O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

ALISHER NAVOIY NOMIDAGI
SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI

FUNKSIONAL ANALIZDAN MASALALAR TO'PLAMI

I qism
LEBEG INTEGRALI

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

ALISHER NAVOIY NOMIDAGI
SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI

FUNKSIONAL ANALIZDAN MASALALAR TO‘PLAMI

I qism

LEBEG INTEGRALI

Toshkent
«TURON-IQBOL»
2013

UO'K: 531/534(076.1)
KBK 22.16
A-15

Mas'ul muharrir:
To'raqulov Davir Davronovich, Fizika-matematika fanlari nomzodi

Tuzuvchilar:
Abdullayev Janikul Ibragimovich, Fizika-matematika fanlari doktori
G'anixo'jayev Rasul Nabiyevich, Fizika-matematika fanlari doktori
Ikromov Isroil Akramovich, Fizika-matematika fanlari doktori

Taqrizchilar:
Imomkulov Sevdiyor Akramovich, Fizika-matematika fanlari doktori
Niyozov Iqbol Ergashovich, Fizika-matematika fanlari nomzodi

Abdullayev J
Funksional analizdan masalalar to'plami: I qism / J. Abdullayev, R. G'anixo'jayev, I. Ikromov. - Toshkent: Turon-Iqbol, 2013. -200 b.
I. G'anixo'jayev. R
II. Ikromov. I

UO'K: 531/534(076.1)
KBK 22.16 ya 73

Ushbu masalalar to'plami Oliy o'quv yurtlarining, 5130100-matematika va 5140300-mexanika yo'nalishlari bo'yicha ta'lim olayotgan talabalari uchun mo'ljallangan

ISBN 978-9943-14-264-0

Mundarija

Kirish

Ushbu uslubiy qo'llanma funksional analiz fanidan namunaviy o'quv dasturga moslab tuzilgan masalalar to'plamidir. U universitetlarning matematika va mexanika bakalavriyat yo'nalishlari bo'yicha ta'lim olayotgan talabalari uchun mo'ljallab yozilgan. Bundan tashqari masalalar to'plamidan matematik tahlil va matematik fizika mutaxassisliklari bo'yicha ta'lim olayotgan magistrlar hamda katta ilmiy xodim – izlanuvchilar foydalanishlari mumkin. Masalalar to'plami o'lchovlar nazariyasi va Lebeg integralining asosiy boblarini o'z ichiga olgan. U nisbatan soddaroq misollardan tashkil topgan bo'lib, o'quvchini misol yechishga rag'batlantiradi. Masalalar to'plamida keltirilgan misollar oldingi misollar bilan aloqador. Shuning uchun misollarning barchasini yechish kerak.

Uslubiy qo'llanmaning asosiy maqsadi bo'lg'usi mutaxassislarni o'lchovlar nazariyasi va Lebeg integralining asosiy tushunchalari va usullari bilan tanishtirishdan iborat. Uslubiy qo'llanma talabalarni funksional analizga oid masalalarni yechishga o'rgatadi hamda ularda yetarli darajada texnik mahorat hosil qiladi. Ushbu to'plam O'zMU va SamDUda "Funksional analiz" fanidan ma'ruza va amaliy mashg'ulotlar olib boruvchi professor-o'qituvchilarning ko'p yillik ish tajribalari asosida tuzilgan.

Uslubiy qo'llanma IV bob, 10 paragrafdan iborat. Har bir paragraf boshida qisqacha nazariy material berilgan. Har bobdan so'ng talabalar o'z bilimlarini tekshirishlari uchun test savollari javoblari bilan berilgan.

Mualliflar uslubiy qo'llanmani yaxshilashda bergan foydali maslahatlari uchun mas'ul muharrir va taqrizchilarga, hamda matnni tahrir qilgani uchun B.E.Davranovga o'z minnatdorchiliklarini bildiradilar.

Masalalar to'plami birinchi marta chop qilinayotgani uchun xato va kamchiliklar bo'lishi mumkin. Xato va kamchiliklar haqidagi fikrlaringizni jabdullaev@mail.ru elektron manziliga jo'natishlaringizni so'raymiz.

I bob. To‘plamlar nazariyasining elementlari

Bu bob to‘plamlar nazariyasining elementlariga bag‘ishlangan bo‘lib, u to‘rt paragrafdan iborat. $1-\S$ da to‘plamlar va ular ustida amallarga doir misollar keltirilgan. $2-\S$ akslantirishlar va ularning xossalarini tekshirishga bag‘ishlangan. To‘plamlarni sinflarga ajratish bilan akslantirishlar o‘rtasidagi bog‘lanishni ochib beruvchi misollar keltirilgan. $3-\S$ da sanoqli va sanoqsiz to‘plamlar hamda ularning asosiy xossalari o‘rganilgan. Haqiqiy sonlar to‘plamining sanoqsizligi, kontinuum quvvatli to‘plamlarning ayrim xossalari misollarda jamlangan. Bu yerda Kantor-Bernshteyn teoremasidan foydalanib, to‘plamlarning ekvivalentligini isbotlashga doir misollar ham bor. Oxirgi $4-\S$ to‘plamlar sistemalariga bag‘ishlangan. Unda to‘plamlar halqasi, to‘plamlar yarim halqasiga doir misollar keltirilgan. Mazkur paragrafda $\sigma-$ algebra va $\delta-$ algebra tushunchalariga oid misollar ham bor.

1-§. To‘plamlar ustida amallar

Matematikada juda xilma-xil to‘plamlarga duch kelamiz. Haqiqiy sonlar to‘plami, tekislikdagi ko‘pburchaklar to‘plami, ratsional koeffitsiyentli ko‘phadlar to‘plami va hokazo. To‘plam tushunchasi matematikada tayanch tushunchalardan bo‘lib, unga ta’rif berilmaydi. *To‘plam* so‘zining sinonimlari sifatida *ob’ektlar jamlanmasi* yoki *elementlar majmuasi* so‘z birikmalaridan foydalaniladi.

To‘plamlar nazariyasi hozirgi zamon matematikasida juda muhim o‘ringa ega. Biz uning ayrim xossalarini o‘rganish bilan cheklanamiz.

To‘plamlarni lotin alifbosining bosh harflari $A, B, \ldots$ ularning elementlarini esa kichik - $a, b, \ldots$ harflar bilan belgilaymiz. Biz asosan quyidagi belgilashlardan foydalanamiz. $\mathbb{N}$ — natural sonlar to‘plami, $\mathbb{Z}$ - butun sonlar to‘plami, $\mathbb{Q}$ — ratsional sonlar to‘plami, $\mathbb{R}$ — haqiqiy sonlar to'plami, $\mathbb{C}$ – kompleks sonlar to'plami, $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $\mathbb{Z}_+ = \{0\} \cup \mathbb{N}$ hamda $\mathbb{R}^n$ sifatida n – o'lchamli arifmetik Evklid fazo belgilanadi

Matematik simvollarning ma'nolariga to'xtalamiz. $a \in A$ belgisi *a element A to'plamga tegishli* ekanligini bildiradi. Bu tasdiqning inkori $a \notin A$ shaklda yoziladi va *a element A to'plamga tegishli emas* deb o'qiladi. $A \subset B$ belgi *A to'plamning barcha elementlari B to'plamga ham tegishli* ekanligini bildiradi. Bu holda A to'plam B to'plamning *qismi* deyiladi. Masalan, natural sonlar to'plami haqiqiy sonlar to'plamining qismi bo'ladi. Agar A va B to'plamlar bir xil elementlardan tashkil topgan bo'lsa, u holda ular *teng to'plamlar* deyiladi va $A = B$ shaklda yoziladi. Ko'pincha, to'plamlarning tengligini isbotlashda $A \subset B$ va $B \subset A$ munosabatlarning bajarilishi ko'rsatiladi ([1] ga qarang). Ba'zida birorta ham elementi mavjud bo'lmagan to'plamlarni qarashga to'g'ri keladi. Masalan, $2 \leq x < 2$ qo'sh tengsizlikni qanoatlantiruvchi haqiqiy sonlar to'plami yoki $|x| = -1$ tenglamaning yechimlari to'plami va hokazo. Bunday to'plamlar uchun maxsus *bo'sh to'plam* nomi berilgan va uni belgilashda $\emptyset$ simvoldan foydalaniladi. Ma'lumki, har qanday to'plam bo'sh to'plamni o'zida saqlaydi va har qanday to'plam o'zining qismi sifatida qaralishi mumkin. To'plamlarning bo'sh to'plamdan va o'zidan farqli barcha qism to'plamlari *xos qism to'plamlar* deyiladi. Uslubiy qo'llanmada $\wedge$ va $\vee$ belgilari mos ravishda *va* hamda *yoki* so'zlariga mos keladi.

Ixtiyoriy tabiatli A va B to'plamlar berilgan bo'lsin.

$$A \cup B = \{x : x \in A \ \vee \ x \in B\}$$

to'plam A va B to'plamlarning *yig'indisi* yoki *birlashmasi* deyiladi.

$$A \cap B = \{x : x \in A \ \wedge \ x \in B\}$$

to'plam A va B to'plamlarning *kesishmasi* deyiladi. Ixtiyoriy (chekli, cheksiz) sondagi A_α to'plamlarning yig'indisi va kesishmasi ham shunga o'xshash aniqlanadi:

$$\bigcup_{\alpha\in X} A_\alpha = \{x:\ \exists\alpha_0\in X,\ x\in A_{\alpha_0}\},\quad \bigcap_{\alpha\in X} A_\alpha = \{x:\ \forall\alpha\in X,\ x\in A_\alpha\}.$$

A va B to'plamlarning *ayirmasi* deb

$$A\backslash B = \{x:\ x\in A\ \wedge\ x\notin B\}$$

to'plamga aytiladi. Agar $B\subset A$ bo'lsa, $A\backslash B$ to'plam B to'plamning A to'plamgacha *to'ldiruvchi to'plami* deyiladi va $C_A B := CB$ shaklda belgilanadi. Ba'zan, A va B to'plamlarning *simmetrik ayirmasi* tushunchasini kiritish maqsadga muvofiq bo'ladi. $A\backslash B$ va $B\backslash A$ to'plamlarning birlashmasidan iborat to'plamga A va B to'plamlarning *simmetrik ayirmasi* deyiladi, ya'ni

$$A\Delta B = (A\backslash B)\cup(B\backslash A).$$

Agar $A, B\subset G$ bo'lib, G da " + " amali aniqlangan bo'lsa, u holda

$$A+B = \{c:\ c=a+b,\ a\in A,\ b\in B\}$$

to'plam A va B to'plamlarning *arifmetik yig'indisi* deyiladi.

X va Y to'plamlarning *dekart ko'paytmasi* deganda

$$X\times Y = \{(x,y):\ x\in X,\ y\in Y\}$$

to'plam tushuniladi. $X\times Y$ to'plamning ixtiyoriy R qism toplami *munosabat* deyiladi. x element (x,y) juftlikning birinchi koordinatasi, y element esa uning ikkinchi *koordinatasi* deyiladi va mos ravishda $x = pr_1(x,y)$ va $y = pr_2(x,y)$ kabi belgilanadi. Xuddi shunday $X\times Y$ to'plamning ixtiyoriy R qism to'plamining birinchi va ikkinchi koordinatalarga proyeksiyalari aniqlanadi:

$$pr_1 R = \{x:\ x\in X,\ \exists y\in Y,\ (x,y)\in R\},$$

$$pr_2 R = \{y : \ y \in Y, \ \exists x \in X, \ (x, y) \in R\} \ .$$

Bu to'plamlar R munosabatning mos ravishda *aniqlanish sohasi va qiymatlar sohasi* deyiladi. Bundan keyin biz $\mathfrak{A}(X)$ bilan X ning barcha qism to'plamlari sistemasini belgilaymiz.

Endi mavzuga oid misollar keltiramiz.

1.1. To'plamlar yig'indisi va kesishmasi kommutativ. Isbotlang.

$$A \cup B = B \cup A, \qquad A \cap B = B \cap A.$$

1.2. To'plamlar yig'indisi va kesishmasi assotsiativ. Isbotlang.

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

1.3. Distributivlik qonunlarini isbotlang:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

To'plamlar nazariyasida muhim o'rin tutadigan va *ikkilik prinsipi* deb nomlanuvchi quyidagi ikki munosabatni isbotlang.

1.4. Kesishmaning to'ldiruvchisi to'ldiruvchilar yig'indisiga teng:

$$E \backslash \bigcap_{\alpha} A_{\alpha} = \bigcup_{\alpha} (E \backslash A_{\alpha}), \qquad A_{\alpha} \subset E. \tag{1.1}$$

1.5. Yig'indining to'ldiruvchisi to'ldiruvchilar kesishmasiga teng:

$$E \backslash \bigcup_{\alpha} A_{\alpha} = \bigcap_{\alpha} (E \backslash A_{\alpha}), \qquad A_{\alpha} \subset E. \tag{1.2}$$

Isbot. Biz (1.2) tenglikning isbotini keltiramiz. Ixtiyoriy $x \in E \backslash \bigcup_{\alpha} A_{\alpha}$ elementni olamiz, bu yerdan $x \in E$ va $x \notin \bigcup_{\alpha} A_{\alpha}$ ekanligi kelib chiqadi.

Bundan ixtiyoriy α uchun x ning A_α to'plamga tegishli emasligiga kelamiz. Demak, x element A_α to'plamlarning to'ldiruvchilarida yotadi. Shunday qilib, ixtiyoriy α uchun $x \in E\backslash A_\alpha$ munosabat o'rinli, bundan biz $x \in \bigcap\limits_{\alpha}(E\backslash A_\alpha)$ ga ega bo'lamiz. Bu esa

$$E\backslash \bigcup_{\alpha} A_\alpha \subset \bigcap_{\alpha}(E\backslash A_\alpha) \tag{1.3}$$

munosabatni keltirib chiqaradi. Endi teskari munosabatni isbotlaymiz. Agar $x \in \bigcap\limits_{\alpha}(E\backslash A_\alpha)$ bo'lsa, u holda barcha α larda $x \in E\backslash A_\alpha$ bo'ladi va x element A_α to'plamlarning birortasiga ham tegishli emas, bu esa $x \notin \bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha$ ekanligini bildiradi. Demak, $x \in E\backslash \bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha$ ekan. Bundan biz

$$E\backslash \bigcup_{\alpha} A_\alpha \supset \bigcap_{\alpha}(E\backslash A_\alpha) \tag{1.4}$$

munosabatga kelamiz. (1.3) va (1.4) munosabatlar (1.2) tenglikni isbotlaydi. $\square$

1.6. $A\Delta B = (A \cup B)\backslash(A \cap B)$ tenglikni isbotlang.

1.7. $A \cup B = (A \,\Delta\, B)\,\Delta\,(A \cap B)$ tenglikni isbotlang.

1.8. $A\backslash B = A\,\Delta\,(A \cap B)$ tenglikni isbotlang.

1.9. Agar $A \subset E$, $B \subset E$ bo'lsa, $(E\backslash A)\Delta(E\backslash B) = A\Delta B$ tenglikni isbotlang.

1.10. $(A \cup B)\Delta(C \cup D) \subset (A\Delta C) \cup (B\Delta D)$ munosabatni isbotlang.

1.11. A va B to'plamlar uchun $A \subset B\cup(A\Delta B)$ munosabatni isbotlang.

1.12. Agar A_1 va A_2 to'plamlar kesishmasa, ixtiyoriy B_1 va B_2 lar uchun $B_1 \cap B_2 \subset (A_1\Delta B_1) \cup (A_2\Delta B_2)$ munosabatni isbotlang.

1.13-1.20-misollarda berilgan A va B to'plamlar uchun $A\cup B$, $A\backslash B$, $A\Delta B$, $A\cap B$ ko'rinishdagi to'plamlarni toping. 1.18-1.20-misollarda esa $A \cup B$, $A\backslash B$, $A\Delta B$, $A \cap B$ to'plamlarni tekislikda tasvirlang.

1.13. $A = [0,\ 1]\,, \quad B = (0,\ 1)\,.$

1.14. $A = \{2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots\}\,, \quad B = \{3, 6, 9, \ldots, 3n, \ldots\}\,.$

1.15. $A = \mathbb{Q}, \quad B = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}-$ irratsional sonlar to'plami.

1.16. $A = [0,\ 1]\backslash\mathbb{Q}, \quad B = [0,\ 1]\cap\mathbb{Q}\,.$

1.17. $A = \{x \in \mathbb{R} : \sin 4x = 0\}\,, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : \cos 2x = 0\}\,.$

1.18. $A = \{(x, y) : |x| \le 4,\ |y| \le 4\}\,, \quad B = \{(x, y) : \ x^2 + y^2 \le 25\}\,.$

1.19. $A = \{(x, y) : 0 \le x \le 1,\ \ 0 \le y \le x\}\,.$
$B = \{(x, y) : 0 \le x \le 1,\ \ x \le y \le 1\}\,.$

1.20. $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 16\}\,. \quad B = \left\{(x, y) : \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} \le 1\right\}.$

1.21-1.35-misollarda keltirilgan munosabatlarni isbotlang.

1.21. $X \subset Y \Longleftrightarrow X \cup Y = Y \Longleftrightarrow X \cap Y = X.$

1.22. $X \subset Z \ \wedge \ Y \subset Z \Longleftrightarrow X \cup Y \subset Z.$

1.23. $Z \subset X \ \wedge \ Z \subset Y \Longleftrightarrow Z \subset X \cap Y.$

1.24. $(X\backslash Y)\backslash Z = X\backslash(Y \cup Z)\,.$

1.25. $X\backslash Y = X\backslash(X \cap Y) = (X \cup Y)\backslash Y.$

1.26. $X\backslash(Y\backslash Z) = (X\backslash Y) \cup (X \cap Z)\,.$

1.27. $(X\backslash Y) \cap (Z\backslash U) = (X \cap Z)\backslash(Y \cup U)\,.$

1.28. $X \cap (Y\backslash Z) = (X \cap Y)\backslash(X \cap Z)\,.$

1.29. $(X\backslash Z) \cap (Y\backslash Z) = (X \cap Y)\backslash Z.$

1.30. $(X \cup Y)\backslash Z = (X\backslash Z) \cup (Y\backslash Z)\,.$

1.31. $X \cap Y = \emptyset \Longleftrightarrow X \subset CY \Longleftrightarrow Y \subset CX$.

1.32. $X \subset Y \Longleftrightarrow CY \subset CX$.

1.33. $X \Delta Y = Y \Delta X$.

1.34. $X \Delta X = \emptyset$.

1.35. $X \Delta \emptyset = X$.

1.24-misolning yechimi. Berilgan to'plamlarning tengligini tekshirish $A \subset B$ va $B \subset A$ munosabatlarni ko'rsatish orqali amalga oshiriladi. Endi $x \in (X \backslash Y) \backslash Z$ ixtiyoriy element bo'lsin. U holda $x \in X \backslash Y$, $x \notin Z \Rightarrow x \in X$, $x \notin Y$, $x \notin Z \Rightarrow x \in X$, $x \notin (Y \cup Z) \Rightarrow x \in X \backslash (Y \cup Z)$. Demak, $(X \backslash Y) \backslash Z \subset X \backslash (Y \cup Z)$ munosabat o'rinli. Endi teskari munosabatni ko'rsatamiz. $y \in X \backslash (Y \cup Z)$ ixtiyoriy element bo'lsin. U holda $y \in X$, $y \notin Y \cup Z$ bo'ladi. Bu yerdan $y \in X$, $y \notin Y$, $y \notin Z$ ekanligini, bundan esa $y \in X \backslash Y$, $y \notin Z$ natijada $y \in (X \backslash Y) \backslash Z$ ekanligini olamiz. Demak, $(X \backslash Y) \backslash Z \supset X \backslash (Y \cup Z)$ munosabat ham o'rinli. Olingan bu ikki munosabatdan $(X \backslash Y) \backslash Z = X \backslash (Y \cup Z)$ tenglik kelib chiqadi. □

1.36. Shunday $X \subset Z$ va $Y \subset Z$ to'plamlar topingki, $X \times Y \neq Y \times X$ bo'lsin. $X \times Y = Y \times X$ tenglikdan $X = Y$ kelib chiqadimi?

1.37. $X = \{1, 3, 5\}$, $Y = \{2, 4\}$ to'plamlar uchun $X \times Y$, $Y \times X$ to'plamlar elementlarini yozib chiqing. $X \times Y = Y \times X$ tenglik to'g'rimi?

1.38-1.41-misollarda keltirilgan munosabatlarni isbotlang.

1.38. $X \times (Y \cup Z) = (X \times Y) \cup (X \times Z)$.

1.39. $(X \times Y) \cup (X_1 \times Y_1) \subset (X \cup X_1) \times (Y \cup Y_1)$.

1.40. $(X \cap X_1) \times (Y \cap Y_1) = (X \times Y) \cap (X_1 \times Y_1)$.

1.41. $(X \times Y) \cap (X_1 \times Y) = (X \cap X_1) \times Y$.

1.40-misolning yechimi. Bu yerda ham 1.24-misoldagi kabi yo‘l tutamiz. $\forall (x, y) \in (X \cap X_1) \times (Y \cap Y_1) \Rightarrow x \in X \cap X_1,\ y \in Y \cap Y_1$. Bu yerdan $x \in X,\ y \in Y \ \wedge\ x \in X_1,\ y \in Y_1 \Rightarrow (x, y) \in X \times Y \wedge\ (x, y) \in X_1 \times Y_1$ ekanligini, bundan esa $(x, y) \in (X \times Y) \cap (X_1 \times Y_1)$ ni olamiz. Ya'ni $(X \cap X_1) \times (Y \cap Y_1) \subset (X \times Y) \cap (X_1 \times Y_1)$ munosabat o‘rinli. Teskari munosabatni ko‘rsatish uchun $(x, y) \in (X \times Y) \cap (X_1 \times Y_1)$ dan orqaga qarab harakatlanish yetarli. Shunday qilib, $(X \cap X_1) \times (Y \cap Y_1) = (X \times Y) \cap (X_1 \times Y_1)$ tenglik isbotlandi. □

1.42. $(X \times Y) \cup (X_1 \times Y_1) = (X \cup X_1) \times (Y \cup Y_1)$ tenglik to‘grimi?

1.43. Ushbu $A \cup B = A \Delta (B \backslash A)$ tenglikni isbotlang. Demak, "$\cup$" amalni "Δ" va "$\backslash$" amallar orqali ifodalash mumkin. Shunga o‘xshash:

a) "$\cup$" amalni "Δ" va "$\cap$" amallar orqali;

b) "$\cap$" amalni "Δ" va "$\cup$" amallar bilan;

c) "$\cap$" amalni "Δ" va "$\backslash$" amallar orqali ifodalang.

Umuman, "$\cup$", "$\cap$", "$\backslash$", "Δ" amallardan ixtiyoriy birini:

d) qolgan uchtasi;

e) qandaydir ikkitasi orqali ifodalash mumkinmi?

1.44. $\{A_n\}$ to‘plamlar ketma-ketligi uchun quyidagi belgilashlarni

$$A^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m, \quad A_* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$$

kiritamiz. U holda $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset A_* \subset A^* \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ munosabatlarni isbotlang.

1.45. Agar $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ bo‘lsa, $\{A_n\}$ to‘plamlar ketma-ketligi *o‘suvchi*, aksincha, $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ bo‘lganda $\{A_n\}$ *kamayuvchi* deyiladi. O'suvchi to'plamlar ketma-ketligi uchun

$$A_* = A^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

hamda kamayuvchi to'plamlar ketma-ketligi uchun

$$A_* = A^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

tengliklarni isbotlang.

1.46. $A_n = \left\{ \frac{k}{n} : k \in \mathbb{Z} \right\}$ – maxraji $n \in \mathbb{N}$ bo'lgan barcha ratsional sonlar to'plami bo'lsa, $A_* = \mathbb{Z}$, $A^* = \mathbb{Q}$ tengliklarni isbotlang.

1.47. Agar $A_{3n} = B$, $A_{3n-1} = C$, $A_{3n-2} = D$, $n \in \mathbb{N}$ bo'lsa, A_* va A^* to'plamlarni B, C, D to'plamlar orqali ifodalang.

1.48. $A_{kn} = \left(k - \frac{1}{n}, k + \frac{1}{n} \right)$, $k, n \in \mathbb{N}$ to'plamlar uchun

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{kn}; \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{kn}; \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{kn};$$

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{kn}; \quad \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{kn}; \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{kn}$$

to'plamlarni toping.

1.49. Ushbu $\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{kn} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{kn}$ munosabat ixtiyoriy $\{A_{kn}\}$, $k, n \in \mathbb{N}$ to'plamlar uchun to'g'ri. Isbotlang.

1.50. $\Omega = \{ x : \ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ \ldots) \}$ barcha ketma-ketliklar to'plami, $\Omega_n = \{ x : \ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots) \}$ esa $n+1$ – hadidan boshlab 0 dan iborat ketma-ketliklar to'plami bo'lsin. U holda $\Omega \neq \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ ekanligini tushuntiring.

1.51. $c_0 = \left\{ x : \ x = (x_1, x_2, \ldots), \quad \lim_{n \to \infty} x_n = 0 \right\}$ – 0 ga yaqinlashuvchi barcha ketma-ketliklardan iborat to'plam va $p \in \mathbb{N}$ uchun

$$\ell_p = \left\{ x : \ x = (x_1, x_2, \ldots), \ \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < +\infty \right\}$$

ya'ni modulining p–darajalaridan tuzilgan qator yaqinlashuvchi bo'lgan barcha ketma-ketliklar to'plami bo'lsin. U holda

$$c_0 \supset \bigcup_{p=1}^{\infty} \ell_p \qquad \text{va} \qquad c_0 \neq \bigcup_{p=1}^{\infty} \ell_p$$

bo'lishini isbotlang.

1.52. Ixtiyoriy $\{A_n\}$ to'plamlar ketma-ketligi uchun shunday $\{B_n\}$ to'plamlar ketma-ketligini tuzingki.

a) $B_n \subset A_n$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ bo'lsin;

b) $B_n \supset A_n$, $B_{n+1} \supset B_n$, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ bo'lsin;

c) $B_n \subset A_n$, $B_{n+1} \subset B_n$, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ bo'lsin.

Yechish. Berilgan $\{A_n\}$ ketma-ketlik uchun $\{B_n\}$ to'plamlar ketma-ketligini quyidagicha tuzamiz.

$$B_1 = A_1, \quad B_2 = A_2 \backslash A_1, \ldots, \quad B_n = A_n \backslash \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k, \ldots .$$

Hosil qilingan $\{B_n\}$ to'plamlar ketma-ketligi misolning a) bandidagi barcha shartlarni qanoatlantiradi. Quyida biz b) va c) banddagi shartlarni qanoatlatiruvchi $\{B_n\}$ to'plamlar ketma-ketligini keltiramiz:

b) $B_1 = A_1$, $B_2 = A_1 \cup A_2, \ldots,$ $B_n = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k, \ldots$

c) $B_1 = A_1$, $B_2 = A_1 \cap A_2, \ldots,$ $B_n = \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k, \ldots .$ □

1.53. Ratsional sonlar to'plami $\mathbb{Q} = \{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots\}$ biror usulda nomerlangan bo'lsin. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (\eta_n - \varepsilon, \ \eta_n + \varepsilon) = \mathbb{R}$$

tenglikni isbotlang.

1.54. $\varepsilon > 0$ biror tayinlangan son bo'lsin. Ixtiyoriy $x \in \mathbb{R}$ haqiqiy son $\left(\frac{m}{n} - \frac{\varepsilon}{n}, \frac{m}{n} + \frac{\varepsilon}{n}\right)$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ ko'rinishdagi intervallardan kamida biriga tegishli ekanligini isbotlang. Demak,

$$\bigcap_{\varepsilon>0}\left(\bigcup_{m\in\mathbb{Z}}\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{m}{n}-\frac{\varepsilon}{n},\ \frac{m}{n}+\frac{\varepsilon}{n}\right)\right)=\mathbb{R}.$$

1.55. Ushbu $\left(\dfrac{m}{n}-\dfrac{1}{4n^2},\ \dfrac{m}{n}+\dfrac{1}{4n^2}\right)$, $m\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}$ intervallarning hech biri $\sqrt{2}$ sonini o'z ichiga olmasligini isbotlang. Demak,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{m}{n}-\frac{1}{4n^2},\ \frac{m}{n}+\frac{1}{4n^2}\right)\neq\mathbb{R}.$$

2-§. Akslantirishlar

Funksiya tushunchasini umumlashtirish. Ma'lumki, matematik analizda funksiya tushunchasi quyidagicha ta'riflanadi: X sonlar o'qidagi biror to'plam bo'lsin. Agar har bir $x\in X$ songa f qoida bo'yicha aniq bir $y=f(x)$ son mos qo'yilgan bo'lsa, u holda X to'plamda f funksiya *aniqlangan* deyiladi. Bunda X to'plam f funksiyaning *aniqlanish sohasi* deyiladi, bu funksiya qabul qiladigan barcha qiymatlardan tashkil bo'lgan $E(f)$ to'plam f funksiyaning *qiymatlar sohasi* deyiladi, ya'ni

$$E(f)=\{y: y=f(x),\quad x\in X\}.$$

Agar sonli to'plamlar o'rnida ixtiyoriy to'plamlar qaralsa, u holda funksiya tushunchasining umumlashmasi, ya'ni akslantirish ta'rifiga kelamiz. Bizga ixtiyoriy X va Y to'plamlar berilgan bo'lsin. Agar har bir $x\in X$ elementga biror f qoida bo'yicha Y to'plamdan yagona y element mos qo'yilsa, u holda X to'plamda aniqlangan Y to'plamdan qiymatlar qabul qiluvchi f *akslantirish berilgan* deyiladi. Bundan keyin *funksiya* termini o'rniga *akslantirish* atamasini ishlatamiz. Agar $Y=\mathbb{R}$ yoki $Y=\mathbb{C}$ bo'lsa f ga X da aniqlangan *haqiqiy* yoki *kompleks qiymatli funksiya* deyiladi.

X to'plamda aniqlangan va Y to'plamdan qiymatlar qabul qiluvchi f akslantirish uchun $f : X \to Y$ belgilashdan foydalaniladi. Endi $f : X \to Y$ akslantirish uchun quyidagi tushunchalarni keltiramiz.

Har bir $a \in X$ uchun unga mos qo'yilgan $b = f(a) \in Y$ element a elementning f akslantirishdagi *tasviri* yoki *aksi* deyiladi. Umuman, X to'plamning biror A qismi berilgan bo'lsa, A to'plam barcha elementlarining Y dagi tasvirlaridan iborat bo'lgan to'plam A to'plamning f akslantirishdagi *tasviri* yoki *aksi* deyiladi va $f(A)$ bilan belgilanadi. Endi $b \in Y$ ixtiyoriy element bo'lsin. X to'plamning b ga akslanuvchi barcha elementlaridan iborat qismi b elementning f akslantirishdagi *asli* deyiladi va u $f^{-1}(b) = \{x \in X : f(x) = b\}$ bilan belgilanadi. O'z navbatida har bir $B \subset Y$ to'plam uchun X ning B ga akslanuvchi (o'tuvchi) qismi B to'plamning f akslantirishdagi *asli* deyiladi va $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$ shaklda belgilanadi. Agar barcha $b \in B$ elementlar uchun ularning $f^{-1}(b)$ aslilari bo'sh bo'lsa, u holda B to'plamning asli ham bo'sh to'plam bo'ladi. Umuman olganda, Y to'plam sifatida f akslantirishning qiymatlar sohasini o'zida saqlovchi to'plam qaraladi. Aniqlanish sohasi X bo'lgan $f : X \to Y$ akslantirishda $f(X) = Y$ tenglik bajarilsa, f akslantirish X to'plamni Y to'plamning *ustiga* yoki *syuryektiv akslantirish* deyiladi. Umumiy holda, ya'ni $f(X) \subset Y$ bo'lsa, u holda f akslantirish X to'plamni Y to'plamning *ichiga akslantiradi* deyiladi. Agar $f : X \to Y$ akslantirishda X dan olingan har xil x_1 va x_2 elementlarga har xil $y_1 = f(x_1)$ va $y_2 = f(x_2)$ tasvirlar mos kelsa, u holda f *inyektiv akslantirish* yoki *inyeksiya* deyiladi. Bir vaqtda ham syuryektiv ham inyektiv bo'lgan $f : X \to Y$ akslantirishga *biyektiv* akslantirish yoki *biyeksiya* deyiladi.

Endi $f : X \to Y$ akslantirishga misollar keltiramiz. 2.1-2.3 misollarda keltirilgan akslantirishlarning qiymatlar sohalarini toping.

2.1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2.$

2.2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = [x]$. Bu yerda $[x]$ belgi x sonining butun qismi.

2.3. Dirixle funksiyasi $\mathfrak{D} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\mathfrak{D}(x) = \begin{cases} 1, & agar \ \ x \in \mathbb{Q} \\ 0, & agar \ \ x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}. \end{cases} \tag{2.1}$$

Yechish. Hozir biz 2.1-2.3-misollarda keltirilgan akslantirishlarning qiymatlar sohasini topamiz.

2.1-misolda keltirilgan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, akslantirishning qiymatlar sohasi $E(f) = [0, \infty)$ dan iborat. Chunki barcha $x \in \mathbb{R}$ lar uchun $x^2 \geq 0$ va ixtiyoriy $y \in [0, \infty)$ uchun $f(\sqrt{y}) = y$ tenglik o'rinli.

2.2-misolda keltirilgan $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = [x]$ akslantirish uchun ixtiyoriy $x \in \mathbb{R}$ da $g(x) \in \mathbb{Z}$, ya'ni $E(g) \subset \mathbb{Z}$. Ikkinchidan ixtiyoriy $n \in \mathbb{Z}$ uchun $g(n) = n$, ya'ni $\mathbb{Z} \subset E(g)$. Bulardan $E(g) = \mathbb{Z}$ ekanligini olamiz.

Dirixle funksiyasi $\mathfrak{D} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ning qiymatlar sohasi, aniqlanishiga ko'ra $E(\mathfrak{D}) = \{0, 1\}$ ikki nuqtali to'plamdan iborat. □

2.4-2.6-misollardagi akslantirishlarning qiymatlar sohasini toping.

2.4. Riman funksiyasi $\mathfrak{R} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\mathfrak{R}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & agar \ x = \dfrac{m}{n}, \quad m \in \mathbb{Z}, \ n \in \mathbb{N} \\ 0, & agar \ x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}. \end{cases} \tag{2.2}$$

Bu formulada $\dfrac{m}{n}$ – qisqarmas kasr.

2.5. Ortogonal proyeksiyalash funksiyasi $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad P(x, y) = x.$

2.6. Sferik simmetrik akslantirish

$$S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \ S(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

2.7. 2.1-misoldagi f akslantirishda $A = [0, 3)$ to'plamning aksi (tasviri) va $B = (1, 4)$ to'plamning aslini toping.

Yechish. $f(x) = x^2$ akslantirish $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ da o'suvchi va uzluksiz funksiya bo'lganligi uchun $f([0, 3)) = [0, 9)$ bo'ladi. Endi $B = (1, 4)$ to'plamning f akslantirishdagi aslini topamiz $\{x \in \mathbb{R} : x^2 \in (1, 4)\}$ yoki $1 < x^2 < 4$ qo'sh tengsizlikni qanoatlantiruvchi haqiqiy sonlar to'plami $f^{-1}(B)$ ga teng. Bu tengsizlikning yechimi $(-2, -1) \cup (1, 2)$ to'plamdan iborat. Demak, $f^{-1}(B) = (-2, -1) \cup (1, 2)$ ekan. □

2.8. 2.2-misoldagi g akslantirishda $A = [0, 3)$ to'plamning aksi va $B = (1, 4)$ to'plamning aslini toping.

2.9. 2.3-misoldagi $\mathfrak{D}$ akslantirishda $A = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ to'plamning aksi va $B = (1, \infty)$ to'plamning aslini toping.

Yechish. $\mathfrak{D}$ akslantirish $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ to'plamning barcha elementlariga nolni mos qo'yadi, shuning uchun $\mathfrak{D}(\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) = \{0\}$. Dirixle funksiyasining 1 dan katta qiymatlari mavjud emas. Demak, $\mathfrak{D}^{-1}(B) = \emptyset$. □

2.10. 2.4-misoldagi $\mathfrak{R}$ akslantirishda $A = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ to'plamning tasviri va $B = (1, \infty)$ to'plamning aslini toping.

2.11. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$ akslantirish biyeksiya ekanligini isbotlang.

Isbot. Chiziqli $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ akslantirishning biyeksiya ekanligini ko'rsatish uchun ixtiyoriy $c \in \mathbb{R}$ da $ax + b = c$ tenglamaning yagona yechimga ega ekanligini ko'rsatish yetarli. Yechimning mavjudligi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, akslantirishning syuryektivligini, yechimning yagonaligi esa uning inyektivligini ta'minlaydi. Bu tenglamaning yechimi yagona bo'lib, u $x = \dfrac{c - b}{a}$ dan iborat. □

2.12. Agar $f : X \to Y$ biyektiv akslantirish bo'lsa, u holda ixtiyoriy $A \subset X$ uchun $f : A \to B$ $(B = f(A))$ ham biyeksiya bo'lishini isbotlang.

Isbot. $f(A) = B$ ekanligidan uning syuryektiv akslantirish ekanligi kelib chiqadi, inyektivligi esa $f : X \to Y$ ning inyektivligidan kelib chiqadi. $\square$

2.13. Inyektiv funksiyalar yig'indisi va ayirmasi inyektiv bo'lishi ham, bo'lmasligi ham mumkin. Bu hollarga misollar keltiring.

2.14. Syuryektiv funksiyalar yig'indisi va ayirmasi syuryektiv bo'lishi ham, bo'lmasligi ham mumkin. Bu hollarga misollar keltiring.

2.15. Biyektiv funksiyalar yig'indisi va ayirmasi biyektiv bo'lishi ham, bo'lmasligi ham mumkin. Bu hollarga misollar keltiring.

2.16. Agar f inyektiv funksiya bo'lsa, u holda ixtiyoriy nolmas $\alpha \in \mathbb{R}$ son uchun αf ham inyektiv funksiya bo'ladi. Isbotlang.

2.17. Agar f inyektiv funksiya bo'lsa, u holda ixtiyoriy $\alpha \in \mathbb{R}$ son uchun $\alpha + f$ ham inyektiv funksiya bo'ladi. Isbotlang.

2.18. Agar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ syuryektiv funksiya bo'lsa, u holda ixtiyoriy nolmas $\alpha \in \mathbb{R}$ son uchun αf ham syuryektiv funksiya bo'ladi. Isbotlang.

2.19. Agar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ syuryektiv funksiya bo'lsa, u holda ixtiyoriy $\alpha \in \mathbb{R}$ son uchun $\alpha + f$ ham syuryektiv funksiya bo'ladi. Isbotlang.

2.20. Agar f biyektiv funksiya bo'lsa, u holda $\beta \in \mathbb{R}$ va nolmas $\alpha \in \mathbb{R}$ sonlar uchun $\alpha f + \beta$ ham biyektiv funksiya bo'ladi. Isbotlang.

2.21. Agar $f(x) = kx + l,\ k > 0$ funksiya uchun $f(a) = c,\ \ f(b) = d$ bo'lsa, u holda $f : [a,\ b] \to [c,\ d]$ chiziqli funksiya biyeksiya bo'ladi. Isbotlang.

2.22. Ikki to'plam birlashmasining asli ular aslilarining birlashmasiga teng, ya'ni quyidagi tenglikni isbotlang

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B).$$

2.23. Ikki to'plam kesishmasining asli ular aslilarining kesishmasiga teng, ya'ni quyidagi tenglikni isbotlang

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

2.24. Quyidagi tengliklarni isbotlang:

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha} f^{-1}(A_\alpha), \quad f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha} A_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha} f^{-1}(A_\alpha).$$

2.25. Ikki to'plam birlashmasining aksi ular tasvirlarining birlashmasiga teng, ya'ni quyidagi tenglikni isbotlang

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B). \tag{2.3}$$

Isbot. Agar $y \in f(A \cup B)$ ixtiyoriy element bo'lsa, u holda $y = f(x)$ bo'lib, x element A va B to'plamlardan aqalli biriga tegishli bo'ladi. Shunday ekan, $y \in f(A) \cup f(B)$. Bu yerdan $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.

Endi teskari munosabatni ko'rsatamiz. Faraz qilaylik, $y \in f(A) \cup f(B)$ ixtiyoriy element bo'lsin. U holda $y = f(x)$ bo'lib, x element A va B to'plamlardan aqalli biriga tegishli bo'ladi, ya'ni $x \in A \cup B$. Bundan, $y = f(x) \in f(A \cup B)$ va demak, $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$. Bu munosabatlardan (2.3) tenglik kelib chiqadi. $\square$

2.26. (2.3) tenglikni ixtiyoriy (chekli yoki cheksiz) sondagi to'plamlar uchun o'rinli ekanligini, ya'ni $f\left(\bigcup_{\alpha} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha} f(A_\alpha)$ tenglikni isbotlang.

2.27. Umuman olganda, ikkita to'plam kesishmalarining aksi ular aksilarining kesishmasiga teng emas. Bunga misol keltiring.

2.28. 2.5-misolda keltirilgan ortogonal proyeksiyalash akslantirishi $P(x,y) = x$ va $A = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1,\ y = 0\}$, $B = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1,\ y = 1\}$ to'plamlar berilgan. $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$ tenglik to'grimi?

Yechish. A va B to'plamlar o'zaro kesishmaydi, ya'ni $A \cap B = \emptyset$. Bu yerdan $P(A \cap B) = \emptyset$ ekanligini olamiz. Bu to'plamlarning P akslantirishdagi tasvirlari ustma-ust tushadi, ya'ni $P(A) = [0,\ 1]$, $P(B) = [0,\ 1]$. Demak, $P(A) \cap P(B) = [0,\ 1] \neq \emptyset = P(A \cap B)$. □

2.29. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ munosabatni isbotlang.

2.30. Biror X to'plam va $A \subset X$ qism to'plam berilgan bo'lsin. X to'plamda aniqlangan

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & agar \quad x \in A \\ 0, & agar \quad x \notin A \end{cases} \tag{2.4}$$

funksiya A *to'plamning xarakteristik funksiyasi* yoki *indikatori* deyiladi. $X \backslash A$; $A \cup B$; $A \cap B$; $A \backslash B$; $A \Delta B$ to'plamlarning xarakteristik funksiyalarini $\chi_A(x)$ va $\chi_B(x)$ funksiyalar orqali ifodalang.

2.31. Quyidagi ikki tenglikni isbotlang.

$$\chi_{\cup_\alpha A_\alpha}(x) = \sup_\alpha \chi_{A_\alpha}(x); \qquad \chi_{\cap_\alpha A_\alpha}(x) = \inf_\alpha \chi_{A_\alpha}(x).$$

2.32. $f(x) = x^2$ bo'lsin. U holda:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ akslantirish syuryektiv ham, inyektiv ham emas;

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ akslantirish syuryektiv, ammo inyektiv emas;

c) $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ akslantirish ham syuryektiv, ham inyektiv ekanligini isbotlang.

2.33. Agar $f : A \to B$ va $g : B \to A$ inyektiv akslantirishlar mavjud bo'lsa, $\varphi : A \to B$ biyeksiya mavjudligini isbotlang.

2.34. Agar $f : A \to B$ va $g : B \to A$ syuryektiv akslantirishlar mavjud bo'lsa, A ni B ga biyektiv akslantirish mavjudmi?

2.35. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ akslantirish $f((x, y)) = y$ tenglik bilan aniqlangan. $A = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$ va $B = \{(1, y) : y \in \mathbb{R}\}$ to'plamlar uchun $f(A \cap B)$ va $f(A) \cap f(B)$ to'plamlarni toping. Berilgan $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ akslantirish uchun $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ tenglik to'g'rimi?

2.36. Ixtiyoriy $f : X \to Y$ akslantirish va $A, B \subset X$ to'plamlar uchun $A \subset B$ bo'lsa, $f(A) \subset f(B)$ munosabatni isbotlang.

2.37. $f : X \to Y$ akslantirish uchun quyidagi jumlalar teng kuchli ekanligini isbotlang:

a) $f -$ inyektiv;

b) ixtiyoriy $A, B \subset X$ uchun $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$;

c) barcha $B \subset A$ to'plamlar uchun $f(A \backslash B) = f(A) \backslash f(B)$;

d) ixtiyoriy $A \subset X$ uchun $f^{-1}(f(A)) = A$.

2.38. $f : X \to Y$ akslantirish va $A, B \subset Y$ to'plamlar uchun

a) $f(f^{-1}(A)) = A \cap f(X)$.

b) $A \supset B$ bo'lganda $f^{-1}(A \backslash B) = f^{-1}(A) \backslash f^{-1}(B)$ tengliklarni isbotlang.

2.39. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0,5 \cdot [x]$ funksiya berilgan. Agar $A = [0, 8]$, $B = (2, 3)$ bo'lsa, $f(A)$ va $f^{-1}(B)$ to'plamlarni toping.

2.40. $f : X \to [5, 10]$, $f(x) = x^2 + 1$ funksiya berilgan. f ustiga (syuryektiv) akslantirish bo'ladigan maksimal X to'plamni toping.

2.41. $f: X \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^2 + 1$ funksiya berilgan. X to'plam qanday tanlansa, f inyektiv akslantirish bo'ladi?

2.42. $M(x, y)$ nuqta $(0,\ 1) \times (0,\ 1)$ kvadratning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. Uning abssissasi x va ordinatasi y larni cheksiz davriy o'nli kasr ko'rinishda $x = 0, n_1 n_2 n_3 \ldots$ va $y = 0, m_1 m_2 m_3 \ldots$ tasvirlaymiz. Quyidagi $f: (0,\ 1) \times (0,\ 1) \to (0,\ 1)$ akslantirishni

$$f(M(0, n_1 n_2 n_3 \ldots,\ 0, m_1 m_2 m_3 \ldots)) = P(0, n_1 m_1 n_2 m_2 n_3 m_3 \ldots)$$

aniqlaymiz. Bu akslantirish syuryektiv bo'ladimi? Biyektivchi?

2.43. $f: [0,\ \pi] \to [-1,\ 1]$, $\quad f(x) = \cos x$,
$g: [0, \pi] \to [0,\ 1]$, $\quad g(x) = \sin x$,
$\varphi: [0,\ \frac{\pi}{2}] \to [0,\ 1]$, $\quad \varphi(x) = \sin x$,
$\psi: [0,\ 3] \to [0,\ 10]$, $\quad \psi(x) = x^2 + 1$. akslantirishlar ichidan inyektiv, syuryektiv va biyektivlarini ajrating.

3-§. Chekli va cheksiz to'plamlar

To'plamlarni sinflarga ajratish. Ekvivalentlik munosabatlari

Ko'pgina masalalarda berilgan to'plam elementlarini ba'zi belgilariga qarab o'zaro kesishmaydigan qism to'plamlarga ajratiladi. Masalan, fazoni markazi koordinata boshida va radiusi r bo'lgan har xil sferalarga ajratish mumkin va bu sferalar o'zaro kesishmaydi. Bir shahar aholisini bir yilda tug'ilganlik belgisiga ko'ra qism to'plamlarga ajratish mumkin. Bunday misollarning har biri to'plamni o'zaro kesishmaydigan sinflarga ajratish deyiladi.

To'plamlarni o'zaro kesishmaydigan sinflarga ajratish belgilari har xil bo'lishi mumkin. Ammo bu belgilar ixtiyoriy emas. Masalan, tekislikda ikki a va b nuqtalar orasidagi masofa 1 dan kichik bo'lsa, ularni bitta sinfga kiritsak, bu belgi tekislikni o'zaro kesishmaydigan sinflarga ajratmaydi, chunki a va b nuqtalar orasidagi masofa 1 dan kichik. b va c nuqtalar orasidagi masofa ham 1 dan kichik bo'lib, a va c nuqtalar orasidagi masofa 1 dan katta bo'lishi mumkin. Bundan ko'rinadiki, a va b nuqtalar bir sinfda, b va c ham bir sinfda. U holda bir sinfga orasidagi masofa 1 dan katta bo'lgan a va c nuqtalar tegishli bo'ladi. Hosil qilingan xulosa sinflarning tashkil qilinishiga zid, ya'ni tekislik bu belgi yordamida o'zaro kesishmaydigan sinflarga ajralmaydi.

Endi to'plam elementlari qanday shartlarni qanoatlantiruvchi belgilar yordamida o'zaro kesishmaydigan sinflarga ajralishini qarab chiqamiz.

3.1-ta'rif. *$X \times X$ to'plamning ixtiyoriy R qism toplami munosabat deyiladi. ya'ni $(a, b) \in R$ bo'lsa, a element b element bilan R munosabatda deyiladi va $a \underset{R}{\sim} b$ shaklda belgilanadi.*

3.2-ta'rif. *Agar R munosabat quyidagi shartlarni qanoatlantirsa, unga ekvivalentlik munosabati deyiladi:*

1. *Ixtiyoriy $a \in X$ element uchun $a \underset{R}{\sim} a$ (refleksivlik);*
2. *Agar $a \underset{R}{\sim} b$ bo'lsa, u holda $b \underset{R}{\sim} a$ (simmetriklik);*
3. *Agar $a \underset{R}{\sim} b$ va $b \underset{R}{\sim} c$ bo'lsa, u holda $a \underset{R}{\sim} c$ (tranzitivlik).*

3.1. M to'plamda kiritilgan φ munosabat M ni o'zaro kesishmaydigan sinflarga ajratishi uchun uning ekvivalentlik munosabati bo'lishi zarur va yetarli. Isbotlang.

3.2. Bizga $f : X \to Y$ akslantirish berilgan bo'lsin. Agar $a, b \in X$ elementlar uchun $f(a) = f(b)$ bo'lsa, ularni φ munosabatda deymiz. Bu munosabatning ekvivalentlik munosabati bo'lishini isbotlang.

3.3. Har qanday $f : X \to Y$ akslantirish yordamida X ni o'zaro kesishmaydigan sinflarga ajratish mumkinligini isbotlang.

3.4. 3.2-misoldan foydalanib, ortogonal proyeksiyalash akslantirishi P :

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $P(x, y) = x$ yordamida $\mathbb{R}^2$ ni o'zaro kesishmaydigan sinflarga ajrating.

3.5. Sferik simmetrik akslantirish $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_+$, $S(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ yordamida $\mathbb{R}^3$ fazoni o'zaro kesishmaydigan sinflarga ajrating.

3.6. Agar x va y haqiqiy sonlarning ayirmasi butun son bo'lsa, ularni ρ munosabatda deymiz. Bu munosabat ekvivalentlik munosabati bo'lishini isbotlang.

3.7. Butun qismlari bir xil haqiqiy sonlarni bir sinfga to'plash yo'li bilan haqiqiy sonlar to'plamini sinflarga ajratamiz. Bu sinflarga ajratishga mos keluvchi akslantirishni quring.

3.8. Agar α va β kompleks sonlarning mavhum qismlari teng bo'lsa, ularni ρ munosabatda deymiz. Bu munosabat ekvivalentlik munosabati bo'ladimi?

Ekvivalent to'plamlar. Chekli va cheksiz to'plamlar. Chekli dona elementdan iborat to'plamga *chekli to'plam* deyiladi, aks holda to'plam *cheksiz* deyiladi. Cheksiz to'plamlar ichida eng soddasi *sanoqli to'plam* deb ataluvchilaridir.

3.3-ta'rif. *Agar M to'plam bilan natural sonlar to'plami o'rtasida biyektiv moslik o'rnatish mumkin bo'lsa, M ga sanoqli to'plam deyiladi.*

Boshqacha aytganda, agar M to'plam elementlarini natural sonlar vositasida $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ cheksiz ketma-ketlik ko'rinishida nomerlab chiqish mumkin bo'lsa, M ga *sanoqli to'plam* deyiladi. Chekli yoki sanoqli to'plamlarni ifodalashda biz $\{\}$ qavsdan foydalanamiz. Masalan, 1, 2, 3, 4 sonlardan iborat to'plamni $\{1, 2, 3, 4\}$ shaklda yozamiz.

3.4-ta'rif. *Sanoqli bo'lmagan cheksiz to'plam sanoqsiz to'plam deyiladi.*

3.5-ta'rif. *Agar A va B to'plamlar o'rtasida biyektiv moslik o'rnatish mumkin bo'lsa, u holda ular ekvivalent to'plamlar deyiladi va $A \sim B$ shaklda belgilanadi.*

Endi sanoqli to'plam tushunchasini boshqacha ta'riflash mumkin: agar to'plam natural sonlar to'plamiga ekvivalent bo'lsa, u *sanoqli to'plam* deyiladi.

3.6-ta'rif. $[0, 1]$ *kesma va unga ekvivalent bo'lgan to'plamlar kontinuum quvvatli to'plamlar deyiladi.*

Agar A va B to'plamlar ekvivalent bo'lsa, u holda ular *bir xil quvvatga ega* deyiladi. Shunday qilib, quvvat ixtiyoriy ikki ekvivalent to'plamlar uchun umumiylik xususiyatidir. A to'plamning quvvati $\overline{\overline{A}}$ bilan belgilanadi. Agar A va B to'plamlar bir xil quvvatga ega bo'lsa, u holda biz $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$ shaklda yozamiz. Agar A va B to'plamlar ekvivalent bo'lmasa va A to'plam B to'plamning biror qismiga ekvivalent bo'lsa, u holda B to'plam A to'plamdan *quvvatliroq* deyiladi va $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$ shaklda yoziladi. Agar A chekli to'plam bo'lib, uning elementlari soni n ga teng bo'lsa, u holda $\overline{\overline{A}} = n$ shaklda yoziladi. Natural sonlar to'plami va unga ekvivalent to'plam quvvati uchun $\aleph_0$ ("alef nol" deb o'qiladi) belgidan foydalaniladi. $[0, 1]$ kesma va unga ekvivalent to'plamlar "kontinuum quvvat" li to'plamlar deyiladi. Bu quvvat uchun c simvol ishlatiladi, ya'ni $A \sim [0, 1]$ bo'lsa, u holda $\overline{\overline{A}} = c$ shaklda yoziladi. Agar B to'plamning biror B_1 xos qism to'plami kontinuum quvvatli bo'lib, $\overline{\overline{B}} > \overline{\overline{B_1}}$ bo'lsa, u holda B *giperkontinuum quvvatli to'plam* deyiladi.

Kantor–Bernshteyn teoremasi yordamida to'plamlarning ekvivalentligi oson tekshiriladi. Bu teoremani quyidagicha bayon qilish mumkin.

3.1-teorema *(Kantor Bernshteyn). Agar A to'plam B to'plamning B_1 qismiga, B to'plam esa A to'plamning A_1 qismiga ekvivalent bo'lsa, u holda A va B to'plamlar ekvivalentdir.*

Endi sanoqli va sanoqsiz to'plamlarga misollar keltiramiz.

3.9. $\mathbb{Z}$ – butun sonlar to'plami sanoqli. Isbotlang.

Isbot. Butun sonlar to'plami $\mathbb{Z}$ va natural sonlar to'plami $\mathbb{N}$ o'rtasida biyektiv moslikni quyidagicha o'rnatish mumkin:

$$f:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}, \quad f(n)=\begin{cases} 2n+1, & agar \ \ n\geq 0 \\ -2n, & agar \ \ n<0. \end{cases}$$

f ning biyektiv akslantirish ekanligi oson tekshiriladi. Demak, butun sonlar to'plami sanoqli ekan. □

3.10. Barcha juft natural sonlar to'plami va natural sonlar to'plami o'rtasida biyektiv moslik o'rnating.

3.11. Ratsional sonlar to'plamining sanoqli ekanligini isbotlang.

3.12. Sanoqli to'plamning ixtiyoriy qism to'plami chekli yoki sanoqlidir. Isbotlang.

3.13. Chekli yoki sanoqlita sanoqli to'plamlar birlashmasi yana sanoqli to'plamdir. Isbotlang.

3.14. Chekli sondagi sanoqli to'plamlarning Dekart ko'paytmasi sanoqli to'plamdir. Isbotlang.

3.15. Har qanday cheksiz to'plam sanoqli qism to'plamga ega.

3.16. Ixtiyoriy ikkita $[a, b]$ va $[c, d]$ kesmalardagi nuqtalar to'plamlari ekvivalentligini isbotlang. Bu yerda $a<b$, $c<d$ deb faraz qilinadi.

Isbot. Bu to'plamlar o'rtasida biyektiv moslikni

$$\varphi:[a, b]\to[c, d], \quad \varphi(x)=\frac{d-c}{b-a}(x-a)+c.$$

orqali o'rnatish mumkin. $\varphi(a)=c$, $\varphi(b)=d$ ekanligini hisobga olsak, φ ning biyektiv akslantirish ekanligi 2.21-misoldan kelib chiqadi. □

3.17. $\mathbb{R}$ va $(0,\ 1)$ interval ekvivalent to'plamlar ekanligini isbotlang.

Isbot. Bu to'plamlar o'rtasida biyektiv moslikni

$$f : \mathbb{R} \to (0,\ 1), \quad f(x) = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}$$

funksiya yordamida o'rnatish mumkin. Bu akslantirishning biyektiv ekanligi arktangens funksiyaning xossalaridan kelib chiqadi. □

3.18. Ixtiyoriy cheksiz to'plam o'zining biror xos qism to'plamiga ekvivalent bo'ladi. Isbotlang.

3.19. O'zbekistondagi barcha talabalar to'plami sanoqlimi?

3.20. Ayirmasi chekli, kesishmasi sanoqli bo'lgan A va B sanoqli to'plamlarga misol keltiring.

3.21. Simmetrik ayirmasi sanoqli, kesishmasi chekli bo'lgan A va B sanoqli to'plamlarga misol keltiring.

3.22. A va B sonli to'plamlar sanoqli bo'lsa, ularning arifmetik yig'indisi ham sanoqli bo'lishini isbotlang.

3.23. $\{x \in \mathbb{R} : \sin x = 0,5\}$ to'plam sanoqli ekanligini isbotlang.

3.24. $\{x \in \mathbb{R} : \cos x \in \mathbb{Q}\}$ to'plamning quvvatini toping.

3.25. Barcha ratsional koeffitsiyentli ko'phadlar to'plami sanoqli ekanligini isbotlang.

3.26. Agar ξ son biror ratsional koeffitsiyentli ko'phadning ildizi bo'lsa, ξ *algebraik son* deyiladi. Algebraik sonlar to'plamining sanoqli ekanligini isbotlang.

3.27. Agar A to'plam B ga, B to'plam C ga ekvivalent bo'lsa, u holda A to'plam C ga ekvivalent bo'lishini isbotlang.

3.28. To'plamlar o'rtasida kiritilgan ekvivalentlik munosabati refleksiv, simmetrik va tranzitiv bo'lishini isbotlang.

3.29. $[0, 1]$ kesmadagi haqiqiy sonlar to'plami sanoqsizdir. Isbotlang.

3.30. $[0, 1]$ kesma va $(0, 1)$ interval ekvivalent ekanligini isbotlang.

Isbot. Bu to'plamlarni ekvivalent ekanligini ko'rsatishda Kantor-Bernshteyn teoremasidan foydalanamiz. $A = [0, 1]$, $A_1 = (0, 1)$, $B = (0, 1)$ va $B_1 = [1/4, 1/2]$ desak, u holda 3.16-misolga ko'ra $A \sim B_1$ bo'ladi. $A_1 = B$ bo'lganligi uchun $I : A_1 \to B$, $Ix = x$ akslantirish biyeksiya bo'ladi, ya'ni $B \sim A_1$. Kantor-Bernshteyn teoremasiga ko'ra $A \sim B$. □

3.31. $[0, 1]$ kesmani $(0, 1)$ intervalga biyektiv akslantiruvchi moslikni quring.

3.32. $[-1, 1] \times [-1, 1]$ kvadrat va $[a, b] \times [c, d]$ to'g'ri to'rtburchak o'rtasida biyektiv moslik o'rnating.

3.33. $[-1, 1] \times [0, 1]$ va $\mathbb{R}^2$ o'rtasida biyeksiya o'rnating.

3.34. Haqiqiy sonlar to'plami sanoqsizdir. Isbotlang.

3.35. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ va $\mathbb{R}$ o'rtasida biyeksiya o'rnating.

3.36. A chekli B sanoqli to'plam bo'lsin, u holda $B \sim A \cup B$, $B \sim A \Delta B$ ekanligini isbotlang.

"*Kantor to'plami*" haqida masala. $E = [0, 1]$ bo'lsin. Undan $K_1 = (3^{-1}, 2 \cdot 3^{-1})$ intervalni chiqarib tashlaymiz, qolgan yopiq to'plamni F_1 bilan belgilaymiz. Keyin F_1 dan $K_{21} = (9^{-1}, 2 \cdot 9^{-1})$ va $K_{22} = (7 \cdot 9^{-1}, 8 \cdot 9^{-1})$ intervallarni chiqarib tashlaymiz, ularning birlashmasini K_2 orqali, qolgan yopiq to'plamni, ya'ni

$$F_1\backslash K_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right]\bigcup\left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right]\bigcup\left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right]\bigcup\left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

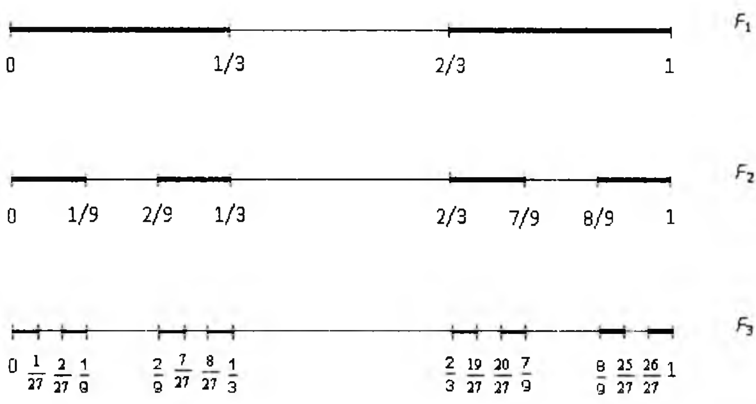
to'plamni F_2 bilan (3.1-chizma) belgilaymiz. Bu to'rtta kesmaning har biri teng 3 qismga bo'linib, o'rtadagi uzunligi 3^{-3} ga teng bo'lgan interval chiqarib tashlanadi. Chiqarib tashlangan

$$K_{31}\cup K_{32}\cup K_{33}\cup K_{34} = \left(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right)\bigcup\left(\frac{7}{27}, \frac{8}{27}\right)\bigcup\left(\frac{19}{27}, \frac{20}{27}\right)\bigcup\left(\frac{25}{27}, \frac{26}{27}\right)$$

to'plamni K_3 bilan $F_2\backslash K_3$ ni esa F_3 bilan (3.1-chizma) belgilaymiz. Bu jarayonni cheksiz davom ettirib, yopiq to'plamlarning kamayuvchi F_n ketma-ketligini hosil qilamiz. Agar

$$K = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$$

deb belgilasak, K yopiq to'plam bo'ladi. U $[0, 1]$ kesmadan sanoqli sondagi $K_1, K_2, \ldots, K_n, \ldots$ intervallarni chiqarib tashlash natijasida hosil bo'ladi. Hosil bo'lgan K to'plam *Kantor to'plami* deyiladi.



3.1k-chizma

3.37. Kantor to'plamining sanoqsiz to'plam ekanligini isbotlang.

3.38-3.44-misollarda keltirilgan to'plamlarni kontinuum quvvatli ekanligini isbotlang.

3.38. Tekislikdagi barcha nuqtalar to'plami.

3.39. Sfera sirtidagi nuqtalar to'plami.

3.40. Uch o'lchamli fazodagi nuqtalar to'plami.

3.41. Sfera ichidagi nuqtalar to'plami.

3.42. $[a, b]$ kesmada aniqlangan uzluksiz funksiyalar to'plami.

3.43. Tekislikdagi hamma to'g'ri chiziqlar to'plami.

3.44. Kantor to'plami.

3.45. Tekislikdagi ratsional koordinatali nuqtalar to'plamining sanoqli ekanligini isbotlang.

3.46. Ixtiyoriy cheksiz M va sanoqli A to'plamlar uchun $M \sim M \cup A$ munosabatni isbotlang.

3.47. Ixtiyoriy kontinuum quvvatli M va sanoqli A to'plamlar uchun $M \sim M \cup A$, $M \sim M \setminus A$, $M \sim M \Delta A$ munosabatlarni isbotlang.

3.48. Ikkita har xil cheksiz o'nli kasrli yoyilmalarga ega bo'lgan sonlar to'plamining sanoqli ekanligini isbotlang.

3.49. Barcha irratsional sonlar to'plamining sanoqsiz ekanligini isbotlang.

3.50. $[0, 1]$ dagi barcha ratsional sonlar bilan $[0, 1] \times [0, 1]$ dagi barcha ratsional koordinatali nuqtalar to'plami o'rtasida biyeksiya o'rnating.

3.51. Koordinata boshidan o'tuvchi barcha to'g'ri chiziqlar to'plami $[0, 1]$ to'plamga ekvivalentmi?

3.52. $[0, 1]$ to'plamni $[0, 1]\times[0, 1]$ to'plamga biyektiv akslantiring.

3.53. Ushbu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_n}{2^n}$ qatorda ε_n soni 0 yoki 1 ga teng bo'lishi mumkin. Demak, qator yaqinlashuvchi. Ixtiyoriy $x\in[0, 1]$ uchun ε_n sifatida 0 yoki 1 sonlarni shunday tanlash mumkinki,

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_n}{2^n}$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Isbot qiling. Qanday x sonlar uchun bu tanlash yagona usulda amalga oshiriladi?

3.54. Sonlar o'qidagi A to'plamning ixtiyoriy ikki nuqtasi orasidagi masofa birdan katta bo'lsa, A ning chekli yoki sanoqli to'plam ekanligini isbotlang.

3.55. 3.53-masaladan foydalanib hadlari faqat 0 yoki 1 bo'lganbarcha ketma-ketliklar to'plami kontinuum quvvatli ekanligini isbotlang.

3.56. Chekli sondagi kontinuum quvvatli to'plamlarning Dekart ko'paytmasi kontinuum quvvatga ega. Isbotlang.

3.57. Kontinuum quvvatli sonli to'plamlarning arifmetik yig'indisi yana kontinuum quvvatli to'plami bo'lishini isbotlang.

3.58. Sanoqli va kontinuum quvvatli to'plamlarning Dekart ko'paytmasi kontinuum quvvatga ega. Isbotlang.

3.59. Sanoqli va kontinuum quvvatli sonli to'plamlarning arifmetik yig'indisi kontinuum quvvatli to'plam bo'lishini isbotlang.

3.60. Agar $A\subset B\subset C$ bo'lib, $A\sim C$ bo'lsa, $A\sim B$ bo'lishini isbotlang.

3.61. $[0, 1]$ kesmada aniqlangan va qiymatlari faqat 0 yoki 1 bo'lgan barcha funksiyalar to'plamining kontinuumdan quvvatliroq, ya'ni giperkontinuum quvvatli bo'lishini isbotlang.

3.62-3.64-misollarda keltirlgan to'plamlarning giperkontinuum quvvatli ekanligini isbotlang.

3.62. $[0, 1]$ kesmaning barcha qism to'plamlaridan iborat to'plam.

3.63. $\mathbb{R}^2$ ning barcha qism to'plamlaridan iborat to'plam.

3.64. $[0, 1]$ kesmada aniqlangan barcha funksiyalar to'plami.

4-§. To'plamlar sistemalari

To'plamlar halqasi va yarim halqasi. Elementlari to'plamlardan iborat to'plam *to'plamlar sistemasi* deyiladi. Biz asosan oldindan berilgan X to'plamning ba'zi qism to'plamlaridan iborat sistemalarni qaraymiz. To'plamlar sistemalarini belgilash uchun biz gotik alifbosining bosh harflaridan foydalanamiz. Bizni asosan to'plamlar ustidagi ba'zi amallarga nisbatan yopiq bo'lgan sistemalar qiziqtiradi.

4.1-ta'rif. *Agar $\mathfrak{S}$ to'plamlar sistemasi simmetrik ayirma va kesishma amallariga nisbatan yopiq, ya'ni ixtiyoriy $A, B \in \mathfrak{S}$ to'plamlar uchun $A \Delta B \in \mathfrak{S}$ va $A \cap B \in \mathfrak{S}$ bo'lsa, u holda $\mathfrak{S}$ to'plamlar sistemasiga halqa deyiladi.*

4.1. Agar $\mathfrak{S}$ to'plamlar sistemasi halqa bo'lsa, u holda $\mathfrak{S}$ birlashma va ayirma amallariga nisbatan ham yopiq bo'ladi. Isbotlang.

Isbot. Ixtiyoriy A, B to'plamlar uchun $A \cup B = (A \Delta B) \, \Delta \, (A \cap B)$ (1.7-misol) va $A \backslash B = A \, \Delta \, (A \cap B)$ (1.8-misolga qarang) tengliklar o'rinli. Bu tengliklardan hamda $\mathfrak{S}$ sistema halqa ekanligidan $A \cup B \in \mathfrak{S}$ va

$A \setminus B \in \mathfrak{S}$ munosabatlar kelib chiqadi. Demak, halqa birlashma va ayirma amallariga nisbatan ham yopiq sistema bo'lar ekan. □

Ushbu $A \setminus A = \emptyset$ tenglik ko'rsatadiki, har qanday halqa o'zida bo'sh to'plamni saqlaydi. Faqat bo'sh to'plamdan iborat sistema mumkin bo'lgan halqalar ichida eng kichigi bo'ladi.

Agar $\mathfrak{S}$ to'plamlar sistemasida shunday $E \in \mathfrak{S}$ to'plam mavjud bo'lib, ixtiyoriy $A \in \mathfrak{S}$ uchun $A \cap E = A$ bo'lsa, E to'plam $\mathfrak{S}$ sistemaning *"birlik elementi"* yoki *"biri"* deyiladi. Sistemaning *biri* deganda shu sistemadagi *maksimal to'plam* tushuniladi. Hamma sistemalar ham maksimal to'plamga ega bo'lavermaydi. Masalan, natural sonlar to'plamining barcha chekli qism to'plamlaridan iborat sistemada maksimal to'plam mavjud emas. Birlik elementga ega bo'lgan to'plamlar halqasi *algebra* deyiladi. Ba'zan, halqa tushunchasiga nisbatan umumiyroq bo'lgan to'plamlar yarim halqasi tushunchasidan ham foydalaniladi.

4.2-ta'rif. *Agar $\mathfrak{S}$ to'plamlar sistemasi quyidagi uch shartni qanoatlantirsa, unga yarim halqa deyiladi:*

a) $\mathfrak{S}$ sistema bo'sh to'plamni saqlaydi;

b) $\mathfrak{S}$ sistema to'plamlar kesishmasi amaliga nisbatan yopiq, ya'ni $A, B \in \mathfrak{S}$ munosabatdan $A \cap B \in \mathfrak{S}$ munosabat kelib chiqadi;

c) Agar $A \in \mathfrak{S}$, $A_1 \in \mathfrak{S}$ bo'lib, $A_1 \subset A$ bo'lsa, u holda $\mathfrak{S}$ sistemaning o'zaro kesishmaydigan $A_2, \ldots, A_n$ cheklita elementlari mavjud bo'lib, quyidagi tasvir o'rinli bo'ladi:

$$A \setminus A_1 = \bigcup_{k=2}^{n} A_k.$$

Agar A to'plam o'zaro kesishmaydigan $A_1, A_2, \ldots, A_n$ to'plamlar birlashmasidan iborat bo'lsa, bu birlashma A to'plamning *chekli yoyilmasi* deyiladi va $A = \coprod_{k=1}^{n} A_k$ shaklda ham yoziladi.

Ixtiyoriy $\mathfrak{S}$ to'plamlar halqasi yarim halqa bo'ladi, chunki halqa bo'sh to'plamni saqlaydi va kesishma amaliga nisbatan yopiq. Endi c) shartning bajarilishini ko'rsatamiz. A va A_1 ($A_1 \subset A$) to'plamlar $\mathfrak{S}$ halqaga tegishli bo'lsa, u holda $A_2 = A \backslash A_1 \in \mathfrak{S}$ bo'lib, $A = A_1 \cup A_2$ chekli yoyilma o'rinli bo'ladi. Demak, har qanday halqa yarim halqa bo'lar ekan. Lekin, yarim halqa doim halqa bo'lavermaydi (4.14-misolga qarang). Agar $\mathfrak{S}$ to'plamlar halqasi undan olingan ixtiyoriy $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ to'plamlar ketma-ketligi bilan birgalikda ularning yig'indisi $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ ni ham o'zida saqlasa, u holda $\mathfrak{S}$ sistemaga $\sigma-$ *halqa* deyiladi. Agar $\mathfrak{S}$ to'plamlar halqasi undan olingan ixtiyoriy $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ to'plamlar ketma-ketligi bilan birgalikda ularning kesishmasi $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ ni ham o'zida saqlasa, u holda $\mathfrak{S}$ sistemaga $\delta-$ *halqa* deyiladi. Agar $\sigma-$ halqaning birlik elementi mavjud bo'lsa, u $\sigma-$ *algebra* deyiladi. Birlik elementli $\delta-$ halqa $\delta-$ *algebra* deyiladi. Shuni ta'kidlash lozimki, ikkilik prinsipidan, ya'ni

$$E \backslash \bigcup_n A_n = \bigcap_n (E \backslash A_n), \quad E \backslash \bigcap_n A_n = \bigcup_n (E \backslash A_n)$$

munosobatlardan ((1.1) va (1.2) ga qarang) $\sigma-$algebra va $\delta-$ algebra tushunchalarining ustma-ust tushishi kelib chiqadi.

4.1-teorema. *Ixtiyoriy bo'shmas $\mathfrak{S}$ to'plamlar sistemasi uchun $\mathfrak{S}$ ni o'zida saqlovchi va $\mathfrak{S}$ ni saqlovchi barcha $\mathfrak{P}$ halqalarda saqlanuvchi yagona $\mathfrak{M}(\mathfrak{S})$ minimal halqa mavjud. Agar $\mathfrak{S}$ yarim halqa bo'lsa, u holda $\mathfrak{M}(\mathfrak{S})$ minimal halqa A_k to'plamlar ($A_k \in \mathfrak{S}$) bo'yicha $A = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ chekli yoyilmaga ega bo'lgan A to'plamlarning $\mathfrak{X}$ sistemasi bilan ustma-ust tushadi.*

$\mathfrak{M}(\mathfrak{S})-$ $\mathfrak{S}$ sistema ustiga qurilgan *minimal halqa* deyiladi.

Har qanday cheksiz A to'plamning barcha qism to'plamlari sistemasi $\mathfrak{A}(A)$, $\sigma-$ algebra bo'ladi. Agar biror $\mathfrak{S}$ sistema berilgan bo'lsa, doim uni saqlovchi $\sigma-$ algebra mavjud. Haqiqatan ham, agar $X = \bigcup\limits_{A \in \mathfrak{S}} A$ desak, X ning barcha qism to'plamlaridan tuzilgan $\mathfrak{A}(X)$, sistema $\mathfrak{S}$ ni o'zida saqlovchi $\sigma-$ algebra bo'ladi. Agar $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{S}$ ni o'zida saqlovchi ixtiyoriy $\sigma-$ algebra va $\tilde{X}$ uning biri bo'lsa, u holda ixtiyoriy $A \in$

$\mathfrak{S}$ to'plam $A \subset \widetilde{X}$ munosabatga bo'ysunadi, va shunday ekan, $X = \bigcup_{A\in\mathfrak{S}} A \subset \widetilde{X}$. Agar $\mathfrak{S}$ ni saqlovchi $\mathfrak{P} - \sigma-$ algebraning biri $\widetilde{X}$ uchun $X = \widetilde{X}$ munosabat bajarilsa, bu $\sigma -$ algebra ($\mathfrak{S}$ ga nisbatan) *keltirilmaydigan* $\sigma -$ *algebra* deyiladi.

4.2-teorema. *Ixtiyoriy bo'shmas $\mathfrak{S}$ to'plamlar sistemasi uchun (bu sistemaga nisbatan) keltirilmaydigan shunday $\mathfrak{B}(\mathfrak{S})$, $\sigma -$ algebra mavjudki, bu $\sigma -$ algebra $\mathfrak{S}$ ni saqlaydi va $\mathfrak{S}$ ni saqlovchi barcha $\sigma -$ algebralarda saqlanadi.*

4.2-teoremada keltirilgan $\sigma -$ algebra $\mathfrak{S}$ sistema ustiga qurilgan minimal $\sigma -$ *algebra* deyiladi.

Sonlar o'qidagi barcha $[a, b]$ kesmalar va $[a, b)$, $(a, b]$ yarim intervallar va (a, b) intervallardan tashkil topgan $\mathfrak{S}$ yarim halqani qarasak, u holda $\mathfrak{S}$ ustida qurilgan keltirilmaydigan minimal $\mathfrak{B}(\mathfrak{S})$, $\sigma -$ algebra elementlari *Borel to'plamlari* yoki "*Borel tipidagi*" *to'plamlar* deyiladi.

$\mathbb{R}$ sonlar o'qi, x_0 uning biror nuqtasi bo'lsin. $\mathbb{R}$ da $O_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ interval x_0 *nuqtaning* $\varepsilon -$ *atrofi* deyiladi. Bizga $M \subset \mathbb{R}$ to'plam va $x \in \mathbb{R}$ nuqta berilgan bo'lsin. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun $O_\varepsilon(x) \cap M \neq \emptyset$ munosabat bajarilsa, x nuqta M ning *urinish nuqtasi* deyiladi. M to'plamning barcha urinish nuqtalaridan iborat to'plam, M ning *yopig'i* deyiladi va u $[M]$ bilan belgilanadi. Agar x ning ixtiyoriy $O_\varepsilon(x)$ atrofi M ning cheksiz ko'p elementlarini saqlasa, u holda x nuqta M to'plamning *limitik nuqtasi* deyiladi. M ning barcha limitik nuqtalaridan iborat to'plamni M' bilan belgilaymiz. Agar $M = M'$ bo'lsa, M ga *mukammal to'plam* deyiladi. M to'plamga tegishli x nuqta uchun shunday $\varepsilon > 0$ mavjud bo'lib, $O_\varepsilon(x) \cap M = \{x\}$ bo'lsa, u holda x nuqta M to'plamning *yakkalangan nuqtasi* deyiladi. Agar M to'plam uchun $M = [M]$ tenglik bajarilsa, M ga *yopiq to'plam* deyiladi. Boshqacha aytganda, agar to'plam o'zining barcha linutik nuqtalarini saqlasa, u *yopiq to'plam* deyiladi. Agar $x \in M$ nuqta uchun shunday $\varepsilon > 0$ mavjud bo'lib, $O_\varepsilon(x) \subset M$ bo'lsa, x nuqta M to'plamning *ichki nuqtasi* deyiladi. Agar to'plamning barcha nuqtalari ichki nuqta bo'lsa, u *ochiq to'plam* deyiladi. Ya'ni faqat ichki nuqtalardan tashkil topgan to'plam *ochiq to'plam* deyiladi. Agar A va B to'plamlar uchun $B \subset [A]$ bo'lsa, u holda A to'plam B to'plamda *zich* deyiladi. Xususan, agar $[A] = \mathbb{R}$ bo'lsa, A to'plam $\mathbb{R}$ ning *hamma yerida zich* deyiladi. Agar A to'plam birorta ham $(x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon)$ intervalda zich bo'lmasa, u holda A *hech yerda zichmas* deyiladi. Xuddi shunday tekislikdagi to'plamlar uchun ham ochiq va yopiq to'plam hamda hamma yerda zich va hech yerda zichmas to'plam tushunchalari kiritiladi.

Endi Borel to'plamlarini quyidagicha ham ta'riflash mumkin.

4.3-ta'rif. *Sonlar o'qidagi barcha ochiq va yopiq to'plamlar, ularning chekli yoki sanoqli birlashmalaridan iborat to'plamlar va ularning to'ldiruvchilari Borel to'plamlari yoki Borel tipidagi to'plamlar deyiladi.*

4.4-ta'rif. *Bo'sh bo'lmagan X to'plamda $*$ binar amal kiritilgan bo'lib, u quyidagi shartlarni qanoatlantirsa:*

1) ixtiyoriy $x, y, z \in X$ lar uchun $(x * y) * z = x * (y * z)$ bo'lsa;

2) shunday $e \in X$ element mavjud bo'lib, ixtiyoriy $x \in X$ uchun $e * x = x * e = x$ bo'lsa;

3) ixtiyoriy $x \in X$ uchun shunday $x^{-1} \in X$ element mavjud bo'lib, $x * x^{-1} = e$ bo'lsa. $(X, *)$ juftlikka gruppa deyiladi. Agar X gruppadagi ixtiyoriy x, y lar uchun $x * y = y * x$ bo'lsa, X ga kommutativ yoki Abel gruppasi deyiladi.

4.2. Agar $\mathfrak{S}$ to'plamlar sistemasi halqa bo'lsa, u holda $\mathfrak{S}$ chekli sondagi birlashma va kesishma amallariga nisbatan yopiq bo'ladi. Isbotlang.

4.3. Agar $\mathfrak{S}$ to'plamlar sistemasi simmetrik ayirma va birlashma amallariga nisbatan yopiq bo'lsa, uning halqa bo'lishini isbotlang.

4.4. Agar $\mathfrak{S}$ to'plamlar sistemasi simmetrik ayirma va ayirma amallariga nisbatan yopiq bo'lsa, uning halqa bo'lishini isbotlang.

4.5. Agar $\mathfrak{S}$ to'plamlar sistemasi kesishma va ayirma amallariga nisbatan yopiq bo'lsa, u halqa bo'lmasligi mumkin. Misol keltiring.

4.6. Agar $\mathfrak{S}$ to'plamlar sistemasi birlashma va kesishma amallariga nisbatan yopiq bo'lsa, u halqa bo'lmasligi ham mumkin. Misol keltiring.

4.7. Ixtiyoriy A to'plam uchun uning barcha qism to'plamlaridan tuzilgan $\mathfrak{A}(A)-$sistema, biri $E = A$ bo'lgan algebra bo'ladi. Isbotlang.

4.8. Ixtiyoriy A to'plam uchun uning barcha chekli qism to'plamlaridan tuzilgan sistema halqa bo'ladi. Bu halqa algebra bo'lishi uchun A chekli to'plam bo'lishi zarur va yetarli. Isbotlang.

4.9. Ixtiyoriy bo'shmas A to'plam uchun A va $\emptyset$ to'plamlardan tuzilgan $\{A, \emptyset\}$ sistema, biri $E = A$ bo'lgan algebra bo'ladi. Isbotlang.

4.10. Sonlar o'qidagi barcha chegaralangan to'plamlar sistemasi halqa bo'ladi, ammo algebra bo'lmaydi. Isbotlang.

4.11. Ixtiyoriy $\{\mathfrak{P}_\alpha\}$ halqalar sistemasi uchun ularning kesishmasi $\mathfrak{P} = \bigcap\limits_\alpha \mathfrak{P}_\alpha$ yana halqa bo'ladi. Isbotlang.

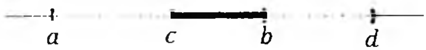
Isbot. Agar $A, B \in \mathfrak{P} = \bigcap\limits_\alpha \mathfrak{P}_\alpha$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy α da $A, B \in \mathfrak{P}_\alpha$ bo'ladi. $\mathfrak{P}_\alpha$ halqa bo'lganligi uchun $A\Delta B \in \mathfrak{P}_\alpha$, $A \cap B \in \mathfrak{P}_\alpha$. U holda $A\Delta B \in \mathfrak{P}$ va $A \cap B \in \mathfrak{P}$. □

4.12. Ixtiyoriy bo'shmas $\mathfrak{S}$ to'plamlar sistemasi uchun $\mathfrak{S}$ ni o'zida saqlovchi va $\mathfrak{S}$ ni saqlovchi barcha $\mathfrak{P}$ halqalarda saqlanuvchi yagona $\mathfrak{M}(\mathfrak{S})$ minimal halqa mavjud. Isbotlang.

4.13. Sonlar o'qidagi barcha $[a, b)$ yarim ochiq intervallar sistemasi $-\ \mathfrak{S}$ yarim halqa bo'lishini isbotlang.

Isbot. $\mathfrak{S}$ bo'sh $[a,\ a) = \emptyset$ to'plamni saqlaydi. $\mathfrak{S}$ to'plamlar kesishma amaliga nisbatan yopiq, ya'ni $[a, b),\ [c, d) \in \mathfrak{S}$ munosabatdan $[a, b) \cap [c, d) \in \mathfrak{S}$ (4.1-chizma) munosabat kelib chiqadi.

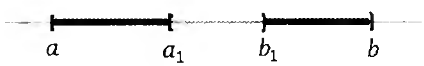
$[a, b) \cap [c, d) = [c, b)$



4.1-chizma

$[a,\ b) \in \mathfrak{S},\ [a_1,\ b_1) \in \mathfrak{S}$, va $[a_1,\ b_1) \subset [a,\ b)$ ekanligidan $[a,\ b) \setminus [a_1,\ b_1) = [a,\ a_1) \cup [b_1,\ b)$ tasvir (4.2-chizmaga qarang) o'rinli hamda $[a,\ a_1)$ va $[b_1,\ b)$ lar $\mathfrak{S}$ ga qarashli. Demak, $\mathfrak{S}$ yarim halqa bo'ladi. □

$[a, b) \setminus [a_1, b_1) = [a, a_1) \cup [b_1, b)$



4.2-chizma

4.14. 4.13-misolda keltirilgan $\mathfrak{S}$ sistema halqa bo'lmaydi. Isbotlang.

Isbot. Buning uchun $\mathfrak{S}$ sistemaning to'plamlar simmetrik ayirmasi amaliga nisbatan yopiq emasligini ko'rsatish yetarli. $\mathfrak{S}$ sistemadan olingan $A = [0,\ 5)$ va $B = [1,\ 3)$ to'plamlarning simmetrik ayirmasini qaraymiz. Bu holda $A \Delta B = [0,\ 1) \cup [3,\ 5)$ bo'lib, u $\mathfrak{S}$ sistemaga qarashli emas. Demak, $\mathfrak{S}$ sistema halqa bo'lmaydi. □

4.15. $[0,\ 1)$ dagi barcha $[a,\ b)$ yarim ochiq intervallar va ularning chekli sondagi birlashmalaridan iborat sistemani qaraymiz. Uning halqa bo'lishini isbotlang.

4.16. 4.15-misolda keltirilgan sistemaning algebra bo'lishini isbotlang.

4.17. 4.15-misolda keltirilgan sistemaning $\sigma -$ algebra bo'la olmaisligini isbotlang.

4.18. $\mathfrak{S}$ yarim halqadan A to'plam va o'zaro kesishmaydigan $A_1, A_2, \ldots, A_n$ to'plamlar olingan bo'lib, ularning har biri A to'plamda saqlansin. U holda $A_1, A_2, \ldots, A_n$ to'plamlarni $A_{n+1}, \ldots, A_s \in \mathfrak{S}$ to'plamlar bilan A to'plamning chekli yoyilmasiga qadar to'ldirish mumkin. Isbotlang.

4.19. $\mathfrak{S}$ yarim halqadan olingan har qanday cheklita $A_1, A_2, \ldots, A_n$ to'plamlar sistemasi uchun $\mathfrak{S}$ da shunday o'zaro kesishmaydigan cheklita $B_1, \ldots, B_t$ to'plamlar sistemasi mavjudki, har bir A_k to'plam $B_1, \ldots, B_t$ to'plamlardan ba'zilari yordamida $A_k = \bigcup\limits_{s \in M_k} B_s$ yig'indi ko'rinishida tasvirlanadi. Bu yerda $M_k \subset \{1, 2, \ldots, t\}$. Isbotlang.

4.20. Agar $\mathfrak{S}$ yarim halqa bo'lsa, u holda bu yarim halqadan hosil qilingan minimal halqa A_k to'plamlar bo'yicha $A = \bigcup\limits_{k \geq 1} A_k$, $A_k \in \mathfrak{S}$ chekli yoyilmaga ega bo'lgan A to'plamlarning $\mathfrak{X}$ sistemasi bilan ustma-ust tushadi. Isbotlang.

4.21. Tekislikdagi barcha kvadratlar to'plami yarim halqa bo'ladimi?

4.22. Yarim halqalarning Dekart ko'paytmasi yarim halqa bo'ladimi?

4.23. Sonlar o'qidagi barcha ochiq va yopiq to'plamlar sistemasi yarim halqa (halqa) tashkil qiladimi?

4.24. Sonlar o'qidagi barcha chekli yoki to'ldiruvchisi chekli bo'lgan to'plamlar sistemasi halqa tashkil qiladimi?

4.25. $\mathfrak{S} = \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ } yo \text{ } \mathbb{R} \backslash A \text{ } to'plamlardan \text{ } biri \text{ } chekli\}$ sistemaning algebra tashkil qilishini isbotlang.

4.26. $\mathfrak{S} = \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ } yo \text{ } \mathbb{R} \backslash A \text{ } to'plamlardan \text{ } biri \text{ } chekli\}$ sistemaning $\sigma-$ algebra bo'la olmasligini ko'rsating.

4.27. $\mathfrak{S} = \{A \subset \mathbb{R} : A \textit{ yo } \mathbb{R}\backslash A \textit{ to'plamlardan biri chekli yoki sanoqli}\}$ sistemaning $\sigma-$ algebra bo'lishini isbotlang.

4.28. $\mathfrak{S} = \{A \cap B : A \subset \mathbb{R} - \textit{yopiq}, \ B \subset \mathbb{R} \textit{ ochiq to'plam}\}$ sistemaning algebra bo'lishini isbotlang.

4.29. 4.28-misolda keltirilgan sistemaning $\sigma-$ algebra bo'la olmasligini ko'rsating.

4.30. Shunday $\mathfrak{S}$ va $\mathfrak{P}$ halqalarga misol keltiringki, ularning birlashmasi halqa bo'lmasin.

4.31. $A = \{a, b, c\}$ to'plamning halqa va algebra tashkil qiluvchi barcha qism to'plamlari sistemasini yozib chiqing.

4.32. Sonlar o'qidagi barcha chekli to'plamlar sistemasi halqa (yarim halqa) tashkil qiladimi?

4.33. Sonlar o'qidan olingan barcha $[a, b]$ kesmalar va $[a, b)$, $(a, b]$ yarim intervallar va (a, b) intervallar sistemasi yarim halqa bo'lishini isbotlang. Bu sistemaning halqa bo'la olmasligini ko'rsating.

4.34. Tekislikdagi barcha yarim ochiq $\{(x, y) : \ a < x \leq b, \ c < y \leq d\}$ to'g'ri to'rtburchaklar sistemasi yarim halqa bo'lishini isbotlang. Bu sistemaning simmetrik ayirma amaliga nisbatan yopiq emasligini ko'rsating.

4.35. Tekislikda $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x < b, \ c \leq y < d\}$ ko'rinishdagi barcha to'g'ri to'rtburchaklar sistemasi yarim halqa bo'lishini isbotlang. Bu sistemaning birlik elementi mavjudmi? Bu sistema halqa bo'ladimi?

4.36. $\mathfrak{S} = \{(x, y) : a \leq x < b, \ c \leq y < d\}$ yarim halqada $A_1 \subset A$ shartni qanoatlantiruvchi $A = [0, 7) \times [0, 7)$ va $A_1 = [1, 3) \times [3, 5)$

to'plamlar berilgan. $A\setminus A_1$ to'plamning chekli yoyilmasida eng kamida nechta to'g'ri to'rtburchak qatnashadi. $A\setminus A_1$ to'plam yoyilmasidagi to'g'ri to'rtburchaklarni shunday tanlangki, ular perimetrlari yig'indisi minimal bo'lsin.

4.37. Sonlar o'qidagi barcha chegaralangan to'plamlar sistemasi halqa bo'lishini isbotlang. Bu sistema $\sigma-$ halqa bo'ladimi? $\sigma-$ algebrachi?

4.38. $\mathfrak{P}$ to'plamlar halqasi bo'lsin. Har bir $A\in\mathfrak{P}$ uchun $\mathfrak{P}_A$ bilan $\{A\cap B,\ B\in\mathfrak{P}\}$. ko'rinishdagi to'plamlar sistemasini belgilaymiz. $\mathfrak{P}_A$ ning algebra bo'lishini isbotlang. Agar $\mathfrak{P}$ sistema $\sigma-$halqa bo'lsa, u holda $\mathfrak{P}_A$ to'plamlar sistemasi $\sigma-$ algebra bo'ladi. Isbotlang.

4.39. X cheksiz elementli to'plam bo'lsin. Uning barcha chekli yoki sanoqli qism to'plamlaridan iborat sistema $\sigma-$halqa bo'lishini isbotlang. X to'plamga qanday shart qo'yilsa bu sistema algebra bo'ladi.

4.40. Quyida berilgan to'plamlar sistemasi yarim halqa, halqa va algebra tashkil qiladimi? Tekshiring.

a) $\{[a,b]: a\in\mathbb{Q},\ b\in\mathbb{Q}\wedge a<b\}\cup\emptyset$,

b) $\{(a,b]: a\in\mathbb{Z},\ b\in\mathbb{Z}\wedge a<b\}\cup\emptyset$,

c) $\{[a,b): a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\ b\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\wedge a<b\}\cup\emptyset$.

4.41. Agar $\mathfrak{S}$ to'plamlar sistemasi halqa bo'lsa, u simmetrik ayirma amaliga nisbatan kommutativ gruppa tashkil qiladi. Isbotlang.

4.42. Bo'sh bo'lmagan X to'plamning barcha qism to'plamlaridan tashkil topgan $\mathfrak{A}(X)$ sistema simmetrik ayirma "Δ" amaliga nisbatan kommutativ gruppa tashkil qilishini isbotlang.

I bobni takrorlash uchun test savollari

1. Quyidagilar ichidan to'g'rilarini ajrating.

1. $A\Delta B = (A\cup B)\backslash(A\cap B)$. 2. $A\Delta B = (A\cup B)\Delta(A\cap B)$.
3. $A\Delta B = (A\backslash B)\cup(B\backslash A)$.

A) 1, 2 B) 2, 3 C) 1, 2, 3 D) 1, 3

2. Sinfda 15 ta o'g'il bola, 13 ta qiz bola bor. $A-$ sinfdagi o'g'il bolalar to'plami, $B-$ sinfdagi qiz bolalar to'plami bo'lsin. $A\Delta B$ to'plamning elementlari sonini toping.

A) 0 B) 28 C) 15 D) 13

3. Sinfda 15 ta o'g'il bola, 13 ta qiz bola bor. $A-$ sinfdagi o'g'il bolalar to'plami, $B-$ sinfdagi qiz bolalar to'plami bo'lsin. $A\backslash B$ to'plamning elementlari sonini toping.

A) 0 B) 28 C) 15 D) 13

4. Sinfda 15 ta o'g'il bola, 18 ta qiz bola bor. $A-$ sinfdagi o'g'il bolalar to'plami, $B-$ sinfdagi qiz bolalar to'plami bo'lsin. $A\cap B$ to'plamning elementlari sonini toping.

A) 0 B) 28 C) 15 D) 13

5. $E-$ universal to'plam. Ikkilik munosabatlarini toping.

1) $E\backslash \bigcup_\alpha A_\alpha = \bigcap_\alpha(E\backslash A_\alpha)$. 2) $E\backslash \bigcap_\alpha A_\alpha = \bigcup_\alpha(E\backslash A_\alpha)$
3) $A\Delta B = (A\cup B)\backslash(A\cap B)$, 4) $(E\backslash A)\Delta(E\backslash B) = A\Delta B$

A) 1, 2 B) 2, 3 C) 3, 4 D) 1, 4

6. A va B to'plamlar o'zaro kesishmaydi. Quyidagilar ichidan to'g'rilarini ajrating. 1) $A\Delta B = A\cup B$, 2) $A\backslash B = A$, 3) $B\backslash A = B$

A) 1, 2 B) 2, 3 C) 1, 2, 3 D) 1, 3

7. A_1 va A_2 to'plamlar o'zaro kesishmaydi. Quyidagilar ichidan to'g'rilarini ajrating. 1) $B_1\cap B_2 \subset (A_1\Delta B_1)\cup(A_2\Delta B_2)$. 2) $A_1\Delta A_2 = \emptyset$.

3) $A_1 \Delta A_2 = A_1 \cup A_2$, 4) $(A_1 \cup A_2)\Delta(B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2)$

A) 1, 2, 3 B) 2, 3, 4 C) 1, 2, 3, 4 D) 1, 3, 4

8. Agar a va b haqiqiy sonlarning butun qismlari teng bo'lsa, ularni φ_1 munosabatda deymiz. Kasr qismlari bir xil bo'lgan c va d haqiqiy sonlarni φ_2 munosabatda deymiz. Bu munosabatlardan qaysilari ekvivalentlik munosabati bo'ladi?

A) φ_1 B) φ_2 C) φ_1, φ_2 D) birortasi ham bo'lmaydi

9. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = [0,5\,x]$ akslantirish berilgan. Bu yerda $[x]$ belgi x sonining butun qismi. Agar $A = [0,\ 8]$ bo'lsa, $f(A)$ ni toping.

A) $\{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7\}$ B) $[0,\ 8]$

C) $\{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8\}$ D) $\{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4\}$

10. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0,5 \cdot [x]$ akslantirish berilgan. Agar $A = [0,\ 8]$ bo'lsa, $f(A)$ ni toping.

A) $\left\{0;\ \frac{1}{2};\ 1;\ \frac{3}{2};\ 2;\ \frac{5}{2};\ 3;\ \frac{7}{2}\right\}$ B) $[0,\ 8]$

C) $\left\{0;\ \frac{1}{2};\ 1;\ \frac{3}{2};\ 2;\ \frac{5}{2};\ 3;\ \frac{7}{2};\ 4\right\}$ D) $\{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4\}$

11. $f : X \to [5,\ 26]$, $f(x) = x^2 + 1$ funksiya berilgan. $f-$ ustiga (suryektiv) akslantirish bo'ladigan maksimal X to'plamni toping.

A) $[-5,\ -2] \cup [2,\ 5]$ B) $[-2,\ 5]$ C) $[2,\ 5]$ D) $(2,\ 5)$

12. $f : X \to [0,\ \infty)$, $f(x) = x^2 - 1$, funksiya berilgan. X to'plam sifatida quyidagilardan qay biri tanlansa, $f-$ inyektiv akslantirish bo'ladi?

A) $(-\infty,\ -2]$ B) $[-2,\ 5]$ C) $[-5,\ \infty)$ D) $[-1,\ \infty)$

13. $f : [0,\pi] \to [-1,1]$, $f(x) = \cos x$, $g : [0,\pi] \to [0,1]$, $g(x) = \sin x$, $\varphi : [0,\frac{\pi}{2}] \to [0,1]$, $\varphi(x) = \sin x$, $\psi : [0,2] \to [0,5]$, $\psi(x) = x^2 + 1$

akslantirishlar ichidan inyektivlarini ajrating.

A) f, g, φ B) f, g, ψ C) f, g, φ, ψ D) f, φ, ψ

14. $f : [0, \pi] \to [-1, 1]$, $f(x) = \cos x$, $g : [0, \pi] \to [0, 1]$, $g(x) = \sin x$, $\varphi : [0, \frac{\pi}{2}] \to [0, 1]$, $\varphi(x) = \sin x$, $\psi : [0, 2] \to [0, 5]$, $\psi(x) = x^2 + 1$ akslantirishlar ichidan syuryektivlarini ajrating.

A) f, g, φ B) f, g, ψ C) g, φ, ψ D) f, φ, ψ

15. $f : [0, \pi] \to [-1, 1]$, $f(x) = \cos x$, $g : [0, \pi] \to [0, 1]$, $g(x) = \sin x$, $\varphi : [0, \frac{\pi}{2}] \to [0, 1]$, $\varphi(x) = \sin x$, $\psi : [0, 2] \to [0, 5]$, $\psi(x) = x^2 + 1$ akslantirishlar ichidan biyektivlarini ajrating.

A) f, g B) f, ψ C) f, φ D) φ, ψ

16. Quyidagilar ichidan chekli to'plamlarni ajrating.

1) O'zbekistondagi barcha talabalar to'plami.

2) Barcha ratsional sonlar to'plami.

3) Qora dengizidagi suv molekulalari to'plami.

4) Barcha tub natural sonlar to'plami.

A) 1, 2, 3 B) 2, 3, 4 C) 1, 3 D) 1, 3, 4

17. Quyidagilar ichidan sanoqli to'plamlarni ajrating.

1) Jahon banklaridagi valyutalar to'plami.

2) Barcha ratsional sonlar to'plami.

3) Yer sharidagi barcha qushlar to'plami.

4) Barcha tub sonlar to'plami.

A) 1, 3 B) 2, 4 C) 1, 2, 3 D) 1, 3, 4

18. Quyidagilar ichidan kontinuum quvvatli to'plamlarni ajrating.

1) $[0, 1]$ kesmada aniqlangan uzluksiz funksiyalar to'plami.

2) Barcha ratsional sonlar to'plami.

3) Sfera ustidagi nuqtalar to'plami.

4) Barcha irratsional sonlar to'plami.

A) 1, 3, 4 B) 2, 3, 4 C) 1, 2, 3 D) 1, 2, 3, 4

19. Quyidagi tasdiqlar ichidan to'g'rilarini ajrating.

1) Chekli to'plamlarning ayirmasi chekli to'plam bo'ladi.

2) Sanoqli to'plamlarning ayirmasi sanoqli to'plam bo'ladi.

3) Kontinuum quvvatli to'plamlarning ayirmasi kontinuum quvvatli to'plam bo'ladi.

A) 1, 3 B) 2, 3 C) 1 D) 1, 2, 3

20. Quyidagi tasdiqlar ichidan to'g'rilarini ajrating.

1) Chekli to'plamlarning kesishmasi chekli to'plam bo'ladi.

2) Sanoqli to'plamlarning kesishmasi sanoqli to'plam bo'ladi.

3) Kontinuum quvvatli to'plamlarning kesishmasi kontinuum quvvatli to'plam bo'ladi.

A) 1, 3 B) 2, 3 C) 1 D) 1, 2, 3

21. Quyidagi tasdiqlar ichidan to'g'rilarini ajrating.

1) Chekli to'plamlarning birlashmasi chekli to'plam bo'ladi.

2) Sanoqli to'plamlarning birlashmasi sanoqli to'plam bo'ladi.

3) Kontinuum quvvatli to'plamlarning birlashmasi kontinuum quvvatli to'plam bo'ladi.

A) 1, 3 B) 2, 3 C) 1 D) 1, 2, 3

22. Shunday A_1 va A_2 sanoqli to'plamlarga misol keltiringki, ularning ayirmasi $A_1 \setminus A_2$ chekli to'plam, kesishmasi sanoqli to'plam bo'lsin.

A) $A_1 = \mathbb{Z}$, $A_2 = \mathbb{N}$ B) $A_1 = \mathbb{N}$, $A_2 = \{1, 3, \ldots, 2n+1, \ldots\}$

C) $A_1 = \mathbb{N}$, $A_2 = \mathbb{N} \setminus \{1\}$ D) $A_1 = \mathbb{N}$, $A_2 = \{2, 4, \ldots, 2n, \ldots\}$

23. Kesishmasi kontinuum, simmetrik ayirmasi sanoqli bo'lgan A_1 va A_2 kontinuum quvvatli to'plamlarga misol keltiring.

A) $A_1 = [0, 1]$, $A_2 = (0, 1)$ B) $A_1 = [0, 1]$, $A_2 = [0, 1] \cup \mathbb{Q}$

C) $A_1 = [0, \infty)$, $A_2 = [-2, \infty)$ D) $A_1 = (-\infty, 0]$, $A_2 = (0, \infty)$

24. Kesishmasi sanoqli, simmetrik ayirmasi kontinuum quvvatli bo'lgan A_1 va A_2 kontinuum quvvatli to'plamlarga misol keltiring.

A) $A_1 = [0, 1]$, $A_2 = (0, 1)$ B) $A_1 = [0, 1]$, $A_2 = [0, 1] \cup \mathbb{Q}$

C) $A_1 = [0, 4]$, $A_2 = [1, 5]$ D) $A_1 = [1, 2] \cup \mathbb{Z}$, $A_2 = [0, 1] \cup \mathbb{Q}$

25. Chekli to'plamlar ko'rsatilgan javobni toping.

A) $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ B) $\{2; 3\}$, $\emptyset$ C) $\{2;3\}$, $[0, 1]$, $\mathbb{Z}$ D) $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$

26. Sanoqli to'plamlar ko'rsatilgan javobni toping.

A) $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ B) $\{2; 3\}$, $\emptyset$ C) $\{2;3\}$, $[0, 1]$, $\mathbb{Z}$ D) $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$

27. Kontinuum quvvatli to'plamlar ko'rsatilgan javobni toping.

A) $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ B) $\{2; 3\}$, $\emptyset$ C) $\{2;3\}$, $[0, 1]$, $\mathbb{Z}$ D) $[0, 1]$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$

28. Ekvivalent to'plamlar ko'rsatilgan javobni toping.

A) $\mathbb{Q} \sim \mathbb{Z} \sim \mathbb{N} \sim \mathbb{R}$ B) $[0, 1] \sim [0, \infty) \sim \mathbb{R} \sim \mathbb{Q}$

C) $[0, 1] \sim \mathbb{R} \sim \mathbb{R}^2 \sim \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ D) $[0, 1] \sim \mathbb{R} \sim \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \sim \mathbb{Q}$

29. Sonlar o'qidagi barcha $[a, b)$ yarim intervallar sistemasi $\mathfrak{S}$:

A) Yarim halqa bo'ladi, halqa bo'lmaydi.

B) Halqa bo'ladi, algebra bo'lmaydi.

C) Ham halqa, ham algebra bo'ladi.

D) Ham algebra, ham σ algebra bo'ladi.

30. Sonlar o'qidagi barcha chekli to'plamlar sistemasi $\mathfrak{S}$:

A) Yarim halqa bo'ladi, halqa bo'lmaydi.

B) Halqa bo'ladi, algebra bo'lmaydi.

C) Ham halqa, ham algebra bo'ladi.

D) Ham algebra, ham σ algebra bo'ladi.

31. Sonlar o'qidagi barcha sanoqli to'plamlar sistemasi $\mathfrak{S}$:

A) Yarim halqa bo'ladi, halqa bo'lmaydi.

B) Halqa bo'ladi, algebra bo'lmaydi.

C) Ham halqa, ham algebra bo'ladi.

D) Yarim halqa tashkil qilmaydi.

32. Sonlar o'qidagi barcha chekli, sanoqli va kontinuum quvvatli to'plamlar sistemasi $\mathfrak{S}$:

A) Yarim halqa bo'ladi, halqa bo'lmaydi.

B) Halqa bo'ladi, algebra bo'lmaydi.

C) Ham halqa, ham algebra bo'ladi.

D) Ham algebra, ham σ algebra bo'ladi.

33. Sonlar o'qidagi barcha chegaralangan to'plamlar sistemasi $\mathfrak{S}$:

A) Yarim halqa bo'ladi, halqa bo'lmaydi.

B) Halqa bo'ladi, algebra bo'lmaydi.

C) Ham halqa, ham algebra bo'ladi.

D) Yarim halqa tashkil qilmaydi.

34. Tekislikdagi barcha to'g'ri to'rtburchaklar sistemasi $\mathfrak{S}$:

A) Yarim halqa bo'ladi, halqa bo'lmaydi.

B) Halqa bo'ladi, algebra bo'lmaydi.

C) Ham halqa, ham algebra bo'ladi.

D) Ham algebra, ham σ algebra bo'ladi.

35. Tekislikdagi barcha qavariq ko'pburchaklar sistemasi $\mathfrak{S}$:

A) Yarim halqa bo'ladi, halqa bo'lmaydi.

B) Halqa bo'ladi, algebra bo'lmaydi.

C) Ham halqa, ham algebra bo'ladi.

D) Ham algebra, ham σ algebra bo'ladi.

36. $E = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ birlik kvadratdagi barcha elementar to'plamlar sistemasi $\mathfrak{S}$:

A) Yarim halqa bo'ladi, halqa bo'lmaydi.

B) Halqa bo'ladi, algebra bo'lmaydi.

C) Ham halqa, ham algebra bo'ladi.

D) Ham algebra, ham σ algebra bo'ladi.

37. $\mathfrak{S} = \{[0, 1], \{0, 1\}\}$ sistemani saqlovchi minimal halqani toping.

A) $\{\emptyset, \{0, 1\}, [0, 1], (0, 1)\}$ B) $\{\emptyset, \{0, 1\}, [0, 1], [0, 1), (0, 1], (0, 1)\}$

C) $\{\emptyset, \{0\}, [0, 1], (0, 1)\}$ D) $\{\{0; 1\}, [0, 1], (0, 1)\}$

38. Noto'g'ri tasdiqni toping.

A) $[0, 1]$ kesmadagi barcha haqiqiy sonlar to'plami sanoqlidir.

B) Sanoqli va chekli to'plamlar birlashmasi sanoqlidir.

C) Kontinuum quvvatli to'plam va sanoqli to'plamlar birlashmasi kontinuum quvvatli to'plamdir.

D) Barcha ratsional sonlar to'plami sanoqlidir.

39. $E = [0, 1]$ to'plamning barcha qism to'plamlaridan tashkil topgan $\mathfrak{A}(E)$ sistema simmetrik ayirma Δ amaliga nisbatan gruppa tashkil qiladi. Uning birlik elementi $e(e * x = x * e = e)$ ni toping.

A) $e = [0, 1]$ B) $e = \emptyset$ C) $e = \{0\}$ D) $e = (0, 1)$

40. $E = [0, 1]$ to'plamning barcha qism to'plamlaridan tashkil topgan $\mathfrak{A}(E)$ sistema simmetrik ayirma Δ amaliga nisbatan gruppa tashkil qiladi. Bu gruppada $x = (0, 1)$ elementga teskari elementni toping.

A) $x^{-1} = \{0\}$ B) $x^{-1} = \emptyset$ C) $x^{-1} = (0, 1)$ D) $x^{-1} = [0, 1]$

II bob. O'lchovli to'plamlar va o'lchovli funksiyalar

Bu bob ikki paragrafdan iborat. Dastlabki 5-§ da sonlar o'qidagi va tekislikdagi to'plamlarning Lebeg o'lchovi tushunchasi keltirilgan. Bu paragrafda Lebeg ma'nosida o'lchovli to'plamlar sinfi Jordan ma'nosida o'lchovli to'plamlar sinfidan kengroq ekanligi ta'kidlangan va Lebeg ma'nosida o'lchovli bo'lgan, ammo Jordan ma'nosida o'lchovli bo'lmagan to'plamga misol keltirilgan. Lebeg o'lchovining yarim additivlik, additivlik, sanoqli additivlik va uzluksizlik xossalariga doir misollar keltirilgan. Umumlashtirishlar bandida esa Lebeg-Stiltes o'lchovlari berilgan. Bu yerda absolyut uzluksiz, singulyar va diskret o'lchovlarga doir misollar ham bor. Paragraf oxirida Lebeg ma'nosida o'lchovsiz to'plamga misol keltirilgan.

6-§da o'lchovli funksiyalar va ularning xossalariga doir misollar jamlangan. Ya'ni, o'lchovli funksiyalar ketma-ketliklarining nuqtali, deyarli va o'lchov bo'yicha yaqinlashishlarini tekshirishga va ekvivalent funksiyalarga doir misollar bor. Bundan tashqari Yegorov va Luzin teoremalari yordamida osonroq yechiladigan misollar ham bu paragrafdan joy olgan.

5-§. Sonlar o'qidagi va tekislikdagi to'plamlarning o'lchovi

Bu paragrafda biz o'lchovning umumiy ta'rifini beramiz. O'lchovni yarim halqadan halqaga davom ettirish masalasini qaraymiz. Bundan tashqari o'lchovning Jordan va Lebeg ma'nosidagi davomlari qaraladi va ularning additivlik, $\sigma-$ additivlik xossalari o'rganiladi.

Dastlab sonlar o'qidagi va tekislikdagi to'plamlarning Lebeg ma'nosidagi o'lchoviga ta'rif beriladi. Jordan va Lebeg ma'nosidagi o'lchovli to'plamlar solishtiriladi.

5.1-ta'rif. *Aniqlanish sohasi $\mathfrak{S}_\mu$ yarim halqa bo'lgan $\mu : \mathfrak{S}_\mu \to \mathbb{R}_+$ to'plam funksiyasi additiv bo'lsa, ya'ni o'zaro kesishmaydigan ixtiyoriy*

$A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathfrak{S}_\mu$ *to'plamlar uchun* $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \in \mathfrak{S}_\mu$ *bo'lganda*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, $\mu : \mathfrak{S}_\mu \to \mathbb{R}_+$ *ga o'lchov deyiladi.*

Boshqacha aytganda, μ to'plam funksiyasi quyidagi

1) aniqlanish sohasi yarim halqa, 2) qiymatlari haqiqiy va manfiymas, 3) additivlik shartlarini qanoatlantirsa, unga *o'lchov* deyiladi.

5.1-eslatma. $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset$ yoyilmadan $\mu(\emptyset) = 2\mu(\emptyset)$, ya'ni $\mu(\emptyset) = 0$ tenglik kelib chiqadi.

5.2-ta'rif. *Agar* m *o'lchovning aniqlanish sohasi* $\mathfrak{S}_m$ *ikkinchi* μ *o'lchovning aniqlanish sohasi* $\mathfrak{S}_\mu$ *da saqlansa* $(\mathfrak{S}_m \subset \mathfrak{S}_\mu)$ *va ixtiyoriy* $A \in \mathfrak{S}_m$ *to'plam uchun*

$$\mu(A) = m(A)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda μ *o'lchov* m *o'lchovning davomi deyiladi.*

5.1-teorema. *Aniqlanish sohasi* $\mathfrak{S}_m$ *yarim halqa bo'lgan har bir* m *o'lchov uchun aniqlanish sohasi* $\mathfrak{M}(\mathfrak{S}_m)$ *(*$\mathfrak{S}_m$ *ni o'zida saqlovchi minimal halqa) bo'lgan yagona* m' *davom mavjud.*

5.3-ta'rif. *Agar* $\mathfrak{S}_m$ *sistemada aniqlangan* m *o'lchov va ixtiyoriy o'zaro kesishmaydigan sanoqlita* $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \mathfrak{S}_m$ *to'plamlar uchun* $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{S}_m$ *bo'lganda*

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda m *o'lchov sanoqli additiv yoki* $\sigma-$ *additiv o'lchov deyiladi.*

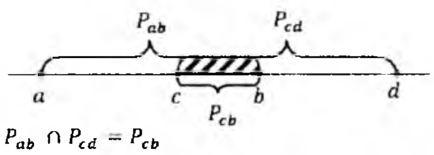
Sodda to'plam o'lchovi. Aytaylik a va b lar ixtiyoriy sonlar bo'lsin. Sonlar o'qida

$$a \le x \le b, \quad a \le x < b, \quad a < x \le b, \quad a < x < b$$

tengsizliklarning istalgan biri bilan aniqlangan to‘plamlar sistemasi berilgan bo‘lsin. Bu to‘plamlarni *oraliqlar* deb ataymiz. Xususan, agar yuqoridagi shartlardan birini qanoatlantiruvchi nuqtalar mavjud bo‘lmasa (masalan $a > b$), ya'ni $\emptyset$ to‘plamni ham *oraliq* deb ataymiz. $\mathfrak{S}$ bilan sonlar o‘qidagi barcha oraliqlar sistemasini belgilaymiz.

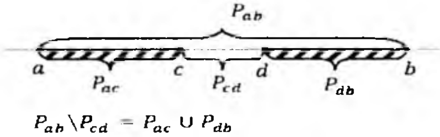
5.1. Sonlar o‘qidagi barcha oraliqlar sistemasi – $\mathfrak{S}$ yarim halqa tashkil qiladi. Isbotlang.

Isbot. $\mathfrak{S}$ sistemaning elementlari $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, (a, b) ko‘rinishdagi oraliqlardan iborat. $\mathfrak{S}$ sistemadan olingan va a, b sonlari bilan aniqlangan (yopiq, ochiq yoki yarim ochiq) oraliqni $P = P_{ab}$ bilan belgilaymiz. $\mathfrak{S}$ bo‘sh $[a, a) = \emptyset$ to‘plamni saqlaydi. $\mathfrak{S}$ sistema to‘plamlar kesishmasi amaliga nisbatan yopiq, ya'ni ikki P_{ab} va P_{cd} oraliqning kesishmasi bo‘sh to‘plam yoki yana $P_{ab} \cap P_{cd} = P_{nm}$, $n = \max\{a, c\}$, $m = \min\{b, d\}$ oraliq (5.1-chizmaga qarang) bo‘ladi.



5.1-chizma

Agar $P_{ab} \in \mathfrak{S}$, $P_{cd} \in \mathfrak{S}$ bo‘lib $P_{cd} \subset P_{ab}$ bo‘lsa, u holda $P_{ab} \backslash P_{cd} = P_{ac} \cup P_{db}$ yoyilma (5.2-chizmaga qarang) o‘rinli. Demak, $\mathfrak{S}$ yarim halqa bo‘ladi. □



5.2-chizma

$\mathfrak{S}$ yarim halqadan olingan va a, b sonlari bilan aniqlangan (yopiq, ochiq yoki yarim ochiq) bo'sh bo'lmagan $P = P_{ab}$ oraliq uchun $m(P) = b - a$ sonni mos qo'yamiz, agar P bo'sh to'plam bo'lsa $m(P) = 0$ deymiz. U holda $m : \mathfrak{S} \to \mathbb{R}$ to'plam funksiyasi 5.1-ta'rif shartlarini qanoatlantiradi, ya'ni $m : \mathfrak{S} \to \mathbb{R}$ o'lchov bo'ladi. Bu o'lchovning additivlik shartini keltiramiz: agar

$$P = \bigcup_{k=1}^{n} P_k, \quad P_i \cap P_k = \emptyset, \quad i \neq k, \quad P, P_k \in \mathfrak{S}$$

bo'lsa, u holda $m(P) = \sum_{k=1}^{n} m(P_k)$ tenglik o'rinli.

$\mathfrak{M}(\mathfrak{S})$ bilan $\mathfrak{S}$ yarim halqa ustiga qurilgan minimal halqani belgilaymiz. 4.1-teoremaga ko'ra $\mathfrak{M}(\mathfrak{S})$ halqaning har bir elementi A o'zaro kesishmaydigan $P_k \in \mathfrak{S}$ oraliqlarning birlashmasi ko'rinishida tasvirlanadi, ya'ni $A = \coprod_{k=1}^{n} P_k$. $\mathfrak{M}(\mathfrak{S})$ halqa elementlarini *sodda to'plamlar* deymiz. Endi $\mathfrak{M}(\mathfrak{S})$ halqadagi to'plamlarning, ya'ni sodda to'plamlarning o'lchovi tushunchasini kiritamiz. Har bir $A = \coprod_{k=1}^{n} P_k \in \mathfrak{M}(\mathfrak{S})$ sodda to'plamga

$$m'(A) = \sum_{k=1}^{n} m(P_k) \tag{5.1}$$

sonni mos qo'yuvchi $m' : \mathfrak{M}(\mathfrak{S}) \to \mathbb{R}$ moslikni aniqlaymiz. $m'(A)$ miqdor A to'plamning *o'lchovi* deyiladi.

5.2. To'plam funksiyasi $m' : \mathfrak{M}(\mathfrak{S}) \to \mathbb{R}$ o'lchov bo'ladi. Isbotlang.

5.3. (5.1) tenglik bilan aniqlangan $m' : \mathfrak{M}(\mathfrak{S}) \to \mathbb{R}$ funksiyaning qiymati A sodda to'plamni chekli sondagi o'zaro kesishmaydigan oraliqlar yig'indisiga yoyish usulidan bog'liq emas. Isbotlang.

5.4. $m' : \mathfrak{M}(\mathfrak{S}) \to \mathbb{R}$ o'lchov $m : \mathfrak{S} \to \mathbb{R}$ o'lchovning davomi bo'ladi. Isbotlang.

5.5. Ikki sodda to'plamning birlashmasi, kesishmasi, ayirmasi va simmetrik ayirmasi yana sodda to'plam bo'ladi. Isbotlang.

5.6. Agar $A \in \mathfrak{M}(\mathfrak{S})$ to'plam oraliq bo'lsa, u holda $m'(A) = m(A)$ bo'ladi. Isbotlang.

5.7. Agar $A \in \mathfrak{M}(\mathfrak{S})$ to'plam chekli sondagi o'zaro kesishmaydigan $A_1, A_2, \dots, A_n$ sodda to'plamlarning yig'indisi, ya'ni $A = \coprod_{k=1}^{n} A_k$ shaklda tasvirlansa, quyidagi tenglikni isbotlang:

$$m'(A) = \sum_{k=1}^{n} m'(A_k).$$

5.8. Agar $A \in \mathfrak{M}(\mathfrak{S})$ sodda to'plam, $\{A_n\}$ – sodda to'plamlarning chekli yoki sanoqli sistemasi bo'lib, $A \subset \bigcup_n A_n$ bo'lsa,

$$m'(A) \leq \sum_n m'(A_n)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Isbotlang.

5.9. A sodda to'plam sanoqli sondagi o'zaro kesishmaydigan $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ sodda to'plamlarning yig'indisidan iborat, ya'ni

$$A = \coprod_{n=1}^{\infty} A_n$$

bo'lsin. U holda quyidagi tenglikni isbotlang:

$$m'(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m'(A_n).$$

Lebeg o'lchovi. Dastlab $E = [0,\ 1]$ birlik kesmada saqlanuvchi to'plamlar bilan chegaralanamiz.

5.4-ta'rif. *Ixtiyoriy* $A \subset E$ *to'plam uchun*

$$\mu^*(A) = \inf_{A \subset \cup_k P_k} \sum_k m(P_k) \tag{5.2}$$

son A to'plamning tashqi o'lchovi deyiladi.

Bu yerda aniq quyi chegara A to'plamni qoplovchi oraliqlarning barcha chekli yoki sanoqli sistemalari bo'yicha olinadi. Shuni ta'kidlaymizki, ixtiyoriy $A \subset E$ to'plamning tashqi o'lchovi mavjud. Chunki infimum belgisi ostidagi ifoda $\sum m(P_k)$ manfiymas, shuning uchun u quyidan nol bilan chegaralangan. Quyidan chegaralangan to'plam esa aniq quyi chegaraga ega. Endi $A \subset E$ to'plam *o'lchovi* ta'rifini beramiz.

5.5-ta'rif. *Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $B \in \mathfrak{M}(\mathfrak{S})$ sodda to'plam mavjud bo'lib, $\mu^*(A \Delta B) < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, u holda A Lebeg ma'nosida o'lchovli to'plam deyiladi.*

Agar A Lebeg ma'nosida o'lchovli to'plam bo'lsa, uning o'lchovi deb tashqi o'lchovini qabul qilamiz. Faqat o'lchovli to'plamlar sistemasi $\mathfrak{U}(E)$ da aniqlangan μ^* to'plam funksiyasi *Lebeg o'lchovi* deyiladi va u μ bilan belgilanadi. Shunday qilib, o'lchovli to'plamlar sistemasi $\mathfrak{U}(E)$ va unda Lebeg o'lchovi μ aniqlandi. Demak, ixtiyoriy $A \in \mathfrak{U}(E)$ uchun $\mu(A) = \mu^*(A)$.

Biz yuqorida faqat $E = [0, 1]$ kesmada saqlanuvchi to'plamlarni qaradik. Bu cheklashdan xalos bo'lish mumkin. Ma'lumki, $\mathbb{R}$ ni

$$E_n = [n, n+1), \quad n \in \mathbb{Z}$$

oraliqlar yig'indisi ko'rinishida tasvirlash mumkin, ya'ni

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} E_n.$$

5.6-ta'rif. *Agar har bir $n \in \mathbb{Z}$ uchun $A_n = A \cap E_n$ to'plamlar o'lchovli bo'lsa, u holda A to'plam o'lchovli deyiladi. Agar A to'plam o'lchovli bo'lsa, quyidagi yig'indi*

$$\mu(A) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mu(A_n). \tag{5.3}$$

A to'plamning Lebeg o'lchovi deyiladi.

Agar (5.3) qator yig'indisi chekli bo'lsa, A *chekli o'lchovli to'plam* deyiladi. Aks holda A *cheksiz o'lchovli to'plam* deyiladi. Shuning uchun μ o'lchov cheksiz qiymat ham qabul qilishi mumkin.

5.10-5.15-misollarda keltirilgan $A \subset \mathbb{R}$ ni sodda to'plam ekanligini ko'rsating. Uni eng kam sondagi o'zaro kesishmaydigan $P_1, P_2, \ldots, P_n$ oraliqlar birlashmasi ko'rinishida tasvirlang. $A = \bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k$ yoyilmadan foydalanib, A to'plamning o'lchovini toping.

5.10. $A = \bigcup\limits_{n=1}^{5} [3^{2-n}, \ 2^{3-n})$.

5.11. $A = \bigcup\limits_{n=1}^{6} [3^{3-n}, \ e^{4-n})$.

5.12. $A = \bigcup\limits_{n=1}^{4} \left[\dfrac{n}{2(n+1)!}, \ \dfrac{6-n}{2n!}\right)$.

5.13. $A = \bigcup\limits_{n=1}^{4} \left[\dfrac{n}{4^{n+1}}, \ \dfrac{5-n}{4^n}\right]$.

5.14. $A = \bigcup\limits_{n=1}^{8} \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{8}, \ \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{24}\right)$.

5.15. $A = \bigcup\limits_{n=1}^{8} \left[\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{8}, \ \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{8}\right)$.

5.15-misolning yechimi. $P_n = \left[\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{8}, \ \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{8}\right)$, $n = 1, 2, \ldots, 8$ belgilash olamiz va P_n oraliqlarning kesishish yoki kesishmasligini tekshiramiz.

$$P_1 = \left[\frac{7}{8}, \frac{9}{8}\right), \quad P_2 = \left[\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right), \quad P_3 = \left[\frac{5}{24}, \frac{11}{24}\right), \ldots, P_8 = \left[0, \frac{1}{4}\right).$$

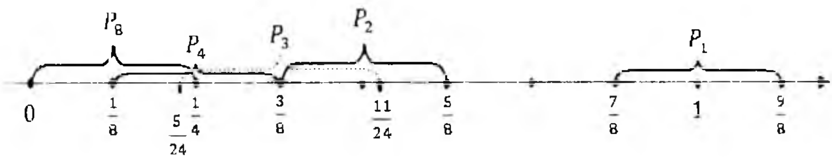
5.3-chizmadan ma'lum bo'ldiki, $P_1 \cap P_2 = \emptyset$, $P_k \cap P_{k+1} \neq \emptyset$, $k = 2, 3, \ldots, 8$. Shuning uchun

$$A = P_1 \cup Q_1, \quad Q_1 = \bigcup_{n=2}^{8} P_n = \left[0, \frac{5}{8}\right), \quad P_1, Q_1 \in \mathfrak{S}$$

tasvir eng kam sonli yoyilma bo'ladi. Demak, A sodda to'plam. Bu yoyilmadan

$$\mu(A) = \mu(P_1) + \mu(Q_1) = \frac{2}{8} + \frac{5}{8} = \frac{7}{8}$$

tenglikni olamiz. □



5.3-chizma

Elementar to'plam o'lchovi. Endi tekislikdagi to'plamlarning Lebeg o'lchoviga to'xtalamiz. Aytaylik a, b, c va d lar ixtiyoriy haqiqiy sonlar bo'lsin. Tekislikda biror Dekart koordinatalar sistemasi tayinlangan bo'lib, shu sistemada

$$a \leq x \leq b, \quad a \leq x < b, \quad a < x \leq b, \quad a < x < b$$

va

$$c \leq y \leq d, \quad c \leq y < d, \quad c < y \leq d, \quad c < y < d$$

tengsizliklarning istalgan bir jufti bilan aniqlangan to'plamlar sistemasi berilgan bo'lsin. Bu to'plamlarni *to'g'ri to'rtburchaklar* deb ataymiz. Xususan, agar yuqoridagi shartlardan birini qanoatlantiruvchi nuqtalar mavjud bo'lmasa (masalan $a > b$ yoki $c > d$ bo'lsa) uni ham *to'g'ri to'rtburchak* deb ataymiz. $\mathfrak{S}_2$ bilan tekislikdagi barcha to'g'ri to'rtburchaklar sistemasini belgilaymiz.

5.16. Ikkita yarim halqaning Dekart ko'paytmasi yarim halqa bo'ladi. Isbotlang.

5.17. $\mathfrak{S} \times \mathfrak{S} = \mathfrak{S}_2$ tenglikni isbotlang.

5.18. Tekislikdagi barcha to'g'ri to'rtburchaklar sistemasi – $\mathfrak{S}_2$ yari halqa tashkil qiladi. Isbotlang.

Sonlar o'qi holidagidek tekislikdagi $A \subset E^2 = [0, 1] \times [0, 1]$ to'plai ning *tashqi o'lchovi* va *Lebeg o'lchovi* ta'riflarini berish mumkin.

5.7-ta'rif. *Ixtiyoriy* $A \subset E^2$ *to'plam uchun*

$$\mu^*(A) = \inf_{A \subset \cup_k P_k} \sum_k m(P_k) \tag{5}$$

son A *to'plamning tashqi o'lchovi deyiladi.*

Bu yerda aniq quyi chegara A to'plamni qoplovchi to'g'ri to'rtbı chaklarning barcha chekli yoki sanoqli sistemalari bo'yicha olinadi.

Tekislikdagi barcha to'g'ri to'rtburchaklar sistemasi – $\mathfrak{S}_2$ yarim hal tashkil qiladi (5.18-misolga qarang). $\mathfrak{S}_2$ yarim halqadan olingan va a, c, d sonlari bilan aniqlangan (ochiq, yopiq, yoki yarim ochiq) bo bo'lmagan $P = P_{abcd}$ to'g'ri to'rtburchak uchun $m(P) = (b-a)(d-$ sonni mos qo'yamiz, agar P bo'sh to'plam bo'lsa $m(P) = 0$ deymiz. qonuniyat bo'yicha aniqlangan $m : \mathfrak{S}_2 \to \mathbb{R}$ to'plam funksiyasi o'lcl (5.1-ta'rif) shartlarini qanoatlantiradi.

$\mathfrak{M}(\mathfrak{S}_2)$ bilan $\mathfrak{S}_2$ yarim halqa ustiga qurilgan minimal halqani bel laymiz. $\mathfrak{M}(\mathfrak{S}_2)$ halqaning elementlari *elementar to'plamlar* deyiladi

5.8-ta'rif. *Agar ixtiyoriy* $\varepsilon > 0$ *uchun shunday* $B \in \mathfrak{M}(\mathfrak{S}_2)$ *elem tar to'plam mavjud bo'lib,* $\mu^*(A \Delta B) < \varepsilon$ *tengsizlik bajarilsa, u holda Lebeg ma'nosida o'lchovli to'plam deyiladi.*

Faqat o'lchovli to'plamlar sistemasi $\mathfrak{U}(E^2)$ da aniqlangan μ^* to'pl funksiyasi *Lebeg o'lchovi* deyiladi va u μ bilan belgilanadi. Shunday qil o'lchovli to'plamlar sistemasi $\mathfrak{U}(E^2)$ va unda Lebeg o'lchovi μ aniqlan Demak, ixtiyoriy $A \in \mathfrak{U}(E^2)$ uchun $\mu(A) = \mu^*(A)$.

Xuddi sonlar o'qi holidagidek tekislikni, ya'ni $\mathbb{R}^2$ ni

$$E_{mn} = \{(x, y) : m < x \leq m+1, \quad n < y \leq n+1\}, \quad n, m \in \mathbb{Z}$$

kvadratlar yig'indisi ko'rinishida tasvirlash mumkin:

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{m,n\in\mathbb{Z}} E_{mn}.$$

5.9-ta'rif. *$A \subset \mathbb{R}^2$ biror to'plam bo'lsin. Agar istalgan m, n butun sonlar uchun $A_{mn} = A \cap E_{mn}$ to'plamlar o'lchovli bo'lsa, u holda A to'plam o'lchovli deyiladi. Agar A to'plam o'lchovli bo'lsa,*

$$\mu(A) = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \mu(A_{mn}), \tag{5.5}$$

yig'indi A to'plamning Lebeg o'lchovi deyiladi.

Agar (5.5) qator yig'indisi chekli bo'lsa, $A \subset \mathbb{R}^2$ *chekli o'lchovli* to'plam deyiladi. Aks holda A *cheksiz o'lchovli* to'plam deyiladi.

5.2-teoroema *(O'lchovning $\sigma-$ additivlik xossasi). Agar $\{A_n\}$ – o'zaro kesishmaydigan o'lchovli to'plamlar ketma-ketligi bo'lsa, u holda*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

tenglik o'rinli.

5.3-teorema *(O'lchovning uzluksizlik xossasi). Agar o'lchovli to'plamlarning $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$ ketma-ketligi uchun $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ bo'lsa, u holda $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$ tenglik o'rinli.*

5.1-natija. *Agar $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$ o'lchovli to'plamlar ketma-ketligi uchun $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ bo'lsa, u holda $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$ tenglik o'rinli.*

Agar (5.2) tenglikda aniq quyi chegara $A \subset \mathbb{R}$ to'plamni qoplovchi barcha B sodda to'plamlar bo'yicha olinsa, A to'plamning Jordan ma'nosidagi *tashqi o'lchovi* hosil bo'ladi, u $j^*(A)$ bilan belgilanadi, ya'ni

$$j^*(A) = \inf_{B\supset A} m'(B), \quad B \in \mathfrak{M}(\mathfrak{S}).$$

Ushbu

$$j_*(A) = \sup_{B \subset A} m'(B), \quad B \in \mathfrak{M}(\mathfrak{S}).$$

son A to'plamning Jordan ma'nosidagi *ichki o'lchovi* deyiladi.

5.10-ta'rif. *Agar* $j^*(A) = j_*(A)$ *bo'lsa,* A *Jordan ma'nosida o'lchovli to'plam deyiladi.*

Shuni ta'kidlash joizki, agar A Jordan ma'nosida o'lchovli to'plam bo'lsa, u Lebeg ma'nosida ham o'lchovli to'plam bo'ladi va bu o'lchovlar o'zaro teng bo'ladi.

5.19. Lebeg ma'nosida o'lchovli, ammo Jordan ma'nosida o'lchovli bo'lmagan to'plamga misol keltiring.

Yechish. $E = [0, 1]$ bo'lsin, A esa $[0, 1]$ kesmadagi barcha ratsional sonlar to'plami bo'lsin A to'plam E da zich bo'lganligi uchun A ni saqlovchi sodda to'plam E ni ham o'zida saqlaydi. Shuning uchun $j^*(A) = 1$ bo'ladi. A to'plamda saqlanuvchi sodda B to'plam faqat chekli to'plamdir. Shuning uchun $j_*(A) = 0$ tenglik o'rinli. Bu yerdan $j^*(A) \neq j_*(A)$. Demak, A to'plam Jordan ma'nosida o'lchovli emas. Ma'lumki, A sanoqli to'plam, shuning uchun uning elementlarini $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ ketma-ketlik ko'rinishida nomerlab chiqish mumkin. Shunday ekan

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k, \quad P_k = \{x : \ x_k \leq x \leq x_k\} = [x_k, x_k].$$

Ikkinchi tomondan ixtiyoriy $k \in \mathbb{N}$ uchun $m(P_k) = 0$. Bu yerdan

$$\mu^*(A) = 0$$

ekanligi kelib chiqadi. Shuni ta'kidlash lozimki, tashqi o'lchovi nolga teng bo'lgan har qanday to'plam o'lchovli to'plamdir. Buning uchun sodda to'plam sifatida $B = \emptyset$ ni olish yetarli:

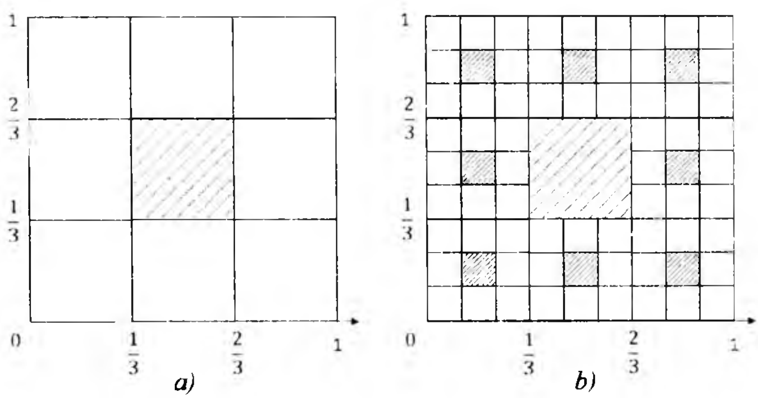
$$\mu^*(A \Delta B) = \mu^*(A \Delta \emptyset) = \mu^*(A) = 0 < \varepsilon.$$

Demak, A Lebeg ma'nosida o'lchovli to'plam. Shunday qilib, A Lebeg ma'nosida o'lchovli bo'lgan, lekin Jordan ma'nosida o'lchovli bo'lmagan to'plamga misol bo'ladi. $\square$

"Serpin gilami" nomli masala. $\mathbb{R}^2$ dagi $E^2 = [0,\ 1] \times [0,\ 1]$ kvadratni $x = \frac{1}{3}$, $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{1}{3}$, $y = \frac{2}{3}$ tog'ri chiziqlar yordamida 9 ta bir xil kvadratlarga bo'lamiz va markazdagi ochiq

$$P_1 = \left\{(x, y): \quad \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}, \quad \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}\right\}$$

kvadratni (5.4a-chizma) tashlaymiz. Keyin qolgan 8 ta kvadratning har birini yuqoridagidek 9 ta bir xil kvadratlarga bo'lamiz (5.4b-chizma) va markazdagi kvadratni tashlaymiz. Bu jarayonni cheksiz marta davom ettiramiz. Natijada qolgan to'plamni A bilan belgilaymiz. Bu to'plamga *"Serpin gilami"* nomi berilgan.



5.4-chizma

5.20. Serpin gilamining o'lchovini toping.

5.21. $A \subset [0,\ 1]$ – bilan shunday sonlar to'plami belgilanganki, ularning cheksiz o'nli kasr yoyilmasida 5 raqami ishtirok etmaydi. $\mu(A)$ ni toping.

Yechish. A to'plam to'ldiruvchisining o'lchovini topamiz. $[0,\ 1]\backslash A$ to'plam elementlarining cheksiz o'nli kasr yoyilmasida 5 raqami ishtirok etadi. $[0,\ 1]$ kesmani teng o'n bo'lakka bo'lamiz va oltinchi $[0,5;\ 0,6)$ bo'lakni A_1 bilan belgilaymiz. A_1 dagi har bir sonning cheksiz o'nli kasr yoyilmasida, verguldan keyingi birinchi raqami 5 bo'ladi. Qolgan 9 ta bo'lakning har birini teng o'n bo'lakka bo'lamiz va ulardagi oltinchi bo'laklarning birlashmasini $[0,15;\ 0,16)\cup[0,25;\ 0,26)\cup\cdots\cup[0,95;\ 0,96) = A_2$ bilan belgilaymiz. A_2 to'plamdagi sonlarning cheksiz o'nli kasr yoyilmasida verguldan keyingi ikkinchi raqami 5 bo'ladi. Va hokazo bu jarayonni cheksiz davom ettiramiz. Hosil bo'lgan $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ to'plamlar juft-jufti bilan kesishmaydi va ularning birlashmasi $[0,\ 1]\backslash A$ ga teng. O'lchovning $\sigma-$ additivlik xossasiga ko'ra

$$\mu([0,\ 1]\backslash A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

tenglik o'rinli. Murakkab bo'lmagan hisoblashlar shuni ko'rsatadiki $\mu(A_1) = 10^{-1}$, $\mu(A_2) = 9\cdot 10^{-2}$, $\mu(A_n) = 9^{n-1}\cdot 10^{-n}, \ldots$ tengliklar o'rinli. Demak,

$$\mu([0,\ 1]\backslash A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^{n-1}}{10^n} = \frac{0,1}{1-0,9} = 1.$$

Shunday qilib, $\mu(A) + \mu([0,\ 1]\backslash A) = 1$ dan $\mu(A) = 0$ ekanini olamiz. □

5.22. $A \subset [0,\ 1]-$ bilan shunday sonlar to'plamini belgilaymizki, ularning cheksiz o'nli kasr yoyilmasida 2 raqami 3 raqamidan oldin uchraydi. Bu to'plamning o'lchovini toping.

5.23. $A \subset [0,\ 1]-$ bilan cheksiz o'nli kasr yoyilmasida 8 raqami qatnashadigan sonlar to'plamini belgilaymiz. Uning o'lchovini toping.

5.24. $A \subset [0,\ 1]-$ shunday to'plamki, uning elementlarini cheksiz o'nli kasr yoyilmasida 1 dan 9 gacha raqamlarning barchasi qatnashadi. Uning o'lchovini toping.

5.25. Kantor to'plami $K \subset [0, 1]$ ning Jordan ma'nosida o'lchovli emasligini isbotlang.

5.26. *"Kantor tarog'i"* nomli masala. K – Kantor to'plami bo'lsin. $A = \{(x, y) : x \in [0, 1], \ y \in K\}$ to'plam *"Kantor tarog'i"* deyiladi. A to'plam $[0, 1] \times [0, 1]$ ning hech yerida zich emas, yopiq va $\mu(A) = 0$. Isbotlang.

"Serpin qabristoni" nomli masala. $\mathbb{R}^2$ da $[0, 1] \times [0, 1]$ kvadratni $x = \frac{1}{3}$, $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{1}{3}$, $y = \frac{2}{3}$ tog'ri chiziqlar yordamida 9 ta bir xil kvadratlarga bo'lamiz. Asosiy kvadratning uchlariga yopishgan 4 ta

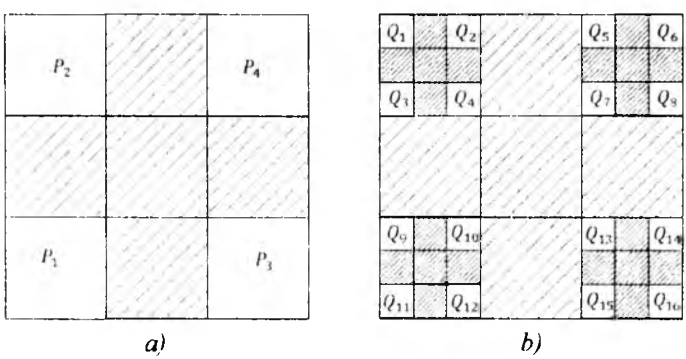
$$P_1 = \{(x, y) : \ 0 \le x \le 3^{-1}, \ \ 0 \le y \le 3^{-1}\},$$

$$P_2 = \{(x, y) : \ 0 \le x \le 3^{-1}, \ \ 2 \cdot 3^{-1} \le y \le 1\},$$

$$P_3 = \{(x, y) : \ 2 \cdot 3^{-1} \le x \le 1, \ \ 0 \le y \le 3^{-1}\},$$

$$P_4 = \{(x, y) : 2 \cdot 3^{-1} \le x \le 1, \ \ 2 \cdot 3^{-1} \le y \le 1\}$$

yopiq kvadratlarni (5.5a-chizma) *birinchi rang kvadratlari* deb ataymiz.



5.5-chizma

Bu to'rt kvadratning birlashmasini $A_1 = P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4$ bilan belgilaymiz. Birinchi rang kvadratlarining har birini yuqoridagidek 9 ta bir xil kvadratlarga bo'lamiz. Birinchi rang kvadratlari P_1. P_2. P_3. P_4 uchlariga yopishgan kvadratlarni *ikkinchi rang kvadratlari* (5.5b-chizmada $Q_1 - Q_{16}$) deymiz. Bu 16 ta kvadratning birlashmasini A_2 bilan belgilaymiz. Va hokazo bu jarayonni cheksiz marta davom ettiramiz. Natijada ichma-ich joylashgan $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ ketma-ketlikka ega bo'lamiz. Ularning kesishmasini $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ bilan belgilaymiz. A to'plam *Serpin qabristoni* deyiladi.

5.27. Serpin qabristoni A ning o'lchovi nol ($\mu(A) = 0$) va $[0, 1] \times [0, 1]$ kvadratning hech yerida zich emasligini isbotlang.

5.28. $A \subset \mathbb{R}$ to'plamning o'lchovi nolga teng bo'lsa. $\mu(\overline{A}) = 0$ bo'lishi shartmi? Bu yerda $\overline{A}$ – A to'plamning yopig'i.

5.29. $A \subset \mathbb{R}$ chegaralanmagan musbat o'lchovli to'plam bo'lsin, u holda shunday $x, y \in A$ lar mavjudki $x - y \in \mathbb{Q}$ bo'ladi. Isbotlang.

5.30. $A \subset \mathbb{R}$ ixtiyoriy musbat o'lchovli to'plam bo'lsin. u holda shunday $x, y \in A$ mavjudki $x - y \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ bo'ladi. Isbotlang.

5.31. $\mathbb{R}$ dagi nol o'lchovli to'plamlar sistemasi σ – halqa bo'lishini isbotlang.

5.32. $A \subset \mathbb{R}$ Borel tipidagi to'plam ekanligini ko'rsating, uning Lebeg o'lchovini toping:

a) $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(n - \frac{1}{3^n}, n + \frac{1}{2^n}\right]$.

b) $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(n^n, n^n + \frac{1}{\ln(n+1)}\right] \backslash \mathbb{Q}$.

c) $A = [0, 1] \backslash \mathbb{Q}$.

5.33. Quyida berilgan $A \subset \mathbb{R}$ to'plamning *Borel tipidagi to'plam* ekanligini ko'rsating. keyin uning o'lchovini toping.

a) $A=(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cap[0,\ 1]$, b) $A=\{x\in\mathbb{R}: x^4\in\mathbb{Q}\}$,

c) $A=[a,\infty)$, d) $A=\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}(n-\frac{1}{2^n},\ n+\frac{1}{2^n})$,

e) $A=\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}\left[n-\frac{1}{e^n},\ n+\frac{1}{4^n}\right]$, f) $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}\left[n^3-\frac{1}{5^n},\ n^3+\frac{1}{5^n}\right]\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$.

5.34. Shunday $\{A_n\}$ "Borel tipidagi to'plam" larga misol keltiringki, quyidagilar bajarilsin:

a) $\mu(A_n)=1,\ \ n\geq 1,\ \ \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\mathbb{R}$,

b) $\mu(A_n)=+\infty,\ \ A_n\supset A_{n+1},\ \ n\geq 1,\ \ \mu\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right)=0$,

c) $\mu(A_n)=+\infty,\ \ A_n\supset A_{n+1},\ \ n\geq 1,\ \ \mu\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right)=1$,

d) $\mu(A_n)=+\infty,\ \ n\geq 1,\ \ \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\mathbb{N}$,

e) $\mu(A_n)=+\infty,\ \ A_n\bigcap A_m=\emptyset,\ \ n\neq m,\ \ n,\ m\in\mathbb{N}$.

Yechish. Biz faqat b) qismini yechimini beramiz. $A_n=[n,\ \infty)$, $n\in\mathbb{N}$ lar Borel tipidagi to'plamlar bo'ladi va ular b) qismda keltirilgan shartlarni qanoatlantiradi. □

5.35. $A\subset\mathbb{R}^2$ ning "Borel tipidagi to'plam" ekanligini ko'rsatib, uning o'lchovini toping:

a) $A=\left\{(x,\ y)\in\mathbb{R}^2:\ x\in\mathbb{R},\ 0\leq y\leq\frac{1}{1+x^2}\right\}$,

b) $A=\left\{(x,\ y)\in\mathbb{R}^2:\ -1<x<1,\ 0\leq y\leq\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right\}$.

5.36. $a\in(0,\ 1)$ ixtiyoriy son bo'lsin. $[0,\ 1]$ kesmaning o'rtasidan uzunligi $\frac{a}{2}$ ga teng $A_1=\left(\frac{2-a}{4},\frac{2+a}{4}\right)$ intervalni chiqarib tashlaymiz. A_1 ni o'rta interval deb ataymiz. Ikkinchi qadamda qolgan ikki kesmaning uzunligi $\frac{a}{8}$ ga teng bo'lgan o'rta intervalini chiqarib tashlaymiz. Bu intervallar birlashmasini A_2 bilan belgilaymiz. Uchinchi qadamda qolgan to'rtta kesmaning har biridan uzunligi $\frac{a}{32}$ ga teng bo'lgan o'rta intervalini chiqarib tashlaymiz. Ularning birlashmasini A_3 orqali belgilaymiz. Bu jarayonni cheksiz davom ettiramiz. A bilan $[0, 1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ to'plamni belgilaymiz. A ning o'lchovli ekanligini ko'rsating va uning o'lchovini toping.

5.37. 5.36-misolda keltirilgan A to'plam $[0, 1]$ kesmaning hech yerida zich emasligini isbotlang.

5.38. $A \subset [a, b]$ o'lchovli to'plam va $\mu(A) = \lambda > 0$ bo'lsin. U holda $f(x) = \mu([a, x) \cap A)$ funksiyaning uzluksizligini isbotlang. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ funksiyaning qiymatlar sohasini toping.

5.39. $[0, 1]$ kesmada $[0, 1]$ dan farqli va o'lchovi 1 bo'lgan yopiq to'plam mavjudmi?

5.40. Tekislikda shunday o'lchovli $A \subset \mathbb{R}^2$ to'plamga misol keltiringki, uning koordinata o'qlariga proyeksiyalari o'lchovsiz bo'lsin.

5.41-5.44-misollarda $A_1 \subset A$ shartni qanoatlantiruvchi A va A_1 to'plamlar berilgan. $A \setminus A_1$ to'plamni eng kam sondagi o'zaro kesishmaydigan $P_1, P_2, \ldots, P_n$ to'g'ri to'rtburchaklar birlashmasi ko'rinishida tasvirlang. $A \setminus A_1 = \bigcup_{k=1}^{n} P_k$ yoyilmadan foydalanib $A \setminus A_1$ to'plam o'lchovini toping.

5.41. $A = \{(x, y) : 0 \le x < 7,\ 0 \le y < 7\}$,

$$A_1 = \{(x, y) : 4 \le x < 6,\ 3 \le y < 5\}.$$

5.42. $A = \{(x, y) : 0 \le x \le 7,\ 0 \le y \le 7\}$,

$$A_1 = \{(x, y) : 4 \le x < 7,\ 3 \le y \le 7\}.$$

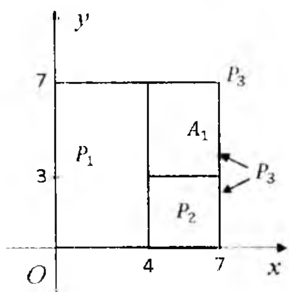
5.43. $A = \{(x, y) : 0 \le x \le 7,\ 0 \le y \le 7\}$,

$$A_1 = \{(x, y) : 3 \le x \le 7,\ 0 \le y < 7\}.$$

5.44. $A = \{(x, y) : 0 \le x \le 7,\ 0 \le y \le 7\}$,

$$A_1 = \{(x, y) : 0 \le x < 7,\ 0 < y < 6\}.$$

5.42-misolning yechimi. Tekislikda A va A_1 to'plamlarni chizmada tasvirlaymiz. 5.6-chizmadan $A \backslash A_1 = P_1 \cup P_2 \cup P_3$ yoyilmani olamiz. Bu yerda $P_1 = [0, 4) \times [0, 7)$, $P_2 = [4, 7) \times [0, 3]$, $P_3 = \{7\} \times [0, 7]$. Bu to'g'ri to'rtburchaklar o'zaro kesishmaydi. O'lchovning additivlik xossasiga ko'ra, $\mu(A \backslash A_1) = \mu(P_1) + \mu(P_2) + \mu(P_3) = 28 + 9 + 0 = 37$. □



5.6-chizma

5.45-5.59-misollarda keltirilgan tasdiqlarni isbotlang.

5.45. $A \subset \mathbb{R}$ to'plam o'lchovli bo'lishi uchun ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ ga ko'ra shunday G $(G \supset A)$ ochiq to'plam mavjud bo'lib, $\mu^*(G \backslash A) < \varepsilon$ tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli.

5.46. Agar $A \subset \mathbb{R}$ o'lchovli to'plam bo'lsa, u holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday G $(G \subset A)$ yopiq to'plam mavjud bo'lib, $\mu^*(A \backslash G) < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi.

5.47. Agar $A \subset B$ bo'lsa, $\mu^*(A) \le \mu^*(B)$ bo'ladi.

5.48. Agar A – sodda to'plam bo'lsa, u holda $\mu^*(A) = m'(A)$ tengli[k] o'rinli.

5.49. Agar chekli yoki sanoqli sondagi $\{A_n\}$ to'plamlar sistemasi uchu[n] $A \subset \bigcup\limits_n A_n$ bo'lsa, u holda quyidagi tengsizlik o'rinli

$$\mu^*(A) \leq \sum_n \mu^*(A_n).$$

5.50. Agar $A \subset [0,\ 1]$ o'lchovli to'plam bo'lsa, $[0,\ 1]\backslash A$ ham o'lchovl[i] bo'ladi.

5.51. Agar A va B to'plamlar o'lchovli bo'lsa, u holda $A \cup B$, $A \cap B$[,] $A \Delta B$, $A \backslash B$ to'plamlarning o'lchovli bo'ladi.

5.52. O'lchovli to'plamlar sistemasi $\mathfrak{U}(\mathbb{R})$ halqa tashkil qiladi.

5.53. Chekli sondagi o'lchovli to'plamlarning birlashmasi va kesishmas[i] yana o'lchovli to'plamdir.

5.54. Agar A va B lar o'zaro kesishmaydigan o'lchovli to'plamlar bo'lsa[,] u holda $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ tenglik o'rinli.

5.55. Agar A va B lar o'lchovli to'plamlar bo'lsa, u holda quyidagi teng[-] liklar o'rinli.

a) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$,

b) $\mu(A \Delta B) = \mu(A) + \mu(B) - 2\mu(A \cap B)$.

5.56. Ixtiyoriy ikkita A va B to'plamlar uchun

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq \mu^*(A \Delta B)$$

tengsizlik o'rinli.

5.57. $A \subset E = [0,\ 1]$ o'lchovli to'plam uchun $\mu(E \backslash A) = 1 - \mu(A$[)] tenglik o'rinli.

5.58. Sanoqli sondagi o'lchovli to'plamlarning birlashmasi va kesishmasi yana o'lchovli to'plamdir.

5.59. O'lchovli to'plamlar sistemasi $\mathfrak{M}(\mathbb{R})$, $\sigma-$ algebra tashkil qiladi.

5.60. O'lchovning $\sigma-$ additivlik xossasidan foydalanib, quyidagi to'plamlarning o'lchovini toping:

a) $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} [n, n + 2^{-n})$; b) $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[n - \frac{2}{3^n}, n + \frac{2}{3^n}\right)$;

c) $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} [2^{-n}, 2^{1-n})$; d) $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(n+1)!}, \frac{1}{n!}\right)$.

5.61. O'lchovning uzluksizlik xossasi va uning natijasidan foydalanib, quyidagi to'plamlarning o'lchovini toping:

a) $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[(1 + \frac{1}{n})^n, 11 - (1 + \frac{1}{n})^n\right)$;

b) $B = \bigcap_{n=0}^{\infty} \left[1 - \frac{8}{2^n}, 4 + \frac{16}{2^n}\right)$;

c) $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[1 - (1 + \frac{1}{n})^n, 5 + (1 + \frac{1}{n})^n\right)$;

d) $B = \bigcup_{n=0}^{\infty} \left[1 - \frac{n}{n+1}, 4 + \frac{n}{n+1}\right)$.

5.62. Chegaralangan o'lchovsiz to'plamga misol keltiring.

Yechish. Chegaralangan o'lchovsiz to'plam quyidagicha quriladi. Buning uchun $[-1, 1]$ kesmaning nuqtalari orasida ekvivalentlik tushunchasini kiritamiz: agar x va y ning ayirmasi $x - y \in \mathbb{Q}$ bo'lsa, *ular ekvivalent* deyiladi. Bu munosabat ekvivalentlik munosabati bo'ladi. Shuning uchun $[-1, 1]$ kesma o'zaro ekvivalent bo'lgan elementlardan iborat $K(x)$, $x \in [-1, 1]$ sinflarga ajraladi. Bunda turli sinflar o'zaro kesishmaydi. Shunday qilib $[-1, 1]$ kesma o'zaro kesishmaydigan $K(x)$, $x \in [-1, 1]$ sinflarga ajraladi. Endi bu sinflarning har biridan bittadan element tanlab olib, bu tanlab olingan elementlar to'plamini A bilan belgilaymiz. Hosil bo'lgan A to'plamning o'lchovsiz ekanligini isbotlaymi $[-1, 1]$ kesmadagi barcha ratsional sonlar to'plamini nomerlab chiqami

$$r_0 = 0, r_1, r_2, \dots$$

A_k bilan A to'plamni r_k songa siljitishdan hosil bo'lgan to'plamni bel layımiz, ya'ni $A_k = A + r_k = \{y : y = x + r_k, x \in A\}$. Xususan $A_0 =$. A_k to'plam A to'plamdan r_k ga siljitish orqali hosil qilingani uchun ul bir vaqtda yo o'lchovli, yo o'lchovsiz to'plamlar bo'ladi. Faraz qilaylik, o'lchovli to'plam bo'lsin. U holda unga konguriyent bo'lgan A_k to'pla lar ham o'lchovli bo'ladi va $\mu(A_k) = \mu(A)$ tenglik o'rinli. Ravshanki,

$$[-1, 1] \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k.$$

Bundan, o'lchovning yarim additivlik xossasiga asosan

$$2 = \mu([-1, 1]) \leq \mu\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) = \mu(A) + \mu(A) + \dots + \mu(A) + \dots.$$

Bu yerdan $\mu(A) > 0$ ekanligi kelib chiqadi. Ikkinchi tomondan, ixtiyo $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ uchun $A_k \subset [-2, 2]$. Bundan

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \subset [-2, 2]$$

va A_k to'plamlar o'zaro kesishmaydi. O'lchovning $\sigma-$ additivlik xossa ga asosan

$$4 = \mu([-2, 2]) \geq \mu\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) = \mu(A) + \mu(A) + \dots + \mu(A) + \dots.$$

Bu yerdan $\mu(A) = 0$ ekanligi kelib chiqadi. Bu qarama-qarshilik to'plamning o'lchovsiz ekanligini isbotlaydi.

5.63. O'lchovsiz to'plamlarning birlashmasi o'lchovsiz bo'ladimi?

Yechish. O'lchovsiz to'plamlarning birlashmasi o'lchovli ham o'lch siz ham bo'lishi mumkin. Masalan, $A \subset [0, 1]$ o'lchovsiz to'plam bo'ls u holda $B = [0,\ 1]\backslash A$ ham o'lchovsiz to'plam bo'ladi. Ularning birlashmasi $A \cup B = [0,\ 1]$ esa o'lchovli to'plam. Agar $A \subset [0,\ 1)$ o'lchovsiz to'plam, $B \subset [1,\ 2)$ o'lchovsiz to'plam bo'lsa, u holda ularning birlashmasi $C = A \cup B$ to'plam uchun, $A_0 = C \cap E_0 = A$ o'lchovsiz to'plam bo'lganligidan 5.6-ta'rifga ko'ra $C = A \cup B$ o'lchovsiz to'plam bo'ladi. □

5.64-5.66-misollarga ham shu tariqa javob bering.

5.64. O'lchovsiz to'plamlarning kesishmasi o'lchovsiz bo'ladimi?

5.65. O'lchovsiz to'plamlarning ayirmasi o'lchovsiz bo'ladimi?

5.66. O'lchovsiz to'plamlarning simmetrik ayirmasi o'lchovsiz bo'ladimi?

5.67. $A \subset E = [0,\ 10]$ o'lchovsiz to'plam, $B \subset E$ o'lchovli to'plam. Ularning birlashmasi o'lchovli bo'lishi mumkinmi? $A \subset B$ holni tahlil qiling.

5.68. $A \subset E$ o'lchovsiz to'plam, $B \subset E$ o'lchovli to'plam. $A \cap B$ to'plam o'lchovli bo'ladimi? $A \cap B = \emptyset$, $B \subset A$, $A \subset B$ hollarni tahlil qiling.

5.69. $A \subset E$ o'lchovsiz to'plam, $B \subset E$ o'lchovli to'plam bo'lsin. $A \backslash B$ to'plam o'lchovli bo'lishi mumkinmi? $A \subset B$, $B \subset A$ hollarni tahlil qiling.

5.70. $A \subset E$ o'lchovsiz to'plam, $B \subset E$ o'lchovli to'plam bo'lsin. $B \backslash A$ to'plam qanday hollarda o'lchovli, qachon o'lchovsiz bo'lishini misollarda tushuntiring. $A \cap B = \emptyset$, $B \subset A$, $A \subset B$ hollarni tahlil qiling.

5.71. $A \subset E$ o'lchovsiz to'plam, $B \subset E$ o'lchovli to'plam bo'lsin. $A \Delta B$ to'plam o'lchovli bo'lishi mumkinmi? $A \cap B = \emptyset$, $B \subset A$, $A \subset B$ hollarni tahlil qiling.

Ayrim umumlashtirishlar. Bizga sonlar o'qida aniqlangan, kamaymaydigan, o'ngdan uzluksiz F funksiya berilgan bo'lsin. Bo'sh bo'lmagan interval, kesma va yarim intervallarga F funksiya yordamida quyidagi sonlarni mos qo'yamiz:

$$m((a,\ b)) = F(b-0) - F(a),\ m([a,\ b]) = F(b) - F(a-0),$$

$$m((a,\ b]) = F(b) - F(a),\ m([a,\ b)) = F(b-0) - F(a-0).$$

Ravshanki,, bu usulda aniqlangan m to'plam funksiyasi manfiymas va additiv. Yarim halqada kiritilgan bu o'lchovning davomini μ_F bilan belgilaymiz. Umuman olganda, μ_F o'lchovga nisbatan o'lchovli to'plamlar sinfi F funksiyaning tanlanishiga bog'liq. Ammo $\mathbb{R}$ da o'ngdan uzluksiz, kamaymaydigan istalgan F funksiya uchun ochiq va yopiq to'plamlar, shuningdek, ularning istalgan sanoqli yig'indi va sanoqli kesishmalari μ_F o'lchovga nisbatan o'lchovli to'plamlar bo'ladi.

5.11-ta'rif. *Biror kamaymaydigan, o'ngdan uzluksiz F funksiya vositasida qurilgan μ_F o'lchov Lebeg-Stiltes o'lchovi deyiladi.*

Bizga Lebeg o'lchovi μ va Lebeg-Stiltes o'lchovi μ_F berilgan bo'lsin.

5.12-ta'rif. *Agar $\mu(A) = 0$ ekanligidan $\mu_F(A) = 0$ tenglik kelib chiqsa, μ_F absolyut uzluksiz o'lchov deyiladi.*

5.13-ta'rif. *Agar μ_F o'lchov chekli yoki sanoqli qiymat qabul qiluvchi F funksiya yordamida aniqlansa, μ_F diskret o'lchov deyiladi.*

5.14-ta'rif. *Agar μ_F o'lchovda istalgan bir nuqtali to'plam nol o'lchovga ega bo'lsa va Lebeg o'lchovi nolga teng bo'lgan biror A to'plam uchun $\mu_F(\mathbb{R}\backslash A) = 0$ bo'lsa, u holda μ_F singulyar o'lchov deyiladi.*

O'lchovning Jordan bo'yicha davomi. Agar m biror $\mathfrak{S}_m$ yarim halqada aniqlangan additivlik shartini qanoatlantiruvchi o'lchov bo'lsa, uni bu yarim halqani o'zida saqlovchi $\mathfrak{M}(\mathfrak{S}_m)$ minimal halqaga tabiiy ravishda davom ettirish mumkin.

Endi o'lchovni $\mathfrak{M}(\mathfrak{S}_m)$ halqadan kattaroq halqaga Jordan bo'yicha davom ettirish masalasini qaraymiz. Faraz qilaylik, $\mathfrak{J}$ biror halqa, m shu halqada aniqlangan o'lchov bo'lsin.

5.15-ta'rif. *Faraz qilaylik, A biror to'plam bo'lsin. Agar ixtiyoriy > 0 son uchun shunday $A', A'' \in \mathfrak{J}$ to'plamlar mavjud bo'lib, $A' \subset A \subset A''$ va $m(A''\setminus A') < \varepsilon$ shartlar bajarilsa, u holda A Jordan ma'nosida o'lchovli to'plam deyiladi.*

5.4-teorema. *Jordan ma'nosida o'lchovli to'plamlar sistemasi $-\mathfrak{J}^*$ halqa bo'ladi.*

5.72. 5.4-teoremani isbotlang.

Faraz qilaylik, $\mathfrak{A}$ biror to'plamlar sistemasi bo'lib, ixtiyoriy $A \in \mathfrak{A}$ uchun shunday $B \supset A$, $B \in \mathfrak{J}$ mavjud bo'lsin. U holda $A \in \mathfrak{A}$ uchun

$$\overline{\mu}(A) = \inf_{B \supset A} m(B), \qquad \underline{\mu}(A) = \sup_{B \subset A} m(B)$$

sonlari mavjud. $\overline{\mu}(A)$ va $\underline{\mu}(A)$ sonlari mos ravishda A to'plamning *tashqi va ichki o'lchovlari* deyiladi. Aniqlanishiga ko'ra $\underline{\mu}(A) \leq \overline{\mu}(A)$.

5.5-teorema. *$\mathfrak{J}^*$ halqa $\mathfrak{A}$ ning $\overline{\mu}(A) = \underline{\mu}(A)$ shartlarni qanoatlantiruvchi $A \in \mathfrak{A}$ to'plamlari bilan ustma-ust tushadi.*

5.73. 5.5-teoremani isbotlang.

$\mathfrak{A}$ ning element (to'plam) lari uchun quyidagilar bajariladi.

5.6-teorema. *Agar $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ bo'lsa, u holda $\overline{\mu}(A) \leq \sum_{k=1}^{n} \overline{\mu}(A_k)$.*

5.74. 5.6-teoremani isbotlang.

5.7-teorema. *Agar $A_k \subset A$ $(k = 1, \dots, n)$ va $A_i \cap A_j = \emptyset$ bo'lsa, u holda quyidagi tengsizlik o'rinli*

$$\underline{\mu}(A) \geq \sum_{k=1}^{n} \underline{\mu}(A_k).$$

$\mathfrak{S}_\mu := \mathfrak{J}^*$ halqada μ o'lchovni $\mu(A) = \bar{\mu}(A) = \underline{\mu}(A)$ bilan aniqlaymiz.

5.8-teorema. *$\mu : \mathfrak{J}^* \to \mathbb{R}$ funksiya m o'lchovning davomidir.*

Yuqoridagi mulohazalardan kelib chiqadiki, ixtiyoriy halqada aniqlangan o'lchovni Jordan bo'yicha davom ettirish mumkin. Xususiy holda tekislikdagi to'g'ri to'rtburchaklar sistemasi, ya'ni $\mathfrak{S}_2$ yarim halqadan ham davom ettirilishi mumkin. Tekislikdagi yarim halqa $\mathfrak{S}_2$ va $\mathfrak{M}(\mathfrak{S}_2)$ halqalar koordinatalar sistemasining tanlanishiga bog'liq. Masalan, 45^0 burchakka burilgan kvadrat bu halqaga qarashli emas va unda o'lchov aniqlanmagan. Ammo Jordan o'lchovi tekislikdagi ixtiyoriy koordinatalar sistemasida (xususan, biror burchakka burilgan koordinatalar sistemasida ham) aniqlanishi mumkin.

5.9-teorema. *$\mathfrak{J}_1$ va $\mathfrak{J}_2$ to'plamlar sistemasida aniqlangan m_1 va m_2 o'lchovlarning Jordan bo'yicha davomlari $\mu_1 = j(m_1)$ va $\mu_2 = j(m_2)$ lar ustma-ust tushishi uchun quyidagi shartlarning bajarilishi zarur va yetarlidir:*

1) $\mathfrak{J}_1 \subset \mathfrak{S}_{\mu_2}$, $m_1(A) = \mu_2(A)$, $\forall A \in \mathfrak{J}_1$.

2) $\mathfrak{J}_2 \subset \mathfrak{S}_{\mu_1}$, $m_2(A) = \mu_1(A)$, $\forall A \in \mathfrak{J}_2$.

Xuddi shunday tabiiy ravishda Jordan o'lchovi yarim halqadan ham davom ettiriladi.

5.16-ta'rif. *Agar A to'plam va m o'lchov uchun quyidagi shartlar bajarilsa, u holda A to'plam m o'lchov uchun yagonalik to'plami deyiladi:*

1) *A to'plam m ning biror davomida o'lchovga ega.*

2) *m ning davomi bo'ladigan ixtiyoriy μ_1 va μ_2 o'lchovlar uchun*

$$\mu_1(A) = \mu_2(A).$$

Xuddi shunga o'xshash ta'rifni m o'lchovning $\sigma-$ additiv davomi uchun ham keltirish mumkin. Agar m $\sigma-$ additiv o'lchov bo'lsa, u holda uning Jordan bo'yicha davomi ham $\sigma-$ additiv o'lchov bo'ladi.

5.75. Tekislikda to'g'ri to'rtburchaklar sistemasida aniqlangan Jordan o'lchovi uchun shunday ochiq to'plam quringki, u Jordan bo'yicha o'lchovli bo'lmasin.

Yechish. Tekislikda $E^2 = [0, 1] \times [0, 1]$ kvadratdagi ratsional koordinatali nuqtalarni nomerlab chiqamiz $\{r_k = (x_k, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$. $\varepsilon > 0$ ixtiyoriy musbat son bo'lsin. $\{B(r_k, \frac{\varepsilon}{2^k})\}$ markazi r_k da, radiusi $\frac{\varepsilon}{2^k}$ bo'lgan barcha sharlarning birlashmasini A bilan belgilaymiz. Sanoqli sondagi ochiq to'plamlarning birlashmasi ochiq to'plam ekanligidan A ning ochiq to'plam ekanligi kelib chiqadi. Endi A ni Jordan bo'yicha o'lchovli emasligini ko'rsatamiz. Teskarisidan faraz qilamiz. A Jordan bo'yicha o'lchovli to'plam bo'lsin. U holda u E^2 dagi hamma ratsional koordinatali nuqtalarni saqlagani uchun uning tashqi o'lchovi 1 dan kichik emas. Endi A dagi ixtiyoriy yopiq P elementar to'plamni olaylik. $P \subset A$ va P chegaralangan yopiq bo'lgani uchun P ning ochiq to'plamlar bilan qoplamasidan chekli qism qoplama ajratib olamiz. Ya'ni

$$P \subset \bigcup_{j=1}^{N} B\left(r_{k_j}, \frac{\varepsilon}{2^{k_j}}\right), 1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_N .$$

Bundan esa $P \subset \bigcup_{j=1}^{k_N} B\left(r_j, \frac{\varepsilon}{2^j}\right)$ kelib chiqadi. $\left\{B\left(r_k, \frac{\varepsilon}{2^k}\right)\right\}$ sharlar Jordan bo'yicha o'lchovli bo'lgani bois

$$m(P) \leq \sum_{j=1}^{k_N} m\left(B\left(r_j, \frac{\varepsilon}{2^j}\right)\right) < \pi\varepsilon^2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \pi\varepsilon^2.$$

Shunday qilib, ixtiyoriy P yopiq elementar to'plam uchun $m(P) < \pi\varepsilon^2$. Demak, $\underline{\mu}(A) \leq \pi\varepsilon^2$ munosabat o'rinli. Ikkinchi tomondan yuqorida ta'kidlaganimizga ko'ra $\bar{\mu}(A) \geq 1$. Agar ε ni $\pi\varepsilon^2 < 1$ shart bajariladigan qilib tanlasak, A ning Jordan bo'yicha o'lchovli emasligiga kelamiz.

Har qanday ochiq to'plam Lebeg ma'nosida o'lchovli bo'lgani uchun A ham Lebeg ma'nosida o'lchovlidir. $\square$

O'lchovning Lebeg bo'yicha davomi. Birlik elementli yarim halqada aniqlangan o'lchovning Lebeg bo'yicha davomini qaraymiz. Agar $\mathfrak{S}_m$ da aniqlangan m o'lchov $\sigma-$additiv bo'lsa, u holda m ni $\mathfrak{S}_m$ dan $\mathfrak{M}(\mathfrak{S}_m)$ ga nisbatan kengroq bo'lgan va qandaydir ma'noda maksimal sinfga davom ettirish mumkin. Buni Lebeg bo'yicha davom ettirish yordamida amalga oshirish mumkin. Bizga biror $\mathfrak{S}_m$ birlik elementli yarim halqada aniqlangan $\sigma-$additiv m o'lchov berilgan bo'lsin va E to'plam $\mathfrak{S}_m$ yarim halqaning birlik elementi bo'lsin. E ning barcha qism to'plamlaridan tashkil topgan $\mathfrak{A}(E)$ sistemada tashqi o'lchov deb ataluvchi μ^* to'plam funksiyasini quyidagi usulda aniqlaymiz.

5.17-ta'rif. *Ixtiyoriy $A \subset E$ to'plam uchun*

$$\mu^*(A) = \inf \sum_n m(B_n)$$

son A to'plamning tashqi o'lchovi deyiladi. Bu yerda aniq quyi chegara A to'plamni qoplovchi barcha chekli yoki sanoqli $\{B_n\}$, $B_n \in \mathfrak{S}_m$ to'plamlar sistemasi bo'yicha olinadi.

5.10-teorema. *Agar A va sanoqlita $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ to'plamlar uchun*

$A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ *bo'lsa, u holda quyidagi tengsizlik o'rinli*

$$\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

5.18-ta'rif. *Agar $A \subset E$ to'plam va istalgan $\varepsilon > 0$ uchun shunday $B \in \mathfrak{M}(\mathfrak{S}_m)$ to'plam mavjud bo'lib,*

$$\mu^*(A \Delta B) < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, A (Lebeg ma'nosida) o'lchovli to'plam deyiladi.

Faqat o'lchovli to'plamlar sistemasi $\mathfrak{U}(E)$ da aniqlangan μ^* to'plam funksiyasi *Lebeg o'lchovi* deyiladi va u μ harfi bilan belgilanadi. Ravshanki, $\mathfrak{S}_m$ va $\mathfrak{M}(\mathfrak{S}_m)$ dan olingan to'plamlar o'lchovli bo'ladi. Bunda, agar $A \in \mathfrak{S}_m$ va $B \in \mathfrak{M}(\mathfrak{S}_m)$ bo'lsa, u holda

$$\mu(A) = m(A), \quad \mu(B) = m'(B).$$

Agar A o'lchovli to'plam va $\mu^*(A\Delta B) < \varepsilon$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi $B \in \mathfrak{M}(\mathfrak{S}_m)$ to'plam berilgan bo'lsa,

$$A\Delta B = (E\backslash A)\Delta(E\backslash B)$$

tenglikdan A ning to'ldiruvchi to'plami $E\backslash A$ ning ham o'lchovli ekanligi kelib chiqadi.

5.11-teorema. *O'lchovli to'plamlar sistemasi* $\mathfrak{U}(E)$ *halqa bo'ladi.*

5.76. 5.11-teoremani isbotlang.

5.2-eslatma. $\mathfrak{S}_m$ ning birlik elementi - E o'lchovli to'plamlar sistemasi $\mathfrak{U}(E)$ uchun ham birlik element bo'ladi, shuning uchun o'lchovli to'plamlar sistemasi $\mathfrak{U}(E)$ algebra tashkil qiladi.

5.12-teorema. *O'lchovli to'plamlar sistemasi* $\mathfrak{U}(E)$ *da aniqlangan* μ *to'plam funksiyasi additivdir.*

5.77. 5.12-teoremani isbotlang.

5.13-teorema. *O'lchovli to'plamlar sistemasi* $\mathfrak{U}(E)$ *da aniqlangan* μ *to'plam funksiyasi* $\sigma-$ *additivdir.*

5.14-teorema. *Lebeg bo'yicha o'lchovli bo'lgan barcha to'plamlar sistemasi* $\mathfrak{U}(E)$, E *birlik elementli* $\sigma-$ *algebradir.*

5.78. $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$ o'lchovli to'plamlar ketma-ketligi uchun $\mu(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$ tenglikni isbotlang.

5.79. O'lchovli to'plamlarning $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$ ketma-ketligi uchun $\mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$ tenglikni isbotlang.

5.19-ta'rif. *O'lchovli to'plamlar sistemasi* $\mathfrak{A}(E)$ *da aniqlangan va* $\mathfrak{A}(E)$ *da tashqi o'lchov* μ^* *bilan ustma-ust tushuvchi* μ *funksiya* m *o'lchovning* $\mu = L(m)$ *Lebeg davomi deyiladi.*

5.15-teorema. *Istalgan boshlang'ich* m *o'lchov uchun Lebeg bo'yicha o'lchovli to'plamlar sistemasi* $\mathfrak{A}(E)$ $\delta-$ *halqa bo'ladi. Sanoqli sondagi o'lchovli* $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ *to'plamlar birlashmasi bo'lgan* $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ *to'plamning o'lchovli bo'lishi uchun* $\mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k\right)$ *miqdorning* n *ga bog'liqsiz o'zgarmas bilan chegaralangan bo'lishi zarur va yetarli.*

5.80. Agar $\mathfrak{A}(\mathbb{R})-$ sonlar o'qidagi Lebeg ma'nosida o'lchovli to'plamlar sistemasi, $[a, b]$ ixtiyoriy kesma bo'lsa, u holda $[a, b]$ kesmada saqlanuvchi o'lchovli to'plamlar sistemasi $\sigma-$ algebra tashkil qiladi. Isbotlang.

Lebeg o'lchovining yana bir xossasini keltiramiz.

5.20-ta'rif. *Agar* $\mu(A) = 0$ *va* $A' \subset A$ *bo'lishidan* A' *ning o'lchovli ekanligi kelib chiqsa,* μ *o'lchov to'la deyiladi.*

Agar μ o'lchov to'la bo'lsa, A' to'plam uchun $\mu(A') = 0$ bo'ladi.

Ixtitoriy o'lchovning Lebeg davomi to'la bo'ladi. Haqiqatan ham, $A' \subset A$, $\mu(A) = \mu^*(A) = 0$ bo'lsa, $\mu^*(A') = 0$ bo'ladi va $B = \emptyset \in \mathfrak{S}_m$ ni olsak,

$$\mu^*(A' \Delta \emptyset) = \mu^*(A') = 0$$

bo'ladi, ya'ni A' ning o'lchovli ekanligi va $\mu(A') = 0$ kelib chiqadi.

5.81. Kantor to'plamining o'lchovi nolga teng ekanligini isbotlang.

5.82. Ixtiyoriy $A \subset \mathbb{R}$ sanoqli to'plam uchun $\mu(A) = 0$ ekanligini isbotlang.

5.83. A va B lar sonlar o'qidagi nol o'lchovli to'plamlar bo'lsa, $A \cup B$ va $A \Delta B$ lar ham nol o'lchovli to'plamlar bo'ladi. Isbotlang.

5.84. $A \subset \mathbb{R}$ nol o'lchovli to'plam va ixtiyoriy $B \subset \mathbb{R}$ to'plam uchun $\mu(A \cap B) = 0$ ekanligini isbotlang.

5.85. Sonlar o'qidagi barcha nol o'lchovli to'plamlar sistemasi σ halqa va δ halqa bo'lishini isbotlang.

5.86. Sonlar o'qidagi barcha nol o'lchovli to'plamlar sistemasi simmetrik ayirma amaliga nisbatan kommutativ gruppa bo'lishini isbotlang.

5.87. Sonlar o'qida kontinuum quvvatli, nol o'lchovli to'plamga misol keltiring.

5.88. $[0, 1]$ kesmada, o'lchovi 0,9 ga teng bo'lgan va $[0, 1]$ ning hech yerida zich bo'lmagan mukammal to'plamga misol keltiring.

5.89. $[0, 1]$ kesmada, o'lchovi 1 ga teng bo'lgan va $[0, 1]$ ning hech yerida zich bo'lmagan mukammal to'plam mavjudmi?

5.90. $[0, 1]$ kesmada, nol o'lchovli va $[0, 1]$ ning hamma yerida zich kontinuum quvvatli to'plamga misol keltiring.

5.91. $A \subset [0, 1]$ hech yerda zich bo'lmagan nol o'lchovli to'plam bo'lsa, uning yopig'i $\bar{A}$ ham nol o'lchovli to'plam bo'lishi shartmi?

5.92. Shunday nol o'lchovli $A \subset \mathbb{R}$ va $B \subset \mathbb{R}$ to'plamlarga misol keltiringki, ularning algebraik yig'indisi $A + B = \{c : c = a + b, a \in A, b \in B\}$ musbat o'lchovli bo'lsin.

5.93. Shunday $A \subset [0, 1]$ va $B \subset [0, 1]$ to'plamlarga misol keltiringki, quyidagilar bajarilsin: $\mu(A) = \mu(B) = 0, \quad \mu(A + B) = 2.$

5.94. $F(x) = 2x + 1$ funksiya yordamida qurilgan $\mu_F -$ Lebeg-Stiltes o'lchovi absolyut uzluksiz o'lchov bo'lishini isbotlang.

5.95. μ_F, $F(x) = 2x + 1$ o'lchov bo'yicha $A = (1, 5]$ to'plamning o'lchovini toping.

Yechish. 5.11-ta'rifga ko'ra

$$\mu_F(A) = F(5) - F(1) = 2 \cdot 5 + 1 - (2 \cdot 1 + 1) = 11 - 3 = 8. \qquad \square$$

5.96. $F(x) = [x]$ funksiya yordamida qurilgan μ_F – Lebeg-Stiltes o'lchovi diskret o'lchov bo'lishini ko'rsating.

Yechish. $F(x) = [x]$ funksiya monoton kamaymaydigan o'ngdan uzluksiz funksiya bo'lib, uning qiymatlar sohasi butun sonlar to'plami $\mathbb{Z}$ dan iborat. Butun sonlar to'plami esa sanoqli to'plam bo'lganligi uchun, 5.13-ta'rifga ko'ra μ_F diskret o'lchov bo'ladi. $\square$

5.97. μ_F, $F(x) = [x]$ Lebeg-Stiltes o'lchovi bo'yicha $A = (1, 5] \cup \{7, 8\}$ to'plamning o'lchovini toping.

Qurilishi Kantor to'plami – K (3.37-misolga qarang) bilan bog'liq bo'lgan *Kantorning zinapoya funksiyasini* (5.7-chizma) keltiramiz. Kantorning zinapoya funksiyasini $\mathfrak{K}$ bilan belgilaymiz va uni $\mathbb{R}$ da quyidagicha aniqlaymiz: $\mathfrak{K}(x) = 0$, $x \in (-\infty, 0]$ va $\mathfrak{K}(x) = 1$, $x \in [1, \infty)$. $\mathfrak{K}$ ni $[0, 1] \setminus K$ da quyidagicha aniqlaymiz. $K_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ to'plam va uning chegarasida (5.7-chizmaga qarang)

$$\mathfrak{K}(x) = \frac{1}{2}, \quad x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right].$$

$K_2 = K_{21} \cup K_{22} = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ to'plam va uning chegaralarida

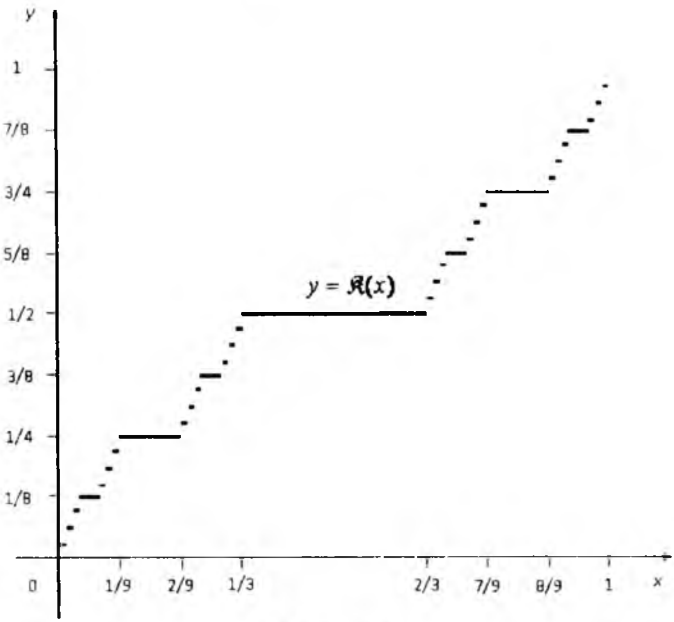
$$\mathfrak{K}(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & agar \ x \in \left[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right], \\ \frac{3}{4}, & agar \ x \in \left[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right]. \end{cases}$$

Endi

$$K_3 = \bigcup_{k=1}^{4} K_{3k} = \left(\frac{1}{3^3}, \frac{2}{3^3}\right) \bigcup \left(\frac{7}{3^3}, \frac{8}{3^3}\right) \bigcup \left(\frac{19}{3^3}, \frac{20}{3^3}\right) \bigcup \left(\frac{25}{3^3}, \frac{26}{3^3}\right)$$

to'plam va uning chegaralarida

$$\mathfrak{K}(x) = \frac{2k-1}{2^3}, \quad x \in \overline{K_{3k}}, \; k = 1, 2, 3, 4.$$



5.7-chizma

Xuddi shunday $K_n = \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} K_{nk}$ to'plamning k – qo'shni intervali va uning chegarasida

$$\mathfrak{K}(x) = \frac{2k-1}{2^n}, \quad x \in \overline{K_{nk}}, \; k = 1, 2, 3, \ldots, 2^{n-1}.$$

Shunday qilib, K_n to'plamlar va ularning chegaralarida $\mathfrak{K}$ funksiya aniqlandi. Bu $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = [0, 1] \setminus K$ to'plam $[0, 1]$ kesmada zich (3.60-misol). Endi $x_0 \in K$ soni $\mathfrak{K}$ funksiya aniqlanmagan biror nuqta bo'lsin.

u holda

$$\mathfrak{K}(x_0) = \sup\left\{\mathfrak{K}(x) : x < x_0,\ x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n\right\}$$

deymiz. Hosil qilingan funksiya *Kantorning zinapoya funksiyasi* deyiladi.

5.98. Kantorning zinapoya funksiyasi $\mathfrak{K}$ ning $[0,\ 1]$ kesmada uzluksiz, monoton kamaymaydigan funksiya ekanligini isbotlang.

5.99. Kantorning zinapoya funksiyasi $F(x) = \mathfrak{K}(x)$ yordamida qurilgan Lebeg-Stiltes o'lchovi $-\mu_{\mathfrak{K}}$ ning singulyar o'lchov ekanligini isbotlang.

5.100. $\mu_{\mathfrak{K}} -$ 5.99-misolda keltirilgan Lebeg-Stiltes o'lchovi bo'lsin. $\mu_{\mathfrak{K}}(K) = 1$ ekanligini isbotlang. Bu yerda $K-$ Kantor to'plami.

5.101. $\mu_{\mathfrak{K}} -$ 5.99-misolda keltirilgan Lebeg-Stiltes o'lchovi. A $(K \subset A)$ Kantor to'plamini saqlovchi ixtiyoriy to'plam bo'lsin. $\mu_{\mathfrak{K}}(A) = 1$ tenglikni isbotlang.

5.101. Sodda to'plamlar sistemasida aniqlangan m' o'lchovning additivlik xossasini isbotlang.

5.102. $F(x) = x$ funksiya yordamida qurilgan Lebeg-Stiltes o'lchovi absolyut uzluksiz o'lchov bo'ladimi?

5.103. $F(x) = 2[x] + 1$ funksiya yordamida qurilgan Lebeg-Stiltes o'lchovi diskret o'lchov bo'ladimi?

5.104. Singulyar Lebeg-Stiltes o'lchoviga misol keltiring.

5.105. Sonlar o'qida Lebeg ma'nosida o'lchovli to'plamlar sistemasi $\sigma-$ algebra tashkil qiladimi?

5.106. Tekislikdagi $A = \{(x, y) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\}$ to'plam elementar to'plam bo'ladimi? Uning o'lchovini toping.

5.107. Additiv, ammo $\sigma-$ additiv bo'lmagan o'lchovga misol keltiring.

5.108. Agar $A, B \subset [0, 1]$ o'lchovli to'plamlar uchun $\mu(A) + \mu(B) > 1$ bo'lsa, $\mu(A \cap B) > 0$ ekanligini isbotlang.

5.109. Har bir $A \subset \mathbb{R}$ to'plamga

$$m(A) = \sum_{n \in \mathbb{N} \cap A} \frac{1}{2^n}$$

sonni mos qo'yamiz. m to'plam funksiyasi o'lchov bo'lishini ko'rsating. $A = (-\infty, 0)$ va $B = [1, 4]$ to'plamlarning o'lchovlarini toping.

6-§. O'lchovli funksiyalar

Bu paragrafda uzluksiz funksiyaga "qaysidir" ma'noda yaqin bo'lgan o'lchovli funksiya tushunchasini keltiramiz. O'lchovli funksiyalar Lebeg integralini kiritishda asosiy manba hisoblanadi. Bizga $E \subset \mathbb{R}$ $(E \subset \mathbb{R}^2)$ Lebeg ma'nosida o'lchovli to'plam va unda aniqlangan haqiqiy qiymatli f funksiya berilgan bo'lsin.

6.1-ta'rif. *Agar ixtiyoriy* $c \in \mathbb{R}$ *uchun* $\{x \in E : f(x) < c\} := E(f < c)$ *to'plam o'lchovli bo'lsa,* f *funksiya* E *to'plamda o'lchovli deyiladi.*

6.1. $f : E \to \mathbb{R}$, $f(x) = a = const$ funksiyaning o'lchovli ekanligini ta'rif yordamida ko'rsating.

Yechish. Ixtiyoriy $c \in \mathbb{R}$ uchun

$$E(f < c) = \{x \in E : f(x) < c\} = \begin{cases} E, & agar\ c > a, \\ \emptyset, & agar\ c \leq a \end{cases}$$

tenglik o'rinli. E va $\emptyset$ to'plamlar o'lchovli. Demak, ixtiyoriy $c \in \mathbb{R}$ uchun $E(f < c)$ to'plam o'lchovli ekan. 6.1-ta'rifga ko'ra, $f(x) = a$ funksiya E da o'lchovli bo'ladi. □

6.2. Funksiyalarni ta'rif yordamida o'lchovli ekanligini ko'rsating.

a) $f(x) = [x], \quad x \in [0, 2)$. b) $f(x) = \{x\}, \quad x \in [0, 2)$.

c) $f(x) = 2x + 3, \quad x \in [0, 3]$. d) $f(x) = x^2 - 5, \quad x \in [-2, 3]$.

e) $f(x) = 2^x - 1, \quad x \in [0, 2]$. f) $f(x) = \ln(x + 1), \quad x \in [0, 2)$.

g) $f(x) = \sin x + 5, \quad x \in [0, \pi]$. h) $f(x) = \cos x + 5, \quad x \in [-\pi, 0]$.

Yechish. Biz a) misolning yechimini beramiz. Ixtiyoriy $c \in \mathbb{R}$ uchun

$$E(f < c) = \{x \in E : [x] < c\} = \begin{cases} \emptyset, & agar\ c \leq 0 \\ [0, 1), & agar\ 0 < c \leq 1 \\ [0, 2), & agar\ c > 1 \end{cases}$$

tenglik o'rinli. $\emptyset$ va $[0, 1)$, $[0, 2)$ to'plamlar o'lchovli. Demak, ixtiyoriy $c \in \mathbb{R}$ uchun $E(f < c)$ to'plam o'lchovli ekan. 6.1-ta'rifga ko'ra, $f(x) = [x]$ funksiya $E = [0, 2)$ da o'lchovli bo'ladi. □

6.3. Agar f va g funksiyalar E to'plamda o'lchovli bo'lsa, u holda ularning yig'indisi $f + g$, ayirmasi $f - g$ va ko'paytmasi $f \cdot g$ o'lchovli bo'ladi. Agar E dagi barcha x lar uchun $g(x) \neq 0$ bo'lsa, u holda $f : g$ funksiya ham E da o'lchovli bo'ladi. Isbotlang.

6.4. O'lchovli bo'lmagan funksiyaga misol keltiring.

Yechish. E musbat o'lchovli to'plam, $A \subset E$ o'lchovsiz to'plam bo'lsin. Quyidagi funksiyani qaraymiz:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & agar\ \ x \in A \\ 1, & agar\ \ x \in E \backslash A \end{cases}. \tag{6.1}$$

Bu funksiya uchun $E(f < 0) = A$ bo'lib, u o'lchovsiz to'plam. Demak, f funksiya E da o'lchovli emas. □

6.5. $A \subset \mathbb{R}$ to'plamning *xarakteristik funksiyasi* (2.30-misol, (2.4) formulaga qarang) $y = \chi_A(x)$ o'lchovli bo'lishi uchun A ning o'lchovli bo'lishi zarur va yetarli. Isbotlang.

6.6. Agar $A \subset E$ o'lchovsiz to'plam bo'lsa, u holda $g(x) = \chi_{E\setminus A}(x)$ funksiya o'lchovsiz bo'lishini isbotlang.

Isbot. To'plam xarakteristik funksiyasi ta'rifiga ko'ra $E(g < 0,5) = A$ bo'lib, u o'lchovsiz to'plam. Demak, $g : E \to \mathbb{R}$ o'lchovli funksiya emas. $\square$

6.7. O'lchovsiz funksiyalar yig'indisi o'lchovsiz bo'ladimi? $A \subset E = [0, 1]$ o'lchovsiz to'plam uchun $f(x) = \chi_A(x)$ va $g(x) = \chi_{E\setminus A}(x)$ ni tahlil qiling.

6.8. O'lchovsiz funksiyalar ko'paytmasi o'lchovli bo'lishi mumkinmi? $A \subset E = [0, 1]$ o'lchovsiz to'plam. $f(x) = \chi_A(x)$ va $g(x) = \chi_{E\setminus A}(x)$ holni tahlil qiling.

6.9. Agar f funksiya E da o'lchovsiz, g esa E da o'lchovli bo'lsa, ularning yig'indisi $f + g$ funksiya E da o'lchovli bo'lishi mumkinmi?

6.10. O'zi o'lchovsiz, kvadrati o'lchovli bo'lgan funksiyaga misol keltiring. (6.1) tenglik bilan aniqlangan f funksiyani tahlil qiling.

6.11. O'zi o'lchovsiz, moduli o'lchovli bo'lgan funksiyaga misol keltiring. (6.1) tenglik bilan aniqlangan f funksiyani tahlil qiling.

6.12. Agar f funksiya E to'plamda o'lchovli bo'lsa, u holda ixtiyoriy $a, b \in \mathbb{R}$ lar uchun quyidagi to'plamlarning har biri o'lchovli bo'lishini isbotlang: 1) $E(f \geq a)$; 2) $E(a \leq f < b)$; 3) $E(f = a)$; 4) $E(f \leq a)$; 5) $E(f > a)$.

Isbot. Aytaylik, f o'lchovli funksiya bo'lsin, u holda ta'rifga ko'ra, ixtiyoriy $a \in \mathbb{R}$ uchun $E(f < a)$ to'plam o'lchovli bo'ladi.

1) $E(f \geq a) = E \setminus E(f < a)$ tenglikdan, hamda o'lchovli to'plamning to'ldiruvchisi o'lchovli ekanligidan $E(f \geq a)$ to'plamning o'lchovli ekanligi kelib chiqadi.

2) $E(a \leq f < b) = E(f \geq a) \cap E(f < b)$ tenglikdan, hamda o'lchovli to'plamlar kesishmasi o'lchovli ekanligidan $E(a \leq f < b)$ to'plamning o'lchovli ekanligi kelib chiqadi.

3) $E(f = a)$ to'plamning o'lchovli ekanligini ko'rsatamiz.

$$E(f = a) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E\left(a \leq f < a + \frac{1}{n}\right).$$

Bu yerda $E(a \leq f < a + 1/n)$ to'plam 2) ko'rinishdagi to'plam bo'lgani uchun u - o'lchovli. O'lchovli to'plamlarning sanoqli sondagi kesishmasi o'lchovli bo'lgani uchun $E(f = a)$ to'plam o'lchovli bo'ladi.

4) $E(f \leq a)$ to'plamning o'lchovli ekanligi ta'rifdan, 3) dan hamda $E(f \leq a) = E(f < a) \cup E(f = a)$ tenglikdan kelib chiqadi.

5) $E(f > a)$ to'plamning o'lchovli ekanligi $E(f > a) = E \setminus E(f \leq a)$ tenglikdan hamda to'ldiruvchi to'plamning o'lchovli ekanligidan kelib chiqadi. $\square$

6.13. Agar ixtiyoriy $a, b \in \mathbb{R}$ lar uchun 6.12-misolda keltirilgan 1), 2), 4), 5) ko'rinishdagi to'plamlarning birortasi o'lchovli bo'lsa, u holda f funksiya E to'plamda o'lchovli bo'ladi. Isbotlang.

6.14. Ixtiyoriy $a \in \mathbb{R}$ uchun $E(f = a)$ to'plamning o'lchovli ekanligidan f ning E to'plamda o'lchovli bo'lishi kelib chiqmaydi. Misol keltiring.

6.15. $A \subset [0, 1]$ o'lchovsiz to'plam. $\mathfrak{L} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funksiyani quyidagicha aniqlaymiz:

$$\mathfrak{L}(x) = \begin{cases} x, & agar \ x \in A \\ -x, & agar \ x \notin A. \end{cases} \tag{6.2}$$

Bu funksiya uchun har bir $a \in \mathbb{R}$ da $\{x : \mathfrak{L}(x) = a\}$ to'plamning o'lchovli ekanligini isbotlang.

6.16. (6.2) tenglik bilan aniqlangan $\mathfrak{L}$ funksiya uchun $\{x \in [0, 1] : \mathfrak{L}(x) < 0\}$ to'plamning o'lchovsiz ekanligini isbotlang.

6.17. (6.2) tenglik bilan aniqlangan $\mathfrak{L}$ funksiyaning $E = [-1, 1]$ to'plamda o'lchovsiz ekanligini isbotlang.

6.18. $f : E \to \mathbb{R}$ o'lchovli funksiya bo'lishi uchun ixtiyoriy $A \subset \mathbb{R}$ Borel to'plami uchun $f^{-1}(A)$ ning o'lchovli to'plam bo'lishi zarur va yetarli. Isbotlang.

6.19. $\mathfrak{K} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – Kantorning zinapoya funksiyasi. K_n, $n = 1, 2, \ldots$ lar Kantor to'plamining qurilishida $n-$ qadamda chiqarib tashlangan K_n intervallar birlashmasi. Ularning Borel to'plamlari bo'lishini ko'rsating, $\mathfrak{K}^{-1}(K_1)$, $\mathfrak{K}^{-1}(K_2)$, $\mathfrak{K}^{-1}(K_3)$ va $\mathfrak{K}^{-1}(K_n)$ larni toping.

6.20. Agar f va g lar E da o'lchovli funksiyalar bo'lsa, u holda

$$\{x \in E : f(x) > g(x)\}$$

to'plam o'lchovli bo'ladi. Isbotlang.

Isbot. Ratsional sonlar to'plami $\mathbb{Q}$ sanoqli bo'lgani uchun uning elementlarini nomerlab chiqamiz, ya'ni $\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots\}$ va quyidagi tenglikni isbotlaymiz:

$$\{x \in E : f(x) > g(x)\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\{x : f(x) > r_k\} \cap \{x : g(x) < r_k\}) \quad (6.3)$$

Faraz qilaylik, $x_0 \in \{x \in E : f(x) > g(x)\}$ bo'lsin. Ratsional sonlarning zichlik xossasiga ko'ra shunday $r_k \in \mathbb{Q}$ mavjudki, $f(x_0) > r_k > g(x_0)$ munosabat o'rinli bo'ladi. Demak,

$$x_0 \in \{x : f(x) > r_k\} \cap \{x : g(x) < r_k\}.$$

Bundan

$$x_0 \in \bigcup_{k=1}^{\infty} (\{ x : f(x) > r_k\} \cap \{ x : g(x) < r_k\})$$

ekanligi kelib chiqadi. Endi

$$x_0 \in \bigcup_{k=1}^{\infty} (\{ x : f(x) > r_k\} \cap \{ x : g(x) < r_k\})$$

ixtiyoriy nuqta bo'lsin, u holda x_0 birlashmadagi to'plamlarning hech bo'lmaganda bittasiga tegishli bo'ladi, ya'ni shunday $r_k \in \mathbb{Q}$ mavjudki, bir vaqtda $f(x_0) > r_k$ va $g(x_0) < r_k$ bo'ladi. Bundan $f(x_0) > g(x_0)$ ekanligi va demak, $x_0 \in \{x \in E : f(x) > g(x)\}$ ekanligi kelib chiqadi. (6.3) tenglik isbotlandi. $\{x \in E : f(x) > g(x)\}$ to'plamning o'lchovli ekanligi (6.3) tenglikdan, hamda o'lchovli to'plamlarning sanoqli birlashmasi va kesishmasi yana o'lchovli ekanligidan kelib chiqadi. □

6.21. Agar $f : E \to \mathbb{R}$ o'lchovli funksiya bo'lsa, u holda f funksiya E ning ixtiyoriy o'lchovli A qismida ham o'lchovli bo'lishini isbotlang.

6.22. $[-2, 2]$ kesmada o'lchovli bo'lmagan funksiyaga misol keltiring.

6.23. $[-2, 2]$ kesmada o'lchovli bo'lmagan, lekin moduli o'lchovli bo'lgan funksiyaga misol keltiring.

6.24. Har bir $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uchun

$$f_+(x) = \max\{f(x), 0\}, \quad f_-(x) = \min\{f(x), 0\}$$

deymiz. Quyidagilarni isbotlang.

a) Agar f o'lchovli bo'lsa, u holda f_+ va f_- lar o'lchovli bo'ladi.

b) Agar f_+ va f_- lar o'lchovli bo'lsa, f ham o'lchovli bo'ladi.

6.25. Shunday f va g funksiyalarga misol keltiringki, ularning yig'indisi o'lchovli bo'lsin, lekin ayirmasi o'lchovli bo'lmasin. $A \subset E = [0, 1]$ o'lchovsiz to'plam. $f(x) = \chi_A(x)$ va $g(x) = \chi_{E\setminus A}(x)$ holni tahlil qiling.

6.26. Shunday f va g funksiyalarga misol keltiringki, ularning ko'paytmasi o'lchovli bo'lsin, lekin yig'indisi o'lchovli bo'lmasin.

6.27. Dirixle funksiyasi (2.3-misol, (2.1) formulaga qarang) $\mathfrak{D}$ ning $[0, 3] = E$ to'plamda o'lchovli ekanligini ta'rif yordamida ko'rsating.

6.28. Agar f funksiya E da o'lchovli bo'lsa, u holda $h(x) = \operatorname{sign} f(x)$ ning o'lchovli ekanligini isbotlang.

6.29. Agar f funksiya E to'plamda o'lchovli bo'lsa, u holda

$$f_+(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + |f(x)|\right) \tag{6.4}$$

funksiyaning o'lchovli ekanligini isbotlang.

6.30. Agar f funksiya E to'plamda o'lchovli bo'lsa, u holda

$$f_-(x) = \frac{1}{2}\left(|f(x)| - f(x)\right) \tag{6.5}$$

funksiyaning o'lchovli ekanligini isbotlang.

6.31. Agar f va g funksiyalar E to'plamda o'lchovli bo'lsa, u holda $m(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ funksiyaning o'lchovli ekanligini isbotlang.

6.32. Agar f va g funksiyalar E to'plamda o'lchovli bo'lsa, u holda $M(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ funksiyaning o'lchovli ekanligini isbotlang.

6.33. Agar f funksiya E da o'lchovli bo'lsa, u holda $h(x) = [f(x)]$ ning o'lchovli ekanligini isbotlang. Bu yerda $[x]$ bilan x ning butun qismi belgilangan.

6.34. $f : E \to \mathbb{R}$ o'lchovli bo'lishi uchun f^3 ning o'lchovli bo'lishi zarur va yetarli. Isbotlang.

6.35. Agar f va g funksiyalar E to'plamda o'lchovli, $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uzluksiz funksiya bo'lsa, u holda $h(x) = \varphi(f(x), g(x))$ funksiyaning o'lchovli ekanligini isbotlang.

6.36. $f: E \to \mathbb{R}$ o'lchovli bo'lishi uchun $h(x) = e^{f(x)}$ funksiyaning o'lchovli bo'lishi zarur va yetarli. Isbotlang.

6.37. $f(x)) = \cos f(x)$ funksiyaning o'lchovli ekanligidan $f : E \to \mathbb{R}$ ning o'lchovli ekanligi kelib chiqmaydi. (6.1) tenglik bilan aniqlangan f funksiya misolida buni tahlil qiling.

6.38. Kompleks qiymatli $f(x) = u(x) + i\,v(x)$ funksiya berilgan bo'lsin. Agar u va v funksiyalar o'lchovli bo'lsa, $f : E \to \mathbb{C}$ *o'lchovli funksiya* deyiladi. Agar kompleks qiymatli $f(x) = u(x) + i\,v(x)$ funksiya o'lchovli bo'lsa, uning moduli va argumenti o'lchovli funksiya bo'lishini isbotlang.

6.39. Kompleks qiymatli $f(x) = e^{ix}$, $x \in [-\pi, \pi]$ funksiyaning o'lchovli ekanligini isbotlang.

6.40. $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ uzluksiz funksiya. Har bir $y \in \mathbb{R}$ uchun $N_f(y)$ bilan $f(x) = y$ tenglama yechimlari sonini belgilaymiz. $N_f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}_+$ funksiyaning o'lchovli ekanligini isbotlang.

O'lchovli funksiyalar ketma-ketligining yaqinlashishlari. Bu bandda ekvivalent funksiyalar, ularning ayrim xossalari va o'lchovli funksiyalar ketma-ketliklarining turli yaqinlashishlari orasidagi bog'lanishlarni o'rganamiz.

6.2-ta'rif. *E o'lchovli to'plamda aniqlangan f va g funksiyalar uchun $\mu(\{x \in E : f(x) \neq g(x)\}) = 0$ bo'lsa, f va g lar ekvivalent funksiyalar deyiladi va $f \sim g$ shaklda belgilanadi.*

6.3-ta'rif. *Agar biror xossa E to'plamning nol o'lchovli qismida bajarilmay qolgan qismida bajarilsa, bu xossa E to'plamda deyarli bajariladi deyiladi.*

Endi 6.2-ta'rifni quyidagicha ham aytish mumkin. Agar ikki funksiya deyarli teng bo'lsa, ular *ekvivalent funksiyalar* deyiladi.

6.4-ta'rif. *Agar E to'plamda aniqlangan $\{f_n\}$ funksiyalar ketma-ketligining f funksiyaga yaqinlashmaydigan nuqtalari to'plamining o'lchovi nol bo'lsa (ya'ni $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ tenglik E to'plamdagi deyarli barcha x lar uchun o'rinli bo'lsa), u holda $\{f_n\}$ funksiyalar ketma-ketligi E to'plamda f funksiyaga deyarli yaqinlashadi deyiladi.*

Bizga E to'plamda aniqlangan $\{f_n\}$ o'lchovli funksiyalar ketma-ketligi va f o'lchovli funksiya berilgan bo'lsin.

6.5-ta'rif. *Agar ixtiyoriy $\delta > 0$ uchun*

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in E : |f_n(x) - f(x)| \geq \delta\}) = 0$$

tenglik bajarilsa, u holda $\{f_n\}$ funksiyalar ketma-ketligi E to'plamda f funksiyaga o'lchov bo'yicha yaqinlashadi deyiladi.

6.1-teorema *(Yegorov). E chekli o'lchovli to'plamda $\{f_n\}$ funksiyalar ketma-ketligi f ga deyarli yaqinlashsin. U holda ixtiyoriy $\delta > 0$ uchun shunday $E_\delta \subset E$ to'plam mavjudki, $\mu(E\backslash E_\delta) < \delta$* va *$E_\delta$ da $\{f_n\}$ funksiyalar ketma-ketligi f ga tekis yaqinlashadi.*

6.2-teorema *(Luzin). $[a, b]$ kesmada aniqlangan f funksiya o'lchovli bo'lishi uchun ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun $[a, b]$ da uzluksiz bo'lgan shunday φ funksiya mavjud bo'lib, $\mu(\{x \in [a, b] : f(x) \neq \varphi(x)\}) < \varepsilon$ tengsizlik bajarilishi zarur va yetarli.*

6.41. Dirixle funksiyasi $\mathfrak{D}$ ((2.1) ga qarang), Riman funksiyasi $\mathfrak{R}$ ((2.2) ga qarang), nol funksiya $\theta(x) \equiv 0$ hamda bir $I(x) \equiv 1$ funksiyalar orasidan o'zaro ekvivalent funksiyalarni ajrating.

Yechish. Ma'lumki, $\mathbb{Q}$ sanoqli to'plam, shuning uchun $\mu(\mathbb{Q}) = 0$. Lebeg o'lchovi - to'la o'lchov (5.20-ta'rifga qarang), shunday ekan, ixtiyoriy $A \subset \mathbb{Q}$ uchun $\mu(A) = 0$. Endi bu funksiyalarni ekvivalentlikka tekshiramiz:

$$\{x : \mathfrak{D}(x) \neq \theta(x)\} = \mathbb{Q}, \quad \{x : \mathfrak{R}(x) \neq \theta(x)\} = \mathbb{Q},$$
$$\{x : \mathfrak{D}(x) \neq \mathfrak{R}(x)\} \subset \mathbb{Q}, \quad \{x : \mathfrak{D}(x) \neq I(x)\} = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}.$$

Bu yerdan quyidagi tengliklarni hosil qilamiz:

$$\mu\left(\{x : \mathfrak{D}(x) \neq \theta(x)\}\right) = \mu\left(\{x : \mathfrak{R}(x) \neq \theta(x)\}\right) = \mu\left(\mathbb{Q}\right) = 0,$$

$$\mu\left(\{x : \mathfrak{D}(x) \neq \mathfrak{R}(x)\}\right) = 0, \quad \mu\left(\{x : \mathfrak{D}(x) \neq I(x)\}\right) = \mu\left(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\right) \neq 0.$$

Demak, $\mathfrak{D} \sim \theta$, $\mathfrak{R} \sim \theta$, $\mathfrak{D} \sim \mathfrak{R}$ munosabatlar o'rinli. $\mathfrak{D}, \mathfrak{R}$ va θ funksiyalarning birortasi ham I bilan ekvivalent emas. □

6.42. Aytaylik, $E = A_1 \cup A_2$ va $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ bo'lsin. Agar $f_1 : A_1 \to \mathbb{R}$ va $f_2 : A_2 \to \mathbb{R}$ funksiyalar o'lchovli bo'lsa, u holda

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & agar \ x \in A_1 \\ f_2(x), & agar \ x \in A_2 \end{cases}$$

funksiyaning E to'plamda o'lchovli bo'lishini isbotlang.

Isbot. Ixtiyoriy $c \in \mathbb{R}$ da

$$\{x \in E : f(x) < c\} = \{x \in A_1 : f_1(x) < c\} \cup \{x \in A_2 : f_2(x) < c\}$$

to'plam - o'lchovli. Haqiqatan ham, $\{x \in A_1 : f_1(x) < c\}$ va $\{x \in A_2 : f_2(x) < c\}$ to'plamlarning o'lchovli ekanligi f_1 va f_2 funksiyalarning o'lchovli ekanligidan kelib chiqadi. $\{x \in E : f(x) < c\}$ to'plam esa o'lchovli to'plamlarning birlashmasi sifatida o'lchovlidir. Demak, f funksiya - E da o'lchovli. □

6.43. Nol o'lchovli A to'plamda aniqlangan ixtiyoriy $f : A \to \mathbb{R}$ funksiyaning o'lchovli bo'lishini isbotlang.

6.44. Agar $f : E \to \mathbb{R}$ funksiya, o'lchovli $g : E \to \mathbb{R}$ funksiyaga ekvivalent bo'lsa, u holda f ham E da o'lchovli funksiya bo'ladi. Isbotlang.

6.45. Agar $f : [0,\ 1] \to \mathbb{R}$ va $g : [0,\ 1] \to \mathbb{R}$ uzluksiz funksiyalar ekvivalent bo'lsa, ular aynan teng bo'lishini isbotlang.

6.46. Agar $\{f_n\}$ o'lchovli funksiyalar ketma-ketligi E to'plamning har bir nuqtasida f ga yaqinlashsa, quyidagi tenglikni isbotlang:

$$\{x \in E:\ f(x) < c\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m>n}^{\infty} \left\{x : f_m(x) < c - \frac{1}{k}\right\}. \qquad (6.6)$$

6.47. Agar $\{f_n\}$ o'lchovli funksiyalar ketma-ketligi har bir $x \in E$ da $f(x)$ funksiyaga yaqinlashsa, u holda limitik funksiya f o'lchovli bo'ladi. Isbotlang.

6.48. Nolga ekvivalent $\{f_n\}$ funksiyalar ketma-ketligi uchun $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ qator deyarli barcha $x \in E$ larda yaqinlashuvchi bo'ladi va $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ham nolga ekvivalent funksiya bo'ladi. Isbotlang.

6.49. $[0,\ 1]$ kesmada shunday o'lchovli funksiyaga misol keltiringki, uning o'zi va unga ekvivalent bo'lgan ixtiyoriy funksiya har bir nuqtada uzilishga ega bo'lsin.

6.50. Quyidagi qatorlar yaqinlashadigan nuqtalarda yig'indi bilan aniqlangan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funksiyaning o'lchovli ekanligini isbot qiling.

a) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{|x| + n}$. b) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(n[x]^4)}{n\sqrt{n}}$.

c) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{\sqrt[3]{n^4 + [x]^4}}$.

6.51. Quyidagi qator yaqinlashadigan nuqtalarda yig'indi bilan aniqlangan $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funksiyaning o'lchovli ekanligini isbot qiling.

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n(x^2 + y^2))}{\sqrt{n^4[1 + x^2 + y^2]}}.$$

6.52. Quyida berilgan $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funksiyaning o'lchovli ekanligini isbot qiling:

a) $f(x,y) = \operatorname{sign}(\cos\pi(x^2+y^2))$, b) $f(x,y) = (|x|+|y|)\cdot e^{[y]}$,

c) $f(x,y) = [x]^2 + [y]^3$, d) $f(x,y) = \ln(1+[x^2+y^2])$.

6.53. $f_n(x) = \cos^n x$, $E = [0, 2\pi]$ funksiyalar ketma-ketligi nol funksiyaga deyarli yaqinlashadi. Isbotlang.

6.54. Agar E to'plamda $\{f_n\}$ o'lchovli funksiyalar ketma-ketligi f ga deyarli yaqinlashsa, u holda f ham o'lchovli funksiya bo'ladi. Isbotlang.

6.55. Agar E to'plamda $\{f_n\}$ o'lchovli funksiyalar ketma-ketligi f ga deyarli yaqinlashsa va $f \sim g$ bo'lsa, u holda $\{f_n\}$ ketma-ketlik g ga ham deyarli yaqinlashadi. Isbotlang.

6.56. Agar $\{f_n\}$ o'lchovli funksiyalar ketma-ketligi ham f, ham g ga deyarli yaqinlashsa, u holda f va g lar ekvivalent bo'ladi. Isbotlang.

6.57. *Lebeg teoremasini isbotlang.* Agar $\{f_n\}$ o'lchovli funksiyalar ketma-ketligi E $(\mu(E) < \infty)$ to'plamda f funksiyaga deyarli yaqinlashsa, u holda $\{f_n\}$ ketma-ketlik E to'plamda f ga o'lchov bo'yicha ham yaqinlashadi.

6.58. O'lchov bo'yicha nol funksiyaga yaqinlashuvchi, lekin biror nuqtada ham nolga yaqinlashmaydigan $\{f_n\}$ ketma-ketlikka misol keltiring.

6.59. *Riss teoremasini isbotlang.* Agar $\{f_n\}$ o'lchovli funksiyalar ketma-ketligi E to'plamda f funksiyaga o'lchov bo'yicha yaqinlashsa, u holda $\{f_n\}$ ketma-ketlikdan f ga deyarli yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin.

6.60. $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sign} x$ funksiyaning o'lchovli ekanligini ta'rif yordamida ko'rsating.

6.61. $[0, \pi]$ kesmada aniqlangan

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in [0, \pi] \setminus \mathbb{Q} \\ \cos^2(\sin x), & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

funksiya o'lchovli bo'lishini Luzin teoremasidan foydalanib isbotlang.

6.62. Agar $f : E \to \mathbb{R}-$ o'lchovli funksiya va $A \subset E-$ o'lchovli to'plam bo'lsa, u holda $f : A \to \mathbb{R}$ funksiyaning A to'plamda o'lchovli bo'lishini isbotlang.

6.63. Agar $f \sim g$ va $g \sim \varphi$ bo'lsa, u holda $f \sim \varphi$ ekanligini isbotlang.

6.64. $f_n(x) = \cos^n x$, $E = [0, 2\pi]$ ketma-ketlik uchun Yegorov teoremasi shartlarini qanoatlantiruvchi E_δ to'plamni $\delta = 10^{-3}$ uchun quring.

6.65. $[0, 1]$ kesmada Dirixle va Riman funksiyalari uchun Luzin teoremasining shartlarini qanoatlantiruvchi uzluksiz φ funksiyani toping.

6.66. f funksiyaga har bir nuqtada yaqinlashuvchi, lekin tekis yaqinlashmaydigan f_n funksiyalar ketma-ketligiga misol keltiring.

6.67. $f_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1]$ funksional ketma-ketlikning $\theta(x) \equiv 0$ funksiyaga nuqtali, deyarli va o'lchov bo'yicha yaqinlashishini tekshiring.

6.68. $f_n(x) = x^n$, $x \in [-1, 1]$ funksional ketma-ketlik Dirixle yoki Riman funksiyalariga deyarli yaqinlashadimi?

6.69. Deyarli yaqinlashuvchi funksional ketma-ketlikning limitik funksiyasi yagona bo'ladimi?

6.70. Quyida berilgan $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funksiya uchun shunday $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uzluksiz funksiya topingki, $g(x)=f(x)$ tenglik deyarli barcha $x\in\mathbb{R}$ lar uchun o'rinli bo'lsin.

a) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$; b) $f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg} x, & x\in\mathbb{Z}\\ \pi, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\end{cases}$;

c) $f(x)=\begin{cases}x^2, & x^2\in\mathbb{Q}\\ 0, & x^2\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$; d) $f(x)=\begin{cases}\ln(1+|x|), & e^x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\\ \sin x^2, & e^x\in\mathbb{Q}\end{cases}$

6.71. Quyida berilgan $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ funksiya uchun shunday $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ uzluksiz funksiya topingki, $g(x,y)=f(x,y)$ tenglik deyarli barcha $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ lar uchun o'rinli bo'lsin.

a) $f(x,y)=\begin{cases}x+y, & (x,y)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\\ x^2, & (x,y)\in\mathbb{R}\setminus(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q})\end{cases}$;

b) $f(x,y)=\begin{cases}\sin x+\cos y, & (x,y)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{R}\\ \cos x-\sin y, & (x,y)\notin\mathbb{Q}\times\mathbb{R}\end{cases}$;

c) $f(x,y)=\begin{cases}xy, & (x,y)\in(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\times\mathbb{R}\\ x+y, & (x,y)\notin(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\times\mathbb{R}\end{cases}$;

d) $f(x,y)=\begin{cases}[x]+[y], & (x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{Q}\\ chx, & (x,y)\notin\mathbb{R}\times\mathbb{Q}\end{cases}$

6.72. Faraz qilaylik, $f_k:[a,b]\to\mathbb{R}$, $k=1,2,\ldots,n$ lar o'lchovli funksiyalar bo'lsin. Quyida berilgan funksiyalarning $[a,b]$ kesmada o'lchovli bo'lishini isbotlang.

a) $\min\{f_1(x),\ldots,f_n(x)\}$; b) $\max\{f_1(x),\ldots,f_n(x)\}$;

c) $\dfrac{f_1(x)}{\ln(2+|f_2(x)|)}$; d) $\dfrac{f_1(x)}{\operatorname{ch}[f_2(x)]}$; e) $\dfrac{f_1(x)\cdot f_2(x)}{1+|\max\{f_3(x),f_4(x)\}|}$

6.73. $A-$ o'lchovli to'plam, $f,f_n,g_n:A\to\mathbb{R}$ o'lchovli funksiyalar bo'lsin. Quyidagi to'plamlarning o'lchovli ekanligini isbotlang.

a) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{x\in A: f_n(x)\ge 0\}$; b) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\{x\in A: f_n(x)\ge f(x)\}$;

c) $\left\{x \in A : \sup_{n\geq 1} f_n(x) \neq f(x)\right\}$. d) $\left\{x \in A : \inf_{n\geq 1} f_n(x) < f(x)\right\}$.

e) $\left\{x \in A : \overline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x) > f(x)\right\}$. f) $\left\{x \in A : \underline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x) < f(x)\right\}$.

g) $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in A : f_n(x) < g_n(x)\}$. h) $\left\{x : \inf_{n\geq 1} f_n(x) \neq \inf_{n\geq 1} g_n(x)\right\}$.

i) $\left\{x \in A : \inf_{n\geq 1} f_n(x) < \inf_{n\geq 1} g_n(x)\right\}$.

6.74. Quyidagi $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ketma-ketlik uchun shunday $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uzluksiz funksiya topingki $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = g(x)$ tenglik $\mathbb{R}$ ning deyarli barcha nuqtalarida o'rinli bo'lsin.

a) $f_n(x) = \cos^n x$. b) $f_n(x) = \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x\right)^n + \sin^n 2x$.

c) $f_n(x) = x^2 \cdot \sin^n x^2$. d) $f_n(x) = \dfrac{n^2 \cdot \sin^2 x}{1 + n^2 \cdot \sin^2 x}$.

e) $f_n(x) = \dfrac{\sin^n x}{2 + \sin^n x}$. f) $f_n(x) = \exp(-n\,|x^2 - 1|)$.

6.75. Quyidagi $f_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ketma-ketlik uchun shunday $g_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uzluksiz va $g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uzilishga ega bo'lgan funksiyalar topingki, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = g_1(x)$ va $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = g_2(x)$ tengliklar $\mathbb{R}^2$ ning deyarli hamma yerida bajarilsin.

a) $f_n(x, y) = \cos^n (x^2 + y^2)$. b) $f_n(x, y) = \exp(-n(x^2 + y^2))$.

c) $f_n(x, y) = \exp(-n\,|x + y|)$. d) $f_n(x, y) = 2^{\sin^n(x^4 + y^4)}$.

e) $f_n(x, y) = \sqrt[n]{|x|^n + |y|^n}$. f) $f_n(x, y) = n \cdot \ln\left(1 + \dfrac{|x| + |y|}{n}\right)$.

g) $f_n(x, y) = \exp(x + \frac{1}{n} y^2)$. h) $f_n(x, y) = \exp(\sin^n x + \cos^n y)$.

6.76. $f_n : A \to \mathbb{R}$ ketma-ketlikning deyarli yaqinlashuvchi ekanligini isbotlang. Yegorov teoramasidan foydalanib, berilgan $\varepsilon > 0$ uchun shunday $A_\varepsilon \subset A$ o'lchovli to'plam tanlangki, $\mu(A \backslash A_\varepsilon) < \varepsilon$ va $\{f_n\}$ ketma-ketlik A_ε to'plamda tekis yaqinlashuvchi bo'lsin.

a) $f_n(x) = \cos^n(x)$, $A = [0, 2\pi]$, $\varepsilon = 10^{-1}$.

b) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$, $A = [0, 1]$, $\varepsilon = 10^{-2}$.

c) $f_n(x) = \dfrac{2nx}{1+n^2x^2}$, $A = [0, 1]$, $\varepsilon = 10^{-3}$.

d) $f_n(x) = x^n - x^{2n}$, $A = [0, 1]$, $\varepsilon = 10^{-4}$.

e) $f_n(x) = \dfrac{n^2\,|\sin \pi x|}{1+n^2\,|\sin \pi x|}$, $A = [-1, 1]$, $\varepsilon = 10^{-5}$.

f) $f_n(x) = \exp(n(x-2))$, $A = [0, 2]$, $\varepsilon = 10^{-6}$.

6.77. $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \chi_{[-n, n]}(x)$ ketma-ketlik $f(x) \equiv 1$ funksiyaga har bir nuqtada yaqinlashadi, lekin $\{f_n\}$ ketma-ketlik $f(x) \equiv 1$ ga o'lchov bo'yicha yaqinlashmaydi. Bu Lebeg teoremasiga (6.57-misolga qarang) zid emasmi? Sababini tushuntiring.

6.78-6.80-misollarda keltirilgan $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funksiyalar ketma-ketligini o'lchov bo'yicha yaqinlahuvchilikka tekshiring. Yaqinlashuvchi bo'lsa, limitik funksiyasini toping.

6.78. $f_n(x) = \chi_{[\sqrt{n},\, \sqrt{n+1}]}(x)$.

6.79. $f_n(x) = \sin^n x \cdot \chi_{[2\pi n,\, 2\pi n+\pi]}(x)$.

6.80. $f_n(x) = \sum\limits_{k=n}^{\infty} \chi_{[k,\, k+k^{-2}]}(x)$.

6.81-6.84-misollarda keltirilgan funksiyalarni Luzin teoremasidan foydalanib $[0, 1]$ da o'lchovli ekanligini isbotlang. Bu yerda K – Kantor to'plami.

6.81. $f(x) = x \cdot \chi_{[0, 1]\setminus \mathbb{Q}}(x)$.

6.82. $f(x) = \mathfrak{D}(x) + \mathfrak{R}(x)$.

6.83. $f(x) = \begin{cases} x, & x \in K \\ 1 + x^2, & x \in [0, 1]\setminus K \end{cases}$.

6.84. $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in [0, 1] \setminus (K \cup \mathbb{Q}) \\ 1 + x^2, & x \in K \cup \mathbb{Q} \end{cases}.$

6.85. $f_n(x) = \chi_{[n, n+1]}(x)$ ketma-ketlik uchun har bir $x \in \mathbb{R}$ da

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0$$

tenglikni isbotlang. Bu ketma-ketlik nol funksiyaga o'lchov bo'yicha yaqinlashadimi?

6.86. Agar $\{f_n\}$ o'lchovli funksiyalar ketma-ketligi $f : E \to \mathbb{R}$ funksiyaga har bir $x \in E$ da yaqinlashsa, u holda ixtiyoriy $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uzluksiz funksiya uchun $\{\varphi_n = g(f_n)\}$ ketma-ketlik $g(f)$ funksiyaga nuqtali yaqinlashadi. Isbotlang.

6.87. Agar $\{f_n\}$ o'lchovli funksiyalar ketma-ketligi $f : E \to \mathbb{R}$ funksiyaga o'lchov bo'yicha yaqinlashsa, u holda ixtiyoriy $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uzluksiz funksiya uchun $\{\varphi_n = g(f_n)\}$ ketma-ketlik $g(f)$ funksiyaga E to'plamda o'lchov bo'yicha yaqinlashadi. Isbotlang.

II bobni takrorlash uchun test savollari

1. $P = \left\{1,4 \le x \le 5\frac{3}{5},\ \ 2,5 \le y \le \frac{15}{2}\right\}$ to'g'ri to'rtburchakning o'lchovini toping.

A) 20 B) 21 C) 18,75 D) 20,4

2. $P = \{0 \le x \le 1,\ \ 0 \le y \le 1\}$ va $Q = \{0,3 \le x \le 0,8,\ 0 \le y \le 1\}$ to'g'ri to'rtburchaklar kesishmasining o'lchovini toping.

A) 0,5 B) 0,8 C) 0,15 D) 0,75

3. $P = \{0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$ va $Q = \{0,5 \le x \le 1,5,\ 0 \le y \le 1\}$ to'g'ri to'rtburchaklar birlashmasining o'lchovini toping.

A) 1,3 B) 1,4 C) 1,5 D) 2

4. $P = \{0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$ va $Q = \{0.5 \le x \le 1.5,\ 0 \le y \le 1\}$ to'g'ri to'rtburchaklar simmetrik ayirmasining o'lchovini toping.

A) 0.5 B) 1 C) 1,5 D) 0,8

5. $P = \{0 \le x \le 5,\ 0 \le y \le 5\}$, $P_1 = \{0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2\}$. $P \backslash P_1$ ayirmaning chekli yoyilmasida eng kamida nechta to'g'ri to'rtburchak qatnashadi?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 5

6. $A = \{0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 0,2\} \cup \{0 \le x \le 1,\ \ 0.8 \le y \le 1\}$ elementar to'plamning o'lchovini toping.

A) 0,2 B) 0,3 C) 0,4 D) 0.5

7. $A = \{0 \le x \le 1,\ \ 0 \le y \le x\}$ to'plamning tashqi o'lchovini toping.

A) 0,2 B) 0,3 C) 0,4 D) 0.5

8. Lebeg o'lchovining additivlik xossasini ko'rsating.

A) $\mu\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu(A_k)$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \ne j$

B) $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n), \quad A_i \cap A_j = \emptyset\ ,\ i \neq j$

C) $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A), \ A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \ A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$

D) $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

9. Lebeg o'lchovining yarim additivlik xossasini ko'rsating.

A) $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k), \quad A_i \cap A_j = \emptyset\ ,\ i \neq j$

B) $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n), \quad A_i \cap A_j = \emptyset\ ,\ i \neq j$

C) $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A), \ A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \ A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$

D) $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

10. Lebeg o'lchovining $\sigma-$ additivlik xossasini ko'rsating.

A) $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k), \quad A_i \cap A_j = \emptyset\ ,\ i \neq j$

B) $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n), \quad A_i \cap A_j = \emptyset\ ,\ i \neq j$

C) $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A), \ A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \ A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$

D) $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

11. Lebeg o'lchovining uzluksizlik xossasini toping.

A) $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k), \quad A_i \cap A_j = \emptyset\ ,\ i \neq j$

B) $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n), \quad A_i \cap A_j = \emptyset\ ,\ i \neq j$

C) $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A), \ A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \ A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$

D) $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

12. $A \subset [0,\ 1]-$ o'lchovsiz to'plam. Quyidagilar ichidan o'lchovsiz to'plamlarni ajrating. 1) $[0,\ 1]\backslash A$, 2) $A\cap\mathbb{Q}$, 3) $A\cap([0,1]\backslash\mathbb{Q})$.

A) 1, 3 B) 2, 3 C) 1, 2 D) 1, 2, 3

13. $A \subset [0,\ 1]-$ o'lchovsiz to'plam. $K-$ Kantor to'plami bo'lsin. Quyidagilar ichidan o'lchovli to'plamlarni ajrating.

1) $[0,\ 1]\backslash A$, 2) $A \cap \mathbb{Q}$, 3) $A \cap K$.

A) 1, 3 B) 2, 3 C) 1, 2 D) 1, 2, 3

14. μ_F o'lchov $F(x) = [x]$ funksiya yordamida qurilgan Lebeg-Stiltes o'lchovi. $A = \{1,\ 2,\ 3\}$ bo'lsin. $\mu_F(A)$ ni hisoblang.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 0

15. μ_F o'lchov $F(x) = \operatorname{arctg} x$ funksiya yordamida qurilgan Lebeg-Stiltes o'lchovi, $A = [0,\ \infty)$ bo'lsin. $\mu_F(A)$ ni hisoblang.

A) ∞ B) π C) $\frac{\pi}{2}$ D) 0

16. $F(x) = \mathfrak{K}(x)-$ Kantorning zinapoya funksiyasi, μ_F- esa $F(x)$ yordamida qurilgan Lebeg-Stiltes o'lchovi bo'lsin. $A = \left(\frac{1}{3};\ \frac{2}{3}\right)$ to'plamning o'lchovini toping.

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{\pi}{2}$ D) 0

17. μ_F o'lchov $F(x) = \mathfrak{K}(x) + [3x]$ funksiya yordamida qurilgan Lebeg-Stiltes o'lchovi bo'lsin. $A = \left[\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right]$ to'plamning o'lchovini toping.

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) 2 D) 0

18. Diskret o'lchovni toping.

A) μ_F, $F(x) = \mathfrak{K}(x)-$ Kantorning zinapoya funksiyasi

B) μ_F, $F(x) = [x]$

C) μ_F, $F(x) = \operatorname{arctg} x$

D) to'g'ri javob keltirilmagan.

19. Singulyar o'lchovni toping.

A) μ_F, $F(x) = \mathfrak{K}(x)-$ Kantorning zinapoya funksiyasi

B) μ_F, $F(x) = [x]$

C) μ_F, $F(x) = \operatorname{arctg} x$

D) to'g'ri javob keltirilmagan.

20. Absolyut uzluksiz o'lchovni toping.

A) μ_F, $F(x) = \mathfrak{K}(x)$– Kantorning zinapoya funksiyasi

B) μ_F, $F(x) = [x]$

C) μ_F, $F(x) = \operatorname{arctg} x$

D) to'g'ri javob keltirilmagan.

21. O'lchovli E to'plamda f funksiya berilgan bo'lsin. Qaysi shart bajarilganda f o'lchovli funksiya deyiladi?

A) Ixtiyoriy $c \in \mathbb{R}$ uchun $E(f < c)$ to'plam o'lchovli bo'lsa

B) Ixtiyoriy $c \in \mathbb{R}$ uchun $E(f = c)$ to'plam o'lchovli bo'lsa

C) Shunday $c > 0$ mavjud bo'lib, $E(f < c)$ to'plam o'lchovli bo'lsa

D) Barcha $c > 0$ lar uchun $E(f < c)$ to'plam o'lchovli bo'lsa.

22. f– o'lchovli funksiya, a va $b \in \mathbb{R}$ lar ixtiyoriy sonlar bo'lsin. Quyidagilar ichidan o'lchovli to'plamlarni toping. 1) $E(f \geq a)$; 2) $E(a \leq f < b)$; 3) $E(f = a)$; 4) $E(f \leq a)$; 5) $E(f > a)$.

A) 1, 2, 4, 5 B) 1, 2, 3, 4, 5 C) 1, 3, 4, 5 D) 2, 3, 4, 5

23. O'lchovli E to'plamda f funksiya aniqlangan, a va b lar ixtiyoriy sonlar bo'lsin. Quyida keltirilgan to'plamlardan qay birining o'lchovli ekanligidan f funksiyaning E da o'lchovli ekanligi kelib chiqmaydi?

A) $E(f \geq a)$ B) $E(f = a)$ C) $E(f \leq a)$ D) $E(f > a)$

24. Quyidagi tasdiqlar ichidan to'g'rilarini ajrating.

1) O'zgarmas funksiya - o'lchovli.

2) O'lchovli funksiyaning songa ko'paytmasi - o'lchovli.

3) O'lchovli funksiyalar yig'indisi - o'lchovli.

A) 1, 2 B) 1, 2, 3 C) 2, 3 D) 1, 3

25. Quyidagi belgilashni kiritamiz:

$$f_+(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2}, \qquad f_-(x) = \frac{f(x) - |f(x)|}{2}.$$

Quyidagi tasdiqlar ichidan to'g'rilarini ajrating.

1) f_+ o'lchovli bo'lsa, f ham o'lchovli bo'ladi.

2) f_- o'lchovli bo'lsa, f ham o'lchovli bo'ladi.

3) f_+ va f_- lar o'lchovli bo'lsa, f ham o'lchovli bo'ladi.

A) 1, 2 B) 1, 3 C) 2, 3 D) 3

26. Quyidagi tasdiqlar ichidan to'g'rilarini ajrating.

1) $|f|$ o'lchovli bo'lsa, f ham o'lchovli bo'ladi.

2) f^2 o'lchovli bo'lsa, f ham o'lchovli bo'ladi.

3) f_+ va f_- lar o'lchovli bo'lsa, f ham o'lchovli bo'ladi.

A) 1, 2 B) 1, 3 C) 2, 3 D) 3

27. $f(x) = 2x$, $x \in E = [0, 5]$ funksiya uchun $E(f < 6)$ to'plamni toping.

A) $[0, 2]$ B) $[0, 3)$ C) $[0, 5)$ D) $[0, 2)$

28. $f(x) = [2x]$, $x \in E = [0, 5]$ funksiya uchun $E(f = 4)$ to'plamni toping.

A) $[0, 2]$ B) $[2, \frac{5}{2})$ C) $[2, 5)$ D) $[2, 3)$

29. $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 1)$, $x \in E = (0, \infty)$ funksiya uchun $\{x : f(x) < 0\}$ to'plamni toping.

A) $(0, 2)$ B) $(0, 1) \cup (1, 2)$ C) $(0, \infty)$ D) $(0, 3)$

30. $f(x) = 2^x - 1$, $x \in [0, 5]$ funksiya uchun $\{x : 3 < f(x) < 7\}$ to'plamni toping.

A) $[0, 3]$ B) $(2, 3)$ C) $[0, 3)$ D) $[2, 3)$

31. $\{x \in [0, \pi] : \sin x \le 2^{-1}\}$ to'plam o'lchovini toping.

A) $\frac{\pi}{3}$ B) $\frac{2\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{6}$ D) $\frac{\pi}{4}$

32. $\{x \in [0, \pi] : \sin x \le \cos x\}$ to'plam o'lchovini toping.

A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{2\pi}{3}$ C) $\frac{3\pi}{4}$ D) $\frac{\pi}{3}$

33. $A \subset [0, 1]-$ o'lchovsiz to'plam. $\mathfrak{D}-$ Dirixle funksiyasi. $f_1(x) = \begin{cases} 0, & x \in A \\ 1, & x \in [0, 1]\setminus A \end{cases}$, $f_2(x) = f_1(x) + \mathfrak{D}(x)$, $f_3(x) = f_1(x) \cdot \mathfrak{D}(x)$

O'lchovli bo'lmagan funksiyalarni toping.

A) f_1 B) f_1, f_2 C) f_1, f_3 D) f_2, f_3

34. $A \subset [0, 1]-$ o'lchovsiz to'plam. $\mathfrak{R}-$ Riman funksiyasi.

$f_1(x) = 1 - \chi_A(x)$, $f_2(x) = f_1(x) - \mathfrak{R}(x)$, $f_3(x) = f_2(x) \cdot \mathfrak{D}(x)$.

O'lchovli funksiyalarni toping.

A) f_1 B) f_2, f_3 C) f_3 D) f_2

35. $[0, 1]$ kesmada nolga ekvivalent funksiyalarni toping:

$f_1(x) = \mathfrak{R}(x)$, $f_2(x) = \mathfrak{D}(x)$, $f_3(x) = x$.

A) f_1 B) f_2, f_3 C) f_3 D) f_1, f_2

36. $f_1(x) = 1 + \mathfrak{R}(x)$, $f_2(x) = 1 + \mathfrak{D}(x)$, $f_3(x) = 1 + \mathfrak{R}(x) + \mathfrak{D}(x)$ funksiyalar ichidan $f(x) \equiv 1$ ga ekvivalent funksiyalarni toping.

A) f_1, f_2 B) f_1, f_2, f_3 C) f_2, f_3 D) f_1, f_3

37. $f_{1n}(x) = \sin^{2n} x$, $f_{2n}(x) = \cos^n x$, $f_{3n}(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}$, $f_{4n}(x) = 1 + x^n$ o'lchovli funksiyalar ketma-ketliklaridan qaysilari $[0, 1]$ to'plamda $f(x) \equiv 0$ funksiyaga tekis yaqinlashadi?

A) f_{1n} B) f_{2n}, f_{3n} C) f_{1n}, f_{3n}, f_{4n} D) f_{1n}, f_{2n}

38. $f_{1n}(x) = \sin^n x$, $f_{2n}(x) = \cos^n x$, $f_{3n}(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}$, $f_{4n}(x) = x^n$ o'lchovli funksiyalar ketma-ketliklaridan qaysilari $[0, 1]$ to'plamda

$f(x) \equiv 0$ funksiyaga nuqtali yaqinlashadi?

A) f_{1n} B) f_{1n}, f_{3n} C) f_{1n}, f_{3n}, f_{4n} D) f_{1n}, f_{2n}

39. $f_{1n}(x) = \sin^n x$, $f_{2n}(x) = \cos^{2n} x$, $f_{3n}(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$, $f_{4n}(x)$ $x^n + 2x^{n+1}$ o'lchovli funksiyalar ketma-ketliklaridan qaysilari [0, to'plamda $f(x) \equiv 0$ funksiyaga deyarli yaqinlashadi?

A) f_{1n}, f_{2n}, f_{3n} B) f_{2n}, f_{3n} C) $f_{1n}, f_{2n}, f_{3n}, f_{4n}$ D) f_{1n}, f

40. $f_{1n}(x) = \sin^n x$, $f_{2n}(x) = \cos^n x$, $f_{3n}(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$, $f_{4n}(x)$ $1+x^n$ o'lchovli funksiyalar ketma-ketliklaridan qaysilari [0, 1] to lamda $f(x) \equiv 0$ funksiyaga o'lchov bo'yicha yaqinlashadi?

A) f_{1n}, f_{2n}, f_{3n} B) f_{2n}, f_{3n} C) $f_{1n}, f_{2n}, f_{3n}, f_{4n}$ D) f_{1n}; .

41. $f_n(x) = \cos^n x$, $x \in [0, \pi]$ funksiyalar ketma-ketligi va $\delta = 0,$ son uchun Yegorov teoremasi shartlarini qanoatlantiruvchi E_δ to lam topilsin.

A) $E_\delta = \left[\dfrac{1}{10^2}, \ \pi - \dfrac{1}{10^2}\right]$ B) $E_\delta = \left[\dfrac{1}{2\cdot 10^2}, \ \pi - \dfrac{1}{2\cdot 10^2}\right]$

C) $E_\delta = \left(\dfrac{1}{300}, \ \pi - \dfrac{1}{300}\right]$ D) $E_\delta = \left[\dfrac{2}{10^2}, \ \pi - \dfrac{2}{10^2}\right]$

42. $f_n(x) = \mathfrak{D}^n(x)$, $g_n(x) = \mathfrak{R}^n(x)$, $x \in [0, 1]$ funksional ketr ketliklardan qaysilari $f(x) = 0$ funksiyaga deyarli yaqinlashadi'

A) ikkalasi ham yaqinlashmaydi. B) faqat f_n

C) ikkalasi ham yaqinlashadi. D) faqat g_n

III bob. Lebeg integrali

Riman integrali odatda uzluksiz funksiyalar yoki uzilish nuqtalari ju- ı ko'p bo'lmagan funksiyalar uchun kiritiladi. Riman integrali avval , $b]$ kesmada, keyin esa $[a, b] \times [c, d]$ to'g'ri to'rtburchakda va hokazo 'plamlarda kiritiladi. Lebeg integrali esa ixtiyoriy tabiatli to'plamlarda r xilda kiritiladi. Hattoki, aniqlanish sohasining hamma yerida uzilishga a bo'lgan funksiyalar uchun ham Lebeg integralini aniqlash mumkin.

Lebeg integralining Riman integralidan asosiy farqlaridan biri shunda- , u funksiyaning aniqlanish sohasi bo'lgan $[a, b]$ kesmani bo'laklarga ı'layotganda argument qiymatlarining yaqinligini emas, balki funksiya ymatlarining yaqinligini hisobga oladi. Keyinchalik biz ko'ramizki, Le- 'g integrali Riman integraliga qaraganda katta imkoniyatlarga ega bo'- di. Avval sodda funksiyalar uchun Lebeg integrali ta'riflanadi, keyin 'beg integrali ixtiyoriy o'lchovli funksiyalar sinfi uchun aniqlanadi.

Bu bob ikki 7 – 8 – §§ lardan iborat. 7 – § da chekli o'lchovli 'plamda aniqlangan sodda funksiyalar va ixtiyoriy o'lchovli funksiyalar 'hun Lebeg integralining asosiy xossalariga doir misollar keltirilgan. Bu- r additivlik, bir jinslilik, monotonlik va $\sigma-$ additivlik hamda absolyut luksizlik xossalaridir. 8–§ integral belgisi ostida limitga o'tish alomat- riga bag'ishlangan. Bu yerda Lebeg, Levi va Fatu teoremalarining tad- qlariga doir misollar keltirilgan. Bundan tashqari Lebeg va Riman in- grallarini taqqoslashga oid misollar ham shu yerdan joy olgan. Cheksiz lchovli to'plamda aniqlangan o'lchovli funksiyalarning Lebeg integrali- ı doir misollar ham shu paragrafdan o'rin olgan.

7- §. Chekli o'lchovli to'plamlarda Lebeg integrali

Bu paragrafda o'lchovli A to'plamda aniqlangan, o'lchovli f funksi- ıni qaraymiz va $\mu(A) < +\infty$ deb faraz qilamiz.

7.1-ta'rif. *Agar $f : A \to \mathbb{R}$ o'lchovli bo'lib, uning qiymatlari to'pla ko'pi bilan sanoqli bo'lsa, u holda f sodda funksiya deyiladi.*

Dastlab biz cheklita $y_1, y_2, \ldots, y_n$ qiymatlarni qabul qiluvchi f sc da funksiya uchun Lebeg integrali ta'rifini beramiz. Ixtiyoriy $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ uchun quyidagicha belgilash olamiz:

$$A_k = \{x \in A : f(x) = y_k\}. \qquad (7$$

7.2-ta'rif. *Cheklita $y_1, y_2, \ldots, y_n$ qiymatlarni qabul qiluvchi $f : A$ $\mathbb{R}$ sodda funksiya berilgan bo'lsin. U holda*

$$\sum_{k=1}^{n} y_k \mu(A_k)$$

yig'indi f sodda funksiyaning A to'plam bo'yicha olingan Lebeg int rali deyiladi va quyidagicha belgilanadi

$$\int_A f(x) d\mu = \sum_{k=1}^{n} y_k \mu(A_k).$$

Endi sanoqlita $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ qiymatlarni qabul qiluvchi $f : A$ $\mathbb{R}$ sodda funksiya berilgan bo'lsin. f funksiya uchun quyidagi forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_k \mu(A_k) \qquad (7$$

qatorni qaraymiz, bu yerda A_k lar (7.1) tenglik bilan aniqlanadi.

7.3-ta'rif. *Agar (7.2) qator absolyut yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda sodda funksiya A to'plamda Lebeg ma'nosida integrallanuvchi deyila (7.2) qatorning yig'indisi f funksiyaning A to'plam bo'yicha olin Lebeg integrali deyiladi va quyidagicha belgilanadi*

$$\int_A f(x) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \mu(A_n).$$

Shuni ta'kidlaymizki, (7.2) qatorning absolyut yaqinlashishi muhim. Aks holda bu shartli yaqinlashuvchi qator yig'indisi funksiya qiymatlarining tartiblanishiga bog'liq bo'lib, integralning qiymati funksiya qiymatlarining nomerlanishiga bog'liq bo'lar edi (matematik analiz kursidan Riman teoremasini eslang).

7.3-ta'rifda y_n qiymatlarning har xilligi talab qilingan. Lekin y_n larning har xilligini talab qilmasdan ham sodda funksiyalar uchun Lebeg integrali ta'rifini keltirish mumkin.

7.4-ta'rif. *Faraz qilaylik,* $A = \bigcup\limits_k B_k$, $B_i \bigcap B_j = \emptyset$, $i \neq j$ *yoyilma o'rinli bo'lib, har bir o'lchovli* B_k *to'plamda* f *funksiya faqat bitta* c_k *qiymat qabul qilsin. Agar*

$$\sum_k c_k \mu(B_k) \tag{7.3}$$

qator absolyut yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda f *sodda funksiya* A *to'plamda Lebeg ma'nosida integrallanuvchi deyiladi.* (7.3) *qatorning yig'indisi* f *funksiyadan* A *to'plam bo'yicha olingan Lebeg integrali deyiladi.*

Endi f ixtiyoriy o'lchovli funksiya bo'lsin.

7.5-ta'rif. *Agar* A *to'plamda* f *funksiyaga tekis yaqinlashuvchi, integrallanuvchi sodda funksiyalarning* $\{f_n\}$ *ketma-ketligi mavjud bo'lsa, u holda* f *funksiya* A *to'plamda Lebeg ma'nosida integrallanuvchi deyiladi va uning integrali quyidagi tenglik bilan aniqlanadi*

$$\lim_{n \to \infty} \int_A f_n(x) d\mu = \int_A f(x) d\mu. \tag{7.4}$$

Lebeg integraliga uning o'zi tomonidan berilgan ta'rifni keltiramiz. Chekli o'lchovli A to'plamda aniqlangan o'lchovli, chegaralangan $f : A \to \mathbb{R}$ funksiyani qaraymiz. Bu holda shunday m va M sonlari mavjudki, barcha $x \in A$ larda

$$m \leq f(x) \leq M$$

tengsizlik bajariladi. $[m, M]$ kesmani $m = y_1 < y_2 < \cdots < y_{n-1}$ $y_n = M$ nuqtalar yordamida n bo'lakka bo'lamiz. Bu bo'linishni П lan belgilaymiz. Har bir $[y_{k-1}, y_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$ yarim inter yordamida $A_k = \{x \in A : y_{k-1} \leq f(x) < y_k\}$ to'plamni, hamda A_n $\{x \in A : y_{n-1} \leq f(x) \leq y_n\}$ to'plamni aniqlaymiz. Bu П bo'linishga n Lebegning quyi va yuqori yig'indilarini topamiz:

$$s_{\Pi}(f) = \sum_{k=1}^{n} y_{k-1}\mu(A_k), \qquad S_{\Pi}(f) = \sum_{k=1}^{n} y_k\mu(A_k).$$

Ixtiyoriy П bo'linishga mos Lebegning quyi yig'indisi $s_{\Pi}(f)$ yuqo dan chegaralangan (masalan $M \cdot \mu(A)$ bilan), yuqori yig'indisi S_{Π} esa quyidan chegaralangan (masalan $m \cdot \mu(A)$ bilan). Shuning uch quyidagilar mavjud va chekli:

$$L_*(f) = \sup s_{\Pi}(f), \qquad L^*(f) = \inf S_{\Pi}(f). \qquad (7$$

(7.5) da aniq quyi va aniq yuqori chegaralar $[m, M]$ kesmaning b cha chekli bo'linishlari bo'yicha olinadi. $L_*(f)$ soni f funksiyadan to'plam bo'yicha olingan *quyi integral*, $L^*(f)$ esa f funksiyadan to'plam bo'yicha olingan *yuqori integral* deyiladi.

7.6-ta'rif. *Agar $L_*(f) = L^*(f)$ bo'lsa, chegaralangan f funksiy A to'plamda Lebeg ma'nosida integrallanuvchi deymiz. $L_*(f)$ va L^* larning bu umumiy qiymati f funksiyadan A to'plam bo'yicha olin Lebeg integrali deyiladi, ya'ni*

$$\int_A f(x)d\mu = L_*(f) = L^*(f).$$

Quyidagi

$$0 \leq S_{\Pi}(f) - s_{\Pi}(f) \leq \lambda_n \cdot \mu(A), \quad \lambda_n = \max_{0 \leq k \leq n-1}(y_{k+1} - y_k)$$

tengsizlikdan chekli o'lchovli A to'plamda aniqlangan har qanday che ralangan o'lchovli f funksiyaning Lebeg ma'nosida integrallanuvchi ek ligi kelib chiqadi. Bundan Lebeg hayratga tushgan va bu jamlash usulining boshqa afzalliklarini qidirgan va topgan. Chegaralangan o'lchovli funksiyaning integrallanuvchanligi hozirda Lebeg integralining IV xossasi sifatida keltiriladi.

Endi chekli o'lchovli A to'plamda aniqlangan chegaralanmagan $f : A \to \mathbb{R}$ funksiyaning Lebeg integrali ta'rifini keltiramiz. Dastlab f ni A to'plamda manfiymas deb faraz qilamiz, ya'ni $\forall x \in A$ uchun $f(x) \geq 0$ bo'lsin. Bu holda $f : A \to \mathbb{R}$ funksiya yordamida $\{f_n\}$ ketma-ketlikni quyidagicha quramiz:

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \leq n \\ n, & f(x) > n \end{cases}$$

Bu usulda qurilgan f_n funksiya A da o'lchovli va chegaralangan bo'ladi. Ma'lumki bu ketma-ketlik monoton, ya'ni

$$f_n(x) \leq f_{n+1}(x), \quad \forall x \in A, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Shuning uchun quyidagi (chekli yoki cheksiz) limit mavjud

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x) d\mu. \tag{7.6}$$

7.7-ta'rif. *Agar (7.6) limit chekli bo'lsa, manfiymas f funksiya A to'plamda integrallanuvchi deyiladi. Bu holda f dan A to'plam bo'yicha olingan integral deb (7.6) limitning qiymati qabul qilinadi, ya'ni*

$$\int_A f(x) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x) d\mu.$$

Endi chegaralanmagan $f : A \to \mathbb{R}$ funksiya A da har xil ishorali qiymatlar qabul qilsin. Bu holda f funksiyadan A to'plam bo'yicha olingan integralni aniqlashda

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x).$$

$$f_+(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| + f(x)) \geq 0, \qquad f_-(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| - f(x)) \geq 0 \quad (7.$$

yoyilmadan foydalanamiz.

7.8-ta'rif. *Agar A to'plamda f_+ va f_- funksiyalar integrallanuvc bo'lsa, u holda f ni A da integrallanuvchi deymiz va uning integrali de*

$$\int_A f_+(x)d\mu - \int_A f_-(x)d\mu$$

ni qabul qilamiz, ya'ni

$$\int_A f(x)d\mu = \int_A f_+(x)d\mu - \int_A f_-(x)d\mu.$$

7.1-teorema *(Lebeg integralining $\sigma-$ additivlik xossasi). O'lchovli to'plam o'zaro kesishmaydigan $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ o'lchovli to'plamlarn birlashmasidan iborat bo'lsin, ya'ni*

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j,$$

va f funksiya A to'plamda integrallanuvchi bo'lsin. U holda har bir A to'plam bo'yicha f funksiyaning integrali mavjud.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f(x)d\mu$$

qator absolyut yaqinlashadi va quyidagi tenglik o'rinli

$$\int_A f(x)d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f(x)d\mu. \qquad (7.$$

Endi ma'lum ma'noda 7.1-teoremaga teskari hisoblanuvchi quyida teoremani keltiramiz.

7.2-teorema. *O'lchovli A to'plam o'zaro kesishmaydigan $A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots$ o'lchovli to'plamlarning birlashmasidan iborat bo'lsin, ya'ni*

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j.$$

Agar har bir A_n to'plamda f funksiya integrallanuvchi bo'lib,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} |f(x)|\, d\mu$$

qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda f funksiya A to'plamda integrallanuvchi bo'ladi va (7.8) tenglik o'rinli.

7.3-teorema *(Lebeg integralining absolyut uzluksizlik xossasi). Agar f funksiya A $(\mu(A) < \infty)$ to'plamda integrallanuvchi bo'lsa, u holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son mavjudki, $\mu(D) < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi har qanday $D \subset A$ to'plam uchun*

$$\left| \int_D f(x) d\mu \right| < \varepsilon$$

tengsizlik o'rinli.

Endi Riman va Lebeg integrallarini taqqoslash haqidagi teoremani keltiramiz.

7.4-teorema. *Agar $[a, b]$ kesmada*

$$I = (R) \int_a^b f(x) dx$$

Riman integrali mavjud bo'lsa, u holda f funksiya $[a, b]$ kesmada Lebeg ma'nosida ham integrallanuvchi bo'ladi va quyidagi tenglik o'rinli:

$$(L) \int_{[a,\, b]} f(x) d\mu = (R) \int_a^b f(x)\, dx.$$

7.1. Ko'pi bilan sanoqlita har xil $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ qiymatlarni qabul qiluvchi $f : A \to \mathbb{R}$ funksiya o'lchovli bo'lishi uchun

$$A_n = \{ x \in A : f(x) = y_n \}$$

to'plamlarning o'lchovli bo'lishi zarur va yetarli. Isbotlang.

Isbot. *Zaruriyligi.* f funksiya A to'plamda o'lchovli bo'lsa, A_n to'plamlarning o'lchovli ekanligi 6.12-misoldan kelib chiqadi.

Yetarliligi. A_n to'plamlarning har biri o'lchovli ekanligidan f fu yaning o'lchovli ekanligini keltirib chiqaramiz.

$$A(f < c) = \{x \in A : f(x) < c\} = \bigcup_{y_n < c} A_n$$

tenglikdan va o'lchovli to'plamlarning chekli yoki sanoqli birlashn o'lchovli ekanligidan f ning A da o'lchovli funksiya ekanligi kelib chi di.

7.2. Agar $f : A \to \mathbb{R}$ o'lchovli funksiya bo'lsa, u holda $g(x) = [f($ funksiya A da sodda funksiya bo'lishini isbotlang. Bu yerda belgi a sonining butun qismini bildiradi.

7.3. O'lchovli $A \subset E$ to'plamning $y = \chi_A(x)$ xarakteristik funksi E da sodda funksiya ekanligini ta'rif va 7.1-misol yordamida to'plamlarning o'lchovli ekanligidan foydalanib ko'rsating.

7.4. $y = \operatorname{sign} x$ ning $E = [-1, 3]$ da sodda funksiya ekanligini ta yordamida va 7.1-misol tasdig'idan foydalanib ko'rsating.

7.5. Agar $f_1 : A \to \mathbb{R}$ va $f_2 : E \backslash A \to \mathbb{R}$ sodda funksiyalar bo'lsa holda

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in A \\ f_2(x), & x \in E \backslash A \end{cases}$$

funksiya E da sodda funksiya bo'lishini isbotlang.

7.6. Kantorning zinapoya funksiyasi $\mathfrak{K}$ ning $[0, 1] \backslash K$ da sodda funk bo'lishini ko'rsating. Bu yerda $K-$ Kantor to'plami.

7.7. $\mathfrak{K} : K \to \mathbb{R}$ Kantor funksiyasining sodda funksiya emasligini isl lang. Bu yerda $K-$ Kantor to'plami.

7.8. Kantorning zinapoya funksiyasi $\mathfrak{K}$ ning K_n to'plam bo'yicha gan Lebeg integralini hisoblang.

Yechish. Malumki, $K_n = \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} K_{nk}$ to'plamning k – qo'shni intervali K_{nk} da $\mathfrak{K}$ funksiya $y_k = (2k-1)\cdot 2^{-n}$, $(k = 1,2,3,\dots,2^{n-1})$ qiymatni qabul qiladi, ya'ni

$$A_k = \{x \in K_n : \mathfrak{K}(x) = y_k\} = K_{nk}, \quad k = 1,2,3,\dots,2^{n-1}.$$

Bundan tashqari barcha $k \in \{1,2,3,\dots,2^{n-1}\}$ lar uchun $\mu(K_{nk}) = 3^{-n}$ ekanligini hisobga olsak, sodda funksiyalar uchun Lebeg untegrali ta'rifidan

$$\int_{K_n} \mathfrak{K}(x)d\mu = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{2k-1}{2^n}\cdot\frac{1}{3^n} = \frac{1}{2^n\cdot 3^n}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}(2k-1) =$$

$$= \frac{1}{2^n\cdot 3^n}\cdot\frac{1+2^n-1}{2}\cdot 2^{n-1} = \frac{1}{4}\cdot\frac{2^n}{3^n}$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bu yig'indini hisoblashda arifmetik progressiyaning dastlabki n ta hadi yig'indisi uchun $S_n = \frac{a_1+a_n}{2}n$ formuladan foydalandik. □

7.9. Kantorning zinapoya funksiyasi $\mathfrak{K}$ dan $[0,\ 1]\backslash K$ to'plam bo'yicha olingan integralni hisoblang. Bu yerda $K-$ Kantor to'plami.

Yechish. Malumki, $[0,\ 1]\backslash K = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ tenglik o'rinli va K_n to'plamlar juft-jufti bilan o'zaro kesishmaydi. Lebeg untegralining $\sigma-$ additivlik xossasiga (7.1-teorema va (7.8) ga qarang) ko'ra quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\int_{[0,1]\backslash K} \mathfrak{K}(x)d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{K_n}\mathfrak{K}(x)d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4}\cdot\frac{2^n}{3^n} = \frac{1}{4}\cdot\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}. \quad (7.9)$$

Bu yerda biz oldingi misol natijasidan hamda cheksiz kamayuvchi geometrik progressiya yig'indisi uchun $S = \frac{b_1}{1-q}$ formuladan foydalandik. □

7.10. Quyidagi sodda funksiyalarning $[0, 1]$ to'plam bo'yicha olingan L
integralini hisoblang.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & agar \ \ x \in K \\ n, & agar \ \ x \in K_n, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1, & x \in K \\ 2^{-n}, & x \in K_n. \end{cases}$$

7.11. Sodda funksiyaning songa ko'paytmasi yana sodda funksiya bo'lis
isbotlang.

7.12. Sodda funksiyalar yig'indisi yana sodda funksiya bo'lishini isb
lang.

7.13. Agar f va g lar sodda funksiyalar bo'lsa, u holda $\alpha f + \beta$
funksiya ham sodda funksiya bo'ladi. Isbotlang.

7.14. Agar $f : A \to \mathbb{R}$ va $g : A \to \mathbb{R}$ lar sodda funksiyalar bo'lsa
holda $f \cdot g$ ham sodda funksiya bo'ladi. Isbotlang.

7.15. $f : A \to \mathbb{R}$ funksiya o'lchovli bo'lishi uchun unga tekis yaqin
shuvchi sodda funksiyalar ketma-ketligining mavjud bo'lishi za
va yetarli. Isbotlang.

7.16. Kantorning zinapoya funksiyasi $\mathfrak{K}$ ga $[0, 1]$ da tekis yaqinlashuv
va cheklita qiymat qabul qiluvchi sodda funksiyalar ketma-ketlig
quring.

7.17. Agar f va g sodda funksiyalar A to'plamda integrallanuv
bo'lsa, u holda $\alpha f + \beta g$ funksiya ham A to'plamda integrallan
chi bo'ladi va

$$\int_A (\alpha f(x) + \beta g(x))\, d\mu = \alpha \int_A f(x) d\mu + \beta \int_A g(x) d\mu$$

tenglik o'rinli. Isbotlang.

7.18. Chekli o'lchovli A to'plamda chegaralangan f sodda funksiya integrallanuvchidir. Isbotlang.

Isbot. Bu xossa sodda funksiyalar uchun Lebeg integralining C) *xossasi* deb yuritiladi. f sodda funksiya chegaralangan bo'lganligi uchun biror $M > 0$ va barcha $x \in A$ larda $|f(x)| \leq M$ bo'ladi. Faraz qilaylik, f sodda funksiya A_i to'plamda f_i qiymatni qabul qilsin. U holda

$$\sum_i |f_i|\mu\,(A_i) \leq M \cdot \sum_i \mu\,(A_i) = M \cdot \mu(A).$$

Demak, 7.3-ta'rifga ko'ra f sodda funksiya integrallanuvchi. □

7.19. $A = (0,\ 1]$ oraliqda f funksiyani quyidagicha aniqlaymiz: $f(x) = n$, agar $x \in A_n = \left(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}\right]$, $n \in \mathbb{N}$. f sodda funksiya $A = (0,\ 1]$ to'plamda Lebeg ma'nosida integrallanuvchimi? Agar integrallanuvchi bo'lsa, uning integralini hisoblang.

Yechish. Ma'lumki,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (0,\ 1], \qquad A_n \cap A_m = \emptyset, \quad n \neq m.$$

va $A_n = \{x \in A : f(x) = n\}$ tenglik o'rinli. Sodda funksiyalar uchun Lebeg integrali ta'rifiga ko'ra,

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{1}{2^n} \qquad (7.10)$$

qator yaqinlashuvchi bo'lsa, f sodda funksiya $A = (0,\ 1]$ da integrallanuvchi bo'ladi. Bu holda musbat hadli qatorlarni taqqoslash haqidagi Dalamber alomatidan foydalanish qulay.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} = \frac{1}{2} < 1.$$

Demak, (7.10) qator yaqinlashuvchi. Bu yerdan f sodda funksiyanir Lebeg ma'nosida integrallanuvchi ekanligi kelib chiqadi. Endi (7.10) qat yig'indisini hisoblaymiz. Uning qismiy yig'indisi S_n uchun

$$S_n = 2S_n - S_n = 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \cdots + \frac{n}{2^{n-1}} - \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \cdots + \frac{n}{2^n}\right)$$

$$= 1 + \left(\frac{2}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{n}{2^{n-1}} - \frac{n-1}{2^{n-1}}\right) - \frac{n}{2^n} = 1 + \frac{1}{2}$$

$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n}$ o'rinli. Bu tenglikda $n \to \infty$ da limitga o'ti

$$\int_{[0,1]} f(x)d\mu = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{n}{2^n} \right) = 2$$

ekanligini olamiz.

Shuni ta'kidlash joizki, yuqorida biz integralini hisoblagan sodda fun siya chegaralanmagandir. Ma'lumki, Riman integrali ta'rifi dastlab cheg ralangan funksiyalar uchun keltiriladi. Chegaralanmagan funksiyalar uc Riman integrali alohida xosmas integral sifatida ta'riflanadi. Lebeg i tegrali chegaralangan va chegaralanmagan funksiyalar uchun bir xil ta'riflanadi.

7.20. $f(x) = [x]$, $x \in [0, 5) = A$ ning sodda funksiya ekanligini ko'rsat va uning A to'plam bo'yicha olingan integralini hisoblang.

7.21. Ixtiyoriy o'lchovli $A \subset E$ uchun $\int_E \chi_A(x)\, d\mu = \mu(A)$ tenglik isbot qiling.

7.22. $A = \{x \in [-\pi, \pi] : \sin x < 0,5\}$ uchun $\int_{[-\pi,\pi]} \chi_A(x)\, d\mu$ integral hisoblang.

7.23. Dirixle funksiyasining sodda funksiya ekanligini ta'rif yordami ko'rsating. Uning $A = [0, 3]$ to'plam bo'yicha olingan integrali hisoblang.

7.24. Riman funksiyasining sodda funksiya ekanligini ko'rsating va uning $A = [0, 1]$ to'plam bo'yicha olingan integralini hisoblang.

7.25-7.31-misollarda berilgan $f : A \to \mathbb{R}$ funksiyani sodda ekanligini ko'rsatib, uning integralini hisoblang.

7.25. $f(x) = [2x], \quad A = [0, 2)$.

7.26. $f(x) = \operatorname{sign} x, \quad A = [-1, 3]$.

7.27. $f(x) = \chi_{[0,1]\setminus\mathbb{Q}}(x), \quad A = [-1, 3]$.

7.28. $f(x) = [x] + \operatorname{sign} x, \quad A = [-1, 2]$.

7.29. $f(x) = \operatorname{sign} x + \chi_{[1,2]}(x), \quad A = [-1, 4]$.

7.30. $f(x) = n, \ x \in A_n = \left(\dfrac{1}{3^n}, \dfrac{1}{3^{n-1}}\right], \quad n \in \mathbb{N}, \ A = (0, 1]$.

7.31. $f(x) = \dfrac{1}{n}, \ x \in A_n = \left(\dfrac{1}{(n+1)!}, \dfrac{1}{n!}\right], \quad n \in \mathbb{N}, \ A = (0, 1]$.

7.32. f ga tekis yaqinlashuvchi va A to'plamda integrallanuvchi har qanday sodda funksiyalar ketma-ketligi uchun (7.4) limit mavjud. Isbotlang.

7.33. Berilgan f funksiya uchun (7.4) limit, unga tekis yaqinlashuvchi $\{f_n\}$ ketma-ketlikning tanlanishiga bog'liq emas. Isbotlang.

7.34. Lebeg integralining *bir jinslilik xossasini* isbotlang. Bu xossani matematik simvollar yordamida quyidagicha yozish mumkin.

$$\int_A k \cdot f(x)\, d\mu = k \int_A f(x)\, d\mu, \quad k \in \mathbb{R}.$$

7.35. Lebeg integralining *additivlik xossasini* isbotlang. Bu xossani matematik simvollar yordamida quyidagicha yozish mumkin:

$$\int_A (f(x) + g(x))\, d\mu = \int_A f(x)\, d\mu + \int_A g(x)\, d\mu.$$

7.34 va 7.35-misollarda keltirilgan xossalar adabiyotlarda ([1] ga qara
Lebeg integralining II va III *xossalari* deb berilgan.

7.36. Lebeg integralining IV *xossasini* isbotlang. A to'plamda chega-ralangan, o'lchovli f funksiya integrallanuvchidir.

7.37. Lebeg integralining *monotonlik xossasini* (V xossa) isbotlang. to'plamda manfiymas $f(x) \geq 0$ funksiyaning integrali manfiyma

7.38. Lebeg integralining VI *xossasini* isbotlang. Agar $\mu(A) = 0$ bo'ls u holda ixtiyoriy $f : A \to \mathbb{R}$ funksiyaning integrali nolga teng.

7.39. Agar deyarli barcha $x \in A$ lar uchun $f(x) = g(x)$ bo'lsa, u hol

$$\int_A f(x)d\mu = \int_A g(x)d\mu$$

tenglik o'rinli. Isbotlang. Bu ham Lebeg integralining VI *xoss* deyiladi.

7.40 va 7.41-misollarda keltiriladigan tasdiqlar mos ravishda Leb integralining VII va VIII *xossasi* deb ataladi ([1] ga qarang).

7.40. Agar φ funksiya A to'plamda integrallanuvchi bo'lib, deyarli ba cha $x \in A$ lar uchun $|f(x)| \leq \varphi(x)$ bo'lsa, u holda f o'lcho funksiya ham A to'plamda integrallanuvchi bo'lishini isbotlang.

7.41. Agar f o'lchovli bo'lsa, u holda f va $|f|$ funksiyalar bir vaqt integrallanuvchi yo integrallanuvchi emas. Isbotlang.

7.42. O'lchovli $f : A \to \mathbb{R}$ funksiya $A\,(\mu(A) < \infty)$ to'plamda integr lanuvchi bo'lishi uchun har bir $n \in \mathbb{N}$ da

$$f_n^{but}(x) = \frac{[nf(x)]}{n} \qquad (7.$$

sodda funksiya integrallanuvchi bo'lishi zarur va yetarli. Isbotla

Isbot. *Zaruriyligi.* $f : A \to \mathbb{R}$ o'lchovli ekanligidan hamda 7.2 va 7.11-misollardan, har bir $n \in \mathbb{N}$ da (7.11) tenglik bilan aniqlangan f_n^{but} ning sodda funksiya ekanligi kelib chiqadi. Quyidagi tengsizlikdan

$$|f_n^{but}(x)| \leq |f(x)| + 1$$

va VII xossadan (7.40-misolga qarang) f_n^{but} funksiyaning integrallanuvchi ekanligi kelib chiqadi.

Yetarliligi. f_n^{but} sodda funksiya har bir $n \in \mathbb{N}$ da integrallanuvchi bo'lsin. $\{f_n^{but}\}$ sodda funksiyalar ketma-ketligining f ga tekis yaqinlashuvchi ekanligini ko'rsatamiz. Haqiqatan ham, barcha $x \in A$ larda

$$|f(x) - f_n^{but}(x)| = \left| f(x) - \frac{[nf(x)]}{n} \right| = \left| \frac{nf(x) - [nf(x)]}{n} \right| = \frac{\{nf(x)\}}{n} \leq \frac{1}{n}$$

tengsizlik o'rinli. Demak, $\{f_n^{but}\}$ ketma-ketlik f ga tekis yaqinlashadi. 7.5-ta'rifga ko'ra f funksiya A to'plamda integrallanuvchidir. $\square$

7.43. Agar har bir $n \in \mathbb{N}$ uchun (7.11) tenglik bilan aniqlanuvchi f_n^{but} sodda funksiya integrallanuvchi bo'lsa, quyidagi tenglikni isbotlang

$$\int_A f(x)\, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_A f_n^{but}(x)\, d\mu.$$

7.44. Lebeg ma'nosida integrallanuvchi, lekin Riman ma'nosida integrallanuvchi bo'lmagan funksiyaga misol keltiring.

Yechish. Dirixle funksiyasini $[0,\ 2]$ kesmada Lebeg va Riman ma'nolarida integrallanuvchanlikka tekshiramiz. $\mathfrak{D}$ sodda funksiya bo'lib, uning Lebeg integrali quyidagiga teng:

$$\int_{[0,\,2]} \mathfrak{D}(x) d\mu = 1 \cdot \mu\left([0,\,2] \cap \mathbb{Q}\right) + 0 \cdot \mu\left([0,\,2] \backslash \mathbb{Q}\right) = 0.$$

Dirixle funksiyasi $[0,\ 2]$ kesmada Riman ma'nosida integrallanuvchi emas. Buni ko'rsatish uchun $[0,\ 2]$ kesmani $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots <$

$x_{n-1} < x_n = 2$ nuqtalar yordamida teng n bo'lakka bo'lamiz. Ma'lumki, Dirixle funksiyasining $[x_{k-1}, x_k]$ bo'lakchadagi aniq yuqori chegarasi M_k barcha $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ uchun 1 ga teng. Dirixle funksiyasining bu bo'lakchalardagi aniq quyi chegarasi m_k esa 0 ga teng. Bu bo'linishga mos Darbuning yuqori Ω_n va quyi ω_n yig'indilarini qaraymiz:

$$\Omega_n = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} M_k = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} 1 = 2, \qquad \omega_n = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} m_k = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} 0 = 0.$$

Bu yerdan,

$$\lim_{n\to\infty} \Omega_n = 2, \quad \lim_{n\to\infty} \omega_n = 0$$

tengliklarga kelamiz. Demak, Dirixle funksiyasi $[0, 2]$ kesmada Riman ma'nosida integrallanuvchi emas. □

Shuni ta'kidlaymizki, IV, VI, VII va VIII xossalar faqat Lebeg integrali uchun xos. Bu xossalar Riman integrali uchun o'rinli emas. Buni 7.45-7.48-misollarda ko'rib chiqamiz.

7.45. Lebeg integralining IV xossasi, Riman integrali uchun o'rinli emasligini, ya'ni shunday o'lchovli va chegaralangan funksiyaga misol keltiringki, u Riman ma'nosida integrallanuvchi bo'lmasin.

Yechish. $[0, 2]$ kesmada Dirixle funksiyasini qaraymiz. U chegaralangan va o'lchovli, demak IV xossaga ko'ra u Lebeg ma'nosida integrallanuvchi, lekin Dirixle funksiyasi $[0, 2]$ kesmada Riman ma'nosida integrallanuvchi emas. Bu tasdiq 7.44-misolda ko'rsatildi. □

7.46. Lebeg integralining VI xossasi, Riman integrali uchun o'rinli emas. Ya'ni, shunday $f : A \to \mathbb{R}$ va $g : A \to \mathbb{R}$ ekvivalent funksiyalarga misol keltiringki, ulardan biri Riman ma'nosida integrallanuvchi, ikkinchisi esa integrallanuvchi bo'lmasin. $A = [0, 2]$ kesmada Dirixle $\mathfrak{D}(x)$ va nol $\theta(x) = 0$ funksiyalarini tahlil qiling.

7.47. Lebeg integralining VII xossasi, Riman integrali uchun o'rinli emas. Ya'ni, shunday integrallanuvchi $\varphi : A \to \mathbb{R}$ va o'lchovli $f : A \to \mathbb{R}$ funksiyalarga misol keltiringki, barcha $x \in A$ larda $|f(x)| \leq \varphi(x)$ bo'lsin, lekin f funksiya Riman ma'nosida integrallanuvchi bo'lmasin

Yechish. Quyidagi funksiyalarni qaraymiz: $\varphi(x) \equiv 2$ va

$$f(x) = \begin{cases} -1, & agar \quad x \in \mathbb{Q} \\ 1, & agar \quad x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}. \end{cases} \tag{7.12}$$

Barcha $x \in [0,\ 2]$ lar uchun $|f(x)| \leq \varphi(x)$ tengsizlik o'rinli. $\varphi : [0,\ 2] \to \mathbb{R}$ o'zgarmas funksiya sifatida $[0,\ 2]$ kesmada Riman ma'nosida integrallanuvchi bo'ladi. Lekin f funksiya $[0,\ 2]$ kesmada Riman ma'nosida integrallanuvchi emas. Bu tasdiq $\mathfrak{D}$ ning Riman ma'nosida integrallanuvchi emasligiga o'xshash isbotlanadi. $\square$

.48. Lebeg integralining VIII xossasi Riman integrali uchun o'rinli emas. Ya'ni. Riman ma'nosida integrallanuvchi bo'lmagan shunday $f : A \to \mathbb{R}$ funksiyaga misol keltiringki, uning moduli $|f|$ esa, Riman ma'nosida integrallanuvchi bo'lsin. (7.12) bilan aniqlangan f funksiyani tahlil qiling.

.49. $[-1,\ 1]$ kesmada aniqlangan Riman ma'nosida integrallanuvchi bo'lmagan, lekin kvadrati Riman ma'nosida integrallanuvchi bo'lgan funksiyaga misol keltiring. 7.47-misol yechimida qaralgan f funksiyani tahlil qiling.

7.50. (7.12) tenglik bilan aniqlangan f funksiya va $\varphi(x) \equiv 1$ funksiyani $[-1,\ 1]$ kesmada ekvivalent ekanligini isbotlang. Ularni $[-1,\ 1]$ kesmada Lebeg va Riman ma'nolarida integrallanuvchanlikka tekshiring.

7.51. Agar f funksiya A to'plamda integrallanuvchi bo'lsa, u holda f funksiya A to'plamning ixtiyoriy o'lchovli A' qismida ham integrallanuvchi bo'ladi. Isbotlang.

7.52. *Chebishev tengsizligini isbotlang*, ya'ni A o'lchovli to'plamda manfiymas φ funksiya va $c > 0$ son berilgan bo'lsa, u holda

$$\mu\{x \in A : \varphi(x) \geq c\} \leq \frac{1}{c}\int_A \varphi(x)d\mu \tag{7.13}$$

tengsizlik o'rinli. (7.13) *Chebishev tengsizligi* deyiladi.

Isbot. Avtavlik, $A_c = \{x \in A : \varphi(x) \geq c\}$ bo'lsin. U holda

$$\int_A \varphi(x)\,d\mu = \int_{A_c} \varphi(x)\,d\mu + \int_{A\setminus A_c} \varphi(x)\,d\mu \geq \int_{A_c} \varphi(x)\,d\mu \geq c \cdot \mu(A_c).$$

Bu yerdan (7.13) tengsizlikning isboti kelib chiqadi. □

7.53. Agar $\int_A |f(x)|\,d\mu = 0$ bo'lsa, u holda deyarli barcha $x \in A$ lar uchun $f(x) = 0$ bo'ladi. Isbotlang.

7.54. *Lebeg integralining absolyut uzluksizlik xossasidan foydalanib isbotlang.* Agar f funksiya A $(\mu(A) < \infty)$ to'plamda integrallanuvchi bo'lsa, u holda ixtiyoriy $n \in \mathbb{N}$ son uchun shunday $m \in \mathbb{N}$ son mavjudki, $\mu(D) < m^{-1}$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi har qanday o'lchovli $D \subset A$ to'plam uchun

$$\left|\int_D f(x)\,d\mu\right| < \frac{1}{n}$$

tengsizlik bajariladi.

7.55. $[0, 1]$ kesmada chegaralanmagan, ammo Lebeg ma'nosida integrallanuvchi bo'lgan sodda funksiyaga misol keltiring.

7.56. $f(x) = [x^2]$ funksiyaning $A = [0, 2]$ to'plam bo'yicha olingan Lebeg integralini hisoblang.

7.57. $[a,\ b]$ kesmada uzluksiz funksiya sodda funksiya bo'la oladimi?

7.58. Dirixle, Riman funksiyalari sodda funksiya bo'ladimi? Ularning $[0, 4]$ to'plam bo'yicha olingan Lebeg integralini hisoblang.

7.59-7.65-misollarda berilgan $f : A \to \mathbb{R}$ funksiyaning integralini ta'rif yordamida hisoblang. Javobingizni Riman va Lebeg integrallarini taqqoslash haqidagi 7.4-teoremadan foydalanib tekshiring.

7.59. $f(x) = 2x + 1, \quad x \in [0,\ 3]$.

7.60. $f(x) = 6x - 3, \quad x \in [-1,\ 2]$.

7.61. $f(x) = 3x^2 + 2, \quad x \in [0,\ 1]$.

7.62. $f(x) = 3x^2 - 2x, \quad x \in [-1,\ 1]$.

7.63. $f(x) = 6x^2 + 4x - 5, \quad x \in [-1,\ 1]$.

7.64. $f(x) = 2^x + 3, \quad x \in [0,\ 2]$.

7.65. $f(x) = e^x + 3x, \quad x \in [0,\ 1]$.

7.61-misolning yechimi. Berilgan $f(x) = 3x^2 + 2$, $x \in [0,\ 1]$ funksiya sodda funksiya emas. Bu funksiya o'lchovli va $[0,\ 1]$ kesmada chegaralangan, shuning uchun u integrallanuvchi. Integrallanuvchi $\{f_n\}$ sodda funksiyalar ketma-ketligini shunday tanlash kerakki, har bir $n \in \mathbb{N}$ da f_n ning integralini hisoblash mumkin bo'lsin, hamda $\lim\limits_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\,d\mu$ ni topish oson bo'lsin. Shu maqsadda biz quyidagicha yo'l tutamiz. $[0,\ 1]$ kesmani

$$0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \cdots < \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n} = 1$$

nuqtalar yordamida teng n bo'lakka bo'lamiz va

$$A_k = \left[\frac{k-1}{n},\ \frac{k}{n}\right), \quad k = 1, 2, \ldots, n-1, \quad A_n = \left[\frac{n-1}{n},\ 1\right]$$

belgilashlarni kiritamiz. Tanlanishiga ko'ra bu to'plamlar juft-jufti bilan o'zaro kesishmaydi va $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = [0,\ 1]$. f_n sodda funksiyani $[0,\ 1]$ kesmada quyidagicha aniqlaymiz:

$$f_n(x) = f\left(\frac{k}{n}\right) = 3\frac{k^2}{n^2} + 2, \quad x \in A_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Tanlangan ketma-ketlikni $[0,\ 1]$ da f ga tekis yaqinlashishini ko'rsatamiz

$$\max_{0 \le x \le 1} |f_n(x) - f(x)| = \max_{1 \le k \le n} \max_{x \in A_k} |f_n(x) - f(x)| =$$

$$= \max_{1 \le k \le n} \max_{x \in A_k} |f(k/n) - f(x)| = \max_{1 \le k \le n} \frac{3(2k-1)}{n^2} = \frac{3(2n-1)}{n^2}.$$

Demak, bu ketma-ketlik $[0,\ 1]$ da f ga tekis yaqinlashadi. Endi f_n sodda funksiyaning $[0,\ 1]$ to'plam bo'yicha Lebeg integralini hisoblaymiz.

$$\int_{[0,1]} f_n(x)\, d\mu = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{3k^2}{n^2} + 2\right)\frac{1}{n} = \frac{3}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 +$$

$$+ \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{3}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{2\,n^2} + 2. \qquad (7.14)$$

Yig'indini hisoblashda barcha $n \in \mathbb{N}$ lar uchun o'rinli bo'lgan

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

tenglikdan foydalandik. (7.14) tenglikda $n \to \infty$ limitga o'tib,

$$\lim_{n \to \infty} \int_{[0,1]} f_n(x)\, d\mu = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{(n+1)(2n+1)}{2\,n^2} + 2\right) = 1 + 2 = 3$$

ni hosil qilamiz. Olingan natijani Riman va Lebeg integrallarini taqqoslash haqidagi 7.4-teorema yordamida tekshiramiz.

$$\int_0^1 (3x^2 + 2)\, dx = (x^3 + 2x)\Big|_0^1 = 1 + 2 - 0 = 3.$$

Demak, ta'rif yordamida hisoblangan integral to'g'ri ekan. $\square$

7.66. Quyidagi integrallarni hisoblang.

a) $\int\limits_{[-3,3]} \operatorname{sign}(\cos \pi x) d\mu$; b) $\int\limits_{(0,1]} \operatorname{sign}(\sin \frac{\pi}{x}) d\mu$;

c) $\iint\limits_{[0,2]\times[0,2]} [x+y] d\mu$; d) $\iint\limits_{x<y<4} \sqrt{[y-x]}\, d\mu$.

7.67-misolni Lebeg integrali ta'rifi va xossalaridan foydalanib hisoblang. Bu yerda $\mathfrak{D}-$ Dirixle, $\mathfrak{R}-$ Riman, $\mathfrak{K}-$ Kantor funksiyasi.

7.67. a) $\int\limits_{[0,1]} x \cdot \chi_{[0,1]\setminus\mathbb{Q}}(x) d\mu$; b) $\int\limits_{[0,2]} (1+2x)\, d\mu$;

c) $\int\limits_{[0,2]} (3x^2+1)\, d\mu$; d) $\int\limits_{[0,1]} (2^x+2)\, d\mu$;

e) $\int\limits_{[0,1]} (\ln 3 + e^x)\, d\mu$; f) $\int\limits_{[0,1]} \mathfrak{K}(x)\, d\mu$;

g) $\int\limits_{[0,1]} x(1-\mathfrak{D}(x)) d\mu$; h) $\int\limits_{[0,1]} x(1-\mathfrak{R}(x)) d\mu$;

i) $\int\limits_{[0,1]} (x+\mathfrak{K}(x))\, d\mu$; j) $\int\limits_{[0,1]} x\cdot\mathfrak{K}(x)\, d\mu$;

k) $\int\limits_{[0,1]} x^2\cdot\mathfrak{R}(x)\, d\mu$.

Yechish. Biz faqat f) ning yechimini keltiramiz. Berilgan integralni quyidagicha yozib olamiz

$$\int\limits_{[0,1]} \mathfrak{K}(x)\, d\mu = \int\limits_{K} \mathfrak{K}(x)\, d\mu + \int\limits_{[0,1]\setminus K} \mathfrak{K}(x)\, d\mu. \qquad (7.15)$$

Bu yerda $K-$ Kantor to'plami. Ma'lumki, $\mu(K)=0$. Shuning uchun (7.15) tenglikning o'ng tomonidagi birinchi integralning qiymati Lebeg integralining VI xossasiga ko'ra nolga teng bo'ladi. Ikkinchi, $[0,1]\setminus K$ to'plam bo'yicha olingan integralning qiymati esa 7.9-misolda hisoblangan ((7.9) tenglikka qarang) va u 0.5 ga teng. Demak,

$$\int_{[0,1]} \mathfrak{K}(x)\, d\mu = \frac{1}{2}.$$

7.68. Har bir $n\in\mathbb{N}$ uchun $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ funksiyani quyidagicha aniqlaymiz. f_n funksiyaning $x\in[0,1]$ nuqtadagi qiymati, x ning cheksiz ikkilik kasrga yoyilmasidagi $n-$ raqamiga teng. Masala $f_2(0.10010\ldots) = 0$, $f_3(0,10110\ldots) = 1$. Bu ketma-ketlik uchı quyidagilarni isbotlang:

$$\int_{[0,1]} f_n(x) f_m(x) d\mu = \frac{1}{4}, \quad n \neq m, \quad \int_{[0,1]} (f_n(x))^2 \, d\mu = \frac{1}{2}.$$

7.69. Har bir $n \in \mathbb{N}$ uchun $g_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ funksiyani quyidagicl aniqlaymiz. Agar $x \in [0, 1]$ ning cheksiz ikkilik kasrga yoyilmasic $n-$ raqami 1 bo'lsa, $g_n(x) = 1$, agar $n-$ raqami 0 bo'lsa, $g_n(x)$ -1. Bu ketma-ketlik uchun quyidagilarni isbotlang:

$$\int_{[0,1]} g_n(x) g_m(x) d\mu = 0, \quad n \neq m, \quad \int_{[0,1]} (g_n(x))^2 \, d\mu = 1.$$

8-§. Lebeg integrali belgisi ostida limitga o'tish

Integral belgisi ostida limitga o'tish yoki qatorlarni hadma-had inte rallash masalasi ko'plab muammolarni yechishda uchraydi. Boshqacl qilib aytganda qanday shartlarda

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x) d\mu = \int_A \lim_{n\to\infty} f_n(x) d\mu := \int_A f(x) d\mu \qquad (8.$$

tenglik o'rinli bo'ladi, ya'ni limit va integral belgilarining o'rinlarini ı mashtirish mumkin? Integral belgisi ostida limitga o'tishning yetarli sha laridan biri berilgan ketma-ketlikning tekis yaqinlishish shartidir, lek bu shart ta'rifda bor. Shuning uchun tekis yaqinlishishdan kuchsizr shartlar qo'ygan holda (8.1) tenglikning bajarilishini tekshiramiz. Ag $\{f_n\}$ integrallanuvchi funksiyalar ketma-ketligi A to'plamning har l nuqtasida f funksiyaga yaqinlashsa, (8.1) tenglik to'g'rimi degan sav tug'iladi. Umuman olganda, nuqtali yaqinlashish integral belgisi osti limitga o'tishni ta'minlay olmas ekan. Bunga quyidagi misolda ishon hosil qilamiz.

8.1. $[0, \pi]$ kesmada quyidagi funksional ketma-ketlikni qaraymiz

$$f_n(x) = \begin{cases} n \sin nx, & x \in \left[0, \dfrac{\pi}{n}\right) \\ 0, & x \in \left[\dfrac{\pi}{n}, \pi\right]. \end{cases} \tag{8.2}$$

Bu ketma-ketlik har bir nuqtada nolga yaqinlashadi. Bu ketma-ketlik uchun (8.1) tenglik to'g'rimi?

Yechish. Har bir $x \in [0, \pi]$ uchun $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = 0$ tenglik oson tekshiriladi. Endi f_n ning $[0, \pi]$ kesma bo'yicha olingan integralini hisoblaymiz:

$$\int_0^{\pi} f_n(x) d\mu = n \int_0^{\frac{\pi}{n}} \sin nx d\mu = 2.$$

Ikkinchi tomondan

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{\pi} f_n(x) d\mu = 2 \neq \int_0^{\pi} \theta(x) d\mu = 0.$$

Demak, bu ketma-ketlik uchun integral belgisi ostida limitga o'tish to'g'ri emas. □

Quyida biz integral belgisi ostida limitga o'tish belgilarini keltiramiz.

8.1-teorema *(Lebeg). Agar $\{f_n\}$ ketma-ketlik A to'plamning har bir nuqtasida f funksiyaga yaqinlashsa va barcha $n \in \mathbb{N}$ lar uchun $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$ tengsizlik bajarilib, φ funksiya A to'plamda integrallanuvchi bo'lsa, u holda limitik funksiya f ham A da integrallanuvchi bo'ladi va quyidagi tenglik o'rinli*

$$\lim_{n \to \infty} \int_A f_n(x) d\mu = \int_A f(x) d\mu.$$

8.1-natija. *Agar $|f_n(x)| \leq M = const$ va barcha $x \in A$ larda $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ bo'lsa, u holda quyidagi tenglik o'rinli*

$$\lim_{n \to \infty} \int_A f_n(x) d\mu = \int_A f(x) d\mu.$$

Nol o'lchovli to'plamda funksiyaning qiymatini o'zgartirish integral qiymatiga ta'sir qilmaydi, shuning uchun 8.1-teoremada $\{f_n\}$ ketma-ketlikning f funksiyaga deyarli yaqinlashishini va $|f(x)| \le \varphi(x)$ tengsizlikning ham deyarli barcha x lar uchun bajarilishini talab qilish yetarli.

8.2-teorema *(Levi). A to'plamda monoton*

$$f_1(x) \le f_2(x) \le \cdots \le f_n(x) \le \cdots$$

integrallanuvchi $\{f_n\}$ funksiyalar ketma-ketligi berilgan bo'lib, barcha $n \in \mathbb{N}$ lar uchun

$$\int_A f_n(x) d\mu \le K$$

tengsizlik bajarilsin. U holda A to'plamning deyarli hamma yerida $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ chekli limit mavjud hamda f funksiya A da integrallanuvchi va integral belgisi ostida limitga o'tish mumkin, ya'ni

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\, d\mu = \int_A f(x)\, d\mu.$$

8.2-natija. *Agar $\psi_n(x) \ge 0$ bo'lib,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_A \psi_n(x) d\mu < +\infty$$

bo'lsa, u holda A to'plamning deyarli barcha nuqtalarida

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x)$$

qator yaqinlashadi va bu qatorni hadlab integrallash mumkin, ya'ni

$$\int_A \left(\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A \psi_n(x)\, d\mu.$$

8.3-teorema *(Fatu). Agar manfiymas, o'lchovli $\{f_n\}$ funksiyalar ketma-ketligi A to'plamda f funksiyaga deyarli yaqinlashsa va*

$$\int_A f_n(x)\, d\mu \le K$$

bo'lsa, u holda f funksiya A to'plamda integrallanuvchi va

$$\int_A f(x)\, d\mu \leq K$$

tengsizlik o'rinli.

Shu paytgacha biz faqat chekli o'lchovli $(\mu(A) < \infty)$ to'plamlarda Lebeg integrali va uning xossalarini o'rgandik. Lekin ko'plab masalalarni yechishda cheksiz o'lchovli to'plamda berilgan funksiyaning integralini qarashga to'g'ri keladi. Masalan, $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ da berilgan funksiyaning Lebeg integralini qarashga to'g'ri keladi. Biz X to'plam sanoqli sondagi chekli o'lchovli X_n to'plamlarning birlashmasi ko'rinishida tasvirlanishi mumkin bo'lgan hol bilan chegaralanamiz.

8.1-ta'rif. *Agar X to'plamda μ o'lchov berilgan bo'lib, X to'plamni sanoqli sondagi chekli o'lchovli to'plamlarning birlashmasi ko'rinishida tasvirlash mumkin bo'lsa, u holda X da berilgan μ o'lchov $\sigma-$ chekli o'lchov deyiladi.*

$\sigma-$ chekli o'lchovlarga sonlar o'qidagi va tekislikdagi Lebeg o'lchovlari misol bo'la oladi.

8.2-ta'rif. *Agar monoton o'suvchi $\{X_n\}$ $(X_n \subset X_{n+1})$ to'plamlar ketma-ketligi quyidagi ikki shartni qanoatlantirsa*

1) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n = X$. 2) *barcha $n \in \mathbb{N}$ lar uchun* $\mu(X_n) < \infty$.

$\{X_n\}$ ga X to'plamni qoplovchi ketma-ketlik deyiladi.

8.3-ta'rif. *X to'plamda $\sigma-$ chekli μ o'lchov va X da aniqlangan manfiymas f funksiya berilgan bo'lsin. Agar f funksiya ixtiyoriy chekli o'lchovli $A \subset X$ to'plamda integrallanuvchi bo'lib, biror qoplovchi $\{X_n\}$ ketma-ketlik uchun*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{X_n} f(x) d\mu$$

chekli limit mavjud bo'lsa, u holda f funksiya X to'plamda integrallanuv-

chi deyiladi va bu limit

$$\int_X f(x)d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{X_n} f(x)d\mu$$

f dan X to'plam bo'yicha olingan Lebeg integrali deyiladi.

Endi f ixtiyoriy funksiya bo'lsin. Uni ikkita manfiymas funksiyalar ayirmasi shaklida tasvirlaymiz, ya'ni $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$, bu yerda f_+ va f_- lar (7.7) tenglik bilan aniqlanadi.

8.4-ta'rif. *Agar (7.7) tenglik bilan aniqlangan f_+ va f_- manfiymas funksiyalar X to'plamda integrallanuvchi bo'lsa, u holda f funksiya X to'plamda integrallanuvchi deyiladi va*

$$\int_X f(x)d\mu = \int_X f_+(x)d\mu - \int_X f_-(x)d\mu.$$

Lebeg va Riman integrallari orasidagi quyidagi bog'lanishni keltiramiz. Agar $[a, b]$ kesmada f funksiya Riman ma'nosida integrallanuvchi bo'lsa, u holda f funksiya $[a, b]$ kesmada Lebeg ma'nosida ham integrallanuvchi bo'ladi va bu integrallar teng bo'ladi (7.4-teoremaga qarang).

Agar f funksiya $[0, 1]$ kesmada xosmas ma'noda Riman bo'yicha integrallanuvchi bo'lsa, u Lebeg ma'nosida integrallanuvchi bo'lmasligi ham mumkin. Masalan,

$$\int_0^1 \sin\frac{1}{t}\frac{dt}{t} \tag{8.3}$$

xosmas integral Riman ma'nosida mavjud (integrallanuvchi). Haqiqatan ham, o'zgaruvchilarni almashtirib

$$\int_0^1 \sin\frac{1}{t}\,\frac{dt}{t} = \int_1^\infty \frac{\sin x}{x}dx$$

ga kelamiz. Dirixle alomatiga ko'ra bu integral yaqinlashuvchi ($f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ funksiya integrallanuvchi). $f(t) = \sin\dfrac{1}{t}\cdot\dfrac{1}{t}$ funksiya $(0, 1)$ oraliqda

Lebeg ma'nosida integrallanuvchi emas. Faraz qilaylik, bu funksiya Lebeg ma'nosida integrallanuvchi bo'lsin. U holda VIII xossaga ko'ra

$$\int_0^1 \left|\sin\frac{1}{t}\right|\frac{dt}{t}$$

integral ham mavjud bo'ladi. Bundan esa yana o'zgaruvchilarni almashtirib,

$$\int_0^1 \left|\sin\frac{1}{t}\right|\frac{dt}{t} = \int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x}dx \geq \int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x}dx = \int_1^\infty \frac{1-\cos 2x}{2x}dx =$$
$$= \int_1^\infty \frac{dx}{2x} - \int_1^\infty \frac{\cos 2x}{2x}dx$$

tenglikka kelamiz. Oxirgi

$$\int_1^\infty \frac{\cos 2x}{x}dx$$

integral yaqinlashuvchi. Birinchi integral esa uzoqlashuvchi. Demak,

$$\int_0^1 \left|\sin\frac{1}{t}\right|\frac{dt}{t}$$

integral ham uzoqlashuvchi. Shuni ta'kidlaymizki, agar manfiymas funksiya Riman ma'nosida integrallanuvchi bo'lsa, u holda bu funksiya Lebeg ma'nosida ham integrallanuvchi bo'ladi va bu integrallar teng bo'ladi.

8.4-teorema. *Aytaylik A to'plamning o'lchovi cheksiz bo'lsin. Chekli ta nolmas $y_1, y_2, \ldots, y_n$ qiymatlarni qabul qiluvchi $f : A \to \mathbb{R}$ sodda funksiya A da integrallanuvchi bo'lishi uchun $A_k = \{x \in A : f(x) = y_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ to'plamlarning o'lchovi chekli bo'lishi zarur va yetarli. Xususan $B \subset A$ to'plamning xarakteristik funksiyasi - $\chi_B(x)$ integrallanuvchi bo'lishi uchun $\mu(B) < \infty$ bo'lishi zarur va yetarli.*

8.5-ta'rif. *Aytaylik A cheksiz o'lchovli to'plam, $f : A \to \mathbb{R}$ sanoqlita $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ qiymatlarni qabul qiluvchi sodda funksiya bo'lsin. Agar har bir nolmas y_k uchun $A_k = \{x \in A : f(x) = y_k\}$ to'plam chekli* *o'lchovli bo'lib,* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n \mu(A_n)$ *qator absolyut yaqinlashuvchi bo'lsa,* f : $A \to \mathbb{R}$ *sodda funksiya* A *to'plamda Lebeg ma'nosida integrallanuvchi deyiladi.*

8.2. Quyida keltirilgan funksiyalar $\mathbb{R}$ da Lebeg ma'nosida integrallanuvchi boʻladimi?

a) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} \chi_{[n,\, n+1]}(x)$; b) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n}{n} \chi_{[n,\, n+1]}(x)$;

c) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2} \chi_{[n^2,\, (n+1)^2)}(x)$; d) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos n \cdot \chi_{[\sqrt{n},\, \sqrt{n+1})}(x)$

e) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{(n-1)!} \chi_{[n,\, n+1)}(x)$; f) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{2^n} \chi_{[n,\, n+1)}(x)$.

Yechish. Biz faqat f) ning yechimini beramiz. Berilgan funksiyaning aniqlanishidan quyidagilarga ega bo'lamiz. $A_0 = (-\infty, 1)$ to'plamda $f(x) = 0 = y_0$ va $f(x) = \dfrac{n^2}{2^n}$, $x \in A_n = [n,\ n+1)$. 8.5-ta'rifga ko'ra $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funksiya integrallanuvchi bo'lishi uchun

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \cdot 1$$

qator yaqinlashuvchi boʻlishi zarur va yetarli. Musbat hadli qatorlarni taqqoslash haqidagi Dalamber alomatidan foydalanib ($q = 0.5$), hosil bo'lgan qatorning yaqinlashuvchiligiga ishonch hosil qilamiz. Demak, f funksiya $\mathbb{R}$ da integrallanuvchi bo'ladi. □

8.3. Quyida keltirilgan funksiyalar $\alpha > 0$ parametrning qanday qiymatlarida $\mathbb{R}$ da integrallanuvchi bo'ladi?

a) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha} \chi_{[n,\, n+1]}(x)$; b) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n}{n^\alpha} \chi_{[n,\, n+1]}(x)$;

c) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha} \chi_{[n^2,\, (n+1)^2)}(x)$.

8.4. Parametr α ning qanday qiymatlarida

$$f_n(x) = \frac{nx^{\alpha}}{nx^2+1}, \quad x \in [0,\ 1],$$

ketma-ketlik integral belgisi ostida limitga o'tish haqidagi Lebeg teoremasi shartlarini qanoatlantiradi?

8.5. $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [n,\ n+n^{-\alpha})$ to'plamning xarakteristik funksiyasi $f(x) = \chi_A(x)$ parametr α ning qanday qiymatlarida $\mathbb{R}$ da integrallanuvchi bo'ladi?

Yechish. 8.4-teoremaga ko'ra, $f(x) = \chi_A(x)$ funksiya integrallanuvchi bo'lishi uchun A to'plam chekli o'lchovli bo'lishi zarur va yetarli. A to'plamning o'lchovi, o'lchovning $\sigma-$ additivlik xossasiga ko'ra

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

yig'indiga teng. Ma'lumki, bu qator parametr α ning 1 dan katta barcha qiymatlarida yaqinlashuvchi bo'ladi. Demak, barcha $\alpha \in (1,\ \infty)$ larda A to'plamning χ_A xarakteristik funksiyasi, $\mathbb{R}$ da integrallanuvchi bo'ladi.

8.6. Quyidagi $\{g_n\}$ ketma-ketlik integral belgisi ostida limitga o'tish haqidagi Levi teoremasi shartlarini qanoatlantiradimi?

$$g_n(x) = \frac{nx^{\frac{3}{2}}}{nx^2+1}, \quad x \in [0,\ 1].$$

8.7. Fatu teoremasi shartlari bajarilganda

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)d\mu = \int_A f(x)d\mu$$

tenglik o'rinlimi? O'rinli bo'lmasa, misol keltiring.

8.8. Quyidagi limitlarni integral belgisi ostida limitga o'tish haqidagi teoremalardan foydalanib yeching.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{[0,1]} \exp(-n x^2)\, d\mu$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{[0,1]} \exp\left(-\frac{x^2}{n}\right) d\mu$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\sin^n x}{1+x^2}\, d\mu$; d) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{[0,\pi]} \exp(-\cos^n x)\, d\mu$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{[0,\infty]} n\left(\exp\left(-\frac{x}{n}\right)-1\right) \frac{d\mu}{1+x^4}$.

Yechish. a) ning yechimi. Integral belgisi ostida limitga o'tish haqidagi Lebeg toremasidan foydalanamiz. Berilgan $f_n(x) = \exp(-nx^2)$ ketma-ketlik $[0,\ 1]$ kesmaning deyarli barcha (nol nuqtadan tashqari) nuqtalarida $\theta(x) \equiv 0$ funksiyaga yaqinlashadi. Integrallanuvchi $\varphi : [0,\ 1] \to \mathbb{R}$ funksiya sifatida $\varphi(x) \equiv 1$ ni olamiz. U holda barcha $x \in [0,\ 1]$ va $n \in \mathbb{N}$ lar uchun $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$ tengsizlik bajariladi. Integral belgisi ostida limitga o'tish haqidagi Lebeg teoremasining shartlari bajariladi. Teorema tasdig'iga ko'ra

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} \exp(-nx^2)\, d\mu = \int_{[0,1]} \theta(x)\, d\mu = 0. \qquad \square$$

8.9. Integral belgisi ostida limitga o'tish haqidagi teoremalardan foydalanib quyidagi limitlarni hisoblang.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \exp(-(x^2+y^2)) \cos\left(\frac{1}{n}x \cdot y\right) dx\, dy$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{n}{(1+x^4)} \cdot \sin\frac{|x|}{n} d\mu$.

8.10. Agar manfiymas funksiya xosmas ma'noda Riman ma'nosida integrallanuvchi bo'lsa, u Lebeg ma'nosida integrallanuvchi bo'lishini isbotlang.

8.11. (8.3) integralning absolyut integrallanuvchi emasligini isbotlang.

8.12. $f(x) = \dfrac{1}{1+[x^2]}$, $x \in A = [0,\ \infty)$ funksiya A da integrallanuvchimi?

8.13. $f(x) = \dfrac{1}{1+[x]^2}$, $x \in A = [0, \infty)$ funksiya A da integrallanuvchimi?

Yechish. Sonning butun qismi ta'rifiga ko'ra $f : A \to \mathbb{R}$ sodda funksiya bo'lib, $A_n = [n, n+1)$, $n = 0, 1, \ldots$ to'plamda $y_n = \dfrac{1}{1+n^2}$ qiymatni qabul qiladi va $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{1+n^2} \cdot 1$ qator yaqinlashuvchi. Demak, 8.5-ta'rifga ko'ra $f(x) = \dfrac{1}{1+[x]^2}$ funksiya $A = [0, \infty)$ da integrallanuvchi. $\square$

III bobni takrorlash uchun test savollari

1. $E = [0, 4]$ to'plamda berilgan f sodda funksiyani toping.

A) $f(x) = x$ B) $f(x) = [x]$ C) $f(x) = e^x$ D) $f(x) = \sin x$

2. Quyidagi shartlarning qaysilari birgalikda bajarilganda, f ga sodda funksiya deyiladi?

1) f o'lchovli, 2) f ning qiymatlar to'plami chekli yoki sanoqli, 3) f chegaralangan.

A) 1–3 B) 2–3 C) 1–2 D) 3

3. $E = [0, 3]$ to'plamda berilgan sodda funksiyalarni ko'rsating.

$f_1(x) = x$, $f_2(x) = 1$, $f_3(x) = \mathfrak{D}(x)$

A) f_1, f_2, f_3 B) f_1, f_3 C) f_1, f_2 D) f_2, f_3

4. $E = [0, 5]$ to'plamda berilgan sodda funksiyalarni ko'rsating.

$f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = \mathfrak{R}(x)$, $f_3(x) = \mathfrak{D}(x)$

A) f_1, f_2, f_3 B) f_2, f_3 C) f_1, f_2 D) f_1, f_3

5. $E = [0, 3]$ to'plamda berilgan sodda funksiyalarni ajrating.

$f_1(x) = \cos x$, $f_2(x) = \operatorname{sign} x$, $f_3(x) = 1 + [x]$

A) f_2, f_3 B) f_1, f_2, f_3 C) f_1, f_2 D) f_1, f_3

6. $E = [0, 1]$ to'plamda berilgan sodda funksiyalarni ajrating.

$f_1 = \sin x$, $\quad f_2(x) = [x]$, $\quad f_3(x) = \mathfrak{R}(x)$

A) f_1, f_2, f_3 B) f_2, f_3 C) f_1, f_2 D) f_1, f_3

7. Quyidagi tasdiqlar ichidan to'g'rilarini ajrating.

1) Sodda funksiyalar yig'indisi sodda funksiya bo'ladi.

2) Sodda funksiyaning songa ko'paytmasi sodda funksiya bo'ladi.

3) Sodda funksiyalar ko'paytmasi sodda funksiya bo'ladi.

A) 1, 2 B) 1, 2, 3 C) 2, 3 D) 1, 3

8. Riman funksiyasi haqidagi tasdiqlar ichidan to'g'rilarini ajrating.

1) O'lchovli funksiya. 2) Qiymatlar to'plami sanoqli.

3) $[0, 1]$ da integrallanuvchi.

A) 1, 2 B) 1, 2, 3 C) 2, 3 D) 1, 3

9. Dirixle funksiyasi haqidagi tasdiqlar ichidan to'g'rilarini ajrating.

1) Qiymatlar to'plami chekli. 2) Sodda funksiya.

3) $[0, 1]$ da integrallanuvchi.

A) 1, 2 B) 1, 2, 3 C) 2, 3 D) 1, 3

10. $f(x) = 1 + \text{sign}\, x$ sodda funksiya uchun $A_1 = \{x \in [-2, 3] : f(x) =$
to'plamni toping.

A) $[-2, 0]$ B) $[-2, 0)$ C) $[-2, -1]$ D) $[-2, 3]$

11. $f(x) = 5 - [2x]$ sodda funksiya uchun $A_1 = \{x \in [-2, 3] : f(x) =$
$1\}$ to'plamni toping.

A) $[2, 3]$ B) $[2, 3)$ C) $[2, 2.5)$ D) $[2, 2.6]$

12. Sodda funksiyaning integrali uchun quyidagi tasdiqlarning qaysilar
o'rinli?

1) $\int_A [f(x) + g(x)] d\mu = \int_A f(x) d\mu + \int_A g(x) d\mu$.

2) $\int_A k \cdot f(x) d\mu = k \int_A f(x) d\mu$.

3) $\int_A f(x)\cdot g(x)d\mu = \int_A f(x)d\mu \cdot \int_A g(x)d\mu$.

A) 1. 2 B) 1. 3 C) 2. 3 D) 3

13. Quyidagi tasdiqlar ichidan to'g'rilarini ajrating.

1) Cheklita qiymat qabul qiluvchi sodda funksiya integrallanuvchidir.

2) Chegaralangan sodda funksiya integrallanuvchidir.

3) Integrallanuvchi sodda funksiya chegaralangandir.

A) 1. 2 B) 1. 3 C) 2. 3 D) 3

14. Quyida berilgan shartlarning qaysilaridan $\int\limits_{[-1,\,1]} f(x)d\mu = 0$ tenglik kelib chiqadi?

1) f nolga ekvivalent bo'lsa.

2) f toq va integrallanuvchi funksiya bo'lsa.

3) f juft va integrallanuvchi funksiya bo'lsa.

A) 1. 2 B) 1. 3 C) 2. 3 D) 3

15. Integralning additivlik xossasini toping.

A) Agar $\mu(A) = 0$ bo'lsa, u holda $\int_A f(x)d\mu = 0$

B) $\int_A [f(x) + g(x)]d\mu = \int_A f(x)d\mu + \int_A g(x)d\mu$

C) $\int_A k\cdot f(x)d\mu = k\int_A f(x)d\mu$

D) Agar $f(x) \geq 0$ bo'lsa, u holda $\int_A f(x)d\mu \geq 0$

16. Integralning bir jinslilik xossasini toping.

A) Agar $\mu(A) = 0$ bo'lsa, u holda $\int_A f(x)d\mu = 0$

B) $\int_A [f(x) + g(x)]d\mu = \int_A f(x)d\mu + \int_A g(x)d\mu$

C) $\int_A k\cdot f(x)d\mu = k\int_A f(x)d\mu$

D) Agar $f(x) \geq 0$ bo'lsa, u holda $\int_A f(x)d\mu \geq 0$

17. Integralning monotonlik xossasini toping.

A) Agar $\mu(A) = 0$ bo'lsa, u holda $\int_A f(x)d\mu = 0$

B) $\int_A [f(x) + g(x)]d\mu = \int_A f(x)d\mu + \int_A g(x)d\mu$

C) $\int_A k \cdot f(x)d\mu = k\int_A f(x)d\mu$

D) Agar $f(x) \geq g(x)$ bo'lsa, u holda $\int_A f(x)d\mu \geq \int_A g(x)d\mu$

18. Integralning VI xossasini toping.

A) Agar $\mu(A) = 0$ bo'lsa, u holda $\int_A f(x)d\mu = 0$

B) $\int_A [f(x) + g(x)]d\mu = \int_A f(x)d\mu + \int_A g(x)d\mu$

C) $\int_A k \cdot f(x)d\mu = k\int_A f(x)d\mu$

D) Agar $f(x) \geq 0$ bo'lsa, u holda $\int_A f(x)d\mu \geq 0$

19. Lebeg integralining monotonlik xossasidan foydalanib, quyidagi sonlar ichidan eng kattasini toping.

$$a_0 = 0, \quad a_1 = \int\limits_{(0,1)} \frac{\sin^2 x}{x}d\mu, \quad a_2 = \int\limits_{(0,1)} \frac{\sin^4 x}{x^3}d\mu, \quad a_3 = \int\limits_{(0,1)} \sin x d\mu$$

A) a_1 B) a_2 C) a_3 D) a_0

20. Lebeg integralining monotonlik xossasidan foydalanib, quyidagi sonlar ichidan eng kichigini toping.

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \int\limits_{(0,1)} \frac{\sin^2 x}{x}d\mu, \quad a_2 = \int\limits_{(0,1)} \frac{\sin^4 x}{x^3}d\mu, \quad a_3 = \int\limits_{(0,1)} \sin x d\mu$$

A) a_1 B) a_2 C) a_3 D) a_0

21. Quyidagi tasdiqlar ichidan to'g'rilarini ajrating.

1) Integrallanuvchi funksiyalar yig'indisi integrallanuvchidir.

2) Integrallanuvchi funksiyaning songa ko'paytmasi integrallanuvchidir.

3) Integrallanuvchi funksiyalar ko'paytmasi integrallanuvchidir.

A) 1, 2 B) 1, 2, 3 C) 2, 3 D) 1, 3

22. Quyidagi tasdiqlar ichidan to'g'rilarini ajrating.

1) Riman ma'nosida integrallanuvchi funksiya Lebeg ma'nosida ham integrallanuvchi bo'ladi.

2) Lebeg ma'nosida integrallanuvchi funksiya Riman ma'nosida ham integrallanuvchi bo'ladi.

3) Lebeg integralining VI xossasi Riman integrali uchun ham o'rinli.

A) 1, 2 B) 1 C) 2 D) 3

23. Quyidagi tasdiqlar ichidan to'g'rilarini ajrating ($\mu(A) < \infty$).

1) Riman ma'nosida integrallanuvchi funksiya Lebeg ma'nosida ham integrallanuvchi bo'ladi va bu integrallar o'zaro teng.

2) A to'plamda chegaralangan sodda funksiya integrallanuvchidir.

3) Lebeg integralining VII xossasi Riman integrali uchun ham o'rinli.

A) 1, 2 B) 1, 3 C) 2, 3 D) 3

24. Quyidagi tasdiqlar ichidan to'g'rilarini ajrating.

1) Lebeg ma'nosida integrallanuvchi, lekin Riman ma'nosida integrallanuvchi bo'lmagan sodda funksiya mavjud.

2) Chegaralangan o'lchovli funksiya integrallanuvchidir.

3) Lebeg integralining VIII xossasi Riman integrali uchun ham o'rinli.

A) 1, 2 B) 1, 3 C) 2, 3 D) 3

25. $[0, 1]$ kesmada Lebeg ma'nosida integrallanuvchi, lekin Riman ma'nosida integrallanuvchi bo'lmagan funksiyani toping.

A) Dirixle funksiyasi B) Riman funksiyasi

C) Kantorning zinapoya funksiyasi D) $f(x) = 2x + 1$

26. $A = [0, 3]$ to'plamda berilgan $f(x) = 3 + \mathfrak{D}(x)$ sodda funksiyaning integralini hisoblang.

A) 3 B) 2 C) 6 D) 9

27. $A = [0, 5]$ to'plamda berilgan $f(x) = 3 - \mathfrak{R}(x)$ sodda funksiyaning integralini hisoblang.

A) 3 B) 12 C) 15 D) 24

28. $A = [0, 2]$ to'plamda berilgan $f(x) = 4 - [x]$ sodda funksiyaning integralini hisoblang.

A) 3 B) 7 C) 6 D) 4

29. $A = [-1, 2]$ to'plamda berilgan $f(x) = 1 - \operatorname{sign} x$ sodda funksiyaning integralini hisoblang.

A) 3 B) 2 C) 0 D) 1

30. Lebeg integralining VI xossasini toping.

A) Manfiymas funksiyaning integrali ham manfiymas.

B) Ekvivalent funksiyalarning integrallari teng.

C) Integrallanuvchi funksiyaning moduli ham integrallanuvchi va aksincha.

D) Integrallanuvchi φ funksiya bilan chegaralangan f funksiya integrallanuvchidir.

31. Lebeg integralining VII xossasini toping.

A) Manfiymas funksiyaning integrali ham manfiymas.

B) Ekvivalent funksiyalarning integrallari teng.

C) Integrallanuvchi funksiyaning moduli ham integrallanuvchi va aksincha.

D) Integrallanuvchi φ funksiya bilan chegaralangan f funksiya integrallanuvchidir.

32. Lebeg integralining VIII xossasini toping.

A) Manfiymas funksiyaning integrali ham manfiymas.

B) Ekvivalent funksiyalarning integrallari teng.

C) Integrallanuvchi funksiyaning moduli ham integrallanuvchi va aksincha.

D) Integrallanuvchi φ funksiya bilan chegaralangan f funksiya integrallanuvchidir.

33. $A = [1, \infty)$ to'plamni $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} [n, n+1)$ ko'rinishda yoyib

$f(x) = e^{-[x]}$ funksiyaga Lebeg integralining $\sigma-$ additivlik xossasini qo'llasak, $\int\limits_A f(x)d\mu$ quyidagilarning qaysi biriga teng bo'ladi?

A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{n-1}$ B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n}$ C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{n}$ D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n+1}$

34. $f(x) = x$, $x \in [0, 100]$ funksiya va $\varepsilon = 0,1$ uchun Lebeg integralining absolyut uzluksizlik xossasini qanoatlantiruvchi $\delta > 0$ ning eng katta qiymatini toping.

A) $\delta = 0,01$ B) $\delta = 0,001$ C) $\delta = 0,1$ D) $\delta = 0,025$

35. $\varphi(x) = e^x$, $x \in A = [0, 1]$ funksiyaga Chebishev tengsizligini qo'llab, $C = \{x \in A : \varphi(x) \geq e^{0.9}\}$ to'plam o'lchovini baholang.

A) $\mu(C) < 0,1$ B) $\mu(C) \leq e^{0.1} - e^{-0,9}$

C) $\mu(C) < 0,01$ D) $\mu(C) \leq e^{0.1}$

36. O'lchovli $f_n(x) = \dfrac{n \cdot x^{\alpha}}{n \cdot x^2 + 1}$, $x \in [0, 1]$, funksiyalar ketma-ketligi uchun integral belgisi ostida limitga o'tish haqidagi Lebeg teoremasi shartlarini qanoatlantiruvchi $\alpha \in \mathbb{R}$ parametrning barcha qiymatlarini toping.

A) $\alpha > 1$ B) $\alpha > 0$ C) $\alpha \geq -1/2$ D) $\alpha > -1/2$

37. O'lchovli $f_n(x) = \dfrac{n \cdot x^{1.3}}{n \cdot x^2 + 1}$, $x \in [0, 1]$, funksiyalar ketma-ketligi uchun integral belgisi ostida limitga o'tish haqidagi Levi teoremasining qaysi shartlari bajariladi?

A) $\{f_n\}$ monoton $(f_n(x) \leq f_{n+1}(x))$, $\{\int f_n(x)d\mu\}$ chegaralangan

B) $\{f_n\}$ monoton emas, $\{\int f_n(x)d\mu\}$ chegaralangan

C) $\{f_n\}$ monoton, $\{\int f_n(x)d\mu\}$ chegaralanmagan

D) $\{f_n\}$ monoton emas, $\{\int f_n(x)d\mu\}$ chegaralanmagan

38. $f_n(x) = \dfrac{n \cdot x^{1,5}}{n \cdot x^2 + 1}$, $x \in [0, 1]$, o'lchovli funksiyalar ketma-ketligi uchun integral belgisi ostida limitga o'tish haqidagi Levi teoremasini qo'llab, limitik funksiya f ni toping va $I = \int f(x)\,d\mu$ integralni hisoblang.

A) $f(x) = x^{-1/2}$ va $I = 2$ B) $f(x) = x^{-1/2}$ va $I = 1$

C) $f(x) = x^{1/2}$ va $I = 2/3$ D) $f(x) = x^{1/2}$ va $I = 1,5$

39. Parametr $\alpha \in \mathbb{R}$ ning qanday qiymatlarida $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln n \cdot n^{\alpha - x}$ qatorni $A = [0,\ 1]$ to'plamda hadlab integrallash mumkin? Levi teoremasi natijasidan foydalaning.

A) $\alpha < -1$ B) $\alpha < 0$ C) $\alpha \leq -1/2$ D) $\alpha < -1/2$

40. $\int\limits_{[-1,\,1]} |f(x)|d\mu = 0$ tenglikdan quyidagi tasdiqlarning qaysi biri kelib chiqadi? Chebishev tengsizligi natijasidan foydalanib javob bering.

A) f nolga ekvivalent B) $f(x) \equiv 0$

C) f toq funksiya D) to'g'ri javob keltirilmagan.

41. Integralining VI xossasidan foydalanib, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,\ 4] \cap \mathbb{Q} \\ 2x, & x \in [0,\ 4] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ funksiyaning $A = [0,\ 4]$ to'plam bo'yicha olingan integralini hisoblan

A) 9 B) 16 C) 25 D) 4

42. Lebeg integralining xossalaridan foydalanib, $f(x) = \cos \pi x \cdot e^{x}$ funksiyaning $A = [0,\ 1]$ to'plam bo'yicha olingan Lebeg integralini hisoblang.

A) $\dfrac{e+1}{1+\pi^2}$ B) $-\dfrac{e+1}{1+\pi^2}$ C) $\dfrac{e-1}{1+\pi^2}$ D) $\dfrac{-1+e}{1+\pi^2}$

43. Lebeg integralining xossalaridan foydalanib, $f(x) = (2x-1)^4$ funksiyaning $A = [0,\ 1]$ to'plam bo'yicha olingan integralini hisoblang.

A) 1 B) 2 C) 0,5 D) 0,2

44. Lebeg va Riman integralini taqqoslash haqidagi teoremadan foydalanib, $f(x) = 1 + \sin x$ funksiyaning $A = [0,\ \pi]$ to'plam bo'yicha olingan Lebeg integralini hisoblang.

A) $\pi + 2$ B) 2 C) π D) $\pi + 1$

45. Manfiymas $f(x) = 2^{-[x]}$ va $g(x) = e^{-x}$ funksiyalar cheksiz o'lchovli $A = [0, \infty)$ to'plamda Lebeg ma'nosida integrallanuvchimi?

A) Ikkalasi ham integrallanuvchi

B) f integrallanuvchi, g integrallanuvchi emas

C) f integrallanuvchi emas, g integrallanuvchi

D) Ikkalasi ham integrallanuvchi emas.