N.X. Kasimov R.N. Dadajanov
F.N. Ibragimov

DISKRET MATEMATIKA VA MATEMATIK MANTIQ ASOSLARI

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

Kasimov Nadimulla Xabibullayevich
Dadajanov Ro‘zimat Normatovich
Ibragimov Farhod Nurmuhamadjonovich

DISKRET MATEMATIKA VA MATEMATIK MANTIQ ASOSLARI

(o‘quv qo‘llanma)

5130100 – “Matematika” bakalavriyat ta’lim yo‘nalishi

“Donishmand ziyosi” нашриёти
Тошкент – 2020

UO‘K 512(075.8)
KBK 22.1
K 24

Kasimov, N., Dadajanov, R., Ibragimov F.,
Diskret matematika va matematik mantiq [Matn] / Kasimov Nadimulla, Dadajanov Ro‘zimat, Ibragimov Farhod. – Toshkent: "Donishmand ziyosi" МЧЖ, 2020. – 176 b.

Ushbu o‘quv qo‘llanma “Matematika”, “Informatika va axborot texnologiyalari”, “Axborot tizimlarining matematik va dasturiy ta’minoti”, “Axborot xavfsizligi” va “Amaliy matematika va informatika” bakalavriyat ta’lim yo‘nalishi bo‘yicha tahsil olayotgan talabalar uchun mo‘ljallangan bo‘lib, “*Diskret matematika va matematik mantiq*” fanining asosiy elementlariga doir mavzularni o‘z ichiga oladi. Qo‘llanmadan nazariy bilimlarni mustahkamlash uchun amaliy mashg‘ulotlar va mustaqil ta’lim uchun nazorat va test savollari hamda misollar joy olgan.

Taqrizchilar:
G‘anixo‘jayev Rasul Nabiyevich – *fizika-matematika fanlari doktori, professor;*
Egamberdiyev Baxtiyar – *fizika-matematika fanlari nomzodi.*

Mas’ul muharrir:
Eshqobilov Yusup Xolboyevich – fizika-matematika fanlari doktori.

ISBN 978-9943-6865-1-9

Kirish

"Mantiq" fani alohida fan sifatida eramizdan avval IV asrda vujudga kelgan. Uning asoschisi yunon faylasufi Aristoteldir (384–322). Aristotel mantiqiy ta'limotlarning ba'zi tarqoq bo'laklarini bir sistemaga keltirgan bo'lib, u hozirgacha formal mantiq sifatida saqlanib kelmoqda.

Matematik mantiq (shuningdek, *simvolik mantiq* deb ham ataladi) – matematik usullar bilan rivojlantirilayotgan mantiqdir. "Matematik mantiq" fani barcha fanlarning asosi bo'lishiga qaramay, uni alohida fundamental fan sifatida chuqur o'rganish XIX asrda noevklid geometriyaning paydo bo'lishidan boshlandi.

O'tgan asrning o'rtalaridan boshlab "Matematika" fanini o'qitishda mantiq usullaridan keng foydalanib kelinmoqda. Masalan, matematik analizda limitga ega bo'lmagan ketma-ketliklarning, tekis uzluksiz bo'lmagan funksiyalarning ta'riflarini berishda predikatlar algebrasi usullaridan (ta'rif orqali berilgan jumlalarning inkorini topish usuli) foydalanib, yuqorida keltirilgan tushunchalarning aniq ta'riflari beriladi.

Ushbu qo'llanmada mantiqni o'rganish uchun matematik usullardan foydalanilgan. Albatta, matematika yordamida mantiqni o'rganishda mantiqning o'ziga murojaat qilinadi. Bunda, *o'rganilayotgan mantiq* va buning uchun *foydalanilayotgan mantiqlar* aniq ajratib olinadi. Bu yo'l bilan ehtimoliy paradokslar chetlab o'tiladi.

O'quvchiga havola qilinayotgan ushbu qo'llanma mualliflar tomonidan uzoq yillar davomida O'zMUning Matematika fakultetida "Diskret matematika va matematik mantiq" fani bo'yicha o'qilgan ma'ruzalari asosida yozilgan bo'lib, u O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi tomonidan tasdiqlangan davlat standartlariga mos keladi.

Ushbu qo‘llanmada to‘plamlar nazariyasi, mulohazalar algebrasi, predikatlar algebrasi, diskret matematika elementlari, shuningdek, mulohazalar algebrasi uchun aksiomatik nazariyalar keltirilgan.

Xususan, qo‘llanmada mulohazalar algebrasi uchun qurilgan aksiomatik nazariya mavjud adabiyotlarda keltirilgan aksiomatik nazariyalardan qisman farq qiladi. Biz keltirgan aksiomatik nazariya uchun ham Gyodelning to‘liqlik haqidagi teoremasi o‘z kuchida qoladi: mulohazalar algebrasining tavtologiyalar to‘plami bilan uning teoremalari to‘plami ustma-ust tushadi.

Ushbu qo‘llanma universitetlar hamda pedagogik oliy o‘quv yurtlari talabalari uchun o‘quv qo‘llanma sifatida tavsiya etiladi.

I BOB. DASTLABKI TUSHUNCHALAR

1- §. To‘plam. To‘plamlar ustıda amallar

“To‘plam” tushunchasi

To‘plam matematikaning boshlang‘ich tushunchalaridan biri. Bu tushunchani o‘zidan soddaroq tushunchalar orqali (bunday tushunchalar yo‘q) ta’riflab bo‘lmaydi. Ayni paytda, “to‘plam” tushunchasini misollar orqali anglash qiyin emas. Masalan, kutubxonadagi kitoblar to‘plami, ushbu $x^3-6x^2+11x-6=0$ tenglamaning ildizlari to‘plami, bitta nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar to‘plami.

Demak, to‘plam deganda, biror umumiy xususiyatga ega bo‘lgan narsalar (predmetlar) guruhi, majmuasi, yig‘ilmasi tushiniladi.

To‘plamni tashkil etgan narsalar uning elementlari deyiladi.

Odatda, to‘plamlar bosh harflar (malasan, $A, B, C, D, ...$) bilan, uning elementlari esa kichik harflar (masalan, $a, b, c, d, ...$) bilan belgilanadi.

Biror to‘plamni olaylik. Uni A bilan belgilaylik. Agar a narsa (predmet) A to‘plamning elementi bo‘lsa, $a \in A$, b narsa (predmet) B to‘plamning elementi bo‘lmasa, $b \notin B$ B kabi belgilanadi va “ a element A to‘plamga tegishli “, “b element B to‘plamga tegishli emas” deb o‘qiladi. Misol tariqasida barcha natural sonlardan tashkil topgan to‘plamni olaylik. Odatda, bu to‘plam N harfi bilan belgilanadi va $N=\{1, 2, 3, ..., n,...\}$ kabi yoziladi. Ravshanki, $5 \in N$, lekin $7{,}05 \notin N$ bo‘ladi.

To‘plamlar ikki xil – chekli hamda cheksiz to‘plamlar bo‘ladi.

*Agar to‘plamni tashkil etgan elementlar soni chekli son bo‘lsa, u **chekli to‘plam** deyiladi.*

Chekli bo'lmagan to'plamlar ***cheksiz to'plamlar*** *deb qaraladi.*

Masalan, $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ tenglamaning yechimlar to'plami

$$E = \left\{x@^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0\right\}$$

chekli to'plam bo'ladi. Haqiqatan ham,

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0, \text{ ya'ni } (x-1)(x-2)(x-3) = 0$$

tenglamani yechib, $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$ bo'lishini topamiz. Demak, $N = \{1, 2, 3\}$ bo'lib, u chekli to'plamdir. Natural sonlar to'plami N cheksiz to'plamga misol bo'ladi.

Aytaylik, E to'plam ushbu

$$x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0 \qquad (1)$$

tenglamaning haqiqiy yechimlaridan iborat to'plam bo'lsin:

$$E = \left\{x@^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0\right\}.$$

E to'plamning elementlarini topish maqsadida

$$x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$$

tenglamani yechamiz.

Ravshanki,

$$x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = \left(x^2 + x + 1\right)\left(x^2 + 1\right)$$

Demak,

$$\left(x^2 + x + 1\right)\left(x^2 + 1\right) = 0$$

bo'ladi. Keyingi tenglikdan, $x^2 + x + 1 = 0, x^2 + 1 = 0$ bo'lishi kelib chiqadi. Bu kvadrat tenglamalarning diskriminatlari manfiy bo'lganligi sababli, ular haqiqiy yechimlarga ega emas.

Binobarin, berilgan (1) tenglama haqiqiy yechimlarga ega emas. Demak, E to'plamning elementlari yo'q ekan. Bunday vaziyat "bo'sh to'plam" tushunchasi kiritilishini taqozo etadi.

Birorta ham elementga ega bo'lmagan har qanday to'plam ***bo'sh to'plam*** *deyiladi va u $\varnothing$ kabi belgilanadi.*

Yuqorida keltirilgan E bo'sh to'plam bo'ladi: $E = \varnothing$.

Ikkita A va B to'plamlar berilgan bo'lsin.

Agar A to'plamning har bir elementi B to'plamning ham elementi bo'lsa, A to'plam B ning ***qismi (qismiy to'plami; to'plam osti)*** *deyiladi va $A \subset B$ kabi belgilanadi.*

Misollar

1) $A = \{0, \pi, 2\pi\}$, $B = \{x | \sin x = 0\}$ bo'lsin. Agar B to'plamning elementlari $\sin x = 0$ tenglamaning yechimlari, ya'ni $x = n\pi$, $n \in Z$ ko'rinishdagi sonlardan iborat ekanligini e'tiborga olsak, $E = \varnothing$ ekanini topamiz.

2) $A = \{0, 4, 6, 8, ..., 2n...\}$, $B = N = \{1, 2, 3, ...n,...\}$ bo'lsin.

Ravshanki, $A \subset B$ bo'ladi.

<u>*Eslatma*</u>. Bo'sh to'plam $\varnothing$ har qanday A to'plamning qismi deb qaraladi: $\varnothing \subset A$. Shuningdek, $A \subset A$ bo'ladi .

Ravshanki, A, B, C to'lamlar berilgan holda $A \subset B$, $B \subset C$ bo'lsa, undan $A \subset C$ bo'lishi kelib chiqadi.

Biror A to'plam berilgan bo'lsin. Bu to'plamning barcha qism to'plamlaridan tashkil topgan to'plamni $P(A)$ kabi belgilaymiz.

Ravshanki, $P(A)$ to'plamning har bir elementining o'zi to'plam bo'ladi.

Odatda, $P(A)$ to'plam A to'plamning buleanı deyiladi.

Masalan $A = \{-1, 0, 1\}$ to'plamnig buleani

$$P(A)=\{\{-1\},\{0\},\{1\},\{-1,0\},\{0,1\},\{-1,1\},\{-1,0,1\},\ \varnothing\ \}$$

bo‘ladi.

A va B to‘plamlar berilgan bo‘lsin. Agar A to‘plam B to‘plamning qismi, B to‘plam A to‘plamning qismi bo‘lsa, A va B to‘plamlar teng to‘plamlar deyiladi va $A=B$ kabi yoziladi.

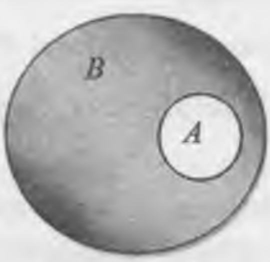
Masalan, $A=\{2,3\}, B=\{x|x^2-5x+6=0\}$ to‘plamlar uchun $A=B$ bo‘ladi, chunki $x^2-5x+6=0$ kvadrat tenglamaning yechimlari: $x_1=2, x_2=3$.

Demak, $B=\{2,3\}$.

Ko‘p hollarda to‘plamlar va ular orasidagi munosabatlarni yaqqol tasavvur qilish uchun to‘plamlarni simvolik ravishda tekislikdagi biror shakl, masalan, doirachalar bilan tasvirlash qulay bo‘ladi.

Masalan, A va B to‘plamlar quyidagicha tasvirlansa,

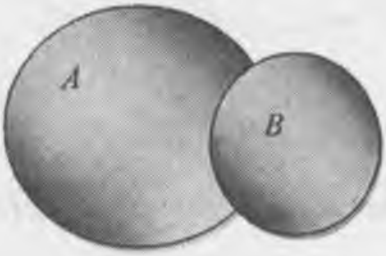
unda $A\subset B$ bo‘lishi quyidagicha tasvirlanadi:



To'plamlar ustida amallar

A va B to'plamlar berilgan bo'lsin.

1.1-t a' r i f. *A va B to'plamlarning barcha elementlaridan tashkil topgan to'plam A va B to'plamlarning* ***birlashmasi*** *deyiladi va $A \cup B$ kabi belgilanadi* (1-chizma).



$A \cup B$

1-chizma

Eslatma. To'plamni tashkil etgan elementlar orasidagi aynan bir-biriga teng bo'lgan (bir xil) elementlardan faqat bittasi shu to'plam elementi sifatida olinadi.

Masalan, $(x-1)^2(x+2)=0$ tenglamaning (ildizlari) yechimlari to'plami $\{1,-2\}$ bo'ladi.

Aytaylik, $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B=\{3, 4, 5, 6, 7\}$ bo'lsin. Unda $A \cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ bo'ladi.

Agar $N_1=\{1,3,5,7,...\}, N_2=\{2,4,6,8,...\}$ bo'lsa, $N_1 \cup N_2 = N$ bo'ladi.

Faraz qilaylik, $A_1, A_2, ...A_n$ to'plamlar berilgan bo'sin. Bu to'plamlarning birlashmasi yuqoridagiga o'xshash ta'riflanadi:

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = (A_1 \cup A_2) \cup A_3$$

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = (A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cup A_4$$

....

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup .... \cup A_{n-1} \cup A_n = (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup .... \cup A_{n-1}) \cup A_n .$$

Yuqorida keltirilgan $A_1, A_2, ...A_n$ birlashmani quyidagicha yozish mumkin:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i .$$

Umuman, yuqoridagidek biror α indeks $(\alpha \in I)$ bo‘yicha A_α to‘plamlar birlashmasi ta’riflanadi va u $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$ kabi belgilanadi. Biror-bir a element $A_\alpha (\alpha \in I)$ larning birlashmasi $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$ ga tegishli bo‘ladi, faqat va faqat, agarda shunday $\alpha_0 \in I$ topilib, $a \in A_{\alpha_0}$ bo‘lsa; to‘plamlarning birlashmasi ta’rifidan bevosita quyidagi tengliklarning o‘rinli bo‘lishi kelib chiqadi:

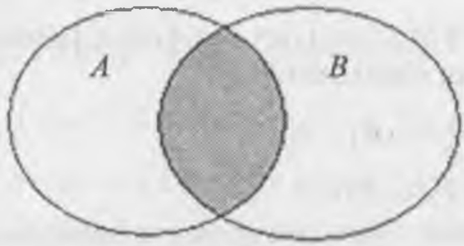
1.1. $A \cup A = A$ (birlashmaning idempotentligi),

1.2. $A \cup B = B \cup A$ (birlashmaning kommutativligi),

1.3. Agar $A \subset B$ bo‘lsa, u holda $A \cup B = B$ bo‘ladi,

1.4. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (birlashmaning assotsiativligi).

1.2-ta‘rif. *A va B to‘plamlarning umumiy elementlaridan tashkil topgan to‘plam A va B to‘plarning* ***kesishmasi (ko‘paytmasi)*** *deyiladi va $A \cap B$ kabi belgilanadi (2-chizma).*



$A \cap B$

2-chizma

Masalan, $A=\{1,2,3,4,5\}$ $B=\{3,4,5,6,7\}$, $C=\{6,7,8,9,10\}$ bo‘lsa,

$A \cap B=\{3,4,5\}, A \cap C=\varnothing, B \cap C=\{6,7\}$ bo‘ladi.

Yuqoridagi N_1 va N_2 to‘plamlar uchun $N_1 \cap N_2=\varnothing$ bo‘ladi.

Ikki to‘plam kesishmasi bo‘sh to‘plam bo‘lsa, bu to‘plamlar kesishmaydigan (dizyunkt) to‘plamlar deyiladi.

Masalan, yuqoridagi A va C hamda N_1 va N_2 to‘plamlar dizyunkt to‘plamlarga misol bo‘ladi.

Aytaylik, A_1, A_2, $...A_n$ to‘plamlar berilgan bo‘lsin. Bu to‘plamlarning kesishmasi $A_1 \cap A_2 \cap .... \cap A_n$ yuqoridagiga o‘xshash ta’riflanadi.

Quyidagi xossalar o‘rinli:

1.5. $A \cap A = A$ (kesishmaning idempotentligi);

1.6. $A \cap B = B \cap A$ (kesishmaning kommutativligi);

1.7. Agar $A \subset B$ bo‘lsa, u holda $A \cap B = A$ bo‘ladi;

1.8. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (kesishmaning assotsiativligi);

1.9. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (birlashmaning kesishmaga nisbatan distributivligi);

1.10. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ kesishmaning birlashmaga nisbatan distributivligi);

1.11. $A \cup (A \cap B) = A$;

1.12. $A \cap (A \cup B) = A$.

Bu xossalar isboti birlashma va kesishma ta'riflaridan kelib chiqadi.

1.3-ta'rif. *A to'plamning B to'plamga tegishli bo'lmagan barcha elementlaridan tashkil topgan to'plam A to'plamdan B to'plamning* ***ayirmasi*** *deyiladi va $A \setminus B$ kabi belgilanadi (3-chizma).*

3-chizma

Masalan, $A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{-1, 0, 1, 2, 5, 6, 7\}$ bo'lsa, $A \setminus B = \{3, 4\}$ va $B \setminus A = \{5, 6, 7\}$ bo'ladi.

Agar $N = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$, $N_1 = \{2, 4, 6, 8, ...\}$ bo'lsa, $N \setminus N_1 = \{1, 3, 5, 7, ...\}$ bo'ladi.

A, B va C to'plamlar berilgan bo'lsin. U holda

1.13. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$,

1.14. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ bo'ladi.

Ushbu xossalardan birini, masalan, 1.13-xossani isbotlaymiz.

$A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$ ni isbotlash uchun

$$A\setminus(B\cup C)\subset(A\setminus B)\cap(A\setminus C) \text{ va}$$

$$A\setminus(B\cup C)\supset(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$$

munosabatlarning bajarilishini ko'rsatish yetarli.

$\forall a\in A\setminus(B\cup C)$ bo'lsin. U holda $a\in A$, $a\notin B\cup C \Rightarrow a\notin B$ va $a\notin C$ bo'lib, $a\in A\setminus B$ va $a\in A\setminus C$ bo'ladi. Demak, $a\in(A\setminus B)\cap$ $\cap(A\setminus C)$, bundan $A\setminus(B\cup C)\subset(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$ bo'lishi kelib chiqadi.

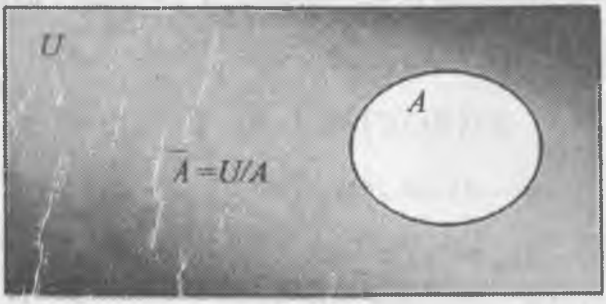
Endi, $\forall a\in(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$ bo'lsin. U holda $a\in(A\setminus B)$ va $a\in(A\setminus C)\Rightarrow a\in A, a\notin B, a\notin C$ bo'lib, $a\in A, a\notin B\cup C$ bo'ladi.

Demak, $a\in A\setminus(B\cup C)$. Bundan, $(A\setminus B)\cap(A\setminus C)\subset A\setminus(B\cup$ $\cup C)$ bo'lishi kelib chiqadi.

To'plamlar ustida amallar kiritilishida, ular ixtiyoriy to'plamlar deb qaraldi. Masalan, A deb shkafdagi kitoblar to'plamini, B deb suv havzasidagi baliqlar to'plamini olish mumkin edi. Bunday to'plamlarning birlashmasi, kesishmasi shunchaki aytilishi mumkin bo'lsa-da, ma'lum g'ayritabiiylikni yuzaga keltiradi.

Muayyan vaziyatdan chiqish uchun biror U to'plam (odatda, u universal to'plam deyiladi) olinib, uning qism to'plamlari ustida amallar bajariladi (masalan, U deb doska tekisligidagi barcha nuqtalar to'plamini olish mumkin). Xuddi shuningdek, A to'plam $P(A)$ uchun universal to'plam bo'ladi.

1.4-ta'rif. *Ushbu $U\setminus A$ to'plam A to'plamni U to'plamgacha* ***to'ldiruvchi to'plami*** *deyiladi va $\overline{A}$ kabi yoziladi:*



4-chizma

Quyidagi tengliklar o‘rinli bo‘ladi:

1.15. $A\cup\overline{A}=U$,

1.16. $A\cap\overline{A}=\varnothing$,

1.17. $\overline{\overline{A}}=A$ (to‘ldiruvchi amalining involutivligi),

1.18. $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ (birlashma uchun de Morgan qonuni),

1.19. $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ (kesishma uchun de Morgan qonuni),

1.20. $A\setminus B=A\cap\overline{B}$ (ayirma amalini kesishma va to‘ldiruvchi amallari orqali ifodalash).

Bu tengliklarni isbotlash qiyin emas. Ulardan birini, masalan, 1.18-tenglikning isbotini keltiramiz .

$\forall x\in\overline{A\cup B}$ bo‘lsin. U holda $x\notin A\cup B$ bo‘lib, $x\notin A, x\notin B$ ekanligi kelib chiqadi. Ravshanki, $x\notin A$ bo‘lgani uchun $x\in\overline{A}$, $x\notin B$ bo‘lgani uchun $x\in\overline{B}$. Demak, $x\in\overline{A}\cap\overline{B}$. Bu esa

$$\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cap \overline{B} \qquad (2)$$

bo'lishini bildiradi.

Endi $\forall x \in \overline{A} \cap \overline{B}$ bo'lsin. Unda $x \in \overline{A}$, $x \in \overline{B}$ bo'lib, $x \notin A$, $x \notin B$ bo'ladi.

Demak, $x \notin A \cup B$. Bu holda $x \in \overline{A \cup B}$ bo'ladi. Bu esa

$$\overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{A \cup B} \qquad (3)$$

ekanini bildiradi.

(2) va (3) munosabatlardan $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ tenglik kelib chiqadi. 1.18-xossa isbotlandi.

1.5-ta'rif. *Ushbu* $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ *to'plam* A *va* B *to'plamlarning **simmetrik ayirmasi** deyiladi va* $A \Delta B$ *kabi belgilanadi.*

Yuqorida keltirilgan 1.4-ta'rif va (1.9, 1.10) xossalardan foydalanib, $A \Delta B$ uchun quyidagi ikki munosabat o'rinli ekanligiga ishonch hosil qilamiz:

$$A \Delta B = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}),$$

$$A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B).$$

1.1-misol.

Berilgan A, B, C to'plamlar uchun $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$ assotsiativlik munosabati o'rinli ekanligini ko'rsating.

Yechish: Quyidagi belgilashni kiritaylik:

$$D = A \Delta B.$$

U holda

$$(A \Delta B) \Delta C = D \Delta C = (D \cup C) \cap (\overline{D} \cup \overline{C})$$

bo'ladi.

Endi $D \cup C$ va $\overline{D} \cup \overline{C}$ larni hisoblaymiz:

$$(A\cup B)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})\ \cup C=(A\cup B\cup C)\cap(\overline{A}\cup\overline{B}\cup C),$$

$$\overline{D}\cup\overline{C}=\overline{((A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)}\cup\overline{C}=(\overline{A\cap\overline{B}}\cap\overline{\overline{A}\cap B})\cup\overline{C}=$$
$$=((\overline{A}\cup B)\cap(A\cup\overline{B}))\cup\overline{C}=(\overline{A}\cup B\cup\overline{C})\cap(A\cup\overline{B}\cup\overline{C}).$$

Shunday qilib,

$$(A\Delta B)\Delta C=(A\cup B\cup C)\cap(\overline{A}\cup\overline{B}\cup C)\cap(\overline{A}\cup B\cup\overline{C})\cap(A\cup\overline{B}\cup\overline{C})$$
ekan.

Xuddi shunga o‘xshash $B\Delta C$ ni D_1 orqali belgilab,

$$A\Delta D_1=A\Delta(B\Delta C)=(A\cup B\cup C)\cap$$
$$\cap(\overline{A}\cup\overline{B}\cup C)\cap(\overline{A}\cup B\cup\overline{C})\cap(A\cup\overline{B}\cup\overline{C})$$

ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

Demak, $A\Delta(B\Delta C)=A\Delta(B\Delta C)$ o‘rinli bo‘lar ekan.

Ravshanki, $A=B$ bo‘lsa, u holda ixtiyoriy C to‘plam uchun $(A\Delta C)=(B\Delta C)$ bo‘ladi.

Bu tasdiqning teskarisi o‘rinli bo‘ladimi?

1.2-misol.

Biror C to‘plam uchun $A\Delta C=B\Delta C$ bo‘lsa, $A=B$ ekanligini ko‘rsating.

Yechish. $A\Delta C=B\Delta C$ dan $(A\Delta C)\Delta C=(A\Delta C)\Delta C$ ga ega bo‘lamiz. 1-misol yechimiga binoan esa, $(A\Delta C)\Delta C=A\Delta(C\Delta C)=$ $=A\Delta\varnothing=A$ bo‘ladi. Xuddi shunga o‘xshash,

$$(B\Delta C)\Delta C=B\Delta(C\Delta C)=B\Delta\varnothing=B.$$

Demak, $A=B$ bo‘lar ekan.

1.3-misol.

$A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$ o'rinli ekanligini ko'rsating.

Yechish.

$$A\setminus(B\cup C)=A\cap(\overline{B\cup C})=A\cap(\overline{B}\cap\overline{C})=(A\cap A)\cap(\overline{B}\cap\overline{C})=$$

$$=(A\cap\overline{B})\cap(A\cap\overline{C})=(A\setminus B)\cap(A\setminus C).$$

Eslatma. Biz $A=A\cap A$ ekanligidan unumli foydalandik.

To'plamlarning dekart ko'paytmasi

Ikkita A va B to'plam berilgan bo'lib, $A\neq\varnothing$, $B\neq\varnothing$ bo'lsin. A to'plamga tegishli bo'lgan biror a elementni va B to'plamga tegishli bo'lgan biror b elementni olamiz.

Birinchi elementi a, ikkinchi elementi b bo'lgan ***tartiblangan juftlik*** *deb* $\{a,\{a,b\}\}$ *to'plamga aytamiz va* (a,b) *kabi belgilanadi.*

1.6-ta'rif. *Barcha* (a,b) *ko'rinishdagi tartiblangan juftliklardan tashkil topgan* $\{(a,b):a\in A,b\in B\}$ *to'plam* A *va* B *to'plamlarning* ***dekart (to'g'ri) ko'paytmasi*** *deyiladi va* $A\times B$ *kabi belgilanadi.*

Demak, $A\times B=\{(a,b):a\in A,b\in B\}$.

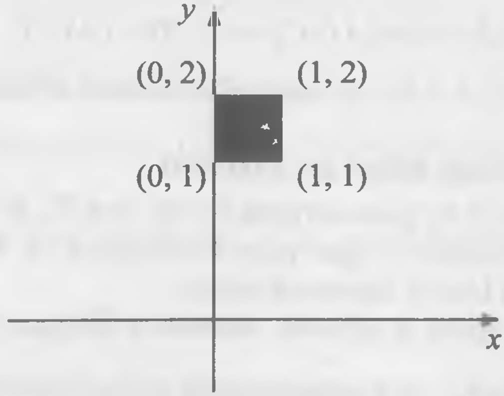
Masalan, $A=\{0,1\}$, $B=\{a,b\}$ to'plamlarning dekart ko'paytmasi $A\times B$ quyidagicha:

$A\times B=\{(0,a),(0,b),(1,a),(1,b)\}$ bo'ladi. $B\times A$ esa

$B\times A=\{(a,0),(b,0),(a,1),(b,1)\}$ bo'ladi.

Demak, umuman aytganda, $A\times B\neq B\times A$ ekan.

Keyingi misol tariqasida A to'plam deb $[0,1]$ segment nuqtalaridan iborat $A=\{x\in R:0\leq x\leq 1\}$ to'plamni, B to'plam deb $[1,2]$ segment nuqtalaridan iborat $B=[y\in R:1\leq y\leq 2]$ to'plamni olaylik. Bu to'plamlarning dekart ko'paytmasi $A\times B=\{(x,y):0\leq x\leq 1,1\leq y\leq 2\}$ to'plam 5-chizmada tasvirlangan kvadrat nuqtalaridan iborat to'plam bo'ladi:



5-chizma

Shuni ta'kidlash lozimki, ikki (a,b) va (c,d) juftliklar $a=s$, va $b=d$ bo'lgandagina teng deb qaraladi.

To'plamlarning dekart ko'paytmasi quyidagi xossalarga ega. Faraz qilaylik, bizga A, B va C to'plamlar berilgan bo'lsin. U holda

1.21. $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$.

1.22. $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$ munosabatlar o'rinli bo'ladi. Bu xossalardan 1.3.1 ni isbotlaymiz.

Aytaylik, $x\in A\times(B\cap C)$ bo'lsin. Unda $x=(a,d)$ bo'lib,

$$a\in A,\ d\in B\cap C$$

bo'ladi.

$$d \in B \cap C$$

bo'lishidan esa, $d \in B$, $d \in C$ ekanligini topamiz.

$$a \in A,\ d \in B;\ (a,d) \in A \times B,$$

$$a \in A,\ d \in C;\ (a,d) \in A \times C.$$

Demak,

$$(a,d) \in (A \times B) \cap (A \times C),$$

ya'ni

$$x \in (A \times B) \cap (A \times C) \qquad (4)$$

bo'ladi.

Endi $x \in (A \times B) \cap (A \times C)$ bo'lsin. Unda $x \in (A \times B)$, $x \in (A \times C)$ bo'ladi.

Ta'rifga binoan

$$x \in A \times B;\ x = (a,b);\ a \in A;\ b \in B;$$

$$x \in A \times C;\ x = (a,c);\ a \in A,\ c \in C$$

bo'ladi.

Ravshanki: $x = (a,b) = (a,c)$; $b = c$.

Demak, $a \in A$, $b \in B \cap C$; $(a,b) \in A \times (B \cap C)$,

ya'ni

$$x \in A \times (B \cap C) \qquad (5)$$

bo'ladi.

(4) va (5) munosabatlardan

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

1.4-misol.

$A=\{1,2,3\}$, $B\{3,4\}$ bo'lsa, $A\times B$ ni hisoblang.

Yechish: $A\times B=\{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4)\}$ bo'ladi.

1.5 -misol.

A va B to'plamlar U to'plamning chekli qism to'plamlari bo'lsin. $n(A)$ va $n(B)$ lar esa, A va B to'plamlar elementlari sonini belgilasin. U holda $n(A\setminus B)=n(A)\setminus n(A\cap B)$ ekanligini ko'rsating.

Yechish: Ravshanki, $A\cap B=\emptyset$ bo'lsa, $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$ bo'ladi. $A\setminus B=C$ bo'lsin. U holda, $A=C\cup(A\cap B)$ tenglik o'rinli ekanligini ko'rsatish qiyin emas. Bundan tashqarii, $C\cap(A\cap B)=\emptyset$ bo'ladi. Shu sababli, $n(A)=n(C)+n(A\cap B)\Rightarrow$ $\Rightarrow n(C)=n(A)-n(A\cap B)$ kelibchiqadi. $C=A\setminus B$ sababli, $n(A\setminus B)=$ $=n(A)\setminus n(A\cap B)$ bo'ladi.

Mustaqil yechish uchun masalalar

1. Agarda $A=\{a,b,c,\}$, $B=\{b,c,d,e\}$ bo'lsa, $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$, $A\Delta B$ larni hisoblang.

2. A va B to'plamlar uchun $A\subseteq B$ bo'lishi uchun $A\cap B=A$ bo'lishi zarur va yetarli ekanligini ko'rsating.

3. A-to'plam o'nta elementdan iborat bo'lsa, $P(A)$ nechta elementdan iborat bo'ladi?

4. $A=\{1, 2, 3, ..., n\}$ bo'lsa, $P(A)$ nechta elementdan iborat bo'ladi?

5. A va B to'plamlar U to'plamning chekli qism to'plamlari bo'lsa, quyidagilarni isbotlang:

a) agar $A\cap B=\emptyset$ bo'lsa, $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$;

b) $n(A\setminus B)=n(A)\setminus n(A\cap B)$;

d) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$.

6. Quyida keltirilgan munosabatlar o'rinli bo'lsa, isbotini keltiring, aks holda o'rinli emasligini tasdiqlovchi misol keltiramiz:

a) $A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus(A\cap C)$;

b) $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cup C$;

d) $\overline{(A\setminus B)}=\overline{(B\setminus A)}$;

e) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$;

f) *agar* $A\Delta C=B\Delta C$ *bo'lsa,* $A=B$ *bo'ladi.*

2-§. Binar munosabatlar

"Binar munosabat" tushunchasi

Atrofni kuzatish, fanni o'rganish jarayonida turli munosabatlarga duch kelamiz. Masalan, odamlar orasida do'stlik munosabati, mamlakatlar o'rtasida diplomatik munosabat, matematikada uchburchaklar orasidagi o'xshashlik munosabati, to'g'ri chiziqlar orasidagi parallellik munosabati kabi munosabatlar to'g'risida gapirish mumkin bo'ladi.

Keltirilgan misollardan A to'plam (odamlar to'plami, mamlakatlar to'plami, uchburchaklar to'plami, to'g'ri chiziqlar to'plami) bo'lsa, uning elementlaridan ma'lum munosabatda bo'lganlari $A\times A$ ning qism to'plamini tashkil etishini ko'ramiz.

Ushbu paragrafda matematikada o'rganiladigan munosabatlarni bayon etamiz.

Avvalo, bitta sodda misol keltiramiz.

Aytaylik, $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,4\}$ bo'lsin. A va B to'plamlarning dekart ko'paytmasi

$$A\times B=\{(1,2),(1,4),(2,2),(2,4),(3,2),(3,4)\}$$

bo'ladi. Bu to'plam elementlari (x,y) lar orasida

$$x+y=5 \tag{1}$$

shartni qanoatlantiruvchilari $(1,4)$ va $(3,2)$ lar bo'ladi. Demak, $A\times B$ to'plam elementlari orasida (1) munosabatda bo'ladiganlari $\{(1,4),(3,2)\}$ to'plamni tashkil etib , u $A\times B$ ning qismi bo'ladi:

$$\{(1,4),(3,2)\}\subset A\times B.$$

Xuddi shu $A\times B$ to'plam elementlari (x,u) lar orasida

$$2x=y \tag{2}$$

shartini qanoatlantiruvchilari $(1,2)$ va $(2,4)$ lar bo'ladi. Bunday holda $A\times B$ to'plam elementlari orasida (2) munosabatda bo'lganlari $\{(1,2),(2,4)\}$ to'plam bo'ladi va u ham $A\times B$ ning qismi bo'ladi:

$$\{(1,2),(2,4)\}\subset A\times B.$$

Bunday vaziyatda, tabiiyki, $\{(1,4),(3,2)\}$ va $\{(1,2),(2,4)\}$ qism to'plamlar mos ravishda (1) va (2) munosabatlar orqali aniqlangan deb aytish mumkin.

Ixtiyoriy A va B to'plamlar berilgan bo'lib, $A\times B$ esa ularning dekart ko'paytmasi bo'lsin.

2.1-ta'rif. *$A\times B$ to'plamning ixtiyoriy R qism to'plami $(R\subset A\times B)$ A va B to'plamlar orsidagi* ***binar munosabat*** *deyiladi. Bu binar munosabat A va B to'plamlarda aniqlangan deyiladi.*

Xususan, $A = B$ bo‘lsa, $R \subset A \times A$ binar munosabat A da aniqlangan binar munosabat deb qaraladi.

Binar munosabatlar, odatda, R, Q, R, ... kabi belgilanadi.

Aytaylik, $(x, y) \in R$, $R \subset A \times A$ bo‘lsin. Bu A to‘plamning x elementi u elementi bilan R munosabatda bo‘ladi deganidir. U xRy kabi ham belgilanadi.

Misol.

$A = \{2,5,4,6\}$ bo‘lsin, $E = \{(x, y) : x = y\} \subset A \times A$ bo‘lsin. Ravshanki, bunday holda $E = \{(2,2),(5,5),(4,4),(6,6)\}$ bo‘ladi. R munosabat xRu; $x = u$ tenglikni bildiradi.

Binar munosabatlar ustida amallar

Endi binar munosabatlar ustida bajariladigan amallarni ko‘rib chiqamiz.

Ma’lumki, R munosabat $A \times A$ to‘plamning qismiy to‘plami, ya’ni to‘plam bo‘lib, ixtiyoriy to‘plamlar ustida bajariladigan amallar esa mazkur bobning 1- paragrafida keltirilgan.

Binar munosabatlarda birlashma, kesishma, ayirma amallari bilan bir qatorda, ulargagina xos bo‘lgan teskari hamda ko‘paytma amallari kiritiladi.

A va B to‘plamlarda R munosabat berilgan bo‘lsin: $(x, y) \subset R$, $R \subset A \times B$ $B \times A$ to‘plamda aniqlangan ushbu $Q = \{(y, x) : (x, y) \in P\}$ munosabat berilgan munosabatga teskari munosabat deyiladi.

Uni P^{-1} kabi belgilanadi.

Demak , $R^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in R\}$.

Shunday qilib, $R_1 \cdot (R_2 \cdot R_3)$ dan olingan ixtiyoriy (a,d) element $R_1 \cdot (R_2 \cdot R_3)$ to'plamga ham tegishli bo'lar ekan: $(a,d) \in (R_1 \cdot R_2) \cdot R_3$.

Bu esa

$$R_1 \cdot (R_2 \cdot R_3) \subset (R_1 \cdot R_2) \cdot R_3 \quad (1)$$

ekanini bildiradi.

Xuddi yuqorida keltirilgan mulohaza bilan

$$(R_1 \cdot R_2) \cdot R_3 \subset R_1 (R_2 \cdot R_3) \quad (2)$$

bo'lishi ko'rsatiladi. (1) va (2) lardan $(R_1 \cdot R_2) \cdot R_3 = R_1 (R_2 \cdot R_3)$ bo'lishini topamiz.

3- §. Binar munosabat turları

Aytaylik, A to'plamda biror $R \subset A \times A$ munosabat berilgan bo'lsin.

*Agar A to'plamning ixtiyoriy x elementi uchun xRx bo'lsa, u holda R **refleksiv** munosabat deyiladi.*

Ravshanki, $\forall x \in A$ uchun, $(x,x) \in A \times A$.

Odatda, $\{(x,y):(x,y) \in A \times A, x = y\}$ to'plam E bilan belgilanadi va diagonal to'plam deyiladi :

$$E = \{(x,x): x \in A\}.$$

Demak, R munosabat refleksiv bo'lishi uchun $E \subset R$ bo'lishi lozim ekan.

Agar A to'plamning ixtiyoriy x va y elementlari R munosabatda (xRy) bo'lishidan y va x elementlarning ham shu munosabatda, ya'ni yRx bo'lishi kelib chiqsa, u holda R ***simmetrik*** *munosabat deyiladi.*

Ravshanki, bu holda $R \subset R^{-1}$ bo'ladi.

Agar $R^{-1} \subset \left(R^{-1}\right)^{-1}$ bo'lishini e'tiborga olsak, u holda R simmetrik munosabat bo'lganda $R = R^{-1}$ bo'lishini topamiz.

Agar A to'plamning ixtiyoriy x, y va z elementlari uchun x va y ning R munosabatda (xRy), y va z larning ham shu munosabatda (yRz) bo'lishidan x va z elementlarining R munosabatda (xRz) bo'lishi kelib chiqsa, u holda R ***tranzitiv*** *munosabat deyiladi.*

A to'plamda R munosabatning tranzitiv bo'lishi, A to'plamda shunday u element topilib, xRy va yRz dan xRz kelib chiqishini, ya'ni $R \cdot R \subset R$ bo'lishini bildiradi.

Agar A to'plamning ixtiyoriy x va y elementlari xRy va yRx munosabatlarda bo'lishidan $x = y$ kelib chiqsa, u holda R ***antisimmetrik munosabat*** *deyiladi.* Bu holda $R \cap R^{-1} = E$ bo'ladi.

Misol. Ushbu $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ to'plamni olaylik.

Bu to'plamda quyidagi binar munosabatlarni ko'rib chiqamiz :

1) R_1 munosabat: $\forall x, y \in A$, $xR_1y : x - y$ ayirmaning 3 ga qoldiqsiz bo'linishini ifodalasin;

2) R_2 munosabat barcha $x, y \in A$ lar uchun $xR_2y : x$ ning y dan kichik yoki tengligini ifodalasin;

3) R_3 munosabat barcha $x, y \in A$ lar uchun $xR_3y: y$ ning x ga qoldiqsiz bo'linishini ifodalasin;

4) R_4 munosabat barcha $x, y \in A$ lar uchun $xR_4y: x \cdot y$ ko'paytmaning manfiy emasligini ifodalasin;

5) R_5 munosabat barcha $x, y \in A$ lar uchun $xR_5y: x$ ning kvadrati y ning kvadratiga teng ekanligini ifodalasin.

Ravshanki, R_1, R_2, R_4, R_5 – refleksiv, R_1, R_4, R_5 – simmetrik, R_1, R_2, R_3, R_5 – tranzitiv, R_2 – antisimmetrik munosabatlar bo'ladi. Bu holat quyidagi jadvaldan yaqqol ko'rinadi.

	Refleksiv	Simmetrik	Tranzitiv	Antisimmetrik
R_1	+	+	+	–
R_2	+	–	+	+
R_3	–	–	+	–
R_4	+	+	–	–
R_5	+	+	+	–

4- §. Ekvivalentlik munosabati

Faraz qilaylik, biror A to'plam berilgan bo'lib, bu to'plamda R munosabat ($R \subset A \times A$) berilgan bo'lsin.

Agar R refleksiv, simmetrik va tranzitiv munosabat bo'lsa, u ***ekvivalentlik munosabati*** deyiladi.

4.1-misol. A – tekislikdagi to‘g‘ri chiziqlar to‘plami. R binar munosabat A to‘plamining ixtiyoriy to‘g‘ri chiziqlarining o‘zaro parallel bo‘lishi munosabatini ifodalasin:

$$R=\{(x,y)\in A\times A: x \quad parallel \quad y\}\ R\subset A\times A.$$

Ravshanki, bu munosabat refleksiv (har bir to‘g‘ri chiziq o‘zi o‘ziga parallel bo‘ladi), simmetrik (agar x to‘g‘ri chiziq y to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lsa, y to‘g‘ri chiziq ham x to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘ladi) hamda tranzitiv (agar x to‘g‘ri chiziq y to‘g‘ri chiziqqa, y to‘g‘ri chiziqqa z to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lsa, u holda x to‘g‘ri chiziq z to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘ladi). Demak, A to‘plamda aniqlangan bunday munosabat ekvivalentlik munosabati bo‘ladi.

To‘plam elementlari orasida ekvivalentlik munosabatining bo‘lishi bu to‘plam elementlarini o‘zaro kesishmaydigan sinflarga ajratish imkonini beradi.

4.1-ta’rif. *Biror M to‘plam va $\{M_i(i\in N)\}$ to‘plamlar sistemasi berilgan bo‘lsin.*

Agar $\{M_i\}$ $(i\in N)$ to‘plamlar sistemasi uchun ushbu

1. $\bigcup\limits_{i\in I} M_i = M$;

2. $M_i\cap M_j=\varnothing\ (i\neq j)$ *shartlar bajarilsa,* $\{M_i\}$ *sistema* M *to‘plamda bo‘laklashni bajaradi deyiladi.*

4.2-misol.

a) $M=\{1,2,3,4,5,6\}$ bo‘lsin. Ushbu $M_1=\{1,2\}$, $M_2=\{3,4\}$, $M_3=\{5,6\}$ to‘plamlar M da bo‘laklashni bajaradi, chunki

1) $M_1\cup M_2\cup M_3=M$;

2) $M_1 \cap M_2 = \varnothing, M_1 \cap M_3 = \varnothing, M_2 \cap M_3 = \varnothing$ bo'ladi.

b) $M = N$ bo'lib , $M_i = \{i\}$ $i = 1,2,...$ bo'lsin.

Ravshanki, $\cup M_i = N = M$ $M_i \cap M_j = \{i\} \cap \{j\} = \varnothing$ $(i \neq j)$ bo'ladi. Demak, berilgan $M = N$ to'plam $M_i = \{i\}$ to'plamlarga bo'laklangan.

Ba'zan $\{M_i\}$ sistema M to'plamning bo'laklashi ham deb yuritiladi. Odatda, bo'laklash biror harf bilan belgilanadi.

Biz bu bo'laklashni π harfi bilan belgilaymiz: $\pi = \{M_i\}$.

M to'plam berilgan bo'lib, $\pi = \{M_i\}$ sistema esa shu to'plamning bo'laklashi bo'lsin. Bu holda M to'plamda ekvivalentlik munosabatini o'rnatish mumkin.

M to'plam elemenlari orasida quyidagicha R_π munosabatni aniqlaymiz: Agarda shunday $M_i \in \pi$ to'plam topilib, $x, y \in M_i$ bo'lsa, u holda x va y elementlar R_π munosabatda deb hisoblaymiz: $xR_\pi y$. Bunday aniqlangan R_π munosabat ekvivalentlik munosabati bo'ladi. Shuni isbotlaymiz.

M to'plamda ixtiyoriy x element olaylik: $x \in M_i$. $M = UM_i$ bo'lganligi sababli, shunday M_i topiladiki, $x \in M_i$ bo'ladi. Demak, $xR_\pi x$. Bu esa R_π ning refleksiv munosabat ekanini bildiradi.

R_π munosabatning simmetrik ekanligi ravshan.

Endi R_π munosabatning tranzitiv bo'lishini ko'rsatamiz. Aytaylik, x va y elementlar R_π munosabatda, $xR_\pi y$ va x, y elementlar ham shu munosabatda $yR_\pi z$, bo'lsin. U holda shunday $M_i \in \pi$ to'plam topiladiki, $x, y \in M_i$ bo'ladi. Shuningdek, $M_j \in \pi$

topiladiki, $y,z \in M_j$ bo‘ladi. Ammo ($i \neq j$) bo‘lsa, $M_i \cap M_j = \varnothing$ bo‘ladi. Bu esa $x,y \in M_i$, $y,z \in M_j$ larga zid bo‘ladi. Demak, $i \neq j$ bo‘lishi kerak ekan. Shu sababli $x,z \in M_i$ bo‘ladi.

Demak, $x,z \in M_i$. Bu esa $xR_\pi z$ bo‘lishini bildiradi .

Shunday qilib, R_π munosabat refleksiv, simmetrik hamda tranzitiv bo‘lar ekan.

Demak, R_π ekvivalentlik munosabati bo‘lar ekan.

Endi quyidagi teorema o‘rinli ekanligini ko‘rsatamiz.

4.1-teorema. *Har qanday ekvivalentlik munosabati R uchun shunday π_R bo‘laklash topiladiki, $R_{\pi_R} = R$ bo‘ladi.*

Isbot. Aytaylik, R munosabat M to‘plamda aniqlangan ekvivalentlik munosabati bo‘lsin. M to‘plamga tegishli har bir $t\,(t \in M)$ ga R munosabatda bo‘lgan M to‘plamning x elementlaridan iborat to‘plamni M_t deb olamiz:

$$M_t = \{x : x \in M,\, xRt\}.$$

Ravshanki, $M_t \neq \varnothing$, chunki $t \in M_t$.

Endi quyidagi $\pi_R = \{M_t : t \in M\}$ to‘plamlar sistemasi M to‘plamning bo‘laklanishi bo‘lishini ko‘rsatamiz.

Barcha $t \in M$ lar uchun $M_t \subset M$ bo‘lganligi sababli

$$\bigcup_{t \in M} M_t \subset M \tag{3}$$

bo'ladi. Ravshanki, $x \in M$ bo'lganda, $x \in M_x$ bo'lib, $x \in \bigcup_{t \in M} M_t$, ya'ni

$$M \subset \bigcup_{t \in M} M_t. \tag{4}$$

(3) va (4) dan $M = \bigcup_{t \in M} M_t$ ekanligi kelib chiqadi.

$\{M_t\}$ to'plamlar sistemasining ixtiyoriy ikki M_a va M_b to'plamlarini olib, $M_a \cap M_b = \varnothing$ $(a \neq b)$ bo'lishini ko'rsatamiz.

Aytaylik, $d \in M_a \cap M_b$ bo'lsin. Unda aRd, bRd bo'ladi. Shuningdek, M_a to'plamdan olingan ixtiyoriy x, $x \in M_a$ element uchun ham aRx bo'ladi.

R munosabatning simmetrikligidan aRd, dRa R ning tranzitivligidan esa bRd, dRa, aRx, bRx bo'lishi kelib chiqadi. Demak, $x \in M_b$.

Shunday qilib, $x \in M_a$ ligidan $x \in M_b$ ligi kelib chiqib,

$$M_a \subset M_b \tag{5}$$

bo'ladi

Xuddi yuqoridagidek mulohaza yuritib,

$$M_b \subset M_a \tag{6}$$

bo'lishini topamiz.

(5), (6) dan $M_a = M_b$ bo'lishi kelib chiqadi. Demak, $a \neq b$ bo'lganda $M_a \cap M_b = \varnothing$ bo'ladi.

Shunday qilib, $\pi_R = \{M_t : t \in M\}$ to'plamlar sistemasi M to'plamning bo'laklanishi ekanini isbotladik. Bu bo'laklanish M to'plamda R_{π_R} ekvivalentlik munosabatini aniqlaydi.

Endi $R_{\pi_R} = R$ ekanini ko'rsatamiz.

Aytaylik, xRy bo'lsin. U holda M_t to'plamning aniqlanishiga binoan $x, y \in M_t$ bo'ladi. Ayni paytda, $x\ R_{\pi_R}\ y$ bo'ladi. Boshqacha qilib aytganda, $(x,y) \in R$ bo'lishidan $(x,y) \in R_{\pi_R}$ ekanligi kelib chiqadi.

Demak,

$$R \subset R_{\pi_R}. \tag{7}$$

Aytaylik, $x\ R_{\pi_R}\ y$ bo'lsin. U holda shunday $d \in M$ element topiladiki,

$$x \in M_d\ ,\ y \in M_d$$

bo'ladi. Demak,

$$xRd,\ yRd.$$

R munosabatning simmetrik hamda tranzitivligidan foydalanib topamiz: (yRd, dRy va xRd, dRy) dan xRy ni olamiz.

Demak, $(x,y) \in R$.

Shunday qilib, $(x,y) \in R_{\pi_R}$ bo'lishidan $(x,y) \in R$ ekanligi kelib chiqar ekan:

$$R_{\pi_R} \subset R. \tag{8}$$

(7) va (8) dan $R_{\pi_R} = R$ bo'lishini topamiz. Bu esa teoremani isbotlaydi.

5- §. Tartıblangan to'plamlar

Biror M to'plam ($M \neq \varnothing$) berilgan bo'lib, bu to'plamda R binar munosabat aniqlangan bo'lsin.

5.1-ta'rif. *Agar R – refleksiv, tranzitiv va antisimetrik bo'lsa, u holda R munosabat M to'plamda aniqlangan* ***qisman tartib munosabat*** *deyiladi.*

Demak, R munosabat M to'plamda aniqlangan qisman tartib munosabat bo'lsa,

1) ixtiyoriy $x \in M$ uchun xRx;

2) xRy va yRz bo'lishidan xRz bo'lishi;

3) xRy va yRx bo'lishidan $x = y$ bo'lishi kelib chiqadi.

Agar M to'plamda qisman tartib munosabat aniqlangan bo'lsa, u holda M qisman tartiblangan to'plam deyiladi va (M, R) kabi belgilanadi.

Odatda, R qisman tartib munosabati $\leq$ simvol orqali belgilanadi. Shuni e'tiborga olib, keyinchalik qisman tartiblangan to'plamni $(M, \leq)$ kabi belgilaymiz.

5.2- ta'rif. *Agar qisman tartiblangan* $(M, \leq)$ *to'plamning ixtiyoriy* x, y *elementlari* $x \leq y$ *yoki* $y \leq x$ *munosabatda bo'lsa, u holda* $(M, \leq)$ ***chiziqli tartiblangan*** *to'plam deyiladi.*

5.1-misol. Barcha natural sonlardan iborat $N=\{1,2,> ,n,> \}$ to‘plamni olaylik. Bu to‘plamyning ixtiyoriy n va m elementlari orasidagi $n \leq m$ munosabat n ning m dan kichik yoki tengligini ifodalasin.

Ravshanki, $(N,\leq)$ to‘plam chiziqli tartiblangan to‘plam bo‘ladi.

5.2-misol. $N=\{1,2,> ,n,> \}$ to‘plamning ixtiyoriy n va m $(n \in N,\ m \in N)$ elementlari orasida n / m munosabat m ning n ga qoldiqsiz bo‘linishini, ya’ni $\exists k \in N(m=nk)$ ekanini ifodalasin.

Bu holda $(N,/)$ to‘plam qisman tartiblangan to‘plam bo‘ladi.

Ikkinchi tomondan, $2 \in N$, $3 \in N$ elementlar uchun 2/3 yoki 3/2 munosabatlarning hech biri bajarilmaganligi sababli, $(N,/)$ chiziqli tartiblangan to‘plam bo‘lmaydi.

5.3-misol. Natural sonlar to‘plami N ning barcha qism to‘plamlaridan iborat $P(N)$ to‘plamni olaylik. Bu $P(N)$ to‘plamning ixtiyoriy A, B $(A \in P(N),\ B \in P(N))$ elementlari uchun $A \leq B$ munosabat A to‘plamni B to‘plamning qismi, ya’ni $A \subset B$ bo‘lishini ifodalasin.

Bu holda $(P(N),\subset)$ to‘plam qisman tartiblangan to‘plam bo‘ladi. Ayni paytda, bu $(P(N),\subset)$ to‘plam chiziqli tartiblangan bo‘lmaydi, chunki $\{1,2\} \subset \{2,3\}$ yoki $\{2,3\} \subset \{1,2\}$ munosabatlarning birortasi o‘rinli bo‘lmaydi.

Aytaylik, $(M,\leq)$ tartiblangan to‘plam bo‘lib, S esa $(S \neq \varnothing)$ uning qism to‘plami bo‘lsin. Bunda $(S,\leq)$ to‘plam ham tartiblangan to‘plam bo‘ladi. Ya’ni tartiblangan to‘plamning har qanday bo‘sh bo‘lmagan qism to‘plami ham o‘sha to‘plamda aniqlangan tartib munosabatiga nisbatan tartiblangan to‘plam bo‘ladi.

Shuni ta'kidlash lozimki, $(M,\leq)$ qisman tartiblangan to'plam bo'lganda uning biror qism to'plami S uchun $(S,\leq)$ chiziqli tartiblangan to'plam bo'lib qolishi mumkin.

Masalan, yuqorida keltirilgan $(N,/)$ qisman tartiblangan to'plamning ushbu $S=\{2^n;\ n=0,1,2,3,>\}$ qism to'plami uchun $(S,/)$ chiziqli tartiblangan to'plam bo'ladi.

Faraz qilaylik, $(M,\leq)$ tartiblangan to'plam bo'lsin.

<u>**5.3-ta'rif.**</u> *Agar M to'plamning a va b elementlari ($a\in M$, $b\in M$) uchun $a\leq b$ va $b\leq a$ munosabatlardan hech bo'lmaganda biri o'rinli bo'lsa, a va b* ***taqqoslanuvchi elementlar*** *deyiladi.*

M to'plamning a va b elementlari uchun $a\leq b$ va $b\leq a$ munosabatlardan birortasi ham o'rinli bo'lmasa, a va b lar M to'plamning taqqoslanmaydigan elementlari deyiladi.

Masalan, tartiblangan $(N,/)$ to'plamda 2 va 4 taqqoslanuvchi, 2 va 3 esa parallel elementlar bo'ladi.

<u>**5.4-ta'rif.**</u> *Agar tartiblangan $(M,\leq)$ to'plamning biror S qisim to'plami uchun $(S,\leq)$ chiziqli tartiblangan to'plam bo'lsa, $(S,\leq)$* ***zanjir*** *deyiladi.*

Masalan, $(N,/)$ ning ushbu $S=\{2^n;\ n=0,1,2,3,>\}$ qism to'plami uchun $(S,/)$ zanjir bo'ladi.

Mustaqil yechish uchun masalalar

1. $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ bo'lib, $\pi=\{1,3,5\}$, $\{2,6\}$, $\{4,7\}$ A ning bo'laklashi bo'lsin. π bo'laklanishga mos kelgan R_π – ekvivalentlik munosabatini toping. (R_π elementlarini sanab chiqing.)

2. R $-A$ to'plamda aniqlangan binar munosabat bo'lsin. U holda quyidagi ikki shart teng kuchli ekanligini ko'rsating.

a) R $-A$ da ekvivalentlik munosabati bo'ladi.

b) R refleksiv va barcha $a,b,c \in A$ uchun, agarda aRb, bRc bo'lsa, cRa bo'ladi.

3. $A=\{1,2,3,5,6,7\}$ bo'lib, $aRb \Leftrightarrow a-b/4$ bo'lsin.

a) R ning elementlarini sanab chiqing.

b) R ning aniqlanish sohasini toping.

c) R ning qiymatlar sohasini toping.

d) R^{-1} ning elementlarini sanab chiqing.

e) R^{-1} ning aniqlanish sohasini toping.

f) R^{-1} ning qiymatlari sohasini toping.

4. $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ bo'lib, $aRb \Leftrightarrow a+b \leq 9$ bo'lsin.

a) $E \subseteq R$ bo'ladimi? Bu yerda $E=\{(x,x) \mid x \in A\}$.

b) $R=R^{-1}$.

c) $R \text{a} R \subseteq R$.

5. Quyida keltirilgan munosabatlarning qaysi biri Z da ekvivalentlik munosabati bo'ladi?

a) $xRy \Leftrightarrow x-y$ juft son bo'lsa;

b) $xRy \Leftrightarrow x-y$ toq son bo'lsa;

c) $xRy \Leftrightarrow x \leq y$ bo'lsa;

d) $xRy \Leftrightarrow x^2 = y^2$ bo‘lsa;

e) $xRy \Leftrightarrow |x| = |y|$ bo‘lsa;

f) $xRy \Leftrightarrow |x - y| \leq 2$.

6. $R = \{(a,b) \mid a,b \in Q$ va $a - b \in Z\}$ bo‘lsin. R ning Q to‘plamda ekvivalentlik munosabati ekanligini ko‘rsating.

7. $A = \{a,b,c\}$ to‘plamda aniqlash mumkin bo‘lgan barcha ekvivalentlik munosabatlarini toping.

8. R_1 va R_2 lar A to‘plamda aniqlangan ekvivalentlik munosabati bo‘lsa, $R_1 \cap R_2$ ham A da ekvivalentlik munosabati bo‘lishini ko‘rsating.

9. R_1 va R_2 lar A da aniqlangan simmetrik binar munosabatlar bo‘lsin. Bundan tashqarii, $R_1 \mathrm{a} R_2 \subseteq R_2 \mathrm{a} R_1$ bo‘lsa, $R_2 \mathrm{a} R_1$ simmetrik ekanligi va $R_1 \mathrm{a} R_2 \subseteq R_2 \mathrm{a} R_1$ bo‘lishini ko‘rsating.

10. R_1 va R_2 lar A da aniqlangan ekvivalentlik munosabatlari bo‘lib, $R_1 \mathrm{a} R_2 \subseteq R_2 \mathrm{a} R_1$ bo‘lsa, u holda $R_1 \mathrm{a} R_2$ ham A da ekvivalentlik munosabati bo‘lishini ko‘rsating.

Aytaylik, tartiblangan $(M, \leq)$ to‘plam berilgan bo‘lib, $m \in M$ bo‘lsin.

Agar M to‘plamning barcha x elemenlari uchun $x \leq m$ ($m \leq x$) munosabat o‘rinli bo‘lsa, m element M to‘plamning ***eng katta (eng kichik)*** elementi deyiladi.

Odatda, tartiblangan $(M, \leq)$ to‘plamning eng katta elementi uning biri, eng kichik elementi esa uning noli deyiladi. Ba’zan M ning universal chegaralari ham deyiladi.

Masalan, tartiblangan $(R(N),\leq)$ to'plamning biri N, noli esa $\varnothing$ bo'ladi.

Ushbu $(N,/)$ tartiblangan to'plamning biri mavjud emas, noli esa 1 bo'ladi.

Agar tartiblangan $(M,\leq)$ to'plam eng katta (eng kichik) elementga ega bo'lsa, $(M,\leq)$ to'plam ***yuqoridan (quyidan) chegaralangan*** deyiladi.

Agar tartiblangan $(M,\leq)$ to'plam ham yuqoridan, ham quyidan chegaralangan bo'lsa, u ***chegaralangan*** deyiladi.

Yuqorida keltirilgan tushunchalardan ko'rinadiki, agar tartiblangan to'plamning eng katta (eng kichik) elementi mavjud bo'lsa, u yagona bo'ladi.

Aytaylik, M tartiblangan to'plam bo'lib, $m^* \in M$, $m_* \in M$ bo'lsin.

Agar M to'plamning biror x elementi uchun $m^* \leq x$ bo'lishidan $x = m^*$ ($x \leq m_*$ bo'lishidan $x = m_*$) bo'lishi kelib chiqsa, m^* M to'plamning ***maksimal*** (m_* M to'plamning ***minimal***) elementi deyiladi.

Ravshanki, M to'plamning eng katta elementi uning maksimal, eng kichik elementi esa uning minimal elementi bo'ladi.

Masalan, $(\{1,2,3,4,5,6\},/)$ tartiblangan to'plam uchun 4,5,6 lar maksimal elementlar bo'lib, 1 esa minimal element bo'ladi.

I bob bo'yicha nazorat savollari

1. To'plamlar ustida qanday amallar bajarish mumkin?
2. To'plam Buleani nima?
3. Dekart ko'paytma qanday aniqlanadi?
4. Munosabatlar va funksiyalarni ta'riflang. Ular qanday xossalarga ega?
5. Qanday maxsus binary munosabatlarni bilasiz?
6. Tartib munosabati turlarini keltiring.

II BOB. MULOHAZALAR ALGEBRASI

1- §. Mulohazalar va ular ustida amallar

Biz kundalik hayotda turli iboralarni eshitamiz va ishlatamiz, har xil mulohaza yuritamiz va boshqalarning mulohazalariga munosabat bildiramiz. Bunda aytiladigan iboralar, yuritiladigan fikr va mulohazalar turlicha bo'lsa-da, ulardan chiqariladigan xulosa, umuman aytganda, ikki xil bo'ladi:

1. Iboralar, fikr va mulohazalar to'g'ri, ya'ni chin.
2. Iboralar, fikr va mulohazalar noto'g'ri, ya'ni yolg'on bo'ladi.

Odatda, biror ibora aytilsa, ravshanki, bu ibora biror gap bo'lib, u darak, so'roq yoki undov alomatlariga ega bo'ladi.

Matematik mantiqda chinligi yoki yolg'onligi bir qiymatli aniqlanadigan darak gaplar o'rganiladi. Bunday darak gaplar *mulohaza* deb ataladi.

Masalan, *Toshkent – O'zbekiston davlatining poytaxti, 13 soni tub son bo'ladi* degan darak gaplar mulohaza bo'ladi. Ravshanki, bu mulohazalar chin.

Boku – Ukraina davlatining poytaxti, uchburchak ichki burchaklari yig'indisi 360° *ga teng* degan darak gaplar ham mulohaza bo'ladi. Bu mulohazalar yolg'ondir.

Shuni ta'kidlash lozimki, har qanday darak gap mulohaza bo'lavermaydi.

Masalan, *oliy o'quv yurtining talabasi* degan darak gap mulohaza emas, chunki talaba haqida hech narsa tasdiqlanmagan.

Shuningdek, *agar uchburchakning barcha tomonlari bir-biriga teng bo'lsa, bunday uchburchak teng tomonli deyiladi*, degan darak gap ham mulohaza bo'la olmaydi, chunki u tasdiqlovchi bo'lmay, balki aniqlovchi gapdir.

Demak, mulohaza deganda, chinligi yoki yolg'onligini bir qiymatli aniqlash mumkin bo'lgan har qanday tasdiqlovchi darak gap tushunilar ekan.

Mulohazalar bosh harflar, masalan,

$$A, B, C, >\ , A_1, B_1, C_1, \ldots, A_n, B_n, C_n, \ldots$$

bilan, ulardan tuzilgan to'plam Φ harfi bilan belgilanadi.

Matematik mantiqda mulohazalarning ma'no yoki mazmuni bilan emas, balki ularning chin yoki yolg'on ekanini aniqlash bilan shug'ullaniladi.

Har bir mulohaza faqat ikkita: chin yoki yolg'on "qiymat" larga ega bo'ladi. Qulaylik uchun chinni 1, yolg'onni 0 "qiymat" lar bilan belgilaymiz.

Demak, mulohazalar to'plami Φ da shunday

$$\mu = \mu(A)^{\bullet}$$

funksiya aniqlanar ekanki,

$$\mu(A) = \begin{cases} 1, \text{ agar } A - \text{chin fikr bo'lsa,} \\ 0, \text{ agar } A - \text{yolg'on fikr bo'lsa} \end{cases}$$

bo'lar ekan. $\mu = \mu(A)$ mantiqiy funksiya, μ_0 ga esa $\mu_0 = \mu(A_0)$, $A_0 \in \Phi$ mantiqiy qiymat deyiladi.

Odatda, mulohazalar bir-biri bilan turli usullarda bog'lanib, yangi murakkab mulohazalarni yuzaga keltiradi. Albatta, bunday mulohazalarning murakkabligi ularning bog'lanishiga bog'liq bo'ladi. Quyida shunday bog'lanishlarni (mantiqiy amallarni) qaramaymizki, bunda murakkab mulohazaning chinligi, unda qatnashgan mulohazalarning chinligi orqali bir qiymatli aniqlanadigan bo‘lsin.

Endi mulohazalar ustida bajariladigan mantiqiy amallarni keltiramiz.

1°. ***Inkor amali.*** Biror A mulohazani olaylik. A chin bo‘lganda, yolg‘on va A yolg‘on bo‘lganda, chin bo‘ladigan mulohaza A mulohazaning ***inkori*** deyiladi. U A mulohaza oldiga ushbu $\rceil$ ishorani qo‘yish bilan belgilanadi va “A emas” deb o‘qiladi.

Demak, A mulohaza, $(\rceil A)$ esa uning inkori. Bu holda:

A chin bo‘lganda, $\mu(A)=1, \quad \mu(\rceil A)=0$,

A yolg‘on bo‘lganda $\mu(A)=0, \quad \mu(\rceil A)=1$.

2°. ***Konyunksiya amali.*** Ikki A va B mulohazalarni olaylik. A va B mulohazalar bir vaqtda chin bo‘lgandagina chin bo‘ladigan mulohaza A va B larning konyunktiv bog‘lanishidan sodir bo‘lgan mulohaza (qisqacha A va B mulohazalarning konyunksiyasi) deyiladi. U $(A \wedge B)$ kabi belgilanib, “A konyunksiya B” deb o‘qiladi.

Bu holda A va B mulohazalar $(A \wedge B)$ ning konyunktiv hadlari deyiladi. Konyunktiv mantiqiy amal, so‘zlashuvlarda “va” bog‘lovchisini ifodalaydi. Ravshanki,

$\mu(A)=1, \mu(B)=1$ *bo‘lganda,* $\mu(A \wedge B)=1$;

$\mu(A)=1, \mu(B)=0$ *bo‘lganda,* $\mu(A \wedge B)=0$;

$\mu(A)=0, \mu(B)=1$ *bo‘lganda,* $\mu(A \wedge B)=0$;

$\mu(A)=0, \mu(B)=0$ *bo‘lganda,* $\mu(A \wedge B)=0$.

3°. ***Dizyunksiya amali.*** A va B mulohazalarning kamida bittasi chin bo‘lgandagina chin bo‘ladigan mulohazalarning dizyunktiv bog'lanishidan sodir bo'lgan mulohaza (qisqacha, A va B mulohazalarning dizyunksiyasi) deyiladi.

U $(A \vee B)$ kabi belgilanib, "A dizyunksiya B" deb o'qiladi. A va B mulohazalar $(A \vee B)$ ning dizyunktiv hadlari deyiladi. Dizyunktiv mantiqiy amal so'zlashuvlarda "yoki" bog'lovchisini ifodalaydi. Bu holda:

$$\mu(A)=1, \mu(B)=1 \text{ } bo\text{'}lganda, \ \mu(A \vee B)=1;$$

$$\mu(A)=1, \mu(B)=0 \text{ } bo\text{'}lganda, \ \mu(A \vee B)=1;$$

$$\mu(A)=0, \mu(B)=1 \text{ } bo\text{'}lganda, \ \mu(A \vee B)=1;$$

$$\mu(A)=0, \mu(B)=0 \text{ } bo\text{'}lganda, \ \mu(A \vee B)=0.$$

4°. *Implikatsiya amali.* A mulohaza chin, B mulohaza yolg'on bo'lgandagina yolg'on bo'lib, qolgan barcha hollarda chin bo'ladigan mulohaza A va B larning implikativ bog'lanishidan sodir bo'lgan mulohaza (qisqacha, A va B larning implikatsiyasi) deyiladi. U $(A \to B)$ kabi belgilanib, "A implikatsiya B" deb o'qiladi.

Implikatsiya uchun:

$$\mu(A)=1, \mu(B)=1 \text{ } bo\text{'}lganda, \ \mu(A \to B)=1;$$

$$\mu(A)=1, \mu(B)=0 \text{ } bo\text{'}lganda, \ \mu(A \to B)=0;$$

$$\mu(A)=0, \mu(B)=1 \text{ } bo\text{'}lganda, \ \mu(A \to B)=1;$$

$$\mu(A)=0, \mu(B)=0 \text{ } bo\text{'}lganda, \ \mu(A \to B)=1.$$

5°. *Ekvivalensiya amali.* A va B mulohazalar bir xil qiymat chin yoki yolg'on bo'lgandagina chin bo'lib, qolgan barcha hollarda yolg'on bo'ladigan mulohaza A va B larning ekvivalent bog'lanishidan sodir bo'lgan mulohaza (qisqacha, A va B

larning ekvivalensiyasi) deyiladi. U $(A \leftrightarrow B)$ kabi belgilanib, "A ekvivalensiya B" deb o'qiladi.

Ekvivalensiya uchun:

$$\mu(A)=1, \mu(B)=1 \text{ } bo\text{'}lganda, \text{ } \mu(A \leftrightarrow B)=1;$$
$$\mu(A)=1, \mu(B)=0 \text{ } bo\text{'}lganda, \text{ } \mu(A \leftrightarrow B)=0;$$
$$\mu(A)=0, \mu(B)=1 \text{ } bo\text{'}lganda, \text{ } \mu(A \leftrightarrow B)=0;$$
$$\mu(A)=0, \mu(B)=0 \text{ } bo\text{'}lganda, \text{ } \mu(A \leftrightarrow B)=1.$$

Shunday qilib, mulohazalar ustida inkor $(\rceil)$, konyunksiya $(\wedge)$, dizyunksiya $(\vee)$, implikatsiya $(\rightarrow)$ va ekvivalensiya $(\leftrightarrow)$ amallari kiritildi.

Yuqoridagi (1°), (2°), (3°), (4°) va (5°) munosabatlarni inobatga olib, quyidagi chinlik jadvalini tuzamiz:

Chinlilik jadvali

$\mu(A)$	$\mu(B)$	$\mu(\rceil A)$	$\mu(A \wedge B)$	$\mu(A \vee B)$	$\mu(A \rightarrow B)$	$\mu(A \leftrightarrow B)$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Umuman olganda, mulohazalar ustida 16 ta binar amalni aniqlash mumkin.

2- §. Mulohazalar algebrasi formulalari

Mazkur bobning 1-paragrafida mulohazalar ustida mantiqiy amallar bilan tanishdik. Unda A va B mulohazalar bo'lganda

$$(\neg A),\ (A \wedge B),\ (A \vee B),\ (A \rightarrow B),\ (A \leftrightarrow B)$$

lar ham mulohaza bo'lishini ko'rdik. Ayni paytda, bu mulohazalar A va B lardan tashkil topgan murakkab mulohazalarni ifodalaydi.

Aytaylik, A chin, B yolg'on mulohaza bo'lsin. Unda

$$(A \vee B)$$

chin mulohaza bo'ladi.

Agar C mulohaza yolg'on, D mulohaza chin bo'lsa, unda

$$(C \leftrightarrow \neg D)$$

chin mulohaza bo'ladi. Ravshanki,

$$((A \vee B) \rightarrow (C \leftrightarrow \neg D)$$

bo'lib, u mulohazalar va mantiqiy amallardan tashkil topgan ifodadir.

Shunga o'xshash,

$$(((A \wedge B) \rightarrow C) \vee ((A \vee C) \wedge \neg B))$$

ham mulohazalar va amallardan tuzilgan ifoda bo'ladi.

Endi mulohazalar va mantiqiy amallardan tashkil topgan ifodalarni chuqurroq o'rganamiz. Bu "formula" tushunchasiga olib keladi.

Mulohazalar to'plami Φ hamda mantiqiy amallar $\rceil$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ lardan tashkil topgan ushbu oltilik mulohazalar algebrasi deyiladi.

Bunda Φ – mulohazalar algebrasining asosiy to'plami; $\rceil$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ lar esa mulohazalar algebrasining asosiy amallari deyiladi.

Ma'lumki, mulohazalar turlicha bo'lib, ularni biror o'zgaruvchining "qiymatlari" deb qarash mumkin.

O'zgarish sohasi mulohazalar to'plamidan iborat bo'lgan har qanday o'zgaruvchi *propozitsional* o'zgaruvchi deyiladi. Bunday o'zgaruvchilar

$$x, y, z, x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n \left(X, Y, Z, \quad X_1, Y_1, Z_1\right)$$

harflari bilan belgilanadi.

Endi mulohazalar algebrasining asosiy tushunchalaridan biri – "formula" tushunchasini keltiramiz.

Mulohazalar algebrasining formulasi (qisqacha, M.A.F.) deganda, mulohazalar va mantiqiy amallarning bog'lanishidan tashkil topgan ifodani tushunamiz. Demak, biz yuqorida M.A.F. ga bir necha bor duch kelgan ekanmiz.

M.A.F. tushunchasi induktiv usulda beriladi.

2.1-ta'rif. *1) Har qanday propozitsional o'zgaruvchi M.A.F dir.*

2) F_1 va F_2 ifodalar M.A.F bo'lsa, u holda $\rceil F_1$, $(F_1 \wedge F_2)$, $(F_1 \vee F_2)$, $(F_1 \rightarrow F_2)$, $(F_1 \leftrightarrow F_2)$, ifodalar ham M.A.F dir.

3) Boshqacha ko'rinishli M.A.F. yo'q, ya'ni M.A.F. lari faqat yuqorida keltirilgan 1 va 2- bandlarda aytilganlar yordamida hosil qilinadi.

Demak, propozitsional o‘zgaruvchilar, mantiqiy amallar (bog‘lovchilar) $\rceil$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ va qavslardan tuzilgan ifodalar faqat va faqat 1 va 2- bandlar yordamida tashkil topsagina M.A.F. bo‘lar ekan.

Misollar. 1. Ushbu:

$$((X_1 \wedge X_2) \rightarrow (\rceil X_1 \vee X_2))$$

ifodani qaraylik. Ta’rifning 1- bandiga ko‘ra, X_1, X_2, X_3 lar, 2-bandiga ko‘ra, $\rceil X_1$, $(X_1 \wedge X_2)$ lar M.A.F. bo‘ladi. Yana 2- bandga ko‘ra, $\rceil X_1 \vee X_2)$ va $((X_1 \wedge X_2) \rightarrow (\rceil X_1 \vee X_2))$ ifodalarning M.A.F. bo‘lishini topamiz. Demak,

$$((X_1 \wedge X_2) \rightarrow (\rceil X_1 \vee X_2))$$

ifoda M.A.F. bo‘ladi.

2. Ushbu:

$$((X_2 \wedge X_3) \leftrightarrow (X_1 \vee X_4))$$

ifodani qaraylik.

Ta’rifning 1 va 2- bandlariga binoan, X_1, X_2, X_3, X_4, $(X_2 \wedge X_3)$, $(X_1 \vee X_4)$ lar va nihoyat

$$((X_2 \wedge X_3) \leftrightarrow (X_1 \vee X_4))$$

ifoda M.A.F. bo‘ladi.

3. $(((X_1 \wedge (X_2)) \rightarrow X_3) \vee ((X_1 \vee X_3) \wedge (\rceil X_2)))$ ifoda M.A.F. bo‘ladi.

4. Ushbu

$$\rceil X_1 \to (\rceil X_2 \wedge X_3))$$

ifodani qaraylik.

Ravshanki, X_1, X_2, X_3 hamda $\rceil X_1$, $\rceil X_2$ lar M.A.F bo'ladi. Ayni paytda $\rceil X_1 \to (\rceil X_2 \wedge X_3))$ ifoda M.A.F. emas, chunki unda butun ifodani o'rovchi chap qavs yetishmaydi.

Aytaylik, $X_1, X_2,...,X_n$ propozitsional o'zgaruvchilar bo'lsin. Bu o'zgaruvchilardan tuzilgan M.A.F. ni umumiy holda quyidagicha belgilaymiz:

$$F(X_1, X_2, ..., X_n). \qquad (*)$$

Endi (*) da X_1, X_2, ..., X_n larning o'rniga, mos ravishda, tayin olingan A_1, A_2, ..., $(A_k \in \Phi$, $k = 1, 2,..., n)$ mulohazalarni qo'yib,

$$F(A_1, A_2, ..., A_n)$$

murakkab mulohazani hosil qilamiz.

Har bir A_k $(k = 1,\ 2,...,n)$ mulohazaning qiymati $\mu(A_k)$ $(k = 1,2,...,n)$ ga ko'ra, $F(A_1, A_2, ..., A_n)$ murakkab mulohazaning qiymati ushbu

$$\mu(F(A_1, A_2,..., A_n)) = F(\mu(A_1), \mu(A_2), ..., \mu(A_n))$$

tenglikdan topiladi.

Ma'lumki, har bir propozitsional o'zgaruvchi 1 yoki 0 qiymatni (mulohaza chin bo'lganda – 1 ni, mulohaza yolg'on bo'lganda – 0 ni) qabul qiladi.

Yuqorida keltirilgan (*) dan ko'rinadiki, murakkab $F(A_1, A_2, ..., A_n)$ mulohazaning qiymati $\mu(F(A_1, A_2, ..., A_n))$ ni $A_1, A_2, ..., A_n$ mulohazalar o'rniga, ularning mantiqiy qiymatlari 1 yoki 0 ni (1 yoki 0 simvollarni) qo'yib, so'ngra bu simvollarga nisbatan formulada ishtirok etgan amallar ketma-ket (chinlik jadvaliga binoan) bajarilishi natijasida topiladi.

Masalan, $F(A_1, A_2, A_3)) = ((A_1 \to A_2) \wedge \neg A_3)$ bo'lib,

$$\mu(A_1) = 1, \quad \mu(A_2) = 0, \quad \mu(A_3) = 1$$

bo'lsin. Unda

$$\mu(F(A_1, A_2, A_3)) = \mu((A_1 \to A_2) \wedge \neg A_3) =$$
$$= ((\mu(A_1) \to \mu(A_2)) \wedge \neg \mu(A_3)) = (1 \to 0) \wedge \neg 0 = 0$$

bo'ladi.

Odatda, bunday holda $X_1, X_2, ..., X_n$ propozitsional o'zgaruvchilar mos ravishda 1, 0, 1 qiymatlarni qabul qilganda

$$((X_1 \to X_2) \wedge (\neg X_3))$$

formula 0 qiymatni qabul qiladi deyiladi. Ko'p hollarda $\mu(A) = 0$, $\mu(B) = 1$ o'rniga $A = 0$, $B = 1$ deb yozish qulay bo'ladi.

Ushbu kelishuvga ko'ra, $X_1, X_2,...., X_n$ o'zgaruvchilarning chinlik qiymatlari $e_1, e_2,...,e_n$ bo'lgan, bu yerda $e_i = 1$ yoki $e_i = 0\,(i = 1,...,n)$, $A_k \in \Phi(k = 1,...,n)$ mulohazalar uchun $\mu(F(A_1, A_2, ..., A_n) = e$ bo'ladi deb olinishini $F(e_1, e_2, ..., e_n) = e$ bo'lar ekan deb aytamiz.

Yuqoridagi misollardan ko'rinadiki, formulalarning yozuvlarini qavslar murakkablashtirib yuboradi. Bu murakkablikni yengillashtirish maqsadida "mantiqiy amallarning kuchi" tushunchasini kiritamiz.

Formulalarni o'zaro bog'laydigan eng "kuchli" amalni "$\urcorner$" deb qabul qilamiz. Undan so'ng formulalarni bog'lash "kuchiga" qarab, mantiqiy amallar quyidagi tartibda joylashadi ("kuch" ning pasayishi tartibida):

$$\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow .$$

Bu kelishuvdan so'ng 3-misolda keltirilgan formulani quyidagicha yozish mumkin:

$$(X_1 \wedge X_2) \rightarrow X_3) \vee (X_1 \vee X_3) \wedge \urcorner X_2 .$$

3- §. "Tavtologiya" tushunchasi. Tavtologiya haqida teoremalar

Propozitsional o'zgaruvchilar $X_1, X_2,...., X_n$ larga bog'liq M.A.F. $F(X_1, X_2,...., X_n)$ berilgan bo'lsin.

Agar ixtiyoriy $i(i = 1,2,3,...,n)$ lar uchun $e_i = 0$ yoki $e_i = 1$ bo'lsa, $e_1, e_2, e_3, ..., e_n$ ketma-ketlik $x_1, x_2,...., x_n$ propozitsional o'zgaruvchilarning ***chinlik taqsimoti*** deyiladi.

Demak, propozitsional o‘zgaruvchilar $X_1, X_2,...., X_n$ larning chinlik taqsimoti 0 va 1 simvollardan tuzilgan ixtiyoriy $e_1, e_2, e_3, ..., e_n$ ketma-ketlikni ifodalar ekan.

3.1-ta’rif. *Agar* $F(X_1, X_2,...., X_n)$ *formulada* $X_1, X_2,...., X_n$ *o‘zgaruvchilarning shunday chinlik taqsimoti* $e_1, e_2, e_3, ..., e_n$ *topilib,* $F(e_1, e_2, ..., e_n)=1$ $(F(e_1, e_2, ..., e_n)=0)$ *bo‘lsa,* $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ ***bajariluvchi (radlanuvchi) formula*** *deyiladi.*

Masalan, $F(X_1, X_2)=(X_1 \to X_2)$ formulada $F(1,0)=0$ sababli u radlanuvchi formula, $F(1,0)=1$ sababli u bajariluvchi formula bo‘ladi.

3.2-ta’rif. *Agar* $F(X_1, X_2,...., X_n)$ *formula propozitsional o‘zgaruvchi* $X_1, X_2,...., X_n$ *larning ixtiyoriy chinlik taqsimotida bir (nol) qiymat qabul qilsa,* $F(X_1, X_2,...., X_n)$ ***aynan rost*** *yoki tavtologiya aynan (**aynan yolg‘on** yoki **ziddiyat**) deyiladi.*

Masalan, ushbu $F_1(X_1, X_2)=((X_1 \wedge X_2) \to (X_1 \vee X_2))$ formulada $F_1(0,0)=F_1(1,0)=F_1(0,1)=F_1(1,1)=1$ bo‘lgani uchun $F_1(X_1, X_2)$ formula tavtologiya bo‘ladi.

Quyidagi $F_2(X_1, X_2)=\urcorner((X_1 \wedge X_2) \to (X_1 \vee X_2))$ formulada esa $F_2(0,0)=F_2(1,0)=F_2(0,1)=F_2(1,1)=0$ bo‘lganligi sababli F_2 formula ziddiyat bo‘ladi.

Odatda, $F(X_1, X_2,...., X_n)$ formulaning tavtologiya ekani, uning oldiga ushbu belgini qo‘yish bilan ifodalanib, $\models F(X_1, X_2,...., X_n)$ kabi yoziladi.

Faraz qilaylik, $F(X_1, X_2,...., X_n)$ hamda

$$F_1(X_1, X_2,...., X_n), \quad F_2(X_1, X_2,...., X_n),$$

$$\ldots, \; F_s(X_1,\; X_2, \ldots,\; X_n)$$

formulalar berilgan bo'lsin.

<u>3.3-ta'rif.</u> *Agar* $X_1,\; X_2, \ldots,\; X_n$ *larning ixtiyoriy chinlik taqsimoti* $e_1,\; e_2, \ldots, e_n$ *lar uchun*

$$F_1(e_1, e_2, \ldots, e_n) = 1,$$
$$F_2(e_1, e_2, \ldots, e_n) = 1,$$
$$> > > > > > > > >$$
$$F_s(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$$

bo'lishidan $F(e_1, e_2, \ldots, e_n) = 1$ *ekani kelib chiqsa, u holda* $F(X_1,\; X_2, \ldots,\; X_n)$ *formula* $F_1(X_1,\; X_2, \ldots,\; X_n)$, $F_2(X_1,\; X_2, \ldots,\; X_n)$, ..., $F_s(X_1,\; X_2, \ldots,\; X_n)$ *formulalarning **mantiqiy natijasi** deyiladi. U*

$$F_1,\; F_2, \ldots,\; F_s \;\models F\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

kabi belgilanadi.

Masalan, $F(X_1, X_2) = (X_1 \vee X_2)$ hamda $F_1 = X_1,\; F_2 = X_2$ bo'lsin. Ravshanki, $F_1(X_1, X_2) = X_1$, $F_2(X_1, X_2) = X_2$, $F(X_1, X_2) = (X_1 \vee X_2)$ lar uchun $F_1(1,1) = 1$, $F_2(1,1) = 1$ hamda $F_1(1,1) = 1$ bo'ladi. Demak,

$$F_1,\; F_2 \;\models F(X_1, X_2)$$

ya'ni

$$X_1,\; X_2 \;\models (X_1 \vee X_2)$$

bo'ladi. (Bu misolda X_1,X_2 larning qolgan chinlik taqsimotlari uchun $F_1(e_1,e_2)=0$, $F_2(e_1,e_2)=0$ bo'lganligi uchun F_1 va F_2 larning bu qiymatlari qaralmadi).

Ushbu: $F_1(X_1,X_2)=X_1$, $F(X_1,X_2)=(X_1 \wedge X_2)$ misolda $F_1(1,0)=1$, $F(1,0)=0$ bo'lganligi sababli ushbu $F(X_1,X_2)=(X_1 \wedge X_2)$ formula $F_1(X_1,X_2)=X_1$ formulaning mantiqiy natijasi bo'lmaydi (ya'ni $X_1 \models (X_1 \wedge X_2)$ munosabat o'rinli emas).

Endi tavtologiya haqidagi teoremalarni keltiramiz

3.1-teorema. *Agar* $F=F(X_1,\ X_2,\ldots,\ X_n)$ *formula* $F_1=F_1(X_1,\ X_2,\ldots,\ X_n)$, $F_2=F_2(X_1,\ X_2,\ldots,\ X_n)$, .., $F_s=F_s(X_1,\ X_2,\ldots,\ X_n)$ *formulalarning mantiqiy natijasi bo'lsa,* $((F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_s) \rightarrow F)$ *formula tavtologiya bo'ladi va aksincha. Ya'ni:*

$$F_1, F_2, \ldots, F_s \models F \ \textit{bo'lsa} \ \models F_1((F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_s) \rightarrow F)$$

va aksincha

$$\models ((F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_s) \rightarrow F) \ \textit{bo'lsa} \ F_1, F_2, \ldots, F_s \models F.$$

Isbot. Aytaylik, F formula $F_1,\ F_2,\ldots,\ F_s$ formulalarning mantiqiy natijasi bo'lsin: $F_1,\ F_2,\ \ldots,\ F_s \models F$ bo'ladi. Shunga qaramay, $((F_1 \wedge \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_s) \rightarrow F)$ formula tavtologiya bo'lmasin deb faraz qilaylik. Unda propozitsional o'zgaruvchilar $X_1,\ X_2,\ldots,\ X_n$ larning shunday chinlik taqsimoti $e_1,\ e_2,\ldots,\ e_n$ topiladiki, $(F_1(e_1,\ e_2,\ldots,\ e_n) \wedge \ldots \wedge F_s(e_1,\ e_2,\ldots,\ e_n)=1$ bo'lib, $F(e_1,\ e_2,\ldots,\ e_n)=0$ bo'ladi.

$F_1(e_1,\ e_2,\ldots,\ e_n) \wedge F_2(e_1,\ e_2,\ldots,\ e_n) \wedge F_s(e_1,\ e_2,\ldots,\ e_n)=1$ bo'lishidan $F_1(e_1,\ e_2,\ldots,\ e_n)=1$, $F_2(e_1,\ e_2,\ldots,\ e_n)=1$, $F_s(e_1,\ e_2,\ldots,\ e_n)$

$=1$ bo'lishi kelib chiqashi ravshan. Ayni paytda, $F_1(e_1, e_2,..., e_n)$ $= 0$ bo'lishi $F_1, F_2,..., F_s \models F$ ga ziddir. Bu ziddiyatning kelib chiqishiga sabab $((F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_s) \rightarrow F)$ formula tavtologiya bo'lmasin deb qilingan farazdir. Demak, $F_1, F_2,..., F_s \models F$ bo'lsa, $\models(F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_s) \rightarrow F)$ bo'lar ekan.

Aytaylik, $((F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_s) \rightarrow F)$ formula tavtologiya bo'lsin:

$$\models(F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_s) \rightarrow F).$$

Unda implikatsiyaning chinlik jadvaliga binoan, biror $e_1, e_2,...,$ e_n chinlik taqsimoti uchun

$(F_1(e_1, e_2,..., e_n) \wedge F_2(e_1, e_2,..., e_n) \wedge F_s(e_1, e_2,..., e_n) = 1$ bo'lishidan, albatta, $F_1(e_1, e_2,..., e_n) = 1$ bo'lishi kelib chiqadi. Binobarin,

$$F_1(e_1, e_2,..., e_n) = 1, \ F_2(e_1, e_2,..., e_n) = 1, \ F_s(e_1, e_2,..., e_n) = 1$$

bo'ladi. Bundan esa, $F(X_1, X_2,..., X_n)$ formula $F_1(X_1, X_2,..., X_n)$, $F_2(X_1, X_2,..., X_n)$, ..., $F_s(X_1, X_2,..., X_n)$ formulalarning mantiqiy natijasi ekanini topamiz: $F_1, F_2,..., F_s \models F$. Teorema isbot bo'ldi.

3.2-teorema. $F(X_1, X_2,..., X_n)$ *formulaning ziddiyat bo'lishi uchun* $\rceil F(X_1, X_2,..., X_n)$ *formulaning tavtologiya bo'lishi zarur va yetarli.*

Bu teoremaning isboti ravshan.

3.3-teorema. *Agar* $F(X_1, X_2,..., X_n)$ *hamda* $(F(X_1, X_2,..., X_n) \rightarrow G(X_1, X_2,..., X_n))$ *formulalar tavtologiya bo'lsa, u holda* $G(X_1, X_2,...., X_n)$ *formula ham tavtologiya bo'ladi.*

Isbot. Teskarisini faraz qilaylik, ya'ni teoremaning sharti bajarilsa ham $G\,(X_1,\ X_2,...,\ X_n)$ formula tavtologiya bo'lmasin. U holda $X_1,\ X_2,...,\ X_n$ larning shunday $e_1,\ e_2,...,e_n$ chinlik taqsimoti topiladiki, $G\,(X_1,\ X_2,...,\ X_n)$ bo'ladi.

$F(X_1,\ X_2,\ ...,\ X_n)$ hamda $(F(X_1,\ X_2,...,\ X_n)\to \to G\,(X_1,\ X_2,...,\ X_n))$ lar tavtologiya bo'lganligi uchun $F\,(e_1,e_2,\ ...,\ e_n)=1$, $(F\,(e_1,e_2,\ ...,e_n)\to G\,(e_1,e_2,\ ...,e_n))=1$ bo'ladi.

Ikkinchi tomondan, $G_1(e_1,e_2...,e_n))=0$, $F_1(e_1,e_2,...,e_n)=1$ bo'lishidan $F_1(e_1,e_2,...,e_n)\to G_1(e_1,e_2,...,e_n))=0$ ekanligini topamiz. Bu esa $(F(X_1,\ X_2,...,\ X_n)\to G\,(X_1,\ X_2,...,\ X_n))$ ning tavtologiya ekanligiga zid. Teorema isbot bo'ldi.

Faraz qilaylik, $F=F\left(X_1,\ X_2,...,\ X_n\right)$ formula berilgan bo'lsin. Bu formuladagi $X_1,\ X_2,...,\ X_n$ larning o'rniga mos ravishda

$$F_1\,(Y_1,Y_2,\ ...,Y_m),\ F_2\,(Y_1,Y_2,\ ...,Y_m),>\ ,\ F_n\,(Y_1,Y_2,\ ...,Y_m)$$

formulalarni qo'yish natijasida hosil bo'lgan formulani F_* deylik:

$$F_* = F_*\,(Y_1,Y_2,\ ...,Y_m)\,.$$

3.4-teorema. *Agar* $F=F\left(X_1,\ X_2,...,\ X_n\right)$ *formula tavtologiya bo'lsa, u holda* $F_*=F_*\,(Y_1,Y_2,\ ...,Y_m)$ *ham tavtologiya bo'ladi.*

Isbot. Formuladagi $Y_1,Y_2,\ ...,Y_m$ propozitsional o'zgaruvchilarning ixtiyoriy chinlik taqsimoti $e_1,\ e_2,...,\ e_m$ bo'lsin. Unda

$$F_1(e_1', e_2',..., e_m') = e_1,$$
$$F_2(e_1', e_2',..., e_m') = e_1,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$F_n(e_1', e_2',..., e_m') = e_n$$

bo'ladi. Agar bu qiymatlar $F = F(X_1, X_2,...., X_n)$ dagi $X_1, X_2,...., X_n$ o'zgaruvchilarning o'rniga qo'yilsa, unda F ning chinlik qiymati bilan F_* ning chinlik qiymati ustma-ust tushishini aniqlaymiz. Unda $F(X_1, X_2,...., X_n)$ formula tavtologiya bo'l-gani uchun $F(e_1, e_2,..., e_n) = 1$ bo'ladi.

Demak,

$$F_*(e_1', e_2',..., e_m') = 1$$

$F_* = F_*(Y_1, Y_2, ..., Y_m)$ formula uchun ham bo'ladi. Bu esa teoremani isbotlaydi.

3.5-teorema. *Faraz qilaylik, G_1 formula F_1 formuladan, unda bir yoki bir necha joyda ishtirok etgan F qism formulani G formula bilan almashtirish natijasida hosil qilingan bo'lsin. U holda:*

1) $\models (F \to G) \to (F_1 \to G_1)$

bo'ladi.

2) $\models (F \leftrightarrow G)$

bo'lishidan $\models (F_1 \leftrightarrow G_1)$ *bo'lishi kelib chiqadi.*

isbot. Aytalik, G_1 va F_1 formulalarda ishtirok etuvchi propozitsional o'zgaruvchilarning ixtiyoriy chinlik taqsimotida

$$\mu(F) \neq \mu(G)$$

bo'lsin. U holda, ravshanki,

$$\mu((F \leftrightarrow G) \rightarrow (F_1 \leftrightarrow G_1)) = 1$$

bo'ladi. Agar

$$\mu(F) = \mu(G)$$

bo'lsa, u holda

$$\mu(F_1) = \mu(G_1)$$

bo'ladi. Chunki, G_1 formula F_1 formuladagi G ni F ga almashtirish natijasida hosil bo'lganidan, ularning chinlik qiymatlari bir xil bo'ladi.

Demak,

$$(F \leftrightarrow G) \rightarrow (F_1 \leftrightarrow G_1).$$

Endi teoremaning ikkinchi qismini isbotlaymiz.

Shartga ko'ra,

$$\models (F \leftrightarrow G).$$

Yuqorida keltirilgan isbotga binoan

$$\models (F \leftrightarrow G) \rightarrow (F_1 \leftrightarrow G_1).$$

Mazkur paragrafda keltirilgan 3.3-teoremadan foydalanib, $\models (F_1 \leftrightarrow G_1)$ bo'lishini topamiz. Teorema isbot bo'ldi. Endi mulohazalar algebrasida muhim bo'lgan "*formulalarning ekvivalentligi*" tushunchasini keltiramiz.

Ikki F va G formulalar berilgan bo'lsin.

3.4-ta'rif. *Agar $(F \leftrightarrow G)$ formula tavtologiya bo'lsa, ya'ni $\models (F_1 \leftrightarrow G_1)$ bo'lsa, u holda F va G* ***mantiqiy ekvivalent formulalar*** *deyiladi va $F \sim G$ kabi belgilanadi.*

Ma'lumki, "*ekvivalentlik*" tushunchasi to'plamlarni sinflarga ajratish imkonini berar edi. Bu yerda ham "*formulalarning ekvivalentligi*" tushunchasi barcha formulalar to'plamini sinflarga ajratadi. Turli sinfga mansub bo'lgan formulalar bir-biriga ekvivalent bo'lmaydi.

Misol. Ushbu

$$F(X_1, X_2) = (X_1 \to X_2),$$
$$G(X_1, X_2) = (\urcorner X_1 \vee X_2)$$

formulalarni qaraymiz. Ular uchun chinlik jadvalini tuzamiz:

X_1	X_2	$X_1 \to X_2$	$(X_1 \to X_2) \to (\urcorner X_1 \vee X_2)$	$\urcorner X_1 \vee X_2$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

Bu jadvaldan ko'rinadiki, $(X_1 \to X_2) \to (\urcorner X_1 \vee X_2)$ formula tavtologiya, ya'ni $\models (X_1 \to X_2) \to (\urcorner X_1 \vee X_2)$ ekan. Bu esa ta'rifga binoan F va G formulalarning ekvivalent bo'lishini bildiradi:

$$(X_1 \to X_2) \sim (\urcorner X_1 \vee X_2).$$

3.6-teorema. *F va G formulalar berilgan bo'lsin. Quyidagi uchta shart o'zaro teng kuchli:*

1) $F \sim G$;

2) $\models (F \to G) \wedge (G \to F)$;

3) $F \models G, G \models F$.

Isbot. Aytaylik, F va G formulalar mantiqiy ekvivalent bo'lsin: $F \sim G$. Ta'rifga binoan $\models (F \leftrightarrow G)$ bo'ladi. Bunda, agar F va G formulalarda ishtiok etuvchi o'zgaruvchilarning shunday chinlik taqsimoti topilib qolsaki, ular uchun $\mu((F \to G) \wedge (G \to F) = 0$ bo'lsa,

$$\mu((F \to G) = 0 \text{ yoki } ((G \to F) = 0$$

bo'lib, $\mu(F) \to \mu(G) = 0$, $\mu(G) \to \mu(F) = 0$ undan esa

$$\mu(F) = 1, \mu(G) = 0 \text{ yoki } \mu(G) = 1, \mu(F) = 0$$

bo'lib qolishini aniqlaymiz. Bu esa $F \sim G$ bo'lishiga ziddir.

Demak, $\models (F \to G) \wedge (G \to F)$.

Shunday qilib, $F \sim G$ bo'lganda $\models (F \to G) \wedge (G \to F)$ bo'lishi ko'rsatildi.

Aytaylik, $\models (F \to G) \wedge (G \to F)$ bo'lsin. U holda konyunksiyaning chinlik jadvaliga ko'ra, ixtiyoriy chinlik taqsimotida

$$\mu(F \to G) = 1, (G \to F) = 1$$

bo'ladi. Demak,

$$\models F \to G, \models G \to F.$$

Unda 3.1-teoremaga muvofiq

$$F \models G, G \models F$$

bo'ladi.

Shunday qilib, $\models (F \to G) \wedge (G \to F)$ bo‘lishidan $F \models G$, $G \models F$ bo‘lishi kelib chiqadi.

Endi $F \models G$, va $G \models F$ bo‘lsin. Unda 3.1-teoremaga ko‘ra $(F \to G)$ hamda $(G \to F)$ formulalar tavtologiya bo‘lmasin deb qaraydigan bo‘lsak, u holda shunday chinlik taqsimot topilib, $\mu(F) \neq \mu(G)$ bo‘lib qoladi.

Bunda $\mu(F) = 1, \mu(G) = 0$ bo‘ladigan bo‘lsa, $F \models G$ bo‘lishiga zid, $\mu(F) = 0$, $\mu(G) = 1$ bo‘lsa, $G \models F$ bo‘lishiga zid natijalarga kelamiz.

Demak, ixtiyoriy chinlik taqsimotda $\mu(F) = \mu(G)$, ya’ni $\models (F \to G)$ bo‘ladi. Ta’rifga binoan $F \sim G$ bo‘ladi.

Shunday qilib, 3.6-teoremadagi 1, 2 va 3 tasdiqlar orasida

$$1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 1)$$

munosabat borligi ko‘rsatildi. Bu esa teoremani isbotlaydi.

Yuqorida tavtologiya haqida keltirilgan teoremalardan foydalanib, ba’zi xulosalarni chiqaramiz.

Ma’lumki,

$$(X_1 \to X_2) \sim (F_1 X_1 \vee X_2),$$

ya’ni

$$\models ((X_1 \to X_2) \leftrightarrow (\rceil X_1 \vee X_2))$$

bo‘ladi.

Agar X_1 va X_2 lar, mos ravishda, F_1 va F_2 larga almashtirilsa, unda 4-teoremaga binoan

$$(F_1 \leftrightarrow F_2)\ (\rceil F_1 \vee F_2)$$

formula ham tavtologiya bo‘ladi. Boshqacha qilib aytganda, ixtiyoriy F_1 va F_2 formulalar uchun $(F_1 \to F_2)$ formula $(\rceil F_1 \vee F_2)$ formulaga mantiqan ekvivalent bo‘ladi.

Agar F_1 va F_2 formulalarning o‘zida $\to$ amali qatnashgan bo‘lsa, unda 3.5-teoremadan foydalanib, ularni $\rceil$ va $\vee$ amallar bilan almashtiramiz. Shunday qilib, $\to$ amali qatnashgan formula, faqat $\rceil$ va $\vee$ amallari qatnashgan, ayni paytda, unga mantiiqan ekvivalent bo‘lgan formulaga ega bo‘linar ekan.

Agar biror formulada $\leftrightarrow$ amal ishtirok etsa, uni 3.6-teoremadan foydalanib, $\to$ va $\wedge$ amallar bilan, so‘ngra $\to$ amalni esa, $\rceil$ va $\vee$ amallar orqali ifodalab, $\leftrightarrow$ amal qatnashgan formuladan $\rceil$, $\vee$ va $\wedge$ amallar qatnashgan, ayni paytda, unga mantiqan ekvivalent bo‘lgan formulaga kelamiz.

Demak, mantiqiy ekvivalentlik aniqligida, barcha formulalarda $\to$ va $\leftrightarrow$ amallar ishtirok etmaydi deb qarash mumkin ekan.

Misol. Quyidagi ikki teoremani ko‘rib chiqamiz:

1-teorema. *Agar $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ vektorlar sistemasi R^n chiziqli fazoda erkli bo‘lsa, u holda ixtiyoriy sistema osti ham chiziqli erkli bo‘ladi.*

2-teorema. *Agar $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ vektorlar sistemasining biror-bir sistema osti chiziqli bog‘liq bo‘lsa, u holda vektorlar sistemasining o‘zi chiziqli bog‘liq bo‘ladi.*

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$A:\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ – vektorlar sistemasi chiziqli erkli,

$B:\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ ning ixtiyoriy sistema osti chiziqli erkli.

U holda 1-teorema $B \to A$, 2-teorema esa $\rceil B \to \rceil A$ ko‘rinishda bo‘ladi. Bu ikki teorema bir-biriga mantiqan ekvivalentmi?

Mulohazalar algebrasida ixtiyoriy X, Y lar uchun

$$(X \to Y) \sim \rceil Y \to \rceil X$$

bo‘ladi. Chinlik jadvalini tuzib,

$$\models (Y \to X)(\neg Y \to \neg X)$$

bo‘lishini ko‘rsatish qiyin emas.

Agar $X = A$, $Y = B$ deb olinsa, unda yuqoridagi ikki teoremaning bir-biriga mantiqan ekvivalent ekanligi kelib chiqadi. Demak, bu ikki teoremadan birini isbotlash kifoya.

4- §. Teng kuchli formulalar va asosiy teng kuchliliklar

4.1-ta’rif. *Mulohazalar algebrasining* $U(A_1, A_2, ..., A_n)$ *va* $B(A_1, A_2, ..., A_n)$ *formulalari propozitsional o‘zgaruvchilar qiymatlarining barcha tanlanmalarida bir xil qiymat qabul qilsa, bu formulalar teng kuchli formulalar deyiladi va u* $U \equiv B$ *ko‘rinishida yoziladi.*

4.1-misol. $F(A,B,C) = (A \Rightarrow B) \wedge C$ va $G(A,B,C) = (\neg A \vee B) \wedge C$ formulalar teng kuchli formulalar ekanligini ko‘rsatamiz:

A	B	C	$\neg A$	$A \Rightarrow B$	$\neg A \vee B$	$(A \Rightarrow B) \wedge C$	$(\neg A \vee B) \wedge C$
1	1	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	0	0

Agar F va G formulalar teng kuchli bo‘lsa, u holda $F \Rightarrow G$ va $G \Rightarrow F$ lar AR formulalar bo‘lishi ravshandir. Aksincha, qandaydir F va G (bir xil propozitsional o‘zgaruvchilarga ega bo‘lgan) formulalar uchun $F \Rightarrow G$ va $G \Rightarrow F$ lar AR formulalar bo‘lsa, u holda $F \equiv G$ bo‘ladi.

$A \Leftrightarrow B$ va $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ formulalar teng kuchli formulalar ekanligini ko‘rsataylik:

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$A \Leftrightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1

Shunday qilib, bu teng kuchliliklardan ko‘rinadiki, $F \equiv G$ bo‘lishi uchun $F \Leftrightarrow G$ formula AR formula bo‘lishi zarur va yetarlidir. Teng kuchli bo‘lish munosabati binar munosabat ekanligi ravshandir, ya’ni bu munosabat

1) $F \equiv F$ – refleksivlik;

2) agar $F \equiv G$ bo‘lsa, u holda $G \equiv F$ bo‘ladi – simmetriklik;

3) agar $F \equiv G$ va $G \equiv H$ bo‘lsa, u holda $F \equiv H$ bo‘ladi – tranzitivlik xossalariga egadir.

4.1-teorema. $F(B)$ – *jumlalar algebrasining ixtiyoriy formulasi, B uning qism formulasi bo‘lsin. Agar $B \equiv C$ bo‘lsa, u holda $F(B) \equiv F(C)$ bo‘ladi.*

Isbot. $B \equiv C$ bo‘lgani uchun B va C formulalar ularda qatnashgan proporsional o‘zgaruvchilar qiymatining barcha tanlanmalarida bir xil qiymatlarga erishadi. B va C formulalari qiymatlari 1 yoki 0 bo‘lgani uchun yo $F(1) \equiv F(1)$, yoki $F(0) \equiv F(0)$ hosil bo‘ladi. Bu esa $F(B) \equiv F(C)$ ekanini ko‘rsatadi.

4.2-teorema. $F(A_1, A_2, ..., A_n) \equiv G(A_1, A_2, ..., A_n)$ $A_1, A_2, ..., A_n$ *lar F va G formulalarning har birida qatnashgan barcha propozitsional o‘zgaruvchilar, $C_1, C_2, ..., C_n$ lar esa ixtiyoriy formulalar bo‘lsin. U holda $F(C_1, C_2, ..., C_n) \equiv G(C_1, C_2, ..., C_n)$ bo‘ladi;*

bunda har bir A_i $(i=\overline{1,n})$ propozitsional o'zgaruvchi berilgan teng kuchlilikda necha joyda qatnashgan bo'lsa, shuncha joyda mos C_i formula bilan almashtiriladi.

Isbot. $F(A_1, A_2, ..., A_n) \equiv G(A_1, A_2, ..., A_n)$ teng kuchlilikda qatnashgan har bir propozitsional o'zgaruvchi 1 yoki 0 qiymat qabul qiladi. $C_i(i=\overline{1,n})$ formula ham o'zi qatnashgan propozitsional o'zgaruvchilar qiymatlarining barcha tanlanmalarida 1 yoki 0 qiymat qabul qiladi. $C_i(i=\overline{1,n})$ formula tarkibida qatnashgan propozitsional o'zgaruvchilar $B_1, B_2, ..., B_k$ bo'lsin. $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ bu propozitsional o'zgaruvchilar qiymatlari tanlanmalaridan biri va $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ $C_1, C_2, ..., C_n$ formulalarning $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)$ tanlanmadagi qiymatlari tanlanmasi bo'lsin. Uzunligi n bo'lgan $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ tanlanma $A_1, A_2, ..., A_n$ propozitsional o'zgaruvchilar qabul qiladigan qiymatlar tanlanmalari orasida mavjud. F va G formulalar 2^n ta tanlanmaning har birida bir xil qiymatga ega bo'lishi uchun $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ tanlanmada ham bir xil qiymat qabul qiladilar.

Yuqorida isbotlangan teoremalardan bevosita quyidagi natijalar kelib chiqadi:

Agar $F_1 \equiv G_1$ va $F_2 \equiv G_2$ bo'lsa, u holda

1) $F_1 \vee F_2 \equiv G_1 \vee G_2$;

2) $F_1 \wedge F_2 \equiv G_1 \wedge G_2$;

3) $F_1 \Rightarrow F_2 \equiv G_1 \Rightarrow G_2$;

4) $F_1 \Leftrightarrow F_2 \equiv G_1 \Leftrightarrow G_2$;

5) $\rceil F_1 \equiv \rceil G_1$ (yoki $\rceil F_2 \equiv \rceil G_2$).

4.2-ta'rif. *Agar F formulaning tarkibida faqat konyunksiya, dizyunksiya va inkor amallari qatnashgan bo'lib, inkor amali propozitsional o'zgaruvchilargagina tegishli bo'lsa, u holda bunday formula* ***keltirilgan formula*** *deyiladi.*

4.2-misol. $\neg A \wedge B \vee A \wedge \neg C \vee A \wedge B$ keltirilgan formuladir, ammo $\neg(A \Rightarrow B) \wedge \neg B \vee C$ keltirilgan formula emas, chunki bu formulada implikatsiya amali qatnashishi bilan birgalikda, inkor amali murakkab formula $A \Rightarrow B$ ga tegishlidir.

4.3-teorema. *Mulohazalar algebrasining har bir F formulasining yo o'zi keltirilgan, yoki uni teng kuchli keltirilgan formula bilan almashtirish mumkin.*

Bu teoremani isbotlash uchun mulohazalar algebrasining asosiy teng kuchliliklari bilan tanishib chiqamiz. Mulohazalar algebrasining teng kuchliliklari quyidagilar:

I. $\neg\neg A \equiv A$ (qo'sh inkor teng kuchliligi);
II. $A \wedge B \equiv B \wedge A$ (konyunksiya va
III. $A \vee B \equiv B \vee A$ dizyunksiyaning kommutativligi);
IV. $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$ (konyunksiya va
V. $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$ dizyunksiyaning assotsiativligi);
VI. $(A \wedge B) \vee C \equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C)$ (dizyunksiyaning konyunksiyaga va
VII. $(A \vee B) \wedge C \equiv (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$ konyunksiyaning dizyunksiyaga nisbatan distributivligi);
VIII. $A \vee A \equiv A$ (dizyunksiya va
IX. $A \wedge A \equiv A$ (konyunksiyaning idempotentligi);
X. $A \vee (A \wedge B) \equiv A$
XI. $A \wedge (A \vee B) \equiv A$ (yutilish teng kuchliliklari);

XII. $\neg A \wedge B \equiv \neg A \vee \neg B$

XIII. $\neg A \vee B \equiv \neg A \wedge \neg B$ (de Morgan teng kuchliliklari);

XIV. $A \vee \neg A \equiv 1$ (uchinchini inkor etish teng kuchliligi);

XV. $A \vee \neg A \equiv 0$ (qarama-qarshilik teng kuchliligi);

XVI. a) $A \vee 1 \equiv A$, b) $A \wedge 1 \equiv A$, c) $A \vee 0 \equiv A$, d) $A \wedge 0 \equiv 0$;

XVII. $A \Rightarrow B = \neg B \Rightarrow \neg A$ $\quad A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$ (kontropozitsiya teng kuchliligi).

Bu teng kuchliliklar o‘rinli ekanligini rostlik jadvali yordamida bevosita tekshirib ko‘rish mumkin. Masalan, XIII teng kuchlilik uchun rostlik jadvalini ko‘raylik:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A \vee \neg B$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1

II–XI, XIV–XVI teng kuchliliklarni tashkil etuvchi formulalar keltirilgan formulalar ekanligi ravshan (propozitsional o‘zgaruvchilar va mantiqiy konstantalar keltirilgan formula hisoblanadi).

Bundan tashqari,

$$A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B \tag{1}$$

teng kuchlilik o‘rinli ekanligini rostlik jadvali tuzib ko‘rsatish qiyin emas. Yuqorida $A \Rightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ ekanligi ko‘rsatilgan edi. Implikatsiya inkor va dizyunksiya bilan almashtirish mumkin ekanligidan quyidagi teng kuchlilikni hosil qilamiz:

$$A \Leftrightarrow B \equiv (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B). \tag{2}$$

Demak, $A \Leftrightarrow B$ va $A \Rightarrow B$ formulalar keltirilgan formulalar bilan almashtirilishi mumkin ekan. I, XII, XIII teng kuchliliklar qo‘sh inkor hamda dizyunksiya va konyunksiyalar inkorlarini qanday keltirilgan formulalar bilan almashtirilishi mumkin ekanini ko‘rsatadi.

Endi 4.3- teoremaning isbotini keltiramiz. Agar F formulaning o'zi keltirilgan formula bo'lsa, u holda teorema isbotlangan bo'ladi.

Agar F formula tarkibida implikatsiya va ekvivalensiya amallari qatnashgan bo'lsa, ularni (1) va (2) teng kuchliliklar yordamida almashtirish mumkin; formula tarkibida $\urcorner B$ ko'rinishdagi qism formula qatnashgan bo'lsa, uni B bilan; $\urcorner(B \vee C)$ yoki $\urcorner(B \wedge C)$ ko'rinishidagi qism formula qatnashgan bo'lsa, ularn, mos ravishda $\urcorner B \wedge \urcorner C$ va $\urcorner B \vee \urcorner C$ formulalar bilan almashtirish mumkin. Bu jarayonni yetarli marta takrorlab, nihoyat, F formulaga teng kuchli bo'lgan keltirilgan formulaga kelamiz.

Shunday qilib, 4. 3-teoremaga asosan mulohazalar algebrasining har bir formulasini asosiy va boshqa teng kuchliliklar yordamida almashtirib, unga teng kuchli formulalar hosil qilish mumkin. Bu shakl almashtirishlar ba'zi bir masalalarni yechishda keng ko'lamda ishlatiladi. Quyida formulalarning shaklini almashtirishga oid ba'zi namunalarni keltiramiz.

4.3-misol. $(\urcorner A \vee \urcorner B) \wedge C \Rightarrow \urcorner(A \wedge B \vee \urcorner C)$ formulaning shaklini almashtiring va soddalashtiring.

$$(\urcorner A \vee \urcorner B) \wedge C \Rightarrow \urcorner(A \wedge B \vee \urcorner C) \equiv \urcorner((\urcorner A \vee \urcorner B) \wedge C) \vee \urcorner(A \wedge B \vee \urcorner C) \equiv$$
$$\equiv \urcorner(\urcorner A \vee \urcorner B) \vee \urcorner C \vee \urcorner(A \wedge B) \wedge \urcorner\urcorner C \equiv$$
$$\equiv \urcorner\urcorner A \wedge \urcorner\urcorner B \vee \urcorner C \vee (\urcorner A \vee \urcorner B) \wedge \urcorner\urcorner C \equiv$$
$$\equiv A \wedge B \vee \urcorner C \vee (\urcorner A \vee \urcorner B) \wedge C \equiv$$
$$\equiv A \wedge B \vee (\urcorner C \vee \urcorner A \vee \urcorner B) \wedge (\urcorner C \vee C) \equiv$$
$$\equiv A \wedge B \vee (\urcorner A \vee \urcorner B \vee \urcorner C) \wedge 1 \equiv$$
$$\equiv A \wedge B \vee \urcorner A \vee \urcorner B \vee \urcorner C \equiv$$
$$\equiv (A \vee \urcorner A) \wedge (B \vee \urcorner A) \vee \urcorner B \vee \urcorner C \equiv$$
$$\equiv 1 \wedge (B \vee \urcorner A) \vee \urcorner B \vee \urcorner C \equiv$$
$$\equiv \urcorner A \vee B \vee \urcorner B \vee \urcorner C \equiv$$
$$\equiv \urcorner A \vee 1 \vee \urcorner C \equiv 1.$$

Demak, berilgan formula AR formula ekan.

Yuqorida aniqlangan „Sheffer shtrixi” va „Pirs strelkasi” amallariga qaytamiz. Mantiqiy amallarning jadval formalarini taqqoslasak:

$$A \mid B = \rceil(A \wedge B);$$

$$A \downarrow B = \rceil(A \vee B)$$

ekanligini ko‘ramiz. Demak, „sheffer shtrixi” va „Pirs strelkasi” inkori mos ravishda konyunksiya va dizyunksiya orqali ifoda qilinar ekan.

5- §. Ikkilik qonuni. Amallarning to‘liq sistemasi

$F(A_1, A_2, ..., A_n)$ – mulohazalar algebrasining ixtiyoriy keltirilgan formulasi bo‘lsin, ya’ni bu formulada faqatgina $\wedge$, $\vee$ va $\rceil$ amallari qatnashgan bo‘lsin. Oldingi paragrafda mulohazalar algebrasining ixtiyoriy formulasini keltirilgan formula ko‘rinishiga teng kuchli shakl almashtirishlar yordamida keltirish mumkinligi isbotlangan edi. Shuning uchun yuqoridagi $F(A_1, A_2, ..., A_n)$ formula mulohazalar algebrasining ixtiyoriy formulasi deb qaralishi mumkin.

5.1-ta’rif. *Agar $U(A_1, A_2, ..., A_n)$ va $U^*(A_1, A_2, ..., A_n)$ formulalar bir-biridan $\vee$ ga almashtirish yordamida hosil qilinsa, u holda bunday formulalar **o‘zaro qo‘shma formulalar** deyiladi.*

5.1-misol. $A \wedge \rceil B \vee \rceil A \vee C$ formula $(A \vee \rceil B) \wedge \rceil A \wedge C$ formulaga qo‘shma formuladir.

5.2-ta’rif. *F formulaga kirgan barcha mantiqiy amallar soni uning **rangi** deyiladi va $r(F)$ bilan belgilanadi; bunda propozitsional o‘zgaruvchining rangi 0 ga teng deb hisoblanadi.*

5.2-misol. $r(A \wedge \urcorner B \vee \urcorner A \vee C) = 5$, chunki bu formulaga 5 ta $\wedge$, $\urcorner$, $\vee$, $\urcorner$, $\vee$ mantiqiy amal kirgan.

5.1-teorema. *$F(A_1, A_2,..., A_n)$ va $F^*(A_1, A_2,..., A_n)$ formulalar o'zaro qo'shma bo'lib, $A_1, A_2,..., A_n$ ular tarkibiga kirgan barcha propozitsional o'zgaruvchilar bo'lsa, u holda*

$$\urcorner F(A_1, A_2,..., A_n) \equiv F^*(\urcorner A_1, \urcorner A_2,..., \urcorner A_n) \qquad (1)$$

Isbot. Agar $r(F) = 0$ bo'lsa, u holda $F^*(A_1, A_2,..., A_n) \equiv A_i \equiv$ $\equiv \urcorner F(\urcorner A_1, \urcorner A_2,..., \urcorner A_n)$ yoki A_s ni $\urcorner A_s$ bilan almashtirsak, $(s = 1, 2,..., n)$ $\urcorner A_i \equiv F^*(\urcorner A_1, \urcorner A_2,..., \urcorner A_n) = \urcorner F(A_1, A_2,..., A_n)$ hosil bo'ladi.

Faraz qilaylik, rangi $r < m$ bo'lgan formulalar uchun (1) o'rinli bo'lsin. U holda rangi m bo'lgan F formula uchun ham (1) munosabat o'rinli ekanligini ko'rsatamiz. F keltirilgan formula bo'lganligi uchun u quyidagi ko'rinishlarga ega bo'lishi mumkin:

1) $\urcorner G$;

2) $G \wedge H$;

3) $G \vee H$, $r(G) < m$ va $r(H) < m$ bo'lganidan, farazga asosan:

$$\urcorner G(A_1, A_2,..., A_n) = G^*(\urcorner A_1, \urcorner A_2,..., \urcorner A_n); \qquad (2)$$

$$\urcorner H(A_1, A_2,..., A_n) = H^*(\urcorner A_1, \urcorner A_2,..., \urcorner A_n). \qquad (3)$$

Ravshanki, $G \wedge H$ va $G \vee H$ formulalarga qo'shma bo'lgan formulalar, mos ravishda, $G^* \vee H^*$ va $G^* \wedge H^*$ bo'ladi. $F = G \wedge H$ va $F = G \vee H$ bo'lganligidan $\urcorner F \equiv \urcorner G \vee \urcorner H$ va $\urcorner F \equiv \urcorner G \wedge \urcorner H$ hosil bo'ladi. (2) va (3) ni e'tiborga olsak, 4.1-teorema natijalariga asosan:

$$\rceil F(A_1, A_2, ..., A_n) \equiv G^*(\rceil A_1, ..., \rceil A_n) \vee H^*(\rceil A_1, ..., A_n),$$

$$\rceil F(A_1, ..., A_n) \equiv G^*(\neg A_1, ..., \rceil A_n) \wedge H^*(\rceil A_1, ..., \rceil A_n)$$

munosabatlarni hosil qilamiz, ya'ni (2) va (3) hollar uchun

$$\rceil F(A_1, ..., A_n) \equiv F^*(\rceil A_1, ..., \rceil A_n)$$

hosil bo'ladi.

Endi, $F = \rceil G$ bo'lsin. U holda:

$$F^*(A_1, ..., A_n) \equiv (\rceil G(A_1, ..., A_n))^* = \rceil G^*(A_1, ..., A_n).$$

$r(G) < m$ bo'lgani uchun, farazga asosan

$$\rceil G(A_1, ..., A_n) = G^*(\rceil A_1, ..., \rceil A_n). \tag{4}$$

Demak, $F^*(A_1, ..., A_n) = \rceil(\rceil G(\rceil A_1, ..., \rceil A_n)) = G(\rceil A_1, ..., \rceil A_n)$ yoki $F^*(\rceil A_1, ..., \rceil A_n) = G(A_1, ..., A_n)$ bo'ladi. $\rceil F = G$ bo'lgani uchun (4) ga asosan $\rceil F(A_1, ..., A_n) = F^*(\rceil A_1, ..., \rceil A_n)$ kelib chiqadi.

5.1-teoremaga asoslangan holda ikkilik qonuni deb ataluvchi quyidagi teoremani isbotlash mumkin.

5.2-teorema. *Agar $F \equiv G$ bo'lsa, u holda $F^* \equiv G^*$ dir.*

Isbot. 5.1-teoremaga asosan

$$\rceil F(A_1, ..., A_n) \equiv F^*(\rceil A_1, ..., \rceil A_n),$$

$$\rceil G(A_1, ..., A_n) \equiv G^*(\rceil A_1, ..., \rceil A_n)$$

yoki

$$F^*(A_1,...,A_n) \equiv \neg F(\neg A_1,..., \neg A_n),$$
$$G^*(A_1,...,A_n) \equiv \neg G(\neg A_1,..., \neg A_n). \quad (5)$$

Teng kuchli bo‘lish ta’rifiga ko‘ra, F va G propozitsional o‘zgaruvchilar qiymatlarining barcha tanlanmalarida bir xil qiymatga ega bo‘lganliklari uchun

$$F(\neg A_1,..., \neg A_n) \equiv G(\neg A_1,..., \neg A_n)$$

ham o‘rinlidir. U holda,

$$\neg F(\neg A_1,..., \neg A_n) = \neg G(\neg A_1,..., \neg A_n) \quad (6)$$

(5) va (6) dan $F^* \equiv G^*$ ekanligi kelib chiqadi.

5.3-ta’rif. *Agar* $F(A_1,...,A_n)$ *formula uchun* $F(A_1,...,A_n) \equiv$ $\equiv \neg F(\neg A_1,..., \neg A_n) \equiv F^*(A_1,...,A_n)$ *o‘rinli bo‘lsa, u holda bunday formulaga* ***o‘z-o‘ziga qo‘shma formula*** *deyiladi.*

5.3-misol. $F(A,B,C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$ formula o‘z-o‘ziga qo‘shmadir. Haqiqatan, bu formulaning qo‘shmasi

$$F^*(A,B,C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

formuladir. Unga teng kuchli shakl almashtirishlarni qo‘llasak,

$$F^*(A,B,C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C) \wedge (B \vee C) =$$
$$= (A \vee (B \wedge C)) \wedge (B \vee C) =$$
$$= (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vee (B \wedge C) = F(A,B,C) =$$
$$= (A \wedge (B \vee C)) \vee ((B \wedge C) \wedge (B \vee C)).$$

Biz yuqorida mulohazalar to'plami P da 16 binar mantiqiy amalni aniqlash mumkin ekanligini ko'rdik. Bundan tashqari, bu to'plamda ikkita unar mantiqiy amal ham aniqlandi: bularning biri berilgan F formulaga uning inkori $\rceil F$ ni mos keltirsa, ikkinchisi esa F ga uning qo'shmasi F^*ni mos qo'yadi.

$\sum$ - mantiqiy amallarning ixtiyoriy sistemasi bo'lsin.

5.4-ta'rif. *Agar mulohazalar algebrasining har qanday formulasi tarkibiga faqat $\sum$ sistemasining amallari kiruvchi qandaydir formulaga teng kuchli bo'lsa, u holda $\sum$ sistema* ***amallarining to'liq sistemasi*** *deyiladi.*

5.3-teorema. *Ushbu*

$$\Sigma_1 = \{\wedge, \vee, \rceil\}, \quad \Sigma_2 = \{\wedge, \rceil\}, \quad \Sigma_3 = \{\vee, \rceil\}, \Sigma_4 = \{|\},$$
$$\Sigma_5 = \{\downarrow\}, \quad \Sigma_6 = \{\Rightarrow, \rceil\}$$

sistemalarning har biri to'liqdir. (bunda Σ_4 va Σ_5 larga kirgan amallar "Sheffer shtrixi" va "Pirs strelka" laridir).

Isbot. 4.3-teoremaga asosan mulohazalar har qanday formulasini yo o'zi keltirgan formula (ya'ni tarkibiga faqatgina $\wedge, \vee, \rceil$ amallar kirgan formula), yoki uni teng kuchli shakl almashtirishlar yordamida keltirilgan formula ko'rinishiga keltirish mumkin. Demak, Σ_1 sistema to'liq ekan. De Morgan teng kuchliligi $\rceil(A \vee B) \equiv \rceil A \wedge \rceil B$ dan $A \vee B \equiv \rceil(\rceil A \wedge \rceil B)$ ni hosil qilamiz. Dizyunksiyani konyunksiya va inkor orqali ifodalash mumkinligi hamda Σ_1 to'liq sistema ekanligidan $\Sigma_2 = \{\wedge, \rceil\}$ ham amallarning to'liq sistemasi ekanligi kelib chiqadi.

$\Sigma_3 = \{\vee, \rceil\}$ sistemaning ham to'liqligi xuddi shu tarzda ko'rsatiladi. Endi Σ_4 sistemaning to'liqligini ko'rsatamiz.

A	$\rceil A$	$A \mid A$
1	0	0
0	1	1

$\rceil A \equiv A \mid A$ ekanligini yuqoridagi jadvaldan ko‘rish qiyin emas.

$A \mid B$ning aniqlanishi bo‘yicha $A \mid B \equiv \rceil(A \wedge B)$ edi. Bunda esa $A \wedge B \equiv \rceil(A \mid B)$ hosil bo‘ladi. Inkorni “Sheffer shtrixi” bilan almashtirsak, $\neg(A \mid B) \equiv (A \mid B) \mid (A \mid B)$, va nihoyat $A \wedge B \equiv$ $\equiv (A \mid B) \mid (A \mid B)$ ni hosil qilamiz. $\Sigma_2 = \{\wedge, \vee\}$ to‘liq sistema bo‘lganligi sababli Σ_4 sistema ham to‘liq ekanligi kelib chiqadi. Σ_5 va Σ_6 sistemalarning to‘liq ekanligini ko‘rsatishni o‘quvchiga havola qilamiz.

Binar mantiqiy amallar jadvalidagi $f_0(A, B)$ amal qisqacha $A \oplus B$ ko‘rinishida belgilanadi va 2 moduli bo‘yicha “qo‘shish” deb ataladi. Bu amal uchun $A \oplus B \equiv \rceil(A \Leftrightarrow B)$ o‘rinli ekanligi ravshan.

Xuddi shu jadvaldagi $f_{15}(A, B) \equiv 1$ amal ***konstanta*** deyiladi va qisqacha 1 ko‘rinishida belgilanadi.

5.4-teorema. $\Sigma_7 = \{\wedge, \oplus, 1\}$, $\Sigma_8 = \{\vee, \oplus, 1\}$ *sistemalar to‘liq sistemalardir.*

Isbot. $\rceil A \equiv A \oplus 1$ ekanligini rostlik jadvali yordamida bevosita tekshirib ko‘rish mumkin. $\Sigma_2 = \{\wedge, \rceil\}$ to‘liq sistema bo‘lgani uchun Σ_7 ham amallarning to‘liq sistemasini tashkil etadi; Σ_8 ning to‘liqligi ham xuddi shu tarzda isbotlanadi.

6- §. Yechilish muammosi. Normal formalar

Har qanday mantiqiy sistemalardagidek mulohazalar algebrasi uchun ham masalani qo'yish mumkin: mulohazalar algebrasining har qanday formulasi AR formula yoki AR formula emasligini chekli qadamdan so'ng aniqlab beradigan yagona usul (algoritm) mavjudmi yoki mavjud emasmi? Bu masalaingn ***yechilish muammosi*** deb ataladi. Yechilish muammosini faqat AR formulalar uchun emas, balki AR formulalar sinfidan kengroq bo'lgan bajariluvchi formulalar sinfi uchun qo'ysa bo'ladi. Albatta, keyingi muammoning yechimi oldingi muammoning ham yechimi bo'lishi ravshan.

Mulohazalar algebrasi uchun bu muammo ijobiy tarzda hal etiladi. Haqiqatan, $F-$ mulohazalar algebrasining ixtiyoriy formulasi bo'lsa, uning rostlik jadvalini tuzish bilan F formulaning bajariluvchi formula yoki AYo formula ekanligini bir qiymatli aniqlash mumkin. Demak, yuqoridagi muammoni ijobiy hal etuvchi yagona usul (algoritm) mavjud bo'lib, bu algortm rostlik jadvalidan iboratdir.

Ammo bu algoritmning muhim bir kamchligi bor ekanligini sezish mumkin. Haqiqatan, F formula tarkibida n ta propozitsional o'zgaruvchi qatnashgan bo'lsa, u holda uning qiymatlarini propozitsional o'zgaruvchilar qiymatlarining 2^n ta tanlanmasida hisoblashga to'g'ri keladi. Ravshanki, bu usul hatto uncha murakkab bo'lmagan formulalar qiymatlarini hisoblashda ham juda katta qiyinchiliklar tug'diradi. Shuning uchun ham bu usul amaliy foydalanish nuqtayi nazaridan noqulaydir. Biz quyida amaliy jihatdan qulay bo'lgan boshqa usul bilan tanishamiz.

Eslatma. Biz bu paragrafda $A \wedge B$ formulani qisqacha AB ko'rinishida yozamiz.

Quyidagi belgilashni kiritamiz:

$$A^{\alpha}=\begin{cases} agar\ \alpha=1\ bo\text{'}lsa,\ A, \\ agar\ \alpha=0\ bo\text{'}lsa,\ \urcorner A. \end{cases}$$

6.1-ta'rif. *$A_1,...,A_n$ propozitsional o'zgaruvchilar $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ 1 va 0 lardan tuzilgan tanlanma bo'lsa, u holda $A_1^{\alpha_1}$, $A_2^{\alpha_2},...,A_n^{\alpha_n}$ formula **elementar konyunksiya** deyiladi (bunda propozitsional o'zgaruvchilar takrorlangan bo'lishi ham mumkin).*

6.1-misol. A, $A\urcorner BC$, $A\urcorner AB$, $AAB\urcorner BC$ formulalar elementar konyunksiyalardir.

6.2-ta'rif. *Elementar konyunksiyalarning har qanday dizyunksiyasi **dizyunktiv normal forma** (DNF) deyiladi.*

6.2-misol. $A\vee A\urcorner BC\vee A\urcorner AB\vee AAB\urcorner BC$ formula 6.1-misolda keltirilgan elementar konyunksiyalardan tuzilgan *DNF* dir.

6.3-ta'rif. *Elementar konyunksiyasiga har bir propozitsional o'zgaruvchi (inkor belgisi qatnashganini ham e'tiborga olsak) bir martadan ortiq kirmagan bo'lsa, bunday elementar konyunksiya **to'g'ri elementar** konyunksiya deyiladi.*

6.3-misol. $A\urcorner BC$, $\urcorner AB\urcorner C$, $A_1A_2\urcorner A_3\urcorner A_4$ formulalar to'g'ri elementar konyunksiyalardir. 6.2-misolda keltirilgan formulaning dastlabki ikkita hadi to'g'ri elementar konyunksiyadir.

6.4-ta'rif. *$A_1,A_2,...,A_n$ propozitsional o'zgaruvchilardan tuzilgan to'g'ri elementar konyunksiyadagi har bir propozitsional o'zgaruvchi bu konyunksiyaga faqat bir marta kirgan bo'lsa, bunday elementar konyunksiya $A_1,A_2,...,A_n$ o'zgaruvchilarga nisbatan **to'liq elementar konyunksiya** deyiladi.*

6.4-misol. Elementar konyunksiyalar *A, B, C* o'zgaruvchilardan tuzilgan bo'lsin. U holda ABC, $\urcorner AB\urcorner C$, $AB\urcorner C$, $A\urcorner BC$ formulalar to'liq elementar konyunksiyalardir.

6.5-ta'rif. *Tarkibida bir xil elementar konyunksiyalar bo'lmagan hamda barcha elementar konyunksiyalar $A_1,...,A_n$ o'zgaruv-*

chilarga nisbatan to'g'ri va to'liq bo'lgan DNF $A_1,...,A_n$ *o'zgaruvchilarga nisbatan* ***mukammal dizyunktiv normal forma*** *(MDNF) deyiladi.*

6.5-misol. $ABC \vee A\rceil BC \vee \rceil A \rceil B \rceil C$ formula A, B, C o'zgaruvchilarga nisbatan MDNF dir. DNF va MDNF larning ta'rifidan ko'rinadiki, bunday formulalar keltirilgan formulalardir.

6.1-teorema. *Mulohazalar algebrasining AYo formula bo'lmagan ixtiyoriy U formulasi yagona MDNF ga teng kuchlidir.*

Isbot. $F(A_1,...,A_n)$ – mulohazalar algebrasining ixtiyoriy *AYo* formula bo'lmagan formulasi bo'lsin. Demak, F bajariluvchi formula bo'lib, u propozitsional o'zgaruvchilar qiymatlarining hech bo'lmaganda bitta tanlanmasida 1 qiymat qabul qiladi. F formulani rostga aylantiruvchi tanlanmalar to'plami $M_{(p)}$ bo'lsin:

$$M_{(p)} = \{(\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)},...,\alpha_n^{(1)}),(\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)},...,\alpha_n^{(2)}),..., (\alpha_1^{(r)}, \alpha_2^{(r)},...,\alpha_n^{(r)})\}, \tag{1}$$

bunda $1 \le r \le 2^n$. Quyidagi DNF ni qaraylik:

$$G(A_1,A_2,...,A_n)\ \mathrm{r}\ A_1^{\alpha_1^{(1)}} A_2^{\alpha_2^{(1)}} ... A_n^{\alpha_n^{(1)}} \vee ... \vee A_1^{\alpha_1^{(r)}} A_2^{\alpha_2^{(r)}} ... A_n^{\alpha_n^{(r)}}. \tag{2}$$

Mazkur DNF MDNF ekanligi ravshan, chunki $M_{(p)}$ ning elementlari har xil tanlanmalardir. $U(A_1,A_2,...,A_n) \equiv B(A_1,A_2,...,A_n)$ ekanligini ko'rsatamiz. $(\alpha_1^{(s)}, \alpha_2^{(s)},...,\alpha_n^{(s)}) \in M_{(p)}$ bo'lsin. U holda $F(\alpha_1^{(s)}, \alpha_2^{(s)},...,\alpha_n^{(s)}) = 1$ bo'ladi. ($M_{(p)}$ to'plamning tanlanishiga asosan). $G(A_1,A_2,...,A_n)$ formulaning $(\alpha_1^{(s)}, \alpha_2^{(s)},...,\alpha_n^{(s)})$

tanlanmadagi qiymatini hisoblaylik. (2) dagi MDNF tarkibida $A_1^{\alpha_1^{(s)}} A_2^{\alpha_2^{(s)}} ... A_n^{\alpha_n^{(s)}}$ to'liq elementar konyunksiya qatnashgan bo'lib, $G(A_1, A_2, ..., A_n)$ ning $(\alpha_1^{(s)}, \alpha_2^{(s)}, ..., \alpha_n^{(s)})$ tanlanmadagi $G(\alpha_1^{(s)}, \alpha_2^{(s)}, ..., \alpha_n^{(s)})$ qiymatini hisoblashda $(\alpha_1^{(s)})^{\alpha_1^{(s)}}, (\alpha_2^{(s)})^{\alpha_2^{(s)}}, ...,$ $(\alpha_n^{(s)})^{\alpha_n^{(s)}}$ had hosil qiladi. (1) ga asosan, $1^1 = 1$ hamda $0^0 = \rceil 0 = 1$ dir, chunki $A^1 = A$, $A^0 = \rceil A$. Demak, $\alpha_i^{(s)}$ qanday bo'lishidan qat'i nazar $(\alpha_i^{(s)})^{\alpha_i^{(s)}} = 1$ $(i = 1, 2, ...n)$ hamda $(\alpha_1^{(s)})^{\alpha_1^{(s)}}, (\alpha_2^{(s)})^{\alpha_2^{(s)}}, ..., (\alpha_n^{(s)})^{\alpha_n^{(s)}} = 1$ $= 1$ $(1 \leq s \leq r)$.

$A \vee 1 \equiv 1$ ga asosan $G(\alpha_1^{(s)}, \alpha_2^{(s)}, ..., \alpha_n^{(s)}) = 1$ bo'ladi. Shunday qilib, $M_{(p)}$ ga tegishli tanlanmalarda berilgan F formula ham, G formula ham 1 qiymat qabul qilar ekan.

$\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) \notin M_{(p)}$ bo'lgan ixtiyoriy tanlanma bo'lsin. U holda bu tanlanma $M_{(p)}$ ga kiruvchi ixtiyoriy $(\alpha_1^{(s)}, \alpha_2^{(s)}, ..., \alpha_n^{(s)})$ tanlanmadan hech bo'lmaganda bitta elementi bilan farq qiladi. (Bu tanlanmalar tartiblangan tanlanmalar ekanligini eslatib o'tamiz.) B ning β tanlanmadagi qiymatini hisoblashda hosil bo'ladigan ifodada qatnashgan ixtiyoriy

$$(\beta_1)^{\alpha_1^{(s)}}, (\beta_2)^{\alpha_2^{(s)}}, ..., (\beta_n)^{\alpha_n^{(s)}}, \quad (1 \leq s \leq r)$$

hadda hech bo'lmaganda bitta i uchun $\beta_i \neq \alpha_i^{(s)}$ dir. (1) ga asosan $1^0 = \rceil 1 = 0$ va $0^1 = 0$ bo'lgani uchun (3) ifodaning qiymati 0 ga tengdir. Bundan $G(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) = 0$ ekanligi kelib chiqadi. $\overline{\beta} \in M_{(p)}$ bo'lgani uchun $F(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) = 0$, demak, $M_{(p)}$ ga kirmagan tanlanmalarda F va G formulalar 0 qiymatga ega ekan. Shunday qilib, $F \equiv G$, ya'ni F formula (2) MDNF ga teng kuchli ekanligi kelib chiqadi. F formula yagona usulda MDNF ga yoyilishi ravshan, chunki G formula F formulaning qiymatini 1 ga aylantiruvchi barcha tanlanmalar yordamida yagona usulda hosil qilinadi.

Natija. Teng kuchli formulalar bir xil MDNF ga ega.

4.3-teoremaga asosan mulohazalar algebrasining ixtiyoriy F formulasining o'zi keltirilgan formuladir yoki uni teng kuchli almashtirishlar yordamida keltirilgan formula shakliga olib kelish mumkin.

Biz quyida har qanday keltirilgan formulani MDNF ga yoyish algortmini keltiramiz.

F ixtiyoriy formula bo'lsin.

1-qadam. Agar U keltirilmagan formula bo'lsa, u holda unga 4.3-teoremani qo'llab, undagi implikatsiya amallari yo'qotiladi; natijada hosil bo'lgan formulada faqat inkor, konyunksiya va dizyunksiya amallari qatnashgan bo'ladi.

2-qadam. Agar hosil bo'lgan formulada inkor murakkab formula oldida qatnashgan bo'lsa, u holda u I, XII va XIII teng kuchliliklar yordamida shunday shakl almashtiriladiki, hosil bo'lgan formulada inkor faqat propozitsional o'zgaruvchilarga tegishli bo'ladi.

3-qadam. 2-qadamdan so'ng hosil bo'lgan formulani VI–VII teng kuchliliklar yordamida shunday shakl almashtirish kerakki, yangi hosil bo'lgan formulada konyunksiya dizyunksiyadan oldin bajarilsin, ya'ni natijada DNF hosil bo'lsin.

4-qadam. Agar hosil bo'lgan DNF da bir nechta bir xil elementar konyunksiyalar qatnashgan bo'lsa, ulardan bittasi qoldirilib, qolganlari tashlab yuboriladi (VIII teng kuchlilikka asosan).

5-qadam. 4-qadamdan keyin hosil bo'lgan DNF da qatnashgan biror elementar konyunksiyada propozitsional o'zgaruvchi va uning inkori qatnashgan bo'lsa, bunday elementar konyunksiya

AYo formula bo'lib, XV va XVII teng kuchliliklarga asosan uni tashlab yuboriladi).

6-qadam. Elementar konyunksiyada biror propozitsional o'zgaruvchining o'zi yoki uning inkori bir necha marta qatnashgan bo'lsa, u holda undan faqat bittasini qoldirib, qolganlari tashlab yuboriladi. (IX teng kuchlikka asosan). Bu qadamdan keyin hosil bo'lgan DNF da barcha elementar konyunksiyalar to'g'ri elementar konyunksiyalardan iborat bo'ladi.

7-qadam. Agar hosil bo'lgan DNF da to'liqmas elementar konyunksiya qatnashgan bo'lsa, uni to'liq elementar konyunksiyaga aylantirish uchun quyidagi shakl almashtirish bajariladi:

$$A_1^{\alpha_1} \wedge > \wedge A_{i-1}^{\alpha_{i-1}} \wedge A_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \wedge > \wedge A_n^{\alpha_n}$$

to'liqmas elementar konyunksiya bo'lsin (bu elementar konyunksiyada A_i propozitsional o'zgaruvchi qatnashgan emas). U holda bu to'g'ri elementar konyunksiyani unga teng kuchli

$$A_1^{\alpha_1} \wedge > \wedge A_{i-1}^{\alpha_{i-1}} \wedge A_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \wedge > \wedge A_n^{\alpha_n} \wedge (A_i^{\alpha_i} \vee \rceil A_i^{\alpha_i})$$

formula bilan almashtirish mumkin. Agar yetishmaydigan propozitsional o'zgaruvchi bir nechta bo'lsa, u holda elementar konyunksiyani $A \vee \rceil A$ ko'rinishdagi bir nechta konyuktiv had bilan to'ldirish kerak.

7-qadamdan so'ng hosil bo'lgan DNF da yana bir xil elementar konyunksiyalar paydo bo'lishi mumkin. U holda unga yana 4-qadam qo'llaniladi. Mazkur algoritm qo'llanilganda, albatta, kerakli joyda II–V teng kuchliliklardan foydalaniladi.

6.6-misol. $(A \vee \rceil B) \wedge C \Rightarrow (\rceil A \vee B) \wedge C$ formulaning MDNF ini yozing.

Berilgan formula keltirilmagan bo'lgani uchun undagi implikatsiyani dizyunksiya va inkor bilan almashtiramiz:

$$(A\vee \rceil B)\wedge C \Rightarrow (\rceil A\vee B)\wedge C \equiv \rceil((A\vee \rceil B)\wedge C)\vee(\rceil A\vee B)\wedge C.$$

Hosil bo'lgan formulada $\rceil$ amali murakkab formula $(A\vee \rceil B)\wedge C$ oldida qatnashgan. Shuning uchun unga de Morgan teng kuchliliklari va qo'sh inkor teng kuchligini qo'llaymiz:

$$\rceil((A\vee \rceil B)\wedge C)\vee(\rceil A\vee B)\wedge C \equiv \rceil(A\vee \rceil B)\vee \rceil C\vee(\rceil A\vee B)\wedge C \equiv$$
$$\equiv \rceil A\wedge \rceil\rceil B\vee \rceil C\vee(\rceil A\vee B)\wedge C \equiv$$
$$\equiv \rceil A\wedge B\vee \rceil C\vee(\rceil A\vee B)\wedge C.$$

Bu keltirilgan formulada dizyunksiya konyunksiyadan oldin bajariladigan had mavjud; shuning uchun distributivlik teng kuchliligini qo'llasak, quyidagi DNF hosil bo'ladi:

$$\rceil A\wedge B\vee \rceil C\vee(\rceil A\vee B)\wedge C \equiv \rceil A\wedge B\vee \rceil C\vee \rceil A\wedge C\vee B\wedge C.$$

Ushbu DNF da qatnashgan barcha elementar konyunksiyalar to'g'ri elementar konyunksiyalar bo'lsa-da, ammo to'liq elementar konyunksiyalar emas. Shuning uchun quyidagi shakl almashtirish bajariladi:

$\rceil A\wedge B$ ni $\rceil A\wedge B\wedge(C\vee \rceil C)$ bilan,
$\rceil C$ ni $(A\vee \rceil A)\wedge(B\vee \rceil B)\vee \rceil C$ bilan,
$\rceil A\wedge C$ ni $\rceil A\wedge(B\vee \rceil B)\wedge C$ bilan,
$B\wedge C$ ni esa $(A\vee \rceil A)\wedge B\wedge C$ bilan almashtiramiz.
Ravshanki, natijada, teng kuchli formula hosil bo'ladi:

$$\rceil A\wedge B\vee \rceil C\vee \rceil A\wedge C\vee B\wedge C \equiv \rceil A\wedge B\wedge(C\vee \rceil C)\vee(A\vee \rceil A)\wedge$$
$$(B\vee \rceil B)\wedge \rceil C\vee \rceil A\wedge(B\vee \rceil B)\wedge C\vee(A\vee \rceil A)\wedge B\wedge C.$$

Ushbu formulaga yana distributivlikni qo‘llasak:

$$\neg A\wedge B\wedge(C\vee\neg C)\vee(A\vee\neg A)\wedge(B\vee\neg B)\wedge\neg C\vee$$
$$\vee\ \forall\cdot\neg A\wedge(B\vee\neg B)\wedge C\vee(A\vee\neg A)\wedge B\wedge C\equiv$$
$$\equiv A\wedge B\wedge C\vee A\wedge B\wedge\neg C\vee A\wedge\neg B\wedge\neg C\vee\neg A\wedge B\wedge C\vee$$
$$\vee\neg A\wedge B\wedge\neg C\vee\neg A\wedge\neg B\wedge C\vee\neg A\wedge\neg B\wedge\neg C$$

teng kuchlilikka ega bo‘lamiz. Bundagi bir xil elementar kon-yunksiyalarni tashlab yuborsak (faqat bittasini qoldirib), u holda quyidagi oxirgi natijaga kelamiz:

$$A\wedge B\wedge C\vee A\wedge B\wedge\neg C\vee A\wedge\neg B\wedge\neg C\vee\neg A\wedge B\wedge C\vee$$
$$\vee\neg A\wedge B\wedge\neg C\vee\neg A\wedge\neg B\wedge C\vee\neg A\wedge\neg B\wedge\neg C.$$

Teng kuchlilikning o‘ng tomoni berilgan formulaning MDNF idir. Ushbu MDNF ni formulaning rostlik jadvali bilan taqqoslaylik:

A	B	C	$\neg A$	$\neg B$	$A\vee\neg B$	$(A\vee\neg B)\wedge C$	$(\neg A\vee B)\wedge C$	$(A\vee\neg B)\wedge C\Rightarrow$ $(\neg A\vee B)\wedge C$
1	1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	0	0	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	0	1

Bu jadvaldan ko‘rinadiki: berilgan formula propozitsional o‘zgaruvchilar qiymatlarining (1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1) va (0, 0, 0) tanlanmalarida 1 (rost) qiymati qabul qiladi.

6.1-teoremaga asosan berilgan formula quyidagi MDNF ga teng kuchlidir:

$$A^1B^1C^1 \vee A^1B^1C^0 \vee A^1B^0C^0 \vee A^0B^1C^1 \vee A^0B^1C^0 \vee$$
$$\vee A^0B^0C^1 \vee A^0B^0C^0.$$

(1) ga asosan esa bu ifoda quyidagi ifodadan iboratdir:

$$ABC \vee AB\rceil C \vee A\rceil B\rceil C \vee \rceil ABC \vee \rceil AB\rceil C \vee \rceil A\rceil BC \vee \rceil A\rceil B\rceil C$$

yoki

$$A \wedge B \wedge C \vee A \wedge B \wedge \rceil C \vee A \wedge \rceil B \wedge \rceil C \vee \rceil A \wedge B \wedge C \vee$$
$$\vee \rceil A \wedge B \wedge \rceil C \vee \rceil A \wedge \rceil B \wedge C \vee \rceil A \wedge \rceil B \wedge \rceil C,$$

ya'ni natijada, (4) ning o'ng tomoni hosil bo'ladi. Berilgan formula 7 ta tanlanmada 1 qiymatga, bitta tanlanmada esa 0 qiymatga ega, demak, u AR formula emas. (4) dan ko'rinadiki, berilgan formulaning MDNF iga 7 ta bog'liq elementar konyunksiya kiradi.

Demak, tekshirilayotgan $F(A_1, A_2, ..., A_n)$ formula AR formula bo'lsa, uning MDNF iga 2^n ta to'liq elementar konyunksiya kiradi. Shunday qilib, mulohazalar algebrasining $F(A_1, A_2, ..., A_n)$ formulasini AR formulami yoki yo'qmi ekanligini aniqlash uchun uni MDNF ga yoyib, MDNF dagi to'liq elementar konyunksiyalar sonini sanash kerak: to'liq elementar konyunksiyalar soni $s = 2^n$ ta bo'lsa, berilgan formula AR formula, $0 < s < 2^n$ bo'lganda bajariluvchi formula bo'ladi. Agar $s = 0$ bo'lsa, u holda berilgan formula AYo formula bo'lishi ravshan.

Yuqoridagi 6.1–6.5- ta'riflarda "konyunksiya" so'zini "dizyunksiya" so'zi bilan, "dizyunksiya" so'zini "konyunksiya" so'zi bilan almashtirsak, u holda "elementar dizyunksiya", "to'liq elementar dizyunksiya", "mukammal konyuktiv normal forma" (MKNF) tushunchalari hosil bo'ladi.

MKNF lar uchun quyidagi teorema o'rinli.

6.2-teorema. *Mulohazalar algebrasining AP formula bo'lmagan ixtiyoriy formulasi yagona MKNF ga teng kuchlidir.*

II bob bo'yicha nazorat savollari

1. Mulohazalar ustida mantiqiy amallarni aniqlang. Mulohazalar algebrasi nima?
2. Tavtalogiya va ziddiyat nima? Tavtalogiyalar haqida qanday teoremalarni bilasiz?
3. Rostlik jadvali qanday to'ldiriladi?
4. Teng kuchli formulalar deganda nima tushunasiz?
5. Rostlik funksiyalari nima? Ikkilik qonunini keltiring.
6. Amallarning to'liq sistemalariga misollar keltiring.
7. Yechilish muammosini qanday tushunasiz?
8. Dizyunktiv va konyunktiv normal formalar haqidagi teoremalarni keltiring.
9. Mukammal dizyunktiv va konyunktiv normal formalar haqidagi teoremalarni keltiring.
10. MAF ning tatbiqlari. Rele kontakt sxemalariga misollar tuzing.

III BOB. MANTIQ ALGEBRASI FUNKSIYALARI

1- §. Bul funksiyalari va ularning berilish usullari

Faraz qilaylik, E to'plam elementlari 0 va 1 lardan iborat bo'lsin, ya'ni $E=\{0,1\}$. Endi, E^1 ni $E^1=E$ deb, $n\geq 2$ uchun E^n to'plamni quyidagicha: $E^n=\{(e_1,e_2,...,e_n):e_i\in E\}$ aniqlaymiz. E^n to'plamning elementlarini n liklar deb ataymiz.

Masalan,

$$E^2=\{(0,0),\ (0,1),(1,0),(1,1)\},$$

$$E^3=\{(0,0,0),\ (0,0,1),(0,1,0),(0,1,1),(1,0,0),(1,0,1),\ (1,1,0),(1,1,1)\}$$

bo'ladi.

Demak, E^2 elementlari tartiblangan ikkiliklardan iborat 4 ta elementli, E^3 elementlari tartiblangan uchliklardan iborat 8 ta elementli, umuman, E^n elementlari tartiblangan n liklardan iborat bo'lib, 2^n ta elementli to'plam bo'lar ekan. Ravshanki, bu to'plamlar chekli to'plamlardir.

1.1-ta'rif. *E^n to'plamni E to'plamga akslantiruvchi har qanday*

$$f:E^n\to E$$

*funksiya chinlik funksiyasi yoki n ta argumentli **Bul funksiyasi** deyiladi va u $f(x_1,x_2,...,x_n)$ kabi belgilanadi.*

Odatda, $x_1,x_2,...,x_n$ lar **Bul o'zgaruvchilari** deyiladi.

Bul funksiyasining aniqlanish va o'zgarish sohalari chekli to'plamlardan iborat bo'ladi. Bu hol Bul funksiyasini jadval yordamida ifodalash imkonini beradi.

Aytaylik, $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ Bul funksiyasi bo'lib, uning qiymatlari $e_0, e_1, ..., e_{2^n-1}$ bo'lsin. Bu funksiyaning argumentlari $x_1, x_2, ..., x_n$ larning qiymtalariga mos funksiya qiymatlaridan foydalanib, ushbu jadvalni tuzamiz:

x_1	x_2	...	x_{n-1}	x_n	$f(x_1, x_2, ..., x_n)$
0	0	...	0	0	e_0
0	0	...	0	1	e_1
0	0	...	1	0	e_2
.	.	...	.	.	.
.	.	...	.	.	.
1	1	...	1	0	e_{2^n-2}
1	1	...	1	1	e_{2^n-1}

Endi, jadval tuzilishiga qisqacha izoh beramiz:

Bu jadvalda 2^n ta satr bor. Jadvaldagi satrlarning satr nomeri bilan $x_1, x_2, ..., x_n$ o'zgaruvchilarning qabul qiladigan qiymatlari (0 va 1 simvollar) moslashtirilgan.

Satrda qatnashgan 0 va 1 simvollar ushbu satr nomerining ikkilik sistemasidagi ifodasidir. Masalan, 0-satrda

$$(x_1, x_2,..., x_n) = (0,0,..,0,0)$$

bo‘lib,

$$0 = 0 \cdot 2^{n-1} + 0 \cdot 2^{n-2} + ... + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0.$$

1-satrda

$$(x_1, x_2,..., x_n) = (0,0,..,0,1)$$

bo‘lib,

$$1 = 0 \cdot 2^{n-1} + 0 \cdot 2^{n-2} + ... + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0.$$

2-satrda

$$(x_1, x_2,..., x_n) = (0,0,..,0,1,0)$$

bo‘lib,

$$2 = 0 \cdot 2^{n-1} + 0 \cdot 2^{n-2} + ... + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0,$$

umuman, $2^n - 1$ -satrda

$$(x_1, x_2,..., x_n) = (1,1,...,1)$$

bo‘lib,

$$2^n - 1 = 1 \cdot 2^{n-1} + 1 \cdot 2^{n-2} + ... + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

bo‘ladi.

Bul funksiyasi n ta o‘zgaruvchiga bog‘liq bo‘lsa, uni quyidagicha ham aniqlash mumkin:

$$f(x_1, x_2,..., x_n) = (e_0, e_1,..., e_{2^n-1}).$$

Masalan,

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

jadval yordamida aniqlangan $f(x_1, x_2, x_3)$ funksiyani $f(x_1, x_2, x_3) = (10011011)$ kabi aniqlash mumkin.

Barcha Bul funksiyalari to'plamini P_2 orqali belgilaymiz.

1.1- teorema. *n ta o'zgaruvchili barcha Bul funksiyalari soni* 2^{2^n} *ga teng.*

Endi elementar funksiyalar deb ataluvchi funksiyalarni keltiramiz.

1°. Ushbu

x	$f(x)$
0	0
1	0

jadval bilan aniqlangan funksiya ***nol funksiya*** deyiladi va u 0 kabi belgilanadi: $f(x) = 0$.

2°. Ushbu

x	$f(x)$
0	1
1	1

jadval bilan aniqlanadigan funksiya ***birlik funksiya*** deyiladi va u 1 kabi belgilanadi: $f(x) = 1$.

3°. Ushbu

x	$f(x)$
0	1
1	0

jadval bilan aniqlanadigan funksiya ***inkor funksiya*** deyiladi va u $\bar{x}$ kabi belgilanadi: $f(x) = \bar{x}$.

4°. Ushbu

x	$f(x)$
0	0
1	1

jadval bilan aniqlanadigan funksiya ***ayniy funksiya*** deyiladi va u $\varepsilon(x)$ kabi belgilanadi: $f(x) = x$.

5°. Ushbu

x_1	x_2	$f(x_1,x_2)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

jadval bilan aniqlanadigan funksiya ***konyunksiya*** deyiladi va u $x_1 \wedge x_2$ yoki $x_1 \cdot x_2$ kabi belgilanadi: $f(x_1,x_2) = x_1 \wedge x_2 = x_1x_2$.

6°. Ushbu

x_1	x_2	$f(x_1,x_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

jadval bilan aniqlanadigan funksiya ***dizyunksiya*** deyiladi va u $x_1 \vee x_2$ kabi belgilanadi: $f(x_1,x_2) = x_1 \vee x_2$.

7°. Ushbu

x_1	x_2	$f(x_1,x_2)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

jadval bilan aniqlanadigan funksiya ***implikatsiya*** deyiladi va u $x_1 \to x_2$ kabi belgilanadi: $f(x_1,x_2) = x_1 \to x_2$.

8⁰. Ushbu

x_1	x_2	$f(x_1,x_2)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

jadval bilan aniqlanadigan funksiya ***ekvivalensiya*** deyiladi va u $x_1 \leftrightarrow x_2$ kabi belgilanadi: $f(x_1, x_2) = x_1 \leftrightarrow x_2$.

9°. Ushbu

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

jadval bilan aniqlanadigan funksiya ikki modul bo'yicha olingan ***yig'indi funksiya*** deyiladi va u $x_1 + x_2$ kabi belgilanadi: $f(x_1, x_2) =$ $= x_1 + x_2$.

10°. Ushbu

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

jadval bilan aniqlanadigan funksiya ***Sheffer (strixi) funksiyasi*** deyiladi va u $x_1 | x_2$ kabi belgilanadi: $f(x_1, x_2) = x_1 | x_2$.

11^0. Ushbu

x_1	x_2	$f(x_1,x_2)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

jadval bilan aniqlanadigan funksiya ***Pirs (strelkasi) funksiyasi*** deyiladi va u $x_1 \downarrow x_2$ kabi belgilanadi: $f(x_1,x_2) = x_1 \downarrow x_2$.

Elementar funksiyalar yordamida formulalar qurish mumkin. Aytaylik, $\mathcal{B} \subseteq P_2$ – qandaydir Bul funksiyalar to'plami bo'lsin. $\mathcal{B}$ ustidagi formulaga quyidagicha ta'rif beramiz.

1.2-ta'rif. *a) barcha o'zgaruvchilarni $\mathcal{B}$ **ustidagi formula** deb ataymiz;*

*b) $f(x_1, x_2,....,x_n) \in \mathcal{B}$ va Φ_1, Φ_2, ..., Φ_n ifodalar ustidagia formulalar bo'lsa, (Φ_1, Φ_2, ..., Φ_n) ifodani $\mathcal{B}$ **ustidagi formula** deb ataymiz.*

Masalan, $\mathcal{B}$ – elementar funksiyalar to'plami bo'lsin. Quyidagi ifodalar $\mathcal{B}$ ustidagi formula bo'ladi.

1) $(((x_1 \wedge x_2) + x_1) \vee x_3)$;

2) $\left(\left(\overline{(x_1 \wedge x_2)} + x_1\right) \leftrightarrow \overline{x_3}\right)$;

3) $\overline{\left(\left((x_1 \to x_2) \to x_1\right) \leftrightarrow x_3\right)}$.

*$\mathcal{B}$ ustidagi har bir $\Phi(x_1, x_2, ..., x_n)$ formula biror bir $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ Bul funksiyasini aniqlaydi. Ushbu aniqlangan $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyaga $\mathcal{B}$ dan olingan funksiyalarning **superpozitsiyasi** deyiladi. $\mathcal{B}$ dan $f(x_1, x_2,...,x_n)$ funksiyani hosil qilish jarayoni*

superpozitsiya amali *deyiladi. Yana* $f(x_1, x_2,...,x_n)$ *funksiyani* $\mathcal{B}$ *ustidagi* $\Phi(x_1, x_2,...,x_n)$ *formula ko'rinishida ifodalash mumkin deyiladi.* $\Phi(x_1, x_2,...,x_n)$ *formulaga* $f(x_1, x_2,...,x_n)$ *funksiya mos qo'yilgan deymiz. Bir funksiya bir necha formulaga mos qo'yilishi mumkin.*

2- §. Formulalar ekvivalentligi. Duallik prinsipi

Yuqorida aytilganidek, turli formulalarga bitta Bul funksiyasi mos qo'yilishi mumkin. Masalan, $x_1 \downarrow x_2$ va $\overline{x_1 \vee x_2}$ formulalarga bitta funksiya mos qo'yiladi.

2.1-ta'rif. *Mos qo'yilgan* f_Φ *va* f_ψ *funksiyalari teng bo'lgan* Φ *va* ψ *formulalarga ekvivalent formulalar deyiladi va* $\Phi \sim \psi$ *kabi belgilanadi.*

Boshqacha aytganda, formulalar bir xil rostlik jadvaliga ega bo'lsa, ular ***ekvivalent formulalar*** *deyiladi.*

Misollar:

1) $x \vee \overline{x} \sim 1$;

2) $\left(\overline{x_1}(x_2 + x_3)\right) \sim \overline{x_1 \vee ((x_2 \to x_3)(x_3 \to x_2))}$;

3) $(x \to y) \sim (\overline{y} \to \overline{x})$.

Quyidagi ekvivalent formulalar elementar funksiyalarining xossalarini ko'rsatadi:

1) $x \wedge x \sim x$; 2) $x \vee x \sim x$;

3) $x \wedge 1 \sim x$; 4) $x \wedge 0 \sim 0$;

5) $x \vee 0 \sim x$; 6) $x \vee 1 \sim 1$;

7) $x \wedge \overline{x} \sim 0$; 8) $x \vee \overline{x} \sim 1$;

9) $x \wedge y \sim y \wedge x$;

10) $x \vee y \sim y \vee x$;

11) $(x \wedge y) \wedge z \sim x \wedge (y \wedge z)$;

12) $(x \vee y) \vee z \sim x \vee (y \vee z)$;

13) $(x + y) + z \sim x + (y + z)$;

14) $(x \leftrightarrow y) \leftrightarrow z \sim x \leftrightarrow (y \leftrightarrow z)$;

15) $(x \wedge y) \vee z \sim (x \vee z) \wedge (y \vee z)$;

16) $(x \vee y) \wedge z \sim (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$;

17) $\overline{\overline{x}} \sim x$;

18) $\overline{x \wedge y} \sim \overline{x} \vee \overline{y}$;

19) $\overline{x \vee y} \sim \overline{x} \wedge \overline{y}$;

20) $x \to y \sim \overline{x} \vee y$.

2.2-ta'rif. *Ushbu tenglik yordamida aniqlangan:*

$$f^*(x_1, x_2, ..., x_n) = \overline{f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)}$$

funksiya $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *funksiyaga* ***dual funksiya*** *deyiladi.*

Dual funksiyaning jadvali $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyaning jadvalidan 0 ni 1 ga va 1 ni 0 ga o'zgartirib, yuqoridan pastga aylantirib hosil qilinadi.

Quyidagi jadvalga qarang.

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$	$f^*(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	0

2.1-misol. Quyidagi funksiyalarga dual funksiyani toping:

1) $f(x_1,x_2,x_3)=\overline{x_1 \vee (x_2 \to x_3)(x_3 \to x_2)}$;

2) $f(x_1, x_2,x_3,x_4)=(1001101100011011)$.

Yechish: 1) ta'rifga ko'ra

$$f^*(x_1, x_2,\dots,x_n)=f(\overline{x_1}, \overline{x_2},\dots,\overline{x_n})=\overline{\overline{\overline{x_1} \vee (\overline{x_2} \to \overline{x_3})(\overline{x_3} \to \overline{x_2})}}.$$

17-ekvivalentlik formulasiga ko'ra

$$f^*(x_1, x_2,\dots,x_n)=\overline{x_1} \vee (\overline{x_2} \to \overline{x_3})(\overline{x_3} \to \overline{x_2}).$$

2) Bu misolni yechish uchun dual funksiyaning qiymatlar jadvali to'g'risida aytilgan mulohazalardan foydalanamiz, ya'ni *0 ni 1 ga va1 ni 0 ga o'zgartirib, teskari aylantirib dual funksiyani hosil qilamiz:*

$$f^*(x_1, x_2,x_3,x_4)=(0010011100100110).$$

2.1-teorema. *Agar*

$$F(x_1, x_2,\dots,x_n)=f(f_1(x_{11},\dots,x_{1p_1}),\dots,f_m(x_{m1},\dots,x_{mp_m}))$$

bo'lsa, u holda

$$F^*(x_1, x_2,\dots,x_n)=f^*(f_1^*(x_{11},\dots x_{1p_1}),\dots,f_m^*(x_{m1},\dots x_{mp_m})).$$

Isbot.

$$F^*(x_1, x_2,\dots,x_n)=\overline{f(f_1(\overline{x_{11}},\dots,\overline{x_{1p_1}}),\dots,f_m(\overline{x_{m1}},\dots,\overline{x_{mp_m}}))}=$$

$$=\overline{f(\overline{\overline{f_1(\overline{x_{11}},\dots,\overline{x_{1p_1}})}},\dots,\overline{\overline{f_m(\overline{x_{m1}},\dots,\overline{x_{mp_m}})}})}=$$

$$=\overline{f(\overline{f_1^*(x_{11},\dots,x_{1p_1})},\dots,\overline{f_m^*(x_{m1},\dots,x_{mp_m})})}=$$

$$=f^*(f_1^*(x_{11},\dots x_{1p_1}),\dots,f_m^*(x_{m1},\dots x_{mp_m})).$$

Teorema isbotlandi.

Teoremadan quyidagi duallik prinsipi kelib chiqadi.

Duallik prinsipi. *Agar* $\Phi = \tilde{N}[f_1,...,f_s]$ *formula* $f(x_1,...,x_n)$ *funksiyani aniqlasa, u holda* Φ *formuladagi* $f_1,...,f_s$ *funksiyalarni* $f_1^*,...,f_s^*$ *funksiyalarga mos ravishda almashtirib hosil qilingan* $\Phi^* = \tilde{N}[f_1^*,...,f_s^*]$ *formula* $f^*(x_1,...,x_n)$ *funksiyani aniqlaydi.* $\Phi^* = \tilde{N}[f_1^*,...,f_s^*]$ *formulani* Φ *formulaga dual formula deb ataymiz.*

Elementar funksiyalarga dual funksiyalarni ko'rsatamiz

$f(x_1, x_2)$	$f^*(x_1, x_2)$
0	1
1	0
$\bar{x}$	$\bar{x}$
x	x
$x_1 \wedge x_2$	$x_1 \vee x_2$
$x_1 \vee x_2$	$x_1 \wedge x_2$
$x_1 \to x_2$	$\overline{x_1} \wedge x_2$
$x_1 \leftrightarrow x_2$	$x_1 + x_2$
$x_1 + x_2$	$x_1 \leftrightarrow x_2$
$x_1 \mid x_2$	$x_1 \downarrow x_2$
$x_1 \downarrow x_2$	$x_1 \mid x_2$

2.2-misol. Duallik prinsipidan foydalanib, berilgan funksiyaga dual funksiyani toping:

1) $f(x_1,x_2,x_3)=\overline{x_1 \vee ((x_2 \to x_3)(x_3 \to x_2))}$;

2) $f(x_1,x_2,x_3)=\left(\left(\left(x_1 \wedge x_2\right)+x_1\right) \vee x_3\right)$.

Yechish: 1) Yuqoridagi jadvaldan foydalanib, berilgan funksiyada qatnashgan barcha funksiyalarni dualiga almashtiramiz:

$$f^*(x_1,x_2,x_3)=\overline{x_1 \wedge ((\overline{x_2} \wedge x_3) \vee (\overline{x_3} \wedge x_2))}.$$

2) $f^*(x_1,x_2,x_3)=\left(\left(\left(x_1 \vee x_2\right) \leftrightarrow x_1\right) \wedge x_3\right)$.

<u>**2.2-ta'rif.**</u> *Quyidagi tenglik o'rinli bo'lsa,*

$$f(x_1, x_2,...,x_n)=f^*(x_1, x_2,...,x_n).$$

$f(x_1, x_2,...,x_n)$ *funksiya o'z-o'ziga dual funksiya deyiladi.*

3- §. Normal formalar

Biz avvalgi paragraflarda fikrlar algebrasining formulalarini o'rganish va undan tegishli mantiqiy xulosalar chiqarishda muhim bo'lgan "*formulalarning ekvivalentligi*" tushunchasini bayon etgan edik.

Ma'lumki, har bir formulani unga ekvivalent bo'lgan, ayni paytda, soddaroq tuzilgan formulaga keltirish muhim.

Endi fikrlar algebrasining har qanday formulasini $\neg, \wedge, \vee$ mantiqiy amallar yordamida tuzilgan maxsus formulaga (odatda, bunday formulalar dizyunktiv normal forma, konyunktiv normal forma deyiladi) keltiramiz.

Propozitsional o'zgaruvchi x uchun ushbu

$$x^e = \begin{cases} x, & agar \quad e=1 \ bo'lsa, \\ \bar{x}, & agar \quad e=0 \ bo'lsa. \end{cases}$$

belgilashni kiritamiz $(e \in E)$.

3.1-teorema. (Funksiyani o'zgaruvchilar bo'yicha yoyish haqida). *Fikrlar algebrasining har qanday* $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *funksiyasini ixtiyoriy* m $(1 \le m \le n)$ *uchun ushbu ko'rinishda ifodalash mumkin:*

$$f(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n) =$$

$$= \bigvee_{(e_1, \dots, e_m)} (x_1^{e_1} \wedge \dots \wedge x_m^{e_m} \wedge f(e_1, \dots, e_m, x_{m+1}, \dots, x_n)) \qquad (*)$$

bu yerda dizyunksiya $x_1, \dots, x_m$ *o'zgaruvchilarning barcha qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari bo'yicha olinadi.*

Isbot. Ixtiyoriy $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in E^n$ uchun (*) tenglikni chap va ong tomoni bir xil qiymat qabul qilishini ko'rsatamiz. Chap tomoni $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ga teng. O'ng tomoni esa

$$\bigvee_{(e_1, \dots, e_m)} (\alpha_1^{e_1} \wedge \dots \wedge \alpha_m^{e_m} \wedge f(e_1, \dots, e_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n)) =$$

$$= \alpha_1^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \alpha_m^{\alpha_m} \wedge f(\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n) =$$

$$= f(\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Teorema isbotlandi.

Bu teoremadan quyidagi natijalarni olishimiz mumkin:
1) $m=1$ bolganida funksiyani o‘zgaruvchi bo‘yicha yoyish:

$$f(x_1,\ldots,x_n)=$$
$$=(x_1 \wedge f(1,x_2,\ldots,x_n)) \vee (x_1 \wedge f(0,x_2,\ldots,x_n));$$

2) $m=n$ bolganda funksiyani barcha o‘zgaruvchilar bo‘yicha yoyish:

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\bigvee_{(e_1,\ldots,e_n)}(x_1^{e_1}\wedge\ldots\wedge x_n^{e_n}\wedge f(e_1,\ldots,e_n)).$$

Agar $f(x_1,\ldots,x_n)\neq 0$ bo‘lsa, yoqoridagi tenglikning o‘ng tomonidagi formulani quyidagicha almashtirishimiz mumkin:

$$\bigvee_{(e_1,\ldots,e_n)}(x_1^{e_1}\wedge\ldots\wedge x_n^{e_n}\wedge f(e_1,\ldots,e_n))=\bigvee_{\substack{(e_1,\ldots,e_n)\\ f(e_1,\ldots,e_n)=1}}(x_1^{e_1}\wedge\ldots\wedge x_n^{e_n}).$$

Natijada, $f(x_1,\ldots,x_n)=\bigvee\limits_{\substack{(e_1,\ldots,e_n)\\ f(e_1,\ldots,e_n)=1}}(x_1^{e_1}\wedge\ldots\wedge x_n^{e_n})$ ni hosil qilamiz.

Ixtiyoriy $f(x_1,\ldots,x_n)$ Bul funksiyasi uchun D_f orqali agar $f(x_1,\ldots,x_n)\equiv 0$ bo‘lsa, $x_1\wedge\overline{x_1}$ formulani, aks holda $\bigvee\limits_{\substack{(e_1,\ldots,e_n)\\ f(e_1,\ldots,e_n)=1}}(x_1^{e_1}\wedge\ldots\wedge x_n^{e_n})$ formulani belgilaymiz.

Quyidagi

$$x_k^{e_k}\quad (k=1,2,3,\ldots)$$

hamda ulardan tuzilgan

$$(x_1^{e_1} \wedge x_2^{e_2} \wedge \ldots \wedge x_k^{e_k}), \quad (k = 1,2,3,\ldots)$$

formulalar *elementar konyunksiya* deyiladi.

3.1-ta'rif. *"Dizyunktiv normal forma" (qisqacha D.N.F.) tushun-chasi quyidagicha induktiv ta'riflanadi:*

1) har qanday elementar konyunksiya D.N.F. bo'ladi;

2) agar F_1, F_2 lar D.N.F. bo'lsa, u holda $F_1 \vee F_2$ ham D.N.F. bo'ladi;

3) boshqacha ko'rinishli D.N.F. yo'q.

Masalan, quyidagi formulalarning har biri D.N.F. bo'ladi;

$$x_1, \overline{x_2}, x_1 \vee \overline{x_2}, \quad (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3);$$
$$(x_1 \wedge x_2) \vee (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3}), x_1 \vee (x_2 \wedge x_3).$$

3.2-teorema. *Fikrlar algebrasining har qanday formulasi uchun unga mantiqiy ekvivalent D.N.F. mavjud.*

Isbot. Aytaylik, F fikrlar algebrasining formulasi bo'lib, unga Bul funksiyasi f_F mos qo'yilsin.

Unda, 3.1- teoremaga binoan, shunday D_{f_F} formula topiladiki,

$$f_{D_{f_F}} = f_F$$

bo'ladi. Binobarin,

$$f_{D_{f_F}} = f$$

bo'lishidan

$$D_{f_F} \sim F$$

ekanligi kelib chiqadi.

Ikkinchi tomondan, D_{f_F} formulaning tuzilishi (u teoremada keltirilgan) uning D.N.F. bo'lishini ko'rsatadi.

Teorema isbot bo'ldi.

Eslatma. *Yuqorida keltirilgan teorema fikrlar algebrasining formulasi uchun unga mantiqiy ekvivalent D.N.F. ning mavjud bo'lishini isbotlabgina qolmasdan, dizyunktiv normal formadagi formulani topish usulini ham ko'rsatadi.*

3.1-misol. Ushbu

$$F = (x_1 \wedge x_2) \to (x_1 \vee x_2)$$

formulani qaraylik. Bu holda

$$f_0(0,0) = f_F(0,1) = f_F(1,0) = f_F(1,1) = 1$$

bo'ladi. Agar

$$C_0 = (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2}),$$

$$C_1 = (\overline{x_1} \wedge x_2),$$

$$C_2 = (x_1 \wedge \overline{x_2}),$$

$$C_3 = (x_1 \wedge x_2)$$

ekanligini e'tiborga olsak, unda

$$D_f = (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2}) \vee (\overline{x_1} \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \overline{x_2}) \vee (x_1 \wedge x_2)$$

bo'lishini topamiz. Demak, fikrlar algebrasining F formulasi unga ekvivalent bo'lgan D.N.F. ko'rinishga keldi. Quyidagi:

$$x_k^e \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

hamda ulardan tuzilgan

$$(x_1^e \vee x_2^e \vee \ldots \vee x_k^e), \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

formulalar ***elementar dizyunksiya*** deyiladi.

3.2-ta'rif. *"Konyunktiv normal forma" (qisqacha K.N.F.) tushunchasi quyidagicha induktiv ta'riflanadi:*

1) har qanday elementar dizyunksiya K.N.F bo'ladi.

2) agar F_1, F_2lar K.N.F. bo'lsa, u holda $F_1 \wedge F_2$ ham K.N.F. bo'ladi.

3) boshqacha ko'rinishli K.N.F. yo'q.

Masalan, quyidagi formulalarning har biri K.N.F. bo'ladi:

$$\overline{x_1},\ \overline{x_3},\ x_1 \wedge \overline{x_3},\ \ (x_1 \vee \overline{x_3}),\ x_1 \wedge (x_1 \vee \overline{x_3}),\ x_1 \wedge \overline{x_3} \wedge (x_1 \vee \overline{x_3}),$$

$$(x_1 \vee \overline{x_3}) \wedge (x_1 \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_3})$$

3.3-teorema. *Fikrlar algebrasining har qanday formulasi uchun unga mantiqiy ekvivalent K.N.F. mavjud.*

Isbot. Faraz qilaylik, F fikrlar algebrasining formulasi bo'lsin. 2-§ da aytilganlardan foydalanib, berilgan F formula uchun F^* ni topamiz. So'ng 2.1-teoremaga ko'ra ushbu:

$$F^* \sim D_{F^*}$$

munosabatni hosil qilamiz. Bunda, ravshanki, D_{F^*} – D.N.F. bo'ladi.

Yuqoridagi munosabatdan esa, 2.1-teoremaga binoan:

$$(F^*)^* \sim \left(D_{F^*}\right)^*$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Demak,

$$F \sim D^*_{F^*}$$

bo‘ladi. Ayni paytda, $D^*_{F^*}$ formulaning tuzilishidan, uning K.N.F. ko‘rinishda ekanligini payqash qiyin emas. Teorema isbot bo‘ldi.

Eslatma. *Bu teorema fikrlar algebrasining formulalarini konyunktiv normal formadagi formulalarga keltirish usulini ham ko‘rsatadi.*

Garchi 3.2 hamda 3.3-teoremalar isboti fikrlar algebrasining formulalarni D.N.F. yoki K.N.F. ko‘rinishidagi formulalarga keltirish usulini ifodalasa-da, undan amaliyotda foydalanish ancha qiyin bo‘ladi. Formulalardagi propozitsional o‘zgaruvchilar sonining o‘sib borishi, katta sondagi satrli jadvalni tuzishga olib keladi.

Masalan, formuladagi propozisional o‘zgaruvchilar soni $n = 8$ bo‘lganda, satrlar soni $2^8 = 256$ ta bo‘lgan jadvalni tuzishga to‘g‘ri keladi. Bunday hollarda, mantiqiy ekvivalent formulalardan foydalanish qulay bo‘ladi.

3.2-misol. Ushbu $(x_1 \wedge x_2) \to (x_3 \vee x_4)$ formulani qaraylik.
Yuqorida aytilganlardan foydalanib, uni quyidagicha D.N.F. va K.N.F. ko‘rinishiga keltiramiz:

$$(x_1 \wedge x_2) \to (x_3 \vee x_4) \sim \overline{(x_1 \wedge x_2)} \vee (x_3 \vee x_4) \sim (\overline{x_1} \vee \overline{x_2}) \vee \vee (x_3 \vee x_4) \sim$$

$\sim \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4$, bu D.N.F bo‘ladi.

Shuningdek, $(x_1 \wedge x_2) \to (x_3 \vee x_4) \sim (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4)$ K.N.F. bo'ladi.

Endi, mukammal dizyunktiv normal forma (qisqacha: M.D.N.F.) hamda mukammal konyunktiv normal forma (qisqacha: M.K.N.F.) tushunchalarini keltiramiz.

Aytaylik, $x_1, \ldots, x_n$ propozitsional o'zgaruvchilarga bog'liq $D(x_1, \ldots, x_n)$ D.N.F. berilgan bo'lsin.

3.3-ta'rif. *D.N.F bo'lgan $D(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ formula ushbu shartlarni qanoatlantirsa:*

1) $D(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ da ishtirok etuvchi elementar konyunksiyalarning har birida $x_1, x_2, \ldots, x_n$lardan ixtiyoriysi yoki inkor ishorasi bilan yoki inkor ishorasiz faqat bir marta ishtirok etsa,

2) $D(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ da ikkita bir xil dizyunktiv had ishtirok etmasa,

$D(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ formula ***mukammal dizyunktiv normal*** *forma (M.D.N.F.) deyiladi.*

3.4-teorema. *Fikrlar algebrasining ziddiyat bo'lmagan har qanday formulasini unga mantiqiy ekvivalent bo'lgan yagona mukammal dizyunktiv normal formaga keltirish mumkin.*

Isbot. Faraz qilaylik, ziddiyat bo'lmagan formula berilgan bo'lsin. U 1.2-teoremadan foydalanib, dizyunktiv normal formaga keltiriladi.

Agar bordi-yu bu D.N.F. da bir xil dizyunktiv had, masalan,

$$(x_1^{e_1} \wedge x_2^{e_2} \wedge \ldots \wedge x_n^{e_n}) \vee (x_1^{e_1} \wedge x_2^{e_2} \wedge \ldots \wedge x_n^{e_n})$$

ishtirok etsa, u holda ushbu

$$x \vee x \sim x$$

ekvivalentlikdan foydalanib, faqat bittasini qoldiramiz.

Agar bordi-yu

$$(x_1^{e_1} \wedge x_2^{e_2} \wedge \ldots \wedge x_n^{e_n})$$

elementar konyunksiyada x_i o'zi va o'zining inkori bilan ishtirok etsa, unda

$$(x_1^{e_1} \wedge \ldots\ldots \wedge x_i \wedge \overline{x_i} \wedge \ldots \wedge x_n^{e_n}) \sim 0$$

munosabatdan foydalanib, bu dizyunktiv hadni tashlab yuboramiz. Agar biror dizyunktiv

$$(x_1^{e_1} \wedge x_2^{e_2} \wedge \ldots \wedge x_n^{e_n})$$

hadda x_i va $\overline{x_i}$ lardan birortasi ishtirok etmagan bo'lsa, u holda

$$(x_1^{e_1} \wedge \ldots \wedge x_n^{e_n}) \sim (x_1^{e_1} \wedge \ldots \wedge x_n^{e_n}) \wedge (x_i \vee \overline{x_i}) \sim$$

$$\sim (x_1^{e_1} \wedge \ldots \wedge x_i \wedge \ldots \wedge x_n^{e_n}) \vee (x_1^{e_1} \wedge \ldots \wedge \overline{x_i} \wedge \ldots \wedge x_n^{e_n})$$

bo'lishidan foydalanamiz.

Shu usulda keltirilgan formula 3.3-ta'rifning barcha shartlarini bajaradi. Binobarin, u mukammal dizyunktiv normal formadagi formula bo'ladi. Teorema isbot bo'ldi.

Yuqorida keltirilgan "M.D.N.F." tushunchasiga o'xshash "mukammal konyunktiv normal forma" (M.K.N.F.) tushunchasini kiritib, quyidagi teoremani isbotlash mumkin.

3.5-teorema. *Fikrlar algebrasining tavtologiya bo'lmagan har qanday formulasini unga mantiqiy ekvivalent bo'lgan yagona mukammal konyunktiv normal forma ko'rinishiga keltirish mumkin.*

4- §. To‘liqlik va yopiqlik

Yuqorida biz ixtiyoriy Bul funksiyasini $\bar{x}$, $x_1 \wedge x_2$ va $x_1 \vee x_2$ elementar funksiyalar yordamida formula ko‘rinishida ifodalash mumkinligini ko‘rdik. Quyida biz shunday xususiyatga ega funksiyalar sistemalari bilan bog‘liq bo‘lgan tushunchalarga to‘xtalib o‘tamiz.

Faraz qilaylik, bizga $B=\{f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots\} \subseteq P_2$ – Bul funksiyalar sistemasi berilgan bo‘lsin.

4.1- ta’rif. *Agarda ixtiyoriy Bul funksiyasini B funksiyalar sistemasi ustida formula ko‘rinishida ifodalash mumkin bo‘lsa, B* ***to‘liq sistema*** *deyiladi.*

4.1-misol. P_2 – barcha Bul funksiyalar to‘plami – to‘liq sistema bo‘ladi.

4.2-misol. $B=\{\bar{\ },\wedge,\vee\}$ – funksiyalar sistemasini to‘liq sistema ekanligi ko‘rsatildi.

Quyidagi teorema yordamida biz bir sistemaning to‘liqligi masalasini ikkinchi sistemaning to‘liqligiga keltirishimiz mumkin.

4.1-teorema. *Agar* $B_1=\{f_1, f_2, \ldots\}$ *va* $B_2=\{f_1, f_2, \ldots\}$ *Bul funksiyalar sistemalaridan* B_1 *– to‘liq sistema bo‘lib, uning har bir funksiyasini* B_2 *ustida formula ko‘rinishida ifodalash mumkin bo‘lsa, u holda* B_2 *funksiyalar sistemasi to‘liqdir.*

4.3-misol. $B=\{\bar{\ },\wedge\}$ – funksiyalar sistemasi to‘liqligini 4.1-teoremaga asoslanib ko‘rsatamiz. B_1 sifatida 2-misoldagi sistemani, B_2 sifatida esa 3-misoldagi sistemani qaraymiz va $x_1 \vee x_2 = \overline{\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2}$ ayniyatdan foydalansak, $B=\{\bar{\ },\wedge\}$ sistemaning to‘liqligi kelib chiqadi.

4.4-misol. $B=\{\bar{\ },\vee\}-$ funksiyalar sistemasi to'liqdir. Bu sistemaning to'liqligi 3-misol kabi ko'rsatiladi.

4.5-misol. $B=\{/\}$ – funksiyalar sistemasi to'liqdir. Quyidagi ayniyatlarning o'rinli ekanligini ko'rsatish qiyin emas:

$$\bar{x}=x/x,\quad x_1\wedge x_2=(x_1/x_2)/(x_1/x_2).$$

Demak 3-misoldagi sistemaning barcha funksiyalari bu sistema ustida formula ko'rinishida ifodalanadi.

4.6-misol. $B=\{0,1,x_1\cdot x_2,x_1+x_2\}-$ funksiyalar sistemasi to'liqdir. Quyidagi ayniyatlarning o'rinli ekanlini ko'rsatish qiyin emas.

$$\bar{x}=x+1,\quad x_1\wedge x_2=x_1\cdot x_2.$$

Demak 3-misoldagi sistemaning barcha funksiyalari bu sistema ustida formula ko'rinishida ifodalanadi.

Ixtiyoriy Bul funksiyasini $0,1,x_1\cdot x_2$ va x_1+x_2 funksiyalari yordamida formula ko'rinishida ifodalagandan keyin, qavslarni ochib chiqib, algebraik almashtirishlar bajarib, **mod 2** bo'yicha ko'phad (Jegalkin ko'phadi) ko'rinishida ifodalanadi. Quyidagi teorema o'rinli.

4.2-teorema.(Jegalkin). *Ixtiyoriy Bul funrsiyasi Jegalkin ko'phadi yordamida ifodalanishi mumkin, ya'ni* $\forall f(x_1,>\ ,x_n)\in P_2$ *uchun*

$$f(x_1,>\ ,x_n)=\sum_{(i_1>\ ,i_s)} a_{i_1>\ i_s}x_{i_1}>\ x_{i_s},\ \textit{bu yerda}\ a_{i_1>\ i_s}\in E.$$

Ushbu ko'phadda

$$x_{i_1} \cdot > \cdot x_{i_s}$$

ko'rinishidagi hadlar soni 1 dan n gacha bo'lgan natural sonlar to'plamining $\{i_1,> ,i_s\}$ qism to'plamlari soniga, ya'ni 2^n ga teng. Ularning $a_{i_1> i_s}$ koeffitsiyentlari faqat 0 yoki 1 qiymat qabul qilgani uchun barcha n o'zgaruvchili Jegalkin ko'phadlarining soni 2^{2^n} ga, ya'ni barcha n o'zgaruvchili Bul funksiyalarining soniga teng. Bu esa Bul funksiyasining Jegalkin ko'phadi yordamida yagona ravishda ifodalanishini bildiradi.

4.7-misol. Ushbi funksiyani Jegalkin ko'phadi ko'rinishida ifodalang:

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1 / x_2)+(x_1 \wedge x_3)$$

Yechish: Berilgan funksiya uchun noma'lum koeffitsiyentli ko'phad ko'rinishidagi ifodasini izlaymiz:

$$(x_1 / x_2)+(x_1 \wedge x_3)=ax_1x_2x_3+bx_1x_2+$$
$$+cx_1x_3+dx_2x_3+ex_1+fx_2+gx_3+h.$$

Funksiyaning qiymatlar jadvalida noma'lum koeffitsiyentlarni aniqlaymiz:

x_1	x_2	x_3	$(x_1 / x_2)+(x_1 \wedge x_3)$	$ax_1x_2x_3+bx_1x_2+cx_1x_3+dx_2x_3+$ $+ex_1+fx_2+gx_3+h$	
0	0	0	1	h	$h=1$
0	0	1	1	$g+h$	$g=0$
0	1	0	1	$f+h$	$f=0$

0	1	1	1	$d+f+g+h$	$d=0$
1	0	0	1	$e+h$	$e=0$
1	0	1	0	$c+e+g+h$	$c=1$
1	1	0	0	$b+e+f+h$	$b=1$
1	1	1	1	$a+b+c+d+e+f+g+h$	$a=0$

Jadvalning 4 va 5-ustunlarini tenglashtirishdan hosil bo‘lgan tenglamalar (noma’lum koeffitsiyentlarga nisbatan) sistemasini yechib, 6-ustunni hosil qilamiz. Demak,

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1/x_2)+(x_1\wedge x_3)=x_1\cdot x_2+x_1\cdot x_3+1.$$

“To‘liqlik” tushunchasi bilan “Yopilma” va “Yopiq sinf” tushunchalari bevosita bog‘liq hisoblanadi.

4.2-ta’rif. *Aytaylik, $M\in P_2$ bo‘lsin. M to‘plamning funksiyalari yordamida formula ko‘rinishida ifodalash mumkin bo‘lgan barcha funksiyalar to‘plamiga M* ***to‘plamning yopilmasi*** *deyiladi. M to‘plamning yopilmasi [M] kabi belgilanadi.*

Misol: 1) $M=P_2$ bo‘lsa, ko‘rinib turibdiki, $[M]=P_2$ bo‘ladi.

2) $M=\{1,x_1+x_2\}$ bo‘lsa, bu to‘plamning yopilmasi barcha chiziqli funksiyalar sinfi L, ya’ni $f(x_1,\dots,x_n)=c_0+c_1x_1+\dots+c_nx_n$ ko‘rinishidagi funksiyalar sinfi bo‘ladi.

4.3- ta’rif. *Agarda M to‘plamning yopilmasi o‘ziga teng, yani [M]=M bo‘lsa, M* ***yopiq to‘plam*** *deyiladi.*

Misol: 1) $M=P_2$ sinf yopiq sinf bo‘ladi.

2) $M=\{1,x_1+x_2\}$ sinf yopiq emas.

3) L sinf yopiq.

5- §. Muhim yopiq sinflar. Post teoremasi

Ushbu paragrafda biz ba'zi muhim yopiq sinflarni o'rganamiz.

1. Nolni saqlovchi barcha Bul funksiyalari sinfini T_0 orqali belgilaymiz, ya'ni $T_0 = \{f(x_1,..,x_n) \mid f(0,0,..,0) = 0\}$.

Masalan, $0,\ x,\ x_1 \wedge x_2,\ x_1 \vee x_2,\ x_1 + x_2$ funksiyalar T_0 sinfga tegishli bo'ladi.

5.1-jumla. T_0 – *yopiq sinfdir.*

Isbot. Biz ixtiyoriy $f, f_1,...,f_m \in T_0$ funksiyalar uchun

$$F(x_1, x_2,....,x_n) = f(f_1(x_{11},...,x_{1p_1}),...,f_m(x_{m1},...,x_{mp_m}))$$

funksiyaning T_0 sinfga tegishli ekanini ko'rsatsak yetarli. Haqiqatan:

$$F(0, 0,....,0) = f(f_1(0,...,0),...,f_m(0,...,0)) = f(0,> ,0) = 0 \cdot$$

2. Birni saqlovchi barcha Bul funksiyalari sinfini T_1 orqali belgilaymiz, ya'ni $T_1 = \{f(x_1,..,x_n) \mid f(1,1,..,1) = 1\}$.

Masalan, $1,\ x,\ x_1 \wedge x_2,\ x_1 \vee x_2,\ x_1 \to x_2$ funksiyalar T_1 sinfga tegishli bo'ladi.

5.2-jumla. T_1 – *yopiq sinfdir.*

Isbot. Biz ixtiyoriy $f, f_1,...,f_m \in T_1$ funksiyalar uchun $F(x_1, x_2,....,x_n) = f(f_1(x_{11},...,x_{1p_1}),...,f_m(x_{m1},...,x_{mp_m}))$ funksiyaning T_1 sinfga tegishli ekanini ko'rsatsak, yetarli. Haqiqatan:

$$F(1, ...,1) = f(f_1(1,...,1),...,f_m(1,...,1)) = f(1,> ,1) = 1 \cdot$$

3. O'z-o'ziga dual barcha Bul funksiyalar sinfini S orqali belgilaymiz, ya'ni $S=\left\{f(x_1,..,x_n)\mid f(x_1,..,x_n)=f^*(x_1,..,x_n)\right\}$.

Masalan, x va $\bar{x}$ funksiyalar S sinfiga tegishli bo'ladi.

5.3-jumla. *S – yopiq sinfdir.*

Isbot. Biz ixtiyoriy $f, f_1,...,f_m \in S$ funksiyalar uchun $F(x_1, x_2, ..., x_n)=f(f_1(x_{11},...,x_{1p_1}),...,f_m(x_{m1},...,x_{mp_m}))$ funksiyaning S sinfga tegishli ekanini ko'rsatsak yetarli. Haqiqatan:

$$F^*(x_1, x_2,...,x_n)=f^*(f_1^*(x_{11},...,x_{1p_1}),...,f_m^*(x_{m1},...,x_{mp_m}))=$$
$$=f(f_1(x_{11},...,x_{1p_1}),...,f_m(x_{m1},...,x_{mp_m}))=F(x_1, x_2,...,x_n).$$

Quyidagi lemma o'z-o'ziga dual bo'lmagan funksiya haqidagi lemma deb yuritiladi.

5.1-lemma. *Agar $f(x_1,..,x_n)\notin S$ bo'lsa, u holda ushbu funksiyadan x va $\bar{x}$ funksiyalarni o'rniga qo'yish yo'li bilan bir o'zgaruvchili o'z-o'ziga dual bo'lmagan funksiyani, ya'ni konstantani hosil qilish mumkin.*

Isbot. Ayraylik, $f(x_1,..,x_n)\notin S$ bo'lsin. U holda shunday $\alpha=(e_1,..,e_n)\in E^n$ borki, $f(\overline{e_1},..,\overline{e_n})=f(e_1,..,e_n)$ tenglik o'rinli. Quyidagi funksiyalarni qaraymiz $\varphi_i(x)=x^{e_i}$ va ular yordamida $\varphi(x)$ funksiyani aniqlaymiz:

$$\varphi(x)=f(\varphi_1(x),...,\varphi_n(x)).$$

Bu $\varphi(x)$ funksiya $f(x_1,..,x_n)\notin S$ funksiyadan x va $\bar{x}$ funksiyalarni o'zgaruvchilar o'rniga qo'yish bilan hosil qilindi va konstantaga teng.

Haqiqatan,

$$\varphi(0) = f(\varphi_1(0), \ldots, \varphi_n(0)) = f(0^{e_1}, \ldots, 0^{e_n}) =$$
$$= f(\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_n) = f(e_1, \ldots, e_n) =$$
$$= f(1^{e_1}, \ldots, 1^{e_n}) = f(\varphi_1(1), \ldots, \varphi_n(1)) = \varphi(1).$$

Lemma isbotlandi.

4. E^n da quyidagi tartib munosabatini kiritamiz:

$\alpha = (e_1,..,e_n)$, $\beta = (e_1',..,e_n') \in E^n$ uchun $\alpha \le \beta \Leftrightarrow e_1 \le e_1'$, $e_2 \le e_2'$,..., $e_n \le e_n'$. Ushbu munosabat o‘rinli bo‘lsa, $\alpha = (e_1,..,e_n)$ – n lik $\beta = (e_1',..,e_n') \in E^n$ – n likdan ***“oldin keladi”*** deyiladi. Masalan, $(0,1,1,0) \le (0,1,1,1)$, ammo (0, 1, 0) va (1, 0, 0) uchliklarni solishtirib bo‘lmaydi. Bu munosabat qisman tartib munosabat bo‘ladi.

5.1-ta’rif. *Agar $f(x_1,...,x_n)$ Bul funksiyasi uchun ixtiyoriy $\alpha = (e_1,..,e_n)$, $\beta = (e_1',..,e_n') \in E^n$ uchun $\alpha \le \beta \Rightarrow f(\alpha) \le f(\beta)$ shart bajarilsa, $f(x_1,...,x_n)$ funksiya monoton funksiya deyiladi.*

Barcha monoton funksiyalar sinfini M orqali belgilaymiz, yani

$$M = \{f(x_1,...,x_n) / \alpha \le \beta \Rightarrow f(\alpha) \le f(\beta)\}.$$

Masalan, $0, 1, x, x_1 \wedge x_2, x_1 \vee x_2$ funksiyalar S sinfiga tegishli bo‘ladi.

5.4-jumla. *M – yopiq sinfdir.*

Agar $\alpha = (e_1, \ldots, e_{i-1}, e_i, e_{i+1}, \ldots, e_n)$ va $\beta = (e_1, \ldots, e_{i-1}, \overline{e}_i, e_{i+1}, \ldots, e_n)$ bo‘lsa, α va β n liklar *qo‘shni* (i- koordinata bo‘yicha) deyiladi.

Quyidagi lemma monoton bo'lmagan funksiya haqidagi lemma deb yuritiladi.

5.2-lemma. *Agar* $f(x_1,..,x_n)\notin M$ *bo'lsa, u holda ushbu funksiyadan* 0,1 va x *funksiyalarni o'rniga qo'yish yo'li bilan* $\bar{x}$ *funksiyani hosil qilish mumkin.*

Isbot. $f(x_1,..,x_n)\notin M$ bo'lsin. Avval, $\alpha\leq\beta$ va $f(\alpha)>f(\beta)$ shartni qanoatlantiradigan *qo'shni* α va β n liklar mavjudligini ko'rsatamiz. $f(x_1,...,x_n)\notin M$ bo'lgani uchun shunday α^1 va β^1 n liklar mavjudki, $\alpha^1\leq\beta^1$ va $f(\alpha^1)>f(\beta^1)$ shart bajariladi. Agar ular *qo'shni* bo'lsa, maqsad bajariladi. Agar α^1vaβ^1 lar *qo'shni* bo'lmasa, ular k ta koordinatasi bilan farq qiladi. α^1usbu koordinatalarda 0 qiymatga ega, β^1esa 1 qiymatga ega. Bunga asoslanib, α^1va β^1lar orasiga k–1 ta turli $\alpha^2,\alpha^3,>\ ,\alpha^k$ n liklarni shunday joylashtirish mumkinki,

$$\alpha^1\leq\alpha^2\leq\alpha^3\leq>\ \leq\alpha^k\leq\beta^1$$

shart o'rinli bo'ladi. Ushbu qatorda yonma-yon turgan n liklar *qo'shni* bo'ladi. $f(\alpha^1)>f(\beta^1)$ bo'lgani uchun, $\exists t<k$ $f(\alpha^t)>$ $>f(\alpha^{t+1})$ o'rinli. $\alpha=\alpha^t$ va $\beta=\alpha^{t+1}$ deb olamiz. Aytaylik, ular i-koordinata bo'yicha *qo'shni* bo'lsin, ya'ni

$$\alpha=(e_1,>\ ,e_{i-1},0,e_{i+1},>\ ,e_n),$$

$$\beta=(e_1,>\ ,e_{i-1},1,e_{i+1},>\ ,e_n).$$

Quyida aniqlangan $\varphi(x)$ funksiyani qaraymiz:

$$\varphi(x)=f(e_1,>\ ,e_{i-1},x,e_{i+1},>\ ,e_n).$$

Bu $\varphi(x)$ funksiya $f(x_1,..,x_n) \notin M$ funksiyadan 0, 1 va x funksiyalarni o‘zgaruvchilar o‘rniga qo‘yish bilan hosil qilindi va $\varphi(x) = \overline{x}$. Haqiqatan,

$$\varphi(0) = f(e_1,\ldots,e_{i-1},0,e_{i+1},\ldots,e_n) = f(\alpha) > f(\beta) =$$

$$f(e_1,\ldots,e_{i-1},1,e_{i+1},\ldots,e_n) = \varphi(1).$$

Demak, $\varphi(0) = 1$ va $\varphi(1) = 0$, yani $\varphi(x) = \overline{x}$. Lemma isbotlandi.

5. Barcha chiziqli Bul funksiyalari sinfi L quyidagi sinf bo‘ladi:

$$L = \left\{ f(x_1,...,x_n) / f(x_1,...,x_n) = c_0 + c_1 \cdot x_1 + ... + c_n x_n \right\}.$$

Masalan, x, $\overline{x}$ va $x_1 + x_2$ funksiyalar L sinfiga tegishli bo‘ladi.

<u>**5.5-jumla**</u>. *L – yopiq sinfdir.*

Quyidagi lemma chiziqli bo‘lmagan funksiya haqidagi lemma deb yuritiladi.

<u>**5.3-lemma**</u>. *Agar $f(x_1,..,x_n) \notin L$ bo‘lsa, u holda ushbu funksiyadan* $0, 1, x$ va $\overline{x}$ *funksiyalarni o‘rniga qo‘yish, yo‘ki f funksiyaning inkorini olish yo‘li bilan $x_1 \wedge x_2$ funksiyani hosil qilish mumkin.*

Isbot. $f(x_1,\ldots,x_n)$ funksiyaning Jegalkin ko‘phadiga yoyilmasini qaraymiz:

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{(i_1,\ldots,i_s)} a_{i_1\ldots i_s} x_{i_1}\ldots x_{i_s}.$$

Funksiya chiziqli bo'lmagani uchun ushbu ko'phadning hech bo'lmaganda bitta hadi ikkitadan ko'p ko'paytuvchiga ega bo'ladi. Umumiylikdan chiqmagan holda, ushbu ko'paytuvchilarning orasida x_1 va x_2 o'zgaruvchilar mavjud deb hisoblaymiz. Shunda ko'phadni quyidagi ko'rinishga keltirish mumkin:

$$\sum_{(i_1,\dots,i_s)} a_{i_1\dots i_s} x_{i_1}\dots x_{i_s} = x_1x_2f_1(x_3,\dots,x_n) + x_1f_2(x_3,\dots,x_n) +$$

$$+ x_2f_3(x_3,\dots,x_n) + f_4(x_3,\dots,x_n),$$

bu yerda $f_1(x_3,\dots,x_n) \neq 0$,

Aytaylik, $f_1(e_3,\dots,e_n) = 1$ bo'lsin. U holda

$$\alpha = f_2(e_3,\dots,e_n),$$

$$\beta = f_2(e_3,\dots,e_n),$$

$$\gamma = f_2(e_3,\dots,e_n)$$

deb olamiz.

Quyida aniqlangan $\varphi(x_1,x_2)$ funksiyani qaraymiz:

$$\varphi(x_1,x_2) = f(x_1,x_2,e_3,\dots,e_n) = x_1x_2 + \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma .$$

Bu $\varphi(x_1,x_2)$ funksiya $f(x_1,..,x_n) \notin L$ funksiyadan 0, $1, x$ va $\bar{x}$ funksiyalarni o'zgaruvchilar o'rniga qo'yish bilan hosil qilindi. Endi $\varphi(x_1,x_2)$ funksiya yordamida quyida aniqlangan $\psi(x_1,x_2)$ funksiyani qaraymiz:

$$\psi(x_1,x_2) = \varphi(x_1 + \beta, x_2 + \alpha,) + \alpha\beta + \gamma .$$

Bu $\psi(x_1,x_2)$ funksiya $\varphi(x_1,x_2)$ funksiyadan x va $\bar{x}$ funksiyalarni o'zgaruvchilar o'rniga qo'yish va balki $\varphi(x_1,x_2)$ dan inkor qilish bilan hosil qilindi va $\psi(x_1,x_2)=x_1\wedge x_2$. Haqiqatan,

$$\psi(x_1,x_2)=\varphi(x_1+\beta,x_2+\alpha,)+\alpha\beta+\gamma=$$

$$=(x_1+\beta)(x_2+\alpha)+\alpha(x_1+\beta)+\beta(x_2+\alpha)+\gamma+\alpha\beta+\gamma=$$

$$=x_1x_2+\beta x_2+\alpha x_1+\alpha\beta+\alpha x_1+\alpha\beta+\beta x_2+\alpha\beta+\alpha\beta+\gamma=x_1x_2.$$

Lemma isbotlandi.

Quyidagi jadval T_0,T_1,S,M va L sinflarning o'zaro turlicha ekanligini ko'rsatadi:

	T_0	T_1	S	M	L
0	+	–	–	+	+
1	–	+	–	+	+
$\bar{x}$	–	–	+	–	+

5.1-teorema(Post). *$B\subseteq P_2$ funksiyalar sistemasi to'liq bo'lishi uchun B yuqoridagi beshta T_0,T_1,S,M va L sinflarning hech birining qism to'plami bo'lmasligi zarur va yetarli.*

Isbot. *Zaruriyligi.* B to'liq sistema bo'lsin. Faraz qilaylik biror-bir $B_1\in\{T_0,T_1,S,M,L\}$ uchun $B\subseteq B_1$. U holda $P_2=[B]\subseteq[B_1]=B_1$. Demak, $B_1=P_2$, bu esa farazga zid. Zaruriylik isbotlandi.

Yetarlilik. B funksiyalar sistemasi T_0,T_1,S,M va L sinflardan hech birining qism to'plami bo'lmasin. B funksiyalar sistemasidan

T_0, T_1, S, M va L sinflar hech birining qism to'plami bo'lmaydigan, beshtadan ko'p bo'lmagan funksiyani o'z ichiga olgan B_1 qism sistema ajratish mumkin. Buning uchun B funksiyalar sistemasidan T_0, T_1, S, M va L sinflariga mos ravishda tegishli bo'lmagan f_0, f_1, f_s, f_m va f_l funksiyalarni tanlaymiz va $B_1 = \{f_0, f_1, f_s, f_m, f_l\}$ deb olamiz.

Yetarlilikni uchta bosqichda isbotlaymiz.

I. Konstantalar 0 va 1 larni f_0, f_1 va f_s funksiyalar yordamida hosil qilamiz. $f_0 \notin T_0$ bo'lgani uchun 2 ta hol bo'lishi mumkin:

1) $f_0(1,\ldots,1) = 1$. Bunda $\varphi(x) = f_0(x,\ldots,x) = 1$, chunki

$$\varphi(0) = f_0(0,\ldots,0) = 1, \quad \varphi(1) = f_0(1,\ldots,1) = 1$$

Ikkinchi konstantani f_1 funksiyadan olamiz:

$$f_1(1,\ldots,1) = 0.$$

2) $f_0(1,\ldots,1) = 0$. Bunda $\varphi(x) = f_0(x,\ldots,x) = \overline{x}$, chunki

$$\varphi(0) = f_0(0,\ldots,0) = 1, \quad \varphi(1) = f_0(1,\ldots,1) = 0.$$

Endi biz $\overline{x}$ funksiyaga egamiz va $f_s (f_s \notin S)$ dan 5.1-lemmaga asosan konstantani hosil qilishimiz mumkin. $\overline{x}$ funksiyaga ega bo'lganimiz uchun ikkinchi konstantani ham topamiz. Ikki holda ham 0 va 1 konstantalarni hosil qildik.

II. 5.2-lemmaga asosan, 0, 1 va $f_m (f_m \notin M)$ funksiyalar yordamida $\overline{x}$ funksiyani hosil qilamiz.

III. 5.3-lemmaga asosan, 0, 1, x va $\overline{x}$ funksiyalar yordamida $x_1 \wedge x_2$ funksiyani hosil qilamiz.

Shunday qilib, $\bar{x}$ va $x_1 \wedge x_2$ funksiyalarni B_1 ustida formula ko'rinishida ifodaladik. 4.1-teoremaga ko'ra B_1 – to'liq sistema. Yetarlilik isbotlandi.

Teorema isbotlandi.

Post teoremasidan kelib chiqadigan natijalarga o'z e'tiborimizni jalb etaylik. Zero, har bir teoremaning mohiyati undan kelib chiqadigan natijalar bilan o'lchanadi. Quyida biz Post teoremasidan kelib chiqadigan uch natija ustida to'xtalamiz.

5.2-ta'rif. *Bizga $B \subseteq P_2$ berilgan bo'lsin.*

B – bir kam to'liq deyiladi, agarda

1) B to'liq bo'lmasa, ya'ni $[B] \neq P_2$;

2) ixtiyoriy $f \in P_2 \setminus B$ uchun $[B \cup \{f\}] = P_2$ bo'lsa.

5.1-natija. *$B \subseteq P_2$ birkam to'liq bo'lishi uchun $B \in \{T_0, T_1, S, M, L\}$ bo'lishi zarur va yetarli.*

Zarurligi. Faraz qilaylik, B birkam to'liq bo'lsin. U holda Post teoremasiga binoan, biror-bir $B_1 \in \{T_0, T_1, S, M, L\}$ uchun $B \subseteq B_1$ bo'ladi. Aytaylik, $B \neq B_1$ bo'lsin. U holda $f \in B_1 \setminus B$ ni qaraymiz. B ning bir kam to'liqligiga binoan, $B \cup \{f\}$ to'liq bo'ladi: $B \cup \{f\} \subseteq B_1 \Rightarrow [B \cup \{f\}] \subseteq [B_1] = B_1$. Bu esa, $P_2 \neq B_1$ ga zid. Demak, $B = B_1$.

Yetarliligi. T_0, T_1, S, M va L sinflarning o'zaro turli ekanligi va Post teoremasidan ularning bir kam to'liq ekanligi kelib chiqadi.

5.2-natija. *To'liq bo'lmagan ixtiyoriy yopiq sinf T_0, T_1, S, M va L sinflardan birining qismi bo'ladi.*

5.3-natija. *Ixtiyoriy to'liq sustemadan to'rtta elementdan ortiq bo'lmagan to'liq qism sistemani ajratib olish mumkin.*

Isbot. Agarda B to'liq bo'lsa, u holda Post teoremasiga binoan, quyidagi:

$$B_1 = \{f_0, f_1, f_s, f_m, f_l\},$$

bu yerda f_0 – nolni saqlamaydigan B sistemanig funksiyasi, f_1 – birni saqlamaydigan B sistemanig funksiyasi, f_s – o'z-o'ziga dual bo'lmagan B sistemanig funksiyasi, f_m – monoton bo'lmagan B sistemanig funksiyasi, f_l – chiziqli bo'lmagan B sistemanig funksiyasi, to'plam to'liq bo'ladi. Ammo bu – besh elementli to'plam. $f_0 \notin T_0$ funksiya uchun quyidagi ikki hol bo'ladi:

1-hol. $f_0(1,1,..,1) = 1$;

2-hol. $f_0(1,1,..,1) = 0$.

Birinchi holda $f_0(0,0,..,0) = f_0(1,1,..,1) = 1$ bo'lib, f_0 o'zi o'ziga ikkilangan emas, shu sababli f_s ni chiqarib tashlasa bo'ladi.

Ikkinchi holda f_0 birni saqlamaydi, shu sababli, $f_1$ni chiqarib tashlasak bo'ladi. Shunday qilib, birinchi holda $\{f_0, f_1, f_m, f_l\}$, ikkinchi holda esa $\{f_0, f_s, f_l\}$ to'liq bo'ladi.

3-natijada "to'rtta elementdan ortiq bo'lmagan" shartni "uchtta elementdan ortiq bo'lmagan" sharti bilan almashtirib bo'lmaydi.

Haqiqatan, quyidagi $f_0 = 1,\ f_1 = 0,\ f_m = x_1 + x_2 + x_3,\ f_l = x_1 \cdot x_2$ funksiyalar to'plami Post teoremasiga binoan to'liq, chunki

$$f_0 \notin T_0,\ \ f_1 \notin T_1 \cup S \quad f_m \notin M, \quad f_l \notin L.$$

Ammo

$\{f_1, f_m, f_l\} \subseteq T_0$, $\{f_0, f_m, f_l\} \subseteq T_1$, $\{f_0, f_1, f_l\} \subseteq M$, $\{f_0, f_1, f_m\} \subseteq L$ bo'lgani sababli, Post teoremasiga binoan, to'liq bo'lmaydilar.

III bob bo‘yicha nazorat savollari

1. Bul (mantiq algebrasi) funksiyalarini ta’riflang.
2. Bul funksiyalari qanday usullarda berilishi mumkin?
3. Elementar Bul funksiyalari va ularning xossalarini keltiring .
4. Bul funksiyalar sistemasi ustida “formula” tushunchasi qanday ta’riflanadi?
5. Jegalkin ko‘phadiga qanday keltiriladi?
6. “To‘liqlik” va “yopiqlik” tusunchalarini ta’riflang va misollar keltiring.
7. To‘liq sistemalarga misollar keltiring.
8. M, L sinflarni aniqlang.
9. T_0, T_1, S sinflarning yopiqligini ko‘rsting.
10. Bul funksiyalarini minimallash muammosini izohlang.
11. To‘liqlik haqida Post teoremasining tatbiqlarini keltiring.

IV BOB. MULOHAZALAR HISOBI

1- §. Formal aksiomatik nazariya

Matematikada aksiomatik metod eramizdan oldin qadimgi, yunon matematiklarining ishlarida paydo bo'lgan. Ammo aksiomatik metod XIX asrda rus matematigi N.I.Lobachevskiy tomonidan noevklid geometriyasining kashf etilishi bilan o'zining alohida yo'nalish sifatida yangi rivojlanish pog'onasiga o'tdi. Shunday qilib, aksiomatik metod matematik nazariyalarni qurish va o'rganishda kuchli apparat ekanligi XIX asr matematiklari tomonidan to'la-to'kis e'tirof etildi va bu apparat matematikada keng ko'lamda qo'llana boshladi.

Mulohazalar algebrasini o'rganganimizda rostlik jadvali orqali ko'pgina savollarga javob olgan edik. Mantiqning ba'zi qiyin masalalarini ushbu metod bilan hal qilish mumkin bo'lmagani sababli, biz endi aksiomatik metodni qo'llaymiz va aynan rost formulalar to'plamini deduktiv sistema yordamida aniqlaymiz. Boshqacha aytganda, biz "dastlabki" aynan rost formulalar sifatida mulohazalar hisobi aksiomalarini aniqlaymiz va shu aksiomalardan xuddi shunday formulalarni keltirib chiqarish mumkin bo'ladigan keltirib chiqarish qoidalarini ifodalaymiz. Bunday qoidalar mantiqqa xizmat qilib, keltirib chiqarish jarayonini sof mexanik hisoblashlarga aylantirgani uchun ham mulohazalar hisobi atamasi paydo bo'lgan.

Endi esa formal aksiomatik nazariyani ifodalashga o'taylik.

Agar quyidagi shartlar bajarilsa, u holda L formal (aksiomatik) nazariya aniqlangan hisoblanadi:

(1) *Sanoqli simvollar to'plami – L nazariyaning simvollari berilgan bo'lishi kerak. Bu holda, L nazariyaning chekli simvollarining ixtiyoriy ketma-ketligi L ning ifodasi deyiladi.*

(2) *L nazariyaning formulalari deb ataluvchi Lning ifodalari to'plami berilgan bo'lishi kerak. Odatda, berilgan ifodaning formula bo'lish-bo'lmasligini aniqlovchi effektiv jarayon beriladi.*

(3) *L nazariyaning aksiomalari deb ataluvchi formulalar majmuasi to'plami ajratilgan bo'lishi kerak. Ko'p hollarda L nazariyaning berilgan formulasi aksioma bo'lish yoki bo'lmasligini effektiv aniqlash mumkin bo'ladi; bu holda L – effektiv aksiomalashtirilgan yoki aksiomatik nazariya deyiladi.*

(4) *Formulalar orasida keltirib chiqarish qoidalari deb ataluvchi chekli $R_1, \dots R_n$ munosabatlar ketma-ketligi berilgan bo'lishi kerak. Har bir R_i uchun shunday musbat butun j soni topiladiki, j ta formulalardan iborat har qanday to'plam uchun hamda ixtiyoriy F formula uchun berilgan j ta formulalar F formula bilan R_1 munosabatda bo'ladimi, degan savol effektiv hal etilishi kerak. Agar bu savolga "ha" deb javob olinsa, u holda F formula berilgan j ta formulalarning R_1 qoidasi bo'yicha bevosita natijasi deyiladi.*

Agar $R_1, \dots R_n$ formulalar ketma-ketligi berilgan bo'lib, har qanday i uchun $(1 \leq i \leq n)$ F_i formula yoki aksioma bo'lsa, yoki o'zidan oldingi qandaydir formulalarning bevosita natijasi bo'lsa, u holda berilgan formulalar ketma-ketligi L da keltirib chiqarish deyiladi.

Agar Lda keltirib chiqarish mavjud bo'lib, bu keltirib chiqarishning oxirgi formulasi F formula bilan ustma-ust tushsa, u holda

F formula L nazariyaning teoremasi deyiladi; bunday keltirib chiqarish F formulaning keltirib chiqarishi deyiladi (berilgan nazariyaga nisbatan).

Hatto, effektiv aksiomalashtirilgan L nazariyada ham "teorema" tushunchasi effektiv bo'lishi shart emas, chunki umuman olganda, berilgan formulaning L da keltirib chiqarilishi mavjudligini aniqlovchi effektiv algoritm mavjud bo'lmasligi ham mumkin.

Bunday algoritm mavjud bo'lgan nazariya yechiluvchan nazariya, aks holda esa yechilmaydigan nazariya deyiladi.

Biroz oldinga o'tib shuni aytish mumkinki, mulohazalar hisobi uchun qurilgan L formal aksiomatik nazariya yechiluvchan nazariya, tor ma'nodagi predikatlar hisobi nazariyasi esa yechilmaydigan nazariyadir.

F formula L nazariyada formulalar to'plami Γ ning mantiqiy natijasi (mulohazalar hisobida mantiqiy natija) bo'lishi uchun shunday $F_1,\ldots F_n$ formulalar ketma-ketligi mavjud bo'lishi kerakki, bunda F_n formula F dan iborat bo'lib, ixtiyoriy i $(1 \leq i \leq n)$ uchun F_i formula yoki aksioma, yoki Γ to'plamning elementi, yoki birorta keltirib chiqarish qoidasi orqali o'zidan oldingi formulalarning bevosita natijasi bo'lishi zarur va yetarlidir. Bunday formulalar ketma-ketligi Γ formulalar to'plamidan F ning keltirib chiqarilishi deyilib, Γ ning elementlari esa keltirib chiqarish gipotenuzalari deyiladi.

Qulaylik uchun, "F formula – Γ formulalar to'plamining natijasi" degan tasdiqni $\Gamma \vdash F$ ko'rinishida yozamiz.

Agar Γ chekli to'plam bo'lsa, ya'ni, $\Gamma = \{F_1,\ldots F_n\}$, u holda $\{F_1,\ldots F_n\} \vdash F$ yozuvni $F_1,\ldots F_n \vdash F$ ko'rinishda yozamiz. Agar $\Gamma = \varnothing$, bo'lsa, u holda $\Gamma \vdash F$ yozuv F formula L da teorema bo'lganda va faqat shu holdagina o'rinli bo'ladi. Odatda, $\varnothing \vdash F$ yozuv o'rniga $\vdash F$ ko'rinishda yoziladi. Shunday qilib, $\vdash F$ yozuv "F formula L da teoremadir" degan tasdiqning qisqartirilganidir.

Aniqlangan $\vdash L$ keltirib chiqarilishining ba'zi xossalarini ko'rib o'taylik.

1.1-xossa. Agar $\Gamma \subseteq \Delta$ va $\Gamma \vdash F$ bo'lsa, u holda $\Delta \vdash F$ bo'ladi.

Haqiqatan ham, $\Gamma \vdash F$ deganda, quyidagini tushunamiz: shunday $F_{i1},\dots F_{ik}$ ketma-ketlik mavjudki, bunda F_n formula F dan iborat bo'lib, ixtiyoriy $i(1 \le i \le n)$ uchun F_i formula yoki aksioma yoki Γ ning elementi, yoki o'zidan oldingi formulalarning, birorta keltirib chiqarish qoidasi orqali hosil qilingan, bevosita natijasidir.

Agar $F_1,\dots F_n$ formulalar Γ to'plamga tegishli bo'lsa, $\Gamma \subseteq \Delta$ bo'lgani uchun $F_1,\dots F_n$ lar Δ ga ham tegishli bo'ladi.Bu esa $\Delta \vdash F$ ekanini bildiradi.

1.2-xossa. $\Gamma \vdash F$ bo'lishi uchun Γ ning qandaydir chekli Δ qism to'plami topilib, $\Delta \vdash F$ bo'lishi zarur va yetarlidir.

1.3-xossa. Agar $\Delta \vdash F$ bo'lib Δ to'plamning ixtiyoriy G elementi uchun $\Gamma \vdash F$ bo'lsa, u holda $\Gamma \vdash F$ bo'ladi.

Ikkinchi va uchinchi xossalarning isboti ham xuddi birinchi xossadagidek bevosita $\vdash$ ning ta'rifidan kelib chiqadi.

$\vdash$ ning bu uchta xossasidan kelajakda juda ko'p bor foydalanamiz.

2- §. Mulohazalar hisobi uchun aksiomalar sistemasi

Biz endi mulohazalar hisobining L aksiomatik nazariyasini kiritamiz.

(1) L ning simvollari sifatida $\rceil$, $\to$, (,) *va butun musbat indeksli* X_i *propozitsional harflarni olamiz:* $X_1, X_2, X_3,\dots$

Bu yerda $\rceil$ *va* $\to$ *lar primitiv bog'lovchilar deyiladi. Mulohazalar hisobining muhim tushunchasi hisoblangan "formula" tushunchasini kiritamiz.*

(2) (a) Barcha propozitsional harflar formulalardir; (b) agar F *va* G *lar formulalar bo'lsa, u holda* $\rceil F, (F \to G)$ *lar ham formulalardir.*

(3) L nazariyaning F, G, H *formulalari qanday bo'lishidan qat'i nazar quyidagi formulalar* L *ning aksiomalaridir:*

(A_1) $(F \to (G \to F))$;

(A_2) $(F \to (G \to H) \to (F \to G) \to (F \to H)))$;

(A_3) $(\rceil G \to \rceil F) \to (F \to G))$.

(4) L nazariyaning "Modus ponens" (MP) deb ataluvchi, yagona keltirib chiqarish qoidasi bo'lib, u quyidagicha: F va $F \to G$ *formulalarning bevosita natijasi G dir. Bu qoidani qisqacha MP ko'rinishida belgilaymiz.*

Xuddi mulohazalar algebrasigidek qavslarni soddalashtirishga kelishib olaylik.

L nazariyaning cheksiz aksiomalari to'plami faqat yuqoridagi (A_1), (A_2), (A_3) aksiomalar sxemalari orqali beriladi. Har bir formulaning aksioma bo'lish yoki bo'lmasligini osongina tekshirish mumkin va shuning uchun L effektiv aksiomalashtirilgan nazariyadir. Bizning maqsadimiz L sistemaning barcha teoremalari sinfi mulohazalar algebrasining barcha tavtologiyalari sinfi bilan ustma-ust tushishidir. Boshqa bog'lovchilarni quyidagicha aniqlaymiz:

Eslatma. Uchinchi holda $F \to F_i$ formulaning Γ dan keltirib chiqarilishi 2.1-lemmaning isbotida qurilgan formulalar ketma-ketligidan iborat. Shunday qilib, $i = 1$ bo'lgan hol isbotlandi.

Endi faraz qilaylik, ixtiyoriy $k < i$ bo'lgan holda $\Gamma \vdash F \to F_k$ bo'lsin. F_i uchun quyidagi to'rtta hol bo'lishi mumkin:

F_i aksioma, yoki $F_i \in \Gamma$, yoki F_i formula F bo'ladi, yoki F_i formula qandaydir F_j va F_m, bu yerda $j < i$, $m < i$, formulalardan *MP* qoidasi bo'yicha kelib chiqadi va F_m formula $F_j \to F_i$ ko'rinishda bo'ladi. Dastlabki uchta holda $\Gamma \vdash F \to F_i$ ekani xuddi $i = 1$ dagidek isbotlanadi. Oxirgi holda esa $\Gamma \vdash F \to F_j$ va $\Gamma \vdash F \to (F_j \to F_i)$ larga asoslangan induktiv farazni qo'llaymiz. (A_2) aksioma sxemasiga asosan

$$\vdash (F \to (F_j \to F_i) \to (F \to F_j) \to (F \to F_i)$$

ga ega bo'lamiz. Bulardan esa ikki marta *MP* qiodasini qo'llab, avval $\vdash (F \to F_j) \to (F \to F_j)$ ni, so'ngra $\Gamma \vdash F \to F_i$ ni hosil qilamiz. Shunday qilib, induksiya metodi bo'yicha $i = n$ bo'lgan hol ham isbotlandi.

2.1-natija. *Agar* $\Gamma \vdash F \to G$ *bo'lsa, u holda* $\Gamma \mathrm{G}\{F\} \vdash G$ *bo'ladi.*

Isbot. Faraz qilaylik, $F_1,...,Fn$ ketma-ketlik $F \to G$ formulaning Γ dan keltirib chiqarilishi bo'lsin. U holda keltirib chiqarishning ta'rifiga asosan F_n formula $F \to G$ dan iboratdir. Endi esa G ning $\Gamma \mathrm{G}\{F\}$ dan keltirib chiqarilishini quramiz:

$$F_1, F_2, ..., F_n = F \to G, \quad F = F_{n+1}.$$

Endi F_n va F_{n+1} larga MP qoidasini qo'llab, G ga ega bo'lamiz. Bu esa $\Gamma \cup \{F\}$ dan G ning keltirib chiqarilganini ko'rsatadi.

2.2-natija. *L nazariyaning ixtiyoriy F, G, H formulalari uchun quyidagilar o'rinlidir:*

(a) $F \to G,\ G \to H \ \vdash F \to H$;

(b) $F \to (G \to H),\ G \ \vdash F \to H$.

Isbot. Masalan (b) ni isbotlaylik.

(1) $F \to (G \to H)$ gipoteza;

(2) G gipoteza;

(3) F gipoteza;

(4) $G \to H$ (1) va (3) larga MP qo'llanildi;

(5) H (2) va (4) lar MP ga qo'llanildi.

Demak, $F \to (G \to H), G \vdash H$.

Bunga deduksiya teoremasini qo'llab, $F \to (G \to H)$, $G \vdash F \to H$ ni hosil qilamiz.

(a) bandning isboti mustaqil bajarish uchun o'quvchi e'tiboriga havola etiladi.

3- §. *L* nazariyaning asosiy keltirib chiqariladigan formulalari

3.1-teorema. *L nazariyaning ixtiyoriy F, G formulalari uchun quyidagi formulalar L ning teoremalaridir:*

(a) $\neg\neg G \to G$;

(b) $G \to \neg\neg G$;

(c) $\neg F \to (F \to G)$;

(d) $(F \to G) \to (\neg G \to \neg F)$;

(e) $F \to (\neg G \to \neg(F \to G)$;

(f) $(\neg F \to F) \to F$;

(g) $(\neg G \to \neg F) \to (\neg G \to F) \to G)$;

(h) $(F \to G) \to (\neg F \to G) \to G)$.

Isbot:

(a) $\vdash \neg\neg G \to G$.

(1) $\neg\neg G$ gipoteza;

(2) $\neg\neg G \to (\neg\neg(\neg G \to \neg\neg G) \to \neg\neg G)$ (A_1) aksioma sxemasi;

(3) $\neg\neg G(\neg G \to \neg\neg G) \to \neg\neg G$; (1) va (2) ga *MP* qo‘llanildi;

(4) $(\neg\neg(\neg G \to \neg\neg G) \to \neg\neg G) \to (\neg G \to \neg(\neg G \to \neg\neg G)$ (A_3) aksioma sxemasi;

(5) $\neg G \to \neg(\neg G \to \neg\neg G)$ (3) va (4) ga *MP* qo‘llanildi;

(6) $(\neg G \to \neg(\neg G \to \neg\neg G) \to (\neg G \to \neg\neg G) \to G)$ (A_3) sxemasi;

(7) $(\neg G \to \neg\neg G) \to G)$ (5) va (6) ga *MP* qo‘llanildi;

(8) $\neg\neg G \to (\neg G \to \neg\neg G)$ (A_1) aksioma sxemasi;

(9) $\neg\neg G \to G$ 2.2-natija a) ni (8) va (7) ga qo'llashdan kelib chiqadi;

(10) G (1) va (9) ga MP qo'llaniladi.

Demak, $\neg\neg G \vdash G$ hosil bo'ldi. Bunga deduksiya teoremasini qo'llasak, $\vdash \neg\neg G \to G$ hosil bo'ladi.

(b) $\vdash G \to \neg\neg G$.

(1) $\neg\neg\neg G \to \neg G$ (a) bandi;

(2) $(\neg\neg\neg G \to \neg G) \to (G \to \neg\neg G)$ (A_3) aksioma sxemasi;

(3) $G \to \neg\neg G$ (1) va (2) ga MP qo'llanildi.

Demak, $\vdash G \to \neg\neg G$ hosil bo'ladi.

(c) $\vdash \neg F \to (F \to G)$.

(1) $\neg F$ gipoteza;

(2) F gipoteza;

(3) $\neg F \to (\neg G \to \neg F)$ (A_1) aksioma sxemasi;

(4) $\neg G \to \neg F$;

(5) $(\neg G \to \neg F) \to (F \to G)$ (A_3) aksioma sxemasi;

(6) $F \to G$ (4) va (5) ga MP qo'llanildi;

(7) G (2) va (6) ga MP qo'llanildi.

Shunday qilib, $\neg F, F \vdash G$ ga ikki marta deduksiya teoremasini qo'llasak, $\vdash \neg F \to (F \to G)$ hosil bo'ladi.

(d) $\vdash (F \to G) \to (\neg G \to \neg F)$.

(1) $F \to G$ gipoteza.

(2) $G \to \neg\neg G$ (b) band;

(3) $\neg\neg F \to F$ (a) band;

(4) $\neg\neg F \to G$ (1) va (3) ga 2.2-natija (a);

(5) $\neg\neg F \to \neg\neg G$ (2) va (4) ga 2.2-natija (a);

(6) $(\neg\neg F \to \neg\neg G) \to (\neg G \to \neg F)$ (A_3) aksioma sxemasi;

(7) $(\neg G \to \neg F)$

Demak, $(F \to G) \vdash (\neg G \to \neg F)$ dan deduksiya teoremasiga asosan

$\vdash (F \to G) \to (\neg G \to \neg F)$ ni hosil qilamiz:

(e) $\vdash F \to (\neg G \to \neg (F \to G)$.

Ma'lumki, $F, F \to G \vdash G$ o'rinlidir. Bunga ikki marta deduksiya teoremasini qo'llasak: $\vdash F \to (\ F \to G) \to G)$ ni hosil qilamiz.

$(\ F \to G) \to G) \to (\neg G \to \neg (F \to G)$ (d) band sxemasi.

Oxirgi ikki ifodaga 2.2-natija (a) ni qo'llab, $\vdash F \to (\neg G \to$ $\neg (F \to G)$ ni hosil qilamiz.

Xususan, bu G ning o'rniga F ni, F ning o'rniga esa $\neg F$ ni qo'yib, (e^*) $\vdash \neg F \to (\neg F \to \neg (F \to F)$ ni ham hosil qilishimiz mumkin.

(f) $\vdash (\neg F \to F) \to F$.

(1) $\neg F \to (\neg F \to \neg(\neg F \to F)$ (e^{*}) band;

(2) $(\neg F \to (\neg F \to \neg(\neg F \to F))) \to (\neg F \to \neg F) \to (\neg F \to \neg(\neg F \to F)))$ (A_2) aksioma sxemasi;.

3. MP (1, 2) $(\neg F \to \neg F) \to (\neg F \to \neg(\neg F \to F)$ (1) va (2) ga MP qo'llanildi;

(4) $\neg F \to \neg F$ 2.1-lemmaga asosan;

(5) $\neg F \to \neg(\neg F \to \neg F)$ (3) va (4) ga MP qo'llanildi;

(6) $(\neg F \to \neg(\neg F \to F) \to (\neg F \to F) \to F)$ (A_3) aksioma sxemasi;

(7) $(\neg F \to F) \to F$ (5) va (6) ga MP qo'llanildi;

(g). $\vdash (\neg G \to \neg F) \to (\neg G \to F) \to G$.

(1) $\neg G \to \neg F$ gipoteza;

(2) $\neg G \to F$ gipoteza;

(3) $(\neg G \to \neg F) \to (F \to G)$ (A_3) aksioma sxemasi;

(4) $F \to G$ (1) va (3) ga MP qo'llanildi;

(5) $\neg G \to G$ (a) band;

(6) $(\neg G \to G) \to G$ (f) band;

(7) G (5) va (6) ga MP qo'llanildi;.

Endi esa, $\neg G \to \neg F, \neg G \to F, \vdash G$ ga ikki marta deduksiya teoremasini qo'llasak,

$\vdash (\neg G \to \neg F) \to (\neg G \to F) \to G)$.

(h) $\vdash (F \to G) \to (\neg F \to G) \to G)$.

(1) $F \to G$ gipoteza;

(2) $\rceil F \to G$ gipoteza;

(3) $(F \to G) \to (\rceil G \to \rceil F)$ (d) band;

(4) $\rceil G \to \rceil F$ (1) va (3) ga *MP* qo‘llanildi;

(5) $\rceil G \to G$ (2) va (4) ga 2.2-natija (a) qo‘llanildi;

(6) $(\rceil G \to G) \to G$ (f) punkt;

(7) G (5) va (6) ga *MP* qo‘llanildi.

Shunday qilib, $F \to G, \rceil F \to G, \vdash G$ ni hosil qildik. Bunga ikki marta deduksiya teoremasini qo‘llasak, $\vdash (F \to G) \to (\rceil F \to G) \to G)$ kelib chiqadi.

Misollar. Quyidagi formulalar L nazariyaning teoremalari bo‘lishini isbotlang:

1. $(F \to G) \to F) \to F$.
2. $F \to (G \to \rceil(F \to \rceil G)$.
3. $F \to (G \to H) \vdash G \to (F \to H)$.
4. $\rceil (F \to \rceil G) \to G$.
5. $G \to (\rceil G \to \rceil G)$.

4- §. *L* nazariya uchun Gyodelning to‘liqlik haqidagi teoremasi

Quyidagi lemma har bir tavtologiyaning teorema bo‘lishini isbotlashda qo‘llaniladi.

4.1-lemma. *Faraz qilaylik, F formula, $X_1,?\ ,X_k$ lar esa F formula tarkibiga kiruvchi propozitsional harflar bo‘lsin va bundan tashqari, $X_1,?\ ,X_k$ lar uchun rostlik (chin) qiymatlarining qandaydir taqsimoti berilgan bo‘lsin. X_i' orqali agar X_i rost qiymat qabul qilsa, X_i ni, agar X_i yolg‘on qiymat qabul qilsa, $\neg X_i$ ni belgilaymiz. Xuddi shunday F' orqali agar shu taqsimotda F formula rost qiymat qabul qilsa F ni, agar F formula yolg‘on qiymat qabul qilsa, $\neg F$ ni belgilaylik. U holda*

$$X_1', X_2',?\ ,X_k' \vdash F'.$$

Agar, masalan, F formula $(\neg X_1 \to X_2)$ ko‘rinishda bo‘lsa, u holda

X_1	X_2	$\neg X_1 \to X_2$
yo	*yo*	*yo*
yo	*ch*	*ch*
ch	*yo*	*ch*
ch	*ch*	*ch*

rostlik jadvalining har bir satri uchun 4.1-lemma ularga mos kelgan keltirib chiqarishni bildiradi.

Xusan, uchinchi satr uchun

$$X_2,\ \rceil X_3 \vdash (\rceil X_1 \to X_2),$$

to'rtinchi satr uchun esa

$$\rceil X_2,\ \rceil X_3) \vdash \rceil(\rceil X_1 \to X_2)$$

tasdiqlar mos keladi.

Isbot. Isbot F formulaning tarkibiga kiruvchi primitiv bog'lovchilar soni n bo'yicha olib boriladi (tabiiyki, F formula soddalashtirishlarsiz yozilgan deb faraz qilamiz).

Agar $n=0$ bo'lsa, u holda F formula X_1 propozitsional harf ko'rinishida, lemmaning tasdig'i esa $X_1 \vdash X_1$ va $\rceil X_1 \ \vdash \rceil X_1$ ko'rinishda bo'ladi.

Endi esa, faraz qilaylik, lemma barcha $j<n$ lar uchun o'rinli bo'lsin.

<u>1a-hol.</u> F formula $\rceil G$ ko'rinishda bo'lsin. G ning tarkibiga kiruvchi primitiv bog'lovchilar soni n dan kichikdir.

Rostlik qiymatlarining berilgan taqsimotida G rost qiymat qabul qilsin. U holda F yolg'on qiymat qabul qiladi. Shunday qilib, G' formula G ko'rinishda, F' formula esa $\rceil F$ ko'rinishda bo'ladi. Induksiya farazi bilan $X_1',>,X_n' \ \vdash G$ ga ega bo'lamiz.

3.1-teoremaning (b) bandiga va MP qoidasiga asosan, $X_1',>,X_n'$ $\vdash \rceil\rceil G$ kelib chiqadi. Ammo $\rceil\rceil G$ esa F' ni bildiradi.

1b-hol. G rost qiymat qabul qilsin. U holda G' formula $\neg G$ bo‘lib, F' esa F bilan ustma-ust tushadi. Induksiya faraziga asosan $X_1', >, X_n' \vdash \neg G$ hosil bo‘ladi. $\neg G$ formula esa F' dan iborat bo‘lgani uchun bu hol ham isbotlandi.

2-hol. F formula $(G \to H)$ ko‘rinishda bo‘lsin. U holda G va H lar tarkibiga kiruvchi primitiv bog‘lovchilar soni F dagi bog‘-lovchilar sonidan kichik. Shuning uchun induksiya faraziga asosan

$$X_1', >, X_n' \vdash G'$$

va

$$X_1', >, X_n' \vdash H'$$

larga ega bo‘lamiz.

2a-hol. G rost qiymat qabul qilsin. U holda F' formula F va G' formula $\neg G$ ko‘rinishga ega bo‘ladi. Shunday qilib, $X_1', >, X_n' \vdash \neg G$ ga va 3.1-teorema (c) bandga asosan:

$$X_1', >, X_n' \vdash G \to H$$

hosil bo‘ladi. $G \to H$ formula F bo‘lgani uchun bu hol ham isbotlandi.

2b-hol. H rost qiymat qabul qilsin. U holda F formula ham rost qiymat qabul qiladi va H' formula H va F' formula F ko‘rinishga ega bo‘ladi. $X_1',>,X_n' \vdash H$ dan va (A_1): $(H\to(G\to H))$ aksiomadan

$$X_1',>,X_n' \vdash G\to H$$

ni hosil qilamiz. $G\to H$ esa F' dan iboratdir.

2c-hol. G rost va H yolg‘on qiymat qabul qilsin. U holda F' formula yolg‘on qiymat qabul qiladi va u $\neg F$ ko‘rinishda bo‘ladi, G' esa G va H' formula $\neg H$ ko‘rinishda bo‘ladi.

$X_1',>,X_n' \vdash G$ va $X_1',>,X_n' \vdash \neg H$ larga ega bo‘lamiz.

Bu yerda 3.1-teorema (e) bandga asosan,

$$X_1',>,X_n' \vdash \neg(G\to H)$$

hosil bo‘ladi. $\neg(G\to H)$ formula esa F' dan iboratdir.

4.1-teorema. *L nazariyaning har qanday teoremasi tavtologiya bo‘ladi.*

Isbot. L nazariyaning har bir aksiomasi tavtologiya bo‘lishini osongina tekshirib ko‘rish mumkin. Ravshanki, MP qoidasini tavtologiyalarga qo‘llash natijasida hosil bo‘lgan formulalar ham tavtologiya bo‘ladi. Demak, L nazariyaning har qanday teoremasi tavtologiya bo‘lar ekan.

4.2-teorema (Gyodelning to‘liqlik haqidagi teoremasi). *Agar F formula L nazariyada tavtologiya bo‘lsa, u holda u L nazariyaning teoremasi bo‘ladi.*

Isbot (Kalmar). Faraz qilaylik, F formula tavtologiya va $X_1,>,X_n$ lar F tarkibiga kiruvchi propozitsional harflar bo‘lsin.

$X_1,> ,X_n$ harflarning har bir chinlik taqsimoti uchun 4.1-lemmaga asosan

$$X_1',> ,X_n' \vdash F.$$

ga ega bo‘lamiz, chunki F tavtologiya bo‘lgani uchun F' formula F dan iboratdir. Shuning uchun, X_n rost qiymat qabul qilsa,

$$X_1',> ,X_{n-1}', X_n \vdash F \text{ ga,}$$

X_n yolg‘on qiymat qabul qilganda esa

$$X_1',> ,X_{n-1}' \vdash X_n \to F \text{ ga}$$

ega bo‘lamiz. Bularga deduksiya teoremasini qo‘llab,

$$X_1',> ,X_{n-1}', \neg X_n \vdash F;$$

$$X_1',> ,X_{n-1}', \neg X_n \to F$$

larni hosil qilamiz.

3.1-teorema (h) punktga asosan

$$X_1',> ,X_{n-1}' \vdash F$$

ni hosil qilamiz.

Xuddi shu jarayonni takrorlab, X_{n-1} ni ham yo‘qotish mumkin. Umuman, n qadamda keyin esa biz $\vdash F$ ga ega bo‘lamiz.

4.1-natija. *Agar G ifoda $\rceil$, $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$ belgilarni o'z ichiga olsa va L nazariyaning qandaydir F formulasining soddalashtirilgani ($D_1 - D_3$) ta'riflarga qarang) bo'lsa, u holda G formula tavtologiya bo'lishi uchun F formula L nazariyaning teoremasi bo'lishi zarur va etarlidir.*

4.2-natija. *L sistema zidsiz sistemadir, ya'ni L da bir vaqtda F ham, $\rceil F$ ham teorema bo'ladigan F formula mavjud emas.*

Isbot. 4.1-teoremaga asosan L nazariyaning har qanday teoremasi tavtologiya bo'ladi. Tavtologiyaning inkori esa tavtologiya bo'la olmaydi. Shuning uchun hech bir F formula uchun F va $\rceil F$ formulalar bir vaqtda L nazariyaning teoremalari bo'la olmaydi.

L nazariyaning ziddiyatsizligidan unda teorema bo'lmaydigan formulaning mavjudligi kelib chiqadi (masalan, ixtiyoriy teoremaning inkori).

Ikkinchi tomondan esa L ning ziddiyatsizligini L nazariyada teorema bo'lmaydigan formulalarning mavjudligidan keltirib chiqarish mumkin edi. Haqiqatan ham, 3.1-teorema (c) bandga asosan,

$$\vdash \rceil F \rightarrow (F \rightarrow G)$$

ga ega bo'lamiz va, demak, agar L nazariya ziddiyatli nazariya bo'lganda edi, ya'ni qandaydir F formula va o'zining inkori chiqariladigan bo'lganda edi, u holda $\vdash \rceil F \rightarrow (F \rightarrow G)$ va MP qoidasiga asosan L dagi har qanday G formula keltirib chiqariladigan bo'lar edi.

Barcha formulalari teorema bo'lmaydigan nazariya absolut ziddiyatsiz nazariya ham deyiladi. Demak, biz ko'rib chiqayotgan L nazariya absolut ziddiyatsiz nazariya ekan.

Biz bu yerda keltirgan aksiomalar sistemasi E.Mendelson kitobida kiritilgan aksiomalar sistemasidan uchinchi aksiomasi bilan farq qiladi.

E.Mendelson kitobida isbotlangan lemmalar va biz isbotini keltirgan faktlar shuni ko‘rsatadiki, ushbu ikkala taklif qilingan aksiomalar sistemasi ekvivalent ekan (ya’ni teoremalar to‘plami ustma-ust tushadi).

IV bob bo‘yicha nazorat savollari

1. Formal aksiomatik nazariya qachon berilgan deyiladi?
2. “Teorema” tushunchasi qanday ta’riflanadi?
3. Mulohazalar hisobi uchun aksiomalar sistemasini aniqlang.
4. Deduksiya teoremasini isbotlang.
5. Keltirib chiqariladigan formulalarga misollar keltiring.
6. To‘liqlik haqidagi Gyodel teoremasini isbotlang.
7. *L* nazariyaning ziddiyatsizligini ko‘rsating.
8. *L* nazariyada teoremalar qanday isbotlanadi?

V BOB. PREDIKATLAR ALGEBRASI

1-§. Predikatlar va kvantorlar

M to'plamda P xossa aniqlangan bo'lsin. "x element P xossaga ega" degan darak gapni $P(x)$ bilan belgilaylik. Agar $a \in M$ bo'lib, a element P xossaga ega bo'lsa, u holda $P(a)$ rost, a element P xossaga ega bo'lmasa, $P(a)$ yolg'on mulohaza bo'lishi ravshan. Demak, $P(x)$ mulohazaviy forma ekan.

Endi $Q(x,y)$: "x va y lar Q munosabatda" degan darak gapni bildirsin. Agar M to'plamning a va b elementlari o'zaro Q munosabatda bo'lsa, u holda $Q(a,b)$ rost mulohaza, a va b elementlar o'zaro Q munosabatda bo'lmasa, $Q(a,b)$ yolg'on mulohazadir. Demak, $Q(x,y)$ ikki o'zgaruvchili mulohazaviy forma ekan.

Huddi shunga o'xshash uch o'zgaruvchili, to'rt o'zgaruvchili va h.k n o'zgaruvchili mulohazaviy formalar haqida gapirish mumkin.

Mulohazaviy formalarning quyidagi xususiyati haqida to'xtalib o'tamiz. $E=\{0,1\}$ (1–"rost", 0–"yolg'on") ikki elementli to'plam, M ixtiyoriy to'plam, $P(x)$ M to'plamda aniqlangan mulohazaviy forma bo'lsin. M to'plamning P xossaga ega bo'lgan elementlarini M_1, P xossaga ega bo'lmagan elementlarini M_2 to'plamlarga yig'aylik. Ravshanki $M=M_1 \cup M_2$ va $M_1 \cap M_2 = \varnothing$ dir.

U holda, $P(x)$ mulohazaviy formani M to'plamni E to'plamga akslantiruvchi funksiya deb qarash mumkin, bunda M_1 ning elementlari 1 ga, M_2 ning elementlari esa 0 ga akslanadi, ya'ni $P: M \to E$. Shunday qilib, mulohazaviy forma o'zi aniqlangan to'plamni maxsus $E = \{1, 0\}$ to'plamga akslantiruvchi funksiya ekan.

Bundan tashqari, ikki o'zgaruvchili $Q(x, y)$ mulohazaviy forma M to'plam dekart ko'paytmasi M^2 ni E ga akslantiruvchi funksiya ekanligi ravshan, chunki M to'plamning Q munosabatda bo'lgan elementlari juftliklarini M_1^2 to'plamga, Q munosabatda bo'lmagan elementlari juftliklarini M_2^2 to'plamga to'plasak, M_1^2 ning elementlari (juftliklar) 1 ga, M_2^2 elementlari (ular ham juftliklar) 0 ga akslanishini ko'ramiz.

Demak, $Q: M^2 \to E$ ikki o'zgaruvchili funksiya ekan. Hozirgi mulohazalarimiz, albatta, uch o'zgaruvchili va h.k. n o'zgaruvchili mulohazaviy formalar uchun ham o'rinli ekanligi ravshan. Mulohazaviy formalar ba'zan shart yoki predikat ham deb ataladi.

1.1-ta'rif. *M to'plamda aniqlangan **n -ar predikat** (mulohazaviy forma) deb $P: M^n \to E$ funksiyaga aytiladi.*

Yuqorida aytilganlaridan ko'rinadiki, M to'plamda aniqlangan $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ n -ar predikat M^n (n =1,2,3,...) to'plamning yagona qism to'plamini ajratib berar ekan (bu qism to'plamga kirgan har bir $(x_1, x_2, ..., x_n)$ n -lik uchun $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ rost bo'lib, qolgan n -liklarda esa $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ yolg'ondir). Bu qism to'plam $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ predikatning rostlik sohasi deyiladi va P bilan belgilanadi.

Shunday qilib, $P \subseteq M^n$ bo'lib,

$$P = \{(x_1, x_2, ..., x_n) | \ (x_1, x_2, ...x_n) \in M^n \ \& \ P(x_1, x_2, ..., x_n) = \text{rost}\}$$

dir. $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ predikat P to'plamning xarakteristik funksiyasi bo'lishini ko'rish qiyin emas. Demak, n-ar predikatni yana quyidagicha ta'riflasa bo'ladi:

1.2-ta'rif. *M to'plamda aniqlangan n-ar predikat deb, M^n to'plamning ixtiyoriy qism to'plamiga aytiladi.*

$n=1$ bo'lganda ($P: M \to E$) unar (bir argumentli) predikat, $n=2$ bo'lganda ($P: M^2 \to E$) binar (ikki argumentli) predikat, $n=3$ bo'lganda ($P: M^3 \to E$) ternar (uch argumentli) predikat deyiladi va hokazo.

Unar predikatlar, odatda, o'zi aniqlangan to'plamdagi elementlarning xossalarini, ko'p argumentli predikatlar esa to'plam elementlari orasidagi munosabatlarni bildiradi.

Predikatlarni $P, Q, T, S, ...P_1, P_2, ...$ simvollar yordamida ifodalaymiz.

1.1-misol. $M = \{1,2,3,4\}$ to'plamda $P(x)$: "x – tub son" predikati aniqlangan bo'lsin.

Bu predikat $x = 2$ va $x = 3$ bo'lgandagina rost mulohazaga aylanadi, ya'ni olingan predikatning rostlik sohasi $P = \{2,3\} \subseteq M$ to'plamdan iborat.

$Q(x)$: "$x < 4$" predikatni ham shu M to'plamda qaraylik. Bu predikat $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ bo'lgandagina rost mulohazaga aylanadi, ya'ni uning rostlik sohasi $P = \{1,2,3\} \subseteq M$ to'plamdan iborat.

Yana shu to'plamda $W(x, y)$: "xy ninf bo'luvchisi" predikatini qaraylik. Ravshanki, bu predikat $(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,4)$ va $(4,4)$

juftliklarada rost mulohazaga aylanib qolgan tartiblangan juftliklarda yolg'on qiymat qabul qiladi. Demak, $W(x,y)$ predikatning rostlik sohasi

$$W=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,4),(4,4)\}\subseteq M^n$$

to'plamdan iborat ekan.

$W(x,y)$ predikat W to'plamning xarakteristik funksiyasi bo'-lishi ravshan:

$$W=\{(x,y)|x,\ y\in M\ \&\ W(x,y)=\text{rost}\}.$$

Agar M to'plam chekli quvvatga ega bo'lsa, ya'ni $|M|=k$ bo'lsa, u holda bu to'plamda nechta unar, binar va h.k predikatlarni aniqlash mumkinligi 1.2-ta'rifdan bevosita ko'rinadi. Haqiqatan, M to'plamda aniqlanishi mumkin bo'lgan n-ar $(n=1,2,...)$ predikat M^n to'plamning ixtiyoriy qism to'plami bo'lganligi uchun, tabiiy, M^n to'plamning qancha qism to'plami mavjud bo'lsa, M to'plamda aniqlanishi mumkin bo'lgan n-ar $(n=1,2,...)$ predikatlar ham shun-cha bo'lishi kerak. Ma'lumki, M^n to'plamning barcha qism to'p-lamlarining soni $2^{|M^n|}$ ga teng. $|M|=k$ bo'lgani uchun $|M^n|=k^n$, demak, $|B(M^n)|=2^{k^n}$ bo'ladi, bunda $B(M^n)$ M^n to'plamning barcha qism to'plamidir.

M to'plamda $P(x)$ predikat aniqlangan bo'lsin. *"M to'plamning barcha elementlari P xossaga ega"* va *"M to'plamda P xossaga ega bo'lgan elementlar mavjud"*, degan darak gaplar mulohazalar ekanligi ravshan. Bu mulohazalarga quyidagicha tus berish mumkin: *"Barcha x lar P xossaga ega"*, *"Shunday x mavjudki, u P xossaga ega"*.

Yuqoridagi mulohazalar tarkibida qatnashgan *"barcha x lar"* va *"shunday x mavjudki"* iboralar mos ravishda ***umumiylik va mavjudlik kvantori*** deyiladi hamda $\forall x$ va $\exists x$ simvollar bilan belgilanadi.

Shunday qilib, yuqorida keltirilgan mulohazalar qisqacha $\forall xP(x)$ va $\exists xP(x)$ ko'rinishda belgilanadi. $P(x)$ predikat tarkibidagi x o'zgaruvchi ***erkin predmet o'zgaruvchisi*** deb ataladi.

Shuni ham aytish kerakki, $\forall xP(x)$ va $\exists xP(x)$ mulohazalarda x predmet o'zgaruvchi qatnashsa-da, x endi erkinlik xususiyatini yo'qotadi va ***bog'liq predmet o'zgaruvchisiga*** aylanadi (kvantorlar yordamida bog'langan).

Endi $Q(x,y)$ binar predikat bo'lsin. Ma'lumki, retraksiya yordamida, ya'ni x va y predmet o'zgaruvchilarni M to'plam elementlari bilan alamashtirish yordamida $Q(x,y)$ predikatdan jumla hosil qilish mumkin.

Agar $Q(x,y)$ predikatdan faqat bitta predmet o'zgaruvchi (masalan, y) ni M to'plamning elementi (masalan b) bilan almashtirsak, u holda faqat bitta erkin predmet o'zgaruvchiga bog'liq bo'lgan $Q(x,b)$ predikat hosil bo'ladi. Yuqorida aytilganidek, x predmet o'zgaruvchini kvantorlar bilan bog'lasak, $\forall xQ(x,b)$ yoki $\exists xQ(x,b)$ mulohazalarni hosil qilamiz.

$Q(x,y)$ predikatning erkin predmet o'zgaruvchilarini to'rt xil usulda kvantorlar yordamida bog'lash mumkin:

$$\forall x\forall yQ(x,y),\ \forall x\exists yQ(x,y),\ \exists x\forall yQ(x,y),\ \exists x\exists yQ(x,y).$$

Bularning har biri mulohaza ekanligini sezish qiyin emas.

Xullas, ixtoyoriy predikatdan ikki xil usulda mulohazalar hosil qilish mumkin ekan:

1. Predikatda qatnashgan barcha erkin predmet o‘zgaruvchilar o‘rniga muayyan predmetlarni (to‘plam elementlarini) qo‘yish (retraksiya usuli);

2. Predikatning barcha erkin predmet o‘zgaruvchilarini kvantorlar yordamida bog‘lash (bu usul “predikatga kvantorlarni osish” deyiladi). Shunday qilib, “predikatga kvantor osish” predikatdan mulohaza hosil qilish operatsiyasi ekan.

Predmet o‘zgaruvchlarning muayyan qiymatlarida predikatlar 1 yoki 0 (rost yoki yolg‘on) qiymat hosil qilganliklari uchun, ular ustida mantiqiy operatsiyalar bajarish mumkin.

$P(x)$ va $Q(x)$ predikatlar M to‘plamda aniqlangan bo‘lsin. $R(x)=P(x)\,\&\,Q(x)$ M to‘plamda aniqlangan xossa bo‘lib, bu xossaga ham P, ham Q xossalarga ega bo‘lgan elementlargina ega, ya’ni $R(x)$ predikat $P(x)$ va $Q(x)$ predikatlar bilan bir paytda rost bo‘lgandagina rost bo‘luvchi predikatdir. Ma’lumki, $P(x)$ predikat M to‘plamning M_1 qism to‘plamining, $Q(x)$ esa M_2 qism to‘plamining xarakteristik funksiyalaridir. $R(x)$ predikat esa $M_1 \cap M_2 \subseteq M$ to‘plamning xarakteristik funksiyasi bo‘lishi ravshan.

Shunday qilib, M to‘plamning qism to‘plamlari kesishmasi ularning xarakteristik funksiyalarining konyunksiyasi bilan xarakterlanar ekan.

Xuddi shunday $P(x)$ va $Q(x)$ predikatlar dizyunksiyasi $T(x)=P(x)\vee Q(x)$ M_1 va M_2 larning birlashmasi $M_1 \cup M_2$ ni xarakterlanishini ko‘rish qiyin emas.

"x – P xossaga ega emas" degan darak gap, tabiiy, $P(x)$ predikatning inkoridir: u yangi predikat bo'lib, uni $S(x) = \neg P(x)$ bilan belgilaylik. M to'plamning P xossaga ega bo'lgan elementlari, tabiiy $S = \neg P$ xossaga ega bo'lmaydilar va aksincha: demak, $P(x)$ va $S(x)$ predikatlar xarakterlovchi to'plamlar bir-birining M to'plamgacha to'ldiruvchilari, ya'ni:

$$P = C_M S, \quad S = C_M P, \quad (S \subseteq M, \quad P \subseteq M).$$

Endi $P(x) \Rightarrow Q(x)$ ifodani ko'raylik. Implikatsiya amalini dizyunksiya va inkor orqali ifoda qilish mumkinligini mulohazalar algebrasida ko'rgan edik.

Shunga asosan, $P(x) \Rightarrow Q(x)$ va $\neg P(x) \vee Q(x)$ lar teng kuchli ifodalar ekanligini hamda $P(x) \Rightarrow Q(x)$ predikat $C_M P \cup Q$ to'plamning xarakteristik funksiyasi ekanligini ko'ramiz. Nihoyat, $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$ va $P(x) \Rightarrow Q(x) \,\&\, Q(x) \Rightarrow P(x)$ ifodalar teng kuchli ekanligiga, $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$ predikat esa $(C_M P \cup Q) \cap (C_M Q \cup P)$ to'plamning xarakteristik funksiyasi bo'lishiga ishonch hosil qilish qiyin emas.

Yuqorida keltirilganlar ko'p argumentli predikatlar uchun ham butunlay o'rinlidir.

Shunday qilib, biz predikatlar ustida mantiqiy amallar va predmet o'zgaruvchilar bo'yicha predikatlarga "kvantorlar osish" amallari bajarilishini ko'rdik.

Shuni ham qayd qilish kerakki, M to'plamda aniqlangan har qanday predikat aynan rost, aynan yolg'on va bajariluvchi bo'ladi.

1.3-ta'rif. *Agar M to'plamda aniqlangan $P(x)$ predikat to'plamning har bir elementi uchun rost qiymat qabul qilsa, bunday predikat M to'plamda* ***AR predikat*** *deyiladi. Agar $P(x)$ predikat har qanday M to'plamda AR predikat bo'lsa, bunday predikat AR predikat deyiladi.*

1.2-misol. $P(x) = F(x) \vee \urcorner F(x)$ predikat AR predikatdir. (Isbotlang!)

1.4-ta'rif. *M to'plamda aniqlangan $P(x)$ predikat M to'plamning har bir elementi uchun yolg'on qiymat qabul qilsa, bunday predikat M to'plamda* ***AYo predikat*** *deyiladi. Agar $P(x)$ ixtiyoriy M to'plamda AYo predikat bo'lsa, u holda u AYo predikat deyiladi.*

1.3-misol. $P(x) = F(x) \,\&\, \urcorner F(x)$ predikat *AYo* predikat. (Isbotlang!)

1.5-ta'rif. *M to'plamda aniqlangan $P(x)$ predikat uchun M to'plamda shunday x_0 element topilsaki, $P(x_0) = 1$ bo'lsa, u holda $P(x)$* ***M to'plamda bajariluvchi predikat*** *deyiladi. Agar $P(x)$ ixtiyoriy M to'plamda bajariluvchi bo'lsa, u holda $P(x)$ bajariluvchi predikat deyiladi.*

1.4-misol. $P(x)$: "$x > 5 \,\&\, x \neq 10$" natural sonlar to'plamda bajariluvchi predikatdir.

2- §. Predikatlar algebrasi va uning formulalari

Mulohazalar algebrasida biz faqat mulohazalar bilan ish ko'rgan bo'lsak, predikatlar algebrasida mulohazalar bilan bir qatorda, barcha predikatlar asosiy o'rganish obyektlari bo'ladi. Predikatlar algebrasi (PA) mulohazalar algebrasidan kengroq bo'lib, uning barcha formulalarini o'z ichiga oladi.

PA ni qurish uchun alifboga qanday simvollar kirishini ko'raylik. PA ning barcha tushunchalari qandaydir ixtiyoriy M to'plam PA ning predmet sohasi, uning $a, b, c, ..., a_1, a_2...$ elementlari esa doimiy predmetlar (yoki individual predmetlar) deb ataladi. M to'plamda o'zgaradigan $x, y, z, ..., x_1, x_2,...$ noma'lumlar bu sohaning predmet o'zgaruvchilari deyiladi. $A, B, C, ... A_1, A_2, ...$ harflar bilan propozitsional o'zgaruvchilarni, $P(x), Q(x,y), S(x,y,z), ... T(x_1, x_2, ... x_n), ...,$ lar bilan esa o'zgaruvchi predikatlarni belgilaymiz.

Bundan tashqari, PA alifboda mantiqiy konstantalar 1 va 0, mantiqiy amallar simvollari $\&, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg, \forall, \exists$ hamda qavslar qatnashadi.

Endi "PA ning formulasi" tushunchasini kiritamiz.

2.1-ta'rif. 1°. *Har bir propozitsional o'zgaruvchi formuladir.*

2°. *P – n-ar predikat o'zgaruvchi, $t_1, t_2, ... t_n$ lar predmet o'zgaruvchilar yoki individual predmetlar bo'lsa, $P(t_1, t_2, ..., t_n)$ ifoda formuladir.* $(n = 1, 2, ...)$.

3°. *$U(x)$ formula bo'lib, x erkin predmet o'zgaruvchisi bo'lsa, u holda $\forall x U(x)$ va $\exists x U(x)$ lar formulalardir.*

4°. *U va B lar formula bo'lib, ulardan birida bog'liq, ikkinchisida erkin bo'lgan predmet o'zgaruvchilar bo'lmasin. U holda quyidagi ifodalar formuladir:*

$$(U \& B),\ (U \vee B),\ (U \Rightarrow B),\ (U \Leftrightarrow B),\ (\neg U)$$

Bunda U va B formulalarda erkin bo'lgan predmet o'zgaruvchilar yuqorida qurilgan formulalarda ham erkin, U va B formulalarda bog'liq bo'lgan predmet o'zgaruvchilar mazkur formulalarda ham bog'liq bo'lib qoladilar.

Izoh. 4° punktdagi U va B formulalarning birida predmet o'zgaruvchi bog'lib bo'lib, ikkinchisida erkin bo'lsa hamda U va B formulalardan 4° punktda ko'rsatilgani kabi ifodalar hosil qilinsa, u holda bu ifodalarda o'zgaruvchilar kolliziyasi paydo bo'ladi deyiladi. Ta'rifga ko'ra, o'zgaruvchilar kolliziyasiga ega bo'lgan ifodalarni formula hisoblaymiz.

1° va 4° lardan ko'rinadiki, mulohazalar algebrasining har bir formulasi PA ning formulasidan iborat ekan.

1°, 2° punktlarda keltirilgan formulalar PA ning elementar formulalari deyiladi.

$\forall x U(x)$ va $\exists x U(x)$ formulalarda $U(x)$ formula umumiylik va mavjudlik kvantorlarining ta'sir sohasi deyiladi.

2.1-misol. $(\forall x \exists y (A \vee (P(x) \& F(x,y))) \Rightarrow \exists t P(t))$ ifoda PA ning formulasidir; bu yerda A –propozitsional o'zgaruvchi, $P(x), F(x,y)$ lar o'zgaruvchi predikatlar, $\forall x$ va $\exists y$ kvantorlarning ta'sir sohasi $(A \vee (P(x) \& F(x,y)))$ formuladir.

2.2-misol. $((A \Rightarrow \exists x(P(x) \Rightarrow \forall yF(y,t))) \& P(x)$ ifoda PA ning formulasi emas, chunki $(\neg A \Rightarrow \exists x(P(x) \Rightarrow \forall yF(y,t))$ formulada x predmet o'zgaruvchi bog'langan bo'lib, ifodaning ikkinchi qismi $P(x)$ va x erkin o'zgaruvchidir, ya'ni berilgan ifodada x predmet o'zgaruvchiga nisbatan kolliziya paydo bo'lgan.

Izoh. PA formulalari yozuvlarini soddalashtirish maqsadida mulohazalar algebrasidagidek operatsiyalarning kuchli bog'lashiga qarab quyidagicha joylashtiramiz: odatdagidek, $\neg$ operatsiya ifodalarni eng kuchli bog'lovchi operatsiya hisoblanadi. Undan so'ng esa kvantorlar va nihoyat, mantiqiy amallar mulohazalar algebrasidagidek tartibda joylashadilar. Bu kelishuvdan so'ng formuladan bir necha qavslarni tashlab yuborishga imkon tug'iladi, bundan tashqari, formulani o'rab turgan tashqi qavslarni ham tashlab yuborishga kelishamiz.

2.3-misol. $(\exists x((F(x) \& A) \Rightarrow (\forall yP(x,y) \vee (\neg B))))$ formula ortiqcha qavslar tashlab yuborilgach, quyidagi ko'rinish oladi:

$$\exists x(F(x) \& A \Rightarrow \forall yP(x,y) \vee \neg B.$$

Bunda $\exists x$ dan keyin turgan chap qavs va unga mos keluvchi o'ng qavsni tashlab yuborish mumkin emas, chunki $\exists x$ kvantorning ta'sir sohasi ushbu qavslar ichidagi barcha formulalar.

PA formulasi ta'rifidan ko'rinadiki, PA formulasi tarkibiga propozitsional o'zgaruvchilar, mantiqiy konstantalar, o'zgaruvchi predikatlar, predmet o'zgaruvchilari va individlar kiradi, ya'ni formula quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$U(A_1,\dots, A_k; a_1,\dots, a_m; x_1,\dots,x_s; P_1,\dots,P_r).$$

Bu yerda: $A_1,\dots, A_k$ – propozitsional o'zgaruvchilar, $a_1,\dots,a_m$ – individlar, $x_1,\dots,x_s$ – predmet o'zgaruvchilari va nihoyat, $P_1,\dots, P_r$ – o'zgaruvchi predikatlar.

Shuni ham aytish kerakki, agar P o'zgaruvchi predikat simvoli bo'lsa (bir yoki ko'p argumentli), uni turli predmet sohalarida turlicha aniqlash mumkin.

2.4-misol. $\exists x(P(x)\Rightarrow \forall tF(x,t))$ formuladagi $P(x)$ va $F(x,t)$ predikatlarni N natural sonlar sohasida, masalan:

$$P(x): \text{“}x-3=0\text{”},\ F(x,t): \text{“}x<t+5\text{”}$$

kabi aniqlasak bo'ladi. Yoki M matematika fakulteti talabalari to'plami bo'lganda esa:

$$P(x): \text{“}x - \textit{xushchaqchaq talaba}\text{”}$$
$$F(x,t): \text{“}x - t \textit{ ning do'sti}\text{”}$$

kabi belgilash mumkin.

Birinchi holda olgan formulamiz:

“*Shunday x natural son topiladiki,*
agar $x-3=0$ *bo'lsa, u holda barcha* t *natural sonlar*
uchun $x<t+5$ *bo'ladi*”

degan jumla bo‘lsa, ikkinchisi:

"*Shunday x talaba mavjudki, agar u xushchaqchaq bo‘lsa, u holda u ixtiyoriy t talaba bilan do‘stdir*"

degan jumla hosil bo‘ladi.

Shuning uchun o‘zgaruvchi P predikat muayyan to‘plamda aniqlangan, bo‘lsa, u shu to‘plamda aniqlangan individual predikat deb ataladi.

2.2-ta’rif. *Predikatlar algebrasining* $U(A_1,...,A_k;\, a_1,...,a_m;\, x_1,...,x_s;\, P_1,...,P_r)$ *formulasi* $P_1,...,P_r$ *predikatalar* M *to‘plamda ixtiyoriy ravishda aniqlanganda,* $x_1,...,x_s$ *predmet o‘zgaruvchilarni* M *to‘plamning ixtiyoriy elementlari bilan almashtirganda hamda* $A_1,....,A_k$ *propozitsional o‘zgaruvchilar qiymatlarining ixtiyoriy tanlanmasida 1 qiymat qabul qilsa,* U *formula* M *to‘plamda* ***aynan rost formula*** *deyiladi. Agar* U *formula ixtiyoriy* M *to‘plamda aynan rost bo‘lsa, u holda* U *formula* ***umummantiqiy formula*** *deyiladi.*

2.5-misol. $P(x)$ natural sonlar to‘plamida aniqlangan ixtiyoriy unar predikat bo‘lsin. Quyidagi formula natural sonlar to‘plamida aynan rost formuladir:

$$P(1)\,\&\left[x\in N\,\&\,P(x)\Rightarrow P(x+1)\right]\Rightarrow \forall y P(y).$$

Ushbu $\forall x\left[P(x)\vee \rceil P(x)\right]$ formula esa umummantiqiy formuladir.

2.2-ta'rifda 1 ni 0 bilan, rost so'zini yolg'on so'zi bilan alamashtirsak, u holda M to'plamda aynan yolg'on formula tushunchalari hosil bo'ladi.

2.3-ta'rif. *$U(A_1,...,A_k;a_1,...,a_m;x_1,...,x_s;P_1,...,P_r)$ formula $P_1,...,P_r$ predikatlarni M to'plamda kamida bitta usulda aniqlaganda, $x_1,...,x_s$ predmet o'zgaruvchilarni M to'plam elementlari bilan kamida bitta usulda almashtirilganda hamda $A_1,...,A_k$ propozitsional o'zgaruvchilar qiymatlarining kamida bitta taqsimotida 1 qiymat qabul qilsa, U formula **M to'plamda bajariluvchi** deyiladi. U formula ixtiyoriy M to'plamda bajariluvchi bo'lsa, u bajariluvchi formula deyiladi.*

2.6-misol. $\exists x[A \& P(x) \Rightarrow \forall t F(x,t)]$ formula natural sonlar to'plamida bajariluvchidir. Haqiqatan "$P(x)$: "x – tub son", $F(x, t)$ esa "$x \leq t$ bo'lsa, A propozitsional o'zgaruvchini, masalan, rost jumla bilan alamashtirsak, qaralayotgan formula rost qiymat qabul qiladi.

2.4-ta'rif. *Predikatlar algebrasining M predmet sohasi ustida qaralayotgan U va B formulalari tarkibida $A_1,...,A_k$ – propozitsional o'zgaruvchilar, $a_1,...,a_m$ – individlar, $x_1,...,x_s$ – predmet o'zgaruvchilari va $P_1,...P_r$ – o'zgaruvchi predikatlar qatnashgan bo'lsin. Agar bu formulalarda propozitsional o'zgaruvchilar qiymatlarining ixtiyoriy tanlanmasida erkin predmet o'zgaruvchilar va o'zgaruvchi predikatlarni M to'plamda ixtiyoriy individual predmetlar va individual predikatlar bilan almashtirilganda, bir xil qiymat qabul qilsa, bunday formulalar M to'plamda **teng kuchli** deyiladi va $U \equiv B$ ko'rinishda belgilanadi. Agar U va B formulalar* *ixtiyoriy M predmet sohada teng kuchli bo'lsa, u holda bunday formulalar* ***teng kuchli formulalar*** *deyiladi.*

2.7-misol. $\exists x(P(x) \Rightarrow \forall yQ(y))$ formula $\exists x(\neg P(x) \vee \forall yQ(y))$ formulaga teng kuchli.

2.8-misol. $\exists x(P(x) \& Q(x))$ formula $\exists xP(x) \& \exists xQ(x))$ formulaga teng kuchli emas.

Chunki shunday M predmet soha va undan shunday individual predikatlarni topish mumkinki, bu ikki formulaning qiymati har xil bo'ladi.

Masalan, "$P(x)$: "x – tub son", $Q(x)$: "x – to'liq kvadrat" predikatlar bo'lib, predmet soha esa N natural sonlar to'plami bo'lsin. U holda $\exists x(P(x) \& Q(x))$: "shunday x topiladiki, u tub son va to'liq kvadrat" yolg'on jumla, $\exists xP(x) \& \exists xQ(x)$ "shunday x topiladiki, u tub son va shunday x topiladiki, u to'liq kvadrat" esa rost jumladir.

Biz yuqorida mulohazalar algebrasining asosiy teng kuchliliklarini sanab o'tgan edik. Mazkur teng kuchliliklar PA ning ham asosiy teng kuchliliklari bo'lib qolaveradilar. Ulardan tashqari, PA ning ham o'ziga xos asosiy teng kuchliliklari mavjudki, biz ularni quyida qayd qilamiz.

A ixtiyoriy propozitsional o'zgaruvchi, $P(x)$ va $F(x)$ lar esa o'zgaruvchi predikatlar bo'lsin. U holda

1. $\rceil \forall xP(x) \equiv \exists x \rceil P(x)$.
2. $\rceil \exists xP(x) \equiv \forall x \rceil P(x)$.

3. $\forall x(P(x) \& F(x)) \equiv \forall x P(x) \& \forall x F(x)$.

4. $\forall x(A \& P(x)) \equiv A \& \forall x P(x)$.

5. $\forall x(A \vee P(x)) \equiv A \vee \forall x P(x)$.

6. $\forall x \forall y(P(x) \vee F(y)) \equiv \forall x P(x) \vee \forall x F(x)$.

7. $\forall x(P(x) \Rightarrow A) \equiv \forall x P(x) \Rightarrow A$.

8. $\forall x(A \Rightarrow P(x)) \equiv A \Rightarrow \forall x P(x)$.

9. $\exists x(P(x) \vee F(x)) \equiv \exists x P(x) \vee \exists x F(x)$.

10. $\exists x \exists y(P(x) \& F(y)) \equiv \exists x P(x) \& \exists x F(x)$.

11. $\exists x(P(x) \Rightarrow A) \equiv \forall x P(x) \Rightarrow A$.

12. $\exists x(A \& P(x)) \equiv A \& \exists x P(x)$.

13. $\exists x(A \vee P(x)) \equiv A \vee \exists x P(x)$.

14. $\exists x(A \Rightarrow P(x)) \equiv A \Rightarrow \exists x P(x)$.

15. $\exists x(P(x) \Rightarrow F(x)) \equiv \forall x P(x) \Rightarrow \exists x F(x)$.

16. $\forall x P(x) \equiv \forall y P(y)$.

Bu teng kuchliliklardan birinchisini isbot qilaylik. $\forall x P(x)$ formulama'lumki, *"Barcha x lar P xossaga ega"*, deb o'qiladi. Bu mulohazaning inkorini *"Barcha x lar P xossaga ega"*, deb hisoblasak, albatta xato bo'ladi.

Bunga misol keltiraylik. "$P(x)$: "*x – tub son*" bo'lsin, u holda bu xossaga qarama-qarshi xossa $\rceil P(x)$: "*x – murakkab son*" bo'ladi; *"barcha x tub son emas"* degan mulohaza natural sonlar sohasida, tabiiy yolg'ondir, chunki *"barcha x lar tub son"* degan mulohazadan farqli o'laroq natural sonlar sohasida qarama-qarshi xossaga ega bo'lgan natural sonlar ham mavjuddir. Demak, *"barcha x lar tub son"* degan mulohazaning inkori shunday *x* son topiladiki, u murakkab son degan mulohaza bo'lar ekan.

Ixtiyoriy M predmet sohasida $P_0(x)$ predikat aniqlangan bo'lsin. Agar $\forall x P_0(x) \equiv 1$ bo'lsa, ya'ni M sohaning barcha elementlari P_0 xossaga ega bo'lsa, u holda M sohaning birorta ham elementi $\rceil P_0$ xossaga ega bo'lmaydi va, demak, $\exists x \rceil P_0(x) \equiv 0$ bo'ladi; $\forall x P_0(x) \equiv 1$ bo'lgani uchun $\rceil \forall x P_0(x) \equiv 0$ bo'ladi, ya'ni $\rceil \forall x P_0(x) \equiv \exists x \rceil P_0(x)$ bo'ladi. Agar $\forall x P_0(x) \equiv 0$ bo'lsa, $P_0(x)$ predikat yo *AYo* predikat, yo shunday $x_0 \in M$ topiladiki, u P_0 xossaga ega bo'lmaydi, ya'ni x_0 element $\rceil P_0$ xossaga ega bo'ladi.

Agar $P_0(x)$ predikat *AYo* predikat bo'lsa, u holda M ning barcha elementlari $\rceil P_0$ xossaga ega bo'ladi. Bu esa, $\exists x \rceil P_0(x)$ rost mulohaza degan so'zdir. $\forall x P_0(x) \equiv 0$ bo'lgani uchun, $\rceil \forall x P_0(x) \equiv 1$ bo'ladi, ya'ni yana $\rceil \forall x P_0(x) \equiv \exists x \rceil P_0(x)$ bo'ladi.

Endi M to'plamda P_0 xossaga ega bo'lmagan x_0 element mavjud bo'lsin. U holda bu element $\rceil P_0$ xossaga ega bo'ladi va demak, $\exists x \rceil P_0(x) \equiv 1$ bo'ladi. $\forall x P_0(x) \equiv 0$ bo'lgani uchun yana $\rceil \forall x P_0(x) \equiv \exists x \rceil P_0(x)$ kelib chiqadi.

M predmet soha va unda aniqlangan $P_0(x)$ predikat ixtiyoriy tanlangani uchun 1-teng kuchlilik o'rinlidir.

Endi, 6-teng kuchlilikni isbotlaylik.

Avvalo, $\forall x$ kvantor $\vee$ ga nisbatan distributiv emasligini misolda ko'rsataylik.

$$M = \{1,2,3,4,5\}, P(x):\ (x-1)(x-2)=0,$$
$$F(x):\ (x-3)(x-4)(x-5)=0$$

bo‘lsin. Ravshanki, M sohada $\forall xP(x)$ va $\forall xF(x)$ mulohazalar yolg‘ondir va, demak, 6-teng kuchlilikning chap tomoni ham yolg‘on mulohazadir. Agar $\forall x$ kvantor $\vee$ ga nisbatan distributiv, ya’ni $\forall x(P(x) \vee F(x)) \equiv \forall xP(x) \vee \forall xF(x)$ bo‘lganda edi, $\forall x(P(x) \vee F(x))$ rost mulohaza bo‘lganligi uchun qarama-qarshilik hosil bo‘lar edi.

Demak, $\forall x(P(x) \vee F(x)) \neq \forall xP(x) \vee \forall xF(x)$ ekan. Endi 6- teng kuchlilikning o‘ng tomoni, 6-teng kuchlilikning chap tomoni bilan bir xil qiymat qabul qilishini ko‘rsatamiz.

Agar $\forall xP(x) \equiv 1$ yoki $\forall xF(x) \equiv 1$ bo‘lsa, u holda 6-teng kuchlilik o‘rinli ekanligi ravshandir; bunda faqat $\forall xP(x) \equiv \forall yP(y)$ ekanligini ko‘rsatish kifoyadir. Ammo bu teng kuchlilik tabiiydir, chunki x predmet o‘zgaruvchi ham, y predmet o‘zgaruvchi ham M ning har bir elementini qiymat sifatida qabul qiladi.

$\forall xP(x) \equiv 0$ va $\forall xF(x) \equiv 0$ bo‘lsin. U holda 6-teng kuchlilikning chap tomoni 0 qiymatga egadir. 6- teng kuchlilikning o‘ng tomonida $\forall x$ kvantorning ta’sir sohasi $P(x) \vee F(y)$ formula bo‘lsa-da, $F(y)$ predikatda x predmet o‘zgaruvchi qatnashmaganligi sababli, $\forall x$ ta’siri faqat $F(y)$ ga ta’sir etadi. Demak, $\forall x\forall y(P(x) \vee F(y))$ formula ham 0 qiymatga ega bo‘ladi.

3.3-teoremada MA ning har bir formulasining o‘zi keltirilgan yoki uni keltirilgan teng kuchli formula bilan almashtirish mumkin ekanligi haqida aytilgan edi. Keltirilgan formulalarda amallardan faqat $\&, \vee$, va $\neg$ qatnashib, $\neg$ amali faqat propozitsional o'zgaruvchilarga tegishli bo'ladi.

PAdaham3.3-ta'rif(keltirilganformulata'rifi)va3.3-teoremaning o'xshashlari mavjud bo'lib, ular quyidagi mazmunga ega.

2.5-ta'rif. *U formula PA ning ixtiyoriy formulasi bo'lsin. Agar bu formulada faqat* $\&, \vee, \neg, \forall$ *va* $\exists$ *amallar qatnashib,* $\neg$*amali faqat propozitsional o'zgaruvchilar va o'zgaruvchi predikatlarga tegishli bo'lsa, bunday formula* ***keltirilgan formula*** *deyiladi.*

2.1-teorema. *PA ning ixtiyoriy formulasi yo o'zi keltirilgan, yoki qandaydir keltirilgan formulaga teng kuchli.*

Isbot. U formula PA ning ixtiyoriy formulasi bo'lsin. Agar keltirilgan formula bo'lsa, teorema o'rinlidir. U keltirilgan formula ko'rinishida bo'lmasin. Agar U formula $B \Rightarrow C$ ko'rinishida bo'lsa, u $\neg B \vee C$ formulaga teng kuchlidir; shunday qilib, formula tarkibida qatnashgan $\Rightarrow$ amallarni yo'qotish mumkin. Agar U formula $\neg\forall x B(x)$ ko'rinishida bo'lsa, u holda asosiy teng kuchliliklarning birinchisiga asosan uni $\exists x \neg B(x)$ ko'rinishga keltirish mumkin.

Agar $U \neg(B \& C)$ ko'rinishda bo'lsa, uni $\neg B \vee \neg C$ teng kuchli formula bilan almashtirish mumkin. Nihoyat, U $B \Leftrightarrow C$ ko'rinishida bo'lsa, u $(\neg B \vee C) \& (\neg C \vee B)$ teng kuchli formula bilan almashtiriladi. Agar U formula bu shakl almashtirishlardan keyin keltirilgan formula ko'rinishiga kelmasa, u holda mazkur shakl alamashtirishlar B va C formulalarga qo'llaniladi.

2.6-ta'rif. *PA ning keltirilgan formulasi tarkibida kvantorlar qatnashmasa yoki kvantorlar mantiqiy amallarni barchasidan* *oldin kelsa, bunday formula normal keltirilgan formula deyiladi.*

2.2-teorema. *PA ning ixtiyoriy formulasi uchun unga teng kuchli bo'lgan normal keltirilgan formula mavjud.*

Isbot. PA ning ixtiyoriy formulasi uchun 2.1-teoremaga asosan unga teng kuchli keltirilgan formula mavjud bo'lgani tufayli teoremani faqat keltirilgan formulalar uchun isbotlash kifoya.

U formula PA ning ixtiyoriy keltirilgan formulasi bo'lsin. Agar u kvantorlarga ega bo'lmasa, teorema o'rinli bo'ladi. Agar u kvantorli formula bo'lib,

$$\forall xB(x) \,\&\, \forall xC(x), A \,\&\, \forall xB(x), A \vee \forall xB(x), \forall xB(x) \vee \forall xC(x),$$
$$\exists xB(x) \vee \exists xC(x), A \,\&\, \exists xB(x), \exists xB(x) \,\&\, \exists xC(x)$$

ko'rinishga ega bo'lsa, uni 3-6, 9-12 - asosiy teng kuchliliklarga asosan mos teng kuchli formula bilan almashtirish mumkin; bunda A propozitsional o'zgaruvchi o'rnida MA ning murakkab formulasi ham turishi mumkin, $B(x)$ va $C(x)$ esa kvantorsiz formuladir.

Agar U formula $\neg\forall xB(x)$ ko'rinishhga ega bo'lsa, u $\exists x\neg B(x)$ teng kuchli formula bilan almashtiriladi. (1 va 2 ga asosan).

3- §. Predikatlar algebrasi tilining matematik mulohazalarni ifoda etıshda qo'llanishi

Matematikaning har qanday sohasi o'rganilayotgan obyektlar haqidagi mulohazalar bilan ish ko'radi. Mantiq va to'plamlar nazariyasining simvollari hamda berilgan fanning maxsus simvollari yordamida shunday mulohazalar formula ko'rinishida ifodalanishi mumkin.

Quyidagi asosiy matematik tushunchalar – ta'rif va teoremalarni predikatlar algebrasi tili yordamida qanday ifodalash mumkinligini ko'rib chiqamiz.

Ta'rif chap tomoni yangi kiritilayotgan simvol, o'ng tomon esa ma'lum simvollardan tuzilgan ifodadan iborat bo'lgan tenglik yoki ekvivalentlik yordamida ifodalanishi mumkin.

Ta'rifni bildiruvchi formulalarni boshqa formulalardan farqlash uchun bu formulalardagi "teng" likning (ekvivalaentlikning) ostiga (yoki) ustiga df (fransuzcha definition-ta'rif) harflar qo'yiladi. Masalan $f(x)$ funksiyaning nuqtadagi uzluksizligi quyidagi formula bilan ifodalanadi:

$$f(x)\,funksiya\; x=x_0\; nuqtada\; uzluksiz \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0$$

$$\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\big[|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon\big].$$

3.1-misol. Halqa aksiomalari predikatlar algebrasi tili yordamida quyidagicha yoziladi:

$$<G;+,\cdot> \quad algebra-halqa \overset{def}{\Longleftrightarrow}$$

1. $\forall x\forall y\in G\,[x+y=y+x]$.
2. $\forall x\forall y\forall z\in G\,[(x+y)+z=x+(y+z)]$.
3. $\exists 0\in G\forall x\in G\,[x+0=0+x=0]$.
4. $\forall x\in G\exists x^{-1}\in G\,[x+(-x)=(-x)+x=0]$.

5. $\forall x \forall y \forall z \in G\,[x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z]$.

6. $\forall x \forall y \forall z \in G\,[(y+z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x]$.

4-§. Predikatlar algebrasida yechilish muammosi

Predikatlar algebrasi uchun yechilish muammosi mulohazalar algebrasidek qo'yiladi:

Predikatlar algebrasining ixtiyoriy formulasi U shu algebrada bajariluvchi yoki bajariluvchi emasligini aniqlab beruvchi yagona usul mavjudmi?

Agar ushbu muammo mulohazalar algebrasi uchun oson yechilgan bo'lsa, predikatlar algebrasida bu muammoni hal etishda katta qiyinchiliklarga duch kelinadi. O'tgan asrning 30-yillarida *"algoritm"* tushunchasiga aniq ta'rif berilgandan so'ng mazkur muammo ijobiy hal etilishi mumkin emasligi, ya'ni izlangan algoritm mavjud emasligi ma'lum bo'lib qoldi. Predikatlar algebrasi uchun yechilish muammosi ijobiy yechilmasligini birinchi marta amerikalik matematik A.Chyorch isbotladi.

Yechilish muammosi predikatlar algebrasi uchun ijobiy yechilmasa-da, predikatlar algebrasi formulalarining ba'zi sinflari uchun bu muammo ijobiy yechiladi.

Biz quyida predikatlar algebrasi formulalarining qanday sinflari uchun yechilish muammosi ijobiy hal etilishi haqida obzor beramiz.

Tarkibida faqat unar (bir argumentli, bitta predmet o'zgaruvchiga bog'liq bo'lgan) predikatlar qatnashgan formulalar uchun yechilish muammosi ijobiy hal etilishi quyidagi teoremadan ko'rinadi.

4.1-teorema. *Tarkibiga n ta unar predikat kirgan predikatlar algebrasining U formulasi biror M to'plamda bajariluvchi bo'lsa, bu formula elementlari soni 2^n dan katta bo'lmagan M' to'plamda ham bajariluvchi bo'ladi.*

Ushbu teoremadan quyidagi natija kelib chiqadi.

Natija. *Tarkibiga n ta faqat unar predikat kirgan U formula elementlari soni 2^n dan ko'p bo'lmagan istalgan to'plamda AP formula bo'lsa, U formula ixtiyoriy to'plamda AP formula bo'ladi.*

L.Lyovengeymning quyidagi teoremasi predikatlar algebrasining katta sinfni tashkil qiluvchi formulalari uchun yechilish muammosini hal qiladi.

4.2-teorema. *Agar predikatlar algebrasining U formulasi biror cheksiz to'plamda bajariluvchi bo'lsa, u sanoqli to'plamda ham bajariluvchi bo'ladi.*

L.Lyovengeymning quyidagi teoremasi ham diqqatga sazovordir.

4.3-teorema. *Erkin predmet o'zgaruvchilar qatnashmagan (balki individual predmetlar qatnashgan) U formula biror to'plamda bajariluvchi bo'lsa, bu formula chekli yoki sanoqli to'plamda ham bajariladi.*

V bob bo'yicha nazorat savollari

1. Predikatlar va kvantorlar mavzusini yoriting.
2. Predikatlar algebrasi nima? Uning formulalariga ta'rif bering.

3. Predikatlar algebrasi formulalariga misollar keltiring.

4. Yechilish, ziddiyatsizlik, to'liqlik va erkinlik muammolari haqida nimalar bilasiz?

5. Predikatlar hisobi qanday aksiomalarga ega?

6. Interpretatsiya nima?

7. Birinchi tartibli nazariyaga misollar keltiring.

Nazorat uchun testlar

1. Quyidagi belgilar ketma-ketligining qaysi biri formula bo'ladi?

A. $((A \leftrightarrow B) \wedge \urcorner A)$

B. $(A \rightarrow B) \urcorner \vee B$

C. $\urcorner(A \vee B) \rightarrow \urcorner B$

D. $(\urcorner B \rightarrow \vee A)$

2. Quyidagi belgilar ketma-ketligining qaysi biri formula bo'ladi?

A. $((B \rightarrow (A \wedge C)) \wedge \urcorner(A \vee C))$

B. $(A \rightarrow \vee(B \wedge C))$

C. $\urcorner(\rightarrow B \vee C) \wedge A, D)$

D. $(\urcorner(A \rightarrow B) \vee \urcorner C))$

3. Quyidagi belgilar ketma-ketligining qaysi biri formula bo'lmaydi?

A. $\urcorner(\rightarrow B \vee C) \wedge A, D)$

B. $((A \leftrightarrow B) \wedge \urcorner A)$

C. $((A \leftrightarrow B) \wedge \urcorner(A \vee B))$

B. $((A \leftrightarrow B) \vee A)$

4. Quyidagi belgilar ketma-ketligining qaysi biri formula bo'lmaydi?

A. $(B \vee C) \wedge AD)$

B. $(\urcorner(B \vee C) \wedge A)$

$C. (\neg(B \vee C) \wedge (A \vee D))$

$D. ((B \vee C) \wedge (A \vee \neg D))$

5. $F \equiv (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ formulaning barcha qism formulalarini yozing.

A. $A, B, \neg B, (A \to B), (\neg B \to \neg A), F$

B. $A, B, (A \to B), (\neg B \to \neg A)$

C. $(A \to B), (\neg B \to \neg A)$

D. $\neg A, \neg B, (A \to B), (\neg B \to \neg A)\ F$

6. $F \equiv (((A \vee B) \vee \neg C) \to (A \wedge B))$ formulaning barcha qism formulalarini yozing.

A. $A, B, C, \neg C, (A \vee B), (A \wedge B), ((A \vee B) \wedge \neg C) F$

B. $A, B, B\ (A \vee B), (A \wedge B), F$

C. $A, B, C, (A \vee B), ((A \vee B) \wedge \neg C)$

D. $A, B, C, \neg C, ((A \vee B) \wedge \neg C) F$

7. Quyidagi ikki o'zgaruvchili formula o'zgaruvchilar qiymatlarining nechta tanlanmasida 1 qiymat qabul qiladi: $(A \to (B \to (A \wedge B)))$?

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

8. Quyidagi ikki o'zgaruvchili formula o'zgaruvchilar qiymatlarining nechta tanlanmasida 1 qiymat qabul qiladi: $(((A \vee \neg B) \to B) \wedge (A \vee B))$?

A.1

B.2

C.3
D.4

9. $(\neg((A\to \neg B)\vee C)\wedge B)$ **uch o'zgaruvchili formula qiymatlarining nechta tanlanmasida 1 qiymat qabul qiladi?**

A.1
B.3
C.6
D.8

10. Quyidagi ikki o'zgaruvchili formula o'zgaruvchilar qiymatlarining nechta tanlamasida 0 qiymat qabul qiladi: $(P\to(Q\to(P\wedge Q)))$**?**

A.0
B.2
C.4
D.1

11. $(((P\vee \neg Q)\wedge R)\to(P\wedge Q))$ **uch o'zgaruvchili formula o'zgaruvchilar qiymatlarining nechta tanlamasida 0 qiymat qabul qiladi?**

A.3
B.2
C.8
D.5

12. Quyidagi ikki o'zgaruvchili formulalarning qaysi biri keltirilgan formula?

$A.\ (A\to B)$
$B.\ (A\vee B)$
$C.\ \neg(A\vee B)$
$D.\ \neg(A\wedge B)$

13. Quyidagi ikki o'zgaruvchili formulalarning qaysi biri keltirilgan formula?

$A.\ (A \vee \neg B)$

$B.\ (A \rightarrow \neg B)$

$C.\ \neg(A \wedge B)$

$D.\ \neg(A \wedge \neg B)$

14. Quyidagi uch o'zgaruvchili formulalarning qaysi biri keltirilgan formula?

$A.\ ((A \rightarrow B) \vee C)$

$B.\ (\neg(A \wedge B) \vee C)$

$C.\ ((\neg A \wedge B) \vee \neg C)$

$D.\ (\neg(A \vee B) \vee C)$

15. Quyidagi uch o'zgaruvchili formulalarning qaysi biri keltirilgan formula?

$A.\ ((\neg A \wedge B) \vee (\neg C \wedge \neg B))$

$B.\ ((\neg A \wedge B) \vee \neg(\neg C \wedge \neg B))$

$C.\ ((\neg A \wedge B) \rightarrow (\neg C \wedge \neg B))$

$D.\ ((\neg A \wedge B) \vee (\neg C \rightarrow \neg B))$

16. Quyidagi formulalarning qaysi biri DNF bo'ladi?

$A.\ ((\neg A \wedge B) \vee (\neg C \wedge \neg B))$

$B.\ ((\neg A \wedge B) \vee (\neg C \rightarrow \neg B))$

$C.\ ((\neg A \rightarrow B) \vee (\neg C \rightarrow \neg B))$

$D.\ (\neg(\neg A \wedge B) \vee \neg(\neg C \wedge \neg B))$

17. Quyidagi formulalarning qaysi biri DNF bo'ladi?

$A.(A \to B)$

$B.(B \to \rceil A)$

$C.(A \vee \rceil B)$

$D.((A \vee B) \wedge C)$

18. Quyidagi formulalarning qaysi biri KNF bo'ladi?

$A.(\rceil A \vee B \vee C)$

$B.((\rceil A \to B) \vee (\rceil C \to \rceil B))$

$C.((\rceil A \wedge B) \vee (\rceil C \to \rceil B))$

$D.(\rceil(\rceil A \wedge B) \vee \rceil C)$

19. Quyidagi ikki o'zgaruvchili formulalarning qaysi biri KNF bo'ladi?

$A. \rceil(A \wedge B)$

$B.(B \to \rceil A)$

$C.((A \vee \rceil B) \wedge C)$

$D.((A \vee B) \wedge \rceil(C \vee A))$

20. Quyidagi ikki o'zgaruvchili formulaning MDNFida nechta had bor: $(A \to (B \to (A \wedge B)))$ **$(A \to (B \to (A \wedge B)))$?**

A.1
B.4
C.3
D.2

21. Quyidagi ikki o'zgaruvchili formulaning MKNFida nechta had bor: $(((P \vee \rceil Q) \to Q) \wedge (\rceil P \vee Q))$?

A.2
B.3

C.1
D.4

22. Quyidagi ketma-ketliklardan qaysi biri formula bo'ladi?

$A.\ A \vee B(C \wedge D)$

$B.((A \wedge B) \vee C)$

$C.(A \neg B) \to C$

$D.(A \wedge \to B) \vee C$

23. Quyidagi ketma-ketliklardan qaysi biri formula bo'ladi?

$A.((\neg A \wedge B) \to (B \vee C))$

$B.(\vee B \wedge C) \to A$

$C.\ A \to (B \vee C)$

$D.\ A \wedge B) \to C$

24. $(((A \to \neg B) \to B) \wedge (\neg A \vee B))$ **formula propozitsional o'zgaruvchilar tanlanmalarining nechtasida rost qiymat qabul qiladi?**

A. 2ta
B. 0 ta
C. 1ta
D.3ta

25. $(A \to B) \leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$ **formula propozitsional o'zgaruvchilar tanlanmalarining nechtasida rost qiymat qabul qiladi?**

A. 3ta
B. 2ta
C.1 ta
D. 4ta

26. $(((A \vee \neg B) \wedge C) \rightarrow (A \wedge C)$ **formula propozitsional o'zgaruvchilar tanlanmalarining nechtasida rost qiymat qabul qiladi?**

A. 5ta

B.7ta

C.3ta

D. 8ta

27. $((A \vee B) \wedge C$ **formula propozitsional o'zgaruvchilar tanlanmalarining nechtasida rost qiymat qabul qiladi?**

A. 4

B. 5

C. 6

D. 3

28. $((A \wedge B) \rightarrow \neg A)$ **formulani mukammal dizyunktiv normal formaga keltiring.**

$A. (A \wedge B)$

$B. (\neg A \wedge B)$

$C. ((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge B))$

$D. ((\neg A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B))$

29. $(((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow (B \wedge A)))$ **formulaning mukammal dizyunktiv normal formaga keltiring.**

$A. ((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B) \vee (A \wedge B))$

$B. ((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge B))$

$C. ((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B))$

$D. (\neg A \wedge B)$

Foydalanilgan adabiyotlar

1. *Mendelson E.* Introduction to mathematical logic. Fifth edition. – NY.: "Chapman&Hall/CRC", 2010.

2. *Yunusov A. S.* Matamatik mantiq va algoritmlar nazariyasi elementlari. – T.: "Yangi asr avlodi", 2006.

3. *Гиндикин С .Г.* Алгебра логики в задачах. – М.: "Наука", 1972.

4. *Ершов Ю. Л., Палютин Е. А.* Математическая логика. – М.: "Наука", 2011.

5. *Ёқубов Т.* Математик логика элементлари.– Т.: "Ўқитувчи", 1983.

6. *Игошин В. И.* Математическая логика и теория алгоритмов. –М.: "Наука", 2008.

7. *Клини С. К.* Математическая логика. – М.: "Мир", 1973.

8. *Лавров И. А., Максимова Л. Л.* Задачи по теории множеств, математической логики и теории алгоритмов. – М.: "Наука", 2004.

9. *Новиков П. С.* Элементы математической логики. – М.: "Наука", 1973.

10. *Успенский В. А.* Теорема Гёделя о неполноте. – М.: "Наука", 1982.

11. *Яблонский С. В.* Введение в дискретную математику. – М.: "Высшая школа", 2006.

Mundarij

Kasimov Nadimulla Xabibullayevich
Dadajanov Ro'zimat Normatovich
Ibragimov Farhod Nurmuhamadjonovich

DISKRET MATEMATIKA VA MATEMATIK MANTIQ ASOSLARI

(O'quv qo'llanma)

Muharrir	Normat G'oyipov
Texnik muharrir	R. Ahmedov
Badiiy muharrir	D. Mulla-Axunov
Kompyuterda sahifalovchi	G. Ahmedova

Nashriyot litsenziyasi AA№ 0049. 18.03.2020 yil.

Bosishga ruxsat etildi 22.10.2020. Bichimi 60×84 $^{1}/_{16}$.
Bosma tabog'i 11. Shartli bosma tabog'i 10,23.
Adadi 200 nusxa. Buyurtma raqami № 21.

«Donishmand ziyosi» nashriyoti.
100011, Toshkent shahri, Navoiy ko'chasi, 30-uy.

«Kamalak-PRESS» MCHJ bosmaxonasida chop etildi.
100011, Toshkent shahri, Navoiy ko'chasi, 30-uy.
Telefon: (71) 244-40-91.

«DONISHMAND ZIYOSI»

ISBN 978-9943-6865-1-9