O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

ABU RAYHON BERUNIY NOMIDAGI
TOSHKENT DAVLAT TEXNIKA UNIVERSITETI

OLIY MATEMATIKA
fanidan laboratoriya ishlarini bajarish uchun uslubiy qo'llanma

Toshkent 2012

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

ABU RAYHON BERUNIY NOMIDAGI
TOSHKENT DAVLAT TEXNIKA UNIVERSITETI

OLIY MATEMATIKA
fanidan laboratoriya ishlarini bajarish uchun uslubiy qo‘llanma

Toshkent 2012

Tuzuvchilar: Sh.Qayumov, A.Narziyev, A.Xaytmetov, I.Iskanadjiyev

«Oliy matematika» fanidan laboratoriya ishlarini bajarish uchun uslubiy qo'llanma. -Toshkent: ToshDTU. 2012, 96 bet.

Mazkur uslubiy qo'llanma I kurs talabalari uchun mo'ljallangan bo'lib, unda «Oliy matematika» fanining chiziqli, chiziqsiz tenglamalari, aniq integrallar, differensial tenglamalar, ko'p o'zgaruvchili va kompleks o'zgaruvchili funksiyalar bo'limlaridan laboratoriya ishlari majmuasi berilgan.

Abu Rayhon Beruniy nomidagi Toshkent davlat texnika universitetining ilmiy-uslubiy kengashi qaroriga muvofiq nashrga tayyorlandi.

F.-m.f.n. dots. A.Haydarov - O'zbekiston Milliy universiteti
F.-m.f.n. dots. R.Shamsiyev - Toshkent davlat texnika universiteti

So'z boshi

Mazkur uslubiy qo'llanma texnika oliy o'quv yurtlarining o'quv rejasidagi "Oliy matematika" fanida, chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini, chiziqsiz algebraik va transsendent tenglamalarni, aniq integralni, birinchi tartibli differensial tenglamalarni taqribiy yechish, ko'p o'zgaruvchili funksiyalar uchun Teylor formulasi va uning qo'llanilishi, kompleks o'zgaruvchili funksiyalarning qoldiqlar nazariyasi asosida aniq integrallarni hisoblash kabi bo'limlari bo'yicha laboratoriya ishlarini bajarishga doir bo'lib, u "Oliy matematika" ning ushbu bo'limlarini talabalarga chuqur o'rganish va ularni amaliy masalalarni yechishga tatbiq qila bilish, hisoblash jarayonlarining ketma-ketligini aniqlanash va talqin qilish, hisoblash jarayonida yo'l qo'yiladigan xatolarni baholash kabi ko'nikmalarni hosil qilishga yordam beradi.

Uslubiy qo'llanma 1 kurs talabalari uchun mo'ljallangan bo'lib, unda chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini Gauss, Jordan–Gauss, usullari bilan yechish, chiziqsiz algebraik yoki transsendent tenglamalar ildizini taqribiy usullar, (iteratsiya, urinma, vatar usullari) yordamida yechish, aniq integrallarni Simpson usuli yordamida taqribiy yechish, birinchi tartibli differensial tenglamalarni Eyler, Eyler–Koshi usullari bilan yechish, ko'p o'zgaruvchili funksiyalarni tekshirishda Teylor formulasining qo'llanilishi (funksiyalar ekstremumini topish, shartli ekstremumni topish va h.k), chekli uzilishga ega bo'lgan funksiyalardan olingan xosmas integrallarni qoldiqlar nazariyasi yordamida hisoblash mavzularidagi laboratoriya ishlari majmuasi berilgan. Har bir laboratoriya ishi nazariy va amaliy qismlardan iborat bo'lib, amaliy qismida laboratoriya ishining qanday yo'l bilan bajarilishi batafsil bayon qilingan. Laboratoriya ishlari oxirida har bir guruh talabalari uchun alohida misollar to'plami berilgan. Laboratoriya ishlari A-4 formatda, standart talablarga mos ravishda rasmiylashtirilgan holda ko'rsatilgan muddatda topshiriladi.

Chiziqli algebrada Jordan–Gauss usulini qo'llash

Chiziqli algebra, chiziqli tenglamalar va chiziqli tengsizliklar sistemasini o'rganadi. Biz quyida chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechish uchun qo'llaniladigan usullardan ayrimlarini qarab chiqamiz.

I. Jordan chiqarish usuli

Quyidagi chiziqli funksiyalar sistemasi berilgan bo'lsin (chiziqli forma):

$$\left.\begin{array}{l} u_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1s}x_s+\ldots+a_{1n}x \\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2s}x_s+\ldots+a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_i=a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{is}x_s+\ldots+a_{in}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_r=a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\ldots+a_{rs}x_s+\ldots+a_{rn}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{ms}x_s+\ldots+a_{mn}x_n \end{array}\right\} \qquad (1)$$

bu n da: $a_{ij}(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n})$– aniq sonlar bo'lib, x o'zgaruvchilarning koeffitsientlaridan iboratdir, u_i funksiyalar. Bu sistemani Jordan jadvali deb ataluvchi 1-jadval ko'rinishida yozamiz:

1-jadval

	x_1	x_2	. . .	x_{s-1}	x_s	x_{s+1}	. . .	x_n
$y_1=$	a_{11}	a_{12}	. . .	$a_{1,s-1}$	a_{1s}	$a_{1,s+1}$	. . .	a_{1n}
$y_2=$	a_{21}	a_{22}	. . .	$a_{2,s-1}$	a_{2s}	$a_{2,s+1}$	. . .	a_{2n}
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
$y_i=$	a_{i1}	a_{i2}	. . .	$a_{i,s-1}$	a_{is}	$a_{i,s+1}$	. . .	a_{in}
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

$y_r=$	a_{r1}	a_{r2}	...	$a_{r,s-1}$	a_{rs}	$a_{r,s+1}$	...	a_{rn}
...	...	...	...	...	...	...	...	...
$y_m=$	a_{m1}	a_{m2}	...	$a_{m,s-1}$	a_{ms}	$a_{m,s+1}$	...	a_{mn}

Jadval (1) sistema matritsasining koeffitsientlaridan iborat bo'lib, (1) sistema kabi o'qiladi, ya'ni 1-ustunda turgan 1-noma'lum ushbu satrdagi 1-koeffitsientning yuqorisida turgan 1-noma'lumga ko'paytirib, natijani 2-koeffitsientni 2-noma'lumga ko'paytirib qo'shilganiga va h.k. oxirgi koeffitsientni yuqoridagi oxirgi noma'lumga ko'paytirib qo'shilganiga tengdir.

"Jordan chiqarishning bir qadami" deb ataluvchi ushbu amalni qaraymiz:

(1) sistemadan r indeksli tenglamani olamiz:

$$u_r=a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\ldots+a_{rs}x_s+\ldots+a_{rn}x_n$$

va uni $a_{rs}\neq 0$ bo'lsa, x_s ga nisbatan yechamiz:

$$x_s=\frac{1}{a_{rs}}(-a_{r1}x_1-a_{r2}x_2-\ldots-a_{r,s-1}x_{s-1}+y_r-a_{r,s+1}x_{s+1}-\ldots-a_{rn}x_n). \tag{2}$$

Topilgan x_s ni (1) sistemadagi boshqa tenglamalardagi x_s lar o'rniga qo'yamiz. Ushbu amalni y_i - tenglamaga nisbatan amalga oshiramiz:

$$y_i=a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{i,s-1}x_{s-1}+a_{is}[\frac{1}{a_{rs}}(-a_{r1}x_1-a_{r2}x_2-\ldots-a_{r,s-1}x_{s-1}$$
$$+y_r-a_{r,s+1}x_{s+1}-\ldots-a_{rn}x_n)]+a_{i,s+1}x_{s+1}+\ldots+a_{in}x_n.$$

Buni ixchamlaymiz:

$$y_i=(a_{i1}-\frac{a_{is}a_{r1}}{a_{rs}})x_1+(a_{i2}-\frac{a_{is}a_{r2}}{a_{rs}})x_2+\ldots+(a_{i,s-1}-\frac{a_{is}a_{r,s-1}}{a_{rs}})x_{s-1}+$$

$$+\frac{a_{is}}{a_{rs}}y_r+(a_{i,s+1}-\frac{a_{is}a_{r,s+1}}{a_{rs}})x_{s+1}+\ldots+(a_{in}-\frac{a_{is}a_{rn}}{a_{rs}})x_n\,. \tag{3}$$

Bu ko‘rinish (1) sistemaning ixtiyoriy (r – tenglamadan tashqari) tenglamasi uchun o‘rinlidir. Shu sababli (3) da i indeks i=1,2, ... ,r-1, r+1, ..., m qiymatlarni qabul qiladi. Bu yerdagi x_j lar oldidagi $a_{ij}-\dfrac{a_{is}a_{rj}}{a_{rs}}$ koeffitsientlarni hosil qilish ma’lum qonuniyatga bo‘ysunadi. Bu qonuniyatni hisobga olib, i - tenglamaning j - noma’lum x_j ning koeffitsientini b_{ij} deb, uni

$$b_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{is}a_{rj}}{a_{rs}} = \frac{a_{ij}a_{rs} - a_{is}a_{rj}}{a_{rs}} \tag{4}$$

ko‘rinishida yozib olamiz.

(2), (3) va (4) ni hisobga olib, (1) sistemani quyidagi ko‘rinishga keltiramiz:

$$
\begin{aligned}
&y_1=b_{11}x_1+b_{12}x_2+ \ldots +b_{1,s-1}x_s+\frac{a_{1s}}{a_{rs}}x_r+b_{1,s+1}x_{s+1}+ \ldots +b_{1n}x_n\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&y_i=b_{i1}x_1+b_{i2}x_2+ \ldots +b_{i,s-1}x_s+\frac{a_{is}}{a_{rs}}y_r+b_{i,s+1}x_{s+1}+ \ldots +b_{in}x_n\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&x_s=-\frac{a_{r1}}{a_{rs}}x_1-\frac{a_{r2}}{a_{rs}}x_2- \ldots -\frac{a_{r,s-1}}{a_{rs}}x_{s-1}+\frac{1}{a_{rs}}y_r-\frac{a_{r,s+1}}{a_{rs}}x_{s+1}- \ldots -\frac{a_{rn}}{a_{rs}}x_n\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&y_m=b_{m1}x_1+b_{m2}x_2+ \ldots +b_{m,s-1}x_{s-1}+\frac{a_{ms}}{a_{rs}}y_s+b_{m,s+1}x_s+ \ldots +b_{mn}x_n\,.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Bu sistema uchun Jordan jadvalini tuzamiz (2-jadval).

2-jadval

	x_1	x_2	...	x_{s-1}	y_r	x_{s+1}	...	x_n
$y_1=$	b_{11}	b_{12}	...	$b_{1,s-1}$	$\frac{a_{1s}}{a_{rs}}$	$b_{1,s+1}$	...	B_{1n}
...	...	...	...	...	...	...	...	...
$y_i=$	b_{i1}	b_{i2}	...	$b_{i,s-1}$	$\frac{a_{is}}{a_{rs}}$	$b_{i,s+1}$	...	b_{in}
...	...	...	...	...	...	...	...	...
$y_{r-1}=$	$b_{r-1,1}$	$b_{r-1,2}$	...	$b_{r-1,s-1}$	$\frac{a_{r-1,s}}{a_{rs}}$	$b_{r-1,s-1}$	...	$b_{r-1,n}$
$x_s=$	$-\frac{a_{r1}}{a_{rs}}$	$-\frac{a_{r2}}{a_{rs}}$	...	$-\frac{a_{r,s-1}}{a_{rs}}$	$\frac{1}{a_{rs}}$	$-\frac{a_{r,s+1}}{a_{rs}}$	...	$-\frac{a_{rn}}{a_{rs}}$
$y_{r+1}=$	$b_{r+1,1}$	$b_{r+1,2}$	...	$b_{r+1,s-1}$	$\frac{a_{r+1,s}}{a_{rs}}$	$b_{r+1,s+1}$	...	$b_{r+1,n}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...
$y_m=$	b_{m1}	b_{m2}	...	$b_{m,s-1}$	$\frac{a_{ms}}{a_{rs}}$	$b_{m,s+1}$	...	b_{mn}

Demak, (1) sistemadan (5) sistemaga o‘tish 1-jadvaldan 2-jadvalga o‘tish bilan ekvivalent ekan.

1 - Jordan jadvalida x_s ustunni hal qiluvchi ustun, y_r qatorni hal qiluvchi qator deb ataladi. Hal qiluvchi qator bilan hal qiluvchi ustunning kesishgan joyida turgan a_{rs} ga hal qiluvchi element deyiladi.

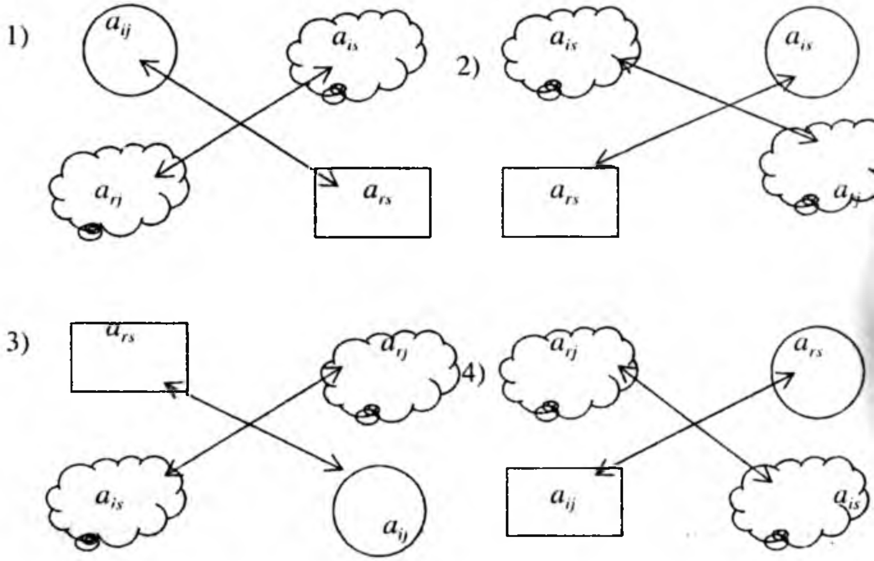
2 - Jordan jadvalida hal qiluvchi ustundagi koeffitsientlar hal qiluvchi elementga bo‘linadi, hal qiluvchi satrdagi koeffitsientlar hal

qiluvchi elementga bo'linib, teskari ishora bilan olinadi. Hal qiluvchi element esa teskarisi bilan almashtiriladi. Qolgan elementlar (4) formula bilan hisoblanadi. (4) formula to'g'ri to'rtburchak formulasi deb ataladi.

Bu formula yordamida a_{ij} element o'rniga yangi jadvaldagi b_{ij} elementni hosil qilish uchun 1 - jadval uchlarida b_{ij} elementni hisoblash uchun zarur bo'lgan elementlar joylashgan to'rtburchakka ajratiladi. Ushbu to'rtburchakning asosiy diagonali hal qiluvchi element bilan yangi jadvaldagi hisoblanayotgan elementning o'rnida turgan koeffitsientdan iborat bo'ladi. Yordamchi diagonal elementlari to'rtburchakning qolgan ikki uchida joylashgan koeffitsientlardan iboratdir. Shuni esda tutish lozimki, asosiy va yordamchi diagonallar turli hollarda har xil joylashishi mumkin.

Yangi element b_{ij} ni hosil qilish uchun asosiy diagonal uchlaridagi elementlarni ko'paytirib, ulardan yordamchi diagonal uchlaridagi elementlar ko'paytmasi ayriladi va natija hal qiluvchi elementga bo'linadi. Hal qiluvchi element, odatda, to'rtburchak ichiga olinadi $\boxed{a_{rs}}$

Quyidagi rasmda birinchi jadvalda a_{ij} elementni hal qiluvchi a_{rs} elementga nisbatan joylashishning turli holatlari ko'rsatilgandir.



Shunday qilib, 1-jadvaldan bir qadam Jordan chiqarish usulini qo'llab, 2-jadvalga o'tish natijasida erkli o'zgaruvchi x_s bilan u_r funksiyaning o'rni almashtiriladi. Bu almashtirish faqat shaklan bo'lmasdan fizik ma'noga ham ega bo'lishi mumkin.

Ushbu o'tish quyidagicha izohlanadi:

1. Hal qiluvchi element o'zining teskari miqdori bilan almashtiriladi.
2. Hal qiluvchi ustunning qolgan elementlar' hal qiluvchi elementga bo'linadi.
3. Hal qiluvchi qatorning qolgan elementlari hal qiluvchi elementga bo'linib, teskari ishora bilan yoziladi.
4. Qolgan barcha elementlar to'g'ri to'rtburchak formulasi (4) yordamida topiladi.

Jordan chiqarish usulini qo'llash natijasida 1-jadvaldagi hamma y_i $(i=\overline{1,m})$ lar jadval tepasiga, ya'ni x_j $(j=\overline{1,n})$ lar o'rniga o'tkaziladi va natijada (1) tenglamlar sistemasi x_j larga nisbatan yechilgan bo'ladi.

Misol.

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= x_1 + 3x_2 - 2x_3 \\ y_2 &= 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 \\ y_3 &= 0x_1 + 7x_2 - x_3 \end{aligned}\right\}$$

berilgan bo'lsin. y_1 va x_3 ning o'rnini almashtiring.

Yechish. Jordan jadvalini tuzamiz.

	x_1	x_2	x_3
$y_1=$	1	3	$\boxed{-2}$
$y_2=$	4	-2	3
$y_3=$	0	7	-1

x_3 ustun hal qiluvchi ustun,
u_1 – hal qiluvchi satr,
$\boxed{-2}$ hal qiluvchi element.

Jordan chiqarish usulining 1-qadamini qo'llaymiz va quyidagi jadvalni hosil qilamiz.

	X_1	x_2	y_1
$x_3=$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$y_2=$	$\frac{11}{2}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$
$y_3=$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{11}{2}$	$\frac{1}{2}$

Izoh: $\frac{5}{2}$ hosil qilish uchun $\begin{array}{|cc|} 3 & \boxed{-2} \\ -2 & 3 \end{array}$ to'rt burchakni qaraymiz va

$$\frac{(-2)(-2)-3\cdot 3}{(-2)}=\frac{+4-9}{-2}=\frac{-5}{-2}=\frac{5}{2}$$ ekanligini topamiz;

$-\frac{1}{2}$ uchun $\begin{array}{|cc|} 0 & \boxed{-2} \\ 1 & -1 \end{array}$ to'rtburchakdan

$$\frac{-2\cdot 0-(-1)\cdot 1}{-2}=-\frac{1}{2}$$ va h.k.

Qolgan elementlar ham shu usulda topiladi.

Bu jadval quyidagi sistemaga ekvivalentdir:

$$\begin{cases} x_3 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}y_1, \\ y_2 = \frac{11}{2}x_1 + \frac{5}{2}x_2 - \frac{3}{2}y_1, \\ y_3 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{11}{2}x_2 + \frac{1}{2}y_1. \end{cases}$$

Bu yerda x_1 funksiya sifatida, u_l argument sifatida qaralmoqda.

Yuqorida bayon qilingan usul oddiy Jordan chiqarish usuli bo'lib, uning takomillashgan ko'rinishlari ham mavjuddir. Jordan chiqarish usuli yordamida matritsaning rangini aniqlash, chiziqli tenglamalar sistemasini yechish, chiziqli tengsizliklar sistemasining qulay yechimlarini topish mumkin.

Biz uchun zarur bo'lgan quyidagi teoremani keltiramiz.

Steynis teoremasi. Agar Jordan jadvalini $m \le n$ satrlari chiziqli bog'langan bo'lsa, u holda Jordan chiqarish usulining m qadamidan so'ng hamma y_i $(i=\overline{1,m})$ larni yuqoriga o'tkazish mumkin, ya'ni m ta $x_1, \ldots, x_m$ larni $y_1, \ldots, y_m$ lar orqali va qolgan $x_{m+1}, \ldots, x_n$ lar orqali ifodalash mumkin.

Isbot. y ni yuqoriga o'tkazishga faqat hal qiluvchi elementni tanlab olish xalaqit berishi mumkin (hal qiluvchi elementlar nolga teng bo'lib, nolga bo'lib bo'lmaydi).

Faraz qilaylik, Jordan chiqarish usulining r $(r<m)$ qadamidan so'ng 3-jadvalga keldik.

3-jadval

	y_1	y_2		y_r	x_{r+1}	...	x_n
$x_1=$	b_{11}	b_{12}		b_{1r}	$b_{1,r+1}$	...	b_{1n}
$x_2=$	b_{21}	b_{22}	...	b_{2r}	$b_{2,r+1}$	...	b_{2n}
...	...	...	...	...	...	...	...
$x_r=$	b_{r1}	b_{r2}	...	b_{rr}	$b_{r,r+1}$	...	b_{rn}

$y_{r+1}=$	$c_{r+1,1}$	$c_{r+1,2}$	...	$c_{r+1,r}$	0	...	0
$y_{r+2}=$	$c_{r+2,1}$	$c_{r+2,2}$	...	$c_{r+2,r}$	0	...	0
...	...	...	...	...	...	...	...
$y_m=$	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mr}	0	...	0

Agar y o'zgaruvchilarni yuqoriga o'tkazish bundan keyin mumkin bo'lmay qolsa, bu jadvalning o'ng tomonining pastki qismida faqat nollar borligini bildiradi, ammo nollarning mavjudligi qolgan y $(y_{r+1}, ..., y_m)$ larni birinchi r y $(y_1, ..., y_r)$ lar orqali chiziqli bog'lanishini bildiradi:

$$y_{r+1}=c_{r+1,1}\,y_1+c_{r+1,2}\,y_2+\ ...\ +c_{r+1,r}\,y_r$$

$$. \ .$$

$$y_m=c_{m1}\,y_1+\ c_{m2}\ y_2\ +\ ...\ +\ c_{mr}\,y_r$$

ya'ni y lar chiziqli bog'langandir, bu esa teoremaning shartiga qarama-qarshidir. Natijada teorema sharti o'rinli bo'lganda, hamma y larni yuqoriga o'tkazish mumkin.

Endi Jordan chiqarish usulini bevosita matritsaning rangini topish uchun qo'llanishini qaraymiz. Quyidagi matritsa berilgan bo'lsin:

$$A_{mn}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ushbu matritsaning rangini aniqlaymiz, ya'ni chiziqli bog'lanmagan qator (yoki ustun) lar sonining eng kattasini topamiz.

Buning uchun yuqoridagi matritsaga Jordan jadvalini (4-jadval) tuzamiz.

4-jadval

	x_1	x_2	. . .	x_n
$u_1=$	a_{11}	a_{12}	. . .	a_{1n}
$u_2=$	a_{21}	a_{22}	. . .	a_{2n}
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
$u_n=$	a_{m1}	a_{m2}	. . .	a_{mn}

Bu jadvalga nisbatan ketma-ket (mumkin bo'lganicha) Jordan chiqarish usulini qo'llaymiz. Steynis teoremasiga asosan jadvalning yuqorisiga chiziqli bog'lanmagan qatorlar soni nechta bo'lsa, shuncha o'zgaruvchi y_i larni chiqarish mumkin. Bu esa matritsaning rangini beradi.

Shunday qilib, matritsaning rangi bajarilgan Jordan chiqarish qadamlari soniga teng. Bundan tashqari, agar matritsa qatorlar soni uning rangidan katta bo'lsa ($r > m$), matritsaning qatorlarini chiziqli bog'langanligi ham kelib chiqadi.

Misol. Quyidagi matritsaning rangini aniqlang:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & -2 & 1 \\ 6 & 8 & -2 & -1 \\ -7 & -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Jordan jadvalini tuzamiz

	x_1	x_2	x_3	x_4
$u_1=$	$\boxed{1}$	3	0	-1
$u_2=$	4	2	-2	1
$u_3=$	6	8	-2	-1
$u_4=$	-7	-1	4	-3

Hal qiluvchi satr deb 1 - satrni, hal qiluvchi ustun deb 1 - ustunni olamiz. Hal qiluvchi element 1 bo'ladi. Jordan chiqarish usulining bitta qadamidan so'ng quyidagi jadvalga kelamiz.

	u_1	x_2	x_3	x_4
$x_1=$	1	$\boxed{-3}$	0	1
$u_2=$	4	-10	-2	5
$u_3=$	6	-10	-2	5
$u_4=$	-7	20	4	-10

Hal qiluvchi satr sifatida 2-satrni, hal qiluvchi ustun sifatida 2-ustunni, hal qiluvchi element deb – 10 ni olamiz.

Yana bir Jordan chiqarish qadamidan so'ng ushbu jadvalga kelamiz.

	u_1	u_2	x_3	x_4
$x_1=$	$-\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{6}{10}$	$-\frac{5}{10}$
$x_2=$	$\frac{4}{10}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{2}{10}$	$\frac{5}{10}$
$u_3=$	2	1	0	0
$u_4=$	1	-2	0	0

y larning qolganini tepaga chiqarib bo'lmaydi, chunki jadvalning quyi o'ng qismida nollar turibdi. Demak, matritsa 2 ta chiziqli bog'lanmagan satrga ega va matritsaning rangi 2 ga teng.

Qolgan ikkita satr birinchi satr orqali chiziqli bog'langan.

$$y_3 = 2y_1 + y_2,$$
$$y_4 = y_1 - 2y_2.$$

II. Gaussning noma'lumlarni yo'qotish usuli

Quyidagi tenglamalar sistemasini qaraymiz:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = a_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = a_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = a_m \end{array}\right\} \qquad (6)$$

Agar $m = n$ bo'lsa, (6) sistemani turli usullar (masalan, Kramer usuli) bilan yechish mumkin.

Agar $m \neq n$ bo'lsa, bu sistemaning yechimi mavjud yoki mavjud emasligini avvalo tekshirib ko'rish kerak bo'ladi. Sistemaning matritsalarini yozamiz:

$$A_{mn} = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \ldots a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} a_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \ldots a_{mn} a_m \end{pmatrix}$$ B kengaytirilgan matritsa.

Agar sistemaning rangi $r_A = r < n$ bo'lsa, kengaytirilgan

V matritsaning satr va ustunlarini elementar almashtirishlar yordamida quyidagi ko'rinishga keltirish mumkin:

$$
B=\begin{pmatrix}
1 & b_{12} & \cdots & b_{1r} & b_{1,r+1} & \cdots & b_{1n} & \bar{b}_1 \\
0 & 1 & \cdots & b_{2r} & b_{2,r+1} & \cdots & b_{2n} & \bar{b}_2 \\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r,r+1} & \cdots & b_{rn} & \bar{b}_r \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bar{b}_{r+1} \\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bar{b}_m
\end{pmatrix} \quad (7)
$$

U holda bunga mos sistema

$$
\begin{aligned}
x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1r}x_r + b_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + b_{1n}x_n &= \bar{b}_1 \\
x_2 + \ldots + b_{2r}x_r + b_{2,r+1}x_{r+1} + \ldots + b_{2n}x_n &= \bar{b}_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
x_r + b_{r,r+1}x_{r+1} + \ldots + b_{rn}x_n &= b_r
\end{aligned} \qquad (8)
$$

$$0 = \bar{b}_r$$

$$\cdots$$

$$0 = b_m$$

Bu sistema (6) ga ekvivalent bo‘lib, agar $\bar{b}_{r+1}, \ldots, \bar{b}_m$ sonlardan birortasi noldan farqli bo‘lsa, (6) sistema va demak (8) sistema birgalikda emas.

Agar $b_{r+1} = \ldots = b_m = 0$ bo'lsa (6) sistema birgalikdadir va (8) dan $x_r, x_{r-1}, \ldots, x_1$ bazis o'zgaruvchilarni erkin $x_{r+1}, \ldots, x_n$ o'zgaruvchilar orqali ketma-ket ifodalab, (6) sistemaning yechimini topish mumkin. Agar $r=n$ bo'lsa, bu sistemaning yechimi yagonadir.

Demak, Gauss usulida kengaytirilgan $\bar{V}$ matritsani almashtirishlar natijasida yuqoridagidek uchburchakli matritsaga keltiriladi. So'ngra oxirgi satrdan boshlab noma'lumlarni $x_m, x_{m-1}, \ldots, x_1$ ketma-ket hisoblab topiladi.

Boshqacha aytganda, Gauss usulida tenglamada o'zgartirishlar (A matritsaning satrlarini kombinatsiyalash orqali) olib borib, unga ekvivalent masalaga (yechimi bir xil bo'lgan) keltirish va hosil bo'lgan masalada o'rniga qo'yishning teskarisini bajarish orqali yechim topiladi.

Teorema. *Agar A kvadrat (m=n) matritsa bo'lsa, u holda shunday U matritsa (yuqori uchburchakli), M matritsa (xosmas pastki uchburchakli) va R matritsa (o'rin almashtiruvchi matritsa) mavjudkim, U=MPA tenglik o'rinlidir. Agar A matritsaga teskari bo'lgan L matritsa (pastki uchburchakli) mavjud bo'lsa, LU=PA o'rinli bo'ladi.*

Gauss usuli *U*, *M* va *R* matritsalarni topish algoritmi hisoblanadi. Bu yerda *A* matritsaning satrlarini *R* matritsa almashtiradi.

Ma'lumki, $\{a_{ij}\}$ $(i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n})$ matritsaning bosh minorlari deb $\{a_{ij}\}$ $(i=\overline{1,k};\ j=\overline{1,k};\ k=1,\ldots,n)$ matritsaning aniqlovchilariga aytiladi.

Teorema. *Agar A matritsaning hamma minorlari noldan farqli bo'lsa, u holda R matritsani birlik matritsa deb olish mumkin va natijada LU=A bo'ladi.*

A matritsaning bunday yoyilmasi[1] diagonal elementlari $l_{ij}=1$ normallashgan bo'lsa, yagonadir. Teoremani $AX=b$ (9) tenglamaga

---

[1] *A* matritsa yoyiluvchi matritsa deyiladi. Agar uni $A=\begin{pmatrix} B & C \\ O & D \end{pmatrix}$ ko'rinishda yozish mumkin bo'lsa. Bu yerda *B* va *D* lar kvadrat matritsalardir. Yoyuvchi matritsaning bu xossasi masalani ikki kichikroq masalaga ajratib yechishga imkon beradi.

qo'llaymiz. Agar U, M va P lar hisoblangan bo'lsa, (9) sistemaning ikkala tomonini MP ga ko'paytiramiz:

$MPAX = MPb$ yoki bundan $UX = MPb$.

Bu tenglama teskari o'ringa qo'yish bilan yechiladi va u (8) ga o'xshashdir. MPb ni hisoblash to'g'ri qadam bilan bajariladi.

Misol.

$$\begin{cases} x + y + z + w = 4 \\ 2x + 3y + z + w = 7 \\ x + y + z + w = 4 \\ x + 2y + 2z + 2w = 7 \end{cases}$$

ya'ni, $AX=b$ sistemani yeching.

Bu n da

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Gaussning birinchi qadamidan so'ng

$x + y + z + w = 4$ satrni ko'paytuvchisi 1

$$\begin{array}{lc} 0 + y - z - w = -1 & ---''--- \\ 0 + 0 + 0 + 0 = 0 & ---''--- \\ 0 + y + z + w = 3 & ---''--- \end{array} \quad \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ikkinchi qadamdan so'ng

$x + y + z + w = 4$

$$y-z-w=-1$$

$$2z+2w=4$$

$$0=0$$

Bu jarayonni amalga oshiruvchi o'rin almashtirish matritsasi quyidagichadir:

$$R=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

M matritsa Gauss usulining keyingi qadamlaridagi satr ko'paytuvchilari bilan aniqlanadi.

Gauss yo'qotish qadamida «1-satrni m_4 ga ko'paytirib, 4-satrga qo'sh» deyish quyidagi

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\m_4&0&1&0\end{pmatrix}$$ matritsani chapdan berilgan matritsaga ko'paytirish orqali bajariladi.

Bu matritsa 1-ustun va 4-satr kesishishi natijasida 1 ta m_4 qo'shimcha elementi bo'lgan birlik matritsadir. Bu matritsalar oddiy ko'paytirish qoidalariga bo'ysunadi, ya'ni

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\m_4&0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0&0\\m_2&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\m_3&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\m_2&1&0&0\\m_3&0&1&0\\m_4&0&0&1\end{pmatrix}$$

Shunday qilib, satrlar ustida bajarilgan almashtirishlar matritsa belgisida quyidagicha ko‘paytma orqali ifodalanadi:

$$\underset{\text{Z ni yo‘qotish}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \underset{\substack{\text{3- va 4- satrlarni almashtirish} \\ \text{3-qadam}}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}} \cdot \underset{\substack{U \text{ ni yo‘qotish} \\ \text{2-qadam}}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\times \underset{\substack{X \text{ ni yo‘qotish} \\ \text{1-qadam}}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} = \underset{\text{yig‘indi natija}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Bu matritsani quyidagicha ham yozish mumkin:

$$\underset{\text{quyi uchburchakli matritsa}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \quad \underset{\text{o‘rin almashtirish matritsasi}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Bundan ko‘rinadiki, satrlarning o‘rnini almashtirishni biz oldindan bajarib qo‘yishimiz mumkin ekan va so‘ngra Gaussning yo‘qotish usulini qo‘llash mumkin (ya’ni, matritsa ko‘paytuvchilarini hisoblash).

Ushbu misol uchun oxirgi natija

$$\underset{\mathbf{M}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{\mathbf{P}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}} \underset{\mathbf{A}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}} = \underset{\mathbf{U}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Ko‘paytuvchi -lar yig’indisi natijasi	O‘rin almashti- rishning yig’indisi natijasi	Beril- gan mat- ritsa	Yuqori uchbur- chakli natija

Yechish jarayonini davom ettirish uchun *MPb* ko‘paytmani hisoblash kerak. Uning natijasi ustun $(4, -1, 4, 0)'$ vektordir, ya’ni Mv ko‘paytmaga.

Endi teskariga o‘rniga qo‘yish bilan shug’ullanamiz. Oxirgi tenglamani yechib bo‘lmaydi, ammo W ning o‘rniga ixtiyoriy qiymatni qo‘ysa, qanoatlantiradi. Masalan $W = 0$ bo‘lsa,

$$2z + 2 \cdot 0 = 4 \quad \text{dan} \quad z = 2.$$

$$y = -1 + w + z = -1 + 0 + 2 = 1.$$

$$x = 4 - y - z - w = 4 - 1 - 2 - 0 = 1$$

bo‘ladi.

Demak, yechim: $x = 1$, $y = 1$, $z = 2$, $w = 0$ bo‘ladi.

Hulosa sifatida shuni aytish mumkin:

1. Agar U matritsa diagonaldagi elementlardan birontasi nolga teng bo‘lsa, u holda A matritsa xos matritsa bo‘ladi.

2. Xos matritsa (A) uchun $AX=b$ sistema birgalikda bo'ladi, agar teskari o'ringa qo'yishda diagonaldagi nol faqat 0=0 ko'rinishdagi tenglamada qatnashsa.

Diagonalida nol qatnashgan tenglama ixtiyoriy usulda yechiladi.

Gaus usulini o'rganishni soddaroq izohlash uchun to'rt noma'lumli tenglamalar sistemasini qaraymiz:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4=a_{15} \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4=a_{25} \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+a_{34}x_4=a_{35} \\ a_{41}x_1+a_{42}x_2+a_{43}x_3+a_{44}x_4=a_{45} \end{aligned}\right\} \qquad (8')$$

Bu sistemada $a_{11} \neq 0$ deb olib, 1-tenglamani x_1 ga nisbatan yechamiz:

$$x_1+b_{12}x_2+b_{13}x_3+b_{14}x_4=b_{15}\,, \qquad (b_{1j}=a_{1j}/a_{11}).$$

Oxirgi tenglikni ketma-ket a_{21}, a_{31}, a_{41} ga ko'paytirib, mos ravishda (8') sistemaning 2, 3 va 4 tenglamalardan ayirib, ulardagi x_1 ni yo'qotamiz, natijada

$$\left.\begin{aligned} x_1+b_{12}x_2+b_{13}x_3+b_{14}x_4=b_{15} \\ a_{22}^{(1)}x_2+a_{23}^{(1)}x_3+a_{24}^{(1)}x_4=a_{25}^{(1)} \\ a_{32}^{(1)}x_2+a_{33}^{(1)}x_3+a_{34}^{(1)}x_4=a_{35}^{(1)} \\ a_{42}^{(1)}x_2+a_{43}^{(1)}x_3+a_{44}^{(1)}x_4=a_{45}^{(1)} \end{aligned}\right\} \qquad (8'')$$

bu n da $a_{ij}^{(1)}=a_{1j}-a_{i1}b_{1j}$, $(i,j\geq 2)$.

(8'') sistemadagi 2-tenglamada $a_{22}^{(1)} \neq 0$ ni bosh element deb olib uni qolgan satr elementlariga bo'lamiz:

$$x_2+b_{23}^{(1)}x_3+b_{24}^{(1)}x_4=b_{25}^{(1)}, \text{ bu } n \text{ da } b_{2j}=\frac{a_{2j}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}\,, \ (j>2).$$

Oldingidek, (8'') ni 3- va 4-tenglamalaridan x_2 ni yo'qotamiz va quyidagi sistemani hosil qilamiz:

$$\left.\begin{aligned} & x_1+b_{12}x_2+b_{13}x_3+b_{14}x_4=b_{15} \\ & x_2+b_{23}^{(1)}x_3+b_{24}^{(1)}x_4=b_{25}^{(1)} \\ & a_{33}^{(2)}x_3+a_{34}^{(2)}x_4=a_{35}^{(2)} \\ & a_{43}^{(2)}x_3+a_{44}^{(2)}x_4=a_{45}^{(2)} \end{aligned}\right\} \qquad (8''')$$

bu n da $a_{ij}^{(2)}=a_{ij}^{(1)}-a_{i2}^{(1)}b_{2j}^{(1)}$, $(i,j\geq 3)$.

Hosil bo'lgan (8''') sistemaning 3-tenglamasida $a_{33}^{(2)}\neq 0$ ni o'sha satrdagi qolgan elementlarga bo'lsak, $x_3+b_{34}^{(2)}x_4=b_{35}^{(2)}$, $(b_{3j}^{(2)}=\dfrac{a_{3j}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}})$.

va uni 4-tenglamaga qo'ysak, uning ko'rinishi

$$a_{44}^{(3)}x_4=a_{45}^{(3)}, \qquad (a_{ij}^{(3)}=a_{ij}^{(2)}-a_{i3}^{(2)}b_{3j}^{(2)})$$

bo'ladi, undan $x_4=b_{45}^{(3)}$ ni topamiz: $\quad b_{43}^{(3)}=\dfrac{a_{45}^{(3)}}{a_{44}^{(3)}}$.

Natijada

$$\left.\begin{aligned} & x_1+b_{12}x_2+b_{13}x_3+b_{14}x_4=b_{15} \\ & x_2+b_{23}^{(1)}x_3+b_{24}^{(1)}x_4=b_{25}^{(1)} \\ & x_3+b_{34}^{(2)}x_4=b_{35}^{(2)} \\ & x_4=b_{45}^{(3)} \end{aligned}\right\} \qquad (8^{IV})$$

sistemani hosil qilamiz.

Undan ketma-ket x_4, x_3, x_2 va x_1 lar topiladi.

Shunday qilib, Gauss usulida tenglamalar sistemasini yechish ikki bosqichda olib boriladi:

a) To‘g’ri yurish. Berilgan ($8'$) sistema (8^{IV}) sistema ko‘rinishiga, ya’ni uchburchakli matritsaga ega bo‘lgan sistemaga keltiriladi.

b) Teskari yurish. Ketma-ket x_4, x_3, x_2 va x_1 lar oldingi qiymatlardan foydalanib, o‘rniga qo‘yish bilan hisoblanadi.

III. Chiziqli tenglamalar sistemasini Jordan chiqarish usuli bilan yechish

Yuqorida keltirilgan (6) sistemada $n=m$ deb olamiz, u holda

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ \dots\ +a_{1n}x_n=a_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ \dots\ +a_{nn}x_n=a_n. \end{array}\right\} \tag{9}$$

Bu tenglamalar sistemasi chiziqli bog’lanmagan bo‘lsin, u holda sistema matritsasining rangi n $(r=n)$ ga teng bo‘ladi.

(9) sistema uchun Jordan jadvalini (5-jadval) tuzamiz.

Sistemaning hamma satrlari chiziqli bog’lanmaganligidan jordan chiqarish usulini n ta qadamidan so‘ng ozod hadlarning hammasi tepaga o‘tadi, ularning o‘rniga noma’lum x lar keladi. Natijada 6-jadval hosil bo‘ladi.

5-jadval

	x_1	x_2	...	x_n
$a_1=$	a_{11}	a_{12}	...	A_{1n}
$a_2=$	a_{21}	a_{22}	...	A_{2n}
...	...	...	...	...
$a_n=$	a_{n1}	a_{n2}	...	a_{nn}

6-jadval

	a_1	a_2	...	a_n
$x_1=$	b_{11}	b_{12}	...	b_{1n}
$x_2=$	b_{21}	b_{22}	...	b_{2n}

Demak, har bir satrda a_i va b_{ij} larni mos holda ko‘paytirib qo‘shsak, noma’lumlarning qiymati topiladi. Shuni e’tiborga olish kerakki, 7-jadvalda keltirilgan B_{nn} matritsa berilgan A_{nn} (6-jadval) matritsaga nisbatan teskari matritsadir, ya'ni

. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
$x_n=$	b_{n1}	b_{n2}	. . .	b_{nn}

$$B_{nn} = A_{nn}^{-1}.$$

Demak, qaralayotgan usul yordamida matritsani o'zgartirish mumkin ekan.

Ushbu usul algebraik tenglamalar sistemasining teskari matritsasini topish yo'li bilan yechish g'oyasini amalga oshiradi.

Agar r<n bo'lsa, tenglamalarning bir qismi qolganlari bilan chiziqli bog'langan bo'ladi, Jordan jadvalining tepasiga faqat r ta ozod hadlar chiqadi, n–r noma'lumlar tepada qoladi (7-jadval), jadvalning o'ng qismi pastki burchagida nollar turadi, chap qismining pastki burchagida chiziqli bog'langan tenglamalar turadi.

7-jadval

	a_1	a_2	. . .	a_r	x_{r+1}	. . .	x_n
$x_1=$	b_{11}	b_{12}	. . .	b_{1r}	$b_{1,r+1}$	. . .	b_{1n}
$x_2=$	b_{21}	b_{22}	. . .	b_{2r}	$b_{2,r+1}$	. . .	b_{2n}
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
$x_r=$	b_{r1}	b_{r2}	. . .	b_{rr}	$b_{r,r+1}$	. . .	b_{rn}
$a_{r+1}=$	$c_{r+1,1}$	$c_{r+1,2}$	. . .	$c_{r+1,r}$	0	. . .	0
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
$a_n=$	c_{n1}	c_{n2}	. . .	c_{nr}	0	. . .	0

$$\left.\begin{array}{l} a_{r+1}=c_{r+1,1}a_1+c_{r+1,2}a_2+ \ldots +c_{r+1,r}a_r \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n=c_{n1}a_1+ c_{n2}a_2 + \ldots +c_{nr}a_r \end{array}\right\} \qquad (10)$$

Tepada qolgan $x_{r+1}, \ldots, x_n$ noma'lumlarga ixtiyoriy qiymatlarni berib, $x_1, \ldots, x_r$ noma'lumlar topiladi. Sistema cheksiz ko'p yechimga ega, ya'ni aniqmas bo'ladi. Bu hol amaliyotda ko'p uchraydi, ya'ni ko'p yechimlar to'plamida eng qulayini tanlab olish zarur bo'ladi.

Agar $m<n$ bo'lsa (tenglamalar soni noma'lumlar sonidan kam bo'lsa), u holda oldindan sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'lishi aniq bo'ladi.

Agar tenglamalar soni noma'lumlar sonidan ko'p bo'lsa ($m>n$), yechimlar sistema matritsasining rangiga bog'liq bo'ladi.

Rang albatta noma'lumlar sonidan ko'p bo'laolmaydi: $r = n$ bo'lsa yechim yagona, $r < n$ bo'lganida yechimi cheksiz ko'p, ikkala holda ham sistemaning bir qism tenglamalari qolganlari orqali chiziqli bog'langan bo'ladi. Agar sistema birgalikda bo'lmasa (ya'ni bironta ham yechim mavjud emas), u holda n ta tenglama va n ta noma'lum bo'lgan holda hamma ozod hadlarni yuqoriga o'tkazib bo'lmaydi (o'tkazib bo'lsa, sistema yagona yechimga ega bo'lishini bildiradi) va natijaviy jadval (8-jadval) ko'rinishida bo'ladi, ammo chap qismidagi ustunda qolgan ozod hadlar yuqoriga o'tkazib yuborilgan ozod hadlarning chiziqli kombinatsiyadan iborat bo'lmaydi:

$$\left.\begin{array}{l} a_{r+1} \neq c_{r+1,1}a_1 + c_{r+1,2}a_2 + \ldots + c_{r+1,r}a_r \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n \neq c_{n1}a_1 + c_{n2}a_2 + \ldots + c_{nr}a_r \end{array}\right\} \qquad (11)$$

Yuqorida keltirilgan (9) sistemani quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n - a_1 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n - a_2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n - a_n = 0 \end{array}\right\} \qquad (12)$$

Bu sistema uchun Jordan jadvalini quyidagicha tuzamiz.

	X_1	x_2	...	x_n	1
0 =	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	$-a_1$
0 =	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	$-a_2$
...	...	...	...	...	...
0 =	a_{n1}	a_{n2}	...	a_{nn}	$-a_n$

Bu jadvalda a_{11} ni hal qiluvchi element deb olib, Jordan chiqarish usulini qo'llasak, 9-jadval hosil bo'ladi.

Xuddi shunday holat tenglamalar sistemasida moslik bo'lmasa, ya'ni tenglamalar soni noma'lumlar sonidan kichik bo'lsa, ($m < n$) ro'y beradi. O'rindosh bo'lmagan ($m > n$) sistemani yechishda hamma ozod hadlar yuqoriga o'tadi. U holda n ta tenglama m ta berilgan qiymatlar orqali ifodalanadi. Ammo chap tomondagi ustunda qolgan ozod hadlar sistema o'rindosh bo'lmaganligi sababli tepada o'tgan ozod hadlarni chiziqli kombinatsiyasiga teng bo'lmaydi va bu holda ham sistemani o'rindosh bo'lmaslik mezoni uchun (11) shartga o'xshagan sistema hosil bo'ladi. Jordan chiqarish usulining qulayligi shundaki, tenglamalar sistemasini yechish jarayonida uning o'rindoshligini yoki o'rindosh emasligini, aniqlangan yoki aniqlanmaganligini tekshirib o'tirish shart emas. Faqatgina sistemani jadval shaklida yozib, ketma-ket Jordan chiqarish usulini qo'llash kerak. Oxirgi jadval esa sistemaning o'rindosh, aniqlangan yoki o'rindoshmasligini, aniqlanmaganligini ko'rsatadi.

Misol.

Quyidagi sistemani yeching.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ 3x_1+5x_2+4x_3=7 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3=1. \end{cases}$$

Jordan jadvalini tuzamiz va ketma-ket Jordan chiqarish usulini qo‘llaymiz.

	x_1	x_2	x_3
5=	$\boxed{1}$	2	-1
7=	3	5	4
1=	2	-1	2

	5	x_2	x_3
x_1=	1	-2	1
7=	3	$\boxed{-1}$	7
1=	2	-5	4

	5	7	x_3
x_1=	-5	2	-13
x_2=	3	-1	7
1=	-13	5	$\boxed{-31}$

	5	7	1
x_1=	$\frac{14}{31}$	$-\frac{3}{31}$	$\frac{13}{31}$
x_2=	$\frac{2}{31}$	$\frac{4}{31}$	$-\frac{7}{31}$
x_3=	$-\frac{13}{31}$	$\frac{5}{31}$	$-\frac{1}{31}$

Oxirgi jadvaldan

$$x_1 = 5\cdot\frac{14}{31} - \frac{3}{31}\cdot 7 + \frac{13}{31}\cdot 1 = \frac{70-21+13}{31} = \frac{62}{31} = 2,$$

$$x_2 = \frac{2}{31}\cdot 5 + \frac{4}{31}\cdot 7 - \frac{7}{31}\cdot 1 = 1, x_3 = -\frac{13}{31}\cdot 5 + \frac{5}{31}\cdot 7 - \frac{1}{31}\cdot 1 = -1,$$

yagona $x_1=2$, $x_2=1$, $x_3=-1$ yechimni topamiz.

Misol.

Sistemani yeching.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 2 \\ -2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4 \\ 5x_1 - 7x_2 - 9x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 - 7x_3 = 14 \end{cases}$$

Jordan jadvalini tuzib, mumkin bo'lgan Jordan chiqarish usulini qo'llaymiz.

	x_1	x_2	x_3
2=	$\boxed{1}$	-1	-2
4=	-2	4	3
2=	5	-7	-9
14=	3	-1	-7

	2	x_2	x_3
x_1=	1	1	2
4=	-2	$\boxed{2}$	-1
2=	5	-2	1
14=	3	2	-1

	2	4	x_3
x_1=	2	1/2	5/2
x_2=	1	1/2	1/2

Oxirgi jadvaldan ozod hadlarni yuqoriga chiqarib bo'lmaydi, chunki hal qiluvchi elementni tanlab bo'lmaydi (u yerda nol turibdi). Ozod hadlar uchun (10) tenglik o'rinli:

2=	3	-1	0
14=	5	1	0

$$2 = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 4$$

$$14 = 5 \cdot 2 + 1 \cdot 4$$

Tepada bitta x_3 noma'lum qoldi. Berilgan sistema o'rindosh ammo aniqlanmagan.

Demak,

$$\begin{cases} x_1 = 22 + 4 \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{2} x_3 \\ x_2 = 1 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{2} x_3 \end{cases}$$

yoki

$$\begin{cases} x_1 = 6 + \frac{5}{2} x_3 \\ x_2 = 4 + \frac{1}{2} x_3 \end{cases}$$

x_3 ga ixtiyoriy qiymatlarni berib x_1 va x_2 lar topiladi.

Misol.

Sistemani yeching:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 4 \end{cases}$$

Jordan jadvalini tuzamiz va ketma-ket Jordan chiqarish usulining ikkita qadamini bajaramiz.

	x_1	x_2	x_3
1=	$\boxed{1}$	1	1
2=	3	4	5
4=	4	5	6

	1	2	x_3
x_1=	4	-1	1
x_2=	-3	1	-2
4=	1	1	0

	1	x_2	x_3
x_1=	1	-1	-1
2=	3	$\boxed{1}$	2
4=	4	1	2

Qolgan noma'lumlarni yuqoriga o'tkazib bo'lmaydi, chunki hal qiluvchi element nolga teng va bundan tashqari:

$4 \neq 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1.$

Demak, sistema o'rindosh emas (oxirgi tenglama oldingi ikkita tenglamaga mos emas).

IV. Jordan – Gauss usuli

9-jadval

	0	x_2	...	x_n	1
x_1 =	b_{11}	b_{12}	...	b_{1n}	b_1
0 =	b_{21}	b_{22}	...	b_{2n}	b_2
...	...	...	...	...	...
0 =	b_{n1}	b_{n2}	...	b_{nn}	b_n

Bu jadvaldan 1-qatorni yozib olamiz:

$$x_1 = b_{12}x_2 + \quad \dots \quad + b_{1n}x_n - b_1$$

va jadvaldan ushbu satrni va nol ustunni o'chiramiz.

10-jadval

	x_2	...	x_n	1
0 =	$\boxed{b_{22}}$	...	b_{2n}	b_2
...	...	...	...	...
0 =	b_{n1}	...	b_{nn}	b_n

Ushbu 10-jadvalda b_{22} ni hal qiluvchi element deb olib, Jordan chiqarish usulining bir qadamini bajarib, 11-jadvalni hosil qilamiz.

11 - jadval

	0	x_2	...	x_n	1
x_2 =	s_{22}	s_{23}	...	s_{2n}	s_2
0 =	s_{32}	s_{33}	...	s_{3n}	s_3
...	...	...	...	...	...
0 =	s_{n2}	s_{n3}	...	s_{nn}	s_n

Ushbu jadvaldan

$$x_2 = c_{23}x_3 + \quad \dots \quad + c_{2n}x_n + c_2 \quad \text{ni}$$

yozib olib, ushbu satr va 0 ustunni o'chiramiz hamda yana Jordan jadvalini yozamiz va h.k. davom ettirib, oxirida $x_n = b$ ni topamiz, so'ngra qolgan x_{n-1}, x_{n-2},... x_2, x_1 larni o'rniga ketma-ket qo'yish orqali hisoblab chiqamiz.

Misol. Quyidagi

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 &= 7 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 &= 3 \end{aligned}\right\}.$$

Sistemani Jordan – Gauss usuli bilan yeching:

Yechish.

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 - 4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 - 7 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - 3 = 0 \end{aligned}\right\}$$

sistemani ko'rinishida yozib olamiz va Jordan (8-jadval) jadvalini tuzamiz.

	x_1	x_2	x_3	1
0 =	$\boxed{2}$	2	-1	-4
0 =	3	1	-3	-7
0 =	1	1	-2	-3

Bu jadvalga nisbatan Jordan chiqarish usulini qo'llaymiz.

	0	x_2	x_3	1
x_1=	1/2	-1	▪	2
0 =	3/2	-2	-3/2	-1
0 =	1/2	0	-3/2	-1

Bu jadvaldan 1-satrni yozib olamiz va 1 satr hamda 0 ustunni o'chiramiz:

$$x_1 = -x_2 + \frac{1}{2}x_3 + 2$$

	x_2	x_3	1
0 =	$\boxed{-2}$	-3/2	-1
0 =	0	-3/2	-1

Bu jadvalga nisbatan Jordan chiqarish usulini qo'llaymiz va quyidagi jadvalni hosil qilamiz.

	0	x_3	1
x_2 =	-1/2	-3/4	-1/2
0 =	0	-3/2	-1

bundan $x_2 = -\frac{3}{4}x_3 - \frac{1}{2}$ deb yozib olamiz,

yana 1-satr, 1-ustunni o'chiramiz

	x_3	1
0 =	-3/2	-1

bundan esa $0=-\frac{3}{2}x_3-1$ yoki $x_3=-\frac{2}{3}$ ni topamiz.

Bu qiymatdan foydalanib ketma-ket

$$x_2 = -3/4\,(-2/3) - 1/2 = 0$$

va x_1 ni topamiz $x_1 = -0 + 1/2\,(-2/3) + 2 = 5/3$.
Demak yechim $x_1 = 5/3$, $x_2 = 0$, $x_3 = -2/3$ ga teng ekan.
Yechim berilgan tenglamalarni qanoatlantiradi.

VARIANTLAR

1. $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 = 5 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 8 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 1 \\ 5x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 5 \\ 5x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 5x_1 - 5x_2 - 4x_3 = -3 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 1 \\ 4x_1 - 4x_2 - 9x_3 = 0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0 \\ 9x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 6 \\ 3x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 7x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \\ 6x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 5 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 8x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 + 6x_3 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 7 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 4 \\ 7x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 2x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = -9 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 5x_1 - x_2 - 2x_3 = 1 \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 4 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 7 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 4x_1 - 9x_2 + 5x_3 = 1 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 = 11 \\ 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 5 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 2 \\ 5x_1 + x_2 - 5x_3 = 9 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 19 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 11 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$

21. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 11 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 22 \end{cases}$

22. $\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = -8 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -4 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -9 \end{cases}$

23. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = -4 \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 36 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -19 \end{cases}$

24. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 9 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 11 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 19 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

26. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 16 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$

27. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -16 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -6 \end{cases}$

28. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -14 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -19 \\ 7x_1 + 4x_2 - x_3 = 13 \end{cases}$

29. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -10 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 8 \end{cases}$

30. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 11 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 10 \end{cases}$

Tenglamaning haqiqiy ildizlarini urinma va vatarlar usuli bilan taqribiy hisoblash

Ishning maqsadi

Ushbu laboratoriya ishini o'tkazishdan asosiy maqsad talabalarga yuqori tartibli algebraik va transsendent tenglamalarning yechimlarini taqribiy, yetarlicha aniqlikda topish usullarini hamda bu uchun zarur bo'lgan hisoblash jarayonini tashkil qila bilish va amalga oshirish, hozirgi zamon hisoblash mashinalarini tatbiq qilish, matematik jadvallardan foydalana bilishni o'rgatishdan iboratdir.

Masalaning qo'yilishi

Ma'lumki, algebraik va transsendent tenglamalarning aniq yechimini har doim ham topib bo'lmaydi. Ayniqsa, beshinchi va undan yuqori tartibdagi tenglamalarning aniq yechimini topish jiddiy muammo hisoblanadi. Bu tipdagi tenglamalarni yechishning eng qulay usuli ularni taqribiy yechishdir.

Faraz qilaylik,

$$F(x) = 0 \qquad (1)$$

tenglamaning yechimi (ildizlari) topish talab qilingan bo'lsin. Ma'lumki, har qanday tenglamaning ildizlari soni tenglamaning tartibiga bog'liq bo'lib, u algebraning asosiy teoremasidan kelib chiqadi.

Teorema. Har qanday n-darajali ko'phad kamida bitta ildizga ega.

(1) tenglamaning ildizlarini topishda ular (ildizlar) qaysi oraliqda yotishini aniqlab olish zarur bo'ladi. Agar tenglama ildizining biror atrofida tenglamaning boshqa ildizlari mavjud bo'lmasa, bunday ildizlar yakkalangan ildizlar deyiladi.

Tenglamaning yakkalangan ildizini topish ikki bosqichdan iborat.

1. Ildizlarni ajratish, ya'ni iloji boricha shunday kichik oraliq olish kerakki, shu oraliqda (1) tenglamaning bitta va faqat bitta ildizi mavjud bo'lsin.
2. Ajratilgan ildizlarni taqribiy usullar yordamida yetarli aniqlikda topish.

Tenglamaning ildizini ajratishda "Matematik tahlil" kursidagi quyidagi teoremadan foydalaniladi.

Teorema. Agar uzluksiz $F(x)$ funksiya $[a;b]$ oraliqning chetki nuqtalarida har xil ishoralar qabul qilsa, ya'ni $F(a)\cdot F(b)<0$ shart bajarilsa, u holda $F(x)$ funksiyaning $[a;b]$ kesmada hech bo'lmaganda bitta haqiqiy - ξ ildizi mavjud bo'lib, $F(\xi)=0$ bo'ladi.

Agar $F(x)$ funksiyaning $[a,b]$ da birinchi va ikkinchi tartibli hosilalari mavjud bo'lib, $F'(x)$ hosila $[a;b]$ da o'z ishorasini ($F'(x)>0$ yoki $F'(x)<0$) o'zgartirmasa, u holda (1) tenglama yagona ildizga ega bo'ladi.

Ildizni ajratish uchun qulay usullardan biri tenglamani grafik usulda yechishdir.

Tenglamalarni yechishning grafik usulidan foydalanib, berilgan tenglamaning haqiqiy musbat ildizlari yotgan eng kichik oraliqlari aniqlab olinadi. So'ngra, urinma va vatarlar usulidan foydalanib, bu yechimlarni δ aniqlikkacha hisoblash mumkin bo'ladi.

Usulning talqini

1. Grafik usulida (1) tenglamaning musbat ildizlarini ajratib olamiz. buning uchun:

a) $y=F(x)$ funksiyaning grafigini chizamiz. Grafikning abssissa o'qi bilan kesishish nuqtalari (1) tenglamaning ildizlari bo'ladi.

b) Agar $y=F(x)$ funksiyaning grafigini chizish ancha mushkul bo'lsa, u holda (1) tenglamani

$$f(x)=\varphi(x) \tag{2}$$

ko'rinishda yozib olamiz va $y=f(x)$ hamda $y=\varphi(x)$ funksiyalarning grafiklarini chizamiz. Bu grafiklarning kesishgan nuqtalarining abssissalari berilgan (1) tenglamaning ildizlari bo'ladi. Ildizlarning joylanishiga qarab bu ildizlar taqriban qanday oraliqlarda yotganligini aniqlash qiyin emas.

Oraliqlar taqriban aniqlangach, bu oraliqlardan (1) tenglamaning haqiqiy musbat ildizi yotgan eng kichik $[a;b]$ kesmani ajratib olamiz. Bu kesmada quyidagi shartlar albatta bajarilishi lozim:

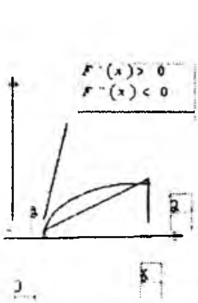
a) $[a;b]$ kesmada, $F(x)$ funksiya va uning birinchi hamda ikkinchi tartibli hosilalari $F'(x)$ va $F''(x)$ lar uzluksiz bo'lishligi;

b) $[a;b]$ kesmaning oxirlarida $y=F(x)$ funksiyaning ishoralari turlicha: ya'ni $F(a)\cdot F(b)<0$ bo'lishligi;

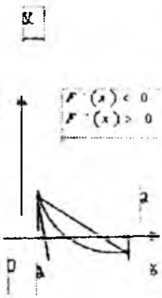
d) $[a;b]$ kesmada birinchi tartibli hosila $F'(x)$ o'z ishorasini o'zgartirmasligi, ya'ni kesmada $F'(x)>0$ – funksiya faqat o'suvchi yoki $F'(x)<0$ – funksiya faqat kamayuvchi bo'lishligi;

e) $[a;b]$ kesmada ikkinchi tartibli hosila $F(x)$ o'z ishorasini o'zgartirmasligi, ya'ni $y=F(x)$ egri chiziq burilish nuqtalariga ega bo'lmasligi kerak.

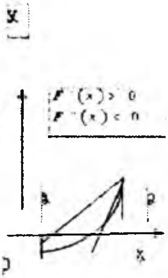
Demak, agar $[a;b]$ kesmada $y=F(x)$ funksiya uchun yuqorida qo'yilgan shartlarning barchasi qanoatlantirilsa, u holda bu kesmada $F(x)$ funksiyaning grafigi quyidagi holatlardan birortasi ko'rinishida bo'lishi mumkin:



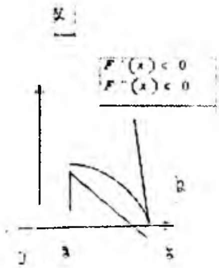
1-rasm.



2-rasm.



3-rasm.



4-rasm.

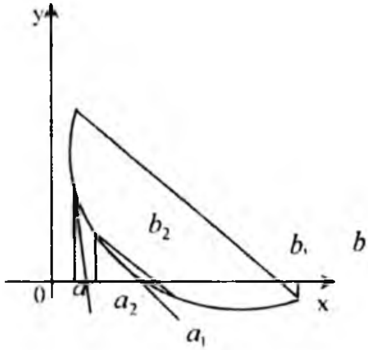
2. Urinma va vatarlar uchun umumlashgan usul.

$F(x)=0$ tenglamani $[a;b]$ kesmaga tegishli bo'lgan haqiqiy musbat ildizini topishda ketma-ket yaqinlashish usulini qo'llash mumkin.

Biz quyida ildizni topish uchun shu usulni, ya'ni umumlashgan urinma va vatarlar usulini qo'llaymiz.

Urinma va vatarlar usulining talqini shundan iboratki, berilgan $y=F(x)$ egri chiziqni $[a;b]$ kesmada bir tomondan vatar bilan ikkinchi tomondan urinma bilan almashtiramiz. Vatar va urinmaning abssissa o'qi bilan kesishgan a_1 va b_1 nuqtalari yangi $[a_1;b_1]$ kesmani hosil qiladi (5-rasm).

Agar $|a_1-b_1|<\delta$ (bu yerda δ-berilgan aniqlik) bo'lsa, hisoblash to'xtatiladi va taqribiy ildiz topilgan hisoblanadi. Aks holda $[a_1;b_1]$ kesmada yuqoridagi hisoblash **ishlari to'liq qaytariladi.**



5-rasm.

Berilgan tenglamaning haqiqiy musbat ildizini topish uchun faqat vatarlar usulidan foydalanganda $[a;b]$ kesmada funksiya grafigiga vatar o'tkazilgandan so'ng, vatarning abssissa o'qi bilan kesishgan nuqtasini b_1 deb belgilab, $[a;b_1]$ kesmada $|a-b_1|<\delta$ shartni tekshiramiz. Agar berilgan aniqlikka erishsak, hisoblash to'xtatiladi va ildiz b_1 deb olinadi, aks holda hisoblash ishlari $[a;b_1]$ kesmada takrorlanadi.

b_1 ni topish uchun berilgan ikki $A(a;\ F(a))$, $B(b;\ F(b))$ nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasidan foydalanamiz:

$$\frac{y-F(b)}{F(a)-F(b)}=\frac{x-b}{a-b}. \qquad (3)$$

(3) tenglama $[a;b]$ kesmadagi vatar tenglamasidir. Bu vatarning Ox o'qi bilan kesishish nuqtasining koordinatalari $x=b_1$, $y=0$ dir. Bu ifodani (3) tenglamaga qo'yib b_1 ga nisbatan yechsak:

$$b_1=b-F(b)\cdot\frac{a-b}{F(a)-F(b)} \qquad (4)$$

bo'ladi. Bunda b_1 vatarlar usuli bo'yicha birinchi yaqinlashish hisoblanadi.

Ildizni faqat urinmalar usulida topish uchun $[a;b]$ kesmada $F(x)$ funksiyaga urinma o'tkazamiz. Urinmani kesmaning shunday tomonidan o'tkazish kerakki, bunda $F(x)$ va $F'(x)$ lar bir xil ishorali, ya'ni $F(x)\cdot F''(x)>0$ bo'lsin; aks holda urinmaning Ox o'qi bilan kesishish nuqtasi $[a;b]$ kesmadan tashqariga chiqib ketadi.

Kesmaning $F(x)\cdot F''(x)>0$ bo'ladigan uchini a bilan, keyingi uchini esa b bilan belgilaymiz. Egri chiziqqa $A(a;F(a))$ nuqtada o'tkazilgan urinma tenglamasi

$$y-F(a)=F'(a)\cdot(x-a) \tag{5}$$

bo'lib, urinmaning Ox o'qi bilan kesishish nuqtasining koordinatalari $x=a_1$; $y=0$ dir. Bu qiymatlarni (5) tenglamaga qo'ysak:

$$a_1=a-\frac{F(a)}{F'(a)} \tag{6}$$

ni hosil qilamiz. Bunda a_1 - urinmalar usuli bo'yicha birinchi yaqinlashishdir.

Endi $[a_1;b]$ da $|a_1-b|<\delta$ shartni tekshirib ko'ramiz, agar shart qanoatlantirilsa, hisoblash ishlari to'xtatiladi va ildiz a_1 deb olinadi, aks holda $[a_1;b]$ kesmada yuqoridagi hisoblash ishlari takrorlanadi.

Agar hisoblash ishlari vatarlar usuli, yoki urinmalar usuli, yoki har ikkala usul bilan bir vaqtda n marta takrorlangan bo'lsa, a_n va b_n lar quyidagicha aniqlanadi:

$$a_n=a_{n-1}-\frac{F(a_{n-1})}{F'(a_{n-1})} \tag{7}$$

$$b_n=b_{n-1}-F(b_{n-1})\cdot\frac{a_n-b_{n-1}}{F(a_n)-F(b_{n-1})}, \qquad (n=1,2,3,...) \tag{8}$$

Agar quyidagi belgilashlarni kiritsak, ya'ni

$$\Delta a_{n-1}=-\frac{F(a_{n-1})}{F(a_{n-1})};\quad \Delta b_{n-1}=-F(b_{n-1})\cdot\frac{a_n-b_{n-1}}{F(a_n)-F(b_{n-1})}\ (n=1,2,3,..)$$

(7) va (8) formulalarni

$$a_n=a_{n-1}+\Delta a_{n-1}$$

$$b_n=b_{n-1}+\Delta b_{n-1}$$

$$(n=1,2,3,\ ...)$$

deb yozish mumkin.

Laboratoriya ishini bajarilish tartibi

1. Berilgan $F(x)=0$ tenglamani $f(x)=\varphi(x)$ shaklda yozib olib, $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar grafiklarini chizamiz hamda urinma va vatarlar usulini qanoatlantiruvchi $[a;b]$ kesmani aniqlaymiz.

2. Quyidagi shartlarni tekshiramiz:

a) $F(a)$ va $F(b)$ lar turli ishorali bo'lishligini;

b) $F(x)$ funksiyaning birinchi tartibli hosilasi $F'(x)$ $[a;b]$ kesmada o'z ishorasini saqlashligini;

d) ikkinchi tartibli $F''(x)$ $[a;b]$ da ishorasining saqlashligini;

3. Kesmani $F(x)\cdot F''(x)>0$ shartni qanoatlantiruvchi uchini aniqlab, uni a bilan belgilaymiz.

4. Hisoblash ishlarini $|a_n-b_n|<\delta$ (bunda δ-berilgan aniqlik) shart bajarilguncha davom ettiramiz.

Ko'rgazmali misol

$x^3-8x+3=0$ tenglamaning haqiqiy musbat ildizini umumlashgan urinma va vatarlar usulida 0.0001 gacha aniqlikda taqribiy hisoblang.

Yechish:

1. $x^3-8x+3=0$ tenglamani $x^3=8x-3$ shaklda yozib olib, $y=x^3$ va $y=8x-3$ funksiyalarning grafiklarini chizamiz. Chizmadan ko'rinadiki, tenglamaning haqiqiy musbat ildizi $\left(0;\frac{1}{2}\right)$ oraliqda yotadi.

2. *a)* $F(x)=x^3-8x+3$ funksiyaning $x=0$ va $x=\frac{1}{2}$ nuqtalardagi qiymatlarni hisoblaymiz:

$$F(0)=3>0$$

$$F\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^3-8\cdot\frac{1}{2}+3=\frac{1}{8}-4+3=\frac{1}{8}-1=0{,}125-1=-0{,}875<0.$$

Demak, $F(0)$ va $F\left(\frac{1}{2}\right)$ lar turli ishorali.

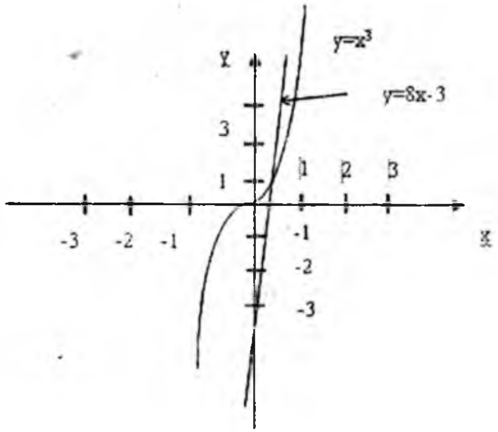
b) Berilgan funksiyaning birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarini topamiz: $F'(x)=3x^2-8$, $F''(x)=6x$.

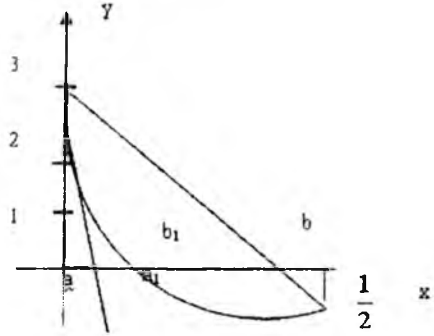
[0; 0,5] kesmadagi $x=0$; $x=0{,}2$; $x=0{,}5$ nuqtalarda funksiya hosilalarning ishoralarini tekshiramiz:

$F'(0)=3\cdot 0\text{-}8=\text{-}8<0,\ F'(0,2)=3\cdot(0,2)^2\text{-}8=3\cdot 0,04\text{-}8=0,12\text{-}8=\text{-}7,88<0.$

$F'(0,5)=3\cdot(0,5)^2\text{-}8=3\cdot 0,25\text{-}8=0,75\text{-}8=\text{-}7,25<0,\ F''(0)=0$

$F''(0,2)=6\cdot 0,2=1,2>0,\ F''(0,5)=6\cdot 0,5=3>0$





Demak, $F'(x)$ va $F''(x)$ hosilalar [0; 0,5] kesmada o'z ishoralarini saqlaydi:

$F'(x)<0$; $F''(x)>0$

3. [0; 0,5] kesmani $F(x)\cdot F''(x)>0$ shartni qanoatlantiruvchi uchini aniqlaymiz.

$F(0)=3>0$, $F''(0)=6\cdot 0=0$, $F(0)\cdot F''(x)>0$, $F(0{,}5)=-0{,}875<0$

$F''(0{,}5)=6\cdot 0{,}5=3>0$ $F(0{,}5)\cdot F''(0{,}5)<0$.

Demak, a sifatida 0 nuqtani olamiz.

4. Hisoblash ishlarini a_n va b_n larni (7) va (8) formulalardan aniqlab, $|a_n-b_n|<0.0001$ gacha davom ettiramiz hamda hosil bo'lgan natijalarni quyidagi jadvalga kiritamiz:

	X	F(x)=x³-8x+3			a_n-b_n	Δa_{n-1}	F(x)=3x²-8		
		x^3	x^3-8x	x^3-8x+3	$F(a_{n-1})-F(b_{n-1})$	Δb_{n-1}	x^2	$3x^2$	$3x^2$-8
a_0	0	0	0	3	-0.5	0.3750	0	0	-8
b_0	0.5	0.1250	-3.8750	0.8750	3.875	-0.1129	0.25	0.75	-7.25
a_1	0.3750	0.0527	-2.9473	0.0527	-0.0121	0.006954	0.14063	0.42188	-7.5781
b_1	0.3871	0.0580	-3.0388	-0.0388	0.0915	-0.00513	0.14985	0.44954	-7.5505
a_2	0.382054			$\lvert a_2-b_2\rvert=0.000085<0.0001$					
b_2	0.381969								

Demak, berilgan x^3-8x+3=0 tenglamaning eng kichik haqiqiy musbat ildizi x=0,381969 bo'lar ekan.

Variantlar

1	x-sin$x$-0,25=0	16	4x-7sin$x$=0
2	x+ln$x$-0,5=0	17	2$x$ln$x$-1=0
3	$ctgx-\frac{x}{4}=0$	18	3-x-2lg$x$=0
4	x^3-4cos$x$=0	19	x-2-4lg$x$=0
5	2x-ln$x$-4=0	20	x^2lg$x$-1=0
6	2^x-4x=0	21	$\ln x+\sqrt{x}=0$
7	$x$lg$x$-1=0	22	$(x-1)^2-e^{-x}=0$
8	$2\lg x-\frac{x}{2}+1=0$	23	$1-x-x\sqrt{x}=0$
9	4x-cos$x$=0	24	1-(x+1)ln$x$=0

10	$x - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cos x = 0$	25	$e^x - 2 + x^2 = 0$
11	$ctgx - \frac{x}{10} = 0$	26	$2 - x\lg x = 0$
12	$5x^2 - 6\sin x = 0$	27	$4 - x - e^{x/2} = 0$
13	$x - \frac{1}{2}\lg x - \frac{7}{2} = 0$	28	$x\sqrt{x+1} - 1 = 0$
14	$x \cdot \ln x - 14 = 0$	29	$2 - x \cdot ctg x = 0$
15	$tg(0,4x + 0,4) - x^2 = 0$	30	$2\sqrt{x} - \cos\frac{\pi}{2}x = 0$

Aniq integralni taqribiy hisoblashda Simpson usuli

Ko'pgina fizik va texnik masalalar, boshlang'ich funksiyalari elementar funksiyalardan iborat bo'lmagan aniq integraldan iborat bo'lishi mumkin. Natijada boshlang'ich funksiyalari elementar funksiyalardan iborat bo'lmagan yoki tajriba yo'li bilan aniqlanadigan funksiyalarni integral yordamida hisoblashga to'g'ri keladi. Bunday integrallar qiymatlarini topish uchun turli taqribiy hisoblash usullari mavjud. Bular: to'g'ri to'rtburchaklar, trapetsiya va Simpson usullaridir.

Simpson usulining qisqacha mazmuni

Bu usulning asosiy maqsadi, integral ostidagi funksiyani ikkinchi tartibli ko'phad bilan almashtirishdan iborat bo'lib, ko'phadning ma'lum nuqtalardagi qiymatlari funksiyaning shu nuqtalardagi qiymatlari bilan ustma-ust tushsin.

Faraz qilaylik,

$$\int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

integralni hisoblash talab qilingan bo'lsin.

$[a;b]$ kesmani $a=x_0$, $x_1,\dots,$ $x_{2n}=b$ nuqtalar yordamida $2n$ ta juft sondagi teng kesmachalarga ajratamiz va bu nuqtalardan $y=f(x)$ egri chiziqgacha OY o'qiga parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz. U holda $y=f(x)$, $y=0$, $x=a$, $x=b$ chiziqlar bilan chegaralangan trapetsiyaning yuzi $2n$ ta elementar yuzachalarga bo'linadi. Ikkita qo'shni elementar yuzachalarni parabolik trapetsiya yuziga keltiramiz. Hosil qilingan yuza quyidagi formula yordamida hisoblanadi:

$$\int f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(y_{2i} + 4y_{2i+1} 2y_{2i+2}\right) \tag{2}$$

bu n da $y_{2i}=f(x_{2i})$, $y_{2i+1}=f(x_{2i+1})$, $y_{2i+2}=f(x_{2i+2})$, $h=\frac{b-a}{2n}, \left(i=\overline{0,n-1}\right)$

$[a;b]$ - kesmada hosil qilingan parabolik trapetsiyachalarning yuzlarini qo'shib, izlanayotgan integralning taqribiy qiymatini beruvchi quyidagi formulani hosil qilamiz:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}\left(y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_n + \ldots + y_{2n-2})\right) \quad (3)$$

(3) formulaga Simpson yoki parabola formulasi deyiladi.

Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada to'rtinchi tartibli uzluksiz hosilaga ega bo'lsa, u holda Simpson formulasining absolyut xatosi

$$|R_n| \le \frac{(b-a)^5}{180(2n)^4} \cdot M, \quad (4)$$

bu n da M; $|f^{IV}(x)|$ – ning $[a;b]$ kesmadagi eng katta qiymati.

Funksiya to'rtinchi tartibli hosilaga ega bo'lsa ham xatolikni baholash qiyin bo'lishi mumkin. Qo'yilgan aniqlikda baholash uchun Runge qoidasidan foydalanamiz. Bu quyidagicha bajariladi:

$$h_1 = \frac{b-a}{2n} \quad \text{va} \quad h_2 = \frac{b-a}{4n}$$

qadamlar bilan (3) formula bo'yicha integralni hisoblaymiz. $h=h_1$ va $h=h_2$ qadamlarda integralning taqribiy qiymatlari mos ravishda $\Im^{(n_1)}$ va $\Im^{(n_2)}$ - lar bo'lsin.

U holda yo'l qo'yilgan absolyut xato

$$\Delta = \frac{\left|\Im^{(n_2)} - \Im^{(n_1)}\right|}{15}$$

ko'rinishda aniqlanadi.

Izoh. Agar (1) integralni ε aniqlikda hisoblash talab qilingan bo'lib, Δ≤ε hosil qilingan bo'lsa, integralning taqribiy qiymati $\Im = \Im^{(n_2)}$–ga teng bo'ladi. Agar Δ>ε bo'lsa,

$$\Im^{(h_{i+1})}\left(h_{i+1} = \frac{h_i}{2}\right)(i = 2,3,\ldots) \quad (5)$$

integral (3) formula yordamida hisoblanib

$$\Delta = \frac{\left|\Im^{(h_{i+1})} - \Im^{(h_i)}\right|}{15} \quad (6)$$

absolyut xato topiladi. Agar $\Delta\leq\varepsilon$ bo'lsa $\Im = \Im^{(h_{i+1})}$ –taqribiy qiymat olinadi, aks holda $\Delta\leq\varepsilon$ shart bajarilguncha (5) dan boshlab jarayon qaytariladi.

Masalaning qo'yilishi

Ushbu

$$\int_a^b f(x)dx$$

integral Simpson usuli bilan $\varepsilon=10^{-5}$ aniqlikda hisoblansin.

Ishning bajarilish tartibi

1. Integralni qo'lda hisoblash uchun

$$h_1 = \frac{b-a}{2n}(n = 5, N = 2n = 10)$$

qadamli jadval tuzamiz.

13-jadval

(N)	(x_i)	(y_i)	(k_i)	(k_i y_i)
0	x_0	y_0	1	y_0
1	x_1	y_1	4	$4y_1$
2	x_2	y_2	2	$2y_2$
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
9	x_9	y_9	4	$4y_9$
10	x_{10}	y_{10}	1	y_{10}

Jadval quyidagi tartibda to'ldiriladi:
1) (N) – ustun, bo'lingan nuqtalarning tartib nomerlari;
2) (x_i) – ustun, $[a;b]$ kesmani bo'lingan nuqtalarining abssissalari;
3) (y_i) – ustun, $y_i=f(x_i)$ funksiyaning mos keluvchi qiymatlari;
4) (k_i) – ustun, (3) formula bilan hisoblangandan y_i ning koeffitsientlari;

5) $(k_i y_i)$ – ustun, y_i va k_i - larning mos qiymatlarining ko'paytmalari.

2. Jadvaldan foydalanib

$$\Im^{(h_1)} = \frac{h_1}{3}\sum_{i=0}^{N} k_i \cdot y_i \quad (N = 10)$$

3. $h_2 = h_1/2$ qadam bilan yana jadval to'ldirilib

4. $\Im^{(h_2)} = \frac{h_2}{3}\sum_{i=0}^{N} k_i \cdot y_i \quad (N = 20)$ hisoblanadi.

5. Xatolik (6) formula bo'yicha baholanadi.

Laboratoriya ishlarining har bir variantini algoritmga qarab programmasini tuzib, EHM da natija olish zarur.

Namunaviy misol

$\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \ln\sin x dx$ – aniq integral Simpson usuli bilan $\varepsilon = 10^{-5}$ aniqlikda hisoblansin.

1. $[\pi/4; \pi/2]$ kesmani $N=2n=10$ qismlarga ajratamiz, u holda
2.

$$h_1 = \frac{1}{10}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{40}, h_2 = \frac{h_1}{2} = \frac{\pi}{80}$$

va jadvalni tuzamiz.

$h_1=\pi/40$ $N=10$					$h_2=\pi/80$ $N=20$		
(N)	(x_i)	(y_i)	(k_i)	(N)	(x_i)	(y_i)	k_i
0	0.785398	-0.346573	1	0	0.785398	-0.346573	1
1	0.863938	-0.273903	4	1	0.824668	-0.308108	4
2	0.942478	-0.211934	2	2	0.863938	-0.273903	2
3	1.021018	-0.159416	4	3	0.903208	-0.241668	4
4	1.099557	-0.115402	2	4	0.942478	-0.211934	2
5	1.178097	-0.079172	4	5	0.981748	-0.184660	4
6	1.256637	-0.050181	2	6	1.021018	-0.159416	2
7	1.335177	-0.028018	4	7	1.060281	-0.136397	4
8	1.413717	-0.012387	2	8	1.099557	-0.115402	2
9	1.492256	-0.003087	4	9	1.138824	-0.096353	4
10	1.570796	-0.000000	1	10	1.178097	-0.079172	2
				11	1.217367	-0.063802	4
				12	1.256637	-0.050181	2
				13	1.295907	-0.038268	4
				14	1.335177	-0.028018	2
				15	1.374447	-0.019402	4
				16	1.413717	-0.012387	2
				17	1.452986	-0.006956	4
				18	1.492256	-0.003087	2
				19	1.531526	-0.000771	4
				20	1.570796	-0.000000	1

2. $\Im^{(h_1)} = \frac{h_1}{3}\sum_{i=0}^{10} k_i y_i = -0{,}086413$ $\qquad \Im^{(h_2)} = \frac{h_2}{3}\sum_{i=0}^{20} k_i y_i = -0{,}086414$

3. $\Delta = \frac{\left|\Im^{(h_2)} - \Im^{(h_1)}\right|}{15} < 10^{-5}$ $\qquad$ 4. $\Im = -0{,}086414$

Variantlar

1	$\int_0^{0,5} \frac{xdx}{1+x^3}$	2	$\int_0^{\pi/4} e^{-x^2/4} dx$
3	$\int_0^{0,5} \ln\left(1+\sqrt{x}\right)dx$	4	$\int_{0,1}^{0,5} \frac{\cos x\sqrt{x}}{x} dx$
5	$\int_{0,1}^{0,5} \frac{arctgx^2}{x} dx$	6	$\int_0^{0,5} x\cos\sqrt{x}dx$
7	$\int_0^{0,5} \frac{xdx}{1+x^5}$	8	$\int_{0,1}^{0,5} \frac{\sin x^2}{x^2}$
9	$\int_0^{0,5} \sqrt{1+x^3}dx$	10	$\int_{0,1}^{0,5} \frac{arctgx}{x^3} dx$
11	$\int_0^{\pi/2} x^2 \sin xdx$	12	$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin \frac{x}{5}}{x} dx$
13	$\int_0^{0,7} x^2 e^{-x^2} dx$	14	$\int_{0,1}^{0,4} \frac{e^{-x}}{x} dx$
15	$\int_0^{\pi/2} x^2 \cos xdx$	16	$\int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^4}$
17	$\int_{0,2}^{0,5} xarctgxdx$	18	$\int_{0,2}^{0,8} \frac{\ln\left(1+x^3\right)}{x^2} dx$
19	$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos \frac{x}{5}}{x} dx$	20	$\int_0^{\pi/3} \frac{\sin \frac{x}{3}}{x} dx$
21	$\int_0^{1} x^3 \sin xdx$	22	$\int_0^{0,4} x^2 e^{-x} dx$

23	$\int_{0}^{0.5} \frac{arctgx}{1+x} dx$	24	$\int_{0}^{0.2} \frac{e^{-x}}{1+x} dx$
25	$\int_{0}^{0,5} x^3 e^{-x^3} dx$	26	$\int_{0,1}^{0,4} x e^{-\sqrt{x}} dx$
27	$\int_{0}^{\pi/8} \frac{\sin x}{1+x} dx$	28	$\int_{-0.2}^{0,8} x^2 \sqrt{1+x^4} dx$
29	$\int_{0}^{0,5} x^3 e^{-\sqrt{x}} dx$	30	$\int_{0}^{0,5} \sqrt{x} \ln(1+x) dx$

Birinchi darajali differensial tenglamalarni Eyler, Eyler–Koshi usullari bilan taqriban yechish

Ishning maqsadi

Talabalami differensial tenglamaning o'ng tomonini o'zgaruvchilarga ajralgan ikkita funksiyaning ko'paytmasi ko'rinishida yozish mumkin bo'lmasa va bundan kelib chiqqan holda bu masalalami analitik yo'l bilan yechish mumkin bo'lmagan hollarda yechishga o'rgatish. Bundan tashqari, talabalarga birinchi darajali oddiy differensial tenglamalami yechishda qo'llaniladigan turli xil sonli usullardan mustaqil foydalanishga, differensial tenglamalami approksimatsiyalashga, javoblaming xatosini baholashga, yechim algoritmini qurishga, algoritmning blok-sxemasini va uning dasturini tuzishga, ulaming sonli qiymatlarini hisoblashga o'rgatish.

Ishni asoslash

O'qish jarayoni davomida talabalar oliy matematikaning boshqa kurslari bilan bir qatorda, birinchi darajali oddiy differensial tenglamalardan boshlanib n darajali tenglamalargacha va xususiy hosilali turli xil differensial tenglamalami o'rganadilar.

Talaba oliy o'quv yurtlarida ta'lim olish davomida turli xil fanlami o'rgana borib, fizik, mexanik, ijtimoiy, iqtisodiy va boshqa jarayonlami modellashtirish ko'nikmasini hosil qiladi. Hozirgi davrda inson va jamiyat faoliyatini umuman matematik modellashtirish jarayonisiz tasavvur qilib bo'lmaydi. Agar tok kuchining o'tkazgich qismida o'zgarishi, havoning, yer osti suvlarining, neft, gaz bosimlarining o'zgarishlari, turli xil biologik substansiyalaming ko'payishi va halokati jarayoni, hudud, shahar avtotransportini boshqarish jarayoni, ishlab chiqarish, ijtimoiy jarayonlami boshqarish, oziq-ovqat narxlarining, foydaning, tannarxning va h.k. ortiqcha jarayonlaming o'zgarishi differensial tenglamalar orqali ifodalanishiga e'tibor beradigan bo'lsak, talabaga ixtiyoriy darajali differensial tenglamalami, xususiy holda birinchi darajali differensial tenglamalami yechish usullarini o'rgatish qanchalik muhim ekani ayon bo'ladi.

Demak, talabalar differensial tenglamalar bo'yicha laboratoriya ishini bajarish jarayonida mustaqil ravishda turli xil usullar to'plami ichidan berilgan tenglamani qanoatlantiruvchi, unga eng ko'p mos keluvchi yechish usulini izlash, u yoki bu usulni qo'llash sohasini, uning afzal va kamchiliklarini aniqlash imkoniyatiga ega bo'ladi.

Masalaning qo'yilishi

Differensial tenglamalar kursidan ma'lumki, birinchi darajali differensial tenglamalarning barchasi ham kvadraturalarda integrallana bermaydi. Kvadraturalarda integrallanmaydigan masalalar sinfi kvadraturalarda integrallanadigan masalalar sinfidan ancha kengdir.

Hosilalarga nisbatan yechilgan birinchi darajali differensial tenglamani ko'ramiz:

$$y' = f(x;y). \tag{1}$$

(1) differensial tenglamaning umumiy yechimi C parametrga bog'liq quyidagi ko'rinishdagi funksiyalar oilasi bo'ladi:

$$y = \varphi(x;C). \tag{2}$$

Bunda $\varphi(x;\ C)$ quyidagi shartlarni qanoatlantirishi kerak:

1) (2) yechim C parametrning ixtiyoriy qiymatida (1) tenglamani qanoatlantirishi kerak;

2) shunday C_0 qiymat mavjudki, funksiya $x=x_0$ nuqtada $u(x_0)=u_0$ shartni qanoatlantiradi.

$\varphi(x;\ C)$ funksiyalar oilasidan xususiy yechimni hisoblash uchun $x=x_0$ nuqtada

$$y(x)\big|_{x=x_0} = y_0 \tag{3}$$

boshlang'ich shart beriladi.

Yuqorida bayon qilingan (1) – (3) masalaga Koshi masalasi deyiladi.

Shunday qilib, (1) differensial tenglamaning (2) umumiy yechimidan (3) boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimni topish talab qilinadi.

(1), (3) tenglamalar uchun quyidagi teorema o'rinli:

Teorema: Agar (1) tenglamada $f(x;y)$ funksiya va uning hosilasi $f_y'(x;y)$ tekisligida yotgan qandaydir $(x_0;y_0)$ nuqtani o'z ichiga olgan yopiq D sohada uzluksiz bo'lsa, u holda bu tenglamaning

$x=x_0$ nuqtada (3) shartni qanoatlantiruvchi yagona $y=\varphi(x)$ yechimi mavjud.

Geometrik nuqtayi nazardan qarasak, bu teorema grafigi (x_0,y_0) nuqtadan o'tuvchi yagona $y=\varphi(x)$ funksiya mavjudligini bildiradi.

Geometrik nuqtayi nazardan (2) tenglamaning umumiy yechimi koordinatalar tekisligida faqat bitta o'zgaruvchi C ga bog'liq egri chiziqlar oilasini tashkil qiladi. Bu egri chiziqlar integral egri chiziqlar deb ataladi. Xususiy yechimga bu oilaning berilgan qandaydir $(x_0;y_0)$ nuqtadan o'tuvchi bitta egri chizig'i mos keladi.

(1) – (3) masalani ikki xil yo'l bilan yechish mumkin: analitik (bunda javob analitik ifoda ko'rinishida bo'ladi), sonli (bunda javob jadvallar ko'rinishidi bo'ladi).

Differensial tenglamani sonli usul bilan yechish quyidagi bosqichlardan iborat:

I. Sonli usulni tanlash.

Mavjud barcha sonli usullardan berilgan tenglamaga eng ko'p mos keladigan usulni tanlash.

II. Yechimning algoritmini ishlab chiqish.

Topilayotgan yechimlarning ketma-ketligi, ya'ni yechimning algoritmi aniqlanadi.

III. Bevosita hisoblashga tayyorgarlik.

Talab qilingan aniqlik darajasida barcha arifmetik hisoblarni bajarishni ta'minlash, yordamchi qurollarni tayyorlash (talab qilinayotgan jadvallar, mikrokalkulyatorlar, hisoblash mashinalari), yechish algoritmining blok-sxemasini tuzish, programmani qo'l ostidagi hisoblash mashinasiga mos algoritmik tilda tuzish.

IV. Hisoblashlarni bajarish va natijani olish.

Agar hisoblash mikrokalkulyatorda bajarilayotgan bo'lsa, hisoblashlar ketma-ket bajariladi va olingan natijalar jadvalga yozib qo'yiladi. Agar hisoblashlar kompyutyerda bajarilsa, u holda programma kompyuter xotirasiga kiritiladi va natija kerakli shaklda olinadi.

V. Olingan natijalarning tahlili.

Olingan natijalar tahlil qilinib, yechimning xarakteri aniqlanadi, uning grafigi chiziladi, zarur bo'lgan taqdirda berilganlar o'zgartirilib, hisoblash takroran bajariladi.

Usulni tavsiflash

Birinchi darajali differensial tenglamalarni taqribiy yechishning eng sodda usuli Eyler usuli hisoblanadi. Eyler usulining mazmuni shundan iboratki, izlanayotgan yechimning ekstrapolyatsiyasi birinchi darajali ko'phad bilan almashtiriladi.

Bizga

$$y' = f(x, y) \tag{4}$$

differensial tenglama quyidagi boshlang'ich shartlar bilan berilgan bo'lsin

$$y(x)\big|_{x=x_0} = y_0 \tag{5}$$

bu yerda $x \in D$ va $D=\{x: a \le x \le b\}$.

$[a;b]$ kesmani $x_i = h$ nuqtalar bilan n ta teng bo'laklarga bo'lamiz, bunda

$$h = \frac{x_n - x_0}{n} = \frac{b-a}{n}. \tag{6}$$

Demak $h=x_1-x_0=x_2-x_1=...=x_n-x_{n-1}=\Delta x$.

Agar (4) tenglmaning yechimini $y=\varphi(x)$ deb olsak, u holda uning $a=x_0$, x_1, ..., $x_n=b$ nuqtalardagi yechimlari $y_1=\varphi(x_0)$, $y_2=\varphi(x_1)$, ..., $y_n=\varphi(x_n)$ ko'rinishda bo'ladi.

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0, \Delta y_1 = y_2 - y_1, ..., \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}. \tag{7}$$

Hosilaning ta'rifiga ko'ra $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y'$.

Ushbu hosilani orttirmalarning nisbati bilan almashtirib, qandaydir xatoliklar bilan

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' \tag{*}$$

deb yozsa bo'ladi. Bundan $\Delta y = y'\Delta x$ ifodani

$$\Delta y = f(x; y)\Delta x \tag{8}$$

ko'rinishida yozamiz.

(8) ifodaning $x_i, (i = \overline{0, n-1})$ nuqtalardagi qiymatini topamiz:

$$x=x_0 \text{ da } \Delta u_0=f(x_0;y_0)\Delta x$$

yoki (7) ni va $\Delta x=h$ ekanligini hisobga olsak,

$$y_1-y_0=f(x_0;y_0)h.$$

Bu yerda h, x_0, y_0 qiymatlar ma'lum bo'lgani uchun y_1 ning qiymatini quyidagicha yoza olamiz:

$$y_1 = y_0 + f(x_0; y_0)h \tag{9}$$

$x=x_1$ bo'lganda $\Delta y_1 = f(x_1, y_1)\Delta x$ ni yoki $y_2 - y_1 = f(x_1; y_1)h$ ni topamiz, bundan

$$y_2 = y_1 + f(x_1; y_1)h. \tag{10}$$

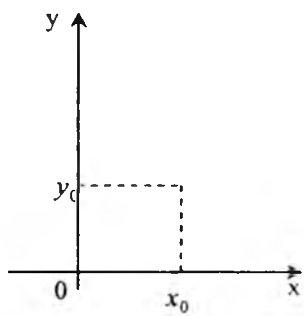
Xuddi shunday yo'l bilan quyidagilarni topamiz:

$$\begin{aligned} &x = x_2 \text{ да } y_3 = y_2 + f(x_2; y_2)h, \\ &x = x_3 \text{ да } y_4 = y_3 + f(x_3; y_3)h, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &x = x_{n-1} \text{ да } y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})h. \end{aligned} \tag{11}$$

(9), (10), (11) munosabatlardan ketma-ket y_1, y_2, ..., y_n larni topamiz.

Topilgan y_1, y_2, ..., y_n qiymatlar (4), (5) differensial tenglama yechimining x_1, x_2, ..., x_n nuqtalardagi sonli qiymatlari bo'ladi. Bu yechimlar taqribiy, chunki ular (*) farazdan olindi, shuning uchun Eyler usuli bilan olingan yechimlar taqribiy yechimlar deyiladi.

Geometrik nuqtayi nazardan Eyler usuli tekislikdagi $(x_0;y_0)$, $(x_1;y_1)$,...,$(x_n;y_n)$ nuqtalarni birlashtirishdan hosil bo'lgan siniq chiziqni bildiradi. Shunday yo'l bilan olingan siniq chiziq Eyler siniq chizig'i deb ataladi. Bu siniq chiziq (4) differensial tenglamaning integral egri chizig'ining taqribiy ko'rinishi hisoblanadi.



1-rasm.

Agar $f(x;y)$ funksiya quyidagi shartlami qanoatlantirsa:

a) funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz;

b) funksiyaning x bo'yicha hosilasi yuqoridan chegaralangan

$$\left|\frac{df}{dx}\right| = \left|\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\right| \le N;$$

d) u bo'yicha Lipshis shartini qanoatlantiradi:

$$\left|f(x;y_k) - f(x;y_{k-1})\right| \le \alpha\left|y_k - y_{k-1}\right|; \left(k = \overline{1,n}\right).$$

U holda $y(x_k)$ aniq yechim bilan y_k taqribiy yechim orasidagi xatolik quyidagi formula bo'yicha hisoblanadi:

$$\left|y_k - y(x_k)\right| \le \frac{hN}{2L}\left|e^{\alpha(x_k - x_0)} - 1\right|.$$

Bu yerda N va L haqiqiy sonlar.

Namunaviy misol

$y(x)\big|_{x=0} = 0$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi $y' = 2x + y$ differensial tenglamaning yechimini toping. Yechim [0;1] oraliqda h=0,1 qadam bilan topilsin.

Shartga ko'ra $a=x_0=0$, $b=x_n=1$ va $f(x;y)=2x+y$

Nuqtalar sonini (6) dan topamiz

$$n = \frac{b-a}{h} = \frac{1-0}{0,1} = 10.$$

Endi (9) – (11) sistemaga ko'ra x_i nuqtalarda funksiyaning $y_i, \left(i = \overline{1;10}\right)$ qiymatlarini topamiz:

$x_0=0$ da $y_0=0$

$x_1=0,1$ da $y_1= y_0+ f(x_0; y_0)h= y_0+(2x_0+ y_0)h=0+(20+0)0,1=0$

$x_2=0,2$ da $y_2= y_1+ f(x_1; y_1)h= y_1+(2x_1+ y_1)h=0+(20,1+0)0,1=$
$=0,02;$

$x_3=0,3$ da $y_3= y_2+ f(x_2; y_2)h= y_2+(2x_2+ y_2)h=0,02+(2\ 0,2+$
$+0,02)\ 0,1\ =0,062;$

$x_4=0,4$ da ------//------- $y_4= 0,1282;$

$x_5=0,5$ da ------//------- $y_5=0,22101;$

$x_6=0,6$ da ------//------- $y_6=0,34312;$

$x_7=0,7$ da ------//------- $y_7=0,4974;$

x_8=0,8 da ------//------- y_8=0,68714;

x_9=0,9 da ------//------- y_9=0,91585;

x_{10}= 1 da ------//-------- y_{10}= 1,18744

Berilgan differensial tenglamaning aniq yechimi $y(x) = 2e^x-2x-2$ ga teng.

Yechimni jadval ko'rinishida ham ifodalash mumkin

1-jadval

№	x_i	y_{i-1}	$F(x_{i-1};y_{i-1})$	$\Delta y_{i-1}=f(x_{i-1};y_{i-1})h$	y_{i-1}
1	0,1	0	0	0	0
2	0,2	0	0,2	0,02	0,02
3	0,3	0,02	0,42	0,042	0,062
4	0,4	0,062	0,662	0,0662	0,1282
5	0,5	0,1282	0,9282	0,09282	0,22102
6	0,6	0,22102	1,22102	0,122102	0,343122
7	0,7	0,343122	1,543122	0,1543122	0,4974342
8	0,8	0,4974342	1,8974342	0,18974342	0,6871776
9	0,9	0,6871776	2,2871776	0,22871776	0,9158954
10	1	0,9158954	2,715589538	0,271589538	1,1874849

2 jadvalda taqqoslash uchun aniq va taqribiy yechimlami keltiramiz:

2-jadval

№	x_i	aniq yechim $y(x)$	taqribiy yechim y_i
1	0,1	0,010304	0,0000
2	0,2	0,0428	0,200
3	0,3	0,09972	0,0620
4	0,4	0,18364	0,12820
5	0,5	0,29744	0,22102
6	0,6	0,440424	0,34312
7	0,7	0,6275	0,49743
8	0,8	0,85108	0,68717
9	0,9	1,1192	0,915895
10	1	1,43656	1,187484

Agar absolyut va nisbiy xatolami hisoblasak:

$$\Delta = y(x_1) - y_1 = 0,249076,$$

$$\delta_y = \frac{\Delta}{y(x_1)} = \frac{0,249076}{1,43656} = 0,17338.$$

Demak, yo'l qo'yilgan xatolik 17,34% ni tashkil etadi.

Bundan ko'rinadiki, taqribiy yechim aniq yechimdan ancha farq qiladi. Bu integrallash qadami h=0,1 juda qo'pol olinganini bildiradi. Agar qadamni h=0,01 yoki h=0,001 qilib olsak, taqribiy yechimni aniq yechimga ancha yaqinlashtirish mumkin.

Eyler usulining aniqligi integrallash qadami h ga bog'liq va approksimatsiyalash tartibi $o(h)$ kattalik bilan o'lchanadi. Shuning uchun kerakli aniqlikka erishish uchun h ning qiymatini kamaytirish kerak. Approksimatsiyalash xatosini kamaytirish uchun Eyler usulining mukammallashgan shakli Eyler–Koshi usulidan foydalanish mumkin.

Eyler – Koshi usuli

Yechimlarni Eylerning mukammallashgan usuli bilan topganda quyidagicha yo'l tutiladi:

Har bir k qadamda $x_{k+\frac{1}{2}} = x_k + \frac{h}{2}$ oraliq nuqta uchun funksiyaning qiymati

$$y_{k+\frac{1}{2}} = y_k + \frac{hf(x_k; y_k)}{2} \qquad (12)$$

formula bilan hisoblanadi.

Keyin x_{k+1} nuqtada y_{k+1} funksiyaning qiymati

$$y_{k+1} = y_k + hf\left(x_{k+\frac{1}{2}};\ y_{k+\frac{1}{2}}\right) \qquad (13)$$

dan topiladi.

Eyler – Koshi usuli bo'yicha har bir k+1 qadamda (11) formula bo'yicha

$$y_{k+1}^{(0)} = y_k + hf(x_k; y_k) \qquad (14)$$

hisoblanadi va keyin bu asosida y_{k+1} funksiyaning qiymati qayta aniqlanadi:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left[f(x_k; y_k) + f\left(x_{k+1}; y_{k+1}^{(0)}\right)\right]. \qquad (15)$$

Bu usulning aniqlik tartibi $O(h^2)$.

Misol. Yuqorida ko'rsatilgan masalani Eyler – Koshi usuli bilan yeching:

$x_0 = 0$ да $y_1^{(0)} = y_0 + f(x_0; y_0)h = y_0 + (2x_0 + y_0)h = 0 + (2\cdot 0 + 0)\cdot 0{,}1 = 0.$

$x_1 = 0{,}1$ да $y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\left(f(x_0; y_0) + f\left(x_1; y_1^{(0)}\right)\right) = y_0 + \frac{h}{2}\left(2x_0 + y_0 + 2x_1 + y_1^{(0)}\right) =$

$= 0 + \frac{0{,}1}{2}(2\cdot 0 + 0 + 2\cdot 0{,}1 + 0) = 0{,}01.$

$x_2 = 0{,}2$ да $y_2^{(0)} = y_1 + h(2x_1 + y_1) = 0{,}01 + 0{,}1(2\cdot 0{,}1 + 0{,}01) = 0{,}031,$

$y_2 = y_1 + 0{,}05\left(2x_1 + y_1 + 2x_2 + y_2^{(0)}\right) = 0{,}042.$

Xuddi shunday

$x_3 = 0{,}3$	da	$y_3 = 0{,}0862$	$y_3 = 0{,}0984$
$x_4 = 0{,}4$	da	$y_4 = 0{,}1628$	$y_4 = 0{,}1817$
$x_5 = 0{,}5$	da	$y_5 = 0{,}2798$	$y_5 = 0{,}2997$
$x_6 = 0{,}6$	da	$y_6 = 0{,}4242$	$y_6 = 0{,}4406$
$x_7 = 0{,}7$	da	$y_7 = 0{,}6046$	$y_7 = 0{,}6228$
$x_8 = 0{,}8$	da	$y_8 = 0{,}8250$	$y_8 = 0{,}8451$
$x_9 = 0{,}9$	da	$y_9 = 1{,}0896$	$y_9 = 1{,}1118$
$x_{10} = 1$	da	$y_{10} = 1{,}4029$	$y_{10} = 1{,}4175$

lami topdik.

Hisoblash natijalarini jadval ko'rinishida yozamiz.

3- jadval

№	x	aniq yechim	Eyler-Koshi usuli yechimi	Eyler usuli yechimi
1	0,1	0,01304	0,0100	0,0000
2	0,2	0,0428	0,0420	0,0200
3	0,3	0,09972	0,09840	0,0620
4	0,4	0,18364	0,1817	0,1282
5	0,5	0,29744	0,2997	0,22102
6	0,6	0,44424	0,4406	0,34312
7	0,7	0,6275	0,6228	0,49743
8	0,8	0,85108	0,8451	0,68717
9	0,9	1,1192	1,1118	0,915895
10	1,0	1,43656	1,4175	1,187484

$x=1$ nuqtadagi absolyut xatolik $\Delta = 1,43656 - 1,4175 = 0,01906$, nisbiy xatolik

$$\delta_y = \frac{0,01906}{1,93656} = 0,01329$$

ga tengdir.

Shunday qilib, yo'l qo'yilgan xatolik 1,33 % ni tashkil etadi.

Taqribiy hisoblashlarning u yoki bu usulini tanlash asosan integral egri chiziqlarga bog'liq bo'ladi. Agar integral egri chiziqlar to'g'ri chiziqqa yaqin bo'lsa, Eyler usulidan foydalansa bo'ladi. Agar integral egri chiziqlarning ko'rinishi to'g'risida oldindan bir narsa deyish qiyin bo'lsa, u holda Eyler usulida integral qadamni maydaroq olish kerak yoki Eyler – Koshi usulidan foydalanish kerak.

Variantlar

1	$y' = x + \cos\frac{y}{5}$	y_0 (1,8)=2,6	$x \in [1,8;2,8]$
2	$y' = x + \cos\frac{y}{3}$	y_0 (1,6) = 4,6	$x \in [1,6;2,6]$
3	$y' = x + \cos\frac{y}{10}$	$y_0(0,6) = 0,8$	$x \in [0,6;2,6]$
4	$y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{7}}$	$y_0(0,5) = 0,6$	$x \in [0,5;1,5]$
5	$y' = x + \cos\frac{y}{\pi}$	$y_0(1,7) = 5,3$	$x \in [1,7;2,7]$
6	$y' = x + \cos\frac{y}{2,25}$	$y_0(91,4) = 2,2$	$x \in [1,4;2,4]$
7	$y' = x + \cos\frac{y}{e}$	$y_0(1,4) = 2,5$	$x \in [1,4;2,4]$
8	$y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{e}}$	$y_0(0,8) = 1,4$	$x \in [0,8;1,8]$
9	$y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{3}}$	$y_0(1,2) = 2,1$	$x \in [1,2;2,2]$
10	$y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{11}}$	$y_0(2,1) = 2,5$	$x \in [2,1;3,1]$
11	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{5}}$	$y_0(1,8) = 2,6$	$x \in [1,8;2,8]$
12	$y' = x + \sin\frac{y}{3}$	$y_0(1,6) = 4,6$	$x \in [1,6;2,6]$
13	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{10}}$	$y_0(0,6) = 0,8$	$x \in [0,6;1,6]$
14	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{7}}$	$y_0(0,5) = 0,6$	$x \in [0,5;1,5]$

15	$y' = x + \sin\frac{y}{\pi}$	$y_0(1,7) = 5,3$	$x \in [1,7;2,7]$
16	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{2,8}}$	$y_0(1,4) = 2,2$	$x \in [1,4;2,4]$
17	$y' = x + \sin\frac{y}{e}$	$y_0(1,4) = 2,5$	$x \in [1,4;2,4]$
18	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{2}}$	$y_0(0,8) = 1,3$	$x \in [0,8;1,8]$
19	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{3}}$	$y_0(1,1) = 1,5$	$x \in [1,1;2,1]$
20	$y' = x + \sin\frac{y}{11}$	$y_0(0,6) = 1,2$	$x \in [0,6;1,6]$
21	$y' = x + \sin\frac{y}{1,25}$	$y_0(0,5) = 1,8$	$x \in [0,5;1,5]$
22	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{15}}$	$y_0(0,2) = 1,1$	$x \in [0,2;1,2]$
23	$y' = x + \sin\frac{y}{1,5}$	$y_0(0,1) = 0,8$	$x \in [0,1;1,1]$
24	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{0,3}}$	$y_0(0,5) = 0,6$	$x \in [0,1;1,1]$
25	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{0,7}}$	$y_0(1,2) = 1,4$	$x \in [1,2;2,2]$
26	$y' = x + \cos\frac{y}{1,25}$	$y_0(0,4) = 0,8$	$x \in [0,4;1,4]$
27	$y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{1,5}}$	$y_0(0,3) = 0,9$	$x \in [0,3;1,3]$
28	$y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{1,3}}$	$y_0(1,2) = 1,8$	$x \in [1,2;2,2]$
29	$y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{0,3}}$	$y_0(0,7) = 2,1$	$x \in [0,7;1,7]$
30	$y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{0,7}}$	$y_0(0,9) = 1,7$	$x \in [0,9;1,9]$

	Differensial tenglama	Boshlang'ich shart	$x\in[a;b]$	h_1	h_2
1.	$y'=y^3-x$	$y\|_{x=0}=1$	[0; 0,5]	0,01	0,1
2.	$y'=x^2y^2-1$	$y\|_{x=0}=1$	[0; 0,5]	0,01	0,1
3.	$y'=x^2-y^2$	$y\|_{x=0}=0$	[0; 2]	0,1	0,4
4.	$y'=\dfrac{1+x^2}{y}+1$	$y\|_{x=0}=1$	[0; 1]	0,01	0,2
5.	$y'=\dfrac{xy}{1+x+y}$	$y\|_{x=0}=1$	[0; 0,5]	0,01	0,1
6.	$y'=e^x+xy$	$y\|_{x=0}=0$	[0; 1]	0,1	0,2
7.	$y'=\sin y-\sin x$	$y\|_{x=0}=0$	[0; 1]	0,1	0,2
8.	$y'=1+x+x^2-2y^2$	$y\|_{x=1}=1$	[1; 1,1]	0,05	0,1
9.	$y'=\dfrac{x^2+y^2}{10}$	$y\|_{x=1}=1$	[1; 1,5]	0,05	0,1
10.	$y'=\dfrac{1}{x^2+y^2}$	$y\|_{x=0,5}=0.5$	[0,5; 1]	0,05	0,1
11.	$y'=x^3y^3+x^2$	$y\|_{x=0}=1$	[0; 0,5]	0,05	0,1
12.	$y'=\sqrt{xy^2+1}$	$y\|_{x=0}=0$	[1; 1,5]	0,05	0,1
13.	$y'=y^2+xy+x^2$	$y\|_{x=0}=1$	[0; 0,5]	0,01	0,1
14.	$y'=xy^3-1$	$y\|_{x=0}=0$	[0; 1]	0,01	0,05
15.	$y'=\sqrt{1+x^3+y}$	$y\|_{x=0,2}=1$	[0,2; 1,2]	0,1	0,2
16.	$y'=\dfrac{x}{2}+\dfrac{e^x}{x+y}$	$y\|_{x=0}=1,5$	[0,3; 1,3]	0,1	0,2
17.	$y'=x-\left(\dfrac{1}{2}-\sqrt{\dfrac{3}{y}}\right)$	$y\|_{x=1}=2$	[1; 2]	0,01	0,02
18.	$y'=x+\sqrt{1+y^2}$	$y\|_{x=0,3}=0,2$	[0,3; 1,3]	0,1	0,2

19.	$y' = x^2 + 2y$	$y\vert_{x=0} = 0{,}2$	[0; 1]	0,1	0,2
20.	$y' = \sqrt{x} + \dfrac{y^2}{2}$	$y\vert_{x=1} = 1$	[1; 2]	0,1	0,2
21.	$y' = x + \sin\dfrac{y}{x}$	$y\vert_{x=1} = 1$	[1; 2]	0,01	0,2
22.	$y' = x + y^2$	$y\vert_{x=0} = 0{,}3$	[0; 1]	0,1	0,2
23.	$y' = \dfrac{y^2 + x^2}{y^2}$	$y\vert_{x=0} = 1$	[0; 1]	0,1	0,2
24.	$y' = x - y^2$	$y\vert_{x=0} = 1$	[0; 1]	0,1	0,2
25.	$y' = 2x - 0{,}1y^2$	$y\vert_{x=0} = 1$	[0; 1]	0,1	0,2
26.	$y' = \dfrac{1 - xy}{1 - x^2}$	$y\vert_{x=0} = 1$	[0; 1]	0,1	0,2
27.	$y' = e^x - \dfrac{y}{x}$	$y\vert_{x=1} = 1$	[1; 2]	0,1	0,2
28.	$y' = xy^2 - 1$	$y\vert_{x=0} = 0$	[0; 1]	0,1	0,2
29.	$y' = 1{,}5y\sqrt{x}$	$y\vert_{x=1} = 2{,}7183$	[1; 2]	0,1	0,2
30.	$y' = x^3 - yx - y^2$	$y\vert_{x=0} = 0{,}5$	[0; 0,5]	0,05	0,1

Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar uchun Teylor formulasi va uning tatbiqlari

Qo‘yilgan masalani to‘g‘ri hal qilish uchun, birinchidan, masalaning o‘zini yaxshi tushunish, ikkinchidan, ishlatiladigan matematik apparatning nozik jihatlarini bilish, uchinchidan esa shu tipdagi masalalarni hal qilish bo‘yicha yetarli tajribaga ega bo‘lish zarur.

Ushbu laboratoriya ishida Teylor formulasi talabalarga Oliy matematikada bayon qilinadigan barcha formulalar kabi amaliy masalalarni hal qilish quroli sifatida taqdim etiladi.

Laboratoriya ishidan maqsad talabalarni Teylor formulasi va shu formula yordamida hal qilinadigan masalalarning ayrimlari bilan yaqindan tanishtirish, shuningdek ushbu tipdagi masalalarni yechish bo‘yicha ularda muayyan ko‘nikma hosil qilishdir.

I. Tushuncha va faktlar

1-teorema. $f(x;y)$ funksiya $M_0(x_0;y_0)$ nuqtaning biror $\varepsilon>0$ atrofi $\left\{(x;y)\middle|\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\varepsilon\right\}$da $n+1$ marta differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda

$$f(x_0+\Delta x;y_0+\Delta x)=f(x_0;y_0)+df\big|_{M_0}+\frac{1}{2!}d^2f\big|_{M_0}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{n!}d^nf\big|_{M_0}+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f\big|_N \tag{1}$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. (1) tenglik Teylor formulasi deb ataladi.

Bu yerda $N(x_0;y_0)$ va $(x_0+\Delta x;\ y_0+\Delta y)$ nuqtalarni tutashtiruvchi kesmadagi biror nuqta;

$$d^kf\big|_{M_0}=\sum_{i=o}^{k}C_k^i\,\frac{\partial^k f(x_0;y_0)}{\partial x^{k-i}\partial y^i}\cdot\Delta x^{k-i}\cdot\Delta y^i. \tag{2}$$

Xususiy holda,

$k=1$ bo‘lganda,

$$df\big|_{M_0}=\frac{\partial f(x_0;y_0)}{\partial x}\cdot\Delta x+\frac{\partial f(x_0;y_0)}{\partial y}\cdot\Delta y,$$

$k=2$ bo‘lganda,

$$d^2 f\Big|_{M_0} = \frac{\partial^2 f(x_0;y_0)}{\partial x^2}\cdot \Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 f(x_0;y_0)}{\partial x \partial y}\cdot \Delta x\cdot \Delta y + \frac{\partial^2 f(x_0;y_0)}{\partial y^2}\cdot \Delta y^2.$$

$R_{n+1} := \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f\Big|_N \cdot R_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f\Big|_N$ Teylor formulasining Lagranj ko'rinishidagi qoldiq hadi deb ataladi.

2-teorema.

a) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} d^n f\Big|_{M_0} = 0, \lim\limits_{\varepsilon\to 0} R_{n+1} = 0;$

b) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{R_{n+1}}{d^n f\Big|_{M_0}} = 0,$ ya'ni $\varepsilon\to 0$ da R_{n+1} $d^n f\Big|_{M_0}$ ga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik miqdor.

Izoh. (1) ko'rinishdagi Teylor formulasi f uch, to'rt va hokazo o'zgaruvchilarning funksiyasi bo'lganda ham o'rinli. Umumiy holda (1) tenglikning o'ng tomoni yozilish jihatidan o'zgarmaydi. Faqat funksiya to'la differensialini hisoblashda o'zgarish bo'ladi. Uch o'zgaruvchili funksiyaning birinchi va ikkinchi tartibli to'la differensiallarini quyida keltiramiz:

$$df\Big|_{M_0} = \frac{\partial f(x_0;y_0;z_0)}{\partial x}\cdot \Delta x + \frac{\partial f(x_0;y_0;z_0)}{\partial y}\cdot \Delta y + \frac{\partial f(x_0;y_0;z_0)}{\partial z}\cdot \Delta z;$$

$$d^2 f\Big|_{M_0} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_{M_0}\cdot \Delta x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big|_{M_0}\cdot \Delta y^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\Big|_{M_0}\cdot \Delta z^2 +$$

$$+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\Big|_{M_0}\cdot \Delta x\cdot \Delta y + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\Big|_{M_0}\cdot \Delta x\cdot \Delta z + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\Big|_{M_0}\cdot \Delta y\cdot \Delta z,$$

bu n da $M_0(x_0;y_0;z_0)$.

Funksiyaning ikkinchi tartibli to'la differensiali argumentlarining ort-tirmalariga nisbati kvadratik formadir.

Ikki o'zgaruvchili funksiya uchun

$$a_{11} := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_{M_0}, a_{12} = a_{21} := \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\Big|_{M_0}, a_{22} := \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big|_{M_0}$$

belgilashlarni kiritsak, uning ikkinchi tartibli to'la differensiali, Δx va Δy ga nisbatan matritsasi

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

dan iborat bo'lgan kvadratik formaga aylanadi.

Uch o'zgaruvchili funksiya uchun esa

$$a_{11} := \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{M_0}, a_{22} := \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{M_0}, a_{33} := \left.\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right|_{M_0},$$

$$a_{12} = a_{21} := \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{M_0}, a_{13} = a_{31} := \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\right|_{M_0}, a_{23} = a_{32} := \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right|_{M_0}$$

belgilashlarni kiritsak, uning 2-tartibli to'la differensiali matritsasi

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

bo'lgan kvadratik formadan iborat bo'ladi.

$Q(x_1;x_2;x_3)=X^T \cdot A \cdot X$ kvadratik formani qaraymiz. Bu yerda

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, X^T = (x_1\ x_2\ x_3).$$

Q(0;0;0)=0.

1-ta'rif. Agar $Q(x_1;x_2;x_3)$ kvadratik forma argumentlarining $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \neq 0$ shartni qanoatlantiradigan barcha qiymatlarida musbat (manfiy) bo'lsa, musbat (manfiy) aniqlangan kvadratik forma deb ataladi.

$$\delta_1 := a_{11}, \delta_2 := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \delta_3 := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

belgilashlarni kiritamiz.

3-teorema. $\delta_1>0$, $\delta_2>0$ ($\delta_1>0$, $\delta_2>0$, $\delta_3>0$) bo'lsa, ikki (uch) o'zgaruvchili f funksiyaning ikkinchi tartibli to'la differensiali argumentlarining orttirmalariga nisbatan musbat aniqlangan kvadratik forma bo'ladi.

4-teorema. $\delta_1<0$, $\delta_2>0$ ($\delta_1<0$, $\delta_2>0$, $\delta_3<0$) bo'lsa, ikki (uch) o'zgaruvchili f funksiyaning ikkinchi tartibli to'la differensiali argumentlarining orttirmalariga nisbatan manfiy aniqlangan kvadratik forma bo'ladi.

2-ta'rif. Agar M_0 nuqtaning biror atrofi topilib, shu atrofdan olingan M_0 dan farqli bo'lgan ixtiyoriy M nuqta uchun $f(M)<f(M_0)$ ($f(M)>f(M_0)$) tengsizlik bajarilsa, $f(M)$ funksiya M_0 nuqtada lokal maksimumga (minimumga) ega deyiladi.

Agar funksiya M_0 nuqtada lokal maksimum yoki lokal minimumga ega bo'lsa, u M_0 nuqtada **lokal ekstremumga** (yoki shunchaki **ekstremumga**) ega deyiladi.

3-ta'rif. Agar $u=f(x;y)$ funksiya uchun $M_0(x_0;y_0)$ ($\varphi(x_0;y_0)=0$) nuqta va uning biror atrofi topilib, bu atrofdan olingan $\varphi(x,y)=0$ bog'lanish shartini qanoatlantiruvchi va M_0 dan farqli ixtiyoriy $M(x,u)$ nuqta uchun

$$f(x;y)<f(x_0;y_0)(f(x;y)>f(x_0;y_0))$$

shart bajarilsa, $f(x;y)$ funksiya $M_0(x_0;u_0)$ nuqtada shartli maksimumga (minimumga) ega deyiladi.

5-Teorema. (ekstremumning zaruriy sharti). $f(x;y;z)$ funksiya $M_0(x_0;y_0;z_0)$ nuqtada lokal ekstremumga ega va differensiallanuvchi bo'lsa,

$$\frac{\partial f(x_0;y_0;z_0)}{\partial x}=\frac{\partial f(x_0;y_0;z_0)}{\partial y}=\frac{\partial f(x_0;y_0;z_0)}{\partial z}=0$$

bo'ladi.

Natija. Agar $f(x;y;z)$ funksiya $M_0(x_0;y_0;z_0)$ nuqtada lokal ekstremumga ega va differensiallanuvchi bo'lsa, Δx, Δy va Δz ning barcha qiymatlarida

$$df\big|_{M_0}=0$$

bo'ladi.

Funksiyaning birinchi tartibli to'la differensiali nolga teng bo'ladigan nuqtalar uning statsionar nuqtalari deb ataladi.

6-teorema. (ekstremumning yetarli sharti).
M_0 nuqta ikki marta differensiallanuvchi bo'lgan f funksiyaning statsionar nuqtasi bo'lsin. Agar $d^2f\big|_{M_0}$ musbat (manfiy) aniqlangan kvadratik forma bo'lsa, f funksiya M_0 nuqtada lokal minimumga (maksimumga) ega bo'ladi.

7-teorema. Agar $(x_0;y_0;z_0)$ $L(x;y;\lambda):=f(x;y)+\lambda\varphi(x;y)$ funksiyaning statsionar nuqtasi bo'lib,

$$F(x;u):=f(x;y)+\lambda_0\varphi(x;y)$$

funksiyaning $M_0(x_0;y_0)$ nuqtadagi ikkinchi tartibli to'la differensiali, ya'ni

$d^2\Phi\Big|_{M_0}$ musbat (manfiy) aniqlangan kvadratik forma bo'lsa, $u=f(x;y)$ funksiya $M_0(x_0;y_0)$ nuqtada $\varphi(x;y)=0$ bog'lanishli shartli minimumga (maksimumga) ega bo'ladi.

II. Masalaning qo'yilishi

1. Berilgan $P_m(x;y)$ ko'phadni Teylor formulasidan foydalanib, $(x-x_0)$ va $(y-y_0)$ ning darajalari orqali ifodalash.
2. Berilgan arifmetik ifodaning qiymatini $n=1$ uchun Teylor formulasidan foydalanib (qoldiq hadni hisobga olmasdan) taqribiy hisoblash.
3. $u=f(x;y)$ funksiyaning statsionar nuqtalarini topish; topilgan nuqtalarda $f(x;y)$ funksiya lokal ekstremumga ega bo'lishi-bo'lmasligini d^2f orqali aniqlash.
4. $u=f(x;y)$ funksiya berilgan $\varphi(x;y)=0$ bog'lanishli, shartli ekstremumga ega bo'ladigan nuqtalarni topish.

III. Masalalarni yechish algoritmlari

1-masala. x^2y+y^3 ko'phadni $(x+1)$ va $(y-1)$ ning darajalari orqali ifodalang.

1-masalani yechish algoritmi.

a) Ko'phadning darajasi m ni aniqlash;

$$m=3$$

Berilgan ko'phad uchun $n=3$ bo'lganda Teylor formulasini yozsak, qoldiq had 0 ga teng bo'ladi.

b) x_0, y_0 va Δx, Δy ni aniqlash;

$$x_0=-1,\quad y_0=1,\quad \Delta x=x+1,\quad \Delta y=y-1$$

d) $d^kP_3\Big|_{(-1;1)}$ $(k=0,1,2,3)$ ni hioblash $\left(d^0P_3\Big|_{(-1;1)}=P_3(-1;1)\right)$

$$P_3(-1;1)=(-1)^2\cdot 1+1^3=2;\qquad P_3(-1;1)=2,$$

$$\frac{\partial P_3}{\partial x}=2xy,\quad \frac{\partial P_3}{\partial y}=x^2+3y^2,\quad \frac{\partial P_3}{\partial x}\Big|_{(-1;1)}=-2;\quad \frac{\partial P_3}{\partial y}\Big|_{(-1;1)}=4,$$

$$dP_3\big|_{(-1;1)} = -2(x+1)+4(y-1).$$

$$\frac{\partial^2 P_3}{\partial x^2} = 2y, \quad \frac{\partial^2 P_3}{\partial x \partial y} = 2x, \quad \frac{\partial^2 P_3}{\partial y^2} = 6y,$$

$$\left.\frac{\partial^2 P_3}{\partial x^2}\right|_{(-1;1)} = 2, \quad \left.\frac{\partial^2 P_3}{\partial x \partial y}\right|_{(-1;1)} = -2, \quad \left.\frac{\partial^2 P_3}{\partial y^2}\right|_{(-1;1)} = 6,$$

$$d^2 P_3\big|_{(-1;1)} = 2(x+1)^2 - 2\cdot 2\cdot (x+1)(y-1)+6(y-1)^2.$$

$$\frac{\partial^3 P_3}{\partial x^3} = 0, \quad \frac{\partial^3 P_3}{\partial x^2 \partial y} = 2, \quad \frac{\partial^3 P_3}{\partial x \partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 P_3}{\partial y^3} = 6,$$

$$d^3 P_3\big|_{(-1;1)} = 3\cdot 2\cdot (x+1)^2(y-1)+6(y-1)^3.$$

2) Topilganlarni

$$P_3(x;y) = P_3(-1;1)+dP_3\big|_{(-1;1)} + \frac{1}{2!}d^2 P_3\big|_{(-1;1)} + \frac{1}{3!}d^3 P_3\big|_{(-1;1)}$$

tenglikka qo'yish:

$$x^2 y + y^3 = 2 - 2(x+1)+4(y-1)+(x+1)^2 - 2(x+1)(y-1)+$$
$$+3(y-1)^2 + (x+1)^2(y-1)+(y-1)^3.$$

Masala hal qilindi.

2-masala. $\sqrt{(4{,}05)^2 + (3{,}07)^2}$ ni taqribiy hisoblang.

2-masalani yechish algoritmi.

$$f(x;y) \approx f(x_0;y_0) + \frac{\partial f(x_0;y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0;y_0)}{\partial y}\Delta y \tag{1}$$

taqribiy hisoblash formulasidan foydalanish uchun

a) $f(x;y)$ funksiyani tanlash:

$$f(x;y) = \sqrt{x^2+y^2}; f(4{,}05;3{,}07) = \sqrt{(4{,}05)^2 + (3{,}07)^2},$$

b) x_0 va y_0 ni $f(x_0;y_0)$, $\frac{\partial f(x_0;y_0)}{\partial x}$ va $\frac{\partial f(x_0;y_0)}{\partial y}$ aniq hisoblanadigan hamda $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$ nisbatan kichik bo'ladigan qilib tanlash:

$$x_0 = 4; y_0 = 3; \Delta x = 0{,}05, \Delta y = 0{,}07,$$

d) $f(x_0;y_0)$, $\frac{\partial f(x_0;y_0)}{\partial x}$ va $\frac{\partial f(x_0;y_0)}{\partial y}$ ni hisoblash:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f(4;3)=5,\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{(4;3)}=\frac{4}{5},\frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{(4;3)}=\frac{3}{5}$$

e) topilgan qiymatlarni (1) taqribiy hisoblash formulasiga qo'yish:

$$\sqrt{(4{,}05)^2+(3{,}07)^2}\approx 5+\frac{4}{3}\cdot 0{,}05+\frac{3}{5}\cdot 0{,}07=5+0{,}04+\frac{6}{10}\cdot 0{,}07=$$

$$=5+0{,}04+0{,}042=5{,}082;\sqrt{(4{,}05)^2+(3{,}07)^2}\approx 5{,}082.$$

3-masala. $f(x;y)=x^3+y^3-3xy$ funksiyaning lokal ekstremum qiymatlarini toping.

3-masalani yechish algoritmi.

a) Birinchi tartibli xususiy hosilalarni, ya'ni $\frac{\partial f}{\partial x}$ va $\frac{\partial f}{\partial y}$ ni topish;

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases}$$

sistemani yechib, $f(x;y)$ funksiyaning statsionar nuqtalarini aniqlash:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2-3y,\frac{\partial f}{\partial y}=3y^2-3x;$$

$$\begin{cases}3x^2-3y=0\\ 3y^2-3x=0,\end{cases}\begin{cases}x^2-y=0\\ y^2-x=0\end{cases}$$

$M_0(0;0)$ va $M_1(1;1)$ statsionar nuqtalar.

b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ xususiy hosilalarni topish; har bir statsionar nuqta uchun a_{11}, a_{12}, a_{22} koeffitsientlarni, so'ngra $\delta_1=a_{11}$, $\delta_2=a_{11}\cdot a_{22}-a^2_{12}$ minorlarni hisoblash;

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x, \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-3, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6y$$

$M_0(0;0)$: $a_{11}=0$, $a_{12}=-3$, $a_{22}=0$ $\delta_1=0$, $\delta_2=-9$

$M_1(1;1)$: $a_{11}=6$, $a_{12}=-3$, $a_{22}=0$ $\delta_1=6$, $\delta_2=36-9=27$, $\delta_3=27$

d) $\delta_1>0$, $\delta_2>0$ bo'lsa, d^2f kvadratik forma musbat aniqlangan, $\delta_1<0$, $\delta_2>0$ bo'lsa, d^2f kvadratik forma manfiy aniqlanadiganidan foydalanib, har bir statsionar nuqtada lokal ekstremum bor-yo'qligi haqida xulosa chiqarish; funksiyaning ekstremum qiymatlarini hisoblash:

$M_0(0;0)$ uchun $\delta_1=0$, $\delta_2<0$: d^2f aniq ishorali kvadratik forma emas.

M_0 nuqtada shartli ekstremum mavjud emas.

$M_1(1;1)$ uchun $\delta_1>0$, $\delta_2>0$. Demak, d^2f musbat aniqlangan kvadratik forma.

$M_1(1;1)$ nuqtada berilgan funksiya $f(1;1)=1+1-3=-1$ ga teng lokal minimum qiymat qabul qiladi.

4-masala. $u=x+2y$ funksiyaning $x^2+y^2=5$ bog'lanishli shartli ekstremum qiymatlarini toping.

4-masalani yechish algoritmi.

a) $L(x;y;\lambda)$ funksiyani tuzish; $L(x;y;\lambda)$ ning statsionar nuqtalarini topish:

$$L(x;y;\lambda)=x+2y+\lambda(x^2+y^2-5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=1+2\lambda x, \quad \frac{\partial L}{\partial y}=2+2\lambda y, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda}=x^2+y^2-5;$$

$$\begin{cases} 1+2\lambda x=0, \\ 2+2\lambda y=0, \\ x^2+y^2-5=0. \end{cases}$$

sistemani yechib,

$M_1\left(-1;-2;\frac{1}{2}\right)$, $M_2\left(1;2;-\frac{1}{2}\right)$ statsionar nuqtalarni topamiz.

b) har bir statsionar nuqta uchun

$$\Phi(x,y)=f(x,y)+\lambda_0\varphi(x,y)$$

funksiyani tuzish:

$$M_1\left(-1;-2;\frac{1}{2}\right): \Phi(x;y)=x+2y+\frac{1}{2}\left(x^2+y^2-5\right).$$

$$M_2\left(1;2;-\frac{1}{2}\right): \Phi(x;y)=x+2y-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2-5\right),$$

d) har bir statsionar nuqta uchun d^2F ni topish va xulosa chiqarish; $f(x,y)$ ning ekstremum qiymatlarini hisoblash:

$$M_1\left(-1;-2;\frac{1}{2}\right): \quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}=1, \quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}=0, \quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=1;$$

$\delta_1=1>0$, $\delta_2=1>0$. Demak, (-1;-2) nuqtada d^2F musbat aniqlangan; $f(x;y)=x+2y$ funksiya (-1;-2) nuqtada $f(-1;-2)=-5$ ga teng shartli ($x^2+y^2=5$ bog'lanishli) minimum qiymatni qabul qiladi.

$$M_2\left(1;2;-\frac{1}{2}\right): \quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}=-1, \quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}=0, \quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=-1;$$

$\delta_1=-1<0$, $\delta_2=1>0$. Demak, (1;2) nuqtada d^2F manfiy aniqlangan; $f(x;y)=x+2y$ funksiya (1;2) nuqtada $f(1;2)=5$ ga teng shartli ($x^2+y^2=5$ bog'lanishli) maksimum qiymatni qabul qiladi.

IV. Variantlar

1 - variant

1. $P_m(x;y) = x^2 y + xy^2 + 1, \quad x_0 = 1,\ y_0 = 1$
2. $\sqrt{(4{,}3)^2 + (3{,}21)^2} = ?$
3. $f(x;y) = xy^2(1 - x - y)$
4. $f(x;y) = \cos^2 x + \sin^2 x;\ y - x - \frac{\pi}{4} = 0$

2 - variant

1. $P_m(x;y) = x^3 + y^3 - 2xy,\ x_0 = -1,\ y_0 = -1$
2. $\sin(30{,}05)^0 \cdot \cos(60{,}02)^0 = ?$
3. $f(x;y) = 4 - (x^2 + y^2)^{2/3}$
4. $f(x;y) = x + y;\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{2} = 0$

3 - variant

1. $P_m(x;y) = xy + x^2 + y^2,\ x_0 = 0,\ y_0 = 1$
2. $\ln(e^{2.5} - e^{2.03} + 1) = ?$
3. $f(x;y) = x^3 + y^3 - 15xy$
4. $f(x;y) = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4;\ x + y + 3 = 0$

4 - variant

1. $P_m(x;y) = x^2 y - xy^2,\ x_0 = 2,\ y_0 = 1$
2. $arctg1{,}05 \cdot arctg1{,}007 = ?$ (I-chorakda)
3. $f(x;y) = (x^2 + y^2)\left(e^{-(x^2+y^2)} - 1\right)$
4. $f(x;y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y + 4);\ x^2 + y^2 - 1 = 0$

5 - variant

1. $P_m(x;y) = 2xy + x^2 - y^2,\ x_0 = 0,\ y_0 = -1\,2.$
2. $(2{,}04)^3 - 2{,}04 \cdot 3{,}02 + (3{,}02)^3 = ?$
3. $f(x;y) = x^2 - xy + y^2 - 4x$
4. $f(x;y) = xy^2; x + 2y = 1$

6 - variant

1. $P_m(x;y) = 2x^2 + 3y^2 + xy;\ x_0 = 2,\ y_0 = 2$
2. $\sqrt{(6{,}03)^2 + (5{,}02)^2 + 3} = ?$
3. $f(x;y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$
4. $f(x;y) = xy;\ x^2 + y^2 - 2 = 0$

7 - variant

1. $P_m(x;y) = xy^2 + xy + 2,\ x_0 = -1,\ y_0 = -2$
2. $tg(45{,}07)^0 \cdot ctg(45{,}15)^0 = ?$
3. $f(x;y) = \frac{1}{2}xy + (47 - x - y)\left(\frac{y}{3} + \frac{y}{4}\right)$
4. $f(x;y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y};\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{4} = 0$

8 - variant

1. $P_m(x;y) = 2x^2y + 3xy + 4,\ x_0 = 2,\ y_0 = -2$
2. $\arcsin 0{,}25 \cdot \arccos 0{,}42 = ?$
3. $f(x;y) = x^3y^2(1 - x - y)$
4. $f(x;y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y};\ x + y - 2 = 0$

9 - variant

1. $P_m(x;y)=x^2+xy^2+x+y$, $x_0=3$. $y_0=-3$
2. $e^{0,5}\ln(e+0{,}4)=?$
3. $f(x;y)=x^2+xy+y^2+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$
4. $f(x;y)=x^3-3xy^2+18y$; $3x^2y-y^3-6x=0$

10 - variant

1. $P_m(x;y)=x^3-5xy+y^2-4$; $x_0=0$, $y_0=-2$
2. $\sqrt{(10{,}14)^2-(6{,}27)^2}=?$
3. $f(x;y)=\sin x+\sin y+\sin(x+y)\,0\le x\le\frac{\pi}{2};\,0\le y\le\frac{\pi}{2}$
4. 4. $f(x;y)=xy$; $2x+3y-5=0$

11 - variant

1. $P_m(x;y)=x^3+3x^2y-y^3$, $x_0=1$, $y_0=3$
2. $e^{0{,}15}\cdot\cos(60{,}05)^0=?$
3. $f(x;y)=x^2-xy+y^2+9x-6y+20$
4. $f(x;y)=x^2+y^2$; $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}-1=0$

12 - variant

1. $P_m(x;y)=x^3-xy+9x-6y$; $x_0=3$, $y_0=2$
2. $e^{0{,}21}\cdot\sin(30{,}18)=?$
3. $f(x;y)=y\sqrt{x}-y^2-x+6y$
4. $f(x;y)=2xy$; $x^2+y^2-4=0$

13 - variant

1. $P_m(x;y)=x^2-2xy-y^2+4;\ x_0=2,\ y_0=1$
2. $\ln\left(1+(3{,}03)^2-(3{,}01)^2\right)=?$
3. $f(x;y)=\sin x\cdot\sin y\cdot\sin(x+y),\ 0\le x\le\pi,\ 0\le x\le 4$
4. $f(x;y)=2x+3y,\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{1}{4}=0$

14 - variant

1. $P_m(x;y)=5xy+xy^2-2x^2y;\ x_0=1,\ y_0=3$
2. $e^{0,13}\cdot tg(45{,}12)^0=?$
3. $f(x;y)=x^3-8y^3-6xy+1$
4. $f(x;y)=2\cos^2 x+3\sin^2 y;\ y-x-\dfrac{\pi}{4}=0$

15 - variant

1. $P_m(x;y)=x+y-2x^2+y^2+4;\ x_0=4,\ y_0=-4$
2. $e^{0,05}\cdot ctg(45{,}06)^0=?$
3. $f(x;y)=3x+6y-x^2-xy-y^2$
4. $f(x;y)=x^2y;\ 2x+y-1=0$

16 - variant

1. $P_m(x;y)=x+y-2x^2+y^2+4;\ x_0=4,\ y_0=-4$
2. $e^{0,25}\cdot\ln(e+0{,}05)=?$
3. $f(x;y)=x^2+y^2-2x-4\sqrt{xy}-2y+8$
4. $f(x;y)=x^2+y^2;\ \dfrac{x}{8}+\dfrac{y}{6}-1=0$

17 - variant

1. $P_m(x;y) = 2x^2y + xy - x + y;\ x_0 = 0,\ y_0 = 1$
2. $\ln\left(e + (2{,}05)^2 - (2{,}01)^2\right) = ?$
3. $f(x;y) = e^{x/2}\left(x + y^2\right)$
4. $f(x;y) = 4xy;\ x^2 + y^2 - 9 = 0$

18 - variant

1. $P_m(x;y) = 5x^2 + y^2 - xy;\ x_0 = 2,\ y_0 = 1$
2. $\sqrt{(5{,}11)^2 + (2{,}12)^2 - 4} = ?$
3. $f(x;y) = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$
4. $f(x;y) = 3\cos^2 x + 4\sin^2 y;\ y - x - \dfrac{\pi}{4} = 0$

19 - variant

1. $P_m(x;y) = 3x^2 - 8x + y^2;\ x_0 = 3,\ y_0 = 4$
2. $e^{0{,}12} \cdot ctg(45{,}07) = ?$
3. $f(x;y) = 3x^2 - 2x\sqrt{4} + y - 8x + 8$
4. $f(x;y) = x^2 + y^2 + xy - x - y + 4;\ x + y + 2 = 0$

20 - variant

1. $P_m(x;y) = 3x + 6y - x^2 - y^2;\ x_0 = 1,\ y_0 = 3$
2. $\sqrt{(4{,}25)^2 + (2{,}24)^2 + 5} = ?$
3. $f(x;y) = \left(2x^2 + y^2\right)e^{-\left(x^2 + y^2\right)}$
4. $f(x;y) = 2\cos^2 y + 3\sin^2 x\ ;\ x - y - \dfrac{\pi}{4} = 0$

21 - variant

1. $P_m(x;y) = xy + x^3 y;\ x_0 = 1,\ y_0 = 0$
2. $\sqrt{(5{,}01)^2 + (8{,}13)^2} = ?$
3. $f(x;y) = 2xy + x^2 - x + y^2 + 2y$
4. $f(x;y) = \sin^2 x + \cos^2 y; \quad x - y - \frac{\pi}{4} = 0$

22 - variant

1. $P_m(x;y) = x^3 - y^3 + 2xy;\ x_0 = 1,\ y_0 = 2$
2. $\sqrt{(1{,}21)^3 + (2{,}01)^3} = ?$
3. $f(x;y) = x^3 - y^3 + 15xy$
4. $f(x;y) = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4;\ x + y + 3 = 0$

23 - variant

1. $P_m(x;y) = 2xy - x^2 + y^2;\ x_0 = 1,\ y_0 = 1$
2. $\ln\left(e^{0{,}25} - e^{0{,}15} + 1\right) = ?$
3. $f(x;y) = x^2 + xy - y^2 + 4x - 3y$
4. $f(x;y) = \frac{\sqrt{2}}{2}(4 + x - y);\ x^2 + y^2 = 1$

24 - variant

1. $P_m(x;y) = xy^2 + x^2 y + 1;\ x_0 = 1,\ y_0 = -1$
2. $\sqrt{(3{,}15)^3 + (2{,}11)^3 + 1} = ?$
3. $f(x;y) = \frac{1}{2}x^2 + xy - \frac{3}{2}y^2 - 5x - y$
4. $f(x;y) = x^2 y;\ 2x + y = 1$

25 - variant

1. $P_m(x;y)=3x^2+2y^2-xy;\ x_0=3,\ y_0=-1$
2. $e^{0.25}\cdot\sin(89{,}5)^0=?$
3. $f(x;y)=x^2y^3(1-x-y)$
4. $f(x;y)=y^3-8x^2y+18x;\ 3xy^2-x^3-6y=0$

26 - variant

1. $P_m(x;y)=y^3-5xy+x^2+4;\ x_0=0,\ y_0=1$
2. $e^{0.15}\cdot\ln(l+0.25)=?$
3. $f(x;y)=-y^2+xy-x^2-9x+6x-20$
4. $f(x;y)=x^2+y^2;\ \frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$

27 - variant

1. $P_m(x;y)=x^2+y^2+3xy+5;\ x_0=0,\ y_0=2$
2. $\arcsin 0{,}15\cdot\arccos 0{,}32=?$
3. $f(x;y)=x^2+xy+y^2+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$
4. $f(x;y)=xy^2;\ x+2y=1$

28 - variant

1. $P_m(x;y)=x-y+x^2+y^2-4;\ x_0=3,\ y_0=1$
2. $\ln\left(l+(2{,}15)^2-(2{,}23)^2\right)=?$
3. $f(x;y)=2y^3-x^2y+5y^2+x^2$
4. $f(x;y)=3\cos^2 y+4\sin^2 x;\ \ x-y=\frac{\pi}{4}$

29 - variant

1. $P_m(x;y)=2x^2-4x+y^2;\ x_0=1,\ y_0=1$
2. $\sqrt{(2{,}18)^3-(3{,}24)^3-10}=?$
3. $f(x;y)=e^y\left(y+x^2\right)$
4. $f(x;y)=x^2+y^2+xy-x-y+4;\ x+y+2=0$

30 - variant

1. $P_m(x;y)=2xy^2+xy+4;\ x_0=1,\ y_0=-1$
2. $e^{0{,}25}\cdot tg(45{,}05)^0=?$
3. $f(x;y)=\frac{3}{2}x^2+\sqrt{x}+\frac{1}{2}y-4x+4$
4. $f(x;y)=3xy\ ;\ x^2+y^2=4$

Kompleks o'zgaruvchili funksiyalarning qoldiqlari nazariyasidan foydalanib aniq integrallarni hisoblash

Ishning maqsadi:

1. Talabalarga haqiqiy va kompleks o'zgaruvchili funksiyalarning har hil ko'rinishlaridagi integrallarini hisoblashlarga qoldiqlar nazariyasini tatbiq qilish mumkinligini ko'rsatish va odatdagi qo'llaniladigan kvadraturalar yordamida integrallanmaydigan funksiyalar integrallarini talabalarga qoldiqlar yordamida hisoblashni o'rgatish.

Ajralgan maxsus nuqtalar va ularning turlarga ajralishi

$w=f(z)$ funksiya biror a nuqtada analitik bo'lsin.

1-ta'rif.

Agar $f(z)$ funksiya biror a nuqtada analitik bo'lsa, u holda a nuqtaga $f(z)$ ning to'g'ri nuqtasi deyiladi.

2-ta'rif. Agar $f(z)$ funksiya a nuqtada nolga aylansa, ya'ni $f(a)=0$ bo'lsa, u holda a nuqta $f(z)$ ning noli deyiladi.

3-ta'rif. Agar a nuqtada $f(a)=0$, $f'(a)=0$, $f''(a)=0$, ..., $f^{(k-1)}(a)=0$ bo'lib, $f^{(k)}(a)\neq 0$ bo'lsa, u holda a ga $f(z)$ funksiyaning k-karrali noli deyiladi. Agar $k=1$ bo'lsa, a ga oddiy nol deyiladi.

4-ta'rif. Agar $f(z)$ funksiya a nuqtada analitik bo'lmasa, a maxsus nuqta deyiladi.

Maxsus nuqtalarning xillari juda ko'p bo'lib, ulardan amalda ko'p uchraydigani ajralgan (yakkalangan) maxsus nuqtalardir.

5-ta'rif. Agar $f(z)$ funksiya a nuqtaning biror $0<|z-a|<R$ atrofida analitik, nuqtaning o'zida analitik bo'lmasa, u holda a nuqtaga $f(z)$ funksiyaning ajralgan maxsus nuqtasi deyiladi.

Ajralgan maxsus nuqtalar uch xil bo'ladi:

1) chetlashtiriladigan (qutulib bo'ladigan) maxsus nuqtalar;
2) qutblar;
3) muhim maxsus nuqtalar.

6-ta'rif. Agar $f(z)$ funksiyaning a maxsus nuqtasida $\lim\limits_{z\to a} f(z)=A$ chekli limitga ega bo'lsa, u holda a nuqta $f(z)$

funksiyaning chetlashtiriladigan (qutulib bo'ladigan) maxsus nuqtasi deyiladi.

7-ta'rif. Agar $f(z)$ funksiyaning a maxsus nuqtasida $\lim\limits_{z\to a} f(z)=\infty$ bo'lsa, u holda a ga $f(z)$ funksiyaning qutbi deyiladi. Agar a nuqta $f(z)$ funksiyaning noli bo'lsa, $\varphi(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ funksiyaning qutbi bo'ladi.

8-ta'rif. Agar a nuqtada $f(z)$ funksiyaning limiti mavjud bo'lmasa, u holda a nuqtaga $f(z)$ funksiyaning muhim maxsus nuqtasi deyiladi.

$f(z)$ funksiyaning ajralgan maxsus nuqtasining qaysi tipga kirishini shu funksiyaning bu nuqta atrofidagi Loran qatoriga yoyilishidan ham aniqlash mumkin bo'ladi.

1-teorema. $f(z)$ funksiyaning ajralgan maxsus a nuqtasi chetlashtiriladigan (qutulib bo'ladigan) maxsus nuqta bo'lishi uchun Loran qatori bosh qismga ega bo'lmasligi zarur va yetarlidir.

Demak, bu nuqta atrofidagi $f(z)$ funksiyasining Loran qatoriga yoyilmasi

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-a)^n$$

ko'rinishda bo'ladi.

2-teorema. $f(z)$ funksiyaning ajralgan maxsus a nuqtasi qutb bo'lishi uchun Loran qatoridagi bosh qism hadlari soni chekli bo'lishi zarur va yetarlidir, ya'ni:

$$f(z)=\sum_{n=1}^{N}\frac{C_{-n}}{(z-a)^n}+\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-a)^n=\sum_{n=1}^{N} C_{-n}(z-a)^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-a)^n.$$

3-teorema. $f(z)$ funksiyaning ajralgan maxsus a nuqtasi muhim maxsus nuqta bo'lishi uchun Loran qatorining bosh qismi cheksiz ko'p hadlarga ega bo'lishi zarur va yetarli, ya'ni:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(z-a)^n$$

Funksiyaning ajralgan maxsus nuqtadagi qoldig'i (chegirmasi) va uning integralni hisoblashga tatbiqi

Ma'lumki, agar $f(z)$ funksiya a nuqtani o'z ichiga olgan biror G sohada analitik bo'lsa, u holda a nuqtani o'rab olgan G ichida yotgan yopiq L kontur bo'ylab olingan integral Koshi teoremasiga muvofiq:

$$\oint_L f(z)dz = 0 .$$

Agar a nuqta $f(z)$ funksiyaning ajralgan maxsus nuqtasi bo'lsa, u vaqtda bu integral nolga teng bo'lmasligi mumkin. Ana shu integralni topamiz.

Ta'rif. Agar $f(z)$ funksiya $0<|z-a|<R$ halqada analitik funksiya bo'lsa, shu funksiyaning ajralgan maxsus a nuqtaga nisbatan qoldig'i deb,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L f(z)dz \tag{1}$$

integralning qiymatiga aytiladi va

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L f(z)dz \tag{2}$$

Res – fransuzcha Residu so'zidan olingan bo'lib, qoldiq degan ma'noni beradi.

Ikkinchidan,

$$C_{-1} = \frac{1}{2\pi}\int_L f(z)dz \tag{3}$$

(2) va (3) dan

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = C_{-1}$$

bo'lishini olamiz. Bundan esa, agar a nuqta $f(z)$ funksiyaning to'g'ri yoki qutulib bo'ladigan (yo'qotilishi mumkin bo'lgan) maxsus nuqtasi bo'lsa,

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = 0.$$

1) agar $z=a$ nuqta $f(z)$ funksiyaning oddiy qutbi bo'lsa,

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \lim_{z \to a} (z-a) f(z). \qquad (4)$$

2) agar $z=a$ nuqta $f(z)$ funksiyaning n-tartibli qutbi bo'lsa,

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left((z-a)^n \cdot f(z)\right) \qquad (5)$$

Agar

$$f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)}$$

kasr shaklida bo'lib, $z=a$ nuqta $f(z)$ funksiyaning oddiy qutbi va $f_1(z)$, $f_2(z)$ funksiyalar $z=a$ nuqtada $f_2(a)=0$, $f_2'(a)\neq 0$, $f(a)\neq 0$ shartni qanoatlantirsa,

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \frac{f_1(a)}{f_2'(a)}. \qquad (6)$$

Teorema (qoldiqlar haqidagi asosiy teorema).

Agar $f(z)$ funksiya ℓ yopiq chiziq bilan o'ralgan G - yopiq sohaning ajralgan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nuqtalaridan boshqa hamma nuqtalarida analitik bo'lsa, u holda

$$\oint_L f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=a} [f(z); a_k]. \qquad (7)$$

Bajariladigan laboratoriya ishida qaralayotgan integrallarni asosan ikki tipga ajratish mumkin:

1-tip. $$\Im = \int_0^{2\pi} R(\cos\varphi; \sin\varphi) d\varphi$$

ko'rinishdagi integral bo'lib, bu yerdagi R $\cos\varphi$ va $\sin\varphi$ larning ratsional funksiyasi. Bu tipdagi integralni $z=e^{i\varphi}$ almashtirish yordamida $|z|=1$ dagi aylana konturi bo'yicha olinadigan kompleks o'zgaruvchining integraliga keltiriladi va Eyler formulalari

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right); \sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right); d\varphi = -i\frac{dz}{z}$$

l.rdan foydalaniladi:

1- namunali misol

$$\Im = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1-2a\cos\varphi + a^2} \quad (|a|<1)$$

integralni hisoblangan.

$z=e^{i\varphi}$ deb, tegishli shakl almashtirishlardan foydalansak,

$$\Im = \int_{|z|=1} \frac{idz}{az^2-(a^2+1)z+a}$$

integralini hosil qilamiz. Maxrajni nolga tenglashtirib:

$$az^2-(a^2+1)z+a=0.$$

$z_1=a$; $z_2=1/a$ ildizlami topamiz.

Bulardan z_1 maxsus nuqta integrallash konturi ichida bo'lib, bu nuqta birinchi tartibli qutb bo'ladi. U holda

$$\operatorname{Res}_{z=z_1=a} f(z) = \frac{i}{2a^2-(a^2+1)} = \frac{i}{a^2-1}.$$

Bundan esa

$$\Im = 2\pi i \cdot \operatorname{Res} f(z_1) = 2\pi i \cdot \frac{i}{a^2-1} = \frac{2\pi}{1-a^2}.$$

2-tip. $$\Im = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx$$

ko'rinishdagi integral bo'lib, bu yerdagi R x o'zgaruvchining ratsional funksiyasi. Bu chegarasi cheksiz bo'lgan xosmas integraldir.

Agar

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$$

ko'rinishdagi ko'phad bo'lib, m va n lar mos ravishda $P_m(x)$ va $Q_n(x)$ ko'phadlaming darajalari bo'lsa, va $Q_n(x)$ ning nollari haqiqiy o'qdan tashqarida bo'lib, $n \geq m+2$ bo'lsa, integral yaqinlashadi.

2-namunali misol

$$\Im = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1}$$

integral hisoblansin.

Ma'lumki, agar $f(x)$ funksiya $(-\infty,+\infty)$ oralig'idagi yuqori yarim tekislikning chekli sondagi z_1, z_2, ..., z_N maxsus nuqtalaridan boshqa barcha nuqtalarida uzluksiz va analitik funksiya bo'lib, yetarlicha katta bo'lgan $|z|$ lar uchun

$$|f(z)| \le \frac{M}{|z|^{1+\delta}}, M\rangle 0, \delta\rangle 0$$

munosabati o'rinli bo'lsa

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{i=1}^{N} \mathrm{Re}\, s[f(z);z_k].$$

Yuqori yarim tekislikda

$$f(z) = \frac{1}{z^4+1}$$

funksiya

$$z_1 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} \quad \text{va} \quad z_2 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}$$

ko'rinishdagi ikkita maxsus nuqtalarga ega bo'ladi. Bularning har ikkalasi ham $f(z)$ funksiyasining oddiy qutblaridir. Shuning uchun:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{z^4+1} = 2\pi i \sum_{k=1}^{2} \mathrm{Re}\, s[f(z);z_k] = 2\pi i(\mathrm{Re}\, s[f(z);z_1] + \mathrm{Re}\, s[f(z);z_2]) =$$

$$= 2\pi i(\mathrm{Re}\, s[f(z);z_1] + \mathrm{Re}\, s[f(z);z_2]) = 2\pi i\left(\lim_{z\to z_1} \frac{z-z_1}{z^4+1} + \lim_{z\to z_2} \frac{z-z_2}{z^4+1}\right) =$$

$$= 2\pi i\left(\lim_{z\to z_1} \frac{1}{4z^3} + \lim_{z\to z_2} \frac{1}{4z^3}\right) = 2\pi i\left(\frac{1}{4z_1^3} + \frac{1}{4z_2^3}\right) = \frac{2\pi i}{4} \cdot \frac{z_1^3 + z_2^3}{z_1^3 \cdot z_2^3} =$$

$$= \frac{\pi i}{2} \cdot \frac{z_1^3 + z_2^3}{(z_1 z_2)^3} = \frac{\pi i}{2} \cdot \left(\frac{\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^3 + \left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)^3}{\left(\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\right)^3} \right) =$$

$$\frac{\pi i}{2}\cdot\frac{\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)}{\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}\right)\right)^3}=\frac{\pi i}{2}\cdot\frac{-\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}}{(\cos\pi+i\sin\pi)^3}=$$

$$=\frac{\pi i}{2}\cdot\frac{2i\sin\frac{\pi}{4}}{(-1+0)^3}=-\frac{\pi i^2\sin\frac{\pi}{4}}{-1}=\pi\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi.$$

Demak,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^4+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi.$$

Variantlar

1	$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^4+1)^2}$	2	$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{(x^4+1)^2}$
3	$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^x dx}{x^4+1}$	4	$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^x dx}{(x^4+1)^2}$
5	$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^x dx}{(x^4+4)^2}$	6	$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^x dx}{x^2+4}$
7	$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$	8	$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+1)^2}$
9	$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x^2+1)dx}{(x^4+1)^2}$	10	$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2\cdot(x^2+4)}$
11	$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)(x^4+1)}$	12	$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2(x^4+1)}$
13	$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)(x^4+1)}$	14	$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin dx}{x^2+2x+5}$
15	$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^2+2x+5}dx$	16	$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)^2}$
17	$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x dx}{(x^2+2x+5)^2}$	18	$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos x dx}{(x^2+2x+5)^2}$
19	$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^1+1)^3}$	20	$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^4+1)^3}$
21	$\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{dx}{2+\cos x}$	22	$\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{dx}{3+2\cos x}$
23	$\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{dx}{(2+\cos x)^2}$	24	$\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{dx}{(3+2\cos x)^2}$

25	$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{(1-6\cos x+9)^2}$	26	$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{(1+6\cos x+9)^2}$
27	$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{\left(1-0{,}5\cos x+\frac{1}{16}\right)^2}$	28	$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{\left(1+0{,}5\cos x+\frac{1}{16}\right)^2}$
29	$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{(3+2\cos^2 x)^2}$	30	$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{(5+2\cos^2 x)^2}$

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Полунин И.Ф. Курс математического программирования. Минск. «Вышшая школа». 1970. -320 стр.
2. Бойзоқов А., Қаюмов Ш. Ҳисоблаш математикаси асослари. –Т.; 2000. –168 бет.
3. Мақсудов Ш., Салохиддинов С. «Комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси». -Т.; «Ўқитувчи», 1970. -270 бет.
4. Данко П.Е., Попов А.Г. «Высшая математика в упражнениях и задачах Часть I, II и III». Высшая школа -М.; 1971. -730 стр.
5. Березин И.С., Жидков Н.П., «Методы вычислений» Т.1-М.; «Наука», 1962. -270 стр.
6. Березин И.С., Жидков Н.П., «Методы вычислений» Т.2-М.; «Физматгиз», 1962. -308 стр.
7. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.Н. «Вычислителные методы» Т.1-М. «Наука», 1976. -278 стр.
8. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.Н. «Вычислителные методы» Т.2 -М.; «Наука», 1977. -288 стр.

9. Волковицский Л.И., Лунц Г.Л., Аронович И.Г. «Сборник задач по теории функции комплексного переменного». -М.; 1972. -330 стр.

10. Лаврентьев Ю.В., Шабат Б.В. «Методы теории функции комплексного переменного». -М.; 1972. -278 стр.

11. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабулин М.И. «Лекции по теории функций комплексного переменного». -М.; 1982. -212 стр.

12. Пискунов Н.С. «Дифференциал ва интеграл ҳисоб». Т.1-2. -Т.; Фан. 1987. 414 бет.

13. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. «Численные методы». –М.; «Наука». 1987. -598 стр.

14. WWW.Ziyo.net

Mundarija

Muharrir: X.Po'latxo'jayev

Bosishga ruhsat etildi 10.08.2012 y. Bichimi 60x84 1/16.
Shartli bosma tabog'i 5,6. Nusxasi 50 dona. Buyurtma № 465.

TDTU bosmaxonasida chop etildi. Toshkent sh,
Talabalar ko'chasi 54. tel: 246-63-84.