O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

ALISHER NAVOIY NOMIDAGI
SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI

FUNKSIONAL ANALIZDAN MASALALAR TO'PLAMI

II qism
METRIK VA CHIZIQLI FAZOLAR

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

ALISHER NAVOIY NOMIDAGI
SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI

FUNKSIONAL ANALIZDAN MASALALAR TO'PLAMI

II qism

METRIK VA CHIZIQLI FAZOLAR

Toshkent
«TURON-IQBOL»
2013

UO'K: 531/534(076.1)
KBK 22.16
A-15

Mas'ul muharrir:
To'raqulov Davir Davronovich, Fizika-matematika fanlari nomzodi

Tuzuvchilar:
Abdullayev Janikul Ibragimovich, Fizika-matematika fanlari doktori
G'anixo'jayev Rasul Nabiyevich, Fizika-matematika fanlari doktori
Ikromov Isroil Akramovich, Fizika-matematika fanlari doktori

Taqrizchilar:
Imomkulov Sevdiyor Akramovich, Fizika-matematika fanlari doktori
Niyozov Iqbol Ergashovich, Fizika-matematika fanlari nomzodi

Abdullayev J.
Funksional analizdan masalalar to'plami: II qism / J. Abdullayev, R. G'anixo'jayev, I. Ikromov. - Toshkent: Turon-Iqbol, 2013. -148 b.
I. G'anixo'jayev. R
II. Ikromov. I

UO'K: 531/534(076.1)
KBK 22.16 ya 73

Ushbu masalalar to'plami Oliy o'quv yurtlarining, 5130100-matematika va 5140300-mexanika yo'nalishlari bo'yicha ta'lim olayotgan talabalari uchun mo'ljallangan

ISBN 978-9943-14-265-7

Mundarija

Kirish

Ushbu uslubiy qo'llanma "Funksional analiz" fanidan namunaviy o'quv dasturga moslab tuzilgan masalalar to'plamidir. U universitetlarning matematika va mexanika bakalavriyat yo'nalishlari bo'yicha ta'lim olayotgan talabalari uchun mo'ljallangan. Bundan tashqari masalalar to'plamidan matematik tahlil va matematik fizika mutaxassisliklari bo'yicha ta'lim olayotgan magistrlar hamda katta ilmiy xodim – izlanuvchilar foydalanishlari mumkin. Masalalar to'plami funksional analizning asosiy boblari metrik fazolar, chiziqli fazolar va chiziqli funksionallarni o'z ichiga olgan. U nisbatan soddaroq misollardan tashkil topgan bo'lib, o'quvchilarni misol yechishga rag'batlantiradi.

Uslubiy qo'llanmaning asosiy maqsadi bo'lg'usi mutaxassislarni funksional analizning asosiy tushunchalari va usullari bilan tanishtirishdan iborat. Uslubiy qo'llanma talabalarni funksional analizga oid masalalarni yechishga o'rgatadi hamda ularda yetarli darajada texnik mahorat hosil qiladi. Ushbu to'plam O'zMU va SamDUda "Funksional analiz" fanidan ma'ruza va amaliy mashg'ulotlar olib boruvchi professor-o'qituvchilarning ko'p yillik ish tajribalari asosida tuzilgan.

Uslubiy qo'llanma II bob, 12 paragrafdan iborat. Har bir paragraf boshida qisqacha nazariy material berilgan. Har bobdan so'ng talabalar o'z bilimlarini tekshirishlari uchun test savollari javoblari bilan berilgan.

Mualliflar uslubiy qo'llanmani yaxshilashda bergan foydali maslahatlari uchun mas'ul muharrir va taqrizchilarga hamda matnni tahrir qilish uchun bergan yordami uchun B.Davranovga o'z minnatdorchiliklarini bildiradi.

Masalalar to'plami birinchi marta chop qilinayotgani uchun xato va kamchiliklar bo'lishi mumkin. Xato va kamchiliklar haqidagi fikrlaringizni jabdullaev@mail.ru elektron manziliga jo'natishlaringizni so'raymiz.

I bob. Metrik fazolar

Bu bob 8 paragraf (1-8) dan iborat. Bobning birinchi 1-paragrafida metrik fazolar, undagi asosiy tushunchalarning mohiyatini ochib beruvchi misol va masalalar jamlangan. 2-paragrafda yaqinlashuvchi va fundamental ketma-ketliklarga doir misollar qaralgan. 3-paragrafda ochiq va yopiq sharlar hamda ochiq va yopiq to'plamlarning xossalarini tekshirishga doir misollar qaralgan. 4-paragraf to'la metrik fazolar va metrik fazolarni to'ldirishga doir misollarga bag'ishlangan. Bu yerda Ber teoremasining qo'llanishiga hamda hamma yerda zich va hech yerda zichmas to'plamlarga doir qiziqarli misollar bor. 5-paragrafda metrik fazolarni uzluksiz akslantirishlar hamda izometrik, gomeomorf metrik fazolarga doir misollar jamlangan. 6-paragrafda qisqartirib akslantirish prinsipining qo'llanishiga doir misollar qaralgan. Kompakt to'plamlar va kompakt metrik fazolarga doir misollar 7-paragrafda jamlangan. Oxirgi 8-paragrafda tutash to'plamlar va ularga doir misollar keltirilgan.

1-§. Metrik fazolar va metrik munosabatlar

Bu paragrafda foydalaniladigan asosiy tushunchalar va ta'riflarni keltiramiz. X bo'sh bo'lmagan to'plam va $X \times X$ bilan X ni o'zini-o'ziga dekart ko'paytmasini belgilaymiz.

1.1-ta'rif. *Agar $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ akslantirish quyidagi uchta shartni qanoatlantirsa unga X dagi masofa yoki metrika deyiladi:*

1) $\rho(x, y) \geq 0, \quad \forall x, y \in X, \quad \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ *(ayniyat aksiomasi),*

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x), \quad \forall x, y \in X$ *(simmetriklik aksiomasi),*

3) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z), \quad \forall x, y, z \in X$ *(uchburchak aksiomasi).*

(X, ρ) *juftlik esa metrik fazo deyiladi.*

Odatda metrik fazo, ya'ni (X, ρ) juftlik bitta X harfi bilan belgilanadi. Agar X to'plamda $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ metrikalar aniqlangan bo'lsa, u holda $(X, \rho_1), (X, \rho_2), \ldots, (X, \rho_n)$ metrik fazolar mos ravishda X_1, X_2,

$\ldots, X_n$ hartlari bilan belgilanadi.

1.2-ta'rif. *Agar shunday* $C_1 > 0$ *va* $C_2 > 0$ *sonlar mavjud bo'lib, barcha* $x, y \in X$ *lar uchun*

$$C_1\rho_1(x, y) \leq \rho_2(x, y) \leq C_2\rho_1(x, y)$$

tengsizliklar o'rinli bo'lsa, ρ_1 *va* ρ_2 *lar ekvivalent metrikalar deyiladi.*

Bu bobda va bundan keyingi boblarda foydalaniladigan asosiy belgilashlarni keltiramiz.

$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \ x_i \in \mathbb{R}\}$ $-$ n o'lchamli vektor fazo, $m-$ barcha chegaralangan ketma-ketliklar to'plami. $c-$ barcha yaqinlashuvchi ketma-ketliklar to'plami. c_0- nolga yaqinlashuvchi barcha ketma-ketliklar to'plami. ℓ_2- kvadrati bilan jamlanuvchi barcha ketma-ketliklar to'plami, ya'ni

$$\ell_2 = \left\{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\right\}.$$

$\ell_p(p \geq 1)$ $-$ absolyut qiymatining $p-$ darajalaridan tuzilgan qator yaqinlashuvchi bo'lgan barcha ketma-ketliklar to'plami, ya'ni

$$\ell_p = \left\{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\right\}.$$

Xususan $p = 1$ da ℓ_p to'plam hadlarining modullaridan tuzilgan qator yaqinlashuvchi bo'ladigan barcha ketma-ketliklardan iborat bo'ladi. $C[a, b]-[a, b]$ kesmada aniqlangan barcha uzluksiz funksiyalar to'plami. $M[a, b]-[a, b]$ kesmada aniqlangan chegaralangan funksiyalar to'plami. $C^{(1)}[a, b]-[a, b]$ kesmada aniqlangan barcha uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar to'plami. $C^{(n)}[a, b]-[a, b]$ kesmada aniqlangan n marta uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar to'plami. $V[a, b]-[a, b]$ kesmada aniqlangan o'zgarishi chegaralangan funksiyalar to'plami. $AC[a, b]-[a, b]$ kesmada aniqlangan barcha absolyut uzluksiz funksiyalar to'plami.

$\widetilde{L}_p[a, b]$– o'lchovli va $[a, b]$ kesmada $(p \geq 1)$ p – darajasi bilan Lebeg ma'nosida integrallanuvchi bo'lgan funksiyalar to'plami. $\widetilde{L}_p^{(0)}[a, b] \subset \widetilde{L}_p[a, b]$ bilan nolga ekvivalent funksiyalar to'plamini belgilaymiz. Agar $f - g \in \widetilde{L}_p^{(0)}[a, b]$ bo'lsa ularni φ munosabatda deymiz. Bu munosabat ekvivalentlik munosabati bo'ladi va u $\widetilde{L}_p[a, b]$ ni o'zaro kesishmaydigan sinflarga ajratadi. Hosil bo'lgan sinflar to'plamini $L_p[a, b]$ bilan belgilaymiz. Xususan $p = 1$ bo'lganda, $[a, b]$ kesmada Lebeg ma'nosida integrallanuvchi ekvivalent funksiyalar sinflari to'plami hosil bo'ladi va u $L_1[a, b]$ bilan belgilanadi. Xuddi shunday $p = 2$ bo'lganda $[a, b]$ kesmada kvadrati Lebeg ma'nosida integrallanuvchi bo'lgan ekvivalent funksiyalar sinflari hosil bo'ladi va u $L_2[a, b]$ bilan belgilanadi.

Bu paragrafda metrik fazolar va akslantirishlarga doir misollar qaraladi.

1.1. $\mathbb{R}^2$ to'plamda $x = (x_1, x_2)$ va $y = (y_1, y_2)$ elementlar uchun kiritilgan ushbu

$$\rho_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|; \qquad \rho_2(x, y) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|;$$

$$\rho_3(x, y) = |x_1 - y_2| + |x_2 - y_1|; \qquad \rho_4(x, y) = |x_1 x_2 - y_1 y_2|$$

akslantirishlardan qaysi biri metrika bo'ladi?

Yechish. ρ_1 akslantirishning metrika aksiomalarini qanoatlantirishini tekshiramiz. $\rho_1(x, y) \geq 0$ shart modulning manfiymasligidan kelib chiqadi. Faraz qilaylik, $\rho_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = 0$ bo'lsin. U holda $|x_1 - y_1| = |x_2 - y_2| = 0$ bo'ladi. Bundan $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, ya'ni $x = y$. Endi $x = y$ bo'lsin, ya'ni $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$. Bu yerdan

$$\rho_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = 0$$

ekanligini olamiz. Demak, 1-aksioma bajariladi. Quyidagi tenglikdan

$$\rho_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| = \rho_1(y, x)$$

2-aksiomaning bajarilishi kelib chiqadi. Nihoyat,

$$\rho_1(x,z) = |x_1 - z_1| + |x_2 - z_2| = |x_1 - y_1 + y_1 - z_1| + |x_2 - y_2 + y_2 - z_2| \le$$

$$\le |x_1 - y_1| + |y_1 - z_1| + |x_2 - y_2| + |y_2 - z_2| = \rho_1(x,y) + \rho_1(y,z)$$

tengsizlikdan 3-aksiomaning bajarilishi kelib chiqadi. Shunday qilib, $(\mathbb{R}^2, \rho_1) = \mathbb{R}_1^2$ metrik fazo bo'ladi. Agar $x = (1,\ 1)$, $y = (2,\ 2)$ deb olsak, u holda $\rho_2(x,y) = |1-1| + |2-2| = 0$ tenglik o'rinli, ammo $x \neq y$. Demak, ρ_2 akslantirish uchun metrikaning 1-aksiomasi bajarilmaydi.

Xuddi shunday ko'rsatish mumkinki, $x = (2,3)$, $y = (3,2)$ har xil nuqtalar uchun $\rho_3(x,y) = |2-2| + |3-3| = 0$ va $\rho_4(x,y) = |2 \cdot 3 - 3 \cdot 2| = 0$ tengliklar bajariladi. Demak, ρ_3 va ρ_4 akslantirishlar uchun metrikaning 1-aksiomasi bajarilmaydi. ❑

1.2. $\mathbb{R}$ sonlar o'qida $\rho(x,y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$ akslantirish metrika bo'lishini tekshiring. $\rho_1(x,y) = \operatorname{arctg}|x-y|$ akslantirish $\mathbb{R}$ to'plamda metrika bo'ladimi?

1.3. $\mathbb{R}^n$ to'plamda ushbu akslantirishlar metrika bo'ladimi?

$$\rho_1(x,y) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|; \qquad \rho_2(x,y) = \left| \max_{1 \le k \le n} (x_k - y_k) \right|;$$

$$\rho_3(x,y) = \begin{cases} 1, & agar\ \ x \neq y \\ 0, & agar\ \ x = y \end{cases}; \qquad \rho_4(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sign}|x_k - y_k|.$$

1.4. $\mathbb{R}^3$ fazoda boshi koordinatalar markazida bo'lgan barcha birlik (uzunligi birga teng) vektorlar to'plamida

$$\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \arccos(\vec{x}, \vec{y}) = \arccos(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)$$

akslantirish metrika bo'lishini isbotlang.

1.5. $[0,\ 1]$ kesmadagi barcha ochiq to'plamlardan iborat sistema X bo'lsin. Agar $\mu-$ sonlar o'qidagi Lebeg o'lchovi bo'lsa,

$$\rho(A,\ B) = \mu(A \,\Delta\, B)$$

akslantirish X da metrika bo'lishini isbotlang.

1.6. Barcha ko'phadlardan iborat $\mathbb{P}$ to'plamda

$$\rho(p, q) = \sum_{i=0}^{\infty} \left|p^{(i)}(0) - q^{(i)}(0)\right|$$

akslantirish metrika bo'lishini isbotlang.

1.7. Natural sonlar to'plami $\mathbb{N}$ da

$$\rho_1(n, m) = |e^{in} - e^{im}|\ ;\ \rho_2(n, m) = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{n+m}, & agar \quad n \neq m \\ 0, & agar \quad n = m \end{cases};$$

akslantirishlar metrika bo'lishini isbotlang.

1.8. Butun sonlar to'plami $\mathbb{Z}$ da

$$\rho_1(n, m) = \frac{|m - n|}{\sqrt{1 + m^2} \cdot \sqrt{1 + n^2}}; \qquad \rho_2(n, m) = 10^{-k}.$$

(bu yerda k son $|n - m|$ ayirmaning oxiridagi nollar soni, agar $n = m$ bo'lsa, $k = \infty$ deb hisoblaymiz) ifodalar metrika bo'lishini ko'rsating.

1.9. Ushbu $|z| < 1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi kompleks sonlar to'plamida

$$\rho(z_1, z_2) = \ln \frac{1 + \left|\dfrac{z_2 - z_1}{1 - z_2 \bar{z}_1}\right|}{1 - \left|\dfrac{z_2 - z_1}{1 - z_2 \bar{z}_1}\right|}$$

akslantirish metrika bo'lishini isbotlang. Bu metrika *Lobachevskiy metrikasi* deyiladi.

1.10. $[a, b]$ kesmada aniqlangan x funksiya uchun shunday α va β o'zgarmas sonlar mavjud bo'lib, barcha $t_1, t_2 \in [a, b]$ lar uchun

$$|x(t_1) - x(t_2)| \leq \beta \cdot |t_1 - t_2|^{\alpha}$$

tengsizlik bajarilsa, x funksiya α *ko'rsatkichli Gyolder shartini qanoatlantiradi* deyiladi. Bu shartni qanoatlantiruvchi barcha funksiyalar to'plamini $H^{\alpha}[a, b]$ orqali belgilaylik. Agar $\alpha > 1$ bo'lsa, $H^{\alpha}[a, b]$ faqat o'zgarmas funksiyalardan iborat ekanligini isbotlang. Agar $0 < \alpha \leq 1$ bo'lsa,

$$\rho(x, y) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)| + \sup_{t_1 \neq t_2} \frac{|(x(t_1) - y(t_1)) - (x(t_2) - y(t_2))|}{|t_1 - t_2|^{\alpha}}$$

akslantirish $H^{\alpha}[a, b]$ to'plamda metrika bo'lishini isbotlang. $H^{\alpha}[a, b]$ Gyolder fazosi. $\alpha = 1$ bo'lganda *Lipshits fazosi* deyiladi.

1.11. $[a, b]$ kesmada cheksiz marta differensiallanuvchi barcha funksiyalar to'plami $C^{\infty}[a, b]$ da

$$\rho(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{\max\limits_{a \leq t \leq b} |x^{(k)}(t) - y^{(k)}(t)|}{1 + \max\limits_{a \leq t \leq b} |x^{(k)}(t) - y^{(k)}(t)|}$$

akslantirish metrika bo'lishini isbotlang.

1.12. (X, ρ) metrik fazo bo'lsa, X to'plamda

$$\rho_1(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)}; \qquad \rho_2(x, y) = \ln(1 + \rho(x, y));$$

$$\rho_3(x, y) = e^{\rho(x, y)} - 1; \qquad \rho_4(x, y) = \min\{1; \rho(x, y)\}$$

akslantirishlarning har biri metrika bo'lishini isbotlang.

1.13-1.32-misollarda $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ akslantirishning metrika shartlarini qanoatlantirishini tekshiring. *Ular asosiy metrik fazolardir.*

1.13. $\rho(x, y) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}$, $x, y \in \mathbb{R}^n$.

1.14. $\rho_{\infty}(x, y) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$, $x, y \in \mathbb{R}^n$.

1.15. $\rho_1(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k - y_k|$, $x, y \in \mathbb{R}^n$.

1.16. $\rho_p(x, y) = \sqrt[p]{\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p}, \quad p \geq 1, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$

1.17. $\rho(x, y) = \sup\limits_{1 \leq n < \infty} |x_n - y_n|, \; x, y \in m.$

1.18. $\rho(x, y) = \sup\limits_{1 \leq n < \infty} |x_n - y_n|, \; x, y \in c.$

1.19. $\rho(x, y) = \sup\limits_{1 \leq n < \infty} |x_n - y_n|, \; x, y \in c_0.$

1.20. $\rho(x, y) = \sqrt{\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^2}, \; x, y \in \ell_2.$

1.21. $\rho(x, y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|, \; x, y \in \ell_1.$

1.22. $\rho(x, y) = \sqrt[p]{\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p}, \; x, y \in \ell_p.$

1.23. $\rho(f, g) = \max\limits_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)|, \; f, g \in C[a, b].$

1.24. $\rho_1(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx, \; f, g \in C[a, b].$

1.25. $\rho_2(f, g) = \sqrt{\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 \, dx}, \; f, g \in C[a, b].$

1.26. $\rho_p(f, g) = \sqrt[p]{\int_a^b |f(x) - g(x)|^p \, dx}, \; p \geq 1, \; f, g \in C[a, b].$

1.27. $\rho(x, y) = \max\limits_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)| + \max\limits_{a \leq t \leq b} |x'(t) - y'(t)|, \; x, y \in C^{(1)}[a, b].$

1.28. $\rho(x, y) = |x(a) - y(a)| + V_a^b[x - y], \; x, y \in V[a, b].$

1.29. $\rho(x, y) = |x(a) - y(a)| + V_a^b[x - y], \; x, y \in AC[a, b].$

1.30. $\rho(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx, \quad f, g \in L_1[a, b].$

1.31. $\rho(f, g) = \sqrt{\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx}, \quad f, g \in L_2[a, b].$

1.32. $\rho(f, g) = \sqrt[p]{\int_a^b |f(x) - g(x)|^p dx}, \; p \geq 1, \; f, g \in L_p[a, b].$

Yuqorida aytilganiga amal qilib quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$(\mathbb{R}^n, \rho_1) = \mathbb{R}_1^n, \quad (\mathbb{R}^n, \rho_p) = \mathbb{R}_p^n, \quad (\mathbb{R}^n, \rho_\infty) = \mathbb{R}_\infty^n, \quad (\mathbb{R}^n, \rho) = \mathbb{R}^n.$$

$$(C[a, b], \rho_1) = C_1[a, b], \ (C[a, b], \rho_2) = C_2[a, b], \ (C[a, b], \rho_p) = C_p[a, b].$$

1.19-misolning yechimi. $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar nolga yaqinlashuvchi bo'lganligi uchun ular chegaralangan bo'ladi. Shuning uchun $\sup\limits_{1 \le n < \infty} |x_n - y_n|$ barcha $x, y \in c_0$ larda chekli bo'ladi. Ixtiyoriy $n \in \mathbb{N}$ da $|x_n - y_n| \ge 0$ ekanligidan $\rho(x, y) = \sup\limits_{n \ge 1} |x_n - y_n| \ge 0$ ekanligi kelib chiqadi. Endi $\rho(x, y) = \sup\limits_{n \ge 1} |x_n - y_n| = 0$ bo'lsin, u holda barcha $n \in \mathbb{N}$ larda $|x_n - y_n| = 0$ bo'ladi. Bu yerdan $x = y$ tenglikka kelamiz. Agar $x = y$ bo'lsa, u holda $\rho(x, y) = 0$ bo'ladi. Demak, 1-shart bajarilar ekan. $|x_n - y_n| = |y_n - x_n|$ tenglikdan 2-shartning bajarilishi kelib chiqadi. Uchburchak tengsizligi esa

$$|x_n - z_n| \le |x_n - y_n| + |y_n - z_n|, \qquad \sup_n (x_n + y_n) \le \sup_n x_n + \sup_n y_n$$

tengsizliklardan kelib chiqadi. Demak, berilgan $\rho : c_0 \times c_0 \to \mathbb{R}$ akslantirish uchun metrikaning barcha shartlari bajariladi. □

1.33-1.42-misollarda $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ akslantirish metrikaning qaysi shartini qanoatlantirmasligini aniqlang.

1.33. $\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ EKUK(x, y), & x \ne y \end{cases}, \quad x, y \in \mathbb{N}.$

1.34. $\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ EKUB(x, y), & x \ne y \end{cases}, \quad x, y \in \mathbb{N}.$

1.35. $\rho(x, y) = (x - y)^2, \quad x, y \in \mathbb{R}.$

1.36. $\rho(x, y) = |\sin x - \sin y|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$

1.37. $\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x < y \\ 2, & x > y, \end{cases} \quad x, y \in \mathbb{R}.$

1.38. $\rho(x, y) = |x_1 - y_2| + |y_1 - x_2|, \quad x, \ y \in \mathbb{R}^2.$

1.39. $\rho(x, y) = |x_1 - y_1| + 2|x_2 - y_2|^2, \quad x, \ y \in \mathbb{R}^2.$

1.40. $\rho(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|, \quad x, \ y \in \mathbb{R}^3.$

1.41. $\rho(f, g) = |f(0) - g(0)| + |f(1) - g(1)|, \quad f, g \in C[0, 1].$

1.42. $\rho(x, y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^2, \ x, y \in \ell_2.$

1.35-misolning yechimi. $\rho(x, y) = (x - y)^2, \ x, \ y \in \mathbb{R}$ akslantirish metrikaning 1− va 2− shartlarini qanoatlantiradi. Bu akslantirish uchun uchburchak tengsizligi o'rinli emasligini ko'rsatamiz. Buning uchun $x = 0, \ y = 3, \ z = 5$ nuqtalarni olamiz. U holda $\rho(x, z) = 25, \ \ \rho(x, y) = 9,$ $\rho(y, z) = 4$ bo'lib,

$$25 = \rho(x, z) > \rho(x, y) + \rho(y, z) = 9 + 4 = 13.$$

Demak, ρ uchun uchburchak aksiomasi o'rinli emas. □

1.43-1.58-misollarda $x \in X$ va $y \in X$ elementlar orasidagi masofani toping. Masofa ko'rsatilmagan misollarda tabiiy metrika qaraladi. Ularni 1.13-1.32 misollardan qarab oling.

1.43. $X = \mathbb{N}, \quad x = 5, \quad y = 25, \quad \rho(x, y) = 0,1 \cdot |x - y|.$

1.44. $X = \mathbb{R}^3, \quad x = (8, 4, 3), \quad y = (6, 0, -1).$

1.45. $X = \mathbb{R}^4_\infty, \quad x = (-1, -2, 3, 0), \quad y = (4, 2, 0, -2).$

1.46. $X = \mathbb{R}^4_1, \quad x = (4, 5, 0, 1), \quad y = (-3, 0, 2, 7).$

1.47. $X = P_{\leq n}, \ x(t) = 1 + t, \ \ y(t) = 2t, \quad \rho(x, y) = \int\limits_0^1 |x(t) - y(t)|\, dt.$

1.48. $X = C[0, \pi], \quad x(t) = \sin t, \quad y = \cos t.$

1.49. $X = C_2[-\pi, \pi], \quad x(t) = e^{it}, \quad y(t) = e^{-it}.$

1.50. $X = m$. $x_n = (-1)^n$, $y_n = \dfrac{n}{n+1}$.

1.51. $X = c$, $x_n = \dfrac{n+1}{n}$, $y_n = 1 - (-1)^n \dfrac{1}{n}$.

1.52. $X = c_0$, $x_n = 2^{2-n}$, $y_n = -2^{1-n}$.

1.53. $X = \ell_2$, $x = (1, 1, 0, 1, 0, 0, \ldots)$, $y = (0, 0, 0, \ldots)$.

1.54. $X = L_1[0, \pi]$, $x(t) = \sin t$, $y(t) = \cos t$.

1.55. $X = L_2[0, \pi]$. $x(t) = \sin t$, $y(t) = \cos t$.

1.56. $X = V[-\pi, \pi]$. $x(t) = \cos t$, $y(t) = 1$.

1.57. $X = AC[0, \pi]$, $x(t) = \sin t$, $y(t) = 0$.

1.58. $X = M[0, 2\pi]$. $\rho(x, y) = \sup\limits_{0 \le t \le 4} |x(t) - y(t)|$. $x(t) = t$, $y(t) = \sin t$.

1.57-misolning yechimi. $AC[0, \pi]$ metrik fazoda x va y nuqtalar orasidagi masofa $\rho(x, y) = |x(0) - y(0)| + V_0^{\pi}[x - y]$ tenglik bilan hisoblanadi. Ma'lumki, $x(t) = \sin t$ funksiyaning $[0, \pi]$ kesmadagi to'la o'zgarishi 2 ga teng. Shuning uchun $x(t) = \sin t$ va $y(t) = 0$ nuqtalar orasidagi masofa quyidagiga teng: $\rho(x, y) = |x(0) - y(0)| + V_0^{\pi}[x - y] = V_0^{\pi}[x] = 2$. □

2-§. Yaqinlashuvchi va fundamental ketma-ketliklar

X metrik fazoda $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ ketma-ketlik va x nuqta berilgan bo'lsin. Agar $\lim\limits_{n \to \infty} \rho(x_n, x) = 0$ munosabat bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik x nuqtaga *yaqinlashadi* deyiladi. x nuqta esa $\{x_n\}$ ketma-ketlikning *limiti* deyiladi. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday N_ε natural son mavjud bo'lib, barcha $n > N_\varepsilon$ va $m > N_\varepsilon$ lar uchun $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, u holda $\{x_n\}$ *ga fundamental ketma-ketlik* deyiladi.

2.1. Agar $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x_0) = 0$ va $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = 0$ bo'lsa, u holda $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(y_n, x_0) = 0$ ekanligini isbotlang.

Isbot. Metrikaning 1 va 3-aksiomalaridan foydalansak,

$$0 \le \rho(y_n, x_0) \le \rho(y_n, x_n) + \rho(x_n, x_0)$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. Bu sonli tengsizlkda limitga o'tib,

$$\lim_{n\to\infty} \rho(y_n, x_0) = 0$$

ni olamiz. $\square$

2.2. (X, ρ) metrik fazoning ixtiyoriy x, y, z, t nuqtalari uchun

a) $|\rho(x, z) - \rho(y, t)| \le \rho(x, y) + \rho(z, t)$;

b) $|\rho(x, z) - \rho(y, z)| \le \rho(x, y)$ tengsizliklarni isbotlang.

2.3. $\{x_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo'lsin. Agar $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_{2n}, a) = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_{2n+1}, b) = 0$ va $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, c) = 0$ bo'lsa, $a = b = c$ hamda $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, a) = 0$ munosabatlarni isbotlang.

2.4. $C[0, 1]$ metrik fazoda ushbu

a) $x_n(t) = t^n - t^{n+1}$; b) $y_n(t) = t^n - t^{2n}$;

c) $z_n(t) = t^n - 2t^{n+1} + t^{n+2}$; d) $u_n(t) = \dfrac{t^n}{n} - \dfrac{t^{n+1}}{n+1}$

ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'ladimi?

2.5. Oldingi misoldagi funksiyalar ketma-ketligi $C^{(1)}[0, 1]$, $C_1[0, 1]$ metrik fazolarda yaqinlashuvchi bo'ladimi?

2.6. $C_1[0, 1]$ metrik fazoda yaqinlashuvchi, ammo $C[0, 1]$ metrik fazoda yaqinlashuvchi bo'lmagan $x_n(t)$ uzluksiz funksiyalar ketma-ketligiga misol keltiring.

2.7. $x_n(t) = n^2 t \cdot e^{-nt}$ funksiyalar ketma-ketligi $x(t) = 0$ funksiyaga har bir nuqtada yaqinlashuvchi, ammo $C_1[0, 1]$ metrik fazoda yaqinlashuvchi emas. Isbot qiling.

Isbot. Har bir $t \in [0, 1]$ uchun $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) = 0$ tenglik matematik analiz kursidan ma'lum. Demak, $x_n(t)$ funksiyalar ketma-ketligi $x(t) = 0$ funksiyaga har bir nuqtada yaqinlashadi. Endi $\rho_1(x_n, 0)$ masofani hisoblaymiz.

$$\rho_1(x_n, x) = \int_0^1 |x_n(t) - 0|\, dt = \int_0^1 |x_n(t)|\, dt = \int_0^1 n^2 t e^{-nt} dt = 1-(n+1)e^{-n}.$$

Integralni hisoblashda bo'laklab integrallash usulidan foydalanildi. Bu yerdan

$$\lim_{n\to\infty} \rho_1(x_n, x) = 1$$

ni olamiz. Demak, $\{x_n\}$ ketma-ketlik $x(t) = 0$ funksiyaga $C_1[0, 1]$ fazo metrikasida yaqinlashuvchi emas. □

2.8. $C_1[0, 1]$ metrik fazoda $x(t) = 0$ funksiyaga yaqinlashuvchi, ammo hech bir $t \in [0, 1]$ nuqtada 0 ga yaqinlashmaydigan funksiyalar ketma-ketligiga misol keltiring.

2.9. Agar $x_n(t)$ uzluksiz funksiyalar ketma-ketligi $C[0, 1]$ metrik fazoda $x(t)$ funksiyaga yaqinlashsa, bu ketma-ketlik $C_1[0, 1]$ va $C_2[0, 1]$ metrik fazolarda ham shu $x(t)$ funksiyaga yaqinlashadi. Isbotlang.

2.10. $C[0, 1]$ metrik fazoda yaqinlashuvchi, ammo $C^{(1)}[0, 1]$ metrik fazoda yaqinlashuvchi bo'lmagan uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalardan iborat ketma-ketlikka misol keltiring.

2.11. Ushbu

a) $x_n = (1, 2, \ldots, n, 0, \ldots)$; b) $y_n = (-1, 2, \ldots, (-1)^n n, 0, \ldots)$;

c) $z_n = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n}, 0, \ldots)$; d) $u_n = \left(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, \ldots\right)$;

e) $e_n = (\underbrace{0,\ldots,0,1}_{n}, 0, \ldots)$; f) $w_n = (\underbrace{\frac{1}{n^\alpha}, \ldots, \frac{1}{n^\alpha}}_{n}, 0, \ldots)$; $\alpha > 0$

ketma-ketliklarning qaysilari c_0, c, ℓ_p, m metrik fazolarda yaqinlashuvchi bo'ladi.

2.12. $\mathbb{R}$ da metrika $\rho(x, y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$ tenglik bilan aniqlangan bo'lsin. U holda ixtiyoriy monoton ketma-ketlik (masalan, $x_n = n$) fundamentaldir. Isbotlang.

2.13. Biror qismiy ketma-ketligi yaqinlashuvchi bo'lgan fundamental ketma-ketlik yaqinlashuvchidir. Isbotlang.

2.14. Biror tayinlangan $\varepsilon > 0$ son uchun $\rho(x_k, x_m) \geq \varepsilon > 0$, $k \neq m$ shartni qanoatlantiruvchi $\{x_n\}$ ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi va hatto fundamental qismiy ketma-ketlik ajratib olish mumkin emas. Isbotlang.

2.15. (X, ρ) metrik fazo, $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ esa undan olingan fundamental ketma-ketliklar bo'lsin. U holda $\{a_n = \rho(x_n, y_n)\}$ sonli ketma-ketlik yaqinlashuvchi ekanligini isbotlang.

2.16. $\{x_n\}$ fundamental ketma-ketlik bo'lsin. Agar biror $\{y_n\}$ ketma-ketlik uchun $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = 0$ bo'lsa, $\{y_n\}$ ketma-ketlik ham fundamental bo'lishi kelib chiqadimi?

2.17. $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ fundamental ketma-ketliklar uchun

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = 0$$

shart bajarilsa, bu ketma-ketliklarni ekvivalent deylik va $\{x_n\} \sim \{y_n\}$ ko'rinishda yozaylik. Bu (vaqtincha) kiritilgan munosabat refleksiv, simmetrik va tranzitiv ekanligi, ya'ni haqiqatan ham ekvivalentlik munosabati bo'lishini isbotlang.

2.18. $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$, $\{t_n\}$ fundamental ketma-ketliklar uchun $\{x_n\} \sim \{y_n\}$ va $\{z_n\} \sim \{t_n\}$ bo'lsa, quyidagi tenglikni isbotlang

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, z_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(y_n, t_n).$$

3-§. Ochiq va yopiq sharlar. Ochiq va yopiq to'plamlar

Bizga X metrik fazo, uning x_0 nuqtasi va $r > 0$ son berilgan bo'lsin. X metrik fazoda markazi x_0 nuqtada, radiusi r bo'lgan *ochiq shar deb* $\{x \in X : \rho(x, x_0) < r\}$ to'plamga aytiladi va u $B(x_0, r)$ kabi belgilanadi. Berilgan $x_0 \in X$ va $r > 0$ da $\rho(x, x_0) \leq r$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $x \in X$ elementlar to'plami $B[x_0, r]$ orqali belgilanadi va u markazi x_0 nuqtada, radiusi r bo'lgan *yopiq shar* deyiladi. $\rho(x, x_0) = r$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $x \in X$ elementlar to'plami $S[x_0, r]$ orqali belgilanadi va u markazi x_0 nuqtada, radiusi r bo'lgan *sfera* deyiladi. Metrik fazoda markazi x_0 nuqtada va radiusi $\varepsilon > 0$ bo'lgan $B(x_0, \varepsilon)$ ochiq shar x_0 *nuqtaning* $\varepsilon-$*atrofi* deyiladi va u $O_\varepsilon(x_0)$ ko'rinishda belgilanadi. X metrik fazo, M uning qism to'plami va $x \in X$ bo'lsin. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun $O_\varepsilon(x) \cap M \neq \emptyset$ munosabat bajarilsa, x nuqta M ning *urinish nuqtasi* deyiladi. M to'plamning barcha urinish nuqtalaridan iborat to'plam M ning *yopig'i* deyiladi va u $[M]$ yoki $\overline{M}$ ko'rinishda belgilanadi. Agar $x \in X$ ning ixtiyoriy $O_\varepsilon(x)$ atrofi M ning cheksiz ko'p elementlarini saqlasa, u holda $x \in X$ nuqta M to'plamning *limitik nuqtasi* deyiladi. M to'plamga tegishli x nuqta uchun shunday $\varepsilon > 0$ mavjud bo'lib, $O_\varepsilon(x) \cap M = \{x\}$ bo'lsa, u holda x nuqta M to'plamning *yakkalangan (yolg'iz) nuqtasi* deyiladi. Agar X metrik fazodagi M to'plam uchun $M = [M]$ tenglik bajarilsa, M *yopiq to'plam* deyiladi. Boshqacha aytganda, agar to'plam o'zining barcha limitik nuqtalarini saqlasa, u *yopiq to'plam* deyiladi. Agar $x \in M$ nuqta uchun shunday $\varepsilon > 0$ mavjud bo'lib, $O_\varepsilon(x) \subset M$ bo'lsa, x nuqta M to'plamning *ichki nuqtasi* deyiladi. Agar to'plamning barcha nuqtalari ichki nuqta bo'lsa, u *ochiq to'plam* deyiladi. Ya'ni faqat ichki nuqtalardan tashkil topgan to'plam *ochiq to'plam* deyiladi. Agar metrikaning 3-aksiomasi, ya'ni uchburchak tengsizligi $\rho(x,z) \leq \max\{\rho(x,y), \rho(y,z)\}$ tengsizlik bilan almashtirilsa, (X,ρ) ga *ultrametrik fazo* deyiladi. Ochiq va yopiq to'plamlar haqida quyidagi tasdiqlar o'rinli.

3.1-teorema. *Ixtiyoriy sondagi yopiq to'plamlar kesishmasi va chekli sondagi yopiq to'plamlar yig'indisi yopiqdir.*

3.2-teorema. *Ixtiyoriy sondagi ochiq to'plamlar yig'indisi va chekli sondagi ochiq to'plamlar kesishmasi yana ochiq to'plamdir.*

3.3-teorema. *M to'plam ochiq bo'lishi uchun uning butun fazogacha to'ldiruvchisi $X \setminus M$ yopiq bo'lishi zarur va yetarli.*

3.1. Kattaroq radiusli shar kichikroq radiusli sharning qismi bo'lishi mumkinmi? Misol keltiring.

Yechish Faraz qilaylik, $X = \mathbb{R}_+$ va $\rho(x,y) = |x-y|$ bo'lsin. Agar $B(1,5) = \{x \in [0, \infty) : |x-1| < 5\}$ deb markazi 1 nuqtada va radiusi 5 ga teng sharni, hamda $B(3,4) = \{x \in [0, \infty) : |x-3| < 4\}$ deb markazi 3 nuqtada va radiusi 4 ga teng bo'lgan ochiq sharlarni olsak, u holda $r_2 = 5 > r_1 = 4$, ammo $[0, 6) = B(1,5) \subset B(3,4) = [0, 7)$. □

3.2. Agar radiusi 7 ga teng bo'lgan shar, radiusi 3 ga teng bo'lgan shar ichiga joylashsa ular ustma-ust tushadi. Isbotlang.

3.3. $\mathbb{R}^2$ to'plamda $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ uchun

a) $\rho_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$;

b) $\rho_2(x, y) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$;

c) $\rho_3(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$;

d) $\rho_4(x, y) = \operatorname{sign}|x_1 - y_1| + \operatorname{sign}|x_2 - y_2|$

tengliklar orqali kiritilgan metrikalarning har birida markazi 0 –

$(0,0)$ nuqtada va radiusi 1 ga teng ochiq shar $B(0, 1)$, yopiq shar $B[0, 1]$ va $S[0, 1]$ sferalarni chizib ko'rsating.

3.4. $\mathbb{R}^3$ to'plamda

$$\rho(x,y) = \sum_{i=1}^{3} \operatorname{sign}|x_i - y_i|$$

metrika kiritilgan. Markazi $(0, 1, 2)$ nuqtada radiusi esa a) 1 ga; b) 2 ga; c) 3 ga teng bo'lgan sferalarni chizing.

3.5. Kengaytirilgan to'g'ri chiziq $\mathbb{R}^* = (-\infty, +\infty) \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ da

a) $\rho_1(x,y) = \dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}$; b) $\rho_2(x,y) = \left|\dfrac{x}{1+|x|} - \dfrac{y}{1+|y|}\right|$

metrikalar kiritilgan. Agar $0 < r < 1$ bo'lsa, $B(-\infty, r)$; $B(\infty, r)$ to'plamlarni, ya'ni markazi $\pm\infty$, radiusi r bo'lgan ochiq sharlarni chizing.

3.6. $M \subset (X, \rho)$ to'plamning diametri $diam M = \sup\limits_{x,y \in M} \rho(x,y)$ tenglik bilan aniqlanadi. U holda:

a) $diam B(x_0, r) \leq 2r$ tengsizlikni isbotlang;

b) $diam B(x_0, r) < 2r$ bo'lgan sharga misol keltiring;

c) $diam B(x_0, r) = diam B[x_0, r]$ tenglik to'g'rimi?

3.7. Ochiq shar - ochiq to'plam, yopiq shar esa yopiq to'plam bo'lishini isbotlang.

3.8. $\mathbb{R}^2$ tekislikda $(0, 1)$ va $(0, -1)$ nuqtalardan hamda OX o'qidagi $(-1, 1)$ intervaldan iborat to'plamni M deb belgilab, M to'plamda Evklid metrikasini kiritamiz:

$$\rho(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}; x = (x_1, x_2), \ y = (y_1, y_2) \in M.$$

U holda markazi $(0, 0)$ nuqtada, radiusi 1 ga teng ochiq sharning yopiq to'plam, ammo yopiq shar emasligini isbotlang.

3.9. Shunday yopiq sharga misol keltiringki, u ochiq to'plam bo'lsin, ammo ochiq shar bo'lmasin.

3.10. Diskret metrik fazoda ixtiyoriy ikkita shar yoki kesishmaydi yoki biri ikkinchisining qismi bo'lishini isbotlang.

3.11. Diskret metrik fazoda ixtiyoriy "uchburchak" teng tomonli, ultrametrik fazoda esa har qanday "uchburchak" teng yonli ekanligini isbotlang.

3.12. Diskret metrik fazoda har qanday to'plam ham ochiq, ham yopiq to'plam ekanligini isbotlang.

Isbot. Diskret metrik fazoda ixtiyoriy M uchun $[M] = M$ tenglik o'rinli. Shuning uchun M yopiq to'plam. Faraz qilaylik, $x \in M$ ixtiyoriy nuqta bo'lsin, u holda ixtiyoriy $\varepsilon \in (0, 1)$ uchun $O_\varepsilon(x) = \{x\}$ atrof M da saqlanadi. Demak, M ochiq to'plam. $\square$

3.13. F_1 va F_2 yopiq to'plamlar o'zaro kesishmasin, ya'ni $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. U holda shunday $G_1 \supset F_1$ va $G_2 \supset F_2$ ochiq to'plamlar mavjudki, $G_1 \cap G_2 = \emptyset$. Isbot qiling.

3.1. $\mathbb{R}$ da ochiq va yopiq to'plamlarning tuzilishi

Ixtiyoriy metrik fazodagi ochiq va yopiq to'plamlar haqida 3.1-3.3-teoremalar o'rinli. Sonlar o'qidagi ochiq to'plam tavsifi quyidagi teorema orqali ifodalanadi.

3.4-teorema. *Sonlar o'qidagi ixtiyoriy ochiq to'plam chekli yoki sanoqli sondagi o'zaro kesishmaydigan intervallar yig'indisi ko'rinishida tasvirlanadi.*

3.14. Interval ochiq, kesma yopiq to'plam ekanligini isbotlang.

Isbot. $\mathbb{R}$ da ixtiyoriy (a, b) interval ochiq to'plamdir. Haqiqatan ham, agar $x \in (a, b)$ desak, $\varepsilon = \min\{x-a, b-x\}$ son uchun $O_\varepsilon(x) \subset$

(a, b). Endi $(-\infty, a)$ to'plamning ochiq ekanligini ko'rsatamiz. Agar ixtiyoriy $x \in (-\infty, a)$ uchun, $\varepsilon = a - x$ desak, $O_\varepsilon(x) \subset (-\infty, a)$. Xuddi shunday (b, ∞) to'plamning ochiq ekanligi ko'rsatiladi. Ochiq to'plamlarning birlashmasi ochiq ekanligidan $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$ to'plamning ochiq ekanligi kelib chiqadi. 3.3-teoremaga ko'ra bu ochiq to'plamning to'ldiruvchi to'plami bo'lgan $[a, b]$ kesma yopiqdir. □

3.15. O'zaro kesishmaydigan intervallardan iborat to'plamlarning quvvati chekli yoki sanoqli ekanligini isbotlang.

3.16. $\mathbb{R}$ da ixtiyoriy ochiq to'plam chekli yoki sanoqli sondagi o'zaro kesishmaydigan intervallarning birlashmasidan iborat bo'lishini isbotlang. Bu yerda $(-\infty, a)$, (a, ∞), $(-\infty, \infty)$ va $(a, a) = \emptyset$ to'plamlar ham intervallar jumlasiga kiradi.

3.17. $\mathbb{R}$ dagi ixtiyoriy yopiq to'plamni $(-\infty, \infty)$ dan o'zaro kesishmaydigan chekli yoki sanoqli sondagi intervallarni chiqarib tashlash natijasida hosil qilish mumkin. Isbot qiling.

3.18. Ixtiyoriy $x \in [0, 1]$ sonni uchlik kasrga yoyish mumkinligini isbotlang: $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{3^i}$, bu yerda ε_i – 0, 1, 2 raqamlardan biri. U holda $x = 0, \varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots$ ko'rinishda yozamiz. Agar biror $x \in [0, 1]$ uchun shunday n mavjud bo'lib, $\varepsilon_n \neq 0$ va $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_{n+2} = \ldots = 0$ bo'lsa, x soni chekli uchlik kasrga yoyilgan deyiladi. Bu x sonini cheksiz yoyilma ko'rinishda ham yozish mumkin: $x = 0, \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n 0 \ldots =$ $= 0, \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{n-1} (\varepsilon_n - 1)22 \ldots$ masalan, $0{,}100\ldots = 0{,}0222\ldots$. F_1 orqali yoyilmasida 1 raqami qatnashmaydigan usulda yozish mumkin bo'lgan barcha $x \in [0, 1]$ sonlar to'plamini belgilaylik. Masalan, $0{,}1 = 0{,}0222\ldots$ yoki $\frac{1}{4} = 0{,}020202\ldots$. F_1 to'plamning yopiq va kontinuum quvvatli to'plam ekanligini isbotlang. $F_1 = K$ to'plam *Kantor to'plami* deyiladi.

3.19. $K + K := \{z = x + y : \ x, y \in K\} = [0,\ 2]$ tenglikni isbotlang.

Isbot. Kantor to'plami K dan ixtiyoriy

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{3^i} \quad \text{va} \quad y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta_i}{3^i}$$

larni olamiz. Bu yerda ε_i va δ_i lar 0 yoki 2 raqamlaridan birini qabul qiladi. Agar

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{3^i} = 2\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \quad \text{va} \quad y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta_i}{3^i} = 2\sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{3^i}$$

shaklda yozsak, u holda a_i va b_i lar 0 yoki 1 raqamlaridan birini qabul qiladi va ularning yig'indisi $x + y = 2\sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{3^i}$, $c_i = a_i + b_i$ bo'lib, c_i – 0, 1 yoki 2 raqamlaridan istalgan birini qabul qila oladi. Ya'ni $x + y$, $x \in K$, $y \in K$ shakldagi yig'indini $[0,\ 2]$ kesmadagi ixtiyoriy songa teng qilish mumkin. Demak, $K + K = [0,\ 2]$ tenglik o'rinli. □

3.20. $0,25 \in K$ ekanligini isbotlang.

Isbot. $\frac{1}{4}$ ni $\frac{1}{4} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{3^{2i}}$ ko'rinishda uchlik kasrga yoyish mumkin. Bu yoyilmada 1 raqami qatnashmayapti. Demak, $0,25 \in K$ ekan. □

3.21. Ixtiyoriy $x \in K$ uchun shunday $y \in K$ mavjudki, $\rho(x,y) = |x - y|$ son irratsional bo'ladi. Isbot qiling.

4-§. To'la metrik fazo. Metrik fazoni to'ldirish

Agar X metrik fazoda ixtiyoriy fundamental ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda X ga *to'la metrik fazo* deyiladi. X metrik fazoning ikkita A va B qism to'plamlari berilgan bo'lsin. Agar $B \subset [A]$ bo'lsa, u holda A to'plam B to'plamda *zich* deyiladi. Xususan, agar $[A] = X$ bo'lsa, A to'plam *hamma yerda zich* (X *da zich*) deyiladi. Agar A to'plam birorta ham sharda zich bo'lmasa (ya'ni har bir

$B \subset X$ sharda A to'plam bilan umumiy elementga ega bo'lmagan B' shar saqlansa), u holda A *hech yerda zichmas* deyiladi. (X, ρ) metrik fazoda x nuqta va M to'plam *orasidagi masofa* deganda

$$\rho(x, M) = \inf_{y \in M} \rho(x, y)$$

miqdor tushiniladi. Xuddi shunday (X, ρ) metrik fazoda A va B to'plamlar *orasidagi masofa* deganda

$$\rho(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} \rho(x, y)$$

miqdor tushiniladi. Metrik fazolarning to'laligini tekshirishda quyidagi teoremadan foydalaniladi.

4.1-teorema. X *metrik fazo to'la bo'lishi uchun undagi ixtiyoriy ichma-ich joylashgan va radiuslari nolga intiluvchi yopiq sharlar ketma-ketligining kesishmasi bo'sh bo'lmasligi zarur va yetarlidir.*

Agar R metrik fazo to'la bo'lmasa, uni biror usul bilan (aslini olganda yagona usul bilan) biror to'la metrik fazo ichiga joylashtirish mumkin.

4.1-ta'rif. *Agar: 1) R metrik fazo R^* to'la metrik fazoning qism fazosi bo'lsa; 2) R to'plam R^* ning hamma yerida zich, ya'ni $[R] = R^*$ bo'lsa, u holda R^* metrik fazo R metrik fazoning to'ldirmasi deyiladi.*

4.2-teorema. *Har bir R metrik fazo to'ldirmaga ega va bu to'ldirma fazo R ning nuqtalarini qo'zg'almas holda qoldiruvchi izometriya aniqligida yagonadir.*

4.1. $\mathbb{R}$ metrik fazo to'la. Isbotlang.

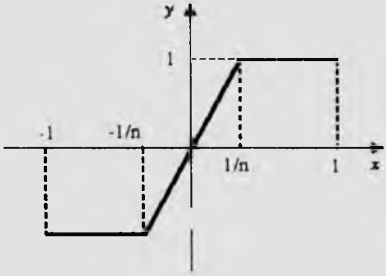
Isbot. Matematik analiz kursidan ma'lumki, ixtiyoriy fundamental sonli ketma-ketlik yaqinlashuvchidir. Demak, $\mathbb{R}$ to'la metrik fazo. $\square$

4.2. $C_1[-1, 1]$ metrik fazo to'la emas. Isbotlang.

Isbot. Buning uchun $C_1[-1, 1]$ fazoda uzluksiz funksiyalarning

$$
f_n(x) = \begin{cases} -1, & agar \quad x \in [-1, -n^{-1}] \\ n\,x, & agar \quad x \in (-n^{-1}, n^{-1}) \\ 1, & agar \quad x \in [n^{-1}, 1] \end{cases}
$$

ketma-ketligini (funksiya grafigi 4.1-chizmada keltirilgan) qaraymiz. Bu ketma-ketlik $C_1[-1, 1]$ fazoda fundamentaldir, chunki barcha $x \in [-1, 1]$ lar uchun $|f_n(x) - f_m(x)| \le 1$ ekanligini hisobga olsak va $n < m$ desak,



4.1-chizma

$$
\rho(f_n, f_m) = \int_{-1}^{1} |f_n(x) - f_m(x)|dx < \int_{-1/n}^{1/n} 1dx = \frac{2}{n} \to 0, \quad n \to \infty.
$$

Biroq $\{f_n\}$ ketma-ketlik $C_1[-1, 1]$ fazodagi birorta ham funksiyaga yaqinlashmaydi. Haqiqatan ham, $f \in C_1[-1, 1]$ ixtiyoriy funksiya va

$$
\varphi(x) = \begin{cases} -1, & agar \quad x \in [-1, 0), \\ 1, & agar \quad x \in [0, 1] \end{cases}
$$

nol nuqtada uzilishga ega funksiya bo'lsin. Ko'rinib turibdiki,

$$
f_n(x) - \varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1, -1/n] \bigcup [1/n, 1], \\ nx + 1, & x \in (-1/n, 0), \\ nx - 1, & x \in [0, 1/n). \end{cases}
$$

Bundan tashqari barcha $x \in [-1, 1]$ lar uchun $|f_n(x) - \varphi(x)| \le 1$.

Shuning uchun

$$\int\limits_{-1}^{1} |f_n(x) - \varphi(x)|dx = \int\limits_{-1/n}^{1/n} |f_n(x) - \varphi(x)|dx \leq \frac{2}{n} \to 0, \ n \to \infty. \quad (4.1)$$

Agar integralning monotonlik xossasidan foydalansak

$$\int\limits_{-1}^{1} |f(x) - \varphi(x)|\, dx \leq \int\limits_{-1}^{1} |f(x) - f_n(x)|\, dx + \int\limits_{-1}^{1} |f_n(x) - \varphi(x)|\, dx. \quad (4.2)$$

tengsizlikka kelamiz. Endi quyidagi

$$\int_{-1}^{1} |f(x) - \varphi(x)|\, dx > 0 \quad (4.3)$$

tengsizlikni isbotlaymiz. Uning isbotini ikki holga ajratamiz.

1) Faraz qilaylik, $f(0) \leq 0$ bo'lsin. u holda f ning uzluksizligiga ko'ra shunday $\delta_1 > 0$ mavjudki, barcha $x \in [0, \delta_1]$ lar uchun $f(x) < 1/2$ bo'ladi. Bundan

$$|f(x) - \varphi(x)| \geq 1/2, \qquad x \in [0, \delta_1] \quad (4.4)$$

tengsizlik kelib chiqadi. (4.4) tengsizlikni $[0, \delta_1]$ kesma bo'yicha integrallab,

$$\int_{-1}^{1} |f(x) - \varphi(x)|\, dx \geq \int_{0}^{\delta_1} |f(x) - \varphi(x)|\, dx > \frac{\delta_1}{2}$$

tengsizlikka kelamiz.

2) Agar biz $f(0) > 0$ deb faraz qilsak, u holda shunday $\delta_2 > 0$ mavjudki, barcha $x \in [-\delta_2, 0)$ lar uchun $|f(x) - \varphi(x)| > 1/2$ bo'ladi. Bundan

$$\int_{-1}^{1} |f(x) - \varphi(x)|\, dx \geq \int_{-\delta_2}^{0} |f(x) - \varphi(x)|\, dx > \frac{\delta_2}{2}.$$

Demak, (4.3) tengsizlik isbot bo'ldi. (4.2) tengsizlikdan

$$\int\limits_{-1}^{1} |f(x) - f_n(x)|\, dx \geq \int\limits_{-1}^{1} |f(x) - \varphi(x)|\, dx - \int\limits_{-1}^{1} |f_n(x) - \varphi(x)|\, dx \quad (4.5)$$

ni olamiz. (4.1), (4.3) va (4.5) lardan

$$\rho(f, f_n) = \int_{-1}^{1} |f(x) - f_n(x)|\, dx$$

ning nolga yaqinlasha olmasligi kelib chiqadi, ya'ni $\{f_n\}$ ketma-ketlik $C_1[-1, 1]$ dagi birorta ham funksiyaga yaqinlasha olmaydi. □

4.3. c metrik fazoning to'laligini isbotlang.

4.4. To'la metrik fazolarning dekart ko'paytmasi yana to'la metrik fazo bo'lishini isbotlang. Demak, $\mathbb{R}^n$ metrik fazo to'la.

4.5. $C[a, b]$ uzluksiz funksiyalar to'plamida metrika

$$\rho(x, y) = \int_a^b \operatorname{sign} |x(t) - y(t)|\, dt$$

ifoda bilan aniqlangan bo'lsa, $(C[a, b], \rho)$ metrik fazo to'la bo'ladimi?

4.6. $C^{(1)}[a, b]$ – uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar to'plamida metrika

$$\rho(x, y) = \max_{a \le t \le b} |x(t) - y(t)|$$

tenglik bilan aniqlangan bo'lsa, $(C^{(1)}[a, b], \rho)$ metrik fazo to'la emas. $(C^{(1)}[a, b], \rho)$ metrik fazoning to'ldirmasini toping.

4.7. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funksiya qanday shartlarni qanoatlantirsa $\rho(x, y) = |f(x) - f(y)|$ akslantirish $\mathbb{R}$ to'plamda: a) metrika bo'ladi; b) $(\mathbb{R}, \rho)$ to'la metrik fazo bo'ladi?

4.8. Agar $\rho(x, y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$ bo'lsa, $(\mathbb{R}, \rho)$ metrik fazoning to'ldirmasini toping.

4.9. Φ - barcha finit ketma-ketliklar, ya'ni faqat cheklita hadi noldan farqli $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$ ketma-ketliklar to'plami bo'lsin.

Agar

$$\rho_1(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}|x_i-y_i|\,; \qquad \rho_2(x,y)=\max_{1\le i<\infty}|x_i-y_i|$$

bo'lsa, (Φ,ρ_1) va (Φ,ρ_2) metrik fazolarning to'ldirmasini toping.

4.10. $X=(-\pi,\ \pi)$ to'plamda $\rho(x,y)=\left|\sin\dfrac{x-y}{2}\right|$ metrika kiritilgan. (X,ρ) metrik fazoning to'ldirmasini toping.

4.11. $\mathbb{P}$ – barcha haqiqiy koeffitsiyentli ko'phadlar to'plamida $x,\ y\in\mathbb{P}$ uchun

a) $\rho_1(x,y)=\max\limits_{0\le t\le 1}|x(t)-y(t)|+\max\limits_{0\le t\le 1}|x''(t)-y''(t)|\,;$

b) $\rho_2(x,y)=\max\limits_{0\le t\le 1}|x(t)-y(t)|+\max\limits_{0\le t\le 1}|x'(t)-y'(t)|\,;$

c) $\rho_3(x,y)=\max\limits_{-1\le t\le 1}|x(t)-y(t)|+|x'(0)-y'(0)|$

metrikalar kiritilgan. $(\mathbb{P},\rho_1)$, $(\mathbb{P},\rho_2)$, $(\mathbb{P},\rho_3)$ metrik fazolarning to'ldirmasini toping.

4.1. Separabellik. Kategoriya. Ber teoremasi

Hamma yerda zich sanoqli qism to'plamga ega bo'lgan metrik fazolar *separabel metrik fazolar* deyiladi. M to'plamning barcha ichki nuqtalaridan iborat to'plam M to'plamning *ichi* deyiladi va $\overset{0}{M}$ bilan belgilanadi. A to'plamning *chegarasi* $FrA=\overline{A}\cap\overline{(X\setminus A)}$ tenglik bilan aniqlanadi.

4.3-teorema *(Ber teoremasi). To'la metrik fazoni hech yerda zich bo'lmagan sanoqli sondagi to'plamlar yig'indisi ko'rinishida tasvirlash mumkin emas.*

Endi, mukammal to'plam, 1-va 2-kategoriya to'plamlar tushunchalarini keltiramiz. M to'plamning barcha limitik nuqtalaridan iborat to'plamni M' bilan belgilaymiz. Agar $M=M'$ tenglik o'rinli bo'lsa, M ga *mukammal to'plam* deyiladi. Agar X to'la metrik fazodagi M to'plamni hech yerda zich bo'lmagan sanoqli sondagi to'plamlar birlashmasi ko'rinishida tasvirlash mumkin bo'lsa M to'plamga *1-kategoriyali to'plam* deyiladi. Agar M to'plamni hech yerda zich bo'lmagan sanoqli sondagi to'plamlar birlashmasi ko'rinishida tasvirlash mumkin bo'lmasa M ga *2-kategoriyali to'plam* deyiladi.

4.12. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ to'plamlarning har biri $\mathbb{R}$ metrik fazoda zich ekanligini isbotlang.

Isbot. Faraz qilaylik, $x \in \mathbb{R}$ ixtiyoriy haqiqiy son bo'lsin. U holda $x_n = \dfrac{[nx]}{n}$ ratsional sonlar ketma-ketligi x ga yaqinlashadi. Bu yerda $[x]$ deb x ning butun qismi belgilangan. Demak, ratsional sonlar to'plami $\mathbb{Q}$ haqiqiy sonlar to'plami $\mathbb{R}$ ning hamma yerida zich ekan. Endi irratsional sonlar to'plami $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ haqiqiy sonlar to'plami $\mathbb{R}$ da zich ekanligini isbotlaymiz. Ixtiyoriy $x \in \mathbb{R}$ haqiqiy son uchun $y_n = \dfrac{[nx]}{n} + \dfrac{\pi}{n}$ irratsional sonlar ketma-ketligi x ga yaqinlashadi. Ya'ni, $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ to'plam $\mathbb{R}$ da zich ekan. Demak, $[\mathbb{Q}] = [\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}] = \mathbb{R}$. $\square$

4.13. $\left\{\dfrac{m}{2^n} : \ m, n \in \mathbb{Z}\right\}$ to'plamning $\mathbb{R}$ da zich ekanligini isbotlang.

4.14. $\mathbb{Z}$, $\left\{\dfrac{1}{n} : \ n \in \mathbb{Z}, \ n \neq 0\right\}$, $\left\{\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m} : \ n, m \in \mathbb{Z}, \ n \cdot m \neq 0\right\}$ to'plamlar $\mathbb{R}$ metrik fazoning hech yerida zich emas. Isbotlang.

4.15. Hamma yerda zich, ichi bo'sh bo'lgan to'plamga misol keltiring.

Kantor to'plamining quyidagi (4.16-4.20) xossalarini isbotlang.

4.16. Kantor to'plamining o'lchovi nolga teng.

4.17. Kantor to'plamining yakkalangan nuqtalari mavjud emas.

4.18. Kantor to'plamining ichki nuqtalari mavjud emas, ya'ni $\overset{0}{K} = \emptyset$.

4.19. Kantor to'plami $[0, 1]$ kesmaning hech yerida zich emas.

4.20. Kantor to‘plami mukammal to‘plam, ya'ni $K = K'$.

4.21. $\mathbb{R}$ metrik fazoda shunday A to‘plamga misol keltiringki, A, $\overset{0}{A}$, $\overline{\overset{0}{A}}$, $\overset{0}{\overline{A}}$, $\overline{\overset{0}{\overline{A}}}$, $\overset{0}{\overset{0}{A}}$ to‘plamlar turli, ya'ni hech qaysi ikkisi teng bo‘lmasin.

4.22. $A \subset (X, \rho)$ hech yerda zich bo‘lmasa, $X \backslash A$ to‘plam hamma yerda zichligini isbotlang.

4.23. Agar A hamma yerda zich va ochiq to‘plam bo‘lsa, $X \backslash A$ to‘plam hech yerda zich emas. Isbotlang.

4.24. Shunday A to‘plamga misol keltiringki, A va $X \backslash A$ to‘plamlarning har biri hamma yerda zich bo‘lsin.

4.25. Φ – finit ketma-ketliklar to‘plami c_0 va ℓ_p $(p \geq 1)$ metrik fazolarda zich joylashgan, ammo c va m metrik fazolarda zich emasligini isbot qiling.

4.26. Agar A to‘plam B da, B esa C da zich joylashgan bo‘lsa, A to‘plam C da zich ekanligini isbotlang.

4.27. $\mathbb{P}$ – barcha ko‘phadlar to‘plami $C[a, b]$ metrik fazoda zich. Isbotlang.

4.28. $[a, b]$ kesmada $a = t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$ nuqtalar va ixtiyoriy $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sonlar berilgan bo‘lsin. U holda $x(t_i) = x_i$, $i = \overline{1, n}$ va $[t_i, t_{i+1}]$ oraliqlarning har birida chiziqli bo‘lgan $x(t)$ funksiya *qisman chiziqli uzluksiz funksiya* deyiladi. Barcha qisman chiziqli uzluksiz funksiyalar to‘plami $C[a, b]$ metrik fazoda zich ekanligini isbotlang.

4.29. Barcha sodda funksiyalar (o‘lchovli va qiymatlari to‘plami ko‘pi bilan sanoqli bo‘lgan funksiyalar) to‘plami $L_1[a, b]$ metrik fazoda zich ekanligini isbotlang.

4.30. Sodda funksiyalar to'plami $L_p[a,\ b]$ $(p \geq 1)$ metrik fazoda zich. Isbotlang.

4.31. $[a,\ b]$ kesmada $a = t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$ nuqtalar berilgan bo'lsin. (t_i, t_{i+1}), $i = \overline{1, n-1}$ intervallarning har birida o'zgarmas, t_i bo'linish nuqtalaridagi qiymatlari esa ixtiyoriy bo'lgan funksiya *pog'onasimon funksiya* deyiladi. Ravshanki, pog'onasimon funksiya sodda funksiya bo'ladi. Pog'onasimon bo'lmagan sodda funksiyaga misol keltiring.

4.32. Pog'onasimon funksiyalar $L_p[a,\ b]$ $(p \geq 1)$ metrik fazodagi barcha sodda funksiyalar to'plamida zich joylashgan. Isbotlang.

4.33. Pog'onasimon funksiyalar $L_p[a,\ b]$ $(p \geq 1)$ metrik fazoda zich ekanligini isbotlang.

4.34. Barcha uzluksiz funksiyalar $L_p[a,\ b]$ $(p \geq 1)$ metrik fazodagi pog'onasimon funksiyalar to'plamida zich. Isbotlang. Demak, $C[a,\ b]$ to'plam sifatida $L_p[a,\ b]$ metrik fazoda zich.

4.35. $[a, b]$ kesmada aniqlangan ixtiyoriy uzluksiz funksiyani istalgancha aniqlikda $L_p[a, b]$ fazo metrikasida ko'phad bilan yaqinlashtirish mumkin, ya'ni $x(t)$ uzluksiz funksiya va ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $p(t)$ ko'phad mavjudki,

$$\rho(x, p) = \left(\int_a^b |\,x(t) - p(t)\,|^p\, dt\right)^{1/p} < \varepsilon$$

tengsizlik o'rinli. Isbotlang.

4.36. Oldingi 4.35-masaladagi $p(t)$ ko'phadning barcha koeffitsiyentlarini ratsional sonlar qilib tanlash mumkin. Isbot qiling.

4.37. Separabel metrik fazoning to'ldirmasi ham separabel bo'ladimi? Misol keltiring.

4.38. Separabel fazoda ixtiyoriy G ochiq to'plamni sanoqli yoki chekli sondagi o'zaro kesishmaydigan ochiq sharlarning yig'indisi ko'rinishida:

$$G = \bigcup_n B(x_n, r_n), \quad B(x_i, r_i) \cap B(x_j, r_j) = \emptyset, \quad i \neq j$$

tasvirlash mumkin. Isbot qiling.

4.39. Separabel metrik fazoda ixtiyoriy F yopiq to'plamni mukammal M va chekli yoki sanoqli N to'plamlarning birlashmasi ko'rinishida tasvirlash mumkin. Isbotlang.

4.40. Diskret metrik fazo separabel bo'lishining zarur va yetarli shartini toping.

4.41. M va N lar 1-kategoriyali to'plamlar bo'lsin. U holda $M \cup N$ ning 1-kategoriyali to'plam ekanligini isbotlang.

Isbot. Ta'rifga ko'ra quyidagi yoyilmalar o'rinli:

$$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_{2n}, \quad N = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_{2n-1}.$$

Bu yerda N_{2n} va N_{2n-1} lar X metrik fazoning hech yerida zich bo'lmagan to'plamlar. U holda $M \cup N = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$ tenglik o'rinli. Demak, $M \cup N$ 1-kategoriyali to'plam. □

4.42. $\mathbb{R}$ metrik fazoda $\mathbb{Q}$ to'plam 1-kategoriyali, $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ to'plam 2-kategoriyali to'plam ekanligini isbotlang.

Isbot. Ma'lumki, $\mathbb{Q}$ - sanoqli to'plam, shuning uchun uning elementlarini $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots\}$ ko'rinishda nomerlab chiqish mumkin. Shunday ekan

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n, \quad M_n = \{x_n\}$$

yoyilma o'rinli va M_n, $n = 1, 2, \ldots$ lar $\mathbb{R}$ ning hech yerida zich emas. Ta'rifga ko'ra $\mathbb{Q}$ 1-kategoriyali to'plam. Endi irratsional sonlar to'plami

$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ning 2-kategoriyali to'plam ekanligini isbotlaymiz. Teskaridan faraz qilaylik. $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ 1-kategoriyali to'plam bo'lsin. U holda 4.41-misolga ko'ra, to'la metrik fazo $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$, 1-kategoriyali to'plam bo'lar edi. Bu esa Ber teoremasiga zid. Demak, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ 2-kategoriyali to'plam. □

4.43. Darajasi n dan oshmaydigan ko'phadlarning $\mathbb{P}_{\leq n}$ to'plami $C[a, b]$ metrik fazoning hech yerida zich emas. Isbot qiling.

4.44. $\mathbb{P} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_{\leq n}$ barcha ko'phadlar to'plami $C[a, b]$ metrik fazoda 1-kategoriyali to'plam bo'lishini ko'rsating.

4.45. $L_2[a, b]$ to'plam $L_1[a, b]$ metrik fazoda 1-kategoriyali to'plam. Isbotlang.

4.46. $x_n(t)$ – uzluksiz funksiyalar va ixtiyoriy $t \in \mathbb{R}$ uchun $\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x_0(t)$ bo'lsa. $x_0(t)$ funksiyaning uzilish nuqtalaridan iborat to'plam 1-kategoriyali to'plam ekanligini isbotlang.

4.47. $C[a, b]$ to'plamda

$$\rho(x, y) = \int_a^b \operatorname{sign}|x(t) - y(t)|\,dt$$

metrika kiritilgan. $(C[a, b], \rho)$ separabel emas. Isbotlang.

4.48. $C[a, b]$ metrik fazoda

$$M_n = \{x : |x(t') - x(t'')| \leq n \cdot |t' - t''|, \quad \forall t',\ t'' \in [a, b]\}$$

to'plam yopiq va hech yerda zich emas. Isbotlang.

4.49. $C[a, b]$ fazoda Lipshits shartini qanoatlantiruvchi funksiyalar to'plami $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ (4.48-masalaga qarang) 1-kategoriyali to'plam. M to'plam yopiq emas va $C[a, b]$ fazoda zich ekanligini isbotlang.

4.50. $C[a,b]$ fazoda har bir $n \in \mathbb{N}$ da

$$D_n = \{x: \quad x'(t) \in C[a,b] \quad \text{va} \quad \max_{a \le t \le b} |x'(t)| \le n\}$$

to'plam yopiq va yech yerda zich emasligini isbotlang.

4.51. $C[a,b]$ fazoda uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar to'plami $C^{(1)}[a,b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ (D_n – 4.50-misolda aniqlangan) 1-kategoriyali to'plam, yopiq emas va hamma yerda zich ekanligini isbotlang.

4.52. x haqiqiy sonning kasr qismi $\{x\}$ ko'rinishda belgilanadi. $\{n \cdot \sqrt{2}\}$, $n \in \mathbb{N}$ sonlar to'plami $[0, 1]$ kesmada zich ekanligini isbotlang. Umuman, a – irratsional son bo'lsa, $\{n \cdot a\}$, $n \in \mathbb{N}$ sonlar to'plami $[0, 1]$ kesmada zich. Isbot qiling.

4.53. Hech yerda zich bo'lmagan to'plamning qism to'plami hech yerda zich emas. Isbotlang.

4.54. Chekli sondagi hech yerda zich bo'lmagan to'plamlarning yig'indisi hech yerda zich emas. Isbot qiling.

4.55. Hech yerda zich bo'lmagan to'plamning yopig'i ham hech yerda zich emas. Isbotlang.

4.56. (X, ρ) to'la metrik fazo, $M \subset X$ esa 1-kategoriyali to'plam bo'lsin. U holda $X \backslash M$ to'plam X fazoda zich bo'lishini ko'rsating.

4.57. (X, ρ) to'la metrik fazo, $G_n \subset X$, $n \in \mathbb{N}$ esa ochiq va hamma yerda zich to'plamlar bo'lsin. U holda $M = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ to'plam ham hamma yerda zich ekanligini isbotlang.

4.58. M to'plam hech yerda zich bo'lmasligi uchun $\overset{0}{\overline{M}} = \emptyset$ shartning bajarilishi zarur va yetarli. Isbotlang.

4.59. X - to'la metrik fazo, $M \subset X$ esa 1-kategoriyali to'plam bo'lsin. U holda $X \backslash M$ 2-kategoriyali to'plam. Isbot qiling.

4.60. Agar $y_0 \in B(x_0, r)$ bo'lsa, $B(y_0, r) \subset B(x_0, 2r)$ munosabatni isbot qiling.

4.61. Biror A to'plamning $\varepsilon-$ atrofi ushbu

$$V_\varepsilon(A) = \left\{ x \in X : \inf_{y \in A} \rho(x, y) < \varepsilon \right\}$$

tenglik bilan aniqlanadi. U holda $\bar{A} = \bigcap\limits_{\varepsilon > 0} V_\varepsilon(A)$ tenglikni isbotlang.

4.62. To'g'ri chiziqda $[a, b]$, (a, b), $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $[a, \infty)$, $\emptyset$ to'plamlarning chegaralarini toping.

4.63. Diskret metrik fazoda ixtiyoriy to'plamning chegarasi bo'sh ekanligini isbotlang.

Isbot. M diskret metrik fazodagi ixtiyoriy to'plam bo'lsin. Ma'lumki (3.12-misolga qarang), bu fazoda ixtiyoriy M to'plam uchun $M = \overline{M}$ tenglik o'rinli. Shunday ekan $X \setminus M = \overline{X \setminus M}$ tenglik ham o'rinli. To'plam chegarasi ta'rifiga ko'ra M uchun $Fr\, M = \overline{M} \cap \overline{(X \setminus M)} = M \cap (X \setminus M) = \emptyset$ tenglikni olamiz. $\square$

4.64. $Fr(A \cup B) \subset Fr A \cup Fr B$ munosabatni isbotlang. Agar $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$ bo'lsa, $Fr(A \cup B) = Fr A \cup Fr B$ tenglikni isbot qiling.

4.65. Separabel metrik fazoda ixtiyoriy to'plamning yakkalangan nuqtalari chekli yoki sanoqli to'plam bo'ladi. Isbotlang.

4.66. $\{x_n\} \subset [a, b]$ bo'lsin. Ixtiyoriy $(\alpha, \beta) \subset [a, b]$ interval uchun $n(\alpha; \beta)$ orqali $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nuqtalarning (α, β) oraliqqa tushganlarining sonini belgilaylik. Agar ixtiyoriy $(\alpha, \beta) \subset [a, b]$ uchun

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n(\alpha; \beta)}{n} = \frac{\beta - \alpha}{b - a}$$

tenglik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik $[a, b]$ kesmada *tekis taqsimlangan* deyiladi. Ushbu $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \ldots, \frac{k-1}{k}, \ldots$ ketma-ketlik $[0, 1]$ kesmada tekis taqsimlangan bo'ladimi?

4.67. $\alpha -$ irratsional son bo'lsin. $\{n\alpha\} = n\alpha - [n\alpha]$, ya'ni $n\alpha$ sonining kasr qismlaridan tuzilgan ketma-ketlik $[0, 1]$ kesmada tekis taqsimlangan bo'lishini isbotlang.

4.68. 4.67-masaladan foydalanib, $1, 5, 5^2, \ldots, 5^n, \ldots$ ketma-ketlikdagi 5^n sonning (o'nlik sanoq sistemasida) 13 dan boshlanish ehtimolligini toping.

4.69. X to'la metrik fazo, $\{f_n\}$ esa X da aniqlangan uzluksiz funksiyalar bo'lsin. Agar ixtiyoriy $x \in X$ uchun chekli $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ mavjud bo'lsa, f funksiyaning uzilish nuqtalari to'plami 1-kategoriyali to'plam ekanligini isbot qiling.

4.70. Agar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funksiya har bir nuqtada chekli hosilaga ega bo'lsa, $f'(x)$ funksiya uzluksiz bo'ladigan nuqtalar to'plami 2- kategoriyali to'plam ekanligini isbotlang.

5-§. Uzluksiz akslantirishlar. Izometriya. Gomeomorfizm

$X = (X, \rho)$ va $Y = (Y, d)$ metrik fazolar, f esa X ni Y ga akslantirish bo'lsin. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ mavjud bo'lib, $\rho(x, x_0) < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $x \in X$ nuqtalar uchun $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda f akslantirish $x_0 \in X$ *nuqtada uzluksiz* deyiladi. Agar f akslantirish X ning hamma nuqtalarida uzluksiz bo'lsa, u holda f akslantirish X *da uzluksiz* deyiladi. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ mavjud bo'lib, $\rho(x, y) < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $x, y \in X$ nuqtalar uchun $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, u holda f akslantirish X *da tekis uzluksiz* deyiladi. Agar $f : X \to Y$ biyektiv akslantirish bo'lib, f va f^{-1} akslantirishlar uzluksiz bo'lsa, u holda f *gomeomorf akslantirish yoki gomeomorfizm* deyiladi. X va Y fazolar esa *gomeomorf fazolar* deyiladi. Agar (X, ρ) va (Y, d) metrik fazolar o'rtasida biyektiv moslik o'rnatuvchi f akslantirish ixtiyoriy $x_1, x_2 \in X$ lar uchun $\rho(x_1, x_2) = d(f(x_1), f(x_2))$ shartni qanoatlantirsa, u holda f akslantirishga *izometriya* deyiladi. X va Y fazolar esa *izometrik fazolar* deyiladi.

5.1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funksiya har bir tayinlangan x da y o'zgaruvchi bo'yicha ko'phad va har bir tayinlangan y da x o'zgaruvchi bo'yicha ko'phad bo'lsa, $f(x, y)$ funksiya ikkala argumenti bo'yicha ham ko'phad ekanligini isbotlang.

Isbot. Shartga ko'ra $f(x, y)$ funksiyani quyidagicha tasvirlash mumkin

$$f(x, y) = a_0(x) + a_1(x)\, y + a_2(x)\, y^2 + \cdots + a_n(x)\, y^n. \qquad (5.1)$$

$$f(x, y) = b_0(y) + b_1(y)\, x + b_2(y)\, x^2 + \cdots + b_m(y)\, x^m. \qquad (5.2)$$

Bundan f ning x va y o'zgaruvchilar bo'yicha differensiallanuvchi ekanligi kelib chiqadi. Agar $y = 0$ bo'lsa, u holda (5.1) va (5.2) lardan quyidagini olamiz

$$f(x, 0) = a_0(x) = b_0(0) + b_1(0)\, x + b_2(0)\, x^2 + \cdots + b_m(0)\, x^m.$$

Xuddi shunday (5.1) va (5.2) lardan y bo'yicha xususiy hosila olib, ularning $y = 0$ dagi qiymatlarini tenglashtirib

$$a_1(x) = b_0'(0) + b_1'(0)\, x + b_2'(0)\, x^2 + \cdots + b_m'(0)\, x^m$$

tenglikni olamiz. Va hokazo $f(x, y)$ ning (5.1) va (5.2) ifodalaridan y bo'yicha $n-$ tartibli hosila olib, ularning $y = 0$ dagi qiymatlarini tenglashtirib

$$a_n(x) = b_0^{(n)}(0) + b_1^{(n)}(0)\, x + b_2^{(n)}(0)\, x^2 + \cdots + b_m^{(n)}(0)\, x^m$$

tenglikka ega bo'lamiz. $a_0(x)$, $a_1(x)$, ..., $a_n(x)$ lar uchun topilgan bu ifodalarni (5.1) ga qo'yib, $f(x, y)$ ning ikkala argumenti bo'yicha ham ko'phad ekanligiga ishonch hosil qilamiz. $\square$

5.2. Ikki argumentli $f : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ funksiya har bir x da y bo'yicha va har bir y da x bo'yicha uzluksiz bo'lsa, shunday (x_0, y_0) nuqta mavjudki, bu nuqtada f funksiya ikkala argumenti bo'yicha birgalikda uzluksiz bo'ladi. Isbot qiling.

5.3. f funksiya $(0, 1)$ intervalda cheksiz marta differensiallanuvchi bo'lsin. Agar ixtiyoriy $x \in (0, 1)$ uchun shunday $n = n(x) \in \mathbb{N}$ mavjud bo'lib, $f^{(n)}(x) = 0$ bo'lsa, f ning ko'phad ekanligini isbotlang.

5.4. (X, ρ) va (Y, d) metrik fazolar bo'lsin. $f : X \to Y$ akslantirishning uzluksizligi quyidagi shartlarning har biriga teng kuchli ekanligini isbotlang:

a) ixtiyoriy $G \subset Y$ ochiq to'plam uchun $f^{-1}(G) \subset X$ ham ochiq to'plam;

b) ixtiyoriy $F \subset Y$ yopiq to'plam uchun $f^{-1}(F) \subset X$ ham yopiq to'plam;

c) ixtiyoriy $\{x_n\} \subset X$ yaqinlashuvchi ketma-ketlik uchun $\{f(x_n)\} \subset Y$ ketma-ketlik ham yaqinlashuvchi.

5.5. Shunday $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uzluksiz funksiya, $G-$ ochiq va $F-$ yopiq to'plamlarga misol keltiringki, $f(G)$ to'plam ochiq emas, $f(F)$ to'plam esa yopiq emas.

5.6. Ixtiyoriy fundamental ketma-ketlikni yana fundamental ketma-ketlikka akslantiruvchi funksiya uzluksiz bo'lishi shartmi?

5.7. Agar X diskret metrik fazo bo'lsa, har qanday $f : X \to Y$ akslantirish uzluksiz bo'ladi. Isbotlang.

5.8. $f_i : X \to Y,\ (i = 1,2)$ uzluksiz akslantirishlar bo'lsin. U holda $M = \{x \in X : \ f_1(x) = f_2(x)\}$ to'plam yopiq ekanligini isbotlang.

5.9. $f_i : X \to Y,\ (i = 1,2)$ uzluksiz akslantirishlar va X da zich bo'lgan biror M to'plam berilgan bo'lsin. Agar barcha $x \in M$ uchun $f_1(x) = f_2(x)$ bo'lsa, $f_1 \equiv f_2$, ya'ni akslantirishlar butun X fazoda teng. Isbot qiling.

5.10. $f : X \to Y$ uzluksiz akslantirish bo'lsin. Quyidagi implikatsiyalardan qaysi biri to'g'ri? Ixtiyoriy $M \subset X$ to'plam uchun:

a) $x \in \bar{M} \Rightarrow f(x) \in \overline{f(M)}$;

b) $x \in \overset{0}{M} \Rightarrow f(x) \in \overset{0}{\overline{f(M)}}$;

c) $x \in M' \Rightarrow f(x) \in (f(M))'$;

d) $x \in Fr\,M \Rightarrow f(x) \in Fr\,(f(M))$.

5.11. X separabel metrik fazo va $f : X \to Y$ haqiqiy funksiya bo'lsin. M orqali X fazodagi barcha shunday nuqtalarni belgilaymizki, $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ mavjud va $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$ bo'lsin. M to'plamning ko'pi bilan sanoqli ekanligini isbotlang.

5.12. $S = \{z \in C : |z| = 1\}$ aylanada $\rho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$ metrika kiritilgan. Ixtiyoriy $f : S \to \mathbb{R}$ uzluksiz funksiya uchun shunday $z_0 \in S$ mavjudki, $f(z_0) = f(-z_0)$ tenglik o'rinli. Demak, aylanada aniqlangan uzluksiz funksiya qandaydir diametral qarama-qarshi nuqtalarda teng qiymatlarni qabul qiladi. Isbotlang.

5.13. $f : C[a, b] \to C[0, 1]$ akslantirish $f(x(t)) = x(a + (b - a)t),\ \ 0 \leq t \leq 1$ tenglik bilan aniqlangan. Bu akslantirish:
a) uzluksiz, b) izometriya bo'ladimi?

5.14. $f : C[0, 1] \to L_1[0, 1]$ akslantirish $f(x(t)) = x(t)$ tenglik bilan aniqlangan bo'lsa, uning uzluksiz ekanligini isbotlang.

Isbot. $x_0 \in C[0,\ 1]$ ixtiyoriy nuqta bo'lsin, u holda

$$\rho(f(x), f(x_0)) = \int_0^1 |x(t) - x_0(t)|\, dt \leq \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - x_0(t)| \int_0^1 dt = \rho(x, x_0)$$

tengsizlik o'rinli. Berilgan $\varepsilon > 0$ uchun $\delta = \varepsilon$ desak, u holda $\rho(x,\ x_0) < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $x \in X$ larda $\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ tengsizlik ham o'rinli bo'ladi. $x_0 \in C[0,\ 1]$ ixtiyoriy nuqta bo'lgani uchun f akslantirish uzluksiz bo'ladi. □

5.15. $f(x(t)) = x(t^2)$ tenglik bilan a) $f : C[-1,\ 1] \to C[0,\ 1]$; b) $f : L_p[-1,\ 1] \to L_p[0,\ 1]$; c) $f : C[-1,\ 1] \to L_1[0,\ 1]$ akslantirishlar aniqlangan. Ularning har birini uzluksizlikka tekshiring.

5.16. $f(x(t)) = x^2(t)$ tenglik bilan a) $f : C[0,\ 1] \to C[0,\ 1]$; b) $f : L_p[0,\ 1] \to L_2[0,\ 1]$; c) $f : L_1[0,\ 1] \to L_2[0,\ 1]$; d) $f : L_2[0,\ 1] \to L_1[0,\ 1]$; e) $f : L_1[0,\ 1] \to L_1[0,\ 1]$ akslantirishlar aniqlangan. Ularni uzluksizlikka tekshiring.

5.17. $f : C[0,\ 1] \to C[0,\ 1]$ akslantirish quyidagi

a) $f(x(t)) = \int_0^t x(s)ds$; b) $f(x(t)) = \int_0^1 \sin(t - s)x(s)ds$;

c) $f(x(t)) = \int_0^t x^2(s)ds$; d) $f(x(t)) = x(t^\alpha)$, $\alpha \geq 0$

tenglik bilan aniqlangan. Ularning qaysilari uzluksiz, qaysilari tekis uzluksiz bo'ladi?

Yechish. Biz faqat a) qismini tekshirish bilan cheklanamiz. f akslantirishni tekis uzluksizlikka tekshiramiz. Barcha $x,\ y \in C[0,\ 1]$ lar uchun

$$\rho(f(x), f(y)) = \max_{0 \leq t \leq 1} \left| \int_0^t (x(s) - y(s))\, ds \right| \leq \max_{0 \leq s \leq 1} |x(s) - y(s)| \int_0^t ds,$$

ya'ni $\rho(f(x), f(y)) \leq \rho(x, y)$ tengsizlik o'rinli. Tekis uzluksizlik ta'rifidagi δ ni ε ga teng desak, u holda $\rho(x, y) < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $x, y \in X$ larda $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Demak, f akslantirish tekis uzluksiz ekan. Tekis uzluksiz akslantirish uzluksiz bo'ladi. □

5.18. $f : L_2[0, 1] \to L_2[0, 1]$ akslantirish quyidagi

a) $f(x(t)) = \int\limits_0^t x(s)ds$; b) $f(x(t)) = \int\limits_0^1 \sin(t - s)x(s)ds$;

c) $f(x(t)) = \int\limits_0^t x^2(s)ds$; d) $f(x(t)) = \int\limits_0^t x(s^\alpha)ds, \quad \alpha \geq 0$

tenglik bilan aniqlangan. Ularning qaysilari uzluksiz, qaysilari tekis uzluksiz bo'ladi?

5.19. $f : L_2[0, 1] \to L_2[0, 1]$ akslantirish ushbu

a) $f(x(t)) = u(t) \cdot x(t), \quad u \in C[0, 1]$; b) $f(x(t)) = x(t^\alpha), \quad \alpha > 0$

tenglik bilan aniqlangan. Ularni uzluksizlikka tekshiring.

5.20. $\mathbb{R}$ da uzluksiz, lekin tekis uzluksiz bo'lmagan funksiyaga misol keltiring.

5.21. $X, \ Y-$ metrik fazolar bo'lib, $Y-$ to'la bo'lsin. Agar $M \subset X$ hamma yerda zich, $f : M \to Y$ tekis uzluksiz akslantirish bo'lsa, shunday $F : X \to Y$ tekis uzluksiz akslantirish mavjudki, $F|_M = f$, ya'ni ixtiyoriy $x \in M$ uchun $F(x) = f(x)$. Isbotlang.

5.22. Lipshits shartini qanoatlantiruvchi akslantirish tekis uzluksiz akslantirish bo'lishini isbotlang.

5.23. $K(t, s)$ funksiya $[a, b] \times [a, b]$ kvadratda ikkala argumenti bo'yicha uzluksiz bo'lsa,

$$Ax(t) = \int_a^b K(t, s)x(s)ds$$

tenglik bilan aniqlangan $A : C[a,b] \to C[a,b]$ akslantirish Lipshits shartini qanoatlantirishini isbotlang.

5.24. O'lchovli $K(t,s)$ funksiya uchun

$$\int_a^b \int_a^b |K(t,s)|^2 dt ds \leq M$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, $A : L_2[a,\ b] \to L_2[a,\ b]$

$$Ax(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds$$

akslantirish tekis uzluksiz bo'lishini isbotlang.

5.25. $f : X \to Y$ tekis uzluksiz va $g : Y \to Z$ Lipshits shartini qanoatlantiruvchi akslantirishlar bo'lsin. U holda $g \circ f : X \to Z$ akslantirish tekis uzluksiz (Lipshits shartini qanoatlantiruvchi) bo'ladimi?

5.26. $[0,\ 1]$ kesmada tekis uzluksiz, ammo Lipshits shartini qanoatlantirmaydigan funksiyaga misol keltiring.

5.27. (X,ρ) metrik fazo bo'lsin. $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ akslantirish

a) uzluksiz; b) tekis uzluksiz bo'ladimi?

5.28. (X,ρ) metrik fazo, $A \neq \emptyset$, $A \subset X$ biror to'plam bo'lsin. $d : X \to \mathbb{R}$ funksiya $d(x) = \inf\limits_{y \in A} \rho(x,y)$ tenglik bilan aniqlangan. Shu akslantirishning tekis uzluksiz ekanligini isbotlang.

5.29. $\mathbb{R}^2$ da $\rho(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ metrika, $\mathbb{C}$ kompleks sonlar to'plamida $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$ metrika kiritilgan. Bu fazolarning izometrik ekanligini isbotlang.

5.30. X va Y lar metrik fazolar bo'lsin. $X \times Y$ va $Y \times X$ metrik fazolarning izometrik ekanligini isbotlang.

5.31. c va $\mathbb{R} \times c_0$ fazolarning izometrik ekanligini isbotlang.

5.32. $C[0, 1]$ va $C[a, b]$ metrik fazolar orasida izometriya o'rnating.

5.33. Izometriya ekvivalentlik munosabati bo'lishini isbotlang.

5.34. $\mathbb{R}$ metrik fazoning barcha izometriyalarini toping.

5.35. $\mathbb{R}^2$ metrik fazoning ($\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$) barcha izometriyalarini toping.

5.36. Metrik fazoni o'zini-o'ziga akslantiruvchi barcha izometriyalar gruppa tashkil etishini isbotlang.

5.37. Biror X to'plamda ρ_1 va ρ_2 ekvivalent metrikalar berilgan bo'lsin. X to'plamdagi barcha metrikalar uchun kiritilgan bu munosabat haqiqatda ham ekvivalentlik munosabati bo'lishini isbotlang.

5.38. X chekli to'plam bo'lsa, unda kiritilgan ixtiyoriy ikki metrika ekvivalent ekanligini isbotlang.

5.39. $\mathbb{R}^n$ da kiritilgan ρ_1, $\rho_2 = \rho$ va ρ_∞ metrikalar ekvivalent ekanligini isbotlang.

5.40. Ekvivalent metrikalarning birida yaqinlashuvchi (fundamental) bo'lgan ketma-ketlik ikkinchisida ham yaqinlashuvchi (fundamental) bo'lishini isbotlang.

5.41. Ekvivalent metrikalarning birida ochiq (yopiq) bo'lgan to'plam ikkinchisida ham ochiq (yopiq) ekanligini isbotlang.

5.42. ρ_1 va ρ_2 ekvivalent metrikalar bo'lsin. Agar (X, ρ_1) metrik fazo a) to'la; b) separabel; c) diskret bo'lsa, (X, ρ_2) metrik fazo ham shu xossaga ega bo'ladi. Isbot qiling.

5.43. $\mathbb{C}^n$ to'plamda $\rho_\infty(x, y) = \max\limits_{1 \le i \le n} |x_i - y_i|$, $\rho_1(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$ $\rho_2(x, y) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}$ metrikalarning ixtiyoriy ikkitasi ekvivalent ekanligini isbotlang.

5.44. $\mathbb{R}$ da $\rho_1(x,y) = |x-y|$ va $\rho_2(x,y) = \begin{cases} 1, & agar \quad x \neq y \\ 0, & agar \quad x = y \end{cases}$ metrikalar ekvivalent emas. Isbotlang.

Isbot. Teskarisini faraz qilaylik, ya'ni ρ_1 va ρ_2 metrikalar ekvivalent bo'lsin. U holda shunday $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ sonlar mavjud bo'lib, barcha $x \neq y$, $x, y \in (-\infty, \infty)$ lar uchun

$$C_1\rho_1(x,y) \leq \rho_2(x,y) \leq C_2\rho_1(x,y) \iff C_1|x-y| \leq 1 \leq C_2|x-y|$$

tengsizliklar bajarilishi kerak. Lekin $|x-y| = \dfrac{1}{2C_2}$ desak, oxirgi tengsizlik bajarilmaydi. Demak, ρ_1 va ρ_2 metrikalar ekvivalent emas. $\square$

5.45. $C[a, b]$ to'plamda kiritilgan

$$\rho_\infty(x,y) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)|, \qquad \rho_2(x,y) = \sqrt{\int_a^b |x(t) - y(t)|^2 \, dt}\,.$$

$$\rho_1(x,y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt, \qquad \rho_4(x,y) = \int_a^b \operatorname{sign}|x(t) - y(t)| \, dt$$

metrikalarning ixtiyoriy ikkitasi ekvivalent emas. Isbotlang.

5.46. X to'plam $[a, b]$ kesmada o'lchovli va chegaralangan funksiyalardan iborat. Shu to'plamda aniqlangan

$$\rho_1(x,y) = \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^{p_1} dt \right)^{1/p_1}; \quad \rho_2(x,y) = \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^{p_2} dt \right)^{1/p_2}$$

metrikalar $p_1 \neq p_2$, $(p_1 \geq 1,\ p_2 \geq 1)$ bo'lganda ekvivalent emasligini isbotlang.

5.47. Gomeomorfizm ekvivalentlik munosabati ekanligini isbotlang.

5.48. $f : X \to Y$ gomeomorfizm, $M \subset X$ to'plam berilgan bo'lsin. Ushbu tasdiqlarni isbotlang:

a) M ochiq to'plam bo'lsa, $f(M)$ ham ochiq;

b) M yopiq to'plam bo'lsa, $f(M)$ ham yopiq;

c) $f(\bar{M}) = \overline{f(M)}$.

5.49. Gomeomorf metrik fazolardan biri separabel bo'lsa, ikkinchisi ham separabel bo'lishini ko'rsating.

5.50. $\mathbb{R}$ to'plamda $\rho_1(x,y) = |x-y|$ va $\rho_2(x,y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$ metrikalar kiritilgan. $(\mathbb{R}, \rho_1)$ va $(\mathbb{R}, \rho_2)$ metrik fazolar gomeomorf ekanligini isbotlang. $x_n = n$ ketma-ketlik $(\mathbb{R}, \rho_2)$ metrik fazoda fundamental, $(\mathbb{R}, \rho_1)$ fazoda esa fundamental emasligini isbotlang.

$(\mathbb{R}, \rho_1)$ to'la metrik fazo, $(\mathbb{R}, \rho_2)$ esa to'la emas. Demak, gomeomorf metrik fazolarning biri to'la bo'lsa, ikkinchisi to'la bo'lishi shart emas.

Xulosa. Metrik fazoning to'laligi topologik xossa emas.

5.51. (X, ρ) metrik fazo bo'lsin. Agar $\rho_1(x,y) = \dfrac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$ bo'lsa, (X,ρ) va (X,ρ_1) metrik fazolar gomeomorf ekanligini isbotlang.

5.52. $\mathbb{R}$ va $\mathbb{R}^2$ metrik fazolar gomeomorf emas. Umuman $n \neq m$ da $\mathbb{R}^n$ va $\mathbb{R}^m$, metrik fazolar gomeomorf emasligini isbotlang.

5.53. $C^{(2)}[a,b]$ to'plamda aniqlangan

$$\rho_1(x,y) = \max_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)| + \max_{a\le t\le b}|x'(t)-y'(t)| + \max_{a\le t\le b}|x''(t)-y''(t)|,$$

$$\rho_2(x,y) = \max_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)| + \max_{a\le t\le b}|x''(t)-y''(t)|$$

metrikalarning ekvivalent ekanligini isbotlang.

5.54. (X,ρ) va (Y,d) metrik fazolar bo'lsin. Agar (Y,d) fazoning biror metrik qism fazosi (X,ρ) metrik fazoga izometrik (gomeomorf) bo'lsa, (X,ρ) fazoni (Y,d) fazoga *izometrik (gomeomorf)* *joylashtirish mumkin* deyiladi. Agar $n \le m$ bo'lsa, $\mathbb{R}^n$ metrik fazoni $\mathbb{R}^m$ fazoga izometrik joylashtirish mumkinligini isbotlang. Bu yerda metrika sifatida

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} |x_i - y_i|^2},$$

$$\rho_\infty(x,y) = \max_{1 \le i \le k} |x_i - y_i|, \quad \rho_1(x,y) = \sum_{i=1}^{k} |x_i - y_i|$$

$(k = n$ yoki $k = m)$ ifodalardan biri olingan.

5.55. S tabiiy metrika kiritilgan aylana bo'lsin. U holda $S \times [0, 1]$ va $S \times S$ metrik fazolarning har birini $\mathbb{R}^3$ metrik fazoga gomeomorf joylashtirish mumkinligini isbotlang.

5.56. Uchta nuqtadan iborat bo'lgan ixtiyoriy metrik fazoni $\mathbb{R}^2$ metrik fazoga izometrik joylashtirish mumkinligini isbotlang. To'rtta nuqtadan iborat bo'lgan diskret metrik fazoni $\mathbb{R}^2$ metrik fazoga izometrik joylashtirish mumkin emas, ammo $\mathbb{R}^3$ metrik fazoga izometrik joylashtirish mumkinligini isbotlang.

5.57. To'rtta nuqtadan iborat shunday metrik fazo mavjudki, uni $\mathbb{R}^n$ metrik fazolarning birortasiga ham izometrik joylashtirish mumkin emasligini isbotlang.

5.58. $L_2[0, 1]$ metrik fazoni $L_1[0, 1]$ metrik fazoga

a) gomeomorf, b) izometrik joylashtirish mumkinmi?

6-§. Qisqartirib aks ettirish prinsipi

Agar $f : (X, \rho) \to (Y, d)$ akslantirish uchun shunday $L > 0$ son mavjud bo'lib, ixtiyoriy $x_1, x_2 \in X$ lar uchun $d(f(x_1), f(x_2)) \le L\rho(x_1, x_2)$ shart bajarilsa, u holda f akslantirish *Lipshits shartini qanoatlantiradi* deyiladi. Agar $f : X \to X$ akslantirish Lipshits shartini qanoatlantirsa va Lipshits o'zgarmasi $L < 1$ bo'lsa, f akslantirish *qisuvchi* deyiladi. Agar $A : X \to X$ akslantirish uchun shunday $x \in X$ nuqta mavjud bo'lib, $Ax = x$ tenglik bajarilsa x nuqta A akslantirishning *qo'zg'almas nuqtasi* deyiladi.

6.1-teorema *(Qisuvchi akslantirishlar prinsipi). To'la metrik fazoda aniqlangan har qanday qisuvchi akslantirish yagona qo'zg'almas nuqtaga ega.*

6.1. $x = \frac{1}{3}\cos x - 2$ tenglama yagona yechimga ega ekanligini isbotlang. Kalkulyator yordamida yechimni 0.001 aniqlik bilan toping.

Isbot. Haqiqiy sonlar to'plami $\mathbb{R}-$ to'la metrik fazo. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{3}\cos x - 2$ akslantirish esa

$$\rho(f(x_1), f(x_2)) \leq \frac{1}{3}\rho(x_1, x_2)$$

shartni qanoatlantiradi, ya'ni – qisuvchi. Shuning uchun 6.1-teoremaga ko'ra, berilgan tenglama yagona yechimga ega. Uning yechimi taqriban $x \approx -2,194749278$. □

6.2. Agar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ va $|f'(x)| \leq q < 1$ bo'lsa, $x = f(x)$ tenglama yagona yechimga ega ekanligini isbotlang.

6.3. Agar $f : [a, b] \to [a, b]$ uzluksiz funksiya bo'lsa, $x = f(x)$ tenglamaning yechimi mavjudligini isbotlang.

6.4. Agar $0 \leq a \leq 1$ bo'lsa,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}(x_n^2 - a), \qquad x_0 = 0$$

rekurrent usulda aniqlanuvchi $\{x_n\}$ ketma-ketlikning $\sqrt{a}$ soniga yaqinlashishini isbotlang.

6.5. Diskret metrik fazoda qanday akslantirish qisuvchi bo'ladi?

6.6. $S = \{z : |z| = 1\}$ aylana bo'lsin. $f : S \to S$ qisuvchi akslantirish mavjudmi?

6.7. X metrik fazo, $f : X \to X$ qisuvchi akslantirish bo'lsin. U holda f akslantirish uzluksiz va hatto tekis uzluksiz bo'lishini isbotlang.

6.8. X to'la metrik fazo va $f_i : X \to X$ $(i = 1, 2)$ akslantirishlar berilgan bo'lsin. Agar f_1 qisuvchi bo'lsa, hamda $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$ tenglik o'rinli bo'lsa, f_2 akslantirishning qo'zg'almas nuqtasi mavjudligini isbotlang.

6.9. $\mathbb{R}^2$ metrik fazoda yagona qo'zg'almas nuqtaga ega bo'lgan izometriya shu nuqta atrofida burishdan iborat ekanligini isbotlang.

6.10. $C[-a, a]$ metrik fazo va $f_i : C[-a, a] \to C[-a, a]$ $(i = 1, 2)$ akslantirishlar $f_1(x(t)) = x(-t)$ va $f_2(x(t)) = -x(-t)$ tengliklar bilan aniqlangan. Shu akslantirishlarning qo'zg'almas nuqtalarini toping.

Yechish. $C[-a, a]$ metrik fazoda juft funksiyalar to'plamini $C^+[-a, a]$ bilan, toq funksiyalar to'plamini esa $C^-[-a, a]$ bilan belgilaylik. U holda ixtiyoriy $x^+ \in C^+[-a, a]$ uchun $f_1(x^+) = x^+$ tenglik o'rinli. Xuddi shunday ko'rsatish mumkinki, har bir $x^- \in C^-[-a, a]$ da $f_2(x^-) = x^-$ tenglik o'rinli. Demak, barcha juft funksiyalar f_1 akslantirishning qo'zg'almas nuqtalari, barcha toq funksiyalar esa f_2 ning qo'zg'almas nuqtalari bo'lar ekan. □

6.11. X to'la metrik fazo, $f : X \to X$ biror akslantirish bo'lsin. f akslantirishning iteratsiyalari (darajalari) ushbu

$$f^2 = f \circ f, \quad f^n = f^{n-1} \circ f$$

tengliklar bilan aniqlanadi. Agar biror n uchun f^n qisuvchi bo'lsa, $f : X \to X$ akslantirish yagona qo'zg'almas nuqtaga ega bo'ladi. Isbot qiling.

6.12. $K(t, s)$ funksiya $[a, b] \times [a, b]$ kvadratda uzluksiz bo'lsin. U holda Veyershtrass teoremasiga ko'ra $K(t, s)$ funksiya chegaralangan, ya'ni barcha $t, s \in [a, b]$ lar uchun

$$|K(t, s)| \leq M$$

tengsizlik o'rinli. Ushbu

$$(Ax)(t) = \int_a^b K(t, s)x(s)ds$$

akslantirish $C[a, b]$ metrik fazoni o'zini-o'ziga akslantirishi va barcha $x, y \in C[a, b]$ funksiyalar uchun

$$\rho(Ax, Ay) \leq M(b-a)\rho(x, y)$$

tengsizlikning bajarilishini isbotlang.

6.13. $K(t, s)$ o'lchovli funksiya uchun

$$\int_a^b \int_a^b |K(t, s)|^2 dtds \leq M$$

tengsizlik o'rinli bo'lsin. U holda $L_2[a, b]$ fazoda aniqlangan

$$x(t) = \lambda \int_a^b K(t, s)x(s)\, ds + y(t), \quad y \in L_2[a, b]$$

integral tenglama λ parametrning yetarlicha kichik (moduli bo'yicha) qiymatlarida yagona yechimga ega ekanligini isbotlang.

6.14. $K(t, s)$ funksiya $a \leq s \leq t \leq b$ uchburchakda (sohani chizib ko'rsating) uzluksiz bo'lsin. U holda

$$(Ax)(t) = \int_a^t K(t, s)x(s)ds$$

tenglik bilan aniqlangan $A : C[a, b] \to C[a, b]$ akslantirish uchun shunday n natural son mavjudki, $A^n : C[a, b] \to C[a, b]$ akslantirish qisuvchi bo'ladi. Isbotlang.

6.15. $K(t, s)$ funksiya $a \le s \le t \le b$ uchburchakda, $y(t)$ funksiya esa $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa,

$$x(t) = \lambda \int_a^t K(t, s)x(s)ds + y(t)$$

integral tenglama ixtiyoriy $\lambda \in \mathbb{R}$ uchun yagona uzluksiz yechimga ega. Isbotlang.

6.16. $(Ax)(t) = \int\limits_0^t x^2(s)ds$ tenglik bilan aniqlangan $A : C[0, a] \to C[0, a]$ akslantirish hech bir $a > 0$ uchun qisuvchi emas. Isbot qiling.

6.17. $a > 0$ sonning qanday qiymatlarida

$$x(t) = 1 + \int_0^t x^2(s)ds$$

integral tenglama $C[0, a]$ fazoda yechimga ega?

6.18. $\mathbb{R}$ metrik fazoda shunday $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ akslantirishga misol keltiringki, barcha $x, y \in \mathbb{R}$, $x \ne y$ lar uchun

$$\rho(f(x), f(y)) < \rho(x, y)$$

tengsizlik o'rinli, ammo $f(x) = x$ tenglama yechimga ega bo'lmasin.

6.19. $\mathbb{R}^n$ fazoda

$$S^{n-1} = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) : \quad \sum_{i=1}^n x_i = 1, \quad x_i \ge 0 \right\}$$

qism to'plam *simpleks* deyiladi. Agar $P = (p_{ij})$, $i, j = \overline{1, n}$ matritsa elementlari $p_{ij} \ge 0$ va $\sum\limits_{i=1}^n p_{ij} = 1$, $j = 1, 2, \ldots, n$ shartlarni qanoatlantirsa, P *stoxastik matritsa* deyiladi. $x \mapsto Px$ akslantirish S^{n-1} simpleksni o'zini-o'ziga akslantirishini ko'rsating. S^{n-1} to'plamda

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|, \quad x, y \in S^{n-1}$$

metrika kiritilgan bo'lsin. Agar P matritsaning biror satri musbat elementlardan iborat bo'lsa ($p_{i1} > 0, p_{i2} > 0, \ldots, p_{in} > 0$), $Px = x$ tenglama S^{n-1} simpleksda yagona yechimga ega bo'lishini isbotlang.

6.20. $K(t, s)$ funksiya $[0, 1] \times [0, 1]$ kvadratda uzluksiz bo'lsin.

$$\max_{0 \le t \le 1} \int_0^1 |K(t, s)| \, ds = M$$

belgilash kiritaylik. Agar $4M|\lambda| < 1$ tengsizlik bajarilsa,

$$x(t) = 1 + \lambda \int_0^1 K(t, s) x(s) ds$$

integral tenglama $C[0, 1]$ fazoda yagona yechimga ega ekanligini isbotlang.

6.21. Kalkulyatordan foydalanib,

a) $5x - 3\sin x = 7$, b) $3x - e^{-|x|} = 10$, c) $x - \ln \sqrt[3]{1 + x^2} = 3$

tenglamalar yechimini 0,01 aniqlikda toping.

6.22. f biror uzluksiz funksiya bo'lsa,

$$x(t) - \frac{1}{2} \sin x(t) + f(t) = 0$$

tenglikni qanoatlantiruvchi $x \in C[0, 1]$ funksiya mavjud. Isbotlang.

6.23. Ushbu

$$x(t) = e^{-x(t)} + \sin t$$

tenglamaning $C[0, 1]$ fazoga tegishli yechimi mavjud. Isbotlang.

6.24. X to'la metrik fazo, $A : X \to X$, $\rho(Ax, Ay) \le q\,\rho(x, y)$, $0 \le q < 1$ qisuvchi akslantirish bo'lsin. Ixtiyoriy $x_0 \in X$ uchun $Ax = x$ tenglamaning yechimi $B[x_0, \dfrac{\rho(x_0, Ax_0)}{1-q}]$ sharga tegishli. Isbotlang.

6.25. X to'la metrik fazo, $B[x_0, r] \subset X$ yopiq shar va $f : B[x_0, r] \to X$ biror akslantirish bo'lsin. Agar f akslantirish $B[x_0, r]$ sharni qisqartirib akslantirsa, ya'ni

$$\rho(f(x), f(y)) < q \cdot \rho(x, y), \quad 0 \le q < 1, \quad x, y \in B[x_0, r]$$

shartni qanoatlantirsa va $\rho(f(x), x_0) \le (1-q) \cdot r$ tengsizlik bajarilsa, $f(x) = x$ tenglama $B[x_0, r]$ sharda yagona yechimga ega. Isbotlang.

6.26. X to'la metrik fazo, $f : X \to X$ uzluksiz akslantirish

$$\rho(f(x), f(y)) \ge \alpha \cdot \rho(x, y), \quad \alpha > 1, \quad x, y \in X$$

shartni qanoatlantirsin. U holda $f(x) = x$ tenglama yechimga ega bo'lishi shartmi?

6.27. $\mathbb{R}^n$ fazoda metrika

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

tenglik bilan aniqlangan. $A = (a_{ij})$, $i, j = \overline{1, n}$ matritsa elementlari

$$\max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| < 1$$

shartni qanoatlantirsa, $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ akslantirish qisuvchi bo'ladi. Isbotlang.

6.28. $A = (a_{ij})$ cheksiz matritsa bo'lsin. $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ uchun

$$Ax = \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{1i} x_i, \sum_{i=1}^{\infty} a_{2i} x_i, \ldots, \sum_{i=1}^{\infty} a_{ni} x_i, \ldots \right)$$

belgilash kiritaylik. Quyidagi tasdiqlarni isbotlang:

a) agar $\sup\limits_{1\le j<\infty} \sum\limits_{i=1}^{\infty} |a_{ij}| < 1$ bo'lsa, $A : \ell_1 \to \ell_1$ - qisuvchi;

b) agar $\sup\limits_{1\le i<\infty} \sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| < 1$ bo'lsa, $A : m \to m$ - qisuvchi;

c) agar $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \sum\limits_{i=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 < 1$ bo'lsa, $A : \ell_2 \to \ell_2$ - qisuvchi.

6.29. Akslantirish $A : C[0,1] \to C[0,1]$, $Ax(t) = \lambda x(t^\alpha)$, $\alpha \ge 0$ tenglik bilan berilgan. Parametr λ ning qanday qiymatlarida bu akslantirish qisuvchi bo'ladi?

6.30. f va g uzluksiz funksiyalar bo'lib, $|f(0)| < 1$, $|f(1)| < 1$ shart bajarilsa,

$$x(t) = f(t) \cdot x(t^\alpha) + g(t)$$

tenglama $\alpha > 0$, $\alpha \ne 1$ bo'lganda, $C[0,1]$ fazoda yagona yechimga ega ekanligini isbotlang.

6.31. $A : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, $(Ax)(t) = \lambda \cdot x(t^\alpha)$, $0 < \alpha \le 1$ akslantirish λ parametrning qanday qiymatlarida qisuvchi bo'ladi?

6.32. $K(t,s)$ uzluksiz va $\alpha < 1$ bo'lsin. Parametr λ ning qanday qiymatlarida $A : C[0,1] \to C[0,1]$

$$(Ax)(t) = \lambda \cdot \int_0^1 \frac{K(t,s)}{|t-s|^\alpha} x(s)\, ds$$

akslantirish qisuvchi bo'ladi?

7-§. Kompakt metrik fazolar

Agar $K \subset X$ to'plamning istalgan ochiq qoplamasidan chekli qism qoplama ajratish mumkin bo'lsa, u holda K *kompakt to'plam* deyiladi. Agar X fazoning istalgan ochiq qoplamasidan chekli qism qoplama ajratish mumkin bo'lsa, u holda X *kompakt metrik fazo* deyiladi. Kompakt to'plamni quyidagicha ham ta'riflash mumkin. Agar K to'plamdan olingan ixtiyoriy $\{x_n\}$ ketma-ketlikdan K da yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin bo'lsa, K ga *kompakt to'plam* deyiladi. Agar M to'plamning yopig'i $[M]$ kompakt to'plam bo'lsa, M *nisbiy kompakt to'plam* deyiladi. Agar ixtiyoriy $x \in M$ uchun shunday $a \in A$ mavjud bo'lib, $\rho(x, a) \leq \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, A to'plam M to'plam uchun ε *to'r* deyiladi. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun M to'plamning chekli ε to'ri mavjud bo'lsa, M *to'la chegaralangan to'plam* deyiladi.

Har qanday to'la chegaralangan to'plam chegaralangan bo'ladi, lekin teskarisi o'rinli emas. Metrik fazolarda to'plamning nisbiy kompakt bo'lishligi haqida quyidagi tasdiq o'rinli.

7.1-teorema. *(X, ρ) to'la metrik fazodagi M to'plam nisbiy kompakt bo'lishi uchun, uning to'la chegaralangan bo'lishi zarur va yetarli.*

$C[a, b]$ fazoda F funksiyalar oilasi berilgan bo'lsin. Agar shunday $C > 0$ mavjud bo'lib, ixtiyoriy $\varphi \in F$ va barcha $x \in [a, b]$ lar uchun $|\varphi(x)| \leq C$ tengsizlik bajarilsa, u holda F funksiyalar oilasi *tekis chegaralangan* deyiladi. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son mavjud bo'lib, $|x_1 - x_2| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $x_1, x_2 \in [a, b]$ hamda barcha $\phi \in F$ lar uchun $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, F funksiyalar oilasi *tekis darajada uzluksiz* deyiladi.

7.2-teorema *(Arsela teoremasi). $M \subset C[a, b]$ to'plam nisbiy kompakt bo'lishi uchun uning tekis chegaralangan va tekis darajada uzluksiz bo'lishi zarur va yetarli.*

Endi biz $\mathbb{R}^n$ yoki $\mathbb{C}^n$ fazoda to'plamning kompaktlik va nisbiy kompaktlik kriteriysini beramiz.

7.3-teorema. *$\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ metrik fazodagi K to'plam kompakt bo'lishi uchun, uning chegaralangan va yopiq bo'lishi zarur va yetarli.*

7.1-natija. *$\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ metrik fazodagi K to'plam nisbiy kompakt bo'-*

lishi uchun, uning chegaralangan bo'lishi zarur va yetarli.

7.1. X metrik fazo A undagi kompakt to'plam bo'lsin. U holda ixtiyoriy $B(B \subset A)$ to'plamning nisbiy kompakt bo'lishini isbotlang.

7.2. X metrik fazo A undagi kompakt to'plam bo'lsin. Shunday $B(B \subset A)$ to'plamga misol keltiringki, u kompakt to'plam bo'lmasin.

7.3. X metrik fazo A undagi nisbiy kompakt to'plam bo'lsin. U holda ixtiyoriy $B(B \subset A)$ to'plamning nisbiy kompakt bo'lishini isbotlang.

7.4. X metrik fazoda A va B nisbiy kompakt to'plamlar bo'lsa, $A \cup B$, $A \cap B$ to'plamlar ham nisbiy kompakt bo'lishini isbotlang.

Isbot. A va B nisbiy kompakt to'plamlar bo'lgani uchun, 7.1-teoremaga ko'ra, ular to'la chegaralangan bo'ladi. Demak, A va B to'plamlar uchun A_ε va B_ε chekli ε to'rlar mavjud. U holda $A \cup B$ to'plam uchun $A_\varepsilon \cup B_\varepsilon$ to'plam chekli ε to'r bo'ladi. Bundan $A \cup B$ to'plamning to'la chegaralangan ekanligi, 7.1-teoremadan esa $A \cup B$ ning nisbiy kompakt to'plam ekanligi kelib chiqadi. 7.3-misol tasdig'iga ko'ra kesishma $A \cap B \subset A$ nisbiy kompakt to'plam bo'ladi. □

7.5. X metrik fazoda A va B kompakt to'plamlar bo'lsa, $A \cup B$, $A \cap B$ to'plamlar ham kompakt bo'lishini isbotlang.

7.6. Kompakt metrik fazo to'la ekanligini isbotlang.

7.7. Kompakt metrik fazo separabel. Isbot qiling.

7.8. Kompaktning uzluksiz akslantirishdagi tasviri yana kompakt bo'lishini isbotlang.

7.9. $C[a,b]$ fazoda

$$F = \left\{ y(s) = \int_a^b K(s,t)\, x(t)\, dt, \quad x \in B[0,1] \right\} \tag{7.1}$$

funksiyalar oilasini nisbiy kompaktlikka tekshiring. Bu yerda $B[0,\ 1]$ to'plam - $C[a,b]$ fazodagi markazi nol ($x(t)\equiv 0$) nuqtada radiusi 1 ga teng bo'lgan yopiq shar. $K(s,t)$ - $[a,b]\times[a,b]$ kvadratda aniqlangan uzluksiz funksiya.

Yechish. Arsela teoremasiga ko'ra F funksiyalar oilasining tekis chegaralangan va tekis darajada uzluksiz ekanligini ko'rsatish yetarli. $K(s,t)$ funksiya - $[a,b]\times[a,b]$ kvadratda uzluksiz bo'lganligi uchun u chegaralangan, ya'ni shunday $C>0$ son mavjudki, barcha $s,\ t\in[a,b]$ lar uchun $|K(s,t)|\le C$ tengsizlik o'rinli. $x\in B[0,\ 1]$ shartdan $\max\limits_{a\le t\le b}|x(t)|\le 1$ ekanligi kelib chiqadi. Endi F funksiyalar oilasining tekis chegaralangan ekanligini ko'rsatamiz:

$$|y(s)|=\left|\int_a^b K(s,t)\,x(t)\,dt\right|\le\int_a^b |K(s,t)|\cdot|x(t)|\,dt\le C\cdot 1\cdot(b-a)\,.$$

Bu tengsizlik F funksiyalar oilasining tekis chegaralangan ekanligini isbotlaydi. Endi F funksiyalar oilasining tekis darajada uzluksiz ekanligini ko'rsatamiz:

$$|y(s_1)-y(s_2)|=\left|\int_a^b K(s_1,t)\,x(t)\,dt-\int_a^b K(s_2,t)\,x(t)\,dt\right|\le$$
$$\le\int_a^b|K(s_1,t)-K(s_2,t)|\cdot|x(t)|\,dt\le\varepsilon\cdot 1\cdot(b-a)\,.$$

So'nggi munosabat $|s_1-s_2|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $s_1,s_2\in[a,b]$ va hamma $x\in B[0,\ 1]$ lar uchun o'rinli. Demak, F funksiyalar oilasi tekis darajada uzluksiz ekan. Shunday qilib, Arsela teoremasiga ko'ra (7.1) tenglik bilan aniqlangan F funksiyalar oilasi nisbiy kompakt to'plam bo'ladi. □

7.10. $C[0,\ 1]$ fazoda

$$\Phi=\left\{x_\alpha(t)=\frac{2\alpha t}{1+\alpha^2t^2};\quad \alpha\in(0,\infty)\right\}\tag{7.2}$$

funksiyalar oilasini nisbiy kompaktlikka tekshiring.

Yechish. Arsela teoremasiga ko'ra, (7.2) tenglik bilan aniqlangan Φ funksiyalar oilasining tekis chegaralangan va tekis darajada uzluksiz ekanligini tekshirishimiz kerak. $(1-\alpha t)^2 = 1 - 2\alpha t + \alpha^2 t^2 \geq 0$ tengsizlikdan $|x_\alpha(t)| \leq 1$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, Φ funksiyalar oilasi tekis chegaralangan ekan. Tekis darajada uzluksiz emas degan tushunchani ta'riflaymiz. Agar biror $\varepsilon > 0$ son va ixtiyoriy $\delta > 0$ uchun shunday $x_\alpha \in \Phi$ va shunday $t_1,\ t_2 \in [0,\ 1]$ lar mavjud bo'lib, $|t_1 - t_2| < \delta$ tengsizlik bajarilganda

$$|x_\alpha(t_1) - x_\alpha(t_2)| \geq \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, Φ funksiyalar oilasi *tekis darajada uzluksiz emas* deyiladi. Endi $\varepsilon = 1/2$ va $\delta > 0$ - ixtiyoriy son bo'lsin. Agar $\alpha > \frac{1}{\delta}$ va $t_1 = \frac{1}{\alpha}$, $t_2 = 0$ bo'lsa, u holda $|t_1 - t_2| = \frac{1}{\alpha} < \delta$ bo'ladi, ammo

$$|x_\alpha(t_1) - x_\alpha(t_2)| = \frac{2\alpha \cdot \frac{1}{\alpha}}{1 + \alpha^2 \cdot \frac{1}{\alpha^2}} = 1 > \varepsilon$$

tengsizlik o'rinli. Demak, Φ funksiyalar oilasi tekis darajada uzluksiz emas ekan. Shunday qilib, (7.2) tenglik bilan aniqlangan Φ funksiyalar oilasi nisbiy kompakt to'plam emas ekan. □

7.11. X kompakt metrik fazo, $\{F_\alpha\}_{\alpha \in I}$ esa undagi yopiq to'plamlar bo'lsin. Agar F_α to'plamlarning ixtiyoriy cheklitasi bo'sh bo'lmagan kesishmaga ega bo'lsa, u holda $\bigcap\limits_{\alpha \in I} F_\alpha$ kesishma ham bo'sh emas. Isbotlang.

7.12. Kompakt metrik fazolarning dekart ko'paytmasi yana kompakt bo'lishini isbotlang.

7.13. X, Y metrik fazolar, Y kompakt va $f : X \to Y$ uzluksiz va inyektiv akslantirish bo'lsin. U holda X va $f(X)$ gomeomorf ekanligini isbotlang.

7.14. X metrik fazoda sanoqli va kompakt bo'lgan to'plamga misol keltiring.

Yechish. $X = (-\infty, \infty)$ va $M = \{0,\ 2,\ 2^{-1}, \ldots, 2^{-n}, \ldots\}$ bo'lsin. M to'plam sanoqli va yagona limitik nuqtasi 0 ni saqlaydi. Demak, M yopiq to'plam. M to'plam quyidan 0, yuqoridan 2 bilan chegaralangan, ya'ni chegaralangan to'plam. 7.3-teoremaga ko'ra, M kompakt to'plam bo'ladi. $\square$

7.15. X kompakt metrik fazo va $f : X \to X$ akslantirish uchun

$$\rho(f(x), f(y)) \geq \rho(x, y), \quad \forall\, x, y \in X$$

tengsizlik bajarilsa, f izometriya bo'lishini isbotlang.

7.16. X kompakt metrik fazo va $f : X \to X$ akslantirish

$$\rho(f(x), f(y)) < \rho(x, y), \quad x \neq y$$

shartni qanoatlantirsin. U holda $f(x) = x$ tenglama yagona yechimga ega bo'lishini isbotlang.

7.17. X kompakt metrik fazo va $f : X \to X$ izometriya bo'lsin. U holda $f(X) = X$ ekanligini isbotlang.

7.18. $\mathbb{R}$ metrik fazoda a) $\mathbb{Z}$, b) $M_n = \left\{\dfrac{k}{n} : k \in \mathbb{Z}\right\}$ to'plam $\mathbb{R}$ uchun qanday to'rni tashkil etadi?

7.19. $\mathbb{Z}^2$ to'plam $\mathbb{R}^2$ da qanday to'rni tashkil etadi?

7.20. Tekislikdagi $A = \{1 \leq x \leq 5,\quad 0 \leq y \leq 4\}$ to'plam uchun chekli $\varepsilon = \sqrt{2}$ to'r quring. Chekli $\varepsilon = \sqrt{2}$ to'rlar ichidan eng kam elementlisining elementlari sonini toping.

7.21. $f : X \to Y$ tekis uzluksiz, $M \subset X$ to'plam to'la chegaralangan bo'lsa, $f(M)$ to'plam ham to'la chegaralangan. Isbot qiling. Agar tekis uzluksizlik shartini faqat uzluksizlik sharti bilan almashtirilsa, xulosa noto'g'ri bo'ladi. Misol keltiring.

7.22. X metrik fazo. Agar ixtiyoriy uzluksiz $f : X \to \mathbb{R}$ funksiya chegaralangan bo'lsa, X kompakt metrik fazo bo'lishini isbotlang.

Demak, X metrik fazoda uzluksiz, ammo chegaralanmagan funksiya mavjud bo'lsa, X kompakt metrik fazo emas.

7.23. Agar $M-$ kompakt to'plam, $F-$ yopiq to'plam va $M \cap F = \emptyset$ bo'lsa, quyidagi tengsizlikni isbotlang

$$d(M, F) = \inf_{x \in M, y \in F} \rho(x, y) > 0.$$

7.24. Shunday M va F yopiq to'plamlarga misol keltiringki, $M \cap F = \emptyset$ va $d(M, F) = \inf\limits_{x \in M, y \in F} \rho(x, y) = 0$ bo'lsin.

7.25. Ushbu

a) $\{t^\alpha\}$, $\alpha > 0$; b) $\{\sin \alpha t\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

c) $\left\{\dfrac{1}{\alpha + t^2}\right\}$, $\alpha > 0$; d) $\left\{\dfrac{t^\alpha}{1 + t^2}\right\}$, $\alpha > 0$; e) $\{\ln^\alpha t\}$, $\alpha > 0$

funksiyalar oilalarining qaysilari $[0, 1]$ kesmada tekis darajada uzluksiz? Qaysilari tekis chegaralangan?

7.26. K kompakt, $C(K)$ shu kompaktda uzluksiz bo'lgan barcha haqiqiy (kompleks) qiymatli funksiyalar to'plami bo'lsin. Agar

$$\rho(x, y) = \max_{t \in K} |x(t) - y(t)|$$

deb olsak, $C(K)$ to'la va separabel metrik fazo ekanligini isbotlang.

7.27. X metrik fazo va $K \subset X$ kompakt to'plam bo'lsin. Ixtiyoriy $x \in X$ uchun shunday $y \in K$ mavjudki,

$$\rho(x, y) = \inf_{z \in K} \rho(x, z)$$

ya'ni x uchun K da unga eng yaqin element mavjud. Isbotlang.

7.28. X metrik fazoda K to'plam berilgan. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun K to'plamning kompakt ε to'ri mavjud bo'lsa, K kompakt bo'lishini isbotlang.

7.29. Arsela teoremasidan foydalanib, $C^{(1)}[a, b]$ metrik fazoda K to'plamning nisbiy kompakt bo'lishining zarur va yetarli shartini toping.

7.30. $C[0, 1]$ metrik fazoda ushbu
$M_1 = \{x \in C[0, 1] : \ |x(t)| \le 1\}$;
$M_2 = \{x \in C[0, 1] : \ |x(t)| \le 1, \ |x'(t)| \le 2\}$;
$M_3 = \{x \in C[0, 1] : \ |x(t)| \le 1, \ |x'(t)| \le 2, \ |x''(t)| \le 3\}$;
$M_4 = \{x \in C[0, 1] : \ |x(t)| \le 1, \ |x''(t)| \le 2\}$;
$M_5 = \{x \in C[0, 1] : \ |x'(t)| \le 1, \ |x''(t)| \le 2\}$,
to'plamlardan qaysilari nisbiy kompakt to'plam bo'ladi?

7.31. $K = [0, 1] \times [0, 1]$ kvadratda uzluksiz differensiallanuvchi va

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t_1}\right| \le 1, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial t_2}\right| \le 1; \quad f(0, 0) = 1$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $f(t_1, t_2)$ funksiyalardan iborat to'plam $C(K)$ metrik fazoda kompakt ekanligini isbotlang.

7.32. $\{a_n\}$ sonlar qanday bo'lganda $M = \{x \in \ell_2 : \ |x_n| \le a_n\}$ "parallelepiped" ℓ_2 metrik fazoda kompakt bo'ladi?

7.33. $K \subset X$ kompakt, f_n lar shu kompaktda aniqlangan, haqiqiy qiymatli uzluksiz funksiyalar. Agar ixtiyoriy $x \in K$ uchun $\{f_n(x)\}$ monoton kamaymovchi

$$f_1(x) \le f_2(x) \le \cdots \le f_n(x) \le \cdots$$

bo'lsa, hamda $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ uzluksiz funksiya bo'lsa, $\{f_n\}$ funksional ketma-ketlik f funksiyaga tekis yaqinlashadi, ya'ni $C(K)$ metrik fazoda $\rho(f_n, f) \to 0$. Isbot qiling.

8-§. Tutash metrik fazolar

Agar X metrik fazoda X va $\emptyset$ to'plamlardan farqli ham ochiq, ham yopiq bo'lgan to'plam mavjud bo'lmasa, X ga *tutash metrik fazo* deyiladi Xuddi shunday X metrik fazoning M to'plami uchun (M, ρ) metrik fazo tutash bo'lsa, M ga *tutash to'plam* deyiladi.

8.1. $\mathbb{R}$ metrik fazoda $\emptyset$, $[a, b]$, (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, \infty)$, (a, ∞), $(-\infty, a]$, $(-\infty, a)$, $(-\infty, \infty)$ to'plamlar tutash ekanligini isbotlang. Ulardan boshqa tutash to'plamlar yo'qligini ko'rsating.

Yechish. Faraz qilaylik, $A \subset \mathbb{R}$ tutash to'plam bo'lsin. A da ham $\rho(x, y) = |x - y|$, $x, y \in A$ metrika shartlarini qanoatlantiradi. Ixtiyoriy $U \subset \mathbb{R}$ ochiq to'plam uchun $U \cap A$, A da ochiq to'plam bo'ladi. Endi quyidagi sonlarni aniqlaymiz $M = \sup A$, $m = \inf A$, umuman $M = \infty$, $m = -\infty$ bo'lishi ham mumkin. Endi $(m, M) \subset A$ ekanligini ko'rsatamiz. Teskarisini faraz qilaylik, ya'ni $(m, M) \not\subset A$ bo'lsin. U holda shunday $c \in (m, M)$ mavjudki, $c \notin A$ bo'ladi. $(-\infty, c)$ va (c, ∞) lar $\mathbb{R}$ dagi ochiq to'plamlar bo'lgani uchun $(-\infty, c) \cap A$ va $(c, \infty) \cap A$ to'plamlar A da ochiq to'plamlar bo'ladi. Aniq quyi va aniq yuqori chegara tarifiga ko'ra $(-\infty, c) \cap A \neq \emptyset$ va $(c, \infty) \cap A \neq \emptyset$. Bu to'plamlar A da ochiq va yopiq to'plamlardir, chunki ulardan biri ikkinchisining to'ldiruvchisi bo'ladi. Bu esa A ning tutash ekanligiga zid. Shunday qilib $(m, M) \subset A$ ekan. Agar $M = \infty$, $m = -\infty$ bo'lsa, $A = \mathbb{R}$, $m = -\infty$ va M chekli bo'lib, $M \in A$ bo'lsa, u holda $A = (-\infty, M]$ bo'ladi. m va M larning ikkalasi ham chekli bo'lib $m, M \in A$ bo'lsa, u holda o'z-o'zidan ravshanki $[m, M] = A$ bo'ladi. Qolgan hollar ham shunga o'xshash tahlil qilinadi. Shunday qilib, $\mathbb{R}$ dagi barcha tutash to'plamlar tavsiflandi.

8.2. A_α, $\alpha \in I$ tutash to'plamlar bo'lsin. Agar $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \neq \emptyset$ bo'lsa,

$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ to'plam tutash bo'lishini isbotlang.

8.3. Uzluksiz akslantirishda tutash to'plamning tasviri yana tutash to'plam bo'lishini isbotlang.

8.4. M_n to'plamlar tutash va $M_n \cap M_{n+1} \neq \emptyset$, $n = 1, 2, \ldots$ bo'lsin. U holda $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ to'plam tutash bo'lishini isbotlang.

8.5. A va B yopiq to'plamlar bo'lsin. Agar $A \cup B$ va $A \cap B$ tutash to'plamlar bo'lsa, A va B to'plamlar ham tutash bo'lishini isbotlang. Masalada A va B to'plamlarning yopiqlik sharti muhim ekanligiga misol keltiring.

8.6. M tutash to'plam bo'lsin. Agar $f : M \to \mathbb{R}$ uzluksiz funksiya uchun $f(x) = a$, $f(y) = b$, $x, y \in M$ va $a < b$ bo'lsa, ixtiyoriy $c \in (a, b)$ uchun shunday $z \in M$ mavjudki, $f(z) = c$ tenglik bajariladi. Isbotlang.

8.7. Tutash metrik fazolarning dekart ko'paytmasi ham tutash ekanligini isbotlang.

8.8. Metrik fazoda ixtiyoriy sfera bo'sh emas. Bu holda fazo tutash bo'lishi shartmi?

8.9. $\mathbb{Q}$ metrik fazo tutash emas. Isbotlang.

8.10. $C[a, b]$ to'plamda metrika $\rho(x, y) = \int_a^b \operatorname{sign}|x(t) - y(t)|\, dt$ tenglik bilan aniqlangan. $(C[a, b], \rho)$ tutash fazo bo'ladimi?

I bobni takrorlash uchun test savollari

1. $\mathbb{R}$ fazo metrikasini ko'rsating.

A) $\rho(x,y) = |x-y|$ B) $\rho(x,y) = |x| - |y|$

C) $\rho(x,y) = |x-y|^2$ D) $\rho(x,y) = |x| + |y|$

2. $\mathbb{R}^n$ fazo metrikasini ko'rsating.

A) $\rho(x,y) = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$ B) $\rho(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k - y_k|$

C) $\rho(x,y) = \max\limits_{1\le k\le n} |x_k - y_k|$ D) $\rho(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2$

3. $\mathbb{R}_1^n$ fazo metrikasini ko'rsating.

A) $\rho(x,y) = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$ B) $\rho(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k - y_k|$

C) $\rho(x,y) = \max\limits_{1\le k\le n} |x_k - y_k|$ D) $\rho(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2$

4. $\mathbb{R}_\infty^n$ fazo metrikasini ko'rsating.

A) $\rho(x,y) = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$ B) $\rho(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k - y_k|$

C) $\rho(x,y) = \max\limits_{1\le k\le n} |x_k - y_k|$ D) $\rho(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2$

5. $C[a,b]$ fazo metrikasini ko'rsating.

A) $\rho(x,y) = \sqrt{\int\limits_a^b |x(t) - y(t)|^2\,dt}$ B) $\rho(x,y) = \int\limits_a^b |x(t) - y(t)|\,dt$

C) $\rho(x,y) = \max\limits_{a\le t\le b} |x(t) - y(t)|$ D) $\rho(x,y) = \int\limits_a^b |x(t) - y(t)|^2\,dt$

6. $C_1[a,b]$ fazo metrikasini ko'rsating.

A) $\rho(x,y) = \sqrt{\int\limits_a^b |x(t) - y(t)|^2\,dt}$ B) $\rho(x,y) = \int\limits_a^b |x(t) - y(t)|\,dt$

C) $\rho(x,y) = \max\limits_{a\le t\le b} |x(t) - y(t)|$ D) $\rho(x,y) = \int\limits_a^b |x(t) - y(t)|^2\,dt$

7. $C_2[a,b]$ fazo metrikasini ko'rsating.

A) $\rho(x,y)=\sqrt{\int\limits_a^b |x(t)-y(t)|^2\,dt}$ B) $\rho(x,y)=\int\limits_a^b |x(t)-y(t)|\,dt$

C) $\rho(x,y)=\max\limits_{a\le t\le b}|x(t)-y(t)|$ D) $\rho(x,y)=\int\limits_a^b |x(t)-y(t)|^2\,dt$

8. $\ell_p,\ p\ge 1$ fazo metrikasini ko'rsating.

A) $\rho(x,y)=\sup\limits_{1\le k\le\infty}|x_k-y_k|$ B) $\rho(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} e^{-k}\,|x_k-y_k|$

C) $\rho(x,y)=\sqrt[p]{\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k-y_k|^p}$ D) $\rho(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k-y_k|^p$

9. ℓ_2 fazo metrikasini ko'rsating.

A) $\rho(x,y)=\sup\limits_{1\le k\le\infty}|x_k-y_k|$ B) $\rho(x,\ y)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} e^{-k}\,|x_k-y_k|$

C) $\rho(x,y)=\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k-y_k|^2}$ D) $\rho(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}(x_k-y_k)^2$

10. Ratsional sonlar to'plami $\mathbb{Q}$ ning barcha limitik nuqtalari to'plamini toping.

A) $\mathbb{R}$ B) $\mathbb{Q}$ C) $\emptyset$ D) $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$

11. Ratsional sonlar to'plami $\mathbb{Q}$ ning barcha urinish nuqtalari to'plamini toping.

A) $\mathbb{R}$ B) $\mathbb{Q}$ C) $\emptyset$ D) $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$

12. Ratsional sonlar to'plami $\mathbb{Q}$ ning barcha yakkalangan nuqtalari to'plamini toping.

A) $\mathbb{R}$ B) $\mathbb{Q}$ C) $\emptyset$ D) $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$

13. Butun sonlar to'plami $\mathbb{Z}$ ning barcha limitik nuqtalari to'plamini toping.

A) $\mathbb{R}$ B) $\mathbb{Q}$ C) $\emptyset$ D) $\mathbb{Z}$

14. Butun sonlar to'plami $\mathbb{Z}$ ning barcha urinish nuqtalari to'plamini toping.

A) $\mathbb{R}$ B) $\mathbb{Q}$ C) $\emptyset$ D) $\mathbb{Z}$

15. Butun sonlar to'plami $\mathbb{Z}$ ning barcha yakkalangan nuqtalari to'plamini toping.

A) $\mathbb{R}$ B) $\mathbb{Q}$ C) $\emptyset$ D) $\mathbb{Z}$

16. $\mathbb{R}$ dagi ochiq to'plamni toping.

A) $(0, 2)$ B) $(0, 2]$ C) $[0, 2)$ D) $[0, 2]$

17. $\mathbb{R}$ dagi yopiq to'plamni toping.

A) $(0, 1)$ B) $[0, 1)$ C) $(0, 2]$ D) $[0, 4]$

18. $\mathbb{R}$ dagi chegaralangan to'plamni toping.

A) $[0, 1]$ B) $(-\infty, 0)$ C) $\mathbb{Q}$ D) $(0, \infty)$

19. (X, ρ) metrik fazoda chegaralangan to'plam ta'rifini keltiring.

A) $F \subset X$ to'plam X dagi birorta sharda saqlansa;

B) $F \subset X$ - yopiq to'plam bo'lsa;

C) $F \subset X$ - ochiq to'plam bo'lsa;

D) $F \subset X$ - chekli yoki sanoqli dona elementdan iborat bo'lsa.

20. Quyidagilar ichidan metrika shartlarini ajrating.

1) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$; 2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, $\forall x, y \in X$

3) $\rho(\lambda x, y) = \lambda\rho(y, x)$, 4) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$, $\forall x, y, z \in X$.

A) 1, 2, 3 B) 1, 2, 4 C) 1, 3, 4 D) 1, 2, 3, 4

21. Quyidagilarning qaysilari (X, ρ) metrik fazodagi yopiq to'plam ta'rifi bo'ladi?

1. Agar F to'plam barcha limitik nuqtalarini o'zida saqlasa;

2. Agar F ning barcha nuqtalari ichki nuqta bo'lsa;

3. Agar $F = [F]$ bo'lsa;

4. Agar F ning to'ldiruvchisi ochiq to'plam bo'lsa.

A) 1, 2, 3 B) 1, 3, 4 C) 2, 3, 4 D) 1, 2, 3, 4

22. Quyidagilarning qaysilari (X, ρ) metrik fazodagi ochiq to'plam ta'rifi bo'ladi?

1. Agar F to'plam barcha limitik nuqtalarini o'zida saqlasa;
2. Agar F ning barcha nuqtalari ichki nuqta bo'lsa;
3. Agar $F = [F]$ bo'lsa;
4. Agar F ning to'ldiruvchisi yopiq to'plam bo'lsa.

A) 1, 2, 3 B) 1, 3, 4 C) 2, 3, 4 D) 2, 4

23. $\mathbb{R}$ metrik fazoning hamma yerida zich to'plamni toping.

A) $\mathbb{Q}$ - ratsional sonlar to'plami B) tub sonlar to'plami

C) $\mathbb{Z}$ - butun sonlar to'plami D) $\mathbb{N}$ - natural sonlar to'plami

24. $\mathbb{R}$ metrik fazoning hamma yerida zich to'plamni toping.

A) murakkab sonlar to'plami B) $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ - irratsional sonlar to'plami

C) $\mathbb{Z}$ - butun sonlar to'plami D) $\mathbb{N}$ - natural sonlar to'plami

25. $\mathbb{R}$ metrik fazoning hech yerida zich bo'lmagan to'plamni toping.

A) $\mathbb{Q}$ - ratsional sonlar to'plami B) $\mathbb{Z}$ - butun sonlar to'plami

C) $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ - irratsional sonlar to'plami D) $[0, \infty)$

26. Kantor to'plamining xossalari keltirilgan javobni toping.

A) $[0, 1]$ ning hech yerida zichmas, nol o'lchovli, sanoqli to'plam.

B) $[0, 1]$ ning hamma yerida zich, nol o'lchovli, kontinuum quvvatli to'plam.

C) $[0, 1]$ ning hech yerida zichmas, nol o'lchovli, ochiq to'plam.

D) $[0, 1]$ ning hech yerida zichmas, nol o'lchovli, kontinuum quvvatli yopiq to'plam.

27. Quyidagi tasdiqlardan to'g'rilarini ajrating.

1) Ochiq to'plamning to'ldiruvchisi yopiq to'plamdir.

2) Ochiq to'plamning to'ldiruvchisi ochiq to'plamdir.

3) Sanoqli sondagi ochiq to'plamlarning birlashmasi ochiq to'plamdir.

4) Sanoqli sondagi ochiq to'plamlarning kesishmasi ochiq to'plamdir.

A) 1, 2, 4 B) 1, 2, 3 C) 1, 4 D) 1, 3

28. Quyidagi tasdiqlardan to'g'rilarini ajrating.

1) Yopiq to'plamning to'ldiruvchisi ochiq to'plamdir.

2) Yopiq to'plamning to'ldiruvchisi yopiq to'plamdir.

3) Sanoqli sondagi yopiq to'plamlarning birlashmasi yopiq to'plamdir.

4) Sanoqli sondagi yopiq to'plamlarning kesishmasi yopiq to'plamdir.

A) 1, 2, 4 B) 1, 2, 3 C) 1, 4 D) 1, 3

29. Quyida keltirilganlardan qaysilari to'la metrik fazo bo'ladi?

1) $\mathbb{R}$ 2) $\mathbb{R}^n$ 3) $C[a, b]$ 4) ℓ_2 5) $C_2[a, b]$.

A) 1, 2, 3, 4 B) 1, 2, 4, 5 C) 1, 2, 3, 5 D) 2, 3, 4, 5

30. $C_1[-1, 1]$ fazoda quyidagi ketma-ketliklardan qaysilari nolga yaqinlashadi? 1) $f_n(x) = x^n$, 2) $f_n(x) = 1 - x^n$,

3) $f_n(x) = (\sin x)^n$, 4) $f_n(x) = (\cos x)^n$

A) 1, 3, 4 B) 1, 2 C) 2, 4 D) 1, 2, 3

31. $C_2[0, 1]$ fazoda $x_n(t) = t^n + t^{n+1}$ ketma-ketlikning limitini toping.

A) $x(t) = 0$ B) $x(t) = 2t$ C) $x(t) = 1$ D) $x(t) = 2$

32. $\mathbb{R}^n$ fazoda Koshi-Bunyakovskiy tengsizligini ko'rsating.

A) $\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k \cdot b_k| \le \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2$

B) $\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k \cdot b_k| \le \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$, $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

C) $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $p \ge 1$

D) $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k\right| \le \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2} \cdot \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2}$

33. $\mathbb{R}^n$ fazoda Minkovskiy tengsizligini ko'rsating.

A) $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2$

B) $\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \ p \geq 1$

C) $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k\right|^2 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2$

D) $\sum_{k=1}^{n} |a_k \cdot b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}, \ p, q > 1, \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

34. $\mathbb{R}^n$ fazoda Gyolder tengsizligini ko'rsating.

A) $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k\right|^2 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2$

B) $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2$

C) $\sum_{k=1}^{n} |a_k \cdot b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}, \ p, q > 1, \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

D) $\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}; \ p \geq 1$

35. Yopiq birlik shar qaysi fazoda kompakt to'plam bo'ladi?

A) $\mathbb{R}^n$ da B) $C[a, b]$ da C) ℓ_2 da D) m da

36. $\mathbb{R}^n$ fazoda kompaktlik kriteriysini keltiring.

A) To'plamning chegaralangan va ochiq bo'lishi

B) To'plamning chegaralangan va yopiq bo'lishi

C) To'plamning chegaralangan va sanoqli bo'lishi

D) To'plamning chegaralangan bo'lishi

37. $\mathbb{R}^n$ fazoda nisbiy kompaktlik kriteriysini keltiring.

A) To'plamning chegaralangan va ochiq bo'lishi

B) To'plamning chegaralangan va yopiq bo'lishi

C) To'plamning chegaralangan va sanoqli bo'lishi

D) To'plamning chegaralangan bo'lishi

38. $C_2[a, b]$ fazoda Koshi-Bunyakovskiy tengsizligini yozing.

A) $\left|\int_a^b x(t)\cdot y(t)dt\right| \le \int_a^b |x(t)|^2\,dt \cdot \int_a^b |y(t)|^2\,dt$

B) $\left|\int_a^b x(t)\cdot y(t)dt\right| \le \left(\int_a^b |x(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |y(t)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}},\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

C) $\left(\int_a^b |x(t)+y(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_a^b |x(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |y(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}},\ p\ge 1$

D) $\left|\int_a^b x(t)\cdot y(t)dt\right| \le \sqrt{\int_a^b |x(t)|^2\,dt} \cdot \sqrt{\int_a^b |y(t)|^2\,dt}$

39. $C[a, b]$ fazoda Minkovskiy tengsizligini toping.

A) $\left|\int_a^b x(t)\cdot y(t)dt\right| \le \int_a^b |x(t)|^2\,dt \cdot \int_a^b |y(t)|^2\,dt$

B) $\left|\int_a^b x(t)\cdot y(t)dt\right| \le \left(\int_a^b |x(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |y(t)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}},\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

C) $\left(\int_a^b |x(t)+y(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_a^b |x(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |y(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}},\ p\ge 1$

D) $\left|\int_a^b x(t)\cdot y(t)dt\right| \le \sqrt{\int_a^b |x(t)|^2\,dt} \cdot \sqrt{\int_a^b |y(t)|^2\,dt}$

40. $C[a, b]$ fazoda Gyolder tengsizligini toping.

A) $\left|\int_a^b x(t)\cdot y(t)dt\right| \le \int_a^b |x(t)|^2\,dt \cdot \int_a^b |y(t)|^2\,dt$

B) $\left|\int_a^b x(t)\cdot y(t)dt\right| \le \left(\int_a^b |x(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |y(t)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}},\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

C) $\left(\int_a^b |x(t)+y(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_a^b |x(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |y(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}},\ p\ge 1$

D) $\left|\int\limits_a^b x(t)\cdot y(t)dt\right| \leq \sqrt{\int\limits_a^b |x(t)|^2\,dt}\cdot\sqrt{\int\limits_a^b |y(t)|^2\,dt}$

41. To'la metrik fazoni ko'rsating.

A) $C[a, b]$ B) $C_1[a, b]$ C) $C_2[a, b]$ D) $C_3[a, b]$

42. Separabel metrik fazolar keltirilgan javobni toping.

A) $\mathbb{R}^n$, $C[a, b]$, ℓ_2, m B) $\mathbb{R}_1^n$, $C[a, b]$, ℓ_2, c_0

C) $\mathbb{R}_\infty^n$, $C[a, b]$, ℓ_2, m D) C^n, $\mathbb{R}_p^n$, $C_2[a, b]$, m

43. Separabel bo'lmagan metrik fazoni ko'rsating.

A) $\mathbb{R}^n$ B) $C[a, b]$ C) m D) ℓ_2

44. Birlik shar qaysi fazoda nisbiy kompakt to'plam bo'ladi?

A) $\mathbb{R}^n$ da B) $L_2[0, 1]$ da C) ℓ_2 da D) m da

45. Metrik fazoda M to'plamning nisbiy kompaktlik kriteriysini keltiring.

A) Har qanday $\varepsilon > 0$ uchun M to'plamning chekli $\varepsilon-$ to'ri mavjud bo'lishi

B) M ning chegaralangan va yopiq bo'lishi

C) M ning chegaralangan va ochiq bo'lishi

D) M ning chegaralangan va sanoqli bo'lishi

46. Ber teoremasini bayon qilishda foydalanilgan tushunchalar qaysi javobda keltirilgan?

A) To'la metrik fazo, hech yerda zich bo'lmagan to'plam, birlashma

B) Nisbiy kompakt, tekis chegaralangan, tekis darajada uzluksiz

C) To'la metrik fazo, qisuvchi akslantirish, qo'zg'almas nuqta

D) Metrik fazo, to'ldirma metrik fazo, izometriya aniqligida yagona

47. Arsela teoremasini bayon qilishda foydalanilgan tushunchalar qaysi javobda keltirilgan?

A) To'la metrik fazo, hech yerda zichmas to'plam, birlashma

B) Nisbiy kompakt, tekis chegaralangan, tekis darajada uzluksiz

C) To'la metrik fazo, qisuvchi akslantirish, yagona qo'zg'almas nuqta

D) Metrik fazo, to'ldirma metrik fazo, izometriya aniqligida yagona

48. Qisuvchi akslantirishlar prinsipi haqidagi teoremani bayon qilishda foydalanilgan tushunchalar qaysi javobda keltirilgan?

A) To'la metrik fazo, hech yerda zichmas to'plam, birlashma

B) Nisbiy kompakt, tekis chegaralangan, tekis darajada uzluksiz

C) To'la metrik fazo, qisuvchi akslantirish, yagona qo'zg'almas nuqta

D) Metrik fazo, to'ldirma metrik fazo, izometriya aniqligida yagona

49. Metrik fazolarni to'ldirish haqidagi teoremani bayon qilishda foydalanilgan tushunchalar qaysi javobda keltirilgan?

A) To'la metrik fazo, hech yerda zichmas to'plam, birlashma

B) Nisbiy kompakt, tekis chegaralangan, tekis darajada uzluksiz

C) To'la metrik fazo, qisuvchi akslantirish, yagona qo'zg'almas nuqta

D) Metrik fazo, to'ldirma metrik fazo, izometriya aniqligida yagona

50. ℓ_p, $p > 1$ fazoda nisbiy kompakt to'plam kriteriysini quyidagi tasdiqlardan qaysilarini birlashtirish bilan hosil qilish mumkin.

1) $K \subset \ell_p$ - chegaralangan to'plam;

2) ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday n_0 nomer mavjud bo'lib, barcha $n \geq n_0$ va barcha $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in K$ uchun;

3) $\sum\limits_{j=n+1}^{\infty} x_j^p < \varepsilon^p$ tengsizlikning bajarilishi;

4) $\sum\limits_{j=n+1}^{\infty} x_j^p > \varepsilon^p$ tengsizlikning bajarilishi.

A) 2 - 3 - 4 B) 1 - 2 - 3 C) 1 - 2 - 4 D) 1 - 3 - 4

II bob. Chiziqli fazolar

Bu bobda biz chiziqli fazolar, chiziqli normalangan fazolar, Evklid va Hilbert fazolarining xossalari hamda chiziqli funksionalning umumiy xossalarini o'rganamiz. Bu bob 4 (9-12) paragrafdan iborat.

9 – § da chiziqli fazo va ularga doir misollar jamlangan. Chiziqli fazo o'lchami ta'riflanib, chekli va cheksiz o'lchamli chiziqli fazolarga misollar keltirilgan. Bu yerda chiziqli fazoning qism fazosi va faktor fazosiga doir misollar ham bor.

10 – § da chiziqli normalangan fazolarga ko'plab misollar qaralgan.

11 – § Evklid va Hilbert fazolariga bag'ishlangan. Evklid fazolarining xarakteristik xossalari, Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi, Bessel tengsizligi, Parseval tengliklarini tushunishga doir misollar qaralgan. Riss-Fisher, Shmidtning ortogonallashtirish jarayonini qo'llashga doir misollar keltirilgan. Hilbert fazolarining qism fazosi, qism fazoning ortogonal to'ldiruvchisi, ortogonal qism fazolarning to'g'ri yig'indilari qaralgan. Xuddi shunday Hilbert fazolarining to'g'ri yig'indilari ham qaralgan.

12 – § da chiziqli funksionallar, ularning xossalariga doir misollar qaralgan. Qavariq to'plamlar va qavariq funksionallarning xossalarini tahlil qilishga doir misollar ham shu paragrafdan joy olgan. Chiziqli funksionalni davom ettirish haqidagi Xan-Banax teoremasining qo'llanishiga doir misollar ham shu yerda.

9-§. Chiziqli fazolar

Chiziqli fazo tushunchasi matematikada asosiy tayanch tushunchalardan hisoblanadi. Yuqoridagi kelishuvimizga ko'ra $\mathbb{C}$ kompleks sonlar, $\mathbb{R}$ esa haqiqiy sonlar to'plamini bildiradi. K orqali $\mathbb{C}$ yoki $\mathbb{R}$ ni belgilaymiz.

9.1-ta'rif. *Agar elementlari $x, y, z, \ldots$ bo'lgan L to'plamda quyidagi ikki amal aniqlangan bo'lsa:*

I. Ixtiyoriy ikkita $x, y \in L$ *elementlarga ularning yig'indisi deb ataluvchi aniq bir* $x + y \in L$ *element mos qo'yilgan bo'lib. ixtiyoriy* $x, y, z \in L$ *elementlar uchun*

1) $x + y = y + x$ *(kommutativlik),*

2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ *(assotsiativlik),*

3) L *da shunday* θ *element mavjud bo'lib,* $x + \theta = x$ *(nolning mavjudligi),*

4) *shunday* $-x \in L$ *element mavjud bo'lib,* $x + (-x) = \theta$ *(qarama-qarshi elementning mavjudligi) aksiomalar bajarilsa;*

II. ixtiyoriy $x \in L$ *element va ixtiyoriy* $\alpha \in K$ *uchun* x *elementning* α *songa ko'paytmasi deb ataluvchi aniq bir* $\alpha x \in L$ *element mos qo'yilgan bo'lib. ixtiyoriy* $x, y \in L$ *va barcha* $\alpha, \beta \in K$ *sonlar uchun*

5) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$,

6) $1 \cdot x = x$,

7) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$,

8) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ *aksiomalar bajarilsa. u holda* L *to'plam* K *maydon ustidagi chiziqli fazo deyiladi.*

Ta'rifda kiritilgan I va II amallar mos ravishda *yig'indi* va *songa ko'paytirish amallari* deyiladi. Agar L ning elementlarini haqiqiy sonlarga (kompleks sonlarga) ko'paytirish aniqlangan bo'lsa, u holda L ga *haqiqiy (kompleks) chiziqli fazo* deyiladi.

9.2-ta'rif. *Agar* L *va* L^* *chiziqli fazolar o'rtasida biyektiv moslik o'rnatish mumkin bo'lib,* $x \leftrightarrow x^*$ *va* $y \leftrightarrow y^*$ $(x, y \in L,\ x^*, y^* \in L^*)$ *ekanligidan* $x + y \leftrightarrow x^* + y^*$ *va* $\alpha x \leftrightarrow \alpha x^*$ (α *— ixtiyoriy son) ekanligi kelib chiqsa, u holda* L *va* L^* *chiziqli fazolar o'zaro izomorf fazolar deyiladi.*

L chiziqli fazo. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ uning elementlari bo'lsin.

9.3-ta'rif. *Agar* L *chiziqli fazoning* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *elementlar sistemasi uchun hech bo'lmaganda birortasi noldan farqli bo'lgan* $a_1, a_2, \ldots, a_n$

sonlar mavjud bo'lib,

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0 \tag{9.1}$$

tenglik bajarilsa, u holda $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *elementlar sistemasi chiziqli bog'langan deyiladi. Aks holda, ya'ni (9.1) tenglikdan*

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$$

ekanligi kelib chiqsa, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *elementlar sistemasi chiziqli bog'lanmagan yoki chiziqli erkli deyiladi.*

9.4-ta'rif. *Agar* $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ *cheksiz elementlar sistemasining ixtiyoriy chekli qism sistemasi chiziqli erkli bo'lsa, u holda* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *sistema chiziqli erkli deyiladi.*

9.5-ta'rif. *Agar* L *chiziqli fazoda* n *elementli chiziqli erkli sistema mavjud bo'lib, bu fazoning ixtiyoriy* $n+1$ *ta elementdan iborat sistemasi chiziqli bog'langan bo'lsa, u holda* L *ga* n *o'lchamli chiziqli fazo deyiladi va* $\dim L = n$ *kabi yoziladi.*

9.6-ta'rif. n *o'lchamli* L *chiziqli fazoning ixtiyoriy* n *ta elementdan iborat chiziqli erkli sistemasi shu fazoning bazisi deyiladi.*

9.7-ta'rif. *Agar* L *chiziqli fazoda ixtiyoriy* $n \in \mathbb{N}$ *uchun* n *elementli chiziqli erkli sistema mavjud bo'lsa, u holda* L *cheksiz o'lchamli chiziqli fazo deyiladi va* $\dim L = \infty$ *ko'rinishda yoziladi.*

Endi biz mavzuga oid misollar qaraymiz. Quyidagi 9.1-9.14-misollarda L to'plam va unda yig'indi va songa ko'paytirish amallari berilgan. Bu amallar uchun chiziqli fazoning 1-8 aksiomalari bajarilishini tekshiring.

9.1. $L = \mathbb{R}$ haqiqiy sonlar to'plami. Haqiqiy sonlar to'plamida odatdagi qo'shish va ko'paytirish amallari.

9.2. $L = \mathbb{C}$ kompleks sonlar to'plami. Kompleks sonlar to'plamida kompleks sonlarni qo'shish va ko'paytirish amallari.

9.3. $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n),\ x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \dots, n\}$ – n ta haqiqiy sonlarning tartiblangan guruhlaridan iborat to'plam. Bu yerda elementlarni qo'shish va songa ko'paytirish amallari quyidagicha aniqlanadi. Ixtiyoriy $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ va $\alpha \in \mathbb{R}$ lar uchun

$$x + y = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2,\ \dots,\ x_n + y_n)\,. \tag{9.2}$$

$$\alpha\, x = (\alpha\, x_1,\ \alpha\, x_2,\ \dots,\ \alpha\, x_n)\,. \tag{9.3}$$

9.4. $\mathbb{C}^n = \{z = (z_1, z_2, \dots, z_n),\ z_k \in \mathbb{C},\ k = 1, 2, \dots, n\}$. Bu yerda ham elementlarni qo'shish va songa ko'paytirish amallari (9.2) va (9.3) tengliklar ko'rinishida aniqlanadi.

9.5. $C[a,b]$ – $[a,b]$ kesmada aniqlangan uzluksiz funksiyalar to'plami. Funksiyalarni qo'shish va funksiyani songa ko'paytirish amallari mos ravishda

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \tag{9.4}$$

va

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x) \tag{9.5}$$

ko'rinishda aniqlanadi.

9.6. $\ell_2 = \left\{x = (x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n, \dots) : \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\right\}$ – kvadrati bilan jamlanuvchi ketma-ketliklar to'plami. Bu yerda elementlarni qo'shish va songa ko'paytirish amallari quyidagicha aniqlanadi:

$$x + y = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2,\ \dots,\ x_n + y_n, \dots)\,, \tag{9.6}$$

$$\alpha x = \alpha\,(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n, \dots)\,. \tag{9.7}$$

Yig'indi $x + y \in \ell_2$ ekanligi $|a + b|^2 \le 2\,|a|^2 + 2|b|^2$ tengsizlikdan foydalanib isbotlanadi.

9.7. $c_0 = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0\}-$ nolga yaqinlashuvchi ketma-ketliklar to'plami. Bu to'plamda ham qo'shish va songa ko'paytirish amallari (9.6) va (9.7) tengliklar ko'rinishida aniqlanadi.

9.8. $c = \left\{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) : \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n\right\}-$ barcha yaqinlashuvchi ketma-ketliklar to'plami. Bu to'plamda ham qo'shish va songa ko'paytirish amallari (9.6) va (9.7) tengliklar ko'rinishida aniqlanadi.

9.9. $m-$ barcha chegaralangan ketma-ketliklar to'plami. Bu to'plamda ham qo'shish va songa ko'paytirish amallari (9.6) va (9.7) tengliklar ko'rinishida aniqlanadi.

Endi Lebeg ma'nosida integrallanuvchi funksiyalar va o'zgarishi chegaralangan funksiyalar to'plamini qaraymiz.

9.10. Berilgan $[a, b]$ kesmada o'lchovli va Lebeg ma'nosida integrallanuvchi ekvivalent funksiyalar sinflaridan iborat to'plamni $L_1[a, b]$ bilan belgilaymiz. Bu to'plamda elementlarni qo'shish va elementni songa ko'paytirish amallari (9.4) va (9.5) tengliklar bilan aniqlanadi.

9.11. Berilgan $[a, b]$ kesmada o'lchovli va $p\,(p \geq 1)$ – darajasi Lebeg ma'nosida integrallanuvchi funksiyalar to'plami $\widetilde{L}_p[a, b]$ bilan belgilanadi. Bu to'plamda ham qo'shish va songa ko'paytirish amallari (9.4) va (9.5) tengliklar bilan aniqlanadi.

9.12. Berilgan $[a, b]$ kesmada aniqlangan va o'zgarishi chegaralangan funksiyalar to'plamini $V[a, b]$ bilan belgilaymiz. Bu to'plamda ham funksiyalarni qo'shish va songa ko'paytirish amallari (9.4) va (9.5) tengliklar bilan aniqlanadi.

9.13. n satr va m ustundan iborat matritsalar to'plamini M_{nm} bilan belgilaymiz. Bu to'plamda qo'shish va songa ko'paytirish amallari odatdagi matritsalarni qo'shish va matritsani songa ko'paytirish kabi aniqlanadi.

9.14. $\mathbb{P}_{\leq n}$– darajasi n dan oshmaydigan ko'phadlar to'plami. Ko'phadlarni qo'shish va songa ko'paytirish amallari (9.4) va (9.5) tengliklar bilan aniqlanadi.

9.3-misolning yechimi. Qo'shish va songa ko'paytirish amallari uchun chiziqli fazo aksiomalari bajarilishini tekshiramiz. Ixtiyoriy $x, y \in \mathbb{R}^n$ lar uchun $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n$ ekanligi ma'lum. Xuddi shunday ixtiyoriy $\alpha \in \mathbb{R}$ uchun $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n) \in \mathbb{R}^n$ munosabat o'rinli. Haqiqiy sonlarni qo'shish kommutativ va assotsiativ, shuning uchun quyidagi tengliklar o'rinli:

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) = (y_1 + x_1, \ldots, y_n + x_n) = y + x.$$

$$x + (y + z) = (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2), \ldots, x_n + (y_n + z_n)) =$$

$$= ((x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2, \ldots, (x_n + y_n) + z_n) = (x + y) + z.$$

$\mathbb{R}^n$ da nol element rolini $\theta = (0, 0, \ldots, 0)$ vektor bajaradi. Chunki ixtiyoriy $x \in \mathbb{R}^n$ uchun $x + \theta = (x_1 + 0, x_2 + 0, \ldots, x_n + 0) = x$ tenglik o'rinli. $x \in \mathbb{R}^n$ elementga qarama-qarshi element $-x = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$ bo'ladi, chunki

$$x + (-x) = (x_1 + (-x_1), x_2 + (-x_2), \ldots, x_n + (-x_n)) = (0, 0, \ldots, 0) = \theta.$$

Demak, 1-4 aksiomalar o'rinli. Endi songa ko'paytirish amali bilan bog'liq aksiomalarning bajarilishini tekshiramiz. Ixtiyoriy $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ lar uchun

$$\alpha(\beta x) = (\alpha(\beta x_1), \alpha(\beta x_2), \ldots, \alpha(\beta x_n)) =$$

$$= ((\alpha\beta) x_1, (\alpha\beta) x_2, \ldots, (\alpha\beta) x_n) = (\alpha\beta) x$$

tengliklar o'rinli. Xuddi shunday

$$1 \cdot x = (1 \cdot x_1, 1 \cdot x_2, \ldots, 1 \cdot x_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = x$$

tenglik o'rinli. Ixtiyoriy $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ va $x \in \mathbb{R}^n$ lar uchun

$$(\alpha+\beta)x = ((\alpha+\beta)x_1, (\alpha+\beta)x_2, \ldots, (\alpha+\beta)x_n) =$$

$$= (\alpha x_1 + \beta x_1, \alpha x_2 + \beta x_2, \ldots, \alpha x_n + \beta x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n) +$$

$$+ (\beta x_1, \beta x_2, \ldots, \beta x_n) = \alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \beta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha x + \beta x$$

tengliklar o'rinli. Ixtiyoriy $\alpha \in \mathbb{R}$ va $x, y \in \mathbb{R}^n$ lar uchun

$$\alpha(x+y) = (\alpha(x_1+y_1), \alpha(x_2+y_2), \ldots, \alpha(x_n+y_n)) =$$

$$(\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha x_2 + \alpha y_2, \ldots, \alpha x_n + \alpha y_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n) +$$

$$+ (\alpha y_1, \alpha y_2, \ldots, \alpha y_n) = \alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \alpha(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \alpha x + \alpha y$$

tengliklar bajariladi va $\mathbb{R}^n$ to'plam *haqiqiy chiziqli* fazo bo'ladi. ☐

9.15-9.32-misollarda keltirilgan to'plamlar funksiyalarni qo'shish ((9.4) ga qarang) va songa ko'paytirish ((9.5) ga qarang) amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil qiladimi? Qaysilari haqiqiy chiziqli fazo, qaysilari kompleks chiziqli fazo bo'ladi.

9.15. $[a, b]$ kesmada aniqlangan monoton funksiyalar to'plami.

9.16. $[-a, a]$ kesmada aniqlangan uzluksiz va toq funksiyalar to'plami.

9.17. $[-a, a]$ kesmada aniqlangan uzluksiz va juft funksiyalar to'plami.

9.18. $[-a, a]$ kesmada aniqlangan, uzluksiz va $x(a) = b$ shartni qanoatlantiruvchi funksiyalar to'plami, b ning qanday qiymatida chiziqli fazo bo'ladi.

9.19. $\mathbb{P}$ – barcha ko'phadlar to'plami.

9.20. $C^{(n)}[a, b]$ – $[a, b]$ kesmada aniqlangan n marta uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar to'plami.

9.21. $[a, b]$ kesmada qisman chiziqli uzluksiz funksiyalar to'plami.

9.22. $[-a, a]$ kesmada aniqlangan, uzluksiz va $\int\limits_{-a}^{a} x(t)dt = 0$ shartni qanoatlantiruvchi funksiyalar to'plami.

9.23. $AC[a, b] - [a, b]$ kesmada aniqlangan absolyut uzluksiz funksiyalar to'plami.

9.24. $V_0[a, b] - [a, b]$ kesmada o'zgarishi chegaralangan va $f(a) = 0$ shartni qanoatlantiruvchi funksiyalar to'plami.

9.25. $\mathbb{R}$ da aniqlangan uzluksiz va davriy funksiyalar to'plami.

9.26. $M(\mathbb{R}) - \mathbb{R}$ da aniqlangan chegaralangan funksiyalar to'plami.

9.27. $L[a, b] - [a, b]$ kesmada aniqlangan va Lipshits shartini qanoatlantiruvchi funksiyalar to'plami.

9.28. Birlik doira $D = \{z \in C : |z| < 1\}$ da analitik va $\overline{D}$ da uzluksiz funksiyalar to'plami.

9.29. $[-a, a]$ kesmada aniqlangan uzluksiz va $T = 2a$ davriy funksiyalar to'plami.

9.30. $\ell_2(\mathbb{Z}) - \mathbb{Z}$ da aniqlangan va $\sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} |f(n)|^2 < \infty$ shartni qanoatlantiruvchi funksiyalar to'plami.

9.31. $\ell_1(\mathbb{Z}) - \mathbb{Z}$ da aniqlangan va $\sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} |f(n)| < \infty$ shartni qanoatlantiruvchi funksiyalar to'plami.

9.32. $\widetilde{L}_2[a, b] - [a, b]$ kesmada o'lchovli va kvadrati Lebeg ma'nosida integrallanuvchi funksiyalar to'plami.

9.18-misolning yechimi. Ma'lumki, (9.4) va (9.5) tengliklar yordamida aniqlangan funksiyalarni qo'shish va songa ko'paytirish amallari chiziqli fazo ta'rifidagi 1-8 shartlarni qanoatlantiradi. Shuning uchun berilgan to'plamning bu amallarga nisbatan yopiqligini ko'rsatish kifoya. $[-a, a]$

kesmada uzluksiz funksiyalar yig'indisi yana uzluksiz funksiya bo'ladi. Endi $(x+y)(a)=b$ shartning bajarilishini tekshiramiz. Shartga ko'ra $(x+y)(a)=x(a)+y(a)=b+b=2b$ tenglik o'rinli. Yuqoridagilardan $b=2b$, ya'ni $b=0$ shartga kelamiz. Bu holda αx funksiya uchun $(\alpha x)(a)=0$ tenglik o'rinli. Demak, $[-a,\ a]$ kesmada aniqlangan, uzluksiz va $x(a)=0$ shartni qanoatlantiruvchi funksiyalar to'plami chiziqli fazo tashkil qiladi. Agar faqat haqiqiy qiymatlar qabul qiluvchi funksiyalar qaralsa, bu fazo haqiqiy chiziqli fazo bo'ladi. Agar funksiyalar kompleks qiymatlar qabul qilsa, u holda bu fazo kompleks chiziqli fazo bo'ladi. □

9.31-misolning yechimi. 9.18-misolning yechimida ta'kidlanganidek $\ell_1(\mathbb{Z})$ to'plamni qo'shish va songa ko'paytirish amallariga nisbatan yopiqligini ko'rsatish kifoya. Faraz qilaylik, f va g lar $\ell_1(\mathbb{Z})$ ning elementlari bo'lsin. $|f(n)+g(n)|\le|f(n)|+|g(n)|$ va $|\alpha f(n)|=|\alpha|\,|f(n)|$ munosabatlardan, quyidagilar kelib chiqadi:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}|f(n)+g(n)|\le\sum_{n\in\mathbb{Z}}|f(n)|+\sum_{n\in\mathbb{Z}}|g(n)|<\infty,\quad f+g\in\ell_1(\mathbb{Z}),$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\alpha f(n)|=|\alpha|\sum_{n\in\mathbb{Z}}|f(n)|<\infty,\ \ \alpha f\in\ell_1(\mathbb{Z}).$$

Demak, $\ell_1(\mathbb{Z})$ to'plam qo'shish va songa ko'paytirish amallariga nisbatan yopiq. Bu to'plam kompleks chiziqli fazo bo'ladi. □

9.33-9.41-misollarda L chiziqli fazo va unda $\{x_k\}_{k=1}^{3}$ sistema berilgan. Uni chiziqli bog'langanlikka tekshiring.

9.33. $x_1=(1,1,1),\ \ x_2=(1,1,0),\ \ x_3=(1,0,0)\in\mathbb{R}^3.$

9.34. $x_1(t)=1,\ \ x_2(t)=1+t,\ \ x_3(t)=1+t+t^2\in\mathbb{P}_{\le2}.$

9.35. $x_1(t)=1,\ \ x_2(t)=t,\ \ x_3(t)=t^2\in C[0,\ 1].$

9.36. $x_1(t)=1,\ \ x_2(t)=\cos t,\ \ x_3(t)=\cos^2 t\in C[0,\ 2\pi].$

9.37. $x_1(t)=-1,\ \ x_2(t)=\cos^2 t,\ \ x_3(t)=\sin^2 t\in C[0,\ \pi].$

9.38. $x_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{22}$.

9.39. $x_1 = (1, 1, 1, \ldots)$, $x_2 = (1, 0, 1, 0, \ldots)$, $x_3 = (0, 1, 0, 1, \ldots) \in m$.

9.40. $x_1(t) = [t]$, $x_2(t) = \{t\}$, $x_3(t) = t \in V[0, 4]$.

9.41. $\mathfrak{D}(x)$, $\mathfrak{R}(x)$, $1(x) \equiv 1 \in \widetilde{L}_2[0, 1]$, $\mathfrak{D}$ – Dirixle, $\mathfrak{R}$– Riman funksiyasi.

9.33-misolning yechimi. x_1, x_2, x_3 elementlarning chiziqli kombinatsiyasini fazoning nol elementiga tenglashtiramiz, ya'ni

$$C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3 = \theta$$

yoki

$$(C_1 \cdot 1, C_1 \cdot 1, C_1 \cdot 1) + (C_2 \cdot 1, C_2 \cdot 1, 0) + (C_3 \cdot 1, 0, 0) = (0, 0, 0).$$

Bu yerdan quyidagi tenglamalar sistemasini olamiz:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 0 \\ C_2 + C_3 = 0 \\ C_3 = 0. \end{cases}$$

Bu sistema faqat nol yechimga ega. Shuning uchun $\{x_k\}_{k=1}^{3}$ sistema chiziqli erkli. $\square$

9.42. $A \subset \mathbb{R}$ to'plamni shunday tanlangki, $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = \operatorname{sign} x$, $f_3(x) = \chi_A(x)$ elementlar $L_1[-1, 1]$ fazoda chiziqli bog'langan bo'lsin. f_1, f_2 va f_3 elementlar $V[-1, 1]$ fazoda chiziqli bog'langan bo'ladigan $A \subset (-1, 1)$ to'plam mavjudmi?

9.43. A, $B \subset \mathbb{R}$ to'plamlarni shunday tanlangki, $f_1(x) = \operatorname{sign} x$, $f_2(x) = \chi_A(x)$, $f_3(x) = \chi_B(x)$ elementlar:

a) $M[-2, 1]$ azoda chiziqli bog'langan bo'lsin.

b) $V[-2, 3]$ fazoda chiziqli bog'langan bo'lsin.

9.44-9.47-misollarda berilgan L chiziqli fazoning o'lchamini toping.

9.44. $L = \mathbb{R}^5$, $L = \mathbb{P}_{<8}$, $L = M_{33}$.

9.45. $L = \mathbb{C}^5$, $L = m$, $L = c$.

9.46. $L = C[a, b]$, $L = V[a, b]$, $L = c_0$.

9.47. $L = \widetilde{L}_1[a, b]$, $L = \widetilde{L}_2[a, b]$, $L = \ell_2$.

9.48-9.50-misollarda L va L^* fazolarning izomorfligini isbotlang.

9.48. $L = \mathbb{R}^3$, $L^* = \mathbb{P}_{<2}$.

9.49. $L = \mathbb{R}^4$, $L^* = M_{22}$.

9.50. $L^* = \mathbb{P}_{<8}$, $L^* = M_{33}$.

9.48-misolning yechimi. Biyektiv $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{P}_{<2}$ moslikni quyidagicha aniqlaymiz

$$\varphi(x) = \varphi((x_1, x_2, x_3)) = x_1 + x_2 t + x_3 t^2. \tag{9.8}$$

Agar $(x_1, x_2, x_3) \neq (y_1, y_2, y_3)$ bo'lsa, u holda $\varphi(x) = x_1 + x_2 t + x_3 t^2 = x^*(t)$ va $\varphi(y) = y_1 + y_2 t + y_3 t^2 = y^*(t)$ ko'phadlar hech bo'lmaganda bitta koeffitsiyenti bilan farq qiladi, ya'ni $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. Bu yerdan (9.8) tenglik bilan aniqlanuvchi $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{P}_{<2}$ akslantirishning inyektiv ekanligi kelib chiqadi. Ixtiyoriy $a^*(t) = a_1 + a_2 t + a_3 t^2 \in \mathbb{P}_{<2}$ kvadrat uchhad uchun $\varphi(a) = a^*(t)$, $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ tenglik o'rinli, ya'ni $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{P}_{<2}$ syuryektiv akslantirish. Demak, φ biyektiv akslantirish ekan. $\varphi(x + y) = x^*(t) + y^*(t)$ va $\varphi(\lambda x) = \lambda x^*$, $\lambda \in \mathbb{R}$ tengliklar (9.8) dan bevosita kelib chiqadi. □

Chiziqli fazoning qism fazosi va faktor fazosi. Bizga L chiziqli fazoning bo'sh bo'lmagan L' qism to'plami berilgan bo'lsin.

9.8-ta'rif. *Agar L' ning o'zi L da kiritilgan amallarga nisbatan chiziqli fazoni tashkil qilsa, u holda L' to'plam L ning qism fazosi deyiladi.*

Boshqacha qilib aytganda, agar ixtiyoriy $x, y \in L'$ va $a, b \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$ sonlar uchun $ax + by \in L'$ bo'lsa, L' *qism fazo* bo'ladi va aksincha.

Har qanday L chiziqli fazoning faqat nol elementdan iborat $\{\theta\}$ qism fazosi bor. Ikkinchi tomondan, ixtiyoriy L chiziqli fazoni o'zining qism fazosi sifatida qarash mumkin.

9.9-ta'rif. *L chiziqli fazodan farqli va hech bo'lmaganda bitta nolmas elementni saqlovchi qism fazo xos qism fazo deyiladi.*

Bizga L fazoning bo'sh bo'lmagan $\{x_i\}$ qism to'plami berilgan bo'lsin. U holda L chiziqli fazoda $\{x_i\}$ sistemani o'zida saqlovchi minimal qism fazo mavjud. Bu qism fazoni $L(\{x_i\})$ orqali belgilaymiz. Bu qism fazo $\{x_i\}$ *"sistemadan hosil bo'lgan"* qism fazo yoki $\{x_i\}$ sistemaning *chiziqli qobig'i* deyiladi.

Bizga L chiziqli fazo va uning L' xos qism fazosi berilgan bo'lsin. L ning elementlari orasida quyidagicha munosabat o'rnatish mumkin.

9.10-ta'rif. *Agar $x, y \in L$ elementlar uchun $x - y$ ayirma L' ga tegishli bo'lsa, x va y elementlar ekvivalent deyiladi.*

Fazo elementlari orasida o'rnatilgan bu munosabat refleksivlik, simmetriklik va tranzitivlik xossalariga ega. Shuning uchun bu munosabat L ni o'zaro kesishmaydigan sinflarga ajratadi va har bir sinf o'zaro ekvivalent elementlardan tashkil topgan. Bu sinflar *qo'shni sinflar* deyiladi. Barcha qo'shni sinflar to'plami L chiziqli fazoning L' qism fazo bo'yicha *faktor fazosi* deyiladi va L/L' ko'rinishda belgilanadi.

Faktor fazoda yig'indi va songa ko'paytirish amallari tabiiy ravishda kiritiladi. Aytaylik, ξ va η lar L/L' dan olingan ixtiyoriy qo'shni sinflar bo'lsin. Bu sinflarning har biridan bittadan vakil tanlaymiz, masalan $x \in \xi$, $y \in \eta$. ξ va η sinflarning yig'indisi sifatida $x + y$ elementni saqlovchi ζ sinf qabul qilinadi. ξ qo'shni sinfning α songa ko'paytmasi sifatida αx elementni saqlovchi ζ_1 sinf qabul qilinadi. Natija $x \in \xi$, $y \in \eta$ vakillarning tanlanishiga bog'liq emas, chunki, qandaydir boshqa $x' \in \xi$, $y' \in \eta$

vakillarni olsak ham $(x+y)-(x'+y')=(x-x')+(y-y')\in L'$ va $\alpha(x-x')\in L'$ bo'lgani uchun $x'+y'\in\zeta$ va $\alpha x'\in\zeta_1$ bo'ladi. Bevosita tekshirish shuni ko'rsatadiki, L/L' da aniqlangan qo'shish va songa ko'paytirish amallari chiziqli fazo ta'rifidagi aksiomalarni qanoatlantiradi. Boshqacha aytganda, L/L' faktor fazo chiziqli fazo tashkil qiladi.

9.11-ta'rif. *L/L' faktor fazoning o'lchami L' qism fazoning koo'lchami deyiladi.*

9.51. $\ell_2\subset c_0\subset c\subset m$ fazolarning har biri o'zidan keyingilari uchun xos qism fazo bo'ladi. Isbotlang.

9.52. $\mathbb{R}^n$ fazoda $V=\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n:\ x_1=x_2\}$ to'plam qism fazo tashkil qilishini isbotlang, uning o'lchamini toping.

9.53. ℓ_2 fazoda $M=\{(x_1,\ldots,x_n,\ldots)\in\ell_2:\ x_1+x_2+x_3=0\}$ to'plam qism fazo tashkil qilishini isbotlang, qism fazoning koo'lchamini toping.

9.54. $\widetilde{L}_p[a,b]$, $(p\geq 1)$ fazoning nolga ekvivalent funksiyalaridan tashkil topgan qism to'plamni $\widetilde{L}_p^{(0)}[a,b]$ ko'rinishda belgilaymiz. $\widetilde{L}_p^{(0)}[a,b]$ ni qism fazo bo'lishini isbotlang.

Isbot. Ma'lumki, nolga ekvivalent funksiyalar yig'indisi yana nolga ekvivalent bo'lgan funksiya bo'ladi. Nolga ekvivalent funksiyaning songa ko'paytmasi ham nolga ekvivalent funksiya bo'ladi. Demak, $\widetilde{L}_p^{(0)}[a,b]$ to'plam $\widetilde{L}_p[a,b]$ fazoning xos qism fazosi bo'ladi. □

9.55. Absolyut uzluksiz funksiyalar to'plami $AC[a,b]$ o'zgarishi chegaralangan funksiyalar fazosi $V[a,b]$ ning qism fazosi bo'ladi. Isbotlang.

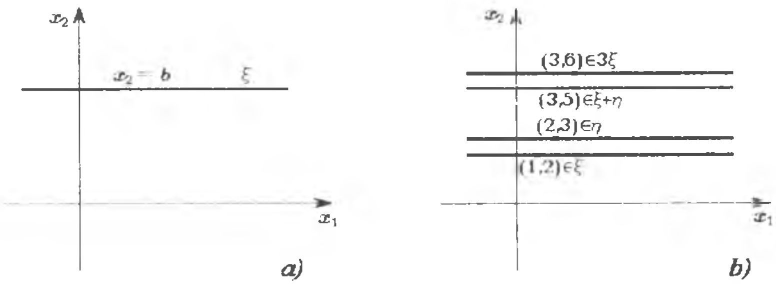
9.56. $V[a,b]$ fazoda $f(a)=0$ shartni qanoatlantiruvchi funksiyalar to'plamini $V_0[a,b]$ bilan belgilaymiz. Bu to'plam $V[a,b]$ fazoning qism fazosi bo'ladi. Isbotlang.

9.57. O'zgarishi chegaralangan funksiyalar fazosi $V[a,b]$ ni qaraymiz. Ma'lumki, $[a,b]$ kesmada monoton funksiyalar to'plami $V[a,b]$ ning qism to'plami bo'ladi. Monoton funksiyalar to'plami $V[a,b]$ ning qism fazosi bo'lmaydi. Isbotlang.

Isbot. Ikki monoton funksiyaning yig'indisi har doim monoton funksiya bo'lavermaydi. Bunga quyidagi misolda ishonch hosil qilish mumkin: $x(t) = t^2+1$, $y(t) = -2t$ funksiyalarning har biri $[0,\ 2]$ kesmada monoton funksiya bo'ladi, ammo ularning yig'indisi $x(t)+y(t) = (t-1)^2$ funksiya $[0,\ 2]$ kesmada monoton emas. Demak, $[a,b]$ kesmada monoton funksiyalar to'plami $V[a,b]$ fazoning qism fazosi bo'la olmaydi. $\square$

9.58. $L = \mathbb{R}^2$ fazoning $L' = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}$ xos qism fazo bo'yicha L/L' faktor fazoning tavsifini bering, ya'ni L/L' fazo elementlarini tavsiflang.

Yechish. Ma'lumki, $x-y = (x_1-y_1, x_2-y_2) \in L'$ bo'lishi uchun $x_2 = y_2$ bo'lishi zarur va yetarli. Demak, L/L' faktor fazoning elementlari (qo'shni sinflar) Ox_1 o'qiga parallel bo'lgan to'g'ri chiziqlardan iborat.



9.1-chizma

Masalan, $(a,\ b) \in \mathbb{R}^2$ nuqtani o'zida saqlovchi ξ qo'shni sinf Ox_1 o'qiga parallel bo'lgan $x_2 = b$ to'g'ri chiziqdan (9.1a-chizma) iborat. Xuddi shunday, $(1,\ 2)$ va $(2,\ 3)$ nuqtalarni saqlovchi qo'shni sinflar yig'indisi

(3, 5) nuqtani saqlovchi $x_2 = 5$ to'g'ri chiziqdan (9.1b-chizma) iborat. $(1,2) \in \xi$ qo'shni sinfning 3 ga ko'paytmasi (3, 6) nuqtani saqlovchi $x_2 = 6$ to'g'ri chiziqdan (9.1b-chizma) iborat. □

9.59. Ma'lumki (9.54-misolga qarang), $\widetilde{L}_p\,[a,b]$ fazoning nolga ekvivalent funksiyalaridan tashkil topgan qism fazosi $\widetilde{L}_p^0\,[a,b]$ ko'rinishda belgilanadi. Endi $\widetilde{L}_p\,[a,b]$ chiziqli fazoning $\widetilde{L}_p^0\,[a,b]$ qism fazo bo'yicha faktor fazosini qaraymiz va bu faktor fazoni $L_p[a,b]$ bilan belgilaymiz. Bu fazo $[a,b]$ kesmada aniqlangan va $p-$ darajasi bilan Lebeg ma'nosida integrallanuvchi ekvivalent funksiyalar fazosi deb ataladi. Dirixle va Riman funksiyalarini bir sinfda yotishini isbotlang.

9.60. $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ to'plamda x va y sonlar yig'indisi deganda ularning ko'paytmasini, x elementni $\lambda-$ haqiqiy songa ko'paytirish deganda x^λ ni tushunamiz. U holda $\mathbb{R}^+$ to'plam unda kiritilgan amallarga nisbatan chiziqli fazo tashkil qilishini isbotlang. Bu fazoning nol elementini toping. Bu fazoning o'lchamini toping.

9.61. $\mathfrak{A}(X)$ orqali X chiziqli fazoning barcha qism to'plamlari sistemasini belgilaymiz. Ixtiyoriy $M,\ N \in \mathfrak{A}(X)$ lar uchun

$$M + N = \{x + y:\ x \in M,\ y \in N\},\quad \lambda M = \{\lambda x:\ x \in M\}$$

kabi amallarni kiritamiz. Bu amallar chiziqli fazo aksiomalarini qanoatlantiradimi?

10-§. Chiziqli normalangan fazolar

Chiziqli fazolarda elementlarning bir-biriga yaqinligi degan tushuncha yo'q. Ko'plab amaliy masalalarni hal qilishda elementlarni qo'shish va ularni songa ko'paytirish amallaridan tashqari, elementlar orasidagi masofa, ularning yaqinligi tushunchasini kiritishga to'g'ri keladi. Bu bizni normalangan chiziqli fazo tushunchasiga olib keladi.

10.1-ta'rif. *L chiziqli fazoning har bir elementiga aniq bir sonni mos qo'yuvchi p akslantirishga funksional deyiladi.*

10.2-ta'rif. *Bizga L chiziqli fazo va unda aniqlangan p funksional berilgan bo'lsin. Agar p funksional quyidagi uchta shartni qanoatlantirsa, unga norma deyiladi:*

1) $p(x) \geq 0, \quad \forall x \in L; \quad p(x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$;

2) $p(ax) = |a|\, p(x), \quad \forall a \in \mathbb{C}, \ \forall x \in L$: *bir jinslilik aksiomasi,*

3) $p(x + y) \leq p(x) + p(y), \quad \forall x, y \in L$, *uchburchak tengsizligi.*

10.3-ta'rif. *Norma kiritilgan chiziqli fazo chiziqli normalangan fazo deyiladi va $x \in X$ elementning normasi $\|x\|$ orqali belgilanadi.*

Bitta chiziqli fazoda har xil normalar kiritish mumkin. Agar X chiziqli fazoda $p_1, p_2, \ldots, p_n$ normalar aniqlangan bo'lsa, u holda (X, p_1), $(X, p_2), \ldots, (X, p_n)$ normalangan fazolar mos ravishda $X_1, X_2, \ldots, X_n$ harflari bilan belgilanadi. Bizga X chiziqli fazo va unda $\|\bullet\|_1$ va $\|\bullet\|_2$ normalar berilgan bo'lsin.

10.4-ta'rif. *Agar shunday $C_1 > 0$ va $C_2 > 0$ sonlar mavjud bo'lib, barcha $x \in X$ lar uchun*

$$C_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2 \|x\|_1$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, $\|\bullet\|_1$ va $\|\bullet\|_2$ normalar ekvivalent deyiladi.

Har qanday normalangan fazoni metrik fazo sifatida qarash mumkin. Shuning uchun metrik fazolarda isbotlangan barcha teoremalar va tasdiqlar normalangan fazolar uchun ham o'rinli. Agar X chiziqli normalangan fazo bo'lsa, u holda $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$, $\rho(x, y) = \|x - y\|$ akslantirish metrika shartlarini qanoatlantiradi. Xuddi metrik fazolar holidagidek yaqinlashuvchi va fundamental ketma-ketlik tushunchalarini keltirish mumkin.

Bizga $x \in X$ element va $\{x_n\} \subset X$ ketma-ketlik berilgan bo'lsin.

10.5-ta'rif. *Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $n_0 = n_0(\varepsilon) > 0$*

mavjud bo'lib, barcha $n > n_0$ larda $\|x_n - x\| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik $x \in X$ elementga yaqinlashadi deyiladi.

10.6-ta'rif. *Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $n_0 = n_0(\varepsilon) > 0$ mavjud bo'lib, barcha $n > n_0$ va $p \in \mathbb{N}$ larda $\|x_{n+p} - x_n\| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ga fundamental ketma-ketlik deyiladi.*

10.7-ta'rif. *Agar X chiziqli normalangan fazodagi ixtiyoriy fundamental ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda X ga to'la normalangan fazo yoki Banax fazosi deyiladi.*

Bu ta'rifni quyidagicha ham aytish mumkin.

10.8-ta'rif. *Agar (X, ρ), $\rho(x, y) = \|x - y\|$ metrik fazo to'la bo'lsa, u holda X to'la normalangan fazo yoki Banax fazosi deyiladi.*

Xuddi metrik fazo holidagidek $B(x_0, r) = \{x \in X : \|x - x_0\| < r\}$ to'plam markazi x_0 da radiusi $r > 0$ bo'lgan *ochiq shar* deyiladi. Markazi x_0 da radiusi $r \geq 0$ bo'lgan *yopiq shar* deganda

$$B[x_0, r] = \{x \in X : \|x - x_0\| \leq r\}$$

to'plam tushuniladi. Agar X chiziqli normalangan fazodagi M to'plamni biror sharga joylashtirish mumkin bo'lsa, unga *chegaralangan to'plam* deyiladi. M to'plamning *diametri* deb $diam M = \sup\limits_{x,y \in M} \|x - y\|$ songa aytiladi. $\rho(x, M) = \inf\limits_{y \in M} \|x - y\|$ miqdorga x nuqtadan M *to'plamgacha bo'lgan masofa* deyiladi. Xuddi shunday

$$\rho(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} \|x - y\|$$

miqdorga A va B *to'plamlar orasidagi masofa* deyiladi. Normalangan fazolarda ham ochiq va yopiq to'plamlar xuddi metrik fazolardagidek ta'riflanadi. M ning barcha limitik nuqtalari to'plami M' orqali belgilanadi. Xuddi metrik fazolardagidek $M \cup M'$ to'plam M *to'plamning yopig'i* deyiladi va $[M]$ yoki $\overline{M}$ orqali belgilanadi. X chiziqli normalangan fazodagi A va B to'plamlarning *arifmetik yig'indisi* deganda $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ to'plam tushuniladi.

10.9-ta'rif. *Agar L va M lar X normalangan fazoning qism fazolari bo'lib, X ning har bir x elementi yagona usul bilan $x = u + v$, $u \in L$, $v \in M$ ko'rinishda tasvirlansa, X normalangan fazo L va M qism fazolarning to'g'ri yig'indisiga yoyilgan deyiladi va bu $X = L \oplus M$ shaklda yoziladi.*

10.1. Ushbu $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $p(x) = 2|x_1| + 3|x_2|$ funksional norma shartlarini qanoatlantiradimi?

Yechish. Bu funksional qiymatlari manfiymas va $p(x) = 0$ faqat va faqat shu holdaki, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ da, ya'ni $x = (0, 0)$ da bajariladi. Shunday qilib, normaning 1-sharti bajariladi. 2-shartning bajarilishini ko'rsatamiz:

$$p(\lambda x) = 2\,|\lambda x_1|+3\,|\lambda x_2| = 2\,|\lambda||x_1|+3\,|\lambda||x_2| = |\lambda|(2|x_1|+3|x_2|) = |\lambda|p(x).$$

Bu tenglik barcha $\lambda \in \mathbb{R}$ va $x \in \mathbb{R}^2$ lar uchun o'rinli. Endi uchinchi shartning bajarilishini ko'rsatamiz:

$$p(x+y) = 2\,|x_1 + y_1|+3\,|x_2 + y_2| \leq 2\,|x_1|+3\,|x_2|+2\,|y_1|+3\,|y_2| = p(x)+p(y).$$

Bu tenglik barcha $x, y \in \mathbb{R}^2$ lar uchun o'rinli. Demak, berilgan funksional normaning barcha shartlarini qanoatlantiradi. □

10.2-10.19-misollarda berilgan $p : X \to \mathbb{R}$ akslantirishning norma shartlarini qanoatlantirishini tekshiring.

10.2. $p(x) = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2}, \ x \in \mathbb{R}^n.$

10.3. $p_q(x) = \sqrt[q]{\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^q}, \ x \in \mathbb{R}^n, \ q \geq 1.$

10.4. $p_\infty(x) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|, \ x \in \mathbb{R}^n.$

10.5. $p_1(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|, \ x \in \mathbb{R}^n.$

10.6. $p(x) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2}, \quad x \in \mathbb{C}^n.$

10.7. $p(x) = \sqrt{\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^2}, \quad x \in \ell_2.$

10.8. $p(x) = \sqrt[q]{\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^q}, \quad x \in \ell_q, \quad q \geq 1.$

10.9. $p(f) = \max\limits_{a \leq x \leq b} |f(x)|, \quad f \in C[a, b].$

10.10. $p_1(f) = \int\limits_a^b |f(x)|\, dx, \quad f \in C[a, b].$

10.11. $p_2(f) = \sqrt{\int\limits_a^b |f(x)|^2\, dx}, \quad f \in C[a, b].$

10.12. $p_q(f) = \sqrt[q]{\int\limits_a^b |f(x)|^q\, dx}, \quad f \in C[a, b], \quad q \geq 1.$

10.13. $p(x) = \sup\limits_{1 \leq n < \infty} |x_n|, \quad x \in m.$

10.14. $p(x) = \sup\limits_{1 \leq n < \infty} |x_n|, \quad x \in c.$

10.15. $p(x) = \sup\limits_{1 \leq n < \infty} |x_n|, \quad x \in c_0.$

10.16. $p(x) = |x(a)| + V_a^b[x], \quad x \in V[a, b].$

10.17. $p(x) = |x(a)| + V_a^b[x], \quad x \in AC[a, b].$

10.18. $p : M[a, b] \to \mathbb{R}, \quad p(x) = \sup\limits_{a \leq t \leq b} |x(t)|.$

10.19. $p(x) = \max\limits_{a \leq t \leq b} |x(t)| + \sum\limits_{k=1}^{n} \max\limits_{a \leq t \leq b} |x^{(k)}(t)|, \quad x \in C^{(n)}[a, b].$

Xuddi metrik fazo holidagidek $(\mathbb{R}^n, p_q) = \mathbb{R}^n_q$, $(\mathbb{R}^n, p_\infty) = \mathbb{R}^n_\infty$, $(\mathbb{R}^n, p) = \mathbb{R}^n$, $(C[a, b], p) = C[a, b]$, $(C[a, b], p_q) = C_q[a, b]$, q belgilashlarni kiritamiz.

10.10-misolning yechimi. Ixtiyoriy uzluksiz funksiya $[a, b]$ kesmada integrallanuvchidir. Shuning uchun p_1 funksional $C[a, b]$ fazoning hamma yerida aniqlangan.

$$p_1(f) = \int_a^b |f(x)|\, dx, \quad f \in C[a, b]$$

funksional uchun norma shartlarining bajarilishini tekshiramiz. 1-shart

$$p_1(f) = \int_a^b |f(x)|\, dx \geq 0$$

ixtiyoriy $f \in C[a, b]$ uchun $|f(x)| \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$ shartdan kelib chiqadi. Agar $p_1(f) = 0$ bo'lsa, u holda f ning uzluksizligidan $|f(x)| \equiv 0$ ekanligini olamiz, ya'ni $f(x) \equiv 0$. Agar $f(x) \equiv 0$ bo'lsa, u holda $p_1(f) = 0$ ekanligi integralning ta'rifidan kelib chiqadi. 2-shart

$$p_1(\alpha f) = \int_a^b |\alpha f(x)|\, dx = |\alpha| \int_a^b |f(x)|\, dx = |\alpha|\, p_1(f)$$

tenglikdan kelib chiqadi. 3-shart

$$p_1(f+g) = \int_a^b |f(x)+g(x)|dx \leq \int_a^b |f(x)|\, dx + \int_a^b |g(x)|dx = p_1(f) + p_1(g)$$

tengsizlikdan kelib chiqadi. Demak, bu funksional uchun normaning barcha shartlari bajariladi. □

10.20. $\mathbb{R}^n$ fazoda kiritilgan p, p_q, p_∞, p_1 normalarning (10.2-10.5-misollarga qarang) istalgan ikkisi ekvivalent ekanligini isbotlang.

10.21. Chekli o'lchamli chiziqli fazodagi ixtiyoriy ikki norma ekvivalentligini isbotlang.

10.22. $C[a, b]$ fazoda kiritilgan p, p_1, p_2, p_q normalarning (10.9-10.12-misollarga qarang) istalgan ikkisi ekvivalent emasligini isbotlang.

10.23-10.28-misollarda keltirilgan akslantirishlar norma shartlarini qanoatlantiradimi?

10.23. $p : \mathbb{P}_{\leq n} \to \mathbb{R}$, $p(x) = \max\{|x_0|, |x_1|, \ldots, |x_n|\}$,

bu yerda $x(t) = x_0 + x_1 t + \cdots + x_n t^n$.

10.24. $p : C^{(1)}[a, b] \to \mathbb{R}$, $\quad p(x) = |x(b) - x(a)| + \max\limits_{a<t\leq b} |x'(t)|$.

10.25. $p : C^{(1)}[a, b] \to \mathbb{R}$. $p(x) = \max\limits_{a\leq t\leq b} |x'(t)|$.

10.26. $p : C^{(2)}[a, b] \to \mathbb{R}$. $p(x) = |\, x(a) \,| + |\, x'(a) \,| + \max\limits_{a\leq t\leq b} |\, x''(t) \,|$.

10.27. $p : C^{(2)}[a, b] \to \mathbb{R}$, $p(x) = |\, x(a) \,| + |\, x(b) \,| + \max\limits_{a\leq t\leq b} |\, x''(t) \,|$.

10.28. $p : \Phi_C(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $p(x) = \max\limits_{-\infty\leq t\leq\infty} |x(t)|$. Bu yerda $\Phi_C(\mathbb{R})-$ sonlar o'qida aniqlangan uzluksiz va finit funksiyalar to'plami.

10.24-misolning yechimi. Bu misolda berilgan funksional uchun normaning 1-sharti bajarilmaydi. Haqiqatan ham, noldan farqli $x_0(t) \equiv 1$ element uchun

$$p(x_0) = |x_0(b) - x_0(a)| + \max_{a<t\leq b} |x_0'(t)| = |1 - 1| + \max_{a<t\leq b} |0| = 0$$

tenglik o'rinli. Ya'ni $p(x) = 0$ shartdan $x(t) = 0$ shart kelib chiqmaydi. 2-shart $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ va 3-shart $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ ning bajarilishi modul hamda maksimum xossalaridan kelib chiqadi. $\square$

10.29. $C[-1, 1]$ fazoda $x_n(t) = t^n$ $(n \in \mathbb{N})$ ketma-ketlikni fundamentallikka tekshiring.

Yechish. $C[-1, 1]$ fazo to'la normalangan fazo bo'lganligi uchun $\{x_n\}$ ketma-ketlikning fundamentalligidan uning yaqinlashuvchi ekanligi kelib chiqadi. $C[-1, 1]$ fazodagi yaqinlashish tekis yaqinlashishni ifodalaganligi uchun $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti (agar u mavjud bo'lsa) ham uzluksiz bo'lishi kerak. Qaralayotgan ketma-ketlikning "limiti" uzluksiz emas. Shuning uchun qaralayotgan ketma-ketlikning fundamental emasligini ko'rsatishga harakat qilamiz. Buning uchun shunday $\varepsilon_0 > 0$ soni mavjud bo'lib, istalgan $n \in \mathbb{N}$ uchun undan katta $n_0 > n$ va shunday $p_0 \in \mathbb{N}$ sonlari mavjud bo'lib, $\|x_{n_0+p_0} - x_{n_0}\| \geq \varepsilon_0$ tengsizlik o'rinli ekanligini ko'rsatish kifoya. $\varepsilon_0 = \frac{1}{5}$ va har bir $n \in \mathbb{N}$ dan katta biror $n_0 > n$ natural son uchun $p_0 = n_0$ deb olamiz. Barcha $t \in [0, 1]$ lar uchun

$$\| x_{2n_0} - x_{n_0}\| = \max_{-1\leq t\leq 1} \left| t^{2n_0} - t^{n_0}\right| \geq t^{n_0} - t^{2n_0}$$

tengsizlikga ega bo'lamiz. Bu tengsizlikdan $t = \frac{1}{\sqrt[n_0]{2}}$ bo'lganida ushbu

$$\|x_{2n_0} - x_{n_0}\| \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} > \frac{1}{5}$$

tengsizlik kelib chiqadi. Bu esa $\{x_n\}$ ketma-ketlikning fundamental emasligini ko'rsatadi. □

10.30-10.39-misollarda keltirilgan funksiyalar ketma-ketligi $\theta(t) \equiv 0$ funksiyaga ko'rsatilgan fazoda yaqinlashuvchimi?

10.30. $x_n(t) = \dfrac{nt}{1 + n^2 + t^2}$, $C[0, 1]$.

10.31. $x_n(t) = te^{-nt}$, $C_1[0, 10]$.

10.32. $x_n(t) = \dfrac{\sin\ nt}{n}$. $C_1[-\pi, \pi]$.

10.33. $x_n(t) = t^n - t^{2n}$, $C_2[0, 1]$.

10.34. $x_n(t) = \dfrac{t^{n+1}}{n+1} - \dfrac{t^{2+n}}{2+n}$, $C[0, 1]$.

10.35. $x_n(t) = \dfrac{t}{1 + n^2t^2}$; $C_1[0, 1]$.

10.36. $x_n(t) = \sqrt[n]{t^n + \dfrac{1}{n^2}} - t$; $C_1[0, 1]$.

10.37. $x_n(t) = t^n - t^{n+1}$; $C_2[0, 1]$.

10.38. $x_n(t) = n^{-0,5}\sqrt{2nt} \cdot e^{-0,5nt}$; $C_2[0, 1]$.

10.39. $x_n(t) = 2n \cdot t \cdot e^{-nt^2}$; $C_1[0, 1]$.

10.30-misolning yechimi. Bu misollarning barchasida $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - \theta\|$ = $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$ shartni tekshirish kerak bo'ladi. Chunki $\theta(t) \equiv 0$ funksiya 10.30-10.39-misollarda keltirilgan fazolarning barchasida nol elementdir. Bu misolda berilgan $x_n(t) = \dfrac{nt}{1 + n^2 + t^2}$ elementning normasini baholaymiz

$$\|x_n\| = \max_{0\le t\le 1} \left| \frac{nt}{1 + n^2 + t^2} \right| \le \frac{n}{1 + n^2} \le \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

Demak, $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$ munosabat o'rinli, ya'ni $\{x_n\}$ nolga yaqinlashadi.

10.39-misolning yechimi. Berilgan $x_n(t) = 2n \cdot t \cdot e^{-nt^2}$ elementning normasini hisoblaymiz

$$\|x_n\| = \int_0^1 |2n \cdot t \cdot e^{-nt^2}| dt = 2n \int_0^1 t \cdot e^{-nt^2} dt = \int_0^1 e^{-nt^2} d(nt^2) =$$

$$= -e^{-nt^2}\Big|_0^1 = -e^{-n} + 1.$$

Demak, $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$ tenglik o'rinli emas, shuning uchun $\{x_n\}$ ketma-ketlik nol elementga yaqinlashmaydi. □

10.40. $x = (1, 2, 2)$ va $y = (-3, 0, 4)$ elementlarning $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^3_1$, $\mathbb{R}^3_4$, $\mathbb{R}^3_\infty$ fazolardagi normasini hisoblang.

10.41. $f(x) = \sin x$ va $g(x) = \cos x$ elementlarning $C[-\pi, \pi]$, $C_1[-\pi, \pi]$, $C_2[-\pi, \pi]$ fazolardagi normasini hisoblang.

10.42. $\varphi_n(x) = \sin nx$ va $\psi_n(x) = \cos nx$, $n \in \mathbb{N}$ elementlarning $C[-\pi, \pi]$, $C_1[-\pi, \pi]$, $L_2[-\pi, \pi]$, $M[-\pi, \pi]$, $V[-\pi, \pi]$ fazolardagi normasini hisoblang.

10.43. Agar $p_1 : X \to \mathbb{R}$ va $p_2 : X \to \mathbb{R}$ normalar bo'lsa, u holda ixtiyoriy a_1, a_2 musbat sonlar uchun $p = a_1p_1 + a_2p_2 : X \to \mathbb{R}$ ham norma shartlarini qanoatlantiradi. Isbotlang.

10.44. Agar $\|\bullet\|_1 : X \to \mathbb{R}$ va $\|\bullet\|_2 : X \to \mathbb{R}$ lar ekvivalent normalar bo'lsa, u holda $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\|_1 = 0$ tenglikdan $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\|_2 = 0$ tenglik kelib chiqadi va aksincha. Isbotlang.

10.45. Agar $p_1 : X \to \mathbb{R}$ va $p_2 : X \to \mathbb{R}$ lar ekvivalent normalar bo'lsa, u holda $\{x_n\}$ ketma-ketlikning X_1 normalangan fazoda fundamentalligidan, uning X_2 da ham fundamental ekanligi kelib chiqadi. Isbotlang.

10.46. Agar $p_1 : X \to \mathbb{R}$ va $p_2 : X \to \mathbb{R}$ lar ekvivalent normalar bo'lsa, u holda $M \subset X$ ning X_1 normalangan fazoda kompakt (nisbiy kompakt) ekanligidan, uning X_2 da ham kompakt (nisbiy kompakt) ekanligi kelib chiqadi. Isbotlang.

10.47. Ixtiyoriy x, $y \in X$ lar uchun quyidagi tengsizlikni isbotlang

$$\big|\,\|x\| - \|y\|\,\big| \leq \|x - y\|. \tag{10.1}$$

Isbot. Normaning uchburchak tengsizligiga ko'ra quyidagilar o'rinli

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\| \Rightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|,$$

$$\|y\| = \|y - x + x\| \leq \|y - x\| + \|x\| \Rightarrow \|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|.$$

Bu ikki tengsizlikdan (10.1) tengsizlik kelib chiqadi. □

10.48. X normalangan fazo va x_n, x, y_n, $y \in X$ bo'lsin. Quyidagilarni isbotlang:

a) agar $x_n \to x$ bo'lsa, u holda $\|x_n\| \to \|x\|$;

b) agar $x_n \to x$ bo'lsa, u holda $\{x_n\}$ chegaralangan ketma-ketlik;

c) agar $x_n \to x$, $\lambda_n \to \lambda$, $\lambda_n \in \mathbb{C}$ bo'lsa, u holda $\lambda_n \cdot x_n \to \lambda \cdot x$;

d) agar $x_n \to x$ va $\|x_n - y_n\| \to 0$ bo'lsa, u holda $y_n \to x$.

e) agar $x_n \to x$ bo'lsa, u holda $\|x_n - y\| \to \|x - y\|$;

f) agar $x_n \to x$, $y_n \to y$ bo'lsa, u holda $\|x_n - y_n\| \to \|x - y\|$.

Isbot. Faraz qilaylik, $x_n \to x$ bo'lsin. Modulning manfiymasligidan hamda (10.1) tengsizlikdan $0 \le |\,\|x_n\| - \|x\|\,| \le \|x_n - x\|$ kelib chiqadi. Bu tengsizlikda limitga o'tib $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$ tenglikni olamiz. Ya'ni a) tasdiq isbot bo'ldi. $\{\|x_n\|\}$ sonli ketma-ketlikning yaqinlashuvchi ekanligidan uning chegaralangan ekanligi kelib chiqadi, ya'ni $\{x_n\}$ chegaralangan ketma-ketlik ekan. b) tasdiq isbot bo'ldi. Endi c) tasdiqni isbotlaymiz. Quyidagi

$$0 \le \|\lambda_n \cdot x_n - \lambda \cdot x\| = \|\lambda_n \cdot x_n - \lambda_n \cdot x + \lambda_n \cdot x - \lambda \cdot x\| \le$$

$$\le \|\lambda_n \cdot x_n - \lambda_n \cdot x\| + \|\lambda_n \cdot x - \lambda \cdot x\| = |\lambda_n|\,\|x_n - x\| + \|x\|\,|\lambda_n - \lambda|$$

tengsizlikdan $\lambda_n \cdot x_n \to \lambda \cdot x$ ekanligi kelib chiqadi. Quyidagi

$$0 \le \|x - y_n\| = \|x - x_n + x_n - y_n\| \le \|x - x_n\| + \|x_n - y_n\|$$

tengsizlikda limitga o'tib d) tasdiqning isbotiga ega bo'lamiz. (10.1) tengsizlikka ko'ra

$$0 \le |\,\|x_n - y\| - \|x - y\|\,| \le \|x_n - y - (x - y)\| = \|x_n - x\|$$

tengsizlik o'rinli. Bu yerdan limitga o'tib e) tasdiqning isbotiga ega bo'lamiz. Oxirgi f) dasdiq ham (10.1) tengsizlik yordamida isbotlanadi. □

10.49. Har qanday normalangan fazoda ochiq shar ochiq to'plam, yopiq shar yopiq to'plam bo'lishini isbotlang.

10.50. $[B(x_0, r)] = B[x_0, r]$ tenglikni isbotlang.

10.51. Ixtiyoriy x, $y \in X$ lar uchun $\|x\| \leq \max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}$ tengsizlik o'rinli. Isbotlang.

10.52. Chegaralangan to'plamlarning birlashmasi yana chegaralangan to'plam bo'lishini isbotlang.

10.53. Chegaralangan to'plamlarning arifmetik yig'indisi yana chegaralangan to'plam bo'lishini isbotlang.

10.54. $M \subset X$ to'plam chegaralangan bo'lishi uchun $diam\, M < \infty$ tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli. Isbotlang.

10.55. $M \subset X$ chegaralangan to'plam. U holda $[M]$ ham chegaralangan to'plam, hamda $diam\, M = diam\, [M]$ tenglik o'rinli. Isbotlang.

10.56. Har qanday $M \subset X$ to'plam uchun M' yopiq to'plam bo'lishini isbotlang.

10.57. Har qanday $M \subset X$ to'plam uchun $(M')' \subset M'$ munosabatni isbotlang. $M' \backslash (M')' \neq \emptyset$ bo'lishi mumkinmi?

10.58. $[A] \subset [B]$ ekanligidan $A \subset B$ munosabat kelib chiqadimi?

10.59. $M \subset X$ yopiq to'plam bo'lsin. $\rho(x, M) = 0$ bo'lishi uchun $x \in M$ bo'lishi zarur va yetarli. Isbotlang.

10.60. $A, B \subset X$ ixtiyoriy to'plamlar bo'lsin. $\rho(A, B) = \rho(A, \overline{B}) = \rho(\overline{A}, B) = \rho(\overline{A}, \overline{B})$ tengliklarni isbotlang.

10.61. $M \subset X$ ixtiyoriy to'plam bo'lsin. M to'plamning chegarasi - ∂M shunday $x \in X$ nuqtalardan iboratki, markazi x da bo'lgan har qanday shar ham M to'plamdan, ham $X \backslash M$ dan hech bo'lmaganda bittadan elementni o'zida saqlaydi. $\partial M-$ yopiq to'plam hamda $\partial M = \partial(X \backslash M)$ tenglikni isbotlang.

10.62. Shunday $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_k^{(n)}, \ldots)$ ketma-ketlikka misol keltiringki, u:

a) m da yaqinlashuvchi, ℓ_1 da uzoqlashuvchi bo'lsin;

b) m da yaqinlashuvchi, ℓ_2 da uzoqlashuvchi bo'lsin;

c) ℓ_2 da yaqinlashuvchi, ℓ_1 da uzoqlashuvchi bo'lsin;

d) c_0 da yaqinlashuvchi, ℓ_1 da uzoqlashuvchi bo'lsin;

e) c_0 da yaqinlashuvchi, ℓ_2 da uzoqlashuvchi bo'lsin.

10.63. $x = (1, \frac{1}{\ln 2}, \frac{1}{\ln 3}, \ldots, \frac{1}{\ln n}, \ldots)$ elementning c_0 da yotishini ko'rsating va birorta ham $p \in \mathbb{N}$ da $x \notin \ell_p$ ekanligini isbotlang.

10.64. $\mathbb{P}$– barcha ko'phadlar to'plami $C[a, b]$ fazoda ochiq to'plam bo'ladimi?

10.65. $\mathbb{P}$– barcha ko'phadlar to'plami $C[a, b]$ da yopiq to'plam bo'ladimi?

10.66. Qisman chiziqli uzluksiz funksiyalar to'plami $C[a, b]$ fazoning hamma yerida zich ekanligini isbotlang.

10.67. $\mathbb{P}$– barcha ko'phadlar to'plami $C[a, b]$ fazoning hamma yerida zich ekanligini isbotlang.

10.68. ℓ_2 fazoda $\{x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2 : |x_n| < 1\}$ parallelepiped ochiq to'plam bo'lishini isbotlang.

10.69. Agar $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ tenglik faqat $y = \lambda x$, $\lambda > 0$ ko'rinishdagi elementlar uchun o'rinli bo'lsa, u holda X normalangan fazo *qat'iy normalangan* deyiladi. Quyidagilarning qaysilari qat'iy normalangan fazo bo'ladi?

a) $\mathbb{R}^2$;   b) ℓ_1;   c) ℓ_2;   d) m;   e) $C[a, b]$;   f) $C_2[a, b]$

10.70. Agar $A, B \subset X$ to'plamlardan birortasi ochiq bo'lsa, u holda $A + B$ to'plam ham ochiq bo'ladi. Isbotlang.

10.71. $A, B \subset X$ lar hamma yerda zich to'plamlar bo'lsin. $A \cap B = \emptyset$ bo'lishi mumkinmi?

10.72. $C[-1, 1]$ fazoni ikkita cheksiz o'lchamli qism fazolarning to'g'ri yig'indisi shaklida yozing.

10.73. Normalangan fazoda fundamental ketma-ketlikning chegaralangan ekanligini isbotlang.

10.74. $\{x_n\} \subset X$ fundamental ketma-ketlik va uning biror x_{n_k} qismiy ketma-ketligi yaqinlashuvchi bo'lsin. U holda x_n ketma-ketlik ham yaqinlashuvchi bo'ladi. Isbotlang.

10.75. $\{x_n\} \subset X$ va $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_{n+1} - x_n\|$ qator yaqinlashuvchi bo'lsin. U holda $\{x_n\}$ fundamental ketma-ketlik bo'ladi. Isbotlang. Teskari tasdiq o'rinlimi?

10.76. Har qanday chekli o'lchamli normalangan fazo to'ladir. Isbotlang.

11-§. Evklid va Hilbert fazolari

Chiziqli fazolarda norma kiritishning sinalgan usullaridan biri, unda skalyar ko'paytma kiritishdir. L haqiqiy chiziqli fazo bo'lsin.

11.1-ta'rif. *Agar $L \times L$ dekart ko'paytmada aniqlangan p funksional quyidagi to'rtta shartni qanoatlantirsa, unga skalyar ko'paytma deyiladi:*

1) $p(x, x) \geq 0, \quad \forall x \in L; \quad p(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta.$

2) $p(x, y) = p(y, x), \quad \forall x, y \in L,$ *simmetriklik.*

3) $p(\alpha x, y) = \alpha p(x, y), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad x, y \in L,$ *bir jinslilik.*

4) $p(x_1 + x_2, y) = p(x_1, y) + p(x_2, y), \quad \forall x_1, x_2, y \in L,$ *additivlik.*

Agar L kompleks chiziqli fazo bo'lsa, u holda 2) shart $p(x, y) = \overline{p(y, x)}$ bilan almashtiriladi va 3) tenglik barcha kompleks α da bajarilishi talab qilinadi.

11.2-ta'rif. *Skalyar ko'paytma kiritilgan chiziqli fazo Evklid fazosi deyiladi. x va y elementlarning skalyar ko'paytmasi (x, y) orqali belgilanadi.*

Evklid fazosida x elementning normasi

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} \tag{11.1}$$

formula orqali aniqlanadi. Demak, har qanday Evklid fazosini normalangan fazo sifatida qarash mumkin. Normalangan fazolarda isbotlangan barcha tasdiqlar Evklid fazosida ham o'rinli bo'ladi.

Teskari masalani qaraymiz. $E-$ normalangan fazo bo'lsin. E da aniqlangan norma qanday qo'shimcha shartlarni qanoatlantirsa, E Evklid fazosi ham bo'ladi? Boshqacha aytganda, qanday shartlarda norma orqali unga mos skalyar ko'paytma aniqlash mumkin?

11.1-teorema. *E normalangan fazo Evklid fazosi bo'lishi uchun, ixtiyoriy ikkita $f, g \in E$ elementlar uchun*

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2\,\|f\|^2 + 2\,\|g\|^2 \tag{11.2}$$

tenglikning bajarilishi zarur va yetarli.

(11.2) *parallelogramm ayniyati* deyiladi. (11.2) shart bajarilganda

$$p(x, y) = \frac{1}{4}\left(\|f + g\|^2 - \|f - g\|^2\right)$$

$p : E \times E \to \mathbb{R}$ funksional skalyar ko'paytma shartlarini qanoatlantiradi.

11.3-ta'rif. *Agar $(x, y) = 0$ bo'lsa, u holda x va y vektorlar ortogonal deyiladi va $x \perp y$ kabi belgilanadi.*

11.4-ta'rif. *Agar ixtiyoriy $\alpha \neq \beta$ da $(x_\alpha,\ x_\beta) = 0$ bo'lsa, u holda nolmas $\{x_\alpha\}$ vektorlar sistemasiga ortogonal sistema deyiladi. Agar bu holda har bir elementning normasi birga teng bo'lsa, $\{x_\alpha\}$ ortogonal normalangan sistema, qisqacha ortonormal sistema deyiladi.*

11.5-ta'rif. *Agar $\{x_\alpha\}$ sistemani o'zida saqlovchi minimal yopiq qism fazo E fazoning o'ziga teng bo'lsa, u holda $\{x_\alpha\}$ sistema to'la deyiladi.*

11.6-ta'rif. *Agar $\{x_n\}$ ortonormal sistema to'la bo'lsa, u holda bu sistema E fazodagi ortonormal bazis deyiladi.*

11.7-ta'rif. *Bizga E Evklid fazosi va $\{\phi_k\}$ ortonormal sistema berilgan bo'lsin. Agar ixtiyoriy $f \in E$ uchun*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \|f\|^2, \quad c_k = (f, \phi_k) \tag{11.3}$$

tenglik o'rinli bo'lsa, $\{\phi_k\}$ ortonormal sistema yopiq sistema deyiladi.

(11.3) tenglik *Parseval tengligi* deyiladi. $c_k = (f, \phi_k)$ sonlar $f \in E$ elementning $\{\phi_k\}$ ortonormal sistemadagi *Furye koeffitsiyentlari* deyiladi.

Ixtiyoriy $f \in E$ element uchun uning Furye koeffitsiyentlari

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|f\|^2 \tag{11.4}$$

tengsizlikni qanoatlantiradi. (11.4) tengsizlik *Bessel tengsizligi* deyiladi.

11.8-ta'rif. *E Evklid fazosi (11.1) normaga nisbatan to'la bo'lsa, u to'la Evklid fazosi deyiladi.*

11.9-ta'rif. *Cheksiz o'lchamli to'la Evklid fazosi Hilbert fazosi deyiladi.*

11.10-ta'rif. *Agar E Evklid fazosining hamma yerda zich bo'lgan sanoqli to'plam mavjud bo'lsa, E separabel Evklid fazosi deyiladi.*

11.2-teorema *(Shmidtning ortogonallashtirish jarayoni). Bizga E Evklid fazosida chiziqli bog'lanmagan*

$$f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$$

elementlar sistemasi berilgan bo'lsin. U holda E Evklid fazosida shunday

$$\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \ldots \tag{11.5}$$

ortonormal sistema mavjudki, quyidagi tasvirlar o'rinli:

$$\phi_n = a_{n1}f_1 + a_{n2}f_2 + \cdots + a_{nn}f_n, \quad a_{nn} > 0;$$

va

$$f_n = b_{n1}\phi_1 + b_{n2}\phi_2 + \cdots + b_{nn}\phi_n, \quad b_{nn} > 0.$$

11.3-teorema. *To'la separabel Evklid fazosidagi $\{\phi_n\}$ ortonorm sistema to'la bo'lishi uchun, E da $\{\phi_n\}$ sistemaning barcha elementlariga ortogonal bo'lgan nolmas elementning mavjud bo'lmasligi zarur va yetarli.*

11.1. $\mathbb{C}^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : x_k \in \mathbb{C}, k = 1, 2, \ldots, n\}$ chiziqli fazoni qaraylik.

$$p(x, y) = (x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}, \quad x, y \in \mathbb{C}^n \tag{11.6}$$

formula yordamida aniqlangan p funksional skalyar ko'paytma aksiomalarini qanoatlantirishini ko'rsating.

Yechish. $\mathbb{C}^n$ kompleks chiziqli fazo. Shuning uchun biz kompleks chiziqli fazoda berilgan skalyar ko'paytma shartlarini tekshiramiz.

1) $p(x, x) = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{x_k} = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{C}^n$

tengsizlik $|x_k| \geq 0$ ekanligidan kelib chiqadi. Endi

$$p(x, x) = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 = 0$$

bo'lsin. Qo'shiluvchilarning manfiy emasligidan har bir k uchun $|x_k|^2 = 0$, bundan $x_k = 0$, ya'ni $x = \theta$ ekanligi kelib chiqadi. Aksincha, har bir k uchun $x_k = 0$ bo'lsa, u holda $p(x, x) = 0$ bo'lishi ko'rinib turibdi.

2) $p(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k} = \sum_{k=1}^{n} \overline{\overline{x_k} y_k} = \overline{\sum_{k=1}^{n} y_k \overline{x_k}} = \overline{p(y, x)}.$

Bu tenglik ko'paytmaning qo'shmasi qo'shmalar ko'paytmasiga, yig'indining qo'shmasi esa qo'shmalar yig'indisiga tengligidan kelib chiqadi.

3) $p(x + y, z) = \sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)\overline{z_k} = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{z_k} + \sum_{k=1}^{n} y_k \overline{z_k} =$

$$= p(x, z) + p(y, z), \quad \forall x, y, z \in \mathbb{C}^n.$$

4) $p(\lambda x, y) = \sum_{k=1}^{n} \lambda x_k \overline{y_k} = \lambda \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k} = \lambda p(x, y), \quad \forall x, y \in \mathbb{C}^n, \ \lambda \in \mathbb{C}$

Bu tengliklarning bajarilishi kompleks sonlarni qo'shish va ko'paytirish xossalaridan kelib chiqadi. Demak, (11.6) tenglik yordamida aniqlangan p funksional skalyar ko'paytma aksiomalarini qanoatlantiradi va $\mathbb{C}^n$ kompleks Evklid fazosi bo'ladi. □

11.2-11.6-misollarda keltirilgan $p : E \times E \to \mathbb{R}$ funksional, haqiqiy chiziqli fazoda skalyar ko'paytma shartlarini qanoatlantiradimi?

11.2. $p\,(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k, \quad x, y \in \mathbb{R}^n$

11.3. $p\,(f, g) = \int_a^b f(t)\,g(t)\,dt, \quad f, g \in C[a, b]$.

11.4. $p\,(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k, \quad x, y \in \ell_2$.

11.5. $p\,(f, g) = \int_a^b f(t)\,g(t)\,dt, \quad f, g \in L_2[a, b]$.

11.6. $p\,(f, g) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n)\,g(n), \quad f, g \in \ell_2(\mathbb{Z})$.

Eslatma. 11.3-misolda keltirilgan $(C[a, b], p)$ Evklid fazosi $C_2[a, b]$ bilan belgilanadi.

11.7-11.10-misollarda keltirilgan $p : E \times E \to \mathbb{C}$ funksional, ko'rsatilgan kompleks chiziqli fazoda skalyar ko'paytma shartlarini qanoatlantirishini ko'rsating.

11.7. $p\,(f, g) = \int_a^b f(t)\,g(t)\,dt, \quad f, g \in C[a, b]$.

11.8. $p\,(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}, \quad x, y \in \ell_2$.

11.9. $p\,(f, g) = \int_a^b f(t)\,\overline{g(t)}\,dt, \quad f, g \in L_2[a, b]$.

11.10. $p(f,g)=\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k)\,g(k),\quad f,g\in \ell_2(\mathbb{Z})$.

11.11-11.20-misollarda keltirilgan $p: E\times E\to\mathbb{R}$ funksional, ko'rsatilgan haqiqiy chiziqli fazoda skalyar ko'paytma shartlarini qanoatlantiradimi?

11.11. $E=\mathbb{R}^2,\ p(x,y)=\sqrt{(x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2)}$.

11.12. $E=\mathbb{R}^2,\ p(x,y)=x_1y_1-x_2y_2$.

11.13. $E=\mathbb{R}^2,\ p(x,y)=x_1y_1-x_2y_1+2x_2y_2$.

11.14. $E=\mathbb{R}^3,\ p(x,y)=x_1y_1+x_2y_2-x_3y_3$.

11.15. $E=\mathbb{R}^3,\ p(x,y)=x_1y_1+x_2y_2-x_3y_3$.

11.16. $E=\ell_2,\ p(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k x_k y_k,\ \ 0<\lambda_n<1$.

11.17. $E=\ell_2,\ \ p(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{x_k y_k}{k}$.

11.18. $E=C[a,b],\ p(x,y)=\int_a^b e^t x(t)\,y(t)\,dt$.

11.19. $E=C[a,b],\ \ p(x,y)=\int_a^b x^4(t)y^4(t)dt$.

11.20. $E=C^{(1)}[a,\ b],\ p(x,y)=\int_a^b x(t)\,y(t)\,dt+\int_a^b x'(t)\,y'(t)\,dt$.

11.11-misolning yechimi. $p(x,y)=\sqrt{(x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2)},\ x,y\in\mathbb{R}^2$ funksional uchun skalyar ko'paytmaning 1-sharti bajariladi. Haqiqatan ham, ixtiyoriy nolmas $x\in\mathbb{R}^2$ da $p(x,x)=\sqrt{(x_1^2+x_2^2)(x_1^2+x_2^2)}=x_1^2+x_2^2>0$ va $p(x,x)=0\Leftrightarrow x=(0,0)$. Bu funksional uchun simmetriklik $p(x,y)=p(y,x)$ sharti o'rinli. Bu funksional uchun $p(\lambda x,y)=\lambda p(x,y)$ tenglik o'rinli emas. Masalan, $p(-2x,y)=2p(x,y)$. Oson tekshirish mumkinki, bu funksional uchun $p(x+z,y)=p(x,y)+p(z,y)$ tenglik ham o'rinli emas. $\square$

11.21. $\mathbb{R}^3$ Evklid fazosida $f_1 = (1,0,0)$, $f_2 = (1,1,0)$, $f_3 = (1,1,1)$ vektorlar sistemasiga Shmidtning ortogonallashtirish jarayonini qo'llang.

Yechish. Ma'lumki, $\mathbb{R}^n$ fazoda n ta vektordan iborat sistemaning chiziqli erkli bo'lishi uchun, bu vektorlarning koordinatalaridan tuzilgan determinantning noldan farqli bo'lishi zarur va yetarlidir. Berilgan vektorlar uchun bu determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

bo'lganligi sababli, ular chiziqli erklidir. Endi bu elementlarga Shmidtning ortogonallashtirish jarayonini qo'llaymiz. $\varphi_1 = f_1 = (1,0,0)$ deb olsak, $\|\varphi_1\| = \sqrt{1^2+0^2+0^2} = 1$ bo'ladi. φ_2 elementni $\varphi_2 = f_2 - a_{21}\,\varphi_1$ ko'rinishda olib, a_{21} koeffitsiyentni $(\varphi_2, \varphi_1) = 0$ ortogonallik shartini qanoatlantiradigan qilib tanlaymiz:

$$0 = (\varphi_2, \varphi_1) = (f_2, \varphi_1) - a_{21}(\varphi_1, \varphi_1) \quad \text{yoki } a_{21} = \frac{(f_2, \varphi_1)}{\|\varphi_1\|^2} = \frac{1}{1} = 1.$$

U holda

$$\varphi_2 = (1,1,0) - (1,0,0) = (0,1,0), \quad \|\varphi_2\| = 1.$$

bo'ladi. φ_3 vektorni quyidagi ko'rinishda izlaymiz:

$$\varphi_3 = f_3 - a_{31}\,\varphi_1 - a_{32}\,\varphi_2. \tag{11.7}$$

Bunda a_{31}, a_{32} koeffitsiyentlar, ortogonallik shartlaridan, ya'ni

$$(\varphi_3, \varphi_1) = (\varphi_3, \varphi_2) = 0 \tag{11.8}$$

shartlardan topiladi. Buning uchun (11.7) ni φ_1 va φ_2 ga skalyar ko'paytirib, (11.8) shartlardan foydalansak, a_{31}, a_{32} koeffitsiyentlarga nisbatan chiziqli tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi. Bu tenglamaning yechimi:

$$a_{31} = \frac{(f_3, \varphi_1)}{\|\varphi_1\|^2} = \frac{1\cdot 1 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1}{1} = 1, \quad a_{32} = \frac{(f_3, \varphi_2)}{\|\varphi_2\|^2} = \frac{1}{1} = 1.$$

Demak.

$$\varphi_3 = (1,1,1) - (1,0,0) - (0,1,0) = (0,0,1), \qquad \|\varphi_3\| = 1.$$

Hosil bo'lgan $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ vektorlar sistemasi ortonormaldir.

11.22-11.31-misollarda keltirilgan vektorlarning chiziqli erkliligini tekshiring, Shmidtning ortogonallashtirish jarayonini qo'llab, ortonormal sistema hosil qiling. $\mathbb{R}^n$, $\ell_2, \ell_2(\mathbb{Z})$, $C_2[a, b]$, $L_2[a, b]$ fazolardagi skalyar ko'paytmalarni 11.2-11.10-misollardan qarab oling.

11.22. $E = \mathbb{R}^3$, $x = (0, 0, 1)$, $y = (0, 1, 1)$, $z = (1, 1, 1)$.

11.23. $E = \mathbb{R}^3$, $x = (1, 1, 0)$, $y = (2, 0, -1)$, $z = (0, -1, 1)$.

11.24. $E = \mathbb{R}^3$, $x = (-1, 0, 0)$, $y = (0, -1, 1)$, $z = (2, 0, -1)$.

11.25. $E = C_2[-1, 1]$, $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = t^3$, $x_3(t) = t^6$.

11.26. $E = C_2[-1, 1]$, $x(t) = 1$, $y(t) = t$, $z(t) = t^2$.

11.27. $E = L_2[0, \pi]$, $x(t) = 1$, $y(t) = \cos t$, $z(t) = \sin t$.

11.28. $E = L_2[-1, 1]$, $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = t$, $x_3(t) = t^2 + 1$.

11.29. $E = \ell_2$, $x = (1, 0, 0, \ldots)$, $y = (1, 1, 0, 0, \ldots)$, $z = (1, 1, 1, 0, 0, \ldots)$.

11.30. $E = \ell_2$, $x = \left(0, 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots\right)$, $y = \left(1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots\right)$.

11.31. $E = \ell_2$, $x = (1, 1, 0, 0, \ldots)$, $y = (0, 0, 1, 1, 0, \ldots)$.

11.32. E Evklid fazosida ixtiyoriy x, y, z elementlar uchun Apolloniy ayniyatini isbotlang

$$\|z - x\|^2 + \|z - y\|^2 = \frac{1}{2}\|x - y\|^2 + 2\left\|z - \frac{x + y}{2}\right\|^2.$$

11.33. E Evklid fazosida ixtiyoriy x, y, z, t elementlar uchun Ptolemey tengsizligini isbotlang

$$\|x - z\| \cdot \|y - t\| \leq \|x - y\| \cdot \|z - t\| + \|y - z\| \cdot \|x - t\|.$$

11.34. E Evklid fazosida x va y elementlar ortogonal bo'lishi uchun

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\|^2$$

tenglikning bajarilishi zarur va yetarli. Isbotlang.

11.35. E haqiqiy normalangan fazo va ixtiyoriy x, y elementlar uchun parallelogramm ayniyati

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

bajarilsin. U holda

$$p : E \times E \to \mathbb{R}, \quad p(x, y) = \frac{1}{4}\left\{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right\}$$

funksional skalyar ko'paytma shartlarini qanoatlantirishini ko'rsating.

11.36. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ lar E Evklid fazosidagi ixtiyoriy ortonormal sistema bo'lsin. Bu sistemaning chiziqli erkli ekanligini isbotlang.

11.37. E haqiqiy Evklid fazosi. Ixtiyoriy x, y elementlar uchun Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi $|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ ni isbotlang.

11.38. E Evklid fazosidagi $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$ sistemaning Gram determinanti deb

$$\Gamma(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} (x_1, x_1) & (x_1, x_2) & \cdots & (x_1, x_n) \\ (x_2, x_1) & (x_2, x_2) & \cdots & (x_2, x_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (x_n, x_1) & (x_n, x_2) & \cdots & (x_n, x_n) \end{vmatrix}$$

determinant tushuniladi. $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$ elementlar sistemasining chiziqli erkli bo'lishi uchun, uning Gram determinanti noldan farqli bo'lishi zarur va yetarli. Isbotlang.

11.39. x_n va y_n lar H Hilbert fazosidagi yopiq birlik sharga tegishli va $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, y_n) = 1$ bo'lsa, u holda $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n - y_n\| = 0$ bo'ladi. Isbotlang.

11.40. $H-$ Hilbert fazosi, L uning qism fazosi bo'lsin. x element L qism fazoga orthogonal bo'lishi uchun istalgan $y \in L$ da $\|x\| \le \|x - y\|$ tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli. Isbotlang.

11.41. $C_2[-\pi, \pi]$ Evklid fazosida $\varphi_n(t) = \sin nt$, $n \in \mathbb{N}$ sistemaning ortogonal ekanligini isbotlang. $\{\varphi_n\}$ sistemadan ortonormal sistemaga o'ting.

11.42. $L_2[-\pi, \pi]$ kompleks Hilbert fazosida $\varphi_n(t) = \exp\{int\}$, $n \in \mathbb{Z}$, sistemaning ortogonal ekanligini isbotlang. $\{\varphi_n\}$ sistemadan ortonormal sistemaga o'ting.

11.43. Kompleks Hilbert fazosida quyidagi tenglikni isbotlang:

$$(x, y) = \frac{1}{4}\left\{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\,\|x + iy\|^2 - i\,\|x - iy\|^2\right\}.$$

11.44. $C_2[-\pi, \pi]$ Evklid fazosida $\varphi(t) = \cos^2 t$ elementning

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \ \varphi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nt, \quad n \in \mathbb{N}\right\}$$

ortonormal sistemadagi Furye koeffitsiyentlarini toping.

11.45. $H-$ Hilbert fazosi, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ undagi ixtiyoriy ortogonal sistema va $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ bo'lsin. Pifagor tengligini isbotlang.

$$\|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2.$$

11.46. Hilbert fazosi qat'iy normalangan fazo ekanligini isbotlang.

11.47. H Hilbert fazosidagi x_1, x_2 elementlar uchun $Re(x_1, x_2) = \|x_1\|^2 = \|x_2\|^2$ tenglik o'rinli bo'lsin. U holda $x_1 = x_2$ ekanligini isbotlang.

11.48. Har bir natural n da $M_n = \{x \in \ell_2 : x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\}$ to'plam ℓ_2 Hilbert fazosining qism fazosi bo'lishini isbotlang. M_1, M_2, M_3 qism fazolarning ortogonal to'ldiruvchilarini tavsiflang, ularning o'lchamlarini toping.

11.49. ℓ_2 Hilbert fazosida $M = \{x \in \ell_2 : x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots = 0\}$ to'plamning chiziqli ko'pxillilik ekanligini hamda ℓ_2 fazoning hamma yerida zich bo'lishini isbotlang.

11.50. $L_2^-[-1, 1] = \{f \in L_2[-1, 1] : f(-t) = -f(t)\}$ toq funksiyalar to'plami $L_2[-1, 1]$ fazoning qism fazosi bo'lishini isbotlang. Uning ortogonal to'ldiruvchisini toping. $\dim L_2^-[-1, 1]$ va $\dim (L_2^-[-1, 1])^\perp$ larni hisoblang.

11.51. $L_2^-[-1, 1]$ toq funksiyalar fazosida $\{\varphi_n(t) = \sin n\pi t\}_{n\in\mathbb{N}}$ sistemaning ortonormal bazis bo'lishini isbotlang.

11.52. $L_2^+[-\pi, \pi]$ juft funksiyalar fazosida $\left\{\varphi_n(t) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nt\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormal sistemaning to'la emasligini isbotlang.

11.53. $L_2^+[-1, 1]$ juft funksiyalar fazosida $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \varphi_n(t) = \cos n\pi t\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormal sistemaning to'laligini isbotlang.

11.54. *Lejandr ko'phadlari haqida to'rt (11.54-11.57) masala.*

$$P_0(x) = 1, \qquad P_n(x) = \frac{1}{2^n} \frac{1}{n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}, \; n \in \mathbb{N}$$

ko'phadlarga *Lejandr ko'phadlari* deyiladi. Ixtiyoriy $m < n$ uchun

$$(P_n, Q_m) = \int_{-1}^{1} P_n(x)\, Q_m(x)\, dx = 0$$

ekanligini isbotlang. Bu yerda Q_m bilan $m-$ darajali ko'phad belgilangan.

11.55. $L_2[-1, 1]$ fazoda Lejandr ko'phadlari $\{1, P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ning ortogonal sistema ekanligini isbotlang.

11.56. Lejandr ko'phadi P_n ni $P_n(x) = c_n x^n + Q_{n-1}(x)$, $n \in \mathbb{N}$ shaklda tasvirlang. c_n- koeffitsiyentni toping.

11.57. Lejandr ko'phadlari $P_n \in L_2[-1, 1]$ ning normasini hisoblang.

11.58. $L_2[-1, 1]$ fazoda $1, t, t^2, t^3, \ldots, t^n, \ldots$ ko'phadlardan ortonormal sistema hosil qiling. Hosil qilingan ortonormal sistemani Lejandr ko'phadlari bilan taqqoslang.

11.59. $L_2(\mathbb{R}, e^{-t^2}d\mu)$ bilan $\mathbb{R}$ da aniqlangan, o'lchovli va

$$\int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 e^{-t^2} dt < \infty$$

shartni qanoatlantiruvchi funksiyalardan iborat fazoni belgilaymiz. Bu fazoda x va y elementlarning skalyar ko'paytmasini

$$(x, y) = \int_{\mathbb{R}} x(t)\, y(t)\, e^{-t^2} dt$$

formula bilan aniqlaymiz. Bu fazoda $1, t, t^2, t^3, \ldots, t^n, \ldots$ chiziqli bog'lanmagan sistemadan ortonormal sistema hosil qiling. Hosil qilingan ortonormal sistema *Chebishev-Ermit ko'phadlari* deyiladi. Uning dastlabki uchta hadini toping.

11.60. $L_2(\mathbb{R}_+, e^{-t}d\mu)$ bilan $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ da aniqlangan, o'lchovli va

$$\int_0^\infty |x(t)|^2 e^{-t} dt < \infty$$

shartni qanoatlantiruvchi funksiyalardan iborat fazoni belgilaymiz. Bu fazoda x va y elementlarning skalyar ko'paytmasini

$$(x, y) = \int_0^\infty x(t)\, y(t)\, e^{-t} dt$$

formula bilan aniqlaymiz. Bu fazoda $1, t, t^2, t^3, \ldots, t^n, \ldots$ chiziqli bog'lanmagan sistemadan ortonormal sistema hosil qiling. Hosil qilingan ortonormal sistema *Chebishev-Lagger ko'phadlari* deyiladi. Uning dastlabki uchta hadini toping.

11.61. $L_{20}^{+}[-1, 1] = \{f \in L_2[-1, 1] : f(t) \equiv 0, \ t \in [0, 1]\}$ to'plam $L_2[-1, 1]$ fazoning qism fazosi bo'lishini isbotlang. Uning ortogonal to'ldiruvchisini toping.

11.62. $[0, 1]$ kesmada x_n funksional ketma-ketlikni quyidagicha aniqlaymiz: $x_0(t) = 1$ va

$$x_n(t) = (-1)^k, \ t \in \left(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right), \quad n \in \mathbb{N}; \ k = 0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1.$$

bu interval chekkalarida $x_n(t) = 0$ deymiz. Bu *Rademaxer sistemasi* deyiladi. Bu sistemaning $L_2[0, 1]$ fazoda ortonormal ekanligini isbotlang.

11.63. $x(t) = t(t-1) + 6^{-1}$ funksiyaning Rademaxer sistemasidagi barcha $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ larga ortogonal ekanligini ko'rsating. Demak, Rademaxer sistemasi to'la ortonormal sistema emas.

11.64. Agar μ_n lar $tg\mu = \mu$ tenglamaning musbat ildizlari bo'lsa, u holda $x_n(t) = \sin \mu_n t, \ n \in \mathbb{N}$ sistema $L_2[0, 1]$ da to'la ortonormal bazis bo'lishini isbotlang.

11.65. $f(x) = 1, \ g(x) = x, \ \varphi(x) = x^2$ elementlarning $L_2[-1, 1]$ fazoda $\{\varphi_n(t) = \sin n\pi t\}, \ n \in \mathbb{N}, \ \{\varphi_n^{+}(t) = \cos n\pi t\}, \ n \in \mathbb{N}, \ \{\psi_n(t) = 2^{-1/2} \exp\{in\pi t\}\}, \ n \in \mathbb{Z}$ ortonormal sistemalardagi Furye koeffitsiyentlarini toping.

11.66. $f(x) = \operatorname{sign} x, \ g(x) = [x], \ \varphi(x) = \chi_{[0,1]}(x)$ elementlarning $L_2[-1, 1]$ fazoda $\{\varphi_n^{-}(t) = \sin n\pi t\}, \ \{\varphi_n^{+}(t) = \cos n\pi t\}, \ n \in \mathbb{N},$

$$\{\psi_n(t) = 2^{-1/2} \exp\{in\pi t\}\}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

ortonormal sistemalardagi Furye koeffitsiyentlarini toping.

11.67. $f(t) = e^t$ funksiya uchun shunday n – darajali $p_n(t)$, $n = 1, 2, 3$ ko'phadlar topingki, $\|f - p_n\|$ norma $L_2[-1, 1]$ da minimal bo'lsin.

11.68. $f(t) = t^4$ funksiya uchun shunday n – darajali $p_n(t)$, $n = 1, 2, 3$ ko'phadlar topingki, $\|f - p_n\|$ norma $L_2[-1, 1]$ da minimal bo'lsin.

11.69. $\Psi[a, b]$ bilan $[a, b]$ kesmada aniqlangan va

$$\sup_S \sum_{x \in S} |f(x)|^2 < \infty$$

shartni qanoatlantiruvchi funksiyalar to'plamini belgilaymiz. Bu yerda aniq yuqori chegara $[a, b]$ da saqlanuvchi barcha chekli yoki sanoqli S to'plamlar bo'yicha olinadi. Bu to'plam funksiyalarni qo'shish va funksiyani songa ko'paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil qiladi. $\Psi[a, b] \times \Psi[a, b]$ da aniqlangan

$$p(f, g) = \sum_{x \subset [a, b]} f(x)\overline{g(x)}\, dx, \quad f, g \in \Psi[a, b]$$

funksional skalyar ko'paytma shartlarini qanoatlantiradi. Hosil bo'lgan Evklid fazosi to'la, ammo separabel emasligini isbotlang.

11.70. $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ da aniqlangan va kvadrati integrallanuvchi bo'lgan ekvivalent funksiyalar sinflaridan tashkil topgan vektor fazoni qaraymiz. Bu fazoda

$$p(f, g) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\overline{g(t)}\, dt$$

funksionalning skalyar ko'paytma shartlarini qanoatlantirishini tekshiring. Hosil bo'lgan Hilbert fazosi $L_2(\mathbb{R}^n)$ bilan belgilanadi. $f(x) = (1 + x^2)^{-1}$ va $g(x) = \chi_{[-1, 1]}(x)$ larni $L_2(\mathbb{R})$ ga qarashli ekanligini ko'rsating. Bu elementlarning skalyar ko'paytmasini toping. Ular ortogonalmi?

11.71. $f(x,y) = \exp\{-|x| - |y|\}$ va $g(x) = \chi_{[-1,1]\times[0,1]}(x)$ larni $L_2(\mathbb{R}^2)$ ga qarashli ekanligini ko'rsating. Bu elementlarning normalarini va ularning skalyar ko'paytmasini toping.

11.72. $\ell_2(\mathbb{Z})$ Hilbert fazosida $f(0) = 0$, $f(n) = n^{-1}$, $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ elementning normasini hisoblang.

11.73. Parametr α va β larning qanday qiymatlarida $f(n,m) = (0.1 + n^{\alpha} + m^{\beta})^{-1}$ funksiya $\ell_2(\mathbb{Z}^2)$ Hilbert fazosining elementi bo'ladi.

11.74. Agar H Hilbert fazosida $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormal bazis bo'lsa, u holda quyidagilarni isbotlang:

a) istalgan $x \in H$ uchun $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(x, \varphi_n)\,\varphi_n$ tenglik o'rinli.

b) ixtiyoriy $x, y \in H$ lar uchun $(x, y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(x, \varphi_n)(\varphi_n, y)$ tenglik o'rinli.

11.75. E Evklid fazosi, $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ esa E dagi ixtiyoriy ortonormal sistema. $\{\varphi_n\}$ ketma-ketlik nolga kuchsiz yaqinlashadi. Isbotlang.

12-§. Chiziqli funksionallar

Bu paragrafda biz chiziqli funksionallar, qavariq funksionallar hamda qavariq jismlarga doir masalalar qaraymiz.

12.1-ta'rif. *X chiziqli fazoda aniqlangan f sonli funksiyaga funksional deyiladi. Agar barcha $x, y \in X$ lar uchun*

$$f\,(x + y) = f\,(x) + f\,(y)$$

bo'lsa, f additiv funksional deyiladi. Agar barcha $x \in X$ va barcha $\alpha \in \mathbb{C}$ lar uchun $f\,(\alpha\, x) = \alpha\, f\,(x)$ bo'lsa, f bir jinsli funksional deyiladi.

Agar barcha $x \in X$ va barcha $\alpha \in \mathbb{C}$ lar uchun $f(\alpha\, x) = \overline{\alpha}\, f\,(x)$ bo'lsa, f ga qo'shma bir jinsli funksional deyiladi.

12.2-ta'rif. *Additiv va bir jinsli funksional chiziqli funksional deyiladi. Additiv va qo'shma bir jinsli funksionalga qo'shma chiziqli funksional deyiladi.*

12.3-ta'rif. $Ker\, f = \{x \in X : \ f(x) = 0\}$ *to'plam* f *chiziqli funksionalning yadrosi deyiladi.*

X haqiqiy chiziqli fazo. x va y uning ikki nuqtasi bo'lsin. U holda

$$\alpha x + \beta y, \qquad \alpha, \beta \in [0, \ 1], \ \ \alpha + \beta = 1$$

shartni qanoatlantiruvchi barcha elementlar to'plami x va y *nuqtalarni tutashtiruvchi kesma* deyiladi va u $[x, y]$ bilan belgilanadi, ya'ni

$$[x, y] = \{\alpha x + \beta y : \qquad \alpha, \beta \in [0, \ 1], \ \ \alpha + \beta = 1\}.$$

12.4-ta'rif. *Agar* $M \subset X$ *to'plam o'zining ixtiyoriy* $x, y \in M$ *nuqtalarini tutashtiruvchi* $[x, y]$ *kesmani ham o'zida saqlasa,* M *ga qavariq to'plam deyiladi.*

12.5-ta'rif. *Agar biror* $x \in M$ *nuqta va ixtiyoriy* $y \in X$ *uchun shunday* $\varepsilon = \varepsilon(y) > 0$ *son mavjud bo'lib, barcha* t, $|t| < \varepsilon$ *larda* $x + t\,y \in M$ *munosabat bajarilsa,* $x \in M$ *nuqta* M *to'plamning yadrosiga qarashli deyiladi.*

$M \subset X$ to'plamning yadrosi $- J(M)$ bilan belgilanadi, ya'ni

$$J(M) = \{x \in M : \forall y \in X, \ \exists \varepsilon = \varepsilon(y) > 0, \ \forall t \in \mathbb{R}, \ |t| < \varepsilon, \ x + t\,y \in M\}.$$

Agar X chiziqli normalangan fazo bo'lsa, u holda $M \subset X$ ning yadrosi M ning ichi bilan ustma-ust tushadi, ya'ni $J(M) = \overset{\circ}{M}$.

12.6-ta'rif. *Yadrosi bo'sh bo'lmagan qavariq to'plam qavariq jism deyiladi.*

12.7-ta'rif. X *chiziqli fazoda aniqlangan manfiymas* p *funksional*

1) $p(x + y) \leq p(x) + p(y), \ \ \forall x, y \in X,$

2) $p(a x) = a\, p(x), \ \ \forall a \geq 0$ *va* $\forall x \in X$ *shartlarni qanoatlantirsa,* p *ga qavariq funksional deyiladi.*

Biz bu yerda $p(x)$ miqdorni chekli deb faraz qilmaymiz, ya'ni ayrim $x \in X$ lar uchun $p(x) = \infty$ ham bo'lishi mumkin. Agar barcha $x \in X$ lar uchun $p(x)$ chekli bo'lsa, p *chekli qavariq funksional* deyiladi.

12.8-ta'rif. *$L-$ haqiqiy chiziqli fazo va L_0- uning biror qism fazosi bo'lsin. L_0 qism fazoda f_0 chiziqli funksional va L fazoda f chiziqli funksional berilgan bo'lsin. Agar ixtiyoriy $x \in L_0$ uchun $f(x) = f_0(x)$ tenglik bajarilsa, f chiziqli funksional f_0 funksionalning L fazoga davomi deyiladi.*

12.1-teorema *(Xan-Banax). Aytaylik, p — L haqiqiy chiziqli fazoda aniqlangan qavariq funksional va L_0 esa L ning qism fazosi bo'lsin. Agar L_0 da aniqlangan f_0 chiziqli funksional*

$$f_0(x) \leq p(x), \quad x \in L_0 \tag{12.1}$$

shartni qanoatlantirsa, u holda f_0 ni L da aniqlangan va L da (12.1) shartni qanoatlantiruvchi f chiziqli funksionalgacha davom ettirish mumkin.

12.9-ta'rif. *X chiziqli normalangan fazoda aniqlangan f funksional berilgan bo'lsin. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ mavjud bo'lib, $\|x - x_0\| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $x \in X$ lar uchun $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, f funksional $x = x_0$ nuqtada uzluksiz deyiladi. Agar f funksional ixtiyoriy $x \in X$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, f uzluksiz funksional deyiladi.*

12.9-ta'rifga teng kuchli bo'lgan quyidagi ta'rifni keltiramiz.

12.10-ta'rif. *Agar x_0 nuqtaga yaqinlashuvchi ixtiyoriy x_n ketma-ketlik uchun $\lim\limits_{n\to\infty} |f(x_n) - f(x_0)| = 0$ bo'lsa, u holda f funksional x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.*

12.2-teorema. *X chiziqli normalangan fazoda aniqlangan chiziqli funksional biror $x_0 \in X$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda bu chiziqli funksional butun X fazoda uzluksiz bo'ladi.*

Endi chegaralangan funksional ta'rifini keltiramiz.

12.11-ta'rif. *Agar biror $M > 0$ soni va barcha $x \in X$ lar uchun $|f(x)| \leq M\|x\|$ tengsizlik bajarilsa, $f : X \to \mathbb{R}$ ga chegaralangan funksional deyiladi.*

12.3-teorema. *X chiziqli normalangan fazoda aniqlangan chiziqli f funksional uzluksiz bo'lishi uchun uning chegaralangan bo'lishi zarur va yetarli.*

$|f(x)| \leq M\|x\|$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi M sonlar to'plamining aniq quyi chegarasi f *funksionalning normasi* deyiladi va u $\|f\|$ bilan belgilanadi. Shunday qilib,

$$|f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\|.$$

12.4-teorema. *Chiziqli chegaralangan funksionalning normasi $\|f\|$ uchun quyidagi tenglik o'rinli:*

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \tag{12.2}$$

12.5-teorema *(Xan-Banax). L kompleks chiziqli normalangan fazo, L_0 esa L ning qism fazosi va $f_0 : L_0 \to \mathbb{C}$ chiziqli uzluksiz funksional bo'lsin. U holda f_0 ni normasini saqlagan holda L da aniqlangan f chiziqli funksionalgacha davom ettirish mumkin, ya'ni $f(x) = f_0(x)$, $x \in L_0$ va $\|f\| = \|f_0\|$ shartlarni qanoatlantiruvchi $f : L \to \mathbb{C}$ chiziqli funksional mavjud.*

X chiziqli normalangan fazoda aniqlangan chiziqli uzluksiz (chegaralangan) funksionallar to'plamini $L(X, \mathbb{C})$ bilan belgilaymiz.

12.12-ta'rif. *$f : X \to \mathbb{C}$ va $g : X \to \mathbb{C}$ chiziqli funksionallarning yig'indisi deb, $x \in X$ elementga $f(x)+g(x) = \varphi(x)$ sonni mos qo'yuvchi $\varphi = f + g : X \to \mathbb{C}$ funksionalga aytiladi.*

Ravshanki, $\varphi : X \to \mathbb{C}$ chiziqli funksional bo'ladi. Agar $f, g \in L(X, \mathbb{C})$ bo'lsa, u holda φ ham chegaralangan (uzluksiz) funksional bo'ladi va quyidagi tengsizlik o'rinli

$$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

12.13-ta'rif. $f : X \to \mathbb{C}$ *chiziqli funksionalning songa ko'paytmasi* x *elementga* $\alpha f(x)$ *sonni mos qo'yuvchi funksional sifatida aniqlanadi, ya'ni*

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x).$$

$L(X, \mathbb{C})$ to'plamda kiritilgan qo'shish va songa ko'paytirish amallari chiziqli fazo ta'rifidagi 1-8 shartlarni qanoatlantiradi. Demak, $L(X, \mathbb{C})$ to'plam chiziqli fazo bo'ladi. Bu fazoda $p(f) = \|f\|$ funksional norma shartlarini qanoatlantiradi. Shunday qilib, $L(X, \mathbb{C})$ chiziqli normalangan fazo bo'ladi. Bu fazo X ga *qo'shma fazo* deyiladi va X^* bilan belgilanadi, ya'ni $X^* = L(X, \mathbb{C})$. Funksional fazolarda chiziqli uzluksiz funksionallarning umumiy ko'rinishidan foydalanib, asosiy funksional fazolarga qo'shma fazolarni izomorfizm aniqligida topish mumkin. Hozir biz $C[a, b]$ va ℓ_p, $p > 1$ fazo hamda Evklid (chekli va cheksiz o'lchamli) fazolarda chiziqli uzluksiz funksionalning umumiy ko'rinishini keltiramiz.

12.7-teorema (Riss). *$C[a, b]$ fazoda berilgan ixtiyoriy f chiziqli uzluksiz funksional uchun shunday $u \in V_0[a, b]$ o'zgarishi chegaralangan funksiya mavjudki, barcha $x \in C[a, b]$ larda*

$$f(x) = \int_a^b x(t)du(t)$$

tenglik o'rinli. Bundan tashqari $\|f\| = V_a^b[u]$ tenglik ham o'rinli.

12.8-teorema. *ℓ_p, $p > 1$ fazoga qo'shma $(\ell_p)^*$ fazo ℓ_q, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ fazoga izomorfdir, ya'ni har bir $f : \ell_p \to C$ chiziqli uzluksiz funksional uchun shunday $\widetilde{f} = (\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2, \ldots, \widetilde{f}_n, \ldots) \in \ell_q$ element mavjudki, quyidagilar o'rinli:*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{f}_n x_n, \quad x \in \ell_p, \quad \|f\| = \left\|\widetilde{f}\right\|.$$

12.9-teorema *(Riss). Har bir $f \in H^*$ funksional uchun shunday yagona $y \in H$ element mavjudki, quyidagilar o'rinli:*

$$f(x) = (x, y), \quad x \in H, \qquad \|f\| = \|y\|.$$

Bu yerda H Hilbert fazosi (x, y) esa x va y larning skalyar ko'paytmasi.

12.14-ta'rif. *Agar $f : H \times H \to \mathbb{C}$ akslantirish uchun*

1) $f(\alpha x + \beta y, z) = \alpha f(x, z) + \beta f(y, z)$;

2) $f(x, \alpha y + \beta z) = \overline{\alpha} f(x, y) + \overline{\beta} f(x, z)$;

3) *shunday $C > 0$ mavjud bo'lib, barcha $x, y \in H$ larda $|f(x, y)| \leq C \|x\| \cdot \|y\|$ bo'lsa, f ga bichiziqli uzluksiz funksional deyiladi.*

12.15-ta'rif. *Agar $f : H \times H \to \mathbb{C}$ bichiziqli uzluksiz funksional uchun barcha $x, y \in H$ larda $f(x, y) = \overline{f(y, x)}$ bo'lsa, f ga simmetrik bichiziqli funksional deyiladi.*

Har bir bichiziqli $f(x, y)$ funksional $\varphi(x) = f(x, x)$ kvadratik formani hosil qiladi.

12.16-ta'rif. *Agar simmetrik bichiziqli f funksional uchun barcha $x \neq 0$ larda $f(x, x) > 0$ bo'lsa, f ga qat'iy musbat bichiziqli funksional deyiladi. Agar barcha $x \in H$ larda $f(x, x) \geq 0$ bo'lsa, f ga musbat bichiziqli funksional deyiladi.*

Bichiziqli uzluksiz f funksionalning normasi $\|f\|$ quyidagi tenglik yordamida aniqlanadi

$$\|f\| = \sup \{ |f(x, y)| : \ \|x\| = \|y\| = 1 \}.$$

Bizga $f \in L(X, \mathbb{C})$ va $f_n \in L(X, \mathbb{C})$ funksionallar ketma-ketligi berilgan bo'lsin.

12.17-ta'rif. *Agar $\lim\limits_{n \to \infty} \|f_n - f\| = 0$ bo'lsa, $\{f_n\}$ funksionallar ketma-ketligi f funksionalga yaqinlashadi deyiladi.*

12.18-ta'rif. *Agar har bir $x \in X$ uchun $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ bo'lsa, $\{f_n\}$ funksionallar ketma-ketligi f funksionalga kuchsiz yaqinlashadi deyiladi.*

12.1-12.10-misollarda keltirilgan funksionallarning qaysilari chiziqli, qaysilari qo'shma chiziqli, qaysilari uzluksiz. Tekshiring.

12.1. $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\ \ f(x)=a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3.$

12.2. $f:C[0,1]\to\mathbb{C},\quad f(x)=\int\limits_0^1 x(t)\,dt.$

12.3. $f:C[0,\pi]\to\mathbb{C},\quad f(x)=\int\limits_0^\pi (1-\cos t)\overline{x(t)}\,dt.$

12.4. $f:C[0,1]\to\mathbb{C},\quad f(x)=x(0).$

12.5. $f:C[0,1]\to\mathbb{C},\quad f(x)=\int\limits_0^1 t^2\overline{x(t)}\,dt.$

12.6. $f:C^{(1)}[0,1]\to\mathbb{C},\quad f(x)=x'\left(\frac{1}{2}\right).$

12.7. $f:L_1[0,1]\to\mathbb{C},\quad f(x)=\int\limits_0^1 \overline{e^t x(t)}\,dt.$

12.8. $f:L_2[0,1]\to\mathbb{C},\quad f(x)=x(0)+\int\limits_0^1 x(t)\,dt.$

12.9. $f:L_2[0,\pi]\to\mathbb{C},\quad f(x)=\int\limits_0^\pi \cos\ t\,\overline{x(t)}\,dt.$

12.10. $f:L_2[0,\pi]\to\mathbb{C},\quad f(x)=\int\limits_0^\pi \sin\ t\,x(t)\,dt.$

12.2-misolning yechimi. Integralning additivlik va bir jinslilik xossalaridan foydalansak quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$f(x+y)=\int_0^1 (x(t)+y(t))\,dt=\int_0^1 x(t)\,dt+\int_0^1 y(t)\,dt=f(x)+f(y),$$

$$f(\alpha x)=\int_0^1 (\alpha x(t))\,dt=\alpha\int_0^1 x(t)\,dt=\alpha f(x).$$

Demak, $f : C[0, 1] \to \mathbb{C}$ chiziqli funksional ekan. Uni uzluksizlikka tekshiramiz:

$$|f(x)| = \left|\int_0^1 x(t)\,dt\right| \le \int_0^1 |x(t)|\,dt \le \max_{0\le t\le 1} |x(t)| \cdot \int_0^1 dt = 1 \cdot \|x\|.$$

12.11-ta'rifga ko'ra $f : C[0, 1] \to \mathbb{C}$ chegaralangan funksional bo'ladi 12.3-teoremaga ko'ra f uzluksiz bo'ladi. □

12.9-misolning yechimi. Integralning asosiy xossalaridan foydalansak, quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$f(x+y) = \int_0^\pi \cos t\,\overline{(x(t)+y(t))}\,dt = \int_0^\pi \cos t\,\overline{x(t)}\,dt + \int_0^\pi \cos t\,\overline{y(t)}\,dt =$$

$$= f(x) + f(y),$$

$$f(\alpha x) = \int_0^\pi \cos t\,\overline{(\alpha x(t))}\,dt = \overline{\alpha}\int_0^\pi \cos t\,\overline{x(t)}\,dt = \overline{\alpha}\, f(x).$$

Demak, $f : L_2[0, \pi] \to \mathbb{C}$ qo'shma chiziqli funksional ekan. Uning uzluksizligini 12.10-ta'rif yordamida tekshiramiz. Faraz qilaylik, $x_0 \in L_2[0, \pi]$ ixtiyoriy tayinlangan nuqta va $\{x_n\} \subset L_2[0, \pi]$ esa x_0 ga yaqinlashuvchi ixtiyoriy ketma-ketlik bo'lsin. U holda Koshi-Bunyakovskiy tengsizligiga ko'ra

$$|f(x_0) - f(x_n)|^2 = \left|\int_0^\pi \cos t\,\overline{(x_0(t) - x_n(t))}\,dt\right|^2 \le$$

$$\le \int_0^\pi \cos^2 t\,dt \int_0^\pi |x_0(t) - x_n(t)|^2\,dt = \frac{\pi}{2}\cdot \|x_0 - x_n\|^2$$

tengsizlik o'rinli. Bu yerdan $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ tenglik kelib chiqadi. Demak, $f : L_2[0, \pi] \to \mathbb{C}$ uzluksiz funksional bo'ladi. □

12.11-12.20-misollarda keltirilgan funksionallarni chiziqli chegaralanganlikka tekshiring, chegaralangan bo'lsa, uning normasini toping.

12.11. $f : C[-1, 1] \to \mathbb{C}$, $f(x) = \frac{1}{3}[x(-1) + x(1)]$.

12.12. $f : C[-1, 1] \to \mathbb{C}$, $f(x) = 2[x(1) - x(0)]$.

12.13. $f : C[-1, 1] \to \mathbb{C}, \ f(x) = \dfrac{1}{2\varepsilon}(x(\varepsilon) + x(-\varepsilon) - 2x(0)), \ \varepsilon \in (0, 1]$.

12.14. $f : L_2[0, 1] \to \mathbb{C}, \quad f(x) = \int\limits_0^1 t^{-1/3} x(t)\, dt$.

12.15. $f : L_2[-1, 1] \to \mathbb{C}, \quad f(x) = \int\limits_{-1}^0 t^{1/3} x(t)\, dt + \int\limits_0^1 t^{-1/3} x(t)\, dt$.

12.16. $f : L_2[0, 1] \to \mathbb{C}, \quad f(x) = \int\limits_0^1 \mathrm{sign}(t - 1/3)\, x(t)\, dt$.

12.17. $f : \ell_1 \to \mathbb{C}, \ f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$.

12.18. $f : \ell_2 \to \mathbb{C}, \ f(x) = x_1 + x_3 + x_5 + x_7$.

12.19. $f : \ell_2 \to \mathbb{C}, \ f(x) = x_2 + x_4 + x_6 + \cdots + x_{200}$.

12.20. $f : \ell_{3/2} \to \mathbb{C}, \ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x_n}{\sqrt[3]{3^n}}$.

12.12-misolning yechimi. Berilgan $f(x) = 2[x(1) - x(0)], \ x \in C[-1, 1]$ funksionalning chiziqli ekanligi oson tekshiriladi. Uning chegaralangan ekanligini ko'rsatib normasini topamiz.

$$|f(x)| = |2\,x(1) - 2\,x(0)| \le 2|x(1)| + 2|x(0)| \le (2+2) \max_{0 \le t \le 1} |x(t)| = 4 \cdot \|x\|.$$

12.11-ta'rifga ko'ra $f : C[-1, 1] \to \mathbb{C}$ chegaralangan funksional bo'ladi va uning normasi uchun $\|f\| \le 4$ tengsizlik o'rinli. $x_0(t) = \cos \pi t, \ x_0 \in C[-1, 1]$ element uchun quyidagilar o'rinli:

$$x_0(0) = 1, \quad x_0(1) = -1, \quad \|x_0\| = 1, \quad |f(x_0)| = 4.$$

Endi (12.2) ga ko'ra, $\|f\| \ge |f(x_0)| = 4$ o'rinli. $\|f\| \le 4$ va $\|f\| \ge 4$ tengsizliklardan $\|f\| = 4$ kelib chiqadi. □

12.16-misolning yechimi. Berilgan funksionalni quyidagicha yozish mumkin:

$$f(x) = (x, y), \quad y(t) = \mathrm{sign}(t - 1/3), \ y \in L_2[0, 1].$$

Demak, 12.9-teoremaga ko'ra $f : L_2[0, 1] \to \mathbb{C}$. chiziqli uzluksiz funksional bo'ladi. Yana 12.9-teoremaga ko'ra uning normasi

$$\|f\| = \|y\| = \sqrt{\int_0^1 |y(t)|^2 dt} = \sqrt{\int_0^1 |\text{sign}(t - 1/3)|^2 dt} = 1.$$

12.21-12.30-misollarda keltirilgan funksionallarning qaysilari qavariq, qaysilari chekli qavariq, qaysilari uzluksiz. Tekshiring.

12.21. $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}|x_k|, \quad x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_2.$

12.22. $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|, \quad x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_1.$

12.23. $f(x) = |x_1 + x_2 + \cdots + x_{49}|, \quad x = (x_1, x_2, \ldots) \in m.$

12.24. $f(x) = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^{1-k} |x_k|^2}, \quad x = (x_1, x_2, \ldots) \in c_0.$

12.25. $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} |x_n|, \quad x = (x_1, x_2, \ldots) \in c.$

12.26. $f(x) = V_0^1[x], \quad x \in C[0, 1].$

12.27. $f(x) = \max\limits_{0 \le t \le 1} x(t), \quad x \in C[0, 1].$

12.28. $f(x) = |\int\limits_0^1 x(t)\, dt|, \quad x \in C[0, 1].$

12.29. $f(x) = 2|\int\limits_0^1 tx(t^2)\, dt|, \quad x \in C[0, 1].$

12.30. $f(x) = V_0^1[x], \quad x \in V[0, 1].$

12.26-misolning yechimi. Shuni ta'kidlaymizki, shunday $x_0 \in C[0, 1]$ funksiyalar mavjudki, ularning $[0, 1]$ kesmadagi to'la o'zgarishi ∞ ga teng. Masalan, $x_0(0) = 0, \quad x_0(t) = t \cdot \sin \pi t^{-1}, \quad t \in (0, 1]$ uzluksiz funksiya uchun $V_0^1[x_0] = \infty$. Shuning uchun $f(x) = V_0^1[x]$, $x \in C[0, 1]$ chekli funksional emas. Funksiya to'la o'zgarishining xossalariga ko'ra

$$f(x + y) = V_0^1[x + y] \le V_0^1[x] + V_0^1[y] = f(x) + f(y).$$

$$f(a x) = V_0^1[a x] = a V_0^1[x] = a f(x)$$

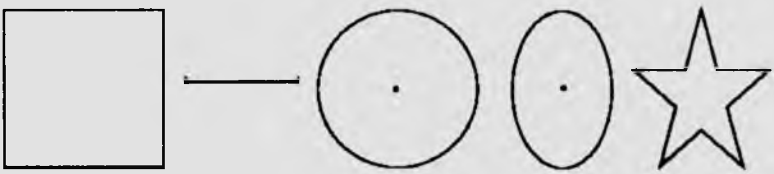
munosabatlar barcha $x, y \in C[0, 1]$ va $a \ge 0$ lar uchun o'rinli. 12.7-ta'rifga ko'ra, $f : C[0, 1] \to \mathbb{C}$ chekli bo'lmagan qavariq funksional bo'ladi. Bu funksionalni $\theta \in C[0, 1]$, $\theta(t) \equiv 0$ nuqtada uzluksiz emasligini ko'rsatamiz. Nolga yaqinlashuvchi $\{x_n\} \subset C[0, 1]$ ketma-ketlikni quyidagicha tanlaymiz:

$$x_n(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, n^{-1}] \\ a_n^{-1} x_0(t), & t \in (n^{-1}, 1]. \end{cases}$$

Bu yerda $a_n = V_{n^{-1}}^1[x_0]$, $x_0(t) = t \sin \pi t^{-1}$, $t \in (0, 1]$. Yuqorida ta'kidlanganidek, $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \infty$. x_n elementning $C[0, 1]$ fazodagi normasi a_n^{-1} ga teng. Shuning uchun $\lim\limits_{n \to \infty} \|x_n\| = 0$. Ammo $|f(x_n) - f(\theta)| = |f(x_n)| \ge 1$, ya'ni $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik $f(\theta) = 0$ ga yaqinlashmaydi. □

12.31. Tekislikda berilgan quyidagi to'plamlarning qaysilari qavariq to'plam, qaysilari qavariq jism (12.1-chizmaga qarang) bo'ladi.

a) kvadrat, b) kesma, c) doira, d) ellips, e) besh yulduz.



12.1-chizma

12.32. $A, B \subset X$ ixtiyoriy qavariq to'plamlar. $A \cup B$, $A \cap B$, $A + B$ to'plamlardan qaysilari qavariq to'plam bo'ladi?

12.33. Normalangan fazoda qavariq to'plamning yopig'i qavariq bo'ladimi?

12.34. Quyida berilgan to'plamlarning qaysilari qavariq to'plam, qaysilari qavariq jism bo'ladi. Agar M qavariq jism bo'lsa, uning yadrosini toping.

a) $M = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \ x_3 \geq 0\}$ birinchi oktant.

b) $M = \{x \in C[-1, \ 1] : \ x(t) \leq 0, \ \ \forall t \in [-1, \ 1]\}$.

c) $M = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$, X – normalangan fazodagi birlik shar.

d) $M = \{x \in \ell_2 : \ |x_n| \leq 2^{-n}\}$. ℓ_2 – dagi asosiy parallelepiped.

Yechish. Biz faqat a) qismini tekshirish bilan cheklanamiz. Faraz qilaylik, x va y lar M ning ixtiyoriy ikki nuqtasi bo'lsin. U holda barcha

$$\alpha, \ \beta \geq 0, \quad \alpha + \beta = 1 \tag{12.3}$$

lar uchun $\alpha x + \beta y \in M$ munosabat o'rinli. Chunki, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$, $y_3 \geq 0$ va (12.3) shartlardan $\alpha x_1 + \beta y_1 \geq 0$, $\alpha x_2 + \beta y_2 \geq 0$, $\alpha x_3 + \beta y_3 \geq 0$ shartlar kelib chiqadi. Ya'ni $[x, y]$ kesma M ga qarashli. 12.4-ta'rifga ko'ra M qavariq to'plam bo'ladi. Bu to'plam qavariq jism ham bo'ladi. Uning yadrosi $J(M) = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 > 0, \ x_2 > 0, \ x_3 > 0\}$ dir.

12.35. Agar $p : L \to \mathbb{R}_+$ chekli qavariq funksional bo'lsa, u holda

$$M = \{\, x \in L \, : \, p\,(x) \leq 1 \,\}$$

to'plam qavariq jism bo'ladi va uning yadrosi nol elementni saqlaydi. Isbotlang.

12.36. $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$, $p(x) = 2\,|x_1| + 3\,|x_2|$ chekli qavariq funksional uchun

$$M = \{\, x \in \mathbb{R}^2 \, : \, p\,(x) \leq 1 \,\}$$

to'plamni tekislikda chizing. M to'plamning yadrosi toping.

12.37. *Minkovskiy funksionali haqidagi masala.* $M \subset L$ qavariq jismning yadrosi nol elementni saqlasin. U holda har bir $x \in L$ ga

$$p_M(x) = \inf\left\{r > 0: \ \frac{x}{r} \in M\right\}$$

sonni mos qo'yuvchi $p_M : L \to \mathbb{R}$ akslantirish qavariq funksional bo'lishini isbotlang. Bu funksional M qavariq jism uchun *Minkovskiy funksionali* deyiladi.

12.38. $\mathbb{R}^2$ fazoda $M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x_1 < 2, \ \ -2 \le x_2 < 1\}$ to'plamning qavariq jism ekanligini isbotlang. Uning yadrosi nolni saqlashini ko'rsating. Unga mos Minkovskiy funksionalini toping.

12.39. $C_1[0, \ 1]$ fazoning hamma yerida aniqlangan chiziqli, ammo uzluksiz bo'lmagan funksionalga misol keltiring.

12.40. $C^{(1)}[0, \ 1]-$ $[0, 1]$ kesmada aniqlangan uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar fazosi. $L = \{x \in C^{(1)}[0, \ 1] : \ x(0) = x(1) = 0\}$ uning qism fazosi va $u, \ v, \ w \in C[0, \ 1]$ bo'lsin. Quyidagi f va g funksionallar uchun a), b) va c) tasdiqlarni isbotlang.

$$f(x) = \int_0^1 u(t)\, x'(t)\, dt, \quad g(x) = \int_0^1 [v(t) x(t) + w(t) x'(t)]\, dt.$$

a) f va g lar $C^{(1)}[0, \ 1]$ fazoda chiziqli uzluksiz.

b) agar $\forall\, x \in L$ uchun $f(x) = 0$ bo'lsa, $u(t) \equiv const$ bo'ladi.

c) agar barcha $x \in L$ lar uchun $g(x) = 0$ bo'lsa, $w \in C^{(1)}[0, \ 1]$ va $w'(t) = v(t)$ bo'ladi.

12.41. $L = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\}$ to'plam $\mathbb{R}^n$ fazoning qism fazosi bo'ladi. Qism fazoning koo'lchamini toping. Shunday $f \in (\mathbb{R}^n)^*$ topingki, $L = Ker\, f$ bo'lsin.

2.42. $L = \left\{ x \in C[-1, 1] : \int\limits_{-1}^{0} x(t)dt = \int\limits_{0}^{1} x(t)dt \right\}$ to'plam $C[-1, 1]$ fazoning qism fazosi bo'lishini isbotlang. Shunday $f \in C^*[-1, 1]$ topingki, $L = Ker\, f$ bo'lsin.

2.43. Agar $\dim X = n$ bo'lsa, u holda $\dim X^* = n$ bo'lishini isbotlang.

2.44. Agar $\dim X = \infty$ bo'lsa, u holda $\dim X^* = \infty$ bo'lishini isbotlang.

2.45. $f : C[-1, 1] \to C$, $f(x) = x(0)$ chiziqli uzluksiz funksionalni

$$f(x) = \int_{-1}^{1} x(t)\, dg(t)$$

shaklda tasvirlang, ya'ni $g \in V_0[-1, 1]$ funksiyani toping.

2.46. $f : C[-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x(-1) + x(1)}{2} + \int\limits_{1}^{1} tx(t)\, dt$ chiziqli uzluksiz funksionalni

$$f(x) = \int_{-1}^{1} x(t)\, dg(t)$$

shaklda tasvirlang, ya'ni $g \in V_0[-1, 1]$ funksiyani toping.

2.47. $\mathbb{R}^2$ fazoning $L = \{x \in \mathbb{R}^2 : 2x_1 - x_2 = 0\}$ qism fazosida $f(x) = x_1$ chiziqli uzluksiz funksional berilgan. Bu funksionalni normasini saqlagan holda davom ettiring. Bu davom yagonami?

2.48. $C[0, 1]$ fazoning $L = \{\lambda \cdot t\}$ qism fazosida f chiziqli uzluksiz funksionalning $x(t) = \lambda \cdot t$ nuqtadagi qiymatini $f(x) = \lambda$ deb aniqlaymiz. Bu funksionalni normasini saqlagan holda davom ettiring. Bu davom yagonami?

2.49. H Hilbert fazosi, $y \in H$ biror element bo'lsin. $f_y(x) = (x, y)$, $x \in H$ funksionalning chiziqli uzluksiz ekanligini isbotlang. Bu yerda $(x, y) - H$ dagi skalyar ko'paytma.

12.50. $f_y : H \to \mathbb{C}$, $f_y(x) = (y, x)$ funksionalning qo'shma chiziqli ekanligini isbotlang. Uning normasini toping.

12.51. $f : H \times H \to \mathbb{C}$, $f(x, y) = (x, y)$ akslantirishning bichiziqli uzluksiz funksional ekanligini isbotlang.

12.52. 12.51-misoldagi f akslantirishning simmetrik bichiziqli funksional ekanligini isbotlang. Uning normasini toping.

12.53-12.55-misollarda keltirilgan funksionallar ketma-ketligini nolga kuchsiz ma'noda yaqinlashishga tekshiring.

12.53. $f_n : L_2[-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$, $f_n(x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos nt\, x(t)\, dt$.

12.54. $f_n : L_2[-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$, $f_n(x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin nt\, x(t)\, dt$.

12.55. $f_n : L_2[0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $f_n(x) = \int\limits_{0}^{2\pi} \exp\{-int\}\, x(t)\, dt$.

12.56-12.58-misollarda keltirilgan funksionallar ketma-ketligini yaqinlashish xarakterini (kuchli, kuchsiz) aniqlang. Limitik funksionalni toping.

12.56. $f_n : L_2[-1, 1] \to \mathbb{C}$, $f_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \int\limits_{-1}^{1} \frac{t^k}{k!}\, x(t)\, dt$.

12.57. $f_n : L_2[-1, 1] \to \mathbb{C}$, $f_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \int\limits_{-1}^{1} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!}\, x(t)\, dt$.

12.58. $f_n : L_2[-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$, $f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (-1)^{k+1} \frac{2}{k} \sin kt\, x(t)\, dt$.

12.59-12.63 misollarda keltirilgan chiziqli normalangan fazolarga qo'shma fazolarni toping.

12.59. $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n_\infty$, $\mathbb{R}^n_p$, $p > 1$ fazolarga qo'shma fazolarni toping.

0. $\mathbb{R}_1^n$ fazoga qo'shma fazoni toping.

1. ℓ_2, ℓ_p, $p > 1$, c, c_0, m, fazolarga qo'shma fazolarni toping.

2. $L_2[a, b]$, $L_p[a, b]$, $p > 1$ fazolarga qo'shma fazolarni toping.

3. $C[a, b]$ fazoga qo'shma fazoni toping.

II bobni takrorlash uchun test savollari

1. Darajasi 100 dan oshmaydigan ko'phadlar fazosining o'lchamini toping.

   A) 100 B) 101 C) 50 D) 200

2. Uch satr va uch ustundan iborat matritsalar fazosining o'lchamini toping.

   A) 3 B) 6 C) 9 D) 27

3. Chekli o'lchamli chiziqli fazolar ko'rsatilgan javobni toping.

   A) $C[a, b]$, ℓ_2 B) $C_2[a, b]$, c_0 C) $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{R}^3$ D) $\mathbb{C}^n$, $L_2[a, b]$

4. Cheksiz o'lchamli chiziqli fazolar ko'rsatilgan javobni toping.

   A) $\mathbb{C}^n$, $C[a, b]$, ℓ_2 B) $C[a, b]$, ℓ_2, c_0

   C) $\mathbb{C}^n$, c, m D) $\mathbb{C}^n$, $L_2[a, b]$, ℓ_p

5. $C[0, 1]$ fazoda chiziqli bog'langan vektorlar sistemasini toping.

   A) $1, t, t^2$ B) t^2, t^3, t^5

   C) $1 + t^2, 2t, (1 - t)^2$ D) $1, t^2, t^4$

6. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x) = x_1$ chiziqli funksionalning yadrosini toping.

   A) $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2 = 0\}$ B) $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 0\}$

   C) $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_2 = 0\}$ D) $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\}$

7. $L' = \{x \in \mathbb{R}^5 : x_1 = x_5 = 0\}$ qism fazoning koo'lchamini toping.

   A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

8. Faktor fazoda elementning normasi qanday aniqlanadi?

A) $\|\xi\| = \sup\limits_{x\in\xi} \|x\|$ B) $\|\xi\| = \inf\limits_{x\in\xi} \|x\|$

C) $\|\xi\| = \|x\|$ D) $\|\xi\| = \sup\limits_{y\in L'} \|x - y\|$

9. $C[0, 1]$ fazoda aniqlangan chiziqli bo'lmagan funksionalni toping.

A) $f(x) = \int\limits_0^1 x(t)dt$ B) $f(x) = \int\limits_0^1 x(t)\, e^t\, dt$

C) $f(x) = x(0) + x(1)$ D) $f(x) = |x(0)|$

10. $C[a, b]$ fazoda aniqlangan qavariq funksionalni toping.

A) $f(x) = \int\limits_a^b x(t)dt$ B) $f(x) = \int\limits_a^b x(t)\, e^t\, dt$

C) $f(x) = x(a) + x(b)$ D) $f(x) = \left|\int\limits_a^b x(t)\, dt\right|$

11. Tekislikda qavariq bo'lmagan to'plamni toping.

A) uchburchak B) kvadrat C) trapetsiya D) besh yulduz

12. Tekislikda keltirilgan quyidagi to'plamlardan qaysi biri qavariq to'plam bo'ladi, ammo qavariq jism bo'lmaydi.

A) uchburchak B) kvadrat C) doira D) kesma

13. Quyidagi to'plamlardan qaysi biri $C[a, b]$ fazoning qism fazosi bo'ladi?

A) Monoton o'suvchi funksiyalar B) Manfiymas funksiyalar

C) Monoton kamayuvchi funksiyalar D) Barcha ko'phadlar

14. Noto'g'ri tasdiqni toping.

A) ℓ_1 fazo ℓ_2 fazoning qism fazosi bo'ladi.

B) c_0 fazo c fazoning qism fazosi bo'ladi.

C) ℓ_2 fazo c_0 fazoning qism fazosi bo'ladi.

D) m fazo c fazoning qism fazosi bo'ladi.

15. To'la bo'lmagan normalangan fazoni toping.

A) $C_1[a, b]$ B) ℓ_2 C) $\mathbb{R}^n$ D) $C[a, b]$

16. E normalangan fazo. Noto'g'ri tasdiqni toping.

A) E dagi ixtiyoriy chegaralangan ketma-ketlik yaqinlashuvchidir

B) Agar $x_n \to x$, $y_n \to y$ bo'lsa, u holda $x_n + y_n \to x + y$

C) $x, y \in E$ uchun $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$ tengsizlik o'rinli

D) $x_n \to x$ va $\lambda_n \to \lambda$ bo'lsa, u holda $\lambda_n x_n \to \lambda x$

17. Quyidagi ketma-ketliklardan qaysilari $C_1[0, 1]$ fazoda nol funksiyaga yaqinlashadi.

1) $x_n(t) = \dfrac{t}{1 + n^2t^2}$, 2) $x_n(t) = te^{-n}$, 3) $x_n(t) = t^n$.

A) 1, 2 B) 1, 2, 3 C) 1, 3 D) 2, 3

18. Quyidagi ketma-ketliklardan qaysilari $C[0, 1]$ fazoda fundamental?

1) $x_n(t) = \dfrac{nt}{1 + n^2t^2}$, 2) $x_n(t) = te^{-n}$, 3) $x_n(t) = t^n$

A) 1, 2 B) 1, 2, 3 C) 1, 3 D) 2

19. Quyidagi to'plamlardan qaysi biri $C[-1, 1]$ fazoda qism fazo tashkil qilmaydi?

A) Barcha ko'phadlar to'plami

B) $x(-1) = 0$ shartni qanoatlantiruvchi funksiyalar to'plami

C) Monoton funksiyalar to'plami

D) Uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar to'plami

20. Quyidagi to'plamlardan qaysi biri $C[-1, 1]$ fazoda qism fazo tashkil qilmaydi?

A) Darajasi 100 dan oshmaydigan ko'phadlar to'plami

B) $x(1) = 1$ shartni qanoatlantiruvchi funksiyalar to'plami

C) Toq funksiyalar to'plami

D) Juft funksiyalar to'plami

21. Quyidagi to'plamlardan qaysi biri $C[-1, 1]$ fazoda qism fazo tashkil qiladi?

A) Monoton o'suvchi funksiyalar

B) Monoton kamayuvchi funksiyalar

C) Darajasi 2 bo'lgan ko'phadlar

D) $\{x \in C[-1, 1] : \int\limits_{-1}^{1} x(t)dt = 0\}$ shartni qanoatlantiruvchi funksiyalar

22. Noto'g'ri tasdiqni toping.

A) Chiziqli bog'lanmagan sistemaning biror qism sistemasi chiziqli bo'glangan bo'ladi

B) Chiziqli bog'lanmagan sistemaning ixtiyoriy qism sistemasi ham chiziqli bo'glanmagan bo'ladi

C) Agar sistemaning biror qism sistemasi chiziqli bog'langan bo'lsa, berilgan sistema ham chiziqli bo'g'langan bo'ladi

D) Agar $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vektorlar sistemasi chiziqli bog'langan bo'lsa, bu vektorlardan biri qolganlarining chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'ladi

23. E – chiziqli fazo, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$ bo'lsin. Chiziqli bog'lanmagan vektorlar sistemasining ta'rifini ko'rsating.

A) $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$

B) $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_1 = 1, \ \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$

C) $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \ \alpha_3 = \ldots = \alpha_n = 0$

D) $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 0$

24. $f_0 : V_0[a, b] \to \mathbb{R}, \quad f_0(x) = x(b)$ funksionalning davomini toping.

A) $f(x) = x(a) - 2x(b), \ x \in V[a, b]$

B) $f(x) = x(a) + x(b), \ x \in V[a, b]$

C) $f(x) = x(a) + 2x(b), \ x \in V[a, b]$

D) $f(x) = x(a) - x(b), \ x \in V[a, b]$

25. Noto'g'ri tasdiqni toping.

A) $n-$ o'lchamli chiziqli fazoda ixtiyoriy n ta chiziqli bog'lanmagan vektorlardan iborat sistema bazis bo'ladi

B) $\{e_k = (\underbrace{0, 0, \ldots, 1}_{k}, 0, \ldots, 0)\}_{k=1}^{n}$ vektorlar sistemasi $\mathbb{R}^n$ fazoda bazis bo'ladi

C) $n-$ o'lchamli chiziqli fazoda ixtiyoriy n ta vektordan iborat sistema bazis bo'ladi

D) $\mathbb{R}^3$ fazoda ixtiyoriy to'rtta vektor chiziqli bog'langandir.

26. Chiziqli bog'langan sistemani toping.

A) $x(t) = \sin^2 2t, \ \ y(t) = \cos^2 2t, \ \ z(t) = 1 \in C[0, \pi]$

B) $x = (0, 1), \ \ y = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$

C) $x = (1, 1, 1), \ \ y = (0, 1, 1), \ \ z = (0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$

D) $x(t) = 1, \ \ y(t) = t \in C[0, 1]$

27. Chiziqli bog'lanmagan sistemani toping.

A) $x(t) = t, \ \ y(t) = 2 - 3t, \ \ z(t) = 1 \in C[0, 1]$

B) $x = (0, 1), \ \ y = (2, 1), \ \ z = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$

C) $x = (0, 1, 1), \ \ y = (1, 0, 0), \ \ z = (0, 0, 2) \in \mathbb{R}^3$

D) $x(t) = \sin^2 2t, \ \ y(t) = \cos^2 2t, \ \ z(t) = \cos 4t \in C[0, \pi]$

28. Quyidagi formulalar yordamida berilgan funksionallardan qaysi biri ko'rsatilgan fazoda skalyar ko'paytma aniqlaydi?

A) $(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^2 y_k, \ x, y \in \ell_2$

B) $(x, y) = x_1 y_2 + x_2 y_1, \ x, y \in \mathbb{R}^2$

C) $(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k, \ x, y \in \mathbb{C}^n$

D) $(x, y) = \int\limits_a^b x(t)\overline{y(t)}dt, \ x, y \in C[a, b]$

29. Qanday fazo Banax fazosi deyiladi?

A) Skalyar ko'paytma kiritilgan chiziqli fazo

B) Har qanday normalangan fazo

C) To'la normalangan fazo

D) Istalgan metrik fazo.

30. Qanday fazo Evklid fazosi deyiladi?

A) Skalyar ko'paytma kiritilgan chiziqli fazo

B) Har qanday normalangan fazo

C) To'la normalangan fazo

D) Istalgan metrik fazo

31. Evklid fazolari keltirilgan javobni toping.

A) $\mathbb{R}^n,\ C[a, b],\ \ell_2$ B) $\mathbb{R}^n,\ C_2[a, b],\ \ell_2$

C) $\mathbb{C}^n,\ C_2[a, b],\ \ell_1$ D) $\mathbb{C}^n,\ C_2[a, b],\ \ell_p$

32. Hilbert fazolari keltirilgan javobni toping.

A) $C_2[a, b],\ \ell_2$ B) $L_2[a, b],\ \ell_2$ C) $\mathbb{C}^n,\ C_2[a, b]$ D) $\mathbb{C}^n,\ \ell_2$

33. $L_2[a, b]$ kompleks Hilbert fazosidagi skalyar ko'paytmani ko'rsating.

A) $(x, y) = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}\, e^{it} dt$ B) $(x, y) = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}\, dt$

C) $(x, y) = \int_a^b |x(t)\, y(t)|\ dt$ D) $(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n\, y_n$

34. $C_2[a, b]$ haqiqiy Evklid fazosidagi skalyar ko'paytmani ko'rsating.

A) $(x, y) = \int_a^b x(t) y(t)\, e^{it} dt$ B) $(x, y) = \int_a^b x(t)\, y(t) dt$

C) $(x, y) = \int_a^b |x(t)\, y(t)|\ dt$ D) $(x, y) = x(a)y(a) + x(b)y(b)$

35. Haqiqiy Evklid fazosida nolga teng bo'lmagan x va y vektorlar orasidagi φ burchakning kosinusi qanday formula bilan aniqlanadi?

A) $\cos\varphi = \dfrac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}$ B) $\cos\varphi = \dfrac{(x, x) - (y, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}$

C) $\cos\varphi = \dfrac{\|x\| + \|y\|}{\|x\| \cdot \|y\|}$ D) $\cos\varphi = \dfrac{\|x + y\|}{\|x\| \cdot \|y\|}$

36. Evklid fazosida Koshi-Bunyakovskiy tengsizligini toping.

A) $|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ B) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

C) $\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2$ D) $\|x + y\| + \|x - y\| \leq 2(\|x\| + \|y\|)$

37. Normalangan fazo Evklid fazosi bo'lishi uchun quyidagi shartlardan qaysi birining bajarilishi zarur va yetarli?

A) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ B) $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

C) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ D) $\|x + y\| + \|x - y\| \leq 2(\|x\| + \|y\|)$

38. To'la bo'lmagan separabel Evklid fazosini toping.

A) $\mathbb{R}^n$ B) $C_2[a, b]$ C) $\mathbb{C}^n$ D) ℓ_2

39. E Evklid fazosidagi $\{x_n\}$ sistema uchun quyidagi shartlarning qaysi biri bajarilganda u E da ortonormal bazis deyiladi?

A) Agar $(x_n, x_m) = \begin{cases} 1, & agar\ n = m \\ 0, & agar\ n \neq m \end{cases}$ bo'lsa.

B) Agar $\{x_n\}$ ortonormal sistema bo'lib, u E da to'la bo'lsa.

C) Agar $\{x_n\}$ sistemani saqlovchi minimal yopiq qism fazo E ning xos qismi bo'lsa.

D) $\{x_n\}$ sistema chiziqli bog'lanmagan bo'lib, $\|x_n\| = 1$ bo'lsa.

40. Noto'g'ri tasdiqni toping.

A) Har qanday Evklid fazosida sanoqli ortonormal bazis mavjud.

B) Evklid fazosida yig'indi amali uzluksizdir.

C) Evklid fazosida skalyar ko'paytma amali uzluksizdir.

D) Evklid fazosida songa ko'paytirish amali uzluksizdir.

41. E to'la haqiqiy Evklid fazosi, $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ undagi ortonormal sistema va $f \in E$, $c_k = (f, \varphi_k)$ bo'lsin. Quyidagi shartlarning qaysi biri bajarilganda berilgan sistema yopiq deyiladi?

A) $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leq \|f\|^2, \ \forall f \in E$ B) $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2, \ \forall f \in E$

C) $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \geq \|f\|^2, \ \forall f \in E$ D) $\left\| f - \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$

42. Quyidagi tasdiqlarning qaysi biri to‘g‘ri?

A) Separabel Evklid fazosida har qanday to‘la ortonormal sistema yopiq va aksincha.

B) Separabel Evklid fazosida har qanday ortonormal sistema to‘ladir.

C) Separabel Evklid fazosida har qanday ortonormal sistema yopiqdir.

D) To‘la Evklid fazosida har qanday ortonormal sistema yopiqdir.

43. $C_2[-1, 1]$ Evklid fazosida $f(x) = 1$ funksiyaning $\{\varphi_n(t) = \sin n\pi t\}_{n=1}^{\infty}$ ortonormal sistemadagi Furye koeffitsiyentlarini toping.

A) $c_n = 0, \ n \in \mathbb{N}$ B) $c_n = n^{-1}, \ n \in \mathbb{N}$

C) $c_n = (-1)^n/n, \ n \in \mathbb{N}$ D) $c_n = n^{-2}, \ n \in \mathbb{N}$

44. $L_2[-\pi, \pi]$ kompleks Evklid fazosida to‘la ortonormal sistemani toping.

A) $\left\{(2\pi)^{-1/2}\exp\{int\}\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ B) $\{\pi^{-1/2}\cos nt\}_{n=1}^{\infty}$

C) $\{\pi^{-1/2}\sin nt\}_{n=1}^{\infty}$ D) $\{t^n\}_{n=1}^{\infty}$

45. Quyidagi tasdiqlardan qaysi biri o‘rinli?

A) Har qanday ikki separabel Hilbert fazolari o‘zaro izomorfdir

B) Har qanday ikki Evklid fazolari o‘zaro izomorfdir

C) Har qanday ikki Hilbert fazolari o‘zaro izomorfdir

D) Har qanday ikki separabel Evklid fazolari o‘zaro izomorfdir

46. Quyidagilar ichidan skalyar ko‘paytma shartlarini ajrating.

1) $(x+z, y) = (x, y) + (z, y)$, 2) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$,

3) $(x, z) \leq (x, y) + (y, z)$, 4) $(x, y) = (y, x)$

5) $(x, x) \geq 0, \quad (x, x) = 0 \iff x = 0$

A) 1, 3, 4, 5 B) 1, 2, 4, 5 C) 1, 3, 5 D) 2, 3, 4, 5

47. Qaysi javobda Evklid fazosidagi norma to‘g‘ri keltirilgan.

A) $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ B) $\|x + y\| = |(x, y)|$

C) $\|x\| = (x, x)$ D) $\|x - y\| = |(x - y)|$

48. Quyidagilardan qaysilari $C[a, b]$ kompleks chiziqli fazoda skalyar ko'paytma aniqlaydi?

1) $(x, y) = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}\, dt$,

2) $(x, y) = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}\, e^t\, dt$,

3) $(x, y) = \int_a^b x(t)\, y(t)\, dt$

A) 1, 3 B) 2, 3 C) 1, 2 D) 1, 2, 3

49. Evklid fazosida noldan farqli x va y elementlar qanday shartda ortogonal elementlar deyiladi?

A) $(x, y) = 0$ B) $(x, x) = (y, y) = 1$

C) $\|x - y\| = 0$ D) $(x, y) = \sqrt{(x, x)(y, y)}$

50. Evklid fazosida noldan farqli $\{x_\alpha\}$ elementlar sistemasi uchun .... bo'lsa, u ortogonal sistema deyiladi?

A) ixtiyoriy $\alpha \neq \beta$ da $(x_\alpha, x_\beta) = 0$ B) $\{x_\alpha\}$ chiziqli bog'lanmagan

C) ixtiyoriy α da $(x_\alpha, x_\alpha) = 1$ D) $\{x_\alpha\}$ chiziqli bog'langan

Javoblar va ko'rsatmalar

1-§. Metrik fazolar va metrik munosabatlar

2. Ha. **3.** ρ_2 metrika bo'lmaydi, ρ_1, ρ_3, ρ_4 lar metrika bo'ladi.

13-32 misollarda keltirilgan $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ akslantirish metrikaning barcha shartlarini qanoatlantiradi.

33-35 va **39, 42**-misollarda metrikaning 3-sharti bajarilmaydi.

36, 38, 40, 41-misollarda metrikaning 1-sharti bajarilmaydi.

37-misolda metrikaning 2-sharti bajarilmaydi.

43. 2. **44.** 6. **45.** 5. **46.** 20. **47.** 0, 5. **48.** $\sqrt{2}$. **49.** $2\sqrt{\pi}$. **50.** 2.
51. 1. **52.** 3. **53.** $\sqrt{3}$. **54.** $2\sqrt{2}$. **55.** $\sqrt{\pi}$. **56.** 4. **57.** 2. **58.** 2π.

2-§. Yaqinlashuvchi va fundamental ketma-ketliklar

4. a) Ha. b) Yo'q. c) Ha. d) Ha.

5. $C^{(1)}[0,1]$ da yo'q. $L_1[0,1]$ da ha.

6. $y_n(t) = t^n - t^{2n}$.

8. Har bir $k \in \mathbb{N}$ uchun $[0, 1]$ kesmada $f_1^{(k)}, f_2^{(k)}, \ldots, f_k^{(k)}$ funksiyalarni quyidagi usul bilan aniqlaymiz: $f_i^{(k)}(0) = 1$ va

$$f_i^{(k)}(x) = \begin{cases} 1, & \text{agar} \quad \dfrac{i-1}{k} < x \leq \dfrac{i}{k}, \\ 0, & \text{agar} \quad x \in (0,1] \setminus \left(\dfrac{i-1}{k}; \dfrac{i}{k}\right] \end{cases}$$

Bu funksiyalarni tartib bilan nomerlab, $\{g_n\}$ ketma-ketlikni hosil qilamiz. $\{g_n\}$ ketma-ketlik nol funksiyaga $C_1[0, 1]$ fazoda yaqinlashadi, lekin biror nuqtada ham nolga yaqinlashmaydi.

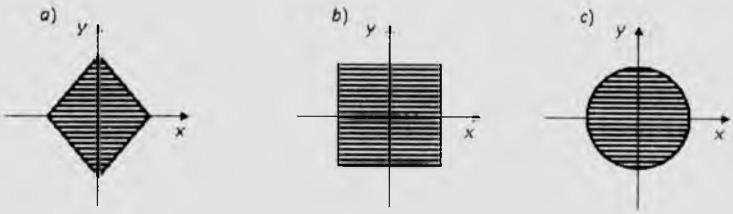
10. $x_n(t) = t^n - t^{n+1}$.

11. x_n, y_n, z_n, e_n ketma-ketliklar barcha metrik fazolarda uzoqlashuvchi. u_n ketma-ketlik c_0, c va m metrik fazolarda yaqinlashuvchi, agar $\alpha p > 1$ bo'lsa, u ℓ_p fazoda ham yaqinlashuvchi. ℓ_1 da uzoqlashuvchi.

16. Ha.

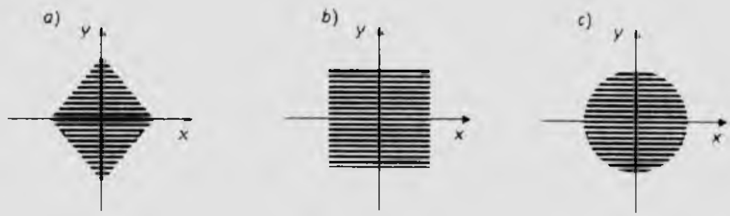
3-§. Ochiq va yopiq sharlar. Ochiq va yopiq to'plamlar

3. a), b), c) larga mos yopiq sharlar 3.1k chizmada a), b), c) lar,



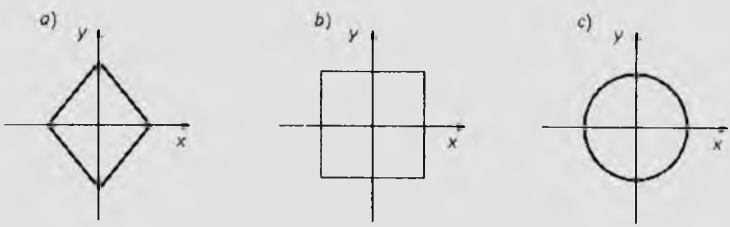
3.1k-chizma

a), b), c) larga mos ochiq sharlar 3.2k-chizmada a), b), c) lar,



3.2k-chizma

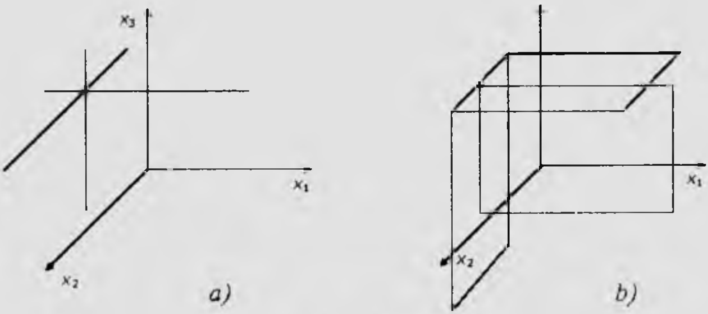
a), b), c) larga mos sferalar 3.3k-chizmada a), b), c) lar



3.3k-chizma

d) $B(0,1) - \{0\}$. $B[0,1]$-yopiq shar $0x_1$ va $0x_2$ o'qlarining birlashmasidan iborat. $S[0,1]$ sfera esa koordinat o'qlaridan $(0,1)$ nuqtani chiqarib tashlangan to'plamdan iborat.

4. Radiusi 1 ga teng sfera - $(0,1,2)$ nuqtadan o'tuvchi va koordinata o'qlariga parallel to'g'ri chiziqlardan ularning kesishish nuqtasi $(0, 1, 2)$ nuqtani chiqarib tashlashdan hosil bo'lgan to'plam bo'ladi, 3.4ka chizmaga qarang. Radiusi 2 ga teng sfera - $(0, 1, 2)$ nuqtadan o'tuvchi va koordinata tekisliklariga parallel tekisliklardan, har juft tekislikning kesishish chizig'ini chiqarib tashlashdan hosil bo'lgan to'plam bo'ladi. 3.4kb chizmaga qarang. Radiusi 3 ga teng sfera – $\mathbb{R}^3$ fazodan $(0, 1, 2)$ nuqtadan o'tuvchi va koordinata tekisliklariga parallel tekisliklarni chiqarib tashlashdan hosil bo'lgan to'plam bo'ladi.



3.4k-chizma

5. a) $B(-\infty, r) = B(\infty, r) = \emptyset$. b) $B(-\infty, r) = (-\infty, -(1-r)/r)$, $B(\infty, r) = = ((1-r)/r, \infty)$

6. b) Diskret metrik fazodagi birlik ochiq shar uchun $diam\, B(x_0, 1) = 0 < 2 \cdot 1$. c) Har doim to'g'ri emas. Diskret metrik fazoda $0 = diam\, B(x_0, 1) < diam\, B[x_0, 1] = 1$.

9. Diskret metrik fazodagi birlik yopiq shar.

4-§. To'la metrik fazo. Metrik fazoni to'ldirish

5. Yo'q. **6.** $C[a, b]$.

7. a) f - qat'iy monoton funksiya bo'lsa. b) f - qat'iy monoton funksiya bo'lib, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ bo'lsa.

8. To'ldirmasi $X - \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ to'plamga izomorf.

9. $(\Phi, \rho_1) \cong \ell_1$, $(\Phi, \rho_2) \cong m$.

11. a) $(\mathbb{P}, \rho_1) = C^{(2)}[0,\ 1]$, b) $\mathbb{P}, \rho_2) = C^{(1)}[0,\ 1]$,

c) $\mathbb{P}, \rho_3) = \{x \in C[-1,\ 1]$ va $t = 0$ da hosilasi mavjud funksiyalar $\}$.

15. $\mathbb{R}$ da ratsional sonlar to'plami.

24. $X = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Q}$.

31. $[0, 1]$ da Riman yoki Dirixle funksiyasi.

40. X ning sanoqli bo'lishi.

62. $Fr[a,\ b] = Fr(a,\ b) = \{a, b\}$, $Fr\,\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$, $Fr\mathbb{Q} = \mathbb{R}$.

$Fr[a,\ \infty) = \{a\}$, $Fr\emptyset = \emptyset$.

66. Ha.

5-§. Uzluksiz akslantirishlar. Izometriya. Gomeomorfizm

5. $f(x) = \mathfrak{K}(x)$ - Kantorning zinapoya funksiyasi, $G = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

6. Ha.

10. a) to'g'ri, b), c) va d) lar doim to'g'ri emas.

13. a) uzluksiz, b) izometriya bo'ladi.

15. a) va c) uzluksiz, b) uzluksiz emas.

16. a) va d) uzluksiz, b), c) va e) lar uzluksiz emas.

17. b) va d) lar tekis uzluksiz, c) uzluksiz, lekin tekis uzluksiz emas.

18. a) va b) lar tekis uzluksiz, c) uzluksiz, lekin tekis uzluksiz emas,

d) $\alpha \in (0,\ 2)$ da tekis uzluksiz, $\alpha \geq 2$ da tekis uzluksiz emas.

19. a) tekis uzluksiz, b) $\alpha \in (0,\ 2)$ da tekis uzluksiz, $\alpha \geq 2$ da tekis uzluksiz emas.

20. $f(x) = x^{\alpha}$, $\alpha > 1$.

25. Tekis uzluksiz bo'ladi.

26. $f(x) = \sqrt{x}$.

27. a) Uzluksiz bo'ladi, b) har doim tekis uzluksiz emas.

32. 5.13-misolga qarang.

34. $f(x) = a \pm x$, $x \in \mathbb{R}$.

35. $\mathbb{R}^2$ fazodagi evklid harakati, ya'ni $f(x_1, x_2) = (x_1 \cos\varphi - x_2 \sin\varphi + a_1,\ x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi + a_2)$ va $g(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$ shakldagi izometriyalar va ularning kombinatsiyasi.

58. a) Ha. b) Yo'q.

6-§. Qisqartirib aks ettirish prinsipi

6. Ha.

10. f_1 uchun barcha juft funksiyalar qo'zg'almas nuqta bo'ladi. f_2 uchun barcha toq funksiyalar qo'zg'almas nuqta bo'ladi.

17. $a < 1$.

21. a) $x = 1,414$, b) $x = 3,321$, c) $x = -2,369$.

26. Shart emas.

29. $\lambda \in (-q,\ q)$, $0 < q < 1$. **31.** $\lambda \in (0,\ 1)$.

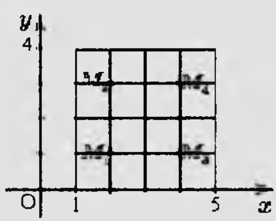
7-§. Kompakt metrik fazolar

2. $X = \mathbb{R}$, $A = [0,1]$, $B = (0,1)$.

18. a) $\varepsilon = 0,5$. b) $\varepsilon = \dfrac{1}{2n}$.

19. $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

20. Tekislikning 4 ta $M_1(2,1)$, $M_2(2,3)$, $M_3(4,1)$ va $M_4(4,3)$ nuqtalaridan tashkil topgan to'plam A uchun eng kam elementli $\varepsilon = \sqrt{2}$ to'r (7.1k-chizma) bo'ladi.



7.1k-chizma

21. $X = \mathbb{R}$. $M = (0, 1)$. $f(x) = \frac{1}{x}$.

24. $X = \mathbb{R}^2$, $M = \{(x, y) : y = 0\}$, $F = \{(x, y) : x > 0, \ y = x^{-1}\}$ yoki tekislikda M sifatida $y = x$ to'g'ri chiziqni, F sifatida esa asimptotikasi $y = x$ bo'lgan va u bilan kesishmaydigan biror egri chiziqni olish mumkin.

25. Birortasi ham tekis darajada uzluksiz emas. a), b), d) lar tekis chegaralangan.

29. $C^{(1)}[a, b]$ fazodagi K to'plam nisbiy kompakt bo'lishi uchun uning tekis chegaralangan hamda o'zi va hosilalari tekis darajada uzluksiz bo'lishi zarur va yetarli.

30. M_2, M_3, M_4. **32.** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

8-§. Tutash metrik fazolar

8. Shart emas. **10.** Yo'q.

9-§. Chiziqli fazolar

1-14- misollarda chiziqli fazoning 1-8 aksiomalar bajariladi.

15. Monoton funksiyalar to'plami chiziqli fazo tashkil qilmaydi.

16-24-misollarda keltirilgan to'plamlar chiziqli fazo tashkil qiladi.

25. Davriy funksiyalar to'plami chiziqli fazo tashkil qilmaydi.

26-32-misollarda keltirilgan to'plamlar chiziqli fazo tashkil qiladi.

33-36 va **38, 41** larda sistema chiziqli erkli.

37, 39-40 larda sistema chiziqli bog'langan.

42. $A = [-1, 1]$ yoki $A = [-1, 0]$, $A = [0, 1]$ desak, f_1, f_2 va f_3 elementlar $L_1[-1, 1]$ fazoda chiziqli bog'langan bo'ladi.

43. a) $A = [-2, 0)$, $B = (0, 1]$, b) $A = [-2, 0)$, $B = (0, 3]$.

44. $\dim \mathbb{R}^5 = 5$, $\dim P_{\leq 8} = 9$, $\dim M_{33} = 9$.

45. $\dim \mathbb{C}^5 = 5$, $\dim m = \dim c = \infty$.

46. Barcha fazolarning o'lchami cheksiz.

47. Barcha fazolarning o'lchami cheksiz.

52. O'lchami $n-1$.

53. $co\dim M = 3$.

60. Bu fazoning nol elementi bir soni bo'ladi. O'lchami 1.

61. Yo'q.

10-§. Chiziqli normalangan fazolar

2-19. Normaning barcha shartlari bajariladi.

23 va **26-28**-misollarda normaning barcha shartlari bajariladi.

24-25-misollarda normaning 1-sharti bajarilmaydi.

30-38 nolga yaqinlashadi.

39. nolga yaqinlashmaydi.

40. $\|x\| = 3$, $\|x\|_1 = 5$, $\|x\|_4 = \sqrt[4]{33}$, $\|x\|_\infty = 2$,
$\|y\| = 5$, $\|y\|_1 = 7$, $\|y\|_4 = \sqrt[4]{337}$, $\|y\|_\infty = 4$.

41. $\|f\| = 1$, $\|f\|_1 = 4$, $\|f\|_2 = \sqrt{\pi}$, $\|g\| = 1$, $\|g\|_1 = 4$, $\|g\|_2 = \sqrt{\pi}$.

42. $\|\varphi_n\|_C = \|\psi_n\|_C = 1$, $\|\varphi_n\|_{L_2} = \|\psi_n\|_{L_2} = \sqrt{\pi}$,
$\|\varphi_n\|_M = \|\psi_n\|_M = 1$, $\|\varphi_n\|_V = \|\psi_n\|_V = 4n$.

57 Ha. **58.** Yo'q. Masalan, $A = [0,1]\backslash\mathbb{Q}$, $B = [0,1]\cap\mathbb{Q}$.

62. a), c) va d) lar uchun $x^{(n)} = (1+\frac{1}{n}, \frac{1}{2}+\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{k}+\frac{1}{n}, \ldots)$.

b) va e) uchun $x^{(n)} = (1+\frac{1}{n!}, \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{n!}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{n!}, \ldots)$.

64. Ochiq to'plam bo'lmaydi.

65. Yopiq to'plam bo'lmaydi.

69. $\mathbb{R}^2$, ℓ_2 va $C_2[a, b]$ lar qat'iy normalangan fazolar bo'ladi. ℓ_1, m va $C[a, b]$ lar qat'iy normalangan fazolar emas.

71. Ha. $X = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

72. $C[-1,1] = C^-[-1,1] \oplus C^+[-1,1]$, bu yerda $C^-[-1,1] = \{x : x(-t) = -x(t)\}$ toq funksiyalar, $C^+[-1,1] = \{x : x(-t) = x(t)\}$ esa juft funksiyalar fazosi.

75. Yo'q. $X = \mathbb{R}$, $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

2-10 misollardagi p funksional skalyar ko'paytma shartlarini qanoatlantiradi.

11-15. misollardagi p funksional skalyar ko'paytmaning 1-shartini qanoatlantirmaydi.

16-18 va **20** misollardagi p funksional skalyar ko'paytma shartlarini qanoatlantiradi.

19 misoldagi p funksional skalyar ko'paytmaning 3 va 4-shartlarini qanoatlantirmaydi.

22. $e_1 = (0, 0, 1),\ e_2 = (0, 1, 0),\ e_3 = (1, 0, 0)$.

23. $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0),\ e_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, -1),\ e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2)$.

24. $e_1 = (-1, 0, 0),\ e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 1), e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)$.

25. $\psi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \psi_2(t) = \frac{1}{\sqrt{3,5}}t^3,\ \psi_3(t) = \frac{1}{a}\left(t^6 - \frac{7}{10}t^3 - \frac{1}{7}\right)$.

26. $\psi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \psi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{3}}\,t,\ \ \psi_3(t) = \sqrt{\frac{5}{8}}\ (3t^2 - 1)$

27. $\psi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}},\ \psi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos t,\ \psi_3(t) = \sqrt{\frac{2\pi}{\pi^2 - 8}}\sin\frac{t-2}{\pi}$.

28. $\psi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \psi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{3}}\,t,\ \ \psi_3(t) = \sqrt{\frac{5}{8}}\ (3t^2 - 1)$

29. $e_1 = (1, 0, 0, \ldots),\ e_2 = (0, 1, 0, 0, \ldots),\ e_3 = (0, 0, 1, 0, 0, \ldots)$.

30. $e_1 = \sqrt{3}\left(0, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2^{n-1}}, \ldots\right), e_2 = \left(1, -\frac{1}{4}, \frac{3}{2^3} \ldots \frac{3}{2^n}, \ldots\right)$.

31. $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0, 0, \ldots),\ e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 1, 1, 0, 0, \ldots)$.

41. $\psi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt,\ \ n \in \mathbb{N}$.

42. $\psi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\{i\,n\,t\},\ n \in \mathbb{Z}$.

44. $c_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}},\ c_1 = 0,\ \ c_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2},\ \ c_n = 0,\ n \geq 3$.

48. $\dim(M_n)^{\perp} = n,\ n = 1, 2, 3$.

50. $L_2^-[-1, 1]$ ning ortogonal to‘ldiruvchisi $(L_2^-[-1, 1])^{\perp}$ - $L_2[-1, 1]$ dagi juft funksiyalardan iborat. $\dim L_2^-[-1, 1] = \dim(L_2^-[-1, 1])^{\perp} = \infty$.

56. $c_n = \dfrac{(2n)!}{2^n\,(n!)^2}$, $n \in \mathbb{N}$. **57.** $\|P_n\| = \sqrt{\dfrac{2}{2n+1}}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

58. $\psi_1(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\psi_2(t) = \sqrt{\dfrac{2}{3}}\,t$, $\psi_3(t) = \sqrt{\dfrac{5}{8}}\,(3\,t^2 - 1)$.

59. $\psi_1(t) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{\pi}}$, $\psi_2(t) = \dfrac{\sqrt{2}\,t}{\sqrt[4]{\pi}}$, $\psi_3(t) = \dfrac{2t^2 - 1}{\sqrt[4]{25\pi}}$.

65. $(f, \varphi_n^-) = (f, \varphi_n^+) = 0$, $n \in \mathbb{N}$, $(f, \psi_0) = \sqrt{2}$, $(f, \psi_n) = 0$, $n \neq 0$.

66. $(f, \varphi_n^-) = \dfrac{2}{\pi\, n}(1 + (-1)^{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$, $(f, \varphi_n^+) = 0$, $n \in \mathbb{N}$, $(f, \psi_0) = 0$, $(f, \psi_n) = \dfrac{2}{\pi\, n}(1 + (-1)^{n-1})$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

12-§. Chiziqli funksionallar

1, 2, 4, 6, 8, 10 lar chiziqli funksional, ular uzluksiz.

3, 5, 7, 9 lar qo‘shma chiziqli funksional, ular uzluksiz.

11. $||f|| = \dfrac{2}{3}$. **13.** $||f|| = \dfrac{2}{\varepsilon}$. **14.** $||f|| = \sqrt{3}$. **15.** $||f|| = 1$

16. $||f|| = 1$. **17.** $||f|| = 1$. **18.** $||f|| = 2$. **19.** $||f|| = 10$.

21-26, 28-29 lar chekli qavariq funksionallar. **26.** Qavariq emas.

30. Chekli bo‘lmagan qavariq funksional.

31. a) qavariq, qavariq jism, b) qavariq, qavariq jism emas, c) qavariq, qavariq jism, d) qavariq, qavariq jism, e) qavariq to‘plam emas.

32. $A \cap B$ $A + B$. **33.** Ha.

34. b) M qavariq to‘plam qavariq jism ham bo‘ladi. Uning yadrosi $J(M) = \{x \in C[-1, 1] : \; x(t) < 0, \; \forall t \in [-1, 1]\}$. c) M qavariq to‘plam qavariq jism ham bo‘ladi. Uning yadrosi $M = \{x \in X : \; ||x|| < 1\}$. d) M qavariq to‘plam qavariq jism bo‘lmaydi.

38. $p_M(x) = \max\{|x_1 - 1|, |x_2 + 1|\}$.

39. $f : C_1[0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x(0)$.

42. $f(x) = \int\limits_{-1}^{1} \operatorname{sign} t \cdot x(t)\, dt$. **45.** $g(t) = \begin{cases} 0, & t \in [-1, 0) \\ 1, & t \in [0, 1] \end{cases}$.

46. $g(t) = \begin{cases} t, & t = -1 \\ \frac{1}{2} + t, & t \in (-1, 1) \\ 1 + t, & t = 1. \end{cases}$

48. $f(x) = x(1)$, davom yagona.

50. $\|f_y\| = \|y\|$. **52.** $\|f\| = 1$.

53-55. $\{f_n\}$ ketma-ketlik 0 da kuchsiz ma'noda yaqinlashadi.

56. Kuchli, $f(x) = \int\limits_{-1}^{1} e^t x(t)\,dt$. **57.** Kuchli, $f(x) = \int\limits_{-1}^{1} \sin t\, x(t)\,dt$.

58. Kuchli, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} t\, x(t)\,dt$.

59. $(\mathbb{R}^n)^* = \mathbb{R}^n$, $(\mathbb{R}^n_\infty)^* = \mathbb{R}^n_1$, $(\mathbb{R}^n_p)^* = \mathbb{R}^n_q$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

60. $(\mathbb{R}^n_1)^* = \mathbb{R}^n_\infty$.

61. $(\ell_2)^* = \ell_2$, $(\ell_p)^* = \ell_q$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $c^* = (c_0)^* = \ell_1$.

62. $(L_2[a, b])^* = L_2[a, b]$, $(L_p[a, b])^* = L_q[a, b]$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

63. $(C[a, b])^* = V_0[a, b]$.

Test javoblari

I bobda keltirilgan test javoblari

1-A 2-A 3-B 4-C 5-C 6-B 7-A 8-C 9-C 10-A 11-A 12-C 13-C 14-D 15-D 16-A 17-D 18-A 19-A 20-B 21-B 22-D 23-A 24-B 25-B 26-D 27-D 28-C 29-A 30-A 31-A 32-D 33-B 34-C 35-A 36-B 37-D 38-D 39-C 40-B, 41-A 42-B 43-C 44-A 45-A 46-A 47-B 48-C 49-D 50-B.

II bobda keltirilgan test javoblari

1-B 2-C 3-C 4-B 5-C 6-B 7-B 8-B 9-D 10-D 11-D 12-D 13-D 14-D 15-A 16-A 17-B 18-D 19-C 20-B 21-D 22-A 23-A 24-B 25-C 26-A 27-C 28-D 29-C 30-A 31-B 32-B 33-B 34-B 35-A 36-A 37-B 38-B 39-B 40-A, 41-B 42-A 43-A 44-A 45-A 46-B 47-A 48-C 49-A 50-A.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Москва: Наука. 1989.
2. Sarimsoqov T.A. Funksional analiz kursi. Toshkent: O'qituvchi. 1986.
3. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. Москва: Наука. 1965.
4. Треногин В.А. Функциональный анализ. Москва: Наука. 1980.
5. В.А. Треногин, Б.М. Писаревский, Т.С. Соболева. Задачи и упражнения по функциональному анализу. Москва: Наука. 1984.
6. Sh.A. Ayupov, M.A. Berdiqulov, R.M. Turg'unboyev. Funksional analiz. Toshkent. 2008.
7. Ayupov Sh. A., Ibragimov M.M., Kudaybergenov K.K. Funksional analizdan misol va masalalar. O'quv qo'llanma. Nukus. Bilim. 2009.
8. А.Б. Антоневич, П.Н. Князов, Я.В. Радыно. Задачи и упражнения по функциональному анализу. Минск. Высшая школа. 1978.
9. Городецкий В.В., Нагнибида Н.И., Настасиев П.П. Методы решения задач по функциональному анализу. Киев 1990.
10. Ю.М. Березанский. Г.Ф. Ус., З.Г. Шефтель. Функциональный анализ. Киев: Выщая школа. 1990.
11. J.I. Abdullayev, R.N. G'anixo'jayev, M.H. Shermatov, O.I. Egamberdiyev. Funksional analiz. O'quv qo'llanma. Toshkent-Samarqand. 2009.

J.I. Abdullayev, R.N. G'anixo'jayev, I.A. Ikromov

FUNKSIONAL ANALIZDAN MASALALAR TO'PLAMI

uslubiy qo'llanma
II qism
METRIK VA CHIZIQLI FAZOLAR

Toshkent – «TURON-IQBOL» – 2013
100182. Toshkent sh., H. Boyqaro ko'chasi, 51-uy
Tel.: 244-25-58. Faks.: 244-20-19

Muharrir *X. Alimov*
Badiiy muharrir *E. Muratov*
Texnik muharrir *I. Bozorov*
Musahhih: *S. Abdunabiyeva*

Nashriyot litsenziyasi AI № 223, 16.11.12
Bosishga 05.06.2013 da ruxsat etildi. Bichimi 60x84 1/16.
«Bukvar» garniturasi. Ofset usulida bosildi.
Nashr t. 10,05. Shartli b.t. 9,02. Adadi 300 nusxa.
19-sonli buyurtma.

«TURON MATBAA» MCHJ bosmaxonasida chop etildi.
Toshkent, Olmazor tumani, Talabalar ko'chasi, 2-uy.