'qotib, $\phi(x, y) = 0$ tenglamaga kelamiz. Agar bu funktsiya (1) ni qanoatlantirsa-yu, lekin (2) yechimlar oilasiga tegishli bo'lmasa, u holda ta'rifga ko'ra, bu funktsiya maxsus integral bo'ladi.

Shuni ta'kidlash lozimki, maxsus yechimni ifodalovchi egri chiziqning har bir nuqtasidan kamida ikkita integral egri chiziq o'tadi, ya'ni maxsus yechimning har bir nuqtasida differentsial tenglamaning yechimini yagonaligi buzilyapti.

Shuning uch'un yechimning yagonaligi buziladigan nuqtalar "maxsus nuqtalar" deb ataladi. Demak, maxsus yechim maxsus nuqtalardan iborat ekan.

M i s o l . $y^2(1+y'^2)=R^2$ tenglamaning maxsus yechimlarini toping.

Yechish. Avval uning umumiy integralini topamiz. Buning uchun tenglamani hosilaga nisbatan yechib olamiz:

$$\frac{dy}{dx}=\pm\frac{\sqrt{R^2-y^2}}{y}.$$

O'zgaruvchilarini ajratsak:

$$\frac{ydy}{\pm\sqrt{R^2-y^2}}=dx.$$

Buni integrallasak:

$$(x-C)^2+y^2=R^2$$

umumiy integral hosil bo'ladi.Ma'lumki (6-§, 1-misolga qarang), bu oilaning o'ramasi $y=\pm R$ to'g'ri chiziqlardir.

$y=\pm R$ funktsiyalar berilgan tenglamani qanoatlantiradi. Demak, bu funktsiyalar maxsus yechimlar ekan.

8-§. Hosilaga nisbatan yechilmagan differentsial tenglamalar.

Birinchi tartibli quyidagi

$$F(x,y,y')=0 \tag{1}$$

differentsial tenglama berilgan bo'lsin. Yuqorida bunday tenglamalar hosilaga nisbatan yechilgan hollar uchun ko'rildi. Endi ko'radigan holimizda $F(x,y,y')$ funktsiya y' ga nisbatan chiziqli bo'lmasin deb faraz qilamiz. Bunday hollarda tenglama har doim ham y' ga nisbatan yechilavermaydi. Shunday bo'lsada, biz bu paragrafda parametr kiritish yordamida hosilaga nisbatan yechiladigan tenglamaga keltiriladigan ayrim xususiy hollarni ko'rib chiqamiz.

8.1. n-darajali birinchi tartibli tenglamalar. Faraz qilaylik, differentsial tenglama quyidagi ko'rinishda berilgan bo'lsin:

$$(y')^n+p_1(y')^{n-1}+p_2(y')^{n-2}+\cdots+p_{n-1}y'+p_ny=0,$$

bu yerda n-natural son, $p_1,p_2,\ldots,p_n$ lar x va y larning funktsiyalari.

Agar bu tenglama y' ga nisbatan yechilsa, u holda y' uchun n ta har xil ifoda hosil bo'ladi:

$$y' = f_1(x, y),\ y' = f_2(x, y), \dots, y' = f_n(x, y). \tag{2}$$

Bu bilan berilgan tenglamani integrallash hosilaga nisbatan yechilgan n ta (2) tenglamalarga keltirildi.

Agar $\Phi_1(x, y, C_1) = 0,\ \Phi_2(x, y, C_2) = 0, \dots, \Phi_n(x, y, C_n) = 0$ lar bu tenglamalarning umumiy integrallari bo'lsa, u holda berilgan tenglamaning umumiy integrali

$$\Phi_1(x, y, C)\cdot \Phi_2(x, y, C)\cdot \ldots \cdot \Phi_n(x, y, C) = 0$$

ko'rinishda bo'ladi (buni tekshirishni o'quvchiga topshiramiz). Umumiylikka ziyon yetkazmaslik maqsadida barcha $C_1, C_2 \dots, C_n$ larni bitta C o'zgarmas bilan almashtirdik.

1 - m i s o l . $(y')^2 - \frac{xy}{a^2} = 0$ tenglamaning umumiy integralini toping.

Yechish. Agar tenglamaning chap tomonini ko'paytuvchilarga ajratsak, tenglama quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\left(y' - \frac{\sqrt{xy}}{a}\right)\cdot\left(y' + \frac{\sqrt{xy}}{a}\right) = 0.$$

Bundan

$$y' - \frac{\sqrt{xy}}{a} = 0 \quad \text{va} \quad y' + \frac{\sqrt{xy}}{a} = 0$$

tenglamalarni hosil qilamiz. Ularning umumiy integrallari mos ravishda

$$\sqrt{y} - \frac{x\sqrt{x}}{3a} - C = 0 \quad \text{va} \quad \sqrt{y} + \frac{x\sqrt{x}}{3a} - C = 0$$

bo'ladi (tekshiring!). U holda berilgan tenglamaning umumiy integrali

$$(\sqrt{y} - C)^2 - \frac{x^3}{9a^2} = 0$$

bo'ladi.

8.2. y ga nisbatan yechilgan va x qatnashmagan tenglamalar.

Bizga

$$y = \varphi(y') \tag{3}$$

ko'rinishdagi tenglama berilgan bo'lsin.

Agar bu tenglamada $y' = p$ belgilash kiritsak, (3) quyidagi

$$y = \varphi(p) \tag{4}$$

ko'rinishga keladi. Endi $y'=p$ tenglikni $dx=\frac{dy}{p}$ ko'rinishda yozib olib integrallasak:

$$x=\int\frac{dy}{p}+C=\frac{y}{p}+\int\frac{\varphi(p)dp}{p^2}+C \qquad (5)$$

hosil bo'ladi, oxirgi integralga bo'laklab integrallash usuli qo'llandi. (4) va (5) lardan tuzilgan tenglamalar sistemasi berilgan tenglamaning parmetrik ko'rinishdagi umumiy yechimini bo'ladi. Zaruriyatga qarab, (4) va (5) lardan p ni yo'qotib, bu yechimni $\Phi(x,y,C)=0$ ko'rinishga keltirsa bo'ladi.

2 - m i s o l . $y=(y')^2+2(y')^3$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. $y'=p$ deb tenglamani $y=p^2+2p^3$ ko'rinishga keltiramiz. Agar buni x ga nisbatan differentsiallasab, $y'=p$ ekanligini hisobga olsak:

$$y'=(2p+6p^2)\frac{dp}{dx} \qquad \text{yoki} \qquad p=(2p+6p^2)\frac{dp}{dx}$$

Bundan o'z navbatida $dx=(2+6p)dp$, integrallagandan so'ng esa $x=2p+3p^2+C$ hosil bo'ladi. Shu sababli, umumiy yechim quyidagicha bo'ladi:

$$\left.\begin{aligned}x&=2p+3p^2+C,\\ y&=p^2+2p^3.\end{aligned}\right\}$$

8.3. x ga nisbatan yechilgan va y qatnashmagan tenglamalar.

Bu yerda

$$x=\varphi(y')$$

ko'rinishdagi tenglama nazarda tutilyapdi. Bunda ham, xuddi yuqoridagidek $y'=p$ belgilash kiritamiz. U holda tenglama

$$x=\varphi(p) \qquad (6)$$

ko'rinishga keladi. Endi $y'=p$ tenglikni $dy=pdx$ ko'rinishda yozib olib, integrallasak, bo'laklab integrallash usulini qo'llagandan so'ng

$$y=\int pdx=px-\int xdp \qquad \text{yoki} \qquad y=p\varphi(p)-\int\varphi(p)dp+C$$

hosil bo'ladi. Demak, umumiy yechim

$$\left.\begin{aligned}x&=\varphi(p),\\ y&=p\varphi(p)-\int\varphi(p)dp+C\end{aligned}\right\}$$

parametrik ko'rinishda bo'lar ekan.

3 - m i s o l. $x = y'\sin y'$ tenglamaning umumiy yechimi topilsin.

Yechish. Agar $y' = p$ desak, u holda $x = p\sin p$ bo'ladi. Endi $dy = pdx$ tenglikni integrallasak:

$$y = \int pdx = px - \int xdp = px - \int p\sin pdp = px + p\cos p - \int \cos pdp =$$
$$= px + p\cos p - \sin p + C$$

kelib chiqadi. Demak, umumiy yechim

$$\left.\begin{aligned} x &= p\sin p, \\ y &= p^2\sin p + p\cos p - \sin p + C \end{aligned}\right\}$$

bo'lar ekan.

8.4. Klero tenglamasi. y ga nisbatan yechilgan, x va y ga nisbatan chiziqli, lekin y' ga nisbatan yechilmagan quyidagi tenglama

$$y = xy' + \psi(y') \qquad (7)$$

"Klero" tenglamasi, deb ataladi. Xuddi yuqoridagidek, bu yerda ham $y' = p$ deb qo'shimcha parametr kiritamiz. U holda (7) quyidagi ko'rinishga keladi:

$$y = xp + \psi(p) \ . \qquad (7')$$

Agar oxirgi tenglikni x bo'yicha differentsiallasak:

$$p = x\frac{dp}{dx} + p + \psi'(p)\frac{dp}{dx}$$

yoki

$$[x + \psi'(p)]\frac{dp}{dx} = 0$$

tenglikka kelamiz. Har bir ko'paytuvchini nolga tenglaymiz:

$$\frac{dp}{dx} = 0\,, \qquad (8)$$

$$x + \psi'(p) = 0\,. \qquad (9)$$

Agar (8) ni integrallasak, $p = C$ hosil bo'ladi, buni (7') ga qo'yib, (7') ning umumiy yechimiga

$$y = xC + \psi(C) \qquad (10)$$

ega bo'lamiz. Ma'lumki, bu to'g'ri chiziqlar oilasidir.

Agar (9) dan p parametrni x ning funktsiyasi sifatida aniqlab, (7') ga qo'ysak, hosil bo'ladigan:

$$y = xp(x) + \psi[p(x)] \qquad (11)$$

funktsiya (7) ning yechimi bo'ladi (tekshiring!). Lekin (11) yechim (10) umumiy yechimdan S ning biror qiymatida ham kelib chiqmaydi. Shu sababli, bu yechim maxsus yechim bo'lib, u quyidagi

$$\left.\begin{aligned} y &= xp + \psi(p), \\ x + \psi'(p) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

sistemadan p ni yoki

$$\left.\begin{aligned} y &= xC + \psi(C), \\ x + \psi'(C) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

sistemadan S ni yo'qotish yo'li bilan hosil qilinadi. Demak, Klero tenglamasining maxsus yechimi (10) umumiy integrallar oilasining o'ramasi, ya'ni boshqacha qilib aytganda, Klero tenglamasining umumiy yechimi maxsus yechimlariga o'tkazilgan urinmalar oilasidan iborat bo'lar ekan.

4 - m i s o l. $y = xy' - e^{y'}$ tenglamani integrallang.

Yechish. Bu tenglamada $y' = p$ deb, uni $y = px - e^p$ ko'rinishda yozib olamiz. Bu tenglikni differentsiallaylik:

$$dy = pdx + xdp - e^p dp$$

Lekin $dy = pdx$, shuning uchun oxirgi tenglik

$$xdp - e^p dp = 0$$

yoki

$$(x - e^p)dp = 0$$

ko'rinishga keladi. Demak, yo $dp = 0$ yo $x = e^p$ bo'lishi kerak. Agar $dp = 0$ bo'lsa, u holda $p = C$ bo'ladi. Buni $y = px - e^p$ ga qo'ysak:

$$y = Cx - e^C$$

umumiy yechimni hosil qilamiz. Agar $x = e^p$ desak, berilgan tenglamaning maxsus yechimi

$$\left.\begin{aligned} x &= e^p, \\ y &= (p-1)e^p \end{aligned}\right\}$$

sistemaning birinchi tenglamasidan p parametrni aniqlab (bu yyerda u $p = \ln x$ bo'ladi), ikkinchisiga qo'ysak, quyidagi

$$y = x(\ln x - 1)$$

ko'rinishda aniqlanadi. Endi umumiy yechim aniqlagan to'g'ri chiziqlar maxsus yechimlarga o'tkazilgan urinmalar oilasi bo'lishligini ko'rsatish qoldi.

Maxsus yechimni differentsiallaylik:

$$y' = \ln x.$$

Hosilaning geometrik ma'nosidan, maxsus integral chiziqga uning $M(x_0, y_0)$ nuqtasida o'tkazilgan urinmasining tenglamasi

$$y - x_0(\ln x_0 - 1) = \ln x_0 (x - x_0)$$

bo'lishligi kelib chiqadi. Agar buni ixchamlab, $\ln x_0 = C$ deb belgilasak:

$$y = Cx - e^C$$

tenglamani hosil qilamiz.

8.5. Lagranj tenglamasi. "Lagranj tenglamasi", deb quyidagi tenglamaga aytiladi:

$$y = x\varphi(y') + \psi(y') , \qquad (12)$$

bu yerda φ va ψ lar y' ning ma'lum funktsiyalaridir. Tenglama x va y ga nisbatan chiziqli, avvalgi bo'limda ko'rilgan (7) "Klero" tenglamasi (12) ning $\varphi(y') \equiv y'$ bo'lgandagi xususiy holi. Shu sababli, bu tenglama ham yuqorida ko'rilgan tenglamalar kabi $y' = p$ parametr kiritish yordamida integrallanadi. U holda, (12) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$y = x\varphi(p) + \psi(p) \qquad (12')$$

Buni x bo'yicha differentsiallasak:

$$p = \varphi(p) + [x\varphi'(p) + \psi'(p)]\frac{dp}{dx}$$

yoki

$$p - \varphi(p) = [x\varphi'(p) + \psi'(p)]\frac{dp}{dx} \qquad (13)$$

ega bo'lamiz. Bu tenglamaning umumiy yechimini topish maqsadida uni quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$\frac{dx}{dp} - x\frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)} = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}$$

va x ni p ning funktsiyasi sifatida qaraymiz. U holda hosil bo'lgan tenglama x ga nisbatan chiziqli differentsial tenglama bo'ladi.

Shu bobning 3-§ ida ko'rilgan usullarning biri bilan uning

$$x = f(p, C)$$

yechimini topamiz. Bundan va (12') dan p parametrni yo'qotsak, (12) ning

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

ko'rinishdagi umumiy yechimini hosil qilamiz.

(12') ni p ning $p_0 - \varphi(p_0) = 0$ shartni qanoatlantiruvchi har qanday o'zgarmas p_0 qiymati ham ayniyatga aylantiradi. (7) ning $p = p_0$ qiymatga mos keluvchi yechimi x ning chiziqli funktsiyasi bo'ladi. Bu chiziqli funktsiyani topish uchun (12') dagi p parametr o'rniga $p = p_0$ qiymatni qo'yish kifoya:

$$y = x\varphi(p_0) + \psi(p_0) \quad .$$

Agar bu yechim umumiy yechimdan o'zgarmasning biror qiymatida hosil bo'lmasa, u holda bu yechim maxsus yechim bo'ladi.

5 - m i s o l . $y=xy'^2+y'^2$ ko'rinishdagi Lagranj tenglamasini integrallaylik. Buning uchun unda $y'=p$ almashtirish bajaramiz:

$$y=xp^2+p^2. \tag{14}$$

Agar (14) ni x bo'yicha differentsiallasak:

$$p=p^2+[2xp+2p]\frac{dp}{dx}$$

yoki

$$p(1-p)=2p(x+1)\frac{dp}{dx} \tag{15}$$

hosil bo'ladi. Oxirgi tenglikni quyidagicha yozib olaylik:

$$\frac{dx}{dp}-x\frac{2}{1-p}=\frac{2}{1-p}.$$

Buning umumiy yechimi

$$x=-1+\frac{C}{(p-1)^2} \tag{16}$$

bo'ladi (tekshiring!). Agar (14) va (16) dan p parametrni yo'qotsak, umumiy yechim

$$y=(C+\sqrt{x+1})^2$$

ko'rinishga keladi.

(15) tenglikni p ning $p=0$ va $p=1$ qiymatlari ham qanoatlantiradi. Shu sababli, berilgan tenglamaning shu qiymatlarga mos keluvchi yechimlari

$$y=x\cdot 0^2+0^2=0 \quad \text{va} \quad y=x+1$$

bo'ladi. Bulardan ikkinchisi maxsus yechim bo'lmaydi, chunki u umumiy yechimdan S=0 qiymatda hosil bo'ladi, shu sababli u xususiy yechim, $y=0$ esa maxsus yechim, chunki u umumiy yechimdan S ning birorta ham qiymatida kelib chiqmaydi.

Eslatma. Odatda "Lagranj" tenglamasi deb, x va y ga nisbatan chiziqli bo'lgan quyidagi

$$P(y')x+Q(y')y+R(y')=0 \tag{18}$$

ko'rinishdagi har qanday birinchi tartibli differentsial tenglamaga aytiladi. Lekin bu tenglama (12) ko'rinishga uni $Q(y')$ ga bo'lib keltirilishi mumkin, bunda

$$\varphi(y')=-\frac{P(y')}{Q(y')} \quad \text{va} \quad \psi(y')=-\frac{R(y')}{Q(y')}$$

bo'ladi.

Biz bu paragrafda (18) tenglamaning eng sodda ko'rinishidan boshlab, barcha xususiy hollarini ko'rib chiqdik.

9-§. Yuqori tartibli differentsial tenglamalar.

9.1. Umumiy tushunchalar. Quyidagi

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

noma'lum funktsiyaning n-hosilasini o'z ichiga olgan tenglamalar n-tartibli differentsial tenglamalar, deb ataladi. Ayrim hollarda, (1) yuqori tartibli hosilasiga nisbatan yechilgan bo'lishi mumkin, ya'ni

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) \qquad (1')$$

ko'rinishda berilgan bo'lishi mumkin.

Bu paragrafda biz (1') ko'rinishdagi yoki shu ko'rinishga keltiriladigan tenglamalarni ko'ramiz. Bunday tenglamalar uchun quyidagi teorema o'rinli.

Teorema. Agar (1') tenglamada $f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$ funktsiya va uning $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ argumentlari bo'yicha olingan xususiy hosilalari $M_0(x_0, y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(n-1)})$ nuqtani o'z ichiga olgan qandaydir sohada uzluksiz bo'lsa, u holda tenglamaning

$$y = y_0, y' = y'_0, y'' = y''_0, \ldots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \qquad (2)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi yagona yechimi mavjud.

(2) shartlar boshlang'ich shartlar, deb ataladi.

Ta'rif. n-tartibli (1') differentsial tenglamaning umumiy yechimi deb, n ta C_1, $C_2, \ldots, C_n$ koeffitsientlarga bog'liq bo'lgan shunday

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$$

funktsiyaga aytamizki, u

1) C_1, $C_2, \ldots, C_n$ koeffitsientlarning har qanday qiymatlarida ham (1') ni qanoatlantiradi;

2) C_1, $C_2, \ldots, C_n$ koeffitsientlarning shunday qiymatlari mavjudki, bu qiymatlarda $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ (2) boshlang'ich shartlarni ham qanoatlantiradi.

Oshkormas $\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$ ko'rinishda topilgan yechim (1') ning umumiy integrali, deb ataladi.

C_1, $C_2, \ldots, C_n$ koeffitsientlarning aniq qiymatlari uchun umumiy yechimdan hosil qilinadigan har qanday yechim xususiy yechim, deyiladi.

Xususiy yechimning grafigi differentsial tenglamaning integral chizig'i, deb ataladi.

Demak, n-tartibli differentsial tenglamani yechish deganda, uning umumiy yechimini yoki boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimini topishni tushunar ekanmiz.

9.2. Eng sodda n-tartibli tenglamalar. Quyidagi

$$y^{(n)}=f(x) \tag{3}$$

ko'rinishdagi tenglamalar eng sodda differentsial tenglamalar, deb ataladi.

Agar $y^{(n)}=(y^{(n-1)})'$ ekanligini e'tiborga olib (3) ni integrallasak:

$$y^{(n-1)}=\int_{x_0}^{x} f(x)dx+C_1$$

bo'ladi, bu yerda x_0 x ning biror qiymati. Agar yana bir marotaba integrallasak:

$$y^{(n-2)}=\int_{x_0}^{x}\left(\int_{x_0}^{x} f(x)dx\right)dx+C_1(x-x_0)+C_2$$

munosabatni hosil qilamiz. Va nihoyat, shu jarayonni n marotaba bajarsak (3) ning umumiy yechimini topamiz:

$$y=\int_{x_0}^{x}\cdots\int_{x_0}^{x} f(x)dx\ldots dx+C_1\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}+C_2\frac{(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!}+\cdots+C_n.$$

Agar (2) ko'rinishdagi boshlang'ich shartlar berilgan bo'lsa, unga mos keluvchi xususiy yechimni topish uchun

$$C_n=y_0, C_{n-1}=y_0', \ldots, C_1=y_0^{(n-1)}$$

deyish kifoya.

1- m i s o l . $y''=xe^{-x}$ tenglamaning $y(0)=1, y'(0)=0$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamani ketma-ket integrallab, uning umumiy yechimini topamiz:

$$y'=\int xe^{-x}dx=-xe^{-x}-e^{-x}+C_1,$$

$$y=\int\left(-xe^{-x}-e^{-x}+C_1\right)dx=xe^{-x}+2e^{-x}+C_1x+C_2$$

yoki

$$y=(x+2)e^{-x}+C_1x+C_2.$$

Agvr boshlang'ich shartlardan foydalansak: $1=2+C_2;$ $C_2=-1;$ $0=-1+C_1;$ $C_1=1$. Demak, xususiy yechim

$$y=(x+2)e^{-x}+x-1$$

ekan.

9.3. y ni bevosita o'z ichiga olmagan tenglamalar. Bu turga

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{4}$$

ko'rinishdagi differentsial tenglamalar kiradi.

Agar (4) da $y^{(k)} = z$ almashtirish bajarsak, uning tartibi k taga pasayadi, ya'ni

$$F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0$$

bo'ladi.

2-misol. $y'' - \dfrac{y'}{x-1} = x(x-1)$; $y(2) = 1$; $y'(2) = -1$ masalaning yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamada y bevosita qatnashmayapti, shu sababli $y' = z$ desak, tenglama quyidagi

$$z' - \frac{z}{x-1} = x(x-1)$$

chiziqli tenglamaga keladi. Buni masalan, Bernulli usuli bilan yechamiz, ya'ni yechimni $z = u\vartheta$ ko'rinishda qidiramiz. U holda, u va ϑ larga nisbatan

$$\left.\begin{aligned} u' - \frac{u}{x-1} &= 0, \\ u\vartheta' &= x(x-1) \end{aligned}\right\}$$

sistema hosil bo'ladi. Sistemaning birinchi tenglamasidan

$$u = x - 1$$

ni topib, ikkinchisiga qo'ysak:

$$\vartheta = \frac{x^2}{2} + C_1$$

kelib chiqadi. U holda, $z = u\vartheta = C_1(x-1) + \frac{1}{2}x^2(x-1)$ bo'ladi. Bu yerda $z = y'$ ekanligini eslab, yana bir marotaba integrallasak:

$$y = C_1(x-1)^2 + \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + C_2$$

hosil bo'ladi. Bu yerdagi C_1 va C_2 o'zgarmaslarni boshlang'ich shartlardan foydalanib topamiz:

$$-1 = C_1 + \frac{1}{2} \cdot 2^2,$$

$$1 = C_1 \cdot 1^2 + \frac{1}{8} \cdot 2^4 - \frac{1}{6} \cdot 2^3 + C_2.$$

Bundan $C_1 = -3$; $C_2 = \dfrac{20}{6}$. Demak, qo'yilgan masalaning echimi

$$y = \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - 3(x-1)^2 + \frac{20}{6}$$

bo'lar ekan.

3 - m i s o l . Massasi m bo'lgan biror jismning yuqoridan vertikal holatda erkin tushish masalasini ko'raylik (1.1-§ dagi 1-misolga qarang). Agar jismga og'irlik kuchidan tashqari uning tushish tezligi ϑ ning kvadratiga proportsional bo'lgan havoning qarshilik kuchi ham ta'sir etsa, shu jismning tezligi qanday qonun bilan o'zgarishini aniqlang.

Yechish. Xuddi 1.1-§ dagi 1-misolga o'xshab mulahaza yuritib, Nyutonning 2-qonuniga ko'ra quyidagi

$$m\frac{d^2 s}{dt^2} = mg - k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

differentsial tenglamani hosil qilamiz.Jismning erkin tushish masalasi ko'rilayotgani uchun boshlang'ich shartlar

$$s\Big|_{t=0} = 0, \quad \vartheta = \frac{ds}{dt}\Big|_{t=0} = 0$$

bo'ladi. $\frac{ds}{dt} = \vartheta$, $\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{d\vartheta}{dt}$ bo'lgani uchun tuzilgan differentsial tenglamani ϑ ga nisbatan birinchi tartibli

$$\frac{d\vartheta}{dt} = g - \frac{k}{m}\vartheta^2$$

tenglamaga keltirsa bo'ladi. Agar bu yerda $\frac{mg}{k} = a^2$ desak, unda o'zgaruvchilarini quyidagicha

$$\frac{d\vartheta}{a^2 - \vartheta^2} = \frac{k}{m}dt$$

ajratish mumkin. Endi oxirgi tenglikni integrallasak:

$$\frac{1}{2a}\ln\frac{a+\vartheta}{a-\vartheta} = \frac{k}{m}t + C_1$$

ga ega bo'lamiz. Agar bunga boshlang'ich shartlarni qo'llasak, $C_1 = 0$ chiqadi. Demak,

$$\ln\frac{a+\vartheta}{a-\vartheta} = \frac{2ak}{m}t$$

bo'ladi. Bundan

$$\vartheta = a\frac{e^{2akt/m} - 1}{e^{2akt/m} + 1} = a\frac{e^{akt/m} - e^{-2akt/m}}{e^{akt/m} + e^{-akt/m}} = ath(akt/m).$$

Lekin $\frac{ak}{m} = \sqrt{\frac{mg}{k}} \cdot \frac{k}{m} = \sqrt{\frac{kg}{m}}$ bo'lgani uchun oxirgi tenglikni

$$\frac{ds}{dt}=ath\sqrt{\frac{kg}{m}}t$$

deb yozish mumkin. Bundan

$$s=\sqrt{\frac{m}{kg}}a\ln ch\sqrt{\frac{kg}{m}}t+C_2=\frac{m}{k}\ln ch\sqrt{\frac{kg}{m}}t+C_2$$

hosil bo'ladi. Boshlang'ich shartning birinchisini qo'llab $C_2=0$ ni topamiz.

Demak, ko'rilayotgan jarayon qonuni

$$s=\frac{m}{k}thch\sqrt{\frac{kg}{m}}t$$

formula bilan ifodalanar ekan.

9.4. Erkli o'zgaruvchini o'z ichiga olmagan tenglamalar. Bizga

$$F(y,y',y'',\dots,y^{(n)})=0$$

ko'rinishdagi tenglama berilgan bo'lsin. Bunday tenglamalarda $y'=z(y)$ almashtirish tenglama tartibini pasaytirdi. Bunda $y'',y''',\dots$ hosilalar yangi o'zgaruvchi z orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$y''=z\frac{dz}{dy},y'''=z\left[z\frac{d^2z}{dy^2}+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right],\dots.$$

Xususan, agar tenglama 2-tartibli bo'lsa, u holda u almashtirish natijasida quyidagi 1-tartibli tenglamaga keladi:

$$F\left(y,z,z\frac{dz}{dy}\right)=0$$

4 - m i s o l . $1+y'^2=yy''$ tenglamani yeching.

Yechish. $y'=z(y),y''=z\dfrac{dz}{dy}$ almashtirish natijasida tenglama quyidagi tenglamaga keladi:

$$1+z^2=yz\frac{dz}{dy}.$$

Uning o'zgaruvchilarini ajratib integrallaymiz:

$$\frac{zdz}{1+z^2}=\frac{dy}{y};\ \ln(1+z^2)=2\ln y+2\ln C_1;\ 1+z^2=C_1^2y^2;\ z=\pm\sqrt{C_1^2y^2-1}.$$

Endi y o'zgaruvchiga qaytsak:

$$y'=\pm\sqrt{C_1^2y^2-1},\quad \frac{dy}{\sqrt{C_1^2y^2-1}}=\pm dx,$$

$$\frac{1}{C_1}\ln(C_1 y + \sqrt{C_1^2 y^2 - 1}) = \pm(x + C_2)$$

yoki

$$y = \frac{1}{2C_1}(e^{\pm(x+C_2)C_1} + e^{\mp(x+C_2)C_1}) = \frac{1}{C_1}chC_1(x + C_2) = C_1^* ch\frac{x + C_2}{C_1^*}.$$

9.5. $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ **larga nisbatan bir jinsli bo'lgan tenglamalar.** Bunday tenglamalarning tartibini $y'/y = z$ almashtirish orqali pasaytirish mumkin, bu yerda z - yangi noma'lum funktsiya.

5 - m i s o l . $3y'^2 = 4yy'' + y^2$ differentsial tenglamani yeching.

Yechish. Tenglamaning ikkala tarafini y^2 ga bo'lib yuboramiz:

$$3\left(\frac{y'}{y}\right)^2 - 4\cdot\frac{y''}{y} = 1.$$

Agar oxirgi tenglikda $y'/y = z$ desak, u holda bundan

$$\frac{y''}{y} - \frac{y'^2}{y^2} = z' \quad \text{yoki} \quad \frac{y''}{y} = z' + z^2$$

ega bo'lamiz. Bularni tenglamaga olib borib qo'ysak, natijada

$$3z^2 - 4z^2 - 4z' = 1 \quad \text{yoki} \quad -4z' = 1 + z^2$$

differentsial tenglamaga kelamiz. Agar buning o'zgaruvchilarini ajratib integrallasak:

$$arctgz = C_1 - \frac{1}{4}x \quad \text{yoki} \quad z = tg\left(C_1 - \frac{x}{4}\right)$$

hosil qilamiz. Endi teskari almashtirish bajaramiz:

$$\frac{y'}{y} = tg\left(C_1 - \frac{x}{4}\right).$$

Buni integrallasak:

$$\ln y = 4\ln\cos\left(C_1 - \frac{x}{4}\right) + \ln C_2 \quad \text{yoki} \quad y = C_2\cdot\cos^4\left(C_1 - \frac{x}{4}\right).$$

10.1. Ta'riflar va umumiy xossalar.

1-ta'rif. n- tartibli differentsial tenglama chiziqli deyiladi, agar u noma'lum funktsiya y ga va uning barcha $y', y'', y''', \ldots, y^{(n)}$ hosilalariga nisbatan 1-darajali, ya'ni

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \qquad (1)$$

ko'rinishda bo'lsa, bu yerda $a_0, a_1, \ldots, a_n, f(x)$ lar x ning berilgan funktsiyalari yoki o'zgarmaslar, bundan tashqari (1) tenglama qaralayotgan sohadagi barcha x lar uchun $a_0 \neq 0$. Bundan buyon $a_0, a_1, \ldots, a_n$ va $f(x)$ funktsiyalarni x ning qaralayotgan sohadagi barcha qiymatlarida uzluksiz, deb faraz qilamiz. Umumiylikni buzmagan holda, $a_0 \equiv 1$, deb faraz qilish mumkin, chunki aks holda, tenglamaning shunday ko'rinishiga uni a_0 ga bo'lib keltirsa bo'ladi. $f(x)$ tenglamaning o'ng qismi, deb ataladi.

Agar $f(x) \neq 0$ bo'lsa, (1) ni birjinsli bo'lmagan tenglama deb, agar $f(x) \equiv 0$ bo'lsa, ya'ni tenglama

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \qquad (2)$$

ko'rinishda bo'lsa, birjinsli tenglama, deb ataymiz. Bunday deb atalishiga sabab, (2) ning chap tarafi $y, y', y'', y''', \ldots, y^{(n)}$ larning chiziqli birjinsli funktsiyasidir.

(1) tenglamani qanoatlantiradigan har qanday funktsiya uning yechimi, biror

$$y_{x=x_0} = y_0, y'_{x=x_0} = y'_0, \ldots, y^{(n-1)}{}_{x=x_0} = y_0^{(n-1)} \qquad (3)$$

shartni qanoatlantiruvchi yechimini esa uning xususiy yechimi, deb ataymiz. (3) shartni (1) tenglamaning boshlang'ich shartlari, deb ataymiz.

Chiziqli birjinsli tenglamaning bitta y_1 yechimini bilgan holda $y = y_1 \cdot \int z dx$ almashtirish orqali uning va demak, unga mos keluvchi birjinsli bo'lmagan tenglamaning ham tartibini bittaga pasaytirish mumkin. z ga nisbatan hosil bo'lgan (n-1)-tartibli tenglama yana chiziqli bo'ladi.

1 - m i s o l . $y''' + \frac{2}{x} y'' - y' + \frac{1}{x \ln x} y = x$ tenglama va unga mos keluvchi birjinsli tenglamaning $y_1 = \ln x$ xususiy yechimi ma'lum bo'lsa, uning tartibini pasaytiring.

Yechish. $y = \ln x \cdot \int z dx$ almashtirish bajaramiz. Buni differentsiallab:

$$y'=\frac{1}{x}\cdot\int zdx+z\cdot\ln x,\quad y''=-\frac{1}{x^2}\cdot\int zdx+\frac{2z}{x}+z'\ln x,$$

$$y'''=\frac{2}{x^3}\cdot\int zdx-\frac{3z}{x^2}+\frac{3z'}{x}+z''\ln x,$$

keyin berilgan tenglamaga olib borib qo'yamiz. Natijada bir nechta soddalashtirishlardan so'ng quyidagi:

$$z''\ln x+\frac{2\ln x+3}{x}\cdot z'+\left(\frac{1}{x^2}-\ln x\right)z=x$$

tenglamaga kelamiz.

2 - m i s o l . $y_1=\frac{\sin x}{x}$ xususiy yechimi ma'lum bo'lgan

$$y''+\frac{2}{x}y'+y=0$$

differentsial tenglamani integrallang.

Yechish. Agar $y=\frac{\sin x}{x}\cdot\int zdx$ almashtirish bajarsak:

$$y'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}\cdot\int zdx+\frac{\sin x}{x}\cdot z,$$

$$y''=\frac{\sin x}{x}\cdot z'+\frac{2(x\cos x-\sin x)}{x^2}\cdot z-\frac{(x^2-2)\sin x+2x\cos x}{x^3}\cdot\int zdx$$

bo'ladi. Bularni tenglamaga qo'ysak:

$$\sin x\cdot z'+2\cos x\cdot z=0$$

tenglama hosil bo'ladi. Bundan $z=\frac{C_1}{\sin^2 x}$ ni topamiz. Demak,

$$y=\frac{\sin x}{x}\cdot\int\frac{C_1dx}{\sin^2 x}=\frac{\sin x}{x}(C_2-C_1ctgx)=C_2\cdot\frac{\sin x}{x}-C_1\cdot\frac{\cos x}{x}.$$

10.2. Chiziqli bir jinsli tenglamalar.

1-teorema. Agar y_1 va y_2 lar (2) ning xususiy yechimlari bo'lsa, u holda y_1+y_2 ham (2) ning yechimi bo'ladi.

Isboti. Agar y_1 va y_2 lar (2) ning xususiy yechimlari bo'lsa, u holda

$$y_1^{(n)}+a_1y_1^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y_1'+a_ny_1=0 \qquad (3')$$

$$y_2^{(n)}+a_1y_2^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y_2'+a_ny_2=0 \qquad (3'')$$

bo'ladi. Endi y_1+y_2 ni (2) ga olib borib qo'yib, (3'),(3") ayniyatlarni inobatga olsak:

$$(y_1+y_2)^{(n)}+a_1(y_1+y_2)^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(y_1+y_2)'+a_n(y_1+y_2)=$$

$$=(y_1^{(n)}+a_1y_1^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y_1'+a_ny_1)+(y_2^{(n)}+a_1y_2^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y_2'+a_ny_2)=0$$

bo'ladi. Teorema isbot bo'ldi.

2-teorema. Agar y_1 (2) ning biror xususiy yechimi va S o'zgarmas bo'lsa, u holda Cy_1 ham (2) ning yechimi bo'ladi.

Isboti. Cy_1 ni (2) ga qo'yamiz:

$$(Cy_1)^{(n)} + a_1(Cy_1)^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(Cy_1)' + a_n(Cy_1) =$$
$$= C(y_1^{(n)} + a_1 y_1^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y_1' + a_n y_1) = C \cdot 0 = 0\,,$$

ya'ni teorema isbot bo'ldi.

2-ta'rif. Agar bir vaqtda nolga teng bo'lmagan shunday $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ sonlarni topish mumkin bo'lsaki, $[a,b]$ oraliqning barcha x nuqtalarida

$$\varphi_n(x) = A_1\varphi_1(x) + A_2\varphi_2(x) + \cdots + A_{n-1}\varphi_{n-1}(x)$$

munosabat o'rinli bo'lsa,u holda $\varphi_n(x)$ funktsiya $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_{n-1}(x)$ funktsiyalar orqali chiziqli ifodalanadi, deymiz.

3-ta'rif. $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ funktsiyalar chiziqli erkli deymiz, agar ularning biri qolganlari orqali chiziqli ifodalanmasa, aks holda ular chiziqli bog'liq, deyiladi.

Demak, agar $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ funktsiyalar chiziqli bog'liq bo'lsa, u holda bir vaqtda nolga teng bo'lmagan shunday C_1, $C_2, \ldots$, C_n sonlar topiladiki

$$C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \cdots + C_n\varphi_n(x) = 0$$

bo'ladi.

1 - m i s o l . $y_1 = e^x, y_2 = e^{2x}, y_3 = 3e^x$ funktsiyalar chiziqli bog'liq, chunki $C_1=1$, $C_2=0$, $C_3=-1/3$ lar uchun

$$C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 3e^x = 0\,.$$

2 - m i s o l . $y_1 = 1, y_2 = x, y_3 = x^2$ funktsiyalar chiziqli bog'liq emas, chunki bir vaqtda nolga teng bo'lmagan hech qanday C_1, C_2, C_3 lar uchun

$$C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot x^2$$

yig'indi aynan nolga teng bo'lmaydi.

3 - m i s o l . $y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = e^{k_2 x}, \ldots, y_3 = e^{k_n x}$ funktsiyalar har xil $k_1, k_2, \ldots, k_n$ sonlar uchun chiziqli erkli.

Yechish. Teskarisini faraz qilaylik, u holda bir vaqtda nolga teng bo'lmagan shunday C_1, $C_2, \ldots$, C_n sonlar topiladiki

$$C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \cdots + C_n e^{k_n x} = 0$$

bo'ladi. Faraz qilaylik, $C_n \neq 0$ bo'lsin. Tenglikning ikkala tarafini $e^{k_1 x}$ ga bo'laylik:

$$C_1 + C_2 e^{(k_2 - k_1)x} + \cdots + C_n e^{(k_n - k_1)x} = 0\,. \qquad (4)$$

Agar (4) ni differentsiallasak:

$$C_2(k_2-k_1)e^{(k_2-k_1)x}+\cdots+C_n(k_n-k_1)e^{(k_n-k_1)x}=0$$

tenglikka kelamiz. Buni $e^{(k_2-k_1)x}$ ga bo'lib keyin yana differentsiallasak:

$$C_3(k_3-k_1)(k_3-k_2)e^{(k_3-k_2)x}+\cdots+C_n(k_n-k_1)(k_n-k_2)e^{(k_n-k_2)x}=0$$

hosil bo'ladi. Bu jarayonni n marotaba takrorlab, natijada

$$C_n(k_n-k_1)(k_n-k_2)\dots(k_n-k_{n-1})e^{(k_n-k_{n-1})x}=0$$

tenglikka kelamiz. Bu yerda farazimizga ko'ra $C_n\neq 0$, shartga ko'ra $k_n\neq k_1, k_n\neq k_2,\dots,k_n\neq k_{n-1}$ va har qanday x uchun $e^{(k_n-k_1)x}\neq 0$. Ziddiyatga keldik. Demak, berilgan funktsiyalar haqiqatan ham chiziqli erkli ekan.

4 - m i s o l . $e^{\alpha x}\sin\beta x$, $e^{\alpha x}\cos\beta x$ funktsiyalar $\beta\neq 0$ uchun $-\infty<x<\infty$ oraliqda chiziqli erkli.

Yechish. Haqiqatan, agar

$$C_1e^{\alpha x}\sin\beta x+C_2e^{\alpha x}\cos\beta x=0$$

tenglikni $e^{\alpha x}\neq 0$ ga bo'lsak:

$$C_1\sin\beta x+C_2\cos\beta x=0$$

hosil bo'ladi. Bu tenglik barcha x lar uchun, shu jumladan $x=0$ uchun ham o'rinli bo'lishi kerak. Agar $x=0$ desak, oxirgi tenglikdan $C_2=0$ ekanligi kelib chiqadi. U holda $C_1\sin\beta x=0$ bo'lishi kerak. Lekin $\sin\beta x\equiv 0$ emas. Shu sababli, $C_1=0$.

3-ta'rif. Agar $y_1,y_2,\dots,y_n$ lar x ning biror (n-1)-marotaba differentsiallanuvchi funktsiyalari bo'lsa, u holda quyidagi

$$W(y_1,y_2,\dots,y_n)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

determinantni "Vronskiy determinanti", deb ataymiz.

3-teorema. Agar $y_1,y_2,\dots,y_n$ funktsiyalar sistemasi $[a,b]$ oraliqda chiziqli bog'liq bo'lsa, u holda bu funktsiyalarning Vronskiy determinanti shu oraliqda aynan nolga teng.

Isboti. Agar $y_1,y_2,\dots,y_n$ funktsiyalar sistemasi $[a,b]$ oraliqda chiziqli bog'liq bo'lsa, u holda bir vaqtda nolga teng bo'lmagan shunday S_1, $S_2,\dots$, S_{n-1} sonlar topiladiki

$$y_n=C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_{n-1}y_{n-1}$$

bo'ladi. Buni (n-1)-marotaba differentsiallaylik:

$$y_n^{(k)}=C_1y_1^{(k)}+C_2y_2^{(k)}+\cdots+C_{n-1}y_{n-1}^{(k)}\ ,\ k=1,2,\dots,n-1.$$

U holda

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & & C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_{n-1} y_{n-1} \\ y_1^1 & y_2^{11} & & C_1 y_1^1 + C_2 y_2^1 + \cdots + C_{n-1} y_{n-1}^1 \\ . & . & \ldots & . \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & C_1 y_1^{(n-1)} + C_2 y^{(n-1)} + \cdots + C_{n-1} y_{n-1}^{(n-1)} \end{vmatrix} =$$

$$= C_1 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & & y_1 \\ y_1^1 & y_2^1 & & y_1^1 \\ . & . & & . \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_1^{(n-1)} \end{vmatrix} + C_2 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & & y_2 \\ y_1^1 & y_2^1 & & y_2^1 \\ . & . & & . \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_2^{(n-1)} \end{vmatrix} + \cdots +$$

$$+ C_{n-1} \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_{n-1} & y_{n-1} \\ y_1^1 & & y_{n-1}^1 & y_{n-1}^1 \\ . & & . & . \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_{n-1}^{(n-1)} & y_{n-1}^{(n-1)} \end{vmatrix} \equiv 0,$$

chunki determinantlarning har birida ikkitadan bir xil ustun bo'lgani uchun ularning har biri nolga teng. Teorema isbot bo'ldi.

5 - m i s o l . $\sin x, \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right)$ va $\sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right)$ funktsiyalarning chiziqli bog'liq ekanligini ko'rsating.

Yechish. Bu funktsiyalarning Vronskiy determinantini hisoblaymiz:

$$W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} \sin x & \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) & \sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right) \\ \cos x & \cos\left(x + \frac{\pi}{8}\right) & \cos\left(x - \frac{\pi}{8}\right) \\ -\sin x & -\sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) & -\sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right) \end{vmatrix} \equiv 0,$$

chunki 1- va 2-satrlari o'zaro proportsional.

6 - m i s o l . 4-misoldagi funktsiyalarning chiziqli erkliligini Vronskiy determinanti yordamida ko'rsating.

Yechish. Avval bu funktsiyalarning Vronskiy determinantini hisoblab olaylik:

$$W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} & e^{k_3 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} & k_3 e^{k_3 x} \\ k_1^2 e^{k_1 x} & k_2^2 e^{k_2 x} & k_3^2 e^{k_3 x} \end{vmatrix} = e^{(k_1 + k_2 + k_3)x}(k_2 - k_1)(k_3 - k_1)(k_3 - k_2)$$

Agar $k_1 \neq k_2, k_1 \neq k_3, k_2 \neq k_3$ bo'lsa, $W(y_1, y_2, y_3) \neq 0$ bo'ladi. Demak, yuqoridagi teoremaga ko'ra berilgan funktsiyalar chiziqli erkli ekan.

Funktsiyalar sistemasining chiziqli bog'liqligini tekshirishning yana boshqa bir mezoni mavjud. Endi shu mezonni ko'raylik.

Bizga $[a,b]$ oraliqda aniqlangan $y_1, y_2, \dots, y_n$ funktsiyalar berilgan bo'lsin. Ular uchun

$$(y_i, y_j) = \int_a^b y_i(x) y_j(x) dx, (i, j = 1,2,\dots,n)$$

belgilashlar kiritamiz. Quyidagi

$$\Gamma(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} (y_1, y_1) & (y_1, y_2) & \dots & (y_1, y_n) \\ (y_2, y_1) & (y_2, y_2) & \dots & (y_2, y_n) \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ (y_n, y_1) & (y_n, y_2) & \dots & (y_n, y_n) \end{vmatrix}$$

determinant $y_1, y_2, \dots, y_n$ funktsiyalar sistemasining "Gram deter-minanti", deb ataladi.

4-teorema. $y_1, y_2, \dots, y_n$ funktsiyalar sistemasi chiziqli bog'liq bo'lishi uchun ularning Gram determinanti nolga teng bo'lishi zarur va etarlidir.

Bu teoremaning isbotini tushurib qoldiramiz.

7 - m i s o l . $y_1 = x, y_2 = 2x$ funktsiyalarning $[0,1]$ oraliqda chiziqli bog'liq ekanligini ko'rsating.

Yechish. $(y_1, y_1) = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$; $(y_1, y_2) = (y_2, y_1) = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3}$;

$(y_2, y_2) = \int_0^1 4x^2 dx = \frac{4}{3}$ bo'lgani uchun

$$\Gamma(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{vmatrix} = 0.$$

Demak, 4-teoremaga ko'ra bu funktsiyalar chiziqli bog'liq ekan.

5-teorema. Agar (2) chiziqli birjinsli tenglamaning y_1 va y_2 yechimlarini Vronskiy determinanti $[a,b]$ oraliqning biror $x = x_0$ nuqtasida noldan farqli bo'lsa, u holda u $[a,b]$ oraliqning hech bir nuqtasida nolga aylanmaydi.

Teoremaning isbotini 2-tartibli chiziqli tenglama uchun bajaramiz.

Isboti. Shartga ko'ra y_1 va y_2 funktsiyalar (2) ning yechimlari, ya'ni

$$y_1^{11} + a_1 y_1^1 + a_2 y_1 = 0 \quad \text{va} \quad y_2^{11} + a_1 y_2^1 + a_2 y_2 = 0.$$

Bu tengliklarning birinchisini y_2 ga va ikkinchisini y_1 ga ko'paytirib, ikkinchisidan birinchisini ayiramiz:

$$(y_1 y_2'' - y_1'' y_2) + a_1 (y_1 y_2' - y_1' y_2) = 0.$$

Ikkinchi qavsda turgan ayirma ma'lumki y_1 va y_2 funktsiyalarning Vronskiy determinantidir, birinchi qavsda turgani esa shu determinantning hosilasidir. Shu sababli, oxirgi tenglikni

$$W' + a_1 W = 0 \qquad (5)$$

deb yozish mumkin. Shu tenglamaning $W|_{x=x_0} = W_0 \neq 0$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini topaylik. Avval (5) ning umumiy yechimini topamiz. Buning uchun uning o'zgaruvchilarini ajrataylik:

$$\frac{dW}{W} = -a_1 dx.$$

Bu tenglikni integrallaymiz:

$$\ln W = -\int_{x_0}^{x} a_1 dx + \ln C$$

yoki

$$\ln \frac{W}{C} = -\int_{x_0}^{x} a_1 dx.$$

Bundan

$$W = Ce^{-\int_{x_0}^{x} a_1 dx}. \qquad (6)$$

Bu formula "Liuvill formulasi", deb ataladi.

Ayonki, agar $C = W_0$ bo'lsa, (6) boshlang'ich shartni ham qanoatlantiradi. Demak,

$$W = W_0 e^{-\int_{x_0}^{x} a_1 dx}$$

funktsiya (5) ning so'ralgan xususiy yechimi ekan. $W_0 \neq 0$ bo'lgani uchun bu funktsiya x ning birorta ham qiymatida nolga aylanmaydi. Teorema isbot bo'ldi.

Eslatma. Agar Vronskiy determinanti qandaydir $x = x_0$ nuqtada nolga teng bo'lsa, u holda (6) formuladan ko'rinib turibdiki, u berilgan oraliqda aynan nolga teng bo'ladi.

6-teorema. Agar y_1 va y_2 lar (2) chiziqli birjinsli tenglamaning $[a,b]$ oraliqda chiziqli erkli bo'lgan yechimlari bo'lsa, u holda ularning Vronskiy determinanti $[a,b]$ oraliqning hech bir nuqtasida nolga aylanmaydi.

Isboti. Teskarisini faraz qilaylik, ya'ni berilgan yechimlarning Vronskiy determinanti $[a,b]$ oraliqning biror nuqtasida nolga aylansin. U holda 5-

teoremaga ko'ra u $[a,b]$ oraliqning barcha nuqtalarida nolga aylanadi, ya'ni

$$W=0 \quad \text{yoki} \quad y_1y_2'-y_1'y_2=0$$

bo'ladi.

Faraz qilaylik, $[a,b]$ oraliqda $y_1 \neq 0$ bo'lsin. U holda oxirgi tenglikni y_1^2 ga bo'lsak:

$$\frac{y_1y_2'-y_1'y_2}{y_1^2}=0 \quad \text{yoki} \quad \left(\frac{y_2}{y_1}\right)'=0$$

tenglikka kelamiz. Buni integrallasak:

$$\frac{y_2}{y_1}=\lambda=const$$

hosil bo'ladi, ya'ni y_1 va y_2 lar chiziqli bog'liq bo'ladi. Bu esa teoremaning shartiga zid.

Agar $[a,b]$ oraliqning $x_1, x_2, \dots, x_k$ nuqtalarida $y_1=0$ bo'lsa, u (a,x_1) intervalda noldan farqli bo'ladi. U holda yuqoridagi isbotimizga ko'ra (a,x_1) intervalda

$$y_2=\lambda y_1$$

bo'ladi. y_1 va y_2 lar (2) ning yechimlari bo'lgani uchun $y=y_2-\lambda y_1$ funktsiya ham (2) ning yechimi bo'ladi va u (a,x_1) intervalda aynan nolga teng.

Agar shu mulohazalarimizni $(x_1,x_2),\dots,(x_{k-1},x_k)$ oraliqlar uchun ham bajarib chiqsak, $[a,b]$ oraliqning barcha nuqtalarida $y\equiv 0$ ekanligiga ishonch hosil qilamiz. Bu esa $[a,b]$ oraliqning barcha nuqtalarida y_1 va y_2 lar chiziqli bog'liq ekanligini bildiradi. Yana ziddiyatga keldik. Demak, $[a,b]$ oraliqning birorta ham nuqtasida $W(y_1,y_2)$ nolga teng bo'lishi mumkin emas.

7-teorema. Agar y_1 va y_2 lar (2) ning chiziqli erkli yechimlari bo'lsa, u holda ixtiyoriy C_1 va C_2 o'zgarmaslar uchun

$$y=C_1y_1+C_2y_2 \tag{7}$$

(2) ning umumiy yechimi bo'ladi.

Isboti. (7) funktsiya (2) tenglamaning yechimi bo'lishi 1- va 2-teoremalardan kelib chiqadi. U (2) ning umumiy yechimi bo'lishi uchun har qanday $y_{x=x_0}=y_0, y'_{x=x_0}=y'_0$ boshlang'ich shartlarda ham C_1 va C_2 o'zgarmaslarning shunday qiymatlari mavjud mumkin bo'lishi kerakki, bu qiymatlarda (7) xususiy yechim boshlang'ich shartlarni ham qanoatlantirishi shart.

Boshlang'ich shartlarni (7) ga qo'yamiz:

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= C_1 y_{10} + C_2 y_{20}, \\ y_0' &= C_1 y_{10}' + C_2 y_{20}'. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Bu sistema yagona yechimga ega, chunki uning asosiy determinanti chiziqli erkli y_1 va y_2 yechimlarning Vronskiy determinantining $x = x_0$ nuqtadagi qiymatiga teng, 6-teoremaga ko'ra esa u noldan farqli. Teorema isbot bo'ldi.

8-teorema. Agar ikkinchi tartibli chiziqli birjinsli tenglamaning biror xususiy yechimi ma'lum bo'lsa, u holda uning umumiy yechimini topish funktsiyalarni integrallashga keltiriladi.

Isboti. Faraz qilaylik, y_1 $y''+a_1 y'+a_2 y = 0$ tenglamaning ma'lum xususiy yechimi bo'lsin. 7-teoremaga ko'ra bu tenglamaning umumiy yechimini topish uchun uning ikkita chiziqli erkli xususiy yechimini bilish kifoya. Shuning uchun uning y_1 bilin chiziqli bog' liq bo'lmagan boshqa y_2 yechimini topamiz.

Liuvill formulasiga ko'ra

$$y_2' y_1 - y_1' y_2 = Ce^{-\int a_1 dx},$$

ya'ni y_2 ni topishga doir chiziqli tenglamaga ega bo'ldik. Bu tenglikni y_1^2 ga bo'lamiz:

$$\frac{y_2' y_1 - y_1' y_2}{y_1^2} = \frac{1}{y_1^2} Ce^{-\int a_1 dx} \quad \text{yoki} \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \frac{1}{y_1^2} Ce^{-\int a_1 dx}.$$

Bundan

$$\frac{y_2}{y_1} = \int \frac{Ce^{-\int a_1 dx}}{y_1^2} dx + C'.$$

Xususiy yechim qidirilayotgani uchun $C=1$, $C'=0$ desak:

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int a_1 dx}}{y_1^2} dx \tag{9}$$

hosil bo'ladi. Demak, umumiy yechim

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_1 \int \frac{e^{-\int a_1 dx}}{y_1^2} dx$$

ekan

Eslatma. n-tartibli chiziqli birjinsli differentsial tenglamaning $[a,b]$ oraliqda aniqlangan va chiziqli erkli n ta xususiy yechimlari shu tenglama yechimlarining fundamental yechimlar sistemasi, deb ataladi.

8 - m i s o l . $y''+\frac{2}{x}y'+y=0$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. $y_1=\frac{\sin x}{x}$ funktsiya berilgan tenglamaning yechimi (tekshirib ko'ring!). Ikkinchi yechimini (9) formuladan foydalanib topamiz:

$$y_2=\frac{\sin x}{x}\int\frac{e^{-2\int\frac{dx}{x}}}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}dx=\frac{\sin x}{x}\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\frac{\cos x}{x}.$$

Shuning uchun umumiy yechim

$$y=C_1\frac{\sin x}{x}-C_2\frac{\cos x}{x}$$

bo'ladi.

10.3. Birjinsli bo'lmagan chiziqli differentsial tenglamalar. Bizga

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x) \qquad (1)$$

differentsial tenglama berilgan bo'lsin.

9-teorema. Birjinsli bo'lmagan (1) tenglamaning umumiy yechimi uning biror y^* xususiy yechimi bilan unga mos keluvchi

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=0 \qquad (2)$$

birjinsli tenglamaning $\bar{y}$ umumiy yechimini yig'indisi ko'rinishida ifodalanadi.

Isboti. $y=y^*+\bar{y}$ funktsiya (1) ning umumiy yechimi ekanligini ko'rsatishdan avval uni (1) ning yechimi ekanligini ko'rsataylik. Buning uchun uni (1) ga qo'yamiz:

$$(y^*+\bar{y})^{(n)}+a_1(y^*+\bar{y})^{(n-1)}+\cdots+a_n(y^*+\bar{y})=f(x)$$

yoki

$$(\bar{y}^{(n)}+a_1\bar{y}^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}\bar{y}'+a_n\bar{y})+(y^{*(n)}+a_1y^{*(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y^{*\prime}+a_ny^*)=f(x).$$

$\bar{y}$ (2) ning yechimi bo'lgani uchun birinchi qavs aynan nolga teng va y^* (1) ning yechimi bo'lgani uchun ikkinchi qavs $f(x)$ ga teng. Demak, oxirgi tenglik ayniyat ekan.

Endi $y=y^*+\bar{y}$ funktsiya (1) ning umumiy yechimi ekanligini isbotlaylik.

Faraz qilaylik,

$$y_{x=x_0} = y_0, y'_{x=x_0} = y'_0, \ldots, y^{(n-1)}{}_{x=x_0} = y_0^{(n-1)} \qquad (3)$$

boshlang'ich shartlar berilgan bo'lsin.

Qilingan farazga ko'ra $\bar{y}$ (2) ning umumiy yechim bo'lgani uchun avvalgi bo'limdagi 7-teoremaga ko'ra uni

$$\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n$$

ko'rinishda ifodalash mumkin, bu erda $y_1, y_2, \ldots, y_n$ lar (2) ning chiziqli erkli yechimlari, $C_1, C_2, \ldots, C_n$ lar ixtiyoriy o'zgarmaslar. U holda

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n + y^*$$

bo'ladi. Bu yechim (3) shartlarni ham qanoatlantirishi kerak. Shuning uchun

$$C_1 y_{10} + C_2 y_{20} + \cdots + C_n y_{n0} + y_0^* = y_0,$$
$$C_1 y'_{10} + C_2 y'_{20} + \cdots + C_n y'_{n0} + y_0^{*'} = y'_0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$C_1 y_{10}^{(n-1)} + C_2 y_{20}^{(n-1)} + \cdots + C_n y_{n0}^{(n-1)} + y_0^{*(n-1)} = y_{n0}^{(n-1)}.$$

bo'ladi. Bu tengliklarni quyidagi sistema ko'rinishida yozib olamiz:

$$\left.\begin{array}{l} C_1 y_{10} + C_2 y_{20} + \cdots + C_n y_{n0} = y_0 - y_0^*, \\ C_1 y'_{10} + C_2 y'_{20} + \cdots + C_n y'_{n0} = y'_0 - y_0^{*'}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1 y_{10}^{(n-1)} + C_2 y_{20}^{(n-1)} + \cdots + C_n y_{n0}^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} - y_0^{*(n-1)}. \end{array}\right\} \qquad (4)$$

Bu sistemaning determinanti chiziqli erkli bo'lgan $y_1, y_2, \ldots, y_n$ funktsiyalar Vronskiy determinantining $x = x_0$ nuqtadagi qiymatiga teng. Shuning uchun u noldan farqli (avvalgi bo'limning 6-teoremasiga qarang). Demak, (4) sistema yagona yechimga ega. Teorema isbot bo'ldi.

Bu teoremadan ko'rinadiki, agar birjinsli tenglamaning umumiy yechimi ma'lum bo'lsa, u holda birjinsli bo'lmagan tenglamaning umumiy yechimini topish uning biror xususiy yechimini topishga keltirilar ekan.

Berilgan (1) tenglamaning umumiy yechimini bizga 3.2.-§ dan ma'lum bo'lgan o'zgarmaslarni variatsiyalash usuli deb ataluvchi Lagranj usulini qo'llab topsa ham bo'ladi. Bu usul quyidagi tartibda qo'llaniladi.

Faraz qilaylik, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ (2) ning fundamental yechimlar sistemasi bo'lsin. U holda (1) ning umumiy yechimini

$$y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 + \cdots + C_n(x) y_n \qquad (5)$$

ko'rinishda qidiramiz. Buni (1) qo'yamiz. Buning uchun avval uni differentsiallasak:

$$y' = C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2' + \cdots + C_n(x)y_n' + C_1'(x)y_1 + \cdots + C_n'(x)y_n$$

hosil bo'ladi. $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ larni shunday tanlaymizki, natijada $C_1'(x)y_1 + \cdots + C_n'(x)y_n = 0$ bo'lsin. U holda

$$y' = C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2' + \cdots + C_n(x)y_n'$$

bo'ladi. Buni yana differentsiallab, xuddi yuqoridagidek mulohaza qilsak:

$$C_1'(x)y_1' + \cdots + C_n'(x)y_n' = 0 \quad \text{va} \quad y'' = C_1(x)y_1'' + C_2(x)y_2'' + \cdots + C_n(x)y_n''$$

bo'ladi. Shu jarayonni to n-tartibli hosilasigacha davom ettirsak,

$$y^{(n)} = C_1(x)y_1^{(n)} + C_2(x)y_2^{(n)} + \cdots + C_n(x)y_n^{(n)} + C_1'(x)y_1^{(n-1)} + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}$$

tenglikga ega bo'lamiz. Bu hosilalarni (1) ga qo'ysak:

$$C_1(x)y_1^{(n)} + C_2(x)y_2^{(n)} + \cdots + C_n(x)y_n^{(n)} + C_1'(x)y_1^{(n-1)} + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} +$$
$$+ a_1[C_1(x)y_1^{(n-1)} + \cdots + C_n(x)y_n^{(n-1)}] + \cdots + a_n[C_1(x)y_1 + \cdots + C_n(x)y_n] = f(x)$$

yoki

$$C_1(x)(y_1^{(n)} + a_1y_1^{(n-1)} + \cdots + a_ny_1) + \cdots + C_n(x)(y_n^{(n)} + a_1y_n^{(n-1)} + \cdots + a_ny_n) +$$
$$+ C_1'(x)y_1^{(n-1)} + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = f(x)$$

tenglikka kelamiz. $y_1, y_2, \ldots, y_n$ lar (2) ning yechimlari bo'lgani uchun birinchi n ta qavs ichidagi ifodalar nolga teng bo'ladi. Natijada $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ lar uchun quyidagi sistema hosil bo'ladi:

$$\left.\begin{array}{l} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \cdots + C_n'(x)y_n = 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + \cdots + C_n'(x)y_n' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} + C_2'(x)y_2^{(n-1)} + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = f(x). \end{array}\right\}$$

Bu sistemaning determinanti chiziqli erkli $y_1, y_2, \ldots, y_n$ funktsiyalarning Vronskiy determinanti bo'lgani uchun noldan farqli. Shu sababli, bu sistema yagona yechimga ega. Uni yechsak:

$$C_1'(x) = \varphi_1(x), \ C_2'(x) = \varphi_2(x), \ \ldots, \ C_n'(x) = \varphi_n(x)$$

lar topiladi. Bularning har birini integrallasak:

$$C_1 = \int\varphi_1(x)dx + \overline{C}_1, \ C_2 = \int\varphi_2(x)dx + \overline{C}_2, \ldots, \ C_n = \int\varphi_n(x)dx + \overline{C}_n$$

hosil bo'ladi. Bu topilgan ifodalarni (5) ga $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ lar o'rniga qo'ysak, (1) ning umumiy yechimini topamiz.

9 - m i s o l . $y'' + \frac{2}{x}y' + y = \frac{ctgx}{x}$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Shu paragrafning 9.1.-bo'limidagi 2-misolda

$$y''+\frac{2}{x}y'+y=0$$

tenglamaning xususiy yechimlari topilgan edi: $y_1=\frac{\sin x}{x}$, $y_2=\frac{\cos x}{x}$. Ular chiziqli erkli, chunki ularning Vronskiy determinanti

$$W(y_1,y_2)=-\frac{1}{x^2}\neq 0.$$

Shuning uchun berilgan tenglamaning umumiy yechimini

$$y=C_1(x)\cdot\frac{\sin x}{x}+C_2(x)\cdot\frac{\cos x}{x} \tag{6}$$

ko'rinishda qidiramiz. $C_1(x)$ va $C_2(x)$ koeffitsientlarni quyidagi sistemadan topamiz:

$$\left.\begin{aligned} &C_1'(x)\cdot\frac{\sin x}{x}+C_2'(x)\cdot\frac{\cos x}{x}=0,\\ &C_1'(x)\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}+C_2'(x)\cdot\frac{-x\sin x-\cos x}{x^2}=\frac{ctgx}{x}.\end{aligned}\right\}$$

Bundan $C_1'(x)=\frac{\cos^2 x}{\sin x}$ va $C_2'(x)=\cos x$ yoki ularni integrallaganimizdan so'ng:

$$C_1(x)=\ln\left|tg\left(x/2\right)\right|+\cos x+C_1,\quad C_2(x)=-\sin x+C_2.$$

Bularni (6) ga qo'ysak:

$$y=C_1\cdot\frac{\sin x}{x}+C_2\cdot\frac{\cos x}{x}+\frac{\sin x}{x}\cdot\ln\left|tg\left(x/2\right)\right|.$$

10-teorema. Agar y_1^* va y_2^* lar mos ravishda

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=f_1(x) \tag{7}$$

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=f_2(x) \tag{8}$$

tenglamalarning yechimlari bo'lsa, u holda $y^*=y_1^*+y_2^*$

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=f_1(x)+f_2(x)$$

tenglamaning yechimi bo'ladi.

Isboti. Agar (7) va (8) larni hadma-had qo'shsak:

$$(y_1^*+y_2^*)^{(n)}+a_1(y_1^*+y_2^*)^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(y_1^*+y_2^*)'+a_n(y_1^*+y_2^*)=f_1(x)+f_2(x)$$

hosil bo'ladi. Bundan $y^*=y_1^*+y_2^*$ (2) ning yechimi ekanligi kelib chiqadi.

10 - m i s o l . $y''+4y=x+3e^x$ tenglamaning xususiy yechimini toping.

Yechish. $y''+4y=x$ tenglamaning xususiy yechimi $y_1^* = \frac{1}{4}x$, $y''+4y=3e^x$ tenglamaning xususiy yechimi esa $y_2^* = \frac{3}{5}e^x$. Shu sababli, berilgan tenglamaning xususiy yechimi

$$y^* = \frac{1}{4}x + \frac{3}{5}e^x$$

bo'ladi.

11-§. O'zgarmas koeffitsientli chiziqli birjinsli differentsial tenglamalar.

Bizga chiziqli birjinsli n-tartibli

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = 0 \tag{1}$$

differentsial tenglama berilgan bo'lib, undagi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ koeffitsientlar o'zgarmas bo'lsin.

Avvalgi paragrafning 9.2.-bo'limidagi 7-teoremaga ko'ra, (1) ning umumiy yechimini topish uchun uning fundamental yechimlari sistemasini topish kifoya.

Bu xususiy yechimlarni quyidagi ko'rinishda qidiramiz:

$$y = e^{kx}, \text{ bu yerda } k = const. \tag{2}$$

U holda

$$y' = ke^{kx}, y'' = k^2 e^{kx}, \ldots, y^{(n)} = k^n e^{kx}.$$

Bularni (1) ga qo'yib ixchamlasak:

$$e^{kx}(k^n + a_1 k^{n-1} + \cdots + a_n) = 0$$

tenglik hosil bo'ladi. Ma'lumki, barcha x lar uchun $e^{kx} \neq 0$. Shu sababli,

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \cdots + a_{n-1}k + a_n = 0 \tag{3}$$

bo'lishi shart. Hosil bo'lgan (2) algebraik tenglamani (1) ning xarakteristik tenglamasi, deb ataymiz.

Biz bilamizki, har qanday n-darajali algebraik tenglama n ta ildizga ega (9-bob, 6-§, 3-teoremaga qarang). Bu ildizlar:

1) haqiqiy va har xil;
2) haqiqiy, lekin ularning orasida karralilari bor;
3) ularning ayrimlari kompleks bo'lishi mumkin.

Bu hollarning har birini alohida-alohida ko'rib chiqaylik.

1-hol. Barcha $k_1, k_2, \ldots, k_n$ ildizlari haqiqiy va har xil.

Bularni (2) ga qo'yib

$$y_1 = e^{k_1x},\ y_2 = e^{k_2x},\ \dots,\ y_n = e^{k_nx} \qquad (4)$$

xususiy yechimlarini hosil qilamiz. Ma'lumki (9.2.-bo'limdagi 3-misolga qarang) bu funktsiyalar har xil $k_1, k_2, \dots, k_n$ lar uchun chiziqli erkli. Shu sababli (4) funktsiyalar (1) ning fundamental yechimlari sistemasini tashkil etadi va shuning uchun (1) ning umumiy yechimi

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x} + \dots + C_ne^{k_nx}$$

bo'ladi.

1 - m i s o l . $y'''-2y''-3y'=0$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamaning xarakteristik tenglamasini tuzib olamiz:

$$k^3 - 2k^2 - 3k = 0.$$

Uning ildizlari: $k_1 = 0, k_2 = -1, k_3 = 3$. Bu ildizlar haqiqiy va har xil bo'lgani uchun tenglamaning umumiy yechimi

$$y = C_1 + C_2e^{-x} + C_3e^{3x}$$

bo'ladi.

2-hol. $k_1, k_2, \dots, k_n$ ildizlar haqiqiy, lekin ularning ayrimlari karrali. Masalan, $k_1 = k_2 = \dots = k_l = k$ bo'lib, qolgan $n-l$ tasi har xil bo'lsin. Bu holda $y_1 = e^{k_1x}$ xususiy yechim k ning o'rniga k_1 ni qo'yib hosil qilinsa, qolgan $y_2 = e^{k_2x},\ \dots,\ y_l = e^{k_lx}$ lar unga aynan teng bo'lgani uchun ularni alohida xususiy yechim deb qaralishi mumkin emas. Shu sababli, bunday xususiy yechimlar sifatida

$$y_2 = xe^{k_1x},\ \dots,\ y_l = x^le^{k_1x}$$

funktsiyalar olinadi (ularni (1) ning yechimi ekanligini o'rniga qo'yib tekshirish mumkin, bu vazifani bajarishni o'quvchining o'ziga havola qilamiz). Bu funktsiyalar qolgan yechimlar bilan chiziqli erkli sistemani tashkil etadi. Shuning uchun (1) ning umumiy yechimi

$$y = e^{k_1x}(C_1 + C_2x + \dots + C_lx^l) + C_{l+1}e^{k_{l+1}x} + \dots + C_ne^{k_nx}$$

ko'rinishda bo'ladi.

2 - m i s o l . $y'''+2y''+y'=0$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Bu tenglamaning xarakteristik tenglamasi

$$k^3 + 2k + k = 0.$$

Buning ildizlari: $k_1 = k_2 = -1, k_3 = 0$. Ildizlardan biri karrali ekan. Demak, tenglamaning umumiy yechimi

$$y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + C_3$$

bo'ladi.

3-hol. $k_1, k_2, \ldots, k_n$ ildizlar orasida komplekslari bor. Ma'lumki (9-bob, 7-§, 1-teoremaga qarang), agar biror kompleks son algebraik tenglamaning ildizi bo'lsa, u holda unga qo'shma kompleks son ham shu tenglamaning ildizi bo'ladi, shu sababli, qo'shma $k^{(1)} = \alpha + i\beta, k^{(2)} = \alpha - i\beta$ kompleks ildizlarga

$$y_s = e^{(\alpha + i\beta)x}, \quad y_{s+1} = e^{(\alpha - i\beta)x} \tag{5}$$

xususiy yechimlar mos keladi. Bular haqiqiy o'zgaruvchining kompleks funktsiyalaridir.

Agar biror haqiqiy o'zgaruvchining

$$y = u(x) + i\vartheta(x)$$

kompleks funktsiyasi (1) ni qanoatlantirsa, u holda $u(x)$ va $\vartheta(x)$ lar ham (1) ni qanoatlantiradi.

Shu sababli, agar biz (5) funktsiyalarni

$$y_s = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) \quad \text{va} \quad y_{s+1} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)$$

ko'rinishda yozib olsak, yuqoridagi mulohazaga ko'ra,

$$\tilde{y}_s = e^{\alpha x}\cos\beta x, \; \tilde{y}_{s+1} = e^{\alpha x}\sin\beta x \tag{6}$$

funktsiyalar ham (1) ning xususiy yechimlari bo'ladi degan xulosaga kelamiz. Bu yechimlar chiziqli erkli, chunki

$$\frac{\tilde{y}_s}{\tilde{y}_{s+1}} = ctg\beta x \neq const.$$

Shuning uchun qo'shma kompleks $k^{(1)} = \alpha + i\beta, k^{(2)} = \alpha - i\beta$ ildizlarga mos keluvchi xususiy yechimlar sifatida (5) ni emas, balki (6) yechimlarni olamiz.

Agar $k^{(1)} = \alpha + i\beta$ ildiz l karrali ildiz bo'lsa, u holda $k^{(2)} = \alpha - i\beta$ ham l karrali ildiz bo'ladi. Bu holda bunday ildizlarga mos keluvchi xususiy yechimlar sifatida xuddi 2-holdagidek

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\; e^{\alpha x}\sin\beta x,\; xe^{\alpha x}\cos\beta x,\; xe^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots, x^{l-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,\; x^{l-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$$

funktsiyalar olinadi.

3 - m i s o l . $y^{(5)} - 2y^{(4)} + 2y^{(3)} - 4y'' + y' - 2y = 0$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Xarakteristik tenglama

$$k^5 - 2k^4 + 2k^3 - 4k^2 + k - 2 = 0$$

yoki

$$(k-2)(k^2+1)^2 = 0$$

oddiy haqiqiy $k_1 = 2$ va ikkikarrali mavhum $k = \pm i$ ildizlarga ega.
Shuning uchun tenglamaning umumiy yechimi

$$y = C_1 e^{2x} + (C_2 + xC_3)\cos x + (C_4 + xC_5)\sin x$$

bo'ladi.

12-§. O'zgarmas koeffitsientli chiziqli birjinsli bo'lmagan differentsial tenglamalar.

I. Bizga

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x) \quad (1)$$

differentsial tenglama berilgan bo'lsin, bu yerda $a_1, a_2, \ldots, a_n$ koeffitsientlar o'zgarmas va $f(x)$ x ning berilgan funktsiyasi.

Shu bobning 9.3-bo'limidagi 9-teoremaga ko'ra (1) ning umumiy yechimi uning biror xususiy yechimini topishga keladi. Biz hozir $f(x)$ ning maxsus ko'rinishlarida xususiy yechimni tanlash usuli, deb ataluvchi usul yordamida topish masalasini ko'ramiz. $f(x)$ funktsiyaning bu usulni qo'llab bo'ladigan eng umumiy ko'rinishi quyidagichadir:

$$f(x)=e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x] \quad (2)$$

bu yerda $P_n(x)$ va $Q_m(x)$ lar x ning mos ravishda n- va m-darajali ko'phadlari, α,β lar esa o'zgarmaslar.

Eslatish joizki, boshqa barcha hollarda (1) ning umumiy yechi- mini 9-§ da ko'rilgan o'zgarmaslarni variatsiyalash usuli yordamida aniqlash mumkin.

(2) ning bir necha xil xususiy ko'rinishlarini ko'raylik.

1-hol. Faraz qilaylik, $f(x)=e^{\alpha x}P_n(x)$ bo'lsin. Bunda quyidagi uch holat yuz berishi mumkin:

a) α xarakteristik

$$h_n(k)\equiv k^n+a_1k^{n-1}+\cdots+a_{n-1}k+a_n=0$$

tenglamaning ildizi emas.

Bu holda xususiy yechimni

$$y^*=(A_0+A_1x+\cdots+A_{n-1}x^{n-1}+A_nx^n)e^{\alpha x}=\widetilde{P}_n(x)e^{\alpha x} \quad (3)$$

ko'rinishda qidiramiz. Buni (1) ga qo'yib, $e^{\alpha x}$ ga qisqartirsak, u quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\widetilde{P}_n^{(n)}+\frac{h_n^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!}\widetilde{P}_n^{(n-1)}+\frac{h_n^{(n-2)}(\alpha)}{(n-2)!}\widetilde{P}_n^{(n-2)}\cdots+h_n'(\alpha)\widetilde{P}_n'+h_n(\alpha)\widetilde{P}_n=P_n(x). \quad (4)$$

α xarakteristik tenglamaning ildizi bo'lmagani uchun $h_n(\alpha)\neq 0$, shuning uchun tenglikning o'ng tomonida ham, chap tomonida ham n-darajali ko'phadlar turibdi. x ning bir xil darajalari oldidagi koeffitsentlarni tenglasak, noma'lum $A_0, A_1, \ldots, A_n$ koeffitsentlarni topish uchun n+1 ta tenglamalar sistemasini hosil qilamiz.

b) α xarakteristik tenglamaning oddiy (bir karrali) ildizi, ya'ni $h_n(\alpha)=0$, lekin $h_n'(\alpha)\neq 0$. Bu holda xususiy yechimni (3) ko'rinishda izlab bo'lmaydi, chunki aks holda (4) dagi tenglikning chap tomonida n-1-darajali, o'ng tomonida esa n-darajali ko'phad bo'lib qoladi, ya'ni $A_0, A_1, \dots, A_n$ larning hech bir qiymatida (4) ayniyatga aylanmaydi. Shu sababli, xususiy yechimni

$$y^* = x(A_0 + A_1x + \dots + A_{n-1}x^{n-1} + A_nx^n)e^{\alpha x} = x\widetilde{P}_n(x)e^{\alpha x}$$

ko'rinishda izlaymiz.

v) α xarakteristik tenglamaning s karrali ildizi, ya'ni $h_n(\alpha)=0$, $h_n^{(l)}(\alpha)=0$, $l=1,2,\dots,s-1$, $h_n^{(s)}(\alpha)\neq 0$. Agar biz xususiy yechimni (3) ko'rinishda qidirsak, u holda shuni hisobiga (4) quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\widetilde{P}_n^{(n)} + \frac{h_n^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!}\widetilde{P}_n^{(n-1)} + \frac{h_n^{(n-2)}(\alpha)}{(n-2)!}\widetilde{P}_n^{(n-2)} \dots + \frac{h_n^{(s)}(\alpha)}{s!}\widetilde{P}_n^{(s)} = P_n(x).$$

Bu tenglikning chap tomonida n-s-darajali ko'phad, o'ng tarafida esa n-darajali ko'phad bo'lib qolyapti. Shu sababli, buni oldini olish maqsadida xususiy yechimni (3) ko'rinishda emas, balki quyidagi

$$y^* = x^s(A_0 + A_1x + \dots + A_{n-1}x^{n-1} + A_nx^n)e^{\alpha x} = x^s\widetilde{P}_n(x)e^{\alpha x},$$

ko'rinishda izlaymiz, chunki differentsiallash jarayonida ozod haddan boshlab dastlabki s ta had yo'qolib ketadi.

1-m i s o l . $y''-2y'-3y=e^{4x}$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi:

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{-x}.$$

Berilgan tenglamaning o'ng tarafidagi ko'rsatkichli funktsiya darajasidagi 4 xarakteristik tenglamaning ildizi emas va uning oldida 0-darajali ko'phad. Shuning uchun xususiy yechimni

$$y^* = Ae^{4x}$$

ko'rinishda izlaymiz. Bu xususiy yechim uchun (4) tenglama quyidagicha bo'ladi:

$$5Ae^{4x} = e^{4x}.$$

Bundan A=1/5. Demak, umumiy yechim

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{-x} + \frac{1}{5}e^{4x}$$

ekan.

2 - m i s o l . $y''-7y'+6y=(x-2)e^x$ tenglamaning umumiy yechimi-ni toping.

Yechish. Tenglamaning o'ng tarafi $P_1(x)e^{1\cdot x}$ ko'rinishga ega, darajadagi 1 xarakteristik tenglamaning oddiy ildizi. Shu sababli, xususiy yechimni

$$y^* = x(A_0 + A_1 x)e^x$$

ko'rinishda izlaymiz. Buni differentsiallab, tenglamaga qo'yib ixchamlagandan so'ng quyidagiga ega bo'lamiz:

$$(-10A_1 x - 5A_0 + 2A_1)e^x = (x-2)e^x.$$

Agar x ning koeffitsientlarini va ozod hadni tenglasak:

$$-10A_1 = 1, \quad -5A_0 + 2A_1 = -2.$$

Bundan $A_1 = -1/10, A_0 = 9/25$. Demak, umumiy yechim

$$y = C_1 e^{6x} + C_1 e^x + x\left(\frac{9}{25} - \frac{1}{10}x\right)e^x$$

bo'lar ekan.

3 - m i s o l . $y''' - y'' = 12x^2 + 6x$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Xarakteristik $k^3 - k^2 = 0$ tenglamaning ildizlari: $k_1 = k_2 = 0, k_3 = 1$. Shuning uchun mos birjinsli tenglamaning umumiy yechimi

$$\bar{y} = C_1 + C_2 x + C_3 e^x$$

bo'ladi. 0 xarakteristik tenglamaning ikki karrali ildizi bo'lgani uchun berilgan tenglamaning xususiy yechimini

$$y^* = x^2(A_0 + A_1 x + A_2 x^2) = A_2 x^4 + A_1 x^3 + A_0 x^2$$

ko'rinishda izlaymiz. Buni tenglamaga qo'yib ixchamlasak:

$$-12A_2 x^2 + (24A_2 - 6A_1)x + (6A_1 - 2A_0) = 12x^2 + 6x.$$

Bundan x ning bir xil darajalari oldidagi koeffitsientlarni tenglab

$$\left.\begin{array}{l} -12A_2 = 12, \\ 24A_2 - 6A_1 = 6, \\ 6A_1 - 2A_0 = 0 \end{array}\right\}$$

sistemani hosil qilamiz. Bu sistemaning yechimlari: $A_0 = -15$, $A_1 = -5, A_2 = -1$. Demak,

$$y^* = -x^4 - 5x^3 - 15x^2.$$

U holda umumiy yechim

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 e^x - x^4 - 5x^3 - 15x^2$$

bo'ladi.

2-hol. Tenglamaning o'ng tarafi $f(x)=e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x]$ bu yerda $P_n(x)$ va $Q_m(x)$ lar x ning mos ravishda n- va m-darajali ko'phadlari, α,β lar esa o'zgarmaslar.

Bu hol 1-holga quyidagi usul bilan keltiriladi. Agar $\cos\beta x$ va $\sin\beta x$ larni Eyler formulasi bilan berilgan ifodalariga almashtirsak, o'ng taraf quyidagi ko'rinishga keladi:

$$f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}\frac{e^{i\beta x}+e^{-\beta x}}{2}+Q_m(x)e^{\alpha x}\frac{e^{i\beta x}-e^{i\beta x}}{2i}$$

yoki

$$f(x)=\left[\frac{1}{2}P_n(x)+\frac{1}{2i}Q_m(x)\right]e^{(\alpha+i\beta)x}+\left[\frac{1}{2}P_n(x)-\frac{1}{2i}Q_m(x)\right]e^{(\alpha-i\beta)x}. \qquad (5)$$

Demak, bu holda xususiy yechim

$$y^*=x^s e^{\alpha x}[\widetilde{P}_k(x)\cos\beta x+\widetilde{Q}_k(x)\sin\beta x]$$

ko'rinishda qidirilar ekan, bu yerda $k=\max(m,n)$, s -esa xarakteristik tenglamaning ildizi bo'lmish $\alpha\pm i\beta$ ning karrasi (agar $\alpha\pm i\beta$ xarakteristik tenglamaning ildizi bo'lmasa s=0 bo'ladi).

4 - m i s o l . $y''+y'-2y=\cos x-3\sin x$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Xarakteristik tenglamaning ildizlari: $k_1=1, k_2=-2$, shuning uchun mos birjinsli tenglamaning umumiy yechimi

$$\bar{y}=C_1e^x+C_2e^{-2x}.$$

Berilgan tenglamaning xususiy yechimini

$$y^*=A\cos x+B\sin x$$

ko'rinishda izlaymiz, chunki bu yerda $\alpha=0,\beta=1,\alpha+\beta i=i$ xarakteristik tenglamaning ildizi emas. Buni tenglamaga qo'yib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$(B-3A)\cos x+(-3B-A)\sin x\equiv\cos x-3\sin x.$$

Bundan

$$\left.\begin{aligned}B-3A&=1,\\3B+A&=3\end{aligned}\right\}.$$

Sistemani yechsak: $A=0, B=1$ bo'ladi. Demak, umumiy yechim

$$y=C_1e^x+C_2e^{-2x}+\sin x.$$

5 - m i s o l . $y''-4y'+8y=e^{2x}(\sin 2x-\cos 2x)$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Xarakteristik tenglama $k_1 = 2 + 2i, k_2 = 2 - 2i$ kompleks ildizlarga ega va $\alpha + \beta i = 2 + 2i$ xarakteristik tenglamaning ildizi, shu sababli birjinsli tenglamaning umumiy yechimi

$$\bar{y} = e^{2x}(C_1 \cos 2x + iC_2 \sin x)$$

bo'lsa, berilgan tenglamaning xususiy yechimi

$$y^* = xe^{2x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$$

ko'rinishda bo'ladi. Buni tenglamaga qo'yib ixchamlasak: $A = -1/4$, $B = -1/4$ kelib chiqadi. Demak, umumiy yechim

$$y = e^{2x}(C_1 \cos 2x + iC_2 \sin 2x) - \frac{1}{4}xe^{2x}(\cos 2x - \sin 2x)$$

bo'ladi.

II. Eyler tenglamasi. O'zgaruvchan koeffitsientli chiziqli

$$(ax + b)^n y^{(n)} + a_1(ax + b)^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(ax + b)y' + a_n y = f(x) \qquad (6)$$

ko'rinishdagi tenglamalar "Eyler tenglamasi" deb ataladi, bu yerda $a_1, a_2, \ldots, a_n$ koeffitsientlar o'zgarmas va $f(x)$ x ning berilgan funktsiyasi.

Bu tipdagi tenglamalarda $ax + b = e^t$ almashtirish bajarilsa, natijada tenglama yangi o'zgaruvchiga nisbatan o'zgarmas koeffitsientli tenglamaga keltiriladi.

6 - m i s o l. $x^2y'' - xy' + y = 0$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Agar $x = e^t$ yoki $t = \ln x$, bundan $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} = e^{-t}$ desak,

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \dot{y}e^{-t}, \quad y'' = \frac{d}{dt}\left[\dot{y}e^{-t}\right] \cdot e^{-t} = (\ddot{y} - \dot{y})e^{-2t}$$

bo'ladi. U holda berilgan tenglama quyidagi ko'rinishga keladi:

$$e^{2t} \cdot e^{-2t}(\ddot{y} - \dot{y}) - e^t \cdot e^{-t} \cdot \dot{y} + y = 0 \quad \text{yoki} \quad \ddot{y} - 2\dot{y} + y = 0.$$

Xarakteristik tenglamaning ildizlari $k_1 = k_2 = 1$, shu sababli umumiy yechim

$$y = (C_1 + C_2 t)e^t \quad \text{yoki} \quad y = (C_1 + C_2 \ln x)x$$

bo'ladi.

7 - m i s o l. $(4x - 1)^2 y'' - 2(4x - 1)y' + 8y = 0$ tenglamani yeching.

Yechish. Agar $4x - 1 = e^t$ desak, $dx = \frac{1}{4}e^t dt, \frac{dt}{dx} = 4e^{-t}$ bo'ladi. Bundan

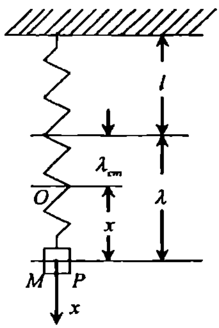
$$y' = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = 4e^{-t} \cdot \dot{y}, \quad y'' = 16e^{-2t}(\ddot{y} - \dot{y})$$

U holda berilgan tenglama $2\ddot{y}-3\dot{y}+y=0$ ko'rinishga keladi. Uni yechsak:

$$y=C_1e^t+C_2e^{t/2} \quad \text{yoki} \quad y=C_1(4x-1)+C_2\sqrt{4x-1}.$$

13-§. Differentsial tenglamalarning fizik va mexanik masalalarga qo'llanishi.

1. Mexanik tebranishlar. 1-masala. Og'irligi R bo'lgan yuk uzunligi l bo'lgan tinch holatdagi vertikal prujinaga osilgan. Natijada yuk biroz pastga tortilib, keyin prujinaning tarangligi hisobiga yana yuqoriga ko'tariladi. Prujina massasini va havo qarshiligini hisobga olmay, yukning xarakat qonunini topish masalasini ko'raylik.



127-rasm.

Ox o'qni yuk osilgan nuqtadan pastga vertikal yo'nalishda olamiz. Koordinatalar boshi O ni yuk muvozanatda bo'lgan holatda, ya'ni yukning og'irligi prujinaning reaktsiya kuchi bilan muvozanatlashgan nuqtada olamiz (127-rasmga qarang).

Agar λ - prujinaning boshlang'ich momentdagi cho'zilishi, λ_{st} esa statik cho'zilish, ya'ni cho'zilmagan prujinaning oxiridan muvozanat holatigacha bo'lgan masofa, x yukning muvozanat holatidan chetlanishi bo'lsa, u holda $\lambda=\lambda_{st}+x$ bo'ladi.

Nyutonning ikkinchi qonuniga ko'ra **F**=m**a**, bu yerda **F** - yukka qo'yilgan kuchlarning teng ta'sir etuvchisi, m=R/g yuk massasi, **a** esa xarakat tezlanishi. Biz ko'rayotgan masalada **F** kuch prujinaning taranglik kuchi va og'irlik kuchlari yig'indisidan iborat.

Guk qonuniga binoan prujinaning taranglik kuchi uning cho'zi-lishiga proportsional, ya'ni $-s\lambda$ ga teng, bu yerda s-o'zgarmas pro-portsionallik koeffitsienti, u prujinaning birkligi, deyiladi.

Shuning uchun xarakat tenglamasi

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-c\lambda+P$$

bo'ladi.

Muvozanat holatida prujinaning taranglik kuchi og'irlik kuchi bilan teng bo'lgani uchun $P=c\lambda_{cm}$ bo'ladi. Buni tenglamaga qo'ysak, u

$$\frac{d^2x}{dt^2}+s^2x=0$$

ko'rinishga keladi, bu yerda $s^2 = c/m$ deb belgilandi va λ-λ_{st}=x ekanligi e'tiborga olindi. Bu tenglama yukning "*erkin tebranish*" yoki "*garmonik ostsillyator*" tenglamasi, deb ataladi. Bu o'zgarmas koeffitsientli ikkinchi tartibli bir jinsli differentsial tenglama. Uning xarakteristik tenglamasi $k^2 + s^2 = 0$ mavhum $k_{1,2} = \pm is$ ildizlarga ega. Unga mos keluvchi umumiy yechim

$$x = C_1 \cos st + C_2 \sin st$$

bo'ladi. Agar buni $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ ga ko'paytirib va bo'lib,

$$\sin\alpha = \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}, \quad \cos\alpha = \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}$$

desak, u quyidagi ko'rinishga keladi:

$$x = A\sin(st + \alpha).$$

Demak, havo qarshiligi bo'lmasa yuk muvozanat holati atrofida garmonik tebranar ekan. A kattalik tebranish amplitudasi, $st+\alpha$ tebranish fazasi, α esa boshlang'ich fazasi, deyiladi. Tebranish chastotasi $s = \sqrt{c/m}$ prujinaning birkligi va yukning massasiga bog'liq. $c = P/\lambda_{cm} = mg/\lambda_{cm}$ bo'lgani uchun tebranish davri

$$T = 2\pi/s = 2\pi\sqrt{m/c} = 2\pi\sqrt{\lambda_{cm}/g}$$

bo'ladi.

Endi faraz qilaylik, yukka xarakat tezligiga proportsional bo'lgan havo qarshiligi ta'sir etsin. U holda yukka ta'sir etadigan kuchlar qatoriga havoning qarshilik kuchi $\boldsymbol{R} = -\mu\boldsymbol{v}$ qo'shiladi, bu yerda manfiy ishoraning olinishiga sabab, $\boldsymbol{R}$ kuch qarshilik kuchi bo'lgani uchun xarakat yo'nalishiga teskari yo'nalgan bo'ladi.

Bu holat uchun xarakat tenglamasi

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx - \mu\frac{dx}{dt}$$

bo'ladi, bu yerda agar $c/m = s^2, \mu/m = 2n$ desak, u

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} + s^2x = 0 \qquad (1)$$

ko'rinishga keladi. Uning xarakteristik tenglamasi

$$k_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - s^2} \qquad (2)$$

ildizlarga ega.

Bu yerda uch hol ro'y berishi mumkin. Agar muhit qarshiligi uncha katta bo'lmasa, u holda $n^2 - s^2 < 0$ bo'lib, ildizlar $k_{1,2} = -n \pm ik_1$

ko'rinishda bo'ladi, bu yerda $k_1^2 = s^2 - n^2$ deb belgilandi. Shuning uchun tenglamaning yechimi

$$x = e^{-nt}(C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t)$$

ko'rinishda bo'ladi. Agar yuqoridagidek almashtirishlar bajarsak, u quyidagi ko'rinishga keltiriladi:

$$x = Ae^{-nt} \sin(k_1 t + \alpha).$$

Bu yerda amplituda sifatida Ae^{-nt} miqdorni ko'rishga to'g'ri kelyapti, u $t \to \infty$ da, nolga intiladi, ya'ni havo qarshiligi kam bo'lsa, tebranish so'nuvchan bo'lar ekan. Shu sababli bunday tebranishni "so'nuvchi tebranish", deb ataymiz. So'nuvchi tebranish davri $T = 2\pi/k_1 = 2\pi/\sqrt{s^2 - n^2}$ ga teng.

So'nuvchi tebranishning amplitudasi maxraji $e^{-n\pi/k_1}$ ga teng bo'lgan geometrik progressiyani tashkil etadi. Bu miqdor "so'nish dekrementi", deb ataladi, uni biz D harfi bilan belgilaymiz. Dekrementning natural logarifmi $\ln D = -n\pi/k_1$ "so'nishning logarifmik dekrementi", deyiladi.

Agar muhitning qarshiligi katta va shu sababli $n^2 - s^2 > 0$ bo'lsa, u holda ildizlar $k_{1,2} = -n \pm h$ bo'lib, bu yerda $h^2 = n^2 - s^2$, tenglamaning umumiy yechimi

$$x = C_1 e^{-(n+h)t} + C_2 e^{-(n-h)t}$$

yoki agar $n = h$ bo'lsa,

$$x = e^{-nt}(C_1 + C_2 t)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Bu ikkala holda ham $t \to \infty$ da $x \to 0$ bo'ladi, ya'ni tebranish so'nuvchi bo'lar ekan.

2 -masala. Uzunligi l bo'lgan prujinaga og'irligi R bo'lgan yuk osilgan. Agar yukka xarakat tezligiga proportsional bo'lgan muhit qarshiligidan tashqari qo'zg'atuvchi $Q \sin pt$ kuch ta'sir etsa, yukning xarakat qonunini topaylik.

Aynan yuqoridagidek mulohazalar bilan xarakat tenglamasini quyidagi ko'rinishda hosil qilamiz:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx - \mu\frac{dx}{dt} + Q \sin pt$$

yoki

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} + s^2 x = q \sin pt, \qquad (3)$$

bu yerda $s^2 = c/m, \mu/m = 2n$ va $q = Q/m$; va yuqoridagilardan farqli o'laroq yukka ta'sir etayotgan qo'zg'atuvchi kuch ham e'tiborga olindi.

Bu jarayonda tebranma xarakat qo'shimcha kuch ta'sirida ham sodir bo'layotgani uchun bu xarakatni "*majburiy tebranma xarakat*", deb atashadi.

(3) o'zgarmas koeffitsientli bir jinsli bo'lmagan chiziqli ikkinchi tartibli differentsial tenglamadir.

Avval yukka muhit qarshiligi ta'sir etayotgan holni ko'raylik, bunda $n \neq 0$ bo'ladi. Agar $n^2 < s^2$ bo'lsa, u holda xarakteristik tenglama kompleks $k_{1,2} = -n \pm ik_1$ ildizlarga ega bo'ladi, bu yerda $k_1^2 = s^2 - n^2$. Shu sababli, mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi

$$\bar{x} = Ae^{-nt}\sin(k_1 t + \alpha)$$

bo'ladi (1-masalaga qarang). (3) ning xususiy yechimini

$$x^* = M\cos pt + N\sin pt$$

ko'rinishda izlaymiz. Buni (3) ga qo'yib ixchamlagandan so'ng, M va N larning qiymatlarini topamiz:

$$M = -\frac{2npq}{(s^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}, \quad N = \frac{q(s^2 - p^2)}{(s^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}.$$

Demak, xususiy yechim

$$x^* = \frac{q}{\sqrt{(s^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}}\left[-\frac{2np}{\sqrt{(s^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}}\cos pt + \frac{s^2 - p^2}{\sqrt{(s^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}}\sin pt\right]$$

bo'lar ekan. Quyidagi belgilashlarni kiritaylik:

$$\frac{q}{\sqrt{(s^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}} = B,$$

$$\frac{2np}{\sqrt{(s^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}} = \sin\delta, \quad \frac{s^2 - p^2}{\sqrt{(s^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}} = \cos\delta.$$

U holda xususiy yechim

$$x^* = B\sin(pt - \delta)$$

ko'rinishni oladi. (3) ning umumiy yechimi esa

$$x = Ae^{-nt}\sin(k_1 t + \alpha) + B\sin(pt - \delta) \tag{4}$$

bo'ladi. Uning birinchi hadi so'nuvchi teranishni ifodalaydi; $t \to \infty$ da u nolga intiladi. Shu sababli, biror muddatdan keyin uning umumiy yig'indiga ta'siri bo'lmay qoladi va asosiy qiymatni majburiy tebranishni aniqlaydigan had beradi. Bu tebranishning chastotasi p tashqi kuchning chastotasiga teng, majburiy tebranishning amplitudasi p ning s ga qanchalik yaqinligi va n ning qanchalik kichikligiga qarab, shunchalik katta bo'ladi.

Majburiy tebranish amplitudasining n ning har xil qiymatlarida p chastotaning o'zgarishiga qanchalik bog'liqligini tekshiraylik. Buning uchun uni differentsiallaymiz:

$$B(p)=\frac{q}{\sqrt{(s^2-p^2)^2+4n^2p^2}},$$

$$B'(p)=q\frac{(s^2-p^2)2p-4n^2p}{\left[(s^2-p^2)^2+4n^2p^2\right]^{3/2}}.$$

Agar $B'(p)=0$ desak, $(s^2-p^2)-2n^2=0$ tenglama hosil bo'ladi. Uning ildizi tashqi kuchlarning chastotasini beradi: $p=\sqrt{s^2-2n^2}$. Bu qiymatda $B(p)$ maksimum qiymatga erishadi (tekshiring!). Uning maksimum qiymati

$$B_{max}=\frac{q}{2n\sqrt{s^2-n^2}} \tag{5}$$

ga teng. n qanchalik kichik bo'lsa, p ning qiymati s ga shunchalik yaqin bo'ladi va (5) dan ko'rinadiki, tebranishlar amplitudasi shunchalik katta bo'ladi:

$$\lim_{p\to s} B(p)=\infty.$$

Agar $p=s$ bo'lsa, rezonans holati yuz beradi.

Endi faraz qilaylik, $n=0$ bo'lsin, ya'ni yukka tashqi muhit ta'sir etmasin. U holda xarakat tenglamasi

$$\frac{d^2x}{dt^2}+s^2x=q\sin pt \tag{6}$$

bo'ladi. Mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi

$$\bar{x}=A\sin(st+\alpha).$$

Agar $p\neq s$ bo'lsa, (6) ning xususiy yechimini

$$x^*=M\cos pt+N\sin pt$$

ko'rinishda izlaymiz. Buni (6) ga qo'yib ixchamlagandan so'ng, M va N larning qiymatlarini topamiz:

$$M=0, N=\frac{q}{s^2-p^2},$$

U holda umumiy yechim

$$x=A\sin(st+\alpha)+\frac{q}{s^2-p^2}\sin pt$$

bo'ladi.

Agar $p=s$ bo'lsa, (6) ning xususiy yechimini

$$x^* = t(M\cos pt + N\sin pt)$$

ko'rinishda izlaymiz. Bunda M va N lar quyidagicha bo'ladi:

$$M = -\frac{q}{2s}, N = 0.$$

Demak,

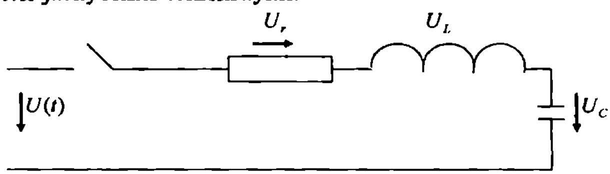
$$x^* = -\frac{q}{2s}t\cos st$$

ekan. U holda umumiy yechim

$$x = A\sin(st+\alpha) - \frac{q}{2s}t\cos st$$

bo'ladi. O'ng tarafdagi ikkinchi had t kattalashgan sari tebranish amplitudasi cheksiz orta borishini ko'rsatadi. Bu holat *rezonans holati*, deb ataladi.

2. Elektr zanjiridagi tebranishlar. r qarshilik, L induktivlik va C sig'im ketma-ket ulangan zanjirda boshlang'ich $t=0$ vaqt momentida konturdagi tok va kondensatordagi zaryad nolga teng bo'lsa, tokning shu zanjirdan o'tish jarayonini tekshiraylik.



128-rasm.

Biz bu masalani shu bobning 1.1-§ ida 5-misolda ko'rgan edik. Agar U manbaaning elektr yurituvchi kuchi (e.yu.k.) bo'lsa, u holda zanjirdan I tokning o'tish tenglamasi quyidagicha edi:

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + r\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \frac{dU}{dt} \tag{7}$$

Faraz qilaylik, zanjir manbaasining e.yu.k. o'zgarmas, ya'ni $U = const$ bo'lsin. U holda (7) quyidagi bir jinsli tenglamaga aylanadi:

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{r}{L}\frac{dI}{dt} + \frac{I}{LC} = 0.$$

Uning xarakteristik tenglamasi

$$k_{1,2} = -\frac{r}{2L} \pm \sqrt{\frac{r^2C - 4L}{4L^2C}}$$

ildizlarga ega. Agar $r^2C-4L\geq 0$ bo'lsa, ildizlar haqiqiy, shuning uchun umumiy yechim nodavriy bo'ladi. Demak, tok ham nodavriy bo'ladi. Bu zanjirda hech qanday tebranishlar ro'y bermasligini bildiradi. Agar $r^2C-4L<0$ bo'lsa, umumiy yechim

$$I=e^{-\delta t}(C_1\cos\omega_1 t+C_2\sin\omega_1 t) \tag{8}$$

bo'ladi, bu yerda $\delta=r/2L, \omega_1^2=1/(LC)-r^2/(4L^2)$.

C_1 va C_2 koeffitsientlarning

$$I|_{t=0}=0, \quad \frac{dI}{dt}|_{t=0}=\frac{E}{L}$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi qiymatlarini topaylik. Buning uchun avval (8) ni differentsiallaymiz:

$$\frac{dI}{dt}=e^{-\delta t}[-\delta(C_1\cos\omega_1 t+C_2\sin\omega_1 t)+\omega_1(-C_2\sin\omega_1 t+C_2\cos\omega_1 t)]$$

Agar boshlang'ich shartlardan foydalansak: $C_1=0$, $C_2=U/(L\omega_1)$ lar topiladi. Demak, yechim quyidagi ko'rinishda bo'lar ekan:

$$I=\frac{U}{L\omega_1}e^{-\delta t}\sin\omega_1 t.$$

Endi faraz qilaylik, $U=Q\sin\omega t$ bo'lsin. U holda (7) tenglama quyidagicha bo'ladi:

$$L\frac{d^2I}{dt^2}+r\frac{dI}{dt}+\frac{I}{C}=Q\omega\cos\omega t. \tag{9}$$

Ma'lumki (1.1-§, 5-misolga qarang)

$$I|_{t=0}=0, \qquad rI+\frac{1}{C}\int_0^t Idt+L\frac{dI}{dt}=Q\sin\omega t.$$

Bundan

$$\frac{dI}{dt}|_{t=0}=0$$

ekanligi kelib chiqadi. Demak, (9) uchun boshlang'ich shartlar

$$I|_{t=0}=0, \quad \frac{dI}{dt}|_{t=0}=0$$

bo'lar ekan. Shu shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimni topaylik. Agar $\omega_1\neq\omega$ bo'lsa, u holda bu yechimni

$$I^*=M\cos\omega t+N\sin\omega t$$

ko'rinishda qidiramiz. Uni (9) ga qo'yib, M va N larni 1-masaladagidek mulohazalar bilan topamiz:

$$M=\frac{Q\omega(1/C-L\omega^2)}{(1/C-L\omega^2)^2+\omega^2r^2}, \quad N=\frac{Q\omega^2 r}{(1/C-L\omega^2)^2+\omega^2r^2}.$$

U holda umumiy yechim

$$I = e^{-\delta t}(C_1 \cos\omega_1 t + C_2 \sin\omega_1 t) +$$

$$+\frac{Q}{(1/(C\omega) - L\omega)^2 + r^2}\left[\left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)\cos\omega t + r\sin\omega t\right]$$

bo'ladi. Agar $L\omega - 1/C\omega = K$; $\sqrt{K^2 + r^2} = Z$ desak, yechim

$$I = e^{-\delta t}(C_1 \cos\omega_1 t + C_2 \sin\omega_1 t) - \frac{Q}{Z^2}(K\cos\omega t - r\sin\omega t)$$

ko'rinishni oladi. Boshlang'ich shartlardan C_1 va C_2 larni topamiz:

$$C_1 = \frac{QK}{Z^2}, \quad C_2 = -\frac{Q}{Z^2\omega_1}(r\omega - K\delta).$$

Qavsda turgan ifodani quyidagicha o'zgartiraylik:

$$r\omega - K\delta = r\omega - \frac{r}{2L}\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) = r\omega - \frac{r\omega}{2} + \frac{\delta}{C\omega} =$$

$$= \frac{r\omega}{2} + \frac{\delta}{C\omega} = \delta\left(L\omega + \frac{1}{C\omega}\right) = \delta K',$$ bu yerda $L\omega + \frac{1}{C\omega} = K'$ deyildi.

Demak,

$$I = \frac{Q}{Z^2\omega_1}e^{-\delta t}(K\omega_1 \cos\omega_1 t - K'\delta \sin\omega_1 t) - \frac{Q}{Z^2}(K\cos\omega t - r\sin\omega t).$$

$K' = K + \frac{2}{C\omega}$ bo'lgani uchun

$$K^2\omega_1^2 + K'^2\delta^2 = K^2\left(\frac{1}{LC} - \delta^2\right) + \left[K^2 + \frac{4}{C\omega}\left(K + \frac{1}{C\omega}\right)\right]\delta^2 =$$

$$= \frac{K^2}{LC} + \frac{4}{C\omega}\left(L\omega - \frac{1}{C\omega} + \frac{1}{C\omega}\right)\delta^2 = \frac{K^2}{LC} + \frac{4Lr^2}{C\cdot 4L^2} = \frac{Z^2}{LC}.$$

Agar

$$\frac{K\omega_1}{\sqrt{K^2\omega_1^2 + K'^2\delta^2}} = \sin\alpha_1, \quad \frac{K'\delta}{\sqrt{K^2\omega_1^2 + K'^2\delta^2}} = \cos\alpha_1, \quad \frac{K}{Z} = \sin\alpha, \quad \frac{r}{Z} = \cos\alpha$$

desak, u holda yechimni quyidagicha yozish mumkin:

$$I = -\frac{Qe^{-\delta t}}{Z\omega_1\sqrt{LC}}\sin(\omega_1 t - \alpha_1) + \frac{Q}{Z}\sin(\omega t - \alpha)$$

Agar $\omega_1 = \omega$ bo'lsa, u holda xususiy yechimni

$$I^* = t(M\cos\omega t + N\sin\omega t)$$

ko'rinishda izlaymiz. Bu qavs oldidagi t kattalashgan sari tebranish amplitudasi cheksiz orta borishini ko'rsatadi. Demak, bu holda rezonans holati yuz berar ekan.

13.3. Differentsial tenglamalarning iqtisod dinamikasiga qo'llanishi. Iqtisod dinamikasining modellarida differentsial tenglamalar yetarlicha ko'p qo'llaniladi. Quyida biz makroiqtisod dinamikasiga qo'llanilishig□ doir bir nechta masalalarni ko'ramiz.

1-masala. Faraz qilaylik, $y(t)$- biror korxonaning t vaqt momentida sotgan mahsulotlari hajmi bo'lsin. Agar korxona chiqargan mahsulotini bir xil p narxda sotgan bo'lsa, u holda korxonaning t vaqt momentida olgan daromadi $Y(t)=py(t)$ bo'ladi.

$I(t)$ bilan ishlab chiqarishni kengaytirish uchun sarf qilinadigan investitsiya miqdorini belgilaylik. *Tabiiy o'sish modelida* mahsulotning chiqish tezligi (ya'ni akseleratsiyasi) investitsiya miqdoriga proportsional deb hisoblanadi, ya'ni

$$y'(t)=lI(t). \qquad (1)$$

Investitsiya miqdori $I(t)$ daromadning o'zgarmas qismini tashkil etadi, deb faraz qilsak:

$$I(t)=mY(t)=mpy(t), \qquad (2)$$

bu yerda proportsionallik koeffitsienti m $0<m<1$ bo'lgan o'zgarmas miqdordir.

Agar (2) ifoda (1) ga olib borib qo'yilsa:

$$y'=ky \qquad (3)$$

differentsial tenglama hosil bo'ladi, bu yerda $k=mpl$. Bu tenglama o'zgaruvchilari ajraluvchi differentsial tenglamadir. Uni yechsak:

$$y(t)=y_0e^{k(t-t_0)}, \quad y_0=y(t_0)$$

funktsiya hosil bo'ladi.

Aytish lozimki, (3) tenglama demografik jarayonda aholini o'sish dinamikasini, muntazam inflyatsiya davrida narxning o'sish dinamikasini va xokazo jarayonlarni ifodalaydi.

Amalda bozorning to'yinish sharti yetarlicha kichik vaqt intervali uchun qabul qilinadi. Umuman talab egri chizig'i, ya'ni sotilgan mol narxi p ning uning hajmi y ga bog'likligi $p=p(y)$ kamayuvchi funktsiya bo'ladi, chunki mahsulot hajmining oshishi bozorning shu molga to'yinishiga olib keladi, u esa mahsulot narxining kamayishiga olib keladi. Shu sababli, raqobatbardor bozor shartida o'sish modeli quyidagicha bo'ladi:

$$y'=mlp(y)y. \qquad (4)$$

Bu yana o'zgaruvchilari ajraluvchi differentsial tenglama. (4) ning o'ng tomonidagi barcha ko'paytuvchilar musbat bo'lgani uchun $y'>0$, shu sababli u o'suvchi $y(t)$ funktsiyani ifodalaydi. Bu funktsiyani qavariqlikka tekshirganda tabiiy uning elastiklik tushunchasi ishlatiladi. Xaqiqatan, agar (4) ni differentsiallab yuborsak

$$y'' = mly'\left(\frac{dp}{dt}y + p\right)$$

munosabatni hosil qilamiz. Ma'lumki, narxga nisbatan talabning elastikligi $E_p(y) = \frac{p}{y}\frac{dy}{dp}$ formula orqali ifodalanadi. U holda oxirgi tengligimizni quyidagicha yozsa bo'ladi:

$$y'' = mly'p\left(\frac{1}{E_p(y)} + 1\right).$$

Bu yerda $y''=0$ desak, $E_p(y) = -1$ tenglik hosil bo'ladi. Demak, agar talab elastik bo'lsa, ya'ni $|E_p(y)| > 1$ yoki $E_p(y) < -1$ bo'lsa, $y''>0$ bo'lib $y(t)$ funktsiya qavarig'i tepaga bo'ladi, agar talab elastik bo'lmasa, ya'ni $|E_p(y)| < 1$ yoki $-1 < E_p(y) < 0$ bo'lsa, u holda $y''< 0$ bo'lib $y(t)$ funktsiya qavarig'i pastga bo'ladi.

1-misol. Agar talab egri chizig'i $p(y) = 2 - y$ tenglama bilan berilgan, akseleratsiya normasi $1/l = 2$, investitsiya normasi $m = 0{,}5$, $y(0) = 0{,}5$ bo'lsa, sotilgan mahsulot hajmini toping.

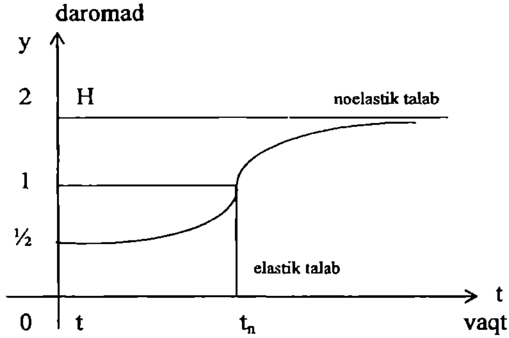
Yechish. Berilgan malumotlarga ko'ra, (4) tenglama quyidagicha ko'rinishga ega:

$$y' = (2 - y)y \quad \text{yoki} \quad \frac{dy}{(2-y)y} = dt.$$

Oxirgi tenglikni integrallab yuborsak:

$$\ln\left|\frac{y-2}{y}\right| = -2t + C_1 \quad \text{yoki} \quad \frac{y-2}{y} = Ce^{-2t} \tag{5}$$

hosil bo'ladi, bu erda $C = \pm e^{C_1}$. Agar $y(0) = 0{,}5$ ekanligini e'tiborga olsak, $C = -3$ kelib chiqadi. U holda (5) dan $y = \frac{2}{1+3e^{-2t}}$ topiladi.



129-rasm

Bu funktsiyaning grafigi yuqoridagi chizmada berilgan. Chizmadagi egri chiziq *logistik chiziq* deyiladi.

2-masala. Biror korxonaning t vaqt momentida olgan daromadi $Y(t)$ investitsiya $I(t)$ va talab miqdori $C(t)$ lar yig'indisiga teng:

$$Y(t) = I(t) + C(t). \tag{6}$$

Xuddi tabiiy o'sish modeliga o'xshab, bu yerda ham daromadning o'sish tezligi investitsiya miqdoriga proportsional deb faraz qilamiz, ya'ni

$$bY'(t) = I(t), \tag{7}$$

bu yerda b - daromad o'sishining kapitalsig'imi koeffitsiyenti, u mahsulot narxi p o'zgarmas va $l = \frac{1}{pb}$ bo'lsa, (3) ga ekvivalent.

$C(t)$ funktsiyaning o'zgarishi daromad funktsiya $Y(t)$ ning o'zgarishiga qay darajada ta'sir qilishini ko'raylik.

Faraz qilaylik, $C(t)$ daromadning muayyan qismi bo'lsin: $C(t) = (1-m)Y(t)$, bu yerda m investitsiya normasi. (6) va (7) lardan

$$Y' = \frac{m}{b}Y \tag{8}$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglama (4) ga $p = const$ bo'lganda tengkuchli.

Ko'pincha talab funktsiyasi $C(t)$ oldindan ma'lum bo'ladi.

14-§. Oddiy differentsial tenglamalar sistemasi.

14.1. Differentsial tenglamalarning normal sistemasi. Quyidagi

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases} \qquad (1)$$

sistema normal sistema, deb ataladi.

Kuzatilayotgan yoki tadqiqot qilinayotgan ayrim jarayonlar modeli (1) ko'rinishdagi tenglamalar sistemasidan iborat bo'ladi.

1 - misol. A modda P va Q moddalarga parchalansin. Ularning har birini hosil bo'lish tezligi A moddaning parchalanmagan qismiga proportsional bo'lsin. Agar P va Q moddalarning t momentdagi miqdorlarini mos ravishda x va y desak, u holda A moddaning t momentdagi miqdori $a-x-y$ bo'ladi. Masala shartiga ko'ra bu miqdor x va y miqdorlarning hosilalariga proportsional, ya'ni

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = k_1(a - x - y), \\ \dfrac{dy}{dt} = k_2(a - x - y) \end{cases}$$

2 - misol. Biologiyadan ma'lumki, ayrim bakteriyalar ko'payishdan tashqari o'zining miqdorini kamaytirib turuvchi zahar ham ishlab chiqaradi. Faraz qilaylik, bakteriyaning miqdori N o'zining ko'payish tezligi dN/dt ga va zahar ishlab chiqarish tezligi dx/dt ga proportsional bo'lsin, bu yerda x zahar miqdori. U holda quyidagi sistemaga ega bo'lamiz:

$$\frac{dN}{dt} = kN - k_1 Nx, \quad \frac{dx}{dt} = k_2 N.$$

(1) sistemani integrallash deganda, (1) ni va quyidagi berilgan

$$y_1|_{x=x_0} = y_{10}, \; y_2|_{x=x_0} = y_{20}, \dots, y_n|_{x=x_0} = y_{n0} \qquad (2)$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi noma'lum $y_1, y_2, \dots, y_n$ funktsiyalarni topishni tushunamiz.

Bunday sistemalarni integrallash uning ko'rinishiga qarab, har xil usullar bilan bajarilishi mumkin. Shulardan bir nechtasini ko'rib chiqamiz.

(1) ning birinchi tenglamasini x bo'yicha differentsiallaylik:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}=\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\cdot\frac{dy_1}{dx}+\dots+\frac{\partial f_1}{\partial y_n}\cdot\frac{dy_n}{dx}.$$

Tenglikning o'ng tarafidagi dy_1/dx, dy_2/dx, $\dots,dy_n/dx$ hosilalarni (1) dan $f_1,f_2,\dots,f_n$ lar orqali ifodalari bilan almashtiramiz, natijada quyidagi tenglama hosil bo'ladi:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}=F_2(x,y_1,y_2,\dots,y_n)$$

Bu tenglamani differentsiallab, aynan yuqoridagidek almashtirishlar bajarsak:

$$\frac{d^3y_1}{dx^3}=F_3(x,y_1,y_2,\dots,y_n)$$

tenglama hosil bo'ladi. Bu jarayonni davom ettirib, nihoyat

$$\frac{d^ny_1}{dx^n}=F_n(x,y_1,y_2,\dots,y_n)$$

tenglamaga kelamiz. Endi hosil bo'lgan tenglamalardan quyidagi sistemani tuzib olaylik:

$$\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dx}=f_1(x,y_1,y_2,\dots,y_n),\\ \dfrac{d^2y_1}{dx^2}=F_2(x,y_1,y_2,\dots,y_n),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \dfrac{d^ny_1}{dx^n}=F_n(x,y_1,y_2,\dots,y_n)\end{cases}\qquad(3)$$

Bu sistemaning dastlabki $n-1$ ta tenglamasidan $y_2,y_3,\dots,y_n$ larni $x,y_1,y_1',\dots,y_1^{(n-1)}$ lar orqali ifodalab:

$$y_2=\varphi_2(x,y_1,y_1',\dots,y_1^{(n-1)}),\dots,y_n=\varphi_n(x,y_1,y_1',\dots,y_1^{(n-1)})\qquad(4)$$

sistemaning oxirgi tenglamasiga olib borib qo'yamiz:

$$\frac{d^ny_1}{dx^n}=\Phi(x,y_1,y_1',\dots,y_1^{(n-1)})\qquad(5)$$

Bu tenglamadan y_1 ni topamiz:

$$y_1=\psi_1(x,C_1,\dots C_n)\qquad(6)$$

Oxirgi tenglikni $n-1$ marotaba differentsiallab, (4) ga qo'ysak, qolgan $y_2, y_3, \ldots, y_n$ noma'lumlar ham topiladi:

$$y_1 = \psi_1(x, C_1, \ldots C_n),\ y_2 = \psi_2(x, C_1, \ldots C_n), \ldots,\ y_n = \psi_n(x, C_1, \ldots C_n)$$

Agar (2) boshlang'ich shartlar berilgan bo'lsa, mos $C_1, \ldots, C_n$ koeffitsientlarni topish xuddi bitta tenglama uchun bajarilgandek amalga oshiriladi.

Agar (1) ning o'ng tarafidagi funktsiyalar o'z o'zgaruvchilariga nisbatan chiziqli bo'lsa, u holda sistemani chiziqli normal sistema deb ataymiz. Chiziqli normal sistemaga mos keluvchi (5) tenglama ham chiziqli bo'ladi.

3-m i s o l. $\frac{dy}{dx} = y + z, \frac{dz}{dx} = y - z$ tenglamalar sistemasini yeching.

Yechish. Birinchi tenglamani x bo'yicha differentsiallaymiz:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx}$$

va undan y, dy/dx larni yo'qotamiz. Shu bilan tenglama

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2y = 0$$

ko'rinishga keladi. Buning xarakteristik tenglamasi $k_{1,2} = \pm\sqrt{2}$ il- dizlarga ega. Shuning uchun uning umumiy yechimi

$$y = C_1 e^{x\sqrt{2}} + C_2 e^{-x\sqrt{2}}$$

bo'ladi. z ni topish uchun bu yechimni sistemaning birinchi tenglamasiga qo'yamiz:

$$z = \frac{dy}{dx} - y = C_1(\sqrt{2} - 1)e^{x\sqrt{2}} - C_2(\sqrt{2} + 1)e^{x\sqrt{2}}.$$

Eslatma. Ayrim hollarda sistemaning tenglamalari ustida bir nechta almashtirishlar bajarib, yechimni topishga olib keladigan osongina integrallanadigan tenglama hosil qilish mumkin. Bu usulni integrallovchi kombinatsiyalar usuli, deb atashadi.

4 -m i s o l . $\frac{dx}{dt} = \frac{x}{2x + 3y}; \frac{dy}{dt} = \frac{y}{2x + 3y}$ tenglamalar sistemasini yeching.

Yechish. Avval birinchi integrallovchi kombinatsiyani tuzib olamiz. Buning uchun birinchi tenglamani ikkinchisiga bo'lamiz:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y}; \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}; \quad \ln x = \ln y + \ln C_1 \quad \text{yoki} \quad x = C_1 y.$$

Ikkinchi integrallovchi kombinatsiyani tuzish uchun birinchi tenglamani 2 ga va ikkinchi tenglamani 3 ga ko'paytirib, o'zaro qo'shamiz:

$$2\cdot\frac{dx}{dt}+3\cdot\frac{dy}{dt}=1;\quad 2dx+3dy=dt \quad \text{yoki} \quad 2x+3y=t+C_2.$$

Hosil bo'lgan tenglamalardan sistema tuzib olib, umumiy yechimni topamiz:

$$x=\frac{C_1(t+C_2)}{2C_1+3},\quad y=\frac{t+C_2}{2C_1+3}.$$

14.2. O'zgarmas koeffitsientli chiziqli differentsial tenglamalar sistemasi. Faraz qilaylik, bizga quyidagi

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n,\\ \dfrac{dx_2}{dt}=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \dfrac{dx_n}{dt}=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n\end{cases} \tag{7}$$

sistema berilgan bo'lsin, bu yerda barcha koeffitsientlar o'zgarmas.

Bu sistemani

$$\frac{dX}{dt}=AX$$

matritsa ko'rinishida ham yozish mumkin, bu yerda

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ . & & & .\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}X_1\\ X_2\\ \vdots\\ X_n\end{pmatrix},\quad \frac{dX}{dt}=\begin{pmatrix}\dfrac{dX_1}{dt}\\ \dfrac{dX_2}{dt}\\ \vdots\\ \dfrac{dX_n}{dt}\end{pmatrix}.$$

Berilgan (7) sistemaning yechimini

$$x_1=p_1e^{\lambda t},\quad x_2=p_2e^{\lambda t},\ \dots,x_n=p_ne^{\lambda t}$$

ko'rinishda izlaymiz. Agar bularni sistemaning tenglamalariga qo'yib, o'xshash hadlarni ixchamlasak, noma'lum $p_1,p_2,\dots,p_n$ koeffitsientlarga nisbatan quyidagi chiziqli bir jinsli algebraik tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)p_1 + a_{22}p_2 + \cdots + a_{1n}p_n = 0, \\ a_{21}p_1 + (a_{22}-\lambda)p_2 + \cdots + a_{2n}p_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}p_1 + a_{n2}p_2 + \cdots + (a_{nn}-\lambda)p_n = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Ma'lumki, bunday sistema hamisha birgalikda, masalan, hech bo'lmaganda nol $p_1 = 0, p_2 = 0, \ldots, p_n = 0$ yechimi mavjud. (8) sistema noldan farqli yechimga ega bo'lishi uchun uning determinanti nolga teng bo'lishi zarur va etarlidir:

$$\Delta(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Bu λ ga nisbatan n-darajali algebraik tenglama. Uni A matritsaning va shu vaqtning o'zida (7) sistemaning ham xarakteristik tenglamasi deb ataymiz.

Ma'lumki, bunday tenglama n ta $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ildizlarga ega. Ular A matritsaning xos sonlari bo'ladi. Har bir λ_k xos songa biror $(p_{1k}, p_{2k}, \ldots, p_{nk})$ xos vektor mos keladi.

Bu yerda uch hol yuz berishi mumkin.

1-hol. Barcha xos sonlar har xil: $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \ldots \neq \lambda_n$ va haqiqiy. U holda, (7) sistema n ta yechimga ega:

$\lambda = \lambda_1$ uchun: $x_{11} = p_{11}e^{\lambda_1 t}, x_{21} = p_{21}e^{\lambda_1 t}, \ldots, x_{n1} = p_{n1}e^{\lambda_1 t}$;

$\lambda = \lambda_2$ uchun: $x_{12} = p_{12}e^{\lambda_2 t}, x_{22} = p_{22}e^{\lambda_2 t}, \ldots, x_{n2} = p_{n2}e^{\lambda_2 t}$;

....

$\lambda = \lambda_n$ uchun: $x_{1n} = p_{1n}e^{\lambda_n t}, x_{2n} = p_{2n}e^{\lambda_n t}, \ldots, x_{nn} = p_{nn}e^{\lambda_n t}$.

Biz fundamental yechimlar sistemasini topdik. Umumiy yechim

$$\begin{aligned} x_1 &= C_1p_{11}e^{\lambda_1 t} + C_2p_{12}e^{\lambda_2 t} + \cdots + C_np_{1n}e^{\lambda_n t}, \\ x_2 &= C_1p_{21}e^{\lambda_1 t} + C_2p_{22}e^{\lambda_2 t} + \cdots + C_np_{2n}e^{\lambda_n t}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= C_1p_{n1}e^{\lambda_1 t} + C_2p_{n2}e^{\lambda_2 t} + \cdots + C_np_{nn}e^{\lambda_n t}. \end{aligned}$$

ko'rinishda bo'ladi.

5 - m i s o l . $\frac{dx_1}{dt} = 7x_1 + 3x_2$, $\frac{dx_2}{dt} = 6x_1 + 4x_2$ sistemaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Sistemaning xarakteristik tenglamasini tuzib olaylik:

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & 3 \\ 6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{yoki} \quad \lambda^2 - 11\lambda + 10 = 0.$$

Uning $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 10$ ildizlari sistemaning matritsasini xos sonlaridir. $\lambda_1 = 1$ ga mos keluvchi xos vektorni topish uchun

$$\begin{cases} (7-1)p_1 + 3p_2 = 0, \\ 6p_1 + (4-1)p_2 = 0 \end{cases}$$

sistemani tuzib olamiz. Bu bitta $2p_1 + p_2 = 0$ tenglamaga ekvivalent. Bundan (1;-2) vektorni aniqlaymiz.

Agar λ o'rniga $\lambda_2 = 10$ ni qo'ysak, quyidagi sistema hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} (7-10)p_1 + 3p_2 = 0, \\ 6p_1 + (4-10)p_2 = 0. \end{cases}$$

Bundan (1;1) vektor aniqlanadi.

U holda fundamental yechimlar: $\lambda_1 = 1$ da $x_{11} = e^t, x_{21} = -2e^t$; $\lambda_2 = 10$ da $x_{12} = e^{10t}, x_{22} = e^{10t}$, umumiy yechim esa

$$x_1 = C_1 e^t + C_2 e^{10t}, \quad x_2 = -2C_1 e^t + C_2 e^{10t}$$

bo'ladi.

2-hol. Xos sonlar har xil, lekin ularning ayrimlari kompleks. Umumiylikni buzmagan holda bu kompleks ildizlar $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ bo'lsin, deb faraz qilaylik. Bu ildizlarga

$$x_j^{(1)} = p_{j1} e^{(\alpha+i\beta)t}, \quad x_j^{(2)} = p_{j2} e^{(\alpha-i\beta)t}, \quad (j = 1,2,\ldots,n)$$

yechimlar mos keladi.

Aynan 10-§ ning 3-holiga o'xshagan mulohazalar bilan kompleks yechimning haqiqiy va mavhum qismlari ham yechim bo'lishini ko'rsatish mumkin. Shu sababli, $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ larga mos keladigan xususiy yechimlar sifatida

$$\tilde{x}_j^{(1)} = e^{\alpha t}(q_{j1} \cos \beta t + q_{j2} \sin \beta t), \quad \tilde{x}_j^{(2)} = e^{\alpha t}(q_{j3} \cos \beta t + q_{j4} \sin \beta t)$$

funktsiyalarni olish mumkin, bu yerda $q_{j1}, q_{j2}, q_{j3}, q_{j4}$ lar p_{j1}, p_{j2} lar orqali aniqlanadigan haqiqiy sonlar. Sistemaning umumiy yechimiga shu funktsiyalarning mos kombinatsiyalari kiradi.

6 - m i s o l . $\frac{dx_1}{dt} = -7x_1 + x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -2x_1 - 5x_2$ sistemaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Avval xarakteristik tenglamani tuzib olamiz:

$$\begin{vmatrix} -7-\lambda & 1 \\ -2 & -5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{yoki} \quad \lambda^2 + 12\lambda + 37 = 0.$$

Uning ildizlari: $\lambda_1=-6+i, \lambda_2=-6-i$. Birinchi $\lambda_1=-6+i$ xos songa mos keluvchi xos vektor (1; 1+i), ikkinchi $\lambda_2=-6-i$ xos songa mos keluvchi xos vektor (1; 1-i). U holda bu xos son va xos vektorlarga mos keluvchi berilgan sistemaning yechimlari quyidagicha:

$$x_1^{(1)}=e^{(-6+i)t}=e^{-6t}(\cos t+i\sin t),\quad x_2^{(1)}=(1+i)e^{(-6+i)t}=(1+i)e^{-6t}(\cos t+i\sin t),$$

$$x_1^{(2)}=e^{(-6-i)t}=e^{-6t}(\cos t-i\sin t),\quad x_2^{(2)}=(1-i)e^{(-6-i)t}=(1-i)e^{-6t}(\cos t-i\sin t).$$

yoki agar ularning haqiqiy va mavhum qismlarini ajratib yozsak:

$$\widetilde{x}_1^{(1)}=e^{-6t}\cos t,\quad \widetilde{x}_2^{(1)}=e^{-6t}(\cos t-\sin t),$$

$$\widetilde{x}_1^{(2)}=e^{-6t}\sin t,\quad \widetilde{x}_2^{(2)}=e^{-6t}(\cos t+\sin t)$$

funktsiyalarni xususiy yechim sifatida olish mumkin. Demak, umumiy yechim

$$x_1=C_1e^{-6t}\cos t+C_2e^{-6t}\sin t,$$

$$x_2=C_1e^{-6t}(\cos t-\sin t)+C_2e^{-6t}(\cos t+\sin t)$$

bo'ladi.

3-hol. Xos sonlarning ayrimlari haqiqiy va karrali.

Umumiylikni buzmagan holda, λ_1 xos son haqiqiy va m karrali bo'lsin, deb faraz qilamiz. Unga mos keluvchi sistemaning echimi

$$x_1=p_1(t)e^{\lambda_1 t},\ x_2=p_2(t)e^{\lambda_1 t},\ \ldots, x_n=p_n(t)e^{\lambda_1 t} \tag{9}$$

ko'rinishda bo'ladi, bu yerda $p_1(t), p_2(t), \ldots, p_n(t)$ lar darajalari *m-1* dan katta bo'lmagan ko'phadlar. Agar (9) ni (7) ga qo'yib, t larning bir xil darajali hadlari oldidagi koeffitsientlarni tenglasak, bu ko'phadlarning noma'lum koeffitsientlarini topish uchun chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Buning bajarilish tartibini quyidagi misolda ko'rib chiqaylik.

7 - m i s o l . $\frac{dx_1}{dt}=5x_1-x_2,\quad \frac{dx_2}{dt}=x_1+3x_2$ sistemaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Avval xarakteristik tenglamani yechib olamiz:

$$\begin{vmatrix}5-\lambda & -1\\ 1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0;\ \lambda^2-8\lambda+16=0;\ \lambda_1=\lambda_2=4.$$

$\lambda_1=4$ xos songa

$$x_1=e^{4t}(a_1t+a_2),\quad x_1=e^{4t}(b_1t+b_2)$$

yechimlar mos keladi. Ularni t bo'yicha differentsiallab, sistemaga qo'yamiz:

$$a_1e^{4t}+4(a_1t+a_2)e^{4t}=5e^{4t}(a_1t+a_2)-e^{4t}(b_1t+b_2),$$

$$b_1e^{4t}+4(b_1t+b_2)e^{4t}=e^{4t}(a_1t+a_2)+3e^{4t}(b_1t+b_2).$$

Agar bu tengliklarning har birini e^{4t} ga qisqartirib, t ning oldidagi koeffitsientlarni va ozod hadlarni tenglasak:

$$\begin{cases} 4a_1 = 5a_1 - b_1, \\ 4b_1 = a_1 + 3b_1, \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 + 4a_2 = 5a_2 - b_2, \\ b_1 + 4b_2 = a_2 + 3b_2 \end{cases}$$

sistemalarni hosil qilamiz. Bundan $a_1 = b_1; a_2 - b_2 = a_1 = b_1$ kelib chiqadi. Agar $a_1 = C_1; a_2 = C_2$ desak, $b_1 = C_1; b_2 = C_2 - C_1$ bo'ladi, shuning uchun sistemaning umumiy yechimi quyidagicha bo'ladi:

$$x_1 = e^{4t}(C_1 t + C_2), \quad x_2 = e^{4t}(C_1 t + C_2 - C_1)$$

Eslatma. O'zgarmas koeffitsientli chiziqli yuqori tartibli differentsial tenglamalar sistemasi ham aynan yuqoridagi tartibda ko'rib chiqilishi mumkin. Masalan, agar sistema

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 x_1}{dt^2} = a_{11} x_1 + a_{12} x_2, \\ \dfrac{d^2 x_2}{dt^2} = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \end{cases}$$

ko'rinishda bo'lsa, u holda uning xarakteristik tenglamasi

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda^2 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda^2 \end{vmatrix} = 0$$

bo'lib, uning ildizlariga mos keluvchi umumiy yechim

$$x_1 = C_1 p_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 p_2 e^{\lambda_2 t} + C_3 p_3 e^{\lambda_3 t} + C_4 p_4 e^{\lambda_4 t},$$
$$x_2 = C_1 q_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 q_2 e^{\lambda_2 t} + C_3 q_3 e^{\lambda_3 t} + C_4 q_4 e^{\lambda_4 t}$$

bo'ladi.

14.3. Bir jinsli bo'lmagan chiziqli o'zgarmas koeffitsientli differentsial tenglamalar sistemasini o'zgarmaslarni variatsiyalash usuli bilan yechish. Bizga

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n + f_1(t), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n + f_2(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \cdots + a_{nn} x_n + f_n(t) \end{cases} \tag{10}$$

sistema berilgan bo'lsin.

Faraz qilaylik, unga mos keluvchi bir jinsli (7) tenglamalar sistemasining umumiy yechimi ma'lum bo'lsin:

$$x_1 = C_1x_{11} + C_2x_{12} + \dots + C_nx_{1n},$$
$$x_2 = C_1x_{21} + C_2x_{22} + \dots + C_nx_{2n},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_n = C_1x_{n1} + C_2x_{n2} + \dots + C_nx_{nn}.$$

Berilgan (10) sistemaning umumiy yechimini

$$x_1 = C_1(t)x_{11} + C_2(t)x_{12} + \dots + C_n(t)x_{1n},$$
$$x_2 = C_1(t)x_{21} + C_2(t)x_{22} + \dots + C_n(t)x_{2n},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_n = C_1(t)x_{n1} + C_2(t)x_{n2} + \dots + C_n(t)x_{nn}$$

ko'rinishda izlaymiz, bu yerda $C_1(t), C_2(t), \dots, C_n(t)$ lar topilishi lozim bo'lgan noma'lum funktsiyalar. Bularni (10) ga qo'yamiz, u holda uning i-tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$C_1'x_{i1} + C_2'x_{i2} + \dots + C_n'x_{in} + C_1(x_1' - a_{11}x_{11} - a_{12}x_{12} - \dots - a_{1n}x_{1n}) + \dots$$
$$\dots + C_n(x_n' - a_{n1}x_{n1} - a_{n2}x_{n2} - \dots - a_{nn}x_{nn}) = f_i(t).$$

Qavs ichidagi yig'indilarning hammasi aynan nolga teng, chunki barcha $k = 1,2,\dots,n$ lar uchun $(x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn})$ lar bir jinsli (7) sistemaning yechimlaridir. Shuning uchun

$$C_1'x_{i1} + C_2'x_{i2} + \dots + C_n'x_{in} = f_i(t), \quad i = 1,2,\dots,n \tag{11}$$

sistemaga ega bo'lamiz. $(x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn})$, $k = 1,2,\dots,n$ lar chiziqli erkli bo'lgani uchun bu sistemaning asosiy determinanti

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ . & \dots & . \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

$C_1'(t), C_2'(t), \dots, C_n'(t)$ larni (11) dan aniqlab, integrallab chiqsak, barcha $C_1(t), C_2(t), \dots, C_n(t)$ lar, va demak, (10) ning umumiy yechimi topiladi.

8 - m i s o l . $\frac{dx}{dt} + 2x + 4y = 1 + 4t, \frac{dy}{dt} + x - y = \frac{3}{2}t^2$ sistemani yeching.

Yechish. Avval bir jinsli sistemani yechib olamiz:

$$\frac{dx}{dt} + 2x + 4y = 0, \frac{dy}{dt} + x - y = 0.$$

Buning uchun birinchi tenglamani differentsiallaymiz:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 4\frac{dy}{dt} = 0.$$

Ikkinchi tenglamadan $\frac{dy}{dt} = y - x$ ni va birinchi tenglamadan $4y = -\frac{dx}{dt} - 2x$ ni aniqlab, bu tenglamaga qo'ysak:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - 6x = 0$$

o'zgarmas koeffitsientli ikkinchi tartibli tenglama hosil bo'ladi. Uning umumiy yechimi

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-3t}$$

bo'ladi. Buni $y = -\frac{1}{4}\frac{dx}{dt} - \frac{1}{2}x$ ga qo'ysak:

$$y = -C_1 e^{2t} + \frac{1}{4} C_2 e^{-3t}$$

ham topiladi.

Endi berilgan bir jinsli bo'lmagan sistemani yechish uchun

$$x = C_1(t)e^{2t} + C_2(t)e^{-3t}, \quad y = -C_1(t)e^{2t} + \frac{1}{4}C_2(t)e^{-3t} \qquad (12)$$

deb faraz qilamiz. (12) ni berilgan sistemaga qo'ysak:

$$C_1'(t)e^{2t} + 4C_2'e^{-3t} = 1 + 4t, \quad -C_1'(t)e^{2t} + C_2'e^{-3t} = \frac{3}{2}t^2$$

sistema hosil bo'ladi. Bundan

$$C_1'(t) = \frac{1 + 4t - 6t^2}{5} e^{-2t}, \quad C_2'(t) = \frac{1 + 4t + \frac{3}{2}t^2}{5} e^{3t}.$$

Bularni integrallasak:

$$C_1(t) = \frac{t + 3t^2}{5} e^{-2t} + C_1, \quad C_2(t) = \frac{t + \frac{1}{2}t^2}{5} e^{3t} + C_2$$

hosil bo'ladi. Bularni (12) ga qo'yib sistemaning umumiy yechimini topamiz:

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-3t} + t + t^2, \quad y = -C_1 e^{2t} + \frac{1}{4} C e^{-3t} - \frac{1}{2} t^2.$$

15-§. Turg'unlik nazariyasi.

Ko'p hollarda differentsial tenglamalar yoxud tenglamalar sistemasining echimlari elementar funktsiyalar bilan berilmagani uchun ularni echish uchun taqribiy hisoblash usullari qo'llaniladi. Bu usullarning kamchiligi shundaki, ular faqat bitta xususiy yechimni topishga imkon beradi. Boshqa xususiy yechimni topish uchun bu usulni yana boshqatdan qo'llashga to'g'ri keladi. Bir xususiy yechimni bila turib, boshqa xususiy yechimlar to'g'risida biror fikr aytib bo'lmaydi.

Texnik va mexanik masalalarning aksariyatida yechimlarning konkret qiymatlari emas, balki bu yechimlarning biror nuqta atrofida yoki argument cheksiz ortib borganda o'zini qanday tutishi ko'proq qiziqtiradi. Bu masalalar bilan differentsial tenglamalarning sifatlash nazariyasi shug'ullanadi. Bu nazariyaga A.M.Lyapunov[1] va A.Puankare[2] lar asos solishgan.

Sifatlash nazariyasida ko'riladigan asosiy masalalardan biri bu yechimning turg'unlik masalasidir.

15.1. Lyapunov ma'nosidagi turg'unlik. Bizga quyidagi

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \tag{1}$$

tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin. Faraz qilaylik, $x_1(t)$, $x_2(t), \dots, x_n(t)$ lar (1) ning

$$x_1|_{t=0} = x_{10},\ x_2|_{t=0} = x_{20},\ \dots,\ x_n|_{t=0} = x_{n0} \tag{2}$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi bo'lsin.

1-ta'rif. Agar har qanday $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topilsaki, (1) ning boshlang'ich qiymatlari

$$|y_i(0) - x_{i0}| < \delta,\ i = 1, 2, \dots, n$$

tengsizliklarni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $y_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, yechimi uchun

$$|y_i(t) - x_i(t)| < \varepsilon,\ i = 1, 2, \dots, n$$

tengsizliklar barcha $t > 0$ lar uchun bajarilsa, u holda $x_1(t)$, $x_2(t), \dots, x_n(t)$ yechim "*Lyapunov ma'nosida turg'un*", deyiladi, aks holda bu yechim "*turg'un emas*", deyiladi.

---

[1] A.M.Lyapunov (1857-1918) - rus matematigi.
[2] Anri Puankare - farang matematigi.

Demak, yechim Lyapunov ma'nosida turg'un bo'ladi, agar boshlang'ich qiymatlari bilan unga yaqin bo'lgan boshqa har qanday yechim barcha $t>0$ lar uchun ham shu yechimga yaqin bo'lsa.

Agar Lyapunov ma'nosida turg'un bo'lgan yechim uchun bundan tashqari

$$\lim_{t\to\infty}|y_i(t)-x_i(t)|=0, \quad i=1,2,\dots,n$$

tengliklar ham o'rinli bo'lsa, u holda bu yechim "*asimptotik turg'un*", deb ataladi.

Bu ta'rifning ma'nosi quyidagicha: agar berilgan tenglamalar sistemasi biror harakatni ifodalasa, turg'un yechimlar holida boshlang'ich shartlarni yetarlicha kichik miqdorga o'zgartirganda harakat xarakteri o'zgarmaydi.

Aytish joizki, yechimning asimptotik turg'un ekanligidan uning Lyapunov ma'nosida turg'un bo'lishi kelib chiqmaydi.

1- m i s o l. $\frac{dx}{dt}=-y, \frac{dy}{dt}=x$ sistemaning $x(0)=0, y(0)=0$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini turg'unlikka tekshiring.

Yechish. Sistemaning berilgan boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi $x(t)\equiv 0, y(t)\equiv 0$ dir. Bunday yechimni biz sistemaning "***sukut nuqtasi***", deb ataymiz.

Sistemaning $x(0)=x_0, y(0)=y_0$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi har qanday boshqa yechimi

$$x(t)=x_0\cos t-y_0\sin t, \quad x(t)=x_0\sin t-y_0\cos t$$

ko'rinishda bo'ladi.

Ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son olaylik. Ayonki, har qanday $t>0$ lar uchun

$$|x_0\cos t-y_0\sin t|\le|x_0\cos t|+|y_0\sin t|\le|x_0|+|y_0|,$$

$$|x_0\sin t+y_0\cos t|\le|x_0\sin t|+|y_0\cos t|\le|x_0|+|y_0| \tag{3}$$

tengsizliklar o'rinlidir. Shuning uchun, agar $|x_0|+|y_0|<\varepsilon$ desak, u holda barcha $t>0$ lar uchun

$$|x_0\cos t-y_0\sin t|<\varepsilon, \quad |x_0\sin t+y_0\cos t|<\varepsilon \tag{4}$$

bo'ladi. Demak, agar masalan, $\delta(\varepsilon)=\varepsilon/2$ deb olsak, $|x_0|<\delta$, $|y_0|<\delta$ bo'lganda, (3) tengsizliklarga ko'ra, barcha $t>0$ lar uchun (4) tengsizliklar o'rinli bo'ladi, ya'ni sistemaning nol yechimi Lyapunov ma'nosida turg'un ekan, lekin u asimptotik turg'un emas.

Faraz qilaylik, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t),\dots,\varphi_n(t)$ lar (1) ning (2) boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi bo'lsin. Agar

$$y_i(t)=x_i(t)-\varphi_i(t), \quad i=1,2,\dots,n, \tag{5}$$

desak, u holda (1) sistema quyidagi

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = f_1(t, y_1 + \varphi_1(t), y_2 + \varphi_2(t), \dots, y_n + \varphi_n(t)) - f_1(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)), \\ \dfrac{dy_2}{dt} = f_2(t, y_1 + \varphi_1(t), y_2 + \varphi_2(t), \dots, y_n + \varphi_n(t)) - f_2(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dt} = f_n(t, y_1 + \varphi_1(t), y_2 + \varphi_2(t), \dots, y_n + \varphi_n(t)) - f_n(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \end{cases} \quad (6)$$

sistemaga almashadi. Bu sistema

$$y_1 \big|_{t=0} = 0, \ y_2 \big|_{t=0} = 0, \dots, y_n \big|_{t=0} = 0 \quad (7)$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi $y_i(t) \equiv 0$, $i = 1,2,\dots,n$, trivial yechimga ega.

Bundan quyidagi teorema kelib chiqadi.

1-teorema. (1) sistemaning (2) boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ yechimi Lyapunov ma'nosida (asimptotik) turg'un bo'lishi uchun (6) sistemaning (7) shartlarni qanoatlantiruvchi trivial yechimi Lyapunov ma'nosida (asimptotik) turg'un bo'lishi zarur va yetarlidir.

Demak, umumiylikni buzmagan holda, (1) sistemaning (7) shart- larni qanoatlantiruvchi trivial yechimini turg'unlikka tekshirsak kifoya ekan.

2-teorema (Lyapunov). Faraz qilaylik, (1) sistema $x_i(t) \equiv 0$, $i = 1,2,\dots,n$, trivial yechimga ega bo'lsin. Agar quyidagi

1) $\vartheta(x_1,\dots,x_n) \geq 0$ va faqat $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ bo'lgandagina $\vartheta \equiv 0$;

2) barcha $t \geq 0$ lar uchun

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0$$

shartlarni qanoatlantiruvchi differentsiallanuvchi biror $\vartheta(x_1,\dots,x_n)$ funktsiya mavjud bo'lsa, u holda $x_i(t) \equiv 0$, $i = 1,2,\dots,n$, trivial yechim Lyapunov ma'nosida turg'un bo'ladi.

Agar bundan tashqari, koordinatalar boshining yetarlicha kichik atrofining tashqarisida barcha $t \geq 0$ lar uchun

$$\frac{d\vartheta}{dt} \leq -\beta < 0$$

bo'lsa, bu yerda β- o'zgarmas son, u holda $x_i(t) \equiv 0$, $i = 1,2,\dots,n$, trivial yechim asimptotik turg'un bo'ladi.

$\vartheta(x_1,\dots,x_n)$ funktsiya "*Lyapunov funktsiyasi*", deb ataladi.

2 - m i s o l . $\frac{dx_1}{dt}=-x_1^5-x_2$, $\frac{dx_2}{dt}=x_1-x_2^3$ sistemaning $x_1|_{t=0}=0$,, $x_2|_{t=0}=0$, boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi trivial yechimini turg'unlikka tekshiring.

Yechish. $\vartheta(x_1,x_n)=x_1^2+x_2^2$ funktsiyani ko'raylik. Bu funktsiya uchun 2-teoremada qo'yilgan 1-shartning bajarilishi ayon, shu sababli 2-shartni tekshiramiz:

$$\frac{d\vartheta}{dt}=2x_1(-x_1^5-x_2)+2x_2(x_1-x_2^3)=-2(x_1^3+x_2^4)\le 0.$$

Agar $x_1\ne 0, x_2\ne 0$ bo'lsa, u holda barcha $t\ge 0$ lar uchun $\frac{d\vartheta}{dt}\le-\beta<0$ bo'ladi. Demak, berilgan sistemaning trivial yechimi asimptotik turg'un ekan.

1-eslatma. Lyapunov funktsiyasini $x_1,x_2,\dots,x_n$ larning quyidagi $\vartheta=\sum_{i,j}a_{ij}x_ix_j$ kvadratik forma ko'rinishida izlash tavsiya etiladi.

Bu funktsiyaga qo'yilgan birinchi shart bu kvadratik formaning musbat aniqlanganligini bildirgani uchun, a_{ij} koeffitsientlarni Silvester mezonining shartlarini qanoatlantiradigan qilib olinadi, ya'ni

$$a_{11}>0,\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}>0,\dots,\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ . & \cdots & .\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}>0.$$

2-eslatma. Agar (1) sistema biror harakatni ifodalab, t vaqtni bildirsa va u tenglamalarda oshkor ishtirok etmasa, ya'ni sistema ushbu

$$\begin{cases}\frac{dx_1}{dt}=f_1(x_1,x_2,\dots,x_n)\\ \frac{dx_2}{dt}=f_2(x_1,x_2,\dots,x_n)\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \frac{dx_n}{dt}=f_n(x_1,x_2,\dots,x_n)\end{cases}$$

ko'rinishda bo'lsa, u holda (1) avtonom sistema, deyiladi.

15.2. Sukut nuqtalarining eng sodda ko'rinishlari. Ushbu

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases} \tag{8}$$

sistema berilgan bo'lib, uning barcha koeffitsientlari o'zgarmas bo'lsin. $x(t) \equiv 0, y(t) \equiv 0$ bu sistemaning sukut nuqtasi bo'ladi, buni bevosita o'rniga qo'yish usuli bilan tekshirish mumkin. Bu nuqta turg'un bo'lishi uchun koeffitsientlar qanday shartlarni qanoatlantirishini tekshiraylik.

Aynan 13.2-§ dagidek yechimni

$$x_1 = p_1 e^{\lambda t}, \; x_2 = p_2 e^{\lambda t}, \ldots, x_n = p_n e^{\lambda t}$$

ko'rinishda izlaymiz. (8) ning

$$\Delta(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

xarakteristik tenglamasining ildizlarini $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ bilan belgilaylik.

3-eslatma. Agar $A = \|a_{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}}$, $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))^T$, desak, (8) quyidagi

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{9}$$

vektor ko'rinishga keladi. Bunda xarakteristik tenglamaning ildizlari A matritsaning xos sonlaridan iborat bo'ladi.

4-eslatma. 1-teoremaga ko'ra,

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t)$$

birjinsli bo'lmagan tenglamalar sistemasining ixtiyoriy $x(t)$ yechimining Lyapunov ma'nosida turg'un (asimptotik turg'un) bo'lishi uchun unga mos keluvchi bir jinsli (9) sistemaning trivial yechimini Lyapunov ma'nosida (asimptotik) turg'un bo'lishi zarur va yetarlidir.

Bu yerda uch hol yuz berishi mumkin.

1-hol. Barcha xos sonlar har xil: $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \ldots \neq \lambda_n$, haqiqiy va $\lambda_k < 0$, $k = 1,2,\ldots,n$ bo'lsin. U holda (8) ning umumiy yechimi

$$\begin{aligned} x_1 &= C_1 p_{11} e^{\lambda_1 t} + C_2 p_{12} e^{\lambda_2 t} + \cdots + C_n p_{1n} e^{\lambda_n t}, \\ x_2 &= C_1 p_{21} e^{\lambda_1 t} + C_2 p_{22} e^{\lambda_2 t} + \cdots + C_n p_{2n} e^{\lambda_n t}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= C_1 p_{n1} e^{\lambda_1 t} + C_2 p_{n2} e^{\lambda_2 t} + \cdots + C_n p_{nn} e^{\lambda_n t}. \end{aligned} \tag{10}$$

ko'rinishda bo'ladi. $C_1, C_2, \ldots, C_n$ koeffitsientlarni bu yechim (2) boshlang'ich shartlarni qanoatlantiradigan qilib tanlaymiz. Agar $t = 0$ desak:

$$C_1 p_{k1} + C_2 p_{k2} + \ldots + C_n p_{kn} = x_{k0}, \quad k = 1,2,\ldots,n$$

chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Bu yerda $\Delta = \det\|p_{ij}\| \neq 0$, chunki $(p_{1k}, p_{2k}, \ldots, p_{nk})$, $k = 1,2,\ldots,n$ lar chiziqli erkli xos vektorlar edi. U holda

$$C_i = \frac{1}{\Delta}\sum_{j=1}^{n} A_{ji} x_{j0}, \quad i = 1,2,\ldots,n,$$

bu yerda A_{ji} - p_{ji} ning Δ determinantdagi algebraik to'ldiruvchisi. Quyidagi

$$\max_{i,k=\overline{1,n}} |p_{i,k}| = p, \quad \max_{i,k=\overline{1,n}} |A_{i,k}| = A$$

belgilashlarni kiritaylik.

Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun $\delta(\varepsilon) = \varepsilon|\Delta|/(n^2 pA)$ desak, barcha $t > 0$ lar uchun $\left|e^{\lambda_k t}\right| < 1$, $k = 1,2,\ldots,n$, bo'lgani uchun $|x_{i0}| < \delta$, $i = 1,2,\ldots,n$, bo'lganda, $|x_i(t)| < \varepsilon$, $i = 1,2,\ldots,n$, bo'ladi, ya'ni sukut nuqta Lyapunov ma'nosida turg'un ekan. Bundan tashqari,

$$\lim_{t\to+\infty} |x_i(t)| = 0, \quad i = 1,2,\ldots,n,$$

va demak, sukut nuqta asimptotik turg'un ham ekan.

Agar $n = 2$ bo'lsa, x_1Ox_2 tekislik (1) sistemaning faza tekisligi, uning yechimlari esa, quyidagi

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{a_{11}x_1 + a_{12}x_2}{a_{21}x_1 + a_{22}x_x} \tag{11}$$

differentsial tenglamaning traektoriyalari, deb ataladi.

O(0,0) koordinatalar boshi (11) tenglamaning maxsus nuqtasi bo'ladi, chunki bu nuqta tenglama yechimining mavjudlik va yagonalik sohasiga tegishli emas.

(10) ko'rinishdagi yechim uchun bu maxsus nuqta turg'un tugun nuqta, deb ataladi. Bunda nuqta $t \to +\infty$ da traektoriya bo'ylab, maxsus nuqtaga yaqinlashadi deymiz.

2 - m i s o l. $\frac{dx}{dt} = -x, \frac{dy}{dt} = -2y$ sistemaning $x(0) = 0, y(0) = 0$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini turg'unlikka tekshiring.

Yechish. Sistemaning xarakteristik tenglamasi

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\lambda = -1, \lambda = -2$ ildizlarga ega. Sistemaning unga mos keluvchi yechimlari

$$x = C_1 e^{-t}, \quad y = C_2 e^{-2t}.$$

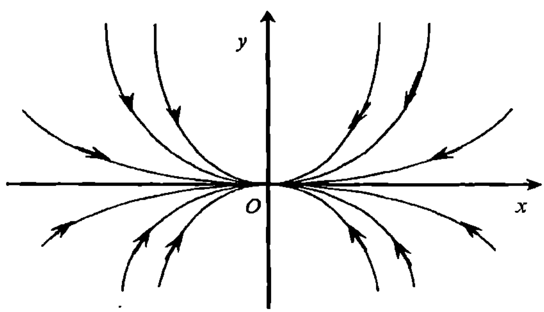
Bulardan boshlang'ich $x|_{t=0} = x_0, y|_{t=0} = y_0$ shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimlari

$$x = x_0 e^{-t}, \quad y = y_0 e^{-2t}. \tag{12}$$

Bundan ko'rinadiki, $t \to +\infty$ da $x(t) \to 0, y(t) \to 0$, ya'ni $x = 0, y = 0$ yechim turg'un. Endi faza tekisligiga o'taylik. (12) dan t parametrni yo'qotsak:

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 = \frac{y}{y_0}$$

parabolalar oilasini hosil qilamiz (129-rasmga qarang).



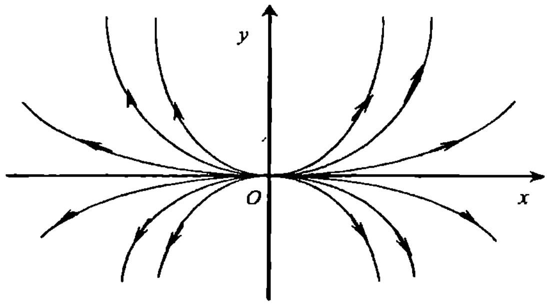
129-rasm.

(12) tenglama bu misol uchun quyidagicha

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}.$$

Bu tenglamaning O(0,0) maxsus nuqtasi turg'un tugun nuqtadir.

2-hol. Barcha xos sonlar har xil: $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \ldots \neq \lambda_n$, haqiqiy va



130-rasm.

$\lambda_k > 0, k = 1,2,\ldots,n$ bo'lsin. Bu holda ham yechim **(10)** ko'rinishda bo'ladi. $t \to +\infty$ da $e^{\lambda_k t} \to +\infty$, $k = 1,2,\ldots,n$, bo'lgani uchun boshlang'ich shartlar qanday bo'lishidan qat'iy nazar, $t \to +\infty$ da $x_k(t) \to \infty$, $k = 1,2,\ldots,n$, bo'ladi, ya'ni yechim turg'un emas.

$n = 2$ bo'lganda faza tekisligida sistemaning maxsus nuqtasi turg'un bo'lmagan tugun bo'ladi: $t \to +\infty$ da nuqta traektoriya bo'ylab $x = 0, y = 0$ sukut nuqtasidan uzoqlasha boradi.

3 - m i s o l . $\frac{dx}{dt} = x, \frac{dy}{dt} = 2y$ sistemaning yechimini turg'unlikka tekshiring.

Yechish. Bu sistema uchun xarakteristik tenglama

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\lambda = 1, \lambda = 2$ ildizlarga ega. Unga mos keluvchi yechimlar: $x = x_0 e^t$, $y = y_0 e^{2t}$. $t \to +\infty$ da $|x(t)| \to \infty, |y(t)| \to \infty$, ya'ni yechim turg'un emas.Agar t ni yo'qotsak:

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 = \frac{y}{y_0}$$

parabolalar oilasi hosil bo'ladi. O(0;0) maxsus nuqta turg'un bo'lmagan tugun nuqtadir (130-rasmga qarang).

3-hol. Xarakteristik tenglamaning ildizlari haqiqiy, lekin har xil ishorali. Umumiylikni buzmagan holda, faraz qilaylik,

$\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0, \ldots, \lambda_k < 0$, $1 \le k < n$, bo'lsin. U holda, agar, unga mos keluvchi umumiy yechimdagi $C_i p_{ik}, i = 1,2,\ldots,n;$ $1 \le k < n$, koeffitsientlarning kamida biri noldan farqli bo'lsa, $t \to +\infty$ da $x_k(t) \to \infty$, $1 \le k \le n$, bo'ladi, ya'ni yechim turg'un emas. Bunda sukut nuqtani turg'un bo'lmagan egar, deb ataymiz.

4 - m i s o l . $\frac{dx}{dt} = x, \frac{dy}{dt} = -2y$ sistemaning yechimini turg'unlikka tekshiring.

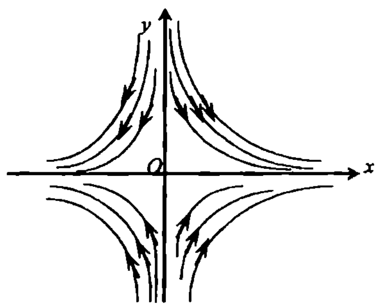
Yechish. Bu sistema uchun xarakteristik tenglama

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\lambda = 1, \lambda = -2$ ildizlarga ega. Unga mos keluvchi yechimlar: $x = x_0 e^t$, $y = y_0 e^{-2t}$. $t \to +\infty$ da $|x(t)| \to \infty$, ya'ni yechim turg'un emas. Agar t ni yo'qotsak:

$$yx^2 = y_0 x_0^2$$

tenglama hosil bo'ladi. Bu faza tekisligida giperbolalar oilasini ifodalaydi (131-rasmga qarang).



131-rasm.

Maxsus O(0;0) nuqta turg'un bo'lmagan egar nuqtadir.

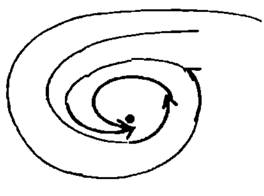
4-hol. Xarakteristik tenglamaning ayrim ildizlari kompleks. Umumiylikni buzmagan holda, faraz qilaylik, $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ bo'lib, qolganlari haqiqiy bo'lsin.

a) agar $\alpha < 0, \lambda_3 < 0, \ldots, \lambda_n < 0$ bo'lsa, u holda ularga mos keluvchi umumiy yechim

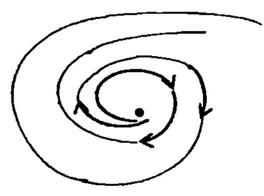
$$x_i = e^{\alpha t}(C_1 p_{i1} \sin\beta t + C_2 q_{i1} \cos\beta t) + C_3 p_{n3} e^{\lambda_3 t} + \cdots + C_n p_{nn} e^{\lambda_n t}, \quad i = 1,2,\ldots,n,$$

ko'rinishda bo'ladi. Shu sababli, $t \to +\infty$ da $x_k(t) \to 0, 1 \le k \le n,$ bo'ladi, ya'ni yechim asimptotik turg'un. Sukut nuqta bu holda turg'un focus, deb ataladi (132-rasmga qarang).

b) agar $\alpha > 0$ (λ_i, $i = 3,4,\ldots,n,$ larning birortasi musbat) bo'lsa, u holda $(C_1 p_{i1})^2 + (C_2 q_{i1})^2 \neq 0$ (musbat λ_i oldidagi $C_i p_{ik} \neq 0$) bo'lsa, $t \to +\infty$ da $x_k(t) \to \infty, 1 \le k \le n,$ bo'ladi, ya'ni yechim turg'un bo'lmaydi (133-rasmga qarang). Bu nuqtani turg'un bo'lmagan focus, deb ataymiz.



132-rasm.

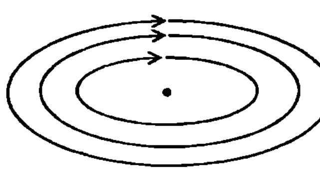


133-rasm.

v) agar $\alpha = 0, \beta \neq 0, \lambda_3 < 0, \ldots, \lambda_n < 0$ bo'lsa, u holda ularga mos keluvchi umumiy yechim

$$x_i = C_1 p_{i1} \sin(\beta t + \delta) + C_2 q_{i1} \cos(\beta t + \delta) + C_3 p_{n3} e^{\lambda_3 t} + \cdots + C_n p_{nn} e^{\lambda_n t},$$
$$i = 1,2,\ldots,n,$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu yechim Lyapunov ma'nosida turg'un, lekin, $t \to +\infty$ da $x_k(t), 1 \le k \le n,$ lar nolga intilmagani uchun yechim asipmtotik turg'un emas. Sukut nuqta bu holda markaz, deb ataladi (134-rasmga qarang).



134-rasm.

16-§. Differentsial tenglamalarni taqribiy hisoblash.

16.1. Eyler usuli. Bizga 1-tartibli

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

differentsial tenglamaning

$$y(x_0) = y_0 \qquad (2)$$

boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini topishni talab etuvchi Koshi masalasi berilgan bo'lsin. Faraz qilaylik, $f(x,y)$ funktsiya (x_0,y_0) nuqtaning biror atrofida mavjudlik teoremasining shartlarini qanoatlantirsin.

Quyida keltiriladigan "Eyler[1] usuli" (1)-(2) masalani analitik yechib bo'lmaydigan hollarda, bu yechimning biror $y(d)$ qiymatini, bu yerda $x_0 < d < x_0 + \delta$, taqriban hisoblash imkonini beradi. $[x_0,d]$ oraliqni

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = d$$

nuqtalar bilan n ta teng bo'laklarga bo'lamiz. $[x_i,x_{i+1}]$ oraliqning $h = x_{i+1} - x_i$ uzunligini hisoblash qadami, deb ataymiz. Yechimning x_i nuqtadagi taqribiy qiymatini y_i bilan belgilaylik.

(1) tenglamada hosilani har bir $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ nuqtada orttirmalar nisbati bilan almashtiraylik:

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x} = f(x_i, y_i)$$

yoki

$$\Delta y_i = f(x_i, y_i)\Delta x,$$

bu yerda $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i, i = 1,2,\ldots,n$. Xususan, $x = x_0$ nuqtada y_1 ni topish uchun

$$y_1 - y_0 = f(x_0, y_0)h$$

yoki

$$y_1 = y_0 + f(x_0 y_0)h \qquad (3)$$

tenglikni hosil qilamiz, bu yerda x_0, y_0, h - lar ma'lum sonlar.

Agar $x = x_1$ desak:

$$y_2 = y_1 + f(x_1 y_1)h$$

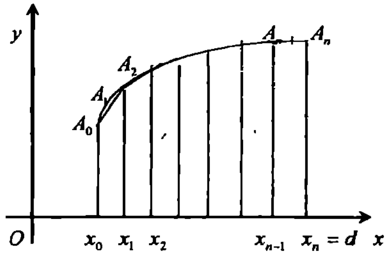
tenglik hosil bo'ladi, bu yerda x_1, h - lar ma'lum sonlar, y_1 esa (3) dan topiladi. Bu jarayonni boshqa nuqtalar uchun davom ettirsak, quyidagi rekurrent formula hosil bo'ladi:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h, \quad i = 1,2,\ldots,n. \qquad (4)$$

---

[1] Leonard Eyler (1707-1783)- ulug' matematik, Rossiya fanlar akademiyasining akademigi, kelib chiqishi bo'yicha shveytsariyalik.

Koordinatalar tekisligida $A_0(x_0, y_0)$, $A_1(x_1, y_1)$,..., $A_n(x_n, y_n)$ nuqtalarni



135-rasm.

birlashtirib, integral chiziqni taqriban ifodalovchi $A_0A_1A_2\dots A_{n-1}A_n$ siniq chiziqni hosil qilamiz. Bu chiziq "*Eyler siniq chizig'i* ", deb ataladi.

(1) tenglamaning $\Delta x = h$ bo'lgandagi Eyler siniq chizig'iga mos keluvchi taqribiy yechimini $y = y_n(x)$ deylik. Agar (1) tenglamaning (2) shartni qanoatlantiruvchi yagona yechimi mavjud bo'lsa, u holda $[x_0, d]$ oraliqda $\{y_n(x)\}$ ketma-ketlik aniq yechimga tekis yaqinlashadi.

16.2. Runge-Kutta usuli. Bu usul (1)-(2) masala uchun Eyler usuliga nisbatan yuqori tartibli yaqinlashishni beruvchi usullardan biri hisoblanadi. Umuman Eyler usulini Runge-Kutta usulining xususiy holi, deb qarash mumkin.

Faraz qilaylik, taqribiy yechimning x_k nuqtadagi y_k qiymati topilgan bo'lib, uning $x_{k+1} = x_k + h$ nuqtadagi y_{k+1} qiymatini hisoblash kerak bo'lsin.

Agar (x_k, y_k) larni (1) ga va uning x bo'yicha differentsiallangan ifodasiga qo'ysak:

$$y_k' = f(x_k, y_k) \tag{5}$$

$$y_k'' = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y'\right)_{\substack{x = x_k,\\ y = y_k}} \tag{6}$$

qiymatlarni topamiz.

Yechimning Teylor yoyilmasida $a = x_k, x = x_{k+1} = x_k + h$ deylik:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{1} y_k' + \frac{h^2}{2!} y_k'' + O(h^2).$$

Agar bu yerda (5) va (6) ifodalarni e'tiborga olsak:

$$\frac{y_{k+1}-y_k}{h}=y_k'+\frac{h}{2}y_k''+O(h^2)=f(x_k,y_k)+\frac{h}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot f\right)_{\substack{x=x_k\\ y=y_k}}+O(h^2)$$

bo'ladi. Ikkinchi qo'shiluvchini biror $\alpha\neq 0$ songa ko'paytirib bo'laylik:

$$\frac{y_{k+1}-y_k}{h}=f(x_k,y_k)+\frac{1}{2\alpha}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\alpha h+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\alpha hf+O(h^2)\right)_{\substack{x=x_k\\ y=y_k}}=$$

$$=f(x_k,y_k)-\frac{1}{2\alpha}f(x_k,y_k)+\frac{1}{2\alpha}\left(f(x,y)+\frac{\partial f}{\partial x}\alpha h+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\alpha hf+O(h^2)\right)_{\substack{x=x_k\\ y=y_k}}=$$

$$=\frac{2\alpha-1}{2\alpha}f(x_k,y_k)+\frac{1}{2\alpha}f(x_k+\alpha h,y_k+\alpha hf)=\frac{2\alpha-1}{2\alpha}k_1+\frac{1}{2\alpha}k_2,$$

bu yerda $k_1=f(x_k,y_k)$, $k_2=f(x_k+\alpha h,y_k+\alpha hk_1)$ deb belgilandi. Natijada quyidagi sxemaga keldik:

$$\frac{y_{k+1}-y_k}{h}=\frac{2\alpha-1}{2\alpha}k_1+\frac{1}{2\alpha}k_2. \tag{7}$$

Bu formuladagi α sonni yaqinlashish tartibi imkon qadar yuqoriroq bo'ladigan qilib tanlanadi. Aytish joizki, biz hosil qilgan (7) sxema har qanday $\alpha\neq 0$ son uchun ikkinchi tartibli yaqinlashishga ega.

16.3. 2-tartibli tenglama uchun Adams usuli. Bizga quyidagi

$$y''=f(x,y,y'), \tag{8}$$

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0' \tag{9}$$

Koshi masalasi berilgan bo'lsin. Bu masala yechimining $x=x_0$ nuqta atrofidagi Teylor formulasi bo'yicha yoyilmasini ko'raylik:

$$y=y_0+\frac{x-x_0}{1}y_0'+\frac{(x-x_0)^2}{2!}y_0''+\cdots+\frac{(x-x_0)^m}{m!}y_0^{(m)}+R_m. \tag{10}$$

Bu yoyilmadagi y_0 va y_0' qiymatlar ma'lum ((9) ga qarang), hosilaning y_0'', $y_0''',\dots$ qiymatlarini (8) dan quyidagi tartibda topiladi: agar (5) ning o'ng tarafiga boshlang'ich x_0,y_0 va y_0' qiymatlarni qo'ysak, y_0''ni topamiz:

$$y_0''=f(x_0,y_0,y_0').$$

(8) ni x bo'yicha differentsiallasak:

$$y'''=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot y'+\frac{\partial f}{\partial y'}\cdot y'' \tag{11}$$

bo'ladi, bu tenglikning o'ng tarafiga x_0,y_0,y_0' va y_0'' qiymatlarni qo'ysak, y_0''' ni topamiz:

$$y_0'''=\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot y'+\frac{\partial f}{\partial y'}\cdot y''\right)\Big|_{x=x_0,y=y_0,y'=y_0',y''=y_0''}.$$

(11) ni yana x bo'yicha differentsiallab, o'ng tarafiga x_0, y_0, y_0', y_0'' va y_0''' qiymatlarni qo'ysak, $y_0^{(4)}$ni topamiz. Shu tartibda davom etib, ixtiyoriy tartibli hosilaning $x=x_0$ nuqtadagi qiymatlarini topish mumkin. Shunday qilib, (10) ifodadagi qoldiqdan boshqa barcha hadlari aniqlanadi. Endi, agar qoldiqni tashlab, x ga ixtiyoriy qiymat bersak, yechimning shu nuqtadagi taqribiy qiymatini topishimiz mumkin. Qilinadigan xatolik $|x-x_0|$ miqdor kattaligiga va (10) yoyilmada olingan hadlar soniga bog'liq bo'ladi.

(10) yoyilmada to'rtta had olib, mos ravishda $x=x_0+h$ va $x=x_0+2h$ desak, y ning y_1 va y_2 qiymatlarini topamiz:

$$y_1=y_0+\frac{h}{1}y_0'+\frac{h^2}{2!}y_0''+\frac{h^3}{3!}y_0''', \quad y_2=y_0+\frac{2h}{1}y_0'+\frac{(2h)^2}{2!}y_0''+\frac{(2h)^3}{3!}y_0'''.$$

Xuddi shunday (10) ni differentsiallab, hosil bo'lgan ifodada $x=x_0+h$ va $x=x_0+2h$ desak, y' ning y_1' va y_2' qiymatlarini topamiz:

$$y_1'=y_0'+\frac{h}{1}y_0''+\frac{h^2}{2!}y_0''', \quad y_2'=y_0'+\frac{2h}{1}y_0''+\frac{(2h)^2}{2!}y_0'''.$$

Natijada y va y' ning uchtadan qiymati topildi: y_0, y_1, y_2 va y_0', y_1', y_2'. Endi bu qiymatlardan foydalanib, (8) tenglamadan quyidagilarni topamiz:

$$y_0''=f(x_0,y_0,y_0'),\ y_1''=f(x_1,y_1,y_1'),\ y_2''=f(x_2,y_2,y_2')$$

Faraz qilaylik, shu tartibda yechimning

$$y_0, y_1, y_2, \ldots, y_k$$

qiymatlarini va uning hosilalarining

$$y_0', y_1', y_2', \ldots, y_k';\ y_0'', y_1'', y_2'', \ldots, y_k''$$

qiymatlarini topgan bo'laylik. Quyidagi ifodalarni

$$\Delta y_0=y_1-y_0,\ \Delta y_1=y_2-y_1,\ \ldots,\Delta y_{k-1}=y_k-y_{k-1}$$

1-tartibli ayirmalar, deb ataymiz. 2-tartibli ayirmalar, deb esa

$$\Delta^2 y_0=\Delta y_1-\Delta y_0=y_2-2y_1+y_0,$$

$$\Delta^2 y_1=\Delta y_2-\Delta y_1=y_3-2y_2+y_1,$$

....

$$\Delta^2 y_{k-2}=\Delta y_{k-1}-\Delta y_{k-2}=y_k-2y_{k-1}+y_{k-2}$$

ifodalarga aytamiz.

Agar (10) Teylor formulasida x_0 ning o'rniga x_k ni, x ning o'rniga esa $x_{k+1} = x_k + h$ qo'ysak:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{1} y_k' + \frac{h^2}{2!} y_k'' + \cdots + \frac{h^m}{m!} y_k^{(m)} + R_m$$

qiymatni topish mumkin. Biz bu yerda beshta had bilan kifoyalansak ham bo'ladi:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{1} y_k' + \frac{h^2}{2!} y_k'' + \frac{h^3}{3!} y_k^{(3)} + \frac{h^4}{4!} y_k^{(4)}. \qquad (12)$$

Bu formuladagi noma'lum $y_k^{(3)}, y_k^{(4)}$ qiymatlarni topish uchun (10) da $x_0 = x_k, x - x_k = -h$ deb y_{k-1}'' ni va $x_0 = x_k, x - x_k = -2h$ deb y_{k-2}'' ni Teylor formulasiga yoyamiz:

$$\dot{y}_{k-1} = \dot{y}_k + \frac{(-h)}{1} y_k''' + \frac{(-h)^2}{2!} y_k^{(4)}, \qquad (13)$$

$$\dot{y}_{k-2} = \dot{y}_k + \frac{(-2h)}{1} \dot{y}_k + \frac{(-2h)^2}{2!} y_k^{(4)}. \qquad (14)$$

(13) dan

$$\Delta \dot{y}_{k-1} = \dot{y}_k - \dot{y}_{k-1} = \frac{h}{1} y_k^{(3)} - \frac{h^2}{2!} y_k^{(4)} \qquad (15)$$

tenglikni hosil qilamiz. Agar (13) ning hadlaridan (14) ning hadlarini ayirsak, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\Delta y_{k-2}' = y_{k-1}' - y_{k-2}' = \frac{h}{1} y_k^{(3)} - \frac{3h^2}{2!} y_k^{(4)}. \qquad (16)$$

Endi (15) dan (16) ni hadma-had ayiramiz:

$$\Delta^2 \dot{y}_{k-2} = \Delta \dot{y}_{k-1} - \Delta \dot{y}_{k-2} = h^2 y_k^{(4)}.$$

Bundan

$$y_k^{(4)} = \frac{1}{h^2} \Delta^2 \dot{y}_{k-2}.$$

Agar buni (16) ga qo'ysak:

$$y_k^{(3)} = \frac{\Delta \dot{y}_{k-1}}{h} + \frac{\Delta^2 \dot{y}_{k-2}}{2h}$$

kelib chiqadi. Topilgan bu qiymatlarni (12) ga qo'yaylik:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{1} y_k' + \frac{h^2}{2!} \dot{y}_k + \frac{h^2}{3!} \Delta \dot{y}_{k-1} + \frac{3h^2}{4!} \Delta^2 \dot{y}_{k-2}.$$

Bu tenglik "*Adams formulasi*", deb ataladi. U yechimning uchta avvalgi qiymatini bilgan holda, keyingi qiymatini topishga imkon beradi.

MUNDARIJA

3 – BOB
TEKISLIKDAGI ANALITIK GEOMETRIYA

4 – BOB
FAZODAGI ANALITIK GEOMETRIYA

5 – BOB
O'ZGARUVCHI VA O'ZGARMAS MIQDORLAR

6 – BOB
FUNKTSIYA. FUNKTSIYANING LIMITI.

7 – BOB
BIR O'ZGARUVCHILI FUNKTSIYA UCHUN DIFFERENTSIAL HISOB

8 – BOB
HOSILALAR YORDAMIDA FUNKTSIYALARNI TEKSHIRISH

9 – BOB
KOMPLEKS SONLAR. KO'PHADLAR

10 – BOB
ANIQMAS INTEGRAL

11 – BOB
ANIQ INTEGRAL

12 – BOB
ANIQ INTEGRALNING TATBIQLARI. TAQRIBIY HISOBLASH USULLARI

13 – BOB
KO'P O'ZGARUVCHILI FUNKTSIYANING DIFFERENTSIAL HISOBI

14 – BOB
DIFFERENTSIAL TENGLAMALAR

DAVRON G'ANIEVICH RAHIMOV

OLIY MATEMATIKA

I

Muharrir: E. Bozorov

Bosishga ruxsat etildi:	17.01.06
Qog'oz bichimi	30x42 1/8
Hisob - nashr tabog'i:	28,8 б.т
Adadi:	500
Buyurtma	№ 16

"IQTISOD-MOLIYA" nashriyoti, 700084, Toshkent, H. Asomov ko'chasi, 7-uy

Toshkent Moliya instituti bosmaxonasida «RISO» nusxa ko'paytirish qurilmasida chop etildi.

700084, Toshkent shahri H.Asomov ko'chasi, 7-uy.