O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

ABU RAYHON BERUNIY NOMIDAGI
TOSHKENT DAVLAT TEXNIKA UNIVERSITETI

"OLIY MATEMATIKA" FANIDAN MA'RUZALAR MATNI

I-QISM

TOSHKENT 2005

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

ABU RAYHON BERUNIY NOMIDAGI
TOSHKENT DAVLAT TEXNIKA UNIVERSITETI

«OLIY MATEMATIKA» FANIDAN MA'RUZALAR MATNI

1-QISM

TOSHKENT 2005

Tuzuvchilar: Ushbu ma'ruzalar matni «2-oliy matematika» kafedrasining:

1. I.Boymurodov
2. E.Q.Qayumov
3. F.O'.Nosirov
4. O.Ubaydullayev
5. A.Yusupov

professor-o'qituvchilari tomonidan ToshDTUning mexanika, tog'-kon, neft va gaz fakultetlarida texnika yo'nalishi bo'yicha bakalavrlar tayyorlash uchun oliy matematika fanining namunaviy dasturiga ko'ra o'qilgan ma'ruzalar asosida qayta tuzilgan.

TAQRIZCHILAR:

1. O'zb MU professori, f.-m.f.d. S. Abdinazarov.

2. ToshDTU «1-Oliy matematika» kafedrasining dotsenti, f.-m.f.n. Sh.I.Todjiyev.

Abu Rayhon Beruniy nomli Toshkent davlat texnika universitetining ilmiy-uslubiy kengashi qarori asosida chop etildi.

KIRISH

Matematik tadqiqot usullari hozirgi zamon fan va texnikasida o'ziga xos muhim o'ringa ega. Hisoblash texnikasining rivojlanishi va uning inson faoliyatining barcha jabhalaridagi tadbiqini kengayishi bilan bog'liq bo'lishligi oqibatida, ayniqsa, matematikaning ahamiyati yanada oshdi. Bu esa muhandis mutaxassislarning matematik tayyorgarligi yuqori bo'lishligiga doir bo'lgan talabni yanada oshirish zaruriyatini vujudga keltiradi.

Matematika – fani fundamental fanlardan biri bo'lib, bu har doim tabiiy va texnika fanlarini taraqqiy etishda muhim o'rin egallagan.

Matematika fanini taraqqiy etishida o'rta asr olimlaridan Muso al-Xorazmiy, Ahmad al-Farg'oniy, Abu Rayhon Beruniy, Mirzo Ulug'bek va boshqalar juda katta hissa qo'shganlar.

O'zbek matematiklarining matematika fani sohasidagi xizmatlarini yuqori baholab, O'zbekiston Respublikasi Prezidenti I.A.Karimovning "O'zbekiston XXI asr bo'sag'asida" asarida shunday deydi: **"Matematikaning "ehtimollar nazariyasi va matematik statistika", "differensial tenglamalar nazariyasi", "matematika-fizika tenglamalari", "funksional analiz" sohalari bo'yicha erishilgan natijalar respublikadan tashqarida ham ma'lum".**

Yuqorida aytilgan natijalarga ega bo'lishda matematiklaridan V.I. Romanovskiy, T.N. Qori-Niyoziy, T.A. Sarimsakov, S.X. Sirojdinov, I.S. Artanix, M.S. Salohiddinov, Sh.A.Achilov, T.A.Azlarov, Sh.A.Alimov, D.X.Xojiyev va boshqalarning xizmatlari nihoyatda kattadir.

Mamlakatimizda barcha yo'nalishlar bo'yicha bakalavrlar tayyorlash tizimiga o'tilgach, barcha fanlar bo'yicha o'quv rejalari va tipik dasturlarni davlat standartiga qo'yish zarurati tug'ildi. Shu bilan birga xalqaro ta'lim berish standartlarini qo'llash, ajdodlarimizning boy milliy meroslarini shu jarayonga jalb qilish kerak bo'ldi. Har bir yo'nalish bir necha mutaxassisliklarni o'z ichiga olgani uchun, mamlakatimizdagi barcha texnik oliy o'quv yurtlarida bakalavrlar tayyorlash bo'yicha oliy matematika fanidan o'zbek tilidagi darslik tayyorlash muammosi paydo bo'ldi. Tavsiya etilayotgan ushbu ma'ruzalar matni ana shu maqsadlarni ko'zda tutadi.

Bu ma'ruzalar matni ToshDTU «2-oliy matematika» kafedrasi professor-o'qituvchilari tomonidan tayyorlanib, ToshDTUning ilmiy-uslubiy ishlar bo'yicha oliy matematikadan ishni muvofiqlashtirish kengashida muhokama qilindi.

Ushbu ma'ruzalar matni oliy matematikaning barcha jabhalarini o'z ichiga olib, **har bir bob bo'yicha oliy matematikaning injenerlik ishiga tadbiqi ko'rsatilgan**. U oliy o'quv yurtlarida dastlabki ikki bosqichda 456 soatlik auditoriya darslariga mo'ljallangan 112 ta ma'ruzadan iborat. To'plamning mazkur 1-qismiga 1-semestrda o'qiladigan 28 ta ma'ruza kiritilgan.

1-ma'ruza.

DETERMINANTLAR

1.1. Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar. Quyidagi a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} haqiqiy sonlardan tuzilgan

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

kvadrat jadvalga 2-tartibli kvadrat matritsa deyiladi, bu yerda a_{ij}-uning elementlari, a_{11}, a_{12} va a_{21}, a_{22} lar uning satr elementlari, a_{11}, a_{21} va a_{12}, a_{22} ustun elementlari deb ataladi. a_{ij} ning birinchi indeksi i satr raqami, j ustun raqamini bildiradi. Misol uchun, a_{21} 2-satr va 1-ustunda joylashgan. Bu matritsaning determinanti deb, quyidagi songa aytamiz:

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{1}$$

Xuddi shunday,

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

kvadrat jadvalni 3-tartibli kvadrat matritsa deb atasak, uning determinanti deb quyidagi sonni aytamiz:

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{12}a_{23}a_{31}- \tag{2}$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

(1) va (2) determinantlar mos ravishda 2-tartibli va 3-tartibli determinantlar deb ham ataladi.

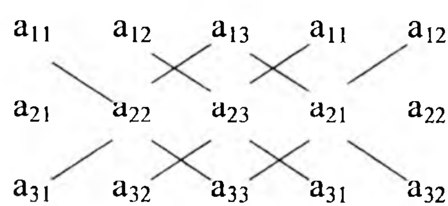
(2) determinantni hisoblash uchun «uchburchaklar usuli» deb ataluvchi quyidagi diagrammadan foydalanish mumkin:

a) (+) b) (-)

1-rasm.

Har bir diagrammada tutashtirilgan elementlar o'zaro ko'paytirilib, keyin natijalar qo'shiladi,
a) diagrammadagi yig'indi «+» ishorasi bilan,
b) diagrammadagi yig'indi esa «-» ishora bilan olinib, ikkala natija o'zaro qo'shiladi.

3-tartibli determinantlarni hisoblash uchun «Sarryus usuli» deb ataluvchi quyidagi diagramma ham mavjud:



2-rasm.

bu yerda tutashtirilgan elementlar o'zaro ko'paytirilib, asosiy diagonalga parallel tutashtirilganlari alohida qo'shilib «+» ishora bilan, yon diagonalga parallel tutashtirilganlari alohida qo'shilib «-» ishora bilan olinib, natijalar qo'shiladi.

1.2. Determinantlarning xossalari.

1. Agar determinantning barcha satr elementlarini ustun elementlariga yoki aksincha almashtirilsa, uning qiymati o'zgarmaydi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

2. Agar determinantning ikki yonma-yon turgan satr (ustun) elementlarini o'rnini mos ravishda almashtirsak, determinant qiymati qarama-qarshi ishoraga o'zgaradi:

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} = -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

3. Agar determinantning biror satri (ustun) elementlari umumiy ko'paytuvchiga ega bo'lsa, u holda bu ko'paytuvchini determinant tashqarisiga chiqarish mumkin:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & \lambda a_{22} \end{vmatrix} = \lambda a_{11}a_{22} - \lambda a_{12}a_{21} = \lambda(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = \lambda\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

4. Agar determinantning biror satr (ustun) elementlari mos ravishda boshqa yo'l (ustun) elementlariga proportsional bo'lsa, u holda determinant qiymati nolga teng bo'ladi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \lambda a_{11} \\ a_{21} & \lambda a_{21} \end{vmatrix} = \lambda a_{11}a_{21} - \lambda a_{11}a_{21} = \lambda(a_{11}a_{21} - a_{11}a_{21}) = \lambda\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix} = 0.$$

Xususan, agar $\lambda=0$ bo'lsa, determinant qiymati nolga tengdir.

5. Agar determinantning yo'l (ustun) elementlari ikki ifodaning yig'indisi ko'rinishida bo'lsa, u holda determinant ikki determinant yig'indisi ko'rinishida yozilishi mumkin:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}^{I} + a_{12}^{II} \\ a_{21} & a_{22}^{I} + a_{22}^{II} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}^{I} \\ a_{21} & a_{22}^{I} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}^{II} \\ a_{21} & a_{22}^{II} \end{vmatrix}$$

6. Agar determinantning yo'l (ustun) elementlarini biror $\lambda \neq 0$ songa ko'paytirib, mos ravishda boshqa yo'l (ustun) elementlariga qo'shsak, determinant qiymati o'zgarmaydi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+\lambda a_{11} \\ a_{21} & a_{22}+\lambda a_{21} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \lambda a_{11} \\ a_{21} & \lambda a_{21} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Yuqorida keltirilgan xossalar determinant uchinchi va undan yuqori tartibli bo'lganda ham o'rinlidir.

Keyingi xossalarni kiritish uchun uchinchi tartibli Δ determinantdan foydalanamiz,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Berilgan uchinchi tartibli determinantning i-yo'li va j-ustunini o'chirishda hosil bo'lgan ikkinchi tartibli determinant a_{ij} elementning minori deyiladi va M_{ij}-deb belgilanadi.

Masalan, a_{11} elementning minori

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Xuddi shuningdek, a_{12}-niki

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ga teng va hokazo.

Qo'yidagi $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ ifoda a_{ij} elementning algebraik to'ldiruvchisi deyiladi. a_{11} elementning algebraik to'ldiruvchisi

$$A_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$ a_{12}-elementniki esa

$$A_{12}=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$ va hokazo.

7. Determinantning biror yo'l (ustun) elementlarini mos ravishda o'zining algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytirib qo'shsak, u holda yig'indi determinant qiymatiga teng bo'ladi. Haqiqatdan,

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \qquad \Delta = a_{11}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{13}A_{13}$$

$$\Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \qquad \Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$$

$$\Delta = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} \qquad \Delta = a_{31}A_{31} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}$$

Tengliklarning to'g'ri ekanligini isbotlash qiyin emas.

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) +$$

$$+ a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

8. Determinantning biror yo'l (ustun) elementlarini mos ravishda boshqa yo'l (ustun) elementlarining algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytirib qo'shsak, u holda yig'indi nolga teng bo'ladi. Masalan,

$$a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}=0 \qquad a_{11}A_{12}+a_{21}A_{22}+a_{31}A_{32}=0$$
$$a_{11}A_{31}+a_{12}A_{32}+a_{13}A_{33}=0 \qquad a_{11}A_{13}+a_{21}A_{23}+a_{23}A_{33}=0$$

va hokazo. Haqiqatdan,

$$a_{11}A_{31}+a_{12}A_{32}+a_{13}A_{33}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}+$$
$$+a_{13}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{12}a_{23}-a_{11}a_{13}a_{22}-a_{11}a_{12}a_{23}+$$
$$+a_{12}a_{13}a_{21}+a_{11}a_{13}a_{22}-a_{12}a_{13}a_{21}=0$$

Yuqorida keltirilgan xossalar quyida kiritiladigan n-tartibli determinantlar uchun ham o'rinlidir.

1.3. *n*-tartibli determinantlar. Birinchi n ta natural sonlarning $\{1,2,\ldots,n\}$ to'plamiga o'zini har qanday π mos qo'yish n-tartibli o'rinlashtirish deyiladi. Har qanday n-tartibli π o'rinlashtirish quyidagicha yozilishi mumkin:

$$\pi=\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ \alpha_{i_1} & \alpha_{i_2} & \cdots & \alpha_{i_n} \end{pmatrix}$$

xususan,

$$\pi=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

kanonik o'rinlashtirish deyiladi.

Agar $i<j$ bo'lib, $\alpha_i>\alpha_j$ bo'lsa π o'rinlashtirishda (i,j) juftlik inversiyani tashkil etadi deymiz. Agar barcha invers juftliklar soni $S(\pi)$ juft bo'lsa, π o'rinlashtirish juft, agar $S(\pi)$ toq bo'lsa, π o'rinlashtirish toq deyiladi.

Misol. Quyidagi

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

o'rinlashtirishning juft yoki toq ekanligini aniqlang.

Yechish: Berilgan o'rinlashtirishni kanonik ko'rinishda yozib olamiz:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

va inversiyalar sonini hisoblaymiz. Invers juftliklarni (1,4), (2,3), (2,4), (3,4) lar tashkil etgani uchun, $S(\pi)=4$, demak, π-juft o'rinlashtirish ekan.

Ta'rif. Quyidagi:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Kvadrat matritsaning n-tartibli determinanti deb, quyidagi songa aytiladi:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\pi} (-1)^{S(\pi)} a_{1,\pi(1)} \cdots a_{n,\pi(n)}$$

bu yerda yig'indi barcha n-tartibli o'rinlashtirishlar bo'yicha bajariladi.

Bu ta'rifni tushunish uchun n=3 bo'lgan holini ko'raylik. Barcha 3-tartibli o'rinlashtirishlar quyidagicha bo'ladi:

$$\pi_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\quad \pi_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},\quad \pi_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},$$
$$\pi_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix},\quad \pi_5=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix},\quad \pi_6=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}.$$

Har bir o'rinlashtirish uchun inversiya sonini hisoblasak: $S(\pi_1)=0$, $S(\pi_2)=2$, $S(\pi_3)=2$, $S(\pi_4)=3$, $S(\pi_5)=1$, $S(\pi_6)=1$ .ekanligiga ishonch hosil qilamiz. U holda ta'rifga ko'ra:

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{12}a_{23}a_{31}-$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

ya'ni 3-tartibli determinant uchun avval keltirilgan formulani hosil qildik.

Yuqoridagiga o'xshab, n-tartibli determinant uchun ham algebraik to'ldiruvchini kiritish mumkin. u holda 2-tartibli va 3-tartibli determinantlarning barcha xossalari n-tartibli determinantlar uchun ham o'rinli bo'ladi. Xususan,

$$\det A=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}\qquad (\mathrm{i}=1,\dots,\mathrm{n})\qquad (3)$$

$$\det A=\sum_{i=1}^{n}a_{ik}A_{ik}\qquad (\mathrm{k}=1,\dots,\mathrm{n})\qquad (4)$$

bu yerda A_{ik} algebraik to'ldiruvchilar n-1 tartibli determinantlardir, shu sababli, (3), (4) formulalarni n-tartibli determinantni hisoblashning tartibini pasaytirish yoki satr va ustun elementlari bo'yicha yoyish usuli deb ham atashadi.

Misol. Hisoblang:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

Yechish: Masalan 3-ustun elemenlarini avval 2-ustunga va -2 ga ko'paytirib 1-ustunga qo'shamiz:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ -9 & 7 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ -9 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

3-ustunni -4 ga va 3 ga ko'paytirib, mos ravishda 1- va 2- ustunlarga qo'shsak:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -13 & 10 & 3 \\ -13 & 10 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} -13 & 10 \\ -13 & 10 \end{vmatrix} = 0$$

2-ma'ruza.

MATRITSALAR

2.1. Matritsalar ustida arifmetik amallar.

Ta'rif: $m\times n$ o'lchamli matritsa deb, a_{ij}, $i=1,2,\ldots,m$, $j=1,2,\ldots,n$ sonlardan tuzilgan m ta satr, n ta ustunli quyidagi

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

jadvalga aytamiz. Matritsa qisqacha, $A=||a_{ij}||$ ko'rinishda ham yozilishi mumkin.

Agar $m=n$ bo'lsa, A kvadrat matritsa deyiladi.

Agar barcha $i=1,2,\ldots,m$, $j=1,2,\ldots,n$ lar uchun $a_{ij}=b_{ij}$ bo'lsa, bir xil o'lchamli $A=||a_{ij}||$ va $B=||b_{ij}||$ matritsalarni teng deymiz, ya'ni $A=B$.

Bir xil o'lchamli $A=||a_{ij}||$ va $B=||b_{ij}||$ matritsalarni yig'indisi $A+B$ deb, shunday $S=||s_{ij}||$ matritsaga aytamizki, bunda $s_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, $i=1,2,\ldots,m$, $j=1,2,\ldots,n$ bo'ladi.

Misol 1.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 5 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -4 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 7 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$A=||a_{ij}||$ matritsani α songa ko'paytmasi deb, A matritsani barcha elementlarini α ga ko'paytirishdan hosil bo'ladigan $V=||b_{ij}||$, $b_{ij}=\alpha a_{ij}$, $i=1,2,\ldots,m$, $j=1,2,\ldots,n$, matritsaga aytamiz.

Misol 2.

$$3\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\\ -1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 9 & -3\\ -3 & 12\end{pmatrix}$$

mxn o'lchamli $A=||a_{ij}||$ matritsaning nxk o'lchamli $B=||b_{ij}||$ matritsaga ko'paytmasi deb, elementlari quyidagi

$$s_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ \dots\ +a_{in}b_{nj},\ i=1,2,\dots,m,\ j=1,2,\ \dots,\ n.$$

formulalardan aniqlanadigan mxk o'lchamli $S=||s_{ij}||$ matritsaga aytamiz.

Misol 3.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 4 & 0\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+6 & 4-2 & 0+2\\ 0-3 & 0+1 & 0-1\\ 3+3 & 12-1 & 0+1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}7 & 2 & 2\\ -3 & 1 & -1\\ 6 & 11 & 1\end{pmatrix}=C$$

Agar $m\neq k$ bo'lsa, $V\cdot A$ ko'paytmani bajarib bo'lmaydi, lekin agar $m=k$ bo'lsa, umumiy holda $A\cdot V=V\cdot A$ bo'lmaydi, chunki $A\cdot V$ mxm o'lchamli, $V\cdot A$ esa nxn o'lchamli matritsa bo'ladi. Hatto $m=n$ bo'lgan holda ham matritsalar ko'paytmasi uchun kommutativlik (o'rin almashtirish) xossasi o'rinli emas. Masalan,

$$A=\begin{pmatrix}3 & 4 & 0\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}.$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -3 & -2 & -4 \\ 9 & 7 & 11 \end{pmatrix}, \qquad A\cdot B=\begin{pmatrix} 7 & 7 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \\ 18 & 15 & 6 \end{pmatrix},$$

ya'ni $A\cdot V\neq V\cdot A$.

Bevosita tekshirish yo'li bilan quyidagi

1) $(\lambda A)\cdot B=A\cdot(\lambda B)=\lambda\cdot(A\cdot B)$, λ-son;

2) $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C;$

3) $C\cdot(A+B)=C\cdot A+C\cdot B;$

4) $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C;$

xossalarni o'rinli ekanligiga ishonch hosil qilish mumkin.

Agar A va V nxn o'lchamli kvadrat matritsalar bo'lsa, u holda

1) $det(A\cdot B)=detA\cdot detB;$

2) $det(\lambda A)=\lambda^n detA;$

munosabatlar o'rinli bo'ladi.

Agar barcha i,j lar uchun $a^T_{ij}=a_{ji}$ bo'lsa, $A^T=||a^T_{ij}||$ matritsani $A=||a_{ij}||$ matritsaga transponirlangan matritsa deymiz.

Agar A mxn o'lchamli matritsa bo'lsa, A^T nxm o'lchamli matritsa bo'ladi.

Misol 4.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A^T=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Quyidagi xossalar o'rinli:

1) $(A^T)^T=A;$

2) $(A+V)^T=A^T+V^T$

3) $(A\cdot B)^T=B^T A^T$

Agar $A^T=A$ bo'lsa, kvadrat A matritsa simmetrik, $A^T=-A$ bo'lsa, kososimmetrik matritsa deb ataladi.

Teorema. Har qanday A kvadrat matritsani simmetrik V va kososimmetrik S matritsalar yig'indisi ko'rinishida ifodalash mumkin.

2.2. Teskari matritsa. Quyidagi nxn o'lchamli matritsani ko'raylik:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Ixtiyoriy nxn o'lchamli $A=||a_{ij}||$ matritsa uchun $A \cdot E = E \cdot A = A$ ekanligiga ishonch hosil qilish qiyin emas, ya'ni E matritsalar uchun birlik vazifasini bajaradi. Shuning uchun E ni birlik matritsa deb aytiladi.

Determinanti 0 ga teng bo'lgan quyidagi har qanday nxn o'lchamli $A=||a_{ij}||$ matritsa maxsus matritsa deb ataladi:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

Aks holda, ya'ni $\det A \neq 0$ bo'lsa, A matritsa maxsus bo'lmagan matritsa deyiladi.

Masalan, avvalgi paragrafda ko'rilgan misolga ko'ra

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

matritsa maxsus matritsa, chunki

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Ta'rif. Agar $A \cdot V = V \cdot A = E$ munosabat o'rinli bo'lsa, $n x n$ o'lchamli kvadrat $B = \|b_{ij}\|$ matritsani maxsus bo'lmagan $n x n$ o'lchamli $A = \|a_{ij}\|$ matritsaga teskari matritsa deb ataladi.Teskari matritsa $V = A^{-1}$ ko'rinishda belgilanadi.

Endi teskari matritsani bevosita hisoblash usullarini ko'ramiz.

Faraz qilaylik, $A = \|a_{ij}\|$ maxsus bo'lmagan kvadrat matritsa bo'lsin. Agar A_{ij} – a_{ij} elementning $\det A$ dagi algebraik to'ldiruvchisi bo'lsa, u holda

$$A^{v} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

A ga biriktirilgan matritsa deb ataladi. Determinantning (3), (4) xossalariga asosan, quyidagi kelib chiqadi:

$$A^{v}A = AA^{v} = \det A \cdot E, \quad \text{bundan} \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^{v}$$

Teskari matritsani hisoblashning bu usuli biriktirilgan matritsalar usuli deb ataladi.

Misol 4. Biriktirilgan matritsalar usuli bilan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

matritsaga teskari matiritsani toping.

Yechish: det$A$=-4. Demak, A maxsus bo'lmagan matritsa ekan. Uning barcha algebraik to'ldiruvchilarini topamiz:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}0 & 2\\ -2 & 5\end{vmatrix}=4,\quad A_{21}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ -2 & 5\end{vmatrix}=-8,\quad A_{31}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=4$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}3 & 2\\ 4 & 5\end{vmatrix}=-7,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 4 & 5\end{vmatrix}=9,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-5$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}3 & 0\\ 4 & -2\end{vmatrix}=-6,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & -2\end{vmatrix}=10,\quad A_{33}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{vmatrix}=-6.$$

Shuning uchun,

$$A^{v}=\begin{pmatrix}4 & -8 & 4\\ -7 & 9 & -5\\ -6 & 10 & -6\end{pmatrix}$$

va

$$A^{-1}=-\frac{1}{4}A^{v}=\begin{pmatrix}-1 & -2 & -1\\ -7/4 & 9/4 & -5/4\\ 3/2 & -5/2 & 3/2\end{pmatrix}.$$

Quyida ko'riladigan usulimiz elementar almashtirishlar usuli deb ataladi.

Agar A nxn o'lchamli maxsus bo'lmagan kvadrat matritsa bo'lsa, uning uchun o'lchami nx$2n$ bo'lgan $G_A=(A|E)$ matritsa tuzib olamiz, ya'ni A matritsaga birlik E matritsani birlashtirib tuzamiz. Hosil bo'lgan G_A matritsani satrlari ustida elementar almashtirishlar bajarib, uni $(E|V)$ ko'rinishga keltiramiz. U holda $V=A^{-1}$ bo'ladi.

Misol 5. Elementar almashtirishlar usuli yordamida quyidagi matritsaga teskari matritsani toping:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Yechish: G_A matritsani tuzib olamiz:

$$\Gamma_A=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

G_A matritsaning satrlarini mos ravishda γ_1, γ_2, γ_3 deb belgilab olib, ular ustida quyidagi almashtirishlarni bajaramiz:

$$\gamma_1'=\frac{1}{3}\gamma_1, \qquad \gamma_1''=\gamma_1'-\frac{2}{7}\gamma_2', \qquad \gamma_1'''=\gamma_1''-\frac{1}{24}\gamma_3''$$

$$\gamma_2'=\gamma_2-\frac{4}{3}\gamma_1, \qquad \gamma_2''=\frac{3}{7}\gamma_2', \qquad \gamma_2'''=\gamma_2''-\frac{1}{12}\gamma_3''$$

$$\gamma_3'=\gamma_3-\frac{2}{3}\gamma_1, \qquad \gamma_3''=\gamma_3'+\frac{1}{7}\gamma_2', \qquad \gamma_3'''=\frac{7}{24}\gamma_3''.$$

Natijada ketma-ket quyidagini hosil qilamiz:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 7/3 & 2/3 & -4/5 & 1 & 0 \\ 0 & -1/3 & 10/4 & -2/3 & 0 & 1 \end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1/7 & 5/7 & -2/7 & 0 \\ 0 & 1 & 2/7 & -4/7 & 3/7 & 0 \\ 0 & 0 & 24/7 & -6/7 & 1/7 & 1 \end{array}\right)\to$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/4 & -7/24 & -1/24 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 5/12 & -1/12 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 1/24 & 7/24 \end{array}\right).$$

Demak,

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 3/4 & -7/24 & -1/24 \\ -1/2 & 5/12 & -1/12 \\ -1/4 & 1/24 & 7/24 \end{pmatrix}.$$

Teskari matritsa quyidagi xossalarga ega:

1^0. $(\alpha A)^{-1}=A^{-1}/\alpha \qquad (\alpha\neq 0)$

2^0. $(AV)^{-1}=V^{-1}A^{-1}$

3^0. $(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$

1^0-xossaning isboti. Agar $\alpha\neq 0$ bo'lsa, $\det(\alpha A)=\alpha^n \det A\neq 0$ bo'ladi, shuning uchun $\alpha A=\|\alpha a_{ij}\|$ matritsa maxsus emas, demak, $(\alpha A)^{-1}$ mavjud. Agar $\mathcal{A}_{ij}$ deb αA matritsaning αa_{ij} elementining algebraik to'ldiruvchisi, A_{ij} deb esa A matritsaning a_{ij} elementini algebraik to'ldiruvchisini belgilasak, u holda $\mathcal{A}_{ij}=\alpha^{n-1}A_{ij}$ ekanligiga ishonch hosil qilish qiyin emas. Shu sababli,

$$(\alpha A)^{-1}=\frac{1}{\alpha^n \det A}\left\|\mathcal{A}_{ji}\right\|=\frac{1}{\alpha^n \det A}\left\|\alpha^{n-1}A_{ji}\right\|=$$
$$=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\det A}\left\|A_{ji}\right\|=\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\det A}A^{v}=\frac{1}{\alpha}A^{-1}.$$

2^0 xossaning isboti. Agar $V^{-1}A^{-1}$ ni $A\cdot V$ ga o'ng tomonidan ko'paytirilsa

$$AV\cdot V^{-1}A^{-1}=A(BB^{-1})A^{-1}=AEA^{-1}=AA^{-1}=E.$$

Agar chap tomonidan ko'paytirsak:

$$B^{-1}A^{-1}AB=B^{-1}(A^{-1}A)B=B^{-1}EB=B^{-1}B=E$$

bo'ladi. Demak, haqiqatdan $(AV)^{-1}=V^{-1}A^{-1}$ ekan.

3^0 xossani isboti. A^T ni $(A^{-1})^T$ ga chap tomonidan ko'paytiraylik, u holda 2.1§ dagi transponirlangan matritsalarning 3-xossasiga ko'ra

$$A^T(A^{-1})^T=(A^{-1}A)^T=E^T=E$$

va A^T ni $(A^{-1})^T$ ga o'ng tomondan ko'paytirsak quyidagi hosil bo'ladi:

$$(A^{-1})^T A^T=(AA^{-1})^T=E^T=E.$$

3-ma'ruza.

ARIFMETIK VEKTORLAR FAZOSI. MATRITSANING RANGI

3.1 Arifmetik vektorlar. Ixtiyoriy n ta $x_1,x_2,\dots,x_n$ sonlarning har qanday tartiblangan to'plami arifmetik vektor deyiladi va $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ kabi belgilanadi. $x_1,x_2,\dots,x_n$ sonlar x arifmetik vektorning komponentlari deb ataladi.

Arifmetik vektor ustida quyidagi amallarni kiritamiz.

Qo'shish: agar $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ va $y=(y_1,y_2,\dots,y_n)$ bo'lsa, u holda

$$x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,\dots,x_n+y_n) \qquad (3.1)$$

bo'ladi.

Songa ko'paytirish: agar λ-biror son va $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ arifmetik vektor bo'lsa, u holda

$$\lambda x=(\lambda x_1,\lambda x_2,\dots,\lambda x_n) \qquad (3.2)$$

bo'ladi.

Barcha arifmetik vektorlar to'plamini yuqoridagi kiritilgan amallarga ko'ra arifmetik vektorlar fazosi deb ataladi va R^n bilan belgilanadi. Bu fazo chiziqli fazo bo'ladi. Haqiqatan, ixtiyoriy $x,u\in R^n$ lar uchun

1) $x+y=y+x$;
2) $(x+y)+z=x+(y+z)$;
3) $x+0=x$, bu erda $0=(0, \dots ,0)$ nol vektor;
4) har qanday x,u uchun shunday z mavjudki, $x=u+z$, z ni x va u larning ayirmasi deb ataladi va $z=x-u$ deb belgilanadi;
5) $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$, λ,μ - ixtiyoriy sonlar;
6) $1\cdot x=x$;
7) $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$;
8) $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$.

Eslatma. Agar $x_1,x_2,\ldots,x_n$ sonlar haqiqiy bo'lsa, R^n xaqiqiy arifmetik vektorlar fazosi, agar $x_1,x_2,\ldots,x_n$ lar kompleks bo'lsa, R^n kompleks arifmetik fazo deb ataladi.

Agar shunday bir vaqtda nolga teng bo'lmagan $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_S$ sonlar mavjud bo'lib, $\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\ldots+\lambda_Sx_S=0$ bo'lsa, arifmetik vektorlarning $\{x_1,x_2,\ldots,x_S\}$ sistemasi chiziqli bog'liq deyiladi. Aks holda, bu sistema chiziqli bog'liq emas deyiladi.

Faraz qilaylik, Q-arifmetik vektorlarning ixtiyoriy to'plami bo'lsin. $V=\{e_1,e_2,\ldots,e_S\}$ sistema Q da bazis tashkil etadi deyiladi, agar

a) $e_k\in Q$, $k=1,2,\ldots,s$;

b) V sistema chiziqli bog'liq bo'lmasa;

v) ixtiyoriy $x\in Q$ uchun shunday $\lambda_1,\ldots,\lambda_S$ topilsaki,

$$x=\sum_{k=1}^{s}\lambda_k e_k \tag{3.3}$$

bo'lsa.

(3.3) formula x vektorning V bazis bo'yicha yoyilmasi deb ataladi. $\lambda_1,\ldots,\lambda_S$ koeffitsientlar x vektorning V bazisdagi koordinatlari deyiladi.

Misol 6. Agar

$$a_1=(4,1,3,-2),\quad a_2=(1,2,-3,2),\ a_3=(16,9,1,-3),$$
$$a_4=(0,1,2,3),\ a_5=(1,-1,15,0)$$

bo'lsa,

$$3a_1+5a_2-a_3-2a_4+2a_5$$

ni hisoblang.

Yechish: (3.1) va (3.2) ga asosan

$$3a_1=(12,3,9,-6),\ 5a_2=(5,10,-15,10),$$
$$2a_4=(0,2,4,6),\ 2a_5=(2,-2,30,0),$$
$$3a_1+5a_2-a_3-2a_4+2a_5=(12+5-16-0+2,\ 3+10-9-2-2,\ 9-15-1-4-30,\ -6+10+3-6+0)=(3,0,-41,1).$$

Misol 7. $x_1=(-3,1,5)$ va $x_2=(6,-3,15)$ arifmetik vektorlarning chiziqli bog'liq yoki chiziqli bog'liq emasligini aniqlang.

Yechish: Ta'rifga ko'ra

$$\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2=(-3\lambda_1+6\lambda_2,\ \lambda_1-3\lambda_2,\ 5\lambda_1+15\lambda_2)=0$$

bundan,

$$-3\lambda_1+6\lambda_2=0,$$
$$\lambda_1-3\lambda_2=0,$$
$$5\lambda_1+15\lambda_2=0.$$

Ko'rinib turibdiki, bu tengliklarni bir vaqtda faqat $\lambda_1=0$, $\lambda_2=0$ qiymatlar qanoatlantiradi. Demak, berilgan vektorlar chiziqli bog'liq emas ekan.

Misol 8. $e_1=(1,1,1,1,1)$, $e_2=(0,1,1,1,1)$, $e_3=(0,0,1,1,1)$, $e_4=(0,0,0,1,1)$, $e_5=(0,0,0,0,1)$ arifmetik vektorlar sistemasi R^5 da bazis tashkil etishini ko'rsating.

Yechish: Avval bu sistema chiziqli bog'liq emasligini ko'rsatamiz. Haqiqatan

$$\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2+\lambda_3 e_3+\lambda_4 e_4+\lambda_5 e_5=(\lambda_1,\lambda_1+\lambda_2,\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3,\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4,$$
$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5)=0$$

bundan

$$\lambda_1=0,\ \lambda_1+\lambda_2=0,\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0,\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=0$$
$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5=0$$

va ketma-ket $\lambda_1=0$, $\lambda_2=0$, $\lambda_3=0$, $\lambda_4=0$, $\lambda_5=0$ hosil bo'ladi, ya'ni bu sistema chiziqli bog'liq emas ekan.

Endi $x=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$ R^5 ning ixtiyoriy elementi bo'lsin. U holda
$x=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(x_1,x_1,x_1,x_1,x_1)+(0,\ x_2-x_1,\ x_2-x_1,\ x_2-x_1,\ x_2-x_1)+$
$+(0,\ 0,\ x_3-x_2,\ x_3-x_2,\ x_3-x_2)+(0,\ 0,\ 0,\ x_4-x_3,\ x_4-x_3)+$
$+(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ x_5-x_4)=x_1(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)+(x_2-x_1)(0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)+(x_3-$
$x_2)(0,0,1,1,1)+$ $+(x_4-x_3)(0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1)+(x_5-x_4)(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1)=$
$=x_1e_1+(x_2-x_1)e_2+(x_3-x_2)e_3+(x_4-x_3)e_4+(x_5-x_4)e_5.$

Agar $x=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\neq 0$ bo'lsa, u holda x_1, x_2-x_1, x_3-x_2, x_4-x_3, x_5-x_4 bir vaqtda nolga teng bo'lmaydi. Shu sababli $\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}$ R^5 da bazis bo'lar ekan.
Masalan, $x=(1, 0, 1, 0, 1)$ arifmetik vektorning shu bazisdagi koordinatlari $x=(1, -1, 1, -1, 1)$ bo'ladi.

Teorema 1. Agar a_1, a_2, a_3 arifmetik vektorlar chiziqli bog'liq va a_3 vektor a_1 va a_2 vektorlar orqali chiziqli ifodalanmasa, a_1 va a_2 lar faqat o'zgarmas ko'paytuvchigagina farq qiladi.

Isbot: a_1, a_2, a_3 lar chiziqli bog'liq bo'lgani uchun bir vaqtda nolga teng bo'lmagan shunday $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ sonlar topiladiki $\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\lambda_3 a_3$ bo'ladi.
Agar $\lambda_3\neq 0$ bo'lsa, u holda

$$a_3=-\frac{\lambda_1}{\lambda_3}a_1-\frac{\lambda_2}{\lambda_3}a_2$$

deb yozish mumkin, lekin bu teorema shartiga zid, chunki a_3 vektor a_1 va a_2 lar orqali chiziqli ifodalanib qoladi. Shu sababli $\lambda_3=0$ bo'lishi shart. U holda quyidagi bo'ladi:

$$\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2=0,$$

bundan esa, agar $\lambda_1\neq 0$ bo'lsa,

$$a_1=-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}a_2$$

kelib chiqadi. Teorema isbot bo'ldi.

Teorema 2. Agar $a_1,a_2,\dots,a_n$ arifmetik vektorlar chiziqli bog'liq bo'lmasa-yu, $a_1,a_2,\dots,a_n,b$ lar chiziqli bog'liq bo'lsa, u holda b vektor $a_1,a_2,\dots,a_n$ vektor orqali chiziqli ifodalanadi.

Isbot: $a_1,a_2,\dots,a_n,b$ vektorlar teorema shartiga ko'ra chiziqli bog'liq bo'lgani uchun bir vaqtda nolga teng bo'lmagan shunday $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{n+1}$ sonlar topiladiki,

$$\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\ldots+\lambda_n a_n+\lambda_{n+1} b=0 \qquad (3.4)$$

bo'ladi. Bu yerda $\lambda_{n+1}\neq 0$ bo'lishi shart, aks holda, ya'ni agar $\lambda_{n+1}=0$ bo'lsa,

$$\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\ldots+\lambda_n a_n=0$$

bo'lib, bundan va $a_1,a_2,\ldots,a_n$ larning chiziqli bog'liq emasligidan $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0$ kelib chiqadi, ya'ni $a_1,a_2,\ldots,a_n,b$ lar chiziqli bog'liq emas degan xato xulosaga kelamiz. Shu sababli $\lambda_{n+1}\neq 0$, u holda (3.4) ni

$$b=-\frac{\lambda_1}{\lambda_{n+1}}a_1-\frac{\lambda_2}{\lambda_{n+1}}a_2-\ldots-\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}a_n$$

deb yozish mumkin. Teorema isbot bo'ldi.

Teorema 3. $a_1,a_2,\ldots,a_m$ arifmetik vektorlar orqali chiziqli ifodalanuvchi har qanday $n>m$ ta b_1, b_2, $\ldots,b_n$ arifmetik vektorlar sistemasi chiziqli bog'liq bo'ladi.

Isbotni matematik induktsiya usuli bilan amalga oshiramiz.

$m=1$ bo'lganda teoremaning to'g'riligiga ishonch hosil qilish qiyin emas. Faraz qilaylik, teorema $m=k$-1 uchun to'g'ri bo'lsin deb $m=k$ uchun tekshiramiz.

Agar

$$\begin{aligned}
b_1&=c_{11}a_1+\ldots+c_{1k}a_k,\\
b_2&=c_{21}a_1+\ldots+c_{2k}a_k,\\
&\ldots\ldots\ldots\\
b_n&=c_{n1}a_1+\ldots+c_{nk}a_k,
\end{aligned}$$

bo'lsa, quyidagi 2 hol yuz berishi mumkin.

1. Barcha $c_{11},c_{21},\ldots,c_{n1}$ koeffitsientlar nolga teng. Unda $b_1,b_2,\ldots,b_n$ lar k-1 ta vektorlar orqali chiziqli ifodalanib qoladi, bu hol uchun farazimizga ko'ra teorema to'g'ri.

2. a_1 ning koeffitsientlarini kamida bittasi noldan farqli. Umumiylikni buzmagan holda $c_{11}\neq 0$ deb faraz qilishi mumkin.

Agar

$$b_2^1 = b_2 - \frac{c_{21}}{c_{11}} b_1$$

$$b_3^1 = b_3 - \frac{c_{31}}{c_{11}} b_1$$

$$. \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ .$$

$$b_n^1 = b_n - \frac{c_{n1}}{c_{11}} b_1$$

desak, bu vektorlar $a_1, a_2, \ldots, a_m$ orqali chiziqli ifodalanadi va ularning soni n-1 teorema shartiga ko'ra k-1 dan katta. Qilingan farazga ko'ra bu sistema chiziqli bog'liq, ya'ni shunday bir vaqtda nolga teng bo'lmagan $\gamma_2, \ldots, \gamma_n$ sonlar topiladiki,

$$\gamma_2 b_2' + \ldots + \gamma_n b_n' = 0$$

bo'ladi. Agar $b_2', \ldots, b_n'$ lar o'rniga ularning $b_1, b_2, \ldots, b_n$ lar orqali ifodasini qo'ysak,

$$\gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \ldots + \gamma_n b_n = 0$$

bu yerda

$$\gamma_1 = -\frac{c_{21}}{c_{11}} \gamma_2 - \ldots - \frac{c_{n1}}{c_{11}} \gamma_n$$

hosil bo'ladi. γ_1, $\gamma_2, \ldots, \gamma_n$ lar bir vaqtda nolga teng bo'lmagani uchun $b_1, b_2, \ldots, b_n$ lar chiziqli bog'liq ekanligi kelib chiqadi.

Har qanday vektorlar sistemasi $Q \subset R^n$ kamida bitta bazisga ega va bu sistemaning barcha bazislari bir xil sondagi vektorlardan tuzilgan bo'ladi. Bu sonni Q sistemaning rangi deb ataladi va *rangQ* yoki *r(Q)* ko'rinishda belgilanadi.

R^n fazoning rangi n ga teng, uni bu fazoning o'lchami deb ataladi. R^n da bazis tashkil etuvchi quyidagi sistema

$$\begin{aligned} &e_1=(1,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0),\\ &e_2=(0,\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0),\\ &\ldots\ldots\ldots\\ &e_n=(0,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 1) \end{aligned}$$

kanonik bazis deb ataladi.

R^n ning har qanday x vektoriga uning shu bazisdagi koordinatlar ustunini o'zaro bir qiymatli mos qo'yish mumkin, ya'ni

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Eslatma. Vektorning komponentalari bilan uning biror bazisdagi koordinatalarini farqlash zarur. Ular faqat kanonik bazis uchun bir xil bo'ladi xalos. Bunga 8-misolda keltirilgan vektor misol bo'la oladi.

3.2. Matritsaning rangi. Faraz qilaylik, mxn o'lchamli A matritsada ixtiyoriy ravishda uning k ta satr va k ta ustuni biror usul bilan tanlangan bo'lsin, bu yerda $k\leq min(m,n)$. Bu tanlangan satr va ustunlardan tuzilgan k-tartibli determinant A matritsaning k-tartibli minori deyiladi.

Ta'rif. Noldan farqli minorlarning eng yuqori tartibi A matritsaning rangi deb ataladi.

Agar $r(A)=r$ bo'lsa, noldan farqli r–tartibli har qanday minor A matritsaning rangi deb ataladi.

mxn o'lchamli A matritsaning barcha satrlarini (yo satrlarini yo ustunlarini) R^n ning yoki mos ravishda R^m ning arifmetik vektorlari sistemasi deb qarash mumkin.

Isbotsiz quyidagi teoremani keltiramiz.

Teorema 3. Matritsaning rangi uning yo'llari sistemasining rangiga teng bo'ladi va bazis minorini o'z ichiga olgan yo'llar sistemasida bazis tashkil etadi.

Matritsa rangini hisoblashning ikkita usulini ko'ramiz.

1-usul o'rab turuvchi minorlar usuli deb ataladi.

Agar M_2 minor M_1 minorni to'la o'z ichiga olsa, M_2 minor M_1 minorni o'rab turadi deymiz. Masalan,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix}$$

matritsada

$$M_1 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

bo'lsa,

$$M_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

uni o'rab turuvchi minor bo'ladi.

Faraz qilaylik, A matritsada noldan farqli biror k-tartibli minor M aniqlangan bo'lsin. M ni o'rab turuvchi $(k+1)$-tartibli minorlarni ko'rib chiqamiz. Agar bu minorlarning hammasi nolga teng bo'lsa, u holda matritsaning rangi k bo'ladi. Agar bu $(k+1)$-tartibli minorlarning orasida hech bo'lmaganda bitta noldan farqlisi M_{k+1} bo'lsa, M_{k+1} ni o'rab turuvchi barcha $(k+2)$-tartibli minorlarni ko'rib chiqamiz va hokazo. Bu jarayon to o'rab turuvchi minorlar orasida kamida bitta noldan farqli topilmaguncha davom etadi.

Misol. Quyidagi matritsaning rangini toping:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Yechish: Ko'rinib turibdiki

$$M_2=\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}\neq 0$$

Uni o'rab turuvchi 3-tartibli minorlar orasida masalan

$$M_3=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

minor noldan farqli. Lekin M_3 ni o'rab turuvchi 4-tartibli minorlar

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{vmatrix}=0, \qquad \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{vmatrix}=0.$$

Shu sababli A matritsaning rangi $r(A)=3$, uning bazis minori M_3 bo'ladi.

2-usul elementar almashtirishlar usuli deb ataladi. matritsalar ustida quyidagi elementar almashtirishlar deb ataluvchi almashtirishlarni bajarish mumkin:

1) Biror yo'lni songa ko'paytirishi;
2) Biror yo'lning elementlariga unga proportsional bo'lgan undan avvalgi yo'lning elementlarini qo'shish;

3) Biror yo'lning elementlariga unga proportsional bo'lgan undan keyingi yo'l elementlarini qo'shish.

Bu almashtirishlarning birinchisini satrlar ustida bajarish uchun berilgan matritsani quyidagi maxsus tuzilgan

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \alpha & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

matritsaga chapdan ko'paytirish kifoya.

2)-almashtirishni satrlar ustida bajarish uchun esa berilgan matritsani quyidagi

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & \vdots & \ddots & & \\ & & \alpha & \ldots & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

matritsaga chapdan ko'paytirish va nihoyat 3)-almashtirishni satrlar ustida bajarish uchun shu matritsani quyidagi

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & \ldots & \alpha & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

matritsaga chapdan ko'paytirish kifoya. Masalan,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha x & \alpha y & \alpha z \\ u & v & w \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u + \alpha x & v + \alpha y & w + \alpha z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ x + \alpha u & y + \alpha v & z + \alpha w \\ u & v & w \end{pmatrix}$$

Agar bu almashtirishlar ustunlar ustida bajariladigan bo'lsa, berilgan matritsani shu maxsus tuzilgan matritsalarga mos ravishda o'ngdan ko'paytirish kerak.

Agar satrlar ustida 1) va 2) almashtirishlarni bir necha marta bajarish lozim bo'lsa, berilgan matritsani

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & 0 \\ . & . & . & . \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \cdots & \gamma_{nn} \end{pmatrix} \qquad (3.5)$$

matritsaga chapdan ko'paytirish kerak bo'ladi.

Xuddi shunday, agar 1) va 3) almashtirishlarni bir necha marta satrlar ustida bajarish lozim bo'lsa, bu matritsani

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \qquad (3.6)$$

matritsaga chapdan ko'paytirish etarli.

Agar ustunlar ustida 1) va 2) almashtirishlarni bir necha marta bajarishgan bo'lsa, matritsani (3.6) ga o'ngdan, agar 1) va 3) almashtirishlar bajariladigan bo'lsa, berilgan matritsani (3.5) ga o'ngdan ko'paytirish kifoya qiladi.

Bu usul quyidagi teoremaga asoslanadi.

Teorema 4. Matritsaning yo'llari ustida bajariladigan har qanday elementar almashtirishlar matritsa rangini o'zgartirmaydi.

Isbot: Faraz qilaylik $r(A)=r$ bo'lib, bazis minor

$$M_r = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ . & . & . & . \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}$$

yo'llarini o'z ichiga olgan bo'lsin. M_r ning $\bar{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, ..., a_{1r}, ..., a_{1n}), \ ..., \ \bar{a}_r = (a_{r1}, a_{r2}, ..., a_{rr}, ..., a_{rn})$ arifmetik vektorlarning sistemasini qaraylik. $M_r \neq 0$ bo'lgani uchun $\bar{a}_1, ..., \bar{a}_r$ sistema barcha yo'llar sistemasida bazis tashkil etadi.

Agar M_r yo'llarini o'z ichiga olgan yo'llar ustida almashtirishlar bajarib, ularni

$$\begin{array}{l} (a_1, 0, ..., 0 \ a'_{1,r+1}, ..., a'_{1n}), \\ (0, a_2, ..., 0, \ a'_{2,r+1}, ..., a'_{2n}), \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ (0, 0, ..., a_r, \ a'_{r,r+1}, ..., a'_{rn}) \end{array}$$

ko'rinishga keltirsak, bu arifmetik vektorlardan tuzilgan sistema ham barcha yo'llar sistemasida bazis tashkil etadi. Ko'rinib turibdiki, bu sistema rangi ham r ga teng. Teorema isbot bo'ldi.

4-ma'ruza.

CHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMASI

4.1. Umumiy tushunchalar. Quyidagi ***n*** ta noma'lumli ***m*** ta tenglamalar sistemasini qaraylik

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned} \tag{4.1}$$

Agar bu yerda

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

desak, (4.1) ni matritsa ko'rinishda yozish mumkin:

$$AX = V. \tag{4.2}$$

Agar V=0 bo'lsa, sistema bir jinsli, aks holda bir jinsli bo'lmagan sistema deyiladi. (4.1) sistemaning yechimi deb (4.2) ni ayniyatga aylantiradigan har qanday ***n*** ta komponentali ustun vektor X ga aytiladi (X yechimga mos keluvchi $x \in R^n$ arifmetik vektorni ham (4.1) sistemaning yechimi deb ataladi).

Agar sistema kamida bitta yechimga ega bo'lsa, uni birgalikda deyiladi, aks holda birgalikda emas deyiladi.

Agar ikkita sistema yechimlari to'plami bir xil bo'lsa, ularni ekvivalent deyiladi.

4.2. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning matritsalar usuli va Kramer formulalari.

Faraz qilaylik, (4.1) sistemada $n=m$ bo'lsin. Agar det$A\neq 0$ bo'lsa, u holda ma'lumki (qarang 2.2 bo'limga). Bunday matritsaga teskari A^{-1} matritsa mavjud. A^{-1} ni (4.2) ga chapdan qo'llasak:

$$X= A^{-1}V \tag{4.3}$$

tenglik hosil bo'ladi. (4.3) ning o'ng tomonidagi ko'paytirish amalini bajarib, hosil bo'lgan ustunlarning mos komponentalarini tenglab, (4.1) ning yagona yechimini hosil qilamiz. Sistemani yechishning bu usuli matritsalar usuli deb ataladi.

Yechimni yuqorida ko'rsatilgan usuli yordamida topaylik. U holda

$$x_i = \frac{A_{1i} + A_{2i}b_2 + \ldots + A_{ni}b_n}{\det A}, \qquad i = 1,2,\ldots,n. \tag{4.4}$$

hosil bo'ladi. Tengliklarni o'ng tomonidagi kasr suratidagi yig'indining determinantni biror yo'li bo'yicha yoyib hisoblash usulidan (qarang, 1.3 bo'lim, (3), (4) formulalar) foydalanib, quyidagi

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} \cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} \cdots a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}, \quad i = \overline{1,n}$$

determinantlar ko'rinishida ifodalash mumkin.

Agar $\Delta=\det A$ deb belgilasak, (4.4) tengliklarni

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \qquad i = \overline{1,n}$$

ko'rinishda yozib olsa bo'ladi. Bu (4.5) formulalar Kramer formulalari deb ataladi.

Misol. Quyidagi tenglamalar sistemasini yeching:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 + 5x_2 &= -3 \end{aligned}$$

Yechish: Sistemaning

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

matritsasi maxsuc emas, chunki $\det A = -2 \neq 0$. Biriktirilgan matritsasi

$$A^{v} = \begin{pmatrix} -5 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 11 & -13 & -7 \end{pmatrix}$$

ko'rinishga ega. U holda teskari matritsa

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 11 & -13 & -7 \end{pmatrix}$$

bo'ladi va nihoyat,

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 11 & -13 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bundan, x_1=2, x_2=-1, x_3=1 ekanligini hosil qilamiz.

Endi sistemani Kramer formulalari yordamida hisoblaymiz:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 1 \\ -3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -4, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 2, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = -2.$$

Demak, $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = 2, \ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = -1, \quad x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = 1$ ekan.

Eslatma. Agar (4.1) sistema bir jinsli bo'lib, uning matritsasi xosmas, ya'ni Δ=det$\neq$0 bo'lsa, u holda bunday sistema yagona trivial deb ataluvchi nol x=(0,0,...,0) echimga ega bo'ladi. Haqiqatdan, bunday sistemani ozod hadlari nolga teng bo'lgani uchun Δ_i, i=1,2,...,n determinantlar nolga teng bo'ladi, Kramer formulalariga asosan esa x_1=0, x_2=0,...x_n=0 ekanligi kelib chiqadi. Shu sababli bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi noldan farqli, ya'ni kamida bitta komponentasi nolga teng bo'lmagan, $x=(x_1,...,x_n)$ yechimga ega bo'lishi uchun uning matritsasi xos bo'lishi shart (Δ=0).

4.3. Ixtiyoriy chiziqli tenglamalar sistemasini yechish. Bunda umuman $n=m$ bo'lishi shart emas deb hisoblaymiz. Quyidagi matritsa

$$\bar{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

kengaytirilgan matritsa deb ataladi.

Teorema (Kroneker-Kapelli). (4.1) sistema birgalikda bo'lishi uchun $rangA = rang\bar{A}$ $\bar{A}$ bo'lishi zarur va yetarlidir.

Zarurligi: Faraz qilaylik, (4.1) sistema birgalikda va $r(A)=k$ bo'lsin. Biz $r(A)=k$ ekanini isbotlashimiz kerak. $r(A)=k$ bo'lgani uchun A matritsaga $\bar{A}$ matritsaga ham tegishli bo'lgan k tartibli noldan farqli minor mavjud. Shuning uchun $r(\bar{A}) \geq k$ bo'ladi. Endi bu minorni qamrovchi $\bar{A}$ matritsaning har qanday $k+1$-tartibli minori nolga teng ekanligini isbotlash zarur. Bu minorning bitta ustuni ozod hadlardan iborat. Umumiylikni buzmagan holda bu minor

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} & b_1 \\ . & . & . & . \\ a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,k} & b_{k+1} \end{vmatrix}$$

deb faraz qilishimiz mumkin, chunki aks holda sistemaning tenglamalarini va no'malumlarnng joyini almashtirib shu holga olib kelsa bo'ladi. Shartga ko'ra (4.1) sistema birgalikda, shuning uchun shunday $x=(x_1,\ldots,x_n)$ arifmetik vektor mavjudki, u sistemaning qanoatlantiradi, xususan, u sistemaning birinchi $k+1$ ta tenglamasini ham qanoatlantiradi. U holda

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1,k}x_k + \lambda_1 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k+1,1}x_1 + \ldots + a_{k+1,k}x_k + \lambda_{k+1} = 0 \end{array}\right\} \tag{4.5}$$

bu yerda

$$\left.\begin{array}{r} \lambda_1 = a_{1,k+1}x_{k+1} + \ldots + a_{1n}x_n - b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_{k+1} = a_{k+1,k+1}x_{k+1} + \ldots + a_{k+1,n}x_n - b_{k+1} \end{array}\right\} \tag{4.6}$$

(4.5) asosida quyidagi

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}y_1 + \ldots + a_{1,k}y_k + \lambda_1 y_{k+1} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k+1,1}y_1 + \ldots + a_{k+1,k}y_k + \lambda_{k+1}y_{k+1} = 0 \end{array}\right\} \qquad (4.7)$$

sistemani tuzib olamiz. Bu sistema birgalikda, chunki uni noldan farqli $y=(x_1,\ldots,x_k,1)$ yechim qanoatlantiradi. U holda (4.2 bo'limdagi eslatmaga qarang) bir jinsli (4.7) sistemaning determinanti nolga teng, ya'ni

$$0 = \begin{vmatrix} a_{11}\ldots a_{1k} & a_{1,k+1}x_{k+1} + \ldots + a_{1n}x_n - b_1 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k+1,1}\ldots a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1}x_{k+1} + \ldots + a_{k+1,n}x_n - b_{k+1} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{S=k+1}^{n} x_S \begin{vmatrix} a_{11}\ldots a_{1k} & a_{1S} \\ \ldots\ldots & \ldots \\ a_{k+1,1}\ldots a_{k+1,k} & a_{k+1,S} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11}\ldots a_{1k} & b_1 \\ \ldots\ldots & \ldots \\ a_{k+1,1}\ldots a_{k+1,k} & b_{k+1} \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} a_{11}\ldots a_{1k} & b_1 \\ \ldots\ldots & \ldots \\ a_{k+1,1}\ldots a_{k+1,k} & b_{k+1} \end{vmatrix}$$

chunki $r(A)=k$ bo'lgani uchun yig'indiga kiruvchi barcha determinantlar nolga teng. Demak, $r(\bar{A})=k$ ekan.

Yetarliligi: Endi $r(A)=r(\bar{A})=k$ bo'lsin deb faraz qilaylik. Sistema birgalikda ekanligini isbot qilish kerak. Qilingan farazga ko'ra, sistemaning shunday k ta tenglamasi mavjudki, uning no'malumlari oldidagi koeffitsientlardan tuzilgan k-tartibli determinanti noldan farqlidir. Tenglamaning birinchi qismida qilinganidek, umumiylikni buzmagan holda bu aynan

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1,k}x_k = b_1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kn}x_k = b_n \end{array}\right\} \qquad (4.8)$$

tenglamalar deb faraz qilish mumkin. Shartga ko'ra, uning uchun

$$\sigma = \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1k} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{k1} \cdots a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0$$

(4.8) sistemani quyidagicha yozib olamiz:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1k}x_k = b_1 - a_{1,k+1}x_{k+1} - \ldots - a_{1n}x_n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kk}x_k = b_k - a_{k,k+1}x_{k+1} - \ldots - a_{kn}x_n \end{array}\right\} \qquad (4.9)$$

$\sigma \neq 0$ bo'lgani uchun bu sistema yagona yechimga ega va u Kramer formulalari yordamida topish mumkin:

$$\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{\sigma_1}{\sigma} = \dfrac{1}{\sigma}\sum_{S=1}^{k} A_{S1}(b_1 - a_{1,k+1}x_{k+1} - \ldots - a_{1n}x_n) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_k = \dfrac{\sigma_k}{\sigma} = \dfrac{1}{\sigma}\sum_{S=1}^{k} A_{Sk}(b_k - a_{k,k+1}x_{k+1} - \ldots - a_{kn}x_n) \end{array} \qquad (4.10)$$

bu yerda A_{si}, $i=1,2,\ldots,k$, a_{si} elementining σ determinantdagi algebraik to'ldiruvchisidir. $x_{k+1},\ldots,x_n$ larga har xil qiymatlar berish mumkin, $x_1,\ldots,x_k$ larning qiymatlari esa (4.10) formulalar orqali hisoblanadi. Demak, (4.9) sistema cheksiz ko'p yechimga ega ekan.

Endi bu yechimlar (4.1) sistemaning (4.9) ga kirmagan tenglamalarini ham qanoatlantirishini ko'rsatishimiz kerak. Buning uchun (4.10) yechimlar (4.1) ning $k+1$ tenglamasini ham yechimi ekanligini ko'rsatish kifoya.

(4.1) sistemaning avvalgi $k+1$ ta tenglamasini olib, ularni (4.5) ko'rinishida yozib olamiz. Faraz qilaylik, x arifmetik vektor (4.5) ning dastlabki k ta tenglamasini yechimi bo'lsin. Xuddi yuqoridagidek, (4.7) tenglamalar sistemasini tuzib olamiz. Bu sistemaning determinanti nolga teng. Shuning uchun bu sistema trivial bo'lmagan $y_1,\ldots,y_{k+1}$ yechimga ega. Bu yerda $y_{k+1}\neq 0$, chunki, aks holda (4.7) sistema $y_1,\ldots,y_k,0$ yechimga ega bo'ladi, bundan $y_1=0,\ldots,y_k=0$ ekanligi kelib chiqadi, chunki $\sigma\neq 0$, ya'ni (4.7) trivial $y_1=y_2=\ldots=y_{k+1}=0$ yechimga ega bo'lib qoladi. (4.5) sistema bir jinsli bo'lgani uchun

$$y_1' = \frac{y_1}{y_{k+1}},\ldots,y_k' = \frac{y_k}{y_{k+1}},1$$

sonlar ham bu sistemaning yechimi bo'ladi. U holda $y_1',\ldots,y_k'$ lar (4.5) sistemaning dastlabki k ta tenglamalarining yechimi bo'ladi. Bizga ma'lumki, bu sistema yagona $x_1,\ldots,x_k$ yechimga ega edi. $\sigma\neq 0$ bo'lgani uchun $z_1' = x_1,\ldots,z_k' = x_k$ bo'lishi shart. Agar bu qiymatlarning va $z_{k+1}' = 1$ ni (4.7) ning $k+1$-tenglamasiga qo'ysak, tenglik bajarilishiga ishonch hosil qilamiz. Demak, $x_1,\ldots,x_k$ lar (4.5) ning $k+1$-tenglamasini qanoatlantiradi va (4.6) ga asosan, $x=(x_1,\ldots,x_n)$ (4.1) ning $k+1$-tenglamasini yechimi ekan. Teorema to'liq isbot bo'ldi.

Eslatma: agar $x_{k+1}=c_1,\ldots,x_n=c_{n-k}$ desak, barcha $x_1,\ldots,x_k$ lar $c_1,\ldots,c_{n-k}$ larga bog'liq bo'lib qoladi. $(x_1(c_1,\ldots,c_{n-k}),\ldots,x_k(c_1,\ldots,c_{n-k}),c_1,\ldots,c_{n-k})^T$ ustun (4.1) ning umumiy yechimi deb ataladi.

Misol. Quyidagi sistemani yeching:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=1,\\ x+y+2z&=1,\\ x+y+3z&=2.\end{aligned}\right\}$$

Yechish:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&2\\1&1&3\end{vmatrix}=0$$

Shuning uchun

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&2\\1&1&3\end{pmatrix}$$

matritsa uchun $r(A)=2$, chunki $\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=1\neq 0$. Kengaytirilgan

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&2&1\\1&1&3&2\end{pmatrix}$$

matritsa uchun $r(\overline{A})=3$, chunki shu matritsaning

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&3&2\end{vmatrix}=1\neq 0$$

ya'ni $r(\overline{A})>r(A)$ bo'lyapti. Yuqoridagi teoremaga asosan, bu sistema yechimga ega emas deyish mumkin.

Misol. Sistemani yeching:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=1,\\ x+y+2z&=1,\\ 2x+2y+4z&=2.\end{aligned}\right\}$$

Yechish: Uning determinanti

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

Bevosita hisoblash yo'li bilan $r(A) = r(\overline{A}) = 2$ ekanligiga ishonch hosil qilishimiz mumkin. Berilgan sistemani birinchi va ikkinchi tenglamalaridan

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 1, \\ x + y + 2z &= 1,. \end{aligned}\right\}$$

sistemani tuzib olamiz. Uni o'z navbatida

$$\left.\begin{aligned} x + z &= 1 - y, \\ x + 2z &= 1 - y. \end{aligned}\right\}$$

ko'rinishda yozib olamiz. Bu sistema uchun

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

shu sababli, u yagona yechimga ega:

$$x = \begin{vmatrix} 1-y & 1 \\ 1-y & 2 \end{vmatrix} = 1 - y, \qquad \mathrm{z} = \begin{vmatrix} 1 & 1\text{-}\mathrm{y} \\ 1 & 1\text{-}\mathrm{y} \end{vmatrix} = 0$$

Demak, *u* ning har qanday qiymatida *(*1-*u*, *u*, 0*)* uchlik berilgan sistemaning yechimi bo'ladi.

Agar *u=S* desak, $(1\text{-}S,\ S,\ 0)^T$ ustun berilgan sistemaning umumiy yechimi bo'ladi.

5-ma'ruza.

5.1. BIR JINSLI SISTEMALAR.

Quyidagi

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+\ldots+a_{mn}x_n=0. \end{array}\right\} \qquad (4.11)$$

bir jinsli sistemani qaraylik. Bu sistema har doim birgalikda, chunki uning kamida trivial x=0 yechimi bor. Uning trivial bo'lmagan yechimi mavjud bo'lishi uchun $r(A)=r<min(m,n)$ bo'lishi zarur va yetarlidir.

Faraz qilaylik, $Q\subset R^n$–bir jinsli (4.4) sistemaning barcha yechimlari to'plami bo'lsin. Bu to'plamdagi har qanday bazis n-r ta $e_1,e_2,\ldots,e_{n-r}$ chiziqli bog'liq bo'lmagan vektorlardan tuzilgandir. Kanonik bazisda unga mos keluvchi $E_1,E_2,\ldots,E_{n-r}$ vektorlar sistemasi fundamental yechimlar sistemasi deb ataladi. Uning yechimi quyidagicha:

$$X=S_1E_1+\ldots+S_{n-r}E_{n-r}$$

Ko'rinishda yozish mumkin, bu yerda $S_1,\ldots,S_{n-r}$ ixtiyoriy o'zgarmaslar.

Misol. Quyidagi bir jinsli sistemaning fundamental yechimlar sistemasini va umumiy yechimini toping:

$$\begin{array}{l} 2x_1-4x_2+5x_3+3x_4=0, \\ 3x_1-6x_2+4x_3+2x_4=0, \\ 4x_1-8x_2+17x_3+11x_4=0. \end{array}$$

Yechish: Bu sistemaning matritsasini tuzib olamiz:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 3 & -6 & 4 & 2 \\ 4 & -8 & 17 & 11 \end{pmatrix}$$

$r(A)=2$ (tekshiring!). Bazis minor sifatida, masalan,

$$M_2=\begin{vmatrix}5 & 3\\ 4 & 2\end{vmatrix}=-2\neq 0$$

ni olishimiz mumkin. U holda sistemaning 3- tenglamasini tashlab, uni quyidagi ko'rinishga keltiramiz:

$$\begin{aligned}5x_3+3x_4&=-2x_1+4x_2\\ 4x_3+2x_4&=-3x_1+6x_2\end{aligned}$$

Bunda, agar $x_1=S_1$, $x_2=S_2$ desak,

$$x_3=-\frac{5}{2}C_1+5C_2,\qquad x_4=\frac{7}{2}C_1-7C_2$$

topiladi. Demak, sistemaning umumiy yechimi

$$X=(C_1,C_2)=\begin{pmatrix}C_1\\ C_2\\ -\frac{5}{2}C_1+5C_2\\ \frac{7}{2}C_1-7C_2\end{pmatrix}$$

bo'ladi. Bundan mos ravishda $S_1=1$, $S_2=0$ va $S_1=0$, $S_2=1$ deb, fundamental yechimlar sistemasini topamiz:

$$E_1=X=(1,0)=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -\frac{5}{2}\\ \frac{7}{2}\end{pmatrix},\qquad E_2=X=(0,1)=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 5\\ -7\end{pmatrix}$$

5.2. Jordan-Gaussning noma'lumlarni ketma-ket yo'qotish usuli. Bu usulning asosiy ma'nosi berilgan (4.1) sistemaning kengaytirilgan matritsasini yozib olib, uning yo'llari ustida elementar almashtirishlar bajarib, uni quyidagi ko'rinishga keltirishdir:

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & a'_{1,r+1} & \cdots & a'_1 & & b'_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a'_{2,r+1} & \cdots & a'_2 & & b'_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a'_{r,r+1} & \cdots & a'_m & & b'_r \\ 0 & 0 & . & 0 & 0 & \cdots & 0 & & b'_{r+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & & b'_m \end{array}\right)$$

(4.12) matritsa o'z navbatida quyidagi (4.1) ga ekvivalent bo'lgan

$$\begin{aligned} x_1 + a'_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + a'_{1n}x_n &= b'_1 \\ x_2 + a'_{2,r+1}x_{r+1} + \ldots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ x_r + a'_{r,r+1}x_{r+1} + \ldots + a'_{rn}x_n &= b'_r \\ 0 &= b'_{r+1} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ 0 &= b'_m \end{aligned}$$

tenglamalar sistemasining kengaytirilgan matritsasidir. Agar (4.12) da $b'_{r+1},\ldots,b'_m$ sonlarning hech bo'lmaganda bittasi noldan farqli bo'lsa, (4.13) va o'z navbatida (4.1) sistemalar birgalikda bo'lmaydi.

Agar $b'_{r+1} = \ldots = b'_m = 0$ bo'lsa, u holda sistema birgalikda bo'ladi va (4.13) formulalar $x_1,\ldots,x_r$ noma'lumlarning $x_{r+1},\ldots,x_n$ noma'lumlar orqali ifodasini beradi.

Misol. Sistemani yeching:

$$\left.\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3+4x_4&=5,\\ x_2+2x_3+3x_4&=1,\\ x_1\qquad\ +3x_3+4x_4&=2,\\ x_1+x_2+5x_3+6x_4&=1.\end{aligned}\right]$$

kengaytirilgan matritsani yozib olaylik:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1&2&3&4&5\\ 0&1&2&3&1\\ 1&0&3&4&2\\ 1&1&5&6&1 \end{array}\right)$$

bu matritsaning satrlari ustida elementar almashtirishlar bajaramiz:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1&2&3&4&5\\ 0&1&2&3&1\\ 1&0&3&4&2\\ 1&1&5&6&1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1&2&3&4&5\\ 0&1&2&3&1\\ 0&-2&0&0&-3\\ 0&-1&2&2&-4 \end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1&2&3&4&5\\ 0&-2&0&0&-3\\ 0&1&2&3&1\\ 0&-1&2&2&-4 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&3&4&2\\ 0&2&0&0&3\\ 0&0&2&3&-1/2\\ 0&0&2&2&-5/2 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&3&4&2\\ 0&2&0&0&3\\ 0&0&2&3&-1/2\\ 0&0&0&-1&-2 \end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&3&4&2\\ 0&2&0&0&3\\ 0&0&2&3&-1/2\\ 0&0&0&1&2 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&3&0&-6\\ 0&2&0&0&3\\ 0&0&2&0&-13/2\\ 0&0&0&1&-2 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&0&15/4\\ 0&2&0&0&3\\ 0&0&2&0&-13/2\\ 0&0&0&1&2 \end{array}\right).$$

bundan $x_4=2$, $x_3=-13/4$, $x_2=3/2$, $x_1=15/4$ kelib chiqadi.

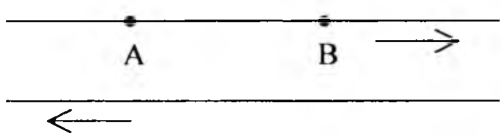
6-ma'ruza.

6.1. VEKTORLAR ALGEBRASI. UMUMIY TUSHUNCHALAR.

Elementar geometriyadan ma'lumki, kesma deb to'g'ri chiziqning ikki nuqtasi bilan chegaralangan bo'lagiga aytiladi. Uning uzunligi deb, tanlangan masshtab birligiga nisbatan kesmaning chegaralari orasidagi masofani o'lchash natijasida olinadigan musbat son qiymatini tushunamiz.

Agar biror to'g'ri chiziqda ikki A va B nuqtalar olib, shu to'g'ri chiziq bo'ylab siljiydigan nuqtani qarasak, bu nuqta to'g'ri chiziqda ikki yo'nalish aniqlaydi.: bittasi A nuqtadan V nuqta tomonga qarab, ikkinchisi teskari, ya'ni V nuqtadan A nuqta tomonga harakatlanadi. Bu yo'nalishlardan birini musbat yo'nalish deb atasak, unga teskari yo'nalishni manfiy yo'nalish deb atash mumkin.

Yo'nalishga ega bo'lgan to'g'ri chiziq o'q deb ataladi.



1-rasm.

Agar o'qlar parallelgina bo'lib qolmay, musbat yo'nalishlari ham bir xil bo'lsa, u holda bu o'qlarni bir xil yo'nalgan deymiz. Parallel bo'lib, musbat yo'nalishlari teskari bo'lgan o'qlarni qarama-qarshi yo'nalgan o'qlar deb ataladi. Agar o'qlar o'zaro perpendikulyar bo'lsa, musbat yo'nalishlari qandayligidan qat'iy nazar ularni ortogonal o'qlar deyiladi.

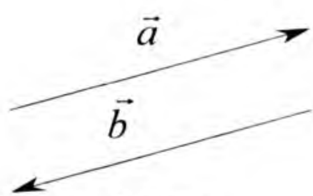
Agar to'g'ri chiziqning biror kesmasida musbat yo'nalish berilgan bo'lsa, bu kesmani vektor deb ataladi. kesmaning chegara nuqtalaridan birini uning boshi, ikkinchisini oxiri desak, vektorning musbat yo'nalishi uning boshidan oxiriga qarab bo'ladi.

Boshi A nuqtada, oxiri V nuqtada bo'lgan vektorni $\overrightarrow{AB}$ ko'rinishda belgilanadi. Vektorni bitta harf bilan belgilash ham qabul qilingan. Masalan $\vec{a}, \vec{в}$ yoki $\vec{c}$ va xokazo.

Vektorning uzunligi deb, shu vektorni ifodalovchi kesmaning uzunligi tushuniladi. Demak, agar AV kesmaning uzunligini $|AB|$, $\vec{AB}$ vektorning uzunligini $|\vec{AB}|$ deb belgilasak, $|\vec{AB}| = |AB|$ bo'ladi. Xuddi shunday $\vec{a}$ vektorning uzunligi uchun $|\vec{a}|$ belgi qabul qilingan.

Boshi va oxiri ustma-ust tushgan $\vec{AA}$ vektorni nol vektor deb ataladi va $\vec{0}$ ko'rinishda belgilanadi. Ma'lumki, $|\vec{AA}| = |\vec{0}| = 0$ bo'ladi.

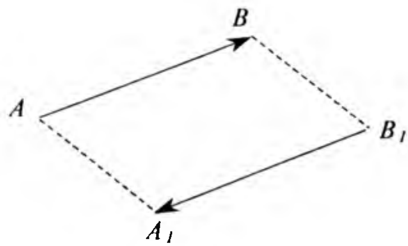
Agar $\vec{a}$ va $\vec{в}$ vektorlar parallel, uzunliklari va musbat yo'nalishlari bir xil bo'lsa, ularni teng deyiladi va $\vec{a} = \vec{b}$ deb yoziladi. Uzunliklari bir xil parallel vektorlar har doim ham teng bo'lavermaydi, masalan, $\vec{a}$ va $\vec{в}$ vektorlar 2-rasmdagidek bo'lsa.



2-rasm.

Uzunliklari bir xil, parallel, lekin qarama-qarshi yo'nalgan $\vec{a}$ va $\vec{в}$ vektorlar qarama-qarshi vektorlar deb ataladi. $\vec{a}$ vektorga qarama-qarshi vektorni $-\vec{a}$ deb belgilanadi. Masalan, 2- rasmdagi $\vec{в}$ vektor $\vec{a}$ ga qarama-qarshi vektor, shu sababli $\vec{в} = -\vec{a}$.

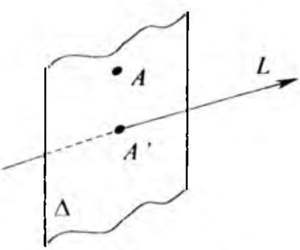
Agar $\vec{AB} = \overline{A_1B_1}$ bo'lsa, u holda $\vec{AB}$ vektorni A_1 nuqtaga parallel ko'chirildi deb tushuniladi (3-rasmga qarang).



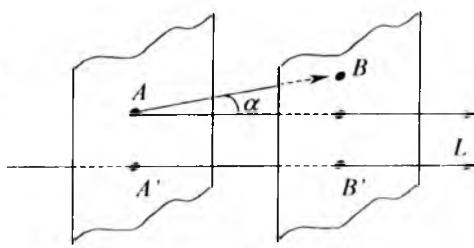
3-rasm.

Bitta to'g'ri chiziqda yoki parallel to'g'ri chiziqlarda joylashgan vektorlar kollinear vektorlar deb ataladi.

A nuqtaning L to'g'ri chiziqdagi proeksiyasi deb, L to'g'ri chiziqning unga perpendikulyar bo'lgan A nuqtadan o'tuvchi tekislik bilan A′ kesishish nuqtasiga aytiladi. (4-rasmga qarang).



4-rasm.



5-rasm.

$\vec{a} = \vec{AB}$ vektorning L o'qidagi proeksiyasi deb, $\vec{a}$ vektorning uzunligini, uni L o'q bilan tashkil etgan α burchagining kosinusiga bo'lgan ko'paytmasiga aytamiz (5-rasmga qarang), ya'ni

$$np_l\,.\vec{a} = |\vec{a}|\cos\alpha, \qquad (0 \le \alpha \le \pi)$$

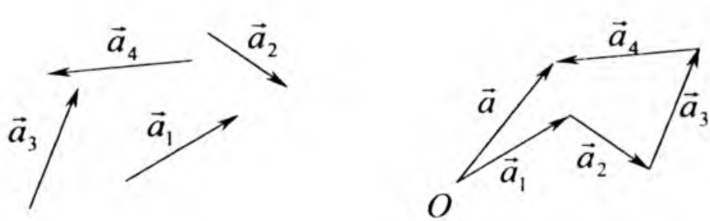
Eslatma. Proeksiyaning yuqorida keltirilgan ta'rifi Δ tekislik L o'qga perpendikulyar bo'lgani uchun, to'g'ri burchakli proeksiya deb ham ataladi. Agar Δ tekislikni L to'g'ri chiziqqa og'ma o'tgan biror Δ′ tekislikka parallel o'tkazsak, bu proeksiyani og'ma burchakli proeksiya deyiladi. Bunday proeksiya $np_L\vec{AB}$ (Δ' ga parallel) ko'rinishda belgilanadi. Agar qavs ichida hech qanday ma'lumot berilmagan bo'lsa, bu proeksiyani to'g'ri burchakli (ortogonal) proeksiya deb tushunamiz.

Teng vektorlarning bitta o'qdagi proeksiyalari ham teng va bir vektorning o'zaro parallel L va L' o'qlardagi proeksiyalari ham teng bo'ladi. Qarama-qarshi vektorlarning L o'qdagi proeksiyalari ishorasiga farq qiladi,chunki agar $\vec{a}$ vektor L o'qga α burchakka og'ib o'tgan bo'lsa, $-\vec{a}$ L o'q bilan $\alpha+\pi$ burchak tashkil etadi, $Cos\alpha$ va $Cos(\pi+\alpha)$ lar qiymati ma'lumki, ishorasi bilan farq qiladi.

Agar $\vec{a}$ vektor Δ tekislikka perpendikulyar bo'lsa, uning L o'qdagi proeksiyasi nol bo'ladi, chunki $Cos\frac{\pi}{2}=0$, $np_L\vec{a}=|\vec{a}|Cos\frac{\pi}{2}=0$.

Agar $\vec{a}$ vektor L o'qga parallel bo'lsa, $np_L\vec{a}=|\vec{a}|Cos0^0=|\vec{a}|$ bo'ladi.

6.2. Vektorlar ustida arifmetik amallar. Bizga $\vec{a}_1,\vec{a}_2,....,\vec{a}_n$ vektorlar berilgan bo'lsin. Ixtiyoriy O nuqta olib $\vec{a}_1$ ni boshini shu nuqtaga, $\vec{a}_2$ ni $\vec{a}_1$ ning oxiriga, $\vec{a}_3$ ni $\vec{a}_2$ ning oxiriga va x.k. tartibda barcha vektorlarni parallel ko'chiramiz. Hosil bo'lgan siniq chiziq berilgan vektorlar sistemasining ko'p burchagi deb ataladi (6-rasmga qarang).



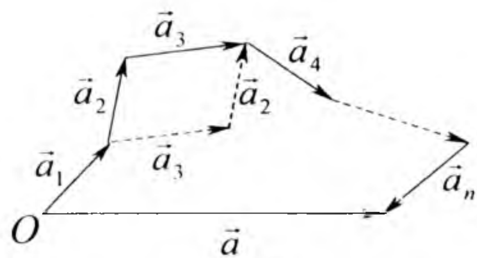
6-rasm.

Bu ko'pburchakni yopuvchi $\vec{a}$ tomoni berilgan vektorlarning yig'indisi deb atalib, quyidagi

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n$$

ko'rinishda belgilanadi.

Vektorlarni qo'shishning bu ta'rifi yig'indi uchun kommutativlik (ya'ni qo'shiluvchilarning o'rnini almashtirish) xossasiga ega (7-rasmga qarang).

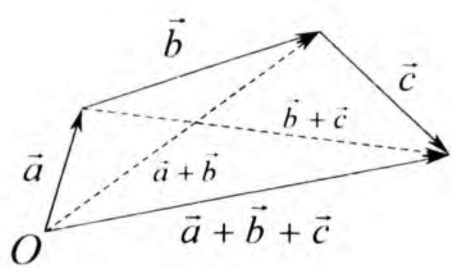


7-rasm.

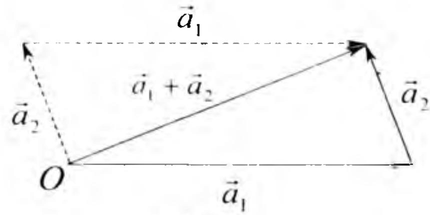
Bu qo'shish amali uchun assotsiativlik xossasi, ya'ni $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar uchun

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

munosabat ham o'rinli (8-rasmga qarang).

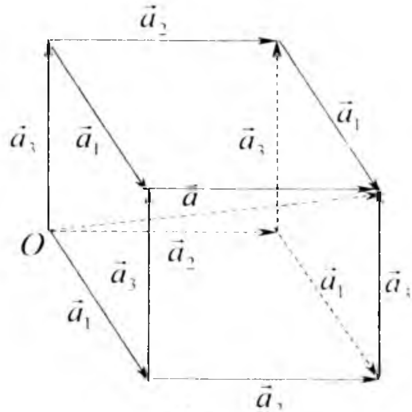


8-rasm.



9-rasm.

Agar $\vec{a}_1$ va $\vec{a}_2$ vektorlar yig'indisini 9-rasmdagidek, ya'ni $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ vektorlar boshini O nuqtaga keltirib bajarilsa, u holda vektorlar parallelogramm qoidasi bo'yicha qo'shildi deb ataymiz.

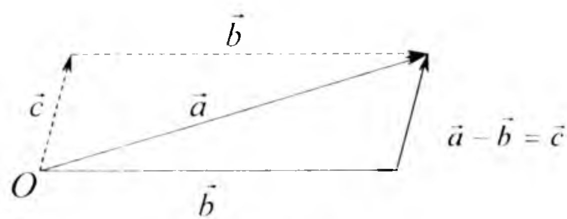


10-rasm.

Agar $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ va $\vec{a}_3$ vektorlar berilgan bo'lsa, ularni olti xil: $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3), (\vec{a}_1, \vec{a}_3, \vec{a}_2), (\vec{a}_2, \vec{a}_1, \vec{a}_3), (\vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_1), (\vec{a}_3, \vec{a}_1, \vec{a}_2)$ va $(\vec{a}_3, \vec{a}_2, \vec{a}_1)$ ketma-ketliklar bo'yicha qo'shish mumkin (10-rasmga qarang). Chizmadan ko'rinadiki, barcha ketma-ketlik natijasi $\vec{a} = \vec{OB}$ vektorga olib keladi, ya'ni boshlari bir O nuqtaga keltirilgan vektorlar yig'indisi, shu vektorlardan qurilgan parallepipedning O uchidan chiqib unga qarama-qarshi uchiga yo'nalgan diagonaldan iborat bo'lar ekan. Xuddi shu xulosaga, qo'shishning parallelogramm usuli yordamida ham kelsa bo'ladi. Bu ishni bajarishni o'quvchining o'ziga havola qilamiz.

Ta'rif. $\vec{a}$ va $\vec{в}$ vektorlarning ayirmasi deb shunday $\vec{c}$ vektorga aytamizki, uning $\vec{в}$ vektor bilan yig'indisi $\vec{a}$ vektor bo'ladi, ya'ni $\vec{a} = \vec{в} + \vec{c}$.

Buni $\vec{c} = \vec{a} - \vec{в}$ ko'rinishda belgilash qabul qilingan.



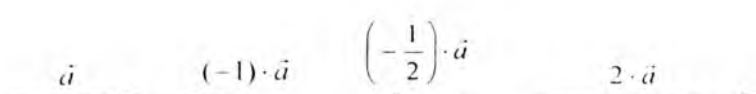
11-rasm.

Ta'rifdan va 11-rasmdan ko'rinadiki, $\vec{a}$ va $\vec{в}$ vektorlarning ayirmasini qurish uchun, ularning boshini bir O nuqtaga keltirib, ayiruvchi vektor oxiridan kamayuvchi vektor oxiriga yo'nalgan vektorni olish kerak ekan.

Eslatma. $\vec{a} - \vec{в}$ ayirmani $\vec{a}$ va $-\vec{в}$ larni qo'shib bajarsa ham bo'ladi, ya'ni $\vec{c} = \vec{a} - \vec{в} = \vec{a} + \left(-\vec{в}\right)$.

Bizga $\vec{a}$ vektor va biror m son (skalyar) berilgan bo'lsin.

Ta'rif. $m\vec{a}$ ko'paytma deb, shunday $\vec{в}$ vektorga aytamizki, 1) $\left|\vec{b}\right| = |m|\left|\vec{a}\right|$ va 2) $\vec{a}$ kabi yo'nalgan agar $m > 0$ bo'lsa, $\vec{a}$ ga teskari yo'nalgan agar $m < 0$ bo'lsa.



12-rasm.

12-rasmda $m=-1, m=-\frac{1}{2}, m=2$ bo'lgan hollar ko'rsatilgan.

Chizmadan ko'rinadiki, $(-1)\vec{a}=-\vec{a}$.

Bu ko'paytma quyidagi taqsimot xossalariga ega:

1^0. $m(\vec{a}_1+\vec{a}_2+...+\vec{a}_n)=m\vec{a}_1+m\vec{a}_2+...+m\vec{a}_n$

2^0. $(m_1+m_2+...+m_n)\vec{a}=m_1\vec{a}+m_2\vec{a}+...+m_n\vec{a}$.

Biror L o'qda yotuvchi shu o'q bo'ylab yo'nalgan uzunligi bir o'lcham birligiga teng vektor shu o'qning orti deb ataladi. Agar $\vec{e}$ ort va unga parallel biror $\vec{a}$ vektor berilgan bo'lsa, uni

$$\vec{a}=\pm|\vec{a}|\vec{e}$$

ko'rinishda ifodalasa bo'ladi, bu yerda "+" ishora $\vec{a}$ va $\vec{e}$ larning yo'nalishlari bir xil bo'lganda va "-" ishora $\vec{a}$ va $\vec{e}$ larning yo'nalishlari teskari bo'lganda olinadi.

$\vec{a}$ va $\vec{e}$ vektorlarning biror L o'qdagi proeksiyalari quyidagi xossalarga ega:

$$np_l\vec{a}+np_l\vec{b}=np_l(\vec{a}+\vec{b}). \qquad (5.1)$$

$$np_l(m\vec{a})=mnp_l\vec{a}. \qquad (5.2)$$

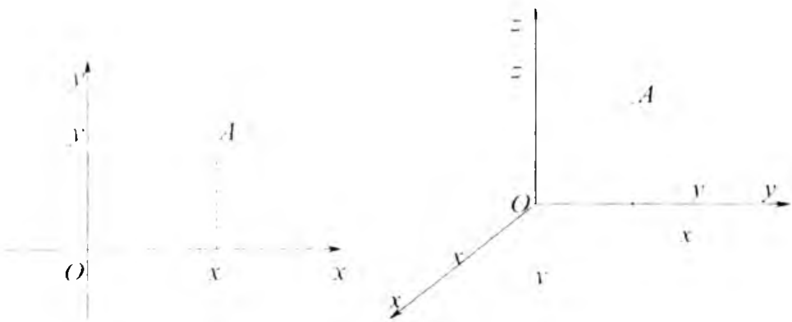
Xuddi shunday $\vec{a}=(\vec{a}-\vec{в})+\vec{в}$ ekanligini e'tiborga olsak,

$$np_l(\vec{a}-\vec{b})+np_l\vec{b}=np_l\vec{a}$$

yoki

$$np_l\vec{a}-np_l\vec{b}=np_L(\vec{a}-\vec{b}) \qquad (5.3)$$

6.3. Dekart koordinatalar sistemasida vektorlar. Tekislikda o'zaro perpendikulyar, O nuqtada kesishuvchi x va y o'qlar, fazoda esa o'zaro perpendikulyar, O nuqtada kesishuvchi x, y, z o'qlar berilgan bo'lsin. O nuqtani koordinatalar boshi, x, y, z o'qlarni koordinatalar o'qlari deb ataymiz. Tekislikdagi va fazodagi har qanday nuqta o'rni uning koordinatalar o'qidagi proeksiyalarini O nuqtagacha bo'lgan masofalari orqali yagona ravishda aniqlanadi. Bu masofalarni shu nuqtaning koordinatalari deb ataymiz (13-rasmga qarang).



13-rasm.

Uch o'lchamli fazoda olingan ixtiyoriy nuqtani O nuqta bilan birlashtirib turuvchi $\vec{OA}$ vektor A nuqtaning radius-vektori deb ataladi. $\vec{OA}$ vektorning x, y va z o'qlardagi proeksiyalarini mos ravishda x, y, z deb belgilasak, ular 13-rasmdan ko'rinadiki, A nuqtaning koordinatalaridan iborat bo'ladi. x ni A nuqtaning abssissasi, y ni ordinatasi va z ni aplikatasi deb ataymiz.

(x, y, z) sonlar uchligi fazoning A nuqtasi bilan uning radius-vektori o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatadi. Shu sababli, (x, y, z) uchlikni ayrim hollarda A nuqta yoki $\vec{OA}$ vektor deb tushunamiz.

Har qanday vektorni o'ziga parallel ravishda ko'chirish mumkin bo'lgani uchun, agar $\vec{OA} = (x, y, z)$ bo'lib, uni o'ziga parallel ko'chirish natijasida hosil bo'lgan vektor $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ bo'lsa, u holda $x = x_1, y = y_1, z = z_1$ bo'ladi.

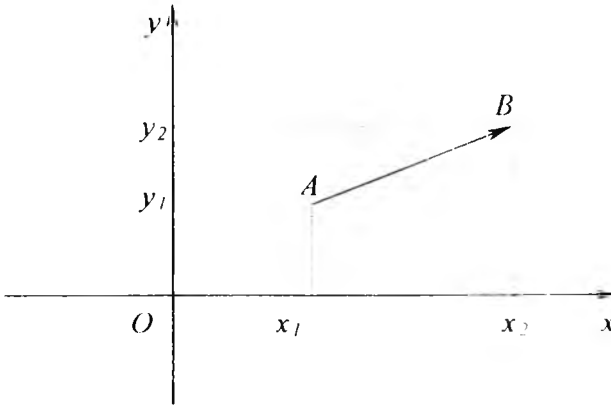
(5.1), (5.2) va (5.3) xossalarga ko'ra

$$(x, y, z) \pm (x_1, y_1, z_1) = (x \pm x_1, y \pm y_1, z \pm z_1) \qquad (5.4)$$

$$\alpha(x,y,z)=(\alpha x,\alpha y,\alpha z). \qquad (5,5)$$

deb yozish mumkin.

Tekislikda boshi $A(x_1,y_1)$ va oxiri $B(x_2,y_2)$ nuqtalarda bo'lgan $\vec{a}=\vec{AB}$ vektor berilgan bo'lsin (14-rasmga qarang). Chizmadan ko'rinadiki,



14-rasm.

$$np_x\vec{AB}=x_2-x_1, np_y\vec{AB}=y_2-y_1.$$

Demak,

$$\vec{a}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$$

ekan. Xuddi shunday, fazoda berilgan $\vec{AB}$, bu yerda $A(x_1,y_1,z_1), B(x_2,y_2,z_2)$, vektor uchun

$$\vec{a}=\vec{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1).$$

x,y,z o'qlarining ortlarini mos ravishda $\vec{i},\vec{j}$ va $\vec{k}$ bilan belgilaymiz. Ixtiyoriy (x,y,z) vektorni

$$(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

ko'rinishda ifodalash mumkin. Haqiqatan, agar

$$\vec{i} = (1,0,0), \vec{j} = (0,1,0), \vec{k} = (0,0,1)$$

ekanligini e'tiborga olsak,

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) =$$
$$= (x,0,0) + (0,y,0) + (0,0,z) = (x, y, z)$$

kelib chiqadi.

Bizga $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ va $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ vektorlar berilgan bo'lsin. Bu vektorlar parallel bo'lishi uchun ularning koordinatalari qanday shartlarni qanoatlantirishi kerakligini aniqlash talab etilgan bo'lsin. Agar $\vec{a} = 0$ bo'lsa, u holda uning yo'nalishi aniq emas, shu sababli uni $\vec{b}$ ga ham parallel deb qarash mumkin. Endi faraz qilaylik, $\vec{a} \neq 0$ bo'lsin. $\vec{b}$ vektor $\vec{a}$ ga parallel bo'lishi uchun $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ bo'lishi zarur va yetarlidir. Oxirgi tenglikni

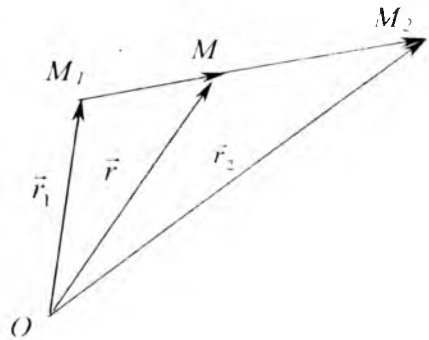
$$x_2 = \lambda x_1, y_2 = \lambda y_1, z_2 = \lambda z_1$$

ko'rinishda yozib olish mumkin. Bundan

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1}$$

kelib chiqadi. Demak, ikki vektor kolleniar bo'lishi uchun, ularning koordinatalari mos ravishda proportsional bo'lishi zarur va yetarli ekan.

Vektorlarning bu xususiyatidan foydalanib, uchlari $M_1(x_1, y_1, z_1)$ va $M_2(x_2, y_2, z_2)$ nuqtalarda bo'lgan M_1M_2 kesmani berilgan $M_1M : MM_2 = \lambda : 1$ nisbatda bo'luvchi M nuqtaning koordinatalarini topish masalasini hal qilamiz.



15-rasm.

Agar $\overrightarrow{OM_1} = \vec{r}_1, \overrightarrow{OM_2} = \vec{r}_2, \overrightarrow{OM} = \vec{r}$ desak, u holda $\overrightarrow{M_1M} = \vec{r} - \vec{r}_1, \overrightarrow{MM_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}$ bo'ladi. $\overrightarrow{M_1M}$ va $\overrightarrow{MM_2}$ vektorlar kolleniar bo'lgani uchun , berilgan nisbatga ko'ra

$$\vec{r} - \vec{r}_1 = \lambda(\vec{r}_2 - \vec{r})$$

bo'ladi. Bundan $\lambda \neq -1$ bo'lgani uchun

$$\vec{r} = \frac{\vec{r}_1 + \lambda\vec{r}_2}{1+\lambda}$$

yoki

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$$

kelib chiqadi.

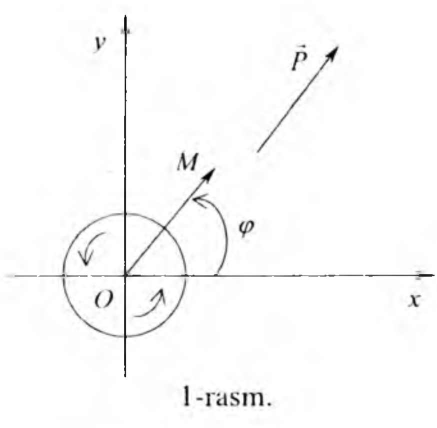
7-ma'ruza.

VEKTORLAR USTIDA AMALLAR. UCHBURCHAK YUZI. SKALYAR KO'PAYTMA

7.1. Tekislikda yo'nalishni aniqlash. Ma'lumki, har bir vektorning yo'nalishini uning koordinata o'qlari bilan tashkil etgan burchaklari to'la aniqlab beradi. Masalan, tekislikdagi vektorni qarasak, u Ox va Oy o'qlari bilan mos ravishda α va β burchaklar tashkil etadiki, bu burchaklar uchun $\alpha+\beta=\pi/2$ munosabat o'rinlidir. Shu sababli, berilgan vektor yo'nalishini faqat bitta burchak yordamida ham aniqlasa bo'ladi deyish mumkin, lekin bunda tekislikda musbat aylanma yo'nalish kiritilgan bo'lishi shart.

Ta'rif. O'zaro parallel bo'lmagan $\vec{a}$ va $\vec{в}$ vektorlar aniqlagan tekislikdagi aylanma yo'nalish deb, $\vec{a}$ vektordan $\vec{в}$ vektorgacha bo'lgan eng qisqa (ya'ni π dan kichik) burilish burchagiga aytamiz.

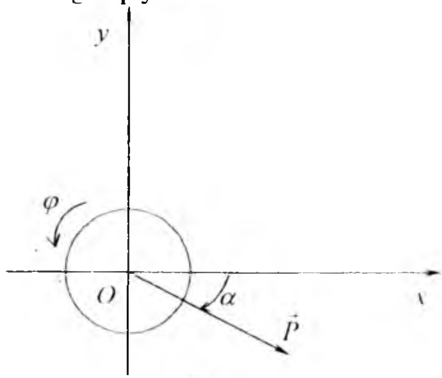
Musbat yo'nalish deb, $\vec{i}$ va $\vec{j}$ ortlar aniqlagan aylanma yo'nalishni tushunamiz.



1-rasm.

Faraz qilaylik, $\vec{P}$ – tekislikning ixtiyoriy vektori bo'lsin. Uning boshini koordinata boshi O ga ko'chirib, $\vec{OM}$ radius-vektor bilan ustma-ust tushiramiz. $\varphi - \vec{P}$ vektorni Ox o'qi bilan tashkil etgan burchagi, ya'ni Ox ni musbat yo'nalishda burganda $\vec{OM}$ bilan ustma-ust tushish burchagi bo'lsin.

φ deb nainki aylanish burchagini, balki 2π dan oshiq qiymatlarni ham qabul qiladigan burchakni tushunamiz, ya'ni bu yo'nalishni necha marotaba 2π burchakka burmaylik, natijada yana dastlabki yo'nalishga qaytamiz.



2-rasm.

φ manfiy qiymatlar ham qabul qilishi mumkin, ya'ni Ox o'qni manfiy yo'nalishda aylantirib $\vec{P} = \vec{OM}$ vektor bilan ustma-ust tushirish mumkin. Lekin bunda φ burchak endi $\vec{P}$ vektorning Ox o'q bilan tashkil etgan burchagi bilan bir xil bo'lmaydi. Masalan, - rasmdagi holatda α π dan kichik bo'lgan musbat burchak, φ esa yo $-\alpha$, yoki $2\pi - \alpha$ ga teng. Shu sababli, agar α, β lar mos ravishda $\vec{P}$ vektorning Ox va Oy o'qlari bilan tashkil etgan burchaklari bo'lsa, u holda φ

1-chorakda bo'lsa: $\alpha = \varphi, \quad \beta = \pi/2 - \varphi$

2-chorakda bo'lsa: $\alpha = \varphi, \quad \beta = \varphi - \pi/2$

3-chorakda bo'lsa: $\alpha = 2\pi - \varphi, \quad \beta = \varphi - \pi/2$

4-chorakda bo'lsa: $\alpha = 2\pi - \varphi, \quad \beta = 2\pi + \pi/2 - \varphi$

bo'ladi.

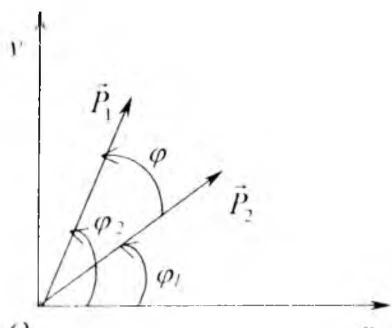
Agar $\vec{P} = \{X, Y\}$ bo'lsa, u holda

$$X = |\vec{P}|\cos\varphi, \qquad Y = |\vec{P}|\sin\varphi, \qquad |\vec{P}| = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

ekanligini e'tiborga olsak,

$$\cos\varphi \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2}}, \qquad \sin\varphi \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \tag{1}$$

kelib chiqadi. (1) formulalar $\vec{P}$ vektorning yo'nalishini to'la aniqlab beradi. φ ni qiymatini (1) ning bitta formulasidan, masalan $\sin\varphi$ orqali aniqlasa bo'ladi, lekin bu vektorning yo'nalishini aniqlash uchun yetarli emas, buning uchun $\cos\varphi$ ning ishorasini ham bilish kerak bo'ladi.



3-rasm.

Faraz qilaylik, $\vec{P}_1 = \{X_1, Y_1\}$ va $\vec{P}_2 = \{X_2, Y_2\}$ vektorlar berilgan bo'lsin. Bu vektorlar orasidagi burchakni, agar u $\vec{P}_1$ dan $\vec{P}_2$ ga qarab o'lchansa, $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ ko'rinishda ifodalaymiz; agar bu burchak yo'nalishi bilan bir xil bo'lsa, bu burchakni musbat qiymatlar bilan o'lchaymiz, aks holda bu burchak kattaligini manfiy qiymatlar bilan ifodalaymiz.

$\vec{P}_1$ va $\vec{P}_2$ lar orasidagi burchakni topaylik. Agar $\vec{P}_1$ va $\vec{P}_2$ vektorlarning Ox o'q bilan tashkil etgan burchaklari mos ravishda φ_1 va φ_2 bo'lsa, u holda

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 .$$

Bundan

$$\cos\varphi = \cos(\varphi_2 - \varphi_1), \qquad \sin\varphi = \sin(\varphi_2 - \varphi_1)$$

yoki

$$\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \cos\varphi_2 \cos\varphi_1 + \sin\varphi_2 \sin\varphi_1 ,$$

$$\sin(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin\varphi_2 \cos\varphi_1 - \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 ,$$

$$\cos\varphi_1 = X_1 \Big/ \sqrt{X_1^2 + Y_1^2}, \qquad \sin\varphi_1 = Y_1 \Big/ \sqrt{X_1^2 + Y_1^2},$$

ekanligini e'tiborga olsak,

$$\cos\varphi = \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2}{\sqrt{X_1^{\ 2} + Y_1^{\ 2}}\sqrt{X_2^{\ 2} + Y_2^{\ 2}}} \tag{2}$$

$$\sin\varphi \frac{X_1 Y_2 - X_2 Y_1}{\sqrt{X_1^{\ 2} + Y_1^{\ 2}}\sqrt{X_2^{\ 2} + Y_2^{\ 2}}} \tag{3}$$

munosabatlarni hosil qilamiz. (2) formulaning o'ng tomoni vektorlarning koordinatalariga nisbatan simmetrik bo'lsa, (3) formulaning o'ng tomoni, $\vec{P}_1$ bilan $\vec{P}_2$ ning o'rinlarini almashtirganda, o'z ishorasini teskarisiga almashtiradi. Shu sababli,

$$\left(\widehat{\vec{P}_2, \vec{P}_1}\right) = -\left(\widehat{\vec{P}_1, \vec{P}_2}\right) + 2k\pi,$$

$$\cos\left(\widehat{\vec{P}_2, \vec{P}_1}\right) = \cos\left(\widehat{\vec{P}_1, \vec{P}_2}\right), \qquad \sin\left(\widehat{\vec{P}_2, \vec{P}_1}\right) = \sin\left(\widehat{\vec{P}_1, \vec{P}_2}\right)$$

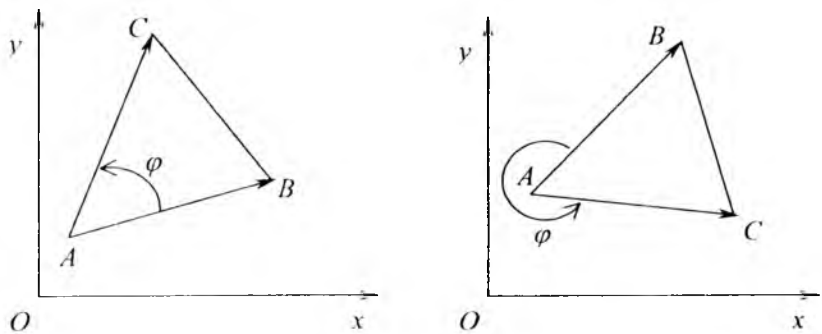
bo'ladi.

Misol. $\vec{Q} = \{3,4\}$ vektor bilan $\widehat{\vec{Q}, \vec{P}} = 60^\circ$ burchak tashkil etuvchi, uzunligi 2 bo'lgan $\vec{P}$ vektorni toping.

Yechish. Agar $\varphi = \widehat{Ox, \vec{Q}}$ desak, u holda $\varphi + 60^\circ = \widehat{Ox, \vec{P}}$ bo'ladi. Shu sababli, $\cos\varphi = 3/5$, $\sin\varphi = 4/5$ ekanligi uchun

$$X=2\cos(\varphi+60^\circ)=2(\cos\varphi\ \cos60^\circ-\sin\varphi\ \sin60^\circ)=$$
$$=2\left(\cos\varphi\ \frac{1}{2}-\sin\varphi\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{3}{5}-\frac{4}{5}\sqrt{3}=\frac{3-4\sqrt{3}}{5}.$$
$$Y=2\sin(\varphi+60^\circ)=2(\sin\varphi\ \cos60^\circ+\cos\varphi\ \sin60^\circ)=$$
$$=2\left(\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{4+3\sqrt{3}}{5}.$$

7.2. Boshi bir nuqtaga qo'yilgan ikki vektorda qurilgan uchburchak yuzi. Boshlari A nuqtaga keltirilgan $\vec{P}_1=\vec{AB}=\{X_1,\ Y_1\}$ va $\vec{P}_2=\vec{AC}=\{X_2,\ Y_2\}$ vektorlar berilgan bo'lsin.



a) b)

4-rasm.

V va S uchlarini birlashtirib AVS uchburchakni hosil qilamiz. Shu uchburchak yuzini hisoblaylik. Agar $\varphi=\left(\vec{P}_1,\ \vec{P}_2\right)$ bo'lsa, ma'lumki

$$S=\frac{1}{2}\left|\vec{P}_1\right|\cdot\left|\vec{P}_2\right|\sin\varphi \qquad (4)$$

Bu yerda, agar $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ vektorlar aniqlaydigan aylanma yo'nalish Oxu tekislikning musbat aylanma yo'nalishi bilan bir xil bo'lsa (qarang, 4-rasm, a), yuza qiymati musbat, aks holda (qarang, 4-rasm, b) manfiy bo'ladi.

Endi (4) da $\sin\varphi$ o'rniga (3) ni qo'ysak:

$$S=\frac{1}{2}(X_1Y_2-X_2Y_1)=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} \qquad (5)$$

formulani hosil qilamiz.

Agar $\vec{P}_1$ va $\vec{P}_2$ vektorlarga tortilgan parallelogrammni ko'rsak, uning yuzi uchun

$$S=\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}$$

formulaga ega bo'lamiz.

Endi faraz qilaylik, ABC uchburchakning uchlari $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ nuqtalarda bo'lsin. Berilgan uchburchakning yuzi $\vec{AB}$ va $\vec{AC}$ vektorlarga qurilgan uchburchak yuziga teng bo'ladi. Agar $\vec{AB}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1)$, $\vec{AC}=(x_3-x_1,\ y_3-y_1)$ ekanligini e'tiborga olsak, (5) formulaga ko'ra

$$S=\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}$$

yoki

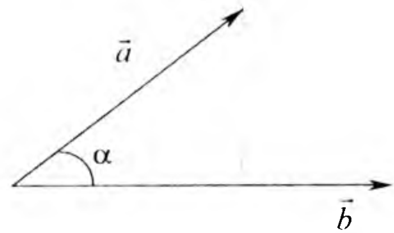
$$S=\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

formulalarga ega bo'lamiz.

7.3. Vektorlarning skalyar ko'paytmasi.

Ta'rif. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi deb, ular uzunliklarining, ular orasidagi burchak kosinusiga bo'lgan ko'paytmasiga aytamiz, ya'ni

$$\vec{a}\circ\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b}).$$



5-rasm.

Vektorning proeksiyasini ta'rifiga ko'ra, $|\vec{a}|\cdot\cos\alpha$ (bu yerda $\alpha = (\vec{a},\vec{в})$) $\vec{a}$ vektorning $\vec{в}$ vektordagi proeksiyasiga teng bo'ladi, shu sababli skalyar ko'paytmani

$$\vec{a}\circ\vec{в} = |\vec{в}|\cdot np_{в}\vec{a} = |\vec{a}|\cdot np_{a}\vec{в}$$

ko'rinishda ham yozsa bo'ladi (5-rasmga qarang).

Skalyar ko'paytma quyidagi xossalarga ega:

1^0. $\vec{a}\circ\vec{в} = \vec{в}\circ\vec{a}$,

2^0. $\vec{a}\circ(\vec{в}+\vec{c}) = \vec{a}\circ\vec{в} + \vec{a}\circ\vec{c}$,

3^0. $(\lambda\vec{a})\circ(\mu\vec{в}) = (\lambda\mu)\cdot(\vec{a}\circ\vec{в})$, ($\lambda,\mu$ - ixtiyoriy sonlar)

4^0. $\vec{a}\circ\vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

5^0. $\vec{a}\circ\vec{в} = 0$ bo'lishi uchun $\vec{a}$ va $\vec{в}$ lar o'zaro perpendikulyar bo'lishi zarur va yetarlidir.

1^0-xossaning isboti.

$$\vec{a}\circ\vec{в} = |\vec{a}|\cdot|\vec{в}|\cdot\cos\alpha = |\vec{b}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos\alpha = \vec{b}\circ\vec{a}$$

2^0-, 3^0- va 4^0-xossalarning isbotini bajarishni o'quvchining o'ziga havola qilamiz.

5^0- xossaning isboti. Zarurligi. $\vec{a}\circ\vec{в} = 0$ bo'lsin. U holda, $0 = \vec{a}\circ\vec{в} = |\vec{a}|\cdot|\vec{в}|\cdot\cos\alpha$ dan $|\vec{a}| \neq 0, |\vec{в}| \neq 0$ bo'lgani uchun $\cos\alpha = 0$, o'z navbatida bundan $\alpha = \frac{\pi}{2}$, ya'ni $\vec{a}\perp\vec{в}$ ekanligi kelib chiqadi.

Yetarligi. Agar $\alpha = (\vec{a}, \vec{в}) = \frac{\pi}{2}$ bo'lsa, u holda $\cos\alpha = 0$, shu sababli $\vec{a} \circ \vec{в} = |\vec{a}| \cdot |\vec{в}| \cdot \cos\frac{\pi}{2} = 0$ bo'ladi.

5^0-xossa vektorlarning perpendikulyarlik sharti deb ataladi.

4^0- va 5^0-xossalarga asosan,

$$\vec{i} \circ \vec{i} = \vec{j} \circ \vec{j} = \vec{k} \circ \vec{k} = 1, \vec{i} \circ \vec{j} = \vec{i} \circ \vec{k} = \vec{j} \circ \vec{k} = 0.$$

Endi agar $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1), \vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ bo'lsa, u holda

$$\vec{a} \circ \vec{в} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \circ (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = x_1x_2\vec{i}^{\,2} + x_1y_2\vec{i} \circ \vec{j} +$$
$$+ x_1z_2\vec{i} \circ \vec{k} + y_1x_2\vec{j} \circ \vec{i} + y_1y_2\vec{j}^{\,2} + y_1z_2\vec{j} \circ \vec{k} + z_1x_2\vec{k} \circ \vec{i} + z_1y_2\vec{k} \circ \vec{j} +$$
$$+ z_1z_2\vec{k}^{\,2} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Xususan, agar $\vec{a} = \vec{в}$ bo'lsa,

$$\vec{a} \circ \vec{a} = \vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2 = x_1^{\,2} + y_1^{\,2} + z_1^{\,2}$$

yoki,

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^{\,2} + y_1^{\,2} + z_1^{\,2}}$$

bo'ladi.

Bu formuladan foydalanib, fazoning ixtiyoriy $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ nuqtalari orasidagi masofa d_{AB} ni quyidagicha topsa bo'ladi:

$$d_{AB} = |\vec{a}| = |\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

1-Misol. $\bar{a} = (1,1,1)$ va $\bar{b} = (1,2,3)$ vektorlarning uzunligini toping.

Yechish.

$$|\bar{a}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}, \qquad |\bar{b}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}.$$

2-Misol. $\vec{a}=(1,0,1)$ va $\vec{в}=(1,2,2)$ vektorlar orasidagi burchakni toping.

Yechish. Skalyar ko'paytmaning ta'rifidan

$$\cos\alpha=\frac{\vec{a}\circ\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

formulani keltirib chiqaramiz. Bundan

$$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+0^2+1^2}=\sqrt{2},|\vec{в}|=\sqrt{1^2+2^2+2^2}=3,$$
$$\vec{a}\circ\vec{в}=1\cdot1+0\cdot2+1\cdot2=1+2=3.$$

Demak,

$$\cos\alpha=\frac{3}{3\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},\alpha=\frac{\pi}{4}.$$

Faraz qilaylik, berilgan $\vec{a}$ vektor x o'qi bilan α burchak, y o'qi bilan β burchak, z o'qi bilan γ burchak tashkil etsin. U holda

$$X=np_x\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\cos\alpha,$$
$$Y=np_y\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\cos\beta,$$
$$Z=np_z\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\cos\gamma,$$

ekanligidan

$$\cos\alpha=\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},$$
$$\cos\beta=\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}, \qquad (6)$$
$$\cos\gamma=\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$$

kelib chiqadi.

(6) ni kvadratlarga ko'tarib,o'zaro qo'shsak,

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{X^2 + Y^2 + Z^2} = 1$$ munosabatni hosil qilamiz.

(6) dan topiladigan $\cos\alpha$, $\cos\beta$ va $\cos\gamma$ qiymatlar $\vec{a}$ vektorning kosinus yo'naltiruvchilari deb ataladi.

Agar $\vec{a} = \vec{e} = (l, m, n)$ ort bo'lsa, u holda

$$l = \cos\alpha, \qquad m = \cos\beta, \qquad n = \cos\gamma$$

bo'ladi.

8-ma'ruza.

n – O'LCHOVLI EVKLID FAZOSI. VEKTOR KO'PAYTMA

8.1. Chiziqli evklid fazosi. Tekislikdagi har bir nuqtaga uning $\overrightarrow{OA}$ radius-vektorini o'zaro bir qiymatli mos qo'yaylik. Natijada, radius-vektorlar uchun kiritilgan qo'shish, ayirish va vektorni songa ko'paytirish amallariga ko'ra, bu radius-vektorlar to'plami, ya'ni tekislik chiziqli fazoga aylanadi, ya'ni chiziqli fazoning barcha xossalarini qanoatlantiradi. Bu chiziqli vektor fazoni R_2 bilan belgilaymiz, Xuddi shunday mulohaza qilib, uch o'lchamli fazoni chiziqli vektor fazoga aylantirib, uni R_3 bilan belgilaymiz,

Agar 3-ma'ruzada kiritilgan R^n chiziqli fazoda uning ikki $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $y=(y_1,y_2,\dots,y_n)$ vektorlari uchun skalyar ko'paytma

$$x\circ y=\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot y_i \tag{1}$$

ko'rinishda kiritilsa, R^n n o'lchamli chiziqli evklid fazosi deb ataladi, uni biz R^n bilan belgilaymiz.

Skalyar ko'paytma (1) uchun quyidagi xossalar o'rinli.

1^0. $x\circ x\ge 0$, $x\circ x=0$ faqat $x=0=(0,0,\dots,0)$ bo'lsagina,

2^0. $x\circ y=y\circ x$,

3^0. $(\alpha x+\beta y)\circ z=\alpha(x\circ z)+\beta(y\circ z)$,

4^0. $|x\circ y|\le\sqrt{x\circ x}\cdot\sqrt{y\circ y}$,

Oxirgi xossa Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi deb yuritiladi.

1^0-3^0-xossalarning isboti sodda bo'lgani uchun ularni bajarishni o'quvchiga havola qilib, 4^0-xossaning isbotini keltiramiz.

Haqiqatan, ixtiyoriy λ haqiqiy son uchun

$$0\le(x+\lambda y)\circ(x+\lambda y)=x\circ x+\lambda\cdot y\circ x+\lambda\cdot x\circ y+\lambda^2\cdot y\circ y=$$
$$=x\circ x+2\lambda\cdot x\circ y+\lambda^2\cdot y\circ y=a+2\lambda b+c\lambda^2.$$

bu yerda $a = x \circ x, b = x \circ y, c = y \circ y$ deb belgilandi. Ma'lumki, agar kvadrat uchhadni qiymatlari manfiy bo'lmasa, uning grafigi λ o'qdan yuqorida joylashgan bo'ladi, shu sababli, u λ o'qni kesib o'tmaydi. Bu hol, agar diskriminant $b^2 - ac \le 0$ yoki $b^2 \le ac$ bo'lgandagina ro'y beradi. Xossa to'liq isbot bo'ldi.

Agar (1) da $x = y$ desak,

$$x \circ x = |x|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Bundan

$$|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

hosil bo'ladi. U holda Koshi-Bunyakovskiy tengsizligini

$$|x \circ y| \le |x| \cdot |y|$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bundan ko'rinadiki, shunday λ $-1 \le \lambda \le 1$ mavjudki, uning uchun

$$x \circ y = \lambda \cdot |x| \cdot |y|$$

o'rinli bo'ladi. Agar $\lambda = \cos\omega$ desak ($[0, \pi]$ da $\cos\omega = \lambda$ yagona yechimga ega, ya'ni har bir λ uchun faqat bitta ω burchak topiladi) , oxirgi tenglikni

$$x \circ y = |x| \cdot |y| \cos\omega \qquad (2)$$

ko'rinishda yozish mumkin bo'ladi. ω son x va y vektorlar orasidagi burchak deb ataladi.

x va y vektorlar ortogonal deyiladi, agar ularning skalyar ko'paytmasi

$$x \circ y = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i = 0$$

bo'lsa.

(2) dan ko'rinadiki, nolga teng bo'lmagan x va y vektorlarning ortogonal bo'lishi uchun ular orasidagi burchak $\omega = \frac{\pi}{2}$ bo'lishi zarur va yetarlidir.

Quyidagi tengsizlik

$$|x + y| \leq |x| + |y| \tag{3}$$

Minkovskiy tengsizligi deb ataladi. Bundan xususan,

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

tengsizlik kelib chiqadi.

(3) ni isbotlashni o'quvchiga havola qilamiz.

R_n chiziqli fazoning har bir x elementiga, shu fazoning y elementini mos qo'yish qoidasi, R_n ni o'ziga akslantirish deb ataladi.

R_n ning chiziqli operatori deb, R_n ni o'ziga akslantiruvchi va quyidagi

$$A(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot Ax, \quad A(x + y) = Ax + Ay$$

xossalarga ega bo'lgan har qanday A akslantirishga aytamiz. Buni $A : R_n \to R_n$ ko'rinishda yozish qabul qilingan.

Bizga R_n chiziqli fazoning A chiziqli operatori va shu fazoning biror $\Re = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ bazisi berilgan bo'lsin. $A\vec{e}_\kappa, \kappa = 1,2,...,n$, vektorlarni $\Re$ bazis bo'yicha yoyaylik:

$$A\vec{e}_\kappa = a_{1\kappa}\vec{e}_1 + ... + a_{n\kappa}\vec{e}_n, \quad \kappa = 1,2,...,n.$$

U holda quyidagi

$$[A]=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matritsa A chiziqli operatorning $\Re$ bazisdagi matritsasi deb ataladi. Agar matritsa chiziqli operatorning qaysi bazisdagi matritsasi ekanligini ko'rsatish zarur bo'lsa, bu matritsa uchun $[A]_{\Re}$ belgi ishlatiladi.

Chiziqli operator o'z matritsasi bilan yagona ravishda aniqlanadi, ya'ni agar x, y lar R_n ning ixtiyoriy elementlari bo'lib, X, Y lar ularning mos ravishda koordinatalar ustunlari bo'lsa, u holda $y = Ax$ dan $Y = [A]X$ kelib chiqadi.

R_n fazoning chiziqli operatorlari uchun quyidagi amallarni kiritish mumkin:

a) operatorlar yig'indisi: $(A+B)x = Ax + Bx)$, o'z navbatida $[A+B]=[A]+[B]$;

b) operatorni songa ko'paytirish: $(\lambda \cdot A)x = \lambda \cdot (Ax)$ va $[\lambda \cdot A] = \lambda \cdot [A]$;

v) operatorlar ko'paytmasi: $(AB)x = A(Bx)$, va o'z navbatida $[AB]=[A]\cdot[B]$.

Har qanday $x \in R_n$ uçhun $Ex = x$ munosabatni qanoatlantiruvchi E operatorni birlik operator deymiz. A operatorga teskari operator deb $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ munosabatni qanoatlantiruvchi A^{-1} operatorga aytamiz. A operatorga teskari operator mavjud bo'lishi uchun (bu holda A operator maxsusmas operator deb ataladi) uning har qanday bazisdagi $[A]$ matritsasi maxsus bo'lmasligi zarur va yetarlidir, bundan tashqari $[A^{-1}]=[A]^{-1}$.

Misol. R_3 ning $Ax = (x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, 3x_1 - x_2 + x_3)$ operatorini chiziqli operator ekanligini ko'rsating va uning kanonik bazisdagi matritsasini tuzing.

Yechish. Agar $x = (x_1, x_2, x_3)$, va $y = (y_1, y_2, y_3)$ lar R_3 ning ixtiyoriy elementlari bo'lsa, u holda

$$x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3),\quad \lambda\cdot x=(\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3)$$

larga asosan,

$$A(x+y)=(x_2+y_2+x_3+y_3,2(x_1+y_1)+x_3+$$
$$+y_3,3(x_1+y_1)-((x_2+y_2)+(x_3+y_3)))=$$
$$=(x_2+x_3+y_2+y_3,2x_1+x_3+2y_1+$$
$$+y_3,3x_1-x_2+x_3+3y_1-y_2+y_3)=$$
$$=(x_2+x_3,2x_1+x_3,3x_1-x_2+x_3)+$$
$$+(y_2+y_3,2y_1+y_3,3y_1-y_2+y_3)=Ax+Ay$$
$$A(\lambda x)=(\lambda x_2+\lambda x_3,2\lambda x_1+\lambda x_3,3\lambda x_1-\lambda x_2+\lambda x_3)=$$
$$=\lambda(x_2+x_3,2x_1+x_3,3x_1-x_2+x_3)=\lambda Ax.$$

Demak, berilgan operator chiziqli ekan.

$$A\vec{e}_1=(0,2,3)=0\cdot\vec{e}_1+2\cdot\vec{e}_2+3\cdot\vec{e}_3,$$
$$A\vec{e}_2=(1,0,-1)=1\cdot\vec{e}_1+0\cdot\vec{e}_2-1\cdot\vec{e}_3,$$
$$A\vec{e}_3=(1,1,1)=1\cdot\vec{e}_1+1\cdot\vec{e}_2+1\cdot\vec{e}_3.$$

Bundan

$$[A]=\begin{pmatrix}0&2&3\\1&0&-1\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

Misol. $Ax=(x_1,x_2+1,x_3+2)$ operatorni chiziqlikka tekshiring.
Yechish.

$$A(x+y)=(x_1+y_1,x_2+y_2+1,x_3+y_3+2)$$
$$=(x_1,x_2+1,x_3+2)+(y_1,y_2,y_3)\neq Ax+Ay,$$

ya'ni berilgan operator chiziqli emas.

Misol. $Ax=(2x_2,-2x_1+3x_2+2x_3,4x_1-x_2+5x_3)$, $Bx=(-3x_1+x_2,2x_2+x_3,-x_2+3x_3)$ operatorlar berilgan. $C=AB$ operatorni va uning $[C]$ matritsasini toping.

Yechish. Avval $[A]$ va $[B]$ matritsalarni topib olamiz.

$$A\vec{e}_1 = (0, -2,4), A\vec{e}_2 = (2,3,-1), A\vec{e}_3 = (0,2,5)$$

va

$$B\vec{e}_1 = (-3,0,0), B\vec{e}_2 = (0,2,-1), B\vec{e}_3 = (1,1,3)$$

bo'lgani uchun

$$[A] = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad [B] = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

U holda

$$[C] = [A] \cdot [B] = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 6 & 4 & 7 \\ -12 & -7 & 18 \end{pmatrix}.$$

Bundan

$$C\vec{e}_1 = (0,6,-12), \quad C\vec{e}_2 = (4,4,-7), \quad C\vec{e}_3 = (2,7,18)$$

va

$$Cx = C(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3) = x_1 \cdot (C\vec{e}_1) + x_2 \cdot (C\vec{e}_2) + x_3 \cdot (C\vec{e}_3) =$$
$$= (4x_2 + 2x_3, 6x_1 + 4x_2 + 7x_3, -12x_1 - 7x_2 + 18x_3).$$

Agar

$$Ax = \lambda x \tag{4}$$

tenglik biror $x \neq 0, x \in R_n$ uchun o'rinli bo'lsa, u holda λ son A chiziqli operatorning xos soni, x
esa A operatorning λ xos soniga mos keluvchi xos vektori deb ataladi.

R_n fazoda (4) tenglikni unga ekvivalent bo'lgan quyidagi matritsa tengligiga almashtirish mumkin:

$$[A - \lambda E]X = 0, \quad X \neq 0. \tag{5}$$

Oxirgi tenglikdan, λ son A operatorning xos soni bo'lishi uchun $\det[A - \lambda E] = 0$ bo'lishi zarur va yetarli ekanligi kelib chiqadi. $p(\lambda) = \det[A - \lambda E]$ A operatorning xarakteristik ko'phadi deb ataladi.

Demak, xos son xarakteristik ko'phadning yechimi bo'lar ekan. Unga mos keluvchi xos vektorning koordinatalar ustuni (5) bir jinsli tenglamalar sistemasining biror noldan farqli yechimi bo'ladi.

Misol. $Ax = (2x_1 - x_2 + 2x_3, 5x_1 - 3x_2 + 3x_3, -x_1 - 2x_3)$ operatorning xos soni va unga mos keluvchi xos vektorlarini toping.

Yechish. Avval A operatorning matritsasini tuzib olamiz:

$$[A] = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Berilgan operatorga mos keluvchi bir jinsli tenglamalar sistemasi quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\begin{cases} (2-\lambda)x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 5x_1 - (3+\lambda)x_2 + 3x_3 = 0 \\ -x_1 - (2+\lambda)x_3 = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Bundan xarakteristik ko'phadni topamiz:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)^3.$$

Demak, xos son $\lambda = -1$ ekan. Bu sonni (6) ga qo'ysak,

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ -x_1 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Bundan $x_1 = -x_3$, $x_1 = x_2$. Agar $x_1 = \alpha$ desak,

$$X=\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

bo'ladi.

Agar A operator R_n fazoda $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ xos sonlarga mos keluvchi n ta chiziqli bog'liq bo'lmagan $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,e_n$ xos vektorlarga ega bo'lsa, u holda A operatorning shu xos vektorlaridan tuzilgan sistema R_n da bazis tashkil etadi. A operatorning shu bazisdagi matritsasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$[A]=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & . & . & 0\\ 0 & \lambda_2 & . & . & 0\\ . & . & . & . & .\\ 0 & 0 & . & . & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

Misol. A chiziqli operatorning quyidagi matritsasini diagonal ko'rinishga keltiring:

$$[A]=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ -2 & -2 & -1\end{pmatrix}.$$

Yechish.

$$p(\lambda)=\det[A-\lambda E]=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & 0\\ 0 & 2-\lambda & 0\\ -2 & -2 & -1-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)(1-\lambda^2)=0.$$

Bundan xos sonlarni topamiz: $\lambda_1=2,\lambda_2=1,\lambda_3=-1$.

Ularga mos keluvchi xos vektorlarni topish uchun avval (5) sistemaga $\lambda_1=2$ ni qo'yamiz:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x \quad = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Bundan, $E_1 = (2,1,-2)^T$. Xuddi shunday, agar $\lambda_2 = 1$ desak, (5) sistema quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Demak, $E_2 = (1,0,-1)^T$ ekan. Agar (5) da $\lambda_3 = -1$ desak,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 3x_2 = 0. \end{cases}$$

Bundan, $E_3 = (0,0,1)^T$.

Demak, E_1, E_2, E_3 bazisda A operatorning matritsasi

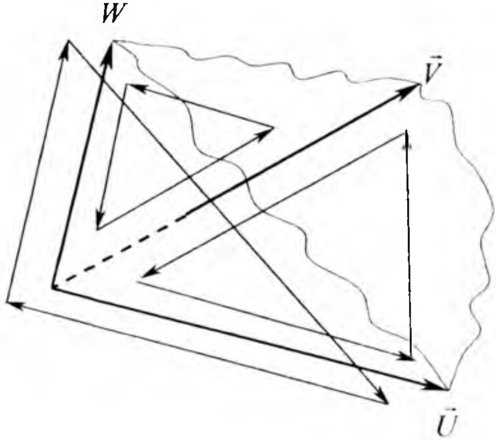
$$[A] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

bo'ladi.

8.2. Ikki vektorning vektor ko'paytmasi. Avval R_3 fazoda yo`nalish tushunchasini kiritib olamiz.

Bir tekislikda yotgan uchta vektorni komplanar vektorlar deb ataymiz. Bir tekislikda yotmagan har qanday vektorlar uchligini komplanar bo'lmagan vektorlar deymiz. Bizga komplanar bo'lmagan, boshlari bir nuqtaga keltirilgan $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ vektorlar berilgan bo'lsin.

Ta'rif. $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ vektorlar uchligi chap sistemani tashkil etadi deymiz, agar $(\vec{u}, \vec{v})$, $(\vec{v}, \vec{w})$, $(\vec{w}, \vec{u})$ vektorlar juftliklari aniqlaydigan aylanma yo'nalishlar o'zlari yotgan tekisliklarda musbat aylanma yo'nalish bilan bir xil bo'lsa. Loaqal bitta juftlik yo'nalishi o'zi yotgan tekislikning musbat aylanma yo'nalishidan farq qilsa, bunday uchlikni o'ng sistema deb ataymiz.



1-rasm.

Misol. $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ ortlar uchligi chap sistemani tashkil etadi, chunki $(\vec{i}, \vec{j})$, $(\vec{j}, \vec{k})$, $(\vec{k}, \vec{i})$ juftliklar yo'nalishi mos ravishda Oxy, Oyz, Ozx tekisliklarning musbat yo'nalishi bilan bir xildir.

$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ uchlik esa o'ng sistemadir, chunki $(\vec{i}, \vec{k})$ juftlik aniqlagan aylanma yo'nalish Ozx tekisligining musbat yo'nalishiga teskari. Xuddi shunday, $(\vec{k}, \vec{j})$ va $(\vec{j}, \vec{i})$ juftliklar aniqlagan aylanma yo'nalishlar mos ravishda Oyz va Oxy tekisliklarining musbat yo'nalishiga teskaridir.

Endi geometriya va amaliy matematika masalalarida keng qo'llaniladigan vektor ko'paytma tushunchasini kiritamiz.

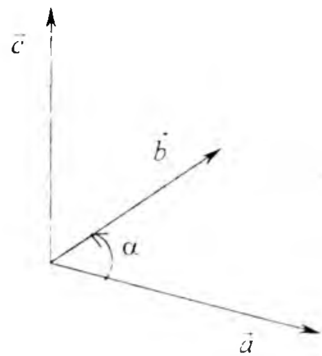
Ta'rif. $\vec{a}$ va $\vec{в}$ vektorlarning vektor ko'paytmasi deb, quyidagi uchta xususiyatga ega bo'lgan $\vec{c}$ vektorga aytamiz:

1) $\vec{c}$ ning uzunligi $\vec{a}$ va $\vec{в}$ vektorlar uzunliklari va ular orasidagi φ burchak sinusi ko'paytmasiga teng:

$$|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{в}|\sin\varphi; \tag{7}$$

2) $\vec{c}$ vektor $\vec{a}$ va $\vec{в}$ vektorlar yotgan tekislikka perpendikulyar,jumladan $\vec{a}$ ga ham va $\vec{в}$ ga ham perpendikulyar;

3) $\vec{a}, \vec{в}, \vec{c}$ vektorlar chap sistemani tashkil etadi.



2-rasm.

Birinchi xossadan $\vec{c}$ ning uzunligi $\vec{a}$ va $\vec{в}$ vektorlardan yasalgan paralelogramm yuziga teng ekanligi kelib chiqadi, ya'ni

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

yoki

$$S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a} \times \vec{b}| \qquad (8)$$

Vektor ko'paytmani $\vec{a} \times \vec{в}$ ko'rinishda ifodalaymiz.

Yuqorida kiritilgan ikki ko'paytmalarga (ya'ni skalyar va vektor ko'paytmalar) berilgan nomlar, ularning natijalariga qarab tanlanganligini eslatib o'tamiz.

Vektor ko'paytma quyidagi xossalarga ega.

1-xossa. $\vec{a} \times \vec{в} = 0$ bo'lishi uchun, $\vec{a}$, $\vec{в}$ vektorlar kolleniar bo'lishi zarur va yetarlidir.

Bu xossa vektorlarning kolleniarlik sharti deb yuritiladi.

Isboti (7) tenglikdan kelib chiqadi.

2-xossa. $\vec{в}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{в}$, ya'ni ko'paytuvchilar o'rni almashsa, natija faqat o'z ishorasini o'zgartiradi.

Haqiqatan, agar ko'paytmada $\vec{a}$ va $\vec{в}$ vektorlar o'rnini almashtirsak, $\vec{в},\vec{a},\vec{a}\times\vec{в}$ uchlik o'ng sistema bo'lib qoladi, $\vec{a}\times\vec{в}$ ning ishorasini teskarisiga almashtirsak, unda $\vec{в},\vec{a},-\vec{a}\times\vec{в}$ uchlik chap sistemaga aylanadi.

3-xossa. Agar m,n - ixtiyoriy sonlar bo'lsa,

$$(m\vec{a})\times(n\vec{b})=mn(\vec{a}\times\vec{b}).$$

Isboti. Agar $m=0$, $n\neq 0$ yoki $m\neq 0, n=0$ bo'lsa, tenglik bajarilishi o'z-o'zidan ko'rinib turibdi. $m\neq 0, n=1$ bo'lgan holni ko'rish yetarli,chunki $m=1, n\neq 0$ bo'lgan hol 2-xossani qo'llash hisobiga biz ko'rmoqchi bo'lgan holga keltiriladi. Avvalambor

$$\left|(m\vec{a})\times\vec{b}\right|=|m\vec{a}||\vec{b}|\sin\phi,$$

bu yerda agar $m>0$ bo'lsa, $\phi=\varphi$ va $m<0$ bo'lsa, $\phi=\pi-\varphi$, lekin ikkala holda ham $\sin\phi=\sin\varphi$ bo'lgani uchun

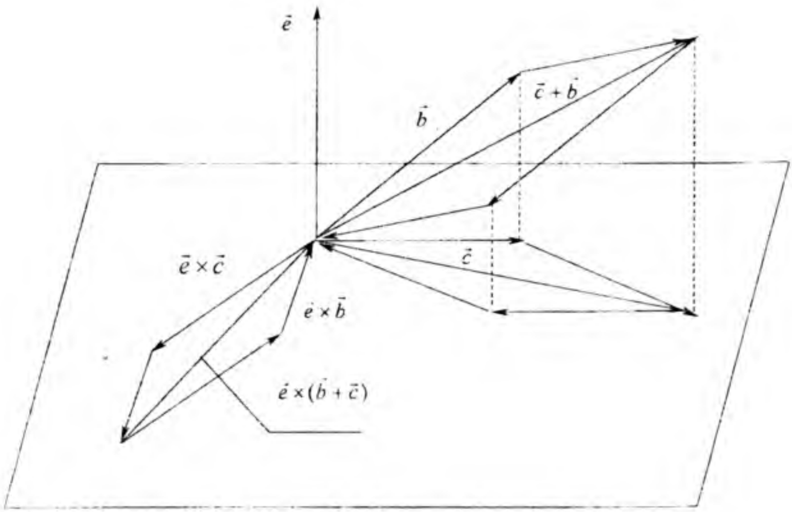
$$\left|(m\vec{a})\times\vec{b}\right|=|m||\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi=|m||\vec{a}\times\vec{b}|.$$

Ikkinchidan, $m\vec{a}$ vektor $\vec{a}$ vektorga kolleniar, shu sababli $\vec{a}\times\vec{b}$ vektor $m\vec{a}$ ga perpendikulyar. $m(\vec{a}\times\vec{b})$ vektor $\vec{a}\times\vec{b}$ ga kolleniar bo'lgani uchun $m(\vec{a}\times\vec{b})$ vektor $m\vec{a}$ ga va $\vec{b}$ ga perpendikulyardir. Va nihoyat, agar $m\succ 0$ bo'lsa, $\vec{a}$ va $m\vec{a}$ vektorlar, $\vec{a}\times\vec{b}$ va $m(\vec{a}\times\vec{b})$ vektorlar bir xil yo'nalgan bo'ladi, shu sababli $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}\times\vec{b}$ uchlik chap sistema bo'lgani uchun $m\,\vec{a}$, $\vec{b}$, $m(\vec{a}\times\vec{b})$ uchlik ham chap sistema bo'ladi. $m<0$ bo'lgan hol ham xuddi shunday tekshiriladi. Xossa to'liq isbot bo'ldi.

4-xossa.

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}.$$

Isboti: Avval $\vec{a}=\vec{e}$ ort bo'lgan holni ko'raylik. $\vec{в}$ va



3-rasm.

$\vec{c}$ vektorlarni 3-rasmda ko'rsatilgandek qilib, $\vec{e}$ ga perpendikulyar bo'lgan π tekislikka proeksiyalaymiz va bu proektsiyalarni $\vec{e}$ ort atrofida soat milini harakati bo'ylab 90^0 ga bursak, $\vec{e}\times\vec{в}$ va $\vec{e}\times\vec{c}$ vektorlar hosil bo'ladi.

$np_\pi(c+в)=np_\pi в+np_\pi c$ bo'lgani uchun $\vec{e}\times\vec{в}$ va $\vec{e}\times\vec{c}$ larning yig'indisi bo'lgan va ularga tortilgan parallelogrammning dioganali $\vec{e}\times(\vec{в}+\vec{c})$ ga teng bo'ladi. Demak,

$$\vec{e}\times(\vec{в}+\vec{c})=\vec{e}\times\vec{в}+\vec{e}\times\vec{c}$$

ekan.

Endi agar $\vec{a}$ ixtiyoriy noldan farqli vektor bo'lsa, $\vec{a}=|\vec{a}|\vec{a}_0$ deb (bu yerda $\vec{a}_0$ - $\vec{a}$ vektorning orti),

$$\vec{a}\times(\vec{в}+\vec{c})=|\vec{a}|\vec{a}_0\times(\vec{в}+\vec{c})=|\vec{a}|(\vec{a}_0\times(\vec{в}+\vec{c}))=|\vec{a}|(\vec{a}_0\times\vec{в}+\vec{a}_0\times\vec{c})=$$
$$=|\vec{a}|(\vec{a}_0\times\vec{в})+|\vec{a}|(\vec{a}_0\times\vec{c})=|\vec{a}|\vec{a}_0\times\vec{в}+|\vec{a}|\vec{a}_0\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{в}+\vec{a}\times\vec{c}$$

tenglikni hosil qilamiz. Xossa to'liq isbot bo'ldi.

Bu xossadan xususan quyidagi munosabat kelib chiqadi:

$$(\vec a+\vec в)\times(\vec c+\vec d)=\vec a\times\vec c+\vec a\times\vec d+\vec b\times\vec c+\vec b\times\vec d\,.$$

Vektor ko'paytmaning xossalaridan ortlar uchun quyidagi munosabatlar kelib chiqadi:

$$\vec i\times\vec i=\vec i^{\,2}=0,\ \vec j^{\,2}=0,\ \vec k^{\,2}=0.$$
$$\vec i\times\vec j=\vec k,\ \vec j\times\vec k=\vec i,\ \vec k\times\vec i=\vec j.$$
$$\vec j\times\vec i=-\vec k,\ \vec k\times\vec j=-\vec i,\ \vec i\times\vec k=-\vec j.$$

Shu sababli, agar vektorlar o'z proeksiyalari bilan berilgan bo'lsa, ya'ni $\vec a=\{a_x,a_y,a_z\}$, $\vec b=\{b_x,b_y,b_z\}$ bo'lsa, u holda

$$\vec a\times\vec в=(a_x\vec i+a_y\vec j+a_z\vec k)\times(b_x\vec i+b_y\vec j+b_z\vec k)=$$
$$a_xb_x\vec i^{\,2}+a_xb_y(\vec i\times\vec j)+a_xb_z(\vec i\times\vec k)+a_yb_x(\vec j\times\vec i)+$$
$$+a_yb_y\vec j^{\,2}+a_yb_z(\vec j\times\vec k)+a_zb_x(\vec k\times\vec i)+a_zb_y(\vec k\times\vec j)+a_zb_z(\vec k\times\vec k)$$
$$=a_xb_y\vec k-a_xb_z\vec j-a_yb_x\vec k+a_yb_z\vec i+a_zb_x\vec j-a_zb_y\vec i=$$
$$=(a_yb_z-a_zb_y)\vec i-(a_xb_z-a_zb_x)\vec j+(a_xb_y-a_yb_x)\vec k=$$
$$=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\vec i-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\vec j+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\vec k=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ \vec i & \vec j & \vec k\end{vmatrix}.$$

Misol. $\vec a=\{4,2,-3\}$ va $\vec в=\{2,1,4\}$ vektorlarning vektor ko'paytmasini toping.

Yechish.

$$\vec a\times\vec в=\begin{vmatrix}4 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 4\\ \vec i & \vec j & \vec k\end{vmatrix}=11\vec i-22\vec j-4\vec k.$$

Misol. $\vec a=\{x_1,y_1,z_1\},\vec b=\{x_2,y_2,z_2\}$ vektorlarga tortilgan uchburchak yuzini toping.

Yechish. Ma'lumki (qarang, (8)),

$$S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \left| \vec{a} \times \vec{b} \right|.$$

Shu sababli,

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2}$$

Misol. $A(1,-1,2), B(0,1,-1)$ va $C(-1,2,3)$ uchlari berilgan $ABCD$ parallelogrammning yuzini toping.

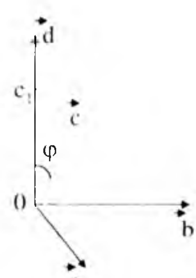
Yechish. $\vec{a} = \vec{AB} = \{-1,2,-3\}, \vec{b} = \vec{AC} = \{-2,3,1\}$ vektorlar tuzib olib, avvalgi misol natijasini qo'llasak:

$$s = \sqrt{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}^2} = \sqrt{11^2 + 7^2 + 1} = \sqrt{171}.$$

Uchta vektorning aralash ko'paytmasi

$\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarning aralash ko'paytmasi deb $\vec{a}$ vektorni $\vec{b}$ vektorga vektor ko'paytmasidan hosil bo'lgan natijaning $\vec{c}$ vektorga skalyar ko'paytmasiga aytiladi va quyidagicha belgilanadi:

$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ yoki $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.



4-rasm.

Aralash ko'paytmaning geometrik ma'nosi: $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar komplanar vektorlar bo'lmasin, ya'ni ular bir tekislikda yotmasin.

U holda $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{d}$ va $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{d} \cdot \vec{c}$ =dcSosφ=dc_1; Bu yerda d-

$\vec{a},\vec{b}$ vektorlarga qurilgan parallelogramm yuzi, s_1 esa $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ vektorlarga qurilgan parallelepipedning balandligi bo'lgani uchun $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ aralash ko'paytma o'sha parallelepipedning hajmiga teng bo'ladi.

Aralash ko'paytmaning xossalari;

1. Istalgan ikkita vektorning o'rni almashsa aralash ko'paytma ishorasini o'zgartiradi:

   $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=-(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{b}=-(\vec{c}\times\vec{b})\cdot\vec{a}$.

2. Agarda uchta vektordan ikkitasi teng bo'lsa yoki parallel bo'lsa aralash ko'paytma nolga teng bo'ladi.

3. «∘» va «×» amallari belgisining o'rnilarini almashtirish mumkin, ya'ni $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})$.

4. $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar komplanar bo'lishi uchun (bitta tekislikda yotishi uchun) $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0$ bajarilishi zarur va yetarli.

Parallelepiped va piramida hajmi

$\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarga qurilgan parallelepipedning hajmi

$$V_{par}=\pm\vec{a}\vec{b}\vec{c}\,.$$

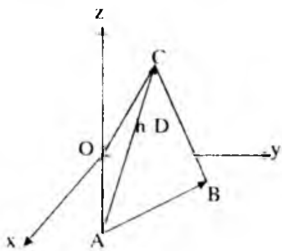
$\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarga qurilgan piramidaning hajmi

$$V_{pir}=\pm\frac{1}{6}\vec{a}\vec{b}\vec{c}\,.$$

Misol. Uchlari $O(0,0,0)$, $A(5,2,0)$, $V(2,5,0)$ va $S(1,2,4)$ nuqtalarda bo'lgan piramidaning hajmi, AVS yoqning yuzasi va shu yoqqa tushirilgan perpendikulyar hisoblansin.

Yechilishi: $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ va $\overline{AO}$ vektorlarning proektsiyalarini topaylik

$\overline{AB}\{-1,3,0\}$, $\overline{AC}\{-4,0,4\}$, $\overline{AO}\{-5,-2,0\}$



5-rasm.

$$V_{pir} = \frac{1}{6}\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AO}$$

$$V_{pir} = -\frac{1}{6}\begin{vmatrix} -3 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \\ -5 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{6}(-60-24) =$$

84/6=14 kub.b.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|12\vec{i}+12\vec{k}+12\vec{j}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{12^2+12^2+12^2} = 6\sqrt{3}$$

$h = OD = \dfrac{3V_{пир}}{S_{\Delta ABC}}$; Demak, $h = \dfrac{3\cdot 14}{6\sqrt{3}} = \dfrac{7\sqrt{3}}{3}$;

9-ma'ruza.

TEKISLIKDAGI TO'G'RI CHIZIQ

9.1. Umumiy tushunchalar. Faraz qilaylik, bizga ikki x va y o'zgaruvchi miqdorlarni bog'lovchi

$$F(x,y)=0 \tag{1}$$

tenglama berilgan bo'lsin. Bu tenglama o'z navbatida bir o'zgaruvchini, masalan y ni ikkinchisining, ya'ni x ning funksiyasi sifatida aniqlaydi. Agar (1) ni y ga nisbatan yechib olsak, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$y=f(x), \tag{2}$$

bu yerda $f(x)$ bir qiymatli yoki ko'p qiymatli funksiya bo'lishi mumkin, bu funksiyaning qiymatlari x o'zgarganda uzluksiz o'zgaradi deb faraz qilaylik.

x va y miqdorlarni Oxy dekart koordinatalar tekisligining biror M nuqtasini koordinatalari sifatida qaraymiz. U holda (2) tenglik x o'zgaruvchining har bir qiymatiga y ning aniq bir qiymatini mos qo'yadi.

Shu sababli, x ning har bir qiymatiga tekislikning koordinatalari x va $y=f(x)$ bo'lgan aniq bir M nuqtasi mos keladi.

Endi, agar x uzluksiz qiymatlarni qabul qilsa, u holda M Oxy tekisligida uzluksiz o'zgarib, nuqtalarning geometrik o'rnini chizadi, bu geometrik o'rinni chiziq deb ataymiz.

Demak, chiziq koordinatalari (1) yoki (2) ko'rinishdagi tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalarning geometrik o'rni ekan. (1) yoki (2) tenglama o'z navbatida chiziqning tenglamasi deb ataladi.

Endi, agar aytilgan gaplarni umumlashtirsak, berilgan chiziqning tenglamasi deb, (1) yoki (2) ko'rinishga ega bo'lgan shunday tenglamaga aytamizki, bu tenglama faqat berilgan to'g'ri chiziqda yotuvchi nuqtaning koordinatalarini x va y ning o'rniga qo'ygandagina qanoatlanadi.

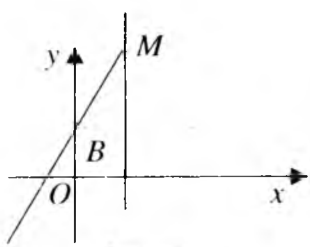
Agar $F(x,y)=Ax+By+C$ bo'lsa, (1) ni 1-tartibli tenglama deymiz, u ifodalaydigan chiziqni to'g'ri chiziq deb ataymiz.

Agar $F(x,y)=Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+M$ bo'lsa, (1) ni 2-tartibli tenglama, unga mos keluvchi chiziqni esa 2-tartibli chiziq deb ataymiz.

Misol tariqasida, to'g'ri chiziq va aylananing tenglamasini tuzamiz.

1. To'g'ri chiziq tenglamasi. Faraz qilaylik, y o'qini $A(0,b)$ nuqtada kesib o'tuvchi va x o'qiga α burchak ostida og'ib o'tgan to'g'ri chiziq berilgan bo'lsin.

$M(x,y)$ to'g'ri chiziqning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. 1-rasmga ko'ra, $BM=AB\cdot tg\alpha$, bu yerda BM va AB lar



1-rasm.

$M(x,y)$ $\overrightarrow{BM}$ va $\overrightarrow{AB}$ vektorlarning kesma kattaligi. $BM=y-b, AB=x$ bo'lgani uchun yuqoridagi formuladan $y-b=tg\alpha\cdot x$,

yoki

$$y=kx+b, \tag{3}$$

kelib chiqadi, bu yerda

$$k=tg\alpha \tag{4}$$

deb belgilandi. (3) tenglamani berilgan to'g'ri chiziqning ixtiyoriy nuqtasini koordinatalari qanoatlantiradi, va aksincha koordinatalari (3) ni qanoatlantiradigan har qanday nuqta Δ to'g'ri chiziqda yotadi. k koeffitsient (4) ga ko'ra, α burchakka bog'liq bo'lgani uchun burchak koeffitsient deb ataladi, b esa boshlang'ich ordinata deyiladi.

2. Aylana tenglamasi. Radiusi r va markazi $C(a,b)$ nuqtada bo'lgan aylanani ko'raylik. Ta'rifga ko'ra, aylana $C(a,b)$ nuqtagacha bo'lgan masofalari o'zgarmas r ga teng bo'lgan nuqtalarning geometrik o'rnidir.

Agar $M(x,y)$ tekislikning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsa, u holda

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r,$$

yoki tenglikni kvadratga ko'tarib, ildizni yo'qotsak,

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

Bu tenglama berilgan aylananing tenglamasidir.

Agar aylananing markazi koordinatalar boshida bo'lsa, u holda uning tenglamasi soddaroq bo'ladi:

$$x^2+y^2=r^2.$$

9.2. To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi.

Teorema. Oxy koordinatalar tekisligida har qanday to'g'ri chiziqning tenglamasi

$$Ax+By+C=0 \tag{5}$$

ko'rinishda bo'ladi, aksincha, (5) ko'rinishdagi har qanday tenglama Oxy koordinatalar tekisligida to'g'ri chiziqni ifodalaydi.

Isboti. Yuqorida ko'rilganidek, x o'qiga og'ish burchagi ma'lum bo'lgan har qanday to'g'ri chiziqning tenglamasi $y=kx+b$, ko'rinishda bo'ladi. Buni o'z navbatida $kx-y+b=0$ ko'rinishga keltirib olsa bo'ladi. Endi, agar to'g'ri chiziqning bir nuqtasi $M_0(x_0, y_0)$ va unga perpendikulyar bo'lgan biror $\vec{s} = \{A, B\}$ vektor berilgan bo'lsa, u holda to'g'ri chiziqda yotuvchi har qanday $M(x, y)$ nuqta uchun $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0\}$ vektor $\vec{s}$ vektorga perpendikulyar bo'ladi. Vektorlarning perpendikulyarlik shartiga ko'ra $\vec{s} \circ \overrightarrow{M_0M} = 0$ yoki

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \tag{6}$$

Qavslarni ochib va $C = -Ax_0 - By_0$ deb belgilasak, (6) ni (5) ko'rinishga keltirsa bo'ladi.

Endi teoremaning ikkinchi qismini isbot qilamiz. Agar (5) da $B \neq 0$ bo'lsa, u holda (5) tenglikni B ga bo'lib yuborib, uni

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

ko'rinishga keltirib olamiz. Agar $k = -\frac{A}{B}, b = -\frac{C}{B}$ desak, oxirgi tenglikni $y = kx + b$ deb yozsa bo'ladi. Ma'lumki, bu to'g'ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasidir.

Agar $B = 0$ bo'lsa, u holda $A \neq 0$, shuning uchun (5) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$x = -\frac{C}{A}.$$

bu yerda $a = -\frac{C}{A}$ desak, $x = a$, ya'ni x o'qiga perpendikulyar to'g'ri chiziq tenglamasi hosil bo'ladi. Teorema isbot bo'ldi.

(5) tenglama to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi deyiladi, (6) esa bir nuqtadan o'tgan to'g'ri chiziq tenglamasi deb ataladi.

To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi (5) to'liq bo'lmagan uch holni ko'ramiz:

1) $C=0$, bunda tenglama $Ax+By=0$ ko'rinishni oladi, bu tenglama koordinatalar boshidan o'tgan to'g'ri chiziqni ifodalaydi. Haqiqatan, $x=0, y=0$ koordinatalar bu tenglamani qanoatlantiradi.

2) $A=0, B\neq 0$, bunda (5) $By+C=0$ ko'rinishga keladi, bu tenglama x o'qiga parallel o'tadigan to'g'ri chiziqni ifodalaydi. Xususan, agar $C=0$ bo'lsa, $y=0$ hosil bo'ladi, bu x o'qining tenglamasidir.

3) $A\neq 0, B\neq 0, C\neq 0$ bo'lsin. U holda (5) ning ozod hadi C ni tenglikning o'ng tomoniga o'tkazsak va $-C$ ga bo'lib yuborsak:

$$\frac{Ax}{-C}+\frac{By}{-C}=1$$

yoki

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1.$$

Quyidagi belgilashlarni kiritsak:

$$a=-\frac{C}{A}, b=-\frac{C}{B}$$

tenglama

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \tag{7}$$

ko'rinishga keladi. (7) ni to'g'ri chiziqning kesmalardagi tenglamasi deb ataymiz, chunki bu to'g'ri chiziq x o'qini $M(a,0)$ nuqtada, y o'qini $N(0,b)$ nuqtada kesib o'tadi.

Misol. $3x-5y+15=0$ to'g'ri chiziqning kesmalardagi tenglamasini tuzing.

Yechish. Ozod had 15 ni tenglikning o'ng tomoniga o'tkazib -15 ga bo'lamiz:

$$\frac{x}{-5}+\frac{y}{3}=1.$$

Demak, berilgan to'g'ri chiziq x va y o'qlaridan mos ravishda $a = -5, b = 3$ kesmalar ajratar ekan.

Umumiy tenglamaning A va B koeffitsientlari geometrik ma'noga ega. (6) dan ma'lumki, A va B koeffitsientlar to'g'ri chiziqqa perpendikulyar vektorning koordinatalaridir. Agar $\vec{a} = \{-B, A\}$ vektor tuzib olsak, $\vec{s}$ va $\vec{a}$ vektorlar perpendikulyar ekanligiga ishonch hosil qilish qiyin emas. Shu sababli, $\vec{a}$ vektor berilgan to'g'ri chiziqqa parallel bo'ladi, uni shu xususiyatiga ko'ra, to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori, $\vec{s}$ ni esa normal vektor deb atashadi.

10-ma'ruza.

TO'G'RI CHIZIQNING BOSHQA KO'RINISHDAGI TENGLAMALARI

Agar $M_0(x_0, y_0)$ to'g'ri chiziqning berilgan nuqtasi va $\vec{a} = \{m, n\}$ uning yo'naltiruvchi vektori bo'lsa, uning tenglamasini quyidagicha tuzsa ham bo'ladi.

Faraz qilaylik, $M(x, y)$ nuqta to'g'ri chiziqning o'zgaruvchi nuqtasi bo'lsin. U holda, $\vec{a}$ va $\overrightarrow{M_0M}$ vektorlar o'zaro parallel bo'ladi. Vektorlarning kolleniarlik shartiga ko'ra

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} \tag{8}$$

Bu tenglama to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi deb ataladi.

Agar (8) da kasrlarni t ga tenglasak,

$$x - x_0 = mt, \qquad y - y_0 = nt,$$

yoki

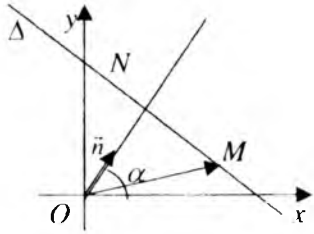
$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \end{cases}$$

parametrik tenglamalar deb ataluvchi tenglamani hosil qilamiz.

Agar to'g'ri chiziqning ikkita $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$ nuqtalari ma'lum bo'lsa, u holda $\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$ vektorni yo'naltiruvchi vektor deb qarash mumkin, shuning uchun bu to'g'ri chiziqning tenglamasi (8) ga ko'ra

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \tag{9}$$

bo'ladi. Bu tenglama ikki nuqtadan o'tgan to'g'ri chiziqning tenglamasi deb ataladi.



2-rasm.

Endi, faraz qilaylik, bizga Δ to'g'ri chiziq va uning normal vektori $\vec{n}$ berilgan bo'lsin. Agar α $\vec{n}$ vektorning x o'qiga og'ish burchagi bo'lsa, u holda shu vektorning orti

$\vec{n}_0 = \{CoS\alpha, Sin\alpha\}$ bo'ladi. $|\vec{n}_0| = 1$.

$M(x, y)$ Δ to'g'ri chiziqning o'zgaruvchi nuqtasi va $ON = p$ bo'lsin. U holda (2-rasmga qarang).

$$p = np_n \overrightarrow{OM} = |\vec{n}| \cdot np_n \overrightarrow{OM} = \vec{n} \circ \overrightarrow{OM} = xCoS\alpha + ySin\alpha.$$

Bundan

$$xCoS\alpha + ySin\alpha - p = 0 \qquad (10)$$

kelib chiqadi. (10) tenglama to'g'ri chiziqning normal tenglamasi deb ataladi.

Agar to'g'ri chiziq $Ax + By + C = 0$ tenglama bilan berilgan bo'lib, bu tenglama normal tenglamami yoki yo'q ekanligini aniqlash uchun bu to'g'ri chiziqning normal vektorini uzunligi birga tengligini tekshirish kifoya. Bu tenglama $|\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2} = 1$ bo'lsagina normal bo'ladi. Agar $|\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2} \neq 1$ bo'lsa, berilgan tenglamani $\pm\sqrt{A^2 + B^2}$ ifodaga bo'lish kerak:

$$\pm\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}x \pm \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}y \mp \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0 \qquad (11)$$

(10) formuladan ma'lumki, ozod hadning ishorasi manfiy bo'lishi shart, shu sababli, oxirgi tenglikdagi ishoralardan birini ozod hadning ishorasiga teskari qilib tanlash zarur. Shunda (11) normal tenglamaga aylanadi. $\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$ ifoda normallovchi ko'paytuvchi deb ataladi.

To'g'ri chiziqqa doir turli masalalar.

1. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak. Faraz qilaylik, bizga $\Delta_1 : y = k_1x + b_1$ va $\Delta_2 : y = k_2x + b_2$ to'g'ri chiziqlar berilgan bo'lsin. Ma'lumki, $k_1 = tg\alpha_1, k_2 = tg\alpha_2$ bu yerda α_1, α_2 lar mos ravishda Δ_1, Δ_2 to'g'ri chiziqlarning x o'qiga og'ish burchaklaridir. Bu burchaklarni Oxy tekisligidagi musbat yo'nalish bo'ylab hisoblangan deb tushunamiz. Agar $\alpha_2 > \alpha_1$ bo'lsa, Δ_1, Δ_2 to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak deb $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ burchakni tushunamiz. U holda

$$tg\alpha = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \qquad (12)$$

(12) dan ko'rinadiki, agar $k_1 = k_2$ bo'lsa, $\alpha = 0$ yoki $\alpha = \pi$ bo'ladi, ya'ni Δ_1 va Δ_2 to'g'ri chiziqlar parallel bo'ladi, va aksincha, agar Δ_1 va Δ_2 to'g'ri chiziqlar parallel bo'lsa, $tg\alpha = 0$, bundan esa $k_1 = k_2$ kelib chiqadi. Shu sababli, $k_1 = k_2$ tenglik to'g'ri chiziqlarning parallellik sharti deb ataladi. Agar Δ_1 va Δ_2 to'g'ri chiziqlar perpendikulyar, ya'ni $\alpha = \frac{\pi}{2}$ bo'lsa, u holda (12) dan $1 + k_1 \cdot k_2 = 0$ munosabat kelib chiqadi. Bu tenglikni to'g'ri chiziqlarning perpendikulyarlik sharti deb ataymiz.

2. Ikki to'g'ri chiziq tenglamasini birgalikda tekshirish. Faraz qilaylik, bizga ikki Δ_1 va Δ_2 to'g'ri chiziqlarning tenglamalaridan tuzilgan

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases} \tag{13}$$

sistema berilgan bo'lsin. Ma'lumki, bu sistema yagona yechimga ega bo'lishi uchun

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

bo'lishi zarur va yetarlidir. Bu esa $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ tengsizlikka ekvivalent. Bu holda (13) ning yagona yechimi Δ_1 va Δ_2 to'g'ri chiziqlarda yotuvchi nuqtaning koordinatalarini beradi, ya'ni Δ_1 va Δ_2 to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasini aniqlaydi.

Agar

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$$

bo'lsa, $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$ bo'ladi. Bunda ikki hol yuz beradi: 1)agar (13) sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'lsa, bu $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ bo'lganda bajariladi, u holda Δ_1 va Δ_2 to'g'ri chiziqlar ustma-ust tushadi; 2) (13) sistema umuman yechimga ega emas, bu $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ bo'lganda yuz beradi, bunda berilgan to'g'ri chiziqlar umuman kesishmaydi, ya'ni ular parallel bo'ladi.

3. Nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqgacha bo'lgan masofa.

$M_0(x_0, y_0)$ nuqtadan Δ to'g'ri chiziqgacha bo'lgan d masofani topish talab etilgan bo'lsin. Δ to'g'ri chiziqning $\vec{n}_0$ normalini qurib olaylik. Agar M_0 nuqta Δ ga nisbatan, $\vec{n}_0$ normalning musbat yo'nalishi tomonida joylashgan bo'lsa, u holda masofa $+d$, aks holda $-d$ bo'ladi. Buni M_0 nuqtaning Δ to'g'ri chiziqdan δ chetlanishi deb ataymiz.

Chizmadan ko'rinadiki,

$$p + \delta = np_{n_0} \overline{OM_0} = x_0 CoS\alpha + y_0 Sin\alpha,$$

bundan

$$\delta = x_0 CoS\alpha + y_0 Sin\alpha - p \qquad (14)$$

yoki

$$d = |x_0 CoS\alpha + y_0 Sin\alpha - p| \qquad (15)$$

kelib chiqadi. Demak, nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqgacha bo'lgan masofani topish uchun, nuqtaning koordinatalarini to'g'ri chiziqning normal tenglamasini chap tomonidagi noma'lumlar o'rniga qo'yish kifoya ekan.

Agar to'g'ri chiziq tenglamasi normal bo'lmasa, u holda normallovchi ko'paytuvchi yordamida normal ko'rinishga keltirib, so'ngra (15) formula yordamida talab qilingan masofani hisoblaymiz.

To'g'ri chiziqlar dastasining tenglamasi.

Tekislikning $S(x_0, y_0)$ nuqtasidan o'tgan barcha to'g'ri chiziqlari to'plami S markazli to'g'ri chiziqlar dastasi deb ataladi.

Teorema. Agar $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ va $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ lar S nuqtada kesishuvchi to'g'ri chiziqlar, va α, β lar bir vaqtda nolga teng bo'lmagan ixtiyoriy sonlar bo'lsa, u holda

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2)=0 \qquad (16)$$

S nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi bo'ladi.

Isboti. Avval (16) haqiqatan tenglama ekanligini ko'rsataylik, buning uchun uni quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$(\alpha A_1+\beta A_2)x+(\alpha B_1+\beta B_2)y+(\alpha C_1+\beta C_2)=0 \qquad (17)$$

Bu yerda $\alpha A_1+\beta A_2$ va $\alpha B_1+\beta B_2$ lar bir vaqtda nolga teng bo'laolmaydi, chunki aks holda, $\alpha A_1+\beta A_2=0$ va $\alpha B_1+\beta B_2=0$ dan $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=-\frac{\beta}{\alpha}$ kelib chiqadi, buni esa bo'lishi mumkin emas, chunki bu to'g'ri chiziqlar shartga ko'ra kesishadi. Bu esa (17) tenglama ekanligini ko'rsatadi. Demak, u tekislikda biror to'g'ri chiziqni ifodalaydi. Endi bu to'g'ri chiziq S nuqtadan o'tishini ko'rsatsak kifoya. Haqiqatan, (17) dagi noma'lumlar o'rniga x_0, y_0 larni qo'ysak, $A_1x_0+B_1y_0+C_1=0$ va $A_2x_0+B_2y_0+C_2=0$ ekanligidan.

$$\alpha(A_1x_0+B_1y_0+C_1)+\beta(A_2x_0+B_2y_0+C_2)=0$$

bo'lishi kelib chiqadi. Teorema isbot bo'ldi.

Agar masalan, $\alpha \neq 0$ bo'lsa, (17) ni quyidagi ko'rinishda yozsa bo'ladi:

$$(A_1x+B_1y+C_1)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0,$$

bu yerda $\lambda=\frac{\beta}{\alpha}$ deb belgilandi.

Misol. S nuqtada kesishuvchi $2x+3y-5=$ $=0{,}7x+15y+1=0$ to'g'ri chiziqlar berilgan bo'lsin. S

nuqtadan $12x-5y-1=0$ to'g'ri chiziqqa perpendikulyar o'tgan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

Yechish. Avval berilgan to'g'ri chiziqlar kesishishini tekshiramiz: $\frac{2}{7} \neq \frac{7}{15}$. Demak, ular kesishmaydi. Dasta tenglamasi

$$2x+3y-5+\lambda(7x+15y+1)=0.$$

Buni quyidagicha yozib olamiz:

$$(2+7\lambda)x+(3+15\lambda)y+(-5+\lambda)=0. \qquad (18)$$

Bu to'g'ri chiziqning burchak koeffitsientini topaylik:

$$k=-\frac{2+7\lambda}{3+15\lambda}.$$

Berilgan to'g'ri chiziqning burchak koeffitsienti $k_1=\frac{12}{5}$ bo'lgani uchun, ularning perpendikulyarlik shartiga ko'ra

$$-\frac{2+7\lambda}{3+15\lambda}=-\frac{5}{12}.$$

Bundan $\lambda=-1$. Bu qiymatni (18) ga qo'ysak:

$$5x+12y+6=0.$$

11-ma'ruza.

IKKINCHI TARTIBLI CHIZIQLAR: ELLIPS, GIPERBOLA VA PARABOLA. ULARNING KANONIK TENGLAMALARI

Ikkinchi tartibli egri chiziqlar.

O'zgaruvchilarning 2 darajasi qatnashgan tenglamalar ikkinchi tartibli egri chiziqni bildiradi. Umumiy holda uning tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi

$$Ax^2+2Bxu+Cu^2+2Dx+2Ey+F=0 \qquad (1)$$

bu yerda A, B, C, D, E, F o'zgarmas koeffitsientlar bo'lib bulardan A, B, C koeffitsientlarning kamida bittasi 0 ga teng bo'lmasligi kerak. (1) tenglama koeffitsientlarining olgan qiymatlariga qarab uning qanday egri chiziqni tasvirlashini ko'ramiz.

1. Aylananing umumiy tenglamasi

Oldingi paragraflarda $C(a;$b) nuqtasidan o'tuvchi radiusi R ga teng bo'lgan aylananing tenglamasi

$$(x-a)^2+(u-b)^2=R^2 \qquad (2)$$

ekanligini ko'rgan edik. Qavslarni ochib bu tenglamani quyidagicha yozish mumkin: $x^2-2a\mathrm{x}+a^2+u^2-2bu+b^2=R^2$, bu tenglamani (1) tenglama bilan solishtirib xu oldidagi koeffitsientni yo'qligi x^2 va u^2 oldidagi koeffitsientlar o'zaro teng ekanligini ko'ramiz. Shunday qilib, x, u ga nisbatan ikkinchi tartibli umumiy tenglama aylana tenglamasi bo'lishi uchun undagi x^2, u^2 qatnashgan hadlar oldidagi koeffitsientlar teng bo'lishi va xu ko'paytma oldidagi koeffitsientlar 0 ga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.

Demak ikkinchi tartibli egri chiziqlarning tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi: $x^2+u^2+2Dx+2Ey+F=0$, bu yerda $\mathrm{x}^2+2\mathrm{Dx}$ va $\mathrm{u}^2+2\mathrm{Ey}$ ni to'la kvadratga keltiramiz, u holda

$$(x+D)^2+(y+E)^2=D^2+E^2-F \qquad (3)$$

(3) da quyidagi uch hol bo'lishi mumkin:

1) $D^2+E^2-F>0$ bu holda $R=\sqrt{D^2+E^2-F}$ radiusli markazi ($-D$, $-E$) nuqtada bo'lgan aylana tenglamasi kelib chiqadi.

2) $D^2+E^2-F=0$ bu holda (3) tenglama quyidagi ko'rinishni oladi: $(x+D)^2+(y+E)^2=0$ bu tenglamani faqat ($-D$,$-E$) nuqta koordinatalarigina qanoatlantiradi.

3) $D^2+E^2-F<0$ (3) tenglama hech qanday egri chiziqni ifodalamaydi.

Misol. $x^2+u^2+6x-6u-22=0$ hech qanday egri chiziqni ifodalamasligini ko'rsating.

Yechish. (3) ga asosan.

$$(x^2+6x+9)-9+(u^2-6x+9)-9+22=0$$
$$(x+3)^2+(u-3)^2=-4.$$

Demak, bu tenglama hech qanday egri chiziqni ifodalamaydi.

Misol 2. $x^2+u^2-4x+6u+3=0$ tenglama aylananing tenglamasi ekanligini ko'rsating.

Yechish. x^2 va u^2 oldidagi koeffitsientlar teng, xu ko'paytma qatnashgan had tenglamada yo'q. Bu yerda $A=1$, $V=1$, $D=-4$, $E=6$, $F=3$.

(2) ga asosan,

$$x^2-4x+4+u^2+6y+9-4-9+3=0$$
$$(x-2)^2+(u+3)^2=10$$

bu markazi (2; -3) nuqtada bo'lgan, radiusi $\sqrt{10}$ bo'lgan aylananing tenglamasidir.

2. Ellips

Ta'rif. Ellips deb,fokuslar deb ataluvchi nuqtalargacha bo'lgan masofalarining yig'indisi $2a$ o'zgarmas bo'lgan tekislik nuqtalarining geometrik o'rniga aytiladi. Fokuslarni F_1, F_2 deb belgilaymiz, ular orasidagi masofa 2S ellipsning ta'rifiga asosan,

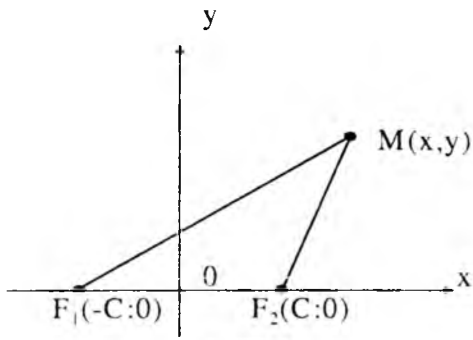
$$F_1M+F_2M=2a \tag{4}$$

bizga ma'lumki $2a>2C$. Dekart koordinatalar sistemasini olamiz. Tanlab olgan koordinatalar sistemasida chap fokus $F_1(-C{:}0)$ va o'ng fokus $F_2(C{:}0)$, 1-rasmdan $M(x, u)$ ixtiyoriy nuqta. ellips tenglamasini keltirib chiqaramiz.

$$MF_1=\sqrt{(x+C)^2+y^2} \qquad MF_2=\sqrt{(x-C)^2+y^2}$$

(4) ga asosan

$$\sqrt{(x+C)^2+y^2}+\sqrt{(x-C)^2+y^2}=2a \qquad .(5)$$



1-rasm.

Tenglamani soddalashtirish uchun yuqoridagi ifodani quyidagicha yozamiz.

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

tenglamani ikkala tomonini kvadratga ko`tarsak

$$(x+C)^2+y^2=4a^2+(x-C)^2+y^2-4a\sqrt{(x-C)^2+y^2}$$

Soddalashtirgandan so'ng

$$a\sqrt{(x-C)^2+y^2}=a^2-Cx$$

yana kvadratga ko'tarsak

$$a^2\,[(x\text{-}S)^2+u^2]=a^4\text{-}2a^2Sx+S^2x^2$$

va soddalashtirsak

$$(a^2\text{-}S^2)x^2+a^2u^2=a^2(a^2\text{-}S^2)$$

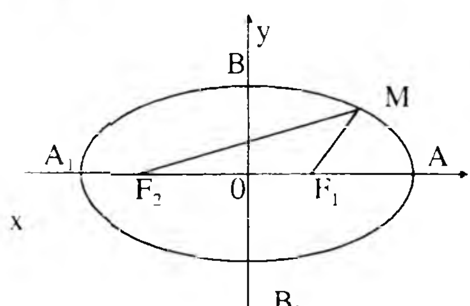
a^2-S^2 musbat son, shuning uchun a^2-S^2=b^2 deb olsak (5) tenglama quyidagicha ko'rinishga keladi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{6}$$

Ellipsni ixtiyoriy nuqtalari (6) tenglamani qanoatlantiradi, (6) ellipsning kanonik tenglamasi deyiladi. Endi ellipsning kanonik tenglamasidan foydalanib uning shaklini tekshiramiz. (6) tenglamaga ellipsning x va u ning kvadratlarigina kiradi, shu sababli (x, u) nuqta ellipsning nuqtasi bo'lsa, ($\pm x$, $\pm u$) nuqta ham ellipsning nuqtasi bo'ladi. Shunday ko'rinishda ellips koordinata o'qlariga nisbatan simmetrik joylashgan, shuning uchun ellips shaklini birinchi chorakda tekshirish kifoya. (6) tenglamani u ga nisbatan yechamiz.

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \tag{7}$$

u haqiqiy son bo'lishi uchun a^2-x^2 $\geq$0 yoki $x \leq a$ bo'lishi kerak $|x|$ 0 dan a gacha o'sib borishi mumkin. x=0 bo'lganda u=b bo'lib, x=a bo'lganda u=0 bo'ladi. Abssissa x 0 dan a gacha o'sib borganda u ordinata b dan 0 gacha kamayib boradi. BA yoy ellipsning birinchi chorakdagi yoyi bo'ladi. Simmetriyaga asoslanib ellipsning 2, 3 va 4 choraklardagi yoylari $\overline{BA_1}$, $\overline{A_1B_1}$ va $\overline{B_1A}$ larini ko'rsatamiz, ellips chizmada ko'rsatilgan.



2-rasm.

Koordinata o'qlarini ellipsning simmetriya o'qlari deyiladi, fokuslar etgan simmetriya o'q ellipsning fokal o'qi deyiladi. Simmetriya o'qlarining kesishgan nuqtasi ellipsning markazi deyiladi. Ellipsning simmetriya o'qlari bilan kesishgan nuqtalari uning uchlari deyiladi. 2-rasmda $A(a,\ 0)$, $A_1(-a,\ 0)$ $V(b,\ 0)$, $V_1(-b,\ 0)$ nuqtalar ellipsning uchlari $AA_1=2a$ ellipsning katta o'qi $VV_1=2b$ ellipsning kichik o'qlari deyiladi ($a>b$ bo'lishi shart). (6) tenglamada $a=b$ deb olinsa, $x^2+u^2=a^2$ ko'rinishiga ega bo'ladi. Bu tenglama radiusi a ga teng bo'lgan aylananing tenglamasidir.

Ellipsning ekssentrisiteti. Ellipsning fokuslari orasidagi masofani uning katta o'qi uzunligiga nisbati ellipsning ekssentrisiteti deyiladi va $\varepsilon=\dfrac{c}{a}$ deb belgilanadi. s noldan a gacha bo'lgan qiymatlarni olish mumkin, shuning uchun $0\le\varepsilon<1$.

Bizga ma'lumki, $c=\sqrt{a^2-b^2}$ bu yerdan

$$\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}.$$

Agarda $a=b$ bo'lsa ellips aylana bo'lib qoladi va $\varepsilon=0$ bo'ladi. Agarda b ning qiymati a dan 0 gacha kamaysa ε 0 dan 1 gacha o'sib boradi. Shunday qilib, ellipsning ε ekssentrisiteti 0 ga qancha yaqin bo'lsa ellipsning shakli aylanaga shuncha yaqin va ekssentrisiteti 1 ga qancha yaqin bo'lsa u shuncha ingichkalasha boradi.

Ellipsning fokal radiuslari. Ellipsning ixtiyoriy nuqtalaridan fokuslargacha bo'lgan masofalari ellips nuqtasining fokal radiuslari deyiladi. F_1M va F_2M ellipsdagi M nuqtaning fokal radiuslaridir, bularni r_1 va r_2 deb belgilaymiz. Bizga ma'lumki,

$$r_1=F_1M=\sqrt{(x-C)^2+y^2}\qquad r_2=F_2M=\sqrt{(x+C)^2+y^2}$$

fokal radiuslarni ifodalash uchun formula topish maqsadida bu tenglikning ikkala tomonini kvadratga ko'tarib, chiqqan natijalarni ikkinchisidan birinchisini hadlab ayiramiz:

$$r_2^2 - r_1^2 = 4Cx$$

$$r_1 + r_2 = 2a \qquad (8)$$

qo'ysak

$$r_2 - r_1 = 2\frac{c}{a}x \qquad (9)$$

tenglik hosil bo'ladi, (8) va (9) tenglikni hadlab qo'shsak,

$$r_1 = a - \varepsilon x$$

$$r_2 = a + \varepsilon x \qquad (10)$$

hosil bo'ladi. (10) formulalar abtsissasi x ga teng bo'lgan ellips nuqtalarining fokal radiuslarini x orqali chiziqli ifodalaydi.

Misol. $2x^2+4u^2=8$ ellips fokuslarining koordinatalari, ekssentrisiteti va abssissasi 1 ga teng bo'lgan nuqtalarning fokal radiuslari topilsin.

Yechish. Ellips tenglamasi 8 ga bo'lamiz $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ bu tenglikdan $a^2=4$, $a=2$, $b^2=2$, $b=\sqrt{2}$

$$C=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{4-2}=\sqrt{2}$$

demak, $F_1(\sqrt{2}, 0)$ $F_2(-\sqrt{2}, 0)$ nuqtalar ellipsning fokuslaridir.

Ellipsning ekssentrisiteti $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

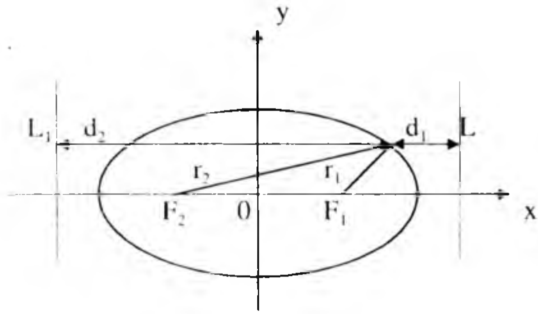
$x=1$ bo'lgani uchun

$$r_1=a-\varepsilon x=2-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1=\frac{4-\sqrt{2}}{2} \qquad r_2=\frac{4+\sqrt{2}}{2}$$

Ellipsning direktrisalari

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Ellipsning direktrisalari deb, uning katta o'qiga perpendikulyar bo'lgan va markazidan $\left|\pm\frac{a}{b}\right|$ masofa uzunligida o'tadigan ikkita to'g'ri chiziqqa aytiladi. Ellips direktrisalarining tenglamalari $x = +\frac{a}{\varepsilon}$ $x = -\frac{a}{\varepsilon}$ bo'ladi.



3-rasm.

Direktrisalari ellipsning A va A_1 uchlaridan tashqarida joylashgan bo'ladi, chunki $\varepsilon < 1$, $\frac{a}{\varepsilon} > a$, $-\frac{a}{\varepsilon} < -a$.

Direktrisalar quyidagi xossaga bo'ysunadi.

Teorema. Ellipsning ixtiyoriy $M(x, u)$ nuqtalaridan fokuslarigacha bo'lgan masofaning mos direktrisalarigacha bo'lgan masofaga nisbati ε (o'zgarmas songa) teng.

$d_1=ML_1$ $d_2=ML_2$ sonlar M nuqtadan direktrisalargacha bo'lgan masofa, r_1 va r_2 fokal radiuslar, 3-rasmdan

$$d_1 = ML = OD - ON = \frac{a}{\varepsilon} - x = \frac{a - \varepsilon x}{\varepsilon}.$$

Demak, $\frac{r_1}{d_1} = \frac{a - \varepsilon x}{\frac{a - \varepsilon x}{\varepsilon}} = \varepsilon$, $\frac{r_2}{d_2} = \frac{a + \varepsilon x}{\frac{a + \varepsilon x}{\varepsilon}} = \varepsilon$.

Misol. Katta yarim o'qi 3 va kichik yarim o'qi 2 bo'lgan ellipsning tenglamasi va uning direktrisalari tenglamalari tuzilsin.

Yechish. $a=3$, $b=2$ bo'lgani uchun Ellipsning tenglamasi $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ ekssentrisiteti $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{9-4}}{3} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

Direktrisalarining tenglamalari $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$ $x=\pm\frac{3\cdot 3}{\sqrt{5}}=\pm\frac{9}{\sqrt{5}}$

Giperbola.

Giperbolaning kanonik tenglamasi. Giperbola deb har bir nuqtasidan berilgan ikki nuqtagacha (fokuslargacha) masofalarning ayirmasi o'zgarmas songa teng bo'lgan tekislik nuqtalarining geometrik o'rniga aytiladi.

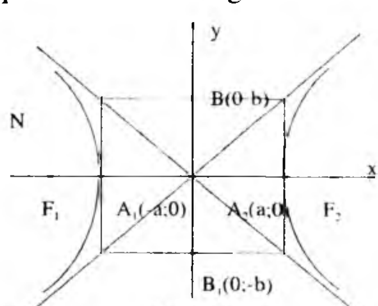
Fokuslar orasidagi masofani 2S deb belgilaymiz. Giperbola ta'rifiga asosan, $MF_2 - MF_1 = \pm 2a$.

Giperbolaning berilgan koordinata sistemasida tenglamasini keltirib chiqaramiz.

Bizga ma'lumki, $MF_1=\sqrt{(x+C)^2+y^2}$ $MF_2=\sqrt{(x-C)^2+y^2}$,
demak $\sqrt{(x+C)^2+y^2}-\sqrt{(x-C)^2+y^2}=\pm 2a$
Ikkala tomonini kvadratga ko'tarib, ixchamlashtirgandan so'ng va S^2-a^2=b^2 deb belgilasak, giperbolaning kanonik tenglamasini keltirib chiqaramiz.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (11)$$

(11) tenglama giperbola nuqtalarining koordinatalarini qanoatlantiradi. Quyida giperbola qanday egri chiziq bo'lishini ko'ramiz. Tenglamada noma'lum koordinatalarining juft darajasi qatnashadi. SHunga asosan giperbolaning ikki simmetriya o'qi mavjud. Bu x va u o'qlaridir, simmetriya o'qlari giperbolaning o'qlari deyiladi. Giperbolaning o'qlari fokuslari joylashgani uchun frontal o'q deyiladi.



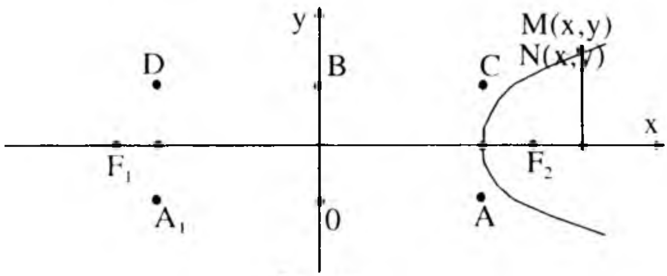
4-rasm.

Giperbolaning birinchi chorakdagi formulasini tekshiramiz.

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} \qquad (12)$$

Bu yerda $x \geq a$ bo'lishi kerak x 0 dan ∞ o'sganda u ham 0 ∞ o'sadi. Giperbola o'qlariga nisbatan simmetrik bo'lgani uchun $\overline{AN}$ yoy 4-rasmdagi kabi bo'ladi. u=0 berib $x=\pm a$ ni topamiz. Demak, giperbolani ikki uchi bor $A(a,$ 0) va $A_1(-a,$ 0) giperbola u o'qi bilan kesishmaydi chunki x=0 bersak $y = \pm\sqrt{-b^2}$. Shuning uchun faqat Ox o'qi haqiqiy o'q Oy o'qini mavhum deyiladi.

AN yoy $y = \frac{b}{a}x$ to'g'ri chiziqqa yaqinlasha boradi. Bu to'g'ri chiziqning burchak koeffitsienti $k=b/a$ bo'ladi.



5-rasm.

Buni ko'rsatish uchun M va $N(x,\ u)$ nuqtasini olamiz. 5-rasmda ko'rinib turibdiki, ikkala nuqtani ham abssissasi bir xil, ordinatalari orasidagi farqni yozamiz.

$$Y - y = \frac{a}{b} - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right) =$$

$$= \frac{b}{a} \cdot \frac{a^2}{x + \sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$$

Bu ifodani surati o'zgarmas son bo'lib maxraji x o'sishi bilan cheksiz suratda o'sib boradi. Shuning uchun Y-u ayrma 0 ga intiladi, ya'ni abssissa o'sishi bilan M nuqta N ga intiladi. Simmetriyadan ko'rinib turibdiki $y = -\frac{b}{a}x$ to'g'ri chiziq x cheksizlikka intilganda giperbola yoyi (shoxi) shu to'g'ri chiziqqa intiladi $y = \frac{b}{a}x$ va $y = -\frac{b}{a}x$ to'g'ri chiziqlari giperbolaning asimptotalari deyiladi. Giperbolani qurishdan oldin asimptotalarni qurish kerak. Buning uchun abssissa o'qidan a uzunlik u o'qidan b uzunlik olib asimptota (0, 0) (a, b) nuqtalardan o'tishi lozim. $\varepsilon = \frac{c}{a}$ giperbolaning ekssentrisiteti deyiladi. Bizga ma'lumki, $s>a$ bunda $\varepsilon>1$ ekstsentrisiteti giperbolani formasini ifodalaydi $s^2=a^2-b^2$ dan $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{c}{a}\right)^2 - 1 = \varepsilon - 1$. Demak ekstsentrisiteti kichik bo'lgan sari o'qlarning munosabatlari b/a ham kam bo'ladi. Agar a o'zgarmay qolib b kattalashib borsa giperbolaning ekssentrisiteti 1 dan ancha katta qiymatlar qabul qiladi va bu holda giperbola shoxlari kengayib boradi ε 1 ga qancha yaqin bo'lsa giperbolaning shoxlari shuncha silliq va ε 1 dan qancha katta bo'lsa giperbola shoxlari shuncha yoyiq bo'ladi.

Misol 1. Fokuslar orasidagi masofa 16 ekssentrisiteti 8/7 bo'lgan giperbolaning kanonik tenglamasi tuzilsin.

Yechish. Shart bo'yicha $2s=16$, $s=8$, $\varepsilon=s/a=8/7$ demak $a = 7$, $v= \sqrt{64-49} = \sqrt{45}$

Giperbolaning kanonik tenglamasi quyidagicha bo'ladi $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{15} = 1$.

Misol 2. $M_1(-3; \frac{\sqrt{2}}{2})$ va $M_2(4; -2)$ nuqtadan o'tuvchi giperbolaning kanonik tenglamasi tuzilsin.

Yechish. Geperbolaning kanonik tenglamasi $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ uning tenglamasini M_1 va M_2 nuqta koordinatalari qanoatlantiradi. Shuning uchun

$$\frac{9}{a^2} - \frac{1/2}{b^2} = 1 \qquad \frac{16}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1$$

bu yerdan $a^2=8$ va $b^2=4$ ekanini topamiz. Giperbola tenglamasi quyidagicha bo'ladi.

$$\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$$

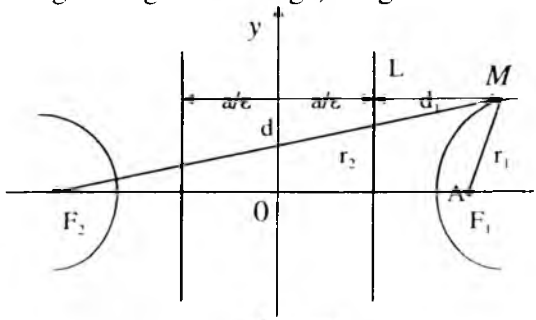
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ giperbolaning direktrisalari deb uning markazidan $\pm a/\varepsilon$ masofada fokal o'qiga perpendikulyar bo'lib o'tadigan ikkita to'g'ri chiziqqa aytiladi.

Ta'rifga asosan, direktrisa tenglamalari quyidagicha ko'rinishda bo'ladi

$$x=+\frac{a}{\varepsilon} \qquad x=-\frac{a}{\varepsilon}$$

Giperbolada $\varepsilon>1$ bo'lgani sababli $a/\varepsilon<a$ bo'ladi. Giperbolaning direktrisalari va O markazi bilan AA_1 uchlari orasida joylashgan.

Giperbola quyidagi xossaga ega. Giperbolaning ixtiyoriy nuqtasidan fokusgacha masofaning mos direktrisasigacha bo'lgan masofa nisbati ε ga (o'zgarmas songa) teng.



6-rasm.

Rasmdan $d_1=x-a/\varepsilon$ agar M nuqta chap shoxida bo'lsa u holda $d_1\ a/\varepsilon-x$ bo'ladi. Endi r_1/d_1 nisbatni ko'ramiz. M nuqta o'ng shoxida bo'lgan holda $\frac{r_1}{d_1}=\frac{-a+\varepsilon x}{x-\frac{a}{\varepsilon}}=\frac{\varepsilon(-a+\varepsilon x)}{\varepsilon x-a}=\varepsilon$ M nuqta chap shoxida bo'lganda $r_1/d_1=\varepsilon$ ikkala holda ham ε ga teng bo'ladi.

Misol. Giperbola direktrisalari orasidagi masofa uning fokuslari orasidagi masofadan uch marta kichik. Giperbolaning mavhum o'qi 4 ga teng. Giperbolaning ekssentrisiteti va direktrisalari tenglamasi tuzilsin.

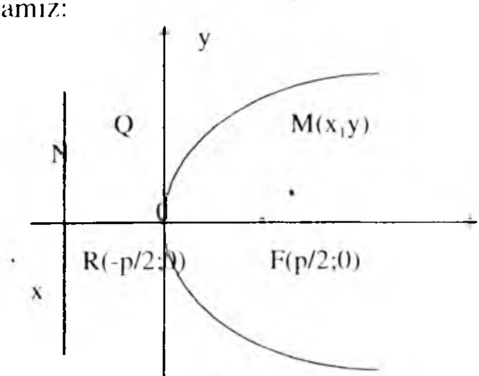
Yechish. Giperbolaning fokuslari orasidagi masofa 2s direktrisalar orasidagi masofa $2a/\varepsilon$ ma'lum shuning uchun masalaning shartiga ko'ra $3\cdot(2\frac{a}{\varepsilon})=2c$ bu yerda $3a=c\varepsilon$

$$\frac{c^2}{a^2}=3 \qquad \varepsilon=\sqrt{3}$$

Direktrisalar tenglamasini tuzamiz. $x=\pm a/\varepsilon$ giperbola uchun $c^2=a^2+b^2$ bizda $2b=4$, $b=2$ demak $2a^2=4$, $a=\sqrt{2}$. a va ε qiymatlarini direktrisasi tenglamasiga qo'ysak, $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, bu yerda $\sqrt{3}x\pm\sqrt{2}=0$.

Parabola

Parabola deb har bir nuqtasidan berilgan bir nuqtagacha (fokusgacha) va berilgan bir to'g'ri chiziqqacha (direktrisagacha) masofalari o'zaro teng bo'lgan tekislik nuqtalarining geometrik o'rniga aytiladi. Direktrisasidan fokusgacha bo'lgan masofasini r deymiz. r parabola parametri deyiladi. Parabola tenglamasini keltirib chiqaramiz:



7-rasm.

Tanlab olingan koordinatalar sistemasi fokus koordinatalari $F(p/2;\ 0)$ direktrisasining tenglamasi $x=-r/2$ va u o'qiga paralel $M(x,\ u)$ parabolaning nuqtasi. Parabolaning ta'rifiga asosan $MN=MF$ 7-rasmda ko'ramiz.

$$MN = NQ + QM = \frac{R}{2} + x \qquad MK = \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + (y - 0)^2}$$

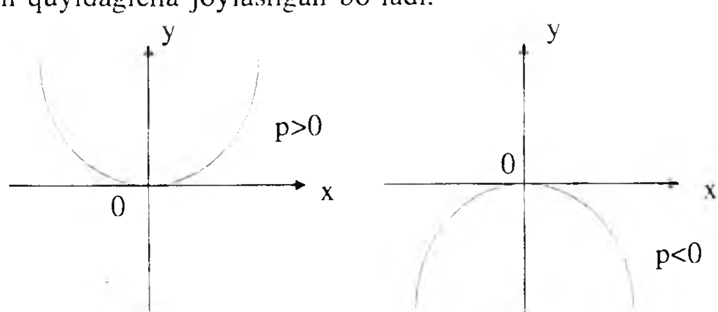
$$\frac{p}{2} + x = \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2}$$

Ikkala tomonini kvadratga ko'tarib ixchamlashtirsak parabolaning kanonik tenglamasi hosil bo'ladi:

$$u^2 = 2rx \tag{13}$$

Parabolaning nuqtalari (13) tenglamasini qanoatlantiradi. Paraboladan tashqarisidagi nuqtalari bu tenglamani qanoatlantirmaydi. Parabolaning shaklini uning tenglamasiga asosan tekshiramiz $y = \pm\sqrt{2px}$ bo'lgani uchun, agar $r>0$ bo'lsa $x \geq 0$ bo'lishi kerak. Demak x turli qiymatlar olsa bu qiymatlar 0 dan $+\infty$ gacha bo'lgan oraliqda bo'lishi kerak, x ning bunday qiymatlariga u ning 0 dan $\pm\infty$ gacha qiymatlari to'g'ri keladi, ya'ni birinchi kvadratda x ning qiymatlari 0 da $+\infty$ gacha o'sib borganda u ham $+\infty$ gacha o'sib boradi. Parabola 7 chizmada tasvirlangan chiziqdan iborat, agar parabolaning (13) tenglamasida $r \leq 0$ ga bo'lsa bu holda $x \leq 0$ bo'lishi kerak va parabolaning shaklidagiga nisbatan teskari bo'ladi.

Agar parabolaning (13) tenglamasida x va u o'rinlarini almashtirsak, ya'ni $x^2=2r$ ko'rinishni oladi va koordinata o'qlariga nisbatan quyidagicha joylashgan bo'ladi.



Parabolaning ekssentrisiteti va direktrisasi. Parabolaning ixtiyoriy nuqtasidan uning fokusgacha bo'lgan masofani r_1 bilan direktrisasigacha bo'lgan masofani d bilan belgilab, parabola ta'rifidan $r=d$ bunday $r/d=1$ shuning uchun parabola ekstsentrisiteti

$$\varepsilon = 1$$

(2) tenglama uchun direktrisa tenglamasi

$$x=-r/2$$

Misol 1. Ox o'q parabolaning simmetriya o'qi, uni uchi koordinatalar boshida yotadi, parabola fokusidan uchigacha bo'lgan masofa 4 birlikka teng. Parabola tenglamasi tuzilsin.

Yechish. Masalaning shartiga asosan, parabolaning tenglamasi $u^2=2rx$ bo'ladi.

$OF=4 \quad r/2=4$ yoki $r=8$

bu qiymatni parabola tenglamasiga qo'ysak $u^2=16x$.

Misol 2. Parabola tenglamasi berilgan $u^2=6x$. Uning fokusini koordinatalarini va direktrisasini tenglamasini tuzing.

Yechish. Bu yerda $2r=6$, $r=3$ direktrisa tenglamasi $x=-r/2$ $x=-3/2$ fokusi $F(3/2; 0)$.

12-ma'ruza.

SIRT TENGLAMASI. FAZODA TEKISLIK VA TO'G'RI CHIZIQ TENGLAMALARI

12.1. Umumiy tushunchalar. Faraz qilaylik, x, y, z - ixtiyoriy o'zgaruvchi miqdorlar bo'lsin. Agar

$$F(x, y, z) = 0 \qquad (1)$$

tenglik x, y, z larning faqat ayrim qiymatlaridagina o'rinli bo'lsa, u holda (1) ni x, y, z larga nisbatan tenglama deb ataymiz. Uchta son $x = x_0, y = y_0, z = z_0$ (1) tenglamani qanoatlantiradi deymiz, agar (1) dagi noma'lumlar o'rniga shu sonlarni qo'yganda tenglik ayniyatga aylansa. (1) tenglamani qanoatlantiradigan har bir x_0, y_0, z_0 sonlar uchligiga fazoning $M(x_0, y_0, z_0)$ nuqtasini mos qo'yamiz. Bunday nuqtalarning geometrik o'rnini sirt deb ataymiz, (1) ni esa shu sirtning tenglamasi deymiz.

Agar sirt tenglamasi berilgan bo'lib, biror nuqtaning shu sirtda yotish yoki yotmasligini tekshirish talab qilingan bo'lsa, u holda berilgan nuqtaning koordinatalarini tenglamaning noma'lumlari o'rniga qo'yish kifoya. Analitik geometriyaning vazifasi qaralayotgan sirtni uning tenglamasi yordamida o'rganishdir.

Sirtning ixtiyoriy $M(x, y, z)$ nuqtasi uning o'zgaruvchi nuqtasi deb ataladi.

Misol sifatida sferaning tenglamasini tuzaylik. Sferaning ta'rifiga ko'ra, sferaning markazi deb ataluvchi $C(a, b, c)$ nuqtadan sferaning o'zgaruvchi nuqtasi orasidagi masofa r o'zgarmasdir. Demak,

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = r,$$

yoki

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2.$$

Agar sferaning markazi koordinatalar boshida bo'lsa, u holda

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Fazodagi analitik geometriyada asosan algebraik tenglamalar bilan ifodalangan sirtlar o'rganiladi. Masalan, tenglamasi

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (2)$$

ko'rinishda bo'lgan sirt 1-tartibli sirt deb ataladi. Tenglamasi

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + 2Gx + 2Hy + 2Kz + L = 0 \quad (3)$$

bo'lgan sirtlarni 2-tartibli sirtlar deb ataymiz. Yuqorida ko'rilgan misoldan sfera 2-tartibli sirt ekanligi kelib chiqadi

12.2. Fazodagi tekislik tenglamalari.

Teorema 1. Dekart koordinatalar sistemasida tekislik 1-tartibli sirtdir.

Isboti. Biror dekart koordinatalar sistemasida berilgan α tekisligida uning biror nuqtasi $M_0(x_0, y_0, z_0)$ va unga perpendikulyar o'tgan qandaydir $\vec{n} = \{A, B, C\}$ vektor berilgan bo'lsin.

Faraz qilaylik, $M(x, y, z)$ tekislikning siljuvchi nuqtasi bo'lsin. Bu nuqta α tekisligida yotishi uchun $\overline{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$ vektor $\vec{n}$ ga perpendikulyar bo'lishi shart, ya'ni $\vec{n} \perp \overline{M_0M}$. $\vec{n} = \{A, B, C\}$.

Vektorlarning perpendikulyarlik shartidan $\overline{M_0M} \circ \vec{n} = 0$ yoki

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (4)$$

kelib chiqadi. Agar $M(x, y, z)$ nuqta α tekisligida yotmasa, (4) o'rinli bo'lmaydi, shu sababli (4) tenglik $M(x, y, z)$ nuqtaning o'rnini to'la aniqlaydi. Agar (4) dagi qavslarni ochib va $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$ deb belgilasak,

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

hosil bo'ladi. Teorema isbot bo'ldi.

Tekislikka perpendikulyar bo'lgan nol bo'lmagan har qanday vektor tekislikka normal vektor deb, shu sababli, (4) tenglama normal vektori $\vec{n}$ bo'lib, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtadan o'tgan tekislik tenglamasi deb ataladi.

Teorema 2. Dekart koordinatalar sistemasida har qanday 1-tartibli tenglama tekislikni aniqlaydi.

Isboti. Biror dekart koordinatalar sistemasida (3) tenglama berilgan bo'lsin. Faraz qilaylik, x_0, y_0, z_0 lar shu tenglamaning biror yechimi bo'lsin, ya'ni (3) ni qanoatlantiruvchi sonlar bo'lsin. U holda

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \tag{5}$$

bo'ladi. (3) dan (5) ni ayirsak

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

hosil bo'ladi. Ma'lumki, bu tenglama normal vektori $\vec{n}$ bo'lib, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtadan o'tgan tekislik tenglamasidir.

(4) tenglama (3) ga ekvivalent bo'lgani uchun (3) ham α tekislikning tenglamasi bo'ladi. Teorema isbot bo'ldi.

Tekislikning (3) tenglamasini uning umumiy tenglamasi deb ataymiz.

Misol. $\vec{n} = \{2,2,3\}$ vektorga perpendikulyar bo'lib, $M_0(1,1,1)$ nuqtadan o'tgan tekislik tenglamasi tuzilsin.

Yechish. (4) ga asosan,

$$2(x-1) + 2(y-1) + 3(z-1) = 0$$

yoki

$$2x + 2y + 3z - 7 = 0.$$

Teorema 3. Agar ikki $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ va $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ tenglamalar bir tekislikni ifodalasa, u holda bu tenglamalarning mos koeffitsientlari o'zaro proportsional bo'ladi.

Isboti. Haqiqatan, agar teorema sharti o'rinli bo'lsa, u holda $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ va $\vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ vektorlar berilgan tekislikka perpendikulyar bo'lishadi, demak, ular o'zaro kolleniar. Vektorlarning kolleniarlik shartiga ko'ra, A_2, B_2, C_2 sonlar A_1, B_1, C_1 sonlarga proportsional bo'ladi. Agar proportsionallik koeffitsientini μ desak, $A_2 = A_1\mu, B_2 = B_1\mu, C_2 = C_1\mu$. Agar $M_0(x_0, y_0, z_0)$ tekislikning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsa, u holda uning koordinatalari har bir tenglamani qanoatlantiradi, ya'ni $A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 = 0$ va $A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2 = 0$ bo'ladi. Agar ularning birini μ ga ko'paytirib, ikkinchisidan ayirsak, $D_2 - D_1\mu = 0$ hosil bo'ladi. Bundan esa,

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1} = \frac{D_2}{D_1} = \mu$$

kelib chiqadi.

12.3. Tekislikning kesmalardagi tenglamasi. Ma'lumki, A, B, C, D koeffitsientlar bir vaqtda nolga teng bo'lmaydi. (3) tenglamada bu koeffitsientlarning ayrimlari nolga teng bo'lgan bir necha xususiy hollarni ko'rib chiqaylik.

1) $D = 0$; tenglama $Ax + By + Cz = 0$ ko'rinishga keladi. Bu tenglamani $x = 0, y = 0, z = 0$ sonlar qanoatlantiradi, ya'ni tekislik koordinatalar boshidan o'tadi.
2) S=0; tenglama $Ax + By + D = 0$ ko'rinishda bo'ladi. Bu tekislikning normal vektori $\vec{n} = \{A, B, 0\}$ z o'qiga perpendikulyar, demak, tekislikni o'zi shu o'qga parallel o'tadi.
3) $B = 0, C = 0$; bunda $Ax + D = 0$ ga ega bo'lamiz. Uning normal vektori $\vec{n} = \{A, 0, 0\}$ y va z o'qlariga perpendikulyar, u holda tekislik Oyz tekisligiga parallel o'tadi. Xususan, agar $D = 0$ bo'lsa, $x = 0$ hosil bo'lib, bu tekislik Oyz koordinatalar tekisligi bilan ustma-ust tushushiga ishonch hosil qilamiz.

Yuqoridagidek fikr yuritib, $Ax+Cz+D=0$ tenglama y o'qiga parallel tekislikni, $By+Cz+D=0$ tenglama x o'qiga parallel tekislikni aniqlashiga ishonch hosil qilamiz. Bularning xususiy holi sifatida, $y=0$ tenglama Oxz koordinatalar tekisligining, $z=0$ esa Oxy tekisligining tenglamasi ekanligini ko'ramiz.

4) A, B, C, D koeffitsientlarning birortasi ham nolga teng bo'lmasin. U holda ozod hadni tenglikning o'ng tomoniga o'tkazib, tenglamani $-D$ ga bo'lib yuboramiz:

$$\frac{Ax}{-D}+\frac{By}{-D}+\frac{Cz}{-D}=1$$

yoki

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}}+\frac{y}{-\frac{D}{B}}+\frac{z}{-\frac{D}{C}}=1$$

Agar $a=-\frac{D}{A}, b=-\frac{D}{B}, c=-\frac{D}{C}$ belgilashlar kiritsak,

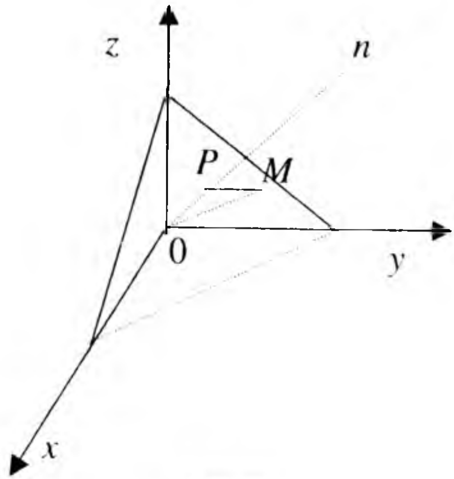
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \qquad (6)$$

hosil bo'ladi. (6) tenglamani tekislikning kesmalardagi tenglamasi deb atashadi.

12.4. Tekislikning normal tenglamasi. Faraz qilaylik, bizga π tekisligi, uning normali $\vec{n}$ va koordinatalar boshidan tekislikkacha bo'lgan masofa p berilgan bo'lsin. $\vec{n}$ vektorning koordinata o'qlari bilan tashkil etgan burchaklari α, β, γ bo'lsin. Agar $\vec{n}_0$ $\vec{n}$ vektorning orti bo'lsa, u holda

$$\vec{n}_0=\{\cos\alpha, \ \cos\beta, \ \cos\gamma\}$$

bo'ladi. Tekislikning siljuvchi nuqtasini $M(x, y, z)$ desak, uning radius-vektori $\overrightarrow{OM} = \{x, y, z\}$ bo'ladi. Ma'lumki, $np_{\vec{n}_0} \overrightarrow{OM} = p$ (1-rasm).



1-rasm.

Ma'lumki,

$$np_{\vec{n}_0} \overrightarrow{OM} = |\vec{n}_0| \cdot np_{\vec{n}_0} \overrightarrow{OM} =$$
$$= \vec{n}_0 \circ \overrightarrow{OM} = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma .$$

Bundan,

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 \qquad (7)$$

(7) tenglama tekislikning normal tenglamasi deyiladi.

Agar tekislikning tenglamasi (3) ko'rinishda berilgan bo'lsa, uni normal tenglamami yoki yo'qmi ekanligini

$$\mu = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \qquad (8)$$

ifodaning qiymatiga qarab aniqlaymiz: agar $\mu = 1$ bo'lsa, (3) normal tenglama bo'ladi, aks holda (3) ni $\pm\mu$ ga bo'lib

$$\pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}x\pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}y\pm$$
$$\pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}z\mp\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0 \qquad (9)$$

hosil qilamiz. Bu tenglama normal bo'lishi uchun endi (9) dagi ishoralardan birini ozod had D ning ishorasiga teskari qilib olinsa kifoya. (3) tenglama μ ifoda yordamida normal ko'rinishga keltirilgani uchun $1/\mu$ ni normallovchi ko'paytuvchi deb atashadi.

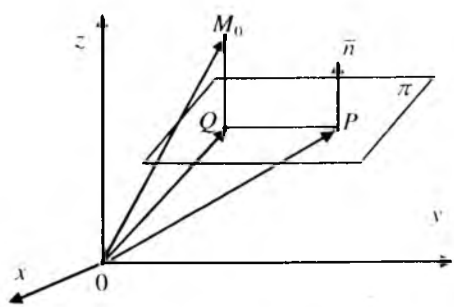
13-ma'ruza.

TEKISLIK, FAZODAGI TO'G'RI CHIZIQ VA ULARGA DOIR AYRIM MASALALAR.

1. Nuqtadan berilgan tekislikkacha bo'lgan masofa.

Faraz qilaylik, π tekislik va unda yotmagan biror $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqta berilgan bo'lsin. M_0 nuqtadan π tekislikkacha bo'lgan d masofani topish talab qilingan bo'lsin.

Berilgan tekislikning normali $\vec{n}_0$ ni qurib olamiz. Agar M_0 nuqta va koordinatalar boshi π tekislikning har xil tomonlarida joylashgan bo'lsa, u holda M_0 nuqtaning π tekislikdan chetlanishi deb $+\delta$ ga, aks holda $-\delta$ ga aytamiz (1-rasm).



1-rasm.

M_0 nuqtani normalga proeksiyalaylik. U holda chizmadan ko'rinadiki,

$$\delta = PQ = OQ - OP.$$

$$OP = p. OQ = np_{\vec{n}_0} \overrightarrow{OM_0}$$

ekanligini e'tiborga olsak,

$$\delta = np_{\vec{n}_0} \overrightarrow{OM_0} - p$$

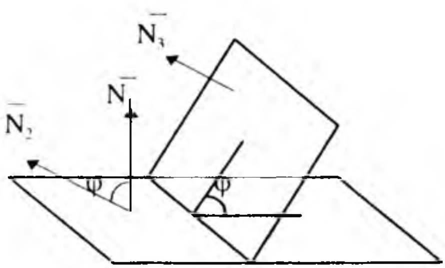
$$np_{n_0}\overline{OM_0} = x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma$$

bo'lgani uchun

$$\delta = x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p \qquad (10)$$

formulaga ega bo'lamiz. U holda

$$d = \left|x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p\right|.$$



2-rasm.

2. Ikki tekislik orasidagi burchak. Faraz qilaylik, bizga $\Delta_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ va $\Delta_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ tekisliklar berilgan bo'lsin. $\vec{N}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ va $\vec{N}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ berilgan tekisliklarning normal vektorlari. 2-rasmdan ko'rinadiki, tekisliklar orasidagi burchak ularning normallari orasidagi burchakka teng. Shuning uchun normal vektorlar orasidagi burchakni qidiramiz. Ma'lumki (3-rasm),

$$\cos\varphi = \frac{\vec{N}_1 \circ \vec{N}_2}{\left|\vec{N}_1\right| \cdot \left|\vec{N}_2\right|}$$

yoki

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \qquad (11)$$

Agar $\Delta_1 \perp \Delta_2$ bo'lsa, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ bo'ladi. U holda $\cos\varphi = 0$ va (11) ga asosan $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$. Bu tenglikni tekisliklarning perpendikulyarlik sharti deb atashadi. Agar Δ_1 tekislik Δ_2 tekislikka parallel bo'lsa, u holda $\vec{N}_1$ vektor $\vec{N}_2$ vektorga kolleniar bo'ladi. Vektorlarning kolleniarlik shartiga ko'ra

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

bo'ladi. Bu munosabat tekisliklarning parallellik sharti deb ataladi.

3. Uch nuqtadan o'tgan tekislik tenglamasi. Bizga Δ tekislikning uchta $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$ nuqtasi berilgan bo'lsin. Agar $M(x, y, z)$ shu tekislikning siljuvchi nuqtasi bo'lsa, u holda $\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}$ vektorlar Δ tekislikda yotadi, ya'ni ular komplanar bo'ladi.

$$\overline{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\},$$

$$\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\},$$

$$\overrightarrow{M_1M_3} = \{x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1\}$$

ekanligidan va vektorlarning komplanarlik shartidan

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

kelib chiqadi.

13.1. Fazodagi to'g'ri chiziq. 1) Agar berilgan
$\Delta_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ va $\Delta_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ tekisliklar parallel bo'lmasa, u holda ular to'g'ri chiziq bo'ylab kesishadi. Shu sababli, fazodagi to'g'ri chiziqni ikki tekislikning kesishish chizig'i sifatida qaraymiz. Demak, fazoda to'g'ri chiziq quyidagi tenglamalar sistemasi bilan aniqlanadi:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \qquad (12)$$

(12) to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi deyiladi. Agar Δ_1 va Δ_2 tekisliklar parallel bo'lsa, (12) to'g'ri chiziqni ifodalamaydi. Demak, berilgan tenglamalar sistemasi to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi ekanligini aniqlash uchun noma'lumlar oldidagi mos koeffitsientlarni proporsional emasligini tekshirish kerak ekan.

Bir to'g'ri chiziq bo'ylab cheksiz ko'p tekisliklar kesishadi. Bunday tekisliklarni tekisliklar dastasi deymiz. Agar shu dastaga tegishli ikkita tekislikning tenglamasi ma'lum bo'lsa, shu dastaning boshqa tekisligini tenglamasi

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \qquad (13)$$

bo'ladi.

Bunga ishonch hosil qilish uchun, avval (13) tenglama tekislik teng ekanligini tekshiraylik. Buning uchun, (13) ni quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$(\alpha A_1 + A_2\beta)x + (\alpha B_1 + \beta B_2)y + (\alpha C_1 + \beta C_2)z + (\alpha D_1 + \beta D_2) = 0.$$

Agar bir vaqtda $\alpha A_1 + \beta A_2 = 0, \alpha B_1 + \beta B_2 = 0, \alpha C_1 + \beta C_2 = 0$ bo'lsa, u holda

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = -\frac{\beta}{\alpha}$$

bo'ladi. Bu esa dastlabki farazga zid, chunki bu holda Δ_1 va Δ_2 tekisliklar parallel bo'ladi va ular to'g'ri chiziqni ifodalamaydi. Bu ziddiyat (13) tenglama ekanligini ko'rsatadi. Bu tenglama 1-darajali tenglama bo'lgani uchun u tekislikni ifodalaydi.

Agar α, β larning biri, masalan $\alpha \neq 0$ bo'lsa, u holda (13) ni quyidagi ko'rinishga keltirish mumkin:

$$\left(A_1x + B_1y + C_1z + D_1\right) + \lambda\left(A_2x + B_2y + C_2z + D_2\right) = 0.$$

2. To'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi. Bizga fazoda to'g'ri chiziqning biror $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtasi va unga parallel bo'lgan $\vec{a} = \{l, m, n\}$ vektor berilgan bo'l sin. Faraz qilaylik, $M(x, y, z)$ to'g'ri chiziqning siljuvchi nuqtasi bo'lsin. U holda $\vec{a}$ va $\overline{M_0M}$ vektorlar parallel bo'ladi. Vektorlarning kolleniarlik shartiga ko'ra

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \tag{14}$$

kelib chiqadi. $\vec{a}$ vektor M nuqtaning to'g'ri chiziqda bo'lishini ta'minlagani uchun uni to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori deb atashadi. (14) ni to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi deb ataymiz. Agar to'g'ri chiziq umumiy tenglamasi bilan berilgan bo'lsa, uning bu tenglamasini kanonik ko'rinishga keltirsa bo'ladi. Haqiqatan, bizga (13) berilgan bo'lsin. Bu sistemani aniqlaydigan tekisliklarni mos ravishda Δ_1 va Δ_2 deb belgilaylik. Ularning normal vektorlari $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ va $\vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ bo'ladi. To'g'ri chiziqning kanonik tenglamasini tuzish uchun: 1) uning biror $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtasini bilish kerak; bu nuqtani topish uchun (13) dagi noma'lumlardan biriga qiymat berib, masalan $z = z_0$ deb, (13) sistemani x va y larga nisbatan yechib, $x = x_0, y = y_0$ larni topamiz; 2) to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi $\vec{a} = \{l, m, n\}$

vektorini topish kerak; qaralayotgan to'g'ri chiziq ikki tekislikning kesishish chizig'i bo'lgani uchun, u $\vec{n}_1$ va $\vec{n}_2$ vektorlarga perpendikulyar bo'ladi. Shuning uchun, $\vec{a}$ vektor sifatida $\vec{n}_1$ va $\vec{n}_2$ vektorlarga perpendikulyar bo'lgan ixtiyoriy vektorni, shu jumladan, ularning vektor ko'paytmasini olish mumkin, ya'ni $\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$.

Misol. Berilgan to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasini tuzing:

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z - 11 = 0, \\ 2x + y - 3z - 1 = 0. \end{cases}$$

Yechish. Agar $x_0 = 1$ desak, sistemadan $y_0 = 2, z_0 = 1$ kelib chiqadi, demak, $M_0(1,2,1)$ ekan. Endi yo'naltiruvchi vektorni topamiz. Sistemadan $\vec{n}_1 = \{3,2,4\}, \vec{n}_2 = \{2,1,-3\}$ larni aniqlaymiz.

U holda $\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \{-10,17,-1\}$ bo'ladi, bundan $l = -10, m = 17, n = -1$ lar topiladi. Bularni (14) ga olib borib qo'ysak:

$$\frac{x-1}{-10} = \frac{y-2}{17} = \frac{z-1}{-1}.$$

Agar (14) dagi nisbatlarni t ga tenglasak:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} = t,$$

bundan

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt \end{cases} \tag{15}$$

kelib chiqadi. (15) ni to'g'ri chiziqning parametrik tenglamasi deb atashadi, t bu yerda parametr rolini o'ynaydi. To'g'ri chiziqning parametrik tenglamasi odatda to'g'ri chiziq bilan tekislikning kesishish nuqtasini topish masalasida ishlatiladi.

Misol. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{2}$ to'g'ri chiziq bilan $2x + y + z - 6 = 0$ tekislikning kesishish nuqtasini toping.

Yechish. Avval to'g'ri chiziqning parametrik tenglamasini tuzib olamiz:

$$x = 2 + t, y = 3 + t, z = 4 + 2t.$$

Endi bularni tekislik tenglamasiga olib borib qo'yamiz:

$$2(2 + t) + (3 + t) + (4 + 2t) - 6 = 0.$$

Bundan $t = -1$ topiladi, bu qiymatni parametrik tenglamasiga qo'yib $x = 1$, $y = 2$, $z = 2$ larni topamiz.

3.To'g'ri chiziqqa doir ayrim masalalar. Faraz qilaylik,to'g'richiziqning ikki $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ nuqtasi berilgan bo'lsin. Bu to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori sifatida $\vec{a} = \overline{M_1M_2}$ vektorni olish mumkin. Agar $M(x, y, z)$ nuqta to'g'ri chiziqning siljuvchi nuqtasi bo'lsa, u holda, $\overline{M_1M}$ va $\vec{a}$ vektorlar parallel bo'ladi. Berilgan koordinatalarga ko'ra,

$$\overline{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}$$

$$\vec{a} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$$

Vektorlarning kolleniarlik shartiga ko'ra:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \qquad (16)$$

Oxirgi tenglik ikki nuqtadan o'tgan to'g'ri chiziq tenglamasi deb ataladi.

A) Endi faraz qilaylik, bizga

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1} \quad \text{vå} \quad \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$$

to'g'ri chiziqlar berilgan bo'lsin. Ular orasidagi burchak ularning yo'naltiruvchi vektorlari $\vec{a}_1 = \{l_1, m_1, n_1\}$, $\vec{a} = \{l_2, m_2, n_2\}$ orasidagi burchakka teng. Shu sababli,

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}_1 \circ \vec{a}_2}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|} = \frac{l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}} \qquad (17)$$

bo'ladi.

b) Agar to'g'ri chiziqlar perpendikulyar bo'lsa, u holda $\varphi = \frac{\pi}{2}, \cos\varphi = 0$, shu sababli,

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0 \qquad (18)$$

bo'ladi. Bu tenglikni to'g'ri chiziqlarning perpendikulyarlik sharti deb ataymiz.

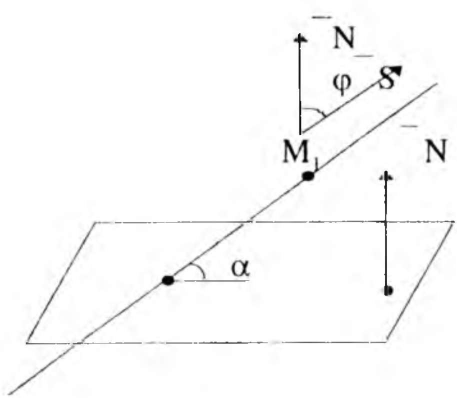
v) Agar to'g'ri chiziqlar parallel bo'lsa, $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ larning kolleniarlik shartidan

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} \qquad (19)$$

kelib chiqadi . Bu tenglik to'g'ri chiziqlarning parallellik sharti deb ataladi.

4. To'g'ri chiziq va tekislik.

Bizga $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$ to'g'ri chiziq va $Ax + By + Cz + D = 0$ tekislik berilgan bo'l sin.



3-rasm.

3-rasmdan ko'rinadiki, to'g'ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchak α va yo'naltiruvchi vektor bilan tekislikning normal vektori orasidagi burchak φ lar yiQindisi $\alpha + \varphi = \frac{\pi}{2}$, bundan

$\alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi$ yoki $\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Shu sababli, φ ni topsak kifoya. Demak,

$$\cos\varphi = Sin\alpha = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \qquad (20)$$

Agar to'g'ri chiziq tekislikka parallel bo'lsa, u holda yo'naltiruvchi vektor normalga perpendikulyar bo'ladi, shuning uchun

$$Al + Bm + Cn = 0 \qquad (21)$$

bo'ladi. Bu tenglik to'g'ri chiziq bilan tekislikning parallellik sharti deyiladi. Agar to'g'ri chiziq bilan tekislik perpendikulyar bo'lsa, u holda yo'naltiruvchi vektor bilan normal vektor parallel bo'ladi. U holda to'g'ri chiziq bilan tekislikning perpendikulyarlik sharti

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n} \qquad (22)$$

bo'ladi.

14-ma'руза.

IKKINCHI TARTIBLI SIRTLAR

I. Ikkinchi tartibli sirt tushunchasi.

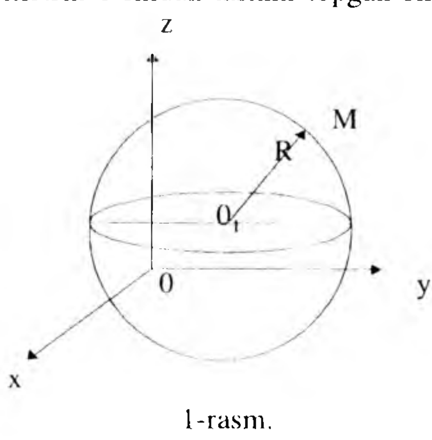
Fazodagi biror Dekart koordinatalar sistemasida x, y, z larga nisbatan

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Eyz+2Fyz+2Gx+2Hy+2Kz+L=0 \quad (1)$$

tenglamani qanoatlantiradigan nuqtalar to'plami ikkinchi tartibli sirt deyiladi. Bu tenglamadagi A, B, C, D, E, F koeffitsientlardan hech bo'lmasa bittasi noldan farqli bo'lganda sfera, ellipsoid, giperboloid, silindrik sirt, konus sirt yoki bir qancha aylanma sirtlarni ifodalash mumkin, shuningdek bu tenglama yordamida ikki tengsizliklar oilasi, nuqta, to'g'ri chiziq va hatto bo'sh to'plamlarni ham aniqlash mumkin. Biz bu bobda eng sodda (aylanma sirtlar) sferalar, konuslar, silindrlar, ellipsoidlar, giperboloidlar, paraboloidlar va giperbolik paraboloidlar bilan tanishamiz.

II. Sfera

Ta'rif. Fazoda berilgan nuqtadan teng masofada yotgan nuqtalarning geometrik o'rnidan tashkil topgan sirt sfera deyiladi.



1-rasm.

Sfera tenglamasini tuzish uchun fazoda $O_1(x_1, y_1, z_1)$ nuqta olaylik undan teng masofada yotgan nuqtalar umumiy holda

$M(x, y, z)$ va masofa R bo'lsin. U holda aytilganga ko'ra, 1-rasmdan:

$$|OM|=R \text{ yoki } \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}=R$$

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=R^2 \qquad (2)$$

Bu sferaning (kanonik) tenglamasi deyiladi.

Agar sfera markazi koordinatalar markazi bilan ustma-ust tushsa uning tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi ($x_1=y_1=z_1=0$)

$$x^2+y^2+z^2=R^2 \qquad (3)$$

Misol. $x^2+y^2+z^2+2x+4y-20=0$ tenglama bilan berilgan sferaning markazi va radiusi R topilsin.

Yechish. $x^2+y^2+z^2+2x+4y-20=0$ dan to'la kvadrat ajratamiz.

$x^2+2x+1+y^2+4y+4+z^2=25$

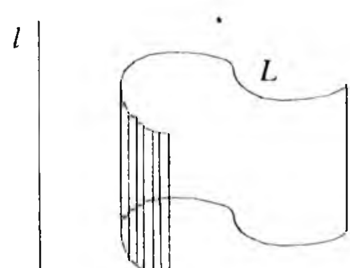
$(x+1)^2+(y+2)^2+(z-0)^2=25;$

Demak: $O_1(-1; -2; 0)$ sfera markazi

$R=5$ sfera radiusi.

III. Silindrik sirtlar.

Ta'rif. Fazoda yo'naltiruvchi deb atalgan L-chiziqni kesib o'tuvchi va biror l to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan barcha to'g'ri chiziqlardan hosil bo'lgan sirt silindrik sirti deyiladi (2-rasm).



2-rasm.

$F(x, y)=0$ tenglama fazodagi yasovchisi OZ-o'qqa parallel silindrik sirtni aniqlaydi. Shuningdek $F(x, y)=0$ yasovchisi OY-

o'qqa parallel, $F(y, z)=0$ yasovchisi OX-o'qqa parallel bo'lgan sirtni aniqlaydi. Bu holda $F(x, y)=0$, $F(x, z)=0$, $F(y, z)=0$ tenglamalar tekislikda ko'rilsa ular mos ravishda XOY, XOZ, YOZ tekislikdagi egri chiziqlarni ifodalaydi va ular silindrik sirtlarning yo'naltiruvchilari deyiladi.

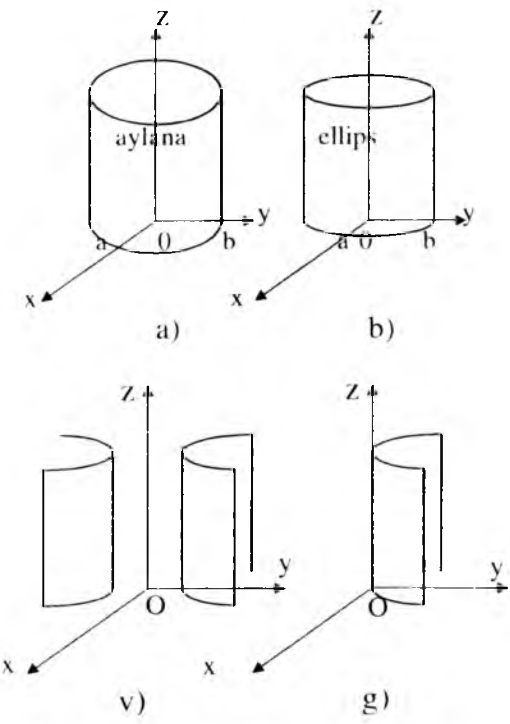
Quyidagi yasovchilari OZ o'qqa parallel bo'lgan eng muhim silindrik sirtni ko'ramiz. Ularning yo'naltiruvchilari mos ravishda aylana, ellips, giperbola, paraboladan iborat (3-rasm)

a) $x^2+y^2=a^2$ - to'g'ri doiraviy silindr (4)

b) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ - elliptik silindr (5)

v) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ - giperbolik silindr (6)

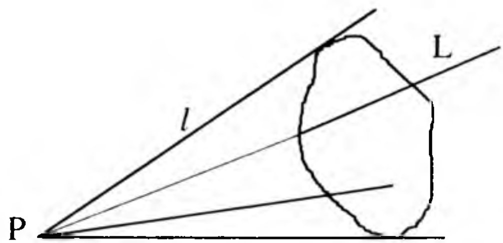
g) $y^2=2px$ - parabolik silindr (7)



3-rasm.

IV. Konus sirt.

Ta'rif. Fazoda yo'naltiruvchi deb atalgan L- chiziqni kesib o'tuvchi va berilgan R-nuqtadan o'tuvchi barcha l to'g'ri chiziqlardan hosil bo'lgan sirt konus sirt (yoki ikkinchi tartibli konus) deb ataladi (4-rasm).



4-rasm.

R - nuqta konusning uchi va L - yasovchisi deb ataladı

Misol. Uchi koordinatalar markazida yotgan va yo'naltiruvchisi ellipsoiddan L iborat:

$$L:\begin{cases} z = c \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$ konus tenglamasi tuzilsin.

Yechish. $M(x, y, z)$ konusning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin, u holda konusning yasovchi $O(0; 0; 0)$ va $M(x, y, z)$ nuqtalardan o'tgan to'g'ri chiziq bo'ladi. Uning fazodagi kanonik tenglamasini topamiz

$$\frac{x-0}{x-0} = \frac{y-0}{y-0} = \frac{z-0}{z-0}$$ yoki $\frac{x}{x} = \frac{y}{y} = \frac{z}{z}$ yoki $z=c$ ni o'rniga qo'ysak:

$$\frac{x}{x} = \frac{y}{y} = \frac{z}{c}$$ bundan $x = \frac{cx}{z}$; $y = \frac{cy}{z}$ hosil bo'ladi.

Buni yo'naltiruvchi L tenglamasiga qo'ysak quyıdagi tenglama hosil bo'ladi

$$\frac{c^2x^2}{a^2z^2} + \frac{c^2y^2}{b^2z^2} = 1 \text{ yoki } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \qquad (8)$$

Bu elliptik sfera yoki ikkinchi tartibli konus tenglamasi deyiladi. Agar bunda $a=b$ deb olsak yo'naltiruvchisi

$$\left.\begin{aligned} z &= c \\ x^2 + y^2 &= a^2 \end{aligned}\right\}$$

a-radiusli aylana bo'lgan to'g'ri aylanma konus hosil bo'ladi, uning simmetriya o'qi OZ dan iborat bo'ladi.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \tag{9}$$

Shuningdek, o'qlari OY va OX koordinata o'qlaridan iborat va uchi koordinatalar markazida yotuvchi ikkinchi tartibli konuslarning tenglamasi mos ravishda

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \tag{10}$$

va

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \tag{11}$$

lardan iborat bo'ladi.

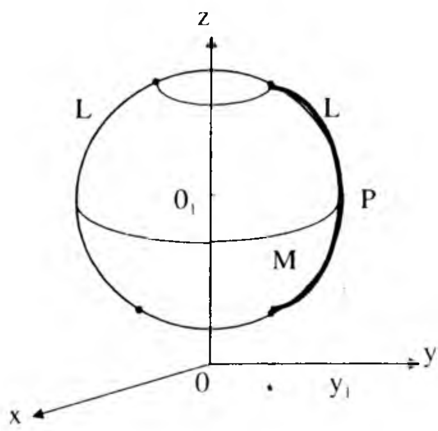
15-ma'ruza.

AYLANMA SIRTLAR.

Ta'rif. Fazoda biror L chiziqning z-o'q atrofida aylanishidan hosil bo'lgan nuqtalar to'plami aylanma sirt deyiladi. L-chiziq aylanma sirtning medianasi, z-o'q esa uning aylanma o'qi deyiladi. Biz aylanish o'qlari OZ, OY, OX-o'qlaridan iborat bo'lgan hollar bilan chegaralanamiz (1-rasm).

1) Sirt aylanish o'qi OZ o'qidan iborat bo'lgan, L-medianasi esa OYZ tekisligida yotgan tekis chiziq bo'lib uning tenglamasi quyidagicha bo'lsin

$$\left.\begin{array}{c} F(y_1 z) = 0 \\ x = 0 \end{array}\right\} \qquad (11)$$



1-rasm.

$M(x, y, z)$- aylanma sirtning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin, M nuqta orqali OZ o'qiga perpendikulyar qilib Q tekislik o'tkazaylik. Q tekislikda aylanma sirtni markazi 0_1 va $P(0,Y_1,Z)$, $0(0;0;Z)$ bo'ladi. Bu holda $|0_1M|=|0_1P|=|Y_1|$

$$|O_1M_1| = \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-z)^2} = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$|y_1| = \sqrt{x^2+y^2}; \qquad y_1 = \pm\sqrt{x^2+y^2}$$

$P(0,y_1, z)$ nuqta L-medianada yotgani uchun, $F(y_1z)=0$ o'rinli. Bundan ushbu tenglama hosil bo'ladi

$$F(\pm\sqrt{x^2+y^2},\quad z)=0. \tag{12}$$

Bu $F(y,z)=0$, $x=0$ L-mediana OZ-o'qi atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan aylanma sirt tenglamasidir

2) Agar $F(y, z)=0$, $x=0$ L-medianani OY o'qi atrofida aylantirilsa, u aylanma jismning tenglamasi quyidagicha ko'rinishda bo'ladi.

$$F(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0 \tag{13}$$

3) Agar $F(x, y)=0$, $z=0$ L-mediana OX o'qi atrofida aylantirilsa va bundan hosil bo'lgan aylanma jismning tenglamasi quyidagicha ko'rinishda bo'ladi

$$F(x,\quad \pm\sqrt{y^2+z^2})=0 \tag{14}$$

Ellipsoidlar
1. Aylanma ellipsoidlar.

a) Agar XOZ tekisligida berilgan $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ellipsni OZ-o'qi atrofida aylantirsak tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'lgan aylanma ellipsoid hosil bo'ladi. (V punkt)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{c^2}=1 \text{ yoki } \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{c^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{15}$$

b) Agar shu ellipsni OX o'qi atrofida aylantirsak ushbu aylanma ellipsoid hosil bo'ladi va h.k.

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ yoki } \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{16}$$

s) Agar (15) yoki (14) da $a=s$ deb olsak

$$x^2+y^2+z^2=a^2 \tag{16'}$$

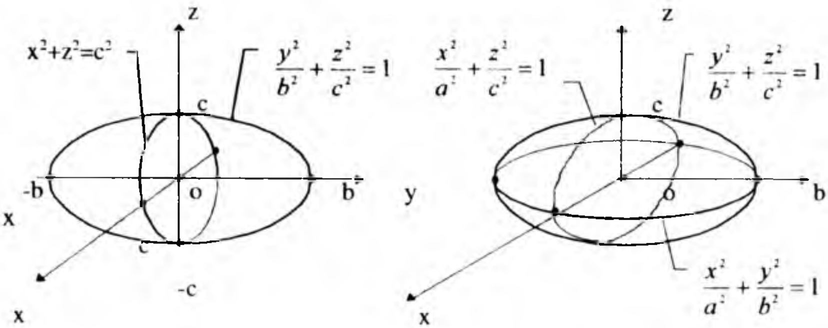
sfera hosil bo'ladi.

2. Elliptik elipsoid

Tenglamasi:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{17}$$

ko'rinishida berilgan sirt fazoda elliptik ellipsoid deyiladi (2-rasm).



$\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2+z^2}{c^2}=1$ $\qquad$ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

2-rasm.

VII. Giperboloidlar

1. Bir pallali aylanma giperboloidlar

a) YOZ tekislikda berilgan $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ giperbola OZ o'qi atrofida aylantirilsa tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'lgan bir pallali aylanma giperbolik sirt hosil bo'ladi.

$$\frac{x^2+y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ yoki } \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (18)$$

b) Agar XOY tekislikda berilgan $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ giperbola OY-o'qi atrofida aylantirilsa tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'lgan bir pallali aylanma giperbolik sirt hosil bo'ladi.

$$\frac{x^2+z^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ yoki } \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (19)$$

s) Agar XOZ tekisligida berilgan $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ giperbola OZ o'qi atrofida aylantirilsa tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'lgan bir pallali aylanma giperbolik sirt hosil bo'ladi.

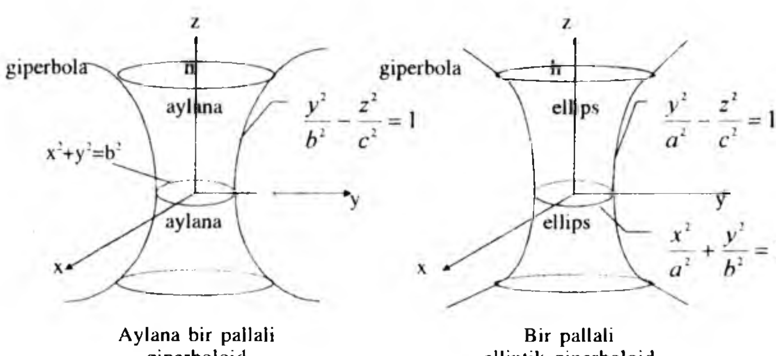
$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ yoki } \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{20}$$

2. Bir pallali elliptik giperboloidlar

Tenglamalari quyidagi ko'rinishda berilgan sirtlar fazoda bir pallali elliptik giperboloidlar deyiladi:

$$\left[\begin{array}{ll} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 & (21) \\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 & (22) \\ -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 & (23) \end{array}\right.$$

Bu sirtlar mos ravishda $z=h$, $y=k$, $x=t$ tekisliklar bilan kesilsa, kesimda ellipslar hosil bo'ladi (3-rasm).



3-rasm.

3. Ikki pallali aylanma giperboloidlar

a) Agar *YOZ* tekisligida berilgan $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ giperbola *OY* o'qi atofida aylantirilsa tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'lgan ikki pallali aylanma giperboloid hosil bo'ladi

b)

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2+z^2}{c^2}=1 \text{ yoki } \frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{c^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (24)$$

b) Shuningdek *XOY* tekisligida berilgan $\frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{c^2}=1$; va

XOZ tekisligida berilgan $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ giperbolalar mos ravishda OX va OZ o'qi atrofida aylantirilsa quyidagi ko'rinishdagi ikki pallali giperboloidlar hosil bo'ladi:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{b^2}=1 \qquad (25)$$

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (26)$$

4. Ikki pallali elliptik giperboloidlar.

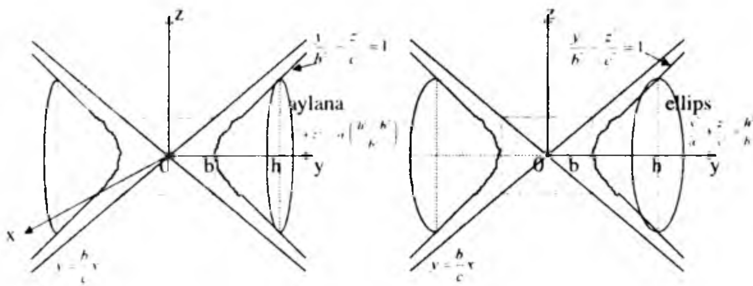
Tenglamalari quyidagicha ko'rinishda berilgan sirtlar fazoda ikki pallali eliptik giperboloidlar deyiladi

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ yoki } -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1 \qquad (27)$$

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ yoki } \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \qquad (28)$$

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ yoki } \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1 \qquad (29)$$

Quyida OY o'qi atrofida aylantirilishdan hosil bo'ladi $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ ikki pallali aylanma giperboloid va $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ ikki pallali elliptik giperboloidlar shaklini keltiramiz (4-rasm)



4-rasm.

VIII. Paraboloidlar

1. Aylanma paraboloidlar.

a) Agar XOY tekisligida berilgan $u^2=2rx$ parabola OX o'qi atrofida aylantirilsa tenglamasi quyidagicha ko'rinishda bo'lgan aylanma paraboloid (sirt) hosil bo'ladi.

$$y^2+z^2=2px \qquad (30)$$

Agar $x=h$ deb olinsa $y^2+z^2=2px$, $z=h$ aylana hosil bo'ladi.

b) Shuningdek XOZ tekisligida berilgan $x^2=2pz$ parabola va YOZ tekisligida berilgan $z^2=2ru$ parabolani mos ravishda OZ va OY o'qlari atrofida aylantirsak quyidagicha aylanma paraboloidlar tenglamasi hosil bo'ladi.

$$x^2+y^2=2pz \qquad (31)$$

va

$$x^2+z^2=2py \qquad (32)$$

2. Eliptik paraboloidlar

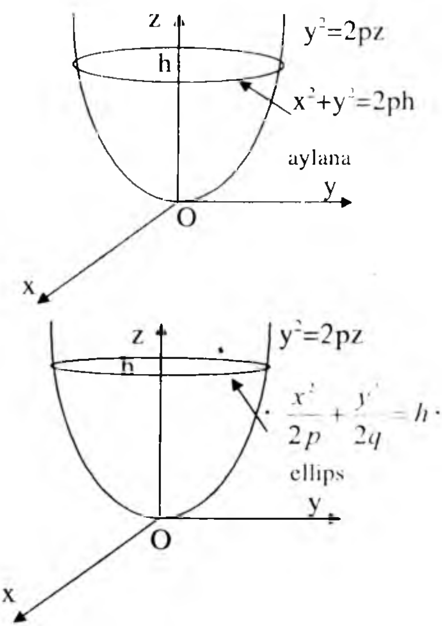
Tenglamasi umumiy holda quyidagicha ko'rinishda berilgan sirtlar elliptik paraboloidlar deyiladi (5-rasm).

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z \qquad (33)$$

$$\frac{x^2}{p}+\frac{z^2}{q}=2y \qquad (34)$$

$$\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}=2x \qquad (35)$$

Quyida OZ o'qi atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan $x^2=y^2=2pz$ va $\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z$ elliptik paraboloidlarni shaklini keltiramiz:



5-rasm.

3. Giperbolik paraboloidlar

Tenglamasi umumiy holda quyidagicha ko'rinishda sirtlar giperbolik paraboloid deyiladi.

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z \qquad \frac{x^2}{p}-\frac{z^2}{q}=2y \qquad \frac{y^2}{p}-\frac{z^2}{q}=2x \tag{36}$$

yoki bu tengliklar odatda quyidagicha ko'rinishda yoziladi:

$$\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q}=z \qquad \frac{x^2}{2p}-\frac{z^2}{2q}=y \qquad \frac{y^2}{2p}-\frac{z^2}{2q}=x \tag{37}$$

Quyida $\frac{y^2}{2q}-\frac{x^2}{2p}=z$ giperbolik paraboloid shaklini keltiramiz.

Bunda $z=h$ bo'lsa $\frac{y^2}{2qh}-\frac{x^2}{2ph}=1$ giperbola;

$x=0$ bo'lsa $y^2=2qz$ parabola

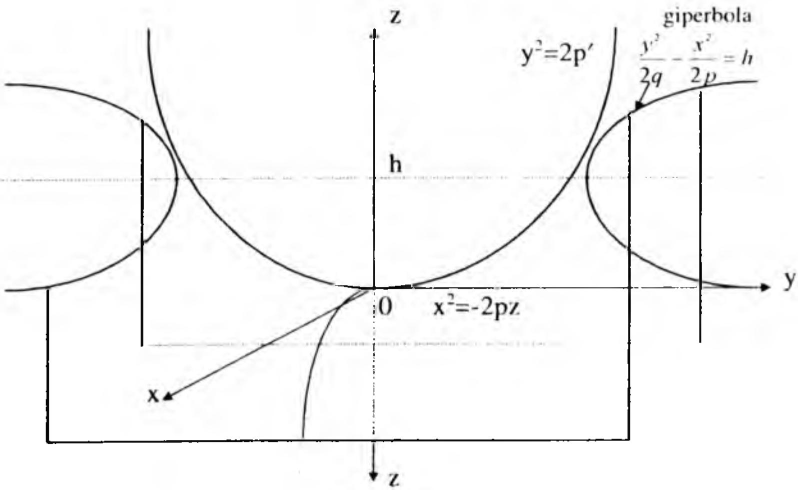
$y=0$ bo'lsa $x^2=2pz$ parabola

$z=0$ bo'lsa $\frac{y^2}{2q}-\frac{x^2}{2p}=0$ yoki

$\frac{y^2}{q}-\frac{x^2}{p}=0$ yoki $\left(\frac{y}{\sqrt{q}}-\frac{x}{\sqrt{p}}\right)\left(\frac{y}{\sqrt{q}}+\frac{x}{\sqrt{p}}\right)$ yoki XOY tekislikda yotuvchi ikkita quyidagi to'g'ri chiziqlardan iborat:

$$\frac{y}{\sqrt{q}}-\frac{x}{\sqrt{p}}=0 \text{ va } \frac{y}{\sqrt{q}}+\frac{y}{\sqrt{p}}=0 \text{ yoki } y=\pm\sqrt{\frac{q}{p}}\,x$$

koordinatalar boshidan o'tuvchi to'g'ri chiziqlardan iborat. Bu degan so'z sirt XOY tekisligini shu ikki to'g'ri chiziqlar bo'ylab kesib o'tadi (6-rasm).



6-rasm.

Giperbolik paraboloidlarni umuman to'g'ri chiziqlardan tashkil topgan sirt ekanligini isbotlash mumkin.

16-ma'ruza.

O'ZGARUVCHI MIQDORLAR. FUNKSIYA.

I. Haqiqiy sonlar. Haqiqiy sonlar bilan sonlar o'qi orasidagi o'zaro moslik

Tabiat, fan va texnika masalalarida qatnashgan miqdorlarning o'zaro munosabatlarini tekshirishga olib keladigan miqdorni o'lchov birligi yordamida taqqoslab ko'rish natijasida yoki boshqacha aytganda o'lchash natijasida son hosil bo'ladi. O'lchash natijasida butun, kasr sonlar hosil bo'lishi mumkin. Son tushunchasi qadim zamonlarda paydo bo'lib, uzoq davrlar davomida kengaygan va umumlashgan.

Butun, kasr, musbat, manfiy sonlar, nol soni bilan birga ratsional sonlarni tashkil etadi va har qanday ratsional sonni ikkita butun son nisbati, ya'ni p/q ko'rinishda tasvirlash mumkin.

Masalan. $3=3/1$; $0{,}75=3/4$; $0=0/1$ va h.k.

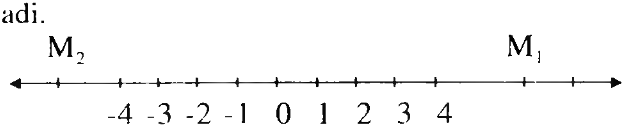
Ratsional sonlarni chekli yoki cheksiz o'nli kasr ko'rinishda ifodalash mumkin. Davriy bo'lmagan cheksiz o'nli kasrlar irratsional sonlar deyiladi.

Masalan. $\sqrt{5}$, $3-\sqrt{7}$, $\sqrt{11}$ va h.k.

Barcha ratsional va irratsional sonlar to'plami haqiqiy sonlar deyiladi. Haqiqiy sonlar qiymatlari bo'yicha tartibga solingandir. Har bir juft haqiqiy son x va u uchun quyidagi manosabatlardan faqat bittasi o'rinli bo'ladi. $x<y$, $x=u$, $x>y$ haqiqiy sonlarni sonlar o'qining nuqtalari bilan tasvirlash mumkin.

Sonlar o'qi shunday cheksiz to'g'ri chiziqdan iborat bo'ladiki unda:

1) Sanoq boshi deyiladigan biror 0 nuqta;
2) Musbat va manfiy yo'nalish (bular strelka bilan ko'rsatiladi) 0 nuqtadan boshlab chapdan o'nga bo'lgan yo'nalish musbat, aksinchasi manfiy bo'ladi;
3) Uzunliklarni o'lchash uchun masshtab birligi tanlab olingan bo'ladi.



0 nuqta 0 sonini tasvirlaydi, har bir haqiqiy son sonlar o'qining ma'lum bir nuqtasi bilan tasvirlanadi. Ikkita har xil

haqiqiy sonlar o'qining har xil nuqtalari bilan tasvirlanadi. Sonlar o'qining har bir nuqtasi birgina haqiqiy sonlarning tasviridan iboratdir. SHunday qilib barcha haqiqiy sonlar bilan sonlar o'qidagi barcha nuqtalar orasida o'zaro bir qiymatli moslik mavjuddir. Har bir songa sonlar o'qida uni tasvirlanuvchi birgina nuqta mos keladi va aksincha, sonlar o'qidagi har bir nuqtaga shu nuqta bilan tasvirlanuvchi birgina son to'g'ri keladi.

Haqiqiy sonlar to'plami quyidagi muhim xossaga ega, ixtiyoriy ikkita haqiqiy son orasida ratsional sonlar ham, irratsional sonlar ham topiladi. Quyidagi teorema o'rinlidir (isbotsiz keltiramiz).

Teorema. Har bir irratsional α son istalgan darajadagi aniqlikda ratsional sonlar yordami bilan ifodalanadi.

Misol.

$$\sqrt{2} = \begin{cases} 1{,}4 & \text{kami bilan} \\ 1{,}5 & \text{ko'pi bilan} \end{cases}$$

II. Haqiqiy sonlarning absolyut qiymati (moduli)

Haqiqiy sonlarning absolyut qiymati (moduli) $|x|$ kabi belgilanadi. X haqiqiy sonning absolyut (moduli) deb, quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi manfiy bo'lmagan haqiqiy songa aytiladi.

$x\geq 0$ bo'lsa, $|x|=x$

$x\leq 0$ bo'lsa, $|x|=-x$

Masalan. $|4|=4$, $|-8|=8$, $|0|=0$

Har qanday son x uchun $x\leq|x|$ munosabat o'rinlidir.

Sonlarning absolyut qiymatining xossalari.

1) Haqiqiy sonlar algebrik yig'indisining absolyut qiymati qo'shiluvchilar absolyut qiymatlarining yig'indisidan katta emas;

$| x+y | \leq | x | \leq | y |$

Xaqiqatdan, agar $x+u \geq 0$ bo'lsa u holda

$|x+y|=x+y\leq|x|+|y|$, chunki $x\leq|x|$, $y\leq|y|$

Agar $x+u<0$ bo'lsa u holda

$|x+u|=-(x+y)=(-x)+(-y)\leq|x|+|y|$

2) Ayirmaning absolyut qiymati kamayuvchi va ayriluvchining absolyut qiymatlari ayirmasidan kichik emas.

$$|x-y| \geq |x|-|y| \quad |x|>|y|$$

Haqiqatdan, agar $x-y=z$ deb olsak unda $x=u+z$ bo'lib

$|x|=|y+z| \leq |y|+|z|=|y|+|x-y|$ bundan

$|x|-|y| \leq |x-y|$ bo'ladi

3) Ko'paytmaning absolyut qiymati ko'paytuvchilar absolyut qiymatlarining ko'paytmasiga teng.

$$|xyz|=|x|\cdot|y|\cdot|z|$$

4) Bo'linmaning absolyut qiymati bo'linuvchi va bo'luvchi absolyut qiymatlarining bo'linmasiga teng

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

III. O'zgaruvchi va o'zgarmas miqdorlar. O'zgaruvchi miqdorlarning o'zgarish sohasi.

Fan va texnikada uchraydigan miqdorlar o'zgaruvchi yoki o'zgarmas bo'lishi mumkin. Masalan, yurib turgan poezdning bosayotgan yo'li, issitilayotgan jismning temperaturasi, erib turgan muzning miqdori, yurib turgan mashinada sarf bo'layotgan benzin miqdori o'zgaruvchi bo'ladi. Keltirilgan misollardan yurayotgan poezdni ko'rib o'taylik. Bu holda uning bosayotgan yo'li, unga sarf bo'lgan vaqtga qarab o'zgarib boradi, ya'ni o'zgaruvchi miqdor bo'ladi. Xolbuki, poyezdning tezligi o'zgarmas yoki o'zgaruvchi bo'lishi mumkin, chunki u bir xil tezlikda yoki borgan sari tezlashib yoki borgan sari sustlashib, yoki goho tezlashib va goho sustlashib yurishi mumkin. Shuning uchun masalada qatnashgan miqdorlardan qaysi birining o'zgarmas yoki o'zgaruvchi bo'lishi ko'rilayotgan masalaning shartlariga bog'liqdir, biroq miqdorlarning orasida shundaylari ham uchraydiki ular har xil sharoitda o'z qiymatini saqlab o'zgarmasligi mumkin. Masalan har qanday uchburchakda ichki burchaklarning yig'indisi $2d$ ga teng, har qanday aylana uzunligini uning diametriga nisbati π ga tengdir.

Bu miqdorlar absolyut o'zgarmas miqdorlar deyiladi. Umuman biror hodisani tekshirishda yoki har bir sharoitda o'z qiymatini saqlagan miqdorni o'zgarmas va turli qiymatlarga ega bo'lgan miqdori o'zgaruvchi miqdor deyiladi. Odatda o'zgaruvchi miqdorlar, x, y, z, t ... harflari bilan, o'zgarmas miqdorlar a, b, c, ... harflar bilan belgilanadi.

Ko'p masalalarda o'zgaruvchi miqdorning qiymatlarini chegaralashga, ya'ni uning qiymatlaridan biror 2 aniq son orasidagi qiymatlarni e'tiborga olishga to'g'ri keladi.

O'zgaruvchi miqdorlarning barcha son qiymatlar to'plami shu o'zgaruvchining o'zgarish sohasi deyiladi. Agarda o'zgaruvchi x ning hamma qiymatlari $a \le x \le b$ shartni qanoatlantirsa bu holda x miqdor $[a, b]$ oraliqda yoki intervalda o'zgaradi deyiladi va bunday interval yopiq interval deyiladi. Hamda $[a, b]$ kabi belgilanadi. Agar o'zgaruvchi x ning hamma qiymatlari $a<x<b$ shartni qanoatlantirsa bu holda (a, b) ochiq interval deyiladi va (a, b) kabi belgilanadi. Bunda a, b lar x (a, b) ni qiymatlariga kirmaydi.

Agar x ning qiymatlari $a \le x < b$ yoki $a < x \le b$ shartni qanoatlantirsa bu holda (a, b) interval mos ravishda o'ngdan va chapdan yarim ochiq oraliqlar deyiladi va mos ravishda $[a, b)$, $(a, b]$ kabi deyiladi.

IV. Tartiblangan o'zgaruvchi miqdor. O'suvchi va kamayuvchi o'zgaruvchi miqdorlar. Cheklangan o'zraruvchi miqdor.

Agar o'zgaruvchi miqdor x ning o'zgarish sohasi va uning ixtiyoriy har ikki qiymatning qaysi biri oldingi va qaysi biri keyingi ekanligi ma'lum bo'lsa bu o'zgaruvchi tartiblan o'zgaruvchi miqdor deyiladi.

Qiymatlar to'plami x_1, x_2, x_3 ... x_n sonlar ketma-ketligini hosil qiladigan o'zgaruvchi miqdor tartiblangan o'zgaruvchi miqdorning xususiy holidir. Bunda $x_i<x_{i+1}$ larning qaysi biri miqdor jihatidan katta kichikligidan qat'iy nazar x_i oldingi, x_{i+1} keyingi qiymatdir.

Agar o'zgaruvchi miqdorning keyingi qiymati oldingidan katta bo'lsa o'suvchi, keyingi qiymati oldingidan kichik bo'lsa kamayuvchi o'zgaruvchi miqdor deyiladi. O'sib boruvchi yoki kamayib boruvchi miqdorlar monoton o'suvchi, monoton kamayuvchi yoki umuman monoton o'zgaruvchi miqdor deyiladi.

Agar o'zgaruvchi miqdor x ning absolyut qiymati uning biror qiymatidan boshlab, birorta musbat A sondan kichik bo'lib, $|x|<A$ x ning qaysi o'zgarishlarida ham bu tengsizlik o'z kuchini saqlab

bo'rsa, bu holda bunday o'zgaruvchi x chegaralangan yoki cheklangan deyiladi.

Masalan. sin$x$ cheklangan yoki chegaralangan bo'ladi, chunki $|\sin x|\leq 1$

V. Funksiya. Funksiyaning aniqlanish sohasi.

Ko'pincha fan va texnika masalalarida qatnashgan o'zgaruvchi miqdorlar o'zaro shunday bog'liq bo'ladiki, ulardan birining o'zgarishiga qarab ikkinchisi ham ma'lum ravishda o'zgaradi. Masalan, doiraning radiusi R va uning yuzi S deb belgilansa, unda

$$S=\pi R^2$$

bo'ladi. Bu yerda S ning qiymati R ning qiymatiga bog'liq bo'lib R ga berilgan har bir qiymatga S ning aniq qiymati mos keladi. Bu holda S, R ning funksiyasi deyiladi.

Ta'rif. Funksiya deb, biror M to'plamning har bir x elementiga boshqa L to'plamning y elementiga mos keltiradigan f qonunga aytiladi.

Bu bog'lanish $u=f(x)$ ko'rinishda ifodalanadi. Bundagi f harfi «funksiya» (function) so'zining birinchi harfidan iborat bo'lib, zikr qilingan bog'lanishni umumiy ravishda va qisqacha ifodalaydi.

Bu yerda x-erkli o'zgaruvchi (argument), y-funksiyaning x nuqtadagi qiymati, f-qonuniyat.

Yana quyidagilarga e'tibor qarataylik. Fizikadan ma'lumki, Boyl-Mariot qonuniga ko'ra, temperaturasi o'zgarmay turgan gazning hajmi (v) bilan uning tashqi bosimi (p) ning ko'paytmasi o'zgarmas miqdordan iborat. Agar S o'zgarmas deyilsa, bu qonunning matematik ifodasi bunday bo'ladi.

$$Pv=C$$

Bundan R berilsa v ni yoki v berilsa R ni aniqlash mumkin.

$$P=\frac{C}{V}; \qquad V=\frac{C}{P}$$

Bunda, birinchisida funksiya rolida bo'lgan R ikkinchisida argument rolini bajarmoqda. Shuning uchun masaladagi o'zgaruvchi miqdorlardan qaysi birini funksiya va qaysi birini argument qilib olish masalaning shartiga va berilgan formulaning tuzilishiga bog'liq bo'ladi.

$u=f(x)$ funktsional bog'lanish va f funksiyaning xarakteristikasi deyiladi.

Ta'rif. Funksiyani aniqlaydigan argumentning hamma qiymatlar to'plami funksiyaning aniqlanish sohasi deyiladi.

Masalan. $y=\dfrac{1}{x-a}$ ning aniqlanish sohasi $x=a$ dan boshqa hamma haqiqiy sonlardan iborat $y=\sqrt{1-x^2}$ ning aniqlanish sohasi $[-1,1]$ intervaldan iborat, $u=\lg x$ ni aniqlanish sohasi hamma musbat sonlardan iborat va h.k.

VI. Funksiyani berilish usullari.

Funksiya quyidagi ko'rinishda beriladi.

1) Jadval usulida;

2) Grafik usulida;

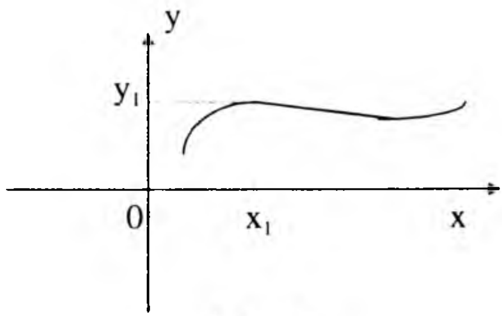
3) Analitik usulida;

1) Funksiya jadval usulida berilganda ikkita o'zgaruvchi x va u larni qiymatlari jadvalda bo'lib x ni har bir qiymatlarga u ni aniq qiymati mos qo'yiladi.

x	x_1	x_2	...	x_n
y	y_1	y_2	...	y_n

Bu usuldan asosan sutkalik ob-havoni o'zgarishini aniqlashda foydalaniladi.

2) Funksiya grafik usulida berilganda koordinata sistemasi yordamida chiziqning barcha nuqtalari uchun o'zgaruvchi x ni har bir qiymatiga u ni aniq qiymati mos qo'yiladi (1-rasm).



1-rasm.

Bu usul yordamida funksiyaning geometrik tasvirini ifodalash mumkin.

$$y=f(x)$$

Funksiyaning geometrik ma'nosi tekislikdagi chiziqni ifoda etadi (2-rasm).

3) Funksiyaning $y=f(x)$ ko'rinishda berilishi analitik usulda berilishi deyiladi.

Masalan. $u=\ln x+5$, $u=3^x$, $y=\cos^2 x$

$$y=\sqrt{x-3x^2+1},\ u=x^2+1.$$

VII. Elementar funksiyalar. Asosiy elementar funksiyalar.

Matematik analizning asosiy masalasi funktsional munosabatlarni tekshirishdan iborat bo'lgani uchun bizga har vaqt turli funksiyalar bilan ish ko'rishga to'g'ri keladi shuning uchun biz bu yerda funksiyalarning asosiy sinflarini tashkil etgan va elementar funksiyalar deb atalgan ularning turlari bilan tanishib o'tamiz.

1) Butun ratsional funksiyalar;

n darajali butun ratsional funksiya deb umumiy ko'rinishi quyidagicha bo`lgan funksiya aytiladi.

$$y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n$$

Bunda a_0, a_1, a_2, ... , a_n lar koeffitsientlar bo'lib haqiqiy o'zgarmas sonlardir.

Masalan. $u=2x+5$, $u=0{,}5x^2-12$, $u=5x^3-3x^2+15$ larni har biri butun ratsional funksiyalardir.

2) Kasr ratsional funksiyalar;

Ikki butun ratsional funksiyalarning bir biriga nisbati kasr ratsional funksiya yoki qisqacha ratsional funksiya deyiladi. Uning umumiy ko'rinishi quyidagicha

$$y=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+b_2x^{m-2}+...+b_m}$$

Misol. $y=\frac{2x+5}{x^2-4x+3}$, $y=\frac{3x^2+1}{x+1}$ larning har biri ratsional funksiyalardir.

3) darajali funksiya;

$u=x^m$ ko'rinishdagi funksiya darajali funksiya deyiladi.

4) ko'rsatgichli funksiya

$u=a^x$ ko'rinishdagi funksiya ko'rsatgichli funksiya deyiladi.

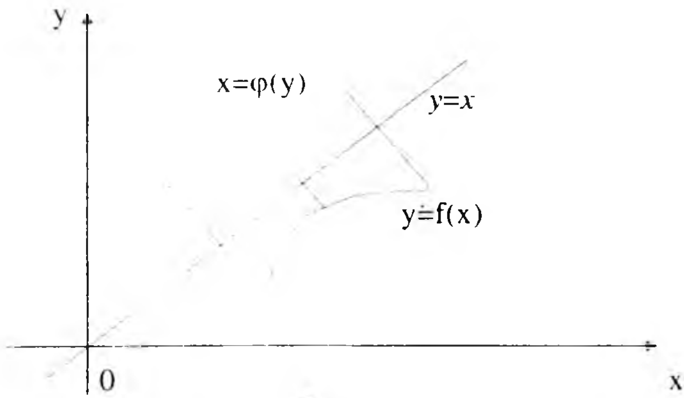
5) Logarifmik funksiya. Teskari funksiya.

$u=\log x$ ko'rinishdagi funksiya logarifmik funksiya deyiladi.

$x=a^{u}$ funksiya logarifmik funksiyaga teskari funksiya deyiladi.

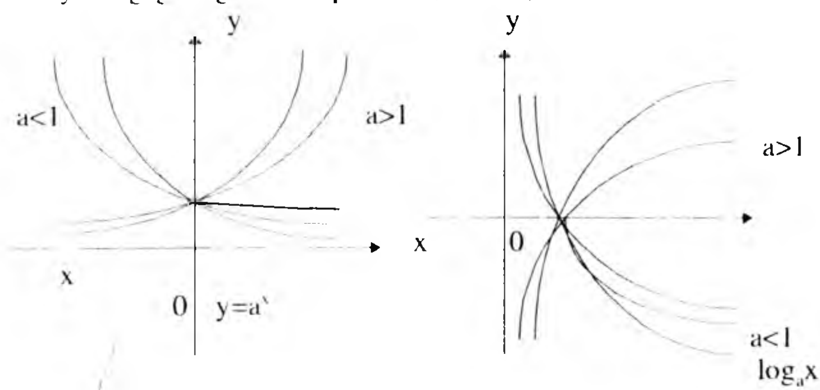
Umuman $u=f(x)$ funksiya berilgan bo'lsa $x=f^{-1}(y)$ bu funksiyaga teskari bo'ladi.

O'zaro teskari bo'lgan funksiyalarning grafiklari orasida ma'lum bog'lanish mavjuddir. Bunday funksiyalardan birining grafigi ma'lum bo'lgan holda, unga teskari bo'lgan ikkinchisining grafigini chizish juda qulaydir. Buning uchun x va u ning rollarini o'zaro almashtirish kifoya. SHunday qilib to'g'ri funksiyaning grafigidan teskari funksiyaning grafigini hosil qilish uchun butun shakl birinchi koordinatalar burchagining bissektirissasi atrofida 180^0 ga aylantirilsa kifoya qiladi.



2-rasm.

Shu yo'l bilan ko'rsatgichli funksiya grafigidan logarifmik funksiyaning grafigi hosil qilinadi (3-rasm).



3-rasm.

6) Trigonometrik funksiyalar.

y=sin$x$, y=cos$x$, y=tg$x$, y=ctg$x$, y=sec$x$, y=cosec$x$ lar trigonometrik funksiyalar deyiladi.

7) Teskari trigonometrik funksiyalar.

y=arcsin$x$, y=arccos$x$, y=arctg$x$, y=arcstg$x$ ko'rinishdagi funksiyalar teskari trigonometrik funksiyalar deyiladi.

Agar argumentning har bir qiymatiga funksiya uchun bir necha qiymat to'g'ri kelsa, bunday funksiya ko'p qiymatli deyiladi va birgina qiymat to'g'ri kelsa, bir qiymatli deyiladi.

Yuqorida ko'rilgan funksiyalar bir qiymatli edi. Lekin teskari trigonometrik funksiyalar ko'p qiymatli funksiyalardir.

Agar bu funksiya $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ oraliqda ko'rilsa, u bir qiymatli funksiyaga aylanadi.

Ta'rif. $u=f(x)$ ko'rinishda analitik usulda berilgan funksiyalar asosiy elementar funksiyalar deyiladi.

Asosiy elementar funksiyalar quyidagilardan iborat.

1) darajali funksiya:

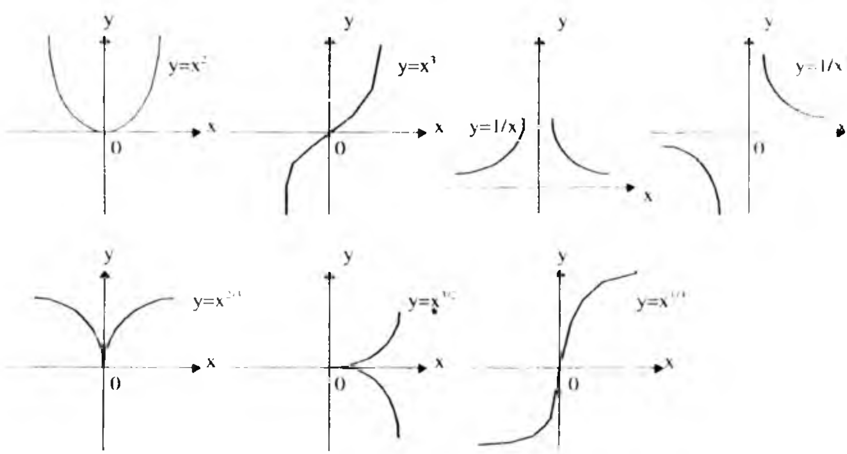
2) ko'rsatkichli funksiya:

3) logarifmik funksiya:

4) trigonometrik funksiya:

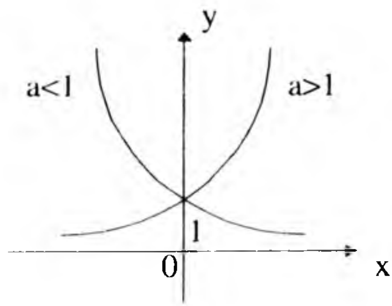
5) teskari trigonometrik funksiya:

1) Darajali funksiya $u=x^n$ va n haqiqiy son. Bu funksiyaning aniqlanish sohasi $(-\infty; +\infty)$ dan iborat. Bu funksiyaning xususiy hollarda grafigi quyidagi ko'rinishda bo'ladi (4-rasm).



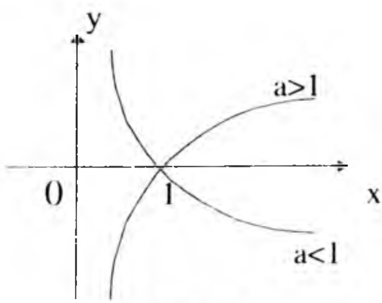
4-rasm.

2) Ko'rsatkichli funksiya $u=a^x$, $a>0$, $a\neq1$. Bu funksiya x ning katta qiymatlarida aniqlangan, uning grafigi quyidagicha (5-rasm)



5-rasm.

3) Logarifmik funksiya. $y=\log_a x$, $a>\varphi$, $a\neq 1$. Bu funksiya $x>0$ qiymatlarda aniqlangan (0, +∞) uning grafigi quyidagicha (6-rasm).



6-rasm.

4) Trigonometrik funksiyalar.
$u=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\text{tg}\,x$, $y=\text{ctg}\,x$, $y=\sec x$, $y=\text{cosec}\,x$.

$y=\sin x$ va $y=\cos x$ funksiyalarni aniqlanish sohasi $(-\infty, +\infty)$ dan iborat.

$y=\text{tg}\,x$ va $y=\sec x$ funksiyalarni aniqlanish sohasi (7-rasm)

$$(-\infty,\ x_k)\cup(x_k\ +\infty)$$

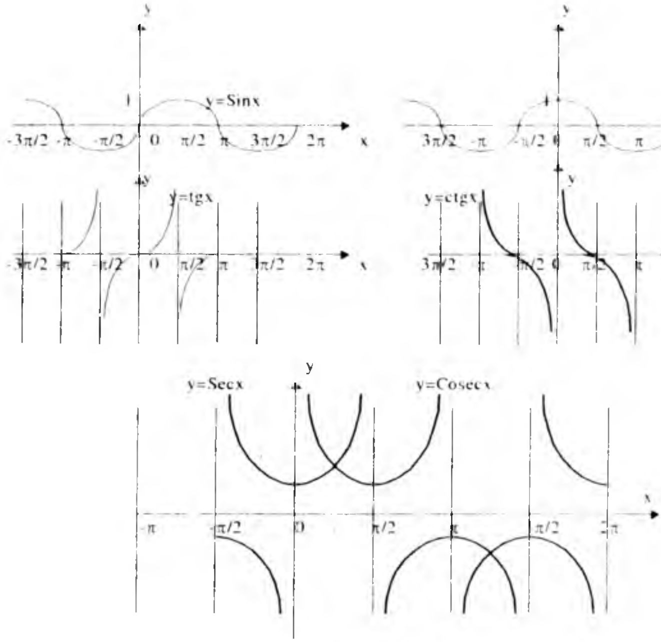
$$x_k=(2k+1)\cdot\pi/2 \quad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$$

y=ctgx va y=cosecx larni aniqlash sohasi

$$(-\infty,\ x_k)\cup(x_k,+\infty)\ x_k\ k\pi.$$

$$x_k=k\pi \quad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$$

Bularni grafiklari quyidagicha



7-rasm.

VIII. Algebraik va transsendent funksiyalar

Algebraik funksiyalar quyidagi funksiyalardan iborat.

1. Butun ratsional funksiya. Buni biz yuqorida ko'rib o'tdik.
2. Kasr ratsional funksiya. Buni ham yuqorida ko'rib o'tdik.
3. Irratsional funksiya.

Agar $u=f(x)$ funksiyani o'ng tomonida algebraik amallar ichida butun bo'lmagan ratsional ko'rsatkichli darajaga ko'tarish amallari bajarilsa u miqdor x ning irratsional funksiyasi deyiladi.

Bunga $y=\frac{2x^2+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{8-3x^2}}$, $y=\sqrt[5]{x}$ kabilar misol bo'ladi.

Ta'rif. Algebraik bo'lmagan funksiya transtsendent funksiya deyiladi.

Masalan, $u=\sin x$, $y=\mathrm{tg}x$, $y=a^x$ larning har biri transsendent funksiyadan iborat.

17-ma'ruza.

FUNKSIYANING LIMITI, UZLUKSIZLIGI.

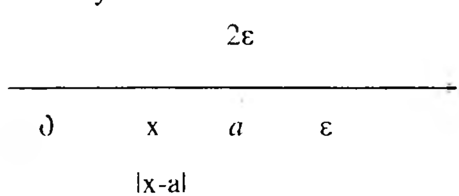
1. O'zgaruvchi miqdorning limiti. Cheksiz katta o'zgaruvchi miqdor.

Matematik analizning asosiy amallaridan biri limitga o'tish amalidir. Bu amal analiz kursida turli ko'rinishlarda uchraydi. Bu bobda o'zgaruvchi miqdorning limiti tushunchasiga asoslangan sodda ko'rinishlar ko'riladi.

Agar masala shartida berilgan miqdor har xil sonli qiymatlarni qabul qilsa, bu miqdor o'zgaruvchi miqdor deyiladi.

1-ta'rif. Agar x-a ayirmaning absolyut qiymati x ning o'zgarishi jarayonida avvaldan berilgan har qanday musbat kichik son ε dan kichik bo'lsa va x ning bunday keyingi o'zgarishida ham bu sondan kichikligicha qolsa, a o'zgarmas son x ning limiti deyiladi.

Agar a o'zgarmas son x ning limiti bo'lsa x miqdor a ga intiladi deyiladi va bu $\lim x=a$ yoki $x\to a$ ko'rinishda yoziladi. Yuqorida aytilgan limit tushunchasining geometrik talqini quyidagidan iborat. Agar o'zgaruvchi x ning a o'zgarmas son limit nuqtasi bo'lsa bunda oldindan berilgan markazi a va radiusi ε ga teng, x ning shunday qiymati topiladiki bu qiymatlar hammasi shu a nuqtaning ε atrofida yotadi.



Endi bir necha misollarni ko'ramiz.

1-Misol. Aytaylik ushbu o'zgaruvchi x

$$x_1 = \frac{1}{2}; \quad x_2 = \frac{2}{3}; \quad x_3 = \frac{3}{4}; \ldots; x_n = \frac{n}{n+1}; \ldots$$

qiymatlari qabul qilinganda uning limiti a=1 bo'lishini ko'rsating.

Yechish. Haqiqatdan modullar ayirmasidan

$$|x_n-1|=\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\frac{1}{n+1}$$

ixtiyoriy musbat ε sonini olamiz. Bunda $|x_n-1|<\varepsilon$ bajariladi agarda $\frac{1}{n+1}<\varepsilon$ va $n>\frac{1}{\varepsilon}-1$ bo'lganda.

Agar N biror natural sondan iborat bo'lib shu shartni qanoatlantirsa $N>\frac{1}{\varepsilon}-1$ va $\frac{1}{N+1}<\varepsilon$.

U holda hamma $n\geq N$ lar uchun quyidagi tengsizlik o'rinli bo'ladi:

$$|x_n-1|=\frac{1}{n+1}\leq\frac{1}{N+1}<\varepsilon$$

Bu tengsizlik shuni ko'rsatadiki yuqoridagi x o'zgaruvchining limit qiymati 1 ga teng bo'ladi, ya'ni

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

2-Misol. O'zgaruvchi x quyidagi qiymatlarni qabul qilganda

$$x_1=2;\ x_2=1\frac{1}{2};\ x_3=1\frac{1}{3};\ \dots;\ x_n=1\frac{1}{n};\ \dots$$

uning limiti $a=1$ bo'lishini ko'rsating.

Yechish. Haqiqatdan, agar

$$|x_n-1|=\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right|=\frac{1}{n}$$

demak ixtiyoriy musbat ε soni uchun n nomerdan boshlab $\frac{1}{n+1}<\varepsilon$ yoki $n>\frac{1}{\varepsilon}-1$ bo'lib $|x_n-1|<\varepsilon$ tengsizlikni qanoatlantiradi. Demak, yuqoridagi x o'zgaruvchining limiti 1 ga tengligini ko'rsatadi.

2-ta'rif. Agar x o'zgaruvchi miqdor o'zini o'zgarish jarayonida avvaldan berilgan har qanday musbat son M dan, katta bo'lsa va bundan keyingi o'zgarishda ham o'sha sondan kattaligicha qolsa x cheksiz katta miqdor deyiladi, ya'ni $|x|>M$.

3-ta'rif. Agar $x\to a$ yoki $x\to\infty$ intilganda $\lim\alpha(x)=0$ bo'lsa, bu holda $x\to a$ yoki $x\to\infty$ da $\alpha(x)$ cheksiz kichik miqdor deyiladi.

3-Misol. O'zgaruvchi x quyidagi qiymatlarni qabul qilsin.

$$x_1=-2;\ x_2=4;\ x_3=-8;\ \dots\ x_n=(-2)^n,\ \dots,$$

Bu holda x cheksiz katta miqdor deyiladi, chunki $n>N=[\log_2 M]$ bo'lganda $|(-2)^n|>M$ bo'ladi, bu yerda $[x]$ simvol x ning butun qismini bildiradi.

2. Funksiyaning limiti.

Faraz qilamiz, $X=\{x\}$ haqiqiy sonlar to'plami berilgan bo'lsin, a nuqta uning limit nuqtasi va shu to'plamda $u=f(x)$ funksiya aniqlangan deb olamiz.

1-Misol. Ushbu $f(x)=x^5$ funksiyaning $x\to 2$ dagi limiti 32 ga teng ekanligini ko'rsating.

Yechish. 2 ga intiluvchi ixtiyoriy $\{X_n\}\{x_n\neq 2,\ n=1,\ 2,\ \dots,\}$ ketma ketlikni olamiz. Mos $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik quyidagi $\{f(x_n)\}=\{x^5{}_n\}$ ko'rinishda bo'ladi. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar ustidagi arifmetik amallarga binoan

$$\lim_{X_n\to 2} f(x_n)=\lim_{X_n\to 2} x_n^5=2^5=32$$

Demak, ta'rifga ko'ra

$$\lim_{X_n\to 2} f(x_n)=32$$

2-Misol. Ushbu $f(x)=\cos 1/x$ $(x\neq 0)$ funksiyaning $x\to 0$ da limitga ega emasligini ko'rsating.

Yechish. 0 ga intiluvchi ikki turli

$$\{x_n^{\mathrm{I}}\}=\left\{\frac{2}{(4n+1)\pi}\right\},\qquad \{x_n^{\mathrm{II}}\}=\left\{\frac{1}{2n\pi}\right\}$$

ketma-ketlikni olaylik, u holda

$$f(x_n^{\mathrm{I}})=\cos\frac{(4n+1)\pi}{2}=0$$

$$f(x_n^{\mathrm{II}})=\cos 2n\pi=1$$

bo'lib $\lim\limits_{x\to\infty} f(x_n^{\mathrm{I}})=0$, bo'ladi. Bu esa $\lim\limits_{x\to\infty} f(x_n^{\mathrm{II}})=1$ funksiyaning $x=0$ nuqtada limiti mavjud emasligini ko'rsatadi.

2-ta'rif. (Koshi ta'rifi). Agar $\forall\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta>0$ son topilsaki, argument x ning $|x-a|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida $|f(x)-b|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, u holda b son $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi ($x\to a$ dagi) limiti deb ataladi.

3-Misol. Ushbu $f(x)=\sin x$ funksiyaning $x=\pi/2$ nuqtadagi limiti 1 ga teng ekanligini ko'rsating.

Yechish. Demak $\forall\varepsilon>0$ songa ko'ra δ ni $\delta=\varepsilon$ deb olsak u holda $|x-\pi/2|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x lar uchun

$$|\sin x-1|=\left|\sin x-\sin\frac{\pi}{2}\right|=\left|2\sin\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}\cos\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2}\right|\le\left|2\sin\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}\right|\le\left|x-\frac{\pi}{2}\right|<\delta=\varepsilon$$

munosabat bajariladi. Bundan, ta'rifga ko'ra $\lim\limits_{x\to\pi/2}\sin x=1$ ekani kelib chiqadi. Faraz qilamiz $x=\{x_n\}$ haqiqiy sonlar to'plami berilgan, a nuqta uning o'ng (chap) limit nuqtasi va shu to'plamda $u=f(x)$ funksiyasi aniqlangan bo'lsin.

4-ta'rif. (Koshi ta'rifi) Agar $\forall\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta=\delta(\varepsilon)$ son topilsaki, argument x ning $a<x<a+\delta$ ($a-\delta<x<a$) tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $x\in X$ qiymatlari uchun
$|f(x)-b|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, b son $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi o'ng (chap) limiti deb ataladi. Funksiyaning o'ng (chap) limitlari quyidagicha belgilanadi.

$$\lim_{x\to a+0}f(x)=b \quad \text{yoki} \quad f(a+0)=b$$

$$(\lim_{x\to a-0}f(x)=b \quad \text{yoki} \quad f(a-0)=b)$$

4-Misol. Ushbu

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & agar \quad x>0 \quad bo'lsa\\ \dfrac{\cos x}{2}, & agar \quad x<0 \quad bo'lsa\end{cases}$$

Funksiyaning $x=0$ nuqtadagi o'ng va chap limitlarini toping.

Yechish. Yuqoridagi funksiya limiti ta'rifidan foydalanib shularni hosil qilamiz:

$$\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\sin x=0$$

$$\lim_{x\to-0}f(x)=\lim_{x\to-0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}$$

3. Funksiyaning x→∞ dagi limiti. Chegaralangan funksiya

Agar funksiyaning argumenti x cheksizlikka va aniq ishorali cheksizlikka intilsa, funksiyaning limit qiymatini quyidagicha ta'riflaymiz.

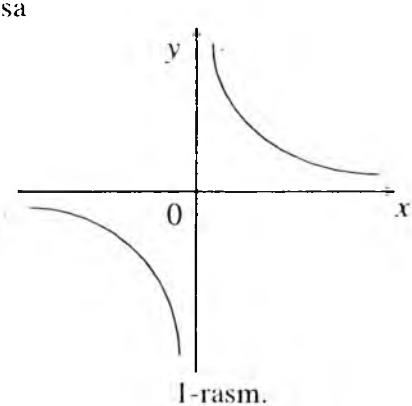
1-ta'rif. Agar argument qiymatlardan tuzilgan ketma-ketlik uchun funksiya qiymatlardan tuzilgan mos ketma ketlik b ga yaqinlashsa, u holda b son $x\to\infty$ da $f(x)$ funksiyaning limit qiymati (yoki $x\to\infty$ da funksiya limiti) deyiladi.

$x\to\infty$ da funksiyaning limit qiymatini belgilash uchun quyidagi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$ simvolikadan foydalaniladi.

2-ta'rif. Agar argument qiymatlaridan tuzilgan va elementlari biror nomerdan boshlab, musbat (manfiy) bo'lgan ixtiyoriy cheksiz katta ketma-ketlik uchun funksiya qiymatlaridan tuzilgan ketma-ketlik b ga yaqinlashsa, u holda b son argument x musbat (manfiy) cheksizlikka intilganda $f(x)$ funksiyaning limit qiymati deyiladi. Bu holda simvolik belgilashlarni quyidagicha yozamiz.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=b, \qquad \left(\lim_{x\to-\infty} f(x)=b\right)$$

1-Misol. Ushbu $f(x)=1/x$ funksiyani ko'ramiz bu funksiya $x\to\infty$ da 0 ga teng bo'lgan limit qiymatga ega. Haqiqatdan ham, agar $x_1, x_2, \dots x_n \dots$ argument qiymatlaridan tuzilgan cheksiz katta ketma-ketlik bo'lsa



1-rasm.

U holda $1/x_1, 1/x_2, \dots, 1/x_n$ ketma-ketlik cheksiz kichik va shuning uchun uning limiti 0 ga teng bo'ladi, ya'ni (1-rasm)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

3-ta'rif. $u=f(x)$ funksiyasi belgilangan biror to'plamda chegaralangan deyiladi, agarda shunday musbat son ($M>0$) mavjud bo'lsaki, shu to'plamga tegishli x argumentning hamma qiymatlari uchun $|f(x)|\leq M$ o'rinli bo'lsa, aks holda funksiya chegaralanmagan deyiladi. SHunday to'plam sifatida oraliq yoki segment va butun sonlar o'qini olish mumkin.

2-Misol. $y=\sin x$ va $y=\cos x$ funksiyalari $-\infty<x<+\infty$ da aniqlangan bo'lib, x ning ihtiyoriy qiymatida quyidagilar o'rinli bo'ladi.

$|\sin x|\leq 1$ va $|\cos x|\leq 1$

1-teorema. Agar $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, bo'lsa va bunda b chekli sondan iborat bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiyasi $x\to a$ da chegaralangandir.

Isboti. Quyidagi tenglikdan $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun shunday δ topiladiki $a-\delta<x<a+\delta$ uchun quyidagi tengsizlik bajariladi.

$| f(x)-b |<\varepsilon$ yoki $| |f(x)| -|b| |<\varepsilon$

Buning bajarilishi $f(x)$ funksiyaning $x\to a$ da chegaralanganligini ko'rsatadi.

2-teorema. Agar $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b\neq 0$ bo'lsa, u holda $y=\dfrac{1}{f(x)}$ funksiya $x\to a$ da chegaralangan bo'ladi.

Isboti teorema shartiga ko'ra ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun $x=a$ nuqtaning atrofida

$$| f(x)-b |<\varepsilon \quad \text{yoki} \quad | |f(x)|-|b| | < \varepsilon$$

$$-\varepsilon<| f(x) |-|b|<\varepsilon \quad \text{yoki} \quad |b|-\varepsilon<|f(x)|<|b|<\varepsilon$$

va oxirgi tengsizlikdan quyidagilar kelib chiqadi:

$$\frac{1}{|b|-\varepsilon}>\frac{1}{|f(x)|}>\frac{1}{|b|+\varepsilon};$$

Agar $\varepsilon=\dfrac{1}{10}|b|$ desak shuni hosil qilamiz:

$$\frac{10}{9|b|}>\frac{1}{|f(x)|}>\frac{10}{11|b|}$$

va oxirgi natija shuni ko'rsatadiki $y=\frac{1}{f(x)}$ funksiyani $x \to a$ da chegaralangandir.

4. Cheksiz kichik miqdorlar va ularning asosiy xossalari.

1-ta'rif. Agar $\lim_{x \to a} f(x)=0$ munosabat o'rinli bo'lsa, u holda $u=f(x)$ funksiya $x=a$ nuqtada ($x \to a$ da) cheksiz kichik miqdor deyiladi. Yozilgan ta'rifni quyidagicha aytish mumkin. Ixtiyoriy oldindan berilgan musbat ε ($\varepsilon > 0$) uchun, shunday $\delta > 0$ topiladiki, hamma x lar uchun $|x-a|<\delta$ da $|f(x)|<\varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Misol sifatida quyidagilarni ko'rish mumkin.

$y=x^2$, agarda $x \to 0$ da $\quad$ $y=x-1$, agarda $x \to 1$ da

$y=1/x$; agarda $x \to \infty$ da $\quad$ $y=2^x$, agarda $x \to -\infty$ da

Cheksiz kichik funksiyalar quyidagi xossalarga ega.

1. Ikkita cheksiz kichik funksiyaning yig'indisi yoki ayirmasi yana kichik funksiya bo'ladi.

2. Cheksiz kichik funksiyaning chegaralangan funksiyaga (xususan o'zgarmas funksiyaga) ko'paytmasi cheksiz kichik funksiyadir.

5. Limitlar haqidagi asosiy teoremalar.

1-teorema. O'zgarmas funksiyaning limiti o'ziga teng. $\lim c=c$ (s- const).

2-teorema. Limitga ega bo'lgan chekli sondagi o'zgaruvchi miqdorlar algebraik yig'indisining limiti, bu o'zgaruvchilar limitlarning yig'indisiga teng

$$\lim(U_1+U_2+\ldots+U_k)=\lim U_1+\lim U_2+\ldots+\lim U_k$$

3-teorema. Limitga ega bo'lgan chekli sondagi o'zgaruvchi miqdorlar ko'paytmasining limiti bu o'zgaruvchilar limitlarining ko'paytmasiga teng

$$\lim U_1 \cdot U_2 \ldots U_k=\lim U_1 \cdot \lim U_2 \ldots \lim U_k.$$

4-teorema. Limitga ega bo'lgan ikki o'zgaruvchi miqdor bo'linmasining limiti, agar bo'luvchining limiti 0 ga teng bo'lmasa, bo'linuvchi va bo'luvchi limitlarining nisbatiga teng,

ya'ni $\lim\frac{U}{V}=\frac{\lim U}{\lim V};(\lim V\neq 0)$

Isboti. Agar $\lim U=a$, $\lim V=b\neq 0$ bo'lsa bundan $U=a+\alpha$, $V=b+\beta$ bo'ladi. α, β cheksiz kichik miqdorligidan

$$\frac{U}{V}=\frac{a+\alpha}{b+\beta}=\frac{a}{b}+\left(\frac{a+\alpha}{b+\beta}-\frac{a}{b}\right)=\frac{a}{b}+\frac{\alpha b-\beta a}{b(b+\beta)};$$

yoki $\frac{U}{V}=\frac{a}{b}+\frac{\alpha a-\beta b}{b(b+\beta)};(*)$

(*) dan a/b o'zgarmasligidan $\frac{\alpha b-\beta a}{b(b+\beta)}$ cheksiz kichik miqdorligidan

αb-βa - ham cheksiz kichik miqdor bo'ladi. Kasrni maxraji b $(b+\beta)$ ni limiti $b^2\neq 0$ ga teng, demak,

$$\lim\frac{U}{V}=\frac{a}{b}=\frac{\lim U}{\lim V}.$$

18-ma'ruzalar.

AJOYIB LIMITLAR

1. $\frac{\sin x}{x}$ funksiyaning x=0 nuqtadagi limit qiymati (birinchi ajoyib limit).

1-teorema. $\frac{\sin x}{x}$ funksiyaning x=0 nuqtadagi limit qiymati mavjud bo'lib, u birga teng

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \tag{1}$$

Isboti. Agar $0<x<\pi/2$ uchun $0<\sin x<x<\operatorname{tg} x$ tengsizlikning o'rinliligidan, tengsizlikni hadma had $\sin x$ ga bo'lib

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x} \quad \text{yoki} \quad \cos x<\frac{\sin x}{x}<1$$

Oxirgi tengsizliklar x ning $-\pi/2<x<0$ shartini qanoatlantiruvchi qiymatlari uchun ham o'rinlidir. Bunga ishonch hosil qilish uchun $\cos(x)=\cos(-x)$ va $\frac{\sin x}{x}=\frac{\sin(-x)}{(-x)}$ ekanini ko'zda tutish yetarli. $\cos x$ uzluksiz funksiya bo'lgani uchun $\lim_{x\to 0}\cos x=1$ bo'ladi. Shunday qilib $\cos x$, 1 va $\frac{\sin x}{x}$ funksiyalar uchun x=0 nuqtaning biror δ atrofida bir xil limit qiymatiga ega bo'ladi.

Demak, bunda

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\cos x=1$$

Teorema isbotlandi.

2. e soni. Natural logarifmlar.

Quyidagi o'zgaruvchi miqdorni ko'ramiz. $(1+\frac{1}{n})^n$ bunda n o'suvchi o'zgaruvchi miqdor va n=1, 2, 3...

1-teorema. O'zgaruvchi miqdor $(1+\frac{1}{n})^n$ $n\to\infty$ intilganda limit qiymati mavjud bo'lib u 2 va 3 son orasida yotadi.

Isbot. Nyuton binomi formulasidan quyidagilarni yozish mumkin.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3+$$

$$..+\frac{n(n-1)(n-2)...[n-(n-1)]^1}{1\cdot 2\cdot,...,n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^n \qquad (1)$$

(1) ifodada algebraik almashtirishlardan so'ng

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=1+1+\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+...$$

$$...+\frac{1}{1\cdot 2\cdot...n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \qquad (2)$$

Oxirgi tenglik n ning o'sib borishi o'zgaruvchi miqdor $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ni o'sib borishini ko'rsatadi. Haqiqatdan, agar n ni $n+1$ ga almashtirsak $\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$ va h.x.

Bundan $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ni chegaralanganligini ko'rsatamiz. Agar shuni e'tiborga olsak $\left(1-\frac{1}{n}\right)<1$; $\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)<1$ va h.k. (2) ifodadan yozish mumkin $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+...\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3....n}$

Bundan

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}<\frac{1}{2^2};\qquad \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}<\frac{1}{2^3};\qquad \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3...n}<\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Shu tengsizlikni yozish mumkin

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+....+\frac{1}{2^{n-1}}$$

va o'ng tarafdagi ifoda geometrik progressiyani tashkil qiladi va $q=1/2$ $a=1$ progressiyani birinchi hadidan iborat.

Shuning uchun

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right] = 1+\frac{a-aq^n}{1-q} =$$

$$= 1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 1+\left[2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right] < 3$$

endi hamma n lar uchun

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$$

hosil qilamiz.

Yuqoridagi (2) dan $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 2$

shunday qilib quyidagi tengsizlikka ega bo'lamiz

$$2 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3 \qquad (3)$$

Demak, (3) o'zgaruvchi miqdor $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ning chegaralanganligini ko'rsatadi.

Agar o'zgaruvchi miqdor $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ - o'suvchi va chegaralangan bo'lsa bu miqdor limit qiymatiga ega bo'ladi va bu limitni e deb belgilaymiz. (3) tengsizlikni shunday yozish mumkin: $2 \leq e \leq 3$

Bu esa teoremani isbotini beradi.

Bunda e irratsional son va uning qiymati

e=2.7182818284... ga teng

2-teorema. $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ funksiyaning $x\to\infty$ da limit qiymati mavjud va u e soniga teng.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \qquad (4)$$

Isboti 1. Aytaylik $x\to+\infty$, va qo'yidagi shu tengsizlik o'rinli bo'lsa,

$$n\le x<n+1$$

Yozish mumkin $\frac{1}{n}\ge\frac{1}{x}>\frac{1}{n+1}$.

$$1+\frac{1}{n}\ge 1+\frac{1}{x}>1+\frac{1}{n+1}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}>\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}$$

Agar x→∞ da n→∞ intiladi. Endi quyidagi limitlarni topamiz:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)=$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=e\cdot 1=$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}}=\frac{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}=\frac{e}{1}=e$$

Demak shularga asosan,

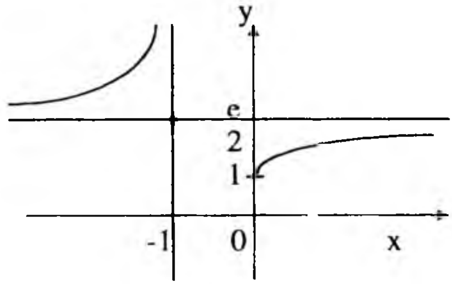
$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e \qquad (5)$$

2. Aytaylik, endi $x\to-\infty$. Agar yangi o'zgaruvchi $t=-(x+1)$ olsak yoki $x=-(t+1)$ desak, $t\to+\infty$ da $x\to-\infty$ bo'ladi.
Yozish mumkin:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t+1}\right)^{-t-1}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t+1}\right)^{-t-1}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1}=$$

$$\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+1}=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right)=e\cdot 1=e$$

Oxirgi ifoda teoremani isbotini beradi. Endi $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ funksiyani grafigini ko'rsatamiz (2-rasm).



2-rasm.

Agar (5) da $1/x=\alpha$ bo'lsa $x\to\infty$ da $\alpha\to 0$ ($\alpha\neq 0$) va shuni hosil qilamiz

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}=e$$

Misol 1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}$

Yechish. Quyidagi almashtirishlarni bajaramiz va (5) da yozamiz

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}3}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^{3}=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^{3}=e^{3}$$

Agar $y=\log_e x$ funksiya uchun $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ ga teng bo'lsa, bu funksiya uchun $y=\ln x$ belgini ishlatamiz. Demak, asosi e bo'lgan logarifmlar natural logarifmlar deb ataladi, ular uchun lnx belgi ishlatiladi. O'nli va natural logarifmlar quyidagi munosabatlar bilan bog'langan

$$\lg N=M\ln N \qquad (6)$$

$$\ln N=1/M\cdot\lg N \qquad (7)$$

Bu yerda M natural logarifmlardan o'nli logarifmlarga o'tish moduli.

$M=\lg e=\lg 2.718\approx 0.4343$

$1/M = \ln 10 \approx 2.303$

Shularga asosan (6) va (7) ni qo'yidagicha yozish mumkin.

$\lg N = 0.4343 \ln N$ (8)

$\ln N = 2.303 \lg N$ (9)

Misollar. Jadvaldan foydalanmasdan hisoblang.

1) $\ln 100 = \ln 10^2 = 2\ln 10 = 2 \cdot 2{,}303 = 4.606$

2) $\ln 0{,}001 = \ln 10^{-3} = -3\ln 10 = -3 \cdot 2{,}303 = -6{,}909$

3) $\ln\sqrt{10} = \frac{1}{2}\ln 10 = \frac{1}{2} \cdot 2{,}303 = 1{,}151$

3. Funksiyaning uzluksizligi.

$X \subset R$ to'plamda $f(x)$ aniqlangan bo'lib $x_0 (x_0 \in R)$ to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

1-ta'rif (Koshi ta'rifi). $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta = f(\varepsilon) > 0$ son topilsaki, funksiya argumenti $x \in X$ ning $|x - x_0| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.

1-misol. Ushbu $f(x) = \sqrt{x+11}$ funksiyaning $x_0 = 5$ nuqtada uzluksiz ekanini ko'rsating.

Echish. $\forall \varepsilon > 0$ son olib, bu ε songa ko'ra $\delta > 0$ soni $\delta = 4\varepsilon$ bo'lsin deb qaralsa, u holda $|x-5| < \delta$ bo'lganda

$$|f(x) - f(5)| = \left|\sqrt{x+11} - 4\right| = \frac{|x-5|}{\sqrt{x+11} - 4} < \frac{|x-5|}{4} < \frac{\delta}{4} = \varepsilon$$

bu esa qo'rilayotgan funksiyaning $x_0 = 5$ nuqtada uzluksiz ekanini bildiradi.

2-ta'rif (Geyne ta'rifi) Agar X to'plamning elementlaridan tuzilgan va x_0 ga intiluvchi har qanday $\{x_n\}$ ketma-ketlik olinganda ham funksiya qiymatlaridan tuzilgan mos $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik hamma vaqt yagona $f(x_0)$ ga intilsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deb ataladi.

Agar $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ musbat o'rinli bo'lsa, ushbu

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$$

munosabat ham o'rinli bo'ladi. Odatda $x - x_0$ ayirma argument orttirmasi $f(x) - f(x_0)$ esa funksiyaning x_0 nuqtadagi orttirmasi deyiladi. Ular mos ravishda Δx va Δy ($\Delta f(x_0)$) kabi belgilanadi: ya'ni: $\Delta x=x-x_0$, $\Delta y=\Delta f(x_0)=f(x)-f(x_0)$.

Demak, $x=x_0+\Delta x$, $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x)$ natijada, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ munosabat $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_0)=0$ ko'rinishga ega bo'ladi.

Shunday qilib $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada uzluksizligi bu nuqtada argumentning cheksiz kichik orttirmasiga funksiyaning ham cheksiz kichik orttirmasi mos kelishi sifatida ham ta'riflanishi mumkin.

2-misol. Ushbu $f(x)=\cos x$ funksiyaning $\forall x_0\in R$ nuqtada uzluksiz bo'lishini ko'rsating.

Yechish. $\forall x_0\in R$ nuqtani olib unga Δx orttirma beraylik. Natijada $f(x)=\cos x$ ham ushbu $\Delta y=\cos(x_0+\Delta x)-\cos x_0$ orttirmaga ega bo'lib.va $-\pi<\Delta x<\pi$ bo'lganda

$$|\Delta y| = |\cos(x_0+\Delta x) - \cos x_0| =$$

$$=\left|2\sin\frac{\Delta x}{2}\sin(x_0+\frac{\Delta x}{2})\right|\le 2\cdot\frac{|\Delta x|}{2}=|\Delta x|$$

munosabatga ega bo'lamiz. Bundan esa $\Delta x\to 0$ da $\Delta y\to 0$ bo'lishi kelib chiqadi. Aytaylik $y=f(x)$ funksiya $x\subset R$ to'plamda aniqlangan bo'lib, $x_0(x_0\in X)$ to'plamning (o'ng va chap) limit nuqtasi bo'lsin. Bunda $x\to x_0$ da $f(x)$ funksiya uchun quyidagi uch holdan bittasigina bajariladi:

1) chekli $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$ chap va o'ng limitlar mavjud va

$$f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0) \qquad (10)$$

tenglik o'rinli. Bu holda $f(x)$ funksiya $x=x_0$ da uzluksiz bo'ladi.

2) $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$ lar mavjud, lekin (10) tengliklar bajarilmaydi u holda $f(x)\to X=X_0$ nuqtada bir tur uzulishga ega deyiladi.

3) $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$ larning birortasi cheksiz yoki mavjud emas. Bu holda x_0 nuqtada 2 tur uzulishga ega deyiladi.

4) $f(x_0-0)=f(x_0+0)\neq f(x_0)$ bo'lsa bunday uzulish, bartaraf qilish mumkin bo'lgan uzilish deyiladi.

3 Misol. Ushbu $f(x)=[x]$ funksiyaning $x_0=2$ nuqtada birinchi tur uzulishga ega ekanligini ko'rsating.

Yechish. Demak,

$$\lim_{x\to 2-0}[X]=1, \quad \lim_{x\to 2+0}[x]=2$$

Bundan esa berilgan funksiyaning $x_0=2$ nuqtada, birinchi tur uzulishga ega ekanligi kelib chiqadi.

4. Uzluksiz funksiyaning xossalari.

Berilgan $f(x)$ va $q(x)$ funksiyalar X to'plamda aniqlangan bo'lib, $x_0 \in X$ nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

1-teorema. Agar $f(x)$ va $q(x)$ funksiyalar x_0 nuqtada uzluksiz bo'lsa u holda

$f(x) \pm q(x)$, $f(x) \cdot q(x)$,

$\dfrac{f(x)}{q(x)}$: $(q(x) \neq 0)$, $\forall x \in X$

funksiyalar ham x_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi.

1-misol. Ushbu $f(x)=3x^3+\sin^2 x$ funksiyaning $x=R$ da uzluksizligini ko'rsating.

Yechish. $\varphi(x)=x$, $q(x)=\sin x$ funksiyalar R uzluksiz. Bundan $f(x)$ funksiyani $f(x)=3 \cdot x \cdot x \cdot x+\sin x \cdot \sin x$ ko'rinishda yozamiz, u holda uzluksiz funksiyalar ustidagi arifmetik amallarga ko'ra $f(x)$ funksiyaning R da uzluksizligi kelib chiqadi.

Uzluksiz funksiyalarni global xossalari:

1) x_0 nuqtaning yetarli kichik atrofida funksiya chegaralangan bo'ladi.

2) Agar $f(x_0) \neq 0$ bo'lsa, x_0 nuqtaning yetarli kichik atrofida $f(x)$ o'z ishorasini saqlaydi.

Aytaylik $y=f(x)$ funksiya X to'plamda $z=\varphi(y)$ funksiya Y to'plamda aniqlangan bo'lib, ular yordamida $z=\varphi(f(x))$ murakkab funksiya tuzilgan bo'lsin.

2-teorema (Murakkab funksiya uzluksizligi haqida). Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada, $z=\varphi(y)$ funksiya x_0 ga mos kelgan $f(x_0)$ nuqtada uzluksiz bo'lsa $z=\varphi(f(x))$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Endi uzluksiz funksiyalarning global xossalarini teorema shaklida keltiramiz.

3-teorema (Boltsano-Koshining 1 chi teoremasi). Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda aniqlangan va uzluksiz bo'lib, segmentning a va b nuqtalarida har xil ishorali qiymatlarga ega bo'lsa, u holda shunday c ($a<c<b$) nuqta topiladiki, u nuqtada funksiya 0 ga aylanadi: $f(c)=0$.

4-teorema. (Boltsano-Koshining 2 chi teoremasi). Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda aniqlangan va uzluksiz bo'lib uning a va b nuqtalarida $f(a)=A$, $f(b)=B$ qiymatlariga ega va $A\neq B$ bo'lsa, A va B orasida har qanday S son olinganda ham a va b orasida shunday s nuqta topiladiki $f(c)=C$ bo'ladi.

5-teorema. (Veyershtrassning 1 chi teoremasi) Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda aniqlangan va uzluksiz bo'lsa, u holda shu segmentda chegaralangan bo'ladi.

6-teorema. (Veyershtrassning 2 chi teoremasi) Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda aniqlangan va uzluksiz bo'lsa, funksiya shu segmentda o'zining aniq yuqori hamda aniq quyi chegaralariga erishadi.

2-misol. Ushbu $f(x)=\frac{|x|-x}{x^2}$ funksiyani uzluksizlikka tekshiring.

Yechish. Ma'lumki

$$|x|=\begin{cases} x & agar \quad x>0 \quad bo'lsa \\ -x & agar \quad x<0 \quad bo'lsa \end{cases}$$

bundan foydalanib topamiz

$$f(x)=\begin{cases} 0, & agar \quad x>0 \quad bo'lsa \\ -\dfrac{2}{x} & agar \quad x<0 \quad bo'lsa \end{cases}$$

$x=0$ nuqtada funksiya aniqlanmagan bo'lib va $\lim\limits_{x\to+0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to-0} f(x)=+\infty$ munosabatlar o'rinlidir, bu esa ta'rifga ko'ra $x=0$ nuqta $f(x)$ funksiya uchun 2 tur uzilish nuqtasi ekanligini bildiradi.

19-ma'ruza.

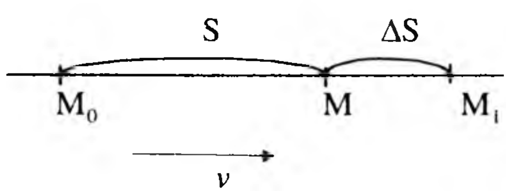
HOSILA VA DIFFERENSIAL.

1. Harakat tezligi.

Biror qattiq jismning to'g'ri chiziqli harakatini ko'rib chiqaylik. Jismni o'lchamini va shaklini e'tiborga olmay moddiy nuqta deb qarash mumkin. Harakat qiluvchi nuqtani uning bog'langich M_0 holatidan hisoblanadigan s masofa t vaqtiga bog'liq bo'ladi ya'ni s masofa t ning funksiyasi bo'ladi.

$$s=f(t) \tag{1}$$

Faraz qilaylik, harakat qiluvchi M nuqta t vaqtning biror momentida M_0 bog'langich harakatda s masofada bo'lsin, undan keyingi $t+\Delta t$ momenti esa nuqta boshlang'ich holatdan $s+\Delta s$ masofada bo'lib M_1 holatni olgan bo'lsin (1-rasm).



1-rasm.

Shunday qilib, Δt vaqt oralig'ida s masofa Δs miqdorga o'zgaradi. Bu holda Δt vaqt oralig'ida s miqdor Δs orttirmani oldi deyiladi.

Quyidagi $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ nisbat nuqta harakatining Δt vaqtidagi o'rtacha tezligini ifodalaydi.

$$v_{o'rta}=\frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{2}$$

Ammo bu nisbat moddiy nuqtaning har bir momentidagi tezligini ifodalamaydi. Buning uchun Δt ni kichik vaqt oralig'ini olish kerak. O'rtacha tezlikning $\Delta t \to 0$ dagi limiti moddiy nuqtaning berilgan momentdagi tezligini ifodalamaydi, ya'ni

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{3}$$

Shunday qilib, yo'l orttirmasi Δs ning vaqt orttirmasi Δt ga nisbati vaqt orttirmasi 0 ga intilgandagi limiti harakatning berilgan momentdagi tezligi deyiladi.

Yuqoridagi (3) tezlikni boshqacha shaklda yozish mumkin. Masofani orttirmasi $\Delta s = f(t+\Delta t) - f(x)$ bo'lgani uchun

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} \tag{3'}$$

Bu esa notekis harakatning tezligi bo'ladi. Demak, notekis harakat tezligi tushunchasi limit tushunchasi bilan bevosita bog'liqdir.

Misol. Yo'lning vaqtga bog'lanishi

$$s = \frac{gt^2}{2}$$

Formula bilan ifodalansa, tekis tezlanuvchan harakatning ixtiyoriy t momentidagi va $t=2$ sekund momentidagi tezligi topilsin. (bu yerda $g=9{,}8$ m/sek^2 erkin tushish tezligi)

Yechish. Argument t ga orttirma beramiz $t+\Delta t$ u holda masofa

$$s + \Delta s = \frac{g(t+\Delta t)^2}{2} = \frac{g(t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2)}{2}$$

orttirmaga ega bo'ladi. Bu yerda Δs ni topamiz:

$$\Delta s = \frac{g(t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2)}{2} - \frac{gt^2}{2} = gt\Delta t + \frac{g\Delta t^2}{2}$$

Endi $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ nisbatini tuzamiz:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{gt\Delta t+\frac{g\Delta t^2}{2}}{\Delta t}$$

Limitni hisoblaymiz:

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(gt+\frac{g\Delta t^2}{2}\right)=gt$$

Shunday qilib, t vaqtning istalgan momentidagi tezligi $v=gt$ ga teng. t=2sek bo'lsa $(v)|_{t=2}=g\cdot 2=9{,}8\cdot 2=19{,}6$ m/sek

2. Hosilani ta'rifi.

Berilgan:

$$y=f(x) \tag{1}$$

funksiya biror x nuqtada va uning atrofida aniqlangan va uzluksiz bo'lsin. Argument x ga biror Δx (musbat yoki manfiy) orttirma beramiz, u holda u funksiya Δu orttirmaga ega bo'ladi. Demak, $x+\Delta x$ da $u+\Delta u=f(x+\Delta x)$ ga ega bo'lamiz.

Funksiya orttirmasi Δu ni topamiz:

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x) \tag{2}$$

Funksiya orttirmasining argument orttirmasiga nisbatini yozamiz.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \tag{3}$$

Bu nisbatning $\Delta x\to 0$ dagi limitini hisoblaymiz agarda bu limit mavjud bo'lsa u berilgan funksiyaning x nuqtadagi hosilasi deyiladi va f'(x) ko'rinishda belgilanadi. Shunday qilib

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

yoki

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \tag{4}$$

Demak, $u=f(x)$ funksiyaning hosilasi deb, funksiya orttirmasini argument orttirmasiga nisbati argument orttirmasi 0 ga intilgandagi limitiga aytiladi.

Ta'rifdan ko'rinadiki, x ning har bir qiymatiga $f'(x)$ ning ma'lum qiymati mos keladi, ya'ni hosila x ning funksiyasi ekanligi kelib chiqadi.

Berilgan funksiyadan hosila olish shu funksiyani diferentsiallash deyiladi. Hosila quyidagi y', $\frac{dy}{dx}$, ko'rinishlarda ham belgilanadi. Hosilaning berilgan nuqtadagi qiymatlari esa $f'(a)$ yoki $u'|_{x=a}$ ko'rinishda belgilanadi.

Misol. $y=\sqrt{x}$ funksiya berilgan uning

1) Ixtiyoriy x nuqtadagi;

2) x=4 nuqtadagi hosilasi topilsin.

Yechish. Argument x ga orttirma beramiz $x+\Delta x$ u holda $y+\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}$ ga ega bo'lamiz. Bu yerdan

$$\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}=\frac{\left(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+\Delta x}+x}=\frac{\Delta x}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$$

funksiya orttirmasiga ega bo'lamiz. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ga nisbatini yozamiz

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$$

limitga o'tamiz

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

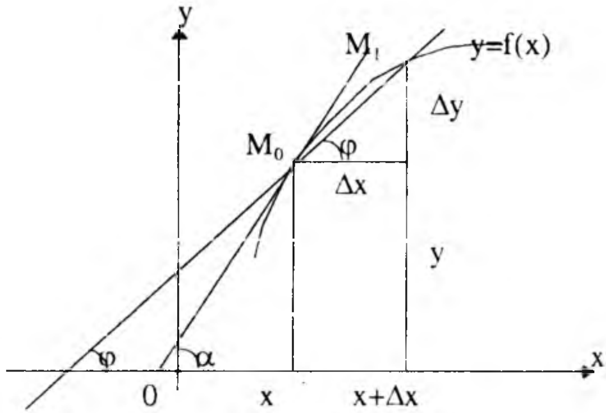
natijada funksiyaning ixtiyoriy nuqtadagi hosilasi quyidagicha bo'ladi:

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

funksiya hosilasining x=4 nuqtadagi qiymati $y'|_{x=4}=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}$ ga teng bo'ladi.

3. Hosilaning geometrik ma'nosi

Bizga berilgan $u=f(x)$ funksiya x nuqta va uning atrofida aniqlangan bo'lsin. Argument x ning biror qiymatida $u=f(x)$ funksiya aniq qiymatga ega bo'ladi, biz uni $M_0(x, u)$ deb belgilaylik. Argumentga Δx orttirma beramiz va natija funksiyaning $u+\Delta u=f(x+\Delta x)$ orttirilgan qiymati to'g'ri keladi. Bu nuqtani $M_1(x+\Delta x,\ u+\Delta u)$ deb belgilaymiz va M_0 kesuvchi o'tkazib uning OX o'qining musbat yo'nalishi bilan tashkil etgan burchagini φ bilan belgilaymiz.



2-rasm.

Endi $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatni qaraymiz. 2-rasmdan ko'rinadiki,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\varphi \qquad (1)$$

ga teng.

Agar $\Delta x \to 0$ ga, u holda M_1 nuqta egri chiziq bo'yicha harakatlanib, M_0 nuqtaga yaqinlasha boradi. M_0M_1 kesuvchi ham $\Delta x \to 0$ da o'z holatini o'zgartira boradi, xususan φ burchak ham o'zgaradi va natijada φ burchak α burchakka intiladi. M_0M_1 kesuvchi esa M_0 nuqtadan o'tuvchi urinma holatiga intiladi. Urinmaning burchak koeffitsienti quyidagicha topiladi.

$$tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} tg\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \qquad (2)$$

Demak, $f'(x) = tg\alpha$, ya'ni, argument x ning berilgan qiymatida $f'(x)$ hosilaning qiymati $f(x)$ funksiyaning grafigiga uning $M_0(x,\ u)$ nuqtasidagi urinmaning OX o'qining musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan burchak tangensiga teng.

4. Funksiyaning differensiallanuvchanligi.

Ta'rif. Agar $u=f(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtada hosilaga ega bo'lsa, (ya'ni $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ mavjud bo'lsa) u holda berilgan $x=x_0$ qiymatda funksiya differensiallanuvchi deyiladi.

Agar funksiya biror $[a, b]$ $((a, b))$ kesma (interval) ning har bir nuqtasida differensiallanuvchi bo'lsa, u holda kesma (interval)da differensiallanuvchi deyiladi.

Teorema. Agar $u=f(x)$ funksiya biror $x=x_0$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda funksiya shu nuqtada uzluksizdir.

Haqiqatdan, agar

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$$

bo'lsa,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\gamma,$$

bu yerda γ $\Delta x\to 0$ da nolga intiluvchi miqdordir. U holda

$$\Delta u=f'(x_0)\Delta x+\gamma\Delta x$$

bo'ladi. Bu yerdan ko'rinadiki $\Delta x\to 0$ da Δu ham nolga intiladi, ya'ni funksiya $x=x_0$ nuqtada uzluksizdir.

Demak, agar $u=f(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtada, uzluksiz bo'lsa, u shu nuqtada differensiallanuvchi bo'lishi ham bo'lmasligi ham mumkin.

Misol. $f(x)$ funksiya $[0, 2]$ kesmada quyidagicha aniqlangan (3-rasm)

$0\le x\le 1$ da $f(x)=x$

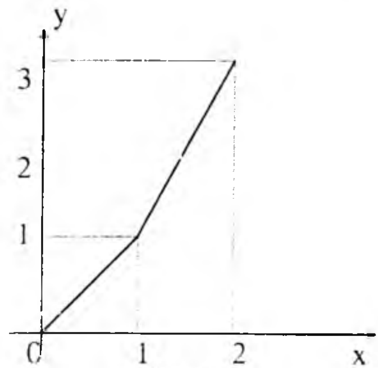
$1<x\le 2$ da $f(x)=2x-1$

Bu funksiya $x=1$ nuqtada uzluksiz bo'lsa-da, hosilaga ega emas. Haqiqatdan, $\Delta x>0$ da

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[2(1+\Delta x)-1]-[2\cdot 1-1]}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x}{\Delta x}=2$$

$\Delta x<0$ da

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(1+\Delta x) - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$



3-rasm.

$\Delta x \to 0$ da funksiyaning qiymati bir hil chiqishi kerak. Shunday qilib, tekshirilayotgan limit Δx ning ishorasiga bog'liq, bu esa $x=1$ nuqtada funksiya hosilaga ega emasligi kelib chiqadi.

DIFFERENSIALLASH QOIDALARI. HOSILA VA DIFFERENSIALNING TADBIQI.

1. $u=x^n$ funksiyaning hosilasi. (n-butun va musbat son).

Teorema. $u=x^n$ funksiyaning hosilasi nx^{n-1} ga teng.

Agar $u=x^n$ bo'lsa, $u'=nx^{n-1}$

haqiqatdan:

1) Δx orttirma beramiz

$u+\Delta u=(x+\Delta x)^n$

2) Nyuton binomi formulasidan

$$\Delta y=x^n+nx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}(\Delta x)^2+\ \dots\ +(\Delta x)^n-x^n$$

3) $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}\Delta x+\ \dots\ +(\Delta x)^{n-1}$$

4) $$y'=\lim\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}[nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}\Delta x+\ \dots\ +(\Delta x)^{n-1}]=nx^{n-1}$$

demak, $u'=nx^{n-1}$ ekan.

Misol. $u=x^3$, $u'=3x^2$.

2. $y=\sin x$, $y=\cos x$ funksiyalarning hosilalari.

1-teorema. $y=\sin x$ funksiyaning hosilasi, cosx ga teng.

Agar $y=\sin x$ bo'lsa, $y'=\cos x$

haqiqatdan,

1) $y+\Delta y=\sin(x+\Delta x)$;

2) $$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{x+\Delta x-x}{2}\cos\frac{x+\Delta x+x}{2}$$

$$=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})$$

3) $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x}=\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})$$

4) $$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x$$

demak, $y'=\cos x$

2-teorema. $y=\cos x$ funksiyaning hosilasi, $-\sin x$ ga teng.

Agar $y=\cos x$ bo'lsa, $y'=-\sin x$

Bu teoremani isboti 1-teoremaning isbotiga o'xshash bo'lib uni o'quvchiga havola qilamiz.

3. O'zgarmas miqdorning hosilasi. O'zgarmas miqdor bilan funksiya ko'paytmasining hosilasi. Yig'indining, ko'paytmaning, bo'linmaning hosilalari.

1-teorema. O'zgarmas miqdorning hosilasi nolga teng.

Agar $y=c$ (c=const) bo'lsa, $y'=0$ bo'ladi.

haqiqatdan, x ning istalgan qiymatida

$y=f(x)=c$

Argument x ga orttirma beramiz, u holda

$y+\Delta y = f(x+\Delta x) = c$ dan $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = c - c=0$

endi nisbatni olamiz va limitga o'tamiz.

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=0$, $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0$, demak $u'=0$.

2-teorema. O'zgarmas ko'paytiruvchini hosila ishorasidan tashqariga chiqarish mumkin.

Agar $u=CU(x)$ (C-const) bo'lsa, $u'=CU'(x)$ bo'ladi.

haqiqatdan,

1) $y=CU(x)$;

2) $y+\Delta y=CU(x+\Delta x)$;

$\Delta y=CU(x+\Delta x)-CU(x)$;

3) $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=C\frac{U(x+\Delta x)-U(x)}{\Delta x}$$

4) $$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=C\lim_{\Delta x\to 0}\frac{U(x+\Delta x)-U(x)}{\Delta x}=CU'(x)$$

Demak, $u'=CU'(x)$ ekani kelib chiqdi.

3-teorema. Chekli sondagi differensiallanuvchi funksiyalar yig'indisining hosilasi shu funksiyalar hosilasining yig'indisiga teng.

Agar $u=u(x)+v(x)+\omega(x)$ bo'lsa, $y'=u'(x)+v'(x)+\omega'(x)$ bo'ladi. Haqiqatdan,

1) $y=u+v+\omega$

2) $y+\Delta y=u+\Delta u+v+\Delta v+\omega+\Delta\omega$

$\Delta y=\Delta u+\Delta v+\Delta\omega$

3) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\Delta u}{\Delta x}+\dfrac{\Delta v}{\Delta x}+\dfrac{\Delta\omega}{\Delta x}$

4) $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta\omega}{\Delta x}=u'+v'+\omega'$

Demak, $y'=u'(x)+v'(x)+\omega'(x)$

Misol. 1) $y=4x^3-2\sin x$

$y'=12x^2-2\cos x$

4-teorema. Ikkita differensiallanuvchi funksiyalar ko'paytmasining hosilasi birinchi funksiya hosilasining ikkinchi funksiya bilan ko'paytmasi plyus birinchi funksiyaning ikkinchi funksiya hosilasi bilan ko'paytmasiga teng.

Haqiqatdan,

1) $y=u\cdot v$

2) $y+\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v)$

$\Delta y=uv+u\Delta v+v\Delta u-uv=v\Delta u+u\Delta v$

3) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=v\dfrac{\Delta u}{\Delta x}+u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}$

4) $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}v\dfrac{\Delta u}{\Delta x}+\lim\limits_{\Delta x\to 0}u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}=vu'+uv'$

Demak, $y'=vu'+uv'$.

Misol. 2) $y=x^4\cos x$, $y'=(x^4)'\cos x+x^{\text{ll}}(\cos x)'=4x^3\cos x-x^4\sin x$

Xuddi shuningdek birinchi funksiyalar ko'paytmasi uchun ham bu formula o'rinlidir. Masalan, y=uvω bo'lsa, $y'=u'v\omega+uv'\omega+uv\omega'$

5-teorema. Kasrning hosilasi yana kasrga teng bo'lib, uning maxraji berilgan kasr mahrajining kvadratiga, surati esa surat hosilasini maxrajga ko'paytmasidan maxraj hosilasini suratga ko'paytmasini ayirganiga teng.

Agar $y=\frac{u}{v}$ bo'lsa, $y'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

Haqiqatdan,

1) $y+\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}$

$$\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}=\frac{v\Delta u-u\Delta v}{v(v+\Delta v)}$$

2) $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}$$

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}=\frac{v\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v\lim\limits_{\Delta x\to 0}(v+\Delta v)}=\frac{vu'-uv'}{v^2}$$

Demak, $y'=\frac{vu'-uv'}{v^2}$

Misol 3. $y=\frac{\sin x}{2x^2-1}$

$$y'=\frac{(\sin x)'(2x^2-1)-(2x^2-1)'\sin x}{(2x^2-1)^2}=\frac{(2x^2-1)\cos x-4x\cdot\sin x}{(2x^2-1)^2}$$

4. Logarifmik funksiyaning hosilasi.

Teorema. $\log_a x$ funksiyaning hosilasi $\frac{1}{x}\log_a e$ ga teng.

Agar $y=\log_a x$ bo'lsa, $y'=\frac{1}{x}\log_a e$

Haqiqatdan,

1) $y+\Delta y=\log_a(x+\Delta x)$

$$\Delta y=\log_a(x+\Delta x)-\log_a x=\log_a\frac{x+\Delta x}{x}=\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

2) $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \to 0} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x} \log_a e$$

Demak, $y' = \frac{1}{x} \log_a e$ yoki $y' = \frac{1}{x \ln a}$

Agarda $a=e$ bo'lsa, $y' = \frac{1}{x \ln e} = \frac{1}{x}$

Demak, $y=\ln x$ funksiyaning hosilasi $1/x$ ga teng, ya'ni $y=\ln x$, $y'=1/x$.

Misol. $y=x^5 \ln x$ $\quad y'=(x^5)' \ln x + x^5 (\ln x)' = 5x^4 \ln x + x^5 \cdot 1/x = x^4(5\ln x+1)$

.

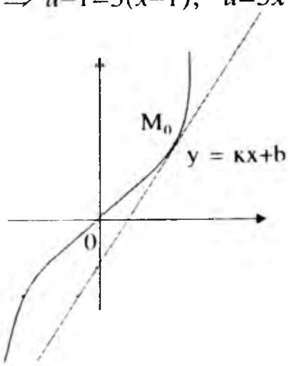
Hosila va differensialning tadbiqi.

1–masala. $f(x)=x^3$ funksiya grafigining $M_0(1;\ 1)$ nuqtasiga o'tkazilgan urinmaning tenglamasi tuzilsin.

Yechish. $f'(x)=3x^2=\mathrm{tg}\,\alpha$; $\quad k=\mathrm{tg}\,\alpha_0=3\cdot 1^2=3$;

$k=3$. $u-u_0=k(x-x_0)$ urinma tenglamasi bo'lsin $u-1=k(x-1) \Rightarrow$

$\Rightarrow u-1=3(x-1)$; $\quad u=3x-2$

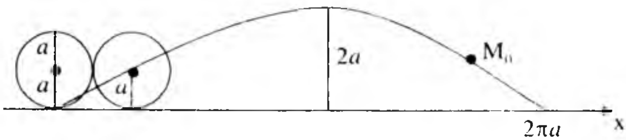


2–masala. $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{18} = 1$ ellipsning $M_0(2;\ 3)$ nuqtasiga o'tkazilgan urinma va normal tenglamalari tuzilsin.

Yechish: Ellips tenglamasining (ayniyat) aynan tenglik deb hisoblab hadlab hosilasini olamiz. Oshkormas funksiyaning hosilasini olish qoidasiga asosan: ushbu hosil bo'ladi.

$$\frac{2x}{8}+\frac{2y\cdot y'}{18}=0;\quad y'=-\frac{9\cdot x}{4\cdot y};\quad \kappa=y'(M_0)=-\frac{9}{4}\cdot\frac{2}{3}=-\frac{3}{2};$$

a) $y-3=-\frac{3}{2}(x-2)$; b) $y=3=\frac{2}{3}(x-2)$ normal tenglamasi urinmaga teng.



3–masala. $\begin{cases} x=2(t-\sin t) \\ y=2(1-\cos t) \end{cases}$ sikloidning $t_0=\frac{3\pi}{2}$ parametrga mos kelgan $M_0(x_0, u_0)$ nuqtasiga o'tkazilgan normal va urinma tenglamasini tuzilsin.

Yechish. a) $x_0=2\left(\frac{3\pi}{2}-\sin\frac{3\pi}{2}\right)=3\pi-2(-1)=3\pi+2,$

$$y_0=2\left(1-\cos\frac{3\pi}{2}\right)=2\cdot1-2\cdot0=2,$$

demak, $M_0(3\pi+2;\ 2)$ bu sikloidga normal va urinmaning urinish nuqtasi.

b) $k_1=?$ $\kappa_1=y'_x(M_0)=\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)_{t_0}=\left(\frac{2\cdot\sin t}{2(1-\cos t)}\right)_{t}=$

$$=\frac{2\sin\frac{3\pi}{2}}{2\left(1-\cos\frac{3\pi}{2}\right)}=\frac{-1}{1}=-1$$

$k_2=?$ $\kappa_2=-\frac{1}{\kappa_1}=1$

s) urinma tenglamasi: $u-u_0=k_1(x-x_0)$

$u-2=-(x-3\pi-2)$ yoki

$u+x-3\pi-4=0.$

Normal tenglamasi: $u-2=+1(x-3\pi-2)$ yoki

$u-x+3\pi=0.$

4–misol. Radiusi 20 sm li bir jinsli metal shar qizdirilgach uning radiusi 20,01 sm ga oshgan. Sharning hajmi qancha oshgan.

Yechish: $f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\cdot\Delta x$; $R=x=20$; $\Delta x=0{,}01$cm.

$$\vartheta_{sh}=\frac{4}{3}\pi R^3;\quad \vartheta_{sh}(x+\Delta x)=\vartheta(20.01)=\vartheta(20)+\vartheta'(20)\cdot 0.01$$

$$\vartheta_{sh}(20{,}01)\approx\frac{4}{3}\pi\cdot 20^3+\frac{4}{3}\pi\cdot 3\cdot(20)^2\cdot 0{,}01=\frac{4}{3}\pi\cdot 20^2(20+3\cdot 0{,}01)=$$

$$=\frac{16}{3}\pi\cdot 100\cdot 20{,}03=\frac{16}{3}\pi\cdot 2003,$$

$$\vartheta_{sh}(20)=\frac{4}{3}\pi\cdot 20^3=\frac{4}{3}\pi\cdot 4\cdot 2\cdot 1000=\frac{16}{3}\pi\cdot 2000$$

$$\frac{16}{3}\pi\cdot(2003-2000)=\frac{16}{3}\pi\cdot 0{,}003.$$

21-ma'ruza.

MURAKKAB, OSHKORMAS, TESKARI VA PARAMETRIK KO'RINISHDA BERILGAN FUNKSIYALARNING HOSILALARI.

Bizga murakkab funksiya berilgan bo'lsin, ya'ni shunday $u=f(x)$ funksiyaki, uni $y=F(u)$, $u=\varphi(x)$ yoki $y=F[\varphi(x)]$ ko'rinishida ifodalash mumkin bo'lsin.

Teorema. Agar $u=\varphi(x)$ funksiya biror x nuqtada $u'_x=\varphi'(x)$ hosilaga ega bo'lsa, $y=F(u)$ funksiya esa u ning mos qiymatida $y'_u=F(u)$ hosilaga ega bo'ladi, u holda shu x nuqtada murakkab funksiya ham

$y'_x=F'_u(x)\cdot\varphi'(x)$ yoki $y'_x=y'_u\cdot u'_x$ ga teng hosilaga ega bo'ladi.

Isboti. Argument x ga Δx orttirma beramiz, u holda

$$u+\Delta u=\varphi(x+\Delta x),\quad y+\Delta y=F(u+\Delta u)$$

bu yerdan

$$u+\Delta u=\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x),\quad \Delta y=F(u+\Delta u)-F(u).$$

$\Delta x\to 0$ da $\Delta u\to 0$ intiladi va $\Delta u\to 0$ da $\Delta u\to 0$ intiladi.

Teoremaning shartiga asosan.

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=y'_u$$

bu yerdan

$$\frac{\Delta y}{\Delta u}=y'_u+\alpha$$

tenglik kelib chiqadi, bu yerda $\Delta u\to 0$ da $\alpha\to 0$

So'ng tenglikdan

$\Delta y=y'_u\Delta u+\alpha\Delta u$ hosil qilamiz.

Buni Δx ga bo'lamiz va $\Delta x\to 0$ dagi limitini topamiz

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'_u\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$y'_x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'_u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}=y'_u\cdot u'_x$$

Shunday qilib teorema isbot bo'ladi.

Agar $u=f(x)$ funksiya $y=F(u)$, $u=\varphi(v)$, $v=\phi(x)$ ko'rinishida bo'lsa, bu murakkab funksiya uchun ham teorema o'rinlidir, ya'ni

$y_x' = y_u' \cdot u_v' \cdot v_x'$

Misol. $y=\sin^2\ln x$, $v=\ln x$, $u=\sin v$, $y=u^2$

$y_u'=2u$, $u_v'=\cos v$, $v_x'=1/x$

$y_x'=y_u' \cdot u_v' \cdot v_x' = 2u \cdot \cos v \cdot 1/x=2\sin\cdot\ln x\cdot\cos\ln x\cdot 1/x$

$y_x'=1/x\sin 2\ln x$

y=tg$x$, y=ctg$x$, y=ln|x| funksiyalarning hosilalari.

1-teorema. tg$x$ funksiyaning hosilasi $\frac{1}{\cos^2 x}$ ga teng.

Haqiqatdan, $y=\mathrm{tg}x$,

$$y'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x-(\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

2-teorema. ctg$x$ funksiyaning hosilasi $-\frac{1}{\sin^2 x}$ ga teng.

Haqiqatdan, y=ctgx;

$$y'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)'\sin x-(\sin x)'\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

3-teorema ln|x| funksiyaning hosilasi $1/x$ ga teng.

Haqiqatdan,

a) $x>0$ bo'lsa, $y=\ln x$, shuning uchun $y'=1/x$

b) $x<0$ bo'lsa, $|x|=-x$, $\ln|x|=\ln(-x)$, $y=\ln(-x)$

$$y'=\frac{1}{-x}\cdot(-x)'=\frac{1}{-x}\cdot(-1)=\frac{1}{x}$$

Misol. $y=\ln \mathrm{tg}2x$, $u=\mathrm{tg}v$, $v=2x$, $y=\ln u$

$$y_x'=y_u'\cdot u_v'\cdot v_x'=\frac{1}{u}\cdot\frac{1}{\cos^2 v}\cdot 2=\frac{1}{tg2x}\cdot\frac{1}{\cos^2 2x}\cdot 2=\frac{4}{\sin 4x}$$

Oshkormas funksiya va uni differensiallash.

Agar ikkita x va u o'zgaruvchilar

$$F(x, y)=0$$

tenglama bilan berilgan bo'lsa va $y=f(x)$ ni (1) tenglamaga qo'yganimizda u x ga nisbatan ayniyatga aylansa, u holda (1) tenglama oshkormas funksiya deyiladi. Bunda

$$F'_x + F'_y y' = 0, \quad y' = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

Masalan, $x^2+y^2-a^2=0$ tenglamani $y=\sqrt{a^2-x^2}$ yoki $y=-\sqrt{a^2-x^2}$ funksiyalar ayniyatga aylantiradi. Ammo hamma vaqt ham oshkormas funksiyani oshkor ko'rinishda ifodalash mumkin emas.

Masalan, 1) $x^2+y^2-xy=0$ 2) $e^{x+y}-2\sin xy=0$ bularni elementar funksiyalar orqali ifodalab bo'lmaydi.

Bunday funksiyani differensiallash uchun u ni x ning funksiyasi deb qarash mumkin va murakkab funksiyaning hosilasi sifatida aniqlash mumkin.

Misol.

1) $x^2+y^2-a^2=0$

$2x+2y\cdot y'=0'$, $y'=-x/y$

2) $x^2+y^2-xy=0$

$2x+2yy'-y-xy'=0$, $y'=-\dfrac{2x-y}{2y-x}$

3) $e^{x+y}-2\sin xy=0$

$e^{x+y}(1+y')-2\cos xy\cdot(xy'+y)=0$.

$(e^{x+y}-2x\cos xy)y'-2y\cos xy+e^{x+y}=0$

$$y'=\frac{2y\cos xy-e^{x+y}}{e^{x+y}-2x\cos xy}$$

$y=x^{\alpha}$, $y=a^x$, $y=u^v$ - ko'rinishidagi funksiyalarning hosilalari.

1-teorema. x^{α} funksiyaning hosilasi $\alpha x^{\alpha-1}$ ga teng.

Agar $u=x^{\alpha}$ bo'lsa, u holda $y'=\alpha x^{\alpha-1}$ bu yerda α-ixtiyoriy haqiqiy son.

Haqiqatdan,

$y=x^{\alpha}$, $\ln y=\ln x^{\alpha}=\alpha\ln x$

$$\frac{1}{y}y'=\alpha\frac{1}{x},\quad y'=y\alpha\frac{1}{x}=\alpha x^{\alpha-1}$$

2-teorema. a^x funksiyaning hosilasi $a^x\ln a$ ga teng .

Haqiqatan,

$y=a^x$, $\ln y=\ln a^x=x\ln a$

$y'=y\ln a=a^x\ln a$

$a=e$ bo'lsa, $y=e^x$, $y'=e^x$

$y'=e^x\ln e=e^x$.

3-teorema. $y=u^v$ funksiyaning hosilasi, $y'=vu^{v-1}u'+u^v v'\ln u$ bo'ladi.

Haqiqatdan,

$y=u^v$, $\ln y=\ln u^v=v\ln u$

$$\frac{1}{y}y'=v'\ln u+v\frac{1}{u}\cdot u'$$

$$y'=y(v\frac{1}{u}u'+v'\ln u)=u^v(v\frac{1}{u}\cdot u'+v'\ln u)$$

$$y'=vu^{v-1}u'+v'u^v\ln u$$

Misol. $y=\dfrac{\sqrt[3]{(x+1)^2}\sqrt[4]{(2x+1)^3}}{(x+5)^7e^{\sin x}}$

$$\ln y=\frac{2}{3}\ln(x+1)+\frac{3}{4}\ln(2x+1)-7\ln(x+5)-\sin x$$

$$\frac{1}{y}y'=\frac{3}{3(x+1)}+\frac{3}{2(2x+1)}-\frac{7}{x+5}-\cos x$$

$$y'=\frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}\sqrt[4]{(2x+1)^3}}{(x+5)^7e^{\sin x}}\left(\frac{2}{3(x+1)}+\frac{3}{2(2x+1)}-\frac{7}{x+5}-\cos x\right)$$

Teskari funksiya va uni differensiallash.

Biror (a, b) $(a<b)$ oraliqda aniqlangan va o'suvchi $u=f(x)$ funksiya berilgan bo'lsin. $(f(a)=s$, $f(b)=d)$.

Funksiya o'suvchi bo'lgani uchun, $x_1<x_2$ quyidagilar uchun $y_1<y_2$ ekani kelib chiqadi. Argumentning ikkita har xil x_1, x_2 qiymatlari uchun funksiyaning ikkita $u_1=f(x_1)$, $u_2=f(x_2)$ qiymatlari

mos keladi. Buning teskarisi ham to'g'ri, ya'ni $u_1<y_2$ qiymatlar uchun $x_1<x_2$ qiymatlari mos keladi. Demak x ning qiymatlari bilan u ning qiymatlari orasida o'zaro bir qiymatli moslik mavjud. U holda $x=f^{-1}(u)$ funksiya $u=f(x)$ funksiyaning teskari funksiyasi deyiladi.

Xuddi shunday fikrni kamayuvchi funksiyalar uchun ham aytish mumkin.

Teorema. Agar $u=f(x)$ funksiyaning u nuqtadagi noldan farqli bo'lgan $\varphi'(u)$ hosilaga ega $x=\varphi(u)$ teskari funksiyasi mavjud bo'lsa, u holda tegishli x nuqtada $u=f(x)$ funksiya $\frac{1}{\varphi'(y)}$ ga teng bo'lgan $f'(x)$ hosilaga ega bo'ladi, ya'ni, $f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isboti. Δu orttirmaga asosan yozamiz.

$\Delta u=\varphi(u+\Delta u)-\varphi(u)$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}$$

$\Delta u\to 0$ da $\Delta x\to 0$. Limitga o'tib

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}$$

ni hosil qilamiz.

Teskari trigonometrik funksiyalar va ularni differensiallash.

1-teorema. arcsin$x$ funksiyaning hosilasi $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ga teng.

Haqiqatdan,

$y=\arcsin x$, $x=\sin y$, $x'_y=\cos y$

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

2-teorema. arccos$x$ funksiyaning hosilasi $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ga teng.

Haqiqatdan,

$y=\arccos x$, $x=\cos y$, $x'_y=-\sin y$

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{\sin y}=\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

3-teorema. $arctgx$ funksiyaning hosilasi $\frac{1}{1+x^2}$ ga teng. Haqiqatdan,

$y=arctgx$, $x=tgy$, $x'_y=\frac{1}{\cos^2 y}$

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\cos^2 y=\frac{1}{1+tg^2 y}=\frac{1}{1+x^2}$$

4-teorema. $arcctgx$ funksiyaning hosilasi $-\frac{1}{1+x^2}$ ga teng. Haqiqatdan,

$y=arcctgx$, $x=ctgy$, $x'_y=-\frac{1}{\sin^2 y}$

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=-\sin^2 y=-\frac{1}{1+ctg^2 y}=-\frac{1}{1+x^2}$$

Misol. $y=arctg^2\sqrt{x}$

$$y'=2arctg\sqrt{x}\cdot\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{arctg\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}$$

Differensiallashdagi asosiy formulalar.

1. $y=c$	$y'=0$
2. $y=u^{\alpha}$	$y'=\alpha u^{\alpha-1}\cdot u'$
3. $y=\sin u$	$y'=\cos u\cdot u'$
4. $y=\cos u$	$y'=-\sin u\cdot u'$
5. $y=tgu$	$y'=\frac{u'}{\cos^2 u}$
6. $y=ctgu$	$y'=-\frac{u'}{\sin^2 u}$
7. $y=a^u$	$y=a^u\ln a\cdot u'$
$y=e^u$	$y'=e^u\cdot u'$

8. $y=\log_a u$ $\quad$ $y'=\frac{1}{u}\log_a e\cdot u'$

$y=\ln u$ $\quad$ $y'=\frac{1}{u}\cdot u'$

9. $y=\arcsin u$ $\quad$ $y'=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$

10. $y=\arccos u$ $\quad$ $y'=-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$

11. $y=\mathrm{arctg}\,u$ $\quad$ $y'=\frac{1}{1+u^2}u'$

12. $y=\mathrm{arcctg}\,u$ $\quad$ $y'=-\frac{1}{1+u^2}u'$

13. $y=Cu$ $\quad$ $y'=Cu'$ $\quad C=\mathrm{const}$

14. $y=u+v-\omega$ $\quad$ $y'=u'+v'-\omega'$

15. $y=u\cdot v$ $\quad$ $y'=u'v+v'u$

16. $y=u/v$ $\quad$ $y'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$

17. $y=F(u),\ u=\varphi(x)$ $\quad$ $y_x'=y_u'\cdot u_x'$

18. $y=u^v$ $\quad$ $y'=vu^{v-1}u'+v'\cdot u^v\ln u$

19. $y=f(x)$ $\quad$ $y_x'=\frac{1}{x'_y}$

$x=\varphi(y)$

Funksiyaning parametrik tenglamasi va uning hosilasi.

Agarda tekislikda egri chiziq

$$\left.\begin{aligned} x=\varphi(t),\\ y=\phi(t),\end{aligned}\right\}\ t\in[\alpha,\ \beta]$$

tenglamalar sistemasi bilan aniqlangan bo'lsa, u holda shu sistema funksiyaning parametrik tenglamasi deyiladi.

Agar $x=\varphi(t)$ funksiya $t=F(x)$ teskari funksiyaga ega bo'lsa, u holda uni x ning funksiyasi, ya'ni

$$u=\psi[F(x)]$$

murakkab funksiya ko'rinishida ifodalash mumkin.

Parametrik funksiyaga misollar keltirish mumkin, masalan:

1) Aylananing parametrik tenglamasi

$$\left.\begin{array}{l} x=a\cos t \\ y=a\sin t \end{array}\right\} \quad t\in[0,\ 2\pi]$$

2) Ellipsning parametrik tenglamasi

$$\left.\begin{array}{l} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{array}\right\} \quad t\in[0,\ 2\pi]$$

3) **Sikloidaning parametrik tenglamasi**

$$\left.\begin{array}{l} x=a(t-\sin t) \\ y=a(t-\cos t) \end{array}\right\} \quad t\in[0,\ 2\pi]$$

4) Astroidaning parametrik tenglamasi

$$\left.\begin{array}{l} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{array}\right\} \quad t\in[0,\ 2\pi]$$

va h.k.

Hosilani topish, murakkab funksiyaning hosilasi formulasidan va teskari funksiyaning hosilasi formulasidan foydalanamiz:

(2) tenglikdan

$$y_x' = y_t' \cdot t_x' = y_t' \cdot \frac{1}{x_t'} = \frac{y_t'}{x_t'} \quad \text{yoki} \quad y_x' = \frac{\phi'(t)}{\varphi'(t)}$$

Misol. $\left.\begin{array}{l} x=a\cos t \\ y=a\sin t \end{array}\right\} \quad t\in[0,\ 2\pi]$

$x_t'=-a\sin t$

$y_t'=-a\cos t$

$$y_x'=\frac{a\cos t}{-a\sin t}=-ctgt$$

Giperbolik funksiyalar

Ko'rsatkichli funksiyalar orqali ifodalanuvchi quyidagi funksiyalar

$$\left.\begin{array}{ll} shx = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}, & thx = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} \\ chx = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}, & cthx = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}} \end{array}\right\} \qquad (1)$$

giperbolik funksiyalar deyiladi.

(1) formuladan quyidagi trigonometrik munosabatlar kelib chiqadi:

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1, \qquad (2)$$

$$\left.\begin{array}{l} ch(x + y) = chxchy + shxshy, \\ sh(x + y) = shxchy + chxshy. \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Bevosita (1) tenglamadan olib kelib qo'yib (2), (3) formulalarning to'g'ri ekanligiga ishonch hosil qilish mumkin.

$x=\cos t$, $y=\sin t$ funksiyalar aylananing parametrik tenglamalari bo'lgani kabi, $x=\cos t$, $y=\sin t$ funksiyalar giperbolik funksiyalar deyiladi.

Giperbolik funksiyalarning hosilalarini osongina keltirib chiqarish mumkin.

$$\left.\begin{array}{ll} (shx)' = chx, & (thx)' = \dfrac{1}{ch^2 x} \\ (chx)' = shx, & (cthx)' = -\dfrac{1}{sh^2 x}. \end{array}\right\}$$

DIFFERENSIAL.

Agar $u=f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada differensiallanuvchi bo`lsa, kesmaga tegishli biror x nuqtadagi hosilasi

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f^{\prime}(x) \qquad (1)$$

tenglik bilan aniqlanadi. Limit ta'rifidan

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f^{\prime}(x) + \alpha \qquad (2)$$

bu yerda $\Delta x \to 0$ da $\alpha \to 0$

$\Delta u = f^{\prime}(x)\Delta x + \alpha \cdot \Delta x$

Shunday qilib, funksiyaning Δu orttirmasi ikkita qo`shiluvchidan iborat bo'lib, bulardan birinchisi orttirmaning bosh bo`lagi deb ataladi va Δx orttirmaga nisbatan chiziqlidir. Shu birinchi hadi funksiyaning differensiali deb ataladi va dy yoki $df(x)$ bilan belgilanadi, demak,

$$du = f^{\prime}(x)\Delta x \qquad (3)$$

$u=x$, $u^{\prime}=x^{\prime}=1$ bo'lgani uchun $du=dx=\Delta x$, u holda $\Delta x=dx$ bo'ladi

$du=f^{\prime}(x)dx$.

Funksiyaning differensiali funksiya hosilasi va argument differensialining ko`paytmasiga tengdir.

(1) tenglamadagi ikkinchi yig`indi $\alpha\Delta x$ esa Δx ga nisbatan yuqori tartibli kichik miqdordir, chunki $\lim \frac{\alpha \cdot \Delta x}{\Delta x}$.

(3) tenglamadan

$$f^{\prime}(x) = \frac{dy}{dx} \qquad (4)$$

Demak, $f^{\prime}(x)$ hosilasi funksiya differensialini erkli o'zgaruvchining argument differensialiga nisbati deb qarash mumkin.

Endi (1) tenglamani quyidagicha yozishimiz mumkin

$$\Delta u = du + \alpha\Delta x \qquad (5)$$

$\alpha\Delta x$ ifoda Δx ga nisbatan cheksiz kichik miqdor bo'lgani uchun

$$\Delta u \approx du \tag{6}$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Yuqoridagi ifodadan foydalanib yozamiz

$$f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\Delta x$$

yoki

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x \tag{7}$$

So'ng (7) formula taqribiy hisoblashlarda ishlatiladi.

Misol. $\sqrt{3,92}$ - hisoblash talab etilsin.

$y=\sqrt{x}$ funksiya olamiz, bu yerda $x_0=4$, $\Delta x=-0,08$

$x_0+\Delta x=4-0,08=3,92$, $f(x_0)=y|_{x_0=4}=\sqrt{4}=2$

$$f'(x)=y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}, \qquad f'(x_0)=y'|_{x_0=4}=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}$$

$$\sqrt{3,92}=\sqrt{4-0,08}\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x=2+\frac{1}{4}(-0,08)=2-0,02=1,92$$

Yuqorida keltirilgan hosila jadvallari yordamida funksiyaning differensiallarini topish mumkin.

Masalan.

1) $y=x^{\alpha}$, $\quad dy=\alpha x^{\alpha-1}dx$

2) $y=\log_a x$ $\quad dy=\frac{1}{x}\log_a e dx$

3) $y=u+v$ $\quad dy=du+dv$

4) $y=u/v$ $\quad dy=\frac{vdu-udv}{v^2}$

shunga o'xshash barcha formulalarni yozish mumkin.

Murakkab funksiya berilgan bo'lsin, ya'ni

$u=f(u)$, $u=\varphi(x)$ yoki $y=f[\varphi(x)]$.

Murakkab funksiyaning hosilasiga muvofiq:

$\frac{dy}{dx}$ yoki $dy=f_u'(u)\varphi'(x)dx$,

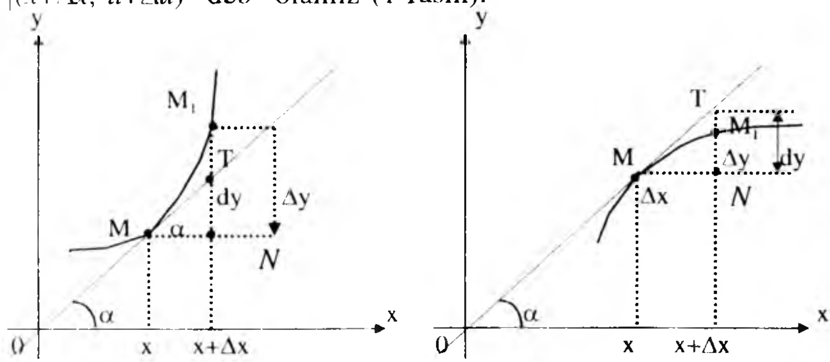
ammo $\varphi'(x)dx=du$ bo'lmagani uchun

$dy=f_u'(u)du$

Shunday qilib, murakkab funksiyaning differensiali oddiy funksiyaning differensiali kabi ekan, ya'ni murakkab va oddiy funksiyaning differensiallari ma'no jihatidan har xil bo'lsa ham, ko'rinishi bir hil ekan. Bu differensialning invariantligi deyiladi.

Differensialning geometrik ma'nosi.

Egri chiziq $u=f(x)$ tenglama orqali berilgan bo'lsin. Egri chiziqning biror $M(x, u)$ nuqtasini olamiz va shu nuqtaga urinma o'tkazib uning OX o'qining musbat yo'nalishi bilan tashkil etgan burchagini α deb belgilaymiz. Argument x ga Δx orttirma beramiz, natijada funksiya Δu orttirmaga ega bo'ladi. Bu nuqtani $M_1(x+\Delta x, u+\Delta u)$ deb olamiz (1-rasm).



1-rasm.

ΔMNT dan: $NT=MN\text{tg}\alpha$, $\text{tg}\alpha=f'(x)$, $MN=\Delta x$, $NT=f'(x)\Delta x$
lekin $du=f'(x)\Delta x$ bo'lgani uchun

$$NT=dy$$

ekani kelib chiqadi.

So'nggi tenglik $f(x)$ funksiyaning berilgan x va Δx qiymatlariga tegishli differensiali $u=f(x)$ egri chiziqning berilgan x nuqtasidagi urinma ordinatasini orttirmasiga teng ekan.

Shakldan ko'rinadiki,

$$M_1T=\Delta y\text{-}dy$$

Bu ayirma shaklga e'tibor bersak musbat ham, manfiy ham bo'lishi mumkin.

Yuqori tartibli hosilalar

Berilgan $u(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada differensiallanuvchi bo'lsin, u holda funksiyaning $f'(x)$ hosilasi x ning funksiyasidir.

Funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasini topish mumkin.

$$y''=(f'(x))'=f''(x)$$

Xuddi shuningdek uchinchi tartibli hosila to'g'risida fikr yuritish mumkin.

$y'''=(y'')'=(f''(x))'=f'''(x)$

Ixtiyoriy n-tartibli hosila ham shu tartibda aniqlanadi.

$y^{(n)}=(y^{(n-1)})'=(f^{(n-1)}(x))'=f^{(n)}(x)$

Misol.

1) $y=x^5-2x^2$,

$y'=5x^4-4x$, $y''=20x^3-4$, $y'''=60x^2$, $y^{IV}=120x$, $y^{V}=120$, $y^{VI}=0$

2) $y=\sin x$

$y'=\cos x=\sin(x+\pi/2)$

$y''=\cos(x+\pi/2)=\sin(x+2\pi/2)$

$y'''=\cos(x+2\pi/2)=\sin(x+3\pi/2)$

. . . .

$y^{(n)}=\sin(x+n\pi/2)$

$y=Cu$, $\quad y^{(n)}=Cu^{(n)}$

$y=u+v$, $\quad y^{(n)}=u^{(n)}+v^{(n)}$

$y=u\cdot v$, $\quad y^{(n)}=(uv)^{(n)}+nu^{(n-1)}v'+\dfrac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{(n-2)}v''+\ldots+v^{(n)}$

So'ngi tenglik Leybnits formulasi.

Yuqori tartibli differensiallar.

Berilgan funksiya differensiallanuvchi bo'lsin, ya'ni, $u=f(x)$ ning differensiali

$du=f'(x)dx$

tengligi bizga ma'lum. Bu tenglikdan yana differensial olamiz

$d(dy)=d^2y=d(f'(x)dx)=f''(x)dx^2$

Uchinchi tartibli differensial ham

$d(d^2y)=d^3y=d(f''(x)dx^2)=f'''(x)dx^3$

ko'rinishida aniqlanadi.

Ixtiyoriy tartibli differensial esa

$d(d^{n-1}y)=d^n y=d(f^{n-1}(x)dx^{n-1})=f^{(n)}(x)dx^n$

tenglik bilan ifodalanadi.

Hosil bo'lgan ifodadan quyidagi tengliklarni yozish mumkin:

$$f^{\prime}(x)=\frac{dy}{dx},\quad f^{\prime\prime}(x)=\frac{d^2y}{dx^2},\ \ldots\ ,\ f^{(n)}(x)=\frac{d^ny}{dx^n}$$

Agar murakkab funksiya berilgan bo'lsa, uning birinchi tartibli differensiali

$$dy=F^{\prime}(u)du$$

ekanligi ma'lum. Lekin ikkinchi tartibli differensiali

$$d^2y=d(F^{\prime}(u)du)=F^{\prime\prime}(u)(du)^2+F^{\prime}(u)d^2u,$$

bu yerda $du=\varphi^{\prime}(x)dx$, $d^2u=\varphi^{\prime\prime}(x)dx^2$

Misol. $u=\ln^2\sin x$, $u=\ln v$, $v=\sin x$, $y=u^2$

$$dy=2\ln\sin x\cdot\frac{1}{\sin x}$$

$$dy=2\ln\sin x\,d(\ln\sin x)=2u\,du$$

$$du=d(\ln v)=\frac{1}{v}$$

$$dv=d(\sin x)=\cos x\,dx$$

Oshkormas va parametrik funksiyalarni yuqori tartibli hosilalari.

1. $x^2+y^2-xy=0$

$2x+2yy^{\prime}-y-xy^{\prime}=0$

$$y^{\prime}=-\frac{2x-y}{2y-x}$$

$$y^{\prime\prime}=\frac{(2-y^{\prime})(2y-x)-(2y^{\prime}-1)(2x-y)}{(2y-x)^2}=$$

$$=\frac{(2-\frac{2x-y}{2y-x})(2y-x)-(2\frac{2x-y}{2y-x}-1)(2x-y)}{(2y-x)^2}=\frac{(5y-4x)(2y-x)-5x(2x-y)}{(2y-x)^3}=$$

$$=\frac{10y-\cancel{5xy}-8xy-4x^2-10x^2+\cancel{5xy}}{(2y-x)^3}=\frac{10y-8xy-6x^2}{(2y-x)^3}$$

Parametrik funksiyalarning ikkinchi tartibli hosilasini topamiz.
Bizga ma'lumki $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ funksiyaning hosilasi

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

formula bilan hisoblanadi. Ikkinchi tartibli hosilasini aniqlaymiz:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)\cdot\frac{dt}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}=$$

$$=\frac{\varphi'(t)\phi''(t)-\varphi''(t)\phi'(t)}{[\varphi'(t)]^3}$$

Misol.

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos t \\ y &= \sin t \end{aligned}\right\}$$

x_t^1=-$a$sin$t$ x_{tt}''=-$a$cos$a$

y_t'=-$a$sint y_{tt}''=-$a$cos$a$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{+a\cos t}{-a\sin t}=-ctgt$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(-a\sin t)(-a\sin t)-(-a\cos t)(a\cos t)}{[-a\sin t]^3}=-\frac{1}{a\sin^3 t}$$

Ikkinchi hosilaning mexanik ma'nosi.

Bizga ma'lumki moddiy nuqtaning harakat tezligi birinchi tartibli hosila orqali ifodalanadi

$$v=\frac{ds}{dt}$$

Agar moddiy nuqta tezligidan vaqt bo'yicha hosila olinsa, u moddiy nuqtaning tezlanishini ifodalaydi.

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

bu yerda a-moddiy nuqtaning tezlanishini ifodalaydi va u ikkinchi tartibli hosila orqali ifodalanadi.

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

23-ma'ruza.

DIFFERENSIALLANUVCHI FUNKSIYALAR HAQIDA BA'ZI TEOREMALAR.

1. Hosilaning ildizi haqidagi Roll teoremasi.

Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lib, shu kesmaning barcha ichki nuqtalarida differensiallanuvchi va $f(a)=f(b)=0$ bo'lsa, u holda (a, b) oraliqda hech bo'lmaganda bitta $x=s$ nuqta mavjudki bu nuqtada funksiya hosilasi nolga aylanadi, ya'ni $f'(c)=0$.

Isboti. $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lgani uchun shu kesmada eng katta qiymati m ga erishadi.

1-hol. $M=m$ bo'lsa $[a, b]$ kesmada $f(x)$ (o'zgarmas) bo'ladi. Bundan $f'(x)=0$ kelib chiqadi $(a<x<b)$

2-hol. $M\neq m$, ya'ni $M>m$ bo'lsa, soddalik uchun $M>0$ deb faraz qilsak, $[a, b]$ kesmada $f(x)$ funksiya uzluksiz bo'lgani uchun $f(c)$ $(a<c<b)$ bo'ladi.

Bundan

$$f'(c)=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{f(c+\Delta x)-M}{\Delta x}\leq 0 \qquad (1)$$

$$f'(c)=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{f(c+\Delta x)-M}{\Delta x}\geq 0 \qquad (2)$$

(1) va (2) tengliklarni taqqoslab, $f(c)=0$ ni hosil qilamiz. Teorema isbot qilindi.

Misol $f(x)=\sin x$ funksiya $[0, \pi]$ kesmada uzluksiz, $(0, \pi)$ oraliqda differensiallanuvchi $f(0)=\sin 0=0$, $f(\pi)=\sin\pi=0$. Roll teoremasining barcha shartlari bajariladi.

$f'(x)=\cos x=0\Rightarrow x=\pi/2$, demak $0<\pi/2<\pi$ uchun $f'(\pi/2)=\cos(\pi/2)=0$

2. Chekli orttirmalar haqidagi Lagranj teoremasi.

Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lib, (a, b) oraliqda differensiallanuvchi bo'lsa, u holda (a, b) oraliqda hech bo'lmaganda bitta $x=s$ nuqta topiladiki, $(a<c<b)$ bu nuqtada

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot. $F(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$

yordamchi funksiyani tuzamiz. Bunda $F(a)=0$, $F(b)=0$ bo'lib, $F(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz va (a, b) oraliqda differensiallanuvchi bo'ladi. Demak, $F(x)$ funksiya Roll teoremasining barcha shartlarini qanotlantiradi. Bunda $F'(c)=0$ $(a<c<b)$ kelib chiqadi. Lekin

$F'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$ bo'lgani uchun $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$ va teorema isbot qilindi.

Misol $f(x)=x^3+3x+5$ funksiya $[-1,1]$ kesmada uzluksiz va uning barcha ichki nuqtalarida differensiallanuvchidir.

$$\frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{9 - 1}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$f'(x)=3x^2+3=4 \Rightarrow 3x^2=1 \Rightarrow x^2=1/3 \Rightarrow x_1= \frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_2=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

Demak, $\dfrac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = f'\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$, bunda $\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}} \in (-1,1)$

3. Orttirmalar nisbati haqidagi Koshi teoremasi.

Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lib, (a, b) oraliqda differensiallanuvchi bo'lsa, bundan tashqari (a, b) oralikning barcha nuqtalarida $g'(x)\neq 0$ bo'lsa, u holda shunday $x=c$ $(a<c<b)$ nuqta topiladiki, bu nuqtada $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Isboti. $F(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\cdot(g(x)-g(a))$ yordamchi funksiyaning tuzamiz. Bunda $F(a)=0$, $F(b)=0$ bo'ladi.

$F'(x)=f'(x)-\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\cdot g'(x)$ bo'lgani uchun $F(x)$ funksiya (a, b) oraliqda differensiallanuvchi bo'ladi. Demak, $F(x)$ funksiya Roll teoremasining barcha shartlarini qanotlantiradi. Roll teoremasiga binoan shunday $x=c$ $(a<c<b)$ nuqta topiladiki, $F'(c)=0$ bo'ladi. Bunda

$f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(c)=0 \Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$ va teorema isbotlandi.

Misol. $f(x)=x^3+8$, $g(x)=x^3+x+1$ funksiyalar $[-1,2]$ kesmada uzluksiz va uning barcha ichki nuqtalarida differensiallanuvchi ekanligi ravshan ($a=-1$, $b=2$)

$$\frac{f(2)-f(-1)}{g(2)-g(-1)}=\frac{8+8-(-1)^3-8}{8+2+1-[(-1)^3-1+1]}=\frac{9}{11+1}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$$

$f'(x)=3x^2$, $g'(x)=3x^2+1\neq 0$, $x=1$ nuqtada $\frac{f'(1)}{g'(1)}=\frac{3\cdot 1}{3\cdot 1+1}=\frac{3}{4}$.

Bundan $\frac{f(2)-f(-1)}{g(2)-g(-1)}=\frac{f'(-1)}{g'(1)}$; $-1<1<2$

4. Rad qiluvchi misollar (kontrprimer). Yuqorida keltirilgan teoremalarning ba'zi shartlari bajarilmaganda teorema tasdig'i o'rinli bo'lmasligiga doir misollar keltiramiz.

1) $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2}$ funksiya $[0,2]$ kesmada uzluksiz

$f(0)=f(0)=\sqrt[3]{(-1)^2}=1; f(2)=\sqrt[3]{1}=1; f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}$ hosila $(0,2)$ oraliqning $x\neq 1$ bo'lgan barcha nuqtalarida aniqlangan va $x=1$ nuqtada mavjud emas. Roll teoremasining ikkinchi sharti buziladi. Shuning uchun $(0,2)$ oraliqda $f'(c)=\frac{2}{3\sqrt[3]{c-1}}=0$ tenglikni qanotlantiradigan $0<c<2$ nuqta mavjud emas.

2) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}+5$ funksiya $[-1, 2]$ kesmada uzluksiz, shu kesmaning $x\neq 0$ bo'lgan barcha ichki nuqtalarida differensiallanuvchi: $f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ va Lagranj teoremasining ikkinchi sharti buziladi.

$$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\frac{\sqrt[3]{4}-1}{3}=\frac{2}{3\sqrt[3]{c}}\to\sqrt[3]{c}=\frac{2}{\sqrt[3]{4}-1}\to c=\frac{8}{(\sqrt[3]{4}-1)^3}>8,$$

demak $c\notin(-1,2)$

Lagranj teoremasining tasdig'i bajarilmaydi

3) $f(x)=\cos x$, $g(x)=\sin x$ funksiyalar $[0, 2\pi/3]$ kesmada uzluksiz $(0, 2\pi/3)$ oraliqda differensiallanuvchi bo'lib, $x\neq\pi/2$ bo'lganda

$g'(x)=\cos x\neq 0$ bo'ladi. $x=\pi/2$ Bo'lganda Koshi teoremasining uchinchi sharti buziladi: $g'(\pi/2=\cos(\pi/2)=0$

$$\frac{f\left(\frac{2\pi}{3}\right)-f(0)}{g\left(\frac{2\pi}{3}\right)-g(0)}=\frac{\cos\frac{2\pi}{3}-\cos 0}{\sin\frac{2\pi}{3}-\sin 0}=\frac{-\frac{1}{2}-1}{\frac{\sqrt{3}}{2}-0}=\frac{-\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{3}{\sqrt{3}}=-\sqrt{3}$$

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{-\sin c}{\cos c}=-tgc;\ \text{Bundan}\ -tgc=-\sqrt{3}\rightarrow c=\frac{\pi}{3}\in\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)$$

Demak, Koshi teoremasining uchinchi sharti buzilsa ham teorema tasdig'i bajariladi, bu shart og'irroq ekan.

$\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmasliklarini ochish.

Teorema (Lopital qoidasi). $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x=a$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan va differensiallanuvchi bo'lsin va shu sohada $g'(x)\neq 0$ bo'lsin. Agar $x=a$ nuqtada $f(a)=g(a)=0$ bo'lib, $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ limit mavjud (chekli yoki cheksiz) bo'lsa, u xolda $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ ham mavjud bo'ladi va $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Eslatma 1. Agar $x=a$ nuqtada $f'(a)=g'(a)=0$ bo'lib, $f'(x)$ va $g'(x)$ funksiyalar teorema shartini qanotlantirsa va $\lim\limits_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}$ limit mavjud (chekli yoki cheksiz) bo'lsa, u holda tenglik o'rinli bo'ladi. Bundan $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}$ kelib chiqadi. Agar $f''(a)=g''(a)=0$ bo'lib, $f''(x)$ va $g''(x)$ funksiyalar teorema shartini qanotlantirsa, bu jarayonni yana davom qildirish mumkin.

Eslatma 2. $a=\infty$ bo'lganda ham teorema o'z kuchini saqlaydi.

Misollar

1. $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^3}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{3x^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6x}=\frac{1}{0}=\infty$$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{arctgx-\dfrac{\pi}{2}}{tg\dfrac{1}{x}}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{1+x^2}}{\dfrac{-1}{\cos^2\dfrac{1}{x}}\cdot\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^2\cos^2\dfrac{1}{x}}{1+x^2}=$

$$=-\lim_{x\to\infty}\cos^2\frac{1}{x}\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=-1\cdot1=-1.$$

$\dfrac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi aniqmasliklarni ochish.

Teorema. $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x=a$ nuqtaning biror atrofida $x\neq a$ bo'lgan barcha nuqtalarda uzluksiz differensiallanuvchi bo'lib shu sohada $g(x)\neq0$ va $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$ bo'lsin.

Agar $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ limit mavjud (chekli yoki cheksiz) bo'lsa, u holda $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ham mavjud bo'ladi va $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Eslatma 1. Agar $\lim\limits_{x\to a}f'(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a}g'(x)=\infty$ bo'lib, $f'(x)$ va $g'(x)$ funksiyalar teorema shartlarini qanotlantirsa, u holda $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f''(x)}{g''(x)}$ tenglik o'rinli bo'ladi va xokazo.

Eslatma 2. $a=\infty$ bo'lganda ham teorema o'z kuchini saqlaydi

Misollar 1. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln(x-1)^2}{ctg(x-1)}\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\dfrac{2}{x-1}}{-\dfrac{1}{\sin^2(x-1)}}=-\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2\sin^2(x-1)}{(x-1)}\left(\dfrac{0}{0}\right)=$

$$=-2\lim_{x\to1}\frac{\sin2(x-1)}{1}=-2\cdot0=0$$

Bu yerda $\dfrac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi aniqmaslik uchun Lopital qoidasi qo'llanildi va $\dfrac{0}{0}$ ko'rinishga keltirildi, so'ngra unga yana Lopital qoidasi qo'llanildi.

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2^x}{x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2^x\ln 2}{3x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2^x\ln^2 2}{6x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2^x\ln^3 2}{6}=\frac{\infty}{6}=\infty$ foydalanib $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞ ko'rinishdagi aniqmasliklarni ochish mumkin. Bunda shu aniqmasliklar $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishga keltiriladi, so'ngra unga Lopital qoidasi qo'llaniladi. Buni misollarda ko'ramiz.

3) $\lim\limits_{x\to 0} x^{2\sin x}$ (0^0) limitni hisoblang. Belgilash kiritamiz

$z(x)=x^{2\sin x}$, $\ln z(x)=2\sin x\cdot\ln x=\frac{2\ln x}{\frac{1}{\sin x}}$. Bundan

$$\lim_{x\to 0}\ln z(x)=\lim_{x\to 0}\frac{2\ln x}{\frac{1}{\sin x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2 x}{x\cos x}=-2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\cos-x\sin x}=$$

$=-2\cdot 0/1=0$.

Teylor formulasi.

Faraz qilaylik $y=f(x)$ funksiya $x=a$ nuqtaning biror atrofida $n+1$ gacha tartibli hosilalarga ega bo'lsin, ya'ni $n+1$ marta differensiallanuvchi bo'lsin. Shunday

$$P_n(x)=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\ldots+c_n(x-a)^n \qquad (1)$$

ko'phadni topamizki, uning noma'lum koeffitsientlari

$$P_n(a)=f(a),\ P_n'(a)=f'(a),\ P_n''(a)=f''(a),\ \ldots,\ P_n^{(n)}(a)=f^{(n)}(a) \qquad (2)$$

tenglikdan topilsin. Bunda $c_0=f(a)$, $c_1=f'(a)$, $c_2=\frac{f''(a)}{2!}$, $c_3=\frac{f'''(a)}{3!}$, ..., $c_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ tengliklar o'rinli bo'ladi. Koeffitsentning topilgan qiymatlarini (1) formulaga qo'ysak, quyidagini hosil qilamiz:

$$P_n(x)=f(a)+f'(a)\cdot(x-a)+$$
$$+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad (3)$$

$f(x)$ funksiya va $P_n(x)$ ko'phad ayirmasini $R(x)$ bilan belgilasak, $f(x)-P_n(x)=R_n(x)$ kelib chiqadi. Buni (3) formuladan foydalanib quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\ldots$$
$$\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x) \qquad (4)$$

(4) formula $x=a$ nuqta atrofida $f(x)$ funksiyaning n darajali ko'phadga yoyilmasi bo'lib, Teylor formulasi deyiladi. $R_n(x)$ yoyilmaning qoldiq hadi deyiladi. $R_n(x)$ ning turli shakllari mavjuddir. $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ $(0<\theta<1)$ - Lagranj shaklidagi qoldiq hadi deyiladi. Buni (4) ga qo'ysak.

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\ldots$$
$$\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \qquad (0<\theta<1) \quad (5)$$

(5) formulada $a=0$ bo'lsa $f(x)$ funksiyaning $x=0$ nuqta atrofidagi yoyilmasi hosil bo'ladi.

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots$$
$$\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad (0<\theta<1) \qquad (6)$$

(6) formula Teylor formulasining xususiy holi bo'lib, Makloren formulasi deyiladi.

e^x, $\sin x$, $\cos x$ funksiyaning Teylor (Makloren) formulasi bo'yicha yoyilmasi.

$f(x)=e^x$ bo'lsa $f^{(i)}(x)=e^x$ bundan $f^{(i)}(0)=e^0=1$; i=0, 1, 2, 3,..., n

$f^{(n+1)}(\theta x)=e^{\theta x}$ Bularni (6) formulaga qo'ysak,

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\ldots+\frac{1}{n!}x^n+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}, \qquad (0<\theta<1)$$

$f(x)=\sin x$ bo'lsa, $f(0)=\sin 0=0$, $f'(x)=\cos x=\sin(x+\pi/2)$, $f'(0)=\cos 0=1$

$f''(x)=(\cos x)'=-\sin x=\sin(x+2\cdot\pi/2)$, $f''(0)=\sin\pi=0$

$f'''(x)=(-\sin x)'=-\cos x=\sin(x+3\cdot\pi/2)$, $f'''(0)=\sin(3\pi/2)=-1$

$f^{(n)}=\sin(x+n\cdot\pi/2)$, $f^{(n)}(0)=\sin(n\pi/2)$; $f(\theta x)^{(n+1)}=\sin[\theta x+(n+1)\cdot\pi/2]$

Bularni (6) formulaga qo'yib sinx ning yoyilmasini hosil qilamiz.

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \ldots + \frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n!}x^n + \frac{\sin\left[\theta x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right]}{(n+1)!}x^{n+1},\quad 0<\theta<1$$

Shunga o'xshash cosx ning yoyilmasi quyidagicha bo'ladi:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{x^n}{n!}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cos\left[\theta x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right],\quad 0<\theta<1.$$

24-ma'ruza.

FUNKSIYANI TEKSHIRISH. FUNKSIYANING O'SISHI VA KAMAYISHI

Bizga $y=f(x)$ funksiya berilgan bo'lsin.

Ta'rif 1. Agar $y=f(x)$ funksiya uchun «x» argumentning katta qiymatiga funksiyaning katta qiymati mos kelsa, u holda bu funksiya o'suvchi deyiladi.

Ta'rif 2. Agar $u=f(x)$ funksiya uchun «x» argumentning katta qiymatiga funksiyaning kichik qiymati mos kelsa, u holda bu funksiya kamayuvchi deyiladi.

Biz endi hosila tushunchasidan foydalanib, funksiyaning o'sishi va kamayishini tekshiramiz.

Teorema 1.

1) Agar $[a, b]$ kesmada hosilaga ega bo'lgan $f(x)$ funksiya shu kesmada o'suvchi bo'lsa, uning hosilasi $[a, b]$ kesmada manfiy bo'lmaydi, $f'(x)\geq 0$

2) Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz, (a, b) oraliqda differensiallanuvchi bo'lsa va $a<x<b$ uchun $f'(x)>0$ bo'lsa, bu funksiya $[a, b]$ da o'sadi.

Isboti. 1) Faraz qilamiz, $u=f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada o'suvchi bo'lsin. Quyidagi nisbatni qaraymiz.

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$f(x)$ funksiya o'suvchi bo'lishi uchun:

$\Delta x>0$ da $f(x+\Delta x)>f(x)$,

$\Delta x<0$ da $f(x+\Delta x)<f(x)$

Lekin, bu hollar uchun $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ bo'ladi.

Demak, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\geq 0$, bundan $f'(x)\geq 0$.

2) Faraz qilamiz, «x» ning $[a, b]$ oraliqdagi barcha qiymatlari uchun $f'(x)>0$ bo'lsin. $x_1\in[a, b]$, $(x_1<x_2)$ ixtiyoriy qiymatni qaraymiz. Lagranjning chekli orttirmalar haqidagi teoremasiga binoan:

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1),\ x_1<\xi<x_2$$

Shartga ko'ra, $f'(\xi)>0$, va bundan

$f(x_2) - f(x_1) > 0$, demak $f(x_2) > f(x_1)$.

Bundan, $f(x)$ f-ya o'suvchi ekanligi kelib chiqadi.

Teorema 2. Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada kamaysa, shu kesmada $f'(x) \leq 0$ bo'ladi. Agar (a, b) oraliqda $f'(x) < 0$ bo'lsa, $[a, b]$ kesmada $f(x)$ funksiya kamayadi.

Bu teoremaning isboti yuqoridagi isbotlangan teoremaga o'xshashdir.

Misollar. 1) $f(x) = 2x^2 - \ln x$ funksiyaning o'sish va kamaish oraliqlari topilsin.

Yechish: funksiya $x > 0$ qiymatlarda aniqlangan.

Hosilasini topamiz:

$f'(x) = 4x - 1/x$;

funksiya usuvchi, agar $f'(x) > 0$ yoki $4x - 1/x > 0$

Bundan $x > 1/2$ bo'ladi.

Funksiya kamayuvchi, agar $f'(x) < 0$ eki bo'lsa, bundan $4x - 1/x < 0$ bo'ladi.

Demak, funksiya $0 < x < 1/2$ intervalda kamayuvchi, $1/2 < x < \infty$ intervalda o'suvchidir.

2) $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$ funksiyaning o'sish kamayish oraliqlari topilsin.

Yechish: funksiya $(-\infty; \infty)$ oraliqda aniqlangan.

$f'(x) = (2x - x^2) \cdot e^{-x}$; $f'(x) = 0 => (2x - x^2) \cdot e^{-x} = 0$

$e^{-x} <> 0$, $2x - x^2 = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = 2$

$(-\infty, 0)$ da $f'(x) < 0$ - funksiya kamayuvchi

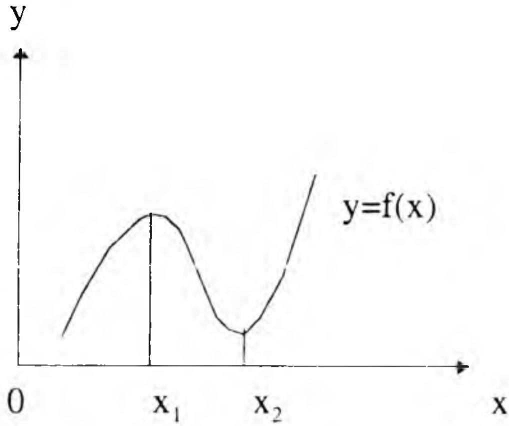
$(0, 2)$ da $f'(x) > 0$ - funksiya o'suvchi;

$(2, \infty)$ da $f'(x) < 0$ - funksiya kamayuvchi.

Funksiyaning maksimumi va minimumi.

Ta'rif 1. Agar absolyut miqdori bo'yicha yetarli darajada kichik bo'lgan ixtiyoriy Δx uchun $f(x_1 + \Delta x) < f(x_1)$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya $x = x_1$ nuqtada maksimumga (max) ega deyiladi.

Ta'rif 2. Agar absolyut miqdori bo'yicha yetarli darajada kichik bo'lgan ixtieriy Δx uchun $f(x_2 + \Delta x) > f(x_2)$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya $x = x_2$ nuqtada minimumga (min) ega deyiladi (1-rasm).



1-rasm.

Funksiyaning maksimum va minimumlari funksiyaning ekstremumlari deyiladi.

Ekstremum mavjudligining zaruriy sharti.

Teorema: Agar differensiallanuvchi $y=f(x)$ funksiya $x=x_1$ nuqtada maksimumga yoki minimumga ega bo`lsa, u holda $f'(x_1)=0$ bo`ladi.

Isboti: Faraz qilamiz, $x=x_1$ nuqtada funksiya maksimumga ega bo`lsin deb. U holda, yetarli darajada kichik $\Delta x\neq 0$ uchun $f(x_1+\Delta x)<f(x_1)$ ni yozish mumkin.

Bundan: $f(x_1+\Delta x)-f(x_1)<0$

$\dfrac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$ nisbatni ko'ramiz.

$\Delta x<0$ da $\dfrac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}>0$, $\Delta x>0$ da $\dfrac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}<0$ bo'ladi.

Hosilaning ta`rifiga ko'ra:

$$f'(x_1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$$

Agar Δx manfiyligicha qolib, nolga intilsa, u holda $f^{\prime}(x_1)\geq 0$ bo'ladi.

Agar Δx musbatligicha qolgan holda nolga intilsa, u holda $f^{\prime}(x_1)\leq 0$ bo'ladi.

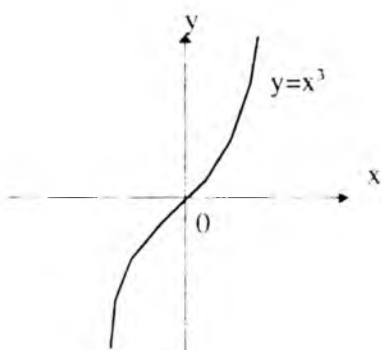
$f^{\prime}(x_1)$ ning qiymati Δx ning qanday holda nolga intilishiga bog'liq bo'lmagan aniq son bo'lgani uchun, tengsizliklar faqat $f^{\prime}(x_1)=0$ da birgalikda bo'ladi.

Isbotlangan teoremadan quyidagi natija kelib chiqadi: agar argument «x» ning kÿrilayotgan hamma qiymatlarida $f(x)$ funksiya hosilaga ega bo'lsa, u holda funksiya x ning faqat hosilani nolga aylantiradigan qiymatlaridagina ekstremumga ega bo'ladi.

Bunga teskari bo'lgan xulosa to'g'ri emas, ya'ni hosilani nolga aylantiradigan har qanday qiymatda albatta maksimum mavjud bo'lavermaydi.

Misol: $y=x^3$; $y^{\prime}=3x^2$; $3x^2=0$, $x=0$.

Funksiyaning hosilasi $x=0$ nuqtada nolga teng bo'ladi, lekin bu nuqtada funksiya na maksimumga na minimumga ega emas (2-rasm).



2-rasm.

Misollar:

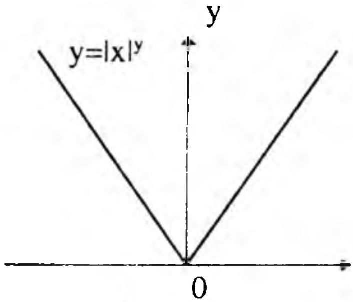
1) $y=[x]$ funksiya $x=0$ nuqtada hosilaga ega emas. lekin bu funksiya shu nuqtada minimumga ega.

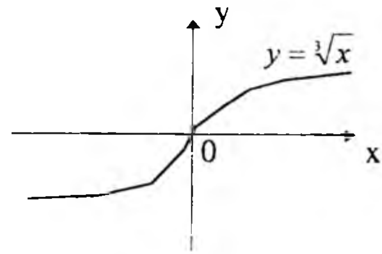
2) $y=\sqrt[3]{x}$ funksiyaning hosilasini topamiz.

$y^{\prime}=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ bu funksiya $x=0$ nuqtada hosilaga ega emas, chunki $x\to 0$

da $y' \to \infty$.

Bu nuqtada funksiya maksimumga ham, minimumga ham ega emas.





2-rasm.

Hosila nolga aylanadigan argumentning qiymatlari kritik nuqtalari yoki kritik qiymatlari deyiladi.

Funksiya faqat 2ta holda: hosila mavjud va nolga teng bulgan nuqtalarda, yoki hosila mavjud bo'lmagan nuqtalarda ekstremumga ega bo'lishi mumkin (3-rasm).

Ekstremum mavjudligining yetarli shartlari.

Teorema: $f(x)$ funksiya x_1 kritik nuqtani o'z ichiga olgan birorta intervalda uzluksiz va shu intervalning hamma nuqtalarida differensiallanuvchi bo'lsin.

1) Agar shu nuqtaning chap tomondan o'ng tomonga o'tishda hosilaning ishorasi «+» dan «-» ga o'zgarsa, funksiya $x=x_1$ nuqtada maksimumga ega bo'ladi.
2) Agar chapdan x_1 nuqta orqali o'ngga o'tishda hosilaning ishorasi «-« dan «+» ga o'zgarsa, funksiya shu nuqtada minimumga ega bo'ladi.

Isboti: 1) Hosilaning ishorasi «+» dan «-» ga o'zgarsin, ya'ni

$x<x_1$, da $f'(x)>0$

$x>x_1$, da $f'(x)<0$ bo'lsin deb faraz qilamiz.

$f(x) - f(x_1)$ ayirmaga Lagranj teoremasini qo'llaymiz:

$f(x) - f(x_1) = f'(\xi)(x-x_1)$, $x<\xi<x_1$

$x<x_1$ bo'lsin.

U holda: $\xi<x_1$, $f'(\xi)>0$, $f'(\xi)(x-x_1) < 0$ bo'ladi.
Demak, $f(x) - f(x_1) < 0$, $f(x) < f(x_1)$

$x>x_1$ bo'lsin. U holda: $\xi>x_1$, $f'(\xi)<0$, $f'(\xi)(x-x_1) < 0$ bo'ladi.
Demak, $f(x) - f(x_1) < 0$, $f(x) < f(x_1)$.

Bulardan, x_1 nuqtada f(x) funksiya maksimumga ega ekanligi kelib chiqadi.

Differensiallanuvchi funksiyani birinchi hosila yordami bilan maksimum va minimumga tekshirish.

Funksiyani birinchi hosila yordami bilan maksimum va minimumga tekshirish quyidagi sxema bo'yicha bajariladi:

1. Funksiyaning birinchi hosilasi $f'(x)$ ni topamiz.
2. Argument x ning kritik qiymatlarini topamiz, buning uchun:

a) birinchi hosilani nolga tenglaymiz va $f'(x)=0$ tenglamaning haqiqiy ildizlarini topamiz.

b) x ning $f'(x)$ hosila uzilishga ega bo'ladigan qiymatlarini topamiz.

3. Hosilaning kritik nuqtadan chapdagi va o'ngdagi $f(x)$ funksiyaning qiymatini hisoblaymiz.

Natijada quyidagi sxema hosil bo'ladi:

Kritik nuqta x_1 dan o'tishda $f'(x)$ hosilaning ishorasi			Kritik nuqtaning xarakteri
$x<x_1$	$x=x_1$	$x>x_1$	
+	$f'(x_1)=0$ yoki uziluvchi	–	Maksimum nuqtasi
–	$f'(x_1)=0$ yoki uziluvchi	+	Minimum nuqtasi
+	$f'(x_1)=0$ yoki uziluvchi	+	Funksiya faqat o'sadi
–	$f'(x_1)=0$ yoki uziluvchi	–	Funksiya faqat kamayadi

Missolar. 1) $f(x)=3/4\ x^4 - x^3 - 9x^2 + 7$

Yechish: funksiya $(-\infty;\ \infty)$ intervalda aniqlangan.
Uning hosilasini olamiz.

$f'(x) = 3x^3 - 3x^2 \quad 18x = 3x(x^2 - x - 6) = 3x(x+2)(x-3)$

$f'(x) = 0{,}3x(x+2)(x-3)=0$

$3x=0,\ x_1=0$
$x+2=0,\ x_2=-2$
$x-3=0,\ x_3=3$
Demak, funksiya $x_1=-2$, $x_2=0$, $x_3=3$ kritik nuqtalarga ega.

Kritik nuqta atrofida funksiya hosilasining ishorasini tekshiramiz.

Intervallar	$x<x_1$	$x_1<x<x_2$	$x_2<x<x_3$	$x_3<x$
$f'(x)$ ishorasi	-	+	-	+

Demak, $x_1=-2$ nuqtada funksiya minimumga erishadi.
$y_{min}|_{x=-2}=-9$
funksiya $x_2=0$ nuqtada maksimumga erishadi.
$y_{max}|_{x=0}=7$
funksiya $x_3=3$ nuqtada minimumga erishadi.
$y_{min}|_{x=3}=-40\frac{1}{4}$.

25-26-ma'ruzalar.

FUNKSIYANI MAKSIMUM VA MINIMUMGA IKKINCHI HOSILA YORDAMIDA TEKSHIRISH.

Faraz qilamiz, $x=x_1$ nuqtada $f'(x_1)=0$ va $f''(x)$ mavjud va x_1 nuqtaning biror atrofida uzluksiz bo'lsin.

Teorema. $f'(x_1)=0$ bo'lsin; va $f''(x_1)<0$ bo'lsa, funksiya $x=x_1$ nuqtada maksimumga va aksincha $f''(x_1)>0$ da minimumga ega bo'ladi.

Agar kritik nuqtada $f''(x_1)=0$ bo'lsa, funksiya $x=x_1$ nuqtada yoki maksimum, yoki minimum bo'lishi, yoki na maksimum va na minimum bo'lmasligi mumkin. Bu holda tekshirishni 1-hosila yordamida olib borish kerak.

Funksiyani 2-hosila yordamida ekstremumga tekshirish sxemasini quyidagi jadvalda tasvirlash mumkin.

$f'(x_1)$	$f''(x_1)$	Kritik nuqtaning xarakteri
0	-	maksimum nuqtasi
0	+	minimum nuqtasi
0	0	noma'lum

Misollar: 1) $f(x)=x^4e^{-x^2}$

$f'(x) = 4x^3e^{-x^2}-2x^5e^{-x^2}=x^3e^{-x^2}(4-2x^2)$

$f'(x)=0,\ x^3e^{-x^2}(4-2x^2)=0;\ e^{-x^2}\neq 0$

$x^3=0,\ x=0$

$4-2x^2=0,\ x=-\sqrt{2},\ x=\sqrt{2}$

Demak funksiya $x_1=-\sqrt{2}$, $x_2=0$, $x_3=\sqrt{2}$ kritik nuqtalarga ega.

Funksiyaning 2- tartibli hosilasini olamiz.

$f''(x)=12x^2e^{-x^2}-8x^4e^{-x^2}-10x^4e^{-x^2}+4x^6e^{-x^2}=2x^2e^{-x^2}(6-9x^2+2x^4);$

Kritik nuqtalarda $f''(x)$ ning ishorasini aniqlaymiz.

$f''(0)=0,\ f''(-\sqrt{2})<0,\ f''(\sqrt{2})<0.$

Demak funksiya $x=-\sqrt{2}$ va $x=\sqrt{2}$ nuqtalarda maksimumga ega va bu qiymat $f(\neq\sqrt{2})=4/e^2$ ga teng bo'ladi.

$x=0$ kritik nuqtani 1- tartibli hosila yordamida tekshiramiz.

$f'(-1)<0$ va $f'(1)>0$

Demak, $x=0$ nuqtada funksiya $f(0)=0$ ga teng bo'lgan minimumga erishadi.

Funksiyaning kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlari

$y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmaning hamma nuqtalarida uzluksiz bo'lsin deb faraz qilaylik. Bu holda shu kesmada funksiya eng katta qiymatga ega bo'ladi.

Funksiya $[a, b]$ kesmada o'zining eng katta qiymatiga kesmaning yo bosh nuqtasida, yo oxiri nuqtasida, yo bo'lmasa funksiya uchun maksimum bo'lgan ichki nuqtasida yotishi mumkin. Funksiya o'zining eng kichik qiymatiga kesmaning yo boshida, yo oxirida, yo bo'lmasa funksiya uchun minimum nuqta bo'lgan ichki nuqtada yotishi mumkin.

$[a, b]$ kesmadagi $y=f(x)$ uzluksiz funksiyaning shu kesmada eng katta va eng kichik qiymatlari quyidagi sxema bo'yicha aniqlanadi.

1) funksiyaning kesmadagi barcha maksimumlari va minimumlari topiladi;

2) kesmaning bosh va oxirgi nuqtalarida funksiyaning $f(a)$ va $f(b)$ qiymatlari hisoblanadi;

3) funksiyaning yuqorida topilgan barcha qiymatlari orasidan eng kattasi va eng kichigi tanlab olinadi, ana shu qiymatlar funksiyaning berilgan kesmadagi eng katta va eng kichik qiymati bo'ladi.

Misollar:

1) $u=f(x)=2x^3-3x^2-12x+1$ funksiyaning $[-2; 5/2]$ kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlari topilsin.

Yechish. Funksiyaning $[-2; 5/2]$ kesmadagi maksimum va minimumlarini topamiz

$f'(x)=6x^2-6x-12$

$f'(x)=0 \Rightarrow 6x^2-6x-12=0$ yoki

$x^2-x-2=0$; $x_1=-1$; $x_2=2$.

Funksiyaning 2-tartibli hosilasini topamiz va kritik nuqtalarda $f''(x)=12x-6$ hosilaning ishorasini aniqlaymiz.

$f''(x)|_{x=-1}=-18<0$; $f''(x)|_{x=2}=18>0$.

Demak, funksiya $x_1=-1$ nuqtada maksimumga, $x_2=2$ nuqtada minimumga ega.

$y_{max}\,|_{x=-1}=8$; $y_{min}\,|_{x=2}=-19$.

Endi kesmaning bosh va oxirgi nuqtalarida funksiyaning qiymatini aniqlaymiz;

$y_{max}\,|_{x=-2}=-3$; $y_{min}\,|_{x=5/2}=-16,5$.

Demak tekshirilayotgan funksiyaning [-2; 5/2] kesmadagi eng katta qiymati $y|_{x=-1}=8$;
eng kichik qiymati $y_{x=2}=-19$ ga teng ekan.

2) $y=x^2 \cdot \ln x$ funksiyaning [1; e] kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlari topilsin.

Yechish: Berilgan funksiyaning hosilasini olamiz.

$y' = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot 1/x = x(2\ln x + 1)$;

$y' = 0$, $x(2\ln x + 1) \neq 0$, chunki funksiya $x > 0$ qiymatlari uchun aniqlangan.

$x \neq 0$; $2\ln x + 1 = 0$

$\ln x = -1/2$; $x = e^{-1/2} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$

Bu qiymat berilgan kesmaga tegishli emas.

U holda berilgan kesmada funksiyaning kritik nuqtalari yo'q. Kesmaning bosh va oxirgi nuqtalarida funksiyaning qiymatini aniqlaymiz

$y|_{x=1}=0$; $y|_{x=e}=e^2$

Demak, $y|_{x=1}=0$ funksiyaning eng kichik qiymati, $y|_{x=e}=e^2$ eng katta qiymati ekan.

Funksiyalar maksimumi va minimumi nazariyasining masalalar yechishga tadbiqi.

Maksimum va minimum nazariyasi yordami bilan geometriya, fizika, mexanikaga doir masalalar yechiladi.

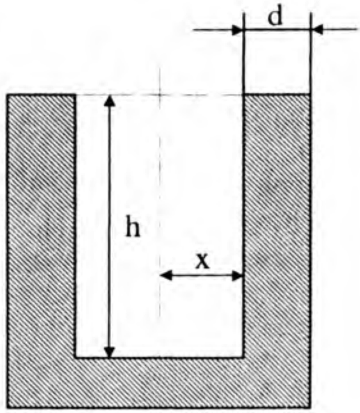
Misollar:

1) V_0 hajmga ega bo'lgan silindrik ko'rinishda ochiq rezervuar qurish kerak bo'lsin. Uning materiali d qalinlikka ega.

Rezervuar qurishda material eng kam ketishi uchun uning o'lchovlari, ya'ni asosining radiusi va balandligi qanday bo'lishi kerak?

Yechish: Ichki silindr asosining radiusini x, balandligini h orqali belgilaymiz (4-rasm). U holda:

$V=\pi(x+d)^2 d+\pi[(x+d)^2-x^2]h=\pi d(x+d)^2+\pi h(2xd+d^2)$



4-rasm.

2-tomondan, shartga ko'ra

$V_0=\pi x^2 h,\ h=V_0/\pi x^2$

U holda:

$$V=\pi d(x+d)^2+\frac{\pi V_0}{\pi x^2}\cdot(2xd+d^2)=\pi d(x+d)^2+\frac{2V_0 d}{x}+\frac{V_0 d^2}{x^2}$$

Bu funksiyani $x>0$ da ekstremumga tekshiramiz. Buning uchun hosila olamiz.

$$V'(x)=2\pi d(x+d)-\frac{2V_0 d}{x^2}+\frac{V_0 d^2}{x^3}=\frac{2d(x+d)(\pi x^3-V_0)}{x^3}$$

$V'(x)=0 \Rightarrow 2d(x+d)(\pi x^3-V_0)=0$

Bu tenglamaning yagona musbat yechimi bor $x=\sqrt[3]{V_0/\pi}$;

Endi h ning qiymatini aniqlaymiz.

$$h=\frac{V_0\cdot\sqrt[3]{\pi^2}}{\pi\cdot\sqrt[3]{V_0^2}}=\sqrt[3]{\frac{V_0}{\pi}}=x$$

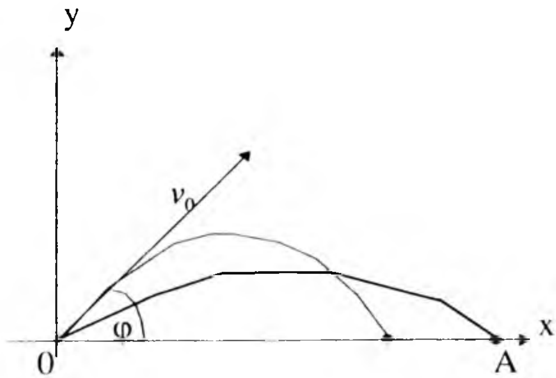
Demak, $x=h=\sqrt[3]{\dfrac{V_0}{\pi}}$;

2) Gorizontal φ burchak bilan qiyalatib qo'yilgan to'pdan v_0 boshlang'ich tezlik bilan otilgan o'qning bo'shliqda uchish uzoqligi $R=OA$

$R=\dfrac{v_0^2 \sin 2\varphi}{g}$ formula bilan aniqlanadi.

Berilgan v_0 boshlang'ich tezlikda o'qning uchish uzoqligi R eng katta bo'lishi uchun φ burchak qanday bo'lishi kerak (5-rasm)?

Yechish:



5-rasm.

$OA=R$

g-og'irlik kuchining tezlanishi.

R-miqdor o'zgaruvchi φ burchakning funksiyasi. Shu funksiyani $0\leq\varphi\leq\pi/2$ kesmada maksimumiga tekshiramiz.

$$R' = \frac{2v_0^2 \cos 2\varphi}{g}; \qquad \frac{2v_0^2 \cos 2\varphi}{g} = 0$$

$\cos 2\varphi=0$; $\varphi=\pi/4$

$$R'' = -\frac{4v_0^2 \sin 2\varphi}{g}; \qquad R''\big|_{\varphi=\pi/4} = -\frac{4v_0^2}{g} < 0$$

Demak, $\varphi=\pi/4$ qiymatda R funksiya maksimumiga ega.

$$R\big|_{\varphi=\pi/4} = \frac{v_0^2}{g}$$ - maksimum qiymat.

R funksiya $[0; \pi/2]$ kesmaning uchlarida $R|_{\varphi=0}=0$; $R|_{\varphi=\pi/2}=0$ qiymatlarga ega.

Demak, $R=v_0^2/g$ qiymat R funksiyaning eng katta qiymatidir.

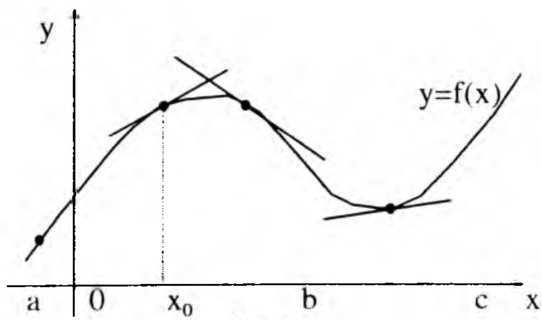
27-ma'ruza.

EGRI CHIZIQNING QAVARIQLIGI VA BOTIQLIGI. BURILISH NUQTA

Bizga grafigi egri chiziqdan iborat bo'lgan $y=f(x)$ funksiya berilgan bo'lsin.

Ta'rif 1. Agar (a, b) intervalda egri chiziqning hamma nuqtalari uning har qanday urinmasidan pastda bo'lsa, shu intervalda egri chiziqning qavariliqligi yuqoriga qaragan yoki qavariq egri chiziq deyiladi.

2. Agar (b, s) intervalda egri chiziqning hamma nuqtalari uning har qanday urinmasidan yuqorida bo'lsa, shu intervalda egri chiziqning kavariqligi pastga yo'nalgan yoki botiq egri chiziq deyiladi (1-rasm).



1-rasm.

Teoremalar:

1. Agar (a, b) intervalning hamma nuqtalarida $f''(x)<0$ bo'lsa, shu intervalda $u=f(x)$ egri chiziq qavariq bo'ladi.

2. Agar (b, s) intervalning hamma nuqtalarida $f''(x)>0$ bo'lsa, shu intervalda $u=f(x)$ egri chiziq botiq bo'ladi.

Ta'rif. Uzluksiz egri chiziqning qavariq qismini botiq qismidan ajratgan nuqta egri chiziqning burilish nuqtasi deyiladi.

Burilish nuqtadagi urinma egri chiziqni kesib o'tadi, chunki bu nuqtaning bir tomonida egri chiziq urinma ostida bo'lsa, ikkinchi tomoni urinma ustida bo'ladi.

Teorema. Egri chiziq $u=f(x)$ tenglama bilan berilgan bo'lsin. Agar $f''(a)=0$ bo'lsa yoki $f''(a)$ mavjud bo'lmasa va $x=a$ nuqtadan o'tishda $f''(x)$ ning ishorasi o'zgarsa, $x=a$ nuqta burilish nuqtasi

bo'ladi.

Misollar:

1. $y=x^4+x^3-18x^2+24x-12$ funksiyaning qavariqliq va botiqlik intervallari va burilish nuqtalari aniqlansin.

Yechish: Berilgan funksiyadan 2 marta hosila olamiz.

$y^{I}=4x^3+3x^2-36x+24$

$y^{II}=12x^2+6x-36=6(2x^2+x-6)$

2- tartibli hosilani nolga tenglaymiz va tenglamani yechamiz.

$y^{II}=0$, $6(2x^2+x-6)=0$, $x_1=-2$; $x_2=3/2$

Berilgan funksiya $(-\infty; \infty)$ intervalda aniqlangan va uzluksiz. Shuning uchun quyidagi intervallar hosil bo'ladi.

$(-\infty; -2)$ intervalda $y^{II}>0$ bo'ladi,

$(-2; 3/2)$ intervalda $y^{II}<0$ bo'ladi,

$(3/2; \infty)$ intervalda $y^{II}>0$ bo'ladi.

Demak, $(-\infty; -2)$ va $(3/2; \infty)$ intervallarda berilgan funksiyaning grafigi botiq, $(-2; 3/2)$ intervalda esa qavariq bo'ladi.

U holda $x_1=-2$ va $x_2=3/2$ nuqtalar funksiya grafigining burilish nuqtalari bo'ladi.

2. $u=x^4$ egri chiziqning qavariqlik va botiqlik intervallari va burilish nuqtasi topilsin.

Yechish: $y^{I}=4x^3$, $y^{II}=12x^2$

$12x^2=0$, $x=0$

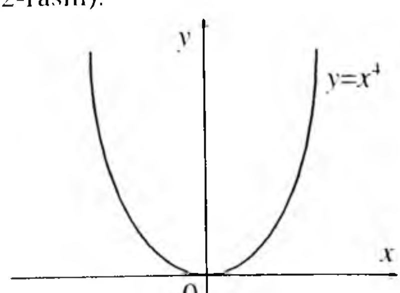
Berilgan funksiya $(-\infty;\infty)$ intervalda aniqlangan.

Quyidagi intervallar hosil bo'ladi:

$(-\infty; 0)$ intervalda $u^{II}>0$ bo'ladi,

$(0; \infty)$ intervalda $y^{II}>0$ bo'ladi.

U holda $x=0$ nuqta burilish nuqtasi bo'lmaydi, funksiyaning grafigi botiqdir (2-rasm).

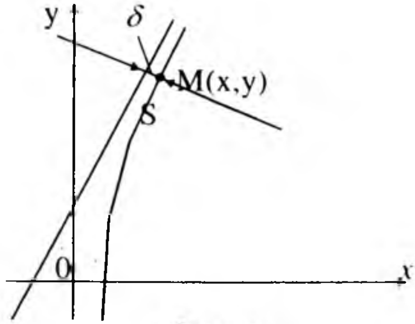


2-rasm.

Asimptotalar.

Ta'rif: Agar egri chiziqning o'zgaruvchi M nuqtasi cheksiz uzoqlashganda uning biror A to'g'ri chiziqdan masofasi $\delta \to 0$ ga, A to'g'ri chiziq egri chiziqning asimptotasi deyiladi (3-rasm).

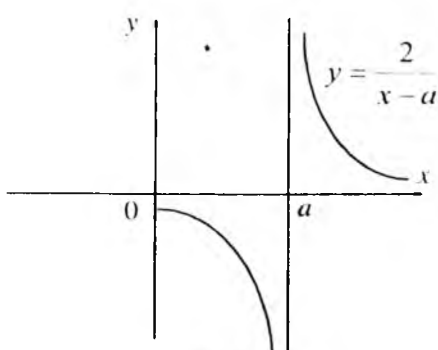
Asimptotalar 2 xil bo'ladi: vertikal asimptota va og'ma asimptota.



3-rasm.

Vertikal asimptota.

Agar $\lim_{x \to a+0} f(x)=\infty$ yoki $\lim_{x \to a-0} f(x)=\infty$ yoki $\lim_{x \to a} f(x)=\infty$ bo'lsa, u holda $x=a$ to'g'ri chiziq $u=f(x)$ egri chiziqning vertikal asimptotasi bo'ladi (4-rasm).



4-rasm.

Og'ma asimptotalar.

Agar $u=f(x)$ egri chiziq og'ma asimptotaga ega bo'lsa, uning tenglamasi

$u=kx+b$ ko'rinishida bo'ladi.

Bu formuladagi k va b lar quyidagi formula orqali aniqlanadi:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}; \quad b = \lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - kx]$$

Agar bu limitlar mavjud va chekli bo'lsa, egri chiziqning og'ma asimptotasi mavjud bo'ladi. Agar limitlardan birortasi mavjud bo'lmasa, u holda egri chiziqning og'ma asimptotasi bo'lmaydi.

Misollar:

1) $u=\dfrac{5x}{x-3}$

Egri chiziq $x=3$ vertikal asimptotaga ega, chunki

$$\lim_{x\to 3\mp 0} u = \lim_{x\to 3\pm 0} \frac{5x}{x-3} = \mp\infty$$

Og'ma asimptotasini tekshiramiz:

$$u=kx+b. \quad k= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{5x}{x(x-3)} = 0$$

$$b= \lim_{x\to\pm\infty} [f(x)-kx] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{5x}{x-3} = 5$$

Demak. egri chiziq $u=5$ og'ma asimptotaga ega ekan.

2) $u=x\cdot e^{1/x}$;

Egri chiziq $x=0$ vertikal asimptotaga ega, chunki

$$\lim_{x\to+0} y = \lim_{x\to+0} x\cdot e^{1/x} = \lim_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$$

Egri chiziqning og'ma asimptotasini topamiz.

$u=kx+b$;

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{xe^{1/x}}{x} = \lim_{x\to\infty} e^{1/x} = e^0 = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(xe^{1/x} - x) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{1/x} - 1}{1/x} = \lim_{z\to 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1$$

Demak, $u=x+1$;

FUNKSIYALARNI TEKSHIRISHNING UMUMIY SXEMASI

Funksiyalarni tekshirishning umumiy sxemasiga quyidagilar kiradi:

1. Funksiyaning aniqlanish sohasini topish;
2. Funksiyaning uzilish nuqtalarini aniqlash;
3. Funksiyaning o'sish va kamayish intervallarini topish;
4. Maksimum va minimum nuqtalarini, shuningdek funksiyaning maksimal va minimal qiymatlarini topish;
5. Grafikning qavariqlik va botiqlik sohalarini, burilish nuqtalarini aniqlash;
6. Funksiya grafigining asimptotalarini topish.

O'tkazilgan tekshirishga asosan funksiyaning grafigi yasaladi.

Agar tekshiriladigan funksiya juft funksiya bo'lsa, ya'ni $f(-x)=f(x)$ bo'lsa, u holda funksiyaning aniqlanish sohasida argumentning faqat musbat qiymatlarida funksiyani tekshirish va grafigini yasash kifoya. Argumentning manfiy qiymatlari uchun funksiya grafigini yasashda juft funksiya grafigi ordinata o'qiga nisbatan simmetrik bo'lishidan foydalaniladi.

Agar $u=f(x)$ toq funksiya, ya'ni $f(-x)=-f(x)$ bo'lsa, bu funksiyani argumentining faqat musbat qiymatlari uchun tekshirish kifoya. Toq funksiyaning grafigi koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo'ladi.

Misol: $\frac{x}{1+x^2}$ funksiya tekshirilsin va grafigi chizilsin.

Yechish: 1) funksiyaning aniqlanish sohasi: $-\infty<x<\infty$

Berilgan funksiya toq funksiyadir, chunki

$$u(-x)= -\frac{x}{1+x^2} = -u(x)$$

2) Funksiya uzluksizdir.

3) Kritik nuqtalarni aniqlaymiz.

$$y'=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2};\ y'=0,\ \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}=0,\ 1-x^2=0$$

$x_1=-1$; $x_2=1$.

Funksiyaning o'sish va kamayish intervallari:

$(-\infty;-1)$ da $y'<0$ - funksiya kamayadi,

$(-1;\ 1)$ da $y'>0$ - funksiya o'sadi,

$(1;\ \infty)$ da $y'<0$ - funksiya kamayadi.

4) Funksiyaning maksimum va minimumlarini topamiz. Buning uchun 2- tartibli hosilani olamiz.

$$y'' = \frac{-2x(1+x^2)^2 - 2(1+x^2)\cdot 2x\cdot(1-x^2)}{(1+x^2)^4} =$$

$$= \frac{-2x(1+x^2+2-2x^2)}{(1+x^2)^3} = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3};$$

$u''|_{x=-1}=1/2>0$

Demak, $x=-1$ nuqtada funksiya minimumga ega. $y_{min}|_{x=-1}=-1/2$;

$y''|_{x=1}=-1/2<0$.

Demak, x=1 nuqtada funksiya maksimumga ega.

$y_{max}|_{x=1}=1/2$;

5) Egri chiziqning qavariqlik va botiqlik sohalarini va burilish nuqtalarini aniqlaymiz.

$y''=0$, $\frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}=0$; $\qquad 2x(x^2-3)=0$.

$x_1=-\sqrt{3}$, $x_2=0$, $x_3=\sqrt{3}$; u holda:

$(-\infty;-\sqrt{3})$ da $y''<0$ - egri chiziq qavariq

$(-\sqrt{3};\ 0)$ da $y''>0$ - egri chiziq botiq

$(0;\ \sqrt{3})$ da $y''<0$ - egri chiziq qavariq

$(\sqrt{3};\ \infty)$ da $y''>0$ - egri chiziq botiq

$$y|_{x=-\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{4};\ y|_{x=0}=0;\ y|_{x=\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

Demak, $(-\sqrt{3};\ -\frac{\sqrt{3}}{4})$, $(0;\ 0)$, $(\sqrt{3};\ \frac{\sqrt{3}}{4})$ nuqtalar burilish nuqtalaridir.

6) Egri chiziqning asimptotalarini aniqlaymiz.

a) Egri chiziqning vertikal asimptotasi yo'q.

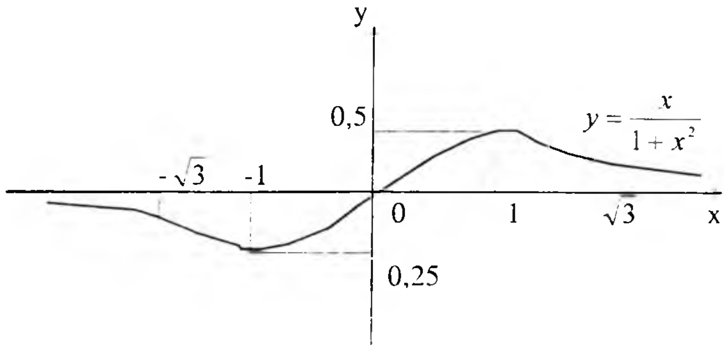
b) Og'ma asimptotasi: u=kx+b

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x(1+x^2)} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+x^2} = 0;$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{1+x^2} = 0;$$

U holda u=0 - og'ma asimptotadir.

Shu topilgan qiymatlarga asosan funksiyaning grafigini chizamiz (1-rasm).

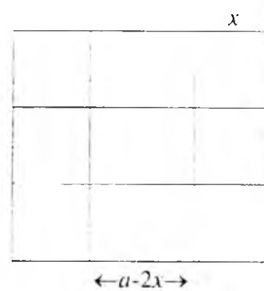


1-rasm.

Funksiyani hosila yordamida tekshirishning tadbiqi.

1–masala Tomoni a ga teng bo'lgan kvadrat shakldagi (temir) tunukadan uning uchlaridan teng kvadratchalarni shunday kesib olinsinki, tunukaning qolgan qismini buklaganda hosil bo'lgan usti ochiq idishning hajmi eng katta bo'lsin.

Yechish. Kesib olingan kvadratcha tomoni uzunligi x bo'lsin, u holda idishni asosi tomoni $a-2x$ bo'lgan kvadrat bo'ladi, hajmi esa



$$\upsilon=(a-2x)^2\cdot x=a^2x-4ax^2+4x^3;$$

$$x\in\left(0;\frac{a}{2}\right),\quad \upsilon'=a^2-8ax+12x^2=0;$$

$$x_{1,2}=\frac{8a\pm\sqrt{64a^2-4\cdot 12\cdot a^2}}{24}=\frac{8a\pm 4a}{24};$$

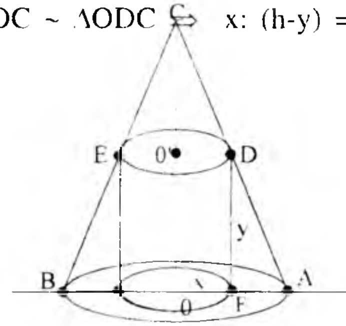
$$x_1=\frac{12a}{24}=\frac{a}{2};\ x_2=\frac{4a}{24}=\frac{a}{6}.\ x_1\notin\left(0;\frac{a}{2}\right);$$

$$\upsilon''=-8a+24x;\ \upsilon''\left(\frac{a}{6}\right)=-8a+4a=-4a<0.$$

Demak, $x=\frac{a}{6}$ da $\upsilon(x)=\frac{2}{27}a^3$ max qiymatga ega.

2–masala. Balandligi h bo'lgan to'g'ri doiraviy konusning ichiga joylashtirilgan doiraviy tsilindrning hajmi eng katta bo'lish uchun uning balandligi qanday bo'lishi kerak?

Yechish: Silindr balandligi u bo'lsin OA=R radiusi bo'lsin. OF=x; DF= y bo'lsin, (0<y<h) $\Delta AOC \sim \Delta ODC \Leftrightarrow$ x: (h-y) = R: h



OC = h

$$x = \frac{R(h-y)}{h};$$

$$\vartheta_ц = \pi x^2 y = \pi R^2 \frac{(h-y)}{h^2} y,$$

$$\vartheta'_ц = \frac{\pi R^2}{h^2}\left(h^2 - 4hy + 3y^2\right) = 0,$$

$$3y^2 - 4hy + h^2 = 0,$$

$$y_{1,2} = \frac{2h \pm \sqrt{4h^2 - 3h^2}}{3} = \frac{2h \pm h}{3}$$

$y_1 = h;\ y_2 = \frac{h}{3};\ h \notin (0;\ h);\ \frac{h}{3} \in (0; h)$ demak $y = \frac{h}{3}$ kritik nuqta.

$$\vartheta''(y) = \frac{\pi R^2}{h^2}(-4h + 6y);\quad \vartheta''\left(\frac{h}{3}\right) = \frac{\pi R^2}{h^2}(-4h + 2h) = -\frac{\pi R^2}{h^2}2h = -\frac{2\pi R}{h} <$$

0 demak funksiya (ϑ - hajm) $y = \frac{h}{3}$ da maksimum qiymatga erishadi.

3-masala. R (m) radiusli yarim shar formadagi rezervuar sekundiga Q (l) tezlik bilan suv quyiladi. Rezervuarda suv satxining ko'tarilishi 0.5 R ga teng bo'lgan momentdagi tezligi topilsin.

Yechish. Suvning satxini h (m), uning hajmini v (m^3) bilan belgilaymiz.

OO_1=R. OM=O_1M=R/2=h.

h va Vlar orasidagi bog'lanishlarni topamiz. Shar segmenti formulasidan foydalanib ushbu ifodani yozamiz:

$$v = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3}\right) \qquad (1)$$

Bu ifodani t bo'yicha differensiallab, tezliklar orasidagi h va v o'zgaruvchilarning bog'lanishlarini topamiz.

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dh}\cdot\frac{dh}{dt} = \pi\left[2h\left(R - \frac{h}{3}\right) - \frac{h^2}{3}\right]\cdot\frac{dh}{dt}$$

yoki

$$\frac{dv}{dt} = \pi\left(2Rh - h^2\right)\cdot\frac{dh}{dt} \quad (2)$$

Masalaning sharti bo'yicha

$$\frac{dv}{dt} = 0{,}001Q\left(\frac{м^3}{сек}\right)$$

Bu yerda 1l = 0,001 m^3

(2) va (3) lardan quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{0{,}001Q}{\pi h(2R-h)}\left(\frac{м}{сек}\right)$$

$h = \frac{R}{2}$ bo'lganda

$$\frac{dh}{dt} = \frac{0{,}004Q}{3\pi R^2}\left(\frac{м}{сек}\right).$$

4-masala. Elektroplitkaga qo'yilgan choynakda t_0 momentda suv qaynaydi va parga aylana boshlaydi. Shu t_0 momentdagi issiqlik miqdori $Q(t)$, issiqlik sig'imi $Q'(t)$ topilsin.

Yechish. Joul-Lents qonuniga ko'ra issiqlik miqdori

$$Q = i^2Rt \quad (1)$$

formula orqali topiladi. Bunda i–tok kuchi (amper), t–vaqt (sekund), Q–issiqlik miqdori (Djoul).

Faraz qilaylik, choynak elektroplitkaga qo'yilganda $t=0$ momentda choynak issiqligi g bo'lsin, u holda t momentda issiqlik miqdori

$$Q = q + i^2Rt \quad (2)$$

bo'ladi. $t=t_0$ momentda suv qaynasin va choynakdagi yig'ilgan issiqlik miqdori

$$Q_0 = q + i^2Rt_0 \quad (3)$$

bo'lib, suv parga aylana boshlaydi.

Fizikadan ma'lumki, suv qaynaganda 1 kg par hosil qilish uchun 2256,7 Djoul issiqlik miqdori kerak bo'ladi.

Agar dt vaqtda qaynagan suvning massasi dm deb belgilasak,

$$dm \approx \frac{i^2 R}{2256{,}7} \cdot dt \approx 45 \cdot 10^{-5} i^2 R dt \qquad (4)$$

demak, 1^0S da suvning qaynagan qismi:

$$\frac{dm}{dt} \approx 45 \cdot 10^{-5} \cdot Ri^2 \qquad (5)$$

Bunga sarf bo'lgan issiqlik miqdori esa quyidagicha:

$$\frac{dQ_1}{dt} = 418{,}68 \frac{dm}{dt} \approx 418{,}68 \cdot 10^{-5} \cdot 45 \cdot i^2 R \approx 0{,}1884 i^2 R \text{ Dj/sek.} \qquad (6)$$

Bundan t va $t > t_0$ momentda qaynagan suvning parga aylanishi uchun sarf bo'lgan issiqlik miqdori quyidagicha bo'ladi:

$$Q_1 \approx 0{,}1884 \cdot i^2 R(t - t_0) \text{ Djoul.} \qquad (7)$$

Demak, choynakda issiqlik miqdori ikki xil formula bilan ifodalanadi:

a) choynakda suv qaynash boshlanguncha ($t < t_0$):

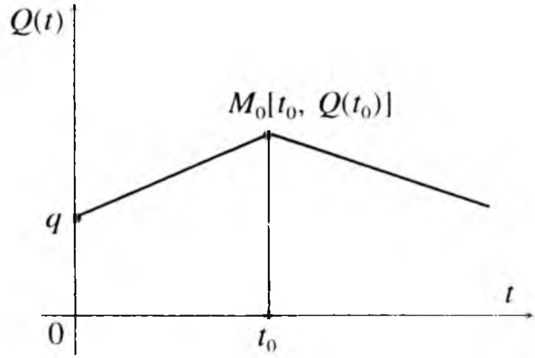
$$Q = g + i^2 Rt\,;$$

b) choynakda suv qaynagandan keyin ($t > t_0$):

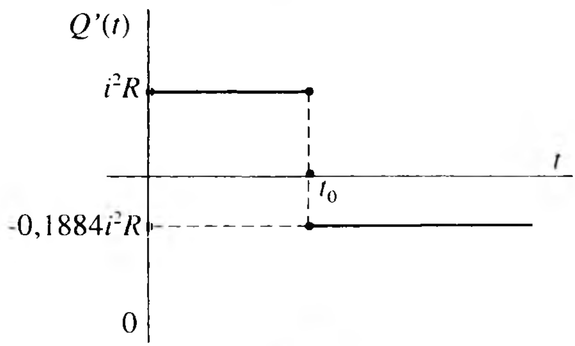
$$Q \approx g + i^2 Rt_0 - 0{,}1884 i^2 R(t - t_0);$$

v) bularni hosila tushunchasiga tadbiq qilamiz. $Q=Q(t)$ funksiya $t=t_0$ nuqtada hosilaga ega bo'lmaydi, biroq bu nuqtada uning grafigi maksimumga erishadi. Bu shakldan ham ko'rinadi (a, b).

$$Q \approx g + i^2 Rt_0 - 0{,}1884 i^2 R(t - t_0);$$



a)



b)

ILOVA

OLIY MATEMATIKADAN MUSTAQIL TAYYORLANISH UCHUN SAVOL VA MISOLLAR (1-KURS, 1-SEMESTR)

CHIZIQLI ALGEBRA

1. Ikkinchi, uchinchi va n-tartibli determinantlar va ularning xossalari.
2. Minorlar va algebraik to'ldiruvchilar.
3. Skalyar va vektor kattaliklar. Vektor uzunligi.
4. Tekislikda va fazoda koordinata sistemasi.
5. Vektorlarning komplanarligi.
6. Vektorlarni qo'shish, ayirish va songa ko'paytirish.
7. Ortalar. Bazis. Vektorni bazis bo'yicha yoyish.
8. Nuqta, kesma va vektorning berilgan o'qqa proektsiyasi.
9. Vektorlarning skalyar ko'paytmasi (vektor ko'rinishi), xossalari.
10. Skalyar ko'paytmaning koordinatalar orqali ifodalanishi.
11. Ikki vektor orasidagi burchak. Ikki vektorning parallellik va perpendikulyarlik shartlari.
12. Vektor ko'paytmaning vektor ko'rinishi va xossalari.
13. Vektor ko'paytmaning koordinatalar orqali ifodalanishi.
14. Ikki vektorning vektor ko'paytmasining geometrik ma'nosi.
15. Uch vektorning aralash ko'paytmasi. Komplanarlik shartlari.
16. Vektorlar ustida chiziqli operatorlar. Matritsalar.
17. Matritsani songa ko'paytirish va matritsalarni qo'shish.
18. Matritsalarni ko'paytirish.
19. Matritsa rangi.
20. Birlik matritsa.
21. Teskari matritsa va uning mavjudlik shartlari.
22. Bir jinsli bo'lmagan tenglamalar sistemasi. Yechimi yagona, cheksiz ko'p yechimli va yechimi bo'lmagan sistemalar.
23. Kroneker-Kapella teoremasi.
24. Kramer formulalari.

25. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Gauss usuli
26. Bir jinsli sistemalar.
27. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning matritsalar usuli.

ANALITIK GEOMETRIYA

1. Tekislikda to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi.
2. Tekislikda to'g'ri chiziqning normal tenglamasi.
3. Tekislikda to'g'ri chiziqning kesmalardagi tenglamasi.
4. Tekislikda to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasining xususiy hollari.
5. To'g'ri chiziqning burchak koeffitsenti. To'g'ri chiziqning burchak koeffitsentli tenglamasi.
6. Berilgan nuqtadan o'tuvchi va berilgan burchak koeffitsentli to'g'ri chiziq tenglamasi.
7. Berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi.
8. Kesma uzunligi.
9. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak.
10. Ikki to'g'ri chiziqning parallellik va perpendikulyarlik shartlari.
11. To'g'ri chiziqning normal tenglamasi.
12. To'g'ri chiziq tenglamasining vektor ko'rinishi
13. To'g'ri chiziqning normal tenglamasi.
14. Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa
15. Ikkinchi tartibli chiziq tenglamasi. Aylana.
16. Ellips.
17. Parabola.
18. Giperbola.
19. Tekislik. Tekislikning umumiy tenglamasi.
20. Tekislikning umumiy tenglamasining xususiy hollari
21. Tekislikning normal tenglamasi.
22. Tekislikning normal vektori.
23. Tekisliking vektor tenglamasi
24. Berilgan nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi.
25 Berilgan uchta nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi.
26. Nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofa.
27. Ikki tekislik orasidagi burchak.

28. Ikki tekislikning parallellik va perpendikulyarlik shartlari.
29. Ikkinchi tartibli sirtlar

MATEMATIK ANALIZGA KIRISH

1. O'zgarmas va o'zgaruvchi kattaliklar
2. To'plamlar va ular ustida amallar
3. Haqiqiy sonlar. Sonli to'plamlar. Chekli va cheksiz to'plamlar.
4. Ketma-ketlik limiti
5. Limitga ega ketma-ketliklar haqida teoremalar.
6. Limitga ega o'zgaruvchi miqdorlar ustida amallar.
7. Cheksiz kichik miqdorlar.
8. Cheksiz katta miqdorlar.
9. Noaniqliklar
10. Monoton ketma-ketliklar.
11. e soni.
12. Ichma-ich joylashgan kesmalar prinsipi.
13. Bolьtsano-Veyershtrass teoremasi.
14. Tekis yaqinlashish tushunchasi.
15. Asosiy eng sodda funksiyalar.
16. Juft va toq funksiyalar.
17. Davriy funksiyalar.
18. Oshkor va oshkormas funksiyalar. Parametrik funksiyalar.
19. Funksiya limiti.
20. Chekli limitga ega funksiyalarning chegaralanganligi haqidagi teorema.
21. Limitga ega funksiyalar haqida teoremalar.
22. Limit mavjudligining Koshi kriteriysi.
23. Limitga ega funksiyalar ustida amallar.
24. Bir tomonlama limitlar
25. Funksiyaning uzluksizligi. Uzilish nuqtalarining turlari.
26. Murakkab funksiya va uning uzluksizligi.
27. Kesmada uzluksiz funksiyalar. Veyershtrass teoremasi.
28. Kesmada uzluksiz bo'lgan funksiyalar haqida teoremalar (Veyershtrass teoremasidan tashqari).
29. Teskari funksiya. Uning mavjudligi va uzluksizligi.
30. Giperbolik funksiyalar.

31. Birinchi ajoyib limit.
32. Ikkinchi ajoyib limit.
33. Ekvivalent cheksiz kichik va cheksiz katta miqdorlar. Ularni solishtirish.

DIFFERENSIAL HISOB

1. Funksiya hosilasi. Hosila va uzluksizlik
2. Hosilaning geometrik ma'nosi
3. Elementar funksiyalarning hosilalari.
4. Murakkab funksiya hosilasi.
5. Teskari funksiya hosilasi.
6. Oshkormas funksiya hosilasi.
7. Parametrik funksiya hosilasi.
8. Funksiya differensiali va uning hosila bilan bog'liqligi.
9. Funksiya differensialining geometrik ma'nosi.
10. Ikkinchi va yuqori tartibli hosilalar
11. Ikkinchi va yuqori tartibli differensiallar
12. O'rta qiymat haqidagi teoremalar:
    a) Ekstremum haqidagi Ferma teoremasi;
    b) Funksiyaning noli haqidagi Roll teoremasi
    v) Koshi formulasi;
    g) Lagranja formulasi.
13. Noaniqliklarniochishning Lopital qoidasi
14. Teylor i Makleron formulalari.
15. Teylor i Makleron formulalari.
16. Asosiy elementar funksiyalarning Teylor qatoriga yoyish.
17. Statsionar nuqtalar. Lokal maksimum va minimum.
18. Lokal ekstremumlarning yetarli shartlari.
19. Kesmada funksiyaning ekstremum qiymatlari.
20. Qabariq va botiqlik. Burilish nuqtalari.
21. Burilish nuqtalari mavjudligining yetarli shartlari.
22. Funksiya grafigining asimptotalari. Og'ma asimptota mavjudligining zaruriy va yetarli shartlari.

1) $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x+3 & x+4 & x+5 \\ x+6 & x+7 & x+8 \end{vmatrix} = 0$ tenglama yechilsin.

2) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix}$ ni hisoblang.

3) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$ ni hisoblang.

4) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ ni hisoblang.

5) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ ni hisoblang.

6) $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ bo'lsa, A^{-1} ni toping.

7) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ bo`lsa, A^{-1} ni toping.

8) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$ matritsaning rangini toping.

9) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 9 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ matritsaning rangini toping.

10) $\begin{cases} 7x + 2y + 3z = 15 \\ 5x - 3y + 2z = 15 \\ 10x - 11y + 5z = 36 \end{cases}$ sistema Kramer formulalari yordamida yechilsin.

11) $\begin{cases} x - y - 2z = 6 \\ 2x + 3y - 7z = 16 \\ 5x + 2y + z = 16 \end{cases}$ sistema Kramer qoidasi yordamida yechilsin.

12) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 6 \end{cases}$ sistemani Gauss usulida yeching

13) $\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_3 - x_4 = 10 \\ x_1 - x_2 - 5x_3 = -10 \\ 3x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$ sistemani Gauss usulida yeching

14) $\begin{cases} 5x + 8y - z = 2 \\ 3x - 2y + 6z = -7 \\ 2x + y - z = -5 \end{cases}$ sistema matritsalar usulida yechilsin.

15) $\begin{cases} 2x - 3y + z = -7 \\ x + 4y + 2z = -1 \\ x - 4y = -5 \end{cases}$ sistema matritsalar usulida yechilsin.

16) $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ vektorlar berilgan bo'lib, ular orasidagi burchak 120^0 ga teng. $\bar{c} = 2\bar{a} - 1{,}5\bar{b}$ -ni quring va uning modulini toping, bunda $|\bar{a}| = 3$ va $|\bar{b}| = 4$.

17) $\bar{r} = 2\bar{i} + 3\bar{j} + 6\bar{k}$ vektorning yo'naltiruvchi kosinuslarini toping.

18) $\overline{OA} = \bar{i} + \bar{j}$ va $\overline{OB} = \bar{k} - 3\bar{j}$ vektorlarga qurilgan parallelogramm diagonallarini aniqlang.

19) $\bar{a} = -\bar{i} + \bar{j}$ va $\bar{b} = \bar{i} - 2\bar{j} + 2\bar{k}$ vektorlar orasidagi burchakni toping.

20) A(3; 3; -2), B(0; -3; 4) C(0; -3; 4) va D(0; 2; -4) nuqtalar berilgan. $\text{пр}_{CD}\overline{AB}$ ni toping.

21) Uchlari A(7; 3; 4), B(1; 0; 6), C(4; 5; -2) nuqtalarda bo'lgan uchburchak yuzini toping.
22) $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar orasidagi burchak 45^0 ga teng. Agar $|\bar{a}| = |\bar{b}| = 3$ bo'lsa $\bar{a} - 2\bar{b}$ va $2\bar{a} + \bar{b}$ vektorlarga qurilgan uchburchak yuzini toping.
23) $\bar{a} = \bar{k} - \bar{j}$ va $\bar{b} = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$ vektorlarga qurilgan parallelogramm diagonallarini va yuzasini toping.
24) $\bar{a} = -\bar{i} + 3\bar{j} + 2\bar{k}$, $\bar{b} = 2\bar{i} - 3\bar{j} - 4\bar{k}$, $\bar{c} = -3\bar{i} + 12\bar{j} + 6\bar{k}$ vektorlar komplanarligini ko'rsating va $\bar{c}$ ni $\bar{a}$ va $\bar{b}$ ga yoying.
25) $\bar{a} = 3\bar{i} + 4\bar{j}$, $\bar{b} = -3\bar{j} + \bar{k}$, $\bar{c} = 2\bar{j} + 5\bar{k}$ vektorlarga qurilgan parallepiped hajmini hisoblang.

1) Ox o'qida koordinata boshidan va A(8, 4) nuqtadan barobar uzoqlikda joylashgan nuqtani toping.
2) Uchlari A(-2; 1), V(3; 6), S(5; 2) va D(0; -6) nuqtalarda bo'lgan bir jinsli to'rtburchak shaklidagi taxtaning og'irlik markazini toping.
3) F(2; 2) nuqtadan va Ox o'qidan barobar uzoqlikda bo'lgan nuqtalar to'plamining geometrik o'rni tenglamasini toping.
4) Diagonallari 10 va 6 ga teng bo'lgan, katta diagonali Ox, kichik diagonali Ou da bo'lgan romb tomonlarini toping.
5) Uchburchakning tomonlari x+3y=0, x=3, x-2y+3=0 tenglamalar bilan berilgan. Uchburchakning uchlari va burchaklarini toping.
6) y=kx+5 to'g'ri chiziqdan koordinata boshigacha bo'lgan masofa $d = \sqrt{5}$ ga teng bo'lsa, k ni toping.
7) Uchlari A(-3;0), V(2; 5), S(3; 2) nuqtalarda bo'lgan uchburchakning BD balandligini toping.
8) y=2x, y=-2x va y=x+b to'g'ri chiziqlardan hosil bo'lgan uchburchakning yuzini va burchaklarini toping.
9) Uchburchakning A(-4; 3) va V(4; -1) uchlari, hamda balandliklarining kesishish nuqtasi M(3; 3) berilgan. Uning S uchini toping.
10) $M_1(0; -1; 3)$ va $M_2(1; 3; 5)$ nuqtalar berilgan. M_1 nuqtadan o'tuvchi va M_1M_2 kesmaga perpendikulyar bo'lgan tekislik tenglamasini toping,

11) Ox o'qiga parallel bo'lgan va $M_1(0; 1; 3)$, $M_2(2; 4; 5)$ nuqtalardan o'tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

12) (2; 2; -2) nuqtadan o'tuvchi va x-2y-3z=0 tekislikka parallel bo'lgan tekislik tenglamasini toping.

13) $M_1(-1; -2; 0)$ va $M_2(1; 1; 2)$ nuqtalardan o'tuvchi va x+2y+2z-4=0 ga perpendikulyar bo'lgan tekislik tenglamasini toping.

14) $M_1(1; -1; 2)$, $M_2(2; 1; 2)$ va $M_3(1; 1; 4)$ nuqtalardan o'tuvchi tekislik tenglamasini toping.

15) 4x+3y-5z-8=0 va 4x+3y-5z+12=0 tekisliklar orasidagi masofani toping.

16) (-4; 3; 0) nuqtadan o'tuvchi va $\begin{cases} x - 2y + z = 4 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini toping.

17) (-4; 3; 0) nuqtadan $\vec{P} = (1; 2; 3)$ ga parallel o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini toping.

18) x=3, z=5 to'g'ri chiziq tenglamasini va uning yo'naltiruvchi vektorini toping.

19) (-1; 2; -3) nuqtadan o'tuvchi va x=2, y-z=1 to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgan tekislik tenglamasini toping.

20) $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}$ to'g'ri chiziq va x+2y+3z-29=0 tekislikning kesishish nuqtasini toping.

21) Fokuslari orasidagi masofa 8 ga, kichik yarim o'qi 3 ga teng bo'lgan ellipsning kanonik tenglamasini toping.

22) Katta yarim o'qi 6 ga, ekssentrisiteti 0,5 ga teng bo'lgan ellipsning kanonik tenglamasini toping.

23) $x^2-4y^2=16$ giperbolada ordinatasi 1 ga teng bo'lgan M nuqta olingan. Bu nuqtadan giperbola fokuslarigacha bo'lgan masofalarni toping.

24) Agar giperbola uchun 1) fokuslari orasidagi masofa 10 ga, uchlari orasidagi masofa 8 ga teng bo'lsa; 2) haqiqiy yarim o'qi $2\sqrt{5}$ ga, ekssentrisiteti $\sqrt{1,2}$ ga teng bo'lsa, bu giperbolalarning kanonik tenglamalarini toping.

25) 1) (0; 0) va (1;-3) nuqtalardan o'tuvchi va Ox o'qiga nisbatan simmetrik bo'lgan; 2) (0; 0) va (2; -4) nuqtalardan o'tuvchi va Ou o'qiga nisbatan simmetrik bo'lgan parabola tenglamasini toping.

26) Quyidagi tenglamalar qanday sirtlarni tasvirlaydi?
1) $x^2+y^2+z^2=2az$; 2) $x^2+y^2=2az$; 3) $x^2+z^2=2az$;
4) $x^2-y^2=2az$; 5) $x^2+y^2=z^2$; 6) $x^2=2az$; 7) $x^2=2yz$.
27) Quyidagi tenglamalar qanday egri chiziqni tasvirlaydi:
1) $4x^2-y^2=0$; 2) $4x^2+y^2=0$; 3) $x^2+z^2+2x+2=0$;
4) $x^2+y^2-6x-8y+25=0$; 5) $y^2-16=0$; 6) $2x^2+3y^2-4x+6y=7$.

Matematik analizga kirish

1) 1) $y=|x|$; 2) $y=-|x-2|$; 3) $y=|x|-x$ funksiyalarning grafiklarini yasang.

2) a) $y=\sqrt{-x}+\sqrt{4+x}$; b) $y=\arcsin\frac{x-1}{2}$; c) $y=\frac{x\sqrt{16-x^2}}{x+2}$;
d) $y=\frac{1-\log_2(x^2-5x+6)}{x^2-1}$; e) $y=\frac{x\ln x}{x^3+1}$ funksiyalarning aniqlanish sohalarini toping.

3) Limitni hisoblang: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{n^5+2}-\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[5]{n^4+2}-\sqrt{n^3+1}}$.

4) Limitni hisoblang:

5) Hisoblang: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{2^n+1}$.

6) Hisoblang: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\ldots n}{\sqrt{9n^4+1}}$.

7) Hisoblang: $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2-x-2}{x^3+1}$.

8) Hisoblang: $\lim\limits_{x\to-2}\frac{3x+6}{x^3+8}$.

9) Hisoblang: $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}$.

10) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

11) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$.

12) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{\arcsin(x+2)}{x^2+2x}$.

13) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x}-x)$

14) $\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{12}{x^3-8}\right)$.

15) $\lim\limits_{x\to-2}\left(\frac{1}{x+2}+\frac{4}{x^2-4}\right)$.

16) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\cos\frac{x}{2}}{x-\pi}$.

17) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$.

18) $\lim\limits_{x\to 0}(1-4x)^{\frac{1}{x}}$.

19) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-2}{3x+1}\right)^{2x}$.

20) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{x}$.

Differensial hisob

Hosilani va $f'(x_0)$ ni toping:

1) $y=\frac{\cos x}{1+2\sin x}$;

2) $y=\frac{\sqrt{2x-1}}{x}$, $x_0=1$;

3) $y=\sqrt[3]{1+\cos^2 x}$, $x_0=\frac{\pi}{2}$;

4) $y=\frac{\sqrt{4x+1}}{x^2}$, $x_0=2$;

5) $y=\ln(e^x+xe^x)$, $x_0=0$;

6) $y=\operatorname{arcctg}\frac{1+x}{1-x}$;

7) $y=x\operatorname{arctg}x-\sqrt{1-x^2}$.

n-tartibli hosilani toping.

8) $y=e^{x}$; 9) $y=\ln x$; 10) $y=\sqrt{x}$; 11) $y=\cos^2 x$.

3-tartibli hosilani toping:

12) $y=e^x\cos x$; 13) $y=x^2\ln x$; 14) $y=x\cos x$; 15) $y=x^2\ln x$.

Funksiya differensiallarini toping:

16) $y=\sqrt{1+x^2}$; 17) $y=\frac{a}{x}+\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$; 18) $y=\arcsin\frac{1}{x}$.

$\frac{dy}{dx}$ ni toping:

19) $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$;

20) $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$;

21) $x^3+y^3-3axy=0$; 22) $y\sin x+x\cos y=0$.

Lopital qoidasidan foydalanib hisoblang:

23) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin 2x}$; 24) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{2-\sin x}$; 25) $\lim\limits_{x\to 0}x^x$;

26) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\ln(1+2x)}$; 27) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{2\sin x}-\frac{1}{x^2}\right)$

Funksiya grafiklarini quring:

28) $y=4x-x^2$; 29) $y=\frac{(x-1)^2}{x^2-1}$; 30) $y=\frac{x^2}{x-2}$;

31) $y=x-2\ln 2$; 32) $y=\sin 2x-x$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$;

33) $y=2x+\operatorname{ctg}x$; 34) $y=x+\frac{1}{x}$.

ADABIYOTLAR

1.Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М., Наука, 1984.

2.Беклемишев Д.В., Петрович А.Ю., Чуберов И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. – М., Наука, 1987.

3.Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. –М., Наука, 1985.

4.Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М., Наука, 1980, 1984, 1988.

5.Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М., Наука, 1980, 1983.

6.Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. ФПК. – М., Наука, 1981, 1985.

7.Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Сборник. – М., Наука, 1982.

8.Данко П.С., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. - М. Высшая школа, 1985, ч. 1, 2.

9.Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М. Наука, 1986.

10. Шитаев В.С. Высшая математика: Учеб. для вузов.\ Шитачев В.С. -5-е. силер. изд. М.: Высшая школа, 2002 – 479 С.

11. Ермакова В.И. Общий курс высшей математики для экономистов. Рос. экон. акад. – М: ИНФРА – М, 2001 - 655 С.

12. Latipov X.R., Nosirov F.O'., Tojiyev Sh. Analitik geometriya va chiziqli algebra. Toshkent. «O'zbekiston», 1995.

13. Latipov X.R., Nosirov F.O'., Tojiyev Sh. Analitik geometriya va chiziqli algebradan masalalar yechish bo'yicha qo'llanma. Toshkent. «Fan», 1999.

14. Шнейдер В.Е., Слуцкий А.И., Шумов А.С. Краткий курс высшей математики. М., 1978, ч. 1, 2.

15. Shneyder V.E., Sluskiy A.I., Shumov A.S. Qisqacha oliy matematika kursi. T., 1980, 1, 2-qism.

16. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для ВТУЗов. М., Наука, 1985, ч. 1, 2.

17. Piskunov N.S. Differensial va integral hisob. Oliy texnika o'quv yurtlari uchun. T., O'qituvchi, 1974, 1, 2-qism.

18. Soatov Yo.U. Oliy matematika. T.: O'qituvchi, 1992-1995. 1-4-qismlar.

19. Вержбицкий В.М. Численные методы (математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения): Учебн.пособие./Вержбицкий В.М.–М.: Высшая школа, 2001–382 С. ISBN 5–06–003982–X.

20. Мышкис А.Д. Математика для технических вузов: Специальные курсы / Мышкис А.Д.–2-ое изд.–СПб.: Лань, 2002-632 С. (Учеб.для вузов. Спец.лит.) ISBN 5–8114–0395–X.

MUNDARIJA

Muharrir M.Hasanova

Подписано к печати 11.05.2005. Формат 60x84 1/16.
Объём 15.5 п.л. Тираж 1200. Заказ № 223.
Отпечатано в типографии ТГТУ. г.Ташкент ул. Талабалар, 54.