...ladjonov, R.V. Mullajonov, K.X.Turg'unova,
...h.N. Abdugapporova, J.V. Mullajonova

Matritsalar nazariyasining tanlangan boblari

$$\tilde{f}_1 - \frac{d\tilde{f}_2}{dt} + \frac{d^2\tilde{f}_3}{dt^2} - \ldots + (-1)^\eta \frac{d^\eta \tilde{f}_{\eta+1}}{dt^\eta} = 0$$

$$\tilde{f}_1 - \frac{d\tilde{f}_2}{dt} + \frac{d^2\tilde{f}_3}{dt^2} - \ldots + (-1)^\eta \frac{d^\eta \tilde{f}_{\eta+1}}{dt^\eta} = 0$$

$$S = THT^{-1} = \frac{1}{2}(E - iV)(E + iV),$$

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA
O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI
ANDIJON DAVLAT UNIVERSITETI

V.G. Miladjonov, R.V. Mullajonov, K.X.Turg'unova,
Sh.N. Abdugapporova, J.V. Mullajonova

Matritsalar nazariyasining tanlangan boblari

(O'quv qo'llanma)

YANGI ASR AVLODI
Toshkent
2014

UO‘K: 512.83
KBK: 22.143
M-50
Miladjonov V.G. va boshq.
Matritsalar nazariyasining tanlangan boblari/Miladjonov V.G. va boshqalar. – Toshkent: «Yangi asr avlodi», 2014. - 236 b.

ISBN 978-9943-27-298-9

Mazkur o‘quv qo‘llanma universitetning yuqori kurs talabalari va magistrlari uchun mo‘ljallangan bo‘lib, unda matritsalar nazariyasining matritsalar algebrasi, kompleks simmetrik, kososimmetrik va ortogonal matritsalar, manfiymas elementli matritsalar, xos qiymatlar regulyarligi va lokalligining har xil kriteriylari, matritsali tenglamalar, kvadratik shakllar va ularning tatbiqlari, yirik masshtabli sistemalar turg‘unligining umumiy masalasi kabi boblar bayon etilgan.

UO‘K: 512.83
KBK: 22.143

Taqrizchilar:
F. Arziqulov,
ADU Matematika kafedrasi katta o‘qituvchisi, f.-m.f.n.
S. Ergashev, And MI dotsenti

«Matematika» kafedrasining umumiy majlisida
muhokama etildi va ma’qullandi.
(Bayonnoma № 2 4-sentabr 2012-y).

Universitet ilmiy kengashida muhokama qilindi
va chop etishga tavsiya etildi.
(Bayonnoma № 3 29-oktabr 2012-y).

ISBN 978-9943-27-298-9

SO‘ZBOSHI

Ma`lumki, hozirgi kunda matritsalar matematika, mexanika, nazariy fizika, nazariy elektrotexnika va boshqa ko‘plab sohalarda keng qo‘llanilmoqda. Ammo matritsalar nazariyasini to‘la yoritib beruvchi o‘zbek tilida yozilgan adabiyotlar mavjud emas. Ushbu o‘quv qo‘llanma universitetning yuqori kurs talabalari, magistrlari va ilmiy izlanishlar olib borayotgan barcha mutaxassislar uchun mo‘ljallangan bo‘lib, unda matritsalar nazariyasining matritsalar algebrasi, kompleks simmetrik, kososimmetrik va ortogonal matritsalar, manfiymas elementli matritsalar, xos qiymatlarni regulyarligi va lokalligining har xil kriteriylari, matritsali tenglamalar, kvadratik shakllar va ularning tatbiqlari, yirik masshtabli sistemalar turg‘unligining umumiy masalasi kabi boblar bayon etilgan. Har bir bobning oxirida shu bobni mustahkamlash uchun mashqlar keltirilgan.

Ushbu qo‘llanmani o‘rganish uchun o‘quvchi universitet dasturi hajmida algebra va sonlar nazariyasi, matematik tahlil, kompleks o‘zgaruvchili funksiyalar nazariyasi, differensial tenglamalar kabi fanlarni to‘la o‘zlashtirgan bo‘lishi kerak.

Qo‘llanma sakkiz bobdan iborat.

Birinchi bob matritsalar algebrasiga bag‘ishlangan bo‘lib, unda matritsalar va ular ustida amallar, umumlashgan transponirlangan matritsalar, simmetrik matritsalar, l-matritsalar. Elementar bo‘luvchilar, Jordon kataklari, asosiy teoremalar bayon qilingan.

Ikkinchi bobda kompleks simmetrik, kososimmetrik va ortogonal matritsalar qarab chiqilgan bo‘lib, unda kompleks ortogonal va unitar matritsalar uchun ba’zi formulalar, kompleks matritsalarni qutb yoyilmasi, kompleks simmetrik matritsalarning normal ko‘rinishi, kompleks kososimmetrik matritsaning normal ko‘rinishi, kompleks ortogonal matritsaning normal ko‘rinishi keltirilgan.

Uchinchi bobda matritsalarning singulyarlik dastasi o‘rganilib, unda masalaning qo‘yilishi, matritsalarning regulyar dastasi, singulyar dastalar, keltirish haqida teorema, matritsalar singulyar dastasining kanonik shaklsi, dastaning minimal indeksi, kvadratik shakllarining singulyar dastasi, differensial tenglamalarga tatbiqlari ko'rib chiqilgan.

To'rtinchi bob manfiymas elementli matritsalarni o'rganishga bag'ishlangan bo'lib, unda umumiy xossa, yoyilmaydigan manfiymas matritsaning spektral xossasi, yoyiluvchi matritsa, yoyiluvchi matritsaning normal shaklsi, primitiv va imirimitiv matritsalar, to'la manfiymas matritsalar bayon qilingan.

Beshinchi bob xos qiymatlarni regulyarligi va lokalligining har xil kriteriylarini o'rganishga bag'ishlangan bo'lib, unda Adamarning regulyarlik kriteriysi va uning umumlashgani, matritsa normasi, Adamar kriteriysini blok matritsalarga kengaytirish, Fidlerning regulyarlik kriteriysi, Gershgoran doirasi va boshqa lokallashtirish sohalari qarab chiqilgan.

Oltinchi bobda matritsali tenglamalar o'rganilib, unda $AX=XB$ tenglama, $A=B$ bo'lgan xususiy hol. o'rin almashinuvchi matritsalar, $Ax-xB=C$ tenglama $f(x)=0$ skalyar tenglama, matritsali ko'phadli tenglamalar, xosmas matritsadan m-darajali ildiz chiqarish, xos matritsadan m-darajali ildiz chiqarish, matritsa logarifmi bayon etilgan.

Yettinchi bob kvadratik shakllar va ularning tatbiqlarini o'rganishga bag'ishlangan bo'lib, unda kvadratik shakllarda o'zgaruvchilarni almashtirish, inersiya qonuni, Lagranj metodi, Yakobi formulasi, kvadratik shakllarning ishoralari, kvadratik shakllarni bosh o'qlarga keltirish, kvadratik shakllar dastasi, shakllar regulyar dastasi xarakteristik sonlarning ekstremal xossasi, kvadratik shakllar ustida amallar, n-o'zgaruvchili kvadratik shakllarni ikki o'zgaruvchili kvadratik shakllar yig'indisi shaklida yozish, erkinlik darajasi n bo'lgan sistemalarning kichik tebranishlari, chiziqli yirik masshtabli sistemalar turg'unligi masalasiga bog'liq bo'lgan ba'zi teoremalar, dempfirlanishi va bikirligi oshkor holatda vaqtga bog'liq bo'lib, chiziqsiz bo'lgan sistema asimptotik turg'unligining yetarli shartlari ko'rib chiqilgan.

Sakkizinchi bobda matritsalar nazariyasini tatbiqi sifatida yirik masshtabli sistemalar turg'unligining masalasiga bag'ishlangan bo'lib, unda masalaning qo'yilishi, yirik masshtabli sistemalarning dekompozitsiyasi, Lyapunov matritsa funksiyasi usuli bayon etilgan.

Qo‘llanmaning I, VI,VIII boblari V.G‘.Miladjonov, II,III boblari K.X.Turg‘unova, IV,V boblari R.V.Mullajonov, VII bobi esa Sh.N.Abdugapporova va J.V.Mullajonovalar tomonidan yozilgan bo‘lib, u V.G‘. Miladjonov va K.X.Turg‘unovalarning tahriri ostida chop etishga tayyorlandi.

Mualliflar fizika-matematika fanlari nomzodi F.Arziqulov va dotsent S.Ergashevlarga qo‘llanmani yozishdagi qimmatli maslahatlari uchun chuqur minnatdorchilik bildiradi.

I BOB

MATRITSALAR ALGEBRASI

Matritsa tushunchasi chiziqli algebraning asosiy tushunchalaridan biri bo‘lib, uning talaba tomonidan chuqur o‘zlashtirilishi muhim ahamiyatga ega. Chunki bu tushunchaning tatbiqlari zamonaviy ishlab chiqarishdagi muhim iqtisodiy, texnikaviy masalalarni yechishda keng qo‘llaniladi.

§1. Matritsalar va ular ustida amallar

Ushbu paragraf yordamchi xarakterda bo‘lib, unda matritsalar va kvadratik shakllar haqidagi umumiy tushunchalar takrorlanadi. Ma’lumki, bu tushunchalar «Oliy algebra» kursida to‘la ko‘rib chiqilgan, shuning uchun isbotlanadigan jumlalarning isbotlariga to‘xtalib o‘tmaymiz.

Ta’rif 1.1: n ta satr va m ta ustundan iborat bo‘lib, to‘g‘ri to‘rtburchak shaklida joylashgan, n·m ta elementdan tuzilgan ixtiyoriy jadval nxm tipdagi matritsa deyiladi. Matritsani tashkil qiluvchi narsalar uning elementlari deyiladi. nxm tipdagi A matritsa quyidagicha yoziladi:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{bmatrix}$$

yoki qisqacha ko‘rinishda

$$A=[a_{ki}],\ \ k=1,2,...,n,\ \ i=1,2,...,m$$

Agar matritsaning ustunlar soni bitta (m=1) bo‘lsa, u holda ustun matritsani hosil qilamiz.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Shuningdek, satrlari soni bitta (n=1) bo‘lsa,

$$y=[y_1,y_2,\dots,y_m]$$

satr matritsani hosil qilamiz.

Agar matritsaning satrlari soni bilan ustunlar soni o‘zaro teng bo‘lsa, u holda matritsa kvadrat matritsa deyilib, uning satrlar (yoki ustunlar) soni matritsaning tartibi deyiladi.

Ta’rif 1.2. Matritsaning k ta satri va k ta ustunidan tuzilgan diterminant bu matritsaning k-tartibli minori deyiladi.

Masalan, birinchi tartibli minorlar shu matritsa elementlarining o‘z bo‘lib, ularning soni n·m ta bo‘ladi, quyidagi 2x3 tipdagi $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ matritsa uchun uchta har xil ikkinchi tartibli

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

minorlarni tuzish mumkin. n-tartibli A kvadratik matritsaning n-tartibli minori shu matritsaning determinantiga teng bo‘lib, detA yoki $|A|$ ko‘rinishda belgilanadi.

Ta’rif 1.3. Satrlar soni va ustunlar soni o‘zaro teng bo‘lib, mos elementlari ham o‘zaro teng bo‘lgan matritsalar o‘zaro teng deyiladi. Shuning uchun ikkita matritsaning o‘zaro tengligi A=B, n·m ta skalyarlarning o‘zaro tengligi $a_{ki}=b_{ki}$, k=1,2,...,n, i=1,2,...,m bilan teng kuchlidir.

Ta’rif 1.4. Matritsani songa ko‘paytirish deb, shu matritsaning hamma elementlarini shu songa ko‘paytirishdan hosil bo‘lgan matritsaga aytiladi, ya’ni:

$$\lambda A = \lambda[a_{ki}] = [\lambda a_{ki}] \quad k=1,2,\dots,n, \ i=1,2,\dots,m.$$

Hamma elementlari nolga teng bo‘lgan matritsa nol matritsa deyiladi.

Ta’rif 1.5. Bir xil tipdagi ikkita matritsaning yig‘indisi deb shunday matritsaga aytiladiki, bu matritsaning elementlari, qo'shiluvchi matritsalar mos elementlarining yig'indisidan iborat bo'lib, yig'indi matritsaning tipi qo'shiluvchi matritsalar tipi bilan bir xil bo'ladi.

Bu aytilganlardan quyidagilar kelib chiqadi:

$$A+(B+C)=(A+B)+C,$$
$$A+B=B+A,$$
$$A+0=A,$$
$$(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A,$$
$$\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B,$$

Bu yerda A, B, C — matritsalar, α,β — skalyar.

Ta'rif 1. 6. A matritsaning ustunlari soni B matritsaning satrlari soniga teng bo'lgan shartda A va B matritsalarning ko'paytmasi deb shunday C matritsaga aytiladiki, uning elementlari

$$c_{ki}=\sum_{j=1}^{m} a_{kj}b_{ji}$$

qoida bo'yicha aniqlangan bo'ladi. Agar A matritsa nxm tipda B matritsa mxs tipda bo'lsa, C=AB matritsa nxs tipdagi matritsa bo'ladi.

Bu ta'rifdan quyidagilar kelib chiqadi:

$$AB\neq BA$$
$$(A+B)C=AC+BC.$$

Ikkita kvadratik matritsa ko'paytmasining determinanti shu matritsalar determinantlari ko'paytmasiga teng, ya'ni:

$$\det(AB)=\det A\det B.$$

Ta'rif 1.7. Kvadratik matritsa bosh diagonalida turgan elementlari yig'indisi shu matritsaning izi deyiladi va Sp belgi bilan belgilanadi. Demak,

$$SpA=a_{11}+a_{22}+...+a_{nn}$$

Diagonalidagi barcha elementlari birga teng bo'lib, qolgan barcha elementlari nollardan iborat bo'lgan matritsa birlik matritsa deyiladi va E bilan belgilanadi.

Bevosita hisoblash bilan

$$AE=EA=A$$

ekanligini ko'rsatish mumkin.

Quyidagi ko'rinishdagi kvadrat matritsa

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

diagonal matritsa deyilib, $\mathrm{diag}A=(a_{11},a_{22},\dots,a_{mn})$ ko'rinishida yoziladi.

Ta'rif 1.8. Agar kvadratik matritsaning determinanti noldan farqli bo'lsa, u holda bu matritsa maxsusmas, aks holda maxsus deyiladi.

Agar $A\times A'=E$ tenglik bajarilsa, A' matritsa A matritsaga teskari matritsa deyilib, $A'=A^{-1}$ bo'ladi. Ixtiyoriy maxsusmas matritsa teskari matritsaga ega ekanligini isbotlash mumkin.

Ta'rif 1.9. Agar A matritsaning satrlarini ustun, ustunlarini satr qilib yozsak, hosil bo'lgan matritsa A matritsaning transponirlangan matritsasi deyilib, A^T ko'rinishda belgilanadi. Demak,

$A=[a_{ki}]$ bo'lsa, $A^T=[a_{ik}]$, $i=1,2,\dots,m$, $k=1,2,\dots,n$.

Transponirlangan va teskari matritsalarning ta'riflaridan bevosita quyidagi tengliklar kelib chiqadi.

$$(AB)^T=B^TA^T$$
$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$
$$\det A^T=\det A.$$

Ta'rif 1.10. $A=[a_{ki}]$, $i,k=1,2,\dots,n$ kvadratik matritsaning elementlari bosh diagonalga nisbatan simmetrik joylashgan bo'lsa, ya'ni, $a_{ki}=a_{ik}$ bo'lsa, u simmetrik matritsa deyiladi. Simmetrik matritsa uchun $A^T=A$ tenglik o'rinli.

Ta'rif 1.11. A kvadratik matritsaning elementlari

$$a_{ki}=-a_{ik},\quad i,k=1,2,\dots,n,$$

tenglikni qanoatlantirib, bosh diagonaldagi elementlari nolga teng, ya'ni, $a_{ii}=0$, $i=1,2,\dots,n$ bo'lsa, u kososimmetrik matritsa deyiladi. Kososimmetrik matritsalar uchun

$$A^T=-A$$

tenglik o'rinli.

Oliy algebradan ma'lumki, toq tartibli kososimmetrik matritsalarning determinantlari aynan nolga teng, juft tartibli kososimmetrik matritsalarning determinantlari esa uning elementlari butun ratsional funksiyasi kvadratini ifodalaydi. Demak, haqiqiy elementli kososimmetrik matritsalarning determinantlari manfiymas bo'ladi.

Ixtiyoriy kvadratik matritsani simmetrik va kososimmetrik matritsalar yig'indisi ko'rinishida tasvirlash mumkin. Haqiqatan,

$$\Lambda=[a_{ki}]$$

Ixtiyoriy kvadratik matritsa bo'lsin. Undan

$$A=\frac{1}{2}\left(\Lambda+\Lambda^{T}\right), \quad B=\frac{1}{2}\left(\Lambda-\Lambda^{T}\right)$$

matritsalarni tuzamiz. Aniqki, A matritsa simmetrik, B matritsa kososimmetrik bo'lib,

$$\Lambda=A+B$$

bo'ladi.

Ta'rif 1.12. Agar Λ kvadrat matritsa uchun

$$\Lambda\times\Lambda^{T}=E$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u ortogonal matritsa deyiladi.

Ortogonal matritsaning bu ta'rifidan quyidagi natijalar kelib chiqadi:

1) $\Lambda T=\Lambda\text{-}1$

2) ortogonal matritsaning determinanti ±1 ga teng, ya'ni:

$$\Delta=\det\Lambda=\pm1;$$

3) Ixtiyoriy satr (yoki ustun) elementlari kvadratlari yig'indisi birga teng, ya'ni:

$$\sum_{i}\alpha^{2}_{ki}=\sum_{k}\alpha^{2}_{ik}=1;$$

4) Qandaydir satr (ustun) elementlarini boshqa satr (ustun) mos elementlariga ko'paytmasining yig'indisi nolga teng, ya'ni:

$$\sum_{i}\alpha_{ki}\alpha_{mi}=\sum_{i}\alpha_{ik}\times\alpha_{im}=0 \qquad k\neq m$$

Agar matritsa elementlari skalyar parametrga, masalan, t vaqtga bog'liq bo'lsa, u holda matritsani bu parametr bo'yicha hosilasi deb elementlari berilgan matritsa mos elementlaridan shu parametr bo'yicha olingan hosilalardan, iborat bo'lgan matritsaga aytiladi. Demak, agar $X=[x_{ki}]$ bo'lsa,

$$\dot{X}=\left[\dot{x}_{ki}\right] \quad \text{yoki} \quad \frac{dX}{dt}=\left[\frac{dx_{ki}}{dt}\right].$$

Biz qarab chiqqan matritsalarning elementlari sonlardangina iborat edi. Umuman olganda, matritsalarning elementlari ixtiyoriy obyektlar bo'lishi mumkin, xususan, shunday matritsalarni qarash mumkinki, ularning elementlari matritsalardan iborat bo'ladi.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & c_1 & c_2 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & d_{11} & d_{12} \\ b_1 & b_2 & b_3 & d_{21} & d_{22} \end{vmatrix}$$

matritsani qisqacha quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{vmatrix} A & C \\ B & D \end{vmatrix}, \text{ bu yerda}$$

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad C = [c_1, c_2],$$

$$B = [b_1, b_2, b_3], \quad A = \begin{vmatrix} d_1 & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{vmatrix}.$$

Matritsalar yordamida quyidagi o'zgarmas koeffitsiyentli chiziqli differensial tenglamalar sistemasini sodda va ixcham ko'rinishda yozish mumkin. Haqiqatan,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{n} x_1 + \ldots + a_{1n} x_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n &= a_{n1} x_1 + \ldots + a_{nn} x_n \end{aligned} \qquad (1.1)$$

differensial tenglamalar sistemasini matritsa ko'rinishida yozish uchun quyidagi 2 ta matritsani kiritamiz.

1. (1.1) tenglamalar o'ng tomonlaridagi koeffitsiyentlardan tuzilgan matritsani

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

2. Ustun matritsa yoki vektorni

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Bu matritsalarni ko'paytirib, quyidagi ustun matritsani tuzamiz.

$$AX = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 + & \dots & + & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 + & \dots & + & a_{2n}x_n \\ \dots & & \dots & \dots & & \dots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n1}x_2 + & \dots & + & a_{nn}x_n \end{bmatrix}$$

Nihoyat ikki matritsaning tenglik shartidan foydalanib isbotlash mumkinki, (1.1) sistema quyidagi matritsali tenglamaga teng kuchli bo'ladi.

$$\dot{X} = A * X$$

Bundan murakkab bo'lgan differensial tenglamalar sistemasini ham matritsa ko'rinishida yozish mumkin.

Xususiy holda quyidagi

$$\sum_{j=1}^{s}\left(a_{kj}\ddot{x}_j + b_{kj}\dot{x}_j + c_{kj}x_j\right) = X_k, \qquad k=1,2,...s$$

ikkinchi tartibli tenglamalar sistemasini matritsa ko'rinishidagi yozuvi

$$A\ddot{x} + B\dot{x} + Cx = X$$

bo'lib, bu yerda $A=[a_{kj}]$, $B=[b_{kj}]$, $C=[c_{kj}]$, $k,j=1,2,...,s$ kvadratik matritsalar, x va X lar elementlari mos ravishda X_i va X_i, $i=1,2,...,n$ lardan iborat bo'lgan ustun matritsalardir.

A-kvadrat matritsa va x-ustun matritsalarni o'zaro ko'paytirib, Ax-ustun matritsa (vektori) ni hosil qilamiz. Ma'lumki, ustun-matritsa bu vektordir, shuning uchun Ax va x ustun-matritsa (vektor) larni o‘zaro skalyar ko‘paytirib, hadlarni qayta guruhlab chiqsak,

$$x^T Ax = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ki}x_i \cdot x_k \tag{1.2}$$

hosil bo‘ladi.

Agar A matritsa simmetrik, ya’ni $a_{ki} = a_{ik}$ bo‘lsa,

$$x^T Ax = a_{11}x_1^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{n-1}x_{n-1}x_n = \sum_{k}^{n}\sum_{i}^{m} a_{ki}x_kx_i,$$

oddiy kvadratik shakl hosil bo‘ladi.

Agar $x^T Ax$ kvadratik shakl musbat aniqlangan bo‘lsa, u holda soddalik uchun A matritsa musbat-aniqlangan deyiladi.

Agar A matritsa kososimmetrik, ya’ni, $a_{kk}=0$, $a_{ki}=-a_{ik}$ bo‘lsa, u holda $A\bar{x} \cdot \bar{x} = 0$ bo‘ladi.

Bizga n ta satr va m ta ustundan iborat bo‘lgan nxm tipdagi A matritsa berilgan bo‘lsin.

$A= [a_{ki}]$, $k=1, 2,..., n$, $i=1, 2,..., m$.

Ta’rif 1.13. A matritsaning normasi deb

$$\|A\| = \sup\left|\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ki}\xi_k\eta_i\right|$$

songa aytiladi. Bu yerda ξ_k va η_i lar mos ravishda

$$\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2 = 1 \quad \text{va} \quad \sum_{i=1}^{m}|\eta_i|^2 = 1$$

tengliklarni qanoatlantiruvchi sonlar.

Amalda, ko‘p hollarda quyidagi ko‘rinishdagi normalar ham ishlatiladi.

$$\|A\|_I = \sup\sum_{k=1}^{n}|a_{ki}|, \quad \|A\|_{II} = \sup\sum_{i=1}^{m}|a_{ki}|$$

$$\|A\| = \left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} |a_{ki}|\right)^{-}, \quad p=1,2,\ldots$$

$$\|A\|_1 = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} |a_{ki}|$$

$$\|A\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} |a_{ki}|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{(Yevklidcha norma)}$$

Agar A matritsa kvadrat matritsadan iborat bo'lsa, uning normasini quyidagicha ham aniqlash mumkin.

$$\|A\| = \lambda_M^{1/2}\left(A \cdot A^T\right),$$

bu yerda $\lambda M\ (AA^T)$ - AA^T matritsaning maksimal xos qiymati.

Agar A-simmetrik kvadrat matritsadan iborat bo'lsa, uning normasi shu matritsa maksimal xos qiymatiga teng bo'ladi, ya'ni:

$$\|A\| = \lambda_M(A)$$

Matritsalarning normalari uchun quyidagi munosabatlar o'rinli:

$$|A + B\| \le \|A\| + \|B\|, \quad \|\alpha * A\| = \alpha * \|A\|,$$

$$\|A \cdot B\| \le \|A\| \cdot \|B\|$$

Xususiy holda $\|A \cdot x\| \le \|A\| \cdot \|x\|$.

§ 2. Umumlashgan transponirlangan matritsalar

Ta'rif 1.14. Matritsani transponirlash deb biror aniq qonun yoki qoida bo'yicha uning barcha elementlari o'rinlarini almashtirishga aytiladi.

Bizga $m \times n,\ (m \le n)$ o'lchovli $A = (a_j),\ (i = 1.2....m,\ j = 1,2,...n,)$ – to'g'ri to'rtburchakli matritsa berilgan bo'lsin. Matritsaning barcha elementlarini o'rinlarini almashtiruvchi trivial (sodda) qoidalarni qarab chiqaylik:

1) matritsa satrlarini (ustunlarini) uning ustunlari (satrlari) bilan to'g'ridan to'g'ri (to'g'ri tartibda) almashtirish;

2) matritsa satrlarini (ustunlarini) uning ustunlari (satrlari) bilan teskari tartibda almashtirish;

3) matritsa i- chi satrini (i=1,2,...m) mos ravishda m+1-i-chi satri bilan almashtirish;

4) matritsa j-ustunini (j=1,2,...,n) mos ravishda n+1-j- ustuni bilan almashtirish;

5) matritsa i- satrini (i=1,2,...m) mos ravishda m+1-i-chi satri bilan, j-ustunini (j=1,2,...,n) mos ravishda n+1-j- ustuni bilan almashtirish.

Avval matritsa bilan bog‘liq bo‘lgan ba’zi tushunchalarni aniqlab olamiz. Ma’lumki, har bir to‘g‘ri to‘rtburchakli matritsaga shu matritsa elementlari ichida yotuvchi to‘g‘ri to‘trburchak mos keladi.

a) A matritsaning bosh (bosh bo‘lmagan) diagonali deb, shu matritsaning a_{ii}, i=1,2,…,m ($a_{i,m+1-i}$,i=1,2,…,m) elementlari joylashgan nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq kesmasiga aytiladi.

b) A matrisaning vertikal (gorizontal) o‘qi deb shu matritsaga mos to‘g‘ri burchakli to‘rtburchakning vertikal (gorizontal) simmetriya o‘qlariga aytiladi,

v) A matritsaning markazi deb unga mos to‘g‘ri to‘rtburchakning simmetriya markaziga aytiladi.

To‘g‘ri to‘rtburchakli A matritsaning bosh va bosh bo‘lmagan diagonallari unga mos to‘g‘ri to‘rtburchakning diagonallari bilan ustma-ust tushmaydi. Shuning uchun bunday matritsalar transponirlanganda ularning o‘lchovi nxm ga almashadi. Agar n+m bo‘lsa, ya’ni, A kvadrat matritsadan iborat bo‘lsa, u holda bu matritsaning bosh (bosh bo‘lmagan) diagonali unga mos kvadratning chap (o‘ng) diagonali bilan ustma-ust tushadi. Demak, geometrik nuqtayi nazardan matritsani transponirlash nuqta yoki to‘g‘ri chiziqqa nisbatan amalga oshiriladi. Agar nuqta yoki to‘g‘ri chiziq kesmasi shu matritsaga mos to‘g‘ri to‘rtburchak (kvadrat) ning simmetriya markazi yoki simmetriya o‘qi bilan ustma-ust tushsa, u holda transponirlangan matritsaning o‘lchovi o‘zgarmaydi, aks holda transponirlangan matritsaning o‘lchovi o‘zgaradi. Agar A matritsa biror nuqta yoki to‘g‘ri chiziqqa nisbatan transponirlansa, u holda bu matritsaning shu nuqta yoki to‘g‘ri chiziqda yotgan elementlari (agar bo‘lsa) o‘zgarmay qoladi.

Agar A matritsaga biror to‘g‘ri to‘rtburchak (kvadrat) mos kelib, A matritsa shu to‘g‘ri to‘rtburchak (kvadrat)da yotuvchi nuqta yoki to‘g‘ri chiziq kesmasiga nisbatan transponirlangan bo‘lsa, u holda transponirlangan matritsaga shu to‘g‘ri to‘rtburchak (kvadrat) ni transponirlash o‘tkazilgan nuqta yoki to‘g‘ri chiziq kesmasi atrofida 180° ga burilgani mos keladi.

Matritsalarni transponirlashning mexanik ma’nosini ochish uchun matritsa bilan yirik masshtabli mexanik sistemalar (YMMS) o‘rtasida quyidagicha moslik o‘rnatamiz.

$A=(a_{ij})$ – to‘g‘ri burchakli mxn (aniqlik uchun $m \leq n$ deb olamiz) o‘lchovli matritsa bo‘lib, Rn da aniqlangan (YMMS) m ta erkin qism sistemalardan tashkil topgan bo‘lsin. A matritsaning bosh diagonalida yotuvchi elementlariga YMMS ning erkin qism sistemalarini shunday mos qo‘yamiz, unda a_{ii}, i=1,2,…,m elementga mos keluvchi erkin qism sistema $a_{m+1-i,m+1-i}$ elementga mos keluvchi erkin qism sistema bilan muvozanatlashsin, A matritsaning a_{ij}, $i,j=1,2,..,m$ $i<j$ $(i>j)$ elementlariga mos a_{ii} va a_{jj}, $i,j=1,2,..,m$ erkin qism sistemalar orasidagi bog‘lanishlar (teskari bog‘lanishlar) ni, ya’ni, a_{ii} (a_{jj}) elementga mos keluvchi erkin qism sistemani a_{jj} (a_{ii}) elementga mos keluvchi erkin qism sistemaga ta’sirini ifodalovchi funksiyalarni mos qo‘yamiz. Bu bog‘lanishlar YMMS ning ichki bog‘lanishlari deyladi. A matritsaning qolgan elementlariga, ya’ni, a_{ij}, $i=1,2,..m$, $j=m+1,m+2..n$, $i<j$ $(i>j)$ elementlariga erkin qism sistemalar bilan berilgan YMMS bilan birga xarakterlanuvchi tashqi sistemalar orasidagi bog‘lanishlar (teskari bog‘lanishlar) ni mos qo‘yamiz. Bu bog‘lanishlar tashqi bog‘lanishlar deyiladi. Agar $m=n$ bo‘lsa, tashqi bog‘lanishlar qaralmaydi, ya’ni, barcha bog‘lanishlar ichki bog‘lanishlar bo‘ladi. Bunday o‘rnatilgan moslikda matritsaning mos bo‘lmagan diagonalidagi elementlarga o‘zaro muvozanatlashuvchi erkin qism sistemalar orasidagi bog‘lanishlar va teskari bog‘lanishlar mos keladi. Agar m – juft bo‘lsa, u holda har bir erkin qism sistemaga mos muvozanatlashtiruvchi erkin qism sistema mavjud bo‘ladi. Agar m – toq bo‘lsa, u holda $a_{\frac{m+1}{2},\frac{m+1}{2}}$ elementga mos erkin qism sistemaga muvozanatlashuvchi qism sistema mavjud bo‘lmaydi. Shuning uchun bu erkin qism sistema etalon qism sistema deyilib, alohida qaraladi. (Masalan, yirik masshtabli energetik sistemalarda sistemani tashkil etuvchi mashinalar soni toq bo‘lib, bitta mashina etalon mashina sifatida qaraladi). Bunday moslikdan ko‘rinadiki, transponirlash YMMS lar ichki strukturasi o‘zgarishini aniqlaydi.

Endi A matritsaning barcha elementlarining o‘rinlarini almashtiruvchi, yuqorida keltirilgan, trivial (sodda) qoidalarga mos keluvchi matritsani transponirlashning ta’riflarini keltiramiz.

Ta'rif 1.15.

1) A matritsaning satrlarini (ustunlarini) ustunlari (satrlari) bilan to‘g‘ri tartibda almashtirib, hosil qilingan $A^T = (a_{ji}),\ j = 1,2,...,n,\ i = 1,2,...,m,$ matritsa;

2) A matritsaning satrlarini (ustunlarini) ustunlari (satrlari) bilan teskari tartibda almashtirib hosil qilingan $A^{\perp} = (a_{n+1-j,m+1-i}),\ j = 1,2,...n,\ i = 1,2,...,m$ matritsa;

3) A matritsaning i- satrini m+1-i satri bilan almashtirib hosil qilingan $A = (a_{m+1-i,j}),\ i = 1,2,..,m,\ j = 1,2,...,n,$ matritsa:

4) A matritsaning j- ustunini n+1-j- ustuni bilan almashtirib, hosil qilingan $A^{|} = (a_{i,n+1-j}),\ i = 1,2,...m,\ j = 1,2,...,n$ matritsa:

5) A matritsaning i - satrini m+1-i satri bilan, j - ustunini n+1-j - ustuni bilan almashtirib hosil qilingan $A^0 = (a_{m+1-i,n+1-j}),\ i = 1,2,...,m,\ j = 1,2,...,n,$ matritsa

A matritsani

1) bosh diagonali bo‘yicha;

2) bosh bo‘lmagan diagonali bo‘yicha;

3) gorizontal o‘qi bo‘yicha;

4) vertikal o‘qi bo‘yicha;

5) markazi bo‘yicha transponirlangan matritsasi deyiladi.

Bu ta'rifning geometrik ma'nosi A matritsaga mos keluvchi to‘g‘ri to‘rtburchakni:

1) bosh diagonalidan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq atrofida;

2) bosh bo‘lmagan diagonalidan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq atrofida;

3) gorizontal o‘qi atrofida;

4) vertikal o‘qi atrofida;

5) A matritsa markazi atrofida 180° ga burishni ifodalaydi.

Yuqorida matritsa bilan YMMS o‘rtasida o‘rnatilgan moslikka asosan shuni ayta olamizki, ta'rif 1.15 da keltirilgan transponirlangan matritsa mos ravishda qaralayotgan YMMS ichki strukturasini:

1) erkin qism sistemalarni o‘zgartirmay, erkin qism sistemalar o‘rtasidagi bog‘lanishlarni ularga mos teskari bog‘lanishlar bilan o‘zaro almashtirib,

2) o‘zaro muvozanatlashuvchi erkin qism sistemalar o‘rtasidagi bog‘lanishlar va teskari bog‘lanishlar o‘zgarmay, muvozanatlanuvchi erkin qism sistemalarni o‘zaro va qolgan bog‘lanishlarni (teskari bog‘lanishlarni) mos ravishda o‘zaro almashtirib;

3) erkin qism sistemalarni o'zaro muvozanatlashuvchi erkin qism sistemalar orasidagi bog'lanishlar va teskari bog'lanishlar bilan teskari tartibda almashtirib;

4) erkin qism sistemalarni o'zaro muvozanatlashuvchi erkin qism sistemalar orasidagi bog'lanishlar va teskari bog'lanishlar bilan to'g'ri tartibda almashtirib;

5) etalon qism sistema (agar bor bo'lsa) dan tashqari muvozanatlashuvchi qism sistemalarni o'zaro va ularga mos barcha bog'lanishlarni mos teskari bog'lanishlar bilan almashtirib, o'zgartirilishini ifodalaydi.

Eslatma 1. Agar n (m) – toq bo'lsa, u holda vertikal (gorizontal) o'q bo'yicha transponirlashda etalon qism sistema va unga mos vertikal (gorizontal) bog'lanishlar va teskari bog'lanishlar o'zgartirilmaydi. Agar n (m) – juft bo'lsa, bunday qism sistema mavjud emas.

2. Agar n va m – toq bo'lsa, u holda markaz bo'yicha transponirlashda faqat etalon qism sistema o'zgartirilmaydi, bu qism sistemaga mos bog'lanishlar va teskari bog'lanishlar teskari tartibda o'zaro almashadi. Agar n va m – juft bo'lsa, bunday qism sistema mavjud bo'lmaydi.

Misollar: 1. $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ bo'lsin. U holda

$$X^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad X^{\perp} = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \\ \vdots \\ x_1 \end{pmatrix}, \qquad X^{|} = (x_n, x_{n-1}, ..., x_2, x_1)$$

$$X^{-} = (x_1, x_2, ..., x_n) = X, \qquad X^{0} = (x_n, x_{n-1}, ..., x_1)$$

2.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$ bo'lsin, u holda

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ a_{14} & a_{24} & a_{44} \end{pmatrix}, \quad A^{\perp} = \begin{pmatrix} a_{34} & a_{24} & a_{14} \\ a_{33} & a_{23} & a_{13} \\ a_{32} & a_{22} & a_{12} \\ a_{31} & a_{21} & a_{11} \end{pmatrix},$$

$$A^{!} = \begin{pmatrix} a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{pmatrix}, \quad A^{-} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{pmatrix}, \quad A^{0} = \begin{pmatrix} a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Bevosita tekshirib, quyidagi xossalar o'rinli ekanligiga ishonch hosil qilish mumkin.

1. Agar A va V $m \times n$ o'lchovli, to'g'ri to'rtburchakli matritsalar bo'lsa, u holda

$$(A+B)^T = A^T + B^T, \quad (A+B)^{\perp} = A^{\perp} + B^{\perp}, \quad (A+B)^{!} = A^{!} + B^{!},$$
$$(A+B)^{-} = A^{-} + B^{-}, \quad (A+B)^{0} = A^{0} + B^{0}$$

2. Agar A $-m \times n$, o'lchovli, to'g'ri to'rtburchakli matritsa bo'lib, $\alpha \neq 0$ haqiqiy son bo'lsa, u holda

$(\alpha A)^T = \alpha A^T$, $(\alpha A)^{\perp} = \alpha A^{\perp}$, $(\alpha A)^{!} = \alpha A^{!}$, $(\alpha A)^{-} = \alpha A^{-}$, $(\alpha A)^{0} = \alpha A^{0}$.

3. Agar A– $m \times n$, o'lchovli, to'g'ri to'rtburchakli matritsa bo'lsa, u holda $(A^T)^T = A$, $(A^{\perp})^{\perp} = A$, $(A^{!})^{!} = A$, $(A^{-})^{-} = A$, $(A^{0})^{0} = A$.

4. Agar A $m \times n$, V $n \times m$ o'lchovli to'g'ri burchakli matritsalar bo'lsa, u holda

$$(AB)^T = B^T A^T, \quad (AB)^{\hat{}} = B^{\hat{}} A^{\hat{}}, \quad (AB)^0 = B^0 A^0$$

5. Agar A n - tartibli kvadrat matritsa bo'lsa, u holda

$$(A^T) = (A)^T = A^0, \quad (A^{!})^{-} = (A^{-})^{!} = A^0, \quad (A^0)^{!} = (A^{!})^0 = A^{-},$$

$$(A^0)^T = (A^T)^0 = A, \quad (A^0) = (A)^0 = A^T, \quad (A^0)^{-} = (A^{-})^0 = A^{!}$$

6. Agar A –n tartibli kvadrat matritsa bo'lsa, u holda

$$A = (A^0)^{-1}(A^T A^{\perp})^T = (A^0)^{-1}(A^{\perp} A^T)^{\perp} = (A^{\perp} A^T)^T (A^0)^{-1} = (A^T A^{\perp})^{\perp} (A^0$$

7. Agar A maxsusmas kvadrat matritsa bo'lsa, u holda

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}, \quad (A^{-1})^{\perp} = (A^{\perp})^{-1}, \quad (A^{-1})^{!} = (A^{!})^{-1}, \quad (A^{-1})^{-} = (A^{-})^{-1}, \quad (A^{-1})^0 = (A^0)^{-1}$$

8. Agar A n –tartibli kvadrat matritsa bo'lsa, u holda

$$|A^T| = |A^{\perp}| = |A^0| = |A|, \quad |A^!| = |A^-| = (-1)^{\alpha}|A|,$$

bu yerda α – A matritsadan $A^!$ yoki A^- matritsalarni hosil qilish uchun A matritsaning satr yoki ustunlarini almashtirishlar soni.

Bu tengliklarning to'g'riligi ta'rif 1.15 va determinantning xossalaridan kelib chiqadi.

9. Agar A n –tartibli kvadrat matritsa, E n-tartibli birlik matritsa va λ sonli parametr bo'lsa, u holda

$$|A^T - \lambda E| = |A^{\perp} - \lambda E| = |A^0 - \lambda E| = |A - \lambda E|$$

Bu tengliklarning to'g'riligi 1.,2.,7. xossalar va $E = E^T = E^{\perp} = E^0$ ekanligidan kelib chiqadi.

10. Agar Sp (A) – A matritsaning izi bo'lsa, u holda

$$Sp(A^T) = Sp(A^{\perp}) = Sp(A^0) = Sp(A),$$

11. Agar *rang* (A) -A matritsaning rangi bo'lsa, u holda

$$rang(A^T) = rang(A^{\perp}) = rang(A^!) = rang(A^{-1}) = rang(A^0) = rang(A)$$

12. A kvadrat matritsa bo'lib,

$\Delta_i, \Delta_i^T, \Delta_i^{\perp}, \Delta_i^0$ $(\overline{\Delta}_i, \overline{\Delta}_i^T, \overline{\Delta}_i^{\perp}, \overline{\Delta}_i^0)$ $i = 1,2,\ldots,n$ lar mos ravishda $A, A^T, A^{\perp}, A^0$ matritsalarning bosh minorlari (ularning mos to'ldiruvchi minorlari) bo'lsin. U holda quyidagi tengliklar o'rinli:

$$\Delta_i = \overline{\Delta}_{n-i}^0, \ i = 1,2,\ldots,n-1, \ \Delta_n = \Delta_n^0 = |A| = |A^0|$$

$$\Delta_i^0 = \overline{\Delta}_{n-i}, \ i = 1,2,\ldots,n-1, \tag{1.3}$$

$$\Delta_i = \Delta_i^T, \ i = 1,2,\ldots,n, \ \Delta_n = \Delta_n^T = |A| = |A^T|$$

$$\Delta_i = \overline{\Delta}_{n-i}^{\perp}, \ i = 1,2,\ldots,n-1, \ \Delta_n = \Delta_n^{\perp} = |A| = |A^{\perp}| \tag{1.4}$$

Bu tengliklarning to'g'riligi ta'rif 1.15 , 7. xossa va determinantning xossalaridan kelib chiqadi.

§ 3. Simmetrik matritsalar

A – n- tartibli kvadrat matritsa bo'lsin, ya'ni

$$A = (a_{ij}), \ i, j = 1,2,\ldots,n$$

Ta'rif 1.16. A matritsa simmetrik deyiladi, agarda uning har bir elementi uchun shunday element mavjud bo'lib, bu elementlar juftliklari biror nuqta yoki to‘g‘ri chiziqqa nisbatan o‘zaro simmetrik bo‘lsa, bu nuqta yoki to‘g‘ri chiziqda yotuvchi elementlar o‘z-o‘ziga simmetrik deyiladi.

Simmetrik kvadrat matritsaning barcha ko‘rinishlarini aniqlash uchun quyidagicha belgilashlar kiritamiz. A- n- tartibli kvadrat matritsaga qandaydir kvadrat mos keladi.

Kvadratning chap (o‘ng) diagonalini A matritsaning bosh (bosh bo‘lmagan) diagonali deb ataymiz.

Kvadratning vertikal (gorizontal) simmetriya o‘qini A matritsaning vertikal (gorizontal) o‘qi deb aytamiz.

Kvadratning simmetriya markazini A matritsaning markazi deb aytamiz.

Ta’rif 1.17. A – n- tartibli kvadrat matritsa

1) bosh diagonalga nisbatan simmetrik matritsa deyiladi, agarda $A^T = A,$ ya’ni, $a_{ij} = a_{ji},\ i,j = 1,2,...,n$ bo‘lsa,

2) bosh bo‘lmagan diagonalga nisbatan simmetrik matritsa deyiladi, agarda $A^{\perp} = A,$ ya’ni $a_{ij} = a_{n+1-j,n+1-i},\ i,j = 1,2,...,n$ bo‘lsa,

3) vertikal o‘qqa nisbatan simmetrik matritsa deyiladi, agarda $A^{|} = A,$ ya’ni, $a_{ij} = a_{i,n+1-j},\ i,j = 1,2,...,n$ bo‘lsa,

4) gorizontal o‘qqa nisbatan simmetrik matritsa deyiladi, agarda $A^{-} = A,$ ya’ni $a_{ij} = a_{n+1-i,j},\ i,j = 1,2,...,n$ bo‘lsa,

5) matritsa markaziga nisbatan simmetrik matritsa deyiladi, agarda $A^{0} = A,$ ya’ni $a_{ij} = a_{n+1-i,n+1-j},\ i,j = 1,2,...,n$ bo‘lsa,

Shuni aytib o‘tamizki, bosh va bosh bo‘lmagan diagonallarda A matritsaning elementlari mavjud, vertikal va gorizontal o‘qlarda esa n- juft bo‘lganda A matritsaning elementlari mavjud bo‘lmaydi, n- toq bo‘lganda mavjud bo‘ladi, matritsa markazida n- juft bo‘lganda matritsa elementi mavjud emas, n- toq bo‘lganda $a_{\frac{n+1}{2},\frac{n+1}{2}}$ element matritsa markazida yotadi.

E birlik matritsa bosh va bosh bo‘lmagan diagonallar hamda matritsa markaziga nisbatan simmetrik bo‘ladi.

Ta’rif 1.18. R^n fazodagi n ta erkin qism sistemalardan tashkil topgan YMMS

1) erkin qism sistemalarga nisbatan simmetrik deyiladi, agarda uning mos bog‘lanishlari va teskari bog‘lanishlari bir xil bo‘lsa;

2) o‘zaro muvozanatlashuvchi erkin qism sistemalar o‘rtasidagi bog‘lanishlar va teskari bog‘lanishlarga nisbatan simmetrik deyi-

ladi, agarda muvozanatlashuvchi erkin qism sistemalar juftliklari o'zaro va o'zaro muvozanatlashuvchi erkin qism sistemalar o'rtasidagi bog'lanishlardan boshqa bog'lanishlar o'zlariga mos teskari bog'lanishlar bilan bir xil bo'lsa;

3. YMMS markaziga nisbatan simmetrik deyiladi, agarda muvozanatlashuvchi erkin qism sistemalar juftliklari o'zaro va barcha bog'lanishlar o'zlariga mos teskari bog'lanishlar bilan bir xil bo'lsa.

Ta'rif 1.17 dan simmetrik matritsalarning quyidagi xossalari kelib chiqadi.

1. Bosh va bosh bo'lmagan diagonallariga nisbatan simmetrik bo'lgan matritsalar shu matritsa markaziga nisbatan ham simmetrik bo'ladi.

2. Vertikal va gorizontal o'qlarga nisbatan simmetrik bo'lgan matritsalar shu matritsa markaziga nisbatan ham simmetrik bo'ladi.

3. Vertikal (gorizontal) o'qqa nisbatan simmetrik bo'lgan matritsalar maxsus matritsalar bo'ladi.

4. Ixtiyoriy A kvadrat matritsa uchun quyidagilar mos ravishda bosh diagonalga, bosh bo'lmagan diagonalga, vertikal o'qqa, gorizontal o'qqa va matritsa markaziga nisbatan simmetrik matritsalar bo'ladi.

$$S_1 = \frac{1}{2}(A + A^T),\ S_2 = \frac{1}{2}(A + A^{\perp}),\quad S_3 = \frac{1}{2}(A + A^{|}),\ S_4 = \frac{1}{2}(A + A^{-}),\ S_5 = \frac{1}{2}(A + A^{0}),$$

5. Agar A kvadrat matritsa bosh (bosh bo'lmagan) diagonalga, vertikal (gorizontal) o'qqa, matritsa markaziga nisbatan simmetrik matritsa bo'lsa, u holda

$$A^i (i = 1, 2, ...),\quad \alpha A,\quad T^* A T$$

lar ham mos ravishda bosh (bosh bo'lmagan) diagonalga, vertikal (gorizontal) o'qqa, matritsa markaziga nisbatan simmetrik matritsa bo'ladi. Bu yerda T - A matritsa bilan bir xil tartibli bo'lgan maxsusmas kvadrat matritsa, α - haqiqiy son, *- mos transponirlash belgisini bildiradi.

6. Agar A maxsusmas kvadrat matritsa bosh (bosh bo'lmagan) diagonalga, matritsa markaziga nisbatan simmetrik bo'lsa, u holda A^{-1} ham mos ravishda bosh (bosh bo'lmagan) diagonalga, matritsa markaziga nisbatan simmetrik bo'ladi.

7. Agar A va B kvadratik matritsalar o‘z markazlariga nisbatan simmetrik matritsalar bo‘lsa, u holda AB va BA matritsalar o‘z markazlariga nisbatan simmetrik matritsalar bo‘ladi.

8. Agar A n- tartibli kvadrat matritsa o‘z markaziga nisbatan simmetrik bo‘lib, Δ_i, $i=1,2,...,n$ bu matritsaning bosh minorlari, $\overline{\Delta}_i$ - shu minorlarga mos to‘ldiruvchi minorlar bo‘lsa, u holda

$$\Delta_i = \overline{\Delta}_{n-i}, \; i=1,2,...,n-1 \tag{1.5}$$

Agar A n- tartibli kvadrat matritsa o‘z markaziga nisbatan simmetrik bo‘lsa, u holda

$$\overline{\Delta}_i > 0, \; i=1,2,...,n-1, \; \Delta_n = |A| > 0 \tag{1.6}$$

shartlar A matritsaning musbat aniqlangan bo‘lishi uchun zarur va yetarli shartlar bo‘ladi. A matritsaning manfiy aniqlangan bo‘lishi uchun (1.6) shartlar quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi.

$$(-1)^i\overline{\Delta}_i > 0, \; i=1,2,...,n-1, \; (-1)^n \Delta_n = |A| > 0 \tag{1.7}$$

10. Agar A n- tartibli kvadrat matritsa 1) bosh diagonalga, 2) bosh bo‘lmagan diagonalga, 3) vertikal o‘qqa, 4) gorizontal o‘qqa, 5) matritsa markaziga nisbatan simmetrik matritsa bo‘lsa, u holda bu matritsani mos ravishda quyidagicha blok matritsalar ko‘rinishida yozish mumkin:

1) n=2k da $A=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ B_1^T & A_2 \end{pmatrix}$, n=2k+1 da $A=\begin{pmatrix} A_1 & a_1 & B_1 \\ a_1^T & a_{k+1,k+1} & a_2^T \\ B_1^T & a_2 & A_2 \end{pmatrix}$,

2) n=2k da $A=\begin{pmatrix} A_1 & C_1 \\ C_2 & A_1^\perp \end{pmatrix}$, n=2k+1 da $A=\begin{pmatrix} A_1 & a_1 & C_1 \\ a_2^T & a_{k+1,k+1} & a_1^T \\ C_1^T & a_2 & A_1^\perp \end{pmatrix}$,

3) n=2k da $A=\begin{pmatrix} A_1 & A_1' \\ A_2 & A_2' \end{pmatrix}$, n=2k+1 da $A=\begin{pmatrix} A_1 & a_1 & A_1' \\ (a_1^T)' & a_{k+1,k+1} & (a_2^T)' \\ A_2 & a_2 & A_2' \end{pmatrix}$,

4) n=2k da $A=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_1^- & B_1^- \end{pmatrix}$, n=2k+1 da $A=\begin{pmatrix} A_1 & a_1 & B_1 \\ a_1^T & a_{k+1,k+1} & a_2^T \\ A_1^- & a_2^- & B_1^- \end{pmatrix}$,

5) n=2k da $A=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ B_1^0 & A_1^0 \end{pmatrix}$, n=2k+1 da $A=\begin{pmatrix} A_1 & a_2 & B_1 \\ a_1^T & a_{k+1,k+1} & (a_1^T)^0 \\ B_1^0 & a_2^0 & A_1^0 \end{pmatrix}$,

bu yerda barcha blok matritsalar k-tartibli

$$a_1=(a_{k+1,1},a_{k+1,2},\dots,a_{k+1,k})^T,\ \ a_2=(a_{k+1,k+2},a_{k+1,k+3},\dots,a_{k+1,n})^T$$

Ta'rif 1.19. $A=(a_{ij})$ n- tartibli kvadrat matritsa

1) bosh diagonalga nisbatan kososimmetrik (antisimmetrik) deyiladi, agarda $A^T = A$, ya'ni, $a_{ij}=-a_{ji}$, $i,j=1,2,\dots,n$, bo'lsa:

2) bosh bo'lmagan diagonalga nisbatan kososimmetrik deyiladi, agarda $A^{\perp}=-A$, ya'ni $a_{ij}=-a_{n+1-j,n+1-i}$, $i,j=1,2,\dots,n$, bo'lsa:

3) vertikal o'qqa nisbatan kososimmetrik deyiladi, agarda $A'=-A$, ya'ni, $a_{ij}=-a_{i,n+1-j}$, $i,j=1,2,\dots,n$, bo'lsa:

4) gorizontal o'qqa nisbatan kososimmetrik deyiladi, agarda $A^{-}=-A$, ya'ni, $a_{ij}=-a_{n+1-i,j}$, $i,j=1,2,\dots,n$, bo'lsa:

5) matritsa markaziga nisbatan kososimmetrik deyiladi, agarda $A^0=A$, ya'ni $a_{ij}=-a_{n+1-i,n+1-j}$, $i,j=1,2,\dots,n$, bo'lsa.

Bu ta'rifdan quyidagilar kelib chiqadi:

1) Har qanday A kvadrat matritsa uchun quyidagilar mos ravishda bosh diagonalga, bosh bo'lmagan diagonalga, vertikal o'qqa, gorizontal o'qqa, matritsa markaziga nisbatan kososimmetrik matritsalar bo'ladi.

$$\bar{S}_1=\frac{1}{2}(A-A^T),\ \bar{S}_2=\frac{1}{2}(A-A^{\perp}),\ \bar{S}_3=\frac{1}{2}(A-A'),\ \bar{S}_4=\frac{1}{2}(A-A^{-}),\ \bar{S}_5=\frac{1}{2}(A-A^0)$$

2) Agar A kvadrat matritsa bo'lsa, u holda

$$A=S_1+\bar{S}_i,\ \ i=1,2,3,4,5$$

A matritsani mos ravishda bosh diagonalga, bosh bo'lmagan diagonalga, vertikal o'qqa, gorizontal o'qqa, matritsa markaziga nisbatan simmetrik va kososimmetrik bo'lgan matritsalar yig'indisiga yoyilmasi bo'ladi.

3. Agar A n- tartibli kvadrat matritsa 1) bosh diagonalga, 2) bosh bo'lmagan diagonalga, 3) vertikal o'qqa, 4) gorizontal o'qqa, 5) matritsa markaziga nisbatan kososimmetrik bo'lsa, u holda bu matritsani mos ravishda quyidagicha blok matritsalarga ajratib yozish mumkin:

1) n=2k da $A=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ -B_1^T & A_2 \end{pmatrix}$, n=2k+1 da $A=\begin{pmatrix} A_1 & a_1 & B_1 \\ -a_1^T & -a_{k+1,k+1} & a_2^T \\ -B_1^T & -a_2 & A_2 \end{pmatrix}$.

2) n=2k da $A=\begin{pmatrix} A_1 & C_1 \\ C_1^T & -A_1^{\perp} \end{pmatrix}$, n=2k+1 da $A=\begin{pmatrix} A_1 & a_1 & C_1 \\ a_2^T & -a_{k+1,k+1} & -a_1^T \\ C_1^T & -a_2 & -A_1^{\perp} \end{pmatrix}$.

3) n=2k da $A=\begin{pmatrix} A_1 & -A_1' \\ A_2 & -A_2' \end{pmatrix}$, n=2k+1 da $A=\begin{pmatrix} A_1 & -a_1 & -A_1' \\ (a_1^T)' & -a_{k+1,k+1} & -(a_2^T)' \\ A_2 & -a_2 & -A_2' \end{pmatrix}$.

4) n=2k da $A=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ -A_1^- & -B_1^- \end{pmatrix}$, n=2k+1 da $A=\begin{pmatrix} A_1 & -a_1 & B_1 \\ -a_1^T & -a_{k+1,k+1} & -a_2^T \\ -A_1^- & -a_2^- & -B_1^- \end{pmatrix}$.

5) n=2k da $A=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ -B_1^0 & -A_1^0 \end{pmatrix}$, n=2k+1da $A=\begin{pmatrix} A_1 & a_2 & B_1 \\ a_1^T & -a_{k+1,k+1} & -(a_1^T)^0 \\ -B_1^0 & -a_2^0 & -A_1^0 \end{pmatrix}$.

Bu yerda barcha blok matritsalar k-tartibli

$$a_1=(a_{k+1,1},a_{k+1,2},\dots,a_{k+1,k})^T,\quad a_2=(a_{k+1,k+2},a_{k+1,k+3},\dots,a_{k+1,n})^T$$

Ta'rif 1.20. $A=(a_{ij})$ n – tartibli kvadrat matritsa:

1) bosh diagonalga nisbatan ortogonal deyiladi, agarda $A^T=A^{-1}$ bo'lsa;

2) bosh bo'lmagan diagonalga nisbatan ortogonal deyiladi, agarda $A^{\perp}=A^{-1}$ bo'lsa;

3) vertikal o'qqa nisbatan ortogonal deyiladi, agarda $A'=A^{-1}$ bo'lsa;

4) gorizontal o'qqa nisbatan ortogonal deyiladi, agarda $A^-=A^{-1}$ bo'lsa;

5) matritsa markaziga nisbatan ortogonal deyiladi, agarda $A^0=A^{-1}$ bo'lsa.

Bu ta'rifdan kelib chiqadiki, agarda A va B kvadrat matritsalar bosh (bosh bo'lmagan) diagonalga, vertikal (gorizontal) o'qqa, matritsa markaziga nisbatan ortogonal bo'lsa, u holda A^{-1} va AB matritsalar ham mos ravishda bosh (bosh bo'lmagan) diagonalga, vertikal (gorizontal) o'qqa, matritsa markaziga nisbatan ortogonal bo'ladi.

§ 4. λ- matritsalar. Elementar bo'luvchilar

Ushbu ma'ruza yordamchi xarakterda bo'lib, chiziqli avtonom sistemalarning turg'unlik shartlarini aniqlash uchun kerak bo'ladigan yordamchi tushunchalarni o'z ichiga oladi.

Elementlari qandaydir λ parametrning $f_{ij}(\lambda)$ ko'rinishdagi ko'phadlaridan iborat bo'lgan

$$F(\lambda)=\begin{bmatrix} f_{11}(\lambda) & \dots & f_{1n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{n1}(\lambda) & \dots & f_{nn}(\lambda) \end{bmatrix}$$

kvadratik matritsani qaraylik. Bunday matritsalar λ- matritsalar deyiladi.

$\nu_k(\lambda)$ (k=1,2,3,...,n) orqali F(λ) matritsaning barcha k-tartibli minorlarining eng katta umumiy bo'luvchisini belgilab, bosh had oldidagi koeffitsiyentni birga teng qilib tanlaymiz. Osongina ko'rsatish mumkinki $\nu_k(\lambda)$ ko'phadning bu aniqlanishidan quyidagi xulosani chiqarish mumkin: agar qandaydir k- tartibli minor o'zgarmas songa teng bo'lsa, u holda $\nu_k = \nu_{k-1} = \dots = \nu_1 = 1$ bo'ladi. Chunki bu minor ν_k ga bo'linishi, ν_k esa

$$\nu_{k-1},\ \nu_{k-2},\dots,\ \nu_1$$

larga bo'linishi kerak.

$$\frac{\nu_k(\lambda)}{\nu_{k-1}(\lambda)} = E_k(\lambda) \quad k=1,2,3...n,\ \nu_0=1 \tag{1.8}$$

isbot bilan aniqlanuvchi ko'phad F(λ) matritsaning invariant ko'paytuvchisi deyiladi. Ravshanki,

$$\nu_k(\lambda)=E_1(\lambda)\times E_2(\lambda)\dots E_k(\lambda)$$

bo'lib, $\nu_n(\lambda)$ o'zgarmas ko'paytuvchi aniqligida F(λ) ning determinantiga teng, ya'ni:

$$\nu_n(\lambda) = \delta \det F(\lambda)=E_1(\lambda)\, E_2(\lambda)\dots E_n(\lambda).$$

$E_k(\lambda)$ invariant ko'paytuvchini ko'paytuvchilarga ajratamiz.

$$E_k(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{i}{}_{k1}\times(\lambda-\lambda_2)^{i}{}_{k2}\times\ldots\times(\lambda-\lambda_p)^{i}{}_{kp}$$

bu yerda

$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p$ lar $\det F(\lambda)=0$

tenglamaning har xil ildizlari.

Aniqki, $I_{kr}>0$, $k=1,2,\ldots,n$; $r=1,2,\ldots,p$.

Bundan tashqari, agar $k<k^1$ bo'lsa, $l_{kj}<l_{kj}$ bo'ladi. Chunki $E_k(\lambda)$ (1.8) ko'phad E_k ko'phadga bo'linadi. $E_k(\lambda)$ ning ko'paytuvchilari tarkibiga kiruvchi o'zgarmas sondan farqli bo'lgan $(\lambda-\lambda_r)^{lkr}$ ikkihad λ matritsaning elementar bo'luvchilari deyiladi. Ularning umumiy sonini m bilan belgilab, ularning o'zlarini

$$(\lambda-\lambda_1)^{i_1},\ (\lambda-\lambda_2)^{i_2},\ (\lambda-\lambda_m)^{i_m}$$

lar orqali belgilaymiz. Chunki λ_i sonlarning ichida o'zaro tenglari bo'lib, $(\lambda-\lambda_j)^{li}$ binom har xil E_k invariant ko'paytuvchilar tarkibiga kirishi mumkin.

Misol:
$$F(\lambda)=\begin{bmatrix}(\lambda+1)^3 & (\lambda+1)^2\\ \lambda+1 & \lambda+1\end{bmatrix}$$

matritsa uchun quyidagi to'rtta birinchi tartibli $(\lambda+1)^3$, $(\lambda+1)^2$, $\lambda+1$, $\lambda+1$ minorlarni tuzish mumkin bo'lib, ularning eng katta bo'luvchisi

$$\nu_1=\lambda+1$$

bo'ladi.

Berilgan misoldagi matritsa uchun bitta ikkinchi tartibli minor bo'lib,

$$\lambda(\lambda+1)^3=\begin{vmatrix}(\lambda+1)^3 & (\lambda+1)^2\\ \lambda+1 & \lambda+1\end{vmatrix}$$

uning eng katta umumiy bo'luvchisi

$$\nu_2=\lambda(\lambda+1)^3$$

bo'ladi. (1.8) formuladan foydalanib, invariant ko'paytuvchilarni topamiz.

$$E_1=\nu_1=\lambda+1,\ E_2=\frac{\nu_2}{\nu_1}=\lambda(\lambda+1)^2$$

Misolda qaralayotgan matritsa uchun elementar bo'luvchilar $\lambda+1$, λ, $(\lambda+1)^2$ bo'ladi. Bu yerda ildizlar $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=0$, $\lambda_3=\lambda_4=-1$

Bu ildizlar

$$\det F(\lambda)=0,$$

tenglamaning ham ildizlari bo‘ladi. Ammo λ=-1 tenglamaning uch karrali ildizi bo‘lib, bir elementar bo‘luvchi uchun oddiy, boshqasi uchun ikki karralidir.

F(λ) matritsaning normal diagonal ko‘rinishi deb

$$\begin{bmatrix} E_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & E_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & E_n \end{bmatrix}$$

matritsaga aytiladi. Bu yerda $E_1,E_2,...,E_n$- F(λ) matritsaning invariant ko‘paytuvchilari. Masalan, yuqorida qaralgan misoldagi matritsaning normal diagonal ko‘rinishi

$$\begin{bmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda+1)^2 \end{bmatrix}$$

matritsadan iborat bo‘ladi.

λ- matritsalarni elementar almashtirishlar deb quyidagi operatsiyalarga aytiladi:

a) ikkita satr yoki ikkita ustunini o‘zaro almashtirish;

b) qandaydir satri (ustuni) ning barcha elementlarini bitta noldan farqli o‘zgarmas ko‘paytuvchilarga ko‘paytirish;

v) qandaydir satri (ustuni) ning barcha elementlarini ko‘paytirilgan elementlarini boshqa satr (ustun) ning mos elementlariga qo‘shish, quyidagilarni isbotlash mumkin:

a) Elementar almashtirishlar λ-matritsa elementar bo‘luvchilarni o‘zgartirmaydi;

b) ixtiyoriy λ-matritsani chekli sondagi almashtirishlar bilan normal diagonal ko‘rinishiga keltirish mumkin.

Bu jumlalarning to‘g‘riligining isbotini keltirmay, yuqoridagi misoldagi matritsani normal shaklga keltiramiz:

$$\begin{bmatrix} (\lambda+1)^3 & (\lambda+1)^2 \\ \lambda+1 & \lambda+1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \lambda+1 & \lambda+1 \\ (\lambda+1)^3 & (\lambda+1)^2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \lambda+1 & \lambda+1 \\ (\lambda+1)^2 & (\lambda+1)^3 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} \lambda+1 & 0 \\ (\lambda+1)^2 & \lambda(\lambda+1)^2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda+1)^2 \end{bmatrix}$$

Bu yerda avval birinchi satrni ikkinchisi bilan, birinchi ustunni ham ikkinchisi bilan almashtirdik. Keyin birinchi ustundan ikkinchisini ayirdik. Nihoyat oxirida birinchi satrni l+l ga ko'paytirib, ikkinchi satrdan ayirdik.

§ 5. Jordon kataklari

Umuman aytganda, ko'p hollarda elementar almashtirishlar elementar bo'luvchilarni topishda ishlatiladi.

Quyidagi l_1 tartibli matritsani qaraylik.

$$J_1=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

Bunday ko'rinishdagi matritsalar Jordon kataklari yoki elementar yashiklar deyiladi.

Bundan foydalanib J_1-λE-λ-matritsani tuzamiz;

$$J_1-\lambda E=\begin{bmatrix} \lambda_1-\lambda & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_1-\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_1-\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_1-\lambda \end{bmatrix}$$

Bu matritsaning birinchi satr va oxirgi ustunini o'chirib qolgan elementlardan l_1-1 tartibli minor tuzamiz.

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1-1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_1-\lambda & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_1-\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Bu minor 1 ga teng bo'lgani uchun $v_1 = v_2 = v_{i-1} = 1$ bo'ladi. Ikkinchi tomondan yagona l_1-tartibli minor quyidagiga teng:

$$\det(J_1 - \lambda E) = (\lambda_1 - \lambda)^{i_1}$$

Demak,

$$v_{l_1} = (\lambda - \lambda 1)^{i_1}$$

Bu yerda λ va λ_1 larning o'rinlari almashtirildi, chunki v_{l_1} ning bosh hadi oldidagi koeffitsiyenti 1 ga teng bo'lishi kerak.

(1.8) formuladan foydalanib invariant ko'paytuvchilarni topamiz:

$$E1 = 1,\quad E2 = 1,\ \ldots, E_{i_l} = 1, E_{i_l} = (1 - 11)^{i_1}.$$

Bundan ko'rinadiki, $J_1 - \lambda E$ matritsa faqat bitta $(\lambda - \lambda_1)^{i_1}$ ga teng elementlar bo'luvchiga ega.

Endi elementlari a o'zgarmas sonlardan iborat bo'lgan A ixtiyoriy kvadrat matritsani qaraymiz. A-λE λ - matritsani tuzamiz (u A matritsaning xarakteristikasi deyiladi)

$$A - \lambda E = \begin{vmatrix} a_1 - \lambda & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_n - \lambda \end{vmatrix}$$

Bu matritsaning elementar bo'luvchilarini topamiz.

$$(\lambda - \lambda_1)^{i_1}, (\lambda - \lambda_2)^{i_2}, \ldots, (\lambda - \lambda_m)^{i_m}.$$

Bu elementar bo'luvchilarning har biri λ_k (k=1,2,3,...,m) ildiziga o'zining mos Jk Jordon katagiga mos keladi. Berilgan A matritsa uchun Jordonning normal ko'rinishi deb diagonaldagi elementlari Jordon kataklaridan, qolgan elementlari nollardan iborat bo'lgan

$$J = \begin{vmatrix} J_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & J_m \end{vmatrix}$$

ko'rinishdagi matritsaga aytiladi.

Ravshanki, J-λE matritsaning elementar bo'luvchilari xarakteristik matritsa elementar bo'luvchilari bilan ustma ust-tushadi.

Bundan tashqari,

$$|A\text{-}lE| = 0$$

xarakteristik tenglamaning ildizlari elementar bo'luvchilarning ildizlari bilan ustma-ust tushadi.

Misol 1.

$$A = \begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & -1 & -1 \\ 5 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

Bu matritsani Jordonning normal ko'rinishiga keltirish uchun avval A-λE xarakteristik matritsaning elementar bo'luvchilarini topamiz.

$$A - \lambda E = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ -4 & 1 & -1-\lambda & -1 \\ 5 & 1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

Buning uchun elementar almashtirishlardan foydalanamiz. Birinchi satrni -1 ga ko'paytiramiz. Keyin oxirgi ustunni -(2+ λ) ga ko'paytiramiz va birinchi ustunga qo'shamiz; bundan keyingi oxirgi ustunni ikkinchi va uchinchi ustunlardan ayiramiz:

$$A - \lambda E = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ -2+\lambda & 2 & -\lambda & -1 \\ (\lambda+1)^2 & -(1-\lambda) & \lambda & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

Birinchi satrni uchinchisiga qo'shamiz, keyingi birinchi satrni 2-λ ga ko'paytirib, to'rtinchi satrdan ayiramiz; bundan keyin oxirgi ustunni birinchi ustun o'rniga keltiramiz:

$$A - \lambda E = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & -2+\lambda & 2 & -\lambda \\ 0 & (1+\lambda) & -1-\lambda & \lambda \end{vmatrix}$$

Ikkinchi ustunni 1+λ ga ko'paytirib, uchinchi ustunga qo'shamiz.

$$A-\lambda E=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2+\lambda & -\lambda(1-\lambda) & -\lambda \\ 0 & (1+\lambda)^2 & \lambda(2+\lambda+\lambda^2) & \lambda \end{bmatrix}$$

Endi ikkinchi satrni avval -2-λ ga ko'paytirib, uchinchi satrga qo'shamiz; keyin ikkinchi satrni $-(1+\lambda)^2$ ga ko'paytirib, to'rtinchi ustunga qo'shamiz. Bundan keyin to'rtinchi ustunni -(1-λ) ga ko'paytirib, uchinchi ustunga qo'shamiz:

$$A-\lambda E=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & 0 & \lambda(1+\lambda)^2 & \lambda \end{bmatrix}$$

Uchinchi satrni to'rtinchi satrga qo'shamiz, keyin bu satrni -1 ga ko'paytirib, to'rtinchi ustunni uchinchi ustun bilan almashtiramiz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda(1+\lambda)^2 \end{bmatrix}$$

Nihoyat A-λE xarakteristik matritsaning normal diagonal ko'rinishi hosil bo'ldi. Bundan quyidagilarni topamiz:

$$E_1=1,\ E_2=1,\ E_3=\lambda,\ E_4=\lambda(1+\lambda)^2$$

Demak, A-λE matritsa ildizlari $\lambda_1=0$, $\lambda_2=0$,

$$\lambda_3=\lambda_4=-1,$$

bo'lgan uchta

$$\lambda,\ \lambda\ ,\ (\lambda+1)^2$$

elementar bo'luvchiga ega.

Har bir elementar bo'luvchiga o'zining Jordon katagi mos keladi:

$$\lambda_1=0 \text{ da } l_1=1;\ \lambda_2=0 \text{ da } l_2=0\ ;\ \lambda_3=-1 \text{ da } l_3=2$$

bo'lgani uchun

$$J_1=[0] \quad J_2=[0]$$

$$J_3=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

Endi qaralayotgan matritsa uchun Jordonning normal ko'rinishini quyidagicha yozamiz:

$$J=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}-2 & -1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ -5 & 0 & -2 & -3\\ 6 & 2 & 3 & 3\end{bmatrix}$$

Avval xarakteristik matritsani tuzamiz.

$$A-\lambda E=\begin{bmatrix}-2-\lambda & -1 & -1 & -1\\ 1 & -1-\lambda & 0 & 0\\ -5 & 0 & -2-\lambda & -2\\ 6 & 2 & 3 & 3-\lambda\end{bmatrix}$$

Elementar almashtirishlar yordamida bu λ matritsani quyidagi ko'rinishdagi normal diagonal ko'rinishga keltiramiz:

$$A-\lambda E=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2(\lambda+1)^2\end{bmatrix}$$

Bundan invariant ko'paytuvchilarni topamiz:

$$E_1=1,\ E_2=1,\ E_3=1,\ E_4=\lambda^2(\lambda+1)^2$$

Demak, A-λE matritsa ildizlari

$$\lambda_1=\lambda_2=0\ ,\ \lambda_3=\lambda_4=-1$$

bo'lgan faqat ikkita λ^2, $(\lambda+1)^2$ elementar bo'luvchilarga ega bo'lib, har bir elementar bo'luvchiga bittadan

$$J_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad J_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Jordon katagi mos keladi.

Endi qaralayotgan matritsa uchun Jordonning normal shaklini yoza olamiz.

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Bu misollardan shuni ko'ramizki, har ikkala misolning xarakteristik tenglamalari bir xil ildizga ega, ammo Jordonning normal shakli har xil. Buning sababi shuki, birinchi misolning xarakteristik matritsasi uchta elementar bo'luvchiga, ikkinchi misoldagi matritsa esa faqat ikkita elementar bo'luvchiga ega.

§ 6. Asosiy teoremalar

Endi bizning keyingi izlanishlarimizda kerak bo'ladigan ikkita chiziqli algebraning teoremalarini isbotsiz keltiramiz.

Teorema 1.1. Agar Λ matritsa maxsusmas bo'lsa, u holda $A-\lambda E$ va $\Lambda A \Lambda^{-1}-\lambda E$ matritsalarning elementar bo'luvchilari bir xil bo'ladi. Aksincha, agar $A-\lambda E$ va $B-\lambda E$ matritsalarning elementar bo'luvchilari bir xil bo'lsa, u holda har doim $B=\Lambda A \Lambda^{-1}$ tenglikni qanoatlantiruvchi A maxsusmas matritsa topiladi.

Ayrim mualliflar bu teoremani algebraning asosiy teoremasi deb ataydilar.

Teorema 1.2. Agar A va C lar s - tartibli simmetrik, kvadratik matritsalar bo'lib, A aniq ishorali bo'lsa, u holda

1) $\det(A\lambda+C)=0$ xarakteristik tenglamaning barcha ildizlari haqiqiy;

2) har doim shunday Λ maxsusmas matritsa topiladiki, unda

$$\Lambda^T A \Lambda = E, \ \Lambda^T C \Lambda = S_0$$

bo'ladi.

Bu yerda E birlik matritsa.

$$C_0 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_s \end{bmatrix}$$

bo'lib, $c_1, c_2, \dots, c_s$ lar xarakteristik tenglamaning ildizlari.

Teoremaning ikkinchi qismi quyidagi tasdiqqa teng kuchlidir: Agar quyidagi ikkita

$$T = \frac{1}{1} A\bar{x} \cdot \bar{x} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{s} \sum_{i=1}^{s} a_k x_k x_i ,$$

$$\Pi = \frac{1}{1} C\bar{x} \cdot \bar{x} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{s} \sum_{i=1}^{s} c_k x_k x_i$$

kvadratik shakllar berilgan bo'lib, ularning birinchisi musbat aniqlangan bo'lsa, u holda shunday Λ maxsusmas matritsali x= Λz chiziqli almashtirish topiladiki, unda

$$T = \frac{1}{2} \bar{z} \cdot \bar{z} = \frac{1}{2} \left(z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_s^2 \right)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} c_0 \bar{z} \cdot \bar{z} = \frac{1}{2} \left(c_1 z_1^2 + c_2 z_2^2 + \dots + c_s z_s^2 \right)$$

Teorema1.2 ning ikkinchi qismidagi ikkinchi tengligidan

$$\det C_0 = \det \Lambda' \det C \det \Lambda$$

tenglikni hosil qilib, $\det S_0 = \det C$ ekanligini e'tiborga olsak va det $\Lambda = \Delta$ deb olsak,

$$\det C_0 = \Delta^2 \det C$$

hosil bo'ladi.

Shuning uchun C_0 diagonal matritsa bo'lgani uchun $\det C_0 = c_1 c_2 \dots c_s$, bo'lib, $s_1 s_2 \dots s_s = \det C$ ko'rinishni oladi.

Bundan tashqari ortogonal almashtirishda ixtiyoriy B kvadrat matritsaning izi $\Lambda^T B \Lambda$ matritsaning iziga teng, ya'ni:

$$C_p B = C_p \Lambda^T B \Lambda$$

ekanligini isbotlash mumkin.

Mashqlar:

1)Quyidagi matritsalar ustida algebraik amallarni bajaring.

a) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ -2 & -2 & -1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}4 & 6 & 0\\ -3 & -5 & 0\\ -3 & -6 & 1\end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix}13 & 16 & 16\\ -5 & -7 & -6\\ -6 & -8 & -7\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3 & 0 & 8\\ 3 & -1 & 6\\ -2 & 0 & -5\end{pmatrix}$

c) $A=\begin{pmatrix}-4 & 2 & 10\\ -4 & 3 & 7\\ -3 & 1 & 7\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}7 & -12 & -2\\ 3 & -4 & 0\\ -2 & 0 & -2\end{pmatrix}$

d) $A=\begin{pmatrix}-2 & 8 & 6\\ -4 & 10 & 6\\ 4 & -8 & -4\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0 & 3 & 3\\ -1 & 8 & 6\\ 2 & -14 & -10\end{pmatrix}$

e) $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ -5 & 21 & 17\\ 6 & -26 & -21\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}8 & 30 & -14\\ -5 & -19 & 9\\ -6 & -23 & 11\end{pmatrix}$

f) $A=\begin{pmatrix}4 & 5 & -2\\ -2 & -2 & 1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3 & 7 & -3\\ -2 & -5 & 2\\ -4 & -10 & 3\end{pmatrix}$

g) $A=\begin{pmatrix}9 & 22 & -6\\ -1 & -4 & 1\\ 8 & 16 & -5\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & -3 & 6\\ 2 & -2 & 4\end{pmatrix}$

2. Quyidagi matritsalarning normasini hisoblang.

1. $\begin{pmatrix}0 & 4 & 10 & 1\\ 4 & 8 & 18 & 7\\ 10 & 18 & 40 & 17\\ 1 & 7 & 17 & 3\end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix}2 & 1 & 11 & 2\\ 1 & 0 & 4 & -1\\ 11 & 4 & 56 & 5\\ 2 & -1 & 5 & 6\end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix}4 & 1 & 1\\ -4 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 6. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

3. Umumlashgan transponirlangan matritsalarning 1-12 xossalarni isbotlang.

4. Umumlashgan transponirlangan matritsalarning boshqa xossalarini aniqlang.

5. Umumlashgan simmetrik matritsalarning 1-10 xossalarini isbotlang.

6. Umumlashgan simmetrik matritsalarning boshqa xossalarini aniqlang.

7. Quyidagi λ - matritsalarni avval elementar almashtirishlar yo'li bilan, so'ngra invariant ko'paytuvchilardan foydalanib kanonik ko'rinishga keltiring.

1. $A(\lambda) = \begin{Vmatrix} \lambda^4 + \lambda^2 + \lambda - 1 & \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 2 \\ 2\lambda^3 - \lambda & 2\lambda^2 + 2\lambda \end{Vmatrix}$

2. $A(\lambda) = \begin{Vmatrix} \lambda^2 + \lambda + 1 & \lambda^3 - \lambda + 2 \\ 2\lambda & \lambda^2 - 3\lambda - 1 \end{Vmatrix}$

3. $A(\lambda) = \begin{Vmatrix} \lambda^2 + 1 & 1 \\ \lambda & \lambda^2 + \lambda \end{Vmatrix}$

4. $A(\lambda) = \begin{Vmatrix} \lambda & \lambda + 1 \\ \lambda^2 - \lambda & \lambda^2 - 1 \end{Vmatrix}$

5. $A(\lambda) = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & \lambda \\ \lambda & \lambda & 1 \\ \text{[illegible]} & \text{[illegible]} & \lambda^2 - 1 \end{Vmatrix}$

6. $A(\lambda) = \begin{Vmatrix} \lambda^2 & \lambda + 1 \\ \lambda - 1 & \lambda^2 \end{Vmatrix}$

7. $A(\lambda) = \begin{Vmatrix} \lambda & \lambda^2 & 0 \\ \lambda^2 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda \end{Vmatrix}$

Quyidagi matritsalarni Jordonning normal ko'rinishiga keltiring.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 13 & 16 & 16 \\ -5 & -7 & -6 \\ -6 & -8 & -7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 7 & -12 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -5 & 21 & 17 \\ 6 & -26 & -21 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 8 & 30 & -14 \\ -5 & -19 & 9 \\ -6 & -23 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 7 & -3 \\ -2 & -5 & 2 \\ -4 & -10 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 22 & -6 \\ -1 & -4 & 1 \\ 8 & 16 & -5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

II BOB

KOMPLEKS SIMMETRIK, KOSOSIMMETRIK VA ORTOGONAL MATRITSALAR

Ushbu bob kompleks simmetrik, kososimmetrik va ortogonal matritsalarni o'rganishga bag'ishlangan bo'lib, unda bu matritsalar qanday elementar bo'luvchilarga ega bo'lishi mumkinligi va ularning norma shakllari qarab chiqiladi. Bu shakllar oddiy holatdagiga qaraganda sezilarli darajada murakkab strukturaga ega.

§1. Kompleks ortogonal va unitar matritsalar uchun ba'zi formulalar.

Lemma 2.1. L agar G matritsa bir vaqtning o'zida ermit matritsasi bo'lib, ortogonal bo'lsa, ya'ni, $G^T = \overline{G} = G^{-1}$ bo'lsa, u holda u quyidagi ko'rinishda tasvirlanadi:

$$G = Ie^{iK}, \tag{2.1}$$

bu yerda I-haqiqiy simmetrik involyutiv $(I^2 = E)$ klatritsa, $K - I$ bilan o'rin almashinuvchi bo'lgan kososimmetrik matritsa:

$$I = \overline{I} = I^T, \quad I^2 = E, \quad K = \overline{K} = -K^T \tag{2.2}$$

Agar $G-$ yuqoridagilarga qo'shimcha ravishda musbat aniqlangan ermit matritsasi bo'lsa, (1) formulasida $I = E$ bo'lib,

$$G = e^{iK}, \tag{2.3}$$

bo'ladi.

Isboti.

$$G = S + iT \tag{2.4}$$

bo'lsin, bu yerda S va T - haqiqiy matritsalar. U holda

$$\overline{G} = S - iT \quad \text{va} \quad G^T = S^T + iT^T \tag{2.5}$$

Shuning uchun $\overline{G} = G^T$ tenglikdan $S = S^T, \quad T = -T^T$, ya'ni, S-simmetrik, T- kososimmetrik ekanligi kelib chiqadi. Bundan tashqari, (2.4) va (2.5) ga asosan $G\overline{G} = E$ tenglikdan

$$S^2 + T^2 = E\ ,\quad ST = TS \tag{2.6}$$

ni hosil qilamiz. Buning ikkinchisidan S va T ning o‘zaro kommutativligi kelib chiqadi.

Malumki, o‘zaro kommutativ matritsalar bir xil haqiqiy ortogonal almashtirish bilan kvazidiagonal kanonik ko‘rinishga keltiriladi. Shuning uchun

$$S = O\left(s_1, s_1, s_2, s_2, \ldots s_q, s_q, s_{2q+1}, \ldots s_n\right)O^{-1}, \left(O = \overline{O} = O^{-1}\right)$$

(2.7)

$$T = O\left\{\begin{Vmatrix} 0 & t_1 \\ -t_1 & 0 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 0 & t_2 \\ -t_2 & 0 \end{Vmatrix}, \ldots, \begin{Vmatrix} 0 & t_q \\ -t_q & 0 \end{Vmatrix}, O, O, \ldots, O\right\}O^{-1},$$

bu yerda s_i, t_i -haqiqiy sonlar. Bundan,

$$G = S + iT = O\left\{\begin{Vmatrix} s_1 & it_1 \\ -it_1 & s_1 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} s_2 & it_2 \\ -it_2 & s_2 \end{Vmatrix}, \ldots, \begin{Vmatrix} s_q & it_q \\ -it_q & s_q \end{Vmatrix}, s_{2q+1}, \ldots s_n\right\}O^{-1}$$

(2.8)

Ikkinchi tomondan (2.7) ifodalarni (2.6) ga qo‘yib, quyidagilarni topamiz;

$$s_1^2 - t_1^2 = 1,\ s_2^2 - t_2^2 = 1, \ldots, s_q^2 - t_q^2 = 1, s_{2q+1} = \pm 1, \ldots, s_n = \pm 1$$

(2.9)

Endi tekshirib ko‘rish mumkinki $\begin{Vmatrix} s & it \\ -it & s \end{Vmatrix}$ tipdagi matritsalarni $s^2 - t^2 = 1$ shartdan har doim quyidagi ko‘rinishda tasvirlash mumkin:

$$\begin{Vmatrix} s & it \\ -it & s \end{Vmatrix} = \varepsilon\, e^{i\begin{Vmatrix} 0 & \varphi \\ -\varphi & 0 \end{Vmatrix}},$$

bu yerda $|s| = ch\varphi,\ \varepsilon t = sh\varphi,\ \varepsilon = signS$. Shuning uchun (2.8) va (2.9) ga asosan quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$G = O\left\{\pm e^{i\begin{Vmatrix} 0 & \varphi_1 \\ -\varphi_1 & 0 \end{Vmatrix}}, \pm e^{i\begin{Vmatrix} 0 & \varphi_2 \\ -\varphi_2 & 0 \end{Vmatrix}}, \ldots, \pm e^{i\begin{Vmatrix} 0 & \varphi_q \\ -\varphi_q & 0 \end{Vmatrix}}, \pm 1, \ldots, \pm 1\right\}O^{-1} \tag{2.10}$$

Ya’ni:

$$G = Ie^{iK},$$

bu yerda $I = O(\pm 1,\pm 1,\ldots,\pm 1,)O^{-1}$,

$$T = O\left\{\left\|\begin{matrix} 0 & \varphi_1 \\ -\varphi_1 & 0 \end{matrix}\right\|,\ldots,\left\|\begin{matrix} 0 & \varphi_q \\ -\varphi_q & 0 \end{matrix}\right\|,O,O,\ldots,O\right\}O^{-1} \qquad (2.11)$$

va

$$IK = KI$$

Agar G - musbat aniqlangan ermit matritsasi bo'lsa, uning barcha xarakteristik sonlari musbat bo'ladi. Ammo (2.10)ga asosan G ning harakteristik sonlari

$$\pm e^{\varphi_1},\pm e^{-\varphi_1},\pm e^{\varphi_q},\pm e^{-\varphi_q},\pm 1,\ldots,\pm 1$$

bo'ladi.

Shuning uchun G - musbat aniqlangan bo'lganda (2.10) va (2.11) dagi $\pm$ ishoralar $+$ ishora bilan almashtirilib,

$$I = O(1,1,\ldots,1,)O^{-1} = E$$

bo'ladi.

Teorema 2.1. O - kompleks ortogonal matritsa har doim quyidagi ko'rinishda tasvirlanadi;

$$O = \mathrm{Re}^{iK} \qquad (2.12)$$

Bu yerda: R–haqiqiy ortogonal matritsa, K–haqiqiy kososimmetrik matritsa, ya'ni:

$$R = \overline{R} = R^{T-1},\ K = \overline{K} = -K^T \qquad (2.13)$$

Isbot. Faraz qilaylik, (2.12) formula o'rinli bo'lsin. U holda

$$O^* = \overline{O}^T = e^{iK}R^T \text{ va } O^*O = e^{iK}R^T\,\mathrm{Re}^{iK} = e^{2iK}$$

bo'lib,

$$O^*O = e^{2iK} \qquad (2.14)$$

tenglikdan K matritsani aniqlashimiz mumkin. K ni aniqlaganimizdan keyin (2.12) tenglikdan R ni topamiz:

$$R = Oe^{iK} \qquad (2.15)$$

U holda $R^*R=e^{-iK}O^*Oe^{iK} = E$, ya'ni, R-unitar matritsa bo'ladi. Ikkinchi tomondan (2.15) dan kelib chiqadiki, ikkita ortogonal matritsaning ko'paytmasidan iborat bo'lgan R matritsa o'zi ortogonal, ya'ni, $R^TK = E$ bo'ladi.

Demak, R bir vaqtning o'zida ham ortogonal, ham unitar bo'ladi, bundan uning haqiqiy ortogonalligi kelib chiqadi. (2.15) ni (2.12) ko'rinishda yozish mumkin.

Lemma 2.2. Agar D matritsa bir vaqtda simmetrik va unitar, ya'ni: $D = D^T = D^{-1}$ bo'lsa, u holda u har doim quyidagi ko'rinishda tasvirlanadi.

$$D = e^{iS} \tag{2.16}$$

bu yerda S – haqiqiy simmetrik matritsa, ya'ni, $S = \overline{S} = S^T$

Isboti.

$$D = U + iV \qquad \left(U = \overline{U}, V = \overline{V}\right) \tag{2.17}$$

bo'lsin. U holda

$$\overline{D} = U - iV \qquad D^T = U^T + iV^T$$

$D = D^T$ dan $U = U^T$, $V = V^T$ kelib chiqadi, ya'ni, U va V lar haqiqiy simmetrik matritsalar.

$$D\overline{D} = E$$

tenglikdan

$$U^2 + V^2 = E, \quad UV = VU \tag{2.18}$$

kelib chiqadi.

U va V matritsalar o'zaro kommutativ bo'lgani uchun ular bir xil ortogonal almashtirish bilan kanonik ko'rinishga keladi. Shuning uchun quyidagilarni hosil qilamiz:

$$U = O(s_1, s_2, \ldots, s_n)O^{-1}, \; V = O(t_1, t_2, \ldots, t_n)O^{-1}, \tag{2.19}$$

bu yerda $O = \overline{O} = O^{-1}$. s_k, t_t, $k = \overline{1,n}$-haqiqiy sonlar (2.18) ning birinchi tengligidan $s_k^2 + t_k^2 = 1$, $k = \overline{1,n}$ kelib chiqadi. Shuning uchun shunday φ_k, $k = \overline{1,n}$ haqiqiy sonlar mavjud bo'lib, $s_k = \cos\varphi_k$, $t_k = \sin\varphi_k$, $k = \overline{1,n}$ bo'ladi. Bu ifodalarni (2.19) ga qo'yib, (2.17) ga asosan quyidagini hosil qilamiz.

$$D = O\left(e^{i\varphi_1}, \ldots, e^{i\varphi_n}\right)O^{-1} = e^{S}, \tag{2.20}$$

bu yerdan $S = O(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)O^{-1}$ (2.20) dan $S = \overline{S} = S^T$ ekanligi kelib chiqadi.

Teorema 2.2. U -unitar matritsani har doim quyidagi ko'rinishda tasvirlash mumkin:

$$U = \mathrm{R}e^{iS} \tag{2.21}$$

bu yerda R-haqiqiy ortogonal matritsa, S-haqiqiy simmetrik matritsa, ya'ni:

$$R = \overline{R} = R^{-1}, \quad S = \overline{S} = S^{T} \tag{2.22}$$

Isboti. (2.21) formuladan

$$U^{T} = e^{iS} R^{T} \tag{2.23}$$

kelib chiqadi. (2.21) va (2.23) ni hadlab ko'paytirib, (2.22) ga asosan quyidagini hosil qilamiz

$$UT\,U = e^{2is} \tag{2.24}$$

tenglikdan lemma 2 ga asosan S ni aniqlash mumkin. Shundan so'ng R matritsani

$$R = Ue^{-iS} \tag{2.25}$$

ko'rinishda aniqlaymiz. U holda $R^{T} = e^{-is}U^{T}$ bo'lib, (2.23), (2.24) va (2.25) dan

$$R^{T}R = e^{-iS}\, U^{T}\, Ue^{-iS} = E$$

kelib chiqadi.

Ikkinchi tomondan, (2.25) ga asosan, R ikkita unitar matritsalar ko'paymasidan iborat, demak, R-unitar matritsa bo'lib, u bir vaqtning o'zida ham ortogonal, ham unitar matritsa bo'ladi. Bundan R ning haqiqiy matritsa ekanligi kelib chiqadi. (2.25) formulani (2.21) ko'rinishda yozish mumkin.

§2. Kompleks matritsalarning qutb yoyilmasi

Teorema 2.3. Agar $A = \| a_{k} \|_{i,k=1}^{n}$ -kompleks elementli xosmas matritsa bo'lsa, y holda quyidagi yoyilma o'rinli:

$$A = SO, \tag{2.26}$$

va

$$A = O_1 S_1 \tag{2.27}$$

bu yerda S va S_1 simmetrik kompleks matritsa, O va O_1 esa ortogonal kompleks matritsa bo'ladi.

$$S = \sqrt{A\ \ ^{T}} = f\left(A\ \ ^{T}\right), \quad S_1 = \sqrt{A^{T} A} = f\left(A^{T} A\right),$$

$f(\lambda)$ va $f_1(\lambda)$-λga nisbatan qandaydir ko'phadlar.

(2.26) yoyilmadagi, shuningdek (2.27) yoyilmadagi S va O, mos ravishda O_1 va S_1 matritsalar faqat va faqat A va A^T o'rin almashinuvchi bo'lgandagina o'rin almashinuvchi bo'ladi.

Isboti: (2.26) yoyilmani hosil qilish yetarli, shuningdek bu yoyilma A^T matritsaga qo'yilib va hosil qilingan formuladan A matritsani aniqlab, (2.27) yoyilmaga kelamiz.

Agar (2.26) o'rinli bo'lsa, u holda

$$A = SO,\ A^T O^{-1} S$$

bo'lib,

$$AA^T = S^2 \tag{2.28}$$

bo'ladi.

Aksincha, AA^T-xosmas matritsa, $\left|AA^T\right| = |A|^2 \neq 0$, u holda $\sqrt{\lambda}$ * funksiyasi bu matritsaning spektrida aniqlangan bo'ladi. Demak, shunday $f(\lambda)$ interpolyatsion ko'phad,

$$\sqrt{AA^T} = f\left(AA^T\right) \tag{2.29}$$

bo'ladi. (2.29) simmetrik matritsani $S = \sqrt{A\ \ ^T}$ orqali belgilaymiz. U holda (2.28) o'rinli bo'ladi, $|S| \neq 0$ bo'ladi. (2.26) tenglikdan O ni aniqlab,

$$O = S^{-1}A,$$

osongina tekshirib ko'ramizki, bu matritsa ortogonal. Shunday qilib, (2.26) da S va O o'zaro o'rin almashinuvchi bo'lsa, u holda $A = SO$ va $A^T O^{-1} S$ matritsalar ham o'rin almashinuvchi bo'lib, $AA^T = S^2$, $A^T A = O^{-1}S^2O$ bo'ladi. Aksincha, agar $AA^T = A^T A$ bo'lsa,

$$S^2 = O^{-1}S^2O,$$

ya'ni, O matritsa $S^2 = AA^T$ matritsa bilan o'rin almashinuvchi. Ammo bu holda O matritsa $S = f(AA^T)$ matritsa bilan o'rin almashinuvchi bo'ladi.

Teorema 2.4. Agar ikkita kompleks simmetrik, yoki kososimmetrik, yoki ortogonal matritsalar

$$B = T^{-1}AT \tag{2.30}$$

bo'lsa, u holda bu matritsalar ortogonal-o'xshash, ya'ni, shunday O ortogonal matritsa mavjudki, unda

$$B = O^{-1}AO \tag{2.31}$$

bo'ladi.

Isboti. Teorema shartidan kelib chiqsa, q (λ) ko'phad mavjud bo'lib,

$$A^T = q(A),\ B^T = q(B) \qquad (2.32)$$
bo‘ladi. Bu ko‘phad matritsalar simmetrik bo‘lgan holda λ ga teng, kososimmetrik bo‘lgan holda esa $-\lambda$ ga teng. Agar A va B ortogonal matritsalar bo‘lsa, u holda A va B matritsalarning umumiy spektrida $\frac{1}{\lambda}$ uchun $g(\lambda)$ interpolyatsion ko‘phad bo‘ladi.

(2.32) tengliklardan foydalansak, (2.30) dan
$$g(B) = T^{-1}q(A)T$$
kelib chiqadi, yoki (2.32) ga asosan
$$B^T = T^{-1} A^T T$$
bo‘ladi. Bundan $B = T^T A^{T-1}$. Bu tenglikni (2.30) ga qo‘yib
$$TT^TA = ATT^T \qquad (2.33)$$
ni topamiz.

T matritsaga teorema 2.3 ni qo‘yamiz.
$$T = SO,\ (S=S^T = f(TT^T),\ O^T = O^{-1})$$
(2.33) ga asosan TT^T matritsa A matritsa bilan o‘rin almashinuvchi, u holda $S = f(TT^T)$ matritsa ham A matritsa bilan o‘rin almashinuvchi bo‘ladi, quyidagiga ega bo‘lamiz:
$$B = O^{-1} S^{-1} ASO = O^{-1} AO.$$

§3. Kompleks simmetrik matritsalarning normal ko‘rinishi

Teorema 2.5. Avvaldan berilgan ixtiyoriy elementar bo‘luvchilarga ega bo‘lgan kompleks simmetrik matritsa mavjud.

Isboti. O‘ng diagonalidan pastdagi elementlari birga teng, qolgan elementlari nolga teng bo‘lgan n – tartibli H matritsani qaraymiz. matritsaga o‘xshash bo‘lgan S simmetrik matritsa mavjudligini isbotlaymiz: H
$$S = THT^{-1} \qquad (2.34)$$
T-almashtiruvchi matritsani
$$S = THT^{-1} = S^T = T^{T-1} H^T T^T$$
shartdan kelib chiqib izlaymiz. Bu shartni quyidagicha yozish mumkin:
$$VH = H^TV, \qquad (2.35)$$
bu yerda V – simmetrik matritsa bo‘lib, T matritsa bilan

$$T^T T = -2iV \tag{2.36}$$

tenglik orqali bog'langan.

H va $F = H^T$ matritsalarning xossalariga ko'ra, (2.35) matritsa tenglamaning ixtiyoriy V yechimi quyidagi ko'rinishga ega:

$$V = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 0 & 0 & \dots & a_0 & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_0 & a_1 & \dots & & a_{n-1} \end{Vmatrix}, \tag{2.37}$$

bu yerda $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ – ixtiyoriy kompleks sonlar.

Bizga bitta T almashtiruvchi matritsani izlash yetarli, shuning uchun bu formulada $a_0=1, a_1= \dots a_{n-1} = 0$ deb olib, V matritsani quyidagicha aniqlaymiz:

$$V = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \tag{2.38}$$

Bundan tashqari T – almashtiruvchi matritsani simmetrik matritsa ko'rinishida izlaymiz:

$$T = T^T \tag{2.39}$$

U holda (36) tenglama T uchun quyidagicha yozamiz:

$$T^2 = -2iV \tag{2.40}$$

Endi T noma'lum matritsani V ning ko'phadi ko'rinishida izlaymiz. $V^2 = E$ bo'lgani uchun bunday ko'phad sifatida $T = \alpha E + \beta V$ birinchi darajali ko'phadni olish mumkin. (2.40) tenglamadan $V^2 = E$ ekanligini hisobga olib, $\alpha^2 + \beta^2 = 0$, $2\alpha\beta = -2i$ ekanligini topamiz. Bu munosabatlardan $\alpha = 1$, $\beta = -i$ ni aniqlaymiz. U holda

$$T = E - iV \tag{2.41}$$

bo'ladi. T- xosmas simmetrik matritsa. Shu bilan birga, (2.40) dan $T^{-1} = \frac{1}{2} iV^{-1}T = \frac{1}{2} iVT,$ ya'ni:

$$T^{-1} = \frac{1}{2}(E + iV) \tag{2.42}$$

Shunday qilib, H matritsaning S-simmetrik ko'rinishi quyidagicha aniqlanadi:

$$\sum \alpha^2_{ki} = \sum \alpha^2_{ik} = 1; \quad V = \begin{Vmatrix} 0\ 0 & \ldots & 0\ 1 \\ 0\ 0 & \ldots & 1\ 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 1\ 0 & \ldots, & 0\ 0 \end{Vmatrix} \tag{2.43}$$

S matritsa (2.35) tenglamani qanoatlantiradi va $V^2 = E$ bo'lgani uchun (2.43) tenglikni quyidagi ko'rinishda ham yozish mumkin:

$$2S = \left(H + H^T\right) + i\left(HV - VH\right) = H + H^T + i\left(H - H^T\right)V =$$

$$= \begin{Vmatrix} 0\ 1 & \ldots & 0\ 0 \\ 1\ 0 & \ldots & 0\ 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0\ 0 & \ldots & 0\ 1 \\ 0\ 0 & \ldots & 1\ 0 \end{Vmatrix} + i \begin{Vmatrix} 0 & \ldots & 1\ \ 0 \\ 0 & \ldots & 0\ -1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \ldots & 0\ \ 0 \\ 0\ -1 & \ldots & 0\ \ 0 \end{Vmatrix} \tag{2.44}$$

(2.44) formula H matritsaning S simmetrik ko'rinishini aniqlaydi. Agar $H - n -$ tartibli matritsa bo'lsa, uni $H = H^{(n)}$ deb belgilaymiz. U holda mos T, V, S matritsalarni $T^{(n)}$, $V^{(n)}$, $S^{(n)}$ deb belgilaymiz. Quyidagi ixtiyoriy elementar bo'luvchilar berilgan bo'lsin:

$$(\lambda - \lambda_1)^{P_1}, (\lambda - \lambda_2)^{P_2}, \ldots, (\lambda - \lambda_i)^{P_i}, \tag{2.45}$$

mos Jordon matritsasini tuzamiz:

$$J = \left\{\lambda_1 E^{(P_1)} + H^{(P_1)}, \lambda_2 E^{(P_2)} + H^{(P_2)}, \ldots, \lambda_i E^{(P_i)} + H^{(P_i)}, \right\}$$

Har bir $H^{(Pj)}$ matritsa uchun mos $S^{(Pj)}$ simmetrik shaklni kiritamiz.

$$S^{(P_j)} = T^{(P_j)} H^{(P_j)} \left[T^{(P_j)}\right]^{-1}, \; j = 1,2,\ldots,i$$

dan

$$\lambda_j E^{(P_j)} + S^{(P_j)} = T^{(P_j)} \left[\lambda_j E^{(P_j)} + H^{(P_j)}\right]\left[T^{(P_j)}\right]^{-1}$$

Shuning uchun

$$\overline{S} = \left\{\lambda_1 E^{(P_1)} + S^{(P_1)}, \lambda_2 E^{(P_2)} + S^{(P_2)}, \ldots, \lambda_i E^{(P_i)} + S^{(P_i)}\right\} \qquad (2.46)$$

$$T = \left\{T^{(P_1)}, T^{(P_2)}, \ldots, T^{(P_i)}\right\} \qquad (2.47)$$

deb olib,

$$\overline{S} = TJT^{-1}$$

ga ega bo‘lamiz.

$\overline{S} - J$ ordon matritsasining simmetrik ko‘rinishi, $\overline{S}$ matritsa J matritsaga o‘xshash va (2.46) elementar bo‘luvchilarga ega.

Natija 2. 1. Ixtiyoriy $A = \| a_{ik} \|_{i,k=1}^{n}$ – kvadrat kompleks matritsa simmetrik matritsaga o‘xshash.

Natija 2.2. Ixtiyoriy $S = \| s_{ik} \|_{i,k=1}^{n}$ – kompleks simmetrik matritsa $\overline{S}$ normal ko‘rinishga ega bo‘lgan simmetrik matritsa ortogonal – o‘xshash, ya’ni, shunday O -ortogonal matritsa mavjudki, unda quyidagi tenglik o‘rinli.

$$S = O\overline{S}O^{-1}. \qquad (2.48)$$

Kompleks simmetrik matritsaning normal ko‘rinishi quyidagicha kvazidiagonal ko‘rinishga ega:

$$\overline{S} = \left\{\lambda_1 E^{(P_1)} + S^{(P_1)}, \lambda_2 E^{(P_2)} + S^{(P_2)}, \ldots, \lambda_i E^{(P_i)} + S^{(P_i)}\right\} \qquad (2.49)$$

bu yerda $S\,(p)$ kataklar quyidagicha aniqlanadi:

$$2S^{(P)} = \left[E^{(P)} - iV^{(P)}\right] H^{(P)} \left[E^{(P)} + iV^{(P)}\right] = \left[H^{(P)} + H^{(P)^T} + i\left(H^{(P)} - H^{(P)^T}\right)V^{(P)}\right]$$

$$= \begin{Vmatrix} 0\,1 & \ldots & 0\,0 \\ 1\,0 & \ldots & 0\,0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0\,0 & \ldots & 0\,1 \\ 0\,0 & \ldots & 1\,0 \end{Vmatrix} + i \begin{Vmatrix} 0\;\;0 & \ldots & 1\;\;0 \\ 0\;\;0 & \ldots & 0\;-1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 1\;\;0 & \ldots & 0\;\;0 \\ 0\;-1 & \ldots & 0\;\;0 \end{Vmatrix} \qquad (2.50)$$

§4. Kompleks kososimmetrik matritsaning normal ko‘rinishi

Teorema 2.6. Kososimmetrik matritsa har doim juft rang bo‘lsin. U holda K matritsa satrlari orasida r ta chiziqli bog‘liq bo‘lganlari $i_1, i_2, \ldots, i_r$ mavjud bo‘lib, qolgan satrlar bu satrlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo‘ladi. Shuningdek, K matritsaning mos satrlaridan hosil qilingan ustunlari, agar oxirgi elementlarni -1 ga ko‘paytirsak, u holda K matritsaning ixtiyoriy ustuni $i_1, i_2, \ldots, i_r$ raqamli ustunlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo‘ladi. Shuning uchun r-tartibli ixtiyoriy minor quyidagi ko‘rinishda tasvirlanishi mumkin.

$$K\begin{pmatrix} i_1, i_2, i_3, \ldots, i_r \\ i_1, i_2, i_3, \ldots, i_r \end{pmatrix},$$

bu yerda L – son.

Bundan

$$K\begin{pmatrix} i_1, i_2, \ldots, i_r \\ i_1, i_2, \ldots, i_r \end{pmatrix} \neq 0$$

ekanligi kelib chiqadi. Ammo kososimmetrik toq tartibli aniqlovchi doimo nolga teng. Demak, r-juft son.

Teorema 2.7. 1. Agar λ K matritsaning xarakteristik soni bo‘lib,

$$(\lambda-\lambda_0)^{l_1}, (\lambda-\lambda_0)^{l_2}, \ldots, (\lambda-\lambda_0)^{l_t}$$

lar unga mos elementar bo‘luvchilar bo‘lsa, u holda $-\lambda_0$ ham K matritsaning xarakteristik soni bo‘lib,

$$(\lambda+\lambda_0)^{l_1}, (\lambda+\lambda_0)^{l_2}, \ldots, (\lambda+\lambda_0)^{l_t}$$

lar unga mos elementar bo‘luvchilar bo‘ladi.

2. Agar nol soni K – kososimmetrik matritsaning xarakteristik soni bo‘lib, u holda K matritsa elementar bo‘luvchilari sistemasida nol xarakteristik songa mos juft darajali elementar bo‘luvchilar juft son marta takrorlanadi.

Isboti. 1. K^T va K matritsalar bir xil elementar bo‘luvchilarga ega. Ammo $K^T = -K$, K ning elementar bo‘luvchilari $\lambda_1, \lambda_3, \ldots$ larni $-\lambda_1, -\lambda_3, \ldots$ larga almashtirib hosil qilinadi.

2. K matritsaning nol xarakteristik soniga λ ko'rinishdagi elementar bo'luvchilari b_1 ta, λ^2 ko'rinishdagilari b_2 ta va hakozo bo'lsin. Umuman b_r barcha λ^p ko'rinishdagi elementar bo'luvchilarni belgilaymiz. $b_2, b_4, \ldots$ larni juft son ekanini isbotlaymiz.

K matritsaning d defekti nol xarakteristik sonlarga mos keluvchi, chiziqli bog`lanmagan xos vektorlar soniga teng, ya'ni, $\lambda, \lambda^2, \ldots$ ko'rinishdagi elementar bo'luvchilar soniga teng. Shuning uchun

$$d = b_1 + b_2 + \ldots \qquad (2.51)$$

Teorema 2.6 ga asosan K matritsa rangi juft son bo'lib, $d = n\text{-}r$ u holda d son n soni qanday juftlikka ega bo'lsa. xuddi shu juftlikka ega. Shunday tasdiqni $K^3, K^5, \ldots$ matritsalarning d_3, d_5, ... defektlariga nisbatan ham aytish mumkin, chunki kososimmetrik matritsaning toq darajalari yana kososimmetrik matritsa bo'ladi. Shuning uchun $d_1 = d$, d_3, d_5, ... lar bir xil juftlikka ega. Ikkinchi tomondan K matritsani m darajaga ko'targanda bu matritsaning har bir λ^p elementar bo'luvchisi $p<m$ da p ta birinchi darajali elementar bo'luvchilarga yoyiladi, $p>m$ da esa m ta elementar bo'luvchilarga yoyiladi. Shuning uchun K, $K3$, ... matritsaning λ ning darajalari bo'lgan elementar bo'luvchilari soni quyidagi formulalar bilan aniqlanadi:

$$d_3 = \delta_1 + 2\delta_2 + 3(\delta_3 + b\delta_4 + \ldots),$$
$$d_5 = \delta_1 + 2\delta_2 + 3\delta_3 + 4\delta_4 + 5(\delta_5 + \delta_6 + \ldots),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (2.52)$$

(2.51) ni (2.52) bilan birga qarab, barcha $d_1 = d$, d_3, d_5, ... sonlar bir xil juftlikka egaligidan, $b_2, b_4, \ldots$, lar juft sonlar deb xulosa qilamiz.

Teorema 2.8. Teorema 2.7. dagi 1. va 2. cheklashlarni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy berilgan elementar bo'luvchilarga ega bo'lgan kososimmetrik matritsa mavjud.

Isboti. Avval ikkita $(\lambda + \lambda_0)^p$ va elementar bo'luvchilarga ega bo'lgan 2p tartibli.

$$J_{\lambda_0}^{(p)} = \{\lambda_0 E + H, -\lambda_0 E - H\},\ E = E^{(p)}, H = H^{(p)}, \qquad (2.53)$$

Kvazidiagonal matritsa uchun kososimmetrik matritsani topamiz.

Buning uchun shunday T almashtirish matritsasini izlaymizki, unda

$$T J_{\lambda_0}^{(pp)} T^{-1}$$

matritsa kososimmetrik, ya'ni

$$T J_{\lambda_0}^{(pp)} T^{-1} + T^{T^{-1}} \left[J_{\lambda_0}^{(pp)} \right]^T T^T = 0$$

yoki

$$W J_{\lambda_0}^{(pp)} + \left[J_{\lambda_0}^{(pp)} \right]^T W = 0 \qquad (2.54)$$

tenglik o'rinli bo'lib, W–kososimmetrik matritsa T matritsa bilan

$$T^T T = 2iW \qquad (2.55)$$

tenglik orqali bog'langan.

W matritsani har biri p – tartibli bo'lgan to'rtta kvadratik blokka ajratamiz:

$$W = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix}$$

U holda (2.54) ni quyidagicha tasvirlash mumkin:

$$\begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 E + H & 0 \\ 0 & -\lambda_0 E - H \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_0 E + H^T & 0 \\ 0 & -\lambda_0 E - H^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix} = 0 \qquad (2.56)$$

(2.56) matritsani tenglamaning chap tomonidagi blok matritsalar ustidagi amallarni bajarib, quyidagi to'rtta matritsaning tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} H^T W_{11} + W_{11}\left(2\lambda_0 E + H\right) &= 0, \\ H^T W_{12} - W_{12} H &= 0, \\ H^T W_{21} - W_{21} H &= 0, \\ H^T W_{22} + W_{22}\left(2\lambda_0 E + H\right) &= 0 \end{aligned} \qquad (2.57)$$

Ma'lumki, agar A va B matritsalar umumiy xarakterstik sonlarga ega bo'lmasa, $A^X - X^B = 0$ tenglama faqat $X = 0$ yechimga ega. Shunung uchun (2.57) ning 1 va 4-tenglamalaridan W kelib chiqadi. (2.57) ning 2- va 3-tenglamalari ustida teorema 2.5 ning isbotidagidek mulohaza yuritib,

$$W_2 = V = \begin{Vmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 0 & 0 \end{Vmatrix} \qquad (2.58)$$

ni aniqlaymiz. W ning simmetrik matritsa ekanligidan

$$W_{21} = W_{12} = V$$

ekanligi kelib chiqadi.

Shunday qilib,

$$W = \begin{pmatrix} 0 & V \\ V & 0 \end{pmatrix} = V^{(2p)} \qquad (2.59)$$

Ammo 3§ da ko'rsatilganidek (2.55) tenglama qanoatlantiradi, agarda

$$T = E^{(2P)} - iV^{(2P)}, \qquad (2.60)$$

bo'lsa. Bundan

$$T^{-1} = \frac{1}{2}\left(E^{(2p)} + iV^{(2p)}\right) \qquad (2.61)$$

Demak, izlanayotgan kososimmetrik matritsa quyidagi formula bilan topiladi:

$$K_{\lambda_0}^{(pp)} = \frac{1}{2}\left[E^{(2p)} - iV^{(2p)}\right] J_{\lambda_0}^{(pp)} \left[E^{(2p)} + iV^{(2p)}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[J_{\lambda_0}^{(pp)} - J_{\lambda_0}^{(pp)^T} + i\left(J_{\lambda_0}^{(pp)} V^{(2p)} - V^{(2p)} J_{\lambda_0}^{(pp)}\right)\right] \qquad (2.62)$$

$J_{\lambda_0}^{(pp)}$ va $V^{(2P)}$ larning o'rniga (2.53) va (2.59) dagi mos blok matritsalarni qo'yib, quyidagini topamiz:

$$\left| \sum_{i} \alpha_{ki} \alpha_{mi} = \sum_{i} \alpha_{ik} \times \alpha_{im} = 0 \right.$$

(2.63)

Ya'ni:

$$K_{\lambda_0}^{(pp)} = \frac{1}{2} \begin{Vmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & . & 0 & 0 & \dots & i & 2\lambda_0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & . & 0 & 0 & \dots & 2\lambda_0 & i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & . & \dots & . & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & . & i & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & . & 2\lambda_0 & i & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & . & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & . & \dots & -i & -2\lambda_0 & . & 0 & -1 & \dots & . & 0 \\ 0 & . & \dots & -2\lambda_0 & -i & . & 1 & 0 & \dots & . & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & . & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -i & . & \dots & 0 & 0 & . & 0 & 0 & \dots & . & -1 \\ -2\lambda_0 & -i & \dots & 0 & 0 & . & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{Vmatrix} \qquad (2.64)$$

Endi λ^q bitta elementar bo'luvchiga ega bo'lgan q – tartibli $K^{(q)}$ kososimmetrik matritsani quramiz, bu yerda q – toq son. Izlanayotgan kososimmetrik matritsa quyidagi matritsaga o'xshash bo'ladi.

$$J^{(q)} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{Vmatrix} \qquad (2.65)$$

$$K^{(q)} = TJ^{(q)}T^{-1} \qquad (2.66)$$

deb olib, kososimmetrik shartidan quyidagini topamiz:

$$W_1 J^{(q)} + J^{(q)} W_1 = 0, \qquad (2.67)$$

Bu yerda:

$$T^T T = 2iW_1 \qquad (2.68)$$

Bevosita tekshirib ko‘rib, ishonch hosil qilish mumkin,

$$W_1 = V^{(q)} = \begin{Vmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

matritsa (2.67) tenglamani qanoatlantiradi. W_1 ni bunday tanlab, (2.68) dan quyidagini topamiz:

$$T = E^{(q)} - iV^{(q)},\ T^{-1} = \frac{1}{2}\left[E^{(q)} + iV^{(q)}\right] \qquad (2.69)$$

$$2K^{(q)}\left[E^{(q)} - iV^{(q)}\right]J^{(q)}\left[E^{(q)} + iV^{(q)}\right] = J^{(q)} - J^{(q)^T} + i\left(J^{(q)} + J^{(q)^T}\right)V^{(q)} \qquad (2.70)$$

mos hisoblashlarni bajarib, quyidagini topamiz:

$$2K^{(q)} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ -1 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & \\ 0 & . & . & . & 0 & -1 \\ 0 & . & . & . & -1 & 0 \end{Vmatrix} + i\begin{Vmatrix} 0 & . & . & . & 1 & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 & 1 \\ . & . & . & . & . & \\ -1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & -1 & . & . & . & 0 \end{Vmatrix} \qquad (2.71)$$

Teorema 2.7 dagi shartlarni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy elementar bo‘luvchilar.

$$(\lambda - \lambda_j)^{p_j},\ (\lambda + \lambda_j)^{p_j},\ j = 1,2,\dots,u$$

$$\lambda^{q_k}, k = 1,2,\dots,v,\ q_1, q_2,\dots,q_v - toq\ sonlar \qquad (2.72)$$

berilgan bo‘lsin.

U holda kvazidiagonal kososimmetrik matritsa.

$$\widetilde{K} = \left\{K_{\lambda_1}^{(p_1 p_1)},\dots,K_{\lambda_i}^{(p_i p_i)}, K^{(q_1)},\dots,K^{(q_v)}\right\} \qquad (2.73)$$

bo‘ladi.

Natija 2.3. Ixtiyoriy kompleks kososimmetrik K matritsa (2.64), (2.71), (2.73) formulalar bilan aniqlangan $\widetilde{K}$ normal ko'rinishga ega bo'lgan kososimmetrik matritsa ortogonal-o'xshashdir, ya'ni, shunday kompleks ortogonal O matritsa mavjudki, unda

$$K = O\widetilde{K}O^{-1} \tag{2.74}$$

Eslatma. Agar K – haqiqiy kososimmetrik matritsa bo'lsa, u holda quyidagi chiziqli elementar bo'luvchilarga ega:

$$\lambda + i\varphi_1,\ \lambda - i\varphi_1, \ldots, \lambda + i\varphi_u, \lambda - i\varphi_u,\ \underbrace{\lambda, \ldots, \lambda}_{v\,n},$$

φ_j – haqiqiy sonlar. Bu holda (2.73) da $p_j = 1$, $q_k = 1$ deb olib, haqiqiy kososimmetrik matritsa normal ko'rinishni hosil qiladi:

$$\widetilde{K} = \left\{ \begin{Vmatrix} 0 & \varphi_1 \\ -\varphi_1 & 0 \end{Vmatrix}, \ldots, \begin{Vmatrix} 0 & \varphi_i \\ -\varphi_i & 0 \end{Vmatrix}, 0, \ldots, 0 \right\}$$

§5. Kompleks ortogonal matritsaning normal ko'rinishi

Teorema 2.9. 1. Agar $\lambda_0 \left(\lambda_0^2 \neq 1\right)$ – O ortogonal matritsaning xarakteristik soni bo'lib, bu xarakteristik songa mos elementar bo'luvchilar

$$(\lambda - \lambda_0)^{j_1},\ (\lambda - \lambda_0)^{j_2}, \ldots, (\lambda - \lambda_0)^{j_t}$$

lar bo'lsa u holda $\dfrac{1}{\lambda_0}$ ham O matritsaning xarakteristik soni bo'lib, bu xarakteristik songa mos elementar bo'luvchilar

$$\left(\lambda - \lambda_0^{-1}\right)^{j_1},\ \left(\lambda - \lambda_0^{-1}\right)^{j_2}, \ldots, \left(\lambda - \lambda_0^{-1}\right)^{j_t}$$

bo'ladi.

2. Agar $\lambda_0 = \pm 1$ O ortogonal matritsaning xarakteristik soni bo'lsa, u holda bu λ_0 xarakteristik songa mos juft darajali elementar bo'luvchilar juft son marta takrorlanadi.

Isboti. 1. Ixtiyoriy O xosmas matritsadan O^{-1} matritsaga o'tganda $(\lambda - \lambda_0)^{i}$ elementar bo'luvchi $\left(\lambda - \lambda_0^{-1}\right)^{i}$ elementar bo'luvchi bilan almashadi. Ikkinchi tomondan O va O^T matritsalar har doim bir xil elementar bo'luvchilarga ega. Shuning uchun $O^T = O^{-1}$ ortogonallik shartiga ko‘ra teorema 9 ning birinchi qismi isbotlanadi.

2. Faraz qilaylik, 1 soni matritsaning xarakteristik soni bo‘lib, -1 xarakteristik soni bo‘lmasin, ya’ni, $|E-O|=0$, $E+O\neq 0$. U holda K matritsani quyidagi tenglik bilan aniqlaymiz:

$$K=(E-O)(E+O)^{-1}$$

Bevosita tekshirib ishonch hosil qilish mumkinki, $K^T=-K$, ya’ni, K – kososimmetrik bo‘ladi. (2.74) dan.

$$O=(E-K)(E+K)^{-1}$$

ni aniqlab, $f(\lambda)=\frac{1-\lambda}{1+\lambda}$ deb olsak, $f'(\lambda)=-\frac{2}{(1+\lambda)^2}$ bo‘ladi. Demak, K matritsadan $O=f(K)$ matritsaga o‘tganda elementar bo‘luvchilar yoyilmaydi. Shuning uchun O matritsa elementar bo‘luvchilar sistemasidagi $(\lambda-1)^{2p}$ ko‘rinishdagi elementar bo‘luvchilar juft son marta takrorlanadi, shuningdek, K matritsaning λ^{2p} ko‘rinishdagi elementar bo‘luvchilari uchun ham bu o‘rinli. $-\varepsilon$ xarakteristik son bo‘lib, 1 xarakteristik son bo‘lmagan xol O matritsani $-O$ matritsa bilan almashtirish yo‘li bilan hal qilinadi.

$\lambda_0=\pm 1$ ning har ikkalasi ham xarakteristik son bo‘lgan holni qarab chiqamiz. $\varphi(\lambda)$ bilan O matritsaning minimal ko‘phadini belgilaymiz.

Teoremaning birinchi qismiga asosan $\varphi(\lambda)$ni quyidagi ko‘rinishda yozishimiz mumkin.

$$\varphi(\lambda)=(\lambda-1)^m(\lambda+1)^{m_2}\prod_{j=1}^{n}(\lambda-\lambda_j)^{p_j}(\lambda-\lambda_j^{-1})^{p_j},\ \lambda_j^2+1,\ j=1,2,\dots,n.$$

Darajasi m dan ($m-\varphi(\lambda)$ ning darajasi) kichik bo‘lgan $g(1)=1$ bo‘lib, O matritsa spektridagi barcha qolgan $m-1$ ta qiymati nolga teng bo‘lgan $g(\lambda)$ ko‘phadni qaraymiz va

$$P=g(O) \tag{2.75}$$

deb olamiz.

O matritsaning spektrida $[g(\lambda)]^n$ va $g\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ funksiyalar $g(\lambda)$ funksiya qabul qilingan qiymatlarni qabul qiladi. Shuning uchun

$$P^2 = P,\ P^T = g\left(O^T\right) = g\left(O^{-1}\right) = P \qquad (2.76)$$

Ya'ni, P – simmetrik tasvirlovchi matritsa.

$h(\lambda)$ ko'phad va Q matritsalarni quyidagicha aniqlaymiz.

$$h(\lambda) = (\lambda - 1)g(\lambda), \qquad (2.77)$$

$$Q = h(O) = (O - E)P \qquad (2.78)$$

$[h(\lambda)]^m$ daraja O matritsa spektrida nolga aylanib, $\varphi(\lambda)$ ga qoldiqsiz bo'linadi, Shuning uchun

$$Q^{m_1} = O,$$

ya'ni, Q – m nilpoteng indeksli nilpoteng matritsa, (2.78) dan

$$Q^T = \left(O^T - E\right)P \qquad (2.79)$$

endi

$$R = Q\left(O^T + 2E\right) \qquad (2.80)$$

matritsani qaraymiz.

(2.76), (2.78) va (2.79) dan quyidagi kelib chiqadi:

$$R = Q^T + 2Q = \left(O - O^T\right)P$$

Bundan ko'rinadiki, R – kososimmetrik matritsa. Ikkinchi tomondan (2.80) dan

$$R^k = Q^k\left(O^T + 2E\right)^k \quad k = 1, 2, \ldots, \qquad (2.81)$$

Ammo Q^T matritsa Q matritsa kabi nilpoteng matritsa, shuning uchun

$$\left|Q^T + 2E\right| \neq O$$

(2.81) dan kelib chiqadiki, ixtiyoriy K uchun R^K va Q^K lar bir xil rangga ega.

Ammo k toq bo'lganda R^k kososimmetrik matritsa bo'lib, juft rangga ega. Demak,

$$Q, Q^3, Q^5, \ldots$$

matritsalar juft rangga ega bo'ladi.

Shuning uchun 4§ da K matritsa uchun aytilgan mulohazalarni Q matritsa uchun ham takrorlab, shunday xulosaga kelishimiz mumkin, Q matritsaning elementar bo'luvchilar orasidagi λ^{2p} ko'rinishdagi bo'luvchilar juft son marta takrorlanadi. Ammo Q matritsaning har bir λ^{2p} elementar bo'luvchisiga O matritsaning

$(\lambda-1)^{2p}$ elementar bo'luvchisi mos keladi va aksincha. Bundan kelib chiqadiki, O matritsaning elementar bo'luvchilarining $(\lambda-1)^{2p}$ ko'rinishdagi juft son marta takrorlanadi.

$(\lambda+1)^{2p}$ elementar bo'luvchilar uchun shunday tasdiqni isbotlanganlarni $-O$ matritsaga qo'llab hosil qilish mumkin.

Teorema 2.10. Ixtiyoriy quyidagi ko'rinishdagi darajalar sistemasi qandaydir O kompleks ortogonal matritsaning elementar bo'luvchilari sistemasi bo'ladi:

$$
\begin{gathered}
(\lambda-\lambda_j)^{p_j},\ (\lambda-\lambda_j^{-1})^{p_j},\ \lambda_j\neq 0,\ j=1,2,\ldots,i \\
(\lambda-1)^{q_1},\ (\lambda-1)^{q_2},\ldots,\ (\lambda-1)^{q_v}, \\
(\lambda+1)^{t_1},\ (\lambda+1)^{t_2},\ldots,\ (\lambda+1)^{t_v}, \\
q_1, q_2,\ldots,q_v, t_1, t_2,\ldots,\ t_w, - \textit{toq sonlar}
\end{gathered}
\tag{2.82}
$$

Isboti.

$$\lambda_j=e^{\mu_j},\ j=1,2,\ldots,i$$

tenglik yordamida μ_j sonlarni kiritamiz.

Elementar bo'luvchilari mos ravishda

$$(\lambda-\mu_j)^{p_j},(\lambda+\mu_j)^{p_j},\quad j=1,2,\ldots,i,\ \lambda^{q_1},\ldots,\lambda^{q_v},\ \lambda^{t_1},\ldots,\lambda^{t_w}$$

bo'lgan

$$K_{\mu_j}^{(p_jp_j)},\ \ j=1,2,\ldots,i,\ K^{(q_1)},\ldots,K^{(q_v)},\ K^{(t_1)},\ldots,K^{(t_w)}$$

kanonik kososimmetrik matritsalarni qaraymiz.

Agar K – kososimmetrik matritsa bo'lsa,

$$O=e^{K}$$

ortogonal bo'ladi, ya'ni:

$$O^T=e^{K^T}=e^{-K}=O^{-1}.$$

K matritsaning har biri $(\lambda-\mu)^p$ elementar bo'luvchisiga O matritsaning $(\lambda-\mu)^p$ elementar bo'luvchisi mos kelishini etiborga olsak, quyidagi kvazidiagonal matritsa ortogonal bo'lib, (2.82) elementar bo‘luvchilarga ega bo‘ladi.

$$\overline{O} = \left\{ e^{K_{p_1}^{(p_1 p_1)}}, \ldots, e^{K_{p_i}^{(p_i p_i)}}, e^{K^{(q_1)}}, \ldots, e^{K^{(q_v)}}, -e^{K^{(t_1)}}, \ldots, -e^{K^{(t_w)}} \right\} \tag{2.83}$$

Natija 2.4. Ixtiyoriy O ortogonal matritsa $\overline{O}$ normal ko‘rinishga ega bo‘lgan ortogonal matritsaga ortogonal-o‘xshash bo‘ladi, ya’ni, shunday O_1 ortogonal matritsa mavjudki, unda

$$O = O_1 \overline{O} O_1^{-1} \tag{2.84}$$

bo‘ladi.

Mashqlar:

1. Agar C-kvadrat yoki to‘g‘ri to‘rtburchakli matritsa bo‘lib, SpCC* bo‘lsa, u holda C=0 bo‘lishini isbotlang.

2. Qanday shartlar bajarilganda

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

matritsa normal bo‘ladi. Bu yerda B va D kataklar kvadrat matritsalar.

3. Haqiqiy xos qiymatga ega bo‘lmagan, ikkinchi tartibli, normal haqiqiy matritsa ko‘rinishini toping.

4. Haqiqiy ortogonal simmetrik matritsaning kanonik ko‘rinishi va geometrik ma’nosi qanday bo‘ladi?

5. Ortogonal matritsa antisimmetrik bo‘lishi mumkinmi?

6. Har bir ustuni uchun qo‘shma kompleks ustunga ega bo‘lgan unitar matritsa mavjudmi?

7. Quyidagi ko‘rinishdagi

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \cdot u^T \\ \sin\alpha \cdot v & R \end{pmatrix}, \qquad u^T u = v\, v^T = 1$$

barcha ortogonal matritsalar berilgan u ni v ustunlarda

$$R = P - (1 + \cos\alpha)\, v \cdot u^T$$

da hosil qilinishini ko‘rsating. Bu yerda P - u ni v ga o‘tkazuvchi ortogonal matritsa.

8. Unitar simmetrik matritsa qanday bo‘ladi?

9. Agar B- unitar matritsa bo‘lsa, $B^T B$ -ko‘rinishdagi matritsani unitar simmetrik matritsa ekanligini isbotlang.

III BOB

MATRITSALARNING SINGULYAR DASTASI

§1. Masalaning qo'yilishi

Bu bob quyidagi masalaga bag'ishlangan.

Elementlari K sonlar maydonidan olingan bir xil $m\times n$ o'lchovli to'rtta A, B, A_1, B_1 matritsa berilgan. Qanday shartlar bajarilganda mos ravishda m va n o'lchovli kvadrat xosmas P va Q matritsalar mavjud bo'lib, bir vaqtning o'zida

$$PAQ = A_1\,, \quad PBQ = B_1 \tag{3.1}$$

tengliklar bajariladi.

$A+\lambda B$ va $A_1+\lambda B_1$ matritsalar dastasini qarab chiqamiz.

Bunday holda (3.1) tengliklarni quyidagi bitta tenglik bilan almashtirish mumkin bo'ladi.

$$P(A+\lambda B)Q = A_1+\lambda B_1 \tag{3.2}$$

Ta'rif 3.1. Mos ravishda m va n o'lchovlari P va Q o'zgarmas matritsalar yordamida tuzilgan (3.2) tenglik bilan bog'langan bir xil $m\ x\ n$ o'lchovli to'g'ri to'rtburchakli $A+\lambda B$ va $A_1+\lambda B_1$ matritsalar dastalari qat'iy ekvivalent deyiladi.

$A+\lambda B$ va $A_1+\lambda B_1$ dastalarining ekvivalentlik kriteriysi λ – matritsalar ekvivalentligining umumiy kriterysidan kelib chiqib, shu dastalar invariant ko'phadlar yoki elementar bo'luvchilarning ustma-ust tushishidan iborat bo'ladi.

Ushbu bobda ikkita matritsalar dastasi qat'iy ekvivalentligi kriteriysi o'rnatiladi va har bir dasta uchun unga qat'iy ekvivalent bo'lgan kvadratik shakl aniqlanadi.

Quyidagi masala geometrik ma'noga ega.

R^n fazoni R^m fazoga o'tkazuvchi $\overline{A}+\lambda\overline{B}$ chiziqli operatorlar dastasini qaraymiz. Fazolarning aniq bir bazasida bu chiziqli operatorlar dastasiga to'g'ri to'rtburchakli $A+\lambda B$ matritsalar dastasi mos keladi. Fazolardagi bazislari o'zgarishi bilan $A+\lambda B$ dasta qat'iy ekvivalent $P(A+\lambda B)Q$ dasta bilan almashadi. Bu yerda P va Q lar mos ravishda m va n o'lchovli xosmas kvadrat matritsalar. Demak, qat'iy ekvivalentlik kriteriysi $m\times n$ o'lchovli $A+\lambda B$ matritsalar dastasi sinfining xarakteristikasini berib, bu dastalar sinfi R^n fazoni R^m fazoga akslantiruvchi $\overline{A}+\lambda\overline{B}$ operatorlar dastasini (shu fazolarda tanlangan har xil bazislarda) ifodalaydi.

Dastaning kanonik shaklini hosil qilish uchun R^n va R^m fazolarda shunday bazisni topish kerakki, unda $\overline{A}+\lambda\overline{B}$ operatorlar dastasi mumkin qadar sodda matritsalar bilan ifodalansin.

Barcha $m\times n$ o'lchovli matritsalar dastalari ikkita asosiy tiplarga ajratiladi: regulyar va singulyar dastalar.

Ta'rif 3.2. A va B matritsalar bir xil $n-$tartibli kvadrat matritsalar bo'lib, $|A+\lambda B|$ aniqlovchi aynan nolga tengmas bo'lsa, $|A+\lambda B|$ -regulyar dasta deyiladi. Boshqa barcha hollardagi dastalar singulyar dastalar deyiladi.

Regulyar dastalarni qat'iy ekvivalent kriteriysi va ularning kanonik shakli 1867-yilda K. Vetshtrass tomonidan o'rganilgan. Xuddi shu masalalar singulyar dastalar uchun 1890-yilda L. Kroneker tomonidan o'rganilgan.

§2. Matritsalarning regulyar dastasi

$A+\lambda B$ va $A_1+\lambda B_1$ dastalar bir xil o'lchovli matritsalardan tashkil topgan bo'lib, $|B|\neq 0$, $|B_1|\neq 0$ bo'lgan xususiy holni qaraymiz. Bu holda dastalarning ekvivalentligi va qat'iy ekvivalentligi tushunchalari ustma-ust tushadi. Shuning uchun $\lambda-$ matritsalar ekvivalentligi umumiy kriteriysini dasta uchun qo'llab, quyidagi teoremani hosil qilamiz:

Teorema 3.1. Ikkita bir xil tartibli $A+\lambda B$ va $A_1+\lambda B_1$ dastalar $|B|\neq 0$, va $|B_1|\neq 0$ shartda qat'iy ekvivalent bo'ladi. Faqat va faqat ular K maydonda bir xil elementar bo'luvchilarga ega bo'lsa.

1§ da keltirilgan ta'rif 3.2 ga ko'ra $A+\lambda B$ regulyar dastalarda $|B|=0$, hattoki $|A|=|B|=0$ holatlar ham bo'lishi mumkin.

Bu keltirilgan umumlashgan ta'rifda teorema 3.1 o'z kuchini saqlaydimi yoki yo'q ekanligini bilish uchun quyidagi misolni qaraymiz;

$$A+\lambda B=\begin{Vmatrix}2&1&3\\3&2&5\\3&2&6\end{Vmatrix}+\lambda\begin{Vmatrix}1&1&2\\1&1&2\\1&1&3\end{Vmatrix},\ A_1+\lambda B_1=\begin{Vmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&1\end{Vmatrix}+\lambda\begin{Vmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{Vmatrix}$$

(3.3)

Bu yerda har ikkala dasta bitta $\lambda+1$ elementar bo'luvchiga ega. Shu bilan birga, bu dastalar qat'iy ekvivalent emas, chunki $r(B)=2$, $r(B_2)=1$, (3.2) tenglikdan esa $r(B)=r(B_2)$ kelib chiqadi. Shu bilan birga, (3.3) dastalar teorema 3.1 ga ko'ra regulyar bo'ladi, chunki

$$|A+\lambda B|=|A_1+\lambda B_1|=\lambda+1$$

Bu misoldan ko'rinadiki, regulyar dastalarning umumlashgan ta'rifida teorema 3.1 to'gri emas.

Teorema 3.1 ni saqlab qolish uchun dastalarning cheksiz elementar bo'luvchilari tushunchasini kiritishimizga to'gri keladi. $A+\lambda B$ dastani bir jinsli λ, μ parametrlar yordamida $A\mu+\lambda B$ ko'rinishda olamiz. U holda $\Delta(\lambda,\mu)=|\mu A+\lambda B|$ aniqlovchi λ, μ larning bir jinsli funksiyasi bo'ladi.

$A+\lambda B$ matritsaning barcha k – tartibli minorlari EKU-Bi $D_k(\lambda,\mu)$ $(k=1,2,\ldots,n)$ ni aniqlab, quyidagi invariant ko'phadlarni hosil qilamiz:

$$i_1(\lambda,\mu)=\frac{D_n(\lambda,\mu)}{D_{n-1}(\lambda,\mu)},\quad i_2(\lambda,\mu)=\frac{D_{n-1}(\lambda,\mu)}{D_{n-2}(\lambda,\mu)},\ldots,$$

shu bilan birga $D_k(\lambda,\mu)$ va $i_j(\lambda,\mu)$ lar λ va μ larga nisbatan bir jinsli ko'phadlardir. Invarsent ko'phadlarni K maydonda keltirilmaydigan bir jinsli ko'phadlarga yoyib, $\mu A+\lambda B$ dastadagi $l_\alpha(\lambda,\mu)$ $(\alpha=1,2\ldots,)$ elementar bo'luvchilarini hosil qilamiz. $l_\alpha(\lambda,\mu)$ da $\mu=1$ deb olib, $A+\lambda B$ dastani $l_\alpha(\lambda)$ elementar bo'luvchisiga kelamiz. Aksincha, $A+\lambda B$ dastaning har bir q – darajali $l_\alpha(\lambda)$ elementar bo'luvchisidan

$$l_\alpha(\lambda,\mu)=\mu^q l_\alpha\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$$

formula yordamida $l_\alpha(\lambda,\mu)$ elementar bo'luvchini hosil qilamiz.

Shunday qilib, $\mu A+\lambda B$ dastaning μ^q ko'rinishdagi boshqa barcha elementar bo'luvchilarini hosil qilishimiz mumkin.

μ^q ko'rinishdagi elementar bo'luvchilar faqat va faqat $|B|=0$ dagina mavjud bo'lib, ular $A+\lambda B$ dasta uchun "cheksiz" elementar bo'luvchilar degan nom bilan ataladi.

$A+\lambda B$ va $A_1+\lambda B_1$ dastalarning qat'iy ekvivalentligidan $\mu A+\lambda B$ va $\mu A_1+\lambda B_1$ dastalarning ham qat'iy ekvivalentligi kelib chiqadi, shuning uchun $A+\lambda B$ va $A_1+\lambda B_1$ qat'iy ekvivalent dastalarda nafaqat "chekli", balki "cheksiz" elementar bo'luvchilar ham ustma-ust tushadi.

Endi bizga barcha elementar bo'luvchilari ustma-ust tushgan $A+\lambda B$ va $A_1+\lambda B_1$ regulyar dastalar berilgan bo'lsin. Bir jinsli parametrlarni kiritib, $\mu A+\lambda B$ va $\mu A_1+\lambda B_1$ larni hosil qilamiz. Bu parametrlarni quyidagicha almashtiramiz:

$$\begin{aligned} \lambda &= \alpha_1\tilde{\lambda}+\alpha_2\tilde{\mu} \\ \mu &= \beta_1\tilde{\lambda}+\beta_2\tilde{\mu} \end{aligned} \qquad (\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\neq 0)$$

Yangi parametrlarda dastalar $\tilde{\mu}\tilde{A}+\tilde{\lambda}\tilde{B}$, $\tilde{\mu}\tilde{A}_1+\tilde{\lambda}\tilde{B}_1$ ko'rinishda yozib, bu yerda $\tilde{B}=\beta_1 A+\alpha_1 B$, $\tilde{B}_1=\beta_1 A_1+\alpha_1 B_1$.

$\mu A+\lambda B$ va $\mu A_1+\lambda B_1$ dastalarining regulyarligidan kelib chiqadiki, α^1 va β_1 larni $|\tilde{B}|\neq 0$, $|\tilde{B}_1|\neq 0$ shartlarni qanoatlantiradigan qilib tanlash mumkin. Shuning uchun 3.1 teoremaga asosan $\tilde{\mu}\tilde{A}+\tilde{\lambda}\tilde{B}$ va $\tilde{\mu}\tilde{A}_1+\tilde{\lambda}\tilde{B}_1$ dastalar, demak, $\mu A+\lambda B$ va $\mu A_1+\lambda B_1$ yoki $A+\lambda B$ va $A_1+\lambda B_1$ dastalar ham qat'iy ekvivalentdir. Shunday qilib, biz teorema 3.1 ning quyidagi umumlashganiga keldik.

Teorema 3.2. $A+\lambda B$ va $A_1+\lambda B_1$ dastalar qat'iy ekvivalent bo'lishi uchun bir xil va faqat bir xil ("chekli" va "cheksiz") elementar bo'luvchilarga ega bo'lishi zarur va yetarlidir.

Yuqorida ko'rilgan misolda (3.3) dastalar bir xil "chekli" elementar bo'luvchilarga ega, ammo "cheksiz" elementar bo'luvchilari har xil, ya'ni, birinchi dasta bitta μ^2 elementar bo'luvchiga, ikkinchisi esa ikkita μ, μ elementar bo'luvchilarga ega. Shuning uchun bu dastalar qat'iy ekvivalent emas.

Endi $A+\lambda B$ ixtiyoriy regulyar dasta bo'lsin. U holda shunday s soni mavjudki, unda $|A+sB|\neq 0$ bo'ladi. Berilgan dastani $A_1+(\lambda-c)B$, bu yerda $A=A+sB$, $|A_1|\neq 0$, ko'rinishda tasvirlaymiz. Bu dastani chapdan A_1^{-1} ga ko'paytirib, quyidagi ko'rinishdagi dastalarni hosil qilamiz.

$$E+(\lambda-\bar{n})A_1^{-1}B = E+(\lambda-\bar{n})\{J_0, J_1\} = \{E-\bar{n}J_0+\lambda J_0,\ E-\bar{n}J_1+\lambda J_1\} \tag{3.4}$$

bu yerda $\{J_0, J_1\} - A_1^{-1}B$ matritsaning kvazidiagonal normal shakli, J_0 – Jordon nilpotent matritsasi va $|J_1| \neq 0$.

(3.4) ning o'ng tomonidagi birinchi diagonal blokni $(E-cJ_0)^{-1}$ ga ko'paytiramiz. Bu yerda λ oldidagi koeffisiyent nilpotent (qandaydir darajasi nolga teng) matritsa. Shuning uchun o'xshash almashtirish bilan bu dastani quyidagi ko'rinishga keltirish mumkin.

$$E+\lambda J_* = \{N^{(i_1)}, N^{(i_2)}, \ldots, N^{(i_s)}\}, \qquad \left(N^{(i)} = E^{(i)} + \lambda H^{(i)}\right) \tag{3.5}$$

Teorema 3.3. Ixtiyoriy $A + \lambda B$ dasta quyidagicha kvazidiagonal kanonik ko'rinishga keltirilishi mumkin.

$$\{N^{(i_1)}, N^{(i_2)}, \ldots, N^{(i_s)},\ J+\lambda E\}, \qquad \left(N^{(i)} = E^{(i)} + \lambda H^{(i)}\right) \tag{3.6}$$

bu yerda birinchi s ta diagonal blok $A + \lambda B$ dastaning $\mu^{i_1}, \lambda^{i_2}, \ldots, \mu^{i_s}$ cheksiz elementar bo'luvchilarga mos kelib, oxirgi $J+\lambda E$ diagonal blok berilgan dastaning chekli elementar bo'luvchilari bilan bir qiymatli aniqlanadi.

§3. Singulyar dastalar. Keltirish haqida teorema

m x n o'lchovli $A + \lambda B$ – matritsalarning singulyar dastasini qaraylik. r bilan dastaning rangini, ya'ni, aynan nolga teng bo'lmagan minorlarning eng yuqori tartibini belgilaymiz. Dastaning singulyarligidan kelib chiqadiki, har doim $r < n$ yoki $r < m$ bo'ladi. $r < n$ bo'lsin, u holda $A+\lambda B - \lambda$ – matritsaning ustunlari chiziqli bog'langan bo'ladi, ya'ni:

$$(A+\lambda B)X = 0, \tag{3.7}$$

bu yerda x – chizilayotgan ustun, tenglama nolmas yechimga ega. Bu tenglamaning har bir nolmas yechimi $A+\lambda B-\lambda$ – matritsaning ustunlari orasidagi qandaydir chiziqli bog'lanishni ifodalaydi. Biz (3.7) tenglamani faqat λ ning ko'phadlari bo'ladigan $x(\lambda)$ yechimlarni qarash bilan chegaralanamiz. Bunday yechimlar ichidan eng kichik ε darajalisini olamiz.

$$x(\lambda)=x_0-\lambda x_1+\lambda^2 x_2-\ .\ .\ .+(-1)^{\varepsilon}\lambda^{\varepsilon}x_{\varepsilon} \quad (x_{\varepsilon}\neq 0) \tag{3.8}$$

Bu yechimni (3.7) tenglamaga qo'yib, λ darajaning oldidagi koeffitsientlarni nolga tenglab, quyidagilarni hosil qilamiz:

$$Ax_0,\ Bx_0-Ax_1=0,\ Bx_1-Ax_2=0,\ .\ .\ .\ ,Bx_{\varepsilon-1}-Ax_{\varepsilon}=0,\ Bx_{\varepsilon}=0, \tag{3.9}$$

Bu tengliklar sistemasini $x_0,-x_1,x_2,\ldots,(-1)^{\varepsilon}x_{\varepsilon}$ ustun elementlariga nisbatan chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasi sifatida qarab, shunday xulosaga kelamizki, bu sistema koyffitsiyentlaridan tuzilgan quyidagi matritsa.

$$M_{\varepsilon}=M_{\varepsilon}[A+\lambda B]=\underbrace{\begin{Vmatrix} A\ O\ .\ .\ .\ O \\ B\ A\ .\ .\ .\ O \\ O\ B\ .\ .\ .\ O \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ O\ O\ .\ .\ .\ A \\ O\ O\ .\ .\ .\ B \end{Vmatrix}}_{\varepsilon+1} \tag{3.10}$$

$\rho_{\varepsilon}<(\varepsilon+1)n$ rangga ega. Shu bilan birga, ε sonining minimallik xossasiga ko'ra quyidagi matritsalarning

$$M_0=\begin{Vmatrix} A \\ B \end{Vmatrix},\ M_1=\begin{Vmatrix} A & O \\ B & A \\ O & B \end{Vmatrix},\ .\ .\ .\ ,M_{\varepsilon-1}=\underbrace{\begin{Vmatrix} A\ O\ .\ .\ .\ O \\ B\ A\ .\ .\ .\ O \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ O\ O\ .\ .\ .\ A \\ O\ O\ .\ .\ .\ B \end{Vmatrix}}_{\varepsilon} \tag{3.10`}$$

$\rho_1,\ .\ .\ .\ ,\rho_{\varepsilon-1}$ ranglar uchun quyidagi tengliklar o'rinli.

$$\rho_0 = n,\ \rho_1 = 2n, \ldots, \rho_{\varepsilon-1} = \varepsilon n.$$

Shunday qilib, ε son $\rho_k \leq (k+1)n$ munosabatni qanoatlantiruvchi K indeksning eng kichik qiymati.

Teorema 3.4. Agar (3.7) tenglama $\varepsilon > 0$ minimal darajali yechimga ega bo'lsa, u holda berilgan $A + \lambda B$ dasta quyidagi dastaga qat'iy ekvivalent boladi.

[illegible] (3.11)

u yerda

$$L_\varepsilon = \underbrace{\left\| \begin{matrix} \lambda\, 1\, 0 & . & . & .\, 0\, 0 \\ 0\, \lambda\, 1 & . & . & .\, 0\, 0 \\ . & . & . & . \, . \, . \\ 0\, 0\, 0 & . & . & .\, \lambda\, 1 \end{matrix} \right\|}_{\varepsilon+1} \Big\} \varepsilon \tag{3.12}$$

$A + \lambda B$ matritsalarning shunday dastasiki, unga mos (3.7) ga o'xshash tenglama ε dan kichik darajali yechimga ega emas.

Isboti. Teoremaning isbotini quyidagi uch bosqichda amalga oshiramiz.

1. Berilgan $A + \lambda B$ dastani quyidagi

$$\left\| \begin{matrix} L_\varepsilon & D + \lambda F \\ 0 & \hat{A} + \lambda \hat{B} \end{matrix} \right\| \tag{3.13}$$

dastaga qat'iy ekvivalentligini ko'rsatamiz, bu yerda D, F, $\hat{A}$, $\hat{B}$,– mos o'lchovli to'g'ri to'rtburchakli o'zgarmas matritsalar.

2. $(\hat{A} + \lambda \hat{B})x = 0$ tenglama ε dan kichik darajali yechimga ega emasligini ko'rsatamiz.

3. (3.13) dastani (3.11) kvazidiagonal ko'rinishga keltirish mumkin ekanligini ko'rsatamiz.

1. Isbotning birinchi qismini geometrik shakldа amalga oshiramiz. Buning uchun $A + \lambda B$-matritsalar dastasi o'rniga R^n fazoni R^m fazoda akslantiruvchi $\overline{A} + \lambda \overline{B}$ operatorlar dastasini qaraymiz va bu fazolarning tanlangan bazislarida $\overline{A} + \lambda \overline{B}$ operator (3.13) shaklga egaligini ko'rsatamiz.

(3.7) tenglama o'rniga quyidagi vektor tenglamani

$$(A+\lambda B)\overline{x}=0 \qquad (3.14)$$

va vektor yechimni

$$\overline{x_0}(\lambda)=\overline{x_1}-\lambda\overline{x_1}+\lambda^2\overline{x_2}-\ldots+(-1)^{\varepsilon}\lambda^{\varepsilon}\overline{x_{\varepsilon}} \qquad (3.15)$$

olamiz. Bu holda (3.9) tengliklar quyidagi vektor tengliklar bilan almashadi.

$$\overline{Ax_0}=0,\ \overline{Ax_1}=\overline{Bx_0},\ \overline{Ax_2}=\overline{Bx_1},\ \ldots,\overline{Ax_{\varepsilon}}=\overline{Bx_{\varepsilon-1}},\ \overline{Bx_{\varepsilon}}=0 \qquad (3.16)$$

Quyidagi vektorlarni chiziqli bog'liqmasligini isbotlaymiz:

$$\overline{Ax_1},\ \overline{Ax_2},\ \ldots,\overline{Ax_{\varepsilon}} \qquad (3.17)$$

Bundan,

$$\overline{x_0},\ \overline{x_1},\ \ldots,\overline{x_{\varepsilon}} \qquad (3.18)$$

vektorlarni chiziqli bog'liqmasligi kelib chiqadi.

Haqiqatan,

$$\overline{Ax_0}=0$$

$a_0\overline{x_0}+a_1\overline{x_1}+\ldots+a_{\varepsilon}\overline{x_{\varepsilon}}=0$ tenglikdan $a_0\overline{Ax_0}+a_1\overline{Ax_1}+\ldots+a_{\varepsilon}\overline{Ax_{\varepsilon}}=0$ tenglikni hosil qilamiz. (3.17) vektorlarni chiziqlik bog'liq emasligidan $a_1=a_1=\ldots=a_{\varepsilon}=0$ kelib chiqadi. Ammo $\overline{x_0}\neq 0$, chunki aks holda $\frac{1}{\lambda}\overline{x}(\lambda)$ (3.14) tenglamaning $\varepsilon-1$ darajali yechimi bo'lib qoladi, bu bo'lishi mumkin emas (ε ning minimal darajali ekanligiga zid). Shuning uchun $a_0=0$.

Agar mos ravishda R^m va R^n da yangi bazislar uchun, (13.17) va (3.18) vektorlarni birinchi bazis vektorlar deb qabul qilsak, u holda (3.16) ga ko'ra yangi bazisda $\overline{A}$ va $\overline{B}$ operatorlarga quyidagi matritsalar mos keladi.

$$\widetilde{A}=\left\|\begin{array}{cccccccc} \multicolumn{5}{c}{\overbrace{\hphantom{0\;1\;0\;\ldots\;0}}^{s+1}} & & & \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & * & \ldots & * \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & * & \ldots & * \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & * & \ldots & * \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & * & \ldots & * \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & * & \ldots & * \end{array}\right\| \qquad \widetilde{B}=\left\|\begin{array}{cccccccc} \multicolumn{5}{c}{\overbrace{\hphantom{1\;0\;\ldots\;0\;0}}^{s+1}} & & & \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & * & \ldots & * \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & * & \ldots & * \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & * & \ldots & * \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & * & \ldots & * \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & * & \ldots & * \end{array}\right\|$$

u holda $\widetilde{A}+\lambda\widetilde{B}$ $\lambda-$matritsa (3.13) ko‘rinishga ega bo‘ladi.

Barcha avvalgi muxokamalar asoslangan bo‘ladi, agarda biz (3.17) vektorlarni chiziqli bog‘liq emasligini ko‘rsata olsak. Teskarisini faraz qilamiz, ya’ni, $\overline{Ax_h}$ $(h\geq 1)-(3.17)$ qatordagi o‘zidan avvalgi vektorlar orqali chiziqli ifodalangan birinchi vektor bo‘lsin,

$$\overline{Ax_h}=\alpha_1\overline{Ax_{h-1}}+\alpha_2\overline{Ax_{h-2}}+\ldots+\alpha_{h-1}\overline{Ax_1}$$

(3.16) ga ko‘ra bu tenglikni quyidagicha yozishimiz mumkin:

$$\overline{Bx_{h-1}}=\alpha_1\overline{Bx_{h-2}}+\alpha_2\overline{Bx_{h-3}}+\ldots+\lambda_{h-1}\overline{Bx_0},$$

ya’ni

$$\overline{Bx^*_{h-1}}=0$$

bu yerda

$$\overline{x}^*_{h-1}=\overline{x}_{h-1}-\alpha_1\overline{x}_{h-2}-\alpha_2\overline{x}_{h-3}-\ldots-\alpha_{h-1}\overline{x}_0,$$

yana (3.16) ga ko‘ra

$$\overline{Ax^*_{h-1}}=B\left(\overline{x}_{h-2}-\alpha_1\overline{x}_{h-2}-\ldots-\alpha_{h-2}\overline{x}_0\right)=\overline{Bx^*_{h-2}},$$

bu yerda

$$\overline{x}^*_{h-2}=\overline{x}_{h-2}-\alpha_1\overline{x}_{h-2}-\ldots-\alpha_{h-2}\overline{x}_0,$$

Bu jarayonni davom ettirib, quyidagi vektorlarni hosil qilamiz:

$$\overline{x}^*_{h-3}=\overline{x}_{h-3}-\alpha_1\overline{x}_{h-3}-\ldots-\alpha_{h-3}\overline{x}_0,\ldots,\overline{x}^*_1=\overline{x}_1-\alpha_1\overline{x}_0,\quad \overline{x}^*_0=\overline{x}_0$$

Natijada quyidagi tengliklar hosil bo‘ladi:

$$\overline{Bx}^*_{h-1}=0,\ \overline{Ax}^*_{h-1}=\overline{Bx}^*_{h-2},\ .\ .\ .\ ,\overline{Ax}^*_1,=\overline{Bx}^*_1,\ \overline{Ax}^*_0=0 \quad (3.19)$$

(3.19) dan kelib chiqadiki,

$$\overline{x}^*(\lambda)=\overline{x}^*_0-\lambda\overline{x}^*_1+.\ .+(-1)^{h-1}\overline{x}^*_{h-1} \qquad \left(\overline{x}^*_0=\overline{x}_0\neq 0\right)$$

(3.14) tenglamani $h-1<\varepsilon$ darajadan ortmaydigan nolmas yechimi bo‘lib, qarama-qarshilikka kelamiz.

Shunday qilib, (3.17) vektorlar chiziqli bog‘liq emas.

2. Endi $(\mathcal{A}+\lambda\mathcal{B})\mathcal{C}=0$ tenglamani ε dan kichik darajali yechimga ega emasligini isbotlaymiz. Avval e’tiborimizni $\overline{L_\varepsilon}\,\overline{y}=0$ tenglama (3.7) tenglama kabi eng kichik darajali nolmas yechimga ega ekanligiga qaratamiz. Bunga $\overline{L_\varepsilon}\,\overline{y}=0$ tenglamani

$$\lambda y_1+y_2=0,\quad \lambda y_2+y_3=0,\ .\ .\ .\ ,\lambda y_\varepsilon+y_{\varepsilon+1}=0,$$

$$\overline{y}=(y_1,y_2,\ .\ .\ .\ ,y_{\varepsilon+1})^T,\ y_k=(-1)^{k-1}y_1\lambda^{k-1},\quad k=1,2,.\ .\ .\ ,\varepsilon+1$$

oddiy tenglamalar sistemasi bilan almashtirib ishonch hosil qilishimiz mumkin.

Ikkinchi tomondan, agar dasta (3.13) „uchburchak” ko‘rinishga ega bo‘lsa, u holda bu dastaga mos keluvchi $M_k(k=1,2,.\ .\ .\ \varepsilon)$ matritsalar ham satr va ustunlarini kerakli almashtirishlardan so‘ng quyidagi uchburchak ko‘rinishga keltirilishi mumkin:

$$\begin{Vmatrix} M_k[L_\varepsilon] & M_k[D+\lambda F] \\ O & M_k[\mathcal{A}+\lambda\mathcal{B}] \end{Vmatrix} \qquad (3.20)$$

$k=\varepsilon-1$ da bu matritsaning barcha ustunlari, jumladan $M_{\varepsilon-1}[L_\varepsilon]$ matritsaning ustunlari chiziqli bog`liq emas. Ammo $M_{\varepsilon-1}[L_\varepsilon]-\varepsilon(\varepsilon+1)$ tartibli kvadrat matritsa. Shuning uchun $M_{\varepsilon-1}[\mathcal{A}+\lambda\mathcal{B}]$ matritsaning ham barcha ustunlari chiziqli bog`liq emas bo‘lib, $(\mathcal{A}+\lambda\mathcal{B})\mathcal{C}=0$ tenglama ε dan kichik darajali yechimga ega bo‘lmaydi.

3. (3.13) dastani unga qat'iy ekvivalent bo'lgan quyidagi dasta bilan almashtiramiz:

$$\left\| \begin{matrix} E_1 & Y \\ O & E_2 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} L_\varepsilon & D+\lambda F \\ O & \dot{A}+\lambda\dot{B} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} E_3 & -X \\ O & E_4 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} L_\varepsilon & D+\lambda F+Y\left(\dot{A}+\lambda\dot{B}\right)-L_\varepsilon X \\ O & \dot{A}+\lambda\dot{B} \end{matrix} \right\|$$

(3.21)

bu yerda E_1, E_2, E_3, E_4 mos ravishda $\varepsilon, m-\varepsilon, \varepsilon+1, n-\varepsilon-1$ tartibli birlik kvadrat matritsalar, X, Y – mos o'lchovli, ixtiyori to'g'ri to'rtburchakli matritsalar. Teorema to'la isbotlangan bo'ladi, agarda X va Y matritsalarni

$$L_\varepsilon X = D + \lambda F + Y\left(\dot{A} + \lambda\dot{B}\right) \tag{3.22}$$

matritsali tenglikni qanoatlantiradigan qilib tanlash mumkin ekanligini ko'rsata olsak.

D, F, X matritsalar elementlari uchun, shunday Y matritsa satrlar va $\dot{A}, \dot{B}$ matritsalar ustunlari uchun quyidagicha belgilashlar kiritamiz:

$$D = \|d_{ik}\|, \quad F = \|f_{ik}\|, \quad X = \|x_{jk}\|, \quad i = \overline{1,\varepsilon}, \quad k = \overline{1, n-\varepsilon-1}, \quad j = \overline{1, \varepsilon+1},$$

U holda (3.22) matritsali tenglamani quyidagi skalyar tenglamalar sistemasi bilan almashtirish mumkin

$$\begin{cases} x_{2k} - \lambda x_{1k} = d_{1k} + \lambda f_{1k} + y_1 a_k + \lambda y_1 v_k \\ x_{3k} - \lambda x_{2k} = d_{2k} + \lambda f_{2k} + y_2 a_k + \lambda y_2 v_k \\ x_{4k} - \lambda x_{3k} = d_{3k} + \lambda f_{3k} + y_3 a_k + \lambda y_3 v_k \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_{\varepsilon+1,k} + \lambda x_{\varepsilon k} = d_{\varepsilon k} + \lambda f_{\varepsilon k} + y_\varepsilon a_k + \lambda y_\varepsilon v_k \end{cases} \tag{3.23}$$

$$k = 1, 2, \ldots n - \varepsilon - 1$$

Bu tengliklarning chap tomonida λ ga nisbatan chiziqli ikkihadlar turibdi. Bu birinchi $\varepsilon - 1$ ta ikkihadning ozod hadi keyingi ikki haddagi λ oldidagi koeffitsiyentga teng. U holda tengliklarning o'ng tomoni ham shu shartni qanoatlantirishi kerak. Shuning uchun quyidagi tengliklar o'rinli bo'lishi kerak:

$$
\begin{aligned}
&y_1 a_k - y_2 v_k = f_{2k} - d_{1k}, \\
&y_2 a_k - y_3 v_k = f_{3k} - d_{2k}, \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&y_{\varepsilon-1} a_k - y_\varepsilon v_k = f_{\varepsilon k} - d_{\varepsilon-1,k} \\
&k = 1, 2, \ldots, n - \varepsilon - 1
\end{aligned}
\qquad (3.24)
$$

Agar (3.24) tengliklar o'rinli bo'lsa , u holda (3.23) dan X matritsaning elementlarini aniqlash mumkin bo'ladi.

Endi (3.24) Y matritsaning elementlariga nisbatan tenglamalar sistemasi, ixtiyoriy d_{ik} va f_{ik} $(i = 1, 2, \ldots, \varepsilon \quad k = 1, 2, \ldots, n - \varepsilon - 1)$ da har doim yechimga ega ekanligini ko'rsatish qoldi. Haqiqatan, $y_1, -y_2, y_3 - y_4, \ldots$ noma'lum elementlar oldidagi koeffitsentlardan tuzilgan matritsa transponirlangandan so'ng, quyidagi ko'rinishda yozilishi mumkin.

$$
\overbrace{\left\|\begin{matrix}
\hat{A} & O & \ldots & O \\
\hat{B} & \hat{A} & \ldots & O \\
O & \hat{B} & \ldots & O \\
\ldots & & & \\
O & O & \ldots & \hat{A} \\
O & O & \ldots & \hat{B}
\end{matrix}\right\|}^{\varepsilon-1}
$$

Ammo bu matritsa $\hat{A} + \lambda\hat{B}$ – to'gri to'rtburchak matritsalar dastasi uchun $M_{\varepsilon-2}$ matritsadan iborat bo'lib, uning rangi $(\varepsilon - 1)(n - \varepsilon - 1)$ ga teng, chunki isbotlanganiga ko'ra $(\hat{A} + \lambda\hat{B})x = 0$ tenglama ε dan kichik darajali yechimga ega emas. Shunday qilib, (3.24) tenglamalar sistemasining rangi tenglamalar soniga teng, bunday sistema ixtiyoriy ozod hadlarda birgalashgan bo'ladi.

Teorema to'la isbotlandi.

§4. Matritsalar singulyar dastasining kanonik ko‘rinishi

Matritsaning m x n o‘lchovli singulyar dastasi $A+\lambda B$ berilgan bo‘lsin. Avval bu dastani ustunlari va satrlari orasida o‘zgarmas koeffitsiyentli chiziqli bog‘langanlari yo‘q deb faraz qilamiz. Dastaning rangi $r<n$ bo‘lsin, ya’ni, $A+\lambda B$ dastaning ustunlari chiziqli bog‘langan bo‘lsin. Bu holda

$$(A+\lambda B)x=0$$

tenglama ε_1 minimal darajali nolmas yechimga ega bo‘ladi. U holda teorema 3.4 ga asosan berilgan dastani quyidagi ko‘rinishga keltirish mumkin:

$$\begin{pmatrix} L_{\varepsilon_1} & O \\ O & A_1+\lambda B_1 \end{pmatrix},$$

bu yerda $(A_1+\lambda B_1)x^{(1)}=0$ tenglama ε_1 da kichik darajali yechimga ega emas.

Agar tenglama ε_2 minimal darajali nolmas yechimga ega bo‘lsa, u holda $A+\lambda B$ dastaga teorema 3.4 ni qo‘llab berilgan dastani

$$\begin{pmatrix} L_{\varepsilon_1} & O & O \\ O & L_{\varepsilon_2} & O \\ O & O & A_2+\lambda B_2 \end{pmatrix}$$

ko‘rinishga keltiramiz.

Bu jarayonni davom ettirib, berilgan dastani quyidagicha kvazidiagonal ko‘rinishga keltiramiz:

$$\left\| \begin{matrix} L_{\varepsilon_1} & O & \cdot & \cdot & O \\ O & L_{\varepsilon_2} & \cdot & \cdot & O \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ O & \cdot & \cdot & L_{\varepsilon_p} & O \\ o & \cdot & \cdot & O & A_p+\lambda B_p \end{matrix} \right\| \qquad (3.25)$$

bu yerda $0<\varepsilon_1\le\varepsilon_2\le\ .\ .\ .\le\varepsilon_p$ $\quad(A_p+\lambda B_p)x^{(p)}=0$ tenglama esa nolmas yechimga ega emas, ya'ni, $A_p + \lambda B_p$ matritsaning ustunlari chiziqli bog'lanmagan.

Agar $A_p + \lambda B_p$ dastaning satrlari chiziqli bog`langan bo'lsa, u holda transponirlangan $A_p^T + \lambda B_p^T$ dasta (3.25) ko'rinishga keltirilishi mumkin bo'lib, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p$ sonlar o'rniga $0 < r_1 \le r_2 \le \ldots \le_p$ sonlar olinadi. Ammo bu holda berilgan $A + \lambda B$ dasta quyidagicha kvazidiagonal ko'rinishga almashtiriladi.

$$\begin{Vmatrix} L_{\varepsilon_1} & & & & & & & & & \\ & L_{\varepsilon_2} & & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & & \\ & & & L_{\varepsilon_p} & & & & & & \\ & & & & L_{\eta_1} & & & & & \\ & & & & & L_{\eta_2} & & & & \\ & & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & L_{\eta_q} & & \\ & & & & & & & & A_0 + \lambda B_0 \end{Vmatrix} \tag{3.26}$$

bu yerda $A_0 + \lambda B_0$ dastaning satrlari ham, ustunlari ham chiziqli bog'lanmagan, ya'ni, $A_0 + \lambda B_0$ regulyar dasta bo'ladi.

Endi umumiy holni qaraymiz, ya'ni, berilgan dastaning satrlari va ustunlari o'zgarmas koeffitsiyentli chiziqli bog`lanish bilan bog`langan bo'lishi mumkin.

$$(A + \lambda B)\, x = 0 \text{ va } (A^T + \lambda B^T)\, y = 0$$

Tenglamalar o'zgarmas bog'lanmagan yechimlari maksimal sonini mos ravishda g va h bilan belgilaymiz. Bu tenglamalarning birinchisi o'rniga teorema 3.4 ning isbotidagidek $(\overline{A} + \lambda \overline{B})\overline{x} = 0$ vektor tenglamani qaraymiz. Bu yerda $\overline{A}$ *va* $\overline{B}$ valar R^n fazoni

R^m fazoga akslantiruvchi operatorlar. Bu tenglamaning chiziqli bog`lanmagan o‘zgarmas yechimlarini $e_1, e_2, \ldots, e_g$ orqali belgilab, ularni R^n fazoning birinchi bazis vektorlari deb qabul qilamiz. U holda mos $\tilde{A} + \lambda\tilde{B}$ matritsadagi birinchi g ta ustunda nollar turadi.

$$\tilde{A} + \lambda\tilde{B} = \left(\overbrace{0}^{g\,ta}, \tilde{A} + \lambda\tilde{B} \right). \tag{3.27}$$

Xuddi shunday $\tilde{A}_1 + \lambda\tilde{B}_1$ dasta ham birinchi h ta satrni nolli qilish mumkin. U holda berilgan dasta quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$\left\| \begin{array}{ll} h\,ta \{ \overbrace{0}^{g\,a} & 0 \\ 0 & A^0 + \lambda B^0 \end{array} \right\|, \tag{3.28}$$

bu yerda $A^0 + \lambda B^0$ dastaning satr va ustunlari o‘zgarmas koeffitsiyentli chiziqli bog`lanish bilan bog`lanmagan. $A^0 + \lambda B^0$ dastaga (3.26) ko‘rinishdagi tasvirlashni qo‘llash mumkin. Shunday qilib, eng umumiy holda $A + \lambda B$ dasta har doim quyidagi kanonik kvazidiagonal ko‘rinishga keltirilishi mumkin.

$$\left\{ h\,ta \left\{ \overbrace{0}^{g\,ta}, L_{\varepsilon_{g+1}}, \ldots, L_{\varepsilon_p}, L^T_{\eta_{h+1}}, \ldots, L^T_{\eta_g}, A_0 + \lambda B_0 \right\} \right\} \tag{3.29}$$

(3.29) dagi $A_0 + \lambda B_0$ regulyar dastani uning (3.6) kanonik ko‘rinishi bilan almashtirib, quyidagi kvazidiagonal matritsani hosil qilamiz:

$$\left\{ h\,a \left\{ \overbrace{O}^{g\,a}, L_{\varepsilon_{g+1}}, \ldots, L_{\varepsilon_p}, L^T_{\eta_{h+1}}, \ldots, L^T_{\eta_g}, N^{(u_1)}, \ldots, N^{(u_s)}, J + \lambda E \right\} \right\} \tag{3.30}$$

bu yerda J matritsa Jordon yoki oddiy normal shaklda,

$$N^{(u)} = E^{(u)} + \lambda H^{(u)}$$

(3.30) matritsa $A + \lambda B$ dastaning eng umumiy holdagi kanonik shaklini ifodalaydi.

§5. Dastaning minimal indeksi

Dastalarning qat'iy ekvivalentlik kriteriysi.

To'g'ri to'rtburchakli matritsalarning $A + \lambda B$ singulyar dastasi berilgan bo'lsin. U holda

$$(A + \lambda B)x = 0 \tag{3.31}$$

tenglamaning yechimi bo'lgan k ta ko'phadli ustun $x_1(\lambda), x_2(\lambda), \dots , x_k(\lambda)$ chiziqli bog'liq bo'ladi, agarda bu ustunlardan tashkil topgan $X = [x_1(\lambda), x_2(\lambda), \dots , x_k(\lambda)]$ ko'phadli matritsaning rangi k dan kichik bo'lsa. Bu holda k ta bir vaqtda nolga teng bo'lmagan $p_1(\lambda), p_2(\lambda), \dots , p_k(\lambda)$ ko'phadlar mavjud bo'lib, ular uchun

$$p_1(\lambda)x_1(\lambda) + p_2(\lambda)x_2(\lambda) + \dots + p_k(\lambda)x_k(\lambda) \equiv 0$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Agar X matritsaning rangi k ga teng bo'lsa, u holda bunday bog'lanishlar mavjud emas va $x_1(\lambda), x_2(\lambda), \dots , x_k(\lambda)$ yechim chiziqli bog'lanmagan bo'ladi.

(3.31) tenglamaning barcha yechimlari ichidan eng kichik ε_1 darajali $X_1(\lambda)$ yechimni olamiz. Bu tenglamaning boshqa barcha yechimlari $X_1(\lambda)$ bilan chiziqli bog'lanmaganlik shartidan foydalanib, $\varepsilon_2(\varepsilon_1 \le \varepsilon_2)$ darajali $x_2(\lambda)$ yechimni tanlaymiz. Bu jarayonni davom ettirib, boshqa yechimlarni topamiz. Chiziqli bog'lanmagan yechimlar soni n dan katta emasligidan bu jarayon chekli bo'ladi. Biz (3.31) tenglamaning fundamental yechimlar qatorini hosil qilamiz:

$$X_1(\lambda), X_2(\lambda), \dots, X_p(\lambda) \tag{3.32}$$

bularning darajalari mos ravishda

$$\varepsilon_1 \le \varepsilon_2 \le \varepsilon_3 \le \dots \varepsilon_p \tag{3.33}$$

bo'ladi.

Umumiy holda fundamental yechimlar qatori $A + \lambda B$ dastaning berilishi bilan bir qiymatli aniqlanmaydi. Ammo ikkita har xil fundamental yechimlar qatori har doim bitta $\varepsilon_1 \le \varepsilon_2 \le \varepsilon_3 \le \dots \varepsilon_p$ darajalar qatoriga ega bo'ladi. Haqiqatan, (3.32) bilan birga $\tilde{\varepsilon}_1, \tilde{\varepsilon}_2, \dots, \tilde{\varepsilon}_p$

darajali $\widetilde{x}_1(\lambda), \widetilde{x}_2(\lambda), \ldots$ fundamental yechimlar qatorini qaraymiz. (3.33) darajalar ichida

$$\varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_{n_1} < \varepsilon_{n_1+1} = \ldots = \varepsilon_{n_2} < \ldots$$

va shunga o'xshash $\widetilde{\varepsilon}_1, \widetilde{\varepsilon}_2, \ldots$ qatorda

$$\widetilde{\varepsilon}_1 = \ldots = \widetilde{\varepsilon}_{\widetilde{n}_1} < \widetilde{\varepsilon}_{\widetilde{n}_1+1} = \ldots = \widetilde{\varepsilon}_{\widetilde{n}_2} < \ldots$$

bo'lsin.

Ko'rinib turibdiki, $\varepsilon_1 = \widetilde{\varepsilon}_1$. Ixtiyoriy $\widetilde{x}_i(\lambda)$ $(i = 1,2,\ldots,\widetilde{n}_1)$ ustun $x_1(\lambda), x_2(\lambda), \ldots, x_{n_1}(\lambda)$ ustunlar chiziqli kombinatsiyasidan iborat, chunki (3.32) qatordagi $x_{n_1+1}(\lambda)$ yechimni kichikroq darajali $\widetilde{x}_1(\lambda)$ yechim bilan almashtirilishi mumkin bo'ladi. Aksincha, har bir $x_i(\lambda)$ $(i = 1,2,\ldots,n_1)$ ustun $\widetilde{x}_1(\lambda), \widetilde{x}_2(\lambda), \ldots, \widetilde{x}_{\widetilde{n}_1}(\lambda)$ ustunlar chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'ladi. Shuning uchun $n_1 = \widetilde{n}_1$ va $\varepsilon_{n_1+1} = \widetilde{\varepsilon}_{\widetilde{n}_1+1}$. Xuddi shunday mulohaza yuritib, $n_2 = \widetilde{n}_2$ va $\varepsilon_{n_2+1} = \widetilde{\varepsilon}_{\widetilde{n}_2+1}$ ni hosil qilamiz va hokazo.

(3.32) fundamental qatordagi har bir $x_k(\lambda)$ yechim $A + \lambda B$ matritsa ustunlari orasida ε_k darajali chiziqli bog`lanishni beradi $(k = 1,2,\ldots,p)$. Shuning uchun $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p$ sonlar $A + \lambda B$ dasta ustunlari uchun minimal indekslar deyiladi. Xuddi shunday $A + \lambda B$ dasta satrlari uchun $|\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_q|$ minimal indekslar kiritiladi. Bunda $(A + \lambda B)x = 0$ tenglama $(A^T + \lambda B^T)y = 0$ tenglama bilan almashtirilib, $|\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_q|$ sonlar transponirlangan $A^T + \lambda B^T$ dasta ustunlari uchun minimal indeks sifatida aniqlanadi.

Qat'iy ekvivalent dastalar bitta va faqat bitta minimal indeksga ega. Haqiqatan, 2 ta $A + \lambda B$ va $P(\mathrm{A} + \lambda \mathrm{B})Q$ (P va Q – xosmas kvadrat matritsalar) o'xshash dastalar berilgan bo'lsin. Birinchi dasta uchun (3.31) tenglamani o'ngdan P matritsaga ko'paytirib, quyidagicha yozamiz:

$$P\,(A + \lambda B)QQ^{-1}x = 0$$

Bundan ko'rinadiki, (3.31) tenglamaning barcha yechimlari chapdan Q^{-1}ga ko'paytirilgandan so'ng

$$P\left(A+\lambda B\right)Qx=0$$

tenglama yechimlarining to'la sistemasini beradi.

Shuning uchun $A+\lambda B$ va $p(\mathrm{A}+\lambda\mathrm{B})Q$ dastalar ustunlar uchun bir xil minimal indekslarga ega.

Satrlar uchun minimal indekslarni ustma-ust tushishi transponirlangan dastalarga o'tish bilan ko'rsatiladi.

Kanonik kvazidiagonal matritsalar

$$\left\{h_{a}\left\{\overbrace{O}^{g}, L_{\varepsilon_{g+1}},\ldots,L_{\varepsilon_p},L^T_{\eta_{h+1}},\ldots,L^T_{\eta_q},A_0+\lambda B_0\right\}\right. \tag{3.34}$$

uchun minimal indekslarni hisoblaymiz. $A_0+\lambda B_0$ – (3.6) normal shaklga ega bo'lgan regulyar dasta.

Kvazidiagonal matritsa ustunlari (satrlari) uchun minimal indekslarning to'la sistemasi, mos alohida diagonal bloklar minimal indekslar sistemalarini birlashtirish bilan hosil qilinadi. L_ε matritsa ustuni uchun faqat bitta ε indeksga ega, satri uchun esa bitta η indeksga ega bo'lib, bu matritsa ustunlari chiziqli bog`liq emas. $A_0+\lambda B_0$ – regulyar dasta umuman minimal indekslarga ega emas. Shuning uchun (3.34) matritsa ustunlari uchun

$$\varepsilon_1=\varepsilon_2=\ldots=\varepsilon_g=0,\quad \varepsilon_{g+1}\ldots,\varepsilon_p$$

satrlari uchun

$$\eta_1=\eta_2=\ldots=\eta_h=0,\quad \eta_{h+1}\ldots,\eta_q$$

minimal indekslarga ega.

L_ε matritsa elementar bo'luvchilarga ega emas, chunki maksimal tartibli minorlari 1 yoki λ^ε ga teng bo'ladi. Bu tasdiq L^T_η matritsa uchun ham o'rinli. Shuningdek, kvazidiagonal matritsa elementar bo'luvchilari uchun alohida olingan diagonal blokli elementar bo'luvchilarni birlashtirib hosil qilinadi, shuning uchun (3.34) λ – matritsa elementar bo'luvchilari uchun $A_0+\lambda B_0$ regulyar yadrosi elementar bo'luvchilari bilan ustma-ust tushadi.

(3.34) dastaning kanonik ko'rinishi minimal indekslar $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_p,\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_q$ va bu dastalar yoki unga qat'iy ekvivalent bo'lgan $A+\lambda B$ dasta elementar bo'luvchilari bilan to'la aniqlanadi. Shuningdek, bir xil kanonik ko‘rinishga ega bo‘lgan ikkita dasta o‘zaro qat’iy ekvivalent bo‘ladi. U holda biz quyidagi teoremani isbotladik:

Teorema 3.5. (Kroneker teoremasi) Ixtiyoriy bir xil mxn o‘lchovli to‘g`ri to‘rtburchakli matritsalarning $A+\lambda B$ va $A_1+\lambda B_1$ dastalari qat’iy ekvivalent bo‘lishi uchun bu dastalar bir xil minimal indekslarga va bir xil elementar (chekli yoki cheksiz) bo‘luvchilarga ega bo‘lishi zarur va yetarli.

Misol tariqasida $\varepsilon_1=0,\ \varepsilon_2=1,\ \varepsilon_3=2,\ \eta_1=\eta_2=0\ \ \eta_3=2$ minimal indekslarga va $\lambda^2,\ (\lambda+2)^2,\ \mu^3$ elementar bo‘luvchilarga ega bo‘lgan $A+\lambda B$ dastaning kanonik ko‘rinishini yozamiz:

$$\left\| \begin{matrix} \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} & & & & & & \\ & [\lambda\ 1] & & & & & \\ & & \begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\end{bmatrix} & & & & \\ & & & \begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 1 & \lambda\\ 0 & 1\end{bmatrix} & & & \\ & & & & \begin{bmatrix}1 & \lambda & 0\\ 0 & 1 & \lambda\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} & & \\ & & & & & \begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix} & \\ & & & & & & \begin{bmatrix}\lambda+2 & 1\\ 0 & \lambda+2\end{bmatrix} \end{matrix} \right\|$$

§6. Kvadratik shakllarning singulyar dastasi

Quyidagi ikkita kompleks kvadratik shakllar berilgan bo‘lsin:

$$A(x,x)=\sum_{i,k=1}^{n} a_k\, x_i x_k, \qquad B(x,x)=\sum_{i,k=1}^{n} b_k\, x_i x_k \qquad (3.36)$$

bular $A(x,x)+\lambda B(x,x)$ kvadratik shakllar dastasini tashkil qiladi. Bu shakllar dastasiga $A+\lambda B$ $\left(A^T=A,\ B^T=B\right)$ simmetrik matritsalar dastasi mos keladi. Agar $A(x,x)+\lambda B(x,x)$ kvadratik shakllar dastasida o'zgaruvchilarni $x=T$ $\left(|T|\neq 0\right)$ chiziqli almashtirishni qo'llasak, u holda $\tilde{A}(z,z)+\lambda\tilde{B}(z,z)$ almashtirilgan shakllar dastasiga quyidagi matritsalar dastasi mos keladi.

$$\tilde{A}+\lambda\tilde{B}=T^T(A+\lambda B)T \qquad (3.37)$$

bu yerda $T-n-$ tartibli, o'zgarmas, xosmas kvadrat matritsa.

Ikkita (3.37) ayniyat bilan bog`langan $A+\lambda B$ va $\tilde{A}+\lambda\tilde{B}$ matritsalar dastalari o'zaro kongruyent deyiladi.

Ma`lumki, kongruyentlik matritsalar dastalarining qat`iy ekvivalentligini maxsus xususiy holi bo'ladi. Agar matritsalar simmetrik (yoki kososimmetrik) bo'lsa, kongruyentlik tushunchasi qat'iy ekvivalentlik tushunchasi bilan ustma-ust tushadi.

Teorema 3.6. Ikkita qat'iy ekvivalent kompleks simmetrik (yoki kososimmetrik) matritsalar dastasi o'zaro kongruyent bo'ladi.

Isboti. Ikkita $\Lambda=A+\lambda B$ va $\tilde{\Lambda}=\tilde{A}+\lambda\tilde{B}$ qat'iy ekvivalent simmetrik (yoki kososimmetrik) matritsalar dastasi berilgan bo'lsin;

$$\tilde{\Lambda}=P\Lambda Q \left(\Lambda^T=\pm\Lambda,\ \tilde{\Lambda}^T=\pm\tilde{\Lambda};\ |P|\neq 0, |Q|\neq 0\right) \qquad (3.38)$$

Transponirlangan matritsalarga o'tib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\tilde{\Lambda}=Q^T\Lambda P^T. \qquad (3.39)$$

(3.38) va (3.39) dan quyidagini topamiz:

$$\Lambda QP^{T^{-1}}=P^{-1}Q^T\Lambda \qquad (3.40)$$

$$U=QP^{T^{-1}} \qquad (3.41)$$

deb olib, (2.40) ni quyidagicha yozamiz:

$$\Lambda U=U^T\Lambda \qquad (3.42)$$

(3.42) dan quyidagilar kelib chiqadi:

$$\Lambda U^k=U^{T^k}\Lambda, \quad (k=0,1,\ldots)$$

va umumiy holda

$$\Lambda S=S^T\Lambda \qquad (3.43)$$

bu yerda

$$S=f(U) \qquad (3.44)$$

$f(\lambda)-\lambda$ ga nisbatan ixtiyoriy ko‘phad. Faraz qilaylik, bu ko‘phad shunday tanlanganki, unda $|S|\neq 0$. U holda (3.43) dan quyidagini topamiz:

$$\Lambda = S^T \Lambda S^{-1} \tag{3.45}$$

Λ uchun olingan ifodani (3.38) ga qo‘yib, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\tilde{\Lambda} = B^{\ T} \Lambda S^{-1} Q \tag{3.46}$$

Bu munosabat kongruyent almashtirish bo‘lishi uchun quyidagi tenglik bajarilishi kerak:

$$(PS)^T = S^{-1}Q$$

buni quyidagicha yozish mumkin:

$$S^2 = QP^{T^{-1}} = \mathrm{U}$$

Ammo $f(\lambda)$ sifatida U matritsa spektrida $\sqrt{\lambda}$ interpolyatsion ko‘phadni olsak, $S = f(U)$ bu tenglamani qanoatlantiradi. Buni qilish mumkin, chunki ko‘p qiymatli $\sqrt{\lambda}$ U matritsa spektrida bir qiymatli tarmoqqa ega, shuningdek, $|U|\neq 0$.

Bundan keyin (3.46) tenglik kongryuentlik sharti bo‘ladi:

$$\tilde{\Lambda} = T^T \Lambda T \quad \left(T = SQ = \sqrt{QP^{\prime}\ Q}\right) \tag{3.47}$$

Bu isbotlangan teorema va teorema 3.5. dan quyidagi natija kelib chiqadi:

Natija3.1: $A+\lambda B$ va $\tilde{A}+\lambda\tilde{B}$ simmetrik matritsalar dastalari bir xil elementar bo‘luvchilarga va bir xil minimal indekslarga ega bo‘lgan holatdagina. Ikkita $A(x,x)+\lambda B(x,x)$ va $\tilde{A}(x,x)+\lambda\tilde{B}(x,x)$ kvadrat shakllar dastasi x-Tz $(|T|\neq 0)$ almashtirish bilan bir-biriga o‘tkaziladi.

Eslatma. Simmetrik matritsalar dastasi uchun satrlar va ustunlar bir xil minimal indekslarga ega, ya’ni:

$$p=q,\quad \varepsilon_1=\eta_1,\quad \varepsilon_2=\eta_2,\dots,\ \varepsilon_p=\eta_p \tag{3.48}$$

Quyidagicha savol qo‘yamiz : Ikkita

$$A(x,x)=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_i x_k,\qquad B(x,x)=\sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}x_i x_k$$

ixtiyoriy kompleks kvadratik shakllar berilgan. Qanday shartlar bajarilganda x-Tz $(|T| \neq 0)$ o'zgaruvchilarni xosmas almashtirish bilan bu shakllarni bir vaqtning o'zida

$$\sum_{i=1}^{n} a_i z_i^2 \quad \text{va} \quad \sum_{i=1}^{n} b_i z_1^2 \tag{3.49}$$

Kvadratlar yig'indisiga keltirish mumkin?

Shunga o'xshash savolni ikkita $A(x,x)$ va $B(x,x)$ ermit shakllar uchun ham qo'yish mumkin, ammo bu holda (3.49) ni o'rniga quyidagini yozish kerak bo'ladi.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i z_i \bar{z}_i \quad \text{va} \quad \sum_{i=1}^{n} b_i z_i \bar{z}_i \tag{3.50}$$

bu yerda a_i va b_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ – haqiqiy sonlar.

Faraz qilaylik, $A(x,x)$ va $B(x,x)$ kvadratik shakllar ko'rsatilgan xossalarga ega bo'lsin. U holda $A\lambda B$ matritsalar dastasi quyidagi diagonal matritsalar dastasiga kongruyent bo'ladi:

$$\{a_1 + \lambda b_1, a_2 + \lambda b_2, \ldots, a_n + \lambda b_n\} \tag{3.51}$$

$a_i + \lambda b_i$ diagonal ko'phadlarning $r(r \leq n)$ tasi aynan nolga teng emas bo'lsin. Umumiylikni buzmasdan quyidagicha deb olamiz: $a_1 = b_1 = 0, \ldots, a_{n-r} = b_{n-r} = 0,\ a_i + \lambda b_i\ (i = n-r+1, \ldots, n)$.

$$A_0 + \lambda B_0 = \{a_{n-r+1} + \lambda b_{n-r+1}, \ldots, a_n + \lambda b_n\}$$

deb olib, (3.51) ni quyidagicha yozamiz:

$$\left\{ \overbrace{O}^{n-r} \ ,\ A_0 + \lambda B_0 \right\} \tag{3.52}$$

(3.52)ni (3.34) bilan solishtirib ko'ramizki, bu holda barcha minimal indekslar nolga teng. Bundan tashqari, barcha elementar bo'luvchilar birinchi darajaga ega.

Biz quyidagi teoremaga keldik;

Teorema 3.7. Ikkita $A(x,x)$ va $B(x,x)$ kvadratik shakllar bir vaqtda o'zgaruvchilarni almashtirish bilan hadlar yig'indisiga keltirilishi mumkin, faqat va faqat shu holda, qachonki, $A+\lambda B$ matritsalar dastasida barcha elementar bo'luvchilar birinchi darajali bo'lib, barcha minimal indekslar nolga teng bo'lsa.

Umumiy holda, ikkita $A(x,x)$ va $B(x,x)$ kvadratik shakllarni qandaydir kanonik ko'rinishga keltirish uchun $A+\lambda B$ matritsalar dastasini unga qat'iy ekvivalent bo'lgan simmetrik matritsalar kanonik dastasi bilan almashtirish kerak.

$A+\lambda B$ – simmetrik matritsalar dastasi

$$\varepsilon_1=0, \varepsilon_2=0, \ldots, \varepsilon_g=0, \varepsilon_{g+1}\neq 0, \ldots, \varepsilon_p\neq 0$$

minimal indekslarga va $\mu^{u_1}, \mu^{u_2}, \ldots, \mu^{u_s}$ – cheksiz va $(\lambda+\lambda_1)^{c_1}, (\lambda+\lambda_1)^{c_2}, \ldots, (\lambda+\lambda_t)^{c_t}$ chekli elementar bo'luvchilarga ega bo'lsin. U holda (3.30) kanonik shaklda $g=h$, $p=q$, $\varepsilon_{g+1}=\eta_{g+1}$, ..., $\varepsilon_p=\eta_p$ bo'ladi. (3.30) da har ikkita L_ε va L_ε^T ko'rinishdagi diagonal bloklarni bitta $\begin{pmatrix} O & L_\varepsilon^T \\ L_\varepsilon & O \end{pmatrix}$ diagonal blok bilan, $N^{(u)}=E^{(u)}+\lambda H^{(u)}$ ko'rinishdagi har bir blokni

$$\tilde{N}^{(u)}=V^{(u)}N^{(u)}=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \lambda \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 1 & \lambda & \ldots & 0 & 0 \end{Vmatrix} \quad \left(V^{(u)}=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{Vmatrix} \right) \tag{3.53}$$

qat'iy ekvivalentlik simmetrik blok bilan almashtiramiz.

Bundan tashqari, (2.30) dagi

$$J+\lambda E=\left\{(\lambda+\lambda_1)E^{(c_1)}+H^{(c_1)}, \ldots, (\lambda+\lambda_t)E^{(c_t)}+H^{(c_t)}\right\} \tag{3.54}$$

(J-Jordon matritsasi) regulyar dioganal blok o'rniga, unga qat'iy ekvivalentlik bo'lgan

$$\left\{Z_{\lambda_1}^{(c_1)}, \ldots, Z_{\lambda_t}^{(c_t)}\right\} \tag{3.55}$$

dastani olamiz. Bu yerda

$$Z_{\lambda_i}^{(c_i)} = V^{(c_i)}\left[(\lambda+\lambda_i)E^{(c_i)} + H^{(c_i)}\right] = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda+\lambda_i \\ 0 & 0 & \dots & \lambda+\lambda_i & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda+\lambda_i & 1 & \dots & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad (i=1,2,\dots,t)$$

(3.56)

$A+\lambda B$ dasta quyidagi simmetrik dastaga qat'iy ekvivalent.

$$\widetilde{A}+\lambda\widetilde{B} = \left\{O, \begin{Vmatrix} O & L_{\varepsilon_{g+1}}^T \\ L_{\varepsilon_{g+1}} & O \end{Vmatrix}, \dots, \begin{Vmatrix} O & L_{\varepsilon_p}^T \\ L_{\varepsilon_p} & O \end{Vmatrix}, N^{(u_1)}, \dots, N^{(u_s)}, Z_{\lambda_1}^{(c_1)}, \dots, Z_{\lambda_t}^{(c_t)}\right\}$$

(3.57)

Ikkita $A(x,x)$ va $B(x,x)$ kompleks koyffitsiyentli kvadratik shakllar $x=Tz$ $(|T|\neq 0)$ o'zgaruvchilarni almashtirish bilan (3.57) tenglik bilan aniqlangan $\widetilde{A}(z,z)$ va $\widetilde{B}(z,z)$ kanonik ko'rinishga bir vaqtda keltirilishi mumkin.

§7. Differensial tenglamalarga tatbiqlar

Olingan natijalarni quyidagi o'zgarmas koeffitsiyentli, n ta noma'lum funksiyali, birinchi tartibli m ta chiziqli differensial tenglamalar sistemasini integrallashga tatbiq qilamiz.

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k + \sum_{k=1}^{n} b_{ik}\frac{dx_k}{dt} = f_i(t), \quad (i=1,2,\dots,m) \qquad (3.58)$$

yoki matritsa yozuvida

$$Ax + B\frac{dx}{dt} = f(t) \qquad (3.59)$$

bu yerda $A=\|a_{ik}\|$, $B=\|b_{ik}\|$, $i=\overline{1,m}$, $k=\overline{1,n}$,

$$x=(x_1,x_2,\dots,x_n)^T, \qquad f=(f_1,f_2,\dots,f_n)^T$$

$x_1,x_2,\dots,x_n$ noma'lum funksiyalar bilan o'zgarmas koeffitsiyentli chiziqli xosmas matritsalar

$$x=Qz \quad \left(z=\left(z_1,z\ ,\ldots,z_n\right)^T,\ \ |Q|\neq O\right) \tag{3.60}$$

orqali bog'langan yangi $z_1, z_1, \ldots, z_n$ funksiyalarni kiritamiz.

(3.59) tenglamada x ning o'rniga Qz ni qo'yib, (3.59) ni chapdan P ga ko'paytirib, quyidagini hosil qilamiz.

$$Az+B\frac{dz}{dt}=f(t), \tag{3.61}$$

bu yerda

$$\bar{A}=PAQ, \qquad \bar{B}=PBQ, \qquad \bar{f}=Pf=\left(\bar{f}_1,\bar{f}_2,\ldots,\bar{f}_n\right) \tag{3.62}$$

Shu bilan birga $A+\lambda B$ va $\widetilde{A}+\lambda\widetilde{B}$ matritsalar dastalari bir biri bilan qat'iy ekvivalent:

$$\widetilde{A}+\lambda\widetilde{B}=P(A+\lambda B)Q \tag{3.63}$$

P va Q matritsalarni shunday tanlaymizki, unda $\widetilde{A}+\lambda\widetilde{B}$ dasta quyidagicha kanonik kvazidiagonal shaklga ega bo'lsin:

$$\widetilde{A}+\lambda\widetilde{B}=\left\{O,L_{\varepsilon_{d+1}},\ldots,L_{\varepsilon_p},L^T_{\eta_{h+1}},\ldots,L^T_{\eta_q},N^{(u_1)},\ldots,N^{(u_s)},J+\lambda E\right\} \tag{3.64}$$

(3.64) ning diagonal bloklariga mos differensial tenglamalar sistemasi $v=p-d+q-h+s+2$ ta alohida sistemalarga ajraladi.

$$O\cdot z=\widetilde{f}, \tag{3.65}$$

$$L_{\varepsilon_{g+i}}\left(\frac{d}{dt}\right)\overset{1+i}{z}=\overset{1+i}{\widetilde{f}}, \quad (i=1,2,\ldots,p-g) \tag{3.66}$$

$$L^T_{\varepsilon_{h+j}}\left(\frac{d}{dt}\right)\overset{p-g+1+j}{z}=\overset{p-g+1+j}{\widetilde{f}}, \quad (j=1,2,\ldots,q-h) \tag{3.67}$$

$$N^{(i_k)}\left(\frac{d}{dt}\right)\overset{p-g+q-h+1+k}{z}=\overset{p-g+q-h+1+k}{\widetilde{f}}, \quad (k=1,2,\ldots,s) \tag{3.68}$$

$$\left(J+\frac{d}{dt}\right)\overset{v}{z}=\overset{v}{\widetilde{f}} \tag{3.69}$$

bu yerda

$$z=\left\|\begin{matrix}\overset{1}{z}\\ \overset{2}{z}\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \overset{\nu}{z}\end{matrix}\right\|, \qquad \tilde{f}=\left\|\begin{matrix}\overset{1}{\tilde{f}}\\ \overset{2}{\tilde{f}}\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \overset{\nu}{\tilde{f}}\end{matrix}\right\| \tag{3.70}$$

$$\overset{1}{z}=(z_1,z_1,\dots,z_g),\quad \overset{1}{\tilde{f}}=(\tilde{f}_1,\tilde{f}_1,\dots,\tilde{f}_h),\quad \overset{2}{z}=(z_{g+1},\dots),\quad \overset{2}{\tilde{f}}=(\tilde{f}_{h+1},\dots) \tag{3.71}$$

va hakozo

$$\Lambda\left(\frac{d}{dt}\right)=A+B\frac{d}{dt}, \qquad \text{agar} \quad \Lambda(\lambda)=A+\lambda B \ \text{bo‘lsa.} \tag{3.72}$$

Shunday qilib, (3.59) sistemani integrallash, umumiy holda (3.65)-(3.69) xususiy sistemalarni integrallashga keltiriladi. Bu sistemalarda $A+\lambda B$ matritsalar dastasi mos ravishda $O,\ L_\varepsilon, L_\eta^{T},\ N^{(u)},\ J+\lambda E$ ko‘rinishlarga ega.

1. (3.65) sistemada qarama-qarshilik bo‘lmasligi uchun

$$\overset{1}{\tilde{f}}=0$$

ya'ni

$$\tilde{f}_1=0,\dots,\tilde{f}_h=0 \tag{3.73}$$

bo‘lishi zarur va yetarli. Bu holda $\overset{1}{z}$ ustunni tashkil etuvchi $z_1, z_2, \dots, z_g$ noma'lum funksiyalar sifatida t ning ixtiyoriy funksiyasini olish mumkin.

2. (3.66) sistema quyidagi ko‘rinishdagi sistemani ifodalaydi:

$$L_{\varepsilon}\left(\frac{d}{dt}\right)z=\bar{f} \tag{3.74}$$

yoki yoyilgan yozuvda

$$\frac{dz_1}{dt}+z_2=\bar{f}_1(t),\ \frac{dz_2}{dt}+z_3=\bar{f}_2(t),\ldots,\frac{dz_{\varepsilon}}{dt}+z_{\varepsilon+1}=\bar{f}_{\varepsilon}(t) \tag{3.75}$$

Bunday sistemalar har doim birgalashgan bo‘ladi. Agar $z_{\varepsilon+1}(t)$ sifatida t ning ixtiyoriy funksiya’ni olsak, u holda (3.75) dan ketma-ket kvadraturalarda barcha qolgan $z_{\varepsilon}, z_{\varepsilon-1}, ..., z_1$ noma’lum funksiyalarni aniqlaymiz:

3. (3.67) sistema quyidagi ko‘rinishdagi sistemani ifodalaydi:

$$\mathrm{L}_{\eta}^{\mathrm{T}}\left(\frac{d}{dt}\right)z=\bar{f} \tag{3.76}$$

yoki yoyilgan yozuvda

$$\left|\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}\right. \tag{3.77}$$

(3.77) ning birinchisidan boshqa barcha tenglamalaridan bir qiymatli ravishda $z_{\eta}, z_{\eta-1},\ldots, z_1$ larni aniqlaymiz:

$$z_{\eta}=\bar{f}_{\eta+1}(t),\ z_{\eta-1}=\bar{f}_{\eta}-\frac{d\bar{f}_{\eta+1}}{dt},\ldots,z_1=\bar{f}_2-\frac{d\bar{f}_3}{dt}+\ldots+(-1)^{\eta-1}\frac{d^{\eta-1}f_{\eta+1}}{dt^{\eta-1}} \tag{3.78}$$

z_1 uchun hosil qilingan ifodani birinchi tenglamaga qo‘yib, birgalashganlik shartini hosil qilamiz:

$$\left\lceil \ \sim\ \right\rceil \tag{3.79}$$

4. (3.68) sistema quyidagi ko‘rinishdagi sistemani ifodalaymiz:

$$N^{(u)}\left(\frac{d}{dt}\right)z=\bar{f} \tag{3.80}$$

yoki yoyilgan yozuvda

$$\frac{dz_2}{dt}+z_1=\tilde{f}_1,\frac{dz_3}{dt}+z_2=\tilde{f}_2,\ldots,\frac{dz_u}{dt}+z_{u-1}=\tilde{f}_{u-1},z_u=\tilde{f}_u. \tag{3.81}$$

Bundan yechimlarni ketma-ket bir qiymatli aniqlaymiz:

$$z_u=\tilde{f}_u,z_{u+1}=\tilde{f}_{u-1}-\frac{d\tilde{f}_u}{dt},\ldots,z_1=\tilde{f}_1-\frac{d\tilde{f}_2}{dt}+\frac{d^2\tilde{f}_2}{dt^2}-\ldots+(-1)^{u-1}\frac{d^{u-1}\tilde{f}_u}{dt^{u-1}} \tag{3.82}$$

5. (3.69) sistema quyidagi sistemani ifodalaydi:

$$J_z+\frac{dz}{dt}=\tilde{f}$$

Bunday sistemaning umumiy yechimi quyidagicha bo‘ladi:

$$z=e^{-Jt_0}+\int_0^t e^{-J(t-\tau)}f(\tau)d\tau \tag{3.84}$$

bu yerda z_0 - ixtiyoriy elementli ustun bo‘lib, noma’lum funksiyani $t=0$ dagi boshlang‘ich qiymati bo‘ladi.

(3.61) sistemadan (3.59) sistemaga teskari o‘tish (3.60) va (3.62) formulalar bilan amalga oshiriladi Bunda har bir $x_1,x_2,\ldots,x_n$ funksiyalar $z_1,z_2,\ldots,z_n$ funksiyalarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo‘lib, har bir $\tilde{f}_1(t),\ldots,\tilde{f}_m(t)$ funksiyalar $f_1(t),\ldots,f_m(t)$ funksiyalar orqali (o‘zgarmas koeffitsiyentlar bilan) chiziqli ifodalanadi.

O‘tkazilgan tahlil ko‘rsatadiki, (3.58) sistema birgalashgan bo‘lishi uchun, umumiy holda, tenglamalarning o‘ng tomonlari o‘rtasida ba’zi aniq chiziqli chekli va differensial bog‘lanishlar bajarilishi shart.

Agar bu shartlar bajarilsa, u holda sistemaning umumiy yechimi chiziqli ixtiyoriy o‘zgarmaslar kabi ixtiyoriy funksiyalarni o‘zida saqlaydi.

Birlashganlik sharti xarakteri va yechimlari xarakteri (xususiy holda ixtiyoriy o‘zgarmaslar va ixtiyoriy funksiyalar soni) $A+\lambda B$ dastaning minimal indekslari va elementar bo‘luvchilari bilan aniqlanadi, chunki (3.65) –(3.69) differensial tenglamalar sistemalarining kanonik shaklsi bu indekslar va bo‘luvchilarga bog‘liq.

Mashqlar:

1. Quyidagi matritsalar bilan berilgan $A+\lambda B$ dastalarni regulyar yoki singulyar ekanligini aniqlang.

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ B= $\begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ B= $\begin{pmatrix} 13 & 16 & 16 \\ -5 & -7 & -6 \\ -6 & -8 & -7 \end{pmatrix}$

c) $A=\begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ B= $\begin{pmatrix} 7 & -12 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

d) $A=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ B= $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix}$

e) $A=\begin{pmatrix} 9 & 22 & -6 \\ -1 & -4 & 1 \\ 8 & 16 & -5 \end{pmatrix}$ B= $\begin{pmatrix} 8 & 30 & -14 \\ -5 & -19 & 9 \\ -6 & -23 & 11 \end{pmatrix}$

f) $A=\begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ B= $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -5 & 21 & 17 \\ 6 & -26 & -21 \end{pmatrix}$

g) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ B= $\begin{pmatrix} 3 & 7 & -3 \\ -2 & -5 & 2 \\ -4 & -10 & 3 \end{pmatrix}$

2. Yuqorida hosil qilingan dastalarni kanonik ko'rinishga keltiring va ularni minimal indeksini aniqlang.

IV BOB
MANFIYMAS ELEMENTLI MATRITSALAR

Ushbu bobda manfiymas elementli haqiqiy matritsalarning xossalari o'rganiladi. Bunday matritsalar ehtimollar nazariyasidagi Markov zanjirlarini o'rganishda va sistemalarning kichik tebranishlar nazariyasida keng qo'llaniladi.

§1. Umumiy xossa

Ta'rif 4.1: Haqiqiy elementli to'g'ri to'rtburchakli

$$A = \|a_{ik}\|, i = 1,2,\dots,m; k = 1,2,\dots,n$$

matritsa manfiymas ($A \geq 0$) yoki musbat $A > 0$ deyiladi, agarda uning barcha elementlari manfiymas $(a_{ik} \geq 0)$ yoki musbat $(a_{ik} > 0)$ bo'lsa.

Ta'rif 4.2: $A = \|a_{ik}\|_{i,k=1}^{n}$ kvadrat matritsa yoyiluvchi deyiladi, agarda barcha 1,2,…,n indekslarni qandaydir ikkita qo'shimcha sistemaga $i_1, i_2, \dots i_m$ va $k_1, k_2, \dots k_y (m + y = n)$ bo'linishida, umumiy indekslardan boshqa holda $a_{i_\alpha k_\beta} = 0(\alpha = 1,2,..,m; \beta = 1,2,\dots y)$ bo'lsa.

Aks holda A matritsa yoyilmaydigan matritsa deyiladi. A kvadrat matritsa qatorlarini o'rin almashtirish deganda satrlarni o'rin almashtirish bilan birga A matritsa ustunlarini ham xuddi shunday o'rin almashtirishni tushunamiz.

Yoyiluvchi va yoyilmaydigan matritsalar ta'rifini quyidagicha ifodalash ham mumkin.

Ta'rif 4.2': $A = \|a_{ik}\|_{i,k=1}^{n}$ matritsa yoyiluvchi deyiladi, agarda uni qatorlarining o'rinlarini almashtirib, quyidagi ko'rinishga keltirish mumkin bo'lsa;

$$\tilde{A} = \begin{Vmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{Vmatrix},$$

bu yerda B va D kvadrat matritsalar. Aks holda A matritsa yoyilmaydigan deyiladi.

A – n o'lchovli kvadrat matritsa $e_1, e_2, \dots, e_n$ bazisli n-o'lchovli R^n fazodagi $\overline{A}$ chiziqli operatorga mos kelsin. Matritsada qatorlarning o'rin almashtirilishi bazis vektorlarni qayta raqamlashga mos keladi, ya'ni, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ bazisdan yangi $e_1' = e_{j_1}, e_2' = e_{j_2}, \ldots, e_n' = e_{j_n}$ bazisga o'tish mos keladi, bu yerda $(j_1, j_2, \ldots j_n)$ indekslarni qandaydir o'rin almashtirish, bunda A matritsa unga o'xshash bo'lgan $\bar{A} = T^{-1}AT$ matritsaga o'tadi. (T-almashtiruvchi matritsaning har bir satr va ustunining bitta elementi birga teng bo'lib, qolgan elementlari nollardan iborat). R^n fazoning v-o'lchovli qism fazosi deganda $e_{k_1}, e_{k2}, \ldots, e_{k_v}$ bazisli ixtiyoriy qism fazoni tushunamiz. $(1 \le k_1 \le k_2 \le \ldots \le k_v)$

Ta'rif 4.2': $A = \|a_{ik}\|_{i,k=1}^{n}$ matritsa yoyiluvchi deyiladi, faqat va faqat shu holdaki, agar bu matritsaga mos $\bar{A}$ operator v<n o'lchovli invariant koordinatali qism fazoga ega bo'lsa.

Lemma 4.1. Agar $A \ge 0$ matritsa yoyilmaydigan bo'lib, n – o'lchovli bo'lsa, u holda

$$(E + A)^{n-1} > 0 \tag{4.1}$$

Isboti. Lemmani isbotlash uchun, ixtiyoriy y>0 (vektor ustun) uchun

$$(E + A)^{n-1} y > 0$$

ekanligini ko'rsatish yetarli. Bu tengsizlik isbotlanadi, agarda biz $y \ge 0$ va $g \ne 0$ shartda $z = (E + A)y$ har doim y ga nisbatan kichik nomli koordinataga ega ekanligini ko'rsatsak, teskarisini faraz qilamiz. U holda g va z vektorlar bir xil nolli koordinataga ega bo'ladi. Umumiylikni buzmasdan,

$$y = \left\| \begin{matrix} u \\ 0 \end{matrix} \right\|, \quad z = \left\| \begin{matrix} v \\ 0 \end{matrix} \right\| \quad (u>0,\ v>0)$$

bu yerda u va v ustunlar bir xil o'lchovli, deb olamiz.

$$A = \left\| \begin{matrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{matrix} \right\|$$

deb olib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\left\| \begin{matrix} u \\ 0 \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} u \\ 0 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} v \\ 0 \end{matrix} \right\|,$$

bundan

$$A_{21}u = 0$$

bo'lib, u>0 bo'lgani uchun $A_{21} = 0$ kelib chiqadi. Bu tenglik A matritsaning yoyiluvchi emasligiga ziddir.

A matritsaning quyidagi darajasini qaraymiz:

$A^q = \| a_{ik} \|_{i,k=1}^n$ (q=1,2...)

u holda yuqoridagi lemmadan quyidagi natija kelib chiqadi.

Natija: Agar A>0 yoyilmaydigan matritsa bo'lsa, u holda i, k indekslar juftligi uchun shunday q butun musbat son mavjudki, unda

$$a_{ik}^q > 0 \tag{4.2}$$

bo'ladi. Shu bilan birga q sonini har doim quyidagicha oraliqda tanlash mumkin

$$\left.\begin{matrix} q \le m-1, & agar & i \ne k & bo'lsa \\ q \le m, & agar & i = k, & bo'lsa \end{matrix}\right\}, \tag{4.3}$$

bu yerda m- A matritsaning $\psi(\lambda)$ ko'phadning darajasi.

§2. Yoyilmaydigan manfiymas matritsaning spektral xossasi

Teorema 4.1. (Perron teoremasi). $A = \| a_{ik} \|_{i,k=1}^n$ musbat matritsa har doim r haqiqiy va musbat xarakteristik songa ega bo'lib, u xarakteristik tenglamaning oddiy ildizi bo'ladi va moduli bo'yicha barcha xarakteristik ildizlardan ortiq. Bu maksimal r xarakteristik songa A matritsaning z_i>0, (i=1,2, ...,n) koordinatali $z = (z_1, z_2, ... z_n)$ xos vektori mos keladi.

Musbat matritsa yoyilmaydigan manfiymas matritsaning xususiy ko'rinishi bo'ladi. Frobenius yoyilmaydigan manfiymas matritsaning spektral xossasini o'rganib, Perron teoremasini umumlashtirdi.

Teorema 4.2. (Frobenius teoremasi). Yoyilmaydigan manfiymas $A = \| a_{ik} \|_{i,k=1}^n$ matritsa har doim mos xarakteristik tenglamani oddiy ildizi bo'lgan r musbat xarakteristik songa ega. Boshqa barcha xarakteristik ildizlarning moduli r dan ortmaydi. R maksimal xarakteristik songa musbat koordinatali z xos vektor mos keladi.

Agar shu bilan birga A matritsa moduli r ga teng bo'lgan h ta $\lambda_0 = r, \lambda_1, ..., \lambda_{h-1}$ xarakteristik sonlarga ega bo'lsa, u holda bu sonlarning hammasi har xil bo'lib,

$$\lambda^h - r^h = 0 \tag{4.4}$$

tenglamaning ildizlari bo'ladi va λ -kompleks tekislikdagi nuqtalar sistemasi sifatida qaralayotgan, $A = \| a_{ik} \|_{i,k=1}^{n}$ matritsaning $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{h-1}$ barcha xarakteristik sonlarning umumiy to'dasi bu tekislikni $\frac{2\pi}{h}$ burchakka burganda o'zi-o'ziga o'tadi, h>1 da qatorlarni almashtirish bilan, A matritsani quyidagi siklik ko'rinishga keltirish mumkin:

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & A_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{h-1,h} \\ A_{h1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix} \tag{4.5}$$

bu yerda diagonal bo'ylab kvadrat matritsalar joylashgan.

Perron teoremasi Frobenius teoremasining xususiy holi bo'lgani uchun, biz Frobenius teoremasini isbotlaymiz. Avval, ba'zi belgilashlarni kelishib olamiz, faqat va faqat

$$c_{ik} \le d_{ik} (i = 1, 2, ...m; \ k = 1, 2, .., n) \tag{4.6}$$

holdagina quyidagi tengsizlikni yozamiz

$$C \le D \quad \text{yoki} \quad D \ge C$$

bu yerda C va D lar bir xil $m \times n$ o'lchovli, to'g'ri to'rtburchakli matritsalar bo'lib,

$$C = \| c_{ik} \|, \quad D = \| d_{ik} \|, \quad (i=1,2,...m; \ k=1,2,..,n).$$

Agar (4.6) tengsizliklarda tenglik belgisini tashlab yuborsak, u holda quyidagini yozamiz: $C \le D$ yoki $D \ge C$

Xususiy holda, $C \ge 0$ $(C > 0)$ C matritsaning barcha elementlari manfiymas (mos ravishda musbat) ekanligini bildiradi.

Bundan tashqari, C^+ bilan mod C, ya'ni, C matritsa barcha elementlarini ularning modullari bilan almashtirib hosil qilingan matritsani belgilaymiz.

Frobenius teoremasining isboti. Fiksirlangan haqiqiy $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0 (x \neq 0)$ vektor uchun

$$r_x = \min_{1 \leq i \leq n} \frac{(Ax)_i}{x_i} \quad \left((Ax)_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k, i = 1, 2, \ldots n \right)$$

deb olamiz, bunda minimumni aniqlashda $x_i = 0$ uchun i indeksning qiymatlari yo'qotiladi. Ma'lumki, $r_x \geq 0$ va r_x $gx \leq Ax$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi g haqiqiy sonlarning eng kattasi bo'ladi.

Biz r_x funksiya qandaydir z>0 vektorda o'zining eng katta r qiymatiga erishishini isbotlaymiz:

$$r = r_z = \max_{(x \geq 0)} r_x = \max_{(x \geq 0)} \min_{1 \leq i \leq n} \frac{(Ax)_i}{x_i} \qquad (4.7)$$

r_x ning aniqlanishidan kelib chiqadiki, $x \geq 0$ $(x \neq 0)$ vektorni $\lambda > 0$ songa ko'paytirganda r_x o'zgarmaydi. Shuning uchun r_x funksiya maksimumini izlashda

$$x \geq 0, \ (x, x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$$

shartni qanoatlantiruvchi x vektorlardan tuzilgan M yopiq to'plam bilan chegaralanish mumkin.

Agar r_x funksiya M to'plamda uzluksiz bo'lsa, u holda maksimumning mavjudligi ta'minlanadi. Ammo r_x funksiya ixtiyoriy x>0 nuqtada uzluksiz bo'lib, koordinatalaridan biri nolga aylanadigan M to'plamning chegaraviy nuqtalarida uziladigan bo'lishi mumkin. Shuning uchun M to'plam o'rniga quyidagi ko'rinishdagi y vektorlardan tuzilgan N to'plamni kiritamiz:

$$y = (E + A)^{n-1} x (x \in M)$$

N to'plam M to'plam kabi chegaralangan va yopiq bo'lib, lemma 4.1 ga asosan musbat vektorlardan tuzilgan.

Bundan tashqari,

$$r_x x \leq Ax$$

tengsizlikning ikkala tomonini $(E + A)^{n-1} > 0$ ga ko'paytirib, quyidagini hosil qilamiz:

$$r_x y \le Ay \quad \left[(y = (E+A)^{n-1}x)\right]$$

bundan, r_y ning aniqlanishiga ko'ra quyidagini topamiz:

$$r_x \le r_y$$

Shuning uchun r_x ning maksimumini izlashda M to'plamni faqat musbat vektorlardan tuzilgan N to'plam bilan almashtirishimiz mumkin. N chegaralangan, yopiq to'plamda r_x funksiya uzluksiz bo'lib, qandaydir z>0 vektorda o'zining eng katta qiymatiga erishadi.

$$r_z = r \tag{4.8}$$

Shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy z>0 vektorni ekstremal deb ataymiz.

Endi quyidagilarni isbotlaymiz:

1) (4.7) tenglik bilan aniqlangan r son musbat va A matritsaning xarakteristik soni bo'ladi;

2) ixtiyoriy z ekstremal vektor bo'ladi, ya'ni:

$$r>0, \ z>0, \quad Az=rz. \tag{4.9}$$

Haqiqatan, agar $u = (\underbrace{1,1,\dots,1}_{n})$ bo'lsa, u holda $r_u = \min\limits_{1\le i\le n} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.

Ammo bu holda $r_u > 0$, chunki yoyilmaydigan matritsaning birorta ham satri faqat nollardan iborat bo'lishi mumkin emas. Demak, r>0, chunki $r > r_x$.

Agar

$$x = (E+A)^{n-1} z \tag{4.10}$$

bo'lsin. U holda 1-lemmaga asosan x>0 deb faraz qilaylik, $Az - rz \ne 0$. U holda (4.1), (4.8) va (4.10) dan quyidagi ketma-ketni hosil qilamiz:

$$Az - rz \ge 0, \quad (E+A)^{n-1}(Az - rz) > 0, \qquad Ax - rx > 0$$

oxirgi tengsizlik r soni aniqlanishiga zid, chunki bu tengsizlikdan yetarli kichik $\varepsilon > 0$ uchun $Ax - (r+\varepsilon)x > 0$ ya'ni, $r_x \ge r + \varepsilon > r$ kelib chiqadi. Demak, Az=rz. Ammo bu holda

$$0 < x = (E+A)^{n-1} z = (1+r)^{n-1} z$$

bo'lib, bundan $z > 0$ kelib chiqadi.

Endi barcha xarakteristik sonlar modullari r dan ortmasligini ko'rsatamiz.

$$Ay = \alpha y (y \neq 0) \qquad (4.11)$$

bo'lsin. (4.11) ning ikkala tomonidan modulga o'tib,

$$|\alpha| y^{+} < Ay^{+} \qquad (4.12)$$

ni hosil qilamiz. Bundan,

$$|\alpha| < r_{y^{+}} < r$$

faraz qilaylik, r xarakteristik son qandaydir y vektorga mos kelsin:

$$Ay = ry(y \neq 0)$$

u holda (4.11) va (4.12) da $\alpha = r$ deb olib, xulosa qilamizki, y^{+} -ekstremal vektor bo'lib, $y^{+} > 0$, ya'ni, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, $y_i \neq 0$ (i=1,2,…,n). bundan kelib chiqadiki, r xarakteristik songa faqat bitta xos yo'nalish mos keladi, chunki ikkita chiziqli bog'liqmas z va z1 vektorlar bo'lgan holda, biz shunday c va d sonlarni tanlashimiz mumkin bo'ladiki, unda $y = cz + dz_1$ xos vektor nolli koordinataga ega bo'ladi, isbotlanganga ko'ra bu mumkin emas.

$\lambda E - A$ xarakteristik matritsa uchun quyidagi matritsani kiritamiz:

$$B(\lambda) = \| B_{ik}(\lambda) \|_{i,k=1}^{n} = \Delta(\lambda)(\lambda E - A)^{-1},$$

bu yerda $\Delta(\lambda)$-A matritsaning xarakteristik ko'phadi, $B_{ik}(\lambda)$ esa $\Delta(\lambda)$ aniqlovchidagi $\lambda\delta_{ki} - a_{ki}$ elementning algebraik to'ldiruvchisi. R xarakteristik songa faqat bitta $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$, $z_1 > 0, z_2 > 0, ..., z_n > 0$ xos vektor mos kelishidan kelib chiqadiki, $B(r) \neq 0$ va B(r) matritsaning ixtiyoriy nolmas ustunida barcha elementlar noldan farqli va bir xil ishorali bo'ladi. U holda bu hol B(r) matritsa satrlari uchun ham o'rinli, chunki A matritsa uchun yuritilgan mulohazalarni A^T-transponirlangan matritsa uchun ham yuritish mumkin. Bundan kelib chiqadiki, barcha $B_{ik}(r)$ $(i, k = 1, 2, ..., n)$ noldan farqli va bitta σ ishorali. Shuning uchun

$$\sigma \cdot \Delta^{T}(r) = \sigma \cdot \sum_{i=1}^{n} B_i(r) > 0,$$

ya'ni, $\Delta^T(r) \neq 0$ va r son $\Delta(\lambda)$ xarakteristik ko'phadning oddiy ildizi.

Shunday qilib, r son $\Delta(\lambda) = \lambda^n + \ldots$ ko'phadning maksimal ildizi, u holda, $\Delta(\lambda)$ ko'phad $\lambda = r$ da o'sadi. Shuning uchun $\Delta^T(r) > 0$ va $\tau = 1$ ya'ni:

$$B_{ik}(r) > 0 \quad (i,k = 1,2,\ldots,n) \tag{4.13}$$

teoremaning ikkinchi qismini isbotlashda quyidagi lemmadan foydalanamiz:

Lemma 4.2. Agar $A = \| a_{ik} \|_{i,k=1}^n$ va $C = \| c_{ik} \|_{i,k=1}^n$ ikkita bir xil n-o'lchovli matritsalar bo'lib, A- yoyilmaydigan matritsa va

$$C^+ \leq A \tag{4.14}$$

bo'lsa, u holda C matritsaning γ xarakteristik soni bilan A matritsa r maksimal xarakteristik soni o'rtasida

$$|\gamma| \leq r \tag{4.15}$$

tengsizlik o'rinli. (4.15) munosabatda tenglik belgisi faqat va faqat

$$C = e^{i\varphi} DAD^{-1} \tag{4.16}$$

dagina o'rinli bo'lishi mumkin, bu yerda

$$e^{i\varphi} = \frac{\gamma}{r},$$

D-elementlari moduli bo'yicha birga teng bo'lgan diagonal matritsa (D+=E).

Lemmaning isboti. C matritsaning γ xarakteristik soniga mos keluvchi xos vektorni y bilan belgilaymiz:

$$C \cdot y = \gamma \cdot y \qquad (\gamma \neq 0)$$

(4.14) va (4.17) dan

$$|\gamma| y^+ \leq C^+ y^+ \leq A y^+ \tag{4.18}$$

shuning uchun

$$|\gamma| \leq r_{y^+} \leq r$$

Endi $|\gamma| = r$ holni taxlil qilamiz. Bu holda, (4.18)dan kelib chiqadiki, y^+ A matritsa uchun ekstremal vektor, demak $y^+ > 0$ va y^+ A matritsaning r xarakteristik soniga mos xos vektor. Shuning uchun (4.18) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$Ay^{+} = C^{+}y^{+} = ry^{+}, y^{+} > 0 \qquad (4.19)$$

Bundan, (4.14) ga asosan

$$C^{+} = A \qquad (4.20)$$

$y = (y_1, y_2, ..., y_n) \quad y_j = |y_j| \; e^{i\Psi_j} (j = 1,2,,...,n)$ bo'lsin.

$$D = \left\{ e^{i\Psi 1}, e^{i\Psi_2}, ..., e^{i\Psi_n} \right\}$$

diagonal matritsa olamiz.

U holda

$$y = Dy^{+}$$

Buni (4.17) ga qo'yib, $\gamma = re^{i\varphi}$ deb olib, quyidagini topamiz:

$$Fy^{+} = ry^{+} \qquad (4.21)$$

Bu yerda

$$F = e^{-i\varphi} D^{-1} CD \qquad (4.22)$$

(4.19) va (4.21) dan

$$Fy^{+} = C^{+} y^{+} = Ay^{+} \qquad (4.23)$$

ammo, (4.22) va (4.20) ga asosan

$$F^{+} = C^{+} = A$$

shuning uchun (4.23) dan,

$$Fy^{+} = F^{+} y^{+}$$

$y^{+} > 0$ bo'lgani uchun bu tenglik $F = F^{+}$ dagina, ya'ni:

$$e^{-i\varphi} D^{-1} CD = A$$

da o'rinli bo'ladi. Bundan

$$C = e^{i\varphi} DAD^{-1}$$

lemma isbotlandi.

Teoremaning isbotiga qaytamiz. Isbotlangan lemmani r maksimal moduli h ta har xil xarakteristik sonlarga ega bo'lgan yoyilmaydigan A matritsaga qo'llaymiz:

$$\lambda_0 = re^{i\varphi_0}, \lambda_1 = re^{i\varphi_1}, ..., \lambda_{h-1} = re^{i\varphi_{h-1}} (\Delta = \varphi_0 < \varphi_1 < \varphi_2 < .... < \varphi_{h-1} < 2\pi)$$

U holda C=A va $\gamma = \lambda_k$ deb olib, ixtiyoriy k=0,1,…,h-1 uchun quyidagiga ega bo'lamiz:

$$A = e^{i\varphi_k} D_k A D_k^{-1} \tag{4.24}$$

bu yerda D_k-diagonal matritsa bo‘lib, $D_k^{+} = E$.

z A matritsaning r maksimal xarakteristik songa mos musbat xos vektor bo‘lsin:

$$Az = rz (z > 0) \tag{4.25}$$

u holda

$$\overset{k}{y} = D_k z \quad \overset{k}{y}^{+} = z > 0 \tag{4.26}$$

deb olib, (4.25) dan

$$A\overset{k}{y} = \lambda_k \overset{k}{y} \quad (\lambda_k = re^{i\varphi_k}, k = 0,1,..,h-1) \tag{4.27}$$

oxirgi tenglikdan ko‘rinadiki, $\overset{0}{y}, \overset{1}{y}, ..., \overset{h-1}{y}$ vektorlar A matritsaning $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{h-1}$ xarakteristik sonlar uchun xos vektorlar bo‘ladi.

(4.24) dan kelib chiqadiki, nafaqat $\lambda_0 = r$ balki, $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{h-1}$ lar A matritsaning oddiy xarakteristik sonlari bo‘ladi. Shuning uchun $\overset{k}{y}$ xos vektorlar va $D_k (k = 0,1,2,..., h-1)$ matritsalar o‘zgarmas skalyar ko‘paytuvchi aniqligida aniqlanadi. $D_0, D_1, ..., D_{h-1}$ matritsalarni bir qiymatli aniqlash uchun bu matritsaning birinchi diagonal elementlarini birga teng qilib tanlaymiz. U holda $D_0 = E$ va $\overset{0}{y} = z > 0$.

(4.24) dan quyidagi kelib chiqadi:

$$A = e^{i(\varphi_j \pm \varphi_k)} D_j D_k^{\pm 1} A D_k^{\mp 1} D_j^{-1} (j, k = 0,1,..., h-1)$$

bundan, yuqoridagi kabi xulosa qilamizki,

$$D_j D_k^{\pm 1} z$$

vektor A matritsani $re^{i(\varphi_j \pm \varphi_k)}$ xarakteristik soniga mos xos vektori bo‘ladi.

Shuning uchun $e^{i(\varphi_j \pm \varphi_k)}$ son $e^{i\varphi_l}$ sonlarning biri bilan, $D_j D_k^{\pm 1}$ matritsa esa D_j matritsaning biri bilan ustma-ust tushadi, ya’ni, qandaydir e_1, e_2 larda

$$e^{i(\varphi_j + \varphi_k)} = e^{i\varphi_{e_1}}, e^{i(\varphi_j - \varphi_k)} = e^{i\varphi_2}$$

$$D_j D_k = D_{e_1}, \; D_j D_k^{-1} = D_{e_2}$$

Shunday qilib, $e^{i\varphi_0}, e^{i\varphi_1}, ..., e^{i\varphi_{h-1}}$ songa mos va diagonal $D_0, D_1, ..., D_{h-1}$ matritsalar o'zaro izomorf multiplikativ abel guruhlarini tashkil etadi.

Har qanday h ta har xil elementli chekli guruhda ixtiyoriy elementning, h-darajasi guruhning birlik elementiga teng. Shuning uchun $e^{i\varphi_0}, e^{i\varphi_1}, ..., e^{i\varphi_{h-1}}$ lar birning h-darajali ildizlari bo'ladi. Shuningdek, birning h ta har xil ildizlari mavjud va $\varphi_0 = 0 < \varphi_1 < \varphi_2, ..., \varphi_{h-1} < 2\pi$ u holda

$$\varphi_k = \frac{2\pi}{k}(k = 0,1,..,h-1)$$

va

$$e^{i\varphi_k} = \varepsilon^k (\varepsilon = e^{i\varphi_1} = e^{\frac{2\pi}{k}i}, k = 0,1...,h-1) \qquad (4.28)$$

$$\lambda_k = r\varepsilon^k, (k = 0,1,2...,h-1) \qquad (4.29)$$

$\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{h-1}$ sonlar (4.4) tenglamaning to'la yechimlar sistemasini tashkil etadi.

(4.28) mos ravishda quyidagiga ega bo'lamiz:

$$D_k = D^k, (D = D_1, k = 0,1,2,..h-1) \qquad (4.30)$$

Endi (4.24) tenglikdan k=1 da

$$A = e^{i\frac{2\pi}{h}} DAD^{-1} \qquad (4.31)$$

hosil bo'ladi. Bundan kelib chiqadiki, A matritsa $e^{i\frac{2\pi}{h}}$ ga ko'paytirilganda o'xshash matritsaga o'tadi, demak, A matritsada xarakteristik sonlarning to'la

sistemasi $e^{i\frac{2\pi}{h}}$ ga ko'paytirilganda o'zi-o'ziga o'tadi.

$$D^h = E$$

ekanligidan ko'rinadiki, d ning diagonalidagi barcha elementlari birning h-darajali ildizlari bo'ladi. A dagi (mos ravishda D dagi) qatorlarni o'rin almashtirish bilan D matritsa quyidagi kvazidiagonal ko'rinishga kelishi mumkin:

$$D = \{\tau_0 E_0, \tau_1 E_1, ..., \tau_{s-1} E_{s-1}\} \qquad (4.32)$$

bu yerda $E_0, E_1, ..., E_{s-1}$ -birlik matritsalar va

$$\tau_p = e^{i\psi_p}, \psi_p = n_p \frac{2\pi}{h}$$

(n_p-butun son, p=0,1,...,s-1, $0<n_0<n_1<\ldots<n_{s-1}<h$) ma'lumki, $s \leq h$.

A matritsani quyidagicha blok ko'rinishida yozib,

$$A = \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{s1} & A_{s2} & \dots & A_{ss} \end{Vmatrix} \tag{4.33}$$

$$\varepsilon A_{pq} = \frac{\tau_{q-1}}{\tau_{p-1}} A_{pq} (p, q = 1, 2, ,..., s) \quad \varepsilon = e^{\frac{2\pi}{h} i} \tag{4.34}$$

Bundan ixtiyoriy p va q da $\frac{\tau_{q-1}}{\tau_{p-1}} = \varepsilon$ yoki $A_{pq} = 0$.

p=1 deb olamiz. Barcha $A_{12}, A_{13}, ..., A_{1n}$ matritsalar bir vaqtda nolga aylanishi mumkin emas, u holda $\frac{\tau_1}{\tau_0}, \frac{\tau_2}{\tau_0}, ..., \frac{\tau_{s-1}}{\tau_0} (\tau_0 = 1)$ yechimlar dan biri ε ga teng bo'lishi kerak. Bu faqat $n_1 = 1$ dagina mumkin.

U holda $\frac{\tau_1}{\tau_0} = \varepsilon$ va $A_{11} = A_{13} = ... = A_{1s} = 0$ xuddi shunday (4.34)da p=2 deb olib, $n_2 = 2$ va $A_{21} = A_{22} = ... = A_{2s} = 0$ va hokazo. Natijada quyidagini hosil qilamiz:

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & A_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & . & A_{s-1,s} \\ A_{s1} & A_{s2} & A_{s3} & \dots & A_{ss} \end{Vmatrix}$$

Shunday qilib, $n_1 = 1, n_2 = 2, \ldots, n_{s-1} = s-1$. Ammo p=s da (4.34) tenglikning o'ng tomonida quyidagi ko'paytuvchi turadi:

$$\frac{\tau_{q-1}}{\tau_{p-1}} = e^{(q-s)\frac{2\pi}{h} i} (q = 1, 2, .., s)$$

bu sonlardan biri $\varepsilon = \frac{2\pi}{h} i$ ga teng bo'lishi kerak. Bu faqat s=h va q=1 dagina mumkin, demak, $A_{s2} = ... = A_s = 0$ shunday qilib,

$$D = \{E_0, \varepsilon E_1, \varepsilon^2 E_2, ..., \varepsilon^{h-1} E_{h-1}\}$$

va A matritsa (4.5) ko'rinishga ega.

Frobenus teoremasi to'la isbotlandi.

§3. Yoyiluvchi matritsa

Avvalgi paragrafda aytilgan yoyilmaydigan manfiymas matritsalarning spektral xossasi yoyiluvchi matritsalarga o'tganda o'z kuchini yo'qotadi. Ammo ixtiyoriy $A \geq 0$ manfiymas matritsa har doim yoyilmaydigan va hattoki musbat A_m matritsalar ketma-ketligi sifatida ifodalanishi mumkin

$$A = \lim_{m \to \infty} A_m (A_m > 0, m = 1,2,...), \tag{4.35}$$

u holda ba'zi yoyilmaydigan matritsalar spektral xossalari kuchsizlantirilgan shaklda yoyiluvchi matritsalar uchun ham o'rinli.

$A = \|a_{ik}\|_{i,k=1}^{n}$ manfiymas matritsa uchun quyidagi teoremani isbotlaymiz:

Teorema 4. 3. *A manfiymas matritsa har doim r manfiymas xarakteristik songa egaki, unda A matritsaning barcha xarakteristik ildizlarining moduli r dan ortmaydi. Bu r maksimal xarakteristik songa $y \geq 0$ manfiymas xos vektor mos keladi:*

$$Ay = ry(y \geq 0, y \neq 0)$$

Isboti. A matritsa uchun (4.35) o'rinli bo'lsin. A_m matritsaning maksimal xarakteristik sonini $r^{(m)}$ bilan unga mos normalangan musbat xos vektorni $y^{(m)}$ bilan belgilaymiz:

$$A_m y^{(m)} = r^{(m)} y^{(m)} \left[y^{(m)} g^m = 1, \ y^{(m)} > 0; \ m = 1, 2, ,... \right] \tag{4.36}$$

u holda (4.35) dan kelib chiqadiki, quyidagi limit mavjud:

$$\lim r^{(m)} = r$$

bu yerda r - A matritsaning xarakteristik soni. $r^{(m)} > 0$ va

$r^{(m)} > \left|\lambda_0^{(m)}\right|$, bu yerda $\lambda_0^{(m)} - A_m$ matritsaning xarakteristik soni (m=1,2…) ekanligidan limitga o‘tib, quyidagini hosil qilamiz:

$$r \geq 0, \qquad r \geq \left|\lambda_0\right| \tag{4.37}$$

bu yerda λ_0 – A matritsaning ixtiyoriy xarakteristik soni. Bu limitik o‘tishdan (4.35) bilan birga quyidagi hosil bo‘ladi:

$$B(r) \leq 0 \tag{4.38}$$

normalangan xos vektorlar $y^{(m)}(m=1,2...)$ ketma-ketligidan qandaydir normalangan y vektorga yaqinlashuvchi $y^{(m_p)}(p=1)$ qism ketma-ketlik ajratish mumkin. (4.36) tenglikdan limitga o‘tib, quyidagini hosil qilamiz:

$$Ay = ry(y \geq 0, y \neq 0)$$

teorema isbotlandi.

Manfiymas elementli matritsalar uchun muhim bo‘lgan qator tasdiqlarni qarab chiqamiz:

1. Agar $A = \left\| a_{ik} \right\|_{i,k=1}^{n}$ -r maksimal xarakteristik sonli manfiymas matritsa bo‘lsa, u holda

$$(\lambda E - A)^{-1} > 0, \quad \frac{d}{d\lambda}(\lambda E - A)^{-1} \leq 0, \qquad \lambda > r \tag{4.39}$$

haqiqatan, $\lambda > r > 0$ da

$$(\lambda E - A)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{\lambda^{j+1}} > 0 \tag{4.40}$$

yoyilma o‘rinli, shuning uchun

$$\frac{d}{d\lambda}(\lambda E - A)^{-1} = -\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+1)A^j}{\lambda^{j+2}} \leq 0 \tag{4.41}$$

2. Agar A – r maksimal xarakteristik sonli manfiymas matritsa bo‘lib, $B(\lambda)$ va $C(\lambda)$ mos ravishda uning yopishgan va keltirilgan yopishgan matritsalari bo‘lsa, u holda

$$\lambda \geq r \text{ da } B(\lambda) \geq 0, \quad C(\lambda) \geq 0 \tag{4.42}$$

bo‘lib,

$$B(\lambda) = (\lambda E - A)^{-1}\Delta(\lambda), \quad C(\lambda) = (\lambda E - A)^{-1}\psi(\lambda)$$

va

$$\lambda > r \text{ da } \Delta(\lambda) > 0, \psi(\lambda) > 0 \tag{4.43}$$

ekanligidan, (4.39) dan (4.42) kelib chiqadi.

3. Agar A yoyilmaydigan, r maksimal xarakteristik sonli matritsa bo'lsa, u holda

$$\lambda > r \text{ da } (\lambda E - A)^{-1} > 0, \frac{d}{d\lambda}(\lambda E - A)^{-1} < 0, \qquad (4.44)$$

$$\lambda \geq r \text{ da } B(\lambda) > 0, \ C(\lambda) > 0 \qquad (4.45)$$

4. r' -A manfiymas matritsaning tartibi n dan kichik bo'lgan bosh minorning xarakteristik soni bo'lib, r-A matritsaning maksimal xarakteristik soni bo'lsa,

$$r' \leq r \qquad (4.46)$$

bo'ladi. Agar (n-1)-tartibli minor uchun $r' < r$ bo'lsa, u holda

$$\Delta(\lambda) = |\lambda E - A|$$

xarakteristik aniqlovchi uchun

$$r' < \lambda < r \text{ da } \Delta(\lambda) < 0 \qquad (4.47)$$

tengsizlik o'rinli.

Agar A–yoyilmaydigan matritsa bo'lsa, u holda (4.46) da tenglik belgisi bo'lmaydi, ya'ni, $r' < r$ bo'ladi.

Agar A–yoyilmaydigan matritsa bo'lsa, u holda, xech bo'lmaganda, bitta bosh minor uchun (4.46) da tenglik belgisi o'rinli, ya'ni, $r' = r$ bo'ladi.

5. Agar $A \geq 0$ yoyiluvchi matritsa bo'lib,

$$\Delta(r) = \begin{vmatrix} r - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & r - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & r - a_{nn} \end{vmatrix}$$

xarakteristik aniqlovchisining qandaydir bosh minori nolga aylansa, u holda shu minorni o'rab turuvchi minor xususiy holda (n-1)-tartibli bosh minorlardan biri

$$B_{11}(\lambda), B_{22}(\lambda), \ldots, B_{nn}(\lambda)$$

nolga aylanadi.

6. $A \geq 0$ matritsa faqat va faqat

$$B_{ii}(r) \geq 0 (i = 1, 2 \ldots, n)$$

munosabatlardan birida tenglik belgisi o'rinli bo'lsa, yoyiluvchi bo'ladi.

7. Agar r-A>0 matritsaning maksimal xarakteristik soni bo'lsa, u holda ixtiyoriy $\lambda > r$ da $A_\lambda = \lambda E - A$ xarakteristik matritsaning barcha bosh minorlari musbat, ya'ni:

$$A_\lambda \begin{pmatrix} i_1, i_2 ... i_p \\ i_1, i_2 .... i_p \end{pmatrix} \geq 0, (\lambda \geq r, 1 \leq i_1 < i_2 < .... < i_p \leq n; p = 1,2,..,n) \tag{4.48}$$

bo'ladi.

Lemma 4.3. (Kotelyanskiy lemmasi).

Agar $G = \| g_{ik} \|_{i,k=1}^{n}$ haqiqiy matritsada diagonalda yotmagan barcha elemenlar manfiy yoki nolga teng,

$$g_{ik} \leq 0 \quad (i \neq k, i.k = 1,2,....,n) \tag{4.49}$$

bosh minorlar ketma-ketligi ega musbat

$$g_{11} = G\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} > 0,\ G\begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix} > 0, ...,\ G\begin{pmatrix} 12....n \\ 12....n \end{pmatrix} > 0 \tag{4.50}$$

bo'lsa, u holda G matritsaning bosh minorlari musbat,

$$G\begin{pmatrix} i_1, i_2 ... i_p \\ i_1, i_2 .... i_p \end{pmatrix} \geq 0 \quad (1 \leq i_1 < i_2 < .... < i_p \leq n;\ p = 1,2,..,n)$$

bo'ladi.

Teorema 4.4. λ haqiqiy son $A = \| a_{ik} \|_{i,k=1}^{n} > 0$ matritsaning r maksimal xarakteristik sonidan katta, $r < \lambda$ bo'lishi uchun λ ning bu qiymatida $A_k = \lambda E - A$ ketma-ketligi musbat, $\lambda - a_{11} > 0$,

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{vmatrix} > 0,$$

$$, ..., \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & ... & a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ -a_{n1} & -a_{n2} & ... & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} \tag{4.51}$$

bo'lishi zarur va yetarli.

Teorema 4.5. Diagonalda yotmagan elementlari manfiymas bo'lgan $C = \| c_{ik} \|_{i,k=1}^{n} > 0$ haqiqiy matritsaning barcha xarakteristik sonlari manfiy haqiqiy qismga ega bo'lishi uchun

$$c_{11} < 0, \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, (-1)^n \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} \qquad (4.52)$$

tengsizlik bajarilishi zarur va yetarli.

Teorema 4.6. A-manfiymas matritsaning ixtiyoriy lementi o'sganda uning maksimal xarakteristik soni kamaymaydi. U qat'iy o'sadi, agarda A yoyilmaydigan matritsa bo'lsa.

Teorema 4.6'. Agar mos ravishda r va r1 maksimal xarakteristik sonli A va A1 manfiymas matritsalar berilgan bo'lsa, u holda $A \le A_1$ tengsizlikdan $r \le r_1$ tengsizlik kelib chiqadi. Agar A yoyilmaydigan matritsa bo'lsa, $r < r_1$ bo'ladi.

Isboti. A –yoyilmaydigan matritsa bo'lsin. U holda A1 ham yoyilmaydigan matritsa bo'ladi. A1 matritsaning r1 xarakteristik soni uchun xos vektorini x bilan belgilaymiz:

$$A_1 x = r_1 x \ \ (x > 0)$$

bundan,

$$\left(r_1 - r\right) x = Ax - rx + (A_1 - A)x \qquad (4.53)$$

ammo $(A_1 - A)x \ge 0$. Shuning uchun agar x A matritsaning r xarakteristik soni uchun xos vektor bo'lmasa, u holda qandaydir $i (1 \le i \le n)$ indeksda

$$\left(r_1 - r\right) x_i = (A_1 - A) x_i > 0$$

ya'ni, yana $r < r_1$ bo'ladi.

Yoyiluvchi matritsa bo'lgan holda $A_\varepsilon = A + \varepsilon B$ va $A_{1\varepsilon} = A_1 + \varepsilon B, B > 0, \varepsilon > 0$ matritsalarni kiritamiz, u holda $A_\varepsilon \le A_{1\varepsilon} va A_\varepsilon \ge 0$ bo'ladi. Shuning uchun $r_\varepsilon < r_{1\varepsilon}$ mos ravishda $A_\varepsilon va A_{1\varepsilon}$ matritsalarning maksimal xarakteristik sonlari. $\varepsilon \to 0$

da limitga o'tsak, $A_\varepsilon va A_{1\varepsilon}$ lar mos ravishda A va A_1 da, $r_\varepsilon < r_{1\varepsilon}$ tengsizlik $r < r_1$ tengsizlikka o'tadi.

Mashqlar: Manfiymas elementli matritsalar uchun muhim bo'lgan 1-7 tasdiqlarni isbotlang.

§4. Yoyiluvchi matritsaning normal ko'rinishi

Ixtiyoriy $A = \| a_{ik} \|_{i,k=1}^{n}$ yoyiluvchi matritsani qaraymiz. Uning qatorlarini almashtirib, quyidagi ko'rinishga keltirish mumkin;

$$A = \begin{Vmatrix} B & O \\ C & D \end{Vmatrix} \tag{4.54}$$

bu yerda B,D – kvadrat matritsalar.

Agar B va D matritsalar yoyiluvchi bo'lsa, uni (4.54)ga o'xshash ko'rinishda tasvirlash mumkin, shundan so'ng A matritsa quyidagi ko'rinishni oladi:

$$A = \begin{Vmatrix} K & O & O \\ H & L & O \\ F & G & M \end{Vmatrix}$$

Agar, K,L,M matritsalarning qandaydir biri yoyiluvchi bo'lsa, yuqoridagi jarayonni yana davom ettirish mumkin. Qatorlarni almashtirish natijasida biz A matritsada uchburchak bloklar (shakli) ko'rinishini beramiz:

$$A = \begin{Vmatrix} A_{11} & O & \dots & O \\ A_{21} & A_{22} & \dots & O \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{s1} & A_{s2} & \dots & A_{ss} \end{Vmatrix} \tag{4.55}$$

bu yerda diagonaldagi bloklar yoyilmaydigan kvadrat matritsalardir.

Diagonaldagi A_{ii} $(1 \le i \le s)$ blok matritsalar ajralgan deyiladi, agarda

$$A_{ik} = 0(k = 1,2, \dots, i-1, i+1, \dots, s)$$

bo'lsa. (4.55) matritsada blokli qatorlarni o'rinlarini almashtirib, barcha ajralgan bloklarni bosh diagonal bo'ylab birinchi o'ringa qo'yamiz. Shundan so'ng A matritsa quyidagi ko'rinishni oladi:

$$A = \begin{Vmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_g & 0 & \dots & 0 \\ A_{g+1,1} & A_{g+1,2} & \dots & A_{g+1,g} & A_{g+1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{s1} & A_{s2} & \dots & A_g & A_{s,g+1} & \dots & A_s \end{Vmatrix} \qquad (4.56)$$

bu yerda $A_1, A_2, \dots, A_s$ yoyilmaydigan matritsalar har bir qatordagi,

$$A_{f1}, A_{f2}, \dots, A_{f,f-1} (f = g + 1, \dots, s),$$

matritsaning hech bo'lmaganda bittasi noldan farqli.

(4.56) matritsani yoyiluvchi A matritsaning normal shakli deb ataymiz.

Teorema 4.7. $A \geq 0$ matritsaning r maksimal xarakteristik soniga faqat va faqat shu holda musbat xos vektor mos keladi, qachonki, A matritsaning (4.64) normal shaklida:

1. $A_1, A_2, \dots, A_g$ matritsaning har biri o'zining r xarakteristik soniga ega:

2. $g < s$ da $A_{g+1}, A_{g+2}, \dots A_s$ matritsalarning birortasi ham bunday xossaga ega emas.

Isboti. R-maksimal xarakteristik soniga z>0 musbat xos vektor mos kelsin. Bloklarga bo'lish bilan mos ravishda (4.56) da z ustunni $z^k (k = 1,2, \dots, s)$
qismlarga ajratamiz. U holda

$$Az = rz \quad (z > 0) \qquad (4.57)$$

tenglik quyidagi ikkita tengliklar sistemasiga almashadi:

$$A_i z^i = rz^i \quad (i = 1,2, \dots, g) \qquad (4.57')$$

$$\sum_{h=1}^{j-1} A_{jh} z^h + A_j z^j = rz^j, \ (j = g + 1, \dots, s) \qquad (4.57'')$$

(4.57') da kelib chiqadiki, r har bir $A_1, A_2, \dots, A_s$ matritsaning xarakteristik soni bo'ladi. (4.57″) dan quyidagini topamiz:

$$A_j z^j \leq r z^j, A_j z^j \neq r z^j, (j = g + 1, \dots, s) \qquad (4.58)$$

r_j bilan $A_j (j = g + 1, .., s)$ matritsaning maksimal xarakteristik sonini belgilaymiz. U holda (4.58)dan quyidagini topamiz:

$$r_j \leq max \frac{(A_j z^j)i}{z_i^j} \leq r, (j = g + 1, .., s)$$

ikkinchi tomondan $r_j = r$ tenglik (4.58) ning ikkinchi munosabatiga ziddir. Shuning uchun

$$r_j < r \quad (j = g + 1, \dots, s) \qquad (4.59)$$

endi aksincha, $A_i \ (i = 1,2, \dots, g)$ matritsalarning r ga teng maksimal xos qiymati berilgan bo'lsin, $A_j (j = g + 1, .., s)$ matritsalar uchun esa (4.59) tengsizliklar o'rinli. U holda izlanayotgan (4.57) tenglikni 4.57′ va 4.57″ tengliklar sistemasi bilan almashtirib, 4.57′ dan $A_i \ (i = 1,2, \dots, g)$ matritsaning z^i musbat xos ustunlarini aniqlashimiz mumkin. Shundan so'ng, (4.57″) dan $z^j \ (j = g + 1, .., n)$ ustunlarni topamiz:

$$z^i = \left(r E_j - A_j\right)^{-1} - \sum_{k=1}^{j-1} A_{jk} z^h \quad (j = g + 1, .., s) \qquad (4.60)$$

bu yerda E_j shu tartibli birlik matritsa bo'lib, A_j kabi

$$(j = g + 1, .., s)$$

$$r_j < r(j - g + 1, \dots, s)$$

bo'lgani uchun

$$\left(r E_j - A_j\right)^{-1} > 0 \ (j = g + 1, \dots s) \qquad (4.61)$$

(4.60) formulalar bilan aniqlangan $z^{g+1}, \dots, z^s$ ustun musbat ekanligini induktiv usul bilan isbotlaymiz. Buning uchun ixtiyoriy $j \ (g + 1 \leq j \leq n)$ da $z^1, z^2, \dots, z^{j-1}$ ustunning musbatligidan $z^j > 0$ kelib chiqishini ko'rsatamiz. Haqiqatan, bu holda

$$\sum_{k=1}^{j-1} A_{jk} z^k \geq 0 \quad \sum_{k=1}^{j-1} A_{jk} z^k \neq 0$$

bo'lib, buni (4.61) bilan birgalikda qarasak, (4.60) ga asosan kelib chiqadi.

Shunday qilib, $z = \begin{Vmatrix} z^i \\ \cdot \\ z^s \end{Vmatrix}$ musbat ustun A matritsaning r harakteristik soni uchun xos vektor bo'ladi.

Teorema 4.7'. A matritsaning r maksimal xarakteristik soniga A matritsaning va AT transponirlangan matritsaning musbat xos vektori javob beradi, agarda A matritsa qatorlarini almashtirish bilan uni quyidagicha kvazidiagonal ko'rinishda tasvirlash mumkin bo'lsa.

$$A = \{A_1, A_2, \dots, A_s,\} \tag{4.62}$$

bu yerda $A_1, A_2, \dots, A_s$ – har biri o'zining r maksimal xarakteristik soni oddiy bo'lib, unga A va AT matritsalarning musbat xos vektorlari mos kelsa, u holda A –yoyilmaydigan matritsa bo'ladi.

Aksincha, har qanday yoyilmaydigan matritsa natijada ko'rsatilgan xossaga ega bo'ladi, u holda bu xossa yoyilmaydigan manfiymas matritsaning spektral xarakteristikasini ifodalaydi.

5§ Primitiv va imprimitiv matritsalar

Ta'rif 4.3. Agar $A \geq 0$ yoyilmaydigan matritsa hammasi bo'lib, h ta $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ r maksimal modulli

$$(|\lambda_1| = |\lambda_2| = \dots = |\lambda_k| = r)$$

xarakteristik sonlarga ega bo'lsa, u holda h<1 da A-primitiv matritsa, h>1 da esa imprimitiv matritsa deyiladi. h son A matritsaning imprimitivlik indeksi deyiladi.

Agar A matritsaning xarakteristik tenglamasi (ko'phadi)

$$\Delta \lambda = \lambda^n + a_1 \lambda^{n1} + \dots + a_{t_n} \lambda^{nt} = 0$$

$$(n > n_1 > n_2 > \cdots > n_t, a_1 \neq 0, a_2 \neq 0, \dots, a_t \neq 0)$$

bo'lsa, u holda uning imprimitivlik indeksi h quyidagi ifodaning eng katta umumiy bo'luvchisiga teng bo'ladi:

$$n - n_1, n_1 - n_2, \dots, n_{t-1} - n_t \qquad (4.63)$$

haqiqatan, frobenus teoremasiga ko'ra, A matritsaning spektri λ -kompleks tekislikni $\lambda \neq 0$ nuqta atrofida $\frac{2\pi}{h}$ burchakka burishda o'ziga o'tadi. Shuning uchun Δ (λ) ko'phad qandaydir g(M) ko'phaddan

$$\Delta(\lambda) = g(\lambda^h)\lambda^n$$

formula yordamida hosil qilinishi kerak. Bundan kelib chiqadiki, h (4.63) ayirmalarning EKUBi ga teng bo'ladi.

Teorema 4.8. $A \geq 0$ matritsa faqat va faqat shu holda primitiv bo'ladiki, qachonki, A matritsaning qandaydir darajasi musbat bo'lsa:

$$A^p > 0 \quad (p > 1) \qquad (4.64)$$

Isboti. Agar $A^p > 0$ bo'lsa, u holda A matritsa yoyilmaydigan bo'ladi, chunki A matritsaning yoyiluvchanligidan A^p matritsaning yoyiluvchanligi kelib chiqadi. A matritsa uchun h>1 bo'ladi, aks holda A^p musbat matritsa

$$\lambda_1^p, \lambda_2^p, \dots, \lambda_h^p$$

h ta r^p maksimal modulli xarakteristik sonlarga ega bo'ladi. Bu perron teoremasiga ziddir.

Endi aksincha bo'lsin, ya'ni, A primitiv matritsa berilgan bo'lsin.

$$A^p = \sum_{k=1}^{s} \frac{1}{(m_k-1)!} \left[\frac{C(\lambda)\lambda^p}{\varphi^k(\lambda)}\right]^{m_k-1}_{\lambda=\lambda_.} \qquad (4.65)$$

bu yerda

$$\varphi(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2} \dots (\lambda-\lambda_s)^{m_s} \quad (\lambda_i \neq \lambda_f, \text{ j} = \text{f da})$$

A-matritsaning minimal ko'phadi,

$$\varphi^k(\lambda) = \frac{\varphi(\lambda)}{(\lambda-\lambda_k)^{m_k}} \, (k = 1,2,\dots,s) \; C(\lambda)$$

esa keltirilgan, yopishgan matritsa

$$C(\lambda) = \left((\lambda E - A)^{-1} \varphi(\lambda) \right)$$

bu holda

$$\lambda_1 = \mathrm{r} > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_s|, \mathrm{m} = 1 \qquad (4.66)$$

deb olish mumkin bo‘lib,

$$A^p = \frac{C(r)}{\varphi'(r)} r^p - \sum_{k=1}^{s} \frac{1}{(m_k-1)!} \left[\frac{C(\lambda)\lambda^p}{\varphi^k(\lambda)} \right]_{\lambda=\lambda_k}^{m_k-1}$$

bo‘ladi. Bundan (4.65) ga asosan

$$\lim_{p\to\infty} \frac{A^p}{r^p} = \frac{C(r)}{\varphi'(r)} \qquad (4.67)$$

bo‘ladi.

Ikkinchi tomondan C(r)>0 va $\varphi'(r) > 0$. Shuning uchun

$$\lim_{p\to\infty} \frac{A^p}{r^p} > 0$$

bo‘lib, qandaydir 1 dan boshlab, $A^p > 0$ bo‘ladi.

Eslatma. Agar A matritsa primitiv va $A^p > 0$ bo‘lsa, u holda barcha m>p uchun $A^m > 0$ bo‘ladi, A matritsa nolli qatorni o‘zida saqlamaydi.

Natija. Primitiv matritsaning darajasi har doim yoyilmaydigan va primitiv bo‘ladi.

Lemma 4.4. Agar A-primitiv matritsa bo‘lsa, u holda ixtiyoriy ikkita *i*, k indekslar uchun shunday $i, i_1, i_2, \dots, i_s, k \; (s \geq 0)$ indekslar zanjiri mavjudki, unda

$$a_{ii_1} > 0, a_{i_1 i_2} > 0, \dots, a_{i_s k} > 0$$

bo‘ladi.

Bunday zanjirlarni A matritsada *i* dan k ga olib boradi deb aytamiz. S+1 son zanjirning uzunligi deyiladi. *i* dan k ga olib boruvchi eng qisqa zanjirda barcha zanjirlar juft-jufti bilan har xil bo'ladi.

Lemmani isbotlash uchun $s \geq 0$ deb olish yetarli bo'lib, unda

$$A^{s+1} = \left\| a_k^{s+1} \right\|_{i,k=1}^{n} > 0$$

bo'lishi kerak. U holda

$$\sum_{i_1, i_2, \dots, i_s = 1}^{n} a_{ii_1} a_{i_1 i_2} \dots a_{i_s k} - a_{ik}^{s+1} > 0$$

va barcha qo'shiluvchilar manfiymas, u holda ularning hech bo'l-maganda bittasi musbat bo'ladi. U so'ralayotgan indekslar zanjirini beradi.

Teorema 4.9. Agar $A \geq 0$ - yoyilmaydigan matritsa bo'lib, uning qandaydir darajasi A^q yoyiluvchi bo'lsa, u holda A^q daraja to'la yoyiluvchi, ya'ni, A^q ni qatorlarini A^q daraja to'la yoyiluvchi, ya'ni, A^q qatorini almashtirib, quyidagi ko'rinishda tasvirlash mumkin:

$$A^q = \{A_1, A_2, \dots, A_d,\} \quad (4.68)$$

bu yerda $A_1, A_2, \dots, A_d$-yoyilmaydigan matritsalar. Bu matritsal-ar bir xil maksimal xarakteristik songa ega. Shu bilan birga, d son q va h sonlarning eng katta umumiy bo'luvchisi bo'lib, bu yerda h son A matritsaning imprimitivlik indeksi.

Isboti. A matritsa yoyilmaydigan bo'lgani uchun Frobenus teo-remasiga ko'ra, r maksimal xarakteristik songa a va A^T matritsalar-ning musbat xos vektorlari mos keladi. Ammo bu musbat vektorlar $\lambda = rq$ xarakteristik songa A^q va $(A^q)^T$ matritsalar uchun ham xos vektorlar bo'ladi. Shuning uchun ham A^q darajaga teorema 4.7 ni qo'llab, bu darajani (4.68) ko'rinishda tasvirlaymiz. Bu yerda $A_1, A_2, \dots, A_d$ lar yoyilmaydigan matritsalar bo'lib, r^q maksimal xarakteristik songa ega bo'ladi. Ammo A matritsa r maksimal mod-ulli quyidagi h ta xarakteristik songa ega:

$$r, r\varepsilon, \dots, r\varepsilon^{h-1} (\varepsilon = e^{\frac{2\pi}{h} i}),$$

shuning uchun A^q matritsa ham quyidagi h ta maksimal modulli xarakteristik songa ega

$$r^q, r^q \varepsilon^q, \dots, r^q \varepsilon^{q(h-1)}$$

d ta son r^q ga teng bo'ladi. Bu faqat d son q va h larning eng katta umumiy bo'luvchisi bo'lgandagina mumkin. Teorema isbotlandi.

Agar teorema 4.9 da q=h deb olsak, quyidagi natijani hosil qilamiz.

Natija. Agar A-h imprimtivlik indeksli imprimitiv matritsa bo'lsa, u holda Ah daraja bir xil maksimal xarakteristik songa ega bo'lgan h ta primitiv matritsalarga yoyiladi.

§6. To'la manfiymas matritsalar

Ta'rif 4.4. To'g'ri to'rtburchakli

$$A = \|a_{ik}\| \quad (i = 1,2,\dots,m; k = 1,2,\dots,n)$$

matritsa to'la manfiymas (to'la musbat) deyiladi, agarda bu matritsaning ixtiyoriy tartibli barcha minorlari manfiymas (musbat) bo'lsa:

$$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ k_1 & k_2 & \dots & k_p \end{pmatrix} \geq 0 \quad (\text{mos ravishda} > 0)$$

$$\left(1 \leq \begin{matrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ k_1 & k_2 & \dots & k_p \end{matrix} \leq n; p = 1,2,\dots,\min(m,n)\right)$$

biz to'la manfiymas va to'la musbat kvadrat matritsalarni qarash bilan chegaralanamiz.

Misol.

1. Vandermondning umumlashgan matritsasi

$$V = \left\|a_i^{\alpha_k}\right\|_{i,k=1}^{n} (0 < a_1 < a_2 < \dots < n; \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n)$$

to'la musbat bo'ladi.

Yakobincha matritsa

$$J = \left\|\begin{matrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & c_{n-1} a_n \end{matrix}\right\|$$

to'la manfiymas bo'lishi uchun uning barcha bosh minorlari va b, c elementlari manfiymas bo'lishi zarur va yetarli.

To‘la manfiymas A matritsa uchun quyidagi muhim determinant tengsizlik o‘rinli:

$$A\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ 1 & 2 & \dots & n\end{pmatrix} \leq \tag{4.69}$$

$$\leq A\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & p\\ 1 & 2 & \dots & p\end{pmatrix} A\begin{pmatrix}p+1 & \dots & n\\ p+1 & \dots & n\end{pmatrix} (p < n)$$

bu tengsizlikni quyidagi lemmadan foydalanib isbotlaymiz:

Lemma 4.5. Agar a-to‘la manfiymas matritsada qandaydir bosh minor nolga teng bo‘lsa, u holda bu minorni o‘rab turuvchi ixtiyoriy bosh minor nolga teng bo‘ladi.

Faraz qilaylik, a matritsaning barcha bosh minorlari noldan farqli bo‘lsin, chunki birorta bosh minorlari nolga teng bo‘lsa, yuqoridagi lemmaga asosan $|A| = 0$ bo‘lib, bu holda (4.69) tengsizlikning bajarilishi ravshan.

n=2 da (4.69) tengsizlikning o‘rinliligi bevosita tekshiriladi:

$$A\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \leq a_{11}a_{22}$$ chunki

$$a_{12} \geq 0, a_{21} \geq 0.$$

$n > 2$ da (4.69) tengsizlikni barcha n dan kichik tartibli matritsalar uchun o‘rinli deb olamiz. Bundan tashqari, umumiylikni buzmasdan p>1 deb hisoblashimiz mumkin, aks holda, satr va ustunlarni teskari raqamlash hisobiga p va n-p larning rollarini almashtirishimizga to‘g‘ri keladi.

$$D = \|d_{ik}\|$$

$$d_{ik} = A\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & p-1 & i\\ 1 & 2 & \dots & p-1 & k\end{pmatrix}, \quad (i,k = 1,p+1,\dots,n)$$

matritsani qaraymiz. Ikki marta Silvestr ayniyatidan va n dan kichik tartibli matritsalar uchun (4.69) tengsizlikni qo‘llab, quyidagiga ega bo‘lamiz.

$$A\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ 1 & 2 & \dots & n\end{pmatrix} = \frac{D\begin{pmatrix}p & p+1 & \dots & n\\ p & p+1 & \dots & n\end{pmatrix}}{\left[A\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & p-1\\ 1 & 2 & \dots & p-1\end{pmatrix}\right]^{n-p}}$$

$$\leq \frac{d_{pp} D\begin{pmatrix}p+1 & \dots & n\\ p+1 & \dots & n\end{pmatrix}}{D\begin{pmatrix}p & p+1 & \dots & n\\ p & p+1 & \dots & n\end{pmatrix}}$$

$$= \frac{A\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & p\\ 1 & 2 & \dots & p\end{pmatrix} A\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & p-1 & p+1 & \dots & n\\ 1 & 2 & \dots & p-1 & p+1 & \dots & n\end{pmatrix}}{A\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & p-1\\ 1 & 2 & \dots & p-1\end{pmatrix}}$$

$$\leq A\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & p\\ 1 & 2 & \dots & p\end{pmatrix} A\begin{pmatrix}p+1 & \dots & n\\ p+1 & \dots & n\end{pmatrix} \tag{4.70}$$

demak, (4.69) tengsizlik o‘rinli.

Ta’rif 4.5. $A = \|a_{ik}\|_{i,k=1}^{n}$ matritsaning

$$A\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \dots & i_p\\ k_1 & k_2 & \dots & k_p\end{pmatrix} \quad \left(1 \leq \begin{matrix}i_1 & i_2 & \dots & i_p\\ k_1 & k_2 & \dots & k_p\end{matrix} \leq n\right) \tag{4.71}$$

minori deyarli bosh minor deyiladi, agarda $i_1 - k_1, i_2 - k_{2,} \dots, i_p - k_p$ ayirmalarning faqat bittasi noldan farqli bo‘lsa.

Yuqorida keltirilgan barcha xulosalar o‘z kuchida qoladi, agarda “A-to‘la manfiymas matritsa” shartini undan kuchsizroq bo‘lgan “A matritsada barcha bosh va deyarli bosh minorlar manfiymas” shart bilan almashtirilsa.

Mashqlar:

1. To'la manfiymas matritsalarga misollar keltiring va ularning deyarli bosh minorlarini ajrating.

2. Agar $A \geq 0,\ B > C\ va\ AB$ aniqlangan bo'lsa, u holda $AB \geq AC$ ekanligini isbotlang.

3. Agar $A \geq 0,\ B > C\ va\ AB = 0$ bo'lsa, u holda A=0 ekanligini isbotlang.

4. Agar A keltiriluvchi matritsa bo'lsa, ixtiyoriy butun musbat p soni uchun A^p matritsa ham keltiriluvchi ekanligini isbotlang.

5. Agar

$$A = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{Vmatrix} \text{ va } x = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$$

bo'lsa, $y \leq Ax$ shartni qanoatlantiruvchi $y \geq 0$ vektorlar to'plamini yozing. $px \leq Ax$ shartni qanoatlantiruvchi eng katta p sonini toping.

6. Agar $A \in R_{nxn}$ manfiymas matritsa bo'lib, $\sigma_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}$ bo'lsa u holda quyidagini isbotlang

$$\min\sigma_j \leq \lambda \leq \max\sigma_j,$$

bu yerda λ – A matritsaning spektral radiusiga teng bo'lgan haqiqiy xos qiymati.

7. Agar A primitiv matritsa bo'lib, p musbat butun son bo'lsa, u holda A^p matritsa primitiv ekanligini isbotlang.

8. Agar $A \geq 0$ keltirilmaydigan matritsa bo'lib, $\varepsilon > 0$ bo'lsa, u holda xos qiymatlarni qarab chiqish yordamida $\varepsilon I + A$ matritsa primitiv ekanligini isbotlang.

V BOB

XOS QIYMATLAR REGULYARLIGI VA LOKALLIGINING HAR XIL KRITERIYLARI

§1. Adamarning regulyarlik kriteriysi va uning umumlashgani

$$A = \|a_{ik}\|_{i,k=1}^{n}$$

ixtiyoriy kompleks elementli $n \times n$ o'lchovli matritsa berilgan bo'lsin.

Faraz qilaylik, bu matritsa xos matritsa, ya'ni, $|A| = 0$ bo'lsin. U holda $|x_k| > 0$ maksimum bilan $x_1, x_2, \dots, x_n$ sonlar mavjud bo'lib, quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j = 0 \tag{5.1}$$

ammo bu holda

$$|a_{kk}||x_k| \le \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}||x_j| \le |x_k| \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}|$$

bo'lib, buni $|x_k|$ ga qisqartirsak,

$$|a_{kk}| \le |x_k| \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}| \tag{5.2}$$

hosil bo'ladi. Shuning uchun, agar

$$H_i = |a_{ii}| - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| > 0 \quad i = (1,2, \dots, n) \tag{5.3}$$

Adamar sharti bajarilsa, u holda (5.2) ko'rinishdagi tengsizlik o'rinli emas, demak, A matritsa regulyar (xosmas), ya'ni, $|A| \neq 0$ bo'ladi.

Shunday qilib, quyidagi teorema o'rinli:

Teorema 5.1: (Adamar teoremasi).

Agar $A = \|a_{ik}\|_{i.k=1}^{n}$ matritsa uchun (5.3) tengsizliklar bajarilsa, u holda A matritsada xosmas bo'ladi.

$H_i>0$ shart a_{ii} diagonal elementning moduli i-satr elementar modullari yig'indisidan katta (qat'iy) ekanligini bildiradi. Bunday a_{ii} element ustunlik qiluvchi (o'zining satri uchun) deyiladi.

Adamar sharti A matritsaning barcha diagonal elementlari (o'zining satri uchun ustunlik qiluvchi) bo'lishini talab qiladi.

Eslatma 1.

Agar (5.3) Adamar sharti bajarilsa, $mod|A|$ uchun quyidagi baho o'rinli:

$$mod|A| \geq H_1 H_2 \dots H_n > 0 \qquad (5.4)$$

(5.4) shartni o'rinli ekanligiga ishonch hosil qilish uchun

$$F = \|f_{ij}\|_{i,j=1}^{n}, |f_{ij}| = \frac{a_{ij}}{H_i} \quad (i, j = 1,2, \dots, n) \qquad (5.5)$$

yordamchi matritsani kiritamiz. bunda quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:

$$|f_{ii}| - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |f_{ij}| = 1 \;\; i = (1,2, \dots, n) \qquad (5.6)$$

λ bilan bu matritsaning qandaydir xarakteristik sonini belgilaymiz. λ Songa $|x_k| > 0$ maksimalli $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ xos vektor mos keladi. U holda

$$\lambda x_k = \sum_{j=1}^{n} f_{kj} x_j \qquad (5.7)$$

bu tengsizlikdan

$$|\lambda_0| | x_k | > | f_k | | x_k | - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} | f_k | |x_j| > |x_k| \left(| f_k | - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} | f_k | = |x_k| \right)$$

buni $|x_k|$ ga qisqartirib,

$$|\lambda_0| > 1$$

ni topamiz. Ammo $|F|$ aniqlovchi F matritsaning xarakteristik sonlari ko'paytmasiga teng. Ularning har biri 1 dan kichik emas. Shuning uchun

$$mod|F| \geq 1 \qquad (5.8)$$

ikkinchi tomondan

$$|F| = \frac{|A|}{H_1 \cdot H_2 \dots H_n} \tag{5.9}$$

(5.8) va (5.9) dan izlanayotgan (5.4) tengsizlik kelib chiqadi.

Eslatma 2.

$|A| = |A^T|$ ekanligidan a matritsani A^T matritsa bilan almashtirib, A matritsaning xosmasligidan yetarli shartini ustunlar uchun Adamar shartlari ko'rinishida quyidagicha hosil qilamiz:

$$G_i = |a_{ii}| - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ji}| > 0 \quad (i = 1,2,\dots,n) \tag{5.10}$$

bu shartlar bajarilganda (5.4) ning o'rniga quyidagiga ega bo'lamiz:

$$mod|A| \geq G_1 G_2 \dots . G_n \tag{5.11}$$

C-ixtiyoriy xosmas $n \times n$ o'lchovli matritsa bo'lsin. U holda A va Ac matritsalar bir vaqtda xosmas bo'ladi. Shuning uchun (5.3), (5.10) shartlarda, shuningdek, (5.4) va (5.11) baholarda A matritsani AC matritsa bilan almashtirish mumkin. C matritsani variatsiyalab, har xil o'zaro ekvivalent bo'lmagan xosmaslikning yetarli shartlarini, shuningdek, $|A|$ uchun (5.4) va (5.11) ga o'xshash baholarni hosil qilamiz. Xususiy holda, C matritsani tanlash hisobiga ustunlarni ixtiyoriy almashtirishni amalga oshirish mumkin. U holda (5.3) shartlarning o'rniga quyidagi shartlarni hosil qilamiz:

$$H_i = |a_{i\mu_i}| - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \mu_i}}^{n} |a_{ij}| > 0 \quad (i = 1,2,\dots,n) \tag{5.12}$$

bu yerda $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$- fiksirlangan, ammo 1,2,…n indekslarning ixtiyoriy o'rin almashgani.

Boshqacha aytganda

$$A = |a_{ij}|_{i,j=1}^{n}$$

matritsa xosmas bo'ladi, agarda uning har bir satrda ustunlik qiluvchi (diagonalda bo'lishi shart emas) element bo'lib, va bu n ta ustunlik qiluvchi elementlar har xil ustunlarda joylashgan bo'lsa.

Shunga o'xshash tasdiq ustunlar uchun ham o'rinli.

Endi quyidagi kuchsizlangan Adamar shartlari bajarilsin:

$$H_i = |a_{ii}| - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \geq 0 \quad (i = 1,2, \ldots, n) \qquad (5.13)$$

U holda har bir diagonal element o'zining satri uchun kuchsiz domirlovchi bo'ladi.

Faraz qilaylik, A matritsa xos va Ax=0 bo'lib, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq 0$ vektor ustun $|x_k|$ maksimal ustunli P ta X_k elementlarga ega va avval p<n bo'lsin, x vektor koordinatalarini qayta raqamlab, modul bo'yicha maksimal bo'lganlarini birinchi p ta koordinatalarga keltiramiz:

$$|x_1| = |x_2| = \cdots = |x_p| > |x_j|, \quad (j = p + 1, \ldots, n)$$

Bunda Ax=0 tenglik saqlanadi, agarda A matritsaning satr va ustunlarida qandaydir almashtirishni amalga oshirsak. Shundan so'ng quyidagini yozish mumkin:

$$a_{kk}x_k = -\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} a_{kj}x_j \quad (k = 1,2, \ldots, p)$$

bundan,

$$|a_{kk}||x_k| \leq (\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}|)|x_k| + \sum_{j=p+1}^{n} |a_{kj}||x_j| \leq |x_k| \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}|, \qquad (5.14)$$

$$(k = 1,2, \ldots, n)$$

Buni $|x_k|$ ga qisqartirib, quyidagini hosil qilamiz:

$$|a_{kk}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}| \quad (k = 1,2, \ldots, n) \qquad (5.15)$$

bu munosabatni (5.13) ga qo'yib xulosa qilamizki, (5.15) va (5.14) da tenglik belgisi o'rinli bo'ladi. Bu esa faqat

$$\sum_{j=p+1}^{n} |a_{kj}| = 0 \quad k = (p+1,\dots,n)$$

dagina bajariladi, ya'ni:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \overbrace{0}^{p\ ta} \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \tag{5.16}$$

ko'rinishda bo'ladi.

Ammo (5.16) ko'rinishdagi matritsa yoyiluvchi deyiladi. Shunday qilib, p<n da A –yoyiluvchi matritsa bo'ladi.

Agar p=n bo'lsa, u holda barcha (5.15) munosabatlarda (5.13) dagi tenglik belgisi o'rinli bo'ladi.

Biz A –xos matritsa deb olib, shunday xulosaga keldik.

Shunday qilib, quyidagi Adamar teoremasiga aniqlik kirituvchi quyidagi teoremani isbotladik.

Teorema 5.2. (Olga Tauski teoremasi).

Agar a-yoyilmaydigan matritsa uchun (5.13) Adamarning kuchsizlantirilgan shartda > belgi o'rinli bo'lsa, u holda A matritsa xosmas bo'ladi.

Bu teoremada $H_i \geq 0 \ (i = 1,2,\dots,n)$ shartlarni $G_i > 0 \ (i = 1,2,\dots,n)$ shartlar bilan almashtirish mumkin.

§2. Matritsa normasi

Har bir $x \in R^n$ vektorga bitta manfiymas $\|x\|$ sonni mos qo'yamiz. R^n fazodagi ixtiyoriy x,y vektorlar va λ - ixtiyoriy skalyar uchun quyidagi shartlar bajariladi:

1. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$,
3. $\|x\| > 0$ agarda $x \neq 0$ bo'lsa.
4. Shartda $\lambda = 0$ desak, $\|x\|$ =0 dagina bajarilishi kelib chiqadi. Bundan tashqari, 2 – Shartdan kelib chiqadiki, ixtiyoriy $x, y \in R^n$ vektorlar uchun

$$\|x-y\| \geq \|x\| - \|y\|$$

Quyidagi normalarni kiritish mumkin; vektorlarning "kubik" normasi

$$\|x\|_1 = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \tag{5.17}$$

yoki "oktaedrli" norma

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \tag{5.17'}$$

"Ermitcha" norma

$$\|x\|_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \tag{5.17''}$$

osongina tekshirib ko'rish mumkinki, bu normalar 1,2 va 3-shartlarni qanoatlantiradi.

Endi $m \times n$ o'lchovli to'g'ri to'rtburchakli A matritsani va uning y=Ax chiziqli almashtirishini qaraymiz. $x, \in R^n$, $y \in S^m$ vektorlar.

Bu fazolarda vektorlarning $\|x\|_R = \|x\|$ va $\|g\|_s = \|y\|$ normalarni kiritib, A matritsaning normasini quyidagicha aniqlaymiz:

$$\|A\| = \sup_{x \in R, x \neq 0} \frac{\|Ax\|_S}{\|x\|_R} \tag{5.18}$$

Normaning ta'rifidan quyidagi munosabat kelib chiqadi:

$$\|Ax\|_s \leq \|A\| \, \|x\|_R \tag{5.18'}$$

$$\|A+B\| \leq \|A_+\|B\| \tag{5.19}$$

$$\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\| \tag{5.19'}$$

pxn o'lchovli B matritsa R^n ni S^p ga akslantirsin, u holda AB matritsa R^n ni T^m ga akslantiradi. R^n,Sp, T^m fazolarda vektor normalarini va ular yordamida matritsalar normalarini kiritib, quyidagi tengsizlikka kelamiz:

$$\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\| \tag{5.19'}$$

Masalan, agar "kubik" vektor normalar, (5.17) dan kelib chiqsak, u holda $A = \|a_{ik}\| \ (i = 1,2, \dots, m; k = 1,2, \dots, n)$ matritsaning normasi quyidagicha aniqlanadi:

$$\|A\| = \max_{1 \le i \le m} \textstyle\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|$$

Haqiqatan, bu holda

$$\|Ax\|_1 = \max_{1 \le i \le m} \sum_{k=1} |a_{ik} x_k| \le$$

$$\le \max_{1 \le i \le m} |x_k| \max_{1 \le i \le m} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|$$

Shuning uchun

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \le \max_{1 \le i \le m} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|$$

Agar "oktaedrli" vektor normadan kelib chiqsak

$\|x\|_2 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$; $\qquad \|y\|_2 = \sum_{i=1}^{m} |y_i|$

U holda

$$\|A\| = \max_{1 \le k \le n} \textstyle\sum_{i=1}^{m} |a_{ik}| \tag{5.20'}$$

Endi "ermitcha" vektor normalarni

$$\|x\|^2 = \textstyle\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2, \ \|y\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |y_i|^2$$

qaraymiz. U holda $S = AA^*$ ermitcha musbat matritsani kiritib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\|Ax\|^2 = y * y = x^* A x^* A x = x^* A x^* A x = x^* S x, \quad \|x\|^2 = x^* x.$$

Ammo bu holda

$$\|A\|^2 = \max_{x \ne 0} \frac{x^* S x}{x^* x} = S,$$

bu yerda S − AA^* matritsaning maksimal xarakteristik soni. Bu holda

$$\|A\| = \sqrt{S} \tag{5.20''}$$

Endi x va y ustun vektor uchun har xil normani kiritamiz. Masalan,

$$\|x\|_2 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|, \|y\|_1 = \max_{1\le i\le n} |y_i|$$

bo'lsin u holda

$$\|Ax\|_1 = \max_{1\le i\le m} \left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |x_k| = a\|x\|_2$$

bu yerda $a = \max_{1\le i\le n} |a_k|$. Ikkinchi tomondan, agar $a = a_{pq}$ bo'lsa, u holda x_q ni $a_{pq} x_q = a|x_q|$ shartni qanoatlantiradigan qilib tanlab, $j \ne q$ da $x_j = 0$ deb olib $\|Ax\|_1 = a\|x\|_2$ tenglikka ega bo'lamiz.

Shunday qilib, bu holda

$$\|Ax\| = \max_{1\le i\le n} |a_{ik}| \qquad (520''')$$

bo'ladi.

§3. Adamar kriteriysini blok matritsalarga kengaytirish

$n \times n$ o'lchovli A matritsa s_2 ta $n_\alpha \times n_p$ o'lchovli $A_{\alpha\beta}$ bloklarga ajratilgan bo'lsin $(\alpha, \beta = 1,2,..,s)$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{s1} & A_{s2} & \dots & A_{ss} \end{pmatrix} \qquad (5.21)$$

bu holda Rn fazo s ta $R^{n\alpha} (\alpha = 1,2,...,s)$ qism fazolarga ajraladi. Ixtiyoriy $x \in R^n$ vektor uchun quyidagi yoyilma o'rinli bo'ladi.

$$x = \sum_{\alpha=1}^{s} x_\alpha (x_\alpha \in R^{n\alpha}, \alpha = 1,2,..,s)$$

(5.21')

R^n qism fazolarda vektor normalar kiritamiz. $A_{\alpha\beta}$ blok matritsa $R^{n\beta}$ qism fazoni $R^{n\alpha}$ qism fazoga akslantiradi, u holda u quyidagi norma bilan aniqlanadi:

$$\|A_{\alpha\beta}\| = \sup_{\substack{x_\beta \in R^{n\beta} \\ x_\beta \ne 0}} \frac{\|A_{\alpha\beta} x_\beta\| R^{n\alpha}}{\|x_\beta\| R^{n\beta}} \qquad (5.22)$$

xususiy holda $A_{\alpha\alpha}$ kvadrat matritsaning normasi quyidagicha aniqlanadi:

$$\|A_{\alpha\alpha}\| = \sup_{\substack{x_\alpha \in R^{n_\alpha} \\ x_\alpha \neq 0}} \frac{\|A_{\alpha\alpha} x_\alpha\|}{\|x_\alpha\|} \tag{5.22'}$$

Agar $|A_{\alpha\alpha}| \neq 0$ bo'lsa, u holda $|A_{\alpha\alpha}| > 0$ bo'ladi. U holda (5.22') dan quyidagi kelib chiqadi:

$$\|A_{\alpha\alpha}^{-1}\| = \sup_{\substack{x_\alpha \in R^{n_\alpha} \\ x_\alpha \neq 0}} \frac{\|x_\alpha\|}{\|A_{\alpha\alpha} x_\alpha\|}$$

Demak,

$$\|A_{\alpha\alpha}^{-1}\|^{-1} = \inf_{\substack{x_\alpha \in R^{n_\alpha} \\ x_\alpha \neq 0}} \frac{\|A_{\alpha\alpha} x_\alpha\|}{\|x_\alpha\|} \tag{5.23}$$

bu tenglikning o'ng tomoni $A_{\alpha\alpha}$-xos matritsa bo'lgan holda ham ma'noga ega.

Endi $|A| = 0$ va $x \neq 0$ da $Ax = 0$ bo'lsin. (5.21) va dan kelib chiqib, quyidagini yoza olmaymiz:

$$-A_{\alpha\alpha} x_\alpha = \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta\neq\alpha}}^{s} A_{\alpha\beta} x_\beta \, (\alpha = 1,2,..,s) \tag{5.24}$$

bundan, (5.18') va (5.19) ga asosan

$$\|A_{\alpha\alpha} x_\alpha\| \leq \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta\neq 0}}^{s} \|A_{\alpha\beta} x_\beta\| \leq \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta\neq 0}}^{s} \|A_{\alpha\beta}\| \|x_\beta\|, (\alpha = 1,2,..,s) \tag{5.25}$$

ikkinchi tomondan, (5.23) dan kelib chiqadiki,

$$\|A_{\alpha\alpha}^{-1}\|^{-1} \|x_\alpha\| \leq \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta\neq 0}}^{s} \|A_{\alpha\beta} x_\beta\| \leq \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta\neq 0}}^{s} \|A_{\alpha\beta}\| \|x_\beta\|, (\alpha = 1,2,..,s) \tag{5.26}$$

§1 dagidek, α indeksni shunday tanlaymizki, unda $\|x_\alpha\|$ eng katta qiymatga ($\|x_\beta\|$ bilan solishtirganda, $\beta \neq \alpha$) ega bo'lsin va (5.26)ning o'ng tomonidagi barcha $\|x_\beta\|$ larni $\|x_\alpha\|$ bilan almashtiramiz. So'ngra $\|x_\alpha\|$>0 ga qisqartirib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\left\|A_{\alpha\alpha}^{-1}\right\|^{-1} \le \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta\neq 0}}^{s} \left\|A_{\alpha\beta}\right\| \tag{5.27}$$

Shuning uchun, "adamarning blokli shartlari", bajarilganda

$$\left\|A_{\alpha\alpha}^{-1}\right\|^{-1} = \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta\neq 0}}^{s} \left\|A_{\alpha\beta}\right\| > 0 \ (\alpha = 1,2,..,s) \tag{5.28}$$

bo'lib, (5.27) munosabat bo'lishi mumkin emas, ya'ni A-xos matritsa bo'lishi mumkin emas.

Biz quyidagi teoremaga keldik:

Teorema 5.3. Agar Adamarning blokli sharti (5.28) bajarilsa, u holda A – xosmas matritsa bo'ladi.

$n_1 = n_2 = ... = n_s = 1$ xususiy holda, bu teorema Adamar teoremasiga o'tadi, agarda R bir o'lchovli qism fazolarga normani $\|x_\alpha\| = |x_\alpha| \ (\alpha = 1,2,..,s)$ dek tanlasak.

§4. Fiddlerning regulyarlik kriteriysi

$n \times n$ o'lchovli A matritsa (5.21) blok ko'rinishda tasvirlangan bo'lsin. Uning uchun haqiqiy elementli $s \times s$ o'lchovli sonni matritsani kiritamiz:

$$G = \begin{pmatrix} \|A_{11}{}^{-1}\|^{-1} & -|A_{12}| & \dots & -\|A_{1s}\| \\ -\|A_{21}\| & \|A_{22}{}^{-1}\|^{-1} & \dots & -|A_{2s}| \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\|A_{s1}\| & -\|A_{s2}\| & \dots & \|A_{ss}{}^{-1}\|^{-1} \end{pmatrix} \quad 5.29$$

bu matritsaning barcha diagonal elementlari manfiymas bo'lib, diagonalda yotmagan elementlari musbatmasdir. Ma'lumki, diagonalda yotmagan barcha elementlari musbatmas bo'lib, barcha bosh minorlari musbat bo'lgan matritsa M-matritsa deyiladi.

Teorema 5.4. (Fidler teoremasi). Agar $s \times s$ o'lchovli G matritsa M –matritsa bo'lsa, u holda $n \times n$ o'lchovli A matritsa regulyar bo'ladi.

Isboti. Faraz qilaylik, $|A| = 0$ bo'lsin. U holda $x \neq 0$ da $Ax =$ 0 bo'ladi. (5.21) va (5.21') ga asosan (5.26)ni hosil qilib, uni quyidagicha yozamiz:

$$\left\|A_{\alpha\alpha}{}^{-1}\right\|^{-1}\left\|x_\alpha\right\| - \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta\neq 0}}^{s}\left\|A_{\alpha\beta}\right\|\left\|x_\beta\right\| \leq 0(\alpha = 1,2,..,s) \qquad (5.30)$$

Avval barcha $\|x_\alpha\| > 0$ bo'lsin. U holda (5.30) da $\|x_\alpha\|$ oldidagi koeffitsiyentlarni orttirib, ya'ni, $\left\|A_{\alpha\alpha}{}^{-1}\right\|^{-1}$ ni qandaydir $\tilde{G}_{\alpha\alpha} \geq \left\|A_{\alpha\alpha}{}^{-1}\right\|^{-1}$ bilan almashtirib, (5.30) tengsizliklardan quyidagi tengliklar sistemasini hosil qilamiz:

$$\tilde{g}_{\alpha\alpha}\left\|x_\alpha\right\| - \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta\neq 0}}^{s}\left\|A_{\alpha\beta}\right\|\left\|x_\beta\right\| = 0(\alpha = 1,2,..,s) \qquad (5.31)$$

buni matritsali ko'rinishda quyidagicha yozamiz:

$$\widetilde{G}\xi = 0,$$

bu yerda

$$\widetilde{G}=\begin{pmatrix} \widetilde{G}_{11} & -\|A_{12}\| & \dots & -\|A_{1s}\| \\ -\|A_{21}\| & \widetilde{G}_{22} & \dots & -\|A_{2s}\| \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\|A_{s1}\| & -\|A_{s2}\| & \dots & \widetilde{G}_{ss} \end{pmatrix},$$

$$0 \neq \xi = \left(\|x_1\|, \ldots\ldots, \|x_s\|\right)^T.$$

Bundan

$$\left|\widetilde{G}\right| = 0$$

Ikkinchi tomondan, M –matritsaning ta'rifiga ko'ra

$$\left|\widetilde{G}\right| \geq |G| > 0$$

ekanligi kelib chiqadi. Biz $|A| = 0$ deb faraz qilib, qarama-qarshilikka keldik.

Agar qandaydir $\|x_\alpha\| = 0$ bo'lsa, u holda (5.30) munosabatlardan faqat $\|x_\alpha\| > 0$ shartni qanoatlantiruvchi α qiymatlariga moslarini olamiz.

Yuqoridagi mulohazalarni so'zma-so'z takrorlab, $|G|$ ning o'rniga G matritsaning qandaydir bosh minorini olib, yana qarama-qarshilikka kelamiz.

Teorema to'la isbotlandi.

§5. Gershgorin doirasi va boshqa lokallashtirish sohalari

$$A = \|a_{ik}\|_{i,k=1}^n$$

ixtiyoriy $n \times n$ o'lchovli, kompleks elementli matritsa bo'lib, λ uning qandaydir xarakteristik soni bo'lsin. U holda $A - \lambda E$ xos matritsa bo'lib, uning uchun Adamarning barcha shartlari bajarilishi mumkin emas, ya'ni, quyidagi munosabatlardan hech bo'lmaganda bittasi o'rinli bo'lishi kerak:

$$|a_{ii} - \lambda| < \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad (i = 1, 2, .., n) \tag{5.36}$$

(5.31) munosabatlarning har biri λ-kompleks tekislikdagi a_{ii} markazli, $\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}|$ radiusli qandaydir doirani aniqlaydi. Biz Gershgorin tomonidan 1931-yilda yaratilgan teoremaga keldik.

Teorema 5.5. (Gershgorin teoremasi).

$$A = \|a_{ik}\|_{i,k=1}^{n}$$

matritsaning har bir λ xarakteristik soni har doim (5.31) doiralarning birida joylashgan bo'ladi.

Shunday qilib, (5.36) Gershgorin doiralari barcha xarakteristik sonlari yotadigan sohani beradi.

Teorema 5.6.

$$A = \{A_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta}^{s} = 1$$

blok ko'rinishda tasvirlangan $n \times n$ o'lchovli A matritsaning har bir λ xarakteristik soni quyidagi sohalarning hech bo'lmaganda bittasiga tegishli bo'ladi:

$$\|(A_{\alpha\alpha} - \lambda E)^{-1}\|^{-1} \leq \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta\neq\alpha}}^{s} \|A_{\alpha\beta}\| \ (\alpha = 1,2,..,s) \tag{5.37}$$

Shuningdek, x_{α} quyidagi sohalarning hech bo'lmaganda bittasiga tegishli bo'ladi:

$$\left\|\left(A_{\alpha\alpha} - \lambda E_{\alpha}^{-1}\right)\right\|^{-1} \leq \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta\neq\alpha}}^{s} \|A_{\beta\alpha}\|, (\alpha = 1,2,..,s) \tag{5.32'}$$

bu yerda E_{α} birlik matritsa bo'lib, $A_{\alpha\alpha}$ matritsalar bir xil tartibli $(\alpha = 1,2,..,s)$ bo'ladi.

Fiddler kriteriysidan kelib chiqib, qanday lokallashtirish sohasini hosil qilish mumkinligini aniqlaymiz. $c_1, c_2,.., c_s$ manfiymas sonlar shunday tanlanganki, unda

$$G = \begin{pmatrix} c_1 & -\|A_{12}\| & \dots & -\|A_{1s}\| \\ -\|A_{21}\| & c_2 & \dots & -|A_{2s}| \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\|A_{s1}\| & -\|A_{s2}\| & \dots & c_s \end{pmatrix}$$

(5.33)

matritsa kuchsizlantirilgan M – matritsa bo'lsin, ya'ni diagonalda yotmagan elementlari musbatmas bo'lib, barcha bosh minorlari manfiymas bo'lsin. Faraz qilaylik, qandaydir λ sonda quyidagi s ta tengsizlik bajarilsin:

$$\left\|\left(A_{\alpha\alpha} - \lambda E_\alpha^{-1}\right)\right\|^{-1} > c_\alpha \qquad (5.34)$$

u holda, (5.33) matritsada C_α ni $\left\|\left(A_{\alpha\alpha} - \lambda E_\alpha^{-1}\right)\right\|^{-1}$ bilan almashtirib, barcha diagonal elementlarni orttiramiz va M – matritsani hosil qilamiz:

$$\begin{pmatrix} \|(A_{11} - \lambda E_1)^{-1}\|^{-1} & -\|A_{12}\| & \dots & -\|A_{1s}\| \\ -\|A_{21}\| & \|(A_{22} - \lambda E_2)^{-1}\|^{-1} & \dots & -|A_{2s}| \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\|A_{s1}\| & -\|A_{s2}\| & \dots & \|(A_{ss} - \lambda E_s)^{-1}\|^{-1} \end{pmatrix}$$

ammo bu holda, Fiddler teoremasiga ko'ra $|A - \lambda E| \neq 0$ va λ son A matritsaning xarakteristik soni bo'lmaydi.

Shuning uchun, A matritsaning ixtiyoriy λ xarakteristik soni uchun (5.34) tengsizlikning hech bo'lmaganda bittasi bajarilmaydi, ya'ni, quyidagi munosabatlardan biri bajariladi:

$$\left\|\left(A_{\alpha\alpha} - \lambda E_\alpha^{-1}\right)\right\|^{-1} \leq c_\alpha (\alpha = 1, 2, .., s) \qquad (5.35)$$

(5.35) dagi s ta sohani birlashtirish, maxsus tanlangan $c_1, c_2, .., c_s$ manfiymas parametrlarga bog'liq bo'lgan Fiddlerning lokallashtirish sohasini tashkil qiladi.

Teorema 5.7. (Fiddler teoremasi). Agar $c_1, c_2, .., c_s$ manfiymas sonlar shunday tanlangan bo'lib, (5.33) matritsa kuchsizlangan M matritsa bo'lsa, u holda A matritsaning har bir λ xarakteristik soni s ta (5.35) sohalarning hech bo'lmaganda bittasiga tegishli bo'ladi.

Misol sifatida quyidagi 4-tartibli simmetrik matritsani qaraymiz:

$$A=\begin{Vmatrix} 0 & 4 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 15 \\ -1 & 1 & 15 & -1 \end{Vmatrix}$$

A-simmetrik matritsa bo'lgani uchun uning barcha xarakteristik sonlari haqiqiy bo'ladi. Shuning uchun λ-kompleks tekislikdagi lokallashtirish sohasi o'rniga λ-haqiqiy o'qdagi sohalar kesishishidan hosil bo'lgan kesmani qarash mumkin.

I. Gershgorin sohasi quyidagi segmentdan iborat bo'lib,

$$-18 \le \lambda \le 16$$

bu segment Gershgorinning qolgan segmentlarini o'zida saqlaydi.

II. A matritsani quyidagicha 4 ta blokka ajratamiz:

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},\ A_{11}=\begin{Vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$A_{22}=\begin{Vmatrix} -1 & 15 \\ 15 & -1 \end{Vmatrix},\ A_{21}=A_{12}=\begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

Bu holda

$$(A_{11}-\lambda E_1)^{-1}=\frac{1}{\lambda^2-16}\begin{Vmatrix} -\lambda & -4 \\ -4 & -\lambda \end{Vmatrix}$$

$$(A_{22}-\lambda E_2)^{-1}=\frac{1}{(\lambda+1)^2-15^2}\begin{Vmatrix} -1-\lambda & -1-\lambda \\ -15 & -15 \end{Vmatrix}$$

R1 va R2 fazolarning quyidagi uch xil ko'rinishdagi normalarini qaraymiz:

a. R1 va R2 da kubik normalarni.

b. R1 da kubik, R2 da esa oktaedrli normalarni.

c. R1 da oktaedrli, R2 da esa kubik normalarni.

barcha bloklar bo'yicha normalar (5.20') formuladan aniqlanadi:

$$\|A_{12}\|=2,\ \|A_{21}\|=2,\qquad \|(A_{11}-\lambda E_1)^{-1}\|=|\lambda|-4,$$

$$\left\|(A_{22}-\lambda E_2)^{-1}\right\| = \left||\lambda+1|-15\right|$$

Gershgorinning blokli sohasi

$$\left||\lambda|-4\right| \le 2, \quad \left||\lambda+1|-15\right| \le 2$$

Quyidagi 4 ta intervaldan iborat bo'ladi:

$$-18 \le \lambda \le 16, -6 \le \lambda \le -2, 2 \le \lambda \le 6, 12 \le \lambda \le 16 \qquad \text{(IIa)}$$

bu holda $\left\|(A_{11}-\lambda E_1)^{-1}\right\|^{-1}$ va $\left\|(A_{22}-\lambda E_2)^{-1}\right\|^{-1}$ lar uchun ifodalar o'zgarmay qoladi, ammo

$$\|A_{12}\| = \max_{x} \frac{|x_1-x_2|}{|x_1|+|x_0|} = 1, \quad \|A_2\| = \max_{x} \frac{2|x_1-x_2|}{\max\limits_{1\le i\le 2}|x_i|} = 4$$

Gershgorinning blokli sohasi

$$\left||\lambda|-4\right| \le 1, \quad \left||\lambda+1|-15\right| \le 4$$

bo'lib, quyidagi 4 ta intervaldan iborat

$$-20 \le \lambda \le -12, -5 \le \lambda \le -3, 3 \le \lambda \le 5, 10 \le \lambda \le 18 \qquad \text{IIb)}$$

bu holni avvalgi holdan farqi shuki, bunda

$$\|A_{12}\| = 1, \quad \|A_{21}\| = 4,$$

bo'ladi. Shuning uchun Gershgorin sohasi.

$$\left||\lambda|-4\right| \le 4, \quad \left||\lambda+1|-15\right| \le 1$$

bo'lib, quyidagi 3 ta intervalga bo'linadi:

$$-17 \le \lambda \prec -15, \quad -8 \le \lambda \le 15, \quad 13 \le \lambda \le 15 \qquad \text{(IIc)}$$

bu sohalarni sxema ko'rinishida quyidagicha tasvirlash mumkin:
Bu sohalarning kesishmasi lokallashtirish sohasini beradi:

$$-17 \le \lambda \prec -15, \quad -5 \le \lambda \le -3, 3 \le \lambda \le 5,$$

III. Fiddler kriteriysini qo'llashda yana a, b, c normalarni qaraymiz:

$$G = \begin{pmatrix} c_1 & -\|A_{12}\| \\ -\|A_{21}\| & c \end{pmatrix} = \begin{Vmatrix} c_1 & -2 \\ -2 & c_2 \end{Vmatrix}$$

$$|G| = c_1 c_2 - 4 \ge 0$$

c_1 va c_2 larning eng kichik qiymatlarini hosil qilish maqsadida $c_1 c_2 = 4$ deb olamiz.

$$\big||\lambda| - 4\big| \le c_1, \quad \big||\lambda + 1| - 15\big| \le c_2$$

Fiddler sohasi $c_1 = c_2 = 2$ da (IIa) soha bilan, $c_1 = 1,\ c_2 = 4$ da (IIb) soha bilan, $c_1 = 4\ \ c_2 = 1$ da esa (IIb) soha bilan ustma-ust tushadi. Fiddler sohasi quyidagi 4 ta intervaldan iborat bo'lib, bitta musbat parametrga bog'liq bo'ladi, chunki $c_1 = \dfrac{4}{c_\lambda}$.

$$-16 - c_2 \le \lambda \le -16 + c_2, \ -4 - c_1 \le \lambda \le -4 + c_1, \quad \text{(III)}$$
$$4 - c_1 \le \lambda \le 4 + c_1, \quad 14 - c_2 \le \lambda \le 14 + c_2,$$

Barcha Fiddler sohalari kesishmasini aniqlash mumkin. Buning uchun quyidagi miqdorlarni qaraymiz:

1) $-16 - c_2 = -4 + c_1,$

2) $-16 + c_2 = -4 + c_1,$

3) $-16 + c_2 = -4 + c_1$

4) $4 - c_1 = 14 - c_2,$

5) $4 + c_1 = 14 - c_2,$

6) $4 + c_1 = 14 + c_2,$

$c_1 c_2 = 4$ tenglikdan foydalanib, eng kichik musbat ildizli 6 ta kvadrat tenglamani hosil qilamiz:

1) $c_2^2 - 12c_2 - 4 = 0, z_1 = -6 + \sqrt{40} = 0,3246...,$

2) $c_2^2 - 12c_2 + 4 = 0, z_2 = 6 - \sqrt{32} = 0,3431...,$

3) $c_1^2-12c_1-4=0, z_3=z_1=-6+\sqrt{40}=0,3246...,$

4) $c_1^2+10c_1-4=0, z_4=-5+\sqrt{29}=0,3852...,$

5) $c_1^2-10c_1+4=0, z_5=5-\sqrt{21}=0,4174...,$

6) $c_2^2+10c_2-4=0, z_6=z_4=-5+\sqrt{29}=0,3852...,$

Lokallashtirish sohasi quyidagi 4 ta segmentdan iborat bo'ladi:
$-16-z_1\le\lambda\le-16+z_2$, $-4-z_2\le\lambda\le-4+z_1$

$4-z_4\le\lambda\le4+z_5$, $14-z_5\le\lambda\le14+z_4$

Mashqlar:

1. Adamar va Fiddler kriteriylaridan foydalanib quyidagi matritsalarning regulyarligini tekshiring:

$$\begin{pmatrix}1&2&0\\0&2&0\\-2&-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7&-12&-2\\3&-4&0\\-2&0&-2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}13&16&16\\-5&-7&-6\\-6&-8&-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0&8\\3&-1&6\\-2&0&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&3&3\\-1&8&6\\2&-14&-10\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}4&5&-2\\-2&-2&1\\-1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9&22&-6\\-1&-4&1\\8&16&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8&30&-14\\-5&-19&9\\-6&-23&11\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-2&8&6\\-4&10&6\\4&-8&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&7&-3\\-2&-5&2\\-4&-10&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&1\\-5&21&17\\6&-26&-21\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&-3&6\\2&-2&4\end{pmatrix}\qquad\qquad\begin{pmatrix}-4&2&10\\-4&3&7\\-3&1&7\end{pmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & i \\ 1 & 6 & 1 & 1 \\ i/2 & i & 5 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & -2 \end{bmatrix}$$ bo‘lsa, A va A^T matritsalar uchun Gershgorin doirasini toping. Agar S=diag{1,1,1,4}, bo‘lsa SAS^{-1} ni hisoblang va A matritsa $|z+2| \le \frac{1}{2}$ doirada xaqiqiy xos qiymatga ega ekanligini hosil qiling.

3. Agar $a_{jj} > \sum_k' |a_{jk}| = p_j$ j=1,2,...,n bo‘lsa, u holda A matritsa xosmas bo‘lishini ko‘rsating.

4. Agar A=B+C, B=diag{1,2,2} va j,k=1,2,3 uchun

$$|c_{jk}| \le \varepsilon < \frac{1}{6}$$

bo‘lsa, u holda A matritsani $|z-1-c_{11}| \le 13\varepsilon^2$ doirada xos qiymati mavjud ekanligini isbotlang.

5. $A-B\| \ge \|A\| - \|B$ ekanligini isbotlang.

6. Haqiqiy qiymatli $\sum_{i,j}|a_{ij}|$funksiya matritsa normasi bo‘lishini isbotlang.

7. Ixtiyoriy matritsa normasi uchun quyidagilarni isbotlang.

$$\|I\| \ge 1, \|A^n\| \le \|A\|^n, \ \|A^{-1}\| \ge \frac{1}{\|A\|}$$

VI BOB.

MATRITSALI TENGLAMALAR

Bu bobda matritsalar nazariyasi va ularning tatbiqlari masalalarida uchraydigan matritsali tenglamalarning ba'zi ko'rinishlari qarab chiqiladi.

§1. $AX = XB$ tenglama

Bizga quyidagi matritsali tenglama berilgan bo'lsin:

$$AX = XB \tag{6.1}$$

bu yerda $A = \| a_{ij} \|_{i,j=1}^{m}$, $B = \| b_{kl} \|_{k,l=1}^{n}$, $X = \| x_{jk} \|$,

$(j = 1,2,...,m;\ k = 1,2,...,n)$

A va B matritsalarning kompleks sonlar maydonidagi elementar bo'luvchilarini yozib chiqamiz:

$$(A) : (\lambda - \lambda_1)^{p_1}, (\lambda - \lambda_2)^{p_2}, ..., (\lambda - \lambda_u)^{p_u}, (p_1 + p_2 + ... + p_u = m)$$

$$(B) : (\lambda - \mu_1)^{q_1}, (\lambda - \mu_2)^{q_2}, ..., (\lambda - \mu_v)^{q_v}, (q_1 + q_2 + ... + q_u = n)$$

Bu elementlar bo'luvchilarga mos holda A va B matritsalarni quyidagicha Jordonning normal ko'rinishiga keltiramiz:

$$A = U\widetilde{A}U^{-1},\quad B = V\widetilde{B}V^{-1} \tag{6.2}$$

bu yerda U va V lar mos ravishda m va n tartibli, xosmas kvadrat matritsalar, $\widetilde{A}$ va $\widetilde{B}$ quyidagicha Jordon ko'rinishidagi matritsalar:

$$A = \left\{\lambda_1 E^{(p_1)} + H^{(p_1)}, \lambda_2 E^{(p_2)} + H^{(p_2)}, ..., \lambda_u E^{(p_u)} + H^{(p_u)}\right\},$$

$$B = \left\{\mu_1 E^{(q_1)} + H^{(q_1)}, \mu_2 E^{(q_2)} + H^{(q_2)}, ..., \mu_u E^{(q_v)} + H^{(q_v)}\right\}. \tag{6.3}$$

(6.2) ni (6.1) ga qo'yib,

$$U\bar{A}U^{-1}X = XV\bar{B}V^{-1}$$

ni hosil qilamiz. Bu tenglikni chapdan U^{-1} ga o'ngdan V ga ko'paytirib,

$$AU^{-1}XV = U^{-1}XVB \tag{6.4}$$

tenglikni hosil qilamiz. Izlanayotgan X matritsa o'rniga

$$\bar{X} = U^{-1}XV \tag{6.5}$$

matritsani kiritib, (6.4) ni quyidagicha yozamiz:

$$\tilde{A}\tilde{X} = \tilde{X}\tilde{B} \tag{6.6}$$

Biz (6.1) matritsali tenglamani xuddi shunday ko'rinishdagi (6.6) tenglama bilan almashtirdik, ammo (6.6) dagi berilgan matritsalar Jordonning normal ko'rinishiga ega.

$\tilde{X}$ matritsani bloklarga ajratamiz:

$$\bar{X} = \left(X_{\alpha\beta}\right) \qquad \left(\alpha = 1,2,3,\ldots,u; \beta = 1,2,3,\ldots,v\right)$$

bu yerda $X_{\alpha\beta} - p_\alpha x q_\beta$ o'lchovli to'g'ri to'rtburchakli matritsa.

Blok matritsani kvazidiagonal matritsaga ko'paytirish qoidasidan foydalanib, (6.6) tenglamaning chap va o'ng tomonlarida ko'paytirish amalini bajaramiz. Natijada bu tenglama $u \cdot v$ ta matritsali tenglamalarga ajraladi:

$$\left[\lambda_\alpha E^{(p_\alpha)} + H^{(p_\alpha)}\right] X_{\alpha\beta} = X_{\alpha\beta}\left[\mu_\beta E^{(q_\beta)} + H^{(q_\beta)}\right],$$

Bularni quyidagicha yozamiz:

$$\left(\mu_\beta - \lambda_\alpha\right) X_{\alpha\beta} = H_\alpha X_{\alpha\beta} - X_{\alpha\beta} G_\beta \qquad \left(\alpha = 1,2,\ldots,u; \beta = 1,2,\ldots,v\right) \tag{6.7}$$

bu yerda

$$H_\alpha = H^{(p_\alpha)},\ G_\beta = H^{(q_\beta)},\ \left(\alpha = 1,2,\ldots,u; \beta = 1,2,\ldots,v\right) \tag{6.8}$$

(6.7) tenglamalardan birini olib qaraymiz. Bunda 2 hol bo'lishi mumkin.

1. $\lambda_\alpha \neq \mu_\beta$. (6.7) ning ikkala tomonini $\mu_\beta - \lambda_\alpha$ ga ko'paytirib, o'ng tomonidagi har bir hadda $(\mu_\beta - \lambda_\alpha)\ X_{\alpha\beta}$ ko'paytuvchini $H_\alpha X_{\alpha\beta} - X_{\alpha\beta} G_\beta$ bilan almashtiramiz. Bu jarayonni $r-1$ marta takrorlab, quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$(\mu_\beta - \lambda_\alpha)^r\ X_{\alpha\beta} = \sum_{\sigma+\tau=r} (-1)^\tau H_\alpha^\sigma X_{\alpha\beta} G_\beta^\tau \tag{6.9}$$

(6.8) ga asosan

$$H_\alpha^{p_\alpha} = G_\beta^{q_\beta} = 0 \tag{6.10}$$

Agar (6.9) da $r > p_\alpha + q_p - 1$ deb olsak, u holda (6.9) ning o'ng tomonidagi yig'indining har bir hadida

$$\sigma \geq p_\alpha \, , r \geq q_\alpha$$

munosabatlarning hech bo'lmaganda bittasi bajarilib, (6.10) ga asosan $H_\alpha^\sigma = 0$ yoki $G_\beta^\tau = 0$ bo'ladi. Bundan $\mu_\beta \neq \lambda_\alpha$ bo'lgani uchun quyidagini topamiz:

$$X_{\alpha\beta} = 0 \tag{6.11}$$

2. $\lambda_\alpha = \mu_\beta$. Bu holda (6.7) dan quyidagi hosil bo'ladi:

$$H_\alpha X_{\alpha\beta} = X_{\alpha\beta} G_\beta \tag{6.12}$$

H_α va G_β matritsalarning diagonal ostidagi birinchi elementlari birga teng bo'lib, qolgan barcha elementlari nollardan iborat. H_α va G_β matritsalar strukturasining bu spetsifikasini hisobga olgan holda,

$$X_{\alpha\beta} = [\![\xi_{ik}]\!] \qquad (i = 1, 2, ..., p_\alpha ; k = 1, 2, ..., q_\beta)$$

deb olib, (6.12) matritsali tenglamani unga ekvivalent bo'lgan quyidagi skalyar munosabatlar sistemasi bilan almashtiramiz:

$$\xi_{i+1,k} = \xi_{i,k-1} \qquad \left(\xi_{i0} = \xi_{p\alpha} = 0; i = 1,2,\ldots, p_\alpha ; k = 1,2,\ldots, q_\beta\right) \tag{6.13}$$

(6.13) tengliklar quyidagini bildiradi.

1) $X_{\alpha\beta}$ matritsaning diagonaliga parallel bo'lgan chiziqqa o'zaro teng elementlar yotadi.

2) $\xi_{21} = \xi_{31} = \cdots = \xi_{p_\alpha 1} = \xi_{p_\alpha 2} = \cdots = \xi_{p_\alpha q_\beta - 1} = 0$

$p_\alpha = q_\beta$ bo'lsin. Bu holda $X_{\alpha\beta}$ kvadrat matritsa bo'lib u 1) va 2) shartga ko'ra quyidagicha bo'ladi:

$$X_{\alpha\beta} = \left\| \begin{matrix} c_{\alpha\beta} & c'_{\alpha\beta} & \ldots & c_{\alpha\beta}^{(p_\alpha - 1)} \\ 0 & c_{\alpha\beta} & \ldots & . \\ \ldots & \ldots & \ldots & . \\ \ldots & \ldots & \ldots & c'_{\alpha\beta} \\ 0 & \ldots & 0 & c_{\alpha\beta} \end{matrix} \right\| = T_{p_\alpha} \qquad (6.14)$$

bu yerda $c_{\alpha\beta}, c'_{\alpha\beta}, \ldots, c_{\alpha\beta}^{(p\alpha)}$ – ixtiyoriy parametrlar.

$p_\alpha < q_\beta$ da

$$X_{\alpha\beta} = \left(\overbrace{0}^{q_\beta - p_\alpha}, \mathrm{T}_{p_\alpha} \right) \qquad (6.15)$$

bo‘lib , $p_\alpha > q_\beta$ da esa,

$$X_{\alpha\beta} = \left(\begin{matrix} \mathrm{T}_{p_\alpha} \\ 0 \,\}\, p_\alpha - q_\beta t a \end{matrix} \right) \qquad (6.16)$$

(6.14), (6.15) va (6.16) matritsalar to‘g‘ri yuqori uchburchak shaklga ega deyiladi. $X_{\alpha\beta}$ dagi ixtiyoriy parametrlar soni p_α va q_β sonlarning kichigiga teng. Quyida keltirilgan sxema $X_{\alpha\beta}$ matritsani $\lambda_\alpha = \mu_\beta$ dagi strukturasini ko‘rsatadi, (bu yerda ixtiyoriy parametrlar a,b,c,d orqali belgilangan):

$$X_{\alpha\beta} = \left\| \begin{matrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{matrix} \right\|, \quad (p_\alpha = q_\alpha = 4),$$

§ 2. $A = B$ bo'lgan xususiy hol. O'rin almashinuvchi matritsalar

(6.1) tenglamaning quyidagicha xususiy holini qaraymiz:

$$Ax = xB \tag{6.21}$$

Bu yerda $A = \| a_{ik} \|_{i,k=1}^{m}$ – berilgan, $X = \| x_k \|_{i,k=1}^{n}$ – izlanayotgan matritsa. Bu holda Frobenusning quyidagi masalasiga kelamiz: berilgan A matritsa bilan o'rin almashinuvchi bo'lgan barcha X matritsalarni aniqlang.

A matritsani quyidagicha Jordonning normal shakliga keltiramiz:

$$A = U\widetilde{A}U^{-1} = U\{\lambda_1 E^{(p_1)} + H^{(p_1)}, \ldots, \lambda_u E^{(p_u)} + H^{(p_u)}\}U^{-1} \tag{6.22}$$

U holda (6.17) formulada $V = U$, $\widetilde{B} = \widetilde{A}$ deb olib, $X_{\widetilde{A}\widetilde{A}}$ ni $X_{\widetilde{A}}$ orqali belgilab, (6.21) tenglamaning barcha yechimlarini, ya'ni, A matritsa o'rin almashinuvchi barcha matritsalarni quyidagicha ko'rinishda hosil qilamiz:

$$X = UX_{\widetilde{A}}U^{-1} \tag{6.23}$$

bu yerda $X_{\widetilde{A}}$ orqali $\widetilde{A}$ matritsa bilan o'rin almashinuvchi barcha matritsalarni belgilangan. Avvalgi paragrafdagi kabi, $X_{\widetilde{A}}$ matritsa U^2 blo'klarga ajraladi:

$$X_{\widetilde{A}} = (X_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta=1}^{u}$$

Bu ajralish $\widetilde{A}$ Jordon matritsani bloklarga ajralishiga mos bo'lib, $X_{\alpha\beta}$ matritsa $\lambda_\alpha \neq \lambda_\beta$ da nol matritsa, $\lambda_\alpha = \lambda_\beta$ da ixtiyoriy to'g'ri yuqori uchburchak matritsa bo'ladi.

Misol uchun A matritsaning elementar bo'luvchilari

$$(\lambda - \lambda_1)^4, (\lambda - \lambda_1)^3, (\lambda - \lambda_2)^2, (\lambda - \lambda_2)$$

bo'lganda $X_{\widetilde{A}}$ matritsaning elementlarini yozamiz.

Bu holda $X_{\widetilde{A}}$ matritsa quyidagicha ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\left\|\begin{matrix} a & b & c & d & e & f & g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 & e & f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 & 0 & e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & k & l & m & p & q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n & k & 0 & m & p & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n & 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r & s & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w & z \end{matrix}\right\|$$

a,b,c,d,e,f,g,h,k,l,m,p,q,r,s,t,w,z – ixtiyoriy parametrlar.

$X_{\bar{\lambda}}$ matritsadagi parametrlar soni $N = \sum\limits_{\alpha,\beta=1}^{u} \delta_{\alpha\beta}$ bo‘lib, $\delta_{\alpha\beta}$ $(\lambda - \lambda_\alpha)^{p_\alpha}$ va $(\lambda - \lambda_\beta)^{q_\beta}$ ko‘phadning eng katta umumiy bo‘luvchisining darajasini bildiradi.

A matritsaning $i_1(\lambda), i_2(\lambda), \ldots, i_t(\lambda), i_{t+1}(\lambda) = \ldots = i_n(\lambda) = 1$ invariant ko‘phadlarini qaraymiz. Bu ko‘phadlarning darajalarini mos ravishda $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_t > n_{t+1} = \ldots = 0$ lar orqali belgilaymiz. Ma’lumki, har bir invariant ko‘phad bir nechta o‘zaro tub bo‘lgan elementar bo‘luvchilar ko‘paytmasidan iborat bo‘ladi, u holda N uchun formulani quyidagicha yozish mumkin:

$$N = \sum_{\alpha,\beta=1}^{u} \delta_{\alpha\beta} \tag{6.24}$$

bu yerda γ_{gj} - $i_g(\lambda)$ va $i_j(\lambda)$ ko'phadlar eng katta umumiy bo'luvchisining darajasi $(g,j=1,2,\ldots,t)$. Ammo $i_g(\lambda)$ va $i_j(\lambda)$ ko'phadlarning eng katta bo'luvchisi ularning biri bo'ladi, shuning uchun $\gamma_{gj}=\min(n_g,n_j)$. Bundan quyidagini hosil qilamiz:

$$N=n_1+3n_2+\ldots+(2t-1)n_t$$

N soni A matritsa bilan o'rin almashinuvchi chiziqli bog'liq bo'lmagan matritsa soni bo'ladi. Biz quyidagi teoremaga keldik:

Teorema 6.2. $A=\|a_{ik}\|_{i,k=1}^{n}$ matritsa bilan o'rin almashinuvchi bo'lgan, chiziqli bog'liqmas matritsalar soni quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$N=n_1+3n_2+\ldots+(2t-1)n_t \tag{6.25}$$

bu yerda $n_1,n_2,\ldots,n_t$ – mos ravishda $i_1(\lambda),i_2(\lambda),\ldots,i_t(\lambda)$ o'zgarmas bo'lmagan, A matritsaning invariant ko'phadlari darajalari.

$$n=n_1+n_2+\ldots+n_t \tag{6.26}$$

(6.25) va (6.26) dan:

$$\mathrm{N}\geq n, \tag{6.27}$$

bo'lib, tenglik belgisi $t=1$ da, ya'ni, A matritsaning barcha elementar bo'luvchilari juft-jufti bilan o'zaro tub bo'lganda bajariladi. $g(\lambda)$- λ ning qandaydir ko'phadi bo'lsin. U holda $g(A)$ matritsada, A matritsa bilan o'rin almashinuvchi bo'ladi. Teskari savol tug'iladi: Qanday holda ixtiyoriy matritsa A matritsa bilan o'rin almashinuvchi bo'lib, A matritsaning ko'phadi sifatida tasvirlanadi? Bu holda $E,A,A^2,\ldots,A^{n_1-1}$ chiziqli bog'liqmas matritsalar chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'lgan matritsa A matritsa bilan o'rin almashinuvchi bo'ladi.

Qaralayotgan holda $N=n_t\leq n$ bo'lib, (6.27) ga asosan $N=n_t=n$ ni hosil qilamiz. Shunday qilib, quyidagini hosil qildik.

Natija. A matritsa bilan o'rin almashinuvchi bo'lgan barcha matritsalar faqat va faqat $n_1=n$ ya'ni A matritsaning barcha elementar bo'luvchilari juft-jufti bilan o'zaro tub bo'lgandagina ular A matritsaning ko'phadi sifatida tasvirlanadi.

Natija. A matritsa bilan o‘rin almashinuvchi bo‘lgan barcha matritsalar faqat va faqat shu holda, qachonki $n_1 = n$, ya’ni, $\lambda E - A$ ning barcha elementar bo‘luvchilari o‘zaro tub bo‘lganda bitta va faqat bitta C matritsaning ko‘phadi sifatida tasvirlanadi. Bu holda A matritsa bilan o‘rin almashinuvchi barcha matritsalar A matritsaning ko‘phadi sifatida tasvirlanadi.

Teorema 6.3. Agar ikki A va B matritsalar o‘rin almashinuvchi bo‘lib, ularning biri, masalan, A quyidagicha kvazidiagonal ko‘rinishga ega bo‘lsa,

$$A = (A_1, A_1), \quad (6.28)$$

bu yerda A_1 va A_2 umumiy xarakteristik songa ega emas, u holda ikkinchi B matritsa ham xuddi shunday kvazidiagonal ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$B = (B_1 B_2) \quad (6.29)$$

Isboti. B matritsani (6.28) kvazidiagonal ko‘rinishga mos bloklarga ajratamiz:

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & x \\ y & B_2 \end{pmatrix},$$

B_1, B_2 mos ravishda A_1, A_2 bilan bir xil o‘lchovli.

$AB = BA$ ekanligidan quyidagi to‘rtta matritsali tengliklarni hosil qilamiz:

$$1.\ A_1B_1 = B_1A_1,\ 2. A_1x = xA_2,\ 3.\ A_1y = yA_1,\ 4.\ A_2B_2 = B_2A_2; \quad (6.30)$$

A_1 va A_2 lar umumiy xarakteristik songa ega bo‘lmaganliklari uchun (6.30) dagi 2. va 3. tenglamalar $x = 0$ va $y = 0$ yechimga ega. (6.30) ning 1. va 4. tengliklaridan A_1 va B_1, A_2 va B_2 matritsalar o‘zaro o‘rin almashinuvchi ekanligi kelib chiqadi.

Teorema-6.3'. Agar $R^n = I_1^{n_1} + I_2^{n_2}$ bo‘lib, $I_1^{n_1}$ va $I_2^{n_2}$ $\overline{A}$-operatorga nisbatan invariant qism fazolar bo‘lsa va bu qism fazolar minimal ko‘phadlar o‘zaro tub bo‘lsa, u holda bu $I_1^{n_1}$ va $I_2^{n_2}$ qism fazolar $\overline{A}$-operator bilan o‘rin almashinuvchi bo‘lgan $\overline{B}$ ixtiyoriy chiziqli operatorga nisbatan ham invariant qism fazolar bo‘ladi.

Natija. Oddiy strukturali o‘rin almashinuvchi matritsalarni bir vaqtda bitta o‘xshash almashtirish bilan diagonal ko‘rinishga keltirish mumkin.

§ 3. $Ax - xB = C$ tenglama

Quyidagi matritsali tenglama berilgan bo'lsin.

$$Ax - xB = C, \qquad (6.31)$$

bu yerda $A = \| a_{ik} \|_{i,k=1}^{m}$, $B = \| b_{kl} \|_{k,l=1}^{n}$ – mos ravishda m va n tartibli berilgan kvadrat matritsalar, $C = \| c_{j,k} \|$ – berilgan matritsa, $X = \| x_{jk} \| - m \times n$ o'lchovli to'g'ri to'rtburchakli, izlanayotgan matritsa. (6.31) tenglama X matritsaning elementlariga nisbatan $m \cdot n$ ta skalyar tenglamalar sistemasiga ekvivalent:

$$\sum_{j=k}^{m} a_{ij} x_{jk} - \sum_{l=1}^{n} x_{ie} b_{ek} = c_{ik} \quad (i = 1, 2, ..., m; k = 1, 2, ..., n).$$

Bunga mos bir jinsli tenglamalar sistemasi

$$\sum_{j=k}^{m} a_{ij} x_{jk} - \sum_{l=1}^{n} x_{ie} b_{ek} = 0 \quad (i = 1, 2, ..., m; k = 1, 2, ..., n).$$

bo'lib, matritsalar ko'rinishida quyidagicha yoziladi:

$$Ax - xB = C \qquad (6.32)$$

Shunday qilib, agar (6.32) tenglama faqat nolli yechimga ega bo'lsa, u holda (6.31) tenglama yagona yechimga ega. Ammo §1 da ko'rsatilganidek, (6.32) tenglama faqat va faqat A va B matritsalar umumiy xarakteristik songa ega bo'lmaganlardagina nolli yechimga ega bo'ladi. Demak, agar, A va B matritsalar umumiy xarakteristik songa ega bo'lmasalar, u holda (6.31) tenglama yagona yechimga ega bo'ladi, Agar, A va B matritsalar umumiy xarakteristik songa ega bo'lsalar, u holda ozod had C matritsaga bog'liq holda ikki hol bo'ldi: (6.31) tenglama umuman yechimga ega emas, yoki quyidagi formula bilan aniqlanuvchi cheksiz ko'p yechimga ega: $X = X_0 + X_1$, bu yerda X_0-(6.31) tenglamaning hususiy yechimi, X_1 esa (6.32) tenglama umumiy yechimi.

§4. $f(x)=0$ skalyar tenglama

Avval quyidagi tenglamani qaraymiz:

$$g(X)=0,$$

bu yerda $g(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{\alpha_1}(\lambda-\lambda_2)^{\alpha_2}\dots(\lambda-\lambda_k)^{\alpha_k}-\lambda$ ning berilgan ko'phadi, X izlanayotgan n – tartibli kvdrat matritsa.

X matritsaning minimal ko'phadi, ya'ni, birinchi $i_1(\lambda)$ invariant ko'phad $g(\lambda)$ ning bo'luvchisi bo'lishi kerak,u holda X matritsaning elementar bo'luvchilari quyidagi ko'rinishga ega bo'lishi kerak:

$$(\lambda-\lambda_{i_1})^{p_{i_1}}(\lambda-\lambda_{i_2})^{p_{i_2}}\dots(\lambda-\lambda_{i_k})^{p_{i_k}}\begin{pmatrix} i_1,i_2,\dots,i_\gamma=1,2,\dots,h, \\ p_{i_1}\le p_{i_2}\le\dots\le p_{i_k}\le a_{i_k}, \\ p_{i_1}+p_{i_2}+\dots+p_{i_\gamma}=n \end{pmatrix},$$

$i_1,i_2,\dots,i_\gamma$ indekslar ichida o'zaro tenglari ham bo'lishi mumkin, X izlanayotgan matritsaning berilgan tartibi.

Izlanayotgan X matritsa quyidagi ko'rinishda tasvirlanadi:

$$X=T\left\{\lambda_{i_1}E^{(p_{i_1})}+H^{p_{i_1}},\dots,\lambda_{i_\gamma}E^{(p_{i_\gamma})}+H^{(p_{i_\gamma})}\right\}T^{-1} \tag{6.34}$$

bu yerda $T-n-$ tartibli ixtiyoriy xosmas matritsa, (6.33) tenglamaning yechimlar to'plamidagi berilgan tartibli izlanayotgan matritsa (6.34) formula bo'yicha chekli sondagi o'zaro o'xshash matritsalarga yoyiladi.

Misol 1. Quyidagi tenglama berilgan bo'lsin.

$$X^m=0 \tag{6.35}$$

Agar matritsaning qandaydir darajasi nolga teng bo'lsa, u holda matritsa nilpotent matritsa deyiladi. Darajasi nolga teng bo'lgan matritsaning eng kichik daraja ko'rsatkichi uning nilpotentlik indeksi deyiladi.

(6.35) tenglamaning yechimi nilpotentlik indeksi $\mu\le m$ bo'lgan barcha nilpotent matritsalar bo'lib, barcha $n-$tartibli yechimlar quyidagicha ifodalanadi:

$$X=T\left\{H^{(p_1)},H^{(p_2)},\dots,H^{(p_\gamma)}\right\}T^{-1}\quad\begin{pmatrix} p_1,p_2,\dots,p_\gamma\le m \\ p_1+p_2,+\dots,+p_\gamma=n \end{pmatrix}, \tag{6.36}$$

bu yerda T – ixtiyoriy xosmas matritsa.

Misol 2: Quyidagi tenglamani qaraymiz:

$$X^2 = X \tag{6.37}$$

Bunday tenglamani qanoatlantiruvchi matritsalar idempotent matritsalar deyiladi. Idempotent matritsalarning elementar bo'luvchilari λ yoki $\lambda - 1$ bo'ladi. Shuning uchun idempotent matritsalarni 0 yoki 1 xarakteristik sonli oddiy strukturali (ya'ni diagonal ko'rinishga keltiriladigan) matritsa sifatida aniqlash mumkin. Berilgan $n-$tartbli barcha idempotent matritsalar quyidagi ko'rinishga ega:

$$x = T\underbrace{\{1,1,\ldots,1,0,\ldots 0\}}_{n}T^{-1} \tag{6.38}$$

bu yerda T -ixtiyoriy xosmas matritsa.

Eng quyidagi umumiy tenglamani qaraymiz:

$$f(X) = 0, \tag{6.39}$$

bu yerda $f(\lambda) - \lambda$ argumentli kompleks tekislikning qandaydir G sohasidagi regulyar funksiya. Izlanayotgan $X = \|x_{ik}\|_{i,k=1}^{n}$ yechimdan uning xarakteristik sonlari G sohasida yotishini talab qilamiz.

$f(\lambda)$ funksiyaning G sohasida yotuvchi barcha nollari va ularning karralilarini yozamiz:

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots,$$
$$a_1, a_2, \ldots$$

Avvalgi holdagi kabi X matritsaning har bir elementar bo'luvchisi

$$(\lambda - \lambda_i)^{p_i} \qquad (p_i \le a_i)$$

ko'rinishida bo'lishi kerak. Shuning uchun:

$$X = T\{\lambda_{i1}E^{(p_{i1})} + H^{(p_{i1})}, \ldots, \lambda_{i_r}E^{(p_{ir})} + H^{(p_{ir})}\}T^{-1} \tag{6.40}$$

$$\begin{pmatrix} i_1, i_2, \ldots, i_\gamma = 1,2,\ldots, p_{i_1} \le a_{i_2}, p_{i_k} \le a_{i_k}, \ldots, p_{i_\gamma} \le a_{i_\gamma}; \\ p_{i_1} + p_{i_2} + \ldots + p_{i_\gamma} = n \end{pmatrix},$$

bu yerda T – ixtiyoriy xosmas matritsa.

§5. Matritsali ko'phadli tenglamalar

Quyidagi tenglamani qaraymiz:

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m = 0, \tag{6.41}$$

$$y^m A_0 + y^{m-1} A_1 + \ldots + A_m = 0 \tag{6.42}$$

bu yerda $A_0, A_1, \ldots, A_m$ – berilganlar, x va y – izlanayotgan n–tartibli kvadrat matritsalar. Avvalgi paragrafdagi (6.33) tenglama (6.41), (6.42) tenglamalarning xususiy holi bo'lib, $A_i = \alpha_i E, \alpha_i, i = 1,2,\ldots,m$ sonlar bo'lganda (6.41), (6.42) dan (6.33) kelib chiqadi.

Quyidagi teorema (6.41),(6.42) va (6.33) tenglamalar o'rtasidagi bog'lanishni o'rnatadi.

Teorema 6.4. (6.41) va (6.42) tenglamalarning har bir yechimi

$$g(x) = 0 \tag{6.43}$$

bu yerda

$$g(\lambda) = A_0 \lambda^m + A_1 \lambda^{m-1} + \ldots + A_m. \tag{6.44}$$

skalyar tenglamani qanoatlantiradi .

Isbot. $F(\lambda) = A_0 \lambda^m + A_1 \lambda^{m-1} + \ldots + A_m$ matritsali ko'phadni qaraymiz. U holda (6.41) va (6.42) tenglamalar $F(x) = 0$ $F(y) = 0$ ko'rinishda yoziladi.

Umumlashgan Bezu teoremasiga asosan, agar X va Y bu tenglamalarning yechimi bo'lsa, $F(\lambda)$ ko'phad chapdan $\lambda E - X$ ga o'ngdan $\lambda E - Y$ da bo'linadi:

$$F(\lambda) = Q(\lambda)(\lambda E - X) = (\lambda E - Y) Q_1(\lambda)$$

Bundan,

$$g(\lambda) = |F(\lambda)| = |Q(\lambda)| \Delta(\lambda) = |Q(\lambda)| \Delta_1(\lambda) \tag{6.45}$$

bu yerda $\Delta(\lambda) = |\lambda E - X|$, $\Delta_1(\lambda) = |\lambda E - Y|$ lar mos ravishda X va Y matritsalarning xarakteristik ko'phadi. Gamelton – Keli teoremasiga asosan

$$\Delta(X) = 0 \quad \Delta_1(Y) = 0$$

Shuning uchun (6.45) dan $g(X) = g(y) = 0$ kelib chiqadi.

Biz (6.41) tenglamaning har bir yechimi darajasi $m \cdot n$ dan katta bo'lmagan

$$g(\lambda) = 0$$

skalyar tenglamani qanoatlantirishini isbotladik. Ammo bu tenglamani berilgan $n-$ tartibli matritsali yechimlar to'plami o'zaro o'xshash bo'lgan matritsalarning chekli sondagi sinfidan iborat bo'ladi. Shuning uchun (6.41) tenglamaning barcha yechimlarini quyidagi ko'rinishdagi matritsalar orasidan izlash kerak:

$$T_i D_i T_i^{-1}, \tag{6.46}$$

bu yerda D_i -ma'lum matritsa bo'lib, uni normal Jordon shaklga ega deb hisoblash mumkin; T_i -ixtiyoriy n -tartibli xosmas matritsa, $i = 1,2,,...,n$. (6.46) matritsani (6.41) dagi X ning o'rniga qo'yib T_i ni shunday tanlaymizki, unda (6.41) tenglama qanoatlantirilsin. Har bir T_i uchun quyidagicha chiziqli tenglamani hosil qilamiz:

$$A_0 T_i D_i^m + A_1 T_i D_i^{m-1} + ... + A_m T_i = 0 \qquad (i = 1,2, \; .... \; , n) \tag{6.47}$$

(6.47) tenglamadagi T_i yechimni topish uchun taklif qilinadigan yagona usul shundan iboratki, matritsani tenglamani T_i matritsa elementlariga nisbatan bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi bilan almashtirishdir. (6.47) tenglamaning har bir T_i yechimini (6.46) ga qo'yib, (6.41) tenglamaning yechimini hosil qilamiz. Xuddi shunday mulohazalarni (6.42) tenglama uchun ham yuritish mumkin.

Ko'rinib turibdiki, Gamelton – Keli teoremasi teorema-6.4 ning xususiy xoli bo'lib, ixtiyoriy A kvadrat matritsa

$$\lambda E - A = 0$$

tenglamani qanoatlantiradi. Shuning uchun teorema-6.4 ga asosan

$$\Delta(A) = |\lambda E - A| = 0$$

Teorema 6.4 ni quyidagicha umumlashtirish mumkin:

Teorema 6.5. (Fillips teoremasi). Agar juft-jufti bilan o'zaro o'rin almashinuvchi bo'lgan n -tartibli $X_0, X_1, ..., X_m$ matritsalar,

$$A_0X_0 + A_1X_1 + ... + A_mX_m = 0 \qquad (6.48)$$

(bu yerda $A_0, A_1, ..., A_m$ -berilgan, n -tartibli kvadrat matritsalar) matritsali tenglamani qanoatlantirsa, u holda bu $X_0, X_1, ..., X_m$ matritsalar quyidagi skalyar tenglamani qanoatlantiradi

$$g(X_0, X_1, ..., X_m) = 0, \qquad (6.49)$$

bu yerda

$$g(\xi_0, \xi_1, ..., \xi_m) = |A_0\xi_0 + ... + A_m\xi_m| \qquad (6.50)$$

Isboti.

$$F(\xi_0, \xi_1, ..., \xi_m) = \|f_k(\xi_0, \xi_1, ..., \xi_m)\|_{i,k=1}^n = A_0\xi_0 + A_1\xi_1 + ... + A_m\xi_m$$

deb olamiz, bu yerda $\xi_0, \xi_1, ..., \xi_m$ -skalyar o'zgaruvchilar bo'lib, $f_{ik}(\xi_0, \xi_1, ..., \xi_m)$ -shu skalyar o'zgaruvchilarga nisbatan chiziqli shakl (i,k=1,2,...,n).

$\widehat{F}(\xi_0, \xi_1, ..., \xi_m) = \|\widehat{f}_{ik}(\xi_0, \xi_1, ..., \xi_m)\|_{i,k=1}^n$ orqali F matritsa uchun yopishgan matritsani belgilaymiz. Bu yerda $\widehat{f}_{i,k}$ $|F(\xi_0, \xi_1, ..., \xi_m)|$ aniqlovchidagi $f_{k,i}$ elementning algebraik to'ldiruvchisi (i,k=1,2,...,n). U holda $\widehat{F}$ matritsaning har bir $\widehat{f}_{i,k}$ (i,k=1,2,...,n) elementi $\xi_0, \xi_1, ..., \xi_m$ larga nisbatan $m-1$ darajali bir jinsli ko'phad bo'ladi, shuning uchun $\widehat{F}$ ni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\widehat{F} = \sum_{j_0+j_1+...+j_m} = n-1^{F_{j_0,j_1...,j_m}\xi_0^{j_0}\xi_1^{j_1}...\xi_m^{j_m}}$$

bu yerda $F_{j_0,j_1,...,j_m}$ -qandaydir n -tartibli o'zgarmas matritsa.

$\widehat{F}$ matritsaning ta'rifidan quyidagi ayniyat kelib chiqadi:

$$\widehat{F}F = g(\xi_0, \xi_1, ..., \xi_m)E$$

Bu ayniyatni quyidagicha yozamiz:

$$\widehat{F} = \sum_{j_0+j_1+...+j_m} =_{n-1} F_{j_0,j_1,...,j_m}(A_0\xi_0 + A_1\xi_1 + A_m\xi_m)\xi_0^{j_0}\xi_1^{j_1}...\xi_m^{j_m} = g(\xi_0, \xi_1, ..., \xi_m)E \qquad (6.51)$$

(6.51) ayniyatning chap tomonidan o'ng tomoniga o'tish qavslarni ochish va o'xshash hadlarga keltirish yo'li bilan amalga oshiriladi. Bunda $\xi_0, \xi_1, ..., \xi_m$ larni o'zaro o'rinlarini almashtirishga to‘g‘ri kelib, bularni A_i va $F_{j_0,j_1,...,j_m}$ matritsali koeffisiyentlar bilan o‘rinlarini almashtirmaslikka to‘g‘ri keladi. Shuning uchun (6.51) o‘z kuchida qoladi, agar $\xi_0,\xi_1,...,\xi_m$ larni o‘zaro o‘rin almashinuvchi $X_0,X_1,...,X_m$ matritsalar bilan almashtirsak:

$$\sum_{j_0+j_1+...+j_m =n-1} F_{j_0,j_1,...,j_m}(A_0X_0+A_1X_1+A_mX_m)X_0^{j_0}X_1^{j_1}...X_m^{j_m}=g(X_0,X_1,...,X_m) \tag{6.52}$$

Ammo bunda $A_0X_0+A_1X_1+A_mX_m=0$ shart bajarilishi kerak bo‘ladi. U holda (6.52) dan $g(X_0,X_1,...,X_m)=0$ ni hosil qilamiz.

Eslatma 1. Agar, (6.48) tenglama

$$A_0X_0+A_1X_1+A_mX_m=0 \tag{6.53}$$

tenglama bilan almashtirilsa, teorema 6.5 o‘z kuchida qoladi.

Haqiqatan, teorema 6.5 ni

$$A^T{}_0X_0+A^T{}_1X_1+A^T{}_mX_m=0$$

tenglamaga qo‘llash mumkin, so‘ngra bu tenglamadan hadlab, transponirlangan matritsaga o‘tish mumkin.

Eslatma 2. Agar $X_0,X_1,...,X_m$ lar sifatida $X^m,X^{m-1},...,X,E$ larni olsak, Teorema 6.4 , Teorema 6.5 ning xususiy holi sifatida kelib chiqadi.

§6. Xosmas matritsadan m-darajali ildiz chiqarish

Quyidagi tenglamani qaraymiz:

$$X^m=A \tag{6.54}$$

bu yerda A – berilgan, X – izlanayotgan n – tartibli matritsalar, m – butun musbat son.

Bu paragrafda $|A|\neq 0$ bo‘lgan holni qaraymiz. Bu holda A matritsaning barcha xarakteristik sonlari noldan farqli bo‘ladi.

A matritsaning elementar bo‘luvchilarini

$$(\lambda-\lambda_1)^{p_1},(\lambda-\lambda_2)^{p_2},...,(\lambda-\lambda_u)^{p_u} \tag{6.55}$$

lar orqali belgilab, A matritsani quyidagicha Jordon shakliga keltiramiz:

$$A = U\tilde{A}U^{-1} = U(\lambda_1 E_1 + H_1, ..., \lambda_u E_u + H_u)U^{-1} \qquad (6.56)$$

Izlanayotgan X matritsaning xarakteristik sonlarini m -darajali A matritsaning xarakteristik soniga teng bo'lgani uchun X matritsaning xarakteristik sonlari ham noldan farqli bo'ladi. Shuning uchun bu xarakteristik sonlarda $f(\lambda) = \lambda^m$ dan olingan hosila nolga aylanmaydi.Ammo bu holda X matritsaning elementar bo'luvchilari X matritsani m -darajaga ko'targanda yoyilmaydi. Bundan kelib chiqadiki, X matritsaning elementar bo'luvchilari quyidagilar bo'ladi:

$$(\lambda - \xi_1)^{p_1}, (\lambda - \xi_2)^{p_2}, ..., (\lambda - \xi_u)^{p_u} \qquad (6.57)$$

bu yerda $\xi_j^m = \lambda_j$ $\xi_j = \sqrt[m]{\lambda_j}$ $(j = 1,2,...,n)$.

Endi $\sqrt[m]{\lambda_j E_j + H_j}$ ni quyidagicha aniqlaymiz. λ -tekislikda markazi λ_j nuqtada bo'lib, nolni o'z ichiga olmaydigan doira olamiz. Bu doirada $\sqrt[m]{\lambda}$ funksiya ya'ni m ta ajralgan tarmoqlariga ega bo'lamiz. Bu tarmoqlarini doira markazida qabul qiladigan qiymatlariga qarab ajratish mumkin. $\sqrt[m]{\lambda}$ bilan λ_j nuqtada izlanayotgan X matritsaning ξ_j xarakteristik soni bilan ustma-ust tushadigan qiymatni qabul qiluvchi tarmoqni belgilaymiz va shu tarmoqdan kelib chiqib, quyidagi qator yordamida $\sqrt[m]{\lambda_j E_j + H_j}$ dan olingan funksiya'ni aniqlaymiz:

$$\sqrt[m]{\lambda_j E_j + H_j} = \lambda_0^{\frac{1}{m}} E_j + \frac{1}{m}\lambda_0^{\frac{1}{m}-1} H_j + \frac{1}{2!}\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m} - 1\right)\lambda_0^{\frac{1}{m}-2} H_j^2 + ... \qquad (6.58)$$

Qaralayotgan $\sqrt[m]{\lambda}$ funksiyadan λ_j olingan hosila nolga teng emas, u holda (6.58) matritsa faqat bitta $(\lambda - \lambda_j)^{p_j}$ elementar bo'luvchiga ega bo'lib,

$\xi_j = \sqrt[m]{\lambda_j}$, $(j = 1,2,...,n)$.

Bundan kelib chiqadiki,

$$\left\{\sqrt[m]{\lambda_1 E_1 + H_1}, \sqrt[m]{\lambda_2 E_2 + H_2}, ..., \sqrt[m]{\lambda_u E_u + H_u}\right\}$$

kvazidiagonal matritsa (6.57) , ya'ni izlanayotgan X matritsa elementar bo'luvchilariga ega. Shuning uchun shunday T xosmas matritsa mavjudki, unda

$$X = T\left\{\sqrt[m]{\lambda_1 E_1 + H_1}, \sqrt[m]{\lambda_2 E_2 + H_2}, \ldots, \sqrt[m]{\lambda_u E_u + H_u}\right\}T^{-1} \tag{6.59}$$

T matritsani aniqlash uchun $(\sqrt[m]{\lambda})^m = \lambda$ ayniyatdagi λ ning o'rniga $\lambda_j E_j + H_j$, $(j = 1,2,\ldots,n)$ ni qo'yib,

$(\sqrt[m]{\lambda_j E_j + H_j})^m = \lambda_j E_j + H_j$, $(j = 1,2,\ldots,n)$ ni hosil qilamiz.

(6.54) va (6.59) dan quyidagi kelib chiqadi:

$$A = T\{\lambda_1 E_1 + H_1, \lambda_2 E_2 + H_2, \ldots, \lambda_u E_u + H_u\}T^{-1} \tag{6.60}$$

(6.56) va (6.60) dan quyidagini topamiz:

$$T = UX_{\tilde{A}} \tag{6.61}$$

bu yerda $X_{\tilde{A}}$ - $\tilde{A}$ matritsa bilan o'rin almashinuvchi, ixtiyoriy xosmas matritsa ($X_{\tilde{A}}$ ning ifodasi 2§ da keltirilgan).

(6.61) ni (6.59) ga qo'yib, (6.54) tenglamani barcha yechimlarini o'z ichiga oluvchi formulani hosil qilamiz:

$$X = UX_{\tilde{A}}\left\{\sqrt[m]{\lambda_1 E_1 + H_1}, \sqrt[m]{\lambda_2 E_2 + H_2}, \ldots, \sqrt[m]{\lambda_u E_u + H_u}\right\}X_{\tilde{A}}^{-1}U^{-1} \tag{6.62}$$

(6.54) tenglamaning barcha yechimlarini A matritsaning m darajali ildizi deb, $\sqrt[m]{A}$ ko'p qiymatli simvol bilan belgilaymiz. $\sqrt[m]{A}$ umumiy holda A matritsaning funksiyasi bo'lmaydi, ya'ni, A ning ko'phadi ko'rinishida tasvirlanmaydi.

Eslatma. Agar A matritsaning barcha elementar bo'luvchilari juft-jufti bilan o'zaro tub, ya'ni, $\lambda_1 \lambda_2, \ldots, \lambda_u$ sonlar har xil bo'lsa, $X_{\tilde{A}}$ matritsa quyidagicha kvazidiagonal ko'rinishga ega bo'ladi:

$$X_{\tilde{A}} = \{X_1, X_2, \ldots, X_u\}$$

bu yerda X_j matritsa $\lambda_j E_j + H_j$ matritsa bilan o'rin almashinuvchi, demak, $\lambda_j E_j + H_j$ ning ixtiyoriy funksiyasi bilan, xususiy holda $\sqrt[m]{\lambda_j E_j + H_j}$ bilan o'rin almashinuvchi bo'ladi $(j = 1,2,...,n)$. Shuning uchun bu holda (6.62) quyidagicha bo'ladi:

$$X = U\left\{\sqrt[m]{\lambda_1 E_1 + H_1}, \sqrt[m]{\lambda_2 E_2 + H_2}, ..., \sqrt[m]{\lambda_u E_u + H_u}\right\}U^{-1}$$

Shunday qilib, agar A matritsaning elementar bo'luvchilari juft-jufti bilan o'zaro tub bo'lsa, $X = \sqrt[m]{A}$ uchun formulada faqat diskret ko'p qiymatlilik bo'ladi. Bu holda ixtiyoriy $\sqrt[m]{A}$ qiymatni A ning ko'phadi sifatida tasvirlash mumkin.

Misol. Quyidagi matritsaning barcha kvadrat ildizlarini toping:

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

ya'ni, $X^2 = A$ tenglamaning barcha yechimlarini toping.

Bu holda A matritsa Jordonning normal ko'rinishiga ega. Shuning uchun (6.62) da $A = \tilde{A}$, $U = E$ deb olish mumkin $X_{\tilde{A}}$ matritsa quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$X_{\tilde{A}} = \begin{Vmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 0 \\ 0 & d & e \end{Vmatrix},$$

bu yerda a, b, c, d, e – ixtiyoriy parametrlar.

(6.62) formula quyidagi ko'rinishni oladi:

$$X = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 0 \\ 0 & d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon & \frac{\varepsilon}{2} & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 0 \\ 0 & d & e \end{bmatrix}^{-1}, \quad \varepsilon^2 = \eta^2 = 1 \tag{6.63}$$

X ni o'zgartirmay, (6.62) formulada $X_{\tilde{A}}$ ni shunday skalyarga ko'paytirish mumkinki, unda $\left|X_{\tilde{A}}\right| = 1$ bo'ladi. Bu qaralayotgan holda $a^2 e = 1$ tenglikka olib keladi, bundan $e = a^{-2}$.

$X_{\tilde{A}}^{-1}$ matritsaning elementlarini hisoblaymiz. Buning uchun $X_{\tilde{A}}$ koeffitsiyentilaridan tuzilgan matritsada chiziqli almashtirishni yozamiz:

$$y_1 = ax_1 + bx_2 + cx_3,$$
$$y_2 = ax_2,$$
$$y_3 = dx_2 + a^{-2}x_3.$$

Bu sistemani X_1, X_2, X_3 ga nisbatan yechib, quyidagi teskari almashtirishni hosil qilamiz:

$$x_1 = a^{-1}y_1 - (a^{-2}b - d\ )y_2 - acy_3,$$
$$x_2 = a^{-1}y_2,$$
$$x_3 = -ady_2 + a^2y_3.$$

Bundan,

$$X_{\tilde{A}}^{-1} = \begin{Vmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 0 \\ 0 & d & a^{-2} \end{Vmatrix}^{-1} = \begin{Vmatrix} a^{-1} & d - a^{-2}b & -a \\ 0 & a^{-1} & 0 \\ 0 & -d & a^2 \end{Vmatrix}$$

bo‘lib, (6.63) dan

$$X = \begin{Vmatrix} \varepsilon & (\varepsilon-\eta)acd + \frac{\varepsilon}{2} & a^2c(\eta-\varepsilon) \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & (\varepsilon-\eta)d^{-1} & \eta \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \varepsilon & (\varepsilon-\eta)w + \frac{\varepsilon}{2} & (\eta-\varepsilon)v \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & (\varepsilon-\eta)w & \eta \end{Vmatrix}$$

(6.64)

$$v = a^2c, \quad w = a^{-1}d$$

Demak, X yechim ikkita v va w ixtiyoriy parametrlar va ikkita ε va η ixtiyoriy belgilarga bog‘liq.

§7. Xos matritsadan m -darajali ildiz chiqarish

Bu paragrafda $|A| = 0$ holni qaraymiz.

Bu holda ham $|A| \neq 0$ holdagi kabi A matritsani quyidagicha Jordonning normal shakliga keltiramiz:

$$A = U(\lambda_1 E^{(p_1)} + H^{(p_1)}, ..., \lambda_u E^{(p_u)} + H^{(p_u)}, H^{(q_1)}, H^{(q_2)}, ..., H^{(q_t)})U^{-1} \tag{6.65}$$

bu yerda $(\lambda - \lambda_1)^{p_1}, ..., (\lambda - \lambda_u)^{p_u}$ - A matritsaning nolmas xarakteristik sonlariga mos elementar bo'luvchilari, $\lambda^{q_1}, \lambda^{q_2}, ..., \lambda^{q_t}$ esa nolli xarakteristik sonlarga mos elementar bo'luvchilari.

U holda

$$A = U\{A_1, A_2\}U^{-1} \tag{6.66}$$

bu yerda

$$A_1 = \{\lambda_1 E^{(p_1)} + H^{(p_1)}, ..., \lambda_u E^{(p_u)} + H^{(p_u)}\}, A_2 = \{H^{(q_1)}, H^{(q_2)}, ..., H^{(q_t)}\} \tag{6.67}$$

ko'rinib turibdiki, A_1 – xosmas matritsa, ya'ni, $|A_1| \neq 0$, A_2 esa nilpotentlik indeksi $\mu = \max(q_1, q_2, ..., q_t)$ bo'lgan nilpotent matritsa, ya'ni, $A_2^{\mu} = 0$.

Berilgan (6.54) tenglamadan kelib chiqadiki, A matritsa izlanayotgan X matritsa bilan o'rin almashinuvchi, demak, unga o'xshash bo'lgan quyidagi matritsalar bilan ham o'rin almashinuvchi:

$$U^{-1}AU = \{A^1, A^2\} \text{ va } U^{-1}XU \tag{6.68}$$

2§ dagi teorema 6.3 da isbotlanganidek, (6.68) matritsalarning o'rin almashinuvchanligidan va A_1 va A_2 matritsalarni umumiy xarakteristik sonlarga ega emasligidan kelib chiqadiki, (6.68) ning ikkinchi matritsasi mos ravishda kvazidiagonal shaklga ega.

$$U^{-1}XU = \{X_1, X_2\} \tag{6.69}$$

(6.54) tenglamadagi A va X matritsalarni ularga o'xshash bo'lgan

$$\{A_1, A_2\} \text{ va } \{X_1, X_2\}$$

matritsalar bilan almashtirib, (6.54) tenglamani quyidagi ikkita tenglama bilan almashtiramiz:

$$X_1^m = A_1, \tag{6.70}$$

$$X_2^m = A_2 \qquad (6.71)$$

$|A_1| \neq 0$ bo'lgani uchun (6.70) tenglamaga avvalgi paragrafdagi natijalarni qo'llab, X_1 ni (6.62) formula bo'yicha topamiz:

$$X_1 = X_{A_1}\left\{\sqrt[m]{\lambda_1 E^{(p_1)} + H^{(p_2)}}, \ldots, \sqrt[m]{\lambda_u E^{(p_u)} + H^{(p_u)}}\right\} X_{A_1}^{-1} \qquad (6.72)$$

Shunday qilib, (6.71) tenglamani qarash qoldi, ya'ni:

$$A_2 = \left\{H^{(q_1)}, H^{(q_2)}, \ldots, H^{(q_t)}\right\} \qquad (6.73)$$

Jordonning normal shaklsiga ega bo'lgan,

$\mu = \max(q_1, q_2, \ldots, q_t)$ nilpotentlik indeksli A_2 nilpotentlik matritsaning m -darajali barcha ildizlarini tanish bilan shug'ullanamiz. $A_2^\mu = 0$ va (6.71) dan

$$X_2^{m\mu} = 0$$

Bu oxirgi tenglikdan ko'rinadiki, X_2 izlanayotgan matritsa Y nilpotentlik indeksli nilpotent matritsa bo'lib, $m(\mu - 1) \leq Y \leq m\mu$

X_2 matritsani Jordon shakliga o'tkazamiz:

$$X_2 = T\left\{H^{(v_1)}, H^{(v_2)}, \ldots, H^{(v_s)}\right\}T^{-1}, \qquad (6.74)$$

$$(v_1, v_2, \ldots, v_s \leq y).$$

(6.74) tenglikni ikkala tomonini m -darajaga ko'tarib, quyidagini hosil qilamiz:

$$A_2 = X_2^m = T\left\{[H^{(v_1)}]^m, [H^{(v_2)}]^m, \ldots, [H^{(v_s)}]^m\right\}T^{-1} \qquad (6.75)$$

$[H^{(v)}]^m$ matritsa qanday elementar bo'luvchilarga ega ekanligini aniqlaymiz.

$\overline{H} - \overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_v$ bazisli v-o'chovli vektor fazodagi $H^{(v)}$ matritsali chiziqli operator bo'lsin. $H^{(v)}$ matritsaning ko'rinishinidan kelib chiqadiki,

$$\overline{H}\overline{e}_1 = 0, \overline{H}\overline{e}_2 = \overline{e}_1, \ldots, \overline{H}\overline{e}_v = \overline{e}_{v-1} \qquad (6.76)$$

Bu tengliklar ko'rsatadiki, $\overline{H}$ operator uchun $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_v$ vektorlar λ^v elementar bo'luvchiga mos Jordoncha vektorlar zanjirini tashkil qiladi.

(6.76) tengliklarni quyidagicha yozamiz:

$$\overline{H}\overline{e}_j = \overline{e}_{j-1} \quad (j = 1,2,...,\nu, \quad \overline{e}_0 = 0)$$

Bundan ko‘rinadiki,

$$\overline{H}^m\overline{e}_j = \overline{e}_{j-m} \quad (j = 1,2,...,\nu, \quad \overline{e}_0 = \overline{e}_1 = ... = \overline{e}_{-m+1} = 0) \quad (6.77)$$

ν sonini quyidagicha yozamiz:

$$\nu = km + r \quad (r < m),$$

bu yerda k, r butun manfiymas sonlar. $\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_\nu$ bazis vektorlarni quyidagicha joylashtiramiz:

$$\begin{array}{cccc} \overline{e}_1 & \overline{e}_2 & \cdots & \overline{e}_m \\ \overline{e}_{m+1} & \overline{e}_{m+2} & \cdots & \overline{e}_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \overline{e}_{(k-1)m+1} & \overline{e}_{(k-1)m+2} & \cdots & \overline{e}_{km} \\ \overline{e}_{km+1} & \overline{e}_{km+2} & \cdots & \overline{e}_{km+x} \end{array} \quad (6.78)$$

Bu jadvalda m ta ustun bo‘lib, birinchi r ta ustunda $k+1$ ta vektor, qolgan ustunlarda k ta vektorlar bor. (6.77) tengliklardan ko‘rinadiki (6.78) jadvalning har bir ustunidagi vektorlar sistemasi $\overline{H}^m$ operatorga nisbatan vektorlarning Jordon zanjirini tashkil etadi. Agar (6.78) dagi vektorlarni satrlar bo‘yicha ketma-ket raqamlanishini ustunlar bo‘yicha qilib olsak, u holda hosil qilingan yangi bazisda $\overline{H}^m$ operatorning matritsasi quyidagicha normal Jordon shakliga ega bo‘ladi:

$$\left\{ \underbrace{H^{(k+1)},...,H^{k+1}}_{ru}, \underbrace{H^{(k)},...,H^{(k)}}_{m-ru} \right\},$$

bundan,

$$[H^{(\nu)}]^m = P_{\nu,m}\left\{H^{(k+1)},...,H^{(k+1)},H^{(k)},...,H^{(k)}\right\}P_{\nu,m}^{-1} \quad (6.79)$$

bu yerda bir bazisdan boshqa bazisga o‘tish matritsasi $P_{\nu,m}$ quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$P_{v,m} = \left\| \begin{array}{l} \overbrace{1 \quad 0 \quad \dots \quad 0}^{m \text{ ta}} \quad 0 \dots\dots \\ 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1 \dots\dots \\ . \quad \dots \quad . \quad \dots\dots\dots\dots \\ 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \\ 0 \quad 1 \quad \dots \quad 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \right\| \qquad (6.80)$$

$\overline{H}^{v}$ matritsa bitta λ^{v} elementar bo‘luvchiga ega bo‘lib, $\overline{H}^{v}$ ni m -darajaga ko‘targanda bu elementar bo‘luvchi deyiladi. (6.79) dan ko‘rinadiki $[H^{(v)}]^{m}$ matritsa quyidagi elementar bo‘luvchilarga ega:

$$\left\{ \underbrace{\lambda^{(k+1)}, \dots, \lambda^{k+1}}_{r \text{ ta}}, \underbrace{\lambda^{(k)}, \dots, \lambda^{(k)}}_{m-r \text{ ta}} \right\}$$

Endi (6.75) tenglikka qaytib,

$$v_i = k_i m + r_i, \ (0 \le r_i < m, k_i > 0, i = 1,2,\dots,s) \qquad (6.81)$$

deb olamiz.

U holda (6.79) ga asosan (6.75) ni quyidagicha yozamiz:

$$A_2 = X_2^m = P \left\{ \underbrace{H^{(k_1+1)}, \dots, H^{(k_1+1)}}_{r_1 \text{ ta}}, \underbrace{H^{(k_1)}, \dots, H^{(k_1)}}_{m-r_1 \text{ ta}}, \underbrace{H^{(k_2+1)}, \dots, H^{(k_2+1)}}_{r_2 \text{ ta}}, \underbrace{H^{(k_2)}, \dots, H^{(k_2)}}_{m-r_2 \text{ ta}} \right\} P^{-1} T^{-1} \qquad (6.82)$$

bu yerda $P = \{P_{v_1,m}, P_{v_2,m}, \dots, P_{v_s,m}\}$.

(6.82) ni (6.73) bilan solishtirib ko‘ramizki,

$$H^{(k_1+1)}, \dots, H^{(k_1+1)}, H^{(k_1)}, \dots, H^{(k_1)}, H^{(k_2+1)}, \dots, H^{(k_2+1)}, H^{(k_2)}, \dots, H^{(k_2)} \dots \qquad (6.83)$$

kataklar tartibigacha aniqlikda

$$H^{(q_1)}, H^{(q_2)}, \dots, H^{(q_t)} \qquad (6.84)$$

kataklar bilan ustma-ust tushishi kerak.

$\lambda^{v_1}, \lambda^{v_2}, \dots, \lambda^{v_3}$ elementar bo‘luvchilarni X_2 uchun mumkin bo'lgan deb aytamiz, agarda matritsani m -darajaga ko'targandan so'ng bu elementar bo'luvchilar yoyilib, A_2 matritsaning berilgan $\lambda^{q_1}, \lambda^{q_2}, ..., \lambda^{q_l}$ elementar bo'luvchilari sistemasini yuzaga keltirsa. Elementar bo'luvchilarning mumkin bo'lgan sistemasi soni har doim chekli bo'ladi, chunki

$$\max(\nu_1, \nu_2, ..., \nu_3) \le m\mu, \; \nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_3 = n_2, \qquad (6.85)$$

bu yerda n_2 - A_2 matritsaning (darajasi) tartibi.

Har bir mumkin bo'lgan elementar bo'luvchilar sistemasi $\lambda^{\nu_1}, \lambda^{\nu_2}, ..., \lambda^{\nu_3}$ uchun (6.71) tenglamaning mos yechimi mavjud ekanligini ko'rsatamiz va bu yechimlarni aniqlaymiz. Bu holda shunday almashtiruvchi Q matritsa mavjudki, unda

$$\{H^{(k_1+1)}, ..., H^{(k_1+1)}, H^{(k_1)}, ..., H^{(k_1)}, H^{(k_2+1)}, ..., H^{(k_2+1)}, H^{(k_2)}, ..., H^{(k_2)} ...\} = Q^{-1}A_2Q \qquad (6.86)$$

Q matritsa kvazidiagonal matritsadagi kataklarning o'rin almashinishini amalga oshiradi. Shuning uchun Q matritsani ma'lum deb hisoblaymiz. (6.86) ga asosan (6.82) dan quyidagini hosil qilamiz:

$$A_2 = TPQ^{-1}A_2QP^{-1}T^{-1}.$$

Bundan,

$$TPQ^{-1} = X_{A_2}$$

yoki

$$T = X_{A2}QP^{-1} \qquad (6.87)$$

bu yerda X_{A_2} - A_2 matritsa bilan o'rin almashinuvchi ixtiyoriy matritsa.

(6.87) ni (6.74) ga qo'yib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$X_2 = X_{A_2}QP^{-1}\{H^{(\nu_1)}, H^{(\nu_2)}, ..., H^{(\nu_s)}\}PQ^{-1}X_{A_2}^{-1} \qquad (6.88)$$

(6.69), (6.72) va (6.88) dan barcha izlangan yechimlarni o'zida saqlovchi umumiy formulani hosil qilamiz:

$$X = U\left\{X_{A_1}, QP^{-1}\right\}$$

$$\left\{\sqrt[m]{\lambda_1 E^{(P_1)}} + H^{(P_2)}, \ldots, \sqrt[m]{\lambda_u E^{(P_u)}} + H^{(P_u)}, H^{(v_1)}, \ldots, H^{(v_s)} X_{A_1}{}^{-1} PQ^{-s} X_{A_2}{}^{-1}\right\} U^{-1}$$

(6.89)

Shuni aytib o‘tish kerakki, xos matritsaning m-darajali ildizi har doim ham mavjud bo‘lavermaydi. Uni mavjudligi X_2 matritsa uchun mumkin bo‘lgan elementar bo‘luvchilar sistemasini mavjudligiga bog‘liq.

Tekshirib ko‘rish mumkinki,

$$X^m = H^{(p)}$$

tenglama $m > 1, p > 1$ da yechimga ega emas.

Misol.

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

matritsani kvadrat ildizdan chiqaring, ya’ni:

$$X^2 = A$$

tenglamani barcha yechimlarini toping.

Bu holda $A = A_2, X = X_2$, $m = 2, t = 2, q_1 = 2, q_2 = 1$. X matritsa faqat bitta λ^3 elementar bo‘luvchiga ega bo‘lishi mumkin. Shuning uchun, $s = 1, v_1 = 3, k_1 = 1, r_1 = 1$ va

$$P = P_{3,2} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} = P^{-1}, \quad Q = E$$

Bundan tashqari, avvalgi misoldagi kabi (6.88) formulada

$$X_{A_2} = \begin{Vmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 0 \\ 0 & d & a^{-2} \end{Vmatrix}, \quad X_{\bar{A}}^{-1} = \begin{Vmatrix} a^{-1} & d & -a^{-2}b & -a \\ 0 & & a^{-1} & 0 \\ 0 & & -d & a^2 \end{Vmatrix}$$

deb olish mumkin.

Bu formuladan quyidagini hosil qilamiz:

$$X = X_2 = X_{A2} = X_{A2} P^{(1)} H^{(3)} P X_{A2}^{-1} = \begin{Vmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^{-1} & 0 \end{Vmatrix},$$

bu yerda $\alpha = -c\alpha^{-1} - a^2 d$ va $\beta = a^3$ – ixtiyoriy parametrlar.

§8. Matritsa logarifmi

Quyidagi matritsali tenglamani qaraymiz:

$$e^X = A \tag{6.90}$$

Bu tenglamaning barcha yechimlarini A matritsaning logarifmi (natural) deb, uni ln A dek belgilaymiz.

A matritsaning λ_j xarakteristik soni X matritsaning ξ_j xarakteristik soni bilan $\lambda_j = e^{\xi_j}$ formula orqali bog'langan, shuning uchun, agar (90) tenglama yechimga ega bo'lsa, u holda A matritsaning barcha xarakteristik sonlari noldan farqli bo'lib, A xosmas matritsa $(|A| \neq 0)$ bo'ladi. Demak, $(|A| \neq 0)$ shart (6.90) tenglama yechimi mavjudligi uchun zarurdir. Bu shart yetarli ham bo'lishini keyinroq ko'ramiz.

$|A| \neq 0$ bo'lsin. A matritsaning elementar bo'luvchilarini yozamiz:

$$(\lambda - \lambda_1)^{p_1}, (\lambda - \lambda_2)^{p_2}, ..., (\lambda - \lambda_u)^{p_u}$$

$$(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_u \neq 0, p_1 + p_2 + ... + p_u = n) \tag{6.91}$$

Bu elementar bo'luvchilarga mos ravishda A matritsani Jordonning normal ko'rinishiga keltiramiz:

$$A = U\tilde{A}U^{-1} = U\{\lambda_1 E^{(p_1)} + H^{(p_1)}, ..., \lambda_u E^{(p_u)} + H^{(p_u)}\}U^{-1} \tag{6.92}$$

Ma'lumki, e^ξ funksiyaning hosilasi ξ ning barcha qiymatlarida noldan farqli, shuning uchun X matritsadan $e^X = A$ matritsaga o'tishda elementar bo'luvchilar yoyilmaydi, ya'ni, X matritsa quyidagi elementar bo'luvchilarga ega bo'ladi:

$$(\lambda - \xi_1)^{p_1}, (\lambda - \xi_2)^{p_2}, ..., (\lambda - \xi_u)^{p_u}, \tag{6.93}$$

bu yerda $\lambda_j = e^{\xi_j}$ $j = 1,2,...,u$, ya'ni ξ_j $\ln\lambda_j$ ning qiymatlaridan biri bo'ladi.

λ o'zgaruvchili kompleks tekislikda markazi λ_j nuqtada bo'l-gan $|\lambda_j|$ dan kichik radiusli doirani olamiz va $f_j(\lambda) = \text{h } \lambda$ orqali h λ funksiyaning qaralayotgan doiradagi shunday tarmog'ini olamizki, u λ_j nuqtada X matritsani ξ_j ($j = 1,2,...,u$) xarakteristik soniga teng qiymatlarni qabul qilsin. Shundan so'ng faraz qilamiz:

$$\ln(\lambda_j E^{(p_j)} + H^{(p_j)}) = f_j(\lambda_j E^{(p_j)} + H^{(p_j)}) = \text{h } \lambda_j E^{(p_j)} + \lambda_j^{-1} H^{(p_j)} + ... \tag{6.94}$$

ln λ dan olingan hosila (λ tekislikning chekli qismida) hech qayerda nolga aylanmaydi, u holda (6.94) matritsa faqat bitta $(\lambda - \xi_j)^{p_j}$ elementar bo'luvchiga ega bo'ladi. Bunga asosan quyidagi kvazidiagonal matritsa

$$\{\ln\{\lambda_1 E^{(p_1)} + H^{(p_1)}),...,\ln(\lambda_u E^{(p_u)} + H^{(p_u)})\} \tag{6.95}$$

va X izlanayotgan matritsa xuddi shu elementar bo'luvchiga ega. Shuning uchun shunday T matritsa mavjudki, unda

$$X = T\{\ln\{\lambda_1 E^{(p_1)} + H^{(p_1)}),...,\ln(\lambda_u E^{(p_u)} + H^{(p_u)})\}T^{-1} \tag{6.96}$$

T matritsani aniqlash uchun quyidagini qaraymiz:

$$A = e^X = T\{\ln\{\lambda_1 E^{(p_1)} + H^{(p_1)}),...,\ln(\lambda_u E^{(p_u)} + H^{(p_u)})\}T^{-1} \tag{6.97}$$

(6.97) va (6.92) larni solishtirib, quyidagini topamiz:

$$T = UX_{\tilde{A}} \tag{6.98}$$

bu yerda $X_{\tilde{A}}$ - $\tilde{A}$ matritsa bilan o'rin almashinuvchi ixtiyoriy matritsa. (6.98) dan topilgan T uchun ifodani (6.96) ga qo'yib, matritsaning barcha logarifmini o'z ichiga oluvchi umumiy formulani hosil qilamiz:

$$X = UX_{\tilde{A}}\left\{\ln\left(\lambda_1 E^{(p_1)} + H^{(p_1)}\right),....,\ln(\lambda_u E^{(p_u)})\right\}X_{\tilde{A}}^{-1}U^{-1} \tag{6.99}$$

Eslatma. Agar A matritsaning barcha elementar bo'luvchilari o'zaro tub bo'lsa, u holda (6.99) formulaning o'ng tomonidagi $X_{\tilde{A}}$ va $X^{-1}{}_{\tilde{A}}$ ko'paytuvchilarni tashlab yuborish mumkin.

Qachon haqiqiy xosmas A matritsa haqiqiy X logarifmga ega bo'lishini aniqlaymiz. Izlanayotgan matritsa $\rho+i\pi$ xarakteristik songa mos bir nechta elementar bo'luvchilarga ega bo'lsin: $(\lambda-\rho-i\pi)^{q_1},...,(\lambda-\rho-i\pi)^{q_t}$. X matritsa haqiqiy bo'lgani uchun u qo'shma elementar bo'luvchilarga ham ega: $(\lambda-\rho+i\pi)^{q_1},...,(\lambda-\rho+i\pi)^{q_t}$. X matritsadan A matritsaga o'tishda elementar bo'luvchilar yoyilmaydi, ammo, $\rho+i\pi$, $\rho-i\pi$ xarakteristik sonlar $e^{\rho+i\pi}=e^{\rho-i\pi}=e^{\rho}=\mu>0$ son bilan almashadi. Shuning uchun A matritsa elementar bo'luvchilari sistemasida manfiy xarakteristik songa mos keluvchi har bir elementar bo'luvchi (agar mavjud bo'lsa), juft son marta takrorlanadi. Endi bu zarururiy shartni yetarli ham ekanligini isbotlaymiz, ya'ni A - haqiqiy xosmas matritsa faqat va faqat shu holda X haqiqiy logarifmga ega bo'ladi, agarda A matritsa manfiy xarakteristik sonlarga mos elementar bo'luvchilarga ega bo'lmasa, yoki (agar mavjud bo'lsa), bunday elementar bo'luvchilar juft son marta takrorlansa.

Haqiqatan, bu shart bajarilgan bo'lsin. U holda (6.94) formulaga mos (6.95) kvazidiagonal matritsada λ_i haqiqiy va musbat bo'lgan kataklarda ln λi uchun haqiqiy qiymatlarini olamiz, agar qandaydir katak kompleks λ_n ga ega bo'lsa, u holda xuddi shunday o'lchovli boshqa katak topilib, bu katakda ln λ va ln λ_g uchun kompleks qo'shma qiymatni olamiz. Har bir katak shartga ko'ra (6.98) da juft son marta takrorlanadi. U holda bu kataklarning yarmida $\ln\lambda_k = \ln|\lambda_k|+i\pi$, qolgan yarmida esa $\ln\lambda_k = \ln|\lambda_k| - i\pi$ deb olamiz. U holda kvazidiagonal matritsaning diagonalidagi elementlari yoki haqiqiy, yoki qo'shma kompleks bo'ladi. Ammo bunday kvazidiagonal matritsa har doim haqiqiy matritsaga o'xshash bo'ladi. Shuning uchun, shunday T_1 $\left(|T_1|\neq 0\right)$ xosmas matritsa mavjud bo'ladiki, unda

$$X_1=T_1\left\{\ln\{\lambda_1E^{(p_1)}+H^{(p_1)}),...,\ln(\lambda_uE^{(p_u)}+H^{(p_u)})\right\}T_1^{-1}$$

matritsa haqiqiy bo'ladi. Ammo bu holda quyidagi matritsa ham haqiqiy bo'ladi:

$$A_1=e^{X_1}=T_1\left\{\ln\{\lambda_1E^{(p_1)}+H^{(p_1)}),...,\ln(\lambda_uE^{(p_u)}+H^{(p_u)})\right\}T_1^{-1} \tag{6.100}$$

(6.100) va (6.92) lardan ko'rinadiki, A va A_1 matritsalar o'zaro o'xshash. Ammo ikkita o'zaro o'xshash matritsalar, qandaydir haqiqiy xosmas W -matritsa yordamida bir-biriga almashtirilishi mumkin:

$A = WA_1W^{-1} = We^{X_1}W^{-1} = e^{WX_1W^{-1}}$:

U holda $X = WX_1W^{-1}$ matritsa A matritsaning izlangan haqiqiqy logarifmi bo'ladi.

Mashqlar:

1. Agar $A = PJP^{-1}$ va B - $Q\hat{J}Q^{-1}$ bo'lib $J,\hat{J}$, - matritsalar Jordonning normal shaklida bo'lsa, u holda $Y = P^{-1}XQ$ bo'lganda AX+XB=0 (X uchun) va JY+Y$\hat{J}$=0 (Y uchun) ekvivalent ekanligini isbotlang.

2. Agar A matritsa har xil xos qiymatlarga ega bo'lsa, u holda A bilan o'rin almashinuvchi matritsa sodda matritsa bo'ladi.

3. Agar f funksiya A matritsa spektrida aniqlangan bo'lsa, u holda f(A) va A matritsalar o'zaro o'rin almashinuvchi bo'lishini aniqlang.

4. Agar A- har xil xos qiymatli normal matritsa bo'lsa, u holda A bilan o'zaro o'rin almashinuvchi har bir matritsa normal bo'lishini isbotlang.

5. Agar JY=YJ va J=$\lambda I_n + H_n$ bo'lsa, u holda

$$Y = \left\| \begin{matrix} y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_n \\ 0 & y_1 & y_2 & \cdots & y_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & y_1 & y_2 \\ 0 & & \cdots & 0 & y_1 \end{matrix} \right\|$$

ekanligini ko'rsating.

VII BOB.
KVADRATIK SHAKLLAR VA ULARNING TATBIQLARI

§1.1. Kvadratik shakllarda o'zgaruvchilarni almashtirish.

Ta'rif 7.1. Kvadratik shakl deb n ta $x_1, x_2, ..., x_n$ o'zgaruvchilarga nisbatan ikkinchi darajali bir jinsli ko'phadga aytiladi.

Kvadratik shakllarni har doim

$$\sum_{i,k}^{n} a_{ik} x_i x_k \ (a_{ik} = a_{ik};\ i,k = 1.2...., n)$$

ko'rinishida tasvirlash mumkin, bu yerda $A = (a_{ik})_{i,k=1}^{n}$ simmetrik matritsa.

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$$

deb belgilasak, kvadratik shaklni quyidagicha yozishimiz mumkin bo'ladi:

$$x^T Ax = \sum_{i,k=1}^{n} a_{i,k} x_i x_k \quad (7.1)$$

Agar A haqiqiy simmetrik matritsa bo'lsa, u holda (7.1) shakl haqiqiy deyiladi.

A matritsaning aniqlovchisi

$$|A| = |a_{ik}|_{i,k=1}^{n}$$

(7.1) kvadratik shaklning determinanti deyiladi. Agar $|A| = 0$ bo'lsa, (7.1) shakl singulyar deyiladi.

Har bir kvadratik shaklga quyidagicha bir chiziqli shakl mos keladi:

$$x^T Ay = \sum_{i,k=1}^{n} a_{i,k} x_i x_k \ , \quad (7.2)$$

bu yerda $A = (a_{ik})_{i,k-1}^{n}$, $x^T = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)^T$

Agar $x^1, x^2, ..., x^e, y^1, y^2, ..., y^m$ lar ustun matritsalar bo'lib, $c_1, c_2, ..., c_e, d_1, d_2 ..., d_m$ lar skalyar sonlar bo'lsa, quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:

$$\left(\sum_{i=1}^{e} c_i x^i\right)^T A\left(\sum_{j=1}^{m} d_j y^j\right) = \sum_{i=1}^{e} \sum_{j=1}^{m} c_i d_j \left(x^i\right)^T A y^j \quad (7.3)$$

Agar n o'lchovli yevklid fazosida $\overline{A}$ operator berilgan bo'lib, bu operatorga qandaydir $\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n$ ortonormallashgan bazisda

$$A = \left(a_{i,k}\right)^n_{i,k=1}$$

matritsa mos kelsa, u holda ixtiyoriy

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{e}_i \qquad \overline{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i \overline{e}_i$$

vektorlar uchun quyidagi ayniyat o'rinli bo'ladi

$$\overline{x}^T \overline{A}\overline{y} = \left(\overline{Ax}, \overline{y}\right) = \left(\overline{x}, \overline{Ay}\right)$$

Xususiy holda

$$\overline{x}^T \overline{A}x = \left(\overline{Ax}, x\right) = \left(\overline{x}, \overline{Ax}\right),$$

bu yerda $a_{i,k} = \left(\overline{Ae_i}, e_k\right), \left(i, k = 1,2,...,k\right).$

Endi o'zgaruvchilarni

$$x = \sum_{k=1}^{n} t_{ik} \xi_k, i = 1, 2, ..., n \quad (7.4)$$

yoki

$$\overline{x} = T\overline{\xi}, \quad T = \left(t_{ik}\right)^n{}_{i,k=1,} \ \overline{x} = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right)^T \overline{\xi} = \left(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\right)^T$$

(7.4¹)

ko'rinishda almashtirganimizda (7.1) kvadratik shakl koeffitsiyentlaridan tuzilgan matritsa qanday o'zgarishini qarab chiqamiz.

Buning uchun (7.4[1]) ni (7.1) ga qo'yib, quyidagicha hosil qilamiz:

$$x^T Ax = (T\xi)^T AT\xi = \xi^T T^T AT\xi = \xi^T \bar{A}\xi$$

bu yerda

$$\bar{A} = T^T AT \tag{7.5}$$

(7.5) formula

$$\xi^T A\xi = \sum_{i,k=1}^{n} \widetilde{a}_{i,k}\xi_i \cdot \xi_k$$

almashgan kvadratik shaklning

$$\widetilde{A} = \left(\widetilde{a}_{i,k}\right)^n{}_{i,k=1}$$

matritsasini ifodalaydi. (7.5) dan

$$\left|\widetilde{A}\right| = |A| \cdot |T|^2 \tag{7.6}$$

kelib chiqadi.

Ta'rif 7.2. (7.5) tenglik bilan bog'langan $\left(|T| \neq 0\right)$ ikkita A va $\widetilde{A}$ matritsalar kongruyent deyiladi.

Shunday qilib, har bir kvadratik shakl bilan, juft-jufti bilan kongruyent bo'lgan matritsalar sinfi bog'langan. Bu matritsalar bir xil rangga ega bo'lib, bu rang qaralayotgan kvadratik shaklning rangi bo'ladi. Bu matritsalar sinfi uchun invariant rang bo'ladi.

§2. Inersiya qonuni

Har bir $x^T Ax$ kvadratik shaklni cheksiz ko'p usul bilan quyidagi ko'rinishga keltirish mumkin:

$$x^T Ax = \sum_{i=1}^{r} a_i X^2{}_i \tag{7.7}$$

bu yerda $a_i \neq 0, i = 1,2,\ldots,r$ va

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k, \ i = 1,2,\ldots,r$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ o'zgaruvchilarning o'zaro chiziqli bog'liq bo'lmagan haqiqiy chiziqli shakllari $(r \leq n)$.

$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ - yangi o'zgaruvchilarning birinchi r tasi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ o'zgaruvchilar bilan

$$\xi_i = X_i, \quad i = 1,2,\ldots,r$$

formulalar bilan bog'langan xosmas almashtirishni qaraymiz. U holda yangi o'zgaruvchilarda

$$x^T Ax = \xi^T \tilde{A}\xi = \sum_{i=1}^{r} a_i \xi^2{}_i$$

bo'lib,

$$\tilde{A} = diag(a_1, a_2, \ldots, a_r, 0, \ldots, 0)$$

bo'ladi.

Ammo $\tilde{A}$ matritsaning rangi r ga teng. Demak, (7.7) ko'rinishdagi kvadratlar soni har doim shaklning rangiga teng bo'ladi.

Quyidagi teorema (7.1) kvadratik shaklni har xil usullar bilan (7.7) ko'rinishga keltirganimizda, nafaqat kvadratlar soni, balki musbat va manfiy kvadratlar soni ham o'zgarmasligini ko'rsatadi.

Teorema 7.1. (Kvadratik shakllarning inersiya qonuni). (7.1) haqiqiy kvadratik shaklni (7.7) o'zaro bog'liq bo'lmagan kvadratlar yig'indisi ko'rinishida ifodalashda musbat kvadratlar soni va manfiy kvadratlar soni ko'rsatilgan ko'rinishga keltirish usuliga bog'liq emas.

Isboti. (7.1) kvadratik shakl (7.7) ko'rinish bilan birga yana quyidagicha o'zaro bog'liq bo'lmagan kvadratlar yig'indisi ko'rinishiga keltirilgan bo'lib,

$$x^T Ax = \sum_{i=1}^{r} b_i Y_i^2$$

$$a_1 > 0, a_2 > 0, \ldots, a_h > 0, a_{h+1} < 0, \ldots, a_r < 0,$$

$$b_1 > 0, b_2 > 0, \ldots, b_g > 0, b_{g+1} < 0, \ldots, b_r < 0$$

bo'lsin. Faraz qilaylik, h≠g, masalan, h<g. U holda

$$\sum_{i=1}^{r} a_i X_i^2 = \sum_{i=1}^{r} b_i Y_i^2 \qquad (7.8)$$

ayniyatda $x_1, x_2, ..., x_n$ o'zgaruvchilarga $X_{h+1}, ..., X_r$ shakllarning hech bo'lmaganda bittasi nolga aylanmaydigan va quyidagi r-(g-h) ta tenglamalar sistemasini qanoatlantiruvchi qiymatlar beramiz:

$$X_1 = 0, X_2 = 0, ..., X_n = 0, Y_{g+1} = 0, ..., Y_2 = 0 \qquad (7.9)$$

O'zgaruvchilarning bunday qiymatlarida (7.8) ayniyatning chap tomoni

$$\sum_{j=n+1}^{r} a_j x_j^2 < 0$$

ga, o'ng tomoni esa

$$\sum_{k=1}^{g} b_k y_k^2 > 0$$

ga teng bo'ladi.

Shunday qilib, h≠g degan farazimiz bizni qarama-qarshilikka olib keladi.

Ta'rif 7.3. (7.1) kvadratik shaklni o'zaro bog'liq bo'lmagan kvadratlar yig'indisi ko'rinishida ifodalaganimizdagi musbat kvadratlar soni π bilan manfiy kvadratlar soni γ ning ayirmasi σ shu kvadratik shaklning signaturasi deyiladi.

Demak, $r = \pi + \gamma$, $\sigma = \pi - \gamma$

(7.7) dagi koeffitsiyentlarni $\sqrt{|a_i|}$ ko'rinishda olib, X_i larning tarkibiga kiritish mumkin bo'lgani uchun quyidagi tenglikni yozishimiz mumkin:

$$x^T A x = X_1^2 + X_2^2 + ... + X_\pi^2 - X_{\pi+1}^2 - ... - X_r^2 \qquad (7.10)$$

(7.10) ifodada $\xi_i = X_i$, $i = 1,2,...,r$ deb olib (7.1) shaklni quyidagicha kanonik ko'rinishga keltiramiz:

$$\xi^T \widetilde{A} \xi = \xi_1^2 + \xi_2^2 + ... + \xi_\pi^2 - \xi_{\pi+1}^2 - ... - \xi_r^2$$

(7.11)

Bundan teorema 7.1 ga asosan quyidagicha xulosa qilamiz: Ixtiyoriy A haqiqiy simmetrik matritsa elementlari 1,-1 va 0 lardan iborat bo'lgan diagonal matritsaga kongruyentdir, ya'ni:

$$A = T^T diog(\underbrace{1,1,...1}_{m}, \underbrace{-1,-1,...,-1}_{Yta},0,...0)T \qquad (7.12)$$

§3. Lagranj metodi

Kvadratik shaklni kvadratlar yig'indisiga keltirishning Lagranj metodini qarab chiqamiz.

Quyidagi kvadratik shakl berilgan bo'lsin

$$x^T Ax = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k$$

Quyidagi ikkita holni qaraymiz:

1) Qandaydir g (1≤g ≤n) uchun diagonal koeffitsiyent $a_{gg} \neq 0$.U holda

$$x^T Ax = \frac{1}{a_{gg}} \left(\sum_{i,k=1}^{n} a_{gk} x_k \right)^2 + x^T A_1 x \qquad (7.13)$$

deb olib, bevosita tekshirib ko'rishimiz mumkinki, $x^t A_1 x$ kvadratik shakl x_g o'zgaruvchini o'zida saqlamaydi. Bu usul kvadratik shakldan kvadratlarni ajratib olish usuli deyilib, A matritsaning diagonal elementlari noldan farqli bo'lganda, har doim uni qo'llash mumkin.

2). $a_{gg} = 0$, $a_{hh} = 0$, $a_{gh} \neq 0$, Bu holda (7.1) ni quyidagicha o'zgartiramiz:

$$x^T Ax = \frac{1}{a_{hg}} \left[\sum_{k=1}^{n} (a_{gk} + a_{hk}) x_k \right]^2 - \frac{1}{a_{hg}} \left[\sum_{k=1}^{n} (a_{gk} + a_k) x_k \right]^2 + x^T A_2 x \qquad (7.14)$$

Quyidagi

$$\sum_{k=1}^{n} a_{gk}x_k, \quad \sum_{k=1}^{n} a_{hk}x_k,$$

shakllar chiziqli bog‘liq emas, chunki birinchisi x_h ni o‘zida saqlab, x_g ni saqlamaydi, ikkinchisi esa x_g ni o‘zida saqlab, x_h ni saqlamaydi. Shuning uchun (7.14) ga kvadrat qavslardagi shakllar chiziqli bog‘liq emas.

Shunday qilib, $x^T Ax$ kvadratik shakldan ikkita chiziqli bog‘liq bo‘lmagan kvadratlarni ajratib oldik. Bu kvadratlarning har biri x_g va x_n o‘zgaruvchilarni o‘zida saqlaydi, $x^T A_2 x$ shakl esa bu o‘zgaruvchilarni o‘zida saqlamaydi.

Bu usulni ketma-ket qo‘llab, $x^T Ax$ ni kvadratlar yig‘indisiga keltirish mumkin.

(7.13) va (7.14) formulalarni mos ravishda quyidagicha ham yozish mumkin.

$$x^T Ax = \frac{1}{4a_{gg}}\left(\frac{\partial(x^T Ax)}{\partial x_g}\right) + x^T A_1 x \qquad (7.13')$$

(1.13[1])

$$x^T Ax = \frac{1}{8a_{gh}}\left[\left(\frac{\partial(x^T Ax)}{\partial x_g} + \frac{\partial(x^T Ax)}{\partial x_h}\right)^2 - \left(\frac{\partial(x^T Ax)}{\partial x_g} + \frac{\partial(x^T Ax)}{\partial x_h}\right)^2\right] + x^T A_2 x$$

(7.14)

Misol 7.1 Quyidagi kvadratik shaklni kvadratlar yig‘indisi ko‘rinishida ifodalang:

$$x^T Ax = 4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_1x_4 + 4x_2x_3 - 4x_3x_4$$

Avval, (7.13) formulani qo‘llaymiz. (g=1)

$$\frac{\partial(x^T Ay)}{\partial x_1} = 8x_1 - 4x_2 - 4x_3 + 4x_4$$

$$x^T Ax = \frac{1}{16}(8x_1 - 4x_2 - 4x_3 + 4x_4)^2 + x^T A_1 x = (2x_1 - x_2 - x_3 + x_4)^2 + x^T A_1 x$$

bu yerda $x^T A_1 x = 2x_2x_3 + 2x_2x_4 - 2x_3x_4$.

Bu shaklga (7.14') formulani qo‘llaymiz: ($g = 2$, $h = 3$)

$$x^T A_1 x = \frac{1}{8}(2x_2 + 2x_3)^2 - \frac{1}{8}(2x_3 - 2x_2 + 4x_4)^2 + x^T A_2 x = \frac{1}{2}(x_2 + x_3)^2 - \frac{1}{2}(x_3 - x_2 + 2x_4)^2 + x^T A_2 x$$

bu yerda $x^T A_2 x = 2x_4^2$.

Demak,

$$x^T Ax = (2x_1 - x_2 - x_3 + x_4)^2 + \frac{1}{2}(x_2 + x_3)^2 - \frac{1}{2}(x_3 - x_2 + 2x_4)^2 + 2x_4^2$$

bo‘lib, r=4, σ=2, $\pi = 3$, γ=1 bo‘ladi.

§4. Yakobi formulasi

(7.1) kvadratik shaklning rangini r bilan belgilab, A matritsaning k-tartibli minoralarini

$$D_k = A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ 1 & 2 & \dots & k \end{pmatrix} \neq 0,\ k=1,2\dots,r \qquad (7.15)$$

deb olamiz. Bundan, $a_{11} = D_1 \neq 0$ bo‘ladi, u holda Lagranj metodi yordamida $x^T Ax$ shakldan bitta kvadrat ajratib, quyidagini hosil qilamiz:

$$x^T Ax = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n)^2 + x^T A_1 x, \qquad (7.16)$$

bu yerda

$$x^T A_1 x = \sum_{i,k=2}^{n} a_k^{(1)} x_i x_k, \quad a_{ik}^{(1)} = a_{k,i}^{(1)},\ i,k = 1,2,\dots,n \qquad (7.17)$$

x_1 o‘zgaruvchini o‘zida saqlamaydi. (7.16) tenglikdan kelib chiqadiki, $x^T Ax$ ning koeffitsiyentlari

$$a_{i,k}^{(1)} = a_{i,k} - \frac{a_{1i}a_{1k}}{a_1},\ i,k = 1,2,\dots,n \qquad (7.18)$$

formulalar bilan aniqlanadi. U holda bu koeffitsiyentlar quyidagi matritsaning mos elementlari bilan ustma-ust tushadi:

$$G_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{pmatrix}$$

Bu matritsa esa A matritsaga Gauss usulining birinchi bosqichini qo'llab hosil qilingan.

Shunday qilib, Lagranj metodi bo'yicha bitta kvadrat ajratish jarayoni mazmun jihatidan Gauss algoritmining birinchi bosqichi bilan ustma-ust tushadi. Ikkinchi kvadratni ajratib olish uchun Gauss algoritmining ikkinchi bosqichini bajarish kerak bo'ladi va hokazo.

$A = \left(a_{ik}\right)_{i,k=1}^{n}$ simmetrik matritsaga r ta bosqichdan iborat bo'lgan Gauss algoritmini to'la qo'llab, quyidagi matritsani hosil qilamiz:

$$G_r = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1r+1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{22}^{(1)} & a_{2r+1}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr}^{(r-1)} & a_{r,r+1}^{(r-1)} & \dots & a_{rn}^{(r-1)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Bunga mos holda $x^T Ax$ kvadratik shakl quyidagicha kvadratlar yig'indisi ko'rinishida ifodalanadi:

$$x^T Ax = \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{a_{kk}^{(k-1)}} (a_{kk}^{(k-1)} x_k + \dots + a_{kn}^{(k-1)} x_n)^2 \qquad (7.19)$$

$$\left(a_{1j}^{(0)} = a_{1j}, j = 1,2,\dots,n\right)$$

O'zaro bog'liq bo'lmagan chiziqli shakllar uchun

$$X_k = a_{kk}^{(k-1)} x_k + \ldots + a_{kn}^{(k-1)} x_n \,(a_{1k}^{(0)} = a_{1k}, k = 1,2,\ldots,r)$$

(7.20)

qisqa belgilashlar kiritamiz.

$$a_{kk}^{(k-1)} = \frac{D_k}{D_{k-1}}, k = 1,2,\ldots,r, D_0 = 1, a_k^{(0)} = a_{11} \qquad (7.21)$$

ekanligini e'tiborga olsak, (7.19) ni quyidagicha yozishimiz mumkin:

$$x^T A x = \sum_{k=1}^{r} \frac{D_{k-1}}{D_k} X_k^2 \ (D_0=1) \qquad (7.22)$$

Bu formulalar Yakobi formulalari deyiladi.

Yakobi formulalaridagi X_k chiziqli shakllar koeffitsiyentlari uchun quyidagi tengliklar o'rinli:

$$a_{k-q}^{(k-1)} = \frac{A\begin{pmatrix}1 \ldots k-1 k\\ 1 \ldots k-1 q\end{pmatrix}}{A\begin{pmatrix}1 \ldots k-1\\ 1 \ldots k-1\end{pmatrix}}, k = 1,2,\ldots,r \qquad (7.23)$$

$X_k (k = 1,2,\ldots,r)$ lar o'rniga

$$Y_k = D_{k-1} X_k \quad (k = 1,2,\ldots,r; D_0 = 1) \qquad (7.24)$$

chiziqli bog'liq bo'lmagan shakllarni kiritib, Yakobi formulalarini quyidagicha yozish mumkin:

$$x^T A x = \sum_{k=1}^{r} \frac{Y_k}{D_{k-1} D_k} \qquad (7.25)$$

Bu yerda

$$Y_k = C_{kk} x_k + C_{k,k+1} X_{k+1} + \ldots + C_{kn} x_n, k = 1,2,\ldots,r \qquad (7.26)$$

$$C_{kq} = A\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & k-1 & k\\ 1 & 2 & \ldots & k-1 & q\end{pmatrix}, \ (q = k, k+1,\ldots,n; \ k = 1,2,\ldots,r)$$

(7.27)

(7.25) – Yakobi formulalaridan quyidagi teoremaning o'rinli ekanligi kelib chiqadi:

Teorema 7.2. Agar rangi r ga teng bo'lgan

$$x^T Ax = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k$$

kvadratik shakl uchun

$$D_k = A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ 1 & 2 & \dots & k \end{pmatrix} \neq 0, \quad k = 1,2,\dots,r \tag{7.28}$$

bo'lsa, u holda musbat kvadratlar soni π va manfiy kvadratlar soni γ mos ravishda

$$1, D_1, D_2, \dots, D_r \tag{7.29}$$

qatordagi P-o'zgarmas ishoralar soni va V- o'zgaruvchan ishoralar soni bilan ustma-ust tushadi, ya'ni:

$$\pi = 1(1, D_1, D_2, \dots, D_r) \quad \gamma = V(1, \ D_1, D_2, \dots, D_r)$$

va signatura

$$\sigma = r - 2V(1, D_1, D_2, \dots, D_r) \tag{7.30}$$

bo'ladi.

Misol 7.2. Quyidagi kvadratik shaklni kvadratlar yig'indisi ko'rinishida yozing:

$$x^T Ax = x_1^2 + 3x_2^2 - 3x_4^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 6x_2x_3 + 8x_2x_4 + 2x_3x_4$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -3 & 4 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

matritsani Gauss shakliga keltiramiz.

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bundan, r=2 $a_{11}=1$, $a_{22}^{(1)}=-1$ ekanligi kelib chiqadi. U holda (7.19) formulaga asosan

$$x^T Ax = (x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4)^2 - (-x_2 - x_3 + 5x_4)^2$$

hosil bo'ladi.

§5. Kvadratik shakllarning ishoralari

Ta'rif 7.4

$$x^T Ax = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k$$

haqiqiy kvadratik shakl manfiymas (musbatmas) deyiladi, agarda o'zgaruvchilarning ixtiyoriy haqiqiy qiymatlarida

$$x^T Ax \geq 0 \ (x^T Ax \leq 0) \tag{7.31}$$

bo'lsa.

Bu holda A simmetrik matritsa yarim musbat aniqlangan (yarim manfiy aniqlangan) deyiladi.

Ta'rif 7.5

$$x^T Ax = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k$$

haqiqiy kvadratik shakl musbat aniqlangan (manfiy aniqlangan) deyiladi, agarda o'zgaruvchilarning ixtiyoriy noldan farqli ($x \neq 0$) qiymatlarida

$$x^T Ax > 0 \ (x^T Ax < 0) \tag{7.32}$$

bo'lsa.

Bu holda A matritsa musbat aniqlangan (manfiy aniqlangan) deyiladi.

Musbat aniqlangan (manfiy aniqlangan) shakllar sinfi manfiymas (musbatmas) shakllar sinfining qismi bo'ladi.

Manfiymas kvadratik shakl o'zaro bog'liqmas kvadratlar yig'indisi ko'rinishida quyidagicha ifodalangan bo'lsin.

$$x^T Ax = \sum_{i=1}^{r} a_i X_i \tag{7.33}$$

(7.33) da barcha kvadratlar musbat bo'lishi kerak, ya'ni

$$a_i > 0, i = 1,2,...,r \qquad (7.34)$$

Haqiqatan, agar birorta $a_i < 0$ bo'lsa, $x_1, x_2, ... x_n$ larning shunday qiymatlarini tanlashimiz mumkinki, unda

$$X_1, = ... = X_{i-1} = X_{i+1} = ... = X_r = 0, X_i \neq 0$$

bo'lib, x^TAx manfiy bo'lib qoladi. Aksincha, (7.33) va (7.34) dan x^TAx shaklning musbatligi kelib chiqadi.

Shunday qilib, manfiymas kvadratik shakllar $\sigma = r$ $(\pi = r,\ \nu = 0)$ tengliklar bilan xarakterlanadi.

Agar x^TAx musbat aniqlangan bo'lsa, u holda u manfiymas shakl ham bo'lib, (7.33) va (7.34) shartlar bajariladi. Kvadratik shaklning musbat aniqlanganligidan r=n ekanligi kelib chiqadi. Haqiqatan, agar r<n bo'lsa, $x_i, x_2, ..., x_n$ o'zgaruvchilarni bir vaqtda nolga teng bo'lmagan qiymatlarini tanlash mumkin bo'ladiki, unda barcha X_i lar nolga teng bo'lib, $x^TAx = 0$ bo'ladi. Bu (7.32) shartga ziddir. Aksincha, agar (7.33) da r=n bo'lib, (7.34) bajarilsa, x^TAx shakl musbat aniqlangan bo'ladi.

Boshqacha aytganda, manfiymas kvadratik shakl faqat va faqat singulyar bo'lmagandagina musbat aniqlangan bo'ladi.

Teorema 7.3. (7.1) kvadratik shakl musbat aniqlangan bo'lishi uchun

$$D_1 = a_{11} > 0,\ D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{12} a_{22} \end{vmatrix} > 0, ..., D_n = |A| > 0 \qquad (7.35)$$

tengsizliklarni bajarilishi zarur va yetarlidir.

Isboti. (7.35) shartlarni yetarli ekanligi (7.25) Yakobi formulalaridan kelib chiqadi. (7.35) shartlarni zarurligini quyidagicha ko'rsatamiz.

x^TAx shaklning musbat aniqlanganligidan kelib chiqadiki, quyidagi qirqib olingan

$$x^T A_p x = \sum_{i,k=1}^{p} a_{ik} x_i x_k, (p = 1,2,...,\mathrm{n})$$

shakl ham musbat aniqlangan bo'ladi. Ammo bu holda barcha shakllar singulyar bo'lmasligi, ya'ni:

$$D_p = |A_p| \neq 0 \quad (p=1,2,\dots,n)$$

bo'lishi kerak.

Endi biz, Yakobining (7.25) formulalarini (r=n) da qo'llash imkoniyatiga ega bo'lamiz. Bu formulalarning o'ng tomonidagi barcha kvadratlar musbat bo'lishi kerak, u holda

$$D_1 > 0, D_1 D_2 > 0, \dots, D_{n-1} D_n > 0$$

Bundan (7.35) shartlarning zarurligi kelib chiqadi.

Natija: Musbat aniqlangan

$$x^T Ax = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k$$

kvadratik shaklning koeffitsiyentlaridan tuzilgan A matritsani barcha bosh minorlari musbat, ya'ni

$$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ i_1 & i_2 & \dots & i_p \end{pmatrix} > 0 \quad (1 \le i_1 \le i_2 \dots \le i_p \le n; \quad p = 1,2,\dots,n$$

(7.36)

Eslatma. Bosh minorlar ketma-ketligining manfiymas, ya'ni:

$$D_1 \ge 0, D_2 \ge 0, \dots, D_n \ge 0$$

ekanligidan $x^T Ax$ shaklning manfiymas ekanligi kelib chiqmaydi.

Teorema 7.4. (7.1) kvadratik shakl manfiymas bo'lishi uchun uning matritsasini barcha bosh minorlari manfiymas, ya'ni:

$$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ i_1 & i_2 & \dots & i_p \end{pmatrix} \ge 0 \quad (1 \le i_1 \le i_2 \le \dots \le i_p \le n \,;\ p = 1,2,\dots,n$$

bo'lishi zarur va yetarlidir.

Isboti: Quyidagi yordamchi shaklni qaraymiz.

$$x^t A_\varepsilon x = x^t Ax + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \,(\varepsilon > 0)$$

Bundan, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0}(x^T A_\varepsilon x) = x^T Ax$ kelib chiqadi.

x^TAx shaklning manfiymasligidan x^TAx shaklning musbat aniqlanganligi kelib chiqadi, shuning uchun quyidagi tengsizlik o'rinli bo'ladi.

$$A_\varepsilon\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ i_1 & i_2 & \dots & i_p \end{pmatrix} > 0(1 \le i_1 \le i_2 \dots \le i_p \le n; \quad P = 1,2\dots,n)$$

Bundan, $\varepsilon \to 0$ da limitga o'tib, (7.36) shartni hosil qilamiz.

Aksincha (7.36) shart bajarilsin. Bundan kelib chiqadiki,

$$A_\varepsilon\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \dots i_p \\ i_1 & i_2 \dots i_p \end{pmatrix} = \varepsilon^p + \dots \ge \varepsilon^p > 0(1 \le i_1 \le \dots \le i_p \le n; \quad P = 1,2\dots,n)$$

Ammo bu holda teorema 7.3 ga asosan

$$x^TA_\varepsilon x > 0 \quad (x \neq 0)$$

Bundan $\varepsilon \to 0$ da limitga o'tib,

$$x^TA_\varepsilon x > 0$$

ni hosil qilamiz.

Kvadratik shaklning musbatmaslik va manfiy aniqlanganlik shartlarini, mos ravishda (7.35) va (7.36) tengsizliklarni $-x^TAx$ shaklga qo'llab hosil qilamiz.

Teorema. 7.5 x^TAx kvadratik shakl manfiy aniqlangan bo'lishi uchun

$$D_1 < 0, D_2 > 0, D_3 < 0, (-1)^n D_n > 0 \qquad (7.35')$$

tengsizliklarning bajarilishi zarur va yetarli.

Teorema. 7.6 $x^T Ax$ kvadratik shakl musbatmas bo'lishi uchun

$$(-1)^p A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \dots i_p \\ i_1 & i_2 \dots i_p \end{pmatrix} \ge 0 \ (1 \le i_1 \le \dots \le i_p \le n; \quad P = 1,2\dots,n)$$

tengsizliklarni bajarilishi zarur va yetarli.

§6. Kvadratik shakllarni bosh o‘qlarga keltirish

Quyidagi ixtiyoriy haqiqiy kvadratik shaklni qaraymiz.

$$x^T Ax = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k$$

Uning matritsasi $A = (a_{ik})_{i,k=1}^{n}$ haqiqiy, simmetrik bo‘ladi. Shuning uchun φ qandaydir Λ haqiqiy diagonal matritsaga ortogonal- o‘xshash bo‘ladi, ya’ni, shunday Q haqiqiy ortogonal matritsa mavjudki, unda

$$\Lambda = Q^{-1}AQ \quad , \quad \left(\Lambda = (\lambda_i \delta_{ik})_{i,k=1}^{n}, \; QQ^T = E\right) \quad (7.37)$$

bo‘ladi. Bu yerda $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n - A$ matritsaning xarakteristik sonlari.

ortogonal matritsa uchun $Q^{-1} = Q^T$ bo‘lgani uchun (7.37) dan kelib chiqadiki, $x^T Ax$ shakl o‘zgaruvchilarni

$$x = Q\xi \quad (QQ^T = E),$$

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} q_{ik}\xi_k \left(\sum_{j=1}^{n} q_{ij}q_{kj} = \delta_{ik}, i, k, = 1,2,\dots,n\right) \quad (7.38)$$

ortogonal almashtirishda quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$\xi^T \Lambda \xi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i \quad (7.39)$$

Teorema. 7.7. $x^T Ax$ - haqiqiy kvadratik shaklni har doim ortogonal alamshtirish yordamida (7.39) kanonik ko‘rinishga keltirish mumkin bo‘lib, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ lar A matritsaning xarakteristik sonlari bo‘ladi.

Kvadratik shaklni ortogonal almashtirish yordamida kanonik ko‘rinishga keltirish uni bosh o‘qlarga keltirish deyiladi. Bunday nomlanish shu bilan bog‘liqki, unda

$$\sum\nolimits^{n}_{i,k=1} a_{ik}\, x_i x_k = c \quad (c = const \neq 0) \quad (7.40)$$

ikkinchi tartibli gipersirt tenglamasi o‘zgaruvchilarni (7.38) ortogonal almashtirishda quyidagi kanonik ko‘rinishni oladi:

$$\sum\nolimits^{n}_{i,k=1} a_{ik} x_i x_k = c \; (c = const \neq 0)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\xi_i^2}{a_i^2} = 1 \left(\frac{\xi i}{a_i^2} = \frac{\lambda_i}{c};\ \varepsilon_i = \pm 1;\ i = 1,2,\dots,n \right) \qquad (7.41)$$

(7.39) formuladan kelib chiqadiki, $x^T Ax$ shaklning rangi r, A matritsaning noldan farqli xarakteristik sonlari soniga teng bo'lib, σ signatura A matritsaning musbat va manfiy xarakteristik sonlari sonining ayirmasiga teng bo'ladi.

Bundan, xususiy holda quyidagi tasdiq kelib chiqadi.

Agar kvadratik shakl koeffitsiyentlari uzluksiz o'zgarganda uning rangi o'zgarmasa, u holda koeffitsiyentlarni bunday o'zgarishida uning signaturasi ham o'zgarmay qoladi.

(7.39) formuladan yana kelib chiqadiki, A haqiqiy simmetrik matritsa yarim musbat aniqlangan (musbat aniqlangan) bo'ladi, faqat va faqat shu holdaki, qachonki, A matritsaning barcha xarakteristik sonlari manfiymas (musbat) bo'lsa, ya'ni, u quyidagi ko'rinishda ifodalansa

$$A = Q(\lambda_i \delta_{ik})_{i,k=1}^{n} Q^{-1} \left[\lambda_i \geq 0 (\lambda_i > 0), i = 1,2,\dots n\right] \qquad (7.42)$$

$$F = Q(\sqrt{\lambda_i} \delta_{ik})_{i,k=1}^{n} Q^{-1} \qquad (7.43)$$

yarim musbat aniqlangan (musbat aniqlangan) matritsa A yarim musbat aniqlangan (musbat aniqlangan) matritsaning kvadrat ildizi bo'ladi:

$$F - \sqrt{A} \qquad (7.44)$$

§ 7. Kvadratik shakllar dastasi

Ikkita

$$x^T Ax = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k \quad \text{va} \quad x^T Bx = \sum_{i,k=1}^{n} b_{ik} x_i x_k$$

haqiqiy kvadratik shakllar yordamida tuzilgan $x^T Ax - \lambda x^T Bx$ (λ–parametr) shakl kvadratik shaklar dastasi deyiladi.

Agar $x^T\ Bx$ shakl musbat aniqlangan bo'lsa, u holda $x^T Ax - \lambda x^T Bx$ dasta regulyar deyiladi.

$$|A - \lambda B| = 0$$

tenglama $x^T Ax - \lambda x^T Bx$ kvadratik shakllar dastasining xarakteristik tenglamasi deyiladi.

Bu tenglamaning qandaydir ildizini λ_0 bilan belgilaymiz. $A - \lambda_0 B$ matritsa xos matritsa bo'lgani uchun shunday

$z = (z_1, z_2, ..., z_n)' \neq 0$ ustun mavjudki, unda

$$(A - \lambda_0 B)z = 0$$

yoki

$$Az = \lambda_0 Bz \quad (z \neq 0)$$

bo'ladi.

λ_0 soni $x^T Ax - \lambda x^T Bx$ dastaning xarakteristik soni deyilib, z – mos bosh ustun yoki bu dastaning bosh vektori deyiladi.

Teorema. 7.8. Kvadratik shakllarning

$$x^T Ax - \lambda x^T Bx$$

regulyar dastasini

$$|A - \lambda B| - 0$$

xarakteristik tenglamasi har doim

$$z^k = (z_{1k}, z_{2k}, ..., z_{nk})(k = 1, 2, ..., n)$$

$$Az^k = \lambda_k Bz^k (k = 1, 2, ..., n) \tag{7.45}$$

bosh vektorlar mos keluvchi, n ta $\lambda_k (k = 1, 2, ..., n)$ haqiqiy xarakteristik ildizlarga ega.

Bu z^k bosh vektorlarni shunday tanlash mumkinki, unda

$$(z^i)^T Bz^k = \delta_{ik} \quad (i, k = 1, 2, ..., n) \tag{7.46}$$

munosabat bajariladi.

Isboti. (7.45) tenglikni quyidagicha yozish mumkin

$$B^{-1} Az^k = \lambda_k z^k = \delta_{ik} (i, k = 1, 2, ..., n) \tag{7.45'}$$

Shunday qilib, teorema 7.8. ga ko'ra

$$D = B^{-1} A \tag{7.47}$$

matritsa quyidagilarga ega:

1) oddiy strukturaga;

2) $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ haqiqiy xarakteristik sonlarga;

3) bu xarakteristik sonlarga mos kelib, (7.46) munosabatni qanoatlantiruvchi z^1, z^2,...,z^n xos ustunlar (vektorlar) ga.

$D=B^{-1}A$ matritsa ikkita simmetrik matritsalarning ko'paytmasidan iborat bo'lib, o'zi simmetrik bo'lmasligi mumkin. Shuning uchun $D^T=AB^{-1}$ bo'ladi. $F=\sqrt{B}$ deb olib, (7.47) tenglikdan quyidagini hosil qilamiz:

$$D=F^{-1}SF, \qquad (7.48)$$

bu yerda

$$S=F^{-1}AF^{-1} \qquad (7.48')$$

simmetrik matritsa. D matritsani S simmetrik matritsaga o'xshash ekanligidan 1) va 2) tasdiqlar kelib chiqadi. u^k(k-1,2,...,n) orqali S simmetrik matritsa xos vektorlari normalangan sistemasini belgilaymiz:

$$Su^k=\lambda_k u^k(k=1,2,...,n),\ (u^k)^{\mathrm{T}}u^l=\delta_{ke}(k,l=1,2,...,n) \qquad (7.49)$$

va

$$u^k=Fz^k(k=1,2,...,n) \qquad (7.50)$$

deb olib, (7.48), (7.48), (7.49), (7.50) tengliklardan quyidagini topamiz:

$$Dz^k=\lambda_k z^k,\ \ (z^k)^T Bz^l=\delta_{kl},\ k,l=1,2,...,n$$

ya'ni, 3) tasdiq isbotlandi va teorema 7.8. to'la isbotlandi.

(7.46) dan z^1, z^2, ...,z^n ustunlarni chiziqli bog'liqmasligi kelib chiqadi.

$$\sum\nolimits_{k=1}^{n} c_k z^k=0 \qquad (7.51)$$

bo'lsin. U holda ixtiyoriy ($1\leq i\leq n$) uchun (7.46) ga asosan

$$0=(z^l)^T B\left(\sum_{k=1}^{n} c_k z^k\right)=\sum_{k=1}^{n} c_k z_l^T Bz_k=c_l$$

bo'ladi. Shunday qilib, (7.51) da barcha c_l(l=1,2,...,n) nolga teng va z^1, z^2, ...,z^n ustunlar orasida hech qanday chiziqli bog'liqlik mavjud emas.

(7.46) munosabatni qanoatlantiruvchi z^1, z^2, ...,z^n bosh ustunlardan tuzilgan

$$Z=(z^1,z^2,...,z^n)=(z_{ik})_{i,k=1}^n$$

matritsani $x^T Ax-\lambda x^T Bx$ shakllar dastasi uchun bosh matritsa deyiladi. Z matritsa xosmas $(|z|\neq 0)$ matritsa bo'ladi, chunki uning ustunlari chiziqli bog'lanmagan.

(7.45) ning ikkala tomonini chapdan z^{i^T} satr matritsaga ko'paytirib, quyidagini hosil qilamiz.

$$z^{i^T} Az^k=\lambda_k z^{i^T} Bz^k=\lambda_k\delta_{i,k}(i,k=1,2,...,n) \qquad (7.52)$$

$Z=(z^1,z^2,...,z^n)$ bosh matritsani kiritib, (7.46) va (7.52) ni quyidagi ko'rinishda ifodalashimiz mumkin.

$$Z^T AZ=(\lambda_k\delta_{i,k})_{i,k=1}^n, Z^T BZ=E \qquad (7.53)$$

(7.53) formulalardan ko'rinadiki,

$$x=Z\xi \qquad (7.54)$$

xosmas almashtirish $x^T Ax$ va $x^T Bx$ kvadratik shakllarni

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k\xi_k^2 \text{ va } \sum_{k=1}^n \xi_k^2 \qquad (7.55)$$

kvadratlar yig'indisiga keltiradi.

(7.54) almashtirishning bu xossasi Z bosh matritsani xarakterlaydi. Haqiqatan, (7.54) almashtirish $x^T Ax$ va $x^T Bx$ shakllarni (7.55) kanonik ko'rinishga keltirsin. U holda (7.53) tenglik o'rinli bo'lib, Z matritsa ustunlari uchun (7.46) va (7.52) tengliklar o'rinli bo'ladi.

(7.53) dan Z ni xosmas $(|z|\neq 0)$ matritsa ekanligi kelib chiqadi. (7.52) tenglikni quyidagicha yozamiz:

$$z^{i^T}(Az^k-\lambda_k Bz^k)=0 \text{ (i=1,2,...,}n\text{)}, \qquad (7.56)$$

bu yerda k – ixtiyoriy fiksirlangan qiymatga ega $1\leq k\leq n$ (7.56) tengliklar sistemasini bitta tenglikka keltirish mumkin:

$$Z^T(Az^k-\lambda_k Bz^k)=0$$

bundan, Z^T– xosmas bo'lgani uchun

$$Az^k-\lambda_k Bz^k=0$$

ni, ya'ni, ixtiyoriy k uchun (7.45) ni hosil qilamiz.

Demak, $Z -$ bosh matritsa. Shunday qilib, quyidagi teoremani isbotladik.

Teorema 7.9. Agar

$$Z = (z_{ik})_{i,k=1}^{n}$$

matritsa

$x^T Ax - \lambda x^T Bx$ shakllar regulyar dastasining bosh matritsasi bo'lsa, u holda

$$x = Z\xi \tag{7.57}$$

almashtirish $x^T Ax$ *va* $x^T Bx$ shakllarni bir vaqtda mos ravishda

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \xi_k^2 \quad \text{va} \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2 \tag{7.58}$$

kvadratlar yig'indisiga keltiradi, bu yerda $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ lar

$$x^T Ax - \lambda x^T Bx$$

dastaning Z matritsa $z^1, z^2, ..., z^n$ ustunlariga mos keluvchi xarakteristik sonlari.

Aksincha, qandaydir (7.57) almashtirish x^TAx va x^TBx kvadratik shakllarni bir vaqtda (7.58) ko'rinishga keltirsa, u holda $Z = (z_{ik})_{i,k=1}^{n}$ matritsa shakllarning

$$x^TAx - \lambda x^TBx$$

dastasi bosh matritsasi bo'ladi.

Misol. 7.3. Umumlashgan koordinatalar sistemasida

$$2x^2 - 2y^2 - 3z^2 - 10yz - 2yz - 4 = 0 \tag{7.59}$$

ikkinchi tartibli sirt tenglamasi va

$$2x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 2xz = 1 \tag{7.60}$$

birlik sfera tenglamasi berilgan. (7.59) tenglamani bosh o'qlarga keltirish talab qilinadi.

Bu holda

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -5 \\ 1 & -5 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Dastaning xarakteristik tenglamasi quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\begin{vmatrix} 2-2\lambda & 0 & 1-\lambda \\ 0 & -2-3\lambda & -5 \\ 1-\lambda & -5 & -3-2\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (7.61)$$

Bu tenglama $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -4$ uchta ildizga ega. $\lambda_1 - 1$ xarakteristik songa mos bosh vektor koordinatalarini u, v, w bilan belgilaymiz. u, v, w miqdorlarni koeffitsiyentlari (7.61) aniqlovchi elementlari bilan ustma-ust tushuvchi quyidagi sistemadan topamiz.

$$0\cdot u + 0\cdot \vartheta + 0\cdot \omega = 0$$

$$0\cdot u + 5\cdot \vartheta + 5\cdot \omega = 0$$

$$0\cdot u + 0\cdot \vartheta + 0\cdot \omega = 0$$

Bundan,

$$v+\omega=0$$

λ − 1 xarakteristik songa ikkita ortonormallangan bosh vektor javob berishi kerak. Birinchi vektor koordinatalarini ixtiyoriy ravishda $v+w=0$ shartni qanoatlantiradigan qilib olamiz. Ularni $u=0,\ v,\ w=-v$ dek tanlaymiz.

Ikkinchi bosh vektor koordinatalarini

$$u',\ v',\ w' = -v'$$

dek tanlab, ortogonallik sharti $(z^T B z^2 = 0)$ ni yozamiz.

$$2uu' + 3\vartheta\vartheta' + 2\omega\omega + u'\omega = 0$$

Bundan, $u' = 5\vartheta'$ kelib chiqadi. Shunday qilib, ikkinchi bosh vektor koordinatalarini $u' = 5\vartheta',\quad \vartheta',\quad \omega' = -\vartheta'$ bo‘ladi.

Shuningdek xarakteristik aniqlovchida λ− −4 deb olib, mos bosh vektor koordinatalarini

$$u'', \vartheta'' = u'', \omega'' = -3u''$$

ko‘rinishda aniqlaymiz.

$\vartheta,\ \vartheta'$ va u'' miqdorlar bosh vektor koordinatalari $x^TBx=1$ birlik sferani qanoatlantirishi kerak degan shartdan topiladi, ya’ni, (7.60) tenglamadan topiladi. Bundan quyidagini topamiz:

$$\vartheta=\frac{1}{\sqrt{5}},\quad \vartheta'=\frac{1}{3\sqrt{5}},\quad u''=-\frac{1}{3}$$

Shuning uchun bosh matritsa quyidagicha bo'ladi:

$$z=\begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

mos koordinatalarni almashtirish $x=Z\xi$ (7.59) va (7.60) tenglamalarni quyidagicha kanonik ko'rinishga keltiradi:

$$\xi_1^2+\xi_2^2-4\xi_3^2-4=0 \text{ va } \xi_1^2+\xi_2^2-\xi_3^2=1$$

Birinchi tenglamani quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{\xi_1^2}{4}+\frac{\xi_2^2}{4}-\frac{\xi_3^2}{4}=1$$

Bu bir yaproqli aylanma giperboloid tenglamasi bo'lib, uning haqiqiy o'qi ikkiga, mavhum o'qi birga teng. Aylanish o'qi orti koordinatalari z matritsa uchinchi ustunidan aniqlanadi, ya'ni, ular $-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ ga teng. Qolgan ikkita ortogonal o'qlar koordinatalari birinchi va ikkinchi ustunlarda beriladi.

§8. Shakllar regulyar dastasi xarakteristik sonlarining ekstremal xossasi

Bizga

$$x^TAx=\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}x_ix_k \quad \text{va} \quad x^TBx=\sum_{i,k=1}^{n}b_{ik}x_ix_k$$

kvadratik shakllar berilgan bo'lib, x^TBx – musbat aniqlangan bo'lsin. $x^TAx-\lambda x^TBx$ – regulyar dasta xarakteristik sonlari

$$\lambda_1\le\lambda_2\le\ldots\le\lambda_n \tag{7.62}$$

shartni qanoatlantirsin. Bu xarakteristik sonlarga mos bosh vektorlarni

$$z^k = (z_{1k}, z_{2k}, \dots, z_{nk})' (k = 1,2,\dots,n)$$

bilan belgilaymiz.

O'zgaruvchilarni bir vaqtda nolga teng bo'lmagan $x \neq 0$ barcha mumkin bo'lgan qiymatlarini qarab, shakllarni $\frac{x^T Ax}{x^T Bx}$ nisbatining eng kichik qiymati (minimumi) ni aniqlaymiz. Buning uchun

$$x = Z\xi (x_i = \sum_{i,k=1}^{n} z_{ik}\xi_k, i = 1,2,\dots,n)$$

almashtirish yordamida yangi $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ o'zgaruvchilarga o'tish qulaydir. Bu yerda Z berilgan dastaning bosh matritsasi. Yangi o'zgaruvchilarda qaralayotgan shakllar nisbati quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\frac{x^T Ax}{x^T Bx} = \frac{\lambda_1\xi_1^2 + \lambda_2\xi_2^2 + \dots + \lambda_n\xi_n^2}{\xi_1^2 + \lambda_2\xi_2^2 + \dots + \xi_n^2} \tag{7.63}$$

Son o'qida $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sonlarga mos n ta nuqtalar olib, bu nuqtalarga mos ravishda $mi = \xi_i^2$, i=1,2,...,n massalarni qo'yamiz. U holda, (7.63) formulaga asosan $\frac{x^T Ax}{x^T Bx}$ nisbat bu sonli nuqtalarning massalar markazi bo'ladi. Shuning uchun

$$\lambda_1 \leq \frac{x^T Ax}{x^T Bx} \leq \lambda_n$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Bu tengsizlikning birinchi qismida qachon tenglik bajarilishini aniqlaymiz. Buning uchun (7.62) da teng xarakteristik sonlarni ajratamiz.

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_{p_1} < \lambda_{p_1+1} = \dots \lambda_{p_1+p_2} < \dots \tag{7.64}$$

λ nuqtadan boshqa nuqtalardagi massalar nolga teng, ya'ni:

$$\xi_{p_{1+1}} = \dots = \xi_N = 0$$

bo'lgandagina va faqat shu holda og'irlik markazi shu λ_1 nuqtaga tushadi. Bu holda mos x bosh ustunlar, $z^1, z^2, \dots, z^n$ larning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'ladi. Ammo bu barcha ustunlar λ_1 ga teng xarakteristik songa javob beradi, u holda x $\lambda - \lambda_1$ uchun bosh ustun (vektor) bo'ladi.

Shunday qilib, biz quyidagi teoremani isbotladik.

Teorema.7.10 $x^T Ax - x^T Bx$ regulyar dastaning eng kichik xarakteristik soni

$$\lambda_1 = min \frac{x^T Ax}{x^T Bx}$$

bu minimum λ_1 xarakteristik son uchun bosh bo'lgan vektorlardagina erishiladi.

Shunga o'xshash „minimallik", xarakteristikasini keyingi λ_2 xarakteristik son uchun ham berish uchun z^1 vektorga ortogonal bo'lgan, ya'ni $z^{1T} Bx = 0$ tenglamani qanoatlantiruvchi barcha x vektorlarni qarash bilan chegaralanamiz.

Bunday vektorlar uchun

$$\frac{x^T Ax}{x^T Bx} = \frac{\lambda_2 \xi_2^2 + \dots + \lambda_n \xi_n^2}{\xi_2^2 + \dots + \xi_n^2}$$

bo'lib,

$$min \frac{x^T Ax}{x^T Bx} = \lambda_2 > \left[z^{1T} Bx = 0 \right]$$

bo'ladi. Bunda tenglik belgisi, faqat λ_2 xarakteristik son uchun bosh bo'lib, z_2 ga ortogonal bo'lgan vektorlardagina bajariladi.

Boshqa xarakteristik sonlarga ham o'tib, quyidagi teoremaga kelamiz.

Teorema. 7.11 Ixtiyoriy $p(1 \le p \le n)$ uchun (7.62) qatordagi λ_p xarakteristik son $\frac{x^T Ax}{x^T Bx}$ nisbat minimumidan iborat, ya'ni:

$$\lambda_1 = min \frac{x^T Ax}{x^T Bx} \tag{7.64}$$

bo'lib, x vektor $z^1, z^2, \dots, z^{p-1}$ ortonormallangan bosh vektorlarga ortogonal, ya'ni:

$$z^{1^T}Bx = 0, z^{2^T}Bx = 0, ..., z^{p-1^T}Bx = 0 \qquad (7.65)$$

bo'ladi.

Bunda (7.65) shartlarni qanoatlantirib, λ_p xarakteristik son uchun bosh vektor bo'lgan vektorlardagina minimumga erishiladi.

Teorema 7.11ni qo'llashning noqulayligi shundan iboratki, unda λ_p xarakteristik son avvalgi $z^1, z^2, ..., z^{p-1}$ bosh vektorlarga bog'liq bo'lib, bu bosh vektorlar ma'lum bo'lgandagina teoremani qo'llash mumkin. Bundan tashqari, bosh vektorlarni tanlash ma'lum ixtiyoriylikka ega.

Bu noqulaylikdan qutulish uchun $x_1, x_2, ..., x_n$ o'zgaruvchilarga qo'yilgan bog'lanishlar haqida tushuncha kiritamiz.

$x_1, x_2, ..., x_n$ o'zgaruvchilarning

$$L_k(x) = l_{1k}x_1 + l_{2k}x_2 + \cdots + l_{nk}x_n, (k = 1, 2, ..., n) \qquad (7.65')$$

chiziqli shakl berilgan bo'lsin.

$x_1, x_2, ..., x_n$ o'zgaruvchilarga yoki x vektorga $L_1, L_2, ..., L_n$ h ta bog'lanishlar qo'yilgan deyiladi, agarda faqat

$$L_k(x) = 0 \quad (k=1,2,...,n) \qquad (7.65'')$$

tenglamalar sistemasini qanoatlantiruvchi o'zgaruvchilargina qaralsa.

(7.65') dagi belgilashlarni saqlab qolgan holda ixtiyoriy chiziqli shakl uchun quyidagicha belgilash kiritamiz:

$$\tilde{L}_l(x) = z^{k^T}Bx \quad (k=1,2,...,n) \qquad (7.66)$$

Bundan tashqari, (4.65'') bog'lanishlar qo'yilgan vektorlar uchun $min\frac{x^TAx}{x^TBx}$ ni quyidagicha belgilaymiz:

$$\mu\left(\frac{A}{B}; L_1, L_{2,...,} L_n\right)$$

Bu belgilashlarda (1,64) quyidagicha yoziladi:

$$L_p = \mu\left(\frac{A}{B}; \tilde{L}_1, \tilde{L}_{2,...,} L_{p-1}\right) \quad (p=1,2,...,n) \qquad (7.67)$$

Endi

$$L_1(x) = 0, L_2(x) = 0, ..., L_{p-1}(x) = 0 \qquad (7.68)$$

va

$$\bar{L}_{p+1}(x)=0,...,\bar{L}_n(x)=0 \qquad (7.69)$$

bog‘lanishlarni qaraymiz. (7.68) va (7.69) dagi bog‘lanishlar soni n dan kichik bo‘lgani uchun bu bog‘lanishlarning hammasini qanoatlantiruvchi $^{(1)} \neq$ vektor mavjud bo‘ladi. (7.69) bog‘lanishlar x vektorni $z^{p+1},...,z^n$ bosh vektorlar bilan ortogonalligini ifodalaydi, shuning uchun $x^{(1)}$ vektor koordinatalarida $\xi_{p+1}=\cdots=\xi_n=0$ bo‘lib, (7.63) ga asosan

$$\frac{x^{(1)^T}Ax^{(1)}}{x^{(1)^T}Bx^1}=\frac{\lambda_1\xi_1^2+...+\lambda_p\xi_p^2}{\xi_1^2+...+\xi_2^2}\leq\lambda_p$$

bo‘ladi. Ammo bu holda

$$\mu(\frac{A}{B};L_1,L_2,...,L_{p-1})\frac{x^{(1)^T}Ax^{(1)}}{x^{(1)^T}Bx^1}\leq\lambda_p$$

Bu tengsizlik (7.67) bilan birga qaralganda ko‘rinadiki, μ miqdor $\bar{L}_1,\bar{L}_2,...,\bar{L}_{p-1}$ bog‘lanishlarda λ_p dan ortmay, $\bar{L}_1,\bar{L}_2,...,\bar{L}_{p-1}$ maxsus bog‘lanishlar olinganda λ_p ga erishadi.

Shunday qilib, quyidagi teorema isbotlandi.

Teorema. 7.12. Agar biz ixtiyoriy p–1 uchun $\bar{L}_1,\bar{L}_2,...,\bar{L}_{p-1}$ bog‘lanishlarda

$$\frac{x^TAx}{x^TAx}-$$

ikkita shakl nisbati minimumini qarab, bog‘lanishlarni variatsiyalasak, u holda bu minimumlar maksimumi λ_p ga teng, ya’ni:

$$\lambda p=max\mu(\frac{A}{B};L_1,L_2,...,L_{p-1})(p=1,2,...,n) \qquad (7.70)$$

bo‘ladi.

Teorema. 7.11. λ_1, λ_2,...,λ_n xarakteristik sonlarni “minimumlik”, xarakteristikasini, Teorema. 7.12 esa “maksimal – minimallik” xarakteristikasini beradi.

$$x^TAx-\lambda x^TBx$$

dastadagi x^TAx shaklni $-x^TAx$ shakl bilan almashtirganimizda dastaning barcha xarakteristik sonlari ishorasini almashtirilib, ularga mos bosh vektorlar o'zgarmay qoladi. Shunday qilib,

$$- x^T Ax - x^T Ax$$

dastaning xarakteristik sonlari $\lambda_n \le -\lambda_{n-1} \le \cdots \le -\lambda_1$ bo'ladi.

Bundan tashqari,

$$\gamma(\frac{A}{B}; L_1, L_2, ..., L_h) = max \frac{x^T Ax}{x^T Ax} \qquad (7.71)$$

belgilash kiritib, variatsiyalanuvchi vektorlarga $L_1, L_2, ..., L_h$ bog'lanishlar qo'yilgan holda quyidagilarni yozishimiz mumkin

$$\mu(-\frac{A}{B}; L_1, L_2, ..., L_h) = -\gamma \frac{A}{B}; L_1, L_2, ..., L_h$$

va

$$max \mu(\frac{A}{B}; L_1, L_2, ..., L_h) = -min \gamma(\frac{A}{B}; L_1, L_2, ..., L_h)$$

Shuning uchun,

$$\frac{x^T Ax}{x^T Ax}$$

nisbatga 7.10, 7.11, 7.12 teoremalarni qo'llab, (7.64), (7.67), (7.70) formulalar o'rniga mos ravishda quyidagilarni hosil qilamiz:

$$\lambda_p = max \frac{x^T Ax}{x^T Ax}$$

$$\lambda_{n-p+1} = \frac{A}{B}; \tilde{L}_n, \tilde{L}_{n-2}, ..., \tilde{L}_{n-p+2}$$

$$\lambda_{n-p+1} = \min(\frac{A}{B}; L_1, L_2, ..., L_{p-1}), \quad (p=2,...,n).$$

Bu formulalar $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ sonlarni mos ravishda "maksimallik" va "minimal-maksimallik", xossalarini aniqlaydi. Bularni teorema ko'rinishida quyidagicha ifodalaymiz.

Teorema. 7.13.

$$x^T Ax - x^T Ax$$

shakllar regulyar dastasi xarakteristik sonlari

$$\lambda_n \le \lambda_{n-1} \le, ..., \le \lambda_1$$

bo'lib, dastaning chiziqli bog'liq bo'lmagan bosh vektorlari $z^1, z^2, ..., z^n$ bo'lsin. U holda

λ_n – eng katta xarakteristik son shakllar nisbati maksimumi, ya'ni:

$$\lambda_n = max\frac{x^T Ax}{x^T Ax} \qquad (7.72)$$

bo'lib, bu maksimumga faqat dastaning λ_n xarakteristik soniga mos vektorlaridagina erishiladi.

oxiridan p – xarakteristik son λ_{n-p+1} $(2 \leq p \leq n)$ variatsiyalanuvchi x vektorga

$$z^{n^T} Bx = 0, \quad z^{n-1^T} Bx = 0, \quad z^{n-p+1^T} Bx = 0 \qquad (7.73)$$

bog'lanishlar qo'yilgan shartda shu shakllar nisbati maksimumi bo'ladi

$$\lambda_{n-p+1} = max\frac{x^T Ax}{x^T Ax} \qquad (7.74)$$

ya'ni

$$\lambda_{n-p+1} = \gamma(\frac{A}{B}; \tilde{L}_n, \tilde{L}_{n-1}, ..., \tilde{L}_{n-p+1}) \qquad (7.75)$$

Bu maksimumga faqat dastaning λ_{n-p+1} xarakteristik soniga mos va (7.73) shartlarni qanoatlantiruvchi bosh vektorlaridagina erishiladi.

Agar

$$L_1(x) = 0, ..., L_{p-1}(x) = 0 \;\; (2 \leq p \leq \text{n})$$

bog'lanishlardagi

$$\frac{x^T Ax}{x^T Ax}$$

shakllar nisbati maksimumida bog'lanishlar variatsiyalansa, u holda bu maksimumlarning eng kichik qiymati (minimumi) λ_{n-p+1} ga teng, ya'ni:

$$\lambda_{n-p+1} = min\gamma(\frac{A}{B}; L_1, L_2, ..., L_{p-1}) \qquad (7.76)$$

Quyidagi h ta o'zaro bog'liq bo'lmagan bog'lanishlar berilgan bo'lsin.

$$L_1^0(x) = 0, L_2^0(x) = 0, ..., L_h^0(x) = 0 \qquad (7.77)$$

U holda bu bog'lanishlar yordamida $x_1, x_2, ..., x_n$ o'zgaruvchilarni h tasini qolganlari orqali ifodalash mumkin. Qolgan o'zgaruvchilarni $v_1, v_2, ..., v_{n-h}$ lar bilan belgilaymiz. Shuning uchun (7.77) bog'lanishlar qo'yilganda

$$x^T Ax - x^T Ax$$

shakllarning regulyar dastasi

$$v^T A^0 v - x^T Ax$$

dastaga o'tib, $v^T B^0 v$ – yana musbat aniqlangan shakl bo'ladi. Keyingi dasta faqat $n-h$ ta o'zgaruvchiga bog'liq bo'lgani uchun u

$$\lambda_1^0 \le \lambda_2^0 \le, ..., \le \lambda_{n-h}^0 \qquad (7.78)$$

$n-h$ ta xarakteristik songa ega bo'ladi.

(7.77) bog'lanishlarni qo'yganda barcha o'zgaruvchilarni $n-h$ ta o'zaro bog'liq bo'lmagan $v_1, v_2, ..., v_{n-h}$ lar bilan har xil ifodalash mumkin. Ammo (7.78) xarakteristik sonlar bu har xillikka bog'liq bo'lmay, to'la aniqlangan qiymatlarga ega bo'ladi. Bu hech bo'lmaganda xarakteristik sonlarning minimal – maksimal xossalaridan kelib chiqadi

$$\lambda_1^0 = min \frac{v^T A^0 v}{v^T B^0 v} = \mu\left(\frac{A}{B}; L_1^0, L_2^0, ..., L_h^0\right) \qquad (7.79)$$

va umumiy holda

$$\lambda_1^0 = max\mu\left(\frac{A}{B}; L_1, L_2, ..., L_{p-1}\right) = max\mu\left(\frac{A}{B}; L_1^0, L_2^0, ..., L_h^0; L_1, L_2, ..., L_{p-1}\right)$$

(7.80)

shu bilan birga (7.80) formulada faqat $L_1, L_2, ..., L_{p-1}$ bog'lanishlar variatsiyalanadi.

Teorema 7.14. Agar

$$\lambda_1 \le \lambda_2 \le, ..., \le \lambda_n, \quad x^T Ax - x^T Ax$$

shakllarning regulyar dastasi xarakteristik sonlar bo'lib,

$$\lambda_1^0 \le \lambda_2^0 \le, ..., \le \lambda_{n-h}^0$$

esa shu dastaga h ta o'zaro bog'liq bo'lmagan bog'lanishlar qo'yilgandagi xarakteristik sonlar bo'lsa, u holda

$$\lambda_p \le \lambda_p^o \le \lambda_{p+h} (p=1,2,...,n-h) \qquad (7.81)$$

Isboti. $\lambda_p \le \lambda_p^o$ tengsizlik (7.70) va (7.80) formulalardan kelib chiqadi. Haqiqatan, yangi bog'lanishlar qo'shilganda

$$\mu\left(\frac{A}{B}; L_1,..., L_{p-1}\right)$$

minimum miqdori ortadi yoki o'zgarmay qoladi. Shuning uchun

$$\mu\left(\frac{A}{B}; L_1,..., L_{p-1}\right) \le \mu\left(\frac{A}{B}; L_1^0, L_h^o; L_1,..., L_{p-1}\right)$$

bo'lib, bundan

$$\lambda_p = max\,\mu\left(\frac{A}{B}; L_1,..., L_{p-1}\right) \le \lambda_p^o = \max\left(\frac{A}{B}; L_1^0, L_h^o; L_1,..., L_{p-1}\right)$$

kelib chiqadi.

(7.81) tengsizlikning ikkinchi qismi quyidagi munosabatga ko'ra o'rinli bo'ladi.

$$\lambda_p^0 = max\,\mu\left(\frac{A}{B}; L_1^0,..., L_h^0; L_1,..., L_{p-1}\right)$$

$$\le \max\,\mu\left(\frac{A}{B}; L_1,..., L_{p-1}, L_p,..., L_{p+h-1}\right) = \lambda_{p+h}$$

Bu yerda, birinchi qismda faqat $L_1,...,L_{p-1}$ bog'lanishlar variatsiyalanadi, ammo $L_p,...,L_{p+h-1}$ lar fiksirlangan $L_1^0,...,L_h^0$ bog'lanishlar bilan almashtiriladi.

$$x^T Ax - x^T Bx \quad \text{va} \quad x^T Ax - x^T Bx \qquad (7.82)$$

shakllarning regulyar dastalari berilgan bo'lib, $x \ne 0$ da

$$\frac{x^T Ax}{x^T Bx} \le \frac{x^T \tilde{A}x}{x^T \tilde{B}x}$$

bo'lsin. U holda

$$max\,\mu\left(\frac{A}{B}; L_1,..., L_{p-1}\right) \le max\,\mu\left(\frac{A}{B}; L_1,..., L_{p-1}\right) \quad (p=1,2,...n)$$

bo'ladi. Shuning uchun (7.82) dagi dastalarining xarakteristik sonlarini mos ravishda

$$\lambda_1 \le \lambda_2 \le,..., \le \lambda_n, \quad \text{va} \quad \tilde{\lambda}_1 \le \tilde{\lambda}_2 \le,..., \le \tilde{\lambda}_n,$$

lar bilan belgilab,

$$\lambda_p \leq \lambda_p \ (p=1,2,...,n)$$

tengsizlikka ega bo‘lamiz.

Demak, quyidagi teorema o‘rinli.

Teorema 7.15. Agar (7.82) regulyar dastalar berilgan bo‘lib,

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq, ..., \leq \lambda_n, \quad \text{va} \quad \tilde{\lambda}_1 \leq \tilde{\lambda}_2 \leq, ..., \leq \tilde{\lambda}_n,$$

mos ravishda ularning xarakteristik sonlari bo‘lsa, u holda

$$\frac{x^T A x}{x^T B x} \leq \frac{x^T \tilde{A} x}{x^T \tilde{B} x} \tag{7.83}$$

ayniy munosabatdan

$$\lambda_p \leq \lambda_p \ (p=1,2,...,n) \tag{7.84}$$

kelib chiqadi.

(7.83) tengsizlikda

$$x^T B x = x^T \tilde{B} x$$

bo‘lgan xususiy holni qaraylik. Bu holda

$$x^T \tilde{A} x - x^T A x$$

manfiymas kvadratik shakl bo‘lib, o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan musbat kvadratlar ko‘rinishida yozilishi mumkin:

$$x^T \tilde{A} x = x^T A x + \sum_{i=1}^{r} \left[X_i(x) \right]^2$$

U holda r o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan

$$X_1(x) = 0, X_2(x) = 0, ..., X_r(x) = 0$$

bog‘lanishlar qo‘yganimizda

$$x^T A x \quad \text{va} \quad x^T \tilde{A} x$$

shakllar ustma-ust tushib, (7.82) dastalar bir hil

$$\lambda_1^0 \leq \lambda_2^0 \leq, ..., \leq \lambda_n^0$$

xarakteristik ildizlarga ega bo‘ladi:

(7.82) dagi har bir dastaga teorema 7.14 ni qo‘llab,

$$\lambda_p \leq \lambda_p^o \leq \lambda_{p+2} \qquad (p = 1, 2, ..., n-2)$$

ga ega bo'lamiz. Bunga (7.84) ni birlashtirib, quyidagi teoremaga kelamiz.

Teorema 7.16. Agar (7.82) dagi dastalar uchun

$$x^T \tilde{A} x = x^T A x + \sum_{i=1}^{r} \left[X_i(x) \right]^2$$

bu yerda $X_i(x)(i = 1, 2, ..., r)$ - o'zaro bog'liq bo'lmagan chiziqli shakllar, (7.84) shart bajarilib,

$$\lambda_1 \le \lambda_2 \le, ..., \le \lambda_n, \quad \text{va} \quad \tilde{\lambda}_1 \le \tilde{\lambda}_2 \le, ..., \le \tilde{\lambda}_n,$$

mos ravishda ularning xarakteristik sonlari bo'lsa, u holda

$$\tilde{\lambda}_p \le \tilde{\lambda}_p \le \lambda_{p+r} \qquad (p = 1, 2, ..., n) \tag{7.85}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Xuddi shuningdek, quyidagi teoremani ham isbotlash mumkin.

Teorema 7.17. Agar

$$\lambda_1 \le \lambda_2 \le, ..., \le \lambda_n, \quad \text{va} \quad \tilde{\lambda}_1 \le \tilde{\lambda}_2 \le, ..., \le \tilde{\lambda}_n,$$

lar mos ravishda

$$x^T A x - x^T B x \text{ va } x^T A x \;\; x^T \tilde{B} x$$

dastalarning xarakteristik sonlari bo'lib,

$$x^T \tilde{B} x$$

shakl

$$x^T B x$$

shaklga r ta musbat kvadratlarni qo'shib hosil qilinsa, u holda

$$\tilde{\lambda}_{p-r} \le \tilde{\lambda}_p \le \lambda \qquad (p = 1, 2, ..., n) \tag{7.86}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Eslatma. Agar $r \neq 0$ chekli bo'lsa, teorema (7.16) va teorema (7.17) larga mos ravishda qandaydir p da

$$\lambda_p < \tilde{\lambda}_p \text{ va } \tilde{\lambda}_p < \lambda_p$$

ga ega bo'lamiz.

§9. Kvadratik shakllar ustida amallar

Quyidagi n o'zgaruvchili kvadratik shaklni qaraymiz:

$$f(x,x)=x^T Ax, \qquad (7.87)$$

bu yerda $x=(x_1,x_2,...,x_n)^T$, $A=(a_{i,j})_{i,j}^n, a_{i,j}=a_{j,i}$ $a\in K$ - ixtiyoriy xaqiqiy son.

Ta'rif 7.6 $f(x,x)$ kvadratik shaklni haqiqiy songa ko'paytmasi deb quyidagi tenglik bilan aniqlanuvchi kvadratik shaklga aytiladi:

$$\alpha f(x,x)=x^T(\alpha A)x=\sigma\geq\left(\sqrt{|\alpha|}x\right)^T A\left(\sqrt{|\alpha|}x\right), \qquad (7.88)$$

bu yerda $\sigma=\begin{cases}1 \text{ agar } \alpha\geq 0 \text{ bo'lsa,}\\ -1 \text{ agar } \alpha>0 \text{ bo'lsa.}\end{cases}$

(7.88) tenglikdan ko'rinadiki,

$$af(x,x)=\sigma f\left(\sqrt{|\alpha|}x,\sqrt{|\alpha|}x\right),$$

Haqiqatan,

$$\alpha f(x,x)=x^T(\alpha A)x=\alpha\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ i<j}}^{n}a_{ij}x_ix_j=\sigma\cdot|\alpha|\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ i<j}}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

$$=\sigma\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ i<j}}^{n}a_{ij}\left(\sqrt{|\alpha|}x_i\right)\left(\sqrt{|\alpha|}x_j\right)=\sigma\left(\sqrt{|\alpha|}x\right)^T A\left(\sqrt{|\alpha|}x\right)$$

$$=\sigma f\left(\sqrt{|\alpha|}x,\sqrt{|\alpha|}x\right),$$

Ta'rif 7.7. $f(x,x)=x^TAx$ va $g(x,x)=x^TBx$ kvadratik shakllarni yig'indisi deb quyidagi kvadratik shaklga aytiladi:

$$f(x,x)+g(x,x)=x^T(A+B)x \qquad (7.90)$$

1. Kvadratik shakllar ustida aniqlangan qo'shish va songa ko'paytirish amallari quyidagi xossalarga ega bo'ladi.

1) $f(x,x)+g(x,x)=g(x,x)+f(x,x)$,

2) $(f(x,x)+g(x,x))+q(x,x)=f(x,x)+(g(x,x)+q(x,x))$,

3) $f(x,x)+0=f(x,x)$ sharti qanoatlantiruvchi $x^T0x=0$ element mavjud,

4. Ixtiyoriy $f(x,x)$ uchun $f(x,x)+(-f(x,x))=0$ shartni qanoatlantiruvchi $-f(x,x)$ qarama-qarshi element mavjud,

5. $\alpha(f(x,x)+g(x,x))=\alpha f(x,x)+\alpha g(x,x)$,

6. $(\alpha\pm\beta)f(x,x)=\alpha f(x,x)\pm\beta fc(x,x)$,

7. $(\alpha\beta)f(x,x)=\alpha(\beta f(x,x)=\beta(\alpha f(x,x))$,

8 $1\cdot f(x,x)=f(x,x)$,

Haqiqatan,

1)

$f(x,x)+g(x,x)=x^TAx+x^TBx=x^T(A+B)x=x^T(B+A)x=x^TBx+x^TAx=g(x,x)+f(x,x)$

2)

$(f(x,x)+g(x,x))+q(x,x)=(x^TAx+x^TBx)+x^TQx=x^T((A+B)+Q)x=x^T(A+(B+Q)x=x^TAx+x^T(B+Q)x=x^TAx+(x^TBx+x^TQx)=f(x,x)+(g(x,x)+q(x,x))$,

3)

$f(x,x)+0=x^TAx+x^T0x=x^T(A+0)x=x^TAx=f(x,x)$,

4)

$f(x,x)+(-f(x,x))=x^TAx+(-x^TAx)=x^T(A-A)x=x^T0x=0$,

5)

$\alpha(f(x,x)+g(x,x))=\alpha(x^TAx+x^TBx)=\alpha x^T(A+B)x=$
$=x^T(\alpha A+\alpha B)=\alpha x^TAx+\alpha x^TAx+\alpha x^TBx=\alpha f(x,x)\pm\alpha g(x,x)$,

6) $(\alpha+\beta)f(x,x)=x^T(A+B)AX=x^T(\alpha A+\beta A)x=$
$=x^T(\alpha A+\beta A)x=x^T\alpha Ax+x^T\beta Ax=\alpha x^TAx+\beta x^TAx=\alpha f(x,x)+\beta f(x,x)$,

7) $(\alpha\cdot\beta)f(x,x)(\alpha\cdot\beta)x^TAx=x^T(\alpha\beta)Ax=x^T\alpha(\beta A)x=$
$=\alpha x^T\beta Ax=\alpha(\beta f(x,x))$.

8) $1\cdot f(x,x)=1\cdot x^TAx=x^TAx=f(x,x)$.

Demak, n o‘zgaruvchili kvadratik shakllar to‘plami chiziqli fazo tashkil qiladi.

Agar $f(x,x)=x^TAx$ kvadratik shakl aniq (o‘zgarmas) ishorali bo‘lsa, u holda $f(x,x)=x^T\alpha Ax$ kvadratik shakl ham aniq (o‘zgarmas) ishorali bo‘lib, a>0 da ularning ishoralari bir xil, a<0 da esa har xil bo‘ladi.

Bu tasdiqning to'g'riligi A va $a{\cdot}A$ matritsalarni bir vaqtda aniq (o'zgarmas) ishorali ekanligidan kelib chiqadi.

Agar $f(x,x)$ va $g(x,x)$ regulyar kvadratik shakllar bir xil aniq (o'zgarmas) ishorali bo'lib, $a>0$ bo'lsa, $f(x,x)+ \alpha g(x,x)$ kvadratik shakllar dastasi ham huddi shunday aniq (o'zgarmas) ishorali bo'ladi.

Haqiqatan, aniqlik uchun $f(x,x)$ va $g(x,x)$ kvadratik shakllar musbat aniqlangan bo'lsin deb olamiz. $f(x,x)>0$ va $g(x,x)>0$ bo'lib, bundan $a>0$ da $\alpha g(x,x)>0$ bo'lgani uchun $f(x,x)+ \alpha g(x,x)>0$ ekanligi kelib chiqadi.

Endi $f(x,x) - x^TAx$ va $g(y,y) - y^TBy$, $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)^T$,

$$y=(y_1,y_2,\dots,y_m)^T, A=(a_{ij})^n_{i,j=1}, \alpha_{ij}=a_{ji}; B=(b_{k,e})^m_{k,e=1}, b_{k,e}=b_{e,k}$$

kvadratik shakllarni qaraymiz.

Agar $m=n$ bo'lib, x va y chiziqli bog'langan, ya'ni $\lambda\neq 0$ mavjudki, unda $\lambda x+y=0$ bo'lsa,

$$f(x,x)+g(y,y)=f(x,x)+g(-\lambda x,-\lambda x)=f(x,x)+\lambda^2 g(x,x)=$$
$$x^T(A+\lambda^2 B)x$$

kvadratik shakllar dastasi hosil bo'ladi.

$m\neq n$ bo'lganda vektor koordinatalarini 0 lar bilan to'ldirib, $m=n$ holga keltirishimiz mumkin.

Agar x va y vektorlar chiziqli bog'lanmagan bo'lsa, $f(x,x)+ g(x,x)$ yig'indini quyidagi ko'rinishdagi bitta kvadratik shakl orqali ifodalash mumkin.

$$f(x,x)+g(y,y)=x^TAx+y^TBy=(x^T,y^T)\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix} \tag{7.91}$$

(7.91) kvadratik shakl $n+m$ o'zgaruvchili bo'lib, unga mos matritsa $n+m$ tartibli bo'ladi.

§10. n-o‘zgaruvchili kvadratik shakllarni ikki o‘zgaruvchili kvadratik shakllar yig‘indisi shaklida yozish

Ma’lumki, kvadratik shakllar amaliy ahamiyatga ega bo‘lib, bunda kvadratik shakllarning ishoralarini aniqlash muhim ahamiyatga ega. Ammo kvadratik shakldagi o‘zgaruvchilar soni ortib borishi bilan unga mos matritsaning tartibi ortib borib, unga Silvestr kriteriysini qo‘llash yoki uni xarakteristik sonlarini topish qiyinlashib boradi. Shuning uchun maqsadimiz berilgan kvadratik shaklni imkon qadar kamroq o‘zgaruvchili kvadratik shakllar yig‘indisi ko‘rinishida ifodalashdan iborat.

Teorema 7.18 (7.87) kvadratik shakl uchun $n>1$ da quyidagi tenglik o‘rinli

$$f(x,x)=x^{T}Ax=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{\substack{j=2\\ i<j}}^{n}(x_i,x_j)\begin{pmatrix} a_{ii} & (n-1)a_{ij} \\ (n-1)a_{ij} & a_{jj}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_i \\ x_j\end{pmatrix}$$

Isboti. (7.92) tenglikni isbotlash uchun avval o‘zgaruvchilar soni n–2 va n–3 bo‘lgan xususiy hollarni qarab chiqamiz.

1. n–2 bo‘lsin, u holda (7.92) quyidagicha yoziladi.

$$f(x,x)=x^{T}Ax=(x_1,x_2)\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{1,2} & a_{2,2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2\end{pmatrix}$$

2. n–3 bo‘lsin, u holda quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$f(x,x)=x^{T}Ax=a_{1,1}\cdot x_1^2+a_{2,2}\cdot x_2^2+a_{3,3}\cdot x_3^2+$$

$$+2a_{1,2}x_1x_2+2a_{1,3}x_1x_3+2a_{2,3}x_2x_3=$$

$$\frac{1}{2}a_{1,1}x_1^2+2a_{1,2}x_1x_2+\frac{1}{2}a_{2,2}x_2^2+\frac{1}{2}a_{1,1}x_1^2+2a_{1,3}x_1x_3+$$

$$\frac{1}{2}a_{3,3}x_3^2+\frac{1}{2}a_{2,2}x_2^2+2a_{2,3}x_2x_3+\frac{1}{2}a_{3,3}x_3^2=$$

$$=\frac{1}{2}\left(a_{1,1}x_1^2+4a_{1,2}x_1x_2+a_{2,2}x_2^2\right)+\frac{1}{2}\left(a_{1,1}x_1^2+4a_{1,3}x_1x_3+a_{3,3}x_3^2\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(a_{2,2}x_2^2+4a_{2,3}x_2x_3+a_{3,3}x_3^2\right)=$$

$$= \frac{1}{2}(x_1, x_2)\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{1,2} & a_{2,2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x_1, x_3)\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{1,3} & a_{3,3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{2}(x_2, x_3)\begin{pmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{2,3} & a_{3,3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\substack{i=1 \\ i}}^{2}\sum_{\substack{j=2 \\ i<j}}^{3}(x_i, x_j)\begin{pmatrix} a_{i,i} & a_{i,j} \\ a_{i,j} & a_{j,j} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_i \\ x_j \end{pmatrix}$$

Endi umumiy holni qaraymiz.

$$f(x,x) = x^T A x = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=n}^{n} a_{ij}x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{\substack{i=2 \\ i<j}}^{n} a_{ij}x_i x_j$$

Oxirgi ifodadagi birinchi yig'indini quyidagicha o'zgartirib yozamiz:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i^2 = a_{11}x_1^2 + a_{2.2}x_2^2 +, \dots, a_{n.n}x_n^2 =$$

$$= \underbrace{\frac{a_{1.1}}{n-1}x_1^2 + \dots + \frac{a_{1.1}}{n-1}x_1^2}_{\text{n-1ta}} + \underbrace{\frac{a_{2.2}}{n-1}x_2^2 + \dots + \frac{a_{2.2}}{n-1}x_2^2}_{\text{n-1ta}} +$$

$$+ \underbrace{\dots + \frac{a_{n.n}}{n-1}x_n^2 + \dots + \frac{a_{n.n}}{n-1}x_n^2}_{\text{n-1ta}} =$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(a_{1,1}x_1^2 + a_{2.2}x_2^2\right) + \frac{1}{n-1}\left(a_{1,1}x_1^2 + a_{1.3}x_3^2\right) + \frac{1}{n-1}\left(a_{1,1}x_1^2 + a_{n,n}x_n^2\right) +$$

$$\frac{1}{n-1}\left(a_{2.2}x_2^2 + a_{3.3}x_3^2\right) + \frac{1}{n-1}\left(a_{2.2}x_2^2 + a_{4.4}x_4^2\right) + \dots + \frac{1}{n-1}\left(a_{2.2}x_2^2 + a_{n,n}x_n^2\right) +$$

$$+ \dots + \frac{1}{n-1}\left(a_{n-1,n-1}x_{n-1}^2 + a_{n-1,n}x_n^2\right) =$$

$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(a_{i,i}x_i^2 + a_{j,j}x_j^2\right)$$

Bundan,

$$f(x,x)=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{\substack{j=2\\ i<j}}^{n}(a_{i,i}x_i^2+2(n-1)a_{i,j}x_ix_j+a_{j,j}x_j^2)=$$

$$=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{\substack{j=2\\ i<j}}^{n}(x_i,x_j)\begin{pmatrix}a_{i,i} & n-1a_{i,j}\\ n-1a_{i,j} & a_{j,j}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_i\\ x_j\end{pmatrix}$$

ni hosil qilamiz.

Musbat (manfiy) aniqlangan kvadratik shakllar yig'indisi musbat (manfiy) aniqlangan ekanligidan, (7.92) tenglikka asosan (7.87) kvadratik shakl uchun quyidagilarni hosil qilamiz:

Agar (7.87) kvadratik shakl uchun

$$a_{i,i}a_{j,j}-a_{i,j}^2(n-1)^2\geq 0, i=1,2,...,n-1; j=2,3,...,n; i<j$$

shartlar bajarilib,<

$$a_{i,i}a_{j,j}>0\ (a_{i,i}<0) i=1,1,...,n$$

bo'lsa, u manfiymas (musbatmas) bo'ladi.

Agar (7.93) shartlarning kamida bittasi uchun

$$a_{i,i}a_{j,j}-(n-1)^2a_{ij}^2>0;\ 1\leq \mathrm{i}\leq n-1,\ 2\leq j\leq n, i<j \qquad (7.95)$$

bo'lib, (7.94) shartlar bajarilsa, (7.87) kvadratik shakl musbat (manfiy) aniqlangan bo'ladi.

Ko'plab mexanik sistemalarning harakat tenglamalari to'rtinchi tartibli differensial tenglamalar sistemasi orqali ifodalanishini hisobga olib, to'rt o'zgaruvchili kvadratik shakllar musbat (manfiy) aniqlanganlik shartlarini keltiramiz:

$$f(x,x)=a_{1.1}x_1^2+a_{2.2}x_2^2+a_{3.3}x_3^2+a_{4.4}x_4^2+2a_{1.2}x_1x_2+2a_{1.3}x_1x_3+$$
$$+2a_{1.4}x_1x_4++2a_{2.3}x_2x_3++2a_{2.4}x_2x_4++2a_{3.4}x_3x_4$$

kvadratik shaklni qaraymiz. Bu kvadratik shaklning matritsasi

$$A=\begin{pmatrix}a_{1.1} & a_{1.2} & a_{1.3} & a_{1.4}\\ a_{1.2} & a_{2.2} & a_{2.3} & a_{2.4}\\ a_{1.3} & a_{2.3} & a_{3.3} & a_{3.4}\\ a_{1.4} & a_{2.4} & a_{3.4} & a_{4.4}\end{pmatrix}$$

bo‘lib, (7.93), (7.94), (7.95) shartlarga ko‘ra (7.96) kvadratik shakl musbat aniqlangan bo‘lishi uchun

$$a_{i,i}>0,\ i=1,2,3,4; \qquad (7.97)$$

$$a_{1.1}a_{2.2}-9a_{1.2}^2>0, \quad a_{n}a_{3.3}-9a_{1.3}^2\geq 0,$$

$$a_{1.1}a_{4.4}-9a_{1.4}^2\geq 0, \quad a_{2.2}a_{3.3}-9a_{2.3}^2\geq 0, \qquad (7.98)$$

$$a_{2.2}a_{4.4}-9a_{2.4}^2\geq 0, \quad a_{3.3}a_{3.3}-9a_{3.4}^2\geq 0,$$

Manfiy aniqlangan bo‘lishi uchun esa (2.12) shartlar bilan bir vaqtda

$$a_{i,i}<0,\ i=1,2,3,4,$$

shartlar bajarilishi yetarlidir.

Eslatma: (7.98) shartlardagi qat’iy tengsizlik, qolgan ixtiyoriy tengsizlik bilan almashtirilishi mumkin.

Agar $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$, lar matritsaning xarakteristik sonlari bo‘lib, A=diag $(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)$ bo‘lsa, (7.92) shakl quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$f(x,x)=x^TAx=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=2}^{n}(x_i,x_j)\begin{pmatrix}\lambda_i & 0\\ 0 & \lambda_j\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_i\\ x_j\end{pmatrix} \qquad (7.100)$$

§11. Erkinlik darajasi n bo‘lgan sistemalarning kichik tebranishlari

n ta erkinlik darajasi bo‘lgan konservativ mexanik sistemani o‘zining turg‘un muvozanat holati yaqinidagi erkin tebranishlarini qaraymiz.

Sistemani muvozanat holatdan og‘ishini o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan $q_1, q_2, \cdots q_n$ umumlashgan koordinatalar yordamida beramiz. Bunda muvozanat holatga $q_1=0,\ q_2=0,...,\ q_n=0$ mos keladi. U holda sistemaning kinetik energiyasi $q_1, q_2, \cdots q_n$ umumlashgan tezliklarning kvadratik shakli ko‘rinishida tasvirlanadi.

$$T=\sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}(q_1,q_2,...,q_n)\dot{q}_i\dot{q}_k$$

$b_{ik}(q_1,q_2,q...q_n)$ koeffitsiyentlari $q_1,q_2...q_n$ larning darajalari bo'yicha qatorga yoyib,

$$b_{ik}(q_1,q_2,q...q_n)=b_{ik}+... \qquad (i,k=1,2,...n)$$

Bu yoyilmaning faqat b_{ik} o'zgarmas hadlarini olib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$T=\sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}\dot{q}_i,\dot{q}_k \qquad (b_{ik}=b_{ik},\ i,k=1,2,...,n)$$

Kinetik energiya har doim musbat bo'lib, faqat $q_1=q_2=...q_n=0$ dagina nolga aylanadi. Shuning uchun $T=\sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}\dot{q}_i,\dot{q}_k$ - musbat aniqlangan kvadratik shakldir.

Sistemaning potensial energiyasi $\Pi(q_1,q_2,q...q_n)$ - umumlashgan koordinatalarning funksiyasi bo'ladi. Umumiylikni buzmasdan $\Pi_0=\Pi(0,0,...,0)=0$ deb olamiz. U holda potensial energiyani $q_1,q_2,\cdots q_n$ larning darajasi bo'yicha qatorga yoyib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\Pi=\sum_{i=1}^{n} a_i q_i+\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}q_i q_k+......$$

Ma'lumki muvozanat holatda potensial energiya statsionar qiymat qabul qiladi, u holda:

$$a_i=\left(\frac{\partial\Pi}{\partial q_i}\right)_0=0, \qquad (i=1,2,...,n)$$

Bundan $q_1,q_2,\cdots q_n$ larga nisbatan ikkinchi tartibli bo'lgan hadlarni saqlab qolib, quyidagicha ega bo'lamiz:

$$\Pi=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}q_i q_k (a_{ik}=a_{ik}, i,k=1,2,...,n)$$

Shunday qilib, Π-potensial energiya va T- kinetik energiya quyidagi kvadratik formulalar bilan aniqlanadi:

$$\Pi=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}q_i q_k, T=\sum_{i,k=1}^{n} b_{i,k}\dot{q}_i\dot{q}_k \qquad (7.101)$$

Bu yerdagi ikkinchi kvadratik shakl musbat aniqlangan.

Endi harakat differensial tenglamalarini Lagranjning ikkinchi tur tenglamalari ko'rinishda yozamiz:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}=-\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}(i=1,2,...,n) \qquad (7.102)$$

Bu yerda T va Π ning o'rniga ularni (7.101) dagi ifodasini qo'yib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\ddot{q}_k+\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}q_k=0(i=1,2,...,n) \qquad (7.103)$$

Quyidagi simmetrik matritsalarni kiritib,

$$A=(a_{ik})_{i,k=1}^{n},\ B=(b_{i,k})_{i,k=1}^{n},\ q^T(q_1,q_2,...,q_n)$$

(7.103) tenglamalar sistemasini quyidagicha yozamiz:

$$B\ddot{q}+Aq=0 \qquad (7,103')$$

(7.103) sistema yechimini quyidagi garmonik tebranishlar ko'rinishda izlaymiz:

$$q_1=v_1\sin(\omega t+\alpha), q_2=v_2\sin(\omega t+\alpha),...,q_n=v_n\sin(\omega t+\alpha)$$

matritsani ko'rinishda

$$q=v\sin(\omega t+\alpha) \qquad (7.104)$$

Bu yerda $v=(v_1,v_2,...,v_n)^T$ -o'zgarmas amplituda vektorlari, ω-chostata, α - boshlang'ich fazo.

(7.104) ni (7,103') ga qo'yib, $\sin(\omega t+\alpha)$ ga qisqartirib, quyidagini hosil qilamiz:

$$A\,v=\lambda Bv \quad (\lambda=\omega^2)$$

Ammo bu $x^TAx-\lambda x^T\,Bx$ –kvadratik shakllar singulyar dastasi xarakteristik tenglamasi $(A-\lambda B)=0$ dan kelib chiqadigan $Az^k=\lambda_k B\,z^k(k=1,2,...,n)$ tenglamalar bilan ustma-ust tushadi. Demak, izlanayotgan amplituda vektori bosh vektor bo'lib, chastota kvadrati $\lambda=\omega^2$ $x^TAx-\lambda x^T\,Bx$ shakllar regulyar dastasining mos xarakteristik sonlari bo'ladi. $\Pi(q_1,q_2,...,q_n)$- potensial energiya qat'iy minimumga ega deb faraz qilamiz. U holda Lajan-Drixle teoremasiga asosan sistemaning muvozanat holati turg'un bo'ladi. Ikkinchi tomondan, $\Pi=q^TAq$ kvadratik shakl musbat aniqlangan bo'ladi.

Regulyar dastalar haqidagi teoremaga asosan kvadratik shakllarning regulyar dastasi

$$x^TAx - \lambda x^T Bx$$

n ta haqiqiy $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ xarakteristik sonlarga ega va bu n ta sonlarga mos $v^1, v^2, ..., v^n$ $\left[v^k = \left(v_{1k}, v_{2k}, ...v_k\right)^T\right]$ bosh vektorlarga ega bo'lib, ular quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

$$v^1, v^2, ..., v^n \left[v^k = (v_{1k}, v_{2k}, ...v_{nk})T\right] \quad (7.105)$$

x^TAx shaklning musbat aniqlanganligidan,

$$x^TAx - \lambda x^T Bx$$

dastaning barcha xarakteristik sonlari musbat

$$\lambda_k > 0 \qquad (k=1,2,...,n)$$

ekanligi kelib chiqadi. Ammo bu holda amplituda vektorlari

$$v^k = (v_{1k}, v_{2k}, ..., v_{nk})^T \quad (k=1,2,...,n)$$

ortanormallashganlik shartini qanoatlantiruvchi quyidagi n ta garmonik tebranishlar mavjud bo'ladi.

$$v^n Sin(\omega_k t + \alpha_k) \quad (\omega_k^2 = \lambda_k,\ k = 1,2,...,n) \quad (7.106)$$

(7.103') ning chiziqli ekanligidan kelib chiqadiki, ixtiyoriy tebranish (7.106) garmonik tebranishlardan hosil qilinishi mumkin:

$$q = \sum_{k=1}^{n} A_k Sin(\omega_k t + \alpha_k) v^k \quad (7.107)$$

bu yerda, A_k, α_k $(k = 1,2,...,n)$ - ixtiyoriy o'zgarmaslar.

(7.107) dan quyidagilarni topamiz:

$$q_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k Sin\alpha_k v^k, \qquad \dot{q}_0 = \sum_{k=1}^{n} \omega_k A_k Cos\alpha_k v^k \quad (7.108)$$

(7.107) yechimini quyidagicha yozish mumkin:

$$q_i = \sum_{k=1}^{n} A_k Sin(\omega_k t + \alpha_k) v_{ik} \quad (7.109)$$

Berilgan mexanik sistema chastotalarini kamaymaydigan tartibda raqamlab chiqamiz, ya'ni:

$$0 < \omega_1 \le \omega_2 \le ... \le \omega_n$$

Bu bilan

$$x^TAx - \lambda x^T Bx$$

dasta xarakteristik sonlari $\lambda_k = \omega_k^2$ $(k = 1,2,...,n)$ ning joylashishi aniqlanadi.

$$\lambda_1 \le \lambda_2 \le .... \le \lambda_n$$

Berilgan sistemaga h ta o'zaro bog'liq bo'lmagan chekli statsionar bog'lanishlarni qo'yamiz. $q_1, q_2, \ldots q_n$ og'ishlarni kichik miqdorlar deb hisoblab, bu bog'lanishlarni $q_1, q_2, \ldots q_n$ larga nisbatan chiziqli deb qarash mumkin:

$$L_1(q) = 0,\ L_2(q) = 0,\ .....\ ,\ L_n(q) = 0.$$

Bu bog'lanishlar qo'yilgandan keyin qaralayotgan sistema n-h ta erkinlik darajasiga ega bo'ladi. Bu sistemaning chastotasi

$$\omega_1^2 \le \omega_2^2 \le .... \le \omega_{n-h}^2.$$

$L_1, L_2, \ldots, L_h$ bog'lanishli $x^T Ax \quad -\lambda x^T \quad Bx$ dastaning $\lambda_1^0 \le \lambda_2^0 \le \ldots \le \lambda_{n-h}^0$ xarakteristik sonlari bilan $\lambda_j^0 = (\omega_j^0)^2$ munosabat orqali bog'langan. Shuning uchun

$$\omega_j \le \omega_j^0 \le \omega_{j+h} \qquad (j = 1,2,\ldots,n-h)$$

Shunday qilib, sistemaga h ta bog'lanishlarni qo'yganimizda uning chastotasi faqat ortishi mumkin, ammo yangi j- chastota ω_j^0 miqdori eski j+L – chastota ω_{j+L} miqdordan ortmaydi.

Xuddi shuningdek aytishimiz mumkinki, sistema bikirligi ortganda, ya'ni, $q^T Aq$ shakl ortganda potensial energiya uchun ($q^T Bq$ - shakl o'zgarmaganda) chastota faqat ortishi mumkin, sistema inersiyasi ortganda, ya'ni, $q^T Bq$ shakl ortganda esa kinetik energiya uchun ($q^T Aq$ shakl o'zgarmaganda) chastota faqat kamayishi mumkin.

§ 12. Chiziqli yirik masshtabli sistemalar turg'unligi masalasiga bog'liq bo'lgan ba'zi teoremalar

A n- tartibli kvadrat matritsa bo'lib, A^T, $A^\perp$, A^0 - lar bu matritsani mos ravishda bosh, bosh bo'lmagan diagonallarga va matritsa markaziga nisbatan transponirlangani bo'lsin.

Quyidagi sistemalarni qaraymiz:

$$\dot{x} = Ax, \tag{7.110}$$

$$\dot{x} = A^T x, \tag{7.111}$$

$$\dot{x} = A^\perp x, \tag{7.112}$$

$$\dot{x} = A^0 x, \tag{7.113}$$

$$\dot{x} = (A + A^0)x, \tag{7.114}$$

bu yerda $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T \in R^n$.

Teorema 7.19. Agar (7.110) sistema muvozanat holati turg'un (asimptotik turg'un) yoki turg'unmas bo'lsa, u holda (7.111), (7.112), (7.113) sistemalar muvozanat holati ham mos ravishda turg'un (asimptotik turg'un) yoki turg'unmas bo'ladi.

Isbot: Transponirlangan matritsalarning xossalariga ko'ra quyidagiga ega bo'lamiz.

$$|A - \lambda E| = |A^T - \lambda E| = |A^{\perp} - \lambda E| = |A^0 - \lambda E|,$$

Ya'ni, $A, A^T, A^{\perp}, A^0$ matritsalarning xarakteristik ko'phadlari bir xil bo'lib, bundan teorema 1 ning to'g'riligi kelib chiqadi.

Teorema 7.20. (7.110) sistema uchun

$$v(x)=x^T Px \tag{7.115}$$

kvadratik shakl ko'rinishdagi Lyapunov funksiyasi mavjud bo'lib, P matritsa musbat aniqlangan, bosh diagonalga yoki matritsa markaziga nisbatan simmetrik bo'lsin. Agar

$$P_1=H^{-1}P=PH^{-1} \tag{7.116}$$

matritsa musbat aniqlangan bo'lsa, u holda (7.110) sistema muvozanat holati turg'unligi (asimptotik turg'unligi) yoki turg'unmasligidan

$$\dot{x} = HAx \tag{7.117}$$

sistema muvozanat holatini mos ravishda turg'unligi, (asimptotik turg'unligi) yoki turg'unmasligi kelib chiqadi, bu yerda H,*HA*–matritsa xosmas, musbat aniqlangan, bosh diagonalga yoki matritsa markaziga nisbatan simmetrik.

Isbot: (7.117) sistema uchun Lyapunov funksiyasini quyidagi kvadratik shakl ko'rinishda quramiz:

$$v_1(x) = x^T P_1 x\,. \tag{7.118}$$

Teorema 7.20 ning shartiga ko'ra P_1 matritsa musbat aniqlangan, shuning uchun (7.118) funksiya ham musbat aniqlangan bo'lib, undan (7.117) sistema yordamida olingan hosila quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$\dot{v}(x) = x^T P_1 x + x^T P_1 x = x^T\left[(HA)^T P_1 + p_1 HA\right]x = x^T(A^T H^T H^{-1}P + PH^{-1}HA)x =$

$x^T(A^T P + PA)x = \dot{v}(x).$

Bundan, $(\dot{v}_1(x)$ va $(\dot{v}(x)$ funksiyalarning ishora aniqlanishi bir xil ekanligi kelib chiqadi. Bu teorema 7.20 ning to‘g‘riligini isbotlaydi.

Teorema 7.21. (7.110) sistema uchun (7.115) Lyapunov funksiyasi tuzilgan bo‘lib, musbat aniqlangan

$$P_1 = HP = PH$$

matritsa mavjud bo‘lsin, bu yerda H, RN–matritsalar xosmas, musbat aniqlangan va bosh diagonalga yoki matritsa markaziga nisbatan simmetrik bo‘lsin. U holda (7.110) sistema muvozanat holatining turg‘unligidan (asimptotik turg‘unligidan) yoki turg‘unmasligidan

$$\dot{x} = H^{-1}Ax$$

sistema muvozanat holatini mos ravishda turg‘unligi (asimptotik turg‘unligi) yoki turg‘unmasligi kelib chiqadi. .

Isboti teorema 7.20 ning isboti kabidir.

Eslatma. Agar teorema 7.20 (teorema 7.21) da $P = E$ bo‘lsa, u holda teorema 7.20 (teorema 7.21) $P_1 = H^{-1}$ $(P_1 = H)$ da o‘z kuchida qoladi.

Teorema 7.22.

$$v(x) = x^T Ex$$

funksiya quyidagi sistema uchun Lyapunov funksiyasi bo‘lsin

$$\dot{x} = A_0 x, \tag{7.119}$$

bu yerda $x \in R^n$, $A_0 \in R^{n\times n}$, E - n-tartibli birlik matritsa va $H_1, H_2, ..., H_m$ matritsalar n o‘lchovli, xosmas, musbat aniqlangan, bosh diagonalga yoki matritsa markaziga nisbatan simmetrik matritsalardir.

U holda (7.119) sistema muvozanat holatining turg‘unligi (asimptotik turg‘unligi) yoki turg‘unmasligidan quyidagi

$$\dot{x} = Ax, \tag{7.120}$$

sistema muvozanat holatining mos ravishda turg‘unligi (asimptotik turg‘unligi) yoki turg‘unmasligi kelib chiqadi. Bu yerda

$$A=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i A_i \quad \text{yoki} \quad A=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i A_i^*,$$

$$A_i=H_iA_0,\ A_i^*=H_i^{-1}A_0,\ \alpha_i\ge 0,\ i=1,2,...,m,\ \sum_{i=1}^{m}\alpha_i^2\ne 0.$$

Isboti: $v(x)=x^T Ex$ (7.119) sistema uchun Lyapunov funksiyasi bo'lsin. U holda

$$(\dot v(x))=x^T(A_0^T+A_0)x.$$

(7.120) sistema uchun Lyapunov funksiyasini quyidagi

$$v_1(x)=x^T H^{-1}x,$$

kvadratik shakl ko'rinishida quramiz, bu yerda $H=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i H_i$

Teorema 7.22 ning shartiga ko'ra N musbat aniqlangan va bosh diagonalga nisbatan simmetrik. Shuning uchun $v_1(x)$ funksiya musbat aniqlangan bo'lib,

$$(\dot v_1(x))=x^T(A^TH^{-1}+H^{-1}A)x=x^T\left(\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i A_i^T\right)H^{-1}+H^{-1}\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i A_i\right)\right)x=$$

$$x^T\left(A_0^T\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i H_i^T\right)H^{-1}+H^{-1}\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i H_i\right)A_0\right)x=x^T(A_0^THH^{-1}+H^{-1}HA_0)x=$$

$$x^T(A_0^T+A_0)x=(\dot v(x)).$$

bo'ladi. Bundan, $(\dot v_1(x))$ va $(\dot v(x))$ funksiyalarning ishora aniqanishi bir xil ekanligi kelib chiqib, teorema 7.22 ning to'g'riligi isbotlanadi.

Agar teorema 7.22 da $A_k<A_j,\ k,j=1,2,...,n,\ k\ne j$ va $\alpha_k+\alpha_j=1$, bo'lib, barcha qolgan $\alpha_i=0,\ i\ne k,\ i\ne j,$ bo'lsa, u holda A matritsa quyidagi shartni qanoatlantiradi.

$$A_k\le A\le A_j. \tag{7.121}$$

Endi (7.110) sistema muvozanat holati turg'unligini ba'zi cheklanishlarda qarab chiqamiz. Faraz qilaylik, (7.110) sistemadagi A matritsa matritsa markaziga nisbatan simmetrik bo'lsin. Bu holda (7.110) sistemani vertikal va gorizontal simmetriya o'qlari bo'yicha yoki o'zaro muvozanatlashuvchi qism sistemalar bo'yicha dekompozitsiya qilish mumkin.

Teorema 7.23. Agar musbat aniqlangan n- tartibli R kvadrat matritsa bosh va bosh bo'lmagan diagonallarga yoki matritsa markaziga nisbatan simmetrik bo'lib,

$$v(x) = x^T Ex \qquad (7.122)$$

funksiya (7.114) sistema uchun Lyapunov funksiyasi bo'lsin. U holda bu funksiya (7.110) sistema uchun ham Lyapunov funksiyasi bo'ladi, ya'ni, (7.114) sistema muvozanat holati turg'unligi (asimptotik turg'unligi) yoki turg'unmasligidan (7.110) sistema muvozanat holatining mos ravishda turg'unligi (asimptotik turg'unligi) yoki turg'unmasligi kelib chiqadi.

Isbot: Bevosita tekshirib ko'rib, ishonch hosil qilish mumkinki, $P = P^T = P^{\perp}$ dan $P = P^0$ ekanligi kelib chiqadi. Shuning uchun teorema 7.23 ni $P = P^0$ hol uchun isbotlash yetarli. R matritsaning musbat aniqlanganligidan (7.122) funksiyadan musbat aniqlanganligi kelib chiqadi. U holda quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$(\dot{v}\ (x)) = x^T((A + A^0)^T P + P(A = A^0))x = (\dot{v}(x)) + x^T(A^{0^T}P + PA^0)x =$$

$$(\dot{v}\ (x)) + x^T(A^{0^T}P^0 + P^0A^0)x = (\dot{v}\ (x)) + x^T(A^TP + PA)x =$$

$$= (\dot{v}(x)) + (\dot{v}(x)) = 2(\dot{v}(x)).$$

Bundan, $(\dot{v}(x)$ va $(\dot{v}(x)$ funksiyalarni ishora aniqlanishi bir xil ekanligi kelib chiqib, teorema 7.23 isbotlanadi.

Teorema 7.24. Agar A matritsa bosh va bosh bo'lmagan diagonallarga yoki matritsa markaziga nisbatan simmetrik bo'lib,

$$v(x) = x^T Ex\ ,$$

funksiya (7.110) sistema uchun Lyapunov funksiyasi bo'lsin. (bu yerda P musbat aniqlangan kvadratik matritsa). U holda $v_1(x) = x^T P^0 x$ va $v_2(x) = x^T(P + P^0)x$ funksiyalar ham (7.110) sistema uchun Lyapunov funksiyasi bo'ladi.

Isboti: P matritsaning musbat aniqlanganligidan P^0 va $P + P^0$. Matritsalarning ham musbat aniqlanganligi kelib chiqadi. Shuning uchun $v_1(x)$ va $v_2(x)$ funksiyalar musbat aniqlangan bo'ladi. Teorema 7.24 ning shartiga ko'ra $A = A^0$. Bu shartdan quyidagilar kelib chiqadi:

$$\left(\dot{v}_1(x)\right)+x^T(A^TP^0+P^0A)x=x^T(A^{0^T}P^0+P^0A^0)x=x^T(A^TP+PA)x,$$

$$\left(\dot{v}_2(x)\right)+x^T(A^T(P+P^0)+(P+P^0)A)x=x^T(A^TP+PA)x+x^T(A^TP+PA)^0x,$$

$$\left(\dot{v}_1(x)\right)+x^T(A^TP+PA)x.$$

Bundan teorema 7.24 ning to‘g‘riligi kelib chiqadi. Shuningdek,

$$\left|A^TP+PA-\lambda E\right|=\left|(A^TP+PA)^0-\lambda E\right|.$$

Teorema 7.25. Agar n- o‘lchovli A kvadrat matritsa bosh va bosh bo‘lmagan diagonallarga yoki matritsa markaziga nisbatan simmetrik bo‘lsa, u holda bu matritsani musbat (manfiy) aniqlangan bo‘lishi uchun quyidagi shartlarning bajarilishi yetarlidir: $n=2k$ da

1. $\lambda_m(A_1)>0(\lambda_M(A_1)<0)$

2. $\lambda_m^2(A_1)>\frac{1}{4}\lambda_M((A_2^T+A_2^0)(A_2^T+A_2^0)^T)$ $\left(\lambda_M^2(A_1)>\frac{1}{4}\lambda_M(A_2^T+A_2^0)(A_2^T+A_2^0)^T\right)$;

$n=2k+1$ da

3. $\lambda_m(A_1)>0, a_{k+1,k+1}>0(\lambda_M(A_1)<0,\ a_{k+1,k+1}<0)$,

4. $\lambda_m(A_1)a_{k+1,k+1}>|a|(\lambda_M(A_1)\ a_{k+1,k+1}>|a|)$,

5. $\lambda_m(A_1)a_{k+1,k+1}>|a|\left(\lambda_M^{\frac{1}{2}}((A_2^T+A_2^0)(A_2^T+A_2^0)^T+2\lambda_m(A_1))+\frac{1}{4}a_{k+1,k+1}\lambda_M(A_2^T+A_2^0)(A_2^T+A_2^0)^T\right)$,

$$\left(\lambda_M^2(A_1)a_{k+1,k+1}<|a|^2(2\lambda_M(A_1)-\lambda_M^{\frac{1}{2}}((A_2^T+A_2^0)(A_2^T+A_2^0)^T))+\frac{1}{4}a_{k+1,k+1}\lambda_M((A_2^T+A_2^0)(A_2^T+A_2^0)^T)\right),$$

bu yerda A_1 va A_2 matritsalar k- tartibli bo‘lib,

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2^0 & A_1^0 \end{pmatrix}$$

dan aniqlanadi, A_1^0 va A_2^0 ularni mos ravishda matritsa markaziga nisbatan transponirlanganidir.

$a=a_1+a_2$, $a_1=(a_{k+1,1},a_{k+1,2},\ldots,a_{k+1,k})^T$,

$a_2=(a_{k+1,k+2},a_{k+1,k+3},\ldots,a_{k+1,n})^T$ va $a_{k+1,k+1}$

mos ravishda A matritsa markazida joylashgan vektor va skalyarlardir.

Isboti: Agar matritsa bosh va bosh bo‘lmagan diagonallarga nisbatan simmetrik bo‘lsa, u holda u matritsa markaziga nisbatan ham simmetrik bo‘ladi. Shuning uchun teorema 7.25 ni matritsa markaziga nisbatan simmetrik bo‘lgan matritsalar uchungina isbotlaymiz.

$n = 2k$ bo‘lsin, u holda teorema 7.25 ning shartiga ko‘ra A matritsa quyidagi ko‘rinishga ega

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2^0 & A_1^0 \end{pmatrix}.$$

Quyidagi A matritsaga mos keluvchi kvadratik shaklni qaraymiz.

$$x^T A x = x^T \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2^0 & A_1^0 \end{pmatrix} x \qquad (7.123)$$

$x = (y^T, z^T)^T$ kabi belgilash kiritamiz, bu yerda $y = (x_1, x_2, ..., x_k)^T$, $z = (x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_n)^T$. U holda quyidagilarni hosil qilamiz

$$x^T A x = (y^T, z^T)\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2^0 & A_1^0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = y^T A_1 y + z^T A_2 y + y^T A_2^0 z + z^T A_1^0 z =$$

$$y^T A_1 y + y^T (A_2^T + A_2^0) z + z^T A_1^0 z \geq \lambda_m (A_1)\|y\| - \lambda_M^{\frac{1}{2}}((A_2^T + A_2^0)(A_2^T + A_2^0)^T)\|y\|\|z\| + \lambda_m (A_1^0)\|z\|^2 =$$

$$= (\|y\| \|z\|)\begin{pmatrix} \lambda_m (A_1) & -\frac{1}{2}\lambda^{\frac{1}{2}}((A_2^T + A_2^0)(A_2^T + A_2^0)^T) \\ -\frac{1}{2}\lambda^{\frac{1}{2}}((A_2^T + A_2^0)(A_2^T + A_2^0)^T) & \lambda_m (A_1^0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \|y\| \\ \|z\| \end{pmatrix}$$

$$x^T A x \leq \lambda_M (A_1)\|y\|^2 - \lambda_M^{\frac{1}{2}}((A_2^T + A_2^0)(A_2^T + A_2^0)^T)\|y\|\|z\| + \lambda_M (A_1^0)\|z\| =$$

$$= (\|y\| \|z\|)\begin{pmatrix} \lambda_M (A_1) & \frac{1}{2}\lambda_M^{\frac{1}{2}}((A_2^T + A_2^0)(A_2^T - A_2^0)^T) \\ \frac{1}{2}\lambda_M^{\frac{1}{2}}((A_2^T + A_2^0)(A_2^T - A_2^0)^T) & \lambda_M (A_1^0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \|y\| \\ \|z\| \end{pmatrix}$$

Bundan kelib chiqadiki, agar teorema 7.25 dagi 1. va 2. shartlar bajarilsa, u holda (7.123) kvadratik shakl va unga mos A matritsa musbat (manfiy) aniqlanadi.

$n = 2k + 1$ bo‘lsin , u holda teorema 7.25 ning shartiga ko‘ra A matritsa quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & a_2 & A_2 \\ a_1^T & a_{k+1,k+1} & (a_1^T)^0 \\ A_2^0 & a_2^0 & A_1^0 \end{pmatrix}$$

A matritsaga mos quyidagi kvadratik shaklni qaraymiz:

$$x^T Ax = x^T \begin{pmatrix} A_1 & a_2 & A_2 \\ a_1^T & a_{k+1,k+1} & (a_1^T)^0 \\ A_2^0 & a_2^0 & A_1^0 \end{pmatrix} x. \tag{7.124}$$

Bu yerda $x = (y^T, x_{k+1,k+1}, z_0^T)^T$, $y = (x_1, x_2, ..., x_k)^T$, $z_0 = (x_{k+2}, x_{k+3}, ..., x_n)^T$.

U holda quyidagilarga ega bo‘lamiz:

$$x^T Ax = (y^T, x_{k+1,k+1}, z_0^T) \begin{pmatrix} A_1 & a_2 & A_2 \\ a_1^T & a_{k+1,k+1} & (a_1^T)^0 \\ A_2^0 & a_2^0 & A_1^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ x_{k+1,k+1} \\ z_0 \end{pmatrix} = y^T A_1 y + z_0^T (A_2^T + A_2^0) y +$$

$$+ y^T a x_{k+1,k+1} + a_{k+1,k+1} x_{k+1,k+1}^2 + z_0^T a^0 x_{k+1,k+1} + z_0^T A_1^0 z_0.$$

bu yerda $a = a_1 + a_2$.

Bundan, $\lambda_m(A_1) = \lambda_m(A_1^0)$ $|a| = |a^0|$, ekanligini hisobga olib, (7.124) kvadratik shakl uchun quyidan va yuqoridan olingan quyidagi baholarga ega bo‘lamiz:

$$x^T Ax \geq \lambda_m(A_1)\|y\|^2 - \lambda_M^{\frac{1}{2}}((A_2^T + A_2^0)(A_2^T + A_2^0)^T)\|y\|\|z_0\| - |a|\|y\||x_{k+1,k+1}| + a_{k+1,k+1}x_{k+1,k+1}^2 -$$

$$-|a|\|z_0\||x_{k+1,k+1}| + \lambda_m(A_1)\|z_0\|^2 =$$

$$= (\|y\|, |x_{k+1,k+1}|, \|z_0\|) \begin{vmatrix} \lambda_m(A_1) & -\frac{1}{2}|a| & -\frac{1}{2}\lambda_M^{\frac{1}{2}}(A_2^T + A_2^0)(A_2^T + A_2^0)^T \\ -\frac{1}{2}|a| & a_{k+1,k+1} & -\frac{1}{2}|a| \\ -\frac{1}{2}\lambda_M^{\frac{1}{2}}(A_2^T + A_2^0)(A_2^T + A_2^0)^T & -\frac{1}{2}|a| & \lambda_m(A_1) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \|y\| \\ |x_{k+1,k+1}| \\ \|z_0\| \end{vmatrix},$$

$$x^T Ax \leq \lambda_M(A_1)\|y\|^2 - \lambda_M^{\frac{1}{2}}((A_2^T + A_2^0)(A_2^T + A_2^0)^T \|y\|\|z_0\| + |a|\|y\||x_{k+1,k+1}| + a_{k+1,k+1}x_{k+1,k+1}^2 +$$

$$+|a|\|z_0\||x_{k+1,k+1}| + \lambda_M(A_1)\|z_0\|^2 =$$

$$= (\|y\|, |x_{k+1,k+1}|, \|z_0\|) \begin{vmatrix} \lambda_M(A_1) & \frac{1}{2}|a| & -\frac{1}{2}\lambda_M^{\frac{1}{2}}(A_2^T + A_2^0)(A_2^T + A_2^0)^T \\ -\frac{1}{2}|a| & a_{k+1,k+1} & \frac{1}{2}|a| \\ \frac{1}{2}\lambda_M^{\frac{1}{2}}(A_2^T + A_2^0)(A_2^T + A_2^0)^T & \frac{1}{2}|a| & \lambda_M(A_1) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \|y\| \\ |x_{k+1,k+1}| \\ \|z_0\| \end{vmatrix}$$

Bu baholardan kelib chiqadiki, agar teorema 7.25 dagi 3., 4. va 5. shartlar bajarilsa, u holda (7.124) kvadratik shakl va unga mos A matritsa musbat (manfiy) aniqlangan bo‘ladi.

Misol 7.4 Quyidagi oltinchi tartibli chiziqli sistemani qaraymiz:

$$\dot{x} = Ax, \tag{7.125}$$

bu yerda $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T$,

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

A matritsa matritsa markaziga nisbatan simmetrik bo‘lgani uchun quyidagilarga ega bo‘lamiz:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad A_1^0 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_2^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_2^T + A_2^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A_2^T + A_2^0)(A_2^T + A_2^0)^T = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_M(A_1) = \lambda_M(A_1^0) = -1{,}382 < 0, \quad \lambda_m(A_1) = \lambda_m(A_1^0) = -3{,}68 < 0,$$

$$\lambda_M((A_2^T - A_2^0)(A_2^T + A_2^0)^T) = 6, \quad \lambda_M^2(A_1) = 1{,}909924 > \frac{1}{4}\lambda_M((A_2^T + A_2^0)(A_2^T + A_2^0)^T) = 1{,}5.$$

Demak, teorema 7.25 ga asosan A matritsa manfiy aniqlangan va (7.125) sistema muvozanat holati asimptotik turg‘un bo‘ladi.

§13. Dempfirlanishi va bikirligi oshkor holatda vaqtga bog'liq bo'lib, chiziqsiz bo'lgan sistema asimptotik turg'unligining yetarli shartlari

Dempfirlanishi va bikirligi oshkor holatda vaqtga bog'liq bo'lib, chiziqsiz bo'lgan sistema toyigan harakat tenglamasini quyidagi ko'rinishda qaraymiz:

$$\ddot{x} + \beta(t,x,\dot{x})\dot{x} + \alpha(t,x,\dot{x})x = 0 \qquad (7.126)$$

bu yerda α va β lar $t, x, \dot{x}$ haqiqiy o'zgaruvchilarni

$$t \geq t_0, \quad x^2 + \dot{x}^2 \leq \mu \qquad (7.127)$$

sohada aniqlangan haqiqiy funksiyalari (t_0, μ - musbat o'zgarmaslar).

α va β koeffitsiyentlar o'zgarmas bo'lib, musbat bo'lganda $x = 0$, $\dot{x} = 0$ toyimagan harakat asimptotik turg'un bo'ladi. Agar bu koeffitsiyentlar musbat holatda qolib, o'zgaruvchi bo'lsa, u holda ularning o'zgarish rejimida harakat turg'unmas bo'lib qoladi. α va β koeffitsiyentlarning o'zgarish qonuni ma'lum bo'lsa, turg'unlik masalasini qarab chiqish mumkin. Ba'zi amaliy tatbiqlarda α va β koeffitsiyentlarni xarakterlari ma'lum bo'lmay, ularni o'zgarish chegaralarigina ma'lum bo'ladi, ya'ni, (7.127) sohada bu funksiyalar quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

$$a_1 \leq \alpha(t,x,\dot{x}) \leq a_2, \quad b_1 \leq \beta(t,x,\dot{x}) \leq b_2, \qquad (7.128)$$

bu yerda a_1, a_2, b_1, b_2 - berilgan musbat sonlar

Bu ko'rsatilgan chegaralarda α va β ixtiyoriy qonun bo'yicha o'zgarganda, $x = 0$, $\dot{x} = 0$ toyimagan harakat asimptotik turg'un bo'ladigan yetarli shartlarni hosil qilish katta qiziqish uyg'otadi.

Qo'yilgan masalani qarab chiqish uchun

$$x = x_1, \quad \dot{x} = x_2$$

o'zgaruvchi almashtirib, (7.126) tenglamani quyidagi sistema bilan almashtiramiz:

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -\alpha(t,x,\dot{x})x_1 - \beta(t,x,\dot{x})x_2$$

yoki matritsa ko'rinishida

$$\dot{y} = A(t,y)y, \tag{7.129}$$

bu yerda $y = (x_1, x_2)^T$, $A(t,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha(t,y) & -\beta(t,y) \end{pmatrix}$

Qat'iylik tartibi mos ravishda ε_1 va ε_2 bo'lgan $\varphi_1(t,y)$ va $\varphi_2(t,y)$ qat'iy musbat funksiyalarni quyidagicha kiritamiz

$$\varphi_1(t,y) = m_1 - \alpha(t,y) \quad \varphi_2(t,y) = m_2 - \beta(t,y) \tag{7.130}$$

Tekshirib ko'rish mumkinki (7.128) tengsizlik bajarilganda $\varphi_1(t,y)$ va $\varphi_2(t,y)$ funksiyalar uchun quyidagi baholar o'rinli:

$$m_1 - a_2 \le \varphi_1(t,y) \le m_1 - a_1, \quad m_2 - b_2 \le \varphi_2(t,y) \le m_2 - b_1 \tag{7.131}$$

bundan, $m_1 = a_2 + \varepsilon_1$, $m_2 = b_2 + \varepsilon_2$ ekanligi kelib chiqadi. Shuning uchun (7.131) ni quyidagicha yozish mumkin.

$$\varepsilon_1 \le \varphi_1(t,y) \le a_2 - a_1 + \varepsilon_1, \quad \varepsilon_2 \le \varphi_2(t,y) \le b_2 - b_1 + \varepsilon_1$$

(7.130) yordamida (7.129) ni quyidagi ko'rinishga keltiramiz

$$\dot{y} = A_0 y + \varphi_1(t,y)A_1 y + \varphi_2(t,y)A_2 y, \tag{7.132}$$

bu yerda $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -m_1 & -m_2 \end{pmatrix}$, $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(7.132) sistema uchun Lyapunov funksiyasini quyidagi kvadratik shakl ko'rinishida quramiz:

$$V(y) = y^T P y \tag{7.133}$$

bu yerda $P = \begin{pmatrix} \dfrac{m_1(m_1+1)}{m_2} & 1 \\ 1 & \dfrac{m_1+1}{m_2} \end{pmatrix}$

bu kvadratik shakl musbat aniqlangan bo'ladi.

(7.133) funksiyadan (7.132) sistema yordamida olingan hosila uchun quyidagini hosil qilamiz:

$$\dot{V}(y) \le (\lambda_M(G_0) + (a_2 - a_1 + \varepsilon_1)\lambda_M(G_1) + (b_2 - b_1 + \varepsilon_2)\lambda_M(G_2))\|y\|^T,$$

bu yerda $G_0 = \begin{pmatrix} -2m_1 & 0 \\ 0 & -2m_1 \end{pmatrix}$, $G_1 = \begin{pmatrix} 2 & \dfrac{m_1+1}{m_2} \\ \dfrac{m_1+1}{m_2} & 0 \end{pmatrix}$,

$$G_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2\dfrac{m_1+1}{m_2} \end{pmatrix}$$

va

$$\dot{V}(y) \le (\lambda_M(G_0) + (a_2 - a_1 + \varepsilon_1)\lambda_M(G_1) + (b_2 - b_1 + \varepsilon_2)\lambda_M(G_2)\ \|y\|^T, \tag{7.134}$$

bu yerda

$$\lambda_M(G_0) = -2m_1, \quad \lambda_M(G_1) = 1 + \sqrt{1 + \left(\frac{m_1+1}{m_2}\right)^2}, \ \lambda_M(G_2) = \frac{m_1+1}{m_2} + \sqrt{1+\left(\frac{m_1+1}{m_2}\right)^2}.$$

(7.134) bahodan ko‘rinadiki, $\dot{V}(y)$ funksiya quyidagi shart bajarilganda manfiy aniqlangan bo‘ladi.

$$\lambda_M(G_0) + (a_2 - a_1 + \varepsilon_1)\lambda_M(G_1) + (b_2 - b_1 + \varepsilon_2)\lambda_M(G_2) < 0, \tag{7.135}$$

Bundan kelib chiqadiki, Lyapunovning asimptotik turg‘unlik teoremasiga asosan (7.132) yoki (7.126) sistema toyimagan harakati (7.135) shart bajarilganda asimptotik turg‘un bo‘ladi.

$\dfrac{m_1+1}{m_2} = k$ bo‘lsin, u holda (7.135) quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$-2m_1 + (m_1 - a_1)(1 + \sqrt{1+k^2}) + (m_2 - b_1)(k - \sqrt{1+k^2}) < 0,$$

yoki

$$(m_1 + m_2 - a_1 - b_1)\sqrt{1+k^2} < a_1 + b_1 k - 1.$$

Bu tengsizlik $a_1 + b_1 k - 1 > 0$ shartda ma’noga ega bo‘ladi.

Bu tengsizlikdan $\varepsilon_1 \to 0, \ \varepsilon_2 \to 0$ va $k = \dfrac{a_2 + 1 + \varepsilon_1}{b_2 + \varepsilon_2}$ ni e’tiborga olib,

$$k = \frac{m_1+1}{m_2} = \frac{a_2+1}{b_2}, \quad \sqrt{1+k^2} = \sqrt{1 + \frac{(b_2+1)^2}{b_2^2}} = \frac{\sqrt{b_2^2 + (a_2+1)^2}}{b_2}$$

$$a_2 - a_1 + b_2 - b_1 < \frac{1}{\sqrt{b_2^2 + (a_2+1)^2}}\left[(a_2+1)b_1 + (a_1 - 1)b_2\right] \tag{7.136}$$

$$(a_2+1)b_1 + (a_1-1)b_2 > 0 \tag{7.137}$$

larni hosil qilamiz. Shunday qilib, $\alpha(t,x,\dot{x})$ va $\beta(t,x,\dot{x})$ funksiyalarning a_1, a_2, b_1, b_2 chegaralari (7.136) va (7.137) shartlarni qanoatlantirsa, u holda toyimagan harakat $x=0$, $\dot{x}=0$ asimptotik turg‘un bo‘ladi.

Mashqlar:

Quyidagi kvadratik shakllarni kanonik ko‘rinishga keltiring:

a) $2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$

b) $x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$

c) $3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$

d) $2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$

e) $x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3$

f) $5x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3$

g) $3x_1^2 + 6x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$

h) $7x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 - 8x_1x_2 + 8x_2x_3$

i) $2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 - 4x_3x_4$

j) $2x_1x_2 + 2x_3x_4$

k) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_3x_4$

l) $2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$

m) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 4x_1x_4 - 4x_2x_3 + 6x_2x_4 - 2x_3x_4$

n) $8x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 8x_2x_4$

Agar A-kososimmetrik matritsa bo‘lsa, u holda $B=(E-A)(E+A)^{-1}$ matritsani ortogonal ekanligini isbotlang.

VIII BOB

YIRIK MASSHTABLI SISTEMALAR TURG'UNLIGINING UMUMIY MASALASI

Ko'plab jarayonlar yirik masshtabli sistemalar (Y.M.S.) orqali modellashtiriladi. Bunday sistemalarning xarakterli belgilari quyidagilardir:

1. ko'p o'lchovlilik;
2. sistema strukturasining ko'p karraliligi (to'rlar, daraxtlar, iyerarxik strukturalar va boshqalar);
3. sistema elementlarining ko'p bog'lamliligi (qism sistemalar orasidagi bitta darajadagi va har xil darajali iyerarxiyalar orasidagi bog'lanishlar);
4. elementlar tabiatining ko'pxilliligi (mashinalar, avtomatlar, robotlar, odam-operatorlar);
5. sistema holati va tarkibi o'zgarishining ko'p karraliligi (sistema strukturasi, tarkibi va bog'lanishlarning o'zgaruvchanligi);
6. sistemaning ko'p kriteriyliligi (qism sistemalar uchun har xil lokal kriteriylar va to'la sistema uchun global kriteriylar, ularning qarama-qarshililigi).
7. sistema yoki uning elementlari tabiatiga xos bo'lgan ba'zi bir xususiy belgilar.

Bu belgilar sistema dinamik xossalarini (turg'unlik, boshqaruvchanlik, kuzatuvchanlik, optimallik) o'rganishda ma'lum qiyinchiliklarga olib keladi.

§1. Masalaning qo'yilishi

Ma'lumki, Lyapunov funksiyasini qurishning umumiy algoritmi mavjud bo'lmaganligi uchun yuqoridagi xarakterli belgilarga ega bo'lgan sistemalar turg'unligini tahlili qilishda hosil bo'ladigan qiyinchiliklar Lyapunovning to'g'ri usulini samarali qo'llash imkonini bermaydi.

Shuning uchun qaralayotgan sistemani soddalashtirish yoki boshqa sistema bilan almashtirish bilan bog'liq bo'lgan bir qancha yo'nalishlar paydo bo'lib, bularda turg'unlik (turg'unmaslik) masalasi bevosita berilgan sistemani tekshirish yo'li bilan emas, balki bu oraliq sistemalarni tekshirish yo'li bilan hal etiladi.

Yirik masshtabli sistemalar turg'unligining umumiy masalasi quyidagicha ikki xil ko'rinishda qo'yiladi.

A muammo: Y.M.S. o'zaro bog'liq bo'lgan qism sistemalarga dekompozitsiya qilingan (ajratilgan) bo'lsin. Shunday shartlarni aniqlashimiz kerakki, bularda sistemaning Lyapunov bo'yicha turg'unligi o'zaro bog'liq bo'lmagan qism sistemalarning turg'unligidan va ular orasidagi bog'lanishlarning xossalaridan kelib chiqsin. Boshqacha aytganda, masalaning bunday qo'yilishida, avval Y.M.S. ni tashkil qiluvchi har bir erkin qism sistema uchun Lyapunov funksiyasi tuzilib, ularni turg'unligi (turg'unmasligi) ning yetarli shartlari hosil qilinadi. So'ngra bu qism sistemalar orasidagi bog'lanishlarning xossalaridan va erkin qism sistemalar turg'unligining yetarli shartlaridan foydalanib, berilgan sistema turg'unligining yetarli shartlari hosil qilinadi.

B muammo: Y.M.S. o'zaro bog'liq bo'lgan qism sistemalarga dekompozitsiya qilingan (ajratilgan) bo'lsin. Sistema tartibi pasayishini ta'minlaydigan shunday shartlarni aniqlashimiz kerakki, unda qaralayotgan sistemaning turg'unligi o'zaro bog'liq bo'lgan qism sistemalar xossalaridan kelib chiqib, bunda erkin qism sistemalar turg'unligi haqidagi ma'lumotlardan foydalanilmaydi. Boshqacha aytganda, masalaning bunday qo'yilishida, har bir qism sistema uchun Lyapunov funksiyasi tanlanib, ular yordamida qaralayotgan sistema uchun Lyapunov funksiyasi tuziladi va qaralayotgan sistema turg'unligining yetarli shartlari hosil qilinadi.

Bu ko'rsatilgan muammolar Y.M.S. turg'unligini tekshirish bilan shug'ullanuvchi mutaxassislar uchun bosh yo'nalishlarni aniqlab berdi. Ularni hal etish yo'lida bir qancha matematik usullar yaratildi yoki rivojlantirildi. Jumladan, Lyapunovning vektor-funksiyasi usuli, vektorli normalar usuli, minimaksli usul, Lyapunov matritsa funksiyasi usuli va boshqalar.

§2. Yirik masshtabli sistemalarning dekompozitsiyasi

Faraz qilaylik, (S). Y.M.S. holati quyidagi differensial tenglama bilan ifodalansin.

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x), \qquad (8.1)$$

bu yerda $t\in T=[t_0,\ \infty)\subset R,\ x\in R^n, f\in F$ bo'lib, F oila quyidagicha aniqlanadi:

$$F=\{f^1,f^2,\dots,f^N\}, f^k{:}TxR^n\to \mathrm{R}^n, \qquad (8.2)$$

N – haqiqiy son.

Agar (S). Y.M.S. s ta qism sistemalardan tashkil topgan bo'lsa, u holda (S). Y.M.S.ni (S_i) o'zaro bog'liq bo'lgan qism sistemalardan tashkil topgan deb qarash mumkin bo'lib, (S_i) o'zaro bog'liq bo'lgan qism sistemalar quyidagi tenglamalar bilan ifodalanadi:

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(t,x),\ \forall i=1,2,\dots,s \qquad (8.3)$$

bu yerda x va f vektorlar quyidagicha aniqlanadi:

$$x=(x_1^T,x_2^T,\dots,x_s^T)^T, \qquad f=(f_1^T,f_2^T,\dots,f_s^T)^T,$$

shuningdek,

$$f_i\in F_i,\ F_i=\left(f_i^1,\ f_i^2,\dots,\ f_i^N\right),\ f_i^k{:}\,\mathrm{Tx}R^n\to R^{n_i},$$

$$\forall\, k=1,2,\dots,N,\ \ n_1+n_2+\cdots n_s=n,\ \ i=1,2,\dots,s.$$

f_i funksiyalar barcha $t\in R$ da, faqat va faqat x=0 dagina

$f(t,x)$=0

shartni qanoatlantiradi.

$$x^i=\left(O^T,O^T,\dots,x_i^T,O^T,\dots,O^T\right)^T, \qquad i=1,2,\dots,s$$

belgilash kiritamiz,

g_i: Tx $R^{n_i}\to R^{n_i}$,

funksiyani

$$g_i(t,x_i)=f_i\left(t,x^i\right)$$

tenglik bilan aniqlaymiz.

U holda $(\hat{S}_i)$ i- erkin qism sistema

$$\frac{dx_i}{dt}=g_i(t,x_i), \qquad (8.4)$$

bu yerda $x_i\in R^{n_i}$,

$$f_i^*(t,x)=f_i(t,x)-g_i(t,x_i), \qquad \forall i=1,2,\dots,s \qquad (8.5)$$

ifoda yordamida aniqlangan f_i^* funksiya (S) sistemani o'zining $(S_i)(S_i)$ i- qism sistemasiga ta'sirini ifodalaydi.

(8.4) va (8.5) ga asosan (8.3) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{dx_i}{dt} = g_i(t,x_i) + f_i^*(t,x),\ \forall i = 1,2,...,s \tag{8.6}$$

Agar

$$g = (g_1^T, g_2^T, ..., g_s^T)^T, \qquad f^* = \left(f_1^{*T}, f_2^{*T}, ..., f_s^{*T}\right)^T,$$

deb olsak, (8.6) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{dx}{dt} = g\ (t,x_i) + f_i^*(t,x), \tag{8.7}$$

(S) Y.M.S. ni (8.6) ko'rinishda dekompozitsiya qilish nazariy bo'lib, amaliy tatbiqlarda bu bir muncha noqulaydir. Masalan (8.5) tenglik yordamida f_i^* funksiyalarni har doim ham aniqlash qulay bo'lavermaydi. Shuning uchun (S) Y.M.S. ni dekompozitsiya qilishni qulaylashtirish maqsadida har bir s ta (S_i) qism sistemalardan iborat bo'lgan Y.M.S. bilan sxs tartibli matritsa o'rtasida quyidagicha o'zaro bir qiymatli mosli o'rnatamiz:

1. (S) Y.M.S.ning $(\bar{S}_i)$ erkin qism sistemalarini matritsaning bosh diagonaliga mos qo'yamiz;

2. $(\bar{S}_i)$ qism sistemalarni $(\bar{S}_j)$ qism sistemaga ta'sirini ifodalovchi funksiyani i-satr va j-ustun kesishgan joyga mos qo'yamiz. Natijada matritsaning bosh diagonalida erkin qism sistemalar bo'lib, bosh diagonaldan tashqarida bu erkin qism sistemalar orasidagi to'g'ri va teskari bog'lanishlar bo'ladi.

Bunday moslik o'rnatilgandan keyin (8.1) sistema quyidagi ko'rishladan biriga keladi:

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \tag{8.8}$$

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \tag{8.9}$$

$$\frac{dx}{dt} = A(x), \tag{8.10}$$

$$\frac{dx}{dt} = A(t,x), \tag{8.11}$$

bu yerda A, A(t),A(x), A(t,x)-bosh diagonalga nisbatan simmetrik bo'lgan sxs tartibli kvadrat matritsalar.

(8.8), (8.9), (8.10), (8.11) sistemalarni dekompozitsiya qilish masalasi mos ravishda A, A(t),A(x), A(t,x)-matritsalarni blok matritsalarga ajratish masalasi bilan teng kuchli bo'lgani uchun (S) Y.M.S.ni dekompozitsiya qilish masalasi matritsani blok matritsalarga ajratish masalasiga keladi.

Misol tariqasida (8.8) sistemani ba'zi xususiy hollarda dekompozitsiya qilish usullarini qarab chiqamiz. Faraz qilaylik, A matritsa markazga nisbatan simmetrik bo'lgan sxs o'lchovli kvadrat matritsa bo'lsin. U holda (8.8) sistemani quyidagicha usullarda dekompozitsiya qilish mumkin:

1. Vertikal va gorizontal simmetriya o'qlarga nisbatan dekompozitsiya qilish. Bu holda (8.8) sistema n=2k da,

$$\begin{aligned} \dot{y} &= A_1 y + B_1 z, \\ \dot{z} &= B_1^0 y + A_1^0 z, \end{aligned} \tag{8.12}$$

ko'rinishga , n=2k+1 da esa

$$\begin{aligned} \dot{y} &= A_1 y + a_2 x_{k+1} + B_1 z, \\ \dot{x}_{k+1} &= a_1^T y + a_{k+1,k+1} x_{k+1} + (a_1^T)^0 z \\ \dot{z} &= B_1^0 y + a_2^0 x_{k+1} + A_1^0 z, \end{aligned} \tag{8.13}$$

ko'rinishga keladi. Bu yerda erkin qism sistemalar

$$\dot{y} = A_1 y, \tag{8.14}$$

$$\dot{z} = A_1^0 z, \tag{8.15}$$

$$\dot{x}_{k+1} = a_{k+1,k+1} x_{k+1}. \tag{8.16}$$

ko'rinishlarda bo'lib, A_1, B_1 - k-tartibli kvadrat matritsalar, A_1^0, B_1^0 -mos ravishda ularni markazga nisbatan transponirlangani, vektorlar esa

$$a_1 = (a_{k+1,1}, a_{k+1,2}, \ldots, a_{k+1,k})^T,\ a_2 = (a_{k+1,k+2}, a_{k+1,k+3}, \ldots, a_{k+1,n})^T,$$

$$y = (x_1, x_2, \ldots, x_k)^T,\ z = (x_{k+2}, x_{k+3}, \ldots, x_n)^T,\ x = (y^T, x_{k+1}, z^T)^T.$$

ko'rinishda aniqlangan.

(8.8) sistema muvozanat holati turg'unligining yetarli shartlarini hosil qilish uchun (8.12) sistema va (8.14), (8.15) qism sistemalarga mos Lyapunov matritsa funksiyasi quyidagi ko'rinishda tanlanadi:

$$U_1(y,z)=\begin{pmatrix} v_{11}(y) & v_{12}(y,z) \\ v_{21}(y,z) & v_{22}(z) \end{pmatrix},\ v_{12}=v_{21} \qquad (8.17)$$

bu yerda $v_{11}(y)=y^T P y, v_{22}(z)=z^T P_1^0 z, v_{12}(y,z)=v_{21}(y,z)=y^T P_2 z$, P_1, P_1^0 - bosh diagonalga nisbatan simmetrik bo'lgan musbat aniqlangan matritsalar, P_2 - o'zgarmas matritsa bo'lib, bularning barchasi k-tartibli matritsalardir.

(8.13)sistema va (8.14), (8.15), (8.16) qism sistemalarga mos Lyapunov matritsa funksiyasi esa quyidagicha tanlanadi.

$$U_2(y,x_{k+1}z)=(v_j^{'}),\quad \text{i,j=1,2,3},\ v_j^{'}=v_j^{'} \qquad (8.18)$$

bu yerda

$v_{11}^{'}=v_{11}^{'}(y),\ v_{12}^{'}=\alpha_{12}x_{k+1}y,\ v_{13}^{'}=v_{12}^{'}(y,z),\ v_{21}^{'}=v_{12}^{'},\ v_{22}^{'}=\alpha_{22}x_{k+1}^2, v_{23}^{'}=\alpha_{23}x_{k+1}z,$

$v_{33}^{'}=v_{22}^{'}(z),\ v_{31}^{'}=v_{13}^{'}, v_{32}^{'}=v_{23}^{'}, P_1, P_1^0, P_2$-matritsalar (8.17) dagidek aniqlanadi, α_{22}>0, α_{12}, α_{32}- lar haqiqiy sonlar

2. O'zaro muvozanatlashuvchi qism sistemalarga nisbatan dekompozitsiya qilish. Bu holda (8.8) sistema n=2k da

$$\dot{y}_i = A_i y_i + \sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{k} A_j y_j,\quad i=1,2,...,k=\frac{n}{2} \qquad (8.19)$$

ko'rinishga, n=2k+1 da esa

$$\begin{aligned} \dot{y}_i &= A_i y_i + \sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{k} A_j y_j + a_i x_{k+1},\quad i=1,2,...,k=\frac{n-1}{2}, \\ \dot{x}_{k+1} &= a_{k+1,k+1}x_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} a_i y_i, \end{aligned} \qquad (8.20)$$

ko'rinishga keladi. Bu yerda

$$A_{ii}=\begin{pmatrix} a_{ii} & a_{i,n+1-i} \\ a_{i,n+1-i} & a_{ii} \end{pmatrix},\qquad A_{ij}=\begin{pmatrix} a_{ij} & a_{i,n+1-j} \\ a_{i,n+1-j} & a_{ij} \end{pmatrix},$$

$$a_i = (a_{i,k+1}, a_{i,k+1})^T, \qquad a_j = (a_{k+1,j}, a_{k+1,j})^T,$$

$$y_i = (x_i, x_{n+1-i})^T, \qquad y = (y_1^T, y_2^T, ..., y_k^T)^T, \ i, j = 1,2,...,k, \ i \neq j,$$

bo'lib, A_{ii} va A_{ij} lar matritsa markaziga nisbatan simmetrik bo'lgan matritsalardir. Bu holda i- erkin qism sistemalar

$$\dot{y}_i = A_{ii} y_i \tag{8.21}$$

ko'rinishda bo'lib, ularning muvozanat holati turg'unligini yetarli shartlari

$$a_{ii} < 0, \ |a_{ii}| > |a_{i,n+1-i}|, \ i = 1,2,...,k \tag{8.22}$$

shartlardan,

$$\dot{x}_{k+1} = a_{k+1,k+1} x_{k+1} \tag{8.23}$$

qism sistema uchun muvozanat holat turg'unligining yetarli sharti

$$a_{k+1,k+1} < 0 \ . \tag{8.24}$$

dan iborat bo'ladi. (8.19) va (8.20) sistemalar hamda (8.21), (8.23) qism sistemalar uchun yuqoridagi kabi Lyapunov matritsa funksiyalarini tuzish mumkin.

§3. Lyapunov matritsa funksiyasi usuli

Lyapunovning matritsa funksiyasi usuli Y.M.S. lar turg'unligi masalasi bilan shug'ullanuvchi mutaxassislar tomonidan yaratilgan bo'lib, uning mohiyati quyidagicha: Avval (8.4) qism sistemalarning har biri uchun

$v_{ii}(t, x_i)$, i=1,2,…,s Lyapunov funksiyalari tuzilib, (S_i) va (S_j) qism sistemalar orasidagi ta'sirlarni ifodalovchi bog'lanishlarga mos

$$v_{ij}(t, x_i, x_j) = v_{ji}(t, x_i, x_j), \quad \text{i,j=1,2,…,s}$$

funksiyalar shunday tanlanadiki, unda

$$U(t,x) = \begin{pmatrix} v_{11}(t,x_1) & v_{12}(t,x_1,x_2) & ... & v_{1s}(t,x_1,x_s) \\ v_{12}(t,x_1,x_2) & v_{22}(t,x_2) & ... & v_{2s}(t,x_2,x_s) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_{1s}(t,x_1,s_2) & v_{1s}(t,x_2,x_s) & ... & v_{ss}(t,x_s) \end{pmatrix} \tag{8.25}$$

matritsa funksiya musbat aniqlangan bo‘lsin. So‘ngra (8.6) sistema uchun Lyapunov funksiyasi (8.25) matritsa funksiya va $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s)^T$ o‘zgarmas vektor yordamida quyidagicha tuziladi:

$$V(t,x) = \eta^T U(t,x)\eta \tag{8.26}$$

(8.25) matritsa funksiyaning musbat aniqlanganlik shartlaridan foydalanib, (8.26) skalyar funksiyaning musbat aniqlanganlik shartini quyidagi ko‘rinishda aniqlaymiz:

$$V(t,x) \geq \psi^T(x) H^T B H \psi(x), \tag{8.27}$$

bu yerda

$$\psi^T(x) = (|\psi_1(x)|, |\psi_2(x)|, \ldots, |\psi_s(x)|),$$

$$H = H^T = diag(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s),$$

B- o‘zgarmas matritsa bo‘lib, uning elementlari (8.25) matritsa funksiya elementlarini quyidan baholashda hosil bo‘ladigan o‘zgarmaslarning algebraik yig‘indisidan ibarat bo‘ladi. (8.27) tengsizlikdan ko‘rinadiki, agar V o‘zgarmas matritsa musbat aniqlangan bo‘lsa, (8.26) funksiya ham musbat aniqlangan bo‘ladi.

(8.26) funksiyadan (8.6) sistema yordamida olingan to‘la hosilani yuqoridan baholab, quyidagi tengsizlikka kelamiz.

$$\dot{V}(t,x) \leq \psi^T(x) G \psi(x), \tag{8.28}$$

bu yerda G o‘zgarmas matritsa bo‘lib, uning elementlari (8.25) matritsa funksiya elemenlaridan (8.4) qism sistemalar va (8.6) sistema yordamida olingan hosilalarni yuqoridan baholash natijasida hosil bo‘ladigan o‘zgarmaslar va η_i, i=1,2,...,s lar ishtirokida tuzilgan ifodalardan iborat bo‘ladi. (8.28) dan ko‘rinadiki, $\dot{V}(t,x)$ manfiy (yarim manfiy) aniqlangan bo‘lishi uchun G- o‘zgarmas matritsani manfiy (yarim manfiy) aniqlangan bo‘lishi yetarlidir.

(8.27) va (8.28) tengsizliklardan foydalanib, (8.1) yoki (8.6) sistema muvozanat holati asimptotik turg‘unligi (turg‘unligi) ning yetarli shartlarini quyidagicha ifodalaymiz.

Teorema 8.1. (8.1) tenglama bilan ifodalangan (S) Y.M.S. (8.6) ko‘rinishda dekompozitsiya qilingan bo‘lib, uning uchun (8.25) matritsa-funksiya tuzilgan bo‘lsin.

Agar V matritsa musbat aniqlangan bo‘lib, G matritsa yarim manfiy (manfiy) aniqlangan bo‘lsa, (8.1) sistema muvozanat holati x=0 turg‘un (asimptotik turg‘un) bo‘ladi.

Eslatma: A muammoni hal etishda (8.25) matritsa funksiya bosh diagonalidagi $v_{ii}(t,x_i)$, $i = 1,2,\dots,s$ elementlardan (8.4) qism sistemalar bo'yicha olingan hosilalar alohida baholanishi shart, chunki bu baho yordamida $(\hat{S}_i)$, i=1,2,…,s erkin qism sistemalarning turg'unligi masalasi hal etiladi. B muammoni hal etishda esa bunday baholash shart emas.

Adabiyotlar

1. Белман Р. В. Ведение теории матриц. – М. , Наука, 1976.

2. Гельфонт И. М. Чизиқли алгебрадан лекциялар. -Т. Олий ва ўрта мактаб. 1964

3. Гантмахер Р. Теории матриц. – М.: Наука, 1967. – 576 с.

4. Груйич Л.Т., Мартинюк А.А., Риббенс – Павелла М. Устойчивость крупномасштабных систем при структурных и сингулярных возмущениях. – Киев.: Наука. думка, 1984. – 307 с.

5. Демидович Б.П. Лекции по математическое теории устойчивости. –М.: Наука, 1967. – 472 с.

6. Iskandarov D., Mullajonova J. Kvadratik shakllarning ishoralari. Respublika ilmiy-amaliy anjumani materiallari. – Andijon 2011. 67-68 betlar.

7. Kurosh A.G. Oliy algebra kursi. T. «O'qituvchi» 1976

8. Кострикин А.И., Сборнык задач по алгебре. М., «Наука», 1986

9. Ланкастер П. Теория матриц. – М.: Наука, 1982. –277с.

10.Миладжанов В. Г., Муллажонов Р.В. Об одном методе анализа устойчивости линейных крупномасштабных систем. // Узбекский журнал Проблемы механики. – Ташкент, 2009. – № 2-3. –С. 28-30.

11.Miladjonov V.G., Mullajonov R.I., Abdug'afforova Sh.N., Transponirlangan va simmetrik matritsalar. –Andijon, ilmiy xabarnoma 2009-№1

12.Муллажонов Р.В. Обобщенное транспонирование матриц и структуры линейных крупномасштабных систем // Украинский журнал «Доп.НАН Украини». –Киев, 2009. -№11.С. 27 –35.

13.Муллажонов Р.В. Анализ устойчивости линейных крупномасштабных систем. // Проблема механики. – Ташкент, 2010. –№2.–С. 4– 7.

14.Xojiyev J.X., Faynleyb A.S. Algebra va sonlar nazariyasi kursi. T. "O'zbekiston" 2001.

MUNDARIJA

O'quv-uslubiy nashr

V.G. Miladjonov, R.V. Mullajonov, K.X. Turg'unova,
Sh.N. Abdugapporova, J.V. Mullajonova.

MATRITSALAR NAZARIYASINING TANLANGAN BOBLARI

(O'quv qo'llanma)

Muharrir
Hasan TESHABOYEV

Badiiy muharrir
Uyg'un SOLIHOV

Tehnik muharrir
Surayyo AHMEDOVA

Musahhih
Muhabbat MENGNOROVA

Kompyuterda sahifalovchi
Nozima TUYG'UNOVA

Bosishga 30.06.2014-y.da ruxsat etildi.
Bichimi 84x108 1\32.
Bosma tobog'i 7,375. Shartli bosma tobog'i 12,39.
Garnitura «Time New Roman». Ofset qog'ozi.
Adadi 500 nusxa. Buyurtma № 81.
Bahosi kelishilgan narxda.

«Yangi asr avlodi» NMMda tayyorlandi.
Litsenziya raqami: AI № 198, 2011-yil 28.08 da berilgan.
100113. Toshkent, Chilonzor-8, Qatortol ko'chasi, 60.

Murojaat uchun telefonlar:
Nashr bo'limi – 278-36-89;
Marketing bo'limi – 128-78-43. faks – 273-00-14;
e-mail: yangiasravlodi@mail.ru