O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

ISLOM KARIMOV NOMIDAGI TOSHKENT DAVLAT

TEXNIKA UNIVERSITETI

OLIY MATEMATIKA

Oddiy differensial tenglamalar

masalalar to‘plami

uslubiy ko‘rsatma

Toshkent-2019

UO‘D:517(075.8)

KBK

Yuldashev A., Pirmatov Sh., Xolxodjaev B., Axralov H. Oliy matematika. Oddiy differensial tenglamalar. Masalalar to‘plami. Uslubiy ko‘rsatma -T.: 2019.-90 b.

Hozirgi davrda Oliy texnika o‘quv yurtlarida amaliyot va texnik masalalarning shartlaridan foydalanib differensial tenglamalarni tuzish va uni yechish talab etiladi. Texnikaviy talimni taraqqiy etishi bilan bu talab yana ham muhim ahamiyatga ega bo‘layapti.

Matematikani texnik masalalarga tadbig‘ida differensial tenglamalar fizika, nazariy mexanika, mashinalar va mexanizmlar nazariyasi, kimyo ishlab chiqarish texnologiyasi, biologiya va ko‘pgina boshqa fanlar bilan bog‘liq masalalarni yechishga imkon beradi. Bunday masalalarni yechish albatta differensial tenglama tuzishga olib keladi. Shuning uchun, har xil fizik-matematik va maxsus fanlarning qonunlarini yaxshi bilish kerak bo‘ladi.

Ushbu ko‘rsatma bakalavr va magistratura talabalariga va doktorantlarga mo‘ljallangan.

Toshkent davlat texnika universiteti ilmiy-uslubiy kengashi

qaroriga asosan chop etildi.

Taqrizchilar:

T.N.Aliqulov O‘zMU, “ Differensial tenglamalar va matematik fizika” kafedrasi dotsenti;

Sh. Kayumov ToshDTU , “Oliy matematika ” kafedrasi dotsenti.

KIRISH

Matematik hisoblashlar fanning turli yo‘nalishlariga texnika, iqtisodiyot, boshqaruv va shu kabi insoniyat faoliyatida matematikadan foydalaniladigan sohalardan tashqari ilgari matematika qo‘llanilmagan boshqa sohalarga ham chuqur kirib bormoqda. Shu sababli matematika fan va texnikaning tili bo‘lib qoldi. Uning yordamida tabiat va jamiyatda sodir bo‘layotgan hodisa va jarayonlar modullashtirilmoqda, o‘rganilmoqda va oldindan aytib berilmoqda. Hozirgi kunda ko‘pgina sohalarda matematikaning shunday bilimlarini amalda qo‘llanilmoqda, ular bir oz avval tor yo‘nalishdagi mutaxassislarga ma’lum emas edi.

Ko‘pgina rivojlangan fan sohalari matematik uslublar, apparat qo‘llanilishi yordamida yuqori darajaga erishmoqda, chunki bir qator asosiy murakkab masalalarni faqat yuqori rivojlangan matematik apparat yordamida yechish mumkin. Bundan tashqari asosiy tushunchalar va hodisalarni izohlashda, asosiy masalalarni qo‘yishda matematikadan foydalaniladi.

So‘nggi yillarda matematika sohasida misli ko‘rilmagan yutuqlarga erishildi, uning rivojlanishiga aynan amaliyot yo‘nalishining rivojlanishi ustun bo‘lmoqda.

Ma’lumki, ko‘plab hodisalarni o‘rganish jarayonlari differensial tenglamalarni tuzishga olib keladi, ya’ni izlanayotgan integral holati noma’lum funksiya orqali ifodalaniladi va uni ba’zi differensial tenglamalar sistemasining yechimi ko‘rinishiga olib kelinadi, bu esa aniq matematik ko‘rinishdagi yechimga ega bo‘ladi.

Differensial tenglamalar metodi paydo bo‘lishi, ko‘pchilik fizik hodisalarni differensial tenglamalar tili bilan izohlash imkoniyatini berdi. Matematika tilidan bunday foydalanish fizika va boshqa tabiiy ilm sohalarida yangi yo‘nalish paydo bo‘lishiga olib keldi.

Tabiatdagi ro‘y berayotgan hodisa va jarayonlarni o‘rganish, xossalarning tavsiflash, kattaliklarning o‘zgarish qonunlarini o‘rganishda matematika fani boshqa fanlarning ma’lumotlarini o‘z ichiga oladi. Bu fanlarning mavjudligida matematik asoslarining qo‘llanmasligi mumkin emas.

Differensial tenglamalar matematikani fizikaning turli qismlari, astronomiya, kimyo, biologiya va boshqa tabiiy ilmiy fanlar bilan tarixiy bog‘lanadi.

Tabiatshunoslik va texnikaning ko‘pgina masalalarini hal etish qaralayotgan hodisa yoki jarayonlarni tavsiflovchi noma’lum funksiyalar va ularning hosilalarini o‘zaro bog‘lovchi munosabatlar ma’lum bo‘lganda bu funksiyalarni topishga keltiriladi. Bunday munosabatlar differensial tenglamalar deyiladi.

Differensial tenglamalar ilm-fanning turli sohalarida qo‘llaniladi.

1. O‘zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamalarga keltiriladigan masalalar

Differensial tenglamalarga olib kelinadigan masalalarning ko‘pchiligi mexanikaga doir, ta’sir etuvchi kuchlar ma’lum bo‘lganda moddiy nuqtaning harakat qonunini aniqlash nuqta dinamikaning klassik masalasi hisoblanadi. Bu holda Nyutonning ikkinchi qonuni differensial tenglamaga olib keladi. Ta’sir etuvchi kuchlarga qarab har xil tipdagi tenglamalar hosil bo‘ladiki, biz ular bilan ish ko‘ramiz.

1. **Baktyeriyaning ko‘payishi.** Ko‘payish tezligi $m'(t)-$ni uning ko‘payishini $m(t)$ bilan belgilaymiz. U holda quyidagi tenglama ko‘rinishda olishimiz mumkin:

$$m'(t)=k\cdot m(t),$$

bu yerda k bakteriya turiga va tashqi muhitga bog‘liq kattalik. Bu tenglamaning yechimi $m(t)=Ce^{kt}$ funksiyadir. C o‘zgarmasni, $t=0$ boshlang‘ich shart yordamida aniqlanadi. $m(t)|_{t=0}=m_0$ bo‘lsin, u holda $m_0=Ce^{k\cdot 0}=C$ bo‘ladi. Demak, $m(t)=m_0e^{k\cdot t}-$ yechimga ega bo‘lamiz.

2. **Kimyoda** moddaning boshlang‘ich konsentratsiyasi a bo‘lsa, x metrda “mol”lar soni, $\frac{dx}{dt}$ reaksiya tezligi. Bu paytda harakatlanuvchi massa $a-x$, u holda quyidagi differensial tenglamaga ega bo‘lamiz:

$$\frac{dx}{dt}=k(a-x),$$

bunda k proporsionallik koeffitsiyenti. Buni yechimi $x=a(1-e^{-kt})$ bo‘ladi.

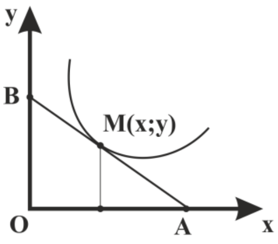
3. **Astronomiyada** Keplerning “yuzalar integrali ” nomi bilan mashhur bo‘lgan birinchi qonuni:

$$r^2\frac{d\varphi}{dt}=C$$

differensial tenglama bilan ifoda qilinadi, bu yerda r va φ quyosh atrofida aylanuvchi samoviy jismning qutb koordinatalari, t vaqt va C o‘zgarmas miqdor.

Geometriyaga doir masala

1.1-masala. Egri chiziqqa uning ixtiyoriy nuqtasida o‘tkazilgan urinmaning ordinatalar o‘qidan kesgan kesmasi urinish nuqtasi ordinatasining ikkilanganiga teng. Shu egri chiziqning tenglamasini tuzing.



1-rasm

Yechilishi. Izlanayotgan egri chiziqda ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqta olamiz (1-rasm). M nuqtada o‘tkazilgan urinmaning tenglamasi

$$Y - y = y'(X - x)$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi, bu yerda X va Y-urinma nuqtaning koordinatalari, $y'-$ izlanayotgan funksiyaning berilgan nuqtadagi hosilasi. Urinmaning Oy o‘qidan ajratadigan OB kesmasini topish uchun $X = 0$ deymiz. U holda $OB = Y = y - xy'.$ ikkinchi tomondan, shartga ko‘ra $OB = 2y,$ bulardan.

$$y - y'x = 2y \Rightarrow$$

$$xy' + y = 0 \qquad (1.1)$$

tenglamani hosil qilamiz.

Bu tenglamaning ikkala tomonini $dx-$ga ko‘paytirib, quyidagi ko‘rinishga keltiramiz:

$$xdy + ydx = 0 \Rightarrow d(xy) = 0 \Rightarrow$$

$$xy = C \qquad (1.2)$$

(1.2) tenglik izlanayotgan egri chiziqning tenglamasini beradi. Uni

$$y = \frac{C}{x}$$

ko‘rinishda ham yozish mumkin. C-ning turli qiymatlarida asimptotalari koordinatalar o‘qidan iborat bo‘lgan giperbolalar oilasini beradi.

Fizikaga doir masalalar.

To‘g‘ri chiziq harakat tezligi. Agar moddiy nuqtaning harakat tezligi kuch ta’sir etadigan chiziq yo‘nalishda bo‘lsa, u holda moddiy nuqtaning harakati to‘g‘ri chiziqli bo‘ladi. Harakat chizig‘ini Ox o‘q uchun qabul qilamiz.

Nyutonning ikkinchi qonunidan nuqta harakatining differensial tenglamasini hosil qilamiz:

$$m\frac{dV}{dt} = F \qquad (1.3)$$

bu yerda $\frac{dV}{dt}-$tezlanish, $m-$ harakatlanayotgan nuqta massasi, $F-$ kuch kattaligi.

Bu tenglama, shuningdek jismning hamma nuqtalari birday harakatlanayotgan ilgarilanma harakatini ham tavsiflaydi va shuning uchun jism harakatini uning og‘irlik markaziga joylashgan moddiy nuqtaning o‘sha jismning og‘irlik markaziga qo‘yilgan kuch ta’siri ostidagi harakati deb qarash mumkin.

X kuch t vaqtning funksiyasi sifatida berilgan bo‘lsin, $V|_{t=0}=V_0$ bo‘lsin. (1.3) ni integrallab,

$$V=\frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}X(\tau)d\tau+C$$

umumiy yechimni hosil qilamiz. Boshlang‘ich shartdan foydalanib $C=V_0$- aniqlaymiz, demak,

$$V=\frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}X(\tau)d\tau+V_0\Rightarrow mV-mV_0=\int_{t_0}^{t}X(\tau)d\tau,$$

bu tenglik quyidagi qonunni ifodalaydi. Nuqtaning biror chekli vaqt oralig‘idagi harakat miqdorining o‘zgarishi, ta’sir etuvchi kuchning shu vaqt oralig‘idagi impulsiga teng.

Agar X funksiya nuqtaning koordinatasi $x-$ ga bog‘liq, ya’ni $X=X(x)$ bo‘lsa va harakat $x=x_0$ boshlang‘ich ko‘chishidan boshlansa, u holda (1.3) tenglikning ikkala tomonini dx ga ko‘paytirib quyidagini hosil qilamiz:

$$m\frac{dV}{dt}dx=X(x)dx$$

yoki $mVdV=X(x)dx,$ chunki $\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=V\frac{dV}{dx}.$

Integrallab topamiz:

$$\frac{mV^2}{2}=\int_{x_0}^{x}F(x)dx+C$$

$V|_{x=x_0}=V_0$ boshlang‘ich shartdan $C-$ ni aniqlaymiz: $\frac{mV_0^2}{2}=C,$ shunday qilib, xususiy integralni quyidagi ko‘rinishda topamiz:

$$\frac{mV^2}{2}-\frac{mV_0^2}{2}=\int_{x_0}^{x}F(x)dx \qquad (1.4)$$

(1.4) nuqtaning $x-x_0$ masofaga ko‘chishda uning kinetik energiyasini o‘zgarishi kuchning shu berilgan oraliqda bajargan ishiga tengligini ko‘rsatadi. Bu munosabat nuqtaning tezligini ham ko‘chish funksiyasi kabi ifodalash talab qilingan hollarda juda qulaydir.

1.2-masala. (O‘qning harakati). O‘q $V_0 = 400\,m/sek$ tezlik bilan harakatlanib, $h = 20\,sm$ qalinlikdagi devorni teshib, undan $V_1 = 100\,m/sek$ tezlik bilan uchib chiqadi. Devorning qarshilik kuchi o‘qning harakat tezligi kvadratiga proporsional deb olib, o‘qning devor ichida harakatlanish vaqti $T-$ ni toping.

Yechilishi. Nyutonning ikkinchi qonuniga binoan o‘q harakatining differensial tenglamasi.

$$m\frac{dV}{dt} = -kV^2 \qquad (1.5)$$

ko‘rinishga ega (manfiy ishora devorning qarshilik kuchi o‘qning tezligiga qarama-qarshi bo‘lgani uchun olindi).

(1.5) o‘zgaruvchilari ajraladigan tenglamadir.

(1.5)-dan $\frac{dV}{V^2} = k_1 dt,$ (bu yerda $k_1 = \frac{k}{m}$) ni hosi qilamiz, buni integrallab

$$-\frac{1}{V} = -k_1 t - C \quad \frac{1}{V} = k_1 t + C \qquad V\big|_{t=0} = V_0$$

dan foydalanib $C = \frac{1}{V_0} -$ ni aniqlaymiz. Shuning uchun

$$\frac{1}{V} = k_1 t + \frac{1}{V_0} \qquad (1.6)$$

Agar $V = V_1$ deb olsak $t = T$ bo‘ladi va binobarin, izlanayotgan $\underline{T_1}$ vaqt

$$\frac{1}{V_1} = k_1 T + \frac{1}{V_0} \Rightarrow T = \frac{1}{k_1}\left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_0}\right) \qquad (1.7)$$

(1.7) da noma’lum $k_1 -$kattalik ishtirok etayapti uni aniqlash uchun (1.6) umumiy yechimini quyidagicha qaytib yozib olamiz:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{V_0}{1 + k_1 V_0 t},$$

bu yerda $V = \frac{dx}{dt}$. Bu tenglamani integrallab topamiz:

$$x = \frac{1}{k_1}\ln(1 + k_1 V_0 t) + C_1$$

$x\big|_{t=0} = 0$ (o‘q devorga kiradi)va shuning uchun $C_1 = 0$. $t = T$ va $x = h$ (o‘q devordan chiqayapti), shuning uchun $h = \frac{1}{k_1}\ln(1 + k_1 V_0 t)$.

(1.7) dan $$V_1 = \frac{V_0}{1+k_1V_0T}$$

bu yerdan $1+k_1V_0T = V_0/V_1$. Shuning uchun h ning ifodasi ushbu ko‘rinishda bo‘ladi:

$$h = \frac{1}{k_1}\ln\frac{V_0}{V_1} \text{ yoki } \frac{1}{k_1} = \frac{h}{\ln\frac{V_0}{V_1}} \tag{1.8}$$

$$(1.8) \rightarrow (1.7) \qquad T = \frac{h}{\ln\frac{V_0}{V_1}}\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_0}\right)$$

Sonli hisoblashlarni bajarib $V_0 = 440\, m/sek, V_1 = 100\, m/sek,\ h = 20\, sm$ deb olib, $T = 0{,}00108\ sek -$ ni topamiz.

<u>Reaktiv harakat</u>.

Massalari o‘zgaruvchan jismlar (masalan, raketalar) harakatini o‘rganishda Nyutonning 2-qonuni qo‘llanib bo‘lmaydi, chunki u massalari o‘zgarmas jismlar uchungina o‘rinlidir. Bunday holda kuchni tezlanish bilan bog‘lovchi boshqa tenglama qo‘llaniladi.

Massasi m bo‘lgan moddiy nuqta vaqtning t momentida V (absolyut) tezlikka ega bo‘lsin. Δt vaqt ichida unga yig‘indi massasi Δm, qo‘shilgunga qadar tezligi U bo‘lgan zarralar qo‘shiladi. $t+\Delta t$ momentda nuqta va unga qo‘shilgan zarralar $m+\Delta m$ massa va $V+\Delta V$ tezlikka ega bo‘ladi.

Sistemaning $t-$ momentdagi harakat miqdori

$$Q = mV + U\Delta m$$

ga teng, $t+\Delta t$ momentda esa u

$$Q + \Delta Q = (m+\Delta m)(V+\Delta V)$$

ga teng bo‘ladi. Demak, butun sistema harakat miqdorining Δt vaqt ichida o‘zgarishi

$$\Delta Q = m\Delta V + (V-U)\Delta m + \Delta m\Delta V$$

ga teng. Faraz qilaylik $m = m(t)$ bo‘lsin. Tenglikning ikkala tomonini $\Delta t-$ ga bo‘lib $\Delta t \rightarrow 0$ da limitga o‘tamiz. Bunda $\lim\limits_{\Delta t\rightarrow 0}\frac{\Delta m\Delta V}{\Delta t} = 0$

Ekanligini nazarda tutib $\frac{dQ}{dt} = m\frac{dV}{dt} + (V-U)\frac{dm}{dt} -$ ni hosil qilamiz. Agar o‘zgaruvchan massali jismga qo‘yilgan tashqi kuchlanishning teng ta’sir etuvchisi $F-$ ga teng bo‘lsa, harakat miqdori haqidagi teoremaga ko‘ra

$$m\frac{dV}{dt}+(V-U)\frac{dm}{dt}=F \qquad (1.9)$$

tenglamani hosil qilamiz. (1.9) ga Misherskiy tenglamasi deyiladi.

$\frac{dm}{dt}>0$ da nuqtaning massasi ortishini (zarralar qo‘shiladi) $\frac{dm}{dt}<0$ bo‘lsa kamayishini(zarralar ajralib chiqadi). $\frac{dm}{dt}=0$ da nuqta massasi o‘zgarmaydi, u holda dt Misherskiy tenglamasidan Nyutonning ikkinchi qonuni kelib chiqadi.

1.3-masala. Jismning parashyut bilan tushishida havoning qarshilik kuchi harakat tezligining kvadratiga proporsional. Tushishning chegaraviy tezligini toping. Parashyutni yuk bilan birga o‘rtacha og‘irligini $80kg$ ga teng deb, uni hisoblang. Proportsionlik koeffitsiyenti $K=3\cdot 10^2\, g/sm$.

Yechilishi. Masalaning shartidan tasvirlangan jarayon Nyutonning ikkinchi qonuni $F=ma$ ga bo‘ysunadi. Bunda F ta’sir etuvchi kuch, $m-$ harakatlanayotgan jism massasi , $a-$ harakat tezlanishi, $t-$ vaqtni argument sifatida qabul qilamiz. Izlanayotgan funksiya sifatida xarakat tezligi $V=V(t)$ ni qabul qilamiz. Berilgan qiymatlar masalaning boshlang‘ich shartlariga kiradi. Ta’sir etuvchi F kuch og‘irlik kuchi $F_1=mg$ va havoning qarshilik kuchi $F_2=-KV^2,\ \ K>0.\ F=F_1+F_2$ bo‘lgani uchun $ma=mg-KV^2$ bo‘ladi. Shunga tezlanish $a=\frac{dV}{dt}$ bo‘lsa, $m\frac{dV}{dt}=mg-KV^2$ differensial tenglamaga ega bo‘lamiz. Uni yechib $V=\sqrt{\frac{mg}{K}}$ ni olamiz. Berilgan qiymatlarini qo‘yib $V=5{,}1v/cek$ ega bo‘lamiz.

1.4-masala. Boshlang‘ich massasi M_0 bo‘lgan raketa undan ajralib chiqayotgan gazlarning uzluksiz jarayonini ta’sirida to‘g‘ri chiziqli harakat qiladi. Gazlarning ajralib chiqish tezligi U_0 (raketaga nisbatan) kattaligi jihatdan o‘zgarmas va raketaning boshlang‘ich V_0 tezligiga qarshi tomonga yo‘nalgan. Og‘irlik kuchi va havo qarshiligini hisobga olmasdan raketaning harakat qonunini toping (raketaning bo‘shliqda to‘g‘ri chiziqli harakati haqida Siolkovskiy masalasi).

Yechilishi.

$$m\frac{dV}{dt}=F+\frac{dm}{dt}U_0$$

ko‘rinishidagi Misherskiy tenlamasidan foydalanib va ox o‘qni V_0 boshlang‘ich tezlik yo‘nalishida tanlab, raketa harakatining shu o‘qdagi proeksiyasi bo‘yicha differensial tenglamani hosil qilamiz:

$$M\frac{dV}{dt} = -U_0\frac{dM}{dt}. \qquad (1.10)$$

Bu yerda $\frac{dM}{dt} = \mu$ “sekund massa”, yonilg‘i massasining har bir dt sekundagi sarfi, yonilg‘ining barqaror yonish prosessida $\mu = const$, M raketaning o‘zgaruvchan massasi (1.10) dan o‘zgaruvchilarni ajratib, $dV = -U_0\frac{dM}{M}$ ni hosil qilamiz va $V = -U_0\ln M + C$ yechimni topamiz. $V|_{t=0} = V_0$, $M|_{t=0} = M_0$ shartdan foydalanib C o‘zgarmasni topamiz, u holda $C = U_0\ln M_0 + V_0$ va shuning uchun

$$V = U_0\ln\frac{M_0}{M} + V_0 \qquad (1.11)$$

Bu formula birinchi bo‘lib Siolkovskiy tomonidan kashf qilingan va uning nomi bilan yuritiladi (Siolkovskiy formulasi).

Raketa harakati formulasini topish uchun Siolkovskiy formulasida $V-$ ni $\frac{dx}{dt}-$ ga almashtiramiz; ushbu differensial tenglamani hosil qilamiz:

$\frac{dx}{dt} = U_0\ln\frac{M_0}{M} + V_0$ va $x|_{t=0} = 0$ da integrallaymiz:

$$x = U_0\int_0^t \ln\frac{M_0}{M}d\tau + V_0 t \qquad (1.12)$$

Agar harakat boshlangandan biror vaqt o‘tgach, $t = t_k$ momentida tezlik, massa va bosib o‘tilgan yo‘l mos ravishda $V = V_k$, $M = M_k$, $x = x_k$ ga teng bo‘lsa, (1.11) va (1.12) formulalar quyidagicha yoziladi:

$$V_k = U_0\ln\frac{M_0}{M} + V_0,$$

$$x_k = U_0\int_0^{t_k} \ln\frac{M_0}{M}d\tau + V_0 t_k$$

bu yerdan bunday xulosaga kelamiz: oxirgi tezlik massaning o‘zgarish qonuniga bog‘liq bo‘lmasdan balki raketaning boshlang‘ich tezligi V_0 ga gazlarning ajralib chiqish nisbiy tezligi U_0- ga hamda oxirgi va boshlang‘ich massalar nisbati M_k/M_0- ga bog‘liq, x_k yo‘l esa massalarning yonilg‘i yonish tezligi bilan aniqlanuvchi o‘zgarish qonuniga bog‘liq.

Raketa massasi $M = M_0(1-\alpha t)$, bu yerda $\alpha = const,\ \alpha > 0$ chiziqli qonun bo‘yicha o‘zgaradi deb faraz qilaylik.

U holda

$$x = U_0\int_0^t \ln\frac{M_0}{M_0(1-\alpha\tau)}d\tau + V_0 t$$

yoki

$$x = -U_0\int_0^t \ln(1-\alpha\tau)d\tau + V_0 t\ .$$

So‘ngra

$$\int_0^t \ln(1-\alpha\tau)d\tau = -\frac{1}{\alpha}\left[(1-\alpha t)\ln(1-\alpha t)+\alpha t\right]$$

bo‘lgani uchun

$$x = -\frac{U_0}{\alpha}\left[(1-\alpha t)\ln(1-\alpha t)+\alpha t\right] + V_0 t\ .$$

Agar raketa massasi

$$M = M_0 e^{-\lambda t},\ \ \lambda = const,\ \lambda > 0$$

ko‘rsatkichli (eksponensial) qonun bo‘yicha o‘zgaradi deb faraz qilsak, u holda $x = U_0\int_0^t \ln\frac{M_0}{M_0 e^{-\lambda\tau},} d\tau + V_0 t$ yoki $x = U_0\lambda\int_0^t \tau d\tau + V_0 t$

binobarin,

$$x = \frac{U_0\lambda t^2}{2} + V_0 t\ .$$

Mexanika qonunlaridan kosmik tezliklarning kattaliklarini aniqlash uchun foydalanish mumkin. Birinchi kosmik tezlikni ya’ni raketa yer atrofida yo‘ldosh bo‘lib doiraviy orbita bo‘yicha aylanishi uchun zarur bo‘lgan V_1 tezlikni aniqlaymiz. Buning uchun raketaning markazdan qochma kuchi yerning tortish kuchiga teng bo‘lishi kerak; demak, $M_k\frac{V_1^2}{r} = M_k g,$ bu yerda $r-$ orbita radiusi, ya’ni yer markazidan orbitada harakat qilayotgan yo‘ldoshgacha bo‘lgan masofa, $g-$ og‘irlik kuchi tezlanishi. Agar $r-$ ni taqriban yer radiusi R_{ep} ga teng deb olsak, u holda

$V_1 = \sqrt{gr} = \sqrt{gR_{ep}} = \sqrt{10\cdot 6400000} = 8 км/сек$ yana aniqrog‘i $V_1 = 7{,}93 км/сек.$

Orbita bo‘ylab harakat qilayotgan yo‘ldosh yer sathidan ancha uzoqlashganda, ya’ni $r \geq R_{ep}$ bo‘lganda balandlik o‘zgarishi bilan og‘irlik kuchi tezlanishining ham o‘zgarishi bilan o‘zgarishini hisobga olish kerak. Tortishish qonunidan kelib chiqadiki, yer markazidan r masofada bo‘lgan M massali jism yerga $F=\gamma MM_{ep}/r^2$ kuch bilan tortishadi, bu berda $M_{ep}-$yer massasi. Biroq, ikkinchi tomondan, $F=Mg_{ep}$ (bu yerda $g_{ep}-$ yer markazidan masofada og‘irlik kuchi tezlanishi) bo‘lgani uchun $\gamma MM_{ep}/r^2=Mg_{ep}$, bu yerdan $g_{ep}=\gamma M_{ep}/r^2$, $r=R_{ep}$ bo‘lganda; demak, $g=\gamma M_{ep}/R_{ep}{}^2$ bu yerdan $\gamma=g\,R_{ep}{}^2/M_{ep}$, shuning uchun $g_r=g\,R_{ep}{}^2/r^2$. Bunday holda markazdan qochma kuchning va og‘irlik kuchining tengligidan: $M_k\dfrac{V_1^2}{r}=M_k\dfrac{g\,R_{ep}{}^2}{r^2}$, bu yerdan $V_1=\sqrt{\dfrac{g\,R_{ep}{}^2}{r}}$.

Bu formuladan r qancha katta bo‘lsa, ya’ni yo‘ldosh yerdan qanchalik ko‘p uzoqlashgan bo‘lsa, yo‘ldoshning tegishli orbitada aylanish uchun zarur bo‘lgan birinchi kosmik tezlik V_1 shunchalik kichik bo‘lishi kelib chiqadi. Masalan, $1000\,km$ balandlikda $V_1\approx 5\,км/сек$, $380000\,км$ (yerdan oygacha bo‘lgan taqribiy masofa) balandlikda esa $V_1=1\,км/сек$. Shunday qilib oy yerga qulab tushmasligi uchun uning tezligi $1\,км/сек$ bo‘lishi yetarlidir.

Raketa yerning tortish doirasidan chiqib keta olish uchun u V_1 dan katta tezlikka ega bo‘lishi kerak. Bu tezlik ikkinchi kosmik tezlik (yoki yerning ta’sir doirasidan chiqib ketish tezligi) deyiladi va V_2 orqali belgilanadi. Uni hisoblaylik. Buning uchun yer markazidan r masofada bo‘lgan raketaning $E_n=M_kg_rr$ potensial energiyasini tezligi V_2 bo‘lsin raketaning $E_k=M_kV^2/2$ kinetik energiyasiga tenglaymiz; natijada

$$\frac{M_kV_2^2}{2}=M_kg_rr\Rightarrow V_2=\sqrt{2g_rr}=\sqrt{2\frac{gR_{ep}^2}{r}}=V_1\sqrt{2}.$$

Shunday qilib, ikkinchi kosmik tezlik birinchi kosmik tezlikdan taxminan $1{,}4$ marta katta. Shuning uchun yer sirtida $V_2=4{,}2\,км/сек$, $1000\,км$ balandlikda $V_2=7\,км/сек$, oy yerning tortish doirasidan chiqib ketishi uchun $1{,}4\,км/сек$ tezlikka ega bo‘lishi kerak.

Yo‘ldoshning oy, Mars va Venera planetalari atrofida doiraviy orbita bo‘yicha aylanish uchun zarur bo‘lgan V_1 tezlikni shuningdek, uning bu osmon jismlaridan chiqib ketishi uchun zarur bo‘lgan V_2- ni taqribiy topish mumkin. Oy uchun: $V_1 \approx 1,7 км/сек$, $V_2 \approx 2,4 км/сек$. Mars uchun: $V_1 \approx 3,6 км/сек$, $V_2 \approx 5,4 км/сек$. Venera uchun: $V_1 \approx 7,3 км/сек$, $V_2 \approx 10,3 км/сек$.

1.5-masala. Massasi m bo‘lgan moddiy nuqtaga ta’sir etadigan kuchning bajargan ishi harakat boshlangandan keyin o‘tgan t vaqtga proporsional (K-proporsionallik koeffitsiyenti) ekanligi ma’lum bo‘lsa, nuqtaning to‘g‘ri chiziqli harakat qonunini toping. Boshlang‘ich yo‘l va boShlang‘ich tezlik mos ravishda S_0 va V_0 ga teng.

Yechilishi. Mexanikadan ma’lumki, nuqtaning to‘g‘ri chiziqli ko‘chishida (kuch va tezlik yo‘nalishlari bir xil) bajargan ishi

$$A=\int_{S_0}^{S} F(U)\,dU$$

formula yordamida hisoblanadi. Bu yerda $F(S)-$ nuqtaga ta’sir etayotgan kuch.

Masala shartiga ko‘ra $A=Kt$ bo‘ladi. A ning har ikkala ifodasini bir-biriga tenglashtiramiz:

$$\int_{S_0}^{S} F(U)\,dU = Kt$$

Bu tenglikning ikkala tomonini S bo‘yicha differensiallaymiz

$$F(S)=K\frac{dt}{dS} \qquad (1.13)$$

$V=\frac{dS}{dt} \Rightarrow \frac{dt}{dS}=\frac{1}{V}$ ekanligini hisobga olib, (1.13) tenglikni quyidagicha yozamiz:

$$F(S)=\frac{K}{V}.$$

Ikkinchi tomondan Nyutonning ikkinchi qonunidan

$$F(S)=m\frac{dV}{dt},$$

U holda $F(S)$ uchun topilgan ifodalarni tenglashtirib, ushbu differensial tenglamani hosil qilamiz:

$$m\frac{dV}{dt}=\frac{K}{V} \Rightarrow mVdV=Kdt$$

Bu ifodani integrallab

$$\frac{mV^2}{2}=Kt+C_1 \qquad (1.14)$$

$$V\big|_{t=0}=V_0-\text{asosan}$$

$$C_1 = \frac{mV_0^2}{2} \qquad (1.15)$$

$(1.15) \to (1.14)$ $\quad V = \sqrt{\frac{2Kt}{m} + V_0^2}, \quad V = \frac{dS}{dt}$ bo‘lgani uchun $\frac{dS}{dt} = \sqrt{\frac{2Kt}{m} + V_0^2}$ – ni integrallab

$$S = \frac{m}{3K}\left(\frac{2K}{m}t + V_0^2\right)^{3/2} + C_2 \qquad S\big|_{t=0} = S_0 \text{ ga asosan}$$

$$C_2 = S_0 - \frac{mV_0^2}{2} \qquad (1.16)$$

$(1.16) \to (1.15)$ $\quad S = \frac{m}{3K}\left(\frac{2K}{m}t + V_0^2\right)^{3/2} + S_0 - \frac{mV_0^2}{2}.$

Bu tenglik moddiy nuqtaning harakat qonunini ifodalaydi.

1.6-masala. Boshlang‘ich massasi M_0 bo‘lgan raketa undan ajralib chiqayotgan gazlarning uzluksiz jarayoni ta’sirida to‘g‘ri chiziqli harakat qiladi. Gazlarning ajralib chiqish tezligi (raketaga nisbatan) kattaligi jihatdan o‘zgarmas va raketaning boshlang‘ich V_0 tezligiga qarshi tomonga yo‘nalgan og‘irlik kuchi va havo qarshiligini hisobga olmasdan raketaning harakat qonunini toping. (raketaning bo‘shliqda to‘g‘ri chiziqli harakati haqida Siolkovskiy masalasi).

Yechilishi. Oy o‘qni yuqoriga yo‘naltiramiz. U holda harakatning differensial tenglamasi ushbu ko‘rinishda yoziladi:

$$f(t)\frac{dV}{dt} = -U_0 f'(t) - gf(t)$$

bu yerdan $f'(t) = \frac{dM}{dt}$ “sekund massa. ”

o‘zgaruvchilarni ajratamiz:

$$dV = -gdt - U_0\frac{f'(t)}{f(t)}dt$$

bu yerdan

$$V = -gt + U_0 \ln\frac{M_0}{f(t)} + V_0, \quad V = \frac{dg}{dt}$$

Shuning uchun keyingi tenglikni o‘zgaruvchilari ajralgan ushbu differensial ko‘rinishda yozish mumkin: $dy = \left[-gt + U_0 \ln\frac{M_0}{f(t)} + V_0\right]dt$

bu yerdan integrallab, topamiz

$$y=-\frac{gt^2}{2}+U_0\int_0^t \ln\frac{M_0}{f(\tau)}d\tau+V_0t+C_1$$

$y|_{t=0}=0$ dan $C_1=0$ demak,

$$y=-\frac{gt^2}{2}+U_0\int_0^t \ln\frac{M_0}{f(\tau)}d\tau+V_0t.$$

Xususiy holda, raketa massasi $M=f(t)=M_0(t-\alpha t),$ bu yerda $\alpha=const,\quad \alpha>0,$ chiziqli qonun bo‘yicha o‘zgarganda quyidagiga egamiz:

$$y=-\frac{gt^2}{2}-U_0\int_0^t \ln(1-\alpha\tau)d\tau+V_0t$$

binobarin,

$$y=-\frac{gt^2}{2}+\frac{U_0}{\alpha}\left[(1-\alpha t)\ln(1-\alpha t)+\alpha t\right]+V_0t$$

Agar son qiymatlar beradigan bo‘lsak, masalan, $V_0=0,\ \ U_0=2000\,м/сек$ va $\alpha=\frac{1}{100}сек^{-1}$ desak,

Bunday holda raketa $10\,сек$ dan keyin $0,54\,км$ balandlikka, $50\,сек$ dan keyin $5,65\,км$ ga $90\,сек$ dan keyin esa $18,4\,км$ ga ko‘tariladi.

Raketa massasi $M=f(t)=M_0e^{-\lambda t}$ (bu yerda $\lambda=const,\ \lambda>0$) ko‘rsatkichli qonun bo‘yicha o‘zgarganda ham yuqoridagiga quyidagini hosil qilamiz:

$$y=-\frac{gt^2}{2}+U_0\int_0^t \ln\frac{M_0}{M_0e^{-\lambda\tau}}d\tau+V_0t=\frac{U_0\lambda-g}{2}t^2+V_0t.$$

Raketa harakatining butun yonilg‘ining yonib tamom bo‘lish momenti $t=t_k$ gacha bo‘lgan V tezligi y dan t bo‘yicha olingan hosilaga teng:

$$V=\frac{dy}{dt}=(U_0\lambda-g)t+V_0$$

$t=t_k$ da, ya’ni butun yonilg‘i zonasi yonib tamom bo‘lish momentida

$$V=V_x=(U_0\lambda-g)t_k+V_0\,,\ y=y_k=\frac{U_0\lambda-g}{2}t^2+V_0t.$$

$W-$tezlanishni hisoblaymiz. Quyidagiga egamiz:

$$W=\frac{d^2y}{dt^2}=U_0\lambda-g=const$$

Bu yerdan raketa o‘zgarmas tezlanish bilan harakat qiladi deb xulosa chiqaramiz. $U_0\lambda-g<0$ da harakat tekis sekinlanuvchan, $U_0\lambda-g>0$ da harakat tekis tezlanuvchan, $U_0\lambda-g=0$ da esa harakat tekis, bo‘lib, V_0 tezlikda bo‘ladi.

$U_0\lambda - g < 0$ bo‘lgan holda $t = V_0/(g - U_0\lambda)$ da nuqta tezligi nolga teng bo‘ladi, bu momentda raketa $y_{\max}$ maksimal balandlikka ko‘tariladi:

$$y_{\max} = \frac{V_0^{\,2}}{2(g - U_0\lambda)}.$$

Butun yonilg‘i yonib tamom bo‘lgandan so‘ng raketa harakati

$$S = -\frac{gt^2}{2} + V_k t + y_k$$

qonun bo‘yicha davom etadi.

Raketaning $y = y_k$ balandlikdan eng katta uzoqlashishi $S_{\max}-$ ni funksiyaning $t = V_k/g$ statsionar nuqtadagi maksimum sifatida topamiz:

$$S_{\max} = \frac{V_k^2}{2g} + y_k$$

Raketaning yer sathidan maksimal balandlikka ko‘tarilishi $y_{\max}$ ni

$$y_{\max} = S_{\max} + y_k = \frac{V_k^2}{2g} + 2y_k$$

formula bo‘yicha topamiz.

V_k va y_k ni ularning U_0, α va t_k orqali ifodalari bilan almashtirib, uzil-kesil quyidagini hosil qilamiz:

$$y_{\max} = \frac{(U_0\lambda - g)^2 t_k^2}{2g} + (U_0\lambda - g)t_k^2 + 2V_0 t_k = \frac{1}{2g}(U_0^2\lambda^2 - g^2)t_k^2 + 2V_0 t_k \ .$$

1.7-masala. Raketa $V_0 = 100\,м/сек$ boshlang‘ich tezlik bilan yuqoriga uchirilgan, havoning qarshiligi raketaga manfiy KV^2 tezlanish berib, uning harakatini sekinlashtiradi (bu yerda: $V-$ raketaning oniy tezligi**,** $K-$ proporsionallik koeffitsiyenti). Raketaning eng yuqori nuqtaga chiqishi uchun ketgan vaqtini toping?

Yechilishi. Shartli ravishda raketaning harakatini moddiy nuqtaning harakati deb qaraymiz. Bu holda raketaning umumiy tezlanishni

$$W = -g - KV^2 \qquad (1.17)$$

ga teng bo‘ladi. Bu yerda: $g-$erkin tushish tezlanishi. Lekin $W = \frac{dV}{dt}$ bo‘lgani uchun (1.17) quyidagi ko‘rinishda yozamiz:

$$\frac{dV}{dt} = -(g + KV^2).$$

O‘zgaruvchilarni ajratib, ushbu tenglamani hosil qilamiz

$$\frac{dV}{g+KV^2}=-dt \tag{1.18}$$

(1.18)-ni integrallash uchun quyidagi almashtirishni bajaramiz:

$$\frac{d\left(\sqrt{\frac{K}{g}}V\right)}{\sqrt{\frac{K}{g}\left(1+\left(V\sqrt{\frac{K}{g}}\right)^2\right)}}=-gdt$$

yoki

$$\sqrt{\frac{g}{K}}\frac{d\left(\sqrt{\frac{K}{g}}V\right)}{1+\left(V\sqrt{\frac{K}{g}}\right)^2}=-gdt \tag{1.19}$$

(1.19)-ni integrallab, quyidagi umumiy yechimni hosil qilamiz

$$arctg\sqrt{\frac{K}{g}}V=-\sqrt{gK}t+C.$$

$t=0$ da $V=V_0=100\,м/сек$ shartdan $C=arctg100\sqrt{\frac{K}{g}}$ kelib chiqadi.

Natijada quyidagi xususiy yechim hosil bo‘ladi

$$arctg\sqrt{\frac{K}{g}}V-arctg100\sqrt{\frac{K}{g}}=-\sqrt{gK}\cdot t \tag{1.20}$$

$t=T$ da $V=0,\ g=10\,м/сек^2$. Qiymatlarni (1.20)-ga qo‘yib, quyidagi ifodani yozamiz:

$$T=\frac{arctg100\sqrt{\frac{K}{g}}}{\sqrt{gK}}=\frac{arctg\left(31,62\sqrt{K}\right)}{3,162\sqrt{K}}$$

vaqt ichida raketa eng yuqori nuqtaga chiqadi.

1.8-masala. Ko‘p bosqichli raketaning y yo‘ldoshini orbitaga chiqarib quygandan keyingi V_k tezligini aniqlang. Bunda reaktiv jarayonning tezligi o‘zgarmas va uning kattaligi U_0-ga, tezlik yo‘nalishining gorizontga nisbatan og‘ish burchagi $a(t)$ga, aerodinamik qarshilik $x(t)$ ga teng.

Yechilishi. Agar raketaning vaqtga bog‘liq bo‘lgan jami massasini $G(t)$ orqali belgilasak, raketa massasining o‘zgarish tezligi (yonilg‘ining massa sarfi) $\frac{dG}{dt}$ ga, reaktiv tortish esa

$$P = \frac{-U_0}{g_0} \cdot \frac{dG}{dt}$$

ga teng bo‘ladi, bu yerda g_0 –yer sathida og‘irlik kuchi tezlanishi (h baland-likdagi tezlanishini g_h orqali belgilaymiz).

Og‘irlik kuchi va tezlik (ataka burchagi) yo‘nalishlarining bir xilda emasligi natijasida raketa tezligining kamayishi juda ham kichik bo‘lganligi uchun uni xech olmaslik mumkin, natijada raketa harakatining uning traektoriyasiga urinmasidagi proeksiyasining differensial tenglamasini

$$\frac{G}{g_0}\frac{dV}{dt} = P - x - \frac{G}{g_0} g_h \sin\theta$$

ko‘rinishda yoki P–ni uning t orqali ifodasi bilan almashtirib va tenlamaning ikkala tomonini G/g_0 ga bo‘lib

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{U_0}{G}\frac{dG}{dt} - g_0\frac{x}{G} - g_h \sin\theta\,,$$

ko‘rinishda hosil qilamiz.

Start momenti $t = 0$ da raketa $V = 0$ (boshlang‘ich shart), raketa yo‘ldoshini orbitaga chiqargandan keyingi $t = t_k$ vaqt momentida raketa tezligi $V = V_k$. Shuning uchun t bo‘yicha integrallashdan va bu qiymatlarni qo‘yib chiqqandan so‘ng izlanayotgan tezlikni hosil qilamiz:

$$V_k = \sum_{i=1}^{n} U_i \ln\frac{G_{0i}}{G_{Ri}} - g_0\int_0^{t_k}\frac{X}{G}dt - \int_0^{t_k} g_h \sin\theta dt \qquad (1.21)$$

bu yerda n– raketa bosqichlari soni, U_i, G_{oi}, G_{Ri} – mos ravishda oqim tezligi, har qaysi ayrim bosqich uchun boshlangan va oxirgi massalar.

(1.21) da o‘ng tomondagi birinchi had Siolkovskiy formulasiga mos keladi va raketaning xarakteristik tezligini anglatadi (1.21) ning o‘ng tomondagi ikkinchi va uning hadlari mos ravishda aerodinamik qarshilik kuchlarini yengishda yo’qotilgan tezlikni anglatadi.

Radioaktiv yemirilish

Ba’zi elementlar atomlarining yadrolari α, β va γ nurlar chiqarib boshqa, elementlar yadrolariga o‘z o‘zidan aylanishi radioaktiv yemirilish deyiladi. Radioaktiv yemirilish statistik xarakterga ega atomlarning yadrolari hammasi birdaniga yemirilmay, balki izotermaning butun mavjud bo‘lish davrida yemiriladi, bunda birlik vaqt ichida yemiriladigan atomlar soni har bir izotop uchun o‘zgarmas bo‘lib, uning yemirilmagan atomlari miqdorining biror qismini tashkil etishi aniqlangan. Bu kattalik (qism) yemirilish doimiysi deyiladi va λ – bilan belgilanadi. Shunday qilib, dt vaqt davomida yemirilgan dN atomlar soni λdN ga teng, bu yerda N son t vaqt momentlarida yemirilmay kolgan atomlar sonidir.

Natijada ushbu differensial tenglamaga ega bo‘lamiz;

$$dN = -\lambda N dt \tag{1.22}$$

manfiy ishora yemirilmagan atomlar soni N vakt o‘tishi bilan kamayishini ko‘rsatadi O‘zgaruvchilari ajratgandan so‘ng.

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt \quad \text{integrallasak } \ln N = -\lambda t + \ln C \text{ yoki } N = Ce^{-\lambda t}$$

Agar atomlarning dastlabki soni $N|_{t=0} = N_0$ ma’lum bo‘lsa, u holda $C = N_0$ bo‘lib.

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

Izotop atomlari miqdorining yarmi yemirilishi uchun kerak bo‘lgan T vaqt shu izotopning yarim yemirilishi dari deyiladi. Turli izotoplar uchun $T = 1590$ yil uran uchun $T = 4{,}6$ *mlyard* yil, radioaktiv kobalt uchun $T = 5{,}3$ yil, radon uchun $T = 3{,}82$ *сутка*.

T va λ orasida osongina topish mumkun bo‘lgan bog‘lanish bor. Vaqtning $t = T$ momenti uchun $N = N_0/2$ va demak;

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T},$$

bu yerdan $e^{-\lambda T} = \frac{1}{2}$ va $T = (\ln 2)/\lambda = 0{,}693/\lambda$, so‘ngra $\lambda = (\ln 2)/T = 0{,}693/T$.

Bu N va λ orqali emas, balki T – orqali ifodalanishiga imkon beradi, chunonchi $N = N_1 e^{-(t\ln 2)/T}$.

Masalan yarim yemirilish davri $T = 1590$ yil bo‘lgan radiy uchun

$$N = N_0 e^{-(t\ln 2)/1590} = N_0 e^{0{,}00044\cdot t}.$$

Bu formuladan atomning aytaylik 200 yil ichida qancha qismi yemirilish mumkin; $t = 200$ desak, 200 yildan keyin $N|_{t=200} = N_0 e^{-0{,}088} = 0{,}915 N_0$ ta atom qolishini ya’ni bu vaqt davomida bor bo‘lgan atomlarning $8{,}5\%$ yemirilishini ko‘ramiz.

Izotopning radioaktiv yemirilish tezligi bu izotopning (yoki uning pereparatining) aktivligi deyiladi. a aktivlik $a = \left|\frac{dN}{dt}\right|$ ga, yoki (1.22)

differensial tenglama va uning yechimiga ko‘ra ushbuga teng:

$$a = \lambda N = N_0 e^{-\lambda t}.$$

Aktivlik yemirilish davri orqali $a = \frac{N \ln 2}{T} = \frac{0,693N}{T}$ formula bilan ifodalanadi.

Agar $a_0 = \lambda N_0$ pereparatning boshlangich momentidagi aktivligi bo‘lsa, u holda $a_0 = \lambda e^{-\lambda t}$

Radioaktiv modda bitta atomning o‘rtacha yashash davrini hisoblaymiz. $t-$ vakt ichida saqlangan va keyingi, dt vakt oralig‘ini ichida yemirilgan atomlar soni dN quyidagiga teng:

$$-dN = \lambda N_0 e^{-\lambda t} dt$$

Bu atomlar t ga teng bo‘lgan o‘rtacha yashash davriga ega. Bitta atomning o‘rtacha yashash davrini topish uchun dN ning $t-$ ko‘paytirib $t-$ bo‘yicha 0 dan $+\infty$ gacha integrallash va atomlarning boshlangich soni N_0 ga bo‘lish kerak.

$$a = \frac{\int_0^{+\infty} \lambda N_0 e^{-\lambda t} dt}{N_0} = \frac{1}{\lambda} = \frac{T}{\ln 2}.$$

Masalan radan ($T = 3,28$ sutka uchun atomning o‘rtacha yashash davri $a = 5,552$ sutkaga teng.

1.9-masala. (Jismning sovishi) Massasi m, issiqlik sig‘imi c o‘zgarmas bo‘lgan jism boshlang‘ich momentda ϑ_0 temperaturaga ega bo‘lsin. Atrof muhit temperaturasi o‘zgarmas va $\vartheta(\vartheta_0 > \vartheta_m)$ ga teng. Jismning cheksiz kichik dt vaqt ichida bergan issiqligi, jism va uning atrofidagi muhit temperaturalari orasidagi farqqa, shuningdek vaqtga proporsional ekanligini (Nyuton qonuni) e’tiborga olgan holda jismning sovish qonunini toping.

Yechilishi. Sovish davomida jism temperaturasi ϑ_0 dan ϑ_m gacha pasayadi. Vaqtning t momentida jism temperaturasi ϑ ga teng bo‘lsin. Cheksiz kichik dt vaqt oralig‘ida jism bergan issiqlik miqdori yuqorida aytilganiga ko‘ra

$$dQ = -\alpha(\vartheta - \vartheta_m)dt$$

ga teng, bu yerda $\alpha = const$-proporsional lik koeffitsiyenti.

Ikkinchi tomondan, jism ϑ temperaturadan ϑ_m temperaturagacha soviganda beradigan issiqlik miqdori Q ushbuga teng: $Q = mc(\vartheta - \vartheta_m)$, demak,

$$dQ = mcd\vartheta .$$

dQ uchun topilgan har ikkala ifodani taqqoslab,

$$mcd\vartheta = -\alpha(\vartheta - \vartheta_m)dt$$

differensial tenglamani hosil qilamiz. O‘zgaruvchilarni ajratish bu tenglamani ushbu ko‘rinishga keltiradi:

$$\frac{d\vartheta}{\vartheta - \vartheta_m} = -\frac{\alpha}{mc}dt .$$

Buni integrallab, quyidagi formulani topamiz:

$$\ln(\vartheta - \vartheta_m) = -\frac{\alpha}{mc}t + \ln C \Rightarrow \vartheta - \vartheta_m = C \cdot e^{-\alpha t/(mc)} .$$

Boshlang‘ich shart ($t = 0$ da $\vartheta = \vartheta_0$) $C-$ni topishga imkon beradi:

$$C = \vartheta_0 - \vartheta_m ,$$

Shuning uchun jismning sovish qonuni (xususiy yechim) quyidagi ko‘rinishda yoziladi:

$$\vartheta = \vartheta_m + (\vartheta_0 - \vartheta_m)e^{-\alpha t/(mc)}$$

α koeffitsiyent yo be’vosita berilgan, yoki qo‘shimcha shart, masalan, $t = t_1$ da $\vartheta = \vartheta_1$ orqali topilishi kerak.

Bunday holda quyidagiga egamiz:

$$\vartheta_1 - \vartheta_m = (\vartheta_0 - \vartheta_m)e^{-\alpha t_1/(mc)} ,$$

bundan $$e^{-\alpha/mc} = \left(\frac{\vartheta_1 - \vartheta_m}{\vartheta_0 - \vartheta_m}\right)^{1/t_1} .$$

Demak, $$\vartheta = \vartheta_m + (\vartheta_0 - \vartheta_m)\left(\frac{\vartheta_1 - \vartheta_m}{\vartheta_0 - \vartheta_m}\right)^{t/t_1} .$$

Sonli misol keltiramiz. Agar muhit temperaturasi $\vartheta_m = 20^0 C$ bo‘lsa va $t_1 = 10\,мин$ ichida jism $\vartheta_0 = 100^0 C$ dan $\vartheta_1 = 60^0 C$ gacha sovisa, u holda

$$\vartheta = 20 + 80 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t/10} .$$

Aytaylik, jism temperaturasi qancha vaqt ichida $25^0 C$ gacha pasayishini topiSh kerak bo‘lsin. Formulada $\vartheta = 25$ deb olib, $25 = 20 + 80 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t/10}$ ni yoki $\left(\frac{1}{2}\right)^{t/10} = \left(\frac{1}{2}\right)^4$ ni hosil qilamiz, bu yterdan $t = 40\min$ ekanligi kelib chiqadi.

1.10-masala. (Quymaning qizishi). Temperaturasi ϑ_a bo‘lgan po‘lat quymani **prokatga** qilishdan avval temperaturasi bir soat ichida ϑ_a dan ϑ_b gacha bir tekis ortadigan pech ichiga joylanadi. Agar pech va quyma temperaturalari farqi T bo‘lganda quyma $kT\ grad/\min$ tezlik bilan qizisa, uning qizish qonunini toping.

Yechilishi. Pech vaqtning t momentidagi temperaturasini θ orqali belgilaymiz. U holda quymaning ϑ temperaturasi $\vartheta = \theta - T$ farqqa teng bo‘ladi. Masala shartidan pech temperaturasining o‘zgarish qonuni $\theta = At + B$ ni topamiz, bu yerda A va B lar doimiylar $\theta|_{t=0} = \vartheta_a$, $\vartheta_{t=60} = \vartheta_b$ shartlardan aniqlanadi, ular mos holda $A = (\vartheta_b - \vartheta_a)/60$ va $B = \vartheta_a$ ga teng.

Masalaning differensial tenglamasi

$$\frac{d\vartheta}{dt} = kT$$

ko‘rinishda bo‘ladi. So‘ngra

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{d}{dt}(\theta - T) = \frac{d}{dt}(At + B - T) = A - \frac{dT}{dt},$$

bo‘lgani uchun yuqoridagi tenglama

$$A - \frac{dT}{dt} = kT \quad \text{yoki} \quad \frac{dT}{dt} + kT - A = 0$$

ko‘rinishga keladi. Bu o‘zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama. Uning umumiy integrali:

$$\frac{1}{k}\ln(kT - A) + t = \frac{1}{k}\ln C \quad \text{yoki} \quad kT - A = C \cdot e^{-kt}.$$

$T|_{t=0} = 0$ boshlang‘ich shartdan $C = -A$ ni topamiz, demak,

$$T = \frac{A}{k}\left(1 - e^{-kt}\right) = kT.\ T = \theta - \vartheta = At + B - \vartheta,$$

almashtirish bajarib,

$$\vartheta = At + B - \frac{A}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)$$

yoki $\quad \vartheta = \vartheta_a - \dfrac{\vartheta_b - \vartheta_a}{60 \cdot k}\left(1 - e^{-kt} - kt\right)$ ni

hosil qilamiz.

Quymaning bir soatdan keyingi, ya'ni $t = 60$ min dagi temperaturasini topamiz:

$$\vartheta\big|_{t=60} = \vartheta_a - \frac{\vartheta_b - \vartheta_a}{60 \cdot k}\left(1 - e^{-kt} - 60k\right) = \vartheta_b - \frac{\vartheta_b - \vartheta_a}{60 \cdot k}\left(1 - e^{-60k}\right).$$

1.11-masala. (Yorug'likning suv orqali o'tishida yutilishi.) Yorug'lik oqimining yupqa suv qatlami tomonidan yutilishi qatlam qalinligiga va qatlam sirtiga tushayotgan oqimga proporsionaldir. $2\,м$ qatlamdan o'tishda dastlabki yorug'lik oqimining $1/3$ qismi yutilishini bilgan holda uning necha protsenti $12\,м$ chuqurlikka yetib borishini aniqlang.

Yechilishi. h chuqurlikdagi sirtga tushayotgan yorug'lik oqimini Q orqali belgilaylik. Qalinligi dh bo'lgan suv qatlamidan o'tishda yutilgan yorug'lik oqimi dQ ushbuga teng bo'ladi:

$$dQ = -kQdh,$$

bu yerda k $(k > 0)$ proporsionallik koeffitsiyenti.

Bu differensial tenglamaning umumiy yechimi: $Q = C \cdot e^{-kh}$. Dastlabki yorug'lik oqimi Q_0 ga teng bo'lsin. U holda $h = 0$ da $Q = Q_0$ ligidan (boshlang'ich shart) $C = Q_0$ ni topamiz, shu sababli

$$Q = Q_0 \cdot e^{-kh}.$$

Masala shartiga ko'ra $h = 2\,м$ da $Q = 2Q_0/3$, shuning uchun

$\dfrac{2}{3}Q_0 = Q_0\left(e^{-k}\right)^2$, bu yerdan $e^{-k} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{1/2}$ va $\quad Q = Q_0 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^{h/2}$

$h = 12\,м$ chuqurlikda $Q_1 = Q_0\left(\dfrac{2}{3}\right)^6 \approx 0{,}0878Q_0$ ga teng bo'lgan Q_1 yorug'lik oqimi yetib boradi. Bu dastlabki yorug'lik oqimi Q_0 ning $8{,}78\,\%$ ini tashkil etadi.

1.12-masala. (Gazning ionlanishi) o'zgarmas (doimiy) nurlanish ta'sirida gazli muhitda ionlanish protsessi ro'y beradi, unda bir sekund ichida berilgan hajmdagi gazda q ta musbat va shuncha manfiy ion hosil bo'ladi. Musbat va manfiy ionlar yana o'zaro birlashganliklari uchun ularning miqdori kamaya boradi.

n ta musbat ionning umumiy miqdoridan har sekundda ularning miqdori kvadratiga proporsional bo‘lgan qismi birlashishini nazarda tutib, ionlar miqdori n ning t vaqtga bog‘lanishini toping (proporsionallik koeffitsiyenti $\alpha = const$ gazning holati va tabiatiga bog‘liq).

Yechilishi. Ionlanish protsessining

$$dn = qdt - \alpha n^2 dt \tag{1.23}$$

differensial tenglamasi bevosita masala shartidan hosil bo‘ladi.

O‘zgaruvchilarni ajratish tenglamani

$$\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{dn}{n^2 - q/\alpha} + dt = 0$$

ko‘rinishga keltiradi. (1.23) Tenglamaning umumiy integrali:

$$\frac{1}{2\sqrt{\alpha q}} \ln \frac{n - \sqrt{q/\alpha}}{n + \sqrt{q/\alpha}} + t = \frac{1}{2\sqrt{\alpha q}} \ln C,$$

bu yerdan

$$\frac{n - \sqrt{q/\alpha}}{n + \sqrt{q/\alpha}} = Ce^{-2\sqrt{\alpha q}\,t}$$

yoki $$n = \sqrt{\frac{q}{\alpha}} \cdot \frac{e^{-\sqrt{\alpha q}t} + C \cdot e^{-\sqrt{\alpha q}t}}{e^{\sqrt{\alpha q}t} - C \cdot e^{-\sqrt{\alpha q}\,t}}.$$

$t = 0$ da $n = 0$ bo‘lganligidan $C = -1$ va ionlar sonining vaqtga bog‘lanishini aniqlovchi xususiy yechim ushbu ko‘rinishni oladi:

$$n = \sqrt{\frac{q}{\alpha}} th\sqrt{\alpha q}\ .$$

1.13-masala. (Sexni ventilyasiyalash) sig‘imi $10800\,м^3$ bo‘lgan sexdagi havoda $0{,}12\%$ karbonat angidrid gazi bor. Ventilyatorlar tarkibida $0{,}04\%$ karbonat angidrid bo‘lgan toza havoni $\alpha\ m^3/\min$ miqdorda berib turadi. Karbonat angidridning konsentratsiyasi sexni hamma qismida vaqtning har qaysi momentida bir xil deb hisoblab (toza havoning ifloslangan havo bilan qo‘shilishi juda tez bo‘ladi), $10\min$ dan so‘ng karbonat angidrid $0{,}06\%$ dan oShmasligi uchun ventilyatorlarning quvvati qanday bo‘lishini toping.

Yechilishi. Vaqtning t momentida havodagi karbonat angidrid miqdorini $x(\%)$ orqali belgilaymiz. t momentdan boShlab o‘tgan dt vaqt oralig‘i uchun sexdagi karbonat angidrid balansini tuzamiz. Shu vaqt ichida ventilyatorlar $0{,}0004\,adt\,м^3$ karbonat angidrid olib kirgan bo‘lsa, sexdan $0{,}01xadt\,м^3$

karbonat angidrid chiqib ketdi. Binobarin, dt min ichida havodagi karbonat angidrid $dq=(0,01x-0,0004)adt$ $м^3$ kamaydi. Havodagi karbonat angidrid miqdorini protsentlarda kamayiShini dx orqali belgilasak, bu miqdorni boShqa yo‘l bilan

$$dq=10800\cdot 0,01dx \ м^3$$

formula bo‘yicha hisoblash mumkin (manfiy ishora $dx<0$ bo‘lgani uchun olindi) dq uchun topilgan ikkala ifodani tenglab, ushbu differensial tenglamani hosil qilamiz:

$$(0,01x-0,0004)a\,dt=10800\cdot 0,01dx$$

O‘zgaruvchilarni ajratib topamiz:

$$-\frac{adt}{10800}=\frac{dx}{x-0,04}$$

Umumiy integral: $x-0,04=C\cdot e^{-at/10800}$

$t=0$ da $x=0,12$ bo‘lgani uchun $C=0,08$ va xususiy integral

$$x-0,04=0,08e^{-at/10800}$$

ventilyatorlarning quvvati a ni aniqlash uchun $x=0,06$ va $t=10$ deymiz. U holda

$$0,02=0,08e^{-a/1080}$$

bu yerdan $e^{-a/1080}=1/4$ va $a=1080\ln 4\approx 1500$ $м^3/мин$.

1.14-masala. (Gazni tozalash) Biror gazli aralashmadan gazni tozalash uchun uni skrubber (u yoki bu yutuvchi modda bo‘lgan idiSh) orqali o‘tkaziladi. Yutqichning (apparatning ma’lum tayin rejimida) yupqa qatlami yutadigan gazsimon aralashma miqdori aralashma konsentratsiyasiga, Shuningdek, qatlamning ko‘ndalang kesim qalinligi va yuziga proporsional dir. Skruber asosining radiusi R, balandligi H bo‘lgan konus shakliga ega. Gaz konus uchidan kiradi. Agar kelayotgan gazda aralashma konsentratsiyasi a % , chiqib ketayotgan gazda esa b % bo‘lsa, skrubberdagi gazli aralashma konsentratsiyasini qatlamdan konus uchigacha bo‘lgan masofaning funksiyasi sifatida toping.

Yechilishi. Aralashma konsentratsiyasini q % orqali, qatlamdan konus uchigacha bo‘lgan masofani h orqali belgilab, ushbu differensial tenglamani tuzamiz:

$$dq=kq\pi r^2dh$$

bu yerda $r-$ konusning yupqa qatlami kesimining radiusi, u konus o‘lchamlari bilan $r=Rh/H$ munosabat orqali bog‘langan, demak,

$$dq=kq\pi\frac{R^2}{H^2}h^2dh.$$

Bu tenglamaning umumiy yechimi

$$q=Ce^{k\pi R^2h^2/(3H^2)}$$

$h=0$ da $q=a$, shuning uchun $C=a$, va demak,

$$q=ae^{k\pi R^2h^2/(3H^2)}$$

$h=H$ bo‘lganda $q=b$ shartdan κ koeffitsiyentni aniqlasak kifoya. Quyidagiga egamiz:

$$b=ae^{k\pi R^2h^2/(3H^2)}$$

bu yerdan κ ni emas, balki κ qatnashgan ifodani aniqlash qulayroq:

$$e^{k\pi R^2h^2/(3H^2)}=\left(\frac{b}{a}\right)^{1/H^3}$$

$$q=a\left(\frac{b}{a}\right)^{h^2/H^3}.$$

Xuddi shu masalani R radiusli shar shaklida bo‘lgan skrubber uchun yechaylik. Bu holda $dq=kq\pi r^2dh$, bu yerda $r-$ sharning yupqa qatlami kesimining radiusi: R va sharning quyi nuqtasidan qatlamgacha bo‘lgan masofa h bilan $r^2=R^2-(h-R)^2$ munosabat orqali bog‘langan. U holda

$$dq=kq\pi\left[R^2-(h-R)^2\right]dh$$

bu tenglamaning umumiy integrali:

$$\ln\frac{q}{C}=k\pi\left[R^2h-\frac{(h-R)^3}{3}\right]$$

C va κ ni aniqlash uchun $q\big|_{h=0}=a$, $q\big|_{h=2R}=b$ shartlardan foydalanamiz:

$$\ln\frac{a}{C}=\frac{k\pi R^3}{3},\ \ln\frac{b}{C}=k\pi\left(2R^3-\frac{R^3}{3}\right)=\frac{5k\pi R^3}{3}.$$

Ushbu

$\ln\frac{b}{C}-\ln\frac{a}{C}=\ln\frac{b}{a}=\frac{4k\pi R^3}{3}$ ayirmadan $k\pi=\frac{3}{4R^3}\ln\frac{b}{a}$ ni topamiz. Shuningdek,

$$\ln\frac{q}{C}-\ln\frac{a}{C}=\ln\frac{q}{a}=k\pi\left[R^2h-\frac{(h-R)^3}{3}-\frac{R^3}{3}\right]=k\pi\left(Rh^2-\frac{h^3}{3}\right),$$

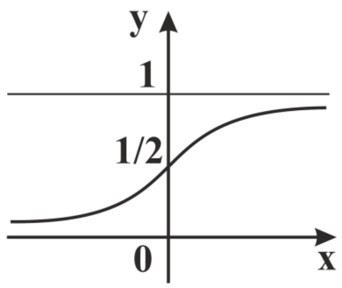
ayirmani olaylik, bunga $k\pi$ ning ifodasini qo‘yib, tenglamaning xususiy integralini $\ln\frac{q}{a}=\frac{h^2(3R-h)}{4R^3}$ ko‘rinishda hosil qilamiz.

1.15-masala. (Ilmiy axborot oqimi). Fanda axborotlar oqimi, ya’ni ilmiy nashrlar sonining o‘sishini tekshirishda nashrlarning $\frac{dy}{dt}$ o‘siSh tezligi nashrlar sonida erishilgan u darajaga proporsional degan kelishuvga asoslanadi, ya’ni o‘sishning nisbiy tezligi $\frac{1}{y}\frac{dy}{dt}$ o‘zgarmaydi. Nashrlar sonining erishilgan darajasini vaqtga bog‘liq holda aniqlaydigan qonun ushbu differensial tenglamadan topiladi:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt}=k \text{ yoki } \frac{dy}{dt}=ky\ (k>0),$$

bu yerda $k-$ u yoki bu fan sohasidagi axborotlarga bildirilgan fikrlarni (o‘rtacha) xarakterlovchi konstanta.

Bu differensial tenglamaning yechimi $y=ae^{kt}$ eksponenta ko‘rinishga ega, bu yerda a- fan rivojlaniShining ma’lum bir boshlang‘ich darajasini xarakterlovchi o‘zgarmas kattalik.



2-rasm

O‘sishning nisbiy tezligi 7% iga, ya’ni $k=0{,}07$ ga o‘sish darajasining taxminan 10 yil ichida ikkilanishi to‘g‘ri keliShini qayd qilib o‘tish mumkin. Haqiqatdan ham, $y_0=a$ darajaga $t=0$ boshlang‘ich momentda, $2y_0$ darajaga esa $t=T$ (bu yerda T- yil hisobida hisoblangan izlanayotgan vaqt) da yerishilgan bo‘lsin. $2y_0=ae^{kt}$. Bu tenglamaning ikkala qismini $y_0=a$ tenglikning mos qismlariga bo‘lib, $2=e^{kt}$ ni hosil qilamiz, bu yerdan logarifmlab topamiz:

$$T=\frac{\ln 2}{k}=\frac{0{,}69}{0{,}07}\approx 10\text{йил}$$

Tashqi sharoitlar keskin o‘zgarganda, tutib turuvchi faktorlar tufayli o‘sishning eksponensial qonuni saqlanmaydi. Darajaning o‘sishi uning birorta qiymati bilan cheklanadi va nashrlar sonining o‘sish mehanizmi ushbu differensial tenglama bilan tasvirlanadi:

$$\frac{dy}{dt}=ky(b-y)\ \ (k>0,\ \ 0<y<b),$$

bu yerda b y kattalikning mumkin bo‘lgan maksimal qiymatini bildiradi. O‘sishning

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt}=k(b-y)$$

nisbiy tezligi endi o‘zgarmas bo‘lmay, balki y ning chiziqli funksiyasi bo‘ladi.

Bu differensial tenglama o‘zgaruvchilari ajraladigan tenglamadir. O‘zgaruvchilarni ajratamiz va tenglamaning ikkala qismidan integral olamiz:

$$\frac{dy}{y(b-y)}=kdt \text{ yoki } \int\frac{dy}{y(b-y)}=kt+C$$

Ma’lumki,

$$\int\frac{dy}{y(b-y)}=\frac{1}{b}\int\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{b-y}\right)dy=\frac{1}{b}\ln\frac{y}{b-y}$$

tenglama yechimi ushbu ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\frac{1}{b}\ln\frac{y}{b-y}+\frac{1}{b}\ln a=kt,$$

bu yerda $C=-\frac{1}{b}\ln a$ deb olingan.

Hosil qilingan yechimni o‘zgartiramiz. Potensirlasak,

$$\frac{ay}{b-y}=e^{bkt};\ ay=(b-y)e^{bkt};$$

$$y\left(a+e^{bkt}\right)=be^{bkt},\quad y=\frac{be^{bkt}}{\left(a+e^{bkt}\right)},$$

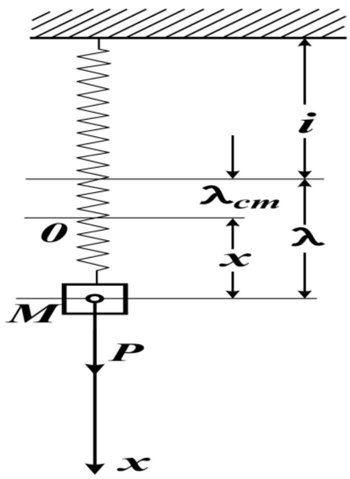
va nihoyat $$y=\frac{b}{1+ae^{-bkt}}.$$

Bu tenglama bilan aniqlanadigan egri chiziq logistik egri chiziq deyiladi. Vaqtning boshlang‘ich momentlarida y ning qiymatlari b dan ancha kichik bo‘lganda bu egri chiziq $y=be^{bkt}$ eksponenta bilan deyarli ustma-ust tushadi, $y=b$ va $y=0$ to‘g‘ri chiziqlar logistik egri chiziqning asimptotalari bo‘ladi.

$M\left(\dfrac{\ln a}{bk};\dfrac{b}{2}\right)$ nuqta bukilish nuqtasidir (2-rasmga qarang, u yerda $a=b=1$ deb qabul qilingan).

2. Bir jinsli va bir jinsli bo‘lmagan chiziqli differensial tenglamalarga keltiriladigan masalalar

2.1-masala. (**Garmonik tebranishlar**). Og‘irligi P bo‘lgan yuk tinch turgan holatidagi uchunligi ℓ bo‘lgan vertikal prujinaga osilgan. Yuk bir oz pastga tortilib, keyin qo‘yib yuboriladi. Prujina massasini va havo qarshiligini hisobga olmay, yukning harakat qonunini toping.



3-rasm

Yechilishi. Ox o‘qni yuk osilgan nuqta orqali pastga vertikal yo‘naltiramiz. Koordinatalar boshi O ni yuk muvozanatda bo‘lgan holatda, ya’ni yukning og‘irligi prujinaning reaksiya kuchi bilan muvozanatlashgan nuqtada olamiz (3-rasm).

λ – purjinaning ayni momentdagi uzayidhi, λ_{cT} esa statik uzayish, ya’ni cho‘zilmagan prujina oxiridan muvozanat holatigacha bo‘lgan masofa. U holda $\lambda=\lambda_{cT}+x$ yoki $\lambda-\lambda_{cT}=x$.

Harakatning differensial tenglamasini Nyutonning ikkinchi qonuni $F=ma$ dan topamiz, bu yerda $m=\dfrac{P}{g}-$yuk massasi, $a-$ harakat tezlanishi, $F-$ yukka qo‘yilgan kuchlarning teng ta’sir etuvchisi. Mazkur holda teng ta’sir etuvchi kuch prujinaning taranglik kuchi va og‘irlik kuchi yig‘indisidan iborat.

Guk qonuniga ko‘ra prujinaning taranglik kuchi uning uzayishiga proporsional , ya’ni $-c\lambda$ ga teng, bu yerda $c-$ o‘zgarmas proporsionallik koeffitsiyenti, u prujinaning bikrligi deyiladi.

Shuning uchun harakatning differensial tenglamasi ushbu ko‘rinishda bo‘ladi:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-C\lambda+P.$$

Muvozanat holatida prujinaning taranglik kuchi og‘irlik bilan muvozanatlashgani uchun $P = c\lambda_{ст}$ bo‘ladi. Differensial tenglamaga P ning ifodasini ko‘yib va $\lambda - \lambda_{ст}$ ni x bilan belgilab, tenglamani $m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx$ ko‘rinishga yoki c/m ni k^2 orqali belgilab,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0$$

ko‘rinishga keltiramiz.

Bu tenglama yukning erkin tebranishlari deb ataladigan tebranishni ifodalaydi. U garmonik ossillyatorning tenglamasi deyiladi. Bu koeffisientlari o‘zgarmas bo‘lgan ikkinchi tartibli chiziqli bir jinsli differensial tenglama. Uning xarakteristik tenglamasi $r^2 + k^2 = 0$ mavhum $r = \pm ki$ ildizlarga ega, bunga tegishli umuiy yechim:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt\,.$$

Yechimning fizikaviy ma’nosini aniqlash uchun yangi ixtiyoriy o‘zgarmaslar kiritib, uni boshqa shaklga keltirish qulayroq $\sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ ga ko‘paytirib va bo‘lib, quyidagini hosil qilamiz:

$$x = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}\left(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}\cos kt + \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}\sin kt\right).$$

Agar

$$\sqrt{C_1^2 + C_2^2} = A, \quad C_1\Big/\sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sin\alpha, \; C_2\Big/\sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \cos\alpha$$

desak, yechim

$$x = A\sin(\kappa t + \alpha) \qquad (2.1)$$

ko‘rinishga keladi.

Shunday qilib yuk muvozanat holati atrofida garmonik tebranadi.

A kattalik tebranishning *amplitudasi*, $kt + \alpha$ argument esa tebranish fazasi deyiladi. Fazaning $t = 0$ dagi qiymati, ya’ni α kattalik tebranishning boshlang‘ich fazasi deyiladi. $k = \sqrt{c/m}$ kattalik tebranish chastotasidir. Tebranishning $I = 2\pi/k = 2\pi\sqrt{m/c}$ davri va k chastota faqat prujinaning bikrligi va sistema massasiga bog‘liq. $c = P/\lambda_{ст} = mg/\lambda_{ст}$ bo‘lgani sababli, davr uchun

$$T = 2\pi\sqrt{\lambda_{ст}/g}$$

formulani ham hosil qilish mumkin.

Yukning harakat tezligini yechimni t bo‘yicha differensiallash orqali topamiz:

$$\vartheta = \frac{dx}{dt} = Ak\cos(kt+\alpha).$$

Amplituda va boshlang‘ich fazani aniqlash uchun boshlang‘ich shartlar berilgan bo‘lishi kerak. Aytaylik, boshlang‘ich $t=0$ momentda yukning holati $x=x_0$ va tezligi $\vartheta=\vartheta_0$ bo‘lsin. U holda $x_0 = A\sin\alpha$, $\vartheta_0 = Ak\cos\alpha$, bu yerdan

$$A=\sqrt{x_0^2+\frac{\vartheta_0^2}{k^2}},\ \alpha = arctg\frac{kx_0}{\vartheta_0}.$$

Amplituda va boshlang‘ich faza formulalaridan ko‘rinishicha, ular xususiy tebranishlar chastotasi va davridan farqli o‘laroq sistemaning boshlang‘ich holatiga bog‘liq. Boshlang‘ich tezlik bo‘lmaganda $(\vartheta_0=0)$ amplituda $A=x_0$, boshlang‘ich faza esa $\alpha=\pi/2$ va shunday qilib,

$$x = x_0\sin(\kappa t+\pi/2) \quad \text{yoki} \quad x = x_0\cos\kappa t.$$

Agar sonli ma’lumotlar berilgan bo‘lsa, masalan, $P=2H$, $\ell=40\ см$, $\lambda_{ст}=4\ см$, shu bilan birga yuk $x=2\ см$ ga tortilib, boshlang‘ich tezliksiz $(\vartheta_0=0)$ qo‘yib yuborilgan bo‘lsa, u holda harakat qonuni (2.1) formulaga ko‘ra

$$x = A\sin(kt+\alpha)$$

ko‘rinishda aniqlanadi, bu yerdagi $k=\sqrt{cg/P}$ chastota $P=c\cdot\lambda_{ст}$ munosabatdan aniqlanadi, bu yerdan $c=1/2$, demak, $k=\sqrt{g/2}$, $A=\sqrt{x_0^2+\vartheta_0^2/k^2}=2$ va $\alpha = arctg(kx/\vartheta_0)=\pi/2$. Shunday qilib,

$$x = 2\cos\frac{t}{2}\sqrt{g}.$$

Yukning tebranish davri $T=2\pi/k=4\pi/\sqrt{g}\approx 0{,}4 сек$. Eng katta cho‘zilish $\lambda_{\max}=\lambda_{ст}+A=6\ см$ prujinaning eng katta taranglik kuchi $F_{\max}=c\lambda_{\max}=3H$.

Elektr zanjirdagi tebranishlar

2.**2-masala.** Elektr yurituvchi kuchi $e(t)$ ga teng bo‘lgan manbaga ketma-ket ulangan L induktivlik g‘altagi, R omik qarshilik va C sig‘imdan iborat kontur ulangan. Agar boshlang‘ich momentda konturdagi tok va kondensator zaryadi nolga teng bo‘lsa, zanjirdagi i tokni t vaqtning funksiyasi kabi toping.

Yechilishi. Kirxgof qonuniga ko‘ra zanjirdagi elektr yurituvchi kuch induktivlikdagi, qarshilikdagi va sig‘imdagi kuchlanishlar pasayishi yig‘indisiga teng:

$$e(t)=u_L+u_R+u_C,$$

ular i tok bilan quyidagi munosabatlar orqali bog‘langan:

$$u_L=L\frac{di}{dt},\quad u_R=Ri,\quad u_C=\frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau.$$

Shunday qilib quyidagi tenglama hosil bo‘ladi:

$$e(t)=L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau.$$

Bu integral differensial tenglamadir, ya’ni tenglamalarning eng murakkab turlaridan biriga mansubdir, biroq mazkur holda differensiallash orqali undan oddiy differensial tenglamaga o‘tish mumkin. Haqiqatan ham, t bo‘yicha differensiallab, koeffitsiyentlari o‘zgarmas bo‘lgan ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamani hosil qilamiz:

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}i=\frac{de}{dt} \tag{2.2}$$

Ikki holni qaraymiz.

1-hol. $e(t)=E=const.$ Bu holda $\frac{de}{dt}=0$ va (2.2) tenlama bir jinsli

$$\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{di}{dt}+\frac{1}{LC}i=0$$

tenglamaga aylanadi. Bu tenglama erkin mexanikaviy tebranishlar (muhit qarshiligi hisobga olingandagi) tenglamasiga o‘xshashdir. Uning $r^2+\frac{R}{L}r+\frac{1}{LC}=0$ xarakteristik tenglamasi

$$r_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\frac{R^2C-4L}{4L^2C}}$$

ildizlarga ega bo‘ladi. Agar $R^2C-4L\geq 0$ bo‘lsa xarakteristik tenglamanig ikkala ildizi haqiqiy va umumiy yechim nodavriy funksiya bo‘ladi. Bunga mos ravishda tok ham nodavriy bo‘ladi. $R^2C-4L=0$ bo‘lgandagi kabi, zanjirda hech qanday elektr tebranishlari vujudga kelmaydi. Agar $R^2C-4L<0$ bo‘lsa,

$$i=e^{-\delta t}\left(C_1\cos\omega_1 t+C_2\sin\omega_1 t\right),$$

(bu Yerda $\delta = R/2L,\ \omega_1^2 = 1/(LC) - R^2/(4L^2)$ deb olingan) umumiy yechim elektr tebranishlarini ifodalaydi.

$L\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0} = E$ ekanligini ko‘rish oson, bu Yerdan $\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0} = \frac{E}{L}$ va shunday qilib, boshlang‘ich shartlar quyidagicha yoziladi:

$$i|_{t=0} = 0, \qquad \left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0} = \frac{E}{L}$$

i ni t bo‘yicha differensiallab, topamiz:

$$\frac{di}{dt} = e^{-\delta t}\left[-\delta\left(C_1\cos\omega_1 t + C_2\sin\omega_1 t\right) + \omega_1\left(-C_1\sin\omega_1 t + C_2\cos vt\right)\right].$$

$t = 0$ ni i va $\frac{di}{dt}$ ning ifodalariga qo‘yib,

$$0 = C_1, \qquad \frac{E}{L} = -\delta C_1 + \omega_1 C_2$$

ni topamiz, bu yerdan $C_1 = 0$ va $C_2 = E/(L\omega_1)$, natijada yechim ushbu ko‘rinishda bo‘ladi:

$$i = \frac{E}{L\omega_1}e^{-\delta t}\sin\omega_1 t.$$

2- hol. $e(t) = E\sin\omega t.$ Bu holda $\frac{de}{dt} = E\omega\cos\omega t.$ Quyidagi chiziqli bir jinsli bo‘lmagan tenglama hosil bo‘ladi:

$$L\frac{d^2 i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = E\omega\cos\omega t.$$

Bu bir jinsli bo‘lmagan tenglamaga mos bir jinsli tenglama yuqorida ko‘rilgan tenglamadan (1-hol) iborat bo‘ladi, shuning uchun bir jinsli bo‘lmagan tenglamaning xususiy yechimini topish qoladi. Uni

$$\bar{i} = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

shaklda izlash kerak. Aniqmas koeffitsiyentlarni topish uchun quyidagilarni hisoblaymiz:

$$\frac{1}{C}\Big|\ \bar{i} = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

$$R\,|\ \bar{i}' = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t\ ,$$

$$L\,|\ \bar{i}'' = -A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\cos\omega t$$

va A, B ga nisbatan algebraik tenglamalar sistemasiga ega bo‘lamiz:

$$\left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right)A + \omega RB = E\omega, \qquad -\omega RA + \left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right)B = 0.$$

Bu sistemani echib,

$$A=\frac{E\omega\left(1/C-L\omega^2\right)}{\left(1/C-L\omega^2\right)^2+\omega^2R^2},\quad B=\frac{E\omega^2R}{\left(1/C-L\omega^2\right)^2+\omega^2R^2}$$

ni topamiz, koeffitsiyentlarning bu qiymatlarida xususiy yechim quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\bar{i}=\frac{E\omega}{\left(1/C-L\omega^2\right)^2+\omega^2R^2}\left[\left(\frac{1}{C}-L\omega^2\right)\cos\omega t+\omega R\sin\omega t\right].$$

Bir jinsli bo‘lmagan tenglamaning umuiy yechimi mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi va bir jinsli bo‘lmagan tenglamaning xususiy yechimi yig‘indisidan iborat, ya’ni

$$i=I+\bar{i}=e^{-\delta t}\left(C_1\cos\omega_1 t+C_2\sin\omega_1 t\right)+\frac{E}{\left[1/(C\omega)-L\omega\right]^2+R^2}\left[\left(\frac{1}{C\omega}-L\omega\right)\cos\omega t+R\sin\omega t\right].$$

Belgilashlar kiritamiz? $L\omega-\frac{1}{C\omega}=X$; $\sqrt{\left(\frac{1}{C\omega}-L\omega\right)^2+R^2}=\sqrt{X^2+R^2}=Z$; u holda

$$i=e^{-\delta t}\left(C_1\cos\omega_1 t+C_2\sin\omega_1 t\right)-\frac{E}{Z^2}\left(X\cos\omega t-R\sin\omega t\right).$$

C_1 va C_2 larni boshlang‘ich shartlardan topamiz: $i\big|_{t=0}=0$, $\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0}=0$, (keyingi shart

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau=E\sin\omega t$$

tenglamadan $t=0$ da hosil bo‘ladi).

Shu maqsadda hosilani yozib olamiz:

$$\frac{di}{dt}=-\delta e^{-\delta t}\left(C_1\cos\omega_1 t+C_2\sin\omega_1 t\right)+e^{-\delta t}\left(-C_1\omega_1\sin\omega_1 t+C_2\omega_1\cos\omega_1 t\right)+$$

$$+\frac{E}{Z^2}\left(X\omega\sin\omega t+R\omega\cos\omega t\right)$$

va $t=0$ qiymatni i va $\frac{di}{dt}$ ning ifodalariga qo‘yamiz:

$0=C_1-\frac{EX}{Z^2}$, bu yerdan $C_1=\frac{EX}{Z^2}$;

$$0=-\delta C_1+\omega_1 C_2+\frac{ER\omega}{Z^2};$$

bu yerdan

$$C_2=\frac{1}{\omega_1}\left(\delta C_1-\frac{ER\omega}{Z^2}\right)=-\frac{E}{Z^2\omega_1}\left(R\omega-X\delta\right).$$

Qavsda turgan ifodani quyidagicha o‘zgartiramiz:

$$R\omega - X\delta = R\omega - \frac{R}{2L}\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) = R\omega - \frac{R\omega}{2} + \frac{\delta}{C\omega} =$$

$$\frac{R\omega}{2} + \frac{\delta}{C\omega} = \delta\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) = \delta X',$$

bu yerda $L\omega + 1/(C\omega) = X'$ deb belgilangan.

Shunday qilib,

$$i = \frac{E}{Z^2\omega} e^{-\delta t}\left(X\omega_1 \cos\omega_1 t - X'\delta \sin\omega_1 t\right) - \frac{E}{Z^2}\left(X\cos\omega t - R\sin\omega t\right).$$

Belgilash kiritamiz: $X\omega_1 \big/ \sqrt{X^2\omega_1^2 + X'^2\delta^2} = \sin\gamma_1$, $X'\delta \big/ \sqrt{X^2\omega_1^2 + X'^2\delta^2} = \cos\gamma_1$ yoki

$$X^2\omega_1^2 + X'^2\delta^2 = \frac{Z^2}{LC} \qquad (2.3)$$

bo‘lgani uchun

$$X\sqrt{LC}\omega_1 / Z = \sin\gamma_1, \quad X'\sqrt{LC}\delta / Z = \cos\gamma_1$$

(2.3) munosabat quyidagicha hosil bo‘ladi. Quyidagiga egamiz:

$$L\omega = X + \frac{1}{C\omega}, \quad L\omega = X' - \frac{1}{C\omega},$$

bu yerdan

$$X' = X + \frac{2}{C\omega} \quad \text{va} \quad X'^2 = X^2 + \frac{4}{C\omega}\left(X + \frac{1}{C\omega}\right)$$

Demak,

$$X^2\omega_1^2 + X'^2\delta^2 = X^2\left(\frac{1}{LC} - \delta^2\right) + \left[X^2 + \frac{4}{C\omega}\left(X + \frac{1}{C\omega}\right)\right]\delta^2 =$$

$$= \frac{X^2}{LC} + \frac{4}{C\omega}\left(L\omega - \frac{1}{C\omega} + \frac{1}{C\omega}\right)\delta^2 = \frac{X^2}{LC} + \frac{4LR^2}{C\cdot 4L^2} = \frac{1}{LC}\left(X^2 + R^2\right) = \frac{Z^2}{LC}.$$

Xuddi yuqoridagiga o‘xshash belgilaymiz: $X\big/\sqrt{X^2 + R^2} = \sin\gamma$, $R\big/\sqrt{X^2 + R^2} = \cos\gamma$ $X/Z = \sin\gamma$, $R\big/\sqrt{X^2 + R^2} = \cos\gamma$. yoki natijada quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$i = -\frac{Ex^{-\delta t}}{Z\sqrt{LC}\omega_1}\sin\left(\omega_1 t - \gamma_1\right) + \frac{E}{Z}\sin\left(\omega t - \gamma\right),$$

bu yerda $tg\gamma_1 = (X\omega)/(X'\delta)$, $tg\gamma = X/R.$

$\omega = \omega_1$ bo‘lgan holda xususiy yechimni

$$\bar{i} = t\left(A\cos\omega t + B\sin\omega t\right)$$

ko‘rinishda izlash kerakligini eslatib o‘taylik.

t ko‘paytuvchining borligi tebranish amplitudasi cheksiz o‘sishini ko‘rsatadi; $\omega=\omega_1$ bo‘lgan hol rezonansni bildiradi.

2.3-masala. 1-Masaladagi zanjirdan R qarshilik yo‘qligi bilan farq qiluvchi va $E\cos(\omega t+\psi)$ (bu yerda $\omega\neq 1/\sqrt{LC}$) EYUK bo‘lgan $LC-$ zanjirni qaraylik.

Bu holda differensial tenglama ushbu ko‘rinishda bo‘ladi:

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{1}{C}i=-E\omega\sin\left(\omega t+\psi\right),$$

boshlang‘ich shartlar: $i\big|_{t=0}=0,\ \left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0}=\frac{E}{L}\cos\psi$ (keyingi shart $L\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}\int\limits_0^t i(\tau)d\tau=E\cos\left(\omega t+\psi\right)$ tenglamadan $t=0$ da hosil bo‘ladi).

Mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi:

$I=C_1\cos\omega_0 t+C_2\sin\omega_0 t$, bu yerda $\omega_0=1/\sqrt{LC}$.

Xususiy yechimni topamiz:

$$\frac{1}{C}\Bigg|\ \bar{i}=A\cos\omega t+B\sin\omega t,$$

$$0\Big|\ \frac{d\bar{i}}{dt}=-A\omega\sin\omega t+B\omega\cos\omega t,$$

$$L\Big|\ \frac{d^2\bar{i}}{dt^2}=-A\omega^2\cos\omega t-B\omega^2\sin\omega t$$

$$A\left(\frac{1}{C}-L\omega^2\right)\cos\omega t+B\left(\frac{1}{C}-L\omega^2\right)\sin\omega t=-E\omega\sin\psi\cos\omega t-E\omega\cos\psi\sin\omega t.$$

Demak,

$$AL\left(\frac{1}{LC}-\omega^2\right)=-E\omega\sin\psi,\ \text{ bu yerdan }\ A=-\frac{E\omega\sin\psi}{L\left(\omega_0^2-\omega^2\right)},$$

$$BL\left(\frac{1}{LC}-\omega^2\right)=-E\omega\cos\psi,\ \text{ bu yerdan }\ B=-\frac{E\omega\cos\psi}{L\left(\omega^2-\omega_0^2\right)},$$

Shuning uchun

$$\bar{i}=-\frac{E\omega}{L\left(\omega^2-\omega_0^2\right)}\left(\sin\psi\cos\omega t+\cos\psi\sin\omega t\right)$$

yoki

$$\bar{i}=-\frac{E\omega}{L\left(\omega^2-\omega_0^2\right)}\sin\left(\omega t+\psi\right).$$

Shunday qilib, umumiy yechim ushbu ko‘rinishda hosil bo‘ladi:

$$i=C_1\cos\omega_0 t+C_2\sin\omega_0 t+\frac{E\omega}{L\left(\omega^2-\omega_0^2\right)}\sin\left(\omega t+\psi\right).$$

Boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiradigan xususiy yechimni topish uchun hosilani yozib olamiz va i hamda $\frac{di}{dt}$ ning ifodalariga ularning $t=0$ dagi qiymatlarini qo‘yamiz:

$$0=C_1+\frac{E\omega\sin\psi}{L\left(\omega^2-\omega_0^2\right)},\quad \text{bu yerdan}\quad C_1=-\frac{E\omega\sin\psi}{L\left(\omega^2-\omega_0^2\right)};$$

$$\frac{E}{L}\cos\psi=C_2\omega_0+\frac{E\omega^2\cos\psi}{L\left(\omega^2-\omega_0^2\right)},\quad \text{bu yerdan}\quad C_2=-\frac{\omega_0 E\cos\psi}{L\left(\omega^2-\omega_0^2\right)},$$

va demak,

$$i=\frac{E}{L\left(\omega^2-\omega_0^2\right)}\left[\omega\sin\psi\cos\omega t+\omega_0\cos\psi\sin\omega t-\omega\sin\left(\omega t+\psi\right)\right]$$

yoki

$$i=\frac{E}{L\left(\omega^2-\omega_0^2\right)}\left[\omega\sin\left(\omega t+\psi\right)-\omega\sin\psi\cos\omega t-\omega_0\cos\psi\sin\omega t\right]$$

Ixtiyoriy o‘zgarmaslar boshlang‘ich shartlardan oldingi holdagi kabi aniqlanadi.

Agar $\omega=1/LC=\omega_0$ bo‘lsa, xususiy yechimni

$$\bar{i}=t\left(A\cos\omega t+B\sin\omega t\right)$$

ko‘rinishda izlash kerak, u holda $\frac{d\bar{i}}{dt}=t\left(-A\omega\sin\omega t+B\omega\cos\omega t\right)+A\cos\omega t+B\sin\omega t$, $\frac{d^2\bar{i}}{dt^2}=t\left(-A\omega^2\cos\omega t-B\omega^2\cos\omega t\right)+\left(-2A\omega\sin\omega t+2B\omega\cos\omega t\right)$. $L\omega^2-\frac{1}{C}=0$ bo‘lgani uchun tenglamaga $\bar{i}$ va $\frac{d^2\bar{i}}{dt^2}$ ning ifodasiga qo‘yib, ushbu ayniyatni hosil qilamiz.

$$L\left(-2A\omega\sin\omega t+2B\omega\cos\omega t\right)=E\omega\cos\omega t,$$

bu Yerdan $A=0$, $B=E/(2L)$ ekanligi kelib chiqadi va shuning uchun

$$\bar{i}=\frac{E}{2L}t\sin\omega t.$$

Bu holda $(R=0)$ tenglamaning umumiy yechimi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$i=I+\bar{i}=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t+\frac{E}{2L}t\sin\omega t.$$

C_1 va C_2 larni $i\big|_{t=0}$ va $\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0}=0$ boshlang‘ich shartlardan topamiz. Buning uchun

$$\frac{di}{dt}=-C_1\omega\sin\omega t+C_2\omega\cos\omega t+\frac{E\omega t}{2L}\cos\omega t+\frac{E}{2L}\sin\omega t$$

ni yozib olamiz $t=0$ va qiymatni i hamda $\frac{di}{dt}$ ning ifodasiga qo‘yamiz, natijada $C_1=C_2=0$ ni, ya’ni $i=\bar{i}$ ni hosil qilamiz. Nihoyat quyidagiga ega bo‘lamiz (rezonans hol):

$$i=\frac{E}{2L}t\sin\omega t,\text{bu yerda } \omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

2.4-masala. EYUKi $E\sin(\omega t+\psi)$ga teng bo‘lgan $LR-$ zanjirni qaraymiz. Bu holda birinchi tartibli

$$L\frac{di}{dt}+Ri=E\sin(\omega t+\psi)$$

tenglama va $i\big|_{t=0}=0$ boshlang‘ich shart hosil bo‘ladi. Bu koeffitsiyentlari o‘zgarmas bo‘lgan chiziqli tenglama bo‘lganligi uchun uni yuqori tartibli chiziqli tenglamalar yechiladigan usullar bilan yechish mumkin.

$Lr+R=0$ xarakteristik tenglamadan $r=-R/L$ ni aniqlaymiz va mos bir jinsli tenglamaning yechimi $I=C_1e^{-R/L}$ ni hosil qilamiz. Bir jinsli bo‘lmagan tenglamaning xususiy yechimini aniqmas koeffitsiyentlar usulidan foydalanib topamiz:

$$R\big|\, i=A\cos\omega t+B\sin\omega t,$$

$$L\Big|\,\frac{di}{dt}=-A\omega\cos\omega t+B\omega\sin\omega t.$$

$$(RA+L\omega B)\cos\omega t+(+L\omega A+RB)\sin\omega t=E\sin\psi\cos\omega t+E\cos\psi\sin\omega t.$$

$$RA+L\omega B=E\sin\psi\ \big|\ R\ \big|\ L\omega$$

$$-L\omega A+RB=E\cos\psi\ \big|-L\omega\ \big|\ R;$$

$$\left(R^2+L^2\omega^2\right)A=E\left(R\sin\psi-L\omega\cos\psi\right),\quad A=\frac{E\left(R\sin\psi-L\omega\cos\psi\right)}{Z^2}$$

$$\left(R^2+L^2\omega^2\right)B=E\left(L\omega\sin\psi+R\cos\psi\right),\quad B=\frac{E\left(L\omega\sin\psi+R\cos\psi\right)}{Z^2}$$

bu yerda $Z^2=R^2+L^2\omega^2$;

$$\bar{i}=\frac{E}{Z^2}\Big[\left(R\sin\psi-L\omega\cos\psi\right)\cos\omega t+\left(L\omega\sin\psi+R\cos\psi\right)\sin\omega t\Big]=\frac{E}{Z^2}\Big[L\omega\big(\sin\omega t\sin\psi-$$

$$-\cos\omega t\cos\psi)+R(\sin\omega t\cos\psi+\cos\omega t\sin\psi)\Big]=\frac{E}{Z^2}\big[-L\omega\cos(\omega t+\psi)+R\sin(\omega t+\psi)\big];$$

Agar $R/Z=\cos\gamma,\ \ L\omega/Z=\sin\gamma$ desak,

$$\bar{i}=\frac{E}{Z}\sin(\omega t+\psi-\gamma).$$

Shunday qilib,

$$i=C_1e^{-Rt/L}+\frac{E}{Z}\sin(\omega t+\psi-\gamma).$$

C_1 ni aniqlash uchun $i\big|_{t=0}=0$ boshlang‘ich shartdan foydalanamiz:

$0=C_1+\frac{E}{Z}\sin(\psi-\gamma)$, bu yerdan $C_1=\frac{E}{Z}\sin(\gamma-\psi)$.

Uzilkesil

$$i=\frac{E}{Z}\Big[\sin(\psi-\gamma)e^{-Rt/L}+\sin(\omega t+\psi-\gamma)\Big]$$

ga egamiz, bu yerda $tg\gamma=L\omega/R$.

3. Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar va ularga keltiriladigan masalalar

Fizikaga doir masalalar

3.1-masala. (Elektr zanjiridagi o‘tish protsessi). Induktivlik zanjirida o‘tish protsessi sodir bo‘ladi. L induktivlik va R aktiv qarshilik – o‘zgarmasdir. U quchlanish t vaqtning funksiyasi sifatida berilgan: $U=f(t)$. Boshlang‘ich tok i_0 ga teng. i tokning t vaqtga bog‘lanishini toping. Jumladan, $U=U_0=const$ bo‘lgan holni qarab chiqing.

Yechilishi. Zanjirdagi i tok vaqt o‘tishi bilan o‘zgargani va L induktivlik mavjudligi tufayli o‘z induksiyasining $l_L=-L\frac{di}{dt}$ $EYUK$. hosil bo‘ladi. Kirxgof qonuniga ko‘ra, zanjirdagi kuchlanish pasayishi Ri $EYUK$ lar yig‘indisi $U-L\frac{di}{dt}$ ga teng. Shunday qilib,

$$U-L\frac{di}{dt}=Ri \quad \text{yoki} \quad L\frac{di}{dt}+Ri=U.$$

Bu birinchi tartibli chiziqli differensial tenglama U ni $f(t)$ bilan almashtirib va tenglamaning ikkala qismini L ga bo‘lib, quyidagini hosil qilamiz. $\frac{di}{dt}+\frac{R}{L}i=\frac{f(t)}{L}$

Bu chiziqli tenglamaning $t=0$ da $i=i_0$ boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi xususiy yechimi

$$i=e^{-Rt/L}\left[i_0+\frac{1}{L}\int_0^t f(\tau)e^{R\tau/L}d\tau\right]$$

funksiyadan iborat bo‘ladi.

$f(t)=U_0=const$, bo‘lganda

$$i=e^{-Rt/L}\left[i_0+\frac{U_0}{L}\int_0^t f(\tau)e^{Rt/L}d\tau\right]$$

yoki $\int_0^t e^{R\tau/L}d\tau=\frac{L}{R}\left(e^{Rt/L}-1\right)$ bo‘lganligi uchun

$$i=\frac{V_0}{R}+\left(i_0-\frac{U_0}{R}\right)e^{-Rt/L}$$

t ning o‘sishi bilan $e^{-Rt/L}$ ko‘paytuvchi kamayadi va biror vaqt oralig‘idan so‘ng protsescni amalda barqaror deb hisoblash mumkin, bunda tok OM qonuni bo‘yicha aniqlanadi.

$$i=\frac{U_0}{R}$$

Agar $i_0=0$ desak, zanjirning ulanishidagi tok uchun formula hosil qilamiz:

$$i=\frac{U_0}{R}\left(1-e^{-Rt/L}\right).$$

Tenglikdan ko‘rinadiki i tok batariya ulangandan so‘ng OM qonuni bilan aniqlanadigan U_0/R qiymatgacha o‘sib etadi.

Chunki tutashuv ekstratoki deb ataluvchi $\frac{U_0}{R}e^{-Rt/L}$ tok juda tez kamayadi va amalda tezda sezilarsiz bo‘lib qoladi deb hisoblash mumkin.

Agar $U_0=0$ desak, zanjirning uzilishidagi so‘nish toki uchun formulasini hosil qilamiz:

$$i=i_0e^{-Rt/L}$$

Zanjirda kuchlanish bo‘lmaganda faqat o‘zinduksiyaning EYUK ta’siri natijasida zanjirda o‘tadigan bu tok uzish ekstratoki deyiladi. t o‘sishi bilan u nolga intiladi.

O‘zgarmas L/R kattalikni zanjirning vaqt doimiysi deyiladi.

Ko‘rib chiqilgan masalalar tutashish va uzilish ketma-ketlikda juda tez sodir bo‘lganda, masalan, telegraf aloqasida muhimdir.

Tok manbaining quchlanishi $U = E\sin\omega t$ sinusoidal qonun bo‘yicha o‘zgaradigan hol (masalan, RL-zanjir o‘zgaruvchan tok manbaiga ulanadigan hol) alohida diqqatga sazovordir. Bu holda formulaga binoan quyidagiga egamiz:

$$i = e^{-Rt/L}\left(i_0 + \frac{E}{L}\int_0^t e^{R\tau/L}\sin\omega\tau d\tau\right).$$

Quyidagini tekshirib ko‘rish oson:

$$\int e^{R\tau/L}\sin\omega\tau d\tau = e^{R\tau/L}\left(\frac{RL}{\omega^2L^2+R^2}\sin\omega\tau - \frac{\omega L^2}{\omega^2L^2+R^2}\cos\omega\tau\right).$$

Shuning uchun

$$\int_0^t e^{R\tau/L}\sin\omega\tau d\tau = e^{Rt/L}\left(\frac{RL}{\omega^2L^2+R^2}\sin\omega t - \frac{\omega L^2}{\omega^2L^2+R^2}\cos\omega t\right) + \frac{\omega L^2}{\omega^2L^2+R^2}$$

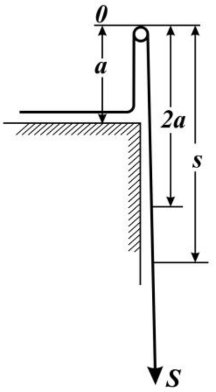
va biz tokning vaqtga bog‘lanishini ushbu qo‘rinishda hosil qilamiz:

$$i = \left(i_0 + \frac{\omega LE}{\omega^2L^2+R^2}\right)e^{-Rt/L} + \frac{RE}{\omega^2L^2+R^2}\sin\omega t - \frac{\omega LE}{\omega^2L^2+R^2}\cos\omega t$$

$e^{-Rt/L}$ ko‘paytuvchi t o‘sib borgan sayin tez qamayadi. Shu sababli bu formuladagi birinchi qo‘shiluvchi qisqa vaqt oralig‘idan so‘ng i kattalikni aniqlashga amalda ta’sir ko‘rsata olmaydi. Qolgan ikkita qo‘shiluvchining yg‘indisi U kuchlanishnig ω chastotasi kabi o‘sha ω chastotali, biroq boshqa amplitudali va boshqa fazali sinusoidal kattalikdan iborat: Shu bilan birga u i_0 boshlang‘ich tokka bog‘liq bo‘lmaydi. Bu tok barqaror tok deyiladi.

3.2-masala. (Arqonning sirpanishi) Arqon stol ustida yotibdi.(4-rasm) Uning uchlaridan biri stol ustidan a masofada bo‘lgan silliq blok orqali o‘tkazilgan. Boshlang‘ich momentda $2a$ uzunlikdagi arqon bo‘lagi blokning narigi tomonida erkin osilib turibdi.

Arqonning bu uchining harakat tezligi ϑ ni S yo‘lga bog‘liq ravishda toping, bunday harakatda ishqalinish qarshiligi tezlik kvadratiga teng, boshlang‘ich tezlik esa nolga teng deb qabul qiling.



4-rasm

Yechilishi. Agar blokni yo‘lning sanoq boshi sifatida tanlab olsak, OS o‘qni pastga yo‘naltirsak, Nyutonning ikkinchi qonuni $m\frac{d\vartheta}{dt}=F$ bizning holda ushbu differensial tenglamaga olib keladi:

$$(S+a)\frac{d\vartheta}{dt}=(S-a)g-\vartheta^2,$$

bu yerda g-og‘irlik kuchi tezlanishi.

$\frac{d\vartheta}{dt}=\frac{d\vartheta}{dS}\cdot\frac{dS}{dt}=\vartheta\frac{d\vartheta}{dS}$ bo‘lgani uchun tenglamani quyidagicha yozish mumkin:

$$(S+a)\vartheta\frac{d\vartheta}{dS}+\vartheta^2=(S-a)g\ .$$

Bu Bernulli tenglamasidir. $(n=-1)$ Ushbu $\vartheta^2=z$ o‘rniga qo‘yish (mos ravishda $\vartheta\frac{d\vartheta}{dS}=\frac{1}{2}\frac{dz}{dS}$) bilan uni chiziqli ko‘rinishga keltiramiz:

$$\frac{dz}{dS}+\frac{2}{S+a}z=\frac{2g(S-a)}{S+a}$$

$$y'+P(x)y=Q(x)$$

chiziqli differensial tenglamani umumiy yechimi

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right] \qquad (3.1)$$

umumiy yechimini (1) formula bo‘yicha topamiz:

$$z=e^{-\ln(S+a)}\left[2g\int\frac{s-a}{s+a}e^{2\ln(s+a)}ds+C\right].$$

Biroq

$$e^{-2\ln(s+a)}=\frac{1}{(s+a)^2}, \qquad e^{2\ln(s+a)}=\left(s+a\right)^2,$$

$$\int\frac{s-a}{s+a}e^{2\ln(a+s)}ds=\int(s^2-a^2)ds=\frac{s^3}{3}-a^2\cdot s$$

va shu sababli

$$z = \vartheta^2 = \frac{1}{(S+a)^2} = \left[2g\left(\frac{S^3}{3} - a^2 \cdot S \right) + C \right]$$

$s = 2a$ da $\vartheta = 0$ boshlang‘ich shartdan $C = -4$ da 3/3 ni topamiz, natijada xususiy integral ushbu ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\vartheta^2 = \frac{2g}{3(s+a)^2}\left(s^3 - 3a^2 \cdot s - 2a^3\right).$$

Qavs ichidagi ifodani ko‘paytuvchilarga ajratish mumkin:

$$s^3 - 3a^2 \cdot s - 2a^3 = s^3 - 2a \cdot s^2 + 2a \cdot s^2 - 4a^2 \cdot s + a^2 \cdot s - 2a^3 =$$

$$= s^3 - 3a^2 \cdot s - 2a^3 = s^2(s-2a) + 2a \cdot s(s-2a) + a^2(s-2a) = (s-2a)(s+a)^2$$

Shunday qilib ϑ ni s ga bog‘liq holda hosil qilamiz

$$\vartheta = \sqrt{\frac{2g}{3}(s-2a)}\ .$$

Harakat tekis tezlanuvchan ekanligini isbot qilamiz. Buning uchun hosil qilingan tenglikning ikkala tomonini kvadratga ko‘taramiz va t bo‘yicha differensiallaymiz. Natijada

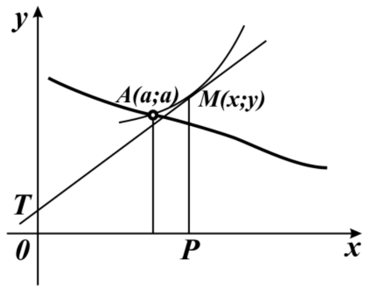
$$2\vartheta\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{2gds}{3dt},\ \text{lekin}\quad \frac{ds}{dt} = \vartheta \quad \text{va} \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Shuning uchun

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{g}{3} = const$$

Shuni isbot qilish kerak edi.

Geometrik masalalar.



5-rasm

3.3-masala. $A(a;a)$ nuqtadan o‘tuvchi va quyidagi xossaga ega bo‘lgan egri chiziqning PM ordinatali istalgan $M(x;y)$ nuqtasidan Oy o‘qning T nuqtasi bilan kesishguncha urinma o‘tkazilsa, $OTMP$ trapetsiyaning yuzi o‘zgarmas bo‘lib, a^2 ga teng bo‘ladi (5-rasm).

Yechilishi. Trapetsiya yuzi $S = \frac{OT + PM}{2} \cdot OP$ formula bo‘yicha aniqlanadi. $OT = y - xy'$, $PM = y$ va $OP = x$ bo‘lgani uchun differensial tenglama quyidagi ko‘riniShda bo‘ladi:

$$(2y - xy')x = 2a^2$$

$$\text{yoki } y' - \frac{2}{x}y = -\frac{2a^2}{x^2}.$$

Bu chiziqli tenglama. Uning umumiy yechimini (3.1) formula bo‘yicha topamiz:

$$y = e^{2\ln x}\left(-2a^2\int \frac{e^{-2\ln x}}{x^2}dx + C\right),$$

bu yerdan

$$y = x^2\left(-2a^2\int \frac{dx}{x^4} + C\right) \qquad \text{yoki} \qquad y = x^2\left(\frac{2a^2}{3x^3} + C\right),$$

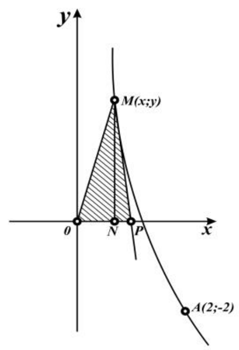
binobarin,

$$y = \frac{2a^2}{3x} + Cx^2.$$

Umumiy yechimga $x = a$, $y = a$ boshlang‘ich shartni qo‘yib, $C = 1/(3a)$ni topamiz, u holda izlanayotgan egri chiziq tenglamasi ushbu ko‘rinishda bo‘ladi:

$$y = \frac{2a^2}{3x} + \frac{x^2}{3a}.$$

3.4-masala. Egri chiziqning istalgan $M(x;y)$ nuqtasining OM radius-vektori OM, shu nuqtadan o‘tkazilgan MP urinma va Ox o‘q hosil qilgan uchburchakning yuzi 2 ga teng. Egri chiziq $A(2;-2)$ nuqtadan o‘tadi. Uning tenglamasini toping (6-rasm).



6-rasm

Yechilishi. Uchburchakning yuzi $S = \frac{1}{2}OP \cdot MN$ formula bo‘yicha topiladi, bu yerda $MN = y$ son M nuqtaning ordinatasi $OP = x - \frac{y}{y'}$. Differensial tenglama quyidagi ko‘rinishga ega:

$$\left(x - \frac{y}{y'}\right)y = 4$$

yoki

$$\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x = -\frac{4}{y^2}.$$

Bu y argumentning noma’lum x funksiyasiga nisbatan chiziqli differensial tenglama. Umumiy integralni (1) formula bo‘yicha topamiz:

$$x = e^{\ln y}\left(-4\int \frac{e^{-\ln y}}{y^2}dy + C\right) \text{ yoki } x = y\left(\frac{2}{y^2} + C\right).$$

$x = 2$ da $y = -2$, demak, $C = -3/2$. Natijada egri chiziqning izlanayotgan tenglamasini ushbu ko‘riniShda hosil qilamiz:

$$3y^2 + 2xy - 4 = 0.$$

3.5-masala. Koordinatalar boshidan o‘tuvchi shunday egri chiziq tenglamasini tuzingki, uning normalining egri chiziq istalgan nuqtasidan Ox o‘qqacha bo‘lgan kesmasining o‘rtasi $y^2 = ax$ parabolada yotadi.

Yechilishi. Egri chiziqqa ixtiyoriy $M(x;y)$ nuqta olamiz. Egri chiziqning M nuqtasiga o‘tkazilgan normalning Ox o‘q bilan kesishish nuqtasi $x + yy'$ va O koordinatalarga, normal kesmasi MP ning o‘rtasi N esa

$$x_N = x + \frac{yy'}{2} \text{ va } y_N = \frac{y}{2} \quad \text{koordinatalarga ega.}$$

N nuqta $y^2 = ax$ parabolada yotganligi uchun uning koordinatalari parabola tenglamasini qanoatlantiradi; natijada

$$\frac{y^2}{4} = a\left(x + \frac{yy'}{2}\right)$$

yoki

$$y' - \frac{y}{2a} = -\frac{2x}{y}.$$

Differensial tenglama tuzildi. Bu Bernulli tenglamasidir $(n = -1)$.

Uni $2yy' - \dfrac{y^2}{a} = -4x$ ko‘rinishda qayta yozamiz va $y^2 = z$ deymiz, mos ravishda $2yy' = z'$.

Tenglama chiziqli ko‘rinishga keladi:

$$z' - \frac{z}{a} = -4x.$$

Uning umumiy yechimini (3.1) formula bo‘yicha yozamiz:

$$z = e^{x/a}\left(-4\int xe^{-x/a}dx + C\right).$$

So‘ngra

$$\int xe^{-x/a}dx = -axe^{-x/a} - a^2e^{-x/a}$$

bo‘lgani uchun

$$z = y^2 = e^{x/a}\left[4a\left(xe^{-x/a} + ae^{-x/a}\right) + C\right] \quad \text{yoki} \quad y^2 = 4ax + 4a^2 + Ce^{x/a}.$$

$x = 0$ da $y = 0$ boshlang‘ich shartidan $C = -4a^2$ ni topamiz. Egri chiziqning izlanayotgan tenglamasi ushbu ko‘rinishda bo‘ladi:

$$y^2 = 4ax + 4a^2\left(1 - e^{x/a}\right).$$

4. Yuqori tartibli differensial tenglamalar va tartibi pasaytiriladigan tenglamalarga keltiriladigan masalalar

Garmonik tebranishlar. Fizikada o‘rganiladigan deyarli barcha jarayonlar davriy takrorlanuvchi jarayonlardir. Ko‘pgina bunday masalalarni yechish quyidagi differensial tenglamani yechishga keltiriladi:

$$y'' = -\omega^2 y, \tag{4.1}$$

bu yerda ω berilgan musbat son, $y = y(x),\ y'' = (y')'$ (4.1) tenglamaning yechimlari

$$y(x) = C_1 \sin \omega x + C_2 \cos \omega x$$

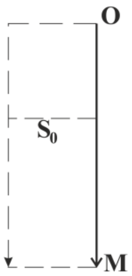
ko‘rinishdagi funksiyalardir. Bu yerda C_1 va C_2 -lar berilgan masala bilan bog‘liq o‘zgarmas sonlardir.

4.1-masala. Massasi m bo‘lgan moddiy nuqta og‘irlik kuchi ta’sirida yerkin tushmoqda. Nuqtaning harakat qonunini havoning qarshiligini hisobga olmagan holda toping.

Yechilishi. Sanoq boshi 0 tanlab olingan va pastga yo‘nalgan vertikal o‘q olaylik. Moddiy nuqtaning vaziyati t vaqtga bog‘liq ravishda o‘zgaradigan $OM = S$ koordinata bilan aniqlanadi (7-rasm). Dinamikaning ikkinchi asosiy qonuni

$$F = ma$$

ko‘rinishda yozamiz, bu yerda m-massa, $a-$ nuqtaning tezlanishi, $F-$ta’sir etuvchi kuch. Shartga ko‘ra nuqtaga faqat og‘irlik kuchi ta’sir etadi, demak, $F = P = mg,$ bu yerda $g-$og‘irlik kuchi tezlanishi, $a-$ tezlanish yo‘ldan vaqt bo‘yicha olingan ikkinchi tartibli hosilaga teng, shuning uchun



7-rasm

$$m\frac{d^2S}{dt^2} = mg \Rightarrow \frac{d^2S}{dt^2} = g\ . \tag{4.2}$$

(4.2) tenglama noma’lum $S = S(t)$ funksiyaning ikkinchi hosilasi qatnashgan differensial tenglamadir. Ushbu holda bu ikkinchi hosila argumentning ma’lum funksiyasi bo‘lgani uchun izlanayotgan funksiyani t bo‘yicha ikki marta integrallab topish mumkin:

$$V = \frac{dS}{dt} = gt + C_1 \qquad (4.3)$$

$$S = \frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2 \qquad (4.4)$$

(4.4) tenglik izlanayotgan harakat qonunini beradi, biroq integrallash C_1 va C_2 o‘zgarmaslarga ega. Nuqtaning boshlang‘ich vaziyatini va boshlang‘ich tezligini bilgan holda C_1 va C_2-o‘zgarmaslarni aniqlash mumkin, ya’ni;

$$V\big|_{t=0} = V_0\,,\;\; S\big|_{t=0} = S_0\,,$$

bo‘lsin. (4.3) dan $C_1 = V_0$, (4.4) dan $C_2 = S_0$-ni hosil qilamiz, natijada harakat qonuni

$$S = \frac{gt^2}{2} + V_0 t + S_0$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi.

Fizikaviy masalalar. Mexanika va materiallar qarshiligining ba’zi masalalari.

Bu yerda tartibini pasaytirishga imkon beradigan va chekli ko‘rinishda integrallanadigan differensial tenglamalarga olib kelinadigan bir qator masalalar qarab chiqiladi.

Nuqtaning to‘g‘ri chiziqli harakati. Birinchi navbatda m massali moddiy nuqtaning F kuch ta’sirida to‘g‘ri chiziqli harakatini tekshiramiz. F kuch faqat quyidagi argumentlarning biriga bog‘liq bo‘ladi: vaqt, tezlik yoki nuqtaning koordinatalari.

Ox o‘qni nuqta harakatlanayotgan to‘g‘ri chiziq bo‘ylab yo‘naladi va harakatning differensial tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F\,. \qquad (4.5)$$

Ushbu boshlang‘ich shartlarni qabul qilamiz:

$$x\big|_{t=0} = x_0\,,\;\; \vartheta\big|_{t=0} = \vartheta_0\,.$$

Uchta holni qarab chiqamiz:

1) <u>Kuch vaqtga bog‘liq:</u> $F = F(t)$.

$\frac{dx}{dt} = \vartheta$, $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d\vartheta}{dt}$ bo‘lgani uchun (4.5) tenglama o‘zgaruvchilari ajraladigan birinchi tartibli tenglamaga keltiriladi:

$$m\frac{d\vartheta}{dt} = F(t),$$

bu yerdan

$$\vartheta = \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} F(u)du + C_1,$$

bu yerda $u-$integrallash o‘zgaruvchisi.

C_1 ixtiyoriy o‘zgarmasni $x|_{t=t_0} = x_0$ da $\vartheta|_{t=0} = \vartheta_0$ boshlang‘ich shartdan aniqlaymiz: $C_1 = \vartheta_0$, demak,

$$\vartheta = \vartheta_0 + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} F(u)du$$

yoki

$$\frac{dx}{dt} = \vartheta_0 + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} F(u)du.$$

Ikkinchi marta integrallab, quyidagini hosil qilamiz:

$$x = \vartheta_0 t + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}\left(\int_{t_0}^{z} F(u)du\right)dz + C_2,$$

bu yerda $\int_{t_0}^{t}\left(\int_{t_0}^{z} F(u)du\right)dz -$ takroriy integraldir. Ixtiyoriy o‘zgarmasni $x|_{t=0} = x_0$ boShlang‘ich shartdan topamiz: $C_2 = x_0 - \vartheta_0 \cdot t_0$, demak, nuqtaning harakat qonuni uzil-kesil ushbu ko‘rinishda yoziladi:

$$x = x_0 + \vartheta_0(t - t_0) + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}\left(\int_{t_0}^{z} F(u)du\right)dz.$$

Masalan, massasi m bo‘lgan nuqta vaqt o‘tishi bilan bir tekis kamayadigan kuch ta’sirida to‘g‘ri chiziqli harakat qilayotgan bo‘lsin. Boshlang‘ich $t = 0$ momentda kuch $F = F_0$, tezlik $\vartheta = 0$ va koordinata $x = 0$ bo‘lsin. Yuqorida topilgan formulalarimizdan foydalanish mumkin bo‘lishi uchun F kuchni topamiz. Masala shartiga ko‘ra $F = F_0 - kt$, bu yerda k

koeffitsiyentni topish kerak. $t=T$ da $F=0$ bo‘lgani uchun $F_0-kt=0\Rightarrow k=F_0/T$ va demak, $F=F_0(1-t/T)$. Shuning uchun

$$\vartheta=\frac{F_0}{m}\int_0^t(1-\frac{u}{T})du \quad \text{yoki} \quad \vartheta=\frac{F_0}{m}\left(t-\frac{t^2}{2T}\right),$$

$$x=\frac{F_0}{m}\int_0^t(\int_0^z(1-\frac{u}{T})du)dz \quad \text{yoki} \quad x=\frac{F_0t^2}{2m}(1-\frac{t}{3T}).$$

Vaqtning T momentidagi tezlik va o‘tilgan yo‘lni topish uchun hosil qilingan munosabatlarda $t=T$ deyish kerak. Natijada quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\vartheta\big|_{t=T}=\frac{F_0T}{2m},\quad x\big|_{t=T}=\frac{F_0T^2}{3m}.$$

2) <u>Kuch tezlikka bog‘liq:</u> $F=F(\vartheta)$.

Bu holda differensial tenglama

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F(\vartheta)$$

ko‘riniShda bo‘ladi. Yuqoridagiga o‘xshash, $\frac{dx}{dt}=\vartheta$ almashtirish bajarib, quyidagini hosil qilamiz :

$$m\frac{d\vartheta}{dt}=F(\vartheta),$$

bu yerdan $m\int_{\vartheta_0}^{\vartheta}\frac{du}{F(u)}=t+C_1$. $\vartheta\big|_{t=t_0}=\vartheta_0$ shuning uchun $C_1=-t_0$ va eng keyingi tenglamani quyidagicha qayta yozib olish mumkin:

$$m\int_{\vartheta_0}^{\vartheta}\frac{du}{F(u)}=t-t_0 \tag{4.6}$$

Aytaylik, bu tenglamani integrallashga erishgan va hosil bo‘lgan munosabatni $\vartheta=\frac{dx}{dt}$ ga nisbatan yechgan bo‘laylik:

$$\vartheta=\varphi(t,t_0,\vartheta_0)$$

u holda

$$x=\int_{t_0}^{t}\varphi(z,t_0,\vartheta_0)dz+C_2,$$

$x\big|_{t=t_0}=x_0$ boshlang‘ich shartdan $C_2=x_0$. Shunday qilib, nuqtaning harakat qonuni

$$x=x_0+\int_{t_0}^{t}\varphi(z,t_0,\vartheta_0)dz$$

ko‘rinishda hosil bo‘ladi.

Agar (4.6) tenglamadan ϑ ni t ning funksiyasi sifatida aniqlash mumkin bo‘lmasa, u holda berilgan differensial tenglamada quyidagicha almashtirishlar bajaramiz:

$$\frac{dx}{dt}=\vartheta,\ \frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d\vartheta}{dt}=\frac{d\vartheta}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=\vartheta\frac{dx}{dt}$$

va tenglamani $m\vartheta\dfrac{d\vartheta}{dx}=F(\vartheta)$ ko‘rinishda qayta yozib olamiz, bu yerdan

$$x=m\int_{\vartheta_0}^{\vartheta}\frac{udu}{F(u)}+C$$

ni topamiz. C ni $x\big|_{t=t_0}=x_0$ da $\vartheta\big|_{t=t_0}=\vartheta_0$ boshlang‘ich shartdan $C=x_0$ ni aniqlaymiz. U holda

$$x=x_0+m\int_{\vartheta_0}^{\vartheta}\frac{udu}{F(u)}. \tag{4.7}$$

Ta’sir etuvchi kuch tezlikka bog‘liq bo‘lgandagi to‘g‘ri chiziqli harakatga qarshilik ko‘rsatuvchi muhitdagi harakat (qarshilik kuchi tezlikka proporsional bo‘lganda) misol bo‘ladi. Bu holda $F(\vartheta)=-k\vartheta$ deb hisoblash mumkin bo‘lgani uchun (4.7) tenglik

$$x=k_0-\frac{m}{k}(\vartheta-\vartheta_0)$$

ko‘rinishni oladi, (4.6) formula esa

$$\frac{m}{k}\ln\frac{\vartheta_0}{\vartheta}=t-t_0$$

yoki

$$\vartheta=\vartheta_0e^{-k(t-t_0)/m} \tag{4.8}$$

ko‘rinishga keladi.

Bunday turdagi aniq masalani ko‘raylik.

4.2-masala. Motorli qayiq $10\ km/soat$ tezlik bilan harakat qilmoqda. Shunday ketayotgan qayiqning motori o‘chirib qo‘yildi, natijada $20\ sek$ dan keyin uning tezligi $6\ km/soat$ ga teng bo‘lib qoldi. Motor o‘chirilgandan keyin $2\ \min$ o‘tgach, qayiqning tezligi qanday bo‘lganini va o‘chirilgandan keyingi bir minut ichida qayiq qancha masofani bosib o‘tganligini aniq-lang.

Yechilishi. Masala shartiga ko‘ra: $t_0 = 0$ $x_0 = 0$, $\vartheta_0 = 10\ км/соат$. $\vartheta|_{t=20сек} = 6\ км/соат$. Shuning uchun (4.8) formulaga binoan: $6 = 10 \cdot e^{-k/(180\,m)}$, bu yerdan $e^{-k/m} = (0,6)^{180}$ yoki $k/m = -180 \ln 0,6 = 180 \cdot 0,5108 = 91,944$

Demak, $\vartheta|_{t=1мин} = 10 \cdot (0,6)^{\frac{180}{60}} = 10 \cdot (0,6)^3 = 2,16 км/соат$

va

$$x|_{t=1мин} = (10 - 2,16)/91,944 = 7,84/91,944 \approx 85,3 м$$

Endi $\vartheta_2 = 1,5\ м/сек$, $\vartheta|_{t=4сек} = 1\ м/сек$ deb faraz qilamiz. Qancha vaqtdan so‘ng qayiqning tezligi $0,01\ м/сек$ ga tushib qoliShini va to‘xtaguncha qayiq qancha masofani bosib o‘tishini hisoblaymiz. Quyidagiga egamiz: $1 = 1,5 e^{-4k/m}$,

$$e^{-k/m} = \left(\frac{1}{1,5}\right)^{\frac{1}{4}} \text{ yoki } \frac{k}{m} = \frac{1}{4}\ln 1,5 = \frac{1}{4} \cdot 0,4055 = 0,1014.$$

Demak , $t|_{\vartheta=0,01 м/сек} = \dfrac{1}{0,1014} \ln \dfrac{1,5}{0,01} = \dfrac{1}{0,1014} \ln 150 = \dfrac{5,0107}{0,1014} \approx 50\ сек$

$$x|_{\vartheta=0} = 1,5/0,1014 \approx 14,8\ м.$$

Endi massasi m bo‘lgan jismning yuqori balandlikdan tushish holini qaraylik, bunda jism moddiy nuqta kabi harakat qiladi, havo qarshiligi esa tezlikning kvadratiga proporsional deb faraz qilamiz. Shuningdek, ushbu boshlang‘ich shartlarni ham qabul qilamiz: $x|_{t=0} = 0$, $\vartheta|_{t=0} = \vartheta_0$.

Tushayotgan jismga ikkita kuch: jismning og‘irlik kuchi va havoning qarshilik kuchi ta’sir etadi: ularning teng ta’sir etuvchisi: $F = mg - k\vartheta^2$, shuning uchun

$$t = m\int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{du}{mg - ku^2}.$$

Jism faqat $F > 0$ bo‘lgandagina tushgani uchun $mg - k\vartheta^2 > 0$ yoki $\vartheta < \sqrt{mg/k}$. Bu yerda $\sqrt{mg/k} = \vartheta_{кр}$ (kritik tezlik) deb belgilaymiz. U holda

$$t = \frac{m}{2k\vartheta_{кр}}\left(\ln\frac{\vartheta_{кр} + \vartheta}{\vartheta_{кр} - \vartheta} - \ln\frac{\vartheta_{кр} + \vartheta_0}{\vartheta_{кр} - \vartheta_0}\right)$$

yoki

$$t=\frac{m}{k\vartheta_{кр}}\left(Arth\frac{\vartheta}{\vartheta_{кр}}-Arth\frac{\vartheta_0}{\vartheta_{кр}}\right).$$

$\frac{m}{k}=\frac{\vartheta_{кр}^2}{g}$ ligidan, va binobarin, $\frac{k\vartheta_{кр}}{m}=\frac{g}{\vartheta_{кр}}$ ligidan keyingi tenglikni quyidagicha o‘zgartirib yozamiz:

$$Arth\frac{\vartheta}{\vartheta_{кр}}=Arth\frac{\vartheta_0}{\vartheta_{кр}}+\frac{gt}{\vartheta_{кр}}.$$

Tenglikni ikkala tomonidan giperbolik tangens olamiz:

$$\vartheta=\vartheta_{кр}\frac{\vartheta_0/\vartheta_{кр}+th\left(gt/\vartheta_{кр}\right)}{1+\left(\vartheta_0/\vartheta_{кр}\right)th\left(gt/\vartheta_{кр}\right)}$$

yoki

$$\vartheta=\vartheta_0+\vartheta_{кр}\frac{\left(1-\vartheta_0^2/\vartheta_{кр}^2\right)th\left(gt/\vartheta_{кр}\right)}{1+\left(\vartheta_0/\vartheta_{кр}\right)th\left(gt/\vartheta_{кр}\right)}.$$

Xususan, $\vartheta_0=0$ da

$$\vartheta=\vartheta_{кр}\cdot th\left(gt/\vartheta_{кр}\right),$$

$\vartheta_0=\vartheta_{кр}$ da esa $\vartheta(t)=\vartheta_0=\vartheta_{кр}$ ga egamiz, ya’ni jismning tushishi o‘zgarmas tezlik bilan sodir bo‘ladi.

Argument cheksiz ortganda giperbolik tangens birga intilgani uchun $t=\infty$ da $\vartheta(t)$ tezlik $\vartheta_{кр}$ ga intilishini qayd qilib o‘taylik. Bu $\vartheta(t)\neq\vartheta_{кр}$ tezlik bilan tushayotgan jismning tezligi kritik tezlikka asimptotik yaqinlashib kelsada, lekin jism kritik tezlikka hech qachon erisha olmasligini bildiradi.

Chekli o‘lchamlarga ega bo‘lgan jismlarning tushishida havoning qarshiligi jismning kattaligi, shakli va og‘irligiga, shuningdek havoning zichligiga bog‘liq bo‘ladi. Bu bog‘lanish $k_1=k/m$ koeffitsiyent orqali hisobga olinib, u

$$k_1=\alpha\frac{Sd}{p} \qquad (4.9)$$

emperik formula bilan aniqlanadi, bu yerda $d - 1\text{м}^3$ havoning og‘irligi (H larda; o‘rtacha $d = 12H/\text{м}^3$), bu 760мм **bosimdagi** va 15^0C dagi 1м^3 havoning og‘irligiga mos keladi; $S-$jismning harakat yo‘nalishiga perpendikulyar bo‘lgan tekislikdagi proeksiyasining yuzi (м^2larda); $P-$jismning og‘irligi (H larda), $\alpha-$esa jism shakliga bog‘liq bo‘lgan va tajriba yo‘li bilan topiladigan o‘lchamsiz “qarshilik koeffitsiyenti”, masalan, gorizontal tushuvchi kvadrat plastinka uchun $\alpha = 0,631$; tirqishi (ochiq tomoni) pastga qaragan yarimsfera (parashyut) uchun $\alpha = 0,664$.

(4.9) formula yuqoridagi natijalar bilan birgalikda, masalan, harakat boshlanguncha tinch holatda turgan hamda tomoni 1м va og‘irligi $19,6H$ bo‘lgan kvadrat plastinka tusha boshlagandan 2сек o‘tgach, u qanday tezlikka ega bo‘lish masalasini hal etishga imkon beradi.
Bu holda

$$k_1 = \frac{0,631 \cdot 12 \cdot 1}{19,6} = 0,386,\ \vartheta_{\text{кр}} = 5,038,\ g/\vartheta_{\text{кр}} = 1,947.$$

Bu qiymatlarni, shuningdek, $t = 2\text{сек}$ ni (4.8) formulaga qo‘yib, quyidagini topamiz:

$$\vartheta\big|_{t=2} = 5,038 \cdot th3,894 = 5,038 \cdot 0,999 = 5,033\text{м/сек}.$$

Bu natija tik tushayotgan plastinka umuman esa bo‘lishi mumkin bo‘lgan $\vartheta_{\text{кр}} = \ = \vartheta\big|_{t=\infty} = 5,038\text{м/сек}$ tezlikdan deyarli farq qilmaydi. Shunday qilib, nazariy jihatdan cheksiz katta vaqt oralig‘idan so‘ng erishiladigan eng yuqori tezlikka, amalda tushishning ikkinchi sekundi oxiridayoq erishilar ekan.

x ning koordinatalarini topish uchun

$$dx = \vartheta_{\text{кр}} \frac{\vartheta_0/\vartheta_{\text{кр}} + th\left(gt/\vartheta_{\text{кр}}\right)}{1 + \left(\vartheta_0/\vartheta_{\text{кр}}\right) th\left(gt/\vartheta_{\text{кр}}\right)} dt$$

differensial tenglamani integrallaymiz, natijada:

$$x = \vartheta_{\text{кр}} \int_0^t \frac{\vartheta_0/\vartheta_{\text{кр}} + th\left(gz/\vartheta_{\text{кр}}\right)}{1 + \left(\vartheta_0/\vartheta_{\text{кр}}\right) th\left(gz/\vartheta_{\text{кр}}\right)} dz + C.$$

O‘ng tomondagi integralni $th\left(gz/\vartheta_{кр}\right)=u$ yoki $z=\left(\vartheta_{кр}/g\right)Arthu$ o‘rniga qo‘yish bilan va bir vaqtda $\vartheta_0/\vartheta_{кр}$ – ni α bilan almashtirib hisoblaymiz; unda integral ($\vartheta_{кр}$ ko‘paytuvchi bilan birgalikda) ushbu ko‘rinishni oladi:

$$I=\frac{\vartheta_{кр}^2}{g}\int_0^{u_0}\frac{\alpha+u}{(1+\alpha u)(1-u^2)}du,$$

bu yerda $u_0=th\left(gt/\vartheta_{кр}\right)$. Kasrni elementar kasrlarga yoyamiz:

$$\frac{\alpha+u}{(1+\alpha u)(1-u^2)}=\frac{\alpha}{1+\alpha u}-\frac{1}{2(1+u)}+\frac{1}{2(1-u)}.$$

Buning natijasida

$$I=\frac{\vartheta_{кр}^2}{g}\left[\ln(1+\alpha u)-\frac{\ln(1+u)}{2}-\frac{\ln(1-u)}{2}\right]\Bigg|_0^{u_0}=\frac{\vartheta_{кр}^2}{g}\ln\frac{(1+\alpha u)}{\sqrt{1-u^2}}\Bigg|_0^{u_0}=$$

$$=\frac{\vartheta_{кр}^2}{g}\ln\frac{1+\left(\vartheta_0/\vartheta_{кр}\right)\cdot th(gt/\vartheta_{кр})}{\sqrt{1-th^2(gt/\vartheta_{кр})}}=\frac{\vartheta_{кр}^2}{g}\ln\left(ch\frac{gt}{\vartheta_{кр}}+\frac{\vartheta_0}{\vartheta_{кр}}sh\frac{gt}{\vartheta_{кр}}\right).$$

Shunday qilib,

$$x=\frac{\vartheta_{кр}^2}{g}\ln\left(ch\frac{gt}{\vartheta_{кр}}+\frac{\vartheta_0}{\vartheta_{кр}}sh\frac{gt}{\vartheta_{кр}}\right)+C$$

agar $x\big|_{t=0}=x_0$ bo‘lsa, u xolda $c=x_0$ va demak,

$$x=x_0+\frac{\vartheta_{кр}^2}{g}\ln\left(ch\frac{gt}{\vartheta_{кр}}+\frac{\vartheta_0}{\vartheta_{кр}}sh\frac{gt}{\vartheta_{кр}}\right)$$

agar $x_0=0$ desak

$$x=\frac{\vartheta_{кр}^2}{g}\ln\left(ch\frac{gt}{\vartheta_{кр}}+\frac{\vartheta_0}{\vartheta_{кр}}sh\frac{gt}{\vartheta_{кр}}\right).$$

Xususan, yana ham $\vartheta_0=0$ desak,

$$x=\frac{\vartheta_{кр}^2}{g}\ln ch\frac{gt}{\vartheta_{кр}}.$$

Bu formula yordamida quyidagi masalani yechish uchun foydalanish mumkin.

4.3-masala. Parashyutchi $1{,}5\,км$ balandlikdan sakradi va parashyutni $0{,}5\,км$ balandlikda ochdi. Odamning normal zichlikka ega bo‘lgan havoda tushishining kritik tezligi $50\,м/сек$ deb olib va havo zichligining balandlikka qarab o‘zgarishini hisobga olmay, parashyutchi parashyuti ochilguncha qancha vaqt tushganini aniqlang.

Yechilishi. Bu yerda $x=1{,}5км-0{,}5км=1км=1000\,м$. Demak,

$1000=\dfrac{50^2}{g}\ln ch\dfrac{gt}{50},\Rightarrow g\approx 10\ м/сек^2$ deb quyidagini hosil qilamiz:

$$\ln ch\left(T/5\right)=4\Rightarrow T=5Arche^{-4}$$

Ko‘rsatkichli va giperbolik funksiyalar jadvallaridan

$e^4=54{,}598,\ \ Arch54{,}598=4{,}693$ ni topamiz. Demak,

$$T=5\cdot 4{,}693=23{,}465сек\approx 23\ сек.$$

3) **<u>Kuch nuqtaning vaziyatiga bog‘liq</u>**: $\underline{F=F(x)}$

Ushbu

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F(x)$$

differrensial tenglamada

$$\frac{dx}{dt}=\vartheta\ ;\quad \frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d\vartheta}{dt}=\vartheta\frac{d\vartheta}{dx}$$

almashtirish bajaramiz. U holda

$$m\vartheta\frac{d\vartheta}{dx}=F(x)\,,$$

bu yerdan o‘zgaruvchilarni ajratish orqali quyidagini topamiz:

$$\frac{m\vartheta^2}{2}=\int_{x_0}^{x}F(u)du+C_1\,,$$

bu Yerda $u-$ integrallash o‘zgaruvchisi.

$\vartheta\big|_{x=x_0}=\vartheta_0$- boshlang‘ich shartdan $C_1=m\vartheta_0^2/2$ ni aniqlaymiz, demak,

$$\frac{m\vartheta^2}{2}=\frac{m\vartheta_0^2}{2}+\int_{x_0}^{x}F(u)du\,.$$

Bu tenglamani ϑ ga nisbatan echib va ϑ ni $\dfrac{dx}{dt}$ orqali almashtirib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\frac{dx}{dt}=\sqrt{\vartheta_0^2+\frac{2}{m}\int_{x_0}^{x}F(u)du}\,,$$

bu Yerdan

$$t=\int_{x_0}^{x}\frac{dz}{\sqrt{\vartheta_0^2+\frac{2}{m}\int_{x_0}^{z}F(u)du}}+C_2 .$$

$x\big|_{t=t_0}=x_0$ boshlang‘ich shartga asosan $C_2=t_0$ bo‘lib quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$t=t_0+\int_{x_0}^{x}\frac{dz}{\sqrt{\vartheta_0^2+\frac{2}{m}\int_{x_0}^{z}F(u)du}} .$$

Bu yerdan x ni t ning funksiyasi sifatida ifodalab, nuqtaning harakat qonunini hosil qilamiz.

Masalan, agar nuqta $F=km/x^3$ kuch ta’sirida $t=t_0$ da $x=x_0$ va $\vartheta=\vartheta_0$ boShlang‘ich shartlarda to‘g‘ri chiziqli harakat qilsa, u holda

$$t=\int_{x_0}^{x}\frac{dz}{\sqrt{\vartheta_0^2+\frac{2}{m}\int_{x_0}^{z}\frac{km}{u^3}du}}=x_0\int_{x_0}^{x}\frac{zdz}{\sqrt{(\vartheta_0^2x_0^2+k)z^2-kx_0^2}}$$

yoki

$$t=\frac{x_0}{(\vartheta_0x_0)^2+k}\left[\sqrt{(\vartheta_0^2x_0^2+k)x^2-kx_0^2}-\vartheta_0x_0\right].$$

Bu tenglamani x ga nisbatan yechib, nuqtaning harakat qonunini topamiz:

$$x=\sqrt{(x_0+\vartheta_0t)^2+\frac{kt^2}{x_0^2}} .$$

Agar nuqta O markazdan itarish kuchi ta’sirida harakat qilayotgan bo‘lsa, $k>0$; tortishish kuchi ta’sirida harakat qilayotganda esa $k<0$ bo‘ladi: keyingi holda nuqta markazga T vaqtdan so‘ng etadi, T ni $t=T$ bo‘lganda $x=0$ shartdan topiladi. $k=-k_1^2$ deb, quyidagini hosil qilamiz:

$$\left(x_0+\vartheta_0T\right)^2-\frac{k_1^2T}{x_0^2}=0 .$$

Bu tenglamaning chap tomonini ko‘paytuvchilarga ajratib, ularning har qaysisini nolga tenglaymiz:

$$x_0+\vartheta_0T-\frac{k_1T}{x_0}=0, \qquad x_0+\vartheta_0T+\frac{k_1T}{x_0}=0 .$$

Ikkinchi tenglamani $T>0$ bo‘lganligi uchun tashlab yuboramiz. Birinchi tenglamadan

$$T=\frac{x_0^2}{R_e-\vartheta_0 x_0^2}$$

ni topamiz.

Kuch nuqtaning vaziyatiga bog‘liq bo‘lgan quyidagi masalani ko‘rib chiqamiz.

4.4-masala. Yerdan cheksiz katta masofada dastlab tinch holatda bo‘lgan meteor to‘g‘ri chiziqli harakat qilib yerga tushmoqda, shu bilan birga meteorning tezlanishi undan yer markazigacha bo‘lgan masofaning kvadratiga teskari proparsional deb faraz qilamiz. Meteor yerga qanday tezlik bilan urilishini aniqlang.

Yechilishi. Meteordan yer markazigacha bo‘lgan masofani r orqali belgilaymiz va

$$\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{k}{r^2}$$

differensial tenglamani tuzamiz. Tezlanish $\omega=\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{d\vartheta}{dt}$ bo‘lgani uchun tenglama ushbu ko‘rinishga keladi:

$$\frac{d\vartheta}{dt}=\frac{k}{r^2} \quad \text{yoki} \quad \vartheta\frac{d\vartheta}{dr}=\frac{\kappa}{r^2},$$

chunki $\frac{d\vartheta}{dt}=\frac{d\vartheta}{dr}\cdot\frac{dr}{dt}=\vartheta\frac{d\vartheta}{dr}$.

Oxiri tenglamaning umumiy integrali $\frac{\vartheta^2}{2}=-\frac{k}{r}+C$ ko‘rinishda bo‘ladi. Bu yerdagi C ni $\vartheta\big|_{r=\infty}=0$ boshlang‘ich shartdan $C=0$ ekanligini aniqlaymiz. Demak, $\vartheta^2=-2k/r$.

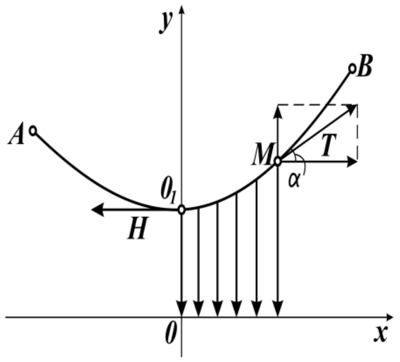
Yerga tushishdagi tezlikni r o‘rniga yer radiusi $R\approx 6{,}377\cdot 10^6$ ni qo‘yib topamiz, proporsionallik koeffitsiyenti k ni yerdagi og‘irlik kuchi tezlanishi $g=9{,}8\,м/сек^2$ va R orqali ifodalash mumkin: $-g=k/R^2 \Rightarrow k=-gR^2$ [masofa $r=0$ dan (sanoq boshi) boshlab hisoblanganligi va tezlanish markazga tamon yo‘nalgani uchun manfiy ishora olinadi].

Shunday qilib, izlanayotgan tezlik quyidagicha bo‘ladi:

$$\vartheta=\sqrt{2gR^2/R}=\sqrt{2gR}=\sqrt{2\cdot 9{,}8\cdot 6{,}377\cdot 10^6}=11\,180\ м/с\approx 11\ км/сек.$$

Ipning muvozanati.

Ikkita uchi bilan A va B nuqtalarga osib qo‘yilgan og‘ir egiluvchan bir jinsli cho‘zilmaydigan ipni ko‘z oldimizga keltiraylik (8-rasm). Ip joylashadigan egri chiziq tekislikda yotadi, deb faraz qilib, bu tekislikni xOy koordinata tekisligi uchun qabul qilamiz. Koordinata sistemasini shunday tanlab olamizki, Ox o‘q gorizontal jaylashsin. Oy o‘q esa ipning eng pastki O_1 nuqtasidan o‘tsin (O_1 nuqta A va B nuqtalardan pastda joylashgan).



8-rasm

Ipning O_1 nuqta va ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtasi orasidagi qismi O_1M ni ajratamiz. Ipning bu qismi quyidagi kuchlar ta’siri ostida bo‘ladi:

1) O_1 nuqtaga quyilgan H taranglik kuchi, unining AO_1 qismi tomonidagi hosil qilingan va O_1 nuqtadagi urinma bo‘ylab (gorizontal) yo‘nalgan;

2) M nuqtaga qo‘yilgan T taranglik kuchi, u ipning MB qismi tomonidan hosil qilingan va M nuqtadagi urinma bo‘ylab yo‘nalgan;

3) Ipning O_1M qismiga tushgan W yuklama, u pastga yo‘nalgan,

Ip muvozanatda bo‘lgan uchun statika qonunlariga ko‘ra bu barcha kuchlar-ning koordinata o‘qlariga proeksiyalari yig‘indisi nolga teng bo‘lishi kerak. Demak,

$$T\cos\alpha - H = 0, \quad T\sin\alpha - W = 0,$$

bu yerda $\alpha -$ taranglik kuchi T va Ox o‘qining musbat yo‘nalishi orasidagi burchak, H, T, W tegishli kuchlarning kattaliklari.

Agar bu tenglamalarda mos ravishda H va W ni o‘ng tomonga o‘tkazib, hosil bo‘lgan ikkinchi tenglamaning ikkala qismini birinchi tenglamaning tegishli qismlariga bo‘lsak,

$$tg\alpha = \frac{W}{H}$$

ni hosil qilamiz. $tg\alpha = \frac{dy}{dx}$ bo‘lgani uchun birinchi tartibli

$$\frac{dy}{dx} = \frac{W}{H} \tag{4.10}$$

differensial tenglamaga kelamiz, uning integrali ipning muvozanatda bo‘lgandagi shaklini tasvirlovchi egri chiziqdan iborat.

Gorizontal taranglik $H-$ o‘zgarmas kattalik. Shuning uchun agar W yuklama x ning funksiyasi sifatida ma’lum bo‘lsa, $W = F(x)$, u holda (4.10) ni bevosita integrallash mumkin. Bu holda uning yechimi

$$y = \frac{1}{H}\int F(x)dx + C$$

ko‘rinishda bo‘ladi, C boshlang‘ich shartlardan aniqlanadi.

Biroq, shunday hollar bo‘lishi mumkinki, unda W funksiya emas, balki uning x bo‘yicha hosilasi ma’lum bo‘ladi. Bunday holda (4.10) tenglamaning ikkala tomonini x bo‘yicha differensiallab, ikkinchi tartibli

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{H}\frac{dW}{dx} \tag{4.11}$$

differensial tenglamaga ega bo‘lamiz. Agar $\frac{dW}{dx} = f(x)$ (bu yerda $f(x)$ ma’lum funksiya) bo‘lsa, bu tenglamaning yechimi ushbu ko‘rinishda bo‘ladi:

$$y = \frac{1}{H}\int\left(\int f(x)dx\right)dx + C_1x + C_2 \ ,$$

bu yerda C_1 va C_2 lar boshlang‘ich shartlardan aniqlanadi.

Umumiyroq hollarda, (4.10) va (4.11) tenglamalarning o‘ng tomonlari faqat x gagina bog‘liq bo‘lmay, balki y va y' ga ham bog‘liq bo‘lib, bu hollarda yechimni topish uchun turli usullarni qo‘llanishiga to‘g‘ri keladi, chunki bevosita integrallash mumkin emas.

Barcha hollarda ham yechimda o‘zgarmas kattalik H qatnashishini qayd qilib o‘taylik, Ipning uchlari A va B larning koordinatalarini va O_1 nuqtani bilgan holda H ni hisoblab topish mumkin.

4.5-masala. Egiluvchan (elastik) bir jinsli cho‘zilmaydigan arqon uchlari bilan ikki nuqtada mahkamlan va arqonga uning gorizontal proeksiyasi bo‘ylab bir xil taqsimlangan $qH/м$ yuklama tushadi. Arqonning og‘irligini hisobga olmay, uning muvozanat holatdagi shaklini aniqlang.

Odatda osma ko‘priklarning zanjir yoki arqonlarining muvozanat holatidagi Shaklini aniqlashda bunday masala yuzaga keladi: Yuklama (zanjir yoki arqonga osilgan ko‘prik) gorizontal proeksiya bo‘ylab bir tekis taqsim-langan va uning kattaligi shundayki, zanjir yoki arqonning og‘irligini hisobga olmasa ham bo‘ladi.

Yechilishi. Bu holda $W=qx$, bu yerda x arqonning M nuqtaning koordinatasi, bir vaqtning o‘zida u arqonning O_1M qismining gorizontal proeksiyasi ham bo‘ladi. Shuning uchun (4.10) differensial tenglama $\frac{dy}{dx}=\frac{qx}{H}$ ko‘rinishini oladi. Uning umumiy yechimi $y=\frac{qx^2}{2H}+C$ parabolalar oilasidan iborat.

C ni anqlash uchun O_1 nuqtaning $y=q/H$ ordinatasini beramiz. U holda boshlang‘ich shart $x=0$ da $y=q/H$ bo‘ladi, demak, $C=q/H$ va izlanayotgan xususiy yechim

$$y=\frac{q}{H}\left(\frac{x^2}{2}+1\right)$$

paraboladan iborat bo‘ladi.

4.6-masala. (Zanjir chiziq). Egiluvchan bir jinsli cho‘zilmaydigan arqon ikki uchidan mahkamlangan bo‘lib, o‘zining og‘irligi ostida osilib turadi. Agar arqonning bir birlik uzunligining og‘irligi q ga teng bo‘lsa, arqonning muvozanat holatdagi shaklini aniqlang.

YechiliSh. Bu holda $W=qs$, bu yerda s arqonning $\breve{O_1M}$ yoyining uzunligi. Matematik analiz kursidan ma’lumki, $s=\int\limits_0^x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$. Shuning uchun

$$W=q\int\limits_0^x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx,\ \text{demak,}\ \frac{dW}{dx}=q\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$\frac{dW}{dx}$ hosilaning ifodasini (4.11) tenglamaga qo‘yib, x argument va izlanayotgan y funksiya qatnashmagan ushbu ikkinchi tartibli differensial tenglamani hosil qilamiz:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{q}{H}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ .$$

$\frac{dy}{dx}=u$ o‘rniga qo‘yish orqali bu tenglama o‘zgaruvchilari ajraladigan ushbu birinchi tartibli tenglamaga keltiramiz:

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{a}\sqrt{1+u^2}\,,$$

tenglikni integrallab $\ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)=\frac{x}{a}+\ln C_1$, bu yerdan ($a=H/q$ belgiladik)

$$u+\sqrt{1+u^2}=C_1e^{x/a}\,.$$

$\sqrt{1+u^2} = C_1 e^{x/a} - u$ dan $1 = C_1^2 e^{2x/a} - 2C_1 u e^{x/a}$ ni hosil qilamiz, bu yerdan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{2} e^{x/a} - \frac{1}{2C_1} e^{-x/a}, \qquad (4.12)$$

chunki $u = \dfrac{dy}{dx}$.

Birinchi tartibli eng sodda tenglama hosil bo‘ladi. Uning umumiy yechimi:

$$y = \frac{aC_1}{2} e^{x/a} + \frac{a}{2C_1} e^{-x/a} + C_2 . \qquad (4.13)$$

C_1 va C_2 larni aniqlash uchun O_1 nuqtaning $y = a$ ordinatasini olamiz. O_1 nuqtada urinma Ox o‘qqa parallel ekanligini e’tiborga olib, boshlang‘ich shartni quyidagicha yozamiz: $x = 0$ da $y = a$, $y' = 0$. x va y' ning qiymatlarini (4.12) tenglikka qo‘yib, C_1 ni aniqlash uchun ushbu algebraik tenglamani hosil qilamiz:

$$0 = \frac{C_1}{2} - \frac{1}{2C_1} \Rightarrow C_1 = 1 .$$

x va y larning qiymatlarini (4.13) tenglamaga qo‘yib quyidagini hosil qilamiz :

$$a = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + C_2 \Rightarrow C_2 = 0 .$$

Shunday qilib, izlanayotgan xususiy yechim

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right) \quad \text{yoki} \quad y = a \cdot ch\frac{x}{a}$$

funksiyadan iborat ekan.

Bu masalaning yechimi ikki uchidan osilgan egiluvchan cho‘zilmaydigan arqon o‘z og‘irligi ta’sirida giperbolik kosinusning grafigi shaklini olishini ko‘rsatadi. Giperbolik kosinusning zanjir chiziq deb atalishi ham shu bilan tushuntiriladi.

$a = H/q$ kattalikka geometrik talqin beradigan bo‘lsak, u zanjir chiziqning quyi O_1 nuqtadagi egrilik radiusidan iborat bo‘lishini qayd qilib o‘tamiz. Bunga quyidagi hisoblaShlar bilan ishonch hosil qilish mumkin:

$$y'\big|_{x=0} = 0, \; y''\big|_{x=0} = \frac{1}{a}, \; R\big|_{x=0} = \left.\frac{\left[1+(y')^2\right]^{3/2}}{|y''|}\right|_{x=0} = a .$$

Shunday qilib, a kattalik zanjir chiziqning shaklini xarakterlaydi: a qanchalik kichik bo‘lsa, chiziq shunchalik tor va tikroq bo‘ladi.

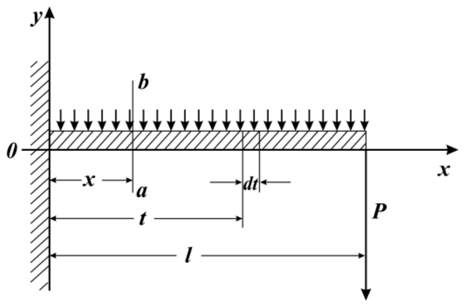
Balkaning egilishiga doir masalalar.

4.7–masala. (Konsol balkaning egilishi.) Chap qismi qattiq mahkamlangan, o‘ng tomoni esa yerkin bo‘lgan $\ell(м)$ uzunlikdagi balka berilgan. Agar balka bir xil taqsimlangan $q\ H/M$ intensivlikdagi yuklama ostida bo‘lsa va o‘ng tomonga PH kuch qo‘yilgan bo‘lsa, egilgan o‘q shaklini va o‘ng tomondagi maksimal egilishini aniqlang.

Yechilishi. Balkaning egilgan o‘qning differensial tenglamasi

$$y'' = \pm \frac{M(x)}{EI} \tag{5.14}$$

dan foydalanishimiz mumkin, shuning uchun ish $M(x)$ bukuvchi momentni topishga keltiriladi, so‘ngra ikki martta integrallash yetarlidir.



9-rasm

Koordinata o‘qlarini 9-rasmdagidek tanlab olamiz va chap tomondan x masofada turgan ab kesimni qaraymiz. Bu kesimda o‘ng tomonga qo‘yilgan P kuchdan vujudga keladigan bukuvchi moment

$$M_1(x) = -P(\ell - x) \tag{4.15}$$

ga teng, shu bilan birga P kuch balkaning o‘ng qismini soat strelkasi harakat yo‘nalishi bo‘yicha olingan.

O‘ng tomonga qo‘yilgan bir xil taqsimlangan yuklama vujudga keltiradigan bukuvchi momentni hisoblash uchun koordinatalar boshidan t masofada joylashgan dt elementni qaraymiz, unga qdt kuch ta’sir etadi. (4.15) dagiga o‘xshash ab kesimda bu elementga ta’sir etadigan kuch vujudga keltirgan bukuvchi moment

$$dM_1(x) = -q(\ell - x)dt \tag{4.16}$$

ga teng.

ab kesimda balkaning o‘ng tomonida bir xil taqsimlangan yuklama vujudga keltiradigan bukuvchi momentni joylash uchun barcha (4.16) ifodalarni balkaning o‘ng tomoni bo‘yicha yig‘ib chiqish kerak, ya’ni

$$M_2(x) = -q\int_x^\ell (t - x)dt = -q\left.\frac{(t-x)^2}{2}\right|_x^\ell = -q\frac{(\ell - x)^2}{2}. \tag{4.17}$$

Endi har ikkala ko‘rinishdagi yuklamadan paydo bo‘ladigan bukuvchi momentni topish uchun

$$\frac{y''}{\left[1+(y')^2\right]^{3/2}} = \pm\frac{M(x)}{EI} \qquad (4.18)$$

(4.15) va (4.18) ifodalarni qo‘yish kerak, shundan so‘ng balkaning egilgan o‘qining differensial tenglamasi bizning hol uchun ushbu ko‘rinishda bo‘ladi:

$$y'' = -\frac{1}{EI}\left[P(\ell - x) + q\frac{(\ell - x)^2}{2}\right].$$

E va I o‘zgarmas bo‘lgani uchun ikki marta integrallash natijasida ketma – ket quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$y' = -\frac{1}{EI}\left[P(\ell x - \frac{x^2}{2}) + \frac{1}{2}q(\ell^2 x - \ell x^2 + \frac{x^3}{3})\right] + C_1,$$

$$y = -\frac{1}{EI}\left[P(\ell\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}) + \frac{1}{2}q(\ell^2\frac{x^2}{2} - \ell\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12})\right] + C_1 x + C_2 .$$

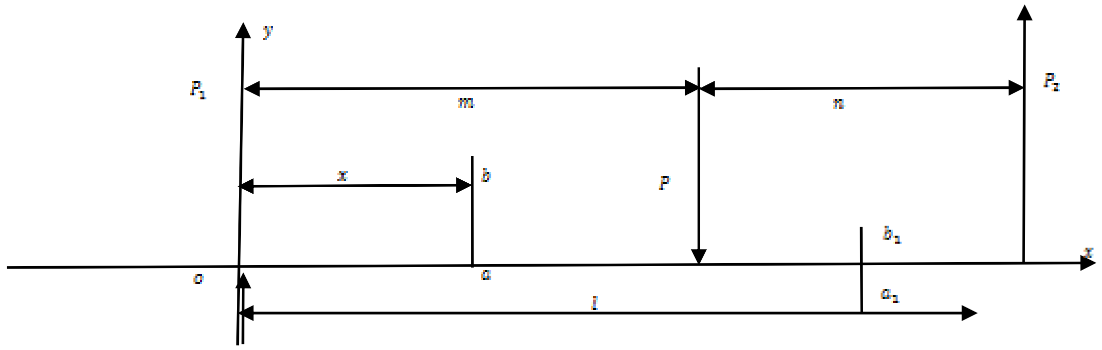
Mazkur hol uchun boshlang‘ich shartlar $y|_{x=0} = y'|_{x=0} = 0$ ko‘rinishda bo‘lib, $C_1 = C_2 = 0$ ni hosil qilamiz, shunday qilib, egilgan o‘qning shakli quyidagi tenglama bilan ifodalanadi:

$$y = -\frac{1}{EI}\left[P(\ell\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}) + \frac{1}{2}q(\ell^2\frac{x^2}{2} - \ell\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12})\right]. \qquad (4.18)$$

o‘ng uchdagi maksimal egilish

$$y|_{x=\ell} = -\frac{1}{EI}\left(\frac{x^3}{3}P + \frac{1}{8}q\ell^4\right).$$

4.8-masala. (Uchlari sharnirli mahkamlangan balkaning egilishi.) ℓ ($м$) uzunlikdagi balkaning uchlari shunday mahkamlanganki, y aylanishi



10-rasm

mumkin, biroq siljishi mumkin emas. Balkaga uning chap uchidan m $м$ masofada P H yuklama ta'sir etadi. Balkaning egilgan o'qining shaklini aniqlang.

Yechilishi. Balka muvozanatda bo'lgani uchun P kuchning ta'siri tayanch reaksiyalar keltirib chiqaradigan tayanchlarning balkaga bosim kuchlari P_1 va P_2 kuchlar bilan muvozanatlashishi kerak (10-rasm.) Bu kuchlarni topish uchun yo'naltirilgan P yuklama qo'yilgan nuqtadan balkaning o'ng uchigacha bo'lgan masofani $n=\ell-m$ bilan belgilaymiz va muvozanatlik shartlariga binoan barcha kuchlarning istalgan kuqtaga nisbatan momentlar yig'indisini olib , $P_1\ell-Pn=0$ tenglikni hosil qilamiz, bu yerdan $P_1=nP/\ell$. Xuddi shunga o'xshash, balkaning chap uchiga nisbatan momentlar yig'indisi $-P_2\ell+Pm=0$ bo'ladi, bundan $P_2=Pm/\ell$.

Egilgan o'qning differensial tenglamasini tuzish uchun, oldingi masalaga o'xshash, (4.1) tenglamadan foydalanamiz. U yerga bukuvchi momentning analitik ifodasini qo'yiSh etarli. Balkaning chap uchidan x masofada joylashgan ab kesimni ko'raylik. Agar $x<m$ deb faraz qilsak, u holda balkaning chap yarmiga faqat chap tayanchning reaksiyasi P_1 ta'sir qiladi va bu holda bukuvchi moment

$$M_1(x)=P_1(x)=\frac{nPx}{\ell}$$

ga teng bo'ladi.

Shunday qilib, $x<m$ uchun, ya'ni balkaning chap qismi uchun (tashqi yo'naltirilgan yuklama qo'yilgan nuqtaga nisbatan olganda) egilgan o'qning differensial tenglamasi

$$y''=\frac{1}{EI}\frac{nPx}{\ell}$$

ko'rinishda bo'ladi.

Bu tenglamani ikki marta integrallasak,

$$y'=\frac{nP}{EI\ell}\cdot\frac{x^2}{2}+C_1, \tag{4.19}$$

$$y=\frac{nP}{EI\ell}\cdot\frac{x^3}{6}+C_1x+C_2. \tag{4.20}$$

(4.20) tenglamadagi ixtiyoriy o'zgarmaslarni topilgandan so'ng, u balkaning egilgan o'qi chap qismining shaklini beradi.

O‘ng qismdagi elastik egri chiziqning shaklini aniqlash uchun balkaning chap uchidan $m < x < \ell$ tengsizlikni qanoatlantiradigan x masofada joylashgan $a_1 b_1$ qaraSh kerak. Bu holda balkaning chap qismiga bunday kesimga nisbatan endi ikkita: P_1 va P_2 kuchlar ta’sir etadi: bu kesimda bukuvchi moment

$$M_2(x) = P_1 x - P(x-m) = \frac{nPx}{\ell} - P(x-m)$$

ga teng. (4.18) differensial tenglama mos ravishda quyidagicha bo‘ladi:

$$y'' = \frac{P}{E\ell}\left(\frac{nx}{\ell} - (x-m)\right) \tag{4.21}$$

Bu tenglamani ketma – ket integrallab quyidagilarni hosil qilamiz:

$$y' = \frac{P}{E\ell}\left(\frac{nx^2}{2\ell} - \frac{(x-m)^2}{2}\right) + C_3, \tag{4.22}$$

$$y = \frac{P}{E\ell}\left(\frac{nx^3}{6\ell} - \frac{(x-m)^3}{6}\right) + C_3 x + C_4. \tag{4.23}$$

(4.20) ga o‘xshash (4.23) ifoda balka o‘qining P kuch qo‘yilgan nuqtadan o‘ng tomondagi egilgan shaklini ifodalaydi.

Shunday qilib, balkaning egilgan o‘qi ikki oraliqda turlicha: $0 < x < m$ uchun (4.20) tenglama bilan, $m < x < \ell$ uchun (4.23) tenglama bilan analitik ifodalanar ekan.

Ixtiyoriy o‘zgarmaslarni aniqlashda boshlang‘ich shartlar yo‘q, yoki quyidagi ikkita chegaraviy shartlarga egamiz:

$$y\big|_{x=0} = y'\big|_{x=0} = 0,$$

biroq to‘rtta ixtiyoriy o‘zgarmaslarni aniqlash uchun etarli emas. Shuning uchun silliqlik sharti $x = m$ da (4.19) va (4.22) ifodalardan hisoblangan y' burchak koeffitsiyentlarini tenglab quyidagini hosil qilamiz:

$$\frac{nP}{EI\ell}\cdot\frac{m}{2} + C_1 = \frac{Pnm}{EI2\ell} + C_3, \text{ bu yerdan } C_1 = C_3$$

ekanligi kelib chiqadi. So‘ngra $x = m$ da (4.20)) va (4.23) ifodalarni tenglab va bunda C_3 ni C_1 bilan almashtirib, ushbuni topamiz:

$$\frac{nP}{EI\ell}\cdot\frac{m^3}{6} + C_1 m = \frac{Pnm^3}{EI6\ell} + C_1 m + C_4,$$

ya’ni $C_4 = 0$. Endi $y\big|_{x=\ell} = 0$ shartdan foydalanib $x = \ell$ ni (4.23) ifodaga qo‘ysak,

$$\frac{P}{EI}\left[\frac{n\ell^3}{6\ell}-\frac{(\ell-m)^3}{6}\right]+C_1\ell=0$$

$m=\ell-n$ ekanligini e’tiborga olsak,

$$\frac{P}{6EI}\left[\ell^2-n^2\right]+C_1\ell=0$$

ni hosil qilamiz, bundan

$$C_1=-\frac{P}{6EI\ell}\left[\ell^2-n^2\right].$$

Aniqlangan o‘zgarmaslarni (4.20) va (4.23) ga qo‘yib balka egilgan o‘qining chap va o‘ng qismlarining shaklini ifodalovchi tenglamalarni hosil qilamiz.

5. O‘zgarmas koeffitsiyentli yuqori tartibli differensial tenglamalarga keltiriladigan masalalar

5.1-masala. (So‘nuvchi tebranishlar) Yukning oldingi masaladagi shartlarda harakat qonunini toping, bu yerda harakat tezligiga proporsional bo‘lgan havo qarshiligini hisobga oling.

Yechilishi. Bu yerda yukka ta’sir etadigan kuchlar qatoriga havoning qarshilik kuchi $R=-\mu v$ (manfiy ishora R kuch v tezlikka teskari yo‘nalganligini bildiradi) qo‘shiladi. Harakatning differensial tenglamasining Ox o‘qqa proeksiyasi ushbu ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-cx-\mu\frac{dx}{dt}$$

yoki $c/m=k^2$, $\mu/m=2n$ desak,

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2n\frac{dx}{dt}+k^2x=0. \qquad (5.1)$$

Bu tenglama ham koeffitsiyentlari o‘zgarmas bo‘lgan ikkinchi tartibli chiziqli bir jinsli tenglamadir. Uning $r^2+2nr+k^2=0$ xarakteristik tenglamasi

$$r_{1,2}=-n\pm\sqrt{n^2-k^2} \qquad (5.2)$$

ildizlarga ega.

Harakat xarakteri bu ildizlar bilan to‘la aniqlanadi. Uch hol ro‘y berishi mumkin. Dastlab $n^2-k^2<0$ bo‘lgan holni qaraymiz. Bu tengsizlik muhitning qarshiligi uncha katta bo‘lmaganda o‘rinli bo‘ladi. Agar $k^2-n^2=k_1^2$ desak, (5.2) ildizlar $r_{1,2}=-n\pm ik_1$ ko‘rinishiga ega bo‘lib umumiy yechim ushbu ko‘rinishda yoziladi:

$$x = e^{-nt}\left(C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t\right)$$

yoki o‘zgartirib yozsak,

$$x = Ae^{-nt}\sin\left(k_1 t + \alpha\right). \qquad (5.3)$$

Agar boshlang‘ich shartlar $t = 0$ da $x_0 = x_0$, $v = v_0$ berilgan bo‘lsa, A va α ni aniqlash mumkin. Buning uchun

$$v = \frac{dx}{dt} = Ak_1 e^{-nt}\cos\left(k_1 t + \alpha\right) - Ane^{-nt}\sin\left(k_1 t + \alpha\right)$$

ni topamiz va $t = 0$ ni x va v ning ifodasiga qo‘yib, ushbu tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$x_0 = A\sin\alpha,$$
$$v_0 = Ak_1\cos\alpha - An\sin\alpha.$$

Ikkinchi tenglamaning ikkala tomonini birinchi tenglamaning mos tomonlariga bo‘lib, $v_0/x_0 = k_1\,\mathrm{c}tg\alpha - n$ ni hosil qilamiz:
bu yerdan

$$\mathrm{c}tg\alpha = \frac{v_0 + nx_0}{k_1 x_0} \text{ yoki } tg\alpha = \frac{k_1 x_0}{v_0 + nx_0}, \quad \alpha = arctg\frac{k_1 x_0}{v_0 + nx_0}.$$

Ma’lumki,

$$\sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}} = \frac{k_1 x_0/\left(v_0 + nx_0\right)}{\sqrt{1 + k_1^2 x_0^2/\left(v_0 + nx_0\right)^2}} = \frac{k_1 x_0}{\sqrt{k_1^2 x_0^2 + \left(v_0 + nx_0\right)^2}},$$

shuning uchun

$$A = \frac{x_0}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{k_1^2 x_0^2 + \left(v_0 + nx_0\right)^2}}{k_1}.$$

(5.3) yechim so‘nuvchi tebranishga ega ekanligimizni ko‘rsatadi. Haqiqatan ham, tebranish amplitudasi Ae^{-nt} vaqtga bog‘liq va monoton kamayuvchi funksiyadir, shu bilan birga $t \to \infty$ da $Ae^{-nt} \to 0$.

So‘nuvchi tebranishlar davri ushbu formula bo‘yicha aniqlanadi:

$$T = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}$$

Yuk koordinatalar boshidan maksimal chetlanish olgan (muvozanatlik holati) vaqt momentlari ayirmasi yarim davr $T/2$ ga teng bo‘lgan arifmetik progressiya tashkil etadi. So‘nuvchi tebranishlarning amplitudalari maxraji $e^{-n\pi/k_1}$ yoki $e^{-nT/2}$ ga teng bo‘lgan kamayuvchi geometrik progressiya tashkil etadi. Bu miqdor so‘nish dekrementi deyiladi va odatda D harfi bilan belgilanadi. Dekrementning natural logarifmi $\ln D = -nT/2$ so‘nishning logarifmik dekrementi deyiladi.

Bu holda tebranishlar chastotasi $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$ oldingi holdagiga nisbatan kichik $(k_1 < k)$ biroq, u yerdagiga o‘xshash yukning boshlang‘ich holatiga bog‘liq emas.

Agar sonli ma’lumotlar berilgan bo‘lsa: tebranish davri $T = 2\,сек$, tebranishning so‘nish dekrementi $D = 1/2$ shuningdek, boshlang‘ich shartlar $x_0 = 0$ va $v_0 = 1\; м/сек$ bo‘lsa, u holda yukning harakat qonuni (5.3) formulaga ko‘ra ushbu ko‘rinishda topiladi:

$$x = Ae^{-nt}\sin(k_1 t + \alpha),$$

bu yerda k_1 va n quyidagi munosabatlardan topiladi:

$$T = 2\pi/k_1 = 2, \text{ bu yerdan } k_1 = \pi;$$

$$D = e^{-nT/2} = e^{-n} = 1/2, \text{ bu yerdan } n = \ln 2.$$

$t = 0$ da $x_0 = 0$ va $v_0 = 1\; м/сек$ boshlang‘ich shartlar A va α ni aniqlashga imkon beradi. Quyidagiga egamiz:

$$\alpha = arctg\,\frac{k_1 x_0}{v_0 + n x_0} = 0, \qquad \frac{v_0}{k_1} = \frac{1}{\pi},$$

va nihoyat:

$$x = \frac{\sin \pi t}{\pi 2^t}.$$

Agar muhitning qarshiligi katta va $k^2 - n^2 > 0$ bo‘lsa, $n^2 - k^2 = h^2$ deb, (5.2) ildizlarni $r_{1,2} = -n \pm h = -(n \mp h)$ ko‘rinishda hosil qilamiz. $h < n$ bo‘lgani uchun ikkala ildiz ham manfiy. Bu holda tenglamaning umumiy yechimi

$$x = C_1 e^{-(n+h)t} + C_2 e^{-(n-h)t}$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Bu yerdan harakat nodavriy va tebranish xarakteriga ega emasligi ko‘rinadi. $n^2 - k^2 = 0$ bo‘lgan holda ham harakat shunga o‘xshash xarakterga ega bo‘ladi, bunda umumiy yechim

$$x = e^{-nt}(C_1 + C_2 t)$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi.

Keyingi ikki holda $t \to \infty$ da $x \to 0$ ekanligini ko‘rish oson.

Agar $x(0)=x_0$ va $x'(0)=v_0$ boshlang‘ich shartlar berilgan bo‘lsa, $n^2-k^2>0$ bo‘lgan holda $x_0=C_1+C_2$ va $v_0=-(n+h)C_1-(n-h)C_2$ ga egamiz. Bu sistemani C_1 va C_2 ga nisbatan echib,

$$C_1=\frac{x_0(h-n)-v_0}{2h},\ C_2=\frac{x_0(h+n)+v_0}{2h}$$

ni topamiz, demak,

$$x=e^{-nt}\left[\frac{x_0(h-n)-v_0}{2h}e^{-ht}+\frac{x_0(h+n)+v_0}{2h}e^{ht}\right]=$$

$$=e^{-nt}\left[\frac{x_0n+v_0}{h}\frac{e^{ht}-e^{-ht}}{2}+x_0\frac{e^{ht}+e^{-ht}}{2}\right]=$$

$$=e^{-nt}\left(x_0 ch\,ht+\frac{x_0n+v_0}{h}sh\,ht\right).$$

$n^2-k^2=0$ bo‘lgan holda $C_1=x_0$, $C_2=x_0n+v_0$ ga egamiz, va binobarin,

$$x=e^{-nt}\left[x_0+(x_0n+v_0)t\right].$$

5.2-masala. (Muhitning qarshiligi hisobga olinmaydigan majburiy tebranishlar). P og‘irlikdagi yuk yuklama bo‘lmagandagi uzunligi l bo‘lgan vertikal prujinaga osilgan. Yukka qo‘zg‘atuvchi $Q\sin pt$ davriy kuch ta’sir etadi, bu yerda Q va $p-$ o‘zgarmaslar. Prujinaning massasini va muhitning qarshiligini hisobga olmay, yukning harakat qonunini toping.

Yechilishi. 1-masaladagiga o‘xshash ushbu tenglamani hosil qilamiz;

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-cx+Q\sin pt.$$

Yuqoridagiga o‘xshash, $k^2=c/m$ deb, bundan tashqari, $q=Q/m$ deb tenglamani

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x=q\sin pt \tag{5.4}$$

ko‘rinishda qayta yozib olamiz. Bu koeffitsiyentlari o‘zgarmas bo‘lgan ikkinchi tartibli bir jinsli bo‘lmagan chiziqli tenglama shu bilan birga (5.4) ga mos keluvchi bir jinsli tenglamadan iborat. Shuning uchun $X=A\sin(kt+\alpha)$; $\overline{x}$ ni topish qoldi. Agar $p\neq k$ deb faraz qilsak, $\overline{x}$ xususiy yechimni $\overline{x}=M\cos pt+N\sin pt$ ko‘rinishda izlash kerak, bu yerda M va N - topilishi kerak bo‘lgan koeffitsiyentlar. Shunday qilib,

$$k^2\left|\overline{x}=M\cos pt+N\sin pt,\right.$$

$$0\left|\overline{x}'=-Mp\sin pt+Np\cos pt,\right.$$

$$1|\overline{x''} = -Mp^2 \sin pt - Np^2 \sin pt,$$

hisoblashlani bajarib, quyidagini hosil qilamiz:

$$-Mp^2 + Mk^2 = 0, \qquad -Np^2 + Nk^2 = q,$$

bu Yerdan $M = 0$ va $N = q/(k^2 - p^2)$. Shunday hosil qilingan

$$\overline{x} = \frac{q}{k^2 - p^2} \sin pt \tag{5.5}$$

xususiy yechim $Q \sin pt$ qo‘zg‘atuvchi kuch vujudga keltiradigan majburiy tebranishlar deb ataluvchi tebranishlarni aniqlaydi. Majburiy tebranishlar qo‘zg‘atuvchi kuch ega bo‘lgan davra ega bo‘lib, $k > p$ da u bilan faza bo‘yicha ham bir xilda bo‘ladi, yoki $k < p$ bo‘lsa, ya’ni $N < 0$ bo‘lsa, π ga farq qiladi.

Harakat qonuni quyidagi umumiy yechim bilan ifodalanadi:

$$x = \frac{q}{k^2 - p^2} \sin pt + A \sin(kt + \alpha). \tag{5.6}$$

U tashqi qo‘zg‘atuvchi kuch bilan aniqlanadigan xususiy majburiy tebranishlar (5.5) va butunlay ichki sabablar prujinaning bikrligi va yuk massa-siga bog‘liq bo‘lgan xususiy tebranishlarning yig‘indisidan iborat.

Agar boshlang‘ich shartlar: $x(0) = x_0$ va $x'(0) = v_0$ berilgan bo‘lsa, u holda ixtiyoriy A va α o‘zgarmaslarni aniqlash mumkin. Buning uchun (5.6) funksiyani differensiallaymiz:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{qp}{k^2 - p^2} \cos pt + Ak \cos(kt + \alpha)$$

va x hamda $\frac{dx}{dt}$ ning ifodasiga argumentning $t = 0$ qiymatini qo‘yamiz; natijada A va α ga nisbatan tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$x_0 = A \sin \alpha,$$

$$v_0 = \frac{qp}{k^2 - p^2} + Ak \cos \alpha.$$

Uni quyidagicha o‘zgartiramiz:

$$x_0 = A \sin \alpha,$$

$$\frac{1}{k}\left(v_0 - \frac{qp}{k^2 - p^2}\right) = A \cos \alpha \;;$$

bu tenglamalarning ikkala qismini kvadratga oshiramiz va qo‘shamiz. U holda

$$A=\sqrt{x_0^2+\frac{1}{k^2}\left(v_0-\frac{qp}{k^2-p^2}\right)^2}\ .$$

α ni topish uchun birinchi tenglamaning ikkala qismini ikkinchi tenglamaning mos qismlariga bo‘lamiz: natijada

$$tg\alpha=\frac{x_0k}{v_0-qp/\left(k^2-p^2\right)},\quad \text{bu yerdan}\quad \alpha=arctg\frac{x_0k}{v_0-qp/\left(k^2-p^2\right)},$$

bunda $\sin\alpha=\dfrac{x_0}{A},\ \cos\alpha=\dfrac{1}{kA}\left(v_0-\dfrac{qp}{k^2-p^2}\right).$

Shunday qilib, berilgan boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiradigan izlanayotgan xususiy yechim

$$x=\frac{q}{k^2-p^2}\sin pt+A\sin kt\cos\alpha+A\cos kt\sin\alpha$$

yoki

$$x=\frac{q}{k^2-p^2}\sin pt+\frac{1}{k}\left(v_0-\frac{qp}{k^2-p^2}\right)\sin kt+x_0\cos kt$$

funsiyadan iborat.

Xususiy majburiy tebranishlarni xarakterlovchi (5.5) xususiy yechim $p\neq k$ degan Shartda, ya’ni tashqi kuchning chastotasi xususiy tebranishlar chastotasi bilan birga bir xilda emas degan shartda hosil qilingan edi. Agar $p=k$ bo‘lsa, ish mutlaqo boshqacha bo‘ladi. Haqiqatan ham, bunday holda (5.4) tenglamani quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x=q\sin kt. \tag{5.7}$$

Xusussiy yechimni $\overline{x}=M\cos pt+N\sin pt$ shaklda izlash kerak, bu yerda M va $N-$ aniqlanishi kerak bo‘lgan koeffitsiyentlar. Shunday qilib,

$$k^2\left|\ \overline{x}=Mt\cos kt+Nt\sin kt,\right.$$

$$0\left|\ \overline{x'}=-Mkt\sin kt+Nkt\cos kt+M\cos kt+N\sin kt,\right.$$

$$1\left|\ \overline{x''}=-Mk^2t\cos kt-Nk^2\sin kt-2Mk\sin kt+2Nk\cos kt,\right.$$

bu yerdan $-2Mk=q,\ \ 2Nk=0$ ni topamiz, va binobarin, xususiy yechim ushbu ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\overline{x}=-\frac{q}{2k}t\cos kt. \tag{5.8}$$

Bu holda umumiy yechim:

$$x=-\frac{q}{2k}t\cos kt+A\sin\left(kt+\alpha\right).$$

$\frac{dx}{dt}$ ni topamiz va x hamda $\frac{dx}{dt}$ ning ifodasiga $t=0$ qiymatni qo‘yamiz:

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{q}{2k}\cos kt+\frac{q}{2}t\sin kt+Ak\cos\left(kt+\alpha\right);$$

$$x_0=A\sin\alpha;$$

$$v_0=-\frac{q}{2k}+Ak\cos\alpha \quad \text{yoki} \quad \frac{1}{k}\left(v_0+\frac{q}{2k}\right)=A\cos\alpha.$$

Keyingi ikki tenglikdan :

$$A=\sqrt{x_0^2+\frac{1}{k^2}\left(v_0+\frac{q}{2k}\right)^2}, \quad tg\alpha=\frac{x_0k}{v_0+q/2k},$$

bu yerdan

$$\alpha=arctg\frac{x_0k}{v_0+q/2k}; \quad \sin\alpha=\frac{x_0}{A}, \quad \cos\alpha=\frac{1}{kA}\left(v_0+\frac{q}{2k}\right).$$

Umumiy yechimni quyidagicha qayta yozib olamiz:

$$x=-\frac{q}{2k}t\cos kt+A\sin kt\cos\alpha+A\cos kt\sin\alpha,$$

U holda boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi izlanayotgan xususiy yechim quyidagi ko‘rinishda yoziladi:

$$x=-\frac{q}{2k}t\cos kt+\frac{1}{k}\left(v_0+\frac{q}{2k}\right)\sin kt+x_0\cos kt.$$

(5.8) tenglik majburiy tebranishlar amplitudasi $gt/(2k)$ bu holda, q hatto uncha katta bo‘lmaganda ham, cheksiz katta bo‘lib qolishi mumkin. Boshqacha aytganda qo‘zg‘atuvchi kuchlar kichik bo‘lganda yetarlicha katta amplitudalarni hosil qilish mumkin. Bu hodisa rezonans deyiladi. Shunday qilib, qo‘zg‘atuvchi kuchning chastotasi xususiy tebranishlar chastotasi bilan bir xil bo‘lib qolganda rezonans ro‘y beradi.

Shunday bo‘lsada, aslida bu chastotalarning aniq bir xilda bo‘lishi zaruriy emas. Majburiy tebranish uchun chiqarilgan (5.5) ifoda chastotalar bir-biriga yaqin bo‘lganda $q/(k^2-p^2)$ amplituda tayin k va p chastotalarda chegaralangan bo‘lishiga qaramay juda katta bo‘lishi mumkin.

Amplitudasi katta bo‘lgan tebranishlarni vujudga keltirish imkoniyatidan ko‘pincha turli kuchaytirgichlarda, masalan, radiotexnikada foydalaniladi. Boshqa tomondan, ko‘pchilik hollarda katta amplitudalarning paydo bo‘lishi zararlidir, chunki konstruksiyalarning (aytaylik, ko‘priklar yoki tomlarning) buzilishiga olib kelishi mumkin.

5.3-masala. (Muhitning qarshiligi hisobga olinadigan majburiy tebranishlar). oldingi masala shartidagi yukning harakat qonunini muhitning harakat tezligiga proporsional bo‘lgan qarshiligini hisobga olgan holda toping.

Yechilishi. Yuqoridagi o‘xshash

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx - \mu\frac{dx}{dt} + Q\sin pt$$

yoki

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2m\frac{dx}{dt} + k^2x = q\sin pt. \tag{5.9}$$

(5.9) ga mos bir jinsli tenglama ildizlari (5.2) xarakteristik tenglamani ildizlari bo‘lgan (5.1) tenglamadan iborat bo‘ladi. Muhitning qarshiligi uncha katta emas, ya’ni $n^2 - k^2 < 0$ deb faraz qilamiz. Bunda bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi (4.3) ko‘rinishda bo‘ladi:

$$X = Ae^{-nt}\sin(k_1t + \alpha)$$

Bu yerda $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$. Bu yechim so‘nuvchi bo‘lgan erkin tebranishlarni aniqlaydi. Majburiy tebranishlarni topish uchun xususiy yechimni $\overline{x} = M\cos pt + N\sin pt$ ko‘rinishda izlaymiz. Quyidagiga egamiz:

$$k^2\left|\,\overline{x} = M\cos pt + N\sin pt\right.,$$

$$2n\left|\,\overline{x'} = -Mp\sin pt + Np\cos pt\right.,$$

$$1\left|\,\overline{x''} = -Mp^2\cos pt - Np^2\sin pt\right..$$

Koeffitsiyentlarni taqqoslab, ushbu sistemani hosil qilamiz:

$$\left.\begin{aligned} &M\left(k^2 - p^2\right) + 2npN = 0, \\ &-2npM + \left(k^2 - p^2\right)N = q. \end{aligned}\right\}$$

Ma’lumki,

$$\begin{vmatrix} k^2 - p^2 & 2np \\ -2pn & k^2 - p^2 \end{vmatrix} = \left(k^2 - p^2\right)^2 + 4n^2p^2,$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2np \\ q & k^2 - p^2 \end{vmatrix} = -2npq, \quad \begin{vmatrix} k^2 - p^2 & 0 \\ -2pn & q \end{vmatrix} = q\left(k^2 - p^2\right).$$

Demak,

$$M = -\frac{2npq}{\left(k^2 - p^2\right)^2 + 4n^2p^2}, \quad N = \frac{q\left(k^2 - p^2\right)}{\left(k^2 - p^2\right)^2 + 4n^2p^2}.$$

Xususiy yechim quyidagicha yoziladi:

$$\bar{x} = \frac{q}{\left(k^2 - p^2\right)^2 + 4n^2p^2}\left[-2np\cos pt + \left(k^2 - p^2\right)\sin pt\right].$$

Bu ifodani quyidagicha o‘zgartiramiz:

$$\bar{x} = \frac{q}{\left(k^2 - p^2\right)^2 + 4n^2p^2}\left[-\frac{2np}{\sqrt{\left(k^2 - p^2\right)^2 + 4n^2p^2}}\cos pt + \frac{k^2 - p^2}{\sqrt{\left(k^2 - p^2\right)^2 + 4n^2p^2}}\sin pt\right].$$

Quyidagi belgilarni kiritamiz:

$$\frac{q}{\sqrt{\left(k^2 - p^2\right)^2 + 4n^2p^2}} = B,$$

$$\frac{2np}{\sqrt{\left(k^2 - p^2\right)^2 + 4n^2p^2}} = \sin\delta, \quad \frac{k^2 - p^2}{\sqrt{\left(k^2 - p^2\right)^2 + 4n^2p^2}} = \cos\delta. \qquad (5.10)$$

Endi x ni

$$\bar{x} = B\sin\left(pt - \delta\right) \qquad (5.11)$$

ko‘rinishda yozamiz.

Ushbu

$$\delta = arctg\frac{2np}{k^2 - p^2} \qquad (5.12)$$

ifoda faza siljishi degan nom bilan yuritiladi. Umumiy yechim, oldingi masaladagiga o‘xshash formulaga qarang, erkin tebranishlar va (5.11) majburiy tebranishlar yig‘indisidan iborat bo‘ladi:

$$x = Ae^{-kt}\sin\left(k_1t + \alpha\right) + B\sin\left(pt - \delta\right). \qquad (5.13)$$

Birinchi qo‘shiluvchi, yuqorida aytganimizdek, so‘nuvchi tebranishlarni aniqlab, katta k larda tezda sezilmaydigan bo‘lib qoladi. (5.11) majburiy tebranishlarga keladigan bo‘lsak, ularning (5.10) amplitudalari vaqtga bog‘liq emas va $q = Q/m$ bo‘lgani uchun davriy qo‘zg‘atuvchi kuchning amplitudasi Q ga proporsional . U q dan

$$A(p) = \frac{1}{\sqrt{\left(k^2 - p^2\right)^2 + 4n^2p^2}} \qquad (5.14)$$

ko‘paytuvchi bilan farq qiladi, bu ko‘paytuvchi majburiy tebranish amplitudasining qo‘zg‘atuvchi kuch chastotasiga bog‘lanishini xarakterlaydi.

Bu amplitudaning maksimumini aniqlaymiz. Buning uchun (5.14) funksiyaning hosilasini topamiz:

$$A'(p)=\frac{\left(k^2-p^2\right)2p-4n^2p}{\left[\left(k^2-p^2\right)^2+4n^2p^2\right]^{3/2}}.$$

$A'(p)=0$ deb $\left(k^2-p^2\right)-2n^2=0$ tenglamani hosil qilamiz ($p=0$ mumkin bo‘lmagan hol sifatida tashlab yuboriladi, uning ildizi tashqi kuchlarning chastotasini beradi: $p=\sqrt{k^2-2n^2}$, bunda, ekstremumning yetarli shartlarini tekshirish ko‘rsatishicha, majburiy tebranishlar amplitudasi maksimal bo‘ladi. Amplitudaning maksimal qiymati ushbuga teng:

$$B=\frac{q}{2n\sqrt{k^2-n^2}}\ . \tag{5.15}$$

(5.15) formula n qanchalik kichik bo‘lsa, tebranishlar amplitudasi shunchalik katta bo‘lishini ko‘rsatadi. Kichik n larda p chastota xususiy tebranishlar chastotasi k ga yaqin bo‘ladi.

(5.11) yechim

$$\left(k^2-p^2\right)^2+4n^2p^2\neq 0$$

bo‘lganda har doim mavjuddir. $\left(k^2-p^2\right)^2+4n^2p^2=0$ bo‘lgan holda $p=k$ va $n=0$, natijada (5.9) tenglama (5.7) tenglamaga aylanadi. Bu erda yana rezonans hodisasi ro‘y beradi, unda, yuqorida ko‘rsatganimizdek, majburiy tebranishlar (5.8) ko‘rinishga ega bo‘ladi.

Elektr zanjirdagi tebranishlar

5.4-masala. EYUKi $e(t)$ ga teng bo‘lgan manbaga ketma-ket ulangan L induktivlik g‘altagi, R omik qarshilik va C sig‘imdan iborat kontur ulangan. Agar boshlang‘ich momentda konturdagi tok va kondensator zaryadi nolga teng bo‘lsa, zanjirdagi i tokni t vaqtning funksiyasi kabi toping.

Yechilishi. Kirxgof qonuniga ko‘ra zanjirdagi elektr yurituvchi kuch induktivlikdagi, qarshilikdagi va sig‘imdagi kuchlaniShlar pasayishi yig‘indisiga teng:

$$e(t)=u_L+u_R+u_C\,,$$

ular i tok bilan quyidagi munosabatlar orqali bog‘langan:

$$u_L = L\frac{di}{dt}, \quad u_R = Ri, \quad u_C = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau.$$

Shunday qilib quyidagi tenglama hosil bo‘ladi:

$$e(t) = L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau.$$

Bu integral-differensial tenglamadir, ya’ni tenglamalarning eng murakkab turlaridan biriga mansubdir, biroq mazkur holda differensiallash orqali undan oddiy differensial tenglamaga o‘tish mumkin. Haqiqatan ham, t bo‘yicha differensiallab, koeffitsiyentlari o‘zgarmas bo‘lgan ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamani hosil qilamiz:

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = \frac{de}{dt} \qquad (5.16)$$

Ikki holni qaraymiz.

1-hol. $e(t) = E = const$. Bu holda $\frac{de}{dt} = 0$ va (5.16) tenlama bir jinsli

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i = 0 \qquad (5.17)$$

tenglamaga aylanadi. Bu tenglama erkin mexanikaviy tebranishlar (muhit qarshiligi hisobga olingandagi) tenglamasiga o‘xshashdir. Uning $r^2 + \frac{R}{L}r + \frac{1}{LC} = 0$ xarakteristik tenglamasi

$$r_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2C - 4L}{4L^2C}}$$

ildizlarga ega bo‘ladi. Agar $R^2C - 4L \geq 0$ bo‘lsa xarakteristik tenglamanig ikkala ildizi haqiqiy va umumiy yechim nodavriy funksiya bo‘ladi. Bunga mos ravishda tok ham nodavriy bo‘ladi. $R^2C - 4L = 0$ bo‘lgandagi kabi, zanjirda hech qanday elektr tebranishlari vujudga kelmaydi. Agar $R^2C - 4L < 0$ bo‘lsa,

$$i = e^{-\delta t}\left(C_1\cos\omega_1 t + C_2\sin\omega_1 t\right),$$

(bu yerda $\delta = R/2L$, $\omega_1^2 = 1/(LC) - R^2/(4L^2)$ deb olingan) umumiy yechim elektr tebranishlarini ifodalaydi.

$L\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0} = E$ ekanligini ko‘rish oson, bu yerdan $\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0} = \frac{E}{L}$ va shunday qilib, boShlang‘ich shartlar quyidagicha yoziladi:

$$i\big|_{t=0}=0, \qquad \left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0}=\frac{E}{L}$$

i ni t bo‘yicha differensiallab, topamiz:

$$\frac{di}{dt}=e^{-\delta t}\left[-\delta\left(C_1\cos\omega_1 t+C_2\sin\omega_1 t\right)+\omega_1\left(-C_1\sin\omega_1 t+C_2\cos vt\right)\right].$$

$t=0$ ni i va $\frac{di}{dt}$ ning ifodalariga qo‘yib,

$$0=C_1,$$

$$\frac{E}{L}=-\delta C_1+\omega_1 C_2$$

ni topamiz, bu yerdan $C_1=0$ va $C_2=E/(L\omega_1)$, natijada yechim ushbu ko‘rinishda bo‘ladi:

$$i=\frac{E}{L\omega_1}e^{-\delta t}\sin\omega_1 t.$$

2- hol. $e(t)=E\sin\omega t.$ Bu holda $\frac{de}{dt}=E\omega\cos\omega t.$ Quyidagi chiziqli bir jinsli bo‘lmagan tenglama hosil bo‘ladi:

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}i=E\omega\cos\omega t. \tag{5.18}$$

Bu bir jinsli bo‘lmagan tenglamaga mos bir jinsli tenglama yuqorida ko‘rilgan tenglamadan (1-hol) iborat bo‘ladi, shuning uchun bir jinsli bo‘lmagan tenglamaning xususiy yechimini topish qoladi. Uni

$$\bar{i}=A\cos\omega t+B\sin\omega t$$

shaklda izlash kerak. Aniqmas koeffitsiyentlarni topish uchun quyidagilarni hisoblaymiz:

$$\frac{1}{C}\Big|\,\bar{i}=A\cos\omega t+B\sin\omega t$$

$$R\,\big|\,\overline{i'}=-A\omega\sin\omega t+B\omega\cos\omega t\ ,$$

$$L\,\big|\,\overline{i''}=-A\omega^2\cos\omega t-B\omega^2\cos\omega t$$

va A,B ga nisbatan algebraik tenglamalar sistemasiga ega bo‘lamiz:

$$\left(\frac{1}{C}-L\omega^2\right)A+\omega RB=E\omega,$$

$$-\omega RA+\left(\frac{1}{C}-L\omega^2\right)B=0.$$

Bu sistemani yechib,

$$A=\frac{E\omega\left(1/C-L\omega^2\right)}{\left(1/C-L\omega^2\right)^2+\omega^2R^2},\quad B=\frac{E\omega^2R}{\left(1/C-L\omega^2\right)^2+\omega^2R^2}$$

ni topamiz, koeffitsiyentlarning bu qiymatlarida xususiy yechim quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\bar{i}=\frac{E\omega}{\left(1/C-L\omega^2\right)^2+\omega^2R^2}\left[\left(\frac{1}{C}-L\omega^2\right)\cos\omega t+\omega R\sin\omega t\right].$$

Bir jinsli bo‘lmagan tenglamaning umuiy yechimi mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi va bir jinsli bo‘lmagan tenglamaning xususiy yechimi yig‘indisidan iborat, ya’ni

$$i=I+\bar{i}=e^{-\delta t}\left(C_1\cos\omega_1 t+C_2\sin\omega_1 t\right)+\frac{E}{\left[1/(C\omega)-L\omega\right]^2+R^2}\left[\left(\frac{1}{C\omega}-L\omega\right)\cos\omega t+R\sin\omega t\right].$$

Belgilashlar kiritamiz? $L\omega-\frac{1}{C\omega}=X$; $\sqrt{\left(\frac{1}{C\omega}-L\omega\right)^2+R^2}=\sqrt{X^2+R^2}=Z$; u holda

$$i=e^{-\delta t}\left(C_1\cos\omega_1 t+C_2\sin\omega_1 t\right)-\frac{E}{Z^2}\left(X\cos\omega t-R\sin\omega t\right).$$

C_1 va C_2 larni boshlang‘ich shartlardan topamiz: $i\big|_{t=0}=0$, $\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0}=0$, (keyingi shart

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau=E\sin\omega t$$

tenglamadan $t=0$ da hosil bo‘ladi).

Shu maqsadda hosilani yozib olamiz:

$$\frac{di}{dt}=-\delta e^{-\delta t}\left(C_1\cos\omega_1 t+C_2\sin\omega_1 t\right)+e^{-\delta t}\left(-C_1\omega_1\sin\omega_1 t+C_2\omega_1\cos\omega_1 t\right)+$$
$$+\frac{E}{Z^2}\left(X\omega\sin\omega t+R\omega\cos\omega t\right)$$

va $t=0$ qiymatni i va $\frac{di}{dt}$ ning ifodalariga qo‘yamiz:

$$0=C_1-\frac{EX}{Z^2},\ \text{bu yerdan}\ C_1=\frac{EX}{Z^2};$$

$$0=-\delta C_1+\omega_1 C_2+\frac{ER\omega}{Z^2};$$

bu yerdan

$$C_2=\frac{1}{\omega_1}\left(\delta C_1-\frac{ER\omega}{Z^2}\right)=-\frac{E}{Z^2\omega_1}\left(R\omega-X\delta\right).$$

Qavsda turgan ifodani quyidagicha o‘zgartiramiz:

$$R\omega - X\delta = R\omega - \frac{R}{2L}\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) = R\omega - \frac{R\omega}{2} + \frac{\delta}{C\omega} =$$

$$\frac{R\omega}{2} + \frac{\delta}{C\omega} = \delta\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) = \delta X',$$

bu yerda $L\omega + 1/(C\omega) = X'$ deb belgilangan.

Shunday qilib,

$$i = \frac{E}{Z^2\omega}e^{-\delta t}\left(X\omega_1\cos\omega_1 t - X'\delta\sin\omega_1 t\right) - \frac{E}{Z^2}\left(X\cos\omega t - R\sin\omega t\right).$$

Belgilash kiritamiz: $X\omega_1 \big/ \sqrt{X^2\omega_1^2 + X'^2\delta^2} = \sin\gamma_1$, $X'\delta \big/ \sqrt{X^2\omega_1^2 + X'^2\delta^2} = \cos\gamma_1$ yoki

$$X^2\omega_1^2 + X'^2\delta^2 = \frac{Z^2}{LC} \qquad (5.19)$$

bo‘lgani uchun

$$X\sqrt{LC}\omega_1 / Z = \sin\gamma_1, \quad X'\sqrt{LC}\delta / Z = \cos\gamma_1$$

(5.19) munosabat quyidagicha hosil bo‘ladi. Quyidagiga egamiz:

$$L\omega = X + \frac{1}{C\omega}, \quad L\omega = X' - \frac{1}{C\omega},$$

bu yerdan

$$X' = X + \frac{2}{C\omega} \quad \text{va} \quad X'^2 = X^2 + \frac{4}{C\omega}\left(X + \frac{1}{C\omega}\right)$$

Demak,

$$X^2\omega_1^2 + X'^2\delta^2 = X^2\left(\frac{1}{LC} - \delta^2\right) + \left[X^2 + \frac{4}{C\omega}\left(X + \frac{1}{C\omega}\right)\right]\delta^2 =$$

$$= \frac{X^2}{LC} + \frac{4}{C\omega}\left(L\omega - \frac{1}{C\omega} + \frac{1}{C\omega}\right)\delta^2 = \frac{X^2}{LC} + \frac{4LR^2}{C\cdot 4L^2} = \frac{1}{LC}\left(X^2 + R^2\right) = \frac{Z^2}{LC}.$$

Xuddi yuqoridagiga o‘xshash belgilaymiz: $X\big/\sqrt{X^2 + R^2} = \sin\gamma$, $R\big/\sqrt{X^2 + R^2} = \cos\gamma$ $X/Z = \sin\gamma$, $R\big/\sqrt{X^2 + R^2} = \cos\gamma$. yoki natijada quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$i = -\frac{Ex^{-\delta t}}{Z\sqrt{LC}\omega_1}\sin\left(\omega_1 t - \gamma_1\right) + \frac{E}{Z}\sin\left(\omega t - \gamma\right),$$

bu Yerda $tg\gamma_1 = (X\omega)/(X'\delta)$, $tg\gamma = X/R.$

$\omega = \omega_1$ bo‘lgan holda xususiy yechimni

$$\bar{i} = t\left(A\cos\omega t + B\sin\omega t\right)$$

ko‘rinishda izlash kerakligini eslatib o‘taylik.

t ko‘paytuvchining borligi tebranish amplitudasi cheksiz o‘sishini ko‘rsatadi; $\omega = \omega_1$ bo‘lgan hol rezonansni bildiradi.

5.5-masala. 1-Masaladagi zanjirdan R qarshilik yo‘qligi bilan farq qiluvchi va $E\cos(\omega t+\psi)$ (bu yerda $\omega \neq 1/\sqrt{LC}$) EYUK bo‘lgan $LC-$ zanjirni qaraylik.

Bu holda differensial tenglama ushbu ko‘rinishda bo‘ladi:

$$L\frac{d^2 i}{dt^2}+\frac{1}{C}i=-E\omega\sin(\omega t+\psi),$$

boShlang‘ich shartlar: $i\big|_{t=0}=0$, $\dfrac{di}{dt}\Big|_{t=0}=\dfrac{E}{L}\cos\psi$ (keyingi shart $L\dfrac{di}{dt}+\dfrac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau=E\cos(\omega t+\psi)$ tenglamadan $t=0$ da hosil bo‘ladi).

Mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi:

$I=C_1\cos\omega_0 t+C_2\sin\omega_0 t$, bu yerda $\omega_0=1/\sqrt{LC}$.

Xususiy yechimni topamiz:

$$\frac{1}{C}\Big|\ \bar{i}=A\cos\omega t+B\sin\omega t,$$

$$0\Big|\ \frac{d\bar{i}}{dt}=-A\omega\sin\omega t+B\omega\cos\omega t,$$

$$L\Big|\ \frac{d^2\bar{i}}{dt^2}=-A\omega^2\cos\omega t-B\omega^2\sin\omega t,$$

$$A\left(\frac{1}{C}-L\omega^2\right)\cos\omega t+B\left(\frac{1}{C}-L\omega^2\right)\sin\omega t=-E\omega\sin\psi\cos\omega t-E\omega\cos\psi\sin\omega t.$$

Demak,

$$AL\left(\frac{1}{LC}-\omega^2\right)=-E\omega\sin\psi, \quad \text{bu yerdan} \quad A=-\frac{E\omega\sin\psi}{L\left(\omega_0^2-\omega^2\right)},$$

$$BL\left(\frac{1}{LC}-\omega^2\right)=-E\omega\cos\psi, \quad \text{bu yerdan} \quad B=-\frac{E\omega\cos\psi}{L\left(\omega^2-\omega_0^2\right)},$$

Shuning uchun

$$\bar{i}=-\frac{E\omega}{L\left(\omega^2-\omega_0^2\right)}(\sin\psi\cos\omega t+\cos\psi\sin\omega t)$$

yoki

$$\bar{i}=-\frac{E\omega}{L\left(\omega^2-\omega_0^2\right)}\sin(\omega t+\psi).$$

Shunday qilib, umumiy yechim ushbu ko‘rinishda hosil bo‘ladi:

$$i=C_1\cos\omega_0 t+C_2\sin\omega_0 t+\frac{E\omega}{L\left(\omega^2-\omega_0^2\right)}\sin(\omega t+\psi).$$

Boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiradigan xususiy yechimni topish uchun hosilani yozib olamiz va i hamda $\frac{di}{dt}$ ning ifodalariga ularning $t=0$ dagi qiymatlarini qo‘yamiz:

$$0=C_1+\frac{E\omega\sin\psi}{L\left(\omega^2-\omega_0^2\right)},\quad \text{bu yerdan}\quad C_1=-\frac{E\omega\sin\psi}{L\left(\omega^2-\omega_0^2\right)};$$

$$\frac{E}{L}\cos\psi=C_2\omega_0+\frac{E\omega^2\cos\psi}{L\left(\omega^2-\omega_0^2\right)},\quad \text{bu yerdan}\quad C_2=-\frac{\omega_0 E\cos\psi}{L\left(\omega^2-\omega_0^2\right)},$$

va demak,

$$i=\frac{E}{L\left(\omega^2-\omega_0^2\right)}\left[\omega\sin\psi\cos\omega t+\omega_0\cos\psi\sin\omega t-\omega\sin\left(\omega t+\psi\right)\right]$$

yoki

$$i=\frac{E}{L\left(\omega^2-\omega_0^2\right)}\left[\omega\sin\left(\omega t+\psi\right)-\omega\sin\psi\cos\omega t-\omega_0\cos\psi\sin\omega t\right]$$

Ixtiyoriy o‘zgarmaslar boshlang‘ich shartlardan oldingi holdagi kabi aniqlanadi.

Agar $\omega=1/LC=\omega_0$ bo‘lsa, xususiy yechimni

$$\bar{i}=t\left(A\cos\omega t+B\sin\omega t\right)$$

ko‘rinishda izlash kerak, u holda $\frac{d\bar{i}}{dt}=t\left(-A\omega\sin\omega t+B\omega\cos\omega t\right)+A\cos\omega t+B\sin\omega t$,

$\frac{d^2\bar{i}}{dt^2}=t\left(-A\omega^2\cos\omega t-B\omega^2\cos\omega t\right)+\left(-2A\omega\sin\omega t+2B\omega\cos\omega t\right)$. $L\omega^2-\frac{1}{C}=0$ bo‘lgani uchun tenglamaga $\bar{i}$ va $\frac{d^2\bar{i}}{dt^2}$ ning ifodasiga qo‘yib, ushbu ayniyatni hosil qilamiz.

$$L\left(-2A\omega\sin\omega t+2B\omega\cos\omega t\right)=E\omega\cos\omega t,$$

bu yerdan $A=0,\ B=E/(2L)$ ekanligi kelib chiqadi va shuning uchun

$$\bar{i}=\frac{E}{2L}t\sin\omega t.$$

Bu holda $(R=0)$ tenglamaning umumiy yechimi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$i=I+\bar{i}=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t+\frac{E}{2L}t\sin\omega t.$$

C_1 va C_2 larni $i\big|_{t=0}$ va $\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0}=0$ boshlang‘ich shartlardan topamiz. Buning uchun

$$\frac{di}{dt}=-C_1\omega\sin\omega t+C_2\omega\cos\omega t+\frac{E\omega t}{2L}\cos\omega t+\frac{E}{2L}\sin\omega t$$

ni yozib olamiz $t=0$ va qiymatni i hamda $\frac{di}{dt}$ ning ifodasiga qo‘yamiz, natijada $C_1=C_2=0$ ni, ya’ni $i=\bar{i}$ ni hosil qilamiz. Nihoyat quyidagiga ega bo‘lamiz (rezonans hol):

$$i=\frac{E}{2L}t\sin\omega t, \text{bu yerda } \omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

5.6-masala. EYUKi $E\sin(\omega t+\psi)$ ga teng bo‘lgan $LR-$ zanjirni qaraymiz.

Bu holda birinchi tartibli

$$L\frac{di}{dt}+Ri=E\sin(\omega t+\psi)$$

tenglama va $i|_{t=0}=0$ boshlang‘ich shart hosil bo‘ladi. Bu koeffitsiyentlari o‘zgarmas bo‘lgan chiziqli tenglama bo‘lganligi uchun uni yuqori tartibli chiziqli tenglamalar yechiladigan usullar bilan yechish mumkin.

$Lr+R=0$ xarakteristik tenglamadan $r=-R/L$ ni aniqlaymiz va mos bir jinsli tenglamaning yechimi $I=C_1e^{-R/L}$ ni hosil qilamiz. Bir jinsli bo‘lmagan tenglamaning xususiy yechimini aniqmas koeffitsiyentlar usulidan foydalanib topamiz:

$$R\left|\, i=A\cos\omega t+B\sin\omega t,\right.$$

$$L\left|\, \frac{di}{dt}=-A\omega\cos\omega t+B\omega\sin\omega t.\right.$$

$$(RA+L\omega B)\cos\omega t+(+L\omega A+RB)\sin\omega t=E\sin\psi\cos\omega t+E\cos\psi\sin\omega t.$$

$$RA+L\omega B=E\sin\psi \;\left|\, R \,\right|\, L\omega$$

$$-L\omega A+RB=E\cos\psi \;\left|-L\omega\,\right|\, R;$$

$$\left(R^2+L^2\omega^2\right)A=E\left(R\sin\psi-L\omega\cos\psi\right),\quad A=\frac{E\left(R\sin\psi-L\omega\cos\psi\right)}{Z^2}$$

$$\left(R^2+L^2\omega^2\right)B=E\left(L\omega\sin\psi+R\cos\psi\right),\quad B=\frac{E\left(L\omega\sin\psi+R\cos\psi\right)}{Z^2}$$

bu yerda $Z^2=R^2+L^2\omega^2$;

$$\bar{i}=\frac{E}{Z^2}\left[\left(R\sin\psi-L\omega\cos\psi\right)\cos\omega t+\left(L\omega\sin\psi+R\cos\psi\right)\sin\omega t\right]=\frac{E}{Z^2}\left[L\omega\left(\sin\omega t\sin\psi-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\cos\omega t\cos\psi\right)+R\left(\sin\omega t\cos\psi+\cos\omega t\sin\psi\right)\right]=\frac{E}{Z^2}\left[-L\omega\cos\left(\omega t+\psi\right)+R\sin\left(\omega t+\psi\right)\right];$$

Agar $R/Z=\cos\gamma,\;\; L\omega/Z=\sin\gamma$ desak,

$$\bar{i}=\frac{E}{Z}\sin\left(\omega t+\psi-\gamma\right).$$

Shunday qilib,

$$i = C_1 e^{-Rt/L} + \frac{E}{Z}\sin(\omega t + \psi - \gamma).$$

C_1 ni aniqlash uchun $i|_{t=0} = 0$ boshlang‘ich shartdan foydalanamiz:

$0 = C_1 + \frac{E}{Z}\sin(\psi - \gamma)$, bu Yerdan $C_1 = \frac{E}{Z}\sin(\gamma - \psi)$.

Uzil- kesil

$$i = \frac{E}{Z}\left[\sin(\psi - \gamma)e^{-Rt/L} + \sin(\omega t + \psi - \gamma)\right]$$

ga egamiz, bu yerda $tg\gamma = L\omega/R$.

Yuqoridagi hamma masalalar koeffitsiyentlari o‘zgarmas bo‘lgan differensial tenglamalarga olib keldi. Quyidagi fizikaviy masala bizni boshqa turdagi tenglamaga olib keldi.

5.7-masala. (Qalin devorli trubadagi zo‘riqishlar). Ichki radiusi r_0 va taShqi radiusi r_1 bo‘lgan qalin devorli trubaning ichki yoki tashqi o‘zgarmas p yuklama ta’sirida zo‘riqqan va egrilangan holatini tekshiramiz.

Trubani cheksiz uzun deb faraz qilamiz va qutb koordinatalarni kiritamiz. Trubaning sirti $rdrd\varphi$ va balandligi 1 bo‘lgan elementiga radial va urinma yo‘nalishlarida ta’sir yetadigan kuchlar simmetrikdir. Shuning uchun markazi truba o‘qida bo‘lgan konsentrik aylanalar buzilmaydi. Radial zo‘riqishni σ_r orqali, halqa bo‘yicha zo‘riqishni σ_φ orqali belgilaymiz. Ichki sirtda radial ta’sir etuvchi kuch $\sigma_r rd\varphi$ ga, tashqi sirtdagisi esa $(\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr)d\varphi$ ga teng. Radial kesimlar sirtida halqa bo‘yicha ta’sir etuvchi kuchlar $\sigma_\varphi d\varphi$ ga teng. $\sigma_\varphi dr$ urinma kuch radial tashkil etuvchi $\sigma_\varphi dr\sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right)$ ga va unga normal bo‘lgan $\sigma_\varphi dr\cos\left(\frac{d\varphi}{2}\right)$ komponentaga ajralishini ko‘ramiz. $d\varphi$ ning kichikligini e’tiborga olib, ularning birinchisini $\sigma_\varphi dr\left(\frac{d\varphi}{2}\right)$ ga ikkinchisini $\sigma_\varphi dr$ ga teng deb olish mumkin. Qarama-qarshi kesimlarga qo‘yilgan normal komponentalar o‘zaro muvozanatlashadi. Agar uchinchi tartibli cheksiz kichik kattaliklarni e’tiborga olmasak, radial yo‘nalishdagi muvozanatlik sharti

$$(\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr)d\varphi - \sigma_r rd\varphi - 2\sigma_\varphi \frac{drd\varphi}{2} = 0$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi.

Qavslarni ochib va $d\varphi \neq 0$ ga qisqartirib, hosil qilingan tenglamani

$$\sigma_r dr + r d\sigma_r - \sigma_\varphi dr = 0$$

yoki

$$\frac{d(r\sigma_r)}{dr} = \sigma_\varphi \qquad (5.20)$$

ko'rinishga keltiramiz. σ_r va σ_φ zo'riqishlarni mos ε_r va ε_φ cho'zilishlar orqali ifodalash mumkin. Agar μ ko'ndalang cho'zilish koeffitsiyentini bildirsa, u holda Guk qonunidan:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \mu\sigma_\varphi).$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{E}(\sigma_\varphi - \mu\sigma_r),$$

bu yerda E- elastiklik moduli. Bu tenglamalarni zo'riqishlarga nisbatan yechib, quyidaini hosil qilamiz:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\mu^2}(\mu\varepsilon_\varphi + \varepsilon_r), \\ \sigma_\varphi &= \frac{E}{1-\mu^2}(\mu\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi). \end{aligned}\right\} \qquad (5.21)$$

Radikal siljish u uchun

$$\varepsilon_r = \frac{d\varphi}{dr}, \qquad \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r}$$

shartlar bajariladi.

Demak,

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\mu^2}(\mu\varepsilon_\varphi + \varepsilon_r), \\ \sigma_\varphi &= \frac{E}{1-\mu^2}(\mu\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi). \end{aligned}\right\} \qquad (5.22)$$

Bu (5.22) ifodalarni zo'riqishlar uchun (5.20) tenglamaga qo'yib va umumiy $E/(1-\mu^2)$ ko'paytuvchiga qisqartirib, ushbuga ega bo'lamiz:

$$\frac{d}{dr}\left(\mu u + r\frac{du}{dr}\right) = \mu\frac{du}{dr} + \frac{u}{r}$$

yoki uzil-kesil:

$$r^2\frac{d^2u}{dr^2} + r\frac{du}{dr} - u = 0.$$

Eyler tenglamasini hosil qildik. U yerda $r=e^t$ deb va oldingi paragrafdagiga o‘xshash

$$r\frac{du}{dr}=\frac{du}{dt},\quad r^2\frac{d^2u}{dr^2}=\frac{d^2u}{dt^2}-\frac{du}{dt}$$

almashtirish qilgach, umumiy yechimi

$$u=C_1e^t+C_2e^{-t}\quad \text{yoki}\quad u=C_1r+\frac{C_2}{r}$$

bo‘lgan o‘zgarmas koeffitsiyentli

$$\frac{d^2u}{dt^2}-u=0$$

tenglamaga kelamiz.

Siljishning topilgan qiymatidan endi σ_r va σ_φ zo‘riqishlarni topish uchun foydalanish mumkin, buning uchun u va $\frac{du}{dr}$ ning ifodalarini (5.22) ga qo‘yamiz. U holda quyidagini hosil qilamiz:

$$\sigma_r=\frac{E}{1-\mu^2}\left(\mu C_1+\frac{\mu C_2}{r^2}+C_1-\frac{C_2}{r^2}\right)=A-\frac{B}{r^2}$$

$$\sigma_\varphi=\frac{E}{1-\mu^2}\left(\mu C_1-\frac{\mu C_2}{r^2}+C_1+\frac{C_2}{r^2}\right)=A+\frac{B}{r^2}$$

bu yerda $A=EC_1/(1-\mu)$, $B=EC_2/(1+\mu)$ deb belgilangan.

Endi dastlabki qo‘yilgan masalaga qaytsak bo‘ladi.

Doimiy p ichki yuklama ta’sirida bo‘lgan truba uchun $r=r_0$ ichki devorda $\sigma_r+p=0$ Shart, yuklamadan xoli bo‘lgan tashqi $r=r_1$ devorda $\sigma_r=0$ shart bajariliShi kerak. Bu shartlar chegaraviy bo‘lib, o‘zgarmaslarning $A=pr_0^2/\left(r_1^2-r_0^2\right)$, $B=r_0^2r_1^2/\left(r_1^2-r_0^2\right)$ qiymatlariga olib keladi, natijada zo‘riqish uchun

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r&=\frac{pr_0^2}{r_1^2-r_0^2}\left(1-\frac{r_1^2}{r_0^2}\right)<0,\\ \sigma_\varphi&=\frac{pr_0^2}{r_1^2-r_0^2}\left(1+\frac{r_1^2}{r_0^2}\right)>0\end{aligned}\right\}\qquad(5.23)$$

ni hosil qilamiz.

Xususan, ichki va tashqi devorlardagi kuchlanishlar uchun quyidagilarni topamiz: radikal kuchlanish kutganimizdek ushbuga teng:

$$\sigma_r\left(r_0\right)=-p,\ \sigma_r\left(r_1\right)=0,$$

urinma kuchlanish esa:

$$\sigma_\varphi(r_0) = p\frac{r_1^2 + r_0^2}{r_1^2 - r_0^2} > p, \quad \sigma_\varphi(r_1) = p\frac{2r_0^2}{r_1^2 - r_0^2}$$

Radial ko‘chish

$$u = \frac{pr_0^2}{E\left(r_1^2 - r_0^2\right)}\left\{(1-\mu)r + (1+\mu)\frac{r_1^2}{r}\right\} \tag{5.24}$$

ga, xususan, ichki devorda

$$u(r_0) = \frac{pr_0}{E}\left\{\mu + \frac{r_0^2 + r_1^2}{r_0^2 - r_1^2}\right\}$$

ga, tashqi devorda esa:

$$u(r_1) = \frac{2pr_0^2 u}{E\left(r_1^2 - r_0^2\right)}$$

ga teng.

Zo‘riqishlar va radial siljishning (5.23) va (5.24) larga o‘xshash ifodalarini boshqa holda trubaning ham hosil qilish oson. Bu hol uchun $r = r_0$ da $\sigma_r = 0$ va $r = r_1$ da $\sigma_r + p$ chegaraviy shartlarga egamiz, bu yerdan kerakli formulalar osongina topiladi. Buni o‘quvchining o‘ziga havola qilamiz.

(5.23) va (5.24) formulalarga o‘xshash formulalarni yupqa devorli truba uchun ham hosil qilish mumkin; buning uchun ularda $r_1 - r_0 = h$ va $r_1 + r_2 \approx 2r$ deb olish etarli. Bu almashtirishlarni ham mustaqil bajarish qiyin emas.

6. Differensial tenglamalar sistemasiga keltiriladigan masalalar

6.1-masala. (moddaning parchalaniShi). A modda P va Q moddalarga parchalanadi. Ularning har birining hosil bo‘lish tezligi A moddaning parchalanmagan miqdoriga proporsional . P va Q moddalarning miqdorlari x va y ni t vaqtga bog‘liq ravishda o‘zgarish qonunlarini toping. Bunda parchalanish protsessi boshlangandan 1 soatdan keyin x va y mos raviShda $a/8$ va $3a/8$ ga tengligi ma’lum, bu yerda a kattalik A moddaning dastlabki miqdori.

Yechilishi. Vaqtning t momentida A moddaning miqdori $a - x - y$ ga teng, binobarin, ushbu birinchi tartibli differensial tenglamalar sistemasiga egamiz:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=k_1\left(a-x-y\right),\\ \frac{dy}{dt}&=k_2\left(a-x-y\right).\end{aligned}\right\} \qquad (6.1)$$

Ikkinchi tenglamaning ikkala qismini birinchi tenglamaning mos qismlariga bo‘lamiz; u holda $\frac{dy}{dx}=\frac{k_2}{k_1}$, bu yerdan $y=k_2x/k_1+C$. So‘ngra $t=0$ da $x=y=0$ bo‘lgani uchun $C=0$ va shuning uchun $y=k_2x/k_1$.

Birinchi tenglamada y ni k_2x/k_1 bilan almashtirib,

$$\frac{dx}{dt}+\left(k_1+k_2\right)x=k_1a$$

ni topamiz. Birinchi tartibli bu chiziqli tenglamaning umumiy yechimi

$$x=\frac{k_1a}{k_1+k_2}+C_1e^{-(k_1+k_2)t}$$

Boshlang‘ich shartlardan ($t=0$ da $x=0$) foydalanib, $C_1=-k_1a/\left(k_1+k_2\right)$ ni topamiz, demak,

$$y=\frac{k_1a}{k_1+k_2}\left(1-e^{-(k_1+k_2)t}\right).$$

x ning bu ifodasini $y=k_2x/k_1$ tenglikka qo‘yib, quyidagini hosil qilamiz:

$$y=\frac{k_2a}{k_1+k_2}\left(1-e^{-(k_1+k_2)t}\right).$$

Vaqt birligi uchun soatni qabul qilamiz. $t=1$ da $x=a/8$ va $y=3a/8$ ekanligini bilgan holda k_1 va k_2 koeffitsiyentlarni aniqlash uchun quyidagi tenglamalar sistemasini tuzamiz:

$$\left.\begin{aligned}\frac{k_1}{k_1+k_2}\left(1-e^{-(k_1+k_2)}\right)&=\frac{1}{8},\\ \frac{k_2}{k_1+k_2}\left(1-e^{-(k_1+k_2)}\right)&=\frac{3}{8}.\end{aligned}\right\}$$

Ikkala tenglamaning mos qismlarini qo‘shib, $1-e^{-(k_1+k_2)}=1/2$ ni topamiz, bu yerdan $e^{-(k_1+k_2)}=2^{-1}$ va $k_1+k_2=\ln 2$.

Ikkinchi tenglamaning ikkala qismini birinchi tenglamaning mos qismlariga bo‘lib, $k_2=3k_1$ ni topamiz. Shunday qilib, $k_1=\frac{1}{4}\ln 2,\ \ k_2=\frac{3}{4}\ln 2,$ va izlanayotgan yechim quyidagi ko‘rinishda yoziladi:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{a}{4}\left(1-2^{-t}\right), \\ y &= \frac{3a}{4}\left(1-2^{-t}\right). \end{aligned}\right\}$$

6.2-masala. (Bakteriyalarning ko‘payishi) Ba’zi bir bakteriyalar o‘zlarining bor bo‘lgan miqdorlariga proporsional ravishda ko‘payadi, biroq xuddi shu paytning o‘zida ular zahar ishlab chiqarib, bu zahar ularni bakteriyalar miqdoriga proporsional ravishda qirib turadi. Zahar ishlab chiqarish tezligi bor bo‘lgan bakteriyalar miqdoriga proporsional . Bakteriyalar soni N dastlab eng katta M qiymatgacha o‘sishini, so‘ngra nolgacha kamayishini ko‘rsating; vaqtning t momentida u $N=\frac{M}{ch^2\left(kt/2\right)}$ formula bilan aniqlanishini ko‘rsating, bu yerda t vaqt $N=M$ bo‘lgan momentdan boshlab hisoblanadi.

Yechilishi. Zahar miqdorini x orqali belgilaymiz. Masala shartiga ko‘ra ushbu differensial tenglamalar sistemasini tuzamiz:

$$\frac{dN}{dt}=kN-k_1Nx,\quad \frac{dx}{dt}=k_2N. \tag{6.2}$$

Bu yerda $\frac{dN}{dt}$ va $\frac{dx}{dt}$ mos ravishda bakteriyalarning ko‘payish va zahar ishlab chiqarish tezliklari, k,k_1,k_2 va esa proporsionallik koeffitsiyentlari.

(6.2) ning birinchi tenglamasining ikkala qismini ikkinchi tenlamaning mos qismlariga bo‘lib, ushbu differensial tenlamani hosil qilamiz:

$$\frac{dN}{dx}=\frac{k}{k_2}-\frac{k_1}{k_2}x,$$

bu yerdan

$$N=\frac{k}{k_2}x-\frac{k_1}{2k_2}x^2+C_1.$$

$N=0$ da $x=0$ bo‘lgani uchun $C_1=0$ va bakteriyalar soni bilan zahar miqdori orasidagi bog‘lanish

$$N=ax-bx^2$$

Formula orqali aniqlanadi, bu yerda

$$\frac{k}{k_2}=a,\quad \frac{k_1}{2k_2}=b \tag{6.3}$$

deb belgilangan.

$y = N(x)$ funksiyaning grafigi koordinatalar boshi va $A\left(\frac{a}{b};0\right)$ nuqtadan o‘tuvchi, simmetriya o‘qi Oy o‘qqa parallel bo‘lgan va uchi $O_1\left(\frac{a}{2b};\frac{a^2}{4b}\right)$ nuqtada bo‘lgan paraboladan iborat. Demak,

$$N_{\max} = M = \frac{a^2}{4b} = \frac{k^2}{2k_1k_2} \qquad (6.4)$$

endi bakteriyalar miqdorini t vaqtga bog‘lanishini topamiz. Buning uchun (6.4) tenglikni

$$bx^2 - ax + N = 0$$

ko‘rinishga keltiramiz va uni x ga nisbatan yechamiz:

$$x = \frac{a}{2b} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4b^2} - \frac{N}{b}} \; .$$

(6.3) ning N orqali bu ifodasini (3) tenglamalarning birinchisiga qo‘yamiz; u holda

$$\frac{dN}{dt} = kN - \frac{k_1a}{2b}N \mp k_1N\sqrt{\frac{a^2}{4b^2} - \frac{N}{a}}. \qquad (6.5)$$

(6.3) va (6.4) munosabatlarni ko‘zdan kechirib, o‘ng tomondagi dastlabki ikkita son o‘zaro qisqarib ketishini ko‘ramiz, keyingi son esa $\mp kN\sqrt{1-N/M}$ ga teng. Shunig uchun (6.5) tenglama quyidagicha yoziladi:

$$\frac{dN}{dt} = \mp kN\sqrt{1-N/M}$$

bu esa o‘zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamadir. O‘zgaruvchilarni ajratsak, u quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$\frac{dN}{N\sqrt{1-N/M}} = \mp kdt. \qquad (6.6)$$

$I = \int \frac{dN}{N\sqrt{1-N/M}}$ integralni $\sqrt{1-N/M} = y$ o‘rniga qo‘yish bilan yechamiz, bu o‘rniga qo‘yishdan $N = M\left(1-y^2\right)$, $dN = -2Mydy$ shuning uchun

$$I = -2\int \frac{dy}{1-y^2} = \ln\frac{1-y}{1+y} + C_2.$$

Shunday qilib, (6.6) tenglamaning umumiy integrali quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\ln\frac{1-y}{1+y} + C_2 = \mp kt.$$

Ixtiyoriy C_2 o‘zgarmasni $t=0$ da $N=M$ boshlang‘ich shartdan topamiz: $y=0$, demak, $C_2=0$ binobarin, (6.6) tenglamaning xususiy integrali quyidagicha bo‘ladi:

$$\frac{1-y}{1+y}=e^{\mp kt},$$

bu yerdan

$$y=\frac{e^{\pm kt/2}-e^{\pm kt/2}}{e^{\pm kt/2}+e^{\pm kt/2}} \text{ yoki } y=\pm th\frac{kt}{2}.$$

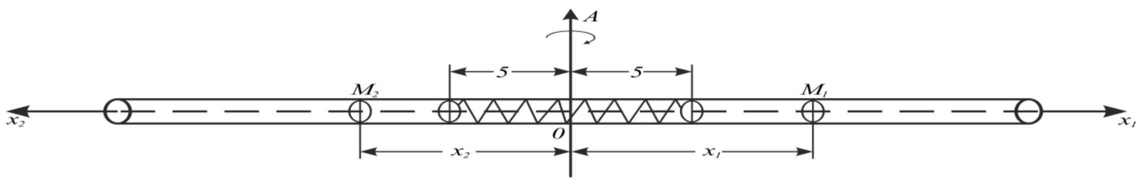
Avvalgi N va M kattaliklarga qaytib, ushbuni hosil qilamiz:

$$\sqrt{1-\frac{N}{M}}=\pm th\frac{kt}{2}.$$

Buning ikkala qismini kvadratga oshirib, N ga nisbatan yechamiz:

$$N=M\left(1-th^2\frac{kt}{2}\right) \text{ yoki } N=\frac{M}{ch^2\left(kt/2\right)}.$$

6.3-masala. (Sharchalarning naychadagi harakati.) Gorizontal naycha $2\ рад/сек$ burchak tezlik bilan vertikal o‘q atrofida aylanadi. Naychada massalari $m_1=300$ g va $m_2=200$ g bo‘lgan ikkita sharcha joylashgan. Ular uzunligi $l=10\ см$ bo‘lgan elastik prujina orqali bir-biri bilan bog‘langan bo‘lib, prujina cho‘zilmagan va sharchalar aylanish o‘qidan bir xilda uzoqlashgan (11-rasm).



11-rasm

Sharchalar ko‘rsatilgan holatda biror mexanizm yordamida ushlab turiladi. Boshlang‘ich momentda mexanizm ishlashdan to‘xtaydi va sharchalar harakatga keladi. Agar 24000 dina kuch prujinani $1\ см$ cho‘zishi mumkin bo‘lsa, har bir sharchaning naychaga nisbatan harakat qonunini toping.

Yechilishi. Og‘irroq sharchaning koordinatasini (naychaga nisbatan) x_1 orqali yengilroq sharchaning koordinatasini x_2 orqali belgilaymiz, bunda sanoqni aylanish o‘qidan boshlab hisoblaymiz va o‘ng tomonga yo‘nalishni musbat deb hisoblaymiz (11-rasm).

Agar masala shartiga muvofiq $F_1 = kx$ deb olsak (bu yerda F_1 prujinaning har qaysi sharchaga ta’sir kuchi, $x-$ prujinaning deformatsiyasi), u holda $k = 24000$ bo‘ladi.

Har qaysi sharcha nisbiy harakatining defferensial tenglamasini tuzamiz:

$$\left.\begin{aligned} m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} &= m_1\omega^2 x_1 - k\left(x_1 - x_2 - 10\right), \\ m_2\frac{d^2x_2}{dt^2} &= m_2\omega^2 x_2 + k\left(x_1 - x_2 - 10\right). \end{aligned}\right\} \qquad (6.7)$$

Hosil qilingan differensial tenglamalar sistemasi normal emas, biroq yuqorida qaralgan usullar yordamida yechilishi mumkin. Birinchi tenglamaning ikkala qismini ikkinchi tenglamaning mos qismlari bilan qo‘shsak:

$$m_1x_1'' + m_2x_2'' = \omega^2\left(m_1x_1 + m_2x_2\right).$$

$m_1x_1 + m_2x_2 = u$ deb belgilab, $u'' - \omega^2 u = 0$ tenglamani hosil qilamiz. Uning umumiy yechimi: $u = C_1 ch\omega t + C_2 sh\omega t$ yoki $3x_1 + 2x_2 = \overline{C_1}ch2t + \overline{C_2}sh2t$, bu yerda shartga ko‘ra $\omega = 2$ deb olingan va $C_1/100 = \overline{C_1}$ hamda $C_2/100 = \overline{C_2}$ deb belgilangan. Boshlang‘ich shartlar $t = 0$ da $x_1 = 5,\ x_1 = 0,\ \ x_2 = -5,\ \ x_2 = 0.$.

$3x_1' + 2x_2' = 2\left(\overline{C_1}sh2t + \overline{C_2}ch2t\right)$ ni hisoblaymiz va bu yerga hamda $3x_1 + 2x_2$ ifodaga ularning $t = 0$ dagi qiymatlarini qo‘yamiz, u holda $\overline{C_1} = 5,\ \overline{C_2} = 0$ va demak, $3x_1 + 2x_2 = 5\left(e^{2t} - e^{-2t}\right)/2$ yoki $3x_1 + 2x_2 = 5ch2t$.

Bu yerdan $x_2 = \frac{5}{2}ch2t - \frac{3}{2}x_1$ ni topamiz va uni quyidagicha o‘zgartirilgan sistemaning birinchi tenglamasiga qo‘yamiz:

$$\left.\begin{aligned} x_1'' &= -76x_1 + 80x_2 + 800, \\ x_2'' &= 120x_1 - 116x_2 - 1200. \end{aligned}\right\}$$

O‘rniga qo‘yish x_2 o‘zgaruvchini yo‘qotadi va faqat x_1 hamda x_1'' larga ega bo‘lgan tenglamaga olib keladi:

$$x_1'' = -76x_1 + 80\left(\frac{5}{2}ch2t - \frac{3}{2}x_1\right) + 800$$

yoki

$$x_1'' + 196x_1 = 200ch2t + 80.$$

Bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi: $X_1 = C_1\cos 14t + C_2\sin 14t.$ Bir jinsli bo‘lmagan tenglamaning xususiy yechimi $\bar{x}$ ni $\overline{x_1} = Ach2t + B$ ko‘rinishda izlaymiz.

Bu holda $\overline{x_1''} = 4Ach2t$ bo‘lgani uchun $\overline{x_1}$ va $\overline{x_1''}$ ni differensial tenglamaga qo‘yib, ushbu ayniyatni hosil qilamiz:

$$200Ach2t + 196B = 200ch2t + 8000,$$

bu yerdan $A = 1,\ B = 200/49$ ni topamiz: demak, $\overline{x_1} = ch2t + 200/49$ va x_1 umumiy yechim quyidagicha yoziladi:

$$x_1 = C_1\cos 14t + C_2\sin 14t + ch2t + \frac{200}{49}.$$

C_1 va C_2 larni topish qoldi. Boshlang‘ich shartlardan: $5 = C_1 + 1 + 200/49,$ bu yerdan $C_1 = -4/49;\ 14C_2 = 0,$ demak, $C_2 = 0.$

Massasi $m_1 = 300$ g bo‘lgan sharcha uchun uning harakat qonuni uzil-kesil

$$x_1 = ch2t - \frac{4}{49}\cos 14t + \frac{200}{49} \qquad (6.8)$$

bo‘ladi.

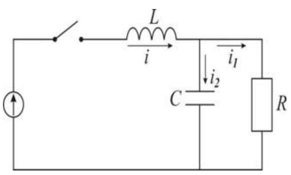
Massasi $m_1 = 200$ g bo‘lgan sharchaning harakat qonunini topish uchun (6.8) ni x_2 ning x_1 orqali ifodasiga qo‘yamiz, natijada:

$$x_2 = \frac{5}{2}ch2t - \frac{3}{2}\left(ch2t - \frac{4}{49}\cos 14t + \frac{200}{49}\right)$$

yoki

$$x_2 = ch2t + \frac{6}{49}\cos 14t - \frac{200}{49}. \qquad (6.9)$$

6.4-masala. (Zanjirni EYUKi o‘zgarmas bo‘lgan manbaga ulash). L induktivlik C sig‘im va R qarshilik 12-rasmda tasvirlangan sxema bo‘yicha ulangan. Zanjir o‘zgarmas EYUK E ga teng bo‘lgan manbaga ulanadi, bunda ulanishga qadar zanjirda tok va zaryad bo‘lmaydi. O‘zinduksiya g‘altagidan o‘tadigan i tokni t vaqtning funksiyasi kabi toping.



12-rasm

Yechilishi. O‘ng konturdagi toklarni i_1 va i_2 orqali belgilab, Kirxgof qonuni asosida masalaning tenglamalar sistemasini tuzamiz:

$$\left.\begin{aligned} &L\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}\int_0^t (i-i_1)\,d\tau = E, \\ &Ri_1-\frac{1}{C}\int_0^t (i-i_1)\,d\tau = 0, \end{aligned}\right\} \tag{6.10}$$

bu yerda $i-i_1=i_2$. Bu sistemadan i_1 ni yo‘qotamiz. Ikkala tenglamaning mos qismlarini qo‘Shamiz:

$$L\frac{di}{dt}+Ri_1=E. \tag{6.11}$$

(6.10) ning birinchi tenglamasining ikkala qismini t bo‘yicha differensiallasak,

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{1}{C}i-\frac{1}{C}i_1=0$$

ni hosil qilamiz, bu yerdan

$$i_1=CL\frac{d^2i}{dt^2}+i.$$

i_1 ni (6.11) tenglamaga qo‘ysak,

$$L\frac{di}{dt}+CLR\frac{d^2i}{dt^2}+Ri=E$$

yoki i_1 tok ishtirok etmagan

$$\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{1}{CR}\frac{di}{dt}++\frac{i}{CL}=\frac{E}{CLR} \tag{6.12}$$

tenglamani hosil qilamiz. (6.12) tenglamani yechamiz. Uning xarakteristik tenglamasi ildizlari $r_{1,2}=-\alpha\pm\beta$ ga teng, bu yerda quyidagicha belgilangan. $1/(2CR)=\alpha,\ \sqrt{\alpha^2-1/(CL)}=\beta$

Dastlab $\alpha^2>1/(CL)$ deb faraz qilamiz. U holda mos bir jinsli tenglamaning yechimi quyidagicha bo‘ladi:

$$z=e^{-\alpha t}\left(C_1ch\beta t+C_2sh\beta t\right).$$

Bir jinsli bo‘lmagan (6.12) tenglamaning xususiy yechimi $\bar{i}$ ni $\bar{i}=A$ ko‘rinishda izlaymiz. U holda $\bar{i}'=\bar{i}''=0$ va $A/(CL)=E/(CLR)$, bu yerdan $A=E/R$.

Demak, $\bar{i}=E/R$, (6.12) tenglamaning $\bar{i}+z$ ga teng bo‘lgan umumiy yechimi i ushbu ko‘rinishda bo‘ladi:

$$i=\frac{E}{R}+e^{-\alpha t}\left(C_1ch\beta t+C_2sh\beta t\right). \tag{6.13}$$

C_1 va C_2 ni boshlang‘ich shartlardan topamiz. $t=0$ da $i=0$ bo‘lgani uchun (6.13) dan: $\frac{E}{R}+C_1=0$ bu yerdan $C_1=-\frac{E}{R}$ va shuning uchun $i=\frac{E}{R}+e^{-\alpha t}\left(C_2 sh\beta t-\frac{E}{R}ch\beta t\right).$

$\frac{di}{dt}$ ni hisoblaymiz. Quyidagiga egamiz:

$$\frac{di}{dt}=e^{-\alpha t}\left[-\alpha\left(C_2 sh\beta t-\frac{E}{R}ch\beta t\right)+\beta\left(C_2 ch\beta t-\frac{E}{R}sh\beta t\right)\right].$$

Bu yerda $t=0$ deb, quyidagini hosil qilamiz:

$$\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0}=\frac{\alpha E}{R}+\beta C_2$$

Endi C_2 ni ham topsak bo‘ladi. $t=0$ da faqat $i=0$ emas, balki $i_1=0$ ham ekanligini nazarda tutsak, (6.11) tenglamadan $\frac{L\alpha E}{R}+L\beta C_2=E$ ni hosil qilamiz, bu Yerdan

$$C_2=\frac{E}{L\beta}\left(1-\frac{L\alpha}{R}\right)=\frac{E}{R\beta}\left(\frac{R}{L}-\alpha\right).$$

$\alpha^2>1/(CL)$ bo‘lgan hol uchun i xususiy yechim uzil-kesil quyidagicha yoziladi:

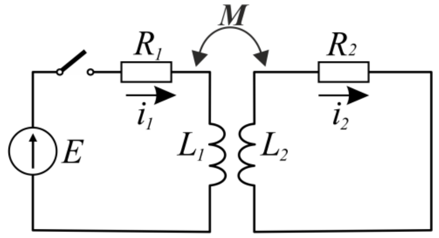
$$i=\frac{E}{R}\left\{1-e^{-\alpha t}\left[ch\beta t+\left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{E}{L\beta}\right)sh\beta t\right]\right\}.$$

Endi $\alpha^2>1/(CL)$ deb faraz qilamiz. U holda β mavhum son bo‘ladi va $\beta=j\omega_1\sqrt{-1}$ deymiz, bu yerda ω_1 haqiqiy son $\sqrt{1/(CL)-\alpha^2}$ ga teng.

Bu holda xususiy yechimni quyidagi ko‘rinishda hosil qilamiz:

$$i=\frac{E}{R}\left\{1-e^{-\alpha t}\left[\cos\omega_1 t+\left(\alpha/\omega_1-R/L\omega_1\right)\sin\omega_1 t\right]\right\}.$$

6.5-masala. (Induktiv bog‘langan ikkita konturdan iborat zanjirni ulash.) Elektr yurituvchi kuchi o‘zgarmas bo‘lgan manbaga 13-rasmda tasvirlangan induktiv bog‘langan ikkita konturdan iborat zanjir ulanadi. Agar zanjirga ulash nol boshlang‘ich shartlarda amalga oshirilsa, shu bilan birga $L_1L_2\neq M^2$ bo‘lsa, har ikkala konturdagi i_1 va i_2 toklarni t vaqtga bog‘liq ravishda toping



13-rasm

Yechilishi. Kirxgof qonuniga asosan masalaga doir differensial tenglamalar sistemasini tuzamiz:

$$\left.\begin{aligned} L_1\frac{di_1}{dt}+R_1i_1+M\frac{di_2}{dt}=E,\\ L_2\frac{di_2}{dt}+R_2i_2+M\frac{di_1}{dt}=0. \end{aligned}\right\} \qquad (6.14)$$

Bu Yerda $M-$ konturlarning o‘zaro induktivlik koeffitsiyenti; qolgan belgilashlar oldingi masaladagiga o‘xshash.

(6.14) tenglamalar sistemasidan $\frac{di_2}{dt}$ ni yo‘qotamiz. Buning uchun birinchi tenglamaning ikkala tomonini L_2 ga, ikkinchi tenglamanikini esa $-M$ ga ko‘paytiramiz va ularni qo‘shamiz. U holda

$$\left(L_1L_2-M^2\right)\frac{di_1}{dt}+L_2R_1i_1-MR_2i_2=L_2E$$

bu tenglamaning ikkala qismini L_1L_2 ga bo‘lib, $M^2/\left(L_1L_2\right)=k^2,\ R_1/L_1=2\alpha_1$, $R_2/L_2=2\alpha_2$ belgilashlar kiritsak, quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$\left(1-k^2\right)\frac{di_1}{dt}+2\alpha_1i_1-\frac{4M\alpha_1\alpha_2}{R_1}i_2=\frac{2\alpha_1E}{R_1}. \qquad (6.15)$$

Bu tenglamaning ikkala qismini differensiallaymiz, $\frac{di_2}{dt}$ ning ifodasi ni topib, uni (6.14) tenglamalarning birinchisiga qo‘yamiz:

$$\frac{di_2}{dt}=\frac{R_1\left(1-k^2\right)}{4M\alpha_1\alpha_2}\frac{d^2i_1}{dt^2}+\frac{R_1}{2M\alpha_2}\frac{di_1}{dt},$$

$$\frac{R_1\left(1-k^2\right)}{4\alpha_1\alpha_2}\frac{d^2i_1}{dt^2}+2\alpha_1i_1+\left(\frac{R_1}{2\alpha_2}+\frac{R_1}{2\alpha_1}\right)\frac{di_1}{dt}+R_1i_1=E.$$

Hosil qilingan tenglamaning ikkala qismini $\frac{d^2i}{dt^2}$ ning oldidagi koeffitsiyentga bo‘lamiz:

$$\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{2\left(\alpha_1+\alpha_2\right)}{1-k^2}\frac{di_1}{dt^2}+\frac{4\alpha_1\alpha_2}{1-k^2}i_1+\frac{4E\alpha_1\alpha_2}{R_1\left(1-k^2\right)}$$

yoki $\left(\alpha_1+\alpha_2\right)/\left(1-k^2\right)=\sigma$ deb belgilasak:

$$\frac{d^2i_1}{dt^2}+2\sigma\frac{di_1}{dt}+\frac{4\alpha_1\alpha_2}{1-k^2}i_1=\frac{4E\alpha_1\alpha_2}{R_1\left(1-k^2\right)}. \qquad (6.16)$$

Xarakteristik tenglamaning ildizlari $r_{1,2} = -\sigma \pm \beta$ bu yerda $\beta = \sqrt{\sigma^2 - \frac{4\alpha_1\alpha_2}{1-k^2}}$ ($\beta -$ haqiqiy son, chunki radikal ostidagi ifoda noldan katta). U holda mos bir jinsli differensial tenglamaning z umumiy yechimi quyidagicha bo‘ladi:

$$z = e^{-\alpha t}\left(C_1 ch\beta t + C_2 sh\beta t\right).$$

Bir jinsli bo‘lmagan tenglamaning $\overline{i_1}$ xususiy yechimini aniqmas koeffitsiyentlar usuli yordamida topamiz. $\overline{i_1} = A$ Bo‘lsin, bu yerda $A-$ topilishi kerak bo‘lgan koeffitsiyent.

$\frac{d\overline{i_1}}{dt} = 0$ va $\frac{d^2\overline{i_1}}{dt^2} = 0$ bo‘lganligi uchun (6.16) differensial tenglamadan A ga nisbatan algebraik tenglama kelib chiqadi:

$$\frac{4\alpha_1\alpha_2}{1-k^2}A = \frac{4E\alpha_1\alpha_2}{R_1\left(1-k^2\right)},$$

bu yerdan $A = E/R_1$.

Shunday qilib, $\overline{i_1} = E/R_1$. demak (6.16) tenglamaning umumiy yechimi quyidagi ko‘riniShda bo‘ladi:

$$\overline{i_1} = \frac{E}{R_1} + e^{-\alpha t}\left(C_1 ch\beta t + C_2 sh\beta t\right). \qquad (6.17)$$

Ixtiyoriy o‘zgarmaslarni aniqlash uchun ushbu boshlang‘ich shartlardan foydalanamiz: $t_1 = 0$ da $i_1 = 0$ va $i_2 = 0$.

Bularning birinchisini (6.17) yechimga qo‘ysak, darhol $C_1 = -E/R_1$. ga ega bo‘lamiz. Shuning uchun (6.17) yechim quyidagicha yoziladi:

$$i_1 = \frac{E}{R_1} + e^{-\alpha t}\left(C_1 sh\beta t - \frac{E}{R_1}C_2 ch\beta t\right). \qquad (6.18)$$

Hosila olamiz:

$$\frac{di_1}{dt} = e^{-\sigma t}\left[-\sigma\left(C_2 sh\beta t - \frac{E}{R_1}ch\beta t\right) + \beta\left(C_2 ch\beta t - \frac{E}{R_1}sh\beta t\right)\right]$$

va uning qiymatini $t = 0$ da hisoblaymiz:

$$\left.\frac{di_1}{dt}\right|_{t=0} = \sigma\frac{E}{R_1} + C_2\beta.$$

Hosilaning topilgan qiymatini va boshlang‘ich shartlardagi $i_1 = i_2$ qiymatlarni (6.15) tenglamaga qo‘yib, C_2 ni topish uchun tenglama hosil qilamiz:

$$\left(1-k^2\right)\left(\frac{\sigma E}{R_1}+C_2\beta\right)=\frac{2\alpha_1 E}{R_1}.$$

$\sigma=(\alpha_1+\alpha_2)/\left(1-k^2\right)$ ekanligini nazarda tutib, keyingi tenglamani

$$\frac{(\alpha_1+\alpha_2)E}{R_1}+C_2\beta\left(1-k^2\right)=\frac{2\alpha_1 E}{R_1}$$

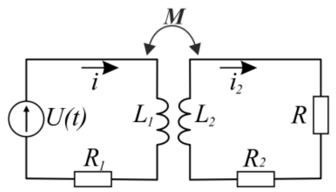
ko‘rinishga keltiramiz, bu yerdan

$$C_2=\frac{(\alpha_1-\alpha_2)E}{\beta\left(1-k^2\right)R_1}.$$

i_1 xususiy yechimni uzil-kesil quyidagicha yoziladi:

$$i_1=\frac{E}{R_1}\left\{1+e^{-\sigma t}\left[\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\beta\left(1-k^2\right)}sh\beta t-ch\beta t\right]\right\}. \qquad (6.19)$$

i_2 xususiy yechimni (6.15) munosabatdan topish mumkin. Buning uchun u yerda i_1 va $\frac{di_1}{dt}$ ni yuqorida i_1 ni t ning funksiyasi sifatida topilgan ifodasiga va bu funksiyaning t bo‘yicha hosilasiga almashtirish kerak. Buni mustaqil bajarishni o‘quvchining o‘ziga havola qilamiz.



14-rasm

6.6-masala. (Yuklama ulangan o‘zgaruvchan tok zanjiridagi transformator.) Yuklama ulangan tok zanjiriga ulangan transformatorning ikkala konturidagi toklarni toping.

Yechilishi. Ma’lumki, transformator induktivlik va ichki qarshilikka ega bo‘lgan va induktiv bog‘langan ikkita konturdan iborat. Shuning uchun 13-rasmdagi sxemadan faqat ikkinchi konturida R yuklamasi bo‘lishi bilan farq qiladigan sxemaga ega bo‘lamiz (14-rasm). Bundan tashqari, tok manbanining elektr yurituvchi kuchi E o‘zgarmas deb emas, balki $U(t)=u\cos(\omega t+\varphi_0)$ deb olinadi, bu yerda $u-$ amplituda, $\omega-$ chastota va φ_0- manba kuchlanishining boshlang‘ich fazasi.

Kirxgof qonunlariga binoan mazkur holda masalaga doir differensial tenglamalar sistemasi (6.14) ga o‘xshash ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\left.\begin{aligned} L_1\frac{di_1}{dt}+R_1 i_1+M\frac{di_2}{dt}&=U(t),\\ L_2\frac{di_2}{dt}+\left(R_2+R\right)i_2+M\frac{di_1}{dt}&=0,\end{aligned}\right\} \qquad (6.20)$$

bu yerda $U(t)-$ manbaning elektr yurituvchi kuchi. Soddalik uchun boshlang‘ich faza φ_0 ni nolga teng deb olamiz va kuchlanishni $U(t)=u\cos\omega t$ ko‘rinishda yozamiz.

(6.20) ni noma’lumlari $\frac{di_1}{dt}$, $\frac{di_2}{dt}$ bo‘lgan ikkita algebraik tenglamadan iborat sistema deb qarab va ularni odatdagicha yechib, koeffitsiyentlarni o‘zgarmas bo‘lgan ikkita chiziqli tenglama sistemasiga kelamiz:

$$\left.\begin{aligned} \frac{di_1}{dt} &= -\frac{R_1L_2}{D}i_1+\frac{M\left(R_2+R\right)}{D}i_2+\frac{L_2U}{D}, \\ \frac{di_2}{dt} &= \frac{R_1M}{D}i_1-\frac{L_1\left(R_2+R\right)}{D}i_2-\frac{MU}{D}, \end{aligned}\right\} \qquad (6.21)$$

bu yerda $D=L_1L_2-M^2$ – sistemaning determinanti.

(6.21) sistema bir jinsli emas va uni yechish uchun dastlab mos bir jinsli

$$\left.\begin{aligned} \frac{di_1}{dt} &= -\frac{R_1L_2}{D}i_1+\frac{M\overline{R}}{D}i_2, \\ \frac{di_2}{dt} &= \frac{R_1M}{D}i_1-\frac{L_1\overline{R}}{D}i_2 \end{aligned}\right\} \qquad (6.22)$$

sistema yechish kerak, bu yerda $R_2+R=\overline{R}$ deb belgiladik. Sistemaning xarakteristik tenglamasi quyidagi ko‘rinishga ega:

$$\begin{vmatrix} -R_1L_2-r & M\overline{R} \\ R_1M & -L_1\overline{R}-r \end{vmatrix}=0,$$

chunki umumiy maxraj D ni yozmasa bo‘ladi. Bu yerdan

$$r^2+\left(R_1L_2+\overline{R}L_1\right)r+R_1\overline{R}D=0$$

ni hosil qilamiz, shuning uchun xarakteristik tenglamaning ildizlari

$$r_{1,2}=-\frac{R_1L_2++\overline{R}L_1}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{R_1L_2+\overline{R}L_1}{2}\right)^2+R_1\overline{R}D} \qquad (6.23)$$

bo‘ladi.

(6.23) dan ko‘riniShicha, $D>0$ bo‘lganda xarakteristik tenglama yo ikkita manfiy haqiqiy ildizga, yoki haqiqiy qismlari manfiy bo‘lgan ikkita kompleks ildizga ega bo‘ladi. Bu holda (6.22) bir jinsli sistemaning i_1 tutashuv elektr tokini aniqlovchi umumiy yechimi t o‘sishi bilan elektrotok tebranish xarakteriga yoki nodavriylik xarakteriga ega bo‘lishidan qat’i nazar tez kamayadi. Barqaror jaryonni o‘rganishda yechimning bu qismini e’tiborga olmasa ham bo‘ladi, shuning uchun umumiy holda uni yozmaymiz.

Qaralayotgan sxemaning ideal transformator deb ataluvchi xususiy holi alohida qiziqish uyg‘otadi. Ideal transformator o‘zining ichki R_1 va R_2 qarshiliklari tashqi yuklama R va taqriban nolga teng bo‘lgan D ning: qiymatiga nisbatan amalda nolga teng deb hisoblash mumkin, bu yerdan ushbu taqribiy tenglik kelib chiqadi: $M \approx \sqrt{L_1 L_2}$. Bunday farazlarda $\overline{R} = R$ deb hisoblash mumkin va (6.23) dan $r_1 \approx 0,\ r_1 \approx -RL_1$ kelib chiqadi, demak, bir jinsli sistemaning umumiy yechimini ideal transformator bo‘lgan hol uchun ushbu ko‘rinishda yozish mumkin:

$$I_1 = C_1^{(1)} + C_2^{(1)} e^{-RL_1 t}, \quad I_2 = C_1^{(2)} + C_2^{(2)} e^{-RL_1 t}.$$

Ikkinchi qo‘shiluvchilar t o‘sishi bilan tez kamayadi; barqaror jarayon birinchi qo‘shiluvchilar va bir jinsli bo‘lmagan (6.21) sistemaning xususiy yechimi bilan birgalikda xarakterlanadi.

$U(t) = u\cos\omega t$ bo‘lgani uchun bu xususiy yechimlarni

$$\left.\begin{aligned} \overline{i_1} &= A\cos\omega t + B\sin\omega t, \\ \overline{i_2} &= P\cos\omega t + Q\sin\omega t \end{aligned}\right\} \qquad (6.24)$$

ko‘rinishda izlaymiz. (6.24) ni (6.21) ga qo‘yib topamiz:

$$D\left(-A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t\right) = -R_1 L_2\left(A\cos\omega t + B\sin\omega t\right) +$$

$$+ M\overline{R}\left(P\cos\omega t + Q\sin\omega t\right) + L_2 u\cos\omega t,$$

$$D\left(-P\omega\sin\omega t + Q\omega\cos\omega t\right) = R_1 M\left(A\cos\omega t + B\sin\omega t\right) -$$

$$-L_1\overline{R}\left(P\cos\omega t + Q\sin\omega t\right) - Mu\cos\omega t.$$

Yozilgan tenglamalarning chap va o‘ng tomonlaridagi $\cos\omega t$ va $\sin\omega t$ oldidagi koeffitsiyentlarni o‘zaro tenglab, to‘rtta A, B, P, Q noma’lumli to‘rtta chiziqli tenglamadan iborat ushbu sistemaga kelamiz:

$$\left.\begin{aligned} BD\omega &= -AR_1L_2 + PM\overline{R} + L_2 u, \\ -AD\omega &= -BR_1L_2 + QM\overline{R}, \\ QD\omega &= AR_1M + PL_1\overline{R} - Mu, \\ -PD\omega &= BR_1M + QL_1\overline{R}. \end{aligned}\right\}$$

Bu sistemaning yechimi (6.24) xususiy yechimning ifodasini beradi. Bu umumiy holga to‘xtalib o‘tirmasdan, ya’na ideal transformator bo‘lgan xususiy holga qaytamiz. Uning uchun ushbu tenglamani hosil qilamiz:

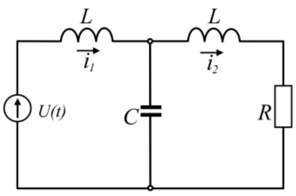
$$PR\sqrt{L_1L_2} + L_2 u = 0, \ \ QR\sqrt{L_1L_2} = 0,$$

bu yerdan

$$Q = 0 \text{ va } P = -\sqrt{L_2/L_1}\,u/R.$$

P ning topilgan qiymati yuklama zanjirdagi tok amplitudasini aniqlaydi. U holda yuklamadagi kuchlanish pasayishining amplitudasi $u_2 = -\sqrt{L_2/L_1}\,u$ ga teng bo‘lishini qayd qilamiz. Shunday qilib, kattalik yuklama zanjiridagi va manba zanjiridagi kuchlanishlar nisbatini ifodalaydi. Uni transformatsiya koeffitsiyenti deyiladi. Biroq elektrotexnikada transformatsiya koeffitsiyenti ko‘pincha boshqacha ko‘rinishda yoziladi. Silindrik cho‘lg‘amli g‘altakning induktivligi cho‘lg‘amlar soni kvadratiga proporsional bo‘lgani uchun transformatsiya koeffitsiyenti transformator o‘ramining birlamchi va ikkilamchi cho‘lg‘amlari soni nisbatiga teng bo‘lar ekan.

6.**7-masala.** (Past chastotalar filtri.) 15-rasmda elektr sxemasi keltirilgan: o‘zaro teng 2 ta L induktivlik, C sig‘im va R yuklama qarshiligi $U(t) = u\cos\omega t$ qonun bo‘yicha o‘zgaradigan kuchlanish manbaiga ulangan. Yuklamadagi kuchlanish pasayishi tebranishlarining xarakterini aniqlang. Bunda barqaror jarayon bilan cheklaning.



15-rasm

Yechilishi. Chap va o‘ng konturlardagi toklarni mos raviShda i_1 va i_2 orqali belgilab, sig‘im orqali o‘tuvchi tok $i_2 - i_1$ ga teng ekanligini topamiz. Kirxgof qonuniga ko‘ra i_1 va i_2 larga nisbatan ushbu differensial tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\left.\begin{aligned} &L\frac{di_1}{dt} + L\frac{di_2}{dt} + Ri_1 = U(t), \\ &L\frac{di_2}{dt} + Ri_2 + \frac{1}{C}\int_0^t (i_2 - i_1)\,d\tau = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (6.25)$$

(6.25) ning ikkinchi tenglamasini t bo‘yicha differensiallab, quyidagini hosil qilamiz:

$$L\frac{d^2 i_2}{dt^2} + R\frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C}(i_2 - i_1) = 0,$$

bu yerdan

$$i_1 = LC\frac{d^2 i_2}{dt^2} + RC\frac{di_2}{dt} + i_2.$$

i_1 ning ifodasini t bo‘yicha yana differensiallash va (6.25) ning birinchi tenglamasiga qo‘yish mumkin, u holda tenglama

$$L^2C\frac{d^3i_2}{dt^3}+LRC\frac{d^2i_2}{dt^2}+2L\frac{di_2}{dt}+Ri_2=U(t) \qquad (6.26)$$

ko‘rinishni oladi.

(6.26) ga mos keluvchi bir jinsli tenglama barcha koeffitsiyentlari musbat bo‘lgan

$$L^2Cr^3+LRCr^2+2Lr+R=0$$

kub tenglamadan iborat bo‘ladi.

Bunday tenglama musbat haqiqiy ildizga ega bo‘lmasligi bu yerdan ko‘rinadi, chunki $r>0$ da chap qismdagi barcha qo‘shiluvchilar musbat va ularning yig‘indisi nolga teng bo‘la olmaydi. Bundan tashqari, bunday tenglamaning mavhum ildizlarining haqiqiy qismlari manfiy bo‘lishini isbot qilish mumkin.

Shunday qilib, (6.26) ga mos bir jinsli tenglama umumiy yechimining barcha qo‘shiluvchilari manfiy ko‘rsatkichli eksponentlarga ega va shu sababli t o‘sishi bilan tez kamayadi. Bizni qiziqtiradigan barqaror jarayon shuning uchun bir jinsli bo‘lmagan, (6.26) tenglamaning xususiy yechimi bilan to‘la aniqlanadi, uni, $U=u\cos\omega t$ bo‘lgani uchun

$$i_2=A\cos\omega t+B\sin\omega t$$

ko‘rinishda izlaymiz.

Bu ifodani differensiallb va i_2 ni hamda uning hosilasini (6.26) ga qo‘yib, ushbu tenglamalar sistemasiga kelamiz:

$$\left.\begin{aligned}A\left(-2L\omega+L^2C\omega^3\right)+B\left(R-LRC\omega^2\right)=0,\\ A\left(R-LRC\omega^2\right)+B\left(2L\omega-L^2C\omega^3\right)=u\end{aligned}\right\}$$

yoki

$$-2L\varphi+L^2C\omega^3=\alpha,\quad R-LRC\omega^2=\beta$$

belgilashlar kiritsak:

$$\left.\begin{aligned}\alpha A+\beta B=0,\\ \beta A-\alpha B=a.\end{aligned}\right\}$$

Bu sistemadan topamiz:

$$A=\beta u\big/\left(\alpha^2+\beta^2\right),\ \ B=-\alpha u\big/\left(\alpha^2+\beta^2\right).$$

$\overline{i_2}$ yechimning amplitudasi

$|\upsilon|=\sqrt{A^2+B^2}=|u|\big/\left(\alpha^2+\beta^2\right)$ munosabat orqali ifodalanadi, yoki va ularning qiymatini e’tiborga olsak:

$$|\upsilon| = \frac{|u|}{\sqrt{L^2\omega^2\left(LC\omega^2-2\right)^2+R^2\left(1-LC\omega^2\right)^2}}. \qquad (6.27)$$

Yuklamadagi kuchlanish pasayishini (6.27) dan tenglikning ikkala qismini R ga ko‘paytirib topish mumkin, chunki $U_2 = Ri_2$.

Tebranishlar chastotasi ω ning yuklamadagi kuchlanish amlitudasining kiriSh yuklamadagi kuchlanish amplitudasiga nisbatan ta’sirini qarab chiqamiz. ω chastotalar kichik bo‘lganda ω^2 va undan yuqori tartibli kattaliklarni e’tiborga olmasa ham bo‘ladi. U holda (6.27) ning mahrajida ω bo‘lmagan hadlargina qoladi, demak, radikal ostidagi ifoda R^2 ga teng bo‘ladi. Demak, $|\upsilon| \approx |u|/R$ va talab etilayotgan nisbat $|\upsilon|\cdot R/|u| \approx 1$.

Bu past chastotali tebranishlar berilgan sxemadan amplitudani amalda o‘zgartirmasdan o‘tishini bildiradi. Aksincha, katta ω chastotalar uchun (6.27) da ildiz ostidagi ifodaning bosh hadi ω ning yuqori darajali hadi bo‘ladi. Shu sababli bunday chastotalar uchun $|\upsilon| \approx |u|/\left(L^2C\omega^3\right)$, u holda ya’ni yuqori chastotali tebranishlar berilgan sxemadan amalda o‘tmaydi, u past chastotalarni o‘tkazadi va yuqori chastotalarni deyarli o‘tkazmaydi. Xuddi ana shu sababga ko‘ra bunday sxema past chastotali filtr deyiladi.

Adabiyotlar

1. Понтрягин Л. С. Обьекновенные дифференциальные уравнения. -М.: Наука, 1959.
2. Еругин А. П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальних уравнений. -М.: Наука и техника, 1970.
3. Гудышенко Ф. С. , Павмок И. А. , Волькова В. А. Сборник задач по дифференциальным уровнениям. -Киев: Высшая школа, 1972.
4. Киселев А. И. , Краснов М. А. , Макаренко Т. И. Сборник задач по обьекновенным дифференциальным уравнениям. -Киев: Высшая школа, 1966.
5. Ляшкогиф И. И. Дифференциальные уравнения. -Киев: Высшая школа, 1981.
6. Матвеев А. М. Методы интегрировация обьекновенных дифференциальных уровненей. -Минск: Высшая школа. 1974.
7. Матвеев А. М. Сборник задач и уравнении по обьекновенным диффер-енциальным уравнениям. -Минск: Высшая школа, 1970.
8. Филлипов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уровнениям. -М: Наука, 1979.
9. Qori Niyoziy T. N. Tanlangan asarlar 4-tom Differensial tenglamalar. -T. : Fan, 1968.
10. Salohitdinov M. S. Nasriddinov G‘. N. Oddiy differensial tenglamalar. -T. : Fan, 1994.
11. Differensial tenglamalar. O‘qituvchi nashriyoti, rus tilidan tarjima, 1978.
12. Begmatov A. Differensial tenglamalar haqida umumiy tushunchalar - Samarqand: 2011.
13. Turg‘unboyev R., Ismoilov Sh., Abdullayev O. Differensial tenglamalar kursidan misol va masalalar to‘plami, o‘quv qo‘l-lanma - Toshkent: 2007.

MUNDARIJA

Muharrir: Sidikova K.A.