O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

ABU RAYHON BERUNIY NOMIDAGI TOSHKENT DAVLAT TEXNIKA UNIVERSITETI

MATEMATIKA

fanining
“Tekislikda qutb koordinatalar sistemasi”
qismidan

USLUBIY KO‘RSATMALAR

Toshkent 2016

Tekislikda qutb koordinatalar sistemasi.Oliy texnika o‘quv yurtlari talabalari uchun uslubiy ko‘rsatmalar. Axmedov A.B., Aralova M.M. – Toshkent: ToshDTU, 2016. 40 b.

Uslubiy ko‘rsatmada qutb koordinatalar sistemasi elementlari, tarixiy ma’lumotlar, egri chiziqlarni qurish va umumlashgan qutb koordinatalar sistemasi haqida ma’lumotlar keltirilgan.

Uslubiy ko‘rsatma birinchi bosqichda ta’lim olayotgan talabalarga mo‘ljallangan. Undan, shuningdek, matematika o‘qituvchilari amaliy mashg‘ulotlarda matematika usullarini namoyish etishda, talabalarning o‘quv - tadqiqot ishlarida hamda ilmiy to‘garaklarda foydalanishlari mumkin.

Toshkent davlat texnika universiteti ilmiy–uslubiy kengashining qaroriga muvofiq chop etildi.

Taqrizchilar:

Xudoynazarov X.- ToshDTU professori, f- m. f.d.,

Shodimetov H.M. – TTYMI professori, f - m. f.d.

Kirish

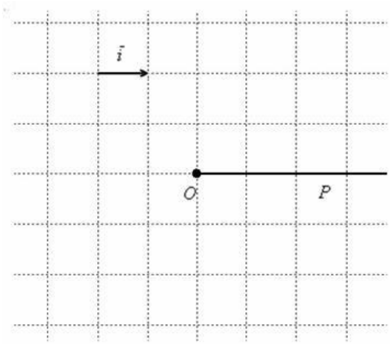
Burchak va radius tushunchalari miloddan oldingi birinchi yillarda ma’lum edi.Yunon astronomi Gipparx (miloddan oldingi 190-120yillarda) turli burchaklar uchun vatarlar uzunliklari jadvalini yaratgan. Samoviy jismlarning o‘rnini aniqlash uchun qutb koordinatalaridan foydalanganligiga dalillar mavjud. Arximed o‘zining “Spirallar” deb ataluvchi asarida Arximed spirali deb ataluvchi burchakdan bog‘liq bo‘lgan radius funksiyani ifodalaydi.

Lekin yunon tadqiqotchilarining ishlarida qutb koordinatalar sistemasining yaxlit ta’rifi rivojlanadi. IX-asrda fors matematigi Xabbash al-Xasib (al-Marvazi) qibla-Makkaga yo‘nalishini aniqlash uchun qutb koordinatalarini boshqa, markazi sferaning biror nuqtasida bo‘lgan koordinatalar sistemasiga o‘tkazish uchun xarita proyeksiyasi va sferik trigonometriya usullarini qo‘lladi. Xorazmlik astronom Abu Rayhon Beruniy (973-1048) qutb koordinatalar sistemasi ta’rifini anglatuvchi g‘oyani olg‘a surdi. A.R. Beruniy taxminan 1025 yilda birinchi bo‘lib, samoviy sferada qutb ekviazimutal, tengoraliq proyeksiyalarni tasvirladi. Qutb koordinatalar sistemasini rasman qabul qilish haqida turli farazlar mavjud. Qutb koordinatalarining kelib chiqishi va to‘liq o‘rganish tarixi Garvard professori Djulian Louvel Kulidjning “Qutb koordinatalarining kelib chiqishi” asarida keltirilgan. Greguar de Sen Venson va Bonaventura Kavalyerilar XVII asr o‘rtalarida shunga o‘xshash tushunchalarga bir-biriga bog‘liq bo‘lmagan holda keldilar. Sen Venson qutb sistemalarini 1625 yilda shaxsiy yozuvlarida tasvirlab, 1647 yilda o‘zining ishlarida chop etgan. Kavalyeri qutb koordinatalarini Arximed spirali bilan chegaralangan yuzani hisoblashda qo‘llagan. Blez Paskal keyinchalik qutb koordinatalarini parabolik yoylarning uzunliklarini hisoblash uchun qo‘llagan. Isaak Nyuton qutb koordinatalari bilan qolgan to‘qqizta koordinatalar sistemalari orasidagi bog‘lanishlarni o‘zining “Spirallar uchun yettinchi usul” deb atalgan va 1671 yilda yozilib 1936 yilda chop etilgan asarida o‘rgangan. Yakov Bernulli 1691 yilda “Acta eruditorum” jurnalida chop etgan maqolasida to‘g‘ri chiziq va nuqtaga ega bo‘lgan sistemani ishlatgan va nuqtani qutb, to‘g‘ri chiziqni qutb o‘qi deb atagan. Koordinatalar qutbdan bo‘lgan masofa va qutb o‘qidan burilgan burchak sifatida beriladi. Bernullining ishlari qutb koordinatalar sistemasida berilgan egri chiziqning egriligini topishga bag‘ishlangan.Qutb koordinatalari atamasini Gregorio Fontanaga bog‘lashadi. XVIII asrda bu atama italyan mualliflari lug‘atiga kirdi.1816 yilda Djordj Pikok tarjima qilgan Silvestr Lakruaning “Differensial va integral hisobi” risolasi orqali bu termin ingliz tiliga kirib bordi. Uch o‘lchovli fazolar uchun qutb koordinatalarini birinchi bo‘lib Aleksiy Klero tavsiya qildi va Leonard Eyler birinchi bo‘lib qutb koordinatalarning tegishli sistemalarini rivojlantirdi.

1.Tekislikda qutb koordinatalar sistemasi to‘g‘risidagi asosiy tushunchalar

Affin koordinatalar sistemasidan, yoki uning mashhur to‘g‘ri burchakli dekart koordinalar sistemasidan tashqari boshqa tekislikning koordinatalar sistemasini qurishga bo‘lgan yo‘nalishlar mavjud. Xususan, qutb koordinatalari sistemasi keng tarqalgan bo‘lib, u ko‘pgina tatbiqiy masalalarni yechishda qulayliklar tug‘diradi. Bundan tashqari, qutb koordinatalar sistemasi haqida tushunchaga ega bo‘lish katta qiyinchiliklar tug‘dirmaydi.

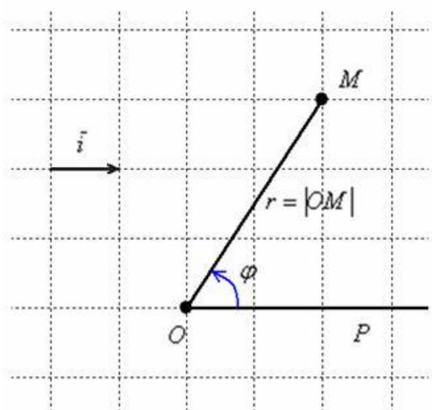
Tekislikda qutb koordinatalari sistemasini aniqlash uchun unda koordinata boshi O nuqtani va birlik koordinata vektori $\vec{\mathbf{i}}$ ni belgilab olamiz.



1-rasm

O nuqtani qutb deb, $\vec{\mathbf{i}}$ vektorni mashtab deb va $\vec{\mathbf{i}}$ vektor bilan bir yo‘nalishda *O* nuqtadan chiquvchi nurni qutb o‘qi deb ataymiz (1-rasm).

Shunday qilib, biz quyidagi grafik shablon:bir nuqta, bir vektor vabir to‘g‘ri chiziqqa ega bo‘ldik. Tajribada birlik vektori o‘rniga tekislikning bir burchagida masshtab kesmasini berish yetarli. Koordinata boshidan farqli tekislikning ixtiyoriy *M* nuqtasi o‘zining qutbdan uzoqlashgan $\mathbf{r} = |\mathbf{OM}|$ masofasi va *OP* kesmaning qutb o‘qidan yo‘naltirilgan og‘ishish burchagi φ bilan bir qiymatli aniqlanadi (2-rasm):



2-rasm

Qutb nuqta $\mathbf{r=0}$ uchun φ burchak aniqlanmagan. $\mathbf{r=|OM|}$ soni *M* nuqtaning qutb radiusi yoki birinchi qutb koordinatasi deb ataladi. Masofa manfiy bo‘la olmagani uchun ixtiyoriy nuqta *M* uchun $\mathbf{r \geq 0}$ bo‘ladi. φ soni *M* nuqta uchun qutb burchagi yoki ikkinchi qutb koordinatasi deb ataladi. Qutb burchagi $-\pi < \varphi \leq \pi$ oraliqda o‘zgaradi va φ burchakning bosh qiymati deb ataladi. Lekin ba’zan φ burchakning $\mathbf{0 \leq \varphi < 2\pi}$ oraliqda o‘zgarishiga yo‘l qo‘yilishi mumkin, ba’zi hollarda bu $\mathbf{0 \leq \varphi < 2\pi}$ oraliqni qarashga to‘g‘ridan-to‘g‘ri zaruriyat tug‘iladi. *P* nuqtaning qutb koordinatalari deb $(\mathbf{r},\varphi)$–juftlikka aytiladi. To‘g‘ri burchakli uchburchak $\mathbf{OMP}$ dan ularning konkret ma’nolarini osongina topish mumkin. To‘g‘ri burchakli uchburchak $\mathbf{OMP}$ dan o‘tkir burchak φ ning tangensi quyidagi nisbatga teng: $\mathbf{tg\varphi = \frac{MP}{OP} = \frac{3}{2}}$,

demak $\mathbf{\varphi = arctg\frac{3}{2} \approx 0{,}98\,rad \approx 56^\circ}$. Pifogor teoremasiga ko‘ra, $\mathbf{OM^2 = OP^2 + MP^2}$. Shuning uchun: $\mathbf{r = \sqrt{OP^2 + MP^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \approx 3{,}6\,birlik.}$

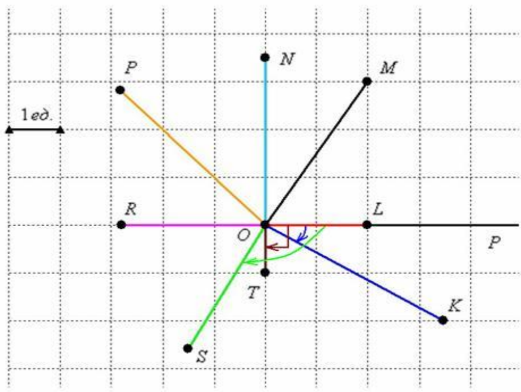
Shunday qilib, M nuqtaning qutb koordinatalari $\mathbf{M\left(\sqrt{13}, arctg\frac{3}{2}\right)}$ bo‘ladi.

Misol**:**

Quyidagi qutb koordinatalari bilan berilgan nuqtalarni tekislikda qutb koordinatalari sistemasida ifodalang (3-rasm):

$$\mathbf{K\left(4;-\frac{\pi}{6}\right),\ L(2;0),\ M\left(\sqrt{13};arctg\frac{3}{2}\right),\ N\left(\frac{7}{2};\frac{\pi}{2}\right),\ P\left(5;\frac{3\pi}{4}\right),}$$

$$\mathbf{R(2{,}8;\pi),\ S\left(3;-\frac{2\pi}{3}\right),\ T\left(1;-\frac{\pi}{2}\right);}$$



3-rasm

Manfiy yo‘nalgan burchaklarni

$$\varphi_k = -\frac{\pi}{6},\ \varphi_S = -\frac{2\pi}{3},\ \varphi_T = -\frac{\pi}{2},$$

Biz har ehtimolga qarshi yo‘nalishini strelka bilan belgilab qo‘ydik. Kerak bo‘lsa, ularni soat strelkasiga teskari yo‘nalishda to‘la bir marta aylantirib jadval qiymatlariga qulay holga keltirish mumkin:

$$\varphi_k = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6},\ \varphi_S = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{4\pi}{3},$$

$$\varphi_T = -\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{3\pi}{2}.$$

Lekin bu an’anaviy yo‘naltirilgan burchaklarning kamchiligi shundan iboratki, ular qutb o‘qidan soat strelkasiga teskari yo‘nalishda 180° dan ortiq bo’lgan burchakda joylashgan. Savol tug‘iladi, nega kamchilik va nega manfiy burchaklar kerak? Matematikada qisqa va qulay yo‘llar afzal ko‘riladi. Fizika nuqtayi nazaridan aylanish, burilish yo‘nalishi ko‘pincha juda muhim.

2.Qutb koordinatalar sistemasida nuqtalarni qurish tartibi va texnikasi

Qutb koordinatalar sistemasida nuqta va chiziqlarni qurish mashaqqatli mashg‘ulotdir.Qutb burchaklari

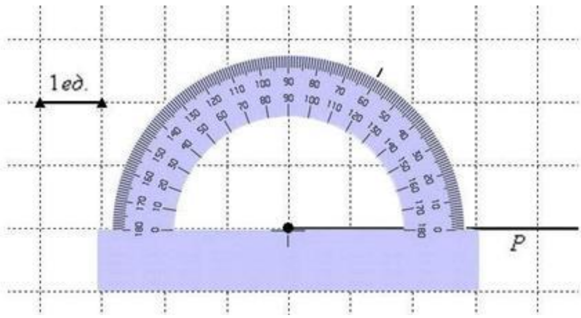
$\varphi = 0,\ \varphi = \pm\frac{\pi}{2},\ \varphi = \pi$ bo‘lgan nuqtalarni qurishda qiyinchiliklar tug‘ilmaydi. 3-rasmda bunday nuqtalar:

$L(2;0),\ N\left(\frac{7}{2};\frac{\pi}{2}\right),\ R(2{,}8;\pi),\ T\left(1;-\frac{\pi}{2}\right).$ Xuddi shunday 45° ga karrali bo‘lgan burchaklar ham katta qiyinchilik tug‘dirmaydi. Lekin qanday qilib aytaylik $S\left(3;-\frac{2\pi}{3}\right)$ nuqtani to‘g‘ri va aniq qurish mumkin?

Misol 1. Qutb koordinatalar sistemasida $S\left(3;-\frac{2\pi}{3}\right)$ nuqtani quring.

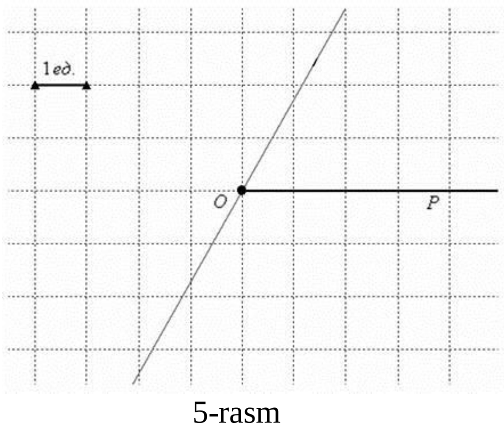
Yechish: Avvalo $-\frac{2\pi}{3}$ radian o‘lchovdagi burchakning gradus o‘lchovi aniqlab olinadi. Agar bu burchak bizga notanish bo‘lsa, jadval yoki radiandan gradusga o‘tishning umumiy formulasidan foydalanish mumkin. Bizning radian o‘lchovda berilgan $-\frac{2\pi}{3}$ burchakning gradus o‘lchovi -120° (yoki -240°) ga teng.

Qutb koordinatalar sistemasini quramiz va qo‘limizga transportir olamiz. $-\frac{2\pi}{3}+\pi=\frac{\pi}{3}$ bo‘lganligi sababli, biz qutb o‘qidan soat strelkasiga teskari yo‘nalishda 60° burilishni belgilab olamiz (4-rasm).



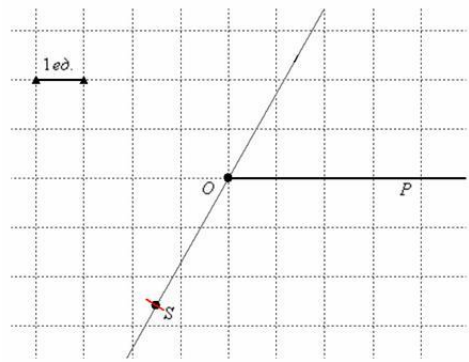
4-rasm

So‘ngra qutb nuqtasi va belgilangan yo‘nalish orqali to‘g‘ri chiziq chizamiz (5-rasm):



5-rasm

Qutb nuqtasiga nisbatan $\mathbf{60^\circ}$ yo‘nalishga qarama-qarshi yo‘nalish qutb o‘qining $\mathbf{-120^\circ}$ yo‘nalishga burilganligini aniqlaydi. Burchak aniqlandi. Endi sirkulning oyog‘ini 3 sm ga ochib, bir uchini qutb nuqtasiga qo‘yib, ikkinchi uchi bilan $\mathbf{-120^\circ}$ yo‘nalishdagi nur ustiga belgi qo‘yamiz.Izlangan $\mathbf{S\left(3;-\frac{2\pi}{3}\right)}$ nuqta topildi (6-rasm).

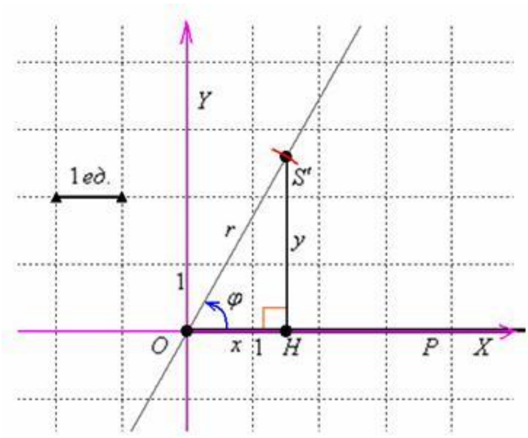


6-rasm

Biz bu nuqtani sirkulsiz lineyka yordamida ham topishimiz mumkin edi. Lekin qutb koordinatalar sistemasida turli burchak koordinatalari bo‘lgan bir xil qutb radiusli nuqtalarni belgilashda sirkul qo‘l keladi. Xususan bizning 6-rasmda sirkulni $\mathbf{180^\circ}$ ga burib qutb o‘qiga nisbatan $\mathbf{S\left(3;-\frac{2\pi}{3}\right)}$ nuqtaga simmetrik bo‘lgan $\mathbf{S'\left(3;\frac{\pi}{3}\right)}$ nuqtani topamiz.

3.To‘g‘ri burchakli va qutb koordinatalar sistemalari orasidagi bog‘lanish

To‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasining O nuqtasiga qutb nuqtasini qo‘yamiz va qutb o‘qini OX o‘qining musbat yo‘nalishi bo‘ylab yo‘naltiramiz va bu birlashgan sistemada $\mathbf{S'\left(3;\frac{\pi}{3}\right)}$ nuqtani tasvirlaymiz. $\mathbf{S'\left(3;\frac{\pi}{3}\right)}$ nuqta misolida $\mathbf{(r;\varphi)}$ qutb koordinatalari va $\mathbf{(x;y)}$ dekart koordinatalari o‘rtasidagi bog‘lanishni topamiz.



7-rasm

$\mathbf{OHS'}$ to‘g‘ri burchakli uchburchakni qaraymiz, bunda uning gipotenuzasi $\mathbf{S'}$ nuqtaning qutb radiusiga teng: $\mathbf{OS'=r}$, katetlar esa $\mathbf{S'}$ nuqtaning dekart koordinatalar sistemasidagi $\mathbf{x}$ va $\mathbf{y}$ koordinatalaridir: $\mathbf{OH=x,\ \ HS'=y.}$

O‘tkir burchak sinusi, qarama-qarshi tomondagi katetning gipotenuzaga nisbatiga teng:

$$\mathbf{\sin\varphi = \frac{HS'}{OS'} = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r\cdot \sin\varphi.}$$

O‘tkir burchak kosinusi, yopishgan katetning gipotenuzaga nisbatiga teng:

$$\mathbf{\cos\varphi = \frac{OH}{OS'} = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r\cdot \cos\varphi.}$$

Shunday qilib, biz dekart koordinatalari $\mathbf{x}$ va $\mathbf{y}$ larni qutb koordinatalari orqali ifodalovchi formulalarni topdik:

$$\begin{cases} \mathbf{y = r\cdot \sin\varphi} \\ \mathbf{x = r\cdot \cos\varphi.} \end{cases}$$

Endi biz $S'\left(3;\frac{\pi}{3}\right)$ nuqtaning to‘g‘ri burchakli koordinatalarini topamiz:

$$\begin{cases} x = r\cdot\cos\varphi = 3\cdot\cos\frac{\pi}{3} = 3\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5 \\ y = r\cdot\sin\varphi = 3\cdot\sin\frac{\pi}{3} = 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}6. \end{cases}$$

Shunday qilib, dekart koordinatalar sistemasida $S'\left(\frac{3}{2};\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

Demak, biz oldin to‘g‘ri burchakli dekart koordinatalar sistemasida $S'\left(\frac{3}{2};\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ nuqtani quramiz va qutb nuqtani $(0,0)$ - to‘g‘ri burchakli koordinatalar boshiga qo‘yib, qutb nuqtadan $S'\left(\frac{3}{2};\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ nuqtaga to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz va $S'\left(3;\frac{\pi}{3}\right)$ nuqtani hosil qilamiz.

Pifagor teoremasidan foydalanib:

$$r = \sqrt{OH^2 + HS'^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ni topamiz va bundan foydalanib:

$$\begin{cases} \cos\varphi = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\varphi = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{cases}$$

Bundan ikkinchi qutb koordinata φ arktangens orqali ifodalanadi:

$$\mathbf{tg\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}} = \frac{y}{x};}$$

$$\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{arctg\,\frac{y}{x}.}$$

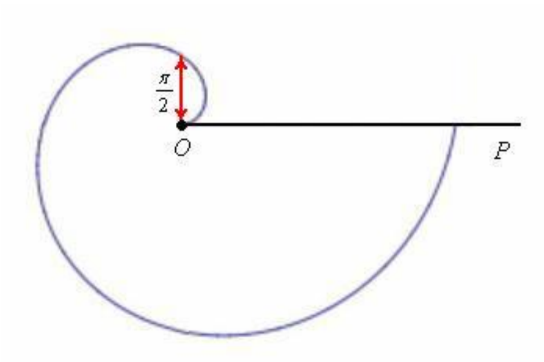
Shunday qilib, biz qutb koordinatalari $\mathbf{r}$ va $\boldsymbol{\varphi}$ larni, to‘g‘ri burchakli dekart koordinatalari $\mathbf{x}$ va $\mathbf{y}$ lar orqali ifodalovchi formulalarni topdik:

$$\begin{cases} \mathbf{r} = \sqrt{\mathbf{x}^2+\mathbf{y}^2} \\ \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{arctg\,\dfrac{y}{x}.} \end{cases}$$

4. Qutb koordinatalar sistemasida egri chiziqlar tenglamasi

Umuman, qutb koordinatalar sistemasida egri chiziqlar tenglamasi $\mathbf{r = r(\boldsymbol{\varphi})}$ qutb burchagidan olingan qutb radiusi funksiyasiko‘rinishida aniqlanadi.Bunda qutb burchagi radianlarda hisoblanib, uzluksiz $\mathbf{(0,2\boldsymbol{\pi})}$ oralig‘ida qiymatlar qabul qiladi (ba’zi hollarda cheksizlikkacha qiymatlar qabul qilishi mumkin, yoki bir qator masalalarda qulaylik uchun $\mathbf{(-\boldsymbol{\pi},\boldsymbol{\pi})}$ oraliqdan qiymatlar qabul qiladi. Har bir aniqlanish sohasiga kiruvchi $\boldsymbol{\varphi}$ burchakka yagona qutb radiusi mos keladi. Qutb funksiyani o‘ziga mos radar bilan taqqoslash mumkin, qutbdan chiquvchi yorug‘lik nuri soat strelkasiga teskari yo‘nalishda burilib ma’lum egri chiziqni chizadi. Qutb chizig‘iga yaqqol misol bu $\mathbf{r} = \boldsymbol{\varphi}$ Arximed spiralidir.

8-rasmda uning birinchi o‘rami keltirilgan, bunda qutb radiusi qutb burchagi kabi $\mathbf{(0,2\boldsymbol{\pi})}$ oralig‘ida qiymat qabul qiladi (8-rasm):



8-rasm

Qutb o‘qini $\mathbf{r = \varphi = 2\pi}$ nuqtada kesib o‘tib spiralni davom ettirsak, spiral chizig‘I qutb nuqtadan cheksiz uzoqlashib boradi. Lekin tajribada bunday hol kam uchraydi, ko‘p uchraydigan vaziyat bu har bir keyingi burilishlarda biz o‘sha $\mathbf{0 \le \varphi \le 2\varphi}$ diapazondagi chiziq ustidan o‘tamiz. Lekin bu birinchi misoldayoq qutb funksiyaning aniqlanish sohasi tushunchasiga duch kelamiz, qutb radiusi $\mathbf{r \ge 0}$ musbat bo‘lgani uchun, bu yerda manfiy burchakni qarash mumkin emas.

Eslatma: bir qator hollarda umumlashgan qutb koordinatalarni qarash qabul qilinganki, bunda radius manfiy bo‘lishi mumkin. Biz bu yondashishni keyinchalik o‘rganamiz. Arximed spiralidan boshqa, ko‘pgina bizga ma’lum egri chiziqlar mavjud. Biz quyida hayotda ko‘p uchraydigan misollarni keltiramiz.Avval soda tenglamalar va soda egri chiziqlarni sanab o‘tamiz.

$\mathbf{\varphi = K = const}$ tenglama qutbdan chiquvchi nurni bildiradi.

Eslatma: umumlashgan qutb koordinatalar sistemasida bu tenglama qutbdan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqni bildiradi.

$\mathbf{r = K = const}$ - tenglama markazi qutbda bo‘lib, radiusi $\mathbf{K}$ ga teng aylanani bildiradi.

Misol uchun $\mathbf{r = 2}$. Tushunarli bo‘lishi uchun bu tenglamani to‘g‘ri burchakli dekart koordinatalar sistemasida yozamiz. Oldingi bo‘limlarda topilgan $\mathbf{r = \sqrt{x^2 + y^2}}$ formuladan foydalanib, quyidagi almashtirishni bajaramiz: $\mathbf{r}=\sqrt{\mathbf{x}^2+\mathbf{y}^2}=\mathbf{2}$. Bu tenglikning ikkala tomonini kvadratga ko‘tarib, $\mathbf{x}^2+\mathbf{y}^2=\mathbf{2}^2$ tenglamani hosil qilamiz. Bu dekart koordinatalar sistemasida markazi $\mathbf{(0,0)}$ nuqtada bo‘lib, radiusi $\mathbf{2}$ ga teng aylanani bildiradi.

Savol tug‘iladi: bizda sodda va qulay to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasi mavjud, nega yana qandaydir egri chiziqli koordinatalar sistemalari kerak? Javob oddiy: matematika barcha tushunchalarni qamrab olishga intiladi. Bundan tashqari, yana shunisi muhimki, soddalik ya’ni aylananing tenglamasi qutb koordinatalar sistemasida $\mathbf{r}=\mathbf{K}=\mathbf{const}$ ko‘rinishining dekart koordinatalar sistemasidagi $\mathbf{x}^2+\mathbf{y}^2=\mathbf{2}^2$ ko‘rinishidan ancha sodda va qulayligidir. Ba’zi hollarda matematik model ilmiy kashfiyotlarni bashariyat qiladi. O‘z vaqtidaQozon universitetining rektori N.I. Lobochevskiy tekislikda berilgan to‘g‘ri chiziqqa undan tashqaridagi nuqta orqali cheksiz ko‘p parallel to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazish mumkinligini qat’iy isbotladi. Butun ilmiy olam bunga shubha bilan qaragan bo‘lsada, lekin hech kim buni rad qila olmadi. Faqat yuz yildan keyingina astronomlar kosmosda yorug‘lik nuri egri chiziqli trayektoriya bilan tarqalishini aniqlashdi. Demak, kosmosda bu kashfiyotdan yuz yil oldin ishlab chiqilgan noevklid Lobochevskiy geometriyasi ishlar ekan. Makonning bu egrilik hislati kichik (astronomik standart bo‘yicha) bizga ko‘rinmas masofalarga ko‘ra bilinmaydi.

5.Qutb koordinatalar sistemasida egri chiziqlarni qurish

Biz oldingi bo‘limlarda qutb koordinatalari bilan, alohida olingan nuqtalarni qutb koordinatalar sistemasida tasvirlash bilan, ba’zi bir keng tarqalgan egri chiziqlarni qutb koordinatalar sistemasida chizish masalalari bilan tanishdik. Endi biz qisqacha oraliq natija sifatida quyidagi savolga javob beramiz:

Qutb koordinatalar sistemasida egri chiziqlar qay tartibda quriladi?

Avvalo qutb boshi belgilanadi,qutb o‘qi belgilanadi va masshtab ko‘rsatiladi. Bundan tashqari, dastlabki etapda funksiyaning aniqlanish sohasi topiladi.Ko‘p hollarda egri chiziqqa tegishli bir necha nuqtalar topiladi. Keyingi qadamda burchak yo‘nalishlari chiziladi va topilgan nuqtalar belgilanadi. Bular qay tarzda transportir, sirkul va lineykalar yordamida bajarilishini biz oldingi bo‘limlarda ko‘rib chiqdik. Keyin topilgan nuqtalarni silliq tutashtiramiz.

Misol 2:

$\mathbf{r = 4\cos\varphi}$ egri chizig‘ini quring.

Yechilishi:

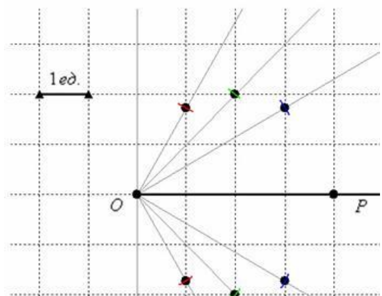
Eng avval bu funksiyaning aniqlanish sohasini topamiz. Qutb radiusi $\mathbf{r \geq 0}$ bo‘lgani uchun $\mathbf{\cos \geq 0}$ bo‘lishi kerak.Bu trigonometrik tengsizlikni yechish mumkin, lekin bunga o‘xshash sodda hollarda quyidagi usulni taklif etamiz. Kosinusning grafigini ko‘z oldingizga keltiring: $\mathbf{\cos \geq 0}$ tengsizlik nima haqida bizga ma’lumot beradi? Bu bizga kosinus funksiyaning grafigi abssissa o‘qining pastida joylashishi kerakligini bildiradi. Bu esa $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ kesmada ro‘y beradi. $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ kesmada esa to‘g‘ri kelmaydi. Demak, bu funksiyaning aniqlanish sohasi $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, ya’ni $\mathbf{r = 4\cos\varphi}$ funksiyaning grafigi qutb nuqtasidan o‘ng tomonda joylashgan (dekart koordinatalar sistemasida o‘ng yarim tekislikda). Odatda qutb koordinatalarida berilgan tenglama qaysi egri chiziqni ifodalashi haqida mavhum tushuncha bo‘ladi, shunga ko‘ra grafikni qurish uchun unga tegishli bir necha nuqtalarni qurish kerak. Qanchalik ko‘p bo‘lsa, shuncha yaxshi. Qulaylik uchun burchaklarning jadval qiymatlarini olish kerak. Aniqlik uchun manfiy burchaklardan soat strelkasiga teskari to‘la bir marta burilib musbat burchaklarga kelish kerak:

$$\varphi=-\frac{\pi}{2}\Rightarrow r=4\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=4\cos\frac{3\pi}{2}=4\cdot 0=0;$$
$$\varphi=-\frac{\pi}{3}\Rightarrow r=4\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=4\cos\frac{5\pi}{3}=4\cdot\frac{1}{2}=2;$$
$$\varphi=-\frac{\pi}{4}\Rightarrow r=4\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=4\cos\frac{7\pi}{4}=4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 2{,}83;$$
$$\varphi=-\frac{\pi}{6}\Rightarrow r=4\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=4\cos\frac{11\pi}{6}=4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 3{,}46;$$
$$\varphi=0\Rightarrow r=4\cos 0=4\cdot 1=4.$$

Kosinusning juft funksiyaligiga ko‘ra ($\cos(-\varphi)=\cos\varphi$) musbat burchaklar uchun funksiya qiymatlarini hisoblab o‘tirmaymiz:

$$\varphi=\frac{\pi}{6}\Rightarrow r\approx 3{,}46;$$
$$\varphi=\frac{\pi}{4}\Rightarrow r\approx 2{,}83;$$
$$\varphi=\frac{\pi}{3}\Rightarrow r\approx 2;$$
$$\varphi=\frac{\pi}{2}\Rightarrow r\approx 0.$$

Topilgan nuqtalarni qutb koordinatalar sistemasidan belgilab olamiz (9-rasm).



9-rasm

Egri chiziqning shakli bizga ayon bo‘lgan bo‘lsada, buni yuz foiz tasdiqlash uchun uning tenglamasini dekart koordinatalar sistemasida topamiz:

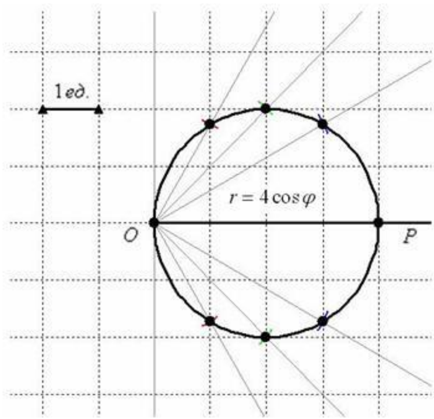
$$\mathbf{r-\sqrt{x^2+y^2},\ \cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}$$

bo‘lishini oldin topgan edik. Shunga ko‘ra

$$\mathbf{r=4\cos\varphi\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2}=4\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\Rightarrow x^2+y^2=4x\Rightarrow}$$

$$\mathbf{x^2-4x+y^2=0\Rightarrow x^2-4x+4+y^2=4\Rightarrow(x-2)^2+y^2=2^2.}$$

Bu topilgan tenglama dekart koordinatalar sistemasida radiusi $\mathbf{2}$ bo‘lgan va markazi $\mathbf{(x;y)=(2;0)}$ bo‘lgan aylananing tenglamasidir.Agar biz 9-rasmdagi topilgan nuqtalarni ketma-ket silliq tutashtirsak, qutb koordinatalar sistemasida markazi $\mathbf{(r;\varphi)=(2;0)}$ nuqtada bo‘lib, radiusi $\mathbf{2}$ ga teng bo‘lgan aylana hosil bo‘ladi (10-rasm).



10-rasm

Savol tug‘iladi: nega biz $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$ intervaldan tashqaridagi burchaklarni qaramadik? Chunki $\mathbf{r=4\cos\varphi}$ funksiyaning davriyligiga ko‘ra biz yana shu aylana chizig‘i ustidan o‘tar edik.

Murakkab bo‘lmagan tahlil o‘tkazish natijasida quyidagi natijaga kelamiz: $\mathbf{r=d\cos\varphi}$ $\mathbf{(d>0)}$ tenglama diametri $\mathbf{d}$ bo‘lgan va markazi $\left(\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{2}};\mathbf{0}\right)$ bo‘lgan aylanani ifodalaydi. Barcha shunaqa aylanalar $\mathbf{OP}$ qutb o‘qida diametrik bo‘lib, albatta qutb nuqtadan o‘tadi,

Misol 3:

$\mathbf{r=3\sin\varphi}$ egri chiziqni qutb koordinatalar sistemasida chizing va uning tenglamasini to‘g‘ri burchakli dekart koordinatalar sistemasida toping.

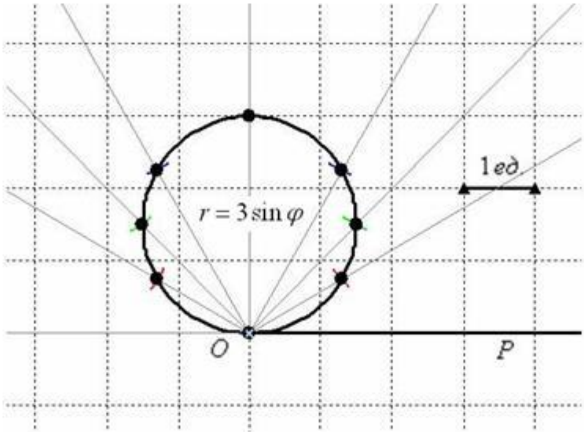
Yechilishi: Avvalo uning aniqlanish sohasini topamiz. Sinus funksiyaning grafigini ko‘z oldimizga keltiramiz. $\mathbf{\sin\varphi\geq 0}$ bo‘ladi. $\mathbf{\varphi\in[0;\pi)}$ bo‘lganda, $\mathbf{(0;2\pi]}$ da esa $\mathbf{\sin\varphi\leq 0}$ bo‘ladi.

$$\mathbf{r\geq 0\Rightarrow \sin\varphi\geq 0\Rightarrow \varphi\in[0;\pi].}$$

Berilgan egri chiziqqa tegishli bir necha nuqtalarning qutb koordinatalarini topamiz.

$$\varphi = 0 \Rightarrow r = 3\sin 0 = 3 \cdot 0 = 0;$$
$$\varphi = \frac{\pi}{6} \Rightarrow r = 3\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) == 3 \cdot \frac{1}{2} = 1{,}5;$$
$$\varphi = \frac{\pi}{4} \Rightarrow r = 3\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) == 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 2{,}1;$$
$$\varphi = \frac{\pi}{3} \Rightarrow r = 3\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) == 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 2{,}6;$$
$$\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow r = 3\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) == 3 \cdot 1 = 3;$$
$$\varphi = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow r = 3\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) == 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 2{,}6;$$
$$\varphi = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow r = 3\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) == 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 2{,}1;$$
$$\varphi = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow r = 3\sin\pi == 3 \cdot \frac{1}{2} = 1{,}5;$$
$$\varphi = \pi \Rightarrow r = 3\sin\pi == 3 \cdot 0 = 0.$$

Topilgan nuqtalarni qutb koordinatalar sistemasida belgilab olamiz va ularni ketma-ket silliq tutashtirsak, markazi $(\kappa;\varphi) = (1{,}5;\frac{\pi}{2})$ da bo‘lib, radiusi $1{,}5$ ga teng aylana hosil bo‘ladi (11-rasm).



11-rasm

Egri chiziqning dekart koordinatalar sistemasida tenglamasini topamiz: $\mathbf{r = 3\sin\varphi \Rightarrow r^2 = 3r \cdot \sin\varphi}$.

Almashtirish bajaramiz: $\mathbf{r^2 = x^2 + y^2,\ r \cdot \sin\varphi = y;}$

$$\mathbf{x^2 + y^2 = 3y \Rightarrow x^2 + y^2 - 3y = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2\frac{3}{2}y + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2}$$

$$\mathbf{= 0 \Rightarrow x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2.}$$

Bu dekart koordinatalar sistemasida markazi $\mathbf{\left(0; \frac{3}{2}\right)}$ da bo‘lib, radiusi $\mathbf{\frac{3}{2}}$ ga teng bo‘lgan aylana tenglamasidir.

Qo‘shimcha ma’lumot: $\mathbf{r = d\sin\varphi,\ (d > 0)}$ tenglama diametri $\mathbf{d}$ ga teng bo‘lib, markazi $\mathbf{\left(\frac{d}{2}; \frac{\pi}{2}\right)}$ bo‘lgan aylanani bildiradi.

Misol 4:

Qutb koordinatalarida berilgan

$$\textbf{a)}\ \mathbf{r = 2\sin 2\varphi}$$

$$\textbf{b)}\ \mathbf{r = 2\sin 3\varphi}$$

tenglamalar bilan berilgan egri chiziqlarni quring.

Bu tenglamalar qutb atirgullarini ifodalaydi. Bularning grafigini chizish uchun ikki xil yondashish mavjud. Avvalo biz qutb radiusi manfiy bo‘la olmaydi degan yondashish bilan boramiz.

Yechilishi:

a) Bu trigonometrik tengsizlikni grafik usulda yechish qiyin emas. Agar biz funksiyaning argumentini ikkiga ko‘paytirsak, uning grafigi OX o‘qi bo‘ylab 2 marta OY o‘qiga qarab siqiladi. Natijada bundan keyin sinus funksiyaning grafigi $\left(\mathbf{0;\frac{\pi}{2}}\right)$, $\left(\mathbf{\pi;\frac{3\pi}{2}}\right)$ oraliqlarda absissa o‘qidan yuqorida joylashadi,va $\mathbf{\sin 2\varphi \geq 0}$ tengsizlikning yechimlari bo‘ladi. $\mathbf{r = \sin 2\varphi}$ funksiyaning aniqlanish sohasi $\mathbf{\varphi \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right]}$ bo‘ladi. Umuman olganda, $\mathbf{\sin 2\varphi \geq 0}$ tengsizlikning yechimi cheksiz ko‘p oraliqlar birlashmasidan iborat bo‘ladi. Lekin bizni faqat bir davr qiziqtiradi.

Balki, ba‘zi bir o‘quvchilarga analitik usul soddaroq ko‘rinsa kerak.

$$\mathbf{\sin 2\varphi \geq 0 \Rightarrow 0 + 2\pi k \leq 2\varphi \leq \pi + 2\pi k.}$$

$$\mathbf{k = 0 \Rightarrow 0 \leq 2\varphi \leq \pi \Rightarrow 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2};}$$

$$\mathbf{k = 1 \Rightarrow 2\pi \leq 2\varphi \leq 3\pi \Rightarrow \pi \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2};}$$

$$\mathbf{k = 2 \Rightarrow 4\pi \leq 2\varphi \leq 5\pi \Rightarrow 2\pi \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{2}.}$$

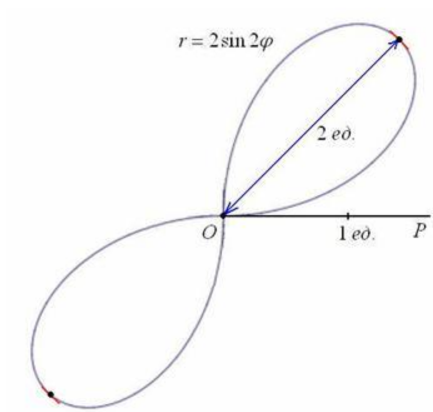
Ko‘ramizki, $\mathbf{k = 2}$ da biz sinus funksiyaning aniqlanish sohasidan chiqib ketdik. Shuning uchun biz $\mathbf{k = 0}$ va $\mathbf{k = 1}$ bo‘lgan hollarni qaraymiz.

Demak, $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$, va $\mathbf{r = 2 \cdot \sin 2\varphi}$ funksiyaning grafigi ikki yaproqli atirgulni bildiradi.Grafikni sxematik yasash mumkin, lekin yaproqlarning uchlarini to‘g‘ri topish muhim.Yaproqlarning uchlariga aniqlanish sohasini tashkil etuvchi oraliqlarning o‘rtalari mos keladi. Bizning misolimizda bular

$\varphi_1 = \frac{\pi}{4}, \varphi_2 = \frac{5\pi}{4}$ qutb burchaklaridir. Bunda yaproqlar uzunliklari:

$$\mathbf{r}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot \sin\frac{\pi}{2} = 2 \cdot 1 = 2 \ \ \textbf{birlik;}$$

$$\mathbf{r}\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 2\sin\left(2 \cdot \frac{5\pi}{4}\right) = 2 \cdot \sin\frac{5\pi}{2} = 2 \cdot 1 = 2 \ \ \textbf{birlik.}$$



12-rasm

Topilgan natijalarni bir sistemaga yig‘ib, quyidagi grafikka kelamiz (12-rasm).

Shuni ta’kidlash lozimki, yaproqlar uzunliklari 2 dan katta bo‘lmasligini oldindan ko‘rish mumkin.

$$\mathbf{-1 \le \sin 2\varphi \le 1 \Rightarrow r = 2\sin 2\varphi \le 2.}$$

b) Endi $\mathbf{r = 2\sin 3\varphi}$ tenglama bilan berilgan 4 egri chiziqni quramiz. Bu atirgul yaprog‘ining uzunligi ham 2 birlikka teng, lekin bu funksiyaning aniqlanish sohasi bizni qiziqtiradi. Analitik usulni qo‘llab, sinus funksiya manfiy bo‘lmasligi uchun uning argumenti $\mathbf{0}$ dan $\boldsymbol{\pi}$ oralig‘ida bo‘lishi kerak. Bizning holimizda $\mathbf{0 \le 3\varphi \le \pi}.$ Tengsizlikning barcha qismlarini 3 ga bo‘lib, $\mathbf{0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}}$ birinchi oraliqni topamiz. $\boldsymbol{\varphi \in [0;2\pi]}$ oraliqni uzunligi $\mathbf{\frac{\pi}{3}}$ radian bo‘lgan bo‘laklarga bo‘lamiz:

$-\left[\mathbf{0;\frac{\pi}{3}}\right]$ aniqlanish sohasiga kiradi;

$-\left[\mathbf{\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}}\right]$ aniqlanish sohasiga kirmaydi;

$-\left[\mathbf{\frac{2\pi}{3};\pi}\right]$ aniqlanish sohasiga kiradi;

$-\left[\mathbf{\pi;\frac{4\pi}{3}}\right]$ aniqlanish sohasiga kirmaydi;

$-\left[\mathbf{\frac{4\pi}{3};\frac{5\pi}{3}}\right]$ aniqlanish sohasiga kiradi;

$-\left[\mathbf{\frac{5\pi}{3};2\pi}\right]$ aniqlanish sohasiga kirmaydi.

Jarayon $\mathbf{2\pi}$ da tugadi. Shunday qilib, aniqlanish sohasi:

$$\boldsymbol{\varphi \in \left[0;\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3};\pi\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3};\frac{5\pi}{3}\right]}.$$

Bu o‘tkazilgan harakatlarni qisman yoki to‘laligicha fikran o‘tkazish qiyin emas.Endi biz grafikni quramiz. Agar oldingi misolda to‘g‘ri burchak va $\mathbf{45}^\circ$ li burchaklar bilan ishlash qulayliklar tug‘dirgan bo‘lsa , bu holda bir oz qiyinchilikka duch kelamiz. Yaproqlarning uchlarini topamiz.Ularning uzunliklari

$\mathbf{r=2}$ bo‘lishligini oldindan ko‘rgan bo‘lsak, burchak koordinatalarini topish qoldi. Buning uchun aniqlanish sohasiga tegishli oraliqlarning o‘rtalarini topishimiz kerak:

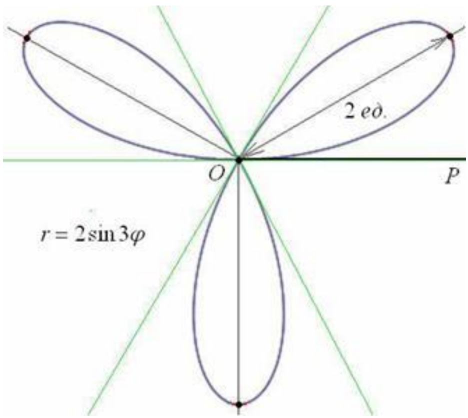
$$\varphi_1 = \frac{0+\frac{\pi}{3}}{2} = \frac{\pi}{6} \quad \text{radian;}$$

$$\varphi_2 = \frac{\frac{2\pi}{3}+\pi}{2} = \frac{5\pi}{6} \quad \text{radian;}$$

$$\varphi_3 = \frac{\frac{4\pi}{3}+\frac{5\pi}{3}}{2} = \frac{3\pi}{6} \quad \text{radian.}$$

Shunisi e’tiborliki, yaproqlar orasida albatta teng oraliqlar bo‘ladi, bu holda $\frac{2\pi}{3}$.

Topilgan natijalarni bir sistemaga yig‘ib, quyidagi grafikka kelamiz (13-rasm).



13-rasm

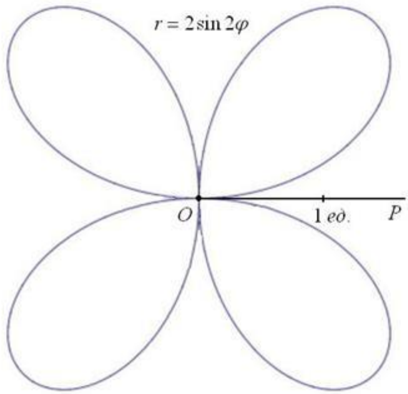
Endi umumiy formulani keltiramiz:

$\mathbf{r = m\sin(k\varphi)}$, $\mathbf{(m > 0, k > 0, k \in N)}$, bu $\mathbf{k}$-yaproqli va yaprog‘i uzunligi $\mathbf{m}$ ga teng atirgulning tenglamasini bildiradi.

Masalan: $\mathbf{r = 5\sin 4\varphi}$ tenglama yaprog‘ining uzunligi $\mathbf{5}$ birlik bo‘lgan $\mathbf{4}$ yaproqli atirgulni bildiradi, $\mathbf{r = 3\sin 5\varphi}$ esa yaprog‘ining uzunligi $\mathbf{3}$ bo‘lgan $\mathbf{5}$ yaproqli atirgulni bildiradi va hokazo.

Endi biz ikkinchi yondashish haqida fikr yuritamiz. Bu yondashish haqida umuman gapirmasak ham bo‘lar edi, lekin bu yondashish keng tarqalgan bo‘lib, gapirmaslik mumkin emas. Gap shundaki, qutb atirguli ko‘proq qutb radiusi manfiy bo‘lishi mumkin bo‘lgan umumlashgan qutb koordinatalar sistemasida qaraladi. Bunda aniqlanish sohasida gap bo‘lishi mumkin emas, lekin boshqa muammolar paydo bo‘ladi. Birinchidan, manfiy $\mathbf{r}$ lar uchun nuqtalar qanday quriladi? Agar $\mathbf{r < 0}$ bo‘lsa, fikran shunday nuqtani topish kerakki, burchak o‘sha bo‘lib faqat qutb radiusi $|\mathbf{r}|$ bo‘lsin. So‘ngra bu nuqtani qutb boshiga nisbatan simmetrik akslantirish kerak.

$\mathbf{r = 2\sin 2\varphi}$ qutb atirgulini qaraymiz va qutb radiusi manfiy bo‘lgan $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ intervalni qaraymiz. $\left(-2;\frac{3\pi}{4}\right)$ nuqtani qanday tasvirlash mumkin? Fikran $\left(2;\frac{3\pi}{4}\right)$ nuqtani topamiz (yuqoridagi chap sektor) va uni qutb boshiga nisbatan $\left(2;-\frac{\pi}{4}\right)$ nuqtaga simmetrik akslantiramiz. Shunday qilib, qilib, burchak $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ intervalda qiymat qabul qilganda, pastdagi o‘ng sektorda yaproq paydo bo‘ladi. Mos ravishda burchak $\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$ intervalda qiymat qabul qilganda to‘rtinchi yaproq hosil bo‘ladi (yuqoridagi chap sektor) (14-rasm).



14-rasm

Xuddi shunday fikrlab, $\mathbf{r = 2\sin 3\varphi}$ qutb atirguli umumlashgan qutb koordinatalar sistemasida atirgul o‘zining yaproqlari sonini saqlaydi. Chunki, burchak bo‘sh sektorlaridan o‘tayotganida qutb radiuslari manfiy qiymatlar qabul qiladi va bu bo‘sh sektorlaridagi nuqtalar qutb boshiga nisbatan oldindan mavjud bo‘lgan yaproqlarga akslanadilar. Endi biz umumlashgan qutb koordinatalar sistemasi uchun atirgul qoidasini keltiramiz.

$\mathbf{r = m\sin(k\varphi),\quad (m > 0, k > 0, k \in N)}$ tenglama yaprog‘ining uzunligi $\mathbf{m}$ ga teng bo‘lgan qutb atirgulini bildiradi, bunda:

1)agar $\mathbf{k}$ - juft bo‘lsa, atirgul $\mathbf{2k}$ yaproqqa ega bo‘ladi;

2)agar $\mathbf{k}$ - toq bo‘lsa, atirgul $\mathbf{k}$ -yaproqqa ega bo‘ladi.

Masalan, $\mathbf{r = \sin 4\varphi}$ - $\mathbf{8}$ yaproqqa ega,

$\mathbf{r = \sin 5\varphi}$ - $\mathbf{5}$ yaproqqa ega,

$\mathbf{r = \sin 6\varphi}$ - $\mathbf{6}$ yaproqqa ega,

$\mathbf{r = \sin 7\varphi}$ - $\mathbf{7}$ yaproqqa ega va hokazo.

Misol 6:

$\mathbf{r(\varphi)=1+\cos\varphi}$ tenglama bilan berilgan egri chiziqni qutb koordinatalar sistemasida egri chiziqqa tegishli nuqtalarni $\frac{\pi}{8}$ interval burchaklarda topish yo‘li bilan quring. Egri chiziq tenglamasini to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasida toping.

Yechilishi: Aniqlanish sohasini topamiz. Qutb radiusi manfiy emas, shuning uchun $\mathbf{1+\cos\varphi\geq 0\Rightarrow\cos\varphi\geq -1.}$ Ixtiyoriy burchak qiymati φ uchun bu shart bajariladi. Shunday qilib, biz φ ning qiymatlarini $\mathbf{0}$ dan $\mathbf{2\pi}$ gacha $\frac{\pi}{8}$ interval bilan uzluksiz qabul qilamiz.

$$\varphi=0\Rightarrow r=1+\cos 0=1+1=2$$

$$\varphi=\frac{\pi}{8}\Rightarrow r=1+\cos\frac{\pi}{8}\approx 1{,}92$$

$$\varphi=\frac{\pi}{4}\Rightarrow r=1+\cos\frac{\pi}{4}\approx 1{,}71$$

$$\varphi=\frac{3\pi}{8}\Rightarrow r=1+\cos\frac{3\pi}{8}\approx 1{,}38$$

$$\varphi=\frac{\pi}{2}\Rightarrow r=1+\cos\frac{\pi}{2}=1+0=1$$

$$\varphi=\frac{5\pi}{8}\Rightarrow r=1+\cos\frac{5\pi}{8}\approx 1{,}62.$$

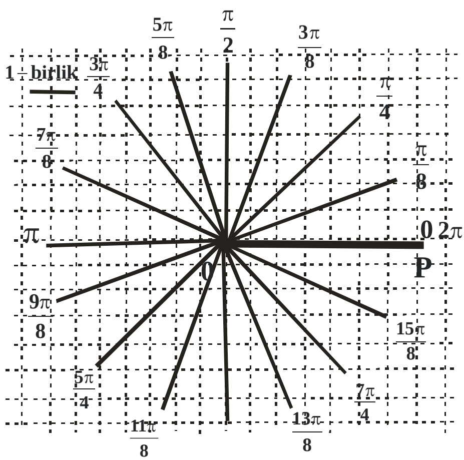
va hokazo, $\mathbf{2\pi}$ gacha.

Bu hisoblashlarni to‘liq yozib chiqish o‘rniga quyidagi quyidagi jadvalni to‘ldirish qulay.

1-jadval

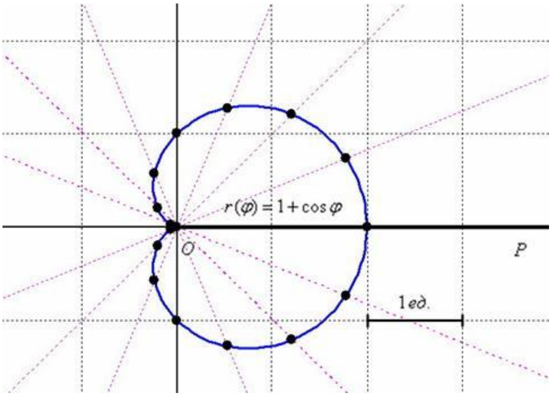
φ	**0**	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π
r	**2**	**1,92**	**1,71**	**1,38**	**1**	**0,62**	**0,29**	**0,08**	**0**
φ	$\frac{9\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{13\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{15\pi}{8}$	2π	
r	**0,08**	**0,29**	**0,62**	**1**	**1,38**	**1,71**	**1,92**	**0**	

Topilgan burchak yo‘nalishlarini 15-rasmda ifodalaymiz.



15-rasm

15-rasmdagi qutb burchak yo‘nalishlariga mos keluvchi 1-jadvalda topilgan qutb radius qiymatlarni qo‘yib va bu nuqtalarni silliq tutashtirib quyidagi 16-rasmga kelamiz.



16-rasm

Endi bu egri chiziqning tenglamasini dekart koordinatalar sistemasida topamiz:

$$\mathbf{r = 1 + \cos\varphi \Rightarrow r \cdot r = r(1 + \cos\varphi) \Rightarrow r^2 = r + r\cos\varphi.}$$

To‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasiga o‘tish formulalaridan foydalanamiz:

$$\mathbf{r^2 = x^2 + y^2, r = \sqrt{x^2 + y^2},\ r \cdot \cos\varphi = x.}$$

Natijada $\mathbf{x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2} + x}$ tenglamani hosil qilamiz.

$$\mathbf{x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2} + x \Rightarrow x^2 + y^2 - x = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow}$$

$$\mathbf{(x^2 + y^2 - x)^2 = x^2 + y^2.}$$

Hosil qilingan tenglamadan kelib chiqadiki, кardioida – bu 4-tartibli algebraik egri chiziq bo‘lib, uning qutb koordinatalar sistemasidagi tenglamasi dekart koordinatalar sistemasidagi tenglamasidan ancha sodda.

Misol 7:

Egri chiziq qutb koordinatalar sistemasida

$\mathbf{r(\varphi) = \dfrac{6}{2 - \cos\varphi}}$ tenglama bilan berilgan.

Talab qilinadi:

1) $\varphi = 0$ dan $\varphi = 2\pi$ gacha $\frac{\pi}{8}$ interval bilan egri chiziqning grafigini nuqtalar bo‘yicha quring.

2) Egri chiziqning tenglamasini dekart koordinatalar sistemasida yozing.

3) Egri chiziqning ko‘rinishini aniqlang.

Yechilishi:

1)Funksiyaning aniqlanish sohasini topamiz.

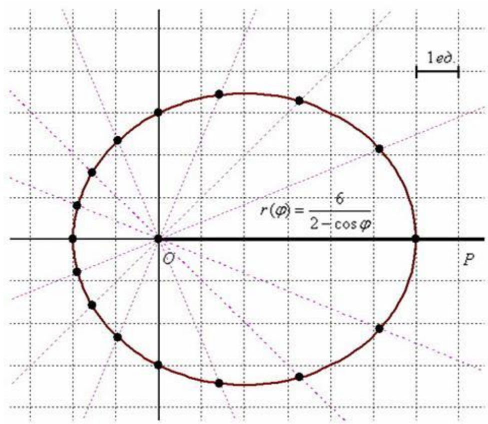
$r \geq 0 \Rightarrow 2 - \cos\varphi > 0 \Rightarrow \cos\varphi < 2 \Rightarrow \varphi -$ ixtiyoriy.

Oldingi misoldagidek quyidagi jadvalni to‘ldiramiz:

2-jadval

φ	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π
r	6	5,58	4,64	3,71	3	2,52	3,22	2,05	2
φ	$\frac{9\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{13\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{15\pi}{8}$	2π	
r	2,05	2,22	2,52	3	3,71	4,64	5,58	6	

Bulardan foydalanib quyidagi chizmani hosil qilamiz (17-rasm):



17-rasm

2) Egri chiziqning tenglamasini dekart koordinatalar sistemasida topamiz:

$$\mathbf{r=\frac{6}{2-\cos\varphi}\Rightarrow r(2-\cos\varphi)=6\Rightarrow 2r-r\cos\varphi=6.}$$

$\mathbf{r=\sqrt{x^2+y^2},\quad r\cdot\cos\varphi=x}$ formulalaridan foydalanamiz:

$$\mathbf{2\sqrt{x^2+y^2}-x=6}$$
$$\mathbf{\left(2\sqrt{x^2+y^2}\right)^2=(x+6)^2}$$
$$\mathbf{4\left(x^2+y^2\right)=x^2+12x+36}$$
$$\mathbf{3x^2-12x+4y^2=36}$$
$$\mathbf{3(x^2-4x+4)-12+4y^2=36}$$
$$\mathbf{3(x-2)^2+4y^2=48}$$

$$\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$$

$$\frac{(x-2)^2}{4^2}+\frac{y^2}{(2\sqrt{3})^2}=1$$

Bu tenglama berilgan egri chiziqning to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasidagi ko‘rinishidir.

3) Bu egri chiziq simmetriya markazi **O (2,0)** bo‘lib, katta yarim o‘qi $\mathbf{a=4}$, kichik yarim o‘qi $\mathbf{b=2\sqrt{3}}$ bo‘lgan ellipsdir.

Misol 8:

Egri chiziq qutb koordinatalar sistemasida $\mathbf{r=\frac{9}{4-5\cos\varphi}}$

tenglama bilan berilgan.

Talab qilinadi:

1) 1) $\boldsymbol{\varphi=0}$ dan $\boldsymbol{\varphi=2\pi}$ gacha $\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{8}}$ interval bilan egri chiziqning grafigini nuqtalar bo‘yicha quring.

2) Egri chiziqning tenglamasini dekart koordinatalar sistemasida yozing.

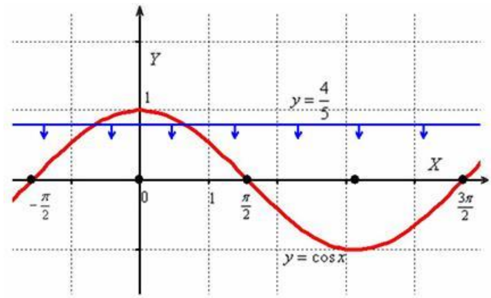
3)Egri chiziqning ko‘rinishini aniqlang va uning fokuslarini va ekssentrisitetini toping.

Yechilishi: Aniqlanish sohasini topamiz:

$$\mathbf{r\geq 0\Rightarrow 4-5\cos\varphi>0\Rightarrow 5\cos\varphi<4\Rightarrow \cos\varphi<\frac{4}{5};}$$

Tengsizlikni analitik usul bilan yechish qiyin emas. Lekin grafik usul masalaning mohiyatini chuqurroq tushunish uchun kerak va biz bu usulni tanlaymiz. Grafikda biz $\mathbf{y=\cos x}$ va $\mathbf{y=\frac{4}{5}}$ chiziqlarni ifodalaymiz (18-rasm).

Bizni bunda faqat bitta $\mathbf{-\frac{\pi}{2}}$ dan $\mathbf{\frac{3\pi}{2}}$ gacha bo‘lgan davr qiziqtiradi. $\mathbf{\cos\varphi < \frac{4}{5}}$ shartni egri chiziqning $\mathbf{y = \frac{4}{5}}$ to‘g‘ri chiziqdan pastda joylashgan qismi bajaradi.



18-rasm

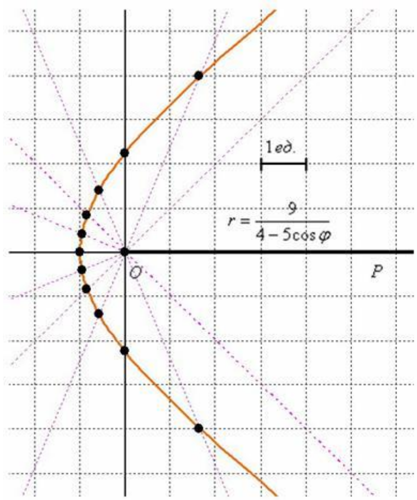
Ya’ni bizning ixtiyorimizda $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)/\left[-\mathbf{arccos}\,\frac{4}{5};\mathbf{arccos}\,\frac{4}{5}\right]$ interval bor.

$\mathbf{arccos\,\frac{4}{5} \approx 37^0}$ bo‘lgani uchun biz $\mathbf{0,\ \frac{\pi}{8},\ \frac{15\pi}{8}\left(-\frac{\pi}{8}\right)}$ burchaklarni qaramaymiz. Hisoblash jadvalini to‘ldiramiz (bunda biz 0, $\frac{\pi}{8}$, $\frac{15\pi}{8}$, 2π yacheykalarga tire qo‘yamiz.

3-jadval

φ	**0**	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π
r	**---**	**---**	**19,38**	**4,31**	**2,25**	**1,52**	**1,19**	**1,04**	**1,00**
φ	$\frac{9\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{13\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{15\pi}{8}$	2π	
r	**1,04**	**1,19**	**1,52**	**2,25**	**4,31**	**19,38**	**---**	**---**	

Berilgan egri chiziqning grafigini chizamiz (19-rasm):



19-rasm

2) Egri chiziqning tenglamasini dekart koordinatalar sistemasida topamiz:

$$\mathbf{r = \frac{9}{4 - 5\cos\varphi}}$$

$$\mathbf{r(4 - 5\cos\varphi) = 9}$$

$$\mathbf{4r - 5r\cos\varphi = 9}$$

O‘tish formulalari $\mathbf{r = \sqrt{x^2 + y^2}, r\cos\varphi = x}$ lardan foydalanamiz:

$$\mathbf{4\sqrt{x^2 + y^2} - 5x = 9}$$

$$\mathbf{4\sqrt{x^2 + y^2} = 5x + 9}$$

$$\mathbf{\left(4\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = (5x + 9)^2}$$

$$\mathbf{16x^2 + 16y^2 = 25x^2 + 90x + 81}$$

$$9x^2 + 90x + 81 - 16y^2 = 0$$
$$9(x+5)^2 - 16y^2 = 144$$
$$\frac{(x+5)^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1.$$

Bu berilgan egri chiziqning dekart koordinatalar sistemasidagi tenglamasi.

3) Berilgan egri chiziq markazi $(-5;0)$ a bo‘lib, haqiqiy yarim o‘qi $a = 4,$ mavhum yarim o‘qi $b = 3$ bo‘lgan giperboladir.

Savol tug‘iladi: nega qutb koordinatalar sistemasida giperbolaning bir shoxi hosil bo‘ldi, bu xato qanday paydo bo‘ldi? Bu xato emas. Agar umumlashgan qutb koordinatalar sistemasida manfiy r ning qiymatlarini $\left(-\arccos\frac{4}{5};\arccos\frac{4}{5}\right)$ burchaklarda qarasak, giperbolaning chap shoxi kelib chiqadi. Buni biz o‘quvchilarga mustaqil ravishda bajarishni taklif etamiz.Endi biz giperbolaning fokuslarini va ekssentrisitetini topamiz.

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Parallel ko‘chirishni bajarib fokuslarni topamiz:

$$F_1(c + x_0; y_0),\ F_2(-c + x_0; y_0)$$
$$F_1(5-5;\ 0),\ F_2(5+5;\ 0)$$
$$F_1(0;\ 0),\ F_2(10;\ 0)$$

Ekssentrisitet: $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{5}{4};$

Misol 9:

Egri to‘g‘ri chiziq qutb koordinatalar sistemasida $\mathbf{r = \dfrac{4}{1+\sin\varphi}}$ tenglama bilan berilgan.

Talab qilinadi:

1) $\mathbf{\varphi = 0}$ dan $\mathbf{\varphi = 2\pi}$ gacha $\mathbf{\dfrac{\pi}{8}}$ interval bilan egri chiziqning grafigini nuqtalar bo‘yicha quring.

2) Egri chiziqning tenglamasini dekart koordinatalar sistemasida yozing va uning ko‘rinishini aniqlang.

3) Topilgan tenglamani kanonik ko‘rinishga keltiring va to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasida uning grafigini chizing. Uning fokuslari va ekssentrisitetlarini toping.

Yechilishi:

1) Funksiyaning aniqlanish sohasini topamiz:

$$\mathbf{r \geq 0 \Rightarrow 1+\sin\varphi > 0 \Rightarrow \sin\varphi > -1 \Rightarrow \varphi \neq \frac{3\pi}{2}.}$$

Hisoblash jadvalini to‘ldiramiz:

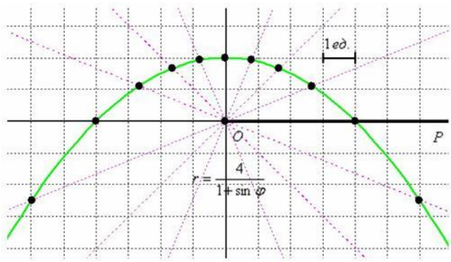
4-jadval

φ	**0**	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π
r	**4**	**2,89**	**2,34**	**2,08**	**2**	**2,08**	**2,34**	**2,89**	**4**
φ	$\frac{9\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{13\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{15\pi}{8}$	2π	
r	**6,48**	**13,66**	**52,55**	**---**	**52,55**	**13,66**	**6,48**	**4**	

2) Berilgan egri chiziqning dekart koordinatalar sistemasida tenglamasini topamiz:

$$\mathbf{r=\frac{4}{1+\sin\varphi}}$$
$$\mathbf{r(1+\sin\varphi)=4}$$
$$\mathbf{r+r\sin\varphi=4}$$

Chizma chizamiz (20-rasm):



20-rasm

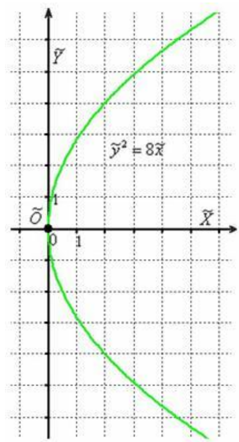
Quyidagi o‘tish formulalaridan foydalanamiz:

$$\mathbf{r=\sqrt{x^2+y^2},\ r\cdot\sin\varphi=y.}$$
$$\mathbf{\sqrt{x^2+y^2}+y=4}$$
$$\mathbf{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2=(4-y)^2}$$
$$\mathbf{x^2+y^2=16-8y+y^2}$$
$$\mathbf{x^2=-8(y-2).}$$

Bu berilgan egri chiziqning dekart koordinatalar sistemasidagitenglamasi.Bu parabolaning tenglamasidir.

3) Egri chiziqning topilgan tenglamasini yangi $\mathbf{\tilde{O}\tilde{x}\tilde{y}}$ koordinatalar sistemasida kanonik ko‘rinishga keltiramiz. Bunda $\mathbf{Oxy}$ koordinatalar sistemasini koordinatalar boshi $\mathbf{O}$ atrofida $\mathbf{-\frac{\pi}{2}}$

radianga buramiz va markazini $\mathbf{\tilde{O}(0,2)}$ nuqtaga parallel ko‘chiramiz (koordinatalar – oldingi koordinatalar sistemasida). Natijada $\mathbf{\tilde{y}^2 = 8 \cdot \tilde{x}}$ parabolaning kanonik tenglamasi hosil bo‘ladi (21-rasm).



21-rasm

Fokal parametri $\mathbf{p = 4.}$ Fokusni topamiz:

$\mathbf{P(\frac{p}{2};0) \Rightarrow F(2;0).}$ Ixtiyoriy parabolaning ekssentrisiteti $\mathbf{1}$ ga teng.

Adabiyotlar

1. Ryabushka B.P, Barxatov V.V, Derjavets V.V, Yurut I.E, Oliy Matematikadan Individual topshiriqlar to‘plami. -Toshkent: O‘zbekiston milliy ensiklopediyasi, 2014-367 b.

2. Danko P.E, Popov A.G, Kojevnikova T.Y Oliy matematikadan misol va masalalar. – Toshkent: O‘zbekiston faylasuflari milliy jamiyati, 2012- 248 b.

3. Черненко В. Д. Высшая математика в примерах и задачах: Учебное пособие для вузов. Т. 1.- СПб.: Политехника, 2012.

4. Билута П.А. Высшая математика.: Курс лекций / Новосиб. Гос. Ун-т. Новосибирск, 2012.

5.Гордон Е.И., Кусраев А.Г. Кутателадзе С.С. Инфинитезимальный анализ. Избранные темы.- М.: Наука, 2011.

Mundarija

Muharrir: Sidikova K.A.

Musahhih: Miryusupova Z.M.