T.Azlarov, H.Mansurov

Matematik analiz asoslari

I qism

Bakalavrlar uchun darslik

Ixchamlashtirilgan va takomillashtirilgan 3-nashri

Toshkent – 2005

Uchinchi nashriga so`zboshi

Mazkur darslikning ikkinchi nashri chiqqaniga ham 10 yil bo`ldi. Bu vaqt oralig`ida Respublikamiz hayotida ayniqsa o`qish - o`qitish sohasida tub o`zgarishlar sodir bo`ldi. Shulardan eng muhimlari oliy ta'limning ikki bosqichli tizimga o`tishidir. Bu esa o`z navbatida o`qitiladigan predmetlarning dasturlarini qayta ko`rib chiqishni taqozo qiladi.

Boshqa predmetlar singari matematik analiz kursini ham qayta "taftish" qilish zarurati paydo bo`ldi. Ikkinchi tomondan, o`qitish metodikasidagi zamonaviy yangi texnologiyalar - o`qitishning intensiv usullari ham bu masalani dolzarb qilib qo`ydi.

Shu sabablarga ko`ra mualliflar oldingi "Matematik analiz" darsligi zaminida "Matematik analiz asoslari" bakalavrlar uchun bir muncha ixcham darslik yaratishni o`z oldilariga vazifa qilib qo`ydilar.

Darslikda to`plamlar nazariyasining elementlari, haqiqiy sonlar nazariyasining elementlari, funksiya tushunchasi, bir o`zgaruvchili funksiya (shu jumladan ketma - ketlik) va uning limiti, uzluksizligi, bunday funksiyalarning xossalari batafsil bayon qilingan. Shuningdek, bir o`zgaruvchili funksiyalarning differensial va integral hisoblari hamda shu hisoblarning ba'zi tadbiqlari keltirilgan. An'anaga ko`ra mazkur darslikning birinchi tomi sonli qatorlar mavzusi bilan yakunlanadi.

Shuni aytish kerakki, dasrlik mavjud dastur asosida yozilgan. Har bir bob oxirida ham nazariy, ham amaliy ahamiyatga ega bo`lgan mashqlar keltirilgan. Darslikni o`zlashtirish davomida kitobxon shu mashqlarni ham yecha borishi lozim. Kitobda matematik belgilardan keng foydalanish bilan bir qatorda tasdiqlar isbotining boshlanganligi "◄" belgi, tugaganligi esa "►" belgi orqali ifodalangan.

Kitob qo`lyozmasini sinchiklab o`qib, uni ilmiy va metodik jihatdan yaxshilanishiga o`z hissalarini qo`shganlari uchun professorlar Sh.Alimov, R. G`anixo`jayev va dotsent B.Shoimqulovlarga mualliflar tashakkur izhor qiladilar. Shuningdek, darslikni nashrga tayyorlashda qatnashgan A.Eshqobilov, J.Xurramova, A.Xusanboyev va N.Usmonovalarga minnatdorchilik bildiradilar.

Mualliflar.

I BOB

TO'PLAM HAQIDA TUSHUNCHA

Ushbu bobda matematika fanining barcha tarmoqlarida keng qo'llaniladigan to'plam tushunchasi haqida ba'zi ma'lumotlar beriladi.

1–§. To'plam. To'plamlar ustida amallar

1⁰. To'plam tushunchasi. To'plam tushunchasi matematikaning boshlang'ich tushunchalaridan biri bo'lib, u misollar yordamida tushuntiriladi. Masalan, shkafdagi kitoblar, barcha to'g'ri kasrlar, quyosh sistemasidagi sayyoralar, berilgan nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar to'plami haqida gapirish mumkin. To'plamni tashkil etgan narsalar (predmetlar) uning elementlari deb ataladi.

Odatda, to'plamlar bosh harflar bilan, uning elementlari esa kichik harflar bilan belgilanadi. Masalan, $A, B, C, \ldots$ larni to'plam, $a, b, c, \ldots$ larni esa to'plam elementi deyish mumkin.

Agar A to'plamning elementi a bo'lsa, $a \in A$ yoki $A \ni a$ kabi yoziladi va "a element A to'plamga tegishli" deb o'qiladi. Aks holda $a \overline{\in} A$ yoki $a \notin A$ deb yoziladi va "a element A to'plamga tegishli emas" deb o'qiladi. Masalan, $A = \{2,4,6,8,10\}$ bo'lsa, $6 \in A$, $7 \notin A$ bo'ladi.

Chekli sondagi elementlardan tashkil topgan to'plam chekli to'plam deb ataladi. Masalan, yuqorida keltirilgan to'plamlardan shkafdagi kitoblar chekli to'plamni tashkil etadi.

Matematikada ko'pincha chekli bo'lmagan to'plamlarni – cheksiz to'plamlarni qarashga to'g'ri keladi. Masalan, barcha to'g'ri kasrlar, barcha natural sonlar, berilgan nuqtadan o'tuvchi barcha to'g'ri chiziqlar to'plami cheksiz to'plamlarga misol bo'la oladi. Barcha natural sonlardan iborat to'plam N harfi bilan belgilanadi va $N = \{1,2,3,\ldots,n,\ldots\}$ yoki $N = \{n : n = 1,2,3,\ldots\}$ kabi yozladi. Yana bir misol sifatida $B = \{x : x^2 - 5x + 6 = 0\}$ to'plamni keltiraylik. Bu to'plam $x^2 - 5x + 6 = 0$ tenglama ildizlaridan tashkil topgan.

Yuqorida biz to'plam uning barcha elementlari uchun xarakterli bo'lgan xususiyatni, qoidani keltirish bilan berilishini, shuningdek, uning barcha elementlarini bevosita ko'rsatish bilan berilishini ko'rdik. Ayrim vaqtlarda to'plam qanday xarakterli xususiyatga ega bo'lgan elementlardan tashkil topganligi ma'lum bo'lsa ham, bunday xususiyatli elementlar mavjud bo'lmasligi mumkin. Masalan, A to'plam $m+x=n$ tenglamaning ($n \in N$, $m \in N$, $n < m$) natural sonlar to'plamidagi ildizlaridan tashkil topgan deyilsa, bu to'plamning bitta ham elementi yo'qligi ma'lum bo'ladi. Bunga sabab, berilgan tenglamaning natural sonlar to'plamida ildizga ega emasligidir. Bundan ko'rinadiki, elementga ega bo'lmagan to'plamlarni ham ko'rishga to'g'ri keladi.

Bitta ham elementga ega bo'lmagan to'plam bo'sh to'plam deyiladi va Ø kabi belgilanadi.

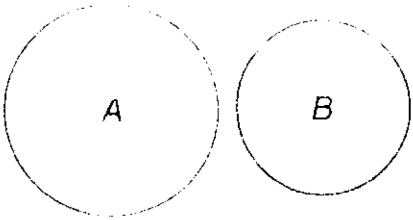
Shuni takidlash lozimki, to'plamni aniqlashda uni tashkil etgan elementlar orasida aynan bir biriga teng bo'lgan elementlar to'plamning elementi sifatida faqat bir martagina olinadi. Masalan, B to'plam $x^2+3x+2=0$ tenglamaning ildizlaridan iborat bo'lsin. Bu tenglamaning ildizlari $x_1=-1$, $x_2=-2$ bo'lib, ulardan tuzilgan B to'plam deganda biz -1 va -2 elementlardan tuzilgan $B=\{-1,-2\}$ to'plamni tushunamiz.

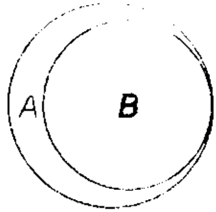
Ko'pincha to'plamlar, ular chekli yoki cheksiz bo'lishidan qat'iy nazar, simvolik ravishda tekislikda biror shakl, masalan, doirachalar bilan tasvirlanadi. Bu esa to'plamlar ustida bajarilgan amallarni tasavvur qilishda, ular orasidagi munosabatlarni o'rganishda ancha qulaylik tug'diradi. (1 – chizma).

Agar B to'plamning har bir elementi A to'plamning ham elementi bo'lsa, B to'plam A to'plamning qismi yoki qismiy to'plami (to'plam osti) deb ataladi va $B \subset A$ kabi belgilanadi (2 – chizma). Masalan, $B=\{2,4,6,8\}$, $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ bo'lsin. Bunda $B \subset A$ ekanligini ko'rish qiyin emas.

Bo'sh to'plam Ø har qanday A to'plamning qismi (qismiy to'plami) deb hisoblanadi. Biror A to'plam berilgan bo'lsin. Bu to'plamning barcha qismiy to'plamlaridan iborat to'plamni $F(A)$ kabi belgilaymiz. Ravshanki,

$$\emptyset \in F(A), \qquad A \in F(A).$$



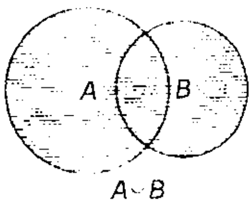


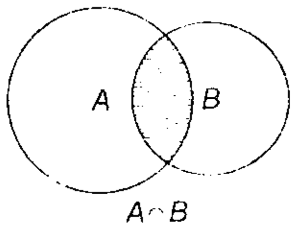
1–chizma. **2–chizma.**

$F(A)$ to'plam elementlarning o'zi to'plamdir. Masalan, $A=\{1,2\}$, $B=\{1,2,3\}$ to'plam uchun $F(A)=\{\{1\},\{2\},\{1,2\},\emptyset\}$, $F(B)=\{\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\},\emptyset\}$ bo'ladi.

1–ta'rif. Agar $A\subset B$, $B\subset A$ bo'lsa, A va B teng to'plamlar deyiladi. Bu hol $A=B$ kabi yoziladi. Masalan, A to'plam $k\pi$ ko'rinishdagi sonlardan iborat bo'lsin, bunda $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$ ya'ni $A=\{a: a=k\pi, k=0,\pm1,\ldots\}$. B to'plam esa $\sin x=0$ tenglamaning yechimlaridan iborat bo'lsin, ya'ni $B=\{x:\sin x=0\}$. Agar $\sin x=0$ tenglamaning barcha yechimlari $x=k\pi, k=0,\pm1,\pm2,\ldots$ formula bilan yozilishini hisobga olsak, $A=B$ bo'lishini ko'ramiz.

2⁰. To'plamlar ustida amallar. Biz quyida to'plamlar ustida bajariladigan amallarni keltiramiz.





3–chizma. **4–chizma.**

2–ta'rif. A va B to'plamlarning barcha elementlaridan tashkil topgan C to'plam A va B to'plamlarning yig'indisi deb ataladi. A va B to'plamlarning yig'indisi $C=A\cup B$ kabi belgilanadi (3–chizma).

Masalan, $A=\{2,4,6,8\}$, $B=\{1,2,3,4\}$, $E=\{2,4,6,8,\ldots\}$,

$\{1,3,5,7,...\}$ bo'lsa, unda ularning yig'indilari quyidagi to'plamlardan iborat bo'ladi: $A\cup B=\{1,2,3,4,6,8\}$, $E\cup D=\{1,2,3,...\}=N$, $A\cup E=\{2,4,6,8,...\}$.

Yuqorida keltirilgan 2-ta'rifdan $A\cup A=A$, $A\cup B=B\cup A$ kelib chiqadi, shuningdek, agar $A\subset B$ bo'lsa, unda $A\cup B=B$ bo'ladi.

3–ta'rif. A va B to'plamlarning barcha umumiy elementlaridan tashkil topgan D to'plam A va B to'plamlarning ko'paytmasi deyiladi. A va B to'plamlarning ko'paytmasi $D=A\cap B$ kabi belgilanadi. (4-chizma). Masalan, $A=\{2,4,6,8\}$, $B=\{1,2,3,4\}$ bo'lsa, ularning ko'paytmasi $A\cap B=\{2,4\}$ to'plam bo'ladi. 3-ta'rifdan bevosita $A\cap A=A$, $A\cap B=B\cap A$ kelib chiqadi, shuningdek, agar $A\subset B$ bo'lsa, unda $A\cap B=A$ bo'ladi.

Agar $A\cap B=\emptyset$ bo'lsa A va B kesishmaydigan to'plamlar deyiladi. Masalan, $E=\{2,4,6,...\}$, $F=\{1,3,5,...\}$ to'plamlar kesishmaydigan to'plamlar bo'ladi, chunki $E\cap F=\emptyset$.

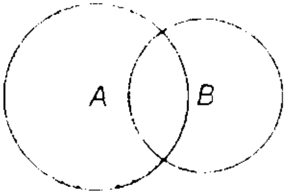
Biz to'plamlarning yig'indisi xamda ko'paytmasi ta'riflarini ikki to'plamga nisbatan keltirdik. Agar $A_1,A_2,...,A_n$ to'plamlar berilgan bo'lsa, ularning yig'indisi $A_1\cup A_2\cup...\cup A_n$ hamda ko'paytmasi $A_1\cap A_2\cap...\cap A_n$ yuqoridagiga o'xshash ta'riflanadi.

4–ta'rif. A to'plamning B to'plamga tegishli bo'lmagan barcha elementlaridan tuzilgan E to'plam A to'plamdan B to'plamning ayirmasi deb ataladi. A dan B ning ayirmasi $A\setminus B=E$ kabi belgilanadi (5 – chizma). Masalan, $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{3,6,9,12\}$ bo'lsa, $A\setminus B=\{1,2,4,5\}$ va $B\setminus A=\{6,9,12\}$ bo'ladi.

Agar A to'plam S to'plamning qismi (ya'ni $A\subset S$) bo'lsa, ushbu $S\setminus A$ ayirma A to'plamni S ga to'ldiruvchi to'plam deb ataladi va $C'A$ kabi yoziladi:

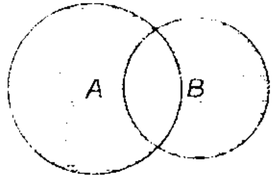
$$C'A=S\setminus A.$$

5–ta'rif. A to'plamning B to'plamga tegishli bo'lmagan barcha elementlaridan va B to'plamning A to'plamga tegishli bo'lmagan barcha elementlaridan tuzilgan to'plam A va B to'plamlarning simmetrik ayirmasi deb ataladi. Simmetrik ayirma $A\Delta B$ kabi belgilanadi (6-chizma).



$A \setminus B$

5–chizma



A B

6–chizma

Ta'rifga ko`ra

$$A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A).$$

Masalan, agar $A=\{1,2,3,4,5,6\}$, $B=\{4,5,6,7,8,9\}$ bo`lsa bu to`plamlarning simmetrik ayirmasi $A\Delta B=\{1,2,3,7,8,9\}$ bo`ladi.

Ikki A va B to`plam berilgan bo`lsin. Birinchi elementi A to`plamga, ikkinchi elementi $B$ to`plamga tegishli bo`lgan tartiblangan (a,b) juftliklarni qaraylik: $a\in A,\ b\in B$.

6-ta'rif. Barcha (a,b) ko`rinishdagi juftliklardan tuzilgan to`plam A va B to`plamlarning Dekart ko`paytmasi deb ataladi. To`plamlarning Dekart ko`paytmasi $A\times B$ kabi belgilanadi. Odatda $A\times A$ to`plam $A^2$ deb belgilanadi: $A\times A=A^2$. Bunda $(a,b)$ va $(b,a)$ juftliklar $A\times B$ to`plaming turli elementlari hisoblanadi.

Masalan, $A=\{1,2\}$, $B=\{2,3\}$ to`plamlar uchun $A\times B=\{(1,2),(1,3),(2,2),(2,3)\}$, $B\times A=\{(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$ bo`ladi.

Yuqorida to`plamlarni va ular ustida bajarilgan amallarni tasvirlash uchun ishlatilgan shakllar Eyler-Viyen diagrammalari deb ataladi (1-6-chizmalar).

1.1.misol. A,B,C to`plamlar uchun $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$ tenglikning o`rinli bo`lishi isbotlansin.

◀Aytaylik, $a\in(A\cup B)\cap C$ bo`lsin. Unda $a\in(A\cup B), a\in C$ bo`ladi. $a\in A, a\in C$ bo`lganda $a\in A\cap C$ bo`lib, $a\in(A\cap C)\cup(B\cap C)$. $a\in B,\ a\in C$ bo`lganda $a\in B\cap C$ bo`lib, yana $a\in(A\cap C)\cup(B\cap C)$ bo`ladi.

Demak,

$$(A\cup B)\cap C\subset(A\cap C)\cup(B\cap C) \qquad (1.1)$$

bo`ladi.

Aytaylik, $a\in(A\cap C)\cup(B\cap C)$. bo`lsin. Unda $a\in A\cap C$ bo`lganda $a\in A, a\in C$ bo`lib, $a\in(A\cup B)\cap C$; $a\in B\cap C$ bo`lganda $a\in B, a\in C$ bo`lib, yana $a\in(A\cup B)\cap C$ bo`ladi.

Demak,

$$(A\cap C)\cup(B\cap C)\subset(A\cup B)\cap C \qquad (1.2)$$

bo`ladi. (1.1) va (1.2) munosabatlardan $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$ bo`lishi kelib chiqadi ►

1.2.misol. A va B to`plamlarda ushbu

$$(A\setminus B)\cup B=A$$

tenglikning o`rinli bo`lishi uchun $B\subset A$ bo`lishi zarur va yetarli ekanligi isbotlansin.

◄Aytaylik $(A\setminus B)\cup B\subset A$ bo`lsin. Qo`shiluvchilarning har biri yig`indining qismi bo`lishidan, $B\subset A$ ekanligini topamiz.

Aytaylik, $A\subset B$ bo`lsin. Unda $(A\setminus B)\cup B\subset A$ bo`lib, $(A\setminus B)\cup B=A$ bo`ladi ►

**3⁰. Universal to`plam.** Yuqorida kiritilgan amallar ixtiyoriy to`plamlar uchun, to`plamlarning tabiatiga hech qanday shart qo`ymasdan ta'riflandi. Ammo bunday " umumiylik " ba'zan konkret hollarda ma'noning yo`qolishiga olib kelishi ham mumkin. Masalan, $A$ to`plam sifatida 2,4,6,8,10 sonlar to`plamini: $A=\{2,4,6,8,10\}$, $B$ to`plam sifatida quyosh sistemasidagi sayyoralar to`plamini olsak, ularning yig`indisi va ko`paytmasi formal aytila olinsa ham, muayyan g`ayritabiiylikka olib kelishi ravshan. Bunday ma'nosizlik hollarini istisno qilish uchun, odatda barcha amallar biror universal to`plam deb ataluvchi to`planning qismiy to`plamlari ustida bajariladi deb hisoblanadi. Bu universal to`plam U yoki Ω bilan belgilanadi. Macalan, yuqorida keltirilgan sonli misollarda universal to`plam sifatida natural sonlar to`plami $U=N=\{1,2,3,\ldots\}$ olinishi mumkin. Eyler-Viyen diagrammalari uchun esa U sifatida tekislikning nuqtalari to`plami olinishi mumkin.

Matematik analiz kursi davomida, universal to`plam sifatida asosan haqiqiy sonlar to`plami (qarang 2-bob, 4-§) qaraladi.

4⁰. To`plamni bo`laklash. Biror A to`plam berilgan bo`lib, $A_1,A_2,\ldots,A_n$ to`plamlar uning qismiy to`plamlari bo`lsin: $A_k\subset A$ $(k=1,2,\ldots,n)$

Agar $\{A_1,A_2,\ldots,A_n\}$ qismiy to`plamlar sistemasi uchun:

1) $A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n=A$,

2) $A_k\cap A_i=\emptyset \quad (k\neq i,\ k,i=1,2,\ldots,n)$

shartlar bajarilsa, $\{A_1,A_2,\ldots,A_n\}$ sistema A da bo`laklash bajargan yoki $A$ to`plam $A_1,A_2,\ldots,A_n$ to`plamlarga bo`laklangan deyiladi. Ba`zan $\{A_1,A_2,\ldots,A_n\}$ ni $A$ dagi bo`laklash, A_k larini esa bo`laklashning elementlari deyiladi. Ikkala shart birgalikda $A$ dagi har bir element bo`laklashning bitta va faqat bitta elementiga tegishli bo`lishini ta'minlaydi.

Tabiiyki, bitta A to`plamda turli bo`laklashlar bajarilgan bo`lishi mumkin.

1.3- misol. $A_1=\{1,2\}, A_2=\{3,4\}, A_3=\{5,6\}$ to`plamlar $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ to`plamda bo`laklash bajarishi ko`rsatilsin.

To`plamlar yig`indisi ta'rifidan foydalanib topamiz

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{1,2\}\cup\{3,4\}\cup\{5,6\}=\{1,2,3,4,5,6\}=A.$$

To`plamlar ko`paytmasi ta'rifiga ko`ra

$$A_1 \cap A_2=\{1,2\}\cup\{3,4\}=\emptyset, \quad A_2 \cap A_3=\{3,4\}\cup\{5,6\}=\emptyset,$$

$$A_1 \cap A_3=\{1,2\}\cup\{5,6\}=\emptyset$$

bo`ladi.

Shunday qilib, $\{A_1, A_2, A_3\}$ sistema uchun 1),2) shartlar bajariladi va demak, u A dagi bo`laklash bo`ladi.

2-§. To`plamlarni taqqoslash

Odatda, ko`pincha turli to`plamlarni taqqoslashga, ya'ni ularni elementlarining miqdori bo`yicha solishtirishga to`g`ri keladi.

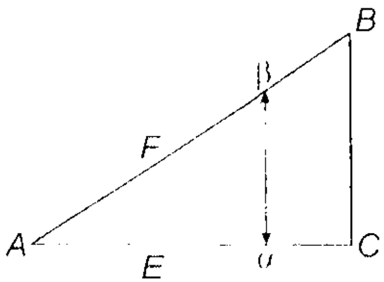
Agar A va B lar chekli to`plamlar bo`lsa, u holda ularning elementlarini bevosita sanash bilan elementlar soni yoki bir-biriga tengligini yoki A to`plamning elementlari soni $B$ to`plamning elementlari sonidan ko`p yoki kam ekanini aniqlash mumkin.

Agar A va B to`plamlar cheksiz to`plamlar bo`lsa, unda bu to`plamlarning elementlarini, ravshanki, sanash yo`li bilan taqqoslab bo`lmaydi. Ammo, bu to`plamlarni ularning elementlarini bir-biriga mos qo`yish yo`li bilan taqqoslash mumkin.

Agar A to`plamning bitta har bir elementiga $B$ to`plamning bitta elementi shunday mos qo`yilsaki, bunda $B$ ning elementiga mos keltirilgan $A$ ning elementi yagona bo`lsa, A va B to`plam elementlari orasida o`zaro bir qiymatli moslik o`rnatilgan deyiladi.

7-ta'rif. Agar A va B to`plam elementlari orasida o`zaro bir qiymatli moslik o`rnatish mumkin bo`lsa, ular bir-biriga ekvivalent to`plamlar deb ataladi.

Ekvivalent A va B to`plamlar $A\sim B$ kabi belgilanadi. Masalan, to`g`ri burchakli $ABC$ uchburchak ($\Delta ABC$) berilgan bo`lsin. (7-chizma).



7- chizma.

Bu uchburchakning gipotenuzasi AB ning nuqtalaridan iborat to`plamni $F$ deb, $AC$ katetni tashkil etgan nuqtalar to`plamini esa E deb olaylik. Bu E va F to`plamlarning elementlari orasida o`zaro bir qiymatli moslik o`rnatish mumkin. $F$ to`plamda olingan har bir β nuqtaga shu nuqtadan AC ga tushirilgan perpendikularning asosi α ni mos qo`yamiz va aksincha. Bu esa $E$ va $F$ to`plam elementlari orasida o`zaro bir qiymatli moslik mavjud ekanligini ko`rsatadi. Demak, ta'rifga binoan, $E\sim F$ bo`ladi.

Shuningdek, $A=\{1,2,3,4,5,6\}$, $B=\{2,4,6,8,10,12\}$, $N=\{1,2,3,\dots,n,\dots\}$, $N'=\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots,\frac{1}{n},\dots\}$ to`plamlar berilgan bo`lsa, unda $A\sim B$ va $N\sim N'$ ekanini ko`ramiz. Ekvivalentlik tushunchasi to`plamlarni sinflarga ajratish imkonini beradi. Masalan, quyidagi to`plamlar berilgan bo`lsin : $A=\{2,4,6,8,10,12\}$, $B=\{1,2\}$, $C=\{10,11\}$, $D=\{1,3,5,7,9,11\}$, $E=\{1\}$. Bu to`plamlar orasida $A$ va $D$ to`plamlar, B va C to`plamlar ekvivalent: $A\sim D$, $B\sim C$. Bunda $B$ va $C$ to`plamlar bitta 6 elementli to`plamlar sinfiga kirsa, $B$ va $C$ to`plamlar esa boshqa 2 elementli to`plamlar sinfiga kiradi. Ammo $E$ to`plam A,B,C,D to`plamlarning birontasiga ham ekvivalent emas. U bir elementli to`plamni tashkil etadi.

Natural sonlar to`plami $N$ berilgan bo`lsin. Bu to`plamga ekvivalent bo`lgan to`plamlarga misollar keltiraylik:

$$N'=\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots,\frac{1}{n},\dots\},\quad n\leftrightarrow\frac{1}{n}$$

$$N''=\{2,4,6,8,\dots,2n,\dots\}\quad n\leftrightarrow 2n$$

$$N'''=\{1,3,5,7,\dots,2n-1,\dots\}\quad n\leftrightarrow 2n-1$$

8-ta'rif. Natural sonlar to`lami $N$ ga ekvivalent bo`lgan har qanday to`plam sanoqli to`plam deb ataladi.

Natural sonlar to`plami $N$ ga ekvivalent bo`lgan barcha to`plamlar sanoqli to`plamlar sinfini tashkil etadi.

Quyidagi ikki $N=\{1,2,3,\dots,n,\dots\}$, $N''=\{2,4,6,\dots,2n,\dots\}$ to'plam berilgan bo'lsin. Bunda $N''\subset N$ ekanligi ravshan. Ammo yuqorida $N\sim N''$ ekanligini ta'kidlagan edik. Demak, $N''\subset N$, $N''\sim N$.

To'plamning qismi o'ziga ekvivalent bo'lishi faqat cheksiz to'plamlargagina xosdir.

Biz yuqorida misol tariqasida keltirgan to'plamlarimiz asosan chekli to'plamlar yoki sanoqli to'plamlar edi. Tabiiyki, cheksiz, ammo sanoqli bo'lmagan to'plamlar bormi?, degan savol tug'iladi. Bunday to'plamlar mavjud (qaralsin.[1]).

Ekvivalent to'plamlar sinfining miqdoriy xarakteristikasi sifatida to'plamning quvvati tushunchasi kiritiladi. Chekli to'plamlar uchun quvvat to'plam elementlarining sonidan iboratdir.

3-§. Matemetik belgilar

To'plam tushunchasi bilan tanishishda biz ba'zi bir matematik belgilarni ishlatdik. Masalan, "A to'plamning elementi a" yoki "a element A to'plamga tegishli" deyilganda $a\in A$ deb tegishlilik belgisi "$\in$" ni ishlatdik. Shuningdek, „$\subset$" yoki „$\subseteq$" belgi bir to'plam ikkinchi to'plamning qismi bo'lganida qo'llanilgan edi.

Matematikada ba'zi hollarda yozuvni qisqartirish maqsadida tez-tez uchraydigan so'z va so'z birikmalari o'rniga maxsus belgilar ishlatiladi.

"Agar ... bo'lsa, u holda ... bo'ladi " iborasi $\Rightarrow$ implikatsiya belgisi orqali yoziladi.

Masalan, A,B va C to'plamlar berilgan bo'lsin. "Agar $A\subset B$, $B\subset C$ bo'lsa, u holda $A\subset C$ bo'ladi" iborasini quyidagicha ifodalash mumkin:
$A\subset B,\ B\subset C\Rightarrow A\subset C$.

Ikki ekvivalent tasdiqlar ekvivalentlik belgisi $\Leftrightarrow$ orqali yoziladi. Masalan, $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=\emptyset \Leftrightarrow (A\cup B)\setminus(A\cap B)=\emptyset$

"Har qanday", "ixtiyoriy", "barchasi uchun" so'zlari o'rniga „$\forall$" umumiylik kvantori belgisidan foydalaniladi.

"Mavjudki", "topiladiki" so'zlari o'rniga „$\exists$" mavjudlik kvantori belgisi ishlatiladi. Masalan:

1) "Ixtiyoriy n hamda m natural sonlar yig'indisi yana natural sonlar bo'ladi" iborasini $\forall n\in N,\ \forall m\in N\Rightarrow(n+m)\in N$ kabi yozish mumkin.

2) "Ikki A va B to'plamlar ko'paytmasi bo'sh emas" degan

iborani $\forall b: b \neq 0$ yoki $\exists a: a \in A, a \notin B$ kabi ifodalash mumkin.

Shunday qilib, $\in, \notin, \subset, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \forall, \exists$ matematik belgilarni ko'rib o'tdik. Biz ulardan qulay kelganda, foydalanib boramiz.

Matematik belgilarning ishlatilish mazmuni quyidagi jadvalda ifodalangan:

№	Matematik belgilar	Matematik belgilarning ishlatilish mazmuni
1.	$\in$	Tegishlilik belgisi, a element A to'plamning elementi bo'lsa, $a \in A$ kabi yoziladi.
2.	$\notin$	Tegishli emaslik belgisi. b element B to'plamning elementi bo'lmasa, $b \notin B$ kabi ifodalanadi.
3.	$\subset$	qism belgisi. A to'plam B to'plamning qismi bo'lsa, u $A \subset B$ kabi yoziladi.
4.	$\forall$	Umumiylik kvantori belgisi. "Har qanday", "ixtiyoriy", "barchasi uchun" so'zlari va so'z birikmalari o'rnida ishlatiladi.
5.	$\exists$	Mavjudlik kvantori belgisi. "Mavjudki", "topiladiki", o'rnida ishlatiladi.
6.	$\Rightarrow$	Implikatsiya belgisi. "Agar ... bo'lsa, u holda ... bo'ladi" iborasi o'rnida ishlatiladi.
7.	$\Leftrightarrow$	Ekvivalentlik belgisi.

4-§. Matematik induksiya metodi

Har bir fanni egallash undagi turli-tuman faktlarni, asosiy qonuniyatlarni bilib olish bilan birga shu fandagi tadbiq qilish metodlarini o'zlashtirishni ham taqozo qiladi. Qadimiy va navqiron matematika fanida ham u o'rganadigan obyektlarni qonuniyatlarni ochuvchi qator metodlar yaratilgan. Ularning ba'zilari muayyan masalalar uchun maxsus yaratilgan bo'lsa, ayrimlari umummatematik ahamiyatga egadir.

Ana shunday umumiy xarakterdagi metodlarni mukammal egallash matematika fani sohasida yaxshi mutaxassis bo'lishning, uning ichki sirlarini anglab yetishning zaruriy shartidir.

Matematik induksiya metodi matematikaning turli-tuman, hatto bir-biridan juda olis sohalarida muvaffaqiyat bilan keng qo'llaniladigan metoddir. Avvalo, bu metod o'zining juda sodda bo'lgan g'oyasi bilan e'tiborga sazovor. Ikkinchidan, bu metod isbotlanayotgan gipotezaning yoki teoremaning aniq bayonini keltirishda ma'lum "topog'onlik"ni talab etishi bilan ham xarakterlidir.

Matematik induksiya elementar matematikaning barcha sohalaridagina emas, balki hozirgi zamonaviy matematikaning turli bo'limlarida ham yangi-yangi faktlarni isbot qilishning muhim omilidir.

1°. Deduktiv va induktiv fikrlash. Odatda, biror jarayon yoki voqea to'g'risida fikr yuritishning ikki formasi farq qilinadi: deduktiv fikrlash va induktiv fikrlash.

Deduksiya-fikrlashning umumiy tasdiqlardan xususiy tasdiqlarga o'tish formasidir (deduksiya so'zi mantiqiy xulosani bildiradi). Misollar ko'raylik.

1.4-misol. Bir va o'zidan boshqa bo'luvchilarga ega bo'lgan sonlar murakkab sonlar to'plamini tashkil etadi. (A)
9 soni 1 va 9 dan boshqa 3 ga bo'linadi. (B)
Demak, 9 soni murakkab son (C)

1.5-misol. Barcha to'rtburchaklar ko'pburchaklar oilasiga tegishli. (A)
$ABCD$ trapetsiya-to'rtburchak. (B)

Demak, $ABCD$ trapetsiya ko'pburchaklar oilasiga tegishli. (C)

Har ikkala misolda ham (A) umumiy tasdiqdan (B) tasdiq yordamida (C) xususiy tasdiq hosil qilinadi.

Induksiya-fikrlashning xususiy tasdiqlardan umumiy tasdiqlarga o'tish formasidir.

1.6-misol. 140 soni 5 ga bo'linadi. (A)
Demak, Nol bilan tugaydigan barcha sonlar 5 ga bo'linadi. (B)

1.7-misol. 140 soni 5 ga bo'linadi. (A)
175 soni 5 ga bo'linadi (B)
425 soni 5 ga bo'linadi (C)
Demak, barcha uch honali sonlar 5 ga bo'linadi. (D)

1.6-misolda (A) hususiy tasdiqdan (B) umumiy tasdiq hosil qilinadi, (B) tasdiq to'g'ridir.

1.7-misolda (A) (B) (C) hususiy tasdiqlardan (D) umumiy tasdiq hosil qilindi. Lekin (D) tasdiq noto'g'ridir.

Tadqiqotchi biror faktni isbotlashdan avval, turli mulohazalar yordamida bu faktning borligini fahmlashi, uni isbotlashga kirishishdan avval esa isbotlash g'oyalarini anglab yetishi kerak bo'ladi.

Deduksiya va induksiya bir-birini to'ldiruvchi fikrlash formalaridir. Haqiqatan ham, isbotlanishi kerak bo'lgan tasdiqlar (gipotezalar) kuzatishlarga asoslangan holda induktiv yo'l bilan hosil qilinadi, so'ngra bu tasdiqning to'g'riligi isbotlashning biror deduktiv metodi yordamida ko'rsatiladi.

Induksiya metodi fizika, kimyo va boshqa tabiiy fanlarda, shuningdek, matematikada ham keng qo'llaniladi, ya'ni bu metod yordamida turli matematik tasdiqlar (gipotezalar) hosil qilinadi. Bunga misollar keltiraylik:

1.8–misol. 2 sonining ketma ket kelgan uchta darajasining yig'indisini qaraylik:

$$2^1+2^2+2^3=14$$

Hosil bo'lgan son 7 ga bo'linadi. Endi

$$2^2+2^3+2^4=28$$

hosil bo'lgan son yana 7 ga karrali. Navbatdagi darajalarni qo'shaylik:

$$2^3+2^4+2^5=56$$

hosil bo'lgan son yana 7 ga karrali.

Bajarilganlarga asoslanib ushbu gipotezani aytish mumkin: 2 sonning ixtiyoriy uchta ketma ket kelgan darajasining yig'indisi 7 ga karralidir, ya'ni $\forall n \in N$ uchun $2^n+2^{n+1}+2^{n+2}$ yig'indi 7 ga qoldiqsiz bo'linadi.

2^0. Matematik induksiya metodi. Yuqoridagi misollarni tahlil natijasida ushbu savol tug'iladi. Bir qancha xususiy hollarda to'g'ri bo'lgan biror tasdiq berilgan bo'lsin. Bu tasdiqning to'g'riligini ko'rsatuvchi barcha cheksiz ko'p xususiy hollarni ko'rib chiqish inson qo'lidan kelmaydi (barcha natural sonlar uchun chiqarilgan tasdiqlar shular jumlasidandir).

Xususiy hollar cheksiz ko'p bo'lgani uchun to'la induksiyani qo'llash imkoniyatiga ega emasmiz, xususiy hollarga asoslanib chiqarilgan tasdiq esa xato bo'lishi mumkin.

Induksiya yordamida biror $A(n)$ gipoteza bayon etilgan bo'lib, bu mulohazaning ixtiyoriy natural son n uchun rostligini isbotlash kerak bo'lsin hamda $A(n)$ mulohazaning to'g'riligini barcha n lar uchun bevosita tekshirib ko'rishning iloji bo'lmasin. $A(n)$ mulohaza, matematik induksiya prinsipiga asosan, quyidagicha isbotlanadi:

Bu tasdiqning to'g'riligi, avvalo $n=1$ uchun tekshiriladi.

So'ngra aytilgan tasdiqni $n=k$ uchun rost bo'lsin deb faraz qilib, uning rostligi $n=k+1$ uchun isbotlanadi. Shundan so'ng, $A(n)$ tasdiq barcha n ($n\in N$) lar uchun isbotlangan hisoblanadi.

Bularga asosan, agar $A(n)$ tasdiq $n=1$ da rost bo'lsa, u navbatdagi $n=1+1=2$ son uchun ham rost bo'ladi. Tasdiqning $n=2$ uchun rostligidan uning $n=2+1=3$ uchun rostligi kelib chiqadi.

Bundan esa tasdiqning, o'z navbatida, $n=4$ uchun rostligi kelib chiqadi va hokazo. Shu yo'sinda, ixtiyoriy n natural songacha yetib boramiz. Demak, $A(n)$ tasdiq ixtiyoriy n uchun o'rinlidir.

Aytilganlarni umumlashtirib, ushbu umumiy prinsipni ifodalaylik:

1. $n=1$ da $A(n)$ mulohazaning rostligi tekshiriladi:

2. $n=k$ da $A(n)$ mulohaza rost bo'lsin deb faraz qilib, $n=k+1$ uchun $A(n)$ mulohazaning rostligi, ya'ni $A(k)\Rightarrow A(k+1)$ isbotlanadi. Shundan so'ng, $A(n)$ mulohaza barcha n lar uchun rost deb xulosa qilinadi.

1.9–misol. Yuqoridagi prinsipga asoslanib, ixtiyoriy n natural son uchun ushbu tenglikni isbotlang:

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Bu yerda va bundan keyingi misoldagi tasdiqni $A(n)$ deb belgilaymiz.

1. $n=1$ bo'lganda $1=\frac{1(1+1)}{1}$, demak $A(1)$ to'g'ri.

2. Ixtiyoriy k natural son uchun $A(k)$ ning to'g'riligidan $A(k+1)$ ning kelib chiqishini isbotlaymiz.

$$1+2+3+\ldots+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

to'g'ri bo'lsin. Yuqoridagi munosabatdan foydalansak:

$$1+2+3+\ldots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}$$

hosil bo'ladi. bu esa $A(k+1)$ ning o'zidir.

Bu esa, tasdiqning barcha n lar uchun o'rinli bo'lishini bildiradi.

Matematik induksiya prinsipiga asoslangan isbotlar isbotlashning matematik induksiya metodi deyiladi.

Matematik induksiya metodiga asoslanib biror tasdiqni isbotlashda yuqorida ko'rsatilgan 1 va 2 punktlarning har birini tekshirish (isbotlash) juda muhimdir. Agar ulardan birortasini hisobga olmasak, chiqarilgan xulosa to'g'ri bo'lmay qolishi mumkin.

Mashqlar.

1.4. Ushbu □\□=(□∪□)\(□∩□) tenglik isbotlansin.

1.5. □ va □ (barcha butun sonlardan iborat to'plam) lar uchun □∪□, □∩□, □\□, □\□ to'plamlar topilsin

1.6. A,□,□ to'plamlar uchun

a) □~□, б) □~□ ⇒ □~□, c) □~□, □~□ ⇒ □~□ bo'lishi isbotlansin.

1.7. Agar □\□~□\□ bo'lsa, □~□ bo'lishi isbotlansin.

1.8. Qavariq □ ko'pburchak diagonallaridan tashkil topgan to'plamning elementlari soni 0.5□(□-3) ga teng bo'lishi isbotlansin.

1.9. Elementlari soni □ ta bo'lgan to'plamning barcha qismiy to'plamlaridan tuzilgan to'plamning elementlari soni 2^n ga teng bo'lishi isbotlansin.

1.10. Sonlar o'qida N va Z to'plamlarning geometrik tasvirlari topilsin.

1.11. Ixtiyoriy $n\in N$ uchun $n(n^2+5)$ ifoda 6 ga karrali ekanini isbotlang.

1.12. Agar p tub son bo'lsa, n^p-n son p ga bo'linishini isbotlang. (Fermaning kichik teoremasi).

1.13. Ixtiyoriy $n\in N$ uchun $3^{5n+2}+2^{5n+1}$ yig'indining 11 ga bo'linishini isbotlang.

1.14. Quyidagi Koshi tengsizligini isbotlang: Ixtiyoriy n ta manfiy bo'lmagan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sonlarning o'rta arifmetigi shu sonlarning o'rta geometrigidan kichik emas, ya'ni

$$\frac{a_1+a_2+\ldots a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1\cdot a_2 \ldots a_n}.$$

Bu tengsizlik $a_1=a_2=\ldots=a_n$ bo'lganda va faqat shu holdagina tenglikka aylanadi.

II BOB

Haqiqiy sonlar. Haqiqiy sonlar to`plami va uning xossalari

Son tushunchasi uzoq o`tmishdan ma'lum. Odamlar sanash taqazosi bilan dastlab 1, 2, 3, ... -natural sonlarni qo`llaganlar. So`ngra manfiy son, ratsional son va, nihoyat, haqiqiy son tushunchalari kiritilgan va o`rganilgan. Albatta, bu tushunchalar kitobxonga o`rta maktab matematika kursidan, litsey va kollejlardan ma'lum. Shuning uchun ham quyida (shu bobning 1-§ ida) ratsional sonlar to`plamlarining muhim xossalari qisqagina bayon etilgan. Haqiqiy son tushunchasiga kelganda shuni aytish kerakki, uning kiritilishi matematik analiz uchun qanoatlanarli darajada emas. Shu sababga ko`ra quyida (shu bobning 2-5§ larida) haqiqiy son tushunchasini Dedekind bo`yicha kiritamiz va haqiqiy sonlar to`plamining xossalarini batafsil o`rganamiz.

1-§. Ratsional sonlar to`plami va uning xossalari

1^0. Ratsional sonlar. Ushbu qisqarmaydigan $r=\frac{p}{n};\ p\in Z, n\in N$ kasr ko`rinishida tasvirlanadigan har bir son *ratsional son deyiladi*. Barcha ratsional sonlar to`plamini Q deb belgilaymiz:

$$Q=\{r:r=\frac{p}{n},\ p\in Z,\ n\in N\}.$$

Ravshanki,

$$N\subset Z\subset Q.$$

Ratsional sonlar to`plamida qo`shish $(r+s;\ r\in Q,\ s\in Q)$, ayirish $(r-s;\ r\in Q,\ s\in Q)$, ko`paytirish $(r\cdot s;\ r\in Q,\ s\in Q)$ hamda bo`lish $(r:s;\ r\in Q,\ s\in Q,\ s\neq 0)$ amallari, shuningdek ratsional sonning darajasi $(r^n,\ r\in Q,\ n\in Z)$, ratsional sondan olingan ildiz $(\sqrt[n]{r};\ r\in Q,\ n\in N)$ amallar kiritilgan bo`lib, amallarning ma'lum xossalari o`rinli bo`ladi.

**2^0. Ratsional sonlar to`plamining tartiblanganligi.** Ratsional sonlar to`plami Q dan olingan ixtiyoriy ratsional r,s,t sonlar uchun quyidagi ikki tasdiq o`rinli bo`ladi:

1). $r=s, r>s, r<s$ munosabatlardan bittasi va faqat bittasi

o'rinli,

2) $r < s < t$ tengsizliklardan $r < t$ tengsizlikning o'rinli bo'lishi kelib chiqadi.

Bu hol ratsional sonlar to'plami Q ning tartiblanganligi xossasini ifodalaydi.

3^0. Ratsional sonlar to'plamining zichligi. Faraz qilaylik, $r \in Q, t \in Q$ va $r < t$ bo'lsin. U holda $\frac{r+t}{2} \in Q$ va $r < \frac{r+t}{2} < t$ bo'ladi.

Bu esa r va t ratsional sonlar orasida $\frac{r+t}{2}$ ratsional son bor ekanligini ko'rsatadi. $\frac{r+t}{2}$ sonni s bilan belgilab, r va s sonlar orasida joylashgan $\frac{r+s}{2}$ hamda s va t orasida joylashgan $\frac{s+t}{2}$ ratsional sonlar borligini ko'ramiz:

$$r < \frac{r+s}{2} < \frac{r+t}{2} < \frac{s+t}{2} < t$$

Bu jarayonni istalgancha davom ettirish yo'li bilan ixtiyoriy r va t ratsional sonlar orasida cheksiz ko'p ratsional sonlar borligi aniqlanadi. Mana shu xossa ratsional sonlar to'plami Q ning zichligi xossasi deyiladi.

Faraz qilaylik, A ratsional sonlardan tuzilgan biror to'plam bo'lsin: $A \subset Q$

1–ta'rif. Agar shunday $r^* \in A$ topilsaki, $\forall r \in A$ uchun $r \le r^*$ tengsizlik bajarilsa, r^* ratsional son A to'plamning *eng katta elementi deyiladi.*

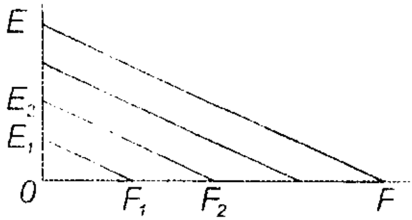
2–ta'rif. Agar shunday $r_* \in A$ topilsaki, $\forall r \in A$ uchun $r \ge r_*$ tengsizlik bajarilsa, r_* ratsional son A to'plamning *eng kichik elementi deyiladi.*

4^0. Ratsional sonlarni geometrik tasvirlash. Sonlar o'qi va bu o'qda O nuqtani olaylik. Bu O nuqtani nol sonining geometrik tasviri deb qaraymiz.

Natural va butun sonlarni geometrik tasvirlash o'quvchiga ma'lum. Ixtiyoriy ratsional sonni geometrik tasvirlashdan avval birlik kesma (masshtab birligi) ning n $(n \in N)$ qismini topishni aytib o'tamiz.

Bir kateti birlik kesma OE ikkinchi kateti birlik kesmani n marta qo'yishdan hosil bo'lgan OF kesmadan iborat, OEF to'g'ri burchakli uchburchakni qaraylik (8 chizma). Bu OEF ning OF

tomonidagi $1, 2, 3, \ldots, n-1$ sonlarni tasvirlovchi nuqtalar $F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}$ bo'lsin. Natijada OF katetda bir biriga teng bo'lgan n ta $OF_1, F_1F_2, \ldots, F_{n-1}F$ kesmalar hosil bo'ladi.



8 - chizma

Endi OF katetdagi $F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}$ nuqtalardan FE gipotenuzaga parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz. Bu to'g'ri chiziqlarning OE kateti bilan kesishgan nuqtalari $E_1, E_2, \ldots, E_{n-1}$ bo'lsin. Ravshanki, bu nuqtalar OE da $OE_1, E_1E_2, \ldots, E_{n-1}E$ kesmalarni hosil qiladi. Demak, OE birlik kesma n ta $OE_1, E_1E_2, \ldots, E_{n-1}E$ kesmalarga ajraldi. Fales teoremasiga ko'ra bu kesmalar bir-biriga teng bo'ladi. Demak, OE_1 kesma OE kesmaning $\frac{1}{n}$ qismiga teng.

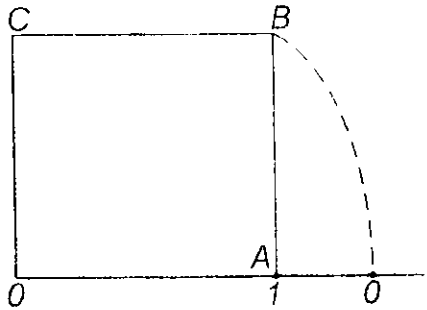
Masshtab kesma OE ning $\frac{1}{n}$ qismi bo'lgan OE_1 kesmani O nuqtadan boshlab o'ng va chap tomonlarga qo'yamiz. Bu kesmaning bir uchi O nuqtada bo'lib, ikkinchi uchi esa o'ng tomondagi nurda $M_{\frac{1}{n}}$, chap tomondagi nurda esa $M_{-\frac{1}{n}}$ nuqtalarni belgilaylik. Endi $\frac{1}{n}$ va $-\frac{1}{n}$ sonlarga $M_{\frac{1}{n}}$ va $M_{-\frac{1}{n}}$ nuqtalarni mos qo'yamiz. OE_1 kesmani O nuqtadan uning o'ng va chap tomonlaridagi nurga ketma-ket m marta qo'yish natijasida $\frac{m}{n}$ hamda $-\frac{m}{n}$ ratsional sonlarni geometrik tasvirlovchi $M_{\frac{m}{n}}$ va $M_{-\frac{m}{n}}$ nuqtalarni topamiz. Shu yo'l bilan sonlar o'qida $r = \frac{m}{n} \in Q$ sonni geometrik tasvirlovchi nuqta topiladi. Masalan, ushbu $\frac{5}{4} \in Q$ sonni tasvirlovchi nuqtani topish uchun avval masshtab birligini O nuqtadan o'ng tomonga bir marta joylashtirib, M_1 nuqta topiladi. So'ngra bu M_1 nuqtadan boshlab masshtab birligining $\frac{1}{4}$ qismini qo'yib, $\frac{5}{4}$ sonni geometrik ifodalovchi M_r nuqtani topamiz.

Shunday qilib, ratsional sonlar to'plamidan olingan ixtiyoriy $r = \frac{m}{n}$ $(m \in Z, n \in N)$ songa to'g'ri chiziqda bitta M_r nuqta mos keladi.

Bundan keyin qulaylik uchun $r \in Q$ songa to'g'ri chiziqda mos keladigan nuqtani M_r kabi belgilamasdan r nuqta deb olaveramiz. Ratsional songa mos keladigan to'g'ri chiziqdagi nuqta ratsional nuqta ham deb ataladi.

5⁰. Ratsional sonlar to'plamini kengaytirish zaruriyati. Biz avvalgi bandda har bir ratsional songa to'g'ri chiziqda bitta nuqta (ratsional nuqta) mos qo'yilishini ko'rib o'tdik. Ammo to'g'ri chiziqda shunday nuqtalar borki, ular birorta ham ratsional songa mos qo'yilgan bo'lmaydi. Shuni ko'rsataylik.

Tomoni bir birlikka teng bo'lgan $OABC$ kvadratni qaraylik (9 – chizma).



9 – chizma

Bu kvadratning diagonali OB r_1 ning uzunligi $\sqrt{2}$ ga teng. Sirkulning uchini O nuqtaga qo'yib, radiusi OB ga teng bo'lgan aylana chizaylik. Bu aylana OA tomon joylashgan to'g'ri chiziqni D nuqtada kesadi.

$OA < OB$ bo'lgani uchun D nuqta A nuqtadan o'ngda joylashgan bo'ladi. Ravshanki, $OB = OD = \sqrt{2}$ demak, D nuqtaga $\sqrt{2}$ son mos keladi. $\sqrt{2}$ esa ratsional son emas. Bu quyidagi teoremada isbotlanadi.

1–teorema. *Ratsional sonlar to'plami Q da kvadrati 2 ga teng bo'lgan ratsional son mavjud emas.*

◀Teskarisini faraz qilaylik, ya'ni Q to'plamda shunday qisqarmaydigan $\frac{p}{n}$ $(p\in Z, n\in N)$ kasr ko'rinishda yoziladigan ratsional son borki, bu

$$\left(\frac{p}{n}\right)^2=2$$

tenglik o'rinli bo'lsin. Yuqoridagi tenglikni quyidagicha

$$p^2=2n^2$$

yozib olamiz. Bundan p juft son ekanligi ko'rinadi. Demak, $p=2m$, $m\in Z$. Natijada

$$n^2=2m^2$$

hosil bo'ladi. Bu esa n sonning ham juft ekanligini ko'rsatadi. Demak, yuqoridagi farazdan p va n sonlar juft sonligi kelib chiqadi. Binobarin, ular uchun 2 umumiy ko'paytuvchi. Bu esa $\frac{p}{n}$ sonning qisqarmaydigan kasr ekaniga zid ▶

Shunday qilib, to'g'ri chiziqda olingan har bir nuqtaga Q to'plamda unga mos keladigan ratsional son mavjud bo'lavermas ekan.

Ayni paytda

$$x^2-2=0$$

tenglama ham ratsional sonlar to'plami Q da yechimga ega bo'lmaydi. Bundan ratsional sonlar to'plamini kengaytirish zarurati kelib chiqadi. Demak, ratsional sonlar to'plamiga yangi tipdagi sonlarni qo'shib, uni shunday kengaytirish kerakki, bir tomondan, sonlarning bu kengaytirilgan to'plamida $x^2-2=0$ tenglamani yechish va shu kabi ko'pgina masalalarni hal qilish mumkin bo'lsin, ikkinchi tomondan esa, ratsional sonlar to'plamining barcha xossalari sonlarning kengaytirilgan to'plamida ham o'rinli bo'lsin.

Ratsional sonlar to'plamini kengaytirishda bir–biriga ekvivalent bo'lgan bir nechta usullar mavjud (Koshi usuli, Kantor usuli, Veyershtrass usuli hamda Dedekind usuli). Biz quyida Dedekind usulini keltiramiz.

2–§. Ratsional sonlar to'plamida kesim

1⁰. Kesim. Irratsional son ta'rifi. Q to'plamda bajarilgan kesim tushunchasi bilan tanishaylik.

5–ta'rif. Ratsional sonlar to'plami Q shunday A va A' to'plamlarga ajratilsaki, bunda

1). $A \neq \emptyset, A' \neq \emptyset$,

2). $A \cup A' = Q$,

3). $\forall a \in A, \forall a' \in A' \Rightarrow a < a'$

shartlar qanoatlantirilsa, A va A' to'plamlar Q to'plamda *kesim bajaradi* deb aytiladi. Bunda A to'plam kesimning quyi sinfi, A' esa yuqori sinfi deyiladi.

Masalan: 1). 5 va undan kichik bo'lgan barcha ratsional sonlardan iborat to'plam A, 5 dan katta bo'lgan barcha ratsional sonlar to'plami A' bo'lsin: $A = \{r : r \in Q, r \leq 5\}, A' = \{r : r \in Q, r > 5\}$. Bu A va A' to'plamlar uchun 5- ta'rifdagi uchchala shartning bajarilishini ko'rish qiyin emas. Demak, bunday tuzilgan A va A' to'plamlar Q da kesim bajaradi.

2). B to'plam deb 1 va 2 ratsional sonlar orasidagi barcha ratsional sonlardan iborat bo'lgan $B = \{r : r \in Q, 1 < r < 2\}$ to'plamni, B' to'plam deb 1 va undan kichik bo'lgan barcha ratsional sonlar hamda 2 va undan katta bo'lgan barcha ratsional sonlardan iborat

$$B' = \{r : r \in Q, r \leq 1\} \cup \{r : r \in Q, r \geq 2\}$$

to'plamni olaylik. Ravshanki, $B \neq \emptyset, B' \neq \emptyset$ hamda $B \cup B' = Q$, ammo B to'plamdan olingan har bir ratsional son B' to'plamdan olingan istalgan ratsional sondan har doim kichik bo'lmaganligi sababli, bunday tuzilgan B va B' to'plamlar Q to'plamda kesim bajarmaydi (kesim ta'rifidagi uchinchi shart bajarilmaydi).

3). Ushbu $C' = \{r : r \in Q, r \leq 1\}, C'' = \{r : r \in Q, 1 < r \leq 5\}$ to'plamlarni olaylik. Bunda $C' \neq \emptyset, C'' \neq \emptyset$ bo'lib, C' to'plamning har bir elementi C'' to'plamning istalgan elementidan kichikdir. Ammo $C' \cup C'' \neq Q$ bo'lgani uchun bu C' va C'' to'plamlar Q da kesim bajarmaydi (kesim ta'rifidagi ikkinchi shart bajarilmaydi).

2.1–misol. Aytaylik $r_0 \in Q$ bo'lib, $A = \{r : r \in Q, r \leq r_0\}$ va $A' = \{r : r \in Q, r > r_0\}$ bo'lsin. Bu to'plamlar Q da kesim bajarilishini ko'rsatilsin.

◄Olingan $r_0 \in Q$ son A to'plamga tegishli. Binobarin $A \neq \emptyset$. Endi

$$r_0 \in Q, \quad r_0 + 1 \in Q \text{ va } r_0 + 1 > r_0$$

bo'lishidan $r_0 + 1 \in A'$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, $A' \neq \emptyset$

Ravshanki, $A\cup A'=\{r: r\in Q, r\le r_0\}\cup\{r: r\in Q, r>r_0\}=Q$. Bu kesim ta'rifining ikkinchi sharti bajarilishini ko'rsatadi. Agar $\forall a\in A, \forall a'\in A'$ bo'lsa, undan $a\le r_0, a'>r_0$ ya'ni $a\le r_0<a'$ ekani kelib chiqadi. Demak, $a<a'$ va kesim ta'rifining 3 – sharti ham bajariladi. Shunday qilib, A va A' to'plamlar Q da kesim bajaradi.▶

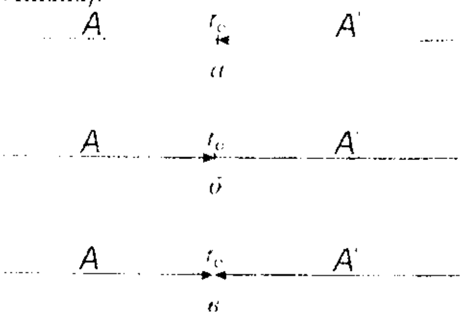
Odatda bu kesimni

$$r_0=(A, A')$$

kabi ham belgilanadi. Bu kesimning quyi sinfi A to'plamda (uning elementlari orasida) eng katta element mavjud bo'lib, u r_0 ekanligi ravshandir. Ammo kesimning yuqori sinfi A' to'plamda esa (uning elementlari orasida) eng kichik element mavjud emas.

◀$r_0=(A, A')$ kesimning yuqori sinfi A' elementlari orasida eng kichigi mavjud bo'lsin deb faraz qilamiz. Uni r^* deb belgilaylik: $r^*\in A'$. Kesim ta'rifiga ko'ra $r_0<r^*$ bo'ladi. Ratsional sonlar to'plami zich to'plam bo'lgani uchun shunday t ratsional son mavjudki $r_0<t<r^*$ bo'ladi. A' ning tuzilishiga binoan topilgan t uchun $t\in A'$ bo'lishi kerak. Demak, A' da r^* dan kichik bo'lgan t son mavjud. Vaholanki, biz r^* ni A' ning eng kichik elementi deb olgan edik.▶

Bunday kesimlarni quyi sinfi yopiq, yuqori sinfi ochiq kesimlar va r_0 sonni esa A to'plamni yopuvchi element deb ataladi (10(a) – chizma).



10 – chizma

2.2–misol. Ushbu $B=\{r: r\in Q, r<r_0\}$ va $B'=\{r: r\in Q, r\ge r_0\}$

to'plamlar Q da kesim bajarishi ko'rsatilsin.

◀Yuqorida keltirilgan 2.1 misoldagidek ko'rsatish mumkinki, Q da bu B va B' to'plamlar (B, B') kesim bajariladi.▶

Bu holda (B, B') kesimning quyi sinfi B to'plamda (uning elementlari orasida) eng katta element mavjud emas, kesimning yuqori sinfi B' to'plamning elementlari orasida eng kichik element mavjud. B quyi sinf ochiq, yuqori sinf B' esa yopiq bo'lib, r_0 ratsional son esa B' to'plamni yopuvchi element bo'ladi. (10(б) – chizma).

2.3–misol. Kubi 2 dan kichik bo'lgan barcha ratsional sonlardan iborat to'plam C, kubi 2 dan katta bo'lgan barcha ratsional sonlardan iborat to'plam C' bo'lsin: Kubi 2 ga teng bo'lgan ratsional son mavjud emasligi 1 – teoremadagidek isbot etiladi

$$C=\{r : r\in Q, r^3<2\},\quad C'=\{r : r\in Q, r^3>2\}$$

Bu C va C' to'plamlar Q da kesim bajarish ko'rsatilsin.

◀C va C' to'plamlar tuzilishidan kesim ta'rifidagi barcha shartlarining bajarilishini topamiz.

Bu misoldagi (C, C') kesimda, kesimning quyi sinfi C to'plam elementlari orasida eng katta element, shuningdek yuqori sinfi C' to'plam elementlar orasida eng kichik element mavjud emasligini ko'rsatamiz. C to'plamdan r_0 sonni ($r_0 \in A,\ r_0 > 1$) olib, uning yordamida ushbu

$$r_1 = r_0 + \frac{2-r_0^3}{3r_0^2+3r_0+1} \qquad \left(0<\frac{2-r_0^3}{3r_0^2+3r_0+1}<1\right)$$

ratsional sonni hosil qilamiz. Bu r_1 ratsional sonning kubi 2 dan kichik bo'ladi: $r_1^3<2$. Haqiqatdan ham,

$$r_1^3=\left(r_0+\frac{2-r_0^3}{3r_0^2+3r_0+1}\right)^3=r_0^3+3\,\frac{2-r_0^3}{3r_0^2+3r_0+1}\,r_0^2+$$

$$+3\left(\frac{2-r_0^3}{3r_0^2+3r_0+1}\right)^2\cdot r_0+\left(\frac{2-r_0^3}{3r_0^2+3r_0+1}\right)^3<r_0^3+3r_0^2\,\frac{2-r_0^3}{3r_0^2+3r_0+1}+$$

$$+3r_0\,\frac{2-r_0^3}{3r_0^2+3r_0+1}+\frac{2-r_0^3}{3r_0^2+3r_0+1}=r_0^3+\frac{2-r_0^3}{3r_0^2+3r_0+1}\left(3r_0^2+3r_0+1\right)=2$$

Demak, $r_0<r_1\in C$ ya'ni $r_0\in C$ sondan katta bo'lgan r_1 ratsional

son ham C' to'plamga tegishli bo'ladi.

Shunday qilib, ixtiyoriy $r_0 \in C'$ ratsional son berilganda ham kamida bitta shunday r_1 ratsional son topilar ekanki, u $r_1 > r_0$ va $r_1 \in C'$. Bu esa C' to'plamning elementlari orasida eng kattasi mavjud emasligini ko'rsatadi.

Endi (C', C'') kesimning yuqori sinfi C'' to'plamning elementlari orasida eng kichigi mavjud emasligini isbotlaymiz. $r_0' \in C''$ $(r_0' > 1)$ bo'lsin. Demak, $r_0'^3 > 2$.

Ushbu

$$r_1' = r_0' - \frac{r_0'^3 - 2}{3r_0'^2} \qquad \left(0 < \frac{r_0'^3 - 2}{3r_0'} < 1\right)$$

ratsional sonni qaraylik. Bu r_1' ratsional sonning kubi 2 dan katta bo'ladi: $r_1'^3 > 2$. Haqiqatan ham,

$$r_1'^3 = \left(r_0' - \frac{r_0'^3 - 2}{3r_0'^2}\right)^3 = r_0'^3 - 3\frac{r_0'^3 - 2}{3r_0'^2} r_0'^2 + 3\left(\frac{r_0'^3 - 2}{3r_0'^2}\right)^2 r_0' -$$

$$- \left(\frac{r_0'^3 - 2}{3r_0'^2}\right)^3 > r_0'^3 - (r_0'^3 - 2) = 2.$$

Demak, $r_1' < r_0' \in C''$ ya'ni $r_0' \in C''$ sondan kichik bo'lgan r_1' ratsional son ham C'' to'plamga tegishli bo'ladi.

Shunday qilib, ixtiyoriy $r_0' \in C''$ ratsional son berilganda ham kamida bitta, shunday r_1' ratsional son topilar ekanki, u $r_1' < r_0'$ va $r_1' \in C''$. Bu esa C'' to'plamning elementlari orasida eng kichigi mavjud emasligini anglatadi.►

Shunday qilib, ko'rsatilayotgan misolda (C', C'') kesim uchun quyi sinf C' ham, yuqori sinf C'' ham ochiq bo'lib, C' va C'' to'plamlarning yopuvchi elementlari mavjud emas (10(в) - chizma).

2.4-misol. Ratsional sonlar to'plami Q da ham quyi sinf D to'plamining elementlari orasida eng kattasi, ham yuqori sinf D' to'plamining elementlari orasida eng kichigi bo'lgan (D, D') kesim mavjud emasligi isbotlansin.

◄Faraz qilaylik, Q to'plamda shunday (D, D') kesim mavjud bo'lsinki, a_0 son D to'plamning eng katta elementi, a_0' esa D' to'plamning eng kichik elementi bo'lsin. U holda kesim ta'rifiga ko'ra $a_0 < a_0'$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Ravshanki,

$$a_0 < \frac{a_0 + a_0'}{2} < a_0'$$

Bunda $\frac{a_0 + a_0'}{2}$ ratsional son D to'plamga tegishli emas, chunki a_0 son D to'plamning eng katta elementi va $a_0 < \frac{a_0 + a_0'}{2}$. Shuningdek, $\frac{a_0 + a_0'}{2}$ ratsional son D' to'plamiga ham tegishli emas, chunki a_0' son D' to'plamning eng kichik elementi va $\frac{a_0 + a_0'}{2} < a_0'$. Demak, $\frac{a_0 + a_0'}{2}$ ratsional son D to'plamga ham, D' to'plamga ham tegishli bo'lmaydi. Bu esa kesim ta'rifiga ziddir. Shunday qilib, bir vaqtda quyi sinfida eng katta elemant, yuqori sinfida esa eng kichik element bo'lgan kesim mavjud emas.▶

Ratsional sonlar to'plami Q da bajarilgan kesim ta'rifi va kesimga keltirilgan misollardan quyidagi xulosani keltirib chiqarish mumkin. Q to'plamda bajarilgan (A, A') kesim faqat uch turli bo'lishi mumkin:

1). Kesimning quyi sinfi A da eng katta element (r_0 ratsional son) mavjud, kesimning yuqori sinfi A' da esa eng kichik element mavjud emas. Bunda r_0 ratsional son quyi sinf yopuvchi elementi bo'ladi.

2). Kesimning quyi sinfi A da eng katta element mavjud emas, kesimning yuqori sinfi A' da esa kichik element (r_0' ratsional son) mavjud. Bunda r_0' ratsional son yuqori sinf A' ning yopuvchi elementi bo'ladi.

3). Kesimning quyi sinfi A da eng katta element mavjud emas, kesimning yuqori sinfi A' da eng kichik element mavjud emas. Bunda quyi sinf A da, yuqori sinf A' da yopuvchi elementlar mavjud emas.

Birinchi va ikkinchi tur kesmlarda ularning quyi yoki yuqori sinflari yopiq bo'lib, yopuvchi elementlarni bir sinfdan ikkinchi sinfga o'tkazib, har doim bir turdagi kesmga quyi sinfi ochiq, yuqori sinfi esa yopiq bo'lgan kesimga keltirish mumkin. Biz bundan buyon birinchi va ikkinchi tur kesimlar o'rniga bir tur kesimni, quyi sinfda eng katta element mavjud bo'lmagan (ochiq sinf), yuqori sinfda esa eng kichik element mavjud bo'lgan (yopiq sinf) kesimni qaraymiz. Bunday kesimlarni ratsional kesim deb ataymiz.

Ixtiyoriy $r \in Q$ ratsional son uchun Q to'plamda har doim (A,A') kesim bajarilishi mumkinki, bu kesim ratsional kesim bo'ladi, bunda A to'plam ochiq sinf, A' to'plam yopiq sinf, yopuvchi element r sonning o'zi bo'ladi. Demak, Q to'plamda olingan har bir ratsional songa Q da bajarilgan ratsional kesim mos keladi.

Aksincha, Q to'plamda (A,A') kesim bajarilgan bo'lib, kesimning quyi sinfi A ochiq, yuqori sinfi A' yopiq hamda yopuvchi element r bo'lsa, bu kesim r ratsional sonni ifodalaydi.

Demak, Q da bajarilgan har bir ratsional kesim bitta ratsional sonni aniqlaydi.

Shunday qilib, Q to'plam elementlari bilan Q to'plamda bajarilgan ratsional kesimlar to'plamining elementlari o'zaro bir qiymatli moslikda bo'ladi.

Ratsional sonlar to'plami Q da bajarilgan uchinchi tur kesim quyi sinf ham, yuqori sinf ham ochiq bo'lgan kesim irratsional kesim deyiladi.

6–ta'rif. Ratsional sonlar to'plami Q da bajarilgan irratsional kesim *irratsional sonni* aniqlaydi deyiladi.

Irratsional sonlar to'plamini I' harf bilan belgilaylik.

3–§. Haqiqiy sonlar. Haqiqiy sonlar to'plamining tartiblanganlik va zichlik xossalari.

Ratsional sonlar to'plami Q da bajarilgan kesim faqat ikki tur ratsional yoki irratsional sonni aniqlashini biz yuqorida ko'rdik.

7–ta'rif. Ratsional hamda irratsional sonlar umumiy nom bilan *haqiqiy sonlar* deb ataladi.

Barcha haqiqiy sonlar to'plami R harfi bilan belgilanadi. Ta'rifga ko'ra, $R = Q \cup I'$. R – lotincha Realis– "haqiqiy" degan ma'noni anglatuvchi so'zning bosh harfi.

Shunday qilib, ratsional sonlar to'plami Q ni haqiqiy sonlar to'plami R gacha kengaytirildi.

1°. Haqiqiy sonlar to'plamining tartiblanganligi. Avval haqiqiy sonlar to'plamida tenglik, katta va kichik tushunchalarini kiritamiz.

Aytaylik, x va y haqiqiy sonlar berilgan bo'lsin: $x\in R$, $y\in R$. Ma'lumki, har bir haqiqiy son ratsional sonlar to'plami Q da bajarilgan kesim bilan aniqlanadi. Binobarin, x va y larni aniqlovchi (A, A') va (B, B') kesimlar berilgan:

$$x=(A,A'),\quad y=(B,B')$$

Bu kesimlarning quyi sinflari A, B lar uchun yoki $A=B$ (bu holda, albatta, $A'=B'$ bo'ladi), yoki $A\neq B$ (bu holda $A'\neq B'$) munosabatlardan biri o'rinli bo'ladi.

Agar $A=B$ bo'lsa, (A,A') va (B,B') kesimlar bir-biriga teng deyiladi: $(A,A')=(B,B')$. Bu holda ular aniqlangan x va y haqiqiy sonlar ham bir-biriga teng deyiladi: $x=y$.

Endi $A\neq B$ bo'lsin. Unda shunday $r_1\in A$ borki, $r_1\notin B$ bo'ladi, yoki shunday $r_2\in B$ borki, $r_2\notin A$ bo'ladi. Birinchi holda $r_1\in A\cap B'$ ekanligi kelib chiqadi. Kesimning ta'rifiga ko'ra, bu holda $B\subset A$ bo'ladi. Ikkinchi holda esa $r_2\in B\cap A'$ ekanligidan $A\subset B$ kelib chiqadi.

Shunday qilib, $A\neq B$ bo'lganda yo $A\subset B$ yoki $B\subset A$ bo'lar ekan.

Agar $A\subset B$ bo'lsa, (A,A') kesim (B,B') kesimdan kichik deyiladi. Bu holda x haqiqiy son y haqiqiy sondan kichik deb ataladi: $x<y$.

Agar $A\supset B$ bo'lsa, (A,A') kesim (B,B') kesimdan katta deyiladi. Bu holda x haqiqiy son y haqiqiy sondan katta deyiladi: $x>y$.

Shunday qilib, ixtiyoriy ikki x va y haqiqiy sonlar berilgan bo'lsa, unda

$$x=y,\quad x<y,\quad x>y$$

munosabatlardan bittasi va faqat bittasi o'rinli bo'ladi.

Endi $x\in R, y\in R, z\in R$ sonlar uchun ushbu $x<y$, $y<z$ tensizliklardan $x<z$ tengsizlik kelib chiqishni isbotlaymiz. x, y, z sonlarni aniqlovchi kesimlar

$$x=(A,A'),\ y=(B,B'),\ z=(C,C')$$

bo'lsin.

Aytaylik, $x<y$ va $y<z$ bo'lsin. Ta'rifga asosan

$$x<y\Rightarrow A\subset B,\ y<z\Rightarrow B\subset C$$

bo'ladi. Ravshanki,

$$A<B,\ B<C \Rightarrow A<C.$$

Bundan $x<z$ bo'lishi kelib chiqadi.

R to'plamning bunday xususiyatga ega bo'lishi uning tartiblanganligini ifodalaydi.

2⁰. Haqiqiy sonlar to'plamining zichligi. Faraz qilaylik, $x\in R, y\in R$ va $x<y$ bo'lsin. U holda shunday r ratsional son mavjudki, shu son uchun ushbu $x<z<y$ tengsizliklar o'rinli bo'ladi. Shuni isbotlaylik.

Q to'plamda bajarilgan (A,A'), (B,B') kesimlar x va y sonlarni aniqlansin: $x=(A,A')$, $y=(B,B')$. U holda $x<y$ dan $A\subset B$ kelib chiqadi. Demak, B to'plamda shunday ratsional son $r_0\in B$ mavjudki, $r_0\notin A$ bo'ladi. $r_0\in B$. Unda $r_0\in A'$ bo'ladi va demak, $x\le r_0$ tensizlik o'rinli bo'ladi. Ikkinchi tomondan, $y=(B,B')$, $r_0\in B,B$ to'plamning elementlari orasida eng kattasi mavjud emasligi sababli, shunday ratsional son $r\in B$ mavjudki, $r_0<r$ va $r<y$ bo'ladi. Natijada $x\le r_0<r<y$ tengsizliklarga ega bo'lamiz. Bundan esa $x<r<y$ ekanligini ko'ramiz. Shu usul bilan $x\in R, y\in R$ va $x>y$ bo'lganda ham $x>r>y$ munosabatlarni qanoatlantiruvchi ratsional son r mavjud ekanligi ko'rsatiladi. Shunday qilib, ixtiyoriy ikkita bir biriga teng bo'lmagan haqiqiy sonlar orasida kamida bitta haqiqiy son mavjud. Bundan esa ular orasida cheksiz ko'p haqiqiy son mavjudligi kelib chiqadi. R to'plamning bunday xususiyatiga ega bo'lishi uning zich to'plam ekanini ifodalaydi.

4-§. Haqiqiy sonlar to'plamning to'liqligi. Dedekind teoremasi

Agar haqiqiy sonlar to'plami R da ham bajarilgan kesim tushunchasi kiritilsa, ratsional sonlar to'plami Q da sodir bo'lganidek, R ni ham kengaytirish zarurati sodir bo'ladimi yoki yo'qmi degan tabiiy savol tug'iladi. Quyida biz bunday holat bo'lmasligini, ya'ni R da bajarilgan har qanday kesim faqat birinchi tur kesim bo'lishini ko'rsatamiz. Odatda bu xossa haqiqiy sonlar to'plami R ning to'liqlik xossasi deyiladi. Dastavval, R da bajarilgan kesim tushunchasi bilan tanishaylik.

8-ta'rif. Haqiqiy sonlar to'plami R shunday E va E' to'plamlarga ajratilsaki, unda

1) $E \neq \emptyset$, $E' \neq \emptyset$,

2) $E \cup E' = R$

3) $\forall x \in E$, $\forall x' \in E' \Rightarrow x < x'$

shartlar bajarilsa, E va E' to'plamlar R *to'plamda kesim bajaradi* deyiladi va (E, E') kabi belgilanadi (5 – ta'rifga qarang)

Avvalgidek, E to'plam kesimning *quyi sinfi*, E' to'plam esa kesimning *yuqori sinfi* deyiladi.

Masalan, ushbu

$$F = \{x : x \in R, x \le x_0\},\ F' = \{x : x \in R, x > x_0\} \qquad (x_0 \in R)$$

to'plamlar R da (F, F') kesim bajaradi. Bu kesimning quyi sinfi F da eng katta element ($y = x_0$ ga teng) bo'lib, yuqori sinfi F' da eng kichik element bo'lmaydi.

Ushbu

$$F = \{x : x \in R, x < x_0\},\ F' = \{x : x \in R, x \ge x_0\} \qquad (x_0 \in R)$$

to'plamlar ham R da (F, F') kesimini bajaradi. Bu kesimning quyi sinfi F da eng katta element bo'lmasdan, yuqori sinfi F' da eng kichik element ($y = x_0$ ga teng) bo'ladi.

2.5–misol. Haqiqiy sonlar to'plami R da quyi sinf G to'plamning elementlari orasida eng katta, yuqori sinf G' to'plamning elementlari orasida eng kichik element bor bo'lgan (G, G') kesim mavjud emasligi isbotlansin.

◀ (G, G') kesim R da bajarilgan kesim bo'lib, unda G ning eng katta elementi x_0 va G' ning eng kichik elementi y_0 bo'lsin. Kesim ta'rifiga ko'ra, $x_0 < y_0$ bo'ladi. R to'plamning zichlik xossasiga binoan shunday $u \in R$ son mavjudki, $x_0 < u < y_0$ bo'ladi. Keyingi tengsizliklardan ko'rinadiki, u son G ga tegishli emas, chunki x_0 son G da eng katta element va $x_0 < u$. Shuningdek, $u < y_0$ va y_0 son G' to'plamning eng kichik elementi ekanidan u sonning G' ga tegishli emasligi kelib chiqadi. Shunday qilib, $u \in R$ son G va G' to'plamlarning birortasiga ham tegishli bo'lmaydi. Bundan G va G' to'plamlar R da kesim bajarilmasligi kelib chiqadi. Bu esa yuqoridagi farazga zid. ▶

Demak, R to'plamda bir vaqtda quyi hamda yuqori sinflari yopiq bo'lgan kesim mavjud emas.

2–teorema (Dedekind teoremasi). *Haqiqiy sonlar to'plami R da bajarilgan har qanday (E, E') kesim uchun faqat quyidagi ikki holdan biri bo'lishi mumkin:*

a). Kesimning quyi sinfi E da eng katta elementi mavjud, yuqori sinf E' da esa eng kichik element mavjud emas;

b). Kesimning quyi sinfi E da eng katta element mavjud emas, yuqori sinf E' da esa eng kichik element mavjud.

◀Faraz qilaylik, R da biror (E,E') kesim bajarilgan bo'lsin. E to'plamning barcha ratsional sonlari to'plamini A, E' to'plamning barcha ratsional sonlari to'plamini A' deylik. Ravshanki, $A\subset E, A'\subset E'$. Bu tuzilgan A va A' to'plamlar Q da (A,A') kesim bajarishini ko'rsatamiz. Avvalo A va A' to'plamlarning bo'sh emasligini isbotlaylik.

$E\neq\emptyset$ bo'lgani uchun $\exists x_0\in R, x_0\in E$. Agar x_0 ratsional son bo'lsa, $x_0\in A$ bo'lib, $A\neq\emptyset$ bo'ladi. Agar x_0 irratsional son bo'lsa, ta'rifiga ko'ra u Q to'plamdagi ikkinchi tur kesim bilan aniqlanadi. Demak, $x_0=(A_0,B_0)$. Bunda $A_0\neq\emptyset$ bo'lgani sababli, $\exists r_0\in Q$, $r_0\in A_0$ bo'ladi. Ammo $r_0<x_0$ va $x_0\in E$ bo'lganida esa $r_0\in A$ ekani kelib chiqadi. Demak, $A\neq\emptyset$ xuddi shuningdek, $A'\neq\emptyset$ ekani ham ko'rsatiladi. $R=E\cup E'$ dan va A, A' to'plamlarning tuzilishiga ko'ra $A\cup A'=Q$ bo'ladi.

(E,E') kesim R da bajarilgan kesimligidan va $A\subset E, A'\subset E'$ dan mos ravishda A va A' to'plamlarga tegishli a va a' elementlar uchun $a<a'$ tengsizlik o'rinli. Demak, (A,A') kesim. Bu kesim biror haqiqiy α sonni (ratsional yoki irratsional sonni) aniqlaydi: $\alpha=(A,A'), \alpha\in R$. Kesimning 2) shartiga ko'ra α son yoki E to'plamga, yoki E' to'plamga tegishli bo'ladi. $\alpha\in E$ bo'lsin. Endi α son E to'plam elementlari orasida eng kattasi ekanini isbotlaymiz. Teskarisini faraz qilaylik, ya'ni α son to'plam E elementlari orasida eng kattasi bo'lmasin. Unda $\exists x\in E: \alpha<x$ bo'ladi. Haqiqiy sonlar to'plami zichligiga ko'ra shunday r ratsional son mavjudki, $\alpha<r<x$ tengsizliklar o'rinli bo'ladi. Ushbu $x\in E$ va $r<x$ munosabatlardan $r\in E$ va demak, $r\in A$ kelib chiqadi. Ammo $\alpha=(A,A')$ kesimning quyi sinfi A to'plamdagi r son bu (A,A') kesim aniqlagan sondan katta bo'lishi mumkin emas. Bu ziddiyatlik. Demak, α son E to'plam elementlari orasida eng kattasi bo'ladi.

Shunga o'xshash mulohaza bilan $\alpha\in E'$ bo'lganda α son E' to'plam elementlari orasida eng kichigi ekani ko'rsatiladi. ▶

Dedekind teoremasiga ko'ra haqiqiy sonlar to'plami R da bajarilgan har qanday (E,E') kesim uchun ikki hol bo'ladi.

Bunda E yoki E' sinflarning yopuvchi elementlarini biridan ikkinchisiga o`tkazish yo`li bilan bitta holga, kesimni bir tur kesimga keltirish mumkin. Biz R da bajarilgan har qanday kesim (E,E') da kesimning quyi sinfi E da eng katta element yo`q, yuqori sinf $E'$ da esa eng kichik element bor bo`lgan kesim deb qaraymiz. Bu esa Dedekind teoremasini quyidagicha ham ifodalash mumkinligini ko`rsatadi.

3–teorema. *R da bajarilgan har qanday (E,E') kesim yagona haqiqiy sonni aniqlaydi.*

$\forall a \in R$ son yordamida har doim R da a (E,E') kesim bajarish mumkinki, bunda haqiqiy son a kesimning yuqori sinfi E' ga tegishli bo`lib, uning eng kichik elementi bo`ladi. Aksincha, R da (E,E') kesim bajarilgan bo`lsin. 2–teoremaga va yuqoridagi kelishuvimizga ko`ra bu kesimning yuqori sinfi E' da eng kichik element mavjud bo`lib, kesim shu sonni ifodalaydi.

Demak, haqiqiy sonlar to`plami $R$ shu to`plamda bajarilgan kesimlar to`plami bilan o`zaro bir qiymatli moslikda bo`ladi.

5–§. Sonli to`plamlarning chegaralari

**1⁰. Sonli to`plamlar.** Elementlari haqiqiy sonlardan iborat bo`lgan to`plam sonli to`plam deyiladi. Matematik analiz kursida asosan sonli to`plamlar qaraladi.

Masalan,

$$A = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\},\ B = \{x : x \in R,\ x^3 - x = 0\}$$

shuningdek

$$N,\ Z,\ Q,\ R$$

lar sonli to`plamlar bo`ladi.

Kurs davomida har doim uchrab turadigan sonli to`plamlarni keltiramiz.

Ikki $a \in R, b \in R$ son berilgan bo`lib, $a < b$ bo`lsin. Ushbu

$$\{x : x \in R,\ a \le x \le b\}$$

to`plam *segment* deb ataladi va u $[a,b]$ kabi belgilanadi:

$$[a,b] = \{x : x \in R,\ a \le x \le b\}$$

Bunda a va b sonlar $[a,b]$ segmentning *chegaraviy nuqtalari* yoki *chegaralari* deyiladi.

Ushbu

$$\{x : x \in R,\ a < x < b\}$$

to'plam *interval* deyiladi va u (a,b) kabi belgilanadi:

$$(a,b)=\{x: x\in R,\ a<x<b\}$$

Quyidagi

$$\{x: x\in R,\ a\le x<b\},\quad \{x: x\in R,\ a<x\le b\}$$

to'plamlar *yarim segment* deyiladi va ular mos ravishda $[a,b)$ va $(a,b]$ kabi belgilanadi:

$$[a,b)=\{x: x\in R,\ a\le x<b\},\ (a,b]=\{x: x\in R,\ a<x\le b\}$$

Keyingi mulohazalarda asosan sonli to'plamlar bilan ish ko'riladi. Shuning uchun bundan keyin E "sonli to'plam" deyish o'rniga qisqacha "to'plam" so'zini yoki $E\subset R$ belgilashni ishlatamiz.

2⁰. To'plamning aniq yuqori va aniq quyi chegaralari. Biror $E\subset R$ to'plam berilgan bo'lsin.

9–ta'rif. Agar shunday M son mavjud bo'lsaki, $\forall x\in E$ uchun $x\le M$ tengsizlik bajarilsa, E to'plam *yuqoridan chegaralangan* deyiladi, M son esa E ning *yuqori chegarasi* deyiladi.

Bu ta'rifni qisqacha, quyidagicha aytsa bo'ladi, agar

$$\exists M\in R\ \ \forall x\in E:\ x\le M$$

bo'lsa, E to'plam yuqoridan chegaralangan deyiladi, M son esa E ning yuqori chegarasi deyiladi.

10–ta'rif. Agar

$$\forall M\in R,\ \exists x_0\in E:\ x_0>M$$

bo'lsa, E to'plam *yuqoridan chegaralanmagan* deyiladi.

11–ta'rif. Agar

$$\exists m\in R,\ \forall x\in E:\ x\ge m$$

bo'lsa, E to'plam *quyidan chegaralangan* deyiladi, m son esa E ning *quyi chegarasi* deyiladi.

12–ta'rif. Agar

$$\forall m\in R,\ \exists x_0\in E:\ x_0<m$$

bo'lsa, E to'plam *quyidan chegaralanmagan* deyiladi.

13–ta'rif. Agar $E\subset R$ to'plam ham quyidan, ham yuqoridan chegaralangan bo'lsa, E to'plam *chegaralangan* deyiladi.

Masalan,

$$E=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots\right\}$$

to'plam chegaralangan;

$$N=\{1,2,3,\dots\}$$

to'plam quyidan chegaralangan, yuqoridan chegaralanmagan;

$$F=\{x: x\in R,\ x<0\}$$

to'plam esa quyidan chegaralanmagan, yuqoridan chegaralangan to'plam bo'ladi.

2.6-misol. Ushbu

$$A = \left\{ x_n : x_n = \frac{n}{n^2+1} \right\}$$

to'plamning chegaralanganligi ko'rsatilsin.

◀ Ravshanki, $\forall n \in N$ da

$$\frac{n}{n^2+1} > 0$$

bo'ladi. Demak, A to'plam quyidan chegaralangan.

Agar

$$0 \le (n-1)^2 = n^2 - 2n + 1 \Rightarrow 2n \le n^2 + 1 \Rightarrow \frac{n}{n^2+1} \le \frac{1}{2}$$

bo'lishini e'tiborga olsak, unda A to'plamning yuqoridan chegaralanganligini topamiz. ▶

Yuqorida keltirilgan ta'rif va misollardan ko'rinadiki, agar E to'plam yuqoridan chegaralangan bo'lsa, uning yuqori chegarasi cheksiz ko'p bo'ladi. Bu tasdiq M sondan katta bo'lgan har qanday haqiqiy son E to'plamning yuqori chegarasi bo'la olishidan kelib chiqadi.

Shuningdek, agar E to'plam quyidan chegaralangan bo'lsa, uning quyi chegarasi ham cheksiz ko'p bo'ladi. Bu esa m sondan kichik bo'lgan har qanday haqiqiy son E to'plamning quyi chegarasi bo'la olishidan kelib chiqadi.

4-teorema. *Har qanday yuqoridan chegaralangan to'plam uchun uning yuqori chegaralari orasida eng kichigi mavjud.*

◀ E to'plam yuqoridan chegaralangan bo'lsin, ya'ni shunday haqiqiy M son mavjudki, $\forall x \in E$ uchun $x \le M$ tengsizlik o'rinli.

E ning elementlari orasida eng kattasi mavjud bo'lsin. Uni x_0 deb olaylik. Demak, $\forall x \in E$ uchun $x \le x_0$ bo'lib, bu esa x_0 son E ning yuqori chegaralari qatorida bo'lishini ko'rsatadi. Ammo E to'plamning yuqori chegarasi bo'lmish har qanday M son x_0 sondan kichik bo'lmaydi, ya'ni $x_0 \le M$ chunki $x_0 \in E$. Bu esa x_0 son E ning yuqori chegaralari orasida eng kichigi ekanligini bildiradi. Bu holda teorema isbot bo'ldi.

Endi E to'plam elementlari orasida eng kattasi mavjud bo'lmagan holni qaraymiz. E ning yuqori chegaralaridan iborat to'plam E' bo'lsin. Bu E' to'plamga tegishli bo'lmagan barcha haqiqiy sonlardan iborat to'plamni F deylik. Ravshanki, $F \cap F' = \emptyset$. F va F' to'plamlar R da (F, F') kesim bajaradi. $E \subset F'$ va E yuqoridan chegaralanganligidan $F \neq \emptyset, F' \neq \emptyset$ ekani kelib chiqadi, shuningdek, F va F' larning tuzilishidan esa $F \cup F' = R$ va $\forall x \in F, \forall x' \in F' \Rightarrow x < x'$ bo'ladi. Dedekind teoremasiga ko'ra bu (F, F') kesim biror α haqiqiy sonni aniqlaydi: $\alpha = (F, F')$. Bu α son tabiiyki, F to'plamning va demak, $E \subset F$ bo'lganidan E to'plamning ham yuqori chegarasidir, ya'ni $\alpha \in F'$ shu bilan birga u F' to'plamning elementlari orasida eng kichigi. ►

14–ta'rif. Yuqoridan chegaralangan E to'plamning yuqori chegaralarining eng kichigi E ning *aniq yuqori chegarasi* deb ataladi. U $\sup E$ kabi belgilanadi.

Bu lotincha supremum "eng yuqori" degan ma'noni anglatuvchi so'zdan olingan.

5–teorema. *Har qanday quyidan chegaralangan to'plam uchun uning quyi chegaralari orasida eng kattasi mavjud.*

Bu teorema yuqoridagi 4 –teorema kabi isbotlanadi. Uning isbotini o'quvchiga havola qilamiz.

15–ta'rif. Quyidan chegaralangan E to'plamning quyi chegaralarining eng kattasi E ning *aniq quyi chegarasi* deb ataladi. U $\inf E$ kabi belgilanadi.

Bu lotincha infimum "eng quyi" degan ma'noni anglatuvchi so'zdan olingan.

Yuqorida keltirilgan teoremalardan, har qanday chegaralangan E to'plamning aniq yuqori va aniq quyi chegaralari mavjud bo'lib,

$$\inf E \leq \sup E$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Endi to'plamning aniq yuqori hamda aniq quyi chegaralarining muhim xossasini keltiramiz.

Aytaylik, $E \subset R$ to'plam uchun

$$a = \sup E \qquad (a \in R)$$

bo'lsin. U holda:

1) $\forall x \in E$ da $x \leq a$,

2) $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham, shunday $x' \in E$ son topiladiki, $x' > a - \varepsilon$ bo'ladi.

◄ To'plamning aniq yuqori chegarasi ta'rifidan $\forall x \in E$ uchun $x \leq a$ bo'ladi.

$a = \sup E$ bo'lsa ham 2) –shart bajarilmasin deb faraz qilaylik. Unda, shunday $\varepsilon > 0$ topiladi, $\forall x \in E$ uchun $x \le a - \varepsilon$ bo'lib, $a - \varepsilon \ge \sup E$ bo'ladi. Natijada $a \le a - \varepsilon$ ma'nosiz tengsizlikka, ya'ni ziddiyatga kelamiz. Demak, 2) - shart o'rinli bo'ladi. ▶

Isbotlash mumkinki, agar $E \subset R$ va $a \in R$ uchun 1), 2) shartlar bajarilsa,

$$a = \sup E$$

bo'ladi.

Aytaylik, $E \subset R$ to'plam uchun

$$b = \inf E \qquad (b \in R)$$

bo'lsin. U holda:

1) $\forall x \in E$ da $x \ge b$

2) $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $x' \in E$ son topiladiki, $x' < b + \varepsilon$ bo'ladi.

Bu tasdiq yuqoridagi kabi isbotlanadi. Isbotlash mumkinki, agar $E \subset R$ va $b \in R$ uchun 1) -, 2) - shartlar bajarilsa

$$b = \inf E$$

bo'ladi.

2.7–misol. Ushbu

$$B = \left\{ \frac{n^2}{n^2+4} : n \in N \right\}$$

to'plamning aniq yuqori hamda aniq quyi chegaralari topilsin.

◀ $\forall n \in N$ da

$$0 < \frac{n^2}{n^2+4} < 1$$

bo'ladi. Demak, B to'plam chegaralangan. Yuqorida keltirilgan teoremalarga ko'ra bu to'plamning aniq chegaralari mavjud bo'ladi. Ayni paytda:

1) $\forall n \in N$ uchun $\frac{n^2}{n^2+4} < 1$

2) $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda $n_0 \in N$ ni

$$n_0 = \left[\sqrt{\frac{4(1-\varepsilon)}{\varepsilon}} \right]$$

deb olinsa, unda $n > n_0$ da

$$\frac{n^2}{n^2+4} > 1 - \varepsilon$$

bo'ladi. Demak,

$$\sup B = 1$$

Xuddi shunga o'xshash

$$\inf B = 0$$

bo'lishi ko'rsatiladi. ▶

Haqiqiy sonlar to'plami R tarkibiga $-\infty$ va $+\infty$ simvollarni $\forall x\in R$ uchun $x>-\infty$ va $x<+\infty$ xususiyat bilan qo'shib, $\bar{R}$ to'plamni hosil qilamiz:

$$\bar{R}=R\cup\{-\infty\}\cup\{+\infty\}$$

Bu simvollarning kiritilishi chegaralanmagan to'plamlarning aniq yuqori va aniq quyi chegaralarini kiritish imkonini beradi.

Agar E yuqoridan chegaralanmagan bo'lsa, $\sup E=+\infty$, quyidan chegaralanmagan bo'lsa, $\inf E=-\infty$ deb olinadi. Demak, shu kelishuvimizga ko'ra

$$\sup N=\sup\{1,2,3,\ldots\}=+\infty,\quad \inf\{x: x\in R,\ x<0\}=-\infty$$

bo'ladi.

6-§. Haqiqiy sonlar ustida amallar

1⁰. Haqiqiy sonlar yig'indisi. Ikki α va β haqiqiy sonlar berilgan bo'lsin. Bu sonlar ratsional sonlar to'plami Q da bajarilgan ushbu $\alpha=(A,A')$, $\beta=(B,B')$ kesimlar bilan aniqlansin. Kesimlarning quyi sinflari A va B to'plamlardan mos ravishda a va b sonlarini olib, ularning yig'indisi $c=a+b$ ni tuzamiz. Bunday yig'indilardan iborat to'plamni C bilan: $C=\{c: c\in Q,\ c=a+b;\ a\in A, b\in B\}$, so'ng $Q\setminus C$ to'plamni esa C' bilan ($C'=Q\setminus C$) belgilaymiz. Tuzilishiga ko'ra $Q=C\cup C'$.

Endi C va C' to'plamlar Q da (C,C') kesim bajarishini ko'rsatamiz. $\alpha=(A,A')$, $\beta=(B,B')$ lar Q da bajarilgan kesimlar bo'lgani uchun

$$A\neq\emptyset, A'\neq\emptyset; A\cup A'=Q; a\in A,\ a'\in A'\Rightarrow a<a',$$

shuningdek,

$$B\neq\emptyset, B'\neq\emptyset; B\cup B'=Q;\ b\in B,\ b'\in B'\Rightarrow b<b'.$$

bo'lib, undan avvalo $C\neq\emptyset$ ekani kelib chiqadi. So'ngra har doim $a+b<a'+b'$ bo'lgani uchun C to'plam yuqoridan chegaralangan bo'lib, $\sup C=\gamma$ mavjuddir. Ammo A va B to'plam elementlari orasida eng kattasi mavjud bo'lmagani uchun $a+b<\gamma$, $(a\in A, b\in B)$ bo'ladi. Unda $a'+b'\geq\gamma$, $(a'\in A', b'\in B')$, bo'lib, $a'+b'\notin C$. Bundan $a'+b'\in Q\setminus C=C'$. Demak, $C'\neq\emptyset$ shuningdek, $c=a+b\in C$ va $c<c'=a'+b'\in Q\setminus C$ ekaniga ishonch hosil qilamiz.

Shunday qilib, C va C' to'plamlar Q da (C,C') kesim bajaradi.

16-ta'rif. (C,C') kesim bilan aniqlanadigan γ haqiqiy son

α va β haqiqiy sonlarning *yig'indisi* deb ataladi. Yig'indi $\alpha+\beta$ kabi belgilanadi.

Endi haqiqiy sonlarni qo'shish amalining ba'zi xossalarini keltiramiz. Faraz qilaylik, $\alpha \in R, \beta \in R, \delta \in R$ bo'lsin. U holda quyidagi tengliklar o'rinli:

1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$;

2) $(\alpha+\beta)+\delta=\alpha+(\beta+\delta)$

3) Nol soni uchun

$$\alpha+0=0+\alpha=\alpha$$

Biz ulardan birining, masalan, 3) ning isbotini keltiramiz.

◀ Ma'lumki, 0 soni Q to'plamda (Q_-, Q_+) kesim bilan aniqlanadi:

$$Q_- = \{r : r \in Q, r < 0\}, Q_+ = \{r : r \in Q, r \geq 0\},$$

$$0=(Q_-, Q_+)$$

$\alpha \in R$ son esa $\alpha=(A, A')$ kesim bilan aniqlansin. Ta'rifga ko'ra $\alpha+0=(C, C')$ bo'lib, bunda

$$C=\{a+r; a \in A, r \in Q_-\}$$

Ammo $\alpha \in R$, $r \in Q_-$ bo'lganda $a+r<a$ munosabat o'rinli. Shuning uchun $C \subset A$ bo'ladi. Bundan

$$\alpha+0 \leq \alpha \qquad (^*)$$

ekani kelib chiqadi.

A to'plamdan ixtiyoriy a sonni olamiz. A da eng katta element mavjud bo'lmagani uchun $a<a_1$ tengsizlikni qanoatlantiradigan $a_1 \in A$ son mavjud. Unda $a=a_1+(a-a_1)$ tenglikdan $r=a-a_1<0$ bo'lishini hisobga olib, A to'plamning har bir elementini $a+r$ $(a \in A, r \in Q_-)$ ko'rinishda yozish mumkinligini aniqlaymiz. Bu esa

$$A \subset \{a+r : a \in A, r \in Q_-\}=C$$

ya'ni $A \subset C$ ekanini ko'rsatadi. Demak,

$$\alpha \leq \alpha+0 \qquad (^{**})$$

Endi $(^*)$ va $(^{**})$ munosabatlardan $\alpha+0=\alpha$ tenglikka ega bo'lamiz. ▶

2⁰. Haqiqiy sonlar ustida bajariladigan keyingi amallar: ayirish, ko'paytirish, bo'lish, darajaga ko'tarish, ildiz chiqarish amallari, shuningdek, haqiqiy sonlarni geometrik tasvirlashlarni mazkur bobning oxirida mashq tarzida bayon etamiz.

7–§. Haqiqiy sonning absolut qiymati va uning xossalari

Ma'lumki, $x \in R$ sonning absolut (mutloq) qiymati quyidagicha aniqlanadi:

$$|x| = \begin{cases} x, & agar \ x \geq 0 \ bo'lsa \\ -x, & agar \ x < 0 \ bo'lsa \end{cases}$$

Haqiqiy sonning absolut qiymati xossalarini keltiramiz.

1^0. $x \in R$ son uchun

$$|x| \geq 0, \ |x| = |-x|, \ x \leq |x|, \ -x \leq |x|$$

munosabatlar o'rinli. Bu munosabatlar sonning absolut qiymati ta'rifidan kelib chiqadi.

2^0. Agar $x \in R$ son $|x| < a$ $(a > 0)$ tengsizlikni qanoatlantirsa, bunday x son $-a < x < a$ tengsizliklarni ham qanoatlantiradi va aksincha. Boshqacha qilib aytganda yuqoridagi tengsizliklar ekvivalent tengsizliklardir:

$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$$

◀ $|x| < a$ tengsizlik o'rinli bo'lsin: $x \in R$, $|x| < a$. 1^0– xossaga ko'ra $-|x| \leq x \leq |x|$ bo'lishidan hamda $a > |x|$ tengsizlikdan topamiz: $-a < -|x| \leq x \leq |x| < a$. Bundan esa $-a < x < a$ ekani kelib chiqadi.

Endi $-a < x < a$ tengsizliklar o'rinli bo'lsin: $x \in R$, $-a < x < a$.

Agar $x \geq 0$ bo'lsa, $|x| = x$ bo'lib, $|x| < a$ bo'ladi. Agar $x < 0$ bo'lsa, $|x| = -x$ bo'lib, $-x < a$ bo'lganidan esa $|x| < a$ ekanini topamiz. Demak, $-a < x < a$ bo'lganda har doim $|x| < a$ bo'ladi. ▶

Bu xossa quyidagi $\{x : x \in R, |x| < a\}$ va $\{x : x \in R, -a < x < a\}$ haqiqiy sonlar to'plamlarining bir–biriga tengligini ifodalaydi.

3^0. Agar $x \in R$ sonlar $|x| \leq a$ tengsizlikni qanoatlantirsa, bunday x sonlar $-a \leq x \leq a$ tengsizliklarni ham qanoatlantiradi va aksincha, ya'ni $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$.

Bu xossa 2^0– xossa kabi isbotlanadi.

4^0. Ikki $x \in R$ va $y \in R$ haqiqiy son yig'indisining absolut qiymati bu sonlar absolut qiymatlarining yig'indisidan katta emas, ya'ni $|x + y| \leq |x| + |y|$.

◀ Agar $x + y \geq 0$ bo'lsa $x + y = |x + y|$ bo'lib, $x \leq |x|$, $y \leq |y|$

tengsizliklarni hisobga olgan holda

$$|x+y| = x+y \le |x|+|y|$$

bo`lishini topamiz. Agar $x+y<0$ bo`lsa, unda $|x+y| = -(x+y) = -x+(-y) \le |x|+|y|$ bo`ladi. ►

Bu munosabat qo`shiluvchilar soni ikkitadan katta bo`lgan holda ham o`rinli bo`ldai:

$$|x_1+x_2+\ldots+x_n| \le |x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n|$$

5^0. $x\in R$, $y\in R$ sonlar uchun

$$|x-y| \ge |x|-|y|$$

tengsizlik o`rinli.

◄Ravshanki, $x=(x-y)+y$. Unda 4^0–xossaga binoan $|x| = |(x-y)+y| \le |x-y|+|y|$ bo`lib, bu tengsizlikdan $|x-y| \ge |x|-|y|$ bo`lishi kelib chiqadi. ►

6^0. $x\in R$, $y\in R$ sonlar uchun

$$|x\cdot y| = |x|\cdot|y|$$

tenglik o`rinli.

Bu tenglik sonning absolut qiymati ta'rifidan kelib chiqadi.

7^0. $x\in R$, $y\in R$, $y\ne 0$ sonlar uchun

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$$

tenglik o`rinli.

◄ $\frac{x}{y}=z$ deb olaylik. Bundan $x=zy$ bo`lishini topamiz.

Ammo 6^0– xossaga ko`ra $|x|=|z|\cdot|y|$ va bundan $|z|=\frac{|x|}{|y|}$ tenglik kelib chiqadi. ►

8–§. Irratsional sonni taqribiy hisoblash

Biror α irratsional son berilgan bo`lib, u $Q$ to`plamda bajarilgan kesim bilan aniqlangan bo`lsin: $\alpha=(A,A')$. Butun sonlar to`plami Z ratsional sonlar to`plamining qismi sonlar to'plami Z ratsional sonlar to'plamining qismi bo'lganligidan ketma-ket kelgan a_0 va a_0+1 butun sonlar topiladiki, ushbu $a_0<\alpha<a_0+1$ tengsizliklar o'rinli bo'ladi. Bu holda $r_0=a_0$ son α irratsional sonni "kami" bilan, $r_0'=a_0+1$ esa "ortig'i" bilan taqribiy ifodalaydi.

Endi

$$a_0,\ a_0+\frac{1}{10},\ a_0+\frac{2}{10},\ \ldots,\ a_0+\frac{9}{10},\ a_0+1$$

sonlarni olamiz. $a_0<\alpha<a_0+1$ bo'lgani uchun bu sonlar orasida ketma-ket kelgan shunday ikkita

$$a_0+\frac{a_1}{10},\ a_0+\frac{a_1+1}{10}$$

sonlar topiladiki, ushbu

$$a_0+\frac{a_1}{10}<\alpha<a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{1}{10}$$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi, bunda a_1 son 0, 1, 2, ... , 9 sonlardan biridir. Quyidagi

$$r_1=a_0+\frac{a_1}{10}=a_0,a_1,$$

$$r_1'=a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{1}{10}=a_0,a_1+\frac{1}{10}$$

sonlar α sonni mos ravishda "kami" hamda "ortig'i" bilan $\frac{1}{10}=0{,}1$ aniqlikda taqribiy ifodalaydi. So'ngra

$$a_0+\frac{a_1}{10},\ a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{1}{10^2},$$

$$a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{2}{10^2},\ \ldots,\ a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{9}{10^2},\ a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{1}{10}$$

sonlarni olamiz. Agar ushbu

$$a_0+\frac{a_1}{10}<\alpha<a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{1}{10}$$

tengsizliklar o'rinli ekanini e'tiborga olsak, u holda yuqoridagi sonlar orasida shunday ketma-ket kelgan ikkita

$$a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2},\ a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_1+1}{10^2}$$

sonlar topiladiki, ular uchun ushbu

$$a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}<\alpha<a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_1+1}{10^2}$$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi, bunda a_2 son 0, 1, 2, ... , 9 sonlardan biridir. Quyidagi

$$r_2 = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} = a_0, a_1 a_2$$

$$r_2' = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{1}{10^2} = a_0, a_1 a_2 + \frac{1}{10^2}$$

sonlar α sonni mos ravishda "kami" hamda "ortig'i" bilan $\frac{1}{10^2} = 0,01$ aniqlikda taqribiy ifodalaydi.

Bu jarayonni davom ettira borib n ta qadamdan keyin shunday ikkita

$$a_0, a_1 a_2 \ldots a_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n},$$

$$a_0, a_1 a_2 \ldots a_n + \frac{1}{10^n} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n + 1}{10^n},$$

sonlar topiladiki, ular uchun ushbu

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} < \alpha < a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n + 1}{10^n}$$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi, bunda $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sonlarning har biri 0, 1, 2, ... ,9 sonlardan biriga tengdir.

Quyidagi

$$r_n = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n, \quad r_n' = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n + \frac{1}{10^n}$$

sonlarning har biri α irratsional sonni $\frac{1}{10^n}$ aniqlikda taqribiy ifodalaydi.

Shunday qilib, yuqoridagi munosabatdan ko'rinadiki, n ni yetarlicha katta qilib olish hisobiga α sonni istalgancha aniqlikda r_n va r_n' ratsional sonlar (o'nli kasrlar) yordamida taqribiy hisoblash mumkin: $\alpha \approx r_n, \alpha \approx r_n'$. Yuqoridagi r_n va r_n' ratsional sonlarni mos ravishda "kami" hamda "ortig'i" bilan α sonning o'nli yaqinlashuvchilari deb ataladi.

Mashqlar.

2.8. Ma'lumki, qisqarmaydigan $r = \frac{p}{n}, (p \in Z, n \in N)$ kasr ko'rinishida tasvirlanadigan har bir son ratsional son deyilar edi. Shuningdek, cheksiz davriy o'nli kasr ko'rinishida tasvirlanadigan har bir son ham ratsional son deyiladi. Bu ta'riflarning ekvivalentligi isbotlansin.

2.9. Ushbu

$$[illegible]$$

to'plam chegaralanganlikka tekshirilsin.

2.10. Ushbu $\lg 2, \log_2 3$ sonlarning ratsional son emasligi isbotlansin.

2.11. Ushbu $\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}$ $(n>1)$ sonning ratsional son emasligi isbotlansin.

2.12. Ushbu

$$A=\{r: r\in Q, r\le 0\}\cup\{r: r\in Q, r>0, r^2<2\},$$
$$A'=\{r: r\in Q, r>0, r^2>2\}$$

to'plamlarning Q da kesim bajarishi va A to'plamda eng katta, A' to'plamda eng kichik element mavjud emasligi ko'rsatilsin.

2.13. Agar $E\subset R$ to'plam chegaralangan bo'lib, $E_1\subset E$ bo'lsa,

$$\inf E\le\inf E_1\le\sup E_1\le\sup E$$

tengsizliklarning bajarilishi isbotlansin.

2.14. Aytaylik,

$$A=\{r: r\in Q\},\quad A'=\{r': r'\in Q\}$$

to'plamlar Q da (A, A') kesim bajarib, u α haqiqiy sonni aniqlasin:

$$\alpha=(A, A')$$

Ushbu

$$-A'=\{-r': r'\in A'\},\quad -A=\{-r: r\in A\}$$

to'plamlar Q da kesim bajarishi ko'rsatilsin. (Bu kesim aniqlangan son α soniga qarama-qarshi son deyiladi va u $-\alpha$ kabi belgilanadi, qaralsin, [1], 2-bob).

2.15. α, β haqiqiy sonlar (A, A'), (B, B') kesimlar bilan aniqlansin:

$$\alpha=(A, A'),\quad \beta=(B, B')\quad (\alpha\ge 0, \beta\ge 0)$$

Ushbu

$$C=\{r: r\in Q, r<0\}\cup\{r\cdot t: r\in A, r>0, t\in B, t>0\},\quad C'=Q\setminus C$$

to'plamlar Q da kesim bajarishi ko'rsatilsin. (Bu kesim aniqlangan son α va β haqiqiy sonlar ko'paytmasi deyiladi va u $\alpha\cdot\beta$ kabi belgilanadi, qaralsin, [1], 2-bob).

2.16. Aytaylik, $\alpha>0$ haqiqiy son Q da bajarilgan (A, A') kesim bilan aniqlangan bo'lsin. Ushbu

$$C=\{r: r\in Q, r<0\}\cup\{0\}\cup\left\{\frac{1}{r}: r\in A'\right\},\quad C'=Q\setminus C$$

to'plamlar Q da kesim bajarishi ko'rsatilsin. (Bu kesim aniqlangan son α haqiqiy songa nisbatan teskari son deyiladi va u $\frac{1}{\alpha}$ kabi belgilanadi, qaralsin, [1], 2- bob).

2.17. Haqiqiy sonning butun darajasi, haqiqiy sondan olingan ildiz hamda haqiqiy sonning ratsional darajasi ta'riflari keltirilsin.

2.18. Aytaylik, $\alpha \in R, \alpha > 1$ va β musbat haqiqiy son Q da bajarilgan (B, B') kesim bilan aniqlangan sonlar bo'lsin. Ushbu

$$E = \{x : x \in R, x \leq 0\} \cup \{\alpha^{b} : b \in B\}$$

$$E' = R \setminus E$$

to'plamlar R da kesim bajarishi ko'rsatilsin. (Bu kesim aniqlangan son α haqiqiy sonning $-\beta$ darajasi deyiladi va u α^{β} kabi belgilanadi qaralsin, [1], 2- bob)

2.19. Aytaylik, $x \in R$, $y \in R$ bo'lsin. Ushbu

$$\rho(x, y) = |x - y|$$

miqdor x va y nuqtalar orasidagi masofa deyiladi. Masofa quyidagi

1) $\rho(x, y) \geq 0, \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$

3) $\rho(x, y) \leq 0, \rho(x, z) + \rho(z, y) \qquad (z \in R)$

xossalarga ega ekanligi isbotlansin.

2.20. $\sqrt{2}$ son taqribiy hisoblansin.

2.21. π irratsional sonning geometrik tasviri topilsin.

2.22. Haqiqiy sonlarning geometrik tasvirlari topilsin.

III BOB

Funksiya

Funksiya matematik analizning asosiy tushunchasi.

Tabiatda, texnikada va fanning turli sohalarida uchraydigan ko'pgina jarayonlar funksiya tushunchasi bilan bog'liq (bu jarayonlarning matematik modellari funksiyalar bilan ifodalanadi). Binobarin, bu jarayonlar bilan bog'liq masalalarni o'rganish va yechish funksiyalarni o'rganishni taqozo etadi.

1-§. Funksiya tushunchasi

1^0. O'zgaruvchi va o'zgarmas miqdorlar. Biz tabiatni kuzatish va o'rganish jarayonida uzunlik, yuz, hajm, vaqt, temperatura, massa kabi miqdorlarga duch kelamiz. Konkret sharoitda bu miqdorlar ba'zan turli qiymatlarni qabul qilsa, ba'zan bir xil qiymatga teng bo'ladi. Masalan, agar auditoriyadagi talabalarga aylana chizish taklif etilsa, unda talaba turli kattalikdagi radius bilan aylana chizganini ko'ramiz. Bunda aylana radiusi turli qiymatlarni qabul qilgani uchun o'zgaruvchi miqdor bo'ladi.

Ma'lumki, har qanday aylana uzunligi S ning uning diametri $2r$ ga nisbati $\frac{S}{2r}$ o'zgarmas son $\pi = 3{,}14...$ ga tengdir.

Shunday qilib, ikki xil o'zgaruvchi hamda o'zgarmas miqdorlar bo'ladi. Odatda o'zgaruvchi x, y, r,... harflar orqali belgilanadi.

Agar o'zgaruvchining qabul qiladigan qiymatlaridan tuzilgan to'plam ma'lum bo'lsa, o'zgaruvchi berilgan deb hisoblanadi. O'zgarmas miqdorni ham o'zgaruvchi deb qarash mumkin. Bunda o'zgaruvchining qabul qiladigan qiymatlaridan tashkil topgan to'plam bittagina elementdan iborat bo'ladi.

Matematikada bir necha o'zgaruvchi miqdorlar hamda bu o'zgaruvchi miqdorlar orasidagi bog'lanishlar o'rganiladi. Aylana radiusi r ham, aylana uzunligi ham o'zgaruvchi miqdor bo'lib, $S = 2\pi r$ munosabat bu o'zgaruvchilar S orasidagi bog'lanishni ifodalaydi. Bu erda r —erkli ravishda o'zgaradigan o'zgaruvchi bo'lib, S esa unga bog'liq, erksiz o'zgaruvchidir. Aylana radiusi $A = \{r : r \in R, 0 \le r < \infty\}$ to'plamdagi qiymatlarni qabul qilsa, aylana uzunligi S ning qiymatlari x ga bog'liq bo'lgan holda $R_x = \{s : s \in R, 0 \le s \le x\}$ to'plamni tashkil etadi.

Shunday qilib, ikki xil: erkli hamda erksiz o'zgaruvchilar bo'lar ekan.

2⁰. Funksiya ta'rifi. X va Y lar haqiqiy sonlarning biror to'plamlari ($X \subset R, Y \subset R$) bo'lib, x va y o'zgaruvchilar mos ravishda shu to'plamlarda o'zgarsin: $x \in X$, $y \in Y$.

1-ta'rif. Agar X to'plamdagi har bir x songa biror f qoidaga ko'ra Y to'plamdan bitta y son mos qo'yilgan bo'lsa, X to'plamda *funksiya berilgan* deb aytiladi.

Ba'zan funksiya X to'plamda berilgan deyish o'rniga funksiya to'plamda aniqlangan deb ham yuritiladi. Funksiya

$$f : x \to y \text{ yoki } y = f(x)$$

kabi belgilanadi.

Bunda X funksiyaning *aniqlanish to'plami (sohasi)*, Y esa funksiyaning *o'zgarish to'plami (sohasi)* deb ataladi, x *erkli o'zgaruvchi* yoki funksiyaning argumenti, y *erksiz o'zgaruvchi* yoki x o'zgaruvchining *funksiyasi* deyiladi.

Funksiyaga misollar keltiramiz:

1). $X = (-\infty, +\infty)$, $Y = (0, +\infty)$ bo'lsin, f qoida sifatida

$$f : x \to y = x^2 + 1$$

ni olaylik. Bu holda, ravshanki, har bir $x \in X$ uchun bitta x^2+1 topiladi va $x^2 + 1 \in Y$ bo'ladi. Demak, X da $y = x^2 + 1$ funksiya aniqlangan.

2). $X = R$, $Y = Z$ va f – har bir haqiqiy x songa uning butun qismi $[x]$ ni mos qo'yuvchi qoida bo'lsin. Demak,

$$f : x \to [x] \text{ yoki } y = [x]$$

funksiyaga ega bo'lamiz.

3). Har bir ratsional songa 1 ni, har bir irratsional songa 0 ni mos qo'yish natijasida funksiya hosil bo'ladi. Bu Dirixle funksiyasi deyiladi va $D(x)$ kabi belgilanadi:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & agar\ x\ ratsional\ son\ bo'lsa \\ 0, & agar\ x\ irratsional\ son\ bo'lsa \end{cases}$$

Funksiya ta'rifida X, Y to'plamlarning hamda f qoidaning berilishi muhimdir. Ko'pincha, amaliyotda funksiyaning aniqlanish sohasi X ham shu qoidaga ko'ra, ya'ni funksional bog'lanishning xarakteriga ko'ra topiladi.

Masalan, ushbu

$$y = \frac{x+1}{x^2 - 5x + 6}$$

funksiyaning aniqlanish sohasi, tabiiyki $x=2$, $x=3$ nuqtalarni o'z ichiga olmasligi kerak.

Ushbu

$$\{f(x) : x \in X\}$$

to'plam funksiyaning qiymatlari to'plami deyiladi va Y_f kabi belgilanadi:

$$Y_f = \{f(x) : x \in X\}$$

Ravshanki,

$$Y_f \subset Y$$

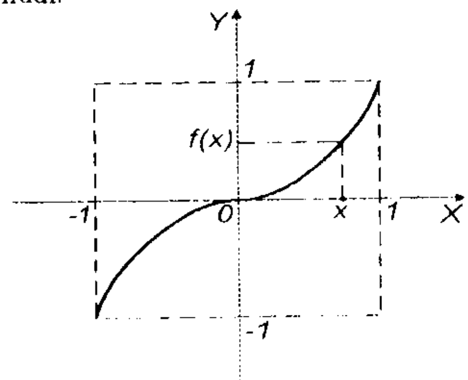
Keltirilgan 1–misolda $Y_f = [1,+\infty]$, 2–misolda $Y_f = Z$, 3–misolda esa $Y_f = \{0,1\}$ bo'ladi.

Biror X to'plamda $y = f(x)$ funksiya aniqlangan bo'lsin. $x_0 \in X$ ga mos keluvchi y_0 miqdor $y = f(x)$ funksiyaning x=x nuqtadagi xususiy qiymati deb ataladi va u $f(x_0) = y_0$ kabi belgilanadi. Masalan, 2–misolda $x_0 = \pi$ bo'lganda $y_0 = [\pi] = 3$ bo'ladi.

Tekislikda Dekart koordinatalar sistemasini olamiz. Tekislikning $(x, f(x))$ nuqtalaridan iborat ushbu

$$\{(x, f(x))\} = \{(x, f(x)) : x \in X, f(x) \in Y\}$$

to'plam $y = f(x)$ funksiyaning grafigi deb ataladi. Ravshanki, $\{(x, f(x))\} \subset XxY$ bo'ladi. Masalan, $y = x^3$ funksiyani $X = [-1,1]$ to'plamda qaraylik. Bu funksiyaning grafigi 11–chizmada ifodalangan. Bunda XxY to'plam shtrixlar bilan ko'rsatilgan kvadratni bildiradi.



11 – chizma.

3^0. **Funksiyaning berilish usullari.** Funksiya ta'rifidagi har bir x ga bitta y ni mos qo'yadigan qoida yoki qonun turli usulda berilishi mumkin. Biz ularni qisqacha qarab o'tamiz.

Ko'pincha x va y o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish formulalar yordamida ifodalanadi. Bunda argument x ning har bir qiymatiga mos keladigan y funksiyaning qiymatini x ustida turli amallar – qo'shish, ayirish, ko'paytirish, bo'lish, darajaga ko'tarish, ildiz chiqarish, logarifmlash va h.k. amallarni bajarish natijasida topiladi. Odatda bunday usul funksiyaning *analitik usulda berilishi* deyiladi.

Misollar keltiraylik:

1). x va y o'zgaruvchilar ushbu

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

formula yordamida bog'langan bo'lsin. Bu funksiyaning aniqlanish sohasi $X = \{x : x \in R, -1 \le x \le 1\} = [-1,1]$ to'plamdan iborat. Bunda har bir x ga mos keladigan y ning qiymati avvalo x ni kvadratga ko'tarish, so'ngra uni 1 dan ayirish va bu ayirmadan kvadrat ildiz chiqarish kabi amallarni bajarish natijasida topiladi.

2). x va y o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish quyidagi formulalar yordamida berilgan bo'lsin:

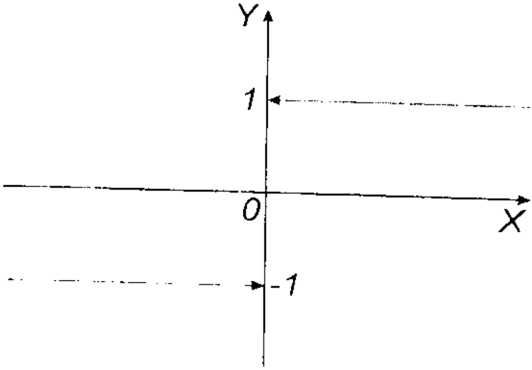
$$y = f(x) = \begin{cases} 1, & agar\ x > 0\ bo'lsa \\ -1, & agar\ x < 0\ bo'lsa \end{cases}$$

Bu funksiyaning aniqlanish sohasi $X = R \setminus \{0\}$ bo'lib, uning qiymatlari sohasi $Y = \{-1,1\}$ to'plamdan iborat. Odatda bu funksiya

$$y = signx$$

kabi belgilanadi. Bunda *sign* lotincha signum so'zidan olingan bo'lib, "belgi", "ishora" degan ma'noni anglatadi.

Bu $y = signx$ funksiyaning $x = 0$ nuqtadagi qiymati nolga teng deb qabul qilsak, u R to'plamda aniqlangan bo'ladi. (12–chizma).



12 – chizma.

Ba'zi hollarda $x(x \in X)$ va $y(y \in Y)$ o`zgaruvchilar orasidagi bog`lanish formulalar yordamida berilmasdan jadval orqali berilgan bo`lishi mumkin. Masalan, kun davomida havo haroratini kuzatganimizda, $t_1$ vaqtda havo harorati $T_1$, $t_2$ vaqtda havo harorati $T_2$ va h.k. bo`lsin. Natijada quyidagi jadvalga kelamiz:

Vaqt, t	t_1	t_2	t_3	t_4	......	t_n
Harorat, T	T_1	T_2	T_3	T_4		T_n

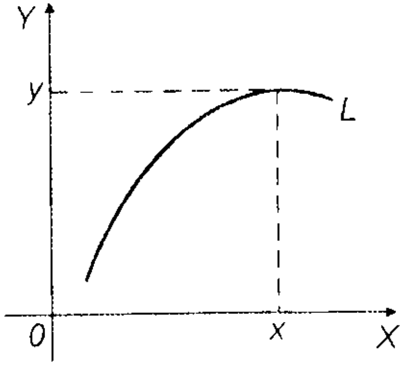
Bu jadval t vaqt bilan harorati T orasidagi funksional bog`lanishni ifodalaydi, bunda t argument, T esa funksiya bo`ladi. Bog`lanishning bunday berilishi, jadval usulida berilishi deb ataladi.

XOY tekisligida shunday L chiziq berilgan bo`lsinki, $OX$ o`qida joylashgan nuqtalardan shu o`qqa o`tkazilgan perpendikular bu L chiziqni faqat bitta nuqtada kesib o`tsin.

OX o`qidagi bunday nuqtalardan iborat to`plamni X orqali belgilaylik. X to`plamdan ixtiyoriy $x$ ni olib, bu nuqtadan $OX$ o`qiga perpendikular o`tkazamiz. Bu perpendikularning L chiziq bilan kesishgan nuqtasining ordinatasini $y$ bilan belgilaymiz va olingan $x$ ga bu $y$ ni mos qo`yamiz. Natijada X to`plamdan olingan har bir $x$ ga yuqorida ko`rsatilgan qoidaga ko`ra bitta $y$ mos qo`yilib, funksiya hosil bo`ladi. Bunda $x$ va $y$ o`zgaruvchilar orasida bog`lanish L chiziq yordamida berilgan bo`ladi (13–

bo'ladi (13 – chizma).

Odatda f ning bunday berilishi uning *grafik usulda berilishi* deb ataladi.



13 – chizma.

Shunday qilib, biz funksiyaning analitik, jadval, grafik usullarda berilishini ko'rib o'tdik. x va y o'zgaruvchilar orasidagi funksional bog'lanish yuqoridagi uchta usul bilangina berilib qolmasdan, boshqacha, faqatgina iboralar bilan ham berilishi mumkin. Masalan, har bir natural n songa uning bo'luvchilari sonini mos qo'yaylik. Bu moslikni φ orqali belgilaymiz. Xususan,

$$\varphi(1)=1, \varphi(2)=2, \varphi(3)=2, \varphi(4)=3, \varphi(5)=2, \ldots, \varphi(12)=6$$

Odatda bu funksiya *Eyler funksiyasi* deyiladi.

Matematik analiz kursida asosan analitik usulda berilgan funksiyalar o'rganiladi.

X to'plamda $y=f(x)$ funksiya aniqlangan bo'lsin. Agar bu funksiya qiymatlaridan tuzilgan

$$Y_f=\{f\{x\}: x\in X\}$$

to'plam yuqoridan (quyidan) chegaralangan bo'lsa, $f(x)$ funksiya X to'plamda *yuqoridan (quyidan) chegaralangan* deb ataladi, aks holda esa funksiya *yuqoridan (quyidan) chegaralanmagan* deyiladi. Agar $f(x)$ funksiya X to'plamda ham yuqoridan, ham quyidan chegaralangan bo'lsa, funksiya chegaralangan deyiladi.

3.1–misol. Ushbu

$$f(x)=\frac{1+x^2}{1+x^4}$$

funksiyaning chegaralanganligi ko'rsatilsin.

◀ Bu funksiya $R=(-\infty,\infty)$ da aniqlangan bo'lib, $\forall x\in R$ da $f(x)>0$ bo'ladi. Demak, berilgan funksiya quyidan chegaralangan.

Ravshanki,

$$(1-x^2)^2\ge 0\Rightarrow 1+x^4\ge 2x^2\Rightarrow \frac{x^2}{1+x^4}\le\frac{1}{2}$$

Unda, $\forall x\in R$ uchun

$$f(x)=\frac{1+x^2}{1+x^4}=\frac{1}{1+x^4}+\frac{x^2}{1+x^4}<1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

bo'lishini topamiz. Demak, berilgan funksiya yuqoridan ham chegaralangan. ▶

X to'plamda aniqlangan ikki $f(x)$ hamda $\varphi(x)$ funksiyalarni qaraylik.

Agar $\forall x\in X$ da $f(x)=\varphi(x)$ bo'lsa, bu funksiyalar X to'plamida *bir biriga teng funksiyalar* deyiladi.

X to'plamda aniqlangan $F(x)=f(x)+\varphi(x)$ funksiya $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalarning yig'indisidan iborat. Ikki funksiya ayirmasi, ko'paytmasi va nisbati ham shunga o'xshash ta'riflanadi.

4^0. Juft va toq funksiyalar. Agar $\forall x\in X$ uchun $-x\in X$ bo'lsa X to'plam O nuqtaga nisbatan *simmetrik to'plam* deyiladi.

O nuqtaga nisbatan simmetrik bo'lgan X to'plamda $y=f(x)$ funksiya aniqlangan bo'lsin. Agar $\forall x\in X$ uchun

$$f(-x)=f(x)$$

bo'lsa, $f(x)$ juft funksiya deb ataladi. Agar $\forall x\in X$ uchun

$$f(-x)=-f(x)$$

bo'lsa, $f(x)$ toq funksiya deb ataladi. Masalan,

$$y=\cos x,\ y=|x|$$

funksiyalar uchun

$$\cos(-x)=\cos x,\ |-x|=|x|$$

bo'lgani sababli ular juft funksiyalardir.

Ushbu

$$y=\sin x,\ y=x^3$$

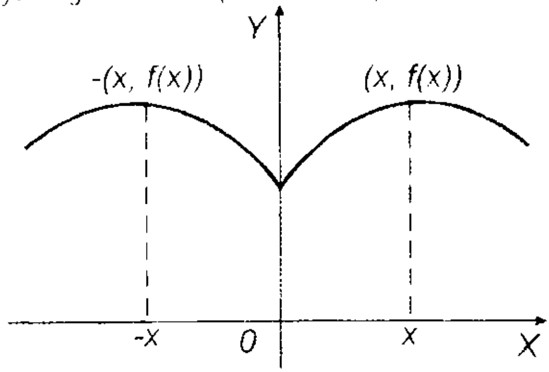
funksiya uchun

$$\sin(-x)=-\sin x,\ (-x)^3=-x^3$$

bo'lgani sababli ular toq funksiyalardir.

Shuni ta'kidlash lozimki, funksiya har doim juft yoki toq funksiya bo'lavermaydi. Bunday funksiyalarga $f(x)=x^2+x,\ \varphi(x)=\sin x+\cos x$ lar misol bo'la oladi. Bu funksiyalar juft ham emas, toq ham emas.

Juft funksiyaning grafigi ordinata o'qiga nisbatan simmetrik joylashgandir. Haqiqatan, bunday funksiyalar uchun $(x, f(x))$ nuqta funksiya grafigida yotgan bo'lsa, $(-x, f(x))$ nuqta ham shu grafikda joylashgan bo'ladi (14 – chizma).



14 – chizma

Toq funksiyaning grafigi koordinata boshiga nisbatan simmetrik joylashadi. Haqiqatdan, bu funksiya grafigida $(x, f(x))$ nuqta bilan birga har doim $(-x, -f(x))$ nuqta yotadi.

5^0. Davriy funksiyalar. Aytaylik, $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda berilgan va $T \in R$ bo'lib, $T \neq 0$ bo'lsin.

2–tarif. Agar

1) $\forall x \in X$ da $x - T \in X$, $\quad x + T \in X$

2) $f(x+T) = f(x)$ $\qquad$ (3.1)

bo'lsa, $f(x)$ *davriy funksiya*, T soni esa funksiyaning *davri* deyiladi.

Agar $f(x)$ davriy funksiya bo'lib, uning davri T ga $(T \neq 0)$ teng bo'lsa, kT $(k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, ..)$ ko'rinishdagi sonlar ham shu funksiyaning davri bo'ladi. $f(x)$ funksiyaning musbat davrlari to'plamini M deb belgiaylik. Agar

$$T_0 = \inf M$$

ham $f(x)$ funksiyaning davri, ya'ni $T_0 \in M$ bo'lsa, u eng kichik musbat davr (asosiy davr) deyiladi. Eng kichik musbat davr mavjud bo'lishi ham mumkin, mavjud bo'lmasligi ham mumkin.

Misollar qaraylik. 1). $f(x) = \sin x$ funksiya davriy funksiya. Uning davrlari to'plami $\{2\pi k : k = \pm 1, \pm 2, ..\}$ bo'lib, eng kichik musbat davri $T_0 = 2\pi$ bo'ladi.

2). $f(x) = \{x\}$ funksiyani qaraylik, bunda $\{x\}$ – qaralayotgan x

ning kasr qismi $\{x\} = x - [x]$ bu davriy funksiyadir. Uning davrlari to'plami $\{m : m = \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ bo'lib, eng kichik musbat davri $T_0 = 1$ bo'ladi.

3). $f(x) = C$ bo'lsin, bunda $C = const$. Bu holda eng kichik musbat davr mavjud emas.

4). Dirixle funksiyasi

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{agar } x \text{ ratsional son bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x \text{ irratsional son bo'lsa} \end{cases}$$

ni qaraylik. Aytaylik, T — biror ratsional son ($T \neq 0$) bo'lsin.

U holda

$$x + T = \begin{cases} \text{ratsional son, agar } x \text{ ratsional son bo'lsa} \\ \text{irratsional son, agar } x \text{ irratsional son bo'lsa} \end{cases}$$

bo'ladi. Demak,

$$D(x+T) = \begin{cases} 1, \text{ agar } x \text{ ratsional son bo'lsa,} \\ 0, \text{ agar } x \text{ irratsional son bo'lsa} \end{cases}$$

Shunday qilib, $\forall x$ uchun T ratsional son bo'lganda

$$D(x+T) = D(x) \qquad (*)$$

bo'ladi. Demak, Dirixle funksiyasi davriy funksiya, ixtiyoriy $T \neq 0$ ratsional son bu funksiyaning davri.

Endi biror T irratsional sonni olaylik. Unda $\forall x$ uchun (3.1) munosabat o'rinli bo'lmaydi, chunki x ratsional son bo'lganda $x + T$ irratsional son bo'lib, $D(x) = 1$, $D(x + T) = 0$. Demak irratsional sonlar Dirixle funksiyasi uchun davr emas. Binobarin, Dirixle funksiyasining davrlari to'plami $Q \setminus \{0\}$ dan iborat. Eng kichik musbat davr esa mavjud emas — barcha musbat ratsional sonlar to'plamining infimumi nol bo'lib, u $Q \setminus \{0\}$ ga tegishli emas.

6^0. Monoton funksiya. Teskari funksiya. Murakkab funksiya. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda berilgan bo'lsin.

3-ta'rif. Agar $\forall x_1 \in X$, $\forall x_2 \in X$ uchun

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya X to'plamda *o'suvchi*,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya X to'plamda *qat'iy o'suvchi* deyiladi.

4-ta'rif. Agar $\forall x_1 \in X$, $\forall x_2 \in X$ uchun

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

bo'lsa $f(x)$ funksiya X to'plamda *kamayuvchi*,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya X to'plamda *qat'iy kamayuvchi* deyiladi.

O'suvchi hamda kamayuvchi funksiyalar monoton funksiyalar deb ataladi.

3.2-misol. $f(x)=x^3$ funksiya $X=R$ da qat'iy o'suvchi bo'lishi ko'rsatilsin.

◀ Darhaqiqat, $\forall x_1 \in R$, $\forall x_2 \in R$ nuqtalar olib, $x_1 < x_2$ bo'lsin deb qaraylik.

U holda

$$f(x_2)-f(x_1)=x_2^3-x_1^3=(x_2-x_1)(x_2^2+x_2x_1+x_1^2)=(x_2-x_1)\left[(x_2+\frac{1}{2}x_1)^2+\frac{3}{4}x_1^2\right]>0$$

bo'lib,

$$f(x_2)>f(x_1)$$

bo'ladi. Demak,

$$x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

bo'lishi topildi.▶

$X \subset R$ to'plamda $y=f(x)$ funksiya aniqlangan bo'lib, Y_f esa funksiya qiymatlaridan iborat to'plam bo'lsin: $Y_f=\{f(x): x \in X\}$. Endi Y_f to'plamdan olingan har bir y ga X to'plamdan faqat bitta ($f(x)=y$ bo'lgan) x ni mos qo'shish mumkin bo'lsin. Bu holda Y_f to'plamdan olingan har bir y ga X to'plamda bitta x mos qo'yilishini ifodalaydigan funksiyaga kelamiz. Odatda, bu funksiya $y=f(x)$ ga nisbatan teskari funksiya deyiladi va u $x=f^{-1}(y)$ kabi belgilanadi. Demak, $x=f^{-1}(y)$ shunday funksiyaki, $f^{-1}(y)=f^{-1}(f(x))=x$ bo'ladi.

Agar $x=f^{-1}(y)$ funksiya $y=f(x)$ ga nisbatan teskari funksiya bo'lsa, $y=f(x)$ funksiya $x=f^{-1}(y)$ ga nisbatan teskari bo'ladi. Shuning uchun ham $y=f(x)$, $x=f^{-1}(y)$ funksiyalar o'zaro teskari funksiyalar deyiladi.

Ravshanki, quyidagi

$$f(f^{-1}(y))=y, \qquad f^{-1}(f(x))=x$$

xossalar o'rinli.

Masalan, $f(x)=2x+1$ funksiyaning $[0,1]$ oraliqdagi qiymatlari [1,3] oraliqni tashkil etadi va [1,3] oraliqda aniqlangan $x = f^{-1}(y) = \frac{y-1}{2}$ funksiya berilgan $y = 2x + 1$ funksiyaga nisbatan teskari funksiya bo'ladi.

Endi murakkab funksiya tushunchasi bilan tanishamiz.

$y = f(x)$ funksiya X sohada aniqlangan bo'lib, Y_f esa funksiya qiymatlaridan iborat to'plam bo'lsin: $Y_f = \{f(x): x \in X\}$. So'ngra Y_f to'plamda o'z navbatida biror $z = \varphi(y)$ funksiya berilgan bo'lsin. Natijada X to'plamdan olingan har bir x ga Y_f to'plamdan bitta $y(f: x \to y)$ son va Y_f to'plamdan olingan bunday y songa bitta $z(\varphi: y \to z)$ son mos qo'yiladi:

$$x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{\varphi} z$$

Demak, X to'plamdan olingan har bir x ga bitta z son mos qo'yiladi.

Odatda, bunday holda f va φ funksiyalarning murakkab funksiyasi berilgan deyiladi va u $z = \varphi(f(x))$ kabi belgilanadi.

Masalan, $z = \sqrt{x+1}$ funksiyani qaraylik. Bu funksiya $z = \sqrt{y}$, $y = x+1$ funksiyalar yordamida hosil bo'lgan. $y = x+1$ funksiya $R = (-\infty, +\infty)$ da aniqlangan bo'lib, $z = \sqrt{y}$ funksiya esa $y \geq 0$ ya'ni $x + 1 \geq 0$ da mavjud bo'ladi. Demak, $z = \sqrt{x+1}$ murakkab funksiya ushbu $X = \{x : x \in R, x \geq -1\}$ to'plamda aniqlangan.

2-§. Elementar funksiyalar

Ma'lumki, o'rta maktab matematika kursida elementar funksiyalar va ularning ba'zi bir xossalari o'rganiladi.

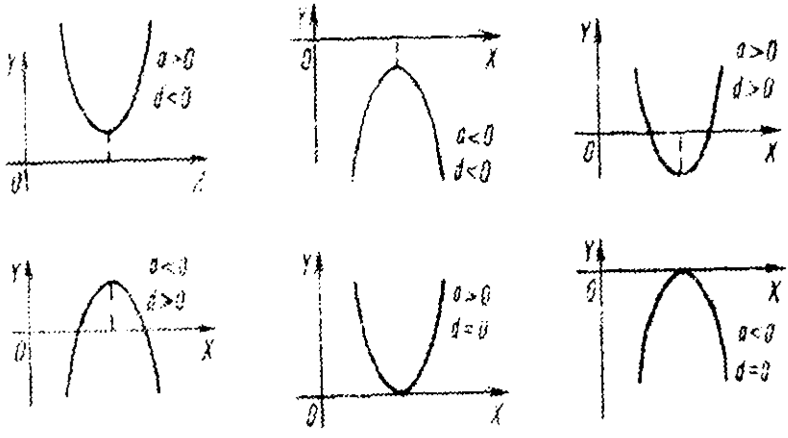
Funksiya – matematik analizda o'rganiladigan asosiy obyekt bo'lgani uchun biz ushbu paragrafda elementar funksiyalarga to'xtalamiz.

Elementar funksiyalar sinfi asosan erkli o'zgaruvchi x $(x \in R)$ hamda o'zgarmas sonlar ustida qo'shish, ayirish, ko'paytirish, bo'lish, darajaga ko'tarish hamda logarifmlash amallarini bajarish natijasida hosil bo'ladi. Bu hosil bo'lgan ifodalarning mavjudligi 2 – bobda qarab o'tilgan haqiqiy sonlarning yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi, nisbati, shuningdek, haqiqiy sonning haqiqiy darajasi, haqiqiy son logarifmining mavjudligidan kelib chiqadi.

1⁰. Butun va kasr ratsional funksiyalar. Ushbu

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

ko'rinishdagi funksiya (bunda $n \in N$ va $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ o'zgarmas sonlar) *butun ratsional funksiya* deb ataladi. Butun ratsional funksiya *ko'pxad* deb ham yuritiladi. Butun ratsional funksiya $R = (-\infty, +\infty)$ da aniqlangan. Xususan, $y = ax + b$ chiziqli funksiya va $y = ax^2 + bx + c$ kvadrat uchhadlar butun ratsional funksiyalardir. Ma'lumki, chiziqli funksiyaning grafigi tekislikda to'g'ri chiziqni, kvadrat uchhadning grafigi esa parabolani ifodalaydi. Kvadrat uchhad grafigining holati a koeffitsient hamda diskriminant $d = b^2 - 4ac$ ning ishoralariga bog'liq bo'ladi. 15 – chizma parabolaning tekislikda turlicha joylanish holatlari ko'rsatilgan.



15 – chizma.

Ikki butun ratsional funksiyaning nisbatidan tuzilgan

$$y = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_{m-1} x + b_m}$$

funksiya kasr ratsional funksiya deb ataladi. Kasr ratsional funksiya

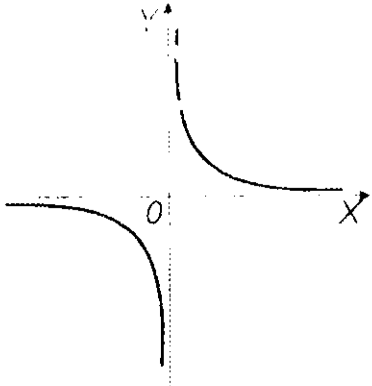
$$x = R \setminus \{x : x \in R, b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_{m-1} x + b_m = 0\}$$

to'plamda, ya'ni maxrajni nolga aylantiruvchi nuqtalardan farqli bo'lgan barcha haqiqiy sonlardan iborat to'plamda aniqlangan.

Xususan, $y = \frac{1}{x}$ va $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ lar kasr ratsional funksiyalar

bo'ladi.

Ma'lumki, $y=\frac{1}{x}$ funksiya grafigi teng yonli giperboladan iborat (17 – chizma).



17 – chizma.

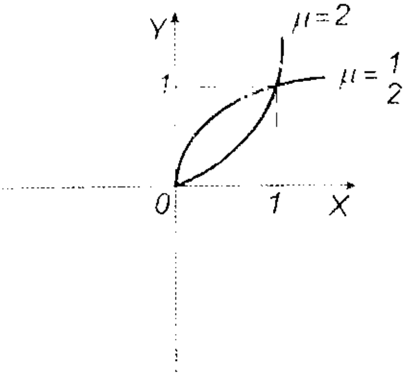
2⁰. Darajali funksiya. Ushbu

$$y=x^{\mu}$$

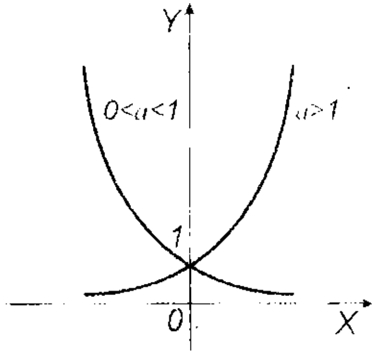
ko'rinishdagi funksiya darajali funksiya deb ataladi, bunda μ ixtiyoriy o'zgarmas haqiqiy son. Darajali funksiyaning aniqlanish sohasi μ ga bog'liq. μ butun son bo'lganda ratsional funksiyaga ega bo'lamiz.

Agar μ ratsional, masalan $\mu=\frac{1}{n}>0$ bo'lsa, n juft bo'lganda

$y^{n}=x^{n}$ funksiyaning aniqlanish sohasi $X=[0,+\infty)$, toq bo'lganda esa funksiyaning aniqlanish sohasi $R=(-\infty,+\infty)$ oraliqdan iborat bo'ladi. μ irratsional bo'lganda $x>0$ deb olinadi. Darajali funksiyaning grafigi $\mu>0$ bo'lganda har doim tekislikning (0,0) hamda (1,1) nuqtalaridan o'tadi (18 – chizma).



18 - chizma.



19 - chizma

Darajali funksiya $y=x^{\mu}$ ushbu $(0,\infty)$ oraliqda $\mu>0$ bo'lganda o'suvchi, $\mu<0$ bo'lganda esa kamayuvchi bo'ladi.

3^0. Ko'rsatkichli funksiya. Ushbu

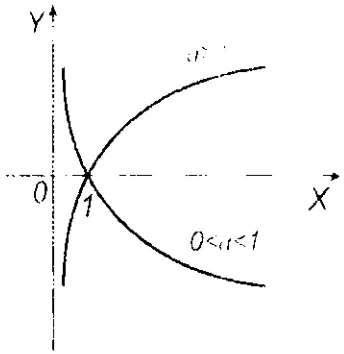
$$y=a^x$$

ko'rinishdagi funksiya ko'rsatkichli funksiya deb ataladi bunda $a>0$ va $a\neq 1$. Ko'rsatgichli funksiyaning aniqlanish sohasi R to'plamdan iborat bo'lib, funksiya qiymatlari esa har doim musbat bo'ladi. Bu funksiyaning grafigi OX o'qidan yuqorida joylashgan va doim tekislikning (0,1) nuqtasidan o'tadi. (19-chizma)

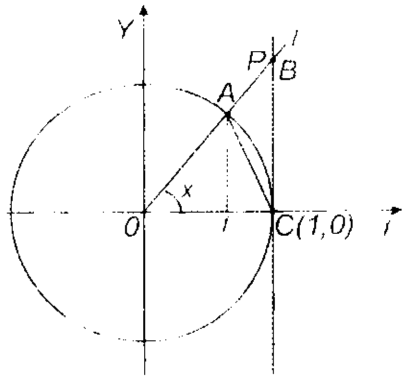
4^0.Logarifmik funksiya. Ushbu

$$y=\log_a x$$

ko'rinishdagi funksiya logarifmik funksiya deb ataladi, bunda $a>0$ va $a\neq 1$. Logarifmik funksiya $X=(0,+\infty)$ intervalda aniqlangan. Bu funksiyaning grafigi OY o'qini o'ng tomonida joylashgan va doim tekislikning (1,0) nuqtasidan o'tadi (20 - chizma).



20 – chizma.



21 – chizma.

5⁰. Trigonometrik funksiyalar. tOy tekislikda, markazi koordinatalar boshida, radiusi 1 ga teng bo'lgan $t^2+y^2=1$ aylanani olaylik (21 – chizma). Bu aylananing $C(1,0)$ nuqtasidan unga CP urinma o'tkazamiz. Koordinata boshidan chiqqan va Ot o'q bilan x burchak tashkil etgan Ol nur aylanani A nuqtada, CP urinmani B nuqtada kesadi. Bu A va B nuqtalarning koordinatalari mos ravishda (t, y_1), $(1, y_2)$ bo'lsin. Ravshanki, A va B nuqtalarning o'rni x burchakka bog'liq. Demak, har bir $x\in R$ son uchun Ot o'q bilan x burchak tashkil etadigan Ol nur o'tkazilsa, bu nurning aylana va urinmalari bilan kesishgan nuqtalrining koordinatalari t, y_1, y_2 lar x ga bog'liq. Har bir x ga shu koordinatalarini mos qo'yaylik.

$$f: x \to t,$$

$$\varphi: x \to y_1,$$

$$\phi: x \to y_2.$$

Odatda, $\varphi: x\to y_1$ ga $\sin x$, $f: x\to t$ ga $\cos x$, $\phi: x\to y_2$ ga tgx funksiya deb ataladi:

$$y_1=\sin x,\quad y_2=tgx,\quad t=\cos x$$

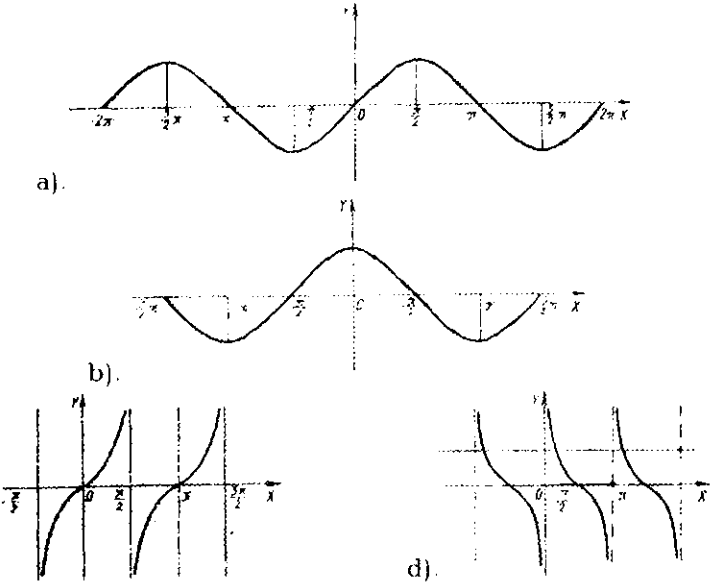
Bunda $y_1=\sin x$, $t=\cos x$ funksiyalar R da aniqlangan 2π davrli funksiyalar bo'lib, ular uchun $\forall x\in R$ da

$$-1\le\sin x\le 1,\qquad -1\le\cos x\le 1$$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi.

$y_2=tgx$ funksiya $X=R\setminus\left\{x: x\in R, x=(2k+1)\frac{\pi}{2}, k=0,\pm1,\dots\right\}$

to'plamda aniqlangan.



22 chizma.

$ctgx$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$ funksiyalar $\sin x, \cos x$ va tgx funksiyalar orqali quyidagicha aniqlangan:

$$ctgx = \frac{1}{tgx}, \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \qquad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$$

Ushbu $\sin x, \cos x$, tgx va $ctgx$ funksiyalarning grafiklari 22 – chizmalarda tasvirlangan.

6⁰. Giperbolik funksiyalar. Ushbu $y = e^x$ ko'rsatkichli funksiya yordamida tuzilgan quyidagi

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

funksiyalar giperbolik (mos ravishda giperbolik sinus, giperbolik kosinus, giperbolik tangens, giperbolik kotangens) funksiyalar deb ataladi va ular shx, chx, thx, $cthx$ kabi belgilanadi:

$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad thx = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad cthx = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}};$$

shx, chx, thx funksiyalar R da, $cthx$ funksiya esa $X = R \setminus \{0\}$ to'plamda aniqlangan.

Giperbolik funksiyalar orasida ham trigonometrik funksiyalar orasidagi bog'lanishga o'xshash munosabatlar mavjud. Masalan,

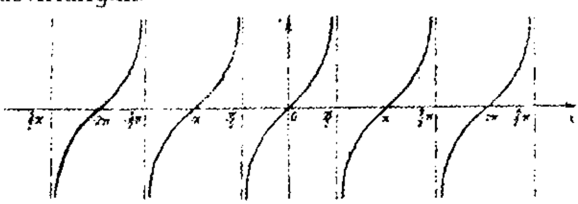
$$thx = \frac{shx}{chx}, \quad cthx = \frac{chx}{shx}, \quad sh2x = 2shxchx$$

7⁰. Teskari trigonometrik funksiyalar. Ma'lumki, $y = \sin x$ funksiya R da aniqlangan bo'lib, uning qiymatlari $\{y \in R \mid -1 \le y \le 1\}$ to'plamni tashkil etadi. Agar biz argument x ning $x \in X = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ segmentdagi qiymatlarini qarasak, $y = \sin x$ funksiyaning qiymatlari ham $Y = [-1,1]$ segmentda o'zgarib, bunda $X = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ to'plamning elementlari $Y = [-1,1]$ to'plamning elementlari bilan o'zaro bir qiymatli moslikda bo'ladi. Bu hol $y = \sin x$ funksiyaga nisbatan teskari funksiyani qarash imkonini beradi. $y = \sin x$ funksiyaga teskari funksiya $y = \arcsin x$ kabi belgilanadi. Demak, $y = \arcsin x$ funksiya $X = [-1,1]$ to'plamda aniqlanagn bo'lib, o'zgarish sohasi $Y = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ to'plamni tashkil etadi.

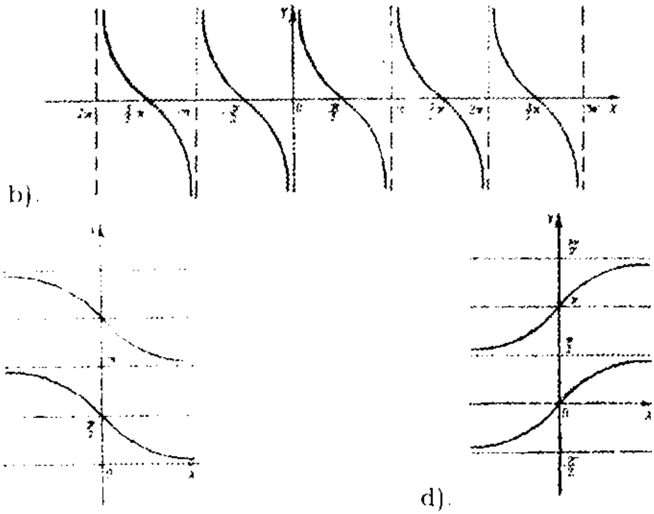
Xuddi shunga o'xshash, $y = \cos x, y = tgx, y = ctgx$ funksiyalarga nisbatan teskari bo'lgan funksiyalar ham teskari trigonometrik funksiyalar deyilib, ular mos ravishda $y = \arccos x, y = arctgx, y = arcctgx$ kabi belgilanadi.

$y = \arccos x$ funksiya $X = [-1,1]$ da aniqlangan bo'lib, uning qiymatlari $Y = [0, \pi]$ to'plamdan iborat. $y = arctgx$ $y = arcctgx$ funksiyalar R da aniqlangan. Bu funksiyalarning o'zgarish sohalari mos ravishda $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ va $(0, \pi)$ to'plamlardan iborat.

23 – chizmalarda teskari trigonometrik funksiyalarning grafiklari tasvirlangan.



a).



23 – chizma.

Endi funksiya tushunchasiga doir ba'zi misollarni keltiramiz.

3.3–misol. Ushbu

$$f(x)=\sqrt{|x|-x}$$

funksiyaning aniqlanish sohasi topilsin.

◀Ravshanki, $\forall x\in R$ uchun

$$|x|\le x$$

bo'ladi. Demak, $\sqrt{[x]-x}$ ifoda ma'noga ega bo'lishi uchun

$$[x]=x \quad \text{ya'ni} \quad x=k \quad (k\in Z)$$

bo'lishi kerak. Berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi $X=Z$ bo'ladi.▶

3.4–misol. Ushbu

$$f(x)=x+\frac{1}{x}$$

funksiyaning $(0,+\infty)$ oraliqdagi qiymatlari orasida eng kichigi topilsin.

◀ Berilgan funksiya uchun

$$f(x)=x+\frac{1}{x}=\frac{x^2+1}{x}=\frac{(x-1)^2+2x}{x}=\frac{(x-1)^2}{x}+2 \qquad f(1)=2$$

bo'lib $\forall x \in (0, +\infty)$ da $f(x) \geq 2$ bo'ladi. Demak, $f(x) = x + \frac{1}{x}$ funksiyaning $(0, +\infty)$ dagi eng kichik qiymati 2 ga teng ►

3.5− misol. Ushbu

$$f(x) = \log_a (x + \sqrt{x^2 + 1}) \qquad (a > 0, a \neq 1)$$

funksiyaning toq funksiya ekanini ko'rsatilsin.

◄ Bu funksiya $R = (-\infty, +\infty)$ da aniqlangan. Berilgan funksiyaning $-x$ nuqtadagi qiymatini topamiz:

$$f(-x) = \log_a (-x + \sqrt{x^2 + 1}) = \log_a \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} =$$

$$= -\log_a (x + \sqrt{x^2 + 1}) = -f(x)$$

Demak, $f(x)$ toq funksiya. ►

3.6−misol. Ushbu

$f(x) = a\sin(bx + c)$, a, b, c — o'zgarmas sonlar $(b \neq 0)$

funksiyaning davri topilsin.

◄ Davriy funksiya ta'rifidan foydalanib,

$$a\sin[\,b(x + T) + c\,] = a\sin(bx + c)$$

deymiz. Unda

$$2\sin\frac{bT}{2}\cos(bx + c + \frac{bT}{2}) = 0$$

bo'lib,

$$\sin\frac{bT}{2} = 0$$

bo'ladi. Keyingi tenglikdan topamiz:

$$\frac{bT}{2} = k\pi \quad \text{ya'ni} \quad T = \frac{2k\pi}{b} \qquad (k = \pm1, \pm2, ...)$$

Topilgan T ning qiymatlari orasida eng kichik musbati

$$T_0 = \frac{2\pi}{b}$$

bo'ladi. ►

3.7−misol. Agar

$$f(x) = \frac{1}{1 - x}$$

bo'lsa, $f(f(f(x)))$ topilsin.

◄ Ravshanki, f funksiya $X = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ to'plamda aniqlangan.

Murakkab funksiya tushunchasidan foydalanib topamiz:

$$f(f(x)) = \frac{1}{1-f(x)} = \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{x-1}{x},$$

$$f(f(f(x))) = \frac{1}{1-f(f(x))} = \frac{1}{1+\frac{1-x}{x}} = x.$$

Bu funksiya $(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$ to'plamda aniqlangan. ►

3−§. Natural argumentli funksiyalar (Sonlar ketma−ketligi)

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $N=\{1,2,3,\dots,n,\dots\}$ to'plamda aniqlangan bo'lsin. Bu holda funksiyaning argumenti natural son bo'ladi. Shuning uchun funksiyani natural argumentli funksiya deyiladi va $f(n)$ kabi yoziladi.

Bu funksiyaning qiymatlari

$$x_n = f(n) \qquad (n=1,2,3,\dots)$$

dan tashkil topgan ushbu

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \dots,\ x_n,\ \dots \qquad (3.2)$$

to'plam sonlar ketma−ketligi deyiladi, to'plamning elementlari esa ketma−ketlikining *hadlari* deyiladi.

Odatda, (3.2) sonlar ketma−ketligi uning umumiy hadi x_n (n − hadi) orqali belgilanadi. Masalan,

$$x_n = \frac{1}{n}:\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \dots,\ \frac{1}{n},\ \dots,$$

$$x_n = n!:\ 1!,\ 2!,\ 3!,\ \dots,\ n!,\ \dots,$$

$$x_n = q^n:\ q,\ q^2,\ q^3,\ \dots,\ q^n,\ \dots,$$

$$x_n = (-1)^n:\ -1,1,\ -1,1,\dots,(-1)^n,\dots,$$

$$x_n = 1:\ 1,1,1,\dots,1,\dots$$

lar sonlar ketma−ketliklari bo'ladi.

Shuni ta'kidlash lozimki, x_n sonlar ketma−ketlikning ($n=1,2,3,\dots$) hadlari soni cheksiz bo'lgan holda bu ketma−ketlikning barcha hadlaridan tuzilgan to'plam cheksiz yoki chekli to'plam bo'lishi mumkin. Masalan, $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots,\frac{1}{n},\dots$ ketma−ketlik hadlaridan tuzilgan $\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots\right\}$ to'plam cheksiz, $1,-1,1,-1,\dots$ ketma−ketlikning hadlaridan tuzilgan $\{-1,1\}$ to'plam esa chekli to'plamdir.

Chegaralanganlik, monotonlik ta'riflari sonlar ketma-ketligi

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$$

uchun quyidagicha ifodalanadi:

5-ta'rif. Agar

$$\exists M \in R, \forall n \in N: x_n \le M$$

tengsizlik bajarilsa, (3.2) ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan,

$$\exists m \in R, \forall n \in N: x_n \ge m$$

tengsizlik bajarilsa, (3.2) ketma-ketlik *quyidan chegaralangan* deyiladi.

6-ta'rif. Agar (3.2) ketma-ketlik ham quyidan, ham yuqoridan chegaralanagn bo'lsa, u *chegaralangan* deyiladi.

3.8-misol. Ushbu

$$x_n = \frac{(-1)^n n + 10}{\sqrt{n^2 + 1}} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

ketma-ketlikning chegaralanaganligi isbotlansin.

◄ Ravshanki,

$$|(-1)^n n + 10| \le |(-1)^n n| + 10 = n + 10,$$

$$\sqrt{n^2 + 1} > n$$

Unda

$$|x_n| = \left| \frac{(-1)^n n + 10}{\sqrt{n^2 + 1}} \right| < \frac{n + 10}{n} = 1 + \frac{10}{n} \le 11$$

ya'ni

$$-11 < x_n \le 11 \qquad (n \in N)$$

bo'ladi. ►

7-ta'rif. Agar $\forall n \in N$ uchun

$$x_n \le x_{n+1}$$

tengsizlik bajarilsa, (3.2) ketma-ketlik o'suvchi,

$$x_n < x_{n+1}$$

tengsizlik bajarilsa, (3.2) ketma-ketlik qat'iy o'suvchi deyiladi.

8-ta'rif. Agar $\forall n \in N$ uchun

$$x_n \ge x_{n+1}$$

tengsizlik bajarilsa, (3.2) ketma-ketlik kamayuvchi,

$$x_n > x_{n+1}$$

tengsizlik bajarilsa, (3.2) ketma–ketlik qat'iy kamayuvchi deyiladi.

O'suvchi va kamayuvchi ketma–ketliklar umumiy nom bilan monoton ketma–ketliklar deyiladi.

3.9–misol. Ushbu

$$x_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1} \qquad (n = 1,2,3,...)$$

ketma–ketlikning kamayuvchi ekani isbotlansin.

◀ Berilgan ketma–ketlikning

$$x_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}, \quad x_{n+1} = (1 + \frac{1}{n+1})^{n+2}$$

hadlarini olib,

$$\frac{x_n}{x_{n+1}}$$

nisbatni qaraymiz. Uni quyidagicha yozib olamiz:

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n+1})^{n+2}} = \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1} = \left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1}$$

Bernulli tengsizligiga (ushbu $(1+\alpha)^n \geq 1+\alpha n$ $(\alpha > -1)$ tengsizlik Bernulli tengsizligi deyiladi. (qaralsin, [1], 2 –bob)) asosan

$$\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} \geq 1 + (n+2)\frac{1}{n(n+2)} = 1 + \frac{1}{n}$$

bo'lishini hisobga olsak, natijada $\forall n \in N$ uchun

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} \geq (1 + \frac{1}{n})\frac{n}{n+1} = 1 \text{ ya'ni } x_n \geq x_{n+1}$$

bo'lishini topamiz.▶

Aytaylik, ikki

$$x_n : x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ... ,$$

$$y_n : y_1, y_2, y_3, ..., y_n, ... ,$$

ketma–ketliklar berilgan bo'lsin. Quyidagi

$$x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, ... x_n + y_n, ... ,$$

$$x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3, ... x_n - y_n, ... ,$$

$$x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2, x_3 \cdot y_3, ... x_n \cdot y_n, ... ,$$

$$\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \frac{x_3}{y_3}, \ldots, \frac{x_n}{y_n}, \ldots \quad (y_n \neq 0, n = 1, 2, \ldots)$$

ketma – ketliklar mos ravishda x_n va y_n ketma – ketliklarning yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi va nisbatan deyiladi va ular

$x_n + y_n, x_n - y_n, x_n \cdot y_n, \frac{x_n}{y_n}$ kabi belgilanadi.

Masalan,

$$x_n = \frac{1}{n}, \quad y_n = \frac{n-1}{n}$$

ketma – ketliklar uchun

$$x_n + y_n = 1, x_n - y_n = \frac{2}{n} - 1, x_n \cdot y_n = \frac{n-1}{n^2}, \frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{n-1} \quad (n \neq 1)$$

bo'ladi.

Mashqlar.

3.10. Ushbu

a) $f(x) = \lg x^2$ bilan $\varphi(x) = 2\lg|x|$,

b) $f(x) = \lg x^2$ bilan $\varphi(x) = 2\lg x$,

s) $f(x) = \arcsin x$ bilan $\varphi(x) = \arccos\sqrt{1-x^2}$ $\quad (0 \leq x \leq 1)$

funksiyalar bir – biriga aynan tengmi?

3.11. Agar $f(x)$ funksiya (0.1) intervalda aniqlagan bo'lsa,

$$f(t^2),\ f(\sin t),\ f(\ln t),\ f\left(\frac{[x]}{x}\right)$$

funksiyalarning aniqlanish sohalari topilsin.

3.12. Agar

$$f(x) = \begin{cases} 0, \ agar\ |x| \leq 1\ bo'lsa \\ 1, \ agar\ |x| > 1\ bo'lsa \end{cases} \qquad \varphi(x) = \begin{cases} x^2 - 1, \ agar\ |x| \leq 2\ bo'lsa \\ -1, \ agar\ |x| > 2\ bo'lsa \end{cases}$$

bo'lsa, $f(\varphi(x))$ topilsin.

3.13. 0 nuqtaga nisbatan simmetrik bo'lgan $X \subset R$ to'plamda aniqlangan har qanday funksiya juft va toq funksiyalar yig'indisi ko'rinishida ifodalanishi isbotlansin.

3.14. Agar $y = f(x)$ juft funksiya, $x = \varphi(t)$ esa toq funksiya bo'lsa, u holda $y = f(\varphi(t))$ ning toq funksiya bo'lishi isbotlansin.

3.15. Ikki toq funksiya ko'paytmasining juft funksiya bo'lishi isbotlansin.

3.16. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $X \subset R$ to'plamda o'suvchi bo'lib, $C = const$ bo'lsa, u holda

a) $f(x)+C$ o'suvchi funksiya,

b) $Cf(x)$, $C > 0$ o'suvchi, $C < 0$ da kamayuvchi,

s) $f(x)+g(x)$ o'suvchi funksiya

bo'lishi isbotlansin.

3.17. Ushbu

$$x_n = (1 + \frac{1}{n})^n \qquad (n = 1,2,3,\ldots)$$

ketma-ketlikning o'suvchi bo'lishi isbotlansin.

3.18. Ushbu

$$x_n = (1 + \frac{1}{n})^n \qquad (n = 1,2,3,\ldots)$$

ketma-ketlikning yuqoridan chegaralanganligi isbotlansin.

3.19. Ushbu

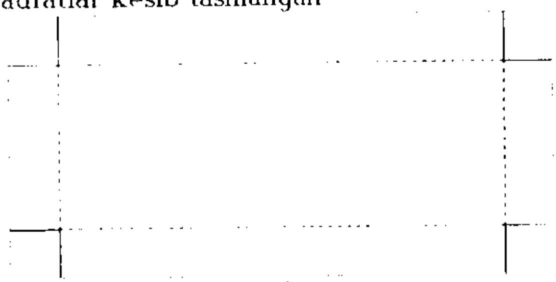
$$x_n = \sqrt[n]{n} \qquad (n = 2,3,4,\ldots)$$

ketma-ketlik uchun

$$1 < \sqrt[n]{n} < (1 + \frac{1}{\sqrt{n}})^2$$

tengsizlikning bajarilishi isbotlansin.

3.20. Tomonlari a va b bo'lgan $(a > 0, b > 0)$ to'g'ri to'rtburchak shaklidagi tunuka plastinkaning uchlaridan tomoni x ga teng kvadratlar kesib tashlangan



24 – chizma

So'ng chizmada ko'rsatilgan punktir chiziqlar bo'ylab bukib idish hosil qilingan. Ravshanki, bu idishning hajmi x ga bog'liq bo'ladi. Shu bog'lanishni ifodalovchi funksiyani topilsin.

3.21. Ushbu $f(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)$ funksiyaning eng kichik qiymati topilsin.

IV BOB

Funksiya limiti

Funksiya limiti (limitga o'tish amali) matematik analizning dastlabki muhim tushunchalaridan. Ayni paytda u keyinroq kiritiladigan asosiy tushunchalar uchun zamin bo'lib hizmat qiladi.

Funksiya limiti nazariyasini dastlab sodda hol – sonlar ketma-ketligi (natural argumentli funksiya) uchun o'rganamiz.

1–§. Sonlar ketma–ketligi limiti

1°. Sonlar ketma–ketligi limiti ta'rifi. Biror

$$x_n : x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots \tag{4.1}$$

ketma–ketlik hamda biror $a \in R$ son berilgan bo'lsin.

1–ta'rif. Agar $\forall \varepsilon > 0$ olinganida ham natural son $n_0 \in N$ mavjud bo'lsaki, $n > n_0$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha natural sonlar uchun

$$|x_n - a| < \varepsilon \tag{4.2}$$

tengsizlik bajarilsa, a son x_n *ketma–ketlikning limiti* deb ataladi.

Limit uchun

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, yoki $\lim x_n = a$, yoki $n \to \infty$ *da* $x_n \to a$

belgilashlardan foydalaniladi.

Bu ta'rifni quyidagicha ifodalash mumkin:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in N, \forall n > n_0 : |x_n - a| < \varepsilon.$$

Ma'lumki, $|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlik $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ tengsizliklarga ekvivalentdir.

Odatda, $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ interval, ya'ni

$$U_\varepsilon(a) = \{x : x \in R, a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\}$$

to'plam a nuqtaning atrofi (ε – atrofi) deyiladi.

Keltirilgan ta'rifdan (4.1) ketma–ketlik hadlari uchun (4.2) tengsizlikning bajarilishi shu hadlarning a nuqtaning ε – atrofi $U_\varepsilon(a)$ to'plamga tegishliligi kelib chiqadi.

Demak, (4.1) ketma–ketlik limitini quyidagicha ham ta'riflash mumkin.

2–ta'rif. Agar a nuqtaning ixtiyoriy $U(a)$ atrofi olinganida ham x_n ketma ketlikning biror hadidan keyingi barcha hadlari shu atrofga tegishli bo'lsa, a son x_n *ketma ketlikning limiti* deb ataladi.

Shuni ta'kidlash lozimki, ketma–ketlik limiti ta'rifidagi ε ixtiyoriy musbat son bo'lib, natural son n_0 esa shu ε ga va qaralayotgan ketma – ketlikka bog'liq ravishda topiladi.

4.1–misol. $x_n = \frac{1}{n}: 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ ketma –ketlikning limiti 0 ga teng bo'lishini ko'rsating.

◀ Ixtiyoriy musbat ε sonni olaylik. Shu ε ga ko'ra $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ ni topamiz. U holda barcha $n > n_0$ sonlar uchun

$$|x_n - a| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} = \frac{1}{\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1} < \varepsilon$$

munosabat o'rinli. Demak, ta'rifga ko'ra $\lim \frac{1}{n} = 0$. ▶

4.2–misol. Ushbu $x_n = (-1)^n: -1, 1, -1, \ldots, (-1)^n, \ldots$ ketma–ketlikning limiti mavjud emasligini ko'rsating.

◀ $\forall a \in R$ sonni olaylik. Agar $a = 1$ bo'lib, uning $(1 + \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ atrofi $(0 < \varepsilon < 1)$ olinsa, ketma–ketlikning biror hadidan boshlab keyingi barcha hadlari shu atrofi tegishli bo'lmaydi $(-1 \notin (1 + \varepsilon, 1 + \varepsilon))$. Binobarin, $a = 1$ ketma–ketlikning limiti emas. Xuddi shunday vaziyat $\forall a \in R$ uchun yuz beradi.

Demak, berilgan ketma–ketlik limitga ega emas. ▶

4.3–misol. Ushbu 0,3; 0,33; 0,333;..., 0,33...3, ... ketma–ketlikning limiti $\frac{1}{3}$ ga teng bo'lishini ko'rsating.

◀ $\forall \varepsilon > 0$ son olib, $\left|0{,}33\ldots3 - \frac{1}{3}\right|$ ni qaraymiz. Ravshanki,

$$0{,}33\ldots3 - \frac{1}{3} = \frac{33\ldots3}{100\ldots0} - \frac{1}{3} = \frac{99\ldots9 - 10^n}{3 \cdot 10^n} = \frac{-1}{3 \cdot 10^n}, \quad \left|0{,}33\ldots3 - \frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3 \cdot 10^n}.$$

Endi $\varepsilon > 0$ ga ko'ra shunday $n_0 \in N$ son topish kerakki, natijada $n > n_0$ lar uchun $\frac{1}{3 \cdot 10^n} < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsin.

Keyingi tengsizlik $n > -\lg(3\varepsilon)$ bo'lganda o'rinli bo'lishi ravshan. Demak, biz n_0 sifatida $[-\lg(3\varepsilon)]$ sonni olishimiz etarli. Bu esa qaralayotgan ketma-ketlik limitining $\frac{1}{3}$ ga teng bo'lishini ko'rsatadi. ▶

2^0. Cheksiz kichik miqdorlar.

3-ta'rif. Agar x_n ketma-ketlikning limiti nolga teng bo'lsa, x_n o'zgaruvchi cheksiz kichik miqdor deb ataladi, tegishli x_n esa *cheksiz kichik ketma-ketlik* deyiladi.

Ketma-ketlik limiti ta'rifida $a = 0$ deb olinadigan bo'lsa, unda barcha natural $n > n_0$ sonlar uchun (4.2) tengsizlik $|x_n - a| = |x_n| < \varepsilon$ tengsizlikka keladi. Demak, cheksiz kichik miqdor o'zgaruvchi miqdor bo'lib, u o'zgarish jarayonida absolut qiymati bo'yicha avvaldan berilgan har qanday kichik musbat ε sondan kichik bo'ladi.

Masalan, $x_n = \frac{1}{n}$ ketma-ketlik cheksiz kichik miqdor bo'ladi.

4.4-misol. Ushbu

$$x_n = \frac{1}{a^n} \qquad (a \in R, |a| > 1)$$

ketma-ketlik cheksiz kichik miqdor ekanligi isbotlansin.

◀ $|a| = 1 + \delta$ deylik. Unda $\delta = |a| - 1 > 0$ bo'ladi. Bernulli tengsizligiga ko'ra

$$(1 + \delta)^n > 1 + n\delta > n\delta$$

bo'lib, $\forall n \in N$ uchun

$$\frac{1}{|a|^n} < \frac{1}{n\delta}$$

bo'ladi. Demak,

$$\left|\frac{1}{a^n} - 0\right| = \frac{1}{|a|^n} < \varepsilon$$

tengsizlik, barcha

$$n > \frac{1}{\varepsilon\delta}$$

bo'lganda o'rinli. Agar

$$n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon\delta}\right] + 1$$

deyilsa. $\forall n > n_0$ uchun

$$\left|\frac{1}{a^n}\right| < \varepsilon$$

bo'ladi. Demak,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a^n} = 0,$$

$x_n = \frac{1}{a^n}$ ketma-ketlik cheksiz kichik miqdor. ►

4.5-misol. Ushbu

$$x_n = a^n \qquad (a \in R,\ |a| < 1)$$

ketma-ketlik cheksiz kichik miqdor ekani isbotlansin.

◄ Agar $a \neq 0$ bo'lganda $\frac{1}{a} = b$ deyilsa, u holda $|b| > 1$ va $a^n = \frac{1}{b^n}$ bo'lib,

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b^n} = 0$$

bo'ladi. ►

Aytaylik, x_n:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$$

ketma-ketlik va a son $(a \in R)$ berilgan bo'lsin.

1-teorema. *a son x_n ketma-ketlikning limiti bo'lishi uchun*

$$\alpha_n = x_n - a \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

ketma-ketlikning cheksiz kichik miqdor bo'lishi zarur va yetarli.

◄ **Zarurligi**. Faraz qilaylik,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

bo'lsin. Limit ta'rifiga binoan

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N, \forall n > n_0 : |x_n - a| < \varepsilon$$

Agar $x_n - a = \alpha_n$ deyilsa, unda $|\alpha_n| < \varepsilon$ bo'lib,

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$$

bo'ladi.

Yetarliligi. Aytaylik, $\alpha_n = x_n - a$ bo'lib,

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$$

bo'lsin. Yana limit ta'rifiga ko'ra

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in N, \forall n > n_\varepsilon \quad |\alpha_n| < \varepsilon$$

bo'ladi. Unda $|x_n - a| < \varepsilon$ bo'lib,

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a$$

bo'ladi ►

Masalan,

$$x_n = \frac{n+1}{n} \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

ketma-ketlik uchun

$$x_n = 1 + \frac{1}{n}, \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

bo'lganligi sababli

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

bo'ladi.

Endi cheksiz kichik miqdorlar haqida ba'zi tasdiqlarni keltiramiz.

1-lemma. Chekli sondagi cheksiz kichik miqdorlar yig'indisi cheksiz kichik miqdor bo'ladi.

◄ Aytaylik, α_n va β_n

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \dots$$
$$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_n, \dots$$

cheksiz kichik miqdorlar bo'lsin:

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_n = 0, \quad \lim_{n \to \infty} \beta_n = 0$$

Unda

$$\forall \varepsilon > 0, \frac{\varepsilon}{2}, \exists n_0' \in N, \forall n > n_0' : |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\forall \varepsilon > 0, \frac{\varepsilon}{2}, \exists n_0'' \in N, \forall n > n_0'' : |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

bo'ladi. Agar $n_0 = \max\{n_0', n_0''\}$ deyilsa, $\forall n > n_0$ uchun

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

bo'lib,

$$|\alpha_n + \beta_n| \le |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi. Bundan

$$\lim_{n \to \infty} (\alpha_n + \beta_n) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha_n+\beta_n)=0$$

bo'lishi kelib chiqadi. Agar γ_n ham cheksiz kichik miqdor bo'lsa,

$$\alpha_n+\beta_n+\gamma_n=(\alpha_n+\beta_n)+\gamma_n$$

ning cheksiz kichik miqdor bo'lishi yuqoridagidek ko'rsatiladi. ►

2−lemma. Chegaralangan ketma−ketlik bilan cheksiz kichik miqdor ko'paytmasi cheksiz kichik miqdor bo'ladi.

◄ Aytaylik, x_n chegaralangan ketma−ketlik, α_n esa cheksiz kichik miqdor bo'lsin:

$$\exists M\in R,\ M>0,\ \forall n\in N:\ |x_n|\le M,$$

$$\forall\varepsilon>0,\ \frac{\varepsilon}{M},\ \exists n_0\in N,\ \forall n>n_0:\ |\alpha_n|<\frac{\varepsilon}{M}$$

Bu munosabatlardan

$$|x_n\alpha_n|=|x_n|\cdot|\alpha_n|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak,

$$\lim_{n\to\infty}(x_n\cdot\alpha_n)=0\ .\ ►$$

3⁰. Cheksiz katta miqdorlar. Biror

$$x_n:\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

ketma−ketlik berilgan bo'lsin.

4−ta'rif. Agar har qanday musbat M son berilganda ham shunday $n_0\in N$ son topilsaki, barcha $n>n_0$ lar uchun

$$|x_n|>M$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, x_n o'zgaruvchi cheksiz katta miqdor deb ataladi, tegishli x_n ketma−ketlik *cheksiz katta ketma−ketlik* deyiladi.

Demak, cheksiz katta miqdor o'zgaruvchi miqdor bo'lib, u o'zgarish jarayonida absolut qiymati bo'yicha avvaldan berilgan har qanday musbat sondan katta bo'ladi.

Ravshanki, cheksiz katta miqdorlar chekli limitga ega emas. Qulaylik nuqtai nazaridan cheksiz katta miqdorlarning limiti cheksiz yoki cheksiz katta miqdorlar cheksizga intiladi deb olinadi va

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\infty \text{ yoki } x_n\to\infty$$

kabi yoziladi.

Agar

$$\forall M>0,\ \exists n_0\in N,\ \forall n>n_0:\ x_n>M$$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ kabi yoziladi.

Agar

$$\forall M > 0, \exists n_0 \in N, \forall n > n_0 : x_n < -M$$

bo'lsa, x_n ketma-ketlikning limiti $-\infty$ deb olinadi va

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ kabi yoziladi.

Masalan, $x_n = (-1)^n n$, $y_n = -n$, $z_n = n$ ketma-ketliklarning limiti mos ravishda ∞; $-\infty$; $+\infty$ bo'ladi.

5-ta'rif. Chekli limitga ega bo'lgan ketma-ketlik *yaqinlashuvchi ketma-ketlik* deyiladi.

6-ta'rif. Agar ketma-ketlikning limiti cheksiz yoki limiti mavjud bo'lmasa, u *uzoqlashuvchi ketma-ketlik* deyiladi.

Masalan, $x_n = \dfrac{n+1}{n}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi, $y_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$, $z_n = n$ ketma-ketliklar esa uzoqlashuvchi bo'ladi.

2-§. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklarning xossalari

Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar qator xossalarga ega.

1-xossa. Agar x_n ketma-ketlik yaqinlashuvchi va $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ bo'lib, $a > p$ $(a < q)$ bo'lsa, u holda ketma-ketlikning biror hadidan keyingi barcha hadlari ham p sondan katta (q sondan kichik) bo'ladi.

◀ $x_n \to a$ bo'lib, $a > p$ bo'lsin, $\varepsilon > 0$ sonni uning ixtiyoriyligidan foydalanib, $\varepsilon < a - p$ tengsizlikni qanoatlantiradigan qilib olaylik.

Ketma-ketlikning chekli a limitga ega ekanligidan $\forall\varepsilon > 0$ son uchun, jumladan $0 < \varepsilon < a - p$ uchun, shunday $n_0 \in N$ son topish mumkinki, $n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ bo'ladi. Natijada $n > n_0$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha natural sonlar uchun $a - \varepsilon < x_n$ va $\varepsilon < a - p$ tengsizliklar o'rinli bo'lib, undan $x_n > p$ bo'lishi kelib chiqadi. ($a < q$ hol uchun xossa xuddi yuqoridagidek isbot etiladi).▶

Bu xossadan quyidagi natija kelib chiqadi.

1-natija. Agar x_n ketma-ketlik yaqinlashuvchi va $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ bo'lib, $a > 0$ $(a < 0)$ bo'lsa, u holda ketma-ketlikning biror hadidan keyingi barcha hadlari musbat (manfiy) bo'ladi.

2-xossa. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, u chegaralangan bo'ladi.

◄ $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ bo'lsin. Ta'rifga ko'ra $\forall\varepsilon>0$ berilganda ham shunday $n_0\in N$ son topiladiki, $n>n_0$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha natural sonlar uchun $|x_n-a|<\varepsilon$ bo'ladi, ya'ni x_n ketma-ketlikning (n_0+1)-hadidan boshlab keyingi barcha hadlari uchun $a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$ tengsizliklar bajariladi. Demak, x_n ketma-ketlik oshib borsa, $x_1, x_2, \dots, x_{n_0}$ hadlari $a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$ tengsizliklarni qanoatlantirmasligi mumkin. Agar

$$|a-\varepsilon|,\ |a+\varepsilon|,\ |x_1|,\ |x_2|,\ \dots,\ |x_{n_0}|$$

sonlarning eng kattasini M deb olsak, u holda berilgan ketma-ketlikning barcha hadlari

$$|x_n|\le M \qquad (n=1,2,3,\dots)$$

tengsizlikni qanoatlantiradi. Bu esa x_n ketma-ketlikning chegaralanganligini bildiradi. ►

1-eslatma. Sonlar ketma-ketlikning chegaralanganligidan uning yaqinlashuvchi bo'lishi har doim kelib chiqavermaydi. Masalan, $x_n=(-1)^n: -1, 1, -1, \dots, (-1)^n, \dots$ ketma-ketlik chegaralangan. Ayni vaqtda uning limiti mavjud emasligi yuqorida ko'rsatilgan edi.

3-xossa. Agar x_n ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, uning limiti yagonadir.

◄ Teskarisini faraz qilaylik. x_n ketma-ketlik ikkita a va b $(a\ne b)$ limitlarga ega bo'lsin:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} x_n = b \qquad (a\ne b)$$

Limit ta'rifiga ko'ra

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0'\in N,\ \forall n>n_0':\ |x_n-a|<\varepsilon,$$

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0''\in N,\ \forall n>n_0'':\ |x_n-b|<\varepsilon$$

bo'ladi. Agar n_0' va n_0'' natural sonlarning kattasini n_0 desak, $\forall n>n_0$ da

$$|x_n-a|<\varepsilon, \quad |x_n-b|<\varepsilon$$

bo'lib,

$$|x_n-a|+|x_n-b|<2\varepsilon$$

bo'ladi. Ravshanki,

$$|a-b|\le|a-x_n+x_n-b|\le|x_n-a|+|x_n-b|$$

Demak $|a-b|<2\varepsilon$, $\varepsilon>0$ ning ixtiyoriyligida $a=b$ bo'lishi kelib chiqadi.►

4–xossa. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar ustida arifmetik amallar

2–teorema. *Agar x_n va y_n ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lsa, x_n+y_n ketma-ketlik ham yaqinlashuvchi va*

$$\lim(x_n+y_n)=\lim x_n+\lim y_n$$

formula o'rinli bo'ladi.

◄ $\lim x_n=a$, $\lim y_n=b$ bo'lsin. 1–teoremaga muvofiq $x_n=a+\alpha_n$, $y_n=a+\beta_n$ bo'ladi, bunda α_n, β_n lar cheksiz kichik miqdorlar. U holda x_n+y_n uchun quyidagi

$$x_n+y_n=(a+b)+(\alpha_n+\beta_n)=a+b+\gamma_n$$

tenglikka kelamiz, bunda $\gamma_n=\alpha_n+\beta_n$ cheksiz kichik miqdor. Bundan esa, yana o'sha 1–teoremaga muvofiq

$$\lim(x_n+y_n)=a+b=\lim x_n+\lim y_n$$

bo'lishi kelib chiqadi.►

Bu teorema ikki yaqinlashuvchi ketma-ketlik yig'indisining limiti bu ketma-ketliklar limitlarining yig'indisiga teng degan qoidani ifodalaydi.

Isbot etilgan teorema qo'shiluvchilarning soni ikkitadan ortiq (chekli) bo'lgan holda ham o'rinli bo'lishini ko'rsatish mumkin.

3–teorema. *Agar x_n va y_n ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lsa $x_n y_n$ ketma-ketlik ham yaqinlashuvchi va*

$$\lim(x_n\cdot y_n)=\lim x_n\cdot\lim y_n$$

formula o'rinli bo'ladi.

◄ $\lim x_n=a$, $\lim y_n=b$ bo'lsin. U holda $x_n=a+\alpha_n$, $y_n=a+\beta_n$, α_n va β_n lar cheksiz kichik miqdorlar. Unda

$$x_n y_n=(a+\alpha_n)(b+\beta_n)=ab+(a\beta_n+b\alpha_n+\alpha_n\beta_n)$$

bo'ladi. Cheksiz kichik miqdorlar haqidagi 1- va 2-lemmalarga asosan $\delta_n=a\beta_n+b\alpha_n+\alpha_n\beta_n$ ketma-ketlik cheksiz kichik miqdor bo'ladi. Demak,

$$x_n y_n=ab+\delta_n$$

bo'lib, bundan

$$\lim(x_n\cdot y_n)=ab=\lim x_n\cdot\lim y_n$$

ekani kelib chiqadi.►

Bu teorema ikkita yaqinlashuvchi ketma-ketlik ko'paytmasining limiti bu ketma-ketliklar limitlarining ko'paytmasiga teng bo'lishini ifodalaydi.

Xususan, agar x_n ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, unda $\lim x_n^2 = (\lim x_n)^2$ bo'ladi.

Agar x_n ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, unda $C = const$ uchun Cx_n ketma-ketlik ham yaqinlashuvchi va $\lim(Cx_n) = C\lim x_n$ formula o'rinli bo'ladi.

4-teorema. *Agar x_n va y_n ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lib, $\forall n \in N$ uchun $y_n \neq 0$ va $\lim y_n \neq 0$ bo'lsa, $\frac{x_n}{y_n}$ ketma-ketlik ham yaqinlashuvchi hamda*

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim x_n}{\lim y_n}$$

formula o'rinli bo'ladi.

◀ $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$ bo'lsin. U holda $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$ bunda α_n, β_n cheksiz kichik miqdorlar. Shuni e'tiborga olib topamiz:

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a + \alpha_n}{b + \beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{1}{b(b + \beta_n)}(b\alpha_n - a\beta_n)$$

Cheksiz kichik miqdorlar haqidagi 1- va 2- lemmalarga asosan $b\alpha_n - a\beta_n$ cheksiz kichik miqdor bo'lib, $\frac{1}{b(b+\beta_n)}$ esa chegaralangan (chunki b – chekli, $\beta_n \to 0$) miqdor bo'lgani uchun $\gamma_n = \frac{1}{b(b+\beta_n)}(b\alpha_n - a\beta_n)$ cheksiz kichik miqdor bo'ladi. Demak,

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} + \gamma_n$$

Bundan

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} = \frac{\lim x_n}{\lim y_n}$$

munosabatlar o'rinli ekani kelib chiqadi.▶

Shunday qilib, yaqinlashuvchi ketma-ketliklar nisbatining limiti ularning limitlari nisbatiga teng (bunda mahraj noldan farqli bo'lishi lozim).

2-eslatma. Ikki x_n va y_n ketma-ketlikning yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi va nisbatidan iborat bo'lgan ketma-ketlikning yaqinlashuvchi bo'lishidan bu x_n va y_n ketma-ketliklarning har biri yaqinlashuvchi bo'lishi har doim kelib chiqavermaydi. Masalan, $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi, chunki $\lim(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) = \lim \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = 0$ ammo $\sqrt{n+1}$ va $\sqrt{n-1}$ ketma-ketliklarning yaqinlashuvchi emasligi ravshan.

Ravshanki, $\frac{1}{n} \cdot n$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi (uning limiti 1 ga teng). Lekin $\frac{1}{n}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi, n ketma-ketlik esa yaqinlashuvchi emas.

5-xossa. Tenglik hamda tengsizliklarda limitga o'tish. Ketma-ketliklar limitining mavjudligini ko'rsatish va limiti mavjud bo'lgan ketma-ketliklarning limitlarni topish kabi masalalarni hal qilishda tenglik hamda tengsizliklarda limitga o'tish qoidalari tez-tez qo'llanilib turadi. Biz ularni keltiramiz.

1). x_n va y_n ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lib, $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$ bo'lsin. Agar $\forall n \in N$ uchun $x_n = y_n$ bo'lsa, u holda $a = b$ bo'ladi.

Bu qoida yaqinlashuvchi ketma-ketlik limitining yagonaligidan kelib chiqadi.

2). x_n va y_n ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lib, $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$ bo'lsin. Agar $\forall n \in N$ uchun $x_n \le y_n$ $(x_n \ge y_n)$ bo'lsa, u holda $a \le b$ $(a \ge b)$ bo'ladi.

◄ Teskarisini faraz qilaylik, ya'ni keltirilgan shartlar bajarilsa ham $a > b$ bo'lsin. $a > c > b$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi c sonni olaylik. Demak, $\lim x_n = a$ va $a > c$. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklarning 1-xossasiga (shu bobning 3-§ iga qarang) ko'ra shunday $n_0 \in N$ mavjudki, barcha $n > n_0$ lar uchun $x_n > c$ bo'ladi. Shuningdek, $\lim y_n = b$, $b < c$. Yana o'sha xossaga muvofiq shunday $n_0' \in N$ mavjudki, barcha $n > n_0'$ lar uchun $y_n < c$ bo'ladi. Agar $\bar{n}_0 = \max\{n_0, n_0'\}$ deyilsa, unda barcha $n > \bar{n}_0$ lar uchun bir vaqtda $x_n > c$ hamda $c > y_n$ tengsizliklar o'rinli bo'lib, undan $x_n > y_n$ bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa $x_n \le y_n$

$n = 1,2,3,...$ tengsizlikka ziddir. Demak, $a \le b$ bo'ladi.

Xuddi shunga o'xshash, $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$ hamda $\forall n \in N$ uchun $x_n \ge y_n$ bo'lishidan $a \ge b$ tengsizlik kelib chiqishi ko'rsatiladi.►

3–eslatma. x_n va y_n ketma–ketliklar yaqinlashuvchi bo'lib, $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$ bo'lsin.

Barcha $n = 1,2,3...$ lar uchun $x_n < y_n$ qat'iy tengsizliklarning bajarilishidan $a < b$ tengsizlik hamma vaqt kelib chiqavermaydi.

Masalan, $-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}$ ketma–ketliklar yaqinlashuvchi. Bu ketma–ketliklarda $\forall n \in N$ uchun $-\frac{1}{n} < \frac{1}{n}$ bo'lsa ham $\lim(-\frac{1}{n}) = \lim \frac{1}{n} = 0$ bo'ladi.

2–natija. Agar x_n ketma–ketlik yaqinlashuvchi bo'lib, $\forall n \in N$ uchun $x_n \le c$ $(x_n \ge c)$ bo'lsa, u holda $\lim x_n \le c$ $(\lim x_n \ge c)$ bo'ladi (bunda c o'zgarmas son).

Bu natijaning isboti yuqoridagi 2) da $y_n = c$, $n = 1,2,3,...$ deb olinishidan kelib chiqadi.

3). x_n va z_n ketma–ketliklar yaqinlashuvchi bo'lib, $\lim x_n = \lim z_n = a$ bo'lsin. Agar $\forall n \in N$ uchun $x_n \le y_n \le z_n$ bo'lsa, u holda y_n ketma–ketlik ham yaqinlashuvchi va $\lim y_n = a$ bo'ladi.

◄Ketma–ketlikning limiti ta'rifiga asosan $\forall \varepsilon > 0$ berilganda ham shunday $n_0 \in N$ topiladiki, barcha $n > n_0$ lar uchun $|x_n - a| < \varepsilon$ yoki $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ tengsizliklar o'rinli bo'ladi. Shuningdek, o'sha $\varepsilon > 0$ olinganida ham shunday $n_0' \in N$ topiladiki, barcha $n > n_0'$ lar uchun $|z_n - a| < \varepsilon$ yoki $a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$ tengsizliklar o'rinli bo'ladi. Endi $\bar{n}_0 = \max\{n_0, n_0'\}$ deylik. Unda $n > \bar{n}_0$ bo'lganda bir vaqtda $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, $a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$ tengsizliklar o'rinli bo'ladi. Ammo shartga ko'ra $\forall n \in N$ uchun $x_n \le y_n \le z_n$ tengsizliklar o'rinli. Shuning uchun $n > \bar{n}_0$ bo'lganda $a - \varepsilon < x_n \le y_n \le z_n < a + \varepsilon$ ya'ni $a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon$ bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa y_n ketma–ketlikning yaqinlashuvchiligini va $\lim y_n = a$ ekanligini ko'rsatadi.►

4.6–misol. Ushbu

$$x_n = \sqrt[n]{n} \qquad (n = 1,2,3,...)$$

ketma – ketlikning limiti topilsin.

◀ Bu ketma – ketlik uchun

$$1 < \sqrt[n]{n} < \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 \qquad (4.3)$$

bo'ladi (qaralsin. 3 – bob, 3.19 – mashq).

Ravshanki,

$$\lim_{n\to\infty} 1 = 1, \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 = \left(\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^2 = 1$$

(4.3) munosabatdan, $n \to \infty$ da limitga o'tish bilan

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

bo'lishni topamiz.▶

4.7–misol. Ushbu $x_n = n - \sqrt[3]{n^3 - n^2}$ ketma – ketlikning limitini toping.

◀ Berilgan ketma – ketlikning umumiy hadi x_n ni quyidagicha yozib olamiz:

$$x_n = n - \sqrt[3]{n^3 - n^2} =$$

$$= \frac{(n - \sqrt[3]{n^3 - n^2})(n^2 + n\sqrt[3]{n^3 - n^2} + \sqrt[3]{(n^3 - n^2)^2})}{n^2 + n\sqrt[3]{n^3 - n^2} + \sqrt[3]{(n^3 - n^2)^2}} =$$

$$= \frac{1}{1 + \sqrt[3]{1 - \frac{1}{n}} + \sqrt[3]{(1 - \frac{1}{n})^2}}$$

Bundan esa

$$\lim x_n = \lim(n - \sqrt[3]{n^3 - n^2}) = \lim \frac{1}{1 + \sqrt[3]{1 - \frac{1}{n}} + \sqrt[3]{(1 - \frac{1}{n})^2}} =$$

$$= \frac{1}{\lim\left[1 + \sqrt[3]{1 - \frac{1}{n}} + \sqrt[3]{(1 - \frac{1}{n})^2}\right]} = \frac{1}{3}$$

bo'lishi kelib chiqadi.▶

3–§. Sonlar ketma–ketligi limitining mavjudligi haqida teoremalar

Ketma – ketlikning qachon chekli limitga ega bo'lishi haqidagi masala limitlar nazariyasining muhim masalalaridan biri. Ushbu paragrafda, avval monoton ketma – ketlikning limiti haqida, so'ng ixtiyoriy ketma – ketlikning limitga ega bo'lishini ifodalaydigan teoremalarni keltiramiz.

1⁰. Monoton ketma-ketlikning limiti haqida teoremalar.

5-teorema. *Agar x_n ketma-ketlik o'suvchi bo'lib, yuqoridan chegaralangan bo'lsa, u chekli limitga ega; agar x_n ketma-ketlik yuqoridan chegaralanmagan bo'lsa, u holda ketma-ketlikning limiti $+\infty$ bo'ladi.*

◄ Avvalo, x_n ketma-ketlik o'suvchi va yuqoridan chegaralangan bo'lgan holni qaraymiz. Ketma-ketlik yuqoridan chegaralanganligi uchun shunday M son mavjudki, $\forall n \in N$ son uchun $x_n \le M$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bu esa ketma-ketlikning barcha hadlaridan tuzilgan $\{x_n\}$ to'plamning yuqoridan chegaralanganligi ifodalaydi. Unda to'plamning aniq yuqori chegarasi haqidagi 3-teoremaga asosan bu to'plam uchun $\sup\{x_n\}$ mavjud bo'ladi. Biz uni a bilan belgilaylik: $\sup\{x_n\} = a$. Endi a son x_n ketma-ketlikning limiti bo'lishini ko'rsatamiz.

Aniq yuqori chegaraning ta'rifiga ko'ra, birinchidan, $\{x_n\}$ to'plamning har bir elementi uchun $x_n \le a$ tengsizligi o'rinli bo'lsa, ikkinchidan, $\forall \varepsilon > 0$ olinganda ham ketma-ketlikning shunday x_{n_0} hadi topiladiki, bu had uchun $x_{n_0} > a - \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Demak,

$$\sup\{x_n\} = a \Rightarrow \begin{cases} a - x_n \ge 0, & \forall n \in N \\ a - x_{n_0} < \varepsilon \end{cases}$$

Qaralayotgan x_n ketma-ketlik o'suvchi. Demak, $n > n_0 \Rightarrow x_n \ge x_{n_0}$. Shu sababli $n > n_0$ bo'lganda $0 \le a - x_n \le a - x_{n_0} < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Shunday qilib, $\forall \varepsilon > 0$ olinganda ham shunday $n_0 \in N$ son topiladiki, $n > n_0$ bo'lganda $|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Bu esa a son x_n ketma-ketlikning limiti ekanini ko'rsatadi.

Endi x_n ketma-ketlik o'suvchi bo'lib, yuqoridan chegaralanmagan bo'lsin. Unda har qanday katta musbat A son olinganda ham x_n ketma-ketlikning shunday $x_{n_0'}$ hadi topiladiki, $x_{n_0'} > A$ bo'ladi. Ammo barcha $n > n_0'$ lar uchun $x_n \ge x_{n_0'}$ tengsizlik o'rinli bo'lgani sababli $x_n > A$ tengsizlik ham bajariladi. Bu esa $\lim x_n = +\infty$ bo'lishini bildiradi.►

Quyidagi teorema ham xuddi yuqoridagi teoremaga o'xshash isbotlanadi.

6–teorema. *Agar x_n ketma-ketlik kamayuvchi bo'lib, quyidan chegaralangan bo'lsa, u chekli limitga ega; agar x_n ketma-ketlik quyidan chegaralanmagan bo'lsa, u holda ketma–ketlikning limiti $-\infty$ bo'ladi.*

4.8–misol. Ushbu $x_n = \dfrac{n!}{n^n}$ ketma-ketlikning limitini toping.

◄Avvalo, bu ketma-ketlik limitining mavjudligini ko'rsatamiz.

Ravshanki,

$$x_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n!}{n^n}\cdot\frac{n^n}{(n+1)^n} = x_n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

Bundan barcha $n \geq 1$ lar uchun $x_{n+1} < x_n$ tengsizlikning o'rinli ekani kelib chiqadi. Bu esa berilgan ketma-ketlik kamayuvchi ekanini ko'rsatadi. Ketma–ketlikning har bir hadi musbat, $x_n > 0,\ n = 1,2,\ldots$. Demak, u quyidan chegaralangan. Shunday qilib, $x_n = \dfrac{n!}{n^n}$ ketma–ketlik kamayuvchi va quyidan chegaralangan. 5–teoremaga ko'ra bu ketma-ketlik chekli limitga ega. Biz uni a bilan belgilaylik:

$$\lim \frac{n!}{n^n} = a$$

Ravshanki, $a \geq 0$. Bernulli tengsizligidan foydalanib topamiz:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + n\cdot\frac{1}{n} = 2.$$

Bundan esa $(n+1)^n \geq 2n^n$ kelib chiqadi. U holda

$$x_n - x_{n+1} = x_n - x_n\frac{n^n}{(n+1)^n} = x_n\left[\frac{(n+1)^n - n^n}{(n+1)^n}\right] \geq$$

$$\geq x_n\frac{2n^n - n^n}{(n+1)^n} = \frac{x_n n^n}{(n+1)^n} = x_{n+1}$$

bo'lib, natijada quyidagi $x_n \geq 2x_{n+1}$ tengsizlikka kelamiz. Bu tengsizlikda limitga o'tamiz: $\lim x_n \geq 2\lim x_n$. Undan $a \geq 2a$ va $a \geq 0$ ni hisobga olsak, $a = 0$ ekani kelib chiqadi. Demak,

$$\lim \frac{n!}{n^n} = 0.$$ ►

4.9- misol. Quyidagi

$$\sqrt{a},\ \sqrt{a+\sqrt{a}},\ \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}},\ \dots,$$

$$\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\dots+\sqrt{a}}}}}_{n},\ \dots$$

($a>0$) ketma-ketlikning limitini toping.

◄Bu ketma-ketlikning n- hadi

$$x_n=\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\dots+\sqrt{a}}}}_{n}$$

deyilsa,

$$x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}, \qquad n\geq 1 \qquad (*)$$

bo'lib, undan x_n ketma-ketlikning o'suvchi va yuqoridan chegaralanganligi matematik induksiya usuli yordamida ko'rsatiladi. Ravshanki,

$$x_1=\sqrt{a}<\sqrt{a+\sqrt{a}}=x_2.$$

Endi k-nomer uchun $x_{k-1}<x_k$ tengsizlik bajarilsin deyilsa, (*) munosabatdan

$$x_k=\sqrt{a+x_{k-1}}<\sqrt{a+x_k}=x_{k+1}$$

tengsizlik kelib chiqadi. Demak, $\forall n\in N$ uchun $x_n<x_{n+1}$ bo'ladi.

Shuningdek, (*) dan foydalanib $\forall n\in N$ uchun

$$x_n<\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$$

isbotlanadi. Monoton ketma-ketlikning limiti haqidagi 5-teoremaga ko'ra berilgan ketma-ketlik chekli limitga ega. Biz uni y bilan belgilaylik: $\lim x_n=y$ so'ngra $x_n^2=a+x_{n-1}$ tenglikda hadlab limitga o'tish amalini bajarib topamiz: $\lim x_n^2=a+\lim x_{n-1}$ yoki $y^2=a+y$. Natijada y ni topish uchun kvadrat tenglamaga kelamiz. Bu kvadrat tenglamaning ildizlarini yozamiz:

$$y_1=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}, \qquad y_2=\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}.$$

Ketma-ketlikning hadlari musbat bo'lgani uchun $y_1=\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$ son ketma-ketlikning limiti bo'ladi. Demak,

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{a+\sqrt{a+\dots+\sqrt{a}}}\right)=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}.$$ ►

Xususan, ushbu

$$\sqrt{3},\ \sqrt{3+\sqrt{3}},\ \sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3}}},\ \ldots,$$
$$\sqrt{3+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{3}}},\ \ldots$$

ketma-ketlik yaqinlashuvchi va uning limiti $\frac{1+\sqrt{13}}{2}\approx 2{,}30$ ga teng.

Monoton ketma-ketlikning limiti haqidagi teoremalarning matematik analiz kursida qaraladigan ba'zi masalalarga tatbiq etilishini qarab o'tamiz.

2^0. e soni. Quyidagi $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1,\ \left(1+\frac{1}{2}\right)^2,\ \left(1+\frac{1}{3}\right)^3,\ \ldots,\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ \ldots \qquad (4.4)$$

ketma-ketlik berilgan bo'lsin. Bu ketma-ketlik limitining mavjudligini ko'rsatamiz. Berilgan (4.4) ketma-ketlik bilan birga ushbu

$$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \qquad (n=1,2,3,\ldots)$$

ketma-ketlikni ham qaraymiz. Bu ketma-ketlik kamayuvchi ekanligi 3—bob, 3-§ da ko'rsatilgan.

Ikkinchi tomondan, $y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ ketma-ketlikning har bir hadi musbat bo'lgani uchun u quyidan chegaralangandir. Shunday qilib $y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ ketma-ketlik kamayuvchi va quyidan chegaralangandir. 6-teoremaga ko'ra bu y_n ketma-ketlik limitga ega.

Agar

$$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=x_n\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

tenglikdan $x_n=y_n\cdot\frac{n}{n+1}$ tenglikning kelib chiqishini va $\lim\frac{n}{n+1}=1$ ekanini e'tiborga olsak, unda $\lim x_n=\lim y_n$ ga ega bo'lamiz. Bu esa (4.4) ketma-ketlik limitining mavjudligini ko'rsatadi.

7-ta'rif. Berilgan $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ketma-ketlikning limiti e *soni* deb ataladi:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Bunda e lotincha exponentis "ko'rsatish, ko'rsatqich, namoyish qilish" so'zining dastlabki harfini ifodalaydi.

3⁰. Ichma-ich joylashgan segmentlar prinsipi.

7-teorema. *Ikkita x_n va y_n ketma-ketlik berilgan bo'lsin. Agar*

1). x_n o'suvchi, y_n kamayuvchi ketma-ketlik,

2). $\forall n\in N$ lar uchun $x_n < y_n$

3). $\lim(y_n - x_n) = 0$ *bo'lsa, x_n va y_n ketma-ketliklar yaqinlashuvchi va* $\lim x_n = \lim y_n$ *tenglik o'rinli bo'ladi.*

◀ x_n ketma-ketlik o'suvchi, y_n ketma-ketlik esa kamayuvchi hamda har bir $n\in N$ uchun $x_n < y_n$ tengsizlik o'rinli bo'lganidan, $\forall n\in N$ uchun $x_n \le y_1$, $y_n \ge x_1$ tengsizliklar bajariladi. Bu esa x_n ketma-ketlik yuqoridan, y_n ketma-ketlik esa quyidan chegaralanganligini bildiradi. Monoton ketma-ketlikning limiti haqidagi teoremalarga asosan x_n va y_n ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'ladi. Shuning uchun

$$\lim(y_n - x_n) = \lim y_n - \lim x_n$$

bo'lib, teoremaning uchinchi shartidan esa

$$\lim y_n - \lim x_n = 0,\quad \lim x_n = \lim y_n$$

bo'lishi kelib chiqadi. ►

Ma'lumki, $\{x : x\in R, a\le x\le b\}$ to'plam $[a,b]$ segment deb atalar edi. Agar $[a_1,b_1]\subset[a,b]$ bo'lsa, $[a_1,b_1]$ segment $[a,b]$ segmentning ichiga joylashgan deyiladi.

Agar

$$[a_1,b_1],\ [a_2,b_2], \dots,\ [a_n,b_n],\dots$$

segmentlar ketma-ketligi quyidagi

$$[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset[a_3,b_3]\supset\dots\supset[a_n,b_n]\supset\dots$$

munosabatda bo'lsa, bu segmentlar ichma-ich joylashgan segmentlar ketma-ketligi deyiladi.

3-natija. Agar ichma-ich joylashgan

$$[a_1,b_1],\ [a_2,b_2],\ [a_3,b_3],\dots,\ [a_n,b_n],\dots$$

segmentlar ketma-ketligi uchun $\lim(b_n - a_n) = 0$ bo'lsa, u holda

a_n va b_n ketma-ketliklar bitta limitga ega hamda bu limit barcha segmentlarga tegishli bo'lgan yagona nuqta bo'ladi.

◀ $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n], \ldots$ ichma-ich joylashgan segmentlar ketma-ketligi bo'lib,

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$$

bo'lsin. Bunda a_n ketma-ketlik o'suvchi, b_n esa kamayuvchi ketma-ketliklardir va barcha $n \in N$ lar uchun $a_n < b_n$ bo'ladi. Demak, a_n va b_n ketma-ketliklar 5 va 6-teoremalarning barcha shartlarini qanoatlantiradi, bu teoremalarga ko'ra a_n va b_n ketma-ketliklar yaqinlashuvchi va

$$\lim a_n = \lim b_n$$

bo'ladi.

Endi $\lim a_n = \lim b_n = c$ deb belgilab, c nuqta barcha $[a_n, b_n]$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ segmentlarga tegishli bo'lgan yagona nuqta ekanini ko'rsatamiz. a_n ketma-ketlik o'suvchi va $\lim a_n = c$ bo'lganidan $a_n \le c$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ shuningdek, b_n ketma-ketlik kamayuvchi va $\lim b_n = c$ bo'lganidan esa $b_n \ge c$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ bo'lishi kelib chiqadi. Demak, $a_n \le c \le b_n$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ bo'lib, c nuqta barcha segmentlarga tegishli: $c \in [a_n, b_n]$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Agar shu c nuqtadan farqli va segmentlarning barchasiga tegishli c', $c' \in [a_n, b_n]$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ nuqta ham mavjud deb qaraladigan bo'lsa, unda

$$b_n - a_n \ge |c - c'| > 0$$

bo'lib, bu munosabat $\lim(b_n - a_n) = 0$ shartga zid bo'ladi. Demak, $c = c'$. ▶

Keltirilgan natija ichma-ich joylashgan segmentlar prinsipi deb yuritiladi.

4^0. Qismiy ketma-ketliklar. Bolsano-Veyershtrass lemmasi

Biror $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ ketma-ketlik berilgan bo'lsin. Bu ketma-ketlikning biror n_1 nomerli x_{n_1} hadini olamiz. So'ngra nomeri n_1 dan katta bo'lgan n_2 nomerli x_{n_2} hadini olamiz. Shu usul bilan x_{n_3}, x_{n_4} va hokazo hadlarni olish mumkin. Natijada nomerlari $n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_k < \dots$ tengsizliklarni qanoatlantira-digan hadlar tanlangan bo'ladi. Bu hadlar ushbu

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots \quad (n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_k < \dots) \qquad (4.5)$$

ketma–ketlikni tashkil etadi.

Odatda (4.5) ketma–ketlik x_n ketma–ketlikning qismiy ketma–ketligi deb ataladi va x_{n_k} kabi belgilanadi. Ba'zida x_n ketma–ketlikdan x_{n_k} ketma–ketlik ajratilgan deyiladi.

Qismiy ketma–ketlikning tuzilishidan ravshanki, $k \to \infty$ da n_k ham cheksizlikka intiladi:

Masalan. 1). quyidagi

$$1, 3, 5, 7, \dots, 2n-1, \dots$$

$$2, 4, 6, 8, \dots, 2n, \dots$$

$$1, 4, 9, 16, \dots, n^2, \dots$$

ketma–ketliklar natural sonlar ketma–ketligi $1, 2, 3, \dots$ ning qismiy ketma–ketliklari bo'ladi:

2). Ushbu

$$1, \frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}, \dots, \frac{1}{10^n}, \dots$$

ketma–ketlik

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

ketma–ketlikning qismiy ketma–ketligidir:

3). Quyidagi

$$1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^n, \dots$$

ketma–ketlikdan, masalan, ushbu

$$1, 1, 1, \dots, 1, \dots$$

$$-1, -1, -1, \dots, -1, \dots$$

qismiy ketma–ketliklarni ajratish mumkin.

Ketma–ketlik limiti bilan uning qismiy ketma–ketliklari limiti orasidagi munosabatni quyidagi teorema ifodalaydi.

8–teorema. *Agar x_n ketma–ketlik limitga (chekli, yoki $+\infty$, yoki $-\infty$) ega bo'lsa, uning har qanday qismiy ketma–ketligi ham shu limitga ega bo'ladi.*

◄ $\lim x_n = a$ bo'lsin, x_n ketma–ketlikning biror

$$x_{n_k}: x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \dots, x_{n_k}, \dots$$

qismiy ketma–ketligini olaylik.

Limit ta'rifiga ko'ra $\forall\varepsilon>0$ olinganida ham, shunday $n_0\in N$ son mavjudki, barcha $n>n_0$ lar uchun $|x_n-a|<\varepsilon$ bo'ladi. $k\to\infty$ da $n_k\to\infty$ bo'lishidan shunday $m\in N$ son topiladiki, $n_m>n_0$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Demak, barcha $k>m$ lar uchun $|x_{n_k}-a|<\varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Bu esa $\lim x_{n_k}=a$ limitning o'rinli ekanini ifodalaydi. Xuddi shuningdek, $\lim x_n=+\infty\ (-\infty)$ bo'lganida ham x_n ketma-ketlikning har qanday qismiy ketma-ketligi $+\infty\ (-\infty)$ ga intilishi ko'rsatiladi. ►

4-eslatma. Ketma-ketlik qismiy ketma-ketliklarining limiti mavjud bo'lishidan berilgan ketma-ketlikning limiti mavjud bo'lishi har doim ham kelib chiqavermaydi. Masalan:

$$1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \ldots,\ (-1)^{n+1},\ldots$$

ketma-ketlikning ushbu

$$1,\ 1,\ 1,\ \ldots,\ 1,\ldots$$
$$-1,\ -1,\ -1,\ldots,\ -1,\ldots$$

qismiy ketma-ketliklari limitga ega (ular mos ravishda 1 va -1 larga teng). Ammo berilgan $(-1)^{n+1}$ ketma-ketlik limitga ega emas.

Demak, berilgan ketma-ketlik limitga ega bo'lmasa ham uning qismiy ketma-ketliklari limitga ega bo'lishi mumkin ekan.

8-ta'rif. x_n ketma-ketlikning qismiy ketma-ketligi limiti berilgan ketma-ketlikning *qismiy limiti* deb ataladi.

3-lemma (Bolsano-Veyershtrass lemmasi). Agar x_n chegaralangan bo'lsa, bu ketma-ketlikdan shunday qismiy ketma-ketlik ajratish mumkinki, u yaqinlashuvchi bo'ladi.

◄ x_n ketma-ketlik chegaralangan bo'lsin. Demak, ketma-ketlikning barcha hadlari biror $[a,b]$ segmentga tegishli bo'ladi. $[a,b]$ segmentni teng ikki qismga ajratib, $\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$ va $\left[\frac{a+b}{2},b\right]$ segmentlarni hosil qilamiz. Berilgan ketma-ketlikning barcha hadlari $[a,b]$ da bo'lgani sababli, uning cheksiz ko'p sondagi hadlari $\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$ va $\left[\frac{a+b}{2},b\right]$ segmentlarning kamida bittasiga tegishli bo'ladi. Endi x_n ketma-ketlikning cheksiz ko'p sondagi hadlari bo'lgan segmentni, ya'ni $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ yoki $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ ni (agar ikkalasida ham ketma ketlikning cheksiz ko'p sondagi hadlari bo'lsa, ulardan ixtiyoriy birini) $[a_1, b_1]$ deb belgilaymiz. Ravshanki, $[a_1, b_1]$ ning uzunligi $\frac{b-a}{2}$ bo'ladi. Yuqoridagiga o'xshash, $[a_1, b_1]$ segmentni teng ikki qismga ajratib, $\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right]$ va $\left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$ segmentlarni hosil qilamiz va bu segmentlardan x_n ketma – ketlikning cheksiz sondagi hadlari bo'lganini $[a_2, b_2]$ deb olamiz. Ravshanki, $[a_2, b_2]$ segmentning uzunligi $\frac{b-a}{2^2}$ bo'ladi.

Bu jarayonni davom ettirish natijasida ushbu

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n], \ldots$$

segmentlar ketma – ketligi hosil bo'ladi. Tuzilishiga ko'ra har bir $[a_k, b_k]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ segmentda x_n ketma – ketlikning cheksiz ko'p sondagi hadlari bo'ladi.

Ravshanki,

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$$

$[a_k, b_k]$ segmentning uzunligi $b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$ bo'lib, $k \to \infty$ da nolga intiladi. Ichma – ich joylashgan segmentlar prinsipiga ko'ra a_k va b_k ketma – ketliklar umumiy (bitta) chekli limitga ega:

$$\lim a_k = \lim b_k = c$$

Endi x_n ketma – ketlikning $[a_1, b_1]$ dagi birorta hadini olaylik. U n_1 – had bo'lsin: $x_{n_1} \in [a_1, b_1]$ so'ngra, x_n ning $[a_2, b_2]$ dagi birorta hadini olaylik. U n_2 – had bo'lsin: $x_{n_2} \in [a_2, b_2]$ qaralayotgan segmentlarning har birida ketma – ketlikning cheksiz ko'p hadlari bo'lganligi uchun, ravshanki, $n_2 > n_1$ qilib olishimiz mumkin.

Xuddi shuningdek, x_n ning $[a_3, b_3]$ dagi x_{n_1}, x_{n_2} hadlaridan keyin keladigan birorta x_{n_3} hadini $(n_1 < n_2 < n_3)$ olamiz. Bu jarayonni davom ettirib, k – qadamda, $[a_k, b_k]$ segmentdagi x_n

ketma-ketlikning $x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \dots, x_{n_{k-1}}$ lardan keyin keladigan hadlaridan biri x_{n_k} ni olamiz va h.k. Natijada x_n ketma-ketlik hadlaridan tashkil topgan ushbu

$$x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \dots, x_{n_k}, \dots \quad (n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_k < \dots)$$

qismiy ketma-ketlik hosil bo'ladi. qismiy x_{n_k} ketma-ketlikning hadlari uchun

$$a_k \le x_{n_k} \le b_k$$

tengsizliklar o'rinli bo'lib, unda $k \to \infty$ da

$$\lim x_{n_k} = c$$

bo'lishi kelib chiqadi. ►

5-eslatma. Keltirilgan lemmada ketma-ketlikning chegaralangan bo'lishi muhim shartdir. Shu shart bajarilmasa, lemmaning xulosasi o'rinli bo'lmasdan qolishi mumkin. Masalan, chegaralanmagan ushbu

$$1, 2, 3, \dots, n, \dots$$

natural sonlar ketma-ketlikning har qanday qismiy ketma-ketligi ham $+\infty$ ga intiladi.

5⁰. Koshi teoremasi (yaqinlashish mezoni). Biror x_n ketma-ketlik berilgan bo'lsin.

9-ta'rif. Agar $\forall \varepsilon > 0$ olinganda ham shunday $n_0 \in N$ son mavjud bo'lsaki, barcha $n > n_0$ va barcha $m > n_0$ lar uchun

$$|x_n - x_m| < \varepsilon \qquad (4.6)$$

tengsizlik bajarilsa, x_n *fundamental ketma-ketlik* deb ataladi.

4.10-misol. $x_n = \dfrac{n}{n+1}$. Bu ketma-ketlik uchun (4.6) shartning bajarilishi ko'rsatilsin.

◄ Haqiqatan,

$$|x_n - x_m| = \left|\frac{n}{n+1} - \frac{m}{m+1}\right| < \frac{n+m}{nm} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}.$$

Agar $\forall \varepsilon > 0$ songa ko'ra natural n_0 sonni

$$n_0 = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right] + 1$$

deb olsak, u holda barcha $n > n_0$ va barcha $m > n_0$ lar uchun

$$|x_n - x_m| < \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

bo'lishini topamiz. Demak, berilgan ketma-ketlik fundamentaldir. ►

4.11−misol. Quyidagi

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

ketma-ketlikning fundamental ketma-ketlik emasligi ko'rsatilsin.

◄ Ravshanki,

$$1,\ 1+\frac{1}{2},\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3},\ \dots$$

ketma-ketlik uchun har qanday $m \geq 1$ olganimizda ham

$$|x_{m+m} - x_m| = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \dots + \frac{1}{2m} > m \cdot \frac{1}{2m} = \frac{1}{2}$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu hol berilgan ketma-ketlikning fundamental emasligini ko'rsatadi. ►

9−teorema. (Koshi teoremasi). *Ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lishi uchun u fundamental bo'lishi zarur va yetarli.*

◄ **Zarurligi.** x_n ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lib, $\lim x_n = a$ bo'lsin. Limit ta'rifiga muvofiq, $\forall \varepsilon > 0$ berilganda ham $\frac{\varepsilon}{2}$ ga ko'ra shunday $n_0 \in N$ son topiladiki, barcha $n > n_0$ sonlar uchun $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Demak, ixtiyoriy $n > n_0$ va $m > n_0$ sonlar uchun

$$|x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m| \leq |x_n - a| + |x_m - a| < \varepsilon$$

Bu esa x_n fundamental ketma-ketlik ekanini ko'rsatadi.

Yetarliligi. x_n fundamental ketma-ketlik bo'lsin. Demak, $\forall \varepsilon > 0$ uchun shunday $n_0 \in N$ son topiladiki, $n > n_0$, $m > n_0$ lar uchun $|x_n - x_m| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli. Bu tengsizlikda n son (n_0 dan katta) ixtiyoriy bo'lishini qoldirib, m natural sonning n_0 dan katta biror tayin qiymatini olib, yuqoridagi tengsizlikni quyidagi

$$x_m - \varepsilon < x_n < x_m + \varepsilon$$

ko'rinishda yozib olamiz. Demak, $n > n_0$ da x_n ketma-ketlikning x_n hadlari $(x_m - \varepsilon, x_m + \varepsilon)$ intervalda tegishli bo'lib, undan ketma-ketlikning chegaralanganligi kelib chiqadi. Bolsano–Veyershtrass lemmasiga ko'ra x_n ketma-ketlikdan chekli songa intiluvchi x_{n_k} qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin. Bu qismiy ketma-ketlik limitini a bilan belgilaylik:

$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$. Endi a son $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti ekanini ko'rsatamiz. Darhaqiqat, bir tomondan $x_{n_k} \to a$ bo'lgani uchun $\forall\varepsilon > 0$ ga ko'ra shunday $k_0 \in N$ son topiladiki, $k > k_0$ lar uchun $|x_{n_k} - a| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi.

Ikkinchi tomondan, $n, n_k > n_0$ bo'lganda $|x_n - x_{n_k}| < \varepsilon$ tengsizlik ham bajariladi. Yuqoridagi tengsizliklarga ko'ra

$$|x_n - a| = |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - a| \le |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < 2\varepsilon$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa $\lim x_n = a$ ekanini ko'rsatadi.►

Isbot etilgan teorema Koshi teoremasi yoki yaqinlashish mezoni (kriteriysi) deb yuritiladi. Bu teorema muhim nazariy ahamiyatga ega.

6⁰. Ketma-ketlikning yuqori va quyi limitlari

Aytaylik, $\{x_n\}$:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$$

ketma-ketlik berilgan bo'lib, $\{x_{n_k}\}$:

$$x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$$

berilgan ketma-ketlikning qismiy ketma-ketliklari bo'lsin. Ma'lumki, $\{x_{n_k}\}$ ketma-ketlikning limiti $\{x_n\}$ ning qismiy limiti deyilar edi.

10-ta'rif. $\{x_n\}$ ketma-ketlik qismiy limitlarning eng kattasi $\{x_n\}$ ketma-ketlikning *yuqori limiti* deyiladi. U

$$\overline{\lim}\ x_n$$

kabi belgilanadi.

$\{x_n\}$ ketma-ketlik qismiy limitlarning eng kichigi berilgan ketma-ketlikning *quyi limiti* deyiladi. U

$$\underline{\lim}\ x_n$$

kabi belgilanadi.

Masalan, ushbu $\{x_n\}$:

$$1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \ldots$$

ketma-ketlikning yuqori limiti

$$\overline{\lim}\ x_n = 3$$

quyi limiti esa

$$\underline{\lim}\ x_n = 1$$

bo'ladi.

4-§. Funksiyaning limiti

Biz yuqorida natural argumentli funksiya – sonlar ketma ketligi va uning limitini o'rgandik. Endi argumenti haqiqiy son bo'lgan funksiya limitini qaraymiz. Avvalo sonli to'plamning limiti nuqtasi tushunchasi bilan tanishamiz.

1⁰. To'plamning limiti nuqtasi. Ma'lumki,

$$U_{\varepsilon}(a) = \{x : x \in R,\ a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\}$$

to'plam a nuqtaning atrofi (ε – atrofi) deb atalar edi. Shunga o'xshash ushbu

$$U_{\varepsilon}^{+}(a) = \{x : x \in R,\ a < x < a + \varepsilon\}$$

to'plam a nuqtaning o'ng atrofi.

$$U_{\varepsilon}^{-}(a) = \{x : x \in R,\ a - \varepsilon < x < a\}$$

to'plam a nuqtaning chap atrofi.

$$U_{c}(\infty) = \{x : x \in R,\ |x| > c\},$$

$$U_{c}(+\infty) = \{x : x \in R,\ x > c\},$$

$$U_{c}(-\infty) = \{x : x \in R,\ x < -c\}$$

to'plamlar esa mos ravishda ∞, $+\infty$ va $-\infty$ "nuqta" larning *atrofi* deb ataladi. Yuqorida keltirilgan ε va c lar ixtiyoriy musbat haqiqiy sonlar.

X biror sonli to'plam, a biror nuqta bo'lsin.

11–ta'rif. Agar a nuqtaning har bir atrofida X to'plamning a dan farqli kamida bitta nuqtasi bo'lsa,
ya'ni

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in X,\ x \neq a,\ : |x - a| < \varepsilon$$

bo'lsa, a nuqta X to'plamning *limit nuqtasi* deyiladi. Misollar qaraylik.

1). Ushbu $[0,1] = \{x : x \in R, 0 \le x \le 1\}$ to'plamning har bir nuqtasi shu to'plamning limit nuqtasi bo'ladi:

2). Ushbu $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ to'plam limit nuqtaga ega emas:

3). Ushbu $(0,1) = \{x : x \in R, 0 < x < 1\}$ to'plamning har bir nuqtasi shu to'plamning limit nuqtasi bo'ladi va yana $x = 0$, $x = 1$ nuqtalar ham $(0,1)$ uchun limit nuqtalardir.

4) F - $[0,1]$ segment hamda 2 sonidan iborat to'plam bo'lsin,

ya'ni $E = [0,1] \cup \{2\}$. Bu to'plam uchun $x = 2$ limit nuqta emas.

Agar a nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'lsa, X to'plam nuqtalaridan a ga intiluvchi x_n ($x_n \in X$, $x_n \neq a$, $n = 1, 2, \ldots$) ketma - ketlik tuzish mumkin.

◀ To'plamning limit nuqtasi ta'rifiga binoan:

$$\varepsilon = 1 \ \ uchun \ \exists x_1 \in X, \ x_1 \neq a, \ |x_1 - a| < 1,$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \ \ uchun \ \exists x_2 \in X, \ x_2 \neq a, \ |x_2 - a| < \frac{1}{2},$$

$$\varepsilon = \frac{1}{3} \ \ uchun \ \exists x_3 \in X, \ x_3 \neq a, \ |x_3 - a| < \frac{1}{3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varepsilon = \frac{1}{n} \ \ uchun \ \exists x_n \in X, \ x_n \neq a, \ |x_n - a| < \frac{1}{n},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

bo'ladi. Natijada, x_n ketma - ketlik hosil bo'lib, $\forall n \in N$ uchun

$$|x_n - a| < \frac{1}{n}$$

bo'ladi. Bundan

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a$$

bo'lishi kelib chiqadi. ▶

Bu keltirilgan mulohazalardan ko'rinadiki, bunday ketma-ketliklarni ko'plab tuzish mumkin.

12–ta'rif. Agar a nuqtaning har bir o'ng (chap) atrofida X to'plamning a dan farqli kamida bitta nuqtasi bo'lsa, a nuqta X ning *o'ng (chap) limit nuqtasi* deb ataladi.

13–ta'rif. Agar har bir $U_\varepsilon(\infty)$ atrofida X to'plamning kamida bitta nuqtasi bo'lsa, ∞ "nuqta" X to'plamning *limit nuqtasi* deyiladi.

$-\infty$, $+\infty$ "nuqta" larning limit nuqta bo'lishi ham yuqoridagi singari ta'riflanadi.

Masalan, $+\infty$ "nuqta" $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ to'plamning limit nuqtasi bo'ladi.

2⁰. Funksiya limitining ta'rifi. $X \subset R$ to'plam berilgan bo'lib, a nuqta uning limit nuqtasi bo'lsin. Bu to'plamda $f(x)$ funksiya aniqlangan deylik. Modomiki, a nuqta X ning limit nuqtasi ekan, X to'plamning nuqtalaridan a ga intiluvchi turli, ($x_n \in X$, $x_n \neq a$, $n = 1, 2, 3, \ldots$) ketma- ketliklar tuzish mumkin: $\lim x_n = a$. Ravshanki, $x_n \in X$ $(n = 1,2,3,...)$ shuning uchun bu nuqtalarda ham $f(x)$ funksiya aniqlangan. Natijada $\{x_n\}$ ketma - ketlik bilan birga $f(x_n)$:

$$f(x_1),\ f(x_2),\ f(x_3),\ ...\ f(x_n),...$$

sonlar ketma — ketligiga ham ega bo'lamiz.

14—ta'rif. Agar X to'plamning nuqtalaridan tuzilgan, a ga intiluvchi har qanday x_n $(x_n \neq a, n = 1,2,3,...)$ ketma - ketlik olganimizda ham mos $f(x_n)$ ketma — ketlik hamma vaqt yagona b (chekli yoki cheksiz) limitga intilsa, shu b ga $f(x)$ funksiyaning *a nuqtadagi limiti* deb ataladi. Funksiya limiti $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ kabi belgilanadi.

Funksiya limitiga berilgan bu ta'rif Geyne ta'rifi deb ataladi.

Ba'zan b ni $f(x)$ ning $x \to a$ dagi limiti deyiladi va

$$x \to a \text{ da } f(x) \to b$$

kabi belgilanadi.

Keltirilgan ta'rifning ushbu muhim tomoniga o'quvchining e'tiborini jalb qilaylik: a ga intiluvchi har qanday x_n $(x_n \neq a, n = 1,2,3,...)$ ketma - ketlik uchun $x_n \to a$ da $f(x_n)$ ketma — ketlikning limiti olingan x_n ketma — ketlikka bog'liq bo'lmasligi kerak.

4.12—misol. Ushbu

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

funksiyaning $x \to 0$ dagi limiti 1 ga teng ekanini ko'rsating.

◀ Nolga intiluvchi ixtiyoriy x_n ketma — ketlik olaylik: $\lim x_n = 0$.

U holda funksiya qiymatlaridan iborat ketma — ketlik

$$f(x_n) = \frac{1}{1+x_n^2}$$

bo'ladi. Ravshanki, $x_n \to 0$ da

$$\lim f(x_n) = \lim \frac{1}{1+x_n^2} = 1.$$

Demak, ta'rifga ko'ra

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{1+x^2} = 1. \blacktriangleright$$

4.13–misol Quyidagi

$$f(x) = \sin\frac{1}{x}, \qquad x \neq 0$$

funksiyaning $x \to 0$ dagi limiti mavjud emasligi ko'rsatilsin.

◄ Haqiqatan, nolga intiluvchi ikkita turli $x'_n = \frac{2}{(4n-1)\pi}$,

$x''_n = \frac{2}{(4n+1)\pi}$ ketma -ketlikni olaylik. Bunda

$$f(x'_n) = \sin\frac{4n-1}{2}\pi = -1, \quad f(x''_n) = \sin\frac{4n+1}{2}\pi = 1,$$

bo'lib,

$$\lim f(x'_n) = -1, \quad \lim f(x''_n) = 1$$

bo'ladi.

Bu esa $\sin\frac{1}{x}$ funksiyaning $x \to 0$ da limiti mavjud emasligini ko'rsatadi. ►

Funksiya limitini boshqacha ham ta'riflash mumkin.

15–ta'rif. Agar $\forall\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topilsaki, argument x ning $0 < |x-a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida $|f(x) - b| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, b son $f(x)$ funksiyaning a *nuqtadagi limiti* deb ataladi.

16–ta'rif. Agar $\forall\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topilsaki, argument x ning $0 < |x-a| < \delta$ tengsizlikning qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida $|f(x)| > \varepsilon$ $(f(x) > \varepsilon, f(x) < -\varepsilon)$ bo'lsa, $f(x)$ funksiyaning a *nuqtadagi limiti* ∞ ($+\infty$; $-\infty$) deyiladi.

Funksiya limitiga berilgan bu ta'rif Koshi ta'rifi deb ataladi.

4.14–misol. Ushbu $f(x) = \frac{x-5}{x^2-25}$ funksiyaning $x \to 5$ dagi limiti $\frac{1}{10}$ bo'lishini isbot eting.

◄ $\forall\varepsilon > 0$ son olaylik. Bu ε ga ko'ra δ ni $\delta = \frac{10\varepsilon}{1+\varepsilon}$ deb olsak, u holda $0 < |x-5| < \delta$ bo'lganda

$$\left|\frac{x-5}{x^2-25} - \frac{1}{10}\right| = \frac{1}{10}\left|\frac{x-5}{x+5}\right| \leq \frac{|x-5|}{10(10-|x-5|)} \leq \frac{\delta}{10-\delta} < \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi. Bundan, ta'rifga ko'ra

$$\lim_{x\to 5} f(x) = \lim_{x\to 5} \frac{x-5}{x^2-25} = \frac{1}{10}$$

kelib chiqadi.►

4.15–misol. Ushbu $f(x) = \frac{1}{x-1}$ funksiya uchun $x \to 1$ da $f(x) \to \infty$ bo'lishini ko'rsating.

◄ $\forall \varepsilon > 0$ son uchun $\delta = \frac{1}{\varepsilon}$ deb olinsa, u holda $0 < |x-1| < \delta$ tengsizlikning bajarilishidan

$$|f(x)| = \left|\frac{1}{x-1}\right| > \varepsilon$$

tengsizlik kelib chiqadi. Demak, $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{x-1} = \infty$.►

3⁰. Funksiyaning bir tomonli limitlari. X biror haqiqiy sonlar to'plami bo'lib, a uning o'ng (chap) limit nuqtasi bo'lsin. Bu to'plamda $f(x)$ funksiya aniqlangan deylik.

17–ta'rif. (Geyne). Agar X to'plamning nuqtalaridan tuzilgan va har bir hadi a dan katta (kichik) bo'lib, a ga intiluvchi har qanday x_n ketma - ketlik olganimizda ham mos $f(x_n)$ ketma–ketlik hamma vaqt yagona b ga intilsa, shu b ni $f(x)$ funksiyaning *a nuqtadagi o'ng (chap) limiti* deb ataladi.

18–ta'rif. (Koshi). Agar $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topilsaki, argument x ning $a < x < a + \delta$ $(a - \delta < x < a)$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida $|f(x) - b| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, b son $f(x)$ funksiyaning *a nuqtadagi o'ng (chap) limiti* deb ataladi.

Funksiyaning o'ng (chap) limiti quyidagicha belgilanadi:

$\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = b$ yoki $f(a+0) = b$ $\left(\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = b\right.$ yoki $\left.f(a-0) = b\right)$

Agar $a = 0$ bo'lsa, $x \to 0+0$ $(x \to 0-0)$ o'rniga $x \to +0$ $(x \to -0)$ deb yoziladi.

Funksiyaning o'ng va chap limitlari, uning bir tomonli limitlari deyiladi.

4.16–misol. Ushbu

$$f(x) = \frac{x}{|x|} \qquad (x \neq 0)$$

funksiyaning o'ng va chap limitlari topilsin.

◄ Har biri nolga intiluvchi ikkita

$$x_n' = \frac{1}{n} \to 0 \ (x_n' > 0,\ n = 1, 2, 3, \dots),$$
$$x_n'' = -\frac{1}{n} \to 0 \ (x_n'' < 0,\ n = 1, 2, 3, \dots)$$
ketma – ketlikni olaylik. Bu ketma – ketliklar uchun
$$f(x_n') = \frac{x_n'}{x_n'} = 1 \to 1, \quad f(x_n'') = \frac{x_n''}{-x_n''} = -1 \to -1$$
bo'ladi. Demak,
$$\lim_{x \to +0} f(x) = \lim_{x \to +0} \frac{x}{|x|} = 1, \quad \lim_{x \to -0} f(x) = \lim_{x \to -0} \frac{x}{|x|} = -1 \ ►$$
Endi $x \to \infty$ da funksiya limiti tushunchasini keltiramiz.

X to'plam berilgan bo'lib, $\infty \ (+\infty, -\infty)$ uning limit "nuqta" si bo'lsin. Bu to'plamda $f(x)$ funksiya aniqlangan deylik.

17–ta'rif. (Geyne). Agar X to'plamning nuqtalaridan tuzilgan har qanday cheksiz katta (musbat cheksiz katta; manfiy cheksiz katta) x_n ketma – ketlik olganimizda ham mos $f(x_n)$ ketma – ketlik hamma vaqt yagona b ga intilsa, shu b ni $f(x)$ funksiyaning $x \to \infty (x \to +\infty, x \to -\infty)$ *dagi limiti* deb ataladi.

18–ta'rif. (Koshi). Agar $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topilsaki, argument x ning $|x| > \delta \ (x > \delta;\ x < -\delta)$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida $|f(x) - b| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, b son $f(x)$ funksiyaning $x \to \infty (x \to +\infty, x \to -\infty)$ *dagi* limiti deb ataladi. Funksiya limiti
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b \quad (\lim_{x \to +\infty} f(x) = b;\ \lim_{x \to -\infty} f(x) = b)$$
kabi begilanadi.

4.17–misol. Ushbu
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad (4.7)$$
tenglikni isbotlang.

◄ Ushbu
$$\sin x < x < tgx \qquad (0 < x < \frac{\pi}{2})$$
tengsizliklar o'rinli. Bu maktab matematikasidan ma'lum. $\sin x > 0$ bo'lgani uchun bu tengsizliklarni
$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$
ko'rinishda yozilishi mumkin. Undan

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x \qquad (4.8)$$

tengsizliklar kelib chiqadi.

Biz (4.8) tengsizliklarni ixtiyoriy $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ uchun isbot qildik. $\frac{\sin x}{x}$ $(x \neq 0)$ va $\cos x$ funksiyalarning juftligidan bu tengsizliklarning barcha $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus \{0\}$ uchun to'g'riligini topamiz. Shu bilan birga $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ da $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2} \leq 2\frac{|x|}{2} = |x|$ tengsizlikning o'rinli bo'lishini e'tiborga olsak, yuqoridagi (4.8) tengsizliklar quyidagi

$$0 < \left|1 - \frac{\sin x}{x}\right| < |x|$$

ko'rinishga kelishini topamiz.

Agar $\forall \varepsilon > 0$ son berilganda ham $\delta > 0$ deb ε va $\frac{\pi}{2}$ sonlarning kichigi olinsa, argument x ning $0 < |x| < \delta$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida

$$\left|1 - \frac{\sin x}{x}\right| = \left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < \varepsilon$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bu esa funksiya limitining Koshi ta'rifiga ko'ra (4.7) limitning to'g'riligini anglatadi. ►

4.18–misol. Quyidagi

$$\lim_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e \qquad (4.9)$$

tenglikni isbotlang (bunda $e = 2{,}71 \ldots$)

◄ Buning uchun $+\infty$ ga intiluvchi ixtiyoriy x_n ketma–ketlikni olaylik. Bu holda barcha $k = 1,2,3,\ldots$ lar uchun $x_k > 1$ deb qarash mumkin. Har bir x_k ning butun qismini n_k orqali belgilab, ushbu $[x_k] = n_k$ $(k = 1,2,\ldots)$ $+\infty$ ga intiluvchi $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ natural sonlar ketma–ketligini hosil qilamiz.

Ma'lumki,

$$\lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$$

Bu munosabatdan

$$\lim_{n_k\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}=e$$

ekani kelib chiqadi.

Endi ushbu

$$[x_k]=n_k \Rightarrow n_k \le x_k < n_k+1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n_k+1} < \frac{1}{x_k} \le \frac{1}{n_k} \Rightarrow 1+\frac{1}{n_k+1} < 1+\frac{1}{x_k} \le 1+\frac{1}{n_k}$$

munosabatlar o'rinli bo'lishini e'tiborga olib, topamiz:

$$\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} < \left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k} < \left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1} \qquad (4.10)$$

Biroq

$$\lim_{n_k\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k}=\lim_{n_k\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{-1}\right)=e,$$

$$\lim_{n_k\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}=\lim_{n_k\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)\right)=e$$

limitlar o'rinli bo'lgani uchun (4.10) tengsizliklarda (bunda $x_k\to+\infty$) limitga o'tsak, izlangan (4.9) limit kelib chiqadi.

Endi $-\infty$ ga intiluvchi ixtiyoriy x_n ketma-ketlikni olaylik. Bunda $x_k<-1$ $(k=1,2,\ldots)$ deb qarash mumkin. Agar $y_k=-x_k$ deb belgilasak, unda $y_k\to+\infty$ va $y_k>1$ $(k=1,2,\ldots)$ bo'ladi.

Ravshanki,

$$\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k}=\left(1-\frac{1}{y_k}\right)^{-y_k}=\left(\frac{y_k}{y_k-1}\right)^{y_k}=\left(1+\frac{1}{y_k-1}\right)^{y_k}.$$

Undan

$$\lim_{x_k\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k}=\lim_{y_k\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{y_k-1}\right)^{y_k-1}\left(1+\frac{1}{y_k-1}\right)\right)=e$$

Shunday qilib, $-\infty$ ga intiluvchi har qanday x_k ketma-ketlik olinganda ham $f(x)=(1+\frac{1}{x})^x$ funksiya qiymatlaridan tuzilgan

$$f(x_k)=\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k}$$

ketma-ketlik hamma vaqt e limitga ega ekani isbotlanadi.

Funksiya limitining Geyne ta'rifiga ko'ra

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

limit ham o'rinli bo'ladi. ►

4^0. Cheksiz kichik hamda cheksiz katta funksiyalar. Faraz qilaylik, $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ funksiyalar $X\subset R$ to'plamda berilgan bo'lib, a shu to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

19–ta'rif. Agar

$$\lim_{x\to a}\alpha(x) = 0$$

bo'lsa, $\alpha(x)$ funksiya $x\to a$ *da cheksiz kichik funksiya* deyiladi. Masalan, $x\to 0$ da $\alpha(x)=\sin x$ funksiya cheksiz kichik funksiya bo'ladi.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya X to'plamda berilgan bo'lib,

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

bo'lsin. U holda

$$\alpha(x)=f(x)-b$$

funksiya $x\to a$ da cheksiz kichik funksiya bo'ladi.

◄ Haqiqatan ham, funksiya limiti ta'riflariga ko'ra

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon \Rightarrow |\alpha(x)|<\varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to a}\alpha(x)=0$$

bo'ladi.

Demak, bu holda

$$f(x)=b+\alpha(x)$$

bo'ladi. ►

20–ta'rif. Agar

$$\lim_{x\to a}\beta(x)=\infty$$

bo'lsa, $\beta(x)$ funksiya $x\to a$ *da cheksiz katta funksiya* deyiladi. Masalan, $x\to 0$ da $\beta(x)=\frac{1}{x}$ funksiya cheksiz katta funksiya bo'ladi.

5–§. Chekli limitga ega bo'lgan funksiyalarning xossalari

Chekli limitga ega bo'lgan funksiyalar ham yaqinlashuvchi ketma–ketliklar singari qator xossalarga ega. Ularning isbotlari ham yaqinlashuvchi ketma–ketliklarning mos xossalari isbotlari kabidir.

1^0. Tengsizlik belgisi bilan ifodalanadigan xossalar. $X\subset R$

to'plam berilgan bo'lib, a esa uning limit nuqtasi bo'lsin. Bu to'plamda $f(x)$ funksiya aniqlangan.

1). Agar ushbu $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ limit mavjud bo'lib, $b>p$ $(b<q)$ bo'lsa, a ning yetarli kichik atrofidan olingan x $(x\neq q)$ ning qiymatlarida $f(x)>p$ $(f(x)<q)$ bo'ladi.

Agar ushbu $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ limit mavjud bo'lib, $b>0$ $(b<0)$ bo'lsa, a ning yetarli kichik atrofidan olingan x $(x\neq 0)$ ning qiymatlarida $f(x)>0$ $(f(x)<0)$ bo'ladi.

2). Agar ushbu $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ limit mavjud bo'lsa, a ning etarli kichik atrofidan olingan x $(x\neq a)$ ning qiymatlarida $f(x)$ funksiya chegaralangan bo'ladi.

6-eslatma. Funksiya chegaralanganligidan uning chekli limitga ega bo'lishi har doim ham kelib chiqavermaydi. Masalan, $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ funksiya chegaralangan, ammo $x\to 0$ da bu funksiya limitga ega emas.

X to'plamda $f_1(x)$ va $f_2(x)$ funksiyalar aniqlangan bo'lib, a esa X ning limit nuqtasi bo'lsin.

3). Agar argument x ning a nuqtaning biror $\dot{U}_\delta(a)$ atrofidan olingan barcha qiymatlarida

$$f_1(x)\leq f_2(x)$$

tengsizlik o'rinli bo'lib, $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)$, $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)$ limitlar mavjud bo'lsa, u holda

$$\lim_{x\to a} f_1(x)\leq \lim_{x\to a} f_2(x)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

4). Agar argument x ning a nuqtaning biror $\dot{U}_\delta(a)$ atrofida olingan barcha qiymatlarida

$$f_1(x)\leq f(x)\leq f_2(x)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa va $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)$, $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)$ limitlar mavjud bo'lib,

$$\lim_{x\to a} f_1(x)=\lim_{x\to a} f_2(x)=b$$

bo'lsa, u holda

$$\lim_{x\to a} f(x)=b$$

bo'ladi.

4.18−misol Ushbu

$$\lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x} \qquad (x\neq 0)$$

limit topilsin.

◀ Ravshanki, bir tomondan $x\cos\frac{1}{x}$ funksiya uchun $-|x|\le x\cos\frac{1}{x}\le|x|$ tengsizliklar bajariladi, ikkinchi tomondan,

$$\lim_{x\to 0}(-|x|)=\lim_{x\to 0}|x|=0$$

Demak, yuqoridagi 4) − xossaga ko'ra $\lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x}=0$. ▶

2⁰. Chekli limitga ega bo'lgan funksiyalar ustida arifmetik amallar. X to'plam berilgan bo'lib, a uning limit nuqtasi bo'lsin. Bu to'plamda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar aniqlangan.

1). Agar $x\to a$ da $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar limitga ega bo'lsa, $f(x)\pm g(x)$ funksiya ham funksiya ham limitga ega va

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)\pm g(x)\big)=\lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}g(x)$$

tenglik o'rinli.

2). Agar $x\to a$ da $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar limitga ega bo'lsa, $f(x)\cdot g(x)$ funksiya ham limitga ega va

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big)=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x)$$

tenglik o'rinli.

4−natija. Agar $x\to a$ da $f(x)$ funksiya limitga ega bo'lsa, unda $kf(x)$ funksiya ham limitga ega va

$$\lim_{x\to a}\big(kf(x)\big)=k\lim_{x\to a}f(x) \qquad (k=const)$$

tenglik o'rinli.

3). Agar $x\to a$ da $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar limitga ega bo'lib, $\lim_{x\to a}g(x)\neq 0$ bo'lsa, $\frac{f(x)}{g(x)}$ funksiya ham limitga ega va

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}$$

tenglik o'rinli.

7−eslatma. 1). Yuqorida keltirilgan 1− va 2− xossalar qo'shiluvchilar, ko'paytuvchilar soni ixtiyoriy chekli bo'lgan holda ham o'rinli.

2). $x\to a$ da $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning yig'indisi, ko'paytmasi va nisbatidan iborat bo'lgan funksiyalarning limitiga ega bo'lishidan bu funksiyalarning har birining limitga ega bo'lishi doim kelib chiqavermaydi. Masalan, $f(x)=1+\sin\frac{1}{x}$, $g(x)=-\sin\frac{1}{x}$ funksiyalar yig'indisi $f(x)+g(x)=1$ bo'lib, $x\to 0$ da $f(x)+g(x)\to 1$ bo'ladi. Ammo $x\to 0$ da $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning har biri limitga ega emas.

4.19-misol. Quyidagi

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+x^3+\ldots+x^n-n}{x-1}$$

limitni hisoblang.

◄ Sodda almashtirishlar yordamida topamiz:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+x^3+\ldots+x^n-n}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)+(x^2-1)+\ldots+(x^n-1)}{x-1}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)[1+(x+1)+(x^2+x+1)+\ldots+(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1)]}{x-1}=$$

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Demak,

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+x^3+\ldots+x^n-1}{x-1}=\frac{n(n+1)}{2}.\ ►$$

6-§. Funksiya limitining mavjudligi haqida teoremalar

1⁰. Monoton funksiya limitining mavjudligi. X to'plam berilgan bo'lib, a (chekli yoki ∞) esa shu to'plamning limit nuqtasi va barcha $x\in X$ lar uchun $x\le a$ bo'lsin. Bu X to'plamda $f(x)$ funksiya aniqlangan.

10-teorema. *$f(x)$ funksiya X to'plamda o'suvchi bo'lib, u yuqoridan chegaralangan bo'lsa, funksiya a nuqtada chekli limitga ega, yuqoridan chegaralanmagan bo'lsa, uning limiti $+\infty$ bo'ladi.*

X to'plam berilgan bo'lib, a (chekli yoki $-\infty$) esa shu to'plamning limit nuqtasi va barcha $x\in X$ lar uchun $x>a$ bo'lsin. Bu X to'plamda $f(x)$ funksiya aniqlangan.

11-teorema. *Agar $f(x)$ funksiya X to'plamda kamayuvchi bo'lib, u quyidan chegaralangan bo'lsa, $f(x)$ funksiya a nuqtada chekli limitga ega, quyidan chegaralanmagan bo'lsa, uning limiti*

∞ *bo'ladi.*

Bu teoremalar monoton ketma-ketlikning limiti mavjudligi haqidagi teoremalar kabi isbotlanadi.

2^0. Koshi teoremasi. Endi funksiya limitining mavjudligi haqidagi umumiy teoremani keltiramiz.

$X \subset R$ to'plam berilgan bo'lib, a uning limit nuqtasi bo'lsin. Bu to'plamda $f(x)$ funksiya berilgan.

21–ta'rif. Agar $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topilsaki, argument x ning $0 < |x' - a| < \delta$, $0 < |x'' - a| < \delta$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy x' va x'' qiymatlarida

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya uchun *a nuqtada Koshi sharti bajariladi* deyiladi.

4.20–misol. Ushbu $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$ funksiya uchun $x = 0$ nuqtada Koshi shartining bajarilishini ko'rsating.

◄ Haqiqatan, $\forall \varepsilon > 0$ son olib, δ ni $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ deb qaralsa, u holda x ning

$$0 < |x' - 0| = |x'| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad 0 < |x'' - 0| = |x''| < \frac{\varepsilon}{2}$$

tengsizliklarini qanoatlantiruvchi ixtiyoriy x', x'' qiymatlari uchun quyidagiga ega bo'lamiz:

$$|f(x'') - f(x')| = \left|x''\sin\frac{1}{x''} - x'\sin\frac{1}{x'}\right| \le \left|x''\sin\frac{1}{x''}\right| + \left|x'\sin\frac{1}{x'}\right| \le |x''| + |x'| < \varepsilon.$$

Bu berilgan funksiya uchun $x = 0$ nuqtada Koshi sharti bajarilishini ko'rsatadi. ►

$f(x)$ funksiya uchun a nuqtada Koshi shartining bajarilmasligi quyidagini anglatadi:

$\forall \delta > 0$ son olganimizda ham shunday $\varepsilon > 0$ va $0 < |x' - a| < \delta$, $0 < |x'' - a| < \delta$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi x', x'' $(x' \in X, x'' \in X)$ qiymatlar topiladiki,

$$|f(x'') - f(x')| \ge \varepsilon$$

bo'ladi.

Masalan,

$$f(x) = \cos\frac{1}{x}$$

funksiya uchun $x = 0$ nuqtada Koshi sharti bajarilmaydi.

Haqiqatan $\forall\delta>0$ olganimizda ham $\varepsilon=1$ va

$$x'=\frac{1}{2k\pi}, \qquad x''=\frac{1}{(2k+1)\pi}$$

nuqtalar uchun $\left(k>\left[\frac{1}{2\pi\delta}\right]\right)$ bo'lganda $|x'|<\delta$, $|x''|<\delta$ bo'lishi ravshan.

$$|f(x')-f(x'')|=|\cos(2k+1)\pi-\cos 2\pi|=2>\varepsilon$$

bo'ladi.

12–teorema.(Koshi). *$f(x)$ funksiya a nuqtada chekli limitga ega bo'lishi uchun bu funksiya uchun a nuqtada Koshi shartining bajarilishi zarur va yetarli.*

◄ **Zarurligi.** $x\to a$ da $f(x)$ funksiya chekli limitga ega bo'lib, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ bo'lsin. Funksiya limiti ta'rifiga ko'ra $\forall\varepsilon>0$ son olinganda ham $\frac{\varepsilon}{2}$ ga asosan shunday $\delta>0$ son topiladiki, argument x ning $0<|x-a|<\delta$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi qiymatlarida

$$|f(x)-b|<\frac{\varepsilon}{2}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Xususan, ushbu

$$0<|x'-a|<\delta \Rightarrow |f(x')-b|<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$0<|x''-a|<\delta \Rightarrow |f(x'')-b|<\frac{\varepsilon}{2}$$

munosabatlar o'rinli. Bundan

$$|f(x')-f(x'')|\le|f(x')-b|+|f(x'')-b|<\varepsilon$$

tengsizlikning o'rinli bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa $f(x)$ funksiya uchun a nuqtada Koshi sharti bajarilishini ko'rsatadi.

Yetarliligi. $f(x)$ funksiya uchun a nuqtada Koshi sharti bajarilsin, ya'ni $\forall\varepsilon>0$ son olinganda ham shunday $\delta>0$ son topiladiki, x ning $0<|x'-a|<\delta$, $0<|x''-a|<\delta$, tengsizliklarni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy x', x'' qiymatlarida $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ tengsizlik o'rinli. Bu holda $f(x)$ funksiya $x\to a$ da chekli limitga ega bo'lishini ko'rsatamiz.

a nuqta X to'plamning limit nuqtasi. Shuning uchun to'plamning nuqtalaridan x_n $(x_n\ne a, n=1,2,3,\ldots)$ ketma–ketlik tuzish mumkinki, $\lim x_n = a$ bo'ladi. Ketma-ketlik limiti ta'rifiga ko'ra, yuqorida olingan $\delta > 0$ son uchun shunday $n_0 \in N$ son topiladiki, barcha $n > n_0$ lar uchun $0 < |x_n - a| < \delta$ va $0 < |x_{n+m} - a| < \delta$ tengsizliklar o'rinli bo'ladi. Bu tengsizliklarning bajarilishidan esa, shartga ko'ra

$$\left| f(x_{n+m}) - f(x_n) \right| < \varepsilon$$

bo'ladi. Demak, $f(x_n)$ fundamental ketma-ketlik. U yaqinlashuvchi. Biz $f(x_n)$ ketma-ketlik limitini b bilan belgilaylik, $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = b$. Endi X to'plamning nuqtalaridan tuzilgan va a ga intiluvchi ixtiyoriy x'_n ketma-ketlik $x'_n \to a,\ x'_n \neq a,\ (n = 1,2,3,\ldots)$ olinganda ham $f(x)$ funksiya qiymatlaridan tuzilgan $f(x'_n)$ mos ketma-ketlik ham o'sha b ga intilishini ko'rsatamiz.

Faraz qilaylik, $x'_n \to a \ (x'_n \neq a,\ n = 1,2,\ldots)$ da $f(x'_n) \to b'$ bo'lsin. x_n va x'_n ketma-ketliklar hadlaridan ushbu

$$x_1,\ x'_1,\ x_2,\ x'_2,\ x_3,\ x'_3,\ \ldots,\ x_n,\ x'_n,\ \ldots$$

ketma-ketlikni tuzaylik. Ravshanki, bu ketma-ketlik a ga intiladi. U holda

$$f(x_1),\ f(x'_1),\ f(x_2),\ f(x'_2),\ f(x_3),\ f(x'_3),\ldots,\ f(x_n),\ f(x'_n),\ldots \qquad (4.11)$$

ketma-ketlik fundamental bo'lib, chekli limitga ega. Bu limitni b^* bilan belgilaylik. Agar $f(x_n)$ va $f(x'_n)$ ketma-ketliklarning har biri (4.11) ketma-ketlikning qismiy ketma-ketliklari ekanini e'tiborga olsak, u holda $f(x_n) \to b^*$, $f(x'_n) \to b^*$ bo'lishini topamiz.

Demak,

$$b^* = b = b'.$$

Shunday qilib, $f(x)$ funksiya uchun a nuqtada Koshi sharti bajarilishidan X to'plam nuqtalaridan tuzilgan va a ga intiluvchi har qanday $x_n \left(x'_n \neq a,\ n = 1,2,3,\ldots\right)$ ketma-ketlik olinganda ham mos $f(x_n)$ ketma-ketlik bitta songa intilishini topdik. Bu esa funksiya limitining Geyne ta'rifiga ko'ra $f(x)$ funksiya a nuqtadan chekli limitga ega bo'lishini bildiradi. ►

8-eslatma. Koshi sharti va Koshi teoremasi $x \to a+0$, $x \to a-0$ bo'lgan hollarda ham yuqoridagiga o'xshash ifodalanadi va isbot etiladi.

7–§. Funksiyalarni taqqoslash

X to'plamda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar aniqlangan bo'lsin. Biror a nuqtaning $U_\delta(a)\subset X$ atrofida $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarni taqqoslash masalasini qaraymiz.

22–ta'rif Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar uchun shunday $\delta>0$ va $C>0$ sonlar topilsaki, barcha $x\in U_\delta(a)$ lar uchun

$$|f(x)|\le C\,|g(x)| \qquad (4.12)$$

tengsizlik bajarilsa, $x\to a$ da $f(x)$ funksiya $g(x)$ *funksiyaga nisbatan chegaralangan* deyiladi va $f(x)=O(g(x))$ kabi belgilanadi.

Shuni ta'kidlash lozimki, bu ta'rifidagi $x\to a$ belgi qaralayotgan (4.12) munosabatning a nuqtaning biror atrofida o'rinli bo'lishini ifodalaydi.

Masalan, $x\to 0$ da $x^2=O(x)$ bo'ladi. Haqiqatan, ixtiyoriy $x\in U_1(0)$ lar uchun, ya'ni $x\in(-1,1)$ lar uchun $|x^2|\le|x|$ tengsizlik bajariladi.

Agar $f(x)$ funksiya a nuqtaning biror atrofida chegaralangan bo'lsa, u $x\to a$ da $f(x)=O(1)$ kabi yoziladi. Masalan, $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ funksiya $x=0$ nuqta atrofida chegaralangan (chunki $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$).

Shuning uchun $(1+x)^{\frac{1}{x}}=O(1)$ deb yozish mumkin.

23–ta'rif. Agar $x\to a$ da $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar uchun $f(x)=O(g(x))$ va $g(x)=O(f(x))$ munosabatlar o'rinli bo'lsa, $x\to a$ da $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar *bir xil tartibli funksiyalar* deb ataladi.

Masalan, $f(x)=x$, $g(x)=2x+x\sin x$ bo'lsin. Ravshanki, $x\to 0$ da

$$|x|\le|2x+x\sin x|\le 3|x|$$

tengsizliklar o'rinli. Bu esa

$$x=O(2x+\sin x),\quad 2x+x\sin x=O(x)$$

bo'lishini bildiradi. Demak, $x\to 0$ da $f(x)=x$, $g(x)=2x+x\sin x$ funksiyalar bir xil tartibli funksiyalar bo'ladi.

Yuqorida keltirilgan ta'riflardan, $x\to a$ da

$$f_1(x)=O(f_2(x)),\ f_2(x)=O(f_3(x))\Rightarrow f_1(x)=O(f_3(x)),$$
$$f_1(x)=O(f_2(x)),\ f_3(x)=O(f_4(x))\Rightarrow f_1(x)f_3(x)=O(f_2(x)\cdot f_4(x)),$$
$$f_1(x)=O(f(x)),\ f_2(x)=O(f(x))\Rightarrow f_1(x)+f_2(x)=O(f(x))$$

kabi munosabatlarning o'rinli bo'lishini ko'rsatish qiyin emas.

13-teorema. *Agar $f(x)$ va $g(x)$ ($x\neq a$ da $f(x)\neq 0$, $g(x)\neq 0$) funksiyalar uchun ushbu*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=C$$

limit mavjud va $0<|C|<\infty$ bo'lsa, $x\to a$ da $f(x)$ va $g(x)$ bir xil tartibli funksiyalar bo'ladi.

◀ Ushbu

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=C$$

limit mavjud va $0<|C|<\infty$ bo'lsin. U holda

$$\frac{f(x)}{g(x)}=C+\gamma_1(x),\qquad \frac{g(x)}{f(x)}=\frac{1}{C}+\gamma_2(x)$$

bo'ladi, bunda $\gamma_1(x)$ va $\gamma_2(x)$ funksiyalar cheksiz kichik funksiyalar $\lim_{x\to a}\gamma_1(x)=0$, $\lim_{x\to a}\gamma_2(x)=0$. Demak, a nuqtaning yetarli kichik atrofi $U_\delta(a)$ da $\gamma_1(x)$ va $\gamma_2(x)$ funksiyalar chegaralangan bo'ladi. U holda barcha $x\in U_\delta(a)$ lar uchun

$$|\gamma_1(x)|\le k,\quad |\gamma_2(x)|\le k \qquad (k-const)$$

tengsizliklar o'rinli bo'lib, $\frac{f(x)}{g(x)}$ va $\frac{g(x)}{f(x)}$ funksiyalar uchun

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|\le|C|+k,\qquad \left|\frac{g(x)}{f(x)}\right|\le\frac{1}{|C|}+k$$

tengsizliklarga kelamiz. Demak,

$$|f(x)|\le(|C|+k)|g(x)|,$$
$$|g(x)|\le\left(\frac{1}{|C|}+k\right)|f(x)|.$$

Bu esa

$$f(x)=O(g(x)),\quad g(x)=O(f(x))$$

ekanini bildiradi. ▶

24-ta'rif. Agar $x\to a$ da $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar ($x\neq a$ da $g(x)\neq 0$) uchun

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1$$

bo'lsa, $x\to a$ $f(x)$ va $g(x)$ *lar ekvivalent funksiyalar* deb ataladi. Ekvivalent funksiyalar

$$f(x)\sim g(x)$$

kabi belgilanadi.

Masalan $x\to 0$ da $f(x)=x$, $g(x)=\sin x$ funksiyalar ekvivalent funksiyalar: $x\sim\sin x$.

Agar $x\to a$ da $f(x)\sim g(x)$, $g(x)\sim s(x)$ bo'lsa, u holda $x\to a$ da $f(x)\sim s(x)$ bo'ladi. Darheqiqat, $x\to a$ da $f(x)\sim g(x)$ bundan $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1$, $x\to a$ da $g(x)\sim s(x)$, bundan $\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{s(x)}=1$ kelib chiqadi, ulardan

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{s(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{s(x)}=1$$

limitga ega bo'lamiz. Demak, $f(x)\sim s(x)$.

25-ta'rif. Agar $f(x)$ va $g(x)$ cheksiz kichik funksiyalar uchun

$$f(x)=\alpha(x)\cdot g(x)$$

tenglik o'rinli bo'lib, bunda $\lim_{x\to a}\alpha(x)=0$ bo'lsa, $x\to a$ da $f(x)$ funksiya $g(x)$ *ga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik funksiya* deb ataladi. U

$$f(x)=o(g(x))$$

kabi belgilanadi.

Agar $f(x)$ funksiya a nuqtaning biror atrofida cheksiz kichik funksiya (ya'ni $x\to a$ da $f(x)\to 0$) bo'lsa, u $f(x)=o(1)$ kabi yoziladi.

Ravshanki, agar $x\to a$ da $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar uchun $f(x)=o(g(x))$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda bu funksiyalar uchun $f(x)=O(g(x))$ tenglik ham o'rinli bo'ladi.

Yuqorida kelitirilgan ta'riflardan foydalanib "katta O" va "kichik o" orasidagi bog'lanishlarni ifodalaydigan quyidagi munosabatlarni keltirib chiqarish mumkin:

$$f_1(x)=O(f_2(x)),\ f_2(x)=o(f_3(x))\Rightarrow f_1(x)=o(f_3(x)),$$

$$f_1(x)=o(f_2(x)),\ f_2(x)=O(f_3(x))\Rightarrow f_1(x)=o(f_3(x)),$$

$$f_1(x)=O(f(x)),\ f_2(x)=o(g(x))\Rightarrow f_1(x)f_2(x)=o(f(x)g(x))$$

"Katta O" va "kichik o" ishtirok etgan tengliklarning oddiy ma'nodagi tengliklar emasligini ta'kidlaymiz.

Masalan, $x \to a$ da $f_1(x) = o(g(x))$, $f_2(x) = o(g(x))$ munosabatlardan $f_1(x) = f_2(x)$ degan xulosa chiqarish xato bo'ladi.

Endi "kichik o" va ekvivalentlik belgilari bilan bog'langan funksiyalar orasidagi munosabatlarni ifodalaydigan teoremani keltiramiz.

14–teorema. *$x \to a$ da $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar ($x \neq a$ da $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$) ekvivalent bo'lishi uchun*

$$g(x) - f(x) = o(g(x)),$$

yoki

$$f(x) - g(x) = o(f(x))$$

tenglikning o'rinli bo'lishi zarur va etarli.

◀ **Zarurligi**. $x \to a$ da $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar ekvivalent bo'lsin, $f(x) \sim g(x)$. U holda ta'rifga ko'ra $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ bo'lib, undan

$$\lim_{x \to a}\left(1 - \frac{f(x)}{g(x)}\right) = \lim_{x \to a} \frac{g(x) - f(x)}{g(x)} = 0$$

kelib chiqadi. Demak, $g(x) - f(x) = o(g(x))$.

Yetarliligi. $x \to a$ da $g(x) - f(x) = o(g(x))$ bo'lsin. U holda $x \to a$ da

$$1 - \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x) - f(x)}{g(x)} = \frac{o(g(x))}{g(x)}$$

bo'lib, undan

$$\lim_{x \to a}\left(1 - \frac{f(x)}{g(x)}\right) = \lim_{x \to a} \frac{o(g(x))}{g(x)} = 0$$

kelib chiqadi. Bu esa $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ ya'ni $f(x) \sim g(x)$ ekanini ko'rsatadi.▶

5–natija. Agar, $x \to a$ da $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar uchun

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = C \neq 0$$

bo'lsa, u holda ushbu

$$g(x) \sim cf(x)$$

va

$$g(x) = cf(x) + o(f(x))$$

munosabatlar o'rinli bo'ladi.

◀ Shartga ko'ra

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = C \neq 0$$

bundan

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{Cf(x)} = 1$$

kelib chiqadi. Demak, $g(x) \sim Cf(x)$.

Yuqorida isbot etilgan 14-teoremaga asosan $Cf(x) - g(x) = o(Cf(x)) = o(f(x))$ ko'rinishda yozish mumkin, undan

$$g(x) = Cf(x) + o(g(x))$$

ekani kelib chiqadi. ►

Endi funksiyalarning ekvivalentligiga asoslangan hamda funksiyalarning limitini hisoblashda tez-tez foydalanib turiladigan teoremani keltiramiz.

15-teorema. *Agar $x \to a$ da $f(x) \sim f_1(x)$ va $g(x) \sim g_1(x)$ bo'lib, ushbu*

$$\lim_{x \to a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

limit mavjud bo'lsa, u holda $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ limit ham mavjud va

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

◄ Shartga ko'ra $x \to a$ da $f(x) \sim f_1(x)$, $g(x) \sim g_1(x)$. U holda ushbu

$$f(x) = f_1(x) + o(f_1(x)),$$
$$g(x) = g_1(x) + o(g_1(x))$$

tengliklar o'rinli bo'ladi. Natijada

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)+o(f_1(x))}{g_1(x)+o(g_1(x))}=\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)\left(1+\dfrac{o(f_1(x))}{f_1(x)}\right)}{g_1(x)\left(1+\dfrac{o(g_1(x))}{g_1(x)}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}\cdot\lim_{x\to a}\frac{1+\dfrac{o(f_1(x))}{f_1(x)}}{1+\dfrac{o(g_1(x))}{g_1(x)}}=\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

bo'lishi kelib chiqadi. ►

Funksiyalarni ularga ekvivalent funksiyalar bilan almashtirish natijasida ko'pgina funksiyalarning limitlari sodda hisoblanadi.

4.21-misol. Ushbu

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2}$$

limitni hisoblang.

◄ Ravshanki,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}}{x^2}$$

Endi $x\to 0$ da

$$\sin\frac{3x}{2}=\frac{3x}{2}+o(x),\quad \sin\frac{x}{2}=\frac{x}{2}+o(x)$$

munosabatlarni e'tiborga olib topamiz:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{3}{2}x+o(x)\right)\left(\frac{1}{2}x+o(x)\right)}{x^2}=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{4}x^2+o(x^2)}{x^2}=\frac{3}{2}.$$

Demak,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2}=\frac{3}{2}.\ ►$$

9-eslatma. Biz 1-bandda "$\frac{0}{0}$", "$\frac{\infty}{\infty}$" va "[illegible]" belgilar bilan bog'langan funksiyalarni o'rgandik. Bunda a chekli deb qaraldi. $a=\infty$ bo'lgan holda ham yuqoridagidek tushuncha va teoremalar ta'riflanadi va o'rganiladi.

Mashqlar.

4.22. Sonlar ketma - ketligi limitlari ta'riflarining ekvivalentligi isbotlansin

4.23. Sonlar ketma - ketligining chegaralanmaganligi ta'rifi keltirilsin. Chegaralanmagan ketma - ketlik cheksiz katta miqdor bo'ladimi?

4.24. Ushbu

$$x_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \sin\left(\sqrt{n}\,\frac{\pi}{2}\right) \qquad (n = 1,2,3,\ldots)$$

ketma - ketlikning cheksiz kichik miqdor ekani isbotlansin.

4.25. Ushbu

$$x_n = \lg\frac{2}{1} + \lg\frac{3}{2} + \ldots + \lg\frac{n+1}{n} \qquad (n = 1,2,3,\ldots)$$

ketma – ketlikning cheksiz katta miqdor ekani isbotlansin.

4.26. Agar x_n va y_n ketma – ketliklar limitga ega bo'lmasa, $x_n + y_n$, $x_n y_n$ ketma – ketliklar limitga ega bo'lishi mumkinmi?

4.27. Agar

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = 0$$

bo'lsa, $\dfrac{x_n}{y_n}$ ketma - ketlikning limiti to'g'risida nima deyish mumkin? (Odatda, uni $\dfrac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmaslik deyiladi.)

4.28. Agar

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = \infty$$

bo'lsa, $\dfrac{x_n}{y_n}$ ketma – ketlikning limiti to'g'risida nima deyish mumkin? (Odatda, uni $\dfrac{\infty}{\infty}$ ko'rinishidagi aniqmaslik deyiladi).

4.29. Agar

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = \infty$$

bo'lsa, $x_n y_n$ ketma – ketlikning limiti to'g'risida nima deyish mumkin? (Odatda, uni $0\cdot\infty$ ko'rinishidagi aniqmaslik deyiladi).

4.30. Agar

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \quad (-\infty)$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = -\infty \quad (+\infty)$$

bo'lsa, $x_n + y_n$ ketma-ketlikning limiti to'g'risida nima deyish mumkinki? (Odatda, uni $\infty - \infty$ ko'rinishdagi aniqmaslik deyiladi).

4.31. e sonining irratsional son ekani isbotlansin.

4.32. e soni taqribiy hisoblansin.

4.33. Ushbu

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n = e^k$$

limit isbotlansin.

4.34. Agar ichma-ich joylashgan segmentlar prinsipida barcha segmentlar mos intervallarga aylantirilsa, prinsip o'rinli bo'ladimi?

4.35. Har qanday sonlar ketma-ketligining yuqori va quyi limiti mavjud bo'lishi isbotlansin.

4.36. To'plamning limit nuqtasi ham to'plamga tegishli bo'ladimi?

4.37. $f(x)$ funksiya a nuqtada b limitga ega bo'lishi uchun uning shu nuqtada o'ng va chap limitlari mavjud bo'lib,

$$f(a+0) = f(a-0) = b$$

tengliklar o'rinli bo'lishi zarur va yetarli bo'lishi isbotlansin.

4.38. Ushbu

$$\lim_{n\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{n\to+\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{n\to-\infty} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{n\to-\infty} f(x) = -\infty$$

limitlarning ta'riflari kelitirilsin.

4.39. Funksiya limiti Koshi va Geyne ta'riflarining ekvivalentligi isbotlansin.

4.40. Ushbu

$$\lim_{x\to -1}\frac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[5]{x}}$$

limit hisoblansin.

4.41. Agar

$$f_n(x) = \frac{1+x^{2n}}{2+x^{3n}}$$

bo'lsa

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

topilsin.

4.42. $x \to 0$ da

$$\text{a)}\quad f(x) = e^x, \quad g(x) = 100 + x;$$

$$\text{b)}\quad f(x) = \frac{13}{x}, \quad g(x) = \frac{1}{\ln x};$$

$$\text{v)}\quad f(x) = \frac{x}{2 + \sin\frac{1}{x}}, \quad g(x) = x$$

funksiyalarning bir xil tartibli bo'lishi isbotlansin.

V BOB

Funksiyaning uzluksizligi

Funksiyaning uzluksizligi matematik analizning muhim tushunchalaridan bo'lib, u funksiya limiti tushunchasi bilan bevosita bog'langan.

1–§. Funksiya uzluksizligi ta'rifi

1°. Funksiyaning nuqtada uzluksizligi. $X \subset R$ to'plamda $f(x)$ aniqlangan bo'lib, $a \in X$ esa X to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

1–ta'rif. Agar

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \qquad (5.1)$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya a *nuqtada uzluksiz* deb ataladi. Masalan:

1). $f(x) = x^2 + x + 1$ funksiya $\forall a \in R$ nuqtada uzluksiz, chunki

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (x^2 + x + 1) = a^2 + a + 1 = f(a)$$

2). Ushbu funksiya

$$f(x) = (sign x)^2 = \begin{cases} 1, \text{ agar } x \neq 0 \text{ bo'lsa}, \\ 0, \text{ agar } x = 0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

uchun $\forall a \in R$ da

$$\lim_{x \to a} f(x) = 1$$

bo'ladi. Ammo $f(0) = 0$ bo'lgani uchun

$$\lim_{x \to 0} f(x) \neq f(0)$$

Demak, $f(x) = (sign x)^2$ funksiya $a = 0$ nuqtada uzluksiz emas, boshqa hamma $a \neq 0$ nuqtalarda esa uzluksizdir.

Funksiya limitning Geyne va Koshi ta'riflardan foydalanib, funksiyaning a nuqtada uzluksizligini quyidagicha ham ta'riflash mumkin.

2–ta'rif (Geyne). Agar $X \subset R$ to'plamning elementlaridan tuzilgan va a ga intiluvchi har qanday x_n ketma-ketlik olinganda ham funksiya qiymatlaridan tuzilgan mos $f(x_n)$ ketma-ketlik hamma vaqt $f(a)$ ga intilsa, $f(x)$ funksiya a *nuqtada uzluksiz* deb ataladi.

3–ta'rif (Koshi). Agar $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topilsaki, funksiya argumenti x ning $|x-a|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida

$$|f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, ya'ni

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall x\in X\cap U_\delta(a):\ |f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya a *nuqtada uzluksiz* deb ataladi.

5.1-misol. Ushbu $f(x)=\sqrt{x+4}$ funksiyaning $x=5$ nuqtada uzluksiz bo'lishini ko'rsating.

◄ $\forall\varepsilon>0$ son olib, bu ε songa ko'ra $\delta>0$ sonni $\delta=3\varepsilon$ deb qaralsa, u holda $|x-5|<\delta$ bo'lganda

$$|f(x)-f(5)|=\left|\sqrt{x+4}-3\right|=\frac{|x-5|}{\sqrt{x+4}+3}<\frac{|x-5|}{3}<\frac{\delta}{3}=\varepsilon$$

bo'ladi. Bu esa yuqoridagi ta'rifga ko'ra, $f(x)=\sqrt{x+4}$ funksiyaning $x=5$ nuqtada uzluksiz bo'lishini bildiradi. ►

Koshi ta'rifidagi $|x-a|<\delta$ va $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ tengsizliklar mos ravishda

$$x\in U_\delta(a)\ \text{va}\ \ f(x)\in U_\varepsilon(f(a))$$

ko'rinishda ham yozilishi mumkin ekanligini hisobga olsak, atrof tushunchasi yordamida funksiyaning uzliksizligini quyidagicha ham ta'riflash mumkin.

4-ta'rif. Agar

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall x\in U_\delta(a):\ f(x)\in U_\varepsilon(f(a))$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya a *nuqtada uzluksiz* deyiladi.

5.2-misol. Ushbu

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{agar } x \text{ ratsional son bo'lsa,}\\ -x, & \text{agar } x \text{ irratsional son bo'lsa}\end{cases}$$

funksiya $x=0$ nuqtada uzluksiz bo'lishi ko'rsatilsin.

◄ Haqiqatan, $\forall\varepsilon>0$ son uchun $\delta>0$ sonni $\delta=\varepsilon$ deb olinsa, u holda $\forall x\in U_\delta(0)$ lar uchun $f(x)\in U_\varepsilon(0)$ kelib chiqadi. ►

Ravshanki, (5.1) o'rinli bo'lsa, ushbu $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-f(a)]=0$ limit ham o'rinli bo'ladi. Odatda $x-a$ ayirma argument orttirmasi, $f(x)-f(a)$ ayirma esa funksiyaning a nuqtadagi orttirmasi deyiladi. Ular mos ravishda Δx va Δy (yoki Δf) kabi belgilanadi:

$$\Delta x=x-a,\ \ \Delta y=\Delta f=f(x)-f(a)$$

Bu tengliklardan foydalanib yozamiz:

$$x = a + \Delta x, \quad \Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$$

Natijada (5.1) munosabat

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Demak, $f(x)$ funksiyaning a nuqtada uzluksizligi bu nuqtada argumentning cheksiz kichik orttirmasiga funksiyaning ham cheksiz kichik orttirmasi mos kelishi sifatida ham ta'riflanishi mumkin.

5.3-misol. $y = \sin x$ va $y = \cos x$ funksiyalarning $\forall a \in R$ nuqtada uzluksiz bo'lishini ko'rsatilsin.

◀ $\forall a \in R$ nuqta olib, unga Δx orttirma beraylik. Natijada $y = \sin x$ funksiya ham ushbu

$$\Delta y = \sin(a + \Delta x) - \sin a$$

orttirmaga ega bo'lib, $-\pi < \Delta x < \pi$ bo'lganda

$$|\Delta y| = |\sin(a + \Delta x) - \sin a| = \left|2 \sin \tfrac{\Delta x}{2} \cos(a + \tfrac{\Delta x}{2})\right|$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. Bundan $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ bo'lishi kelib chiqadi. Demak, $y = \sin x$ funksiya $a \in R$ nuqtada uzluksiz. Xuddi shunga o'xshash $y = \cos x$ funksiyaning ham $\forall a \in R$ da uzluksiz bo'lishi ko'rsatiladi. ▶

2^0. Funksiyaning bir tomonli uzluksizligi. $X \subset R$ to'plamda $f(x)$ funksiya aniqlangan bo'lib, $a \in X$ esa X to'plamning o'ng (chap) limit nuqtasi bo'lsin.

5-ta'rif. Agar $x \to a+0$ $(x \to a-0)$ da $f(x)$ funksiyaning o'ng (chap) limiti mavjud va

$$f(a+0) = \lim_{x \to a+0} f(x) = f(a), \quad \left(f(a-0) = \lim_{x \to a-0} f(x) = f(a)\right)$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya *a nuqtada o'ngdan (chapdan) uzluksiz* deyiladi.

Masalan. Ushbu

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}, & \text{agar } x \neq 0 \\ 0, & \text{agar } x = 0 \end{cases}$$

funksiya uchun

$$\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} = 0 = f(0)$$

$$\lim_{x\to-0} f(x) = \lim_{x\to-0} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} = 1 \neq f(0)$$

bo'lganligi sababli, berilgan funksiya $x=0$ nuqtada o'ngdan uzluksiz bo'lib, chapdan esa uzluksiz emas.

Yuqorida keltirilgan ta'riflardan ko'rinadiki, agar $f(x)$ funksiya a nuqtada ham o'ngdan, ham chapdan bir vaqtda uzluksiz bo'lsa, funksiya shu nuqtada uzluksiz bo'ladi.

6–ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, funksiya X *to'plamda uzluksiz* deb ataladi.

Masalan, $f(x)$ funksiya (a,b) intervalning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, funksiya shu intervalda uzluksiz deb ataladi.

$f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda berilgan bo'lsin. Agar bu funksiya (a,b) da uzluksiz bo'lsa, hamda a nuqtada o'ngdan, b nuqtada chapdan uzluksiz bo'lsa, funksiya $[a,b]$ segmentda uzluksiz deb ataladi.

5.4–misol. Ushbu $f(x)=\sqrt[3]{x}$ funksiyaning R to'plamda uzluksiz bo'lishini ko'rsating.

◀ Avval $\forall a \in R\setminus\{0\}$ nuqtada mazkur funksiyaning uzluksizligini ko'rsatamiz. $\forall \varepsilon>0$ son olib, bu songa ko'ra $\delta>0$ sonni $\delta=\frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2}\varepsilon$ deb qaraylik. Natijada $|x-a|<\delta$ bo'lganda

$$|f(x)-f(a)| = \left|\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}\right| = \frac{|x-a|}{\left|\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{a^2}\right|} =$$

$$= \frac{|x-a|}{(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{a})^2+\frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2}} \le \frac{|x-a|}{\frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2}} < \varepsilon$$

tengsizlik kelib chiqadi. Demak, funksiya $\forall a \in R\setminus\{0\}$ nuqtada uzluksiz.

Endi $a=0$ bo'lgan holda, $\forall \varepsilon>0$ songa ko'ra δ sonni $\delta=\varepsilon^3$ deb olib, $|x-a|=|x|<\delta$ bo'lganda

$$|f(x)-f(0)| = \left|\sqrt[3]{x}\right| < \sqrt[3]{\delta} = \varepsilon$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. Bu esa berilgan funksiyaning $a=0$ nuqtada uzluksiz bo'lishini ifodalaydi. Demak, berilgan funksiya

R to'plamda uzluksiz. ►

2–§. Funksiyaning uzilishi. Uzilishning turlari

$f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda aniqlanagan bo'lib, $a \in X$ nuqta X to'plam limit nuqtasi bo'lsin.

7–ta'rif. Agar $x \to a$ da $f(x)$ funksiyaning limiti mavjud, chekli bo'lib, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \neq f(a)$ yoki $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ $(+\infty; -\infty)$ bo'lsa yoki funksiyaning limiti mavjud bo'lmasa, $f(x)$ funksiya *a nuqtada uzilishga ega* deyiladi.

Funksiyaning a nuqtada uzilishga ega bo'ladigan hollarini alohida qarab o'tamiz.

1^0. $x \to a$ da $f(x)$ funksiyaning limiti mavjud, chekli bo'lib, u $f(a)$ ga teng bo'lmasin:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \neq f(a) \qquad (b \text{ – chekli son})$$

Bu holda, ushbu

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), \text{ agar } x \neq a \text{ bo'lsa,} \\ b, \text{ agar } x = a \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

funksiya a nuqtada uzluksiz bo'ladi:

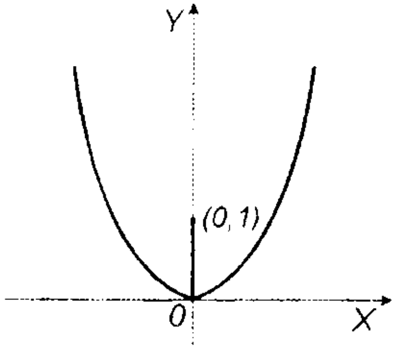
$$\lim_{x\to a} f^*(x) = \lim_{x\to a} f(x) = b = f^*(a)$$

Shunday qilib, berilgan funksiyamizning bitta a nuqtadagi qiymatini o'zgartirib ($f(a)$ o'rniga b olib) a nuqtada uzluksiz funksiyaga ega bo'lamiz. Shuning uchun, bu holda $f(x)$ funksiya bartaraf qilish mumkin bo'lgan uzilishga ega deyiladi.

Masalan, ushbu

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ agar } x \neq 0 \\ 1, \text{ agar } x = 0 \end{cases}$$

funksiya uchun $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 \neq f(0)$ munosabat o'rinli. Demak, bu funksiya $x=0$ nuqtada bartaraf qilish mumkin bo'lgan uzilishga ega (25 – chizma).



25 – chizma

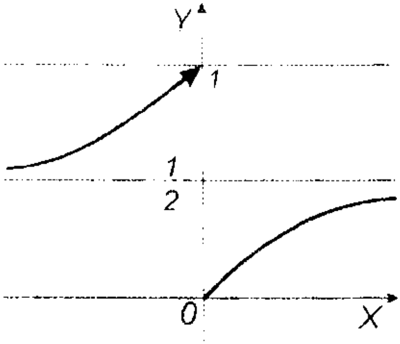
2^0. **Endi $x \to a$ da $f(x)$ funksiyaning limiti mavjud emas deylik.** Bu holat, avvalo, $x \to a$ da $f(x)$ funksiyaning o'ng va chap limitlari mavjud va chekli bo'lib, $f(a-0) \neq f(a+0)$ bo'lganda ro'y beradi. Shu holda funksiya a nuqtada birinchi tur uzilishga ega deyiladi va $f(a+0) - f(a-0)$ ayirma funksiyaning a nuqtadagi sakrashi deyiladi. $x \to a$ da $f(x)$ ning limiti mavjud bo'lmaydigan boshqa hamma hollarda funksiya a nuqtada ikkinchi tur uzilishga ega deyiladi.

Masalan, 1) ushbu

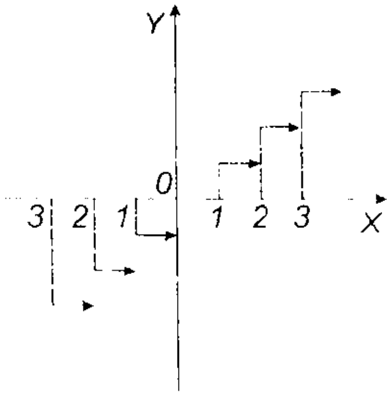
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}, & \text{agar } x \neq 0 \text{ bo'lsa} \\ 0, & \text{agar } x = 0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

funksiya uchun

$$\lim_{x \to +0} f(x) = 0, \qquad \lim_{x \to -0} f(x) = 1$$



26 – chizma



27-chizma

Demak, berilgan funksiya $x=0$ nuqtada birinchi tur uzilishiga ega.

Uning 0 nuqtadagi sakrashi – 1 ga teng (26 – chizma).

2). Quyidagi

$$f(x)=[x]$$

funksiya $x=p$ (p – butun son) nuqtada birinchi tur uzilishga ega, chunki (27 – chizma):

$$\lim_{x\to p-0} f(x) = \lim_{x\to p-0}[x] = p-1$$

$$\lim_{x\to p+0} f(x) = \lim_{x\to p+0}[x] = p$$

3). Ushbu

$$f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & agar\ x>0\\ x, & agar\ x\le 0\end{cases}$$

funksiya $x=0$ nuqtada ikkinchi tur uzilishga ega, chunki $x\to+0$ da $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ funksiyaning limiti mavjud emas.

4). Dirixle funksiyasi

$$D(x)=\begin{cases}1, & agar\ x\ \text{irratsional son bo'lsa,}\\ 0, & agar\ x\ \text{ratsional son bo'lsa}\end{cases}$$

R to'plamning har bir a nuqtada ikkinchi tur uzilishga ega, chunki $x\to a$ da $D(x)$ funksiyaning o'ng limiti ham, chap limiti ham mavjud emas.

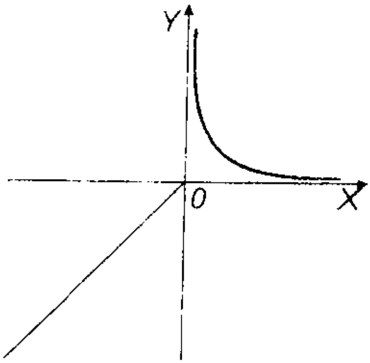
5). Ushbu

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & agar\ x>0\ bo'lsa\\ x & agar\ x\le 0\ bo'lsa\end{cases}$$

funksiya uchun

$$\lim_{x\to+0} f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to-0} f(x)=0$$

bo'lib, bu funksiya $x=0$ nuqtada ikkinchi tur uzilishga ega bo'ladi (28 – chizma).



28 – chizma

6). Ushbu $f(x)=tgx$ funksiyaning $x=\frac{\pi}{2}$ nuqtadagi o'ng va chap limitlari

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \operatorname{tg} x = +\infty, \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0} \operatorname{tg} x = -\infty$$

bo'ladi. Demak, $f(x)=\operatorname{tg} x$ funksiya $x=\frac{\pi}{2}$ nuqtada ikkinchi tur uzilishga ega.

3^0. Endi $x\to a$ da

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \ (+\infty, -\infty)$$

bo'lsin. Unda funksiyaning o'ng va chap limitlari ham ∞ $(+\infty, -\infty)$ bo'ladi. Bu holda ham $f(x)$ funksiya a nuqtada ikkinchi tur uzilishga ega deyiladi.

Masalan, ushbu

$$f(x)=\frac{1}{x^2}\ (x\neq 0), \quad f(0)=0$$

funksiyaning $x\to 0$ dagi limiti $+\infty$ dir (bu holda

$$\lim_{x\to -0}\frac{1}{x^2}=+\infty, \quad \lim_{x\to +0}\frac{1}{x^2}=+\infty\ )$$

Demak, berilgan funksiya $x=0$ nuqtada ikkinchi tur uzilishga ega.

Shunday qilib, $f(x)$ funksiya $a\in X$ nuqtada

1. uzluksiz bo'ladi yoki,
2. bartaraf qilish mumkin bo'lgan yoki birinchi tur uzilishga ega bo'ladi, yoki
3. ikkinchi tur uzilishga ega bo'ladi.

1–eslatma. Agar $a\in X$ nuqta X to'plamning bir tomonli (ya'ni o'ng yoki chap) limit nuqtasi bo'lsa, yuqoridagidek funksiyaning bu nuqtada uzilishi (o'ngdan yoki chapdan uzilishi) ta'rifi keltiriladi.

2–eslatma. $f(x)$ funksiya X to'plamda uzluksiz bo'lib, $a\in X$ nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'lsin. Bu holda funksiyaning a nuqtadagi qiymati aniqlanmagan bo'lsa ham $x\to a$ da $f(x)$ ning limiti mavjud va chekli, ya'ni $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ (b — chekli son) bo'lishi mumkin. Bu limit munosabatdan foydalanib $X\cup\{a\}$ to'plamda uzluksiz bo'lgan funksiya tuzish mumkin. Haqiqatan, agar

$$f^*(x)=\begin{cases} f(x), \text{ agar } x\in X \text{ bo'lsa,} \\ b, \text{ agar } x=a \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

deb olinsa, natijada $X \cup \{a\}$ to'plamda uzluksiz $f^*(x)$ funksiya hosil bo'ladi.

Masalan, $y = \frac{\sin x}{x}$ funksiya $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ da aniqlangan va uzluksiz. Ma'lumki,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Bu munosabatdan foydalanib tuzilgan ushbu

$$f^*(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, \text{ agar } x \neq 0 \text{ bo'lsa} \\ 1, \text{ agar } x = 0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

funksiya R da uzluksiz bo'ladi.

3-§. Monoton funksiyaning uzluksizligi va uzilishi.

$f(x)$ funksiya X oraliqda aniqlangan bo'lsin.

1-teorema. Agar $f(x)$ funksiya X oraliqda monoton bo'lsa, u shu oraliqning istalgan nuqtasida yo uzluksiz bo'ladi, yoki faqat birinchi tur uzilishga ega bo'ladi.

◄ $f(x)$ funksiya X oraliqda o'suvchi bo'lsin. X ning shunday a nuqtasini olaylikki, biror $\delta > 0$ uchun $(a-\delta, a+\delta) \subset X$ bo'lsin. Shartga ko'ra $\forall x \in (a-\delta, a)$ uchun $f(x) \le f(a)$ va $\forall x \in (a, a+\delta)$ uchun $f(x) \ge f(a)$ bo'ladi. Demak, $f(x)$ funksiya $(a-\delta, a)$ da yuqoridan, $(a, a+\delta)$ da quyidan chegaralangandir. Monoton funksiya limiti haqidagi teoremaga asosan

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = f(a-0) \le f(a), \qquad (*)$$

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a+0) \ge f(a). \qquad (**)$$

bo'ladi. Agar $f(a-0) = f(a+0) = f(a)$ bo'lsa, funksiya a nuqtada uzluksiz bo'ladi. Agar $f(a-0) < f(a+0)$ bo'lsa, shu nuqtada funksiya birinchi tur uzilishga ega bo'ladi.

Agar a nuqta X oraliqning chetki nuqtasi bo'lsa, yuqoridagi kelishuvimizga ko'ra, bu nuqtadagi bir tomonli limitning mavjudligini ko'rsatish kifoya.

Ravshanki, $f(x)$ funksiya X oraliqda kamayuvchi bo'lgan holda ham mulohazalarimiz xuddi yuqoridagidek bo'ladi. ►

Endi monoton funksiyaning uzluksiz bo'lishi haqidagi teoremani keltiramiz.

2-teorema. *Agar* $f(x)$ *funksiya* X *oraliqda monoton bo'lib, uning qiymatlari to'plami* $Y_f = \{f(x) : x \in X\}$ *biror oraliqdan iborat bo'lsa, u holda bu funksiya* X *da uzluksiz bo'ladi.*

◄ Aniqlik uchun $f(x)$ funksiya X da o'suvchi bo'lsin. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya teoremaning shartlarini qanoatlantirsa ham, u biror $a \in X$ nuqtada uzluksiz bo'lmasin. U holda 1 teoremaga ko'ra u birinchi tur uzilishga ega bo'ladi. Ya'ni

$$f(a-0) < f(a+0)$$

bo'ladi (agar a nuqta X oraliqning chetki nuqtasi bo'lsa, (*) yoki (**) tengsizlik o'rinli bo'ladi). Natijada

$$x < a, \text{ bo'lsa, } f(x) \le f(a-0)$$

$$x > a, \text{ bo'lsa, } f(x) \ge f(a+0)$$

bo'lib, $f(x)$ funksiya $(f(a-0), f(a+0))$ intervaldagi $f(a)$ dan boshqa qiymatlarni hech bir $x \in X$ da qabul qila olmaydi. Bu esa $f(x)$ ning qiymatlari to'plami Y_f biror oraliqdan iborat ekanligiga ziddir. Demak, funksiya a nuqtada birinchi tur uzilishga ega bo'la olmaydi. ►

4-§. Uzluksiz funksiyalar ustida arifmetik amallar. Murakkab funksiyaning uzluksizligi

1^0. Uzluksiz funksiyalarning yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi va nisbatining uzluksizligi.

3-teorema. *Agar* $f(x)$ *va* $g(x)$ *funksiyalar* $X \subset R$ *to'plamda aniqlangan bo'lib, ularning har biri* $a \in X$ *nuqtada uzluksiz bo'lsa,*

$$f(x) \pm g(x), \quad f(x) \cdot g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x) \ne 0, \ \forall x \in X)$$

funksiyalar ham shu nuqtada uzluksiz bo'ladi.

◄ Bu teoremaning isboti limitga ega bo'lgan funksiyalar ustida arifmetik amallar haqidagi teoremalardan bevosita kelib chiqadi. Masalan, ikkita uzluksiz funksiya ko'paytmasi yana uzluksiz funksiya bo'lishini ko'rsataylik. $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar a nuqtada uzluksiz bo'lsin:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a), \quad \lim_{x \to a} g(x) = g(a).$$

U holda

$$\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = \lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x) = f(a)g(a)$$

bo'lib, undan $f(x)g(x)$ funksiyaning a nuqtada uzluksiz bo'lishi kelib chiqadi. ►

3–eslatma. Ikkita funksiya yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi va nisbati uzluksiz bo'lishidan bu funksiyalarning har birining uzluksiz bo'lishi kelib chiqavermaydi.

Masalan. Quyidagi $f(x)=x$ va

$$g(x)=\begin{cases}\cos\frac{1}{x}, & \text{agar } x\neq 0 \text{ bo'lsa,}\\ 0, & \text{agar } x=0 \text{ bo'lsa}\end{cases}$$

funksiyalar ko'paytmasidan tuzilgan $\varphi(x)=x\cos\frac{1}{x}$ funksiya R da uzluksiz bo'lgan holda $g(x)$ funksiya $x=0$ nuqtada uzluksiz emas.

Yuqorida keltirilgan teorema qo'shiluvchilar hamda ko'paytuvchilar soni ixtiyoriy chekli bo'lgan holda ham o'rinli bo'lishini ko'rsatish qiyin emas.

Endi teoremaning qo'llanilishiga misollar keltiraylik.

1) $y=ax^n$, $a=const$, $n\in N$ funksiya R da uzluksiz.

◄ Ravshanki, $f(x)=x$ funksiya R da uzluksiz. Agar berilgan funksiyani

$$y = ax^n = a\cdot\underbrace{x\cdot x\cdot\ldots\cdot x}_{n}$$

ko'rinishda ifodalash mumkinligini e'tiborga olsak, 3-teoremaga ko'ra $y=ax^n$ funksiyaning R da uzluksizligi kelib chiqadi. ►

Keltirilgan misol va 3–teoremadan butun va kasr ratsional funksiyalar

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,$$

$$Q(x)=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m}$$

($a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_n$ o'zgarmas sonlar, $n\in N$, $m\in N$) o'z aniqlanish to'plamlarida uzluksiz bo'lishi kelib chiqadi.

2). $y=tgx$, $y=ctgx$, $y=\sec x$, $y=\cos ecx$ funksiyalar o'z aniqlanish sohalarida uzluksiz. Haqiqatan, bu funksiyalar uzluksiz funksiyalarning nisbati orqali ifodalanadi.

2^0. **Murakkab funksiyaning uzluksizligi** $y=f(x)$ funksiya X to'plamda, $z=\varphi(y)$ funksiya esa Y to'plamda aniqlangan bo'lib, ular yordamida $z=\varphi(f(x))$ murakkab funksiya tuzilgan bo'lsin (4 – bobning 1 – § iga qarang).

4–teorema. *Agar $y=f(x)$ funksiya $a\in X$ nuqtada, $z=\varphi(y)$ funksiya esa a nuqtaga mos kelgan $y_a=f(a)$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, $z=\varphi(f(x))$ murakkab funksiya a nuqtada uzluksiz bo'ladi.*

◀ $y=f(x)$ funksiya $a\in X$ nuqtada, $z=\varphi(y)$ funksiya esa mos $y_a=f(a)$ nuqtada uzluksiz bo'lsin.

Ta'rifga ko'ra

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\sigma>0,\ |y-y_a|<\sigma:\ |\varphi(y)-\varphi(y_a)|<\varepsilon,$$

$$\sigma>0,\ \exists\delta>0,\ |x-a|<\delta:\ |f(x)-f(a)|<\sigma$$

bo'lib,

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ |x-a|<\delta:\ |\varphi(f(x))-\varphi(f(a))|<\varepsilon.$$

bo'ladi. Demak, $z=\varphi(f(x))$ funksiya a nuqtada uzluksiz. ▶

Misollar qaraylik. 1) $y=a^x$ $(a>1)$ R to'plamda o'suvchi funksiya. Har bir $y>0$ da $x=\log_a y$ ning mavjud bo'lishidan berilgan funksiyaning qiymatlari $Y=\{a^x : x\in R\}=(0,+\infty)$ oraliqni tashkil etishi kelib chiqadi. Demak, $y=a^x$ funksiya R da uzluksiz.

2). $y=\log_a x$ $(a>1)$ Bu funksiya $X=(0,+\infty)$ oraliqda o'suvchi. Uning qiymatlari $Y=\{\log_a x : x\in(0,+\infty)\}=R$ ni to'ldiradi, chunki har bir $y\in R$ uchun $x=a^y$ mavjud. Demak, $y=\log_a x$ $(a>1)$ funksiya, $(0,+\infty)$ da uzluksiz.

Yuqorida keltirilgan ko'rsatgichli va logarifimik funksiyalarning $0<a<1$ bo'lganda uzluksiz ekanligi ham 2– teoremadan kelib chiqadi.

3). $y=x^\mu$ $(x>0)$ darajali funksiyani qaraylik. Bu funksiyani

$$y=x^\mu=a^{\mu\log_a x}\qquad(a>0,a\neq1)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin. Agar $\mu\log_a x$ funksiya $(0,+\infty)$ da, a^x funksiya esa R da uzluksiz ekanini e'tiborga olsak, u holda murakkab funksiyaning uzluksizligi haqidagi teoremaga asoslanib $y=x^\mu$ funksiyaning $(0,+\infty)$ da uzluksiz bo'lishini topamiz.

5–§. Limitlarni hisoblashda funksiyaning uzluksizligidan foydalanish

$y = f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda aniqlangan bo'lib, a nuqta X ning limit nuqtasi bo'lsin. $z = \varphi(y)$ funksiya esa $Y \subset R$ to'plamda aniqlangan. Bu funksiyalar yordamida $z = \varphi(f(x))$ murakkab funksiya tuzilgan bo'lsin.

Agar $\lim\limits_{x \to a} f(x) = y_0$ mavjud bo'lib, $z = \varphi(y)$ funksiya y_0 nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda $\lim\limits_{x \to a} \varphi(f(x))$ mavjud va

$$\lim_{x \to a} \varphi(f(x)) = \varphi(y_0)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Aytaylik $x \to a$ da $f(x) \to y_0$ va $\varphi(y)$ funksiya y_0 nuqtada uzluksiz, ya'ni $y \to y_0$ da $\varphi(y) \to \varphi(y_0)$ bo'lsin. U holda murakkab funksiyaning limiti haqidagi teoremaga asosan (qaralsin, [1], 4 - bob) $x \to a$ da $\varphi(f(x))$ funksiya limitga ega va

$$\lim_{x \to a} \varphi(f(x)) = \lim_{y \to y_0} \varphi(y) = \varphi(y_0)$$

tengliklar o'rinli. Bu tengliklardan uzluksiz funksiyalar uchun funksiya ishorasi ostida limitga o'tish qoidasi kelib chiqadi:

$$\lim_{x \to a} \varphi(f(x)) = \varphi(\lim_{x \to a} f(x))$$

Xususan, $f(x) = x$ bo'lsa,

$$\lim_{x \to a} \varphi(x) = \varphi(\lim_{x \to a} x) = \varphi(a)$$

5.5-misol. Quyidagi

$$\lim_{x \to 0} (1 + \mu x)^{\frac{1}{x}} \qquad (\mu \in R, \mu \neq 0)$$

limitni hisoblang.

◄ Biz buni $\lim\limits_{x \to 0} (1 + \mu x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to 0} ((1 + \mu x)^{\frac{1}{\mu x}})^{\mu}$ ko'rinishda yozib olamiz. Ravshanki, $x \to 0$ da $y = \mu x \to 0$ bo'ladi. Bundan quyidagini topamiz:

$$\lim_{x \to 0} ((1 + \mu x)^{\frac{1}{\mu x}})^{\mu} = \left[\lim_{y \to 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}}\right]^{\mu} = e^{\mu}. ►$$

Shu misoldan foydalanib, $\lim\limits_{n \to \infty} (1 + \frac{x}{n})^n$ limitni ham hisoblash mumkin. Bundan $x \in R$, $x \neq 0$. Ravshanki, $\frac{x}{n} \in R$ da va $n \to \infty$ da $\frac{x}{n} = y \to 0$. Shuning uchun

$$\lim_{n \to \infty} (1 + \frac{x}{n})^n = \lim_{y \to 0} ((1 + y)^{\frac{1}{y}})^x = (\lim_{y \to 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}})^x = e^x.$$

5.6–misol. Quyidagi limitlarni hisoblang.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e$ (birinchi muhim limit, $a>0, a\neq 1$)

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$ (ikkinchi muhim limit $a>0, a\neq 1$)

v) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$ (uchunchi muhim limit).

◄ Bu munosabatlarni isbotlashda logarifmik, ko'rsatkichli va darajali funksiyalarning uzluksizligidan foydalanamiz. Darhaqiqat,

a) holda

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}})=\log_a e$$

b) holda esa $a^x-1=t$ deb $x\to 0$ da $t\to 0$ bo'lishini e'tiborga olib topamiz:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(1+t)}=\frac{1}{\log_a(\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}})}=\frac{1}{\log_a e}=\ln a.$$

Nihoyat v) holda $(1+x)^\alpha-1=t$ deb, so'ngra $\alpha=\frac{\ln(1+t)}{\ln(1+x)}$ va $x\to 0$ da $t\to 0$ bo'lishini hisobga olsak,

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{t}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{t}{\ln(1+t)}\cdot\frac{\ln(1+t)}{\ln(1+x)}\cdot\frac{\ln(1+x)}{x}\right)=\alpha$$

kelib chiqadi.

5.7–misol. Ikkita $f(x)$ va $g(x)$ funksiya $X\subset R$ to'plamda aniqlangan va $f(x)>0$, a nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

Agar

$$\lim_{x\to a}f(x)=b\quad(b>0),\quad \lim_{x\to a}g(x)=c$$

limitlar o'rinli bo'lsa,

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)}=b^c$$

bo'lishi isbotlansin.

◄ Haqiqatan, $(f(x))^{g(x)}$ funksiyani

$$(f(x))^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$$

ko'rinishda ifodalab, so'ngra ko'rsatkichli hamda logarifmik funksiyalarning uzluksizligidan foydalanib, quyidagini topamiz:

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)}=\lim_{x\to a}e^{g(x)\ln f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}g(x)\cdot\ln\lim\limits_{x\to a}f(x)}=$$

$$=e^{b\ln a}=e^{\ln a^b}=a^b.$$

Odatda $(f(x))^{g(x)}$ funksiya darajali – ko'rsatkichli funksiya deb ataladi.

Darajali – ko'rsatkichli $(f(x))^{g(x)}$ funksiya quyidagi

1) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=1,\ \lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to a}g(x)=0$;

3) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to a}g(x)=0$

hollarda avval (4 – bob, mashqlar) o'tganimizga o'xshash, aniqmasliklarni ifodalaydi. $x\to a$ da $(f(x))^{g(x)}$ funksiya 1) holda 1^∞ 2) holda 0^0 3) holda ∞^0 ko'rinishdagi aniqmasliklar deyiladi.

5.8–misol. Ushbu

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}\qquad(a>0,\ b>0)$$

limitni hisoblang.

◀ $\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ ifoda $x\to 0$ da 1^∞ ko'rinishdagi aniqmaslikdan iborat. Uni ochish uchun limit ishorasi ostidagi funksiyani qulay ko'rinishda yozib olib, keyin limitga o'tamiz:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x-1+b^x-1}{2}+1\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left\{\left(1+\frac{a^x-1+b^x-1}{2}\right)^{\frac{2}{a^x-1+b^x-1}}\right\}^{\frac{a^x-1+b^x-1}{2x}}=$$

$$=\left\{\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{a^x-1+b^x-1}{2}\right)^{\frac{2}{a^x-1+b^x-1}}\right\}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1+b^x-1}{2x}}=e^{\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)}=\sqrt{ab}$$

Demak, $x\to 0$ da berilgan funksiyaning limiti $\sqrt{ab}$ ga teng. ▶

6–§. Uzluksiz funksiyalarning xossalari

Biz ushbu paragrafda nuqtada hamda oraliqda uzluksiz bo'lgan funksiyalarning xossalarini o'rganamiz.

1⁰. Nuqtada uzluksiz bo'lgan funksiyaning xossalari (lokal xossalar). $f(x)$ funksiya $X\subset R$ to'plamda aniqlangan,

$x_0 \in X,\ U_\delta(x_0) \subset X\ (\delta > 0)$ bo'lib, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'lsin:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Chekli limitga ega bo'lgan funksiyalarning xossalaridan (3-bobning 4-§ iga qaralsin) foydalanib, x_0 nuqtada uzluksiz bo'lgan funksiyalarning ham quyidagi xossalarini ayta olamiz:

1). Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda x_0 nuqtaning etarli kichik atrofida funksiya chegaralangan bo'ladi.

2). Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz va $f(x) \neq 0$ bo'lsa, u holda, x_0 nuqtaning yetarli kichik atrofidan olingan barcha x nuqtalarda funksiya qiymatlarining ishorasi $f(x_0)$ ning ishorasi kabi bo'ladi.

1-natija. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'lib, bu nuqtaning yetarli kichik atrofidan olingan x nuqtalarda uning qiymatlari musbat ham manfiy ishorali bo'laversa, funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymati nolga teng bo'ladi.

3). Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda $\forall \varepsilon > 0$ uchun x_0 nuqtaning shunday yetarli kichik atrofi topiladiki, bu atrofdan olingan ixtiyoriy x', x'' uchun $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ bo'ladi.

◄ Haqiqatan, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'lganligidan $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham, $\frac{\varepsilon}{2}$ ga ko'ra shunday $\delta > 0$ son topiladiki, $|x - x_0| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha x lar uchun $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ tengsizlik bajariladi. x_0 nuqtaning yetarli kichik atrofidan olingan x', x'' nuqtalar uchun ham

$$|f(x') - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |f(x'') - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

tengsizliklar o'rinli bo'lib, undan $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ tengsizlik kelib chiqadi.

Funksiyaning nuqta atrofidagi xossalari uning lokal xossalari deyiladi.

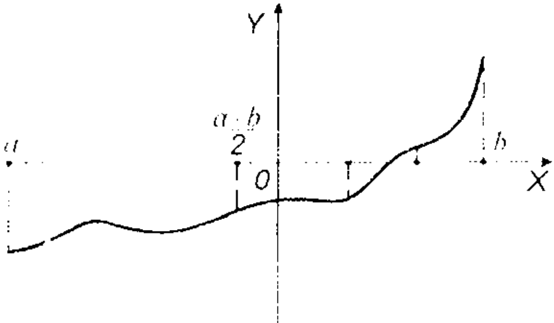
2^0. Segmentda uzluksiz bo'lgan funksiyalarning xossalari (global xossalar). Aytaylik, $f(x)$ funksiya

$$[a,b]=\{x: x\in R,\ a\le x\le b\}$$
segmentda aniqlangan bo'lsin.

5–teorema. (Bolsano Koshining birinchi teoremasi). *Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda uzluksiz bo'lib segmentning chetki nuqtalarida har xil ishorali qiymatlarga ega bo'lsa, u holda shunday c $(a<c<b)$ nuqta topiladiki, u nuqtada funksiya nolga aylanadi:*

$$f(c)=0$$

Bu teorema geometrik nuqtayi nazardan, uzluksiz egri chiziq OX o'qining bir tomonidan ikkinchi tomoniga o'tishda uni albatta kesib o'tishni ifodalaydi (29 – chizma).



29 – chizma.

◄ $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da uzluksiz bo'lib, $f(a)<0, f(b)>0$ bo'lsin, ($f(a)>0, f(b)<0$ bo'lgan hol ham shunga o'xshash qaralishi mumkin). $[a,b]$ segmentning $\frac{a+b}{2}$ nuqtasini olib, bu nuqtada $f(x)$ funksiyaning qiymatini qaraymiz. Agar $f(\frac{a+b}{2})=0$ bo'lsa, $c=\frac{a+b}{2}$ deb olinib, unda $f(c)=0$ va demak, teorema isbot etilgan bo'ladi. Agar $f(\frac{a+b}{2})\neq 0$ bo'lsa, $\left[a,\frac{a+b}{2}\right],\left[\frac{a+b}{2},b\right]$ segmentlardan chetki nuqtalarida $f(x)$ funksiya turli ishorali qiymatga ega bo'ladiganini olib, uni $[a_1,b_1]$ orqali belgilaymiz. Demak, $f(a_1)<0, f(b_1)>0$ bo'lib, $[a_1,b_1]$ segmentning uzunligi esa $b_1-a_1=\frac{b-a}{2}$ bo'ladi. So'ng $[a_1,b_1]$ segmentning $\frac{a_1+b_1}{2}$ nuqtasini olib, bu nuqtada $f(x)$ ning qiymatini qaraymiz. Agar $f(\frac{a_1+b_1}{2})=0$

bo'lsa, $c=\frac{a_1+b_1}{2}$ deb olinib, unda $f(c)=0$ va bu holda teorema isbot bo'ladi. Agar $f(\frac{a_1+b_1}{2})\neq 0$ bo'lsa, $\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right], \left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$ segmentlardan chetki nuqtalarida $f(x)$ funksiya turli ishorali qiymatga ega bo'ladiganini olib, uni $[a_2, b_2]$ deymiz. Bu holda $f(a_2)<0, f(b_2)>0$ va $[a_2, b_2]$ segmentning uzunligi $b_2-a_2=\frac{b-a}{2^2}$ bo'ladi. Bu jarayonni davom ettiraveramiz. Natijada yo chekli sondagi qadamdan keyin segmentlarning o'rtalarini ifodalovchi nuqta sifatida shunday c nuqtaga kelamizki, u nuqtada funksiya nolga aylanadi, demak teorema isbot bo'ladi, yoki jarayon cheksiz davom etib, ichma-ich joylashgan

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n], \ldots$$

segmentlar ketma-ketligi hosil bo'ladi. Bu ketma-ketlikning umumiy hadi $[a_n, b_n]$ da $f(a_n)<0, f(b_n)>0$ bo'lib, $[a_n, b_n]$ ning uzluksizligi $b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}\to 0$ ($n\to\infty$ da) bo'ladi.

Ichma-ich joylashgan segmentlar prinsipiga asosan shunday nuqta mavjudki

$$\lim a_n=\lim b_n=c \qquad (c\in(a,b)).$$

$f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ da uzluksiz bo'lishidan foydalanib, topamiz:

$$a_n\to c\Rightarrow f(a_n)\to f(c) \quad \text{va} \quad f(a_n)<0\Rightarrow f(c)\le 0,$$

$$b_n\to c\Rightarrow f(b_n)\to f(c) \quad \text{va} \quad f(b_n)>0\Rightarrow f(c)\ge 0,$$

Keyingi tengsizliklardan esa $f(c)=0$ bo'lishi kelib chiqadi. ►

Isbot etilgan teorema ko'pgina tatbiqlarga ega, jumladan u ayrim tenglamalar yechimining mavjudligini ko'rsatish va ularni taqribiy yechish imkonini beradi. Masalan,

$$\sin x-x+1=0 \qquad (5.2)$$

tenglamani qaraylik. Ravshanki, $f(x)=\sin x-x+1$ R da uzluksiz. Jumladan, bu funksiya $[0,\pi]$ segmentda ham uzluksiz bo'lib, segmentning chetki nuqtalarida: $f(0)=1>0, f(\pi)=-\pi+1<0$

5-teoremaga asosan $f(x)$ funksiya $[0,\pi]$ oraliqning hech bo'lmaganda bitta nuqtasida nolga aylanadi, ya'ni berilgan (5.2) tenglamaning $[0,\pi]$ oraliqda yechimi mavjud. $[0,\pi]$ segmentni $[0,\frac{\pi}{2}]$ va $[\frac{\pi}{2},\pi]$ segmentlarga ajratib, $[\frac{\pi}{2},\pi]$ ning chetki nuqtalarida $f(\frac{\pi}{2}) = 2 - \frac{\pi}{2} > 0$, $f(\pi) < 0$ bo'lishini topamiz. Demak, (5.2) tenglamaning yechimi $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ oraliqda yotadi. Bu jarayonni davom ettiraverish natijasida $\sin x - x + 1 = 0$ tenglamaning taqribiy yechimi kerakli aniqlikda topilishi mumkin.

6–teorema. (Bolsano–Koshining ikkinchi teoremasi). *Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda uzluksiz bo'lib, uning chetki nuqtalarida $f(a) = A$, $f(b) = B$ qiymatlarga ega va $A \neq B$ bo'lsa, A va B orasida har qanday C son olinganda ham a bilan b orasida (kamida bitta) shunday c nuqta topiladiki,*

$$f(c) = C$$

bo'ladi.

◄ Aniqlik uchun $A < B$ bo'lsin. Ixtiyoriy $C \in (A, B)$ olaylik. Yordamchi $\varphi(x) = f(x) - C$ funksiya tuzamiz. Ravshanki, bu funksiya segmentda uzluksiz va bu segmentning chetki nuqtalarida $\varphi(a) = A - C < 0$, $\varphi(b) = B - C > 0$ qiymatlarni qabul qiladi. U holda Bolsano - Koshining birinchi teoremasiga ko'ra a bilan b orasida shunday c nuqta topiladiki, $\varphi(c) = 0$ ya'ni $f(c) = C$ bo'ladi. ►

2–natija. Agar $f(x)$ funksiya biror X oraliqda (yopiq yoki ochiq, chekli yoki cheksiz) uzluksiz bo'lsa, u holda funksiyaning barcha qiymatlari to'plami biror Y oraliqdan iborat bo'ladi.

◄ $Y = \{f(x), x \in X\}$ to'plamning aniq quyi chegarasi m aniq yuqori chegarasi M bo'lsin:

$$m = \inf_{x \in X} Y, M = \sup_{x \in X} Y$$

Bunda m va M lar chekli son yoki ∞ bo'lishi mumkin. Aniq chegaralarning ta'rifiga binoan, $\forall x \in X$ uchun $m \leq f(x) \leq M$ bo'ladi. Endi $f(x)$ funksiya qiymatlari to'plami (m, M) intervalda tashkil etishini ko'rsatamiz. Bu intervalda ixtiyoriy C sonni olaylik: $m < C < M$. U holda shunday A va B sonlar topiladiki,

$$m < A < C < B < M$$

bo'ladi. Bu A va B sonlarni $A = f(a), B = f(b)$ deb qarash mumkin ($a \in X, b \in X$). Isbotlangan teoremaga asosan a bilan b orasida shunday c son mavjudki, $f(c) = C$ bo'ladi. Olingan C son (m, M) intervaldagi ixtiyoriy son bo'lganidan, bu intervaldagi barcha qiymatlarni $f(x)$ funksiya qabul qilishi kelib chiqadi. ►

7–teorema. (Veyershtrassning birinchi teoremasi). Agar

$f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda uzluksiz bo'lsa, funksiya shu segmentda chegaralangan bo'ladi.

◀ Teskarisini faraz qilaylik, ya'ni $[a,b]$ da uzluksiz bo'lgan $f(x)$ funksiya unda chegaralanmagan bo'lsin. U holda $[a,b]$ da shunday x_n nuqta topiladiki, shu nuqta uchun $|f(x_n)|>n$ $(n=1,2,\dots)$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. x_n ketma-ketlikdan Bolsano Veyershtrass lemmasiga asosan yaqinlashuvchi qismiy x_{n_k} ketma-ketlik ajratish mumkin: $x_{n_k}\to x_0, x_0\in[a,b]$. $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da uzluksiz. Unda $f(x_{n_k})\to f(x_0)$ bo'ladi. Bu esa $|f(x_n)|>n$ ya'ni $f(x_n)\to\infty$ deb qilgan farazimizga ziddir. Demak, funksiya $[a,b]$ da chegaralangan. ▶

4-eslatma. Keltirilgan teorema shartidagi oraliqning segment bo'lishi muhimdir. Bu shart bajarilmasa, teorema o'rinli bo'lmasdan qolishi mumkin. Masalan, $f(x)=\frac{1}{x}$ funksiya $(0,1)$ oraliqda uzluksiz bo'lsa ham, shu oraliqda chegaralanmagan.

5-eslatma. Funksiyaning biror oraliqda chegaralangan bo'lishidan, uning shu oraliqda uzluksiz bo'lishi har doim ham kelib chiqavermaydi. Masalan, Dirixle funksiyasi $D(x)$ chegaralangan bo'lsa ham u uzluksiz emas.

8-teorema. (Veyershtrassning ikkinchi teoremasi). Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda uzluksiz bo'lsa, funksiya shu segmentda o'zining aniq yuqori hamda aniq quyi chegaralariga erishadi, ya'ni $[a,b]$ da shunday x_1 va x_2 nuqtalar topiladiki,

$$f(x_1)=\sup_{x\in[a,b]}\{f(x)\},\quad f(x_2)=\inf_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$$

tengliklar o'rinli bo'ladi.

◀ Veyershtrassning birinchi teoremasiga ko'ra $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da chegaralangan. Modomiki, $\{f(x):x\in[a,b]\}$ to'plam chegaralangan ekan, unda bu to'plamning aniq yuqori hamda aniq quyi chegaralari mavjud.

Biz ularni

$$\sup_{x\in[a,b]}\{f(x)\}=M,\quad \inf_{x\in[a,b]}\{f(x)\}=m,$$

orqali belgilaylik.

Endi $[a,b]$ segmentda $f(x)$ funksiya M va m qiymatlarni qabul qiladigan nuqtalar mavjudligini ko'rsatamiz. Teskarisini faraz qilaylik, ya'ni $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda o'zining aniq yuqori chegarasi M ga erishmasin. U holda $\forall x\in[a,b]$ lar uchun $f(x)<M$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Quyidagi

$$\varphi(x)=\frac{1}{M-f(x)}$$

funksiyani qaraylik. Ravshanki, bu funksiya $[a,b]$ segmentda uzluksiz. Veyershtrassning birinchi teoremasiga ko'ra $\varphi(x)$ funksiya $[a,b]$ da chegaralangan. Demak, $\forall x\in[a,b]$ lar uchun ushbu

$$\varphi(x)=\frac{1}{M-f(x)}\le\mu \quad (\mu=const,\ \mu>0)$$

tengsizlik o'rinli. Bundan

$$f(x)\le M-\frac{1}{\mu}$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa $M=\sup\{f(x)\}$ ekani zid. Demak, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda o'zining aniq yuqori chegarasiga erishadi, ya'ni $[a,b]$ da shunday x_0 nuqta mavjudki,

$$f(x_0)=\sup_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$$

bo'ladi. Huddi shunga o'xshash $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda o'zining aniq quyi chegarasiga erishish ko'rsatiladi. ►

6-eslatma. Agar $f(x)$ funksiya ochiq oraliqda (intervalda) uzluksiz bo'lsa, funksiya shu oraliqda o'zining aniq chegaralariga erishmasligi mumkin. Masalan, $f(x)=x^2$ funksiya $(0,1)$ intervalda uzluksiz. Bu funksiya uchun $\sup x^2=1, \inf x^2=0$ bo'ladi. Ammo funksiya o'zining $\sup$ va $\inf$ qiymatlariga $(0,1)$ intervalda erishmaydi.

Odatda funksiyaning biror oraliqdagi xossalari uning global xossalari deb ataladi.

9-teorema. (Teskari funksiyaning mavjudligi). Agar $f(x)$ funksiya X oraliqda aniqlangan, uzluksiz va qat'iy o'suvchi (qat'iy kamayuvchi) bo'lsa, bu funksiya qiymatlaridan iborat $Y=\{f(x):x\in X\}$ oraliqda teskari $f^{-1}(y)$ funksiya mavjud bo'lib, u uzluksiz va qat'iy o'suvchi (qat'iy kamayuvchi) bo'ladi.

◄ $f(x)$ funksiya X oraliqda uzluksiz bo'lgani uchun uning qiymatlari Y oraliqni tutash to'ldiradi. Demak, har bir $y_0\in Y$ uchun X da shunday x_0 topiladiki, $f(x_0)=y_0$ bo'ladi. Bunday

$y_0 \in Y$ ga mos keladigan x_0 nuqta X da yagona bo'ladi. Haqiqatan ham, agar X oraliqda x_0 dan katta yoki kichik bo'lgan x' nuqta olinadigan bo'lsa, $f(x)$ funksiya o'suvchi bo'lgani uchun $f(x')=y'$ ham y_0 dan katta yoki kichik bo'ladi. Shunday qilib, Y oraliqdan olingan har bir y ga X da unga mos keladigan yagona shunday x topiladiki, $f(x)=y$ bo'ladi. Demak, Y oraliqda teskari $x=f^{-1}(y)$ funksiya mavjud. Endi $x=f^{-1}(y)$ funksiyaning Y da qat'iy o'suvchi bo'lishini, ya'ni $y_1 \in Y,\ y_2 \in Y,\ y_1 < y_2$ bo'lganda $x_1 < x_2$ tengsizlik o'rinli $\left(x_1=f^{-1}(y_1), x_2=f^{-1}(y_2)\right)$ bo'lishini ko'rsatamiz. Teskarisini faraz qilaylik: $y_1 < y_2$ bo'lganda $x_1 > x_2$ bo'lsin. U holda $y=f(x)$ funksiya X da qat'iy o'suvchiligidan $f(x_1) > f(x_2)$ ya'ni $y_1 > y_2$ bo'ladi. Bu esa $y_1 < y_2$ deb olinishiga ziddir. Demak, $x=f^{-1}(y)$ funksiya Y da qat'iy o'suvchi.

Nihoyat, monoton funksiyaning uzluksizligi haqidagi teoremaga ko'ra, $x=f^{-1}(y)$ funksiya Y oraliqda uzluksiz bo'ladi.

$y=f(x)$ funksiya X da kamayuvchi bo'lganda ham teorema yuqoridagidek isbotlanadi. ►

7–§. Funksiyaning tekis uzluksizligi. Kantor teoremasi

$y=f(x)$ funksiya X to'plamda aniqlangan bo'lib, $x_0 \in X$ nuqtada uzluksiz bo'lsin. Funksiya uzluksizligi ta'rifiga ko'ra, $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta_0 > 0$ son topiladiki, $|x-x_0| < \delta_0$ tengsizlik o'rinli bo'lishidan $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$ tengsizlikni o'rinli bo'lishi kelib chiqadi. Bu ta'rifdagi δ_0 son avval ta'kidlab o'tganimizdek ε ga bog'liq: $\delta_0=\delta_0(\varepsilon)$. Aytaylik $f(x)$ funksiya X ning x_1 $(x_1 \neq x_0)$ nuqtasida ham uzluksiz bo'lsin. Yana ta'rifga ko'ra, $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta_1 > 0$ son topiladiki, $|x-x_1| < \delta_1$ dan $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$ kelib chiqadi.

$f(x)$ funksiyaning $x=x_0, x=x_1$ nuqtalarida uzluksizligi ta'rifidagi $\varepsilon > 0$ son bir hil bo'lgan holda ham unga mos keladigan δ_0 va δ_1 sonlar, umuman, turlicha bo'ladi, ya'ni funksiya bir necha nuqtalarda uzluksiz bo'lganda, uzluksizlik ta'rifidagi $\delta > 0$ son faqat $\varepsilon > 0$ gagina bog'liq bo'lmasdan, qaralayotgan nuqtaga ham bog'liq bo'ladi. Shuni ham aytish kerakki, agar $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ deb olinsa, bu $\delta>0$ son x_1 va x_2 nuqtalarga baravar yarayveradi, chunki $|x-x_1|<\delta$ dan $|x-x_1|<\delta_1$ va $|x-x_2|<\delta$ dan $|x-x_2|<\delta_2$ kelib chiqadi. Misollar qaraylik:

1) $f(x)=x^2$ funksiya $[0,1]$ segmentda uzluksiz, jumladan $a\in[0,1]$ nuqtada uzluksizdir. Ta'rifga ko'ra, $\forall\varepsilon>0$ son uchun $\delta=\sqrt{a^2+\varepsilon}-a$ deb olinsa, $|x-a|<\delta$ bo'lganda

$$|f(x)-f(a)|=|x^2-a^2|=|x-a||x-a+2a|<\delta(\delta+2a)=$$

$$=(\sqrt{a^2+\varepsilon}-a)^2+(\sqrt{a^2+\varepsilon}-a)\cdot 2a=\varepsilon$$

bo'ladi. Demak, $\delta=\sqrt{a^2+\varepsilon}-a$ bo'lib, $\varepsilon>0$ bilan birga qaralayotgan $a\in[0,1]$ nuqtaga ham bog'liq ekan. Biroq,

$$\delta_0=\min_{a\in[0,1]}\delta=\min_{a\in[0,1]}(\sqrt{a^2+\varepsilon}-a)=\min_{a\in[0,1]}\frac{\varepsilon}{\sqrt{a^2+\varepsilon}+a}=\frac{\varepsilon}{1+\sqrt{1+\varepsilon}}$$

deb olinsa, $|x-a|<\delta_0$ dan $|x-a|<\delta$ kelib chiqadi. Shu sababli bu $\delta_0>0$ son $[0,1]$ segmentning barcha nuqtalariga to'g'ri keladi.

Shunday qilib, $f(x)=x^2$ funksiya $[0,1]$ segmentning nuqtalarida uzluksiz bo'lishi ta'rifidagi $\delta>0$ son $\varepsilon>0$ son bilan birga qaralayotgan nuqtalarga bog'liq bo'lsa ham, shunday $\delta_0>0$ topiladiki, u $[0,1]$ segmentning barcha nuqtalariga yaraydi, boshqacha qilib aytganda, shu $\delta_0>0$ son faqat ε gagina bog'liq bo'lib, qaralayotgan nuqtalarga bog'liq emas.

2) $f(x)=\frac{1}{x}$ funksiya $(0,1]$ oraliqda uzluksiz, jumladan $a\in(0,1]$ nuqtada uzluksizdir. Ta'rifga ko'ra $\forall\varepsilon>0$ son uchun $\delta=\frac{\varepsilon a^2}{1+a\varepsilon}$ deb olinsa, $|x-a|<\delta$ bo'lganda

$$|f(x)-f(a)|=\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right|=\frac{|x-a|}{ax}<\frac{1}{a}\cdot\frac{\varepsilon a^2}{1+a\varepsilon}\cdot\frac{1}{a-\frac{\varepsilon a^2}{1+a\varepsilon}}=\varepsilon$$

bo'ladi. Demak, δ ning tanlanish $\varepsilon>0$ bilan birga $a\in(0,1]$ nuqtaga bog'liq. Biroq, bu holda δ ning $a\in(0,1]$ bo'yicha minimumi

$$\delta_0=\min_{a\in(0,1]}\delta=\min_{a\in(0,1]}\frac{\varepsilon a^2}{1+a\varepsilon}=0.$$

Bu esa $f(x)=\frac{1}{x}$ funksiya $(0,1]$ oraliqning nuqtalarida uzluksiz bo'lishi ta'rifidagi $\delta>0$ son ε, x_0 bilan birga qaralayotgan nuqtalarga bog'liq va $(0,1]$ oraliqning barcha nuqtalariga yaraydigan $\delta>0$ son mavjud emasligini ko'rsatadi.

8–ta'rif. Agar $\forall\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta>0$ son topilsaki, X to'plamning $|x'-x''|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy x' va x'' $(x'\in X, x''\in X)$ nuqtalarida

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya X *to'plamda tekis uzluksiz* deb ataladi.

$f(x)$ funksiyaning tekis uzluksizlik ta'rifidagi $\delta>0$ son $\varepsilon>0$ songagina bog'liq bo'ladi.

5.9–misol. Ushbu

$$f(x)=\sqrt[3]{x}$$

funksiyaning $X=[1,2]$ segmentda tekis uzluksizligi ko'rsatilsin.

◄ $\forall\varepsilon>0$ uchun $\delta>0$ sonni $\delta=3\varepsilon$ deb olsak, u holda $\forall x'\in[1,2], \forall x''\in[1,2]$ lar uchun $|x''-x'|<\delta$ tengsizlik bajarilganda

$$\left|\sqrt[3]{x''}-\sqrt[3]{x'}\right|=\frac{|x''-x'|}{\sqrt[3]{x''^2}+\sqrt[3]{x''x'}+\sqrt[3]{x'^2}}<\frac{|x''-x'|}{3}<\frac{\delta}{3}=\varepsilon$$

bo'ladi. Demak, $y=\sqrt[3]{x}$ funksiya $[1,2]$ oraliqda tekis uzluksiz. ►

5.10–misol. Quyidagi

$$f(x)=\sin\frac{1}{x}$$

funksiya $X=(0,1)$ intervalda tekis uzluksiz emasligi ko'rsatilsin.

◄ Haqiqatan ham, $\varepsilon>0$ sonni, masalan, $\varepsilon=\frac{1}{2}$ deb olib, $x', x''\in(0,1)$ nuqtalar sifatida

$$x'=\frac{1}{n\pi},\ x''=\frac{2}{(2n+1)\pi}\qquad(n\in N)$$

qaralsa, u holda $|x''-x'|$ ayirma uchun

$$|x''-x'|=\frac{1}{n\pi(2n+1)}$$

ni topamiz. Endi δ ni (n ni katta qilib olish hisobiga) har qancha kichik qilib olish mumkin bo'lsa ham

$$|f(x'')-f(x')|=\left|\sin\frac{(2n+1)\pi}{2}-\sin n\pi\right|=1>\varepsilon=\frac{1}{2}$$

bo'ladi. Demak, berilgan funksiya $(0,1)$ da tekis uzluksiz emas. ►

10–teorema. (Kantor teoremasi). *Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$*

segmentda uzluksiz bo'lsa, funksiya shu segmentda tekis uzluksiz bo'ladi.

◄ $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda uzluksiz bo'lsin. Faraz qilaylik, funksiya shu segmentda tekis uzluksiz bo'lmasin. Demak, bu holda biror $\varepsilon>0$ son va ixtiyoriy kichik $\delta>0$ son uchun $[a,b]$ segmentda shunday x' va x'' nuqtalar topiladiki, $|x''-x'|<\delta$ tengsizlik bajarilsa ham

$$|f(x'')-f(x')|\geq\varepsilon$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Nolga intiluvchi musbat sonlar ketma-ketligini $\{\delta_n\}:\delta_1,\delta_2,\delta_3,\ldots,\delta_n$ olaylik $(\delta_n\to 0,\delta_n>0,n=1,2,3,\ldots)$. Farazimizga ko'ra, yuqoridagi $\varepsilon>0$ son va ixtiyoriy $\delta_n>0,(n=1,2,3,\ldots)$ son uchun $[a,b]$ segmentda shunday x'_n va x''_n $(n=1,2,3,\ldots)$ nuqtalar topiladiki, ular uchun quyidagi munosabatlar o'rinli bo'ladi:

$$|x''_1-x'_1|<\delta_1\Rightarrow|f(x''_1)-f(x'_1)|\geq\varepsilon,$$
$$|x''_2-x'_2|<\delta_2\Rightarrow|f(x''_2)-f(x'_2)|\geq\varepsilon,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$|x''_n-x'_n|<\delta_n\Rightarrow|f(x''_n)-f(x'_n)|\geq\varepsilon,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

x'_n ketma-ketlik chegaralangan. Bu ketma-ketlikdan Bolsano–Veyershtrass lemmasiga ko'ra chekli songa intiluvchi qismiy x'_{n_k} ketma-ketlik ajratish mumkin:

$$x'_{n_k}\to x_0\qquad(x_0\in[a,b])$$

U holda

$$|x''_{n_k}-x'_{n_k}|<\delta_{n_k},\quad\delta_{n_k}\to 0$$

bo'lganidan x''_{n_k} ketma-ketlik ham x_0 ga intiladi: $x''_{n_k}\to x_0$. $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ da uzluksiz bo'lishidan:

$$f(x''_{n_k})\to f(x_0),\ f(x'_{n_k})\to f(x_0)$$

bo'lib, ulardan esa

$$f(x''_{n_k})-f(x'_{n_k})\to 0$$

kelib chiqadi. Bu esa $\forall n\in N$ uchun $|f(x''_n)-f(x'_n)|\geq\varepsilon$ deyilgan yuqoridagi tasdiqqa zid. ►

$f(x)$ funksiya X to'plamda aniqlangan bo'lsin.

9–ta'rif. Quyidagi

$$\sup_{x\in X}\{f(x)\} - \inf_{x\in X}\{f(x)\}$$

ayirma $f(x)$ funksiyaning X *to'plamdagi tebranish* deb aytiladi va ω orqali belgilanadi:

$$\omega = \omega(f; X) = \sup_{x\in X}\{f(x)\} - \inf_{x\in X}\{f(x)\}$$

$f(x)$ funksiyaning X to'plamdagi tebranishi quyidagi

$$\omega = \sup_{x', x''\in X}\{|f(x'') - f(x')|\}$$

ko'rinishda ham ta'riflanish mumkin.

Kantor teoremasidan muhim natija kelib chiqadi.

3–natija. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda uzluksiz bo'lsa, u holda $\forall\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta>0$ son topiladiki, $[a,b]$ segmentni uzunliklari δ dan kichik bo'laklarga ajratilganda funksiyaning har bir bo'lakdagi tebranishi ε dan kichik bo'ladi.

◄ $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda uzluksiz bo'lsin. Kantor teoremasiga ko'ra bu funksiya $[a,b]$ da tekis uzluksiz bo'ladi.

Tekis uzluksizlik ta'rifiga ko'ra $\forall\varepsilon>0$ uchun shunday $\delta>0$ topiladiki, $|x' - x''|<\delta$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $x'\in[a,b]$, $x''\in[a,b]$ lar uchun $|f(x') - f(x'')|<\varepsilon$ bo'ladi. Endi shu δ ni olib, $[a,b]$ segmentni diametri δ bo'lgan ixtiyoriy $P=\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ bo'laklashni olamiz. U holda, ravshanki, $\forall x'\in[x_k, x_{k+1}], \forall x''\in[x_k, x_{k+1}]$ nuqtalar uchun $|x'' - x'|<\delta$ va demak, $|f(x'') - f(x')|<\varepsilon$ bo'ladi. Bundan, ixtiyoriy bo'lakcha $[x_k, x_{k+1}]$ uchun

$$\omega = \sup_{x', x''\in[x_k, x_{k+1}]}|f(x'') - f(x')| \le \varepsilon$$

bo'ladi.

Mashqlar.

5.11. Ushbu

$$f(x) = |x|,\ g(x) = \sqrt[3]{x},\ \varphi(x) = \frac{1}{x^2}$$

funksiyalarning aniqlanish sohalarida uzluksizligi isbotlansin.

5.12. Agar $f(x)$ funksiya R da uzluksiz bo'lsa, $f(x)^3$ funksiyaning ham R da uzluksiz bo'lishi isbotlansin.

5.13. Ushbu

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \text{ ratsional son bo'lsa,} \\ x^2 - 1, & \text{agar } x \text{ irratsional son} \end{cases}$$

bo'lsa

funksiyaning R to'plamning faqat $x = -1, x = 1$ nuqtalarida uzluksiz bo'lishi isbotlansin.

5.14. Ushbu

$$f(x) = \mathrm{sign}|x(1 - x^2)|$$

funksiyaning uzilish nuqtalari topilib, turli aniqlansin.

5.15. Agar $f(x)$ funksiya a nuqtada uzluksiz, $g(x)$ funksiya shu nuqtada uzilishga ega bo'lsa, $f(x)+g(x)$ funksiyaning a nuqtada uzilishga ega bo'lishi ko'rsatilsin.

5.16. Agar R to'plamda uzluksiz bo'lgan $f(x)$ funksiya uchun $\forall x \in R \setminus \{0\}$ da

$$|f(x)| < |x|$$

tengsizlik bajarilsa, $f(0) = 0$ bo'lishi ko'rsatilsin.

5.17. Ushbu

$$\lim_{n \to \infty} n^2 (\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x}) = \ln x$$

tenglik isbotlansin.

5.18. Ushbu

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} (x - 1) \operatorname{arctg} x^n$$

funksiya uzluksizlikka tekshirilsin.

5.19. Ushbu

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1, \text{ agar } -1 \le x < 0 \\ 0, \text{ agar } x = 0 \\ x^2 - 1, \text{ agar } 0 < x \le 1 \end{cases}$$

funksiya $[-1, 1]$ da o'zining eng katta va eng kichik qiymatlariga erishadimi?

5.20. Ushbu

$$f(x) = \sin x$$

funksiyaning $(-\infty, +\infty)$ da tekis uzluksiz bo'lishi ko'rsatilsin.

5.21. Agar $f(x)$ funksiya $[0, +\infty)$ da uzluksiz bo'lib,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)$$

chekli bo'lsa, $f(x)$ ning $[0, +\infty)$ da tekis uzluksiz bo'lishi ko'rsatilsin.

VI BOB

Funksiyaning hosilasi va differensiali

Funksiyaning hosilasi va differensiali tushunchalari matematik analizning fundamental tushunchalaridandir.

Biz ushbu bobda funksiya hosilasi va differensiali tushunchalari bilan tanishamiz, funksiyalarning hosilasi va differesialini hisoblashni, shuningdek, differensial hisobning asosiy teoremalarini o'rganamiz.

1-§. Funksiyaning hosilasi

1^0. Funksiya hosilasining ta'rifi. Faraz qilaylik, $y=f(x)$ funksiya (a,b) intervalda berilgan, $x_0\in(a,b)$, $(x_0+\Delta x)\in(a,b)$ bo'lsin.

Ma'lumki,

$$\Delta y=\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

funksiya orttirmasi muayyan funksiya va x_0 nuqtalarda Δx ga bog'liq bo'ladi.

1-ta'rif. Agar

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

mavjud va chekli bo'lsa, bu limit $f(x)$ funksiyaning x_0 *nuqtadagi hosilasi* deb ataladi. Funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi odatda,

$$f'(x_0)\ \text{yoki}\ \ y'_x\big|_{x=x_0}\ \text{yoki}\ \frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}$$

belgilar yordamida yoziladi.

Demak,

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

Bunda $x_0+\Delta x=x$ deb olaylik, unda $\Delta x=x-x_0$ va $\Delta x\to 0$ da $x\to x_0$ bo'lib, natijada

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

bo'ladi. Demak, $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi $x\to x_0$ da

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

nisbatning limiti sifatida ham ta'riflanishi mumkin:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad (6.1)$$

Ravshanki, $f(x)$ funksiya (a,b) intervalning har bir x nuqtasida hosilaga ega bo'lsa, bu hosila x o'zgaruvchining funksiyasi bo'ladi.

Misollar qaraylik.

a) $f(x)=C=const$ funksiya uchun, $\Delta y=0$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0$$

bo'lib, $y'=0$ bo'ladi,

b) $f(x)=x$ funksiya uchun $\Delta y=\Delta x$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$$

bo'lib, $y'=1$ bo'ladi,

v) $f(x)=|x|$ funksiya uchun, $x_0=0$ nuqtada $\Delta y=|\Delta x|$ bo'lib,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

limit mavjud bo'lmaydi. Demak, bu funksiya $x_0=0$ nuqtada hosilaga ega emas.

6.1-misol. $f(x)=e^x$ funksiyaning $x=1$ nuqtadagi hosilasini toping.

◄ Funksiya hosilasining (6.1) ta'rifidan foydalanib, topamiz:

$$y'\Big|_{x=1}=\lim_{x\to 1}\frac{e^x-e}{x-1}=\lim_{t\to 0}\frac{e^{t+1}-e}{t}=e\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=e\ln e=e.$$

Demak, $(e^x)'_{x=1}=e.$ ►

6.2-misol. $f(x)=\ln x \quad (x>0)$ funksiyaning ixtiyoriy $x>0$ nuqtadagi hosilasini hisoblang.

◄Berilgan funksiyaning x nuqtadagi orttirmasi

$$\Delta y=\ln(x+\Delta x)-\ln x=\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right), \qquad (x>0)$$

bo'lib,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

bo'ladi. Ma'lumki

$$\lim_{\Delta x\to 0}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}=1$$

(qaralsin 5 – bob). Unda $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x}$ limit o'rinli bo'ladi. Demak, $(\ln x)'=\frac{1}{x}$ ▶

6.3–misol. $f(x)=\cos x$ funksiyaning ixtiyoriy $x\in R$ nuqtadagi hosilasini hisoblang.

◀Bu funksiya uchun

$$\Delta y=\cos(x+\Delta x)-\cos x=-2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$$

bo'lib,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\lim_{\Delta x\to 0}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=-\sin x$$

bo'ladi. Demak, $(\cos x)'=-\sin x \quad (\forall x\in R)$ ▶

6.4–misol. $f(x)=\sqrt{x} \quad (x>0)$ funksiyaning $\forall x\in(0,+\infty)$ nuqtadagi hosilasini toping.

◀ Bu funksiyaning hosilasi, x o'zgaruvchining ushbu

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

funksiyasi bo'ladi.▶

2–ta'rif. Agar

$$\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\left(\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\right)$$

mavjud va chekli bo'lsa, bu limit $f(x)$ funksiyaning x_0 *nuqtadagi o'ng (chap) hosilasi* deb ataladi. Funksiyaning x_0 nuqtadagi o'ng (chap) hosilasi $f'(x_0+0) \quad (f'(x_0-0))$ kabi belgilanadi.

Odatda funksiyaning o'ng va chap hosilalari bir tomonli hosilalar deb ataladi.

Masalan, $f(x)=|x|$ funksiya uchun $\lim\limits_{\Delta x\to+0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1$, $\lim\limits_{\Delta x\to-0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-1$ bo'ladi. Demak, $f(x)=|x|$ funksiyaning $x=0$ nuqtadagi o'ng hosilasi 1 ga, chap hosilasi -1 ga teng.

1-eslatma. Agar $\Delta x\to 0$ da $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatning limiti aniq ishorali cheksiz bo'lsa, uni ham $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi deb yuritiladi. Bunday holda $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi $+\infty$ (yoki $-\infty$) ga teng deyiladi.

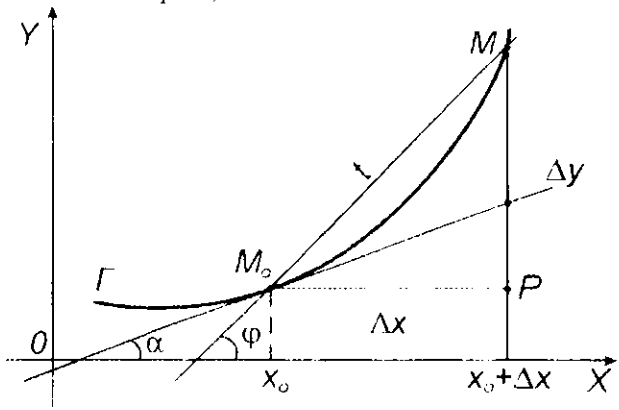
2^0. Hosilaning geometrik va mexanik ma'nolari.

a) Hosilaning geometrik ma'nosi. $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda uzluksiz bo'lib, $x_0\in(a,b)$ nuqtada $f'(x_0)$ hosilaga ega bo'lsin:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$f(x)$ funksiyaning grafigi biror Γ chiziqni ifodalasin deylik (30 – chizma).

Endi Γ chiziqqa uning $M_0(x_0, f(x_0))$ nuqtasida urinma o'tkazish masalasini qaraymiz.



30 – chizma.

Γ chiziqda M_0 nuqtadan farqli $M(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$ nuqtani olib, bu nuqtalar orqali ℓ kesuvchi o'tkazamiz. ℓ kesuvchining OX o'qi bilan tashkil etgan burchakni φ bilan belgilaylik. Ravshanki, φ burchak Δx ga bog'liq bo'ladi: $\varphi=\varphi(\Delta x)$.

Agar l kesuvchining M nuqta l chiziq bo'ylab M_0 ga intilgandagi (ya'ni $\Delta x \to 0$ dagi) limit holati mavjud bo'lsa, kesuvchining bu limit holati l chiziqqa M_0 nuqtada o'tkazilgan urinma deb ataladi. Urinma to'g'ri chiziqdan iborat.

Ma'lumki, M_0 nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq M nuqtaning koordinatalari hamda bu chiziqning burchak koeffitsienti orqali to'liq aniqlanadi.

$f(x)$ funksiya grafigiga M_0 nuqtada o'tkazilgan urinmaning mavjud bo'lishi uchun

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) = \alpha$$

limitning mavjudligini ko'rsatish yetarli, bunda α urinmaning OX o'q bilan tashkil etgan burchagi. MM_0P dan

$$tg\,\varphi(\Delta x) = \frac{MP}{M_0P} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

undan esa

$$\varphi(\Delta x) = arctg\,\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

bo'lishini topamiz. $u = arctgt$ funksiyaning uzluksizligidan foydalansak,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} arctg\,\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= arctg\left[\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\right] = arctg\,f'(x_0)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x)$ mavjud va

$$\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) = arctg\,f'(x_0)$$

Keyingi tenglikdan

$$f'(x_0) = tg\alpha$$

bo'lishini topamiz. Shunday qilib, $f(x)$ funksiya $x_0 \in (a,b)$ nuqtada $f'(x_0)$ hosilaga ega bo'lsa, bu funksiya grafigiga $M_0(x_0, f(x_0))$ nuqtada o'tkazilgan urinma mavjud. Funksiyaning x_0 nuqtasidagi hosilasi $f'(x_0)$ esa bu urinmaning burchak koeffitsientini ifodalaydi. Urinmaning tenglamasi esa ushbu

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

ko'rinishda bo'ladi.

b) Hosilaning mexanik ma'nosi. Moddiy nuqtaning harakati

$s = f(t)$ qoida bilan ifodalangan bo'lsin, bunda t vaqt, s shu vaqt ichida o'tilgan yo'l (masofa). Bu qonun bo'yicha harakat qilayotgan nuqtaning t_0 momentdagi oniy tezligini topish masalasini qaraylik.

t vaqtning t_0 qiymati bilan birga $t_0 + \Delta t$ $(\Delta t > 0)$ qiymatini ham olib, bu nuqtalarda $s = f(t)$ ning qiymatlarini topamiz. Moddiy nuqta Δt vaqt ichida

$$\Delta s = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$$

masofani o'tadi va uning $[t_0, t_0 + \Delta t]$ segmentdagi o'rtacha tezligi

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$$

bo'ladi. $\Delta t \to 0$ da $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ nisbatning limiti moddiy nuqtaning t_0 momentdagi oniy tezligi v ni ifodalaydi:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$$

Hosila ta'rifiga ko'ra

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} = f'(t_0)$$

Demak, $s = f(t)$ funksiyaning t_0 nuqtadagi hosilasi mexanik nuqtayi nazardan $s = f(t)$ qonun bilan harakat qilayotgan moddiy nuqtaning t_0 momentdagi oniy tezligini bildiradi.

3°. **Funksiyaning uzluksiz bo'lishi bilan uning hosilaga ega bo'lishi orasidagi bog'lanish**. $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda aniqlangan bo'lib, $x_0 \in (a,b)$ nuqtada chekli $f'(x_0)$ hosilaga ega bo'lsin:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Ushbu

$$\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0) \qquad (6.2)$$

miqdor Δx ga bog'liq va $\Delta x \to 0$ da nolga intiladi.

(6.2) tenglikdan topamiz:

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha \Delta x \qquad (6.3)$$

Odatda (6.3) formula funksiya orttirmasining formulasi deb ataladi. Bu formuladan

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}(f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x)=0$$
kelib chiqadi.

Shunday qilib, $f(x)$ funksiya $x_0\in(a,b)$ nuqtada chekli $f'(x_0)$ hosilaga ega bo'lsa, funksiya shu nuqtada uzluksiz bo'ladi.

2–eslatma. Funksiyaning biror nuqtada uzluksizligidan uning shu nuqtada chekli hosilaga ega bo'lishi har doim kelib chiqavermaydi.

Masalan, $y=|x|$ funksiya $x=0$ nuqtada uzluksiz, ammo u shu nuqtuda hosilaga ega emas.

2–§. Teskari funksiyaning hosilasi. Murakkab funksiyaning hosilasi

1⁰. Teskari funksiyaning hosilasi. $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda aniqlangan bo'lib, bu funksiya teskari funksiyaning mavjudligi haqidagi teoremaning (qaralsin 5–bob) barcha shartlarini qanoatlantirsin.

1–teorema. *$f(x)$ funksiya (a,b) da uzluksiz va qat'iy o'suvchi (qat'iy kamayuvchi) bo'lsin. Agar $f(x)$ funksiya $x_0\in(a,b)$ nuqtada $f'(x_0)\neq 0$ hosilaga ega bo'lsa, bu funksiyaga teskari $x=f^{-1}(y)$ funksiya x_0 nuqtada mos bo'lgan y_0 $(y_0=f(x_0))$ nuqtada hosilaga ega va*

$$(f^{-1}(y))'_{y=y_0}=\frac{1}{f'(x_0)}$$

tenglik o'rinli.

◄ $f(x)$ funksiya $x_0\in(a,b)$ nuqtada $f'(x_0)\neq 0$ hosilaga ega bo'lsin. (6.3) formuladan foydalanib topamiz:

$$f(t)-f(x_0)=f'(x_0)(t-x_0)+\alpha(t-x_0)\qquad (t\in(a,b))\tag{6.4}$$

bunda $t\to x_0$ da $\alpha=\alpha(t)\to 0$. Endi $f(x)$ funksiyaning t nuqtadagi qiymatini $f(t)=z$ deb belgilaymiz. Unda $t=f^{-1}(z)$ shuningdek, $x_0=f^{-1}(y_0)$ bo'ladi. Natijada (6.4) tenglik ushbu

$$z-y_0=f'(x_0)(f^{-1}(z)-f^{-1}(y_0))+\alpha(f^{-1}(z))(f^{-1}(z)-f^{-1}(y_0))=$$
$$=(f^{-1}(z)-f^{-1}(y_0))(f'(x_0)+\alpha(f^{-1}(z)))$$

ko'rinishda keladi. Keyingi tenglikdan esa

$$\frac{f^{-1}(z)-f^{-1}(y_0)}{z-y_0}=\frac{1}{f'(x_0)+\alpha(f^{-1}(z))}$$

kelib chiqadi. $z \to y_0$ da limitga o'tib topamiz:

$$\lim_{z\to y_0} \frac{f^{-1}(z) - f^{-1}(y_0)}{z - y_0} = \lim_{z\to y_0} \frac{1}{f'(x_0) + \alpha(f^{-1}(z))} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Demak,

$$\lim_{z\to y_0}\frac{f^{-1}(z)-f^{-1}(y_0)}{z-y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Hosila ta'rifiga ko'ra

$$\lim_{z\to y_0}\frac{f^{-1}(z)-f^{-1}(y_0)}{z-y_0} = (f^{-1}(y))'_{y=y_0}$$

bo'lib, bundan

$$(f^{-1}(y))'_{y=y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

tenglikning o'rinli ekani kelib chiqadi. ►

2^0. Murakkab funksiyaning hosilasi. $u=f(x)$ funksiya (a,b) intervalda, $y=F(u)$ funksiya esa (c,d) intervalda aniqlangan bo'lib, bu funksiyalar yordamida $y=F(f(x))=\varphi(x)$ murakkab funksiya tuzilgan bo'lsin (bunda, albatta, $x\in(a,b)$ da $u=f(x)\in(c,d)$ bo'lishi talab qilinadi).

2-teorema. *Agar $u=f(x)$ funksiya $x_0\in(a,b)$ nuqtada $f'(x_0)$ hosilaga ega bo'lib, $y=F(u)$ funksiya esa x_0 nuqtaga mos u_0 $(u_0=f(x_0))$ nuqtada $F'(u_0)$ hosilaga ega bo'lsa, u holda murakkab funksiya $\varphi(x)=F(f(x))$ ham x_0 nuqtada hosilaga ega va*

$$\varphi'(x_0) = (F(f(x)))'_{x=x_0} = F'(u_0)\cdot f'(x_0) \qquad (6.5)$$

formula o'rinli.

◄ $u=f(x)$ funksiya $x_0\in(a,b)$ nuqtada, $y=F(u)$ funksiya esa mos u_0 $(u_0=f(x_0))$ nuqtada hosilaga ega bo'lsin. (6.3) formuladan foydalanib topamiz:

$$f(t)-f(x_0)=f'(x_0)(t-x_0)+\alpha(t)(t-x_0), \qquad (6.6)$$

$$F(s)-F(u_0)=F'(u_0)(s-u_0)+\beta(s)(s-u_0), \qquad (6.7)$$

bunda

$$\lim_{t\to x_0}\alpha(t)=0,\qquad \lim_{s\to u_0}\beta(s)=0.$$

Murakkab funksiya $\varphi(x)=F(f(x))$ ning x_0 nuqtadagi orttirmasi $\varphi(t)-\varphi(x_0)$ ni yuqoridagi (6.6) va (6.7) munosabatlardan foydalanib, quyidagicha yozish mumkin:

$$\varphi(t)-\varphi(x_0)=F(f(t))-F(f(x_0))=F'(u_0)(f'(x_0)(t-x_0)+$$
$$+\alpha(t)(t-x_0))+\beta(f(t))(f(t)-f(x_0))=F'(u_0)f'(x_0)(t-x_0)+$$
$$+F'(u_0)\alpha(t)(t-x_0)+\beta(f(t))(f(t)-f(x_0)).$$

Endi bu tenglikning har ikki tomonini $t-x_0$ ga bo'lib, so'ngra $t\to x_0$ da limitga o'tamiz:

$$\lim_{t\to x_0}\frac{\varphi(t)-\varphi(x_0)}{t-x_0}=F'(u_0)f'(x_0)+F'(u_0)\lim_{t\to x_0}\alpha(t)+$$
$$+\lim_{t\to x_0}\beta(f(t))\cdot\lim_{t\to x_0}\frac{f(t)-f(x_0)}{t-x_0}.$$

Bundan $t\to x_0$ da $\alpha(t)\to 0,\ \beta(f(t))\to 0$ ekanini e'tiborga olsak, (6.5) formula kelib chiqadi. ►

3-§. Hosila hisoblashning sodda qoidalari. Elementar funksiyalarning hosilalari

Biz ushbu paragrafda ikki funksiya yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi va nisbatining hosilalarini topish qoidalarini keltiramiz. So'ngra elementar funksiyalarning hosilalarini hisoblaymiz.

$f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar (a,b) intervalda aniqlangan bo'lsin.

1^0. Ikki funksiya yig'indisi hamda ayirmasining hosilasi. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning har biri $x\in(a,b)$ nuqtada $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalarga ega bo'lsa, u holda $f(x)\pm g(x)$ funksiya ham x nuqtada hosilaga ega va

$$(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x) \tag{6.8}$$

formula o'rinli.

◄ Haqiqatan ham, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x\in(a,b)$ nuqtada $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalarga ega bo'lsin:

$$f'(x)=\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x},\quad g'(x)=\lim_{t\to x}\frac{g(t)-g(x)}{t-x}.$$

Endi $F(x)=f(x)\pm g(x)$ deb belgilab, topamiz:

$$\frac{F(t)-F(x)}{t-x}=\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\pm\frac{g(t)-g(x)}{t-x}.$$

Bu tenglikda $t\to x$ da limit o'tsak, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$F'(x)=\lim_{t\to x}\frac{F(t)-F(x)}{t-x}=\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\pm\lim_{t\to x}\frac{g(t)-g(x)}{t-x}=$$
$$=f'(x)\pm g'(x).$$

Bu esa (6.8) formulani isbotlaydi. ►

2⁰. Ikki funksiya ko'paytmasining hosilasi. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning har biri $x\in(a,b)$ nuqtada $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalarga ega bo'lsa, u holda $f(x)\cdot g(x)$ funksiya ham x nuqtada hosilaga ega va

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \tag{6.9}$$

formula o'rinli.

◄ $\varphi(x) = f(x)\cdot g(x)$ deb belgilab, $\frac{\varphi(t)-\varphi(x)}{t-x}$ nisbatni quyidagi

$$\frac{\varphi(t)-\varphi(x)}{t-x} = \frac{f(t)-f(x)}{t-x}g(x) + \frac{g(t)-g(x)}{t-x}f(t)$$

ko'rinishda yozib olamiz. Bu tenglikda $t\to x$ da limitga o'tib, topamiz:

$$\varphi'(x) = \lim_{t\to x}\frac{\varphi(t)-\varphi(x)}{t-x} = \left[\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}g(x) + \lim_{t\to x}\frac{g(t)-g(x)}{t-x}f(t)\right] =$$

$$= g(x)\cdot\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x} + \lim_{t\to x}f(t)\lim_{t\to x}\frac{g(t)-g(x)}{t-x} =$$

$$= g(x)f'(x) + f(x)g'(x).$$

Bu esa (6.9) formulani isbotlaydi. ►

3⁰. Ikki funksiya nisbatining hosilasi. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning har biri $x\in(a,b)$ nuqtada $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalarga ega bo'lib, $g(x)\neq 0$ bo'lsa, u holda $\frac{f(x)}{g(x)}$ funksiya ham x nuqtada hosilaga ega va

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \tag{6.10}$$

formula o'rinli.

◄ (6.10) formulani isbolashdan avval funksiya hosilasi ta'rifidan foydalanib $\frac{1}{g(x)}$ $(g(x)\neq 0)$ funksiyaning $x\in(a,b)$ nuqtadagi hosilasini hisoblaymiz:

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \lim_{t\to x}\frac{\frac{1}{g(t)}-\frac{1}{g(x)}}{t-x} = \lim_{t\to x}\frac{\frac{g(x)-g(t)}{g(t)g(x)}}{t-x} =$$

$$= -\frac{1}{g(x)}\cdot\lim_{t\to x}\frac{g(t)-g(x)}{t-x}\cdot\lim_{t\to x}\frac{1}{g(t)} = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}.$$

Demak,

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)} \qquad (g(x)\neq 0) \qquad (6.11)$$

Endi (6.9) va (6.11) formulalardan foydalanib topamiz:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right)' = f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)} + f(x)\cdot\left(-\frac{1}{g(x)}\right)' =$$

$$= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Bu (6.10) formulaning o'rinli ekanini isbotlaydi. ►

1−natija. 1) Yuqorida keltirilgan (6.8) va (6.9) formulalar yordamida qo'shiluvchilar hamda ko'payuvchilar soni ixtiyoriy chekli bo'lgan holda ham tegishli formulalarni isbotlash mumkin.

2) (6.9) formuladan $g(x) = c$, $c = const$ bo'lganda

$$\left(cf(x)\right)' = cf'(x)$$

formula kelib chiqadi. Bundan o'zgarmas sonni hosila ishorasidan tashqariga chiqarish mumkinligi kelib chiqadi.

4⁰. Elementar funksiyalarning hosilalari. Funksiya hosilasi ta'rifidan foydalanib, elementar funksiyalarning hosilalarini topamiz.

1) $y = x^\mu$ $(x > 0)$ **darajali funksiyaning hosilasi.** Bu funksiya uchun quyidagiga egamiz:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^\mu - x^\mu = x^\mu\left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^\mu - 1\right]$$

va

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x^\mu\left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^\mu - 1\right]}{\Delta x} = x^{\mu-1}\frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^\mu - 1}{\frac{\Delta x}{x}}.$$

Ma'lumki, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\mu - 1}{x} = \mu$ (qaralsin 5- bob) unda

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} x^{\mu-1}\cdot\frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^\mu - 1}{\frac{\Delta x}{x}} = x^{\mu-1}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^\mu - 1}{\frac{\Delta x}{x}} = \mu x^{\mu-1}$$

bo'ladi.

Demak, $(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$. Umuman, bu formula $y = x^\mu$ funksiyaning aniqlanish sohasidagi ixtiyoriy x uchun o'rinlidir. Xususan $a = -1$ bo'lganda

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \quad x \neq 0.$$

2) $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$ **ko'rsatkichli funksiyaning hosilasi.** Bu funksiya uchun quyidagiga egamiz:

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)$$

va

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^x(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}.$$

Ma'lumki, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$ (qaralsin 5 - bob). Unda

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} a^x \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a$$

bo'ladi.
Demak,

$$y' = (a^x)' = a^x \ln a.$$

Xususan, $(e^x)' = e^x$.

3) $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1, x > 0)$ **logarifmik funksiyaning hosilasi.** Bu funksiya uchun quyidagiga egamiz:

$$\Delta y = \log_a(x + \Delta x) - \log_a x = \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

va

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x}\log_a\left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right].$$

Ma'lumki $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\log_a(1 + x)}{x} = \log_a e$ (qaralsin 5 - bob). Unda

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x}\log_a\left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right] = \frac{1}{x}\log_a e$$

bo'ladi.
Demak,

$$y' = (\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e.$$

Xususan,

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

4) Trigonometrik funksiyalarning hosilalari. Ushbu $y=\sin x$ funksiya uchun quyidagiga egamiz:

$$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

va

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

Keyingi tenglikda $\Delta x \to 0$ da limitga o'tib topamiz:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x.$$

Demak,

$$y' = (\sin x)' = \cos x$$

Shunga o'hshash (6 bobning 1 § ga qarang) $(\cos x)' = -\sin x$ formula ham isbotlanadi.

Endi $y = tgx$ funksiyaning hosilasini $tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$ nisbatning hosilasi formulasidan foydalanib topamiz:

$$y = (tgx)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Demak,

$$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Huddi shunga o'hshash quyidagi formulalar ham isbotlanadi:

$$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad (\sec x)' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}, \quad (\operatorname{cosec} x)' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

5) Teskari trigonometrik funksiyalarning hosilalari. Teskari funksiyaning hosilasini topish qoidasidan foydalanib, teskari trigonometrik funksiyalarning hosilalarini hisoblaymiz. Ushbu $y = \arcsin x$ funksiyani olaylik. Bu funksiya $x = \sin y$ funksiyaga teskari bo'lib, uni $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ intervalda qarasak,

$$y' = (\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

kelib chiqadi. Demak,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (-1<x<1)$$

Xuddi shunga o'xshash quyidagi formulalar ham isbotlanadi:

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (-1<x<1)$$

$$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}, \qquad (arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

6). Giperbolik funksiyalarning hosilalari. Endi giperbolik funksiyalarning hosilalarini hisoblaymiz. Bunda hosila hisoblashdagi sodda qoidalardan va ko'rsatkichli funksiya hosilasi formulasidan foydalanamiz. Sodda hisoblashlar yordamida $y = shx$ uchun topamiz:

$$y' = (shx)' = \left[\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\right]' = \frac{1}{2}\left(e^x - \frac{1}{e^x}\right)' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = chx$$

Shunga o'xshash quyidagi formulalar ham isbotlanadi:

$$(chx)' = shx, \qquad (thx)' = \frac{1}{ch^2 x}, \qquad (cthx)' = -\frac{1}{sh^2 x} \quad (x \neq 0)$$

4^0. Hosilalar jadvali. Biz ushbu bandda elementar funksiyalar hosilalari uchun topilgan formulalarni jamlab, ularni jadval sifatida keltiramiz:

1). $(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1} \quad (x>0)$;

2). $(a^x)' = a^x \ln a \quad (a>0, a \neq 1)$

3). $(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e \quad (x>0, a>0, a \neq 1)$

Xususan,

$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (x>0)$;

4). $(\sin x)' = \cos x$

5). $(\cos x)' = -\sin x$

6). $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k = 0, \pm 1, \ldots)$

7). $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad (x \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \ldots)$

8). $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1<x<1)$

9). $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1<x<1)$

10). $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$

11). $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$

12). $(shx)' = chx$

13). $(chx)' = shx$

14). $(thx)' = \frac{1}{ch^2 x}$

15). $(cthx)' = -\frac{1}{sh^2 x}$

6.5–misol. Agar $a>0, a \neq 1, x \neq 0$ bo'lsa,

$$(\log_a |x|)' = \frac{1}{x \ln a}$$

bo'lishi isbotlansin.

◄ Aytaylik, $x>0$ bo'lsin. Unda $|x| = x$ bo'lib,

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

bo'ladi.

Aytaylik, $x<0$ bo'lsin. Unda $|x| = -x$ bo'lib,

$$\log_a |x| = \log_a (-x)$$

bo'ladi. Murakkab funksiyaning hosilasini topish qoidasiga ko'ra

$$(\log_a (-x))' = \frac{1}{(-x)\ln a} \cdot (-1) = \frac{1}{x \ln a}$$

bo'ladi. ►

6.6–misol. Agar $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar hosilaga ega bo'lib, $u(x)>0$ bo'lsa,

$$y = (u(x))^{v(x)}$$

funksiyaning hosilasi topilsin.

◄ Ravshanki,

$$\ln y = v(x) \ln u(x)$$

Murakkab funksiyaning hosilasi va ko'paytmaning hosilasi uchun tegishli formulalardan foydalanib topamiz:

$$\frac{1}{y} y' = v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{1}{u(x)} u'(x).$$

$$y' = y(v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)}) = \qquad ► \qquad (6.12)$$

$$= (u(x))^{v(x)} (v'(x) \ln u(x) + \frac{v(x)}{u(x)} u'(x))$$

6.7-misol. Ushbu

$$f(x) = x^x, \varphi(x) = x^{x^x} \qquad (x>0);$$

funksiyalarning hosilalari topilsin.

◄ (6.12) formulaga ko'ra

$$f'(x) = (x^x)' = x^x(\ln x + 1)$$

bo'ladi. Ravshanki,

$$\varphi(x) = x^{x^x} = x^{f(x)}$$

yana (6.12) formulaga ko'ra

$$\varphi'(x) = (x^{f(x)})' = \varphi(x)\ln x \cdot f'(x) + f(x)x^{f(x)-1}$$

bo'lib,

$$\varphi'(x) = x^{x^x} \ln x \cdot x^x(\ln x + 1) + x^x \cdot x^{x^x - 1} =$$

$$= x^{x^x + x - 1}(x \ln x(\ln x + 1) + 1)$$

bo'ladi.►

6.8-misol. Ushbu

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & \text{agar } x \neq 0 \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x = 0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

funksiyaning hosilasi topilsin.

◄ Aytaylik, $x \neq 0$ bo'lsin. Unda

$$f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} + x^2\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

bo'ladi.

Aytaylik, $x = 0$ bo'lsin. Bu holda hosila tarifidan foydalanib topamiz:

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^2 \sin \dfrac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \sin \frac{1}{\Delta x} = 0.$$

Demak,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}, & \text{agar } x \neq 0 \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x = 0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

bo'ladi. ►

4-§. Funksiyaning differensiali

1⁰. Funksiyaning differensiallanuvchi bo'lishi tushunchasi. $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda aniqlangan, $x_0 \in (a,b)$, $x_0+\Delta x \in (a,b)$ bo'lsin. U holda $f(x)$ funksiya ham x_0 nuqtada $\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ orttirmaga ega bo'ladi.

3–ta'rif. Agar $f(x)$ funksiyaning $x_0 \in (a,b)$ nuqtadagi ortirmasi Δy ni

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha\Delta x \tag{6.13}$$

ko'rinishda ifodalash mumkin bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi deb ataladi, bunda $A-\Delta x$ bog'liq bo'lmagan o'zgarmas, α esa Δx ga bog'liq va $\Delta x \to 0$ da $\alpha = \alpha(\Delta x) \to 0$

Agar $\Delta x \to 0$ da

$$\alpha \cdot \Delta x = \alpha(\Delta x)\Delta x = o(\Delta x)$$

ekanini e'tiborga olsak, u holda yuqoridagi (6.13) ifoda ushbu

$$\Delta y = A\Delta x + 0(\Delta x)$$

ko'rinishni oladi. Funksiya orttirmasi uchun (6.13) formulada $A\cdot\Delta x$ ifoda orttirmaning bosh qismi deb yuritiladi.

3–teorema. $f(x)$ funksiyaning $x \in (a,b)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lishi uchun uning shu nuqtada chekli hosilaga ega bo'lishi zarur va etarli.

◄**Zarurligi.** $f(x)$ funksiya $x \in (a,b)$ nuqtada differensial-lanuvchi bo'lsin: Unda

$$\Delta y = A\cdot\Delta x + 0(\Delta x),\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{0(\Delta x)}{\Delta x}$$

bo'lib,

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(A + \frac{0(\Delta x)}{\Delta x}\right) = A$$

bo'ladi. Demak,

$$f'(x) = A$$

Yetarliligi. $f(x)$ funksiya $x \in (a,b)$ nuqtada chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsin:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Agar

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) = \alpha$$

deb olsak, undan

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x$$

ekanini topamiz. Bu tenglikdagi α miqdor Δx ga bog'liq va $\Delta x \to 0$ da $\alpha \to 0$. Demak, $f(x)$ funksiya $x \in (a,b)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lib, $A = f'(x)$ bo'ladi ►

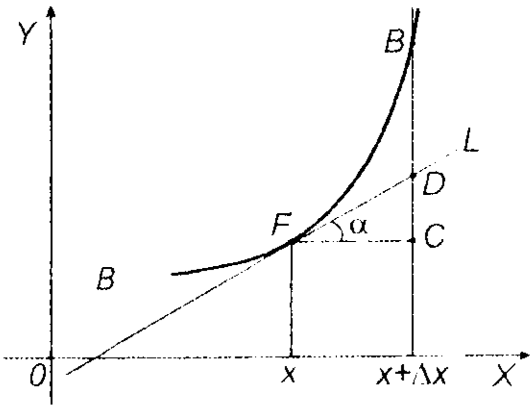
Isbot etilgan teorema $f(x)$ funksianing $x \in (a,b)$ nuqtada chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo'lishi bilan uning shu nuqtada differensiallanuvchi bo'lishi ekvivalent ekanini ko'rsatadi.

2⁰. Funksiya differensiali va uning geometrik ma'nosi. $f(x)$ funksiya $x \in (a,b)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin:

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$$

bunda $A = f'(x)$ bo'ladi. Bu tenglikda funksiya orttirmasi Δy ikki qo'shiluvchi: argument orttirmasi Δx ga nisbatan chiziqli $A \cdot \Delta x$ hamda Δx ga nisbatan yuqori tartibli $(\Delta x \to 0)$ cheksiz kichik miqdorlar yig'indisidan iborat ekani ko'rinadi.

4-ta'rif. $f(x)$ funksiya orttirmasi Δy ning Δx ga nisbatan chiziqli bosh qismi $A \cdot \Delta x = f'(x)\Delta x$ berilgan $f(x)$ funksiyaning x nuqtadagi differensiali deb ataladi. Funksiyaning differensiali dy yoki $df(x)$ kabi belgilanadi: $dy = df(x) = A \cdot \Delta x = f'(x)\Delta x$. Endi $x \in (a,b)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lgan $f(x)$ funksiyaning grafigi 31 chizmada ko'rsatilgan chiziqni ifodalasin deylik.



31 chizma.

Bu chiziqning $(x, f(x))$, $(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$ nuqtalarini mos ravishda E va B bilan belgilaylik. Unda $EC = \Delta x$, $BC = \Delta y$ bo'ladi. $f(x)$ funksiya $x \in (a,b)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lgani uchun u x nuqtada chekli $f'(x)$ hosilaga ega. Demak, $f(x)$ funksiya grafigiga uning $E(x, f(x))$ nuqtasida o'tkazilgan ET urinma mavjud va bu urinmaning burchak koeffitsienti $tg\alpha = f'(x)$. Shu ET urinmaning BC bilan kesishgan nuqtasini D bilan belgilaylik. Ravshanki, ΔEDC dan $\frac{DC}{EC} = tg\alpha$ va undan $DC = tg\alpha \cdot EC = f'(x) \cdot \Delta x$ ekani kelib chiqadi.

Demak, $f(x)$ funksiyaning x nuqtadagi differensiali $dy = f'(x)\Delta x$ funksiya grafigiga $E(x, f(x))$ nuqtada o'tkazilgan urinma orttirmasi DC ni ($DC = dy$) ifodalaydi. Xususan, $f(x) = x$ bo'lganda bu funksiyaning differensiali

$$dy = f'(x)\Delta x = \Delta x$$

bo'lib,

$$dy = dx = \Delta x$$

bo'ladi. Bu hol $f(x)$ funksiyaning x nuqtadagi differensialini quyidagi

$$dy = f'(x)dx = y'dx \qquad (6.14)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin ekanini anglatadi.

Endi funksiya differensialining (6.14) ifodasidan foydalanib, elementar funksiyalarning differensiallari jadvalini keltiramiz:

1) $d(x^\mu) = \mu x^{\mu-1}dx \quad (x > 0)$;

2) $d(a^x) = a^x \ln a\, dx \quad (a > 0, a \neq 1)$

3) $d(\log_a x) = \frac{1}{x}\log_a e\, dx$

4) $d(\sin x) = \cos x\, dx$

5) $d(\cos x) = -\sin x\, dx$

6) $d(tgx) = \frac{1}{\cos^2 x}dx \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k = 0, \pm 1, \dots\right)$

7) $d(ctgx) = -\frac{1}{\sin^2 x}dx \quad (x \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \dots)$

8) $d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \quad (-1 < x < 1)$

9) $d(\arccos x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \quad (-1<x<1)$

10) $d(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{1}{1+x^2}dx$

11) $d(\operatorname{arcctg} x) = -\dfrac{1}{1+x^2}dx$

12) $d(\operatorname{sh} x) = \operatorname{ch} x\,dx$

13) $d(\operatorname{ch} x) = \operatorname{sh} x\,dx$

14) $d(\operatorname{th} x) = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}dx$

15) $d(\operatorname{cth} x) = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}dx$

3^0. Differensiallashning sodda qoidalari. Murakkab funksiyaning differensiali. $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar (a,b) intervalda aniqlangan bo'lib, $x\in(a,b)$ nuqtada ularning differensiallari $df(x), dg(x)$ mavjud bo'lsin. U holda $f(x)+g(x), f(x)\cdot g(x)$ va $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x)\neq 0)$ funksiyalarning ham shu $x\in(a,b)$ nuqtada differensiallari mavjud va ular uchun quyidagi

$$d(f(x)+g(x)) = df(x)+dg(x), \qquad d(f(x)\cdot g(x)) = f(x)dg(x)+g(x)df(x)$$

$$d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)df(x)-f(x)dg(x)}{g^2(x)} \qquad (g(x)\neq 0)$$

formula o'rinli.

Bu tasdiqlarning isboti funksiya differensialining (6.14) ko'rinishda ifodalanishidan va funksiyaning hosilalarini topish qoidalaridan kelib chiqadi.

Faraz qilaylik, $u=f(x)$ funksiya (a,b) intervalda, $y=F(u)$ funksiya esa (c,d) intervalda aniqlangan bo'lib, bu funksiyalar yordamida $y=F(f(x))=\varphi(x)$ murakkab funksiya tuzilgan bo'lsin.

Murakkab funksiyaning hosilasi uchun topilgan (6.5) formuladan foydalanib, shu murakkab funksiyaning differensialini topamiz:

$$d\varphi(x) = d(F(f(x))) = (F(f(x)))'dx = F'(u)f'(x)dx = F'(u)du$$

Shuni ta'kidlash lozimki, bu holda du miqdor argument u ning erkli orttirmasi emas, u x o'zgaruvchining funksiyasidir.

4^0. Funksiya differensiali va taqribiy formulalar. Nazariy va amaliy masalalarni yechishda tegishli funksiyalarning nuqtadagi qiymatlarini hisoblash zarurati tug'iladi. Ko'pincha, bunday funksiyalar murakkab bo'lib, ularning nuqtadagi qiymatlarini topish ancha qiyin bo'ladi. Bu hol funksiyaning nuqtadagi qiymatini taqribiy hisoblash (ularni hisoblash uchun taqribiy formulalar topish) masalasini yuzaga keltiradi. Funksiyaning differensiali esa taqribiy formulalarni topish imkonini beradi.

$f(x)$ funksiya (a,b) intervalda aniqlangan bo'lib, $x_0 \in (a,b)$ nuqtada chekli $f'(x_0) \neq 0$ hosilaga ega bo'lsin. Bu holda funksiya orttirmasini ushbu

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu formulani hamda funksiya differensiali uchun $dy = f'(x_0)\Delta x$ formulani e'tiborga olib topamiz:

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{dy} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)}{f'(x_0)\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left[1 + \frac{1}{f'(x_0)} \cdot \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right] = 1$$

Shunday qilib, $\Delta y \sim dy$. Natijada quyidagi

$$\Delta y \approx dy$$

ya'ni

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x \qquad (6.15)$$

taqribiy tenglikka kelamiz. Ravshanki, $\Delta y - dy = o(\Delta x)$. Shuning uchun $\Delta x \to 0$ da (6.15) taqribiy tenglikning nisbiy xatosi nolga intiladi, ya'ni $\frac{\Delta y - dy}{\Delta x} \to 0$.

(6.15) formula $x_0 \in (a,b)$ nuqtada differensiallanuvchi $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi orttirmasi Δy ni uning shu nuqtadagi differensiali dy bilan almashtirish mumkinligi ko'rsatadi. Bu almashtirishning qulayligi, funksiya orttirmasi Δy argument orttirmasi Δx ning, umuman aytganda, murakkab funksiyasi bo'lgan holda, funksiya differensiali dy esa Δx ning chiziqli funksiyasi bo'lishidadir. Agar $\Delta x = x - x_0$ ekanini e'tiborga olsak, unda $x_0 + \Delta x = x$ bo'lib, (6.15) formula quyidagi

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad (6.16)$$

ko'rinishga keladi. Bunda $x_0 \in (a,b)$ nuqta $x \in (a,b)$ nuqtadan katta farq qilmaydigan, ammo $f(x_0)$ qulayroq hisoblanadigan nuqtadir.

Masalan, $f(x) = \sin x$ bo'lib, $\sin 29^0$ ni hisoblash talab etilgan bo'lsin. Bu holda $x_0 = 30^0$ deyish qulay. (6.16) formulaga ko'ra

$$\sin 29^0 \approx \sin 30^0 + \cos 30^0 (29^0 - 30^0) \cdot \frac{2\pi}{360^0} = 0.5 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2\pi}{360^0} \approx 0.4848$$

Bunda radian o'lchovida yozish zarur, chunki boshqa hadlar radianlarda berilgan. Demak, $\sin 29° \approx 0{,}4848$ (10^{-4} aniqlikda).

Yuqoridagi (6.16) formula $x_0 = 0$ bo'lganda ushbu

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x$$

ko'rinishni oladi. Bu formula $(1+x)^{\mu}$, $\sqrt{1+x}$, e^x, $\ln(1+x)$, $\sin x$, tgx funksiyalar uchun quyidagicha bo'ladi:

$$(1+x)^{\mu} \approx 1 + \mu x$$

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$$

$$e^x \approx 1 + x$$

$$\ln(1+x) \approx x$$

$$\sin x \approx x$$

$$tgx \approx x$$

5-§. Yuqori tartibli hosila va differensialar

1⁰. Funksiyalarning yuqori tartibli hosilalari. $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda aniqlangan bo'lib, uning har bir x nuqtasida $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsin. Ravshanki, $f'(x)$ hosila x o'zgaruvchining funksiyasi bo'ladi. Bu $f'(x)$ hosila ham o'z navbatida biror $x_0 \in (a,b)$ da hosilaga ega bo'lishi mumkin.

5-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya (a,b) intervalning har bir $x \in (a,b)$ nuqtasida $f'(x)$ hosilaga ega bo'lib, bu $f'(x)$ funksiya $x_0 \in (a,b)$ nuqtada hosilaga ega bo'lsa, u $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi ikkinchi hosilasi deb ataladi. Funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi y''_{x_0}, $f''(x_0)$, $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=x_0}$ belgilarning biri orqali yoziladi.

$f(x)$ funksiyaning uchinchi, to'rtinchi va h.k. tartibdagi hosilalari xuddi shunga o'xshash ta'riflanadi. Umuman, $f(x)$ funksiya (a,b) intervalning har bir $x \in (a,b)$ nuqtasida $(n-1)$-tartibli $f^{(n-1)}(x)$ hosilaga ega bo'lsin. Bu $f^{(n-1)}(x)$ funksiyaning $x_0 \in (a,b)$ nuqtadagi hosilasi (agar u mavjud bo'lsa) $f(x)$ funksiyaning x_0 *nuqtadagi n tartibli hosilasi* deb ataladi va $y^{(n)}_{x_0}$, $f^{(n)}(x_0)$, $\left.\frac{d^ny}{dx^n}\right|_{x=x_0}$ larning biri orqali belgilanadi. Odatda $f(x)$ funksiyaning $f''(x)$, $f'''(x)$, ... hosilalari uning yuqori tartibli hosilalari deyiladi.

Shunday qilib, $f(x)$ funksiyaning $x=x_0$ da n-tartibli hosilasining mavjudligi bu funksiyaning shu nuqta atrofida 1-, 2-, ..., $(n-1)$-tartibli hosilalari mavjudligini taqozo etadi. Ammo bu hosilalarning mavjudligidan n-tartibli hosila mavjudligi, umuman aytganda, kelib chiqavermaydi. Masalan, $y=\frac{x|x|}{2}$ funksiyaning hosilasi $y'=|x|$ bo'lib, bu funksiya $x=0$ da hosilaga ega emas, ya'ni berilgan funksiyaning $x=0$ da birinchi tartibli hosilasi mavjud, ikkinchi tartibli hosilasi esa mavjud emas.

Misollar qaraymiz.

1) $y=x^\mu$ bo'lsin ($x>0$ va $\mu\in R$). Bu funksiyaning hosilalarini ketma-ket hisoblaymiz:

$$y'=\mu x^{\mu-1},$$

$$y''=(y')'=(\mu x^{\mu-1})'=\mu(\mu-1)x^{\mu-2}$$

$$y'''=(y'')'=(\mu(\mu-1)x^{\mu-2})'=\mu(\mu-1)(\mu-2)x^{\mu-3}$$

. . . .

Berilgan funksiyaning n-tartibli hosilasi uchun ushbu

$$(x^\mu)^{(n)}=\mu(\mu-1)(\mu-2)...(\mu-n+1)x^{\mu-n} \qquad (6.17)$$

formulaning o'rinli bo'lishini matematik induksiya usuli yordamida ko'rsatish qiyin emas. Ma'lumki, $n=1$ da

$$y'=\mu x^{\mu-1}.$$

bo'ladi. Endi (6.17) formula $n=k$ da o'rinli, ya'ni

$$y^{(k)}=\mu(\mu-1)...(\mu-n+1)x^{\mu-k}$$

bo'lsin deb, uning $n=k+1$ da o'rinli bo'lishini ko'rsatamiz. Ta'rifga ko'ra $y^{(k+1)}=(y^k)'$. Demak

$$y^{(k+1)}=(y^k)'=(\mu(\mu-1)(\mu-2)...(\mu-k+1)x^{\mu-k})'=$$

$$=\mu(\mu-1)(\mu-2)...(\mu-k+1)(\mu-k)x^{\mu-k-1}$$

Bu esa (6.17) formulaning $n=k+1$ da ham o'rinli bo'lishini bildiradi. Demak, (6.17) formula ixtiyoriy $n\in N$ uchun o'rinli.

(6.17) da μ ixtiyoriy haqiqiy son. Xususan, $\mu=-1$ bo'lsin. Unda $y=\frac{1}{x}$ funksiyaning n-tartibli hosilasi

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)}=(-1)(-2)...(-n)x^{-1-n}=\frac{(-1)^n\cdot n!}{x^{n+1}} \qquad (6.18)$$

bo'ladi.

2) $y=\ln x$ $(x>0)$ funksiyaning n-tartibli hosilasini topamiz. Bu funksiyaning hosilasi $y'=\frac{1}{x}$ bo'lishidan hamda (6.18) formuladan

$$y^{(n)} = (y')^{(n-1)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$
formula kelib chiqadi. Demak,

$$(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} \qquad (x>0)$$

3) $y = a^x$ $(a>0, a\neq 1)$ bo'lsin. Bu funksiyaning hosilalarini ketma-ket hisoblaymiz:

$$y' = a^x \ln a$$
$$y'' = (a^x \ln a)' = a^x \ln^2 a,$$
$$y''' = (a^x \ln^2 a)' = a^x \ln^3 a$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Bu munosabatlarga qarab $y = a^x$ funksiyaning n tartibli hosilasi uchun ushbu

$$y^{(n)} = a^x \ln^n a$$
formulani yozamiz. Uning to'g'riligi yana matematik induksiya usuli yordamida osongina isbotlanadi. Demak,

$$(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a$$

Xususan, $\forall n \in N$ uchun $(e^x)^{(n)} = e^x$.

4). $y = \sin x$ bo'lsin. Ma'lumki, bu funksiya uchun $y' = \cos x$. Biz uni quyidagi

$$y' = (\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$
ko'rinishda yozib olamiz. So'ngra $y = \sin x$ funksiyaning keyingi tartibli hosilalarini hisoblaymiz:

$$y'' = (\cos x)' = -\sin x = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right),$$
$$y''' = (-\sin x)' = -\cos x = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right),$$
$$y^{(IV)} = (-\cos x)' = \sin x = \sin\left(x + 4\frac{\pi}{2}\right),$$

Bu ifodalardan esa $y = \sin x$ funksiyaning n tartibli hosilasi uchun

$$y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$
formula kelib chiqadi. Uning to'g'riligi yana matematik induksiya usuli bilan isbotlanadi. Demak,

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

Xuddi shunga o'xshash

$$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right).$$

2⁰. Sodda qoidalar. $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar (a,b) intervalda aniqlangan bo'lib, ular $x\in(a,b)$ nuqtada n tartibli $f^{(n)}(x)$, $g^{(n)}(x)$ hosilalarga ega bo'lsin. Buni quyidagicha tushunish lozim: $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar x nuqtani o'z ichiga olgan $(\alpha,\beta)\subset(a,b)$ intervalda $f', f'', \ldots, f^{(n-1)}$ hamda $g', g'', \ldots, g^{(n-1)}$ hosilalarga ega bo'lib, x nuqtada esa $f^{(n)}, g^{(n)}$ hosilaga ega. U holda

1) $(cf(x))^{(n)}=cf^{(n)}(x),\ c-const;$

2) $(f(x)+g(x))^{(n)}=f^{(n)}(x)+g^{(n)}(x);$

3) $$(f(x)g(x))^{(n)}=f^{(n)}(x)g(x)+C_n^1f^{(n-1)}(x)g'(x)+C_n^2f^{(n-2)}(x)g''(x)+\ldots+$$
$$+C_n^kf^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)+\ldots+f(x)g^{(n)}(x)$$

bo'ladi, bunda

$$C_n^k=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}.$$

6.9–misol. Ushbu

$$f(x)=\frac{2x+3}{x^2-5x+6}\qquad x\neq2,\ x\neq3$$

funksiyaning n-tartibli hosilasi topilsin.

◀ berilgan funksiyani quyidagicha

$$f(x)=-\frac{7}{x-2}+\frac{9}{x-3}$$

yozib olamiz. So'ng

$$\left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$$

formuladan foydalanib topamiz:

$$\left(\frac{2x+3}{x^2-5x+6}\right)^{(n)}=\frac{7(-1)^{n+1}n!}{(x-2)^{n+1}}+\frac{9(-1)^n n!}{(x-3)^{n+1}}.\ ▶$$

3⁰. Murakkab funksiyaning yuqori tartibli hosilalari. $u=f(x)$ funksiya (a,b) intervalda, $y=F(u)$ funksiya esa (c,d) intervalda aniqlangan bo'lib, ular yordamida $y=F(f(x))$ murakkab funksiya tuzilgan bo'lsin. $u=f(x)$ funksiya $x\in(a,b)$ nuqtada ikkinchi tartibli $f''(x)$, $y=F(u)$ funksiya esa mos $u(u=f(x))$ nuqtada ikkinchi tartibli $F''(u)$ hosilaga ega bo'lsin. Ikkinchi tartibli hosila ta'rifiga ko'ra

$$y''=(F(f(x)))''=[(F(f(x)))']'$$

bo'ladi. Murakkab funksiyaning hosilasini hisoblash formulasi (6.5) dan hamda ko'paytmaning hosilasini hisoblash formulasi (6.9) dan foydalanib topamiz:

$$[(F(f(x)))']' = [F'(f(x))\cdot f'(x)]' = [F'(f(x))]'\cdot f'(x) +$$
$$+F'(f(x))\cdot(f'(x))' = F''(f(x))\cdot f'(x)\cdot f'(x) + F'(f(x))\cdot f''(x) =$$
$$= F''(f(x))f'^2(x) + F'(f(x))\cdot f''(x)$$

Demak,

$$y'' = [F(f(x))]'' = F''(f(x))f'^2(x) + F'(f(x))\cdot f''(x)$$

Xuddi shunga o'xshash $u = f(x)$ funksiya $x \in (a,b)$ nuqtada $f'''(x)$ va $y = F(u)$ funksiya esa mos $u (u = f(x))$ nuqtada $F'''(u)$ hosilaga ega bo'lsa, murakkab $y = F(f(x))$ funksiya ham $x \in (a,b)$ nuqtada 3 tartibli hosilaga ega bo'ladi. Bu hosila quyidagicha hisoblanadi:

$$y''' = [F(f(x))]''' = [(F(f(x)))'']' = [F''(f(x))f'^2(x) + F'(f(x))\cdot f''(x)]' =$$
$$= F'''(f(x))\cdot f'^3(x) + F''(f(x))\cdot 2f'(x)\cdot f''(x) + F''(f(x))\cdot f'(x)\cdot f''(x) +$$
$$+F'(f(x))\cdot f''' = F'''(f(x))\cdot (x) f'^3(x) + 3F''(f(x))\cdot f'(x)\cdot f''(x) + F'(f(x))\cdot f'''(x).$$

Shu yo'l bilan murakkab funksiya $y = F(f(x))$ ning istalgan tartibli hosilalari ham hisoblanishi mumkin.

4^0. Funksiyaning yuqori tartibli differensiallari

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $x \in (a,b)$ nuqtada ikkinchi tartibli $f''(x)$ hosilaga ega bo'lsin.

6-ta'rif. $f(x)$ funksiya differensiali dy ning $x \in (a,b)$ nuqtadagi differensiali funksiyaning *ikkinchi tartibli differensiali* deb ataladi. Funksiyaning ikkinchi tartibli differensiali $d^2 f(x)$ yoki $d^2 y$ kabi belgilanadi;

$$d^2 y = d(dy) \quad \text{yoki} \quad d^2 f(x) = d(df(x)).$$

Endi differensiallash qoidasidan foydalanib topamiz:

$$d^2 y = d(dy) = d(y'dx) = dx d(y') = dx \cdot y''dx = y''(dx)^2$$

Demak,

$$d^2 y = y'' dx^2 \qquad (6.19)$$

bunda

$$dx^2 = dxdx = (dx)^2$$

Xuddi yuqoridagiga o'xshash, $x \in (a,b)$ nuqtada funksiyaning 3-tartibli differensiali ta'riflanadi:

$$d^3 y = d(d^2 y) = d(y''dx^2) = dx^2 d(y'') = y'''dx^3$$

bunda $dx^3 = (dx)^3$. Umuman funksiyaning $(n-1)$-tartibli differensiali $d^{(n-1)}y$ dan olingan differensial $f(x)$ funksiyaning $x \in (a,b)$ nuqtadagi n tartibli differensiali deb ataladi va u $d^n y$ yoki $d^n f(x)$ kabi belgilanadi:

$$d^n y = d(d^{n-1} y) \quad \text{yoki} \quad d^n f(x) = d(d^{n-1} f(x))$$

Bu holda funksiyaning n tartibli differensiali uning n tartibli hosilasi orqali quyidagi

$$d^n y = y^{(n)} dx^n$$

ko'rinishda ifodalanadi. Uning to'g'riligini matematik induksiya usuli yordamida isbotlash mumkin.

$f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar (a,b) intervalda aniqlangan bo'lib, ular $x \in (a,b)$ nuqtada n tartibli differensialga ega bo'lsin. U holda ushbu

1) $d^n(c \cdot f(x)) = c\, d^n f(x),\ c = const$

2) $d^n(f(x) \pm g(x)) = d^n f(x) \pm d^n g(x)$.

3) $d^n(f(x)g(x)) = d^n f(x) g(x) + C_n^1 d^{n-1} f(x) \cdot dg(x) + \ldots + f(x) d^n g(x)$

formulalar o'rinli bo'ladi.

Endi murakkab funksiya $y = F(f(x))$ ning differensialini hisoblaymiz. Ma'lumki, $y = F(f(x)) = \varphi(x)$ funksiyaning differensiali

$$dy = \varphi'(x)dx = (F(x))'dx$$

$$(F(f(x)))' = F'(f(x)) \cdot f'(x)$$

bo'lib, u

$$dy = d(F(x)) = F'(f(x)) \cdot f'(x)dx = F'(f(x))df(x) \qquad (6.20)$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Demak, funksiya murakkab bo'lgan holda ham funksiya differensiali funksiya hosilasi $F'(f(x))$ bilan (bu holda argument $f(x)$ bo'ladi) argument $f(x)$ ning differensiali $df(x)$ ko'paytmasidan iborat ekanligini ko'ramiz. Odatda bu xossani differensial formasining invariantligi deyiladi. Bunda (6.14) formuladagi dx argument x ning ixtiyoriy orttirmasi Δx ni $(\Delta x = dx)$ bildiradi, (6.20) formuladagi $df(x)$ esa x o'zgaruvchiga bog'liq bo'ladi.

Endi $y = F(f(x))$ murakkab funksiyaning ikkinchi tartibli differensialini hisoblaymiz. Ta'rifga ko'ra

$$d^2 y = d^2(F(f(x))) = d(dF(f(x)))$$

bo'ladi. Differensiallash qoidasidan foydalanib topamiz:

$$d^2 y = d(F'(f(x)) \cdot df(x)) = d(F'(f(x)))df(x) + F'(f(x)) \cdot d(f(x))$$

$$= F''(f(x))df^2(x) + F'(f(x)) \cdot d^2 f(x),$$

bunda $df^2(x) = df(x) \cdot df(x) = (df(x))^2$.

Demak,

$$d^2 y = d^2(F(f(x)) = F''(f(x))df^2(x) + F'(f(x)) \cdot d^2 f(x) \qquad (6.21)$$

Bu (6.21) formula bilan (6.19) formulani taqqoslab, ikkinchi tartibli differensiallar differensial formasining invariantligi xossasiga ega emasligini ko'ramiz.

$y = F(f(x))$ funksiyaning uchinchi va hokazo tartibli differensiallari yuqoridagidek birin - ketin hisoblanadi.

6-§. Differensial hisobning asosiy teoremalari

Ushbu paragrafda differensial hisobning asosiy teoremalarini keltiramiz. Bu teoremalar kelgusida, ayniqsa funksiyalarni tekshirishda muhim rol o'ynaydi.

1-teorema (Ferma teoremasi). *$f(x)$ funksiya biror $X \subset R$ oraliqda aniqlangan va bu oraliqning ichki c nuqtasida o'zining eng katta (eng kichik) qiymatiga erishsin. Agar bu nuqtada funksiya chekli $f'(c)$ hosilaga ega bo'lsa, u holda*

$$f'(c) = 0$$

bo'ladi.

◀ $f(x)$ funksiya c nuqtada eng katta qiymatga ega, ya'ni $\forall x \in X$ da $f(x) \le f(c)$ tengsizlik o'rinli, shu bilan birga bu c nuqtada chekli $f'(c)$ hosila mavjud bo'lsin. Ravshanki

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c+0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c-0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Ayni paytda

$$\lim_{x \to c+0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \le 0, \quad \lim_{x \to c-0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \ge 0$$

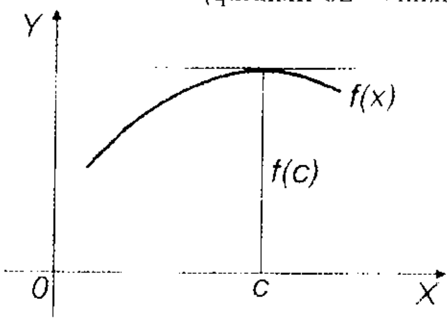
bo'ladi.

Yuqoridagi munosabatlardan

$$f'(c) = 0$$

ekani kelib chiqadi. ▶

Shunga o'xshash, funksiya c nuqtada eng kichik qiymatga ega va bu nuqtada chekli $f'(c)$ hosilaga ega bo'lganda ham $f'(c) = 0$ bo'lishi ko'rsatiladi. ▶ (qaralsin 32 - chizma)



32 - chizma.

5–teorema (Roll teoremasi). *$f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda uzluksiz, $f(a)=f(b)$ bo'lsin. Agar bu funksiya (a,b) intervalda chekli hosilaga ega bo'lsa, u holda shunday c $(a<c<b)$ nuqta topiladiki,*

$$f'(c)=0$$

bo'ladi.

◄ $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda uzluksiz. Demak, Veyershtrassning birinchi teoremasiga (5–bob, 7 §) ko'ra bu oraliqda funksiya o'zining eng katta qiymati M va eng kichik qiymati m ga erishadi.

1) $m=M$ bo'lsin. Bunda $f(x)=const$, $x\in(a,b)$ bo'ladi. Ravshanki, bu holda $\forall c\in(a,b)$ uchun $f'(c)=0$ bo'ladi.
2) $m<M$ bo'lsin. Bu holda $f(a)=f(b)$ bo'lgani uchun $f(x)$ funksiya o'zining eng katta qiymati M, eng kichik qiymati m larning kamida bittasiga $[a,b]$ segmentning ichki c $(a<c<b)$ nuqtasida erishadi. Ferma teoremasiga asosan bu nuqtada

$$f'(c)=0$$

bo'ladi. ►

6–teorema. (Lagranj teoremasi). *$f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda uzluksiz bo'lsin. Agar bu funksiya (a,b) intervalda chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsa, u holda shunday c $(a<c<b)$ nuqta topiladiki, bu nuqtada*

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad (6.22)$$

bo'ladi.

◄ $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda uzluksiz bo'lib, uning ichki nuqtalarida chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsin. Bu funksiya yordamida quyidagi

$$F(x)=f(x)-f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

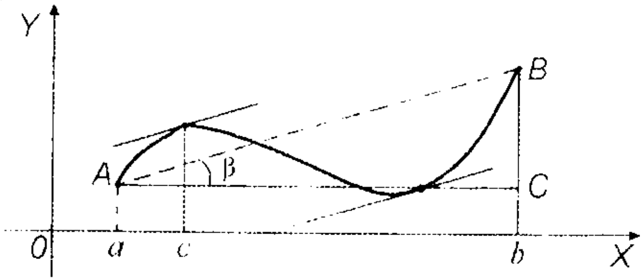
funksiyani tuzaylik. Ravshanki, bu funksiya $[a,b]$ segmentda uzluksiz bo'lib, (a,b) intervalda esa

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

hosilaga ega. $F(x)$ funksiyaning $x=a$ va $x=b$ nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz: $F(a)=F(b)=0$. Demak, $F(x)$ funksiya Roll teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi. U holda a va b orasida shunday c $(a<c<b)$ nuqta topiladiki, $F'(c)=0$ bo'ladi. Shunday qilib,

$$0=F'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

va bundan (6.22) formula kelib chiqadi. ► (qaralsin 33-chizma)



33-chizma.

7–teorema. (Koshi teoremasi). *$f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a,b]$ segmentda uzluksiz bo'lsin. Agar bu funksiyalar (a,b) intervalda chekli $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalarga ega bo'lib, $\forall x\in(a,b)$ uchun $g'(x)\neq 0$ bo'lsa, u holda shunday c $(a<c<b)$ nuqtada topiladiki,*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}. \qquad (6.23)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

◄ (6.23) tenglik ma'noga ega bo'lishi uchun $g(b)\neq g(a)$ bo'lishi kerak. Bu esa teoremadagi $g'(x)\neq 0$, $(x\in(a,b))$ shartdan kelib chiqadi. Haqiqatan ham, agar $g(b)=g(a)$ bo'lib qoladigan bo'lsa, u holda $g(x)$ funksiya Roll teoremasining barcha shartlarini qanoatlantirib, biror $c\in(a,b)$ nuqtada (bunday nuqta Roll teoremasiga ko'ra topiladi) $g'(c)=0$ bo'lib qoladi. Bu esa $\forall x\in(a,b)$ da $g'(x)\neq 0$ shartga ziddir. Demak, $g(b)\neq g(a)$

Endi $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar yordamida quyidagi

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)].$$

funksiyani tuzaylik. Bu funksiya $[a,b]$ segmentda uzluksiz bo'lib, (a,b) intervalda

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(x)$$

hosilaga ega. So'ngra $F(x)$ funksiyaning $x=a, x=b$ nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz: $F(a)=F(b)=0$. Demak, $F(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda Roll teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi. Shuning uchun a va b lar orasida shunday c $(a<c<b)$ topiladiki, $F'(c)=0$ bo'ladi. Shunday qilib,

$$0=F'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(c)$$

va unday (6.23) tenglikning o'rinli ekani kelib chiqadi. ►

Xususan, $g(x)=x$ bo'lganda Koshi teoremasidan Lagranj teoremasi kelib chiqadi.

7-§. Teylor formulasi

1⁰. Funksiyani yaqinlashtirish haqida. Ma'lumki, funksiya matematik analiz o'rganiladigan asosiy tushuncha. Ko'pgina masalalar esa funksiyani hisoblash (berilgan nuqtada qiymatini topish) bilan bog'liq. Funksiyaning murakkab bo'lishi bunday hisoblashlarda katta qiyinchiliklar tug'diradi. Natijada noqulay va murakkab funksiyani o'ziga qaraganda sodda va hisoblashga qulay bo'lgan funksiya bilan yaqinlashtirish - taqribiy ifodalash masalasi yuzaga keladi. Bu masalani hal qilishda ko'p hollarda Teylor formulasidan foydalaniladi.

Shuni aytish kerakki, xususiy holda bunday masala bilan funksiya orttirmasi Δy ni uning differensiali dy bilan taqribiy ifodalash $(\Delta y\approx dy)$ jarayonida tanishgan edik. Ma'lumki, $f(x)$ funksiya $x_0\in(a,b)$ da differensiallanuvchi bo'lsa, uni quyidagi

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu esa x_0 nuqtaning etarli kichik atrofidagi x nuqtalarda $f(x)$ funksiya ushbu

$$P_1(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

chiziqli funksiya (birinchi darajali ko'phad) bilan taqribiy ifodalanishini ko'rsatadi.

2⁰. Ko'phad uchun Teylor formulasi. Ushbu

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n \qquad (6.24)$$

(bunda $a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n$ va x_0 o'zgarmas haqiqiy sonlar, $n\in N$) ko'phadni qaraylik. Bu ko'phadni ketma-ket n marta differensiallab topamiz:

$$\begin{aligned}
&P_n'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+3a_3(x-x_0)^2+\ldots+na_n(x-x_0)^{n-1},\\
&P_n''(x)=2a_2+3\cdot 2a_3(x-x_0)+\ldots+n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2},\\
&P_n'''(x)=3\cdot 2a_3+\ldots+n(n-1)(n-2)a_n(x-x_0)^{n-3}, \qquad (6.25)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&P_n^{(n)}(x)=n(n-1)(n-2)\ldots 2a_n
\end{aligned}$$

Bu (6.24) va (6.25) tengliklarda $x=x_0$ deb olinsa, unda berilgan $P_n(x)$ ko'phad va uning hosilalari $P_n^{(k)}(x)$ $(k=1,2,\ldots,n)$ ning x_0 nuqtadagi qiymatlari topiladi:

$$P_n(x_0)=a_0,$$
$$P_n'(x_0)=1!a_1,$$
$$P_n''(x_0)=2!a_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$P_n^{(n)}(x_0)=n!a_n.$$

Ulardan

$$a_0=P_n(x_0),$$
$$a_1=\frac{P_n'(x_0)}{1!},$$
$$a_2=\frac{P_n''(x_0)}{2!},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_n=\frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}$$

kelib chiqadi.

Shunday qilib, $P_n(x)$ ko'phadning koeffitsientlari ko'phad va uning hosilalarining x_0 nuqtadagi qiymatlari orqali ifodalanadi. Koeffitsientlarning bu qiymatlarini (6.24) ga qo'ysak, unda

$$P_n(x)=P_n(x_0)+\frac{P_n'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad (6.26)$$

bo'ladi.

(6.26) formula ko'phad uchun Teylor formulasi deb ataladi.

3⁰. Ixtiyoriy funksiya uchun Teylor formulasi. $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda aniqlangan bo'lib, u $x_0\in(a,b)$ nuqtada $f', f'', \ldots, f^{(n)}(x_0)$ hosilalarga ega bo'lsin. Funksiyaning nuqtadagi hosilalaridan foydalanib, quyidagi

$$P_n(f;x)=P_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

ko'phadni tuzaylik.

Agar qaralayotgan $f(x)$ funksiya n-darajali ko'phad bo'lsa, unda yuqorida (2⁰-bandda) aytilganga ko'ra

$$f(x)=P_n(f;x)$$

ya'ni

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

bo'ladi.

Agar $f(x)$ funksiya ko'phad bo'lmasa, ravshanki,

$$f(x)\neq P_n(f,x)$$

bo'lib, ular orasida farq yuzaga keladi. Biz uni $R_n(x)$ orqali belgilaylik:

$$R_n(x)=f(x)-P_n(f,x)$$

Natijada ushbu

$$f(x)=P_n(f,x)+R_n(x)$$

ya'ni

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x) \qquad (6.27)$$

formulaga kelamiz. Bu (6.27) formula $f(x)$ funksiya uchun Teylor formulasi deb ataladi. $R_n(x)$ esa Teylor formulasining qoldiq hadi deyiladi.

$f(x)$ funksiyaning $P_n(f,x)$ ko'phad bilan taqribiy $f(x)\approx P_n(f,x)$ ifodalashda Teylor formulasidan keng foydalaniladi. Bunda qoldiq had $R_n(x)$ ni baholash muhim. Bu masalani hal qilish uchun $f(x)$ funksiyaga "og'irroq" shart qo'yishga to'g'ri keladi.

$f(x)$ funksiya (a,b) intervalda aniqlangan bo'lib, u shu intervalda uzluksiz $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x)$ hosilalarga ega bo'lsin degan edik. Endi (a,b) intervalda bu funksiyaning $(n+1)$ tartibli $f^{(n+1)}(x)$ hosilasi ham mavjud bo'lsin deymiz. (a,b) intervalda argument x ning ixtiyoriy qiymatini tayinlab quyidagi

$$F(t)=f(x)-f(t)-\frac{f'(t)}{1!}(x-t)-\frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2-\ldots-\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n \qquad (6.28)$$

yordamchi funksiyani tuzamiz va uni $[x_0,x]\subset(a,b)$ (yoki $[x,x_0]\subset(a,b)$) segmentda qaraymiz. $F(t)$ funksiyaning (6.28) ifodasidan uning $[x_0,x]$ segmentda uzluksiz bo'lishini ko'rish qiyin emas. Bu funksiya (x_0,x) intervalda hosilaga ham ega. Haqiqatan ham,

$$F'(t)=-f'(t)-\left[\frac{f''(t)}{1!}(x-t)-f'(t)\right]-\left[\frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2-\frac{f''(t)}{1!}(x-t)\right]-\ldots$$

$$-\left[\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n-\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}\right]=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

Demak,

$$F'(t)=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \qquad (6.29)$$

Endi $[x_0,x]$ segmentda uzluksiz va (x_0,x) intervalda chekli (nolga teng bo'lmagan) hosilaga ega bo'lgan biror $\varphi(t)$ funksiyani olaylik.

$F(t)$ va $\varphi(t)$ funksiyalarga $[x_0, x]$ segmentda Koshi teoremasini qo'llanib topamiz.

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{\varphi(x)-\varphi(x_0)}=\frac{F'(c)}{\varphi'(c)} \tag{6.30}$$

bunda,

$$x_0<c<x \qquad (c=x_0+\theta(x-x_0), 0<\theta<1)$$

Yuqoridagi (6.28) funksiya uchun

$$F(x)=0, F(x_0)=R_n(x)$$

tengliklarga egamiz. Endi (6.29) tenglikdan $t=c$ da

$$F'(c)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

bo'lishini e'tiborga olsak, unda (6.30) tenglikdan

$$R_n(x)=\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\varphi'(c)}\cdot\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n \tag{6.31}$$

$(c=x_0+\theta(x-x_0))$ formula kelib chiqadi.

Shunday qilib, Teylor formulasining qoldiq hadi uchun (6.31) formula topildi. Bu holda $f(x)$ funksiyaning Teylor formulasi quyidagi

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+$$
$$+\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\varphi'(c)}\cdot\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n$$
$$(c=x_0+\theta(x-x_0), 0<\theta<1) \tag{6.32}$$

ko'rinishda yoziladi.

Teylor formulasidan kengroq foydalanish maqsadida, uning qoldiq hadining turli ko'rinishlarini keltiramiz.

1). Koshi ko'rinishdagi qoldiq hadli Teylor formulasi. Yuqorida qaralgan $\varphi(t)$ funksiya sifatida $\varphi(t)=x-t$ funksiyani olaylik. Ravshanki, bu funksiya $[x_0,x]\subset(a,b)$ segmentda uzluksiz, (x_0,x) intervalda esa chekli $\varphi'(t)=-1$ hosilaga ega. Bu funksiya uchun $\varphi(t)=0, \varphi(x_0)=x-x_0$ bo'ladi. Natijada (6.31) formula quyidagi

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n(x-x_0)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}[x-x_0-\theta(x-x_0)]^n(x-x_0)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-x_0)^{n+1}(1-\theta)^n$$
$$(0<\theta<1)$$

ko'rinishni oladi. Qoldiq hadning bu ifodasini (6.32) ga qo'yib topamiz:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+ \tag{6.33}$$
$$+\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-x_0)^{n+1}(1-\theta)^n$$

Bu (6.33) formula $f(x)$ funksiyaning Koshi ko'rinishdagi qoldiq hadli Teylor formulasi deb ataladi.

2). Lagranj ko'rinishidagi qoldiq hadli Teylor formulasi Endi $\varphi(t)=(x-t)^{n+1}$ funksiyani olaylik. Bu funksiya ham $[x_0,x]\subset(a,b)$ segmentda uzluksiz, (x_0,x) intervalda esa chekli $\varphi'(t)=-(n+1)(x-t)^n$ hosilaga ega. Bu funksiya uchun

$$\varphi(x)=0,\ \varphi(x_0)=(x-x_0)^{n+1}$$
$$\varphi'(c)=-(n+1)(x-c)^n,\ (c=x_0+\theta(x-x_0),\ 0<\theta<1)$$

bo'ladi. U holda yuqoridagi (6.31) formula ushbu

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)(x-c)^n}=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

ko'rinishni oladi. Qoldiq hadning bu ifodasini (6.32) ga qo'yib, topamiz:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+ \tag{6.34}$$
$$+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Bu formula $f(x)$ funksiyaning Lagranj ko'rinishidagi qoldiq hadi Teylor formulasi deb ataladi.

Teylor formulasi qoldiq hadining bu ko'rinishi sodda bo'lib, u (6.34) formuladagi navbatda keladigan hadni eslatadi. Faqat bunda funksiyaning $(n+1)$ tartibli hosilasining x_0 nuqtadagi qiymati o'rniga bu hosilaning c $(c=x_0+\theta(x-x_0))$ nuqtada qimati olinadi.

3). Peano ko'rinishidagi qoldiq hadli Teylor formulasi. $f(x)$ funksiya Teylor formulasining Peano ko'rinishidagi qoldiq hadini chiqarishda $f(x)$ funksiyaga nisbatan qo'yilgan shartni "engillashtirish" mumkin.

$f(x)$ funksiya $x_0\in(a,b)$ nuqtaning biror $U_\delta(x_0)\subset(a,b)$ atrofida $f'(x), f''(x),\ldots, f^{(n)}(x)$ hosilalarga ega bo'lib, $f^{(n)}(x)$ hosila esa x_0 nuqtada uzluksiz bo'lsin. Bu funksiya uchun $x\in U_\delta(x_0)$ da ushbu

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+ \tag{6.35}$$
$$+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n$$

(bunda c son x bilan x_0 orasida) formula o'rinli.

Haqiqatan ham, yuqoridagi (6.34) formulada n ni $n-1$ ga almashtirsak, u holda (6.34) formuladan (6.35) kelib chiqadi.

Ravshanki, $x \to x_0$ da $c \to x_0$ bo'ladi. $f^{(n)}(x)$ esa x_0 nuqtada uzluksiz. Demak,

$$\lim_{x \to x_0} f^{(n)}(c) = \lim_{c \to x_0} f^{(n)}(c) = f^{(n)}(x_0).$$

U holda

$$\frac{f^{(n)}(c)}{n!} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \alpha(x),$$

tenglik o'rinli bo'lib, $\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$ bo'ladi.

Agar $x \to x_0$ da $\alpha(x)(x-x_0)^n = o((x-x_0)^n)$ bo'lishini e'tiborga olsak, natijada (6.35) formulaning qoldiq hadi uchun ushbu

$$\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n) \qquad (6.36)$$

formulani topamiz. Endi (6.35) va (6.36) formulalardan

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \qquad (6.37)$$
$$+ o((x-x_0)^n)$$

formulaga kelib chiqadi. Bu formula $f(x)$ funksiyaning Peano ko'rinishidagi qoldiq hadli Teylor formulasi deb ataladi.

Demak, $x \to x_0$ da (6.37) formulaning qoldiq hadi nolga intilib, u (6.37) formulada o'zidan oldin keladigan har bir hadga qaraganda yuqori tartibli cheksiz kichik miqdor bo'ladi.

Shunday qilib, biz yuqorida $f(x)$ funksiya Teylor formulasi qoldiq hadining turli ko'rinishlarini keltirdik. Yechilayotgan masalaning talabiga qarab u yoki bu ko'rinishdagi qoldiq hadli Teylor formulasidan foydalaniladi. Masalan, biror x_0 nuqta atrofidagi x $(x \neq x_0)$ nuqtalarda $f(x)$ funksiyaning qiymatlarini taqribiy hisoblash kerak bo'lsa, Koshi yoki Lagranj ko'rinishidagi qoldiq hadli Teylor formulalaridan foydalangan ma'qul, $x \to x_0$ da qoldiq hadi nolga intilish tartibinigina bilish lozim bo'lsa yoki x_0 nuqta atrofida funksiyaning bosh qismini ajratish kerak bo'lsa, u holda Peano ko'rinishdagi qoldiq hadli Teylor formulasidan foydalanish maqsadga muvofiq bo'ladi.

4⁰. Makloren formulasi. $f(x)$ funksiyaning (6.27) Teylor formulasida $x_0 = 0$ deb olinsa, ushbu

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + r_n(x) \qquad (6.38)$$

formula hosil bo'ladi. Bu holda qoldiq had $r_n(x)$ quyidagicha:

a) Koshi ko'rinishida: $\frac{1}{n!}x^{n+1}(1-\theta)^n f^{(n+1)}(\theta x) = r_n(x)$.

b) Lagranj ko'rinishida: $r_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)$.

v) Peano ko'rinishida: $r_n(x) = o(x^n)$

$(0<\theta<1)$ yozilishi mumkin.

Yuqoridagi (6.38) formula $f(x)$ funksiyaning Makloren formulasi deb ataladi.

Ushbu

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$(0<\theta<1)$ Lagranj ko'rinishidagi qoldiq hadli Makloren formulasini qaraylik. Bu formulaning qoldiq hadini baholaymiz. Faraz qaraylik, shunday M son mavjud bo'lsinki, argument x ning $x_0 = 0$ nuqta atrofidagi qiymatlarida hamda $n \in N$ ning barcha qiymatlarida

$$f^{(n)}(x) < M$$

tengsizlik bajarilsin. U holda ushbu

$$|r_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\theta x)\cdot x^{n+1}}{(n+1)!}\right| < M\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. x ning har bir tayin qiymatida

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{(n+1)}}{(n+1)!} = 0$$

limit o'rinli bo'lishini e'tiborga olsak, u holda n ning etarli katta qiymatlarida $r_n(x)$ yetarli kichik bo'lishini ko'ramiz. Demak, $x_0 = 0$ nuqta atrofida $f(x)$ funksiyani

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

ko'phad bilan almashtirish mumkin. Natijada ushbu

$$f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

taqribiy formula kelib chiqadi.

5^0. Elementar funksiyalar uchun Makloren formulasi. 1) $f(x) = e^x$ bo'lsin. Bu funksiya uchun $f^{(n)}(x) = e^x$ va $f(0) = 1$,

$f^{(n)}(0)=1$ $(n=1,2,3,\dots)$. U holda

$$e^{x}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^{2}}{2!}+\dots+\frac{x^{n}}{n!}+r_{n}(x)$$

bo'lib, uning qoldiq hadi esa Lagranj ko'rinishida quyidagicha yoziladi:

$$r_{n}(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}\qquad (0<\theta<1)$$

Har bir $x\in[-a,a]$ $(a>0)$ da $|e^{\theta x}|<e^{a}$ bo'lishini e'tiborga olsak, unda

$$|r_{n}(x)|\le\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}e^{a}$$

tengsizlik kelib chiqadi va $n\to\infty$ da $\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}e^{a}$ ifoda va demak, $r_n(x)$ ham nolga intiladi. Natijada $f(x)=e^{x}$ funksiya uchun quyidagi

$$e^{x}\approx1+\frac{x}{1!}+\frac{x^{2}}{2!}+\dots+\frac{x^{n}}{n!}$$

taqribiy formulaga ega bo'lamiz. Bu formuladan, xususan, $x=1$ bo'lganda, e sonini taqribiy hisoblash imkonini beradigan ushbu

$$e\approx1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!}$$

formula hosil bo'ladi. Bu holda $|r_n(1)|<\frac{3}{(n+1)!}$.

2). $f(x)=\sin x$ bo'lsin. Ma'lumki, bu funksiyaning n tartibli hosilasi uchun $f^{(n)}(x)=(\sin x)^{(n)}=\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$ formula o'rinli. Ravshanki, $f(0)=0$ va

$$f^{(n)}(0)=\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0, & \text{agar } n-\text{juft bo'lsa,}\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}, & \text{agar } n-\text{toq bo'lsa.}\end{cases}$$

$f(x)=\sin x$ funksiyaning Makloren formulasi n toq son bo'lganda

$$\sin x=x-\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{5}}{5!}-\frac{x^{7}}{7!}+\dots+(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{x^{n}}{n!}+r_{n}(x)$$

ko'rinishda yoziladi. Bu formulaning qoldiq hadi Lagranj ko'rinishda quyidagicha yoziladi:

$$r_n(x) = \frac{x^{n+2}}{(n+2)!}\sin\left(\theta x + n\frac{\pi}{2} + \pi\right) \qquad (0<\theta<1)$$

Ravshanki, $\forall x \in [-a,a]$ $(a>0)$ da

$$|r_n(x)| \le \frac{a^{n+2}}{(n+2)!}$$

bo'lib, $n \to \infty$ da $\frac{a^{n+2}}{(n+2)!}$ ifoda va demak, $r_n(x)$ ham nolga intiladi. Shunday qilib, n – toq son bo'lganda ushbu

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{x^n}{n!}$$

taqribiy hisoblash formulasiga egamiz.

3). $f(x) = \cos x$ bo'lsin. Bu funksiyaning n - tartibli hosilasi uchun $f^{(n)}(x) = (\cos x)^{(n)} = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$ formulaga egamiz. Ravshanki, $f(0) = 1$ va

$$f^{(n)}(0) = \cos\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & \text{agar } n \text{ – toq son bo'lsa,} \\ (-1)^{\frac{n}{2}}, & \text{agar } n \text{ – juft son bo'lsa} \end{cases}$$

$f(x) = \cos x$ funksiyaning Makloren formulasi quyidagicha yoziladi.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^{\frac{n}{2}}\frac{x^n}{n!} + r_n(x)$$

(bunda n – juft son), uning qoldiq hadi Lagranj ko'rinishida quyidagicha yoziladi:

$$r_n(x) = \frac{x^{n+2}}{(n+2)!}\cos\left(\theta x + n\frac{\pi}{2} + \pi\right) \qquad (0<\theta<1)$$

Demak,

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^{\frac{n}{2}}\frac{x^n}{n!}$$

4). $f(x) = \ln(1+x)$ bo'lsin. Ma'lumki, bu funksiyaning n - tartibli hosilasi uchun ushbu

$$f^{(n)}(x) = (\ln(1+x))^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

formula o'rinli. Ravshanki, $f(0) = 0$, $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}\cdot(n-1)!$. Shuni e'tiborga olib, berilgan funksiyaning Makloren formulasini yozamiz:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n}+r_n(x) \qquad (6.38)$$

Bu formulaning qoldiq hadi $r_n(x)$ ni baholashda uning Lagranj hamda Koshi ko'rinishlaridan foydalanamiz.

a) $0\le x\le 1$ bo'lsin. Bu holda (6.38) formulaning Lagranj ko'rinishidagi

$$r_n(x)=\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}} \qquad (0<\theta<1)$$

qoldiq hadini olib, uning uchun quyidagi

$$|r_n(x)|=\left|\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}\right|\le\frac{1}{n+1}$$

bahoga ega bo'lamiz.

b) $-a\le x<0$, $0<a<1$ bo'lsin. Bu holda (6.38) formulaning Koshi ko'rinishidagi

$$r_n(x)=(-1)^n x^{n+1}\cdot\frac{(1-\theta_1)^n}{(1+\theta_1 x)^{n+1}}; \qquad (0<\theta_1<1) \qquad (6.39)$$

qoldiq hadini olamiz. (6.39) tenglikni quyidagicha yozamiz:

$$r_n(x)=(-1)^n\cdot\left(\frac{1-\theta_1}{1+\theta_1 x}\right)^n\cdot\frac{x^{n+1}}{1+\theta_1 x}$$

o'zgaruvchi x ning $-a\le x\le 0$ $(0<a<1)$ qiymatlarida

$$\frac{1-\theta_1}{1+\theta_1 x}<1$$

tengsizlik o'rinli bo'lishini hisobga olib, topamiz:

$$|r_n(x)|=\left|(-1)^n\cdot\left(\frac{1-\theta_1}{1+\theta_1 x}\right)^n\cdot\frac{x^{n+1}}{1+\theta_1 x}\right|<\left|\frac{x^{n+1}}{1+\theta_1 x}\right|<\frac{a^{n+1}}{1-a}$$

Demak, $\ln(1+x)$ funksiya uchun quyidagi

$$\ln(1+x)\approx x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n}$$

taqribiy hisoblash formulasi hosil bo'ladi.

5). $f(x)=(1+x)^\alpha$ bo'lsin, bunda $\alpha\in R$. Bu funksiyaning n - tartibli hosilasi uchun $f^{(n)}(x)=((1+x)^\alpha)^{(n)}=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$ formulaga egamiz. Ravshanki, $f(0)=1$, $f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)$. $f(x)=(1+x)^\alpha$ funksiyaning Makloren formulasi quyidagicha yoziladi:

$$(1+x)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+r_n(x).$$

qoldiq had $r_n(x)$ esa ushbu

$$r_n(x)=\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}(1-\theta)^n x^{n+1}$$

Koshi ko'rinishida yoziladi. Endi $|x|<1$ bo'lganda

$$|r_n(x)|=\left|\alpha\left(1-\frac{\alpha}{1}\right)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\dots\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)\right|(1+\theta x)^{\alpha-1}\left|\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right|^n|x|^{n+1}\le$$

$$\le\left|\alpha\left(1-\frac{\alpha}{1}\right)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\dots\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)\right|(1+\theta x)^{\alpha-1}|x|^{n+1}$$

bo'lib, $n\to\infty$ da nolga intiladi.

Xususan, $\alpha=n$ bo'lsa, u holda $r_n(x)=0$ bo'lib, ushbu

$$(1+x)^n=1+\frac{n}{1!}x+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\dots+\frac{n(n-1)\dots(n-n+1)}{n!}x^n$$

Nyuton binomi formulasiga kelamiz.

Shunday qilib, bu holda ushbu

$$(1+x)^\alpha\approx 1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\dots+\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

taqribiy formulaga egamiz.

Biz yuqorida elementar funksiyalarning Makloren formulalarini keltirdik. Bu formulalarning qoldiq hadlarini asosan Lagranj ko'rinishida yozib, so'ngra ularni baholadik. Elementar funksiyalarning Makloren formulalarida ularning qoldiq hadlarini boshqa ko'rinishlarda ham yozish mumkin. Masalan, elementar funksiyalarning Peano ko'rinishdagi qoldiq hadli Makloren formulalari quyidagicha yoziladi. $(x\to 0)$

1) $e^x=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\dots+\dfrac{x^n}{n!}+o(x^n)$

2) $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}+\dots+(-1)^{\frac{n-1}{2}}\dfrac{x^n}{n!}+o(x^n)$

(bunda n – toq son),

3) $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}+\dots+(-1)^{\frac{n}{2}}\dfrac{x^n}{n!}+o(x^n)$

(bunda n – juft son),

4) $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\dots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+o(x^n)$

5) $(1+x)^\alpha=1+\dfrac{\alpha}{1!}x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\dots+\dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$

Odatda bu formulalar asimptotik formulalar deyiladi.

Mashqlar.

6.10. Ushbu

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{agar } x \text{ ratsional son bo'lsin} \\ x^2, & \text{agar } x \text{ irratsional son bo'lsa,} \end{cases}$$

funksiyaning $x=0$ nuqtadagi hosilasi topilsin.

6.11. 1) Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada $f'(x_0)$ hosilaga ega bo'lsa, u holda shu nuqtada funksiyaning o'ng hosilasi $f'(x_0+0)$ chap hosilasi $f'(x_0-0)$ lar mavjud va $f'(x_0+0)=f'(x_0-0)=f'(x_0)$ bo'lishi isbotlansin. 2) Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada o'ng hosila $f'(x_0+0)$ chap hosila $f'(x_0-0)$ larga ega bo'lib, $f'(x_0+0)=f'(x_0-0)$ bo'lsa, u holda shu nuqtada funksiyaning $f'(x_0)$ hosilasi mavjud va $f'(x_0)=f'(x_0+0)=f'(x_0-0)$ bo'lishi isbotlansin.

6.12. Bir tomonli hamda cheksiz hosilalarning geometrik ma'nolari keltirilsin.

6.13. Ushbu

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{agar } x=0 \text{ bo'lsa,} \\ \frac{1}{n}, & \text{agar } \frac{1}{n+1}<x<\frac{1}{n} \text{ bo'lsa,} \\ \frac{1}{n}, & \text{agar } -\frac{1}{n}<x<-\frac{1}{n+1} \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

funksiyaning $x=0$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lishi isbotlansin.

6.14. Agar $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalari $x=a$ nuqtada hosilaga ega bo'lmasa,

$$f(x)+\varphi(x),\ f(x)\cdot\varphi(x),\ \frac{f(x)}{\varphi(x)} \qquad (\varphi(x)\neq 0)$$

funksiyalar shu nuqtada hosilaga ega bo'ladimi? Misollar keltirilsin.

6.15. Ushbu

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)$$

belgilashda chap tomondagi ifodani kasr deb qarash mumkinmi?

6.16. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x\in(a,b)$ nuqtada n - tartibli $f^{(n)}(x), g^{(n)}(x)$ hosilalarga ega bo'lsa,

$$f(x)\cdot g(x)$$

funksiyaning n tartibli hosilasini topish formulasi keltirib chiqarilsin. (Odatda bu formula Leybnis formulasi deyiladi).

6.17. Ferma, Roll, Lagranj teoremalari qanday geometrik ma'noga ega?

6.18. Ushbu

$$\text{a)}\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} \qquad \text{b)}\ f(x) = \ln\frac{x-5}{x-4}$$

funksiyalarning Makloren formulalari yozilsin.

6.19. Asimptotik formulalardan foydalanib, ushbu

$$\lim_{x\to 0}\left(\cos x + \frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x(\sin x - x)}}$$

limit topilsin.

6.20. Ushbu

$$f(x) = |x|^3 \qquad x=0 \text{ da}$$

funksiya $x=0$ da uchinchi tartibli hosilaga egami? $|x|^3$ chi?

VII BOB

Differensial hisobning ba'zi bir tatbiqlari

Ushbu bobda funksiyaning hosilalari yordamida uning o'zgarish xarakteri (oraliqda o'zgarmas qiymatni saqlashi, o'suvchi yoki kamayuvchi bo'lishi, maksimum va minimum qiymatlari), shuningdek funksiya grafigini tekshirish (funksiya grafigining qavariq yoki botiqligi, burilish nuqtalarini aniqlash) kabi masalalar o'rganiladi.

1–§. Funksiyaning o'zgarib borishi

1^0. Funksiyaning o'zgarmas qiymatni saqlashi. $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda aniqlangan bo'lsin.

1–teorema. *$f(x)$ funksiya (a,b) intervalda chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsin. Bu funksiya (a,b) intervalda o'zgarmas bo'lishi uchun shu intervalda*

$$f'(x)=0$$

bo'lishi zarur va yetarli.

◀ **Zarurligi**. Shartga ko'ra $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda o'zgarmas, ya'ni $f(x)=c$ — $const$. Ravshanki, bu holda (a,b) intervalda $f'(x)=0$ bo'ladi.

Yetarliligi. Shartga ko'ra $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda chekli $f'(x)$ hosilaga ega va $f'(x)=0$. Endi (a,b) intervalda istalgan x va tayinlangan x_0 nuqtalarni olib, $[x_0,x]$ yoki $[x,x_0]$ segmentni qaraylik: $[x_0,x]\subset(a,b)$, $[x,x_0]\subset(a,b)$ Lagranj teoremasiga (6- bobdagi 7- teoremaga qarang) ko'ra x_0 bilan x nuqtalar orasida shunday $c(c\in(x_0,x))$ nuqta mavjudki, ($f'(x)=0$ bo'lishini hisobga olgan holda)

$$f(x)-f(x_0)=f'(c)(x-x_0)=0 \qquad (7.1)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. (7.1) tenglikdan esa $f(x)=f(x_0)$ kelib chiqadi. Bu $f(x)$ funksiyaning (a,b) intervalda o'zgarmas ekanini anglatadi. ▶

1–natija. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar (a,b) intervalda chekli $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalarga ega bo'lib, shu intervalda

$$f'(x)\equiv g'(x)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $f(x)$ bilan $g(x)$ funksiyalar (a,b) intervalda bir biridan o'zgarmas songa farq qiladi:

$$f(x) = g(x) + C \qquad (C = const)$$

◄ Haqiqatan ham,

$$F(x) = f(x) - g(x) \qquad (7.2)$$

deb, (a,b) da

$$F'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

bo'lishini topamiz. Isbot etilgan teoremaga ko'ra $F(x) = C$ bo'ladi. (7.2) munosabatdan $f(x) = g(x) + C$ ekani kelib chiqadi. ►

2^0. **Funksiyaning monoton bo'lishi.** $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda aniqlangan bo'lsin.

2–teorema. *$f(x)$ funksiya (a,b) intervalda chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsin. Bu funksiya shu intervalda o'suvchi (kamayuvchi) bo'lishi uchun (a,b) intervalda*

$$f'(x) \geq 0 \qquad (f'(x) \leq 0)$$

tengsizlik o'rinli bo'lishi zarur va yetarli.

◄ **Zarurligi.** Shartga ko'ra $f(x)$ funksiya (a,b) da chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo'lib, u (a,b) intervalda o'suvchi (kamayuvchi). $\forall x \in (a,b)$ nuqtani olib, u bilan birga $(x + \Delta x) \in (a,b)$ nuqtani ham qaraymiz. U holda

$$\Delta x > 0 \text{ da } f(x) \leq f(x + \Delta x) \qquad (f(x) \geq f(x + \Delta x))$$

$$\Delta x < 0 \text{ da } f(x) \geq f(x + \Delta x) \qquad (f(x) \leq f(x + \Delta x))$$

munosabatlar o'rinli bo'ladi va bu munosabatlardan har doim

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0 \qquad \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \leq 0 \right) \qquad (7.3)$$

tengsizlik kelib chiqadi.

Ma'lumki,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) \qquad (7.4)$$

(7.3) va (7.4) munosabatlardan (4–bobning 4–§ iga qarang) intervalning barcha nuqtalarida

$$f'(x) \geq 0 \qquad (f'(x) \leq 0)$$

tengsizlik o'rinli bo'lishini topamiz.

Yetarliligi. Shartga ko'ra $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo'lib, shu intervalda $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) \leq 0)$ tengsizlik o'rinli.

$\forall x \in (a,b)$ va $(x + \Delta x) \in (a,b)$, $\Delta x > 0$ nuqtalarni olaylik. Bu holda $[x, x + \Delta x] \subset (a,b)$ bo'lib, $[x, x + \Delta x]$ segmentda $f(x)$ funksiya Lagranj teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi. Lagranj teoremasiga muvofiq x va $x + \Delta x$ nuqtalar orasida shunday c $(x < c < x + \Delta x)$ nuqta mavjudki, ushbu

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(c)\Delta x$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Demak,

$$f(x+\Delta x)-f(x)\geq 0 \qquad (f(x+\Delta x)-f(x)\leq 0).$$

Bundan $f(x)$ funksiyaning (a,b) intervalda o'suvchi (kamayuvchi) bo'lishi kelib chiqadi. ►

2-§. Funksiyaning ekstremum qiymatlari

$f(x)$ funksiya (a,b) intervalda berilgan bo'lib, $x_0\in(a,b)$ va

$$U_\delta(x_0)=(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset(a,b)$$

bo'lsin.

1-ta'rif. Agar $\forall x\in U_\delta(x_0)$ uchun

$$f(x)\leq f(x_0) \qquad (f(x)\geq f(x_0))$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 *nuqtada lokal maksimumga (lokal minimumga) ega* deyiladi. $f(x_0)$ qiymat $f(x)$ funksiyaning $U_\delta(x_0)$ *dagi lokal maksimumi (lokal minimumi)* deyiladi.

2-ta'rif. Agar $\forall x\in U_\delta(x_0)\setminus\{x_0\}=\dot{U}_\delta(x_0)$ uchun

$$f(x)<f(x_0) \qquad (f(x)>f(x_0))$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada qat'iy lokal maksimumga (qat'iy lokal minimumga) ega deyiladi, $f(x_0)$ qiymat $f(x)$ funksiyaning $U_\delta(x_0)$ *dagi qat'iy maksimumi (minimumi)* deyiladi.

Yuqoridagi ta'riflardagi x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaga mos ravishda maksimum (minimum), qat'iy maksimum (qat'iy minimum) qiymat beradigan nuqta deb ataladi.

Funksiyaning $U_\delta(x_0)$ dagi maksimum (minimum) qiymatlari

$$f(x_0)=\max_{x\in U_\delta(x_0)}\{f(x)\} \qquad (f(x_0)=\min_{x\in U_\delta(x_0)}\{f(x)\})$$

kabi belgilanadi. Bunda max (min) lotincha maximum (minimum) so'zidan olingan bo'lib, eng katta (eng kichik) degan ma'noni anglatadi.

Funksiyaning maksimum va minimum umumiy nom bilan uning ekstremumi deb ataladi.

Masalan, $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ funksiya $x=0$ nuqtada maksimumga erishadi. Chunki $\forall x\in U_\delta(x_0)\subset(\{-1,1\})$ $(\delta>0)$ uchun $f(x)<f(0)$ ya'ni

$$f(x)=\sqrt{1-x^2}<f(0)=1$$

bo'ladi.

Funksiya hosilalari yordamida uning ekstremumlari hamda funksiyaga ekstremum qiymat beriladigan nuqtalar topiladi.

1). Ekstremumning zaruriy sharti. $f(x)$ funksiya $x_0 \in (a,b)$ nuqtada maksimum (minimum) ga erishsin. Ta'rifga ko'ra, $\forall x \in U_\delta(x_0)$ da $f(x_0) \geq f(x)$ $(f(x_0) \leq f(x))$ bo'ladi.

3–teorema. *Agar $f(x)$ funksiya $x_0 \in (a,b)$ nuqtada chekli $f'(x_0)$ hosilaga ega bo'lsa, u holda*

$$f'(x_0) = 0$$

bo'ladi.

◀ Bu teoremaning isboti Ferma teoremasini qo'llash bilan kelib chiqadi. ▶

Biroq, $f(x)$ funksiya uchun biror $x^* \in (a,b)$ nuqtada chekli hosilasi mavjud va $f'(x^*) = 0$ bo'lishidan uning x^* nuqtada ekstremumga ega bo'lishi har doim kelib chiqavermaydi. Masalan, $f(x) = x^3$ funksiya uchun $f'(x) = 3x^2$ va $x = 0$ nuqtada $f'(0) = 0$ bo'lsa ham u $x = 0$ nuqtada ekstremumga ega emas (bu funksiya qat'iy o'suvchi ekanligi bizga ma'lum).

Demak, yuqoridagi teorema funksiya ekstremumga erishishning zaruriy shartini ifodalaydi.

Odatda funksiya hosilasini nolga aylantiradigan nuqtalar funksiyaning statsionar (turg'un, kritik) nuqtalari deb ham ataladi.

Biz $f(x) = |x|$ funksiyaning $x = 0$ nuqtada (6 – bob, 1 – §) hosilasi mavjud emasligini ko'rgan edik. Bu funksiya $x = 0$ nuqtada minimumga ega bo'lishi ravshandir. Demak, funksiya hosilaga ega bo'lmagan nuqtalarda ham ekstremumga erishish mumkin.

Shunday qilib, $f(x)$ funksiyaga ekstremum qiymat beriladigan nuqtalarni:

Funksiyaning statsionar nuqtalari, funksiyaning hosilasi mavjud bo'lmagan nuqtalari orasidan izlash kerak ekan. Odatda bunday nuqta funksiya ekstremumga sinaladigan nuqta deb ataladi.

2). Ekstremumning yetarli shartlari. $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'lib,

$$\dot{U}_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} \quad (\delta > 0)$$

da chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsin.

a) Agar

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \text{ uchun } f'(x) > 0$$

$$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \text{ uchun } f'(x) < 0$$

bo'lsa, ya'ni $f'(x)$ hosila x_0 nuqtadan o'tishda o'z ishorasini "+"

dan "−" ga o'zgartirsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga ega bo'ladi.

◄ Haqiqatan ham, $(x_0-\delta, x_0)$ da $f(x)$ funksiyaning qat'iy o'suvchi va

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0)$$

bo'lishidan, $\forall x\in(x_0-\delta, x_0)$ da

$$f(x)<f(x_0)$$

tengsizlik kelib chiqadi.

Shuningdek $(x_0, x_0+\delta)$ da $f(x)$ funksiyaning qat'iy kamayuvchi va

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$$

bo'lishidan $\forall x\in(x_0, x_0+\delta)$ da

$$f(x)<f(x_0)$$

bo'lishini topamiz.

Demak, $\forall x\in \dot{U}_\delta(x_0)$ uchun

$$f(x)<f(x_0)$$

bo'lib, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga ega bo'ladi. ►

b) Agar

$$\forall x\in(x_0-\delta, x_0) \text{ uchun } f'(x)<0$$
$$\forall x\in(x_0, x_0+\delta) \text{ uchun } f'(x)>0$$

bo'lsa, ya'ni $f'(x)$ hosila x_0 nuqtadan o'tishda o'z ishorasini "−" dan "+" ga o'zgartirsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada minimumga ega bo'ladi.

◄ Haqiqatan ham, $(x_0-\delta, x_0)$ da $f(x)$ funksiyaning qat'iy kamayuvchi va

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0)$$

bo'lishidan, $\forall x\in(x_0-\delta, x_0)$ da

$$f(x)>f(x_0)$$

tengsizlik kelib chiqadi.

Shuningdek, $(x_0, x_0+\delta)$ da $f(x)$ funksiyaning qat'iy o'suvchi va

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$$

bo'lishidan, $\forall x\in(x_0, x_0+\delta)$ da

$$f(x)>f(x_0)$$

bo'lishini topamiz.

Demak, $\forall x\in \dot{U}_\delta(x_0)$ uchun

$$f(x)>f(x_0)$$

bo'lib, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada minimumga ega bo'ladi ►

v) Agar

$$\forall x \in (x_0-\delta, x_0) \text{ uchun } f'(x)>0$$
$$\forall x \in (x_0, x_0+\delta) \text{ uchun } f'(x)>0$$

yoki

$$\forall x \in (x_0-\delta, x_0) \text{ uchun } f'(x)<0$$
$$\forall x \in (x_0, x_0+\delta) \text{ uchun } f'(x)<0$$

tengsizliklar o'rinli bo'lsa, ya'ni $f'(x)$ hosila x_0 nuqtani o'tishda o'z ishorasini o'zgartirmasa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumga ega bo'lmaydi.

Shunday qilib, ekstremumga sanalayotgan nuqtani o'tishda funksiya hosilasi ishorasining o'zgarishi uning ekstremumga erishishning yetarli shartidir.

7.1-misol. $f(x)=(x+3)^2\sqrt[3]{(x-1)^2}$ funksiyaning ekstremumini toping.

◄ Berilgan funksiyaning hosilasini topamiz:

$$f'(x)=\frac{8x(x+3)}{3\sqrt[3]{x-1}} \qquad (7.5)$$

Ravshanki, hosila $x=0$, $x=-3$ nuqtalarda nolga aylanadi, $x=1$ nuqtada esa chekli hosila mavjud emas. Demak, funksiyaga ekstremum beradigan nuqtalarni $x=0$, $x=-3$, $x=1$ nuqtalar orasidan izlash kerak.

Avval $x=0$ nuqtani olaylik. Bu nuqtaning $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ atrofini olib, hosila uchun (7.5) ifodani e'tiborga olsak,

$$\forall x \in (-\frac{1}{2},0) \text{ uchun } f'(x)>0$$
$$\forall x \in (0,\frac{1}{2}) \text{ uchun } f'(x)<0$$

bo'lishini topamiz. Demak, $f'(x)$ hosila $x=0$ nuqtani o'tishda o'z ishorasini "+" dan "−" ga o'zgartiradi. Ravshanki, berilgan funksiya $x=0$ nuqtada uzluksiz. Demak, berilgan funksiya $x=0$ nuqtada maksimumga ega va uning maksimum qiymati $f(0)=9$.

Endi $x=-3$ nuqtani qaraylik. Bu nuqtaning $(-\frac{7}{2},-\frac{5}{2})$ atrofini olib, (7.5) dan foydalansak,

$$\forall x \in (-\frac{7}{2},-3) \text{ uchun } f'(x)<0$$
$$\forall x \in (-3,-\frac{5}{2}) \text{ uchun } f'(x)>0$$

bo'lishini topamiz. Demak, $f'(x)$ hosila $x=3$ nuqtani o'tishda o'z ishorasini "$-$" dan "$+$" ga o'zgartiradi. Berilgan funksiya $x=3$ nuqtada uzluksiz, demak, u $x=3$ nuqtada minimumga ega va uning minimum qiymati $f(3)=0$. Nihoyat $x=1$ nuqtada berilgan funksiya minimumga ega bo'lishi yuqoridagidek ko'rsatiladi. ►

3°. **Funksiya ekstremumini topishda uning yuqori tartibli hosilalaridan foydalanish.**

$f(x)$ funksiya $x_0\in(a,b)$ nuqtada $f', f'', \dots f^{(n)}$ hosilalarga ega bo'lib biror $n\geq 2$ son uchun

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\dots=f^{(n-1)}(x_0)=0, \quad f^{(n)}(x_0)\neq 0 \qquad (7.6)$$

bo'lsin.

a) Agar n - juft son, ya'ni $n=2m$ $(m\in N)$ bo'lib,

$$f^{(n)}(x_0)=f^{(2m)}(x_0)<0$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga,

$$f^{(n)}(x_0)=f^{(2m)}(x_0)>0$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada minimumga ega bo'ladi.

◄ Haqiqatan ham, $f(x)$ funksiya uchun ushbu

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\dots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^{n-1}+$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)+\alpha(x)}{n!}(x-x_0)^n$$

Teylor formulasidan yuqoridagi (7.6) shartlarni e'tiborga olib topamiz:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f^{(n)}(x_0)+\alpha(x)}{n!}(x-x_0)^n$$

bunda $x\to x_0$ da $\alpha(x)\to 0$. Keyingi tenglikni quyidagicha yozib olamiz:

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(n)}(x_0)+\alpha(x)}{n!}(x-x_0)^n \qquad (7.7)$$

$f^{(n)}(x_0)\neq 0$ va $x\to x_0$ da $\alpha(x)\to 0$ bo'lgani sababli, x ning x_0 ga yetarli yaqin qiymatlarida ($x\in U_\delta(x_0)$ lar uchun) $f^{(n)}(x_0)+\alpha(x)$ ning ishorasi $f^{(n)}(x_0)$ ning ishorasi kabi bo'ladi.

Ravshanki, $n=2m$ bo'lganda $(x-x_0)^n=(x-x_0)^{2m}>0$ bo'lib, $x\in U_\delta(x_0)$ da $f(x)-f(x_0)$ ayirmaning ishorasi $f^{(n)}(x_0)$ ning ishorasi bilan bir xil bo'ladi. Demak, $f^{(n)}(x_0)<0$ bo'lganda $\forall x\in U_\delta(x_0)$ uchun $f(x)-f(x_0)<0$ ya'ni $f(x)<f(x_0)$ bo'lib, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga ega bo'ladi. $f^{(n)}(x_0)>0$ bo'lganda esa, $\forall x\in U_\delta(x_0)$ uchun $f(x)-f(x_0)>0$ ya'ni $f(x)>f(x_0)$ bo'lib, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada minimumga ega bo'ladi. ►

b) Agar n toq son, ya'ni $n=2m+1$ $(m\in N)$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumga ega bo'lmaydi.

◄ Haqiqatan,

$$\forall x\in(x_0-\delta,x_0) \text{ uchun } (x-x_0)^n<0,$$
$$\forall x\in(x_0,x_0+\delta) \text{ uchun } (x-x_0)^n>0$$

tengsizliklar o'rinli bo'lib, x_0 nuqtaning $U_\delta(x_0)$ atrofida $(x-x_0)^n$ ning ishorasi saqlanmaydi. Bu holda (7.7) dan ko'rinadiki, $f^{(n)}(x_0)$ ning ishorasi har qanday bo'lganda ham $f(x)-f(x_0)$ ayirmaning ishorasi o'zgaradi. Bu esa x_0 nuqtada ekstremum yo'qligini anglatadi. ►

7.2–misol. $f(x)=e^x+e^{-x}+2\cos x$ funksiyani ekstremumga tekshiring.

◄ Bu funksiya uchun $f'(x)=e^x-e^{-x}-2\sin x$ bo'lib, u $x=0$ nuqtada nolga aylanadi. Demak, $x=0$ statsionar nuqta. Berilgan funksiyaning yuqori tartibli hosilalarini topib, ularning $x=0$ nuqtadagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$$f''(x)=e^x+e^{-x}-2\cos x, \quad f''(0)=0,$$
$$f'''(x)=e^x-e^{-x}+2\sin x, \quad f'''(0)=0,$$
$$f^{IV}(x)=e^x+e^{-x}+2\cos x, \quad f^{IV}(0)=4.$$

Juft tartibli hosila $x=0$ nuqtada noldan farqli bo'lib, u musbat bo'lgani uchun berilgan funksiya $x=0$ nuqtada minimumga ega bo'ladi. Shu nuqtada funksiya qiymatini hisoblaymiz: $f(0)=4$. ►

Yuqorida keltirilgan qoidadan, xususan, $n=2$ bo'lganda quyidagi natija kelib chiqadi.

2–natija. Agar x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning statsionar nuqtasi bo'lib, $f''(x_0)<0$ bo'lganda, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga, $f''(x_0)>0$ bo'lganda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada minimumga ega bo'ladi.

4⁰. Funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlari. Biz avvalgi bandlarda funksiyaning ekstremumlarini o'rgandik va funksiya biror oraliqda bir necha maksimum va minimumlarga ega bo'lishi mumkinligini aytib o'tdik.

Endi funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlarini topish masalasini qaraymiz.

$f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda aniqlangan va uzluksiz bo'lsin. Veyershtrassning ikkinchi teoremasiga ko'ra (5 - bobdagi 8 - teoremaga qarang) funksiyaning $[a,b]$ da eng katta hamda eng kichik qiymatlari mavjud bo'ladi va bu qiymatlarga $[a,b]$ segmentning nuqtalarida erishiladi. Funksiyaning eng katta qiymati quyidagicha topiladi:

1) $f(x)$ funksiyaning (a,b) intervaldagi maksimum qiymatlari topiladi. Funksiyaning hamma maksimum qiymatlaridan iborat to'plam $\{\max f(x)\}$ bo'lsin.

2) Funksiyaning $[a,b]$ segmentning chegaralaridagi, ya'ni $x=a$, $x=b$ nuqtalardagi $f(a)$ va $f(b)$ qiymatlari hisoblanadi. So'ngra $\{\max f(x)\}$ to'plamning barcha elementlari bilan $f(a)$ va $f(b)$ lar taqqoslanadi. Bu qiymatlar ichida eng kattasi $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ segmentdagi eng katta qiymati bo'ladi.

Shunga o'xshash funksiyaning eng kichik qiymati topiladi:

1) $f(x)$ funksiyaning (a,b) intervaldagi barcha minimum qiymatlari topilib, ulardan $\{\min f(x)\}$ to'plam tuziladi.

2) $[a,b]$ segmentning chegaralari $x=a$, $x=b$ nuqtalarda $f(x)$ funksiyaning $f(a)$, $f(b)$ qiymatlari hisoblanadi.

$\{\min f(x)\}$ to'plamning barcha elementlari hamda $f(a)$, $f(b)$ qiymatlari ichida eng kichigi $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ segmentdagi eng kichik qiymati bo'ladi.

7.3–misol. Ushbu $f(x)=\sin(x^2)$ funksiyaning $[-\sqrt{\pi}, \frac{1}{2}\sqrt{5\pi}]$ segmentda eng katta va eng kichik qiymatlarini toping.

◄ Funksiya hosilasini nolga tenglab,

$$f'(x)=2x\cos(x^2)=0$$

tenglamani qaraymiz. Uni yechib $x=0$, $x=-\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, $x=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ lar statsionar nuqta ekanini topamiz. Berilgan funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasini hisoblaymiz:

$$f''(x)=2\cos(x^2)-4x^2\sin(x^2)$$

Bu hosilaning statsionar nuqtalardagi qiymatlarini topamiz:

$$f''(0)=2>0,\ f''\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)=-2\pi<0,\ f''\left(-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)=-2\pi<0$$

Bundan $f(x)=\sin(x^2)$ funksiya $x=0$ nuqtada minimumga, $x=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ va $x=-\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ nuqtalarda esa maksimumga erishishi kelib chiqadi.

Funksiyaning statsionar nuqtalardagi qiymatlari

$$f(0)=0,\ f\left(-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)=1,\ f\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)=1$$

bo'lib, uning $[-\sqrt{\pi}, \frac{1}{2}\sqrt{5\pi}]$ segmentning chegaralaridagi qiymatlari

$$f(-\sqrt{\pi}) = 0, \quad f\left(\frac{1}{2}\sqrt{5\pi}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

bo'ladi. Bu qiymatlarni taqqoslab $f(x) = \sin(x^2)$ funksiyaning $[-\sqrt{\pi}, \frac{1}{2}\sqrt{5\pi}]$ segmentdagi eng katta qiymati 1 ga, eng kichik qiymati esa $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ teng bo'lishini topamiz. ►

3−§. Funksiyaning qavariqligi va botiqligi

$f(x)$ funksiya (a,b) intervalda aniqlangan bo'lib, bu intervaldan olingan $x_1 \in (a,b), x_2 \in (a,b)$ nuqtalar uchun $x_1 < x_2$ bo'lsin. Ravshanki, $(x_1, x_2) \subset (a,b)$.

Endi $f(x)$ funksiya grafigida $A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2))$ nuqtalarni olaylik. Ma'lumki, bu $A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2))$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi quyidagi

$$\frac{y - f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Uni

$$y = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

kabi yozib olib, qulaylik uchun bu tenglamaning o'ng tomonini $l(x)$ orqali belgilaylik:

$$l(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

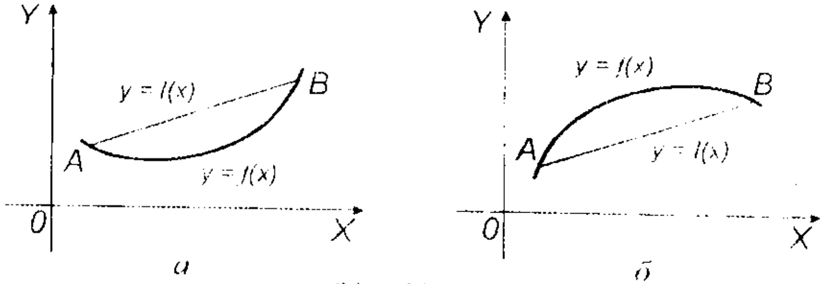
Demak, $y = l(x)$ tenglama $A(x_1, f(x_1))$ va $B(x_2, f(x_2))$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqni ifodalaydi.

3−ta'rif. Agar har qanday $(x_1, x_2) \subset (a,b)$ olinganda ham $\forall x \in (x_1, x_2)$ uchun

$$f(x) \le l(x) \qquad (f(x) < l(x))$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda botiq (qat'iy botiq) funksiya deb ataladi.

Botiq funksiya grafigi (34 – chizma) A va B nuqtalardan o'tuvchi $l(x)$ vatardan pastda joylashgan bo'ladi.



34- chizma.

4–ta'rif Agar har qanday $(x_1,x_2)\subset(a,b)$ olinganda ham $\forall x\in(x_1,x_2)$ uchun

$$f(x)\ge l(x) \qquad (f(x)>l(x))$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda *qavariq (qat'iy qavariq) funksiya* deb ataladi.

Qavariq funksiya grafigi (34 - chizma) A va B nuqtalardan o'tuvchi $l(x)$ vatardan yuqorida joylashgan bo'ladi.

Funksiyaning hosilasi yordamida uning botiqligi hamda qavariqligini tekshirish mumkin.

$f(x)$ funksiya (a,b) intervalda aniqlangan bo'lib, bu intervalda chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsin.

4–teorema. $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda botiq (qat'iy botiq) bo'lishi uchun uning $f'(x)$ hosilasi (a,b) da o'suvchi (qat'iy o'suvchi) bo'lishi zarur va yetarli.

◄ **Zarurligi.** $f(x)$ funksiya (a,b) da botiq bo'lsin. Demak, $x_1\in(a,b), x_2\in(a,b)$, $x_1<x_2$ bo'lganda $\forall x\in(x_1,x_2)$ uchun

$$f(x)\le\frac{x_2-x}{x_2-x_1}f(x_1)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2).$$

bo'ladi. Bundan

$$(x_2-x)f(x_1)+(x_1-x_2)f(x)+(x-x_1)f(x_2)\ge 0$$

bo'lishi kelib chiqadi. Keyingi tengsizlikda $x_2-x_1=(x_2-x)+(x-x_1)$ deb quyidagini topamiz:

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\le\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} \qquad (7.8)$$

Shu (7.8) tengsizlikda avval $x\to x_1$ da, so'ng $x\to x_2$ da limitga o'tsak, u holda

$$f'(x_1)=\lim_{x\to x_1}\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\le\lim_{x\to x_1}\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

$$f'(x_2)=\lim_{x\to x_2}\frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}=\lim_{x\to x_2}\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}\ge\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

bo'lib, natijada quyidagi

$$f'(x_1)\le\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le f'(x_2)$$

tengsizliklar kelib chiqadi. Demak, $f'(x_1)\le f'(x_2)$. Shunday qilib, $x_1<x_2$ bo'lganda $f'(x_1)\le f'(x_2)$ bo'ladi. Bu esa (a,b) intervalda $f'(x)$ ning o'suvchi ekanini bildiradi.

Endi $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda qat'iy botiq bo'lsin. Bu holda (7.8) tengsizlik ushbu

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}>\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}\qquad(7.9)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Lagranj teoremasiga (6- bobdagi 7- teoremaga qarang) ko'ra

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}=f'(\xi_1),\ (x_1<\xi_1<x),$$

$$\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}=f'(\xi_2),\ (x<\xi_2<x_2)$$

bo'ladi. So'ngra

$x_1<\xi_1$ bo'lganda $f'(x_1)\le f'(\xi_1)$

$\xi_2<x_2$ bo'lganda $f'(\xi_2)\le f'(x_2)$

tengsizlik o'rinli bo'lishini hamda (7.9) tengsizlikni e'tiborga olib, topamiz:

$$f'(x_2)>f'(\xi_2)>f'(\xi)>f'(x_1)$$

Demak, $f(x_1)<f(x_2)$. Shunday qilib, $x_1<x_2$ bo'lganda $f'(x_1)<f'(x_2)$ bo'ladi. Bu $f'(x)$ funksiyaning qat'iy o'suvchiligini anglatadi.

Yetarliligi. $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo'lib, u o'suvchi (qat'iy o'suvchi) bo'lsin. Demak, $\forall x_1\in(a,b),\forall x_2\in(a,b)$ uchun $x_1<x_2$ bo'lganda $f'(x_1)\le f'(x_2)$ ($f'(x_1)<f'(x_2)$) tengsizlik o'rinli. Yana Lagranj teoremasidan foydalanib topamiz:

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}=f'(\xi_1),\ (x_1<\xi_1<x),\qquad(7.10)$$

$$\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}=f'(\xi_2),\ (x<\xi_2<x_2),\qquad(7.11)$$

bunda

$$x_1<\xi_1<x<\xi_2<x_2.\qquad(7.12)$$

Demak, $\xi_1<\xi_2$ bo'lganda $f'(\xi_1)\le f'(\xi_2)$ $(f'(\xi_1)>f'(\xi_2))$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. U holda (7.10) va (7.11) munosabatlardan

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} \qquad \left(\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} < \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}\right)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Shunday qilib, $\forall x_1 \in (a,b), \forall x_2 \in (a,b)$ va $x_1 < x_2$ bo'lganda (bu holda (7.12) ga ko'ra $\xi_1 < \xi_2$ bo'ladi)

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} \qquad \left(\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} < \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}\right) \quad (x_1 < x < x_2)$$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi. Natijada (7.8) munosabatlarni e'tiborga olib, $f(x)$ funksiyaning (a,b) intervalda botiq (qat'iy botiq) ekaniga ishonch hosil qilamiz. ►

Xuddi shunga o'xshash quyidagi teorema ham isbotlanadi.

5–teorema. *$f(x)$ funksiya (a,b) intervalda qavariq (qat'iy qavariq) bo'lishi uchun uning $f'(x)$ hosilasi (a,b) da kamayuvchi (qat'iy kamayuvchi) bo'lishi zarur va yetarli.*

$f(x)$ funksiya (a,b) intervalda aniqlangan bo'lib, shu intervalda u ikkinchi tartibli $f''(x)$ hosilaga ega bo'lsin. Bundan tashqari (a,b) intervalning har qanday (α,β) $((\alpha,\beta)\subset(a,b), \alpha \neq \beta)$ qismida $f''(x)$ aynan nolga teng bo'lmasin.

6–teorema. *$f(x)$ funksiya (a,b) intervalda botiq (qavariq) bo'lishi uchun shu intervalda*

$$f''(x) \ge 0 \qquad (f''(x) \le 0)$$

tengsizlik o'rinli bo'lishi zarur va yetarli.

◄ **Zarurligi.** $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda botiq (qavariq) bo'lsin. U holda yuqorida keltirilgan teoremalarga ko'ra, funksiyaning $f'(x)$ hosilasi (a,b) intervalda o'suvchi (kamayuvchi) bo'ladi. Funksiyaning monoton bo'lishi haqidagi 2–teoremaga ko'ra $f''(x) \ge 0$ $(f''(x) < 0)$ bo'lishini topamiz.

Yetarliligi. Endi (a,b) intervalda funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi uchun ushbu $f''(x) \ge 0$ $(f''(x) \le 0)$ tengsizlik o'rinli bo'lsin. U holda yana funksiyaning monotonligi haqidagi 2–teoremaga ko'ra $f'(x)$ hosila (a,b) intervalda o'suvchi (kamayuvchi) bo'ladi. Bundan 4–teoremaga (5–teoremaga) asosan $f(x)$ funksiyaning (a,b) intervalda botiq (qavariq) bo'lishi kelib chiqadi. ►

7.4–misol. Ushbu

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x\sqrt{x}}$$

funksiyaning qavariqligi, botiqligi aniqlansin.

◄ Berilgan funksiya $(0,+\infty)$ da aniqlangan bo'lib, $x=1$ nuqtada hosilaga ega bo'lmasdan, qolgan barcha nuqtalarda hosilaga ega.

Agar $x \in (0,1)$ bo'lsa,

$$f''(x) = \frac{3}{4} \cdot \frac{5-x}{x\sqrt{x}},$$

$x \in (1,+\infty)$ bo'lsa,

$$f''(x) = \frac{3}{4} \cdot \frac{x-5}{x\sqrt{x}}$$

bo'ladi. Demak, $f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi $x=5$ nuqtada nolga teng, $x=1$ nuqtada esa mavjud emas.

Ravshanki,

$$x \in (0,1) \text{ da } f''(x) > 0,$$
$$x \in (1,5) \text{ da } f''(x) < 0,$$
$$x \in (5,+\infty) \text{ da } f''(x) > 0,$$

bo'ladi.

Demak, berilgan funksiya $(0,1)$ oraliqda botiq, $(1,5)$ oraliqda qavariq, $(5,+\infty)$ oraliqda botiq bo'ladi.

2^0. Funksiyaning egilish nuqtalari. Funksiya hosilasi yordamida uning egilish nuqtalarini topish mumkin. $f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning $U_\delta(x_0)$ atrofida aniqlangan bo'lsin.

5–ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya $(x_0-\delta, x_0)$ oraliqda botiq (qavariq) bo'lib, $(x_0, x_0+\delta)$ oraliqda esa qavariq (botiq) bo'lsa, u holda x_0 *nuqta funksiyaning (funksiya grafigining) egilish nuqtasi* deb ataladi.

$f(x)$ funksiya $U_\delta(x_0)$ da ikkinchi tartibli $f''(x)$ hosilaga ega bo'lsin. Agar

$$\forall x \in (x_0-\delta, x_0) \text{ uchun } f''(x) \geq 0 \quad (f''(x) \leq 0)$$
$$\forall x \in (x_0, x_0+\delta) \text{ uchun } f''(x) \leq 0 \quad (f''(x) \geq 0)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $(x_0-\delta, x_0)$ da $f'(x)$ o'suvchi (kamayuvchi), $(x_0, x_0+\delta)$ da $f'(x)$ kamayuvchi (o'suvchi) bo'lib, $f'(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumga erishadi. U holda x_0 nuqtada $f''(x_0)=0$ bo'ladi.

Demak, $f(x)$ funksiyaning egilish nuqtasida ikkinchi tartibli hosila $f''(x)$ nolga teng bo'ladi.

7.5–misol. $f(x)=e^{-x^2}$ funksiyaning egilish nuqtalari topilsin.

◄ Ravshanki,

$$f''(x) = 2e^{-x^2}(2x^2-1)$$

bo'lib, u faqat $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ nuqtalarda nolga aylanadi.

$$f''\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=0,\quad f''\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=0$$

Bu funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ va $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$ intervalda $f''(x)>0$, $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ segmentda esa $f''(x)<0$ bo'ladi. Demak, $f(x)=e^{-x^2}$ funksiya $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ intervalda qavariq, $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ segmentda botiq va $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$ intervalda yana qavariq bo'ladi. Funksiya grafigining $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},e^{-\frac{1}{2}}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},e^{-\frac{1}{2}}\right)$ nuqtalari uning egilish nuqtalaridir. ►

3^0. Funksiya grafigining asimptotalari. $f(x)$ funksiya $a\in R$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lsin.

6–ta'rif. Agar ushbu

$$\lim_{x\to a-0} f(x),\quad \lim_{x\to a+0} f(x).$$

limitlardan biri yoki ikkalasi cheksiz bo'lsa, $x=a$ to'g'ri chiziq $f(x)$ funksiya grafigining vertikal asimptotasi deb ataladi. Masalan, $y=\frac{1}{x}$ funksiya grafigi uchun $x=0$ to'g'ri chiziq vertikal asimptota bo'ladi.

Aytaylik $y=f(x)$ funksiya $(a,+\infty)$, $((-\infty,a))$ oraliqda aniqlangan bo'lsin.

7–ta'rif. Agar shunday k va b sonlar mavjud bo'lsaki, $x\to+\infty$ da $f(x)$ funksiya ushbu

$$f(x)=kx+b+\alpha(x)$$

ko'rinishda ifodalansa, (bunda $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha(x)=0$) $y=kx+b$ to'g'ri chiziq $f(x)$ funksiya grafigining *og'ma asimptotasi* deb ataladi.

Masalan,

$$f(x)=\frac{x^2-3x-2}{x+1}$$

funksiyani

$$f(x)=x-4+\frac{2}{x+1}$$

ko'rinishda yozish mumkinligi va $x\to+\infty$ da $\alpha(x)=\frac{2}{x+1}\to 0$ bo'lishidan $y=x-4$ to'g'ri chiziq funksiya grafigining og'ma asimptotasi ekani kelib chiqadi.

7–teorema. $f(x)$ funksiya grafigi $y=kx+b$ og'ma asimptotaga ega bo'lishi uchun

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k,\quad \lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=b$$

limitlarning o'rinli bo'lishi zarur va yetarli.

◀ **Zarurligi**. $f(x)$ funksiya grafigi $y=kx+b$ og'ma asimptotaga ega bo'lsin. Og'ma asimptota ta'rifiga ko'ra

$$f(x)=kx+b+\alpha(x)$$

bo'lib, bunda $x\to+\infty$ da $\alpha(x)\to 0$ bo'ladi. U holda quyidagilarga egamiz:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{kx+b+\alpha(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(k+\frac{b}{x}+\frac{\alpha(x)}{x}\right)=k,$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to+\infty}(b+\alpha(x))=b.$$

Yetarliligi. Ushbu

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k,\quad \lim_{x\to+\infty}(f(x)-bx)=0$$

limitlar o'rinli bo'lsin. U holda,

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=b$ dan $f(x)-kx-b=\alpha(x)\to 0$ kelib chiqadi. Demak, $x\to+\infty$ da

$$f(x)=kx+b+\alpha(x)$$

bo'lib, $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha(x)=0$ bo'ladi. Bu esa $y=kx+b$ to'g'ri chiziq funksiya grafigining og'ma asimptotasi ekanini bildiradi. ▶

7.6–misol. Ushbu $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ funksiya grafigining asimptotalari topilsin.

◀ Bu funksiya uchun

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{(x-1)^2}=1 \text{ demak, } k=1;$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{(x-1)^2}-x\right)=2 \text{ demak, } b=2$$

Shunday qilib, berilgan funksiya grafigining og'ma asimptotasi $y=x+2$ to'g'ri chiziqdan iborat. ▶

4–§. Funksiyalarni tekshirish. Grafiklarni yasash

Biz ushbu bobning o'tgan paragraflarida funksiyalarning o'zgarish xarakterini hosilalar yordamida o'rgandik. Bu hol funksiyalarni yaqqol tasavvur etishda, shuningdek, funksiya grafigini aniqroq yasashda qo'l keladi.

Funksiyalarni tekshirish va ularning grafiklarini yasashni quyidagi sxema bo'yicha olib borish maqsadga muvofiqdir:

1. Funksiyaning aniqlanish sohasini topish;
2. Funksiyani uzluksizlikka tekshirish va uzilish nuqtalarini topish;
3. Funksiyaning juft, toq hamda davriyligini aniqlash;
4. Funksiyani monotonlikka tekshirish;
5. Funksiyani ekstremumga tekshirish;
6. Funksiya grafigining qavariq hamda botiqligini aniqlash, egilish nuqtalarini topish;
7. Funksiya grafigining asimptotalarini topish;
8. Funksiyaning haqiqiy ildizlarini (agar ular mavjud bo'lsa), shuningdek argument x ning bir nechta xarakterli qiymatlarida funksiyaning qiymatlarini yasash.

7.7–misol. Ushbu

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$$

funksiyani tekshiring va grafigini yasang.

◄ Berilgan funksiya $R=(-\infty,+\infty)$ da aniqlangan va uzluksiz. Bu funksiya uchun $f(-x)=f(x)$ tenglik o'rinli. Demak, $f(x)$ juft funksiya (uning grafigi OY o'qiga nisbatan simmetrik bo'ladi), uni $[0,+\infty)$ oraliqda tekshirish yetarli.

Funksiyaning birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarini topamiz:

$$f'(x)=\frac{4x}{(x^2+1)^2},\quad f''(x)=\frac{4(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}$$

Funksiyaning birinchi tartibli hosilasi $[0,+\infty)$ oraliqda mavjud va $x=0$ nuqtada nolga aylanadi. Shu $x=0$ nuqtada ikkinchi tartibli hosilani hisoblaymiz: $f''(0)=4>0$. Bundan berilgan $f(x)$ funksiya $x=0$ da minimumga ega va $[0,+\infty)$ da $\min f(x)=-1$ bo'ladi. Endi $x>0$ da $f'(x)>0$ bo'lganidan berilgan funksiyaning $[0,+\infty)$ oraliqda o'suvchiligini topamiz. So'ngra ushbu

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1}\cdot\frac{1}{x}=0,$$

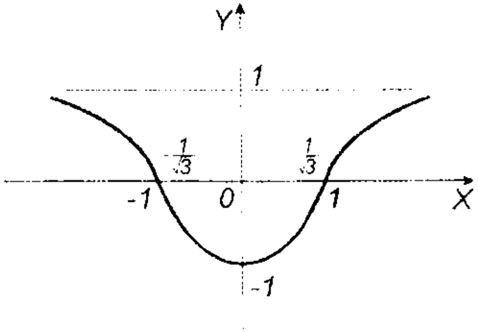
$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1}=1$$

limitlarga ko'ra $y=1$ gorizontal to'g'ri chiziq $f(x)$ funksiya grafigining asimptotasi ekaniga va

$$f(x)-1=\frac{x^2-1}{x^2+1}-1=-\frac{2}{x^2+1}<0$$

tengsizlikka ko'ra funksiya grafigi asimptotadan pastda joylashgan bo'lishiga ishonch hosid qilamiz.

Funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi $[0,+\infty)$ oraliqning $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ nuqtasida nolga aylanadi. Ravshanki, $0<x<\frac{1}{\sqrt{3}}$ da $f''(x)>0$, $\frac{1}{\sqrt{3}}<x<+\infty$ da $f''(x)<0$. Demak, $f(x)$ funksiya $(0,\frac{1}{\sqrt{3}})$ intervalda botiq, $(\frac{1}{\sqrt{3}},+\infty)$ intervalda qavariq bo'ladi. $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ nuqta funksiya grafigining egilish nuqtasidan iborat. Berilgan funksiyaning grafigi 35 chizmada tasvirlangan. ►



35 – chizma.

5–§. Aniqmasliklarni ochish. Lopital qoidalari

Biz funksiyalarning limitini o'rganish jarayonida $\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty},0\cdot\infty,\infty-\infty,0^0,\infty^0,1^\infty$ ko'rinishdagi aniqmasliklarni ochish bilan shug'ullangan edik. Tegishli funksiyalarning hosilalari mavjud bo'lganda, berilgan aniqmasliklarni ochish masalasi birmuncha yengillashadi. Odatda hosilalardan foydalanib aniqmasliklarni ochish Lopital qoidalari deb ataladi.

1^0. $\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmaslik. Ma'lumki, $x\to a$ da $f(x)\to 0$, $g(x)\to 0$ bo'lsa, $\frac{f(x)}{g(x)}$ nisbat $\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmaslikni ifodalaydi. Ko'pincha $x\to a$ da $\frac{f(x)}{g(x)}$ nisbatning limitini topishga qaraganda $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ nisbatning limitini topish oson bo'ladi. Bu nisbatlar limitlarning tengligini quyidagi teorema ko'rsatadi.

8–teorema. *(a,b) intervalda uzluksiz $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar uchun ushbu shartlar bajarilgan bo'lsin:*

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0, \quad \lim\limits_{x\to a} g(x)=0;$

2) (a,b) da chekli $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalar mavjud va $g'(x)\neq 0$

3) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=k$ *(k chekli yoki cheksiz).*

U holda

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=k$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

◄ Agar

$$f(a)=0, \quad g(a)=0 \tag{7.13}$$

deb olinsa,

$$\lim_{x\to a} f(x)=0=f(a), \quad \lim_{x\to a} g(x)=0=g(a)$$

bo'lib, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a,b)$ oraliqda uzluksiz bo'ladi.

$\forall x\in(a,b)$ nuqta olib, $[a,x]$ segmentda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarni qaraymiz. Koshi teoremasiga ko'ra a bilan x orasida shunday c $(a<c<x)$ nuqta topiladiki, ushbu

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu tenglikdan esa (7.13) ga ko'ra

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

bo'lishi kelib chiqadi. Ravshanki, $x\to a$ da $c\to a$. Demak,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}=k. \quad ►$$

7.8–misol. Ushbu

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-\ln(x+e)}{\arcsin x}$$

limitni hisoblang.

◄ Bu holda

$$f(x)=e^{2x}-\ln(x+e), \; g(x)=\arcsin x$$

bo'lib, ular uchun 8–teoremaning barcha shartlari bajariladi. Haqiqatan ham,

1) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(e^{2x}-\ln(x+e))=0, \; \lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\arcsin x=0$,

2) $f'(x)=2e^{2x}-\dfrac{1}{x+e}$, $\quad g'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\quad |x|<1$.

3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to0}\left[\left(2e^{2x}-\dfrac{1}{x+e}\right):\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right]=2-\dfrac{1}{e}$

bo'ladi. U holda 8 – teoremaga ko'ra

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-\ln(x+e)}{\arcsin x}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=2-\frac{1}{e}$$

bo'ladi. ►

Lapital qoidalarini ifodalovchi keyingi teoremalarni isbotsiz keltiramiz.

9–teorema. *$(c,+\infty)$ intervalda aniqlangan $f(x)$ va $g(x)$ funksiya uchun ushbu shartlar bajarilgan bo'lsin:*

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$;

2) $(c,+\infty)$ da chekli $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalar mavjud va $g'(x)\neq0$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=k$ *(k chekli yoki cheksiz). U holda*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=k$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

7.9– misol. Ushbu

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}-1}{2arctgx^2-\pi}$$

limitni hisoblang.

◄ Bu yerda $f(x)=e^{\frac{1}{x^2}}-1$, $g(x)=2arctgx^2-\pi$ bo'lib, ular uchun 9-teoremaning barcha shartlari bajariladi, jumladan

$$f'(x)=-\frac{2}{x^3}e^{\frac{1}{x^2}},\quad g'(x)=\frac{4x}{1+x^4}$$

bo'lib,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{2}{x^3}\right)e^{\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{1+x^4}{4x}=-\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^4}{2x^4}=-\frac{1}{2}$$

bo'ladi. 9 – teoremaga ko'ra

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}-1}{2arctgx^2-\pi}=-\frac{1}{2}$$ ►

2⁰. $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi aniqmaslik. Ma'lumki, $x\to a$ da $f(x)\to\infty$, $g(x)\to\infty$ bo'lsa, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ nisbat $\dfrac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi aniqmaslikni ifodalaydi. Bunday aniqmaslikni ochishda ham $f(x)$ va $g(x)$

funksiyalarning hosilalaridan foydalanish mumkin.

10-teorema. *(a,b) intervalda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar uchun ushbu shartlar bajarilgan bo'lsin:*

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$;

2) (a,b) *intervalda chekli* $f'(x)$, $g'(x)$ *hosilalar mavjud va* $g'(x)\neq 0$

3) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=k$ *(k chekli yoki cheksiz). U holda*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=k$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

11-teorema. *$(c,+\infty)$ intervalda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar uchun ushbu shartlar bajarilgan bo'lsin:*

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\infty$;

2) $(c,+\infty)$ *intervalda chekli* $f'(x)$, $g'(x)$ *hosilalar mavjud va* $g'(x)\neq 0$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=k$ *(k chekli yoki cheksiz).*

U holda

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=k$$

bo'ladi.

3⁰. Boshqa ko'rinishdagi aniqmasliklar. Ma'lumki, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$ bo'lganda $f(x)\cdot g(x)$ ifoda $0\cdot\infty$ ko'rinishdagi aniqmaslik bo'lib, uni quyidagi

$$f(x)g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}=\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

kabi yozish orqali $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi aniqmaslikka keltirish mumkin.

Shuningdek, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$ bo'lganda $f(x)-g(x)$ ifoda $\infty-\infty$ ko'rinishdagi aniqmaslik bo'lib, uni ham quyidagi

$$f(x)-g(x)=\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)\cdot g(x)}}$$

kabi o'zgartirish natijasida $\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmaslikka keltirish mumkin.

Shunday qilib, funksiya hosilalari yordamida $0\cdot\infty$ hamda $\infty-\infty$ ko'rinishdagi aniqmasliklarni ochishda, ularni $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi aniqmaslikka keltirib, so'ng yuqoridagi teoremalar qo'llaniladi.

Ma'lumki, $x\to a$ da $f(x)$ funksiya 1, 0 va ∞ ga, $g(x)$ funksiya esa mos ravishda ∞, 0 va 0 ga intilganda

$$(f(x))^{g(x)}$$

darajali-ko'rsatkichli ifoda $1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0}$ ko'rinishdagi aniqmasliklar edi. Bu ko'rinishdagi aniqmasliklarni ochish uchun avval $y=(f(x))^{g(x)}$ logarifmlanadi: $\ln y=g(x)\ln f(x)$. $x\to a$ da $g(x)\ln f(x)$ ifoda $0\cdot\infty$ ko'rinishdagi aniqmaslikni ifodalaydi. Aytaylik,

$$\lim_{x\to a}(g(x)\ln f(x))=b$$

(b chekli yoki cheksiz) bo'lsin. Unda

$$\lim_{x\to a} y=\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}=\lim_{x\to a} e^{g(x)\ln f(x)}=e^{b}$$

bo'ladi.

1-eslatma. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalari ham $f(x)$ va $g(x)$ lar singari yuqorida keltirilgan teoremalarning barcha shartlarini qanoatlantirsa, u holda

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\frac{f''(x)}{g''(x)}$$

tengliklar o'rinli bo'ladi, ya'ni bu holda Lopital qoidasini takror qo'llash mumkin bo'ladi.

7.10-misol. Ushbu $$\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

limitni hisoblang.

◀ Ravshanki, $x\to0$ da $y=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ ifoda 1^{∞} ko'rinishdagi aniqmaslik. Sodda hisoblashlar yordamida topamiz:

$$\lim_{x\to0}\ln y=\lim_{x\to0}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\ln\frac{\sin x}{x}\right)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}}{2x}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{(x\cos x-\sin x)'}{(x^3)'}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{x\sin x}{3x^2}=-\frac{1}{6}$$

Demak,

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{6}}$$ ▶

Mashqlar.

7.11. (a,b) da chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo'lgan $f(x)$ funksiya (a,b) da qat'iy o'suvchi (qat'iy kamayuvchi) bo'lsa,

$$f'(x)>0 \qquad (f'(x)<0)$$

bo'ladimi? Misol keltiring.

7.12. Hosilasi nolga teng bo'lgan nuqtada funksiya ekstremumga erishish shartmi?

7.13. Ushbu

$$f(x)=\cos\frac{\pi}{x} \qquad (x\neq 0)$$

funksiyaning o'suvchi hamda kamayuvchi bo'ladigan oraliqlari topilsin.

7.14. Ushbu

$$f(x)=chx+\cos x$$

funksiya ekstremumga tekshirilsin.

7.15. Ushbu

$$f(x)=x\sin\frac{\pi}{x}$$

funksiya $[0,1]$ dagi cheksiz sondagi nuqtalarda maksimumga, cheksiz sondagi nuqtalarda minimumga erishish ko'rsatilsin.

7.16. Berilgan shar ichiga yon sirti eng katta bo'ladigan silindr joylashtirilsin.

7.17. Ushbu

$$f(x)=(x-3)^2e^{|x|}$$

funksiyaning $[-1,4]$ dagi eng katta va eng kichik qiymati topilsin.

7.18. Ushbu

$$f(x)=\frac{x+1}{x^2+x}$$

funksiyaning qavariq, botiq bo'ladigan oraliqlari hamda egilish nuqtalari topilsin.

7.19. Ushbu

$$f(x)=\frac{\sin^2 x}{2+\sin x}$$

funksiya to'liq tekshirilsin, grafigi chizilsin.

7.20. Lopital qoidalaridan foydalanib, ushbu limitlar hisoblansin:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha}}{e^{\beta x}} \qquad (\alpha>0,\beta>0)$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-ctg^2x\right)$

v) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{tgx}$

VIII BOB

Aniqmas integral

Ma'lumki, harakatdagi nuqtaning tezligini topish, shuningdek, egri chiziqqa urinma o'tkazish kabi masalalar (6 – bobning 1 – § iga qarang) funksiyani differensiallash tushunchasiga olib kelgan edi.

Nuqtaning har bir vaqt momentidagi tezligi ma'lum bo'lganda uning harakat qonunini topish, egri chiziqni uning har bir nuqtalaridagi urinmalariga ko'ra aniqlash kabi masalalar ham ko'p uchraydi. Bunday masalalar yuqorida eslatib o'tilgan masalalarga teskari bo'lib, ular funksiyani integrallash tushunchasiga olib keladi.

1–§. Aniqmas integral tushunchasi

1⁰. Aniqmas integral ta'rifi. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda (bu interval chekli yoki cheksiz bo'lishi mumkin) aniqlangan bo'lib, $F(x)$ funksiya esa shu intervalda differensiallanuvchi bo'lsin.

1–ta'rif. Agar $\forall x \in (a,b)$ da

$$F'(x) = f(x) \quad \text{yoki} \quad dF(x) = f(x)dx$$

bo'lsa, $F(x)$ funksiya (a,b) da $f(x)$ *ning boshlang'ich funksiyasi* deyiladi.

Masalan,

1) $f(x) = x^2$ funksiyaning $R = (-\infty, +\infty)$ dagi boshlang'ich funksiyasi $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ bo'ladi, chunki

$$F'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2 = f(x),$$

2) $f(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ funksiyaning $(-1,1)$ intervaldagi boshlang'ich funksiyasi $F(x) = \sqrt{1-x^2}$ bo'ladi, chunki

$$F'(x) = (\sqrt{1-x^2})' = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = f(x)$$

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a,b]$da aniqlangan bo'lib, $F(x)$ funksiya shu segmentda differensiallanuvchi bo'lsin.

2–ta'rif. Agar

$$F'(x)=f(x) \quad (x\in(a,b))$$

bo'lib,

$$F'(a+0)=f(a), \quad F'(b-0)=f(b),$$

bo'lsa, $F(x)$ funksiya $[a,b]$ da $f(x)$ *ning boshlang'ich funksiyasi* deyiladi.

8.1-misol. Ushbu

$$f(x)=\begin{cases} 1, & \text{agar } x>0, \\ 0, & \text{agar } x=0, \\ -1, & \text{agar } x<0 \end{cases}$$

funksiya $(-1,1)$ intervalda boshlang'ich funksiyaga ega emasligi ko'rsatilsin.

◄ Teskarisini faraz qilaylik. Biror $F(x)$ funksiya $(-1,1)$ da $f(x)$ ning boshlang'ich funksiyasi bo'lsin: $(-1,1)$ da

$$F'(x)=f(x).$$

Lagranj teoremasiga ko'ra $[0,x]$ da $(0<x<1)$

$$F(x)-F(0)=F'(c)x=f(c)x=x \qquad (0<c<x)$$

bo'ladi. Keyingi tenglikdan topamiz:

$$F'(+0)=\lim_{x\to+0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=1.$$

Bu esa $F'(+0)=F'(0)=f(0)=0$ bo'lishiga zid. ►

1-eslatma. Keyinchalik, $F(x)$ funksiya $f(x)$ ning boshlang'ich funksiyasi bo'ladigan oraliqni ko'rsatib o'tirmaymiz. Oraliq sifatida $f(x)$ ning aniqlanish oralig'i X ko'zda tutiladi va X sifatida

$$[a,b],\ (a,b),\ (a,b],\ [a,b),\ (-\infty,a],\ (-\infty,a),$$
$$[b,+\infty),\ (b,+\infty),\ (-\infty,+\infty)$$

lar olinishi mumkin.

1-teorema. *Agar* $f(x)$ *funksiya* X *oraliqda uzluksiz bo'lsa,* $f(x)$ *shu oraliqda har doim boshlang'ich funksiyaga ega bo'ladi.*

Bu teoremaning isboti 9-bobda keltiriladi.

$F(x)$ va $\Phi(x)$ funksiyalarning har biri $f(x)$ funksiya uchun boshlang'ich funksiya bo'lsin:

$$F'(x)=f(x), \quad \Phi'(x)=f(x).$$

Demak, $F'(x)=\Phi'(x)$. Bundan 7-bobdagi 1-natijaga ko'ra

$$F(x)=\Phi(x)+C \qquad (C=const)$$

tenglik kelib chiqadi.

Demak, $f(x)$ funksiyaning barcha boshlang'ich funksiyalari bir – biridan o'zgarmas songa farq qiladi va istalgan boshlang'ich funksiyasi ushbu ko'rinishda ifodalanadi: $F(x)+C$ $(C=const)$

3–ta'rif. $f(x)$ funksiya boshlang'ich funksiyalarning umumiy ifodasi $F(x)+C$ $(C=const)$ shu $f(x)$ *funksiyaning aniqmas integrali* deb ataladi va

$$\int f(x)dx$$

kabi belgilanadi. Bunda $\int$ -intervalda belgisi, $f(x)$ integral ostidagi funksiya, $f(x)dx$ esa integral ostidagi ifoda deyiladi.

Demak,

$$\int f(x)dx = F(x)+C.$$

Masalan,

$$\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2}+C$$

bo'ladi, chunki hosila olish sodda qoidalariga ko'ra

$$\left(\frac{2^x}{\ln 2}+C\right)' = 2^x$$

2^0. Aniqmas integralning sodda xossalari

1) $f(x)$ funksiya aniqmas integrali $\int f(x)dx$ ning differensiali $f(x)dx$ ga teng:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$$

◄ Haqiqatan ham, $F(x)$ funksiya $f(x)$ ning boshlang'ich funksiyasi bo'lsin: $F'(x)=f(x)$. U holda

$$\int f(x)dx = F(x)+C$$

bo'ladi. Keyingi tenglikdan topamiz:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = d(F(x)+C) = dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx ►$$

Bu xossa avval differnsial belgisi d, so'ngra integral belgisi $\int$ kelib, ular yonma – yon turganda o'zaro bir – birini yo'qotishni ko'rsatadi.

2). Funksiya differensialining aniqmas integrali shu funksiya bilan o'zgarmas son yig'indisiga teng:

$$\int dF(x) = F(x)+C$$

◄ $F(x)$ funksiya $f(x)$ ning biror boshlang'ich funksiyasi bo'lsin: $F'(x)=f(x)$. U holda

$$\int f(x)dx = F(x)+C$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Ikkinchi tomondan,

$$\int f(x)dx = \int F'(x)dx = \int dF(x)$$

Oxirgi ikki tenglik 2) xossani isbot etadi. ►

Yuqorida keltirilganlardan, differensiallash (funksiyaning hosilasini hisoblash) hamda integrallash (funksiyaning aniqmas integralini hisoblash) amallari o'zaro teskari amallar ekanligi kelib chiqadi.

Ayni paytda funksiya hosilasi hisoblanganda natija bitta funksiya bo'lsa, uning aniqmas integrali hisoblanganda esa natija cheksiz ko'p funksiya (ulai bir –biridan o'zgarmas songa farq qiladi) bo'ladi. Aniqmas integral deb yuritilishining boisi ham shu.

3^0. Integrallashning sodda qoidalari. 1) Agar $f(x)$ funksiya boshlang'ich funksiyaga ega bo'lsa, u holda $kf(x)$ (k o'zgarmas son) ham boshlang'ich funksiyaga ega va $k\neq 0$ da

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx \qquad (8.2)$$

formula o'rinli bo'ladi.

◄ $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi $F(x)$ bo'lsin. U holda $F'(x)=f(x)$ va $\int f(x)dx = F(x)+C$ bo'lib,

$$k\int f(x)dx = k(F(x)+C) = kF(x)+kC \qquad (8.3)$$

bo'ladi, bunda C – ixtiyoriy o'zgarmas son. Ushbu

$$(kF(x))' = kF'(x) = kf(x)$$

tenglik o'rinli bo'lishidan $kf(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi $kF(x)$ ekanini topamiz. Demak,

$$\int kf(x)dx = kF(x)+C_1 \qquad (8.4)$$

bunda C_1 ixtiyoriy o'zgarmas son. Endi (8.3) va (8.4) munosabatlardan C va C_1 o'zgarmas sonlarning ixtiyoriyligi hamda $k\neq 0$ bo'lishidan (8.2) formulaning o'rinli ekani kelib chiqadi. ►

Shunga o'xshash integralning quyidagi xossasi isbotlanadi:

3) Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar boshlang'ich funksiyalarga ega bo'lsa, $f(x)+g(x)$ ham boshlang'ich funksiyaga ega va

$$\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx \qquad (8.5)$$

formula o'rinli.

Odatda bu xossa integralning additivik xossasi deyiladi.

2–eslatma. Yuqorida keltirilgan (8.2) va (8.5) tengliklarni hamda kelgusida uchraydigan shunga o'xshash tengliklarni o'ng va chap tomonlaridagi ifodalar orasidagi ayirma o'zgarmas songa barobarligi ma'nosidagi (o'zgarmas son aniqligidan) tengliklar deb qaraladi.

4^0. Elementar funksiyalarning aniqmas integrallari. Boshlang'ich funksiya ta'rifidan hamda elementar funksiyalar hosilalari jadvalidan (6 – bobning 3 – § iga qarang) foydalanib elementar funksiyalar aniqmas integrallari jadvalini keltiramiz (har bir formula integral ostidagi funksiyaning aniqlanish sohasida qaraladi):

1) $\int 0dx = C = const;$

2) $\int 1dx = \int dx = x + C;$

3) $\int x^{\mu} dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq 1);$

4) $\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq 0);$

5) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \int \frac{dx}{1+x^2} = arctg + C;$

6) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$

7) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C; \quad (a > 0)$

8) $\int \sin x dx = -\cos x + C;$

9) $\int \cos x dx = \sin x + C;$

10) $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C;$

11) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C;$

12) $\int shxdx = chx + C;$

13) $\int chxdx = shx + C;$

14) $\int \frac{1}{sh^2 x} dx = -cthx + C;$

15) $\int \frac{1}{ch^2 x} dx = thx + C;$

8.2–misol. Ushbu $\int (1+\sqrt{x})^2 dx$ integralni hisoblang.

◄ Bu integralni hisoblash uchun avval (8.2), (8.5) formulalarni, so'ngra jadvalni qo'llaymiz:

$$\int (1+\sqrt{x})^2 dx = \int (1 + 2\sqrt{x} + x)dx = \int 1dx + 2\int x^{\frac{1}{2}} dx + \int xdx = x + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{x^2}{2} + C. \text{ ►}$$

2–§. Integrallash usullari

1⁰. O'zgaruvchilarni almashtirib integrallash usuli. Ushbu $\int f(x)dx$ aniqmas integralni hisoblash talab etilgan bo'lsin. Bunda $f(x)$ funksiya biror $X=(a,b)$ intervalda aniqlangan va

$$f(x)=\varphi(g(x))\cdot g'(x) \qquad (8.6)$$

ko'rinishda yozilishi mumkin deylik.

Agar $\varphi(t)$ funksiya $T=(t_1,t_2)$ intervalda boshlang'ich funksiya $\Phi(t)$ ga ega bo'lib, $g(x)$ funksiya $X=(a,b)$ intervalda (bunda $g(x)\subset T$) differensiallanuvchi bo'lsa, u holda

$$\int f(x)dx=\int\varphi(g(x))g'(x)dx=\Phi(g(x))+C \qquad (8.7)$$

formula o'rinli.

◄ Haqiqatan, $[\Phi(g(x))]'=\Phi'(g(x))\cdot g'(x)=\varphi(g(x))g'(x)$. ►

Odatda integralni bunday usul bilan hisoblash o'zgaruvchini almashtirish usuli bilan integrallash deb ataladi.

O'zgaruvchilarni almashtirish usulining muhim tomoni o'zgaruvchilarni juda ko'p usul bilan almashtirish imkoniyati bo'lgan holda ular ichidan integralni sodda va hisoblash uchun qulay holga keltiradiganini tanlab olishdan iborat.

8.3–misol. $\int\frac{xdx}{x^2+a^2}$ $(a-const)$ ni hisoblang.

◄ Berilgan integralda o'zgaruvchi x ni $x^2+a^2=t$ kabi almashtiramiz. Bunda $2xdx=dt$ bo'lib, ((8.6) va (8.7) larga qarang)

$$\int\frac{xdx}{x^2+a^2}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln|t|+C=\frac{1}{2}\ln(x^2+a^2)+C \ ►$$

8.4–misol. $\int e^{\cos x}\sin xdx$ ni hisoblang.

◄ Bu integralda $\cos x=t$ almashtirishni bajaramiz. Natijada $-\sin xdx=dt$ bo'lib,

$$\int e^{\cos x}\sin xdx=-\int e^t dt=-e^t+C=-e^{\cos x}+C$$

bo'ladi. ►

2⁰. Bo'laklab integrallash usuli. Ikki $u=u(x)$ va $v=v(x)$ funksiya (a,b) intervalda uzluksiz $u'(x)$ va $v'(x)$ hosilalarga ega bo'lsin. Ma'lumki, (6–bobning 4–§ ga qarang)

$$d(u(x)\cdot v(x))=u(x)dv(x)+v(x)du(x)$$

Bu tenglikdan

$$u(x)\cdot dv(x)=(u(x)v(x))-v(x)du(x). \qquad (8.8)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Endi (8.8) tenglikni integrallab topamiz:

$$\int u(x)dv(x) = \int (d(u(x)v(x)) - \int v(x)du = u(x)v(x) - \int v(x)du$$

Shunday qilib, quyidagi

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du \tag{8.9}$$

formulaga kelamiz. Bu (8.9) formula bo'laklab integrallash formulasi deyiladi.

Bo'laklab integrallash formulasidan foydalanish uchun integral ostidagi ifodani $u(x)$ hamda $dv(x)$ lar ko'paytmasi ko'rinishda yozib olinadi, bunda albatta $dv(x)$ hamda $v(x)du$ ifodalarning integrallarini oson hisoblana olinishi lozimligini e'tiborda tutish kerak.

8.5–misol. $\int \ln x dx$ ni hisoblang.

◄ Integral ostidagi $\ln x dx$ ifodani $u = \ln x, dv = dx$ lar ko'paytmasi deb olamiz. U holda $du = \frac{1}{x}dx, v = x$ bo'ladi. Bo'laklab integrallash formulasidan foydalanib, topamiz:

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln x - x + C = x\ln\frac{x}{e} + C \quad ►$$

8.6–misol. $J_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ $(n = 1,2,3...)$ ni hisoblang.

◄ Bu intervalda

$$u = \frac{1}{(x^2+a^2)^n}, dv = dx \qquad du = -\frac{2nx dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}, v = x$$

bo'ladi. (8.9) formuladan foydalanib topamiz:

$$J_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx \tag{8.10}$$

Bu tenglikning o'ng tomonidagi $\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx$ ni

$$\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}dx - a^2\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}$$

ko'rinishda yozsak, unda (8.10) munosabat ushbu

$$J_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n \cdot J_n - 2na^2 \cdot J_{n+1}$$

ko'rinishni oladi. Keyingi tenglikdan esa quyidagi

$$J_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \cdot \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{1}{a^2} J_n \tag{8.11}$$

rekurrent formula kelib chiqadi.

Ravshanki, $n = 1$ bo'lganda

$$J_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\, arctg\frac{x}{a} + C$$

bo'ladi.

$n \geq 2$ bo'lganda, mos J_n integrallar (8.11) rekurrent formula yordamida topiladi. Masalan:

$$J_2 = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^2}\cdot\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^2}J_1 = \frac{1}{2a^2}\cdot\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^3}\, arctg\frac{x}{a} + C. \ \blacktriangleright$$

3–§. Ratsional funksiyalarni integrallash

Ushbu paragrafda ratsional funksiyalarni integrallash bilan shug'ullanamiz. Buning uchun avval algebra kursidan biz uchun zarur bo'lgan ma'lumotlarni keltiramiz.

1⁰. Ko'phad va uning ildizlari haqida. Biror

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \qquad (8.12)$$

ko'phad berilgan bo'lsin, bunda $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ o'zgarmas haqiqiy sonlar, $a_n \neq 0, n \in N$ esa ko'phadning darajasi.

Ma'lumki, biror $a \in R$ son uchun $P(\alpha) = 0$ bo'lsa, α son $P(x)$ ko'phadning ildizi deb ataladi. U holda Bezu teoremasiga ko'ra $P(x)$ $x-\alpha$ ga qoldiqsiz bo'linib, u quyidagi

$$P(x) = (x-\alpha)Q(x)$$

ko'rinishda ifodalanadi, bunda $Q(x)-(n-1)$-darajali ko'phad.

Agar (8.12) ko'phad $(x-\alpha)^k$ $(k \in N)$ ga qoldiqsiz bo'linsa, α son (8.12) ko'phadning k karrali ildizi bo'ladi. Bu holda $P(x)$ ko'phadni ushbu

$$P(x) = (x-\alpha)^k \cdot R(x)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin, bunda $R(x)-(n-k)-$ darajali ko'phad.

Agar $z = \alpha + i\beta$ kompleks son $P(x)$ ko'phadning ildizi bo'lsa, u holda $\bar{z} = \alpha - i\beta$ kompleks son ham bu ko'phadning ildizi bo'ladi. Shuningdek, $z = \alpha + i\beta$ son $P(x)$ ning k karrali ildizi bo'lsa, $\bar{z} = \alpha - i\beta$ son ham bu ko'phadning k karrali ildizi bo'ladi.

Demak, $P(x)$ ko'phad $z = \alpha + i\beta$ kompleks ildizga ega bo'lganda uning ifodasi $(x-z)$ ko'paytuvchi bilan birga $x-\bar{z}$ ko'paytuvchi ham qatnashadi. Bunday holda $P(x)$ ko'phadning ifodasi quyidagi

$$(x-z)(x-\bar{z}) = [x-(\alpha+i\beta)][x-(\alpha-i\beta)] = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2 = x^2 + px + q$$

$$(x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2)$$

kvadrat uchhad ko'paytuvchi bo'lib qoladi.

Faraz qilaylik,

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

ko'phad berilgan bo'lib, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ lar uning mos ravishda $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ karrali haqiqiy ildizlari, $z_1, z_2, \ldots, z_s$ ($z_j = \delta_j + i\sigma_j$, $j = 1,2,\ldots,s$) lar esa ko'phadning mos ravishda $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ karrali kopleks ildizlari bo'lsin. Bu ko'phadni uning ildizlariga ko'ra ko'paytuvchilarga ajratish haqidagi ushbu teoremani isbotsiz keltiramiz.

2-teorema. *Har qanday n- darajali*

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

ko'phad ($a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ o'zgarmas haqiqiy sonlar, $a_n \neq 0$) ushbu

$$P(x) = (x - \alpha_1)^{\lambda_1}(x - \alpha_2)^{\lambda_2}\ldots(x - \alpha_k)^{\lambda_k} \cdot (x^2 + p_1 x + q_1)^{\gamma_1}(x^2 + p_2 x + q_2)^{\gamma_2}\ldots(x^2 + p_s x + q_s)^{\gamma_s}$$

ko'rinishda ifodalanadi, bunda

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k + 2(\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_s) = n$$

bo'lib, $x^2 + p_j x + q_j = 0$ $(j = 1,2,\ldots,s)$ *tenglamalar haqiqiy ildizga ega emas.*

2^0. Sodda kasrlar. To'g'ri kasrlarni sodda kasrlar orqali ifodalash. Ushbu

$$\frac{A}{(x-a)^m}, \quad \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^m} \qquad (m = 1,2,3\ldots) \tag{8.13}$$

ko'rinishdagi kasrlar sodda kasrlar deb ataladi, bunda A, B, C hamda a, p, q lar o'zgarmas sonlar, $x^2 + px + q$ kvadrat uchhad esa haqiqiy ildizga ega emas.

Ma'lumki, quyidagi

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

va

$$Q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_v x^v$$

ko'phadlarning ($a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, b_0, b_1, b_2, \ldots, b_v$ o'zgarmas sonlar, $n \in N, v \in N$) nisbati

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_v x^v}$$

kasr ratsional funksiya deyiladi, $n < v$ bo'lganda esa u to'g'ri kasr deb ataladi.

Har qanday to'g'ri kasr (8.13) sodda kasrlar orqali ifodalanadi. Buni isbotlashdan avval, ikkita lemmani keltiramiz.

1-lemma. Agar $\frac{P(x)}{Q(x)}$ to'g'ri kasr mahrajidagi $Q(x)$ ko'phad ushbu

$$Q(x) = (x-\alpha)^m Q_1(x) \qquad (m \in N)$$

ko'rinishda bo'lib, $Q_1(x)$ ko'phad esa $x-\alpha$ ga bo'linmasa, u holda berilgan to'g'ri kasr quyidagi

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_m}{(x-\alpha)^m} + \frac{A_{m-1}}{(x-\alpha)^{m-1}} + \ldots + \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$$

ko'rinishda ifodalanishi mumkin, bunda $A_1, A_2, \ldots, A_m$ o'zgarmas haqiqiy sonlar, $P_1(x)$ ko'phad.

◄ $\frac{P(x)}{Q(x)}$ to'g'ri kasrni quyidagi ko'rinishda yozib olamiz.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-\alpha)^m Q_1(x)} = \frac{A_m}{(x-\alpha)^m} + \frac{P(x) - A_m Q_1(x)}{(x-\alpha)^m Q_1(x)} \tag{8.14}$$

Ravshanki, (8.14) munosabatlardagi $P(x) - A_m Q_1(x)$ ayirma A_m songa bog'liq. Bu sonni shunday tanlab olamizki, natijada $P(x) - A_m Q_1(x)$ ko'phad $x-\alpha$ ga bo'linsin. Buning uchun

$$P(\alpha) - A_m Q_1(\alpha) = 0$$

tenglik o'rinli bo'lishi kerak. Demak,

$$A_m = \frac{P(\alpha)}{Q_1(\alpha)}$$

deb olinsa, u holda $P(x) - A_m Q_1(x)$ ko'phad $x-\alpha$ ga bo'linadi.

Shunday qilib,

$$P(x) - A_m Q_1(x) = (x-\alpha) \cdot P_m(x)$$

bo'ladi, bunda $P_m(x)$ — ko'phad.

Natijada (8.14) munosabat quyidagi

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_m}{(x-\alpha)^m} + \frac{P_m(x)}{(x-\alpha)^{m-1} Q_1(x)} \tag{8.15}$$

ko'rinishga keladi, bunda A_m son yuqoridagidek aniqlanadi.

Endi

$$\frac{P_m(x)}{(x-\alpha)^{m-1} Q_1(x)} = \frac{A_{m-1}}{(x-\alpha)^{m-1}} + \frac{P_m(x) - A_{m-1} Q_1(x)}{(x-\alpha)^{m-1} Q_1(x)}$$

tenglikning o'ng tomonidagi A_{m-1} sonni shunday tanlab olamizki, $P_m(x) - A_{m-1} Q_1(x)$ ko'phad $x-\alpha$ ga bo'linsin. Buning uchun

$$P_m(\alpha) - A_{m-1} Q_1(\alpha) = 0$$

tenglik o'rinli bo'lishi kerak. Demak,

$$A_{m-1} = \frac{P_m(\alpha)}{Q_1(\alpha)}$$

deb olinsa, u holda $P_m(x) - A_{m-1} Q_1(x)$ ko'phad $x-\alpha$ ga bo'linadi.

Shunday qilib,

$$P_m(x)-A_mQ_1(x)=(x-\alpha)\cdot P_{m-1}(x) \qquad (8.16)$$

bo'ladi, bunda $P_{m-1}(x)$ ko'phad.

(8.15) va (8.16) munosabatlardan topamiz:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_m}{(x-\alpha)^m}+\frac{A_{m-1}}{(x-\alpha)^{m-1}}+\frac{P_{m-1}(x)}{(x-\alpha)^{m-2}Q_1(x)} \qquad (8.17)$$

Xuddi shunga o'xshash har gal $\frac{P(x)}{Q(x)}$ kasrni ifodalovchi tenglikning o'ng tomonidagi oxiri hadidan, yuqoridagidek $\frac{A_i}{(x-\alpha)^i}$ qismini ajratib topamiz:

$$\frac{P_{m-1}(x)}{(x-\alpha)^{m-2}Q_1(x)}=\frac{A_{m-2}}{(x-\alpha)^{m-2}}+\frac{P_{m-2}}{(x-\alpha)^{m-3}Q_1(x)} \qquad (8.18)$$

va h.k.

$$\frac{P_2(x)}{(x-\alpha)\cdot Q_1(x)}=\frac{A_1}{x-\alpha}+\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \qquad (8.19)$$

(8.17), (8.18), (8.19) tengliklardan

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_m}{(x-\alpha)^m}+\frac{A_{m-1}}{(x-\alpha)^{m-1}}+\ldots+\frac{A_1}{x-\alpha}+\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$$

bo'lishi kelib chiqadi. ►

2–lemma. Agar $\frac{P(x)}{Q(x)}$ to'g'ri kasr maxrajidagi $Q(x)$ ko'phad

$$Q(x)=(x^2+px+q)^n Q_1(x)$$

ko'rinishga ega bo'lib (x^2+px+q kvadrat uchhad haqiqiy ildizga ega emas), $Q_1(x)$ ko'phad x^2+px+q ga bo'linmasa, u holda berilgan to'g'ri kasr quyidagi ko'rinishda ifodalanishi mumkin:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{B_nx+C_n}{(x^2+px+q)^n}+\frac{B_{n-1}x+C_{n-1}}{(x^2+px+q)^{n-1}}+\ldots+\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}+\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$$

bunda $B_1,B_2,\ldots B_n,C_1,C_2,\ldots,C_n$ o'zgarmas sonlar, $P_1(x)$ ko'phad.

◄ $\frac{P(x)}{Q(x)}$ to'g'ri kasrni quyidagicha yozib olamiz:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(x^2+px+q)^nQ_1(x)}=\frac{B_nx+C_n}{(x^2+px+q)^n}+\frac{P(x)-(B_nx+C_n)Q_1(x)}{(x^2+px+q)^nQ_1(x)}$$

Bu tenglikdangi

$$P(x)-(B_nx-C_n)Q_1(x) \qquad (8.20)$$

ko'phad B_n va C_n sonlarga bog'liq. Endi B_n va C_n sonlarni shunday tanlab olish mumkinligini ko'rsatamizki, natijada (8.20) ko'phad x^2+px+q ga bo'linsin. Avvalo $P(x)$ va $Q_1(x)$ ko'phadlarning har birini x^2+px+q kvadrat uchhadga bo'lib topamiz:

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{x^2+px+q} &= R(x) + \frac{a_1x+b_1}{x^2+px+q} \\ \frac{Q_1(x)}{x^2+px+q} &= S(x) + \frac{a_2x+b_2}{x^2+px+q} \end{aligned} \qquad (8.21)$$

bunda $R(x)$ va $S(x)$ ko'phadlar. U holda

$$\frac{P(x)-(B_nx+C_n)Q_1(x)}{x^2+px+q} = \frac{P(x)}{x^2+px+q} - (B_nx+C_n)\frac{Q_1(x)}{x^2+px+q} =$$

$$= R(x) - (B_nx+C_n)S(x) + \frac{a_1x+b_1-(B_nx+C_n)(a_2x+b_2)}{x^2+px+q} =$$

$$= R(x) - (B_nx+C_n)S(x) - B_na_2 + \frac{(a_1+B_npa_2-C_na_2-B_nb_2)x+B_nqa_2+b_1-C_nb_2}{x^2+px+q}$$

bo'ladi. Bu tenglikdan ko'rinadiki, $P(x)-(B_nx-C_n)Q_1(x)$ had x^2+px+q ga bo'linishi uchun x ning barcha qiymatlarida

$$(a_1+B_npa_2-C_na_2-B_nb_2)x+B_nqa_2+b_1-C_nb_2=0,$$

ya'ni

$$\begin{aligned} B_n(a_2p-b_2)-C_na_2+a_1&=0 \\ B_nqa_2-C_nb_2+b_1&=0. \end{aligned} \qquad (8.22)$$

bo'lishi kerak. B_n va C_n larga nisbatan (8.22) sistemaning determinanti

$$D = \begin{vmatrix} a_2p-b_2 & -a_2 \\ a_2q & -b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

bo'ladi. Buni isbotlaymiz. Teskarisini faraz qilaylik, ya'ni

$$D = -b_2(a_2p-b_2)+a_2^2q=0 \qquad (8.23)$$

bo'lsin.

Agar $a_2=0$ bo'lsa, unda $b_2=0$ bo'lib, natijada (8.21) dan $Q_1(x)$ ko'phad x^2+px+q ga bo'linishi kelib chiqadi. Bu esa $Q_1(x)$ ko'phad x^2+px+q ga bo'linmaydi, deb olinishiga ziddir. Demak, $a_2\neq 0$. Bu holda (8.23) tenglikdan ushbu

$$\left(-\frac{b_2}{a_2}\right)^2 + p\left(-\frac{b_2}{a_2}\right) + q = 0$$

ko'rinishga ega bo'lib, $-\frac{b_2}{a_2}$ haqiqiy son $x^2+px+q=0$ tenglamaning ildizi bo'lishini ko'ramiz. Bu esa x^2+px+q kvadrat uchhad haqiqiy ildizga ega bo'lmasin, deb olinishiga zidddir. Demak, (8.22) sistemaning determinanti noldan farqli ekan. U holda, bu sistemadan yagona B_n va C_n sonlar topiladi. Bu sonlarni (8.20) ga qo'ysak, natijada $P(x)-(B_nx-C_n)Q_1(x)$ ko'phad

x^2+px+q ga bo'linib, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ kasr esa ushbu

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x^2+px+q)^n Q_1(x)} = \frac{B_n x + C_n}{(x^2+px+q)^n} + \frac{P_n(x)}{(x^2+px+q)^{n-1}Q_1(x)} \tag{8.24}$$

ko'rinishga keladi, bunda $P_n(x)$ – ko'phad.

Xuddi shu yo'l bilan

$$\frac{P_n(x)}{(x^2+px+q)^{n-1}Q_1(x)} = \frac{B_{n-1}x+C_{n-1}}{(x^2+px+q)^{n-1}} + \frac{P_{n-1}(x)}{(x^2+px+q)^{n-2}Q_1(x)} \tag{8.25}$$

$$\frac{P_{n-1}(x)}{(x^2+px+q)^{n-2}Q_1(x)} = \frac{B_{n-2}x+C_{n-2}}{(x^2+px+q)^{n-2}} + \frac{P_{n-2}(x)}{(x^2+px+q)^{n-3}Q_1(x)} \tag{8.26}$$

va h.k.

$$\frac{P_2(x)}{(x^2+px+q)Q_1(x)} = \frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \tag{8.27}$$

bo'lishi topiladi.

(8.24), (8.25), (8.26), (8.27) tengliklardan

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{B_n x+C_n}{(x^2+px+q)^n} + \frac{B_{n-1}x+C_{n-1}}{(x^2+px+q)^{n-1}} + \dots + \frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$$

bo'lishi kelib chiqadi. ►

3-teorema. *Har qanday to'g'ri kasr sodda kasrlar yig'indisi orqali ifodalanadi.*

◄ $\frac{P(x)}{Q(x)}$ to'g'ri kasr bo'lsin. $Q(x)$ esa n-darajali ko'p had bo'lib,

$$Q(x) = (x-\alpha_1)^{n_1}(x-\alpha_2)^{n_2}\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_k)^{n_k}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}\cdot$$
$$\cdot(x^2+p_2x+q_2)^{m_2}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_ix+q_i)^{m_i}$$

bo'lsin, bunda

$$n_1+n_2+\dots+n_k+2(m_1+m_2+\dots+m_i)=n$$

bo'lib, $x^2+p_jx+q_j$ $(j=1,2,\dots,i)$ kvadrat uchhadlar haqiqiy ildizga ega emas.

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ to'g'ri kasrni quyidagi

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-\alpha_1)^{n_1}(x-\alpha_2)^{n_2}\ldots(x-\alpha_k)^{n_k}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}\ldots(x^2+p_ix+q_i)^{m_i}}$$

ko'rinishda yozib, bu tenglikning o'ng tomoniga 1 – lemmaning bir necha marta ($n_1+n_2+\dots+n_k$ marta) qo'llanib topamiz:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_{n_1}^{(1)}}{(x-\alpha_1)^{n_1}}+\frac{A_{n_1-1}^{(1)}}{(x-\alpha_1)^{n_1-1}}+\dots+\frac{A_1^{(1)}}{x-\alpha_1}+\frac{A_{n_2}^{(2)}}{(x-\alpha_2)^{n_2}}+$$
$$+\frac{A_{n_2-1}^{(2)}}{(x-\alpha_2)^{n_2-1}}+\dots+\frac{A_1^{(2)}}{x-\alpha_2}+\dots+\frac{A_{n_k}^{(k)}}{(x-\alpha_k)^{n_k}}+\frac{A_{n_k-1}^{(k)}}{(x-\alpha_k)^{n_k-1}}+\dots+ \tag{8.28}$$
$$+\frac{A_1^{(k)}}{x-\alpha_k}+\frac{P_1(x)}{Q_1(x)},$$

bunda

$$Q_1(x)=(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}\cdot(x^2+p_2x+q_2)^{m_2}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_lx+q_l)^{m_l}.$$

Endi $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ kasrga 2- lemmani bir necha marta qo'llab, topamiz:

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}=\frac{P_1(x)}{(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}\cdot(x^2+p_2x+q_2)^{m_2}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_lx+q_l)^{m_l}}=$$
$$=\frac{B_{m_1}^{(1)}x+C_{m_1}^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}}+\frac{B_{m_1-1}^{(1)}x+C_{m_1-1}^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{m_1-1}}+\dots+\frac{B_1^{(1)}x+C_1^{(1)}}{x^2+p_1x+q_1}+$$
$$+\frac{B_{m_2}^{(2)}x+C_{m_2}^{(2)}}{(x^2+p_2x+q_2)^{m_2}}+\frac{B_{m_2-1}^{(2)}x+C_{m_2-1}^{(2)}}{(x^2+p_2x+q_2)^{m_2-1}}+\dots+\frac{B_1^{(2)}x+C_1^{(2)}}{x^2+p_2x+q_2}+\dots+ \tag{8.29}$$
$$+\frac{B_{m_l}^{(l)}x+C_{m_l}^{(l)}}{(x^2+p_lx+q_l)^{m_l}}+\frac{B_{m_l-1}^{(l)}x+C_{m_l-1}^{(l)}}{(x^2+p_lx+q_l)^{m_l-1}}+\dots+\frac{B_1^{(l)}x+C_1^{(l)}}{x^2+p_lx+q_l}.$$

(8.28) va (8.29) munosabatlardan teoremaning isboti kelib chiqadi. ►

Yuqorida isbotlangan teoremadagi o'zgarmas sonlarni boshqacha – noma'lum koeffitsientlar usuli deb atalgan usul bilan ham topish mumkin. Bunda $\frac{P(x)}{Q(x)}$ to'g'ri kasr noma'lum koeffitsientlari bo'lgan sodda kasrlarga yoyilib, so'ng tenglikning o'ng tomonidagi sodda kasrlar yig'indisi umumiy maxrajga keltiriladi.

Natijada

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{R(x)}{Q(x)}$$

tenglik hosil bo'ladi va undan barcha x lar uchun o'rinli bo'lgan

$$P(x)=R(x)$$

tenglik kelib chiqadi. Bu tenglikning har ikki tomonidagi x ning bir xil darajalari oldida turgan koeffitsientlarni tenglashtirib, sistema hosil qilinadi.

8.7-misol. $\frac{2x-1}{x^2-5x+6}$ to'g'ri kasrni sodda kasrlarga ajrating.

◄ Bu kasrning maxraji $x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$ bo'lgani uchun teoremaga ko'ra

$$\frac{2x-1}{x^2-5x+6}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2}$$

bo'ladi. Uni

$$\frac{2x-1}{x^2-5x+6}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2}=\frac{A(x-2)+B(x-3)}{(x-2)(x-3)}$$

ko'rinishda yozib, ushbu

$2x-1=A(x-2)+B(x-3)$ yoki $2x-1=(A+B)x-(2A+3B)$

tenglikka kelamiz. Ikki ko'phadning tengligidan foydalanib, A va B larga nisbatan ushbu

$$\begin{cases} A+B=2 \\ 2A+3B=1 \end{cases} \qquad (8.30)$$

sistemaga kelamiz. (8.30) dan $A=5, B=-3$ bo'ladi. Shunday qilib, berilgan to'g'ri kasr sodda kasrlar orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$\frac{2x-1}{x^2-5x+6}=\frac{5}{x-3}+\frac{3}{x-2}. \ ►$$

3⁰. Sodda kasrlarni integrallash. Sodda kasrlarning aniqmas integrallarini hisoblaymiz.

1). $\frac{A}{x-a}$ sodda kasrning aniqmas integrali:

$$\int\frac{A}{x-a}dx=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\ln|x-a|+C$$

2). $\frac{A}{(x-a)^m}$ $(m>1)$ sodda kasrning aniqmas integrali ham tez hisoblanadi:

$$\int\frac{Adx}{(x-a)^m}=A\int\frac{d(x-a)}{(x-a)^m}=A\int(x-a)^{-m}d(x-a)=\frac{A}{1-m}\cdot\frac{1}{(x-a)^{m-1}}+C$$

3). $\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$ sodda kasrning (bunda x^2+px+q kvadrat uchhad haqiqiy ildizga ega emas) integrali $\int\frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx$ ni hisoblash uchun avval kasrning maxrajida turgan x^2+px+q kvadrat uchhadni ushbu

$$x^2+px+q=(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}$$

ko'rnishda yozib olamiz. U holda

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx=\int \frac{Bx+C}{(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}}dx$$

bo'ladi, bunda $a^2=q-\frac{p^2}{4}$. Bu integralda $x+\frac{p}{2}=t$ almashtirishni bajaramiz:

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx=B\int \frac{tdt}{t^2+a^2}+(C-\frac{Bp}{2})\int \frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{B}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2}+$$

$$(C-\frac{Bp}{2})\frac{1}{a}\int \frac{d(\frac{t}{a})}{1+(\frac{t}{a})^2}=\frac{B}{2}\ln(t^2+a^2)+(C-\frac{Bp}{2})\frac{1}{a}arctg\frac{t}{a}+C_1=$$

$$=\frac{B}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{2C-Bp}{2\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}arctg\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C_1$$

Demak,

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx=\frac{B}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{2C-Bp}{\sqrt{4q-p^2}}arctg\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C_1$$

bunda C_1 ixtiyoriy o'zgarmas.

4). $\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}$ $(m>1)$ sodda kasrning integrali $J_m=\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}dx$ ni hisoblash uchun 3) holdagidek o'zgaruvchini almashtiramiz: $x+\frac{p}{2}=t$. Natijada quyidagiga ega bo'lamiz:

$$J_m=\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}dx=\int \frac{Bx+C}{((x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4})^m}dx=\int \frac{Bt+(C-\frac{Bp}{2})}{(t^2+a^2)^m}dt=$$

$$\frac{B}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^m}+(C-\frac{Bp}{2})\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m}=\frac{B}{2}\cdot\frac{1}{1-m}\cdot\frac{1}{(t^2+a^2)^{m-1}}+(C-\frac{Bp}{2})\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m}$$

Bu munosabatdagi $\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m}$ integral ushbu bobning 2- § ida keltirilgan integral bo'lib, u rekurrent formula orqali hisoblanadi.

4^0. Ratsional funksiyalarni integrallash. Ma'lumki, ratsional funksiya ikkita $P(x)$ va $Q(x)$ butun ratsional funksiyalar nisbatidan iborat:

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

Agar $\frac{P(x)}{Q(x)}$ noto'g'ri kasr bo'lsa, uning butun qismini ajratib, butun ratsional funksiya hamda to'g'ri kasr yig'indisi ko'rinishida quyidagicha ifodalab olinadi:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=R(x)+\frac{P_1(x)}{Q(x)}$$

U holda

$$\int f(x)dx=\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\int R(x)dx+\int\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}dx \qquad (8.31)$$

bo'ladi.

(8.31) munosabatdagi $\int R(x)dx$ integral butun ratsional funksiya (ko'phad) ning integrali bo'lib, u oson hisoblanadi.

To'g'ri kasrni integrallash uchun avval bu kasrni 3 teoremadan foydalanib, sodda kasrlar orqali ifodalab olinadi, so'ngra ularni 3^0- bandda ko'rsatilgandek integrallanadi.

8.8–misol. $\int\frac{dx}{x^4-1}$ ni hisoblang.

◄ Integral ostidagi $\frac{1}{x^4-1}$ kasrni sodda kasrlarga ajratamiz:

$$\frac{1}{x^4-1}=\frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

Bu tenglikni quyidagicha yozib olamiz:

$$\frac{1}{x^4-1}=\frac{A(x+1)(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2-1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$$

U holda

$$1=A(x+1)(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2-1)$$

ya'ni

$$1=(A+B+C)x^3+(A-B+D)x^2+(A+B-C)x+(A-B-D)$$

bo'ladi. Natijada A,B,C,D larni topish uchun

$$A+B+C=0,$$

$$A-B+D=0,$$

$$A+B-C=0,$$

$$A-B-D=1.$$

sistemaga kelamiz. Bu sistemani echib,

$$A=\frac{1}{4},B=-\frac{1}{4},C=0,D=-\frac{1}{2}$$

bo'lishini topamiz. Demak,

$$\frac{1}{x^4-1}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}$$

bo'lib,

$$\int\frac{dx}{x^4-1}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\,arctg\,x+C$$

bo'ladi. ►

4-§. Ba'zi irrasional funksiyalarni integrallash

Ikki u va v o'zgaruvchilar berilgan bo'lib, bu o'zgaruvchilar yordamida

$$u^i v^j \qquad (i=0,1,2,\ldots,\ j=0,1,2,\ldots)$$

ko'paytmalarni tuzamiz. Bu ko'paytmalardan tuzilgan ushbu

$$f(u,v)=a_{00}+a_{10}u+a_{01}v+a_{20}u^2+a_{11}uv+a_{02}v^2+$$
$$+\ldots+a_{n0}u^n+a_{(n-1)1}u^{n-1}v+\ldots+a_{1(n-1)}uv^{n-1}+a_{0n}v^n$$

funksiya u va v o'zgaruvchilarning ko'phadi deb ataladi, bunda $a_{00}, a_{10}, a_{01}, \ldots, a_{0n}$ o'zgarmas haqiqiy sonlar (koeffitsientlar).

$P(u,v)$ hamda $Q(u,v)$ lar u va v o'zgaruvchilarning ko'phadlari bo'lsin. Ushbu $\frac{P(u,v)}{Q(u,v)}$ $(Q(u,v)\neq 0)$ nisbat u va v o'zgaruvchilarning ratsional funksiyasi deb ataladi va u $R(u,v)$ orqali belgilanadi:

$$R(u,v)=\frac{P(u,v)}{Q(u,v)} \qquad (Q(u,v)\neq 0)$$

Endi u va v o'zgaruvchilarning har biri o'z navbatida bitta x o'zgaruvchining

$$u=\varphi(x)$$
$$v=\phi(x)$$

funksiyalar bo'lsin. U holda $R(u,v)$ funksiya $\varphi(x)$ va $\phi(x)$ funksiyalarning ratsional funksiyasi bo'ladi. Masalan, ushbu

$$f(x)=\frac{x-2\sqrt[3]{x^2-1}+1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2-1}}$$

funksiya $u=\sqrt{x}$, $v=\sqrt[3]{x^2-1}$ larning ratsional funksiyasidir, chunki,

$$R(u,v)=\frac{u^2-2v+1}{u+v}$$

Xususan, $\varphi(x)$ va $\phi(x)$ larning har biri x o'zgaruvchining ratsional funksiyalari bo'lsa, u holda ushbu

$$R(u,v)=R(\varphi(x),\phi(x))=R(x)$$

funksiya shu x o'zgaruvchining ratsional funksiyasi bo'ladi.

Haqiqatan, x o'zgaruvchining ratsional funksiyalaridan iborat $\varphi(x)$ va $\phi(x)$ lar ustida qo'shish, ayirish, ko'paytirish, hamda bo'lish amallari bajarilsa, natijada x ning yana ratsional funksiyasi hosil bo'ladi.

1^0. $R(x, y(x))$ ko'rinishdagi funksiyalarni integrallash. Ushbu

$$\int R(x, y(x))dx \qquad (8.32)$$

integralni qaraylik, bunda $R(x, y(x))$ funksiya x va $y(x)$ larning ratsional funksiyasidir.

Agar $y(x)$ funksiya x ning ratsional funksiyasi bo'lsa, ushbu

$$\int R(x, y(x))dx$$

integral ratsional funksiyaning integrali bo'ladi. Bunday integrallar 3 - § da batafsil o'rganildi.

Agar $y(x)$ funksiya x o'zgaruvchining ratsional funksiyasi bo'lmasa, u holda ravshanki, $R(x, y(x))$ ham x o'zgaruvchining ratsional funksiyasi bo'lmaydi. Bu holda x o'zgaruvchini almashtirish yordamida $R(x, y(x))$ ni
ratsional funksiyaga keltirish masalasi kelib chiqadi. Agar biz shunday $x = \varphi(t)$ almashtirish topsakki, natijada $x = \varphi(t), y(x) = y(\varphi(t))$ lar t ning ratsional funksiyalari bo'lsa, (bunda $x' = \varphi'(t)$ ham ratsional funksiya bo'ladi), u holda

$$\int R(x, y(x))dx = \int R(\varphi(t), y(\varphi(t)))\cdot\varphi'(t)dt$$

bo'lib, $\int R(x, y(x))dx$ integralni hisoblash ushbu

$$\int R(\varphi(t), y(\varphi(t)))\cdot\varphi'(t)dt$$

ratsional funksiyaning integralini hisoblashga keltiriladi.

Endi $y(x)$ funksiyaning ba'zi bir konkret ko'rinishga ega bo'lgan hollarini qaraymiz:

1). (8.32) integralda

$$y(x) = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

bo'lsin, bunda a, b, c, d o'zgarmas sonlar, $n \in N$. Bu holda (8.32) integral quyidagi

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx \qquad (8.33)$$

ko'rinishni oladi. Bunda a, b, c, d sonlardan tuzilgan determinant noldan farqli, ya'ni

$$\Delta = \begin{vmatrix} a, & b \\ c, & d \end{vmatrix} \neq 0$$

deb qaraymiz. Agar

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$$

bo'lsa, a va b sonlar c, d sonlarga proporsional bo'lib, $\frac{ax+b}{cx+d}$ nisbat x ga bog'liq bo'lmaydi va $R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})$ funksiya x o'zgaruvchining ratsional funksiyasi bo'lib qoladi. Bu holda (8.33) integral 3 § da o'rganilgan integralga keladi. Shunday qilib, keyingi mulohazalarda $\Delta \neq 0$ deymiz.

(8.33) integralda

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

almashtirish bajaramiz. Natijada

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \quad x = \frac{dt^n - b}{a - ct^n} = \varphi(t)$$

$$dx = \varphi'(t)dt = \frac{(ad-bc)nt^{n-1}}{(a-ct^n)^2}\,dt$$

bo'lib, (8.33) integral ushbu

$$\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx = \int R(\varphi(t), t)\varphi'(t)dt = \int R(\frac{dt^n - b}{a - ct^n}, t)\frac{(ad-bc)nt^{n-1}}{(a-ct^n)^2}\,dt$$

ko'rinishni oladi.

Demak, qaralayotgan

$$\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx$$

integralni hisoblash ushbu $R(\frac{dt^n - b}{a - ct^n}, t)\frac{(ad-bc)nt^{n-1}}{(a-ct^n)^2}$ ratsional funksiyaning integralini hisoblashga keladi.

8.9–misol. Ushbu

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,\frac{dx}{x}$$

integral hisoblansin.

◄ Bu integralni hisoblash uchun

$$t = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

deb olamiz. U holda

$$x = \frac{t^2-1}{t^2+1}, \quad dx = \frac{4t\,dt}{(t^2+1)^2}$$

bo'lib,

$$\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\frac{dx}{1-x}=2\int\frac{t^2dt}{t^2+1}$$

bo'ladi. Natijada berilgan integral uchun topamiz.

$$\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\frac{dx}{1-x}=2\int\frac{t^2dt}{t^2+1}=2t-2arctg\,t+C=2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-2arctg\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C\ ►$$

Quyidagi

$$\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_2},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_k}\right)dx \qquad (8.34)$$

integralni qaraylik. Agar $r_1,r_2,\ldots,r_k$ ratsional sonlarni umumiy m maxrajga keltirib, (8.34) integralda

$$t=\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

almashtirish bajarilsa, natijada (8.34) integralni hisoblash ratsional funksiyani integrallashga keladi.

8.10–misol. Ushbu

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$$

integralni hisoblang.

◄ Bu integralda $t=\sqrt[6]{x}$ almashtirish bajaramiz. Natijada

$$x=t^6,\ dx=6t^5dt$$

bo'lib, berilgan integral uchun topamiz:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=6\int\frac{t^3dt}{t+1}=6\int\left((t^2-t+1)-\frac{1}{t+1}\right)dt=6\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln|t+1|\right)+C=$$

$$=6\left(\frac{\sqrt{x}}{3}-\frac{\sqrt[3]{x}}{2}+\sqrt[6]{x}-\ln(\sqrt[6]{x}+1)\right)+C=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln|\sqrt[6]{x}+1|+C\ ►$$

2). (8.32) integralda $y=y(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$ bo'lsin, bunda a,b,c o'zgarmas sonlar bo'lib, ax^2+bx+c kvadrat uchhad teng ildizlarga ega emas. (8.32) integral quyidagi

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx \qquad (a\neq 0) \qquad (8.35)$$

ko'rinishda oladi.

Quyida keltiriladigan uchta almashtirish yordamida (8.35) integral ratsional funksiya integraliga keltiriladi.

a) $a>0$ **bo'lsin**. Bu holda (8.35) integral

$$t=\sqrt{a}x+\sqrt{ax^2+bx+c} \qquad (8.36)$$

$$(\text{yoki}\ \ t=-\sqrt{a}x+\sqrt{ax^2+bx+c})$$

almashtirish natijasida ratsional funksiyani integrallashga keladi.

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx=$$
$$=\int R\left(\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b},\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t+b}\right)\frac{2(\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a})}{(2\sqrt{a}t+b)^2}dt$$

b) $c>0$ **bo'lsin**. Bu holda (8.35) integral

$$t=\frac{1}{x}(\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{c}) \qquad (8.37)$$

$$\left(\text{yoki } t=\frac{1}{x}(\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{c})\right)$$

almashtirish yordamida rasional funksiyani integrallashga keladi.

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx=\int R\left(\frac{2\sqrt{c}t-b}{a-t^2},\frac{\sqrt{c}t^2-bt+a\sqrt{c}}{a-t^2}\right)\frac{2(\sqrt{c}t^2+bt+\sqrt{c}a)}{(a-t^2)^2}dt$$

v) ax^2+bx+c kvadrat uchhad har xil x_1 va x_2 haqiqiy ildizlarga ega bo'lsin. Ma'lumki, x_1 va x_2 ildizlar orqali ax^2+bx+c kvadrat uchhadni

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin. Bu holda (8.35) integral ushbu

$$t=\frac{1}{x-x_1}\sqrt{ax^2+bx+c} \qquad (8.38)$$

almashtirish bilan ushbu

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx=\int R\left(\frac{-ax_2+x_1t^2}{t^2-a},\frac{a(x_1-x_2)}{t^2-a}t\right)\cdot\frac{2a(x_1-x_2)}{(t^2-a)^2}dt$$

ko'rinshga keladi. Bu tenglikning o'ng tomonidagi integral ostidagi funksiya t o'zgaruvchining ratsional funksiyasidir.

Odatda (8.36), (8.37) va (8.38) almashtirishlar Eyler almashtirishlari deb ataladi.

8.11-misol. $\int\frac{1}{x+\sqrt{x^2+x+1}}dx$ integralni hisoblang.

◄ Bu integral uchun $(a=1)$ Eylerning birinchi almashtirishini ((8.36) ga qarang) bajaramiz:

$$t=x+\sqrt{x^2+x+1}$$

U holda

$$x=\frac{t^2-1}{1+2t},\ \sqrt{x^2+x+1}=\frac{t^2+t+1}{1+2t},\ dx=2\frac{t^2+t+1}{(1+2t)^2}dt$$

bo'lib, berilgan integral uchun

$$\int\frac{1}{x+\sqrt{x^2+x+1}}dx=2\int\frac{t^2+t+1}{t(1+2t)^2}dt$$

bo'ladi. Endi

$$2\frac{t^2+t+1}{t(1+2t)^2} = \frac{2}{t} - \frac{3}{1+2t} - \frac{3}{(1+2t)^2}$$

bo'lishini e'tiborga olib, topamiz:

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x^2+x+1}}\,dx = 2\ln|t| - \frac{3}{2}\ln|1+2t| + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1+2t} + C =$$

$$= 2\ln\left|x+\sqrt{x^2+x+1}\right| - \frac{3}{2}\ln\left|1+2x+2\sqrt{x^2+x+1}\right| + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1+2x+2\sqrt{x^2+x+1}} + C \qquad \blacktriangleright$$

2⁰. Binomial differensiallarni integrallash. Ushbu

$$x^m(a+bx^n)^p\,dx$$

differensial ifoda binomial differensial deb ataladi, bunda a, b o'zgarmas sonlar m, n, p ratsional sonlar.

Ushbu

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx \qquad (8.37)$$

integralni hisoblash m, n, p ratsional sonlarga bog'liq. Mashhur rus matematigi P.L. Chebishev ko'rsatganki, (8.37) integral quyidagi uchta

1) p butun son,

2) $\frac{m+1}{n}$ butun son,

3) $\frac{m+1}{n}+p$ butun son,

holdagina ratsional funksiyalarning integrali orqali ifodalanadi.

1) p – butun son bo'lsin. Bu holda m va n ratsional sonlar (ya'ni kasrlar) maxrajining eng kichik umumiy bo'luvchisini δ orqali belgilab, (8.37) integralda $x = t^{\delta}$ almashtirish bajarilsa, integral ostidagi funksiya ratsioanl funksiyaga aylanib, (8.37) integral ratsional funksiyaning integraliga keltiriladi.

2) $\frac{m+1}{n}$ – butun son bo'lsin. Avval (8.37) integralda

$$x = t^{\frac{1}{n}}$$

almashtirish bajaramiz. Natijada (8.37) integral quyidagi

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx = \frac{1}{n}\int (a+bt)^p\, t^{\frac{m+1}{n}-1}\,dt \qquad (8.38)$$

ko'rinishni oladi. Qisqalik uchun

$$q = \frac{m+1}{n} - 1$$

deb belgilaymiz. Bu holda p kasr sonning maxrajini s bilan belgilab, (8.38) integralda

$$z = (a+bt)^{\frac{1}{s}} = (a+bx^n)^{\frac{1}{s}}$$

almashtirish bajarilsa, natijada integral ostidagi ifoda ratsional funksiyaga aylanib, yana (8.37) integral ratsional funksiya integralini hisoblashga keltiriladi.

3) $p+q$ **butun son bo'lsin**. Yuqoridagi (8.38) integralni quyidagicha yozib olamiz:

$$\int (a+bt)^p t^q dt = \int \left(\frac{a+bt}{t}\right)^p t^{p+q} dt.$$

Agar keyingi integralda

$$z = \left(\frac{a+bt}{t}\right)^{\frac{1}{s}}$$

almashtirish bajarilsa, (8.37) integral ratsional funksiyaning integraliga keladi.

8.12-misol. Ushbu

$$\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2} dx$$

integral hisoblansin.

◀ Bu integralni (8.37) integral bilan taqqoslab, $p=-2$ (butun son) ekanligini aniqlaymiz. Yuqorida qaralgan 1) holga ko'ra $x=t^6$ $(t=\sqrt[6]{x})$ almashtirish bajarib topamiz:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2} dx = 6\int \frac{t^8}{(1+t^2)^2} dt$$

Bu tenglikning o'ng tomonidagi integral ostidagi funksiyani

$$\frac{t^8}{(1+t^2)^2} = t^4 - 2t^2 + 3 - 4\cdot\frac{1}{t^2+1} + \frac{1}{(t^2+1)^2}$$

ko'rinishda yozish mumkin ekanini e'tiborga olsak, u holda

$$\int \frac{t^8}{(1+t^2)^2} dt = \frac{t^5}{5} - 2\frac{t^3}{3} + 3t - 4arctgt + \int \frac{dt}{(t^2+1)^2}$$

bo'ladi. Oxirgi integral shu bobning 2–§ ida keltirilgan (8.17) rekurrent munosabat yordamida osongina hisobalnadi.

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t^2+1} + \frac{1}{2}arctgt + C$$

Natijada quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\int \frac{t^8}{(1+t^2)^2} dt = \frac{1}{5}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + 3t - \frac{7}{2}arctgt + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t^2+1} + C$$

Demak, $t=\sqrt[6]{x}$ ekanini e'tiborga olib, uzul–kesil yozamiz:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2} dx = \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} - 4\sqrt{x} + 18\sqrt[6]{x} - 21arctg\sqrt[6]{x} + 3\frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x}+1} + C$$ ▶

8.13-misol. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$ integralni hisoblang.

◄ Bu integralni $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}} = \int x(1+x^{\frac{2}{3}})^{-\frac{1}{2}}dx$ ko'rinishda yozib, $m=1,\ n=\frac{2}{3},\ p=-\frac{1}{2}$ bo'lishini topamiz. Bu holda $\frac{m+1}{n}=3$ bo'lib,

$$t=(1+x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}$$

almashtirishni bajaramiz. Unda

$$1+x^{\frac{2}{3}}=t^2,\ x=(t^2-1)^{\frac{3}{2}} \quad \text{va} \quad dx=\frac{3}{2}(t^2-1)^{\frac{1}{2}}2t\,dt$$

bo'lib, berilgan integral uchun ushbu

$$\int x(1+x^{\frac{2}{3}})^{-\frac{1}{2}}dx = 3\int (t^2-1)^2 t^2\,dt = 3\frac{t^7}{7}-6\frac{t^5}{5}+t^3+C,\ t=\sqrt{1+x^{\frac{2}{3}}}.$$

ifoda topiladi. ►

5-§. Trigonometrik funksiyalarni integrallash

Yuqoridagidek, $R(\sin x, \cos x)$ orqali $\sin x$ va $\cos x$ larning ratsional funksiyasini belgilaylik. Bunday ifodaning

$$\int R(\sin x, \cos x)dx \qquad (8.39)$$

integralning qaraylik.

Agar (8.39) integralda

$$t=tg\frac{x}{2} \qquad (-\pi<x<\pi)$$

almashtirish bajarilsa, u holda (8.39) integral ostidagi $R(\sin x, \cos x)$ ifoda t o'zgaruvchining ratsional funksiyasiga aylanib, (8.39) integralni hisoblash ratsional funksiya integralini hisoblashga keladi.

Darhaqiqat, quyidagi

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2\,arctgt,\quad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

munosabatlarni e'tiborga olsak, u holda (8.39) integral quyidagi

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}$$

ko'rinishga keladi. Ravshanki,

$$R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2}{1+t^2}$$

funksiya t o'zgaruvchining ratsional funksiyasi. Demak, (8.39) integralni hisoblash ratsional funksiya integralini hisoblashga keladi.

8.14-misol. $\int\frac{dx}{3+\sin x}$ integralni hisoblang.

◄ Bu integralda $t = tg\frac{x}{2}$ almashtirish bajarib topamiz:

$$\int\frac{dx}{3+\sin x} = \int\frac{1}{3+\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2} = 2\int\frac{dt}{3t^2+2t+3} =$$

$$2\int\frac{dt}{3t^2+2t+1} = \frac{2}{3}\int\frac{d(t+\frac{1}{3})}{(t+\frac{1}{3})^2+\frac{8}{9}} = \frac{2}{3}\int\frac{d(t+\frac{1}{3})}{(t+\frac{1}{3})^2+(\frac{2\sqrt{2}}{3})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}arctg3\frac{t+\frac{1}{3}}{2\sqrt{2}}+C$$

Demak,

$$\int\frac{dx}{3+\sin x} = \frac{\sqrt{2}}{2}arctg\frac{3tg\frac{x}{2}+1}{2\sqrt{2}}+C \blacktriangleright$$

Shuni ta'kidlash lozimki, $\int R(\sin x, \cos x)dx$ integralda $t = tg\frac{x}{2}$ almashtirish universal almashtirish bo'lib, u (8.39) integralni har doim ratsional funksiya integraliga keltirsada ko'pincha bu almashtirish murakkab hisoblashlarga olib keladi.

Ayrim hollarda trigonometrik funksiyalarni integrallashda $t = tgx, t = \sin x, t = \cos x$ almashtirishlar qulay bo'ladi.

8.15-misol. $\int\frac{dx}{\cos^4 x}$ integral hisoblansin.

◄ Agar bu integralda $t = tg\frac{x}{2}$ universal almashtirish bajarilsa, u holda

$$\int\frac{dx}{\cos^4 x} = 2\int\frac{(1+t^2)^3}{(1-t^2)^4}dt$$

bo'ladi. Biroq qaralayotgan integralda $t = tgx$ almashtirish bajarilsa, u holda

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int (1+tg^2 x)\,dtgx = \int (1+t^2)\,dt$$

bo'lib, undan

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = t + \frac{t^3}{3} + C = tgx + \frac{tg^3 x}{3} + C$$

bo'lishini topamiz. ►

Mashqlar

8.16. Ushbu

$$f(x) = x|x|,\ \varphi(x) = e^{-|x|} \qquad (x \in R)$$

funksiyalarning $(-\infty,+\infty)$ dagi boshlang'ich funksiyalari topilsin

8.17. Ushbu

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$$

integral hisoblansin.

8.18. Ushbu

$$\int e^{ax} \cos bx\,dx$$

integral hisoblansin.

8.19. Quyidagi

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C \qquad (a > 0)$

2) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm\sqrt{a^2 \pm x^2} + C \qquad (a > 0)$

3) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$

4) $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

tengliklar isbotlansin.

8.20. Ushbu

$$\int \frac{\sin 4x}{\sin^8 x + \cos^8 x}\,dx$$

integral hisoblansin.

IX BOB

Aniq integral

Funksiyaning aniq integrali matematik analizning muhim tushunchalaridan biri.

Tabiatda, texnikada va fanning turli sohalarida uchraydigan ko'pgina masalalar (shaklning yuzi, egri chiziqning uzunligi, bajarilgan ish miqdori, inersiya momenti, jismning hajmi va h.k. larni topish masalalari) aniq integral yordamida hal etiladi.

Ushbu bobda funksiyaning aniq integrali nazariyasini batafsil bayon etamiz.

1–§. Aniq integral tushunchasi

1⁰. $[a,b]$ ni bo'laklash Biror $[a,b]\subset R$ segment berilgan bo'lsin. Uning ushbu

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$$

munosabatda bo'lgan chekli sondagi ixtiyoriy $x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n$ nuqtalari sistemasini olaylik. Agar $A_i=[x_{i-1},x_i]$, $i=1,2,\ldots,n$ deb belgilasak, u holda ravshanki,

1) $A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n=[a,b]$,

2) $A_k\cap A_j=\emptyset,(k,j=1,2,\ldots,n)$

Mazkur kursning 1-bobidagi to'plamni bo'laklash tushunchasi ta'rifiga binoan $\{A_1,A_2,\ldots,A_n\}$ sistema $[a,b]$ da bo'laklash bajargan bo'ladi, va aksincha, agar bizga $[a,b]$ segmentning biror chekli $\{B_1,B_2,\ldots,B_m\}$ bo'laklashi berilgan bo'lsa, u ushbu

$$a=y_0<y_1<y_2<\ldots<y_m=b$$

munosabatda bo'lgan chekli sondagi $y_0,y_1,y_2,\ldots,y_{m-1},y_m$ nuqtalar sistemasini aniqlaydi. Binobarin, biz to'plamni bo'laklash ta'rifiga ekvivalent bo'lgan quyidagi ta'rifni kirita olamiz.

1–ta'rif. $[a,b]$ segmentning ushbu

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$$

munosabat bo'lgan ixtiyoriy chekli sondagi $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_{n-1},x_n$ nuqtalari sistemasi $[a,b]$ *segmentda bo'laklash bajaradi* deyiladi. U

$$P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$$

kabi belgilanadi.

Har bir x_k $(k=0,1,\dots,n)$ nuqta bo'laklashning bo'luvchi nuqtasi, $[x_k,x_{k+1}]$ $(k=0,1,\dots,n-1)$ segment esa P bo'laklashning oralig'i deyiladi.

P bo'laklash oraliqlari uzunligi $\Delta x_k=x_{k+1}-x_k$ $(k=0,1,\dots,n-1)$ eng kattasi, ya'ni ushbu

$$\lambda_P=\max\{\Delta x_k\}=\max\{\Delta x_0,\Delta x_1,\dots,\Delta x_k,\dots,\Delta x_{n-1}\}$$

miqdor P bo'laklashning diametri deb ataladi. $[a,b]$ segment berilgan holda bu segmentni turli usullar bilan istalgan sondagi bo'laklashlarni tuzish mumkin ekan. Bu bo'laklashlardan iborat to'plamni F bilan belgilaymiz: $F=\{P\}$

2⁰. Integral yig'indi. $[a,b]$ segmentda $f(x)$ funksiya aniqlangan bo'lsin. Shu segmentni

$$P=\{x_0,x_1,x_2,\dots,x_k,\dots,x_n\}\in F$$

bo'laklashi va bu bo'laklashning har bir $[x_k,x_{k+1}]$ $(k=0,1,\dots,n-1)$ oralig'ida ixtiyoriy ξ_k $(\xi_k\in[x_k,x_{k+1}])$ nuqta olamiz. Berilgan funksiyaning ξ_k nuqtadagi qiymati $f(\xi_k)$ ni $\Delta x_k=x_{k+1}-x_k$ ga ko'paytirib, quyidagi yig'indini tuzamiz:

$$\sigma=f(\xi_0)\Delta x_0+f(\xi_1)\Delta x_1+\dots+f(\xi_k)\Delta x_k+\dots+f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}f(\xi_k)\Delta x_k$$

2–ta'rif. Ushbu

$$\sigma=\sum_{k=0}^{n-1}f(\xi_k)\Delta x_k \qquad (9.1)$$

yig'indi $f(x)$ funksiyaning *integral yig'indisi* deb ataladi.

Masalan, 1) $f(x)=x$ funksiyaning $[a,b]$ segmentdagi integral yig'indisi

$$\sum_{k=0}^{n-1}f(\xi_k)\Delta x_k=\sum_{k=0}^{n-1}\xi_k\Delta x_k$$

bo'ladi, bunda

$$x_k\le\xi_k\le x_{k+1} \qquad (k=0,1,\dots,n-1)$$

3) Dirixli funksiyasi

$$D(x)=\begin{cases}1, \text{agar } x\in[a,b] \text{ ratsional son bo'lsa,}\\ 0, \text{ agar } x\in[a,b] \text{ irratsional son bo'lsa.}\end{cases}$$

ning integral yig'indisi quyidagi

$$\sum_{k=0}^{n-1} D(\xi_k)\Delta x_k = \begin{cases} b-a, & \text{agar barcha } \xi_k \text{ ratsional son bo'lsa,} \\ \\ 0, & \text{agar barcha } \xi_k \text{ irratsional son bo'lsa} \end{cases}$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Ravshanki, $f(x)$ funksiyaning integral yig'indisi σ a) $f(x)$ funksiyaga, b) $[a,b]$ segmentni bo'laklash usuliga v) har bir $[x_k, x_{k+1}]$ segmentdan olingan ξ_k nuqtalarga bog'liq bo'ladi.

3^0. Aniq integral ta'rifi. $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda aniqlangan bo'lsin. $[a,b]$ segmentning shunday

$$P_1, P_2, \ldots, P_m, \ldots \qquad (9.2)$$

$(P_m \in F, m = 1,2,\ldots)$ bo'laklashlarning qaraymizki, ularning mos diametrlaridan tashkil topgan

$$\lambda_{P_1}, \lambda_{P_2}, \lambda_{P_3}, \ldots, \lambda_{P_m}, \ldots$$

ketma-ketlik nolga intilsin: $\lambda_{P_m} \to 0$.

Bunday P_m $(m=1,2,\ldots)$ bo'laklashlarga nisbatan $f(x)$ funksiyaning integral yig'indilarini tuzamiz. Natijada $[a,b]$ segmentni (9.2) bo'laklashlarga mos $f(x)$ funksiyaning integral yig'indilari qiymatlaridan iborat quyidagi

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m, \ldots$$

ketma-ketlik hosil bo'ladi. Ravshanki, bu ketma-ketlikning har bir hadi ξ_k nuqtalarga bog'liqdir.

3-ta'rif. Agar $[a,b]$ segmentni har qanday (9.2) bo'laklashlar ketma-ketligi $\{P_m\}$ olinganda ham unga mos integral yig'indi qiymatlaridan iborat $\{\sigma_m\}$ ketma-ketlik ξ_k nuqtalarning tanlab olinishiga bog'liq bo'lmagan ravishda hamma vaqt bitta J songa intilsa, bu J son σ yig'indining $\lambda_P \to 0$ *dagi limiti* deb ataladi. U

$$\lim_{\lambda_P \to 0} \sigma = \lim_{\lambda_P \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$$

kabi belgilanadi.

Yig'indi limitini quyidagicha ham ta'riflash mumkin.

4-ta'rif. Agar $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $\delta > 0$ son topilsaki, $[a,b]$ segmentni diametri $\lambda_P < \delta$ bo'lgan har qanday P bo'laklash uchun tuzilgan σ yig'indi ixtiyoriy ξ_k nuqtalarda

$$|\sigma - J| < \varepsilon$$

tengsizlikni qanoatlantirsa, J son σ yig'indining $\lambda_P \to 0$ *dagi* *limiti* deb ataladi.

5-ta'rif. Agar $\lambda_P \to 0$ da $f(x)$ funksiyaning integral yig'indisi (9.1) chekli limitga ega bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda integrallanuvchi deyiladi, σ yig'indining chekli limiti J esa — $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ segmentdagi *aniq integrali* deb ataladi. Funksiyaning aniq integrali

$$\int_a^b f(x)dx$$

kabi belgilanadi.

Demak,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda_P \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k .$$

Bunda a son integralning quyi chegarasi, b son esa integralning yuqori chegarasi, $[a,b]$ segment inegrallash oralig'i deb ataladi.

Agar $\lambda_P \to 0$ da yig'indining limiti mavjud bo'lmasa yoki uning limiti cheksiz bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda integrallanmaydi deyiladi.

9.1-misol. $f(x)=C=const$ funksiyaning $[a,b]$ segmetndagi integrali hisoblansin.

◀ $[a,b]$ segmentni ixtiyoriy

$$P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\} \qquad (a=x_0<x_1<\dots<x_n=b)$$

bo'laklashni olib, $f(x)=C$ funksiyaning integral yig'indisini topamiz:

$$\sigma=\sum_{k=0}^{n-1} C\cdot\Delta x_k = C\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k = C[(x_1-x_0)+(x_2-x_1)+\dots+(x_n-x_{n-1})]=$$
$$=C(x_n-x_1)=C(b-a).$$

Ravshanki,

$$\lim_{\lambda_P \to 0}\sigma=\lim_{\lambda_P \to 0} C(b-a)=C(b-a).$$

Demak,

$$\int_a^b C\,dx=C(b-a). \blacktriangleright$$

Xususan, $f(x)=1$ bo'lganda quyidagiga egamiz:

$$\int_a^b 1\cdot dx=\int_a^b dx=b-a$$

9.2-misol. Ushbu $f(x)=x$ funksiyaning $[a,b]$ segmentdagi integrali hisoblansin.

◀ Ma'lumki, $[a,b]$ segmentda $f(x)=x$ funksiyaning integral yig'indisi

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \Delta x_k$$

bo'lib, bunda $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ va

$$x_k \le \xi_k \le x_{k+1}.$$

Bu tengsizlikni $\Delta x_k > 0$ ga ko'paytirib topamiz:

$$x_k \cdot \Delta x_k \le \xi_k \cdot \Delta x_k \le x_{k+1} \cdot \Delta x_k \qquad (k = 0,1,\dots,n-1)$$

Keyingi tengsizliklardan esa

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_k \Delta x_k \le \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \Delta x_k \le \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} \Delta x_k$$

tengsizliklar kelib chiqadi.

Demak,

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_k \Delta x_k \le \sigma \le \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} \Delta x_k$$

Endi $\sum_{k=0}^{n-1} x_k \Delta x_k$ va $\sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} \Delta x_k$ yig'indilarni quyidagicha o'zgartirib yozib olamiz:

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_k \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} x_k (x_{k+1} - x_k) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}^2 - x_k^2) - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k)^2 = \frac{1}{2}(x_n^2 - x_0^2) -$$

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2 = \frac{b^2 - a^2}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2.$$

Agar $x_{k+1} = x_k + \Delta x_k$ ekanini e'tiborga olsak, u holda

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} (x_k + \Delta x_k) \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} x_k \Delta x_k + \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2 = \frac{b^2 - a^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2$$

Demak,

$$\frac{b^2 - a^2}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2 \le \sigma \le \frac{b^2 - a^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2.$$

Bu munosabatdan

$$\left|\sigma - \frac{b^2 - a^2}{2}\right| \le \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2$$

tengsizlik kelib chiqadi. So'ngra $\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2$ uchun

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2 \le \lambda_P \cdot \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = \frac{b-a}{2} \lambda_P$$

(bunda $\lambda_P = \max_k\{\Delta x_k\}$) bo'lishidan $\lambda_P \to 0$ da

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2 \to 0$$

bo'lishini topamiz.

Demak,

$$\lim_{\lambda_P \to 0} \sigma = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Bu esa ta'rifga ko'ra

$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

ekanligini bildiradi. ►

9.3–misol. $[a,b]$ segmentda Dirixle funksiyasi uchun aniq integral mavjud emasligini ko'rsatilsin.

◄ Dirixle funksiyasi $D(x)$ uchun integral yig'indi quyidagicha bo'lishini ko'rgan edik:

$$\sigma = \begin{cases} b-a, & \text{agar barcha } \xi_k \text{ ratsional son bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar barcha } \xi_k \text{ irratsional son bo'lsa.} \end{cases}$$

Ravshanki $\lambda_P \to 0$ da σ yig'indi limitga ega emas. Demak, Dirixle funksiyasi $[a,b]$ segmentda integrallanmaydi. ►

Odatda, yuqorida keltirilgan aniq integral Riman integrali, integral yig'indi Riman yig'indisi deyiladi.

1–eslatma. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda chegaralanmagan bo'lsa, u shu segmentda integrallanmaydi.

4⁰. Darbu yig'indilari. $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda aniqlangan bo'lib, shu oraliqda chegaralangan bo'lsin:

$$m \le f(x) \le M, \qquad x \in [a,b]$$

$[a,b]$ oraliqni biror

$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathcal{P}$$

$(a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$ bo'laklashni olaylik. Bu funksiyaning aniq chegaralari

$$m_k = \inf\{f(x)\},\ x \in [x_k, x_{k+1}],$$
$$M_k = \sup\{f(x)\},\ x \in [x_k, x_{k+1}]$$

mavjud (2–bob, 6–§).

Ravshanki, ixtiyoriy $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ uchun

$$m_k \le f(\xi_k) \le M_k \qquad (9.3)$$

bo'ladi. Endi m_k va M_k sonlarni $[x_k, x_{k+1}]$ oraliqning uzunligi $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ $(k = 0,1,\ldots,n-1)$ga ko'paytirib quyidagi

$$\sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k = m_0 \Delta x_0 + m_1 \Delta x_1 + \ldots + m_k \Delta x_k + \ldots + m_{n-1} \Delta x_{n-1},$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k = M_0 \Delta x_0 + M_1 \Delta x_1 + \ldots + M_k \Delta x_k + \ldots + M_{n-1} \Delta x_{n-1}$$

yig'indilarni tuzamiz.

6–ta'rif. Ushbu

$$s=\sum_{k=0}^{n-1} m_k\Delta x_k, \quad S=\sum_{k=0}^{n-1} M_k\Delta x_k$$

yig'indilar mos ravishda *Darbuning quyi hamda yuqori yig'indilari* deb ataladi.

Darbu yig'indilari funksiyaga hamda P bo'laklashga bog'liq:

$$s=s(P), S=S(P)$$

va har doim

$$s(P)\le S(P)$$

bo'ladi.

(9.3) tengsizliklarni Δx_k ga ko'paytirib topamiz:

$$m_k\Delta x_k \le f(\xi_k)\Delta x_k \le M_k\Delta x_k \qquad (k=0,1,\ldots,n-1)$$

Keyingi tengsizliklardan esa

$$\sum_{k=0}^{n-1} m_k\Delta x_k \le \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k \le \sum_{k=0}^{n-1} M_k\Delta x_k$$

tengsizliklar kelib chiqadi. Demak,

$$s(p)\le \sigma \le S(P)$$

Shunday qilib, $f(x)$ funksiyaning integral yig'indisi har doim uning Darbu yig'indilari orasida bo'lar ekan.

(9.3) munosabatdan yana bitta xulosa chiqarish mumkin: ξ_k nuqtani tanlab olish hisobiga $f(\xi_k)$ ni m_k shuningdek, M_k qiymatlarga har qancha yaqin keltirish mumkin. Bundan esa Darbuning quyi va yuqori yig'indilari berilgan bo'laklash uchun integral yig'indining mos ravishda aniq quyi hamda aniq yuqori chegaralari bo'lishi kelib chiqadi:

$$s=\inf_{\xi_k}\{\sigma\}, S=\sup_{\xi_k}\{\sigma\}$$

Aniq chegaralar xossalaridan foydalanib topamiz:

$$m\le m_k, M_k\le M \qquad (k=0,1,\ldots,n-1)$$

Natijada

$$s(P)=\sum_{k=0}^{n-1} m_k\Delta x_k \ge m\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k = m(b-a)$$

$$S(P)=\sum_{k=0}^{n-1} M_k\Delta x_k \le M\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k = M(b-a)$$

bo'ladi.

Ravshanki,

$$\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k = b-a$$

Demak, $\forall P\in\mathcal{P}$ uchun quyidagi

$$m(b-a) \le s(P) \le S(P) \le M(b-a) \qquad (9.4)$$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi. Bu esa Darbu yig'indilarining chegaralanganligini bildiradi.

5⁰. Aniq integralning boshqacha ta'rifi. $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda aniqlangan bo'lib, u shu oraliqda chegaralangan bo'lsin. $[a,b]$ oraliqni bo'laklashlar to'plami $F=\{P\}$ ning har bir $P\in F$ bo'laklashi uchun $f(x)$ funksiyaning Darbu yig'indilari $s(P), S(P)$ ni tuzib,

$$\{s(P)\}, \{S(P)\}$$

to'plamlarni qaraymiz. Bu to'plamlar (9.4) ga ko'ra chegaralangan bo'ladi.

7–ta'rif. $\{s(P)\}$ to'plamning aniq yuqori chegarasi $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ *oraliqdagi quyi integrali* deb ataladi. U

$$\underline{J}=\underline{\int_a^b} f(x)dx$$

kabi belgilanadi.

$\{S(P)\}$ to'plamning aniq quyi chegarasi $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ oraliqdagi yuqori integrali deb ataladi. U

$$\overline{J}=\overline{\int_a^b} f(x)dx$$

kabi belgilanadi. Demak,

$$\underline{J}=\underline{\int_a^b} f(x)dx=\sup\{s(P)\},$$

$$\overline{J}=\overline{\int_a^b} f(x)dx=\inf\{S(P)\}$$

8–ta'rif. Agar $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ oraliqdagi quyi hamda yuqori integrallari bir biriga teng bo'lsa, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda integrallanuvchi deyiladi, ularning umumiy qiymati

$$J=\underline{\int_a^b} f(x)dx=\overline{\int_a^b} f(x)dx$$

$f(x)$ funksiya $[a,b]$ *oraliqdagi aniq integrali* deyiladi. Agar

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \ne \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda integrallanmaydi deyiladi.

Demak,

$$\int_a^b f(x)=\underline{\int_a^b} f(x)dx=\overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

2–§. Aniq integralning mavjudligi

1°. Darbu yig'indilarning xossalari. Faraz qilaylik, $F=\{P\}$ to'plam $[a,b]$ oraliqning barcha bo'laklashlaridan iborat to'plam bo'lsin. Agar $P_1\in F$ bo'laklashning har bir bo'luvchi nuqtasi $P_2\in F$ bo'laklashning ham bo'luvchi nuqtasi bo'lsa, P_2 bo'laklash P_1 ni ergashtiradi deyiladi va $P_1\subset P_2$ kabi belgilanadi.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda chegaralangan bo'lib, $P_1\in F$ va $P_2\in F$ bo'laklashlari uchun Darbu yig'indilari

$$s(P_1),S(P_1);\ s(P_2),S(P_2)$$

bo'lsin.

1). Agar $P_1\subset P_2$ bo'lsa, u holda

$$s(P_1)\le s(P_2),S(P_1)\ge S(P_2)$$

bo'ladi.

2). $\forall P_1\in F,\ \forall P_2\in F$ uchun

$$s(P_2)\le S(P_1)$$

bo'ladi.

3). Darbu yig'indilarida tuzilgan

$$\{s(P)\},\{S(P)\}\qquad (P\in F)$$

to'plam uchun

$$\sup_{P\in F}\{s(P)\}\le \inf_{P\in F}\{S(P)\}$$

ya'ni

$$\underline{J}\le \overline{J}$$

bo'ladi.

4). Ixtiyoriy $\varepsilon>0$ olinganda ham shunday $\delta>0$ topiladiki, diametri $\lambda_P<\delta$ bo'lgan $[a,b]$ oraliqning P bo'laklashlari uchun

$$S(P)<\inf\{S(P)\}+\varepsilon,$$

$$s(P)>\sup\{s(P)\}-\varepsilon$$

ya'ni

$$S(P)<\overline{J}+\varepsilon,s(P)>\underline{J}-\varepsilon$$

bo'ladi.

Bu xossalardan birining masalan 2) – ning isbotini keltiramiz.

◄ Aytaylik, P_1 va P_2 lar $[a,b]$ oraliqning ixtiyoriy bo'laklashlari bo'lsin. Bu bo'laklashlarning barcha bo'luvchi nuqtalari yordamida $[a,b]$ ning yangi P bo'laklashini hosil qilamiz. Ravshanki,

$$P_1\subset P,P_2\subset P$$

bo'ladi. P bo'laklash uchun tuzilgan Darbu yig'indilari $s(P)$ va

$S(P)$ lar uchun 1) - xossaga ko'ra

$$s(P_1) \le s(P), S(P) \le S(P_1)$$

$$s(P_2) \le s(P), S(P) \le S(P_2)$$

bo'lib, ulardan

$$s(P_2) \le s(P) \le S(P) \le S(P_1)$$

ya'ni

$$s(P_2) \le S(P_1)$$

bo'lishi kelib chiqadi. ►

Bu xossa $[a,b]$ oraliqni bo'laklashlar uchun tuzilgan quyi yig'indilar to'plami $\{s(P)\}$ ning har bir elementi yuqorida yig'indilar to'plami $\{S(P)\}$ ning istalgan elementidan katta emasligini bildiradi. (Qolgan xossalarining isboti [1] ning 9 - bobidan qaralsin).

2^0. **Aniq integralning mavjudligi**. Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda chegaralangan bo'lsin.

1-teorema. *$f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'lishi uchun $\forall\varepsilon>0$ olinganda ham shunday $\delta>0$ son topilib, $[a,b]$ oraliqni diametri $\lambda_P<\delta$ bo'lgan har qanday P bo'laklashi uchun Darbu yig'indilari*

$$S(P)-s(P)<\varepsilon$$

tengsizlikni qanoatlantirishi zarur va yetarli.

◄ **Zarurligi**. $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'lsin. Ta'rifga ko'ra $\bar{J}=J=\underline{J}$ bo'ladi, bunda

$$\underline{J}=\sup\{s(P)\}, \bar{J}=\inf\{S(P)\}$$

$\forall\varepsilon>0$ olinganda ham shunday $\delta>0$ son topiladiki, $[a,b]$ oraliqning diametri $\lambda_P<\delta$ bo'lgan har qanday P bo'laklashida Darbu yig'indilari uchun 1^0 – dagi 4) xossaga ko'ra $S(P)-J<\frac{\varepsilon}{2}, J-s(P)<\frac{\varepsilon}{2}$ tengsizliklar o'rinli bo'lib, undan $S(P)-s(P)<\varepsilon$ tengsizlik kelib chiqadi.

◄ **Yetarliligi**. $\forall\varepsilon>0$ olinganda ham shunday $\delta>0$ son topilib, $[a,b]$ oraliqni diametri $\lambda_P<\delta$ bo'lgan har qanday P bo'laklashida Darbu yig'indilari uchun

$$S(P)-s(P)<\varepsilon$$

tengsizlik o'rinli bo'lsin. $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda chegaralanganligi uchun uning quyi hamda yuqori integrallari

$$\underline{J}=\sup\{s(P)\}, \bar{J}=\inf\{S(P)\}$$

mavjud va 1^0. dagi 3) –xossaga ko'ra $\underline{J}\le\bar{J}$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Ravshanki,

$$s(P) \le I \le J \le S(P)$$

Bu munosabatdan

$$0 \le J - I \le S(P) - s(P)$$

bo'lishini topamiz. Demak, $\forall\varepsilon > 0$ son uchun $0 \le J - I < \varepsilon$ bo'lib, undan $I = J$ bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa $f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ oraliqda integrallanuvchi ekanligini bildiradi. ►

Agar avvalgidek $f(x)$ funksiyaning $[x_k, x_{k+1}]$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ oraliqdagi tebranishini ω_k orqali belgilasak, u holda

$$S(P) - s(P) = \sum_{k=0}^{n-1}(M_k - m_k)\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1}\omega_k \Delta x_k$$

bo'lib, yuqorida keltirilgan teorema quyidagicha ifodalanadi.

2–teorema. *$f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'lishi uchun $\forall\varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $\delta > 0$ son topilib, $[a, b]$ oraliqni diametri $\lambda_P < \delta$ bo'lgan har qanday P bo'laklashda*

$$\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k \Delta x_k < \varepsilon \qquad (9.5)$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli.

Ravshanki, (9.5) munosabatni quyidagi

$$\lim_{\lambda_P \to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k \Delta x_k = 0$$

ko'rinishda ham yozish mumkin.

3–§. Integrallanuvchi funksiyalar sinfi

Ushbu paragrafda aniq integralning mavjudligi haqidagi teoremadan foydalanib, ba'zi funksiyalarning sinfi integrallanuvchi bo'lishini ko'rsatamiz.

$f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda aniqlangan bo'lsin.

3–teorema. *Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda uzluksiz bo'lsa, u shu oraliqda integrallanuvchi bo'ladi.*

◄ $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda uzluksiz bo'lsin. Veyershtrassning birinchi teoremasiga (5 – bobdagi 7 – teoremaga qarang) ko'ra funksiya $[a, b]$ da chegaralangan. Ikkinchi tomondan, Kantor toeremasining (5 – bobdagi 10 – teoremaga qarang) 3 – natijaga ko'ra $\forall\varepsilon > 0$ olinganda ham shunday $\delta > 0$ son topiladiki, $[a, b]$ oraliqni uzluklari δ dan kichik bo'lgan bo'laklarga ajratilganda funksiyaning har bir bo'lakdagi tebranishi uchun $\omega_k < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Demak, $[a, b]$ oraliqni diametri $\lambda_P < \delta$ bo'lgan har qanday P bo'laklashda

$$S(P)-s(P)=\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k\Delta x_k<\varepsilon\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k=\varepsilon(b-a)$$

bo'lib, undan

$$\lim_{\lambda_P\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k\Delta x_k=0$$

kelib chiqadi. Demak, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da integrallanuvchi. ►

4-teorema. *Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda chegaralangan va monoton bo'lsa, funksiya shu oraliqda integrallanuvchi bo'ladi.*

◄ $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da chegaralangan va shu oraliqda, aytaylik, o'suvchi bo'lsin. $\forall\varepsilon>0$ sonni olib, unga ko'ra $\delta>0$ sonni quyidagicha tanlaylik:

$$\delta=\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}>0$$

So'ngra $[a,b]$ oraliqni diametri $\lambda<\delta$ bo'lgan P bo'laklashi uchun Darbu yig'indilari $S(P)$ va $s(P)$ ni tuzamiz. U holda

$$S(P)-s(P)=\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k\Delta x_k=\sum_{k=0}^{n-1}[f(x_{k+1})-f(x_k)]\Delta x_k\le\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\sum_{k=0}^{n-1}[f(x_{k+1})-f(x_k)]$$

$$=\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}[f(x_1)-f(x_0)+f(x_2)-f(x_1)+\ldots+f(x_n)-f(x_{n-1})]=$$

$$=\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}(f(x_n)-f(x_0))=\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}(f(b)-f(a))=\varepsilon$$

Demak, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda integrallanuvchi. ►

Chegaralangan hamda kamayuvchi funksiyaning integrallanuvchi bo'lishi ham xuddi shunga o'xshash isbotlanadi.

5-teorema. *Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda chegaralangan va bu oraliqning chekli sondagi nuqtalarida uzulishga ega bo'lib, qolgan barcha nuqtalarida uzluksiz bo'lsa, funksiya shu oraliqda integrallanuvchi bo'ladi.*

◄ $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da chegaralangan bo'lib, shu oraliqning faqat bitta x^* $(x^*\in[a,b])$ nuqtasida uzilishga ega, qolgan barcha nuqtalarida uzluksiz bo'lsin.

$\forall\varepsilon>0$ son olib, x^* nuqtaning

$$U_\varepsilon(x^*)=\{x:x\in R,\ x^*-\varepsilon<x<x^*+\varepsilon\}$$

atrofini tuzamiz. Bu atrof $[a,b]$ oraliqni

$$U_\varepsilon(x^*),\ [a,b]\setminus U_\varepsilon(x^*)=[a,x^*-\varepsilon]\cup[x^*+\varepsilon,b]$$

qismlarga ajratadi.

Shartga ko'ra, $f(x)$ funksiya $[a,x^*-\varepsilon]$ va $[x^*+\varepsilon,b]$ oraliqlarning har birida uzluksiz. Bu oraliqlarning har biriga alohida Kantor teoremasining natijasini (5-bobdagi 3-natijani qarang) qo'llanamiz. U holda olingan $\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta_1>0$ va $\delta_2>0$ sonlar topiladiki,

$$[a,x^*-\varepsilon] \text{ da } \Delta x_k<\delta_1 \text{ dan } \omega_k<\varepsilon,$$

$$[x^*+\varepsilon,b] \text{ da } \Delta x_k<\delta_2 \text{ dan } \omega_k<\varepsilon$$

tengsizliklar o'rinli ekani kelib chiqadi. Agar $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ deb olsak, u holda ikkala oraliq uchun bir vaqtda

$$\Delta x_k<\delta \text{ dan } \omega_k<\varepsilon$$

tengsizlikning o'rinli ekani kelib chiqadi.

Endi yuqoridagi $\forall\varepsilon>0$ songa ko'ra $\delta>0$ sonni $\delta<\varepsilon$ deb olaylik.

$[a,b]$ oraliqni diametri $\lambda<\delta$ bo'lgan bo'laklashlari uchun $f(x)$ funksiyaning Darbu yig'indilarini tuzib, quyidagi

$$S(P)-s(P)=\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k\Delta x_k \qquad (9.6)$$

ayirmani qaraymiz. (9.6) yig'indining har bir hadida $[x_k,x_{k+1}]$ $(k=0,1,\dots,n-1)$ oraliqning uzunligi Δx_k qatnashadi. Bu $[x_k,x_{k+1}]$ oraliqlarning x^* nuqtaning $U_\varepsilon(x^*)$ atrofidan tashqarida joylashganiga, ya'ni $[x_k,x_{k+1}]\cap U_\varepsilon(x^*)=\emptyset$ munosabat o'rinli bo'ladiganiga mos keladigan (9.6) yig'indining hadlaridan tuzilgan yig'indi

$$\sum_k{}'\omega_k\Delta x_k$$

bo'lsin. (9.6) yig'indining qolgan barcha hadlaridan tashkil topgan yig'indi

$$\sum_k{}''\omega_k\Delta x_k$$

bo'lsin, bunda $[x_k,x_{k+1}]\subset U_\varepsilon(x^*)$ yoki $[x_k,x_{k+1}]\cap\{x^*-\varepsilon\}\neq\emptyset$ yoki $[x_k,x_{k+1}]\cap\{x^*+\varepsilon\}\neq\emptyset$ bo'ladi.

Natijada (9.6) yig'indi ikki qismga ajraladi:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k\Delta x_k=\sum_k{}'\omega_k\Delta x_k+\sum_k{}''\omega_k\Delta x_k \qquad (9.7)$$

Endi bu yig'indilarni baholaymiz. Yuqoridagi (9.6) munosabatdan foydalanib, topamiz:

$$\sum_k{}'\omega_k\Delta x_k<\sum_k{}'\varepsilon\cdot\Delta x_k\le\varepsilon\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k=\varepsilon(b-a) \qquad (9.8)$$

Ikkinchi yig'indi uchun

$$\sum_k{}''\omega_k\Delta x_k\le\sum_k{}''\Omega\cdot\Delta x_k=\Omega\cdot\sum_k{}''\Delta x_k$$

bo'lishini topamiz, bunda Ω – $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ oraliqdagi tebranishi.

Agar ε (x^*) atrofda butunlay joylashgan $[x_k, x_{k+1}]$ oraliqlari uzunliklarining yig'indisi 2ε dan kichikligini hamda $x^*-\varepsilon$ va $x^*+\varepsilon$ nuqtalarini o'z ichiga olgan $[x_i, x_{i+1}]$ oraliqlar ikkita bo'lib, ularning uzunliklari yig'indisi ham 2ε (chunki $\delta<\varepsilon$) dan kichik bo'lishini e'tiborga olsak, u holda

$$\sum{}'' \Delta x_k < 4\varepsilon \tag{9.9}$$

bo'ladi. Natijada (9.7), (9.8) va (9.9) munosabatlardan

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k < \varepsilon(b-a) + 4\varepsilon\Omega = \varepsilon[(b-a)+4\Omega]$$

ekani kelib chiqadi. Demak,

$$\lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k = 0$$

Bu $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ da integrallanuvchi bo'lishini bildiradi.

$f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqning chekli sondagi nuqtalarida uzilishga ega bo'lib, qolgan barcha nuqtalarida uzluksiz bo'lsa, uning $[a,b]$ da interallanuvchi bo'lishi yuqoridagidek isbot etiladi. ►

2-eslatma. $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'lsin. Biz

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

hamda

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

tengliklar o'rinli deb kelishib olamiz.

4-§. Aniq integralning xossalari

Endi $f(x)$ funksiya aniq integralining xossalarini o'rganamiz.

1-xossa. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'lsa, u istalgan $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$ oraliqda ham integrallanuvchi bo'ladi.

◄ $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da integrallanuvchi bo'lsin. U holda 1 teoremaga ko'ra $\forall\varepsilon>0$ olinganda ham shunday $\delta>0$ son topiladiki, $[a,b]$ oraliqni diametri $\lambda<\delta$ bo'lgan har qanday $P=\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ bo'laklash uchun

$$S(P)-s(P)<\varepsilon \tag{9.10}$$

tengsizlik bajariladi.

bo'laklashning bo'luvchi nuqtalari $x_0, x_1, \ldots, x_n$ qatoriga α hamda β nuqtalarni qo'shib, $[a,b]$ oraliqni yangi P_1 bo'laklashni hosil qilamiz. Ravshanki, $P \subset P_1$ bo'ladi. U holda Darbu yig'indilarining xossasiga ko'ra (ushbu bobning 4 §, 2 - bandiga qarang)

$$s(P) \le s(P_1),\ S(P_1) \le S(P) \tag{9.11}$$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi. (9.10) va (9.11) munosabatlardan

$$S(P_1) - s(P_1) < \varepsilon \tag{9.12}$$

bo'lishi kelib chiqadi.

$[\alpha,\beta]$ oraliqdagi P_1 bo'laklashning bo'luvchi nuqtalarini $[\alpha,\beta]$ oraliqning biror P_2 bo'laklashning bo'luvchi nuqtalari sifatida qaraymiz. Bu P_2 bo'laklash uchun $f(x)$ funksiyaning Darbu yig'indilari $s(P_2), S(P_2)$ bo'lsin. U holda

$$S(P_1) - s(P_1) = \sum_{[a,b]} (M_k - m_k)\Delta x_k,$$

$$S(P_2) - s(P_2) = \sum_{[\alpha,\beta]} (M_k - m_k)\Delta x_k$$

yig'indilarni taqqoslab,

$$S(P_2) - s(P_2) \le S(P_1) - s(P_1)$$

bo'lishini topamiz. Natijada (9.12) munosabatni e'tiborga olsak

$$S(P_2) - s(P_2) < \varepsilon$$

kelib chiqadi. Bundan 1- teoremaga ko'ra $f(x)$ funksiyaning $[\alpha,\beta]$ oraliqda integrallanuvchi ekani kelib chiqadi. ►

2-xossa. Agar $f(x)$ funksiya $[a,c]$ hamda $[c,b]$ oraliqlarda integrallanuvchi bo'lsa, u holda funksiya $[a,b]$ oraliqda ham integrallanuvchi bo'ladi va ushbu

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

formula o'rinli.

◄ $f(x)$ funksiya $[a,c]$ hamda $[c,b]$ oraliqlarda integrallanuvchi bo'lsin $(a<c<b)$. U holda $\forall\varepsilon>0$ olinganda ham $\frac{\varepsilon}{2}$ songa ko'ra shunday $\delta_1>0$ son topiladiki, $[a,c]$ oraliqni diametri $\lambda_{P_1}<\delta_1$ bo'lgan har qanday P_1 bo'laklashida Darbu yig'indilari uchun

$$S(P_1) - s(P_1) < \frac{\varepsilon}{2}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Shuningdek, o'sha $\frac{\varepsilon}{2}$ songa ko'ra shunday $\delta_2>0$ son topiladiki, $[c,b]$ oraliqni diametri $\lambda_{P_2}<\delta_2$ bo'lgan har qanday P_2 bo'laklashida Darbu yig'indilari uchun

$$S(P_2)-s(P_2)<\frac{\varepsilon}{2}$$
tengsizlik o'rinli bo'ladi. Endi $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ deb, $[a,b]$ oraliqni diametri $\lambda_P<\delta$ bo'lgan ixtiyoriy P_1 bo'laklashni olaylik. Bu bo'laklashning bo'luvchi nuqtalari qatoriga c $(a<c<b)$ nuqtani ham qo'shib, $[a,b]$ oraliqni yangi P bo'laklashni hosil qilamiz. Bu bo'laklash uchun Darbu yig'indilari $S(P),s(P)$ bo'lsin. $[a,c]$ oraliqdagi P bo'laklashning bo'luvchi nuqtalarini shu $[a,c]$ oraliqni biror P_1' bo'laklashning bo'luvchi nuqtalari $[c,b]$ oraliqni biror P_2' bo'laklashning bo'luvchi nuqtalari sifatida qaraymiz. Bu bo'laklashlar uchun Darbu yig'indilarini tuzamiz:

$$S(P_1'),s(P_1'),S(P_2'),s(P_2')$$

Ravshanki, bu yig'indilar uchun mos ravishda yuqoridagi (9.13), (9.14) tengsizliklar o'rinli bo'ladi:

$$S(P_1')-s(P_1')<\frac{\varepsilon}{2},$$

$$S(P_2')-s(P_2')<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Ikkinchi tomondan,

$$S(P)=S(P_1')+S(P_2'),$$
$$s(P)=s(P_1')+s(P_2')$$

bo'lib, natijada

$$S(P)-s(P)=[S(P_1')-s(P_1')]+[S(P_2')-s(P_2')]<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak, $\forall\varepsilon>0$ olinganda ham shunday $\delta>0$ son topiladiki, $[a,b]$ oraliqni diametri $\lambda_P<\delta$ bo'lgan har qanday P bo'laklashida Darbu yig'indilari uchun

$$S(P)-s(P)<\varepsilon$$

bo'ladi. Bu esa 1 – teoremaga ko'ra $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ oraliqda integrallanuvchi ekanini ko'rsatadi.

Yuqoridagi P bo'laklash uchun $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ oraliqdagi integral yig'indilarini tuzib, ularni mos ravishda quyidagi

$$\sum_{[a,b]}f(\xi_k)\Delta x_k,\quad \sum_{[a,c]}f(\xi_k)\Delta x_k,\quad \sum_{[c,b]}f(\xi_k)\Delta x_k.$$

ko'rinishda belgilasak, u holda

$$\sum_{[a,b]}f(\xi_k)\Delta x_k=\sum_{[a,c]}f(\xi_k)\Delta x_k+\sum_{[c,b]}f(\xi_k)\Delta x_k \qquad (9.15)$$

bo'ladi. $f(x)$ funksiya $[a,c]$, $[c,b]$ hamda $[a,b]$ oraliqlarda integrallanuvchi bo'lgani uchun

$$\lim_{\lambda_p \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx,$$

$$\lim_{\lambda_1 \to 0} \sum_{k=0}^{m-1} f(\xi_k')\Delta x_k' = \int_a^c f(x)dx,$$

$$\lim_{\lambda_2 \to 0} \sum_{k=m}^{n-1} f(\xi_k'')\Delta x_k'' = \int_c^b f(x)dx.$$

tengliklarga egamiz. (9.15) tenglikdan $\lambda_p \to 0$ da izlangan formula kelib chiqadi.

Endi c nuqta $[a,b]$ oraliqdan tashqaridan yotsin, ya'ni c nuqta $c<a<b$ yoki $a<b<c$ tengsizlikni qanoatlantirsin. Agar $c<a<b$ bo'lsa, u holda $[a,b] \subset [c,b]$ bo'lgani uchun 1 -xossaga ko'ra $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da integrallanuvchi bo'lib, yuqorida isbot etilganiga asosan

$$\int_c^b f(x)dx = \int_c^a f(x)dx + \int_a^b f(x)dx$$

formula o'rinli bo'ladi. Bundan esa, 2- eslatmadan foydalanib

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_c^a f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

bo'lshini topamiz.

Xuddi shunga o'xshash, $a<b<c$ bo'lganda ham $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da integrallanuvchi bo'lishi va tegishli formulaning o'rinli ekani ko'rsatiladi. ►

3-xossa. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'lsa, u holda $cf(x)$ $(c = const)$ ham shu oraliqda integrallanuvchi bo'ladi va ushbu

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$$

formula o'rinli.

◄ $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'lsin. Demak,

$$\lim_{\lambda_p \to 0} \sigma = \lim_{\lambda_p \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx$$

Endi $cf(x)$ funksiyaning mos integral yig'indisini yozamiz:

$$\sigma_1 = \sum_{k=0}^{n-1} cf(\xi_k) \cdot \Delta x_k$$

U holda

$$\sigma_1 = \sum_{k=0}^{n-1} cf(\xi_k)\Delta x_k = c\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k = c \cdot \sigma$$

Bundan $\lambda_p \to 0$ da quyidagi

$$\lim_{\lambda_P\to 0}\sigma_1=\lim_{\lambda_P\to 0}c\sigma=c\lim_{\lambda_P\to 0}\sigma=c\int_a^b f(x)dx$$

tenglik kelib chiqadi. Bu izlangan formulaning o'rinli ekanini anglatadi. ►

4–xossa. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da integrallanuvchi va $f(x)\geq d>0$ bo'lsa, u holda $\frac{1}{f(x)}$ funksiya ham shu oraliqda integrallanuvchi bo'ladi.

◄ $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da integrallanuvchi bo'lsin. Demak, $\forall\varepsilon>0$ olinganda ham $d^2\varepsilon$ ga ko'ra shunday $\delta>0$ topiladiki, $[a,b]$ oraliqni diametri $\lambda_P<\delta$ bo'lgan har qanday P bo'laklash uchun

$$S(P)-s(P)=\sum_{k=0}^{n-1}(M_k-m_k)\Delta x_k<d^2\varepsilon$$

bo'ladi. Bunda

$$M_k=\sup\{f(x)\},\quad x\in[x_k,x_{k+1}]$$
$$m_k=\inf\{f(x)\},\quad x\in[x_k,x_{k+1}].$$

$f(x)\geq d>0$ bo'lganligini e'tiborga olib, $\frac{1}{f(x)}$ funksiya uchun

$$M_k^*=\sup\{\frac{1}{f(x)}\},\quad x\in[x_k,x_{k+1}]$$

$$m_k^*=\inf\{\frac{1}{f(x)}\},\quad x\in[x_k,x_{k+1}]$$

mavjud bo'lishini aniqlaymiz. Ravshanki,

$$M_k^*=\frac{1}{m_k},\ m_k^*=\frac{1}{M_k}$$

bo'ladi. Natijada

$$S(P)-s(P)=\sum_{k=0}^{n-1}(M_k^*-m_k^*)\Delta x_k=\sum_{k=0}^{n-1}(\frac{1}{m_k}-\frac{1}{M_k})\Delta x_k=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{M_k-m_k}{m_kM_k}\Delta x_k\leq$$

$$\leq\frac{1}{d^2}\sum_{k=0}^{n-1}(M_k-m_k)\Delta x_k<\varepsilon$$

bo'ladi. Bu esa $\frac{1}{f(x)}$ funksiyaning $[a,b]$ da integrallanuvchi ekanini bildiradi. ►

5–xossa. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a,b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'lsa, u holda $f(x)\pm g(x)$ funksiya ham shu oraliqda integrallanuvchi bo'ladi va ushbu

$$\int_a^b[f(x)\pm g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$$

formula o'rinli bo'ladi.

◀ $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a,b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'lsin. Demak,

$$\lim_{\lambda_P\to 0}\sigma_1=\lim_{\lambda_P\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}f(\xi_k)\Delta x_k=\int_a^b f(x)dx,$$

$$\lim_{\lambda_P\to 0}\sigma_2=\lim_{\lambda_P\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}g(\xi_k)\Delta x_k=\int_a^b g(x)dx$$

Endi $f(x)\pm g(x)$ funksiyaning $[a,b]$ oraliqdagi mos integral yig'indisini yozamiz:

$$\sigma=\sum_{k=0}^{n-1}[f(\xi_k)\pm g(\xi_k)]\Delta x_k=\sum_{k=0}^{n-1}f(\xi_k)\Delta x_k\pm\sum_{k=0}^{n-1}g(\xi_k)\Delta x_k=\sigma_1\pm\sigma_2$$

Bundan $\lambda_P\to 0$ da quyidagiga egamiz:

$$\lim_{\lambda_P\to 0}\sigma=\lim_{\lambda_P\to 0}\sigma_1\pm\lim_{\lambda_P\to 0}\sigma_2=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$$

Bu izlangan formulaning o'rinli ekanini anglatadi. ▶

6–xossa. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a,b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'lsa, u holda $f(x)\cdot g(x)$ funksiya ham shu oraliqda integrallanuvchi bo'ladi.

◀ $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a,b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'lsin. U holda integralning mavjudligi haqidagi teoremaga ko'ra

$$\lim_{\lambda_P\to 0}(S_f(P)-s_f(P))=\lim_{\lambda_P\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}(M_k-m_k)\Delta x_k=0, \tag{9.16}$$

$$\lim_{\lambda_P\to 0}(S_g(P)-s_g(P))=\lim_{\lambda_P\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}(M'_k-m'_k)\Delta x_k=0. \tag{9.17}$$

Avval barcha $x\in[a,b]$ lar uchun $f(x)\ge 0,\ g(x)\ge 0$ deb qaraylik. U holda $\forall x\in[x_k,x_{k+1}]$ uchun

$$0\le m_k\le f(x)\le M_k$$
$$0\le m'_k\le g(x)\le M'_k$$

tengsizliklar o'rinli bo'lib, undan quyidagi

$$0\le m_k m'_k\le f(x)g(x)\le M_k M'_k$$

tengsizlik kelib chiqadi.

Ravshanki, $[x_k,x_{k+1}]$ $(k=0,1,\dots,n-1)$ oraliqda $f(x)\cdot g(x)$ funksiyaning quyidagi aniq chegaralari

$$m_k^0=\inf\{f(x)g(x)\},$$
$$M_k^0=\sup\{f(x)g(x)\}$$

mavjud bo'lib, ular uchun

$$m_k m'_k\le m_k^0<M_k^0\le M_k M'_k$$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi. U holda quyidagi

$$M_k'' - m_k'' \le M_k M_k' - m_k m_k' = M_k'(M_k - m_k) + m_k(M_k' - m_k'),$$
$$M = \sup_{x\in[a,b]}\{f(x)\} \ge M_k, \qquad M' = \sup_{x\in[a,b]}\{g(x)\} \ge M_k'$$

tengsizliklarni e'tiborga olib ($f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a,b]$ da chegaralanganligi uchun $M<\infty, M'<\infty$ bo'ladi), topamiz:

$$S_{fg}(P) - s_{fg}(P) = \sum_{k=0}^{n-1}(M_k'' - m_k'')\Delta x_k \le M'\sum_{k=0}^{n-1}(M_k - m_k)\Delta x_k + M\sum_{k=0}^{n-1}(M_k' - m_k')\Delta x_k$$

Endi (9.16) va (9.17) munosabatlardan foydalansak, u holda quyidagi

$$\lim_{\lambda_P\to 0}(S_{fg}(P) - s_{fg}(P)) = \lim_{\lambda_P\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}(M_k'' - m_k'')\Delta x_k = 0$$

tenglik kelib chiqadi. Demak, $f(x)g(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda integrallanuvchi.

Endi $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar ixtiyoriy integrallanuvchi funksiyalar bo'lsin. Bir tomondan $\forall x\in[a,b]$ lar uchun

$$f(x) - \inf\{f(x)\} = f(x) - m \ge 0,$$
$$g(x) - \inf\{g(x)\} = g(x) - m' \ge 0,$$

tengsizliklar o'rinli. Ikkinchi tomondan,

$f(x)g(x) = [f(x) - m][g(x) - m'] + mg(x) + m'f(x) - mm'$ deb yoza olamiz. Yuqorida isbot etilganiga hamda 4–xossaning natijasiga (1–natijasiga qarang) ko'ra, $f(x)g(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'ladi. ►

4) –va 5) –xossalardan quyidagi natija kelib chiqadi.

1–natija. Agar $f(x), g(x)$ funksiyalar $[a,b]$ da integrallanuvchi va $g(x)\ge d>0$ bo'lsa, u holda $\frac{f(x)}{g(x)}$ funksiya ham $[a,b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'ladi.

7–xossa. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'lib, $\forall x\in[a,b]$ lar uchun $f(x)\ge 0$ bo'lsa, u holda

$$\int_a^b f(x)dx \ge 0 \qquad\qquad (a<b)$$

bo'ladi.

◄ Ta'rifga ko'ra ushbu

$$\lim_{\lambda_P\to 0}\sigma = \lim_{\lambda_P\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$$

limit mavjud. Modomiki, $\forall x\in[a,b]$ lar uchun $f(x)\ge 0$ ekan, unda

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k \ge 0$$

va

$$\lim_{\lambda_P \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \ge 0$$

bo'ladi. Demak,

$$\int_a^b f(x)dx \ge 0 \ \blacktriangleright$$

2-natija. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a,b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'lib, $\forall x \in [a,b]$ lar uchun $f(x) \le g(x)$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda ushbu

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

tengsizlik ham o'rinli bo'ladi.

◀ Haqiqatan ham, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a,b]$ da integrallanuvchi bo'lganidan $g(x)-f(x) \ge 0$ funksiyaning integrallanuvchiligi 4-xossadan kelib chiqadi. 6-xossaga ko'ra bu holda

$$\int_a^b [g(x)-f(x)]dx \ge 0$$

tengsizlik kelib chiqadi. Bundan izlangan tengsizlikka ega bo'lamiz. ▶

3-natija. (Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi). Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a,b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'lsa, u holda (yuqoridagi xossalarga ko'ra) ushbu $f(x)-\alpha g(x)$ (α - ixtiyoriy o'zgarmas) funksiya ham $[a,b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'ladi va

$$\int_a^b [f(x)-\alpha g(x)]^2 dx \ge 0$$

tengsizlik o'rinli.

Demak, ixtiyoriy o'zgarmas α son uchun

$$\alpha^2 \int_a^b g^2(x)dx - 2\alpha \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b f^2(x)dx \ge 0$$

tengsizlik o'rinli. Bu tengsizlikning chap tomonidagi ifoda α ga nisbatan kvadrat uchhad bo'lib, u α ning barcha haqiqiy qiymatlarida manfiy emas. Demak, bu kvadrat uchhadning diskriminanti musbat emas, ya'ni

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 - \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx \le 0.$$

Natijada quyidagi

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}\sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}$$

tengsizlikka kelamiz. Bu tengsizlik Koshi Bunyakovskiy tengsizligi deb ataladi

8-xossa. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'lsa, u holda $|f(x)|$ funksiya ham shu oraliqda integrallanuvchi bo'ladi va

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

◄ $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'lsin. U holda $\forall\varepsilon>0$ olinganda ham shunday $\delta>0$ son topiladiki, $[a,b]$ oraliqni diametri $\lambda_P<\delta$ bo'lgan har qanday $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ bo'laklash uchun

$$S(P)-s(P)=\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k\Delta x_k<\varepsilon$$

bo'ladi, bunda ω_k $f(x)$ funksiyaning $[x_k,x_{k+1}]$ oraliqdagi tebranishi.

Ravshanki, $\forall x'\in[a,b]$, $\forall x''\in[a,b]$ lar uchun quyidagi

$$\big||f(x')|-|f(x'')|\big|\le|f(x')-f(x'')|$$

tengsizlik o'rinli bo'lib, undan

$$\sup\big||f(x')|-|f(x'')|\big|\le\sup|f(x')-f(x'')|$$

tengsizlik kelib chiqadi. Demak, $\omega_k'\le\omega_k$, bunda ω_k' $|f(x)|$ funksiyaning $[x_k,x_{k+1}]$ dagi tebranishi. Natijada

$$S_{|f|}(P)-s_{|f|}(P)=\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k'\Delta x_k\le\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k\Delta x_k<\varepsilon$$

bo'ladi. Bundan $|f(x)|$ funksiyaning $[a,b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'lishi kelib chiqadi.

$f(x)$ hamda $|f(x)|$ funksiyalarning $[a,b]$ oraliqdagi integral yig'indilarini yozamiz:

$$\sigma=\sum_{k=0}^{n-1}f(\xi_k)\Delta x_k,$$

$$\sigma_1=\sum_{k=0}^{n-1}|f(\xi_k)|\Delta x_k$$

U holda

$$|\sigma|=\left|\sum_{k=0}^{n-1}f(\xi_k)\Delta x_k\right|\le\sum_{k=0}^{n-1}|f(\xi_k)|\Delta x_k=\sigma_1$$

bo'ladi va $\lambda \to 0$ da limitga o'tib izlangan tengsizlikning o'rinli ekaniga ishonch hosil qilamiz. ►

5-§. O'rta qiymat haqidagi teoremalar

$f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda aniqlangan va chegaralangan bo'lsin. U holda $[a,b]$ oraliqda

$$m=\inf\{f(x)\},\ M=\sup\{f(x)\}$$

mavjud va $\forall x\in[a,b]$ uchun

$$m\le f(x)\le M \qquad (9.18)$$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi.

6-teorema. *Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'lsa, u holda shunday o'zgarmas μ $(m\le\mu\le M)$ son mavjudki, ushbu*

$$\int_a^b f(x)dx=\mu(b-a)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

◄ (9.18) tengsizliklardan foydalanib topamiz:

$$\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M\,dx$$

Bundan

$$m(b-a)\le \int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$$

Bu tengsizliklarni $b-a>0$ songa bo'lamiz:

$$m\le \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}\le M$$

Agar

$$\mu=\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

deb olsak, u holda izlangan tenglik kelib chiqadi. ►

4-natija. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz bo'lsa, u holda bu oraliqda shunday c $(c\in[a,b])$ nuqta topiladiki,

$$\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

7-teorema. *Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a,b]$ oraliqda* *integrallanuvchi bo'lib, $g(x)$ funksiya shu oraliqda o'z ishorasini o'zgartirmasa, u holda shunday o'zgarmas μ $(m \le \mu \le M)$ son mavjudki,*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu\int_a^b g(x)dx \qquad (9.19)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

◄ Aniq integralning 5 – xossasiga asosan $f(x)\cdot g(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'ladi. Endi $g(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda manfiy bo'lmasin, ya'ni $\forall x \in [a,b]$ lar uchun $g(x) \ge 0$ bo'lsin deylik. U holda $m \le f(x) \le M$ tengsizliklarni $g(x)$ ga ko'paytirib, so'ngra hosil bo'lgan ushbu

$$mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x)$$

tengsizliklarni $[a,b]$ oraliqda integrallab topamiz:

$$m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx. \qquad (9.20)$$

Ikki holni qaraylik:

a) $\int_a^b g(x)dx = 0$ bo'lsin. U holda

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$$

bo'lib, bunda μ deb $(m \le \mu \le M)$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy sonni olish mumkin.

b) $\int_a^b g(x)dx > 0$ bo'lsin. Bu holda (9.20) tengsizliklardan

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \le M$$

bo'lishi kelib chiqadi. Agar

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$$

deb olsak, unda

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu\int_a^b g(x)dx$$

bo'ladi.

$[a,b]$ oraliqda $g(x) \le 0$ bo'lganda (9.19) formula xuddi shunga tenglik o'rinli bo'ladi.

Bu natijaning isboti (9.19) tenglikka asoslanadi.

6−§. Chegaralari o'zgaruvchi bo'lgan aniq integrallar

$f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'lsin. U holda aniq integralning 1)−xossasiga ko'ra $f(x)$ funksiya istalgan $[a,x]\subset[a,b]$ $(a<x\le b)$ oraliqda ham integrallanuvchi bo'ldi. Ravshanki,

$$\int_a^x f(t)dt$$

integral x ga bog'liq. Uni $F(x)$ deb belgilaymiz:

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

Endi $f(x)$ funksiyaga ko'ra $F(x)$ funksiyaning xossalarini (uzluksizligi, differensiallanuvchi bo'lishini) o'rganamiz.

8−teorema. *Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'lsa, $F(x)$ funksiya shu oraliqda uzluksiz bo'ladi.*

◄ $f(x)$ funksiya integrallanuvchi bo'lgani uchun $\sup|f(x)|=M<+\infty$ bo'ladi. $\forall x\in[a,b]$ nuqta olib, unga shunday $\Delta x>0$ orttirma beraylikki, $(x+\Delta x)\in[a,b]$ bo'lsin. U holda $F(x)$ funksiyaning orttirmasi uchun quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\Delta F(x)=F(x+\Delta x)-F(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

Aniq integralning 7)−xossasidan foydalanib, topamiz:

$$|\Delta F(x)|=\left|\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt\right|\le\int_x^{x+\Delta x}|f(t)|dt\le M\int_x^{x+\Delta x}dt=M\cdot\Delta x$$

Demak,

$$|\Delta F(x)|\le M\cdot\Delta x$$

Bundan esa

$$\lim_{\Delta x\to+0}\Delta F(x)=0$$

limit kelib chiqadi. $\Delta x<0$ bo'lganda ham xuddi yuqoridagiga o'xshash $\lim\limits_{\Delta x\to-0}\Delta F(x)=0$ bo'lishi ko'rsatiladi. Bu esa $F(x)$ funksiyaning $x\in[a,b]$ nuqtada uzluksizligini bildiradi. ►

9−teorema. *Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'lib, $x_0\in[a,b]$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda $F(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'ladi va* limit kelib chiqadi. $\Delta x \to 0$ bo'lganda ham xuddi yuqoridagiga o'xshash $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta F(x) = 0$ bo'lishi ko'rsatiladi. Bu esa $F(x)$ funksiyaning $x \in [a,b]$ nuqtada uzluksizligini bildiradi. ►

9-teorema. *Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'lib, $x_0 \in [a,b]$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda $F(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'ladi va*

$$F'(x_0) = f(x_0)$$

◄ $F(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi orttirmasi:

$$\Delta F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt \qquad (\Delta x > 0)$$

ni olib, quyidagi

$$\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0)$$

ayirmani qaraymiz. Aniq integralning xossalaridan foydalanib topamiz:

$$\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0) = \frac{1}{\Delta x}\left[\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt - f(x_0)\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} dt\right] = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}(f(t) - f(x_0))dt.$$

Bu munosabatdan

$$\left|\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0)\right| \le \frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}|f(t) - f(x_0)|dt. \qquad (9.21)$$

tengsizlik kelib chiqadi.

Shartga ko'ra $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz. Ta'rifga asosan, $\forall \varepsilon > 0$ olinganda ham shunday $\delta > 0$ son topiladiki, $|x - x_0| < \delta$ bo'lganda $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ bo'ladi. Agar $\Delta x < \delta$ deb olsak, u holda $\forall t \in [x_0, x_0 + \Delta x]$ uchun

$$|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$$

bo'ladi. Natijada (9.21) tengsizlik quyidagi

$$\left|\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} dt = \varepsilon$$

ko'rinishga keladi. Demak,

$$\left|\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0)\right| < \varepsilon$$

Bundan

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} = f(x_0)$$

ya'ni

$$F'(x_0 + 0) = f(x_0)$$

tengilk kelib chiqadi. Yuqoridagidek, $\Delta x < 0$ bo'lganda

$$\lim_{\Delta x\to -0} \frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} = f(x_0)$$

ya'ni

$$F'(x_0 - 0) = f(x_0)$$

tenglik ham o'rinli bo'lishi ko'rsatiladi. ►

Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'lib, $x=a$ va $x=b$ nuqtalarda uzluksiz (bunda funksiyaning $x=a$ da o'ngdan, $x=b$ da esa chapdan uzluksizligi tushuniladi) bo'lsa, u holda

$$F'(a+0) = f(a+0), \quad F'(b-0) = f(b-0)$$

bo'lishi yuqoridagiga o'xshash ko'rsatiladi.

6–natija. $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz bo'lsa, u holda $\forall x \in [a,b]$ uchun

$$F'(x) = f(x)$$

bo'ladi.

Demak, $F(x)$ funksiya $f(x)$ ning $[a,b]$ dagi boshlang'ich funksiyasi.

Endi quyi chegarasi o'zgaruvchi bo'lgan aniq integralni qaraymiz. $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'lsin. U holda bu funksiya $[x,b] \subset [a,b]$ $(a \le x \le b)$ oraliqda ham integrallanuvchi va bu integral x ga bog'liq bo'ladi. Uni

$$\phi(x) = \int_x^b f(t)dt$$

deb belgilaymiz. Aniq integral xossasidan foydalanib topamiz:

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^b f(t)dt = F(x) + \phi(x). \qquad (a \le x \le b)$$

Bundan esa

$$\phi(x) = \int_a^b f(t)dt - F(x)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu tenglik, $\phi(x)$funksiyaning xossalarini $f(x)$ hamda $F(x)$ funksiyalarning xossalari orqali o'rganish mumkinligini ko'rsatadi. Jumladan, agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz bo'lsa, u holda

$$\phi'(x) = -f(x)$$

bo'ladi. Haqiqatan ham, bu holda $\int_a^b f(t)dt$ mavjud va u chekli son, $F(x)$ funksiya esa yuqorida keltirilgan teoremaga ko'ra $[a,b]$ va $F'(x)$ hosilaga ega bo'lib,

7–§. Aniq integrallarni hisoblash

Integral mavzusining asosiy masalalaridan biri funksiya integralining mavjudligi bo'lsa, ikkinchisi funksiya integralini hisoblashdir.

1^0. Nyuton–Leybnis formulasi. Ushbu bandda, funksiyalarning aniq integrallarini hisoblashda keng qo'llanadigan formulani keltiramiz.

Ma'lumki, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz bo'lsa, u holda

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

funksiya shu oraliqda $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'ladi. Bu bir tomondan.

Ikkinchi tomondan, $f(x)$ funksiyaning ixtiyoriy boshlang'ich funksiyasi $\phi(x)$ berilgan boshlang'ich funksiya $F(x)$ dan ixtiyoriy o'zgarmas qo'shiluvchiga farq qiladi, ya'ni

$$\phi(x)=\int_a^x f(t)dt+C$$

bo'ladi. Bu tenglikdan, avval $x=a$ deb,

$$\phi(a)=C \qquad (9.22)$$

so'ngra $x=b$ deb,

$$\phi(b)=\int_a^b f(t)dt+C \qquad (9.23)$$

tengliklarini topamiz. (9.22) va (9.23) tengliklardan ixtiyoriy boshlang'ich funksiya $\phi(x)$ uchun ushbu

$$\int_a^b f(x)dx=\phi(b)-\phi(a) \qquad (9.24)$$

formula kelib chiqadi. Bu (9.24) formula Nyuton–Leybnis formulasi deb ataladi.

Odatda, (9.24) tenglikning o'ng tomonidagi $\phi(b)-\phi(a)$ ayirma $\phi(x)\Big|_a^b$ kabi yoziladi:

$$\phi(b)-\phi(a)=\phi(x)\Big|_a^b$$

Demak,

$$\int_a^b f(x)dx=\phi(x)\Big|_a^b$$

Masalan,

Demak,

$$\int_a^b f(x)dx = \phi(x)\Big|_a^b$$

Masalan,

$$\int_a^b x dx = \frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2}$$

2⁰. O'zgaruvchilarni almashtirish usuli. $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda aniqlangan va uzluksiz bo'lsin. Ravshanki, $\int_a^b f(x)dx$ mavjud bo'ladi.

Faraz qilaylik, aniq integralda o'zgaruvchi x ushbu $x=\varphi(t)$ formula bilan almashtirilgan bo'lib, bunda quyidagi shartlar bajarilgan bo'lsin:

a) $\varphi(t)$ funksiya biror $[\alpha,\beta]$ oraliqda aniqlangan va uzluksiz, t o'zgaruvchi $[\alpha,\beta]$ oraliqda o'zgarganda $\varphi(t)$ funksiyaning qiymatlari $[a,b]$ oraliqda chiqmaydi.

b) $\varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b$.

v) $\varphi(t)$ funksiya $[\alpha,\beta]$ oraliqda uzluksiz $\varphi'(t)$ hosilaga ega. U holda

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad (9.25)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

◄ $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ oraliqda boshlang'ich funksiyasi $\phi(x)$ uchun (9.24) formula o'rinli.

$[\alpha,\beta]$ oraliqda $\phi(\varphi(t))$ funksiyani qaraylik. Bu funksiya $[\alpha,\beta]$ oraliqda uzluksiz va

$$(\phi(\varphi(t)))' = \phi'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$$

Keyingi tenglikdan $\phi'(x)=f(x)$ ekanini e'tiborga olib topamiz:

$$(\phi(\varphi(t)))' = f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t).$$

Bu esa $\phi(\varphi(t))$ funksiya $[\alpha,\beta]$ da $f(\varphi(t))$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'lishini bildiradi. Nyuton–Leybnis formulasiga ko'ra,

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \phi(\varphi(\beta)) - \phi(\varphi(\alpha))$$

Demak,

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \phi(b) - \phi(a) \qquad (9.26)$$

Shunday qilib, (9.24) va (9.26) munosabatlardan (9.25) tenglik kelib chiqadi. ►

9.4 –misol. Quyidagi

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$

integralni o'zgaruvchini almashtirish usuli bilan hisoblang.

◄ Bu integralda $x=\sin t$ almashtirishni bajaramiz. U holda (9.25) formulaga ko'ra topamiz:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t\right)dt=\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}.$$

3⁰. Bo'laklab integrallash usuli. $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalarning har biri $[a,b]$ oraliqda uzluksiz $u'(x)$ va $v'(x)$ hosilalarga ega bo'lsin. U holda

$$\int_a^b u(x)dv(x)=[u(x)v(x)]\Big|_a^b-\int_a^b v(x)du(x) \qquad (9.27)$$

formula o'rinli.

◄ Ravshanki,

$$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$$

Demak, $u(x)\,v(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda $u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'lib, Nyuton – Leybnis formulasiga ko'ra

$$\int_a^b [u'(x)v(x)+u(x)v'(x)]dx=(u(x)v(x))\Big|_a^b$$

bo'ladi. Aniq integral xossasidan foydalanib topamiz:

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx+\int_a^b u(x)v'(x)dx=(u(x)v(x))\Big|_a^b$$

Bu tenglikdan esa (9.45) formula kelib chiqadi. ►

(9.27) formula $\int_a^b u(x)dv(x)$ integralni hisoblashni $\int_a^b v(x)du(x)$ integralni hisoblashga olib keladi. Bunda $u(x)$ hamda $dv(x)$ larni shunday tanlash lozimki, $\int_a^b v(x)du(x)$ integral imkoniyat boricha sodda hisoblansin.

9.5–misol. $\int_1^2 \ln x\,dx$ integralni hisoblang.

◄ Agar $u(x)=\ln x,\ dv=dx$ deb olinsa, u holda

$$du=\frac{1}{x}dx,\ v(x)=x$$

bo'lib, (9.27) formulaga ko'ra topamiz.

$$\int_1^2 \ln x dx = (x\ln x)\Big|_1^2 - \int_1^2 x\frac{1}{x}dx = (x\ln x)\Big|_1^2 - x\Big|_1^2 = 2\ln 2 - 1 \blacktriangleright$$

9.6–misol. $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ integralni hisoblang, bunda $n = 0,1,2,...$

Bu integral, xususan $n=0, n=1$ bo'lganda osongina hisoblanadi:

$$J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}, \qquad J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1$$

$n \geq 2$ bo'lganda berilgan integralni

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} xd(-\cos x)$$

ko'rinishda yozib, unga bo'laklab integrallash formulasini qo'llaymiz. Natijada

$$J_n = (-\sin^{n-1} x\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\cos^2 xdx = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)dx =$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} xdx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n xdx = (n-1)J_{n-2} - (n-1)J_n$$

bo'lib, undan ushbu

$$J_n = \frac{n-1}{n} J_{n-2}$$

rekurrent formula kelib chiqadi. Bu formula yordamida berilgan integralni $n = 2,3,...$ bo'lganda ketma–ket hisoblash mumkin. Biz quyida n juft va toq bo'lganda berilgan integralning qiymatini keltiramiz:

$n = 2m$ juft son bo'lganda

$$J_{2m} = \frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdot\ldots\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}J_0 = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\cdot\frac{\pi}{2}. \tag{9.28}$$

$n = 2m+1$ – toq son bo'lganda

$$J_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdot\ldots\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}J_1 = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!} \tag{9.29}$$

Bunda $m!!$ simvol m dan katta bo'lmagan va u bilan bir xil juftlikka ega bo'lgan natural sonlarning ko'paytmasini bildiradi.

Shunday qilib,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \begin{cases} \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\cdot\frac{\pi}{2}, & \text{agar } n=2m \text{ juft bo'lsa,} \\ \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}, & \text{agar } n=2m+1 \text{ toq bo'lsa.} \end{cases}$$

4⁰. Vallis formulasi. Yuqorida keltirilgan 9.6 – misoldan foydalanib, π sonini ifodalovchi formulani keltiramiz. Ravshanki, $0<x<\frac{\pi}{2}$ bo'lganda

$$\sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x \qquad (n=1,2,\dots)$$

tengsizliklar o'rinli. Bu tengsizliklarni $[0,\frac{\pi}{2}]$ oraliqda integrallab

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x dx$$

so'ngra (9.28), (9.29) formulalardan foydalanib topamiz:

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}.$$

Bundan

$$\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2n}$$

tengsizliliklar kelib chiqadi. Ammo bu tengsizliklarning chekkalarida turgan ifodalar ayirmasi

$$\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2n} - \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2n+1} < \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{2n} < \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2n}$$

bo'lib, $n\to\infty$ da nolga intilgani uchun ushbu

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\cdot\frac{2n}{2n+1}$$

formula o'rinli bo'ladi. Demak,

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\dots\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1} \qquad (9.30)$$

Bu (9.30) formula Vallis formulasi deyiladi.

8–§. Aniq integrallarni taqribiy hisoblash

Biz yuqorida integral ostidagi funksiyaning boshlang'ich funksiyasi ma'lum bo'lsa, aniq integralni Nyuton–Leybnis formulasi yordamida hisoblash mumkinligini ko'rdik. Ammo boshlang'ich funksiyani topish masalasi doim osongina hal bo'lavermaydi. Agar integral ostidagi funksiya murakkab bo'lsa, tegishli aniq integralni hisoblashning taqribiy usullarini qo'llash lozim. Bu usullar integral ostidagi $f(x)$ funksiyani uni taqribiy ifodalovchi ko'phad bilan almashtirishga ($f(x) \approx P_n(x)$) asoslanadi.

1⁰. To'g'ri to'rtburchaklar formulasi. $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz bo'lib, uning

$$\int_a^b f(x)dx$$

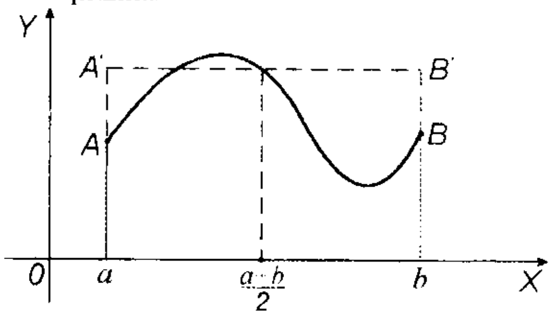
integralini hisoblash talab etilsin. Avvalo $\forall x \in [a,b]$ uchun

$$f(x) \approx f\left(\frac{a+b}{2}\right) = const$$

deb olib, quyidagi

$$\int_a^b f(x)dx \approx f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) \qquad (9.31)$$

formulani hosil qilamiz.



36 – chizma.

Bu taqribiy formula (36 – chizma) $f(x) \geq 0$ bo'lganda $aABb$ egri chiziqli trapetsiyaning yuzini $aA'B'b$ to'g'ri to'rtburchak yuzi bilan almashtirilishini ko'rsatadi. (9.31) formulaning aniqligini oshirish maqsadida $[a,b]$ oraliqni $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ nuqtalar yordamida n ta teng bo'lakka bo'lib, har bir $[x_k, x_{k+1}]$ bo'lakda (9.31) formula qo'llaniladi. U holda

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \approx f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)(x_{k+1} - x_k) = \frac{b-a}{n} f(x_k)$$

bo'ladi, bunda

$$x_k = a + k\frac{b-a}{n}, \quad \bar{x}_k = \frac{x_k + x_{k+1}}{2} = a + \left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{n}$$

$$x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n} \qquad (k = 0,1,2,\ldots,n-1)$$

Natijada quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \ldots + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} f(\bar{x}_0) +$$

$$+\frac{b-a}{n} f(\bar{x}_1) + \ldots + \frac{b-a}{n} f(\bar{x}_k) + \ldots + \frac{b-a}{n} f(\bar{x}_{n-1}) = \frac{b-a}{n}\left(f(\bar{x}_0) + f(\bar{x}_1) + \ldots + f(\bar{x}_{n-1})\right)$$

Shunday qilib, $\int_a^b f(x)dx$ integralni hisoblash uchun quyidagi taqribiy

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(f(\bar{x}_0) + f(\bar{x}_1) + \ldots + f(\bar{x}_k) + \ldots + f(\bar{x}_{n-1})\right) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\bar{x}_k) \qquad (9.32)$$

formulaga kelamiz.

(9.32) formula to'g'ri to'rtburchaklar formulasi deb ataladi.

Odatda, taqribiy formula chiqarilganda, albatta uni qo'llanilganda yo'l qo'yiladigan xatolikni aniqlash (yoki baxolash) taqazo etiladi. Buning natijasida taqribiy formulalar o'zaro taqqoslanadi.

(9.32) formulaning xatoligi ushbu

$$R_n = \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\bar{x}_k)$$

ayirma bilan ifodalanadi. Uni baholaymiz. Buning uchun $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz $f''(x)$ hosilaga ega bo'lsin deb qaraymiz.

Aniq integralning xossalaridan foydalanib, R_n ni quyidagi

$$R_n = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\bar{x}_k) = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx - \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(\bar{x}_k)dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} [f(x) - f(\bar{x}_k)]dx$$

ko'rinishda yozish mumkin. Teylor formulasi

$$f(x) - f(\bar{x}_k) = f'(\bar{x}_k)(x - \bar{x}_k) + \frac{1}{2} f''(\xi_k)(x - \bar{x}_k)^2$$

dan foydalanaylik, bunda ξ_k son x va $\bar{x}_k$ sonlari orasida bo'ladi. Natijada

$$R_n = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} [f'(\bar{x}_k)(x - \bar{x}_k) + \frac{1}{2} f''(\xi_k)(x - \bar{x}_k)^2]dx =$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}[f'(\bar{x}_k)\int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - \bar{x}_k)dx + \frac{1}{2}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f''(\xi_k)(x - \bar{x}_k)^2 dx] = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f''(\xi_k)(x - \bar{x}_k)^2 dx$$

bo'ladi

O'rta qiymat haqidagi 6 – teoremaning 5 – natijasiga ko'ra

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f''(\xi)(x-x_{k+\frac{1}{2}})^2 dx = f''(\xi_k^*)\int_{x_k}^{x_{k+1}}(x-x_{k+\frac{1}{2}})^2 dx = \frac{(x_{k+1}-x_k)^3}{12} f''(\xi_k^*) =$$

$$= \frac{(b-a)^3}{12n^3} f''(\xi_k^*)$$

$$(\xi_k^* \in [x_k, x_{k+1}])$$

bo'ladi. Shunday qilib, R_n uchun quyidagi

$$R_n = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(b-a)^3}{12n^3} f''(\xi_k^*) = \frac{(b-a)^3}{24n^2}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f''(\xi_k^*)$$

ifodaga kelamiz. Ravshanki, ushbu

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f''(\xi_k^*) = \frac{f''(\xi_0^*) + f''(\xi_1^*) + \ldots + f''(\xi_{n-1}^*)}{n}$$

$(\xi_k^* \in [a,b], k = 0,1,2,\ldots,n-1)$ miqdor $f''(x)$ ning $[a,b]$ oraliqdagi eng kichik m'' hamda eng katta M'' qiymatlari orasida bo'ladi:

$$m'' \le \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f''(\xi_k^*) \le M''$$

$f''(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz. Bolsano Koshining ikkinchi teoremasiga ko'ra (5 – bobdagi 9 – teoremaga qarang), (a,b) intervalda shunday ξ nuqta topiladiki,

$$f''(\xi) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f''(\xi_k^*) \qquad (\xi_k \in (a,b))$$

bo'ladi. Natijada R_n ushbu

$$R_n = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\xi)$$

ko'rinishni oladi. Demak,

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}}) + \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\xi) \qquad (9.32)$$

Shunday qilib, $[a,b]$ oraliqda ikkinchi tartibli uzluksiz hosilaga ega bo'lgan $f(x)$ funksiyaning $\int_a^b f(x)dx$ integralni (9.32) to'g'ri to'rtburchaklar formulasi yordamida taqribiy hisoblansa, bu taqribiy hisoblash xatoligi quyidagi

$$R_n = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\xi) \qquad (\xi \in (a,b))$$

formula bilan ifodalanadi.

2⁰. Trapetsiyalar formulasi. $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz bo'lsin. $\forall x \in [a,b]$ uchun

$$f(x) \approx \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x + \frac{bf(a)-af(b)}{b-a} \qquad (9.33)$$

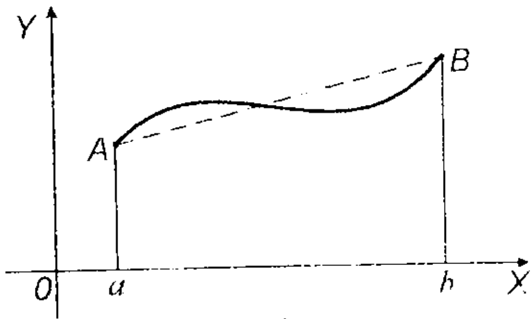
deb olib, $\int_a^b f(x)dx$ integralni taqribiy ifodalovchi ushbu

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x + \frac{bf(a)-af(b)}{b-a}\right]dx = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) \qquad (9.34)$$

formulani hosil qilamiz. (9.33) munosabatdagi

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x + \frac{bf(a)-af(b)}{b-a}$$

ifoda $(a, f(a)), (b, f(b))$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq nuqtasining ordinatasini ifodalaydi. (9.34) taqribiy formula $f(x) \geq 0$ $(\forall x \in [a,b])$ bo'lganda (37 - chizma) $aABb$ egri chiziqli trapetsiyaning yuzini $aABb$ trapetsiya yuzi bilan almashtirilishini ifodalaydi.



37 chizma.

Endi (9.34) formulaning aniqligini oshirish maqsadida $[a,b]$ oraliqni $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ nuqtalar yordamida n ta teng bo'lakka bo'lib, har bir $[x_k, x_{k+1}]$ bo'lakda $f(x)$ funksiyaning $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx$ integraliga nisbatan (9.34) formulani qo'llaymiz. U holda

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \approx \frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}(x_{k+1}-x_k)$$

bo'lib, natijada ushbu

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \ldots + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx \approx \frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}(x_1 - x_0) +$$

$$+ \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}(x_2 - x_1) + \ldots + \frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}(x_n - x_{n-1}) =$$

$$= \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1})\right]$$

formulaga kelamiz. Demak,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1})\right] \qquad (9.35)$$

Bu (9.35) formula trapetsiyalar formulasi deb ataladi.

$f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda $f''(x)$ hosilaga ega bo'lib, u shu oraliqda uzluksiz bo'lsin. U holda

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1})\right] - \frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi) \quad (\xi \in (a,b)) \quad (9.35)$$

bo'ladi.

3^0. **Parabolalar (Simpson) formulasi**. Bu holda $[a,b]$ oraliqda uzluksiz $f(x)$ funksiyaning $\int_a^b f(x)dx$ integralini taqribiy hisoblash uchun $f(x)$ funksiyani $(a, f(a)), (\frac{a+b}{2}, f(\frac{a+b}{2}))$ hamda $(b, f(b))$ nuqtalardan o'tuvchi $y = Ax^2 + Bx + C$ parabola nuqtasining ordinatasi bilan almashtiramiz. Berilgan $(a, f(a)), (\frac{a+b}{2}, f(\frac{a+b}{2}))$ va $(b, f(b))$ nuqtalar orqali parabola o'tkazish mumkin. Bunday parabola yagona bo'ladi. Haqiqatan ham, $y = Ax^2 + Bx + C$ parabola yuqorida aytilgan nuqtalar orqali o'tgani uchun ushbu

$$\begin{aligned} &Aa^2 + Ba + C = f(a), \\ &A\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + B\left(\frac{a+b}{2}\right) + C = f\left(\frac{a+b}{2}\right), \\ &Ab^2 + Bb + C = f(b) \end{aligned} \qquad (9.36)$$

tengliklar o'rinli bo'ladi. Bu sistemaning koeffitsientlaridan tuzilgan

$$\begin{vmatrix} a^2 & a, & 1 \\ \left(\frac{a+b}{2}\right)^2, & \frac{a+b}{2}, & 1 \\ b^2, & b, & 1 \end{vmatrix} = \frac{(a-b)^3}{4}$$

determinant har doim noldan farqli (chunki $a \neq b$). Demak, (9.36) sistema yagona echimga ega. Bu hol $(a, f(a))$, $(\frac{a+b}{2}, f(\frac{a+b}{2}))$ hamda $(b, f(b))$ nuqtalardan yagona $y = Ax^2 + Bx + C$ parabola o'tishini bildiradi.

Endi $\int_a^b (Ax^2 + Bx + C)dx$ integralni berilgan $\int_a^b f(x)dx$ integralning taqribiy qiymati deb quyidagi

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b (Ax^2 + Bx + C)dx$$

formulani hosil qilamiz. Bu taqribiy formuladagi $\int_a^b (Ax^2 + Bx + C)dx$ integralni hisoblaymiz:

$$\int_a^b (Ax^2 + Bx + C)dx = A\frac{x^3}{3}\Big|_a^b + B\frac{x^2}{2}\Big|_a^b + Cx\Big|_a^b = A\frac{b^3 - a^3}{3} + B\frac{b^2 - a^2}{2} + C(b-a) =$$

$$= \frac{b-a}{6}[2A(b^2 + ba + a^2) + 3B(b-a) + 6C] = \frac{b-a}{6}[(Aa^2 + Ba + C) + 4(A(\frac{a+b}{2})^2 +$$

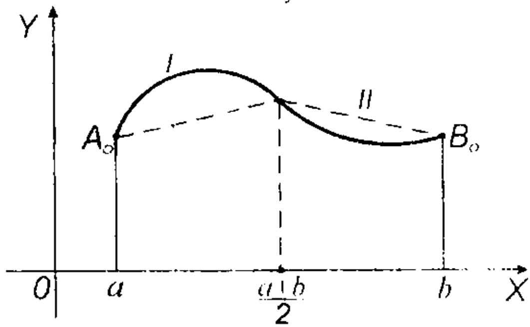
$$+ B(\frac{a+b}{2}) + C) + (Ab^2 + Bb + C)] = \frac{b-a}{2}[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)]$$

Shunday qilib, $\int_a^b f(x)dx$ integralni taqribiy hisoblash uchun ushbu

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)] \qquad (9.37)$$

formulaga kelamiz.

Bu (9.37) formula $f(x) > 0$ bo'lganda 38 – chizmada ko'rsatilgan $aAIBb$ egri chiziqli trapetsiya yuzini $aAIIBb$ egri chiziqli trapetsiya yuzi bilan almashtirilishini ifodalaydi.



38 – chizma.

(9.37) formulaning aniqligini oshirish uchun $[a,b]$ oraliqni

$$a = x_0,\ x_1,\ x_2, \ldots,\ x_{2k},\ x_{2k+1},\ x_{2k+2}, \ldots,\ x_{2n-1},\ x_{2n} = b$$

$$(x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{2k} < x_{2k+1} < x_{2k+2} < \ldots < x_{2n-1} < x_{2n})$$

nuqtalar yordamida $2n$ ta teng bo'lakka bo'lib, har bir $[x_{2k}, x_{2k+2}]$ $(k = 0,1,\ldots,n-1)$ oraliq bo'yicha olingan integralga (9.37) formulani qo'llanamiz. U holda $[x_{2k}, x_{2k+2}]$ oraliq uchun

$$\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x)dx \approx \frac{x_{2k+2} - x_{2k}}{6}[f(x_{2k}) + 4f(x_{2k+1}) + f(x_{2k+2})] =$$

$$= \frac{b-a}{6n}[f(x_{2k}) + 4f(x_{2k+1}) + f(x_{2k+2})] \qquad (k = 0,1,\ldots,n-1)$$

formulaga egamiz.

Natijada aniq integralning xossasidan foydalanib, quyidagi ifodaga ega bo'lamiz:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx \approx$$

$$\approx \frac{b-a}{6n}[(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) + (f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)) + \ldots + (f(x_{2n-2}) +$$

$$+ 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})] = \frac{b-a}{6n}[(f(x_0) + f(x_{2n})) + 4(f(x_1) + f(x_3) + \ldots + f(x_{2n-1})) +$$

$$+ 2(f(x_2) + f(x_4) + \ldots + f(x_{2n-2}))]$$

Shunday qilib, $f(x)$ funksiyaning aniq integralini taqribiy ifodalaydigan quyidagi

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}[(f(x_0) + f(x_{2n})) + 4(f(x_1) + f(x_3) + \ldots + f(x_{2n-1})) + \\ + 2(f(x_2) + f(x_4) + \ldots + f(x_{2n-2}))] \qquad (9.38)$$

formulaga kelamiz. Bu formula parabolalar (yoki Simpson) formulasi deb ataladi.

Faraz qaraylik, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz $f^{(IV)}(x)$ hosilaga ega bo'lsin.

U holda

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6n}[(f(x_0) + f(x_{2n})) + 4(f(x_1) + f(x_3) + \ldots + f(x_{2n-1})) +$$

$$+ 2(f(x_2) + f(x_4) + \ldots + f(x_{2n-2}))] - \frac{(b-a)^5 f^{(IV)}(\xi)}{2880n^4}$$

bo'ladi, bunda $\xi \in (a,b)$.

Biz yuqorida $\int_a^b f(x)dx$ integralni taqribiy hisoblash uchun to'g'ri to'rtburchaklar, trapetsiyalar hamda Simpson formulalarini keltirdik. Bu taqribiy formulalarning hatoliklarini taqqoslab, Simpson formulasining aniqlik darajasi to'g'ri to'rtburchaklar hamda trapetsiyalar formulalarining aniqligiga qaraganda yuqori ekanligini ko'ramiz.

9.7–misol. Ushbu

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx$$

integral to'g'ri to'rtburchaklar, trapetsiyalar va Simpson formulalari yordamida taqribiy hisoblaymiz.

◀ [0,1] oraliqni 5 ta teng bo'lakka bo'lamiz. Bo'linish nuqtalari

$$x_0 = 0,\ x_1 = 0,2,\ x_2 = 0,4,\ x_3 = 0,6,\ x_4 = 0,8,\ x_5 = 1,0$$

bo'lib, bu nuqtalarda $f(x) = e^{-x^2}$ funksiyaning qiymatlari quyidagicha bo'ladi:

$$f(x_0) = 1,00000\ ,$$
$$f(x_1) = 0,96079\ ,$$
$$f(x_2) = 0,85214\ ,$$
$$f(x_3) = 0,69768\ ,$$
$$f(x_4) = 0,52729\ ,$$
$$f(x_5) = 0,36788\ .$$

Har bir bo'lakning o'rtasini ifodalovchi nuqtaning koordinatalari $x_{\frac{1}{2}} = 0,1,\ x_{\frac{3}{2}} = 0,3,\ x_{\frac{5}{2}} = 0,5,\ x_{\frac{7}{2}} = 0,7,\ x_{\frac{9}{2}} = 0,9$ bo'lib, bu nuqtalardagi funksiyaning qiymatlari quyidagicha bo'ladi:

$$f(x_{\frac{1}{2}}) = 0,99005\ ,$$
$$f(x_{\frac{3}{2}}) = 0,91393\ ,$$
$$f(x_{\frac{5}{2}}) = 0,77680\ ,$$
$$f(x_{\frac{7}{2}}) = 0,61263\ ,$$
$$f(x_{\frac{9}{2}}) = 0,44486\ .$$

a) To'g'ri to'rtburchaklar formulasi ((9.32) qarang) bo'yicha

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx \frac{1}{5}(0,99005 + 0,91393 + 0,77680 + 0,61263 + 0,44486) \approx$$

$$\approx \frac{1}{5}3,74027 \approx 0,74805,$$

$$|R_n| \le \frac{1}{12\cdot 25} = \frac{1}{300} \approx 0,003$$

b) Trapetsiyalar formulasi ((9.35) qarang) bo'yicha

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx \frac{1}{5}\left(\frac{1{,}00000+0{,}36788}{2}+0{,}96079+0{,}85214+0{,}69768+0{,}52729\right)=$$

$$=\frac{1}{5}(0{,}68394+3{,}03790)=\frac{1}{5}\cdot 3{,}72184=0{,}74437$$

$$|R_n| \le \frac{1}{6\cdot 25}=\frac{1}{150}\approx 0{,}006$$

v) Simpson formulasi ((9.38) qarang) bo'yicha

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx \frac{1}{30}[(1{,}00000+0{,}36788)+4(0{,}99005+0{,}91393+0{,}77680+$$

$$+0{,}61263+0{,}44486)+2(0{,}96079+0{,}85214+0{,}69768+0{,}52729)]=$$

$$=\frac{1}{30}(1{,}36788+4\cdot 3{,}74027+2\cdot 3{,}03790)=\frac{1}{30}(1{,}36788+6{,}07580+14{,}96108)\approx$$

$$\approx 0{,}74682$$

$$|R_n| \le \frac{12}{2880\cdot 5^4}\approx 0{,}7\cdot 10^{-5}$$

Taqribiy formulalar yordamida hisoblab, topilgan $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ integralning qiymatini uning

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = 0{,}744685\ldots$$

qiymati bilan taqqoslab, Simpson formulasi yordamida topilgan integralning taqribiy qiymati aniqroq ekanligini ko'ramiz. ►

Mashqlar

9.8. Ushbu

$$f(x)=x \qquad (x\in[a,b])$$

funksiyaning yuqori hamda quyi integrallari topilsin.

9.9. Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da chegaralangan bo'lib, P_1 va P_2 lar $[a,b]$ oraliqning bo'laklashlari bo'lsin. Agar $P_1\subset P_2$ bo'lsa, ushbu

$$s(P_1)\le s(P_2),\ S(P_1)\ge S(P_2)$$

tengsizliklar isbotlansin.

9.10. Aniq integral ta'riflarining ekvivalentligi isbotlansin.

9.11. Agar $\forall x\in[a,b]$ uchun $f(x)\le g(x)$ bo'lsa,

$$S_f(P)\le S_g(P),\ s_f(P)\le s_g(P)$$

bo'lishi isbotlansin.

9.12. Ushbu

$$f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & \text{agar } x\in(0,1]\\ 0, & \text{agar } x=0\end{cases}$$

funksiyaning $[0,1]$ da integrallanuvchi bo'lishi ko'rsatilsin.

9.13. Ushbu

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx$$

integral baholansin.

9.14. Ushbu

$$\frac{1}{10\sqrt{2}}<\int_0^1\frac{x^9}{\sqrt{1+x}}\,dx<\frac{1}{10}$$

tengsizliklar isbotlansin.

9.15. Ushbu

$$\int_0^5\frac{dx}{(x-4)^4}$$

integralga Nyuton – Leybniya formulasini qo'llash mumkinmi?

9.16. Ushbu

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)dx$$

tenglik isbotlansin, bunda $f(x)$ funksiya $[0,1]$ da uzluksiz.

9.17. Aniq integral tushunchasidan foydalanib,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$$

limit topilsin.

9.18. Trapetsiyalar formulasining xatoligi topilsin.

9.19. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda ikkinchi tartibli uzluksiz $f''(x)$ hosilaga ega bo'lsa,

$$\lim_{n\to\infty}n\left[\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right]=\frac{f(1)-f(0)}{2}$$

bo'lishi isbotlansin.

9.20. Ushbu

$$f(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}\cos\pi t^2\,dt$$

funksiyaning hosilasi topilsin.

X BOB

Aniq integralning ba'zi tatbiqlari

Matematika, fizika, mexanika hamda fan va texnikaning boshqa sohalarida uchraydigan ko'pgina masalalarni yechish ma'lum funksiyalarning integrallarini hisoblashga keltiriladi.

Ushbu bobda egri chiziq yoyining uzunligi, egri chiziqli trapesiyaning yuzi, o'zgaruvchi kuchning bajargan ishi hamda massaga ega bo'lgan egri chiziqning inergiya momenti aniq integrallar orqali hisoblanishi ko'rsatiladi.

1–§. Yoy uzunligi va uning aniq integral orqali ifodalanishi

$f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda aniqlangan ixtiyoriy uzluksiz funksiya bo'lsin. Bu funksiya grafigi $[a,b]$ oraliqda egri chiziq yoyini tasvirlasin. Uni $\breve{AB}$ deb belgilaymiz. $[a,b]$ oraliqning ixtiyoriy

$$P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\} \qquad (a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b)$$

bo'laklashini olib, bo'luvchi x_k $(k=0,1,2,\ldots n)$ nuqtalar orqali OY o'ziga parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz. Bu to'g'ri chiziqlarning $\breve{AB}$ yoy bilan kesishgan nuqtalari $A_k(x_k,f(x_k))$ $(k=0,1,2,\ldots,n,\ A_0=A,A_n=B)$ bo'ladi. $\breve{AB}$ yoydagi bu nuqtalarni bir–biri bilan to'g'ri chiziq kesmalari yordamida birlashtirib, L siniq chiziqni hosil qilamiz. L yoyga chizilgan siniq chiziq deb ataladi. Bu siniq chiziq perimetri

$$L=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+[f(x_{k+1})-f(x_k)]^2}$$

bo'ladi.

Ravshanki, siniq chiziq perimetri L qaralayotgan $f(x)$ funksiyaga bog'liq bo'lishi bilan birga $[a,b]$ oraliqni bo'laklashga ham bog'liq bo'ladi: $L=L(P)$.

Agar P_1 va P_2 lar $[a,b]$ oraliqni ikkita bo'laklash bo'lib, $P_1\subset P_2$ bo'lsa, u holda bu bo'laklashlarga mos $\breve{AB}$ yoyga chizilgan siniq chiziqlar perimetrlari uchun

$$L_f(P_1)\le L_f(P_2)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Demak, P bo'laklashning bo'luvchi nuqtalari sonini orttirib borilsa, $\breve{AB}$ yoyga chizilgan mos siniq chiziqlar perimetrlari ham ortib boradi.

P bo'laklashning diametri λ_P nolga intila borganda, $\breve{AB}$ yoyiga chizilgan bu bo'laklashga mos siniq chiziq shu $\breve{AB}$ yoyga borgan sari yaqinlasha boradi, siniq chiziq perimetri esa $\breve{AB}$ yoyning uzunligini borgan sari aniqroq ifodalay boradi, deb qarash tabiiydir.

1–ta'rif. Agar $\breve{AB}$ yoyiga chizilgan ($[a,b]$ oraliqni har qanday P bo'laklashga mos) siniq chiziq perimetri

$$L_f(P)=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+\left[f(x_{k+1})-f(x_k)\right]^2}$$

$\lambda_p\to 0$ da chekli limitga ega bo'lsa, $\breve{AB}$ yoy uzunlikka ega deb ataladi va shu

$$\lim_{\lambda_p\to 0}L_f(P)=L$$

limit $\breve{AB}$ yoyning uzunligi deyiladi.

Endi yoy uzunligining aniq integral orqali qanday ifodalanishini ko'rsatamiz.

$f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz hamda uzluksiz $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsin. Bu funksiyaning $[a,b]$ oraliqdagi grafigi $\breve{AB}$ yoyni tasvirlasin, deylik. $[a,b]$ oraliqda ixtiyoriy

$$P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}\qquad (a=x_0<x_1<\dots<x_n=b)$$

bo'laklashni olib, $\breve{AB}$ yoyiga chizilgan unga mos siniq chiziqni hosil qilamiz. Bu siniq chiziqning perimetrini yozamiz:

$$L_f(P)=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+\left[f(x_{k+1})-f(x_k)\right]^2}$$

Har bir $[x_k,x_{k+1}]$ oraliqda $f(x)$ funksiyaga Lagranj teoremasini qo'llanamiz:

$$f(x_{k+1})-f(x_k)=f'(\tau_k)(x_{k+1}-x_k)\qquad (x_k\le\tau_k\le x_{k+1})$$

Demak,

$$L_f(P)=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+f'^2(\tau_k)}\cdot(x_{k+1}-x_k)=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+f'^2(\tau_k)}\Delta x_k$$

bunda $x_k\le\tau_k\le x_{k+1}$. Keyingi tenglikning o'ng tomonidagi yig'indi $\sqrt{1+f'^2(x)}$ funksiyaning integral yig'indisini eslatadi. Uning integral yig'indidan farqi shuki, integral yig'indida $\xi_k\in[x_k,x_{k+1}]$ nuqta ixtiyoriy bo'lgan holda, yuqoridagi yig'indida esa τ_k nuqta $[x_k,x_{k+1}]$ oraliqdagi tayin nuqtadir. Ammo $\sqrt{1+f'^2(x)}$ funksiya integrallanuvchi bo'lganligi (chunki, shartga ko'ra, $f'(x)$ uzluksiz) sababli $\xi_i = t_i$ deb olish mumkin.

Demak,

$$\lim_{\lambda_P \to 0} L(P) = \lim_{\lambda_P \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\,\Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$$

tenglik kelib chiqadi, Demak, AB yoy uzunlikka ega va bu yoy uzunligi quyidagi

$$L = \int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx \qquad (10.1)$$

formula yordamida hisoblanadi.

10.1-misol. $[-a,a]$ $(a>0)$ oraliqda ushbu

$$f(x) = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

zanjir chiziq yoyning uzunligini toping.

◄ Avval $f(x)$ funksiyaning hosilasini hisoblab, $\sqrt{1+f'^2(x)}$ ni tipamiz:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

$$1+f'^2(x) = 1+\frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2 .$$

$$\sqrt{1+f'^2(x)} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) \quad ►$$

Endi (10.1) formulaga ko'ra zanjir chiziq yoyining $[-a,a]$ oraliqdagi yoyi uzunligini hisoblaymiz:

$$L = \int_{-a}^{a} \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)dx = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)\Bigg|_{-a}^{a} = a\left(e-\frac{1}{e}\right)$$

Quyidagi

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \qquad (\alpha \le t \le \beta) \qquad (10.2)$$

tenglamalar sistemasi orqali ifodalangan egri chiziqni qaraymiz (bu holda egri chiziq paremetrik holda berilgan deyilib, (10.2) sistema egri chiziqning paremetrik tenglamalari deyiladi). Bunda $\varphi(t)$, $\psi(t)$ lar $[\alpha,\beta]$ oraliqda uzluksiz funksiyalar bo'lib, t o'zgaruvchi paremetrning $[\alpha,\beta]$ oraliqdagi ixtiyoriy ikkita turli t_1 va t_2 $(t_1 \ne t_2)$ qiymatga mos keladigan (10.2) chiziqdagi $A_1(x_1,y_1)$, $A_2(x_2,y_2)$ nuqtalar $(x_1=\varphi(t_1), y_1=\psi(t_1);\ x_2=\varphi(t_2), y_2=\psi(t_2))$ ham turlicha bo'lsin. Bundan tashqari, parametr t ning t_1 va t_2 qiymatlariga mos keladigan (10.2) chiziqdagi $A_1(x_1,y_1)$, $A_2(x_2,y_2)$ nuqtalarni $t_1 < t_2$ bo'lganda, A_2 nuqta A_1 nuqtadan keyin keladi deb qaraladi. Shu bilan egri chiziqda yo'nalish o'rnatiladi.

Faraz qilaylik, $t=\alpha$, $t=\beta$ qiymatlarga (10.2) chiziqda A va B nuqtalar mos kelsin. Bu chiziqning $\breve{AB}$ yoyi uzunligi aniq integral orqali qanday ifodalanishini ko'rsatamiz.

Avval yuqoridagidek $\breve{AB}$ yoyning uzunligini aniqlaymiz. $[\alpha,\beta]$ oraliqni ixtiyoriy

$$P\{t_0,t_1,\ldots,t_n\} \qquad (\alpha=t_0<t_1<\ldots<t_n=\beta)$$

bo'laklashni olib, bu bo'laklashning bo'luvchi t_k $(k=0,1,\ldots,n)$ nuqtalariga mos kelgan $\breve{AB}$ yoydagi $A_k=A_k(x_k,y_k)$ $(x_k=\varphi(t_k),\ y_k=\psi(t_k))$ nuqtalarni bir-biri bilan to'g'ri chiziq kesmalari yordamida birlashtirib, $\breve{AB}$ yoyga chizilgan siniq chiziqni topamiz. Bu siniq chiziqning perimetri quyidagi

$$l=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{[\varphi(t_{k+1})-\varphi(t_k)]^2+[\psi(t_{k+1})-\psi(t_k)]^2}$$

(10.3)

formula bilan ifodalanadi. Ravshanki, L $\varphi(t)$, $\psi(t)$ funksiyalarga hamda $[\alpha,\beta]$ oraliqni bo'laklashga bog'liq: $L=L_{\varphi\psi}(P)$

Yuqoridagidek, $\lambda_p\to 0$ da siniq chiziq perimetri $L=L_{\varphi\psi}(P)$ chekli limitga ega, ya'ni

$$\lim_{\lambda_p\to 0} L_{\varphi\psi}(P)=l$$

bo'lsa, $\breve{AB}$ yoy uzunlikka ega deyiladi, bu limit l esa $\breve{AB}$ yoyning uzunligi deyiladi.

Aytaylik, $\varphi(t)$ va $\psi(t)$ funksiyalar $[\alpha,\beta]$ oraliqda uzluksiz $\varphi'(t)$ va $\psi'(t)$ hosilalarga ega bo'lsin. Har bir $[t_k,t_{k+1}]$ $(k=0,1,\ldots,n-1)$ oraliqda $\varphi(t)$ hamda $\psi(t)$ funksiyalariga Langranj teoremasini qo'llab topamiz:

$$\varphi(t_{k+1})-\varphi(t_k)=\varphi'(\tau_k)(t_{k+1}-t_k) \qquad (10.4)$$

$$\psi(t_{k+1})-\psi(t_k)=\psi'(\theta_k)(t_{k+1}-t_k) \qquad (10.5)$$

bunda $\tau_k\in[t_k,t_{k+1}]$, $\theta_k\in[t_k,t_{k+1}]$

Bu (10.4), (10.5) munosabatlardan foydalanib, (10.3) siniq chiziq perimetrini quyidagicha yozamiz:

$$L_{\varphi\psi}(P)=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\varphi'^2(\tau_k)(t_{k+1}-t_k)^2+\psi'^2(\theta_k)(t_{k+1}-t_k)^2}=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\varphi'^2(\tau_k)+\psi'^2(\theta_k)}\cdot\Delta t_k$$

$(\Delta t_k=t_{k+1}-t_k)$

bunda $\tau_k \in [t_k, t_{k+1}]$, $\theta_k \in [t_k, t_{k+1}]$.

Bu holda ham, yuqoridagi

$$\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}$$

funksiyaning integral yig'indisini eslatadi. Farqi $\xi_k \in [t_k, t_{k+1}]$ ixtiyoriy nuqta bo'lgan holda, τ_k va θ_k lar shu $[t_k, t_{k+1}]$ oraliqdagi tayin nuqtaligidir.

Modomiki,

$$\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}$$

funksiya $[\alpha,\beta]$ da uzluksiz, binobarin integrallanuvchi ekan, unda

$$\lim_{\lambda_P\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\varphi'^2(\tau_k)+\psi'^2(\theta_k)}\Delta t_k=\lim_{\lambda_P\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\varphi'^2(\xi_k)+\psi'^2(\xi_k)}\Delta t_k=\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt$$

bo'ladi.

Demak,

$$\lim_{\lambda_P\to 0} L_{\varphi\psi}(P)=\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt$$

Bu esa $\overset{\frown}{AB}$ yoyning uzunlikka ega bo'lishini va uning uzunligi uchun

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt \qquad (10.6)$$

formula o'rinli ekanini bildiradi.

Xususan, agar (10.2) sistema ushbu

$$\begin{cases} x=\varphi(t)=t \\ y=\psi(t) \end{cases}, \qquad (\alpha\le t\le\beta)$$

ko'rinishda bo'lsa, bu sistema $y=\psi(x)$ $(a\le x\le b)$ ko'rinishni oladi. $\overset{\frown}{AB}$ yoyning uzunligi uchun

$$l=\int_a^b\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt=\int_a^b\sqrt{1+\psi'^2(x)}dx$$

formulaga ega bo'lamiz. Bu (10.1) formulaning o'zidir.

10.2–misol. Ushbu

$$\begin{cases} x=r\cos t, \\ y=r\sin t \end{cases} \qquad (0\le\alpha\le t\le\beta\le 2\pi) \qquad (10.7)$$

chiziqning uzunligini toping.

◀ $[\alpha,\beta]$ oraliqda $x=\varphi(t)=r\cos t$, $y=\psi(t)=r\sin t$ $(r>0)$ funksiyalar uzluksiz hosilalarga ega. (10.7) sistema markazi koordinata boshida, radiusi r ga teng bo'lgan aylana yoyini ifodalaydi. Uning uzunligini (10.6) formula yordamida topamiz:

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(r\cos t)'^2+(r\sin t)'^2}\,dt=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r^2(\sin^2 t+\cos^2 t)}\,dt=r\int_{\alpha}^{\beta}dt=r(\beta-\alpha).$$ ►

Yuqoridagi (10.2) sistema bilan ifodalangan $\breve{AB}$ yoyni qaraylik. Bu yoyda parametrning t $(\alpha\le t\le\beta)$ qiymatiga mos keladigan nuqtani C deylik. Ravshanki, $\breve{AC}$ yoyning uzunligi t ga bog'liq bo'lib, u (10.6) formulaga ko'ra $[\alpha,t]$ oraliqda

$$S=S(t)=\breve{AC}=\int_{\alpha}^{t}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$$

ko'rinishda ifodalanadi. Bu yuqori chegarasi o'zgaruvchi bo'lgan aniq integraldir. Uning hosilasi (9 – bobning 9 – § iga qarang):

$$S'(t)=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}$$

Keyingi tenglikni kvadratga ko'tarib, so'ngra har ikki tomonini dt^2 ga ko'paytirsak, natijada

$$S'^2(t)dt^2=\varphi'^2(t)dt^2+\psi'^2(t)dt^2$$

ya'ni

$$ds^2=dx^2+dy^2$$

munosabat hosil bo'ladi. Bu munosabat yoy differensialining kvadratini ifodalaydi.

Endi tekislikda qutb koordinatalarda berilgan egri chiziq yoyi uzunligining ham aniq integral orqali ifodasini ko'rsatamiz.

Faraz qilaylik, egri chiziq qutb koordinata sistemasida quyidagi

$$r=g(\theta)\qquad(\alpha\le\theta\le\beta)\qquad\qquad(10.8)$$

funksiya bilan berilgan bo'lsin, bunda $g(\theta)$ funksiya $[\alpha,\beta]$ oraliqda uzluksiz $g'(\theta)$ hosilaga ega bo'lsin deylik. Biz (10.8) ko'rinishda berilgan egri chiziq tenglamasini quyidagi

$$\begin{cases}x=g(\theta)\cos\theta\\ y=g(\theta)\sin\theta\end{cases}\qquad(\alpha\le\theta\le\beta)$$

parametrik ko'rinishda ifodalab, (10.6) formuladan foydalanamiz:

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left[g(\theta)\cos\theta\right]'^2+\left[g(\theta)\sin\theta\right]'^2}\,d\theta=$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left[g'(\theta)\cos\theta-g(\theta)\sin\theta\right]^2+\left[g'(\theta)\sin\theta+g(\theta)\cos\theta\right]^2}\,d\theta=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{g'^2(\theta)+g^2(\theta)}\,d\theta.$$

Demak,

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{g'^2(\theta)+g^2(\theta)}\,d\theta\qquad\qquad(10.9)$$

10.3-misol Ushbu

$$r = a\,\theta \qquad (a = \text{const} \qquad 0 \le \theta \le \alpha)$$

egri chiziq (Arximed spirali) yoyining uzunligi topilsin.

◄ Yuqoridagi (10.9) formulaga ko'ra hisoblaymiz:

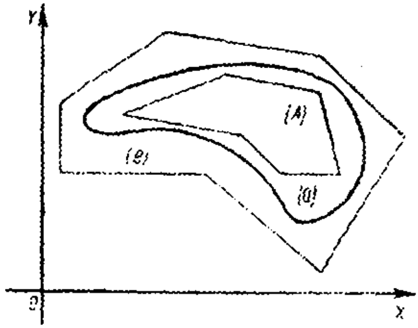
$$l = \int_0^\alpha \sqrt{(a')^2 + (a\cdot\theta)^2}\,d\theta = a\int_0^\alpha \sqrt{1+\theta^2}\,d\theta = a\left[\frac{\theta}{2}\sqrt{1+\theta^2} + \frac{1}{2}\ln\left|\theta + \sqrt{1+\theta^2}\right|\right]_0^\alpha =$$

$$= \frac{a}{2}\left[\alpha\sqrt{1+\alpha^2} + \ln(\alpha + \sqrt{1+\alpha^2})\right] ►$$

2-§. Tekis shaklning yuzi va uning aniq integral orqali ifodalanishi

Ma'lumki, tekislikda yopiq siniq chiziq bilan chegaralangan ko'pburchak yuzaga ega. Uning yuzi uchburchak yuzalari yig'indisi sifatida topiladi.

Endi tekislikda biror chegaralangan (Q) shaklni qaraylik. (39-chizma)



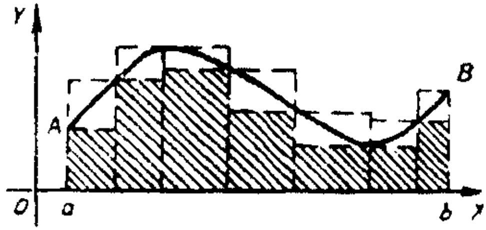
39-chizma.

Bu (Q) shaklning ichiga (A) ko'pburchaklar, so'ngra (Q) shaklni o'z ichiga olgan (B) ko'pburchaklarni chizamiz. (A) ko'rburchaklarning yuzini S_A bilan, (B) ko'pburchaklarning yuzini S_B bilan belgilaylik. Natijada (Q) shakliga ichki chizilgan ko'pburchak yuzlaridan iborat $\{S_A\}$ to'plam, (Q) shaklini o'z ichiga olgan ko'pburchak yuzlaridan iborat $\{S_B\}$ to'plamlar hosil bo'ladi. $\{S_A\}$ to'plam yuqoridan, $\{S_B\}$ to'plam quyidagi chegaralangan. Demak, $\sup\{S_A\} = \underline{Q}$, $\inf\{S_B\} = \bar{Q}$ mavjud va $\underline{Q} \le \bar{Q}$

2-ta'rif. Agar $\underline{Q} = \bar{Q}$ bo'lsa, (Q) shakl yuzga ega deyiladi va

$Q = \underline{Q} = \bar{Q}$ miqdor (Q) *shaklning yuzi* deyladi. Demak, $Q = Sup\{S_q\} = \inf\{S_Q\}$ hamda boshidagi $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz bo'lib, $\forall x \in [a,b]$ $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz bo'lib, $\forall x \in [a,b]$ uchun $f(x) \geq 0$ bo'lsin.

Yuqoridan $f(x)$ funksiya grafigi, yon tomonlardan $x = a$, $x = b$ vertikal chiziqlar hamda pastdan OX abssissa o'qi bilan chegaralangan shaklni, ya'ni aABb egri chiziqli trapetsiyani qaraylik. (40-chizma)



40-chizma.

$[a,b]$ oraliqning ixtiyoriy

$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \qquad (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$$

bo'laklashi uchun har bir $[x_k, x_{k+1}]$ $(k = 0,1,\ldots,n-1)$ oralig'ida

$$\inf\{f(x)\} = m_k, \qquad Sup\{f(x)\} = M_k$$

$$(x \in [x_k, x_{k+1}] \qquad k = 0,1,2,\ldots,n-1)$$

mavjud bo'ladi.

Quyidagi

$$s = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k, \qquad S = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k$$

yig'indilarni tuzamiz. Bu yig'indilarning birinchisi aABb egri chiziqli trapetsiyaning ichiga chizilgan ko'pburchakning yuzini (40 – chizmada bu yuz shtrixlangan), ikkinchisi esa aABb egri chiziqli trapesiyani o'z ichiga olgan ko'pburchakning yuzini ifodalaydi.

Ravshanki, bu ko'pburchaklar, demak, ularning yuzlari ham $f(x)$ funksiyaga hamda $[a,b]$ oraliqni bo'laklashga bog'liq bo'ladi:

$$s = s(P), \qquad S = S(P)$$

$[a,b]$ oraliqda turli bo'laklashlar olinsa, ularga nisbatan aABb egri chiziqli trapetsiyaning ichiga chizilgan hamda bu egri chiziqli trapesiyani o'z ichiga olgan turli ko'pburchaklar yasaladi. Natijada bu ko'pburchak yuzlaridan iborat quyidagi

$$\{s(P)\}, \qquad \{S(P)\}$$

to'plamlar hosil bo'ladi. Bunda $\{S_A(P)\}$ to'plam yuqoridan, $\{S_B(P)\}$ to'plam esa quyidan chegaralangan bo'ladi. Demak, bu to'plamlarning

$$\operatorname{Sup}\{S_A(P)\},\qquad \inf\{S_B(P)\}$$

aniq chegaralari mavjud.

Shartga ko'ra $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz. U holda Kantor teoremasining natijasiga asosan $\forall\varepsilon>0$ son olinganda $\frac{\varepsilon}{b-a}$ songa ko'ra shunday $\delta>0$ son topiladiki, $[a,b]$ oraliqni diametri $\lambda_p<\delta$ bo'lgan har qanday P bo'laklash uchun har bir $[x_k,x_{k+1}]$ oraliqda funksiyaning tebranishi

$$M_k-m_k<\frac{\varepsilon}{b-a}$$

bo'ladi. Unda

$$\inf\{S_B(P)\}-\operatorname{Sup}\{S_A(P)\}\le S_B(P)-S_A(P)=\sum_{k=0}^{n-1}M_k\Delta x_k-\sum_{k=0}^{n-1}m_k\Delta x_k=\sum_{k=0}^{n-1}(M_k-m_k)\Delta x_k<$$

$$\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k=\frac{\varepsilon}{b-a}(b-a)=\varepsilon$$

Demak, $[a,b]$ oraliqni diametri $\lambda_p<\delta$ bo'lgan har qanday bo'laklash olinganda ham bu bo'laklashga mos $aABb$ egri chiziqli trapesiyaning ichiga chizilgan hamda bu trapesiyani o'z ichiga olgan ko'pburchak yuzlari uchun har doim

$$0\le\inf\{S_B(P)\}-\operatorname{Sup}\{S_A(P)\}<\varepsilon$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bundan esa

$$\inf\{S_B(P)\}=\operatorname{Sup}\{S_A(P)\}\qquad(10.10)$$

tenglik kelib chiqadi.

(10.10) tenglik $aABb$ egri chiziqli trapetsiyaning yuzaga ega bo'lishini bildiradi.

Endi yuqorida o'rganilgan $S_A(P)$, $S_B(P)$ yig'indilarni Darbu yig'indilari (9—bobdagi 5—ta'rifga qarang) bilan taqqoslab, $S_A(P)$ hamda $S_B(P)$ yig'indilar $f(x)$ funskiyaning $[a,b]$ oraliqda mos ravishda Darbuning quyi hamda yuqori yig'indilari ekanini topamiz. Shuning uchun (9—bobdagi 6—ta'rifga asosan) ushbu

$$\operatorname{Sup}\{S_A(P)\},\quad \inf\{S_B(P)\}$$

miqdorlar $f(x)$ funksiyaning quyi hamda yuqori integrallari bo'ladi:

$$\operatorname{Sup}\{S_A(P)\}=\underline{\int_a^b} f(x)dx,\qquad \inf\{S_B(P)\}=\overline{\int_a^b} f(x)dx$$

Yuqorida isbotlangan (10.10) munosabatga ko'ra

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{L} f(x)dx$$

tenglik o'rinli ekani ko'rinadi. Demak,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{L} f(x)dx = \int_a^{l} f(x)dx$$

Demak, aABb egri chiziqli trapetsiyaning yuzi

$$Q = \int_a^b f(x)dx \qquad (10.11)$$

bo'ladi.

10.4–misol. Quyidagi

$$y = 0, \quad y = \frac{1}{2}x^2, \quad x = 1, \quad x = 3$$

chiziqlar bilan chegaralangan shaklning yuzini toping. (41-chizma)

◄ (10.11) formuladan foydalanib, topamiz:

$$Q = \int_1^3 \frac{1}{2}x^2\,dx = \frac{1}{6}x^3\Big|_1^3 = \frac{27}{6} - \frac{1}{6} = \frac{13}{3} \quad ►$$

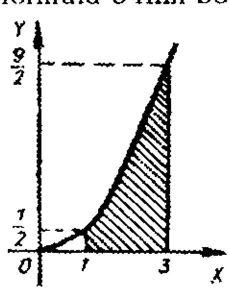
Agar tekislikda (Q) shakl quyidagi

$$y = f_1(x), \quad y = f_2(x), \quad x = a, \quad x = b$$

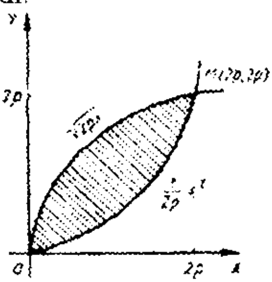
chiziqlar bilan chegaralangan shaklni ifodalasa (42-chizma)(bunda $f_1(x)$ va $f_2(x)$ funksiyalar $[a,b]$ oraliqda uzluksiz bo'lib, bu oraliqda $f_1(x) \ge 0$, $f_2(x) \ge 0$, $f_1(x) \ge f_2(x)$) u holda bu shaklning yuzi uchun ushbu

$$Q = \int_a^b f_1(x)dx - \int_a^b f_2(x)dx = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]dx \qquad (10.12)$$

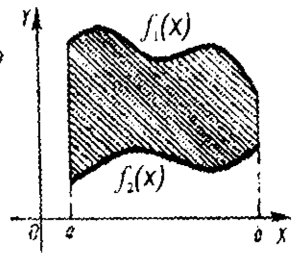
formula o'rinli bo'ladi.



41-chizma.



42-chizma.



43-chizma.

10.5–misol. Ushbu $f_1(x) = \sqrt{2px}$, $f_2(x) = \frac{1}{2p}x^2$ $(p > 0)$ chiziqlar bilan chegaralangan shaklning yuzin toping. (43 – chizma)

◀ Izlangan yuz $y=\sqrt{2px}$ va $y=\frac{1}{2p}x^2\ (p>0)$ parabolalar bilan chegaralangan. Shu parabolalar $(0,\ 0)$ va $(2p,\ 2p)$ nuqtalarda kesishadi. Demak, izlangan yuza $x=0,\ x=2p$ va $y=\sqrt{2px}$, $y=\frac{1}{2p}x^2$ chiziqlar bilan chegaralangan shaklning yuzi. Shuning uchun (10.12) formuladan foydalanib topamiz:

$$Q=\int_0^{2p}\left[\sqrt{2px}-\frac{1}{2p}x^2\right]dx=\left[\frac{2}{3}\sqrt{2p}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{6p}\right]_0^{2p}=\frac{4}{3}p^2.\ ▶$$

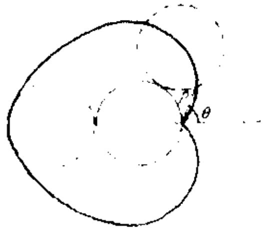
1–eslatma. Yuqoridagi (10,12) formula $[a,b]$ oraliqda $f(x)\geq 0$ bo'lganda $aABb$ egri chiziqli trapetsiyaning yuzini ifodalashini ko'rdik. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ orliqda uzluksiz bo'lib, unda ishora saqlamasa, (10,11) formuladagi integral egri chiziqli trapetsiyalar yuzlarining yig'indisi iborat bo'ladi. Bunda OX o'qining yuqoridagi yuz musbat ishora bo'lsa, OX o'qining pastidagi yuz esa manfiy ishora bilan olinadi.

2–eslatma. Tekis shaklning yuzini quyidagicha ham ta'riflash mumkin. Tekislikda (Q) shakl berilgan (39 – chizmaga qarang). $\{A_n\}$ shu shakl ichiga chizilgan ko'pburchaklar ketma – ketligi, $\{B_n\}$ esa Q shakli o'z ichiga olgan ko'pburchaklar ketma – ketli bo'lsin. A_n hamda B_n ko'pburchaklar yuzlari mos ravishda S_{A_n} va S_{B_n} bo'lib, ulardan tuzilgan ketma – ketliklar esa $\{S_{A_n}\}$ hamda $\{S_{B_n}\}$ bo'lsin. Agar $n\to\infty$ da $\{S_{A_n}\}$ hamda $\{S_{B_n}\}$ ketma - ketliklar chekli limitga ega bo'lib, $\lim\limits_{n\to\infty} S_{A_n}=\lim\limits_{n\to\infty} S_{B_n}$ tenglik o'rinli bo'lsa, (Q) shakl yuzga ega deyiladi, ushbu

$$Q=\lim_{n\to\infty} S_{A_n}=\lim_{n\to\infty} S_{B_n}$$

miqdor Q shakl yuzi deb ataladi.

Qutb koordinata sistemasida ushbu $\rho=\rho(\theta)\ (\alpha\leq\theta\leq\beta)$ funksiya tasvirlagan AB yoy hamda OA va OB radius vektorlar bilan chegaralangan shakl – egri chiziqli sektorni qaraylik. Bunda $\rho(\theta)$ funksiya $[\alpha,\beta]$ oraliqda uzluksiz hamda $\forall\theta\in[\alpha,\beta]$ uchun $\rho(\theta)>0$.



44 – chizma.

Bu OAB sektor yuzga ega bo'lib, uning yuzi

$$Q=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^{2}(\theta)\,d\theta$$

bo'ladi.

10.6–misol. Ushbu

$$\rho=\rho(\theta)=a(1-\cos\theta) \qquad (a=const,\ 0\le\theta\le 2\pi)$$

funksiya grafigi bilan chegeralangan shaklning yuzini toping.

◄ Bu funksiya kardiodani ifodalaydi. Ma'lumki, kardioda – radiusi a ga teng bo'lgan aylananing shu radiusli ikkinchi qo'zg'almas aylana bo'ylab harakatga (sirg'anmasdan yumalashi) natijasida birinchi aylana ixtiyoriy nuqtasining chizgan chizig'idir. (44 – chizma).

Kardioida qutb o'qiga nisbatan simmetrik bo'lgani sababli yuqori yarim tekislikdagi shaklning yuzini topib, so'ngra uni ikkiga ko'paytirsak, izlanayotgan yuz kelib chiqadi.

θ o'zgaruvchi $[0,\pi]$ oraliqda o'zgarganda ρ radius – vektor kardioidaning yuqori yarim tekislikdagi qismini chizadi. Shuning uchun

$$Q=2\cdot\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\rho^{2}(\theta)d\theta=\int_{0}^{\pi}a^{2}(1-\cos\theta)^{2}d\theta=a^{2}\int_{0}^{\pi}\left[\frac{3}{2}-2\cos\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right]d\theta=$$

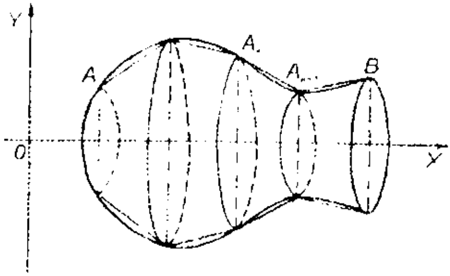
$$=a^{2}\left[\frac{3}{2}\theta-2\sin\theta+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{0}^{\pi}=\frac{3}{2}\pi a^{2}$$

Demak, $Q=\frac{3}{2}\pi a^{2}$ ►

3–§ Aylanma sirtning yuzi va uning aniq integral orqali ifodalanishi

$f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz bo'lib, $\forall x\in[a,b]$ uchun $f(x)\ge 0$ bo'lsin. Shu funksiya grafigining $A(a,f(a))$ va $B(b,f(b))$ nuqtalar orqasidagi bo'lagini AB yoy deb yuritamiz. Shu AB

yoyni o'qi atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan sirt aylanma sirt deb ataladi. (45- chizma).



45 chizma.

Bu sirtning yuzini aniqlab, uning aniq integral orqali ifodalanishini ko'rsatamiz. $[a,b]$ oraliqni ixtiyoriy

$$P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}\quad (a=x_0<x_1<\dots<x_n=b)$$

bo'laklashni olaylik. P bo'laklashning har bir $x_k\,(k=0,1,\dots,n)$ bo'luvchi nuqtalari orqali OY o'qiga parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazib, ularning AB yoyi bilan kesishgan nuktalarning $A_k(x_k,f(x_k))$ bilan belgilaylik. Bu $A_k(x_k,f(x_k))$ $(k=0,1,\dots,n^*,\ A_0=A,\ A_n=B)$ nuqtalarni o'zaro to'g'ri chiziq kesmalari bilan birlashtirib, AB yoyiga L^1 siniq chiziq chizamiz.

AB yoyining OX o'qi atrofida aylantirish bilan birga siniq chiziqni ham shu o'q atrofida aylantiramiz. Natijada kesik konus sirtlardan tashkil topgan sirt hosil bo'ladi. Bu sirtning yuzi ushbu

$$q=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2\pi f(x_k)+2\pi f(x_{k+1})}{2}\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+\left[f(x_{k+1})-f(x_k)\right]^2}=$$

$$2\pi\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+\left[f(x_{k+1})-f(x_k)\right]^2}\qquad(10.13)$$

formula bilan ifodalanadi.

P bo'laklashning diametri $\lambda_p\to 0$ da AB yoyiga chizilgan l^* siniq chiziq peremetri L (shu bobning 1 - § da ko'rsatilganiga ko'ra) AB yoyi uzunligiga intiladi.

Buni e'tiborga olib, $\lambda_p\to 0$ da L siniq chiziqni OX o'qi atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan (kesik konus sirtlaridan tashkil topgan) sirtning yuzi q ning limitini biz izlayotgan aylanma sirtning yuzi deb qarash tabiiy.

Endi aylanma sirt yuzining aniq integral orqali ifodalash maqsadida qaralayotgan $f(x)$ funksiyani $[a,b]$ oraliqda uzluksiz $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsin deb qaraymiz. Avval $f(x)$ funksiya $[a,b]$

oraliqda uzluksiz bo'lgani uchun $[x_k, x_{k+1}]$ oraliqda ham uzluksiz bo'lib, unda shunday ξ_k nuqta topiladiki,

$$\frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2} = f(\xi_k), \quad \xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu bir tomondan. Ikkinchi tomondan, Lagranj teoremasiga ko'ra $[x_k, x_{k+1}]$ oraliqda shunday τ_k nuqta topiladiki,

$$f(x_{k+1}) - f(x_k) = f'(\tau_k)(x_{k+1} - x_k), \quad \tau_k \in [x_k, x_{k+1}]$$

tenglik ham o'rinli bo'ladi. Natijada (10,13) munosabat ushbu

$$q = 2\pi \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2 + f'^2(\tau_k)(x_{k+1}-x_k)^2} =$$

$$= 2\pi \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\sqrt{1+f'^2(\tau_k)}\Delta x_k \qquad (\Delta x_k = x_{k+1} - x_k)$$

ko'rinishni oladi.

Bu holda ham yuqoridagi yig'indi

$$f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}$$

funksiyaning integral yig'indisini eslatadi. Farqi, $\eta_k \in [x_k, x_{k+1}]$ ixtiyoriy nuqta bo'lgan holda, ξ_k va τ_k lar shu $[x_k, x_{k+1}]$ oraliqdagi tayin nuqtalarligidir.

Modomiki,

$$f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}$$

funksiya $[a, b]$ da uzluksiz, binobarin integralanuvchi ekan,

$$\lim_{\lambda_P \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\sqrt{1+f'^2(\tau_k)} \cdot \Delta x_k = \lim_{\lambda_P \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\eta_k)\sqrt{1+f'^2(\eta_k)} \cdot \Delta x_k = \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$$

bo'ladi.

Demak, aylanma sirtning yuzi

$$Q = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx \qquad (10,14)$$

bo'ladi.

10.7–misol. $[0, a]$ $(a > 0)$ oraliqda

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) \qquad (10.15)$$

zanjir chiziqni OX o'qi atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan aylanma sirtning yuzini toping.

◄Avvalo (10,15) funksiyaning hosilasini hisoblaymiz:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

So'ngra (10.14) formuladan foydalanib, izlanavotgan aylanma sirtning yuzini topamiz:

$$S=2\pi\int_0^a \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)^2}\,dx=\frac{\pi a}{2}\int_0^a\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)^2dx=$$

$$=\frac{\pi a}{2}\int_0^a\left[e^{\frac{2x}{a}}+2+e^{-\frac{2x}{a}}\right]dx=\frac{\pi a}{2}\left|\frac{a}{2}e^{\frac{2x}{a}}+2x-\frac{a}{2}e^{-\frac{2x}{a}}\right|_0^a=\frac{\pi a^2}{4}\left(e^2+e^{-2}+4\right)$$

4–§. O'zgaruvchi kuchning bajargan ishi va uning aniq integral orqali ifodalanishi

Faraz qilaylik, biror jism OX o'qi bo'ylab F kuch ta'siri ostida harakat qilayotgan bo'lsin. Bunda F kuch jismning OX o'qidagi holatiga bog'liq, ya'ni $F=F(x)$ va uning yo'nalishi harakat yo'nalishi bilan ustma-ust tushsin, deylik. Bu kuch ta'sirida jismni a nuqtadan b nuqtaga o'tkazish uchun bajarilgan ishni topish masalasi yuzaga keladi. Ma'lumki $F=F(x)$ kuch $[a,b]$ oraliqda $F(x)=c=const$ bo'lsa, jismni a nuqtadan b nuqtaga o'tkazish uchun bajarilgan ish $A=C(b-a)$ flrmula bilan ifodalanadi.

$F(x)$ kuch $[a,b]$ oraliqda x o'zgaruvchining ixtiyoriy uzluksiz funksiyasi bo'lsin. U holda $[a,b]$ oraliqni ixtiyoriy

$$P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}\quad (a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b)$$

bo'laklashni olib, bu bo'laklashning har bir $[x_k,x_{k+1}]$ $(k=0,1,\ldots,n-1)$ orlig'ida ixtiyoriy $\xi_k(\xi_k\in[x_k,x_{k+1}],k=0,1,\ldots,n-1)$ nuqta olamiz.

Agar har bir $[x_k,x_{k+1}],k=0,1,\ldots,n-1)$ oraliqda jismga ta'sir etayotgan $F(x)$ kuchni o'zgarmas va $F(\xi_k)$ ga teng deb olsak, u holda $[x_k,x_{k+1}]$ oralig'ida bajarilgan ish taxminan $F(\xi_k)\cdot(x_{k+1}-x_k)$ formula bilan, $[a,b]$ oraliqda bajarilgan ish esa, taxminan

$$A\approx\sum_{k=0}^{n-1}F(\xi_k)(x_{k+1}-x_k)=\sum_{k=0}^{n-1}F(\xi_k)\Delta x_k \qquad (10.16)$$

formula bilan ifodalanadi.

$F=F(x)$ kuch ta'sirida jismni a nuqtadan b nuqtaga o'tkazish uchun bajarilgan ishni ifodalovchi (10. 16) formula taqribidir.

Ravshanki, $\sum\limits_{k=0}^{n-1}F(\xi_k)\Delta x_k$ yig'indini $F=F(x)$ funksiyaga bog'liq bo'lishi bilan birga u $[a,b]$ oraliqni bo'laklashga hamda har bir $[x_k,x_{k+1}]$ oraliqda olingan ξ_k nuqtalarga bog'liq.

Endi P bo'laklashning diametri λ_p nolga intila borsin. U holda yuqoridagi yig'indining qiymati biz izlayotgan ish miqdorini tobora aniqroq ifodalaydi. Demak, $\lambda_p \to 0$ da yuqoridagi yig'indining chekli limitini bajarilgan ish deb aytish tabiiydir.

Agar $\lambda_p \to 0$ da (10,16) yig'indi $[a,b]$ oraliqni bo'laklash usuliga hamda ξ_k nuqtani tanlab olishga bog'liq bo'lmagan holda chekli A songa intilsa, bu A son o'zgaruvchi $F(x)$ kuchning $[a,b]$ oraliqdagi bajargan ishi deb ataladi. Demak,

$$A = \lim_{\lambda_p \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k)\Delta x_k$$

Yuqoridagi (10,16) yig'indi $F(x)$ funksiyaning $[a,b]$ oraliqdagi integral yig'indisi ekanini payqash qiyin emas. Qaralayotgan $F(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz bo'lgani uchun u shu oraliqda integrallanuvchi bo'ladi. Demak,

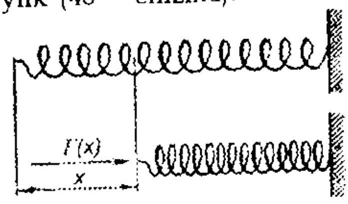
$$\lim_{\lambda_p \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} F(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b F(x)dx$$

Shunday qilib, o'zgaruvchi $F(x)$ kuchning $[a,b]$ oraliqdagi bajargan ishi

$$A = \int_a^b F(x)dx$$

formula bilan ifodalanadi.

10.8–misol. Vintsimon prujinaning bir uchi mustahkamlangan, ikkinchi uchiga esa $F = F(x)$ kuch ta'sir etib, prujina qisilgan deylik (46 – chizma).



46 – chizma.

Agar prujinaning qisilishi unga ta'sir etayotgan $F(x)$ kuchga proporsional bo'lsa, prujinani a birlikka qisish uchun $F(x)$ kuchning bajarilgan ishini toping.

◀Agar $F(x)$ kuch ta'sirida prujinaning qisilish miqdorini x orqali belgilasak, u holda

$$F(x) = kx$$

bo'ladi, bunda k — proporsionallik koeffitsienti (qisilish koeffitsienti). Yuqoridagi formuladan foydalanib bajarilgan ishni hisoblaymiz:

$$A=\int_0^a kx\,dx=k\frac{x^2}{2}\Big|_0^a=\frac{ka^2}{2}. \blacktriangleright$$

5-§. Inersiya momenti

Mexanikada inersiya momenti tushunchasi muhim bo'lib, u masalalar yechishda ko'p qo'llaniladi. Tekislikda m massaga ega bo'lgan A moddiy nuqta berilgan bo'lib, bu nuqtadan biror l o'qqacha (yoki 0 nuqtagacha) bo'lgan masofa r ga teng bo'lsin.

Ma'lumki, ushbu $J=mr^2$ miqdor A moddiy nuqtaning l o'qni (0 nuqtaga) nisbatan inersiya momenti deb ataladi.

Masalan, tekislikdagi m massaga ega bo'lgan $A=A(x,y)$ moddiy nuqtaning koordinata o'qlariga hamda koordinata boshiga nisbatan inersiya momentlari mos ravishda

$$J_x=my^2,\quad J_y=mx^2,\quad J_0=m(x^2+y^2)$$

formulalar bilan ifodalanadi.

Endi tekislikda har biri mos ravishda $m_0, m_1, \ldots, m_{n-1}$ massaga ega bo'lgan $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ moddiy nuqtalar sistemasi berilgan bo'lsin. Bu sistemaning biror l o'qqa (0 nuqtaga) nisbatan inersiya moment har bir nuqtaning shu l o'qqa (0 nuqtaga) nisbatan inersiya momentlari yig'indisi $J_n=\sum\limits_{k=0}^{n-1} m_k r_k^2$ sifatida ta'riflanadi, bunda r_k miqdor A_k nuqtadan l o'qqacha (0 nuqtagacha) bo'lgan masofa.

Masalan, tekislikda har biri mos ravishda $m_0, m_1, \ldots, m_{n-1}$ massaga ega bo'lgan $A_0(x_0,y_0), A_1(x_1,y_1), \ldots, A_{n-1}(x_{n-1},y_{n-1})$ moddiy nuqtalar sistemasining koordinata o'qlariga hamda koordinata boshiga nisbatan inersiya momentlari mos ravishda

$$J_x^{(n)}=\sum_{k=0}^{n-1} m_k y_k^2,\qquad J_y^{(n)}=\sum_{k=0}^{n-1} m_k x_k^2,\qquad J_0^{(n)}=\sum_{k=0}^{n-1} m_k (x_k^2+y_k^2)$$

formula bilan ifodalanadi.

Biror $y=f(x)$ egri chiziq yoyi bo'yicha massa tarqatilgan bo'lsin. Bu massali egri chiziq yoyining koordinata o'qlari hamda koordinata boshiga nisbatan inersiya momentini aniqlaymiz.

$f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz hamda uzluksiz $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsin. Bu funksiya grafigi AB yoyini tasvirlasin, deylik. AB yoyi bo'yicha zichligi o'zgarmas va 1 ga teng bo'lgan massa tarqatilgan. Ravshanki, bu holda massa yoy uzunligiga teng va (10,1) formulaga ko'ra

$$m=\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$$

bo'ladi.

$[a,b]$ oraliqni ixtiyoriy

$$P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\} \quad (a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b)$$

bo'laklashni olaylik. Bu bo'laklash AB yoyni $A_k(x_k,f(x_k))$ $(k=0,1,\ldots,n-1,\ A_0=A,\ A_{n-1}=B)$ nuqtalar bilan n ta A_kA_{k+1} bo'lakka ajratadi. Bunda A_kA_{k+1} bo'lakning massasi (10,1) formulaga ko'ra topiladi:

$$m_k=\int_{x_k}^{x_{k+1}} \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx \qquad (k=0,1,2,\ldots,n-1)$$

O'rta qiymat haqidagi teoremaga asosan shunday $\xi_k(\xi_k\in[x_k,x_{k+1}])$ nuqta topiladiki,

$$m_k=\int_{x_k}^{x_{k+1}} \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx=\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\,\Delta x_k$$

bo'ladi, bunda $\Delta x_k=x_{k+1}-x_k$.

Yuqoridagi munosabatlarga muvofiq $(\xi_k,f(\xi_k))$ $(k=0,1,\ldots,n-1)$ moddiy nuqtaning koordinata o'qlariga hamda koordinata boshiga nisbatan inersiya momentlari mos ravishda

$$J_y^k=\xi_k^2 m_k=\xi_k^2\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\,\Delta x_k,$$

$$J_x^k=f^2(\xi_k)m_k=f^2(\xi_k)\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\,\Delta x_k,$$

$$J_0^k=(\xi_k^2+f^2(\xi_k))m_k=(\xi_k^2+f^2(\xi_k))\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\,\Delta x_k$$

formula bilan, $(\xi_0,f(\xi_0)),\ (\xi_1,f(\xi_1)),\ldots,(\xi_{n-1},f(\xi_{n-1}))$ moddiy nuqtalar sistemasining inersiya momentlari esa mos ravishda

$$J_y^{(n)}=\sum_{k=0}^{n-1}\xi_k^2\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\,\Delta x_k,$$

$$J_x^{(n)}=\sum_{k=0}^{n-1}f^2(\xi_k)\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\,\Delta x_k, \qquad (10,17)$$

$$J_0^{(n)}=\sum_{k=0}^{n-1}(\xi_k^2+f^2(\xi_k))\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\,\Delta x_k$$

formulalar bilan ifodalanadi.

Endi P bo'laklashning diametri λ_P nolga intila borsin. Unda har bir A_kA_{k+1} yoyning uzunligi ham nolga intila borib, A_kA_{k+1} yoyi esa nuqtaga aylana boradi. Bu hol tabiiy ravishda $\lambda_P \to 0$ da (10.17) formulalar bilan ifodalangan $J_x^{(n)}, J_y^{(n)}, J_0^{(n)}$ yig'indilarning limitini massaga ega bo'lgan moddiy egri chiziq yoyining koordinata o'qlari hamda koordinata boshiga nisbatan inersiya momenti deb qarashga olib keladi.

$\lambda_P \to 0$ da $J_x^{(n)}, J_y^{(n)}, J_0^{(n)}$ yig'indilarning limiti moddiy egri chiziq yoyining koordinata o'qlariga hamda koordinata boshiga nisbatan inersiya momenti deb ataladi va ular mos ravishda J_x, J_y, J_0 kabi belgilanadi.

Demak,

$$J_y = \lim_{\lambda_P \to 0} J_y^{(n)} = \lim_{\lambda_P \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k^2 \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\,\Delta x_k,$$

$$J_x = \lim_{\lambda_P \to 0} J_x^{(n)} = \lim_{\lambda_P \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f^2(\xi_k) \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\,\Delta x_k,$$

$$J_0 = \lim_{\lambda_P \to 0} J_0^{(n)} = \lim_{\lambda_P \to 0} = \sum_{k=0}^{n-1} (\xi_k^2 + f^2(\xi_k)) \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\,\Delta x_k$$

(10.17) munosabatdagi yig'ndilarni $[a, b]$ oraliqda mos ravishda quyidagi

$$x^2\sqrt{1 + f'^2(x)}, \quad f^2(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}, \quad (x^2 + f^2(x))\sqrt{1 + f'^2(x)}$$

funksiyalarning integral yig'indilari ekanligini payqash qiyin emas. Shartga ko'ra $f(x)$ funksiya $[a, b]$ da uzluksiz hamda uzluksiz $f'(x)$ hosilaga ega. Shuning uchun yuqoridagi funksiyalar $[a, b]$ da integrallanuvchi. Demak,

$$\lim_{\lambda_P \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k^2 \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\,\Delta x_k = \int_a^b x^2 \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx,$$

$$\lim_{\lambda_P \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f^2(\xi_k) \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\,\Delta x_k = \int_a^b f^2(x) \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx,$$

$$\lim_{\lambda_P \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} (\xi_k^2 + f^2(\xi_k)) \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\,\Delta x_k = \int_a^b (x^2 + f^2(x)) \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx.$$

Natijada ushbu

$$J_y = \int_a^b x^2 \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx,$$

$$J_x = \int_a^b f^2(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx,$$

$$J_0 = \int_a^b (x^2 + f^2(x))\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$$

formulalarga ega bo'lamiz.

Mashqlar

10.9. Ushbu

$$y^2 = 2px$$

parabolaning (0,0) va (x,y) nuqtalari orasidagi yoyining uzunligi

$$L = \frac{y}{2p}\sqrt{y^2+p^2} + \frac{p}{2}\ln\frac{y+\sqrt{y^2+p^2}}{p}$$

ga teng bo'lishi isbotlansin.

10.10. Parametrik ko'rinishda $(x=\varphi(t),\ \ y=\varphi(t);\ t\in[\alpha,\beta])$ berilgan egri chiziq yoyining uzunligi

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t)+\varphi'^2(t)}\,dt$$

bo'lishi isbotlansin.

10.11. Ushbu

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,\ \ x = c \qquad (c > a)$$

chiziqlar bilan chegaralangan shaklning yuzi topilsin.

10.12. Radiusi r bo'lgan $(r>0)$ shar sirtining yuzi topilsin.

XI BOB

Sonli qatorlar

Biz mazkur bobda sonli qatorlarni, ularning yaqinlashishi, uzoqlashishi, yaqinlashish alomatlari hamda yaqinlashuvchi qatorlarning xossalarini o'rganamiz.

1-§. Asosiy tushunchalar

Ushbu

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots \qquad (11.1)$$

haqiqiy sonlar ketma-ketligi berilgan bo'lsin.

1-ta'rif. Quyidagi

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (11.2)$$

ifoda *qator (sonli qator)* deb ataladi. Uni $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ kabi belgilanadi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

(11.1) ketma-ketlikning $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ elementlari qatorning hadlari deyiladi, a_n esa qatorning umumiy (n-chi) hadi deyiladi. (11.2) qatorning hadlaridan quyidagi

$$A_1 = a_1,$$
$$A_2 = a_1 + a_2$$
$$A_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

yig'indilarni tuzamiz. Ular qatorning qismiy yig'indilari deyiladi.

Demak, (11.2) qator berilgan holda har doim bu qatorning qismiy yig'indilaridan iborat ushbu A_n:

$$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots$$

sonlar ketma-ketligini hosil qilish mumkin.

2-ta'rif. Agar $n \to \infty$ da (11.2) qatorning qismiy yig'indilaridan iborat A_n ketma-ketlik chekli limitga ega, ya'ni

$$\lim_{n \to \infty} A_n = A \qquad (A \in R)$$

bo'lsa, *qator yaqinlashuvchi* deyiladi.

Bu limitning qiymati A son (11.2) qatorning yig'indisi deyiladi va quyidagicha yoziladi

$$A = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

3-ta'rif. Agar $n \to \infty$ da (11.2) qatorning qismiy yig'indilaridan iborat A_n ketma- ketlikning limiti cheksiz bo'lsa yoki bu limit mavjud bo'lmasa, u holda (11.2) *qator uzoqlashuvchi* deyiladi. Masalan:

1) Ushbu

$$1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} + \dots$$

qator yaqinlashuvchi, chunki

$$A_n = 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} = 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \to \infty} A_n = 2$$

2) Quyidagi

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + \dots$$

qator uzoqlashuvchi, chunki

$$A_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

bo'lib,

$$\lim_{n \to \infty} A_n = \infty$$

3) Quyidagi

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

qator ham uzoqlashuvchi, chunki

$$A_n = 1 - 1 + \dots + (-1) = \begin{cases} 0, \text{ agar n juft son bo'lsa} \\ 1, \text{ agar n toq son bo'lsa} \end{cases}$$

bo'lib, A_n ketma - ketlik limitga ega emas.

11.1 misol. Geometrik progressiya $a, aq, \dots, aq^{n-1} \dots$ hadlaridan tuzilgan

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots$$

qatorni yaqinlashuvchilikka tekshirilsin. Odatda bu qator geometrik qator deyiladi.

◄ Ravshanki,

$$A_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1 - q} \quad (q \neq 1)$$

Agar $|q| < 1$ bo'lsa

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}$$

bo'ladi. Demak, bu holda geometrik qator yaqinlashuvchi va uning yig'indisi $\frac{a}{1-q}$ songa teng.

Agar $q>1$ bo'lsa, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ bo'lib, qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

Agar $q=1$ bo'lsa, $n\to\infty$ da $S_n = na \to\infty$ bo'lib, qator uzoqlashuvchi, $q=-1$ bo'lganda esa S_n ketma-ketlik limitga ega emas. Demak, bu holda ham qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

Shunday qilib, geometrik qator $|q|<1$ bo'lganda yaqinlashuvchi, $|q|>1$ va $|q|=1$ bo'lganda uzoqlashuvchi bo'ladi. ►

11.2-misol. Quyidagi

$$1+\frac12+\frac13+\dots+\frac1n+\dots \qquad (11.3)$$

qatorni uzoqlashuvchi bo'lishi ko'rsatilsin. Bu qator garmonik qator deb ataladi.

◄ (11.2) qatorning birinchi 2^k ta $(k\in N)$ hadidan tuzilgan

$$S_{2^k} = 1+\frac12+\frac13+\frac14+\dots+\frac{1}{2^{k-1}+1}+\dots+\frac{1}{2^k}$$

qismiy yig'indisini olib, uni quyidagicha yozib olamiz.

$$S_{2^k} = \left(1+\frac12\right)+\left(\frac13+\frac14\right)+\left(\frac15+\frac16+\frac17+\frac18\right)+\left(\frac19+\frac1{10}+\dots+\frac1{16}\right)+\dots+$$
$$+\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\frac{1}{2^{k-1}+2}+\dots+\frac{1}{2^k}\right).$$

Endi ushbu

$$\frac13+\frac14>\frac14+\frac14=\frac12,$$
$$\frac15+\frac16+\frac17+\frac18>\frac18+\frac18+\frac18+\frac18=4\cdot\frac18=\frac12,$$
$$\frac19+\dots+\frac1{16}>\frac1{16}+\frac1{16}+\dots+\frac1{16}=8\cdot\frac1{16}=\frac12,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{1}{2^{k-1}+1}+\frac{1}{2^{k-1}+2}+\dots+\frac{1}{2^k}>\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k}+\dots+\frac{1}{2^k}=2^{k-1}\cdot\frac{1}{2^k}=\frac12$$

tengsizliklarni e'tiborga olsak, unda

$$S_{2^k}>1+k\cdot\frac12$$

tengsizlikning o'rinli bo'lishi kelib chiqadi. Ravshanki, A_{2^k} ketma-ketlik o'suvchi va $\lim\limits_{n\to\infty} A_{2^k} = \infty$. Shunday qilib, garmonik qator uzoqlashuvchi. ►

11.3 misol. Ushbu

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\ldots \qquad (11.4)$$

qatorni yaqinlashuvchiligi, yig'indisi $\ln 2$ ga tengligi ko'rsatilsin.

◄ Bu qatorning qismiy yig'indisini yozamiz.

$$A_n = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

Ma'lumki,

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n}\frac{x^n}{n}+r_n(x)$$

bunda $0\le x\le 1$ uchun

$$|r_n(x)|\le\frac{1}{n+1}$$

tengsizlik o'rinli (6 bob, 7 § ning 6 - bandidiga qarang). Yuqoridagi formulada $x=1$ deb topamiz.

$$\ln 2 = A_n + r_n(1)$$

natijada ushbu

$$|A_n - \ln 2| = |r_n(1)| \le \frac{1}{n+1}$$

tengsizlikka kelamiz. Unda

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \ln 2.$$

kelib chiqadi. Demak (11,4) qator yaqinlashuvchi va uning yig'indisi $\ln 2$ ga teng.►

Aytaylik

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

qator berilgan bo'lsin. Bu qatorning dastlabki m ta hadini tashlash natijasida hosil bo'lgan ushbu

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n \qquad (11.5)$$

qator $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorning (m - chi hadidan keyingi) qoldig'i deyiladi.

2-§. Yaqinlashuvchi qatorning xossalari Koshi teoremasi

1°. Yaqinlashuvchi qatorning xossalari. Biror

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \qquad (11.2)$$

qator berilgan bo'lsin. Agar qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u ma'lum xossalarga ega bo'ladi.

1-xossa. Agar (11.2) qator yaqinlashuvchi bo'isa, uning istalgan (11.5) qoldig'i ham yaqinlashuvchi bo'ladi va aksincha.

◄ (11.2) qator berilgan bo'lsin. Biror m natural soni tayinlab (11.5) qatorning qismini yig'indisini A'_k bilan belgilaylik.

$$A'_k = a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{m+k}$$

Ravshanki,

$$A_n - A_m = A'_{n-m}, \quad A_n = A_m + A'_{n-m} \qquad (n > m)$$

(11.6)

bunda $A_m = a_1 + a_2 + \dots + a_m$ bo'ladi.

(11.2) qator yaqinlashuvchi bo'lsin. Ta'rifga ko'ra

$$\lim_{k \to \infty} A_{m+k} = A \quad (A - \text{chekli son})$$

bo'ladi. $k \to +\infty$ da (11.6) tenglikda limitga o'tib topamiz:

$$\lim_{k \to \infty} A'_k = A - A_m$$

Bu esa (11.5) qatorning yaqinlashuvchi ekanini bildiradi.

Endi (11.5) qator yaqinlashuvchi bo'lsin. U holda ta'rifga ko'ra

$$\lim_{k \to \infty} A'_k = A' \qquad (A - \text{chekli son})$$

bo'ladi. (11.6) tenglikda $n \to \infty$ da limitga o'tsak, u holda

$$\lim_{n \to \infty} A_n = A' + A_m$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa (11.2) qatorning yaqinlashuvchi ekanini bildiradi. ►

Shunday qilib, qatorning dastlabki chekli sondagi hadlarini tashlab yuborish yoki qatorning boshiga chekli sondagi yangi hadlarni qo'shish uning yaqinlashuvchidagi xarakterga ta'sir qilmaydi.

1-natija. Agar (11.2) qator yaqinlashuvchi bo'lsa, uning qoldig'i

$$r_m = a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{m+k} + \dots$$

$m \to \infty$ da nolga intiladi.

◄ Haqiqatan ham (11.2) qator yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi A bo'lsin. u holda

$$A = A_m + r_m, \quad r_m = A - A_m$$

bo'lib,

$$\lim_{m \to \infty} r_m = A - A = 0$$

bo'ladi. ►

2–xossa. Agar (11.2) qator yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi A ga teng bo'lsa, u holda

$$\sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c a_1 + c a_2 + \ldots + c a_n + \ldots \qquad (11.7)$$

qator ham yaqinlashuvchi va uning yig'indisi cA ga teng bo'ladi ($c \neq 0$ – n ga bog'liq bo'lmagan o'zgarmas son).

◄ (11.2) qatorning qismiy yig'indisi A_n' bilan belgilasak, u holda

$$A_n' = c a_1 + c a_2 + \ldots + c a_n = c(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = c A_n$$

bo'lib, undan

$$\lim_{n \to \infty} A_n' = cA$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa (11.7) qatorning yaqinlashuvchi bo'lishini va uning yig'indisi cA ga teng ekanini bildiradi. ►

Bu xossa yaqinlashuvchi qatorlarda ushbu

$$c(a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots) = c a_1 + c a_2 + \ldots + c a_n + \ldots$$

munosabatning o'rinli bo'lishini ifodalaydi.

3–xossa. Agar

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots$$

qatorlar yaqinlashuvchi bo'lib, ularning yig'indisi mos ravishda A va B ga teng bo'lsa, u holda

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_n + b_n) + \ldots \qquad (11.8)$$

qator ham yaqinlashuvchi va uning yig'indisi $A + B$ ga teng bo'ladi.

◄ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ va $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qatorlar yaqinlashuvchi. Demak, bu qatorlarning qismiy yig'indilari (A_n va B_n lar) uchun $\lim_{n \to \infty} A_n = A$

$\lim\limits_{n\to\infty} B_n = B$ tengliklar o'rinli (11.8) qatorning qismiy yig'indilari C_n bilan belgilab topamiz:

$$C_n = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_n + b_n) = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = A_n + B_n$$

Bundan

$$\lim_{n\to\infty} C_n = A + B$$

Keyingi tenglikdan xossaning isboti kelib chiqadi. ►

2–natija Agar $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ va $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ qatorlar yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda

$$\sum_{n=1}^{\infty} (c a_n + l b_n)$$

qator ham yaqinlashuvchi va

$$\sum_{n=1}^{\infty} (c a_n + l b_n) = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n + l\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

tenglik o'rinli bo'ladi (bunda c, l – n ga bog'lik bo'lmagan o'zgarmas sonlar)

4–xossa. Agar (11.2) qator yaqinlashuvchi bo'lsa, bu qatorning umumiy hadi a_n, $n \to \infty$ da nolga intiladi.

◄ (11.2) qator yaqinlashuvchi bo'lsin, ya'ni $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$ (A chekli son). Agar

$$a_n = A_n - A_{n-1}$$

bo'lishini e'tiborga olsak, u holda limitlar xossalariga ko'ra

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (A_n - A_{n-1}) = A - A = 0$$

bo'lishini topamiz. ►

Eslatma. Qatorning umumiy hadi $n \to \infty$ da nolga intilishdan uning yaqinlashuvchi bo'lishi har doim kelib chiqavermaydi.

Masalan. Garmonik qator $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ning umumiy hadi $a_n = \frac{1}{n}$ bo'lib, u $n \to \infty$ da nolga intiladi, ammo bu qator uzoqlashuvchi.

Yuqorida keltirilgan 4–xossa qator yaqinlashishning zaruriy shartini ifodalaydi.

2^0. **Koshi teoremasi**. Aytaylik,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

qator berilgan bo'lib,

$$A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

uning qismiy yig'indisi bo'lsin.

1−teorema. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *qatorning yaqinlashuvi bo'lishi uchun* $\forall \varepsilon > 0$ *olinganda ham shunday* $n_0 \in N$ *topilib,* $\forall n > n_0$ *va* $m = 1, 2, 3, \ldots$ *lar uchun*

$$|A_{n+m} - A_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+m}| < \varepsilon$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli.

◄ Bu teoremaning isboti 3−bob, da keltirilgan Koshi teoremasidan kelib chiqadi. ►

Bu teorema muhim nazariy ahamiyatga ega bo'lib, undan amaliy masalalarni hal etishda foydalanish qiyin bo'ladi.

3−§. Musbat qatorlar

1⁰. Musbat qatorlarning yaqinlashuvchi bo'lishi sharti. Biror (11.2) qator berilgan bo'lsin.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (11.2)$$

Agar $a_n \geq 0 \; (n = 1, 2, 3, \ldots)$ bo'lsa, u holda (11.2) qator musbat holda qator yoki, qisqacha, musbat qator deb ataladi.

2−teorema. *Ushbu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *musbat qator yaqinlashuvchi bo'lishi uchun uning qismiy yig'indilari ketma−ketligi yuqoridan chegaralangan bo'lishi zarur va yetarli.*

◄ **Zarurligi**. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashuvchi bo'lsin: $\lim_{n \to \infty} A_n = A$ (A − chekli son). U holda A_n ketma−ketlik yaqinlashuvchi binobarin chegaralangan, jumladan u yuqoridan chegaralangan bo'ladi.

Yetarliligi. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorning qismiy yig'indilari ketma ketligi A_n yuqorida chegaralangan bo'lsin.

Shu qatorning har bir hadi manfiy bo'lmagani uchun

$$A_{n+1} = A_n + a_{n+1} \geq A_n$$

tengsizlik o'rinli. A_n ketma ketlik o'suvchi. Shuning uchun 3 bobdagi 7−teoremaga ko'ra A_n ketma−ketlik chekli limitga ega:

$\lim_{n\to\infty} S_n = S$. Bu esa $\sum a_n$ qatorning yaqinlashuvchi ekanini bildiradi. ►

11.4 misol. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}} = 1+\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3^{\alpha}}+\dots+\frac{1}{n^{\alpha}}+\dots$$

qatorni (uni umumlashgan garmonik qator deyiladi) $\alpha > 1$ bo'lganda yaqinlashuvchi ekanligi ko'rsatilsin.

◄ Ravshanki qismiy yig'indilardan tuzilgan

$$A_n = 1+\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3^{\alpha}}+\dots+\frac{1}{n^{\alpha}}$$

ketma - ketlik o'suvchi. Demak $A_n < A_{2n+1}$ $(n=1,2,\dots)$. Ayni paytda

$$A_{2n+1} = 1+\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3^{\alpha}}+\dots+\frac{1}{(2n+1)^{\alpha}} = 1+\left(\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3^{\alpha}}\right)+\dots+\left(\frac{1}{(2n)^{\alpha}}+\frac{1}{(2n+1)^{\alpha}}\right) < 1+$$

$$+\frac{2}{2^{\alpha}}+\frac{2}{4^{\alpha}}+\dots+\frac{2}{(2n)^{\alpha}} = 1+\frac{1}{2^{\alpha-1}}A_n$$

bo'ladi.

Oxirgi ikki munosabatdan ushbu

$$A_n < 1+\frac{1}{2^{\alpha-1}}A_n$$

tengsizlik kelib chiqadi. Bundan $\alpha > 1$ bo'lganda

$$A_n < \frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}-1}, \qquad (n=1,2,\dots)$$

tengsizlik hosil bo'ladi. Bu esa A_n ketma - ketlikning yuqoridan chegaralanganligini bildiradi. 2 - teoremaga ko'ra berilgan qator yaqin - lashuvchidir. ►

3−natija. Musbat qatorning qismiy yig'indilaridan iborat ketma ketlik yuqoridan chegaralnmagan bo'lsa, qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

2⁰. Musbat qatorlarni taqqoslash haqida teoremalar. Ma'lum musbat qatorning yaqinlashuvchanligi yoki uzoqlashuvchiligini bilgan holda, hadlari bu qator hadlari bilan biror munosabatda bo'lgan (taqqoslangan) ikkinchi musbat qatorning yaqinlashuvchiligi yoki uzoqlashuvchiligini aniqlash mumkin. Ular quyidagi teoremalar bilan ifodalanadi.

Ikkita musbat $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ va $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qator berilgan bo'lsin.

3−teorema. *n ning biror $n_0(n_0 \geq 1)$ qiymatidan boshlab* *barcha $n \geq n_0$ lar uchun*

$$a_n \leq b_n \qquad (11.9)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsin. Agar a) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qator yaqinlashuvchi bo'lsa, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi. b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator uzoqlashuvchi bo'lsa, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qator ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

◀Ushbu bobning 2–§ ida aytib o'tdikki, qatorning yaqinlashuvchi (uzoqlashuvchi) bo'lishiga uning chekli sondagi dastlabki hadlarining ta'siri bo'lmaydi. Shu sababli (11.9) tengsizlik $n_0 = 1$ dan boshlab o'rinli bo'lsin, deb qarash mumkin. Demak, $a_n \leq b_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ tengsizlik o'rinli. U holda berilgan qatorlarning qismiy yig'indilari

$$A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$
$$B_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$$

uchun ushbu

$$A_n \leq B_n \qquad (n = 1, 2, \ldots) \qquad (11.10)$$

tengsizlik ham o'rinli bo'ladi.

Avval $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qator yaqinlashuvchi bo'lsin. U holda 2– teoremaga ko'ra B_n ketma–ketlik yuqoridan chegaralangan bo'ladi: $B_n \leq M$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$

Bundan (11.10) tengsizlikka asosan $A_n \leq M$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ tengsizlik ham o'rinli ekani kelib chiqadi. Demak, A_n ketma – ketlik ham yuqoridan chegaralangan. Yana o'sha 2 – teoremaga ko'ra $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorning yaqinlashuvchi bo'lishi kelib chiqadi.

Endi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator uzoqlashuvchi bo'lsin. U holda A_n ketma–ketlik yuqoridan chegaralanmagan. (11.10) tengsizlikka asosan B_n ketma–ketlik ham yuqoridan chegaralanmagan bo'ladi. Bundan esa $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qatorning uzoqlashuvchi bo'lishi kelib chiqadi. ▶

11.5–misol. Quyidagi

$$\sin\frac{\pi}{1^2} + \sin\frac{\pi}{2^2} + \sin\frac{\pi}{3^2} + \ldots + \sin\frac{\pi}{n^2} + \ldots$$

qator yaqinlashuvchiligini tekshiring.

◄ Bu qator hadlari uchun

$$0 < \sin\frac{\pi}{n^2} < \frac{\pi}{n^2} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

tengsizlik o'rinli bo'lishini ko'rsatish qiyin emas. Demak, berilgan qatorning har bir hadi yaqinlashuvchi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ qatorning mos hadidan kichik. 3 – teoremaga asosan berilgan qator yaqinlashuvchi ►

4–teorema. *Ushbu*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = k \qquad (0 \le k \le \infty)$$

limit mavjud bo'lsin. Agar: a) $k < \infty$ *va* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi; b)* $k > 0$ *va* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *qator uzoqlashuvchi bo'lsa, u holda* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *qator ham uzoqlashuvchi bo'ladi.*

◄ a) $k < \infty$ bo'lib, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qator yaqinlashuvchi bo'lsin. Limit ta'rifiga ko'ra, $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $n_0 \in N$ son topiladiki, barcha $n > n_0$ lar uchun

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - k\right| < \varepsilon$$

ya'ni

$$(k - \varepsilon)\, b_n < a_n < (k + \varepsilon)\, b_n \qquad (11.11)$$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi.

Shartga ko'ra $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qator yaqinlashuvchi. Shuning uchun $\sum_{n=1}^{\infty}(k + \varepsilon) b_n$ qator ham yaqinlashuvchi. U holda (11.11) tengsizlikdan va 3 teoremadan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorning yaqinlashuvchi bo'lishi kelib chiqadi.

b) $k > 0$ bo'lib, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qator uzoqlashuvchi bo'lsin. Agar

$0<k_1<k$ olsak, u holda $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k$ limit o'rinli ekanidan va $k_1<k$ bo'lishidan shunday $n_0\in N$ son topiladiki, $n>n_0$ bo'lganda $\frac{a_n}{b_n}>k_1$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Demak $n>n_0$ bo'lganda $b_n<\frac{1}{k_1}a_n$ tengsizlik bajariladi. Bundan 3-teoremaga asosan $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ qatorning uzoqlashuvchi bo'lishi kelib chiqadi.►

4–natija. Agar ushbu

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k$$

limit o'rinli bo'lib, $0<k<\infty$ bo'lsa, u holda $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ va $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ qatorlar bir vaqtda yaqinlashuvchi, yoki bir vaqtda uzoqlashuvchi bo'ladi.

11.6 misol. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$$

qatorni yaqinlashuvchilikka tekshiring.

◄ Bu qatorni garmonik qator $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ bilan taqqoslaymiz. Bu ikki qator umumiy hadlarni nisbatining limitini topamiz:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^{1+\frac{1}{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1.$$

Demak, 4 – natijaga ko'ra berilgan qator uzoqlashuvchi bo'ladi.►

5–teorema. *$n\in N$ ning biror n_0 qiymatidan boshlab barcha $n>n_0$ lar uchun*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\frac{b_{n+1}}{b_n}\qquad(11.12)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsin. U holda a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ qator yaqinlashuvchi bo'lsa, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ qator uzoqlashuvchi bo'lsa, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ qator ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

◄ Avval aytganimizdek (11.12) tengsizlik $n=1,2,\ldots$ qiymatlarda bajariladi deb hisoblash mumkin. Shunday qilib,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n} \qquad (n=1,2,\ldots)$$

tengsizlik o'rinli deb qaraymiz. Unda quyidagi $\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdots\frac{a_n}{a_{n-1}} \le \frac{b_2}{b_1}\cdot\frac{b_3}{b_2}\cdots\frac{b_n}{b_{n-1}}$ tengsizlik kelib chiqadi. Bundan ushbu

$$a_n \le \frac{a_1}{b_1} b_n \qquad (11.13)$$

tengsizlikka ega bo'lamiz.

Agar $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qator yaqinlashuvchi bo'lsa, unda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1}{b_1} b_n$ qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi. Unda (11.13) tengsizlik va 3 – teoremga asosan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorning yaqinlashuvchi bo'lishi kelib chiqadi.

(11.12) tengsizlik o'rinli bo'lganda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorning uzoqlashuvchi bo'lishidan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qatorning ham uzoqlashuvchiligi kelib chiqishi shunga o'xshpsh isbotlanadi.►

3⁰. Musbat qatorlar uchun yaqinlashuvchilik alomatlari. Biz yuqorida musbat qatorlarni taqqoslash teoremalarni keltirdik. Garchi bu teoremalar yordamida tekshiriladigan qator hadlarni ikkinchi qator hadlari bilan taqqoslab, qaralayotgan qatorning yaqinlashuvchiligi yoki uzoqlashuvchiligi masalasi hal bo'lsa ham taqqoslash teoremalari ma'lum noqulayliklarga ega. Bunday noqulayliklaridan biri berilgan qator bilan taqqoslanadigan qatorni tanlab olishning umumiy qoidasi yo'qligidir.

Berilgan qatorni geometrik hamda umumlashgan garmonik qatorlar bilan taqqoslab, qatorning yaqinlashuvchiligi yoki uzoqlashuvchiligini ifodalaydigan alomatlarni keltiramiz:

a) Koshi alomati. Musbat qator $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ berilgan bo'lsin. Agar $n \in N$ ning biror $n_0 (n_0 \ge 1)$ qiymatlaridan boshlab barcha $n \ge n_0$ qiymatlari uchun

$$\sqrt[n]{a_n} \le q < 1 \qquad \left(\sqrt[n]{a_n} \ge 1\right)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashuvchi (uzoqlashuvchi) bo'ladi.

◄Avval $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator uchun $n > n_0$ bo'lganda $\sqrt[n]{a_n} \le q < 1$ tengsizlik o'rinli bo'lsin. Bu tengsizlik ushbu $a_n \le q^n$ tengsizlikka ekvivalentdir. 3 teoremaga ko'ra $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

Agar barcha $n > n_0$ lar uchun $\sqrt[n]{a_n} \ge 1$ ya'ni $a_n \ge 1$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda berilgan qatorning har bir hadi uzoqlashuvchi $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ qatorning mos hadidan kichik bo'lmaydi. Yana o'sha 3 teoremaga ko'ra, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator uzoqlashuvchi bo'ladi. ►

Amaliy masalalarni hal qilishda ko'pincha, Koshi alomatining quyidagi limit ko'rinishidan foydalaniladi.

Agar ushbu

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = k$$

limit mavjud bo'lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator $k < 1$ bo'lganda yaqinlashuvchi, $k > 1$ bo'lganda esa uzoqlashuvchi bo'ladi.

11.7-misol. Quyidagi $1+\left(\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{7}\right)^3+\dots+\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n+\dots$ qatorning yaqinlashuvchiligi ko'rsatilsin.

Berilgan qator uchun

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n} = \frac{n+1}{2n+1}, \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}$$

bo'ladi.

Demak, Koshi alomatiga ko'ra berilgan qator yaqinlashuvchi.

b) Dalamber alomati. Agar $n \in N$ ning biror n_0 $(n_0 \ge 1)$ qiymatidan boshlab barcha $n > n_0$ qiymatlari uchun

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q < 1 \qquad \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1\right)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashuvchi (uzoqlashuvchi) bo'ladi.

◄ Berilgan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator bilan birga yaqinlashuvchi

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = q + q^2 + q^3 + \dots + q^n + \dots \qquad (0 < q < 1)$$

geometrik qatorni qaraylik. Ushbu $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q < 1$ tengsizlikni

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q = \frac{q^{n+1}}{q^n}$$

ko'rinishda yozib, so'ngra taqqoslash 3- teoremani qo'llaymiz. Shu teoremaga ko'ra $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ qatorning yaqinlashuvchiligidan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorning yaqinlashuvchiligi kelib chiqadi. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$ bo'lganda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorning uzoqlashuvchi bo'lishi ravshan.►

Dalamber alomatini ham limit ko'rinishida ifodalash mumkin. Agar ushbu

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = d$$

limit mavjud bo'lsa, u holda $d < 1$ bo'lganda qator yaqinlashuvchi, $d > 1$ bo'lganda esa qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

11.8–misol. Ushbu

$$1 + \frac{2!}{2^2} + \frac{3!}{3^3} + \dots + \frac{n!}{n^n} + \dots$$

qator yaqinlashuvchiligini tekshiring.

◄Bu qator uchun quyidagilarga egamiz:

$$a_n = \frac{n!}{n^n}, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

limitga o'tib topamiz:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{e}$$

Dalamber alomatiga ko'ra berilgan qator yaqinlashuvchi.►

v) Raabe alomati. Ushbu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ musbat qator berilgan bo'lsin. Agar $n \in N$ ning biror n_0 $(n_0 \ge 1)$ qiymatidan boshlab barcha $n > n_0$ qiymatlar uchun

$$n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \ge r > 1 \qquad \left(n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \le 1\right)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, $\sum a_n$ qator yaqinlashuvchi (uzoqlashuvchi) bo'ladi.

◄ Avval $n > n_1$ lar uchun $n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \ge r > 1$ tengsizlik bajarilsin, deylik. Bu tengsizlikni quyidagi

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le 1 - \frac{r}{n} \qquad (11.14)$$

ko'rinishda yozib, so'ng $r > \alpha > 1$ tengsizlikni qanoatlantiradigan α son olamiz. Ma'lumki,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\alpha} - 1}{-\frac{1}{n}} = \alpha$$

(5-bobning 6-§ iga qarang). Tanlanishiga ko'ra $\alpha < r$ bo'lgani uchun shunday $n_0 \in N$ son topiladiki, barcha $n > n_1'$ lar uchun

$$\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\alpha} - 1}{-\frac{1}{n}} < r$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Undan ushbu

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\alpha} \ge 1 - \frac{r}{n} \qquad (11.15)$$

tengsizlik kelib chiqadi. Endi $\max\{n_0, n_1\} = n_0$ deb olsak, barcha $n > n_0$ lar uchun (11.14) va (11.15) tengsizliklardan

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \left(1-\frac{1}{n}\right)^{\alpha} \qquad (11.16)$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. Agar (11.16) tengsizlikni ushbu

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{\frac{1}{n^{\alpha}}}{\frac{1}{(n-1)^{\alpha}}}$$

ko'rinishda yozsak, unda berilgan qator hadlari bilan $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ umumlashgan garmonik qator hadlari orasida (11.12) ko'rinishdagi munosabat borligini payqaymiz. Ma'lumki, $\alpha > 1$ da umumlashgan garmonik qator yaqinlashuvchi. Demak, 5-teoremaga ko'ra berilgan qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

Endi barcha $n \ge n_0$ lar uchun

$$n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\le 1$$

tengsizlik o'rinli bo'lsin. Undan

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\ge\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{(n-1)}}$$

tengsizlik kelib chiqadi. Shuning uchun 5 teoremaga asosan $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ garmonik qatorning uzoqlashuvchi bo'lishidan berilgan qatorning uzoqlashuvchi ekani kelib chiqadi.

Bu alomatni ham quyidagicha limit ko'rinishda ifodalash mumkin. Agar ushbu

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=g \qquad (g-\text{const})$$

limit o'rinli bo'lsa, $g>1$ bo'lganda qator yaqinlashuvchi, $g<1$ bo'lganda esa qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

11.9−misol. Quyidagi

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{n}+\ldots$$

qatorni yaqinlashuvchilikga tekshiring.

◄ Bu qator uchun

$$n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=n\left(1-\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\cdot\frac{1}{1+n}\cdot\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\cdot\frac{n}{1}\right)=\frac{3n^2+3n}{2n^2+4n+2}, \qquad \lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\frac{3}{2}>1$$

bo'ladi. Demak, Raabe alomatiga ko'ra berilgan qator yaqinlashuvchi. ►

g) Intergal alomat (Koshining integral alomati). Ushbu $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ musbat qator berilgan bo'lsin.

Faraz qilaylik, $[1,+\infty]$ orliqda aniqlangan, uzluksiz, o'smaydigan hamda manfiy bo'lmagan $f(x)$ funksiya uchun $f(n)=a_n \quad (n=1,2,\ldots)$ bo'lsin. U holda berilgan qator quyidagi

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$$

ko'rinishni oladi. Ravshanki, $n<x<n+1$ bo'lganda

$$f(n)\ge f(x)\ge f(n+1)$$

ya'ni $a_n\ge f(x)\ge a_{n+1}$ tengsizliklar o'rinli. Keyingi tengsizliklarni $[n,n+1]$ oraliq bo'yicha integrallab topamiz:

$$a_{n+1} \le \int_{n}^{n+1} f(x)dx \le a_n \qquad (11.17)$$

Endi berilgan qator bilan birga ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{n}^{n+1} f(x)dx \qquad (11.18)$$

qatorni ham qaraylik. Bu qatorning qismiy yig'indisini yozamiz:

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} f(x)dx = \int_{1}^{n+1} f(x)dx \qquad (11.19)$$

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $[1,+\infty]$ oraliqda $F(x)$ boshlang'ich funksiyaga ega bo'lsin $(F'(x)=f(x))$. $[1,+\infty]$ oraliqda $f(x)\ge 0$ bo'lgani uchun $F(x)$ funksiya shu oraliqda o'suvchi bo'ladi. $F(x)$ funksiyani yuqori chegarasi o'zgaruvchi bo'lgan aniq integral ko'rinishda yozish mumkin:

$$F(x) = \int_{1}^{x} f(t)dt, \qquad F(1) = 0$$

Natijada (11.19) tenglik ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{k}^{k+1} f(x)dx = F(n+1)$$

ko'rinishga keladi. Demak, (11.18) qatorning qismiy yig'indisi $F(n+1)$ ga teng.

Agar $n \to \infty$ da $F(n+1)$ chekli songa intilsa, shu qator yaqinlashuvchi bo'ladi. Unda (11.17) tengsizlik hamda 5 – teoremaga ko'ra qaralayotgan qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi $n \to \infty$ da $F(x) \to \infty$ bo'lsa, berilgan qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

Shunday qilib, quyidagi integral alomatiga (Koshi alomatiga) kelamiz:

Agar $f(x)$ funksiya $[1,+\infty]$ oraliqda aniqlangan, uzluksiz va o'smaydigan bo'lib, $F(x)$ shu funksiya uchun boshlang'ich funksiya va $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator uchun $f(n) = a_n$ $(n = 1,2,\ldots)$ bo'lsa, u holda berilgan qator $\lim_{n\to+\infty} F(x) = A$ limit chekli bo'lganda yaqinlashuvchi, cheksiz bo'lganda uzoqlashuvchi bo'ladi.

11.10–misol. Quyidagi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ umumlashgan garmonik qator yaqinlashuvchilikka tekshirilsin.

◀ $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$ $(\alpha > 0)$ deb olaylik. Ravshanki, bu funksiya $[1,+\infty]$ da uzluksiz, kamayuvchi hamda shu oraliqda manfiy emas. Shu bilan birga $x = n$ bo'lganda $f(x) = \frac{1}{n^\alpha}$. Ravshanki,

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,dt = \int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{x^{\alpha-1}}\right).$$

Bundan quyidagi natija kelib chiqadi:

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{x^{\alpha-1}}\right) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \text{agar } \alpha > 1 \text{ bo'lsa} \\ \infty, & \text{agar } \alpha < 1 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

Agar $\alpha = 1$ bo'lsa, $x \to \infty$ da

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \ln x \to \infty$$

bo'ladi.

Demak, integral alomatiga ko'ra berilgan qator $\alpha > 1$ bo'lganda yaqinlashuvchi, $\alpha \le 1$ bo'lganda uzoqlashuvchi bo'ladi. ►

4-§. Ixtiyoriy hadli qatorlar

1⁰. Qatorning absolyut va shartli yaqinlashuvchiligi. Ixtiyoriy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

qator berilgan bo'lsin. Bu qator hadlarining absolyut qiymatlaridan quyidagi

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots$$

qatorni tuzamiz.

6-teorema. *Agar* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi.*

Ushbu teoremaning isboti yuqoridagi 1-teoremadan osongina kelib chiqadi.

4-ta'rif. Agar $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ qator yaqinlashuvchi bo'lsa, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *qator absolyut yaqinlashuvchi* deyiladi.

5-ta'rif. Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashuvchi bo'lib, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ qator uzoqlashuvchi bo'lsa, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *qator shartli yaqinlashuvchi* deyiladi.

4-eslatma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorning uzoqlashuvchi bo'lishidan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorning uzoqlashuvchi bo'lishi har doim chiqavermaydi.

Masalan, 1) Ushbu

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\ldots$$

(1-§ dagi (11.4) qatorni qarang). Qator hadlarining absolyut qiymatlaridan tuzilgan

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

qator uzoqlashuvchi. Demak, berilgan qator shartli yaqinlashuvchi.

2) Ushbu

$$\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}+\ldots$$

qator hadlarining absolyut qiymatlaridan tuzilgan

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$$

qator yaqinlashuvchi. Demak, berilgan qator absolyut yaqinlashuvchi.

Biror ixtiyoriy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator berilgan bo'lsin. Qaralayotgan qator hadlarining absolyut qiymatlarini olib, ulardan $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ qatorni tuzamiz. Shu $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ qatorning musbat qatorligini e'tiborga olib, qaralayotgan qatorning absolyut yaqinlashuvchiligini ifodalash alomatlardan birini — Dalamber alomatini keltiramiz.

Dalamber alomati. Agar $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ qator uchun

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=l$$

limit o'rinli bo'lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator $l<1$ bo'lganda absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi.

11.11-misol. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1-x^n} \qquad (x\neq \pm 1)$$

qator yaqinlashuvchilikka tekshirilsin.

◀ Bu qator uchun quyidagini topamiz:

$$l = \lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{x^{n+1}}{1-x^{n+1}}\right| : \left|\frac{x^n}{1-x^n}\right|\right) = \lim_{n\to\infty}\left|x\,\frac{1-x^n}{1-x^{n+1}}\right| = \begin{cases} |x|, & agar\ |x|<1\ bo'lsa \\ 1, & agar\ |x|>1\ bo'lsa \end{cases}$$

Demak, $|x|<1$ da berilgan qator absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi. $|x|>1$ bo'lganda esa qatorning xarakteri to'g'risida Dalamber alomati biror xulosa bermaydi. Ammo $|x|>1$ bo'lgan holda $n\to\infty$ da qatorning umumiy holda nolga intilmaganligi sababli (uning limiti 1 ga teng) qator uzoqlashuvchidir.►

2^0. Hadlarning ishoralari navbat bilan o'zgarib keladigan qatorlar. Leybnis teoremasi. Biz quyida ixtiyoriy qatorlarning bitta muhim holini qaraymiz.

Ushbu

$$c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \dots + (-1)^{n-1} c_n + \dots \qquad (11.20)$$

qatorni qaraylik, bunda $c_n > 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$.

Odatda bunday qator hadlarining ishoralari navbat bilan o'zgarib keladigan qator deb ataladi.

Quyidagi

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n} + \dots$$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n+1} + \dots$$

qatorlar hadlarining ishoralari navbat bilan o'zgarib keladigan qatorlardir.

7-teorema. (Leybnis teoremasi). *Agar (11.20) qatorda*

$$c_{n+1} < c_n \qquad (n = 1, 2, \dots) \qquad (11.21)$$

tengsizliklar o'rinli bo'lib,

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0 \qquad (11.22)$$

bo'lsa, (11.20) qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

◄ Berilgan (11.20) qatorning $2m \ (m\in N)$ ta hadidan iborat ushbu

$$A_{2m} = c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \dots + c_{2m-1} - c_{2m}$$

qismiy yig'indisini olaylik. Ravshanki,

$$A_{2(m+1)} = A_{2m} + (c_{2m+1} - c_{2m+2}).$$

Teoremaning shartiga ko'ra $c_{2m+2} < c_{2m+1}$ bo'lib, natijada

$$A_{2(m+1)} > A_{2m}$$

tengsizlikka kelamiz. Bu esa A_{2m} ketma-ketlikning o'suvchi ekanligini bildiradi.

Endi A_{2m} ni quyidagicha yozamiz:

$$A_{2m} = c_1 - (c_2 - c_3) - (c_4 - c_5) - \dots - (c_{2m-2} - c_{2m-1}) - c_{2m}$$

Ravshanki, (11.21) ga ko'ra

$$c_1 - c_2 > 0,\quad c_3 - c_4 > 0,\quad \ldots,\quad c_{2m-1} - c_{2m} > 0$$

Shuning uchun $A_{2m} < c_1$ tengsizlik o'rinli. Demak, A_{2m} ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan. Shunday qilib, A_{2m} ketma-ketlik o'suvchi va yuqoridan chegaralangan. Demak, bu ketma-ketlik chekli limitga ega.

$$\lim_{m\to\infty} A_{2m} = A \text{ (A – chekli son)} \tag{11.23}$$

Endi (11.20) qatorning $2m+1$ $(m \in N)$ ta toq sondagi hadidan iborat ushbu

$$A_{2m+1} = c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \ldots + c_{2m+1}$$

qismiy yig'indisini olaylik.

Ravshanki,

[illegible]

Bundan (11.22) va (11.23) larga asosan topamiz:

$$\lim_{m\to\infty} A_{2m+1} = \lim_{m\to\infty}(A_{2m} + c_{2m}) = A$$

Shunday qilib, (11.20) qatorning qismiy yig'indilardan iborat ketma-ketlik chekli limitga ega ekanini ko'rsatdik. Demak, (11.20) qator yaqinlashuvchi. ►

Masalan, yuqorida ko'rsatilgan ushbu

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \ldots$$

qator uchun teorema barcha shartlarining bajarilishini ko'rsatish qiyin emas. Leybnis teoremasiga ko'ra berilgan qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

5-§. Yaqinlashuvchi qatorlarning xossalari

Biz ushbu paragrafda yaqinlashuvchi qatorlarda hadlarni guruhlash, absolyut yaqinlashuvchi qatorlarda esa hadlarning o'rnini almashtirish kabi xossalarga to'xtalamiz.

1⁰. Guruhlash xossasi. Biror $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator berilgan bo'lsin. Bu qator hadlarini guruhlab, quyidagi qatorni tuzamiz:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \ldots + a_{n_2}) + \ldots \tag{11.24}$$

bunda $n_1, n_2, \ldots$ $(n_1 < n_2 < \ldots)$ lar natural sonlar ketma-ketligining biror n_k qismiy ketma-ketligi bo'lib, $k \to \infty$ da $n_k \to \infty$.

Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi A songa teng bo'lsa, u holda bu qatorning hadlarini guruhlashdan hosil bo'lgan (11.24) qator ham yaqinlashuvchi va uning yig'indisi ham A songa teng bo'ladi.

◄ Ta'rifga ko'ra berilgan qatorning A_n qismiy yig'indisi uchun $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$ (A – chekli son) limit o'rinli. Endi (11.24) qatorning qismiy yig'indisini yozamiz:

$$A_{n_k} = (a_1 + a_2 + \dots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \dots + a_{n_2}) + \dots + (a_{n_{k-1}+1} + a_{n_{k-1}+2} + \dots + a_{n_k})$$

Bu qismiy yig'indilardan tuzilgan

$$A_{n_1}, A_{n_2}, \dots, A_{n_k}, \dots$$

ketma-ketlikni qaraylik. Ravshanki, bu A_n ketma-ketlikning qismiy ketma-ketligidir. U holda 3-bobdagi 12-teoremaga ko'ra, A_{n_k} ketma-ketlik yaqinlashuvchi va uning limiti ham A ga teng bo'ladi.

$$\lim_{k\to\infty} A_{n_k} = A$$

Bu esa (11.24) qatorning yaqinlashuvchi bo'lishini va uning yig'indisi A ga teng ekanini bildiradi. ►

2⁰. O'rin almashtirish xossasi. Ixtiyoriy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ qator berilgan bo'lsin. Bu qator hadlarining o'rinlarini almashtirib, quyidagi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a'_n = a'_1 + a'_2 + \dots + a'_n + \dots \qquad (11.25)$$

qatorni hosil qilamiz. Bu (11.25) qatorning har bir a'_n hadi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorning tayin bir a_{n_k} hadining aynan o'zidir.

Agar $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ qator absolyut yaqinlashuvchi bo'lib, yig'indisi A songa teng bo'lsa, u holda bu qator hadlarining o'rinlarini ixtiyoriy ravishda almashtirishdan hosil bo'lgan (11.25) qator yaqinlashuvchi bo'ladi va uning yig'indisi ham A songa teng bo'ladi.

◄ Bu xossani $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ qator musbat hamda ixtiyoriy hadli bo'lgan hollari uchun alohida isbotlaymiz.

1) Berilgan qator musbat qator bo'lib, u yaqinlashuvchi va yig'indisi A songa teng bo'lsin. Ta'rifga ko'ra $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$. A_n o'suvchi ketma-ketlik bo'lganidan $A_n \le A$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Endi (11.25) qatorning

$$A'_k = a'_1 + a'_2 + \dots + a'_k$$

qismiy yig'indisini qaraylik. Bunda $a'_1 = a_{n_1}, a'_2 = a_{n_2}, \dots, a'_k = a_{n_k}$

Ravshanki, A_k' o'suvchi. Agar $n = \max\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$ deb olsak, u holda $A_k' \le A_n$ tengsizlik ham o'rinli bo'ladi. Shuning uchun $A_k' \le A$ tengsizlik o'rinli. Shunday qilib, A_k' ketma-ketlik o'suvchi va yuqoridan chegaralangan. Demak, u chekli limitga ega:

$$\lim_{k\to\infty} A_k' = A' \quad \text{va} \quad A' \le A$$

Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorni (11.25) qator hadlarining o'rinlarini almashtirishdan hosil bo'lgan qator deb qaraydigan bo'lsak, unda yuqorida keltirilgan mulohazaga asoslanib, (11.25) qatorning yaqinlashuvchi va yig'indisi A' songa teng bo'lishidan berilgan qatorning ham yaqinlashuvchiligini va uning yig'indisi A uchun $A \le A'$ tengsizlik o'rinli bo'lishini topamiz. Yuqorida $A' \le A$ ekani ko'rsatilgan edi. Shu ikki tengsizlikdan $A = A'$ bo'lishi kelib chiqadi.

2) $\sum a_n$ ixtiyoriy hadli qator bo'lib, u absolut yaqinlashuvchi va yig'indisi A songa teng bo'lsin. Shu qator hadlarining o'rinlarini almashtirishdan hosil bo'lgan $\sum a_n'$ qatorni qaraylik. Modomiki, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator absolut yaqinlashuvchi ekan, unda $\sum |a_n|$ qator yaqinlashuvchi bo'ladi. Bu musbat qator bo'lganligi sababli 1) holda isbotlanganiga ko'ra $\sum |a_n'|$ qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi. Shuning uchun $\sum a_n'$ qator yaqinlashuvchidir.

Endi $\sum a_n'$ qator yig'indisining ham A songa teng ekanini ko'rsatamiz. $\sum a_n$ qatorning musbat ishorali va nolga teng bo'lgan $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots$ hadlaridan $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ hamda manfiy ishorali $a_{m_1}, a_{m_2}, \dots$ hadlarining absolut qiymatlaridan $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{m_k}|$ qatorlarni tuzamiz. Qulaylik uchun $a_{n_k} = b_k$, $|a_{m_k}| = c_k$ deb belgilasak, ushbu

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = b_1 + b_2 + \dots + b_k + \dots$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_m = c_1 + c_2 + \dots + c_m + \dots$$

qatorlar hosil bo'ladi. Shartga ko'ra $\sum |a_n|$ qator yaqinlashuvchi. Demak, bu qatorning

$$A^*_n = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|, \qquad n = 1,2,3,\dots$$

qismiy yig'indilaridan tuzilgan A^*_n ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan, ya'ni $\forall n \in N$ da

$$A^*_n \le A^*, \qquad A^* - \text{o'zgarmas son} \qquad (11.26)$$

tengsizlik o'rinli. Endi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorning qismiy yig'indisini A_n bilan belgilab topamiz:

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{k} b_i - \sum_{i=1}^{m} c_i = B_k - C_m \qquad (11.27)$$

bunda $n = k + m$ bo'lib, k – A_n qismiy yig'indida $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorning musbat ishorasi, m esa uning manfiy ishorasi hadlarining soni. Biz eng muhim, $n \to \infty$ va $m \to \infty$ holni qarash bilan chegaralanamiz.

Ravshanki,

$$B_k \le A^*_n, \qquad C_m \le A^*_n \qquad (11.28)$$

(11.26) va (11.28) munosabatlardan $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, $\sum_{m=1}^{\infty} c_m$ qatorlarning qismiy yig'indilari B_k va C_m yuqoridan chegaralanganligi kelib chiqadi. 2-**teoremaga** ko'ra $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, $\sum_{m=1}^{\infty} c_m$ qatorlar yaqinlashuvchi bo'ladi. Bu qatorlarning yig'indilarini mos ravishda B va C bilan belgilaylik:

$$\lim_{k \to \infty} B_k = B \ (B - \text{chekli son}), \quad \lim_{m \to \infty} C_m = C \ (C - \text{chekli son}).$$

Endi (11.27) tenglikda limitga o'tsak, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\lim_{n \to \infty} A_n = \lim_{n \to \infty}(B_k - C_m) = \lim_{k \to \infty} B_k - \lim_{m \to \infty} C_m = B - C$$

Bu esa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorning yaqinlashuvchi va uning yig'indisi A uchun $A = B - C$ formula o'rinli ekanini anglatadi.

Berilgan qator hadlarining o'rinlari almashtirilganda $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ va $\sum_{m=1}^{\infty} c_m$ qatorlar hadlarining ham o'rinlari almashadi va 1 – holga asosan bu qatorlar yig'indilari mos ravishda B va C ga teng bo'lib qolaveradi. Demak, $A = B = C$ tenglikka ko'ra $\sum_{n=1}^{\infty} a_n'$ qatorning yig'indisi ham A songa teng bo'ladi. ►

Absolyut yaqinlashuvchi bo'lmagan qatorlar hadlarining o'rinlarini almashtirishdan hosil bo'lgan qatorlar haqida quyidagi teorema o'rinli. Biz bu teoremani isbotsiz keltiramiz.

8-teorema. (Riman teoremasi). *Agar* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *qator shartli yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda har qanday A (chekli yoki cheksiz) olinganda ham berilgan qator hadlarining o'rinlarini shunday almashtirish mumkinki, hosil bo'lgan qatorning yig'indisi xuddi shu A ga teng bo'ladi.*

Mashqlar

11.12. Agar

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (a_n \geq 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots)$$

qator yaqinlashuvchi bo'lsa,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

qatorning ham yaqinlashuvchi bo'lishi isbotlansin.

11.13. Koshi teoremasidan foydalanib, ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2^n}$$

qatorning yaqinlashuvchi bo'lishi isbotlansin.

11.14. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^{\ln n}$$

qator yaqinlashuvchilikka tekshirilsin.

11.15. Agar

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (a_n \geq 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots)$$

qator uchun

a) $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$

b) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$

bo'lsa, berilgan qator yaqinlashuvchi bo'ladimi? Misollar keltiring.

11.16. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

qator yaqinlashuvchilikka tekshirilsin.

Adabiyotlar

1. Azlarov T, Mansurov H. Matematik analiz, 1 qism, Toshkent, «O'qituvchi», 1994.
2. Azlarov T, Mansurov H. Matematik analiz, 2 qism, Toshkent, «O'zbekiston», 1995.
3. Архипов Г, Садовничий В, Чубариков В. Лекции по математическому анализу, Москва, Высшая школа, 1999.
4. Дороговцев А. Математический анализ (справочное пособие) Киев, Высшая школа, 1985.
5. Matematikadan qo'llanma, 1 va 2 – qismlar. Prof. Azlarov T. tahriri ostida, Toshkent, O'qituvchi, 1979, 1990.
6. Хинчин А. Восемь лекций по математическому анализу, Москва, Наука, 1977.
7. Кудрявцев Л. Курс математического анализа, т.1,2, Москва, высшая школа, 1981.
8. Рудин У. Основы математического анализа, Москва, Мир, 1976.
9. Зорич В. Математический анализ, ч.1, Москва, Наука, 1981.

Mundarija

«Matematik analiz asoslari» 2–qismining mundarijasi.

Босишга рухсат этилди 31.08.2005. Ҳажми 21 босма табоқ.
Бичими 60×84 1/16. Адади 1000 нусха. Офсет қоғози. Буюртма 266.
М.Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий Университети
босмахонасида чоп этилди.