O’ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O’RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

Toshkent Moliya Instituti

E. Mamurov
T. Adirov

Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika

o’quv qo’llanma

Toshkent-2005

E. Mamurov, T. Adirov. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika. O’quv qo’llanma. Toshkent Moliya instituti, 2005. 152 b.

Ushbu o’quv qo’llanma O’zbekiston Respublikasi Oliy va o’rta maxsus ta’lim vazirligi tomonidan tasdiqlangan «Biznes va boshqaruv» ta’lim sohasidagi barcha bakalavriat yo’nalishlari uchun ta’lim standartlari talablariga muvofiq ehtimollar nazariyasi va matematik statistika kursi bo’yicha yozilgan. Unda asosiy e’tibor talabalarning ushbu fanni to’liqroq o’zlashtirishlari uchun yordam berishga qaratilgan.

O’quv qo’llanma Toshkent Moliya instituti qoshidagi Oliy o’quv yurtlararo ilmiy-uslubiy Kengash majlisida muhokama qilingan va nashrga tavsiya etilgan

Taqrizchilar: TAYI «Oliy matematika» kafedrasining
mudiri, professor M.U.G’ofurov
Fizika-matematika fanlari nomzodi,
dotsent Hamdamov I.

1-§.Fanga kirish. Dastlabki tushunchalar. Ehtimollik. Ehtimolning turli ta'riflari. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fanining iqtisodiy jarayonlarni o'rganishdagi ahamiyati.

Ehtimollar nazariyasi fanining dastlabki tushunchalari shakllangan davr XVI-XVII asrlar bo'lib, Kardano, Gyuygens, Paskal, Ferma va Yakov Bernulli kabi olimlarning nomlari bilan bog'liqdir. Ehtimollar nazariyasining paydo bo'lishiga qimor o'yinlarining matematik modellarini va nazariyasini yaratish yo'lidagi izlanishlar turtki bo'ldi.

Ehtimollar nazariyasining keyingi yutuqlari Muavr, Laplas, Puasson kabi olimlarning nomlari bilan bog'liq.

Ehtimollar nazariyasining yangi samarali rivoji Chebishev, Markov, Lyapunov kabi rus olimlarining ilmiy izlanishlari bilan bog'liq bo'ldi. Fanning mustaqil fan bo'lib uyg'unlashishida va keyingi rivojida Bernshteyn, Romanovskiy, Kolmogorov, Xinchin, Gnedenko, Smirnov va boshqalarning xizmatlari katta bo'ldi. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fanining rivojida S. X. Sirojiddinov, T. A. Sarimsoqov kabi zabardast o'zbek olimlarining ham munosib hissalari bor. Hozirgi kunda bu ikki olimning shogirdlari tomonidan O'zbekistonda ham ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fani bo'yicha ham nazariy, ham amaliy tadqiqotlar davom ettirilmoqda.

Ehtimollar nazariyasining dastlabki tushunchalari – tajriba, hodisa, elementar hodisa, ehtimollik, nisbiy chastota kabi tushunchalar bo'lib, ularni bayon qilishga o'tamiz.

Tajriba hodisani ro'yobga keltiruvchi tayin shartlar to'plami S ning bajarilishidan iboratdir. Hodisani esa tajriba natijasi sifatida qaraymiz.

Masalan, tajriba tangani muayyan sharoitda tashlashdan iborat bo'lsin. Tanga va uni tashlash S shartlar to'plamini tashkil etsa, tajriba natijalari tanganing "gerb" yoki "raqam" tomonlari bilan tushishi hodisalaridir.

Biz kuzatgan hodisalarni uch turga ajratish mumkin: muqarrar, ro'y bermaydigan va tasodifiy hodisalar.

Muqarrar hodisa deb, tajriba natijasida albatta ro'y beradigan hodisaga aytiladi va biz bunday xodisani Ω (omega) harfi bilan belgilaymiz.

Mumkin bo'lmagan hodisa deb, tajriba natijasida mutlaqo ro'y bermaydigan hodisaga aytiladi va bu hodisani $\varnothing$ belgisi bilan belgilaymiz.

Tasodifiy hodisa deb, tajriba natijasida ro'y berishi ham, ro'y bermasligi ham mumkin bo'lgan hodisaga aytiladi. Tasodifiy hodisalarni A, V, S, … katta lotin harflari bilan belgilaymiz.

Misol: O'yin kubigi bir marta tashlanadi. Bu holda

$\mathbf{\Omega} =$ { tushgan ochko 6 dan katta emas} – muqarrar hodisa;

$\varnothing =$ {tushgan ochko 10 ga teng} – mumkin bo'lmagan hodisa;

A = {tushgan ochko juft son} – tasodifiy hodisalardir.

Albatta bu tajribaga mos bo'lgan boshqa ko'plab hodisalarni ta'riflashimiz mumkin.

Elementar hodisa deb, tajribaning har qanday natijasiga aytiladi, hamda ω harfi bilan belgilanadi. Tajriba natijasida ro'y berishi mumkin bo'lgan barcha elementar hodisalar to'plami elementar hodisalar fazosi deyiladi. Elementar hodisalar fazosi $\mathbf{\Omega}$ kabi belgilanadi.

Misollar:

1. Tajriba tangani ikki marta tashlashdan iborat bo'lsin. Bunda elementar hodisalar quyidagicha bo'ladi:

$$\omega_1=(gg),\ \omega_2=(gr),\ \omega_3=(rg),\ \omega_4=(rr).$$

Elementar hodisalar fazosi $\mathbf{\Omega}$ to'rt elementdan iborat:

2. Agar tanga uch marta tashlansa, u holda

$$\omega_1=(ggg),\ \omega_2=(ggr),\ \omega_3=(grr),\ \omega_4=(rrr)$$

$$\omega_5=(rrg),\ \omega_6=(rgg),\ \omega_7=(rgr),\ \omega_8=(grg).$$

3. Tajriba o'yin kubigini ikki marta tashlashdan iborat bo'lsin. Bu holda $\omega_{ij}=(i,j)$ bo'lib, i-birinchi tashlashda tushgan ochkoni bildiradi.

$$\Omega=\{\omega_{ij}\},\ i=1,6,\ j=1,6$$

va elementar hodisalar soni n=36 ga teng.

4. Tajriba nuqtani **[a;b]** kesmaga tashlashdan iborat bo'lsin. Bunda **Ω=[a;b]** to'plamidan iboratdir.

Biz yuqorida hodisalarni uch turga bo'lgan edik. O'z navbatida tasodifiy hodisalarni ham quyidagi turlarga ajratamiz.

Birgalikda bo'lmagan hodisalar deb, bitta tajribada birining ro'y berishi qolganlarining ro'y berishini yo'qqa chiqaradigan hodisalarga aytiladi.

Agar tajriba natijasida bir nechta hodisalardan bittasi va faqat bittasining ro'y berishi muqarrar hodisa bo'lsa, u holda bu hodisalar *yagona mumkin bo'lgan* hodisalar deyiladi.

Agar bir nechta hodisalardan hech birini boshqalariga nisbatan ro'y berishi mumkinroq deyishga asos bo'lmasa, ular **teng imkoniyatli hodisalar** deyiladi.

Bizni qiziqtirayotgan hodisaning ro'y berishiga olib keladigan elementlar hodisalarni bu hodisaning ro'y berishiga qulaylik tug'diruvchi deb ataymiz.

Ehtimol tushunchasi asosiy tushunchalardan biri bo'lib, uning bir nechta ta'rifi mavjud.

Umumiy qilib aytganda, ehtimol - tasodifiy hodisaning ro'y berish imkoniyatini miqdoriy jihatdan xarakterlovchi sondir. Quyida ehtimolning klassik ta'rifini keltiramiz.

Ta'rif. A hodisaning ehtimoli deb, bu hodisa ro'y berishiga qulaylik tug'diruvchi elementar natijalar sonining tajribaning yagona mumkin bo'lgan va teng imkoniyatli elementar natijalari jami soniga nisbatiga aytiladi hamda **R(A)** = $\frac{m}{n}$ formula bilan aniqlanadi.

Ehtimolning klassik ta'rifidan bevosita quyidagi xossalar kelib chiqadi.

1-xossa. Muqarrar hodisaning ehtimoli 1 ga teng.

Haqiqatan ham, bu holda **m=n** va demak.

$$\mathbf{P(\Omega)} = \frac{m}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

2-xossa. Mumkin bo'lmagan hodisaning ehtimoli nolga teng, bu holda

m=0 va **P(∅)** $= \frac{m}{n} = \frac{0}{n} = 0$

3-xossa. Tasodifiy hodisaning ehtimoli nol va bir orasida yotuvchi sondir.

0<R(A)<1

Shunday qilib, istalgan hodisaning ehtimoli quyidagi munosabatni qanotlantiradi.

0≤R(A) ≤1

Ehtimolning yuqorida keltirilgan klassik ta'rifi cheklangan bo'lib, hamma masalalarga ham qo'llanilavermaydi. Jumladan, elementar natijalari soni cheksiz yoki elementar natijalari teng imkoniyatli bo'lmagan tajribalarda klassik ta'rifni qo'llab bo'lmaydi.

Shu sababli klassik ta'rif bilan bir qatorda hodisaning ehtimoli sifatida nisbiy chastota yoki unga yaqinroq sonni olib, statistik ta'rifdan ham foydalaniladi.

Statistik ta'rif nisbiy chastotaning turg'unlik hossasiga asoslanadi. Bu xossa shundan iboratki, ko'p sondagi tajribalar seriyasi uchun A hodisaning n ta tajribada ro'y berishlari nisbiy chastotasi deb ataluvchi $W(A) = \frac{v}{n}$ nisbat deyarli o'zgarmas miqdor bo'lib qolaveradi. Bu erda v - A hodisaning n ta tajribada ro'y berishlari soni. Nisbiy chastotaning turg'unlik xossasi birinchi bor demografik harakterdagi hodisalarda ochilgan. Bizning eramizdan 2000 yillar burun qadimiy Xitoyda o'g'il bolalar tug'ilishlar sonining jami tug'ilgan bolalar soniga nisbati deyarli **1/2** ga teng ekanligi hisoblangan. Bu sonning barcha davrlar uchun o'zgarmay qolishini statistik ma'lumotlar tasdiqlaydi.

Nisbiy chastotaning turg'unlik xossasiga yana bir misol sifatida tanga tashlash tajribasini ko'ramiz. Tanga tashlash tajribalari ko'p marta o'tkazilib, ularda «gerb» tomoni tushishi soni sanalgan. Bir nechta tajribalarning natijalari quyidagicha bo'lgan

Tanga tashlashlar soni	Gerb tomon tushishlar soni	Nisbiy chastota
4.040	2.048	0.5069
12.000	6.019	0.5016
24.000	12.012	0.5005

Bu tajribalarda W(A) nisbiy chastota o’zgarmas r=0.5 soni atrofida tebranayapti, shu 0,5 son tanga tashlashda «gerb» tomon tushishi hodisasining ehtimoli sifatida olinishi tabiiydir.

Umuman, agar tajribalar soni etarlicha ko’p bo’lib, shu tajribalarda qaralayotgan A hodisaning ro’y berishi nisbiy chastotasi –W(A) biror o’zgarmas $\mathbf{r\in[0;1]}$ son atrofida turg’un ravishda tebransa, shu R sonni A hodisaning ro’y berish ehtimoli deb qabul qilamiz. Bunday usulda aniqlangan ehtimol hodisaning statistik ehtimoli deyiladi.

Ba’zan geometrik mulohazalarga asoslangan masalalarda ehtimolning geometrik ta’rifi qo’llaniladi. Ushbu ta’rifni bayon qilishga o’tamiz.

Biror G soha berilgan bo’lib, bu soha g sohani o’z ichiga olsin. G sohaga tavakkaliga tashlangan nuqtaning g sohaga xam tushish ehtimolini topish talab etilsin. Bu erda $\mathbf{\Omega}$ elementar hodisalar fazosi G ning barcha nuqtalaridan iborat va cheksizdir. Shuning uchun, bu holda klassik ta’rifdan foydalana olmaymiz. Tashlangan nuqta G ga tushish ehtimoli shu g qismining o’lchoviga (uzunligiga, yuziga, hajmiga) proportsional bo’lib, g ning shakliga va g ni G sohaning qaerida joylashganligiga bog’liq bo’lmasin. Bu shartlarda qaralayotgan hodisaning ehtimoli

$$R = \frac{\text{G ning ulchovi}}{\text{G ning ulchovi}}$$

formula yordamida aniqlanadi. Bu formula yordamida aniqlangan R ehtimollik ehtimolning barcha xossalarini qanoatlantiradi.

Misol. Radiusi R bo’lgan doira ichiga tavakkaliga nuqta tashlangan. Tashlangan nuqta doiraga ichki chizilgan:

a) kvadrat ichiga:

b) muntazam uchburchak ichiga tushishi ehtimolini toping. Nuqtaning yassi figuraga tushishi ehtimoli bu figuraning yuziga proportsional bo'lib, uning joylashishiga esa bog'liq emas deb faraz qilinadi.

Echilishi.

a) geometrik ehtimollar ta'rifiga ko'ra izlanayotgan ehtimollik

$$P = \frac{\text{Kvadratnig yuzi}}{\text{Doiraning yuzi}} = \frac{2R^2}{\pi R^2} = \frac{2}{\pi}$$

b) Bu xolda, muntazam uchburchak yuzi $\frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$ ekanligini hisobga olsak:

$$P = \frac{\text{Uchburchak yuzi}}{\text{doira yuzi}} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4\pi R^2} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$$

Ehtimollar nazariyasi fani - matematik fan bo'lib, uning predmeti bir xil shart – sharoitlarda ko'p marta takrorlanuvchi tasodifiy hodisalarning ehtimoliy qonuniyatlarini o'rganishdan iborat.

Tasodifiy hodisalar bo'ysunadigan qonuniyatlarni bilish, shu hodisalarning qanday kechishini avvaldan ko'ra bilish imkonini beradi.

Ehtimollar nazariyasi fanining metodlari hozirgi davrda amaliyotning turli sohalarida, jumladan, iqtisodiyot sohasida ham keng samarali qo'llanilmoqda.

Tasodifiylik bilan bog'liq bo'lgan iqtisodiy jarayonlarni tadqiq etishda, bu jarayonlarning kechishini bashorat qilishda, hamda ma'qul iqtisodiy echimlar qabul qilishda ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fanining ahamiyati kattadir.

Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fani usullari makro va mikro-iqtisodiyotni rejalashtirish va tashkil etishda, turli texnologik jarayonlarni tahlil etishda, mahsulot sifatini nazorat qilishda, ommaviy xizmat ko'rsatish nazariyasida va boshqa ko'plab sohalarda o'z tadbiqlarini topmoqda.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

1. Hodisalarning turlarini ayting va ularga doir misollar keltiring.
2. Elementar natija ta'rifini bering.
3. Tasodifiy hodisalarning turlarini ayting.
4. Ehtimollikning klassik va statistik ta'riflarini keltiring. Ularning farqi nimada?
5. Nisbiy chastotaning turg'unlik xossasi nimadan iborat?
6. Geometrik ehtimol ta'rifini ayting.

Tayanch iboralar

Tasodifiy hodisa, muqarrar hodisa, mumkin bo'lmagan hodisa, birgalikda bo'lmagan hodisalar, yagona mumkin bo'lmagan hodisalar, teng imkoniyatli hodisalar, ehtimolning klassik ta'rifi, nisbiy chastota.

Mustaqil ishlash uchun misollar.

1. Tanga ikki marta tashlanganda aqalli bir marta gerbli tomoni bilan tushishi ehtimolini toping.

2. Ikkita o'yin soqqasi tashlanadi. Chiqqan ochkolar yig'indisining 7 ga teng bo'lishi ehtimolini toping.

3. Yashikda 15 ta detal bo'lib, ulardan 10 tasi bo'yalgan. Yashikdan tavakkaliga 3 ta detal olindi. Olingan detallarning bo'yalgan bo'lishi ehtimolini toping.

4. Uch marta tanga tashlangan. Ikki marta «gerb» tomoni bilan tushishi ehtimolini toping.

Adabiyotlar.

[1] (14-30)

[2] (12-33)

[3] (8-15)

[4] (5-17)

[5] (229-235)

[7] (5-8)

[12] (263-274)

2- §. Hodisalar ustida amallar. Shartli ehtimollik. Ehtimollarni qo'shish va ko'paytirish teoremalari.

Ehtimollar nazariyasida hodisalar ustida qo'shish va ko'paytirish amallari bilan ish ko'rishga to'g'ri keladi, quyida shu amallarni ta'riflaymiz.

Ta'rif. Ikkita A va V hodisalarning yig'indisi (birlashmasi) deb, A yoki V ning, yoki ikkalasining ham ro'y berishidan iborat S=A+V hodisaga aytiladi.

Qisqacha qilib aytganda, A+V yig'indi A va V hodisalarning kamida bittasining ro'y berishini ifodalaydi.

Xuddi yuqoridagi ta'rif kabi $A_1 + A_2 +. . . + A_n$ yig'indi deganda, A_1 , A_2, ...A_n hodisalarning kamida bittasining ro'y berishi tushuniladi.

Masalan. A={I merganning nishonga tekkizishi},
V={II merganning nishonga tekkizishi} bo'lsin. U holda, A+V hodisa, yoki I merganning, yoki II merganning, yoki ikkalasining ham nishonga tekkizishidan iborat hodisani bildiradi.

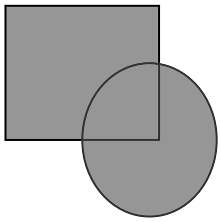
Agar A va V hodisalar birgalikda bo'lmasa, u holda A+V yig'indi shu hodisalardan qaysinisi bo'lsa ham, birining ro'y berishidan iboratdir.

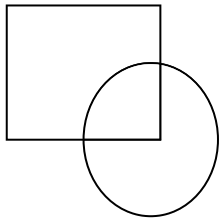
Ta'rif. A va V hodisalarning ko'paytmasi (kesishmasi) deb, shu hodisalarning birgalikda ro'y berishidan iborat S=A·V hodisaga aytiladi.

Ushbu ta'rif ikkitadan ortiq bir nechta hodisalar ko'paytmasi uchun ham yuqoridagidek umumlashtiriladi.

Yuqorida keltirilgan misolda AV hodisa ikkala merganning ham nishonga tekkizishini bildiradi.

Hodisalar ustida bajariladigan qo'shish va ko'paytirish amallarini quyidagi shaklda geometrik izohlash mumkin.





A+B,(A ∪B) A

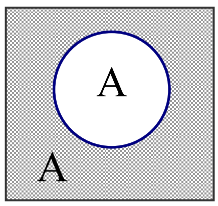
B A·B (A∩B) B

A hodisaga qarama-qarshi hodisa deb, A hodisaning ro'y bermasligidan iborat hodisaga aytiladi va Ā kabi belgilanadi. Qarama-qarshi A va Ā hodisalar uchun

$$\begin{cases} A + \overline{A} = \Omega \\ A \cdot \overline{A} = \varnothing \end{cases}$$

munosabat o'rinli ekanligini tushunish qiyin emas.

Elementar hodisalar tilida Ā hodisa A ga kirmagan barcha elementar hodisalar to'plamidan iborat bo'ladi, qarama-qarshi hodisalarni geometrik tasvirlash mumkin.



Misol. A hodisa kubik bir marta tashlanganda «6» ochko tushishini bildirsin. U holda Ā hodisa «6» ochko tushmasligini bildiradi

Ba'zan A hodisaning ehtimolini biror V hodisa (R(V)>0 deb faraz qilinadi) ro'y bergandan so'ng hisoblashga to'g'ri keladi.

Ta'rif. A hodisaning V hodisa ro'y berganligi shartida hisoblangan ehtimolga shartli ehtimol deyiladi va $R_V(A)$ yoki R(A/V) kabi belgilanadi.

Xuddi shunga o'xshash $R_A(V)$ shartli ehtimol ta'riflanadi.

Misol. Ikkita kubik tashlanayotgan bo'lsin. A={tushgan ochkolar yig'indisi 8 ga teng bo'lishi} va V={tushgan ochkolar juft son bo'lishi} hodisalar uchun

$R(A)=5/36$, $R(V)=18/36$ bo'lishi ravshan. Endi, masalan, $R_V(A)$ shartli ehtimolni topsak: $R_V(A)=5/18$

Shartli ehtimol yordamida hodisalarning bog'liqsizligi tushunchasini kiritamiz.

Ta'rif. Ikkita A va V hodisalar uchun $R_V(A)=R(A)$ va $R_A(V)=R(V)$ bo'lsa, A va V hodisalar bog'liqmas (erkli) hodisalar deyiladi. Aks holda, hodisalar **bog'liq** deyiladi.

Soddaroq qilib aytganda, ikkita hodisadan ixtiyoriy birining ro'y berishi ehtimoli ikkinchisining ro'y berishi yoki ro'y bermasligiga bog'liq bo'lmasa, bu hodisalar **bog'liqmas** deyiladi.

Misol. Qutida 6 ta oq va 9 ta qora shar bor. Tavakkaliga bitta shar olinadi. Olingan sharning oq bo'lishi (A hodisa) ehtimoli klassik ta'rifga ko'ra $R(A)=6/15$ga teng. Olingan shar qutiga solinadi va sinash takrorlanadi. Ikkinchi olishda oq shar chiqishi (V hodisa) ehtimoli, avvalgidek yana 6/15ga teng va birinchi sinash natijasiga bog'liq emas. Shunday qilib, bu holda V hodisa A hodisaga bog'liq emas. Agar olingan birinchi shar qutiga qaytarib solinmasdan ikkinchi shar olinsa, V hodisa A hodisaga bog'liq bo'ladi, chunki

$$\mathbf{R_A(V)=5/14 \text{ va } R_A(V)=6/14.}$$

Endi hodisalar ehtimollarini qo'shish va ko'paytirish teoremalarini bayon qilishga o'tamiz.

1-Teorema. Birgalikda bo'lmagan ikkita hodisadan qaysinisi bo'lsa ham birining ro'y berishi ehtimoli shu hodisalar ehtimollarining yig'indisiga teng:

$$\mathbf{R(A+V)=R(A)+R(V)}$$

Isboti.

n-sinashning mumkin bo'lgan elementar natijalari jami soni bo'lsin;

m_1-A hodisaga qulaylik tug'diradigan natijalar soni;

m_2-V hodisaga qulaylik tug'diradigan natijalar soni.

Yo - A hodisa, yoki V **h**odisa ro'y berishiga qulaylik tug'diruvchi natijalar soni m_1+ m_2 ga teng. Bundan esa

$$\text{P(A+V)=}\frac{m_1+m_2}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}=P(A)+P(B)$$

munosabatni hosil qilamiz.

N*atija.* Xar ikkitasi birgalikda bo'lmagan bir nechta hodisalardan qaysinisi bo'lsa xam, birining ro'y berish ehtimoli shu hodisalar ehtimollarining yig'indisiga teng:

$$\mathbf{R(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = R\ (A_1) + R\ (A_2) + \ldots + R(A_n)}$$

Misol. Yashikda 30 ta shar bo'lib, ulardan 10 tasi qizil, 5 tasi ko'k va 15 tasi oq. Tavakkaliga olingan bitta sharning rangli shar bo'lish ehtimolini toping.

Echish. Rangli shar chiqishi yo qizil, yoki ko'k shar chiqishini bildiradi.

Qizil shar chiqishi (A hodisa) ehtimoli

$$P(A) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

Ko'k shar chiqishi (V hodisa) ehtimoli

$$P(A) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$

A va V hodisalar birgalikda emas (bir rangli shar chiqishi boshqa rangli shar chiqishini yo'qqa chiqaradi), shuning uchun qo'shish teoremasiga ko'ra:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

A va V hodisalar bog'liqmas bo'lib, ulardan har birining ehtimoli ma'lum bo'lsa, A va V hodisalarning birgalikda ro'y berishi ehtimolini qanday topish mumkin? Bu savolga quyidagi ko'paytirish teoremasi javob beradi.

2-Teorema. Ikkita bog'liqmas hodisaning birgalikda ro'y berishi ehtimoli shu hodisalar ehtimollarning ko'paytmasiga teng:

$$\mathbf{R(A \cdot V) = R(A) \cdot R(V).}$$

Ko’paytirish teoremasini bir nechta hodisalarga umumlashtirish uchun birgalikda bog’liqmaslik tushunchasini kiritamiz.

Bir nechta hodisalardan har biri va qolganlarning istalgan kombinatsiyasi bog’liqmas bo’lsa, u holda bu hodisalar **birgalikda bog’liq emas** deyiladi. Shuni ta’kidlash lozimki, bir nechta hodisalarning juft-juft bog’liq emasligidan ularning birgalikda bog’liq emasligi kelib chiqmaydi. Shu ma’noda birgalikda bog’liq emasligi talabi juft-juft bog’liqmaslik talabidan kuchliroqdir.

Endi ko’paytirish teoremasidan kelib chiqadigan natijani keltiramiz.

Natija. Birgalikda bog’liq bo’lmagan bir nechta hodisalarning birgalikda ro’y berish ehtimoli shu hodisalarning ehtimollari ko’paytmasiga teng:

$$\mathbf{R(A_1 \cdot A_2, \ldots \cdot A_n)=R\,(A_1) \cdot R\,(A_2), \ldots \cdot R(A_n)}$$

Eslatma. Agar $\mathbf{A_1\,,\ A_2\,,\ \ldots\ \cdot A_n}$ hodisalar birgalikda bog’liqmas bo’lsa, u holda ularga qarama-qarshi bo’lgan $\mathbf{A_1\,,\ A_2\,,\ \ldots\ \cdot A_n}$ hodisalar ham birgalikda bog’liqmas bo’ladi.

Ikkita bog’liq A va V hodisalar uchun ko’paytirish teoremasi quyidagicha bayon qilinadi.

3-Teorema. Ikkita bog’liq hodisaning birgalikda ro’y berishi ehtimoli ulardan birining ehtimolini ikkinchi hodisaning shartli ehtimoliga ko’paytmasiga teng:

R(A·V)=R(A) · R$_A$(V)

Isboti. Belgilashlar kiritamiz:

n-sinashning A hodisa ro'y beradigan yoki ro'y bermaydigan elementar natijalari jami soni;

n_1- A hodisa ro'y berishiga qulaylik tug'diruvchi natijalar soni (n_1<n).

m-sinashning A hodisa ro'y berdi degan farazda V hodisa ro'y beradigan elementar natijalar soni, ya'ni bu natijalar AV hodisaning ro'y berishiga qulaylik tug'diradi.

A va V hodisalarning birgalikda ro'y berishi ehtimoli:

$$P(A\cdot B)=\frac{m}{n}=\frac{n_1}{n}\cdot\frac{m}{n_1}$$

$\frac{n_1}{n}=P(A)$ va $\frac{m}{n_1}=P_A(B)$ ekanligini e'tiborga olib quyidagini hosil qilamiz:

R(A·V)=R(A) · R$_A$ (V)

Shuni ta'kidlab o'tamizki, AV=VA bo'lganligi uchun teoremani VA hodisa uchun qo'llab quyidagi tenglikni hosil qilamiz.

R(A·V)=R(A) · R$_A$ (V)=R(V) · R$_V$ (A)

Natija. Bir nechta bog'liq hodisalarning birgalikda ro'y berishi ehtimoli ulardan birining ehtimolini qolganlarining shartli ehtimollariga ko'paytmasiga teng, bunda har bir keyingi hodisaning ehtimoli undan oldingi hamma hodisalar ro'y berdi degan farazda hisoblanadi.

$$P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2)\cdot P_{A_1\ A_2}(A_3)\cdot\ldots\cdot P_{A_1A_2\ldots A_{n-1}}(A_n)$$

Yuqorida birgalikda bo'lmagan hodisalar uchun qo'shish teoremasi (1-teorema) keltirilgan edi. Endi birgalikda bo'lgan hodisalar uchun qo'shish teoremasini keltiramiz.

4-Teorema. Birgalikda bo'lgan ikkita hodisadan kamida bittasining ro'y berish ehtimoli shu hodisalarning ehtimollari yig'indisidan ularning birgalikda ro'y berish ehtimolini ayrilganiga teng:

R(A+V)=R(A)+R(V)-R(AV)

Isboti. Ta’rifga ko’ra A+V hodisa yo AV, yo A$\overline{V}$ yoki AV hodisaning ro’y berishidan iborat, ya’ni

A+V=AV+AV+AV

AV va AV hodisalar birgalikda emas. Shuning uchun,

R(A+V)=R(AV)+R(AV)+R(AV) (*)

Endi A=AV+AV, R(A)=R(AV)+R(AV), V=AV+AV,

R(A)=R(AV)+R(AV) munosabatlardan

R(AV)=R(A)-R(AV) va R(AV)=R(V)-R(AV)

tengliklarni hosil qilamiz. Bu tengliklarni (*) ifodaga qo’yib

R(A+V)=R(A)+R(V)-R(A·V)

tenglikni hosil qilamiz.

Misol. I va II to’plardan o’q otishda nishonga tekkizish ehtimollari mos ravishda r_1=0,8 va r_2=0,9. Bir yo’la otishda to’plardan kamida birining nishonga tekizishlari ehtimolini toping.To’plarning tekkizishlari bir-biriga bog’liq emas. Shuning uchun

A={ I to’pning nishonga tekkizishi} va

V={II to’pning nishonga tekkizishi} hodisalari erklidir. Bundan esa

R(AV)=R(A) · R(V)=0.8 · 0.9=0.72

Izlanayotgan ehtimol quyidagiga teng:

R(A+V)=R(A)+R(V)-R(A·V)=0.8+0.9-0.72=0.98

O’z-o’zini tekshirish uchun savollar.

1. Hodisalar yig’indisi va ko’paytmasi amallarini ta’riflang.
2. Qarama-qarshi hodisalar ta’rifini bering.
3. Bog’liqmas hodisalar ta’rifini bering.
4. Shartli ehtimollik ta’rifini bering.
5. Ehtimollarni qo’shish teoremalarini ayting.
6. Ehtimollarni ko’paytirish teoremalarini keltiring.

Tayanch iboralar

Qarama-qarshi hodisalar, bog'liqmas hodisalar, bog'liq hodisalar, shartli ehtimol, birgalikda bo'lgan hodisalar.

Mustaqil echish uchun masalalar.

1. Guruhda 10 ta talaba bo'lib, ularning 7 nafari a'lochilar. 4 ta talaba dekanatga chaqirtirildi. Ularning barchasi a'lochi bo'lishi ehtimolini toping.

2. Talaba programmadagi 30 ta savoldan 25 tasini biladi. Talabaning imtihon oluvchi taklif etgan uchta savolni bilish ehtimolini toping.

3. Birinchi yashikda 4 ta oq va 8 ta qora shar bor. Ikkinchi yashikda 10 ta oq va 6 ta qora shar bor. Har qaysi yashikdan bittadan shar olinadi. Ikkala sharning ham oq chiqishi ehtimolini toping.

4. Birinchi yashikda 5 ta oq va 10 ta qizil shar bor. Ikkinchi yashikda 10 ta oq va 5 ta qizil shar bor. Agar har bir yashikdan bittadan shar olinsa, hech bo'lmaganda bitta sharning oq bo'lish ehtimolini toping.

5. Merganning uchta o'q uzishda kamida bitta o'qni nishonga tekkizish ehtimoli 0,875 ga teng. Uning bitta o'q uzishda nishonga tekkizish ehtimolini toping.

6. To'rtta o'q uzishda kamida bitta o'qni nishonga tekkizish ehtimoli 0,3 ga teng. Merganlar navbat bilan o'q uzadilar, lekin har biri ikkitadan o'q uzadi. Birinchi bo'lib o'q tekkizgan mergan mukofot oladi. Merganlarning mukofot olishlari ehtimolini toping.

Adabiyotlar

[1] (31-47)

[2] (33-51)

[3] (15-25)

[4] (17-24)

[5] (237-244)

[7] (14-16)

[8] (270-280)

3-§.To'la ehtimol va Bayes formulalari.

To'la ehtimol va Bayes formulalarini keltirishdan avval, bu formulalarda foydalaniladigan ba'zi tushunchalarni keltiramiz.

Ta'rif: Hodisalarning to'la guruhi deb, sinashning yagona mumkin bo'lgan hodisalari to'plamiga aytiladi.

Bu ta'rifga binoan, agar A_1, A_2,….A_n hodisalar hodisalarning to'la guruhini tashkil etsa, u holda bu hodisalar uchun

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \mathbf{\Omega},\ A_iA_j = \varnothing,\ (i \neq j)$$

munosabatlar o'rinli bo'ladi.

Misol. Tanga bir marta tashlanadi. (Tanga qirrasi bilan tushmaydi deb faraz qilinadi) bu sinovda

A={tanga «gerb» tomoni bilan tushadi}

V={tanga «raqam» tomoni bilan tushadi}

hodisalari to'la guruhni tashkil etadi.

Hodisalarning to'la guruhini tashkil etuvchi A_1, A_2,….A_n hodisalar uchun muhim bo'lgan quyidagi teoremani keltiramiz

Teorema: To'la guruh tashkil etuvchi A_1, A_2,….A_n hodisalarning ehtimollari yig'indisi birga teng, ya'ni

$$\mathbf{R(A_1)+R(A_2)+\ldots\ldots+R(A_n)=1}$$

Isbot. To'la guruh tashkil etuvchi hodisalardan birining ro'y berishi muqarrar. Muqarrar hodisaning ehtimoli esa birga teng bo'lgani uchun

$$\mathbf{R(A_1+A_2+\ldots\ldots+A_p)=1}$$

To'la guruhning ikkita hodisasi birgalikda emasligi sababli, qo'shish teoremasini qo'llash mumkin.

Ta'rif: Qarama-qarshi hodisalar deb, to'la guruh tashkil etuvchi ikkita hodisaga aytiladi.

Yuqoridagi teoremaga asosan qarama-qarshi hodisalar ehtimollarining yig'indisi birga teng.

$$R(A)+R(\bar{A})=1$$

Shuni alohida eslatib o'tamizki, A hodisaning ehtimolini topishga doir ko'pgina masalalarda ko'pincha qarama-qarshi A hodisasining ehtimolini hisoblash ancha oson bo'ladi, keyin esa izlanayotgan ehtimolni quyidagi formula orqali topish qulay bo'ladi.

$$R(A)=1-R(\bar{A})$$

Misol. Yashikda 20 ta detal bo'lib, ulardan 12 tasi yaroqli. Tavakkaliga olingan 5 ta detal orasida kamida 1 ta yaroqli detal bo'lishi ehtimolini toping.

Echish**:** A={olingan detallar ichida kamida bitta yaroqli}

A={olingan detallar orasida bitta ham yaroqli detal yo'q}

hodisalar qarama-qarshi hodisalardir.

Bunda R(A) ehtimolni topish osonroq.

$$R(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_8^5}{C_{20}^5}$$

Bundan esa izlanayotgan ehtimolni topsak:

$$R(A)=1-R(A)=1-\frac{C_8^5}{C_{20}^5}$$

Endi «to'la ehtimol» formulasini keltiramiz.

Faraz qilaylik, A hodisa to'la guruh tashkil etuvchi hodisalardan bittasining ro'y berganlik sharti ostida ro'y bersin. U holda, A hodisaning ehtimoli quyidagicha topiladi.

$$R(A)=R(V_1)\ R(A/V_1)+R(V_2)\ R(A/V_2)+\ldots+R(V_p)\ R(A/V_p).$$

Bu formula «to'la ehtimol» formulasi deb ataladi.

Shu formulani keltirib chiqaraylik. A hodisasi ro'y berish uchun birgalikda bo'lmagan.

$$AV_1,\ AV_2,\ \ldots..AV_n.$$

hodisalardan biror bittasi ro'y berishi zarur va etarli.

Boshqacha aytganda

$$A=AV_1+AV_2+\ldots.+AV_n.$$

Bunda AV_i $(i=\overline{1},n)$ hodisalar birgalikda bo'lmaganligi uchun

$$\mathbf{R(A)=R(AV_1+AV_2+\ldots+AV_n)=R(AV_1)+R(AV_2)+\ldots+R(AV_n)=}$$
$$\mathbf{=R(V_1)R(A/V_1)+R(V_2)R(A/V_2)+\ldots+R(V_n)R(A/V_n)}$$

Odatda, bu formula shartlarida A hodisaning V_1, V_2, . . .V_n hodisalarning qaysi biri bilan ro'y berishi oldindan noma'lum bo'lganligi uchun, V_1, V_2, . . .V_n hodisalar **g i p o t e z a l a r** deb ham ataladi.

Faraz qilaylik, sinash o'tkazilgan bo'lib, uning natijasida A hodisa ro'y bergan bo'lsin. Gipotezalarning ehtimollari qanday o'zgarganligini (A hodisa ro'y berganligi sababli) aniqlash masalasini ko'raylik. Boshqacha qilib aytganda,

$$\mathbf{R(V_1/A),\ R(V_2/A),\ldots R(V_n/A)}$$

shartli ehtimollarni izlaymiz.

Ko'rsatilgan ehtimollardan, masalani, $R(V_1/A)$ ni qaraylik. Ko'paytirish teoremasiga ko'ra

$$\mathbf{R(AV_1)=R(A)R(V_1/A)=R(V_1)\,R(A/V_1)}$$

Bunda esa,

$$\mathbf{R(V_1/A)} = \frac{P(B_1)P(A/B_1)}{P(A)}$$

Bu munosabatda maxrajdagi R(A) ehtimolni, uning to'la ehtimollik formulasidagi ifodasi bilan almashtirib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\mathbf{R(V_1/A)} = \frac{P(B_1)P(A/B_1)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A/B_i)}$$

Qolgan gipotezalarning ham shartli ehtimollari ham xuddi shunga o'xshash keltirib chiqariladi. Shunday qilib, ixtiyoriy V_k (k=1,n) gipoteza uchun

$$\mathbf{R(V_k/A)=} \frac{P(B_k)P(A/B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A/B_i)}$$

Bu formulalar Bayes formulalari deb ataladi. Bayes formulalari tajriba natijasida A hodisasi ro'y berganligi ma'lum bo'lgandan so'ng, V_k (k=1,n) gipotezalar ehtimollarini qayta baholashga imkon beradi.

To'la ehtimol formulasi va Bayes formulalarining qo'llanishiga doir quyidagi misolni ko'ramiz.

Misol. Birinchi qutida 2 ta oq, 6 ta qora, ikkinchi qutida esa, 4 ta oq, 2 ta qora shar bor. Birinchi qutidan tavakkaliga 2 ta shar olib, ikkinchi qutiga solinadi, shundan keyin ikkinchi qutidan tavakkaliga bitta shar olinadi.

A) olingan sharning oq bo'lishi ehtimolini toping.

V) ikkinchi qutidan olingan shar oq bo'lib chiqdi; birinchi qutidan olib, ikkinchi qutiga solingan 2 la sharning oq bo'lishi ehtimoli nimaga teng.

***Echish*:**

A) Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

A = {Ikkinchi qutidan olingan shar oq}.

V_1= {Birinchi qutidan ikkinchi qutiga 2 ta oq shar solingan}.

V_2= {Birinchi qutidan ikkinchi qutiga 1 ta oq, 1 ta qora shar solingan}.

V_3={birinchi qutidan ikkinchi qutiga 2 ta qora shar solingan}.

V_1, V_2, V_3 - hodisalar hodisalarning to'la guruhini tashkil etadi. U holda, to'la ehtimol formulasiga ko'ra, A hodisaning ehtimoli quyidagiga teng:

$$\mathbf{R(A)=R(V_1)\ R(A/V_2)\ +R(V_2)\ R(A/V_2)+R(V_3)\ R(A/V_3)}$$

Bunda, masalaning shartidan

$\mathbf{R(V_1)=}\ \frac{C_2^2}{C_8^2}=\frac{1}{28}\ \mathbf{R(A/V_1)=}\ \frac{3}{4}$**,**

$\mathbf{R(V_2)=}\frac{C_2^1C_6^1}{C_8^2}=\frac{12}{28}=\frac{3}{7}\ \mathbf{R(A/V_2)=}\frac{5}{8}$

$\mathbf{R(V_3)=}\frac{C_6^2}{C_8^2}=\frac{15}{28}\qquad \mathbf{R(A/V_3)=}\frac{1}{2}$

U holda,

$$\mathbf{R(V_1)=}\ \frac{1}{28}.\frac{3}{4}+\frac{12}{28}.\frac{5}{8}+\frac{15}{28}.\frac{1}{2}=\frac{9}{16}$$

b) R (V_1/A) ehtimolni esa Bayes formulasidan foydalanib, topamiz.

$$\mathbf{R\ (V_1/A)=}\ \frac{P(B_1)P(A/B_1)}{P(A)}$$

O’z - o’zini tekshirish uchun savollar.

1. Hodisalar to’la guruhi ta’rifini bering.
2. To’la ehtimollik formulasida qanday shartlar talab qilinadi?
3. Bayes formulasi va to’la ehtimollik formulalari orasidagi umumiy, hamda farq qiluvchi jihatlarni ayting.

Tayanch iboralar.

Hodisalarning to’la gruppasi, to’la ehtimol formulasi, gipotezalar, Bayes formulasi.

Mustaqil echish uchun masalalar.

1. Yashikda 1 zavodda tayyorlangan 12 ta detal, 2-zavodda tayyorlangan 20 ta detal va 3-zavodda tayyorlangan 18 ta detal bor. 1-zavodda tayyorlangan detalning a’lo sifatli bo’lishi ehtimoli 0,9 ga teng. 2-zavodda va 3-zavodda mos ravishda 0,6 va 0,9 ga teng. Tavakkaliga olingan detalning a’lo sifatli bo’lishi ehtimolini toping.

2. Birinchi idishda 10 ta shar bo’lib, ularning 8 tasi oq, ikkinchi idishda 20 ta shar bo’lib, ularning 4 tasi oq. Har bir idishdan tavakkaligabittadan shar olinib, keyin bu ikki shardan yana bitta shar tavakkaliga olindi oq shar olinganlik ehtimolini toping.

3. Ikkita yashikda radiolampalar bor. Birinchi yashikda 12 ta lampa bo’lib, 1 tasi yaroqsiz, ikkinchi yashikda 10 ta lampa bo’lib, ularning bittasi yaroqsiz. Birinchi yashikda bitta lampa olinib, ikkinchi yashikka solinadi. Ikkinchi yashikdan tavakkaliga olingan lampaning yaroqsiz bo’lishi ehtimolini toping.

Adabiyotlar.

[1] (48-55)

[2] (51-60)

[3] (27-30)

[4] (21-26)

[5] (244-250)

[7] (20-23)

[12] (280-283)

4-§ . Erkli sinovlar ketma-ketligi.
Bernulli formulasi. Eng ehtimolli son.

Takrorlanadigan sinovlardan har birining u yoki bu natijasining ehtimolligi boshqa sinovlarda qanday natijalar bo'lganligiga bog'liq bo'lmasa, ular erkli sinovlar ketma-ketligini hosil qiladi deyiladi.

Har xil erkli sinashlarda A hodisa yo har xil ehtimolga, yoki bir xil ehtimolga ega bo'lish mumkin. Biz bundan keyin A hodisa bir xil ehtimolga ega bo'lgan erkli sinashlarni tekshiramiz.

Faraz qilaylik, n ta o'zaro erkli sinash o'tkazilayotgan bo'lib, ularning har birida A hodisa yo ro'y berishi, yoki ro'y bermasligi mumkin bo'lsin. A hodisaning ehtimoli har bir sinashda bir hil, chunonchi r ga teng deb hisoblaymiz, ro'y bermaslik ehtimoli esa q=1-p ga teng. Sinovlarning bunday eng sodda ketma-ketligiga Bernulli sxemasi deyiladi.

***Masalan**,* o'yin soqqasini tashlashdan iborat tajriba o'tkazilmoqda. Har bir tashlashda tayin ochko tushishi, boshqalarida qanday ochko chiqqanligiga bog'liqmasligi ravshan, binobarin biz bu erda erkli sinovlar ketma-ketligiga egamiz.

n ta sinashda A hodisaning rosa k marta ro'y berishi, va demak, n-k marta ro'y bermaslik ehtimolini xisoblashni ko'rib chiqaylik.

n ta sinashda A hodisaning rosa k marta ro'y berishi va n-k marta ro'y bermasligidan iborat bo'lgan bitta murakkab hodisaning ehtimoli erkli hodisalar ehtimolini ko'paytirish teoremasiga ko'ra $p^{k}\cdot q^{n-k}$ ga teng. Bunday murakkab hodisalar n ta elementdan k tadan nechta gruppalash tuzish mumkin bo'lsa, shuncha, ya'ni C^{k}_{n} ta bo'ladi. Izlanayotgan ehtimollikni $P_n(k)$ bilan belgilaymiz.

U holda: $$P_n(k) = C_n^k \cdot p^{\kappa} q^{n-k}$$

Hosil qilingan formula Bernulli formulasi deyiladi.

Misol. Har bir detalning standart bo'lishi ehtimoli r=0,8 bo'lsa, tavakkaliga olingan 5 ta detaldan rosa 2 tasining standart bo'lishi ehtimolini toping.

Echish. Izlanayotgan ehtimolni n=5, m=2, p=0,8, va q=0,2 da Bernulli formulasidan topamiz

$$P_5(2) = C_5^2 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^3 = \frac{5!}{3!2!} 0{,}00512 = 0{,}0512$$

Bernulli formulasining tatbiqiga doir yana bitta misol keltiramiz. Tanga 10 marta tashlanadi. Gerb tomonining aniq 3 marta tushishi ehtimoli qanchaga teng?

Echish. Bu hodisaning har bir tajribadagi ehtimoli $\frac{1}{2}$ ga teng. Bundan,

$$P_{10}(3) = C_{10}^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{10\,!}{3\,!7\,!} \cdot \frac{1}{2^{10}} = \frac{15}{28}$$

A hodisaning o'tkazilayotgan n ta erkli takroriy sinov davomida kamida k marta ro'y berish ehtimoli

$$P_n(\kappa) + P_n(k+1) + \ldots + P_n(n)$$

ko'pi bilan k marta ro'y berishi ehtimoli esa

$$P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(k)$$

formulalar bilan hisoblanadi.

Agar n ta erkli sinovdan hodisaning k_0 marta ro'y berishi ehtimoli sinovning boshqa mumkin bo'lgan natijalari ehtimollaridan kichik bo'lmasa, u holda k_0 soni eng eh*timolli son* deb ataladi va quyidagi qo'sh tengsizlik bilan aniqlanadi:

$$np - q \le \kappa_0 \le np + p$$

Eng ehtimolli sonni aniqlash uchun hamma ehtimollarni hisoblab chiqmasdan sinovlar soni n, har bir sinovda A hodisaning ro'y berish ehtimolini bilish kifoya ekan. Haqiqatan ham, eng ehtimolli songa mos keluvchi ehtimolni $P_n(k_o)$ bilan belgilasak, yuqoridagi formuladan

$$P_n(k_o) = C_n^{k_0} p^{k_o} \cdot q^{n-k_0} = \frac{n}{k_o!(n-k_o)!} P^{k_o} \cdot q^{n-k_o}$$

Eng ehtimolli soni ta'rifidan

$$P_n(k_o) \ge P_n(k_o - 1)$$

$$P_n(k_o) \ge P_n(k_o + 1)$$

Bu tengsizliklarga mos ravishda $P_n(k_o)$, $P_n(k_o-1)$, $P_n(k_o+1)$ larninng qiymatlarini qo'yib quyidagilarga ega bo'lamiz.

$$\frac{n!}{k_o!(n-k_o)!}P^{k_o}\cdot q^{n-k_o}\geq\frac{n!P^{k_o-1}q^{n-k_0+1}}{(k_o-1)!(n-k_o+1)!},$$

$$\frac{n!}{k_o!(n-k_o)!}P^{k_o}\cdot q^{n-k_o}\geq\frac{n!P^{k_o-1}q^{n-k_0+1}}{(k_o-1)!(n-k_o+1)!}p^{k_o+1}\cdot q^{n-k_o-1}$$

Bu tengsizliklarni k_0 ga nisbatan echamiz va quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$\kappa_o\leq np+p;\quad \kappa_o\geq np-q$$

Ohirgi ikki tengsizlikni birlashtirib, eng ehtimolli sonni aniqlovchi qo'sh tengsizlikka ega bo'lamiz:

$$np-q\leq\kappa_o<np+p$$

Bu tengsizlikni aniqlovchi intervalning uzunligi

$$np+p-(np-q)=p+q=1$$

ekanligini va hodisa n ta sinov natijasida butun son marta ro'y berishini hisobga olsak, eng ehtimolli son k_0 quyidagi shartlarni qanotlantiradi:

a) agar np-q son kasr bo'lsa, u holda bitta eng ehtimolli k_0 son mavjud bo'ladi.

b) agar np-q butun son bo'lsa, u holda ikkita k_0 va k_0 +1 eng ehtimolli sonlar mavjud bo'ladi;

v) agar np butun son bo'lsa, u holda eng ehtimolli son k_0=np bo'ladi.

Misol. Tanga 6 marta tashlanadi. Gerbli tomon tushishlarining eng ehtimolli sonini toping.

Echish. Berilgan masalaning shartlariga asosan, n=6, p=q=1/2. U holda gerbli tomoni tushishlarining eng ehtimolli soni k_0 ni quyidagi qo'sh tengsizlikdan foydalanib topamiz:

$$6\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\leq k_o\leq 6\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Rightarrow 2{,}5\leq k_o\leq 3{,}5$$

Demak, eng ehtimolli son 3 ekan. $K_0 = np=3$ ekanligidan foydalansak ham bo'ladi.

Shunday qilib, eng ehtimolli sonni aniqlash jarayonida biz np sonning Bernulli sxemasida maxsus ahamiyatga ega ekanligiga ishonch hosil qilish imkoniga ega bo'ldik. Bu shundan iborat bo'ldiki, np songa eng yaqin bo'lgan ikkita butun sonlardan biri (ba'zan esa ikkalasi ham) eng ehtimolli son bo'ladi.

np son yuqoridagidan boshqa unga nisbatan muhimroq bo'lgan talqinga xam ega ekan. Chunonchi, np ni ma'lum ma'noda n ta tajribalardagi muvaffaqiyatlarning o'rtacha soni deb qarash mumkin.

Qisqalik uchun tajribaning n marta takrorlanishini seriya deb ataymiz. Faraz qilaylik, biz biror songa teng, aytaylik, N ta seriya o'tkazgan bo'laylik. Birinchi seriyada k_1 muvaffaqiyat, ikkinchisida k_2 ta va x.k. N-seriyada esa k_N ta muvaffaqiyat olingan bo'lsin. Bu sonlarning o'rta arifmetigini tuzamiz:

$$\frac{k_1 + k_2 + \ldots + k_N}{N}$$

W ortishi bilan ko'rsatilgan o'rta arifmetik biror o'zgarmas qiymatga yaqinlashar ekan. Bunga ishonch hosil qilish maqsadida oxirgi munosabatni

$$\frac{k_1 + k_2 + \ldots + k_n}{n \cdot N} \cdot n$$

ko'rinishda yozib olamiz; so'ngra quyidagi holni e'tiborga olamiz .

N ta seriya o'tkazish bilan biz qaralayotgan tajribani Nn marta amalga oshiramiz. Yuqorida yozilgan Nn maxrajli kasr ana shu Nn ta tajribalardagi muvaffaqiyatlar umumiy sonining barcha tajribalar soniga nisbatidan boshqa narsa emas. N ning o'sishi (demak, Nn ham o'sishi) bilan bu kasr muvaffaqiyatning ehtimoli bo'lgan R songa yaqinlashadi. Demak,

$$\frac{k_1 + k_2 + \ldots + k_n}{N}$$

ifoda np songa yaqinlashadi. Ana shuni hosil qilish talab qilingan edi.

Misol. Ma'lum korxonaning sharoitida yaroqsizlikka yo'l qo'yish ehtimoli 0,05 ga teng. 100 ta mahsulot orasidagi yaroqsiz mahsulotning o'rtacha soni nimaga teng?

Echish. Izlanayotgan son np=100 $\cdot$ 0.05=5 ga teng bo'ladi.

Polinomial sxema

Bu sxema binomial sxemaning (Bernulli sxemasining) umumlashmasidir. Agar Bernulli sxemasida har bir tajribada faqat 2 ta hodisa: Ā va A qaralgan bo'lsa, polinomial sxemada har bir sinovda k ta hodisa qaraladi. Tajriba shundan iborat bo'ladiki, n ta bog'liq bo'lmagan sinov o'tkaziladi va ularning har birida to'la guruh hosil qiladigan k ta A_1, A_2, . . .A_k hodisaning faqat bittasi ro'y berishi mumkin, bunda bu hodisalarning ehtimolliklari ma'lum:

$$\mathbf{R_1=R(A_1),\ R_2=P(A_2),\ ...R_k=P(A_k)}$$

A_1 hodisa rosa m_1 marta A_2 hodisa rosa m_2 marta, . . . A_k hodisa rosa m_k marta ro'y berishi ehtimoli

$$P_n(m_1, m_2, ...m_k) = \frac{n!}{m_1!m_2!\ldots m_k!}P_1^{m_1}P_2^{m_2}\ldots P_k^{m_k}$$

xususiy holda, k=2 bo'lganda Bernulli formulasi kelib chiqadi.

O’z- o’zini tekshirish uchun savollar.

1. Erkli sinovlar ketma-ketligini ta’riflang.

2. Bernulli formulasi nima uchun xizmat qiladi?

3. Bernulli formulasini keltirib chiqaring.

4. Eng ehtimolli son ta’rifini bering va hisoblash formulasini keltiring.

5. Erkli sinovlar ketma-ketligining polinomial sxemasi nima?

Tayanch iboralar.

Bernulli formulasi, eng ehtimolli son, erkli sinovlar ketma-ketligi, Bernulli sxemasi va polinomial sxema.

Mustaqil ishlash uchun masalalar.

1. Tanga 10 marta tashlanadi. Tangani 2 marta “gerb” tomoni bilan tushishi ehtimolini toping.

2. Merganning nishonga urishi ehtimoli 0,6 ga teng. Merganning 6 ta o’qdan 4 tasini nishonga urish ehtimolini toping.

3. Tanga 15 marta tashlanadi. “Gerb” tomon bilan tushishlar sonining eng ehtimolli sonini toping.

4. Nishonga tushish ehtimoli r=0,35. Nishonga qarata 10 marta o’q uziladi. Nishonga tushishlar eng ehtimolli soni va bu sonning ehtimolini toping.

5. Tanga 7 marta tashlanadi. Tanganing 2 marta “raqam” tomoni bilan tushishi ehtimolining toping.

6. Nishonga tegish ehtimoli r=0,8. Nishonga otilgan 5 ta o’qdan 2 tasining nishonga tegishi ehtimolini toping.

Adabiyotlar

[1] (55-63)

[2] (67-70)

[3] (30-35)

[4] (26-36)

[5] (247-250)

[7] (24-26)

[12] (283-287)

5-§.Laplasning lokal va integral limit teoremalari. Puasson formulasi. Limit teoremalarining amaliy ahamiyati.

Ehtimollar nazariyasining tatbiqlarida n va k larning anchagina katta qiymatlarida $R_n(k)$ ehtimollarni hisoblash zarurati tez-tez uchrab turadi. Masalan, quyidagi masalani echish talab qilinsin.

Biror korxonada mahsulotning yaroqsizlikka yo'l qo'yish ehtimoli 0,05 ga teng. Tayyor mahsulotdan 500 ta buyum tekshirildi. Bular orasida rosa 25 tasi yaroqsiz buyum bo'lish ehtimolini toping.

Har bir alohida buyumning tekshirilishini tajriba sifatida qarab, har birida A hodisaning (buyum, yaroqsiz deb topiladi) yuz berish ehtimoli 0,05 ga teng bo'lgan 500 ta erkli tajriba o'tkazilyapti deb, ayta olamiz. Bernulli formulasiga asosan

$$P_{500}(25) = C_{500}^{25}(0,05)^{25} \cdot (0,95)^{475}$$

ni hosil qilamiz.

$R_{500}(25)$ ning ifodasi ancha murakkab bo'lganligi sababli bu ifodani bevosita hisoblash katta qiyinchiliklarga olib keladi:

$$C_{500}^{25} = \frac{476 \cdot 477 \cdot \ldots \cdot 499 \cdot 500}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 25}$$

Shu sababli, n va k ning katta qiymatlari uchun $R_n(k)$ ehtimollarni taqribiy formulalar yordamida hisoblash zaruriyati tug'iladi. Bu formulalar Laplasning lokal limit teoremasi va integral limit teoremasi deb ataluvchi ikkita teoremada keltiriladi.

Laplasning lokal teoremasi.

Agar har bir tajribada A hodisaning ro'y berishi ehtimoli r o'zgarmas bo'lib, nol va birdan farqli bo'lsa, u holda n ta tajribada A hodisaning rosa k marta ro'y berish ehtimoli $R_n(k)$ taqriban (n qancha katta bo'lsa, shuncha aniq).

$$y = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

funktsiyaning $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$ dagi qiymatiga teng.

$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ funktsiya x argumentining musbat qiymatlariga mos qiymatlaridan tuzilgan jadvallar ehtimollar nazariyasiga oid ko'plab adabiyotlarda keltirilgan. Shuningdek, φ(x) funktsiya juft, ya'ni φ(- x) = φ(x) bo'lganligi uchun bu jadvallardan argumentning qiymatlari manfiy bo'lganda ham foydalaniladi.

Shunday qilib, n ta erkli sinashda A hodisaning rosa k marta ro'y berish ehtimoli taqriban quyidagiga teng.

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x)$$

Misol. Agar har bir sinashda A hodisaning ro'y berish ehtimoli 0,2 ga teng bo'lsa, 400 ta sinashda bu hodisaning rosa 80 marta ro'y berish ehtimolini toping.

Echish. n=400, k=80, p=0,2, q-0,8.

$$P_{400}(80) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} \varphi(x) \approx \frac{1}{8} \varphi(x)$$

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{80 - 400 \cdot 0{,}2}{8} = 0$$

jadvaldan φ(0)=0,3989 ekanligini aniqlaymiz.

U holda, izlanayotgan ehtimollik

$$P_{400}(80) \approx \frac{0{,}3989}{8} \approx 0{,}0498$$

Boshqa misol. Merganning o'q uzishda nishonga tekkizish ehtimoli r=0.75. Mergan 10 ta o'q uzganda 8 ta o'qni nishonga tekkizish ehtimolini toping.

Echish. n=10, k=8, p=0.75, q=0.25.

Laplasning asimptotik formulasidan foydalanamiz.

$$P_{10}(8) \approx \frac{1}{\sqrt{10 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25}} \varphi(x) \approx 0{,}7301 \cdot \varphi(x)$$

x ning masala ma'lumotlari bo'yicha aniqlanadigan qiymatini hisoblaymiz:

$$x = \frac{\kappa - np}{\sqrt{npq}} = \frac{8 - 10 \cdot 0,75}{\sqrt{10 \cdot 0,75 \cdot 0,25}} \approx 0,36$$

jadvaldan φ(0,36)=0,3789

Izlanayotgan ehtimol:

R_{10} (8)=0,7301·0,3739 ≈0,273

Bernulli formulasi boshqa natijaga, chunonchi

R_{10} (8)=0,282

natijaga olib keladi. Javoblarning bunchalik katta farq qilishi bu misolda n kichik qiymatga egaligi bilan tushuntiriladi.

Laplasning integral teoremasi.

Teorema. Agar har bir sinashda A hodisaning ro'y berish ehtimoli r o'zgarmas bo'lib, nol va birdan farqli bo'lsa, u holda n ta sinashda A hodisaning k_1 dan k_2 martagacha ro'y berish ehtimoli – $R_n(k_1,k_2)$ taqriban quyidagi aniq integralga teng:

$$P_n(k_1, k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x'}^{x''} e^{\frac{-y^2}{2}} dy = \phi(x'') - \phi(x'),$$

bu erda

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} \quad \text{ва} \quad x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

Maxsus jadvallarda yuqoridagi integralning x=5 gacha bo'lgan qiymatlari berilgan, chunki x>5 lar uchun F(x)=0,5 deb olish mumkin. F(x) funktsiya ko'pincha Laplas funktsiyasi deb ataladi.

Laplas funktsiyasi jadvalidan foydalanish uchun uni quyidagicha o'zgartiramiz.

$$P_n(k_1,k_2)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x'}^{0}e^{-\frac{f^2}{2}}df+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x''}e^{-\frac{f^2}{2}}df=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x''}e^{-\frac{f^2}{2}}df-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x'}e^{-\frac{f^2}{2}}df=$$

$$=\Phi(x'')-\Phi(x')$$

Bu jadvallardan argumentning manfiy qiymatlari uchun ham F(x) funktsiyaning toqligini hisobga olib, (ya’ni F(-x) = F(x)) foydalanamiz.

Shunday qilib, n ta erkli sinashda A hodisaning k_1 dan k_2 martagacha ro’y berishi ehtimoli

$$P_n(k_1,k_2)\approx\approx\Phi(x'')-\Phi(x')$$

$$x'=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}\ \textit{ва}\ x''=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}$$

Misol. Detalni texnikaviy nazorat bo’limi tekshirmagan bo’lish ehtimoli r=0,2. Tasodifiy olingan 400 ta detaldan 70 tadan 100 tagachasini nazorat bo’limi tekshirmagan bo’lish ehtimolini toping.

Echish. r=0.2. q=0,8. n=400, $k_{1=}70$, $k_{2=}100$.

$$x'=\frac{70-400\cdot 0,2}{\sqrt{400\cdot 0,2\cdot 0,8}}=-1,25$$

$$x''=\frac{100-400\cdot 0,2}{\sqrt{400\cdot 0,2\cdot 0,8}}=2,75$$

Shunday qilib,

R_{400} (70,100) = ϕ(2,5)- ϕ(-1,25) = ϕ(2,5)+ ϕ(1,25)

jadvaldan ϕ(2,5) = 0,4938; ϕ(1,25) = 0,3944

Izlanayotgan ehtimol

R_{400} (70,100)=0,4938+0,3944=0,8882

Puassonning limit teoremasi.

R_n(k) ehtimolning

$$P_n(k) = C_n^k\, p^k (1-p)^{n-k}; \qquad (1-p=q)$$

ifodasi formal ravishda uchta n, p va q o'zgaruvchilarning funktsiyasini ifoda qiladi. Aytaylik, k tayinlangan, n va p esa o'zgaradi deb faraz qilamiz. Aniqrog'i n va p lar mos holda cheksizlikka va nolga shunday intiladiki, λ = np miqdor chegaralangan bo'lib qolaveradi: λ = np, λ = Const

Bunday holda quyidagi teorema o'rinli bo'ladi.

Teorema. Yuqorida ko'rsatilgan shartlar bajarilganda ushbu $P_n(k) \approx \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ munosabat o'rinli bo'ladi.

Misol. Qo'shma korxona iste'molchiga 5000 ta sifatli mahsulot jo'natadi. Mahsulotning yo'lda shikastlanish ehtimoli 0,001 ga teng bo'lsa, ikkita yoki undan ortiq mahsulotning shikastlanishi ehtimolini toping.

Echish. shikastlangan mahsulotlar sonini m desak, izlanayotgan ehtimol R_{5000} (m≥2) bo'lib, u quyidagiga teng bo'ladi: R_{5000} (m≥2) = R_{5000} (2)+ R_{5000} (3)+...+R_{5000} (5000)=1-(R_{5000}(0)+ R_{5000}(1))

bizning xolda sinashlar soni katta va hodisa ro'y berish ehtimoli 0 ga yaqin bo'lganligi uchun Puasson teoremasidan foydalanamiz.

λ = pn = 5000·0,001= 5 ekanligini e'tiborga olsak:

$$P_{5000}(0) = \frac{5^0 \cdot e^{-5}}{0!} = e^{-5};$$

$$P_{5000}(1) = \frac{5^1 \cdot e^{-5}}{1!} = 5e^{-5}$$

U holda, R_{5000}(m≥2) = $1-e^{-5}-5e^{-5} \approx 0{,}9596$

Erkli sinashlarda nisbiy chastotaning o'zgarmas ehtimoldan chetlanish ehtimolini hisoblaymiz.

Faraz qilaylik, A hodisaning ro'y berishi ehtimoli o'zgarmas r ga (0<p<1) teng bo'lgan n ta erkli sinash o'tkazilayotgan bo'lsin. $\frac{m}{n}$ nisbiy chastotaning o'zgarmas r ehtimoldan chetlanishi absolyut qiymati bo'icha avvaldan berilgan ε>0 sondan katta bo'lmaslik ehtimolini topishni o'z oldimizga maqsad qilib qo'yaylik, ya'ni

$$\left| \frac{m}{n} - p \right| \leq \varepsilon$$

tengsizlikning ro'y berish ehtimolini topamiz. Bu ehtimolni bunday belgilaymiz:

$$P\left(\left| \frac{m}{n} - p \right| \leq \varepsilon \right)$$

Yuqoridagi tengsizlikni unga teng kuchli bo'lgan

$$-\varepsilon \leq \frac{m - np}{n} \leq \varepsilon$$

tengsizlik bilan almashtiramiz. Uni musbat $\sqrt{\frac{n}{pq}}$ ko'paytuvchiga ko'paytirsak

$$-\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}} \leq \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}$$

Laplasning integral teoremasidan foydalanib,

$$x' = -\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}} \qquad \text{ва} \qquad x'' = \varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}$$

deb olib, quyidagini hosil qilamiz:

$$P\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} \leq \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \leq \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}}^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{Z^2}{2}} dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{Z^2}{2}} dz = 2\phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

Nihoyat, qavs ichidagi tengsizliklarni ularga teng kuchli bo'lgan dastlabki tengsizlik bilan almashtirib, quyidagini hosil qilamiz:

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\leq\varepsilon\right)\approx 2\phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

Xulosa qilib aytganda.

$$\left|\frac{m}{n}-p\right|\leq\varepsilon$$

tengsizlikning ro'y berish ehtimoli taqriban Laplas funktsiyasining $x=\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$ dagi ikkilangan qiymatiga teng ekan.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

1. Laplasning lokal teoremasini ta'riflang.

2. Laplasning integral teoremasini ayting.

3. Puasson teoremasi qanday xollarda qo'llaniladi?

4. Lokal va integral teoremalarning amaliy ahamiyati nimadan iborat?

Tayanch iboralar.

Laplasning lokal teoremasi, Laplasning integral teoremasi, Puasson teoremasi**.**

Mustaqil echish uchun masalalar.

1. Bitta o'q uzilganda nishonga tegish ehtimoli 0,8 ga teng. 100 marta o'q uzilganda nishonga rosa 75 marta tegish ehtimolini toping.

2. O'yin soqqasi 10 marta tashlanganda uchga karrali ochkolar kamida 2 marta, ko'pi bilan besh marta tushishi ehtimolini toping.

3. O'yin soqqasi 800 marta tashlanganda uchga karrali ochko 267 marta tushishi ehtimolini toping.

4. O’yin soqqasini 90 marta tashlashda 3 ga karrali sonning kamida 100, ko’pi bilan 170 marta chiqish ehtimolini toping.

5. Detalning yaroqli bo’lish ehtimoli 0,97 ga teng. Olingan 200 ta detal orasida rosa 100 tasining yaroqli bo’lishi ehtimolini toping.

6. Texnologik jarayonga ko’ra kalava ipining 1 soat davomida uzilish ehtimoli 0,2 ga teng. Yigiruvchi ayol 100 ta kalavaga xizmat qiladi. Uning bir soat davomida ko’pi bilan 30 ta ipni ulash ehtimolini toping.

Adabiyotlar

[1] (57-63)

[2] (70-82)

[3] (30-35)

[4] (43-58)

[5] (247-250)

[7] (30-33)

[12](287-302)

6-§.Tasodifiy miqdorlar va ularning turlari.
Diskret tasodifiy miqdor ehtimollarining taqsimot qonuni.
Amalda ko'p uchraydigan diskret taqsimot qonunlari.

Tasodifiy miqdor tushunchasi ehtimollar nazariyasi fanining asosiy tushunchalaridan biri xisoblanadi.

Ta'rif: Tasodifiy miqdor deb, tasodifiy sabablarning ta'siri natijasida mumkin bo'lgan qiymatlardan faqat bittasini tayin ehtimol bilan qabul qiluvchi miqdorga aytiladi.

Biz tasodifiy miqdorlarni lotin alfavitining bosh harflari **X, Y, Z,…** bilan, ularning mumkin bo'lgan qiymatlarini esa tegishli kichik harflari **x, u, z, …** bilan belgilaymiz.

Odatda tasodifiy miqdorlar ikki xil bo'ladi: diskret tasodifiy miqdorlar va uzluksiz tasodifiy miqdorlar.

Diskret tasodifiy miqdorlar deb, mumkin bo'lgan qiymatlari ayrim ajralgan sonlardan (bu mumkin bo'lgan qiymatlar chekli yoki cheksiz bo'lishi mumkin) iborat miqdorga aytiladi.

Misol. X-tasodifiy miqdor 100 ta buyumdan iborat guruhdagi yaroqsiz buyumlar soni. Bu miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari quyidagicha bo'ladi:

$$x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=2\ \ldots.,x_{101}=100$$

Shunday qilib, diskret tasodifiy miqdorni tasvirlash uchun eng avvalo uning barcha mumkin bo'lgan qiymatlarini ko'rsatish lozim. Ammo, X tasodifiy miqdor uchun uning faqat mumkin bo'lgan qiymatlari x_1, x_2… nigina emas, balki $\{x=x_1\}$, $\{x=x_2\}$, … hodisalarning ehtimollarini ham, ya'ni

$$P_1=P(X=x_1),\ P_2=P(X=x_2),\ \ldots$$

ni ham ko'rsatish lozim.

Ta'rif. Tasodifiy miqdorning qiymatlari bilan ularning ehtimollari orasidagi bog'lanishni tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni deb ataladi.

Diskret tasodifiy miqdor taqsimot qonunini ifodalash usullari va shakllari turlicha bo'lishi mumkin.

X diskrekt tasodifiy miqdor taqsimot qonuni berilishining eng sodda shakli jadval bo'lib, bunda tasodifiy miqdorning barcha mumkin bo'lgan qiymatlari va ularga mos ehtimolliklar ko'rsatilgan bo'ladi:

$$\mathbf{X:}\ x_1\ x_2\ \ldots\ x_n$$

$$\mathbf{p:}\ \mathbf{p_1\ p_2\ \ldots\ p_n}$$

$x_1\ x_2\ \ldots\ x_n$ qiymatlar odatda ortib borish tartibida yoziladi.

Bundan tashqari, $\{X=x_i\}$ hodisalarning har ikkitasi birgalikda emasligi sababli

$$\mathbf{r_1+r_2+\ldots+r_n}=\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

tenglik har doim o'rinli bo'ladi. Ba'zan diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni grafik usulda – taqsimot ko'pburchagi yordamida ham beriladi.

Taqsimot ko'pburchagi hosil qilish uchun, abstsissalar o'qida tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari, ordinatalar o'qida esa ularga mos ehtimollarni qo'yiladi, keyin esa $\mathbf{(x_1;r_1), (x_2\ ;r_2)\ \ldots}$ nuqtalarni kesmalar bilan tutashtiriladi. Taqsimot qonuni formula (analitik) usulda ham beriladi.

Misol. Tanga 5 marta tashlanadi. Gerb tomonining tushish soni X tasodifiy miqdor. Bu X tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari 0, 1, 2, 3, 4, 5, sonlardan iborat bo'ladi. Bu qiymatlarning ehtimollari Bernulli formulasi yordamida hisoblanadi.

Masalan,

$$P(X=3)=C_5^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{10}{32}$$

U holda

$$\begin{array}{lcccccc} \textbf{X:} & \textbf{0} & \textbf{1} & \textbf{2} & \textbf{3} & \textbf{4} & \textbf{5} \\ \textbf{P:} & \frac{1}{32} & \frac{5}{32} & \frac{10}{32} & \frac{10}{32} & \frac{5}{32} & \frac{1}{32} \end{array}$$

ko'rinishdagi jadvalni hosil qilamiz.

Amalda ko'p uchraydigan diskret taqsimot qonunlari Binomial taqsimoti va Puasson taqsimoti hisoblanadi.

Binomial taqsimot. n marta erkli tajriba o'tkaziladi.

Ulardan har birida biror A hodisa bir xil R ehtimol bilan yuz berishi mumkin. n ta tajribada A hodisaning yuz berishi sonidan iborat X tasodifiy miqdor qaraladi. Bu tasodifiy miqdorga mos jadval

X: 0 1 2 … n-1 n

P: $P_n(0)$ $P_n(1)$ $p_n(2)$ … $P_n(n-1)$ $P_n(n)$

ko'rinishda bo'lib, bunda

$$P_n(k)=C^k{}_n p^k q^{n-k}, \qquad (k=0, 1, 2,\dots n)$$

Bu bevosita Bernulli formulasidan kelib chiqadi. Bu jadval bilan harakterlanadigan taqsimot qonuni **binomial taqsimot qonuni** deb ataladi.

Agar X tasodifiy miqdorga mos jadval

X:	**0**	**1**	**2**	**…**	**k**	**…**
R:	r_0	r_1	r_2	**…**	r_k	**…**

ko'rinishda bo'lsa, u holda X tasodifiy miqdor Puasson qonuni bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi. Jadvalda

$$P_k = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \qquad (k = 0, \quad 1, \quad 2, \quad \dots, \quad)$$

Bundagi λ tayinlangan musbat son (λ ning har xil qiymatlariga turlicha Puasson taqsimoti mos keladi).

Ehtimollar nazariyasining tatbiqlarida Puasson taqsimoti boshqa ko'plab diskret taqsimotlarga nisbatan ko'proq uchraganligi sababli u muhim axamiyat kasb etadi.

Masalan, binomial ehtimollarning

$$\mathbf{P_n(k)=C^k_n p^k q^{n-k}}$$

ifodasidagi r ni tayinlab qo'yib, n tajribalar sonini cheksizlikka, R ehtimolni esa n va r larning ko'paytmasi uchun pr=const shart bajariladigan qilib nolga intiltirsak, u holda

$$\lim_{n\to\infty} p_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-k}}{k!}$$

munosabatga ega bo'lamiz. Oxirgi munosabatdan ko'rinib turibdiki, yuqoridagi limitga o'tish natijasida binomial taqsimotning jadvali Puasson taqsimotining jadvaliga o'tadi. Shunday qilib, Puasson taqsimoti binomial taqsimot uchun yuqoridagi shartlar bajarilganda limit taqsimot bo'lar ekan. Puasson taqsimotning bu hossasi tajribalar soni katta bo'lib, ehtimol esa kichik bo'lganda binomial taqsimotni ifodalash bilan u tez-tez ishlatiladigan siyrak voqealar nomi bog'liq ekanligini ta'kidlab o'tamiz.

Geometrik taqsimot qonuni deb ataluvchi qonun

$$\mathbf{R(X=k)=q^{k-1}p,\ (p+q=1,\ k=1,\ 2,\ \dots)}$$

formula shaklida berilishi yoki

X: 1 2 3 … k …

P: p qp q^2p … q^{k-1} p …

jadval ko'rinishida berilishi mumkin.

Misol. X – bitta kubikni tashlashda birinchi marta «6» ochko tushguncha o'tkaziladigan tajribalar soni bo'lsin. Ravshanki, bu holda X – diskret tasodifiy miqdor bo'lib, r=1/6 parametrli geometrik taqsimot qonuniga bo'ysunadi. Ya'ni

X: 1 2 3 … k …

r: $\frac{1}{6}$ $\quad \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}$ $\quad \left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}$ $\quad \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{6}\dots$

Misol. Talabaning imtihon biletidagi savollarning har biriga to'g'ri javob berish ehtimoli 0,7 ga teng. Uning imtihon biletidagi 4 ta savolga bergan to'g'ri javoblari sonining taqsimot qonunini tuzing.

Echish: X tasodifiy miqdor orqali talabaning to'g'ri javoblari sonini belgilasak, uning qabul qiladigan qiymatlari

$$x_1=0;\ x_2=1;\ x_3=2;\ x_4=3;\ x_5=4;$$

Ko'rinib turibdiki, n=4; p=0.7; q=0.3 va X tasodifiy miqdorning yuqoridagi qiymatlarni qabul qilish ehtimollari Bernulli formulasi orqali topiladi:

$R_1 = R_4(0) = S_4^0(0,7)^0(0,3)^4 = 0,0081$

$R_2 = R_4(1) = S_4^1(0,7)^1(0,3)^3 = 0,0756$

$R_3 = R_4(2) = S_4^2(0,7)^2(0,3)^2 = 0,2646$

$R_4 = R_4(3) = S_4^3(0,7)^3(0,3)^1 = 0,4116$

$R_5 = R_4(4) = S_4^4(0,7)^4(0,3)^0 = 0,2401$

U holda X tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni quyidagicha bo'ladi:

X	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
P	**0,0081**	**0,0756**	**0,2646**	**0,4116**	**0,2401**

Tekshirish:

0,0081+0,0756+0,2646+0,4116+0,2401=1

O'z -o'zini tekshirish uchun savollar.

1. Tasodifiy miqdor ta'rifini bering.
2. Tasodifiy miqdorning qanday turlari bor? Ularga misollar keltiring.
3. Diskret tasodifiy miqdorni taqsimot qonuni deb nimaga aytiladi?
4. Taqsimot qonuni qanday shakllarda berilishi mumkin?
5. Amalda ko'p uchraydigan diskret taqsimot qonunlariga misollar keltiring.

Tayanch iboralar.

Tasodifiy miqdor, diskret tasodifiy miqdor, diskret tasodifiy miqdorning taqsimoti qonuni, binomial taqsimot qonuni, Puasson taqsimot qonuni, geometrik taqsimot qonuni.

Mustaqil echish uchun misollar.

1. Nishonga qarata 4 ta o'q uziladi, bunda har qaysi o'q uzishda nishonga tegishi ehtimoli R=0,8 ga teng. Quyidagilarni toping:

a) nishonga tegishlar soniga teng bo'lgan X diskret tasodifiy miqdorning taqsimoti qonunini;

b) $1 \le X \le 3$ *ва* X >3 hodisalarning ehtimolini;

v) Taqsimot ko'pburchagini chizing.

2. Yashikda 15 ta oq va 25 ta qora shar bor. Yashikdan 1 ta shar olindi. X-tasodifiy miqdor olingan oq sharlar soni bo'lsa, uning taqsimot qonunini tuzing.

3. Uchta mergan nishonga qarata o'q uzishdi. Nishonga tekkizish ehtimoli birinchi mergan uchun 0,8 ga, ikkinchi mergan uchun 0,6 ga, uchinchisi uchun 0,5 ga teng. Nishonga tekkan o'qlar sonidan iborat bo'lgan X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

4. Ichida 5 ta oq va 7 ta qora shar solingan idishdan 4 ta shar olinadi. Olingan oq sharlar sonidan iborat bo'lgan X tasodifiy miqdorni taqsimot qonunini tuzing.

Adabiyotlar.

[1] (64-74)

[2] (86-94) , (140-149)

[3] (37-42)

[4] (36-58)

[5] (251-269)

[7] (39-44)

[12] (302-310)

7-§. Diskret tasodifiy miqdorning sonli xarakteristikalari va ularning xossalari.

Shuni ta'kidlash joizki, X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini bilish ehtimollik nuqtai-nazardan X miqdor haqida to'liq ma'lumot beradi. Amaliyotda esa ko'pincha bundan ancha kam narsani bilish kifoya qiladi, chunonchi taqsimotni xarakterlaydigan ba'zi sonlargina bilish kifoyadir, bular tasodifiy miqdorning sonli xarakteristikalari deb ataladi va ularning vazifasi tasodifiy miqdorning eng muhim xususiyatlarini qisqa shaklda ifodalashdir. Eng muhim sonli xarakteristikalar qatoriga matematik kutilish va dispersiya kiradi.

Ushbu diskret tasodifiy miqdor berilgan bo'lsin.

$$\begin{array}{ll} \mathbf{X:} & x_1\ \mathbf{x_2} \ldots \mathbf{x_n} \\ \mathbf{R:} & \mathbf{r_1}\ \mathbf{r_2} \ldots \mathbf{r_n} \end{array}$$

Ta'rif. X diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilishi M(X) deb, X miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlarini mos ehtimollarga ko'paytmalari yig'indisiga teng songa aytiladi, ya'ni

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots. + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

X tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari soni cheksiz, ya'ni X tasodifiy miqdor

$$\begin{array}{ll} \mathbf{X:} & x_1\ x_2 \ldots x_n \ldots. \\ \boldsymbol{R:} & \mathbf{r_1}\ \mathbf{r_2} \ldots \mathbf{r_n} \ldots. \end{array}$$

taqsimotga ega bo'lgan holda uning matematik kutilishi

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots. + x_n p_n + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

formula bilan aniqlanadi, bunda oxirgi qator absolyut yaqinlashadi deb faraz qilinadi. Aks holda, bu tasodifiy miqdor matematik kutilishga ega bo'lmaydi.

Misol. Ushbu tasodifiy miqdorning matematik kutilishini toping.

X: **1 2 3 4 5 6**

R: $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$

Echish.

$$\mathbf{M(x)= 1\cdot \frac{1}{6} +2\cdot \frac{1}{6} +3\cdot \frac{1}{6} + 4\cdot \frac{1}{6} +5\cdot \frac{1}{6} +6\cdot \frac{1}{6}=3{,}5}$$

Misol. Puasson qonuni bo'yicha taqsimlangan X diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilishini toping.

Echish. Ma'lumki, Puasson qonuni quyidagi jadval bilan xarakterlanadi.

X: 0 1 2 3 . . . k

p: $e^{-\lambda}$ $\lambda e^{-\lambda}$ $\frac{\lambda e^{-\lambda}}{2!}$ $\frac{\lambda^3 e^{-\lambda}}{3!}$ . . . $\frac{\lambda^\kappa e^{-\lambda}}{\kappa!}$

U holda

$$M(X)=\sum_{\kappa=0}^{\infty}\kappa\frac{\lambda^\kappa}{\kappa!}e^{-\lambda}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{\lambda^{\kappa-1}}{(\kappa-1)!}e^{-\lambda}=\lambda e^{-\lambda}\cdot e^{-\lambda}=\lambda$$

Shunday qilib, Puasson taqsimotini xarakterlovchi parametr X tasodifiy miqdorning matematik kutilishidan boshqa narsa emas ekan.

X tasodifiy miqdor ustida n ta sinov o'tkazilgan bo'lsin. Sinov natijalari quyidagicha bo'lsin.

X: x_1 x_2 . . . x_k

p: n_1 n_2 . . . n_k

Yuqori satrda X miqdorning kuzatilgan qiymatlari, pastki satrda esa mos qiymatlarning chastotalari ko'rsatilgan. X orqali kuzatilgan barcha qiymatlarning o'rta arifmetigini belgilaylik, u holda

$$\overline{X}=\frac{x_1n_1+x_2n_2+\ldots+x_kn_k}{n}$$

yoki

$$\overline{X}=x_1\frac{n_1}{n}+x_2\frac{n_2}{n}+\ldots+x_k\frac{n_k}{n}=x_1\nu_1+x_2\nu_2+\ldots+x_k\nu_k$$

Bu erda ν_1, ν_2, ...,ν_K - mos ravishda x_1, x_2 , . . . x_x qiymatlarning nisbiy chastotalari.

Demak, $\overline{X}$=M(X) ya'ni X tasodifiy miqdorning matematik kutilishi uning kuzatiladigan qiymatlari o'rta arifmetigiga taqriban teng.

Matematik kutilishning xossalari.

1-xossa. O'zgarmas miqdorning matematik kutilishi shu o'zgarmasning o'ziga teng, ya'ni M(S)=S.

Isboti. S o'zgarmas miqdorni yagona S qiymatni 1 ga teng ehtimol bilan qabul qiladigan tasodifiy miqdor deb qarash mumkin. Shuning uchun,

$$\mathbf{M(S)=S\cdot 1=S}$$

2-xossa. Chekli sondagi tasodifiy miqdorlar yig'indisining matematik kutilishi ular matematik kutilishlarining yig'indisiga teng, ya'ni

$$\mathbf{M(X_1+X_2+\ldots+X_n)=M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)}$$

3-xossa. Chekli sondagi bog'liqmas tasodifiy miqdorlar ko'paytmasining matematik kutilishi ular matematik kutilishlarining ko'paytmasiga teng, ya'ni

$$\mathbf{M(X_1\cdot X_2\cdot\ldots\cdot X_n)=M(X_1)\cdot M(X_2)\cdot\ldots\cdot M(X_n)}$$

4- xossa.

$$\mathbf{M(aX+b)=aM(X)+b,\ (a,\ b=const)}$$

Isboti.

$$\mathbf{M(\mathit{a}X+b)=M(\mathit{a}X)+M(b)=\mathit{a}M(X)+b}$$

5-xossa.

$$\mathbf{M(X-M(X))=0}$$

X-M(X) tasodifiy miqdor X tasodifiy miqdorni o'zining matematik kutilishidan chetlanishi (og'ishi) deb ataladi. Shunday qilib, tasodifiy miqdor chetlanishining matematik kutilishi nolga teng.

Tasodifiy miqdor dispersiyasi.

Ko'pchilik holatlarda, tasodifiy miqdorning matematik kutilishini bilish uni etarli darajada xarakterlash uchun kifoya qilmaydi.

Masalan. **X: -0,7 –0,01 0 0,01 0.7**

r: 0,1 0,2 0,4 0,2 0,1

Y: -50 –10 0 10 50

p: 0,3 0,1 0,2 0,1 0,3

M(X)=0 va M(Y)=0 ekanligi ko'rinib turibdi. Ammo bu tasodifiy miqdorlar taqsimotlarining mohiyati turlicha: X miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari uning matematik kutilishidan kam farq qiladi, shu bilan bir vaqtda Y miqdorning qiymatlari uning matematik kutilishidan katta farq qiladi. Boshqacha aytganda, matematik kutilishini bilish undan qanday chetlanishlar bo'lish mumkinligi haqida xukm yuritishga imkon bermaydi.

Ta'rif. X tasodifiy miqdorning dispersiyasi D(X) deb, uning chetlanishi kvadratining matematik kutilishiga aytiladi, ya'ni

$$D(X)=M(X-M(X))^2$$

Diskret tasodifiy miqdor uchun bu formula ushbu ko'rinishini oladi:

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-M(X))^2 p_i$$

Ta'rif. X tasodifiy miqdorning o'rtacha kvadratik chetlanishi σ(X) deb, dispersiyadan olingan kvadrat ildizning qiymatiga aytiladi, ya'ni

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$$

Misol. Agar A hodisaning ro'y berish ehtimoli r ga teng bo'lsa, u holda A hodisaning bitta sinovda ro'y berish sonining matematik kutilishi, dispersiyasi va o'rtacha kvadratik chetlanishini toping.

Echish. Taqsimot qonuni quyidagicha bo'ladi:

X: 0 1

r: q p

U holda,

$$M(X)=0\cdot q+1p=p$$

$$D(X)=(0-p)^2\cdot q+(1-p)^2\cdot p=qp^2+pq^2(p+q)=qp$$

$\sigma(X)=\sqrt{pq}$

Dispersiyani hisoblash uchun ko'pincha quyidagi formuladan foydalangan ma'qul:

$$\mathbf{D(X)=M(X^2)-(M(X))^2}$$

Dispersiyaning xossalari.

1-xossa. O'zgarmas miqdorning dispersiyasi nolga teng, ya'ni

$$D(S)=0$$

Isbot. S o'zgarmas miqdorni S qiymatini 1 ehtimol bilan qabul qiladi deb qarash mumkin. U holda

$$\mathbf{M(S)=S \text{ va } D(S)=(S\text{-}S)^2 \cdot 1=0}$$

2-xossa. O'zgarmas ko'paytuvchini kvadratga ko'tarib dispersiya belgisidan tashqariga chiqish mumkin.

$$\mathbf{D(S\cdot X)=S^2\, D(X)}$$

3-xossa. Chekli sondagi bog'liqmas tasodifiy miqdorlar yig'indisining dispersiyasi ular dispersiyalarning yig'indisiga teng:

$$\mathbf{D(X_1+X_2+...+X_n)=D(X_1)+D(X_2)+...+D(X_n)}$$

Misol. Quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan X diskeret tasodifiy miqdorning matematik kutilishi, dispersiyasi va o'rtacha kvadratik chetlanishini hisoblang.

X:	**-2**	**1**	**3**	**6**
r:	**0.4**	**0,2**	**0,1**	**0,3**

Echish.

$$\mathbf{M(X)=-2\cdot 0,4+1\cdot 0,2+30,1+6\cdot 0,3=1,5}$$

$$\mathbf{D(X)=M(X\text{-}M(X))^2=(-2\text{-}1,5)^2\cdot 0,4+(1\text{-}1,5)^2\cdot 0.2+(3\text{-}1,5)^2\cdot 0,1+(6\text{-}1,5)^2\cdot 0,3=11,25}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{11,25}\approx 3,36$$

Biz yuqorida dispersiyani ta'rif bo'yicha hisobladik. Endi $D(X)=M(X^2)-M^2(X)$ formula bo'yicha hisoblaylik. Buning uchun dastlabki X^2 tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini tuzib olamiz.

$$\mathbf{X^2: 4\ 1\ 9\ 36}$$

r: 0,4 0,2 0,1 0.3

$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=13{,}5-2{,}25=11{,}25$

Ta'rif. X va Y tasodifiy miqdorlarning korrelyatsiya momenti (yoki kovariatsiyasi) deb, quyidagi songa aytiladi.

$$K_{ku}=M[(X-M(X))(Y-M(Y))]$$

Diskret X va Y tasodifiy miqdorlar uchun bu formula ushbu ko'rinishini oladi:

$$K_{xy}=\sum_{i,j}(x_i-M(X))(y_j-M(Y))P_{ij}$$

bunda $R_{ij}=P(X=x_i;Y=y_j)$

Korrelyatsiya momenti ifodasi matematik kutilish xossalari asosida bunday almashtirilishi mumkin;

$M(X-M\ (Y-M))=M[XY-XM(Y)-YM(X)+M(X)M(Y)]=$

$=M(XY)-M(X)M(Y)-M(Y)M(X)+M(X)M(Y)=M(XY)-M(X)\cdot M(Y)$

Teorema. Bog'liqmas tasodifiy miqdorlar korrelyatsiya momenti nolga teng.

Ta'rif:

$$r_{xy}=\frac{K_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}$$

nisbat X va Y tasodifiy miqdorning korrelyatsiya koeffitsienti deb ataladi.

Agar X va Y tasodifiy miqdorlar bog'liqmas bo'lsa, u holda ularning korrelyatsiya koeffitsienti nolga tengligini tushunish qiyin emas.

Quyidagi teorema tasodifiy miqdorlar orasidagi bog'lanishni tavsiflashda korrelyatsiya koeffitsientining ahamiyatini yana ham batafsil oydinlashtirib beradi.

Teorema. Agar Y tasodifiy miqdor X tasodifiy miqdorning chiziqli funktsiyasi, ya'ni $Y=aX+b$ bo'lsa, u holda agar $a>0$ bo'lsa, $r_{xy}=1$ agar $a<0$ bo'lsa, u holda $r_{xy}=-1$ bo'ladi.

Isbot.

$K_{xu}=M[(X-M(X))(Y-M(Y))]=M[(X-M(X)(aX+b-M(Y))]=M[(X- M(X))(aX+b-aM(X)-b)]=aM[X-M(X)]^2 =aD(X)=a\sigma^2_x$

$a\sigma^2_u=D(Y)=a^2D(X)=a^2\sigma^2_x \quad \sigma_y=[a] \ \sigma_x$

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{a\sigma_x^2}{|a|\sigma_x^2} = \begin{cases} 1, & a > 0 \\ -1, & a < 0 \end{cases}$$

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

1. Tasodifiy miqdor matematik kutilishi va dispersiyasi ta'riflarini ayting.

2. Matematik kutilish va dispersiya tasodifiy miqdorning qaysi xossalarini ifodalaydi?

3. Matematik kutilish va dispersiyaning xossalarini keltiring.

4. Kovariatsiya nima?

Tayanch iboralar

Matematik kutilish, chetlanish, o'rtacha kvadratik chetlanish, tasodifiy miqdor dispersiyasi, korrelyatsiya koeffitsenti.

Mustaqil echish uchun masalalar.

1. 10 ta detaldan iborat partiyada 3 ta yaroqsiz detal bor. Tavakkaliga 2 ta detal olingan. X diskret tasodifiy miqdor –olingan 2 ta detal orasidagi yaroqsiz detallar soni bo'lsa, uning matematik kutilishini toping.
2. Tanga 5 marta tashlanadi. «Raqam» tomoni bilan tushishlar sonining taqsimot qonunini tuzing va dispersiyasini hisoblang.
3. Mergan o'q nishonga tekkuncha otadi. O'qning nishonga tegish ehtimoli R ga teng, otilgan o'qlar sonining matematik kutilishi va dispersiyasini toping.
4. Ichida 4 ta oq va 6 ta qora shar bo'lgan idishda 5 ta shar olinadi. X tasodifiy miqdor chiqqan oq sharlar soni. M(X), D(X) va σ(X) larni toping.

5. To'pdagi uzilgan bitta o'q bilan nishonni mo'ljalga olish ehtimoli 0,4 ga teng. Uchta o'q uzilganda nishonga tekkizishlar sonidan iborat bo'lgan X tasodifiy miqdorning matematik kutilishining toping.

Adabiyotlar

[1] (75-95)

[2] (94-103)

[3] (42-58)

[4] (99-146)

[5] (261-269)

[7] (39-44)

[12] (302-310)

8-§.Taqsimot funktsiya va uning xossalari. Ehtimollar taqsimotining zichlik funktsiyasi. Amalda ko'p uchraydigan uzluksiz taqsimot qonunlari.

Diskret tasodifiy miqdorning berilish usulini uzluksiz tasodifiy miqdorlar uchun qo'llab bo'lmaydi. Uzluksiz tasodifiy miqdorning barcha mumkin bo'lgan qiymatlarini yozish mumkin emas. Shuning uchun, taqsimot funktsiya tushunchasi keltiriladi.

Aytaylik, x– haqiqiy son bo'lsin. X ning x dan kichik qiymat qabul qilishdan iborat hodisaning ehtimolini F(x) orqali belgilaymiz. Albatta x ning o'zgarishi bilan umuman olganda F(x) ham o'zgaradi, ya'ni u x ning funktsiyasi.

Ta'rif. Tasodifiy miqdorning taqsimot funktsiyasi deb, har bir x qiymati uchun X tasodifiy miqdorning x dan kichik qiymat qabul qilish extimolini aniqlovchi F(x) funktsiyaga aytiladi, ya'ni

$$\mathbf{F(x) = R(X<x)}$$

Endi uzluksiz tasodifiy miqdorning aniqroq ta'rifini bersak bo'ladi: tasodifiy miqdor taqsimotining F(x) taqsimot funktsiyasi uzluksiz differentsiallanuvchi bo'lsa, tasodifiy miqdorni uzluksiz deymiz.

Taqsimot funktsiyaning xossalari.

1-xossa. Taqsimot funktsiyaning qiymatlari [0;1] kesmaga tegishli:

$$0 \le F(x) \le 1$$

Isboti: Bu xossa taqsimot funktsiyani ehtimol sifatida ta'riflanishdan kelib chiqadi: ehtimol hamma vaqt manfiy bo'lmagan va birdan katta bo'lmagan sondir.

2-xossa. F(x) kamaymaydigan funktsiya, ya'ni agar $x_1<x_2$ bo'lsa, u holda $F(x_1)\le F(x_2)$

Isboti: $x_1<x_2$ bo'lsin, u holda

$$(X<x_2)=(X<x_1)+(x_1\le X<x_2).$$

Bundan

$$R(X<x_2)=R(X<x_1)+R(x_1\le X<x_2).$$

yoki

$$\mathbf{F(x_2)\text{- } F(x_1)= R(x_1 \leq X < x_2).}$$

ehtimol manfiy bo'lmasligini hisobga olsak,

$$\mathbf{F(x_2)\text{- } F(x_1) \geq 0}$$

yoki

$$\mathbf{F(x_1) \leq F(x_2)}$$

1-natija. Tasodifiy miqdorning (a:b) intervalda yotuvchi qiymatni qabul qilish ehtimoli taqsimot funktsiyasining shu intervaldagi orttirmasiga teng:

$$\mathbf{R(a \leq X < b) = F(b)\text{-}F(a)}$$

***2**-natija.* X uzluksiz tasodifiy miqdorning tayin bitta qiymat qabul qilishi ehtimoli nolga teng.

Xaqiqatan ham, $a=x_1$; $b=x_1+\Delta x$ deb olsak, quyidagiga ega bo'lamiz.

$$\mathbf{R(x_1 \leq X < x_1 + \Delta x) = F(x_1+\Delta x)\text{-}F(x_1)}$$

Δx ni nolga intiltiramiz. X uzluksiz tasodifiy miqdor bo'lgani uchun F(x) funktsiya uzluksiz bo'ladi. F(x) ning x_1 nuqtada uzluksizligidan $F(x_1+\Delta x)\text{-}F(x_1)$ ayirma ham nolga intiladi, demak

$$\mathbf{R(X=x_1)=0}$$

3-xossa. Agar tasodifiy miqdorning_mumkin bo'lgan qiymatlari (a;b) intervalga tegishli bo'lsa, u holda

$$x \leq a \textbf{ da } F(x)=0, \; x > b \textbf{ da } F(x)=1$$

Natija. Agar tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari butun ox o'qda joylashgan bo'lsa, u holda quyidagi limit munosabatlar o'rinli:

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, \lim_{x\to\infty} F(x) = 1$$

Misol. X tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot funktsiya bilan berilgan:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}, & -1 < x \leq 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

Sinash natijasida X miqdor (0 ;2) intervalga tegishli qiymat qabul qilish extimolini toping.

Echish.

$$P(0<X<2)=F(2)-F(0)=\frac{1}{4}\cdot 2+\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{4}\cdot 0+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}$$

Misol. X diskret tasodifiy miqdor quydagi taqsimot qonuni bilan berilgan.

X: 1 4 8

r: 0,3 0,1 0,6

Taqsimot funktsiyani toping.

Echish.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ 0{,}3, & 1<x\le 4\\ 0{,}4, & 4<x\le 8\\ 1, & x>8\end{cases}$$

Ehtimollarning zichlik funktsiyasi.

Yuqorida uzluksiz tasodifiy miqdorni taqsimot funktsiya yordamida bergan edik. Tasodifiy miqdorni bu usulda berish yagona emas. Uzluksiz tasodifiy miqdorni, ehtimollar taqsimotining zichlik (differentsial) funktsiyasidan foydalanib ham berish mumkin.

Ta'rif. Taqsimotning zichlik f(x) (differentsial) funktsiyasi deb,taqsimot funktsiyasidan olingan birinchi tartibli f (x) = F' (x) hosilaga aytiladi.

Zichlik funktsiyasini bilgan holda, uzluksiz tasodifiy miqdorning berilgan intervalga tegishli qiymat qabul qilishi ehtimolini hisoblash mumkin.

Teorema: X uzluksiz tasodifiy miqorning (a;b) intervalga tegishli qiymat qabul qilishi ehtimoli zichlik funktsiyasidan a dan b gacha olingan aniq integralga teng:

$$\mathbf{R}(a<X<b)=\int_a^b f(x)\,dx$$

Bundan tashqari, f(x) zichlik funktsiyasini bilgan holda F(x) taqsimot funktsiyasini quyidagi formula bo'yicha topish mumkin:

$$\mathbf{F(x)} = \int_{-\infty}^{X} f(y)\,dy$$

Shunday qilib, zichlik funktsiyasini bilgan holda taqsimot funktsiyasini topish mumkin. Albatta, taqsimot funktsiya ma'lum bo'lsa, zichlik funktsiyasini topish mumkin, chunonchi f(x) = F'(x).

Misol. Berilgan zichlik funktsiya bo'yicha taqsimot funktsiyani toping.

$$f(x)= \begin{matrix} 0, & x \le 0 \\ \frac{1}{b-a}, & a < x \le b \\ 0, & x > b \end{matrix}$$

Echish. Agar x≤a bo'lsa, u holda f(x)=0 va demak, F(x)=0.

Agar a<x≤b bo'lsa,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(y)dy = \int_{-\infty}^{a} 0dy + \int_{a}^{x} \frac{dy}{b-a} = \frac{x-a}{b-a}$$

Agar x>b bo'lsa,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} ody = \int_{-\infty}^{b} \frac{dy}{b-a} + \int_{b}^{\infty} ody = \frac{b-a}{b-a} + 0 = 1$$

Demak,

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \le b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

Odatda, bunday zichlik funktsiya bilan berilgan tasodifiy miqdorni (a;b) oraliqda tekis taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi.

Differentsial funktsiyaning xossalari

1-xossa. Differentsial funktsiya manfiy emas: f(x)≥0

Isbot. Bu xossa f(x) kamaymaydigan F(x) taqsimot funktsiyaning hosilasi ekanligidan kelib chiqadi.

2-xossa. Differentsial funktsiyadan -∞ dan +∞ gacha olingan hosmas integral birga teng:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Isboti. Nyuton-Leybnits formulasiga asosan;

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = F(x) \mathop{I}_{\infty}^{-\infty} = F(+\infty) - F(-\infty) = 1 - 0 = 1$$

Shuni isbotlash talab qilingan edi.

Eslatama: Agar X tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari [*a*;b] kesmadan iborat bo'lsa, u holda yuqoridagi formula

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = 1$$

ko'rinishini oladi. Bu formula geometrik nuqtai nazardan OX o'q *f*(x) funktsiya va x=*a*; x=b to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuzi 1 ga tengligini bildiradi.

Uzluksiz tasodifiy miqdorning sonli xarakteristikalari.

Ta'rif. Mumkin bo'lgan qiymatlari [*a*;b] kesmaga tegishli bo'lgan X uzluksiz tasodifiy miqdorning matematik kutilishi deb,

$$M(X) = \int_{a}^{b} xf(x)dx$$

aniq integralga aytiladi.

Agar mumkin bo'lgan qiymatlar butun X o'qqa tegishli bo'lsa, u holda

$$M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

Bu o'rinda hosmas integral absolyut yaqinlashuvchi, ya'ni

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)dx$$

integral mavjud deb faraz qilinadi.

Ta'rif. Uzluksiz tasodifiy miqdorning dispersiyasi deb uning chetlanishi kvadratining matematik kutilishiga aytiladi.

Agar mumkin bo'lgan qiymatlar [*a*;b] kesmaga tegishli bo'lsa u holda

$$D(X) = \int_{a}^{b} (x - M(X))^2 f(x)dx$$

agar OX o'qqa tegishli bo'lsa,

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-M(X))^2 f(x)dx$$

Misol. Ushbu taqsimot funktsiya bilan berilgan X tasodifiy miqdorning matematik kutilishi va dispersiyasini toping.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x, & 0<x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}$$

Echish:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 1, & 0<x\le 1\\ 0, & x>1\end{cases}$$

Matematik kutilishini topamiz:

$$M(X)=\int_0^1 x\cdot 1\cdot dx=\frac{x^2}{2}\int=\frac{1}{2}$$

Dispersiyani topamiz:

$$\text{Д}(X)=\int_0^1 x^2 1dx-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{x^3}{3}\int_0^1-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$$

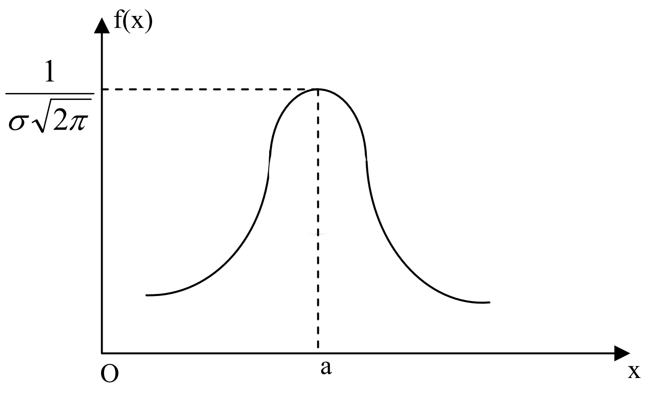
Normal taqsimot qonuni.

Normal taqsimot deb,

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)}{2\sigma^2}}$$

zichlik funktsiya bilan beriladigan uzluksiz tasodifiy miqdor taqsimotiga aytiladi.

Bu zichlik funktsiya grafigining sxematik chizmasi quyidagi ko’rinishga ega:



Ko’rinib turibdiki, normal taqsimot ikkita parametr:*a* va σ bilan aniqlanadi. Normal taqsimot berilish uchun shu ikkita parametrning berilish kifoya. Bu parametrning ehtimoliy ma’nosi quyidagicha: *a* parametr normal taqsimotning matematik kutilishiga, σ -o’rtacha kvadratik chetlanishiga teng. Darhaqiqat

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{(x-a)}{2\sigma^2}}dx$$

Yangi $Z=\frac{x-a}{\sigma}$ o’zgaruvchi kiritamiz.

Bundan $X=\sigma z+a \Rightarrow dx=\sigma dz$

U holda,

$$M(X)=\frac{\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma z e^{-\frac{z^2}{2}}dz+\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}dz=0+\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi}=a$$

Shunday qilib, M(X)=*a*, ya’ni normal taqsimotning matematik kutilishi *a* parametrga teng. Xuddi shunga o’xshash, σ (X)= σ ekanligini ko’rsatish qiyin emas.

1-eslatma. Umumiy normal taqsimot deb, ixtiyoriy *a* va σ (σ>0) parametrli normal taqsimotga aytiladi.

Normalangan normal taqsimot deb, *a*=0 va σ=1 parametrli normal taqsimotga aytiladi. Masalan, X *a* va σ parametrli normal tasodifiy miqdor bo’lsa, u holda U=$\frac{x-a}{\sigma}$ almashtirish bilan tasodifiy miqdor normal miqdor bo’ladi, shu bilan birga M(U)=0, σ(U)=1. Normalangan taqsimotning zichlik funktsiyasi

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Bu funktsiyaning qiymatlari jadvalari ehtimollar nazariyasiga oid ko’plab adabiyotlarda keltirilgan.

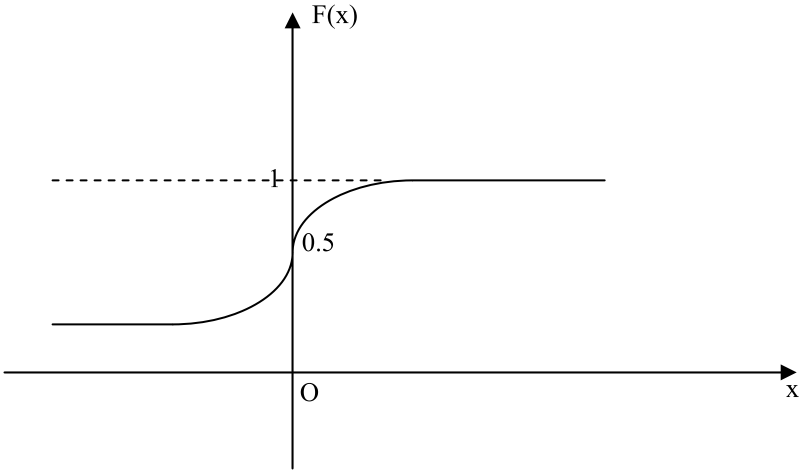
2-eslatma. Umumiy normal taqsimotning taqsimot funktsiyasi deb,

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(y-a)^2}{2\sigma^2}}$$ funktsiyaga,

normalangan normal tasodifiy miqdorning taqsimot funktsiyasi deb,

$$F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{Z^2}{2}} dz$$ funktsiyaga aytiladi.

F_0 (x) funktsiyaning maxsus qiymatlari jadvali tuzilgan bo'lib, uning grafigi quyidagicha shaklga ega:



Ko'rsatkichli taqsimot.

Ko'rsatkichli (eksponentsial) taqsimot deb,

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x>0\end{cases}$$

(bu erda λ>0 - o'zgarmas musbat kattalik) zichlik funktsiya bilan tavsiflanadigan ehtimollar taqsimotiga aytiladi.

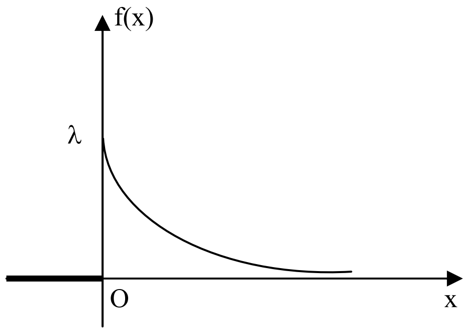
Ko'rsatkichli taqsimotning taqsimot funktsiyasini topamiz

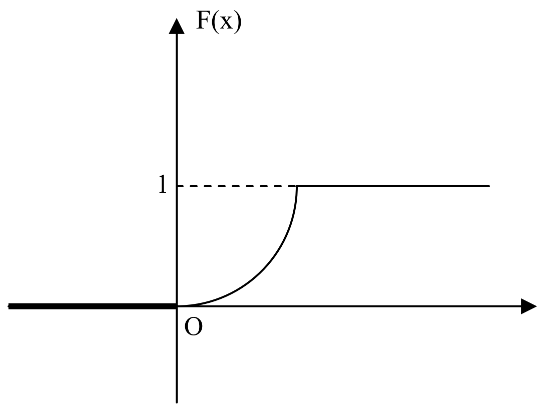
$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} 0\cdot dx+\lambda\int_{0}^{x} e^{-\lambda x}dx=1-e^{-\lambda x}$$

Demak,

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-e^{-\lambda x}, & x>0\end{cases}$$

Ko'rsatkichli taqsimotning zichlik funktsiyasi va taqsimot funktsiyasi grafiklari quyidagi chizmada tasvirlangan.





Ko'rsatkichli taqsimotning matematik kutilishi, dispersiya va o'rtacha kvadratik chetlanishi mos ravishda quyidagicha:

$$M(X)=\frac{1}{\lambda};\ D(X)=\frac{1}{\lambda^2};\ \sigma(X)=\frac{1}{\lambda};$$

Ko'rsatkichli qonun bo'yicha taqsimlangan uzluksiz tasodifiy miqdorga misol bo'lib, eng oddiy oqim ikkita ketma-ket hodisasining ro'y berishi orasidagi vaqt taqsimoti xizmat qilish mumkin.

Markaziy limit teorema haqida tushuncha.

Shu paytga qadar biz ko'p sondagi tajribalarning o'rtacha xarakteristikalarining turg'unligi haqida, aniqrog'i ushbu

$$S_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$$

ko'rinishdagi yig'indilarning turg'unligi haqida gapirib keldik. Ammo, S_n miqdorning tasodifiy miqdor ekanligini va shuning uchun ham uning biror taqsimot qonuniga ega bo'lishini unitmaslik lozim. Ana shu ajoyib fakt boshqa bir teoremalar gruppasining mazmunini tashkil qiladiki, ular markaziy limit teoremalar deb atalgan umumiy nom bilan birlashtiriladi: juda umumiy bo'lgan shartlarda S_n uchun taqsimot qonun normal taqsimot qonunga yaqin bo'ladi.

S_n miqdor ushbu

yig'indidan o'zgarmas $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$

ko'paytuvchigagina farq qilganligi uchun markaziy limit teoremaning mazmunini umumiy holda quyidagicha aytish mumkin: ko'plab sondagi erkli tasodifiy miqdorlar yig'indisining taqsimoti juda umumiy bo'lgan shartlar bajarilganda normal taqsimotga yaqin bo'ladi.

Ana shu bilan normal taqsimot qonunining muhim roli aniqlanadi, chunki ko'p sondagi tasodifiy miqdorlarning yig'indisi bilan ehtimollar nazariyasining o'zida ham, shuningdek, uning ko'plab tadbiqlarida ham ish ko'rishga to'g'ri keladi.

Quyidagi ikkita savolga javob berish orqali markaziy limit teoremaning ma'nosini yanada oydinlashtiramiz.

1. $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ yig'indining taqsimot qonuni normal taqsimot qonunga yaqin deyilgan tasdiqda qanday aniq ma'no yotadi?

2. Qanday shartlar bajarilganda bu yaqinlik o'rinli bo'ladi?

Bu savolga javob berish maqsadida ko'p sondagi tasodifiy miqdorlarni emas, balki tasodifiy miqdorlarning ushbu

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_n + \ldots$$

cheksiz ketma-ketligini qaraymiz.

Ulardan

$$S_n' = X_1 + X_2 +. . . +X_n \text{ (n=1,2,3,…) (1)}$$

ko’rinishdagi «xususiy» yig’indilarni tuzamiz. S_n' tasodifiy miqdorlarning har biridan matematik kutilish 0 ga, dispersiyasi 1 ga teng bo’lgan ushbu

$$S_n'' = \frac{S_n' - M(S_n')}{\sqrt{D(S_n')}} \quad (2)$$ ko’rinishdagi

«normallashtirilgan tasodifiy miqdorga o’tamiz.» birinchi savolga javob shundan iboratki, qandaydir shartlar bajarilganda S_n' tasodifiy miqdorning taqsimoti n ning o’sishi bilan matematik kutilishi 0 ga dispersiyasi 1 ga teng bo’lgan normal taqsimot qonunga tabiiy ma’noda quyidagicha yaqinlashadi:

a va b, *a*<b sonlar qanday bo’lmasin

$$\lim_{n\to\infty} P(a \le S_n' \le b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{X^2}{2}} dz \quad (3)$$

bo’ladi S_n' tasodifiy miqdorning taqriban normal taqsimotga ega bo’lishi faktidan S_n' miqdorning ham taqriban normal taqsimlanishining kelib chiqishi tushunarlidir, chunki taqsimotning normal harakteri tasodifiy miqdorlar ustidagi har qanday chiziqli almashtirish bajarilganda ham saqlanadi. $\mathbf{X_1, X_2, X_3}$, **. . .** tasodifiy miqdorlarga qo’yiladigan shartlar masalasiga kelganda esa quyidagi muloxazalarni aytish mumkin. (1) tenglikdan ushbu

$$\mathbf{M(S_n') = M(X_1) + M(X_2) + . . . + M(X_n)}$$

tenglikni ayirib

$$S_n^0 = X_1^0 + X_2^0 + . . . + X_n^0$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu erda X^0 – odatdagidek X tasodifiy miqdor o’zining matematik kutilishidan chetlanishini belgilaydi.

(3) limit munosabatning o’rinli bo’lishi uchun kerak bo’lgan shartni 1901 yilda rus matematigi A. M. Lyapunov beradi.

U quyidagidan iborat:

Aytaylik, berilgan X_i (i=1,2,3,. . .) tasodifiy miqdorning har biri uchun ushbu

$$d_i = M\left[(X_i^0)^2\right] \text{ va } K_i = \left\lfloor |X_i|^3 \right\rfloor$$

sonlarning ikkalasi ham chekli bo'lsin. (d_i; X_i tasodifiy miqdorning dispersiyasi, K_i esa uning «uchinchi tartibli markaziy momenti» deb ataluvchi momenti ekanini eslatib o'tamiz)

Agar $n \to \infty$ da

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} d_i\right)^{3/2}} = 0$$

bo'lsa, u holda X_1, X_2, X_3,. . ketma-ketlik Lyapunov shartini qanoatlantiradi deb aytamiz.

Endi biz A.M. Lyapunov formasidagi markaziy limit teoremani tavsiflash imkoniyatiga egamiz.

Teorema. (isbotsiz). Agar X_1, X_2, X_3,. . erkli tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi Lyapunov shartini qanoatlantirsa, u holda (3) limit munosabat o'rinli bo'ladi.

O'z- o'zini tekshirish uchun savollar.

1. Taqsimot funktsiya va zichlik funktsiyasi ta'riflarini keltiring.
2. Diskret tasodifiy miqdor uchun taqsimot funktsiya, zichlik funktsiyasi tushunchalari o'rinlimi?
3. Taqsimot funktsiya xossalarini keltiring.
4. Zichlik funktsiya xossalari keltiring.
5. Amalda ko'p uchraydigan uzluksiz taqsimotlarga misollar keltiring.
6. Normal taqsimot qonun parametrlarining ehtimoliy ma'nosini ayting.

Tayanch iboralar

Taqsimot funktsiya, taqsimotning zichlik funktsiyasi, uzluksiz tasodifiy miqdor, normal taqsimot qonuni, ko'rsatkichli taqsimot, markaziy limit teorema.

Mustaqil echish uchun masalalar.

1. X uzluksiz tasodifiy miqdorning

$$f(x)=\begin{cases} 0, \ \tilde{o}\le \frac{\pi}{6} \ \textit{булса}, \\ 3\sin 3x, \ \frac{\pi}{6}< x\le \frac{\pi}{3} \textit{булса}, \\ 0, \ x>\frac{\pi}{6} \ \textit{булса}, \end{cases}$$

zichlik funktsiyasi berilgan. F(x) taqsimot funktsiyani toping.

2. X uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funktsiyasi (0;1) intervalda f(x)=carctgx tenglik bilan berilgan; Bu intervaldan tashqarida f(x)=0 ga. S o'zgarmas parametrni toping.

3. X uzluksiz tasodifiy miqdor ko'rsatkichli qonun bo'yicha taqsimlangan:

$$\begin{cases} 0, \ \textit{агар} \ \ x<0 \ \textit{булса} \\ 2e^{-2x}, \textit{агар} \ \ x\ge 0, \textit{булса} \end{cases}$$

Sinov natijasida X tasodifiy miqdorning (0,3;1) oraliqqa tushishi ehtimolini toping.

4. X tasodifiy miqdor ehtimollar taqsimotining a=0, b=2 parametrli normal qonuniga bo'ysunsin. X tasodifiy miqdorning (-2;3) oraliqqa tushish ehtimolini aniqlang.

Adabiyotlar

[1] (111-147)

[2] (103-132)

[3] (37-62)

[4] (58-69)

[5](256-261) (271-279)

[7] (46-51)

[12] (313-322)

9-§. Katta sonlar qonuni. Chebishev tengsizligi. Chebishev teoremasi. Bernulli teoremasi. Katta sonlar qonunining amaliy ahamiyati.

Ehtimollar nazariyasi va uning tatbiqlarida ko'pincha etarlicha katta sondagi tasodifiy miqdorlar yig'indisidan iborat miqdorlar bilan ish ko'rishga to'g'ri keladi.

Har bir qo'shiluvchi tasodifiy miqdorning sinash natijasida qanday qiymat qabul qilishini avvaldan aytib bo'lmaydi va shu sababli katta sondagi tasodifiy miqdorlar yig'indisining taqsimot qonunini bevosita hisoblab aniqlash, odatda ancha qiyinchiliklar bilan bog'liq. Lekin, shunday bo'lsada nisbatan keng shartlar ostida ko'p sondagi tasodifiy miqdorlar yig'indisining tasodifiylik xarakteri yo'qolib, u qonuniyatga aylanib qolar ekan.

Amaliyot uchun juda ko'p tasodifiy sabablarning birgalikdagi ta'siri tasodifga deyarli bog'liq bo'lmaydigan natijaga olib keladigan shartlarni bilish juda muhimdir, chunki bu tasodifiy hodisalarning qanday rivojlanishini oldindan ko'ra bilishga imkon beradi. Bunday shartlar umumiy nomi **"Katta sonlar qonuni"** deb ataluvchi teoremalarda keltiriladi. Bular qatoriga Chebishev va Bernulli teoremalari mansub bo'lib, Chebishev teoremasi katta sonlar qonunining eng umumiysi, Bernulli teoremasi esa eng sodda holidir.

Dastlab quyidagi ta'rifni keltiramiz.

***Ta'rif*:** Agar X_1, X_2, … X_n tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi mos ravishda $M(X_1)$, $M(X_2)$… $M(X_n)$ matematik kutilishlarga ega bo'lib, ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun $n\to\infty$ da

$$P\left(\left|\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}-\frac{M(X_1)+M(X_2)+...+M(X_n)}{n}\right|<\varepsilon\right)\to 1$$

munosabat bajarilsa, berilgan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi katta sonlar qonuniga bo'ysunadi deyiladi.

Katta sonlar qonuniga oid teoremalarni isbotlashda Chebishev tengsizligidan foydalaniladi.

Chebishev tengsizligi. Ixtiyoriy ε>0 son uchun

$$\mathrm{P}\ \left(|X - M(X)| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{Д(X)}{\varepsilon^2}$$

yoki

$$\mathrm{P}\quad \left(|X - M(X)| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{Д(X)}{\varepsilon^2}$$

Amaliyot uchun Chebishev tengsizligining ahamiyati cheklangan bo'lib, u ba'zan trivial baho beradi. Chebishev tengsizligining nazariy ahamiyati juda kattadir.

Chebishev teoremasi. Agar X_1, X_2, … X_n juft-juft erkli tasodifiy miqdorlar bo'lib, ularning dispersiyalari yuqoridan tekis chegaralangan (ya'ni D (X_i)<S, i=1, 2,….) bo'lsa, u holda musbat ε son har qancha kichik bo'lganda ham

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + ... + M(X_n)}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1$$

munosabat bajariladi.

Shunday qilib, Chebishev teoremasi bunday da'vo qiladi: agar dispersiyalari chegaralangan tasodifiy miqdorlarni ko'p sondagisi qaralayotgan bo'lsa, u holda bu tasodifiy miqdorlar arifmetik o'rtacha qiymatining ularning matematik kutilishlari arifmetik o'rtacha qiymatidan chetlanishi absolyut qiymat bo'yicha istalgancha kichik bo'lishidan iborat hodisani deyarli muqarrar deb hisoblash mumkin.

Teorema isboti. Chebishev tengsizligini

$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

tasodifiy miqdorga nisbatan qo'llaymiz. Matematik kutilish, dispersiyaning xossalaridan foydalanib va teorema shartlariga ko'ra quyidagilarni hosil qilamiz.

$$\mathrm{P}\left(|\overline{X} - M(\overline{X})| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{Д(X)}{\varepsilon^2} \qquad (*)$$

$$M(\overline{X}) = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_1\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_1)$$

$$D(\overline{X}) = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_1\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(X_1) \le \frac{nc}{n^2} = \frac{c}{n}$$

Bularni (*) tengsizlikka qo'ysak

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_1 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_1)\ \right| < \varepsilon\ \right) \ge 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} D(X_1)}{n^2\varepsilon^2} \ge 1 - \frac{C}{n\varepsilon}$$

va ixtiyoriy hodisa ehtimoli 1 dan katta emasligini hisobga olsak;

$$1 - \frac{C}{n\varepsilon^2} \le P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_1 - 1\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_1)\right| < \varepsilon\ \right) \le 1$$

Bu munosabatda n→∞ da limitga o'tsak, teorema tasdig'i kelib chiqadi.

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_1 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_1)\right| < \varepsilon\ \right) = 1$$

Teorema isbotlandi.

Chebishev teoremasida biz tasodifiy miqdorlarning matematik kutilishlari har xil deb faraz qilgan edik. amaliyotda esa tasodifiy miqdorlar ko'pincha bir xil a=M(X_1) matematik kutilishga va D (X_1) dispersiyaga ega bo'ladi. Bu holda,

$$M(\overline{X}) = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_1\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i) = \frac{1}{n}\cdot na = a$$

bo'lishini tushunish qiyin emas.

Qaralayotgan xususiy holda, Chebishev teoremasi quyidagicha ta'riflanadi.

Teorema. Agar X_1, X_2, … X_n tasodifiy miqdorlar juft – juft erkli bo'lib, bir xil a matematik kutilishga va σ^2 chekli dispersiyaga ega bo'lsa, u holda ixtiyoriy ε>0 son berilganda ham

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - a\right| < \varepsilon\right) = 1$$

Aytaylik, n ta erkli sinash o'tkazilayotgan bo'lib, ularning har birida A hodisaning ro'y berish ehtimoli r ga teng bo'lsin. Hodisa ro'y berishining nisbiy chastotasi qanday bo'lishini oldindan ko'ra bilish mumkinmi? Bu savolga Yakov Bernulli tomonidan isbotlangan quyidagi teorema ijobiy javob beradi.

Bernulli teoremasi. Agar n ta erkli sinashning har birida A hodisaning ro'y berish ehtimoli r o'zgarmas va sinashlar soni etarlicha katta bo'lsa, u holda hodisa ro'y berish nisbiy chastotaning r ehtimoldan chetlanishi absolyut qiymat bo'yicha istalgancha kichik bo'lish ehtimoli birga istalgancha yaqin bo'ladi.

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1$$

Isbot. A hodisa ro'y berishining chastotasi μ_n ni quyidagicha ifodalash mumkin.

$$\mu_n = \mathbf{X_1+X_2+ \dots +X_n}$$

Bunda X_i – xodisaning i- sinashdagi ro'y berish sonini ifodalovchi tasodifiy miqdordir. $\mathbf{X_1, X_2, \dots, X_n}$ tasodifiy miqdorlar erkli bo'lib, bir xil taqsimot qonuniga egadir. Ya'ni

$$\mathbf{X_1: 0\ 1\ X_2: 0\ 1\ , \dots , X_n: 0\ 1}$$

$$\mathbf{R: q\ p\ P: q\ p, \dots , P: q\ p}$$

Bu tasodifiy miqdorlar uchun

$$\mathbf{M\ (X_1)=M(X_2)=\dots=M(X_n)=r,\ D(X_i)=pq} \le \frac{1}{4}$$

ekanligini tushunish qiyin emas.

$$\mathbf{M\ (\mu_n)=M(X_1 + X_2 + \dots + X_n)= M\ (X_1)+M(X_2)+\dots+M(X_n)=nr}$$

va $M\left(\frac{\mu_n}{n}\right) = p$ ekanligini hisobga olib, teorema isbotini keltirib chiqaramiz.

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum X_i - p\right| < \varepsilon\right) = 1`$$

Qaralayotgan holda Chebishev teoremasining barcha shartlari bajariladi. Teorema isbotlandi.

Bernulli teoremasi sinashlar soni etarlicha katta bo’lganda nisbiy chastota nima uchun turg’unlik xossasiga ega bo’lishini tushuntiradi va ehtimolning statistik ta’rifini asoslaydi.

Chebishev teoremasining (yoki katta sonlar qonunining) mohiyati bunday: ayrim olingan erkli tasodifiy miqdorlar o’z matematik kutilishlaridan ancha farq qiladigan qiymatlar qabul qilsa-da, etarlicha katta sondagi tasodifiy miqdorlarning arifmetik o’rtacha qiymati katta ehtimollik bilan tayin o’zgarmas songa, chunonchi $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)$ songa yaqin qiymatlarni qabul qiladi.

Boshqacha qilib aytganda, ayrim tasodifiy miqdorlar anchagina sochilgan bo’lishi mumkin, lekin ularning arifmetik o’rtacha qiymati kam tarqoq bo’ladi.

Shunday qilib, har bir tasodifiy miqdor mumkin bo’lgan qiymatlardan qaysinisini qabul qilishini avvaldan aytish mumkin bo’lmasada, katta sondagi tasodifiy miqdorlar yig’indisining qanday qiymat qabul qilishini oldindan ko’ra bilish mumkin.

Katta sonlar qonuniga ko’ra, etarlicha katta sondagi erkli tasodifiy miqdorlarning arifmetik o’rtacha qiymati tasodifiylik xarakterini yo’qotadi. Bu esa quyidagicha izoxlanadi: har bir miqdorning o’z matematik kutilishidan chetlanishi musbat ham, manfiy ham bo’lishi mumkin, ammo arifmetik o’rtacha qiymatda ular o’zaro yo’qolib ketadi.

Chebishev teoremasining amaliy ahamiyatiga doir quyidagi misolni keltiramiz.

Odatda biror fizik kattalikni o’lchash uchun bir necha o’lchashlar o’tkaziladi va ular arifmetik o’rtacha qiymati izlanayotgan o’lcham sifatida qabul qilinadi. Qanday shartlarda bu usulni to’g’ri deb hisoblash mumkin? – degan savolga Chebishev teoremasi javob beradi.

Haqiqatan ham, har bir o’lchash natijalarini $\mathbf{X_1}$, $\mathbf{X_2}$, **…,** $\mathbf{X_n}$ tasodifiy miqdorlar sifatida qaraymiz. Bu tasodifiy miqdorlarga Chebishev teoremasini qo’llasak, quyidagilar bajarilishi kerak:

1. Ular juft-juft erkli;

2. Bir xil matematik kutilishga ega;

3. Dispersiyalari tekis chegaralangan.

Agar har bir o’lchash natijasi qolganlariga bog’liq bo’lmasa, 1-shart bajariladi.

Agar o’lchashlar statistik (bir xil ishorali) xatolarsiz bajarilsa, ikkinchi talab bajariladi. Bu holda hamma tasodifiy miqdorlarning matematik kutilishlari bir xil bo’lib, u haqiqiy o’lchamga teng bo’ladi.

Agar o’lchov asbobi tayin aniqlikni ta’minlay olsa, 3-talab ham bajariladi. Bunda ayrim o’lchashlarning natijalari har xil bo’lsa-da, ularning tarqoqligi chegaralangan bo’ladi.

Agar yuqorida ko’rsatilgan hamma talablar bajarilgan bo’lsa, u holda o’lchash natijalariga Chebishev teoremasini qo’llashga haqlimiz. Bunda etarlicha ko’p sonda o’lchashlar o’tkazilsa, u holda ularning arifmetik o’rtacha qiymati o’lchanayotgan kattalikning haqiqiy qiymatidan istalgancha kam farq qiladi.

Statistikada qo’llanadigan tanlanma usul ham Chebishev teoremasiga asoslangan, bu usulning mohiyati shundan iboratki, unda uncha katta bo’lmagan tasodifiy tanlanmaga asoslanib, barcha tekshirilayotgan ob’ektlar to’plami to’g’risida mulohaza qilinadi.

1-misol. $\mathbf{X_1}$, $\mathbf{X_2}$, **...,** $\mathbf{X_n}$ **-** erkli tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi quyidagicha taqsimot qonuniga ega.

$\mathbf{X_n}$**:**	$-a$	a
r:	$\frac{n+1}{2n+1}$	$\frac{n}{2n+1}$

Berilgan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun Chebishev teoremasi o’rinlimi?

Echish. Chebishev teoremasi shartlarini tekshiramiz:

$$M(X_n) = -a\frac{n+1}{2n+1} + a\frac{n}{2n+1} = -\frac{a}{2n+1};$$

$$D(X_n)=M(X_n^2)-M^2(X_n)=-a\frac{a^2}{(2n+1)^2} < a^2$$

Demak, dispersiyalar a^2 son bilan tekis chegaralangan va tasodifiy miqdorlar ketma - ketligi uchun Chebishev teoremasi o'rinli.

2-misol. X-diskret tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot bilan berilgan.

X: 0.1 0.4 0.6

R: 0.2 0.3 0.5

Chebishev tengsizligidan foydalanib, p$\left(|X - M(X)| < \sqrt{0.4}\right)$ ehtimolni baholang

Echish.

M(X)=0,1 ·0,2+0,4 ·0,3+0,6·0,5=0,44

D(X)=$0{,}1^2$ ·0,2+$0{,}4^2$ ·0,3+$0{,}6^2$·0,5=$0{,}44^2$=0.364

Demak,

$$P\left(\left|X - 0{,}44\right| < \sqrt{0.4}\right) \geq 1 - \frac{0{,}364}{0{,}4} = 0{,}909$$

O’z-o’zini tekshirish uchun savollar.

1. Katta sonlar qonunini ta’riflang.
2. Bernulli teoremasini va uning amaliy ahamiyatini ayting.
3. Katta sonlar qonunining mohiyati nimada?
4. Katta sonlar qonunining amaliy ahamiyatiga doir misollar keltiring.
5. Chebishev tengsizligini keltiring.

Tayanch iboralar.

Katta sonlar qonuni, Chebishev tengsizligi.

Mustaqil echish uchun masalalar

1. X tasodifiy miqdor uchun **M(X)=1** va σ**(X)=0,2** ga teng. Chebishev tengsizligidan foydalanib, 0,5<X<1,5 tengsizlikni baxolang

2. X diskret tasodifiy miqdor ushbu taqsimot qonun bilan berilgan.

X: 0.3 0.6

R: 0.2 0.8

$|X - M(X)| < 0,2$ ning ehtimolini baholang.

3. Agar D (X)=0,002 bo’lsa, $|X - M(X)| < 0,2$ ning ehtimolini Chebishev tengsizligidan foydalanib, baholang.

Adabiyotlar.

[1] (101-110)

[2] (215-234)

[3] (89-93)

[4] (148-161)

[5] (279-285)

[7] (60-62)

[12] (234-326)

II-QISM. Matematik statistika elementlari.

1- §. Matematik statistikaning vazifasi. Tanlanma metod. Tanlanmaning reprezentativligi. Statistik taqsimot. Empirik taqsimot funktsiyasi. Poligon va gistogramma.

Matematik statistikaning birinchi vazifasi statistik ma’lumotlarni to’plash va (agar ma’lumotlar juda ko’p bo’lsa) gruppalash usullarini ko’rsatishdir.

Matematik statistikaning ikkinchi vazifasi statistik ma’lumotlarni tahlil qilish metodlarini tadqiqot masalalariga muvofiq ishlab chiqishdir.

Shunday qilib, matematik statistikaning vazifasi ilmiy va nazariy xulosalar hosil qilish maqsadida statistik ma’lumotlarni to’plash va ularni tahlil qilish usullarini yaratishdan iboratdir.

Matematik statistika shug’ullanadigan ba’zi tipik masalalarni keltirib o’tamiz:

1) Tasodifiy hodisa ro’y berishi ehtimolining noma’lum qiymatini baholash.

2) Noma’lum taqsimot funktsiyani aniqlash.

Bunda masala quyidagicha qo’yiladi:

X tasodifiy miqdor (o’rganilayotgan belgi) ustida n ta erkli sinash o’tkazilib, uning $x_1, x_2, ..., x_p$ qiymatlari olingan. Shu qiymatlar bo’yicha X ning noma’lum $F(x)$ taqsimot funktsiyasini taxminan bo’lsa ham aniqlash talab qilinadi.

3) Taqsimotning noma’lum parametrlarini aniqlash. Ko’pincha nazariy yoki boshqa xulosalarga asoslanib bizni qiziqtirayotgan X tasodifiy miqdorining taqsimot qonuni qanday ko’rinishda ekanligini aytish mumkin bo’ladi. Shu taqsimotni aniqlovchi noma’lum parametrlarni statistik baholash talab qilinadi. Masalan, o’rganilayotgan belgining taqsimot qonuni normal taqsimotga ega ekanligi ma’lum bo’lsa, shu taqsimotni aniqlovchi a va σ- noma’lum parametrning qiymatlarini kuzatish natijalari bo’yicha baholash kerak bo’ladi.

4) Belgilar orasidagi bog’likliklarni o’rganish.

5) Statistik gipotezalarni tekshirish.

<u>Bosh va tanlanma to'plamlar</u>.

Bir jinsli ob'ektlar to'plamini bu ob'ektlarni xarakterlovchi biror ***sifat*** yoki ***son*** belgiga nisbatan o'rganish talab qilinsin. Masalan, agar biror xil detallar partiyasi bo'lsa, u holda detalning sifat belgisi bo'lib, uning standartligi, son belgisi bo'lib esa detalning o'lchami xizmat qilishi mumkin.

Ba'zan yalpi tekshirish o'tkaziladi, ya'ni to'plamdagi ob'ektlarning har birini o'rganilayotgan belgiga nisbatan tekshiriladi. Lekin, yalpi tekshirish amalda nisbatan kam qo'llaniladi. Masalan, to'plam juda ko'p (juda katta sondagi) ob'ektlarni o'z ichiga olgan bo'lsa, u holda yalpi tekshirish o'tkazish jismonan mumkin emas. Bunday hollarda to'plamdan chekli sondagi ob'ektlar tasodifiy ravishda olinadi va ularni o'rganiladi.

Tanlanma to'plam, yoki oddiy qilib, ***tanlanma*** deb tasodifiy ravishda tanlab olingan ob'ektlar to'plamiga aytiladi.

Bosh to'plam deb tanlanma ajratiladigan ob'ektlar to'plamiga aytiladi.

To'plam (bosh yoki tanlanma to'plami) hajmi deb, bu to'plamdagi ob'ektlar soniga aytiladi. Masalan, 500 ta detaldan tekshirish uchun 50 ta detal olingan bo'lsa, u holda bosh to'plam hajmi $N=500,$ tanlanma hajmi esa $p=50.$

Bosh to'plamdan olingan tanlanma bo'yicha bosh to'plam haqida hulosa qilishga asoslangan usulga, tanlanma usul deb ataladi.

Takror va notakror tanlanmalar.

Reprezentativ tanlanma.

Tanlanmani tuzishda ikki xil yo’l tutish mumkin: ob’ekt tanlanib va uning ustida kuzatish o’tkazilgandan so’ng, u bosh to’plamga qaytarilishi yoki qaytarilmasligi mumkin.

Takror tanlanma deb, shunday tanlanmaga aytiladiki, bunda olingan ob’ekt (keyingisini olishdan oldin) bosh to’plamga qaytariladi.

Notakror tanlanma deb, tanlangan element yana bosh to’plamga qaytarilmaydigan tanlanmaga aytiladi.

Odatda qaytarilmaydigan tasodifiy tanlashdan foydala-niladi.

Tanlanmadagi ma’lumotlar bo’yicha bosh to’plamning bizni qiziqtirayotgan belgisi haqida etarlicha ishonch bilan fikr yuritish uchun tanlanmaning ob’ektlari bosh to’plamni to’g’ri tasvirlashi zarur. Bu talab qisqacha bunday ta’riflanadi: tanlanma reprezentativ (tasvirlay oladigan) bo’lishi kerak. Odatda, reprezentativlikni ta’minlash uchun bosh to’plam elementlarining tanlanmaga tushish ehtimollari teng deb olinadi.

Tanlash usullari.

Odatda tanlashning turli usullari qo’llaniladi. Bu usullarni 2 turga bo’lish mumkin:

1. Bosh to’plamni qismlarga ajratishni talab qilmaydigan tanlash. Bunga quyidagilar kiradi:
   a) oddiy qaytarilmaydigan tasodifiy tanlash;
   b) oddiy qaytariladigan tasodifiy tanlash.
2. Bosh to’plamni qismlarga ajratilgandan keyin tanlash, bunga quyidagilar kiradi:
   a) tipik tanlash;
   b) mexaniq tanlash;
   v) seriyali tanlash.

Bosh to’plamdan elementlar bittalab olinadigan tanlash *oddiy tasodifiy* tanlash deyiladi.

Tipik tanlash deb, shunday tanlashga aytiladiki, bunday ob'ektlar butun bosh to'plamdan emas, balki uning "tipik" qismlaridan olinadi.

Mexanik tanlash deb, shunday tanlashga aytiladiki, bunda bosh to'plam tanlanmaga nechta ob'ekt kirishi lozim bo'lsa, shuncha gruppaga mexanik ravishda ajratiladi va har bir gruppadan bittadan ob'ekt tanlanadi.

Seriyali tanlash deb, shunday tanlashga aytiladiki, bunda ob'ektlar bosh to'plamdan bittalab emas, balki "seriyalab" olinadi va ular yalpisiga tekshiriladi.

Odatda ko'pincha aralash tanlashdan foydalaniladi, ya'ni ko'rsatilgan usullardan birgalikda foydalaniladi. Masalan, bosh to'plamni ba'zan bir xil hajmli seriyalarga ajratiladi, keyin oddiy tasodifiy tanlash bilan ayrim ob'ektlar olinadi.

Tanlanmaning statistik taqsimoti.

Bosh to'plamdan tanlanma olingan bo'lsin. Bunda x_1 qiymat n_1 marta, x_2 qiymat n_2 marta kuzatilgan va

$$\sum n_i = n$$

bo'lsin. Kuzatilgan x_i qiymatlar variantalar, variantalarning ortib yoki kamayib borish tartibida yozilgan ketma-ketligi esa ***variatsion qator*** deyiladi. Kuzatishlar soni chastotalar, ularning tanlanma hajmiga nisbati $W_i = \frac{n_i}{n}$ esa nisbiy chastotalar deyiladi.

Tanlanmaning statistik taqsimoti deb, variantalar va ularga mos chastotalar yoki nisbiy chastotalar ro'yxatiga aytiladi.

Shunday qilib, taqsimot deyilganda ehtimollar nazariyasida tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari va ularning ehtimollari orasidagi moslik, matematik statistikada esa kuzatilgan variantalar va ularning chastotalari yoki nisbiy chastotalari orasidagi moslik tushuniladi.

Misol. Hajmi 40 bo'lgan tanlanmaning chastotalari taqsimoti berilgan:

x_i:	2	6	12
n_i:	6	20	14

Nisbiy chastotalar taqsimotini yozing.

Echish. Nisbiy chastotalarni topamiz. Buning uchun chastota-larni tanlanma hajmiga bo'lamiz.

$$W_1 = \frac{6}{40} = 0{,}15,\ W_2 = \frac{20}{40} = 0{,}5,\ W_3 = \frac{14}{40} = 0{,}35$$

U holda, nisbiy chastotalar taqsimoti

x_i:	2	6	12
w_i:	*0,15*	*0,5*	*0,35*

Taqsimotning empirik funktsiyasi.

Aytaylik, X son belgi chastotalarining statistik taqsimoti ma'lum bo'lsin. Quyidagicha belgilashlar kiritamiz: p_x - belgining x dan kichik qiymati kuzatilgan kuzatishlar soni; p - kuzatishlarning umumiy soni.

Ravshanki, $X<x$ hodisaning nisbiy chastotasi $\frac{n_x}{n}$ ga teng. Agar x o'zgaradigan bo'lsa, u holda umuman aytganda, nisbiy chastotasi ham o'zgaradi, ya'ni $\frac{n_x}{n}$ nisbiy chastota x ning funktsiyasidir.

Taqsimotning empirik funktsiyasi (tanlanmaning taqsimot funktsiyasi) deb har bir x qiymati uchun $(X<x)$ hodisaning nisbiy chastotasini aniqlaydigan $F^*_n(x)$ funktsiyaga aytiladi. Shunday qilib, ta'rifga kqra

$$F_n^*(x) = \frac{n_x}{n}$$

Bu erda p_x - x dan kichik variantalar soni, p - tanlanma hajmi.

Misol. Tanlanmaning quyida berilgan taqsimoti bo'yicha uning empirik funktsiyasini tuzing.

Variantalar	x_i:	*2*	*6*	*10*
Chastotalar	n_i:	*12*	*18*	*30*

Echish. Tanlanma hajmini topamiz. $n=12+18+30=60$

$$F_n^*(x)=\begin{cases}0, & x\le 2\\ 0.2, & 2<x\le 6\\ 0.5, & 6<x\le 10\\ 1, & x>10\end{cases}$$

Poligon va gistogramma.

Chastotalar poligoni deb,kesmalari(x_1,n_1), (x_2,n_2), ..., (x_k,p_k) nuqtalarni tutashtiradigan siniq chiziqqa aytiladi.

Nisbiy chastotalar poligoni deb, kesmalari (x_1,w_1), (x_2,w_2), ... , (x_k,w_k) nuqtalarni tutashtiradigan siniq chiziqqa aytiladi.

Uzluksiz belgi bo'lgan holda gistogramma yasash maqsadga muvofiqdir, buning uchun belgining kuzatiladigan qiymatlarini o'z ichiga olgan intervalni uzunligi h bo'lgan bir nechta qismiy intervallarga bo'linadi va har bir i-qismiy interval uchun n_i ni - ya'ni i-intervalga tushgan variantalar chastotalari yig'indisi topiladi.

Chastotalar gistogrammasi deb, asoslari h uzunlikdagi intervallar, balandliklari esa $\frac{n_i}{h}$ nisbatlarga (chastota zichligi) teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklardan iborat pog'onaviy figuraga aytiladi.

Nisbiy chastotalar gistogrammasi deb, asoslari h uzunlikdagi intervallar, balandliklari esa $\frac{W_i}{h}$ nisbatga (nisbiy chastota zichligi) teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklardan iborat pog'onaviy figuraga aytiladi.

Poligon va gistogramma statistik taqsimotni ko'rgazmali tasvirlash uchun xizmat qiladi.

Tayanch so'z va iboralar:

Tanlanma, bosh to'plam, takror tanlanma, notakror tanlanma, reprezentativ tanlanma, variantalar, variatsion qator, tanlanmaning statistik taqsimoti, taqsimotning empirik funktsiyasi, chastotalar poligoni, chastotalar gistogrammasi.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar:

1. Matematik statistika vazifalarini ayting.
2. Tanlanma olishning qanday usullari bor?
3. Tanlanmaning reprezentativligi nimadan iborat?
4. Tanlanmaning statistik taqsimoti ta'rifini bering.
5. Empirik taqsimot funktsiyasi ta'rifini keltiring.
6. Poligon va gistogramma qanday quriladi?

Mustaqil echish uchun masalalar:

1. Quyidagi tanlanma berilgan:

2,1,3,3,4,4,3,3,3,2,3,1,1,2,3,3,4,2,2,3

a) variatsion qatorni tuzing;

b) chastotalar jadvalini tuzing;

v) nisbiy chastotalar poligonini chizing.

2. Korxona ishchilaridan tavakkaliga 20 tasi tanlanib, ularning tarif razryadlari xaqida quyidagi ma'lumotlar olingan.

1,2,4,6,3,4,4,2,6,3,5,3,3,1,5,4,2,5,4,3

Shu ma'lumotlarga asoslangan holda:

a) tanlanmaning statistik taqsimotini tuzing va chastotalar poligonini yasang;

b) empirik taqsimot funktsiyasini tuzing.

3. Tanlanma

x_i	4	5	7	12
n_i	5	2	3	10

chastotalar taqsimoti ko'rinishida berilgan. Nisbiy chastotalar taqsimotini toping.

4. Chastotalar poligonini yasang.

x_i	15	20	25	30	10
n_i	10	15	30	20	25

5. Tanlanmaning quyidagi berilgan taqsimoti bo'yicha chastotalar gistogrammasini yasang.

Interval ro'yxati	**Qismiy interval**	**Qismiy intervaldagi variantalar chastotalarining yig'indisi**
i	$x_i - x_{i+1}$	n_i
1	2-5	6
2	5-8	10
3	8-11	4
4	11-14	5
		$n = \sum n_i = 25$

Adabiyotlar:

[1] (187-197)

[2] (264-284, 286-289)

[3] (125-139)

[4] (185-199)

[5] (310-318)

[7] (63-71)

[9] (245-257, 269-279)

[12] (332-339)

2-§.Taqsimot parametrlarining statistik baholari. Baholarga qo'yiladigan talablar.

Aytaylik, bosh to'plamning son belgisini o'rganish talab qilinayotgan bo'lsin. Faraz qilaylik, shu belgi qaysi taqsimotga ega ekanligi nazariy mulohazalardan aniqlangan bo'lsin. Bu taqsimotni aniqlaydigan parametrlarni baholash masalasini ko'rib chiqaylik. Masalan, bosh belgi, to'g'rirog'i o'rganilayotgan belgi bosh to'plamda normal taqsimlanganligi oldindan ma'lum bo'lsa, u holda matematik kutilishni va o'rtacha kvadratik chetlanishni baholash, ya'ni taqribiy hisoblash zarur, chunki bu ikki parametr normal taqsimotni to'liq aniqlaydi, agar belgi Puasson taqsimotiga ega deyishga asos bo'lsa, u holda bu taqsimotni aniqlaydigan $\lambda>0$ parametrni baholash, ya'ni taqribiy hisoblash zarur.

Odatda, tadqiqotchi ixtiyorida tanlanmadagi ma'lumotlargina, masalan, son belgining p ta kuzatish natijasida olingan $x_1, x_2, ..., x_p$ qiymatlari bo'ladi. Demak, baholanayotgan belgi xuddi shu ma'lumotlar orqali ifodalanishi kerak.

Demak, $x_1, x_2, ..., x_p$ ni erkli X_1, X_2, ... X_n tasodifiy miqdorlar deb qarab, nazariy taqsimot noma'lum parametrning statistik bahosini topish, bu demak, kuzatilayotgan tasodifiy miqdorlar orqali shunday funktsiyani topishdirki, u baholanayotgan parametrning taqribiy qiymatini bersin. Masalan, normal taqsimotning matematik kutilishini baholash uchun ushbu

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$$

funktsiya xizmat kiladi.

Shunday qilib, nazariy taqsimot noma'lum parametrning *statistik bahosi* deb kuzatilgan tasodifiy miqdorlardan tuzilgan funktsiyaga aytiladi.

Siljimagan, effektiv va asosli baholar.

Statistik baholar baholanayotgan parametrlarning “yaxshi” yaqinlashishlarini berishi uchun ular ma’lum talablarni qanoatlantirishlari lozim. Quyida shunday talablarni ko’rib chikamiz.

θ^* nazariy taqsimot θ noma’lum parametrining statistik bahosi bo’lsin. n hajmli tanlanma bo’yicha θ^*_1 baho topilgan bo’lsin. Tajribani takrorlaymiz, ya’ni bosh to’plamdan o’sha hajmli ikkinchi tanlanmani olamiz va undagi ma’lumotlar bo’yicha θ^*_2 bahoni topamiz. Tajribani ko’p marta takrorlab, $\theta^*_1, \theta^*_2, ..., \theta^*_k$ sonlarni hosil qilamiz, ular, umuman aytganda, o’zaro har xil bo’ladi. Shunday qilib, θ^* bahoni tasodifiy miqdor, $\theta^*_1, \theta^*_2, ..., \theta^*_k$ sonlarni esa uning mumkin bo’lgan qiymatlari sifatida qarash mumkin.

θ^* baho θ ning taqribiy qiymatini ortig’i bilan beradi deb faraz qilaylik, u holda tanlanmadagi ma’lumotlar bo’yicha topilgan har bir θ^*_i son haqiqiy θ qiymatdan katta bo’ladi. Bu holda θ^* tasodifiy miqdorning matematik kutilishi ham θ dan katta bo’ladi, ya’ni $M(\theta^*)>\theta$. Agar θ^* qiymat bahoni kami bilan beradigan bo’lsa, ravshanki, $M(\theta^*)<\theta$

Shunday qilib, matematik kutilishi baholanayotgan parametrga teng bo’lmagan statistik bahoni ishlatish sistematik xatolarga olib kelgan bo’lar edi. Shu sababli, θ^* bahoning matematik kutilishi baholanayotgan parametrga teng bo’lishini talab qilish tabiiydir.

Demak, $M(\theta^*)=\theta$ talablarga rioya qilish sistematik xatolar hosil qilishdan asraydi.

Siljimagan baho deb, matematik kutilishi istalgan hajmli tanlanma bo’lganda ham baholanayotgan θ parametrga teng, ya’ni

$$M(\theta^*)=\theta$$

bo’lgan θ^* statistik bahoga aytiladi.

Siljigan baho deb, matematik kutilishi baholanayotgan parametrga teng bo’lmagan bahoga aytiladi.

Ammo siljimagan baho har doim ham baholanayotgan parametrning yahshi yaqinlashishini beradi deb hisoblash xato bo'lar edi. Darhaqiqat, θ^* mumkin bo'lgan qiymatlari uning o'rtacha qiymati atrofida ancha tarqoq, ya'ni $D(\theta^*)$ dispersiya anchagina katta bo'lishi mumkin. Bunday holda bitta tanlanmadagi ma'lumotlar bo'yicha topilgan baho, masalan, θ^*_1 baho $\overline{\theta}^*$ o'rtacha qiymatdan va demak baholanayotgan θ parametrdan ancha uzoqlashgan bo'ladi.

θ^*_1 ni θ ning taqribiy qiymati uchun qabul qilib, katta xatoga yo'l qo'ygan bo'lar edik. Shu sababli statistik bahoga effektivlik talabi ko'yiladi.

Effektiv baho deb (tanlanmaning hajmi *n* berilganda) mumkin bo'lgan eng kichik dispersiyaga ega bo'lgan statistik bahoga aytiladi.

Katta hajmli (*n* etarlicha katta bo'lganida) tanlanmalar qaralganda statistik baholarga asoslik talabi qo'yiladi.

Asosli baho deb baholanayotgan parametrga $n \to \infty$ da ehtimol bo'yicha yaqinlashadigan bahoga aytiladi. Agar dispersiya $n \to \infty$ da nolga intilsa, u holda bunday baho asosli ham bo'ladi.

Bosh to'plamning o'rtacha bosh qiymati *M(X)* ning statistik bahosi sifatida

$$\overline{x}_T = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$$

o'rtacha tanlanma qiymat qabul qilinadi. $\overline{x}_T$ siljimagan baho ekanligiga, ya'ni $M(\overline{x}_T) = M(X)$ ekanligiga ishonch hosil qilamiz. $\overline{x}_T$ ni tasodifiy miqdor, $x_1, x_2, \ldots, x_p$ - variantalarni erkli bir xil taqsimlangan $X_1, X_2, \ldots, X_p$ tasodifiy miqdorlar sifatida qaraymiz. Bu miqdorlar bir xil taqsimlanganligi uchun ular bir xil son xarakteristikalarga, jumladan bir xil matematik kutilishga ega, uni $a=M(X)$ deb belgilaymiz. Bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlarning arifmetik o'rtacha qiymatining matematik kutilishi bittasining matematik kutilishiga teng, ya'ni

$$M(\overline{x}_T) = M\left(\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}\right) = \frac{nM(X_1)}{n} = M(X_1) = a$$

$X_1, X_2, \ldots, X_p$ miqdorlarning har biri va bosh to'plam X belgisi(uni ham tasodifiy miqdor sifatida qaraymiz) bir xil taqsimotga ega ekanligini e'tiborga oladigan bo'lsak, bu miqdorlarning va bosh to'plamning son xarakteristikalari bir xil degan xulosaga kelamiz. Shunday qilib, $M(\bar{x}_{\text{T}}) = a = M(X)$ va $\bar{x}_{\text{T}}$ bosh to'plam matematik kutilishi uchun siljimagan baho ekan.

Ma'lumki, katta sonlar qonuniga asosan har kanday ε>0 son uchun $n \to \infty$ da

$$P\left(\left|\bar{x}_{\text{T}} - M(\bar{x}_{\text{T}})\right| < \varepsilon\right) = P\left(\left|\bar{x}_{\text{T}} - a\right| < \varepsilon\right) \to 1$$

Ya'ni, $\bar{x}_{\text{T}}$ qiymat n ortishi bilan bosh to'plam matematik kutilishiga *(a=M(X)* ga) ehtimol bo'yicha yaqinlashadi. Bundan esa, $\bar{x}_{\text{T}}$ baho a uchun asosli baho ham bo'lishi kelib chikadi.

Yuqorida aitilganlardan yana shu narsa ham kelib chiqadiki, agar bitta bosh to'plamning o'zidan ancha katta hajmli bir nechta tanlanmalar bo'yicha o'rtacha tanlanmalar topiladigan bo'lsa, ular o'zaro taqriban teng bo'ladi. O'rtacha tanlanma qiymatlarning *turg'unlik xossasi* mana shundan iborat.

ESLATMA. Agar X normal qonun bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor bo'lsa, u holda $\bar{x}_{\text{T}}$ *M(X)* uchun effektiv baho ham bo'ladi.

Bosh to'plam dispersiyasi uchun statistik baho sifatida tanlanma dispersiya

$$\overline{Д}_{\text{T}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_{\text{T}})^2$$

ni ko'raylik.

Qulaylik uchun *m=M(X),* σ^2 *=D(X)* deb belgilaylik.

$$\overline{Д}_{\text{T}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}_{\text{T}}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[x_i - m - (\bar{x}_{\text{T}} - m)\right]^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 -$$

$$-\frac{2}{n}(x_i - m)^2\sum_{i=1}^{n}(x_i - m) + \frac{n}{n}(\bar{x}_{\text{T}} - m)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 -$$

$$-\frac{2}{n}(\bar{x}_{\text{T}} - m)(\bar{x}_{\text{T}} - m)n + (\bar{x}_{\text{T}} - m)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 - (\bar{x}_{\text{T}} - m)^2$$

Agar $M(\bar{x}_{\text{T}} - m)^2 = Д\bar{x}_{\text{T}} = \frac{1}{n}\sigma^2$ ekanligini e'tiborga olsak,

$$M(Д_Т) = \frac{1}{n} M\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2 \right) - M(x_Т - m)^2 = \sigma^2 - \frac{1}{n}\sigma^2 = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

Demak, tanlanma dispersiya D_t bosh to'plam dispersiyasi σ^2 uchun siljimagan baho bo'lolmas ekan, shu sababli tanlanma dispersiya uchun baho sifatida $S^2 = \frac{n}{n-1} Д_Т$ tuzatilgan tanlanma dispersiya olinadi.

$\sigma_Т = \sqrt{Д_Т}$ - kattalikka tanlanma o'rtaga kvadratik chetlanish,

$S = \sqrt{\frac{n}{n-1} Д_Т}$ - kattalikka esa tuzatilgan tanlama o'rtacha kvadratik chetlanish deb ataladi.

Matematik statistika va uning tatbiqlarida variatsion qatorning tanlanma o'rtacha va tanlanma dispersiyasidan tashqari boshka xarakteristikalari ham ishlatiladi. Shulardan ba'zilarini keltiramiz.

Eng katta chastotaga ega bo'lgan variantaga *moda* deb ataladi va M_0 kabi belgilanadi.

Mediana deb, variatsion qatorni variantalari soni teng bo'lgan ikki qismga ajratadigan variantaga aytiladi va M_e kabi belgilanadi. Variantalar sonining juft yoki toqligiga qarab, medianani quyidagicha aniqlanadi.

$$M_e = \begin{cases} x_{k+1}, & агар \quad n = 2k+1 \quad бўлса \\ \frac{x_k + x_{k+1}}{2}, & агар \quad n = 2k \quad бўлса \end{cases}$$

Variatsiya qulochi R deb eng katta va eng kichik variantalar ayirmasiga aytiladi.

$R = X_{max} - X_{min}$

Variatsiya qulochi variatsion qator tarqoqligining eng sodda xarakteristikasi bo'lib xizmat qiladi.

Variatsion qator tarqoqligining yana bir xarakteristikasi sifatida *o'rtacha absolyut chetlanish* θ ham ishlatiladi.

$$\theta = \frac{\sum n_i |x_i - \bar{x}_Т|}{n}$$

Variatsiya koeffitsienti V deb o'rtacha kvadratik chetlanishning $\bar{x}_T$ tanlanma qiymatga nisbatining protsentlarda ifodalanganiga aytiladi:

$$V = \frac{\sigma_T}{\bar{x}_T} \cdot 100\%$$

Variatsiya koeffitsienti ikkita yoki undan ortiq variatsion qatorlarning tarqoqlik kattaliklarini taqqoslash uchun xizmat qiladi: variatsion qatorlardan variatsiya koeffitsienti katta bo'lgani ko'proq tarqoqlikka ega bo'ladi.

Misol. *Q*uyida berilgan

x_i: *1 3 6 16*

n_i: *4 10 5 1*

qator uchun M_0, M_e, R, θ *va* V — xarakteristikalarni hisoblaymiz.

$M_0 = M_e = 3,\ R = 15$

$$\bar{x}_T = \frac{\sum n_i x_i}{\sum n_i} = \frac{4\cdot 1 + 10\cdot 3 + 5\cdot 6 + 1\cdot 16}{4+10+5+1} = \frac{20}{20} = 4$$

$$\theta = \frac{\sum n_i |x_i - \bar{x}_T|}{\sum n_i} = \frac{4\cdot|1-4| + 10\cdot|3-4| + 5\cdot|6-4| + 1\cdot|16-4|}{20} = 2{,}2$$

$$\sigma_T = \sqrt{\frac{\sum n_i |x_i - \bar{x}_T|^2}{n}} = \sqrt{\frac{4\cdot(1-4)^2 + 10\cdot(3-4)^2 + 5\cdot(6-4)^2 + 1\cdot(16-4)^2}{20}} \approx 3{,}24$$

$$V = \frac{\sigma_T}{\bar{x}_T}\cdot 100\% = \frac{3{,}24}{4}\cdot 100\% = 80{,}1\%$$

Tayanch so'z va iboralar:

Statistik baho, siljimagan baho, siljigan baho, effektiv baho, asosli baho, o'rtacha tanlanma qiymat, tanlanma dispersiya.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar:

1. Statistik baho ta'rifini bering.
2. Siljimagan, asosli va effektiv baholar ta'riflarini keltiring.
3. $\bar{x}_T$-bosh to'plam uchun siljimagan va asosli baho bo'lishini tushuntiring.

4. D_t - tanlanma dispersiya siljigan baho ekanligini tushuntiring.
5. Variatsion qatorning xarakteristikalarini ta'riflang.

Mustaqil echish uchun masalalar:

1. Bosh to'plamdan n=50 hajmdagi tanlanma ajratilgan.

x_i	2	5	7	10
n_i	16	12	8	14

Bosh to'plam o'rtacha qiymatining siljimagan bahosini toping.

2. Guruhdagi 40 ta talabalarning yozma ishlari baholarining chastotalari jadvali berilgan.

x_i	2	3	4	5
n_i	3	8	25	4

Tanlanma o'rtacha va tanlanma dispersiyani toping.

3. n=41 xajmli tanlanma bo'yicha bosh dispersiyaning $D_T = 3$ siljigan bahosi topilgan. Bosh to'plam dispersiyasining siljimagan bahosini toping.

4. n=10 hajmli tanlanmaning berilgan taqsimoti bo'yicha tanlanma dispersiyani toping.

x_i	102	104	108
n_i	2	3	5

5. Ushbu n=100 hajmli tanlanmaning berilgan taqsimoti bo'yicha tanlanma dispersiyasini toping.

x_i	156	160	164	168	172	176	180
n_i	10	14	26	28	12	8	2

Adabiyotlar:

[1] (197-213)

[2] (289-307)

[3] (125-137)

[4] (200-219)

[5] (318-321)

[7] (71-75)

[9] (250-257)

[12] (339-344)

3-§.Nuqtaviy va intervalli baholar. Normal maqsimot noma'lum parametrlari uchun intervalli baholar.

Faraz qilaylik, X belgili bosh to'plamning taqsimot funktsiyasi $F(x, \theta)$ bo'lib, θ noma'lum parametr bo'lsin. $X_1, X_2, \ldots, X_p$ shu bosh to'plamdan olingan tanlanma bo'lib, $x_1, x_2, \ldots, x_p$ tanlanmaning kuzatilgan qiymati bo'lsin.

Ta'rif. Tanlanmaning ixtiyoriy $L(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ funktsiyasi **statistika** deyiladi.

Nuqtaviy baholashda taqsimot funktsiyaning noma'lum θ parametri uchun shunday $L(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ statistika qidiriladiki, $L(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ ni θ parametr uchun taqribiy qiymat deb olinadi. Bu holda $L(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ statistika parametrning bahosi deyiladi.

Shunday qilib, agar noma'lum parametrni birgina $\tilde{\theta}$ son bilan baholasak, bunday baho nuqtaviy baho deyiladi. Tajribalar soni juda katta bo'lgan hollarda nuqtaviy baho, qoida bo'yicha, noma'lum parametrga yaqin bo'ladi. Ammo, kuzatishlar soni kichik bo'lgan hollarda $\tilde{\theta}$ bahoning tasodifiylik xarakteri θ va $\tilde{\theta}$ orasida sezilarli darajadagi farqlanishiga olib kelishi mumkin. Bunday holda θ parametrni bitta son bilan emas, balki butunlay $(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)$ interval bilan shunday yaqinlashtirish masalasi tug'iladiki, bu intervalni θ parametrni tamomila o'z ichiga olish ehtimoli, ya'ni ushbu

$$\tilde{\theta}_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) < \theta < \tilde{\theta}_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (1)$$

qo'sh tengsizlikning o'rinli bo'lish ehtimoli oldindan berilgan γ sondan kichik bo'lmasin.

θ - biror aniq (bizga ma'lum bo'lmasada) son bo'lgani holda, $\tilde{\theta}_1$ va $\tilde{\theta}_2$ lar tasodifiy miqdorlar. Shuning uchun (1) hodisa tasodifiy hodisa bo'lib, uning yuz berish ehtimoli haqida gapirish imkoniyatiga ega bo'lamiz.

Agar γ sonni etarlicha katta qilib olsak, masalan, 0,95 yoki 0,99, u holda (1) tasodifiy hodisani amaliy jihatdan muqarrar hodisa deb hisoblay olamiz.

Faraz qilaylik, $Z(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ θ parametr uchun baho bo'lsin.

Ta'rif. Agar istalgan γ>0 uchun shunday δ>0 topish mumkin bo'lsaki, uning uchun

$$P(|Z(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \theta| < \delta) = \gamma$$

bo'lsa, u holda *(Z*-δ, *Z*+δ*)* tasodifiy interval θ parametrning γ ishonchlilik darajali ishonchli intervali deyiladi.

(Z-δ, *Z*+δ*)* ishonchli interval, shuningdek, ishonchli baho ham deb ataladi. Musbat δ son esa baho aniqligi deyiladi.

(Z-δ, *Z*+δ*)* ishonchli interval θ parametrni γ ehtimol bilan qoplaydi deb ham aytiladi.

Matematik kutilish a uchun ishonchli interval.

X belgisi normal taqsimlangan bosh to'plamni qaraymiz, bu taqsimotning σ^2 dispersiyasi ma'lum bo'lsin. Bu taqsimotning matematik kutilishi *a* uchun ishonchli intervalni topamiz.

X belgi normal taqsimlangan bo'lgani uchun

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

ham normal taqsimlangan, shu bilan birga, $\overline{X}$ belgi uchun parametrlar quyidagicha:

$$M(\overline{X}) = a; \qquad Д(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Normal taqsimlangan tasodifiy miqdorning berilgan intervalga tushish ehtimoli quyidagi formula bilan ifodalanadi:

$$P(|X - a| < \delta) = 2\phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

Bu formulani *X* tasodifiy miqdor uchun qo'llab, quyidagini topamiz:

$$P(|\overline{X} - a| < \delta) = 2\phi\left(\frac{\delta}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) \qquad (*)$$

Endi $t=\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}$ belgilash kiritsak, $\delta=\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$ bo'ladi.

U holda (*) formula quyidagi ko'rinishni oladi:

$$P\left(\left|\overline{X}-a\right|<\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right)=2\phi(t)$$

yoki

$$P\left(\overline{X}-\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}<a<\overline{X}+\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right)=2\phi(t) \qquad (**)$$

Shunday qilib, ishonchli interval

$$\left(\overline{X}-\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}<a<\overline{X}+\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

dan iborat bo'ladi. Bu erdan $\left(\overline{X}-\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}<a<\overline{X}+\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ tasodifiy interval a parametrni $\gamma=2\phi(t)$ ehtimol bilan $\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$ aniqlikda qoplashi kelib chiqadi.

Hosil qilingan formulalar tanlanma hajmi ortishi bilan baholash aniqligi oshishini bildiradi. Bunda agar γ ishonchlilik orttirilsa, natijada t parametr ortadi va demak, baholash aniqligi kamayadi.

Agar bosh to'plam normal taqsimotga ega bo'lmasa, (**) formula to'g'ri bo'lmay qoladi, biroq $n\to\infty$ da markaziy limit teoremaga ko'ra

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

tasodifiy miqdor taqsimoti X_i ning dispersiyalari chegaralangan va σ^2 ga teng bo'lsa, normal taqsimotga intiladi. Bu esa - n katta bo'lganda ishonchli interval a matematik kutilish uchun ishonchli intervalning yaqinlashishi bo'lib xizmat qilishi mumkinligini bildiradi.

Misol. X tasodifiy miqdor o'rtacha kvadratik chetlanishi $\sigma = 3$ ma'lum bo'lgan normal taqsimotga ega. Tanlanma hajmi $p=36$ va bahoning ishonchliligi γ=0,95 berilgan. Noma'lum a matematik kutilishni $\bar{x}$ tanlanma o'rtacha bo'yicha baholash uchun ishonchli intervallarni toping.

Echish. t ni topamiz. $2F(t)$=0,95 munosabatdan $F(t)$=0,475 ni hosil qilamiz. Laplas funktsiyasi qiymatlar jadvalidan t=1,96 ni topamiz. Bahoning aniqligini topamiz:

$$\delta = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}96 \cdot 3}{\sqrt{36}} = 0{,}98$$

Ishonchli intervallar bunday:

$$(\bar{x} - 0{,}98;\ \bar{x} + 0{,}98)$$

Berilgan γ=0,95 ishonchlilikning ma'nosi quyidagicha: agar etarlicha ko'p sonda tanlanmalar olingan bo'lsa, u holda ularning 95%i shunday ishonchli intervallarni aniqlaydiki, bu intervallarda parametr haqiqatan ham yotadi; 5% hollardagina interval chegarasidan chetda yotishi mumkin.

ESLATMA. Agar matematik kutilishni oldindan berilgan δ aniqlik va γ ishonchlilik bilan baholash talab qilinsa, u holda bu aniqlikni ta'minlab beradigan minimal hajmli tanlanmaning hajmini

$$n = \frac{t^2\sigma^2}{\delta^2}$$

formuladan topiladi.

Normal taqsimlangan X bosh to'plam belgisining a matematik kutilishini $\bar{x}_T$ tanlanma o'rtacha bo'yicha baholashda σ o'rtacha kvadratik chetlanish noma'lum bo'lganda

$$\bar{x}_T - t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_T + t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}} \qquad (***)$$

interval xizmat qiladi. Bu erda S - tuzatilgan o'rtacha kvadratik chetlanish; t_γ esa berilgan n va γ bo'yicha maxsus jadvaldan topiladi.

Misol. Bosh to'plamdan $p=10$ hajmli tanlanma olingan va quyidagi statistik taqsimot tuzilgan:

x_i:	-2	1	2	3	4	5
n_i:	2	1	2	2	2	1

Bosh to'plamning normal taqsimlangan X belgisining a matematik kutilishni $\bar{x}_{\text{T}}$ bo'yicha γ=0,95 ishonchlilik intervali yordamida baholang.

Echish. Tanlanma o'rtachani va tuzatilgan o'rtacha kvadratik chetlanishni mos ravishda ushbu formulalar bo'yicha topamiz:

$$\bar{x}_{\text{T}} = \frac{\sum n_i x_i}{n}, \qquad S = \sqrt{\frac{\sum n_i (x_i - \bar{x}_{\text{T}})^2}{n-1}}$$

Bu formulalarga masalada berilganlarni qo'yib $\bar{x}_{\text{T}} = 2$, S=2,4 ni hosil qilamiz. Jadvaldan γ=0,95 va n=10 bo'yicha t_γ=2,26 ni topamiz. Topilganlarni (***) ifodaga qo'yib

0,3<a<3,7

ishonchli intervalni hosil qilamiz. Bu interval noma'lum a matematik kutilishni γ=0,95 ishonchlilik bilan qoplaydi.

Normal taqsimotning noma'lum o'rtacha kvadratik chetlanishni baholash uchun ishonchli intervallar.

Bosh to'plamning o'rganilayotgan X son belgisi normal taqsimlangan bo'lsin. Shu taqsimotning σ - o'rtacha kvadratik chetlanishi uchun tanlanma ma'lumotlari bo'yicha intervalli baho topish talab qilinsin. Biz isbotsiz quyidagi da'voni keltiramiz.

Normal taqsimlangan X tasodifiy miqdorning σ - o'rtacha kvadratik chetlanishini "tuzatilgan" o'rtacha kvadratik chetlanish S orqali oldindan berilgan γ ishonchlilik bilan baholash uchun ushbu ishonchlilik intervallari xizmat qiladi.

$$S(1-q) < \sigma < S(1+q), \quad (q < 1 \text{ бўлганда})$$
$$0 < \sigma < S(1+q), \quad (q > 1 \text{ бўлганда})$$

bu erda q — kattalik berilgan p va γ bo'yicha mahsus jadvaldan topiladi.

Misol. Bosh to'plamning X son belgisi normal taqsimlangan. n=50 hajmli tanlanma bo'yicha S=*1,5* topilgan. Noma'lum σ ni γ=0,95 ishonchlilik bilan qoplaydigan ishonchli intervalni toping.

Echish. Jadvaldan n=50 va γ=0,95 bo'yicha q = 0,21 ekanligini topamiz (q<1). Yuqorida keltirilgan tengsizlikka muvofiq

$1,185<\sigma<1,815$ ishonchli intervalni topamiz.

Tayanch iboralar:

Nuqtaviy baho, ishonchli baho, baho aniqligi.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar:

1. Statistik baho ta'rifini bering.
2. Ishonchlilik ehtimoli va ishonchli interval tushunchalarini ta'riflang.
3. Normal taqsimlangan bosh to'plam matematik kutilishi uchun ishonchli intervallarni keltiring.
4. Ishonchli intervallarda qatnashuvchi parametrlarni izohlang.

Mustaqil echish uchun masalalar:

1. Bosh to'plamning normal taqsimlangan X son belgisining noma'lum matematik kutilishi a ni 0,95 ishonchlilik bilan baholash uchun ishonchli oraliqni toping, bunda o'rtacha kvadratik chetlanish $\delta = 4$ tanlanma o'rtacha $\bar{x}_T = 10,2$ va tanlanma hajmi n=16.

2. 10 ta erkli o'lchashlar natijasida sterjen uzunligi (mm) uchun quyidagi ma'lumotlar olingan: 23,24,23,25,25,26,26,25,24,25. O'lchash xatoligi normal taqsimlangan deb faraz kilib, sterjen uzunligining matematik kutilishi uchun $\gamma = 0.95$ ishonchlilik bilan ishonchli oraliqni toping.

3. Bosh to'plamning normal taqsimlangan X belgisining matematik kutilishini tanlanma o'rta qiymat bo'yicha bahosining 0,925 ishonchlilik bilan aniqligi 0,2 ga teng bo'ladigan tanlanmaning minimal hajmini toping. O'rtacha kvadratik chetlanishni $\sigma = 1,5$ deb oling.

4. Bosh to’plamdan n=10 hajmli tanlanma olingan:

x_i	-0,5	-0,4	-0,2	0	0,2	0,6	0,8	1	1,2	1,5
n_i	1	2	1	1	1	1	1	1	2	1

Bosh to’plamning normal taqsimlangan belgisining *a* matematik kutilishini 0,95 ishonchlilik bilan ishonchli oraliq yordamida baholang.

5. Bosh to’plamning *X* belgisi normal taqsimlangan.

n hajmli tanlanma bo’yicha tuzilgan o’rtacha kvadratik chetlanish S topilgan.

Ğ-o’rtacha kvadratik chetlanishni 0,99 ishonchlilik bilan qoplaydigan ishonchli oraliqni toping, bunda n=10, S=5,1.

Adabiyotlar:

[1] (213-235)

[2] (310-330)

[3] (125-137)

[4] (222-238)

[5] (321-329)

[7] (75-79)

[9] (248-253)

[12] (346-357)

4-§.Korrelyatsiya nazariyasi elementlari. Funktsional, statistik va korrelyatsion bog'lanishlar. Korrelyatsion jadval. Korrelyatsiya nazariyasining ikki asosiy masalasi.

Kundalik faoliyatimizdagi ko'p amaliy masalalarda, tajriba ishlarida o'rganilayotgan *X* belgining (tasodifiy miqdorning) bitta yoki bir nechta boshqa belgilarga (tasodifiy miqdorlarga) bog'liqligini *aniqlash* va *baholash* talab qilinadi. Belgilar orasida funktsional, statistik va korrelyatsion bog'lanishlar mavjud bo'lishi mumkin.

Funktsional bog'lanishda bir o'zgaruvchi miqdorning har bir qiymatiga boshqa o'zgaruvchi miqdorning aniq bitta qiymati mos keladi. Funktsional bog'lanishlar aniq fanlar matematika, fizika va ximiyada ayniksa yaqqol kuzatiladi.

Masalan:

1. Termometrdagi simob ustunining balandligi *(X)* havo harorati *(Y)* haqida aniq va bir qiymatli ma'lumot beradi;
2. Aylana radiusi *R (X belgi)* va uning uzunligi *S (Y belgi)* orasida $C=2\pi R$ geometriyadan ma'lum bo'lgan formula bilan aniqlangan funktsional bog'lanish mavjuddir.

Iqtisodiy jarayonlarda hamda turmushning boshqa sohalarida umuman olganda, belgilar orasida qat'iy funktsional bog'lanish kam bo'ladi. Buning asosiy sabablaridan biri belgilarga ta'sir etuvchi faktorlarning tasodifiyligidir.

Statistik bog'lanish deb shunday bog'lanishga aytiladiki, unda miqdorlardan birining o'zgarishi boshqasining taqsimoti o'zgarishga olib keladi. Xususan, miqdorlardan (belgilardan) birining o'zgarishi ikkinchisining o'rtacha qiymatining o'zgarishiga olib keladi. Bu holda statistik boglanish *korrelyatsion bog'lanish* deb ataladi.

Korrelyatsion bog'lanishda bo'lgan belgilarga misollar keltiramiz.

1. Mehnat unumdorligi *(X)* va jami ishlab chiqarilgan mahsulot *(Y);*
2. Yig'ib olingan hosil miqdori *(X)* va ishlatilgan o'g'itlar miqdori *(Y);*

3. Ja'mi mahsulot miqdori *(X)* va korxonaning ish haqi fondi *(Y);*

4. Sarflangan kapital mablag'lar *(X)* va shu mablag'lardan olingan sof foyda *(Y);*

5. Korxonaning texnika bilan qurollanganlik darajasi *(X)* va mehnat unumdorligi ko'rsatkichi *(Y)*.

Bunday misollarni boshka ko'plab sohalardan ham keltirish mumkin.

Agar *X* va *Y* tasodifiy miqdorlar (belgilar) ustida kuzatishlar o'tkazilgan bo'lib, kuzatishlar natijalari mos ravishda (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3), ..., (x_k,y_k) lardan iborat bo'lsa, u holda *X* va *Y* orasidagi bog'lanishni (munosabatni) ushbu jadval ko'rinishida ifodalash mumkin.

X_i	x_1	x_2	...	x_k
Y_i	y_1	y_2	...	y_k

Agar kuzatishlar natijasida hosil bo'lgan (x_i, y_i) juftlarning soni katta bo'lsa hamda ular yoki ayrimlari takrorlanadigan bo'lsa, u holda yuqoridagi jadval o'rniga quyidagi ikki "o'lchovli" jadvalni keltirish mumkin.

Y / X	y_1	y_2	…	y_S	m_X
x_1	m_{11}	m_{12}	…	m_{1S}	m_{X1}
x_2	m_{12}	m_{22}	…	m_{2S}	m_{X2}
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
x_k	m_{k1}	m_{k2}	…	m_{kS}	m_{Xk}
m_y	m_{y1}	m_{y2}	…	m_{yS}	n

Bu jadval *korrelyatsion jadval* yoki *korrelyatsion panjara* deb ataladi.

Belgilar orasidagi korrelyatsion munosabatlar (bog'lanishlar) to'g'ri, teskari, to'g'ri chiziqli va egri chiziqli, oddiy va ko'p belgilar orasidagi bog'lanishlar bo'lishi mumkin. To'g'ri korrelyatsion bog'lanishda belgilardan birining ortishi (kamayishi) boshqasining ham ortishiga (kamayishiga) olib keladi.

Masalan, daraxtning yoshi *(X)* ortib borishi bilan daraxtdagi xalqalar soni *(Y)* ortib boradi, havoning harorati *(X)* pasayishi bilan nafas olish tezligi *(Y)* kamayadi va h.k.

Aytaylik X va Y belgilar orasidagi bog'lanish o'rganilayotgan bo'lsin. X ning har bir qiymatiga Y ning bir nechta qiymati mos kelsin. Masalan, $x_1=8$ *da* $y_1=2;\ y_2=3;\ y_3=7$ qiymatlar olgan bo'lsin. Bularning arifmetik o'rtachasini topsak

$$\bar{y}_8 = \frac{2+3+7}{3} = 4$$

$\bar{y}_8$ - shartli o'rtacha qiymat deyiladi.

$\bar{y}_x$ - shartli o'rtacha qiymat deb Y ning $X=x$ qiymatga moc qiymatlarning arifmetik o'rtachasiga aytiladi.

Y ning X ga korrelyatsion bog'liqligi deb, $\bar{y}_x$ shartli o'rtachaning x ga funktsional bog'liqligiga aytiladi:

$$\bar{y}_x = f(x)$$

Bu tenglama Y ning X ga *regressiya tenglamasi* deb ataladi. Bu tenglama grafigi esa Y ning X ga *regressiya chizig'i* deb ataladi.

X ning Y ga regressiya tenglamasi va regressiya chizig'i ham yuqoridagiga o'xshash aniqlanadi.

$$\bar{x}_y = \varphi(y)$$

Korrelyatsiya nazariyasining ikki asosiy masalasi.

1-masala. Belgilar orasidagi korrelyatsion bog'lanish formasini aniqlash, ya'ni regressiya funktsiyasining ko'rinishini (chiziqli, nochiziqli va h.k.) topish.

Agar *f(x)* va *φ(u)* regressiya funktsiyalarining ikkalasi ham chiziqli bo'lsa, u holda korrelyatsiya *chiziqli,* aks holda esa *nochiziqli* deyiladi.

2-masala. Korrelyatsion bog'lanish zichligini (kuchini) aniqlashdir

Y ning X ga korrelyatsion bog'liqligining zichligi Y ning qiymatlarini $\overline{y}_x$ shartli o'rtacha qiymat atrofida tarqoqligining kattaligi bo'yicha baholanadi. Ko'p tarqoqlik Y ning X ga kuchsiz bog'liqligidan yoki bog'liqlik yo'qligidan darak beradi. Aksincha, kam tarqoqlik belgilar orasida ancha kuchli (zich) bog'liqlik borligini ko'rsatadi.

X ning Y ga korrelyatsion bog'lanishining zichligi shunga o'hshash aniqlanadi.

Tayanch iboralar:

Statistik bog'lanish, korrelyatsion bog'lanish, regressiya tenglamasi.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar:

1. Belgilar orasida qanday bog'lanishlar bo'lishi mumkin? Bog'lanish turlariga misollar keltiring.
2. Korrelyatsion bog'lanish ta'rifini bering.
3. Korrelyatsion jadval qanday tuziladi?
4. Shartli o'rtacha qiymat ta'rifini bering.
5. Regressiya tenglamasi, regressiya funktsiyasi va regressiya chizig'i ta'riflarini bering.
6. Korrelyatsiya nazariyasi ikki asosiy masalasini ayting.

Mustaqil echish uchun masalalar:

1. Tanlanmaning quyidagi jadvali yordamida Y ning X ga chiziqli tanlanma regressiya tenglamasini tuzing.

X	10	2	7	5
Y	8	2	6	4

2. Berilgan jadvaldan foydalanib, tanlanma shartli o'rta qiymat $\overline{y}_x$ ni toping.

X / Y	3	3,5	4	4,5	5
7	5	3	-	-	-
9	2	3	5	3	1
13	-	1	1	2	2

Adabiyotlar:

[1] (253-261)

[2] (392-410)

[3] (196-208)

[4] (265-291)

[5] (333-336)

[7] (80-89)

[9] (283-392)

[12] (362-371)

5-§.To'g'ri chiziqli regressiya tanlanma tenglamasining parametrlarini eng kichik kvadratlar usuli bilan topish. To'g'ri chiziqli regressiya tenglamasi.

Ma'lumki korrelyatsiya koeffitsienti ikkita X va Y belgining (tasodifiy miqdorning) o'zaro chiziqli bog'lanish darajasini ko'rsatadi, lekin bir belgining ikkinchi belgiga qarab son jihatdan qanday o'zgarishini ko'rsatib bera olmaydi.

X va Y belgilar orasidagi munosabatni *regressiya tenglamasi* deb ataluvchi bog'lanish ma'lum darajada ochib bera oladi. Bunda X ning o'zgarishiga qarab Y ni aniqlash va aksincha, Y ning o'zgarishiga qarab, X ni aniqlash mumkin bo'ladi.

Aytaylik, X va Y belgilar orasida chiziqli korrelyatsion bog'lanish mavjud bo'lsin. Bu holda belgilarning regressiya tenglamalari ham (yoki regressiya chiziqlari) to'g'ri chiziq tenglamalaridan iborat bo'ladi. Bu to'g'ri chiziqlar tenglamalarining koeffitsientlarini topish maqsadida n ta sinov o'tkazilgan bo'lib natijada $(x_1,y_1), (x_2y_2), \ldots, (x_ny_n)$ juftliklari olingan bo'lsin.

Bu son juftliklarini (X, Y) ikki o'lchovli tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari bosh to'plamidan olingan tasodifiy tanlanma sifatida qarash mumkin. Shu sababli bu ma'lumotlar bo'yicha topilgan koeffitsientlarga va tenglamalarga tanlanma nomi qo'shiladi.

Aniqlik uchun, Y belgining X ga regressiya to'g'ri chizig'ining tanlanma tenglamasini izlaylik. Buning uchun ikkita holni qaraymiz.

1. Ma'lumotlar gruppalanmagan hol.
2. Ma'lumotlar gruppalangan hol.

Ma'lumotlar gruppalanmagan eng sodda holda X belgining turli x qiymatlari va Y belgining ularga moc y qiymatlari bir martadan kuzatilgan bo'lsin. Bunday tanlanmani gruppalashning va shartli o'rtacha qiymatdan foydalanishning hojati yo'q. Shuning uchun izlanayotgan

$$\overline{y}_x = kx + b$$

regressiya to'g'ri chizig'i tenglamasini bunday yozib olamiz

$u = kx + b$

Bu tenglamadagi burchak koeffitsientini ρ_{yx} orqali belgilab, uni Y ning X ga *tanlanma regressiya koeffitsienti* deb ataymiz. Shunday qilib, maksadimiz

$$y=\rho_{yx}x + b \qquad (*)$$

ko'rinishdagi regressiya tanlanma tenglamasini topishdir.

Bu tenglamada ρ_{yx} va b - noma'lum koeffitsientlardir. Bu koeffitsientlarni *eng kichik kvadratlar usuli* deb ataluvchi usul yordamida topish mumkin.

Bu usulning mazmuni quyidagicha:

ρ_{yx} va b parametrlarni shunday tanlash kerakki, kuzatish ma'lumotlari bo'yicha topilgan, hamda XOY tekislikda yasalgan (x_1,y_1), (x_2y_2), ..., (x_ny_n) nuqtalar iloji boricha $u = \rho_{yx}\, x + b$ to'g'ri chiziq yaqinida yotsin. Aniqroq aytganda, ρ_{yx} va b - koeffitsientlarni $\delta_i=Y_i - y_i$ $(i=\overline{1,n})$ chetlanishlarning kvadratlari yig'indisi eng kichik bo'ladigan qilib tanlaymiz. Bu erda Y_i - (*) tenglama bo'yicha hisoblangan va kuzatilgan x_i qiymatga moc ordinata; y_i - esa x_i ga moc kuzatilayotgan ordinata. Agar chetlanishlar kvadratlarining yig'indisi kichik bo'lsa, yaxshi natijaga erishilgan bo'ladi.

Har bir chetlanish ρ_{yx} va b - noma'lum koeffitsientlarga bog'liq bo'lgani uchun chetlanishlarning kvadratlari yig'indisidan iborat $F(\rho_{yx},b\}$ funktsiya ham bu koeffitsientlarga bogliq bo'ladi:

$$F(\rho_{yx},b)=\sum_{i=1}^{n}(Y_i-y_i)^2=\sum_{i=1}^{n}(\rho_{yx}x_i+b-y_i)^2$$

Bu funktsiyaning minimumini izlash uchun tegishli xususiy hosilalarni hisoblab nolga tenglashtiramiz:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial \rho}=2\sum\limits_{i=1}^{n}(\rho_{yx}x_i+b-y_i)x_i=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial b}=2\sum\limits_{i=1}^{n}(\rho_{yx}x_i+b-y_i)=0\end{cases}$$

g'ki elementar almashtirishlar bajarib ρ_{yx} va b ga nisbatan quyidagi tenglamalar sistemasini olamiz.

$$\begin{cases} \rho_{yx}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum x_i = \sum x_i y_i \\ \rho_{yx}\sum_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum y_i \end{cases}$$

Bu sistemani echib izlanayotgan parametrlarni topamiz.

$$\rho_{yx} = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2},$$

$$b = \frac{n\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}$$

Xuddi shunga o'xshash X ning Y ga regressiya to'g'ri chizig'i tanlanma tenglamasini ham topish mumkin.

Misol. Quyidagi hajmi n=5 tanlanma bo'yicha Y ning X ga regressiya tanlanma tenglamasini toping.

x_i :	1	1,5	3	4,5	5
y_i :	1,25	1,4	1,5	1,75	2,25

Hisoblash jadvalini tuzamiz:

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	1,25	1	1,25
1,5	1,4	2,25	2,1
3	1,5	9	4,5
4,5	1,75	20,25	4,875
5	2,25	25	11,25
$\sum = 15$	$\sum = 8{,}15$	$\sum = 57{,}5$	$\sum = 26{,}975$

Jadvalda hisoblanganlarni formulaga qo'ysak,

$$\rho_{yx} = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} = \frac{5 \cdot 26{,}975 - 15 \cdot 8{,}15}{5 \cdot 57{,}5 - 15^2} = 0{,}202$$

$$b = \frac{n\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} = \frac{5 \cdot 57{,}5 \cdot 8{,}15 - 15 \cdot 26{,}975}{5 \cdot 57{,}5 - 15^2} = 1{,}024$$

Izlanayotgan regressiya tenglamasini yozamiz:

u=0,202x+1,024

Biz regressiya tanlanma tenglamasini gruppalanmagan ma'lumotlar bo'yicha, ya'ni X va Y ning qiymatlari bir martadan kuzatilgan degan farazda topdik.

Endi esa ko'p sonli ma'lumotlar olingan va ular orasida takrorlanadiganlari ham bor hamda ular korrelyatsion jadval ko'rinishida berilgan deb faraz qilaylik.

Kichik kvadratlar usuli yordamida hosil qilingan yuqoridagi (**) tenglamalar sistemasini quyidagicha soddaroq ko'rinishda yozib olaylik:

$$\begin{aligned} \left(\sum x_i^2\right)\rho_{yx} - \left(\sum x_i\right) \cdot b &= \sum x_i y_i \\ \left(\sum x_i\right)\rho_{yx} + nb &= \sum y_i \end{aligned} \qquad (***)$$

Bu sistemani ρ_{yx} va b ga nisbatan echib, izlanayotgan regressiya tenglamasini yozamiz

$$\overline{y}_x = \rho_{yx} x + b$$

Korrelyatsion koeffitsienti yordamida regressiya tenglamalarini boshqacha ko'rinishda ham yozish mumkin.

Shu maqsadda (***) sistemaning ikkinchi tenglamasidan b ni topamiz:

$$b = \overline{y} - \rho_{yx}\overline{x}$$

b ning bu ifodasini regressiya tenglamasiga qo'yib,

$$\overline{y}_x - \overline{y} = \rho_{yx}\left(x - \overline{x}\right) \text{ (R)}$$

tenglamani hosil qilamiz.

(**) tenglamalar sistemasidan, $\overline{x}^2 - \left(\overline{x}\right)^2 = \sigma_x^2$ ekanligini hisobga olib, ρ_{yx} koeffitsientini topsak:

$$\rho_{yx}\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{\sum n_{xy}xy - n\overline{x}\,\overline{y}}{n\left[\overline{x}^2 - \left(\overline{x}\right)^2\right]} = \frac{\sum n_{xy}xy - n\overline{x}\,\overline{y}}{n\sigma_x^2}$$

Bu tenglikning ikkala tomonini $\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$ ifodaga ko'paytiramiz:

$$\rho_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{\sum n_{xy}xy - n\overline{x}\,\overline{y}}{n\sigma_x\sigma_y} = r_T$$

Bu ifodadan ρ_{yx} ni topsak:

$$\rho_{yx} = r_T\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

Bu tenglamaning o'ng tomonini *(R)* tenglamaga qo'yib, *Y* ning *X* ga regressiya to'g'ri chizig'i tanlanma tenglamasini

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r_T\frac{\delta_y}{\sigma_x}\cdot\left(x - \overline{x}\right)$$

ko'rinishni hosil qilamiz.

Xuddi shunga o'xshash *X* ning *Y* ga regressiya tanlanma tenglamasini ham yozish mumkin.

$$\overline{x}_y - \overline{x} = r_T \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \cdot \left(y - \overline{y}\right)$$

Bu erda $r_T \cdot \dfrac{\sigma_x}{\sigma_y} = \rho_{xy}$ *X* ning *Y* ga tanlanma regressiya koeffitsienti.

Shuni ta'kidlab o'tamizki, tanlanma hajmi ancha katta hollarda tanlanma korrelyatsiya koeffitsientini ancha soddalashtirib topishga imkon beruvchi usullar mavjud.

Tayanch iboralar:

Eng kichik kvadratlar usuli, tanlanma regressiya tenglamasi.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar:

1. Eng kichik kvadratlar usulining mohiyatini tushuntiring.
2. Belgilar orasidagi to'g'ri chiziqli regressiya tanlanma tenglamalarini keltiring.
3. Regressiya to'g'ri chizig'i tenglamasidagi parametrlarni izohlang.

Mustaqil echish uchun masalalar:

1. Tanlanmaning quyidagi jadvali yordamida Y ning X ga chiziqli tanlanma regressiya tenglamasini tuzing.

X	10	2	7	5
Y	8	2	6	4

2. Bir oylik ish xaqi fondining (Y) ishlab chiqarilgan jami mahsulot hajmiga (X) bog'liqligini o'rganish maqsadida 10 ta korxona bo'yicha quyidagi ma'lumotlar olingan. Y ning X ga chiziqli regressiya tanlanma tenglamasini toping.

Korxonalar	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X (mln. sum)	500	570	600	650	700	720	800	860	900	920
Y (mln. sum)	110	120	130	135	140	145	150	154	160	164

3. Kuyidagi berilgan ma'lumotlar bo'yicha 1 ga erdan olingan hosil mikdorining (Y) sarflangan o'g'it mikdoriga (X) bog'liqligi chizikli regressiya tanlanma tenglamasini toping.

X(ts)	6	7	7,5	8	9	9,5	10
Y(ts)	25	27	26	30	32	35	38

4. Shahardagi 10 ta oziq-ovqat magazini bo'yicha bir oylik tovar ayirboshlash hajmi (X) va shu davr mobaynidagi muomala xarajatlari (Y) hajmi o'rganilgan. X ning Y ga chiziqli bog'liqligi regressiya tanlanma tenglamasini toping.

X (mln. sum)	200	300	320	410	304	500	540	600	650	700
Y (mln. sum)	20	27	30	36	38	44	50	56	58	60

5. Quyidagi ma'lumotlar bo'yicha arpa boshog'idagi donlar sonining (Y), boshoqning uzunligiga (X) bog'liqligi chiziqli regressiya tanlanma tenglamasini tuzing.

X	6	6,8	7	8	8,5	9	10	11	12	13	14	15
Y	11	14	16	20	22	24	24	28	28	30	31	33

Adabiyotlar:

[1] (261-267)

[2] (394-412)

[3] (208-220)

[4] (200-215, 276-279)

[5] (336-342)

[7] (80-89)

[9] (293-295, 353-356)

[12](371-378)

6-§.Korrelyatsion bog'liqlikning zichligi. Tanlanma korrelyatsiya koeffitsienti va uning xossalari. Tanlanma korrelyatsion nisbat.

Ma'lumki korrelyatsiya nazariyasining asosiy masalalaridan biri korrelyatsion bog'lanishning zichligini (kuchini) aniqlashdir.

Y belgining *X* ga korrelyatsion bog'liqligining zichligi *Y* ning qiymatlarini $\overline{y}_x$ shartli o'rtacha qiymat atrofida tarqoqligi bo'yicha baholanadi. Ko'p tarqoqlik *Y* ning *X* ga kuchsiz bog'liqligidan yoki bog'liqlik yo'qligini bildiradi. Kam tarqoqlik ancha kuchli bog'liqlik borligini ko'rsatadi.

Belgilar orasidagi korrelyatsion munosabatlar to'g'ri, teskari, to'g'ri chiziqli va egri chiziqli, oddiy va ko'p belgilar orasidagi bog'lanishlar bo'lishi mumkin.

To'g'ri korrelyatsion bog'lanishda belgilardan birining ortishi (kamayishi) boshqasining ham ortishiga (kamayishiga) olib keladi. Teskari korrelyatsion munosabatda esa aksincha holat kuzatiladi.

Tanlanma korrelyatsiya koeffitsienti belgilar orasidagi chiziqli bog'liqlik miqdorini xarakterlashi bilan alohida muhim ahamiyatga ega. Tanlanma korrelyatsiya koeffitsienti

$$r_T = \frac{\sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{n\delta_x\delta_y} \quad \text{yoki} \quad r_T = \frac{\sum n_{xy}xy - n\bar{x}\bar{y}}{n\delta_x\delta_y}$$

formulalar yordamida aniqlanadi.

Bu erda x_i, u_i lar *X* va *Y* belgilarning kuzatilgan qiymatlari,

n_{xy} - kuzatilgan (x, u) varianta juftining chastotasi;

n - tanlanma hajmi;

$\overline{x}, \overline{y}$ - tanlanma o'rtacha qiymatlar;

σ_x, σ_y - tanlanma o'rtacha kvadratik chetlanishlar.

Endi tanlanma korrelyatsiya koeffitsientining xossalarini keltiramiz.

1-xossa. Tanlanma korrelyatsiya koeffitsientining absolyut qiymati birdan ortmaydi, ya'ni

$$|r_T| \le 1 \qquad \text{yoki } -1 \le r_T \le 1$$

2-xossa. Tanlanma korrelyatsiya koeffitsientining absolyut qiymati ortib borgan sari chiziqli bog'lanish yanada zichroq bo'la boradi va $|r_T| = 1$ da funktsional bog'lanishga o'tadi.

3-xossa. Agar $|r_T| = 1$ bo'lsa, u holda belgilarning kuzatilayotgan qiymatlari chiziqli funktsional bog'lanish bilan bog'langan.

4-xossa. Agar $|r_T| = 0$ bo'lib, tanlanma regressiya chiziqlari to'g'ri chiziqlar bo'lsa, u holda *X* va *Y* chiziqli korrelyatsion bog'lanish bilan bog'lanmagan.

Eslatma. Agar $|r_T| = 0$ bo'lsa, u holda o'rganilayotgan belgilar nochiziqli korrelyatsion bog'lanishda (masalan, parabolik, ko'rsatkichli va h.k.) va hattoki funktsional bog'lanishda bo'lishi mumkin.

Yuqorida keltirilgan xossalardan tanlanma korrelyatsiya koeffitsientining ma'nosi kelib chiqadi: tanlanma korrelyatsiya koeffitsienti tanlanmada son belgilar orasidagi chiziqli bog'lanish zichligini xarakterlaydi: $|r_T|$ kattalik 1 ga qancha yaqin bo'lsa, bog'lanish shuncha kuchli; $|r_T|$ kattalik 0 ga qancha yaqin bo'lsa, bog'lanish shuncha kuchsiz.

1-eslatma. Tanlanma korrelyatsiya koeffitsientining ishorasi regressiya koeffitsientlarining ishoralari bilan bir xil bo'ladi, bu ushbu formulalardan kelib chiqadi:

$$p_{yx} = r_T \frac{\delta_x}{\delta_y}; \; p_{xy} = r_T \frac{\delta_x}{\delta_y}$$

2-eslatma. Tanlanma korrelyatsiya koeffitsienti tanlanma regressiya koeffitsientlarining o'rtacha geometrik qiymatiga teng.

Haqiqatan ham 1-eslatmadagi tengliklarning chap va o'ng tomonlarini ko'paytirib, quyidagini hosil qilamiz:

$$p_{yx}p_{xy} = r_T^2$$

Bu erdan

$$r_T = \pm\sqrt{p_{yx}p_{xy}}$$

Ildiz oldidagi ishora regressiya koeffitsientlarining ishoralari bilan bir xil qilib olinishi lozim.

Agar tanlanma etarlicha katta hajmga ega va bosh to'plamni «yaxshi» tasvirlasa, u holda belgilar orasidagi zichlik haqida tanlanma ma'lumotlari bo'yicha olingan xulosa ma'lum darajada bosh to'plamga ham tarqatilishi mumkin. Masalan, normal qonun bo'yicha taqsimlangan bosh to'plam korrelyatsiya koeffitsientini baholash uchun $(n \geq 50\partial a)$.

$$r_T - 3\frac{1 - r_T^2}{\sqrt{n}} \leq r_\delta \leq r_T + 3\frac{1 + r_T^2}{\sqrt{n}}$$

formulalardan foydalanish mumkin.

Misol. Cho'chqa bolasining og'irligi Y (kg.) va yoshi X (haftalarda) orasidagi bog'lanish quyidagi jadval bilan xarakterlanadi.

x	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
y	*1,3*	*2,5*	*3,9*	*5,2*	*5,3*	*7,5*	*9,0*	*10,8*	*13,1*

Shu ma'lumotlar bo'yicha tanlanma korrelyatsiya koeffitsientini toping.

Echish.

$$r_T = \frac{\sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{n\delta_x\delta_y}$$

formulada zarur hisoblashlarni bajarsak, $r_T = 0{,}98$ ekanligini topamiz. Bundan esa cho'chqa bolasining og'irligi va yoshi orasidagi bog'lanish kuchli, degan xulosaga kelamiz.

Tanlanma korrelyatsion nisbat va uning xossalari.

Kuzatilayotgan (yoki biz o'rganmoqchi bo'lgan) ikkita X va Y belgilar orasidagi chiziqli korrelyatsion bog'lanish zichligini baholash uchun r_T korrelyatsiya koeffitsienti xizmat qilishini bilib oldik. Chiziqli bo'lmagan yoki umuman, istalgan korrelyatsion bog'lanish zichligini qanday baholash mumkin degan savol bo'lishi tabiiydir. Istalgan korrelyatsion bog'lanish uchun *korrelyatsion nisbat* deb ataluvchi quyidagi xarakteristika ishlatiladi.

Y ning X ga tanlanma korrelyatsion nisbati deb,

$$\eta_{yx} = \frac{\delta_{\bar{y}x}}{\delta_y}$$

nisbat bilan aniqlanuvchi kattalikka aytiladi. Bu erda

$$\delta_{\bar{y}x} = \sqrt{\frac{\sum n_x(\bar{y}_x - \bar{y})}{n}}, \quad \delta_y = \sqrt{\frac{\sum n_y(y - \bar{y})^2}{n}}$$

n - tanlanma hajmi;

n_x - X belgi x qiymatining chastotasi;

n_y - Y belgi y qiymatining chastotasi;

$\bar{y}$ - Y belgining umumiy o'rtacha qiymati;

$\bar{y}_x$ - Y belgining shartli o'rtacha qiymati.

X belgining Y ga tanlanma korrelyatsion nisbati ham shu kabi aniqlanadi:

$$\eta_{xy} = \frac{\delta_{\bar{x}y}}{\delta_x}$$

Endi tanlanma korrelyatsion nisbatni hisoblashga doir quyidagi misolni qaraymiz.

Misol. *p=50* hajmli quyidagi korrelyatsion jadval bo'yicha Y belgining X belgiga korrelyatsion nisbati η_{yx} ni toping:

X \ Y	10	20	30	n_y
15	4	28	6	38
25	6	-	6	12
n_x	10	28	12	p=50
$\bar{y}_x$	21	15	20	

Echish. $\bar{y}$ - umumiy o'rtachani topamiz:

$$\bar{y} = \frac{\sum n_i y_i}{n} = \frac{38 \cdot 15 + 12 \cdot 25}{50} = \frac{870}{50} = 17{,}4$$

Umumiy o'rtacha kvadratik chetlanishni topamiz:

$$\delta_y = \sqrt{\frac{\sum n_y (y - \bar{y})^2}{n}} = \sqrt{\frac{38 \cdot (15 - 17{,}4)^2 + 12 \cdot (25 - 17{,}4)^2}{50}} = 4{,}27$$

Shartli o'rtachaning o'rtacha kvadratik chetlanishni (yoki gruppalararo o'rtacha kvadratik chetlanish) topamiz.

$$\delta_{\bar{y}x} = \sqrt{\frac{\sum n_x (\bar{y}_x - \bar{y})}{n}} = \sqrt{\frac{10(21 - 17{,}4)^2 + 28(15 - 17{,}4)^2 + 12(20 - 17{,}4)^2}{50}} = 2{,}73$$

Topilganlarni formulaga qo'ysak,

$$\eta_{yx} = \frac{\delta_{\bar{y}x}}{\delta_y} = \frac{2{,}73}{4{,}27} = 0{,}64$$

Endi korrelyatsion nisbatning quyidagi xossalarini keltiramiz.

1-xossa, Korrelyatsion nisbat ushbu qo'sh tengsizlikni qanoatlantiradi. $0 \le \eta \le 1$

2-xossa. Agar $\eta = 1$ bo'lsa, belgilar funktsional bog'lanish bilan bog'langan, ya'ni:

$Y = f$ (x)

3-xossa. Tanlanma korrelyatsion nisbat tanlanma korrelyatsiya koeffitsientining absolyut qiymatidan kichik emas:

$$\eta \geq |r_T|$$

4-xossa. Agar $\eta = |r_T|$ bo'lsa, belgilar orasida aniq chiziqli bog'lanish bo'ladi.

Korrelyatsion nisbatning afzalligi uning istalgan bog'lanish, shu jumladan, chiziqli bog'lanish zichligining ham o'lchovi bo'lib xizmat qilishdadir. Shu bilan birga bir qatorda korrelyatsion nisbat *kamchilikka ham ega:* u bog'lanish shakli haqida hech qanday ma'lumot bermaydi.

Tayanch iboralar:

Korrelyatsion bog'lanish zichligi, tanlanma regressiya koeffitsienti, tanlanma korrelyatsiya koeffitsienti, tanlanma korrelyatsion nisbat.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar:

1. Korrelyatsion bog'liqlikning zichligi kanday baholanadi?
2. Tanlanma korrelyatsiya koeffitsienti xossalarini keltiring.
3. Tanlanma korrelyatsiya koeffitsienti va tanlanma regressiya koeffitsienti orasida kanday munosabat bor?
4. Tanlanma korrelyatsion nisbat nima uchun xizmat qiladi? Uning xossalarini keltiring.

Mustaqil echish uchun masalalar:

1. Berilgan jadval bo'yicha X va Y tasodifiy miqdorlar tanlanma korrelyatsiya koeffitsienti topilsin.

X	-1	3	4	0	2	3	1	4
Y	2	0	1	-1	1	1	2	0

2. n=50 hajmli quyidagi korrelyatsion jadval bo'yicha Y belgining X belgiga korrelyatsion nisbati η_{yx} ni toping.

Y \ X	10	20	30	n_y
15	4	28	6	38
25	6	-	6	12
n_x	10	28	12	n=50
y_x	21	15	20	

Adabiyotlar:

[1] (261-275)

[2] (403-427)

[3] (195-221)

[4] (279-291, 301-306)

[5] (343-347)

[7] (90-94)

[9] (293-305)

[12] (374-378)

7-§.Egri chiziqli va to'plamiy korrelyatsiya. Korrelyatsion va regression modellarning amaliy masalalardagi ahamiyati.

Agar X va Y orasidagi korrelyatsion bog'lanish o'rganilayotgan bo'lib, $\overline{y}_x = f(x)$ yoki $\overline{x}_y = \varphi(y)$ regressiya funktsiyalarining grafiklari egri chiziq bilan tasvirlanadigan bo'lsa, korrelyatsiya *egri chiziqli* deyiladi.

Egri chiziqli korrelyatsiya nazariyasi ham chiziqli korrelyatsiya nazariyasi masalalari kabi masalalarni, ya'ni korrelyatsion bog'lanish formasi va zichligini aniqlash bilan shug'ullanadi. Egri chiziqli korrelyatsiyada masalan, Y ning X ga regressiya funktsiyalari quyidagi ko'rinishlarda bo'lishi mumkin:

$$\overline{y}_x = ax^2 + bx + c$$

(ikkinchi tartibli parabolik korrelyatsiya);

$$\overline{y}_x = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

(uchinchi tartibli parabolik korrelyatsiya);

$$\overline{y}_x = \frac{a}{x} + b$$

(giperbolik korrelyatsiya);

$$\overline{y}_x = a \cdot e^{bx}$$

(ko'rsatkichli korrelyatsiya) va h.k.

Albatta, belgilar orasidagi korrelyatsion bog'lanishni ifodalovchi regressiya tenglamalaridagi noma'lum parametrlarni aniqlash yoki statistik baholash masalalari ham muhim hisoblanadi.

Regressiya tenglamasining noma'lum parametrlarini eng kichik kvadratlar usuli bilan izlanadi. Egri chiziqli korrelyatsiya zichligini baholash uchun tanlanma korrelyatsion nisbatlar xizmat qiladi.

Egri chiziqli korrelyatsiyaning sodda hollaridan biri parabolik korrelyatsiyani ko'raylik. Aniqlik uchun Y ning X ga regressiyasi tenglamasini qaraymiz. Bunda regressiya tenglamasi $\overline{y}_x = ax^2 + bx + c$ ko'rinishda bo'lib,

a, b, c koeffitsientlarni tanlanma ma'lumotlari bo'yicha topish kerak bo'ladi. Noma'lum koeffitsientlarni $v_i = y_i - \left(ax_i^2 + bx_i + c\right),\ i = 1,2,3...,n$

chetlanishlar kvadratlarining yig'indisi eng kichik bo'ladigan qilib, tanlaymiz. Shu maqsadda, quyidagi funktsiyani kiritamiz:

$$F(a,b,c) = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \left(ax_i^2 + bx_i + c\right)\right)^2$$

Chiziqli korrelyatsiya holidagi kabi ushbu funktsiyani ekstremumga tekshiriladi va quyidagi sistema hosil qilinadi.

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i + cn = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

Tanlanma natijalari bo'lmish (x_i, y_i) juftliklarni bu sistemaga qo'yib, hamda uni echib, izlanayotgan a, b, c koeffitsientlarni topiladi. *X* va *Y* belgilar orasidagi korrelyatsion bog'liqlik kuchi yoki zichligi, egri chiziqli korrelyatsiyada η_{yx} korrelyatsion nisbat bilan aniqlanadi.

$$\eta_{yx} = \frac{\sigma_{\bar{y}_X}}{\sigma_y}$$

Bunda

$$\sigma_{\bar{y}_X} = \sqrt{\frac{\sum n_x \left(\bar{y}_x - \bar{y}\right)^2}{n}};\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum n_i \left(y_i - \bar{y}\right)^2}{n}}.$$

Ba'zi amaliy masalalarda ikkita emas, balki undan ko'p belgilar orasidagi bog'lanishni o'rganish zarurati tug'iladi. Belgilar orasidagi korrelyatsion bog'lanish bu holda to'plamiy (yoki ko'p-lik) korrelyatsiya deb ataladi.

To'plamiy korrelyatsiyaning eng sodda holi bo'lgan chiziqli korrelyatsiyani qaraymiz. Bu holda **X**, *Y,* va *Z* belgilar orasidagi korrelyatsion munosabat

$$Z=aX+bY+c$$

tenglama ko'rinishida ifodalanadi.

Bunda quyidagi masalalarni hal qilish zarur:

1) tanlanma ma'lumotlari bo'yicha koeffitsientlarni shunday tanlash kerakki, *Z=aX+By+C* funktsiya belgilar orasidagi bog'liqlikni «yaxshiroq» ochib bersin;
2) *X, Y* va *Z* belgilar orasidagi bog'lanish zichligini yoki kuchini miqdoriy baholash;
3) fiksirlangan *Y* da *Z,* va X orasidagi, yoki fiksirlangan *Z* da *Y* va *X* orasidagi bog'lanishni aniqlash.

Avvalgidek a,b,c koeffitsientlarni eng kichik kvadratlar usuli bilan topiladi. Buning uchun

$$\begin{aligned}
&v_1 = Z_1 - (ax_1 + by_1 + c),\\
&v_2 = Z_2 - (ax_2 + by_2 + c),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&v_n = Z_n - (ax_n + by_n + c)
\end{aligned}$$

chetlanishlar qaraladi hamda chetlanishlar kvadratlarining yig'indisidan iborat

$$F(a,b,c) = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(Z_i - (ax_i + by_i + c)\right)^2$$

funktsiya tuziladi. Noma'lum a,b,c koeffitsientlarning shunday qiymatlarini topish kerakki, bunda *F(a, b, s)* funktsiya eng kichik qiymatga erishsin. Ma'lumki, buning uchun a,b,c argumentlar bo'yicha xususiy hosilalarni hisoblab, nolga tenglashtirish zarur.

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial F}{\partial a} = 2\sum\limits_{i=1}^{n} \left(Z_i - (ax_i + bx_i + c)\right)(-x_i) = 0\\
\dfrac{\partial F}{\partial b} = 2\sum\limits_{i=1}^{n} \left(Z_i - (ax_i + bx_i + c)\right)(-y_i) = 0\\
\dfrac{\partial F}{\partial c} = 2\sum\limits_{i=1}^{n} \left(Z_i - (ax_i + bx_i + c)\right)(-1) = 0
\end{cases}$$

Bu sistemani noma’lum a, b, c larga nisbatan echib, *Z= aX+bY+s* funktsiyani topamiz. Ko’pincha *x, u, z* orasidagi bog’lanish tenglamasi

$$Z - \overline{Z}_T = A(x - \overline{x}_T) + B(y - \overline{y}_T)$$

shaklda yoziladi.

Bu tenglamadagi *A* va *V* koeffitsientlar quyidagi formulalar bilan aniqlanadi:

$$A = \frac{r_{xz} - r_{yz} \cdot r_{xy}}{1 - r_{xy}^2} \cdot \frac{\delta_z}{\delta_x}$$

$$B = \frac{r_{yz} - r_{yx} \cdot r_{zx}}{1 - r_{xy}^2} \cdot \frac{\delta_z}{\delta_y}$$

Bunda $r_{xz}, r_{yz}, r_{xy} -$ mos ravishda *X* va *Z*, *Y* va *Z, X* va *Y* belgilar korrelyatsiya koeffitsientlari; $\delta_x, \delta_y, \delta_z -$ mos belgilar tanlanma o’rtacha kvadratik chetlanishlari.

Z belgining *X* va *Y* belgilar bilan bog’liqligining zichligi quyidagi to’la korrelyatsiya koeffitsienti bilan baholanadi. $R = \sqrt{\dfrac{r_{xz}^2 - 2r_{xy}^2 r_{xz} r_{yz} + r_{yz}^2}{1 - r_{xy}^2}}$

Shuningdek, *Y* ning tayin fiksirlangan qiymatida *Z* va *X* orasidagi bog’lanish zichligi

$$r_{xz(y)} = \frac{r_{xz} - 2r_{xy} r_{yz}}{\sqrt{(1 - r_{xy}^2)(1 - r_{yz}^2)}}$$

xususiy korrelyatsiya koeffitsienti bilan baholanadi.

Tabiatda turli-tuman jarayonlarni o’rganishda, tasodifiy jarayonlarning o’zaro bog’liqlik qonunlarini ochishda, hamda umuman prognozlash masalalarida korrelyatsion va regression analizning xulosalari katta ahamiyatga egadir. Xususan, iqtisodiy jarayonlarni tadqiq etishda turli iqtisodiy ko’rsatkichlarning bir-biriga bog’liqligini aniqlash va shu asosda ma’lum xulosalar chiqarishda korrelyatsiya nazariyasining elementlari muvaffaqiyatli tatbiq etib kelinmoqda.

Tayanch iboralar:

Egri chiziqli korellyatsiya, to’plamiy korrelyatsiya, to’la korrelyatsiya koeffitsienti, xususiy korrelyatsiya koeffitsienti.

O’z-o’zini tekshirish uchun savollar:

1. Egri chiziqli korrelyatsiya nima?
2. Egri chiziqli korrelyatsiyadagi regressiya funktsiyalariga misollar keltiring.
3. To’plamiy korrelyatsiya tushunchasini ayting.
4. To’la korrelyatsiya koeffitsienti va xususiy korrelyatsiya koeffitsientlari nimani xarakterlaydi?

Mustaqil echish uchun masalalar:

1. Quyidagi jadvaldagi ma'lumotlar bo'yicha $\bar{y}_x = Ax^2 + Bx + C$ regressiya tanlanma tenglamasini va η_{yx} tanlanma korrelyatsion nisbatni toping.

Y \ X	0	4	6	7	10	n_y
7	19	1	1	-	-	21
13	2	14	-	-	-	16
40	-	3	22	2	-	27
80	-	-	-	15	-	15
200	-	-	-	-	21	21
n_x	21	18	23	17	21	n=100

2. Korrelyatsion jadvalda keltirilgan ma'lumotlar bo'yicha $x_y = Ay^2 + By + C$ regressiya tanlanma tenglamasini va η_{yx} tanlanma korrelyatsion nisbatni aniqlang.

X **Y**	6	30	50	n_y
1	15	-	-	15
2	1	14	-	15
3	-	2	18	20
4	16	16	18	n=50

Adabiyotlar:

[1] (275-278)

[2] (421-435, 438-451)

[3] (195-235)

[4] (291-306)

[5] (345-352)

[7] (90-94)

[9] (307-310, 335-350)

[12] (378-383)

8-§.Statistik gipotezalar. Gipotezalarning turlari. Birinchi va ikkinchi tur xatolar.

Amaliyotda, texnikada va iqtisodiyotda ko'pincha tasodifiylik bilan bog'liq bo'lgan biror faktni aniqlashtirish uchun statistik yo'l bilan tekshirib ko'rish mumkin bo'lgan - gipotezalarga tayanib ish ko'riladi. *Statistik gipoteza* deb, tasodifiy miqdor noma'lum taqsimotning ko'rinishi haqida yoki ma'lum taqsimotning parametrlari haqidagi gipotezaga aytiladi. Masalan, quyidagilar statistik gipotezalar bo'ladi:

1. Bir xil ishlab chiqarish sharoitlarida bir xil ishni bajarayotgan ishchilarning mehnat unumdorligi normal qonun bo'yicha taqsimlangan;
2. Parallel ishlayotgan stanoklarda tayyorlanayotgan bir xil turdagi detallarning o'rtacha o'lchamlari bir-biriga teng;
3. Ikkita normal to'plamning dispersiyalari o'zaro teng;
4. Ikkita turdosh korxonaning tayin iqtisodiy ko'rsatgichi bir xil.

1-gipotezada noma'lum taqsimotning ko'rinishi xaqida, 2,3,4-gipotezalarda esa parametrlar haqida faraz qilingan.

«Ertaga yomg'ir yog'adi», «Korxona 2006 yilda iqtisodiy inqirozdan chiqadi» kabi gipotezalar statistik gipotezalar bo'lmaydi, chunki ularda na taqsimot qonunining ko'rinishi haqida, na parametrlari haqida so'z boradi.

Oldinga surilgan gipoteza tanlanma natijalarga asoslanib tekshirib ko'rish natijasida qabul qilinishi yoki rad qilinishi mumkin.

Asosiy (yoki nolinchi) gipoteza deb ilgari surilgan H_0 gipotezaga, konkurent (yoki alternativ) gipoteza deb, asosiy gipotezaga zid bo'lgan H_1 gipotezaga aytiladi.

Masalan. Asosiy gipoteza sifatida «*X*» tasodifiy miqdor Puasson taqsimot konuniga bo'ysunadi» degan gipoteza surilsin.

Bu holda: $(\lambda > 0, k = 0,1,2,.......)$

$$H_0: \ P(X=k)=\frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$$

$$H_1: \ P(X=k)\neq \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$$

Faqat bitta da'voni o'z ichiga olgan gipoteza *oddiy gipoteza*. bittadan ortiq sondagi da'volarni o'z ichiga olgan gipoteza esa *murakkab gipoteza* deyiladi.

Misol. Agar λ ko'rsatkichli taqsimotning parametri bo'lsa, ya'ni

$F(x)=\begin{cases} 0, x\leq 0 \\ 1-e^{-\lambda x}, x>0 \end{cases}$ bo'lsa, u holda

$H_0: \ \lambda = 2.5$ gipoteza oddiy gipoteza va

$H_1: \ \lambda. > 2.5$ gipoteza esa murakkab gipotezadir.

Ilgari surilgan gipoteza haqiqatda to'g'ri yoki noto'g'ri bo'lishi mumkin, shu sababli uni tekshirib ko'rib xulosa chiqariladi.

Gipotezani tekshirish natijasida ikki turdagi xatoga yo'l qo'yilishi mumkin.

Agar to'g'ri gipoteza rad etilsa, qilingan xatolikni I tur xatolik, agar noto'g'ri gipoteza qabul qilinsa qilingan xatolik II tur xatolik deb ataladi. Qaralgan bu hollarni quyidagi jadvalda yaqqolroq tasvirlash mumkin.

N_0 gipoteza	To'g'ri	Noto'g'ri
Rad qilinadi	I tur xatolik	To'g'ri qaror
Qabul qilinadi	To'g'ri qaror	II tur xatolik

Amaliyotda I va II tur xatolarning oqibatlari har xil bo'lishi mumkin.

Misol. «Samolyotga uchishga ruxsat berilsin» degan to'g'ri qaror rad etilgan bo'lsa, u holda I tur bu xato moddiy zararga olib kelishi mumkin, agar samolyotning nosozligiga qaramasdan «uchishga ruxsat etilsin» degan noto'g'ri qaror qabul qilinsa, II tur xato kishilarning halokatiga olib kelishi mumkin.

Albatta, I tur xato II tur xatoga qaraganda og'irroq oqibatlarga olib keladigan misollar ham keltirish mumkin.

Statistik kriteriy. Kriteriyning kuzatiladigan qiymati. Qiymatdorlik darajasi. Kritik soha. Kritik nuqta.

Statistik gipoteza ilgari surilgandan keyin, uni to'g'ri yoki noto'g'ri ekanini tekshirib ko'rish kerak bo'ladi. Shu maqsadda maxsus tanlangan, hamda aniq, yoki taqribiy taqsimoti ma'lum bo'lgan tasodifiy miqdor ishlatiladi.

Statistik kriteriy (mezon) deb, asosiy gipotezani tekshirish uchun xizmat qiladigan tasodifiy miqdorga aytiladi.

Masalan, normal taqsimot qonuniga ega X va Y bosh to'plamlarning dispersiyalari tengligi haqidagi N_0*:* $D(X)=D(Y)$ asosiy gipoteza tekshirilayotgan bo'lsa, u holda statistik kriteriy sifatida tuzatilgan tanlanma dispersiyalar nisbati olinadi:

$$F = \frac{S_x^2}{S_y^2}$$

Bu miqdor tasodifiy miqdordir, chunki turli tajribalarda dispersiyalar har xil, oldindan ma'lum bo'lmagan qiymatlar qabul qiladi.

Gipotezani tekshirish uchun kriteriyga kirgan miqdorlarning xususiy qiymatlari tanlanma bo'yicha hisoblanadi va shunday qilib kriteriyning kuzatiladigan qiymati hosil qilinadi.

Kuzatiladigan qiymat deb, statistik kriteriyning tanlanmalar bo'yicha hisoblangan qiymatiga aytiladi. Masalan, normal qonun bilan taqsimlangan bosh to'plamlardan olingan ikkita tanlanma dispersiyalar topilgan bo'lsa, u holda

$F = \dfrac{S_x^2}{S_y^2}$ kriteriy uchun

$$F_{kuzat} = \frac{S_x^2}{S_y^2} = \frac{16}{5} = 3.2 \qquad \left(S_x^2 = 16; S_y^2 = 5\right)$$

H_1 konkurent gipotezaga nisbatan H_0 asosiy gipotezani tekshirish maqsadida X tasodifiy miqdor ustida n ta erkli kuzatish o'tkazilib, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tanlanma olingan deylik. Tanlangan kriteriyning mumkin bo'lgan barcha qiymatlari to'plami *K* ikkita kesishmaydigan qism to'plamlariga ajratiladi:

$$K = K^{-} \cup K^{+}, K^{-} \cap K^{+} = \varnothing$$

Ulardan biri K^{-} kriteriyning asosiy gipoteza H_0 rad qilinadagan, ikkinchisi K^{+} esa asosiy gipoteza qabul qilinadigan qiymatlarini o'z ichiga oladi.

Kritik soha deb, kriteriyning asosiy gipoteza H_0 rad qilinadigan qiymatlari to'plami K^{-} ga aytiladi.

Gipotezaning qabul qilinish sohasi deb, kriteriyning gipoteza qabul qiladigan to'plami K^{+} ga aytiladi.

Statistik gipotezalarni tekshirishning asosiy printsiplari E. Neyman, E. Pirson va boshqa matematiklar tomonidan ishlab chiqilgan bo'lib, bu printsipni quyidagicha ta'riflash mumkin: agar kriteriyning kuzatiladigan qiymati *K* kritik sohaga tegishli bo'lsa, asosiy gipoteza rad qilinadi, agar kriteriyning kuzatilayotgan qiymati K^{+} gipotezaning qabul qilinish sohasiga tegishli bo'lsa, asosiy gipoteza qabul qilinadi.

Kriteriy bir o'lchovli tasodifiy miqdor bo'lgani uchun uning mumkin bulgan barcha qiymatlari to'plami biror intervaldan iborat bo'ladi. Shu sababli, kritik soha va gipotezaning qabul qilinish sohasi ham intervaldan iborat bo'ladi, va demak, ularni ajratib turuvchi nuqtalar to'g'risida gapirish mumkin.

Kritik nuqtalar deb, kritik *sohani* gipotezaning qabul kilinish sohasidan ajratib turuvchi nuqtalarga aytiladi.

1-tur xatoga yo'l qo'yish ehtimolini α orqali belgilash va uni *qiymatdorlik. darajasi* deb atash qabul qilingan. qiymatdorlik darajasi odatda 0,05 yoki 0,01 deb olinadi. Buning ma'nosi quyidagicha: agar, masalan $\alpha = 0{,}05$ deb olinsa, u holda bu yuzta holdan 5 tasida biz 1-tur xatoga yo'l qo'yishimiz (to'g'ri gipotezani rad qilishimiz) mumkinligini bildiradi.

Konkret gipotezalarni tekshirishda avvalo oldindan α qiymatdorlik darajasi tanlanadi. So'ngra K_{kp} nuqtani quyidagi talabga asoslanib topiladi: H_0 asosiy gipoteza o'rinli bo'lishi shartida tanlangan K kriteriyning K_{kp} nuqtadan katta bo'lishi ehtimoli α qiymatdorlik darajasiga teng bo'lsin:

$$P(K > K_{kp}) = \alpha \quad (*)$$

Statistikaga doir adabiyotlarda har xil kriteriy uchun tegishli mos jadvallar tuzilgan bo'lib, bu jadvallar bo'yicha (*) shartni qanoatlantiruvchi kritik nuqta topiladi. Kritik nuqta
topilgandan so'ng, x_1, x_2,..., x_n tanlanma ma'lumotlari bo'yicha kriteriyning kuzatilgan qiymati topiladi. Bunda agar $K_{kuzat} > K_{kp}$ bo'lsa, u holda H_0 asosiy gipoteza rad qilinadi; agar $K_{kuzat} < K_{kp}$ bo'lsa, u holda gipotezani rad qilishga asos yo'q.

ESLATMA. Aytaylik H_0 gipoteza qabul qilingan bo'lsin. Shu bilan bu gipoteza isbotlandi deyish xato bo'ladi. aslida bunday deyish to'g'riroq bo'ladi: «kuzatish natijalari H_0 gipotezaga mos keladi va demak, uni rad qilishga asos bo'la olmaydi».

Amalda gipotezani katta ishonch bilan qabul qilish uchun boshqa statistik usullar bilan tekshiriladi yoki tanlanma hajmi orttirilib tajriba takrorlanadi. Gipotezani qabul qilishdan ko'ra ko'proq uni rad qilishga harakat kilinadi. haqiqatan, ma'lumki biror umumiy da'voni rad kilish uchun bu da'voga zid bo'lgan bitta misol keltirish kifoya.

Agar $K_{kuzat} \in K^{-}$ bo'lsa, u holda shu faktning o'zi H_0 asosiy gipotezaga zid bo'lgan misoldir, demak bu misol gipotezani rad qilishga imkon beradi.

Yuqorida keltirilganlarga doir quyidagi misolni qaraymiz.

Misol. (Normal bosh to'plamlarning ikki dispersiyasini taq-qoslash). Dispersiyalar haqidagi gipotezalar texnikada ayniqsa muhim ahamiyatga egadir, chunki tarqoqlik xarakteristikasi bo'lgan dispersiya mashina va uskunalarning aniqligini, o'lchov asboblarining aniqligini, texnologik protsesslarning aniqligini baholashda juda muhim ko'rsatkich hisoblanadi.

X va U normal bosh to'plamlardan olingan $n_1=11$ va $n_2=14$ hajmli ikkita erkli tanlanma bo'yicha tuzatilgan tanlanma dispersiyalar $S_x^2 = 0{,}76,$ va $S_x^2 = 0{,}38$ topilgan. $\alpha = 0{,}05$ qiymatdorlik darajasida

$H_0 : D(X)=D(Y)$

$H_1 : D(X)>D(Y)$

gipotezani tekshiring.

Echish. Gipotezani tekshirish uchun $F = \frac{S_x^2}{S_y^2}$ kriteriyni tanlaymiz. Bu kriteriy (tasodifiy miqdor)

Fisher-Snedekor taqsimot qonuni bo'yicha taqsimlangan bo'lishi isbotlangan.

F_{kuzat} qiymatni topsak:

$$F_{kuzat}=\frac{S_x^2}{S_y^2}=\frac{0{,}76}{0{,}38}=2$$

Fisher-Snedekor taqsimotining kritik nuqtalar jadvalidan $\alpha = 0{,}05$ $k_1 = n_1 - 1 = 10$ va $k_2 = n_2 - 1 = 13$ bo'yicha $F_{kp} = (0{,}05;10;13 = 2{,}67)$ kritik nuqtani topamiz:

$F_{kuzat}=2<2{,}67$ bo'lganligi uchun gipotezani rad qilishga asos yo'q.

Boshqacha aytganda, tanlanma dispersiyalar farqi muhim emas.

Tayanch iboralar:

Statistik gipoteza, oddiy gipoteza, murakkab gipoteza, statistik kriteriy, kuzatiladigan qiymat, kritik nuqtalar, qiymatdorlik darajasi.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar:

1. Statistik gipoteza ta'rifini bering. Statistik gipotezalarga misollar keltiring.
2. Statistik gipotezalarning turlarini ayting.
3. Birinchi va ikkinchi tur xatoliklar nimadan iborat?
4. Statistik kriteriy nima?
5. Qiymatdorlik darajasi nima? Kritik soha va kritik nuqta tushunchalarini ayting.

Mustaqil echish uchun masalalar:

1. Oddiy statistik gipotezani ko'rsating

a) Bernulli sxemasida hodisa ro'y berishining ehtimoli 0.7 ga teng.

b) O'rganilayotgan belgi $a<0$ parametrli normal taqsimotga ega.

2. Quyidagi farazlardan qaysi birlari statistik gipoteza hisoblanadi?

1) Korxona ishlab chiqarayotgan mahsulotlar orasidagi brak mahsulotlar soni Puasson taqsimotiga ega.

2) Ikkita fakultet talabalarining matematikadan bilim darajalari bir xil.

3) Komanda trenerligiga ikkita A va V nomzod bor. V nomzod trener bo'lib saylanadi.

Adabiyotlar:

[1] (281-288)

[2] (334-350)

[3] (166-179)

[4] (240-258)

[5] (330-338)

[7] (95-101)

[9] (312-329)

9-§. Bosh to'plamning taqsimot konuni haqidagi gipotezani tekshirish. Pirsonning muvofiqlik kriteriysi (χ^2 - kriteriy)

Ko'p amaliy masalalarda o'rganilayotgan X tasodifiy miqdorning aniq taqsimot qonuni noma'lum bo'lib, bu taqsimot to'g'risida gipoteza qilinadi va u statistik usulda tekshirib ko'rishni taqozo etadi.

Aytaylik, X tasodifiy miqdor *F(x)* taqsimot qonuniga egaligi haqida da'vo qiluvchi H_0: *P(X<x)=F(x)* gipotezani tekshirish talab etilsin. Buning uchun X ustida n ta erkli kuzatish o'tkazib $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - tanlanma olamiz. Bu tanlanma bo'yicha $F_n^*(x)$ empirik taqsimot funktsiyasini ko'rish mumkin. Empirik taqsimot funktsiyasi bilan nazariy (gipotetik) taqsimot funktsiyasini bir-biri bilan taqqoslash maxsus tanlangan tasodifiy miqdor - muvofiqlik kriteriysi yordamida bajariladi.

Muvofiqlik kriteriysi deb, bosh to'plam noma'lum taqsimotining taxmin qilinayotgan qonuni haqidagi gipotezani tekshirish uchun xizmat qiluvchi kriteriyga aytiladi.

Bir qancha muvofiqlik kriteriylari mavjud: Pirson (χ^2-xi kvadrat) kriteriysi, Kolmogorov, Smirnov va h.k. kriteriylar.

Pirsonning χ^2- kriteriysi noma'lum taqsimot haqidagi gipotezani tekshirishda ko'p qo'llaniladigan kriteriylardandir. Shu kriteriyga batafsilroq to'xtalamiz. X ning barcha mumkin bo'lgan qiymatlar sohasini *k* ta $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ intervallarga bo'linadi va har bir Δ_i oraliqqa tushgan variantalar soni n- hisoblanadi.

R(X <x) = F(x) - nazariy taqsimot funktsiyasi ma'lum degan farazda X ning Δ_i ; oraliqdagi qiymatlarini qabul qilish ehtimoli P_i ni topish mumkin.

$$P_i = P(X \in \Delta_i) = \int_{\Delta_i} dF(x)$$

Bundan foydalanib, X ning Δ_i oraliqqa tegishli qiymatlarining nazariy chastotalarini np_i formula orqali hisoblash mumkin. Topilganlarni quyidagi jadvalga yozamiz:

Oraliqlar - Δ_i	Δ_1	Δ_2	$\ldots$	Δ_i	$\ldots$	Δ_k
Empirik chastotalar	n_1	n_2	$\ldots$	n_i	$\ldots$	n_k
Nazariy chastotalar	np_1	np_2	$\ldots$	np_i	$\ldots$	np_k

Bunda $n_1 + p_2 + \ldots + n_k = n,\ p_1 + p_2 + \ldots + p_k = 1$

Odatda empirik va nazariy chastotalar bir-biridan farq qiladi. Agar bu chastotalar farqi katta bo'lsa, tekshirilayotgan gipoteza rad qilinishi, aks holda esa qabul kilinishi kerak.

Empirik va nazariy chastotalar farqi darajasini xarakterlovchi kriteriy hamda H_0 asosiy gipotezani tekshirish kriteriysi sifatida

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$$

tasodifiy miqdorni qaraymiz.

Matematik statistikaga oid adabiyotlarda χ^2 tasodifiy miqdor $n \to \infty$ da, $S=k+1$ ozodlik darajali χ^2 taqsimot qonuniga intilishi isbotlanadi.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$$

χ^2 tasodifiy miqdorning muhim xususiyatlaridan biri shundaki, u $F(x)$ nazariy taqsimot qonunining konkret ko'rinishga bog'liqmas ravishda x^2 taqsimot qonuniga $n \to \infty$ da intiladi.

Ozodlik darajalari soni $S=k-l-1$ tenglik bo'yicha topiladi, bunda k oraliqlar soni, l esa $F(x)$ gipotetik taqsimotning tanlanma ma'lumotlari bo'yicha baholangan parametrlari soni.

Masalan: gipoteza qilinayotgan taqsimot normal taqsimot bo'lsa, u holda ikkita parametr α va σ baholanadi, shu sababli $l=2$ va $S=k-l-1=k-2-1=k-3$

Agar bosh to'plam, masalan Puasson qonuniga ega deb gipoteza qilinayotgan bo'lsa, u holda bitta λ parametr baholanadi va shu sababli ozodlik darajalari soni *S=k-l-1=k-1-1=k-2*

χ^2 kriteriyning qo'llash qoidasi quyidagicha ta'riflanadi:

Berilgan α qiymatdorlik darajasida H_0 bosh to'plam *F(x)* taqsimot qonuniga ega degan gipotezani tekshirish uchun avval np_i nazariy chastotalarni, keyin esa kriteriyning

$$\chi^2_{кузат} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$$

kuzatilgan qiymatini hisoblash va χ^2 taqsimotning kritik nuqtalari jadvalidan α va *S=k-l-1* ozodlik darajalari bo'yicha $\chi^2_{kp} = (\alpha, S)$ kritik nuqtani topish lozim.

Agar $\chi^2_{кузат} < \chi^2_{kp}$ bo'lsa, gipotezani rad etishga asos yo'q.

Agar $\chi^2_{кузат} > \chi^2_{kp}$ bo'lsa, gipoteza rad qilinadi.

Shuni ta'kidlash joizki, χ^2 - kriteriy faqat $n \to \infty$ dagina taqsimot konuniga ega, shuning uchun har bir Δ_i oraliq kamida 5-10 ta variantani o'z ichiga olishi lozim. Tanlanma hajmi ham etarlicha katta, har holda 50 dan kam bo'lmasligi lozim. Kam variantalari bor oraliqlarni birlashtirish kerak.

Endi χ^2 kriteriyni qo'llanishini quyidagi misolda ko'rib chiqamiz.

Tayyorlangan 100 dona detalning o'lchami tekshirilgan. Berilgan o'lchamdan tekshirilgan detallar o'lchamining chetlanishi quyidagi intervalli variatsion qator shaklida berilgan.

Δ_i	(-3;-2]	(-2;-1]	(-1;0]	(0;1]	(1;2]	(2;3]	(3;4]	(4;5]
n_i	3	10	15	24	26	13	7	3

Bu jadvalda eng chetki oraliqlar uchun n_i variantalar soni 5 dan kichik bo'lganligi uchun ularni qo'shni oraliqlar bilan birlashtiramiz.

Birlashtirish natijasida quyidagicha jadvalni olamiz:

Δ_i	(-3;-1]	(-1; 0]	(0;1]	(1;2]	(2;3]	(3;5]
n_i	13	15	24	25	13	10

Berilgan *α=0,01* qiymatdorlik darajasida detallarning proektdagi o'lchamdan chetlanishlari normal taqsimotga bo'ysunishi haqidagi N_0 gipotezani tekshirish talab qilinadi.

Echshi. Bu misolda *X* - detal o'lchamining loyihadagi o'lchamdan chetlanishi. Normal taqsimotning matematik kutilishi va o'rtacha kvadratik chetlanishi haqida hech narsa deyilmagani uchun
dastlab ularni tanlanma ma'lumotlari bo'yicha hisoblaymiz: (qisqalik uchun oraliq hisoblashlarni keltirmaymiz).

$\overline{x} = 0{,}6 \qquad S^2 = 2{,}53 \quad S \approx 1{,}6$

Endi $P_1 = P(x \in \Delta_i)$ ehtimollarni hisoblaymiz.

$$P_1 = P(-3 < X < -1) = \left(P\frac{-3-0{,}6}{1{,}6} < \frac{X - M(X)}{\sqrt{Д(X)}} < \frac{-1-0{,}6}{1{,}6} \right) = \phi(-1) - \phi(-2{,}25) =$$
$$= \phi(2{,}25) - \phi(1) = 0{,}4880 - 0{,}3415 = 0{,}1465$$

Bu erda $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy$ Laplas funktsiyasi.

Xuddi shunga o'xshash

$p_2 = 0{,}1226; p_3 = 0{,}2467; p_4 = 0{,}2119; p_5 = 0{,}1226; p_6 = 0{,}0638$

qiymatlarni hisoblab topamiz.

Topilganlarni quyidagi jadvalga yozib olamiz va χ^2 kriteriyning

$\chi^2_{кузат}$ - kuzatilgan qiymatini hisoblaymiz.

Oraliqlar -	(-3;-1)	(-1;0)	(0;1)	(1;2) ,	(2;3)	(3;5)
Empirik chastota	13	14	24	25	13	10
Nazariy chastota	14,64	12,26	24,67	21,19	12,26	6,38

$$\chi^2_{кузат} = \sum_{i=1}^{6} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = \frac{(13-14,64)^2}{14,64} + \frac{(14-12,26)^2}{12,26} + \frac{(24-24,67)^2}{24,67} + \frac{(25-21,19)^2}{21,19} +$$
$$+ \frac{(13-12,26)^3}{12,26} + \frac{(10-6,38)^2}{6,38} = 5,53$$

Oraliqlar soni, tanlanma bo'yicha ikkita parametr $\overline{x}$ va S^2 topildi, ya'ni *l=2.* Demak, ozodlik darajalari soni *S=k-l-1=6-3=3* ga teng. x^2 taqsimotning kritik nuqtalari jadvalidan berilgan α *=0,01* qiymatdorlik darajasida $\chi^2_{kp} = (0,01;3) = 11,3$ kritik nuqtani topamiz.

5,53<11,3 ya'ni, $\chi^2_{кузат} < \chi^2_{kp} = 11,3$ bo'lganligi uchun detal o'lchamlarining loyihadagi o'lchamdan chetlanishi normal taqsimotga ega ekanligi haqidagi N_0 gipotezani rad qilishga asos yo'q.

Tayanch iboralar:

Muvofiqlik kriteriysi, Pirson kriteriysi.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar:

1. Muvofiqlik kriteriylari nima?
2. Pirsonning muvofiqlik kriteriysi qanday formula bilan beriladi?
3. Pirson kriteriysining qo'llanilishini tushuntiring.

Mustaqil echish uchun masalalar:

1. Pirson kriteriysidan foydalanib, 0.05 qiymatdorlik darajasida X bosh to'plamning normal taqsimlanganligi haqidagi gipotezani n=200 hajmli tanlanmaning ushbu taqsimoti bilan muvofiq kelish kelmasligini tekshiring.

x_j	0.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3	1.5	1.7	1.9	2.1	2.3
n_j	6	9	26	25	30	26	21	24	20	8	5

2. Pirson kriteriysidan foydalanib, 0.01 qiymatdorlik darajasida n_i empirik va n'_i nazariy chastotalar orasidagi farq tasodifiymi yoki muhimligini aniqlang. Nazariy chastotalar X bosh to'plamning normal taqsimlanganligi haqidagi gipotezaga asoslanib hisoblangan.

n_j	8	16	40	72	36	18	10
n'_i	6	18	36	76	39	18	7

3. Ikki tanga bir vaqtda 20 marta tashlanganida "Gerb" hodisasining yuz berishlari soni quyidagi jadvalda keltirilgan.

har ikkala tangada gerb tushishlar soni	0	1	2
hodisa yuz bergan tashlashlar soni	4	8	8

Pirsonnning muvofiqlik kriteriysi yordamida ikkala tangani ham simmetrik deb hisoblash mumkinmi? α=0,05 deb qabul qiling. (jadvaldan $\chi^2_{0.95}(2) = 5.99$).

4. X belgili bosh to'plamdan olingan tanlanmaning statistik taqsimoti berilgan.

Δ_i	[0;10)	[10;20)	[20;30)	[30;40)	[40;50)	[50;60)
n_j	11	14	15	10	14	16

X belgining taqsimot funktsiyasi tekis taqsimotga muvofiq emasligini 0.05 aniqlik darajasi bilan Pirsonning muvofiqlik kriteriysi yordamida aniqlang.

Adabiyotlar:

[1] (329-335)

[2] (359-371)

[3] (179-192)

[4] (258-262)

[5] (331-333)

[7] (101-104)

1-ilova

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$ **funktsiya qiymatlari jadvali**

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	03989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$ **funktsiya qiymatlari jadvali**

x	F(*x*)	*x*	F(*x*)	*x*	F(**x**)	*x*	F(*x*)
0,00	0,0000	0,45	0,1736	0,90	0,3159	1,35	0,4115
0,01	0,0040	0,46	0,1772	0,91	0,3186	1,36	0,4131
0,02	0,0080	0,47	0,1808	0,92	0,3212	1,37	0,4147
0,03	0,0120	0,48	0,1844	0,93	0,3238	1,38	0,4162
0,04	0,0160	0,49	0,1879	0,94	0,3264	1,39	0,4177
0,05	0,0199	0,50	0,1915	0,95	0,3289	1,40	0,4192
0,06	0,0239	0,51	0,1950	0,96	0,3315	1,41	0,4207
0,07	0,0279	0,52	0,1985	0,97	0,3340	1,42	0,4222
0,08	0,0319	0,53	0,2019	0,98	0,3365	1,43	0,4236
0,09	0,0359	0,54	0,2054	0,99	0,3389	1,44	0,4251
0,10	0,0398	0,55	0,2088	1,00	0,3413	1,45	0,4265
0,11	0,0438	0,56	0,2123	1,01	0,3438	1,46	0,4279
0,12	0,0478	0,57	0,2157	1,02	0,3461	1,47	0,4292
0,13	0,0517	0,58	0,2190	1,03	0,3485	1,48	0,4306
0,14	0,0557	0,59	0,2224	1,04	0,3508	1,49	0,4319
0,15	0,0596	0,60	0,2257	1,05	0,3531	1,50	0,4332
0,16	0,0636	0,61	0,2291	1,06	0,3554	1,51	0,4345
0,17	0,0675	0,62	0,2324	1,07	0,3577	1,52	0,4357
0,18	0,0714	0,63	0,2357	1,08	0,3599	1,53	0,4370
0,19	0,0753	0,64	0,2389	1,09	0,3621	1,54	0,4382
0,20	0,0793	0,65	0,2422	1,10	0,3643	1,55	0,4394
0,21	0,0832	0,66	0,2454	1,11	0,3665	1,56	0,4406
0,22	0,0871	0,67	0,2486	1,12	0,3686	1,57	0,4418
0,23	0,0910	0,68	0,2517	1,13	0,3708	1,58	0,4429
0,24	0,0948	0,69	0,2549	1,14	0,3729	1,59	0,4441
0,25	0,0987	0,70	0,2580	1,15	0,3749	1,60	0,4452
0,26	0,1026	0,71	0,2611	1,16	0,3770	1,61	0,4463
0,27	0,1064	0,72	0,2642	1,17	0,3790	1,62	0,4474
0,28	0,1103	0,73	0,2673	1,18	0,3810	1,63	0,4484
0,29	0,1141	0,74	0,2703	1,19	0,3830	1,64	0,4495
0,30	0,1179	0,75	0,2734	1,20	0,3849	1,65	0,4505
0,31	0,1217	0,76	0,2764	1,21	0,3869	1,66	0,4515
0,32	0,1255	0,77	0,2794	1,22	0,3883	1,67	0,4525
0,33	0,1293	0,78	0,2823	1,23	0,3907	1,68	0,4535
0,34	0,1331	0,79	0,2852	1,24	0,3925	1,69	0,4545
0,35	0,1368	0,80	0,2881	1,25	0,3944	1,70	0,4554
0,36	0,1406	0,81	0,2910	1,26	0,3962	1,71	0,4564
0,37	0,1443	0,82	0,2939	1,27	0,3980	1,72	0,4573
0,38	0,1480	0,83	0,2967	1,28	0,3997	1,73	0,4582
0,39	0,1517	0,84	0,2995	1,29	0,4015	1,74	0,4591
0,40	0,1554	0,85	0,3023	1,30	0,4032	1,75	0,4599
041	0,1591	0,86	0,3051	1,31	0,4049	1,76	0,4608
0,42	0,1628	0,87	0,3078	1,32	0,4066	1,77	0,4616
0,43	0,1664	0,88	0,3106	1,33	0,4082	1,78	0,4625
0,44	0,1700	0,89	0,3133	1,34	0,4099	1,79	0,4633

davomi

x	F(x)	x	F(x)	x	F(**x**)	x	F(x)
1,80	0,4641	2,00	0,4772	2,40	0,4918	2,80	0,4974
1,81	0,4649	2,02	0,4783	2,42	0,4922	2,82	0,4976
1,82	0,4656	2,04	0,4793	2,44	0,4927	2,84	0,4977
1,83	0,4664	2,06	0,4803	2,46	0,4931	2,86	0,4979
1,84	0,4671	2,08	0,4812	2,48	0,4934	2,88	0,4980
1,85	0,4678	2,10	0,4821	2,50	0,4938	2,90	0,4981
1,86	0,4686	2,12	0,4830	2,52	0,4941	2,92	0,4982
1,87	0,4693	2,14	0,4838	2,54	0,4945	2,94	0,4984
1,88	0,4699	2,16	0,4846	2,56	0,4948	2,96	0,4985
1,89	0,4706	2,18	0,4854	2,58	0,4951	2,98	0,4986
1,90	0,4713	2,20	0,4861	2,60	0,4953	3,00	0,49865
1,91	0,4719	2,22	0,4868	2,62	0,4956	3,20	0,49931
1,92	0,4726	2,24	0,4875	2,64	0,4959	3,40	0,49966
1,93	0,4732	2,26	0,4881	2,66	0,4961	3,60	0,499841
1,94	0,4738	2,28	0,4887	2,68	0,4963	3,80	0,499928
1,95	0,4744	2,30	0,4893	2,70	0,4965	4,00	0,499968
1,96	0,4750	2,32	0,4898	2,72	0,4967	4,50	0,499997
1,97	0,4756	2,34	0,4904	2,74	0,4969	5,00	0,499997
1,98	0,4761	2,36	0,4909	2,76	0,4971		
1,99	0,4767	2,38	0,4913	2,78	0,4973		

3-ilova

$t_\gamma = t(\gamma, n)$ qiymatlar jadvali

p \ γ	0,95	0,99	0,999	p \ γ	0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,729	3,600
9	2,31	2,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,001	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

4-ilova

$q = q(\gamma, n)$ qiymatlar jadvali

p \ γ	0,95	0,99	0,999	p \ γ	0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

5-ilova

χ^2 taqsimotning kritik nuqtalari

Ozodlik darajalari soni k	α qiymatdorlik darajasi					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63

davomi

Ozodlik darajalari soni *k*	α qiymatdorlik darajasi					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,9	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Asosiy adabiyotlar:

1. *Gmurman V.E. Teoriya veroyatnostey i matematicheskaya statistika. Izdanie sedmoe. – M.: Visshaya shkola, 1999.*
2. Kremer N.Sh. Teoriya veroyatnostey i matematicheskaya statistika. – M.: 2001 g.
3. Kolemaev V.A., Kalinina V.N. Teoriya veroyatnostey i matematicheskaya statistika. – M.: Infra-M, 1997.
4. Kolemaev V.A. i dr. Teoriya veroyatnostey i matematicheskaya statistika. – M.: 1991.
5. Soatov g'.U. Oliy matematika kursi. II qism. – T.: O'qituvchi, 1994.
6. Mamurov E.N., Adirov T.X. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistikadan ma'ruzalar matni. – T.: TMI 2001.
7. Adirov T.X., Hamdamov I.M. "Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika"dan masalalar to'plami va ularni echishga doir uslubiy ko'rsatmalar. – T.: TMI, 2003.

Qo'shimcha adabiyotlar:

1. *Venetskiy I.G., Venetskaya V.I. Osnovnie matematiko-statisticheskie ponyatiya i formuli v ekonomicheskom analize. – M.: Visshaya shkola, 1987.*
2. Zamkov O.O., Tolstopyatenko A.V., Cheremnix Yu.N. Matematicheskie metodi v ekonomike. – M.: Izd. DIS, 1998.
3. Spravochnik po matematike dlya ekonomistov. / Pod redaktsiey prof. Ermakova. – M.: Visshaya shkola, 1997.
4. Eddous M., Stensfild R. Metodi prinyatiya resheniya. – M.: Audit, 1997.
5. Zaytsev I.A. Visshaya matematika. – M.: Visshaya shkola, 1998.