R.R. ABZALIMOV

EHTIMOLLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK STATISTIKA

II-III-BOB

MATEMATIK STATISTIKA MISOL VA MASALALAR

T o sh k e n t – 2008

O'zbekiston Respublikasi oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi

R.R. ABZALIMOV

EHTIMOLLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK STATISTIKA

ANNOTATSIYA.

O'quv qo'llanmada «Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika» ning asosiy bo'limlari bo'yicha nazariy ma'lumotlar keltirilgan.

Qo'llanma oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi tamonidan tasdiqlangan «Oliy matematika» fanidan namunaviy dastur asosida tuzildi.

Qo'llanma texnika oliy o'quv yurtlari talabalari uchun mo'ljallangan.

Oliy texnika o'quv yurtlarining bakalavriat ta'lim yo'nalishi talabalari uchun o'quv qo'llanma

Taqrizchilar:

O'zbekiston Milliy Universiteti,
«Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika»
kafedrasi. F.m.f.d., professor **T.M. Zuparov**

Toshkent arxitektura – qurilish
instituti, «Oliy va amaliy matematika»
kafedrasi. F.m.f.n. dosent, **A.Q. Amanov**.

T o sh k e n t – 2008

Mundarija

II-BOB. MATEMATIK STATISTIKA ELEMENTLARI.

So'z boshi.

Zamonaviy kadrlarni yetishtirish borasida respublikamiz oliy ta'limi tizimida tub o'zgarishlar amalga oshirilmoqda. Bunga sabab, «Ta'lim to'g'risida»gi qonun va «Kadrlar tayyorlash milliy dasturi»ning qabul qilinishi va ularda ilmiy-texnika taraqqiyoti yutuqlarini xalq xo'jaligiga tadbiq qilish, ijtimoiy-iqtisodiy rivojlanish bilan uzviy bog'liq ekanligining aniq ko'rsatilishidir.

Bundan shunday xulosa chiqarish kerakki, hozirgi zamonda fundamental fanlar bilan bir qatorda ularning tatbiqiga bag'ishlangan maxsus kurslarni ko'proq o'qitish dolzarb masalalardan biri bo'lib qoladi.

«Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika» maxsus kursi oliy matematikaning tatbiqiy bo'limlaridan biri bo'lib, uning mavjud qonuniyatlarini ma'lum darajada bilish, tasodifiy holatlarni hisobga olgan holda mantiqiy xulosalar chiqarish va mavjud vaziyat uchun optimal yyechimlarni topa olishga imkon yaratadi.

Ushbu qo'llanmaning mavjud adabiyotlardan asosiy farqi shundaki, bu qo'llanma o'zbek tilida va lotin alifbosida yozilgan. Bundan tashqari, bu qo'llanmada texnik oliy o'quv yurtlari uchun zarur bo'lgan asosiy ma'lumotlar fanning ichki uzviyligi buzilmagan holda keltirilgan.

Ehtimollar nazariyasi bobida matematik statistika bobi uchun kerakli ma'lumotlarga asosiy urg'u berilgan bo'lib, matematik statistika bo'limida esa, asosan tajriba natijalarini statistik qayta ishlash uchun zarur bo'lgan usullar keltirilgan. Texnik fanlarda tajriba natijalarini statistik qayta ishlash keng ko'lamda qo'llaniladi.

Qo'llanmani yozishda muallif Toshkent davlat texnika universitetida ko'p yillar davomida o'qigan ma'ruzalarini asos qilib oldi.

Mazkur qo'llanma kamchiliklardan holi emas, shu sababdan

muallif qo'llanmani yanada takomillashtirishga qaratilgan

fikr va mulohazalarni minnatdorchilik bilan qabul qiladi.

Muallif.

II-BOB. MATEMATIK STATISTIKA ELEMENTLARI.

§1 Matematik statistika masalasi.

Ommoviy tasodifiy hodisalar bo'ysunadigan qonuniyatlarni o'rganish, kuzatishlar natijalari – statistik ko'rsatkichlarni o'rganishga asoslangan.

Matematik statistikaning birinchi masalasi:

– statistik ko'rsatkichlarni yig'ish va gruppalash metodlarini ko'rsatish.

Matematik statistikaning ikkinchi masalasi:

– tadqiqotning maqsadiga bog'liq ravishda statistik ko'rsatkichlarni analiz qiluvchi usullarni ishlab chiqish.

Shunday qilib matematik statistikaning asosiy masalasi:

– statistik ko'rsatkichlarini yig'ish va ularni ilmiy va amaliy xulosalar qilish uchun ishlab chiqishdir.

§2 Bosh va tanlanma to'plam.

Bir jinsli ob'ektlar to'plamini, bu ob'ektlarni harakterlovchi ularning miqdoriy yoki sifat belgilariga nisbatan o'rganish talab qilingan bo'lsin. Agar bu tekshirish ob'ektlarni yo'q qilish yoki moddiy zarar keltirish bilan bog'langan bo'lsa, bu holda barcha ob'ektlar to'plamidan tasodifiy ravishda chekli sondagilari tanlanib, ular tekshiriladi.

Tanlanma to'plam deb yoki oddiygina tanlanma deb, tasodifiy ravishda tanlangan ob'ektlar to'plamiga aytiladi.

Bosh to'plam deb tanlanma olingan ob'ektlar to'plamiga aytiladi. To'plamning (bosh yoki tanlanma) hajmi deb bu to'plamdagi ob'ektlar soniga aytiladi.

Tanlanmalar hosil kilinish usuli bo'yicha takror va takrormas tanlanmalarga bo'linadi.

Agar tanlanmaning elementlari bosh to'plamdan tanlangan elementni (keyingisini olishdan oldin) yana bosh to'plamga qaytarish yo'li bilan ajratilsa, bunday tanlanma takror tanlanma deyiladi. Agar tanlanma elementlarini bosh to'plamga qaytarmasdan uning elementlari bosh to'plamdan ajratilsa, bunday tanlanma takrormas tanlanma deyiladi.

§3 Tanlash usullari.

Tajribada tanlashning turli usullari qo'llaniladi. Bu usullarni asosan ikki turga bo'lish mumkin:

1.Bosh tanlanmani qismlarga ajratish talab etilmaydigan tanlash. Bularga:

a. Oddiy tasodifiy takror tanlash.
b. Oddiy tasodifiy takrormas tanlash kiradi

2.Bosh tanlanmani qismlarga bo'lib tanlash usuli.

Bularga:

a. Tipik tanlash
b. Mexanik tanlash
c. Seriyali tanlash

Tipik tanlash deb shunday tanlashga aytiladiki, ob'ektlar barcha bosh to'plamdan emas, ularning har bir «tipik» qismlaridan tanlanadi.

Mexanik tanlash usuli deb shunday tanlashga aytiladiki, bunda bosh to'plam «mexanik» ravishda tanlanmaga necha ob'ekt kerak bo'lsa, shuncha qismlarga bo'linadi va har bir qismdan bittadan ob'ekt olinadi.

Seriyali tanlash deb shunday tanlashga aytiladiki, bunda ob'ektlar bosh to'plamdan bittadan emas «seriyalar» bilan tanlanib yoppasiga tekshiriladi.

§4 Tanlanmaning statistik taqsimoti.

X - (diskret yoki uzluksiz) belgining miqdoriy hususiyatini o'rganish uchun bosh to'plamdan n hajmli tanlanma olingan bo'lsin, bunda $X_1 \ - n_1$ marta, $X_2 \ - n_2$ marta va hakozo $X_k \ - n_k$ marta uchrasin. $\sum n_i = n$ - tanlanmaning hajmi bo'ladi.Kuzatilgan X_i - qiymat varianta deb ataladi va variantalarning o'sib borish tartibda yozilgan ketma–ketligi variasion qator deyiladi.

Kuzatmalarning soni - n_i ga chastota deyiladi, yoki variantalar qiymatlarining takrorlanish soni. Chastotaning tanlanma hajmiga nisbati

$$W_i = \frac{n_i}{n}$$

nisbiy chastota deyiladi.

Tanlanmaning statistik taqsimoti deb belgining turli qiymatlari bilan ularning chastotalari yoki nisbiy chastotalaridan tuzilgan quyidagi jadvalga aytiladi:

$$\left.\begin{matrix} X_i : X_1, X_2, X_3, ...X_k \\ W_i : W_1, W_2, W_3, ...W_k \end{matrix}\right\}$$

§5 Empirik taqsimot funksiyasi.

Miqdoriy belgi X-ning chastotalarining statistik taqsimoti ma'lum bo'lsin. Quyidagi belgilashlar kiritamiz:

n_x - belgining x - dan kichik qiymatlari soni

n - tanlanma hajmi.

$X < x$ hodisaning nisbiy chastotasi $\frac{n_x}{n}$ bo'ladi. Agar x - o'zgarsa, umuman aytganda, nisbiy chastota ham o'zgaradi, ya'ni nisbiy chastota $\frac{n_x}{n}$ x - ning funksiyasidir. Bu funksiya empirik (tajriba) yo'li bilan topilgani uchun uni empirik funksiya deyiladi. Empirik taqsimot funksiyasi deb (yoki tanlanmaning taqsimot funksiyasi deb) shunday $F_n^*(x)$ funksiyaga aytiladiki, u har bir x uchun $X < x$ hodisaning nisbiy chastotasini aniqlaydi. Ta'rifga ko'ra:

$$F_n^*(x) = \frac{n_x}{n};$$

Bu yerda n_x x- dan kichik bo'lgan variantlar soni, n - tanlanmaning hajmi. Bosh tanlanmaning taqsimoti $F(x)$ - funksiyaga nazariy taqsimot funksiyasi deyiladi. Empirik va nazariy taqsimot funksiyasi orasidagi farq shundan iboratki, nazariy taqsimot funksiya $\{X < x\}$ - hodisaning ehtimolini ifodalasa, empirik taqsimot funksiyasi shu hodisaning nisbiy chastotasini ifodalaydi.

Bernulli teoremasidan $X < x$ hodisaning nisbiy chastotasi $F_n*(x)$ ehtimol bo'yicha, shu hodisaning ehtimoli bo'lgan $F(x)$ - nazariy taqsimot funksiyasiga intilishi kelib chiqadi. Boshqa so'z bilan aytganda $F_n*(x)$ bilan $F(x)$ bir-biridan etarlicha katta n- larda kam farq qiladi.

Yuqorida aytilganlardan kelib chiqadiki, bosh to'plamning nazariy taqsimot funksiyasini empirik taqsimot funksiyasi bilan etarlicha aniqlikda almashtirish mumkin ekan.
Misol: Berilgan tanlanma taqsimotga ko'ra empirik funksiya to'zing:

x_i	2	6	10
n_i	12	18	30

Yechish:

$$n = 12 + 18 + 30 = 60$$

Tanlanmaning hajmi $n = 60$ ga teng. Eng kichik varianta 2 ga teng bo'lgani uchun, $x \le 2$ qiymatlarda $F_n*(x) = 0$ bo'ladi. Belgining $X < 6$ qiymatlari, chunonchi $x_1 = 2$ qiymati 12 marta kuzatilgan, demak, $2 < x \le 6$ bo'lganda

$$F_n*(x) = \frac{12}{60} = \frac{1}{5} = 0{,}2$$

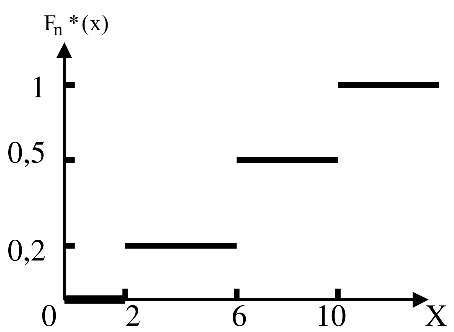
Belgining $X < 10$ qiymatlari, chunonchi $x_1 = 2$ va $x_2 = 6$ qiymatlari 12+18=30 marta kuzatilgan, demak, $6 < x \le 10$ bo'lganda $F_n*(x) = \frac{30}{60} = 0{,}5$.

Belgining $x_3 = 10$ qiymati eng katta varianta bo'lgani uchun $x > 10$ bo'lganda $F_n*(x) = 1$ ga teng buladi.

Izlanayotgan empirik funksiyani yozamiz:

$$F_n*(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2 \\ 0.2, & 2 < x \le 6 \\ 0.5, & 6 < x \le 10 \\ 1 & x > 10 \end{cases}$$

Bu funksiyaning grafigi 4 rasmda berilgan.



Rasm 4

§6 Poligon va gistogramma.

X- belgining diskret taqsimoti.

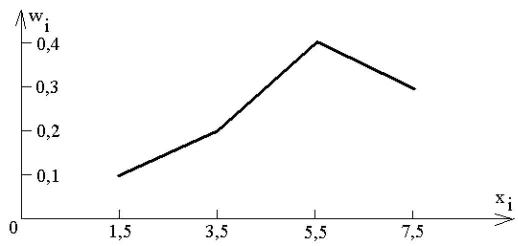
Chastotalar poligoni deb, kesmalari $(x_1, n_1), (x_2, n_2), ...(x_k, n_k)$ nuqtalarni tutashtiradigan siniq chiziqqa aytiladi, bu yerda x_i - tanlanmaning variantalari va n_i - ularga mos chastotalardir.

Nisbiy chastotalar poligoni deb, $(x_1, w_1), (x_2, w_2), ...(x_k, w_k)$ nuqtalarni tutashtiradigan siniq chiziqqa aytiladi, bu yerda x_i - tanlanmaning variantalari va w_i - ularga mos nisbiy chastotalar.

Misol:

Tanlanmaning quyida berilgan taqsimoti bo'yicha nisbiy chastotalar poligonini yasang:

x_i	1,5	3,5	5,5	7,5
w_i	0,1	0,2	0,4	0,3



Rasm 5

Yechish:

absissalar o'qida x_i variantalarni, koordinatalar o'qida esa mos keluvchi w_i nisbiy chastotalarni qo'yamiz; (x_i, w_i) nuqtalarni to'g'ri chiziq kesmalari bilan tutashtirib, izlanayotgan nisbiy chastotalar poligonini hosil qilamiz (5-rasm).

X - belgining uzluksiz taqsimoti.

Belgi uzluksiz taqsimlangan holda belgining barcha kuzatilgan qiymatlari yotgan intervalni uzunligi h bo'lgan qator qismiy intervallarga bo'linadi va i-intervalga tushgan variantalarning chastotalari yig'indisi n_i - topiladi.

Chastotalar gistogrammasi deb, asoslari h uzunlikdagi intervallar, balandliklari esa $\frac{n_i}{h}$ nisbatlarga (chastota zichligi) teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklardan iborat pog'onaviy figuraga aytiladi. Nisbiy chastotalar gistogrammasi deb, asoslari h uzunlikdagi intervallar, balandliklari esa $\frac{w_i}{h}$ nisbatga (nisbiy chastota zichligi) teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklardan iborat pog'onaviy figuraga aytiladi.

Misol:

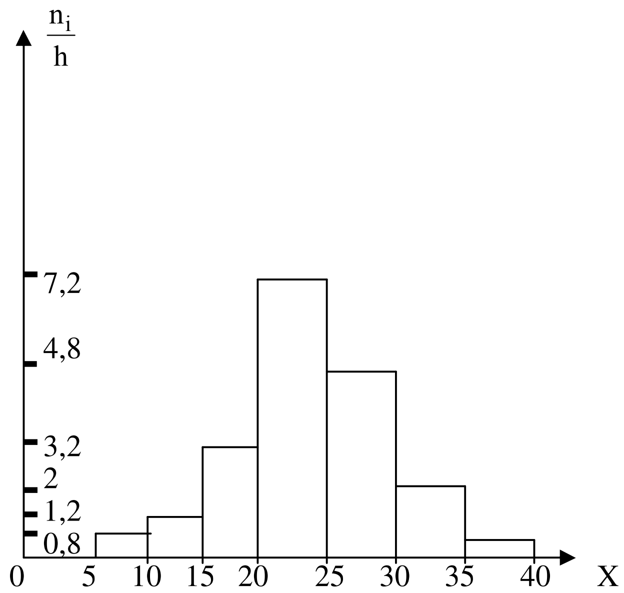
Tanlanmaning quyida berilgan taqsimoti bo'yicha chastotalar gistogrammasini yasang:

Interval nomeri	Qismiy interval	Intervaldagi variantalar chastotalari yig'indisi	Chastota zichligi
i	$x_i - x_{i-1}$	n_i	n_i/h
1	5-10	4	0,8
2	10-15	6	1,2
3	15-20	16	3,2
4	20-25	36	7,2
5	25-30	24	4,8
6	30-35	10	2,0
7	35-40	4	0,8

Yechish:

Abssissalar o'qida h=5 uzunlikdagi berilgan intervallarni yasaymiz. Bu intervallarning ustida abssissalar o'qiga parallel va undan tegishli chastota zichliklari $\frac{n_i}{h}$ ga teng masofada bo'lgan kesmalar o'tkazamiz.

Masalan, (5;10) intervalning ustida abssissalar o'qiga parallel qilib, $\frac{n_i}{h} = 4/5 = 0{,}8$ masofada kesma yasaymiz. Qolgan kesmalar ham shunga o'xshash yasaladi. Izlanayotgan chastotalar gistogrammasi 6-rasmda tasvirlangan.



Rasm 6

§7 Taqsimot parametrlarining statistik baholari.

Bosh tanlanmaning miqdoriy belgisini o'rganish talab etilgan bo'lsin Faraz qilamizki, nazariy muloxazalarga asosan belgi taqsimoti aniqlangan bo'lsin. Tabiiy ravishda taqsimotni harakterlovchi parametrlarni baholash masalasi kelib chiqadi. Masalan, normal taqsimot uchun bu parametrlar matematik kutilma bilan dispersiyadir. Odatda biz faqatgina tanlanmaning berilishiga ega bo'lamiz. Masalan, tanlanmaning berilishi – miqdoriy belgining qiymatlari $x_1, x_2, x_3, ..x_n$ lar- n-ta kuzatishlar natijasi bo'lsin. U holda baholanayotgan parametr shu miqdoriy belgining qiymatlari $x_1, x_2, x_3, ...x_n$ lar orqali ifodalanadi. YA'ni parametrning statistik bahosi $\Theta^* = \Theta^*(x_1, x_2, x_3, ...x_n)$ - n o'zgaruvchili funksiya bo'ladi. Statistik baho o'zi baholanayotgan parametrlarga etarlicha yaqin bo'lishi uchun ma'lum talabalarni bajarishi kerak;

Aytaylik $\Theta^* = \Theta^*(x_1, x_2, x_3, ...x_n)$ statistik baho berilgan nazariy taqsimotning noma'lum parametr Θ - ning bahosi bo'lsin. Θ^*- ni har bir n hajmli tanlanmada qiymati Θ_i^* ga teng tasodifiy miqdor sifatida karash mumkin.

-Siljimagan baho deb, tanlanmaning hajmi istalgancha bo'lganda ham matematik kutilishi baholanayotgan parametrga teng bo'lgan statistik bahoga aytiladi. YA'ni $M(\Theta^*) = \Theta$. Siljigan baho deb, matematik kutilishi baholanayotgan parametrga teng bo'lmagan bahoga aytiladi.

-Effektli baho deb, berilgan n hajmli tanlanma uchun eng kichik dispersiyali statistik bahoga aytaladi (etarlicha katta n lar uchun).

-Salmoqli baho deb $n \to \infty$ bo'lganda baholanayotgan bahoga ehtimol bo'yicha yaqinlashuvchi statistik bahoga aytiladi, ya'ni:

$$p(\omega : /\Theta^* - \Theta/ > \varepsilon) = 0$$

§8 Bosh to'plamning nazariy o'rtacha qiymati.

$\bar{x}_b$ - bosh o'rtacha qiymat deb bosh to'plam belgisi qiymatlarining o'rtacha arifmetik qiymatiga aytiladi. Agar bosh to'plam hajmi N ga teng bo'lsa, u holda

$$\bar{x}_b = \frac{x_1 + \ldots + x_N}{N}.$$

Agar x_i ning chastotasi N_i bo'lsa $\bar{x}_b = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i N_i}{N}$; $N_1 + \ldots + N_k = N$.

Bosh o'rtacha qiymat bosh to'plam miqdoriy belgisi X – ning nazariy matematik kutilmasidir:

$$\bar{x}_b = M(X)$$

§9 Tanlanma o'rtacha qiymat.

Bosh to'plamning X belgisining miqdoriy xususiyatini o'rganish uchun bosh to'plamdan n-hajmli $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ tanlanma olingan bo'lsin.

Tanlanma o'rtacha qiymat deb tanlanma to'plam belgisining o'rtacha arifmetik qiymatiga aytiladi va $\bar{x}_t$ - bilan belgilanadi:

$$\bar{x}_t = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$$

Agar x_i ning chastotasi n_i ga teng bo'lsa u holda

$$\bar{x}_t = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{n}; \quad n_1 + \ldots + n_i = n$$

Bosh o'rtacha qiymatning bahosi sifatida tanlanma o'rtacha qiymatni qabul qilinadi. $\bar{x}_t$ - bu siljimagan, salmoqli baho.

§10 Bosh to'plamning nazariy dispersiyasi.

Bosh dispersiya deb bosh to'plami belgisi qiymatlari bilan bosh to'plam o'rtacha qiymati $\bar{x}_b$ orasidagi kvadratik chetlanishlarining o'rta arifmetigiga aytiladi.

$$D_b = \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x}_б)^2}{N}$$

Bosh dispersiya bosh to'plamning miqdoriy belgisi X ning nazariy dispersiyasidir:

$$D_b = D(X)$$

Agarda x_i - lar N_i chastotalarga ega bo'lsalar, u holda

$$D_b = \frac{\sum_{i=1}^{k} N_i \cdot (x_i - \bar{x}_б)^2}{N} \quad \text{bunda} \quad N_1 + N_2 + \ldots + N_k = N$$

Misol:

Bosh to'plam quyidagi taqsimot jadvali bilan berilgan:

x_i	2	4	5	6
N_i	8	9	10	3

Bosh dispersiya topilsin.

Yechish:

Bosh o'rtacha qiymatni topamiz:

$$\bar{x}_b = \frac{8\cdot 2+4\cdot 9+5\cdot 10+6\cdot 3}{8+9+10+3} = \frac{120}{30} = 4$$

Bosh dispersiyani topamiz:

$$D_b = \frac{8\cdot(2-4)^2+9\cdot(4-4)^2+10\cdot(5-4)^2+3\cdot(6-4)^2}{30} = 1{,}8$$

Bosh o'rtacha kvadratik chetlashish deb bosh dispersiyadan olingan kvadrat ildizga aytiladi.

$$\sigma_b = \sqrt{D_b}$$

§11 Tanlanma dispersiya.

Bosh to'plam miqdoriy belgisi X ning quzatilgan qiymatlari o'zining tanlanma o'rtacha qiymati $\bar{x}_T$ atrofida tarqoqlik harakteristikasi sifatida tanlanma dispersiya kiritiladi. Tanlanma dispersiya deb X-belgining kuzatilgan qiymatlari bilan tanlanma o'rtacha qiymati orasidagi kvadratik chetlanishlarning o'rtacha arifmetigiga aytiladi.

$$D_t = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_t)^2}{n}$$

Agarda x_i lar n_i chastotalarga ega bo'lsalar, u holda:

$$D_t = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \bar{x}_t)^2}{n},$$

bunda $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

Teorema: Belgining dispersiyasi shu belgi qiymatlari kvadratlari o'rtacha qiymati bilan belgining o'rtacha qiymati ayirmasiga teng:

$$DX = \overline{x^2} - [\bar{x}]^2$$

Bu yerda $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{n}$; $\overline{x^2} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i^2 n_i}{n}$;

Bosh dispersiyani tuzatilgan tanlanma dispersiya bilan quyidagicha baholanadi.
Bizda quyidagi tanlanma berilgan bo'lsin:

$$X:\ x_1, x_2, \ldots x_k$$
$$n:\ n_1, n_2, \ldots n_k$$

va $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$ - tanlanmaning hajmi bo'lsin. Tanlanmaning berilishiga qarab noma'lum bosh dispersiya D_b ni baholash (taxminiy topish) talab qilingan bo'lsin. Agarda D_b - bosh dispersiya bahosi sifatida D_t- tanlanma dispersiyani olsak, u holda bu baho sistematik xatoliklarga olib keladi, chunki D_t tanlanma dispersiya bosh dispersiya D_b- uchun siljigan bahodir. Ya'ni:

$$M(D_t) = \frac{n-1}{n} D_b$$

Bu oson tuzatiladi. Buning uchun D_t- tanlanma dispersiyani $\frac{n}{n-1}$ ga ko'paytirish etarlidir. Shunday qilib biz «tuzatilgan» dispersiya hosil qilamiz va uni s^2 bilan belgilaymiz:

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_t = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \bar{x}_t)^2}{n-1}$$

Endi s^2- tuzatilgan dispersiya D_b bosh dispersiya uchun siljimagan baho bo'ladi:

$$M(s^2) = M(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \overline{x}_t)^2) \overset{(1)}{=} \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}(D(x_i - \overline{x}_t) + M^2(x_i - \overline{x}_t)) =$$

$$= \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n} D\left[(1-\frac{1}{n})x_k - \frac{1}{n}\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} x_i\right] + \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left[Mx_k - M\overline{x}_t\right]^2 \overset{(2)}{=}$$

$$\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^2 Dx_k + \frac{1}{n^2}\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} Dx_i\right] = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 DX + \frac{n-1}{n^2}DX\right] =$$

$$= \frac{1}{n-1}\cdot n\cdot\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 D_b + \frac{n-1}{n^2}D_b\right] = D_б\left(\frac{n-1}{n} + \frac{1}{n}\right) = D_b.$$

(1): $D\eta = M\eta^2 - M^2\eta$ dan $M\eta^2 = D\eta + M^2\eta$ kelib chiqadi va uni $\eta = x_k - \overline{x}_t$ ga qo'llaymiz.

(2): $Mx_k = M\overline{x}_b$ va $M\overline{x}_t = M\overline{x}_b$ bo'lgani uchun $Mx_k - M\overline{x}_t = 0$ bo'ladi.

§12 Nuqtaviy baholar, ishonchli ehtimol, ishonchli interval.

Nuqtaviy baho deb, bitta son bilan aniqlanadigan statistik bahoga aytiladi. Yuqorida qo'rilgan barcha baholar nuqtaviy baholardir. Agar tanlanmaning hajmi kichik bo'lsa nuqtaviy baho o'zi baholayotgan parametrdan anchagina farq qilishi mumkin, ya'ni qo'pol xatoliklarga yo'l qo'yiladi. Shu sababdan kichik hajmli tanlanmalar uchun intervallik baholardan foydalanish maqsadga muvofiq bo'ladi.

Intervallik baho deb baholanayotgan parametrni koplaydigan intervalning uchlari bo'lgan ikkita son bilan aniqlanadigan bahoga aytiladi.

Intervallik baholar – bahoning aniqligini va ishonchini aniqlashni ta'minlaydilar.

Faraz qilamiz, tanlanma berilishiga qarab topilgan statistik harakteristika Θ^*, noma'lum parametr Θ ning bahosi bo'lsin.

Θ - o'zgarmas son deb hisoblaymiz. Agar $\left|\Theta - \Theta^*\right|$ qiymat qanchalik kichik bo'lsa, shuncha Θ^* - statistik baho Θ parametrni aniq baholaydi. Boshqacha qilib aytganda, agar ixtiyoriy $\delta > 0$ uchun $\left|.\Theta - \Theta^*\right| < \delta$ bo'lsa, shunchalik baho aniq bo'ladi. Shunday qilib $\delta > 0$ son bahoning aniqligini ifodalaydi. Ammo statistik metodlar Θ^* bahoning $\left|\Theta - \Theta^*\right| < \delta$ tengsizlikni muqarrar qanoatlantirishini tasdiq qilishga ojizlik qiladilar. Faqat bu tengsizlik bajarilishining ehtimoli γ haqida gapirish mumkin.

Θ^*- statistik bahoning ishonchli ehtimoli deb $\left|\Theta - \Theta^*\right| < \delta$ tengsizlikning bajarilish ehtimoliga aytiladi.

Odatda bahoning ishonchli qiymati deb oldindan birga yaqin son olinadi. Ko'pincha 0.95, 0.99, va 0. 999 ga teng ishonch qiymatlari beriladi.

Faraz qilamiz $\left|\Theta - \Theta^*\right| < \delta$ tengsizlikning ehtimoli γ ga teng bo'lsin, ya'ni

$$P\left(\left|\Theta - \Theta^*\right| < \delta\right) = \gamma \qquad (1)$$

Endi $\left|\Theta - \Theta^*\right| < \delta$ tengsizlikni unga ekvivalent bo'lgan qo'sh tengsizlik bilan almashtiramiz:

$$-\delta < \Theta - \Theta^* < \delta \text{ yoki } \Theta^* - \delta < \Theta < \delta + \Theta^*.$$

Natijada (1) o'rniga quyidagini olamiz:

$$P(\Theta^* - \delta < \Theta < \delta + \Theta^*) = \gamma$$

Bu tenglikni quyidagicha tushunish mumkin: $(\Theta^* - \delta; \delta + \Theta^*)$ interval noma'lum parametr Θ ni o'z ichiga olishining (qoplashining) ehtimoli γ ga teng. Ishonchli interval $(\Theta^* - \delta; \delta + \Theta^*)$ deb noma'lum parametr Θ ni berilgan γ ishonch bilan qoplaydigan $(\Theta^* - \delta; \delta + \Theta^*)$ intervalga aytiladi.

§13 Normal taqsimot parametrlari uchun ishonchli baholar.

1. Asosiy masalaning qo'yilishi.

Berilgan o'zgarmas a sonini aniqlash maqsadida n-ta o'zaro bog'liqsiz o'lchashlar o'tkazilgan bo'lsin. Bu o'lchashlar hatoliklari Z tasodifiy miqdor bo'ladi. Ihtiyoriy o'lchashlar natijalarida turli hil turdagi hatoliklarga yo'l qo'yiladi. Bular sistematik, tasodifiy va qo'pol hatoliklardan iborat bo'ladi.

1. Sistematik hatoliklar.

Sistematik hatoliklarga birinchi navbatda asboblar hatoliklari kiradi. Ya'ni o'lchashlar uchun ishlatiladigan asboblarni ishlab chiqishda aniqlikni yuz foyiz ta'minlash mumkin emas. Oddiy asboblar hatoliklariga asbobdagi o'lchash shkalalarini hatoliklar bilan belgilash, yoki hisob boshini noto'g'ri belgilashlar kiradi. Bu hatoliklar tufayli o'lchash natijalari aniq qiymatdan har doim bir hil ishorali qiymatga farq qiladi. Shu sababdan ham bu hatoliklar sistematik hatoliklar deb ataladi.

2. Tasodifiy hatoliklar.

Tasodifiy hatoliklarga asosan o'lchashlar natijalariga oldindan bilib bo'lmaydirgan tasodifiy fizik sabablar ta'siri ostida yo'l qo'yiladigan hatoliklar kiradi.

Hatoliklar nazariyasi deganda biz tasodifiy hatoliklarni o'rganadigan nazariyani ko'zda tutamiz. Hatoliklar nazariyasini qurish uchun ehtimollar nazariyasini ishlatiladi.

3. Qo'pol hatoliklar.

O'lchashlar natijalarini qayta ishlash jarayonida tashqi ta'sirlar yoki mumkin bo'lgan chetlanishlar ta'sirida shunday hatoliklarga yo'l qo'yish mumkinki o'lchash natijasi katta hatolik bilan aniqlanadi. Eng oddiy mumkin bo'lgan chetlanishlardan biri shunday bo'lishi mumkin: o'lchov o'tkazuvchi asbobdagi o'lchov natijasi 20 o'rniga jadvalga 30 sonini yozadi. Qo'pol hatolikka olib keluvchi eng oddiy tashqi sabablardan biri, kuzatuvchining o'zi sezmagan holda yo'l qo'ygan hatoligidir. Qo'pol hatolikning borligini ko'rsatuvchi belgilardan biri, bir biridan kam farq qiladigan o'lchash natijalari orasida ulardan tubdan farq qiladigan natijalarning mavjudligidir.

Umuman olganda o'lchash natijalarining tasodifiy hatoliklari turlicha taqsimot qonunlariga bo'ysinishi mumkin. Lekin amalda juda ko'p hollarda tasodifiy hatoliklar normal taqsimot qonuniga boysinadi.

Gauss postuloti: O'lchash haqiqiy kattaligining eng ehtimolli qiymati o'lchash natijalarining o'rta arifetigiga teng.

Teorema:

Agar tasodifiy hatoliklar Gauss postulotini qanoatlantirsalar, u holda tasodifiy hatoliklarining taqsimot qonuni normal qonun bo'ladi.

Shunday qilib agar Gauss postulotini qobul qilinsa tasodifiy hatolikla normal qonun bilan taqsimlangan bo'ladi. Huddi shunday buning teskarisi ham o'rinli:

Agar tasodifiy hatoliklar normal taqsimot bilan taqsimlangan bo'lsalar, u holda o'lchash haqiqiy kattaligining eng ehtimolli qiymati o'lchash natijalarining o'rta arifetigiga teng.

Shuni alohida qayd qilish joizki bu teoremadan tasodifiy hatoliklarning har doim ham normal taqsimot bilan taqsimlanganligi kelib chiqmaydi, Ba'zi bir tip o'lchashlarda (ayniqsa kam sondagi o'lchashlarda) Gauss postuloti bajarilmaydi va bu hollarda boshqa taqsimot qonunlarini qarashga to'g'ri keladi.

Lyapunovning markaziy limit teoremasi shunday umumiy yetarli shartlarni berganki bu shartlar bajarilganda bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar yig'indisi asimptotik normal qonunga bo'ysinadi.

Bu shartlar asosan shunga olib keladiki, markazlashtirilgan qo'shiluvchilar orasida qolgan markazlashtirilgan qo'shiluvchilardan tubdan farq qiluvchilari yo'q.

Albatta $MX_к=a_к$.matematik kutilmaning mavjudligi talab qilinadi. Bundan tashqari markazlashtirilgan tasodifiy miqdorning kvadratining matematik kutilmasi mavjudligi ham talab qilinadi.

Ko'rsatilgan shartlarda $X_1+X_2+\ldots+X_n$ yig'indi $a = a_1+a_2+\ldots+a_n$ va $\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i - a_i)^2}$ parametrli asimptotik normal qonunga ega bo'ladi.

Agar o'lchash natijalari sistematik hataliklardan holi bo'lsa u holda hatolikning ta'rifidan (Z=X-a) o'lchash natijalari X=a+Z, a va σ parametrli normal qonunga bo'ysinishligi kelib chiqadi.Demak o'lchash natijalarining taqsimot markazi o'lchanayotgan kattalikning haqiqiy qiymati bilan ustma-ust tushadi, ya'ni MX=a .(Bu esa o'lchash natijasida sistematik hatoliklarning yo'qligini bildiradi)

O'lchashlarning birinchi asosiy masalasi – o'lchanayotgan kattalikning haqiqiy qiymatini baholash,- matematik tilda aytganda, normal taqsimotning markazini, ya'ni matematik kutilmasini baholashdir. Normal taqsimot markazining bahosi deb quyidagi rattalikni olishadi:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}.$$

O'lchashlarning ikkinchi asosiy masalasi – o'lchash aniqligini baholashdir (o'lchash asbobining aniqligini) Matematik tilda bu masala normal taqsimotning σ parametrini, yoki uning dispersiyasi σ^2 ni baholashni bildiradi. Dispersiya yoki o'lchash aniqligining bahosi sifatida quyidagi kattalikni olishadi:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

Shunday qilib ko'rsatilgan ikki asosiy masala normal taqsimotning ikki parametrini baholashga keltiriladi.

§14 Taqsimot markazining ishonchli baholari.

Taqsimot markazining bahosini biz ikki holda o'rganamiz: σ^2 ma'lum bo'lgan hol (o'lchanayotgan kattalikning haqiqiy qiymatining bahosini o'lchash aniqligi ma'lum bo'lgan holda) va σ^2 noma'lum bo'lgan hol.

1. Agar dispersiya σ^2 ma'lum bo'lsa, u holda o'rta arifmetik qiymat $\bar{x}$ ning, a va $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ parametrli normal taqsimotga ega bo'lishligidan foydalanish mumkin. Bu esa $Z = \frac{\bar{x}-a}{\sigma}\sqrt{n}$ kattalik normallashtirilgan N(0;1) normal taqsimotga ega ekanligini bildirib, $\bar{x}$ ni dispersiya oldindan ma'lum bo'lgan holda baholash imkoniyatini beradi.

$|\bar{x}-a|$ ning ihtiyoriy chetlanishining ehtimolini quyidagi formula yordamida aniq hisoblash mumkin:

$$P\left(\left|\bar{x}-a\right| < t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \Phi(t)$$

Aniq bir ishonchli ehtimollik δ ni berib, biz $t(\delta)$ ning qiymatini $\Phi(t) = \delta$ tenglamadan jadval yordamida topamiz, va ishonchli bahoni δ ishonchli ehtimoligi bilan topamiz:

$$\left|\bar{x}-a\right| < t(\delta)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Bu bahoni odatta quyidagi ko'rinishda yozishadi:

$$\bar{x} - t(\delta)\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + t(\delta)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Masalan, $\delta = 0{,}99$ ishonchli ehtimol bilan quyidagi baho o'rinli:

$$\bar{x} - 2{,}576\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + 2{,}576\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$\delta = 0{,}997$ ishonchli ehtimol bilan esa quyidagi baho o'rinlidir:

$$\bar{x} - 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

(uch sigma qoyidasi).

Endi biz tasodifiy hatoliklarning normal taqsimlanganligiga asoslangan holda qo'pal hatoliklarni yo'qatish usulini ko'rib o'tamiz. Faraz qilamiz, bir nechta o'lchashlar natijasida biz o'lchanayotgan kattalikning taqribiy qiymati $\bar{x}$ va o'rtacha kvadratik hatolik σ ni topdik. Har bir o'lchash hatoligining taqribiy qiymatini aniqlaymiz:

$$\varepsilon_k = x_k - \bar{x} \approx \delta_k .$$

Normal taqsimotning hossasiga asosan:

$$P(|\delta| < 3\sigma) = 0{,}9973$$

Demak

$$P(|\delta| > 3\sigma) = 0{,}0027$$

Odatda hatolikning absolyut qiymati 3σ dan oshishining ehtimoli juda ham kam deb hisoblashadi.Shuning uchun ham agar ε_k lardan birortasining moduli 3σ dan oshgan bo'lsa u holda bu o'lchash qo'pol hatolik bilan o'tkazilgan hisoblanib uning natijasini tashlab yuboriladi. Ba'zi bir o'lchash natijalari shu usulda tashlab yuborilgandan so'ng $\bar{x}$ va σ larning taqribiy qiymatlari qaytadan hisoblanishi kerak.

2. Agar σ^2 dispersiya noma'lum bo'lsa u holda Styudent taqsimotidan foydalanish mumkin. Uning uchun empiric dispersiyani qaraymiz:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

$\bar{x}$ miqdor a va $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ paramatrli normal taqsimotga ega bo'lganligidan $\frac{\bar{x} - a}{\sigma/\sqrt{n}}$ miqdor 0 va 1 parametrli normal taqsimotga ega bo'ladi. Ularga bo'g'liq bo'lmagan holda $u = \frac{S^2(n-1)}{\sigma^2}$ miqdor χ^2_{n-1} - hi-kvadrat taqsimotga ega bo'ladi.

$T = \frac{\bar{x} - a}{\sigma/\sqrt{n}} : \sqrt{\frac{u}{n-1}} = \frac{\bar{x} - a}{S/\sqrt{n}}$ kattalik esa Styudent taqsimotiga ega bo'lib bu taqsimot uchun ham zichlik funktsiyasining ko'rinishi mavjud bo'lib, uning qiymatlarining jadvallari tuzilgan. Bu nisbat σ ga bog'liq bo'lmaganligi uchun u taqsimotning markazi bahosini qurish imkonini beradi. Buning uchun Styudent taqsimotining jadvali yordamida berilgan

$$P\left(\left|\frac{\bar{x} - a}{s/\sqrt{n}}\right| < t(\gamma, n-1)\right) = 2\int_0^t p_T^k(t)dt = \gamma$$

ehtimollikka ko'ra t ning qiymati topiladi.

Bu yerda

$$p_T^k(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi k}} \frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})}{\Gamma(\frac{k}{2})} (1+\frac{t^2}{k})^{-\frac{k+1}{2}} \qquad (-\infty < t < \infty)$$

$$\lim_{k\to\infty} P_T^k(t) = \varphi_{0,1}(t)$$

Bu esa quyidagi ishonchli bahoni beradi:

$$\left| \frac{\overline{x} - a}{s/\sqrt{n}} \right| < t(\gamma, n-1)$$

Ya'ni

$$\overline{x} - t(\gamma, n-1)\frac{s}{\sqrt{n}} < a < \overline{x} + t(\gamma, n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}$$

Bu yerda t faqatgina γ dan emas balki tajribalar sonidan ham bog'liq. Bu narsa kam sonli o'lchashlarda sezilarlidir. Masalan:

n=5, к=4, γ =0,99 bo'lsa

$$\overline{x} - 4{,}604\frac{s}{\sqrt{n}} < a < \overline{x} + 4{,}604\frac{s}{\sqrt{n}}$$

bo'ladi.

Shunday qilib o'lchashlar soni kamayganda ishonchli interval kattalashadi (bir hil ishonchli ehtimollikda). Agar intervalni o'zgartirmasak o'lchashlar soni kamayganda ularning ishonchli ehtimolligi kamayadi. Hususan

$$\overline{x} - 3\frac{s}{\sqrt{n}} < a < \overline{x} + 3\frac{s}{\sqrt{n}}$$

ko'rinishdagi uch sigma qoidasi, kam sonli o'lchashlarda, 0,997 dan kam bo'lgan ishonchli ehtimollikka ega bo'ladi.

n=14 bo'lganda $\gamma < 0{,}99$

n=8 bo'lganda $\gamma < 0{,}98$

n=5 bo'lganda $\gamma < 0{,}96$.

Styudent taqsimotini tajribalar soni katta bo'lganda ishlatish tavsiya etilmaydi, chunki n=20 da u normal taqsimotdan juda ham kam farq qiladi.

§15 Normal taqsimot o'rtacha kvadratik chetlanishi σ ning bahosi uchun ishonchli intervallar.

Bosh to'plamning X-sonli belgisi normal taqsimlangan bo'lsin. Tuzatilgan tanlanma o'rtacha kvadratik chetlanish s orqali noma'lum bosh o'rtacha kvadratik chelanish σ ni baholash talab etilgan bo'lsin. Oldimizga γ ishonchli ehtimollik bilan σ parametrni qoplaydigan ishonchli intervalni topish masalasini qo'yamiz:

$$P(|\sigma - s| < \delta) = \gamma$$

munosabat bajarilishini talab etamiz. Bu munosabat quyidagiga teng kuchli:

$$P(s - \delta < \sigma < s + \delta) = \gamma$$

Mavjud jadvallardan foydalanish mumkin bo'lishligi uchun quyidagi

$$s - < \sigma < s + \delta$$

Qo'sh tengsizlikni unga teng kuchli bo'lgan quyidagi tengsizlikka almashtiramiz:

$$s\left(1 - \frac{\delta}{s}\right) < \sigma < s\left(1 + \frac{\delta}{s}\right).$$

$\frac{\delta}{s} = q$ deb belgilab

$$s(1-q) < \sigma < s(1+q) \qquad (1)$$

tengsizlikka kelamiz. q ni topish uchun quyidagi “xi” tasodifiy miqdorini kiritamiz: $\chi = \frac{s}{\sigma}\sqrt{n-1}$;

n-tanlanma xajmi. Isbot qilinganki, $\frac{s^2(n-1)}{\sigma^2}$ miqdor xi-kvadrat qonun bilan taqsimlangan, shuning uchun ham uning kvadrat ildizini χ bilan belgilaymiz.

χ ning taqsimotining zichlik funktsiyasi quyidagi ko’rinishda bo’ladi:

$$p(\chi, n) = \frac{\chi^{n-2} e^{-\frac{\chi^2}{2}}}{2^{\frac{n-3}{2}} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \qquad (2)$$

Bu yerda Γ - gamma funktsiya. Ko’rinib turibdiki bu taqsimot baholanayotgan σ parametrga bog’liq bo’lmay, faqatgina tanlanma hajmi n ga bog’liq. (1) tengsizlikni shunday almashtiramizki, u quyidagi ko’rinishga kelsin:

$$\chi_1 < \chi < \chi_2$$

Bu tengsizlik bajarilishining ehtimoli γ gat eng bo’lgani uchun

$$P(\chi_1 < \chi < \chi_2) = \int_{\chi_1}^{\chi_2} p(\chi, n) d\chi = \gamma .$$

$q < 1$ deb faraz qilib, (1) tengsizlikni boshqa ko’rinishda yozib olamiz:

$$\frac{1}{s(1+q)} < \frac{1}{\sigma} < \frac{1}{s(1-q)} .$$

Bu tengsizlikni $s\sqrt{n-1}$ ga ko’paytirib quyidagini hosil qilamiz:

$$\frac{\sqrt{n-1}}{1+q} < \frac{s\sqrt{n-1}}{\sigma} < \frac{\sqrt{n-1}}{1-q},$$

yoki

$$\frac{\sqrt{n-1}}{1+q} < \chi < \frac{\sqrt{n-1}}{1-q} .$$

Bu tengsizlik bajarilishi ehtimoli, yoki unga teng kuchli bo’lgan (1) tengsizlik bajarilishi ehtimoli quyidagicha:

$$\int_{\frac{\sqrt{n-1}}{1+q}}^{\frac{\sqrt{n-1}}{1-q}} p(\chi, n) d\chi = \gamma .$$

Bu tenglikdan berilgan n va γ larga ko’ra q topiladi. Amalda q ni topishda jadvaldan foydalaniladi. Tanlanmadan s ni hisoblab va jadvaldan q ni topib, izlanayotgan (1) ishonchli interval, ya’ni σ ni γ ishonchli ehtimol bilan qoplovchi

$$s(1-q) < \sigma < s(1+q)$$

Interval topiladi.

§16 Statistik gipotezalarni tekshirish.

Agar bosh to’plam taqsimoti qonuni noma’lum bo’lib, lekin uning qo’rinishini F(x) ekanligini taxmin qilishga asos bo’lsa, u holda quyidagi gipoteza (faraz) ni oldinga surishadi: bosh to’plam F(x) qonuni bo’yicha taqsimlangan.

Boshqacha hol ham bo'lishi mumkin: taqsimot qonuni ma'lum; lekin uning parametrlari noma'lum. Agar noma'lum parametr Θ ni aniq bir qiymat Θ_0 ga tengligini faraz qilishga asos bo'lsa, quyidagi gipotezani oldinga surishadi: $\Theta = \Theta_0$.

Yana boshqacha gipotezalarni oldinga surish mumkin: ikki yoki bir necha taqsimotlarning parametrlari tengligi, tanlanmaning bog'liqsizligi va boshqalar.

§17 Statistik gipoteza. Nolinchi, konkurent (alьternativ), oddiy va murakkab gipotezalar.

Statistik gipoteza deb, noma'lum taqsimotning qo'rinishi yoki ma'lum taqsimotlarning parametrlari xakidagi gipotezalarga aytiladi.

Masalan:

1) Bosh to'plam Puasson qonuniga asosan taqsimlangan;
2) Ikki normal taqsimlangan to'plamning dispersiyalari o'zaro teng;

degan farazlarni oldinga suruvchi gipotezalar statistik gipotezalardir.

Ammo lekin «2010 yilda urush bo'lmaydi» degan gipoteza statistik gipoteza emas. Oldinga surilgan gipoteza bilan bir qatorda unga qarama-qarshi (zid) gipoteza ham qaraladi. Agar F(x) o'rinli bo'lmasa, u holda uning aksi o'rinlidir. Nolinchi (asosiy) gipoteza deb, quyilgan H_0 gipotezaga aytiladi. Konkurent (alternativ) gipoteza deb, nolinchi gipotezaga zid H_1 gipotezaga aytiladi.

Misol:

$H_0 : M(x) = a = 10, \quad \Phi(x)$ taqsimot uchun,

$H_1 : M(x) = a \neq 10, \quad \Phi(x)$ taqsimot uchun.

Sodda gipoteza deb, yolg'iz bir farazdan tashkil topgan gipotezaga aytiladi. Masalan: $H_0 : \lambda = 5$, bu yerda λ- ko'rsatkichli taqsimotning parametri.

Murakkab gipoteza deb, chekli yoki cheksiz sondagi oddiy gipotezalardan tashkil topgan gipotezalarga aytiladi.

Masalan:

1) $H : \lambda > 5$ bu murakkab gipoteza bo'lib quyidagi sanoqsiz sondagi oddiy gipoteza $H_i : \lambda = b_i$, $b_i > 5$ lardan tashkil topgan.

1) $H_0 : Mx = a = 3$ (σ-ma'lum) – oddiy gipoteza,

2) $H_0 : Mx = a = 3$ (σ-noma'lum) – murakkab gipoteza.

§18 Birinchi va ikkinchi tur xatoliklar.

Qo'yilgan gipotezalar to'g'ri yoki noto'g'ri bo'lishi mumkin, shuning uchun uni tekshirishga extiyoj tug'iladi. Tekshirish statistik metodlar asosida olib borilgani uchun uni statistik tekshirish deyiladi. Natijada gipotezalarni statistik tekshirish davomida ikki holda xato xulosa qabul qilinishi mumkin, ya'ni ikki tur xatolikka yul quyilishi mumkin.

Birinchi tur xato shundan iboratki, bunda to'g'ri gipoteza rad qilinadi.

Ikkinchi tur xato shundan iboratki, bunda noto'g'ri gipoteza qabul qilinadi.

Birinchi tur xatoning ehtimoli qiymatdorlik darajasi deyiladi va α bilan belgilanadi. Ko'proq $\alpha = 0.05$, $\alpha = 0.01$ qiymatlar beriladi. Agar, $\alpha = 0.05$ qiymatdorlik darajasi qabul qilingan bo'lsa bu 100 ta holdan 5 tasida birinchi tur xatolikka yo'l qo'yilish xavfi borligini bildiradi. (to'g'ri gipotezani rad etish). Ikkinchi tur xatoning ehtimolini β orqali belgilanadi.

§19 Nolinchi gipotezani tekshiruvchi ba'zi bir statistik kriteriyalar.

Nolinchi gipotezani tekshirish uchun maxsus tanlangan tasodifiy miqdor ishlatiladi. Uning aniq yoki taxminiy taqsimoti ma'lum bo'ladi.

Bu miqdorni:

-taqsimoti normal bo'lganda U yoki Z bilan,

-taqsimoti Fisher-Snedekor qonuni bo'lganda F yoki V^2 bilan,

-taqsimoti Stьyudent qonuni bo'lganda T bilan,

-taqsimoti «xi- kvadrat» qonun bo'lganda χ^2 - bilan, va hakozalar bilan belgilanadi.

Statistik kriteriya (yoki oddiygina kriteriya) deb, nolinchi gipotezani tekshirish uchun xizmat qiladigan K - tasodifiy miqdorga aytiladi.

Masalan: Agar ikki normal taqsimlangan bosh to'plamning dispersiyalari o'zaro tengligi to'g'risidagi gipotezani tekshirish kerak bo'lsa u holda kriteriya K deb ikki bosh to'plam tuzatilgan dispersiyalarining nisbati olinadi:

$$F = \frac{S_1^{\ 2}}{S_2^{\ 2}};$$

Bu tasodifiy miqdor bo'lib Fisher-Snedekor qonuni bo'yicha taqsimlangandir.

Gipotezani tekshirish uchun tanlanmaning qiymatlariga asosan kriteriya tarkibiga kirgan kattaliklarning xususiy qiymatlari hisoblanadi va shu taxlikada kriteriyaning xususiy (kuzatilgan) qiymatini hosil qilinadi va uni K_{kuz} deb belgilaymiz.

§20 Kritik soha. Gipotezani qabul qilish sohasi. Kritik nuqtalar.

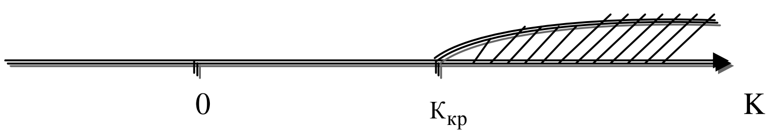
Aniq bir kriteriya qabul qilingan. Uning qabul qiladigan qiymatlari to'plami ikkita kesishmaydigan to'plam ostlariga quyidagicha bo'linadi: ularning biri kriteriyaning nolinchi gipotezani rad etadigan qiymatlaridan, ikkinchisi kriteriyaning nolinchi gipotezani qabul etadigan qiymatlaridan tashkil topgan bo'ladi.

- Kritik soha deb kriteriyaning nolinchi gipoteza rad qilinadigan qiymatlari to'plamiga aytiladi.
- Gipotezaning qabul qilinish sohasi (yo'l qo'yilgan qiymatlar sohasi) deb kriteriyaning nolinchi gipoteza qabul qilinadigan qiymatlari to'plamiga aytiladi.

Statistik gipotezalarni tekshirishning asosiy prinsipi quyidagicha: agar kriteriyaning kuzatilayotgan qiymati kritik sohaga tegishli bo'lsa, nolinchi gipoteza rad qilinadi; agar kriteriyaning kuzatiladigan qiymati gipotezaning qabul qilinish sohasiga tegishli bo'lsa, gipoteza kabul qilinadi.

Agar K bir o'lchovli tasodifiy miqdor bo'lsa, u holda kriteriya- ning qiymati biror intervalga tegishli bo'ladi. Bizga ma'lumki bu interval ikki intervalga, kritik interval va yo'l qo'yiladigan qiymatlar intervaliga ajraladi.

- Kritik nuqtalar (chegaralar) $K_{\text{кг}}$ deb, kritik sohani gipotezaning qabul qilinish sohasidan ajratib turadigan nuqtalarga aytiladi.
- o'ng tomonlama kritik soha deb, $K > K_{\text{кг}}$ tengsizlik bilan aniqlanadigan kritik sohaga aytiladi, bu yerda $K_{\text{кг}}$ - musbat son (7-rasm).



Rasm 7

- Chap tomonlama kritik soha deb $K < K_{\text{кг}}$ tengsizlik bilan aniqlanadigan kritik sohaga aytiladi, bu yerda $K_{\text{кг}} < 0$ son (8-rasm).

K_{kr} 0 K

Rasm 8

Bir tomonlama kritik soha deb, o'ng tomonlama yoki chap tomonlama kritik sohaga aytiladi. Ikki tomonlama kritik soha deb, $K < K^1_{kr}$, $K > K^2_{kr}$ tengsizliklar bilan aniqlanadigan kritik sohaga aytiladi, bu yerda $K^2_{kr} > K^1_{kr}$. Xususan, kritik nuqtalar nolga nisbati simmetrik bo'lsa, u holda ikki tomonlama kritik soha ($K_{kr} > 0$ degan farazda) $K < -K_{kr}, k > K_{kr}$ tengsizliklar bilan yoki bunga teng kuchli bo'lgan $|K| > K_{kr}$ tengsizlik bilan aniqlanadi. Endi K_{kr} qanday topilinishini ko'raylik. Shu maqsadda avvalo qiymatdorlik darajasi α beriladi. So'ngra o'ng tomonlama kritik soha uchun kritik nuqta K_{kr} ni H_0 gipoteza o'rinli bo'lganda kriteriya qiymati K ning K_{kr} dan katta bo'lish ehtimoli oldindan berilgan α ga teng bo'lishlik shartidan topiladi. Ya'ni H_0 o'rinli bo'lganda

$$P(K > K_{kr}) = \alpha \qquad (1)$$

dan topiladi.
Har bir kriteriya uchun maxsus jadvallar berilgan bo'lib [1,2] ulardan berilgan munosabatni qanoatlantiruvchi kritik nuqtaning qiymati topiladi.
Eslatma: kritik nuqta K_{kr} topilgandan keyin tanlanmaning berilganiga ko'ra kriteriyaning kuzatilgan qiymati hisoblanadi va agar $K_{kuz} > K_{kr}$ bo'lsa, u holda H_0 - rad etiladi; agar $K_{kuz} < K_{kr}$ bo'lsa u holda H_0 ni rad etishga asos yo'q. (1)– tenglikdan foydalanganda biz α ehtimollik bilan birinchi tur xatolikka yo'l qo'yayapmiz. Chap tomonlama kritik sohani topish uchun $K < K_{kr}$ tengsizlikdan foydalanamiz. Bunda K_{kr} - kritik nuqta H_0 o'rinli bo'lgan holda $P(K < K_{kr}) = \alpha$ shartdan topiladi.
Ikki tomonlama kritik sohani topish uchun $K < K^1_{kr}$, $K > K^2_{kr}$ tengsizliklardan foydalanamiz, bunda K^1_{kr} va K^2_{kr} - kritik nuqtalar H_0 o'rinli bo'lgan holda $P(K < K^1_{kr}) + P(K > K^2_{kr}) = \alpha$ shartdan topiladi.

§21 Kriteriyaning quvvati.

Biz kritik sohani, H_0 o'rinli bo'lganda bu sohaga kriteriya qiymati tegishli bo'lishning ehtimoli α teng bo'lishlik shartidan topdik. Tajriba shuni ko'rsatadiki, kriteriya qiymatining kritik sohaga tegishli bo'lishlik ehtimolini, H_0 - noto'g'ri bo'lganda, ya'ni H_1 o'rinli bo'lganda, kiritish maqsadga muvofiq ekan. Kriteriyaning quvvati deb H_1- o'rinli bo'lganda kriteriya qiymatining kritik sohaga tegishli bo'lish ehtimoliga aytamiz. Ya'ni: kriteriya quvvati, H_1 to'g'ri bo'lganda H_0-rad etilishi ehtimoliga teng. Gipotezani tekshirish uchun qiymatdorlik darajasi

qabul qilingan va tanlanma hajmi fiksirlangan songa teng bo'lib faqat kritik sohani tanlashda erkinlik qolgan bo'lsin. Kritik sohani, kriteriyaning quvvati eng katta bo'ladigan qilib qurish maqsadga muvofiqligini ko'rsataylik. Avvalo ikkinchi tur xatolikning (noto'g'ri gipoteza kabul qilishning) ehtimoli β ga teng bo'lsa, u holda kriteriyaning quvvati $1-\beta$ ga teng bo'lishiga ishonch hosil qilaylik. Haqiqatdan, agar β - ikkinchi tur xatolikning ya'ni «H_0 - qabul qilindi, H_1 - o'rinli» hodisasining ehtimoli bo'lsa, u holda unga teskari «H_0 - rad etildi, H_1 - o'rinli» hodisaning ehtimoli, ya'ni kriteriyaning quvvati $1-\beta$ ga teng. Agar quvvat $1-\beta$ o'ssa, albatta β ehtimol, ya'ni ikkinchi tur xatolikka yo'l qo'yish kamayadi.
Demak qanchalik kriteriyaning quvvati katta bo'lsa, shunchalik ikkinchi tur xatolikka yo'l quyish ehtimoli kichik bo'ladi.

Eslatma: Kriteriya quvvati, bu ikkinchi tur xatolikka yo'l quyilmaslik ehtimolidir. Shu narsa aniq bo'ldiki, α va β lar qanchalik kichik bo'lsalar, shunchalik kriteriya yaxshi hisoblanadi. Lekin bir vaqtning o'zida α ni ham, β ham kichik qilish mumkin emas. Agar α ni kichraytirsak, β oshib ketib qoladi.

Endi savol tug'iladi: α ni eng maqsadga muvofiq qilib qanday tanlash kerak?

Eslatma: Birinchi va ikkinchi tur xatoliklarning ehtimollarini bir vaqtda kichraytirishning yagona yo'li bu, tanlanma hajmini oshirish.

§22 Pirsonning muvofiqlik kriteriyasi.

Agar, bosh to'plamning taqsimot qonuni noma'lum bo'lib, lekin bu qonun ko'rinishi G' ekanligini tahmin qilishga asos bo'lsa, u holda quyidagi nolinchi gipoteza H_0 ni tekshirishadi: H_0: bosh to'plam G' taqsimot qonuni bilan taqsimlangan. Buning uchun maxsus tanlangan tasodifiy miqdor – muvofiqlik kriteriyasidan foydalaniladi. Muvofiqlik kriteriyasi deb noma'lum taqsimotning tahmin qilingan qonuni haqidagi gipotezani tekshirish kriteriyasiga aytiladi.
Muvofiqlik kriteriyalaridan biri Pirsonning muvofiqlik kriteriyasi bo'lib, bu kriteriya yordamida empirik va nazariy chastota lar taqqoslanadi. Empirik chastotalar deb tanlanmaning kuzatilayotgan chastotalariga aytiladi. Nazariy chastotalar deb bosh to'plamning X miqdoriy belgisi faraz qilingan taqsimot bilan taqsimlangan degan shart bo'yicha nazariy yo'l bilan hisoblangan chastotalarga aytiladi va ular $n_i^{/} = n \cdot P_i$ tenglikdan topiladi. Bu yerda n- tanlanma hajmi, P_i – X miqdoriy belgi diskret bo'lgan holda shu miqdoriy belgining qiymati x_i – ning, faraz qilingan taqsimot bo'yicha hisoblangan ehtimolidir. Agar X – miqdoriy belgi ma'lum bir uzluksiz taqsimot qonuni bilan taqsimlangan degan gipotezani tekshirish kerak bo'lsa, bu holda X-ning barcha qabul qiladigan qiymatlari sohasini teng uzunlikdagi, kesishmaydigan s intervalga bo'lishadi. Tanlanmaning qiymatlari sifatida intervallar o'rtalarini, mos chastotalari sifatida tanlanmaning shu intervalga tushgan qiymatlarining sonini olishadi. Bu holda P_i tanlanma x_i qiymatining i-nchi intervalga tushish ehtimolidir.Pirsonning muvofiqlik kriteriyasini bosh to'plam normal taqsimlanganligini tekshirishda ko'rsatamiz (kriteriya boshqa taqsimotlar uchun ham xuddi shunday ishlatiladi).
Faraz qilamiz, n-hajmli tanlanma berilgan bo'lsin:

$$X_i:\ x_1, x_2, \ldots, x_s$$
$$n_i:\ n_1, n_2, \ldots, n_s$$
$$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_s$$

Berilgan qiymatdorlik darajasi α da bosh to'plam normal taqsimlangan degan gipotezani tekshirish talab qilingan bo'lsin. Buning uchun H_0: - bosh to'plam normal taqsimlangan degan farazda $n_i^{/}$ nazariy chastotalar hisoblanadi. H_0 – ni tekshirish kriteriyasi sifatida quyidagi tasodifiy miqdor olinadi:

$$\chi^2 = \sum \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}; \qquad (1)$$

$n \to \infty$ da bu tasodifiy miqdor taqsimoti ozodlik darajasi k ga teng bo'lgan χ^2-ning taqsimot qonuniga intiladi. k ozodlik darajasi quyidagi tenglikdan topiladi:

$$k = r - s - 1$$

Bu yerda s - tanlanma gruppalari soni (xususiy intervallar).

r – faraz qilingan taqsimotning parametrlari soni.

H_0 gipoteza to'g'ri degan faraz ostida $P(\chi^2 > \chi^2_{kr}(\alpha; k)) = \alpha$ bo'lishlik shartidan kelib chiqib o'ng tomonlama kritik sohani tuzamiz. Shunday qilib o'ng tomonlama kritik soha quyidagi tengsizlik orqali ifodalanadi:

$$\chi^2 > \chi^2_{kr}(\alpha; k)$$

H_0 ni qabul etish sohasi esa quyidagi tengsizlik bilan ifodalanadi.

$$\chi^2 < \chi^2_{kr}(\alpha; k).$$

Kuzatishlar natijasida hisoblangan kriteriyaning qiymatini χ^2_{kuz} bilan belgilaymiz va H_0 ni tekshirish qoidasini keltiramiz:

Qoida: Qiymatdorlik darajasining berilgan qiymatida, H_0 gipotezani tekshirish uchun avvalo nazariy chastota hisoblanadi, so'ngra kriteriyaning kuzatilgan qiymati:

$$\chi^2_{kuz} = \sum \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i} \qquad (2)$$

hisoblanadi va χ^2- taksimotning kritik nuqtalari jadvalidan [1] berilgan qiymatdorlik darajasi bilan, ozodlik darajasi $k = s - 3$ (normal taqsimot uchun $r = 2$) ga mos keluvchi o'ng tomonlama kritik sohaning kritik nuqtasi $\chi^2_{kr}(\alpha; k)$ topiladi. Agarda $\chi^2_{kuz} < \chi^2_{kr}$ bo'lsa, bosh to'plamning normal taqsimlanganligi haqidagi H_0 gipotezani rad etishga asos yo'q. Boshqacha aytganda, empirik va nazariy chastotalar farqi muhim emas (tasodifiy).

Agar $\chi^2_{kuz} > \chi^2_{kr}$ bo'lsa, nolinchi gipoteza rad qilinadi. Boshqacha aytganda, empirik va nazariy chastotalar farqi muhim.

Misol:

$$\alpha = 0{,}05$$

Empirik chastotalar:

n_i : 6, 13, 38, 74, 106, 85, 30, 14

Nazariy chastotalar:

n'_i : 6, 14, 42, 82, 99, 76, 37, 13

H_0: bosh to'plam normal taqsimlangan.

Yechish:

Quyidagi hisoblash jadvalini to'ldiramiz:

1	2	3	4	5	6	7	8
i	n_i	n'_i	$n_i - n'_i$	$(n_i - n'_i)^2$	$\frac{(n_i - n'_i)^2}{n_i}$	n_i^2	$\frac{n_i^2}{n'_i}$
1	6	3	3	9	3	36	12
2	13	14	-1	1	0.07	169	12.07
3	38	42	4	16	0.38	1444	34.38
4	74	82	-8	64	0.78	5476	66.78
5	106	99	7	49	0.49	4236	113.49
6	85	76	9	81	1.07	7225	95.07

7	30	37	-7	49	1.32	900	24.32
8	14	13	1	1	0.08	196	15.08
$\sum$	366	366			$\chi^2_{kuz} = = 7.19$		373.19

Tekshirish: $\chi^2_{kuz} = 7.19$ $\sum \frac{n^2_i}{n'_i} - n = 373.19 - 366 = 7.19$

Demak, hisoblashlar to'g'ri bajarilgan. Tanlanma gruppalari soni $s = 8$. Demak $k = 8 - 3 = 5$.
χ^2 taqsimotining kritik nuqtalari jadvalidan $\alpha = 0{,}05$ va $k = 5$ ga mos keluvchi $\chi^2_{кr}$ qiymatini topamiz:

$$\chi^2_{kr}(0.05;5) = 11.1$$

$\chi^2_{kuz} < \chi^2_{kr}$ bo'lgani uchun H_0 gipotezani rad etishga asos yo'q.
Boshqacha aytganda, empirik va nazariy chastotalar farqi muhim emas (tasodifiy).
Demak kuzatishlar natijasi bilan bosh to'plam normal taqsimlangan degan gipoteza muvofiq keladi.

§23 Normal taqsimotning nazariy chastotalarini hisoblash usuli.

Biz ko'rdikki, Pirson kriteriyasining asosi empirik va nazariy chastotalarni taqqsoslashdan iborat. Empirik chastotalar tajriba yo'li bilan topiladi. Endi bosh to'plam normal taqsimlangan degan faraz ostida nazariy chastotalar qanday topilishining bir usulini ko'ramiz.
1. X belgining kuzatilgan qiymatlar intervalini (tanlanma hajmi n-ga teng) s ta bir xil uzunlikdagi xususiy (x_i, x_{i+1}) intervallarga bo'linadi. Ularning o'rtalari topiladi:

$$x*_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$$

$x*_i$ variantaning chastotasi n_i^* sifatida bu intervalga tushgan variantlar sonini olamiz. Shunday qilib, teng uzoqlikda turuvchi variantalar va ularga mos keluvchi chastotalar ketma-ketligiga ega bo'lamiz:

$$\begin{array}{ll} X*_i & x*_1, x*_2, ..., x*_n \\ n_i^* & n*_1, n*_2, ..., n*_n \end{array}$$

$$\sum n_i^* = n$$

2. Ko'paytmalar yoki yig'indilar usuli yordamida $\overline{X}*_i$ - tanlanma o'rta qiymat va $\tau*$ - tanlanma o'rtacha kvadratik chetlashishni hisoblaymiz.
A) Ko'paytmalar metodi:

$$\begin{array}{ll} X*_i & x*_1, x*_2, ..., x*_m \\ n_i^* & n*_1, n*_2, ..., n*_m \end{array}$$

Bu yerda x_i^* -lar teng uzoqlashgan variantalar va n_i^* -lar mos chastotalar.

$$\overline{X}*_i = M_1 * h + C$$

$$\tau*_i = [M*_2 - (M_1*)] \cdot h^2$$

larni ko'paytmalar metodi bilan topish usuli quyidagicha: Bu yerda h- qadam (ikkita qo'shni varianta orasidagi ayirma); C - soxta nol (eng katta chastotaga ega bo'lgan varianta)

$u_i = \frac{x_i^* - C}{h}$ - shartli variantaga o'tib olib so'ngra

$M_1* = \frac{\sum(n_i^* u_i)}{n}$, $M_2* = \frac{\sum(n_i^* u_i^2)}{n}$ larni hisoblaymiz.

Hisoblashlarni tekshirish uchun

$\sum n_i^*(u_i + 1)^2 = \sum n_i^* u_i^2 + 2\sum n_i^* u_i + n$ ayniyatdan foydalaniladi.

M_1* ва M_2* larni hisoblashlar qo'yidagi jadval ko'rinishiga olib boriladi:

1	2	3	4	5	6
x_i	n_i^*	u_i	$n_i^* u_i$	$n_i^* u_i^2$	$n_i^*(u_i+1)^2$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
	n=N		$\sum n_i^* u_i$	$\sum n_i^* u_i^2$	$\sum n_i^*(u_i+1)^2$

B) Yig'indilar usuli:

(1) – tanlanma empirik taqsimoti berilgan bo'lsin.

Huddi ko'paytmalar usulidagidek bunda ham

$$\overline{X}*_i = M_1 * h + C$$
$$\tau*_i = [M*_2 - (M_1*)] \cdot h^2$$

larni hisoblash talab etiladi. Yig'indilar usulidan foydalanishda birinchi va ikkinchi tartibli shartli momentlar ushbu formulalar bilan topiladi.

$$M_1* = \frac{d_1}{n} \quad M_2* = \frac{S_1 - 2\cdot S_s}{n}$$

Bu yerda $d_1 = a_1 - b_1$, $S_1 = a_1 + b_1$, $S_2 = a_2 + b_2$.

Shunday qilib pirovardida a_1, a_2, b_1, b_2 larni hisoblash lozim. Hisoblashlar quyidagi jadval ko'rinishida olib boriladi.

x_1	n_1	n_1	n_1
x_2	n_2	n_1+n_2	$n_1+(n_1+n_2)$
x_3	n_3	$n_1+n_2+n_3$	$n_1+(n_1+n_2)+$ $+(n_1+n_2+n_3)$
...	...	...	...
x_{S-2}	n_{S-2}	$n_1+n_2+\ldots+n_{S-2}$	$n_1+(n_1+n_2)+\ldots+$ $+(n_1+n_2+\ldots+n_{S-2})$
x_{S-1}	n_{S-1}	$n_1+n_2+\ldots+n_{S-1}$	0
x_S	n_S	0	0
x_{S+1}	n_{S+1}	$n_1+n_2+\ldots+n_{S+1}$	0
x_{S+2}	n_{S+2}	$n_1+n_2+\ldots+n_{S+2}$	$n_1+(n_1+n_2)+\ldots+$ $+(n_1+n_2+\ldots+n_{S+2})$
...	...	...	...

x_{m-2}	n_{m-2}	$n_m + n_{m-1} + n_{m-2}$	$n_m + (n_m + n_{m-1}) +$ $+ (n_m + n_{m-1} + n_{m-2})$
x_{m-1}	n_{m-1}	$n_m + n_{m-1}$	$n_m + (n_m + n_{m-1})$
x_m	n_m	n_m	n_m

Bu yerda x_S - eng katta chastotaga ega bo'lgan varianta

$n = n_1 + n_2 + ... + n_m$, $b_1 = (s-1)n_1 + (S-2)n_2 + ... + 2n_{s-1} + n_s$

$$a_1 = (m-s)n_m + (m-s-1)n_{m-1} + ... + 2n_{s+1} + n_{s+1}$$

$$b_2 = \frac{(s-1)(s-2)}{2}n_1 + \frac{(s-2)(s-3)}{2}n_2 + ... + 2n_{s-3} + n_{s-2}$$

$$a_2 = \frac{(m-s)(m-s-1)}{2}n_m + \frac{(m-s-1)(m-s-2)}{2}n_{m-1} + + ... + 2n_{s+3} + n_{s+2}$$

3) X ni normalaymiz, ya'ni

$$Z = \frac{X - \overline{x}^*}{\tau^*}$$

Tasodifiy miqdorga o'tamiz intervallarning uchlarini hisoblaymiz:

$$z_i = \frac{x_i - \overline{x}*}{\tau*}; \quad z_{i+1} = \frac{x_{i+1} - \overline{x}*}{\tau*}$$

Bunda Z-ning eng kichik qiymatini, ya'ni z_1 ni $-\infty$ ga teng, eng katta qiymatini, ya'ni z_m ni esa $+\infty$ ga teng deb olamiz.

4) Ushbu nazariy chastotalar hisoblanadi:

$$n'_i = n \cdot P_i$$

Bu yerda n-tanlanma hajmi (barcha chastotalar yig'indisi). $P_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$ esa X ning $(x_i; x_{i+1})$ intervallarga tushish ehtimoli, $\Phi(z)$- Laplas funksiyasi.

Misol: Bosh to'plam normal taqsimlangan deb faraz qilib, n=200 hajmli tanlanmaning, bir xil uzunlikdagi intervallar ketma ketligi va ularga mos chastotalar ko'rinishida berilgan empirik taqsimoti bo'yicha nazariy chastotalarini toping.

Interval nomeri	Interval uchlari		Chastotalar
i	x_i	x_{i+1}	h_i
1	4	6	15
2	6	8	26
3	8	10	25
4	10	12	30
5	12	14	26
6	14	16	21
7	16	18	24
8	18	20	20
9	20	22	19

Yechish:

1) $X*_i = \frac{X_i + X_{i+1}}{2}$ o'rtalarini topib quyidagi jadvalni olamiz;

x_i *	5	7	9	11	13	15	17	19	21
n_i	15	26	25	30	26	21	24	20	13

2) Ko'paytmalar usulidan foydalanib $X* = 12.63$, $\tau* = 4.695$ larni topamiz;

3) $(z_i; z_{i+1})$ intervallarni topamiz;

i	x_i	x_{i+1}	$x_i - x^*$	$x_{i+1} - x^*$	$z_i = \frac{x_i - x^*}{\tau^*}$	$z_{i+1} = \frac{x_{i+1} - x^*}{\tau^*}$
1	4	6	-	-6,63	$-\infty$	-1,41
2	6	8	-6,63	-4,63	-1,41	-0,99
3	8	10	-4,63	-2,63	-0,99	-0,156
4	10	12	-2,63	-0,63	-0,156	-0,13
5	12	14	-0,63	1,37	-0,13	0,29
6	14	16	1,37	3,37	0,29	0,72
7	16	18	3,37	5,37	0,72	1,14
8	18	20	5,37	7,37	1,14	1,57
9	20	22	7,37	-	1,57	∞

4) P_i-nazariy ehtimollarni va n'_i- izlanayotgan nazariy chastotalarni topamiz: $n'_i = n \cdot P_i$

Interval uchlari					
z_i	z_{i+1}	$\Phi(z_i)$	$\Phi(z_{i+1})$	$P_i = \Phi(z_i) - - \Phi(z_{i+1})$	$n'_i = nP_i = 200P_i$
$-\infty$	-1,41	-0,5	-0,4207	0,0793	15,86
-1,41	-0,99	-0,4209	-0,3389	0,0818	16,36
-0,99	-0,156	-0,3389	-0,2123	0,1266	25,32
-0,156	-0,13	-0,2123	-0,0517	0,1606	32,16
-0,13	0,29	-0,0517	0,1141	0,1658	33,16
0,29	0,72	0,1141	0,2642	0,1501	30,02
0,72	1,14	0,2642	0,3729	0,1087	21,74
1,14	1,57	0,3729	0,4418	0,0689	13,78
1,57	∞	0,4418	0,5	0,0582	11,64
				$\sum P_i = 1$	$\sum n'_i = = 200$

§24 Korrelyatsiyon analiz elementlari.

Ma'lumki, fizik va biologik jarayonlar, katta sondagi o'zaro bog'liq faktorlar ta'siri ostida kechadi. Ularning orasida, jarayonning asosiy xususiyatlari bilan harakteristikalarini aniqlovchi asosiy faktorlar bilan bir qatorda ikkilamchi faktorlar ham bo'ladi.

Kuzatishlar natijasida olingan ikki tasodifiy miqdorlar orasidagi bog'liqlikni bir miqdorning har bir qiymatiga ikkinchi miqdorning bir necha qiymati mos kelganda, formula ko'rinishda qanday topish mumkin?

Bu formulaning, o'rganilayotgan jarayon asl ma'nosini aks ettiradigan va ikkilamchi tasodifiy faktorlar ta'sirini "silliqlab" beradigan parametrlarini qanday topiladi?

Bir miqdor o'zgarishi ikkinchi miqdor o'zgarishiga qay darajada ta'sir ko'rsatadi?

Va shu singari savollarga javob berishda korrelyatsion analiz metodlarini qo'llash mumkin.

§25 Masalaning qo'yilishi va yechilishi.

Amaliyotda biror tasodifiy miqdor Y ning ikkinchi tasodifiy miqdor X dan bog'liqligini formula ko'rinishda ifodalash va bu bog'liqlik kuchini aniqlash masalasi qo'yiladi. Bu ikki masala korrelyatsion analizning asosiy masalalaridir.

Kuzatishlar natijasida olingan Y va X o'zaro bog'liq tasodifiy miqdorlarning qiymatlarini dastlabki sifat analizi yordamida quyidagi korrelyatsion jadval ko'rinishida yozib olamiz:

Jadval 1.

Y / X	Y_1	Y_2	Y_3	....	Y_n	Σn_{x_i}

X_1	n_{11}	n_{12}	n_{13}	....	n_{1n}	Σn_{x_1}
X_2	n_{21}	n_{22}	n_{23}	....	n_{2n}	Σn_{x_2}
X_3	n_{31}	n_{32}	n_{33}	....	n_{3n}	Σn_{x_3}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
X_m	n_{m1}	n_{m2}	n_{m3}	....	n_{mn}	Σn_{x_m}
Σn_{y_i}	Σn_{y_2}	Σn_{y_3}	Σn_{y_3}	....	Σn_{y_n}	Σn_{xy}

Ikki tasodifiy miqdorlar o'zaro funksional bog'langan bo'lishi, statistik bog'langan bo'lishi yoki o'zaro bog'liqsiz bo'lishi mumkin.

Funksional bog'lanish deb,

$$Y=\varphi(X) \qquad (1)$$

ko'rinishdagi bog'lanishga aytiladi.

Bir tasodifiy miqdorning o'zgarishi, ikkinchi tasodifiy miqdorning taqsimoti o'zgarishiga olib keladigan bog'lanishga statistik bog'lanish deyiladi.

Korrelyatsion bog'lanish- statistik bog'lanishning xususiy holi bo'lib, bunda bir miqdorning o'zgarishi ikkinchi miqdorning o'rtacha qiymati o'zgarishiga olib keladi.

Agar bir miqdorning o'zgarishi ikkinchi miqdorning o'zgarishiga umuman ta'sir etmasa, bu ikki miqdor o'zaro bog'liqsiz deyiladi.

Y miqdor bilan X miqdor funksional bog'liq bo'lmay, korrelyatsion bog'liq bo'lishiga misol keltiramiz.

Y- bug'doy hosili, X- bug'doy dalasiga solingan mineral o'g'it bo'lsin.

Ma'lumki, bir xil dala va bir xil mineral o'g'it berilishiga qaramay ikki daladan ikki xil hosil yig'iladi.

Bunga sabab, har xil o'zga tasodifiy faktorlarning ta'siridir (yog'in-sochin, havoning darajasi va boshqalar). Lekin, tajriba shuni ko'rsatadiki, olingan o'rtacha hosil dalaga solingan mineral o'g'it miqdoriga bog'liq bo'ladi, ya'ni Y va X lar korrelyatsion bog'langandir.

Korrelyatsion bog'lanish ta'rifining matematik modelini qurish uchun, shartli o'rtacha qiymat tushunchasini kiritamiz.

Bizga X va Y tasodifiy miqdorlar bog'lanishini o'rganish talab etilgan bo'lsin.

Shartli o'rtacha_qiymat $\overline{y}_x$ deb, Y miqdorning X=x qiymatiga mos keluvchi o'rtacha arifmetik qiymatiga aytiladi.

Agar X ning har bir x qiymatiga yagona shartli o'rtacha qiymat mos kelsa, bu holda shartli o'rtacha qiymat x ning funksiyasi bo'ladi va Y miqdor X miqdordan korrelyatsion bog'liq bo'ladi.

Demak, Y ning X dan korrelyatsion bog'liqligi deb, $\overline{y}_x$ shartli o'rtacha qiymatning X dan funksional bog'liqligiga aytiladi:

$$\overline{y}_x = f(X) \qquad (2)$$

(2) tenglama Y ning X ga regressiya tenglamasi deyiladi. f(X) funksiya Y ning X ga regressiyasi va uning grafigi nazariy regressiya chizig'i deyiladi.

Shunday qilib biz korrelyatsion analizning ikki asosiy masalasini yechishning matematik modelini yaratdik.

Endi korrelyatsion analizning ikki asosiy masalasini alohida aniqlab olamiz.

Birinchi masala:— korrelyatsion bog'liqlikning formasini, ya'ni regressiya funksiyasi f(X) ning ko'rinishini topish (chiziqli, kvadratik, ko'rsatkichli va hokazolar).

Ikkinchi masala:— korrelyatsion bog'liqlikning zichligini (kuchini) sonli harakteristika bilan ifodalash.

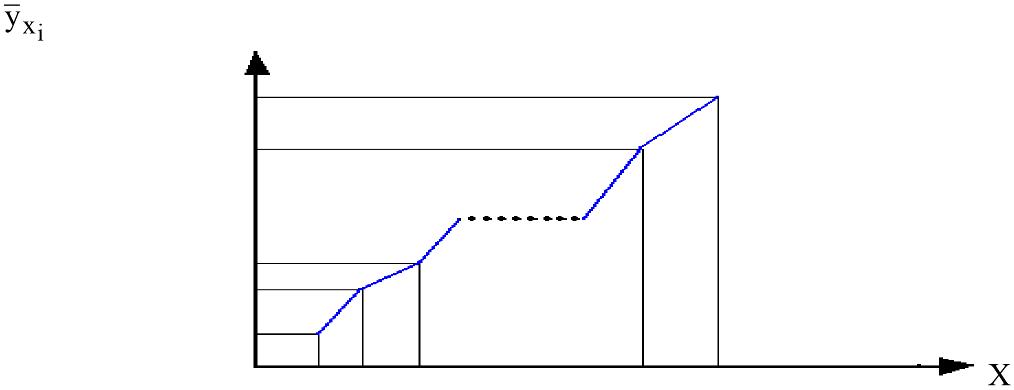
Birinchi masalani yechish uchun regressiyaning empirik chizig'ini topamiz.

1-korrelyatsion jadvalga asosan X miqdorning qiymatlari x_i lar bilan shartli o'rta qiymatlar $\overline{y}_{x_i}$ lar bilan orasidagi moslik jadvalini tuzamiz.

Jadval 2.

X_i	X_1	X_2	X_3	...	X_m
$\overline{y}_{x_i}$	$\overline{y}_{x_1}$	$\overline{y}_{x_2}$	$\overline{y}_{x_3}$	...	$\overline{y}_{x_m}$

So'ngra dekart koordinatalar sistemasida Y o'qni $\bar{y}_x$ bilan belgilaymiz. Bu sistemada $M_i(x_i, \bar{y}_{x_i})$ nuqtalarni belgilab, ulrani kesmalar bilan o'zaro tutashtiramiz. Hosil bo'lgan siniq chiziq Y ning X ga regressiyasining empirik chizig'i deyiladi.(9 rasm)



Rasm 9

§26 Chiziqli korrelyatsiya.

Regressiya chizig'ining formasi va tenglamasini regressiyaning empirik chizig'i ko'rinishiga qarab taxmin qilishadi. Agar
$M_i(x_i, \bar{y}_{x_i})$ nuqtalar biror to'g'ri chiziq atrofida taqsimlangan bo'lsalar, u holda regressiya chizig'i f(X) to'g'ri chiziqli regressiya deb ataladi va f(X) funksiyaning ko'rinishini topish

$$\bar{y}_x = aX + b \qquad (3)$$

funksiya parametrlari a va b larni topishga keltiriladi.

Eng kichik kvadratlar usuli yordamida a va b lar quyidagi tengliklardan topiladi:

$$a = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2}; \qquad b = \bar{y} - a\bar{x}$$

Bu yerda:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{m} n_{x_i} x_i}{N}; \qquad \bar{y} = \frac{\sum_{j=1}^{n} n_{y_j} y_j}{N};$$

$$\overline{xy} = \frac{\sum_{\substack{i=1\\ j=1}}^{\substack{j=n\\ i=m}} n_{x_i y_j} x_i y_j}{N}; \qquad \overline{x^2} = \frac{\sum_{i=1}^{m} n_{x_i} {x_i}^2}{N}; \qquad \overline{y^2} = \frac{\sum_{j=1}^{n} n_{y_j} y_j}{N};$$

Bularni (3) ga qo'yib,

$$\bar{y}_x - \bar{y} = a(x - \bar{x}) \qquad (4)$$

ni hosil qilamiz.

$$a = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2}$$

kattalikni Y nig X ga tanlanma regressiya koeffisienti deb ataymiz, va ρ_{yx} bilan belgilaymiz, ya'ni

$$\rho_{yx} = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\overline{x^2} - (\overline{x})^2}; \qquad (5)$$

(5) ni (4) ga qo'yib,

$$\overline{y}_x - \overline{y} = \rho_{yx}(x - \overline{x}) \qquad (6)$$

tenglamani hosil qilamiz.

Endi $\overline{x^2} - (\overline{x})^2 = \sigma_x{}^2$ va $\overline{y^2} - (\overline{y})^2 = \sigma_y{}^2$ ekanligini hisobga olib, (5) tenglikdan

$$\rho_{yx} = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\sigma_x{}^2}$$

yoki

$$\rho_{yx} \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\sigma_x \sigma_y}$$

tengliklarni hosil qilamiz.

$\rho_{yx} \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$ ni korrelyatsiya koeffisienti deb ataymiz va r_T bilan belgilaymiz:

$$r_T = \rho_{yx} \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\sigma_x \sigma_y};$$

Bu oxirgi tenglikdan:

$$\rho_{yx} = r_T \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x};$$

tenglikni hosil qilamiz va bu qiymatni (6) tenglikka qo'yib,

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r_T \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \overline{x}) \qquad (7)$$

Y ning X ga to'g'ri chiziqli regressiyasining tanlanma tenglamasini hosil qilamiz.

Shunday qilib, birinchi masala yechildi.

Endi ikkinchi masalani qaraymiz. Y ning X dan bog'liqlik zichligi, Y ning qiymatlari shartli o'rtacha qiymat $\overline{y}_x$ atrofida tarqalish (sochilish) kattaligiga bog'liq bo'ladi.

Agar tarqalish kattaligi katta bo'lsa, Y ning X dan kuchsiz bog'liqligini yoki umuman bog'liq emasligini ko'rsatadi.

Tarqalish kattaligining kichik bo'lishi yetarlicha kuchli bog'liqlik borligini ko'rsatadi. Ba'zan, Y bilan X funksional bog'lanishda bo'lsada, ikkilamchi tasodifiy faktorlar ta'siri ostida bu bog'lanish buzilgan, natijada X ning yagona qiymatida, Y bir necha qiymat olishi mumkin.

Agar biz S_y deb Y ning $\overline{y}_x$ shartli o'rta qiymat atrofida kuzatilgan qiymatlarining dispersiyasi (sochilishi) ni, D_y deb Y ning $\overline{y}$ umumiy o'rta qiymat atrofida kuzatilgan qiymatlarining dispersiyasini belgilasak, u holda

$$S_y = D_y(1 - r_T{}^2) \qquad (8)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Bu tenglikdan ko'rinib turibdiki, $|r_T| \le 1$ bo'ladi (chunki $S_y \ge 0$) va S_y katta bo'lishi uchun r_T ning 0 ga yaqin bo'lishi yetarli. Xuddi shunday, S_y kichik bo'lishi uchun $|r_T|$ ning 0 ga yaqin bo'lishi yetarli. Yuqorida aytilganlardan r_T tanlanma korrelyatsiya koeffisienti Y belgi bilan X belgi orasidagi to'g'ri chiziqli bog'liqlikning zichligi me'yorini aniqlab berishi kelib chiqadi. $|r_T|$ qanchalik 1 ga yaqin bo'lsa, bog'liqlik shuncha kuchli, $|r_T|$ qanchalik 0 ga yaqin bo'lsa shuncha kuchsiz bo'ladi.

Misol. Jadval 3.

– Variant	X Y	10	20	30	40	50	60	n_y
	15	5	7	-	-	-	-	12
	25	-	20	23	-	-	-	43
	35	-	-	30	47	2	-	79
	45	-	-	10	11	20	6	47
	55	-	-	-	9	7	3	19
	n_x	5	27	63	67	29	9	N=20

3-jadvalda berilganlarga ko'ra, Y ning X ga to'g'ri chiziqli regressiyasining tanlanma tenglamasini yozing va tanlanma korrelyatsiya koeffisienti orqali Y ning X dan bog'liqlik zichligini aniqlang.

Yechish:

Topilishi kerak bo'lgan nazariy regressiya chizig'i ko'rinishini taxmin qilish uchun empirik regressiya chizig'ini yasab olamiz. Buning uchun har bir x_i ga mos keluvchi $\overline{y}_{x_i}$ larni hisoblab chiqamiz:

$$x_1 = 10 \text{ da } \overline{y}_{x_1} = \frac{15 \cdot 5}{5} = 15;$$

$$x_2 = 20 \text{ da } \overline{y}_{x_2} = \frac{7 \cdot 15 + 20 \cdot 25}{27} = 22{,}41$$

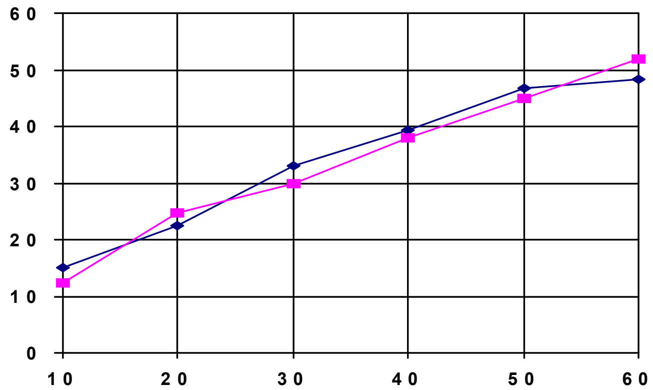
Xuddi shu usulda qolganlarini ham topamiz:

$\overline{y}_{x_3} = 32{,}33;$ $\overline{y}_{x_4} = 39{,}33;$ $\overline{y}_{x_5} = 46{,}72;$ $\overline{y}_{x_6} = 48{,}3$

Natijada quyidagi x_i bilan $\overline{y}_{x_i}$ lar orasidagi moslik jadvali hosil bo'ladi:

Jadval 4

x_i	10	20	30	40	50	60
$\overline{y}_{x_i}$	15	22,41	32,94	39,33	46,72	48,33



Rasm 10.

Empirik regressiya chizig'i grafigidan ko'rinib turibdiki $(x_i, \overline{y}_{x_i})$ nuqtalar to'g'ri chiziq atrofida taqsimlangan bo'lib, bu Y bilan X orasidagi bog'liqlik to'g'ri chiziqli ekanligini ko'rsatadi. Y ning X ga to'g'ri chiziqli regeressiya tenglamasi (7) tenglik bilan berilgan bo'lib, uning parametrlari $\overline{y}$, $\overline{x}$, σ_y, σ_x, va r_T larni topish qoladi.

Hisoblashlarni yengillashtirish uchun shartli variantlarga o'tish maqsadga muvofiqdir:

$$u = \frac{x - c_1}{h_1} \qquad \text{va} \qquad v = \frac{y - c_2}{h_2};$$

Bu yerda s_1 berilgan X belgi qiymatlarining “soxta noli” (yangi sanoq boshi) bo’lib, “soxta nol” sifatida eng katta chastotaga ega bo’lgan X ning qiymatini qabul qilish mumkin; h_1 qadam, X ning ikki qo’shni qiymati orasidagi ayirma. s_1 va h_2 lar mos ravishda tekshirilayotgan Y ning qiymatlarining “soxta noli” va qadami.

U holda korrelyatsiya koeffisienti quyidagi formuladan topiladi:

$$r_T = \frac{\overline{uv} - \overline{u}\,\overline{v}}{\sigma_u \sigma_v}; \qquad (9)$$

Shartli variantlarga o’tish r_T ning qiymatini o’zgartirmaydi.

3-jadvalda berilgan X miqdor qiymatlarining “soxta noli” (sanoq boshi) s_1 deb, eng katta chastotaga ega bo’lgan X miqdorning x=40 qiymatini olamiz. h_1 deb X ning ikki qo’shni qiymatlari orasidagi farqni: 20-10=10 ni olamiz.

U holda

$$u = \frac{x - c_1}{h_1} = \frac{x - 40}{10};$$

Y miqdor qiymatlarining “soxta noli” (sanoq boshi) s_2 deb, eng katta chastotaga ega bo’lgan Y ning qiymati y=35 ni olamiz. h_2 deb, Y ning ikki qo’shni qiymati orasidagi farqni: 25-15=10 ni olamiz.

U holda $v = \frac{y - c_2}{h_2} = \frac{y - 35}{10};$

Shartli variantlar korrelyatsion jadvalini tuzamiz. Buning uchun 3 jadvalni quyidagicha o’zgartiramiz: birinchi ustundagi eng katta chastotaga ega bo’lgan u=35 varianta o’rniga 0 yozamiz va uning tagiga ketma-ket 1, 2 larni, ustiga –1, -2 larni yozamiz. Birinchi qatordagi eng katta chastotaga ega bo’lgan x=40 varianta o’rniga 0 yozamiz va uning o’ng tomoniga ketma-ket 1, 2 larni, chap tomoniga ketma-ket –1, -2, -3 larni yozamiz. qolgan barcha kataklar 2-jadvaldagidek to’ldiriladi. Natijada 5-shartli variantalar korrelyatsion jadvali hosil bo’ladi

Jadval 5

u / v	-3	-2	-1	0	1	2	n_v
-2	5	7	-	-	-	-	12
-1	-	20	23	-	-	-	43
0	-	-	30	47	2	-	79
1	-	-	10	11	20	6	47
2	-	-	-	9	7	3	19
n_u	5	27	63	67	29	9	N=20

Endi $\overline{u}$ ва $\overline{v}$ larni hisoblaymiz:

$$\overline{u} = \frac{\sum n_u u}{N} = \frac{5\cdot(-3) + 27\cdot(-2) + 63\cdot(-1) + 29\cdot 1 + 9\cdot 2}{200} = 0{,}425$$

$$\overline{v} = \frac{\sum n_v u}{N} = \frac{12\cdot(-2) + 43\cdot(-1) + 47\cdot 1 + 19\cdot 2}{200} = 0{,}09$$

Avval $\overline{u^2}$ ni hisoblab, uning yordamida σ_u ni hisoblaymiz:

$$\overline{u^2} = \frac{5\cdot 9 + 27\cdot 4 + 63\cdot 1 + 29\cdot 1 + 9\cdot 4}{200} = 1{,}405$$

$$\sigma_u = \sqrt{\overline{u^2} - (\overline{u})^2} = \sqrt{1{,}405 - (0{,}425)^2} = 1{,}106$$

Xuddi shunday $\sigma_v = 1{,}209$ ni topamiz.

Endi $\overline{uv} = \frac{\sum n_{uv}\cdot u\cdot v}{N}$ qiymatni topish uchun “to’rt chorak” usulidan foydalanib hisoblash jadvalini tuzamiz.

Hisoblash jadvali quyidagicha tuziladi:

Eng katta chastota turgan katakda kesishuvchi ustun va qator bilan 3 jadvalni 4 chorakka bo’lamiz:

-yuqori chapdagi chorakni 1-chorak;

-yuqori o’ngdagi chorakni 2-chorak;

-pastki chapdagi chorakni 3-chorak;

-pastki o’ngdagi chorakni 4-chorak

deb ataymiz. Hisoblashlar qay usulda olib borilishini 1-chorakda ko’rsatamiz. u va v variantlar ko’paytmasini ularga mos chastotasi turgan katakning yuqori o’ng qismiga yozib qo’yamiz.
u=-3 va v=-2 variantlar juftligi 5 marta kuzatilgan.

uv=(-3)·(-2)=6 ko’paytmani 5 chastota turgan katakning yuqori o’ng qismiga yozamiz.
u=-2; v=-2 variantlar juftligi 7-marta kuzatilgan.uv=(-2)(-2)=4 ko’paytmani 7 chastota turgan katakning yuqori o’ng qismiga yozamiz. Hisoblash jadvalining birinchi maydonidagi qolgan kataklar ham xuddi shu usulda to’ldiriladi.

Shunday qilib, har bir n_{uv} chastota turgan katakda uv ko’paytma yozilib qoladi. Bu ko’paytmalarni n_{uv}-chastotalarga ko’paytirib, yozib chiqilsa, izlangan $\Sigma n_{uv}uv$ qiymat hosil bo’ladi. Hisoblash natijasini tekshirish oson bo’lishi uchun, n_{uv} bilan uv ning ko’paytmalarini har bir chorak uchun alohida qo’shiladi; alohida qator bo’yicha va alohida ustun bo’yicha; qator bo’yicha, $\Sigma n_{uv}uv$ yig’indi jadvalning pastida qo’shimcha kiritilgan ikki qatorning yig’indi hisoblangan chorak nomeri bilan belgilanganiga yoziladi.

Jadval 6

U V	-3	-2	-1	0	1	2	I	II
-2	6 5	4 7	-		-	-	58	-
-1	-	2 20	1 23		-	-	63	-
0							III	IV
1	-	-	-1 10		1 20	2 6	-10	32
2	-	-	-		2 7	4 3	-	26
I	30	68	23	II	-	-	121	-
III	-	-	-10	IV	34	24	-10	58

Alohida har bir chorak bo’yicha $\Sigma n_{uv}uv$ sonlar yig’indisi jadvalning pastki o’ng qismidagi to’rtta natija kataklariga mos ravishda yoziladi. (Jadval 6)
Natijaviy 4 ta katakdagi sonlarni yig’ib, izlangan $\Sigma n_{uv}uv$ sonni topamiz:

$$\sum n_{uv}\cdot u\cdot v = 121-10+58;$$

$$\overline{uv} = \frac{\sum n_{uv}\cdot u\cdot v}{N} = \frac{169}{200};$$

Endi biz (9) tenglikka topilgan kattaliklarning qiymatlarini qo’yib, izlangan tanlanma korrelyatsiya koeffisientini topamiz.

$$r_T = \frac{\overline{uv} - \overline{u}\,\overline{v}}{\sigma_u\sigma_v} = \frac{\frac{169}{200} - (-0{,}425)\cdot 0{,}09}{1{,}106\cdot 1{,}209} = 0{,}603$$

Shunday qilib: $r_T = 0{,}603$

Endi Y ning X ga to’g’ri chiziqli tanlanma regressiya tenglamasidagi boshqa parametrlarni hisoblaymiz;

Ular $\sigma_x, \sigma_y, \overline{y}$ ва $\overline{x}$ lar bo’lib, quyidagi formulalar yordamida topiladi:

$$\sigma_x = h_1\cdot\sigma_u,\ \ \sigma_y = h_2\cdot\sigma_v,\ \ \overline{x} = \overline{u}\cdot h_1 + c_1 \ \text{ ва } \ \overline{y} = \overline{v}\cdot h_2 + c_2$$

$$\bar{x} = \bar{u} \cdot h_1 + c_1 = -0,425 \cdot 10 + 40 = 35,75$$
$$\bar{y} = \bar{v} \cdot h_2 + c_2 = 0,09 \cdot 10 + 35 = 35,9$$
$$\sigma_x = h_1 \cdot \sigma_u = 1,106 \cdot 10 = 11,06$$
$$\sigma_y = h_2 \cdot \sigma_v = 1,209 \cdot 10 = 12,09$$

Hosil bo'lganlarni (7) tenglikka qo'yib, izlangan tenglamani topamiz:

$$\bar{y}_x - 35,9 = 0,603 \cdot \frac{12,09}{11,06} \cdot (x - 35,75)$$

$$\bar{y}_x = 0,659 \cdot x + 12,34 \qquad (10)$$

Endi biz

a) Hosil bo'lgan (10) tenglama bo'yicha;
b) 2-jadval bo'yicha;

topilgan shartli o'rtacha qiymatlarni solishtiramiz:

Masalan: x=30 bo'lsa

a) $\bar{y}_{30} = 0,659 \cdot 30 + 12,34 = 32,11$

b) $\bar{y}_{30} = 32,94 \qquad 2 - \text{jadvaldan}$

Ko'rinib turibdiki, (10) bo'yicha hisoblangan va 2-jadvaldan topilgan shartli o'rta qiymatlar yaqinligi qoniqarli darajadadir. Agar bir dekart koordinatalar sistemasida empirik regressiya chizig'i bilan birga (10) formula bilan berilgan nazariy regressiya chizig'ini yasasak, bu yaqinlik yanada yaqqol ko'rinadi (10 rasm).

Natija: (Xulosa)

Bajarilgan misolda 3-jadval bilan berilgan Y va X belgilar orasidagi korrelyatsion bog'liqlikning analitik ko'rinishi (10) formula topildi va bu bog'liqlikning zichligi r_T=0,603 kattalik orqali baholandi. Bundan tashqari empirik regressiya chizig'i bilan nazariy regressiya chizig'i grafiklari solishtirildi.

Shuni xulosa qilib aytish mumkinki:

1. Y bilan X o'zaro to'g'ri chiziqli korrelyatsion bog'liqlik bilan (10) formula ko'rinishida bog'langan.
2. Y ning X dan bog'liqligi r_T=0,603 bo'lib, 0 dan ko'ra 1 soniga yaqin bo'lgani uchun bog'liqlik kuchi yetarlicha katta.
3. 10-rasmdan ko'rinib turibdiki topilgan nazariy regressiya chizig'i empirik regressiya chizig'ini yetarlicha aniq ifodalaydi.

3-BOB. MISOL VA MASALALAR

§ 1 Namunaviy misol va masalalar yechimi

1. Tasodifiy sonlar jadvalidan ikki son tavakaliga olingan. A va B hodisalar mos ravishda olingan sonlarning kamida biri tub son va kamida biri juft son ekanligini bildiradi. *AB* va *A+B* hodisalar qanday hodisalarni aniqlaydi?

Yechilishi. *AB* hodisa *A* va *B*, hodisalarning bir vaqtda ro'y berganligini bildiradi, ya'ni olingan ikki sonning biri tub, ikkinchisi juft. *A* + *B* hodisa esa *A* va *B* hodisalarning kamida biri ro'y berganligini bildiradi, ya'ni olingan sonlarning kamida biri tub yoki kamida biri juft yo'ki kamida biri juft va ikkinchisi tub.

2. Tavakkaliga olingan butun son N ning kubining ohirgi ikki raqami birga tengligi ehtimolini toping.Tavakkaliga olingan son deb biz har bir honasi teng imkoniyat bilan 0 dan 9 gacha bo'lgan raqamlarni qobul qiladigan k-honali sonni tushunamiz (k>1)

Yechilishi. *N* sonini $N=a+10b+...$, ko'rinishda ifodalaymiz, bu yerda *a, b,...* — ihtiyoriy sonlar bo'lib 0 dan 9 gacha bo'lgan sonlarni qobul qilaoladi. U holda $N^3 = a^3 + a^2b + ...$ Bundan ko'rinib turibdiki N^3 ning ohirgi ikki raqamiga faqatgina *a* va *b* larning qiymatlari ta'sir ko'rsata oladi. Shuning uchun mumkin bo'lgan qiymatlar soni n=100. N^3 sonining ohirgi raqami birga teng bo'lganligi sababli birgina a=1 qulaylik tug'diruvchi imkoniyat mavjud. Bundan tashqari $\frac{N^3-1}{10}$ ning ohirgi raqami ham birga teng bo'lishi lozim, ya'ni $3b$ ko'paytma ham bir bilan tugashi lozim. Bu esa faqatgina b=7 da bajariladi. Shunday qilib qulaylik tug'diruvchi imkoniyat yagonadir (a=1, b=7). Demak p=0,01.

3. 200 m. magnitofon lentasining bir yo'liga 20 m intervalda ahborot yozilgan va ikkinchi yo'liga ham huddi shunday ahborot yozilgan. Agar ikkala ahborotlar boshlanishi 0 dan 180 m. gacha teng imkoniyatli bo'lsa, 60 dan 85 m. gacha bo'lgan intervalda yozuv bo'lmagan oraliq bo'lmaslik ehtimolini toping.

Yechilishi. x va y — lar yozuvlar boshlanishlarining koordinatalari bo'lsin. Bundan tashqari $x \geq y$ bo'lsin. $0 \leq x \leq 180$, $0 \leq y \leq 180$ va $x \geq y$ bo'lganligi sababli x va y larning qiymatlari qobul qilishi mumkin bo'lgan soha katetlari 180 m. bo'lgan to'g'ri burchakli uchburchak bo'ladi. Bu uchburchakning yuzasi $S = \frac{1}{2} \cdot 180^2$ $м^2$. ga teng.

Ko'rsatilgan hodisaga qulaylik tug'diruvchi x va y larni topamiz. Uzluksiz yozuv hosil bo'lishligi uchun quyidagi tengsizlik bajarilishi lozim: $x - y \leq 20$ $м$. Yozuv intervali 25 $м$ dan kam bo'lmasligi uchun $x—y \geq 5$ $м$. bo'lishi kerak. Bundan tashqari 60 dan 85 m. gacha uzluksiz yo'zuv hosil bo'lishligi uchun

$$45\ м \leq y \leq 60\ м,\ 65\ м \leq x \leq 80\ м.$$

tengsizliklar bajarilishi kerak.

Bu sohalarning chegaralarini chizib shuni ko'ramizki x va y larning qulaylik tug'diruvchi qiymatlari yuzasi $S_A = \frac{1}{2} \cdot 15^2$ $м^2$ bo'lgan uchburchak ichida bo'lar ekan. Shunday qilib izlanayotgan ehtimollik $p = \frac{S_A}{S} = \left(\frac{15}{180}\right)^2 = \frac{1}{144}$ gat eng bo'ladi.

4. Agar barcha mahsulotning 4% - yaroqsiz, va qolgan yaroqli mahsulotlarning 75%- birinchi sort mahsulot bo'lsa tavakkaliga tanlangan mahsulotning birinchi sort bo'lishligi ehtimolini toping.

Yechilishi. A hodisa tanlangan mahsulot yaroqli, B — hodisa esa tanlangan mahsulot birinchi sort.

Berilgan : $P(A) = 1 — 0,04 = 0,96$, $P(B \mid A) = 0,75$.

Izlanayotgan ehtimollik $p = P(AB) = 0,96 \cdot 0,75 = 0,72$.

5. Yuzta mahsulotdan beshtasi yaroqsiz. Agar tavakkaliga eliktasi tanlanganda ko'pi bilan bittasi yaroqsiz bo'lganda mahsulotlar qobul qilinishi ehtimjlini toping.

Yechilishi. *A* hodisa - tekshirilayotgan mahsulotlar ichida yaroqsizi yo'q. *B* — hodisa esa tekshirilayotgan mahsulotlar ichida faqatgina bittasi yaroqsiz.. Izlanayotgan ehtimollik p=P $(A + B)$. *A* va *B* hodisalar birgalikda emas. Shuning uchun p=P (A) + P(B).

100 mahsulotdan 50 tadan $\tilde{N}_{100}^{50}$ hil usul bilan tanlash mumkin. 95 yaroqli mahsulotdan 50 tani $\tilde{N}_{95}^{50}$ hil usul bilan tanlash mumkin.Shuning uchun $\mathrm{P}(A)=\frac{C_{95}^{50}}{C_{100}^{50}}$. Huddi shuningdek

$$\mathrm{P}(B)=\frac{C_5^1 C_{95}^{49}}{C_{100}^{50}}.$$

U holda

$$p=\frac{C_{95}^{50}}{C_{100}^{50}}+\frac{C_5^1 C_{95}^{49}}{C_{100}^{50}}=\frac{47\cdot 37}{99\cdot 97}=0{,}181.$$

6. Telegraf ahboroti «nuqta» va «tire» belgilaridan tashkil topgan. Hatoliklarning statistic hossasi shudayki, «nuqta» belgisi o'rtacha 2/5 signalga va «tire» belgisi o'rtacha 1/3 signalga hatolik beradi. Shu narsa ma'lumki uzatilayotgan signallar orasida «nuqta» va «tire» 5:3 nisbatda uchraydi. Uzatilayotgan signalning qobul qilinganligining a) «nuqta» belgisi qobul qilingandagi; б) «tire» belgisi qobul qilingandagi
ehtimolini toping.

Yechilishi. *A* — hodisa «nuqta» belgisi qobul qilindi. *B* — hodisa «tire» belgisi qobul qilindi.

Ikki hil farazni oldinga surish mumkin: H_1 — «nuqta» belgisi uzatilgan, H_2 — «tire» belgisi uzatilgan. Shartga ko'ra P(H_1):P(H_2)= 5:3. Bundan tashqari, P(H_1)+P(H_2)= 1. Shuning uchun $\mathrm{P}(H_1)=\frac{5}{8}$, $\mathrm{P}(H_2)=\frac{3}{8}$. Ma'lumki

$$\mathrm{P}\langle A|H_1\rangle=\frac{3}{5},\qquad \mathrm{P}\langle A|H_2\rangle=\frac{1}{3},$$

$$\mathrm{P}\langle B|H_1\rangle=\frac{2}{5},\qquad \mathrm{P}\langle B|H_2\rangle=\frac{2}{3},$$

A va *B* hodisalarning ehtimolini to'la ehtimollik formulasidan topamiz:

$$\mathrm{P}(A)=\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{5}+\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2},\qquad \mathrm{P}(B)=\frac{5}{8}\cdot\frac{2}{5}+\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{2}.$$

Izlanayotgan ehtimolliklar quyidagilarga teng:

a) $$P\langle H_1|A\rangle=\frac{P(H_1)P\langle A|H_1\rangle}{P(A)}=\frac{\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{5}}{1/2}=\frac{3}{4};$$

б) $$P\langle H_2|B\rangle=\frac{P(H_2)P\langle B|H_2\rangle}{P(B)}=\frac{\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{3}}{1/2}=\frac{1}{2}.$$

7. Teng kuchli raqiblarning nimani yutish ehtimoli katta: (durang o'yin bundan mustasno)

a) to'rt partiyadan uchtasini yoki sakkiz partiyadan beshtasinimi

б) to'rt partiyadan kamida uchtasinimi yoki sakizta partiyadan kamida beshtasinimi?

Y e c h i l i s h i . Raqiblar teng kuchli bo'lganligi sababli har bir partiyada yutish va yutqazish ehtimolligi teng va quyidagicha

$$p = q=1/2.$$

a) to'rt partiyadan uchtasini yutish ehtimoli

$$P_{4;3} = C_4^1 \frac{1}{2^4} = \frac{1}{4}.$$

Sakkiz partiyadan beshtasinimi yutish ehtimoli

$$P_{8;5} = C_8^3 \frac{1}{2^8} = \frac{7}{32}.$$

$\frac{1}{4} > \frac{7}{32}$ bo'lganligi uchun to'rt partiyadan uchtasini yutish ehtimoli katta.

б) to'rt partiyadan kamida uchtasinimi yutish ehtimoli

$$R_{4;3} = P_{4;3} + P_{4;4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16},$$

sakizta partiyadan kamida beshtasinimi yutish ehtimoli esa

$$R_{8;5} = P_{8;5} + P_{8;6} + P_{8;7} + P_{8;8} = \frac{7}{32} + \left(\frac{8 \cdot 7}{2} + 8 + 1\right)\frac{1}{2^8} = \frac{93}{256}.$$

$\frac{93}{256} > \frac{5}{16}$ bo'lganligi uchun sakizta partiyadan kamida beshtasinimi yutish ehtimoli katta.

8. 100 ta mahsulotdan iborat partiya orasida 10 ta yaroqsiz mahsulot bor. Tavakkaliga 5 ta mahsulot tekshirishga olingan. Tanlanmadagi yaroqsiz mahsulotlar soni X tasodifiy miqdorning taqsimotini tuzing.

Y e c h i l i s h i . Tanlanmadagi yaroqsiz mahsulotlarning soni 0 dan 5 gacha ihtiyoriy butun sonlarga teng bo'lishi mumkin bo'lganligi uchun, X tasodifiy miqdorning qobul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari x_i lar quyidagilar bo'lishi mumkin:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2,\ x_4 = 3,\ x_5 = 4,\ x_6 = 5.$$

Tanlanmada k $(k = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$ ta yaroqsiz mahsulot bo'lishligining ehtimoli

$$\mathrm{P}(X = k) = \frac{C_{10}^k C_{90}^{5-k}}{C_{100}^5}$$

ga teng.

0,001 aniqlikda berilgan formula bilan hisoblash natijasida quyidagilarni hosil qilamiz:

p_1 = P (X = 0)=0,583, p_2 = P (X = 1)=0,340,

p_3 = P (X = 2)=0,070, p_4 = P (X = 3)=0,007, p_5 = P (X = 4)=0, p_6 = P (X = 5)=0.

$\sum_{k=1}^{6} p_k = 1$ tenglik yordamida tekshirib hisoblashlar to'g'ri olib borilganligiga ishonch yosil qilamiz.

x_i	*0*	*1*	2	*3*	*4*	*5*
p_i	*0,583*	*0,340*	0,070	*0,007*	*0*	*0*

9. Agar A xodisaning har bir sinovda ro'y berish extimoli 0,25 ga teng bo'lsa , bu xodisaning 243 ta sinovda rosa 70 marta ro'y berish extimolini toping.

Y e c h i l i s h i : Masala shartiga ko'ra n=243, k=70, p=0,25, q=0,75; n=243 yetarlicha katta son bo'lgani uchun Laplasning ushbu lokal teoremasidan foydalanamiz:

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x).$$

bu yerda

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}};$$

x ning qiymatini topamiz:

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 243 \cdot 0,25}{\sqrt{243 \cdot 0,25 \cdot 0,75}} = \frac{9,25}{6,75} = 1,73$$

Jadvaldan (Ilova) φ(1,37)=0,1561 ni topamiz

Izlanayotgan extimol

$$P_{243}(70) = \frac{1}{6,75} \cdot 0,1561 = 0,0231$$

10. X- diskret tasodifiy miqdor faqat ikkita x_1 va x_2 qiymatga ega bo'lib $x_1 > x_2$. X-ning x_1 qiymatni qobul qilish extimoli 0,6 ga teng. Matematik kutilish va dispersiya ma'lum: M(x)=1,4. D(x)=0,24. X-ning taqsimat qonunini toping.

Diskret tasodifiy miqdorning barcha mumkin bo'lgan qiymatlarning extimollari yig'indisi birga teng, Shuning uchun X-ning x_2 qiymatni qobul qilish extimoli

1-0,6=0,4 ga teng.

Demak

X:	x_1	x_2
P	0,6	0,4

x_1 va x_2 larni topish uchun bu sonlarni o'zaro bog'laydigan ikkita tenglamani tuzish lozim. Shu maqsadda biz ma'lum matematik kutilish va dispersiyani x_1 va x_2 orqali ifodalaymiz.

M(X) ni topamiz. M(X)=0,6 x_1 + 0,4 x_2 Shartga ko'ra M(X)=1,4 demak

$$0,6\,x_1 + 0,4\,x_2 = 1,4.$$

Ikkinchi tenglamani hosil qilish uchun bizga ma'lum dispersiyani x_1 va x_2 orqali ifodalaymiz. Buning uchun X^2 ning taqsimat qonunini yozamiz:

X^2:	x_1^2	x_2^2
P :	0,6	0,4

$$M(x^2) = 0{,}6x_1^2 + 0{,}4x_2^2;$$

$$Dx = M(x^2) - (M(x))^2 = 0{,}6x_1^2 + 0{,}4x_2^2 - (1{,}4)^2;$$

$D(x) = 0{,}24$ bo'lgani uchun: $0{,}6x_1^2 + 0{,}4x_2^2 = 2{,}2;$

$$\begin{cases} 0{,}6x_1^2 + 0{,}4x_2^2 = 1{,}4; \\ 0{,}6x_1^2 + 0{,}4x_2^2 = 2{,}2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases} \cup \begin{cases} x_1 = 1{,}8 \\ x_2 = 0{,}8 \end{cases}$$

Shartga ko'ra $x_1 > x_2$, shuning uchun masalani faqat birinchi yechim

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases} \qquad (2)$$

qanoatlantiradi. (2) ni (1) ga qo'yib, izlanayotgan taqsimat qonunini hosil qilamiz:

X	1	2
P	0,6	0,4

11. Radiusi *a* bo'lgan aylanadan olingan tasodifiy nuqta radius-vektorining aylana diametriga proektsiyasi *X* ning taqsimot funktsiyasi quyidagicha (arcsinus qonuni)

$$F(x) = \begin{cases} 1 & agar \quad x \geq a \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi}\arcsin\dfrac{x}{a} & agar \ -a < x < a \\ 0 & agar \quad x \leq -a \end{cases}$$

Aniqlang:

a) X ning qiymatlari $\left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$; oraliqqa tushishi ehtimolini; b) X tasodifiy miqdor ehtimolligining zichlik funktsiyasi *f(x)* ni*;*

v) taqsimotning moda va medianasini.

Yechilishi. a) *X* tasodifiy miqdor qiymatlari $\left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$ oraliqqa tushishi ehtimoli quyidagiga teng:

$$P\left(-\frac{a}{2} < X < \frac{a}{2}\right) = F\left(\frac{a}{2}\right) - F\left(-\frac{a}{2}\right) = \frac{2}{\pi}\arcsin\frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

b)*X* tasodifiy miqdor ehtimolligining zichlik funktsiyasi *f(x)* quyidagiga teng:

1) *(-a; a)* oraliqqa tegishli barcha x lar uchun

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}};$$

2) *x* ning qolgan barcha qiymatlarida nolga.

v). $f(x) = \dfrac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}}$ funktsiya maksimumga ega bo'lmagani uchun arcsinus qonuni modaga ega emas. $\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{x_{0,5}}{a} = \frac{1}{2}$, tenglamani yechib $x_{0,5} = 0$ medianani topamiz.

1 2

100 dona mahsulotdan 10 donasining kamchiligi bor. Tekshirish maqsadida barcha mahsulotlardan tasodifiy suratda 5 donasi tanlanadi (tasodifiy tanlanma). Tanlanmadagi kamchiligi bor mahsulotlar sonining matematik kutilmasini toping.

Y e c h i l i s h i . Tanlanmadagi kamchiligi bor mahsulotlarning tasodifiy soni quyidagi qiymatlarni qobul qilishi mumkin:

$$x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=2,\ X_4=3,\ x_5=4,\ x_6=5.$$

Вероятности того, что X tasodifiy miqdorning berilgan x_i qiymatlarni qobul qilishligi ehtimoli p_i = P $(X=x_i)$ quyidagiga teng:

$$p_i=\frac{C_{10}^{i-1}C_{90}^{6-i}}{C_{100}^{5}} \quad (i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6).$$

Izlanayotgan matematik kutilma quyidagiga teng:

$$\bar{x}=\sum_{i=1}^{6}(i-1)\frac{C_{10}^{i-1}C_{90}^{6-i}}{C_{100}^{5}}=\frac{1}{C_{100}^{5}}\sum_{j=0}^{5}j\,C_{10}^{j}C_{90}^{5-j}.$$

$(1+u)^{10}(1+u)^{90}$ ko'paytmadagi u^5 had oldidagi koeffitsient

$\sum_{i=0}^{6}C_{10}^{j}C_{90}^{5-j}$ ga teng bo'lganligi uchun,

$\frac{\partial}{\partial x}\{(1+tu)^{10}(1+u)^{90}\}\Big|_{t=1}=10u(1+u)^{99}$ ifodadagi u^5 oldida turgan koeffitsient $\sum_{j=0}^{5}j\,C_{10}^{j}C_{90}^{5-j}$ ga teng. Shunga ko'ra,

$$\sum_{j=0}^{5}j\,C_{10}^{j}C_{90}^{5-j}=10C_{99}^{4},\ \text{a}\ \bar{x}=\frac{10C_{99}^{4}}{C_{100}^{5}}=0{,}5.$$

1 3

Kemaning yon tomonga chayqalishi amplitudasini tasodifiy miqdor sifatida ko'rsak, uning ehtimolligining zichlik funktsiyasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi: (Relye qonuni)

$$f(x)=\frac{x}{a^2}e^{-\frac{x^2}{2a^2}} \qquad (x\ge 0)$$

Aniqlang:

a) Matematik kutilma M[X] ni, b) Dispersiya D[X] va o'rtacha kvadratik chetlashish σ_x ni; v) uchinchi va to'rtinchi tartibli μ_3 va μ_4
markaziy momentlarni

Y e c h i l i s h i . Momentlarni hisoblash quyidagi ko'rinishdagi integrallarni hisoblashga keltiriladi:

$$J_n=\int_0^{\infty}t^n e^{-t^2}dt \qquad (n>0\ \text{butun}),$$

Bu integral:

n - juft bo'lganda:

$$J_{2k}=\frac{1}{2}\tilde{A}\left(k+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2k-1)!!}{2^{k+1}}\sqrt{\pi},$$

bu yerda

$$(2k-1)!!=(2k-1)(2k-3)(2k-5)...3\cdot 1,$$

va n - toq bo'lganda:

$$J_{2k+1}=\frac{1}{2}\tilde{A}(k+1)=\frac{k!}{2}.$$

a) yon tomonga chayqalish tasodifiy amplitudasinining matematik kutilmasi

$$\bar{x}=\mathrm{M}[X]=\int_0^{\infty}xf(x)dx=\frac{1}{a^2}\int_0^{\infty}x^2e^{-\frac{x^2}{2a^2}}dx.$$

$\frac{x}{a\sqrt{2}}=t$ almashtirish bajarib, quyidagini hosil qilamiz:

$$M[X]=2\sqrt{2a}\int_0^{\infty}t^2e^{-t^2}dt=2\sqrt{2}a\,J_2=2\sqrt{2}\frac{\sqrt{\pi}}{4}a=a\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

b)

$$\sigma_x^2=\mathrm{D}[X]=\mathrm{M}[X^2]-(\bar{x})^2=4a^2J_3-\frac{\pi}{2}a^2=a^2\left(2-\frac{\pi}{2}\right),$$

bo'lganligi uchun $\sigma_x=a\sqrt{2-\frac{\pi}{2}}$ bo'ladi.

v) $\mu_3=\mathrm{M}[(X-\bar{x})^3]=m_3-3\bar{x}m_2+2(\bar{x})^3$ ifodaga

$m_3=4\sqrt{2}\,a^3J_4=3a^3\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ qiymatni qo'yib $\mu_3=a^3(\pi-3)\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ ni hosil qilamiz.

$\mu_4=\mathrm{M}[(X-\bar{x})^4]=m_4-4\bar{x}m_3+6\bar{x}^2m_2-3\bar{x}^4$ ifodaga

$m_4=8a^4J_5=8a^4$ qiymatni qo'yib $\mu_4=a^4\left(8-\frac{3}{4}\pi^2\right)$ ni hosil qilamiz.

14

Radioapparat 1000 ta elektroelementlardan tashkil topgan. Bir yil ichida bitta element buzilishi ehtimolligi 0,001 ga teng va bu ehtimollik qolgan elementlarning holatidan bog'liq emas. Bir yil ichida ikki va hech bo'lmaganda ikkita element buzilishi ehtimolini toping.

Y e c h i l i s h i . X tasodifiy miqdor deb, buzilgan elementlar sonini belgilasak, bu tasodifiy miqdor Puasson qonuni bilan taqsimlangan bo'ladi, ya'ni

$$\mathrm{P}(X=m)=P_m=\frac{a^m}{m!}e^{-a}.$$

Bu yerda a = np = 1000 0,001= 1 ekanligini hisobga olgan holda

1) ikki elementning buzilishi ehtimolligi:

$$\mathrm{P}(X=2)=P_2=\frac{a^2}{2!}e^{-a}=\frac{1}{2e}=0{,}184;$$

2) hech bo'lmaganda ikkita element buzilishi ehtimolligi

$$\mathrm{P}(X\geq 2)=\sum_{m=2}^{\infty}P_m=1-P_0-P_1=1-e^{-a}(1+a)=1-\frac{2}{e}\approx 0{,}264.$$

1 5

Ob'ektgacha bo'lgan masofani o'lchashda, sistematik va tasodifiy hatoliklarga yo'l qo'yiladi. Sistematik hatolik kattaligi 50 *м* gat eng bo'lib, masofa kamaytirilib o'lchangan. Tasodifiy hatoliklar σ =100 *м* o'rtacha kvadratik chetlanishga ega bo'lgan normal qonun bilan taqsimlangan.

1) Absolyut qiymati bo'yicha 150 *м* dan oshmaydirgan hatolik bilan masofani o'lchash ehtimolligini toping.

2) O'lchangan masofaning haqiqiy masofadan oshmasligi ehtimolligini toping.

Y e c h i l i s h i . X deb masofa o'lchashdagi hatoliklar yig'indisini belgilaymiz. Uning sistematik tashkil etuvchisi $\bar{x}$ = -50 *м*.ga teng. Demak hatoliklar yig'indisi ehtimolliklari zichlik funktsiyasi quyidagi ko'rinishga ega:

$$f(x)=\frac{1}{100\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x+50)^2}{20000}}.$$

1)Umumiy formulaga ko'ra

$$\mathrm{P}(|X|<150)=\mathrm{P}(-150<X<150)=\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{150+50}{100}\right)-\Phi\left(\frac{-150+50}{100}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}[\Phi(2)-\Phi(-1)].$$

Ehtimollik integrali toq funktsiya bo'lganligi sababli

$$\Phi(-1)=-\Phi(1).$$

Bundan esa

$$\mathrm{P}(|X|<150)=\frac{1}{2}[\Phi(2)+\Phi(1)].$$

Jadvaldan quyidagilarni topamiz: Φ(2) = 0,9545, Φ(1) = 0,6827;

Demak $\mathrm{P}(|X|<150)=0{,}8186$.

2) O'lchangan masofaning haqiqiy masofadan oshmasligi ehtimolligi

$$\mathrm{P}(-\infty<X<0)=\frac{1}{2}[\Phi(0{,}5)+\Phi(\infty)]$$

$\Phi(\infty)=\lim\limits_{x\to\infty}\Phi(x)=1$ va jadvalga ko'ra Φ(0,5) = 0,3829 bolganligi uchun

$$\mathrm{P}(-\infty<X<0)=0{,}6914$$

bo'ladi.

16. ξ - tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi berilgan.

$$P_\xi(x) = \begin{cases} h, -2 \le x \le 3 \text{ да} \\ 0, x < -2, x > 3 \text{ да} \end{cases}$$

h, $M\xi$, $D\xi$, $P(1<\xi<5)$ ва $F_\xi(x)$ larni toping:

1) $\int_{-\infty}^{\infty} P_\xi(x)dx = \int_{-\infty}^{-2} P_\xi(x)dx + \int_{-2}^{3} P_\xi(x)dx + \int_{3}^{\infty} P_\xi(x)dx = 5h = 1 \Rightarrow h = 0{,}2.$

2) $M_\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xP_\xi(x)dx = \int_{-2}^{3} xP_\xi(x)dx = 0{,}2\int_{-2}^{3} xdx = 0{,}1x^2\Big|_{-2}^{3} = 0{,}5$

3) $D_\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x-0{,}5)^2 \cdot P_\xi(x)dx = \int_{-2}^{3} (x-0{,}5)^2 \cdot 0{,}2dx \approx 2{,}1$

4) $P(1<\xi<5) = \int_{1}^{5} P_\xi(x)dx = \int_{1}^{3} P_\xi(x)dx + \int_{3}^{5} P_\xi(x)dx = \int_{1}^{3} 0{,}2dx = 0{,}4.$

5) Agar x<-2 bo'lsa

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} P_\xi(x)dx = 0$$

Agar x>3 bo'lsa

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} P_\xi(x)dx = \int_{-\infty}^{-2} P_\xi(x)dx + \int_{-2}^{3} P_\xi(x)dx + \int_{3}^{x} P_\xi(x)dx = \int_{-2}^{3} 0{,}2dx = 1$$

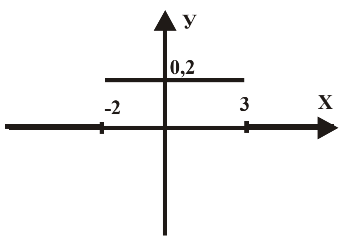
chunki x<-2 da va x>3 da $P_\xi(x) = 0$.

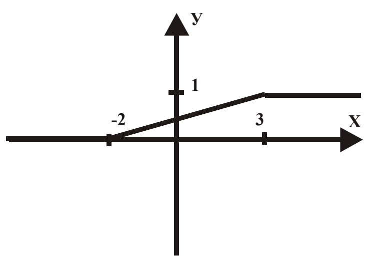
Agar $-2 \le x \le 3$ bo'lsa

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} P_\xi(x)dx = \int_{-\infty}^{-2} P_\xi(x)dx + \int_{-2}^{x} P_\xi(x)dx = \int_{-2}^{x} 0{,}2dx = 0{,}2\cdot(x+2)$$

Shunday qilib

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ 0{,}2(x+2) & -2 \le x \le 3 \\ 1 & x \ge 3 \end{cases}$$





Rasm-11

17. Normal taqsimlangan X- tasodifiy miqdorning matematik kutilishi va dispersiyasi mos ravishda 10 va 2 ga teng. Tajriba natijasida X- ning (12:14) intervalda yotadigan qiymat qabul qilish extimolini toping.

X-ning (α, β) intervalga tegishni qiymat qobul qilish extimoli

$$P(\alpha < x < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\tau}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\tau}\right); \quad \text{bu yerda}$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-x^2/2} dx \quad \text{- Laplas funksiyasidir.}$$

Bunga $\alpha = 12; \beta = 14; a = 10; \tau = 2$ -parni qo'yib

$$\frac{\beta - a}{\tau} = \frac{14 - 10}{2} = 2; \frac{\alpha - a}{\tau} = \frac{12 - 10}{2} = 1$$

va $P(\alpha < x < \beta) = \Phi(2) - \Phi(1);$ -larni hosil qilamiz.

Jadvaldan foydalanib:

$\Phi(2) = 0{,}4772, \Phi(1) = 0{,}3413$ ni opamiz.

Izlanayotgan extimol:

$P(\alpha < x < \beta) = 0{,}1359$ ga teng.

18. Bosh to'plamning normal taqsimlangan X- belgisining noma'lum a- matematik kutilishini 0,95 ishonchlik bilan baholash uchun ishonchlik intervalini toping. Bosh o'rtacha kvadratik chetlanish $\sigma = 5$, tanlanma o'rtacha qiymat $\overline{x} = 14$ va taklanma hajmi $n = 25$ berilgan.

Ushbu ishonchlik intervalini tolish talab etilmoqda:

$$\overline{x} - t\frac{\tau}{\sqrt{n}} < a < \overline{x} + t\frac{\tau}{\sqrt{n}} \qquad (1)$$

Bu yerda t-dan boshqa barcha kattaliklar ma'lum, t ni topamiz:

$2\Phi(t) = 0{,}95$ munosabatdan $\Phi(t) = 0{,}475$ ni xosil qilamiz, Javaldan t=1,96 ni tolamiz, t=1,96, $\tau = 5$, $\overline{x} = 14$, $n = 25$ -larni (1) ga qo'yib uzil-kesil ushbu izlanaetgan ishonchlik intervalini xosil qilamiz: $12{,}04 < a < 15{,}96$

§ 2 Mustaqil yechish uchun misol va masalalar

Berilgan hodisalarning ehtimolini toping.

1. Talaba dasturdagi 60 savoldan 45 tasini biladi. Har bir imtixon bileti uchta savoldan tashkil topgan. Quyidagi xodisalarning extimolini toping:
Talaba tushgan biletning:
a) barcha uchta savolini biladi;
b) faqat ikkita savolini biladi;
v) faqat bitta savolini biladi.

2. Ikkita yashikning birida 5ta oq va ikkinchisida 10ta qora shar bor. Birinchi yaщikdan ikkinchisiga tavakkaliga bir shar olindi, so'ngra ikkinchi yashikdan tavakkaliga bir shar olindi. Olingan shar qora bo'lishligi ehtimolini toping.

3. Uchta mergan bir hil va bog'liqsiz sharoitda bitta mo'ljalga qarab bir martadan o'q uzishdi. Birinchi merganning mo'ljalga o'q tekkizish ehttimoli 0,9 ga, ikkinchisiniki 0,8 ga, uchinchisiniki esa 0,7 ga teng. Quyidagi xodisalarning ehtimolini toping:
a) faqat bir mergan mo'ljalga o'q tekkizdi;
b) faqat ikkita mergan mo'ljalga o'q tekkizdi;

v) uchta mergan ham mo’ljalga o’q tekkizdi.

4. Bir hil va bog’liqsiz tajribalarning har birida xodisaning ro’y berish ehtimoli 0,8 ga teng. 1600 tajribada xodisa 1200 marta ro’y berish ehtimolini toping.

5. Avariya ro’y berishini bildirish uchun uchta bir-biridan bog’liq bo’lmagan xolda ishlovchi qurilma o’rnatilgan. Avariya vaqtida birinchi qurilma ishga tushishining ehtimoli 0,9 ga, ikkinchi qurilma ishga tushishining ehtimoli 0,95ga va uchinchisi ishga tushishining ehtimoli 0,85 ga teng. Quyidagi xodisalarning ehtimoli topilsin:
avariya vaqtida:
a) faqat bitta qurilma ishga tushishi.
b) faqat ikkita qurilma ishga tushishi.
v) barcha qurilmalar ishga tushishi.

6 Bir xil va bog’liqsiz tajribalarning har birida xodisaning ro’y berish ehtimoli 0,02 ga teng. 150 ta tajriba o’tkazilganda xodisa 5 marta ro’y berish ehtimolini toping.

7. 1000 dona tovarda 10 ta yaroqsiz tovar uchraydi.Shu 1000 dona tovardan tavakkaliga 50 dona olinganda ularning rosa 3 donasi yaroqsiz bo’lishligi ehtimolini toping.

8. Bir xil va bog’liqsiz tajribalarning xar birida xodisaning ro’y berish ehtimoli 0,8 ga teng. 125 ta tajriba o’tkazilganda xodisa 75 dan kam bo’lmagan va 90 dan ko’p bo’lmagan marta ro’y berish ehtimolini toping.

9. Uchta dastgoxda bir xil va bog’liqsiz sharoitda bir turli detalь tayyorlanadi. Birinchi dastgoxda 10% detalь, ikkinchisida 30% detalь, uchinchisida 60% detalь tayyorlanadi. Xar bir detalьning yaroqli bo’lib tayyorlanish ehtimoli: birinchi dastgoxda 0,7 ga, ikkinchi dastgoxda 0,8 ga va uchinchi dastgoxda 0,9 ga teng. Barcha tayyorlangan detallardan tavakkaliga olingan detalning yaroqli bo’lishi ehtimolini toping.

10. Aka-uka xar biri 12 kishidan iborat ikkita sport komandasiga qatnashadilar. Ikki yaщikda 1 dan 12 gacha nomerlangan 12 ta bilet bor. Xar bir komanda a’zolari tavakkaliga bittadan biletni aniq bir yaщikdan olishadi. Olingan bilet yaщikka qaytarilmaydi. Ikkala aka-ukaning 6- nomerli bilet olishligi ehtimoli topilsin.

11. Uchta quroldan bir vaqtda mo’ljalga qarab o’q uzishdi. Bir otishda mo’ljalga tekkizish ehtimoli birinchi qurol uchun 0,8 ga, ikkinchi qurol uchun 0,7 ga va uchinchi qurol uchun esa 0,9 ga teng. Quyidagi xodisalarning ehttimolini toping:
a) faqat bir o’q mo’ljalga tegishi;
b) faqat ikkita o’q mo’ljalga tegishi;
v) barcha uchta o’q mo’ljalga tegishi;
g) hech bo’lmaganda bir o’q mo’ljalga tegishi.

12. Uch mergan bir vaqtda mo’ljalga o’q uzishdi. Mo’ljalga o’q tekkizish ehtimoli birinchi mergan uchun 0,7 ga, ikkinchi mergan uchun 0,8 ga, uchinchi mergan uchun esa 0,9 ga teng. Quyidagi xodisalarning ehtimolini toping:
a) faqat bir mergan mo’ljalga o’q tekkizishi;
b) faqat ikki mergan mo’ljalga o’q tekkizishi;
v) barcha uchta mergan mo’ljalga o’q tekkizishi;
g) xech bo’lmaganda bitta mergan mo’ljalga o’q tekkizishi ehtimolini toping.

13. Talaba dasturning 60 ta savolidan 50 tasini biladi.
Imtixon bileti 3 ta savoldan iborat. Quyidagi xodisalarning ehtimolini toping: Talaba
a) faqat ikkita savolni biladi;
b) uchta savolni biladi;

v) hech bo'lmaganda bitta savolni biladi.

14. Xar biri 10 sportchidan iborat ikki komanda musobaqa qatnashchilariga nomer berish uchun qur'a tashlashmoqda. Ikki aka-uka turli komandalarning a'zosidirlar. Aka-ukaning ikkalasi xam musobaqada 5- nomer bilan qatnashish ehtimolini toping.

15. Ikki mergan mo'ljalga bittadan o'q uzishdi. Xar bir merganning mo'ljalga o'q tekkizish ehtimoli 0,8 ga teng. Quyidagi xodisalarning ehtimolini toping:
a) ikkala mergan mo'ljalga o'q tekkizishdi;
b) ikkala mergan mo'ljalga o'q tekkizishmadi;
v) hech bo'lmaganda bir mergan mo'ljalga o'q tekkizishdi.

16. Ikki o'q otishda hech bo'lmaganda bir marta mo'ljalga o'q tekkizish ehtimoli 0,96 ga teng. To'rt marta o'q otishda uch marta mo'ljalga o'q tekkizish ehtimolini toping.

17. Nashriyot ikkita aloqa bo'limiga gazetalar yuboradi. O'z vaqtida gazeta yetib borishi ehtimoli xar bir aloqa bo'limi uchun 0,9 ga teng. Quyidagi xodisalarning ehtimolini toping:
a) ikkala aloqa bo'limiga o'z vaqtida gazeta etib borishi;
b) faqat bir aloqa bo'limiga o'z vaqtida gazeta etib borishi;
v) hech bo'lmaganda bitta aloqa bo'limiga o'z vaqtida gazeta etib borishi.

18. Ikkita yashikning xar birida 2 ta qora va 8 ta oq shar bor. Birinchi yaщikdan tavakkaliga bir shar olinib, ikkinchi yaщikka solindi. So'ngra ikkinchi yaщikdan bir shar olindi. Ikkinchi yaщikdan olingan shar oq bo'lishligining ehtimolini toping.

19. Ikkita harf teruvchilar bir xil xajmda xarf terdilar. Birinchi xarf teruvchi xatoga yo'l qo'yishining ehtimoli 0,051 ga teng, ikkinchisi xatoga yo'l qo'yishining ehtimoli 0,1 ga teng. Terilgan xarflarni tekshirilganda xato topishdi.Bu xatoga birinchi xarf teruvchi yo'l qo'yganligining ehtimolini toping.

20. Bog'liqsiz tajribalarning xar birida xodisaning ro'y berishi ehtimoli 0,8 ga teng. 100 ta tajriba o'tkazilganda xodisaning 70 dan kam bo'lmagan va 80 dan ortiq bo'lmagan marta ro'y berishligining ehtimolini toping.

Diskret tasodifiy miqdor X faqat ikkita x_1 va x_2 qiymat qobul qiladi va $x_1 < x_2$. X ning x_1 qiymatini qobul qilish ehtimoli p_1 ma'lum, matematik kutilmasi M(X) va dispersiyasi D(X) ma'lum. Bu tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

№	R_1	M(X)	D(X)	№	R_1	M(X)	D(X)
1	0,1	1,9	0,09	11	0,2	5,8	0,16
2	0,2	2,8	0,16	12	0,3	6,7	0,21
3	0,3	3,7	0,21	13	0,4	1,6	0,24
4	0,4	4,6	0,24	14	0,5	2,5	0,25
5	0,5	5,5	0,25	15	0,6	3,4	0,24
6	0,6	6,4	0,24	16	0,7	4,3	0,21
7	0,7	1,3	0,21	17	0,8	5,2	0,16
8	0,8	2,2	0,16	18	0,9	6,1	0,09
9	0,9	3,1	0,09	19	0,1	1,2	0,36
10	0,1	4,9	0,09	20	0,2	3,8	0,16

X – tasodifiy miqdor o'zining taqsimot funksiyasi G'(x) bilan berilgan. Uning zichlik funksiyasi, matematik kutilmasi va dispersiyasi topilsin. Taqsimot va zichlik funksiyalarining grafigi chizilsin.

1. $F(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{agar} \quad x \le 0 \\ x^2 \quad \text{agar} \quad 0 < x \le 1 \\ 1 \quad \text{agar} \quad x > 1 \end{cases}$

2. $F(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{agar} \quad x \le 1 \\ \frac{1}{10}(3x^2 + x - 4) \quad \text{agar} \quad 1 < x \le 2 \\ 1 \quad \text{agar} \quad x > 2 \end{cases}$

3. $F(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{agar} \quad x \le -0{,}2 \\ 5x+1 \quad \text{agar} \quad -0{,}2 < x \le 0 \\ 1 \quad \text{agar} \quad x > 0 \end{cases}$

4. $F(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{agar} \quad x \le -\pi \\ \sqrt{2}\cos\frac{x}{2} \quad \text{agar} \quad -\pi < x \le \frac{\pi}{2} \\ 1 \quad \text{agar} \quad x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$

5. $F(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{agar} \quad x \le 0 \\ \frac{\sqrt{x}}{2} \quad \text{agar} \quad 0 < x \le 4 \\ 1 \quad \text{agar} \quad x > 4 \end{cases}$

6. $F(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{agar} \quad x \le 4 \\ \mathrm{Ln}\frac{x}{2} \quad \text{agar} \quad 4 < x \le 4e \\ 1 \quad \text{agar} \quad x > 4e \end{cases}$

7. $F(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{agar} \quad x \le 0 \\ \frac{1}{3}(2x^2 + x) \quad \text{agar} \quad 0 < x \le 1 \\ 1 \quad \text{agar} \quad x > 1 \end{cases}$

8. $F(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{agar} \quad x \le 0 \\ \frac{1}{2}(x^3 + x) \quad \text{agar} \quad 0 < x \le 1 \\ 1 \quad \text{agar} \quad x > 1 \end{cases}$

9. $F(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{agar} \quad x \le 0 \\ 3x^2 + 2x \quad \text{agar} \quad 0 < x \le \frac{1}{3} \\ 1 \quad \text{agar} \quad x > \frac{1}{3} \end{cases}$

10. $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{agar} \quad x \le 0 \\ 2\sin x & \text{agar} \quad 0 < x \le \frac{\pi}{6} \\ 1 & \text{agar} \quad x > \frac{\pi}{6} \end{cases}$

11. $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{agar} \quad x \le 1 \\ \frac{1}{6}(x^2+3x-4) & \text{agar} \quad 1 < x \le 2 \\ 1 & \text{agar} \quad x > 2 \end{cases}$

12. $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{agar} \quad x \le \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5}(3x-1) & \text{agar} \quad \frac{1}{3} < x \le 2 \\ 1 & \text{agar} \quad x > 2 \end{cases}$

13. $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{agar} \quad x \le 0 \\ x^3 & \text{agar} \quad 0 < x \le 1 \\ 1 & \text{agar} \quad x > 1 \end{cases}$

14. $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{agar} \quad x \le -1 \\ \sqrt{x+1} & \text{agar} \quad -1 < x \le 0 \\ 1 & \text{agar} \quad x > 0 \end{cases}$

15. $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{agar} \quad x \le 3 \\ \mathrm{Ln}\frac{x}{3} & \text{agar} \quad 3 < x \le 3e \\ 1 & \text{agar} \quad x > 3e \end{cases}$

16. $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{agar} \quad x \le \frac{3\pi}{4} \\ \cos 2x & \text{agar} \quad \frac{3\pi}{4} < x \le \pi \\ 1 & \text{agar} \quad x > \pi \end{cases}$

17. $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{agar} \quad x \le -1 \\ x^2 & \text{agar} \quad -1 < x \le 1 \\ 1 & \text{agar} \quad x > 1 \end{cases}$

18. $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{agar} \quad x \le 0 \\ \frac{x^2}{9} & \text{agar} \quad 0 < x \le 3 \\ 1 & \text{agar} \quad x > 3 \end{cases}$

$$
19.\ F(x)=\begin{cases} 0 & \text{agar} \quad x \le 0 \\ \frac{1}{4}(x^3-2x) & \text{agar} \quad 0 < x \le 2 \\ 1 & \text{agar} \quad x > 2 \end{cases}
$$

$$
20\ F(x)=\begin{cases} 0 & \text{agar} \quad x \le 2 \\ \frac{1}{2}(x^2-3x) & \text{agar} \quad 2 < x \le 3 \\ 1 & \text{agar} \quad x > 3 \end{cases}
$$

Normal taqsimlangan X- tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi a va o'rtacha kvadratik chetlashishi σ-lar berilgan. Bu tasodifiy miqdorning berilgan (α;β) intervalga tushishligining ehtimolini toping.

№	a	σ	α	β	№	a	σ	α	β
1	2	6	4	9	11	12	4	7	18
2	3	2	3	10	12	13	5	9	18
3	4	2	2	10	13	14	9	11	17
4	5	4	5	9	14	15	8	9	21
5	6	2	4	12	15	16	6	12	9
6	7	2	3	10	16	17	11	9	20
7	8	5	3	15	17	18	6	10	22
8	9	6	5	14	18	19	7	11	23
9	10	4	2	13	19	20	7	13	24
10	11	5	7	17	20	21	9	9	15

Tanlanma o'rtacha qiymati x ga, tanlanma hajmi n ga va o'rtacha kvadratik chetlashishi σ ga teng bo'lgan normal taqsimottning matematik kutilmasi a ning bahosi uchun 0,95 ishonchlilik bilan ishonch intervalini toping.

№	$\bar{x}$	n	σ	№	$\bar{x}$	n	σ
1	74,69	25	2,5	11	74,79	225	7,5
2	74,70	36	3	12	74,80	256	8
3	74,71	49	3,5	13	74,81	289	8,5
4	74,72	64	4	14	74,82	324	9
5	74,73	81	4,5	15	74,83	381	9,5
6	74,74	100	5	16	74,84	400	10
7	74,75	121	5,5	17	74,85	441	10,5
8	74,76	144	6	18	74,86	484	11
9	74,77	169	6,5	19	74,87	529	11,5
10	74,78	196	7	20	74,88	576	12

§3 Korrelyatsiyon analiz elementlaridan mustaqil ish variantlari.

VARIANT-1

Y \ X	18	23	28	33	38	43	m_k
125	1	2					3
150	1	2	5				8
175		3	2	12			17
200			1	8	7		16
225					3	3	6
m_i	2	7	8	20	10	3	n=50

VARIANT-2

Y \ X	5	7	9	11	13	15	m_k
40	2	4					8
50		3	7				6
60			5	30	10		8
70			7	10	8		12

80				5	6	3	11
m_i	4	9	8	9	10	5	n=45

VARIANT-3

Y \ X	10	15	20	25	30	35	m_k
40	2	4					6
50		3	7				10
60			5	30	10		45
70			7	10	8		25
80				5	6	3	14
m_i	2	7	19	45	24	3	n=100

VARIANT-4

Y \ X	7	12	17	22	27	32	m_k
1					2	3	5
4			1	3	2	1	7
7		1	4	3	2		10
10		1	3	3			7
13	3	3					6
m_i	3	5	8	9	6	4	n=35

VARIANT-5

Y \ X	15	20	25	30	35	40	m_k
15	4	1					5
25		6	4				10
35			2	50	2		54
45			1	9	7		17
55				4	3	7	14
m_i	4	7	7	63	12	7	n=100

VARIANT-6

Y \ X	5	10	15	20	25	30	m_k
30	2	6					8
40		5	3				8
50			7	40	2		49
60			4	9	6		19
70				4	7	5	16
m_i	2	11	14	53	15	5	n=100

VARIANT-7

Y \ X	15	20	25	30	35	40	m_k
25	3	4					7
35		6	3				9
45			6	35	2		43
55			12	8	6		26
65				4	7	4	15
m_i	3	10	21	47	15	4	n=100

VARIANT-8

Y \ X	4	9	14	19	24	29	m_k
30	3	3					6
40		5	4				9
50	4		40	2	4		50
60			5	10	6		21
70				4	7	3	14
m_i	7	8	49	16	17	3	n=100

VARIANT-9

Y \ X	15	20	25	30	35	40	m_k
25	3	4					7
35		6	3				9
45			6	35	2		43
55			12	8	6		26
65				4	7	4	15
m_i	3	10	21	47	15	4	n=100

VARIANT-10

Y \ X	2	7	12	17	22	27	m_k
110	1	5					6
120		5	3				8
130			3	40	12		55
140			2	10	5		17
150				3	4	7	14
m_i	1	10	8	53	21	7	n=100

VARIANT-11

Y \ X	10	15	20	25	30	35	m_k

20	5	1					6
30		6	2				8
40			5	40	5		50
50			2	8	7		17
60				4	7	8	19
m_i	5	7	9	52	19	8	n=100

VARIANT-12

Y \ X	5	10	15	20	25	30	m_k
30	2	6					8
40		5	3				8
50			7	40	2		49
60			4	9	6		19
70				4	7	5	16
m_i	2	11	14	53	15	5	n=100

VARIANT-13

Y \ X	11	14	17	20	23	26	m_k
30	1	3					4
60		3	4				7
90			5	11	9		25
120				10	5	3	18
150						2	2
m_i	1	6	9	21	24	5	n=56

VARIANT-14

Y \ X	12	17	22	27	32	37	m_k
25	2	4					6
35		6	3				9
45			6	35	4		45
55			2	8	6		16
65				14	7	3	24
m_i	2	10	11	57	17	3	n=100

VARIANT-15

Y \ X	2	7	12	17	22	27	m_k
100	1	5					6
110		5	3				8
120			3	40	12		55
130			2	10	5		17
140				3	4	7	14
m_i	1	10	8	53	21	7	n=100

VARIANT-16

Y \ X	15	20	25	30	35	40	m_k
15	4	1					5
25		6	4				10
35			2	50	2		54
45			1	9	7		17
55				4	3	7	14
m_i	4	7	7	63	12	7	n=100

VARIANT-17

Y \ X	5	10	15	20	25	30	m_k
100	2	1					3
120		3	4	3			10
140			5	10	8		23
160				2	6	1	9
180					1	4	5
m_i	2	4	9	15	15	5	n=50

VARIANT-18

Y \ X	5	10	15	20	25	30	m_k
45	2	4					6
55		3	5				8
65			5	35	5		45
75			2	8	17		27
85				4	7	3	14
m_i	2	7	12	47	29	3	n=100

VARIANT-19

Y \ X	5	10	15	20	25	30	m_k
10	3	5					8
20		4	4				8
30			7	35	8		50
40			2	10	8		20
50				5	6	3	14
m_i	3	9	13	50	22	3	n=100

VARIANT-20

Y \ X	0	2	4	6	8	10	m_k
7	19	1					20
20	2	14					16
33		1	20	1			2
46				15	6	6	27
59				2	9		11
m_i	21	16	20	18	19	6	n=100

VARIANT-21

Y \ X	11	14	17	20	23	26	m_k
30	1	3					4
60		3	4				7
90			5	11	9		25
120				10	5	3	18
150						2	2
m_i	1	6	9	21	14	5	n=56

VARIANT-22

Y \ X	4	9	14	19	24	29	m_k
30	3	3					6
40		5	4				9
50			40	2	4	4	50
60			5	10	6		21
70				4	7	3	14
m_i	3	8	49	16	17	7	n=100

VARIANT-23

Y \ X	0	1	2	3	4	m_k
10	20	5				25
15	7	15	3	1		26
20		3	17	4		24
25			8	13	7	28
30				5	42	47
m_i	27	23	28	23	49	n=150

VARIANT-24

Y \ X	0	4	6	8	10	m_k
20	19	1	1			21

40	2	14				16
60		3	22	2		27
80				15		15
100					21	21
m_i	21	18	23	17	21	n=100

VARIANT-25

Y \ X	0	1	2	3	4	m_k
9	20	7				27
19	5	15	3			23
29		3	17	8		28
39		1	4	13	5	23
49				7	42	49
m_i	25	26	24	28	47	n=150

VARIANT-26

Y \ X	30	60	90	120	150	180	210	m_k
100	3	2	2	1				8
200	1	4	3	1				9
300		1	5	2				8
400		1	4	4	1			10
500				2	3			5
600				1	4	1		6
700					3	2	1	6
800					1	4	5	10
m_i	4	8	14	11	12	7	6	n=62

VARIANT-27

Y \ X	0	4	5	7	m_k
5	10	5	5		20
10	5	25			30
15			14	13	27
20			13	10	23
m_i	15	30	32	23	n=100

VARIANT-28

Y \ X	13	15	17	19	21	23	25	m_k
15					7	5	3	15
25			3	5	4	2		14
35			6	8	4			18
45	1	4	3	1				9

55	2	5						7
m_i	3	9	12	14	15	7	3	n=63

VARIANT-29

Y \ X	3	9	12	15	21	27	m_k
35				1		1	2
45			1	5	4	5	15
55			2	18	10	2	32
65		6	14	2	2		24
75		6	3				9
85	4	8					12
95	6						6
m_i	10	20	20	26	16	8	n=100

VARIANT-30

Y \ X	18	24	30	36	42	m_k
55			1	1	1	3
65	1	4	3	2		10
75	1	8	5	4		18
85	4	6	3			13
95	3	3				6
m_i	9	21	12	7	1	n=50

A d a b i yo t l a r:

1. В.П. Гмурман Теория вероятностей и математическая статистика. М.1999.
2. В.П. Гмурман Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистики. М. 2000.
3. S.X.Sirojiddinov, M.M.Mamatov Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika T. “O’qituvchi”. 1980y. Gosizdat 1947.
4. Б.А.Севостьянов Курс теории вероятностей и математической статистики. Москва. 1982.
5. В.Н.Калинина, В.Ф. Панкин. Математическая статистика. М.1998.
6. Л.З.Румшиский. Элементы теории вероятностей. М.1970.
7.Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. Теория вероятностей и ее инженерные приложение. М.2000.
8.Р.Р.Абзалимов Элементарные сведения из теории корреляции Методические указания. Тошкент –1997г.
9.Калинина В.М. Математическая статистика.М.Дрофа,2002 г.336стр.
10. Бородин А.Н. Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики. СПБ-Лань, 2002 г. 256 стр.
11. Манита А.Д. Теория вероятностей и математическая статистика. Интернет – учебник. WWW.teor.ver.-online.narod.ru
12. Корнилов Г.И. Математическая статистика. Конспект лекций. Кафедра информационных систем и высшей математики. Институт делового Админстрирования.Кривой Рог.Библиотека Интернет–учебник. WWW.5 ballov.ru.
13. Рыбников К.А. Учебник по математической статистики. Интернет – учебник. WWW.5 ballov.ru.
14. Боровиков В.П. Ивченко Г.И. Учебник по математической статистике с упражнениями в системе Statistica. Интернет – учебник. WWW.5 ballov.ru.

Ilovalar:

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$ funksiyaning qiymatlari jadvali.

Jadval 1

x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)
0,00	0,0000	0,29	0,1141	0,58	0,2190	0,87	0,3078
0,01	0,0040	0,30	0,1179	0,59	0,2224	0,88	0,3106
0,02	0,0080	0,31	0,1217	0,60	0,2257	0,89	0,3133
0,03	0,0120	0,32	0,1255	0,61	0,2291	0,90	0,3159
0,04	0,0160	0,33	0,1293	0,62	0,2324	0,91	0,3186
0,05	0,0199	0,34	0,1331	0,63	0,2357	0,92	0,3212
0,06	0,0239	0,35	0,1368	0,64	0,2389	0,93	0,3238
0,07	0,0279	0,36	0,1406	0,65	0,2422	0,94	0,3264
0,08	0,0319	0,37	0,1443	0,66	0,2454	0.95	0,3289
0,09	0,0359	0,38	0,1480	0,67	0,2486	0,96	0,3315
0,10	0,0398	0,39	0,1517	0,68	0,2517	0,97	0,3340
0,11	0,0438	0,40	0,1554	0,69	0,2549	0,98	0,3365
0,12	0,0478	0,41	0,1591	0,70	0,2580	0,99	0,3389
0,13	0,0517	0,42	0,1628	0,71	0,2611	1,00	0,3413
0,14	0,0557	0,43	0,1664	0,72	0,2642	1,01	0,3438
0,15	0,0596	0,44	0,1700	0,73	0,2573	1,02	0,3461
0,16	0,0636	0,45	0,1736	0,74	0,2703	1,03	0,3485
0,17	0,0675	0,46	0,1772	0,75	0,2734	1,04	0,3508
0,18	0,0714	0,47	0,1808	0,76	0,2764	1,05	0,3531
0,19	0,0753	.0.48	0,1844	0,77	0,2794	1,06	0,3554
0,20	0,0793	0,49	0,1879	0,78	0,2823	1,07	0,3577
0,21	0,0832	0,50	0,1915	0,79	0,2852	1,08	0,3599
0,22	0,0871	0,51	0,1950	0,80	0,2881	1,09	0,3621
0,23	0,0910	0,52	0,1985	0,81	0,2910	1,10	0,3643
0,24	0,0948	0,53	0,2019	0,82	0,2939	1,11	0,3665
0,25	0,0987	0,54	0,2054	0,83	0,2967	1.12	0,3686
0,26	0,1026	0,55	0,2088	0,84	0,2995	1,13	0,3708
0,27	0,1064	0,56	0,2123	0,85	0,3023	1,14	0,3729
0,28	0,1103	0,57	0,2157	0,86	0,3051	1,15	0,3749

x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)
1,16	0,3770	1,47	0,4292	1,78	0,4625	2,18	0,4854
1,17	0,3790	1,48	0,4306	1,79	0,4633	2,20	0,4861
1,18	0.3810	1,49	0,4319	1,80	0,4641	2,22	0,4868
1,19	0,3830	1,50	0,4332	1,81	0,4649	2,24	0,4875
1,20	0,3849	1,51	0,4345	1,82	0,4656	2,26	0,4881

1,21	0,3869	1,52	0,4357	1,83	0,4664	2,28	0,4887
1,22	0,3883	1,53	0,4370	1,84	0,4671	2,30	0,4893
1,23	0,3907	1,54	0,4382	1,85	0,4678	2,32	0,4898
1,24	0,3925	1,55	0,4394	1,86	0,4686	2,34	0,4904
1,25	0,3944	1,56	0,4406	1,87	0,4693	2,36	0,4909
1,26	0,3962	1,57	0,4418	1,88	0,4699	2,38	0,4913
1,27	0,3980	1,58	0,4429	1,89	0,4706	2,40	0,4918
1,28	0,3997	1,59	0,4441	1,90	0,4713	2,42	0,4922
1,29	0,4015	1,60	0,4452	1,91	0,4719	2,44	0,4927
1.30	0,4032	1,61	0.4463	1,92	0,4726	2,46	0,4931
1,31	0,4049	1,62	0,4474	1,93	0,4732	2,48	0,4934
1,32	0,4066	1,63	0,4484	1,94	0,4738	2,50	0,4938
1,33	0,4082	1,64	0,4495	1,95	0,4744	2,52	0,4941
1.34	0,4099	1,65	0,4505	1,96	0,4750	2,54	0,4945
1,35	0,4115	1,66	0,4515	1,97	0,4756	2,56	0,4948
1,36	0,4131	1,67	0,4525	1,98	0,4761	2,58	0,4951
1,37	0,4147	1,68	0,4535	1,99	0,4767	2,60	0,4953'
1,38	0,4162	1,69	0,4545	2,00	0,4772	2,62	0,4956
1,39	0,4177	1,70	0,4554	2,02	0,4783	2,64	0,4959
1,40	0.4192	1.71	0,4564	2,04	0,4793	2,66	0,4961
1,41	0,4207	1,72	0,4573	2,06	0,4803	2,68	0,4963
1,42	0,4222	1,73	0,4582	2,08	0,4812	2,70	0,4965
1,43	0,4236	1,74	0,4591	2,10	0,4821	2,72	0,4967
1,44	0,4251	1,75	0,4599	2,12	0,4830	2,74	0,4969
1,45	0,4265	1,76	0,4608	2,14	0,4838	2,76	0,4971
1,46	0,4279	1,77	0.4616	2,16	0,4846	2,78	0,4973

x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)
2,80	0,4974	2,90	0,4981	3,00	0,49865	4,00	0,49996
2,82	0,4976	2,92	0,4982	3,20	0,49931	4,50	0,49999
2,84	0,4977	2,94	0,4984	3,40	0,49966	5,00	0,49999
2,86	0,4979	2,96	0,4985	3,60	0,49984		
2,88	0,4980	2,98	0,4986	3,80	0,49992		

$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ funksiyaning qiymatlari jadvali.

Jadval 2

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0.3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0.3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0.4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0.7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1.0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1.1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1.2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957

1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0149
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2.2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2.7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,6	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046

γ / n	0,95	0,99	0,999	γ / n	0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,729	3,600
9	2,31	2,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3.3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	.010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3.6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3.9	0002	0102	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

$t_\gamma = t(\gamma, n)$ - ning qiymatlari jadvali.

Jadval 3

$q = q(\gamma, n)$ - **ning qiymatlari jadvali.**

Jadval 4

γ / n	0,95	0,99	0,999	γ / n	0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162