O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

NIZOMIY NOMIDAGI TOSHKENT DAVLAT
PEDAGOGIKA UNIVERSITETI

MATEMATIK ANALIZ
II – qism

O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi tomonidan 5140100-Matematika va informatika bakalavriat ta'lim yo'nalishi talabalari uchun darslik sifatida nashrga tavsiya etilgan

TOSHKENT - 2008

Matematik analiz. II-qism.

Ushbu darslik pedagogika oliy ta'lim muassasalari «Matematika va informatika» ta'lim yonalishining «Matematik tahlil» fani dasturiga mos yozilgan bo'lib, bunda matematik analizning qatorlar nazariyasiga oid nazariy materiallar to'liq berilgan. Nazariy holatlarni ochib beruvchi misol va masalalar keltirilgan.

Математический анализ. Часть II.

Учебник написан в соответствии с программой по курсу математического анализа для педагогических вузов по направлению бакалавриата «Математика и информатика». В нем расматриваются теории числовых и функциональных рядов. Учебник снабжен примерами и задачами, иллюстрирующие теоретические положения.

Mathematical Analysis. Part II.

The textbook is written according to the program by the course "Mathematical Analysis" for higher pedagogical institutions on the direction of the bachelor degree "Mathematics and Informatics". Problems of the theory of numerical and functional series are considered. Examples and problems illustrating the theory are given.

Taqrizchilar:
Nizomiy nomidagi TDPU dotsenti, f.-m.f.n. M.Xushvaqtov
O'zR FA Matematika va information texnologiyalar instituti katta ilmiy hodimi f.-m.f.n. J.B.Azimov

O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligining 2008-yil 28-fevral 51-sonli buyrig'i bilan 5140100-Matematika va informatika bakalavriat ta'lim yo'nalishi talabalari uchun darslik sifatida nashrga tavsiya etilgan

KIRISH

Ushbu darslik pedagogika oliy ta'lim muassasalarida «Matematika va informatika» bakalavriat ta'lim yo'nalishida tahsil olayotgan talabalarga mo'ljallangan bo'lib, u «Matematik tahlil» fani dasturining «Qatorlar nazariyasi» bo'limiga bag'ishlangan. Qatorlar nazariyasi «Matematik tahlil» fanining «Analizga kirish», «Bir o'zgaruvchili funksiyaning differensial hisobi», «Bir o'zgaruvchili funksiyaning integral hisobi» bo'limlari bilan uzviy bog'langan.

Umumiy o'rta maktab, kasb-hunar kolleji va akademik litsey matematika kurslarida odatda qo'shiluvchilari soni chekli bo'lgan yig'indilar, qo'shiluvchilari soni cheksiz bo'lgan yig'indilardan faqat cheksiz kamayuvchi geometrik progressiya yig'indisi qaraladi. Matematik analiz kursida qo'shiluvchilari soni cheksiz bo'lgan yig'indilar qaralib, ular cheksiz qatorlar yoki qatorlar deb ataladi. Qatorlar nazariy jihatdan funksiyalarni o'rganishning muhim vositasi, amaliy jihatdan taqribiy hisoblash (funksiyaning qiymatini, integralning qiymatini va boshq.) apparati bo'lib xizmat qiladi. Shuningdek u ko'pgina tatbiqiy masalalarni yechishda qo'llaniladi.

Dastlab, matematiklar qatorlarning xossalari chekli yig'indilarning xossalariga o'xshash deb hisoblashgan. Buning natijasida qatorlar hadlarining o'rinlarini istagancha almashtirishgan, hadlari funksiyalardan iborat qatorlarni hadma-had differensiallagan, integrallagan, bir qatorni ikkinchi qatorga ko'paytirishgan. Lekin, keyinchalik qatorlar ustida bajarilgan bunday amallar noto'g'ri natijalarga olib kelishi ma'lum bo'ldi. Shu sababli qatorlar nazariyasini qurish ehtiyoji tug'ildi. Bu nazariyaning asosiy masalalariga quyidagilar kiradi:

1) cheksiz qo'shiluvchilarning yig'indisi tushunchasini aniqlash;
2) berilgan qator yig'indisi mavjudligini aniqlash alomatlarini topish;
3) chekli yig'indilar kabi xossaga (masalan, qator hadlarini o'rinlarini almashtirish, hadma-had differensiallash va integrallash va boshq.) ega bo'lgan qatorlar sinfini ajratib olish;
4) berilgan funksiyalarni sodda funksiyalarning cheksiz qatori ko'rinishda tasvirlashga imkon beradigan formulalarni keltirib chiqarish.

Mazkur darslikning birinchi bobi sonli qatorlar sinfida yuqoridagi birinchi, ikkinchi va uchinchi masalalarni o'rganishga bag'ishlangan.

Ikkinchi bobi hadlari funksional ketma-ketlik va funksional qatorlarning umumiy nazariyasiga bag'ishlangan. Bunda ham yuqorida aytilgan uchta masala funksional qatorlar uchun qaraladi.

Uchinchi bobda funksional qatorlarning xususiy, lekin muhim sinfi bo'lgan darajali qatorlar o'rganiladi. Bu qatorlar uchun yuqorida aytilgan to'rtta masala qaraladi. Bunda asosiy elementar funksiyalarni Teylor qatoriga yoyish masalasi, darajali qatorlarning ba'zi tatbiqlari keltirilgan.

Darslikning to'rtinchi bobi Furye qatorlari haqidagi dastlabki ma'lumotlarni o'rganishga bag'ishlangan bo'lib, bunda funksiyani trigonometrik qatorga yoyish masalasi o'rganiladi. Trigonometrik qatorlarning ba'zi tatbiqlari qaraladi. Furye qatorlari nazariyasining asosiy teoremasi (Dirixle teoremasi) isbotsiz keltirilgan.

Darslik boblarga, paragraflarga va punktlarga ajratilgan bo'lib, misollar, teoremalarni nomerlash har bir paragraf ichida alohida bajarilgan. Darslikning deyarli har bir paragrafida o'z-o'zini tekshirish uchun savollar, mustaqil yechish uchun misol va masalalar berilgan. Har bir bob so'ngida bobni takrorlash uchun test savollari keltirilgan. Bu savollar, misol va masalalar nazariy materiallarni puxta o'zlashtiriga yordam beradi.

Muallif qo'lyozmani diqqat bilan o'qib chiqib, o'zining qimmatli maslahatlarini bergan dotsent M.Xushvaqtovga, O'zR FA Matematika instituti katta ilmiy hodimi J.B.Azimovga o'z minnatdorchiligini bildiradi.

I-BOB. SONLI QATORLAR

1-§. Sonli qator va uning yig'indisi

1.1. Umumiy tushunchalar. Faraz qilaylik, sonlarning biror cheksiz ketma-ketligi berilgan bo'lsin: $a_1,\ a_2,\ a_3, ..., a_n, ...$

Bu sonlardan tuzilgan ushbu

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... \qquad (1)$$

ifodaga *cheksiz qator* (qisqacha – *qator*) deyiladi.

$\{a_n\}$ ketma-ketlik hadlari qatorning hadlari deyiladi. (1) ifodada + belgisi qatnashganligi sababli qatorni $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ko'rinishda ham yoziladi. Agar n tayinlangan bo'lsa, a_n- qatorning n-hadi deyiladi, agar n umumiy holda berilsa, a_n- qatorning umumiy hadi deyiladi. Umumiy had yordamida berilgan qatorning ixtiyoriy hadini yozib olish mumkin. Masalan, agar $a_n = \frac{1}{2^n}$ bo'lsa, u holda qator

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^n} + ... \text{ yoki } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

ko'rinishda bo'ladi. Agar $a_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ bo'lsa, u holda quyidagi ko'rinishdagi qatorga ega bo'lamiz:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \cdots \text{ yoki } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Algebrada qo'shiluvchilari soni chekli bo'lgan yig'indilar qaraladi. Qatorda esa "qo'shiluvchilar" (hadlar) cheksiz ko'p va cheksiz sondagi sonlarni qo'shishni qanday bajarish kerakligi aniqlanmagan, shuning uchun cheksiz qatorning yig'indisi deganda nimani tushunish kerakligini kelishib olish lozim. Shu maqsadda (1) qatorning birinchi n ta hadi yig'indisini qaraymiz va uni S_n orqali belgilaymiz:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n \qquad (2)$$

Bu yig'indini (1) qatorning *n- xususiy yig'indisi* deyiladi. Bunda S_1 deganda a_1 ni qarashga kelishamiz.

(2) da n ga 1, 2, 3, ... qiymatlar berib, quyidagi xususiy yig'indilar ketma-ketligiga ega bo'lamiz:

$$S_1 = a_1,\ S_2 = a_1 + a_2,\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3, ...,\ S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n, ...$$

Yuqoridagi $\{S_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi bo'lishi mumkin.

Ta'rif. Agar (1) qatorning $\{S_n\}$ xususiy yig'indilari ketma-ketligi chekli limitga ega bo'lsa, ya'ni $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ mavjud bo'lsa, u holda bu qator *yaqinlashuvchi qator* deyiladi. $\{S_n\}$ ketma-ketlik limiti

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n \qquad (2)$$

qatorning yig'indisi deyiladi.

Bu holda

$S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ yoki $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ kabi yoziladi.

Agar (1) qatorning xususiy yig'indilar ketma-ketligi chekli limitga ega bo'lmasa, u holda *uzoqlashuvchi qator* deyiladi.

Agar $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ bo'lsa, u holda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ yoki $S = \infty$ kabi yozishga kelishamiz.

Shunday qilib, qator yig'indisi ikkita amal (qo'shish va limitga o'tish) natijasida hosil qilinadi. Qo'shish amali xususiy yig'indilarni, ikkinchi amal esa ularning limitini topish uchun kerak bo'ladi.

Yaqinlashuvchi va uzoqlashuvchi qatorlarga misollar ko'ramiz.

1-*misol.* Ushbu qatorni yaqinlashishga tekshiring:

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+2)} + \cdots.$$

Yechish. Berilgan qatorning n-xususiy yig'indisi

$S_n = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+2)}$. Bu yig'indini soddalashtirish maqsadida qatorning n-hadini quyidagi $\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$ ko'rinishda yozib olamiz. U holda

$$S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) =$$

$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$ bo'ladi. Ravshanki, $\{S_n\}$ ketma-ketlik limiti mavjud va $\frac{3}{4}$ ga teng. Demak, berilgan qator yaqinlashuvchi bo'lib, uni

$\frac{3}{4} = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+2)} + \cdots,$ yoki $\frac{3}{4} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ kabi yozish mumkin ekan.

2-*misol.* Ushbu qatorni $1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+\cdots$ yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Bu qatorning n-xususiy yig'indisi $S_n=1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ va $S_n>\underbrace{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}_{n\text{-ta}}=\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\cdot n=\sqrt[3]{n^2}$ bo'lganligi sababli, $\lim_{n\to\infty}S_n=+\infty$ bo'ladi. Demak, berilgan qator uzoqlashuvchi.

3-*misol.* Umumiy hadi $a_n=(-1)^{n-1}$ bo'lgan qatorni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Bu qatorning n-xususiy yig'indisi $S_n=1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n-1}$ ga teng. Xususiy yig'indilar ketma-ketligi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

1, 0, 1, 0, ...

Ma'lumki, bu ketma-ketlik chekli limitga ega emas. Demak, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ qator uzoqlashuvchi ekan.

1.2. Geometrik qator. Qatorga eng sodda misol sifatida geometrik progressiya barcha hadlarining yig'indisini olishimiz mumkin:

$$a+aq+aq^2+...+aq^{n-1}+... \qquad (3)$$

bunda $a\neq 0$. Bu qator *geometrik qator* deyiladi. Geometrik qator q ning qanday qiymatlarida yaqinlashuvchi bo'lishini aniqlaymiz. Buning uchun uning n-xususiy yig'indisini qaraymiz. Geometrik progressiya birinchi n ta hadi yig'indisining formulasiga ko'ra ($q\neq 1$)

$$S_n=\frac{a-aq^n}{1-q}=\frac{a}{1-q}-a\frac{q^n}{1-q}$$

o'rinli. Agar $|q|<1$ bo'lsa, u holda $\lim_{n\to\infty}q^n=0$ bo'lib, $\lim_{n\to\infty}S_n$ mavjud va $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q}-a\frac{q^n}{1-q}\right)=\frac{a}{1-q}$ bo'ladi. Demak, $|q|<1$ bo'lganda (3) qator yaqinlashuvchi va uning yig'indisi $\frac{a}{1-q}$ bo'ladi.

Agar $|q|>1$ bo'lsa, u holda $\lim_{n\to\infty}q^n=\infty$ va $\lim_{n\to\infty}S_n=\infty$ bo'ladi. Demak, bu holda geometrik qator uzoqlashuvchi bo'ladi. Agar $q=-1$ bo'lsa, qatorning xususiy yig'indisi $S_n=\frac{a}{2}(1+(-1)^n)$ bo'ladi. Ravshanki (qarang, 3-misol) bu holda xususiy yig'indilar ketma-ketligi uzoqlashuvchi, demak (3) qator ham uzoqlashuvchi bo'ladi. Agar $q=1$ bo'lsa, qatorning xususiy yig'indisi $S_n=a+a+...a=na$ va $\lim_{n\to\infty} S_n=\infty$ bo'ladi.

Shunday qilib, geometrik qator $|q|<1$ bo'lganda yaqinlashuvchi, $|q|\geq 1$ bo'lganda uzoqlashuvchi bo'ladi. Yaqinlashuvchi bo'lgan holda cheksiz kamayuvchi geometrik progressiya yig'indisining formulasi hosil bo'ladi:

$$\frac{a}{1-q}=a+aq+aq^2+...+aq^{n-1}+...$$

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Qator deb nimaga aytiladi?
2. Qatorning xususiy yig'indisi nima?
3. Qator xususiy yig'indilari ketma-ketligi qanday aniqlanadi?
4. Qanday qator yaqinlashuvchi deyiladi?
5. Qanday qator uzoqlashuvchi deyiladi?
6. Qatorning yig'indisi deb nimaga aytiladi?
7. Ta'rif bo'yicha qatorni yaqinlashishga qanday tekshirasiz?
8. Geometrik qatorni yozing.
9. Geometrik qator qachon yaqinlashuvchi, qachon uzoqlashuvchi bo'ladi?
10. Geometrik qatorni yaqinlashishga tekshiring.

Mustaqil yechish uchun misol va masalalar

1. Qatorning $a_n=\frac{n^2}{(n+2)!}$ umumiy hadi berilgan. Shu qatorning dastlabki to'rtta hadini yozing.
2. Tomoni a ga teng bo'lgan muntazam uchburchakning tomonlari o'rtalarini tutashtirib, yangi uchburchak ichki chizilgan. Shu uchburchakka yuqoridagi usulda yana ichki uchburchak chizilgan va hokazo. Bu uchburchaklarning perimetrlari va yuzalarini mos qatorlar hadlari deb qarab, hosil bo'lgan qatorlarning yig'indilarini toping.
3. Radiusi a ga teng bo'lgan doiraga kvadrat ichki chizilgan, kvadratga doira ichki chizilgan. Bu doiraga ikkinchi kvadrat ichki chizilgan va hokazo. Doira va kvadrat yuzlarini ikkita qator hadlari deb qarab, shu qatorlarning yig'indilarini toping.
4. Qatorning $S_n=\frac{3+4^n}{4^n}$ xususiy yig'indisi ma'lum. Uning umumiy hadini va yig'indisini toping?
5. Ushbu qatorning n-xususiy yig'indisi uchun ifoda toping va yaqinlashishga tekshiring:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{5^n}$.

Javoblar: 1. $a_1=\frac{1}{6}$; $a_2=\frac{1}{6}$; $a_3=\frac{3}{40}$; $a_4=\frac{1}{45}$; 2. $6a$; $\frac{\sqrt{3}}{3}a^2$;

3. $2\pi a^2; 4a^2$; 4. $a_1=\frac{7}{4}$; $a_n=-\frac{9}{4^n}\ (n\geq 2)$, $S=1$;

5. a) $S_n=1-\frac{1}{2n+1}$, $S=1$; b) $S_n=\frac{13}{6}-\frac{2^{n+1}}{3\cdot 5^n}-\frac{3^{n+1}}{2\cdot 5^n}$.

2-§. Yaqinlashuvchi qatorlarning asosiy xossalari

Bizga ushbu

$$a_1+a_2+a_3+...+a_n+... \qquad (1)$$

va

$$b_1+b_2+b_3+...+b_n+... \qquad (2)$$

qatorlar berilgan va c ixtiyoriy o'zgarmas son bo'lsin.

Ushbu

$$ca_1+ca_2+ca_3+...+ca_n+... \qquad (3)$$

qator (1) qatorni c o'zgarmas songa ko'paytirish natijasida hosil qilingan deyiladi.

$$(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+(a_3+b_3)+...+(a_n+b_n)+... \qquad (4)$$

$$(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+(a_3-b_3)+...+(a_n-b_n)+... \qquad (5)$$

qatorlar esa, mos ravishda (1) va (2) qatorlarning yig'indisi va ayirmasi deb ataladi.

1-*teorema*. Agar (1) qator yaqinlashuvchi, yig'indisi S ga teng bo'lsa, u holda (3) qator ham yaqinlashuvchi bo'lib, yig'indisi cS ga teng bo'ladi.

Isboti. (3) qatorning n-xususiy yig'indisini yozib olamiz: $\sigma_n=ca_1+ca_2+ca_3+...+ca_n$. Buni quyidagicha yozish mumkin: $\sigma_n=c(a_1+a_2+a_3+...+a_n)=cS_n$, bu yerda S_n (1) qatorning n-xususiy yig'indisi. Teorema shartiga ko'ra $\lim_{n\to\infty}S_n=S$, u holda $\lim_{n\to\infty}\sigma_n$ limit mavjud bo'ladi: $\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\lim_{n\to\infty}cS_n=c\lim_{n\to\infty}S_n=cS$.

Shunday qilib, yaqinlashuvchi qatorni o'zgarmas songa ko'paytirish natijasida yana yaqinlashuvchi qator hosil bo'ladi va uning yig'indisini topish uchun berilgan qator yig'indisini shu songa ko'paytirish kifoya.

2-*teorema*. Agar (1) va (2) qatorlar yaqinlashuvchi va yig'indilari mos ravishda S va S' bo'lsa, u holda (4) va (5) qatorlar ham yaqinlashuvchi bo‘lib, ularning yig‘indilari mos ravishda $S+S'$ va $S-S'$ ga teng bo‘ladi.

Isboti. (4) qatorning yaqinlashuvchi ekanligini isbotlaymiz. Buning uchun qatorning n-xususiy yig‘indisini yozib olamiz:

$$\sigma_n = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + \ldots + (a_n + b_n).$$

Bu tenglikni quyidagicha yozib olish ham mumkin:

$$(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n) = S_n + S_n',$$

bu yerda S_n va S_n' mos ravishda (1) va (2) qatorning xususiy yig‘indilari. Teorema shartiga ko‘ra $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ va $\lim\limits_{n\to\infty} S_n' = S'$. Shu sababli $\sigma_n = S_n + S_n'$ tenglikda limitga o‘tish mumkin:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty}(S_n + S_n') = \lim_{n\to\infty} S_n + \lim_{n\to\infty} S_n' = S + S'.$$

Demak, (4) qator yaqinlashuvchi va yig‘indisi $S+S'$ ga teng ekan.

Yuqoridagi kabi isbotni (5) qator uchun ham bajarish mumkin. Buni o‘quvchilarga havola qilamiz.

Shunday qilib, yaqinlashuvchi qatorlarni chekli yig‘indilar kabi qo‘shish va ayirish mumkin ekan. Bu natijani yaqinlashuvchi qatorlarning algebraik yig‘indilari uchun ham umumlashtirish mumkin.

Quyidagi teoremani o‘quvchilarga mashq sifatida isbotlashni taklif qilamiz:

3-*teorema.* Yaqinlashuvchi qatorda hadlarning joylashish tartibini o‘zgartirmasdan ixtiyoriy guruhlash natijasida hosil bo‘lgan yangi qator yaqinlashuvchi va uning yig‘indisi avvalgi qator yig‘indisiga teng bo‘ladi.

Ko‘rsatma. Berilgan yaqinlashuvchi qator va bu qatordan uning hadlarining joylashish tartibini o‘zgartirmasdan ixtiyoriy guruhlash natijasida hosil bo‘lgan qator xususiy yig‘indilarining tengligini ko‘rsating.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Ikkita qatorning yig‘indisi qanday aniqlanadi?
2. Qatorning songa ko‘paytmasi qanday aniqlanadi?
3. Yaqinlashuvchi qatorlarning yig‘indisi haqida nima dey olasiz?
4. Uzoqlashuvchi qatorlarning yig‘indisi haqida nima dey olasiz?
5. Qatorni songa ko‘paytirish amali qator yaqinlashuvchiligi yoki uzoqlashuvchiligiga ta’sir qiladimi? Javobni asoslang.
6. Yaqinlashuvchi qatorning bir necha hadini tashlash yoki yangi bir necha hadlar qo‘shish uning yaqinlashuvchiligiga qanday ta’sir qiladi?

7. Uzoqlashuvchi qatorning bir necha hadini tashlash yoki yangi bir necha hadlar qo'shish uning yaqinlashuvchiligiga qanday ta'sir qiladi?

Mustaqil yechish uchun misol va masalalar

1. Yaqinlashuvchi qatorlarning ayirmasi yaqinlashuvchi qator ekanligini isbotlang.
2. Agar ikkita qatorning yig'indisi yaqinlashuvchi bo'lsa, ularning har biri yaqinlashuvchi bo'ladimi? Javobingizni asoslang.
3. Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashuvchi, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qator uzoqlashuvchi bo'lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ qatorning uzoqlashuvchi ekanligini isbotlang. Misol keltiring.
4. Ushbu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 5^n}{7^n}$ yaqinlashuvchi qatorni ikkita uzoqlashuvchi qator ayirmasi ko'rinishida ifodalang.

3-§. Qatorning qoldig'i

Ushbu

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... \qquad (1)$$

qator berilgan bo'lsin. Uning dastlabki n ta (tayin son) hadini tashlab yuborish natijasida yangi qator hosil bo'ladi:

$$a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + ... + a_{n+k} + ... \qquad (2)$$

(2) qator (1) *qatorning n-qoldig'i* deyiladi. (2) qatorning yig'indisini r_n orqali belgilaymiz. Demak, $r_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k}$. Qator va uning qoldig'i orasida quyidagi munosabat o'rinli:

Teorema. Qator va uning qoldig'i bir vaqtda yo yaqinlashadi yoki uzoqlashadi.

Isboti. Berilgan (1) qatorning dastlabki n ta hadi yig'indisi S_n, qator qoldig'ining, ya'ni (2) qatorning dastlabki k ta hadining yig'indisi S_k' bo'lsin. U holda, ravshanki,

$$S_k' = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k} = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} + ... + a_{n+k}) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n),$$

yoki

$$S_k' = S_{n+k} - S_n \qquad (3)$$

bundan esa

$$S_{n+k} = S_n + S_k' \qquad (4)$$

hosil bo'ladi.

Faraz qilaylik (1) qator yaqinlashuvchi va $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ bo'lsin. U holda $\{S_n\}$ ketma-ketlikning qism ketma-ketligi $\{S_{n+k}\}$ ham yaqinlashuvchi va $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n+k} = S$ bo'ladi. Bu esa (3) tenglikning o'ng tomonining limiti va, demak, chap tomonining ham limiti mavjudligini ta'minlaydi. Shunday qilib,

$$\lim_{k\to\infty} S_k' = \lim_{k\to\infty}\left(S_{n+k} - S_n\right) = \lim_{k\to\infty} S_{n+k} - \lim_{k\to\infty} S_n = S - S_n.$$

Bu degani qatorning qoldig'i yaqinlashuvchi va uning yig'indisi $r_n=S-S_n$ ga teng ekanligini bildiradi.

Endi (2) qator yaqinlashuvchi va $\lim\limits_{k\to\infty} S_k' = r_n$ bo'lsin, bu yerda n tayin son ekanligini eslatib o'tamiz. U holda (4) tenglikdan quyidagiga ega bo'lamiz:

$\lim\limits_{k\to\infty} S_{n+k} = \lim\limits_{k\to\infty}(S_n + S_k') = \lim\limits_{k\to\infty} S_n + \lim\limits_{k\to\infty} S_k' = S_n + r_n$, ya'ni (1) qator xususiy yig'indilar ketma-ketligi $\{S_{n+k}\}$ yaqinlashuvchi va limiti S_n+r_n ga teng. Demak, (1) qator yaqinlashuvchi va uning yig'indisi S_n+r_n ga teng.

1-*natija*. Agar (1) qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda (2) qatorning yig'indisi $n\to\infty$ da nolga intiladi, ya'ni $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$ bo'ladi.

Isboti. Haqiqatan ham, $r_n=S-S_n$ tenglik o'rinli. Bundan $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \lim\limits_{n\to\infty}(S - S_n) = S - S = 0$.

Misol. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$ qator uchun r_n ni toping va barcha $n>N$ larda $|r_n|<0{,}0001$ tengsizlik bajariladigan N ni ko'rsating.

Yechish. 1-§ ning 1-misolida $S_n=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$ va $S=\frac{3}{4}$ ekanligini ko'rsatgan edik. $r_n=S-S_n$ formulaga ko'ra $r_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$ bo'ladi. Ravshanki, $|r_n|=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)\le\frac{1}{n+1}$. Demak, $|r_n|<0{,}0001$ tengsizlik bajarilishi uchun $\frac{1}{n+1}<0{,}0001$ bajarilishi yetarli. Bundan $n+1>10000$ yoki $n>9999$ munosabatga ega bo'lamiz. Shunday qilib, $N=9999$ dan boshlab barcha n lar uchun $|r_n|<0{,}0001$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

2-*natija.* Agar

$$a_1+a_2+a_3+...+a_n+... \qquad (5)$$

va

$$b_1+b_2+b_3+...+b_n+... \qquad (6)$$

qatorlar bir-biridan faqat chekli sondagi hadlari bilan farq qilsa, u holda bu qatorlar bir vaqtda yaqinlashadi, yoki bir vaqtda uzoqlashadi.

Isboti. Haqiqatan, ham (5) va (6) qatorlar faqat chekli sondagi hadlari bilan farq qilsa, u holda biror k dan boshlab, ya'ni barcha $n>k$ da $a_n=b_n$ bo'ladi, demak, ularning qoldiqlari aynan bitta

$$a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}+...+a_{n+k}+... \qquad (7)$$

qatordan iborat. Shu sababli (5) va (6) qatorlar (7) qator yaqinlashuvchi bo'lsa, yaqinlashadi, uzoqlashuvchi bo'lsa, uzoqlashadi.

3-*natija.* Berilgan qatorning chekli sondagi hadlarini tashlab yuborish (yoki chekli sondagi yangi hadlarni qo'shish) natijasida hosil bo'lgan qator berilgan qator bilan bir vaqtda yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi bo'ladi.

Boshqacha aytganda, berilgan qatorning chekli sondagi hadlarini tashlab yuborish, yoki qatorga chekli sondagi yangi hadlarni qo'shish qatorning yaqinlashish xarakteriga ta'sir etmaydi.

Shu sababli, qatorni yaqinlashishga tekshirganda uning chekli sondagi hadlarini o'zgartirish mumkin.

4-§. Qator yaqinlashishining zaruriy sharti

Biz yuqorida ko'rdikki, yaqinlashuvchi qator biror sonni ifodalar ekan. Shu sababli qatorlarga oid asosiy masalalardan biri berilgan qator yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligini aniqlashdan iborat. 1-§ da misollar yechishda bu masalani qator yaqinlashishi yoki uzoqlashishining ta'rifidan foydalandik. Ammo amalda berilgan qator xususiy yig'indisi S_n ni n orqali ifodalash, bu ifodaning limitini topish murakkab masalaga aylanadi.

Shu sababli qator yaqinlashishi (uzoqlashishi) alomatlarini bilish muhim hisoblanadi. Shuni ta'kidlash kerakki bunday alomatlar ko'p bo'lib, ulardan birini foydalanish qulay bo'lgan holda ikkinchisi natija bermasligi ham mumkin.

Quyida qator yaqinlashishining zaruriy shartini keltiramiz.

Teorema. Agar

$$a_1+a_2+...+a_n+... \qquad (1)$$

qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda uning a_n umumiy hadi n cheksizga intilganda nolga intiladi, ya'ni $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ bo'ladi.

Isboti. Faraz qilaylik, (1) qator yaqinlashuvchi va yig'indisi S ga ya'ni $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ bo'lsin. U holda $\{S_n\}$ ketma-ketlikning qism ketma-ketligi $\{S_{n-1}\}$ $(n \ge 2)$ ham yaqinlashuvchi va $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$ bo'ladi.

Ravshanki. $a_n = S_n - S_{n-1}$ bundan $\lim_{n\to\infty} a_n$ mavjud va $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$. Shunday qilib, (1) qator yaqinlashuvchi bo'lishi uchun uning umumiy hadi nolga intilishi zarur ekan.

Yuqoridagi teoremadan qator uzoqlashishining yetarli sharti kelib chiqadi.

Natija. Agar (1) qatorning a_n umumiy hadi n cheksizga intilganda noldan farqli chekli limitga ega bo'lsa, yoki limitga ega bo'lmasa, u holda bu qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

Bu natija ba'zi qatorlarning uzoqlashuvchi ekanligiga oson ishonch hosil qilishga yordam beradi.

1-*misol.* Ushbu $\frac{1}{3}+\frac{2}{4}+\frac{3}{5}+\ldots+\frac{n}{n+2}+\ldots$ qatorni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Qatorning umumiy hadi $a_n = \frac{n}{n+2}$ ga teng va

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+2} = 1 \ne 0$ demak, yuqoridagi natijaga ko'ra qator uzoqlashuvchi.

2-*misol.* Ushbu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^2$ qatorni yaqinlashishiga tekshiring.

Yechish. Bu qatorning umumiy hadi $a_n=(-1)^{n-1}n^2$ va $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Demak, berilgan qator uzoqlashuvchi.

3-*misol.* Ushbu $\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{n\pi}{3}$ qatorni yaqinlashishiga tekshiring.

Yechish. Bu qatorning $a_n = \cos\frac{n\pi}{3}$ umumiy hadi $n \to \infty$ da limitga ega emas. Demak, qator uzoqlashuvchi.

Yuqorida isbotlangan teoremaning teskarisi, ya'ni $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ shartdan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorning yaqinlashuvchi ekanligi kelib chiqavermaydi.

Bunga misol sifatida *garmonik qator* deb ataluvchi ushbu qatorni qaraymiz:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+... \tag{2}$$

Garmonik qatorning uzoqlashuvchi ekanliligini ko'rsatamiz. Buning uchun teskaridan, ya'ni garmonik qator yaqinlashuvchi deb faraz qilamiz. U holda uning $S_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}$ xususiy yig'indisi chekli S limitga ega bo'ladi. Ravshanki, qatorning $S_{2n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}$ xususiy yig'indisi ham shu limitga ega bo'ladi.

Bu holda

$$\lim_{n\to\infty}(S_{2n}-S_n) = \lim_{n\to\infty} S_{2n} - \lim_{n\to\infty} S_n = S - S = 0.$$

Ammo

$$S_{2n}-S_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+...+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n} = n\cdot\frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

ya'ni $S_{2n}-S_n \geq \frac{1}{2}$, bundan $\{S_{2n}-S_n\}$ ketma-ketlikning $n\to\infty$ da nolga intilmasligi kelib chiqadi. Bu esa garmonik qator yaqinlashuvchi degan farazimizga zid. Demak, garmonik qator uzoqlashuvchi ekan.

Izoh. (2) qatorning ikkinchi hadidan boshlab har bir hadi u bilan qo'shni bo'lgan hadlarning o'rta garmonigiga teng (ikkita musbat a va b sonlarning o'rta garmonigi deb $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ songa aytiladi). Shu sababli bu qator garmonik qator deyiladi.

5-§. Qator yaqinlashishining Koshi kriteriyasi

Berilgan qator yaqinlashishining zaruriy va yetarli sharti Koshi kriteriyasi orqali beriladi:

Teorema. Ushbu

$$a_1+a_2+a_3+...+a_n+... \tag{1}$$

qator yaqinlashuvchi bo'lishi uchun ixtiyoriy ε musbat son olinganda ham shunday n_0 natural sonni ko'rsatish mumkin bo'lib, barcha $n>n_0$ va istalgan natural p sonda $|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon$, boshqacha aytganda

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+...+a_{n+p}|<\varepsilon \qquad (2)$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli.

Isboti. Zaruriyligi. (1) qator yaqinlashuvchi, ya'ni $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=S$ bo'lsin. U holda ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lishining Koshi kriteriyasiga ko'ra ixtiyoriy ε musbat son uchun shunday n_0 natural son topilib, barcha $m>n_0$ va $n>n_0$ larda

$$|S_m-S_n|<\varepsilon \qquad (3)$$

tengsizlik bajariladi. $m=n+p$ deb olib, (3) dan (2) ni hosil qilamiz.

Yetarliligi. Teorema qator xususiy yig'indilar ketma-ketligi $\{S_n\}$ ning yaqinlashuvchi ekanligini bildiradi. Demak, ta'rif bo'yicha (1) qator yaqinlashuvchi.

Misol. Koshi kriteriyasidan foydalanib,

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}+...$$

qatorning yaqinlashuvchi ekanligini isbotlang.

Yechish. Ixtiyoriy ε musbat soni uchun shunday n_0 natural son topilib, $n>n_0$ va istalgan r natural sonda $|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon$ bajarilishini ko'rsatamiz.

Ravshanki,

$$\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{n(n+1)};\ \frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{(n+1)(n+2)};...;\frac{1}{(n+p)^2}<\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}.$$

Bulardan

$$|S_{n+p}-S_n|=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+...+\frac{1}{(n+p)^2}<$$

$$<\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+...+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}=$$

$$=(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})+(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})+...+(\frac{1}{n+p-1}+\frac{1}{n+p})=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}$$

ya'ni $|S_{n+p}-S_n|<\frac{1}{n}$ tengsizlikning istalgan n da o'rinli ekanligi kelib chiqadi. Demak, $n>1/\varepsilon$ da $|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Shunday qilib, ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun $n_0=[1/\varepsilon]$ deb olsak, $n>n_0$ va istalgan n

natural son uchun $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$ tengsizlikning o‘rinli ekanligi kelib chiqadi. Demak, qator yaqinlashuvchi.

Koshi kriteriyasi nazariy tadqiqotlarda muhim ahamiyatga ega. Uning yordamida qatorlar haqidagi teoremalar isbotlanadi. Amalda, ya’ni berilgan qatorning yaqinlashishi yoki uzoqlashishini aniqlashda (2) tengsizlikning bajarilishini tekshirish ancha noqulay. Shu sababli amaliyotda boshqa alomatlardan foydalaniladi.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Qatorning qoldig‘i nima?
2. Yaqinlashuvchi (uzoqlashuvchi) qatorning qoldig‘i haqida nima dey olasiz?
3. Qator yaqinlashishining zaruriy sharti nimadan iborat?
4. Qator yaqinlashishining zaruriy sharti qanday isbotlanadi?
5. Qator uzoqlashishining yetarli shartini ayting, bu shartdan qatorlarni yaqinlashishga tekshirganda qanday foydalanish mumkin?
6. Garmonik qatorni yozing. U yaqinlashuvchimi?
7. Garmonik qatorning uzoqlashuvchi ekanligi qanday isbotlanadi?
8. Qator yaqinlashishining zaruriy va yetarli sharti nimadan iborat?
9. Koshi kriteriyasi yordamida qatorni yaqinlashishga qanday tekshiramiz?
10. Koshi kriteriyasining inkorini (qator uzoqlashuvchi bo‘lishining zaruriy va yetarli shartini) ayting va uni garmonik qatorga qanday tatbiq qilish mumkin?

Mustaqil yechish uchun misol va masalalar

1. Quyida berilgan qatorlarning r_n qoldig‘i uchun ifoda toping, barcha $n>n_0$ larda $|r_n|<\varepsilon$ tengsizlik bajariladigan n_0 ni ko‘rsating:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$, $\varepsilon = 2\cdot10^{-4}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+4^n}{5^n}$, $\varepsilon = 10^{-4}$.

2. Ushbu qatorlarning uzoqlashuvchi ekanligini asoslang:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1000n+2}$; c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{3n+2}$; d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin n\alpha$, $\alpha \neq \pi m, m \in \mathbf{Z}$.

3. Koshi kriteriyasidan foydalanib ushbu qatorlarning yaqinlashuvchi ekanligini isbotlang:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{3^n}$.

3. Koshi kriteriyasidan foydalanib ushbu qatorlarning uzoqlashuvchi ekanligini isbotlang:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

Javoblar: 1. a) $r_n=\frac{1}{2(2n+1)}$, $n_0=1250$; b) $r_n=\frac{2^{n+1}}{3\cdot 5^n}$, $n_0=\left[\frac{4}{\lg 2,5}\right]=10$

6-§. Musbat qatorlar

6.1. Musbat qatorlarning yaqinlashish sharti. Agar berilgan $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots$ qatorning hadlari nomanfiy, ya'ni $a_n\geq 0$, $n\in\mathbb{N}$, bo'lsa, bu qator *musbat qator* (yoki *musbat hadli qator*) deyiladi. Ravshanki, musbat qatorlarning xususiy yig'indilari ketma-ketligi kamaymaydigan ketma-ketlik bo'ladi, chunki $S_{n+1}=S_n+a_{n+1}$, bundan $S_n\leq S_{n+1}$. Monoton ketma-ketlikning limiti haqidagi teoremadan musbat qatorlar uchun quyidagi yaqinlashish sharti kelib chiqadi:

1-*teorema.* Musbat qator yaqinlashuvchi bo'lishi uchun uning xususiy yig'indilaridan tuzilgan ketma-ketlikning yuqoridan chegaralangan bo'lishi zarur va yetarli.

Bu teoremadan ko'rinadiki, musbat qatorlarni yaqinlashishga tekshirish uchun uning xususiy yig'indilaridan tuzilgan $\{S_n\}$ ketma-ketlikning yuqoridan chegaralanganligini ko'rsatish yetarli ekan. Quyida isbotlari shu teoremaga asoslangan musbat qator yaqinlashishining bir nechta yetarli shartlarini ko'rib chiqamiz.

1-*misol.* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n(n+1)}$ qatorni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Qatorning n-xususiy yig'indisini yozib olamiz: $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin^2 k}{k(k+1)}$. $\frac{\sin^2 k}{k(k+1)}\leq\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$ bo'lganligi sababli $\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin^2 k}{k(k+1)}\leq\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}<1$ munosabatlar o'rinli. Demak, barcha n lar uchun $S_n<1$, ya'ni qatorning xususiy yig'indilari ketma-ketligi yuqoridan chegaralangan. 1-teoremaga ko'ra berilgan musbat qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

6.2. Taqqoslash alomatlari

2-teorema. Aytaylik,

$$a_1+a_2+a_3+...+a_n+... \qquad (1)$$

$$b_1+b_2+b_3+...+b_n+... \qquad (2)$$

musbat qatorlar berilgan bo'lsin. Biror n_0 nomerdan boshlab $a_n \leq b_n$ munosabat o'rinli bo'lsa, u holda

a) (2) qator yaqinlashuvchi bo'lsa, (1) qator yaqinlashuvchi bo'ladi;

b) (1) qatorning uzoqlashuvchi bo'lsa, (2) qatorning ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

Isbot. Aytaylik, $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$, $S_n'=\sum_{k=1}^{n}b_k$ bo'lsin. Shartga ko'ra $a_n \leq b_n$ munosabat o'rinli, bundan $S_n \leq S'_n$ tengsizlik kelib chiqadi.

a) Agar (2) qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $\{S'_n\}$ ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan. Demak, (1) qator xususiy yig'indilaridan tuzilgan $\{S_n\}$ ketma-ketlik ham yuqoridan chegaralangan. Bundan (1) qator yaqinlashuvchidir.

b) (1) qator uzoqlashuvchi bo'lsin, u holda $\{S_n\}$ ketma-ketlik yuqoridan chegaralanmagan. Demak, $\{S'_n\}$ ham yuqoridan chegaralanmagan. Bundan $\lim_{n\to\infty} S_n'=\infty$ va qator uzoqlashuvchi.

2-misol. Birinchi taqqoslash alomatidan foydalanib,

$\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3+...+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n+...$ qatorni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Ushbu qatorni qaraymiz: $\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+...+\left(\frac{2}{3}\right)^n+....$

Ravshanki, $a_n=\frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n=b_n$. Mahraji $q=\frac{2}{3}$ bo'lgan $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ geometrik qator yaqinlashuvchi, demak 1-teoremaga ko'ra berilgan $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n$ qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

3-misol. Birinchi taqqoslash alomatidan foydalanib $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}+...$ qatorning uzoqlashuvchi ekanligini asoslang.

Yechish. Berilgan qatorning hadlari, ikkinchi hadidan boshlab $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n}+...$ garmonik qatorning mos hadlaridan katta, garmonik qator esa uzoqlashuvchi. Demak, birinchi taqqoslash alomatiga ko'ra berilgan qator uzoqlashuvchi.

Yuqorida isbotlangan teoremadan bir nechta foydali natijalar kelib chiqadi. Bunda biz (2) qator hadlarini musbat, (1) qator hadlarini nomanfiy deb qaraymiz.

1-*natija.* Agar (1) va (2) qatorlar uchun $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k$ ($k<\infty$) mavjud bo'lsa, u holda (2) qatorning yaqinlashuvchi ekanligidan (1) qatorning yaqinlashuvchi ekanligi kelib chiqadi.

Isboti. Haqiqatan ham, agar $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k$ mavjud bo'lsa, u holda limitning ta'rifiga ko'ra har qanday ε musbat son (masalan, ε=1) olmaylik, shunday n_0 nomer topilib, $n>n_0$ larda $\left|\frac{a_n}{b_n}-k\right|<1$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bundan esa $\frac{a_n}{b_n}<k+1$ tengsizlik hosil bo'ladi. Shartga ko'ra $b_n>0$ bo'lganligi sababli, so'ngi tengsizlikni $a_n<(k+1)b_n$ ko'rinishda yozib olish mumkin. Endi, (2) qator yaqinlashuvchi, demak, 2-§ da isbotlangan 1-teoremaga ko'ra umumiy hadi $(k+1)b_n$ bo'lgan qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi. U holda yuqorida isbotlangan taqqoslash alomatiga ko'ra (1) qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

Izoh. $a_n\geq 0$, $b_n>0$ bo'lganligi sababli $k\geq 0$ bo'ladi. Natija xulosasi $k=0$ da ham o'rinli ekanligi ravshan.

2-*natija.* Agar (1) va (2) qatorlar uchun $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k$ ($0<k\leq\infty$) mavjud bo'lsa, u holda (2) qatorning uzoqlashuvchi ekanligidan (1) qatorning uzoqlashuvchi ekanligi kelib chiqadi.

Isboti. Agar (1) qator yaqinlashuvchi bo'lganda edi, u holda $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\frac{1}{k}$ $(0<\frac{1}{k}<+\infty)$ munosabat va 1-natijaga ko'ra (2) qator yaqinlashuvchi bo'lar edi. Bu esa shartga zid. Shuningdek, $k=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=+\infty$ bo'lganda ham $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=0$ bo'lib, yuqoridagi natijaga ko'ra ziddiyatga kelamiz.

Yuqoridagi ikkita natijadan quyidagi natija kelib chiqadi:

3-*natija*. Agar (1) va (2) qatorlar uchun $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=k$ $(0<k<\infty)$ mavjud bo'lsa, u holda (1) va (2) qatorlar bir vaqtda yaqinlashuvchi, yoki bir vaqtda uzoqlashuvchi bo'ladi.

4-*misol.* $\sin 1+\sin\frac{1}{2}+...+\sin\frac{1}{n}+...$ qatorni $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n}+...$ qator bilan taqqoslaymiz. $\frac{a_n}{b_n}=\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$ nisbatni ko'ramiz. Ma'lumki, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1$.

Demak, berilgan $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ qator uzoqlashuvchi.

5-*misol.* $\sin\frac{1}{2}+\sin\frac{1}{2^2}+...+\sin\frac{1}{2^n}+...$ qatorni $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^n}+...$ qator bilan taqqoslaymiz. Berilgan ikkinchi qator yaqinlashuvchi, chunki $q=\frac{1}{2}$ bo'lgan cheksiz kamayuvchi geometrik progressiya hadlari yig'indisidan iborat.

$\frac{a_n}{b_n}=\frac{\sin\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^n}}$ va $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^n}}=1$. Shunday qilib, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{2^n}$ qator yaqinlashuvchi.

Taqqoslash alomatidan foydalanib biror qatorning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligi haqida xulosa chiqarish har doim ham oson masala emas. Chunki bunday xulosa chiqarish uchun tadqiq etilayotgan qator bilan taqqoslanadigan yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi qatorni topishning umumiy usuli yo'q. Shu sababli qatorni yaqinlashishga tekshirishda yordamchi qatordan foydalanilmaydigan alomatlarni topish zaruriyati tug'iladi. Quyida shunday alomatlarni ko'rib o'tamiz.

6.3. Dalamber alomati

3-*teorema.* Agar

$$a_1+a_2+a_3+...+a_n+... \qquad (3)$$

musbat qatorning $(n+1)$-hadining n-hadiga nisbati $n\to\infty$ da chekli limitga ega, ya'ni

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l \qquad (4)$$

bo'lsa, u holda

1) $l<1$ da qator yaqinlashadi;

2) $l>1$ da qator uzoqlashadi.

Isbot. Teorema shartiga ko‘ra (4) tenglik o‘rinli. Limitning ta’rifiga ko‘ra ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun shunday n_0 natural son topilib, barcha $n>n_0$ larda quyidagi munosabat o‘rinli bo‘ladi:

$$l-\varepsilon < a_{n+1}/a_n < l+\varepsilon \qquad (5)$$

1) Agar $l<1$ bo‘lsa, u holda shunday $\varepsilon>0$ son topilib, $q=l+\varepsilon<1$ bo‘ladi. U holda shu $\varepsilon>0$ songa mos n_0 natural son topilib, barcha $n>n_0$ larda $a_{n+1}/a_n < q$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Bundan

$$a_{n_0+1} < a_{n_0}q,\ a_{n_0+2} < a_{n_0+1}q < a_{n_0}q^2,\ \ldots,\ a_{n_0+k} < a_{n_0+k-1}q < a_{n_0}q^k, \ldots$$

Endi, $|q|<1$ da $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_0}q^k$ qator yaqinlashishidan $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_0+k} = \sum\limits_{n=n_0+1}^{\infty} a_n$ qatorning, demak, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorning yaqinlashishi kelib chiqadi.

2) Agar $l>1$ bo‘lsa, u holda shunday $\varepsilon>0$ topilib, $q=l-\varepsilon>1$ bo‘ladi. (3) munosabatdan barcha $n>n_0$ larda $a_{n+1}/a_n > q$ tengsizlik, yoki $a_{n+1}>a_nq$ tengsizlik kelib chiqadi. Bu esa biror haddan boshlab qator hadlari o‘suvchi ekanligini anglatadi. Demak, qator yaqinlashishining zaruriy sharti bajarilmaydi. Qator uzoqlashuvchi.

$l=1$ bo‘lgan holda bu alomat qatorning yaqinlashuvchi bo‘lish-bo‘lmasligini aniqlash imkonini bermaydi.

6-*misol.* Qatorni yaqinlashishga tekshiring:

$$\frac{2}{1^2}+\frac{2^2}{2^2}+\frac{2^3}{3^2}+\ldots+\frac{2^n}{n^2}+\ldots$$

Yechish. Ravshanki, $a_n=\frac{2^n}{n^2}$, $a_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}$. (4) formuladan quyidagini topamiz:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)^2}}{\dfrac{2^n}{n^2}}=2\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=2>1.$$

Demak, qator uzoqlashuvchi.

7-*misol.* Berilgan qatorni yaqinlashishga tekshiring:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{3}{(\sqrt{2})^2}+\frac{5}{(\sqrt{2})^3}+\ldots+\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}+\ldots$$

Yechish. Ravshanki, $a_n=\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$, $a_{n+1}=\frac{2n+1}{(\sqrt{2})^{n+1}}$. (4) formulaga ko‘ra

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2n+1}{\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}}}{\dfrac{2n-1}{\left(\sqrt{2}\right)^{n}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}<1.$$

Demak, qator yaqinlashuvchi.

8-*misol.* Qatorni yaqinlashishga tekshiring:

$$1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+\ldots.$$

Yechish. Qatorning n- va $n+1$-hadlarini yozib olamiz: $a_n=\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$, $a_{n+1}=\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}$. (2) formulaga ko‘ra $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{n}{n+1}}=1$.

Qatorning yaqinlashishi to‘g‘risida Dalamber alomati asosida xulosa chiqarish mumkin emas. Taqqoslash alomatiga ko‘ra (masalan, garmonik qator bilan taqqoslang), qatorning uzoqlashuvchi ekanligini ko‘rish mumkin.

6.4. Koshining radikal alomati.

4-*teorema.* Agar

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots \qquad (6)$$

musbat hadli qator uchun

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=p$$

chekli limit mavjud bo‘lsa, u holda $p<1$ da berilgan qator yaqinlashuvchi, $p>1$ da esa uzoqlashuvchi bo‘ladi.

Isboti. Aytaylik $p<1$ bo‘lsin. Ushbu $p<q<1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi biror q sonni tanlaymiz. U holda $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=p<q$ bo‘lganligi sababli $n=k$ nomerdan boshlab, $\sqrt[n]{a_n}<q$ yoki $a_n<q^n$ $(n\geq k)$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Bundan esa

$$a_k<q^k,\ a_{k+1}<q^{k+1},\ a_{k+2}<q^{k+2},\ldots \qquad (7)$$

munosabatlar o‘rinli ekanligi kelib chiqadi.

$0<q<1$ bo‘lganligi sababli,

$$q+q^2+q^3+\ldots+q^k+q^{k+1}+q^{k+2}+\ldots \qquad (8)$$

geometrik qator yaqinlashuvchi bo‘ladi. Qaralayotgan (6) qatorning k-hadidan boshlab barcha hadlari ((7) munosabatga ko‘ra) (8) qatorning mos hadlaridan kichik. Demak taqqoslash alomatiga ko'ra (6) qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

Endi $p>1$ bo'lsin. U holda $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=p>1$ bo'lganligi sababli, biror $n=k$ nomerdan boshlab $\sqrt[n]{a_n}>1$ bo'ladi. Bundan $a_n>1$ $(n\geq k)$. Demak (6) qatorning umumiy hadi $n\to+\infty$ da nolga intilmaydi, ya'ni (6) qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

1-*izoh*. Agar $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=+\infty$ bo'lsa, (6) qator uzoqlashuvchi bo'ladi, chunki bu holda ham biror k nomerdan boshlab $\sqrt[n]{a_n}>1$ bo'ladi.

2-*izoh*. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ mavjud bo'lmagan yoki mavjud va 1 ga teng bo'lgan holda, Koshi alomati qatorning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchiligi haqidagi masalaga javob bermaydi.

Haqiqatdan ham, masalan $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ qator yaqinlashuvchi, lekin $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}=1$.

$1+1+\ \ 1+\ldots+1\ldots$ qator uzoqlashuvchi, lekin bu qator uchun $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1}=1$.

9-*misol.* Berilgan qatorni yaqinlashishga tekshiring:

$$\frac{1}{ln2}+\frac{1}{ln^2 3}+\ldots+\frac{1}{ln^n(n+1)}+\ldots$$

Yechish. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{\ln^n(n+1)}}=\frac{1}{\ln(n+1)}=0<1$

Demak, qator yaqinlashuvchi.

10-*misol.* $\frac{2}{1}+\left(\frac{3}{2}\right)^4+\left(\frac{4}{3}\right)^9+\ldots+\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}+\ldots$ qatorni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=e>1.$

Qator uzoqlashuvchi.

6.5. Koshining integral alomati

5-*teorema.* Agar $f(x)$ funksiya $[1;\infty)$ oraliqda nomanfiy, integrallanuvchi, monoton kamayuvchi hamda $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ qator hadlari uchun

$f(1)=a_1, f(2)=a_2,..., f(n)=a_n,...$ tengliklar o'rinli bo'lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator va $\int_1^{\infty} f(x)dx$ xosmas integrallar bir vaqtda yaqinlashuvchi yoki bir vaqtda uzoqlashuvchi bo'ladi; yaqinlashuvchi bo'lgan holda

$$\int_1^{\infty} f(x)dx \le \sum_{n=1}^{\infty} a_n \le \int_1^{\infty} f(x)dx + a_1 \qquad (9)$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Isboti. $f(x)$ funksiya monoton kamayuvchi, demak $k \le x \le k+1$ tengsizliklardan $f(k) \ge f(x) \ge f(k+1)$ kelib chiqadi. Bu qo'sh tengsizlikni k dan $k+1$ gacha integrallab,

$\int_k^{k+1} f(k)dx \ge \int_k^{k+1} f(x)dx \ge \int_k^{k+1} f(k+1)dx$, yoki $f(k)=a_k$ bo'lganligi uchun $a_k \ge \int_k^{k+1} f(x)dx \ge a_{k+1}$ qo'sh tengsizliklarga erishamiz. So'ngi tengsizliklarni $k=1, 2, ..., n$ uchun yozamiz:

$$a_1 \ge \int_1^{2} f(x)dx \ge a_2,$$

$$a_2 \ge \int_2^{3} f(x)dx \ge a_3,$$

. . . .

$$a_n \ge \int_n^{n+1} f(x)dx \ge a_{n+1}.$$

Bularni hadma-had qo'shib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$S_n \ge \int_1^{n+1} f(x)dx \ge S_{n+1} - a_1 \qquad (10)$$

Quyidagi hollarni qaraymiz.

1) $\int_1^{\infty} f(x)dx$ integral yaqinlashuvchi va I ga teng. U holda $\int_1^{n+1} f(x)dx \le I$ va $S_{n+1} \le I + a_1$ tengsizlik barcha natural n larda o'rinli. Demak, $\{S_n\}$ ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan, bundan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ musbat qator yaqinlashuvchi.

Va aksincha, agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $\{S_n\}$ ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan, demak umumiy hadi $I_{n+1}=\int_1^{n+1} f(x)dx$ bo'lgan monoton o'suvchi ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'ladi, ya'ni $\int_1^{\infty} f(x)dx$ integral yaqinlashuvchi bo'ladi.

2) $\int_1^{\infty} f(x)dx$ integral uzoqlashuvchi bo'lsin. U holda $S_n \geq \int_1^{n+1} f(x)dx$ tengsizlikdan $\{S_n\}$ ketma-ketlik yuqoridan chegaralanmagan, bundan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator uzoqlashuvchi ekanligi kelib chiqadi. Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator uzoqlashuvchi bo'lsa, u holda uning xususiy yig'indilaridan iborat $\{S_n\}$ ketma-ketlik yuqoridan chegaralanmagan, demak, umumiy hadi $I_{n+1}=\int_1^{n+1} f(x)dx$ bo'lgan ketma-ketlik ham chegaralanmagan. Bundan $\int_1^{\infty} f(x)dx$ integralning uzoqlashuvchiligi kelib chiqadi.

Qator yaqinlashuvchi bo'lgan holda (10) qo'sh tengsizlikda $n\to\infty$ limitga o'tib,

$S \geq \int_1^{\infty} f(x)dx \geq S-a_1$ munosabatga, bundan (9) ga ega bo'lamiz.

11-*misol. Umumlashgan garmonik qator* deb ataluvchi ushbu

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots$$

qatorni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. $a_1=f(1)=1,\ a_2=f(2)=\frac{1}{2^p}, \ldots,\ a_n=f(n)=\frac{1}{n^p}, \ldots$ va $f(x)=\frac{1}{x^p}$ ekanligi ravshan, bu yerda p-haqiqiy son.

Ushbu

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}dx=\lim_{n\to\infty}\int_1^{n}\frac{1}{x^p}dx=\frac{1}{1-p}\lim_{n\to\infty}x^{-p+1}\Big|_1^n=\frac{1}{1-p}\lim_{n\to\infty}(n^{1-p}-1)\quad (p\neq 1)$$

xosmas integralni hisoblaymiz.

Agar $p>1$ bo'lsa, u holda $\lim_{n\to\infty} n^{1-p}=0$ va $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}dx=\frac{1}{p-1}$ yaqinlashuvchi;

Agar $p<1$ bo'lsa, u holda $\lim\limits_{n\to\infty} n^{1-p}=\infty$ va $\int\limits_1^{\infty}\frac{1}{x^p}dx$ uzoqlashuvchi;

Agar $p=1$ bo'lsa, u holda $\int\limits_1^{\infty}\frac{1}{x}dx=\ln x\Big|_1^{\infty}=\infty$ uzoqlashuvchi.

Shunday qilib, umumlashgan garmonik qator $p>1$ bo'lsa yaqinlashuvchi, $p\le 1$ bo'lsa uzoqlashuvchi bo'ladi.

6.6. Raabe alomati

6-*teorema.* (1) qatorning hadlari musbat va $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=r$ bo'lsin.

U holda

1) agar $r>1$ bo'lsa, (1) qator yaqinlashuvchi;
2) agar $r<1$ bo'lsa, (1) qator uzoqlashuvchi

bo'ladi.

Isboti. ([1], 397-398 b.)

12-*misol.* $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}$ qatorni yaqinlashishga tekshiring, bu yerda (2n)!! orqali 2n gacha bo'lgan barcha juft sonlarning, (2n-1)!! orqali esa 2n-1 gacha bo'lgan barcha toq sonlarning ko'paytmasi belgilangan.

Yechish. Bu qator uchun Dalamber alomati natija bermaydi, chunki $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n-1)^2}{2n(2n+1)}=1$. Raabe alomatini tatbiq etamiz:

$r=\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1-\frac{(2n-1)^2}{2n(2n+1)}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n-1}{2(2n+1)}=\frac{3}{2}$. Demak, $r=1{,}5>1$ bo'lganligi uchun qator yaqinlashuvchi.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Qanday qatorga musbat qator deyiladi?
2. Musbat qatorlarning xususiy yig'indilar ketma-ketligi haqida nimalar deyish mumkin?
3. Musbat qator yaqinlashishining zaruriy va yetarli shartini nimadan iborat?
4. Musbat qator yaqinlashishining zaruriy va yetarli shartini isbotlang.
5. Musbat qatorlarni taqqoslash deganda nimani tushunasiz?
6. Musbat qatorlarni yaqinlashishga tekshirganda taqqoslashdan qanday foydalaniladi? Misolda tushuntiring.
7. Taqqoslash teoremalarining isbotida qaysi teoremadan foydalaniladi?
8. Dalamber alomatini ayting.

9. Dalamber alomatini isbotlashda qanday qatordan foydalaniladi?
10. Dalamber alomati bo'yicha qatorni yaqinlashishga tekshirganda nima ishlar bajariladi?
11. Koshining radikal alomatini ayting.
12. Koshining radikal alomati bo'yicha qatorni yaqinlashishga tekshirganda nima ishlar bajariladi?
13. Koshining radikal alomatidan foydalanib geometrik qatorni yaqinlashishga tekshiring.
14. Koshining integral alomati yordamida qatorni yaqinlashishga qanday tekshiriladi?
15. Koshining integral alomati yordamida garmonik qatorni yaqinlashishga tekshiring.
16. Koshining integral alomatini ayting.
17. Koshining integral alomatini isbotlang.
18. Umumlashgan garmonik qatorni yozing.
19. Umumlashgan garmonik qatorni Koshining integral alomati yordamida yaqinlashishga tekshiring.
20. Qanday qatorlarni Koshining integral alomati yordamida tekshirish mumkin?
21. Raabe alomati yordamida qatorni yaqinlashishga qanday tekshiriladi?
22. Dalamber, Koshi, Raabe alomatlarining taqqoslash alomatlaridan afzalliklari nimada?

Mustaqil yechish uchun misol va masalalar

1. Umumiy hadi a_n bo'lgan qator xususiy yig'indilari ketma-ketligining yuqoridan chegaralanganligidan foydalanib, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorning yaqinlashuvchi ekanligini isbotlang:

a) $a_n = \dfrac{\cos^4 3n}{(n+1)(n+2)}$; b) $a_n = \dfrac{n \cdot 2^n + 5}{n \cdot 3^n + 4}$.

2. Taqqoslash teoremalaridan foydalanib, qatorni yaqinlashishga tekshiring.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n+2^n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{2n^2-1}}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} tg \dfrac{\pi}{2^{n+1}}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+\dfrac{1}{4^n})$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator hadlari 100-chi hadidan boshlab, musbat va $a_n < \frac{1}{3^n}$ bo'lsa, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yaqinlashuvchi bo'ladimi?

4. Dalamber yoki Koshi alomatlari yordamida qatorlarni yaqinlashishga tekshiring.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n n!}{n^n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{ln^n(n+5)}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{n+2}\right)^n$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^{n+2}}{n^n}$.

5. Koshining integral alomatidan foydalanib qatorni yaqinlashishga tekshiring.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$.

Javoblar: 2. a) yaqinlashuvchi, b) uzoqlashuvchi, c) yaqinlashuvchi, d) yaqinlashuvchi. 3. Ha, yaqinlashuvchi bo'ladi. 4. a) uzoqlashuvchi, b) yaqinlashuvchi, c) uzoqlashuvchi, d) yaqinlashuvchi. 5. a) uzoqlashuvchi, b) yaqinlashuvchi, c) uzoqlashuvchi.

7-§. Ixtiyoriy hadli qatorlar. Absolyut yaqinlashuvchi va shartli yaqinlashuvchi qatorlar

Biz oldingi paragraflarda musbat hadli, ya'ni hadlarining ishoralari bir xil bo'lgan (nolga teng hadlarini hisobga olmaganda) qatorlarni ko'rdik. Agarda qator hadlarining ishoralari biror nomerdan boshlab musbat bo'ladigan bo'lsa, bunday qatorlarni yaqinlashishga tekshirish qiyinchilik tug'dirmaydi. Chunki, qatorning chekli sondagi hadlarini tashlab yuborish uning yaqinlashish xarakteriga ta'sir etmaydi. Ammo qatorda cheksiz ko'p musbat va cheksiz ko'p manfiy hadlar qatnashsa, bunday qatorni yaqinlashishga tekshirish muhim masalaga aylanadi. Odatda, bunday qatorlar *ixtiyoriy hadli qatorlar* deb yuritiladi.

7.1. Ishoralari navbatlashuvchi qatorlar

1-*ta'rif.* Ushbu

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^n u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n , \qquad (1)$$

bu yerda $u_1, u_2, u_3, ..., u_n, ...$ musbat sonlar, qator *ishoralari navbatlashuvchi* qator deyiladi.

Ishoralari navbatlashuvchi qatorlar uchun quyidagi teorema o'rinli:

1-*teorema* (Leybnits teoremasi). Agar ishoralari navbatlashuvchi

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ... + (-1)^n u_n + ...$$

qatorda

1) qator hadlarining absolyut qiymatlari kamayuvchi, ya'ni

$$u_1 > u_2 > u_3 > u_4 > ... > u_n > ... \qquad (2)$$

bo'lsa,

2) qatorning u_n umumiy hadi $n \to \infty$ da nolga intilsa:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \qquad (3)$$

u holda (1) qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

Isboti. $n = 2m$, ya'ni juft bo'lsin. U holda S_{2m} ni quyidagicha yozib olamiz: $S_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + ... + (u_{2m-1} - u_{2m})$. (2) shartga ko'ra u_{2m-1}-u_{2m}>0 (m=1,2,...), demak $S_{2m} > 0$ va xususiy yig'indilar ketma-ketligi $\{S_{2m}\}$ o'suvchi bo'ladi.

Endi S_{2m} xususiy yig'indini quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$S_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - ... - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m}.$$

Yana (2) shartga ko'ra $u_1 > S_{2m}$ tengsizlikni hosil qilamiz.

Shunday qilib, $\{S_{2m}\}$ xususiy yig'indilar ketma-ketligi o'suvchi va yuqoridan chegaralangan. Demak, $\lim_{m\to\infty} S_{2m} = S$, shu bilan birgalikda $u_1 > S > 0$.

Endi toq indeksli $\{S_{2m+1}\}$ xususiy yig'indilar ketma-ketligi ham S limitga intilishini ko'rsatamiz.

Haqiqatan ham,

$$S_{2m+1} = S_{2m} + u_{2m+1}$$

bo'lgani uchun $m \to \infty$ da

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} S_{2m} + \lim_{m\to\infty} u_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} S_{2m} = S$$

ga ega bo'lamiz, bunda (3) shartga ko'ra

$$\lim_{m\to\infty} u_{2..i+1} = 0$$

Demak, $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, qator yaqinlashuvchi.

1-*misol.* $\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - ... + (-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)^2} + ...$ qatorni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. $\frac{1}{2^2}>\frac{1}{3^2}>\frac{1}{4^2}>...>\frac{1}{(n+1)^2}>...$ va $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^2}=0$.

Demak, yuqoridagi teoremaga asosan qator yaqinlashuvchi.

7.2. Absolyut yaqinlashuvchi va shartli yaqinlashuvchi qatorlar

Endi ixtiyoriy hadli qatorlarni qaraylik.

2-*teorema.* Agar ixtiyoriy hadli

$$u_1+u_2+u_3+u_4+...+u_n+... \qquad (4)$$

qator hadlarining absolyut qiymatlaridan tuzilgan

$$|u_1|+|u_2|+|u_3|+|u_4|+...+|u_n|+... \qquad (5)$$

qator yaqinlashsa, u holda berilgan qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

Isboti. S_n va S_n' mos ravishda (4) va (5) qatorlarning n-xususiy yig'indilari bo'lsin. S_n^+ bilan barcha musbat va S_n^- bilan S_n xususiy yig'indidagi barcha manfiy ishorali hadlar absolyut qiymatlari yig'indisini belgilaymiz. U holda $S_n= S_n^+-S_n^-$, $S_n'=S_n^++S_n^-$ bo'ladi.

Shartga ko'ra, (5) qator yaqinlashuvchi, shu sababli $\{S_n'\}$ xususiy yig'indilar ketma-ketligi S limitga ega.

$\{S_n^+\}$ va $\{S_n^-\}$ lar esa musbat va o'suvchi, shu bilan birgalikda $S_n^+\le S_n'<S$ va $S_n^-\le S_n'<S$ (chegaralangan), demak, ular ham limitga ega:

$$\lim_{n\to\infty}S_n^+=S^+,\quad \lim_{n\to\infty}S_n^-=S^-$$

$S_n= S_n^+-S_n^-$ munosabatdan $\{S_n\}$ ham limitga egaligi kelib chiqadi:

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}S_n^+-\lim_{n\to\infty}S_n^-=S^+-S^-.$$

2-*ta'rif.* Ixtiyoriy hadli

$$u_1+u_2+u_3+u_4+...+u_n+... \qquad (4)$$

qator hadlari absolyut qiymatlaridan tuzilgan

$$|u_1|+|u_2|+|u_3|+|u_4|+...+|u_n|+... \qquad (5)$$

qator yaqinlashuvchi bo'lsa, (4) qator *absolyut yaqinlashuvchi* qator deyiladi.

3-*ta'rif.* Agar ixtiyoriy hadli (4) qator yaqinlashuvchi bo'lib, bu qator hadlarining absolyut qiymatlaridan tuzilgan (5) qator uzoqlashuvchi bo'lsa, u holda (4) qator *shartli yaqinlashuvchi* deyiladi.

2-*misol.* Quyidagi qatorni qaraylik :

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+...$$

Leybnits alomatiga ko‘ra bu qator yaqinlashuvchi, lekin qator hadlarining absolyut qiymatlaridan tuzilgan $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n}+...$ qator uzoqlashuvchi. Demak, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ qator shartli yaqinlashuvchi.

3-*misol.* Quyidagi qatorni yaqinlashishga tekshiring:

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+...+\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}+...$$

Yechish. Berilgan qatorning absolyut qiymatlaridan tuzilgan $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ qator umumlashgan garmonik qator (r=2>1) bo‘lib, yaqinlashuvchi. Demak, berilgan qator absolyut yaqinlashuvchi.

Shu paragrafning birinchi punktida ishora navbatlashuvchi qator yaqinlashishining yetarli sharti isbotlandi. Ixtiyoriy hadli qatorlar uchun bunday sodda yaqinlashish alomati mavjud emas. Lekin ixtiyoriy hadli qatorni absolyut yaqinlashishga tekshirganda musbat qatorlar uchun isbotlangan taqqoslash, Dalamber, Koshi alomatlaridan foydalanish mumkin.

4-*misol.* Ushbu

$$\frac{\sin\alpha}{1^2}+\frac{\sin 2\alpha}{2^2}+...+\frac{\sin n\alpha}{n^2}+... \qquad (7)$$

qatorni yaqinlashishga tekshiring, bu yerda α-ixtiyoriy haqiqiy son.

Yechish. Berilgan qator bilan birga

$$\left|\frac{\sin\alpha}{1^2}\right|+\left|\frac{\sin 2\alpha}{2^2}\right|+...+\left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right|+... \qquad (8)$$

qatorni qaraymiz. Bu qatorni ushbu yaqinlashuvchi

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{n^2}+...$$

qator bilan taqqoslaymiz.

Ravshanki, $\left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right|\le\frac{1}{n^2}$ n=1,2,... Shu sababli taqqoslash alomatiga ko‘ra (8) qator yaqinlashuvchi. U holda 2-ta’rifga ko‘ra berilgan (7) qator absolyut yaqinlashuvchi.

5-*misol.* Ushbu

$$\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{1!}+\frac{2^2\sin\frac{3\pi}{4}}{2!}+\frac{3^2\sin\frac{5\pi}{4}}{3!}+...+\frac{n^2\sin\frac{(2n-1)\pi}{4}}{n!}+... \qquad (9)$$

qatorni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Berilgan qator hadlarining absolyut qiymatlaridan tuzilgan ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{n^2\sin\frac{(2n-1)\pi}{4}}{n!}\right| \qquad (10)$$

qatorni qaraymiz. Bu qatorni Dalamber alomati yordamida tekshiramiz. U holda

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(n+1)^2 n!\sin\frac{(2n+1)\pi}{4}}{(n+1)!n^2\sin\frac{(2n-1)\pi}{4}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\cdot\dfrac{n+1}{n^2}\right) = 0 < 1$. Dalamber alomatiga ko‘ra (10) qator yaqinlashuvchi. Demak, (9) qator absolyut yaqinlashadi.

6-*misol.* Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n \qquad (11)$$

qatorni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Qator hadlarining absolyut qiymatlaridan tuzilgan musbat hadli $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{3n+1}\right)^n$ qatorga Koshining radikal alomatini tatbiq etamiz:

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(\dfrac{n}{3n+1}\right)^n\right|} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{3n+1} = \dfrac{1}{3} < 1$. Koshi alomatiga ko‘ra $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{3n+1}\right)^n$ qator yaqinlashuvchi, demak, berilgan qator absolyut yaqinlashuvchi bo‘ladi.

8-§. Qator hadlari o‘rinlarini almashtirish bilan bog‘liq xossalar

Chekli yig‘indining muhim xossalaridan biri o‘rin almashtirish xossasidir, ya’ni yig‘indi qo‘shiluvchilar tartibiga bog‘liq emasligidir. Bu xossa qatorlar uchun o‘rinlimi? degan savolni qarash tabiiydir, ya’ni yaqinlashuvchi qator hadlarini istalgancha o‘rinlarini almashtirish natijasida qator yig‘indisi o‘zgarmaydimi (yaqinlashuvchi bo‘lib qoladimi)?

8.1. Absolyut yaqinlashuvchi qatorlarning o‘rin almashtirish xossasi

1-*teorema.* Agar absolyut yaqinlashuvchi qatorda hadlarini istalgan tartibda o‘zgartirsak yana absolyut yaqinlashuvchi qator hosil bo‘lib, uning yig‘indisi avvalgi qator yig‘indisiga teng bo‘ladi.

Isboti. Bu teoremani, avval musbat qator uchun isbotlaymiz.

Aytaylik

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (1)$$

musbat qator va uning yig'indisi S bo'lsin.

Bu qator hadlarini biror usulda o'rinlarini almashtirib, yangi

$$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n + \ldots$$

qatorni hosil qilamiz. Bu qator hadlarini eski belgilash orqali yozib chiqamiz:

$$b_1 = a_{k(1)},\ b_2 = a_{k(2)},\ b_3 = a_{k(3)}, \ldots,\ b_n = a_{k(n)}, \ldots .$$

U holda qator quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$a_{k(1)} + a_{k(2)} + a_{k(3)} + \ldots + a_{k(n)} + \ldots \qquad (2)$$

Ravshanki, (1) qatorning har bir hadi (2) qatorning ham hadi va aksincha bo'ladi. (2) qatorning σ_n xususiy yig'indisini tuzamiz:

$$\sigma_n = a_{k(1)} + a_{k(2)} + a_{k(3)} + \ldots + a_{k(n)}$$

va $k(1)$, $k(2), \ldots, k(n)$ sonlardan kattasini tanlaymiz va uni m bilan belgilaymiz.

U holda (1) qatorning S_m xususiy yig'indisi hadlari ichida σ_n yig'indi hadlari mavjud. Shu sababli $\sigma_n \le S_m$ (bu yerda n ixtiyoriy, m esa n ga bog'liq tanlangan) tengsizlik o'rinli.

(1) musbat qator yaqinlashuvchi va yig'indisi S ga teng bo'lganligi sababli istalgan m uchun $S_m < S$ tengsizlik o'rinli. U holda $\sigma_n < S$ albatta bajariladi. So'ngi tengsizlik (2) musbat qatorning xususiy yig'indilari yuqoridan chegaralanganligini anglatadi.

Demak, (2) qator yaqinlashuvchi va uning σ yig'indisi (1) qator yig'indisi S dan katta emas: $\sigma \le S$.

Shunday qilib, qator hadlarini o'rinlarini almashtirish natijasida qator yaqinlashishi saqlanadi.

Ikkinchi tomondan (1) qator (2) qator hadlari o'rinlarini almashtirish natijasida hosil qilinishi mumkin. Shu sababli ham (1) qator yig'indisi (2) qator yig'indisidan katta emas, ya'ni $S \le \sigma$.

$\sigma \le S$ va $S \le \sigma$ tengsizliklardan $\sigma = S$ kelib chiqadi.

Shunday qilib, musbat qator uchun teorema isbot bo'ldi.

Endi (1) ixtiyoriy absolyut yaqinlashuvchi qator va uning yig'indisi S' bo'lsin. 7-§ dagi 2-teoremaga ko'ra $S' = S^+ - S^-$, bu yerda S^+ (1) qatorning musbat hadlari yig'indisi, S^- esa (1) qatorning manfiy hadlari absolyut qiymatlari yig'indisi. Berilgan qator hadlari o'rinlarini almashtirishda uning musbat va manfiy hadlar o'rinlari almashadi.

Yuqorida isbotlaganimizga ko'ra S^+ va S^-, demak, ularning ayirmasi S' ham o'zgarmaydi. Teorema to'liq isbot bo'ldi.

8.2. Shartli yaqinlashuvchi qator hadlari o'rinlarini almashtirish.

Shartli yaqinlashuvchi qatorlar o'rin almashtirish xossasiga ega emas. Bunga quyidagi misolda iqror bo'lamiz. Ushbu

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+...+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+... \qquad (3)$$

qatorni qaraymiz. Bu qatorning shartli yaqinlashuvchi ekanligini ko'rsatgan edik (7-§, 2-misol). Uning yig'indisini S bilan belgilaymiz.

(3) qator hadlari o'rinlarini quyidagicha almashtiramiz: birinchi musbat haddan so'ng ikkita manfiy hadlarini avvalgi qatorda kelish tartibida yozamiz, keyin ikkinchi musbat haddan so'ng ikkita manfiy hadni (3) qatorda kelish tartibida yozamiz va hakozo.

Natijada

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}+... \qquad (4)$$

qatorga ega bo'lamiz.

(4) qator yaqinlashuvchi, uning yig'indisi (3) qator yig'indisining yarimiga teng ekanligini ko'rsatamiz: (3) va (4) qatorlar xususiy yig'indilarini mos ravishda S_n va $S_n^!$ bilan belgilaymiz. (4) qatorning S_{3n} xususiy yig'indisini yozib olamiz va uni shakl almashtiramiz:

$$S'_{3n}=\sum_{n=1}^{n}(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k})=\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k})=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k})$$

ya'ni $S'_{3n}=\frac{1}{2}S_{2n}$, bu yerda S_{2n} orqali (4) qatorning dastlabki $2n$ ta hadlari yig'indisi $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=S$ bo'lganligi sababli,

$$\lim_{n\to\infty}S'_{3n}=\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{2}S_{2n})=\frac{1}{2}S.$$

Shunday qilib, (4) qatorning nomerlari uchga karrali xususiy yig'indilari ketma-ketliklari $\frac{1}{2}S$ ga yaqinlashadi. Ammo (2) qatorning nomerlari uchga karrali bo'lmagan xususiy yig'indilari ketma-ketliklari ham shu songa yaqinlashadi. Haqiqatdan ham,

$$\lim_{n\to\infty}S_{3n+1}=\lim_{n\to\infty}(S_{3n}+\frac{1}{2n+1})=\frac{1}{2}S,$$

$$\lim_{n\to\infty}S'_{3n+2}=\lim_{n\to\infty}(S'_{3n}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{4n+2})=\frac{1}{2}S.$$

Bundan, $\lim\limits_{n\to\infty} S'_n = \frac{1}{2}S$ degan xulosaga kelamiz, bu esa (2) qator yaqinlashuvchi va uning yig'indisi dastlabki (1) qator yig'indisi yarmiga tengligini ko'rsatadi. Qarab o'tgan misol, shartli yaqinlashuvchi qator hadlari o'rinlarini almashtirish natijasida uning yig'indisi o'zgarishiga olib kelishi mumkinligini ko'rsatadi. Umuman olganda, shartli yaqinlashuvchi qatorlar uchun ushbu teorema o'rinli.

2-teorema (Riman). Istalgan shartli yaqinlashuvchi qatorda qator hadlari o'rinlarini shunday almashtirish mumkinki, hosil bo'lgan qator yig'indisi avvaldan berilgan songa teng bo'ladi. Bundan tashqari, qator hadlari o'rinlarini shunday almashtirish mumkinki, hosil bo'lgan qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

Shunday qilib, Riman teoremasi shartli yaqinlashuvchi qatorlar o'rin almashtirish xossasiga ega emasligini ta'kidlaydi. Biz bu teoremani isbotsiz qoldiramiz.

9-§. Absolyut yaqinlashuvchi qatorlarni ko'paytirish

2-§ da ikkita yaqinlashuvchi qatorni qo'shish, ayirish va qatorni hadma-had songa ko'paytirish amallarini ko'rib o'tdik. Bu paragrafda qatorni qatorga ko'paytirishni o'rganamiz.

Aytaylik

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... \qquad (1)$$

va

$$b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n + ... \qquad (2)$$

yaqinlashuvchi qatorlar berilgan bo'lsin.

(1) va (2) qatorlar hadlaridan tuzilgan barcha $a_i b_k$ $(i,k = 1,2,...)$ ko'paytmalarni tuzib chiqamiz. $a_i b_k$ $(i,\ k=1,2...\ )$ ko'paytmalarni biror tartibda nomerlab, c_1, c_2, ..., c_n, ... ko'rinishda yozib olamiz va quyidagi qatorni qaraymiz:

$$c_1+c_2+c_3+...+c_n+... \qquad (3)$$

Absolyut yaqinlashuvchi qatorlar uchun quyidagi teorema o'rinli.

Teorema. (qatorlarni hadma-had ko'paytirish haqida). Agar (1) va (2) qatorlar absolyut yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda birinchi qator hadlarini ikkinchi qator hadlariga ko'paytirishdan hosil bo'lgan $a_i b_k$ $(i,\ k=1,2...\ )$ ko'paytmalardan (va istalgan tartibda joylashtirilgan) tuzilgan (3) qator absolyut yaqinlashuvchi bo'lib, uning S yig'indisi (1) va (2) qator yig'indilari A va B larning ko'paytmasiga teng bo'ladi.

Isboti. Teorema shartiga ko'ra (1) va (2) absolyut yaqinlashuvchi, shu sababli

$$|a_1|+|a_2|+|a_3|+...+|a_n|+... \quad (4)$$

va

$$|b_1|+|b_2|+|b_3|+...+|b_n|+... \quad (5)$$

qatorlar yaqinlashuvchi bo'ladi. Bu holda

$$|c_1|+|c_2|+|c_3|+...+|c_n|+... \quad (6)$$

qator yaqinlashuvchi bo'lishini ko'rsatamiz.

C'_n shu qatorning n-xususiy yig'indisi bo'lsin. U $|a_ib_k|$ ko'rinishdagi hadlardan tuzilgan. C'_n yig'indiga kiruvchi hadlarning i va k indekslari ichida eng kattasi mavjud va uni m bilan belgilaymiz. Endi

$$A'_m=|a_1|+|a_2|+|a_3|+...+|a_m|,\ B'_m=|b_1|+|b_2|+|b_3|+...+|b_m|$$

chekli yig'indilarni ko'paytirib chiqsak, C'_n ko'paytmaning barcha $a_i\ b_k$ hadlari yangi hosil qilingan ko'paytma hadlari ichida bo'ladi. (4) va (5) qatorlarning musbat ekanligini e'tiborga olsak.

$$C'_n \le A'_m B'_m \quad (7)$$

hosil bo'ladi.

(7) tengsizlikning o'ng tomonida (4) va (5) musbat qatorlarning m-ta xususiy yig'indilarining ko'paytmasi turibdi. Bu qatorlar yaqinlashuvchi bo'lganligi sababli, A'_m va B'_m xususiy yig'indilar yuqoridan chegaralangan, demak, (7) tengsizlikka ko'ra C'_n xususiy yig'indi ham yuqoridan chegaralangan. Bundan (6) musbat qatorning, undan esa (3) qatorning absolyut yaqinlashuvchiligi kelib chiqadi.

Endi (3) qatorning S yig'indisi (1) va (2) qatorlar yig'indilari A va B ko'paytmasiga teng ekanligini ko'rsatamiz.

(3) qator absolyut yaqinlashuvchi bo'lganligi sababli uning yig'indisi S a_ib_k hadlar o'rinlari tartibiga (joylashuvchiga) bog'liq emas. Shu xossadan va 2-§ dagi 3- teoremadan foydalanamiz.

$$a_1b_1+(a_1b_2+a_2b_2+b_2b_1)+(a_1b_3+a_2b_3+a_3b_2+a_3b_1)+... \quad (8)$$

Bunda avval a_1b_1 ((1) va (2) qator hadlarining eng katta indeksi 1 ga teng bo'lgan) hadi, keyin esa bu qatorlar hadlari eng katta indeks 2 ga teng bo'lgan hadlari ko'paytmasi yozilgan (bunday hadlar soni 3 ta) keyin esa eng katta indeksi 3 ga teng bo'lgan (1) va (2) qator hadlari ko'paytmasi yozilgan va hokazo.

Agar (8) qator yig'indisini topa olsak, u holda (3) qator yig'indisini topgan bo'lamiz. S_n orqali (8) qatorning eng katta indeksi n bo'lgan yig'indilar guruhi bilan tugaydigan xususiy yig'indisini belgilaymiz.

(1) va (2) qatorlarning n-xususiy yig'indilarini A_n va B_n bilan belgilaymiz. U holda ravshanki $C_n = A_n \cdot B_n$ bo'ladi.

$\lim_{n\to\infty} A_n = A$, $\lim_{n\to\infty} B_n = B$ bo'lganligi sababli, ko'paytmaning limiti haqidagi teoremaga ko'ra, $\lim_{n\to\infty} C_n = A \cdot B$ bo'ladi.

Shunday qilib, (3) qator yig'indisi uchun $C = A \cdot B$ tenglik o'rinli.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ va $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qatorlar hadlarining mumkin bo'lgan barcha ko'paytmalaridan tuzilgan qator berilgan *qatorlarning ko'paytmasi* deyiladi.

Amalda qatorlar ko'paytmasini quyidagicha yozish qulay:

$$AB = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n = a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1) + (a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1) + \ldots$$
$$+ (a_1b_n + a_2b_{n-1} + \ldots + a_nb_1) + \ldots$$

Shunday qilib, absolyut yaqinlashuvchi qatorlar chekli yig'indilarning barcha asosiy xossalariga ega. Shartli yaqinlashuvchi qatorlar esa bu xossalarning ba'zi birlariga ega emas.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Ixtiyoriy hadli qator deganda qanday qatorni tushunasiz?
2. Qanday qator ishoralari navbatlashuvchi qator deyiladi?
3. Leybnits teoremasini ayting.
4. Leybnits teoremasi shartlari bajarilganda ishoralari navbatlashuvchi qatorning xususiy yig'indilari ketma-ketligi $\{S_n\}$ qanday xossalarga ega?
5. Leybnits teoremasi shartlari bajarilganda ishoralari navbatlashuvchi qatorning xususiy yig'indilari ketma-ketligining $\{S_{2n}\}$ va $\{S_{2n-1}\}$ qismiy ketma-ketliklari hadlari ichma-ich joylashgan kesmalar ketma-ketliklarining uchlari bo'lishini ko'rsating.
6. Ichma-ich joylashgan kesmalar ketma-ketligi prinsipidan foydalanib Leybnits teoremasini isbotlang.
7. Berilgan qator hadlarining absolyut qiymatlaridan tuzilgan qator yaqinlashuvchiligidan berilgan qatorning yaqinlashuvchi bo'lishini isbotlang.
8. Qanday qator absolyut yaqinlashuvchi deyiladi?
9. Qanday qator shartli yaqinlashuvchi deyiladi?
10. Absolyut va shartli yaqinlashuvchi qatorlarga misollar keltiring.
11. Absolyut yaqinlashuvchi qatorning qanday xossalarini bilasiz?

12. Shartli yaqinlashuvchi qatorning qanday xossalarini bilasiz?
13. Ixtiyoriy hadli qatorni yaqinlashishga tekshirganda nima ishlar bajariladi?
14. Ikki qatorning ko'paytmasi deganda qanday qatorni tushunasiz?
15. Ko'paytma qator absolyut yaqinlashuvchi bo'lishligi haqidagi teoremani ayting.
16. Yaqinlashuvchi qatorlar va chekli yig'indilar qanday umumiy xossalarga ega?

Mustaqil yechish uchun misol va masalalar

1. Quyidagi ishoralari navbatlashuvchi qatorlarni yaqinlashishga tekshiring.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n\sqrt{n}}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+3}{n+1}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)^3}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\sqrt[4]{n}}$;

e) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n+1)}{2\cdot5\cdot8\cdots(3n-1)}$; f) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n}$.

2. Quyidagi qatorlarni yaqinlashishga tekshiring:

a) $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}+...$; b) $1+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{2}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{2}{9}+....$

3. Ikkita absolyut yaqinlashuvchi qatorlarning yig'indisi absolyut yaqinlashuvchi qator ekanligini isbotlang. Ikkita absolyut yaqinlashuvchi qatorlarning ayirmasi haqida nima deyish mumkin?

4. Ushbu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ va $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-3}}$ qatorlarning ko'paytmasi yaqinlashuvchi ekanligini isbotlang va hosil bo'lgan qator yig'indisini toping.

5. $1+\frac{a}{1!}+\frac{a^2}{2!}+...+\frac{a^{n-1}}{(n-1)!}+...$ va $1+\frac{b}{1!}+\frac{b^2}{2!}+...+\frac{b^{n-1}}{(n-1)!}+...$ qatorlarni ko'paytiring.

Javoblar: 1. a) absolyut yaqinlashuvchi, b) uzoqlashuvchi, c) absolyut yaqinlashuvchi, d) shartli yaqinlashuvchi e) absolyut yaqinlashuvchi, f) absolyut yaqinlashuvchi. 2. a) uzoqlashuvchi, b) shartli yaqinlashuvchi. 4. $\frac{8}{3}$.

5. $1+\frac{a+b}{1!}+\frac{(a+b)^2}{2!}+...+\frac{(a+b)^{n-1}}{(n-1)!}+...$

I-bobni takrorlash uchun test savollari.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ qatorning xususiy yig'indisini toping.

A) $\ln(n+1)$ B) $\ln n-1$ C) $\ln(n+1)-\ln 2$ D) $-\ln(n+1)$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ qator uchun S_6 nimaga teng?

A) 5/7 B) 3/4 C) 2/3 D) 3/8

3.Agar $S_n=\frac{n}{n+1}$ bo'lsa, qatorning umumiy hadini toping.

A) $\frac{1}{n(n-1)}$ B) $\frac{1}{n(n+1)}$ C) $\frac{2}{(n+1)(n+2)}$ D) $\frac{1}{n(n+2)}$.

4. Agar $S_n=\frac{2^n-1}{2^{n-1}}$ bo'lsa, qatorning uchinchi hadini toping.

A) 1/4 B) 3/4 C) 1/8 D) 3/8

5.Quyidagi jumlalardan qaysi biri noto'g'ri?

A) Agar qatorning biror qoldig'i yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda uning o'zi ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

B) Agar qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda uning har qanday qoldig'i ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

C) Agar qatorning umumiy hadi nolga intilsa, u holda qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

D) Agar qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda uning xususiy yig'indilaridan iborat ketma-ketlik chegaralangan bo'ladi.

6. Quyidagi jumlalardan qaysi biri noto'g'ri?

A) Agar qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda uning n-hadi nolga intiladi.

B) Agar qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda uning har qanday qoldig'i ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

C) Agar qatorning xususiy yig'indilaridan iborat ketma-ketlik chegaralangan bo'lsa, u holda qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

D) Agar qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda uning xususiy yig'indilaridan iborat ketma-ketlik chegaralangan bo'ladi.

7. Quyidagi jumlalardan qaysi biri noto'g'ri?

A) Chekli sondagi yaqinlashuvchi qatorlarning yig'indisi yaqinlashuvchi qator bo'ladi.

B) Yaqinlashuvchi va uzoqlashuvchi qatorlarning yig'indisi uzoqlashuvchi qator bo'ladi.

C) Yaqinlashuvchi qatorning songa ko'paytmasi yaqinlashuvchi qator bo'ladi.

D) Ikkita uzoqlashuvchi qatorning ayirmasi uzoqlashuvchi qator bo'ladi.

8. Quyidagi jumlalardan qaysi biri to'g'ri?

A) uzoqlashuvchi qatorni songa ko'paytirsa, yana uzoqlashuvchi qator bo'ladi.

B) Ikkita uzoqlashuvchi qatorning ayirmasi yaqinlashuvchi qator bo'ladi.

C) Ikkita uzoqlashuvchi qatorning ayirmasi uzoqlashuvchi qator bo'ladi.

D) Ikkita yaqinlashuvchi qatorlarning ayirmasi yaqinlashuvchi qator bo'ladi.

9. Quyidagi jumlalardan qaysi biri noto'g'ri?

A) Yaqinlashuvchi qatorga chekli sondagi yangi hadlarni qo'shish natijasida hosil bo'lgan qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

B) Yaqinlashuvchi qatorning chekli sondagi hadlarini o'rnini almashtirish natijasida hosil bo'lgan qatorning yig'indisi avvalgi qator yig'indisiga teng bo'ladi.

C) Yaqinlashuvchi qatordan uning chekli sondagi hadlarni tashlash natijasida qator yig'indisi o'zgarmaydi.

D) Uzoqlashuvchi qatorga chekli sondagi yangi hadlarni qo'shish natijasida hosil bo'lgan qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

10. Quyidagi jumlalardan qaysi biri noto'g'ri?

A) Musbat hadli qatorning xususiy yig'indilari ketma-ketligi yaqinlashuvchi bo'ladi.
B) Yaqinlashuvchi musbat hadli qator hadlari cheksiz kamayuvchi ketma-ketlik bo'ladi.
C) Yaqinlashuvchi musbat hadli qator xususiy yig'indilari ketma-ketligi chegaralangan bo'ladi.
D) Musbat hadli qator xususiy yig'indilari kamaymaydigan ketma-ketlik tashkil qiladi.

11. Noto'g'ri jumlani ko'rsating.

A) Agar biror n nomerdan boshlab $0 \le a_n \le b_n$ bo'lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorning uzoqlashishidan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qatorning uzoqlashishi kelib chiqadi.

B) Agar biror n nomerdan boshlab $0 \le a_n \le b_n$ bo'lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qatorning yaqinlashishidan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorning yaqinlashishi kelib chiqadi.

C) Agar cheksiz ko'p n lar uchun $0 \le a_n \le b_n$ bo'lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qatorning yaqinlashishidan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorning yaqinlashishi kelib chiqadi.

D) Agar barcha n lar uchun $0 \le a_n \le b_n$ bo'lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorning uzoqlashishidan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qatorning uzoqlashishi kelib chiqadi.

12. To'g'ri jumlani ko'rsating.

A) Agar biror n nomerdan boshlab $a_n \le b_n$ bo'lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorning uzoqlashishidan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qatorning uzoqlashishi kelib chiqadi.

B) Agar biror n nomerdan boshlab $a_n \le b_n$ bo'lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qatorning yaqinlashishidan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorning yaqinlashishi kelib chiqadi.

C) Agar cheksiz ko'p n lar uchun $a_n \le b_n$ bo'lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qatorning yaqinlashishidan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorning yaqinlashishi kelib chiqadi.

D) Agar barcha n lar uchun $0 \le a_n \le b_n$ bo'lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorning uzoqlashishidan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qatorning uzoqlashishi kelib chiqadi.

13.To'g'ri jumlani ko'rsating.

A) Agar $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ musbat qatorning uzoqlashishidan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ musbat qatorning uzoqlashishi kelib chiqadi.

B) Agar $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ bo'lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ musbat qatorning yaqinlashishidan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ musbat qatorning yaqinlashishi kelib chiqadi.

C) Agar $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ bo'lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ musbat qatorning yaqinlashishidan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ musbat qatorning yaqinlashishi kelib chiqadi.

D) Agar $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ musbat qatorning uzoqlashishidan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ musbat qatorning uzoqlashishi kelib chiqadi.

14.Quyidagi qatorlardan qaysi biri uzoqlashuvchi?

A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$; B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + 5^n}$; C) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$; D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$;

15. Quyidagi qatorlardan qaysi biri yaqinlashuvchi?

A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{1+7^n}$ B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ C) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}$ D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+n}$

16.Quyidagi qatorlardan qaysi biri yaqinlashuvchi?

A) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^n$ B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}$ C) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ D) A va C

17.Quyidagi qatorlardan qaysi biri uzoqlashuvchi?

A) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2^n+1}$ B) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n-1}{3n+1}\right)^n$ C) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^n}$ D) hammasi

18.Musbat qator uchun quyidagi jumlalardan qaysi biri noto'g'ri?

A) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$ bo'lsa, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

B) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}<1$ bo'lsa, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

C) $\lim\limits_{n\to\infty}n(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1)>1$ bo'lsa, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

D) $\lim\limits_{n\to\infty}n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)>1$ bo'lsa, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

19.To'g'ri jumlani ko'rsating.

A) Ishoralari navbatlashuvchi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ $(a_n>0)$ qator hadlarining absolyut qiymatlari kamayuvchi bo'lsa, uning xususiy yig'indilar ketma-ketligining $\{S_{2n}\}$ qism ketma-ketligi yaqinlashuvchi bo'ladi.

B) Ishoralari navbatlashuvchi qator hadlarining absolyut qiymatlari kamayuvchi bo'lsa, uning xususiy yig'indilar ketma-ketligi chegaralangan bo'ladi.

C) Ishoralari navbatlashuvchi qator hadlarining absolyut qiymatlari kamayuvchi bo'lsa, uning xususiy yig'indilar ketma-ketligining $\{S_{2n-1}\}$ qism ketma-ketligi o'cuvchi bo'ladi.

D) Ishoralari navbatlashuvchi qator hadlarining absolyut qiymatlari kamayuvchi bo'lsa, uning xususiy yig'indilar ketma-ketligining $\{S_{2n}\}$ qism ketma-ketligi kamayuvchi bo'ladi.

20. Noto'g'ri jumlani ko'rsating.

A) Ishoralari navbatlashuvchi qator hadlarining absolyut qiymatlari kamayuvchi bo'lsa, uning xususiy yig'indilar ketma-ketligining $\{S_{2n+1}\}$ qism ketma-ketligi o'cuvchi bo'ladi.

B) Ishoralari navbatlashuvchi qator hadlarining absolyut qiymatlari kamayuvchi bo'lsa, uning xususiy yig'indilar ketma-ketligining $\{S_{2n+1}\}$ qism ketma-ketligi kamayuvchi bo'ladi.

C) Ishoralari navbatlashuvchi qator hadlarining absolyut qiymatlari kamayuvchi bo‘lsa, u holda $S_{14}<S_3$ bo‘ladi.

D) Ishoralari navbatlashuvchi qator hadlarining absolyut qiymatlari kamayuvchi bo‘lsa, uning xususiy yig‘indilar ketma-ketligining qismi $\{S_{2n+1}\}$ chegaralangan bo‘ladi.

21. Noto‘g‘ri jumlani ko‘rsating.

A) Ishoralari navbatlashuvchi qator umumiy hadi nolga intilishi qatorning yaqinlashishi uchun yetarli.

B) Ishoralari navbatlashuvchi qator umumiy hadi nolga intilishi qatorning yaqinlashishi uchun zaruriy.

C) Agar ishoralari navbatlashuvchi qator yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda uning chekli hadlarini almashtirish natijasida hosil bo‘lgan qator yaqinlashuvchi bo‘ladi.

D) Ishoralari navbatlashuvchi qator hadlarining absolyut qiymatlaridan tuzilgan ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda bu qator yaqinlashadi.

22. Noto‘g‘ri jumlani ko‘rsating

A) Agar qator absolyut yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda uning yig‘indisi qator hadlarining o‘rnini almashtirishga bog‘liq bo‘lmaydi.

B) Agar qator shartli yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda uning hadlarini almashtirish natijasida uzoqlashuvchi qator hosil qilish mumkin.

C) Absolyut yaqinlashuvchi qator yaqinlashuvchi bo‘ladi.

D) Yaqinlashuvchi qator absolyut yaqinlashuvchi bo‘ladi.

23. Uzoqlashuvchi qatorni ko‘rsating.

A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^2}$ B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}$ C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}$ D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^n}$

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{5^n}$ qator yig‘indisini toping.

A) 5/3 B) -5/3 C) 2/7 D) -2/7

25. Shartli yaqinlashuvchi qatorni ko‘rsating.

B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^2}$ B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}$ C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^n}$

26. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{3^n}$ va $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{5^n}$ qatorlar koʻpaytmasining yigʻindisini toping.

A) 3/2 B) -3/2 C) 2/3 D) 3/8

II-BOB. FUNKSIONAL KETMA-KETLIKLAR VA QATORLAR

1-§. Funksional ketma-ketlik va uning limiti

Natural sonlar to'plami **N** va biror X to'plamda ($X \subset \mathbf{R}$) aniqlangan F funksiyalar to'plami berilgan bo'lsin. Har bir natural $n \in \mathbf{N}$ songa F to'plamdagi bitta funksiyani mos qo'yish $n \mapsto u_n(x)$ natijasida hosil bo'lgan

$$u_1(x),\ u_2(x),\ \ldots,\ u_n(x), \ldots \qquad (1)$$

ketma-ketlik *funksional ketma-ketlik* deyiladi va $\{u_n(x)\}$ kabi belgilanadi. $u_n(x)$ funksiya (1) funksional ketma-ketlikning umumiy hadi deyiladi.

Faraz qilaylik, X to'plamda ($X \subset \mathbf{R}$) biror

$$u_1(x),\ u_2(x),\ \ldots,\ u_n(x),\ \ldots$$

funksional ketma-ketlik berilgan bo'lsin. X to'plamda x_0 nuqtani olib, berilgan funksional ketma-ketlikning har bir hadining shu nuqtadagi qiymatlarini qaraylik. Ular

$$u_1(x_0),\ u_2(x_0),\ \ldots,\ u_n(x_0),\ \ldots \qquad (2)$$

sonlar ketma-ketligini tashkil etadi.

Ta'rif. Agar (2) sonlar ketma-ketligi yaqinlashuvchi (uzoqlashuvchi) bo'lsa, u holda $\{u_n(x)\}$ funksional ketma-ketlik x_0 *nuqtada yaqinlashuvchi* (uzoqlashuvchi) deyiladi, x_0 nuqta esa *yaqinlashish (uzoqlashish) nuqtasi* deyiladi.

$\{u_n(x)\}$ funksional ketma-ketlikning barcha yaqinlashish (uzoqlashish) nuqtalaridan iborat to'plam, uning *yaqinlashish (uzoqlashish) sohasi* deyiladi.

Aytaylik, D ($D \subset \mathbf{R}$) to'plam $\{u_n(x)\}$ funksional ketma-ketlikning yaqinlashish sohasi bo'lsin. U holda D to'plamdan olingan har bir x nuqtada funksional ketma-ketlik sonli ketma-ketlikga aylanib, u yaqinlashuvchi, ya'ni chekli limit $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x)$ ga ega bo'ladi. D to'plamdan olingan har bir x ga unga mos keladigan sonli ketma-ketlikning chekli limitini mos qo'ysak, unda funksiyaga ega bo'lamiz. Uni $\{u_n(x)\}$ funksional ketma-ketlikning *limit funksiyasi* deyiladi: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x) = f(x)$.

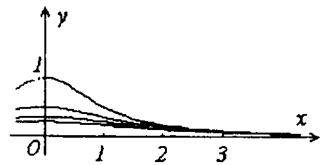
Bu holda $\{u_n(x)\}$ funksional ketma-ketlik D sohada (D sohaning har bir nuqtasida) $f(x)$ funksiyaga yaqinlashadi va bu funksiya (1) *funksional ketma-ketlikning limit funksiyasi* deyiladi.

$\{u_n(x)\}$ funksional ketma-ketlik D sohaning har bir nuqtasida $f(x)$ funksiyaga yaqinlashadi, degan jumlani, boshqacha, quyidagicha aytish mumkin: ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son va ixtiyoriy $x\in D$ uchun shunday $n_0=n_0(\varepsilon,x)$ topilib, barcha $n>n_0$ larda $|u_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ tengsizlik bajariladi.

1-*misol.* $\frac{1}{1+x^2}$, $\frac{1}{2+x^2}$, $\frac{1}{3+x^2}$, ..., $\frac{1}{n+x^2}$, ... funksional ketma-ketlikning aniqlanish sohasi, yaqinlashish sohasi va limit funksiyasini toping.

Yechish. Berilgan funksional ketma-ketlikning umumiy hadi $u_n(x)=\frac{1}{n+x^2}$ bo'lib, aniqlanish sohasi barcha haqiqiy sonlar to'plamidan iborat. Bu funksional ketma-ketlikning yaqinlashish sohasi ham barcha haqiqiy sonlar to'plamidan iborat ekanligini ko'rish qiyin emas. Funksional ketma-ketlikning limit funksiyasi $f(x)=0$ bo'ladi, chunki $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+x^2}=0$.

1-rasmda bu ketma-ketlikning bir nechta hadlari va limit funksiyasining grafiklari keltirilgan.



1-rasm

2-*misol.* $\sin x$, $2\sin\frac{x}{2}$, $3\sin\frac{x}{3}$, ..., $n\sin\frac{x}{n}$, ... funksional ketma-ketlikning aniqlanish sohasi, yaqinlashish sohasi va limit funksiyasini toping.

Yechish. Funksional ketma-ketlikning umumiy hadi $u_n(x)=n\sin\frac{x}{n}$ bo'lib, aniqlanish sohasi barcha haqiqiy sonlar to'plamidan iborat. Bu ketma-ketlik haqiqiy sonlar to'plamida $f(x)=x$ funksiyaga yaqinlashadi. Haqiqatdan ham, haqiqiy sonlar to'plamidan olingan ixtiyoriy x da ushbu munosabat o'rinli:

$$\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{x}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\cdot x=x\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}=x\cdot 1=x.$$

3-*misol.* Umumiy hadi $u_n(x)=nx^2$ bo'lgan funksional ketma-ketlikning aniqlanish sohasi, yaqinlashish sohasi va limit funksiyasini toping.

Yechish. Bu funksional ketma-ketlikning aniqlanish sohasi $(-\infty;+\infty)$ dan iborat. Agar $x\neq 0$ bo'lsa, $\lim\limits_{n\to\infty} nx^2=\infty$ bo'ladi. Agar $x=0$ bo'lsa, ravshanki limit 0 ga teng bo'ladi. Demak, berilgan funksional ketma-ketlikning yaqinlashish sohasi $\{0\}$ to'plamdan, bu to'plamda limit funksiya $f(x)=0$ dan iborat.

4-*misol.* Ushbu $\left\{\dfrac{n!}{x^2+n}\right\}$ funksional ketma-ketlikni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Bu ketma-ketlikning aniqlanish sohasi barcha haqiqiy sonlar to'plamidan iborat. Lekin x ning istalgan qiymatida ketma-ketlik uzoqlashuvchi bo'ladi, chunki $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n!}{x^2+n}=\infty$. Demak, bu ketma-ketlikning yaqinlashish sohasi bo'sh to'plamdan iborat, u hech qanday funksiyaga yaqinlashmaydi.

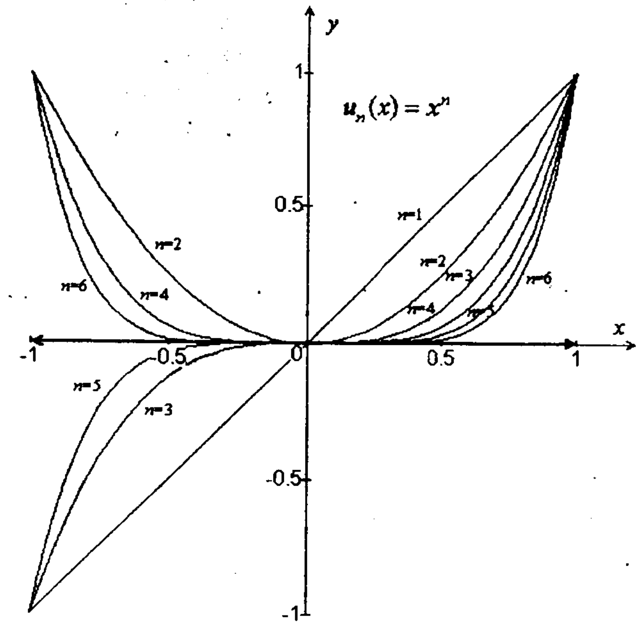
5-*misol.* Ushbu $\{x^n\}$ ketma-ketlikni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Ketma-ketlik hadlari $(-\infty;+\infty)$ da aniqlangan. Agar, masalan, $x=\frac{1}{3}$ bo'lsa, u holda $\left\{\dfrac{1}{3^n}\right\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi va limiti nolga teng bo'ladi. demak, $x=\frac{1}{3}$ ketma-ketlikning yaqinlashish sohasiga tegishli. Shunga o'xshash, agar $x=3$ bo'lsa, u holda $\{3^n\}$ ketma-ketlik uzoqlashuvchi bo'ladi. Demak, $x=3$ ketma-ketlikning yaqinlashish sohasiga tegishli emas.

Umuman olganda, agar $|x|<1$ bo'lsa, $\{x^n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi va limiti 0 ga teng bo'ladi. Shuningdek, $\{x^n\}$ ketma-ketlik $x=1$ nuqtada ham yaqinlashuvchi, lekin bu nuqtada limit 1 ga teng bo'ladi. Agar $x=-1$ bo'lsa, u holda $\{(-1)^n\}$ ketma-ketlik uzoqlashuvchi bo'ladi. Shuningdek, agar $|x|>1$ bo'lsa, $\{x^n\}$ ketma-ketlik uzoqlashuvchi bo'ladi. Shunday qilib, ketma-ketlikning yaqinlashish sohasi $(-1;1]$ oraliqdan iborat bo'lib, bunda u

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{agar } -1<x<1 \text{ bo'lsa},\\ 1, & \text{agar } x=1 \text{ bo'lsa}\end{cases}$$

funksiyaga yaqinlashadi.



2-rasm

2-rasmda $\{x^n\}$ ketma-ketlikning $[0,1]$ kesmadagi dastlabki bir nechta hadlarining va limit funksiyasining grafiklari keltirilgan.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Funksional ketma-ketlik deb nimaga aytiladi? Misol keltiring.
2. Funksional ketma-ketlikning aniqlanish sohasi deganda nimani tushunasiz?
3. Qanday nuqta funksional ketma-ketlikning yaqinlashish nuqtasi deyiladi?
4. Funksional ketma-ketlikning yaqinlashish sohasi deb qanday to'plamga aytiladi?
5. Funksional ketma-ketlikning yaqinlashish sohasi qanday topiladi?
6. Limit funksiya qanday anıqlanadi?
7. Limit funksiyaga «ε» tilidagi ta'rifini bering.

Mustaqil yechish uchun misol va masalalar

1. Umumiy hadi $u_n(x)=\frac{1}{1+x^{2n}}$ bo'lgan funksional ketma-ketlikning aniqlanish sohasini, yaqinlashish sohasini, limit funksiyasini toping.

2. Umumiy hadi $u_n(x)=\frac{4^n}{x^n}$ bo'lgan funksional ketma-ketlikning aniqlanish sohasini, yaqinlashish sohasini, limit funksiyasini toping.

3. Umumiy hadi $u_n(x)=\sqrt[n]{1+x^n}$ bo'lgan funksional ketma-ketlikning D=[0;2] to'plamdagi limit funksiyasini toping.

4. Umumiy hadi $u_n(x)=narcctgnx^2$ bo'lgan funksional ketma-ketlikning D=(0;+∞) to'plamdagi limit funksiyasini toping.

Javoblar: 1. (-∞;+∞); (-∞;+∞); $f(x)=\begin{cases}0, & \text{agar } |x|>1,\\ 0{,}5, & \text{agar } |x|=1,\\ 1, & \text{agar } |x|<1.\end{cases}$

2. (-∞;0)∪(0;+∞); (-∞;-4)∪[4;+∞); $f(x)=\begin{cases}0, \text{ agar } |x|>1,\\ 1, \text{ agar } x=1.\end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases}1, \text{ agar } 0\le x<1,\\ x, \text{ agar } 1\le x\le 2.\end{cases}$ 4. $f(x)=\frac{1}{x^2}$.

2-§. Tekis yaqinlashuvchi funksional ketma-ketlik

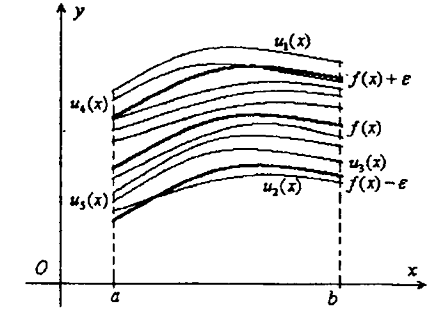
Aytaylik, $\{u_n(x)\}$ funksional ketma-ketlik D to'plamda biror $f(x)$ funksiyaga yaqinlashsin. Ya'ni, D to'plamdan olingan ixtiyoriy x_0 son uchun $\{u_n(x_0)\}$ sonli ketma-ketlik $f(x_0)$ ga yaqinlashsin. Yaqinlashuvchi sonli ketma-ketlikning ta'rifiga ko'ra ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun shunday n_0 natural son topilib, barcha $n>n_0$ larda $|u_n(x_0)-f(x_0)|<\varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Bu yerda n_0 son $\{u_n(x_0)\}$ ketma-ketlik uchun faqat ε ga bog'liq. Agarda x_0 o'rniga D ga tegishli bo'lgan boshqa x_0' nuqtani olsak va $\{u_n(x_0')\}$ ketma-ketlik uchun n_0 ni avvalgidek qoldirsak, $|u_n(x_0')-f(x_0')|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilishi ham, bajarilmasligi ham mumkin. (Albatta, bu tengsizlik bajariladigan boshqa n_0' topiladi).

Demak, biror D to'plamda yaqinlashuvchi funksional ketma-ketliklarni ikki sinfga ajratib o'rganish mumkin ekan.

1-*ta'rif*. Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son olinganda ham, faqat ε ga bog'liq n_0 natural son topilib, ixtiyoriy $x\in D$ va barcha $n>n_0$ larda $|u_n(x)-f(x)|<\varepsilon$

tengsizlik bajarilsa, $\{u_n(x)\}$ funksional ketma-ketlik D to'plamda $f(x)$ funksiyaga *tekis yaqinlashadi* deyiladi.

Agar yaqinlashuvchi $\{u_n(x)\}$ funksional ketma-ketlik D to'plamda tekis yaqinlashmasa, u holda bu ketma-ketlik D to'plamda *notekis yaqinlashadi* deyiladi. Buni quyidagicha ta'riflash mumkin: shunday ε musbat son topilib, barcha m natural sonlar uchun shunday $n>m$ natural son va shunday $x_n \in D$ topilib, $|u_n(x_n)-f(x)| \geq \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.



3-rasm

Yuqoridagi tushunchalarga geometrik talqin beramiz.

Aytaylik, $\{u_n(x)\}$ funksional ketma-ketlik biror D to'plamda $f(x)$ funksiyaga tekis yaqinlashsin. U holda ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun shunday n_0 nomer ko'rsatish mumkinki, barcha $n>n_0$ va barcha $x \in D$ uchun $|u_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ tengsizlik, ya'ni $f(x)-\varepsilon<u_n(x)<f(x)+\varepsilon$ tengsizliklar bajariladi. Geometrik nuqtai nazardan bu tengsizliklar $y=u_n(x)$ funksiyaning grafigi $y=f(x)-\varepsilon$, $y=f(x)+\varepsilon$ funksiya grafiklari bilan chegaralangan yo'lakda yotishini anglatadi. Demak, $\{u_n(x)\}$ funksional ketma-ketlik D to'plamda $f(x)$ funksiyaga tekis yaqinlashsa, u holda yo'lakning eni qanchalik kichik bo'lmasin, biror n_0 nomerdan boshlab $\{u_n(x)\}$ ketma-ketlik hadlari grafiklari to'lig'icha shu yo'lakda yotadi (3-rasm).

Agarda $\{u_n(x)\}$ funksional ketma-ketlik D to'plamda $f(x)$ funksiyaga notekis yaqinlashsa, u holda shunday yo'lak mavjudki, har qanday n_0 nomer uchun $n>n_0$ bo'lgan $u_n(x)$ funksiya topilib, uning grafigi qisman bo'lsa ham yo'lakning tashqarisida yotadi.

Endi quyidagi belgilashni kiritamiz: $d_n = \sup\limits_{x \in D} |u_n(x)-f(x)|$.

1-teorema. $\{u_n(x)\}$ funksional ketma-ketlik D to'plamda $f(x)$ funksiyaga tekis yaqinlashishi uchun $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = 0$ bo'lishi zarur va yetarli.

Isboti. Zaruriyligi. D to'plamda $\{u_n(x)\}$ funksional ketma-ketlik $f(x)$ funksiyaga tekis yaqinlashsin. Ta'rifga ko'ra ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son olinganda ham, shunday n_0 nomer topiladiki, $n>n_0$ bo'lganda D to'plamning barcha x

nuqtalari uchun $|u_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ bo'ladi. Bundan esa ixtiyoriy $n>n_0$ uchun $d_n=\sup\limits_{x\in D}|u_n(x)-f(x)|\le\varepsilon$ bo'lishi kelib chiqadi. Demak, $\lim\limits_{n\to\infty} d_n=0$.

Yetarliligi. D to'plamda $\{u_n(x)\}$ funksional ketma-ketlik $f(x)$ limit funksiyaga ega bo'lib, $\lim\limits_{n\to\infty} d_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in D}|u_n(x)-f(x)|=0$ bo'lsin. Demak, ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son olinganda ham, shunday n_0 nomer topilib, barcha $n>n_0$ da $\sup\limits_{x\in D}|u_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ bo'ladi. Agar $|u_n(x)-f(x)|\le\sup\limits_{x\in D}|u_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ munosabatni e'tiborga olsak, u holda ixtiyoriy $x\in D$ uchun $|u_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa $\{u_n(x)\}$ funksional ketma-ketlik D to'plamda $f(x)$ limit funksiyaga tekis yaqinlashishini bildiradi.

Bu teorema 1-ta'rifni unga teng kuchli va amaliyotda ishlatish oson bo'lgan quyidagi ta'rif bilan almashtirishga imkon beradi:

2-ta'rif. Agar umumiy hadi $d_n=\sup\limits_{x\in D}|u_n(x)-f(x)|$ bo'lgan ketma-ketlikning limiti $\lim\limits_{n\to\infty} d_n=0$ bo'lsa, u holda $\{u_n(x)\}$ funksional ketma-ketlik D to'plamda $f(x)$ funksiyaga tekis yaqinlashadi deyiladi.

Ravshanki, $\{u_n(x)\}$ funksional ketma-ketlikning D to'plamda $f(x)$ funksiyaga tekis yaqinlashishidan bu ketma-ketlikning $f(x)$ funksiyaga D to'plamning har bir nuqtasida yaqinlashishi kelib chiqadi.

1-misol. 1) $\frac{1}{1+x^2}, \frac{1}{2+x^2}, \frac{1}{3+x^2}, \dots, \frac{1}{n+x^2}, \dots$ funksional ketma-ketlik $D=\mathbf{R}$ da $f(x)=0$ funksiyaga tekis yaqinlashadi. Isbotlang.

Yechish. Ikkinchi ta'rifdan foydalanamiz.

$d_n=\sup\limits_{x\in R}\left|\frac{1}{n+x^2}-f(x)\right|=\sup\limits_{x\in R}\left|\frac{1}{n+x^2}\right|=\frac{1}{n}$ va $\lim\limits_{n\to\infty} d_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. Demak, $\left\{\frac{1}{n+x^2}\right\}$ funksional ketma-ketlik $f(x)=0$ funksiyaga tekis yaqinlashadi.

2-misol. Umumiy hadi $u_n(x)=x^n$ bo'lgan funksional ketma-ketlikni $D=[0;1]$ to'plamda tekis yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Bu funksional ketma-ketlikning limit funksiyasi (1-§, 5-misol)

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{agar } x\in[0;1),\\ 1, & \text{agar } x=1\end{cases} \quad \text{va } d_n=\sup_{x\in M}|x^n-f(x)|=\sup_{x\in[0;1)}|x^n-0|=1,$$

bundan berilgan funksional ketma-ketlik $D=[0;1]$ to'plamda limit funksiyaga tekis yaqinlashmasligi kelib chiqadi.

Shu funksional ketma-ketlikning $D=[0;0,5]$ to'plamda $f(x)=0$ funksiyaga tekis yaqinlashishini tekshirib ko'rishni o'quvchilarga havola qilamiz.

2-teorema. (Koshi) $\{u_n(x)\}$ funksional ketma-ketlik D to'plamda limit funksiyaga ega bo'lishi va unga tekis yaqinlashishi uchun ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun shunday $n_0\in N$ son mavjud bo'lib, barcha $n > n_0$, $m > n_0$ va ixtiyoriy $x\in D$ nuqtalar uchun

$$|u_n(x)-u_m(x)| < \varepsilon \qquad (1)$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli.

Isboti. Zaruriyligi. D to'plamda $\{u_n(x)\}$ funksional ketma-ketlik $f(x)$ limit funksiyaga ega bo'lib, unga tekis yaqinlashsin. Tekis yaqinlashishning ta'rifiga ko'ra ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son olinganda ham $\varepsilon/2$ uchun shunday n_0 natural son topilib, $n > n_0$ bo'lganda barcha $x\in D$ nuqtalar uchun

$$|u_n(x)-f(x)| < \varepsilon/2,$$

shuningdek, $m > n_0$ bo'lganda barcha $x\in D$ nuqtalar uchun

$$|u_m(x)-f(x)| < \varepsilon/2$$

bo'ladi. U holda barcha $n > n_0$, $m > n_0$ va ixtiyoriy $x\in D$ nuqtalar uchun

$$|u_n(x)-u_m(x)| \leq |u_n(x)-f(x)|+ |u_m(x)-f(x)| < \varepsilon$$

tengsizlik o'rinli. Bu esa barcha $n > n_0$, $m > n_0$ va ixtiyoriy $x\in D$ nuqtalar uchun (1) tengsizlikning bajarilishini bildiradi.

Etarliligi. $\{u_n(x)\}$ funksional ketma-ketlik uchun D to'plamda (1) tengsizlik o'rinli bo'lsin. D to'plamdan olingan har bir x_0 da $\{u_n(x)\}$ funksional ketma-ketlik $\{u_n(x_0)\}$ sonli ketma-ketlikga aylanadi va bu nuqtada (1) tengsizlikning bajarilishi uning fundamental ketma-ketlik ekanini ko'rsatadi, bundan uning yaqinlashuvchi ekanligi kelib chiqadi. Demak, D to'plamning har bir nuqtasida $\{u_n(x_0)\}$ sonli ketma-ketlik yaqinlashuvchi. $\{u_n(x)\}$ funksional ketma-ketlikning limit funksiyasini $f(x)$ deylik: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x)=f(x)$.

Endi (1) tengsizlikda $m\to\infty$ da (bunda n va x larni tayinlab) limitga o'tib quyidagini topamiz:

$$|u_n(x)-f(x)| \leq \varepsilon$$

Bundan esa $\{u_n(x)\}$ funksional ketma-ketlik D to'plamda $f(x)$ funksiyaga tekis yaqinlashishi kelib chiqadi.

3-§. Tekis yaqinlashuvchi funksional ketma-ketliklarning xossalari

1-teorema. Agar $\{u_n(x)\}$ funksional ketma-ketlikning har bir $u_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ hadi D to'plamda uzluksiz bo'lib, bu funksional ketma-ketlik

D da tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $f(x)$ limit funksiya ham D to'plamda uzluksiz bo'ladi.

Isboti. Aytaylik x_0 nuqta D to'plamdan olingan ixtiyoriy nuqta bo'lsin. Funksional ketma-ketlikning tekis yaqinlashishidan ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son olinganda ham, shunday $n_0 \in N$ topiladiki, $n>n_0$ va D to'plamning barcha x nuqtalari uchun

$$|u_n(x)-f(x)| < \varepsilon/3, \qquad (1)$$

jumladan

$$|u_n(x_0)-f(x_0)| < \varepsilon/3 \qquad (2)$$

tengsizlik bajariladi.

Funksional ketma-ketlik har bir hadining D to'plamda uzluksizligidan $u_n(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada uzluksizligi kelib chiqadi. Demak, yuqoridagi $\varepsilon>0$ olinganda ham, $\varepsilon/3$ ga ko'ra shunday $\delta>0$ topiladiki, $|x-x_0|<\delta$ bo'lganda

$$|u_n(x)-u_n(x_0)| < \varepsilon/3 \qquad (3)$$

bo'ladi.

Endi (1), (2) va (3) tengsizliklardan foydalanib, quyidagini topamiz:

$$|f(x)-f(x_0)| \le |f(x)-u_n(x)|+ |u_n(x)-u_n(x_0)|+ |u_n(x_0)-f(x_0)|< \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

Demak, ixtiyoriy $\varepsilon>0$ olinganda ham, shunday $\delta>0$ topiladiki $|x-x_0|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi x lar uchun $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli. Bu esa $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada uzluksiz ekanligini bildiradi. x_0 nuqta D to'plamning ixtiyoriy nuqtasi bo'lganligi sababli, $f(x)$ funksiya D to'plamda uzluksiz bo'ladi.

Bu teorema shartlari bajarilganda ushbu

$$f(x)= \lim_{t\to x}(\lim_{n\to\infty} u_n(t))= \lim_{n\to\infty}(\lim_{t\to x} u_n(t))$$

munosabat o'rinli bo'ladi ekan.

Aytaylik $[a,b]$ kesmada

$$u_1(x),\ u_2(x),\ ...,\ u_n(x), ...$$

yaqinlashuvchi uzluksiz funksiyalar ketma-ketligi berilgan bo'lib, $f(x)$ bu ketma-ketlikning limiti bo'lsin. Qanday shartlar bajarilganda integral ostida limitga o'tish mumkinligini, ya'ni

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx \qquad (4)$$

shart bajarilishini aniqlaylik.

Umuman aytganda, agar $f(x)$ funksiya (limit funksiya) integrallanmaydigan bo'lsa, (4) tenglik ma'noga ega emasligi ravshan.

Ammo, $f(x)$ funksiya integrallanuvchi, xatto uzluksiz bo'lgan holda ham (4) tenglik bajarilmasligi mumkin. Masalan, umumiy hadi $u_n(x) = n^2x^n(1-x)$ bo'lgan funksional ketma-ketlikning $[0,1]$ kesmada qaraylik. Bu ketma-ketlik $x=0$ va $x=1$ da $f(x)=0$ bo'ladi. $0<x<1$ bo'lganda

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}(n^2x^n(1-x)) = (1-x)\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\left(\frac{1}{x}\right)^n} =$$

$$= (1-x)\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\left(\frac{1}{x}\right)^n\cdot\ln\frac{1}{x}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2(1-x)}{\left(\frac{1}{x}\right)^n\ln^2\frac{1}{x}} = 0$$

bo'ladi. Ikkinchi tomondan,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 n^2x^n(1-x)dx = \lim_{n\to\infty}\left(n^2\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)(n+2)} = 1.$$

Demak, $\int_0^1 \lim_{n\to\infty} u_n(x)dx = \int_0^1 0dx = 0 \neq 1 = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 u_n(x)dx.$

Izoh. Tekis yaqinlashish sharti (4) tenglik bajarilishi uchun zaruriy shart emas. Haqiqatdan ham, $\{x^n\}$ ketma-ketlik $[0,1]$ kesmada

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x\neq 1 \\ 1, & x=1 \end{cases}$$

funksiyaga notekis yaqinlashadi. Ammo $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^n dx = \lim\frac{1}{n+1} = 0 = \int_0^1 f(x)dx$,

ya'ni (4) tenglik o'rinli.

2-teorema. Agar $\{u_n(x)\}$ funksional ketma-ketlikning har bir $u_n(x)$ ($n=1, 2, \ldots$) hadi $[a;b]$ kesmada uzluksiz bo'lib, bu funksional ketma-ketlik $[a;b]$ da tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda

$$\int_a^b u_1(x)dx,\ \int_a^b u_2(x)dx,\ \ldots,\ \int_a^b u_n(x)dx,\ \ldots$$

ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'ladi, uning limiti esa $\int_a^b f(x)dx$ ga teng bo'ladi, ya'ni

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b u_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx. \qquad (5)$$

Isboti. Berilgan $\{u_n(x)\}$ funksional ketma-ketlikning har bir hadi $[a;b]$ kesmada uzluksiz va bu funksional ketma-ketlik $[a;b]$ da tekis yaqinlashuvchi bo'lganligi sababli, yuqoridagi teoremaga asosan uning $f(x)$

limit funksiyasi $[a;b]$ kesmada uzluksiz, demak $[a;b]$ kesmada integrallanuvchi bo‘ladi. Endi (5) tenglikni isbotlaymiz.

$$\left|\int_a^b u_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |u_n(x) - f(x)|\,dx \le \sup_{x\in[a;b]} |u_n(x)-f(x)|(b-a)$$

tengsizlikda $n\to\infty$ da limitga o‘tsak, u holda teorema shartiga ko‘ra $d_n = \sup\limits_{x\in[a;b]} |u_n(x)-f(x)| \to 0$, bundan esa $\left|\int_a^b u_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| \to 0$, ya’ni (5) tenglik kelib chiqadi.

Bu teoremadagi (5) munosabatni quyidagicha

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b u_n(x)dx\right) = \int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} u_n(x)\right)dx$$

ko‘rinishda ham yozish mumkin.

3-teorema. Faraz qilaylik, $[a;b]$ kesmada yaqinlashuvchi $\{u_n(x)\}$ funksional ketma-ketlik berilgan bo‘lib, uning limit funksiyasi $f(x)$ bo‘lsin.

Agar $\{u_n(x)\}$ funksional ketma-ketlikning har bir $u_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ hadi $[a;b]$ kesmada uzluksiz $u_n'(x)$ (n=1, 2, ...) hosilaga ega bo‘lib, bu hosilalardan tuzilgan

$$u_1'(x),\ u_2'(x),\ \ldots,\ u_n'(x),\ \ldots \qquad (6)$$

funksional ketma-ketlik $[a;b]$ da tekis yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda $f(x)$ limit funksiya shu $[a;b]$ kesmada $f'(x)$ hosilaga ega bo‘lib, $\{u_n'(x)\}$ ketma-ketlikning limiti $f'(x)$ ga teng bo‘ladi.

Isboti. Shartga ko‘ra (6) ketma-ketlik $[a;b]$ da tekis yaqinlashuvchi, uning limit funksiyasini $g(x)$ bilan belgilaylik: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n'(x) = g(x)$. U holda 2-teoremaga asosan $g(x)$ funksiya $[a;b]$ da uzluksiz, demak integrallanuvchi ham bo‘ladi. Bu funksional ketma-ketlikni $[a;x]$ $(a<x\le b)$ oraliqda hadma-had integrallab, quyidagini topamiz:

$$\int_a^x g(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^x u_n'(x)dx = \lim_{n\to\infty}(u_n(x)-u_n(a)) = f(x)-f(a) \qquad (7)$$

$g(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz bo‘lganligi sababli, $\int_a^x g(t)dt$ funksiya differensiallanuvchi bo‘lib, uning hosilasi

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x g(t)dt\right) = g(x)$$

bo‘ladi.

Ikkinchi tomondan (7) tenglikka asosan

$$\frac{d}{dx}(f(x)-f(a))=g(x),$$

ya'ni $f'(x)=g(x)$ bo'lishini topamiz. Bu esa $\{u_n(x)\}$ funksional ketma-ketlik limit funksiyasining $[a;b]$ kesmada differensiallanuvchi ekanligini, shu bilan birga $\lim_{n\to\infty} u_n'(x)=f'(x)$ tenglik o'rinli ekanligini bildiradi.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Funksional ketma-ketlik M to'plamda biror funksiyaga «tekis yaqinlashadi» degani nimani bildiradi?
2. Funksional ketma-ketlikning tekis yaqinlashishini ta'riflang.
3. Funksional ketma-ketlik tekis yaqinlashishining zaruriy va yetarli shartini ayting. (Zaruriy sharti nimadan iborat? Etarli sharti nimadan iborat?)
4. Funksional ketma-ketlik tekis yaqinlashishining zaruriy va yetarli shartini isbotlang.
5. Funksional ketma-ketlik tekis yaqinlashishining zaruriy va yetarli shartini (Koshi) ayting.
6. Funksional ketma-ketlik tekis yaqinlashishining zaruriy va yetarli shartini (Koshi) isbotlang.
7. Funksional ketma-ketlik tekis yaqinlashishining zaruriy va yetarli shartida (Koshi) limit funksiyaning mavjudligi qanday ko'rsatiladi?
8. Tekis yaqinlashuvchi funksional ketma-ketlikni limit funksiyasining uzluksizligi haqidagi teoremani ayting.
9. Tekis yaqinlashuvchi funksional ketma-ketlikni limit funksiyasining uzluksizligi haqidagi teoremani isbotlang.
10. Tekis yaqinlashuvchi funksional ketma-ketlikni hadma-had integrallash haqidagi teoremani ayting.
11. Tekis yaqinlashuvchi funksional ketma-ketlikni hadma-had integrallash haqidagi teoremani isbotlang.
12. Tekis yaqinlashuvchi funksional ketma-ketlikni hadma-had differensiallash haqidagi teoremani ayting.
13. Tekis yaqinlashuvchi funksional ketma-ketlikni hadma-had differensiallash haqidagi teoremani isbotlang.

Mustaqil yechish uchun misol va masalalar

1. Umumiy hadi $u_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2}$ bo'lgan funksional ketma-ketlikning limit funksiyasini toping va uni tekis yaqinlashishga tekshiring.

2. Umumiy hadi $u_n(x)=\dfrac{x}{x+n}$ bo'lgan funksional ketma-ketlikning D=[0;5] kesmadagi limit funksiyasini toping va uni tekis yaqinlashishga tekshiring.

3. Umumiy hadi $u_n(x)=1-x^2+x^4+...+(-1)^{n-1}x^{2(n-1)}$ bo'lgan funksional ketma-ketlikning limit funksiyasini toping va uni tekis yaqinlashishga tekshiring.

4. Agar $\{f_n(x)\}$ va $\{g_n(x)\}$ funksional ketma-ketliklar D to'plamda mos ravishda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarga tekis yaqinlashsa, u holda ixtiyoriy α va β haqiqiy sonlar uchun $\{\alpha f_n(x)+\beta g_n(x)\}$ ketma-ketlik $\alpha f(x)+\beta g(x)$ funksiyaga tekis yaqinlashishini ko'rsating.

5. Agar $\{f_n(x)\}$ funksional ketma-ketlik D to'plamda $f(x)$ funksiyaga tekis yaqinlashsa, $g(x)$ funksiya D to'plamda chegaralangan bo'lsa, u holda $\{g(x)f_n(x)\}$ ketma-ketlik $g(x)f(x)$ funksiyaga tekis yaqinlashishini isbotlang.

6. Umumiy hadi $u_n(x)=nxe^{-nx^2}$ bo'lgan funksional ketma-ketlikning D=[0;1] kesmada yaqinlashuvchi, ammo $\int\limits_0^1\left(\lim\limits_{n\to\infty}u_n(x)\right)dx\neq\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 u_n(x)dx$ ekanligini ko'rsating.

7. Umumiy hadi $u_n(x)=\dfrac{1}{n}arctgx^n$ bo'lgan funksional ketma-ketlik **R** da tekis yaqinlashuvchi, lekin x=1 nuqtada $\left(\lim\limits_{n\to\infty}u_n(x)\right)'\neq\lim\limits_{n\to\infty}u_n'(x)$ ekanligini ko'rsating.

Javoblar: 1. $f(x)=0$, notekis yaqinlashadi; 2. $f(x)=0$, tekis yaqinlashadi;

3. $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, $|x|<1$ da tekis yaqinlashadi.

4-§. Funksional qatorlar

Hadlari funksiyalardan iborat bo'lgan qatorlarni qaraymiz:

$$u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)+... \qquad (1)$$

Bunday qatorlar *funksional qatorlar* deyiladi, bu yerda $u_1(x), u_2(x), ..., u_n(x), ...$ funksiyalarning hammasi biror chekli yoki cheksiz oraliqda aniqlangan va uzluksiz funksiyalar.

(1) qatorning dastlabki n ta hadi yig'indisi $S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)$ $(n=2,3,...)$ va $S_1(x)=u_1(x)$ funksiyani (1) qatorning xususiy yig'indilari deb ataymiz.

Xususiy yig'indilar $\{S_n(x)\}$ ketma-ketligini qaraymiz.

Ta'rif. Agar aniqlanish sohasi G to'plamdan iborat $\{S_n(x)\}$ funksional ketma-ketlik D yaqinlashish sohasiga ega bo'lib, bu sohada biror $S(x)$ funksiyaga yaqinlashsa, ya'ni

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)$$

bo'lsa, (1) *qator D to'plamda yaqinlashuvchi* (har bir nuqtasida), $S(x)$ esa (1) *qatorning yig'indisi* deyiladi.

Bu holda

$$S(x)=u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)+...$$

deb yoziladi.

1-*misol.* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+x)(n+x+1)}$ qator yaqinlashish sohasi va yig'indisini toping.

Yechish. $u_n(x)=\frac{1}{(n+x)(n+x+1)}$ $(n=1,2,...)$ funksiyalar $x=-n$ va $x=-(n+1)$ nuqtalarda aniqlanmagan. Shu sababli bu qatorni $x\neq -k$ $(k\in\mathrm{N})$ bo'lgan nuqtalarda tekshiramiz. Qatorning umumiy hadini $u_n(x)=\frac{1}{n+x}-\frac{1}{n+x+1}$ deb yozib olish mumkin. Shu sababli

$$S_n(x)=\frac{1}{(1+x)(2+x)}+\frac{1}{(2+x)(3+x)}+...+\frac{1}{(n+x)(n+x+1)}=$$

$$=\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2+x}\right)+\left(\frac{1}{2+x}-\frac{1}{3+x}\right)+...+\left(\frac{1}{n+x}-\frac{1}{n+x+1}\right)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{n+x+1}$$

Bundan

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{n+x+1}\right)=\frac{1}{1+x}.$$

Demak, berilgan qator $x\neq -k$ $(k\in\mathrm{N})$ nuqtalarda yaqinlashuvchi bo'ladi va uning yig'indisi $\frac{1}{1+x}$ ga teng.

Funksional qatorlar uchun sonli qatorlarning asosiy xossalaridan kelib chiqadigan quyidagi xossalar o'rinli:

1) Agar (1) qatorning har bir hadini noldan farqli songa yoki (1) qatorning yaqinlashish sohasida noldan farqli qiymat qabul qiladigan funksiyaga ko'paytirsak, qatorning yaqinlashish sohasi o'zgarmaydi.

2) (1) funksional qatorning bir nechta hadlarini olib tashlash yoki (1) qatorga chekli sondagi yangi hadlarni qo‘shish ((1) qator yaqinlashish sohasida aniqlangan) natijasida qatorning yaqinlashish sohasi o‘zgarmaydi.

Agar $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ qator absolyut yaqinlashsa, u holda (1) qator x_0 nuqtada *absolyut yaqinlashuvchi* deyiladi. Agar (1) qator to‘plamining har bir nuqtasida absolyut yaqinlashsa, u holda qator shu *to‘plamda absolyut yaqinlashuvchi* deyiladi.

2-*misol.* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cos x$ qatorning yaqinlashish sohasini toping.

Yechish. x argument qiymatini tayinlab olamiz va umumiy hadi $v_n(x) = \frac{x^n}{n!}$ bo‘lgan yordamchi qatorni qaraymiz. Dalamber alomatiga ko‘ra x ning har bir qiymatida

$\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{v_{n+1}}{v_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} (\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{x^n}{n!}) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0$ bo‘ladi, va bundan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ qatorning absolyut yaqinlashuvchi ekanligi kelib chiqadi.

Ixtiyoriy x uchun $\left|\frac{x^n}{n!} \cos x\right| \le \left|\frac{x^n}{n!}\right| = |v_n|$ bo‘lganligi sababli, taqqoslash teoremasiga ko‘ra berilgan qator x ning ixtiyoriy qiymatida yaqinlashuvchi bo‘ladi. Shunday qilib, qatorning yaqinlashish sohasi $(-\infty;+\infty)$ oraliqdan iborat.

3-*misol.* Umumiy hadi $u_n(x)=n^3x^2$ bo‘lgan qatorning yaqinlashish sohasini toping.

Yechish. x ni tayinlab olamiz, natijada umumiy hadi $u_n=n^3x^2$ bo‘lgan sonli qatorga ega bo‘lamiz. Agar $x \ne 0$ bo‘lsa, u holda $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} (n^3x^2) = x\lim\limits_{n\to\infty} n^3 = \infty$ bo‘ladi. Demak, $x \ne 0$ bo‘lganda qator yaqinlashishining zaruriy sharti bajarilmaydi va qator uzoqlashuvchi bo‘ladi. Agar $x=0$ bo‘lsa, u holda $u_n(0)=0$ $(n=1,2...)$, $S_n(0)=0$ bo‘lib, qator yig‘indisi $S(0) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(0) = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$ ga teng bo‘ladi. Shunday qilib, qatorning yaqinlashish sohasi faqat bitta, $x=0$ nuqtadan iborat.

Agar yuqoridagi qatorda x^2 o‘rniga x^2+4 ni qo‘ysak, u holda umumiy hadi $u_n(x)=n^3(x^2+4)$ qatorga ega bo‘lar edik. Bu qator esa hech bir nuqtada yaqinlashuvchi emas. Uning yaqinlashishi sohasi bo‘sh to‘plamdan iborat.

4-*misol.* Ushbu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$ funksional qatorning yaqinlashish sohasini toping.

Yechish: x ning $(x\neq-1)$ har bir qiymatida sonli qator hosil bo'ladi. Bunga Dalamber alomatini tatbiq qilamiz (absolyut yaqinlashishga tekshirishdagi kabi):

$$u_{n+1}(x)=\frac{(-1)^{n+1}}{3n+2}\cdot\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{n+1}, \qquad u_n(x)=\frac{(-1)^n}{3n-1}\cdot\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$$

U holda $l(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-1}{3n+2}\left|\frac{1-x}{1+x}\right|=\left|\frac{1-x}{1+x}\right|$

$\left|\frac{1-x}{1+x}\right|<1$ shartni qanoatlantiruvchi x larda berilgan qator absolyut yaqinlashadi. $l(x)>1$ shartni qanoatlantiruvchi x larda qator uzoqlashadi. $l(x)=1$ shartni qanoatlantiradigan x larda va $l(x)$ aniqlanmagan nuqtalarda qatorni qo'shimcha tekshirish lozim. Bu misolda $x=\pm1$ bo'lib, x=-1 da qator aniqlanmagan, x=1 da esa qator faqat 0 dan iborat bo'ladi, absolyut yaqinlashadi. $l(x)<1$ tengsizlikni yechib, x>0 ni hosil qilamiz. Demak, qator (0,+∞) da yaqinlashadi. x=0 nuqtani alohida tekshirish lozim. x=0 da $-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...+\frac{(-1)^n}{3n-1}+...$ bo'lib, bu qator shartli yaqinlashadi.

Shunday qilib, berilgan qator $[0;+\infty)$ da yaqinlashadi.

Yuqoridagi misolni yechishda Koshining radikal alomatidan ham foydalanish mumkin edi.

5-*misol.* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$ qatorning yaqinlashish sohasini toping.

Yechish: Dalamber alomatidan foydalanamiz:

$$l(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{|x|^{n+1}}{1+x^{2n+2}}:\frac{|x|^n}{1+x^{2n}}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}|x|\cdot\frac{1+x^{2n}}{1+x^{2n+2}}=\begin{cases}|x|, & агар\ |x|<1,\\ 1, & агар\ |x|=1,\\ \frac{1}{|x|}, & агар\ |x|>1\end{cases}$$

$l(x)$ uchun hosil qilingan ifodalardan $|x|<1$ va $|x|>1$ da berilgan qatorning yaqinlashishi kelib chiqadi. x=0 bo'lganda Dalamber alomatidan foydalanib bo‘lmaydi. Ammo bu holda qatorning barcha hadlari 0 dan iborat, qatorning yaqinlashishi o‘z-o‘zidan ravshan. $l(x)=1$, ya'ni $x=\pm 1$ bo‘lganda qator umumiy hadining absolyut qiymati 0,5 ga teng, demak, qator uzoqlashuvchi bo‘ladi. Shunday qilib, berilgan qator $|x|<1$, $|x|>1$ shartlarni qanoatlantiruvchi nuqtalarda absolyut yaqinlashuvchi bo‘ladi.

6-*misol.* Qatorni $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{tg^n x}{n}$ yaqinlashishga tekshiring.

Yechish: Koshining radikal alomatidan foydalanamiz:

$$l(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{tg^n x}{n}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|tgx|}{\sqrt[n]{n}}=|tgx|$$

$l(x)<1$ da, ya'ni $|tgx|<1$ da qator absolyut yaqinlashadi. Bu tengsizlik yechimi $(-\frac{\pi}{4}+\pi n, \frac{\pi}{4}+\pi n)$, $n\in\mathbf{Z}$. Bu intervallarning chap uchlarida berilgan qator shartli yaqinlashuvchi, o‘ng uchlarida uzoqlashuvchi bo‘lishini tekshirish qiyin emas.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Funksional qator deb nimaga aytiladi?
2. Funksional qatorning aniqlanish sohasi deb nimaga aytiladi?
3. Funksional qatorning xususiy yig‘indilari qanday aniqlanadi?
4. Funksional qatorning yig‘indisi qanday aniqlanadi?
5. Funksional qatorning yaqinlashish sohasi deb nimaga aytiladi?
6. Funksional qatorning yaqinlashish sohasini qanday topish mumkin?
7. Funksional qatorning qoldig‘i deb nimaga aytiladi?
8. Qanday funksional qator yaqinlashuvchi deyiladi?
9. Yaqinlashuvchi funksional qatorning qoldig‘i haqida nima deyish mumkin?

Mustaqil yechish uchun misol va masalalar

Ushbu funksional qatorning yaqinlashish (absolyut va shartli) sohasini toping.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$; c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1-x^n}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\sin^n x}{n^2}$;

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n x^n}$; f) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x(x+n)}{n}\right)^n$; g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{1+x^{2n+1}}$; h) $\sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}\sin\frac{x}{3^{n-1}}$.

Javoblar: a) (-∞;-1)∪(1;+∞), absolut yaqinlashadi; b) (-∞;-1)∪(-1/3;+∞), absolut yaqinlashadi: c) (-1;1), absolut yaqinlashadi; d) $\bigcup\limits_k \left[-\frac{\pi}{6}+\pi k;\frac{\pi}{6}+\pi k\right]$, $k\in\mathbf{Z}$, absolut yaqinlashadi; e) (-∞;-1/3)∪(1/3;+∞), absolut yaqinlashadi; f) (-1;1], absolut yaqinlashadi; g) (-1;1), absolut yaqinlashadi; h) (-∞;+∞), absolut yaqinlashadi.

5-§. Tekis yaqinlashuvchi funksional qator

Aytaylik,

$$u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)+... \qquad (1)$$

funksional qator D to'plamda yaqinlashuvchi va $S(x)$ uning yig'indisi bo'lsin.

Ta'rif. Agar (1) qatorning xususiy yig'indilaridan iborat $\{S_n(x)\}$ ketma-ketlik D to'plamda $S(x)$ funksiyaga tekis yaqinlashsa, u holda (1) qator D to'plamda tekis yaqinlashuvchi deyiladi.

Ushbu $r_n(x)=S(x)-S_n(x)$ belgilash kiritamiz. Bunda $r_n(x)=u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+...$ bo'lib, (1) qatorning qoldig'i deyiladi.

2-§ dagi 1-teoremadan quyidagi teoremaning o'rinli ekanligi kelib chiqadi.

1-*teorema.* (1) qator D to'plamda tekis yaqinlashuvchi bo'lishi uchun $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in D}|r_n(x)|=0$ tenglikning bajarilishi zarur va yetarli.

1-*misol.* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+x)(n+x+1)}$ nuqtalarni x>-1 da tekis yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Berilgan qator x>-1 da yaqinlashadi. Bu qator uchun $S(x)=\frac{1}{1+x}$, $S_n(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{n+x+1}$ ekanligini yuqorida (4-§b 1-misol) ko'rdik. Demak $r_n(x)=\frac{1}{n+x+1}$ va masala shartiga ko'ra x+1>0, shu sababli $|r_n(x)|<\frac{1}{n}$ tengsizlik o'rinli. Bundan $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in(-1;\infty)}|r_n(x)|=0$ kelib chiqadi. Demak, berilgan qator x>-1da tekis yaqinlashar ekan.

2-*teorema* (Veyershtrass alomati). Agar

$$u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)+...$$

funksional qatorning hadlari D to'plamda absolyut qiymati bo'yicha biror yaqinlashuvchi

$$c_1+c_2+...+c_n+... \qquad (2)$$

musbat qatorning mos hadlaridan katta bo'lmasa, ya'ni

$$|u_n(x)|\le c_n \qquad (n=1,2,3,...) \qquad (3)$$

bo'lsa, u holda berilgan funksional qator D to'plamda tekis yaqinlashuvchi bo'ladi.

Isbot. (2) qator yig'indisini σ bilan belgilaymiz: $\sigma=c_1+c_2+...+c_n+...$

U holda

$$\sigma=\sigma_n+\varepsilon_n$$

bu yerda σ_n - n-xususiy yig'indi, ε_n esa bu qatorning n-qoldig'i, ya'ni

$$\varepsilon_n=c_{n+1}+c_{n+2}+... \qquad (4)$$

(2) qator yaqinlashuvchi bo'lganligi uchun $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=\sigma$, demak, $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$.

Endi (1) funksional qatorning qoldig'i $r_n(x)=u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+...$ ni baholaymiz.

(3) shartdan $|u_{n+1}(x)|\le c_{n+1}$, $|u_{n+2}(x)|\le c_{n+2}$, ... va shu sababli (4) ga asosan qaralayotgan D to'plamdan olingan barcha x lar uchun $|r_n(x)|<\varepsilon_n$ tengsizlik bajariladi. Bundan esa, $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in D}|r_n(x)|=0$ kelib chiqadi. Demak, (1) qator D to'plamda tekis yaqinlashuvchi bo'ladi.

(2) qator berilgan (1) funksional qator uchun *majorant qator* deyiladi.

2-*misol.* Ushbu

$$\frac{sin^2 x}{1^3}+\frac{sin^2 2x}{2^3}+...+\frac{sin^2 nx}{n^3}+...$$

funksional qatorni tekis yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. x ning barcha haqiqiy qiymatlari uchun

$$\left|\frac{sin^2 nx}{n^3}\right|\le\frac{1}{n^3}$$

tengsizlik o'rinli. $\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{n^3}+...$ qator esa yaqinlashuvchi. Demak, Veyershtrass alomatiga ko'ra berilgan qator $(-\infty;+\infty)$ da tekis yaqinlashadi.

Izoh: 2-teoremaning shartlari tekis yaqinlashishning yetarli shartlari bo'lib, ular zaruriy shart bo'la olmaydi. Buni biz quyidagi misolda ko'rsatamiz.

3-*misol.* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+x}$ qatorni $[0;+\infty)$ da tekis yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. $x\geq 0$ da $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+x}$ qator shartli yaqinlashuvchi ekanligini ko'rish qiyin emas. Bu qator uchun majorant qator yo'q. Berilgan qatorni tekis yaqinlashuvchi ekanligini ko'rsatish uchun ta'rifning bajarilishini ko'rsatishimiz lozim. Buning uchun Leybnits teoremasidan foydalanamiz. Qatorning hadlari $x\geq 0$ da absolyut qiymatlari bo'yicha monoton kamayuvchi va n-hadi $n\to\infty$ da nolga intiladi. Shu sababli, qator $[0,\infty)$ yarim o'qda yaqinlashuvchi va qator qoldig'i uchun $|r_n(x)|<\frac{1}{n+1+x}$ tengsizlik o'rinli. $x>0$ da $|r_n(x)|\leq\frac{1}{n+1}$ ga ega bo'lamiz, bundan $[0,\infty)$ oraliqdan olingan ixtiyoriy x uchun $\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0$ shartning bajarilishi kelib chiqadi. Demak, qator tekis yaqinlashuvchi bo'ladi.

6-§. Tekis yaqinlashuvchi funksional qatorlarning xossalari

Tekis yaqinlashuvchi funksional qatorlar uchun funksiyalarning chekli yig'indisi xossalarini tatbiq qilish mumkin.

1-*teorema.* Agar

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots$$

funksional qatorning har bir hadi $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo'lib, bu funksional qator $[a,b]$ kesmada tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda bu qatorning yig'indisi $S(x)$ ham shu kesmada uzluksiz bo'ladi.

Bu teoremaning *isboti* umumiy hadi $S_n(x)=\sum_{m=1}^{n}u_m(x)$ bo'lgan funksional ketma-ketlikga 3-§ dagi 1-teoremani tatbiq qilishdan kelib chiqadi.

1-*misol.* Ushbu $\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^2+\frac{1}{n}\right)^n$ qatorning yaqinlashish sohasini toping va yig'indisini uzluksizlikka tekshiring.

Yechish. Berilgan funksional qatorning yaqinlashish sohasini Koshi alomatidan foydalanib topamiz.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(x^2+\frac{1}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\left(x^2+\frac{1}{n}\right)=x^2.$$

Bundan $x^2<1$ bo'lganda qator yaqinlashuvchi va $x^2>1$ bo'lganda uzoqlashuvchi ekanligi kelib chiqadi. $x=\pm1$ nuqtalarda uzoqlashuvchi, chunki

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\neq0,$$

ya'ni qator yaqinlashishining zaruriy sharti bajarilmaydi.

Qator yig'indisi $S(x)$ ni (-1,1) da uzluksizlikka tekshiramiz. Buning uchun qatorni ixtiyoriy $[-a,a]$ $(0<a<1)$ kesmada tekis yaqinlashuvchi ekanligini ko'rsatamiz.

$0<a<b<1$ shartni qanoatlantiruvchi biror b sonni tanlab olamiz. Bu son uchun shunday n_0 topiladiki, barcha $n\geq n_0$ da $a+\frac{1}{\sqrt{n}}\leq b$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. U holda $|x|\leq a$ lar uchun

$$\left(x^2+\frac{1}{n}\right)^n\leq\left(|x|+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2n}\leq\left(a+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2n}\leq b^{2n}$$

tengsizlik bajariladi.

Ravshanki, $b^2+b^4+b^6+...+b^{2m}+...$ qator yaqinlashuvchi (chunki bu qator mahraji $b^2<1$ bo'lgan geometrik progressiya), shu sababli Veyershtrass alomatiga ko'ra berilgan qator $[-a,a]$ da tekis yaqinlashuvchi. Demak, $S(x)$ funksiya $[-a,a]$ kesmada uzluksiz. Tanlashimizga ko'ra a $(0<a<1)$ ixtiyoriy, demak, $S(x)$ funksiya (-1,1) da uzluksiz.

2-*misol.* Ushbu $\sum_{n=1}^{\infty}x^2e^{-nx}$ qator yig'indisi [0;1] kesmada uzluksiz ekanligini isbotlang va bu yig'indini toping.

Yechish. Qator hadlari uzluksiz funksiyalardan iborat, uning umumiy hadi $u_n(x)=x^2e^{-nx}$, $x>0$ da $u_n(x)>0$ va $u_n(0)=0$. Berilgan qatorni [0;1] kesmada tekis yaqinlashuvchi ekanligini ko'rsatamiz. Ravshanki, $u_n'(x)=e^{-nx}(2x-nx^2)$ hosila (0;1) intervalda yagona $x=x_n=\frac{n}{2}$ ildizga ega. Bunda $x\in(0;x_n)$ da $u_n'(x)>0$, $x\in(x_n;1)$ da $u_n'(x)<0$ bo'lib, $u_n(x)=x^2e^{-nx}$ funksiya $x=x_n=\frac{n}{2}$ nuqtada maksimum qiymatga erishadi. Shuningdek $\max\limits_{x\in[0;1]}u_n(x)=u_n(x_n)=\frac{4}{n^2}e^{-2}$ ekanligi ravshan. Demak, [0;1] kesmadan olingan ixtiyoriy x va ixtiyoriy n natural son uchun $0\leq u_n(x)\leq\frac{4}{n^2}e^{-2}$ tengsizlik o'rinli. Umumiy hadi $\frac{4}{n^2}e^{-2}$ bo'lgan sonli qator yaqinlashuvchi, bundan Veyershtrass alomatiga ko'ra $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$ qator $[0;1]$ kesmada tekis yaqinlashadi. Demak, yuqorida isbotlangan 1-teoremaga ko'ra bu qatorning yig'indisi uzluksiz bo'ladi.

Endi bu qatorning yig'indisini topamiz, buning uchun $x>0$ da cheksiz kamayuvchi geometrik progressiya yig'indisi formulasidan foydalanamiz: $S(x)=\frac{x^2e^{-x}}{1-e^{-x}}=\frac{x^2}{e^x-1}$. $x=0$ da qator hadlari nolga teng, shu sababli $S(0)=0$.

2-*teorema.* (Qatorlarni hadlab integrallash) Agar

$$u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)+...$$

funksional qatorning har bir hadi $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo'lib, bu funksional qator $[a,b]$ kesmada tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda

$$\int_a^b S(x)dx=\int_a^b u_1(x)dx+\int_a^b u_2(x)dx+...+\int_a^b u_n(x)dx+...$$

bo'ladi.

Isboti umumiy hadi $S_n(x)$ bo'lgan funksional ketma-ketlikga 3-§ dagi 2-teoremani tatbiq qilishdan kelib chiqadi.

3-misol. $|x|<1$ da

$$arctgx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+... \qquad (1)$$

formulaning o'rinli ekanligini isbotlang.

Yechish. Ma'lumki, $1-x^2+x^4-...+(-1)^n x^{2n}+...$ (2) funksional qator $|x|<1$ da tekis yaqinlashuvchi va uning yig'indisi $S(x)=\frac{1}{1+x^2}$ ga teng (3-§ so'ngidagi 3-misolni qarang). Berilgan (2) qatorni 0 dan x gacha ($x<1$) hadlab integrallaymiz va quyidagi qatorga ega bo'lamiz:

$$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+...$$

Bu qator $|x|<1$ da tekis yaqinlashadi va uning yig'indisi quyidagiga teng:

$$\int_0^x S(x)dx=\int_0^x\frac{dx}{1+x^2}=arctgx\Big|_0^x=arctgx$$

Shunday qilib, $|x|<1$ da (1) formula o'rinli ekan.

3-*teorema.* (Qatorlarni hadlab differensiallash) Agar

$$u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)+...$$

funksional qatorning har bir hadi $[a,b]$ kesmada uzluksiz hosilalarga ega bo'lib, bu hosilalardan tuzilgan

$$u_1'(x)+u_2'(x)+...+u_n'(x)+...$$

qator $[a,b]$ kesmada tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda berilgan funksional qatorning $S(x)$ yig'indisi shu $[a,b]$ kesmada $S'(x)$ hosilaga ega va $S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ bo'ladi.

Isboti umumiy hadi $S_n(x)$ bo'lgan funksional ketma-ketlikga 3-§ dagi 3-teoremani tatbiq qilishdan kelib chiqadi.

4-*misol.* Yuqorida (-1,1) intervalda (1) tenglikning o'rinli ekanligini ko'rsatgan edik (3- misol). U holda yaqinlashuvchi funksional qatorlarning xossalariga ko'ra (-1,1) intervalda

$$x\,arctgx = x^2-\frac{x^4}{3}+\frac{x^6}{5}-...+(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{2n+1}+...$$

tenglik ham o'rinli bo'ladi. Bu tenglikning o'ng tomonidagi qatorni hadlab differensiallab, quyidagini topamiz:

$$2x-\frac{4x^3}{3}+\frac{6x^5}{5}-...+(-1)^n\frac{(2n+2)x^{2n+1}}{2n+1}+... \qquad (3)$$

Bu qatorni yaqinlashishga tekshiramiz. Dalamber alomatiga ko'ra

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{2n+2}{2n+1}x^{2n+1}\right|}{\left|\frac{2n}{2n-1}x^{2n-1}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)(2n-1)}{(2n+1)^2}x^2=x^2.$$

Bundan (3) qator $|x|<1$ da absolyut yaqinlashuvchi, demak tekis yaqinlashuvchi bo'ladi.

Shunday qilib, (3) qator berilgan *xarctgx* funksiyaning hosilasiga yaqinlashadi:

$$arctgx+\frac{x}{1+x^2}=2x-\frac{4x^3}{3}+\frac{6x^5}{5}-...+(-1)^n\frac{(2n+2)x^{2n+1}}{2n+1}+....$$

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Qanday funksional qator tekis yaqinlashuvchi deyiladi?
2. Qator tekis yaqinlashadi. Bu qator absolyut yaqinlashuvchi bo'ladimi?
3. Qator hadlari ham, yig'indisi ham kesmada uzluksiz funksiyalar bo'lsa, qator shu kesmada tekis yaqinlashadi, deyish mumkinmi?

4. Funksional qator tekis yaqinlashishining zaruriy va yetarli shartini ayting.
5. Funksional qator tekis yaqinlashishining zaruriy va yetarli shartini isbotlang.
6. Funksional qator tekis yaqinlashishining Veyershtrass alomatini ayting.
7. Funksional qator tekis yaqinlashishining yetarli shartini isbotlang.
8. Tekis yaqinlashuvchi funksional qator xossalarini ayting.
9. Tekis yaqinlashuvchi funksional qator yig'indisining uzluksizligi qanday isbotlanadi?
10. Tekis yaqinlashuvchi funksional qatorni hadma-had integrallash haqidagi teorema qanday isbotlanadi?
11. Tekis yaqinlashuvchi funksional qatorni hadma-had differensiallash haqidagi teorema qanday isbotlanadi?

Mustaqil yechish uchun misol va masalalar

1. Ushbu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^2+n}{n^2}$ qator ixtiyoriy kesmada tekis yaqinlashuvchi, ammo x ning hech bir qiymatida absolyut yaqinlashmasligini isbotlang.

2. Veyershtrass alomatidan foydalanib, ko'rsatilgan oraliqda funksional qatorning tekis yaqinlashuvchi ekanligini isbotlang.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$, $(-\infty,+\infty)$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{1-x^{2n}}}{2^n}$, $(-1;1)$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty}(x^n-x^{n-1})$ qatorni a) $[0;0,5]$; b) $[0;1]$ kesmalarda tekis yaqinlashishga tekshiring.

4. $1+x^2+x^4+...+x^{2n-2}+...=\frac{1}{1-x^2}$ $(|x|<1)$ tenglikdan foydalanib, $\sum_{n=1}^{\infty}(2n-2)x^{2n-3}$ qator yig'indisini toping.

5. $x^2+x^5+...+x^{3n-1}+...=\frac{x^2}{1-x^3}$ $(|x|<1)$ tenglikdan foydalanib, $\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+...+\frac{x^{3n}}{3n}+...$ qator yig'indisini toping.

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2^n\pi x}{2^n}$ qator sonlar o'qida tekis yaqinlashishini ko'rsating. Bu qatorni hadma-had differensiallash mumkinmi? Javobingizni asoslang.

7. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(x-n)^2}$ qator [0;1] kesmada tekis yaqinlashishini va uni hadma-had differensiallash mumkinligini isbotlang.

Javoblar: 3. a) $S(x)=-1$, tekis yaqinlashadi; b) $S(x)=\begin{cases} -1, & agar\ 0\le x<1, \\ 0, & agar\ x=1. \end{cases}$ notekis yaqinlashadi; 4. $S(x)=\frac{2x}{(1-x^2)^2}$; 5. $S(x)=-\frac{1}{3}\ln|1-x^3|$.

II-bobni takrorlash uchun test savollari

1. Umumiy hadi $u_n(x)=1+x+x^2+...+x^n$ bo'lgan funksional ketma-ketlikning aniqlanish va yaqinlashish sohalarini ko'rsating.
A) $(-\infty;\infty)$; $(-1;1)$ B) $(0;\infty)$; $(0;1)$ C) $(-\infty;\infty)$; $(-1;1]$ D) $[0;\infty)$; $[-1;1]$

2. Umumiy hadi $u_n(x)=1+x^n$ bo'lgan funksional ketma-ketlikning $f(x)$ limit funksiyasini toping.
A) $f(x)=1$, $x\in(-1;1)$ B) $f(x)=1$, $x\in(-1;1]$ C) $f(x)=1$, agar $x\in(-1;1)$ va $f(1)=2$
D) $f(x)=1$, agar $x\in(0;1)$ va $f(1)=2$

3. Umumiy hadi $u_n(x)=x^n$ bo'lgan funksional ketma-ketlik qaysi to'plamda tekis yaqinlashuvchi bo'ladi?
A) $(-1;1)$ B) $[0;1)$ C) $[0;1]$ D) $[-0,3;0,9]$

4. Quyidagi jumlalarning qaysi biri to'g'ri?
A) Agar $\{u_n(x)\}$ funksional ketma-ketlikning har bir hadi M to'plamda uzluksiz bo'lsa, u holda limit funksiya M to'plamda uzluksiz bo'ladi.
B) Agar $\{u_n(x)\}$ funksional ketma-ketlikning limit funksiyasi M to'plamda uzluksiz bo'lsa, u holda $\{u_n(x)\}$ funksional ketma-ketlikning har bir hadi M to'plamda uzluksiz bo'ladi.
C) Har bir hadi M to'plamda uzluksiz bo'lgan $\{u_n(x)\}$ funksional ketma-ketlikning limit funksiyasi M to'plamda uzluksiz bo'lishi uchun bu ketma-ketlikning M to'plamda tekis yaqinlashishi zarur.
D) Har bir hadi M to'plamda uzluksiz bo'lgan $\{u_n(x)\}$ funksional ketma-ketlikning limit funksiyasi M to'plamda uzluksiz bo'lishi uchun bu ketma-ketlikning M to'plamda tekis yaqinlashishi yetarli.

5. Noto'g'ri jumlani ko'rsating.

A) Agar $\{u_n(x)\}$ funksional ketma-ketlikning har bir hadi $(a;b)$ intervalda uzluksiz va u shu intervalda tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda limit funksiya $(a;b)$ intervalda uzluksiz bo'ladi.
B) Agar $\{u_n(x)\}$ funksional ketma-ketlikning har bir hadi $[a;b]$ kesmada uzluksiz va u shu kesmada tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda bu funksional ketma-ketlikni $[a;b]$ kesmada hadma-had integrallash mumkin.
C) Agar $\{u_n(x)\}$ funksional ketma-ketlikning har bir hadi $[a;b]$ kesmada uzluksiz va u shu kesmada tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda bu funksional ketma-ketlikni $[a;b]$ kesmada hadma-had differensiallash mumkin.
D) Agar $\{u_n(x)\}$ funksional ketma-ketlikning har bir hadi $[a;b]$ kesmada uzluksiz $u'_n(x)$ hosilaga ega bo'lib, $\{u'_n(x)\}$ ketma-ketlik shu kesmada tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda bu funksional ketma-ketlikni $[a;b]$ kesmada hadma-had differensiallash mumkin.

6. Aniqlanish sohasida tekis yaqinlashuvchi funksional ketma-ketlikni ko'rsating.
A) $(\left\{\frac{1}{n+x^2}\right\})$ B) $\{x^{2n}\}$ C) $\{1+x+\ldots+x^n\}$ D) $\{2+x^n\}$

7. Umumiy hadi $u_n(x)=x^n$ bo'lgan funksional qatorning aniqlanish va yaqinlashish sohalarini ko'rsating.
A) $(-\infty;\infty)$; $(-1;1)$ B) $(0;\infty)$; $(0;1)$ C) $(-\infty;\infty)$; $(-1;1]$ D) $[0;\infty)$; $[-1;1]$

8. Umumiy hadi $u_n(x)=x^n-x^{n-1}$ bo'lgan funksional qatorning $S(x)$ limit funksiyasini toping.
A) $S(x)=-1$, $x\in(-1;1)$ B) $S(x)=-1$, $x\in(-1;1]$
C) $S(x)=-1$, agar $x\in(-1;1)$ va $S(1)=0$ D) $S(x)=0$, agar $x\in(0;1)$ va $S(1)=1$

9. Umumiy hadi $u_n(x)=x^{2n}-x^{2(n-1)}$ bo'lgan funksional qator qaysi to'plamda tekis yaqinlashuvchi bo'ladi?
A) $(-1;1)$ B) $[0;1)$ C) $[0;1]$ D) $[-0,3;0,9]$

10. Umumiy hadi $u_n(x)=x^{n+1}-x^n$ bo'lgan funksional qator uchun $S_3(x)$ va $S(0,1)$ larni toping.
A) $S_3(x)=x^4-x^3$, $S(0,1)=0$ B) $S_3(x)=x^4-x^3$, $S(0,1)=0,001$
C) $S_3(x)=x^4-x$, $S(0,1)=-0,9999$ D) $S_3(x)=x^4-x$, $S(0,1)=-0,0999$

11. $\sum_{n=1}^{\infty}(x^n - x^{n-1})$ funksional qatorning $S_n(x)$ umumiy yig'indisini toping.

A) $S_n(x)=x^n-1$ B) $S_n(x)=x^n$

C) $S_n(x)= x^n-x$ D) $S_n(x)=x^{n+1}-x$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n}$ funksional qatorning yaqinlashish sohasini toping.

A) $(-\infty;+\infty)$ B) $(-1;1]$ C) $(-1;1)$ D) $[-1;1]$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} x2^{-nx}$ funksional qatorning yaqinlashish sohasini toping.

A) $(-\infty;+\infty)$ B) $(-\infty;0]$ C) $(0;+\infty)$ D) $[0;+\infty)$

14. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^2 3^{nx}$ funksional qatorning yaqinlashish sohasini toping.

A) $(-\infty;+\infty)$ B) $(-\infty;0]$ C) $(0;+\infty)$ D) $[0;+\infty)$

15. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 7^{nx}$ funksional qatorning yaqinlashish sohasini toping.

A) $(-\infty;0]$ B) $(-\infty;0)$ C) $(0;+\infty)$ D) $[0;+\infty)$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} x2^{-nx}$ funksional qatorning yig'indisini toping.

A) $\frac{x}{1-2^x}$ B) $\frac{x}{2^x-1}$ C) $\frac{x2^x}{2^x-1}$ D) $\frac{x2^x}{2^x+1}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^2 3^{nx}$ funksional qatorning yig'indisini toping.

A) $-\frac{x^2}{1+3^x}$ B) $\frac{x^2}{3^x+1}$ C) $-\frac{x^2 3^x}{3^x+1}$ D) $\frac{x^2 3^x}{3^x+1}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^n x}{n^4}$ funksional qatorning yaqinlashish sohasini toping.

A) $(1/e; e)$ B) $(1/e; e]$ C) $(1/e; e]$ D) $[1/e; e]$

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x^2+n}$ qator haqidagi fikrlardan qaysi biri noto'g'ri?

A) qatorning yaqinlashish sohasi $(-\infty;+\infty)$

B) qator $(-\infty;+\infty)$ da tekis yaqinlashadi

C) qator $(-\infty;+\infty)$ da absolyut yaqinlashadi

D) qator yig'indisi uzluksiz funksiya

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x^2+n^2}$ qator haqidagi fikrlardan qaysi biri noto'g'ri?

A) qatorning yaqinlashish sohasi $(-\infty;+\infty)$

B) qator $(-\infty;+\infty)$ da tekis yaqinlashadi

C) qator $(-\infty;+\infty)$ da absolyut yaqinlashadi

D) barchasi to'g'ri

III-BOB. DARAJALI QATORLAR. TEYLOR QATORI

1-§. Darajali qator tushunchasi. Abel teoremasi

1.1. Darajali qator tushunchasi. Funksional qatorlar orasida, ularning xususiy holi bo'lgan ushbu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (1)$$

yoki, umumiyroq,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots \qquad (2)$$

qatorlar (bunda $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots, x_0$ o'zgarmas haqiqiy sonlar) matematikada va uning tatbiqlarida muhim rol o'ynaydi. Bu yerda funksional qatorning umumiy hadi sifatida $u_n(x)=a_n x^n$ (yoki $u_n(x)=(x-x_0)^n$), ya'ni x (yoki $(x-x_0)$) darajalari qaralayapti, shu sababli (1) va (2) qatorlar *darajali qatorlar* deb ataladi.

Agar (2) qatorda $x-x_0=t$ deb olinsa, u holda bu qator t o'zgaruvchiga nisbatan (1) qator ko'rinishga keladi. Demak, (1) ko'rinishdagi qatorlarni o'rganish yetarli.

(1) ifodadagi $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ haqiqiy sonlar *darajali qatorning koeffitsientlari* deb ataladi.

Darajali qatorlar bir-biridan faqat koeffitsientlari bilangina farq qiladi. Demak, darajali qator berilgan deganda uning koeffitsientlari berilganligini tushunamiz.

Ixtiyoriy (1) darajali qator $x=0$ nuqtada yaqinlashuvchi bo'ladi.

1.2. Abel teoremasi. Darajali qatorning yaqinlashish sohasini aniqlashda quyidagi Abel teoremasi muhim rol o'ynaydi.

1-*teorema.* (Abel) Agar (1) qator x ning $x=x_0$ $(x_0\neq 0)$ qiymatida yaqinlashuvchi bo'lsa, x ning

$$|x|<|x_0| \qquad (3)$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida (1) darajali qator absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi.

Isboti. Shartga ko'ra

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n + \ldots$$

sonli qator yaqinlashuvchi. U holda qator yaqinlashishining zaruriy shartiga ko'ra $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$ bo'ladi. Demak, $\{a_n x_0^n\}$ ketma-ketlik chegaralangan bo'ladi, ya'ni shunday $M>0$ con topilib, barcha $n\in\mathbb{N}$ uchun $|a_n x_0^n|<M$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bu tengsizlikni e'tiborga olib quyidagini topamiz:

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \le M \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n.$$

Endi ushbu

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = |a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \ldots + |a_n x^n| + \ldots \qquad (4)$$

qator bilan birga quyidagi

$$\sum_{n=0}^{\infty} M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n = M + M\left|\frac{x}{x_0}\right| + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \cdots + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \cdots \qquad (5)$$

qatorni qaraylik. Bunda, birinchidan $\left|\frac{x}{x_0}\right|<1$ bo'lganligi sababli, (5) qator yaqinlashuvchi, ikkinchidan (4) qatorning har bir hadi (5) qatorning har bir hadidan katta emas. U holda sonli qatorlarni taqqoslash teoremasiga ko'ra (4) qator yaqinlashuvchi bo'ladi. Demak, (1) darajali qator absolyut yaqinlashuvchi.

Natija. Agar (1) qator x ning $x=x_1$ ($x_1\neq 0$) qiymatida uzoqlashuvchi bo'lsa, u holda (1) qator x ning $|x|>|x_1|$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida uzoqlashuvchi bo'ladi.

Isboti. Faraz qilaylik (1) qator $|x|>|x_1|$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi x nuqtada yaqinlashuvchi bo'lsin. U holda Abel teoremasiga ko'ra (1) qator $x=x_1$ nuqtada ham yaqinlashuvchi bo'ladi. Bu ziddiyat natijaning o'rinli ekanligini isbotlaydi.

1.3. Darajali qatorning yaqinlashish sohasi, yaqinlashish radiusi

2-teorema. Agar (1) darajali qator x ning ($x\neq 0$) ba'zi qiymatlarida yaqinlashuvchi, ba'zi qiymatlarida uzoqlashuvchi bo'lsa, u holda shunday yagona $r>0$ son topilib, (1) darajali qator x ning $|x|<r$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi qiymatlarida absolyut yaqinlashuvchi, $|x|>r$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi qiymatlarida uzoqlashuvchi bo'ladi.

Isboti. $\{|x'|\}$, bu yerda x' yaqinlashish nuqtalari, to'plamni qaraylik. Bu to'plam yuqoridan chegaralangan yoki chegaralanmagan bo'lishi mumkin. Faraz qilaylik $\{|x'|\}$ to'plam yuqoridan chegaralangan va uning aniq yuqori chegarasi r bo'lsin. Agar $|x|>r$ bo'lsa, x barcha x' lardan farq qiladi, demak bu x nuqtada qator uzoqlashuvchi bo'ladi. Agar $|x|<r$ bo'lsa, u holda aniq yuqori chegaraning ta'rifiga ko'ra shunday x' topiladiki $|x|<|x'|\le r$ bo'ladi. Bundan Abel teoremasiga ko'ra berilgan qator x ning

$|x|<r$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi qiymatlarida absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi.

Yuqoridagi teoremada topilgan r soni (1) darajali qatorning *yaqinlashish radiusi*, $(-r;r)$ interval darajali qatorning *yaqinlashish intervali* deyiladi.

Agar darajali qator faqat $x=0$ nuqtadagina yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $r=0$; agar darajali qator ixtiyoriy x haqiqiy qiymatida yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $r=+\infty$ deb qabul qilamiz.

r chekli bo'lgan holda $x=\pm r$ nuqtalarda qatorning yaqinlashish masalasini hal qilish uchun darajali qatorni shu nuqtalarda alohida tekshirish kerak.

Darajali qatorning yaqinlashish radiusini topish uchun Koshining radikal yoki Dalamber alomatlaridan foydalanish mumkin.

Teorema. Agar (1) qatorda

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=l$$

limit mavjud bo'lib, $l\neq 0$ bo'lsa, u holda bu qatorning yaqinlashish radiusi $r=\frac{1}{l}$ bo'ladi.

Isboti. Aytaylik, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=l$, $l\neq 0$ bo'lsin. Bu tenglikdan foydalanib, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_nx^n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\cdot|x|=l\cdot|x|$ ekanligini topamiz. Bundan Koshi alomatiga ko'ra $l\cdot|x|<1$ yoki $|x|<\frac{1}{l}$ bo'lganda $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ qator yaqinlashuvchi, $l\cdot|x|>1$ yoki $|x|>\frac{1}{l}$ bo'lganda esa qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

Demak, berilgan darajali qatorning yaqinlashish radiusi $r=\frac{1}{l}$ bo'lar ekan.

Shunga o'xshash quyidagi teorema isbotlanadi:

Teorema. Agar (1) qatorda

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=l$$

limit mavjud bo'lib, $l\neq 0$ bo'lsa, u holda bu qatorning yaqinlashish radiusi $r=\frac{1}{l}$ bo'ladi.

Xulosa qilib aytganda darajali qatorning yaqinlashish radiusi uning koeffitsientlari bilan to'liq aniqlanadi.

1-*misol.* $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n3^{n+1}}$ qatorning yaqinlashish radiusi, yaqinlashish intervali va yaqinlashish sohasini toping.

Yechish. Berilgan qator uchun $a_n=\frac{1}{n3^{n+1}}$. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=l$ ni hisoblaymiz: $l=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n3^{n+1}}}=\frac{1}{3}\sqrt[n]{\frac{1}{n3}}=\frac{1}{3}$, demak, qatorning yaqinlashish radiusi r=3, yaqinlashish intervali (–3;3). Berilgan qatorni yaqinlashish intervali uchlarida yaqinlashishga tekshiramiz: x=3 da $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n3^{n+1}}=\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}$. Bu esa garmonik qator, demak berilgan qator x=3 nuqtada uzoqlashuvchi. x= –3 da $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n}{n3^{n+1}}=\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$. Bu Leybnits qatori, yaqinlashuvchi.

Demak, berilgan darajali qatorning yaqinlashish sohasi [–3;3) to'plamdan iborat.

2-*misol.* $\sum_{n=0}^{\infty}n!x^n$ qatorning yaqinlashish radiusi, yaqinlashish intervali va sohasini toping.

Yechish. Ushbu misolda $a_n=n!$ va $a_{n+1}=(n+1)!$. Bunda $\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=l$ va $r=\frac{1}{l}$ formulalardan, yoki $r=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ formuladan foydalanamiz. U holda $r=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$, bundan berilgan darajali qator faqat x=0 nuqtadagina yaqinlashuvchi ekanligi kelib chiqadi.

Yuqoridagi teoremalar darajali qator yaqinlashish radiusini topishning yetarli shartlarini beradi. Ba'zi hollarda darajali qatorning yaqinlashish radiusini topish uchun yuqoridagi teoremalarni bevosita qo'llab bo'lmaydi. Masalan, ushbu $\sum_{n=0}^{\infty}nx^{2n}$ qator uchun $a_n=\begin{cases}n, \text{ agar } n \text{ juft bo'lsa,}\\ 0, \text{ agar } n \text{ toq bo'lsa}\end{cases}$ bo'lib, $r=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ formuladan foydalanib bo'lmaydi.

Darajali qatorning yaqinlashish radiusini topishning umumiy formulasi mavjud bo'lib, u Koshi-Adamar formulasi deb yuritiladi.

2-§. Koshi-Adamar formulasi

Ushbu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ darajali qator berilgan bo'lsin. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$\rho = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}, \quad 0 \le \rho \le +\infty \tag{1}$$

$$r = \begin{cases} 0, & \text{agar } \rho = +\infty, \\ \dfrac{1}{\rho}, & \text{agar } 0 < \rho < \infty, \\ +\infty, & \text{agar } \rho = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Teorema. Faraz qilaylik $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ (3) darajali qator, ρ va r sonlar (1) va (2) formulalar bilan aniqlangan bo'lsin.

U holda

a) $r=0$ da (3) qator ixtiyoriy $x \in \mathbf{R}$ da $(x \ne 0)$ uzoqlashuvchi bo'ladi;

b) $r = +\infty$ da (3) qator barcha $x \in \mathbf{R}$ da absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi;

c) $0 < r < \infty$ (3) qator $|x| < r$ da absolyut yaqinlashuvchi, $|x| > r$ da uzoqlashuvchi bo'ladi.

Isboti. a) $r=0$ bo'lsin. U holda $\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$ bo'ladi. Demak $\{a_n\}$ ketma-ketlikning shunday $\{a_{n(k)}\}$ qism ketma-ketligi mavjudki, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n(k)]{|a^{n(k)}|} = +\infty$ bo'ladi.

Faraz qilaylik, x $(x \ne 0)$ ixtiyoriy tayin son bo'lsin. U holda shunday k_0 nomer topilib, barcha $k \ge k_0$ larda $\sqrt[n(k)]{|a_{n(k)}|} > \frac{1}{|x|}$ tengsizlik bajariladi. Bundan $|a_{n(k)} \cdot x^{n(k)}| > 1$ tengsizlik hosil bo'ladi. Bu umumiy hadi $a_n x^n$ bo'lgan ketma-ketlik nolga intilmasligini, ya'ni $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ qator yaqinlashishining zaruriy sharti bajarilmasligini bildiradi. Demak, $x \ne 0$ da (3) qator uzoqlashuvchi ekan.

b) $r = +\infty$ bo'lsin. Bundan $\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$. Demak, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ bo'ladi. Faraz qilaylik $x \ne 0$ bo'lsin. U holda shunday n_0 nomer topilib barcha $n \ge n_0$ larda $\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{2|x|}$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. So'ngi tengsizlikdan $|a_n x^n| < \frac{1}{2^n}$ hosil bo'ladi. Taqqoslash teoremasiga ko'ra (3) qatorning absolyut yaqinlashishi kelib chiqadi.

c) $0 < r < +\infty$, ya'ni $0 < \rho = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|} < +\infty$ bo'lsin. Faraz qilaylik x ushbu $|x| > r$ tengsizlikni, ya'ni $\rho > \frac{1}{|x|}$ tengsizlikni qanoatlantiradi. U holda shunday qism ketma-ketlik $\{a_{n(k)}\}$ topiladiki, barcha $k \geq 1$ da $\sqrt[n(k)]{|a_{n(k)}|} > \frac{1}{|x|}$ bo'ladi. Bundan $|a_{n(k)} x^{n(k)}| > 1$ tengsizlik, bundan esa $\{a_n x^n\}$ ketma-ketlik $n \to \infty$ da 0 ga intilmasligi, ya'ni (3) qatorning uzoqlashuvchi ekanligi kelib chiqadi.

Endi $x \neq 0$ va $|x| < r$ bo'lsin. So'ngi tengsizlikni $|x|\rho < 1$ deb yozib olish mumkin. Haqiqiy sonlarning zichlik xossasiga ko'ra shunday α son mavjudki, $|x|\rho < \alpha < 1$ bo'ladi. Bundan $\rho < \frac{\alpha}{|x|}$ tengsizlikni yozib olish mumkin.

$\rho = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{\alpha}{|x|}$ bo'lganligi sababli, shunday n_0 nomer topilib barcha $n > n_0$ larda $\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{\alpha}{|x|}$ tengsizlik, demak $|a_n x^n| < \alpha^n$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha^n$ $(0 < \alpha < 1)$ yaqinlashuvchi qator, va taqqoslash teoremasidan (3) qatorning absolyut yaqinlashuvchi ekanligi kelib chiqadi.

1-*misol.* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 4^n x^{3n}$ qatorning yaqinlashish radiusini toping.

Yechish. (1) formuladan foydalanamiz: $\rho = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3n]{4^n} = \sqrt[3]{4}$. Demak, berilgan qatorning yaqinlashish radiusi $r = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ ga teng.

Bu misolni quyidagicha ham yechish mumkin. $z = 4x^3$ belgilash kiritamiz. U holda berilgan qator $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^n$ ko'rinishga keladi. Bu qator $|z|<1$ da yaqinlashuvchi, $|z|>1$ da uzoqlashuvchi. Demak, berilgan qator $|x| < \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$

da yaqinlashuvchi, $|x|>\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ da uzoqlashuvchi bo'ladi. Bundan qatorning yaqinlashish radiusi $r=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ ekanligi kelib chiqadi.

2-*misol.* $\sum_{n=1}^{\infty}(2+\sin\frac{\pi n}{4})^n x^n$ qatorning yaqinlashish radiusini toping.

Yechish. $\rho=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|2+\sin\frac{\pi n}{4}\right|^n}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|2+\sin\frac{\pi n}{4}\right|=3,$ bundan $r=\frac{1}{3}$.

Odatda, $r=\frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}$ formulaga *Koshi-Adamar formulasi* deyiladi.

3-§. Darajali qatorlarning xossalari

Quyida darajali qatorlarning xossalarini ko'rib o'tamiz. Darajali qatorlar funksional qatorlarning xususiy ko'rinishlaridan biri bo'lganligi sababli, funksional qatorlarning xossalari darajali qatorlar uchun ham o'rinli bo'ladi.

Bizga

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+... \qquad (1)$$

darajali qator berilgan bo'lsin.

1-*xossa.* Agar (1) qatorning yaqinlashish radiusi r ($r>0$) bo'lsa, u holda bu qator $[-c;c]$ ($0<c<r$) kesmada tekis yaqinlashuvchi bo'ladi.

Isboti. (1) darajali qatorning yaqinlashish radiusi r bo'lganligi sababli, u $(-r;r)$ intervalda absolyut yaqinlashuvchi, xususan $c<r$ da ham (1) absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi.

Demak,

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|c^n=|a_0|+|a_1|c+|a_2|c^2+...+|a_n|c^n+... \qquad (2)$$

qator yaqinlashuvchi.

Ixtiyoriy $x\in[-c;c]$ uchun har doim $|a_nx^n|\le|a_n|c^n$ bo'lganligidan (2) qator quyidagi qator uchun majorant qator bo'ladi:

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_nx^n|=|a_0|+|a_1x|+|a_2x^2|+...+|a_nx^n|+... .$$

U holda Veyershtrass teoremasiga ko'ra, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ qator $[-c;c]$ kesmada tekis yaqinlashuvchi bo'ladi.

Shuni ham aytib o'tish kerakki, teoremadagi c sonini r ga yetarlicha yaqin qilib olish mumkin, lekin $(-r;r)$ intervalda darajali qator tekis yaqinlashishi shart emas. Masalan

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

darajali qator $(-1;1)$ oraliqda yaqinlashuvchi ($r=1$), lekin u bu oraliqda tekis yaqinlashuvchi emas.

2-xossa. Agar $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ darajali qatorning yaqinlashish radiusi $r>0$ bo'lsa, u holda bu qatorning $S(x)= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ yig'indisi $(-r;r)$ intervalda uzluksiz funksiya bo'ladi.

Isboti. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ darajali qatorning yaqinlashish intervali $(-r;r)$ dan ixtiyoriy x nuqtani olaylik. Ravshanki, $|x|<r$. Ushbu $|x|<c<r$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi c sonini olaylik. Darajali qatorning 1-xossasiga ko'ra u $[-c;c]$ kesmada tekis uzluksiz, bundan berilgan qatorning yig'indisi shu kesmada, demak, x nuqtada ham, uzluksiz bo'ladi. x ning ixtiyoriyligidan darajali qatorning $S(x)$ yig'indisi $(-r;r)$ intervalda uzluksiz funksiya bo'ladi.

3-xossa. Agar $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ darajali qatorning yaqinlashish radiusi $r>0$ bo'lsa, u holda bu qatorni $[a;b]$ ($[a;b]\subset(-r;r)$) kesmada hadma-had integrallash mumkin.

Isboti. Shunday c ($0<c<r$) topish mumkinki $[a;b]\subset[-c;c]\subset(-r;r)$ bo'ladi. Berilgan qator $[-c;c]$ da, demak, $[a;b]$ da ham, tekis yaqinlashuvchi bo'ladi. Tekis yaqinlashuvchi funksional qatorning xossalariga ko'ra bu qator yig'indisi $[a;b]$ da uzluksiz bo'ladi. U holda bu qatorni shu kesmada hadma-had integrallash mumkin:

$$\int_a^b S(x)dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}.$$

Xususan, $a=0$, $b=x$ ($|x|<r$) bo'lganda $\int_0^x S(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ bo'ladi. Bu qatorning yaqinlashish radiusi ham r ga teng bo'ladi. Haqiqatan ham, Koshi-Adamar formulasidan foydalanib quyidagini topamiz:

$$\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|\frac{a_n}{n+1}\right|}}=\frac{1}{\frac{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+1}}}=\frac{1}{\frac{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+1}}}=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+1}=r\cdot 1=r.$$

4-xossa. Agar $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ darajali qatorning yaqinlashish radiusi $r>0$ bo'lsa, u holda bu qatorni $(-r;r)$ da hadma-had differensiallash mumkin.

Isboti. Teoremani isbotlash uchun II-bob 6-§ dagi 3-teoremadan foydalanamiz. Buning uchun dastlab $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ qatorni hadma-had differensiallashdan hosil bo'lgan quyidagi

$$\sum_{n=1}^{\infty}na_n x^{n-1}=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots \qquad (3)$$

qatorning $|x_0|<r$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy x_0 nuqtada yaqinlashuvchi bo'lishini ko'rsatamiz. Ushbu $|x_0|<c<r$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi c sonni olamiz. U holda $\frac{1}{c}|x_0|=q<1$ bo'lib, $|na_nx^{n-1}|=nq^{n-1}\cdot\frac{1}{c}|a_nc^n|$ bo'ladi. Umumiy hadi nq^{n-1} bo'lgan musbat qatorga Dalamber alomatini tatbiq etib, uning yaqinlashuvchi ekanligini ko'rsatish qiyin emas. Bundan $\lim\limits_{n\to\infty}nq^{n-1}=0$ kelib chiqadi. Demak, limitning ta'rifiga ko'ra $c>0$ uchun shunday n_0 topilib, barcha $n>n_0$ da $|nq^{n-1}|<c$ tengsizlik bajariladi. Natijada barcha $n>n_0$ da

$$|na_nx^{n-1}|\le|a_nc^n| \qquad (4)$$

tengsizlikka kelamiz.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nc^n$ qator absolyut yaqinlashuvchi, chunki tanlashimizga ko'ra $c\in(-r,r)$. (4) tengsizlikni e'tiborga olsak, Veyershtrass alomatiga ko'ra (3) qatorning $(-r,r)$ da yaqinlashuvchi bo'lishi kelib chiqadi. Demak, bu qator $[-r,r]$ da tekis yaqinlashadi.

Shunday qilib, II-bob 6-§ dagi 3-teorema shartlari bajariladi va bu teoremaga ko'ra

$$S'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_nx^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$$

bo'ladi.

Differensiallash natijasida hosil bo'lgan darajali qatorning yaqinlashish radiusi r ga teng bo'lishini Koshi-Adamar formulasidan foydalanib ko'rsatish mumkin. Buni o'quvchilarga mashq sifatida havola qilamiz.

Yuqorida isbotlangan xossadan quyidagi natija kelib chiqadi:

Natija. Agar $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ darajali qatorning yaqinlashish radiusi $r>0$ bo'lsa, u holda bu qatorni $(-r;r)$ da istalgan marta hadma-had differensiallash mumkin va hosil bo'lgan qatorlarning yaqinlashish radiusi r ga teng bo'ladi.

1-*misol.* Quyidagi darajali qatorlarning yaqinlashish sohalarini toping:

a) $1+x+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{2\cdot 3}+...+\frac{x^n}{n(n+1)}+...;$

b) $1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+...+\frac{x^n}{n}+...;$

c) $1+x+x^2+x^3+...+x^n+...$.

Yechish. b) qator a) qatorni hadma-had differensiallashdan, c) qator b) qatorni hadma-had differensiallashdan hosil bo'lgan. Demak, bu qatorlarning yaqinlashish radiuslari teng. c) qator mahraji x ga teng bo'lgan cheksiz kamayuvchi geometrik progressiyadir, bu qator $|x|<1$ da yaqinlashuvchi va $|x|>1$ da uzoqlashuvchidir. Demak, $r=1$.

Berilgan qatorlarni yaqinlashish intervali uchlarida yaqinlashishga tekshiramiz.

$|x|=1$ bo'lganda a) qator absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi (mustaqil tekshiring), demak a) qatorning yaqinlashish sohasi $[-1;1]$ kesmadan iborat.

b) qator $x=-1$ da shartli yaqinlashuvchi, $x=1$ da uzoqlashuvchi, demak b) qatorning yaqinlashish sohasi $[-1;1)$ to'plamdan iborat.

c) qator $|x|=1$ da uzoqlashuvchi, demak c) qatorning yaqinlashish sohasi $(-1;1)$ intervaldan iborat.

Bu misol berilgan darajali qatorni hadma-had differensiallash natijasida hosil bo'lgan qatorning yaqinlashish radiusi o'zgarmasa ham, lekin uning yaqinlashish sohasi berilgan darajali qatornining yaqinlashish sohasidan farq qilishi mumkinligini ko'rsatadi.

2-*misol.* $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ qator yig'indisini toping.

Yechish. Ushbu $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ qatorni qaraymiz. Bu qator $|x|<1$ bo'lganda yaqinlashadi va uning yig'indisi $\frac{x}{1-x}$ ga teng, ya'ni $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$. Qatorni hadma-had differensiallab, quyidagini hosil qilamiz: $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

Bundan $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$ tenglikka ega bo'lamiz. Bu tenglik $|x|<1$ da o'rinli.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

1. Darajali qator deb qanday qatorga aytiladi?
2. Darajali qatorning umumiy ko'rinishini yozing.
3. Darajali qatorning aniqlanish sohasi qanday to'plamdan iborat?
4. Darajali qatorning yaqinlashish sohasi bo'sh to'plam bo'lishi mumkinmi?
5. Abel teoremasini isbotlang.
6. Darajali qatorning yaqinlashish radiusi nima?
7. Agar darajali qatorning yaqinlashish radiusi 0, R, $+\infty$ bo'lsa, darajali qator yaqinlashish sohasi qanday bo'ladi?
8. Darajali qator yaqinlashish radiusi qanday formulalar bilan hisoblanadi?
9. Darajali qatorning yaqinlashish intervali nima?
10. Darajali qatorning yaqinlashish sohasi nima?
11. Darajali qatorning yaqinlashish sohasini topish uchun nima ishlar bajariladi?
12. Darajali qatorning qanday xossalarini bilasiz?
13. Darajali qatorning yig'indisi yaqinlashish sohasida chegaralangan bo'ladimi?
14. Darajali qatorning yig'indisi yaqinlashish sohasida tekis uzluksiz bo'ladimi?
15. Darajali qatorni hadma-had integrallash natijasida hosil bo'lgan qatorning yaqinlashish radiusi haqida nima deyish mumkin? Javobingizni asoslang.
16. Darajali qatorni hadma-had differensiallash natijasida hosil bo'lgan qatorning yaqinlashish radiusi haqida nima deyish mumkin? Javobingizni asoslang.

Mustaqil yechish uchun misol va masalalar

1. Quyidagi darajali qatorlarning yaqinlashish sohalarini toping:

a) $1-3\sqrt{2}x+...+(-3)^{n-1}\sqrt{n}x^{n-1}+...;$

b) $1+\frac{6x}{3^2\sqrt{5}}+\frac{36x^2}{5^2\sqrt{25}}+...+\frac{6^n x^n}{(2n-1)^2\sqrt{5^n}}+...;$

c) $\frac{(x-2)}{2\cdot 3}+\frac{(x-2)^2}{4\cdot 3^2}+...+\frac{(x-2)^n}{2n\cdot 3^n}+...;$

d) $\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+....$

2. Quyidagi darajali qatorlarning yaqinlashish sohalarini toping:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!(x+3)^n}{n^n};$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-5)^n}{n\cdot 4^n};$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3+(-1)^n)^n}{n}(x+1)^n;$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+2\cos(\pi n/4))^n}{n^2}(x-1)^n.$

3. Quyidagi darajali qatorlarning yaqinlashish intervali va yig'indisini toping:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n};$ b) $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n;$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(2n-1)x^{2n-2};$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{2}x^n.$

4. Agar $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ va $\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n$ darajali qatorlarning yaqinlashish radiuslari mos ravishda R_1 va R_2 bo'lsa, *a*) $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$, *b*) $\sum_{n=0}^{\infty}a_n b_n x^n$ qatorlarning yaqinlashish radiuslari qanday bo'ladi?

Javoblar: 1. a) $-1/3<x<1/3$; b) $-\frac{\sqrt{5}}{6}\le x\le\frac{\sqrt{5}}{6}$; c) $-1\le x<5$; d) $(-\infty;+\infty)$;

2. a) $-3-e<x<-3+e$; b) $1\le x\le 9$; c) $-1{,}25<x<-0{,}75$; d) $2/3<x<4/3$

4-§. Funksiyani darajali qatorga yoyish. Yoyilmaning yagonaligi

Yuqoridagi paragrafda isbotlangan ikkinchi va to'rtinchi xossalardan har qanday

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+...$$

darajali qator o'zining yaqinlashish intervali $(-r;r)$ da uzluksiz $S(x)$ funksiyani (darajali qator yig'indisini) ifodalab, bu funksiya shu oraliqda istalgan tartibdagi hosilaga ega bo'lishi kelib chiqadi.

Endi biror oraliqda istalgan tartibli hosilaga ega bo'lgan $f(x)$ funksiya uchun yig'indisi shu funksiyaga teng bo'ladigan (o'z yaqinlashish oralig'ida) darajali qatorni topish masalasi bilan shug'ullanamiz.

Ta'rif. Biror L oraliqda $f(x)$ funksiya berilgan bo'lsin. Agar L oraliqda yaqinlashuvchi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ (bu yerda a, a_0, a_1, ... biror haqiqiy sonlar) qator mavjud bo'lib, uning yig'indisi $f(x)$ funksiyaga teng, ya'ni ixtiyoriy $x \in L$ uchun

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + ... + a_n(x-a)^n + ... \qquad (1)$$

bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya L oraliqda *darajali qatorga yoyilgan* deyiladi.

Bu holda $f(x)$ funksiya L oraliqda x-a ayirmaning darajalari bo'yicha darajali qatorga yoyilgan, deb ham aytiladi. (1) tenglikning o'ng tomonidagi qatorni $f(x)$ funksiyaning x-a ayirma darajalari bo'yicha *yoyilmasi* deyiladi. Odatda, L oraliq sifatida markazi a nuqtada bo'lgan (a-r; a+r) ($r \neq 0$) interval qaraladi.

Berilgan $f(x)$ funksiyani x-a ayirmaning darajalari bo'yicha darajali qatorga yoyishdan oldin bunday yoyilma nechta?- degan savolga javob berish lozim. Bu savolga quyidagi teorema javob beradi.

Teorema. Agar $f(x)$ funksiya a nuqtani o'z ichida saqlaydigan biror intervalda x-a ayirmaning darajalari bo'yicha darajali qatorga yoyilgan bo'lsa, u holda bunday yoyilma yagona bo'ladi.

Isboti. Faraz qilaylik, (a-r; a+r) ($r \neq 0$) intervalda (1) tenglik o'rinli bo'lsin, bunda a_0, a_1, a_2,... lar hozircha noma'lum koeffitsientlar deb qaraladi. Bu koeffitsientlarni topish uchun darajali qatorlarni hadma-had differensiallash mumkinligidan va $f(x)$ funksiya hamda uning hosilalarining a nuqtadagi qiymatlaridan foydalanamiz. $f(x)$ funksiya (a-r; a+r) ($r \neq 0$) intervalda darajali qator yig'indisi bo'lganligi sababli, u istalgan tartibli hosilaga ega va bu hosilalarni (1) ni hadma-had differensiallash natijasida topish mumkin:

$$f'(x)=1 \cdot a_1+2a_2(x-a)+3a_3(x-a)^2+...+na_n(x-a)^{n-1}+...,$$

$$f''(x)=1 \cdot 2a_2+2 \cdot 3a_3(x-a)+...+(n-1) \cdot na_n(x-a)^{n-2}+...,$$

$$f'''(x)=1 \cdot 2 \cdot 3a_3+...+(n-2) \cdot (n-1) \cdot na_n(x-a)^{n-3}+...,$$

. . . . ,

$$f^{(n)}(x)=1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1)na_n+...,$$

. . . .

(1) va yuqoridagi ayniyatlarda x=a deb olib, quyidagilarni hosil qilamiz:

$f(a)=a_0, f'(a)=1\cdot a_1, f''(a)=2!a_2, \ldots, f^{(n)}(a)=n!a_n, \ldots$

Bundan

$$a_0 = f(a),\ a_1 = \frac{f'(a)}{1!},\ a_2 = \frac{f''(a)}{2!}, \ldots,\ a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \ldots \qquad (2)$$

Shunday qilib, berilgan intervalda yig'indisi $f(x)$ funksiyaga teng bo'lgan darajali qatorning a_0, a_1, a_2,... koeffitsientlari $f(x)$ funksiya va a nuqta orqali (2) formulalar yordamida bir qiymatli topiladi. Bu esa berilgan intervalda $f(x)$ funksiya yoyilmasining yagonaligini isbotlaydi.

5-§. Teylor qatori

5.1. Teylor qatori tushunchasi. Aytaylik $f(x)$ funksiya $x=a$ nuqtaning atrofida berilgan bo'lib, shu atrofda istalgan tartibli hosilaga ega bo'lsin. Bu holda 3-§ dagi (2) formulalar yordamida a_n (n=1, 2, 3...) koeffitsientlarni hisoblash mumkin.

Ta'rif. Ushbu

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots \qquad (1)$$

ko'rinishdagi qator $f(x)$ funksiyaning a nuqta atrofidagi *Teylor qatori* deyiladi.

Izoh. (1) qator yig'indisi $f(x)$ funksiyaga teng bo'lishi shart emas.

Agar $a=0$ bo'lsa, u holda Teylor qatori quyidagi ko'rinishga keladi:

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots \qquad (2)$$

Teylor qatorining xususiy holi bo'lgan bu qator *Makloren qatori* deb yuritiladi.

Yuqoridagi ta'rifni e'tiborga olgan holda 4-§ da isbotlangan *teoremani* quyidagicha aytish mumkin:

Agar $f(x)$ funksiya a nuqtaning biror atrofida (x-a) ayirmaning darajalari bo'yicha darajali qatorga yoyilsa, u holda bu qator funksiyaning a nuqta atrofidagi Teylor qatori bo'ladi.

Bu natija berilgan funksiyani darajali qatorga yoyish haqidagi masalani yechishga oydinlik kiritadi. Chunki biz darajali qator koeffitsientlarining ko'rinishini bilamiz. Bundan esa $f(x)$ funksiyani (x-a) ayirmaning darajalari bo'yicha qatorga yoyish masalasini a nuqtada cheksiz marta differensiallanuvchi $f(x)$ funksiyaga nisbatan aytish mumkinligi kelib chiqadi. Ammo bu shart $f(x)$ funksiyani Teylor qatoriga yoyishning zaruriy sharti bo'lib, yetarli emas. Fikrimizning dalili sifatida quyidagi funksiyani qaraymiz:

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{agar } x\neq 0, \\ 0, & \text{agar } x=0. \end{cases}$$

Bu funksiya (-∞;+∞) oraliqda cheksiz marta differensiallanuvchi. Haqiqatan ham, agar $x\neq0$ bo'lsa, u holda $f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}=P_3\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}$, $f''(x)=-\left(\frac{6}{x^4}+\frac{4}{x^6}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}=P_6\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}$, umuman olganda matematik induksiya metodi yordamida n-tartibli hosila uchun $f^{(n)}(x)=P_{3n}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}$ formulaning o'rinli ekanligini isbotlash mumkin, bu yerda $P_{3n}\left(\frac{1}{x}\right)$ orqali $\frac{1}{x}$ ga nisbatan $3n$ darajali biror ko'phad belgilangan.

Bu funksiyaning $x=0$ nuqtada ham cheksiz marta differensiallanuvchi ekanligini isbotlaymiz. Avval $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x^m}e^{-\frac{1}{x^2}}\right)$ limitni hisoblaymiz, bu yerda m natural son. Buning uchun $\frac{1}{x^2}=y$ belgilash kiritamiz. U holda $x\to0$ da $y\to\infty$ bo'ladi va $\lim\limits_{x\to0}\left|\frac{1}{x^m}e^{-\frac{1}{x^2}}\right|=\lim\limits_{y\to+\infty}\left|\frac{y^{\frac{m}{2}}}{e^y}\right|=\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{y^{\frac{m}{2}}}{e^y}=0$ bo'ladi. Bunda so'ngi limitning o'rinli ekanligini ko'rsatish uchun Lopital qoidasidan foydalanish yetarli. So'ngi tenglikdan

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^m}e^{-\frac{1}{x^2}}\right)=0 \tag{3}$$

ekanligi kelib chiqadi. Bundan esa ixtiyoriy $P_k\left(\frac{1}{x}\right)=a_0+a_1\frac{1}{x}+...+a^k\frac{1}{x^k}$ ko'phad uchun

$$\lim_{x\to0}\left(P_k\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}\right)=\sum_{m=0}^{k}\lim_{x\to0}\left(a_m\frac{1}{x^m}e^{-\frac{1}{x^2}}\right)=0 \tag{4}$$

kelib chiqadi.

Endi funksiya hosilasining ta'rifi va (3) tenglikdan foydalanib, funksiyaning 0 nuqtadagi hosilasini hisoblaymiz:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x^2}}\right)=0.$$

Faraz qilaylik, biror n uchun $f^{(n)}(0)=0$ bo'lsin. U holda n+1 tartibli hosilaning ta'rifi va (4) munosabatdan

$$f^{(n+1)}(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f^{(n)}(x)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{P_{3n}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to 0}P_{3n+1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}=0,$$

demak, matematik induksiya prinsipiga ko'ra $f^{(m)}(0)=0$ tenglik barcha natural m larda o'rinli bo'ladi.

Shunday qilib, $f(x)$ funksiyaning x=0 nuqtadagi barcha Teylor koeffitsientlari 0 ga teng va bu funksiyaning mos Teylor qatori quyidagi ko'rinishda bo'ladi: $0+0x+0x^2+\ldots+0x^n+\ldots$. Bu qator, ravshanki, $(-\infty;+\infty)$ da yaqinlashuvchi bo'lib, yig'indisi 0 ga teng. Ammo qaralayotgan $f(x)$ funksiya aynan 0 ga teng emas. Qaralayotgan $f(x)$ funksiya va uning Teylor qatori qiymatlari faqat x=0 nuqtada teng bo'ladi.

Bu misoldan ikkita har xil funksiyalar aynan bitta oraliqda bir xil Teylor qatoriga ega bo'lishi mumkinligi kelib chiqadi. Masalan, agar $\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n$ bo'lsa, u holda $\varphi(x)+f(x)$, bu yerda $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{(x-a)^2}}, & agar\ x\neq a, \\ 0, & agar\ x=a \end{cases}$ funksiya ham x=a nuqtada $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n$ Teylor qatoriga ega bo'ladi.

Endi ushbu $\psi(x)=\frac{1}{1+x^2}$ funksiyani qaraymiz. Bu funksiya $(-\infty;+\infty)$ oraliqda cheksiz marta differensiallanuvchi, uning x=0 nuqta atrofidagi Teylor qatori $1-x^2+x^4-x^6+\ldots$ bo'ladi. Ammo bu qator $(-\infty;+\infty)$ oraliqda emas, balki (-1;1) intervalda yaqinlashuvchi. Demak, $\psi(x)$ funksiya va uning Teylor qatori yig'indisi faqat (-1;1) intervalda ustma-ust tushadi.

5.2. Funksiyani Teylor qatoriga yoyish sharti. Aytaylik, $f(x)$ funksiyaning biror $(a-r,\ a+r)$ intervalda cheksiz marta differensiallanuvchi bo'lsin. Bu funksiya va uning hosilalarining x=a nuqtadagi qiymatlarini hisoblab, Teylor qatorini yozib olamiz:

$$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots \qquad (5)$$

Ushbu savolga javob izlaymiz: qachon tuzilgan qator $(a\text{-}r,\ a+r)$ intervalda $f(x)$ funksiyaga yaqinlashadi?

Berilgan $f(x)$ funksiya $(a\text{-}r,\ a+r)$ intervalda cheksiz marta differensiallanuvchi bo'lganligi sababli, shu intervaldan olingan ixtiyoriy x va istalgan n uchun Teylor formulasi o'rinli bo'ladi:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+R_n(x), \quad (6)$$

bu yerda $R_n(x)$ bu formulaning qoldiq hadi. Shu formula yordamida yuqorida berilgan savolga javob berish mumkin.

1-teorema. $f(x)$ funksiyaning (5) Teylor qatori biror $(a-r;a+r)$ intervalda $f(x)$ funksiyaga yaqinlashishi uchun $f(x)$ funksiya Teylor formulasining $R_n(x)$ qoldiq hadi $(a-r;a+r)$ intervaldan olingan barcha x lar uchun n cheksiz kattalashganda nolga intilishi zarur va yetarli.

Isboti. Zaruriyligi. (5) qator yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi $f(x)$ ga teng bo'lsin. U holda bu qatorning n-xususiy yig'indisi

$$S_n(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$$

uchun $(a-r;a+r)$ intervaldan olingan ixtiyoriy x da

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x)=f(x)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bundan esa $(a-r;a+r)$ intervaldan olingan ixtiyoriy x uchun

$$\lim_{n\to\infty}(f(x)-S_n(x))=\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Yetarliligi. $(a-r;a+r)$ intervaldan olingan ixtiyoriy x da $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$ bo'lsin. U holda $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x)-S_n(x))$ bo'lib, bundan $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)=f(x)$ bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa (5) qator $(a-r;a+r)$ da yaqinlashuvchi bo'lib, uning yig'indisi $f(x)$ ga teng ekanligini bildiradi.

Quyida funksiyaning Teylor qatoriga yoyilishining yetarli shartini ifodalovchi teoremani keltiramiz.

2-teorema. Aytaylik, $f(x)$ funksiya $(a-r;a+r)$ intervalda istalgan tartibdagi hosilaga ega bo'lsin. Agar shunday o'zgarmas M soni mavjud bo'lsaki, barcha $x\in(a-r;a+r)$, hamda barcha $n=0, 1, 2, \dots$ uchun

$$|f^{(n)}(x)|\le M$$

tengsizlik bajarilsa, u holda $(a-r;a+r)$ intervalda $f(x)$ funksiya Teylor qatoriga yoyiladi.

Isboti. $f(x)$ funksiya uchun Teylor formulasi (6) ni yozib, uning Lagranj ko'rinishidagi qoldiq hadini

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n \qquad (0<\theta<1)$$

olaylik. U holda

$$|R_n(x)|=\left|\frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n\right|\le M\frac{r^n}{n!} \quad (x\in(a-r;a+r))$$

bo'ladi. Agar $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{r^n}{n!}=0$ bo'lishini e'tiborga olsak, u holda $(a-r;a+r)$ dan olingan ixtiyoriy x uchun $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$ ekanligini aniqlaymiz. Bu esa (5) munosabatning o'rinli bo'lishini bildiradi.

6-§. Ba'zi funksiyalarning Teylor qatorlari

6.1. $f(x)=e^x$ funksiyaning Teylor qatori. Ma'lumki, $f(x)=e^x$ funksiyaning (ixtiyoriy chekli $[-a;a]$ $(a>0)$ kesmadagi) Teylor formulasi

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+R_n(x)$$

bo'lib, uning qoldiq hadi esa Lagranj ko'rinishida quyidagicha bo'ladi:

$$R_n(x)=\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad (0<\theta<1)$$

Har bir $x\in[-a;a]$ da $e^{\theta x}<e^a$ bo'lishini e'tiborga olsak,

$$|R_n(x)|\le\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\cdot e^a$$

ekanligi kelib chiqadi va $n\to\infty$ da u nolga intiladi. Demak, 3-§ dagi 1-teoremaga ko'ra ixtiyoriy chekli x da

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots \qquad (1)$$

formula o'rinli bo'ladi.

6.2. $f(x)=\sin x$ funksiyaning Teylor qatori. Ma'lumki, $f(x)=\sin x$ funksiyaning ixtiyoriy chekli $[-a;a]$ $(a>0)$ kesmadagi Teylor formulasi

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+R_{2n}(x)$$

bo'ladi. Bu formula qoldiq hadining Lagranj ko'rinishidan foydalanib, $[-a;a]$ dan olingan ixtiyoriy x uchun $|R_n(x)|\le\frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!}$ bo'lishini topamiz. Undan $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, ixtiyoriy x uchun

$$\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+... \qquad (2)$$

bo'ladi.

6.3. ***f*(*x*)=cos*x* funksiyaning Teylor qatori.** Bunda $\cos x=(\sin x)'$ ekanligi va darajali qatorni hadma-had differensiallash xossasidan foydalanamiz. U holda ixtiyoriy x uchun

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+...=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad (3)$$

ekanligini topamiz.

6.4. ***f*(*x*)=ln(1+*x*) funksiyaning Teylor qatori.** Ma'lumki, $x\in(-1;1)$ da $1-x+x^2-x^3+...+(-1)^nx^n+...=\frac{1}{1+x}$. Bu qatorni hadma-had integrallab quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\ln(1+x)=\int_0^x\frac{dt}{1+t}=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-t)^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1},$$

yoki

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+.... \qquad (4)$$

Bu qatorning yaqinlashish sohasi $(-1;1]$ to'plamdan iborat.

6.5. ***f*(*x*)=(1+*x*)$^\alpha$, ($\alpha\notin N$) funksiyani Teylor qatoriga yoyish.** Bu funksiyaning Teylor formulasi

$$(1+x)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+...+\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n+R_n(x).$$

Teylor formulasidagi qoldiq hadni Koshi ko'rinishida olamiz:

$$R_n(x)=\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)}{n!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}(1-\theta)^nx^{n+1},\ (0<\theta<1).$$

Uni ushbu

$$R_n(x)=\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)...((\alpha-1)-(n-1))}{n!}x^n\alpha x(1+\theta x)^{\alpha-1}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n$$

ko'rinishda yozib olamiz.

Agar $-1<x<1$ bo'lganda: birinchidan Dalamber alomatidan foydalanib $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$ qatorning yaqinlashishini, bundan esa $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}(\alpha-1)(\alpha-2)\dots((\alpha-1)-(n-1))x^n=0$;

ikkinchidan, $|\alpha x|(1-|x|)^{\alpha-1}<\alpha x(1+\theta x)^{\alpha-1}<|\alpha x|(1+|x|)^{\alpha-1}$, va nihoyat, uchinchidan $\left|\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right|^n\le\left|\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right|<1$ bo'lganligidan $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$ ekanligi kelib chiqadi.

Demak, $|x|<1$ da

$$(1+x)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\dots+\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\dots \qquad (5)$$

bo'ladi.

6.6. Teylor qatoriga yoyishga doir misollar. Uchinchi paragrafda isbotlangan 1-teorema berilgan $f(x)$ funksiyani $x=a$ nuqta atrofida Teylor qatoriga yoyishni quyidagi tartibda bajarishga imkon beradi:

1) $f(x)$ funksiyaning hosilalarini topish;

2) $f(a)$ va $f^{(n)}(a)$ larni hisoblash;

3) $f(x)$ funksiyaga mos bo'lgan Teylor qatorini yozish:

$$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\dots$$

4) yozilgan qatorning $(a-r;a+r)$ yaqinlashish intervalini topish;

5) $f(x)$ funksiya Teylor formulasining $R_n(x)$ qoldiq hadini yozish;

6) $(a-r;a+r)$ intervalga tegishli va $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$ bo'ladigan x lar to'plamini aniqlash.

$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$ shartni qanoatlantiruvchi x lar uchun

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\dots$$

tenglikni yozishimiz mumkin.

1-*misol.* $f(x)=\frac{1}{x}$ funksiyani $x=4$ nuqtaning atrofida Teylor qatoriga yoying.

Yechish. Yuqorida keltirilgan tartibda ish bajaramiz:

1) $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$, $f''(x)=\frac{2!}{x^3}$,..., $f^{(n)}(x)=(-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}$, ...;

2) $f(4)=\frac{1}{4},\ f'(4)=-\frac{1}{4^2},\ f''(4)=\frac{2!}{4^3},\ldots,\ f^{(n)}(4)=(-1)^n\frac{n!}{4^{n+1}},\ldots;$

3) $\frac{1}{4}-\frac{1}{4^2}(x-4)+\frac{1}{4^3}(x-4)^2-\ldots+(-1)^n\frac{1}{4^{n+1}}(x-4)^n+\ldots;$

4) tuzilgan qatorning yaqinlashish radiusi r=4, yaqinlashish intervali (0;8) dan iborat;

5) $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}=\frac{(-1)^{n+1}n!}{(n+1)!\cdot 4^n\cdot(4+\theta(x-4))^n}(x-4)^n=$

$=\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\cdot(4+\theta(x-4))^n}\cdot\frac{(x-4)^n}{4^n}$

6) (0;8) dan olingan ixtiyoriy x uchun

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\cdot(4+\theta(x-4))^n}\cdot\frac{(x-4)^n}{4^n}\right|=0$, bundan $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$, demak,

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4^2}(x-4)+\frac{1}{4^3}(x-4)^2-\ldots+(-1)^n\frac{1}{4^{n+1}}(x-4)^n+\ldots$$

formulaning o‘rinli ekanligi kelib chiqadi.

Odatda, funksiyani Teylor qatoriga yoyishda (1)-(5) yoki cheksiz kamayuvchi geometrik progressiya yig‘indisi

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,\quad |x|<1, \qquad (6)$$

kabi tayyor formulalardan foydalaniladi.

1-misoldagi funksiyani (6) formuladan foydalanib, quyidagicha Teylor qatoriga yoyish mumkin. Avval berilgan funksiyani $\frac{1}{1+t}$ shaklida yozib olishga harakat qilamiz: $\frac{1}{x}=\frac{1}{4+(x-4)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{x-4}{4}\right)}$, $\left|\frac{x-4}{4}\right|<1$ shartda (6) formula o‘rinli, ya’ni $\frac{1}{\left(1+\frac{x-4}{4}\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-4)^n}{4^n}$. Bularni hisobga olsak

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-4)^n}{4^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}\cdot(x-4)^n$$

tenglikka ega bo‘lamiz. Bu tenglik $\left|\frac{x-4}{4}\right|<1$ shartda, ya’ni $x\in(0;8)$ da o‘rinli.

2-*misol.* Ushbu $f(x)=\frac{1}{x^2+5x+6}$ funksiyaning x ning darajalari bo'yicha qatorga yoying.

Yechish: $\frac{1}{x^2+5x+6}$ ratsional funksiyani sodda kasrlarga ajratamiz:

$\frac{1}{x^2+5x+6}=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}$, har bir sodda kasrni x ning darajalari bo'yicha qatorga yoyamiz. Bu holda ham (6) formuladan foydalanamiz.

$$\frac{1}{x+2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n+1}}\cdot x^n,\ \text{bunda } |x|<2.$$

$$\frac{1}{x+3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{3}}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3^n}\cdot x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3^{n+1}}\cdot x^n,\ \text{bunda } |x|<3.$$

Demak, $|x|<2$ da $\frac{1}{x^2+5x+6}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}-\frac{(-1)^{n-1}}{3^n}\right)x^n$ o'rinli bo'ladi.

3-*misol.* $f(x)=\frac{1}{x^2+6x-3}$ funksiyani (x+3) ning darajalari bo'yicha qatorga yoying.

Yechish: (6) formuladan foydalanamiz.

$$\frac{1}{(x+3)^2-12}=-\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{1-\frac{(x+3)^2}{12}}=-\frac{1}{12}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\left(-\frac{(x+3)^2}{12}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{12^{n+1}}\cdot(x+3)^{2n},$$

bu yoyilma

$\left|\frac{(x+3)^2}{12}\right|<1$ da, ya'ni $|x+3|<2\sqrt{3}$ da o'rinli bo'ladi.

4-*misol.* *f(x)=lnx* funksiyani x-1 ning darajalari bo'yicha qatorga yoying.

Yechish: Berilgan funksiyani $f(x)=\ln x=\ln(1+(x-1))$ ko'rinishda yozib olamiz va (5) formuladan foydalanamiz. U holda $|x-1|<1$ shartda $f(x)=\ln x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}$ yoyilma o'rinli bo'ladi.

5-*misol.* $f(x)=2^x$ ni x+2 ning darajalari bo'yicha qatorga yoying.

Yechish: $f(x)=2^x$ funksiyani quyidagicha yozib olamiz: $2^x=2^{x+2-2}=\frac{1}{4}e^{\ln 2^{x+2}}=\frac{1}{4}e^{(x+2)\ln 2}$ va (1) formuladan foydalanib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$2^x=\frac{1}{4}e^{(x+2)\ln 2}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln 2)^n}{n!}(x+2)^n$, bu formula $x\in(-\infty;+\infty)$ da o'rinli.

6-*misol.* $f(x)=\sin^2 x$ ni x ning darjalari bo'yicha qatorga yoying.

Yechish: $\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$ formuladan va (3) dan foydalanamiz. U holda

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-...+(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}+...\right)$$

$$=\frac{2^2x^2}{2\cdot 2!}-\frac{2^4x^4}{2\cdot 4!}+...+(-1)^{n-1}\frac{2^{2n}\cdot x^{2n}}{2\cdot(2n)!}+...=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}$$

Bu formula $x\in(-\infty;\infty)$ da o'rinli.

7-*misol.* $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ funksiyani x-9 ning darajalari bo'yicha qatorga yoying.

Yechish: $\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x-9+9}}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{x-9}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$ Endi (5) formuladan foydalanamiz, bunda $\alpha=-\frac{1}{2}$, x o'rniga $\frac{x-9}{9}$ qo'yamiz. U holda

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!}\cdot\frac{(x-9)^n}{9^n}=$$

$$=\frac{1}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{3\cdot 2^{2n}\cdot n!}(x-9)^n.$$

Bu yoyilma $\left|\frac{x-9}{9}\right|<1$ shartda, ya'ni $|x-9|<9$ da o'rinli bo'ladi.

7-§. Darajali qatorlarning ba'zi bir tatbiqlari

7.1. Darajali qatorlar yordamida taqribiy hisoblash. Darajali qatorlar kuchli (taqribiy) hisoblash vositasi bo'lib xizmat qiladi. Ular yordamida funksiyalar qiymatlarini taqribiy hisoblash mumkin.

1-*misol.* ln1,2 ni 0,0001 aniqlikda hisoblang.

Yechish. ln(1+x) funksiyani x ning darajalari bo'yicha yoyamiz:

$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+...$, bu qator (-1;1] sohada yaqinlashadi. Ushbu qatorda x=0,2 deb olib, ln1,2 ni hisoblash uchun

$$\ln 1{,}2 = 0{,}2 - \frac{0{,}2^2}{2} + \frac{0{,}2^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{0{,}2^n}{n} + \ldots$$

ishora navbatlashuvchi qatorga ega bo'lamiz.

Bu qatorning birinchi k ta hadini yig'indisini $\ln 1{,}2$ ning taqribiy qiymati deb olsak, u holda xatolikning absolyut qiymati $k+1$ chi hadning absolyut qiymatidan kichik bo'ladi. Qator beshinchi hadining absolyut qiymati 0,000064 ga teng ya'ni 0,0001 dan kichik. Shu sababli hisoblash uchun birinchi to'rtta hadini olish yetarli:

$$\ln 1{,}2 \approx 0{,}2 - \frac{0{,}04}{2} + \frac{0{,}008}{4} - \frac{0{,}0016}{4} \approx 0{,}18228.$$

2-*misol.* $\sqrt[4]{20}$ ni 0,001 aniqlikda taqribiy hisoblang.

Yechish. Binomial qatordan foydalanamiz. Uning uchun berilgan ildizni quyidagicha ifodalab olamiz:

$$\sqrt[4]{20} = \sqrt[4]{16+4} = \sqrt[4]{16\left(1+\frac{1}{4}\right)} = 2\left(1+\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$\left(1+\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$ soni $(1+x)^{\frac{1}{4}}$ binomining $x=\frac{1}{4}$ dagi qiymatiga teng. $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{4}}$ funksiya uchun quyidagi yoyilma o'rinli:

$$(1+x)^{\frac{1}{4}} = 1 + \frac{1}{4}x + \frac{\frac{1}{4}(\frac{1}{4}-1)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{4}(\frac{1}{4}-1)(\frac{1}{4}-2)}{3!}x^3 + \ldots =$$

$$1 + \frac{1}{4-1!}x - \frac{1\cdot 3}{4^2\cdot 2!}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 7}{4^3\cdot 3!}x^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 7\cdot 11}{4^4\cdot 4!}x^4 + \ldots$$

$x=\frac{1}{4}$ da ishora navbatlashuvchi ushbu qatorni hosil qilamiz:

$$(1+\frac{1}{4})^{\frac{1}{4}} = 1 + \frac{1}{4\cdot 1!\cdot 4} - \frac{1\cdot 3}{4^2\cdot 2!\cdot 4^2} + \frac{1\cdot 3\cdot 7}{4^3\cdot 3!\cdot 4^3} - \frac{1\cdot 3\cdot 7\cdot 11}{4^4\cdot 4!4^4} + \ldots$$

Ishora navbatlashuvchi qatorning xossasiga ko'ra, berilgan ildiz qiymatini 0,001 aniqlikda hisoblash uchun so'ngi qatorning dastlabki to'rtta hadini olish yetarli, chunki beshinchi hadi absolyut qiymati bo'yicha 0,001 dan kichik.

$$\frac{2\cdot 1\cdot 3\cdot 7\cdot 11}{4^4\cdot 4!\cdot 4^4} = \frac{2\cdot 3\cdot 7\cdot 11}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 8\cdot 2\cdot 16\cdot 4^4} < \frac{1}{2\cdot 4^5} < \frac{1}{2568} < 0{,}001$$

hisoblashni bajaramiz:

$$\sqrt[4]{20} = 2\cdot(1 + \frac{1}{4\cdot 1!\cdot 4} - \frac{1\cdot 3}{4^2\cdot 2!4^2} + \frac{1\cdot 3\cdot 7}{4^3\cdot 3!\cdot 4^3}) =$$

$$= 2{,}000 + 0{,}0625 - 0{,}0059 + 0{,}0009 \approx 2{,}0575$$

3-*misol.* $e^{0,2}$ ni 0,0001 aniqlikda hisoblang.

Yechish. e^x funksiyaning Teylor formulasiga ko'ra

$e^{0,2}=1+\frac{0,2}{1!}+\frac{0,2^2}{2!}+\cdots+\frac{0,2^n}{n!}+\cdots$. r_4 ni baholaymiz:

$$r_4=\frac{0,2^4}{4!}+\frac{0,2^5}{5!}+\frac{0,2^6}{6!}+\cdots=\frac{0,2^4}{4!}(1+\frac{0,2}{5}+\frac{0,2^2}{5\cdot 6}+\cdots)<$$

$$<\frac{0,2^4}{4!}(1+\frac{0,2}{5}+\left(\frac{0,2}{5}\right)^2+\cdots)=\frac{0,0016}{24}\cdot\frac{1}{1-\frac{0,2}{5}}<0,0001.$$

Demak, 0,0001 aniqlikda $e^{0,2}=1+\frac{0,2}{1!}+\frac{0,2^2}{2!}+\frac{0,2^3}{3!}\approx 1,2213.$

7.2. Tenglamalarni yechish.

1-*misol.* e^x-e^y=xy (1) tenglamani x ga nisbatan yeching (y ning x darajalari bo'yicha yoyilmasining dastlabki uchta hadini toping).

Yechish. (1) tenglama y ni x ning oshkormas funksiyasi sifatida aniqlaydi. Bu funksiya istalgan tartibli hosilaga ega. Bunda y ni x orqali aniq ifodalash mumkin emas. Shu sababli yechimni darajali qator ko'rinishda izlaymiz.

Bunda ikki usuldan foydalanish mumkin:

a) Noma'lum koeffitsientlar metodi.

Ma'lumki,

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+... \qquad (2)$$

qator $(-\infty;+\infty)$ da yaqinlashuvchi. Shunga o'xshash

$$e^y=1+\frac{y}{1!}+\frac{y^2}{2!}+...+\frac{y^n}{n!}+... \qquad (2')$$

qator ham $(-\infty;+\infty)$ da yaqinlashuvchi.

(2) va (2') qatorlarni (1) tenglamaga qo'yamiz:

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^4}{n!}+...-(1+\frac{y}{1!}+\frac{y^2}{2!}+...+\frac{y^n}{n!}+...)=xy. \quad (3)$$

y funksiyani

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+... \qquad (4)$$

qator ko'rinishda izlaymiz. (3) tenglamadagi y o'rniga (4) qatorni qo'yamiz:

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^4}{n!}+...-x(a_0+a_1x+a_2x^2+...1+\frac{a_0+a_1x+...}{1}+\frac{(a_0+a_1x+...)}{2!}+...$$

Endi x ning bir xil darajalari oldidagi koeffitsentlarni tenglashtiramiz. Avval x^0 oldidagi, ya'ni ozod hadni topamiz. Bunda

$$1-1-(a_0+\frac{a_0^2}{2}+...)=0, \text{ bundan } a_0=0.$$

x ning oldidagi koeffitsientlarni tenglashtiramiz:

$1-a_1-a_0(a_1+...)=a_0$. $a_0=0$ ekanligini e'tiborga olib, 1-a_1=0 yoki a_1=1 ekanligini topamiz. x^2 oldidagi koeffitsientlarni tenglashtirib, a_1=-1, x^3 oldidagi koeffitsientlarni tenglashtirib a_2=2 ekanligini topamiz. Shunday qilib, y ning taqribiy formulasini $y \approx x-x^2+2x^3$ ni topamiz.

b) Hosiladan foydalanish metodi. Bu metod y funksiyaning 0 nuqtadagi xosilalarini ketma-ket topishga asoslangan.

(1) tenglamani y ni x ning differensiallanuvchi funksiyasi deb qarab, x bo'yicha differensiallaymiz:

$$e^x-e^y\cdot y'=y+xy' \qquad (6)$$

x=0 da $e^0-e^{y(0)}\cdot y'(0)=y(0)+0\cdot y'(0)$, bu yerda $y(0)$=0 ekanligini e'tiborga olsak, $y'(0)=1$ xosil bo'ladi. Endi $y''(0)$ ni izlaymiz. Shu maqsadda (6) tenglamani x bo'yicha differensiallaymiz:

$$e^x-e^y(y')^2-e^y\cdot y''=y'+y'+xy'' \qquad (7)$$

(7) da x=0 va $y(0)=0$, $y'(0)=1$ ekanligini hisobga olib, $y''(0)=-2$ ekanligini topamiz. $y'''(0)$ ni topish uchun (7) ni differensiallaymiz:

$$e^x-e^y\cdot y'^3-3e^y\cdot y'\cdot y''-e^y y'''=3y''+xy''' \qquad (8)$$

$y(0)$, $y'(0)$, $y''(0)$ ning qiymatlarini hisobga olib $y'''(0)=12$ ekanligini topamiz.

$$y=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\frac{y'''(0)}{3!}x^3+...$$

formulaga $y'(0)$, $y''(0)$, $y'''(0)$ ni qo'yib

$$y \approx x-\frac{2}{2!}x^2+\frac{12}{3!}x^3=x-x^2+2x^3$$

ni hosil qilamiz. Ravshanki, ikkinchi usulda yechish osondir.

7.3. Darajali qatorlar yordamida integrallarni taqribiy hisoblash.

Misol. 0,0001 aniqlikda $\int_0^{0.5}\frac{\sin x}{x}dx$ integralni hisoblang.

Yechish. $\sin x$ funksiyani uning darajali qatori bilan almashtiramiz va hosil bo'lgan qatorni hadma-had integrallab quyidagiga erishamiz:

$$\int_0^{0,5}\frac{\sin x}{x}dx=\int_0^{0,5}\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-...\right)dx=\left(x-\frac{x^3}{3\cdot 3!}+\frac{x^5}{5\cdot 5!}-\right)\Big|_0^{0,5}=0,5-\frac{0,125}{18}+\frac{0,03125}{600}-$$

... . Natijada, ishora navbatlashuvchi qator hosil bo'ldi. Bunda $\frac{0,03125}{600}<0,0001$ bo'lganligi sababli, talab qilingan aniqlikda hisoblash uchun bu qatorning avvalgi ikkita hadi yig'indisi bilan chegaralanish kifoya. Shunday qilib, $\int_0^{0,5}\frac{\sin x}{x}dx \approx 0,5-\frac{0,125}{18}\approx 0,4931$.

Bundan tashqari darajali qatorlar yordamida ba'zi limitlarni, qator yig'indilarini hisoblash hamda differensial tenglamalarni yechish mumkin.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Butun ratsional funksiyaning Teylor qatorini yozing.
2. Berilgan $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqta atrofidagi Teylor qatorini yozing.
3. Darajali qator o'z yig'indisining Teylor qatori ekanligi haqidagi teoremani isbotlang.
4. «Funksiya Teylor qatoriga yoyilgan» degan jumlani qanday tushunasiz?
5. Funksiyani Teylor qatoriga yoyish mumkinligining zaruriy va yetarli sharti nimadan iborat?
6. Funksiya Teylor formulasi qoldig'i va shu funksiya Teylor qatori qoldig'i orasidagi farq nimadan iborat?
7. Funksiyani Teylor qatoriga yoyish mumkinligining yetarli sharti nimadan iborat?
8. Funksiyani Teylor qatoriga yoyish mumkinligining yetarli sharti qanday isbotlanadi?
9. Funksiyani Teylor qatoriga yoyish uchun nima ishlar qilinadi?
10. Asosiy elementar funksiyalarning yoyilmasidan foydalanib funksiyani qatorga yoyishda nima ishlar bajariladi?
11. Darajali qatorning qanday tatbiqlarini bilasiz?
12. Qatorni uning xususiy yig'indisi bilan almashtirsak absolyut xatolik nimaga teng bo'ladi?

Mustaqil yechish uchun misol va masalalar

1. Quyidagi funksiyalarni x ning darajalari bo'yicha qatorga yoying:
a) $f(x)=\text{sh}x$; b) $f(x)=\text{ch}x$; c) $f(x)=(1-x)^{-1}$; d) $f(x)=\ln(1-x)$.

2. Ushbu $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ funksiyani 6-§ dagi (5) formuladan foydalanib x ning darajalari bo'yicha qatorga yoying va qatorni hadma-had integrallash yordamida

$$\arcsin x = x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

tenglikni isbotlang.

3. $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ funksiyani Makloren qatoriga yoying, yaqinlashish radiusini toping.

Ko'rsatma. Avval funksiyani differensiallang.

4. Quyidagi funksiyalarning x ning darajalari bo'yicha qatorga yoygandagi noldan farqli dastlabki uchta hadini yozing:

a) $f(x)=\mathrm{tg}x$; b) $f(x)=\ln(1+\sin x)$.

5. Quyidagi funksiyalarni x-x_0 ning darajalari bo'yicha Teylor qatoriga yoying, yaqinlashish intervalini ko'rsating:

a) $f(x)=\sqrt{x}$, $x_0=4$; b) $f(x)=e^{x+1}$, $x_0=-2$;

c) $f(x)=\frac{1}{x^2-5x+6}$, $x_0=1$; d) $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $x_0=-1$;

e) $f(x)=(x+1)\cos^2 x$, $x=-1$; f) $f(x)=\ln(12-x-x^2)$, $x_0=0$.

6. $\sqrt[3]{130}$ ni 0,0001 aniqlikda hisoblang.

7. $\int_0^{1/5}\sqrt{1+x^3}dx$ integralni 0,0001 aniqlikda hisoblang.

8. $y^3+xy=1$ tenglamani yeching (yoyilmaning dastlabki uchta hadini toping).

Javoblar: 1. a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$; b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$; c) $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$; d) $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$.

3. $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1}$, $R=1$. 4. a) $x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5$; b) $x-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}$.

5. a) $2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{(x-4)^n}{2^{2n-1}}$, $0\le x<\infty$; b) $e^3\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n!}$;

c) $\sum_{n=0}^{\infty}(1-2^{-(n+1)})(x-1)^n$, $R=1$; d) $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(x+1)^n$, $R=1$;

e) $\frac{1+\cos 2}{2}(x+1)+\cos 2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n-1}\cdot(x+1)^{2n+1}}{(2n)!}+\sin 2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}\cdot(x+1)^{2n+2}}{(2n+1)!}$, $R=\infty$;

f) $\ln 12+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}4^{-n}-3^{-n}}{n}x^n$, $R=3$. 6. 5,0658. 7. 0,2002. 8. $1-\frac{x}{3}+\frac{x^3}{81}$

III-bobni takrorlash uchun test savollari

1. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n+1}$ darajali qator uchun a_5, a_{10} larni toping.

A) $a_5=1/6$; $a_{10}=1/11$ B) $a_5=1/5$; $a_{10}=1/10$

C) $a_5=0$; $a_{10}=1/10$ D) $a_5=0$; $a_{10}=1/6$

2. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n+1}$ darajali qatorning yaqinlashish radiusi va sohasini toping.

A) $r=\infty$; $(-\infty;\infty)$ B) $r=1$; $(-1;1)$ C) $r=1$; $[-1;1)$ D) $r=1$; $[-1;1]$

3. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{2^n n}$ darajali qatorning yaqinlashish radiusi va sohasini toping.

A) $r=2$; $(-2;2)$ B) $r=1/2$; $(-1/2;1/2)$

C) $r=1/2$; $[-1/2;1/2)$ D) $r=2$; $[-2;2)$

4. $\sum_{n=0}^{\infty}(3-(-1)^n)^n(x-1)^n$ darajali qatorning yaqinlashish radiusi va intervalini toping.

A) $r=1/4$; $(-0,25;\ 0,25)$ B) $r=1/2$; $(-0,5;0,5)$

C) $r=1/4$; $(0,75;\ 1,25)$ D) $r=4$; $(3;\ 5)$

5. $\sum_{n=0}^{\infty}(1+\cos\frac{\pi n}{4})^n(x+1)^n$ darajali qatorning yaqinlashish radiusi va intervalini toping.

A) $r=2$; $(-2;2)$ B) $r=1/2$; $(-1/2;1/2)$

C) $r=1/2$; $(-1,5;\ -0,5)$ D) $r=1/2$; $(0,5;\ 1,5)$

6. Noto‘g‘ri jumlani ko‘rsating.

A) Agar $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ darajali qatorning yaqinlashish radiusi $r>0$ bo‘lsa, u holda bu qator $(-r;\ r)$ intervalda absolyut yaqinlashuvchi bo‘ladi.

B) Agar $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ darajali qatorning yaqinlashish radiusi $r>0$ bo‘lsa, u holda bu qator $[-r;r]$ kesmada tekis yaqinlashuvchi bo‘ladi.

C) Agar $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ darajali qatorning yaqinlashish radiusi $r>0$ bo‘lsa, u holda bu qatorning yig‘indisi $(-r;\ r)$ intervalda uzluksiz bo‘ladi.

D) Agar $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ darajali qatorning yaqinlashish radiusi r>0 bo'lsa, u holda bu qatorning yig'indisini (-r;r) intervalda istalgan marta hadma-had differensiallash mumkin.

7. Noto'g'ri jumlani ko'rsating.

A) Darajali qatorning yaqinlashish radiusi uni hadma-had differensiallash natijasida hosil bo'lgan qatorning yaqinlashish radiusiga teng bo'ladi.

B) Darajali qatorning yaqinlashish intervali uni hadma-had differensiallash natijasida hosil bo'lgan qatorning yaqinlashish intervaliga teng bo'ladi.

C) Darajali qatorning yaqinlashish sohasi uni hadma-had differensiallash natijasida hosil bo'lgan qatorning yaqinlashish sohasiga teng bo'ladi.

D) Darajali qatorni hadma-had differensiallash natijasida hosil bo'lgan qatorning yig'indisi yaqinlashish intervalida uzluksiz funksiya bo'ladi.

8. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$ qator va uni hadma-had differensiallash natijasida hosil bo'lgan qatorning yaqinlashish sohalarini toping.

A) $(-1;1), (-1;1]$ B) $[-1;1], (-1;1]$

C) $(-1;1], (-1;1]$ D) $[-1;1], [-1;1)$

9. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ qator va uni hadma-had integrallash natijasida hosil bo'lgan qatorning yaqinlashish sohalarini toping.

A) $(-1;1), (-1;1]$ B) $(-1;1], [-1;1]$

C) $(-1;1], (-1;1)$ D) $[-1;1), [-1;1]$

10. To'g'ri jumlani ko'rsating.

A) x_0 nuqtaning biror atrofida cheksiz marta differensiallanuvchi funksiyani shu nuqta atrofida Teylor qatoriga yoyish mumkin.

B) Har qanday darajali qatorning yaqinlashish sohasi bo'sh to'plam emas.

C) Funksiyaning aniqlanish sohasi bilan uning Teylor qatori aniqlanish sohasi har doim teng bo'ladi.

D) Funksiyaning aniqlanish sohasi bilan uning Teylor qatori yaqinlashish sohasi har doim teng bo'ladi.

11. Noto'g'ri formulani ko'rsating.

A) $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ B) $e^{x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n!}$

C) $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ D) $\ln(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}$

12. Noto'g'ri formulani ko'rsating.

A) $e^x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ B) $e^{x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n!}$

C) $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ D) $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}$

13. Noto'g'ri formulani ko'rsating.

A) $e^{x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n!}$ B) $\sin(x-1)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^{2n-1}}{(2n-1)!}$

C) $\frac{x}{1-x}=\sum_{n=1}^{\infty}x^n$ D) $\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$

14. Noto'g'ri jumlani ko'rsating.

A) Toq funksiyaning Makloren qatorida noma'lumning faqat toq darajalari qatnashadi.

B) Juft funksiyaning Makloren qatorida noma'lumning faqat juft darajalari qatnashadi.

C) $(1+x)^\alpha$ $(\alpha\neq 0, \alpha\notin N)$ darajali funksiya Makloren qatorining yaqinlashish sohasi $(-1,1]$ oraliqdan iborat.

D) $f(x)$ funksiyaning $(-r;r)$ oraliqda istalgan tartibdagi hosilaga ega, funksiya va uning hosilalari birgalikda chegaralangan bo'lishi $f(x)$ funksiyaning Teylor qatoriga yoyilishi uchun yetarli.

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ qator yig'indisini toping.

A) $\ln x$ B) $\ln(1+x)$ C) $\ln(1-x)$ D) $-\ln(1-x)$

16. $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ qator yig'indisini toping.

A) $\frac{1}{(1+x)^2}$ B) $\frac{1}{(1-x)^2}$ C) $\frac{x}{(1-x)^2}$ D) $\frac{x(2-x)}{(1-x)^2}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$ qator yig'indisini toping.

A) $\frac{1}{(1+x)^2}$ B) $\frac{1}{(1-x)^2}$ C) $\frac{x}{(1-x)^2}$ D) $\frac{x(2-x)}{(1-x)^2}$

18. $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-1)^n x^n$ qator yig'indisini toping.

A) $\frac{1}{(1+x)^2}$ B) $\frac{1}{(1-x)^2}$ C) $\frac{x}{(1-x)^2}$ D) $\frac{x}{(1+x)^2}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n-1}$ qator yig'indisini toping.

A) $\frac{1}{(1+x)^3}$ B) $\frac{2}{(1-x)^3}$ C) $\frac{2x}{(1-x)^3}$ D) $\frac{x^2}{(1-x)^2}$

20. $f(x)$=cos$x$ funksiyani x=π/4 nuqta atrofida Teylor qatoriga yoying.

A) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ B) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}-\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}\right)$

C) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-\pi/4)^{2n}}{(2n)!}$ D) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}\right)$.

21. $f(x)=\sqrt[5]{x^3}$ funksiyani x=4 nuqta atrofidagi Teylor qatorining uchinchi hadini yozing.

A) $-\frac{3}{100\sqrt[5]{16}}(x-4)^2$ B) $\frac{3}{100\sqrt[5]{16}}(x-4)^2$

C) $-\frac{3}{10\sqrt[5]{16}}(x-4)^2$ D) $-\frac{3}{400}(x-4)^2$

22. $f(x)=e^{-x}\sin x$ funksiya Makloren qatorida a_3 va a_4 koeffitsientlarni toping.

A) a_3=-1; a_4=1/3 B) a_3=-1/3; a_4=1

C) a_3=1/3; a_4=1/4 D) a_3=1/3; a_4=-1/4

23. $f(x)=\frac{1}{x^2+2x+2}$ funksiyani x+1 darajalari bo'yicha qatorga yoying, uning yaqinlashish sohasini ko'rsating.

A) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x+1)^{2n}$, (-2;0)

B) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}(x+1)^{2n}$, (-1;1)

C) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(x+1)^{2n}$, (-2;0)

D) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x+1)^n$, (-2;0)

24. $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ funksiyani $x+1$ darajalari bo'yicha qatorga yoying

A) $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x+1)^n}{2^{n+1}}$, (-3;1)

B) $-\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x+1)^n}{2^{n+1}}$, (-3;1)

C) $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x+1)^n}{2^n}$, (-3;1)

D) $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x+1)^n}{2^{n+1}}$, (-3;1]

IV-BOB. FURYE QATORI

1-§. Sodda trigonometrik funksiyalar sistemasi va ularning ortogonalligi

Oldingi bobda darajali qatorlarni o'rgandik. Ushbu bobda ham nazariy, ham tatbiqiy nuqtai nazardan muhim ahamiyatga ega bo'lgan trigonometrik qatorlarni (Furye qatorlarini) o'rganamiz.

Trigonometrik qatorlar avvalom bor davriy jarayonlarni o'rganishda foydalaniladi. Davriy jarayon bilan bog'liq bo'lgan ixtiyoriy $f(t)$ kattalik T vaqt o'tishi bilan o'zining dastlabki qiymatiga qaytadi, ya'ni davri T ga teng bo'lgan funksiya bo'ladi. Dastlab $T=2\pi$ bo'lgan holni qaraymiz. Ma'lumki, davri 2π ga teng bo'lgan funksiyalarga o'zgarmas funksiya, $\sin x$, $\cos x$, $\sin 2x$, $\cos 2x$, $\sin 3x$, $\cos 3x$, ... funksiyalar misol bo'ladi.

Ushbu

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots \quad (1)$$

funksiyalar sistemasini davri 2π ga teng bo'lgan *sodda trigonometrik funksiyalar sistemasi* deb ataymiz.

Sodda funksiyalarning ixtiyoriy chiziqli kombinatsiyasi, ya'ni

$$a_0+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+\ldots \quad (2)$$

ko'rinishdagi ixtiyoriy funksiyaning ham davri 2π ga teng bo'ladi. Bu tasdiq (2)_chekli sondagi hadlardan iborat yig'indi yoki (2) funksional qator bo'lganda ham o'rinli.

Tabiiy holda quyidagi savol tug'iladi: davri 2π ga teng bo'lgan har qanday funksiyani (2) ko'rinishdagi qator yig'indisi shaklida ifodalash mumkinmi? Ushbu savolga javob berish trigonometrik qatorlar nazariyasining bosh masalasi hisoblanadi.

Ta'rif. Agar $[a;b]$ kesmada aniqlangan $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar uchun

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=0 \quad (3)$$

bo'lsa, u holda bu funksiyalar shu kesmada *o'zaro ortogonal* deyiladi.

Izoh. Bu yerda aniqlangan ortogonallik tushunchasi vektorlarning ortogonalligi tushunchasining umumlashmasidan iborat.

Teorema. Sodda trigonometrik funksiyalar sistemasidan olingan ixtiyoriy ikkita funksiya $[0;2\pi]$ kesmada o'zaro ortogonal bo'ladi.

Isboti. Agar $1=\cos 0x$ ekanligini e'tiborga olsak, u holda quyidagi

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx dx = 0 \quad (m,n=0,\ 1,2,\ldots;\ m\neq n); \quad (4)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx dx = 0 \quad (m,n = 1, 2, ...; m \neq n); \tag{5}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \sin nx dx = 0 \quad (m = 0, 1, 2, ...; n = 1,2,...;) \tag{6}$$

tengliklarning o'rinli ekanligini tekshirish lozim. Shu maqsadda ushbu trigonometrik formulalardan foydalanamiz:

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\left(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right),$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}\left(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right),$$

$$\cos mx \sin nx = \frac{1}{2}\left(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right).$$

Shu sababli (4)-(6) tengliklarni tekshirish uchun $\int_0^{2\pi} \cos kx dx$, $\int_0^{2\pi} \sin lx dx$, bu yerda k, l butun sonlar va $k \neq 0$, integrallarning har birining nolga tengligiga ishonch hosil qilish yetarli. So'ngi integrallarning nolga tengligini isbotlashni o'quvchilarga mustaqil bajarishni tavsiya etamiz.

2-§. Trigonometrik qatorlar. Furye koeffitsientlari va berilgan funksiyaning Furye qatori

Ta'rif. Ushbu

$$\frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + ... \tag{1}$$

funksional qator *trigonometrik qator* deyiladi, a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, ... o'zgarmas sonlar shu qatorning koeffitsientlari deyiladi.

Qisqa yozish maqsadida (1) qator

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

ko'rinishda ham yoziladi. Bunda qatorning boshlang'ich hadi qo'laylik uchun $\frac{a_0}{2}$ deb olingan.

Endi berilgan $f(x)$ funksiyani (1) qatorga yoyish masalasini qaraymiz. Aytaylik, $f(x)$ funksiyaning davri 2π ga teng va ixtiyoriy x uchun ushbu yoyilma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{2}$$

o'rinli bo'lsin. U holda a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, ... koeffitsientlarni qanday topish mumkin?

1-*teorema*. Agar ixtiyoriy x uchun (2) tenglik o'rinli va bu tenglikning o'ng tomonidagi funksional qator tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda quyidagi formulalar o'rinli bo'ladi:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nxdx \quad (n=0,1,2,...) \qquad (3)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nxdx \quad (n=1,2,3,...) \qquad (4)$$

Shuni ta'kidlab o'tish kerakki, (3) formula $n=0$ da ham o'rinli bo'lishi uchun boshlang'ich hadi $\frac{a_0}{2}$ deb olingan.

Isboti. Ma'lumki, tekis yaqinlashuvchi qatorni hadma-had integrallash mumkin. Bundan

$$\int_0^{2\pi}f(x)dx=\frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_0^{2\pi}\cos nxdx+b_n\int_0^{2\pi}\sin nxdx\right)=a_0\pi, \text{ demak}$$

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)dx$. Bu (3) formulada $n=0$ holiga to'g'ri keladi.

Endi (2) tenglikning ikkala tomonini $\cos kx$ ga ko'paytirib, quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$f(x)\cos kx=\frac{a_0}{2}\cos kx+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx\cos kx+b_n\sin nx\cos kx).$$

Bu tenglikning o'ng tomonidagi funksional qator tekis yaqinlashuvchi bo'ladi. Chunki uning har bir hadi (2) qatorning mos hadidan moduli birdan kichik bo'lgan $\cos kx$ ko'paytuvchisi bilan farq qiladi. Shu sababli bu qatorni hadma-had integrallash mumkin:

$$\int_0^{2\pi}f(x)\cos kxdx=\frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi}\cos kxdx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_0^{2\pi}\cos nx\cos kxdx+b_n\int_0^{2\pi}\sin nx\cos kxdx\right).$$

1-§ dagi (4) va (6) formulalarga ko'ra so'ngi tenglikning o'ng tomonidagi qo'shiluvchilardan faqat bittasi noldan farqli bo'ladi:

$a_k\int_0^{2\pi}\cos kx\cos kxdx=a_k\int_0^{2\pi}\cos^2 kxdx=\pi a_k$. Shunday qilib, $\pi a_k=\int_0^{2\pi}f(x)\cos kxdx$, bundan (3) tenglik kelib chiqadi. (4) tenglikni isbotlash uchun (2) yoyilmaning ikkala tomonini $\sin kx$ ga ($k=1, 2, ...$) ko'paytirish va $[0;2\pi]$ kesma bo'yicha integrallash yetarli.

Ta'rif. Faraz qilaylik $f(x)$ funksiya $[0;2\pi]$ kesmada aniqlangan bo'lsin. Mos ravishda (3) va (4) formulalar bilan aniqlangan a_n (n=0, 1, 2, ...) va b_n (n=1, 2, ...) sonlar $f(x)$ funksiyaning *Furye koeffitsientlari*, koeffitsientlari shu sonlarga teng bo'lgan $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ trigonometrik qator $f(x)$ funksiyaning *Furye qatori* deyiladi.

Yuqorida aytilganlarni e'tiborga olib, teoremani quyidagicha aytish mumkin:

2-*teorema.* Agar $f(x)$ funksiya tekis yaqinlashuvchi trigonometrik qatorga yoyilsa, u holda bu qator funksiyaning Furye qatori bo'ladi.

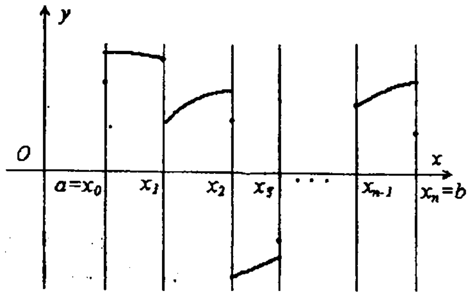
3-§. Funksiyalarni trigonometrik qatorlarga yoyish

Endi ushbu savolga javob izlaymiz: berilgan $f(x)$ funksiyaga ko'ra tuzilgan Furye qatori yaqinlashuvchi va uning yig'indisi shu funksiyaga teng bo'lishi uchun $f(x)$ funksiya qanday xossalarga ega bo'lishi kerak? Bu savolning javobini oydinlashtirishda trigonometrik va darajali qatorlar orasidagi keskin farqni ko'rish mumkin. Biz bilamizki, darajali qatorga barcha tartibli hosilalarga ega bo'lgan funksiyalarni yoyish mumkin, trigonometrik qatorga esa deyarli istalgan funksiyani yoyish mumkin.

3.1. Bo'lakli-differensiallanuvchi funksiya tushunchasi. Dirixle teoremasi.

Agar $[a;b]$ kesmani chekli sondagi x_1, x_2, .., x_{n-1} nuqtalar yordamida $[x_0;x_1]$, $[x_1;x_2]$, $[x_2;x_3]$, ..., $[x_{n-1};x_n]$ (bu yerda $x_0=a$, $x_n=b$) kesmalarga ajratish mumkin bo'lib, bu kesmalarga mos intervallarda $f(x)$ funksiya differensiallanuvchi hamda $x=x_k$ (k=0, 1, 2, ..., n-1) nuqtalarda chekli o'ng $f'_+(x_k)$ va chap $f'_-(x_k)$ (k=1, 2, ..., n) hosilalarga ega bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada *bo'lakli-differensiallanuvchi* deyiladi.

Izoh. $x=x_k$ (k=0, 1, 2, ..., n-1) nuqtalarda o'ng $f'_+(x_k)$ hosilani hisoblaganda funksiyaning $x=x_k$ nuqtadagi qiymati deb $f(x_k+0)=\lim\limits_{x\to x_k+0}f(x)$ qabul qilinadi. Shunga o'xshash, $x=x_k$ (k=1, 2, ..., n) nuqtalarda chap $f'_-(x_k)$ hosilani hisoblaganda funksiyaning $x=x_k$ nuqtadagi qiymati deb $f(x_k-0)=\lim\limits_{x\to x_k-0}f(x)$ qabul qilinadi.



4-rasm

4-rasmda bo'lakli-differensiallanuvchi funksiyaga misol keltirilgan. Yuqoridagi izohdan ko'rinadiki, funksiyaning x_1, x_2, .., x_{n-1} nuqtalardagi qiymatlari funksiyaning shu nuqtalar atrofidagi qiymatlari bilan bog'liq bo'lishi shart emas.

Agar $f(x)$ funksiya bo'lakli-differensiallanuvchi funksiya bo'lsa, u holda bu funksiya va uning hosilasi faqat x_1, x_2, .., x_{n-1} nuqtalarda birinchi tur uzilishga ega bo'lishi mumkin.

1-*misol*. Ushbu $f(x)=\begin{cases}2x^2, \text{ agar } 0\le x<1,\\ 3-x, \text{ agar } 1\le x\le 2\end{cases}$ funksiya bo'lakli-differensiallanuvchi bo'ladimi?

Yechish. Funksiya [0;2] kesmada aniqlangan. Bu kesmani [0;1] va [1,2] kesmalarga ajratamiz. Bu kesmalarga mos intervallarda funksiya differensiallanuvchi. 0 va 1 nuqtada o'ng hosila $(f'_+(0)=0,\ f'_+(1)=-1)$, 1 va 2 nuqtalarda chap hosila $(f'_-(1)=4,\ f'_-(2)=-1)$ mavjud. Demak, berilgan funksiya bo'lakli-differensiallanuvchi.

2-*misol*. Ushbu $f(x)=\begin{cases}2x^2, \text{ agar } 0\le x<1,\\ 4-x, \text{ agar } 1\le x\le 2\end{cases}$ funksiya bo'lakli-differensiallanuvchi bo'ladimi?

Yechish. Funksiya [0;2] kesmada aniqlangan. Bu kesmani [0;1] va [1;2] kesmalarga ajratamiz. Bu kesmalarga mos intervallarda funksiya differensiallanuvchi. Yuqoridagi kabi funksiyaning 0 va 1 nuqtadagi o'ng hosilalarini, 2 nuqtadagi chap hosilasini hisoblash muammo emas. Bu funksiyaning 1 nuqtadagi chap hosilasini hisoblashda, izohga ko'ra, f(1) deb f(1-0)=2 ni qabul qilishimiz lozim. Bu holda $f'_-(1)=4$ bo'ladi. Shunday qilib, bu funksiya ham bo'lakli-differensiallanuvchi ekan.

3-*misol*. Ushbu $f(x)=\begin{cases}\frac{2}{x}, \text{agar } -1\le x<0, \\ 1-x^2, \text{agar } 0\le x\le 2\end{cases}$ funksiya bo'lakli-differensiallanuvchi bo'ladimi?

Yechish. Funksiya [-1;2] kesmada aniqlangan. Bu kesmani [-1;0] va [0;2] kesmalarga ajratamiz. Bu kesmalarga mos intervallarda funksiya differensiallanuvchi. Ammo, 0 nuqtada funksiyaning chap hosilasi mavjud emas ($f(0-)=-\infty$). Demak, berilgan funksiya bo'lakli-differensiallanuvchi emas.

Biz yuqorida kesmada bo'lakli-differensiallanuvchi funksiya tushunchasini ko'rdik. Bu tushunchani (-∞;+∞) oraliq uchun umumlashtiramiz.

Agar $f(x)$ funksiya (-∞;+∞) oraliqda berilgan bo'lib, uning istalgan $[a;b]$ qismida bo'lakli-differensiallanuvchi bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya (-∞;+∞) oraliqda bo'lakli-differensiallanuvchi deyiladi.

Quyidagi teorema $f(x)$ funksiyaning Furye qatoriga yoyilishining yetarli shartini beradi.

Teorema (Dirixle). Agar davri 2π ga teng bo'lgan $f(x)$ funksiya $[0;2\pi]$ kesmada bo'lakli-differensiallanuvchi funksiya bo'lsa, u holda bu funksiya uchun tuzilgan Furye qatori barcha nuqtalarda yaqinlashuvchi va uning yig'indisi $F(x)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$ bo'ladi.

Isboti. ([2], 406-408 b.)

Dirixle teoremasidan Furye qatoriga yoyiladigan funksiyalar sinfining keng ekanligi ko'rsatadi. Shu sababli ham Furye qatorlari fanning turli tarmoqlarida, amaliyotda, ayniqsa matematik fizikada keng tatbiqqa ega.

3.2. Funksiyalarni trigonometrik qatorga yoyishga doir misollar. Endi funksiyalarni trigonometrik qatorlarga yoyishga doir misollar ko'ramiz. Avval ushbu tasdiqni isbotlaymiz.

Lemma. Agar $f(x)$ funksiyaning davri 2π ga teng bo'lsa, u holda bu funksiyaning uzunligi 2π ga teng bo'lgan ixtiyoriy kesma bo'yicha olingan integrali aynan bitta songa teng bo'ladi, ya'ni

$$\int_a^{a+2\pi} f(x)dx=\int_0^{2\pi} f(x)dx$$

tenglik o'rinli bo'ladi, bu yerda a ixtiyoriy son.

Isboti. Aniq integralning additivlik xossasiga ko'ra

$$\int_a^{a+2\pi} f(x)dx = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^{2\pi} f(x)dx + \int_{2\pi}^{a+2\pi} f(x)dx \qquad (1)$$

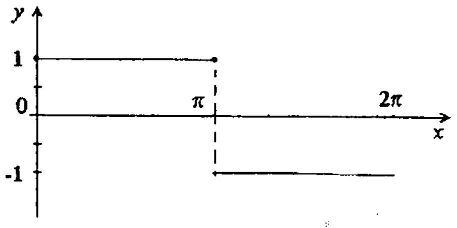
tenglik o'rinli. Bu tenglikning o'ng tomonidagi uchinchi integralda $x=2\pi+t$ almashtirish bajaramiz. U holda bu integral $\int_0^a f(2\pi+t)dt = \int_0^a f(t)dt$ ko'rinishga keladi. Bundan esa (1) tenglikning o'ng tomonidagi birinchi va uchinchi integrallar yig'indisi nolga tengligi kelib chiqadi.

4-*misol.* Davri 2π ga teng bo'lgan funksiya $[0,2\pi)$ yarim intervalda ushbu formula bilan berilgan:

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{agar } 0 \le x \le \pi, \\ -1, \text{agar } \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

(5-rasm). $f(x)$ funksiyani trigonometrik qatorga (Furye qatoriga) yoying.

Yechish. Furye koeffitsientlarini hisoblaymiz. Yuqorida isbotlangan tasdiqqa ko'ra $[0;2\pi]$ kesma bo'yicha integralni $[-\pi;\pi]$ kesma bo'yicha olingan



5-rasm

integralga almashtirish mumkin. U holda $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$ bo'ladi. Integral ostidagi funksiyaning 0 nuqtadagi qiymatini e'tiborga olmasak, u toq funksiya bo'ladi. Shu sababli $a_0=0$ bo'ladi. Shuningdek, $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \quad (n=1,2,...)$ integrallarda ham integral ostida toq funksiyalar bo'lganligi sababli, $a_n=0$ bo'ladi. Endi b_n koeffitsientlarni hisoblaymiz:

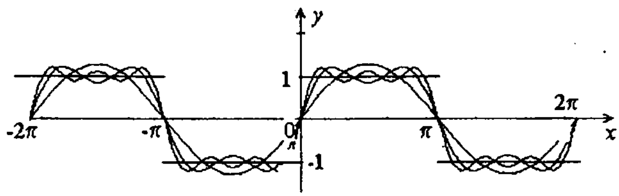
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin nx dx+\int_{0}^{\pi}\sin nx dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{\cos nx}{n}\Big|_{0}^{\pi}\right)=\frac{2}{\pi n}(\cos 0-\cos n\pi)$$

bundan $b_n=\begin{cases}0, \text{ agar } n \text{ juft bo'lsa,}\\ \dfrac{4}{\pi n}, \text{ agar } n \text{ toq bo'lsa}\end{cases}$ kelib chiqadi. Shunday qilib $f(x)$ funksiyaning Furye qatori quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+...\right) \qquad (2)$$

Xususan, $x=\frac{\pi}{2}$ da $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...$ bo‘ladi.



6-rasm

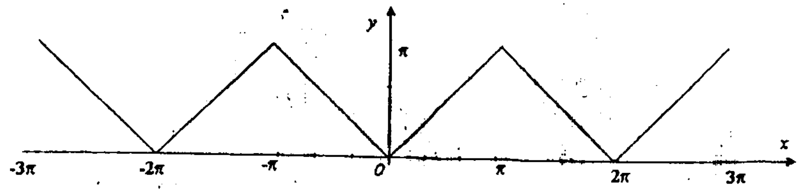
6-rasmda (2) qatorning bir nechta xususiy yig‘indilari grafiklari keltirilgan. Bu grafiklardan xususiy yig‘indi nomeri ortishi bilan uning berilgan funksiyani aniqroq tavsiflashi ko‘rinib turibdi.

5-misol. $f(x)$ funksiya $[-\pi;\pi]$ kesmada $f(x)=|x|$ formula bilan berilgan, x ning boshqa qiymatlariga davriy davom ettirilgan (7-rasm). Funksiyani Furye qatoriga yoying.

Yechish. $f(x)=|x|$ funksiya $[-\pi;\pi]$ kesmada Dirixle teoremasi shartlarini qanoatlantiradi. Furye koeffitsientlarini topamiz:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{\pi}f(x)dx\right)=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-x)dx+\int_{0}^{\pi}xdx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{\pi}\right)=\pi, \qquad a_0=\pi.$$



7-rasm

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nx dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x\cos nx dx) + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nx dx = \left| \begin{array}{l} u = x, du = dx \\ dv = \cos nx dx \\ v = \frac{1}{n}\sin nx dx \end{array} \right| =$$

$$-\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{0}\sin nx dx\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx\Big|_{0}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{0}^{\pi}\sin nx dx\right) =$$

$$- = -\frac{1}{\pi n^2}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi n^2}\cos nx\Big|_{0}^{\pi} = \frac{1}{\pi n^2}(\cos n\pi - 1 - 1 + \cos n\pi) =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}(\cos n\pi - 1) = \begin{cases} 0, & \text{agar} \quad n = 2k, \\ -\frac{4}{\pi n^2}, & \text{agar} \quad n = 2k+1 \end{cases},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-x\sin nx dx) + \int_{0}^{\pi} x\sin nx dx\right) = \left| \begin{array}{l} u = x, du = dx \\ dv = \sin nx dx \\ v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{array} \right| =$$

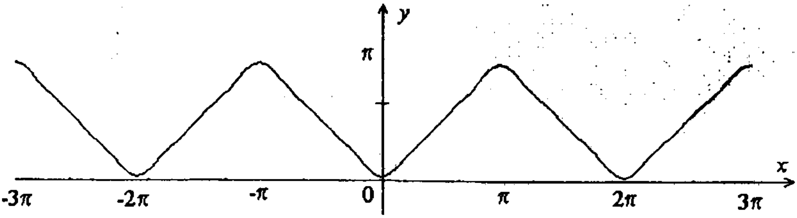
$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{0}\cos nx dx\right) + \frac{1}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_{0}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{0}^{\pi}\cos nx dx\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\cos n\pi - \frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{n}\cos n\pi + \frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_{0}^{\pi} = 0$$

Topilgan Furye koeffitsientlarini (2) ga qo‘ysak, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\ldots+\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}+\ldots\right).$$

Hosil bo'lgan qator qaralayotgan oraliqning barcha nuqtalarida berilgan funksiyaga yaqinlashadi. 8-rasmda $S_5(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}\right)$ xususiy yig'indining grafigi berilgan.



8-rasm.

4-§. Juft va toq funksiyalarni Furye qatoriga yoyish. [0;π] kesmada berilgan funksiyani Furye qatoriga yoyish

Yuqorida qaralgan misollarni tahlil qilish natijasida quyidagilarni kuzatish mumkin: birinchi misoldagi funksiyaning yoyilmasida faqat $b_n\sin nx$ qo'shiluvchilar, ikkinchi misoldagi funksiya yoyilmasiga faqat $a_n\cos nx$ ko'rinishdagi qo'shiluvchilar qatnashadi. Yoyilmalarning ushbu xususiyati nimaga bog'liq? Bu savolga quyidagi teorema javob beradi:

Teorema. Agar $f(x)$ funksiya juft bo'lsa, u holda uning Furye qatoridagi barcha b_n koeffitsientlari nolga teng bo'ladi.

Agar $f(x)$ funksiya toq bo'lsa, u holda uning Furye qatoridagi barcha a_n koeffitsientlari nolga teng bo'ladi.

Isboti. Agar $f(x)$ funksiya juft bo'lsa, u holda $f(x)\sin nx$ funksiya toq, demak $b_n=0$ bo'ladi. $f(x)\cos nx$ juft funksiya bo'lib, uning -π dan π gacha bo'lgan integralini 0 dan π gacha bo'lgan integralning ikkilangani bilan almashtirish mumkin:

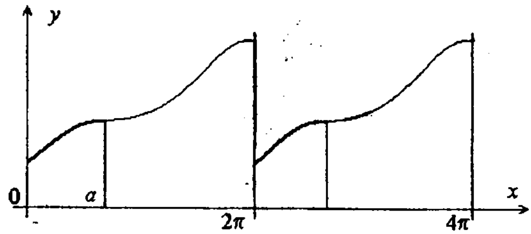
$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx. \qquad (1)$$

Agar $f(x)$ toq funksiya bo'lsa, u holda $f(x)\cos nx$ toq funksiya, demak $a_n=0$ bo'ladi. $f(x)\sin nx$ juft funksiya bo'ladi va yuqoridagi kabi uning -π dan π gacha bo'lgan integralini 0 dan π gacha bo'lgan integralning ikkilangani bilan almashtirish mumkin:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx. \qquad (2)$$

2-§ dagi 2-teoremaga ko'ra davri 2π ga teng bo'lgan $f(x)$ funksiya uchun shu funksiyaga tekis yaqinlashuvchi ko'pi bilan bitta trigonometrik qator mavjud. Bu uning Furye qatoridir.

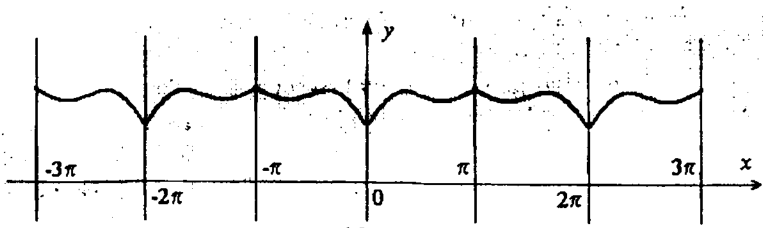
Ammo, agar $f(x)$ funksiya dastlab sonlar o'qida emas, balki uzunligi 2π dan kichik bo'lgan biror oraliqda berilgan bo'lsa, u holda bu funksiyani cheksiz ko'p usulda trigonometrik qatorga yoyish mumkin.



9-rasm

Haqiqatan ham, $f(x)$ funksiya $(0;a)$ intervalda berilgan bo'lsin, bu yerda $a<2\pi$. $f(x)$ funksiyani ixtiyoriy ravishda $[0;2\pi)$ oraliqqa, keyin esa 2π davr bilan sonlar o'qiga davom ettiramiz (9-rasm). Bunday davom ettirish natijasida hosil bo'lgan funksiyani $\tilde{f}(x)$ orqali belgilaymiz. $\tilde{f}(x)$ funksiyaning davri 2π ga teng, uni Furye qatoriga yoyish mumkin, bu Furye qatori $(0;a)$ oraliqda ($f(x)$ funksiya uzluksiz bo'lgan barcha nuqtalarda) $f(x)$ funksiyaga yaqinlashadi. Berilgan $f(x)$ funksiyaning $\tilde{f}(x)$ davomi cheksiz ko'p usulda tanlanishi mumkinligi sababli, $(0;a)$ intervalda $f(x)$ funksiyaga yaqinlashadigan trigonometrik qatorlar ham cheksiz ko'p bo'ladi.

Shunday qilib, uzunligi 2π dan kichik bo'lgan oraliqda berilgan $f(x)$ funksiyani trigonometrik qatorga turlicha yoyish mumkin ekan.

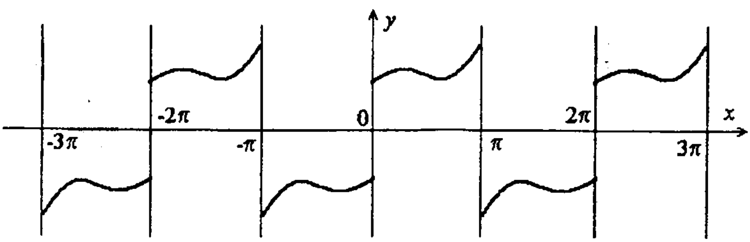


10-rasm

Bu xossa $(0;\pi)$ intervalda (umuman olganda, uzunligi π ga teng oraliqda) berilgan $f(x)$ funksiyalar uchun alohida ahamiyatga ega. Bu holda $f(x)$ funksiyaning turli davomlari ichida ikkita maxsus - $f_j(x)$ va $f_t(x)$ davomlari mavjud, bu yerda $f_j(x)$ -juft, $f_t(x)$ - toq funksiyalar. $f_j(x)$ funksiyani hosil qilish uchun avval $f(x)$ funksiyani $(-\pi;0)$ intervalga juft tarzda, keyin esa hosil bo'lgan funksiyani 2π davr bilan butun sonla o'qiga davom ettiramiz (10-rasm).

Xuddi shunga o'xshash $f_t(x)$ funksiyani hosil qilamiz: avval $f(x)$ funksiyani $(-\pi;0)$ intervalga toq tarzda, keyin esa hosil bo'lgan funksiyani 2π davr bilan butun sonlar o'qiga davom ettiramiz (11-rasm).

$f_j(x)$ juft funksiya bo'lganligi sababli uning Furye qatori faqat $a_n\cos nx$ qo'shiluvchilardan tashkil topadi. Bu qator $f(x)$ funksiyaning $(0;\pi)$ intervaldagi *kosinuslar bo'yicha trigonometrik qatori* deyiladi.



11-rasm

Shunga o'xshash, $f_t(x)$ toq funksiya bo'lganligi sababli uning Furye qatori faqat $b_n\sin nx$ qo'shiluvchilardan tashkil topadi. Bu qator $f(x)$ funksiyaning $(0;\pi)$ intervaldagi *sinuslar bo'yicha trigonometrik qatori* deyiladi.

Shunday qilib, uzunligi π ga teng bo'lgan oraliqda berilgan funksiyani faqat kosinuslar yoki faqat sinuslar bo'yicha Furye qatoriga yoyish mumkin ekan.

1-*misol.* $f(x)=x$ funksiya $(0;\pi)$ intervalda berilgan. Uni sinuslar bo'yicha Furye qatoriga yoying.

Yechish. Berilgan $f(x)=x$ funksiyani $(-\pi;0)$ intervalga toq tarzda davom ettiramiz. Hosil bo'lgan funksiyani 2π davr bilan sonlar o'qiga davom ettirib $f_t(x)$ toq funksiyaga ega bo'lamiz ($f_t(\pi)$ qiymatni ixtiyoriy, masalan $f_t(\pi)=0$, tanlash mumkin). $f_t(x)$ funksiyaning Furye qatori faqat $b_n \sin nx$ hadlardan tashkil topadi. (2) formulaga ko'ra $b_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x\sin nx dx \quad (n=1,2,...)$ formula bilan aniqlanadi. Bu formulaning o'ng tomonidagi integralni bo'laklab integrallaymiz:

$$\int\limits_0^{\pi} x\sin nx dx=-x\cdot\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int\limits_0^{\pi}\cos nx dx=-\pi\frac{\cos n\pi}{n}+\frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi}=-\pi\frac{\cos n\pi}{n}.$$

Demak, $b_n=-\frac{2}{n}\cos n\pi=\begin{cases}-\frac{2}{n}, & \text{agar } n \text{ juft bo'lsa,}\\ \frac{2}{n}, & \text{agar } n \text{ toq bo'lsa}\end{cases}$.

Shunday qilib, $0<x<\pi$ da ushbu yoyilma o'rinli:

$$x=2\left(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 4x}{4}+...\right).$$

2-*misol.* $f(x)=\sin x$ funksiya $(0;\pi)$ intervalda berilgan. Uni kosinuslar bo'yicha Furye qatoriga yoying. Hosil qilingan yoyilmadan foydalanib, quyidagi

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+...$$

qator yig'indisini toping.

Yechish. Berilgan $f(x)=\sin x$ funksiyani $(-\pi;0)$ intervalga juft tarzda davom ettiramiz. Hosil bo'lgan funksiyani 2π davr bilan sonlar o'qiga davom ettirib $f_j(x)$ juft funksiyaga ega bo'lamiz ($f_j(\pi)$ qiymatni ixtiyoriy, masalan $f_j(\pi)=0$, tanlash mumkin). $f_j(x)$ funksiyaning Furye qatori faqat $a_n \cos nx$ hadlardan tashkil topadi. (1) formulaga ko'ra $a_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\sin x\cos nx dx \quad (n=0,1,2,...)$ formula bilan aniqlanadi. Integralni hisoblaymiz:

$$\int\limits_0^{\pi}\sin x\cos nx dx=\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin(1+n)x+\sin(1-n)x}{2}dx=\frac{1}{2}\left(-\frac{\cos(1+n)x}{1+n}-\frac{\cos(1-n)x}{1-n}\right)\Bigg|_0^{\pi}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{\cos(1+n)\pi}{1+n}+\frac{1}{1+n}-\frac{\cos(1-n)\pi}{1-n}+\frac{1}{1-n}\right)=$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos(1+n)\pi}{1+n}+\frac{1-\cos(1-n)\pi}{1-n}\right).$$

Demak, $a_n=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1-\cos(1+n)\pi}{1+n}+\frac{1-\cos(1-n)\pi}{1-n}\right)$ hosil bo‘ladi.

Agar n-juft ($n=2k$) bo‘lsa, $\cos(1\pm n)\pi=-1$, va

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{1+n}+\frac{2}{1-n}\right)=-\frac{4}{\pi(n^2-1)}=-\frac{4}{\pi(2k-1)(2k+1)},\quad (n=2k)$$

bo‘ladi.

Agar n-toq ($n\neq 1$) bo‘lsa, a_n=0 bo‘ladi, (n=3,5,7,...). n=1 bo‘lganda esa

$$a_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos x dx=\frac{2}{\pi}\frac{\sin^2 x}{2}\bigg|_0^{\pi}=0.$$

Shunday qilib, $a_{2k}=-\frac{4}{\pi(2k-1)(2k+1)},\quad a_{2k-1}=0,\quad (k=0,1,2,...)$

Furye koeffitsientlarining qiymatlarini qatorga qo‘ysak, berilgan funksiya uchun tuzilgan Furye qatori quyidagi

$$|\sin x|=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1\cdot 3}+\frac{\cos 4x}{3\cdot 5}+...+\frac{\cos 2kx}{(2k-1)(2k+1)}+...\right)$$

ko‘rinishga keladi. Bu tenglik $[-\pi,\pi]$ kesmaning barcha nuqtalarida o‘rinli.

x=0 da, $0=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}(\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+...+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+...)$, bundan,

$\frac{1}{2}=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+...+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+...$ hosil bo‘ladi.

5-§. Davri 2*L* bo‘lgan funksiyalar uchun Furye qatori

Biz yuqorida davri T=2π ga teng bo‘lgan $f(x)$ funksiyani Furye qatoriga yoyish masalasini o‘rgandik. Shu masalani davri ixtiyoriy, masalan T=2L ga teng bo‘lgan funksiya uchun o‘rganamiz. Buning uchun

$$x=\frac{L}{\pi}t,\quad t=\frac{\pi}{L}x \qquad (1)$$

almashtirishlardan foydalanamiz. Ravshanki, $f(x)=f\left(\frac{L}{\pi}t\right)=\varphi(t)$ funksiya 2π davrli davriy funksiya bo‘ladi. Haqiqatan ham,

$$\varphi(t+2\pi)=f\left(\frac{L}{\pi}(t+2\pi)\right)=f\left(\frac{L}{\pi}t+2L\right)=f\left(\frac{L}{\pi}t\right)=\varphi(t).$$

Demak, $\varphi(t)$ funksiyani Furye qatoriga yoyish mumkin:

$$\varphi(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nt+b_n\sin nt\right), \tag{2}$$

bu yerda a_n va b_n koeffitsientlar quyidagi formulalardan topiladi:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(t)\cos nt dt \quad (n=0,1,2,...) \tag{3}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(t)\sin nt dt \quad (n=1,2,...) \tag{4}$$

(1) formuladan foydalanib (2) formulada x o'zgaruvchiga qaytamiz, u holda

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\frac{\pi}{L}x+b_n\sin n\frac{\pi}{L}x\right) \tag{5}$$

hosil bo'ladi. Bu holda (3) va (4) formulalar quyidagicha yoziladi:

$$a_n=\frac{1}{L}\int_0^{2L}f(x)\cos n\frac{\pi}{L}xdx \quad (n=0,1,2,...) \tag{6}$$

$$b_n=\frac{1}{L}\int_0^{2L}f(x)\sin n\frac{\pi}{L}xdx \quad (n=1,2,...) \tag{7}$$

Yuqoridagi (5), (6), (7) formulalar davri $2L$ bo'lgan $f(x)$ funksiyani Furye qatoriga yoyish masalasi yechimini beradi.

Izoh. davri $2L$ bo'lgan sodda funksiyalar sistemasi ushbu funksiyalardan tashkil topgan: 1, $\cos\omega x$, $\sin\omega x$, $\cos 2\omega x$, $\sin 2\omega x, \ldots$, bu yerda $\omega=\pi/L$.

Xususiy holda agar $f(x)$ funksiya juft funksiya bo'lsa, Furye qatori quyidagi

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\frac{\pi}{L}x \tag{8}$$

sodda ko'rinishga keladi. Furye koeffitsientlari esa quyidagi formulalar yordamida topiladi:

$$a_n=\frac{2}{L}\int_0^{L}f(x)\cos n\frac{\pi}{L}xdx, \ (n=0,1,2,...).$$

Ravshanki, bunda $b_n=0$ ($n=1, 2, \ldots$) bo'ladi.

Xuddi shuningdek, agar $f(x)$ funksiya toq funksiya bo'lsa, Furye qatori

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\frac{\pi}{L}x \tag{9}$$

ko‘rishga keladi, bundagi b_n Furye koeffitsienti

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin n\frac{\pi}{L}x dx$$

formula orqali topiladi.

1-*misol.* Davri 4 ga teng bo‘lgan $f(x)$ funksiya (-2;2) intervalda ushbu

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{agar} & -2<x<-1,\\ x, \text{agar} & -1\le x<1,\\ 0, \text{agar} & 1<x\le 2\end{cases}$$

formula yordamida berilgan. Bu funksiyani Furye qatoriga yoying.

Yechish. Berilgan funksiya uchun L=2 bo‘lib, u toq funksiyadir. Shu sababli a_n=0 (n=0, 1, 2,...). b_n koeffitsientlarni hisoblaymiz:

$$b_n=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx=\int_0^1 f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx+\int_1^2 f(x)\sin\frac{n\pi}{2}xdx=\int_0^1 x\sin\frac{n\pi x}{2}dx=$$

$$=\left|\begin{array}{l} u=x, du=dx\\ dv=\sin\frac{n\pi x}{2}dx\\ v=-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\end{array}\right|=-\frac{2x}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}x\Big|_0^1+\frac{2}{n\pi}\int_0^1\cos\frac{n\pi}{2}xdx=$$

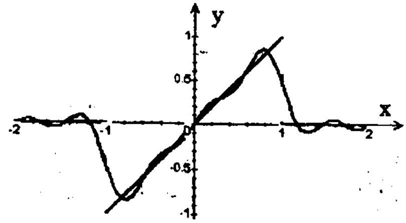
$$=-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}x\Big|_0^1=-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}, \text{ bundan}$$

$$b_n=\begin{cases}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k\pi}, & \text{agar } n=2k,\\ \dfrac{(-1)^k 4}{(2k+1)^2\pi^2}, & \text{agar } n=2k+1\end{cases}$$

Bu holda berilgan funksiya uchun Furye qatori (9) ga asosan

$$f(x)=\frac{4}{\pi^2}\sin\frac{\pi}{2}x+\frac{1}{\pi}\sin\pi x-\frac{4}{3^2\pi^2}\sin\frac{3\pi}{2}x-\frac{1}{2\pi}\sin 2\pi x+...$$

Berilgan funksiya va unga mos tuzilgan Furye qatorining birinchi oltita hadi yig‘indisining grafiklari quyidagicha bo‘ladi (12-rasm):



12-rasm

2-*misol.* Davri $2L$ ga teng bo'lgan $f(x)$ funksiya $(-L;L)$ intervalda $f(x)=|x|$ formula bilan berilgan. Bu funksiyani Furye qatoriga yoying.

Yechish. Berilan $f(x)=|x|$ funksiya $2L$ davrli davriy funksiya bo'lib, bu funksiya juft funksiyadir. Bu holda $b_n=0$ (n=1, 2, ...) va

$$a_0=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)dx=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx=\frac{2}{L}\int_0^L xdx=\frac{2}{L}\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_0^L=L,$$

$$a_n=\frac{2}{L}\int_0^L x\cos\frac{n\pi}{L}xdx=\left|\begin{array}{l} u=x,\ du=dx \\ dv=\cos\frac{n\pi}{L}xdx \\ v=\frac{L}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{L}x\end{array}\right|=\frac{2}{L}\left(\frac{Lx}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{L}x\bigg|_0^L-\frac{L}{n\pi}\int_0^L\sin\frac{n\pi}{L}xdx\right)=$$

$$=\frac{2}{n\pi}\cdot\frac{L}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{L}\bigg|_0^L==\begin{cases}0, & \text{agar} \quad n=2k,\\ -\frac{4L}{n^2\pi^2}, & \text{agar} \quad n=2k+1\end{cases}$$

Demak berilgan funksiya uchun Furye qatori quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$f(x)=|x|=\frac{L}{2}-\frac{4L}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}\cos\frac{\pi x}{L}+\frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{L}+...+\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\frac{(2k+1)\pi x}{L}+...\right).$$

3-*misol.* Ushbu $f(x)=x-[x]$ funksiyani Furye qatoriga yoying.

Yechish. Berilgan $f(x)=x-[x]$ funksiya $2L=1$ ($L=1/2$) davrli funksiya bo'lib, $[0,1]$ kesmada $f(x)=x$ funksiyadan iborat.

Furye koeffitsientlarini hisoblaymiz.

$$a_0=\frac{1}{L}\int_0^{2L}f(x)dx=2\int_0^1 xdx=x^2\Big|_0^1=1,\ a_n=\frac{1}{L}\int_0^{2L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}xdx=2\int_0^1 x\cos\frac{n\pi}{\frac{1}{2}}xdx=$$

$$=2\int_0^1 x\cos 2n\pi x dx=\begin{vmatrix} u=x, & du=dx \\ dv=\cos 2n\pi x dx & \\ v=\frac{1}{2n\pi}\sin 2n\pi x & \end{vmatrix}=2\left(\frac{x}{2n\pi}\sin 2n\pi x\Big|_0^1-\frac{1}{2n\pi}\int_0^1 \sin 2n\pi x dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2n^2\pi^2}\cos 2n\pi x\Big|_0^1=0.$$

$$b_n=2\int_0^{2L} f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x dx=2\int_0^1 x\sin 2\pi x dx=\begin{vmatrix} u=x, & du=dx \\ v=-\frac{1}{2n\pi}\cos 2n\pi x & \end{vmatrix}=$$

$$=2\left(-\frac{x}{2n\pi}\cos 2n\pi x\Big|_0^1+\frac{1}{2n\pi}\int_0^1 \cos 2n\pi x dx\right)=-\frac{1}{n\pi}+\frac{1}{2n^2\pi^2}\sin 2n\pi x\Big|_0^1=-\frac{1}{n\pi},$$

$$b_n=-\frac{1}{n\pi}.$$

Demak, Furye qatori quyidagicha bo'ladi:

$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\pi x}{n};$$

$x=0$ va $x=1$ da $f(x)=x-[x]$ funksiya uzilishga ega. Bu nuqtalarda qator yig'indisi Dirixle teoremaga ko'ra $F(x)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$ ga teng, haqiqatan ham $F(1)=F(0)=\frac{1}{2}$.

Agar $[0,L]$ kesmada bo'lakli-differensiallanuvchi funksiya berilgan bo'lsa, u holda bu funksiyani yoki faqat sinuslar, yoki faqat kosinuslar, yoki ham sinuslar, ham kosinuslar bo'yicha Furye qatoriga yoyish mumkin.

$f(x)$ funksiyani kosinuslar bo'yicha qatorga yoyish uchun uni $[-L,0]$ kesmaga juft tarzda davom ettiriladi, ya'ni

$\varphi(x)=\begin{cases} f(-x), & x\in[-L,0], \\ f(x), & x\in[0,L] \end{cases}$ yordamchi funksiya tuziladi va bu funksiyani sonlar o'qiga davriy davom ettiriladi. Bu holda $f(x)$ funksiya uchun Furye qatori quyidagicha bo'ladi:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{L}dx, \qquad (10)$$

bu yerda

$$a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx \quad (n=0,1,2,...) \qquad (11)$$

$f(x)$ funksiyani sinuslar bo'yicha qatorga yoyish uchun uni $[-L,0]$ kesmaga toq tarzda davom ettiriladi, ya'ni

$\varphi(x)=\begin{cases} -f(-x), & x\in[-L,0], \\ f(x), & x\in[0,L] \end{cases}$ yordamchi funksiya tuziladi va bu funksiyani sonlar o'qiga davriy davom ettiriladi. Bu holda $f(x)$ funksiya uchun Furye qatori quyidagicha bo'ladi:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}dx, \qquad (12)$$

bu yerda

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \qquad (n=1,2,...) \qquad (13)$$

4-*misol.* $f(x)=\begin{cases} 0{,}3, & 0\le x\le 1/2 \\ -0{,}3, & 1/2<x\le 1 \end{cases}$ funksiyani qaralayotgan $[0;1]$ kesmada a) faqat kosinuslar bo'yicha va b) faqat sinuslar bo'yicha Furye qatoriga yoying.

Yechish. a) $f(x)=\begin{cases} 0{,}3, & 0\le x\le 1/2 \\ -0{,}3, & 1/2<x\le 1 \end{cases}$ funksiyani $[-1,0]$ kesmaga juft tarzda davom ettiramiz va yuqoridagi kabi Furye koeffitsientlarini hisoblaymiz, bunda $L=1$:

$$a_o=2\int_0^1 f(x)dx=2\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx+\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx=2\int_0^{1/2}0{,}3dx+\int_{1/2}^1(-0.3dx)=2(0{,}3x)\Big|_0^{1/2}-0{,}3x\Big|_{1/2}^1=$$

$$=2\left(\frac{0{,}3}{2}-03+\frac{0{,}3}{2}\right)=0, \quad a_0=0$$

$$a_n=2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x dx=2\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\cos n\pi x dx+\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\cos n\pi x dx=$$

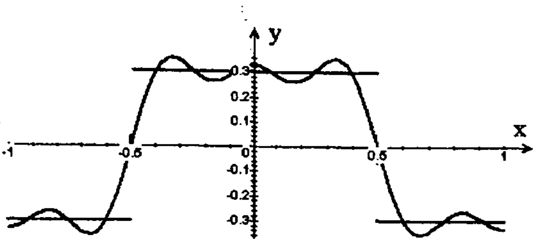
$$=2\int_0^{\frac{1}{2}}0{,}3\cos n\pi x dx-2\int_{\frac{1}{2}}^1 0{,}3\cos n\pi x dx=0{,}6\frac{1}{n\pi}\left(\sin n\pi x\Big|_0^{\frac{1}{2}}-\sin n\pi x\Big|_{\frac{1}{2}}^1\right)=$$

$$=\frac{0{,}6}{n\pi}(\sin\frac{n\pi}{2}+\sin\frac{n\pi}{2})=\frac{1{,}2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases} 0, & n=2k, \\ (-1)^{k-1}\dfrac{1{,}2}{(2k-1)\pi}, & n=2k-1,\ k\in\mathbf{N}. \end{cases}$$

Bu holda faqat kosinuslarni o'z ichiga oluvchi Furye qatori quyidagi ko'rinishga keladi:

$$f(x)=\frac{1,2}{\pi}\left(\frac{\cos\pi x}{1}-\frac{\cos 3\pi x}{3}+\frac{\cos 5\pi x}{1}-...+(-1)^{k-1}\frac{\cos(2k-1)\pi x}{2k-1}+...\right)$$

Berilgan funksiya va unga mos tuzilgan Furye qatorining dastlabki oltita hadi yig'indisi grafiklari quyidagicha bo'ladi (13-rasm):



13-rasm

Berilgan funksiyaning faqat sinuslar qatnashgan Furye qatorini yozish uchun bu funksiyani [-1;0] kesmaga toq tarzda davom ettiramiz va (12) formuladan foydalanamiz:

$$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx=2\left(\int_0^{1/2}0,3f(x)\sin n\pi x dx-\int_{1/2}^{1}0,3f(x)\sin n\pi x dx\right)=$$

$$=-0,6\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\bigg|_0^{1/2}+0,6\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\bigg|_{1/2}^{1}=\frac{0,6}{n\pi}(\cos n\pi-2\cos\frac{n\pi}{2}+1),$$

Bundan n-toq bo'lsa, $b_n=0$ va n-juft $n=2k$ bo'lsa

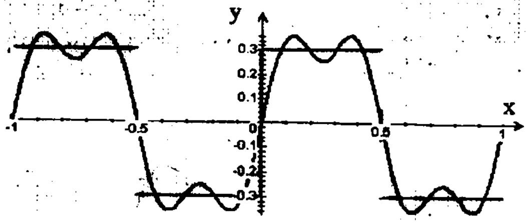
$$b_{2k}=\frac{0,6}{2k\pi}(2-2\cos\frac{2n\pi}{2})=\frac{0,6(1-\cos k\pi)}{k\pi}=\begin{cases}0, & k=2m,\\ \frac{1,2}{k\pi}, & k=2m-1\end{cases}\quad (m\in\mathbf{N})$$

ekanligi kelib chiqadi.

(13) ga asosan funksiyaning Furye qatori quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$f(x)=\frac{1,2}{\pi}(\frac{\sin 2\pi x}{1}+\frac{\sin 6\pi x}{3}+...+\frac{\sin 2(2m-1)\pi x}{2m-1}+...)$$

Berilgan funksiya va unga mos tuzilgan Furye qatorining dastlabki oltita hadi yig'indisi grafiklari quyidagicha bo'ladi (14-rasm):



14-rasm

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Sodda funksiyalar sistemasi deb qanday sistemaga aytiladi?
2. Funksiyalarning o'zaro ortogonalligi qanday aniqlanadi?
3. Trigonometrik qator deb qanday qatorga aytiladi?
4. Funksiyaning Furye qatori deb qanday qatorga aytiladi?
5. Furye koeffitsientlari qanday hisoblanadi?
6. Qanday funksiya bo'lakli-differensiallanuvchi deyiladi?
7. Dirixle teoremasining mazmuni nimadan iborat?
8. "Funksiyani davriy davom ettirish" deganda nimani tushunasiz?
9. Juft va toq funksiyalarning Furye qatorlari qanday xususiyatga ega?
10. $[0,\pi]$ kesmada berilgan funksiya kosinuslar bo'yicha Furye qatoriga qanday yoyiladi?
11. $[0,\pi]$ kesmada berilgan funksiya sinuslar bo'yicha Furye qatoriga qanday yoyiladi?
12. Davri $2L$ ($L>0$) bo'lgan funksiyaning Furye koeffitsientlari qanday hisoblanadi?
13. $[0;2L]$ kesmada berilgan funksiyani qanday qilib Furye qatoriga yoyish mumkin?

Mustaqil yechish uchun misol va masalalar

1. $[-\pi,\pi)$ kesmada berilgan

$$f(x)=\begin{cases} x, \text{ agar } & -\pi\le x<0, \\ 1, \text{ agar } & x=0, \\ 0, \text{ agar } & 0<x<\pi \end{cases}$$

funksiyani Furye qatoriga yoying, qator yig'indisining $x=0$ dagi qiymati nimaga teng?

2. $[-\pi,\pi)$ oraliqda berilgan

$$f(x)\begin{cases} -1, & \text{agar } -\pi\le x<0, \\ 1, & \text{agar } 0\le x<\pi \end{cases}$$

funksiyani Furye qatoriga yoying. Furye qatori yig'indisi 0, π va $-\pi$ da nimaga teng?

3. $f(x)=\frac{1}{3}x$ funksiya $[-3,3]$ kesmada berilgan. Bu funksiyani Furye qatoriga yoying.

4. $\sin x$, $\sin 3x$, $\sin 5x$, ..., $\sin(2n-1)x$,... funksiyalar sistemasi $[0,\frac{\pi}{2}]$ da ortogonal sistema ekanligini ko'rsating. Shu sistemaga nisbatan $f(x)$ funksiyaning Furye koeffitsientlarini yozing.

5. $[0,\pi]$ da berilgan $f(x)=\cos x$ funksiyani sinuslar bo'yicha Furye qatoriga yoying.

6. (-1; 1) da berilgan $f(x)=e^x$ funksiyani Furye qatoriga yoying.

Javoblar: 1. $f(x)=-\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}+1}{\pi n^2}\cos nx+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right)$, $f(0)=0$;

2. $f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$, $0<|x|<\pi$, $f(0)=f(\pi)=f(-\pi)=0$;

3. $f(x)=6\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}$; 5. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16n}{\pi(4n^2-1)}\sin 2nx$;

6. $sh1+2sh1\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos n\pi x}{1+n^2\pi^2}+\frac{\pi}{2}sh1\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot n\sin n\pi x}{1+n^2\pi^2}$

IV-bobni takrorlash uchun test savollari

1. Bo'lakli-differensiallanuvchi bo'lmagan funksiyani ko'rsating.

A) $f(x)=\begin{cases}1-x, & 0\le x\le 2\\ \frac{3}{x-2} & 2<x\le 4\end{cases}$ B) $f(x)=\begin{cases}1-4x, & 0\le x\le 1\\ \frac{3}{x-5} & 1<x\le 3\end{cases}$

C) $f(x)=\cos x$, $1\le x\le\pi$ D) $f(x)=[x]$, $-1\le x\le 3$

2. Trigonometrik qatorni ko'rsating.

A) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\sin^2 nx}{3^n}$ B) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{3^n}$ C) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^x\sin x}{3^n}$ D) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin n\sqrt{x}}{3^n}$

3. Trigonometrik qatorni ko'rsating.

A) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\cos nx}{3^n}$ B) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\cos x}{3^n}$ C) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2x\cos x}{3^n}$ D) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx^2}{3^n}$

4. Davri 2π ga teng bo'lgan $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<\pi\\ 0, & -\pi<x<0\end{cases}$ funksiya uchun a_0 Furye koeffitsientini toping.

A) 0,5 B) 1 C) -0,5 D) 2

5. $f(x)=\text{sign}x$, $-\pi<x<\pi$ funksiya uchun a_5 va b_6 larni toping.

A) $a_5=b_6=0$ B) $a_5=0,\ b_6=0{,}8/\pi$

C) $a_5=0,\ b_6=2/3\pi$, D) $a_5=0{,}8/\pi,\ b_6=0{,}8/\pi$

6. Davri 2π ga teng bo'lgan $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<\pi\\ 0, & -\pi<x<0\end{cases}$ funksiya Furye qatorining xususiy yig'indisi $S_1(x)$ ni toping.

A) $\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sin x$ B) $\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\sin x$ C) $\frac{2}{\pi}\sin x$ D) $\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\cos x$

7. $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<\pi\\ 0, & -\pi<x<0\end{cases}$ funksiya Furye qatori yig'indisi $S(x)$ ning $x=-\pi$ va $x=\pi$ nuqtalardagi qiymatlarini toping.

A) $S(-\pi)=0,\ S(\pi)=0{,}5$ B) $S(-\pi)=S(\pi)=0{,}5$

C) $S(-\pi)=S(\pi)=-0{,}5$ D) $S(-\pi)=S(\pi)=0$

8. Davri 2 ga teng bo'lgan $f(x)=|x|$, $-1<x<1$, funksiya uchun b_1, b_2 Furye koeffitsientlarini toping.

A) $b_1=b_2=0$ B) $b_1=1;\ b_2=0$ C) $b_1=0;\ b_2=1$ D) $b_1=b_2=1$

9. Davri 2 ga teng bo'lgan $f(x)=|x|$, $-1<x<1$, funksiya Furye qatorining xususiy yig'indisi $S_1(x)$ ni toping.

A) $\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\cos\pi x$ B) $\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\cos x$ C) $\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}\cos\pi x$ D) $\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}\cos x$

10. (0;1) intervalda berilgan $f(x)=x$ funksiyani kosinuslar bo'yicha Furye qatoriga yoying.

A) $\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}\cos k\pi x$ B) $\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)\pi x$

C) $\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}\frac{1}{k}\cos k\pi x$ D) $\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)\pi x$

Test savollarining javoblari

I-bob

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
A	D	B	A	C	C	D	D	C	A	C	D	B
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
D	A	D	D	C	B	A	D	D	C	D	C	A

II-bob

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	C	D	D	C	A	A	C	D	D
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A	C	D	B	B	B	C	D	C	D

III-bob

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	B	D	C	C	B	C	D	D	B	D	A
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
B	C	D	B	D	A	C	B	A	A	A	B

IV-bob

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	B	A	A	A	B	B	A	A	B

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Азларов Т., Мансуров Х., Математик анализ. 1-қисм.-Т.: "Ўқитувчи", 1994.-416 б.
2. Азларов Т., Мансуров Х., Математик анализ. 2-қисм.-Т.: "Ўқитувчи", 1995.-436 б.
3. Gaziyev A., Israilov I., Yaxshibaev M. "Matematik analizdan misol va masalalar" T.: "Yangi asr avlodi" 2006 y. -304 b.
4. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков Д.И. Лекции по математическому анализу. М.: "Высшая школа", 1999,-695 ст.
5. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: «Издательство АСТ», 2003,-558 ст.
6. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. I. М.: Интеграл-Пресс, 2002,-416 ст.
7. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. II. М.: Интеграл-Пресс, 2002,-544 ст.

MUNDARIJA